محاضرات

في

التحليل الحقيقي

مقرر بحتة 9

الفرقة الثالثة عام رياضيات

المحتويات

الفصل الأول: الاعداد الحقيقية

مجموعات الاعداد

- **مجموعة الاعداد الطبيعية (أو الصحيحة الموجبة)** $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}$
- **مجموعة الاعداد الصحيحة** $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$
- **مجموعة الاعداد القياسية** $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}: \ \ m, n \in \mathbb{Z}, \ \ n \neq 0\right\}$
- **مجموعة الاعداد غير القياسية يرمز لها بـ** $\mathbb{Q}^c$
- **مجموعة الاعداد الحقيقية** $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$

مبدأ الاستقراء

ينص مبدأ الاستقراء أو الاستنتاج principle of induction على انه إذا كانت $P(n)$ خاصية يحققها كل عدد طبيعي n بحيث

1) $P(1)$ متحققة

2) إذا كان$k \in \mathbb{N}$ و $P(K)$ متحققة فإن $P(k+1)$ تتحقق

عندئذ تكون $P(n)$ متحققة لكل $n \in \mathbb{N}$. يمكن تعريف مبدأ الاستقراء بطريقة ثانية كخاصية للأعداد الطبيعية، وهذا ما توضحه النظرية التالية.

نظرية: الجمل التالية متكافئة

1) مبدأ الاستقراء

2) كل مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{N}$ يكون لها عنصر أصغر.

الخاصية (2) في النظرية السابقة تسمى خاصية الترتيب الحسن لمجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

نذكر هنا خاصية للأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ تعني عدم تحقق خاصية التمام للأعداد النسبية، وهي الخاصية المميزة للأعداد الحقيقية.

نظرية: لا يوجد عدد نسبي مربعه 2.

البرهان. بفرض العكس أن p/q عدد نسبي في أبسط صورة (q أصغر ما يمكن) يحقق $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. من هذه المتساوية نلاحظ أن $q < p < 2q$ ومن ثم $0 < p - q < q$ وأن $2q - p > 0$. من السهل حساب $\left(\frac{2q-p}{p-q}\right)^2 = 2$. هذا يتناقض مع فرضنا بأن p/q هو العدد النسبي ذو ابسط مقام q يحقق $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. وبالتالي لا يوجد عدد نسبي مربعه 2.

مسلمات الحقل للأعداد الحقيقية

يرمز عادة لمجموعة الاعداد الحقيقية بالرمز $\mathbb{R}$. إذا عرفنا العمليات التالية

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

نجد أن $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ حقل يحقق الخواص التالية

خاصية الابدال الجمعي: $(A_1)\ \ a + b = b + a\ \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

خاصية الدمج الجمعي: $(A_2)\ \forall\ \ a, b, c \in \mathbb{R},$

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

خاصـــية وجـــود محايـــد جمعي: $(A_3)\ \exists\ 0 \in \mathbb{R}, \quad a + 0 = 0 + a = a\ \forall a \in \mathbb{R}$

خاصــية وجــود معكــوس جمعي: $(A_4)\ \forall\ a \in \mathbb{R}\ \exists - a \in \mathbb{R}, a + (-a) = -a + a = 0$

خاصية الابدال الضربي: $(A_5)\ \ a \cdot b = b \cdot a\ \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

خاصية الدمج الضربي: $(A_6)\ \forall\ \ a, b, c \in \mathbb{R}, \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

خاصـــية وجـــود محايـــد ضربي: $(A_7)\ \exists\ 1 \in \mathbb{R}, \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a\ \forall a \in \mathbb{R}$

خاصية وجود مقلوب: $(A_8)\ \forall\ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\ \exists\ a^{-1} \in \mathbb{R}, a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

قانون التوزيع: $(A_9) \forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

ملاحظة: $(\mathbb{R}, +)$ زمرة إبداليه، $(\mathbb{R}\backslash \{0\}, \cdot)$ زمرة إبداليه.

بعض الخواص الأخرى:

1) لكل $a, b \in \mathbb{R}$ فإن

$$a + b = a + c\ \Longrightarrow b = c$$

البرهان: لكل $a \in \mathbb{R}$ يوجد $-a \in \mathbb{R}$ (A_4) وبالتالي فإن تطبيق الخواص $(A_2), (\ A_3)$ يؤدي إلى

$$-a + (a + b) = -a + (a + c) \Longrightarrow (-a + a) + b = (-a + a) + c$$
$$\Longrightarrow 0 + b = 0 + c$$

وهذا يكافئ المطلوب.

2) لكل $a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ فإن

$$a \cdot b = a \cdot c \Longrightarrow b = c$$

البرهان: لكل $a \neq 0$ يوجد $a^{-1} \in \mathbb{R}$ (A_8). وبتطبيق الخواص (A_6) و (A_7) نحصل على

$$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c) \Longrightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c \Longrightarrow 1 \cdot b = 1 \cdot c \Longrightarrow b = c$$

3) لكل $a \in \mathbb{R}$ فإن $a + b = a$ يعني أن $b = 0 \in \mathbb{R}$.

البرهان: إذا كان $a \in \mathbb{R}$ فيوجد $-a \in \mathbb{R}$ (A_4). وبالتالي فإن الخواص (A_2)، (A_3) و (A_4) تؤدي إلى

$$0 = -a + a = -a + (a + b) = (-a + a) + b = 0 + b = b$$

4) لكل $a \in \mathbb{R}$ فإن $a \cdot 0 = 0$

البرهان: من النتيجة السابقة وباستخدام الخواص (A_3)، (A_7) و (A_9) نجد أن

$$a \cdot 1 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 + a \cdot 0 \Longrightarrow a \cdot 0 = 0$$

5) لكل $a, b \in \mathbb{R}$ فإن $a \cdot b = 0 \Longleftarrow a = 0 \ \vee b = 0$

البرهان: بفرض أن $a \neq 0$ سيوجد $a^{-1} \in \mathbb{R}$ و $a^{-1} \neq 0$. ومن ثم

$$0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b$$

بالمثل يمكن اثبات أن $a \cdot b = 0, b \neq 0$ تعني أن $a = 0$.

6) لأي $a, b \in \mathbb{R}$ فإن للمعادلة $a + x = b$ حل هو $x = b - a$

البرهان: إذا كان $a \in \mathbb{R}$ سيوجد $-a \in \mathbb{R}$ ، وبالتالي

$$x = -a + (a + x) = -a + b = b - a$$

7) لأي $a, b \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ فإن المعادلة $a \cdot x = b$ لها حل هو $x = a^{-1} \cdot b$

البرهان: واضح أن

$$x = 1 \cdot x = (a^{-1} \cdot a) \cdot x = a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot b$$

8) لكل $a \in \mathbb{R}$ فإن $-(-a) = a$

البرهان: لكل $a \in \mathbb{R}$ فإن

$$0 = 0 \cdot a = (-1 + 1) \cdot a = -a + a$$

وهذا يعني أن a معكوس $-a$

خاصية الترتيب للأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

تعريف: يقال لمجموعة غير خالية P جزئية من $\mathbb{R}$ أنها صف موجب إذا تحقق التالي

$(A_{10})\quad \forall a,b \in P, \qquad a+b \in P.$

$(A_{11})\quad \forall a,b \in P, \qquad a \cdot b \in P.$

$(A_{12})\quad a \in \mathbb{R} \implies a \in P \;\vee\; a=0 \;\vee\; -a \in P.$

الخاصية الأخيرة (A_{12}) تسمى خاصية الانقسام الثلاثي (وتسمى مسلمة الترتيب).

تعريف: إذا كان $a \in P$ يقال أن $a > 0$، ويقال $a > b$ إذا كان $a - b \in P$. يقال أن $a \geq b$ إذا كان
$.a - b \in P \cup \{0\}$

نتائج خاصية الترتيب:

1) إذا كان $a > b,\ \ b > c$ فإن $a > c$.

البرهان: بحسب التعريف السابق فإن $a - b, b - c \in P$. وبالتالي

$$a - c = (a - b) + (b - c) \in P \implies a > c$$

2) لأي $a, b \in \mathbb{R}$ فإن $a > b$، $a = b$، او $a < b$.

البرهان: لأي $a, b \in \mathbb{R}$ فإن $a - b \in \mathbb{R}$. وبحسب مسلمة الترتيب (A_{12}) فإن

$$a - b \in P \;\vee\; a - b = 0 \;\vee\; -(a - b) \in P$$

وهذا يكافئ على الترتيب

$$a > b \quad \vee \quad a = b \quad \vee \quad a < b$$

تعريف: المجموعة $N = P^{-} = \{-a; a \in P\}$ هي صف سالب ل $\mathbb{R}$ تسمى مجموعة الاعداد الحقيقية السالبة.

ملاحظة: لأي $a, b \in \mathbb{R}$ فإن

$$a - b \in P \;\vee\; a = b \quad a - b \in P^{-}$$

3) إذا كان $a > b$ و$c > 0$ فإن $a \cdot c > b \cdot c$

البرهان: لدينا

$$a > b, \quad c > 0 \implies a - b, c \in P \implies (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c \in P$$

وهذا يكافئ المطلوب.

4) إذا كان $a > b$ و$c < 0$ فإن $a \cdot c < b \cdot c$

البرهان: لدينا

$$a > b, \quad c < 0 \Longrightarrow a - b, -c \in P \Longrightarrow (a-b)\cdot(-c) = b\cdot c - a\cdot c \in P$$

وهذا يكافئ المطلوب.

5) لكل $a \neq 0$ في $\mathbb{R}$ فإن $a^2 > 0$.

البرهان: بحسب خاصية الانقسام الثلاثي فإن $a \neq 0$ تعني $a > 0$ أو $a < 0$. بفرض أن $a > 0$

فإن $a^2 = a \cdot a > 0$. وإذا كان $a < 0$ فإن $a^2 = (-a)\cdot(-a) > 0$.

6) $1 > 0$ لأن $0 \neq 1 = 1^2 > 0$.

7) لكل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$ فإن $n > 0$.

البرهان: باستخدام الاستنتاج الرياضي، وحيث أن $1 > 0$، فإنه بفرض انه للعدد طبيعي k أن $k > 0$ فإن $1, k \in P$. وبالتالي $1 + k \in P$. ومن ثم كل عدد طبيعي هو موجب.

تمرين:

8) إذا كان $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ بحيث $a > b, \ c > d$ اثبت أن $a + c > b + d$.

9) لكل $a \in P$ اثبت أن $a^{-1} \in P$.

10) إذا كان $a \cdot b > 0$ اثبت أن $a, b > 0$ أو $a, b < 0$. وإذا كان $a \cdot b < 0$ فاثبت ان $a > 0, b < 0$

أو $a < 0, b > 0$.

11) إذا كان $a > b$ فإن $a > \frac{a+b}{2} > b$.

البرهان: إذا كان $a > b$ فإن $2a > a + b > 2b$ ومنها ينتج المطلوب.

خاصية وجود أصغر حد علوي وأكبر حد سفلي:

تعريف: إذا كانت A مجموعة غير خالية من الاعداد الحقيقية، يقال:

1) أن العدد الحقيقي u هو حد علوي للمجموعة A إذا كان $x \leq u$ لكل $x \in A$.

2) أن العدد الحقيقي v هو حد سفلي للمجموعة A إذا كان $v \leq x$ لكل $x \in A$.

أمثلة: 1) للمجموعة $A = \{x \in \mathbb{R}, \ x \geq 0\}$ حد سفلي $v = 0$، وكل عدد حقيقي سالب هو حد سفلي للمجموعة. لا يوجد حد علوي، لتوضيح ذلك، نفرض على العكس أن u حد علوي للمجموعة A

فإن $u, u + 1 > 0$. ومن ثم فإن $u + 1 \in A$ وهذا يناقض كون u حد علوي لأن $u < u + 1$.

2) لمجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ لا توجد حدود علوية أو حدود سفلية.

3) للمجموعة $B = (0,1)$ فإن كل $u \geq 1$ هو حد علوي، وأن كل $v \leq 0$ هو حد سفلي.

تعريف: إذا كانت A مجموعة غير خالية من الاعداد الحقيقية،

1) يقال أن A محدودة من أعلى إذا وجد (حد علوي) عدد حقيقي u بحيث $x \leq u$ لكل $x \in A$.

2) يقال أن A محدودة من أسفل إذا وجد (حد سفلي) عدد حقيقي v بحيث $x \geq v$ لكل $x \in A$.

3) يقال أن A محدودة إذا وجد حد علوي u وحد سفلي v بحيث $v \leq x \leq u$ لكل $x \in A$.

خلاف ذلك تكون المجموعة A غير محدودة.

تعريف: إذا كانت A مجموعة غير خالية من الاعداد الحقيقية،

1) يقال للعدد الحقيقي a أنه أصغر حد علوي للمجموعة A، ونكتب $a = \sup A$، إذا كان

- $x \leq a$ لكل $x \in A$، أي أن a حد علوي للمجموعة A.
- لكل حد علوي u للمجموعة A فإن $a \leq u$.

2) يقال للعدد الحقيقي b أنه أكبر حد سفلي للمجموعة A، ونكتب $a = \inf A$، إذا كان

- $x \geq b$ لكل $x \in A$، أي أن b حد سفلي للمجموعة A.
- لكل حد سفلي v للمجموعة A فإن $b \geq v$.

ملاحظة: sup تقرأ supremum، inf تقرأ infimum.

أمثلة: 1) $\sup(a,b) = \sup(a,b] = b$

البرهان: واضح أن $x \leq b$ لكل x في (a,b)، (أو $(a,b]$). ويوجد $\epsilon > 0$ بحيث $a < b - \epsilon < b$. وبالتالي فإن $b - \epsilon$ ليس حد علوي للمجموعة (a,b)، (أو $(a,b]$).

2) $\inf\{\frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}\} = -1$, $\sup\{\frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{2}$.

لاحظ أن $\left\{\frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} = \{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \cdots\}$.

نظرية: العدد الحقيقي a يكون أصغر حد علوي لمجموعة غير خالية A إذا وفقط إذا

1) $x \leq a$ لكل $x \in A$.

2) لأي $\epsilon > 0$ يوجد $x^* \in A$ بحيث $a - \epsilon \leq x^*$.

ملاحظة: الشرط (2) يعني أنه مهما كان $\epsilon > 0$ صغير فإن $a - \epsilon$ ليس حد علوي للمجموعة A.

بالمثل فإن العدد الحقيقي b يكون أكبر حد سفلي لمجموعة غير خالية A إذا وفقط إذا

1) $x \geq b$ لكل $x \in A$.

2) لأي $\epsilon > 0$ يوجد $x^* \in A$ بحيث $x^* \leq b + \epsilon$.

ملاحظة: الشرط الاخير يعني أنه مهما كان $\epsilon > 0$ صغير فإن $b + \epsilon$ ليس حد سفلي للمجموعة A.

نتائج لخاصية أصغر حد علوي وأكبر حد سفلي:

1) إذا كانت A مجموعة جزيئة غير خالية من الاعداد الحقيقية، وكان c عدد حقيقي فإن

$$c + A = \{c + x;\ \ x \in A\}$$

اثبت أن

$$(i)\ \sup\{c + A\} = c + \sup A, \qquad (ii)\ \inf\{c + A\} = c + \inf A$$

$$(iii)\ \sup(-A) = -\inf A, \qquad (iv)\ \inf(-A) = -\sup A$$

البرهان: سنكتفي ببرهان المطلوب الأول والثالث.

($\boldsymbol{i}$) ليكن $a = \sup A$. فإن $x \leq a$ لكل $x \in A$. ومن ثم فإن $c + x \leq c + a$ لكل $x \in A$. أي أن $y \leq c + a$ لكل $y \in c + A$. ولذلك فإن $c + a$ هو حد علوي للمجموعة $c + A$. وبالتالي يوجد $u = \sup\{c + A\}$، يحقق $\underline{u \leq c + a}$. من جهة ثانية، فإن $y \leq u$ لكل $y \in c + A$. وهذا يؤدي إلى $c + x \leq u$ لكل $x \in A$، ومن ثم يكون $u - c$ حد علوي للمجموعة A. وعليه فإن $\underline{u \geq c + a}$. وهكذا فإن $u = c + a$، وهذا يكافئ المطلوب.

($\boldsymbol{iii}$) ليكن $v = \inf A$. فإن $v \leq x$ لكل $x \in A$. ومن ثم $-x \leq -v$ لكل $x \in A$، أو $y \leq -v$ لكل $y \in (-A)$. وبالتالي، فإن العدد $(-v)$ حد علوي للمجموعة $-A$. لذا، يوجد $\underline{w = \sup(-A) \leq -v}$.

من جهة ثانية، فإن $-x \leq w$ لكل $x \in A$. ولهذا، فإن العدد $(-w)$ حد سفلي للمجموعة A، وبالتالي يكون $-w \leq v$، أو $\underline{w \geq -v}$. وهكذا، فإن $w = -v$، وهو المطلوب.

2) اثبت ان

(أ) كل عدد حقيقي هو حد علوي للمجموعة الخالية $\emptyset$.

(ب) كل عدد حقيقي هو حد سفلي للمجموعة الخالية $\emptyset$.

(جـ) $\sup\emptyset, \inf\emptyset$ غير موجودين.

البرهان: بفرض أن $\alpha \in \mathbb{R}$ ليس حد علوي للمجموعة $\emptyset$، سيوجد $x \in \emptyset$ بحيث $x \geq \alpha$. هذا يناقض كون $\emptyset$ خالية. هذا التناقض يثبت صحة الجملة (أ). الأن، بفرض أن $a = \sup\emptyset$ موجود في $\mathbb{R}$، فإن $a \geq x$ لكل $x \in \emptyset$، وهذا يناقض كون $\emptyset$ هي مجموعة خالية. وبالتالي، فإن $\sup\emptyset$ غير موجود (أي أن الجملة (**جـ**) صحيحة). بالمثل يمكن اثبات صحة الجمل الأخرى.

3) مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ غير محدودة (لا من أعلى ولا من أسفل).

البرهان: فرض أن عدد حقيقي a هو حد علوي للمجموعة $\mathbb{R}$ يناقض كون $2a \in \mathbb{R}$ لكل $a \in \mathbb{R}$. وفرض أن عدد حقيقي b هو حد سفلي للمجموعة $\mathbb{R}$ يناقض كون $\frac{b}{2} \in \mathbb{R}$ لكل $b \in \mathbb{R}$.

4) **مسلمة التمام** Completeness Axiom

إذا كانت A مجموعة غير خالية من الاعداد الحقيقية، ومحدودة من أعلى سيوجد $u \in \mathbb{R}$ بحيث $u = \sup A$. بعبارة أخرى، كل مجموعة غير خالية ولها حد علوي يكون لها أصغر حد علوي. فمثلا،

$$\sup(a, b) = b, \quad \sup\{x \in \mathbb{R};\ \ x \leq 1\} = 1.$$

كذلك، إذا كانت A مجموعة غير خالية من الاعداد الحقيقية، ومحدودة من أسفل سيوجد $v \in \mathbb{R}$ بحيث $v = \inf A$. بعبارة أخرى، كل مجموعة غير خالية ولها حد سفلي يكون لها أكبر حد سفلي. لاحظ أنه إذا كان $b \in \mathbb{R}$ حد سفلي للمجموعة A فإن $b \leq x$ (ومنها $-b \geq -x$) لكل $x \in A$، أي أن $-b$ حد علوي للمجموعة $-A$. وبالتالي، إذا كانت A مجموعة غير خالية من الاعداد الحقيقية، ومحدودة من أسفل فإن المجموعة $-A$ تكون محدودة من أعلى وأن $\sup(-A) = -\inf A$ (أو $\inf A = -\sup(-A)$).

5) إذا كانت f, g دوال حقيقية القيمة معرفة على فترة I بحيث $f(x) \leq g(x)$ لكل $x \in I$ فإن

$$\sup\{f(x), \quad x \in I\} \leq \sup\{g(x), \quad x \in I\}$$

البرهان: واضح أنه لكل $x \in I$ يكون

$$g(x) \leq \sup\{g(x), \quad x \in I\}$$

وبالتالي، فإن

$$f(x) \leq \sup\{g(x), \quad x \in I\}$$

لكل $x \in I$. أي أن، $\sup\{g(x), \quad x \in I\}$ حد علوي للمجموعة $\{f(x), \quad x \in I\}$. ومن ثم

$$\sup\{f(x), \quad x \in I\} \leq \sup\{g(x), \quad x \in I\}.$$

تعريف: إذا كانت A مجموعة غير خالية من الاعداد الحقيقية

(1) يقال للعنصر $a \in A$ أنه عنصر أكبر للمجموعة A، ونكتب $a = \max A$ (أي *maximum*) إذا كان $a \geq x$ لكل $x \in A$.

(2) يقال للعنصر $b \in A$ أنه عنصر أصغر للمجموعة A، ونكتب $a = \min A$ (أي *minimum*) إذا كان $b \leq x$ لكل $x \in A$.

أمثلة: 1) $\max[0,1] = \sup[0,1] = 1, \ \min[0,1] = \inf[0,1] = 0$

2) كل من $\max(0,1)\,, \min(0,1)$ غير موجود، على الرغم من $\sup(0,1) = 1, \inf(0,1) = 0$.

متباينات مهمة

1) متباينة المتوسطين الحسابي والهندسي (The Arithmetic-Geometric Mean Inequality**):**

للعددين الموجبين a, b فإن العدد $(a+b)/2$ يسمى المتوسط الحسابي، والعدد $\sqrt{ab}$ يسمى المتوسط الهندسي، وأن $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$. المتساوية في العلاقة السابقة تتحقق فقط عندما يكون $a = b$.

البرهان: لأي $a, b \in \mathbb{R}$ فإن $(a-b)^2 \geq 0$. وبالتالي، $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. ومنها فإن

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

بوضع $a^2 = x, \ b^2 = y$ نحصل على (هو يكافئ المطلوب)

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

المتساوية في العلاقة السابقة تتحقق فقط عندما يكون $x = y$.

بصورة عامة، إذا كانت $x_1, x_2, \cdots, x_n$ أعداد حقيقية موجبة فإن

$$\sqrt{x_1x_2\cdots x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

باستخدام الاستنتاج الرياضي يمكن برهان هذه المتباينة.

2) متباينة برنولي (Bernoulli's Inequality): إذا كان $x \geq -1$ فإن

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

البرهان: باستخدام الاستنتاج الرياضي، وحيث أن المتساوية تتحقق عندما $n = 1$، نفرض صحة العلاقة للعدد $n = k$. نجد عندما $n = k+1$، مع الاخذ في الاعتبار $1 + x \geq 0$، أن

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x)\\ &\geq (1+kx)(1+x)\\ &= 1+(1+k)x+kx^2\\ &\geq 1+(k+1)x, \quad kx^2 \geq 0 \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x \geq -1\end{aligned}$$

هذا يثبت صحة المتباينة عندما $n = k+1$ بفرض صحتها عندما $n = k$. ومن صحتها عندما $n = 1$، فإن المتباينة صحيحة لكل $n \in \mathbb{N}$.

3) القيمة المطلقة ومتباينة المثلث (The absolute value and the Triangle Inequality):

القيمة المطلقة لعدد حقيقي a، ويرمز لها $|a|$، تعرف بالصورة

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0\\ 0, & a = 0\\ -a, & a < 0\end{cases}$$

نظرية: للأعداد الحقيقية $a, b, c \in \mathbb{R}$ فإن

1) لكل $a, b \in \mathbb{R}$ فإن $|ab| = |a||b|$.

2) لكل $a \in \mathbb{R}$ فإن $|a|^2 = a^2$.

3) إذا كان $c \geq 0$ فإن $|a| \leq c$ إذا وفقط إذا $-c \leq a \leq c$.

نظرية: (**متباينة المثلث** Triangle Inequality)

إذا كان $a, b \in \mathbb{R}$ فإن $|a+b| \leq |a| + |b|$.

البرهان: لكل $a, b \in \mathbb{R}$ فإن $-|a| \leq a \leq |a|, -|b| \leq b \leq |b|$. وبالتالي، فإن

$$-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$$

وهذا يكافئ المطلوب.

بصورة عامة، لأي أعداد حقيقية $a_1, a_2, \cdots, a_n$ فإن

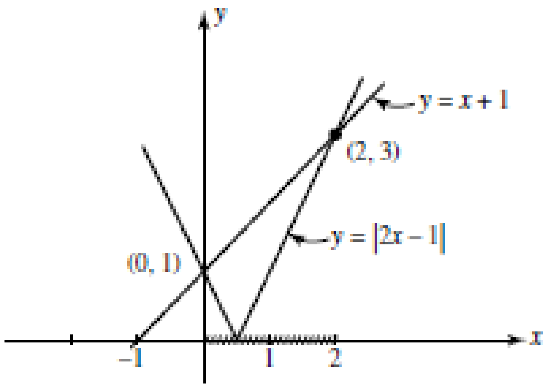
$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

نتيجة: أذا كان $a, b \in \mathbb{R}$ فإن

$$\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|, \qquad |a-b| \leq |a|+|b|.$$

مثال (1): حل المتباينة $|2x-1| \leq x+1$.

الحل: لدينا خاليتين، الأولى عندما يكون $x \leq \frac{1}{2}$ فإن $|2x-1| = -2x+1$. ومن ثم، فإن المتباينة المعطاة تكافئ $-2x+1 \leq x+1$. ومنها نحصل على $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. في الحالة الثانية، عندما $x \geq 1/2$ نجد أن $|2x-1| = 2x-1$. وعندئذ، المتباينة المعطاة تأخذ الصورة $2x-1 \leq x+1$. ومنها نحصل على $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$. وبالتالي، فإن حل المتباينة هو $0 \leq x \leq 2$، كما يوضحه الشكل التالي



مثال (2): إذا كانت

$$f(x) = \frac{2x^2+3x+1}{2x-1}, \qquad 2 \leq x \leq 3$$

فأوجد عدد حقيقي موجب M بحيث $|f(x)| \leq M$ لكل $2 \leq x \leq 3$.

الحل: لكل $2 \leq x \leq 3$ فإن $2 \leq |x| \leq 3$،

$$|f(x)| = \frac{|2x^2+3x+1|}{|2x-1|},$$

$$|2x^2+3x+1| \leq 28, \qquad |2x-1| \geq 3.$$

وبالتالي، فإن $|f(x)| \leq \frac{28}{3}$، أي أن $M = \frac{28}{3}$.

ملحوظة: العدد $M=\frac{28}{3}$ ليس الوحيد الذي يحقق المتباينة $|f(x)|\leq M$، فمن الواضح أن أي عدد $h>\frac{28}{3}$ يحقق $|f(x)|\leq H$. أيضًا، فإن العدد $\frac{28}{3}$ قد لا يكون هو أصغر عدد ممكن يحقق المطلوب.

4) متباينة كوشي – شفارتز (Cauchy-Schwarz inequality):

لأي أعداد حقيقية $a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n$ فإن

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq\left[\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

البرهان: عرف المتجهين

$$u=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad v=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

فإن

$$\|u\|=\left[\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right]^{\frac{1}{2}},\qquad \|v\|=\left[\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right]^{\frac{1}{2}},\qquad u\cdot v=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

وبالتالي، لإثبات صحة متباينة كوشي – شفارتز يكفي إثبات أن

$$u\cdot v\leq\|u\|\,\|v\|$$

لذلك، عرف المتجه

$$w=-\left(\frac{u\cdot v}{v\cdot v}\right)v+u$$

نجد أن w,v متجهان متعامدان، لأن

$$w\cdot v=-\left(\frac{u\cdot v}{v\cdot v}\right)v\cdot v+u\cdot v=0.$$

وحيث أن $u=w+\left(\frac{u\cdot v}{v\cdot v}\right)v$ فإن

$$\|u\|^2=u\cdot u=\|w\|^2+\left|\frac{u\cdot v}{v\cdot v}\right|^2\|v\|^2=\|w\|^2+\frac{|u\cdot v|^2}{\|v\|^2}.$$

ومنها

$$\|u\|^2\|v\|^2=\|w\|^2\|v\|^2+|u\cdot v|^2\geq|u\cdot v|^2$$

لأن $\|w\|\|v\|\geq 0$. وهذا يكمل البرهان.

خاصية ارشميدس (ARCHIMEDES PROPERTY):

لكل عدد حقيقي $x > 0$ يوجد عدد طبيعي n_x بحيث $x < \frac{1}{n_x}$.

هذه الخاصية تعني أن:

1) مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ليست محدودة من أعلى.
2) لكل عدد حقيقي موجب يوجد عدد طبيعي أكبر منه.

البرهان: (1) بفرض العكس فإنه سيوجد $\alpha = \sup \mathbb{N}$ في $\mathbb{R}$. وبالتالي، فإن $n \leq \alpha$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وحيث إن $n + 1 \in \mathbb{N}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $n + 1 \leq$\alpha، ومن ثم $n \leq \alpha - 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وعليه فإن $\alpha - 1$ حد علوي للمجموعة $\mathbb{N}$، وهذا يناقض كون α أصغر حد علوي للمجموعة $\mathbb{N}$. هذا التناقض يعني أن $\mathbb{N}$ ليس لها حد علوي، أي ليست محدودة من أعلى.

(2) بناء على (1) فإنه لأي عدد حقيقي موجب x فإن $\frac{1}{x}$ ليس حد علوي للمجموعة $\mathbb{N}$. لذا سيوجد $n_x \in \mathbb{N}$ بحيث $n_x > \frac{1}{x}$. وهذا يكمل البرهان.

أمثلة: (1) إذا كانت $A = \{\frac{n}{n+1};\ \ n \in \mathbb{N}\}$ فاوجد $\inf A, \sup A, \max A, \min A$.

الحل: عرف $a_n = \frac{n}{n+1}$ نجد أن $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$. وبالتالي، فإن المجموعة A تزايدية. ويمكن كتابتها على الصورة

$$A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right\}$$

ومن ثم فإن $\inf A = \min A = \frac{1}{2}$. من جهة ثانية، واضح أن $\frac{n}{n+1} < 1 \notin A$ لكل $n \in \mathbb{N}$. ولذلك، فإن $\max A$ غير موجود. وأن العدد 1 حد علوي للمجموعة A. يبقى إثبات أن العدد $\sup A = 1$. بحسب خاصية ارشميدس لأي عدد حقيقي $\epsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي n_ϵ بحيث $\frac{1}{n_\epsilon + 1} < \epsilon$. وبالتالي،

$$1 - \epsilon < 1 - \frac{1}{n_\epsilon + 1} = \frac{n_\epsilon}{n_\epsilon + 1} \in A$$

وهذا يعني أنه لأي $\epsilon > 0$ فإن العدد $1 - \epsilon$ ليس حد علوي للمجموعة A، أي أن $\sup A = 1$.

(2) للمجموعة $A=\left\{\frac{n+2}{n+1};n\in\mathbb{N}\right\}$ أوجد – إن وجد – كلا من $\inf A\,,\sup A\,,\min A\,,\max A$.

الحل: عرف $a_n=\frac{n+2}{n+1}$ نجد أن $a_n-a_{n+1}=\frac{1}{(n+2)(n+3)}>0$. ولذلك، فإن المجموعة A تناقصية، وحيث إن $\left\{\cdots,\frac{5}{4},\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right\}\left\{\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\cdots\right\}=A$ فإن $\sup A=\max A=\frac{3}{2}$.

من جهة ثانية، فإن $\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}>1$ لكل $n\in\mathbb{N}$. وهذا يعني أن العدد 1 هو حد سفلي للمجموعة A.

لأي $\epsilon>0$ (بحسب خاصية ارشميدس) يوجد عدد طبيعي n_ϵ بحيث $\frac{1}{n_\epsilon+1}<\epsilon$. ومن هذا نجد أن

$1+\frac{1}{n_\epsilon+1}<1+\epsilon$ لكن $1+\frac{1}{n_\epsilon+1}\in A$ ولذلك، فإن $1+\epsilon$ ليس حد سفلي للمجموعة A، أي أن $\inf A=1$. وحيث إن $1\notin A$ فإن $\min A$ غير موجود.

ملاحظة:

$$\sup A=\sup\left\{1+\frac{1}{n+1};n\in\mathbb{N}\right\}=1+\sup\left\{\frac{1}{n+1};n\in\mathbb{N}\right\}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\inf A=\inf\left\{1+\frac{1}{n+1};n\in\mathbb{N}\right\}=1+\inf\left\{\frac{1}{n+1};n\in\mathbb{N}\right\}=1+0=1$$

نظرية: (1) إذا كان $z>0,y>0$ عددان حقيقيان موجبان سيوجد عدد طبيعي n بحيث $ny>z$.

(2) إذا كان $z>0$ عدد حقيقي موجب سيوجد عدد طبيعي n بحيث $0<\frac{1}{n}<z$.

(3) إذا كان $y>0$ عدد حقيقي موجب سيوجد عدد طبيعي n بحيث $n-1\le y<n$.

البرهان: (1) إذا كان $y>0,z>0$ فإن $\frac{z}{y}>0$. بحسب خاصية ارشميدس يوجد عدد طبيعي n

بحيث $n>z/y$. ومن ثم فإن $ny>z$.

$$(2)\ z>0\Longrightarrow\frac{1}{z}>0,\ \ \exists\, n\in\mathbb{N},\ \ n>\frac{1}{z}\Longrightarrow\ 0<\frac{1}{n}<z$$

(3) إذا كـان $y > 0$ سيوجد عدد طبيعي m بحيث $m > y$. ليكن n هو أصـغر عدد طبيعـي بحيث $n > y$. فإن $n - 1 \leq y < n$.

نظريـة: (1) إذا كـان $x > 0$ عدد غيـر نسـبي، و$z > 0$ عدد حقيقـي سيوجد عدد طبيعـي m بحيث

$$0 < \frac{x}{m} < z$$

(2) إذا كان $y < z$ عددان حقيقيان سيوجد عدد نسبيr بحيث $y < r < z$.

(3) إذا كان x عدد نسبي، و$y < z$ عددان حقيقيان سيوجد عدد نسبي r بحيث $y < rx < z$.

البرهان: يكفي برهان واحدة من الجمل السابقة وبرهان بقيتها يكون بالمثل. سنبرهن (3).

لنعتبر الحالة عندما $x > 0$ عدد غير نسبي و $0 < y < z$ عددان حقيقيـان. فـإن $0 < \frac{y}{x} < \frac{z}{x}$. وبالتالي،

$\frac{z}{x} - \frac{y}{x} > 0$. ومن ثم $0 < \min\left\{\frac{y}{x}, \frac{z}{x} - \frac{y}{x}\right\}$.

وبحسـب خاصـية ارشـميدس يوجـد عـدد طبيعـي m بحيـث $\frac{1}{m} < \min\left\{\frac{y}{x}, \frac{z}{x} - \frac{y}{x}\right\}$، أي $\frac{1}{m} < \frac{y}{x}, \frac{1}{m} < \frac{z}{x} - \frac{y}{x}$. كذلك يوجد أصغر عدد طبيعي n بحيث $\frac{n-1}{m} \leq \frac{y}{x} < \frac{n}{m}$.

يبقى اثبات أن $\frac{z}{x} > \frac{n}{m}$. لذلك نفرض العكس، أن $\frac{z}{x} \leq \frac{n}{m}$. هذا يؤدي إلى

$$\frac{z}{x} - \frac{y}{x} \leq \frac{n}{m} - \frac{y}{x} \leq \frac{n}{n} - \frac{n-1}{m} = \frac{1}{m}$$

هذا يناقض كون $\frac{1}{m} < \frac{z}{x} - \frac{y}{x}$. هذا التناقض يثبت أن $\frac{y}{x} < \frac{n}{m} < \frac{z}{x}$. ومنها ينتج المطلوب (3).

المجموعات المنتهية وغير المنتهية وقابلية العد في $\mathbb{R}$

مجموعـة الاعـداد الطبيعيـة (مجموعـة العـد) هـي $\mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}$. هـي مجموعـة مرتبـة (ordered) وقابلة للعد (countable). يقال لمجموعة S جزئية من $\mathbb{N}$ أنها جزء أولي (او قطعة أوليـة initial segment) إذا وجـد عـدد طبيعـي n بحيـث $x \in S$ إذا كـان $x < n$. فمـثلا، المجموعات التالية هي قطع أولية من $\mathbb{N}$

$$S_1 = \{1,2\}, \qquad S = \{1,2,3,4\}, \qquad S_3 = \{1,2,3,\cdots,100\}$$

ولكن المجموعات التالية ليست كذلك

$$A_1 = \{1,3,5\}, \qquad A_2 = \{2,4,6,\cdots\}$$

تعريف: (1) يقال لمجموعة B انها منتهية (finite) إذا كانت خالية أو توجد دالة تقابل (أحادية وفوقية) نطاقها B ومداها قطعة أولية من $\mathbb{N}$. خلاف ذلك يقال للمجموعة B أنها غير منتهية (infinite).

(2) إذا وجدت دالة تقابل $f: B \to \mathbb{N}$ فيقال للمجموعة B انها منتهية أو قابلة للترقيم (Numerable).

(3) إذا كانت مجموعة B منتهية أو قابلة للترقيم فيقال أنها قابلة للعد.

نظرية: كل مجموعة جزئية من مجموعة منتهية تكون منتهية، وكل مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد تكون قابلة للعد.

نظرية: اتحاد عدد منتهي من مجموعات منتهية هو مجموعة منتهية، واتحاد قابل للعد من مجموعات قابلة للعد هو مجموعة قابلة للعد.

أمثلة: 1) مجموعة الاعداد الطبيعية الزوجية $A = \{2,4,6,\cdots\}$ قابلة للترقيم.

2) مجموعة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ قابلة للعد.

البرهان: (1) عرف الدالة $f: \mathbb{N} \to A$ بحيث $f(n) = 2n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. يكفي إثبات أن f دالة تقابل (أحادية وفوقية)، عندئذ تكون A مجموعة قابلة للترقيم.

- **الدالة A $f: \mathbb{N} \to A$ بحيث $f(n) = 2n$ أحادية**

إذا كان $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ و $f(n_1) = f(n_2)$ فإن $2n_1 = 2n_2$، ومن ثم $n_1 = n_2$.

- **الدالة A $f: \mathbb{N} \to A$ بحيث $f(n) = 2n$ فوقية**

إذا كان $x \in A$ فإن x عدد طبيعي زوجي، وبالتالي يوجد عدد طبيعي n_x بحيث $x = 2n_x$. أي أنه لكل $x \in A$ يوجد $n_x \in \mathbb{N}$ بحيث $f(n_x) = x \in A$.

(2) عرف الدالة $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ بحيث

$$f(z) = \begin{cases} 1, & z = 0 \\ 2z, & z > 0 \\ 1 - 2z, & z < 0 \end{cases}$$

يكفي اثبات أن f دالة تقابل، عندئذ تكون $\mathbb{Z}$ قابلة للترقيم.

أ) **الدالة f أحادية:**

- إذا كان z_1, z_2 عددان صحيحان موجبان، وبفرض ان $f(z_1) = f(z_2)$ فإن $2z_1 = 2z_2$. ومن ثم فإن $z_1 = z_2$.

- إذا كان z_1, z_2 عددان صحيحان سالبان، وبفرض ان $f(z_1) = f(z_2)$ فإن $1 - 2z_1 = 1 - 2z_2$. ومن ثم فإن $z_1 = z_2$.

ب) الدالة f فوقية:

لأي $n \in \mathbb{N}$ فإن

- إذا كان n عدد زوجي فإن $z = \frac{n}{2}$ عدد صحيح موجب ومن ثم $f(z) = 2z = n$. أي أن كل عدد طبيعي زوجي n هو صورة لعدد صحيح موجب هو $z = \frac{n}{2}$.
- إذا كان n عدد فردي فإن $0 \geq z = \frac{1-n}{2}$ عدد صحيح غير موجب ومن ثم $f(z) = 1 - 2z = n$. أي أن كل عدد طبيعي فردي n هو صورة لعدد صحيح غير موجب هو

$$z = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ \dfrac{1-n}{2}, & n > 1 \end{cases}$$

نتيجة: إذا كانت $B \subseteq \mathbb{N}$ فإن B مجموعة قابلة للعد.

البرهان: (1) إذا كانت B مجموعة منتهية فهي قابلة للعد.

(2) إذا كانت B مجموعة غير منتهية جزئية من $\mathbb{N}$ سيوجد أصغر عنصر $b_1 \in B$. وبالتالي، فإن

$B - \{b_1\} \subset \mathbb{N}$ مجموعة غير منتهية، خلاف ذلك فإن B تكون منتهية وهذا يناقض الفرض. ليكن b_2 أصغر عنصر للمجموعة $B - \{b_1\}$، فإن $B - \{b_1, b_2\}$ مجموعة غير منتهية. وهكذا، فإن الاستمرار في هذا الاجراء يؤدي إلى $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$ حيث $b_j \in \mathbb{N}$ لكل $j \geq 1$، هذا يثبت أن B مجموعة قابلة للعد.

نظرية: مجموعة الاعداد القياسية $\mathbb{Q}$ قابلة للعد.

البرهان: حيث إن $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ هو اتحاد قابل للعد من المجموعات: $\mathbb{Q}^+$ مجموعة الاعداد القياسية الموجبة، $\{0\}$، و $\mathbb{Q}^-$ مجموعة الاعداد القياسية السالبة. يكفي إثبات أن $\mathbb{Q}^+$ مجموعة قابلة للعد، عندئذ تكون $\mathbb{Q}$ مجموعة قابلة للعد. واضح أن

$$\mathbb{Q}^+ = \cup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$$

اتحاد قابل للعد، حيث

$$A_1 = \left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cdots\right\}, A_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \cdots\right\}, \cdots, A_n = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots\right\}, \cdots$$

مجموعـات قابلـة للعد فلكل عـدد طبيعـي $k \geq 1$ توجـد دالـة تقابـل $f_k : \mathbb{N} \to A_k$ بحيـث لكـل $n \in \mathbb{N}$ فإن $f_k(n) = \frac{n}{k} \in A_k$. وبالتالي، $\mathbb{Q}^+$ مجموعة قابلة للعد، ومن ثم $\mathbb{Q}$ مجموعـة قابلـة للعد.

كذلك يمكن ترتيب مجموعة الاعداد القياسية $\mathbb{Q}$ على الصورة التالية

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots \\
\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{7}{4} & \cdots \\
\cdots & & & \ddots & & & & \cdots
\end{array}$$

نظرية: الفترة $(0,1)$ غير قابلة للعد.

البرهـان: بفرض العكس أن $A = (0,1)$ مجموعـة قابلـة للعد، وأن $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$. فـإن $0 < a_k < 1$ لكل $k \geq 1$. ومن ثم يوجد تمثيل عشري لكل عنصر a_k في A، ليكن

$$a_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$$

$$a_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$$

$$\vdots$$

$$a_k = 0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\cdots$$

$$\vdots$$

حيـث $a_{mn} \in \{0,1,2,3,\cdots,9\}$ لكـل $m, n \in \mathbb{N}$. مـن جهـة ثانيـة، يوجـد العـدد $b = 0.b_1b_2b_3\cdots$ فـي A بحيـث $b_n \neq a_{nn}$ لكـل $n \in \mathbb{N}$. أي أن $b \neq a_k$ لكـل $k \geq 1$. هـذا التناقض يقتضي أن تكون $A = (0,1)$ مجموعة غير قابلة للعد.

نتيجة: 1) كل مجموعة جزئية من الاعداد الحقيقية تحوي الفترة $(0,1)$ هي مجموعة غير قابلـة للعد.

2) كل فترة هي مجموعة غير قابلة للعد.

3) مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي مجموعة غير قابلة للعد.

4) مجموعة الاعداد غير النسبية $\mathbb{Q}^c$ هي مجموعة غير قابلة للعد.

ملاحظات: 1) كل مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد تكون قابلة للعد.

2) تقاطع مجموعتين احداهما قابلة للعد هو مجموعة قابلة للعد.

3) إذا كانت Aمجموعة غير قابلة للعد، وكانت $A \subseteq B$ فإن B مجموعة غير قابلة للعد.

الخاصية المميزة للفترات (THE PROPERTY OF THE INTERVALS):

إذا كانت S مجموعة جزئية من الاعداد الحقيقية تحوي على الأقل عنصرين بحيث إذا كان $x < y$ في S فإن $[x, y] \subseteq S$، عندئذ تكون S فترة.

البرهان: (1) إذا كانت S مجموعة محدودة سيوجد $a = \inf S\,,\ \ b = \sup S$. وبالتالي، فإن $S \subseteq [a, b]$. الآن نثبت أن $(a, b) \subset S$. كل $x \in (a, b)$ ليس حداً للمجموعة S، ومن ثم يوجد $s_1, s_2 \in S$ بحيث

$$s_1 < x < s_2$$

وبالتالي، فإن $x \in [s_1, s_2] \subseteq S$. هذا يكمل البرهان $S = (a, b)$.

(2) إذا كانت S مجموعة محدودة فقط من أعلى سيوجد $b = \sup S$ وبالتالي $S \subseteq (-\infty, b]$. يبقى إثبات أن $(-\infty, b) \subset S$، وعندئذ يكون $S = (-\infty, b)$ هي فترة. كل $x \in (-\infty, b)$ ليس حداً للمجموعة S، ومن ثم يوجد $s_1, s_2 \in S$ بحيث

$$s_1 < x < s_2$$

وبالتالي، فإن $x \in [s_1, s_2] \subseteq S$.

بالمثل يمكن إثبات أنه إذا كانت S محدودة فقط من أسفل سيوجد $a \in \mathbb{R}$ بحيث $S = (a, \infty)$.

(3) إذا كانت S ليست محدودة (ليست محدودة من أعلى وليست محدودة من أسفل) فإن $S \subseteq (-\infty, \infty)$. وكل $x \in \mathbb{R}$ ليس حداً للمجموعة S، ومن ثم يوجد $s_1, s_2 \in S$ بحيث

$$s_1 < x < s_2$$

وبالتالي، فإن $x \in [s_1, s_2] \subseteq S$. أي أن $S = (-\infty, \infty)$.

الفترات المتعششة (NESTED INTERVALS):

تعريف: إذا كانت (I_n) متتابعة من فترات بحيث $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$ يقال أنها فترات متعششة (nested).

أمثلة: الفترات التالية متعششة. لكل $n \in \mathbb{N}$ عرف

$$I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right), \qquad J_n = \left[0, \frac{1}{n}\right], \qquad K_n = (n, \infty)$$

مثال: إذا كان $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$ لكل $n \in \mathbb{N}$، فاثبت أن $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

الحل: واضح أن $0 \in I_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وبالتالي، فإن $0 \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. لأي عدد حقيقي $x \neq 0$ فإن

(1) إذا كان $x < 0$ فإن $x \notin I_n$ لكل $1 \leq n$. ومن ثم $x \notin \cap_{n=1}^{\infty} I_n$.

(2) إذا كان $x > 0$ فسيوجد عدد طبيعي n_x بحيث $0 < \frac{1}{n_x} < x$. ولذلك،

$x \notin I_{n_x} = \left[0, \frac{1}{n_x}\right]$. وبالتالي، فإن $x \notin \cap_{n=1}^{\infty} I_n$.

هذا يثبت أن $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

مثال: إذا كان $J_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$ لكل $n \in \mathbb{N}$، فاثبت أن $\cap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset$.

الحل: لأي عدد حقيقي x فإن

(1) إذا كان $x \leq 0$ فإن $x \notin J_n$ لكل $1 \leq n$. ومن ثم $x \notin \cap_{n=1}^{\infty} J_n$.

(2) إذا كان $x > 0$ فسيوجد عدد طبيعي n_x بحيث $0 < \frac{1}{n_x} < x$. ولذلك،

$x \notin J_{n_x} = \left(0, \frac{1}{n_x}\right]$. وبالتالي، فإن $x \notin \cap_{n=1}^{\infty} J_n$.

هذا يثبت أن $\cap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset$.

مثال: إذا كان $K_n = [n, \infty)$ لكل $n \in \mathbb{N}$، فاثبت أن $\cap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$.

نظرية (خاصية الفترات المتعششة): إذا كانت $I_n = [a_n, b_n]$ بحيث $I_n \supseteq I_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$، فإن $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ تقاطع غير خالي.

البرهـان: حيـث إن (I_n) متتابعـة مـن فتـرات متعشـة فـإن $a_n < b_1$ لكـل $n \in \mathbb{N}$. أي أن $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ مجموعـة محـدودة مـن أعلـى. وبالتـالي سـيوجد $x \in \mathbb{R}$ بحيـث $x = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. ومن ثم

$$a_n \leq x, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

يبقى ثبت ان

$$x \leq b_n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

عندئـذ، مـن $(1), (2)$ نجـد أن $a_n \leq x \leq b_n$، أي أن $x \in I_n$ لكـل $n \in \mathbb{N}$. ومـن ثـم فـإن $x \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. هذا يثبت أن $\cap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.

الآن، اثبـات (2) يكـافئ اثبـات أن b_n (لكـل $n \in \mathbb{N}$) هـو حـد علـوي للمجموعـة $A = \{a_k;\ k \in \mathbb{N}\}$. لتحقيق ذلك نعتبر الحالتين:

(i) إذا كـان $k < n$ فـي $\mathbb{N}$ فـإن $I_n \subseteq I_k$ ومـن ثـم $a_k \leq a_n < b_n \leq b_k$. أي أن $a_k < b_n$.

(ii) إذا كـان $k > n$ فـإن $I_k \subseteq I_n$، وبالتـالي $a_n \leq a_k < b_k \leq b_n$. أي أن $a_k < b_n$.

مما سبق فإن $a_k < b_n$ لكل $k, n \in \mathbb{N}$. وهذا يكمل البرهان.

تطبيقات خاصية الفترات المتعششة:

نظرية: مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ غير قابلة للعد.

البرهان: يكفي اثبات أن الفترة $[0,1]$ غير قابلة للعد. عندئذ تكون $\mathbb{R}$ غير قابلة للعد. خلاف ذلك، إذا كانـت $\mathbb{R}$ قابلـة للعد وحيث إن $[0,1] \subset \mathbb{R}$ فـإن تكـون $[0,1]$ قابلـة للعـد، وهـذا تنـاقض. الآن بفـرض العكـس، أي بفـرض ان $[0,1]$ قابلـة للعـد، وأن $I = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$. لـتكن $I_1 = I \backslash \{x_1\}$، فـإن $\boldsymbol{I_1}$ فتـرة محـدودة ومغلقـة (؟). بالمثل $I_2 = I_1 \backslash \{x_2\}$ فترة محدودة ومغلقة. وهكذا فـإن (I_n) متتابعـة من فترات محدودة ومغلقـة، حيـث $I_{n+1} = I_n \backslash \{x_{n+1}\}$ وتحقـق $I_{n+1} \subset I_n \subset \cdots \subset I_1 \subset I$ لكـل $n \in \mathbb{N}$، أي أن (I_n) متتابعة فترات متعششة. وبالتالي، يوجد عدد حقيقي y بحيث $y \in I_n$ لكل $n \geq 1$. ومن ثم، $y \neq x_n$ لكل $n \geq 1$. هذا يثبت ان $I = [0,1]$ (ومن ثم $\mathbb{R}$)ليست قابلة للعد.

نظريــة: لكـل عـدد حقيقـي x توجـد فتـرة $I_n = [a_n, a_n + \frac{1}{n}]$ حيث $x \in I_n \subset I_{n-1}$ و a_n عدد نسبي لكل $n \geq 1$.

البرهان: إذا كان $x = 0$ فإن

$$x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \subset \left[-\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}\right] \subset \cdots \subset [-1,1]$$

لكل $n > 1$.

أمـا إذا كـان $x > 0$ (فـي الحالـة عنـدما $x < 0$ نتعامـل مـع العـدد $-x$) سـيوجد أصـغر عـدد طبيعـي n_0 بحيـث $n_0 - 1 \leq x < n_0$. اعتبـر $a_0 = n_0 - 1$، لاحـظ أنـه عـدد نسـبي، فإننا نحصل على

$$x \in I_1 = [a_1, a_1 + 1].$$

بتنصيف الفترة I_1 نحصل على الفترتين $\left[a_1 + \frac{1}{2}, a_1 + 1\right]$, $\left[a_1, a_1 + \frac{1}{2}\right]$.

فإذا كان $x \in \left[a_1, a_1 + \frac{1}{2}\right]$ اعتبرنا $a_2 = a_1$ وكان $x \in I_2 = \left[a_2, a_2 + \frac{1}{2}\right]$. خلاف ذلك يكون $x \in \left[a_1 + \frac{1}{2}, a_1 + 1\right]$ وعندئـذ نعتبـر $a_2 = a_1 + \frac{1}{2}$. بالاسـتمرار فـي هـذا الاجراء نحصل على

$$x \in I_n = \left[a_n, a_n + \frac{1}{2^{n-1}}\right], a_n \in \mathbb{Q}, \quad n \geq 1$$

وهذا يكمل البرهان.

كثافة الاعداد النسبية والاعداد غير النسبية في $\mathbb{R}$

تعريف: يقـال لمجموعـة A غيـر خاليـة جزئيـة مـن $\mathbb{R}$ أنهـا كثيفـة فـي $\mathbb{R}$ إذا كانـت كـل فتـرة مفتوحة (a, b) تحوي على الأقل عنصرا من A.

بعبارة أخرى، لكل عددان حقيقيان a, b يوجد عنصر $x \in A$ بحيث $a \leq x \leq b$.

نظرية: مجموعة الاعداد النسبية $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$.

البرهان: ليكن $a < b$ عددان حقيقيان، فإن $0 < b - a$.

(1) إذا كان $0 < a < b$ سيوجد عدد طبيعي n بحيث $0 < \frac{1}{n} < b - a$.

ومن ثم، $nb > na + 1$. وحيث إن $0 < na$ سيوجد أصغر عدد طبيعي m بحيث

$$m - 1 \leq na < m$$

ومن ذلك نحصل على $na < m \leq na + 1 < nb$. وبالتالي $a < x = \frac{m}{n} < b$،
وهذا يثبت المطلوب.

(2) إذا كان $a < 0 < b$ فإن $x = 0$ عدد نسبي يحقق المطلوب.

(3) إذا كان $a < b < 0$ فإن $0 < -b < -a$، وبحسب الحالة الأولى يوجد عدد نسبي x بحيث $-b < x < -a$. أو $a < -x < b$ وهو المطلوب.

نتيجة: مجموعة الاعداد غير النسبية $\mathbb{Q}^c$ كثيفة في $\mathbb{R}$.

البرهان: ليكن $a < b$ عددان حقيقيان. فإن $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}}$ عددان حقيقيان، وبالتالي سيوجد عدد نسبي x بحيث $\frac{a}{\sqrt{2}} < x < \frac{b}{\sqrt{2}}$. ومن ثم، نجد العدد غير النسبي $y = x\sqrt{2}$ (؟) ليحقق $a < y < b$ وهذا هو المطلوب.

توبولوجيا الاعداد الحقيقية

نقصد بتوبولوجيا $\mathbb{R}$ تحديد المجموعات المفتوحة Open Sets والمجموعات المغلقة Closed Sets في $\mathbb{R}$ ودراسة خواصها.

المجموعات المفتوحة

تعريف: يقال لمجموعة غير خالية A جزئية من $\mathbb{R}$ أنها مفتوحة إذا كان لكل $x \in A$ توجد فترة مفتوحة I بحيث $x \in I \subseteq A$.

أمثلة:

1) الفترة (a, b) هي مجموعة مفتوحة، لأنه لكل $x \in (a, b)$ يوجد العدد $\delta_x = \min\{x - a, b - x\}$ بحيث $x \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \subset (a, b)$.

2) مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ مجموعة مفتوحة، لأنه لكل $x \in \mathbb{R}$ نجد $x \in (x - \delta, x + \delta)$ لأي عدد حقيقي $0 < \delta$.

3) المجموعة الخالية $\emptyset$ مجموعة مفتوحة. بفرض العكس، أن $\emptyset$ غير مفتوحة، سيوجد $x \in \emptyset$ (!) وتوجد فترة مفتوحة I بحيث $x \in I \not\subset \emptyset$. وهذا يناقض كون $\emptyset$ مجموعة خالية.

4) كل مجموعة A قابلة للعد جزئية من $\mathbb{R}$ تكون غير مفتوحة.

البرهان: بفرض العكس، أن A مجموعة مفتوحة فإنه لكل $x \in A$ توجد فترة I (غير قابلة للعد لكونها فترة) بحيث $x \in I \subset A$. وهذا يناقض كون A مجموعة قابلة للعد.

5) المجموعات $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^c$ كلها غير مفتوحة. لنعتبر المجموعة $\mathbb{Q}^c$ (هي مجموعة كثيفة في $\mathbb{R}$، غير قابلة للعد!) فإنه لكل $x \in \mathbb{Q}^c$ ولكل فترة (a, b) تحوي x فإن $x \in (a, b) \not\subset \mathbb{Q}^c$.

6) الفترات $[a, b), (a, b], [a, b]$ كلها مجموعات غير مفتوحة. لنعتبر الفترة $[a, b)$، فإن كل فترة مفتوحة I تحوي a نجد أن $I \not\subset [a, b)$.

المجموعات المغلقة

تعريف: يقال لمجموعة غير خالية B جزئية من $\mathbb{R}$ أنها مغلقة إذا كانت $B^c = \mathbb{R} - B$ مجموعة مفتوحة.

أمثلة:

1) المجموعات $\mathbb{R}, \emptyset$ مغلقة.

2) الفترات $[a, b), (a, b], [a, b]$ كلها مجموعات غير مغلقة. فمثلا الفترة $[a, b)$ غير مغلقة لأن $\mathbb{R} - [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$ مجموعة غير مفتوحة، لأنه لكل فترة مفتوحة I تحوي b نجد أن $I \not\subset \mathbb{R} - [a, b)$.

خواص المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$

1) $\mathbb{R}, \emptyset$ مجموعات مفتوحة.

2) إذا كان $n \in \mathbb{N}$، وكانت A_k (لكل $1 \le k \le n$) مجموعات مفتوحة فإن

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_K$$

مجموعة مفتوحة.

3) إذا كانت $A_1, A_2, A_3, \cdots$ مجموعات مفتوحة فإن

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

مجموعة مفتوحة.

4) إذا كانت A_α (لكل $\alpha \in I$ و I فترة) مجموعة مفتوحة فإن الاتحاد التالي (غير قابل للعد)

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$$

هو مجموعة مفتوحة.

برهان (2): إذا كان $\bigcap_{k=1}^{n} A_K = \emptyset$ فإنها مجموعة مفتوحة. خلاف ذلك، لكل x في هذا التقاطع توجد الاعداد الحقيقية δ_k (لكل $1 \le k \le n$) بحيث $x \in I_k = (x-\delta_k, x+\delta_k) \subset A_k$. من ثم يوجد العدد الحقيقي $\delta = \min\{\delta_k; 1 \le k \le n\}$ بحيث

$$x \in (x-\delta, x+\delta) \subset \cap_{k=1}^{n} I_k \subset \cap_{k=1}^{n} A_k$$

هذا يثبت المطلوب.

برهان (4): إذا كان $\cup_{\alpha\in I} A_\alpha = \mathbb{R}$ فإنها مجموعة مفتوحة. خلاف ذلك، لكل x في هذا الاتحاد ستوجد فترة مفتوحة I_{α_0} بحيث $x \in I_{\alpha_0} \subset A_{\alpha_0} \subset \cup_{\alpha\in I} A_\alpha$، وهذا يثبت أن $\cup_{\alpha\in I} A_\alpha$ مجموعة مفتوحة.

برهان آخر: إذا كانت A_α (لكل $\alpha \in I$) مجموعة مفتوحة. وبالتالي لها مكملة $\mathbb{R} - A_\alpha$ مغلقة. لإثبات أن $\cup_{\alpha\in I} A_\alpha$ مجموعة مفتوحة يكفي إثبات أن مكملتها $\mathbb{R} - \cup_{\alpha\in I} A_\alpha = \cap_{\alpha\in I} (\mathbb{R} - A_\alpha)$ مغلقة. وهذا ما سنثبته لاحقا.

مثال يوضح أن التقاطع اللانهائي لمجموعات مفتوحة ليس بالضرورة يكون مجموعة مفتوحة. اعتبر الفترات المفتوحة $I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ لكل $n \in \mathbb{N}$. واضح أن $\cap_{n\ge1} I_n = \{0\}$ هي مجموعة غير مفتوحة (؟).

تعريف: إذا كانت τ عائلة كل المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ فإن

1) $\mathbb{R}, \emptyset \in \tau$

2) إذا كانت $A_1, A_2 \in \tau$ فإن $A_1 \cap A_2 \in \tau$

3) إذا كانت $A_1, A_2, \cdots \in \tau$ فإن $\cup_{k\ge1} A_k \in \tau$

تعريف: العائلة τ تسمى توبولوجي العادي (أو المعتاد) على $\mathbb{R}$. الثنائي $(\mathbb{R}, \tau)$ يسمي بالفضاء التوبولوجي العادي.

خواص المجموعات المغلقة في $\mathbb{R}$

1) $\mathbb{R}, \emptyset$ مجموعات مغلقة.

2) إذا كان $n \in \mathbb{N}$، F_k، لكل $1 \le k \le n$ مجموعة مغلقة فإن

$$\bigcup_{k=1}^{n} F_k$$

مجموعة مغلقة.

3) إذا كانت وكانت F_α (لكل $\alpha \in I$، حيث I فترة) مجموعات مغلقة فإن

$$\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha$$

مجموعة مغلقة.

البرهان: يكفي إثبات الخاصيتين الثانية والثالثة

- إذا كانت F_k (لكل $1 \le k \le n$) مجموعة مغلقة فإن المكملة $\mathbb{R} - F_k$ مجموعة مفتوحة. وبالتالي التقاطع المنته

$$\cap_{k=1}^{n} (\mathbb{R} - F_k) = \mathbb{R} - \cup_{k=1}^{n} F_k$$

هو مجموعة مفتوحة. ومن ثم فإن الاتحاد $\cup_{k=1}^{n} F_k$ يكون مجموعة مغلقة (مكملته مفتوحة).

- إذا كانت F_α مجموعة مغلقة فإن المكملة $\mathbb{R} - F_\alpha$ مجموعة مفتوحة. ومن ثم، المجموعة

$$\mathbb{R} - \cap_{\alpha\in I} F_\alpha = \cup_{\alpha\in I} (\mathbb{R} - F_\alpha)$$

مجموعة مفتوحة (اتحاد من مجموعات مفتوحة). وبالتالي فإن مكملتها $\cap_{\alpha\in I} F_\alpha$ مجموعة مغلقة، وهو المطلوب.

النقاط الداخلية والحدود لمجموعة في $\mathbb{R}$

تعريف: (1) إذا كانت $A \subseteq \mathbb{R}$ مجموعة غير خالية، يقال للعنصر $x \in A$ أنه نقطة داخلية (interior point) للمجموعة A إذا وجدت مجموعة مفتوحة I بحيث $x \in I \subseteq A$. وتسمى مجموعة كل النقاط الداخلية لمجموعة A بالداخلية (*interior*) للمجموعة A، ويرمز لها A°.

(2) يقال للعدد الحقيقي u أنه نقطة حدودية (أو حدية، boundary point) لمجموعة $A \subset \mathbb{R}$ إذا كل مجموعة مفتوحة I تحوي العدد u يكون $I \cap A \neq \emptyset,\ I \cap (\mathbb{R} - A) \neq \emptyset$. وتسمى مجموعة كل النقاط الحدودية لمجموعة A بحدود (*boundary*) للمجموعة A، ويرمز لها $b(A)$.

أمثلة: (1) كل نقاط فترة مفتوحة هي نقاط داخلية لها.

البرهان: لتكن $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$، فإنه لأي $x \in I$ فإن $a < x < b$. وبالتالي يوجد

$$\delta = \min\{x-a, b-x\}$$

بحيث $x \in (x-\delta, x+\delta) \subset I$. وهذا يثبت المطلوب. في الحالة عندما $I = \mathbb{R}$ فإنه لأي $\delta > 0$ يتحقق $x \in (x-\delta, x+\delta) \subset I$.

(2) للمجموعة (a,b) فإن النقاط الحدية هي $\{a,b\}$.

البرهان: لأي $\epsilon > 0$ فإن $a-\epsilon < a < a+\epsilon$، وأن

$$(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap (a,b) \neq \emptyset, \qquad (a-\epsilon, a+\epsilon) \cap \left(\mathbb{R} - (a,b)\right) \neq \emptyset$$

هذا يبين أن a نقطة حدودية للمجموعة (a,b). بالمثل يمكن إثبات أن b نقطة حدودية.

(3) للمجموعة $[0,4)$ فإن $[0,4)^{\circ} = (0,4),\ b[0,4) = \{0,4\}$.

(4) واضـــح أن $\mathbb{N}^{\circ} = \emptyset,\ \mathbb{Z}^{\circ} = \emptyset,\ \mathbb{Q}^{\circ} = \emptyset,\ (\mathbb{R}-\mathbb{Q})^{\circ} = \emptyset,\ \emptyset^{\circ} = \emptyset, \mathbb{R}^{\circ} = \mathbb{R}$، لأنه لكل عدد حقيقي r فإن كل فترة مفتوحة I تحوي r تحقق

$$I \cap \mathbb{N} = \emptyset,\ \ I \cap \mathbb{Z} = \emptyset,\ \ I \cap \mathbb{Q} = \emptyset,\ \ I \cap (\mathbb{R}-\mathbb{Q}),\ \ I \cap \emptyset = \emptyset,\ \ I \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

(5) بين أن

$$b(\mathbb{N}) = \mathbb{N}, b(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, b(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}, b(\mathbb{R}-\mathbb{Q}) = \mathbb{R}, b(\mathbb{R}) = \emptyset, b(\emptyset) = \emptyset.$$

نقاط التراكم ACCUMULATION POINTS

أمثلة تمهيدية

1) للمجموعة $A = \left\{\frac{1}{n};\ \ n \in \mathbb{N}\right\}$ واضح أن العناصر في المجموعة تتراكم بالقرب من العدد $x = 0$، لذا نقول أن $x = 0$ نقطة تراكم للمجموعة A. فلأي $\epsilon > 0$ يكون $(-\epsilon,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$. حيث يوجد (بحسب خاصية ارشميدس) عدد طبيعي N بحيث $\frac{1}{N} < \epsilon$، وبالتالي $0 \neq \frac{1}{N} \in (-\epsilon,\epsilon) \cap A$.

أي أن، كل جوار للعدد $x = 0$ يحتوي على عناصر من المجموعة A.

ملاحظة: $x = 0 \notin A$ نقطة التراكم الوحيدة للمجموعة A (سنهتم بذلك فيما بعد).

2) للمجموعـة $B = \left\{\frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}\right\}$ فـإن العـدد $x = 1$ هـو نقطـة تـراكم (وحيـدة!). فـلأي $\delta > 0$ فإنه بحسب خاصية ارشميدس يوجد العدد الطبيعي N بحيث $\frac{1}{\delta} < N + 1$، وبالتالي

$$1-\delta<1-\frac{1}{N+1}=\frac{N}{N+1}<\frac{N+2}{N+1}=1+\frac{1}{N+1}<1+\delta$$

ومن ثم، $1 \neq \frac{N}{N+1} \in (1-\delta, 1+\delta) \cap B \neq \emptyset$. وهذا يثبت المطلوب.

يتضح من هذه الأمثلة أن العدد الحقيقي x يكون نقطة تراكم لمجموعة غير خالية من الاعداد الحقيقية إذا كل فترة مفتوحة تحوي x فإنها تحتوي على الأقل على عنصر (خلاف x) من عناصر A. هذا يمكن صياغته في التعريف التالي.

تعريف: إذا كانت A مجموعة غير خالية جزئية من $\mathbb{R}$، يقال لعدد حقيقي x أنه نقطة تراكم للمجموعة A إذا كانت كل فترة مفتوحة I تحوي العدد x تحقق $I \cap (A-\{x\}) \neq \emptyset$.
بعبارة اخرى، العدد x يكون نقطة تراكم لمجموعة غير خالية A إذا كان لكل $0<\epsilon$ يتحقق

$$(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap (A-\{x\}) \neq \emptyset.$$

مثال: اثبت أن $x=1$ هو نقطة تراكم للمجموعة $A=\left\{\frac{n+1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$.

الحل: اجعل $a_n := \frac{n+1}{n} \in A$ فإن $1<a_{n+1}<a_n \leq 2$ لكل $n \in \mathbb{N}$. أي أن، عناصر A تتناقص من $2 \in A$ لتتراكم بالقرب من $1 \notin A$. لإثبات المطلوب يكفي اثبات أنه لكل $0<\delta$ يوجد $a_n \in A$ بحيث $a_n \in (1-\delta, 1+\delta) \cap (A-\{1\})$. بحسب خاصية ارشميدس يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{n}<\delta$. ومن ثم فإن

$$1-\delta<1-\frac{1}{n}<1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}=a_n<1+\delta$$

وهذا يكمل الاثبات.

تعريف: مجموعة كل نقاط التراكم لمجموعة A تسمى مشتقة (derivative) المجموعة، ويرمز لها A'. والمجموعة $A \cup A'$ تسمى انغلاق (closure) المجموعة A ويرمز له $\overline{A}$، ونكتب $\overline{A}=A \cup A'$.

أمثلة: 1) $\mathbb{N}'=\emptyset$. لأي $r \in \mathbb{R}$ فإن

i) إذا كان $r \in \mathbb{N}$ نجد أن $\left(r-\frac{1}{2}, r+\frac{1}{2}\right) \cap (\mathbb{N}-\{r\})=\emptyset$. وبالتالي $r \notin \mathbb{N}'$.

ii) إذا كان $r \notin \mathbb{N}$ سيوجد عدد طبيعي n بحيث $0 < \delta = |r-n| \leq \frac{1}{2}$، وبالتالي $\left(r-\frac{\delta}{2}, r+\frac{\delta}{2}\right) \cap (\mathbb{N}-r) = \emptyset$. أي أن، $r \notin \mathbb{N}$ لكل $r \in \mathbb{R}$. هذا يثبت $\mathbb{N}' = \emptyset$

2) بالمثل يمكن إثبات أن $\mathbb{Z}' = \emptyset$.

3) $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. لأي $r \in \mathbb{R}$ فإن كل فترة مفتوحة I تحوي r هي تحتوي على عدد لانهائي من الاعداد النسبية (وغير النسبية!) لذلك فإن $I \cap (\mathbb{Q} - \{r\}) \neq \emptyset$. وهذا يثبت المطلوب

4) بالمثل فإن $(\mathbb{R}-\mathbb{Q})' = \mathbb{R}$ و$\mathbb{R}' = \mathbb{R}$.

5) $\{7\}' = \emptyset$, $(-3,5]' = [-3,5]$.

6) مجموعة نقاط التراكم (المشتقة) للمجموعة $(-1,15) \cup (15,17]$ هي $[-1,17]$.

ملاحظات: (1) خواص مجموعة الاعداد النسبية $\mathbb{Q}$

- $\mathbb{Q}$ مجموعة قابلة للعد
- $\mathbb{Q}$ مجموعة غير مفتوحة وغير مغلقة
- $\mathbb{Q}$ مجموعة كثيفة في $\mathbb{R}$، فلأي فترة مفتوحة I في $\mathbb{R}$ فإن $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$
- $\mathbb{Q}^{\circ} = \mathbb{Q},\ b(\mathbb{Q}) = \mathbb{R},\ \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

تمرين: اذكر خواص المجموعات $\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{R}-\mathbb{Q},\ \mathbb{R}$.

(2) إذا كانت $A \subseteq \mathbb{R}$ فإن

$$b(A) = (A \cup A') - A^{\circ},\quad b(A) = \mathbb{R} - \left(A^{\circ} \cup (\mathbb{R}-A)^{\circ}\right)$$

أمثلة:

$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{b}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' - \mathbb{Q}^{\circ} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} - \emptyset = \mathbb{R}$

$\mathbf{2)}\ \boldsymbol{b}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}' - \mathbb{Z}^{\circ} = \mathbb{Z} \cup \emptyset - \emptyset = \mathbb{Z}$

$\mathbf{3)}\ \boldsymbol{b}(\mathbb{N}) = \mathbb{R} - (\mathbb{N}^{\circ} \cup (\mathbb{R}-\mathbb{N})^{\circ}) = \mathbb{R} - (\emptyset \cup (\mathbb{R}-\mathbb{N}) = \mathbb{N}$

$\mathbf{4)}\ \boldsymbol{b}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}' - \mathbb{R}^{\circ} = \mathbb{R} - \mathbb{R} = \emptyset.$

نظرية: إذا كانت x نقطة حدودية لمجموعة مغلقة A فإن $x \in A$.

البرهان: بفرض العكس، أن $x \notin A$ نقطة حدودية. فإن $x \in \mathbb{R}-A$ وحيث إن $\mathbb{R}-A$ مجموعة مفتوحة ستوجد فترة مفتوحة I بحيث $x \in I \subset \mathbb{R}-A$. هذا يناقض كون x نقطة حدودية، ولذلك $x \in A$.

نتيجة: المجموعة A تكون مغلقة إذا وفقط إذا احتوت كل نقاطها الحدودية.

نظرية: المجموعة المفتوحة هي اتحاد لفترات مفتوحة.
بعبارة أخرى، إذا كانت A مجموعة مفتوحة ستوجد (I_n) متتابعة من فترات مفتوحة بحيث $A = \cup_n I_n$.

نظرية: إذا كانت A مجموعة مفتوحة ومغلقة فإن $b(A) = \emptyset$، أي أن $A = \overline{A}$.
ملاحظة:

العدد $x \in \mathbb{R}$ يكون نقطة داخلية لمجموعة غير خالية A إذا 1) $x \in A$ 2) توجد فترة مفتوحة I بحيث $x \in I \subseteq A$	العدد $x \in \mathbb{R}$ يكون نقطة حدودية (أو حدية) لمجموعة A، وليس بالضرورة $x \in A$، إذا لكل فترة مفتوحة I تحوي x يتحقق $I \cap A \neq \emptyset, I \cap (\mathbb{R} - A) \neq \emptyset$	العدد $x \in \mathbb{R}$ يكون نقطة تراكم لمجموعة A، وليس بالضرورة $x \in A$، إذا لكل فترة مفتوحة I تحوي x يتحقق $I \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$

نظرية (نظرية بلزانو-فيرشتراس *Bolzano-Weierstrass Theorem*)**:**
لكل مجموعة لانهائية ومحدودة توجد نقطة تراكم.
البرهان: لتكن $B \subset \mathbb{R}$ مجموعة لانهائية ومحدودة، سيوجد $a, b \in \mathbb{R}$ بحيث

$$a = \inf B\,, \quad b = \sup B$$

ومن ثم $B \subseteq [a, b]$. بتقسيم الفترة $I_1 = [a, b]$ إلى جزئين، فإن أحد الجزئين (ليكن I_2) يحتوي على عدد لانهائي من عناصر B، خلاف ذلك تكون B مجموعة محدودة، وهذا يناقض المعطى. مرة ثانية، بتقسيم الفترة I_2 إلى فترتين، ولتكن I_3 هي الفترة الجزئية التي تحتوي العدد اللانهائي من عناصر B. بالاستمرار في هذا الاجراء نحصل على متتابعة الفترات المتعشقة(I_n) حيث

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ I_3 \supseteq \cdots, \quad \ell(I_{n+1}) = \frac{1}{2}\ell(I_n)$$

حيث $\ell(I_n)$ ترمز لطول الفترة I_n. بحسب خاصية الفترات المتعشقة يوجد $y \in \mathbb{R}$ بحيث $y \in I_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. الأن لكل فترة مفتوحة J تحوي y فإن $J \cap (I_n - \{y\}) \neq \emptyset$ لكل

$n \in \mathbb{N}$. وحيث إن I_n (لكل $n \in \mathbb{N}$) تحتوي على عدد لانهائي من عناصر B. فإن $J \cap (B - \{y\}) \neq \emptyset$. وهذا يكمل المطلوب.

الفصل الثاني

المتتابعات الحقيقية Real sequences

تعريف: المتتابعة هي دالة $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (من $\mathbb{N}$ إلى $\mathbb{R}$) بحيث $n \longmapsto a_n$، أي تحدد لكل عدد طبيعي n عدد حقيقي وحيد a_n. العدد a_n يسمى بالعنصر رقم n من المتتابعة (a_n) (ونكتب كذلك $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ و $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

أمثلة: امثلة للمتتابعات

$$\left(\frac{1}{n}\right) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\},$$
$$((-1)^n) = \{-1,1,-1,1,\cdots\},$$
$$\left(\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right) = \left\{\sin x, \sin\frac{x}{2}, \sin\frac{x}{3}, \cdots\right\},$$
$$(\cos(mx)) = \{\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cdots\}.$$

ملاحظة: المجموعة $\{a_n\}$ تسمى مجموعة عناصر المتتابعة (a_n). واضح أن $(a_n) \neq \{a_n\}$ عامة. فمثلا، للمتتابعة $(a_n) = ((-1)^n)$ مجموعة العناصر $\{a_n\} = \{-1,1\}$. وللمتتابعة $(b_n) = (\sin n\pi)$ فإن مجموعة العناصر هي $\{b_n\} = \{0\}$.

تعريف: يقال لمتتابعة (a_n) أنها تتقارب إلى عدد حقيقي x إذا كانت كل فترة مفتوحة I تحوي x تحتوي على جميع عناصر المتتابعة a_n ابتداء من عنصر ما. ونكتب $\lim_{n\to\infty} a_n = x$

مثال: المتتابعة $\left(\frac{1}{n}\right)$ تتقارب إلى العدد $x = 0$. لأنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد العدد الطبيعي n_ϵ الذي يحقق $\frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon$، ومن ثم فإنه لكل $n \geq n_\epsilon$ نج أن $\frac{1}{n} \in (-\epsilon, \epsilon)$. هذا يعني أن الفترة المفتوحة (الاختيارية) $(-\epsilon, \epsilon)$ تحتوي جميع العناصر $\frac{1}{n}$ لكل $n \geq n_\epsilon$.

يمكن إعادة تعريف المتتابعة التقاربية كما يلي:

تعريف: يقال لمتتابعة (a_n) أنها تتقارب إلى عدد حقيقي x إذا كان لكل $\epsilon > 0$ معطى يوجد العدد الطبيعي n_ϵ بحيث $a_n \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$ لكل $n_\epsilon \leq n$.

تعريف: يقال لمتتابعة (a_n) أنها تتقارب إلى عدد حقيقي x إذا كان لكل $\epsilon > 0$ معطى يوجد العدد الطبيعي n_ϵ بحيث $|a_n - x| < \epsilon$ لكل $n_\epsilon \leq n$.

ملاحظة: المتتابعة (a_n) لا تتقارب إلى العدد x إذا وجدت فترة مفتوحة J تحوي x ولا تحوي عدد لانهائي من العناصر a_n.

مثال: اثبت أن المتتابعة $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب إلى العدد $x = 1$.

الحل: إذا كان $\epsilon > 0$ فإنه بحسب خاصية ارشميدس يوجد $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{n_\epsilon+1} < \epsilon$ (؟!).
وبالتالي لكل $n \geq n_\epsilon$ يكون $\left|\frac{1}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_\epsilon+1} < \epsilon$. وهذا يثبت المطلوب $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

مثال: اثبت أن $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$.

الحل: لكل $\epsilon > 0$ معطى فإن، بحسب خاصية ارشميدس يوجد $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon$.
ومن ثم، لكل $n \geq n_\epsilon$ نجد أن $\left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon$. وهذا يثبت المطلوب.

مثال: اثبت أن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{4n+1} = \frac{1}{4}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{(n+1)} = 3$$

الحل: متروك كتمرين.

مثال: إذا كان $0 < x < 1$ فاثبت أن $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

نقاش: إذا اعطينا $\epsilon > 0$ نريد أن $x^n < \epsilon$. وهذا يكافئ $n \ln x < \ln \epsilon$. أو $n > \frac{\ln \epsilon}{\ln x}$ لأن $\ln x < 0$.

الحل: لكل $0 < x < 1$, $0 < \epsilon$، بحسب خاصية ارشميدس يوجد العدد الطبيعي k بحيث $k > \frac{\ln \epsilon}{\ln x}$ ومن ثم $x^k < \epsilon$. وبالتالي لكل $n \geq k$ فإن $x^n \leq x^k < \epsilon$ (لأن $0 < x < 1$).
هذا يثبت أن $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

نظريات النهايات للمتتابعات الحقيقية

نظرية: النهاية لمتتابعة، إن وجدت، تكون وحيدة.

البرهان: إذا كانت (a_n) متتابعة من أعداد حقيقية، وبفرض أن

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = y$$

فإنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|a_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\ n \geq k_1, \quad |a_n - y| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\, n \geq k_2. \qquad (*)$$

الان يمكن إيجاد $k = \min\{k_1, k_2\}$ فإنه لكل $n \geq k$ المتباينات $(*)$ تتحقق. وبالتالي فإن

$$|x - y| = |(a_n - y) - (a_n - x)| \leq |a_n - y| + |a_n - x| < \epsilon$$

لكل $\epsilon > 0$. ومن ثم فإن $|y - x| = 0$، هذا يعني أن $x = y$.

نظرية: إذا كانت (a_n) متتابعة، وكان m عدد طبيعي فإن المتتابعة (a_{n+m}) تتقارب إذا وفقط إذا كانت (a_n) متقاربة، وأن $\lim_{n\to\infty} a_{n+m} = \lim_{n\to\infty} a_n$.

البرهان: (1) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n = x$فإنه لكل $\epsilon > 0$ معطى يوجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq k$ فإن $|a_n - x| < \epsilon$. وبالتالي لكل $n \geq k - m$ (أو $n + m \geq k$) فإن

$$|a_{n+m} - x| < \epsilon$$

وهذا يثبت أن $\lim_{n\to\infty} a_n = x \Leftarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+m} = x$.

(2) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_{n+m} = x$فإنه لكل $\epsilon > 0$ معطى يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N$ فإن $|a_{n+m} - x| < \epsilon$. وبالتالي لكل $r = n + m \geq N + m > N$ فإن

$$|a_r - x| < \epsilon$$

وهذا يثبت أن $\lim_{n\to\infty} a_{n+m} = x \Leftarrow \lim_{n\to\infty} a_n = x$.

نظرية: إذا كانت (x_n) متتابعة من أعداد حقيقية، وكانت (a_n) متتابعة من أعداد حقيقية موجبة بحيث $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$، وكان $c > 0$ عدد حقيقي بحيث $|x_n - x| \leq c\, a_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$فإن $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

البرهان: لكل $\epsilon > 0$ يوجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq k$ يكون $a_n < \frac{\epsilon}{c}$. وبالتالي لكل $n \geq k$

$$|x_n - x| \leq c\, a_n < \epsilon$$

هذا يثبت أن $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ وهو المطلوب.

مثال: إذا كان $a > 0$ فاثبت أن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a\,n} = 0$.

الحل: لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $1 + a\,n > a\,n$. وبالتالي فإن

$$\frac{1}{1+a\,n} < \frac{1}{a\,n} = \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{n}\right).$$

وحيث إن $\frac{1}{a} > 0$ و $\frac{1}{n} \to 0$ فإن $\frac{1}{1+a\,n} \to 0$.

مثال: إذا كان $0 < b < 1$ فاثبت أن $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$.

الحل: إذا كان $0 < b < 1$ فإنه يوجد عدد حقيقي $0 < a$ بحيث $b = \frac{1}{1+a}$.

من متباينة برنولي $(1+a)^n \geq 1 + a\,n$ لكل $0 < a$ و $n \in \mathbb{N}$. وبالتالي فإن

$$b^n = \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{1+a\,n} < \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

وحيث إن $\frac{1}{a} > 0$ و $\frac{1}{n} \to 0$ فإن $b^n \to 0$.

مثال: اثبت أن $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

الحل: لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $1 \leq n^{\frac{1}{n}}$. ولذلك، لكل $n \in \mathbb{N}$ يوجد عدد حقيقي موجب k_n بحيث $n^{\frac{1}{n}} = 1 + k_n$. وبالتالي $k_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$. من جهة ثانية، وبتطبيق نظرية ذات الحدين فإن

$$\begin{aligned} n = (1+k_n)^n &= 1 + n\,k_n + \frac{n(n-1)}{2}k_n^2 + \cdots \\ &> 1 + \frac{n(n-1)}{2}k_n^2 \end{aligned}$$

ومنها فإن $k_n < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \to 0$

ومن ثم

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} k_n = 0$$

وهذا يكافئ المطلوب.

تعريف: يقال لمتتابعة (a_n) أنها

(1) محدودة من أعلى إذا وجد عدد حقيقي M بحيث $x_n \leq M$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

(2) محدودة من أسفل إذا وجد عدد حقيقي m بحيث $m \leq x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

(3) محدودة إذا كانت المتتابعة محدودة من أعلى ومن أسفل.

نظرية: كل متتابعة تقاربية تكون محدودة.

البرهان: لتكن (x_n) متتابعة في $\mathbb{R}$ وتتقارب إلى $x \in \mathbb{R}$. فإنه للعدد $\epsilon = 1$ يوجد العدد الحقيقي k بحيث لكل $n \geq k$ يكون $|x_n - x| < 1$. وبالتالي لكل $n \geq k$ يكون $x - 1 < x_n < x + 1$.

ليكن $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{k-1}|, x + 1\}$ فإنه لكل $n \geq k$ يكون $|x_n| < M$.
وهذا يثبت المطلوب.

ملاحظة: ليس كل متتابعة محدودة تكون تقاربية، فمثلا المتتابعة $((-1)^n)$ محدودة وليست تقاربية (متذبذبة؟!)

نظرية: (1) إذا كانت $(a_n), (b_n)$ متتابعات في $\mathbb{R}$ تتقارب على الترتيب إلى a, b فإن المتتابعات التالية تقاربية $(a_n b_n), (a_n - b_n), (a_n + b_n)$ وأن

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = a \times b.$$

(2) وإذا كانت (c_n) متتابعة في $\mathbb{R}$ بحيث $c_n \neq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكانت $\lim_{n\to\infty} c_n = c \neq 0$، فإن المتتابعة $\left(\frac{a_n}{c_n}\right)$ متقاربة وأن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} c_n} = \frac{a}{c}$$

البرهان: نكتفي ببرهان بعض النتائج

(1) نهاية متتابعة المجموع: من الفرض فإنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\, n \geq k_1,$$

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \ \ \forall \ \ n \geq k_2.$$

وبالتالي لكل $n \geq \max\{k_1, k_2\}$ يكون

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(2) نهاية متتابعة القسمة: في هذه الحالة لدينا

$$\left|\frac{a_n}{c_n} - \frac{a}{c}\right| \leq \frac{|a_n - a|}{|c_n|} + \frac{|a||c_n - c|}{|c_n||c|} \qquad (*)$$

الآن من الفرض فإن (c_n) متتابعة محدودة، أي يوجد $m, M \in \mathbb{R}$ بحيث $m \leq c_n \leq M$ لكل n، وأنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\frac{1}{m}|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \ \ \forall \, n \geq k_1,$$

$$\frac{|a|}{m|c|}|c_n - c| < \frac{\epsilon}{2} \ \ \forall \ \ n \geq k_2.$$

وبالتالي لكل $n \geq \max\{k_1, k_2\}$ ، باستخدام $(*)$ يكون

$$\left|\frac{a_n}{c_n} - \frac{a}{c}\right| \leq \frac{|a_n - a|}{|c_n|} + \frac{|a||c_n - c|}{|c_n||c|} \leq \frac{1}{m}|a_n - a| + \frac{|a|}{m|c|}|c_n - c|$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

وهذا يثبت المطلوب (2).

أمثلة:

$$1) \lim_{n\to\infty} \frac{3n - 5}{n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n + 1) - 8}{n + 1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{8}{n + 1}\right) = 3 - 8 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n + 1} = 3$$

$$2) \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2 + 3n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1 + 0 + 0} = 0$$

نظرية: إذا كان $0 \leq x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$، وكان $x_n \to x$ فإن $0 \leq x$.

البرهان: بفرض العكس، أن $x < 0$. وحيث إن $x_n \to x$ فإنه للعدد $\epsilon = x$ (> 0) يوجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < -x \ \forall\, n \geq k$$

ومـن ثـم نجـد أن $x_n < x + (-x) = 0$. وهـذا ينـاقض كـون $x_n \geq 0$ لكـل $n \in \mathbb{N}$. هـذا التناقض يستلزم أن يكون $x \geq 0$، وهو المطلوب.

نظرية: إذا كان $a_n \leq b_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$، وكان $a_n \to a,\ b_n \to b$ فإن $a \leq b$.

البرهان: لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $0 \leq b_n - a_n$ ومن ثم

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = b - a$$

وهذا يعني تحقق المطلوب.

نظرية:

إذا كان $\alpha < x_n < \beta$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكان $x_n \to x$ فإن $\alpha < x < \beta$ حيث $\alpha, \beta\ \in \mathbb{R}$.

البرهان: عرف المتتـابعتين $\alpha_n = (\alpha, \alpha, \cdots),\ \beta_n = (\beta, \beta, \cdots)$ فـإن $\alpha_n < x_n < \beta_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. ومن ثم، بحسب النظرية السابقة، فإن

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n < \lim_{n\to\infty} x_n = x < \lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$$

وها هو المطلوب.

نظرية: (نظرية المحصور Squeeze Theorem)

إذا كـان $a_n \leq x_n \leq b_n$ لكـل $n \in \mathbb{N}$، وكـان $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x$ فـإن $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

البرهان: لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي $k \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq k$ يكون

$$|a_n - x| < \epsilon, \qquad |b_n - x|, \epsilon$$

من جهة ثانية، فإنه لكل $n \in \mathbb{N}$ لدينا

$$a_n - x \leq x_n - x \leq b_n - x$$

وهكذا فإنه لكل $n \geq k$

$$-\epsilon < a_n - x \leq x_n - x \leq b_n - x < \epsilon$$

وهذا يعني أن $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

أمثلة: 1) اثبت أن $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

الحل: لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \implies -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

وحيث إن $\lim_{n\to\infty}\left(\pm\frac{1}{n}\right) = 0$ فإن $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} = 0$.

2) مستخدما نظرية المحصور ادرس تقارب المتتابعات $\left((n!)^{\frac{1}{n^2}}\right)$, $\left(n^{\frac{1}{n^2}}\right)$.

الحل: (1) لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$1 \leq n^{\frac{1}{n^2}} \leq n^{\frac{1}{n}}$$

وبالتالي

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

(2) حيث إن

$$1 \leq n! \leq n^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

فإن

$$1 \leq (n!)^{\frac{1}{n^2}} \leq (n^n)^{\frac{1}{n^2}} = n^{\frac{1}{n}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

ومن ثم فإن

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

نظرية: إذا كان $x_n \to x$ فإن $|x_n| \to |x|$، والعكس ليس بالضرورة صحيح.

البرهان: لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$\big||x_n| - |x|\big| \leq |x_n - x|$$

من ذلك يمكن للقارئ بسهولة اثبات صحة المطلوب.

ملاحظة: المتتابعة (x_n)، حيث $x_n = (-1)^n$، ليست تقاربية بينما $|x_n| = (1,1,\cdots)$ هي متتابعة تقاربية.

بفرض أن $x_n = (-1)^n$ تتقارب إلى $a \in \mathbb{R}$. فإنه للعدد $\epsilon = 1$ يوجد العدد الطبيعي k بحيث لكل $n \geq k$ يكون $|(-1)^n - a| < 1$.

الان خذ n عددا فرديا أكبر من k تجد أن

$$|(-1)^n - a| = |-1 - a| = |a + 1| < 1 \Longrightarrow -2 < a < 0.$$

من جهة ثانية، لأي n هو عدد زوجي أكبر من k فإن

$$|(-1)^n - a| = |1-a| = |a-1| < 1 \Longrightarrow 0 < a < 2.$$

هذا التناقض يثبت أن $x_n = (-1)^n$ متتابعة غير تقاربية.

نظرية: إذا كان (x_n) متتابعة من أعداد حقيقية موجبة، وكان $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L < 1$ فإن المتتابعة (x_n) تقاربية وأن $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

البرهان: يوجد عدد $r \in \mathbb{R}$ بحيث $0 \le L < r < 1$، ومن ثم يكون $\epsilon = r - L > 0$. لهذا العدد ϵ يوجد بالتالي عدد طبيعي k بحيث لكل $k \le n$ يكون $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - L\right| < r - L$. ومنها، لكل $k \le n$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < L + (r - L) = r$$

أي أنه لكل $k \le n$

$$x_{n+1} < r\,x_n < r^2 x_{n-1} < \cdots < r^{n-k+1} x_k = c r^n,\;\; c = r^{1-k} x_k > 0.$$

وحيث إن $0 < r < 1$ فإن $r^n \to 0$ ومن ثم يتحقق المطلوب.

أمثلة: 1) أوجد $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

الحل: عرف $x_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$ لكل $n \in \mathbb{N}$. واضح أن $x_n > 0$ لكل n، وأن

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left[\frac{2^{3(n+1)}}{3^{2(n+1)}}\right] \frac{3^{2n}}{2^{3n}} = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9} < 1$$

ولذلك، بتطبيق نظرية النسبة فإن $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} = 0$.

2) إذا كان $b > 1,\; 0 < a < 1$ فادرس تقارب كل من المتتابعات

$$X = (a^n),\quad Y = \left(\frac{b^n}{2^n}\right),\quad Z = \left(\frac{n}{b^n}\right).$$

الحل: (1) ليكن $x_n = a^n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$x_n > 0,\quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{a^n} = a < 1$$

ومن ثم فإن $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

(2) ليكن $y_n = \frac{b^n}{2^n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$y_n > 0, \qquad \frac{y_{n+1}}{y_n} = \left(\frac{b}{2}\right)^{n+1} \left(\frac{2}{b}\right)^n = \frac{b}{2}$$

فإذا كانت $1 < b < 2$ فإن المتتابعة $Y = \left(\frac{b}{2}\right)^n$ تتقارب إلى الصفر.

(3) عرف $z_n = \frac{n}{b^n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$z_n > 0, \frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{n+1}{b^{n+1}} \ \frac{b^n}{n} = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{b} < 1$$

ولذلك فإن $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{b^n} = 0$.

3) احسب $\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ علما بأن $0 < a < b$.

الحل: لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$x_n := \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} = \frac{b^{n+1}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} + 1\right]}{b^n\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1\right]} = b\,\frac{c^{n+1} + 1}{c^n + 1}.$$

وحيث إن $0 < \frac{a}{b} < 1$ فإن $c^n \to 0, c^{n+1} \to 0$ ومن ثم $x_n \to b$ وهو المطلوب.

المتتابعات المطردة MONOTONE SEQUENCES

تعريف: (1) يقال لمتتابعة (x_n) في $\mathbb{R}$ أنها تزايدية إذا كان $x_{n+1} \geq x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وإذا كان $x_{n+1} > x_n$ يقال للمتتابعة (x_n) أنها تزايدية فعلية.

(2) يقال لمتتابعة (x_n) في $\mathbb{R}$ أنها تناقصية إذا كان $x_{n+1} \leq x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وإذا كان $x_{n+1} < x_n$ يقال للمتتابعة (x_n) أنها تناقصية فعلية.

(3) إذا كان $x_{n+1} = x_n$ كل $n \in \mathbb{N}$ فإن المتتابعة (x_n) تكون ثابتة.

(4) يقال لمتتابعة (x_n) في $\mathbb{R}$ أنها مطردة إذا كانت تزايدية أو تناقصية.

أمثلة: المتتابعات $(n), (n^2), \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ تزايدية فعلية، المتتابعات $\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\left(\frac{1}{n}\right)$ تناقصية فعلية.

ملاحظة: عند دراسة العلاقة بين اطراد متتابعة وتقاربها من المهم أخذ الأمثلة التالية في الاعتبار. المتتابعة (n) هي مطردة (تزايدية فعلية) وليست تقاربية، المتتابعة $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ ليست مطردة (ليست تزايدية ولا تناقصية) لكنها تتقارب إلى الصفر، بينما المتتابعة $\left(\frac{1}{n}\right)$ هي تناقصية فعلية (أي مطردة) ومحدودة (حيث $1 > \frac{1}{n} > 0$) وتتقارب إلى الصفر.

نظرية: (نظرية التقارب المطرد Monotone Convergence Theorem)

إذا كانت (x_n) متتابعة مطردة في $\mathbb{R}$فإن (x_n) تكون تقاربية إذا وفقط إذا

(1) كانت (x_n) تزايدية ومحدودة من أعلى، وعندئذ يكون $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.

(2) كانت (x_n) تناقصية ومحدودة من أسفل، وعندئذ يكون $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.

البرهان: سنبرهن فقط الحالة (1) وبالمثل يمكن برهان الحالة (2).

إذا كانت (x_n) متتابعة محدودة سيوجد عدد حقيقي M بحيث $x_n \leq M$ لكل n. ومن ثم، يوجد

$$x_* = \sup\{x_n;\ \ n \in \mathbb{N}\}.$$

لكل $\epsilon > 0$ فإن $x_* - \epsilon$ ليس حد علويا لمجموعة عناصر المتتابعة (x_n) وبالتالي يوجد العنصر x_k بحيث $x_* - \epsilon < x_k \leq x_* < x_* + \epsilon$. وحيث إن المتتابعة (x_n) تزايدية فإنه لكل $k \leq n$ يكون $x_k \leq x_n$. وهكذا فإنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد العدد الطبيعي k بحيث لكل $k \leq n$ يكون

$$x_* - \epsilon < x_n < x_* + \epsilon$$

وهذا يثبت أن $\lim_{n\to\infty} x_n = x_*$، وهو المطلوب.

مثال (1): ادرس تقارب المتتابعة (x_n) حيث $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

الحل: واضح أن

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = \frac{9}{4} > x_1, \qquad x_3 = \frac{64}{27} > x_2$$

يمكن اثبات أن $x_{n+1} > x_n$ كما يلي: بتطبيق نظرية ذات الحدين Binomial Theorem نجد أن

$$x_n = 1 + \frac{n}{1}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} \qquad (*)$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

واضح أن x_n يتكون من $n+1$ حد موجب. بالمثل لدينا

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{(n+1)}\right)$$

والذي يتكون من $n+2$ حد موجب. هذا يعني أن $x_{n+1} > x_n$ لكل n، أي أن المتتابعة (x_n) تزايدية. من جهة ثانية، من $(*)$ نجد أن

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$
$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3$$

لكل n، أي أن المتتابعة (x_n) محدودة من أعلى بالعدد 3. وبالتالي، فالمتتابعة (x_n) تقاربية وأن

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

لإيجاد هذه النهاية بطريقة أسهل نستخدم صيغة أويلر للأعداد الحقيقية حيث

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left\{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\}$$

ولذلك فإن

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \exp\left[\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = e < 3.$$

مثال (2): ادرس تقارب المتتابعة (x_n) حيث

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

الحل: لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $\frac{1}{n+1} > 0$. وبالتالي $x_{n+1} > x_n$ لكل n، أي أن المتتابعة تزايدية.

من جهة ثانية، لدينا

$$x_1 = 1,\ \ x_2 = 1 + \frac{1}{2},\ \ x_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

بوجه عام فإن

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1 + \frac{n}{2} \end{aligned}$$

وحيث إن المقدار $\left(1 + \frac{n}{2}\right)$ غير محدود فإن المتتابعة (x_n) غير محدودة ومن ثم فهي ليست تقاربية.

مثال (3): ادرس تقارب المتتابعة (y_n) حيث

$$y_1 = 1,\ \ y_{n+1} = \frac{1}{4}\{2\, y_n + 3\},\ \ n \in \mathbb{N}$$

الحل: واضح أن $2 > y_2 = \frac{5}{4} > y_1$. الان نثبت أن

(1) $y_n < 2$ لكل n. حيث إن المتباينة صحيحة عندما $n = 1$، نفرض صحتها عندما $n = k$، أي $y_k < 2$. عنـدما $n = k + 1$ نجـد أن $y_{k+1} = \frac{1}{4}\{2\, y_k + 3\} < \frac{7}{4} < 2$، أي أن المتباينة صحيحة عندما $n = k + 1$ وذلك من فرض صحتها عندما $n = k$. هذا يعني أن المتتابعة محدودة.

(2) مـرة ثانيــة، باســتخدام الاســتقراء الرياضــي فــإن $y_n < y_{n+1}$ لكـل n، أي أن المتتابعة تزايدية (مطردة).

وبالتالي، بحسب نظرية التقارب المطرد فإن المتتابعـة (y_n) تقاربيـة ولـيكن إلـى العدد الحقيقـي y. وحيث إن

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\{2y_n + 3\} = \frac{1}{4}\left\{2 \lim_{n\to\infty} y_n + 3\right\}$$

فإن $y=\frac{1}{4}\{2y+3\}$. ومنها $y=\frac{3}{2}$.

مثال (4): بين تقارب المتتابعة (z_n) حيث $z_1=1$ و $z_{n+1}=\sqrt{2\,z_n}$ لكل $n\in\mathbb{N}$.

الحل: بالاستقراء الرياضي يمكن اثبات أن

$$z_n<z_{n+1}<2\ \ \forall\ n\in\mathbb{N},$$

أي أن المتتابعة (z_n) تزايدية ومحدودة. وبالتالي فإنها تقاربية، وليكن إلى العدد الحقيقي z. وحيث إن

$$\lim_{n\to\infty}z_n=z\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}z_{n+1}=z$$

فإنه بأخذ النهاية لطرفي المتساوية $z_{n+1}=\sqrt{2\,z_n}$ نحصل على $z=\sqrt{2z}$. ومنها $z=2$.

مثال (5): بين تقارب متتابعة الاعداد الحقيقية (x_n) حيث

$$x_1>1,\ \ x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right),a>0,\ \ n\in\mathbb{N}.$$

الحل: واضح أن الاعداد الحقيقية تحقق المعادلة التربيعية $x_n^2-2x_{n+1}x_n+a=0$. لذلك فهذه المعادلة لها حل حقيقي (في $\mathbb{R}$)، ومن ثم المميز $4\,x_{n+1}^2-4a$ غير سالب. وبالتالي $x_{n+1}^2\geq a$ لكل $n\geq 1$، أي $x_n^2\geq a$ لكل $n\geq 2$. هذا يثبت أن المتتابعة محدودة من أسفل بالعدد $a>0$.

من جهة ثانية، فإن

$$x_n-x_{n+1}=x_n-\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)=\frac{x_n^2-a}{2x_n}\geq 0$$

تثبت أن المتتابعة تناقصية. وبالتالي فإن المتتابعة تقاربية وليكن إلى x. هذا العدد يحقق المعادلة

$$x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)$$

ومنها نجد أن $x=\sqrt{a}$.

المتتابعات الجزئية SUBSEQUENCES

تعريف: إذا كانت (x_n) متتابعة في $\mathbb{R}$، وكانت (n_k) متتابعة تزايدية فعلية في $\mathbb{N}$ فإن المتتابعة (x_{n_k}) تسمى متتابعة جزئية من المتتابعة (x_n).

ملاحظة: نقصد بأن (n_k) متتابعة تزايدية فعلية $n_1<n_2<n_3<\cdots$.

أمثلة: إذا كانت $x_n = \frac{1}{n}$ فإن المتتابعات التالية جزئية من (x_n)

$$X = \left(\frac{1}{2n}\right), \qquad Y = \left(\frac{1}{2n-1}\right), \qquad Z = \left(\frac{1}{n!}\right)$$

بينما المتتابعة التالية ليست جزئية من (x_n)

$$W = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \cdots\right).$$

وإذا كانت (x_n) متتابعة بحيث

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}), \qquad n \geq 3$$

فإن المتتابعة التالية جزئية من (x_n):

$$x_1 = 1, x_3 = \frac{3}{2}, \cdots, x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}}.$$

تمهيدية: إذا كانت (n_k) متتابعة تزايدية فعلية في $\mathbb{N}$ فإن $n_k \geq k$ لكل $k \in \mathbb{N}$.

البرهان: باستخدام الاستقراء الرياضي فإن $n_1 \geq 1$ لأي عدد طبيعي. بفرض أنه لعدد ما $k \in \mathbb{N}$ أن $n_k \geq k$. فإن $n_{k+1} > n_k$ وبالتالي

$$n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k + 1$$

وهذا يكمل البرهان.

نظرية: إذا كانت متتابعة تتقارب إلى عدد حقيقي x فإن كل متتابعة جزئية $\left(x_{n_k}\right)$ تتقارب إلى x.

البرهان: لتكن (x_n) متتابعة تتارب إلى x، فإنه لكل $\epsilon > 0$ يعطى يوجد عدد طبيعي N بحيث

$$|x_n - x| < \epsilon \quad \forall\ n \geq N. \qquad (*)$$

بحسب التمهيدية السابقة فإن إذا كان $N \geq k$ نجد أن $n_k \geq k \geq N$، ومن ثم يكون

$$\left|x_{n_k} - x\right| < \epsilon$$

وهذا يثبت أن المتتابعة الجزئية $\left(x_{n_k}\right)$ تتقارب إلى x.

أمثلة: (1) إذا كان $0 < b < 1$ فاثبت أن $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$.

الحل: من المعطى واضح أن $0 < b^n < 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$، هذا يعني أن (b^n) متتابعة محدودة. وحيث إن $b^n > b^{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $0 < b < 1$ فإن (b^n) متتابعة تناقصية. وبالتالي، فإن (b^n) متتابعة تقاربية، ليكن إلى x. فإن للمتتابعة الجزئية (b^{2n}) نجد أن

$$\lim_{n\to\infty} b^{2n} = \lim_{n\to\infty} b^n = x, \quad \lim_{n\to\infty} b^{2n} = \left(\lim_{n\to\infty} b^n\right)^2 = x^2$$

ولذلك، فإن $x^2 = x$، أو $x(x-1) = 0$ وهذا يعني أن $x = 0$ ($x = 1$ مرفوض؟).

(2) اثبت أن $\lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = 1$ إذا كان $1 \leq c$.

الحل: إذا كان $c = 1$ فالنتيجة متحققة ولا نحتاج إلى برهان. لكل $c > 1$ واضح ان $\left(c^{\frac{1}{n}}\right)$ متتابعة تناقصية ومحدودة من أسفل بالعدد 1. لذلك فهي تقاربية، وليكن إلى العدد x. من النظرية السابقة فإن

$$\lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = x, \quad \lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}}} = \sqrt{x}$$

وبالتالي فإن x تحقق المعادلة $\sqrt{x} = x$، أي أن $x = 1$ ($x = 0$ مرفوض؟).

نظرية: (معيار التباعد Divergence Criteria)

إذا كانت (x_n) متتابعة تتحقق لها احدى الخاصيتين التاليتين فإنها متتابعة تباعدية.

(1) توجد متتابعتين جزئيتين $(y_n), (z_n)$ تتقاربان ولكن $\lim_{n\to\infty} y_n \neq \lim_{n\to\infty} z_n$.

(2) المتتابعة (x_n) غير محدودة.

أمثلة: (1) المتتابعة $X = ((-1)^n)$ تباعدية.

المتتابعة الجزئية $X' = ((-1)^{2n}) = (1,1,1,\cdots)$ تتقارب إلى 1، ولكن المتتابعة الجزئية $X'' = ((-1)^{2n-1}) = (-1,-1,\cdots)$ تتقارب إلى -1. وبحسب النظرية السابقة نستنتج أن X متتابعة تباعدية.

(2) المتتابعة $X = \left(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \cdots\right)$ تباعدية.

فالمتتابعة الجزئية $X' = (x_{2n}) = \left(\frac{1}{2n}\right)$ تتقارب إلى 0. لكن المتتابعة الجزئية $X'' = (x_{2n-1}) = (1,3,5,\cdots)$ ليست محدودة. هذا يعني أن X متتابعة غير محدودة ومن ثم تباعدية.

(3) المتتابعة $S = (\sin n)$ تباعدية. في هذا المثال نحتاج إلى تذكر خواص دالة sin.
حيث إن لكل $1 \le k$

$$\sin\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi(k-1)\right] = \sin\left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi(k-1)\right] = \frac{1}{2},$$

$$\sin x > \frac{1}{2} \quad \forall x \in I_k = \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi(k-1), \frac{5\pi}{6} + 2\pi(k-1)\right).$$

وحيث إن طول الفترة I_k هو $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} > 2$ فسيوجد في الفترة I_k عددان طبيعيان، ليكن n_k أحد العددين. لاحظ أن $n_{k+1} > n_k$، أي ان (n_k) متتابعة تزايدية فعلية. وبالتالي فإن المتتابعة

$$S' = (\sin n_k), \quad \sin n_k \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad \forall\, k \ge 1, n_k \in \mathbb{N}$$

جزئية من المتتابعة S. من جهة ثانية، فإنه لكل $1 \le k$

$$\sin\left[\frac{7\pi}{6} + 2\pi(k-1)\right] = \sin\left[\frac{11\pi}{6} + 2\pi(k-1)\right] = -\frac{1}{2},$$

$$\sin x < -\frac{1}{2} \quad \forall x \in J_k = \left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi(k-1), \frac{11\pi}{6} + 2\pi(k-1)\right).$$

وحيث إن طول الفترة J_k هو $\frac{11\pi}{6} - \frac{7\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} > 2$ فسيوجد في الفترة J_k عددان طبيعيان، ليكن m_k أحد العددين. لاحظ أن $m_{k+1} > m_k$، أي ان (m_k) متتابعة تزايدية فعلية. وبالتالي فإن المتتابعة

$$S'' = (\sin m_k), \quad \sin m_k \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \quad \forall\, k \ge 1, m_k \in \mathbb{N}$$

جزئية من المتتابعة S.

الآن، فإنه لأي عدد حقيقي c على الأقل واحدة من هاتين المتتابعتين تقع جميع عناصرها خارج الفترة

$$|x - c| < \frac{1}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

هذا يثبت أن العدد c لا يكون نقطة نهاية للمتتابعة S. وحيث إن $c \in \mathbb{R}$ عدد اختياري فإن المتتابعة S تكون تباعدية.

تعريف: يقال للعدد الحقيقي x_m أنه قمة (ذروة Peak) للمتتابعة (x_n) إذا كان $x_m \ge x_n$ لكل

$.m \leq n$

نظرية: (نظرية بلزانو – فيرشتراس Bolzano-Weierstrass Theorem)

لكل متتابعة محدودة متتابعة جزئية تقاربية

البرهان: لتكن (x_n) متتابعة محدودة في $\mathbb{R}$. فإذا كانت $x_n = \alpha$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $x_n \to \alpha$.

وإذا كانت (x_n) متتابعة غير ثابتة سيوجد بالمتتابعة عدد من القمم، ويكون لدينا إحدى الحالتين.

(1) إذا كان للمتتابعة عدد لانهائي من القمم، ولتكن $x_{m_1} \leq x_{m_2} \leq \cdots$ فإنها تكون متتابعة جزئية $\left(x_{m_k}\right)$ مطردة ومحدودة ومن ثم تقاربية، وهذا يثبت المطلوب.

(2) إذا كان للمتتابعة عدد منتهي من القمم، ولتكن $.x_{m_1}, x_{m_2}, \cdots, x_{m_r}$

فإذا كان $s_1 = m_r + 1$، فإن x_{s_1} ليس قمة للمتتابعة (x_n) وبالتالي يوجد $x_{s_1} < x_{s_2}$ حيث $s_1 < s_2$ ، ومن ثم يوجد $x_{s_2} < x_{s_3}$ و $s_2 < s_3$. وهكذا تتكون $\left(x_{s_k}\right)$ متتابعة تزايدية جزئية من المتتابعة الأصل (x_n)، حيث (s_k) متتابعة تزايدية فعلية في $\mathbb{N}$. المتتابعة الجزئية $\left(x_{s_k}\right)$ مطردة ومحدودة، ولذا، فهي تقاربية. وهذا يكمل الاثبات.

النهايات العليا والنهايات الدنيا LIMIT SUPERIOR AND LIMIT INFERIOR

المتتابعة المحدودة ليست بالضرورة تقاربية، ولكن بحسب نظرية بلزانو-فيرشتراس توجد متتابعة (أو ربما متتابعات) جزئية منها تقاربية. ويقال لنهاية متتابعة جزئية $\left(x_{n_k}\right)$ من متتابعة محدودة(x_n) أنها نهاية تتابع جزئي (subsequential limit) للمتتابعة (x_n). فإذا كانت S مجموعة نهايات كل المتتابعات الجزئية التقاربية من متتابعة محدودة، فإن Sمجموعة محدودة. فمثلا للمتتابعة (x_n)، حيث $x_n = (-1)^n + \frac{2}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن (x_{2n})، حيث $x_{2n} = 1 + 1/n$، متتابعة جزئية تتقارب إلى 1. بينما (x_{2n-1})، حيث $x_{2n-1} = -1 - \frac{2}{2n-1}$، متتابعة جزئية متقاربة إلى -1. وبالتالي، فإن $S = \{-1,1\}$. مثال آخر، حيث إن مجموعة الأعداد النسبية قابلة للترقيم فإن الأعداد النسبية في الفترة $(0,1)$ تكون متتابعة (r_n). ومن خاصية الكثافة للأعداد النسبية فإن كل عدد حقيقي r في الفترة $[0,1]$ هو نهاية لمتتابعة جزئية من المتتابعة (r_n)، وبالتالي فإن$S = [0,1]$.

للمتتابعات المحدودة يمكن رصد الملاحظة التالية. إذا كانت (x_n) متتابعة محدودة، وكان

$$t_m := \inf\{x_n; n \geq m\}, \quad \tau_m := \sup\{x_n; n \geq m\}, \quad m = 1,2,3,\cdots$$

فإن جميع عناصر متتابعة الذيل $(x_n)_{n\geq m}$ تنتمي إلى الفترة $I_m = [t_m, \tau_m]$ لكل $m = 1,2,3,\cdots$، الفترات I_m متعششة، أي أن $I_m \supset I_{m+1}$ لكل $m = 1,2,3,\cdots$، وبالتالي فإن المتتابعات $(t_m), (\tau_m)$ مطردة ومحدودة، ومن ثم فهي تقاربية.

بالإضافة لما سبق يمكن رصد الملاحظة التالية عن سلوك نهايات المتتابعات الجزئية من متتابعة محدودة. إذا كان v عدد حقيقي بحيث $x_n > v$ على الأكثر لعدد منتهي من قيم $n \in \mathbb{N}$، فإنه لا توجد متتابعة جزئية من (x_n) تتقارب إلى عدد أكبر من v. خلاف ذلك، سيوجد عدد لانهائي من العناصر x_n أكبر من v. بعبارة أخرى، إذا كان v عدد حقيقي بحيث $x_n \leq v$ لكل $N \leq n$، فإنه لا يوجد عدد حقيقي أكبر من v بحيث يكون نهاية لمتتابعة جزئية من (x_n). هذه الملاحظة تؤدي إلى التعريف التالي لنهاية أصغر حد علوي.

تعريف: إذا كانت (x_n) متتابعة محدودة فإن

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} x_n$$

تسمى النهاية العليا (أو نهاية أصغر حد علوي) ويرمز لها بالرمز $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

ملاحظة: هذه النهاية تمثل أكبر حد سفلي لمجموعة الاعداد v بحيث لكل v يوجد عدد منتهي n بحيث $x_k \geq v$ لكل $n \geq k$. وهي أكبر نهاية يمكن لمتتابعة جزئية من (x_n) ان تتقارب إليها.

تعريف: إذا كانت (x_n) متتابعة محدودة فإن

$$\lim_{n\to\infty} \inf x_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} x_n$$

تسمى النهاية العليا (أو نهاية أصغر حد علوي) ويرمز لها بالرمز $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

ملاحظة: هذه النهاية تمثل أصغر حد علوي لمجموعة الاعداد u بحيث لكل u يوجد عدد منتهي n بحيث $x_k \leq u$ لكل $n \geq k$. وهي أصغر نهاية يمكن لمتتابعة جزئية من (x_n) ان تتقارب إليها.

أمثلة: (1) اوجد $\lim_{n\to\infty} \inf x_n$, $\lim_{n\to\infty} \sup x_n$ إذا كان $x_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

الحل: واضح أن عناصر المتتابعة هي

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \cdots$$

وبالتالي فإن

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \cdots\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

وأن

$$\lim_{n\to\infty} \inf x_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \inf \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \cdots\right\}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) اوجد $\lim_{n\to\infty} \inf x_n$, $\lim_{n\to\infty} \sup x_n$ إذا كان، لكل $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = \begin{cases} 2^{\frac{1}{n+1}}, & n \text{ is odd} \\ 1, & n \text{ is even} \end{cases}$$

الحل: عرف

$$M_k = \sup\{x_n; n \geq k\}, \quad m_k = \inf\{x_n; \quad n \geq k\}$$

فإن

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \lim_{k\to\infty} M_k, \quad \lim_{n\to\infty} \inf x_n = \lim_{k\to\infty} m_k$$

الجدول التالي يوضح قيم M_k, m_k لمتتابعة الذيل (x_{n_k}) لقيم $k = 1,2,3,\cdots$

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$M_k =$	$2^{\frac{1}{2}}$	$2^{\frac{1}{4}}$	$2^{\frac{1}{4}}$	$2^{\frac{1}{6}}$	$2^{\frac{1}{6}}$	$2^{\frac{1}{8}}$	$2^{\frac{1}{8}}$	$\cdots$
$m_k =$	1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$

ومن ذلك نجد أن

$$m_k = 1, \qquad M_k = \begin{cases} 2^{\frac{1}{k+1}}, & k \text{ is odd} \\ \\ 2^{\frac{1}{k+2}}, & k \text{ is even} \end{cases}$$

وهكذا، فإن

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \lim_{k\to\infty} M_k = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \inf x_n = \lim_{k\to\infty} m_k = 1.$$

تمرين:

إذا كانت $(x_n), (y_n)$ متتابعين محدودتين في $\mathbb{R}$، بحيث $\lim_{n\to\infty} \sup x_n + \lim_{n\to\infty} \sup y_n \neq \infty - \infty$

فاثبت ان $\lim_{n\to\infty} \sup(x_n + y_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup x_n + \lim_{n\to\infty} \sup y_n$.

ملاحظة: من جهة ثانية، إذا كانت S مجموعة نهايات كل المتتابعات الجزئية من متتابعة (x_n) فإن

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \sup S, \quad \lim_{n\to\infty} \inf x_n = \inf S$$

أمثلة: (1) اوجد $\lim_{n\to\infty} \sup x_n , \lim_{n\to\infty} \inf x_n$ إذا كان $x_n = n^{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

الحل: واضح أن

$$(x_n) = \left(1^{\sin\frac{\pi}{2}}, 2^{\sin\pi}, 3^{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}, 4^{\sin 2\pi}, 5^{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)}, \cdots\right)$$
$$= \left(1, 1, \frac{1}{3}, 1, 5, 1, \frac{1}{7}, 1, 9, \cdots\right)$$

من الملاحظ أن توجد فقط ثلاث نهايات لمتتابعات جزئية تقاربية وهي

$$\lim_{n\to\infty} x_{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n-1} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} x_{4n-3} = \lim_{n\to\infty} (4n-3) = \infty.$$

وبالتالي فإن مجموعة نهايات كل المتتابعات الجزئية من متتابعة (x_n) هي $S = \{0, 1, \infty\}$.

ومن ثم فإن $\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \inf x_n = 0$.

(2) اوجد $\lim_{n\to\infty} \sup x_n , \lim_{n\to\infty} \inf x_n$ إذا كان

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{n}{n+1}, & n \text{ is odd} \\ \dfrac{1}{n+1}, & n \text{ is even} \end{cases}$$

الحل: بإعادة كتابة المتتابعة على الصورة

$$\{x_1, x_2, x_3, \cdots\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{7}{8}, \frac{1}{9}, \cdots\right\}$$

لدينا امكانيتين للحصول على نهايات لمتتابعات جزية هما

$$1 = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n},\ \ 0 = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}.$$

وبالتالي فإن $\lim_{n\to\infty} \inf x_n = 0$,$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = 1$.

نظرية: المتتابعة (x_n) تكون تقاربية إذا وفقط إذا $\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \lim_{n\to\infty} \inf x_n$.

مثال: المتتابعة $x_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$ تباعدية حيث

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = 1 \neq \lim_{n\to\infty} \inf x_n = -1.$$

متتابعات كوشي CAUCHY SEQUENCES

تعريف: يقال لمتتابعة (x_n)انها متتابعة كوشي إذا لكل $\epsilon > 0$ معطى يوجد عدد طبيعي k بحيث لكل $m, n \geq k$ يكون $|x_m - x_n| < \epsilon$.

فمثلا، المتتابعة $\left(\frac{1}{n}\right)$ كوشيه لأنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي k بحيث $\frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{2}$ (بحسب خاصية ارشميدس). وبالتالي لكل $m, n \geq k$ فإن $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{m} \leq \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{2}$. ومن ثم يكون

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

ولكن المتتابعة $((-1)^n)$ ليست كوشية، فإذا اعطينا العدد $\epsilon = 1/2$ فإنه لأي $n \geq 1$ نجد

$$|(-1)^n - (-1)^{n+1}| = 2 > \epsilon.$$

نظرية: كل متتابعة تقاربية هي متتابعة كوشي.

البرهان: لتكن (x_n) متتابعة تقاربية، وليكن $x_n \to x$، فإنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي k بحيث

$$|x_m - x| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall \; m,n \geq \; k.$$

وبالتالي لكل $m,n \geq k$ فإن

$$|x_m - x_n| = |(x_m - x) + (x_n - x)| < |x_m - x| + |x_n - x| < \epsilon$$

وهذا يثبت المطلوب.

تمهيدية: متتابعة كوشي هي متتابعة محدودة.

البرهان: إذا كانت (x_n) متتابعة كوشية، فإنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي k بحيث

$$|x_m - x_n| < \epsilon \;\; \forall \;\; m,n \geq \; k$$

وبالتالي، للعدد $\epsilon_0 = 1$ يوجد العدد الطبيعي k بحيث

$$|x_n - x_k| < 1 \;\; \forall \;\; n \geq \; k$$

ومنها

$$x_k - 1 < x_n < x_k + 1 \quad \forall \;\; n \geq k$$

الان ليكن

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{k-1}|, |x_k| + 1\}$$

فإن

$$|x_n| \leq M \quad \forall \;\; n$$

هذا يثبت أن المتتابعة الكوشية (x_n) هي متتابعة كوشية.

نظرية: كل متتابعة كوشية في $\mathbb{R}$ هي تقاربية.

البرهان: لتكن (x_n) متتابعة كوشية في $\mathbb{R}$ فإن (x_n) متتابعة محدودة، ومن ثم لها نقطة تراكم x (بتطبيق نظرية بلزانو - فيرشتراس على مجموعة عناصر المتتابعة).

وبناء على ذلك، فإنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد العددان الطبيعيان k_1, k_2 بحيث

$$|x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall \;\; m,n \geq k_1 \tag{1}$$

$$|x_p - x| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall \;\; p \geq k_2 \tag{2}$$

الان، ليكن $k = \max\{k_1, k_2\}$ فإنه لكل $n \geq k$ والعدد $p_* \geq k$ نجد أن

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{p_*}| + |x_{p_*} - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

وهذا يثبت المطلوب.

مثال (1): ادرس تقارب المتتابعة التالية، ثم اوجد نهايتها (إن وجدت)

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})\,, \quad n > 2.$$

الحل: واضح أن $x_1 < x_2,\ x_2 > x_3$ أي أن المتتابعة المعطاة ليست مطردة. من جهة ثانية

$$|x_n - x_{n+1}| = \left|x_n - \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})\right| = \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|$$

$$= \frac{1}{2^2}|x_{n-1} - x_{n-2}| = \cdots = \frac{1}{2^{n-1}}|x_2 - x_1| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

ومنها فإنه لكل $m > n$ نجد أن

$$|x_m - x_n| = |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + x_{m-2} - \cdots + x_{n+1} - x_n|$$

$$\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$$

$$\leq \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{m-3}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right)$$

$$\leq \frac{2}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{1}{2^{m-n}}\right) < \frac{1}{2^{n-2}}$$

وبالتالي إذا اعطينا $\epsilon > 0$ نجد العدد الطبيعي k بحيث لكل $n \geq k$ فإن $\frac{1}{2^{n-2}} < \epsilon$. ومن ثم فإنه لكل $m.n \geq k$ نجد أن $|x_n - x_m| < \epsilon$، وهذا يثبت أن المتتابعة (x_n) كوشية، ومن ثم فهي تقاربية، وليكن إلى العدد الحقيقي x. الان، نعمل على إيجاد العدد x، كنهاية لمتتابعة جزئية. لدينا

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1 + \frac{1}{2},\ x_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2},\ \cdots,\ x_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}$$

$$x_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}},\ x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}}$$

للمتتابعة الجزئية (x_{2n+1}) فإن

$$x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right] = 1 + \frac{2}{3}\left[1 - \frac{1}{4^n}\right]$$

ومن ثم فإن

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left\{1 + \frac{2}{3}\left[1 - \frac{1}{4^n}\right]\right\} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

مثال (2): ادرس تقارب المتتابعة التالية

$$x_1 = 1,\ \ x_2 = 1 - \frac{1}{2!},\ \ x_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \mp \cdots + \frac{(-1)^n}{n!},\quad n \geq 3.$$

الحل: واضح أن $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{2}{3}$. وهذا يبين أن المتتابعة ليست مطردة.

لأي $m > n$ عددان طبيعيان فإن

$$x_m - x_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} + \cdots + \frac{(-1)^{m+1}}{m!},$$

$$|x_m - x_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{m!}.$$

وحيث إن $2^{k-1} \leq k!$ لكل $k \geq 1$ (اثبت ذلك بالاستقراء الرياضي)، فإن

$$|x_m - x_n| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{m-1}}$$

$$\leq \frac{1}{2^n}\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right]$$

$$\leq \frac{1}{2^{n-1}}\left[1 - \frac{1}{2^{m-n}}\right] < \frac{1}{2^{n-1}}$$

هذا يثبت أن المتتابعة (x_n) متتابعة كوشية، وبالتالي فهي تقاربية، وليكن إلى العدد x.

باستخدام مفكوك الدالة الاسية نلاحظ أن

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!} = 1 - \frac{1}{e}.$$

الفصل الثالث

المتسلسلات الحقيقية Real Series

تعريف: إذا كانت (x_n) متتابعة، فإن المتسلسلة S المتولدة بالمتتابعة (x_n) هي متتابعة المجاميع الجزئية (S_n) حيث

$$S_1 = x_1, S_2 = x_1 + x_2, \cdots, S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\,, \cdots$$

فمثلا، إذا كانت $x_n = \frac{1}{n}$ فإن

$$S_1 = 1, S_2 = 1 + \frac{1}{2}, \cdots, S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + 1/n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \cdots$$

وبالتالي فإن المتسلسلة المتولدة بالمتتابعة $\left(\frac{1}{n}\right)$ هي $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (أو باختصار نكتب $\sum \frac{1}{n}$).

تعريف: إذا كانت (S_n) متتابعة المجاميع الجزئية لمتتابعة (x_n)، وكانت $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ يقال إن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ تقاربية إلى s، ونكتب $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$. خلاف ذلك، إذا كانت المتتابعة (S_n) تباعدية فيقال إن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ تباعدية.

ملاحظة: (1) العدد x_n يسمى الحد العام (أو النوني) للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

(2) العدد S_n يسمى المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

(3) العدد s (إن وجد) يسمى مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

أمثلة: (1) إذا كان $r \in \mathbb{R}$ فادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$.

الحل: المجموع الجزئي النوني لهذه المتسلسلة هو

$$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \begin{cases} n+1, & r = 1 \\ \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, & r \neq 1 \end{cases}$$

وحيث إن

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} r^n=\begin{cases}0, & |r|<1\\ \infty, & |r|>1\end{cases}$$

فإن

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\begin{cases}\dfrac{1}{1-r}, & |r|<1\\ \\ \infty, & |r|\geq 1\end{cases}$$

وبالتالي فإن $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ تقاربية إذا كان $|r|<1$، وعندئذ يكون مجموعها هو

$$\lim_{n\to\infty} S_n(|r|<1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{n+1}}{1-r}=\frac{1}{1-r}$$

أي أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n=\frac{1}{1-r}, \quad |r|<1.$$

وتكون المتسلسلة تباعدية إذا كان $|r|\geq 1$. نماذج أخرى للمتسلسلة الهندسية

$$\frac{1}{5-r}=\frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{r}{5}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{5^{n+1}}, \quad |r|<5,$$

$$\frac{1}{3-2r}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2r}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n r^n, \quad |r|<\frac{3}{2},$$

$$\frac{1}{2+3r}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{3r}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n r^n, \quad |r|<\frac{2}{3}.$$

(2) بين أن المتسلسلة $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ تباعدية.

الحل: المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة هو

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k=\begin{cases}0, & n \text{ is odd}\\ 1, & n \text{ is even}\end{cases}$$

وبالتالي فإن المتتابعة (S_n)، ومن ثم المتسلسلة $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ تكون تباعدية.

(3) اثبت أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

الحل: بالتحليل إلى كسور جزئية فإن

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \qquad k \geq 1$$

فإن المجموع الجزئي النوني هو

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

هذا يثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ وأن مجموعها $s = 1$.

نظرية: إذا كانت $\sum_{n\geq 1} x_n$ متسلسلة تقاربية فإن $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

البرهان: إذا كانت $\sum_{n\geq 1} x_n$ تقاربية فإن $\lim_{n\to\infty} S_n$ موجودة. وبالتالي، فإن

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0.$$

ملاحظة: النظرية تكون مفيدة على النحو التالي. إذا كان $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تكون تباعدية. نحذر أن عكس النظرية ليس بالضرورة صحيح، أي أن $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ لا تعني أن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تقاربية، فمثلا $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ في حين أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ليست تقاربية. إذا كان S_n هو المجموع الجزئي النوني لهذه المتسلسلة فإن

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2} \to \infty \end{aligned}$$

هذا يعني ان المتتابعة الجزئية (S_{2^n})، ومن ثم متتابعة المجاميع الجزئية (S_n) تكون تباعدية. وبالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ تباعدية.

نظرية: (معيار كوشي لتقارب المتسلسلات Cauchy Criterion for convergent Series)

المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n\geq 1} x_n$ تكون تقاربية إذا وفقط إذا كان لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $k(\epsilon)$ بحيث

$$|S_m - S_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + X_m| < \epsilon \quad \forall\ m > n \geq k(\epsilon).$$

نظريـة: إذا كـان $0 \leq x_n$ فـإن المتسلسلة $\sum_{n\geq1} x_n$ تكـون تقاربيـة إذا وفقط إذا كانـت متتابعـة المجاميع الجزئية (S_n) محدودة.

البرهان: اولاً: إذا كانت $\sum_{n\geq1} x_n$ تقاربية فإن المتتابعة (S_n) تكون تقاربية ومن ثم محدودة.

ثانياً: حيث إن $0 \leq x_n$ فـإن المتتابعـة (S_n) تكـون تزايديـة، فـإذا كانـت (S_n) محـدودة فإنهـا تكون تقاربية ومن ثم تكون $\sum_{n\geq1} x_n$ تقاربية.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^p}$ لكل $p \in \mathbb{R}$.

الحل: لنعتبر الحالات التالية.

(1) إذا كانت $p \leq 0$ فإن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} 1, & p = 0 \\ \infty, & p < 0 \end{cases}$$

وبالتالي فالمتسلسلة $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^p}$ تكون تباعدية لكل $p \leq 0$.

(2) إذا كانت $0 < p < 1$ فإن

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n^p \leq n \;\Rightarrow \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$$

وحيث إن المتسلسلة $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n}$ تباعدية فإن $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^p}$ تباعدية لكل $0 < p < 1$.

(3) إذا كانت $p = 1$ فإن المتسلسلة تكون تباعدية (انظر الملاحظة الأخيرة).

(4) إذا كانت $p > 1$ فإن $n \leq 2^n - 1$, $\frac{1}{n^p} > 0$. وبالتـالي فـإن متتابعـة المجـاميع الجزئيـة (S_n) تكون مطردة حيث

$$S_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \frac{1}{(n+1)^p}$$

$$= S_n + \frac{1}{(n+1)^p} > S_n \;\forall\; n \geq 1$$

من جهة ثانية، إذا كانت $p > 1$ فإن $2^p < n^p$ لكل $n > 2$. عرف $n_k = 2^k - 1$ نجد أن

$$n_1 = 1, \quad S_{n_1} = S_1 = 1,$$

$$n_2 = 3, \quad S_{n_2} = S_3 = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < 1 + \frac{1}{2^{p-1}},$$

$$n_3 = 7, \quad S_{n_3} = S_7 = 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right)$$
$$< 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}}$$

يمكن بالاستقراء الرياضي اثبات أن

$$S_{n_k} < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{2(p-1)}} + \frac{1}{2^{3(p-1)}} + \cdots + \frac{1}{2^{(k-1)(p-1)}}\,, \qquad k \geq 1.$$

المجموع الأخير هو مجموع جزئي لمتسلسلة هندسية أساسها $r = \frac{1}{2^{p-1}}$. وحيث إن $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ فإن هذه المتسلسلة تتقارب إلى العدد

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}} = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1} - 1} = 1 + \frac{1}{2^{p-1} - 1} < 2.$$

لذلك فإن $1 < S_{n_k} < 2$. ومن ثم $1 < S_n < 2$.

وهكذا فإننا أثبتنا أن المتتابعة (S_n) مطردة ومحدودة. وبالتالي فهي تقاربية، ومن ثم فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$ تكون تقاربية لكل $1 < p$. وهذا يكمل الحل.

اختبارات تقارب المتسلسلات SERIES CONVERGENCE TESTS
اختبار المقارنة COMPARISON TEST

نظرية: إذا كانت $(x_n), (y_n)$ متتابعات في $\mathbb{R}$، و$k \in \mathbb{N}$ بحيث $0 \leq x_n \leq y_n$ لكل $k \leq n$ فإن

(1) إذا كانت المتسلسلة $\sum y_n$ تقاربية فإن $\sum x_n$ تقاربية.

(2) إذا كانت المتسلسلة $\sum x_n$ تباعدية فإن $\sum y_n$ تباعدية.

البرهان: (1) إذا كانت المتسلسلة $\sum y_n$ تقاربية فإنه لكل $0 < \epsilon$ يوجد $M \in \mathbb{N}$ بحيث

$$0 < y_{n+1} + \cdots + y_m < \epsilon \quad \forall\, m > n \geq M$$

وحيث إن $0 \leq x_n \leq y_n$ لكل $k \leq n$ فإنه لكل $m > n \geq \max\{M, k\}$ فإن

$$0 \leq x_{n+1} + \cdots + x_m \leq y_{n+1} + \cdots + y_m < \epsilon$$

وهذا يثبت أن المتسلسلة $\sum x_n$ تقاربية.

(2) إذا كانت المتسلسلة $\sum x_n$ تباعدية، وبفرض العكس، أن $\sum y_n$ تقاربية فإنه لكل $0 < \epsilon$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$0 \leq x_{n+1} + \cdots + x_m \leq y_{n+1} + \cdots + y_m < \epsilon \ \ \forall\, m > n \geq N$$

وهذا يناقض كون المتسلسلة $\sum x_n$ تباعدية. وبالتالي فإن $\sum y_n$ تباعدية.

نظرية: إذا كانت $(x_n), (y_n)$ متتابعات في $\mathbb{R}$، و$k \in \mathbb{N}$ بحيث $0 < x_n \leq y_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكانت النهاية التالية موجودة

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

فإن

(1) إذا كانت $r \neq 0$ فإن $\sum x_n$ تتقارب إذا وفقط إذا كانت $\sum y_n$ تقاربية.

(2) إذا كانت $r = 0$ فإن $\sum x_n$ تتقارب إذا كانت $\sum y_n$ تقاربية.

البرهان: تمرين.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$$

الحل: لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^2+n} > 0$. وحيث إن $\sum \frac{1}{n^2}$ متسلسلة تقاربية فإن، باختبار المقارنة، المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^2+n}$ تتقارب.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

الحل: لكل $4 \leq n$ فإن $n! > n^2$. وبالتالي فإن المتسلسلة تقاربية لأن $\sum \frac{1}{n^2}$ تقاربية.

مثال: بين أن المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^2-n+1}$ تقاربية.

الحل: لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $\frac{2}{n^2} > \frac{1}{n^2-n+1} > 0$ (؟). وهذا يثبت أن المتسلسلة تقاربية لأن $\sum \frac{1}{n^2}$ تقاربية.

طريقة أخرى: عرف $x_n = \frac{1}{n^2-n+1}$ و $y_n = \frac{1}{n^2}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

نجد أن $0 < x_n$ لكل $1 \leq n$، لأن $n^2 - n + 1 = (n-1)^2 + n > 0$. وكذلك $0 < y_n$. وحيث إن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-n+1}=1\neq 0$$

فإن $\sum x_n$ تقاربية لأن $\sum y_n$ تقاربية.

مثال: بين أن المتسلسلة $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ تباعدية

الحل: عرف $x_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}, y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ لكل $n\in\mathbb{N}$. فإن $0<x_n, y_n$ وأن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=1\neq 0$$

وحيث إن $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ تباعدية (؟) فإن $\sum\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ تباعدية.

تعريف: إذا كانت $\sum |x_n|$ متسلسلة تقاربية فيقال إن المتسلسلة $\sum x_n$ تقاربية تقارب مطلق. خلاف ذلك، إذا كانت $\sum x_n$ تقاربية، ولكن $\sum |x_n|$ تباعدية عندئذ نقول إن $\sum x_n$ تقاربية تقارب مشروط.

مثال: المتسلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}$ تقاربية تقارب مطلق لأن $\sum_{n\geq 1}\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ متسلسلة تقاربية. والمتسلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ تقاربية تقارب مشروط لأن $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ تباعدية.

يمكن اثبات أن $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ كما يلي. اعتبر المجاميع الجزئية التالية

$$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right),$$

$$S_{2n+1}=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

واضح أن هذه المجاميع تعرف متتابعات مطردة، ومحدودة لأن

$$0<S_{2n}<S_{2n}+\frac{1}{2n+1}=S_{2n+1}<1.$$

ولذلك في متتابعات تقاربية وهذا يثبت أن متتابعة المجاميع الجزئية (S_n)، ومن ثم المتسلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ تكون تقاربية.

اختبار التكامل INTEGRAL TEST

نظرية: إذا كانت (x_n) متتابعة تناقصية، وكان $0<x_n$ لكل $n\in\mathbb{N}$ وكان

$$\int_{1}^{\infty} f(t)dt < \infty, \;\; f(n) = x_n$$

فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تقاربية.

مثال: اثبت أن $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ متسلسلة تقاربية.

الحل: عرف الدالة $f(t) = \frac{1}{t^3}$ لكل $1 \leq t$ فإن

$$\int_{1}^{\infty} f(t)dt = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{t^3} dt = -\frac{1}{2t^2}\Big|_{t=1}^{\infty} = \frac{1}{2} < \infty$$

وحيث المتتابعة $\left(\frac{1}{n^3}\right)$تناقصية وجميع عناصرها موجبة، فإن المتسلسلة تقاربية.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة التالية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)}$$

الحل: اولاً: ندرس خواص المتتابعة المولدة $(x_n) = \left(\frac{1}{n \ln(n+1)}\right)$. حيث إن $n + 1 > 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $\ln(n+1) > 0$، ومن ثم $x_n > 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وحيث إن الدالة اللوغاريتمية تزايدية فإن

$$x_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\ln(n+2)} < \frac{1}{n \ln(n+1)} = x_n$$

أي أن المتتابعة (x_n) تناقصية.

ثانياً: الآن يمكن تطبيق اختبر التكامل لدراسة تقارب المتسلسلة. عرف الدالة

$$f(t) = \frac{1}{t \ln(t+1)}, \qquad t \geq 1.$$

فإن

$$\int_{1}^{\infty} f(t)dt = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{t \ln(t+1)} dt > \int_{1}^{\infty} \frac{1}{(t+1)\ln(t+1)} dt$$

$$= \ln \ln(t+1)\Big|_{t=1}^{\infty} = \infty$$

هذا يعني أن التكامل، ومن ثم المتسلسلة غير تقاربية. أي أن المتسلسلة تباعدية.

اختبار الجذر ROOT TEST

نظرية: إذا كانت (x_n) متتابعة اعداد حقيقية غير سالبة، أي أن $0 \leq x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وإذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = c$$

(1) إذا كان $c < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تكون تقاربية.

(2) إذا كان $c > 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تكون تباعدية.

(3) إذا كان $c = 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ قد تكون تقاربية وربما لا تكون.

البرهان: (1) إذا كان $c < 1$ فإنه يمكن اختيار عدد حقيقي r بحيث $c < r < 1$. ومن ثم يوجد عدد طبيعي N بحيث $x_n^{\frac{1}{n}} < r$ لكل $n \geq N$، ومنها $x_n < r^n$ لكل $n \geq N$. باستخدام اختبار المقارنة بالمتسلسلة الهندسية $\sum_{n\geq 1} r^n$، وهي تقاربية لأن $0 \leq r < 1$، فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$.

(2) إذا كان $c > 1$ فإن يوجد عدد طبيعي k بحيث $x_n^{\frac{1}{n}} > 1$ لكل $n \geq k$. وبالتالي فإن $x_n \nrightarrow 0$. وبحسب اختبار الحد العام فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تكون تباعدية.

(3) للمتسلسلة التباعدية $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ نجد أن $c = 1$ حيث $n^{\frac{1}{n}} \geq 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$، ولذلك يوجد عدد حقيقي موجب δ بحيث $n^{\frac{1}{n}} = 1 + \delta$، ومن ثم $n = (1+\delta)^n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. بتطبيق نظرية ذات الحدين، نحصل على $n = (1+\delta)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\delta^2$، وبالتالي

$$1 \leq n^{\frac{1}{n}} = 1 + \delta \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 1$$

ولذلك فإن

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

وهذا يثبت أن $c = 1$ للمتسلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ التباعدية. بالمثل يمكن اثبات أن $c = 1$ للمتسلسلة التقاربية $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^p}$ لكل $1 < p.$

مثال: بين أن المتسلسلة التالية تقاربية

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$$

الحل: لكل $1 < n$ فإن $0 < \ln n$، ومن ثم $x_n = \frac{1}{(\ln n)^n} > 0$. وحيث إن

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = 0 < 1$$

فإن المتسلسلة تقاربية.

مثال: بين أن المتسلسلة التالية تباعدية

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

الحل: لدينا $0 \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ لكل $1 \leq n$، وأن

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$$

فإن المتسلسلة تباعدية، بحسب اختبار الحد العام.

تمرين: ادرس تقارب كل من المتسلسلات التالية

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$$

اختبار النسبة RATIO TESTS

نظرية: إذا كانت (x_n) متتابعة اعداد حقيقية موجبة، وكانت

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = c$$

(1) إذا كان $c < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تقاربية.

(2) إذا كان $c > 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تباعدية.

(3) إذا كان $c = 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ قد تكون تقاربية وقد تكون تباعدية.

ملاحظة: (1) حيث إن $0 < x_n$ فإن $0 \le c$

(2) للمتسلسلة $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^p}$ فإن $c = 1$ لكل $p \in \mathbb{R}$ لكن المتسلسلة تكون تقاربية لكل $1 < p$ وتكون تباعدية خلاف ذلك.

مثال: بين أن المتسلسلة التالية تقاربية

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$$

الحل: واضح أن $x_n = \frac{n}{10^n} > 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$، وأن

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{10n} \to \frac{1}{10} < 1$$

لذلك، فالمتسلسلة تقاربية.

مثال: بين أن المتسلسلة التالية تقاربية

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$$

الحل: لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $x_n = \frac{3^n}{n!} > 0$، وان

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3}{n+1} \to 0 < 1$$

وبالتالي فإن المتسلسلة المعطاة تقاربية.

مثال: اثبت أن المتسلسلة التالية تقاربية

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3.5.7\cdots(2n+1)}$$

الحل: عرف

$$x_n = \frac{n!}{3.5.7\cdots(2n+1)}\,, \qquad n \in \mathbb{N}$$

نجد أن

$$x_n > 0, \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{2n+3}\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

وبالتالي،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} < 1$$

لذلك، فالمتسلسلة تقاربية.

اختبار راب RAABE'S TEST

نظرية: إذا كانت (x_n) متتابعة من أعداد حقيقية موجبة، وكانت

$$\lim_{n\to\infty} \left[n\left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \right] = L$$

(1) إذا كان $L > 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تكون تقاربية (تقارب مطلق).

(2) إذا كان $L < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تكون تباعدية.

(3) إذا كان $L = 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ قد تكون تقاربية أو تباعدية.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة التالية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4.6 \cdots (2n)}{5.7.9 \cdots (2n+3)}$$

الحل: عرف

$$x_n = \frac{2.4.6 \cdots (2n)}{5.7.9 \cdots (2n+3)}\ , \quad n \in \mathbb{N}$$

نجد أن

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2.4.6 \cdots (2n)(2n+2)}{5.7.9 \cdots (2n+3)(2n+5)} \times \frac{5.7.9 \cdots (2n+3)}{2.4.6 \cdots (2n)} = \frac{2n+2}{2n+5} \to 1$$

هذا يعني أن اختبار النسبة يفشل في هذه الحالة. لنطبق اختبار راب، حيث

$$n\left[1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right] = n\left[1 - \frac{2n+2}{2n+5}\right] = \frac{3n}{2n+5} \to \frac{3}{2} > 1$$

ولذلك المتسلسلة تقاربية.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة التالية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4.6 \cdots (2n)}{3.5.7.9 \cdots (2n+1)}$$

الحل: عرف

$$x_n = \frac{2.4.6\cdots(2n)}{3.5.7.9\cdots(2n+1)}\ ,\ \ n\in\mathbb{N}$$

نجد أن

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2.4.6\cdots(2n)(2n+2)}{3.5.7.9\cdots(2n+1)(2n+3)}\times\frac{3.5.7.9\cdots(2n+1)}{2.4.6\cdots(2n)} = \frac{2n+2}{2n+3}$$
$$\to 1$$

هذا يعني أن اختبار النسبة يفشل في هذه الحالة. لنطبق اختبار راب، حيث

$$n\left[1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right] = n\left[1-\frac{2n+2}{2n+3}\right] = \frac{n}{2n+3}\to\frac{1}{2}<1$$

ولذلك المتسلسلة تباعدية.

تمرين: ادرس تقارب كل من المتسلسلات التالية

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3.6.9\cdots(3n)}{7.10.13\cdots(3n+4)},\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3.6.9\cdots(3n)}{4.7.10.\cdots(3n+1)}\ ,n\in\mathbb{N}$$

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة التالية

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\alpha}},\ \ \alpha>0$$

الحل: عرف

$$x_n = \frac{1}{(\ln n)^{\alpha}},\ \ n\in\mathbb{N},\ \ \alpha>0$$

نجد أن

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{\alpha}\to 1$$

لذا نطبق اختبار راب

$$n\left[1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right] = n\left[1-\left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{\alpha}\right]$$
$$= \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{\alpha} n\left[\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha}-1\right]$$

$$= \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{\alpha} n\left[\left(\frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^{\alpha} - 1\right]$$

$$\approx \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{\alpha} n\left[\left(1+\frac{1}{n\ln n}\right)^{\alpha} - 1\right]$$

$$\approx \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{\alpha} n\left[\frac{\alpha}{n\ln n}\right] = \frac{\alpha}{\ln n}\left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{\alpha} \to 0$$

$$< 1$$

وهذا يبين أن المتسلسلة تباعدية.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة التالية

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)}\right]^{p},\ \ p > 0$$

الحل: واضح أن

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left[\frac{2n+1}{2n+2}\right]^{p} \to 1$$

لذا، نستخدم اختبار راب. لاحظ أن

$$\left[\frac{2n+1}{2n+2}\right]^{p} = \left[1-\frac{1}{2(n+1)}\right]^{p} \approx 1-\frac{p}{2(n+1)} \to 1$$

وبالتالي فإن

$$n\left[1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right] = n\left[1-\left[\frac{2n+1}{2n+2}\right]^{p}\right] \approx \frac{np}{2(n+1)} \to \frac{p}{2}$$

فإذا كانت $p > 2$ فإن المتسلسلة تكون تقاربية، وإذا كانت $2 > p$ فإن المتسلسلة تكون تباعدية، وإذا كانت $p = 2$ فإن الاختبار يفشل.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة التالية

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3.5.7\cdots(2n+1)}{2.4.6\cdots(2n)}\right]^{2}$$

الحل: واضح أن

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left[\frac{2n+3}{2n+2}\right]^2 \to 1$$

لذا، نستخدم اختبار راب. لاحظ أن

وبالتالي فإن

$$n\left[1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right] = n\left[1 - \left[\frac{2n+3}{2n+2}\right]^2\right] = -\frac{(4n+5)n}{4(n+1)^2} \to -1 < 1$$

ولذلك فالمتسلسلة تباعدية.

اختبار برتراند BERTRAND’S TEST

نظرية: إذا كانت (x_n) متتابعة من أعداد حقيقية موجبة، وكانت

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\ln n\left[n\left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) - 1\right]\right\} = c$$

(1) إذا كان $c > 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تكون تقاربية (تقارب مطلق).

(2) إذا كان $c < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تكون تباعدية.

(3) إذا كان $c = 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ قد تكون تقاربية أو تباعدية.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة التالية

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)}\right]^2$$

الحل: واضح أن

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left[\frac{2n+1}{2n+2}\right]^2 \to 1$$

لذا، نحاول تطبيق اختبار راب. لاحظ أن

$$n\left[1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right] = n\left[1 - \left[\frac{2n+1}{2n+2}\right]^2\right] = \frac{n(4n+3)}{4(n+1)^2} \to 1$$

لذا، فإن اختبار راب يفشل. نطبق اختبار برتراند. بتطبيق قاعدة لوبيتال نحصل على

$$\ln n\left[n\left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) - 1\right] = \ln n\left[\frac{n(4n+3)}{4(n+1)^2} - 1\right] = -\frac{5n+4}{4(n+1)^2}\ln n \to 0 < 1$$

وبالتالي فالمتسلسلة تباعدية.

الفصل الرابع

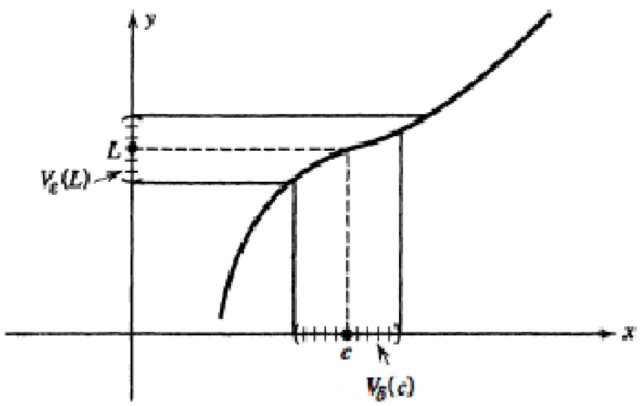
نهايات الدوال الحقيقية LIMITS OF REAL-VALUED FUNCTIONS

تعريف: إذا كانت $A \subseteq \mathbb{R}$ مجموعة من اعداد حقيقية وكانت c نقطة تراكم للمجموعة A يقال أن العدد الحقيقي L هو نهاية للدالة $f: A \to \mathbb{R}$ عند النقطة c إذا لكل معطى $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إذا كانت $x \in A$ و $0 < |x - c| < \delta$ فإن $0 < |f(x) - L| < \epsilon$. عندئذ نكتب $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

بعبارة أخرى، نقول إن العدد الحقيقي L هو نهاية الدالة $f: A \to \mathbb{R}$ عند النقطة c (نقطة تراكم للمجموعة A) إذا لكل فترة مفتوحة $V_\epsilon(L)$ (جوار مفتوح) مركزها العدد الحقيقي L توجد فترة مفتوحة $V_\delta(c)$ مركزها العدد الحقيقي c بحيث

$$x \in V_\delta(c) \Longrightarrow \quad f(x) \in V_\epsilon(L)$$

ونكتب $x \to c \Longrightarrow f(x) \to L$ أو $\lim_{x\to c} f(x) = L$.



مثال: اثبت ان $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-2x-15}{x-5} = 8$

الحل: إذا اعطينا $\epsilon > 0$ نريد إيجاد $\delta > 0$ بحيث

$$|x - 5| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} - 8\right| < \epsilon.$$

حيث إن

$$\frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} - 8 = \frac{x^2 - 10x + 25}{x - 5} = x - 5 \quad \forall\ x \neq 5$$

فإنه باختيار $\delta = \epsilon$ نحصل على

$$|x-5|<\delta=\epsilon \Longrightarrow \left|\frac{x^2-2x-15}{x-5}-8\right| = |x-5|<\epsilon$$

وهذا يثبت المطلوب.

مثال: اثبت أن $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4}{x^2+1}=\frac{4}{5}$

الحل: حيث إن

$$\frac{x^3-4}{x^2+1}-\frac{4}{5}=\frac{5x^3-4x^2-24}{5(x^2+1)}=\frac{(5x^2+6x+12)(x-2)}{5(x^2+1)}$$

من جهة ثانية، $x\to 2$ تعني أن x قريبة بدرجة كافية من 2، لتكن $1<x<3$. عندئذ نجد أن

$$|5x^2+6x+12|<75, \qquad |x^2+1|>2$$

ومن ثم فإن

$$\left|\frac{x^3-4}{x^2+1}-\frac{4}{5}\right|=\frac{1}{5}\left|\frac{5x^2+6x+12}{x^2+1}\right||x-2|<\frac{75}{10}\,|x-2|=\frac{15}{2}\,|x-2|.$$

وبالتالي، لكل $\epsilon>0$ معطى يوجد $0<\delta=\inf\left\{\frac{12\epsilon}{15}\right\}$ بحيث

$$|x-2|<\delta \Longrightarrow \left|\frac{x^3-4}{x^2+1}-\frac{4}{5}\right|<\epsilon$$

وهذا يثبت المطلوب.

المتتابعات التقاربية ونهاية الدالة الحقيقية

نظرية: إذا كانت $f:A\to\mathbb{R}$ وكانت $c\in\mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة A، فإن الجمل التالية متكافئة.

(1) $\lim_{x\to c} f(x)=L$

(2) لكل متتابعة (x_n) في A بحيث $x_n\neq c$ لكل $n\in\mathbb{N}$ و $x_n\to c$ فإن $f(x_n)\to L$.

البرهان: (1) إذا كان $\lim_{x\to c} f(x)=L$، فإنه لكل $\epsilon>0$ معطى يوجد $\delta>0$ بحيث

$$0<|x-c|<\delta \Longrightarrow |f(x)-L|<\epsilon.$$

فإذا كانت (x_n) متتابعة في A بحيث $x_n\neq c$ لكل $n\in\mathbb{N}$ و $x_n\to c$ فإنه للعدد δ يوجد عدد طبيعي $k(\delta)$ بحيث

$$n \geq k(\delta) \Longrightarrow |x_n - c| < \delta.$$

ومن ثم لكل $k(\delta) \leq n$ فإن

$$n \geq k(\delta) \Longrightarrow |x_n - c| < \delta \Longrightarrow |f(x_n) - L| < \epsilon$$

هذا يثبت صحة (2)، أي أن $f(x_n) \to L$.

(2) إذا، لكل متتابعة (x_n) في A بحيث $x_n \neq c$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $x_n \to c$، كان $f(x_n) \to L$. بفرض أن (1) غير صحيحة. عندئذ سيوجد $\epsilon_0 > 0$ بحيث لكل $\delta > 0$ يوجد x_δ في المجموعة $A \cap (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$ بحيث $f(x_\delta) \notin (L-\epsilon, L+\epsilon)$. هذا يؤدي إلى، لكل $n \in \mathbb{N}$ يوجد x_n في A بحيث $x_n \neq c$ و $|x_n - c| < \frac{1}{n}$ لكل n ، ولكن $|f(x_n) - L| \geq \epsilon_0$. هذا يعني أن المتتابعة (x_n) في $A \setminus \{c\}$ وتقاربية إلى c لكن المتتابعة $\big(f(x_n)\big)$ لا تتقارب إلى L. هذا يناقض صحة (2). وعلي ذلك فإن (1) صحيحة. هذا يكمل الاثبات.

نتيجة: لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$، و $f: A \to \mathbb{R}$، ولتكن $c \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة A.

(1) $\lim_{x \to c} f(x) \neq L$ إذا وجدت متتابعة (x_n) في A بحيث $x_n \neq c$ لكل n و $x_n \to c$، ولكن $f(x_n) \nrightarrow L$.

(2) النهاية $\lim_{x \to c} f(x)$ غير موجودة إذا وجدت متتابعة (x_n) في A بحيث $x_n \neq c$ لكل n و $x_n \to c$، ولكن المتتابعة $\big(f(x_n)\big)$ غير تقاربية.

سنعطي بعض الأمثلة على هذه النتيجة توضح كيفية استخدامها.

مثال: باستخدام المتتابعات التقاربية بين أن النهاية التالية غير موجودة

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

الحل: اعتبر المتتابعة $x_n = \frac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$. تجد أن $x_n \neq$ لكل n، و $x_n \to 0$، ولكن

$$f(x_n) = \frac{1}{x_n} = n \to \infty$$

أي أن المتتابعة $\big(f(x_n)\big)$ تباعدية. هذا يثبت المطلوب.

مثال: إذا كانت $\operatorname{sgn}(x)$ دالة الإشارة للعد الحقيقي x، أي

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}+1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

اثبت أن $\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$ غير موجودة.

الحل: للمتتابعة $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$ لكل $n\in\mathbb{N}$ فإن $x_n\neq 0$ لكل n و$x_n\to 0$، ولكن

$$f(x_n)=(-1)^n,\qquad n\in\mathbb{N}$$

متتابعة تباعدية (لأنها متذبذبة). هذا يثبت أن $\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$ غير موجودة.

مثال: اثبت أن النهاية التالية غير موجودة

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

الحل: اعتبر المتتابعتين

$$x_n=\frac{1}{n\pi},\quad y_n=\left(\frac{1}{2}\pi+n\pi\right)^{-1}\quad\forall\ n\in\mathbb{N}$$

يتضح أن $x_n\neq 0, y_n\neq 0$ لكل n، وأن $x_n\to 0, y_n\to 0$، ولكن

$$f(x_n)=\sin(n\pi)=0, f(y_n)=\sin\left(\frac{1}{2}\pi+n\pi\right)=1$$

وهــــــذا يعنــــــي أن $f(x_n))\to 0, f(y\_n))\to 1$. ولــــــذلك $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ غير موجودة.

نظريات النهايات LIMIT THEOREMS

نظرية: إذا كانت $f:A\to\mathbb{R}$، وكانت $c\in\mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة A، فإن الدالة f يمكن أن تكون لها نهاية واحدة فقط عند النقطة c.

بعبارة أخرى، نهاية الدالة، إن وجدت تكون وحيدة.

البرهان: تمرين.

تعريف: إذا كانت $A\subseteq\mathbb{R}$، و $f:A\to\mathbb{R}$، وكانت $c\in\mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة A، يقال أن الدالة f محدودة في جوار النقطة c إذا وجد $\delta>0$ و $M>0$ بحيث لكل $x\in A\cap(c-\delta, c+\delta)$ يكون $|f(x)|\leq M$.

نظرية: إذا كانت $A\subseteq\mathbb{R}$ وكان للدالة $f:A\to\mathbb{R}$ نهاية عند النقطة c فإن f تكون محدودة في جوار للنقطة c.

البرهان: تمرين.

نظرية: إذا كانت $A \subseteq \mathbb{R}$، و f, g دوال من A إلى $\mathbb{R}$، و $c \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة A، وكان $b \in \mathbb{R}$.

(1)فإذا كانت $\lim_{x \to c} f(x) = L$، $\lim_{x \to c} g(x) = M$ فإن

$$\lim_{x \to c}\big(f(x) \pm g(x)\big) = L \pm M, \quad \lim_{x \to c} f(x)g(x) = LM, \quad \lim_{x \to c} bf(x) = bL$$

(2)إذا كانت $h: A \to \mathbb{R}$ بحيث $h(x) \neq 0$ لكل $x \in A$، وكان $\lim_{x \to c} h(x) = H \neq 0$ فإن

$$\lim_{x \to c}\left(\frac{f}{h}\right) = \frac{L}{H}.$$

البرهان: تمرين.

أمثلة:

$$1) \lim_{x \to c} x = c, \quad \lim_{x \to c} x^2 = c^2, \lim_{x \to c, c \neq 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}.$$

$$2) \quad \lim_{x \to 2}(x^2 + 1)(x^3 - 4) = 20,$$

$$\lim_{x \to 2} 3(x^2 + 1) = 15, \quad \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 1}{x^3 - 4} = \frac{5}{4}.$$

3) إذا كانت $p(x)$ كثيرة حدود فإن $\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$.

4) إذا كانت $p(x),\ q(x)$ كثيرات حدود بحيث $q(c) \neq 0$ فإن $\lim_{x \to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}$.

5) النهاية $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ غير موجودة.

نظرية: لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$، و $f: A \to \mathbb{R}$، ولتكن $c \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة A. فإذا

$$a \le f(x) \le b \quad \forall\ x \in A, \qquad x \neq c$$

وإذا كانت $\lim_{x \to c} f(x) = L$ فإن $a \le L \le b$.

البرهان: إذا كان $\lim_{x \to c} f(x) = L$ فإنه لكل متتابعة (x_n) في A بحيث $x_n \neq c$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكان $x_n \to c$ فإن $f(x_n) \to L$. ومن ثم

$$a \le f(x_n) \le b \Longrightarrow a \le L \le b$$

وهو المطلوب.

نظرية: (Squeeze Theorem)

لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$، و $f, g, h: A \to \mathbb{R}$، ولتكن $c \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة A. فإذا

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \quad \forall \;\; x \in A, \;\; x \neq c$$

وإذا كانت $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$ فإن $\lim_{x \to c} g(x) = L$.

مثال: بين أن $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

الحل: نعلم أن $-1 \le \cos x \le 1$. بالتكامل بالنسبة إلى x على الفترة $[0, \infty)$ نحصل على

$$-x \le \sin x \le x, \qquad x \ge 0 \qquad\qquad (*)$$

وحيث إن $\lim_{x \to 0} \pm x = 0$ فإن $\lim_{x \to 0} \sin x = 0.$

بالمثل، إذا $x < 0$ و $x \to 0$ فإن $\sin x \to 0$.

مثال: بين أن $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

الحل: بتكامل $(*)$ بالنسبة إلى x على الفترة $[0, \infty)$ نحصل على

$$-\frac{1}{2}x^2 \le 1 - \cos x \le \frac{1}{2}x^2, \qquad x \ge 0$$

وحيث إن $\lim_{x \to 0} \pm \frac{x^2}{2} = 0$ فإن $\lim_{x \to 0}(1 - \cos x) = 0.$ وهذا يكافئ المطلوب.

بطريقة أخرى، حيث إن لكل $x \in \mathbb{R}$ لدينا $1 - \frac{1}{2}x^2 \le \cos x \le 1$. فإن

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) = 1$$

مثال: اثبت ان $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x}\right) = 0$

الحل: من مفكوك تيلور فإن

$$\frac{1x}{2} \le \frac{\cos x - 1}{x} \le 0, \quad x > 0$$

$$0 \le \frac{\cos x - 1}{x} \le -\frac{x}{2}, \quad x < 0.$$

وبتطبيق نظرية المحصور ينتج أن المطلوب.

مثال: اثبت أن $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

الحل: لكل $x \neq 0$ فإن $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$. وبالتالي فإن

$$-|x| \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

وحيث إن $\lim_{x\to 0}|x| = 0$، فإن نظرية المحصور تؤدي إلى المطلوب.

نظرية: إذا كانت $g: A \to \mathbb{R}$ دالة محدودة على المجموعة $A \subseteq \mathbb{R}$، وكانت $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ عند c، نقطة تراكم للمجموعة A فإن $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$.

نظرية: لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$، و$f: A \to \mathbb{R}$. ولتكن $c \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة A. فإذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ سيوجد جوار $V_\delta(c)$ للنقطة c بحيث $0 < f(x)$ لكل $x \in V_\delta(c)$.

النهايات من جانب واحد One-Sided Limits

تعريف: إذا كانت $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$، وكانت $f: A \to \mathbb{R}$

(1) إذا كانت c نقطة تراكم لمجموعة $A \cap (0,\infty)$ يقال أن العدد الحقيقي L هو نهاية يمنى للدالة f عند c إذا لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$x \in A, \quad 0 < x - c < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

ونكتب $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ (أو $x \in A,\ x \to c^+ \Longrightarrow f(x) \to L$).

(2) إذا كانت c نقطة تراكم لمجموعة $A \cap (-\infty,0)$ يقال أن العدد الحقيقي L هو نهاية يسرى للدالة f عند c إذا لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$x \in A, \quad 0 < c - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

ونكتب $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ (أو $x \in A,\ x \to c^- \Longrightarrow f(x) \to L$).

نظرية: لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$ و$f: A \to \mathbb{R}$، ولتكن $c \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة $A \cap (0,\infty)$. فإن الجمل التالية متكافئة.

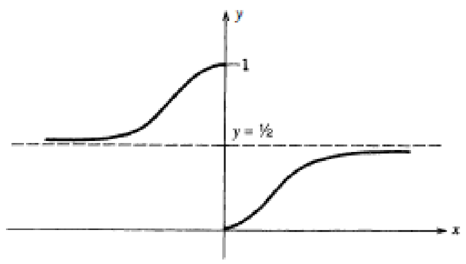
(1) $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$

(2) لكل متتابعة (x_n) في A بحيث $c < x_n$ لكل n و $x_n \to c$ فإن $f(x_n) \to L$.

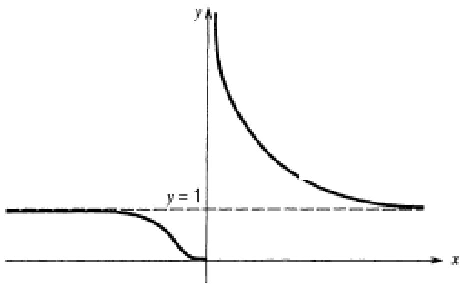
نظرية: لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$ و$f: A \to \mathbb{R}$، ولتكن $c \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعات $A \cap (0,\infty)$

و $A \cap (-\infty, 0)$. فـــــإن $\lim_{x\to c} f(x) = L$ إذا وفقـــــط إذا $L = \lim_{x\to c^-} f(x)$
$= \lim_{x\to c^+} f(x)$.

أمثلة:



Graph of $h(x) = 1/(e^{1/x}+1) \quad (x \neq 0)$



Graph of $g(x) = e^{1/x} \quad (x \neq 0)$

النهايات اللانـهائية INFINITE LIMITS

تعريف: لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$، و c نقطة تراكم للمجموعة A، ولتكن $f: A \to \mathbb{R}$

(1) يقال أن $f \to \infty$ عندما تقترب $x \to c$، نكتب $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$، إذا لكل عدد حقيقي

$0 < k$ يوجد $0 < \delta$ بحيث

$$x \in A, \quad 0 < |x - c| < \delta \implies f(x) > k.$$

(2) يقال أن $f \to -\infty$ عندما تقترب $x \to c$، نكتب $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$، إذا لكل عدد حقيقي $0 < m$ يوجد $0 < \delta$ بحيث

$$x \in A, \quad 0 < |x - c| < \delta \implies f(x) < k.$$

مثال: اثبت أن $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

الحل: لكل $0 < k$ نريد إيجاد $0 < \delta$ بحيث

$$0 < |x| < \delta \implies \frac{1}{x^2} > k.$$

المتباينـة المطلوبـة تكـافئ $\sqrt{k} < \frac{1}{|x|}$. فـإذا اعطينـا $0 < k$ فإنـه يمكـن إيجـاد $0 < \delta$ بحيـث $\delta \le \frac{1}{\sqrt{k}}$. عندئذ نجد أن

$$0 < |x| < \delta \implies \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} \ge k$$

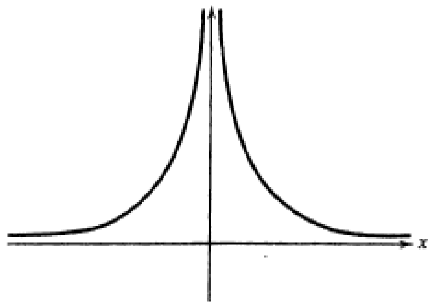
وهذا يثبت المطلوب.

مثال: اثبت أن $\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}=\infty$

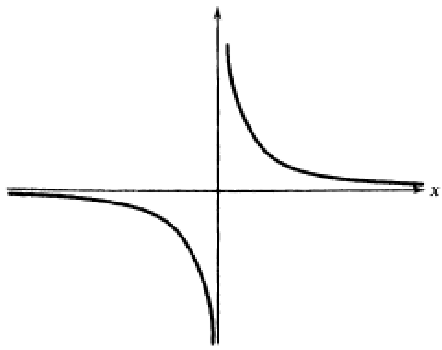
الحل: لكل $k>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث $\delta\leq\frac{1}{k}$. وبالتالي لكل $0<x<\delta$ فإن $k\leq\frac{1}{\delta}<\frac{1}{x}$ وهذا يثبت المطلوب.

مثال: اثبت أن $\lim_{x\to 0^-}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}=-\infty$

الحل: لكل $k>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث $\delta\leq\frac{1}{k}$. وبالتالي لكل $x<0, |x|<\delta$ ، أي $-x<\delta$ فإن $-k\leq-\frac{1}{\delta}<\frac{1}{x}$ وهذا يثبت المطلوب.



Graph of $f(x)=1/x^2 \quad (x\neq 0)$



Graph of $g(x)=1/x \quad (x\neq 0)$

نظرية: لتكن $A\subseteq\mathbb{R}$، و c نقطة تراكم للمجموعة A، ولتكن $f,g:A\to\mathbb{R}$ بحيث $f(x)\leq g(x)$ لكل $x\in A$ و $x\neq c$.

(1) فإذا كانت $\lim_{x\to c}f(x)=\infty$ فإن $\lim_{x\to c}g(x)=\infty$.

(2) فإذا كانت $\lim_{x\to c}g(x)=-\infty$ فإن $\lim_{x\to c}f(x)=\infty$.

البرهان: تمرين.

النهايات عند اللانهاية LIMITS AT INFINITY

تعريف: يقال إن العدد الحقيقي L هو نهاية الدالة الحقيقية $f:A\to\mathbb{R}$ عند اللانهاية إذا لكل $\epsilon>0$ معطى يوجد عدد حقيقي موجب k بحيث لكل $x>k$ فإن $|f(x)-L|<\epsilon$. عندئذ نكتب

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=L \quad \text{or} \quad x\to\infty\Longrightarrow f(x)\to L.$$

نظرية: لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$، و$f: A \to \mathbb{R}$. فإذا كان $(a, \infty) \subseteq A$ لعدد حقيقي ما a فإن الجمل التالية متكافئة.

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

(2) لكل متتابعة (x_n) في $A \cap (a, \infty)$ بحيث $x_n \to \infty$ فإن $f(x_n) \to L$.

مثال: اثبت أن $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x+1}{x^2+5} = 2$

الحل: لدينا لكل $0 < x$

$$|f(x) - L| = \left|\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 5} - 2\right| = \left|\frac{3x - 9}{x^2 + 5}\right| \leq \frac{3(x + 3)}{x^2 + 5}$$

فإذا كانت $x > k > 0$ فإن

$$\frac{x + 3}{x^2 + 5} = \frac{1 + \frac{3}{x}}{x + \frac{5}{x}} < \frac{1 + \frac{3}{x}}{x} < \frac{1 + \frac{3}{k}}{k}$$

وبالتالي إذا اعطينا $\epsilon > 0$ نختار $k > 0$ بحيث $\frac{1+\frac{3}{k}}{k} < \frac{\epsilon}{3}$. عندئذ نجد أن

$$x > k \Longrightarrow \left|\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 5} - 2\right| < \epsilon$$

وهذا يثبت المطلوب.

تمرين: اثبت أن $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{x+2} = 3$.

تعريف: إذا كان $A \subseteq \mathbb{R}$، و $f: A \to \mathbb{R}$، وكانت $c \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة A نقول أن الدالة $f \to \infty$، عندما $x \to \infty$ إذا لكل $k > 0$ يوجد $M > 0$ بحيث

$$x \in A, \ \ x > M \Longrightarrow f(x) > k$$

وعندها نكتب $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (أو $x \to \infty \Longrightarrow f(x) \to \infty$).

نظرية: لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$، و$f: A \to \mathbb{R}$. فإذا كان $(a, \infty) \subseteq A$ لعدد حقيقي ما a فإن الجمل التالية متكافئة.

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

(2) لكل متتابعة (x_n) في $A \cap (a, \infty)$ بحيث $x_n \to \infty$ فإن $f(x_n) \to \infty$.

مثال: اثبت أن $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x+5} = \infty$

الحل: حيث إن

$$\frac{x^2+2}{x+5} = x - 5 + \frac{27}{x+5} = x - 5 + \frac{27/x}{1+5/x}$$

فإنه لقيم $x > M$ الكبيرة بدرجة كافية نجد أن

$$\frac{x^2+2}{x+5} \approx x - 5$$

وبالتالي، إذا أعطينا $k > 0$ نوجد $M \geq k + 5$ عندئذ نجد أن

$$x > M \Longrightarrow \frac{x^2+2}{x+5} \geq x - 5 > k$$

وهو المطلوب.

مثال: اثبت أن $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x+5}{x-1} = \infty$

الحل: لكل $x > 0$ فإن $x - 1 < x,\ x^3 + 2x + 5 > x^3$. وبالتالي فإن

$$\frac{x^3+2x+5}{x-1} > x^2.$$

فإذا أعطينا $k > 0$ نوجد $M > 0$ بحيث $M^2 \geq k$ عندئذ نجد أن

$$x > M \Longrightarrow \frac{x^3+2x+5}{x-1} > M^2 \geq k$$

وهو المطلوب.

الفصل الخامس

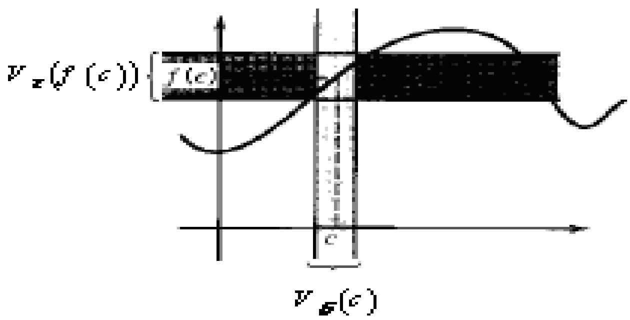
الدوال المتصلة CONTINUOUS FUNCTIONS

تعريف(1): إذا $f : A \to \mathbb{R}$, $c \in A \subseteq \mathbb{R}$. يقال أن f دالة متصلة عند c إذا لكل معطى $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إذا $x \in A$ و $|x-c| < \delta$ فإن $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

إذا لم تكن f دالة متصلة عند c فيقال أن f منفصلة عند c .

هذا التعريف يمكن صياغته كما في تعريف النهاية عند نقطة وذلك باستخدام الجوارات. وهذا ما توضحه النظرية والشكل التاليين.

نظرية(1) : الدالة $f : A \to \mathbb{R}$ تكون متصلة عند نقطة c حيث $c \in A \subseteq \mathbb{R}$ إذا وفقط وإذا لكل جوار $V_\varepsilon(f(c))$ للنقطة $f(c)$ يوجد جوار $V_\delta(c)$ للنقطة c بحيث إذا $x \in A \cap V_\delta(c)$ فإن $f(x) \in V_\varepsilon(f(c))$, بمعنى $f(A \cap V_\delta(c)) \subseteq V_\varepsilon(f(c))$.



"إذا أعطيت جواراً $V_\varepsilon(f(c))$ لـ $f(c)$ يمكن تحديد جوار $V_\delta(c)$ لـ c"

ملاحظات:1) إذا $c \in A$ نقطة تراكم للمجموعة A فإن $f : A \to \mathbb{R}$ تكون متصلة عند c إذا وفقط إذا $f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$. هذا يعنى أنه إذا $c \in A$ نقطة تراكم للمجموعة A فإن $f : A \to \mathbb{R}$ تكون متصلة إذا تحققت الشروط التالية:

i) f معرفة عند c

ii) $\lim_{x \to c} f$ موجودة في $\mathbb{R}$

iii) القيمتين في *i*) و*ii*) متساويتين.

2) إذا $c \in A$ ليست نقطة تراكم، فإنه يوجد جوار $V_\delta(c)$ للنقطة c بحيث $A \cap V_\delta(c) = \{c\}$ ومن ثم فإن $f(x) - f(c) = 0$ لكل x في $A \cap V_\delta(c)$.

وهذا يعنى أن f متصلة عند كل نقطة c ليست نقطة تراكم. مثل هذه النقطة تسمى نقطة معزولة.

نظرية(2): الدالة $f : A \to \mathbb{R}$ تكون متصلة عند النقطة c حيث $c \in A \subseteq \mathbb{R}$ إذا وفقط إذا لكل متتابعة (x_n) في A متقاربة إلى c تكون $(f(x_n))$ متتابعة تقاربية إلى $f(c)$.

البرهان: إذا c ليست نقطة تراكم للمجموعة A فإن تقارب (x_n) إلى c يعنى وجود $k \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \ge k$ فإن $x_n = c$ (؟). وبالتالي $f(x_n) = f(c)$ وهذا يعنى أن $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$. من جهة أخرى فإن f متصلة عند c, وهو ما يتحقق تلقائياً لأي $c \in A$ ليست نقطة تراكم.

وإذا c نقطة تراكم للمجموعة A فإن اتصال الدالة f عند c يكافئ الشرط $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, ومن ثم يكافئ الشرط المعطى في النظرية. (وضح تفاصيل ذلك البرهان؟)

مثال: إذا $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة معرفة لكل $0 \le x$ بحيث $f(x) = \sqrt{x}$ فاثبت أن f دالة متصلة عند x لكل $0 \le x$.

الحل: لكل $0 \le c \in \mathbb{R}$ إذا (x_n) في $\mathbb{R}$ متقاربة إلى c و $0 \le x_n$ لكل n فإن

i) إذا $c = 0$ فإن $x_n \to 0$ تعنى أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $|x_n| < \varepsilon^2$ لكل $n \ge N$.
وحيث أن $0 \le x_n$ لكل n فإن $\sqrt{x_n} < \varepsilon$. وبالتالي $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = 0$.

ii) وإذا $c > 0$, $x_n \to c$ فإن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $|x_n - c| < \sqrt{c}\,\varepsilon$ لكل $n \ge N$. ومن ثم $\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{c}\right| = \dfrac{|x_n - c|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{c}} \le \dfrac{|x_n - c|}{\sqrt{c}} < \varepsilon$.

أي أن $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{c}$

وهكذا فإن لكل $0 \le c \in \mathbb{R}$ ولكل (x_n) في $\mathbb{R}$ متقاربة إلى c فإن المتتابعة $\left(\sqrt{x_n}\right)$ تتقارب إلى $\sqrt{c}$. وبالتالي فإن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ أي أن $f(x) = \sqrt{x}$ دالة متصلة عند كل $0 \le c \in \mathbb{R}$.

نتيجة(1): الدالة $f : A \to \mathbb{R}$ غير متصلة عند نقطة $c \in A$ إذا وفقط إذا وجدت متتابعة (x_n) في A متقاربة إلى c بحيث $(f(x_n))$ لا تتقارب إلى $f(c)$.

مثال: إذا $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث

$$g(x) = \begin{cases} 2 & ; \quad x \ne 1 \\ 0 & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

أثبت أن الدالة g غير متصلة عند $x = 1$.

الإثبات: للمتتابعة (x_n) حيث $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ فنجد أن $x_n \ne 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $x_n \to 1$ و $\lim g(x_n) = 2 \ne g(1) = 0$. وبالتالي فإن $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2 \ne g(1) = 0$. وهذا يعني أن g غير متصلة عند $x = 1$.

تعريف(2): يقال للدالة $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ أنها متصلة على مجموعة B $(B \subseteq A)$ إذا f متصلة عند كل نقطة في B.

أمثلة: 1) $f(x) := b$ متصلة على $\mathbb{R}$ حيث b مقدار ثابت. فإذا $c \in \mathbb{R}$ فإن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = b = f(c)$.

2) $g(x) := x$ متصلة على $\mathbb{R}$، حيث أنه لكل $c \in \mathbb{R}$ يكون $\lim\limits_{x \to c} g(x) = c = g(c)$.

3) $h(x) := x^2$ متصلة على $\mathbb{R}$، لأنه لكل $c \in \mathbb{R}$ يتحقق $\lim\limits_{x \to c} h(x) = c^2 = h(c)$.

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة دريشلت المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

غير متصلة عند أي نقطة $x \in \mathbb{R}$.

حل(4): لكل $c \in \mathbb{R}$ لدينا الحالتين:

i) إذا $c \in \mathbb{Q}$ فـإن $f(c)=1$. وحيث أن $\mathbb{Q}$ كثيفـة فـي $\mathbb{R}$ فإنـه توجـد (x_n) متتابعـة فـي $\mathbb{Q}^c$ بحيث $x_n \to c$. وبذلك لدينا $f(x_1), f(x_2), f(x_3),\ldots$ ($f(x_n)=0$ لكل n) متتابعة لا تتقـارب إلـى $f(c)=1$.

ii) إذا $c \notin \mathbb{Q}$ فإن $f(c)=0$. وحيث أن $\mathbb{Q}^c$ كثيفـة فـي $\mathbb{R}$ فإنـه توجـد (y_n) متتابعـة فـي $\mathbb{Q}$ بحيث $y_n \to c$. وعليـه فـإن $f(y_1), f(y_2), f(y_3),\ldots$ ($f(y_n)=1$ لكل n) متتابعـة غيـر تقاربيـة إلى $f(c)=0$.

وهكذا لكل $c \in \mathbb{R}$ توجد متتابعـة (x_n) فـي $\mathbb{R}$ تقاربيـة إلـى c بينمـا $(f(x_n))$ لا تتقـارب إلـى $f(c)$. وبالتالي f ليست متصلة عند c لكل $c \in \mathbb{R}$.

5) ادرس اتصال الدالة $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث

$$g(x)=\begin{cases} x & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

الحل متروك كتمرين.

6) إذا $A := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ وإذا $h : A \to \mathbb{R}$ معرفة بـ

$$h(x)=\begin{cases} 0 & ; \; x \notin A \cap \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{n} & ; \; x = \dfrac{m}{n} \in A \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

حيث m, n أعداد طبيعية و $\gcd(m,n)=1$. فإن h دالة متصلة عند كل عدد غيـر نسبي فـي A وغير متصلة عند كل عدد نسبي في A .

الحل: i) إذا $a > 0$ عدد نسبي فإن $h(a) > 0$ وإذا (x_n) متتابعة فـي $\mathbb{Q}^c$ فـإن $h(x_n)=0$ لكل n . فإذا $x_n \to a$ فإن $(h(x_n))$ متتابعة تتقارب إلى الصفر ولـيس إلـى $h(a)$. وبالتـالي الدالـة h غيـر متصلة عند a لكل $a \in A \cap \mathbb{Q}$.

ii) إذا $b>0$ عدد غير نسبي فإن $h(b)=0$. الآن نريد إثبات أن الدالة h متصلة عند النقطة b، أي يجب إثبات أنه لكل معطى $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ فإن $|h(x)-h(b)|<\varepsilon$ لكل $x\in A$ بحيث $|x-b|<\delta$.

حيث أنه لكل $\varepsilon>0$ يوجد $n_0\in\mathbb{N}$ (بحيث $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$) ومن ثم إذا (y_n) متتابعة في $A\cap\mathbb{Q}$ بحيث $y_n\to b$ فإن $|y_n-b|<1$ لكل $n\ge n_0$. أي أن $y_n\in(b-1,b+1)$ لكل $n\ge n_0$. هذا يعني أنه يوجد في الفترة $(b-1,b+1)$ عدد محدود من الأعداد النسبية مقام أياً منها أقل من n_0. وبالتالي يمكن اختيار $\delta>0$ صغير لدرجة أن الجوار $V_\delta(b)$ للنقطة b لا يحتوي عدداً نسبياً مقامه أصغر من n_0. وبالتالي لكل $x\in A$ بحيث $|x-b|<\delta$ فإن $|h(x)-h(b)|=|h(x)|\le\frac{1}{n_0}<\varepsilon$

أي أن h دالة متصلة عند العدد غير النسبي(الاختياري) b.

ملاحظات: قد تكون الدالة $f:A\to\mathbb{R}$ غير متصلة عند نقطة $c\in A$ لأن f غير معرفة عند هذه النقطة. في هذه الحالة فإن

1) إذا $\lim_{x\to c} f=L$ موجودة فإنه يمكن تعريف الامتداد $F:A\cup\{c\}\to\mathbb{R}$ بالقاعدة

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & ; \quad x\in A \\ L & ; \quad x=c \end{cases}$$

ونحصل بذلك على دالة F متصلة عند c. وفي هذه الحالة تسمى c نقطة عدم اتصال (شاذة) بسيطة (أو قابلة للإزالة).

2) إذا $\lim_{x\to c} f$ غير موجودة فإنه لا يوجد العدد L بحيث يكون الامتداد

$$G(x)=\begin{cases} f(x) & ; \quad x\in A \\ L & ; \quad x=c \end{cases}$$

دالة متصلة عند c. وفي هذه الحالة تسمى c نقطة شاذة أساسية (غير قابلة للإزالة) للدالة f. ويقال عندئذ أن عدم الاتصال لا نهائي.

أمثلة: 1) الدالة $f(x) := \sin \frac{1}{x}$ متصلة على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. وعند $x = 0$ ليس للدالة نهاية(؟) وبالتالي $x = 0$ نقطة شاذة أساسية (لانهائية) للدالة f .

2) الدالة $g(x) := x \sin \frac{1}{x}$ غير معرفة عند $x = 0$ وبالتالي فهي غير متصلة عند $x = 0$. وحيث أن $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. فإنه يمكن تعريف الامتداد $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث

$$F(x) := \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

فنحصل على دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

تركيب الدوال المتصلة COMBINATIONS OF CONTINUOUS FUNCTIONS

نظرية(3): إذا f, g, h دوال حقيقية معرفة على مجموعة A جزئية من $\mathbb{R}$، إذا f, g, h متصلة عند $c \in A$ و $h(x) \neq 0$ لكل $x \in A$ وإذا $b \in \mathbb{R}$ فإن $bf, f + g, f - g, fg, f/h$ دوال متصلة عند c.

البرهان: إذا $c \in A$ ليست نقطة تراكم فإن جميع هذه الدوال تكون تلقائياً متصلة عند c. ولذا فإننا نحتاج لإثبات النظرية في حالة إذا c نقطة تراكم للمجموعة A .

إذا f, g, h دوال متصلة عند c فإن

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c), \quad \lim_{x \to c} g(x) = g(c), \quad \lim_{x \to c} h(x) = h(c)$$

وبالتالي فإنه من النظريات الأساسية لنهايات الدوال نحصل على

$$\begin{aligned} (i) \qquad \lim_{x \to c} (f \pm g)(x) &= \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x) \\ &= f(c) \pm g(c) = (f \pm g)(c) \end{aligned}$$

هذا يعنى أن $f + g$ و $f - g$ دوال متصلة عند c، كذلك

$$(ii) \qquad \lim_{x\to c}(fg)(x) = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$$
$$= f(c)\times g(c) = (fg)(c)$$

أي أن fg دالة متصلة عند c،

$$(iii) \qquad \lim_{x\to c}(bf)(x) = b\lim_{x\to c} f(x) = bf(c)$$

أي أن bf دالة متصلة عند c,

$$(iv) \qquad \lim_{x\to c}\left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} h(x)} = \frac{f(c)}{h(c)} = \left(\frac{f}{h}\right)(c)$$

وعليه فإن f/h دالة متصلة عند c .

وباستخدام هذه النظرية عند كل نقطة في A نحصل على النتيجة التالية

نظرية(4): إذا f, g, h دوال حقيقية معرفة على مجموعة A جزئية من $\mathbb{R}$، إذا f, g, h متصلة على A و $h(x)\neq 0$ لكل $x\in A$ وإذا $b\in\mathbb{R}$ فإن $bf, f+g, f-g, fg, f/h$ دوال متصلة على A .

أمثلة:1) دالة كثيرة الحدود $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ متصلة على $\mathbb{R}$، لأنه لكل $c\in\mathbb{R}$ فإن $\lim_{x\to c} P(x) = P(c)$.

2) الدالة القياسية متصلة عند كل نقطة في $\mathbb{R}$ تكون الدالة عندها معرفة. فإذا p, q كثيرتي حدود في $\mathbb{R}$ فإنه يوجد عدد محدود من النقاط $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ بحيث $q(x_i)=0$ لكل $i=1,2,\ldots,n$. ومن ثم فالدالة القياسية $r(x) := \frac{p(x)}{q(x)}$ تكون معرفة لكل $x\notin\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ وبالتالي لكل $c\in\mathbb{R}\setminus\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ فإن

$$\lim_{x\to c} r(x) = \lim_{x\to c}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x\to c} p(x)}{\lim_{x\to c} q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)} = r(c)$$

أي أن r دالة متصلة عند c حيث $q(c)\neq 0$ وهذا يثبت المطلوب.

3) الدالة $f(x):=\sin x$ متصلة على $\mathbb{R}$. فلكل $c,x\in\mathbb{R}$ لدينا

$$\sin x-\sin c=2\sin\left(\frac{x-c}{2}\right)\cos\left(\frac{x+c}{2}\right)$$

وحيث أن $|\sin z|\le|z|$ و $|\cos z|\le 1$ لكل $z\in\mathbb{R}$ فإن

$$|\sin x-\sin c|\le 2\cdot\frac{1}{2}|x-c|\cdot 1=|x-c|$$

وبالتالي لكل $c\in\mathbb{R}$ ولكل معطى $\varepsilon>0$ فإن $|\sin x-\sin c|<\varepsilon$ لكل $x\in\mathbb{R}$ بحيث $|x-c|<\varepsilon$. أي أن $f(x)=\sin x$ دالة متصلة عند c. وحيث أن c نقطة اختيارية فإن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

4) إذا $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بحيث $f(x)=\cos x$ فاثبت أن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

ملحوظة: $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

5) حسب نظرية (4) فإن

i) $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R}\setminus\left\{x\in\mathbb{R}:x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

ii) $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R}\setminus\left\{x\in\mathbb{R}:x=n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

iii) $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R}\setminus\left\{x\in\mathbb{R}:x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

iv) $\operatorname{cosec}x=\dfrac{1}{\sin x}$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R}\setminus\left\{x\in\mathbb{R}:x=n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

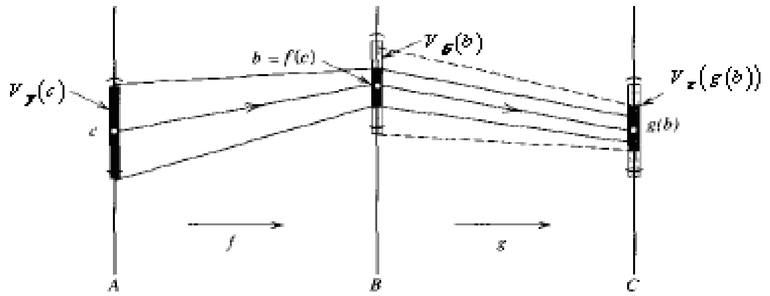
تحصيل الدوال المتصلة Composition of Continuous Functions

إذا $f:A\to\mathbb{R}$, $g:B\to\mathbb{R}$ و $A,B\subseteq\mathbb{R}$ بحيث $f(A)\subseteq B$ فإن الدالة $g\circ f:A\to\mathbb{R}$ وتسمى تحصيل f,g تُعرف بـ $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

نظريـة(5): إذا $f:A\to\mathbb{R}$ دالـة متصـلة عنـد $c\in A\subseteq\mathbb{R}$، إذا $B\subseteq\mathbb{R}$ بحيث $f(A)\subseteq B$ وإذا $g:B\to\mathbb{R}$ دالة متصلة عند $b=f(c)$ فإن $g\circ f:A\to\mathbb{R}$ دالة متصلة عند c.

البرهان: إذا g دالة متصلة عند b فإنه لكل جوار $V_\varepsilon(g(b))$ للنقطـة $g(b)$ يوجد جوار $V_\delta(b)$ للنقطـة $b=f(c)$ بحيـث لكـل $y\in B\cap V_\delta(b)$ فـإن $g(y)\in V_\varepsilon(g(b))$. وحيـث أن f دالـة متصـلة عنـد c جـوار $V_\delta(b)$ للنقطـة $b=f(c)$ سـيوجد جـوار $V_\gamma(c)$ للنقطـة c بحيـث $f(x)\in V_\delta(b)$ لكل x في $A\cap V_\gamma(c)$.

وحيـث أن $f(A)\subseteq B$ فـإن $f(x)\in B\cap V_\delta(b)$ لكـل x فـي $A\cap V_\gamma(c)$. وعليـه فـإن $(g\circ f)(x)=g(f(x))\in V_\varepsilon(g(b))$ لكل x في $A\cap V_\gamma(c)$. وهذا يثبت أن $g\circ f$ دالة متصلة عند c.



تحصيل f,g

بتطبيق هذه النظرية عند كل نقاط كلاً من A,B نحصل على النتيجة التالية:

نظريـة(6): إذا $f:A\to\mathbb{R}$ دالـة متصـلة علـى $A\subseteq\mathbb{R}$ و $g:B\to\mathbb{R}$ متصـلة علـى $B\subseteq\mathbb{R}$ حيث $f(A)\subseteq B$ فإن $g\circ f:A\to\mathbb{R}$ متصلة على A.

أمثلة: 1) إذا $f:A\to\mathbb{R}$ متصلة على $A\subseteq\mathbb{R}$ فأثبت أن $h(x)=|f(x)|$ دالة متصلة على A.

الإثبات: عرف $g(x):=|x|$ لكل $x\in\mathbb{R}$. فإن $|g(x)-g(c)|\le|x-c|$ لكل $x,c\in\mathbb{R}$

وبالتالي g دالة متصلة على $\mathbb{R}$. وحيث أن $h(x)=|f(x)|=(g\circ f)(x)$ فإن h دالـة متصـلة عند c لكل $c\in A$.

2) إذا $f : A \to \mathbb{R}$ متصلة على $A \subseteq \mathbb{R}$ فأثبت أن $w(x) := \sqrt{f(x)}$ دالة متصلة عند كل $x \in A$ بحيث $f(x) \geq 0$.

الإثبات: عرف $g(x) := \sqrt{x}$ لكل $x \geq 0$. وحيث أن $g(x) = \sqrt{x}$ دالة متصلة عند كل $0 \leq c \in \mathbb{R}$.
فإذا $f : A \to \mathbb{R}$ دالة متصلة على A فإنه بحسب نظرية(5) تكون $w(x) := (g \circ f)(x)$ دالة متصلة عند كل $x \in A$ بحيث $f(x) \geq 0$.

3) إذا $f : A \to \mathbb{R}$ دالة متصلة فإن الدالة $s(x) := \sin(f(x))$ متصلة على A .

الحل: حيث أن $g(x) := \sin x$ لكل $x \in \mathbb{R}$ هي دالة متصلة على $\mathbb{R}$. فإذا $f : A \to \mathbb{R}$ دالة متصلة على A فإنه لكل $\varepsilon > 0$ معطى سيوجد $\delta > 0$ بحيث $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ لكل x, c في A تحقق $|x - c| < \delta$. وعليه فإن

$$|s(x) - s(x)| = |\sin(f(x)) - \sin(f(c))| \leq |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

أي أن $s := g \circ f$ دالة متصلة على A .

4) أعطى مثالاً لدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ غير متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$ ولكن $g(x) := |f(x)|$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

الحل: اجعل $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \ x \in \mathbb{Q} \\ -1 & ; \ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

فنجد أن f غير متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$ (؟) وأن $|f(x)| = 1$ لكل $x \in \mathbb{R}$ وهي دالة متصلة.

5) إذا $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = x + 1$ لكل $x \in \mathbb{R}$ وإذا $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث

$$g(x) = \begin{cases} 2 & ; \ x \neq 1 \\ 0 & ; \ x = 1 \end{cases}$$

أثبت أن الدالة $g \circ f$ غير متصلة عند $x = 0$.

الحل: اجعل (x_n) متتابعة في $\mathbb{R}$ بحيث $x_n \neq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$, $x_n \to 0$ فيكون $x_n + 1 \neq 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ومن ثم

$$\lim_{n\to\infty}(g \circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} g(x_n+1) = \lim_{n\to\infty} 2 = 2$$

وبالتالي فإن $\lim_{x\to 0}(g \circ f)(x) = 2$. وحيث أن $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = 0$

فإن $\lim_{x\to 0}(g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(0)$ ، **أي أن** $g \circ f$ **غير متصلة عند** $x = 0$ **.**

الدوال المتصلة على فترات CONTINUOUS FUNCTIONS ON INTERVALS

للدوال الحقيقية المتصلة على فترات عدد من الخواص الهامة التي لا تتحقق للدوال المتصلة بوجه عام.

تعريف(3): يقال للدالة $f : A \to \mathbb{R}$ أنها محدودة على A إذا وجد الثابت $0 < M$ بحيث $|f(x)| < M$ لكل $x \in A$.

بعبارة أخرى نقول لدالة أنها محدودة على مجموعة إذا كان مدى الدالة في $\mathbb{R}$ هو مجموعة محدودة. ونقول أن الدالة $f : A \to \mathbb{R}$ ليست محدودة على A إذا لكل $M > 0$ معطى توجد $x_M \in A$ بحيث $|f(x_M)| > M$.

مثال: الدالة $f : A \to \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = 1/x$ لكل $x \in A = (0,\infty)$ ليست محدودة على A لأنه لكل $M > 0$ يوجد $x_M = 1/(M+1)$ يحقق $f(x_M) = M + 1 > M$

هذا المثال يوضح أن الدالة المتصلة ليست بالضرورة محدودة. والنظرية التالية تعطى الشرط الكافي للدالة المتصلة كي تكون محدودة.

نظرية(7): إذا $I := [a,b]$ فترة مغلقة ومحدودة وإذا $f : I \to \mathbb{R}$ دالة متصلة على I فإن f محدودة على I.

البرهان: بفرض أن f ليست محدودة على I, فإنه لكل $n \in \mathbb{N}$ يوجد $x_n \in I$ بحيث $|f(x_n)| \geq n$. حيث أن I محدودة وحيث أن $x_n \in I$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن المتتابعة (x_n) محدودة. وبحسب نظرية بلزانو-فيرشتراس توجد متتابعة جزئية (x_{n_r}) تقاربية إلى عدد x في I لأن I مغلقة. وحيث أن الدالة f متصلة عند x فإن المتتابعة $(f(x_{n_r}))$ تتقارب إلى $f(x)$. ومن ثم فإن $(f(x_{n_r}))$ متتابعة محدودة وهذا يناقض كون $|f(x_{n_r})| \geq n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. هذا التناقض يؤدي إلى أن الدالة $f : I \to \mathbb{R}$ محدودة على I.

يجب ملاحظة أن كل فرضية في النظرية السابقة هي شرط أساسي لا تتحقق النتيجة بدونه. لتوضيح ذلك نعتبر الأمثلة التالية.

1) الدالـة $f_1:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ حيث $f_1(x)=x$ هـي دالـة متصـلة علـى $[0,\infty)$ وغيـر محـدودة فلكـل $M>0$ فإن $x_M=M+1\in[0,\infty)$ و $f_1(x_M)>M$ لاحظ أن $I=[0,\infty)$ غير محدودة.

2) الدالـة $f_2:(0,1]\to\mathbb{R}$ حيث $f_2(x)=1/x$ هـي دالـة متصـلة علـى $I=(0,1]$ وغيـر محـدودة، حيـث أنـه لكـل $M>0$ يوجـد $n_M\in\mathbb{N}$ بحيـث $n_M>M$ و $\frac{1}{n_M}\in[0,1]$، ومـن ثـم فـإن $f_2(1/n_M)=n_M>M$. لاحظ أن I غير مغلقة.

3) الدالة $f_3:[0,1]\to\mathbb{R}$ حيث

$$f_3(x)=\begin{cases}1/x & ; \quad x\in(0,1]\\ 1 & ; \quad x=0\end{cases}$$

هـي دالـة غيـر متصـلة علـى $I=[0,1]$. وبالتـالي توجـد متتابعـة $\left(\frac{1}{n}\right)$ و $n\in\mathbb{N}$ تحقـق $\frac{1}{n}\to 0$ و $\left(f_3\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ غير تقاربية إلـى 1 لأنـه لكل $M>0$ يوجد $n_M\in\mathbb{N}$ بحيث $n_M>M+1$، وبالتـالي يوجد $x_M=1/n_M$ في $[0,1]$ يحقق

$$|f_3(x_M)-1|\ge\big||f_3(x_M)|-1\big|=n_M-1>M$$

ومنها $f_3(x_M)>M+1$ لكل $M>0$. وهذا يبين أن f_3 ليست محدودة على I.

تعريـف(4): إذا $A\subseteq\mathbb{R}$ و $f:A\to\mathbb{R}$ يقـال أن للدالـة f قيمـة عظمى(مطلقـة) علـى A إذا وجدت $x^*\in A$ بحيث $f(x^*)\ge f(x)$ لكل $x\in A$ وتسمى x^* نقطـة نهايـة عظمى(مطلقـة) للدالـة f .

ويقال أن للدالة f قيمة صغرى(مطلقة) على A إذا وجدت $x_*\in A$ بحيث $f(x_*)\le f(x)$ لكل $x\in A$ وتسمى x_* نقطة نهاية صغرى(مطلقة) للدالة f .

يتضح من التعريف أنه إذا للدالة f قيمة عظمى عند x^* وصغرى عند x_* فإن

$$f(x_*)\le f(x)\le f(x^*) \qquad \forall \quad x\in A$$

ومن ثم فإن $f(A)\subseteq\left[f(x_*),f(x^*)\right]$. ويتضح كذلك أن

$$f(x_*)=\inf f(A),\quad f(x^*)=\sup f(A)$$

وعليه فالقيمة القصوى (عظمى أو صغرى) للدالة متى وجدت تكون وحيدة. ولكن الدالة قد تأخذ هذه القيمة عند أكثر من نقطة في A فمثلا الدالةً $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $f(x)=\sin x$ تأخذ قيمتها العظمى 1 عند النقاط $x_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ لكل $n\in\mathbb{Z}$

وتأخذ قيمتها الصغرى -1 عند كل النقاط $x_n=\frac{3\pi}{2}+2n\pi$ لكل $n\in\mathbb{Z}$.

الآن نعطى أمثلة على أن الدالة المتصلة على مجموعة A في $\mathbb{R}$ ليس بالضرورة لها قيمة قصوى على A:

1) الدالة $f_1:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ بحيث $f_1(x)=1/x$ ليس لها قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) على المجموعة $A=(0,\infty)$

a) ليس للدالة f_1 قيمة عظمى على A:

فلكل $M>0$ يوجد $x_M=1/(M+1)$ يحقق $f_1(x_M)=M+1>M$ وبالتالي فإن

الدالة f_1 غير محدودة من أعلى. فإذا وجد $x^*\in A$ بحيث $f_1(x)\le f_1(x^*)$ لكل $x\in A$ فإننا نحصل على تناقض يقتضي عدم وجود قيمة عظمى للدالة f_1 على A.

b) لا يوجد قيمة صغرى للدالة f_1 على A:

حيث أن $1/x>0$ لكل $x>0$ فإن $\inf f_1(A)=0\notin f_1(A)$. فإذا وجد $x_*\in A$ بحيث $f_1(x)\ge f_1(x_*)$ لكل $x\in A$ فإن $f_1(x_*)=1/x_*$ حد سفلي للمجموعة $f_1(A)$ وبالتالي $1/x_*\le\inf f_1(A)=0$. وهذا يعني أن $x_*\notin A$.

هذا التناقض يؤدى إلى أنه لا توجد قيمة صغرى للدالة f_1 على A.

2) الدالة $f_2:(0,1)\to\mathbb{R}$ حيث $f_2(x)=1/x$ ليس لها قيمة قصوى على $A:=(0,1)$

a) حيث أن $f_2(A)=(1,\infty)$ مجموعة غير محدودة من أعلى. فإذا وجد $M=f_2\left(x^*\right)$ لبعض $x^*\in A$ فإن $M>1$، ومن ثم يوجد $x_M=1/(M+1)$ في A ويحقق $f_2\left(x_M\right)>M$. وهذا يناقض كون $M=f_2\left(x^*\right)$ قيمة عظمى للدالة f_2 على A.

b) إذا وجد $x_*\in A$ بحيث $f_2(x)\ge f_2(x_*)$ لكل $x\in A$, أي $\frac{1}{x_*}\ge\frac{1}{x}$ لكل $x\in A$، فإن $f_2(A)=1\le\inf\frac{1}{x_*}$. ومن ثم $x_*\ge 1$ وهذا يناقض كون $x_*\in A$. هذا التناقض يؤدى إلى أنه لا توجد قيمة صغرى للدالة f_2 على A.

3) للدالة $f_3:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ حيث $f_3(x)=1/x$ قيمة عظمى $f_3\left(x^*\right)=1$ عند $x^*=1$ لأن $f_3(x)=1/x\le 1$ لكل $x\in[1,\infty)$. وليس للدالة f_3 قيمة صغرى. خلاف ذلك يوجد $x_*\in[1,\infty)$ بحيث $f_3(x)\ge 1/x_*$ لكل $x\in[1,\infty)$. وبالتالي يكون $1/x_*$ حد سفلي للمجموعة $f_3([1,\infty))=(0,1]$، ومن ثم $\frac{1}{x_*}\le\inf(0,1]=0$ ، أي أن $x_*\le 0$

هذا يناقض كون $x_*\in[1,\infty)$. هذا التناقض يؤدى إلى أن f_3 ليس لها قيمة صغرى على $[1,\infty)$.

4) للدالة $f_4:[1,2]\to\mathbb{R}$ بحيث $f_4(x)=\frac{1}{x}$ توجد قيمة عظمى 1 عند $x^*=1$ وقيمة صغرى $\frac{1}{2}$ عند $x_*=2$ لأن $\frac{1}{2}\le f(x)\le 1$ لكل $x\in[1,2]$.

5) الدالة $g_1:(0,1)\to\mathbb{R}$ حيث $g_1(x)=x^2$ ليس لها قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) على $A:=(0,1)$. أثبت ذلك؟

6) للدالة $g_2:[0,1]\to\mathbb{R}$ حيث $g_2(x)=x^2$ توجد قيمة عظمى عند $x=1$ وقيمة صغرى عند $x=0$. بين صحة ذلك، وبرر الاختلاف بين المثالين 5 و6؟

نظرية(8): إذا $I=[a,b]$ فترة مغلقة ومحدودة وإذا $f:I\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على I فإن f تصل إلى قيمتها العظمى(المطلقة) وإلى قيمتها الصغرى(المطلقة) على I.

البرهان: من نظرية (7) واضح أن المجموعة غير الخالية $f(I)=\{f(x); x\in I\}\subseteq \mathbb{R}$ محدودة. فإذا $s_*=\inf f(I)$ و $s^*=\sup f(I)$ فإننا سنبين أنه يوجد x^* و x_* في I بحيث $s^*=f(x^*)$ و $s_*=f(x_*)$.

1) لكل $n\in\mathbb{N}$ فإن s^*-1/n ليس حد علوي للمجموعة $f(I)$، أي أنه لكل $n\in\mathbb{N}$ يوجد $x_n\in I$ بحيث $s^*-\frac{1}{n}<f(x_n)\le s^*<s^*+\frac{1}{n}$ لكل $n\in\mathbb{N}$.

وحيث أن I محدودة فإن كل متتابعة (x_n) في I تكون محدودة وبالتالي لها متتابعة جزئية (x_{n_r}) تقاربية إلى نقطة x^*. وحيث أن I مغلقة فإن $x^*\in I$ وبالتالي f متصلة عند x^* ومن ثم $f(x_{n_r})\to f(x^*)$.

وحيث أن $s^*-\frac{1}{n}<f(x_{n_r})<s^*+\frac{1}{n}$ فإن $f(x^*)=\lim_{n\to\infty}f(x_{n_r})=s^*$.

وهكذا نحصل على $f(x^*)\ge f(x)$ لكل $x\in I$، أي أن $f(x^*)$ قيمة عظمى للدالة f على I.

2) بالمثل يمكن إثبات أن توجد $x_*\in I$ يكون للدالة f عندها قيمة صغرى هي $f(x_*)$.
(تفاصيل البرهان متروكة كتمرين).

نظرية(9):(وجود جذر للدالة المتصلة)

إذا $I=[a,b]$ و $f:I\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على I، وإذا $f(a)f(b)<0$ فإنه توجد $c\in(a,b)$ بحيث $f(c)=0$.

البرهان: في الحالة عندما $f(a)<0<f(b)$ (الحالة عندما $f(a)>0>f(b)$ تناقش بالمثل.)
سوف نقوم بتكوين متتابعة من الفترات المتداخلة، ومن ثم نضمن وجود نقطة c تنتمي إلى كل من هذه الفترات ونبين أن $f(c)=0$.

اجعل $I_1=[a_1,b_1]$ حيث $a_1=a, b_1=b$ واجعل ρ_1 هي نقطة منتصف I_1. فإذا $f(\rho_1)=0$ فإن $c=\rho_1$ ونتوقف. خلاف ذلك إذا $f(\rho_1)>0$ نضع $a_2=a_1, b_2=\rho_1$. وإذا $f(\rho_1)<0$ نضع

$a_2=\rho_1, b_2=b_1$. ومـــن ثـــم اجعـــل $I_2=[a_2,b_2]$ فيكـــون $I_2\subset I_1$ و $f(a_2)<0<f(b_2)$.

بالاستمرار في طريقة تنصيف المدى نحصل على متابعة الفترات المتداخلة $I_1\supseteq I_2\supseteq\ldots\supseteq I_k$

وفيها $f(a_k)<0<f(b_k)$ لكل $k\in\mathbb{N}$

وحيث أن هذه الفترات تكونت بتكرار التنصيف فإن طول الفترة I_n يساوي نصف طول الفترة I_{n-1} . وبالتالي فإن طول الفترة I_n هو $b_n-a_n=(b-a)/2^{n-1}$ لكل $n\in\mathbb{N}$. وحيث أن I_n فترات متداخلة مغلقة ومحدودة فإنه توجد $c\in\mathbb{R}$ بحيث $c\in I_n$ لكل $n\in\mathbb{N}$. أي أن $a_n\le c\le b_n$ ، ومن ثم لكل $n\in\mathbb{N}$ نحصل على $0\le c-a_n\le b_n-a_n=(b-a)/2^{n-1}$. وهكذا فإن $\lim_{n\to\infty}a_n=c$.

كذلك $0\le b_n-c\le b_n-a_n=(b-a)/2^{n-1}$ لكل $n\in\mathbb{N}$. وبالتالي $\lim_{n\to\infty}b_n=c$.

من جهة ثانية حيث أن f دالة متصلة على I فإن $f(a_n)\to f(c)$ عندما $n\to\infty$. وحيث أن $f(a_n)<0$ لكل n فإن $f(c)<0$. وكذلك $f(b_n)\to f(c)$ وحيث أن $f(b_n)>0$ لكل n فإن $f(c)>0$. وهكذا فإن هذا تناقض يقتضي أن $f(c)=0$.

مثال: إذا $f:[0,1]\to[0,1]$ متصلة فاثبت وجود $x_0\in[0,1]$ بحيث $f(x_0)=x_0$

ملاحظة: مثل هذه النقطة تسمى نقطة ثابتة.

الحل: عرف $g(x)=f(x)-x$ فتكون $g:[0,1]\to[0,1]$ دالة متصلة على $[0,1]$. فإذا $f(0)=0$ فإن $x_0=0$, وإذا $f(1)=1$ فإن $x_0=1$. خلاف ذلك إذا $f(1)\ne1, f(0)\ne0$ فإن $f(1)<1, f(0)>0$. وبالتالي $g(1)=f(1)-1<0$ و $g(0)=f(0)-0>0$. وبذلك توجد x_0 في $[0,1]$ بحيث $g(x_0)=0$ ومن ثم $f(x_0)=x_0$.

نظرية(10): **(نظرية بلزانو للقيمة البينية)**

إذا I فترة وإذا $f:I\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على I . فإذا $a,b\in I$ و $k\in\mathbb{R}$ بحيث $f(a)<k<f(b)$ فإنه توجد نقطة c في I بين a,b بحيث $f(c)=k$.

البرهان: بفرض أن $a<b$. عرف $g(x):=f(x)-k$ فنجد أن $g(a)<0<g(b)$.

وحسب نظرية (9) ستوجد نقطة c و $a<c<b$ بحيث $g(c)=0$. وبالتالي $f(c)=k$. وإذا $a>b$ عرف $h(x):=k-f(x)$ فتحقق $h(b)<0<h(a)$. ومن ثم توجد نقطة c و $b<c<a$ تحقق $0=h(c)=k-f(c)$ ، ومن ثم $f(c)=k$.

نتيجة: إذا $I:=[a,b]$ فترة مغلقة ومحدودة وإذا $f:I\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على I. فإذا $k\in\mathbb{R}$ بحيث $\inf f(I)\le k\le \sup f(I)$ فإنه توجد نقطة c في I بحيث $f(c)=k$.

البرهان: حيث أن I مغلقة ومحدودة و f متصلة على I فإن $f(I)$ محدودة، ومن ثم تصل f إلى قيمة قصوى على I ، أي توجد النقاط $c^*,c_*\in I$ بحيث $f(c^*)=\sup f(I),\ f(c_*)=\inf f(I)$. وبالتالي $f(c_*)\le k\le f(c^*)$

ومن ثم حسب نظرية بلزانو للقيمة البينية توجد $c\in I$ و $c_*<c<c^*$ يحقق $f(c)=k$.

نظرية(11): إذا I فترة و $f:I\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على I فإن $f(I)=\{f(x)\ ;\ x\in I\}$ فترة.

البرهان: لكل $\alpha,\beta\in f(I)$ بحيث $\alpha<\beta$ ستوجد $a,b\in I$ بحيث $\alpha=f(a),\ \beta=f(b)$. وحسب نظرية بلزانو للقيمة البينية لكل $k\in(\alpha,\beta)$ ستوجد $c\in I$ و $a<c<b$ يحقق $f(c)=k$. وحيث k اختيارية في (α,β) فإن $[\alpha,\beta]\subseteq f(I)$. وحيث أن α,β عناصر اختيارية في $f(I)$ فإن $f(I)$ فترة.

نظرية(12): إذا I فترة مغلقة ومحدودة وإذا $f:I\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على I فإن $f(I)=\{f(x)\ ;\ x\in I\}$ فترة مغلقة ومحدودة.

البرهان: حيث أن I فترة مغلقة ومحدودة فإنه وبحسب نظرية (7) تكون $f(I)$ محدودة. وبالتالي سيوجد $m,M\in\mathbb{R}$ بحيث $M=\sup f(I)$ و $m=\inf f(I)$.

وحسب نظرية (8) فإن $m,M\in f(I)$. وبالتالي $f(I)\subseteq[m,M]$. وحسب النتيجة التالية لنظرية بلزانو للقيمة البينية فإنه لكل $k\in[m,M]$ يوجد $c\in I$ بحيث $f(c)=k$. وعليه $k\in f(I)$ هذا يعنى أن $[m,M]\subseteq f(I)$. وهكذا يكون $f(I)=[m,M]$.

تمارين:

1) إذا $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة متصلة بحيث $f(x)>0$ لكل $x\in[a,b]$ فاثبت أنه يوجد $0<\alpha\in\mathbb{R}$ بحيث $\alpha\le f(x)$ لكل $x\in[a,b]$.

الحل: حيث أن $I=[a,b]$ فترة مغلقة ومحدودة فإن $f(I)$ فترة مغلقة ومحدودة. وبالتالي يوجد α في $\mathbb{R}$ بحيث $\alpha=\inf f(I)$. وحيث أن $f(I)$ فترة مغلقة فإن $\alpha\in f(I)$ ومن ثم $0<\alpha$.

2) إذا $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ دوال متصلة على $I=[a,b]$ وإذا $A=\{x\in I; f(x)=g(x)\}$ فاثبت أنه إذا (x_n) متتابعة في A تتقارب إلى x_0 فإن $x_0\in A$.

الحل: إذا (x_n) متتابعة في A تتقارب إلى x_0 وحيث أن $A\subseteq I$ و I فترة مغلقة ومحدودة فإن $x_0\in I$. وحيث أن f,g دوال متصلة على I فإن $(f(x_n))$ تتقارب إلى $f(x_0)$ و $(g(x_n))$ تتقارب إلى $g(x_0)$. وحيث أن $x_n\in A$ لكل n فإن $f(x_n)=g(x_n)$ لكل n. وبالتالي فإن $f(x_0)=g(x_0)$. ومن ثم $x_0\in A$.

3) إذا $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على $I=[a,b]$ وإذا لكل $x\in I$ توجد $y\in I$ بحيث $|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(x)|$ فاثبت أنه يوجد $c\in I$ بحيث $f(c)=0$.

الحل: إذا (x_n) متتابعة في I بحيث $|f(x_{n+1})|\le\frac{1}{2}|f(x_n)|$ لكل n فإن $|f(x_{n+1})|\le\frac{1}{2^n}|f(x_1)|$ وبالتالي فإن $f(x_n)\to 0$.

وحيث أن I محدودة و $x_n\in I$ لكل n فإن (x_n) متتابعة محدودة ومن ثم توجد (x_{n_r}) متتابعة جزئية تقاربية إلى c في I لأن I مغلقة. وحيث أن f دالة متصلة و $x_{n_r}\to c$ فإن $f(x_n)\to f(c)$. وهكذا فإن $f(c)=0$.

4) بين أن كل كثيرة حدود من درجة فردية ذات معاملات حقيقية يكون لها جذر حقيقي واحد على الأقل.

الحل: اجعل $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ كثيرة حدود من درجة n و n عدد فردي. وبالتالي فإن $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n=\pm\infty$. فإذا $a_n>0$ فإن $\lim\limits_{x\to\pm\infty}P_n(x)=\pm\infty$. وإذا $a_n<0$ فإن $\lim\limits_{x\to\pm\infty}P_n(x)=\mp\infty$. وبالتالي $-\infty<P_n(x)<+\infty$ لكل $x\in\mathbb{R}$. وحيث أن $P_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ سيوجد a,b في $\mathbb{R}$ بحيث $-\infty<P_n(a)<0<P_n(b)<+\infty$، ومن ثم يوجد $c\in(a,b)$ بحيث $P_n(c)=0$.

5) إذا $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ وإذا $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$. فاثبت أن f محدودة على $\mathbb{R}$ وتصل إلى قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) على $\mathbb{R}$. وأعطي مثال يبين أن مثل هذه الدالة لا تصل بالضرورة إلى قيمة عظمى وقيمة صغرى.

الحل: إذا $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ متصلة على $\mathbb{R}$ بحيث فإنه لكل (x_n) متتابعة في $\mathbb{R}$ بحيث $x_n\to\pm\infty$ فإن $f(x_n)\to 0$. وبالتالي فإن $(f(x_n))$ متتابعة محدودة. وهذا يعني وجود عدد $M>0$ بحيث $|f(x_n)|<M$ لكل x_n.

وحيث أن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ فإنه لكل $x\in\mathbb{R}$ و $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث

$$|f(x)|\le|f(x)-f(x_n)|+|f(x_n)|<M$$

لكل x_n في الجوار $V_\delta(x)$.

وحيث أن $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ فإنه لكل $M>0$ معطى يوجد جوار $V_\delta(0)$ بحيث $f(x)\ge 0$ أو $f(x)\le 0$ لكل x في الجوار $V_\delta(0)$، أي أن f تصل إلى قيمة قصوى على $\mathbb{R}$.

مثال: الدالة $f(x)=\frac{1}{x^2}$ تحقق $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}=0$ و $\frac{1}{x^2}\ge 0$ لكل $0\ne x\in\mathbb{R}$. هذه الدالة تصل فقط إلى قيمة صغرى.

6) إذا $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$. اثبت أنه إذا $x_0\in\mathbb{R}$ بحيث $f(x_0)<\beta$ فإنه يوجد $\delta>0$ بحيث $f(x)<\beta$ لكل x الجوار $V_\delta(x_0)$.

الحل: عرف $g(x)=\beta-f(x)$ فنجد أن $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ وأن $g(x_0)>0$.

ومن ثم فإن $\lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$. وبالتالي للعدد $\varepsilon=\frac{1}{2}g(x_0)$ يوجد $\delta>0$ بحيث $|g(x)-g(x_0)|<\frac{1}{2}g(x_0)$ لكل x الجوار $V_\delta(x_0)$. ومن ذلك نحصل على $0<\frac{1}{2}g(x_0)<g(x)$، ومن ثم $f(x)<\beta$ لكل x الجوار $V_\delta(x_0)$.

7) إذا $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بحيث $f(x)=x^2$ لكل x في $\mathbb{R}$ اختبر تحت تأثير f صورة كل فترة مفتوحة(مغلقة)

8) أعطيت $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على الفترة $[0,1]$ و $f(x)\in\mathbb{Q}$ لكل $x\in[0,1]$ فاثبت أن f دالة ثابتة القيمة.

9) إذا $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (ليست بالضرورة متصلة على $[a,b]$) وإذا لكل x في $[a,b]$ يوجد جوار $V_{\delta_x}(x)$ بحيث f دالة محدودة على $V_{\delta_x}(x)$. فاثبت أن f دالة محدودة على $[a,b]$.

الحل: افرض على العكس أن f غير محدودة على $I=[a,b]$ فإنه لكل $n\in\mathbb{N}$ يوجد $x_n\in I$ بحيث $|f(x_n)|>n$. وحيث أن I مغلقة ومحدودة فإن المتتابعة (x_n) محدودة ومن ثم توجد متتابعة جزئية (x_{n_r}) تتقارب إلى x_0 في I. من جهة ثانية للعدد x_0 يوجد $\delta_x>0$ بحيث f دالة محدودة على الجوار $V_{\delta_x}(x_0)$. وبالتالي يوجد $M>0$, $N\in\mathbb{N}$ بحيث $|f(x_{n_r})|<M$ لكل $n_r\geq N$. وهذا يناقض كون $|f(x_n)|>n$ لكل n. هذا التناقض يؤدي إلى أن محدودة على I.

10) إذا $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على الفترة (a,b) وإذا لكل $x\in(a,b)$ يوجد $\delta_x>0$ بحيث f محدودة على الجوار $V_{\delta_x}(x)$ فاثبت بمثال أن f ليست بالضرورة محدودة على الفترة (a,b).

الحل: **الدالة** $f(x)=1/x$ **متصلة على الفترة** $J=(0,1)$، **ولكن** $f(J)=(1,\infty)$ **غير محدودة.**

الاتصال المنتظم UNIFORM CONTINUITY

إذا $A \subseteq \mathbb{R}$ و $f: A \to \mathbb{R}$ فإن f دالة متصلة عند c في A يعني أنه لكل معطى $\varepsilon > 0$ يوجد $0 < \delta = \delta(\varepsilon, c)$ بحيث $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ لكل x تحقق $|x - c| < \delta$. بوجه عام فإن العدد δ يعتمد على كل من ε, c فمثلا للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ متصلة على المجموعة $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ ولكل c في A فإن $f(x) - f(c) = \frac{c - x}{cx}$. ولكل معطى $\varepsilon > 0$ يوجد $0 < \delta = \min\left\{\frac{1}{2}|c|, \frac{1}{2}c^2\varepsilon\right\}$. وحيث أنه لكل x تحقق $|x - c| < \delta$ فإن $|x - c| < \frac{1}{2}|c|$ ومنها نجد أن $|x| > \frac{1}{2}|c|$ وبالتالي فإن $|f(x) - f(c)| < \frac{2}{c^2}|x - c|$

من جهة ثانية لدينا $|x - c| < \frac{1}{2}c^2\varepsilon$. وهكذا فإن $|f(x) - f(c)| < \frac{2}{c^2}\left(\frac{1}{2}c^2\varepsilon\right) = \varepsilon$

لكل $x \in A$ تحقق $|x - c| < \delta$. واضح من هذا المثال أنه عند دراسة الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ عند كل نقطة في A فإن الصيغة السابقة للعدد δ لا تحدد قيمة واحدة تصلح لكل $c \in A$ لأن $\inf\{\delta(\varepsilon, c); c \in A\} = 0$. بينما للدالة $f(x) = x$ المتصلة على $\mathbb{R}$ نجد أنه لكل $c \in \mathbb{R}$ ولكل معطى $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta = \varepsilon$ بحيث $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ لكل x تحقق $|x - c| < \delta$. أي أن العدد δ هذه المرة يعتمد فقط على ε. هذا يدفعنا لدراسة هذه الحالة للدوال المتصلة.

تعريف(5): إذا $A \subseteq \mathbb{R}$ يقال للدالة $f: A \to \mathbb{R}$ أنها متصلة اتصال منتظم على A إذا لكل معطى $\varepsilon > 0$ يوجد $0 < \delta(\varepsilon)$ بحيث $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ لكل x, c في A يحققان $|x - c| < \delta$.

يلاحظ أن الاتصال المنتظم يعرف على مجموعة. وأنه إذا f دالة متصلة بانتظام على مجموعة A فإن f متصلة عند كل نقطة في A، وعكس ذلك ليس بالضرورة صحيح على وجه العموم فمثلا الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ متصلة عند كل عدد $x > 0$ وهي غير متصلة بانتظام على المجموعة $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. النظرية التالية توضح معيار عدم الاتصال المنتظم.

نظرية(13): إذا $f: A \to \mathbb{R}$ دالة فإن الجمل التالية متكافئة

1) الدالة f غير متصلة بانتظام على المجموعة A

2) يوجد $\varepsilon_0>0$ بحيث لكل $\delta>0$ يوجد $x_\delta,\ c_\delta$ في A يحققان $|x_\delta-c_\delta|<\delta$ و $|f(x_\delta)-f(c_\delta)|\geq\varepsilon_0$

3) يوجد $\varepsilon_0>0$ وتوجد (x_n) و (c_n) متتابعتان في A بحيث $\lim_{n\to\infty}(x_n-c_n)=0$ و $|f(x_n)-f(c_n)|\geq\varepsilon_0$.

البرهان: 1)$\Leftarrow$ 2) بحسب التعريف فإذا f غير متصلة بانتظام على A سيوجد $\varepsilon_0>0$ بحيث لكل $\delta>0$ يوجد $x_\delta,\ c_\delta$ في A يحققان $|x_\delta-c_\delta|<\delta$ و $|f(x_\delta)-f(c_\delta)|\geq\varepsilon_0$.

2) $\Leftarrow$ 3) لأنه بصحة2) يوجد $\varepsilon_0>0$ ولكل $n\in\mathbb{N}$ يوجد x_n, c_n في A بحيث $|x_n-c_n|<\frac{1}{n}$ و $|f(x_n)-f(c_n)|\geq\varepsilon_0$. ومن ثم يوجد $\varepsilon_0>0$ و $(x_n),(c_n)$ متتابعات في A بحيث $\lim_{n\to\infty}(x_n-c_n)=0$ و $|f(x_n)-f(c_n)|\geq\varepsilon_0$.

والآن نفرض على العكس من 1) أن f متصلة بانتظام على A. ولكل معطى $\varepsilon>0$ يوجد $0<\delta=\delta(\varepsilon)$ بحيث $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$ لكل x تحقق $|x-c|<\delta$.

فإذا 3) صحيحة فإنه للعدد δ يوجد $K\in\mathbb{N}$ بحيث $|x_n-c_n|<\delta$ لكل $n\geq K$. وبالتالي $|f(x_n)-f(c_n)|<\varepsilon$ لكل $n\geq K$ ولكل معطى $\varepsilon>0$. وهذا يناقض أنه يوجد $\varepsilon_0>0$ بحيث $|f(x_n)-f(c_n)|\geq\varepsilon_0$ لكل $n\in\mathbb{N}$. هذا التناقض يؤدي إلى أنه بصحة3) تكون1) صحيحة. وهكذا فإن3) $\Leftarrow$ 1).

أمثلة:

1) بين أن الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ غير متصلة بانتظام على المجموعة $A=\{x\in\mathbb{R} : x>0\}$.

الحل: اجعل $x_n=\frac{1}{n},\ c_n=\frac{1}{n+1}$ لكل $n\in\mathbb{N}$ نجد أن $x_n, c_n\in A$ لكل n وأن $\lim_{n\to\infty}(x_n-c_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}=0$. كذلك واضح أن $|f(x_n)-f(c_n)|=1$ لكل n. وبالتالي

توجد (x_n) و (c_n) متتابعتان في A بحيث $\lim_{n\to\infty}(x_n-c_n)=0$ ولأي $\varepsilon_0\in(0,1)$ فإن $|f(x_n)-f(c_n)|\ge\varepsilon_0$.

2) ادرس الاتصال المنتظم للدالة $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ على الفترة $(0,\infty)$.

الحل: رغم أن الدالة متصلة f على الفترة $(0,\infty)$ غير أنها غير متصلة اتصال منتظم على هذه الفترة وسوف نناقش مثل هذه الحالة لاحقا. ولإثبات أن f غير متصلة اتصال منتظم على $(0,\infty)$ نعتبر المتتابعتان $(x_n)=\left(\frac{1}{2n\pi}\right)$ و $(c_n)=\left(\frac{2}{(2n+1)\pi}\right)$. واضح أن $\lim_{n\to\infty}(x_n-c_n)=0$ ولكل $n\in\mathbb{N}$ فإن $f(x_n)=1, f(c_n)=0$. وبالتالي $|f(x_n)-f(c_n)|=1$، ومن ثم لكل $0<\varepsilon\le 1$ فإن $|f(x_n)-f(c_n)|\ge\varepsilon$. وبالتالي فإن f غير متصلة اتصال منتظم على $(0,\infty)$.

3) بين أن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بحيث $f(x)=x^2$ لكل $x\in\mathbb{R}$ غير متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$

الحل: لدينا (x_n) و (c_n) متتابعتان في $\mathbb{R}$ بحيث $x_n=n,\ c_n=n+\frac{1}{n}$ لكل $n\in\mathbb{N}$ تحققان

$\lim_{n\to\infty}(x_n-c_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ ولكل $n\in\mathbb{N}$ فإن

$$|f(x_n)-f(c_n)|=\left|\left(n+\frac{1}{n}\right)^2-n^2\right|=2+\frac{1}{n^2}>2$$

ومن ثم $f(x)=x^2$ دالة غير متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

نظرية(14): إذا I فترة مغلقة ومحدودة وإذا $f:I\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على I فإن f دالة متصلة اتصال منتظم على I.

البرهان: بفرض أن f غير متصلة بانتظام على I سيوجد (x_n) و (c_n) متتابعتان في I ويوجد $0<\varepsilon_0$ بحيث $|f(x_n)-f(c_n)|\ge\varepsilon_0$ لكل $n\in\mathbb{N}$ و $|x_n-c_n|<\frac{1}{n}$.

وحيث أن I مغلقة ومحدودة ستوجد $\left(c_{n_k}\right)$ و $\left(x_{n_r}\right)$ متتابعتان جزئيتان تتقاربان في I. فإذا $x_{n_r} \to z$ فإن $\left|c_{n_k} - z\right| \le \left|c_{n_k} - x_{n_r}\right| + \left|x_{n_r} - z\right| < \frac{2}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وبالتالي $c_{n_k} \to z$.

وحيث أن f متصلة على I فإن $\lim_{n\to\infty}\left(f\left(x_{n_r}\right) - f\left(c_{n_k}\right)\right) = f(z) - f(z) = 0$. هذا يعني أنه لكل معطى $\varepsilon > 0$ يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث $\left|f(x_n) - f(c_n)\right| < \varepsilon$ لكل $n \ge n_0$. وهذا يناقض كون $\left|f(x_n) - f(c_n)\right| \ge \varepsilon_0$ لكل $n \in \mathbb{N}$. هذا التناقض يؤدي إلى أن f متصلة بانتظام على I.

مثال(4): أعطيت $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = \sqrt{x}$ فاثبت أن f متصلة بانتظام على $I = [0,2]$.

الحل: يكفي إثبات أن f متصلة على I، وحيث أن I فترة مغلقة ومحدودة فإن f متصلة بانتظام على I.

تعريف(6): "دوال ليبشتز Lipschitz Functions"

إذا $A \subseteq \mathbb{R}$ يقال للدالة $f : A \to \mathbb{R}$ أنها تحقق شرط ليبشتز على A إذا وجد الثابت $0 < K$ بحيث $\left|f(x) - f(c)\right| \le K\left|x - c\right|$ لكل x, c في A.

أمثلة: 1) بين أن الدالة $f(x) = x^2$ بحيث $x \in [0,b]$ تحقق شرط ليبشتز على $[0,b]$.

الحل: لكل x, c في $[0,b]$ فإن $|x + c| \le 2b$. ومن ثم يوجد $K = 2b$ بحيث لكل x, c في $[0,b]$ نحصل على $\left|f(x) - f(c)\right| = \left|x^2 - c^2\right| = |x + c||x - c| \le K|x - c|$.

2) إذا $f(x) = \sqrt{x}$ لكل $1 \le x$ فاثبت أن الدالة f تحقق شرط ليبشزز على الفترة $[1,\infty)$.

الحل: لكل x, c في $[1,\infty)$ فإن $\sqrt{x} + \sqrt{c} \ge 2$. وبالتالي يوجد $K = \frac{1}{2}$ بحيث لكل x, c في $[1,\infty)$ يكون $\left|f(x) - f(c)\right| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{c}\right| = \frac{|x - c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \le K|x - c|$.

3) اثبت أن الدالة $g(x) = \sqrt{x}$ بحيث $x \in [0,2]$ لا تحقق شرط ليبشزز على $[0,2]$.

الحل: بفرض أن $|g(x)-g(0)|\le K|x-0|$ فإن $\sqrt{x}\le Kx$. ومنها $\frac{1}{\sqrt{x}}\le K$ لكل x في $[0, 2]$. فإذا $x_n=\frac{1}{n^2}$ فإن $x_n\in[0, 2]$ لكل $n\in\mathbb{N}$، ومن ثم $n\le K$ لكل $n\in\mathbb{N}$. وهذا يناقض كون المجموعة $\mathbb{N}$ غير محدودة من أعلى.

نظرية(15): إذا $f: A\to\mathbb{R}$ دالة تحقق شرط ليبشتز على المجموعة A الجزئية من $\mathbb{R}$ فإن f دالة متصلة اتصال منتظم على A.

البرهان: إذا f تحقق شرط ليبشتز سيوجد $0<K$ بحيث $|f(x)-f(c)|\le K|x-c|$ لكل x, c في A. وإذا $\varepsilon>0$ معطى سيوجد $\delta=\frac{\varepsilon}{K}$. ولكل x, c في A بحيث $|x-c|<\delta$ فإن $|f(x)-f(c)|\le K|x-c|<K\frac{\varepsilon}{K}=\varepsilon$. أي أن f دالة متصلة اتصال منتظم على A.

أمثلة: 1) اثبت أن الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ متصلة بانتظام على الفترة $A=[a, \infty)$ لأي $0<a$.

الحل: لكل x, c في A فإن $a\le x, a\le c$ و $|f(x)-f(c)|\le\frac{1}{a^2}|x-c|$. وبالتالي فإن f تحقق شرط ليبشتز على A بثابت $K=\frac{1}{a^2}$، ومن ثم فإن f متصلة اتصال منتظم على A

2) أعطيت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ لكل $x\in\mathbb{R}$، فاثبت أن f دالة متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

الحل: لكل x, c في $\mathbb{R}$ فإن

$$|f(x)-f(c)|=\left|\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+c^2}\right|=\left|\frac{c^2-x^2}{(1+x^2)(1+c^2)}\right|$$
$$\le\frac{|x|+|c|}{(1+x^2)(1+c^2)}|x-c|\le 2|x-c|$$

وهكذا فإن الدالة f تحقق شرط ليبشتز(بثابت $K=2$) على $\mathbb{R}$. وبالتالي فإن f دالة متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

3) ادرس الاتصال المنتظم للدالة $f(x)=\sqrt{x}$ على الفترة $[0,\infty)$.

الحل: اجعل $I=[0,2]$ و $J=[1,\infty)$ فإن $[0,\infty)=I\cup J$. وحيث أن $f(x)=\sqrt{x}$ دالة متصلة على I وحيث أن I فترة مغلقة ومحدودة فإن f متصلة بانتظام على I.

ولكل x في J فإن $\sqrt{x}\geq 1$. وبالتالي إذا x, c في J فإن

$$\left|f(x)-f(c)\right|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{c}\right|=\frac{|x-c|}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}\leq\frac{1}{2}|x-c|$$

أي أن f تحقق شرط ليبشتز (بثابت $K=\frac{1}{2}$) على الفترة J. وهكذا فإن f متصلة بانتظام على $[0,\infty)=I\cup J$.

ملاحظة: ليس كل دالة متصلة اتصال منتظم على مجموعة A تحقق شرط ليبشتز على A. مثال ذلك الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ متصلة اتصال منتظم على الفترة $[0,1]$ ولا تحقق شرط ليبشتز على هذه الفترة.

التمديد المتصل CONTINUOUS EXTENSION

نظرية(16): الدالة f تكون متصلة اتصال منتظم على الفترة (a,b) إذا وفقط إذا أمكن تعريف الدالة f عند نقطتي النهاية a,b بحيث تكون الدالة الناتجة متصلة على الفترة $[a,b]$.

البرهان: $\Rightarrow$ إذا أمكن تعريف الدالة f عند نقطتي النهاية a, b بحيث تكون الدالة الناتجة متصلة على الفترة $[a,b]$ فإنها تكون متصلة بانتظام على $[a,b]$. وبالتالي f دالة القصر على الفترة (a,b) تكون متصلة بانتظام على (a,b).

$\Leftarrow$ بفرض أن f دالة متصلة اتصال منتظم على (a,b) فإذا (x_n) متتابعة في (a,b) تتقارب إلى a فإن $(f(x_n))$ متتابعة تقاربية. اجعل $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=L_a$ حيث $L_a\in\mathbb{R}$ فإذا (c_n) متتابعة اخرى في (a,b) تتقارب إلى a فإن $\lim_{n\to\infty}(x_n-c_n)=0$.

وحيث أن f متصلة بانتظام على (a,b) فإنه لكل معطى $0<\varepsilon$ يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث $\left|f(x_n)-f(c_n)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ لكل $n \geq n_0$. وبالتالي

$$\left|f(c_n)-L_a\right| \leq \left|f(x_n)-f(c_n)\right|+\left|f(x_n)-L_a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

أي أن $\lim_{n\to\infty} f(c_n)=L_a$ لكل (c_n) متتابعة في (a,b) تقاربية إلى a.

بالمثل يوجد L_b في $\mathbb{R}$ بحيث $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=L_b$ لكل (x_n) متتابعة في (a,b) تقاربية إلى b. وبوضع $f(a)=L_a, f(b)=L_b$ تكون f متصلة عند كل من a,b. وحيث أنها متصلة بانتظام على (a,b) فإن f دالة متصلة على $[a,b]$.

أمثلة: 1) الدالة $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ متصلة على الفترة $(0,b]$ لكل عدد حقيقي $0<b$. وحيث أن $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$ فإن التمديد

$$F(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & ; \quad x>0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$$

متصل على $[0,b]$. وبالتالي فإن f دالة متصلة بانتظام على $(0,b]$.

2) الدالة $g(x)=\sin\frac{1}{x}$ متصلة على الفترة $(0,b]$ لكل عدد حقيقي $0<b$. وحيث أن $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ غير موجودة فإن g ليس لها تمديد متصل على $[0,b]$ وبالتالي فإن g ليست متصلة اتصال منتظم على $(0,b]$.

تمارين:

1) إذا $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ دالة معرفة بالقاعدة $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ بين بطريقتين مختلفتين أن f غير متصلة اتصال منتظم على الفترة $(0,\infty)$.

الحل(1): اجعل $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ و $c_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$ لكل $n \in \mathbb{N}$. فإن $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - c_n) = 0$ وأن

$$\left|f(x_n) - f(c_n)\right| = \left|\sin(2n\pi) - \sin\frac{(2n+1)\pi}{2}\right| = 1$$

أي أنه لكل $\varepsilon \in (0,1]$ فإن $\left|f(x_n) - f(c_n)\right| \geq \varepsilon$. وبالتالي فإن f ليست متصلة بانتظام على $(0, \infty)$.

الحل(2): حيث أن $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ غير موجودة فإنه لا يوجد تمديد متصل على $[0,\infty)$ للدالة f وبالتالي فإن f ليست متصلة بانتظام على $(0, \infty)$.

2) أعطيت $f, g : A \to \mathbb{R}$ دوال متصلة بانتظام على المجموعة $A \subseteq \mathbb{R}$. فاثبت أن دالة المجموع $f + g$ متصلة اتصال منتظم على A.

الحل: إذا f, g دوال متصلة اتصال منتظم على A فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ بحيث $\left|f(x) - f(c)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل x, c في A يحققان $|x - c| < \delta_1$ و $\left|g(x) - g(c)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل x, c في A يحققان $|x - c| < \delta_2$. فإذا $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ فإنه لكل x, c في A يحققان $|x - c| < \delta$ نجد أن

$$\left|(f+g)(x) - (f+g)(c)\right| \leq \left|f(x) - f(c)\right| + \left|g(x) - g(c)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

أي أن الدالة $f + g$ متصلة اتصال منتظم على A.

3) إذا $f, g : A \to \mathbb{R}$ متصلة بانتظام على المجموعة $A \subseteq \mathbb{R}$. وإذا f, g دوال محدودة على A فاثبت أن دالة حاصل الضرب fg متصلة اتصال منتظم على A.

الحل: حيث أن كل من f, g دالة محدودة على A سيوجد $M_f > 0, M_g > 0$ في $\mathbb{R}$ بحيث $\left|f(x)\right| < M_f, \left|g(x)\right| < M_g$ لكل x في A. وحيث أن f, g دوال متصلة بانتظام على A فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ بحيث $\left|f(x) - f(c)\right| < \frac{\varepsilon}{2M_f}$ لكل x, c في A يحققان

$|x-c|<\delta_1$ و $|g(x)-g(c)|<\frac{\varepsilon}{2M_g}$ لكل x, c في A يحققان $|x-c|<\delta_2$. فإذا $\delta=\max\{\delta_1, \delta_2\}$ فإنه لكل x, c في A يحققان $|x-c|<\delta$ نجد أن

$$\begin{aligned}|(fg)(x)-(fg)(c)| &\le |g(x)||f(x)-f(c)|+|f(x)||g(x)-g(c)| \\ &< M_f\frac{\varepsilon}{2M_f}+M_g\frac{\varepsilon}{2M_g}=\varepsilon\end{aligned}$$

أي أن الدالة fg متصلة اتصال منتظم على A.

4) بين أن كل من الدالتين $f(x)=x$ و $g(x)=\sin x$ متصلة اتصال منتظم على $\mathbb{R}$. وأن دالة الضرب $fg(x)=x\sin x$ غير متصلة اتصال منتظم على $\mathbb{R}$.

الحل: لكل $\varepsilon>0$ يوجد $0<\delta=\varepsilon$ ولكل x, c في $\mathbb{R}$ يحققان $|x-c|<\delta$ فإن

$$\begin{aligned}&|f(x)-f(c)|=|x-c|<\delta=\varepsilon, \\ &|g(x)-g(c)|=|\sin x-\sin c|\le|x-c|<\delta=\varepsilon\end{aligned}$$

أي أن الدوال f, g متصلة اتصال منتظم على $\mathbb{R}$.

بفرض أن الدالة fg متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$ فإنه لكل $\varepsilon>0$ ولكل $(x_n), (c_n)$ متتابعتين في $\mathbb{R}$ تحققان $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-c_n)=0$ يكون $|(fg)(x_n)-(fg)(c_n)|<\varepsilon$. من جهة ثانية إذا $x_n=n+\frac{1}{n}, c_n=n$ لكل $n\in\mathbb{N}$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-c_n)=0$ ولكن

$$\begin{aligned}|(fg)(x_n)-(fg)(c_n)| &= \left|\left(n+\frac{1}{n}\right)\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)-n\sin n\right| \\ &\le n\left|\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)-\sin n\right|+\frac{1}{n}\le 1+\frac{1}{n}\end{aligned}$$

وهذا يناقض كون $|(fg)(x_n)-(fg)(c_n)|<\varepsilon$ لكل $n\in\mathbb{N}$. هذا التناقض يؤدي إلى أن الدالة fg ليست متصلة اتصال منتظم على $\mathbb{R}$.

5) أعطيت $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دوال متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$. فاثبت أن دالة التحصيل $f\circ g$ متصلة اتصال منتظم على $\mathbb{R}$.

الحل: حيث أن f دالة متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$ فلكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta_f>0$ بحيث $|f(y)-f(b)|<\varepsilon$ لكل $y,b\in\mathbb{R}$ تحققان $|y-b|<\delta_f$. وحيث أن g دالة متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$ فإنه للعدد $\delta_f>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث $|g(x)-g(c)|<\delta_f$ لكل x,c في $\mathbb{R}$ تحققان $|x-c|<\delta$. وهكذا لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث لكل x,c في $\mathbb{R}$ تحققان $|x-c|<\delta$ يكون $|(f\circ g)(x)-(f\circ g)(c)|=|f(g(x))-f(g(c))|<\varepsilon$. وبالتالي فإن دالة التحصيل $f\circ g$ متصلة اتصال منتظم على $\mathbb{R}$.

6) إذا $f:A\to\mathbb{R}$ دالة متصلة بانتظام على A وإذا $|f(x)|\geq k>0$ لكل $x\in A$. فاثبت أن الدالة $\frac{1}{f}$ متصلة بانتظام على A.

الحل: عرف الدالة $g(x)=\frac{1}{x}$ لكل x بحيث $|x|\in[k,\infty)$ تجد أن

$$|g(x)-g(c)|\leq\frac{1}{k^2}|x-c|$$

أي أن g دالة تحقق شرط ليبشتز بثابت $\frac{1}{k^2}$ على الفترة $[k,\infty)$، ومن ثم فهي دالة متصلة اتصال منتظم على هذه الفترة. فإذا $f:A\to\mathbb{R}$ دالة متصلة بانتظام على $A\subseteq\mathbb{R}$ وحيث أن $|f(x)|\geq k>0$ لكل $x\in A$ فإن $f(A)\subseteq[k,\infty)$.

وحيث أن $(g\circ f)(x)=\frac{1}{f(x)}$ لكل $x\in A$ فإن دالة التحصيل $g\circ f:A\to\mathbb{R}$ متصلة اتصال منتظم على A.

7) إذا $A\subseteq\mathbb{R}$ مجموعة محدودة وإذا $f:A\to\mathbb{R}$ دالة متصلة بانتظام على A. فاثبت أن f دالة محدودة على A.

الحل: افرض العكس بأن f دالة غير محدودة على A فإنه لكل $n\in\mathbb{N}$ يوجد $x_n\in A$ بحيث $|f(x_n)|\geq n$. وحيث أن A مجموعة محدودة و $x_n\in A$ لكل $n\in\mathbb{N}$ فإن (x_n) متتابعة محدودة ومن ثم لها متتابعة جزئية (x_{n_r}) تقاربية. وحيث أن f دالة متصلة اتصال منتظم على A فإن

المتتابعة $\left(f\left(x_{n_r}\right)\right)$ تقاربية وبالتالي فهي محدودة. هذا يناقض كون $\left|f\left(x_n\right)\right| \geq n$ لكل $n \in \mathbb{N}$.
وهذا التناقض يؤدي إلى أن f دالة محدودة على A.

8) إذا f دالة متصلة على الفترة $[0,\infty)$ وإذا f متصلة اتصال منتظم على الفترة $[a,\infty)$ لكل $0<a$. فاثبت أن f دالة متصلة اتصال منتظم على $[0,\infty)$.

الحل: إذا f دالة متصلة على الفترة $[0,\infty)$ فإنه لكل $0<a$ تكون f متصلة على الفترة المغلقة والمحدودة $[0,a]$ ومن ثم فهي متصلة اتصال منتظم على هذه الفترة. وحيث أن f متصلة اتصال منتظم على الفترة $[a,\infty)$ لكل $0<a$. فإن f متصلة اتصال منتظم على $[0,\infty)=[0,a]\cup[a,\infty)$.

9) إذا $A \subseteq \mathbb{R}$ وإذا $f: A \to \mathbb{R}$ دالة تحقق الخاصية: لكل $0<\varepsilon$ توجد $g_\varepsilon: A \to \mathbb{R}$ دالة متصلة بانتظام على A بحيث $\left|f(x)-g_\varepsilon(x)\right|<\varepsilon$ لكل x في A. فاثبت أن f متصلة اتصال منتظم على A.

الحل: حيث أن g_ε دالة متصلة اتصال منتظم على A فإنه لكل $0<\varepsilon$ يوجد $0<\delta(\varepsilon)$ فإن $\left|g_\varepsilon(x)-g_\varepsilon(c)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$ لكل x,c في A تحققان $|x-c|<\delta$. وحيث أنه لكل $0<\varepsilon$ ولكل x في A لدينا $\left|f(x)-g_\varepsilon(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$. وبالتالي لكل $0<\varepsilon$ يوجد $0<\delta(\varepsilon)$ ولكل x,c في A تحققان $|x-c|<\delta$ فإن

$$\left|f(x)-f(c)\right| \leq \left|f(x)-g_\varepsilon(x)\right|+\left|g_\varepsilon(x)-g_\varepsilon(c)\right|+\left|f(c)-g_\varepsilon(c)\right|<\varepsilon$$

وهذا يعني أن f دالة متصلة اتصال منتظم على A.

10) إذا $A \subseteq \mathbb{R}$ و $f: A \to \mathbb{R}$ دالة متصلة اتصال منتظم على A وإذا (x_n) متتابعة كوشي في A فاثبت أن $\left(f\left(x_n\right)\right)$ متتابعة كوشي في $\mathbb{R}$.

الحل: إذا f دالة متصلة اتصال منتظم على المجموعة A فإنه لكل $0<\varepsilon$ يوجد $0<\delta$ بحيث $\left|f(x)-f(c)\right|<\varepsilon$ لكل $x,c \in A$ يحققان $|x-c|<\delta$. فإذا (x_n) متتابعة كوشي في A فإنه

للعدد $\delta > 0$ يوجد $K(\delta) > 0$ بحيث $|x_m - x_n| < \delta$ لكل $m,n \in \mathbb{N}$ بحيث $m,n \geq K(\delta)$. وهكذا فـإن $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$ لكـل m,n بحيـث $m,n \geq K(\delta)$. أي أن المتتابعـة $(f(x_n))$ هـي متتابعة كوشي.

11) إذا $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالـة دوريـة متصلة علـى $\mathbb{R}$ فاثبت أن f دالـة محدودة ومتصلة بانتظـام على $\mathbb{R}$.

الحل: اجعل $0 < p$ دورة الدالة f أي أن $f(x+p) = f(x)$. إذا f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ فإن f تكون متصلة علـى الفترة $[0,p]$، ومن ثم تكون محدودة علـى $[0,p]$. وبالتـالي سيوجد $0 < M$ بحيث $|f(x)| < M$ لكل x في $[0,p]$. وحيث أن f دالة دورية فإنه لكل x في $\mathbb{R}$ يوجد عدد x_p في $[0,p]$ بحيث $f(x_p) = f(x)$. وبالتالي لكل x في $\mathbb{R}$ فإن $|f(x)| = |f(x_p)| < M$ أي أن f دالة محدودة على $\mathbb{R}$.

وحيث أن f متصـلة علـى $[-1,p+1]$ فإن f متصـلة بانتظـام علـى $[-1,p+1]$. بفرض أن f ليسـت متصـلة بانتظـام علـى $\mathbb{R}$ سـيوجد $\varepsilon_0 > 0$ بحيث لكـل $\delta > 0$ يوجـد x_δ, c_δ فـي $\mathbb{R}$ بحيث $|x_\delta - c_\delta| < \delta$ و $|f(x_\delta) - f(c_\delta)| \geq \varepsilon_0$.