جامعة جنوب الوادى

كلية التربية بالغردقة

بيانات الكتاب

الماده: (بحته ٥) نظريه المعادلات الجبريه

التخصص: رياضيات

الفرقه: الثانيه تربيه عام رياضيات

د. صالح عياد محمد عمران

السنه :٢٠٢١

كلية التربية بالغردقة – جامعة جنوب الوادى

رؤية الكلية

كلية التربية بالغردقة مؤسسة رائدة محلياً ودولياً فى مجالات التعليم ،والبحث العلمى ،وخدمة المجتمع ، بما يؤهلها للمنافسة على المستوى : المحلى ، والإقليمى ، والعالمى .

رسالة الكلية

تقديم تعليم مميز في مجالات العلوم الأساسية و إنتاج بحوث علمية تطبيقية للمساهمة فى التنمية المستدامة من خلال إعداد خريجين متميزين طبقا للمعايير الأكاديمية القومية، و تطوير مهارات و قدرات الموارد البشرية، و توفير خدمات مجتمعية وبيئية تلبي طموحات مجتمع جنوب الوادي، و بناء الشراكات المجتمعية الفاعلة.

نظرية المعادلات الجبرية Theory of Algebraic Equations

✓ **مفاهيم خاصة بالمعادلة الجبرية:**

العامل – المعامل – الجذر.

✓ **العناصر الأساسية في دراستنا لنظرية المعادلات الجبرية:**

القسمة بطريقة المعاملات المنفصلة – تحويل المعادلات – تكوين معادلة جبرية جذورها معلومة – بحث الجذور الموجبة والجذور السالبة والجذور الصحيحة والجذور الكسرية للمعادلات الجبرية ذات المعاملات الصحيحة – حذف الحد الثاني في معادلة جبرية معلومة – الحل الجبري للمعادلات الجبرية من الدرجة الثالثة والرابعة.

✓ **طريقـة القسـمة التركيبيـة (أو التحليليـة) أو طريقـة المعـاملات المنفصلة:**

لإيجاد خارج القسمة والباقي عند قسمة كثيرة الحدود:

$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$

على عامل الدرجة الأولى $x-\alpha$.

فإن خارج القسمة يكون عبارة عن كثيرة حدود من درجة $n-1$ ولتكن:

$q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\ldots+b_{n-1}$

وباقي القسمة R .

ويتم حساب المعاملات $b_0,b_1,b_2,\ldots,b_n$ والباقي R على النحو التالي:

α	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
		αb_0	αb_1	$\ldots$	αb_{n-2}	αb_{n-1}
	b_0	b_1	b_2	$\ldots$	b_{n-1}	R

وذلك بكتابة معاملات $p(x)$ في الصف الأول مع مراعاة أنه إذا كانت إحدى قوى x غير موجودة يُوضع صفر لمعاملها ، ويترك الصف الثاني خاليا مؤقتا ،

وفي الصف الثالث نكتب b_0 يساوي a_0 تحت a_0 ثم نضرب b_0 في α ونكتب حاصل الضرب αb_0 في الصف الثاني تحت a_1 ثم نجمعهما لنحصل على b_1 في الصف الثالث ، ثم نضرب b_1 في α ونكتب حاصل الضرب αb_1 في الصف الثاني تحت a_2 ثم نجمعهما لنحصل على b_2 في الصف الثالث ، وهكذا ... ،

فبذلك تتكون كثيرة الحدود:

$q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\ldots+b_{n-1}$

وهي خارج القسمة ، ويكون باقي القسمة $R=a_0+\alpha b_{n-1}$

مثال(1): باستخدام القسمة التركيبية أوجد خارج القسمة والباقي عند قسمة: $2x^5 - 28x^3 + 11x^2 + 64$ على $x+4$

الحل:

-4	2	0	-28	11	0	64
		-8	32	-16	20	-80
	2	-8	4	-5	20	-16

وبالتالي يكون خارج القسمة هو كثيرة الحدود: $2x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 5x + 20$
والباقي 16- .

مثال(2): بطريقة المعاملات المنفصلة أوجد خارج القسمة والباقي عند قسمة:

$$x^5 + 2x^4 - 9x^3 - 22x^2 + 8 \quad \text{على} \quad x^2 - x - 6$$

الحل: نحلل المقسوم عليه $x^2 - x - 6$ إلى عاملين من الدرجة الأولى $(x-3)(x+2)$

نقسم أولا على $x-3$ ثم نقسم خارج القسمة على $x+2$ كما يلي:

3	1	2	-9	-22	0	8
		3	15	18	-12	-36
-2	1	5	6	-4	-12	-28
		-2	-6	0	8	
	1	3	0	-4	-4	

فيكون خارج القسمة النهائي هو $x^3 + 3x^2 - 4$.

والباقي النهائي للقسمة يكون عبارة عن مجموع الباقي الأول وحاصل ضرب الباقي الثاني في العامل الأول المقسوم عليه أي يكون:

$$-28 + (-4)(x-3) = -4x - 16$$

(وللدلالة على صحة ذلك) حيث نلاحظ من عمليات القسمة السابقة أن:

$$\begin{aligned}
&(x-3)[x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 12] - 28 \\
&= (x-3)[(x+2)(x^3 + 3x^2 - 4) - 4] - 28 \\
&= (x-3)(x+2)(x^3 + 3x^2 - 4) - 4(x-3) - 28.
\end{aligned}$$

ومن ثم فإن الباقي النهائي للقسمة يكون $-28 + (-4)(x-3) = -4x - 16$

ملاحظة: يمكننا أن نقسم أولا على $x+2$ ثم نقسم خارج القسمة على $x-3$

وخارج القسمة النهائي والباقي النهائي للقسمة يكون هو نفسه (تحقق من ذلك؟).

▪ تحويل المعادلات:

المقصود بتحويل المعادلات هو إيجاد معادلة ترتبط جذورها بعلاقة معينة مع جذور معادلة أخرى معلومة. وفي بعض الأحيان بعد إجراء تحويل مناسب قد نتمكن من
حل المعادلة الجديدة الناتجة، وتبعا لذلك يمكننا الحصول على جذور المعادلة الأصلية.
والمعادلة الجديدة (المحولة) تكون من نفس درجة المعادلة الأصلية.
وفيما يلي بعض التحويلات حيث نفترض دائما أن المعادلة الأصلية المعلومة هي: $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n=0$

1-تحويل معادلة معلومة إلى معادلة أخرى جذورها تساوي جذور المعادلة المعلومة بإشارة مخالفة:

إذا كانت $P(x)=0$ معادلة جبرية معلومة فإن المعادلة التي جذورها تساوي جذور المعادلة المعلومة بإشارة مخالفة تكون هي $P(-x)=0$

مثال(3): أوجد المعادلة التي جذورها تساوي جذور المعادلة:
$x^5-10x^3+5x^2-x+2=0$
بإشارة مخالفة.

<u>الحل:</u> نضع $-x$ بدلا من x فتكون المعادلة المطلوبة هي:

$$(-x)^5-10(-x)^3+5(-x)^2-(-x)+2=0 \Rightarrow -x^5+10x^3+5x^2+x+2=0$$

أي $x^5-10x^3-5x^2-x-2=0$.

2-تحويل معادلة معلومة إلى معادلة أخرى جذورها تساوي مقلوب جذور المعادلة المعلومة:

إذا كانت $P(x)=0$ معادلة جبرية معلومة فإن المعادلة التي جذورها تساوي مقلوب جذور المعادلة المعلومة تكون هي $P(1/x)=0$.

مثال(4): أوجد المعادلة التي جذورها تساوي مقلوب جذور المعادلة:
$x^5-10x^3+5x^2-x+2=0$

<u>الحل:</u> نضع $1/x$ بدلا من x فتكون المعادلة المطلوبة هي:

$$(1/x)^5-10(1/x)^3+5(1/x)^2-(1/x)+2=0$$

وبالضرب في x^5 يكون $1-10x^2+5x^3-x^4+2x^5=0$ أي $2x^5-x^4+5x^3-10x^2+1=0$.

3-تحويل معادلة معلومة إلى معادلة أخرى جذورها تساوي جذور المعادلة المعلومة مضروبة في كمية ثابتة:

إذا كانت $P(x)=0$ معادلة جبرية معلومة فإن المعادلة التي جذورها تساوي جذور المعادلة المعلومة مضروبة في كمية ثابتة ولتكن k تكون هي $P(x/k)=0$.

مثال(5): أوجد المعادلة التي جذورها ثلاثة أمثال جذور المعادلة:

$x^3+4x^2-7x+6=0$

الحل: نضع $x/3$ بدلا من x فتكون المعادلة المطلوبة هي:

$(x/3)^3+4(x/3)^2-7(x/3)+6=0$

أي $x^3+12x^2-63x+162=0$.

مثال(6): أوجد المعادلة التي جذورها تكون نصف جذور المعادلة:

$2x^4-3x^3+x^2+4x=0$

الحل: نضع $2x$ بدلا من x فنحصل على المعادلة المطلوبة وهي:

$32x^4-24x^3+4x^2+8x=0.$

مثال(7): أوجد المعادلة التي تكون جذورها عشرة أمثال جذور المعادلة:

$x^4+7x^3-5x+8=0$

الحل: نضع $x/10$ بدلا من x فنحصل على المعادلة المطلوبة وهي:

$x^4+70x^3-5000x+80000=0.$

مثال(8): حول المعادلة $3x^4-5x^3+x^2-x+2=0$ إلى أخرى بحيث يكون معامل x^4 يساوي الواحد الصحيح ، ومعاملات الحدود الأخرى كلها أعداد صحيحة.

الحل: نقسم طرفي المعادلة على 3 فنحصل على:

$x^4-(5/3)x^3+(1/3)x^2-(1/3)x+(2/3)=0$

ثم نوجد المعادلة التي جذورها ثلاثة أضعاف جذور المعادلة السابقة وذلك بوضع $x/3$ بدلا من x فنحصل على المعادلة:

$(x/3)^4-(5/3)(x/3)^3+(1/3)(x/3)^2-(1/3)(x/3)+(2/3)=0$

وبالضرب في (3^4) نحصل على المعادلة المحولة المطلوبة وهي:

$x^4-5x^3+3x^2-9x+54=0.$

4-تحويل معادلة معلومة إلى معادلة أخرى جذورها تنقص (أو تزيد) عن جذور المعادلة المعلومة بمقدار ثابت:

إذا كانت $P(x)=0$ معادلة جبرية معلومة فإن المعادلة التي جذورها تنقص (تزيد) بمقدار α عن جذور المعادلة المعلومة تكون هي $P(x+\alpha)=0$ ($P(x-\alpha)=0$).

ولتحويل معادلة معلومة $P(x)=0$ إلى أخرى جذورها تنقص (تزيد) بمقدار α عن جذور المعادلة المعلومة – وبدلا من استخدام مفكوك ذات الحدين - نتبع ما يلي:

نقسم كثيرة الحدود $P(x)$ على العامل $x-\alpha$ (على العامل $x+\alpha$) قسمة متتالية بطريقة المعاملات المنفصلة حتى تنتهي عملية القسمة. فتكون المعادلة المطلوبة هي $q(x)=0$ حيث $q(x)$ هي كثيرة الحدود التي معاملاتها عبارة عن معامل أكبر قوى في كثيرة الحدود $p(x)$ وبواقي القسمة من أسفل إلى أعلى على الترتيب.

ويُرتب العمل كما في الأمثلة التالية:

مثــال(9): أوجـد المعادلـة التـي تـنقص جـذورها بمقـدار 4 عـن جـذور المعادلة:

$$x^4-6x^3+35x-17=0$$

<u>الحل:</u> نقسم كثيرة الحدود $x^4-6x^3+35x-17$ قسمة متتالية على $x-4$ كما يلي:

4	1	-6	0	35	-17
		4	-8	-32	12
4	1	-2	-8	3	-5
		4	8	0	
4	1	2	0	3	
		4	24		
4	1	6	24		
		4			
	1	10			

فتكون المعادلة المطلوبة هي: $x^4+10x^3+24x^2+3x-5=0$

ملاحظة: يمكن إعادة صياغة مثال(9) على الصورة:

إذا كانت $P(x) = x^4-6x^3+35x-17$ فأوجد $P(x+4)$.

مثال(10): أوجد المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار 3 عن جذور المعادلة: $4x^4+48x^3+151x^2+42x-245=0$ وبحل المعادلة الناتجة أوجد جذور المعادلة الأصلية.

<u>الحل:</u> نقسم كثيرة الحـدود $4x^4+48x^3+151x^2+42x-245$ قسـمة متتاليـة علـى $x+3$ كما يلي:

-3	4	48	151	42	-245

		-12	-108	-129	261
-3	4	36	43	-87	16
		-12	-72	87	
-3	4	24	-29	0	
		-12	-36		
-3	4	12	-65		
		-12			
	4	0			

فتكون المعادلة المحولة المطلوبة هي $4x^4-65x^2+16=0$
والتي يمكن كتابتها على الصورة:

$$(x^2-16)(4x^2-1)=0$$

ومن ثم يكون:

$$x=4\ ,\ 1/2,\ -1/2\ ,\ -4$$

وعلى ذلك تكون جذور المعادلة الأصلية (تنقص 3 عن هذه الجذور) هي:

$$x=1\ ,\ -5/2\ ,\ -7/2\ ,\ -7$$

▪ **نظرية الباقي ونظرية العامل**:

(1)نظرية الباقي: إذا قسمت كثيرة الحدود $P(x)$ على $x-\alpha$ فإن الباقي يساوي $P(\alpha)=R$ (أي أن الباقي يساوي قيمة كثيرة الحدود عندما $x=\alpha$) .

مثال(11): أوجد قيمة كثيرة الحدود $P(x)=x^4-2x^3+36x+5$ عندما $x=-4$.

الحل: الطريقة العادية لحل هذا المثال هي أن نعوض عن $x=-4$ في كثيرة الحدود المعطاة فيكون:

$P(-4)=(-4)^4-2(-4)^3+36(-4)+5=245.$

وباستخدام نظرية الباقي والقسمة التركيبية يكون الحل كما يلي:

بفرض أن $P(x)=x^4-2x^3+36x+5$ وبقسمة $P(x)$ على $x=-4$ أي على $x+4$ فإن باقي القسمة يساوي $P(-4)$ كما يلي:

-4	1	-2	0	36	5
		-4	24	-96	240
	1	-6	24	-60	245

واضح أن الباقي هو 245 يساوي $P(-4)$.

(2) نظرية العامل:إذا كانت α جذرا للمعادلة $P(x)=0$ فإن $x-\alpha$ يكون عامل لكثيرة الحدود $P(x)$ (وهذا يعني أن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$) والعكس صحيح أي أنه إذا كان $x-\alpha$ عامل لكثيرة الحدود $P(x)$ فإن α يكون جذرا للمعادلة $P(x)=0$.

مثال(12): أوجد قيمة C التي تجعل كثيرة الحدود $P(x)=x^6-4x^5-149x^3+C$ تقبل القسمة على $x-7$.

الحل: كثيرة الحدود $P(x)$ تقبل القسمة على $x-7$ عندما يكون باقي القسمة مساويا الصفر

7	1	-4	0	-149	0	0	C
		7	21	147	-14	-98	-686
	1	3	21	-2	-14	-98	C-686

باقي القسمة $R=C-686=0$ وإذاً $C=686$.

مثال(13): تحقق من أن $x=2$ يكون جذرا للمعادلة $2x^4-5x^3-26x^2+20x+72=0$

وأن $x-2$ عامل للطرف الأيسر منها.

الحل: بقسمة الطرف الأيسر من المعادلة على $x=2$ كما يلي:

2	2	-5	-26	20	72

	4	-2	-56	-72
2	-1	-28	-36	0

وبما أن باقي القسمة يساوي 0 فيكون $x=2$ جذرا للمعادلة المعطاة ، ويكون $x-2$ عامل للطرف الأيسر منها.

عدد الجذور: تؤكد النظرية الأساسية في الجبر أن كل معادلة جبرية $P(x)=0$ لها جذر على الأقل، وأكثر من ذلك تؤكد أنه إذا كانت معاملات المعادلة أعداد مركبة فإنه توجد قيمة تأخذها x خلال حقل الأعداد تحقق المعادلة.

النظرية الأساسية للمعادلات: كل معادلة جبرية من درجة n لها بالضبط عدد n من الجذور.

مثال(14): المعادلة الجبرية $x^3-x^2-7x+15=0$ تكافئ:

$$(x+3)(x-2-i)(x-2+i)=0$$

ولها ثلاثة جذور هي $2-i$, $2+i$, -3 .

والنظرية الأساسية للمعادلات لم تذكر كيف توجد العوامل (أو الجذور) ولكنها ضمنت وجودها.

فالمعادلة الجبرية $2x^3+(1+2i)x^2+(4+i)x+2=0$ تكافئ $2(x+1/2)(x-i)(x+2i)=0$

ولها ثلاثة جذور هي $-2i$, i , $-1/2$.

- **تكوين المعادلة التي جذورها معلومة:**

إذا كانت $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n$ هي جذور معادلة جبرية معاملاتها أعداد صحيحة من درجة n فإن المعادلة تكون على الصورة:

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n)=0.$$

مثال(15): كوّن المعادلة الجبرية ذات المعاملات الصحيحة التي جذورها هي $3/2,-5$.

الحل:

$$(x-3/2)(x+5)=0$$
$$\therefore\ x^2+(7/2)x-15/2=0$$
$$\therefore 2x^2+7x-15=0.$$

وهي المعادلة المطلوبة.

مثال(16): كوّن المعادلة الجبرية التي جذورها $2+i,2-i,0$ كجذور بسيطة (ليست مكررة) ولها أيضا -1 كجذر مكرر مرتين وليس لها جذور أخري.

الحل:

$$(x-2-i)(x-2+i)(x)(x+1)^2=0$$
$$\therefore x^5-2x^4-2x^3+6x^2+5x=0.$$

وهي المعادلة المطلوبة.

نظرية(1): إذا كان $a+ib$ جذرا للمعادلة الجبرية $P(x)=0$ ذات المعاملات الصحيحة فإن $a-ib$ يكون أيضا جذرا لها.

مثال(17): إذا كان $1+i$ جذرا للمعادلة $x^4-2x^3-2x^2+8x-8=0$ فأوجد باقي الجذور.

الحل: $1+i$ جذر للمعادلة فيكون $1-i$ أيضا جذر لها ، ونوجد الجذرين الباقيين بقسمة الطرف الأيسر للمعادلة على حاصل ضرب العاملين المناظرين للجذرين $1+i\,,\,1-i$

كما يلي: $(x-(1+i))(x-(1-i)) = ((x-1)^2-i^2) = x^2-2x+2$

$$
\begin{array}{l|l}
x^2-2x+2 & x^4-2x^3-2x^2+8x-8 \\
\hline
x^2-4 & \quad - \quad + \quad - \\
 & x^4-2x^3+2x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad -4x^2+8x-8 \\
 & \qquad + \quad - \quad + \\
 & \qquad -4x^2+8x-8 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 0 \;+0\;+0
\end{array}
$$

فيكون خارج القسمة هو العامل(x^2-4) ومن ثم يكون الجذران الباقيان هما $-2\,,\,2$.

نظرية(2): إذا كان $a+\sqrt{b}$ (حيث $a\,,b$ عددان حقيقيان ، b ليس مربعا كاملا) جذرا لمعادلة جبرية معاملاتها أعداد حقيقية فإن $a-\sqrt{b}$ يكون أيضا جذرا لها.

مثال(18): أوجد كل جذور المعادلة $2x^3-5x^2-14x-3=0$ إذا علمنا أن $2-\sqrt{5}$ هو أحد جذورها.

الحل: بما أن $2-\sqrt{5}$ جذر للمعادلة فيكون $2+\sqrt{5}$ أيضا جذرا لها ، ونوجد الجذر الثالث بقسمة الطرف الأيسر للمعادلة على حاصل ضرب العاملين المناظرين للجذرين $2+\sqrt{5}\,,\,2-\sqrt{5}$ كما يلي: $(x-2+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{5})= x^2-4x-1$

$$
\begin{array}{l|l}
x^2-4x-1 & 2x^3-5x^2-14x-3 \\
\hline
2x+3 & \quad - \quad + \quad + \\
 & 2x^3-8x^2-2x \\
\cline{2-2}
 & \qquad 3x^2-12x-3 \\
 & \qquad - \quad + \quad + \\
 & \qquad 3x^2-12x-3 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 0 \;+0\;+0
\end{array}
$$

وعلى ذلك يكون الجذر الثالث هو $-3/2$

- **تغييرات الإشارة:**

عندما تنقلب إشارات معاملات كثيرة الحدود من موجب إلى سالب أو من سالب إلى موجب فإن هذا يُسمى تغير في الإشارة.

مثال: إشارات معاملات كثيرة الحدود $P(x)=3x^5-7x^4+9x^2+6x-5$ **هي** + - + + - + على التوالي وواضح أن هناك ثلاثة تغيرات في الإشارة.

للمعادلة $x^2+4x+5=0$ يلاحظ أن الطرف الأيسر لا يوجد به تغير في الإشارة ولذلك لا يمكن أن توجد جذور موجبة لهذه المعادلة وذلك لان أي قيمه موجبة للمتغير x تجعل كل حد في الطرف الأيسر موجب ولذلك مجموع الطرف الأيسر لا يمكن أن يكون صفر.

ومن ناحية أخرى المعادلة $x^2-7x+10=0$ الطرف الأيسر لها يوجد به تغيران في الإشارة ولذلك لها جذرين موجبين هما 2,5

والعلاقة بين عدد الجذور الموجبة وعدد تغيرات الإشارة تُعطى بالقاعدة التالية:

- **قاعدة الإشارات:**

"عدد الجذور الموجبة للمعادلة الجبرية $P(x)=0$ ذات المعاملات الصحيحة يكون إما مساويا لعدد تغيرات الإشارات في كثيرة الحدود $P(x)$ أو أقل من هذا العدد بعدد صحيح زوجي موجب".

مثال(19): ابحث الجذور الموجبة للمعادلة الجبرية $x^3-4x^2+6x+9=0$

<u>الحل</u>: الطرف الأيسر للمعادلة $x^3-4x^2+6x+9=0$ به تغيران في الإشارة ، وطبقا لقاعدة الإشارات يكون للمعادلة إما جذرين موجبين أو لا يوجد جذور موجبة علي الإطلاق.

والقاعدة المناظرة فيما يختص بعدد الجذور السالبة يمكن الحصول عليها باعتبار عدد تغيرات الإشارة في كثيرة الحدود $P(-x)$ وذلك بوضع $-x$ بدلا من x ، والقاعدة تكون كما يلي:

"عدد الجذور السالبة للمعادلة الجبرية $P(x)=0$ ذات المعاملات الصحيحة يكون إما مساويا لعدد تغيرات الإشارة في كثيرة الحدود $P(-x)$ أو أقل من هذا العدد بعدد صحيح زوجي موجب" .

مثال(20): ابحث الجذور السالبة للمعادلة الجبرية $x^3-4x^2+6x+9=0$

الحل: الطرف الأيسر $P(x)=x^3-4x^2+6x+9$ ويكون:

$$P(-x)=(-x)^3-4(-x)^2+6(-x)+9= -x^3-4x^2-6x+9$$

واضح أنه يوجد تغير واحد في إشارة كثيرة الحدود $P(-x)$ ، ولذلك يكون للمعادلة جذر سالب واحد بالضبط.

وفي المثال السابق وجدنا أن لنفس المعادلة إما جذرين موجبين أو لا توجد جذور موجبة علي الإطلاق، ومن ثم يكون للمعادلة جذرين موجبين وجذر سالب واحد.

- **<u>الجذور الصحيحة:</u>**

<u>نظرية(3):</u> إذا وُجد لمعادلة جبرية-معاملاتها أعداد صحيحة- جذر صحيح فيجب أن يكون هذا الجذر عامل للحد المطلق.

مثال(21): ابحث الجذور الصحيحة للمعادلة الجبرية $x^3 - 2x^2 - 7x + 2 = 0$

<u>الحل</u>: عوامل(قواسم) الحد المطلق الأعداد الصحيحة ± 2 , ± 1 التي من المحتمل أن تكون جذور صحيحة للمعادلة المعطاه، وعندما نجرب (نختبر) كل هذه الأعداد كجذور باستخدام طريقة قسمة المعاملات المنفصلة كما يلي:

1	1	-2	-7	2
		1	-1	-8
	1	-1	-8	-6

-1	1	-2	-7	2
		-1	3	4
	1	-3	-4	6

2	1	-2	-7	2
		2	0	-14
	1	0	-7	-12

-2	1	-2	-7	2
		-2	8	-2
	1	-4	1	0

نجد أن 2- فقط هو الجذر الصحيح للمعادلة.

<u>ملاحظة:</u> يمكن التعويض بعوامل الحد المطلق في الطرف الأيسر للمعادلة المعطاه فيكون العدد الصحيح الذي يحقق المعادلة جذرا صحيحا لها.

- **الجذور الكسرية:**

نظريــة(4): إذا كــان للمعادلــة الجبريــة $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n=0$ (والتي معاملاتها أعداد صحيحة) جذرا على الصورة الكسرية α/β حيث α,β عددان صحيحان. فيجب أن يكون α عامل من عوامل a_n ويكون β عامل من عوامل a_0 .

مثال(22): ابحث الجذور الكسرية للمعادلة الجبرية $2x^3+7x^2+2x-6=0$

الحل: الأعداد الكسرية التي من المحتمل أن تكون جذور للمعادلة:
$2x^3+7x^2+2x-6=0$

هي $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ (عوامل الحد المطلق a_n)كبسط ، $\pm1, \pm2$ (عواملa_0)كمقام.

أي الأعداد $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm1/2, \pm3/2$

وعندما نختبر هذه الأعداد باستخدام القسمة التحليلية فإننا نجد أن $-3/2$ هو الجذر الكسري الوحيد للمعادلة حيث:

-3/2	2	7	2	-6
		-3	-6	6
	2	4	-4	0

وقاعدة الإشارات تؤكد أنه يوجد جذر موجب واحد فقط ، وبـذلك يكـون هذا الجذر عدد غير كسري ، وكذلك يكون للمعادلة جذر سالب أخر وهذا الجذر يجب أن يكون عدد غير كسري .

ونســتطيع بــالطبع أن نوجـد الجـذرين الآخـرين للمعادلــة بحـل المعادلــة $2x^2+4x-4=0$ (الناتجة من خارج القسمة) فيكونا $-1\pm\sqrt{3}$.

نتيجة: أي جذر كسري للمعادلة الجبرية $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n=0$ (حيث معامل x^n الوحدة والمعاملات الباقية أعـداد صـحيحة) يكـون عـدد صحيح من بين عوامل الحد المطلق a_n .

مثال(23): ابحث الجذور الكسرية للمعادلة الجبرية $x^5+12x^2-7x+4=0$

الحل: الأعداد الكسرية التي يمكن أن تكون جذور للمعادلة:

$x^5+12x^2-7x+4=0$

هي من بين الأعداد $\pm1,\pm2,\pm4$ (عوامل الحد المطلق)

وعندما نجرب (نختبر) هذه الأعداد بواسطة القسمة التحليلية نجد أنه لا يوجد بينهم أي جذر للمعادلة، وبذلك نستنتج أنه إذا وُجدت جذور حقيقية للمعادلة فإنها تكون أعداد غير كسرية .

وبتطبيق قاعدة الإشارات على هذه المعادلة نجد أنه يوجد جذر حقيقي سالب ، وأيضا يوجد إما جذران موجبان أو لا توجد جذور موجبة على الإطلاق وفي هذه الحالة يكون الجذران الآخران تخيليان مترافقان.

▪ الحل الجبري للمعادلات:

حذف الحد الثاني من معادلة معلومة:

حذف الحد الثاني في المعادلة الجبرية

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

يعني جعلها خالية من معامل x^{n-1} ويتم ذلك بتحويلها إلى أخرى جذورها تنقص بمقدار $\frac{-a_1}{(n)(a_0)}$ عن جذور المعادلة الأصلية.

مثال: احذف الحد الثاني في المعادلة $x^3 + 3x^2 - 2x + 5 = 0$

الحل: حذف الحد الثاني في المعادلة المعطاة (يعني جعلها خالية من معامل x^2)

ويتم ذلك بتحويلها إلى أخرى جذورها تنقص بمقدار

$$\frac{-a_1}{(n)(a_0)} = \frac{-3}{(3)(1)} = -1$$

عن جذور المعادلة الأصلية المعطاة كما يلي:

-1	1	3	-2	5
		-1	-2	4
-1	1	2	-4	9
		-1	-1	
-1	1	1	-5	
		-1		
	1	0		

فتكون المعادلة المطلوبة هي:

$$x^3 - 5x + 9 = 0.$$

- **<u>الطريقة العامة لحل معادلة من الدرجة الثالثة:</u>**

سنلخص فيما يلي طريقة العالم الرياضي كاردان Cardan لحل المعادلة الجبرية
من الدرجة الثالثة في الصورة العامة:

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

<u>أولاً</u>: نحذف الحد (الثاني) الذي يحتوي على x^2
فتتحول المعادلة إلى الصورة القياسية:

$$x^3+ax+b=0$$

<u>ثانياً</u>: نحسب قيمة المميز $\Delta=\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}$ فيكون لدينا <u>ثلاث حالات</u>:

- <u>الحالة الأولى</u>: إذا كان $\Delta>0$ يكون للمعادلة جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان ، وتكون هذه الجذور على الصورة:

$$y+z\,,\ y\omega+z\omega^2\,,\ z\omega+y\omega^2$$

حيث:

$$y=[-\frac{b}{2}+\sqrt{\Delta}]^{\frac{1}{3}},,\ z=[-\frac{b}{2}-\sqrt{\Delta}]^{\frac{1}{3}}$$

$\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\ ,\ \omega^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ (الجذور التكعيبية للواحد الصحيح)

- <u>الحالة الثانية</u>: إذا كان $\Delta=0$ تكون جميع جذور المعادلة حقيقية أحد هذه الجذور يكون مكرر مرتين نوجده من العلاقة $3x^2+a=0$

فيكون $x=\pm\sqrt{\frac{-a}{3}}$

ونختار منها القيمة التي تحقق المعادلة القياسية $x^3+ax+b=0$
وبمعرفة الجذر المكرر (أي الجذرين المتساويين) للمعادلة يمكن استنتاج الجذر الثالث
حيث مجموع الجذور الثلاث يساوي الصفر.

- الحالة الثالثة: إذا كان $\Delta < 0$ تكون جميع جذور المعادلة حقيقية مختلفة. وفي هذه الحالة تكون y^3, z^3 كميتين تخيليتين مترافقتين، ويمكن الحصول على جذور المعادلة باستخدام نظرية دي موافر للأعداد المركبة حيث إذا فرضنا أن:

$$y^3 = p + iq = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ z^3 = p - iq = r(\cos\theta - i\sin\theta)$$

وإذاً يكون لـ y ثلاث قيم مختلفة هي:

$$r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}),\ r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\theta+2\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{3}),$$
$$r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\theta+4\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+4\pi}{3}),$$

ويكون لـ z ثلاث قيم مختلفة هي:

$$r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\theta}{3} - i\sin\frac{\theta}{3}),\ r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\theta+2\pi}{3} - i\sin\frac{\theta+2\pi}{3}),$$
$$r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\theta+4\pi}{3} - i\sin\frac{\theta+4\pi}{3}).$$

ونحصل على جذور المعادلة بجمع القيم المتناظرة لكل من y, z فتكون:

$$2r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\theta}{3}),\ 2r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\theta+2\pi}{3}),\ 2r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\theta+4\pi}{3}).$$

وواضح أن جذور المعادلة تكون كلها حقيقية ومختلفة.

ملاحظة: القيم المختلفة للمقدار $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{m}{k}}$ تكون:

$$z_s = \cos\frac{m\theta + 2\pi s}{k} + i\sin\frac{m\theta + 2\pi s}{k} \quad ; s = 0,1,2,\ldots,k-1$$

مثال(1): حول المعادلة الجبرية $x^3+3x^2-15x-52=0$ إلى أخرى خالية من معامل x^2 ثم أوجد جذور المعادلة الناتجة.

<u>الحل</u>: نحذف الحد (الثاني) الذي يحتوي على x^2 في المعادلة بتحويلها إلى أخرى جذورها تنقص بمقدار $\frac{-a_1}{(n)(a_0)}=\frac{-3}{(3)(1)}=-1$ عن جذور المعادلة الأصلية المعطاة

وذلك كما يلي:

-1	1	3	-15	-52
		-1	-2	17
-1	1	2	-17	-35
		-1	-1	
-1	1	1	-18	
		-1		
	1	0		

فتكون المعادلة الناتجة هي $x^3-18x-35=0$

والصورة القياسية لمعادلة الدرجة الثالثة هي $x^3+ax+b=0$

وعلى ذلك يكون $a=-18\ ,\ b=-35$ ومميز المعادلة المساعدة يكون:

$$\Delta=\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}=\frac{(-35)^2}{4}+\frac{(-18)^3}{27}=\frac{361}{4}>0$$

فيكون للمعادلة جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان ، وتكون هذه الجذور على الصورة $y+z,\ y\omega+z\omega^2,\ z\omega+y\omega^2$ حيث:

$$y=[-\frac{b}{2}+\sqrt{\Delta}]^{\frac{1}{3}}\ ,z=[-\frac{b}{2}-\sqrt{\Delta}]^{\frac{1}{3}},\ \omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\ ,\ \omega^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$\therefore y=(-\frac{b}{2}+\sqrt{\Delta})^{\frac{1}{3}}=(-\frac{-35}{2}+\frac{19}{2})^{\frac{1}{3}}=(27)^{\frac{1}{3}}=3\ ,$$

$$\therefore z=(-\frac{b}{2}-\sqrt{\Delta})^{\frac{1}{3}}=(-\frac{-35}{2}-\frac{19}{2})^{\frac{1}{3}}=(8)^{\frac{1}{3}}=2$$

وإذاً جذور المعادلة تكون هي $5,\ 3\omega+2\omega^2\ ,\ 2\omega+3\omega^2$

أي تكون $5,\ -\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ -\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

مثال(2): حول المعادلة الجبرية $x^3+3x^2-9x+5=0$ إلى أخرى خالية من معامل x^2 ثم أوجد جذور المعادلة الناتجة.

الحل: نحذف الحد (الثاني) الذي يحتوي على x^2 في المعادلة بتحويلها إلى أخرى جذورها تنقص بمقدار $-1 = \frac{-3}{(3)(1)} = \frac{-a_1}{(n)(a_0)}$ عن جذور المعادلة الأصلية المعطاة

فتكون المعادلة الناتجة هي $x^3 - 12x + 16 = 0$ (تحقق من ذلك؟).

والصورة القياسية لمعادلة الدرجة الثالثة هي $x^3 + ax + b = 0$

وعلى ذلك يكون $a = -12,\ b = 16$ ومميز المعادلة المساعدة يكون:

$$\Delta = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} = \frac{(16)^2}{4} + \frac{(-12)^3}{27} = 0$$

وإذاً يكون للمعادلة جذر مكرر يحقق المعادلة $3x^2 + a = 0$ أي يحقق المعادلة:

$$3x^2 - 12 = 0$$

وجذرا هذه المعادلة هما $x = \pm 2$ إلا أن $x = -2$ لا يحقق المعادلة القياسية ، ولذلك يكون الجذر المكرر للمعادلة هو $x = 2$ وحيث إن مجموع جذور المعادلة يساوي الصفر فيكون الجذر الثالث للمعادلة هو $x = -4$.

ومن ثم تكون جذور المعادلة الناتجة هي $x = 2, 2, -4$.

مثال(3): حول المعادلة الجبرية $x^3-3x^2-3x+1=0$ إلى أخرى خالية من معامل x^2 ثم أوجد جذور المعادلة الناتجة.

الحل: نحذف الحد (الثاني) الذي يحتوي على x^2 في المعادلة بتحويلها إلى أخرى جذورها تنقص بمقدار $\frac{-a_1}{(n)(a_0)}=\frac{-(-3)}{(3)(1)}=1$ عن جذور المعادلة الأصلية المعطاة

فتكون المعادلة الناتجة هي $x^3-6x-4=0$ (تحقق من ذلك؟).

والصورة القياسية لمعادلة الدرجة الثالثة هي $x^3+ax+b=0$

وعلى ذلك يكون $a=-6,\ b=-4$ ومميز المعادلة المساعدة يكون:

$$\Delta=\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}=\frac{(-4)^2}{4}+\frac{(-6)^3}{27}=-4<0$$

وإذاً يكون للمعادلة ثلاث جذور حقيقية مختلفة تُعطى من:

$$y^3=-\frac{b}{2}+\sqrt{\Delta}=-\frac{-4}{2}+\sqrt{-4}=2+i2=2(1+i)=2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}),$$

$$z^3=-\frac{b}{2}-\sqrt{\Delta}=-\frac{-4}{2}-\sqrt{-4}=2-i2=2(1-i)=2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$$

ومن ثم يكون لـ y ثلاث قيم مختلفة هي:

$$\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}),\sqrt{2}(\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}),\sqrt{2}(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}).$$

ويكون لـ z ثلاث قيم مختلفة هي:

$$\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}),\sqrt{2}(\cos\frac{9\pi}{12}-i\sin\frac{9\pi}{12}),\sqrt{2}(\cos\frac{17\pi}{12}-i\sin\frac{17\pi}{12}).$$

وإذاً تكون جذور المعادلة هي:

$$2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}),-2,2\sqrt{2}(\cos\frac{17\pi}{12}).$$

▪ الطريقة العامة لحل معادلة من الدرجة الرابعة:

سنعرض فيما يلي طريقتين لحل المعادلة من الدرجة الرابعة ، وسنرى أنه في كلتا الحالتين تعتمد الطريقة على حل معادلة مساعدة من الدرجة الثالثة.

الطريقة الأولى تُنسب إلى العالم الرياضي فراري Ferrari

والطريقة الثانية تُنسب إلى ديكارت De-Cart .

أولا: طريقة فراري لحل معادلة من الدرجة الرابعة:

الصورة القياسية للمعادلة من الدرجة الرابعة هي:

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \qquad (1)$$

بالقسمة على a_0 نحصل على المعادلة:

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + k = 0 \qquad (2)$$

وبإعادة كتابة المعادلة (2) على الصورة:

$$(x^2 + \frac{p}{2}x + \lambda)^2 - (\alpha x + \beta)^2 = 0 \qquad (3)$$

أي أن:

$$x^4 + px^3 + (2\lambda + \frac{p^2}{4} - \alpha^2)x^2 + (p\lambda - 2\alpha\beta)x + (\lambda^2 - \beta^2) = 0 \qquad (4)$$

بمقارنة المعاملات في (2),(4) نحصل على:

$$2\lambda + \frac{p^2}{4} - \alpha^2 = q$$
$$p\lambda - 2\alpha\beta = r$$
$$\lambda^2 - \beta^2 = k$$

وإذاً يكون:

$$\alpha^2 = 2\lambda + \frac{p^2}{4} - q$$
$$\alpha\beta = \frac{1}{2}(p\lambda - r) \qquad (5)$$
$$\beta^2 = \lambda^2 - k$$

وبحذف α, β بين هذه المعادلات ينتج أن:

$$\frac{1}{4}(p\lambda - r)^2 = (\lambda^2 - k)(2\lambda + \frac{p^2}{4} - q)$$

وبفك الأقواس وترتيب الحدود بالنسبة لقوى λ نحصل على:

$$2\lambda^3 - q\lambda^2 - 2(k - \frac{pr}{4})\lambda - (qk + \frac{pk + r^2}{4}) = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة الثالثة في λ لها على الأقل جذر حقيقي واحد، وباستخدام هذه القيمة الحقيقية للمقدار λ يمكن الحصول على α, β من (5) ثم من المعادلة (3) ينتج أن:

$$x^2 + \frac{p}{2}x + \lambda = \pm(\alpha + \beta)$$

وهاتين معادلتين من الدرجة الثانية في x يمكن منهما الحصول على جذور المعادلة الأصلية.

مثال(1): أوجد حل المعادلة الآتية بطريقة فراري

$$x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 14x + 3 = 0 \qquad (1)$$

الحل: نكتب المعادلة في الصورة:

$$(x^2 + 3x + \lambda)^2 - (\alpha x + \beta)^2 = 0 \qquad (2)$$

بمقارنة المعاملات في المعادلتين (1),(2) نحصل على:

$$\alpha^2 = 2\lambda - 3$$
$$\beta^2 = \lambda^2 - 3 \qquad (3)$$
$$\alpha\beta = 3\lambda - 7$$

بحذف α, β بين مجموعة المعادلات (3) نحصل على:

$$(3\lambda - 7)^2 = (2\lambda - 3)(\lambda^2 - 3)$$
$$\therefore 2\lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda - 40 = 0$$
$$\therefore \lambda^3 - 6\lambda^2 + 18\lambda - 20 = 0.$$

ونرى أن القيمة $\lambda = 2$ تحقق هذه المعادلة ، وبالتعويض في (3) نحصل على:

$$\alpha^2 = 1, \beta^2 = 1, \alpha\beta = -1$$

وإذاً $\alpha = 1, \beta = -1$ أو $\alpha = -1, \beta = 1$

وبالتعويض في (2) نحصل على:

$$(x^2+3x+2)^2-(x-1)^2=0$$
$$\Rightarrow (x^2+3x+2)=\pm(x-1)$$
$$\therefore x^2+2x+3=0 \Rightarrow x=-1\pm i\sqrt{2}\ ,$$
$$x^2+4x+1=0 \Rightarrow x=-2\pm\sqrt{3}\ .$$

وبالتالي تكون جذور المعادلة الأصلية (1) هي:

$x=-1\pm i\sqrt{2}, -2\pm\sqrt{3}$.

مثال(2): أوجد حل المعادلة الآتية بطريقة فراري

$$x^4+11x^2+10x+50=0 \qquad (1)$$

الحل: نكتب المعادلة في الصورة

$$(x^2+\lambda)^2-(\alpha x+\beta)^2=0 \qquad (2)$$

بمقارنة المعاملات في المعادلتين نحصل على

$$\alpha^2=2\lambda-11$$
$$\beta^2=\lambda^2-50 \qquad (3)$$
$$\alpha\beta=-5$$

بحذف α, β بين مجموعة المعادلات (3) نحصل على:

$$(-5)^2=(2\lambda-11)(\lambda^2-50)$$
$$\therefore 2\lambda^3-11\lambda^2-100\lambda+525=0$$

وجذور هذه المعادلة هي $\lambda=5,-7,\frac{15}{2}$ نختار منها الجذر $\frac{15}{2}$ لأنه بذلك تكون قيم α, β حقيقية من (3) فيكون:

$$\alpha^2=4 \Rightarrow \alpha=\pm 2$$
$$\beta^2=\frac{25}{4} \Rightarrow \beta=\pm\frac{5}{2}$$
$$\alpha\beta=-5$$

وحتى يتحقق أن $\alpha\beta=-5$ لابد أن تكون $\alpha=2, \beta=-\frac{5}{2}$

وبالتعويض في (2) نحصل على:

$$(x^2+\frac{15}{2})^2-(2x-\frac{5}{2})^2=0 \Rightarrow (x^2+\frac{15}{2})=\pm(2x-\frac{5}{2})$$

$$\Rightarrow 2x^2-4x+17=0 \Rightarrow x=1\pm 3i \quad ,$$

$$\Rightarrow 2x^2+4x+13=0 \Rightarrow x=-1\pm 2i$$

وبالتالي تكون جذور المعادلة الأصلية (1) هي: $x=1\pm 3i,-1\pm 2i$

ثانياً: طريقة دي-كارت لحل معادلة من الدرجة الرابعة:

الصورة القياسية للمعادلة من الدرجة الرابعة هي:

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \qquad (1)$$

بحذف الحد الثاني من المعادلة وذلك بالتعويض عن $x - \frac{a_1}{4a_0}$ بدلا من x فتصبح المعادلة على الصورة:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \qquad (2)$$

نفرض أنه يمكن كتابة هذه المعادلة على الصورة:

$$(x^2 + \lambda x + \alpha)(x^2 - \lambda x + \beta) = 0 \qquad (3)$$

وبمقارنة المعاملات في المعادلتين (3),(2) نحصل على:

$$\alpha + \beta - \lambda^2 = p \ , \ \lambda(\alpha - \beta) = q \ , \ \alpha\beta = r$$

$$\Rightarrow 2\alpha = \lambda^2 + p - \frac{q}{\lambda} \ , \ 2\beta = \lambda^2 + p + \frac{q}{\lambda} \ , \ \alpha\beta = r \qquad (4)$$

بحذف α, β بين مجموعة المعادلات (4) نحصل على:

$$(\lambda^2 + p - \frac{q}{\lambda})(\lambda^2 + p + \frac{q}{\lambda}) = 4r$$

$$\therefore \lambda^6 + 2p\lambda^4 + (p^2 - 4r)\lambda^2 - q^2 = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة الثالثة في λ^2 لها على الأقل جذر واحد حقيقي موجب λ فإذا علمنا λ يمكن تعيين α, β من العلاقات(4) .

وبالتعويض في المعادلة (3) عن قيم λ, α, β نحصل على معادلتين من الدرجة الثانية هما:

$$x^2 + \lambda x + \alpha = 0 \ , \ x^2 - \lambda x + \beta = 0$$

يكون لهما أربعة جذور هي جذور المعادلة (2) . وأخيرا تكون جذور المعادلة الأصلية(1) تزيد بمقدار $\frac{-a_1}{4a_0}$ عن جذور المعادلة (2) .

مثال: أوجد حل المعادلة الآتية بطريقة دي-كارت

$$x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 14x + 3 = 0 \qquad (1)$$

<u>الحل</u>: بحذف الحد الثاني من المعادلة وذلك بالتعويض عن $x - \frac{a_1}{4a_0}$

بدلا من x حيث $a_0 = 1, a_1 = 6$ أي بوضع $x - \frac{3}{2}$ بدلا من x أي نحول

المعادلة إلى أخرى جذورها تنقص بمقدار $\frac{-3}{2}$ عن جذور المعادلة

المعطاة (1) كما يلي:

-3/2	1	6	12	14	3
		-3/2	-27/4	-63/8	-144/16
-3/2	1	9/2	21/4	49/8	-99/16
		-3/2	-9/2	-9/8	
-3/2	1	3	3/4	5	
		-3/2	-9/4		
-3/2	1	3/2	-3/2		
		-3/2			
	1	0			

فتصبح المعادلة على الصورة:

$$x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 5x - \frac{99}{16} = 0 \qquad (2)$$

نكتب هذه المعادلة على الصورة:

$$(x^2 + \lambda x + \alpha)(x^2 - \lambda x + \beta) = 0 \qquad (3)$$

بمقارنة المعاملات في المعادلتين (2),(3) نحصل على:

$$\alpha + \beta - \lambda^2 = -\frac{3}{2}$$

$$(\alpha - \beta)\lambda = 5 \qquad (4)$$

$$\alpha\beta = -\frac{99}{16}$$

$$\therefore 2\alpha = \lambda^2 - \frac{3}{2} - \frac{5}{\lambda} \quad , \quad 2\beta = \lambda^2 - \frac{3}{2} + \frac{5}{\lambda}$$

وبحذف α, β نحصل على:

$$(\lambda^2 - \frac{3}{2} - \frac{5}{\lambda})(\lambda^2 - \frac{3}{2} + \frac{5}{\lambda}) = 4(\frac{-99}{16})$$

$$\therefore 4\lambda^6 - 12\lambda^4 + 108\lambda^2 - 100 = 0 \qquad (5)$$

وواضح أن $\lambda^2 = 1$ هو أحد جذور هذه المعادلة فإذا أخذنا القيمة $\lambda = 1$

فبالتعويض في (4) نحصل على :

$$\alpha = -\frac{11}{4} \ , \ \beta = \frac{9}{4}$$

وبالتعويض عن قيم α, β, λ في (3) نحصل على المعادلتين:

$$x^2 + x - \frac{11}{4} = 0 \ , \ x^2 - x + \frac{9}{4} = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}, \frac{1}{2} \pm i\sqrt{2}$$

وهذه جذور المعادلة (2) التي تنقص جذورها عن جذور المعادلة الأصلية (1) بمقدار $\frac{-3}{2}$ وعلى ذلك تكون جذور المعادلة الأصلية المطلوبة هي:

$$\therefore x = -2 \pm \sqrt{3}, -1 \pm i\sqrt{2} \ .$$

- **<u>تمارين:</u>**

1- بطريقة المعاملات المنفصلة أوجد خارج وباقي قسمة كثيرة الحدود $x^5 - 6x^4 + 15x^2 + 7$ على $x - 2$.

2- بطريقة المعاملات المنفصلة أوجد خارج وباقي قسمة كثيرة الحدود $3x^7 - x^6 + 31x^2 + 21x + 5$ على $x+2$.

3- بطريقة المعاملات المنفصلة أوجد خارج وباقي قسمة كثيرة الحدود $x^5 - 4x^4 + 9x^3 - 6x^2 - 16x + 13$ على $x^2 - 3x + 2$.

4- أوجد العلاقة بين a, b بحيث إن كثيرة الحدود $2x^4 - 7x^3 + ax + b$ تقبل القسمة على $x-3$.

5- أوجد المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار 2 عن جذور المعادلة:

$4x^4 + 32x^3 + 31x^2 - 132x - 180 = 0$.

وبحل المعادلة الناتجة أوجد جذور المعادلة الأصلية.

6- إذا كانت $p(x) = x^4 + 12x^3 + 49x^2 + 78x + 40$ فأوجد $p(x-3)$.

7- إذا كانت $p(x) = x^4 + 10x^3 + 39x^2 + 76x + 65$ فأوجد $p(x+4)$.

8- إذا علمت أن أحد جذور المعادلة $2x^3 - 15x^2 + 86x - 102 = 0$ هو $3+5i$ فأوجد باقي الجذور.

9- ابحث الجذور الموجبة والجذور السالبة للمعادلة الجبرية

$x^3 - 2x^2 - 7x + 2 = 0$.

وإذا عُلم أن أحد جذورها هو $2+\sqrt{3}$ فأوجد باقي الجذور.

10- ابحث الجذور الموجبة والجذور السالبة للمعادلة الجبرية

$6x^3 + 24x^2 + 2x - 3 = 0$.

ثم حولها إلى أخرى تكون معاملاتها أعداد صحيحة ، ويكون معامل أكبر قوى فيها الواحد الصحيح.

11- ابحث الجذور الموجبة والجذور السالبة والجذور الصحيحة للمعادلة الجبرية

$2x^3 - 5x^2 - 14x - 7 = 0$.

12- ابحث الجذور الموجبة والجذور السالبة والجذور الكسرية للمعادلة الجبرية

$2x^3 - 5x^2 - 14x - 3 = 0$.

13- حول المعادلة $x^3 - 12x^2 + 30x - 27 = 0$ إلى أخرى خالية من معامل x^2

ثم أوجد جذور المعادلة الناتجة.

14- احذف الحد الثاني في كل من المعادلات الجبرية الآتية:

(i) $x^3 - 3x^2 - 3x - 4 = 0$

(ii) $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$

(iii) $8x^3 - 12x^2 - 6x + 1 = 0$

ثم أوجد جذور المعادلة الناتجة.

15- أوجد جذور كل من المعادلات الجبرية الآتية:

(i) $x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 10x + 3 = 0$

(ii) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$

(iii) $x^4 + 11x^2 + 10x + 50 = 0$.

(iv) $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 2 = 0$

****

****