



قسم الرياضيات

# محاضرات في الطرق الرياضية

إعداد

كلية العلوم - قسم الرياضيات

## الفصل الأول

### متسلسلة فوريير ..... Fourier Series

رأينا في المثال الأخير ضرورة التعرف علي طريقة للتعبير عن أي دالة  $f(x)$  كمجموع عدة من دوال الجيوب وجيوب التمام ، ولما كانت هذه الأخيرة دوال دورية وجب أيضاً أن تكون الدالة  $f(x)$  دورية ( Periodic..... ) حتي يمكن التعبير عنها بدوال دورية .

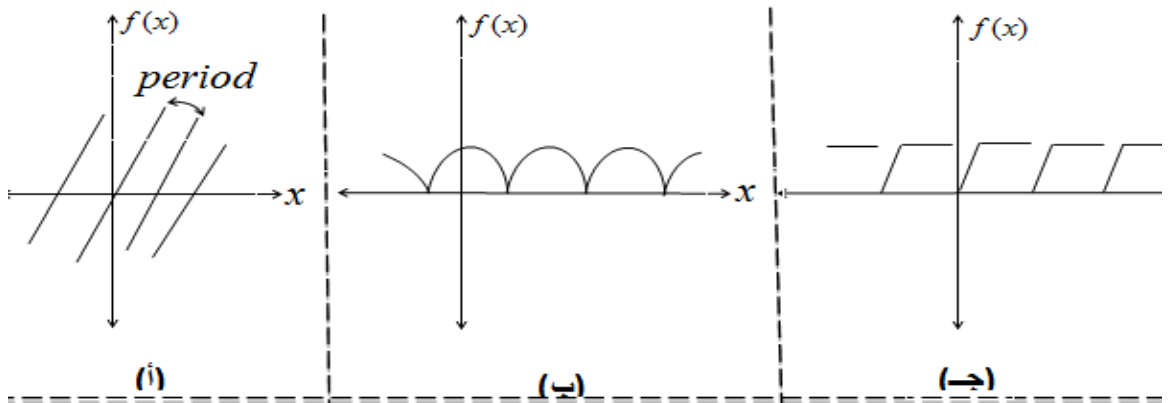
#### تعريف:

تسمي  $f(x)$  دالة دورية إذا كان  $f(x+p) = f(x)$  حيث  $p$  ثابت موجب وأقل قيمة للثابت  $p$  تحقق العلاقة السابقة تسمي الدورة ( Period ..... )

فمثلاً  $f(x) = \sin x$  دورتها  $2\pi$  ،  $\tan x$  دورتها  $\pi$  ،  $\cos nx$  دورتها

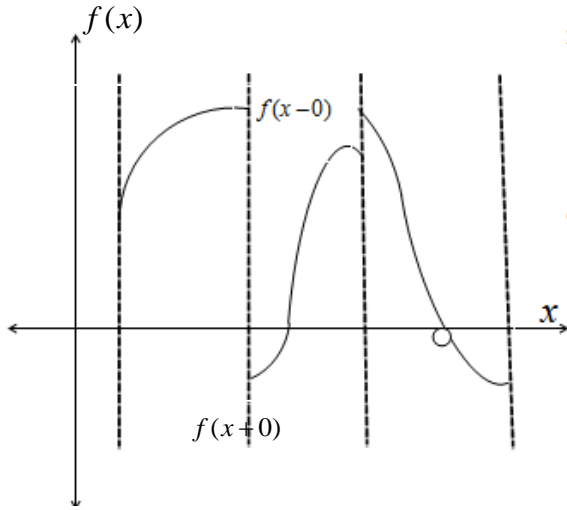
$$\frac{2\pi}{n}$$

وفي الأشكال الآتية أمثلة لدوال دورية :



### الدوال المتصلة جزئياً ..... Piecewise Continuous Functions :

تسمى الدالة متصلة جزئياً في فترة ما إذا كان :



أ - الفترة يمكن تقسيمها إلى عدد محدود م

الترات تكون الدالة متصلة علي كل منها .

ب- نهايات الدالة عند نقط عدم الإتصال تكون

قيمتها محدودة وبتعبير مختصر تكون الدالة

متصلة جزئياً علي فترة معينة إذا كان للدالة

علي هذه الفترة عدد محدود من الفترات المحدودة .

### متسلسلة فوريير:

إذا كانت الدالة  $f(x)$  معرفة علي الفترة  $(-L, L)$  وكانت دورة الدالة  $2L$  فإن متسلسلة فوريير لها هي :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \dots\dots\dots (1)$$

حيث يتم حساب المعاملات  $a_n, b_n$  من الصيغ الآتية :

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad \dots (2)$$

مع ملاحظة أنه يمكن أخذ بداية التكامل عند أي نقطة علي محور  $x$  ونهايته عند نقطة تبعد عن نقطة البداية بمسافة تساوي دورة كاملة أي أن :

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

ومع ذلك فنحن لا نعلم متي تكون هذه المتسلسلة تقاربية وحتى إذا كانت تقاربية لا نعلم إن كانت تقترب من  $f(x)$  أم لا وهناك شروط تسمى شروط ديرشلت توضح هذ الموقف وهي :

أ- إذا كانت  $f(x)$  معروفة ووحيدة القيمة في الفترة  $(-L, L)$  باستثناء عدد محدود من النقط ، وهذ الشرط ليس كافياً.

ب-  $f(x)$  دورية ودورتها  $2L$  .

ج-  $f(x), f'(x)$  متصلة جزئياً .

إذا توفرت هذه الشروط فإن المتسلسلة (1) بالمعاملات (3) ، (2) تقترب من  $f(x)$  إذا كانت  $x$  نقطة اتصال للدالة

ولكن عند نقط عدم الإتصال فإن المتسلسلة تقترب من

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

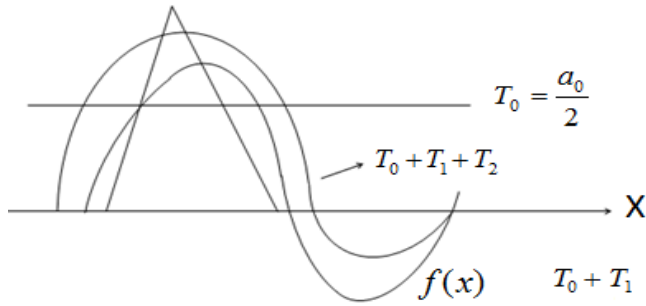
في هذه الحالة نستطيع أن نكتب :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

كذلك يمكننا ملاحظة اقتراب المتسلسلة من الدالة من الشكل الآتي :

نفرض أن  $f(x) = T_0 + T_1 + T_2 + \dots$

حيث:  $T_0 = \frac{a_0}{2}$  ,  $T_1 = a_1 \cos \frac{\pi x}{L}$  ,  $T_2 = a_2 \cos \frac{2\pi x}{L}$  , ...



**الدوال الزوجية والدوال الفردية ..... Odd & Even Functions**

تسمى  $f(x)$  فردية إذا كان  $f(-x) = -f(x)$

مثال ذلك الدوال  $\sin x$  ,  $\tan 3x$  ,  $x^3$  ,  $x^5 - 3x^3 + 2x$

وتسمى الدالة زوجية إذا كان

$$f(-x) = f(x)$$

مثال ذلك الدوال

$$x^4$$
 ,  $2x^2 + 5$  ,  $\cos x$  ,  $e^x + e^{-x}$

**متسلسلة نصف المدى ..... Half -Range Series**

إذا كانت الدالة فردية فإن حدود جيوب التمام تتقدم في متسلسلاتها .

وإذا كانت زوجية تتقدم في المتسلسلة حدود الجيب وتأخذ المعاملات الصيغ الآتية :

$$a_n = 0$$
 ,  $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$  فردية

$$b_n = 0 \quad , \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad \text{زوجية}$$

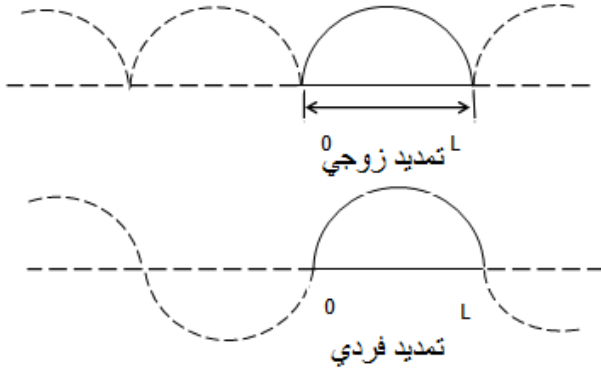
### فائدة متسلسلة نصف المدى:

هناك بعض الدوال ليست دورية علي الإطلاق بل قد تكون معرفة علي فترة ما وغير معرفة خارج هذه الفترة ومع ذلك يمكن أن نوجد لها متسلسلة فوريير ( نصف المدى ) . (

مثال ذلك نفرض أن قضيب طوله  $L$  طرفاه

$$x = 0 \quad , \quad x = L$$

وأن  $f(x)$



هي دالة توزيع الحمل علي هذا العتب.

أي أن معرفة  $f(x)$  معرفة في الفترة  $(0, L)$

وغير معرفة خارج هذه الفترة.

في هذه الحالة يمكننا عمل تمديد فرضي

للدالة علي الفترة  $(-L, 0)$  ويكون التمديد زوجي أو فردي حسب رغبتنا كما في الشكل .. ثم نعتبر أيضاً أن الدالة تتكرر دورياً قبل وبعد الفترة  $(-L, L)$  ثم يمكننا إيجاد متسلسلة نصف المدى للدالة الممدة الدورية التي أنشأناها ولنفرض أن هذه الدالة هي  $F(x)$  .

واضح أن قيم  $F(x)$  الممدة الدورية تتفق مع قيم الدالة  $f(x)$  الغير دورية وذلك في الفترة  $(0, L)$  ولذا يمكن أخذ  $F(x)$  كمثلة للدالة  $f(x)$  في الفترة  $(0, L)$  مع عدم الاهتمام بقيم الدالة  $F(x)$  خارج هذه الفترة.

### متسلسلة فوريير المركبة ..... Complex Fourier Series

بسبب المتطابقة  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  متسلسلة فوريير تأخذ الصور :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}} \quad ; \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{L}} dx$$

## متسلسلة فوريير المزدوجة ..... Double Fourier Series :

الفكرة في استخدام متسلسلة فوريير لدالة ذات متغير واحد يمكن تعميمها للحصول على متسلسلة فوريير لدوال ذات متغيرين.

في هذه الحالة تكون متسلسلة فوريير الجيبية المزدوجة :

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L_1} \sin \frac{n\pi y}{L_2}$$

وهناك صيغ شبيهة لمتسلسلة جيب التمام المزدوجة أو المتسلسلة المختلطة . كما أنه يمكن التعميم للدوال ذات ثلاث متغيرات أو أكثر .

### أمثلة

مثال (1) : برهن علي ما يأتي :

$$(a) \int_{-L}^L \sin \frac{k\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} dx = 0 ; k=1, 2, 3, \dots$$

$$(b) \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \\ = \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$= \begin{cases} 0 & : m \neq n \\ L & : m = n \end{cases}$$

$$(c) \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = 0$$

### الحل

$$(a) \int_{-L}^L \sin \frac{k\pi x}{L} dx = -\frac{L}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{L} \Big]_{-L}^L \\ = -\frac{L}{k\pi} ( \cos k\pi - \cos (-k\pi) ) = 0$$

وبنفس الطريقة يمكن اثبات أن :

$$\int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} dx = 0$$

(b) إذا كانت  $m \neq n$  فإن :

$$(b) \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \left[ \int_{-L}^L \cos \frac{(m-n)\pi x}{L} dx + \int_{-L}^L \cos \frac{(m+n)\pi x}{L} dx \right] = 0$$

وبنفس الطريقة يمكن اثبات أن :

$$\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0$$

أما إذا كانت  $m = n$  فإن :

$$\int_{-L}^L \cos^2 \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left( 1 + \cos \frac{2n\pi x}{L} \right) dx = L$$

كذلك

$$\int_{-L}^L \sin^2 \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left( 1 - \cos \frac{2n\pi x}{L} \right) dx = L$$



$$(c) \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \left[ \int_{-L}^L \sin \frac{(m-n)\pi x}{L} dx + \int_{-L}^L \sin \frac{(m+n)\pi x}{L} dx \right] = 0$$

مثال (2) : إذا كانت:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

فأثبت أن :

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (أ)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (ب)$$

### الحل

(أ) بإجراء التكامل علي الطرفين من  $-L$  إلى  $L$  ينتج أن :

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right] \\ &= \frac{a_0}{2} \cdot 2L + 0 = a_0 L \end{aligned}$$

$$\text{Thus } a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

بضرب الطرفين في  $\cos \frac{m\pi x}{L}$  والتكامل ينتج أن:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx \\ &= 0 + a_m L + 0 \end{aligned}$$

$$\text{Thus } a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx \quad ; m = 1, 2, 3, \dots$$

(ب) بالضرب في  $\sin \frac{m\pi x}{L}$  والتكامل نجد أن :

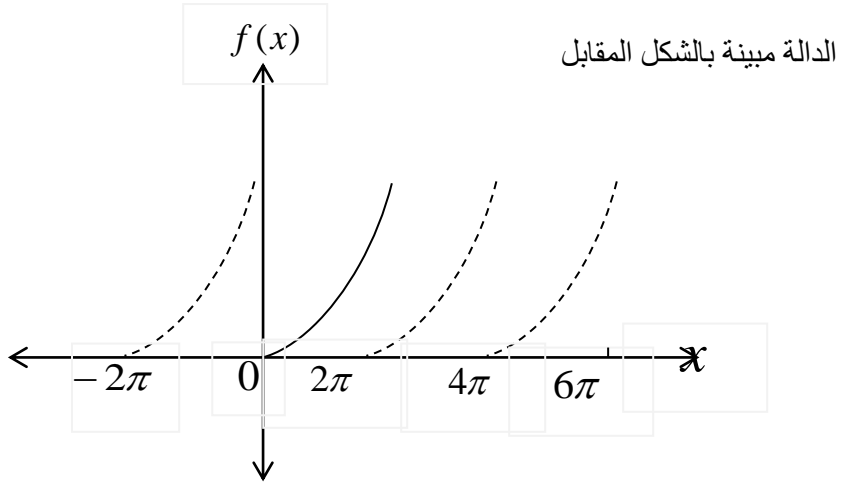
$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0 + 0 + b_m L \end{aligned}$$

$$\text{Thus } b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx$$

مثال (3) : أوجد متسلسلة فوريير للدالة الدورية المعرفة علي دورة كالآتي :

$$e\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

الحل



لايجاد متسلسلة فوريير لهذه الدالة نوجد المعاملات  $a_0$  ,  $a_n$  ,  $b_n$  كالآتي :

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ x^2 \frac{\sin nx}{n} - 2x \left( \frac{-\cos nx}{n^2} \right) + 2 \left( \frac{-\sin nx}{n^3} \right) \right] \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2} ; n \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ x^2 \left( \frac{-\cos nx}{n} \right) - 2x \left( \frac{-\sin nx}{n^2} \right) + 2 \left( \frac{\cos nx}{n^3} \right) \right] \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{-4\pi}{n}
 \end{aligned}$$

ومن ثم فإن متسلسلة فوريير للدالة الدورية  $f(x) = x^2$  تأخذ الصورة :

$$\begin{aligned}
 f(x) = x^2 &= \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right) \\
 &= \frac{4\pi^2}{3} + 4 \cos x + \cos 2x + \frac{4}{9} \cos 3x + \dots \\
 &\quad - 4\pi \sin x - 2\pi \sin 2x - \frac{4\pi}{3} \sin 3x - \dots
 \end{aligned}$$

مثال (4) : أ- بين أن الدالة الزوجية لا تحتوي متسلسلتها علي دوال الجيب .

ب- بين أن معاملات الدالة الزوجية هي :

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

### الحل

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (1)$$

والآن نتناول التكامل الأول ونرمز له بالرمز  $I_1$  ونعتبر التحويل  $x = -u$  .

$$I_1 = \frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(-u) \sin\left(\frac{-n\pi u}{L}\right) d(-u) = \frac{-1}{L} \int_0^L f(u) \sin \frac{n\pi u}{L} du$$

$$= \frac{-1}{L} \int_0^L f(-x) \sin\left(\frac{-n\pi x}{L}\right) d(-x) = \frac{-1}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

واضح أن قيمة هذا التكامل تساوي وتضاد في الإشارة لقيمة التكامل الثاني .

وينتج عن هذا أن  $b_n = 0$

وهذا يعني أن الدالة الزوجية لا تحتوي متسلسلتها على دوال الجيب .

(ب)

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

بعمل التحويل  $x = -u$  في التكامل الأول نجد أن قيمته تساوي تماماً قيمة التكامل الثاني أي أن :

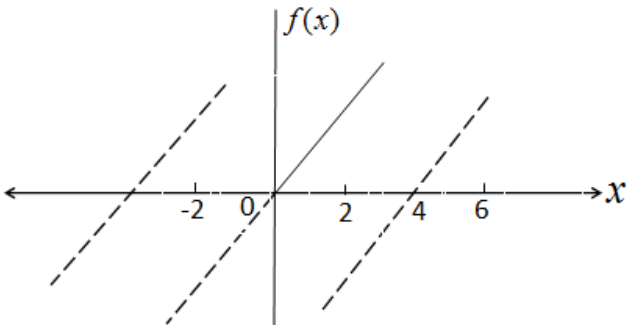
$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

مثال (5) : أوجد متسلسلة نصف المدي (أ) الجيبية (ب) جيبية التمام للدالة

$$f(x) = x \quad ; \quad 0 < x < 2$$

الحل

أ- الشكل يبين الدالة الأصلية والدالة بعد تمديدها تمديداً فردياً :



لايجاد متسلسلة فوريير لهذه الدالة نوجد المعاملات  $a_0$  ,  $a_n$  ,  $b_n$  كالآتي :

$$a_n = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

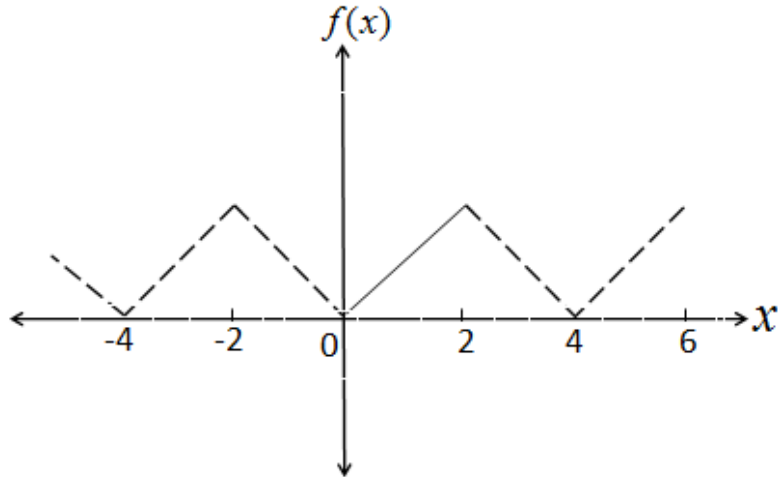
$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{2} \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{4}{n\pi} \cos n\pi$$

ومن ثم فإن متسلسلة فوريير لهذه الدالة تصبح علي الصورة :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4 \cos n\pi}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} \dots \dots \dots \right)$$

ب- الشكل يبين الدالة الأصلية والدالة بعد تمديدها تمديداً زوجياً :



$$b_n = 0 \quad , \quad a_0 = \int_0^2 x \, dx = 2$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx = \frac{2}{2} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} \, dx = \frac{-4 (\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \quad , \quad n \neq 0$$

ومن ثم فإن متسلسلة فوريير لهذه الدالة تصبح علي الصورة :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 (\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi x}{2} + \dots \right) \end{aligned}$$

لاحظ أن المتسلسلة الثانية تتقارب بطريقة أسرع كثيراً من المتسلسلة الأولى .

مثال (6) : في حالة متسلسلة فوريير المزدوجة :

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L_1} \sin \frac{n\pi y}{L_2}$$

أوجد الصيغة التي تحسب منها المعاملات  $B_{mn}$  .

### الحل

إذا اعتبرنا  $y$  بارامتر فإنه يمكن كتابة المتسلسلة كالآتي :

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin \frac{m\pi x}{L_1} \dots \dots \dots (1)$$

حيث

$$C_m = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{n\pi y}{L_2} \dots\dots\dots (2)$$

في هذه الحالة تكون  $C_m$  دالة في  $y$ .

وبالنظر إلى المتسلسلة (2) باعتبارها مفكوك فوريير للدالة  $C_m$  فإن :

$$B_{mn} = \frac{2}{L_2} \int_0^{L_2} C_m \sin \frac{n\pi y}{L_2} dy$$

كذلك من (1) نجد أن :

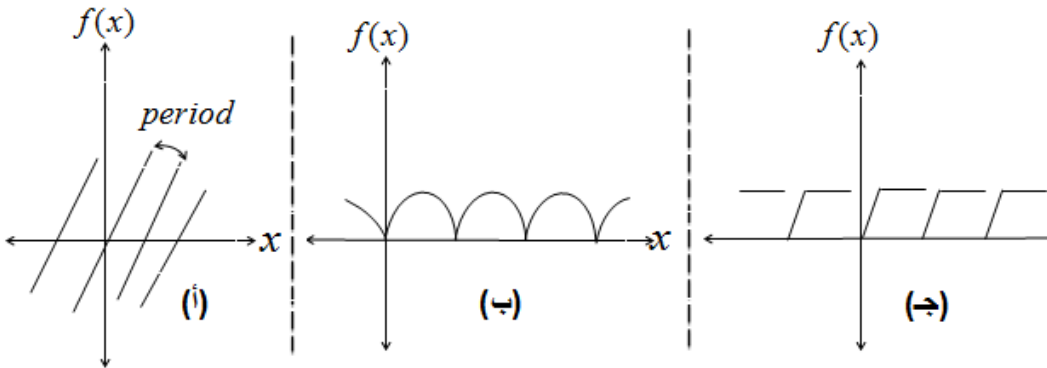
$$C_m = \frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{L_1} dx$$

أي أن :

$$B_{mn} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{L_1} \sin \frac{n\pi y}{L_2} dx dy$$

**تمارين**

( 1 ) بين أي الدوال الآتية زوجية وأيها فردية :



( 2 ) إذا كانت  $f(x) = const.$  فهل هذه الدالة دورية ؟

وإذا كانت كذلك فما مقدار دورتها ؟



\*\*\*\*\*

( 3 ) أ- أوجد معاملات فوريير للدالة الدورية :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : -5 < x < 0 \\ 3 & : 0 < x < 5 \end{cases}$$

ب- ارسم شكلاً للدالة وأوجد متسلسلة فوريير لها .

ج - كيف يمكن تعريف الدالة عند النقط

$x = 5$  ,  $x = 0$  ,  $x = -5$  حتي تكون المتسلسلة تقاربية

للدالة في الفترة  $-5 \leq x \leq 5$  .

( 4 ) أ- أوجد متسلسلة نصف المدي جيبيية التمام للدالة الآتية وارسم شكلاً لها :

$$f(x) = \sin x \quad ; \quad 0 < x < \pi$$

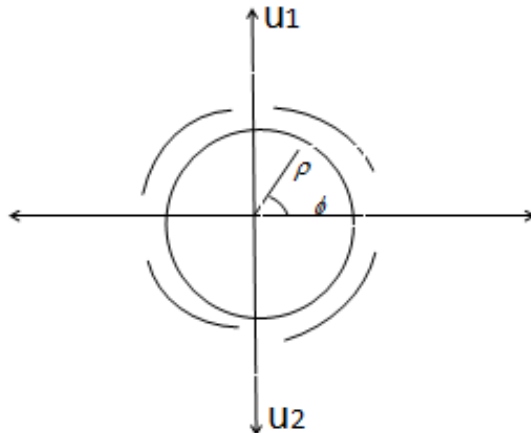
تطبيقات على تحليل فوريير:

مثال (1) : قرص معدني رقيق نصف قطره الوحدة معزول الوجهين نصف حافظه محفوظ علي درجة حرارة

ثابتة  $u_1$  والنصف الأخر علي درجة حرارة ثابتة  $u_2$  .

أوجد التوزيع الحراري في الحالة المستقرة .

الحل



نستخدم هنا الإحداثيات

القطبية المستوية

( والتي هي حالة

خاصة من الإحداثيات

الاسطوانية

حيث  $Z = 0$  ) .

معادلة الحالة المستقرة للتوصيل الحراري

هي معادلة لابلاس  $\nabla^2 u = 0$ .

أي أن

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

الشروط الحدية هي :

$$u(1, \phi) = \begin{cases} u_1 & : 0 < \phi < \pi \\ u_2 & : \pi < \phi < 2\pi \end{cases}$$

$$, |u(\rho, \phi)| < M$$

لفصل المتغيرات نفرض أن :

$$u(\rho, \phi) = P(\rho) \Phi(\phi)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية والقسمة على  $P \Phi$  ينتج أن :

$$\frac{\rho^2 P'' + \rho P'}{P} = \frac{-\Phi''}{\Phi} = \lambda^2$$

ومن ذلك ينتج أن :

$$\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0 \quad , \quad \rho^2 P'' + \rho P' - \lambda^2 P = 0$$

**ملحوظة:** اختيرت إشارة الثابت بحيث يكون كل طرف بعد فصل المتغيرات

مساوياً المقدار  $\lambda^2$  وليس  $-\lambda^2$  كما

حدث في مثال سابق . وليس السبب هنا أن يتحقق الشرط

$$|u(\rho, \phi)| < M \quad \text{كما حدث في مثال}$$

سابق . ولكن السبب هنا أن تكون معادلة  $\Phi$  هي

$$. \Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0$$

حتى يكون الحل متضمناً لدوال الجيب وجيب التمام وذلك لأن الدالة  $\Phi(\phi)$  دورية ويجب أن ترجع قيمتها إلي نفس القيمة . وهذا يتحقق بالاختيار الذي أشرنا إليه . أما إذا كنا قد اخترنا الثابت بإشارة عكسية لكان حل معادلة الدالة  $\Phi(\phi)$  متضمناً لدوال أسية وهي دوال ليست دورية وبالتالي لا تكون مناسبة لحالة المسألة .

نعود الآن لحل المعادلتين العاديتين اللتان نتجتا عن فصل المتغيرات الأولي منهما حلها

$$\Phi(\phi) = A_1 \cos \lambda \phi + B_1 \sin \lambda \phi$$

والثانية من نوع معادلات أويلر وحلولها الخاصة  $\rho^{-\lambda}$  ,  $\rho^{\lambda}$  وحلها العام :

$$P(\rho) = A_2 \rho^{\lambda} + B_2 \rho^{-\lambda}$$

وهنا يجيء دور شرط أن تكون الدالة محدودة . واضح أن كلاً من الحدين  $\rho^{\lambda}$  ,  $\rho^{-\lambda}$  لا يصل إلي قيمة لا نهائية عندما تصل  $\rho$  إلي أقصى قيمتها عند محيط الدائرة حيث نصف القطر قيمة محدودة . ولكن المشكلة تظهر عند مركز القرص حيث  $\rho = 0$  ، حيث الحد الثاني  $\rho^{-\lambda} = \frac{1}{\rho^{\lambda}}$  يصل إلي قيمة لا نهائية .

لذا يجب أن يكون  $B_2 = 0$  وهذا نتيجة تطبيق شرط أن تكون الدالة محدودة في كل مكان . كذلك – كما أشرنا – يجب أن يكون الحل في  $\phi$  دوري ، ويجب أيضاً أن تكون دورته  $2\pi$  بالتحديد . لذا فإن  $\lambda$  يجب أن تكون بالصيغة  $\lambda = m$  ,  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

### والخلاصة:

$$u(\rho, \phi) = \rho^m ( A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi )$$

وبتطبيق مبدأ الإضافة :

$$u(\rho, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m ( A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi )$$

وبتطبيق الشرط الحدي ينتج أن :

$$u(1, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi)$$

وحسب نظرية فورير نحصل علي المعاملات  $A_m$  ,  $B_m$  كالآتي :

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(1, \phi) \cos m\phi \, d\phi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_1 \cos m\phi \, d\phi + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} u_2 \cos m\phi \, d\phi \end{aligned}$$

والنتيجة هي :

$$A_m = \begin{cases} 0 & : m > 0 \\ u_1 + u_2 & : m = 0 \end{cases}$$

أي أن كل المعاملات  $A_m$  تتقدم فيما عدا  $A_0 = u_1 + u_2$ .

والمجموعة الأخرى من المعاملات  $B_m$  نحصل عليها من :

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_1 \sin m\phi \, d\phi + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} u_2 \sin m\phi \, d\phi \\ &= \frac{(u_1 - u_2)(1 - \cos m\pi)}{m\pi} \end{aligned}$$

ومن ثم فإن التوزيع الحراري في الحالة المستقرة يصبح علي الصورة :

$$\begin{aligned} u(\rho, \phi) &= \frac{u_1 + u_2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(u_1 - u_2)(1 - \cos m\pi)}{m\pi} \rho^m \sin m\phi \\ &= \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{2(u_1 - u_2)}{\pi} \left( \rho \sin \phi + \frac{1}{3} \rho^3 \sin 3\phi + \dots \right) \end{aligned}$$



مثال (2) صفيحة رقيقة علي هيئة مربع طول ضلعه الوحدة معزول الوجهين وأحرفه كلها محفوظة في درجة

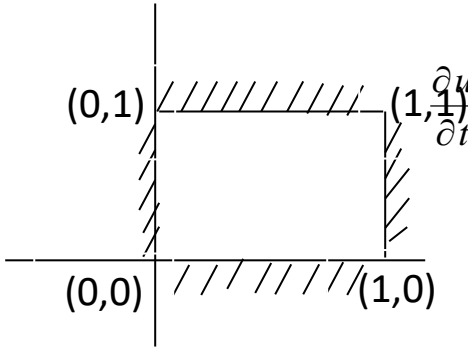
الصفير ... فإذا كان التوزيع الحراري الابتدائي معلوم فأوجد التوزيع العام .

### الحل

المعادلة التفاضلية هي :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

والشروط هي :

$$|u(x, y)| < M ,$$


$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y)$$

حيث  $f(x, y)$  هي دالة التوزيع الحراري الابتدائي المعلومة

لفصل المتغيرات افترض أن :  $u = X(x) Y(y) T(t)$

بعد التعويض في المعادلة والقسمة علي  $K X Y T$

$$\frac{T'}{KT} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \quad \text{نجد أن :}$$

$$T' + K \lambda^2 T = 0 \quad , \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \quad \text{أي أن :}$$

ونكون بذلك طبقنا الشرط الأول للدالة المحدودة . والمعادلة الثانية يجري عليها أيضاً فصل المتغيرات فنحصل علي :

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda^2 = -\mu^2$$

حيث  $\mu^2 -$  هو ثابت آخر اختياري . وقد تم اختياره بحيث يكون سالباً . أما لو اخترناه موجباً ثم طبقنا الشروط الباقية لكنا قد حصلنا علي الحل التافه . ويمكن للطلاب التحقق من ذلك .

$$X'' + \mu^2 X = 0 \quad , \quad Y'' + (\lambda^2 - \mu^2) Y = 0 \text{ أي أن}$$

وحلول هذه المعادلات هي:

$$X = a_1 \cos \mu x + b_1 \sin \mu x \quad ,$$

$$Y = a_2 \cos \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} y + b_2 \sin \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} y \quad ,$$

$$T = a_3 e^{-K\lambda^2 t}$$

$$u(x, y, t) = e^{-K\lambda^2 t} (a_1 \cos \mu x + a_2 \sin \mu x)$$

$$(a_2 \cos \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} y + b_2 \sin \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} y)$$

حيث قد ادمجنا  $a_3$  في باقي الثوابت .

$$\text{بتطبيق الشرط } u(0, y, t) = 0 \text{ نحصل علي } a_1 = 0$$

$$\text{بتطبيق الشرط } u(x, 0, t) = 0 \text{ نحصل علي } a_2 = 0$$

أي أن :

$$u(x, y, t) = B e^{-K\lambda^2 t} \sin \mu x \sin \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} y$$

$$\text{بتطبيق الشرط } u(1, y, t) = 0 \text{ نحصل علي } \mu = m\pi$$

$$\text{بتطبيق الشرط } u(x, 1, t) = 0 \text{ نحصل علي } \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} = n\pi$$

$$\text{أي أن : } \lambda = \sqrt{m^2 + n^2}$$

وبتطبيق مبدأ الإضافة نحصل علي الحل العام وهو :

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} e^{-K(m^2+n^2)\pi^2 t} \sin m\pi x \sin n\pi y$$

وبتطبيق الشرط  $u(x, y, 0) = f(x, y)$  نحصل علي :

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin m\pi x \sin n\pi y$$

وهي متسلسلة فوريير المزدوجة معاملاتها هي :

$$B_{mn} = 4 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \sin m\pi x \sin n\pi y dx dy$$

وإذا كانت  $f(x, y)$  دالة معروفة لأمكننا حساب هذا التكامل والحصول علي القيم الرقيمة للمعاملات  $B_{mn}$  ثم التعويض عنها في الصيغة النهائية للدالة  $u(x, y, t)$ .

## تمارين

(1) أوجد حل مسألة التوصيل الحراري لساق رقيقة حيث :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3$$

علماً بأن  $u(0, t) = u(3, t) = 0$ .

وعلماً بأن درجة الحرارة الابتدائية  $25^\circ C$  لكل نقط الساق .

(2) ساق رقيقة معزولة الجوانب ومعزولة الطرفين  $x=0$  ,  $x=L$  فإذا كان التوزيع الحراري الابتدائي

يعطي بالدالة  $f(x)$  ..... فأوجد التوزيع العام .

(3) حل معادلة لابلاس في بعدين : صفيحة رقيقة مربعة طول ضلعها الوحدة  
ثلاث أضلاع منها محفوظة علي  
درجة الصفر والضلع الرابع علي درجة  $\mu$  . أوجد التوزيع الحراري في  
الحالة المستقرة

## الفصل الثاني

### تكامل فوريير ..... Fourier Integral

#### الحاجة الي تكامل فوريير:

فيما سبق تناولنا دوال دورية دورتها اما اذا كانت  $L \rightarrow \infty$  واذا كانت  
الفترة المعرفة عليها الدالة غير محدودة فاننا سنجد ان متسلسلة فوريير يؤول  
تكامل فوريير .

#### تكامل فوريير:

أ- اذا كانت  $f(x)$  ,  $f'(x)$  متصلة جزئيا في كل فترة محدودة

$$\text{ب- } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \text{ متقارب}$$

فإن نظرية تكامل فوريير تقرر ان :

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] dx \quad (1)$$

حيث

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha u du \quad (2)$$



$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \alpha u \, du$$

كما ان تكامل فوريير يقترب من الدالة  $f(x)$  عند نقطة عدم الاتصال ومن متوسط الدالة عند نقطة عدم الاتصال كما كان الحال في متسلسله فوريير .  
والطرف الايمن للمعادلة (1) يسمى تكامل فوريير للدالة  $f(x)$  .

صيغ مكافئة:

يمكن التعبير عن (2), (1) بصيغة واحده هي :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=0}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha(x-u) \, du \, d\alpha \quad (3)$$

$$\text{or } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\alpha(x-u)} \, du \, d\alpha$$

$$\text{or } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \, d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\alpha u} \, du \quad (4)$$

وفي حالة  $f$  دالة فردية فإن :

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x \, d\alpha \int_0^{\infty} f(u) \sin \alpha u \, du \quad (5)$$

وفي حالة  $f$  دالة زوجية فإن :

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha x \, d\alpha \int_0^{\infty} f(u) \cos \alpha u \, du \quad (6)$$

**تحويل فوريير.....:Fourier Transform**

من المعادلة (4) نجد أن :

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u} du \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{i\alpha x} dx \quad (8)$$

الدالة  $F(\alpha)$  تسمى تحويل فوريير للدالة  $f(x)$  وتكتب :

$$F(\alpha) = \mathfrak{T}\{f(x)\}$$

والدالة  $f(x)$  هي تحويل فوريير

$$f(x) = \mathfrak{T}^{-1}\{F(\alpha)\}$$

العكسي للدالة  $F(\alpha)$  وتكتب

**تحويل فوريير الجيبى وجيبى التمام :**

إذا كانت  $f(x)$  دالة فردية فان تكامل فوريير يختزل الى صيغة (5) وهي :

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\alpha) \sin \alpha x d\alpha$$

اما اذا كانت الدالة زوجية فإن:

$$F_c(\alpha) = \int_0^{\infty} f(u) \cos \alpha u du, \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\alpha) \cos \alpha x d\alpha$$

حيث  $F_c(\alpha)$ ,  $F_s(\alpha)$  تسمى بتحويل فورير جيبي التمام والجيبي للدالة  $f(x)$ .

### نظرية الاندماج..... Convolution Theorem:

اندماج الدالة  $f(x)$ ,  $g(x)$  يعرف بانه :-

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u) du$$

ونظرية الاندماج تقرر ان تحويل فورير لاندماج  $f$ ,  $g$  اي الدالة  $f * g$  يساوي حاصل ضرب تحويل فورير للدالتين  $f$ ,  $g$  بمعنى ان :

$$\mathfrak{F}\{f * g\} = \mathfrak{F}\{f\} \mathfrak{F}\{g\}$$

كما ان الاندماج يحقق قوانين التبادلالاملازم والتوزيع اي ان :

$$f * g = g * f, \quad f * (g * h) = (f * g) * h$$

$$, \quad f * (g + h) = f * g + f * h$$

### أمثلة

مثال (1) بين ان المعادلتين (3), (1) متكافئة .

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=0}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha(x-u) du d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=0}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u) \{ \cos \alpha x \cos \alpha u + \sin \alpha x \sin \alpha u \} du d\alpha$$

حيث

$$= \int_{\alpha=0}^{\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] du d\alpha$$

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha u du$$

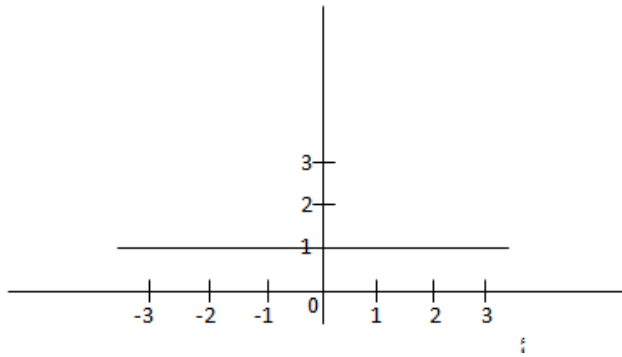
$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \alpha u du$$

مثال (2) أ- اوجد تحويل فوريير للدالة :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : |x| < a \\ 0 & : |x| > a \end{cases}$$

ب - ارسم منحنى الدالة  $f(x)$  ومنحنى تحويل فوريير لها في حالة

$$a = 3$$



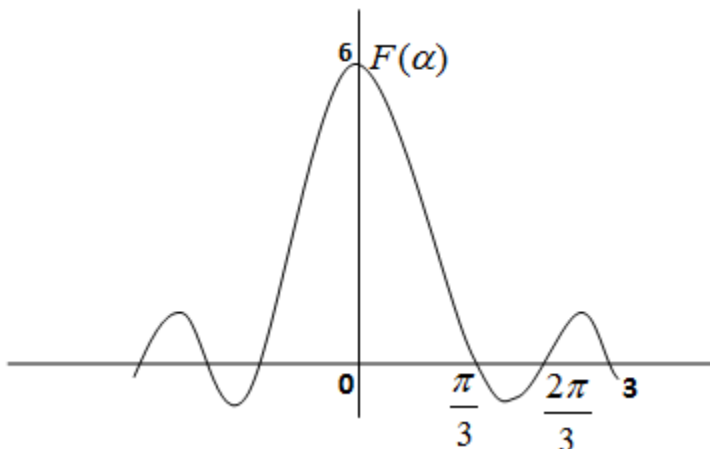
منحى الدالة  
عندما  $a = 3$

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u} du = \int_{-a}^a e^{-i\alpha u} du$$

$$= \frac{e^{-i\alpha u} - e^{-i\alpha a}}{-i\alpha} = \frac{2 \sin \alpha a}{\alpha}$$

$$= \frac{e^{-i\alpha u}}{-i\alpha} \Big|_{-a}^a$$

مع ملاحظة ان  $F(0) = 2a$  والشكل الاتي يبين منحى التحويل عندما  $a = 3$



مثال (3)

استخدم نتيجة المثال السابق في إيجاد قيم التكاملين الاتيين :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha a \cos \alpha}{\alpha} d\alpha \quad (أ)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \quad (ب)$$

الحل:

للدالة المعرفة في المثال السابق اثبتنا ان :

$$F(\alpha) = \frac{2 \sin \alpha a}{\alpha}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin \alpha a}{\alpha} e^{i\alpha x} d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha a \cos \alpha x}{\alpha} d\alpha + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha a \sin \alpha x}{\alpha} d\alpha$$

وحيث ان كلا من  $\alpha, \sin \alpha a, \dots\dots$  دوال فردية في  $\alpha$  فإن الدالة التي على علامة التكامل تكون دالة فردية ولذا ينعدم التكامل الثاني ويصبح:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha a \cos \alpha x}{\alpha} d\alpha$$

اي ان قيم التكامل هي نفس قيم الدالة  $f(x)$  المعرفة في المثال وحسب نظرية فوريير يقترب التكامل من قيم الدالة او متوسط قيمتها .  
اي ان :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\alpha} d\alpha = \begin{cases} \pi & : |x| < a \\ \frac{\pi}{2} & : |x| = a \\ 0 & : |x| > a \end{cases}$$

ب - بوضع  $x = 0$  ,  $a = 1$  في نتيجة (أ) ينتج أن :

$$\text{or } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha = \pi \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2}$$

مثال (4) : وهو تطبيق على نظرية الاندماج .

حل المعادلة التكاملية :

$$y(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} y(u)r(x-u)du$$

حيث  $r(x)$  ,  $g(x)$  دوال معطاه .

### الحل

بأخذ تحويل فوريير للطرفين وتطبيق نظرية الاندماج فإن:

$$y(\alpha) = G(\alpha) + Y(\alpha)R(\alpha)$$

حيث  $G(\alpha)$  ,  $R(\alpha)$  دوال معلومة لانها تحويل فوريير لدوال معلومة .

ومن هذا ينتج ان:

$$y(\alpha) = \frac{G(\alpha)}{1 - R(\alpha)}$$

اي ان  $Y(\alpha)$  ولو ان تحويل لدالة مجهولة اننا استطعنا ايجاده بدلالة تحويلات معلومة لدوال معلومة .

وللحصول على نفس الدالة  $y(x)$  نجري التحويل العكسي .

اي ان :-

$$y(x) = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \frac{G(\alpha)}{1 - R(\alpha)} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\alpha)}{1 - R(\alpha)} e^{i\alpha x} d\alpha$$

حيث كل الدوال التي تلي علامة التكامل دوال معلومة.

مثال (5) :

اوجد حل المعادلة التكاملية

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(u) du}{(x-u)^2 + a^2} = \frac{1}{x^2 + b^2}$$

الحل:

نحسب أولا تحويل فورير للطرف الأيمن :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \left\{ \frac{1}{x^2 + b^2} \right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{x^2 + b^2} dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + b^2} dx \end{aligned}$$

هذا التكامل معطى كتمرين (2) ونتيجته هي



$$\mathfrak{F}\left\{\frac{1}{x^2 + b^2}\right\} = \frac{\pi}{b} e^{-b\alpha} \quad (1)$$

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{1}{x^2 + b^2}\right\} = \frac{\pi}{a} e^{-a\alpha} \quad (2) \text{ ومن ذلك ينتج ايضا ان}$$

باجراء التحويل على طرفي المعادلة ينتج ان :

$$\mathfrak{F}\{y\} \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{x^2 + b^2}\right\} = F\left\{\frac{1}{x^2 + b^2}\right\} \quad (3)$$

وبالتعويض عن (2) , (1) في (3) ينتج ان :

$$Y(\alpha) \frac{\pi}{a} e^{-a\alpha} = \frac{\pi}{b} e^{-b\alpha}$$

$$Y(\alpha) = \frac{a}{b} e^{-(b-\alpha)\alpha} \quad \text{اي ان}$$

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} Y(\alpha) d\alpha \text{ ويكون}$$

$$= \frac{a}{b\pi} \int_0^{\infty} e^{-(b-a)\alpha} \cos \alpha x d\alpha$$

$$= \frac{a(b-a)}{b\pi [x^2 + (b-a)^2]}$$

حيث استخدمنا العلاقة .....  $e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \sin \alpha x$  وحذفنا الحد الثاني باعتباره دالة فردية ينعدم تكاملها وضاعفنا قيمة التكامل بعد تغيير الحدود من صفر الى  $\alpha$  بدلا من  $-\infty$  الى  $\infty$

تمارين:

(1) - بين ان المعادلتين (4) , (3) في نظرية تكامل فوريير متكافئتان .

(2) - أ- اوجد تحويل فوريير جيبي التمام للدالة  $f(x) = e^{-mx}$

ب - استخدم نتيجة (أ) في اثبات ان :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos pvdv}{v^2 + \beta^2} = \frac{\pi}{2\beta} e^{-P\beta}$$

(3) - أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx = \begin{cases} 1 - \alpha : 0 \leq \alpha \leq 1 \\ 0 : \alpha > 1 \end{cases}$$

تطبيقات على تكامل فوريير :-

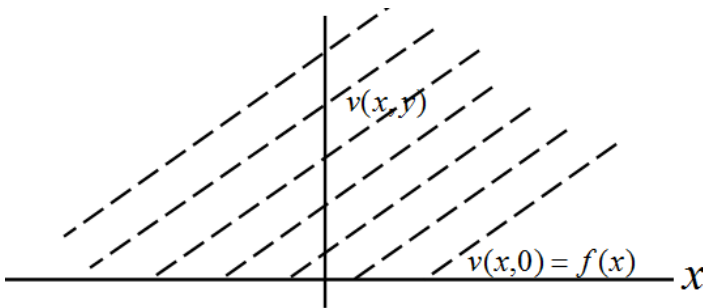
مثال (1) اوجد الحل المحدود لمعادلة لابلاس  $\nabla^2 v = 0$  لنصف المستوى

$y > 0$  اذا علم انه على محور  $x$  تكون  $v$  معطاه بالدالة  $f(x)$

الحل:

المسألة الحدية

هي:



$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, v(x,0) = f(x), |v(x,y)| < M$$

لفصل المتغيرات ضع  $v = XY$

$$\text{Then } \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0, Y'' - \lambda^2 Y = 0$$

$$v(x, y) = (a_1 \cos \lambda x + b_1 \sin \lambda x)(a_2 e^{\lambda y} + b_2 e^{-\lambda y})$$

وبسبب ان  $v(x, y)$  يجب ان تكون محدودة فإن  $a_2 = 0$

$$, v(x, y) = e^{-\lambda y} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x)$$

وبسبب عدم وجود شروط على البارامتر  $\lambda$  فإنه بتطبيق مبدأ الأضافة ينتج أن :

$$v(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda$$

وبسبب الشرط  $v(x, 0) = f(x)$  فإن :

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda$$

ومن نظرية تكامل فوريير نجد أن :

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda u du$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda u du$$

والنتيجة أن :

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y} f(u) \cos \lambda(x-u) du d\lambda$$

مثال (2) : بين ان نتيجة المثال السابق يمكن ان تختزل الى :

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(u)}{y^2 + (u-x)^2} du$$

الحل:

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left[ \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} \cos \lambda(x-u) d\lambda \right] du$$

وبإجراء التكامل الداخلي نجد أن :

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda y} \cos \lambda(x-u) d\lambda = \frac{y}{y^2 + (u-x)^2}$$

$$\therefore v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(u)}{y^2 + (u-x)^2} du$$

مثال (3) : أ - استخدم تحويل فوريير لحل المسألة الحدية الآتية :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial u}{\partial x^2}, u(x,0) = f(x), |u(x,t) < u|, -\infty < x < \infty$$

ب - استنتج المعنى الطبيعي للمسألة:

الحل:

أ - بأخذ تحويل فوريير المعادلة ينتج أن :

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{T}\{u\} = -k\alpha^2 \mathfrak{T}\{u\}$$

وهذه مسألة تفاضلية عادية للدالة  $\mathfrak{T}\{u\}$  وحلها هو:

$$\mathfrak{T}\{u\} = c(\alpha)e^{-k\alpha^2 t}$$

ويوضع  $t = 0$  نحصل على:

$$\mathfrak{T}\{u(x,0)\} = \mathfrak{T}\{f(x)\} = c(\alpha)$$

اي ان:

$$\mathfrak{T}\{u\} = \mathfrak{T}\{f\} \cdot e^{-k\alpha^2 t} \quad (1)$$

وحتى يصبح في الامكان تطبيق نظرية الاندماج فإنه يجب ان يكتب العامل الثاني في الطرف الايمن على هيئة تكامل . وهناك تكامل معروف هو :

$$\int_0^{\infty} e^{-Mx^2} \cos \beta x dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{M}} e^{-\frac{\beta^2}{4M}}$$

ومن ذلك نجد ان:

$$e^{-k\alpha^2 t} = 2 \sqrt{\frac{1}{4k\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \cos \alpha x dx$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{4k\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \cos \alpha x dx \quad \text{اي ان:}$$

$$e^{-k\alpha^2 t} = \Gamma \left\{ \sqrt{\frac{1}{4k\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \right\} \quad (2)$$

من (1) , (2) نجد ان :

$$\mathfrak{T}\{u\} = \mathfrak{T}\{f\} \cdot \mathfrak{T}\left\{\sqrt{\frac{1}{4k\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right\}$$

وبتطبيق نظرية الأندماج فإن :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x) * \sqrt{\frac{1}{4k\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(w) \sqrt{\frac{1}{4k\pi t}} e^{-\frac{(x-w)^2}{4kt}} dw \end{aligned}$$

هذا ويمكن تبسيط النتيجة اذا اجرينا التحويل الاتى :

$$\text{Or } \frac{(w-x)^2}{4kt} = z^2 \quad z = \frac{x-w}{2\sqrt{kt}}$$

والنتيجة هى:

$$\therefore u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} f(x-2z\sqrt{kt}) dz$$

ب - المعنى الطبيعي توصيل حراري في ساق رفيعة لا نهائيه الطول .

مثال (4) : لانهائي الطول ليعطي الازاحة الابتدائية  $y(x,0) = f(x)$  ثم يترك ليهتز . اثبت ان الازاحة العامة تعطي من :

$$y(x,t) = \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)]$$

ثم وضح معنى هذه النتيجة :

الحل:

المسألة الحدية الخاصة بهذا المثال هي:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad y(x,0) = f(x), \quad y_t(x,0) = 0, \quad |y(x,t)| < M, \quad -\infty < x < \infty$$

بعد تطبيق مبدأ الاضافة (بالتكامل) فالحل العام هو :

$$y(x,t) = \int_0^{\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] \cos \lambda at d\lambda$$

بوضع  $t = 0$  وتطبيق الشرط الأول فإن :

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda$$

حيث :

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda u du,$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda u du,$$

وبالتعويض في صيغة الدالة  $y(x,t)$  ينتج أن :

$$\begin{aligned}
y(x,t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) [\cos \lambda x \cos \lambda u + \sin \lambda x \sin \lambda u] \cos \lambda at \, dud\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) [\cos(\lambda x - \lambda u)] \cos \lambda at \, dud\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) [\cos(x + at - u) + \cos \lambda(x - at - u)] \, dud\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(x + at - u) \, dud\lambda \quad (1)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(x - at - u) \, dud\lambda$$

ولكن احدى صيغ نظرية فوريير:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(x - u) \, dud\lambda \quad (2)$$

وبمقارنة (2) و(1) نجد أن :

$$y(x,t) = \frac{1}{2} [f(x + at) + f(x - at)]$$

التفسير الطبيعي لهذه النتيجة لا يتم الا بعد تحليل دقيق لها كالآتي :-

$$y(x,t) = \frac{1}{2} (y_1 + y_2) \quad \text{نفرض أن}$$



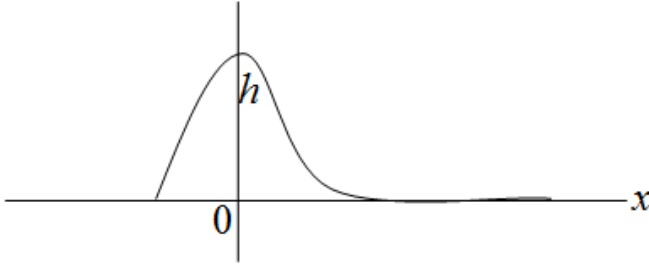
$$y_2 = f(x - at), y_1 = f(x + at) \text{ حيث}$$

وعلينا الان نتبع تغيرات الدالة  $y_2 = f(x - at)$  في أزمنة مختلفة.

عند  $t = 0$  يكون  $y_2(x, 0) = f(x)$  حيث  $f(x)$  هو التوزيع

الابتدائي للإزاحات او بمعنى اخر ان  $y_2 = f(x)$  هي الدالة التي تعطى شكل الوتر في الحالة الابتدائية ونفرض الشكل الاتي يمثل الدالة

$$y_2(x, 0) = f(x)$$



ولنفرض ان قيمة الدالة عند  $x = 0$  هي العدد  $h$  اي ان ارتفاع الوتر عند نقطة الاصل عند بداية الحركة هو العدد  $h$ .

نركز النظر على هذه القيمة  $h$  عندما ندع الزمن والمسافة تتغيران معا كما يحدث عندما يركز الأتسان نظره على قمة موجة تنتشر في البحر فيجد ان هذه القمة تتحرك .

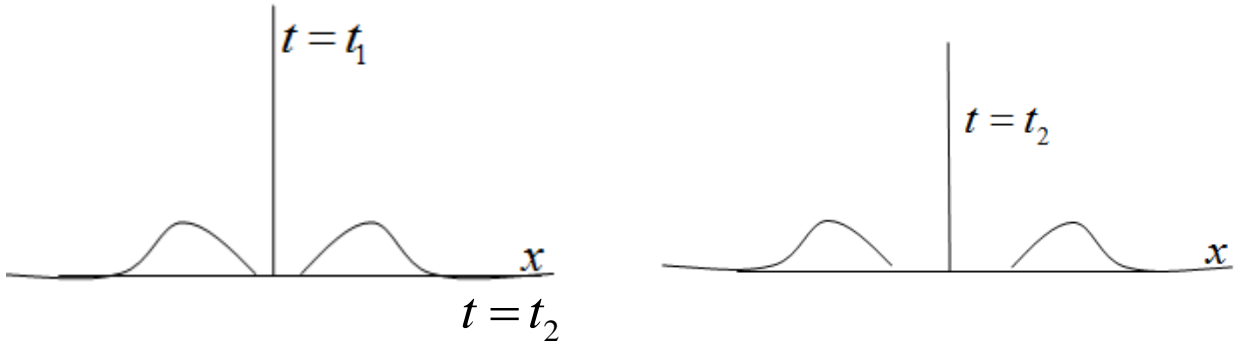
وحيث أنه لأي زمن وايمسافة يكون  $y_2 = f(x - at)$  وحيث اننا نريد ان يكون دائما  $(x - at) = h$ ..... وحيث انه  $f(0) = h$  .

لذا فان الشرط يتحقق عندما  $x - at = 0$  .

بمعنى اخر لان  $x - at$  حيث  $x$  هنا تعبر عن النقطة التي ازاحتها  $L$  ومعنى هذا ان هذه النقطة التي لها هذه الازاحة تتحرك الى اليمين بسرعة قدرها  $a$  .

ونفس الطريقة لو تأملنا الدالة فاننا نجد ان هناك نقطة اخرى لها نفس الازاحة ولكنها تتحرك يسارا بسرعة  $a$  .

وبتطبيق هذا الاستنتاج ايضا على اي نقطة اخرى لها ازاحة وتختلف عن  $L$  ولذا نستطيع ان نقول ان الشكل الابتدائي للوتر يتحرك كله (الشكل وليس الوتر) الى اليمين والي اليسار بسرعة  $a$  .  
والشكل الاتي يوضح الامر .



اما الازاحة العامة فهي :

$$y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

وهي من حيث القيمة العددية مساوية لقيمة  $f(x)$  .

## تمارين

- (1) - ساق نصف لانهاية ( $x \geq 0$ ) معزولة الجوانب والتوزيع الحراري الابتدائي لها معطى بالدالة  $f(x)$ . حيث الطرف الايسر على درجة الصفر والمطلوب .  
 أ - كتابة المسألة الحدية .

ب - أثبت :

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(v) e^{-k^2 \lambda t} \sin \lambda v \sin \lambda x d v d \lambda$$

- (2) - اذا اخذ تحويل فوريير للدالة  $v(x,t)$  بالنسبة المتغير  $x$

فاثبت ان :-

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\} = i\alpha\Gamma\{v\}_- \text{ أ}$$

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\} = -\alpha^2\Gamma\{v\}_- \text{ ب}$$

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{\partial v}{\partial t}\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\Gamma\{v\}_- \text{ ج}$$

علمنا بان:  $\text{as } v_1 \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow 0 \text{ } x \rightarrow \pm\infty$

### الفصل الثالث

## تحويلات لابلاس ..... Laplace Transform

### التحويل التكاملي..... Integral Transform

عند دراستنا لتكامل فوريير رأينا انه تحت شروط معينة فان الدالة  $f(x)$

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\lambda) \cos \lambda x d\lambda$$

يمكن تمثيلها بالتكامل

$$A(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(u) \cos \lambda u du$$

حيث

وبعد تعديل بسيط في الرموز يمكننا ان نقول انه اذا كانت  $F(t)$  دالة في المتغير  $t$  فان التحويل التكاملي لها هو بصفة عامة :

$$f(s) = \int_a^b F(t) K(s, t) dt$$

حيث  $f(s)$  تسمى التحويل التكاملي للدالة  $F(t)$  وحيث  $k(s, t)$  تسمى نواة التحويل وواضح ان نوع التحويل يتوقف على كيفية اختيار النواة  $k(s, t)$  كما يتوقف على حدود التكامل  $a, b$ .

فمثلا تحويل فوريير نحصل عليه باختيار  $k(s, t) = \cos st$  او

$$k(s, t) = \sin st, \quad a = 0, \quad b = \infty$$

والتحويلات التكاملية تلعب دورا هاما في حلول بعض المسائل الحدية وغيرها حيث نستبدل حل المسألة التي تتضمن الدالة  $F(t)$  بحل مسألة أخرى تتضمن دالة التحويل  $f(s)$  والمسألة الثانية تكون عادة اسهل كثيرا في حلها من المسألة الأصلية وبعد إيجاد الحل للدالة.....  $f(s)$  نرجع فنجرى عليهما التحويل العكسي حتى نحصل على الحل المقابل وهو الدالة  $F(t)$ .

اما تحويل لابلاس فيكون باختيار  $K(s,t) = e^{-st}$  وتكون حدود التكامل هي  $a = 0, b = \infty$ ,

وفي هذه الحالة يكون :

$$f(s) = \int_0^{\infty} F(t)e^{-st} dt$$

هذا ولا يجب ان يعتبر ان تحويل فورير او تحويل لابلاس هو اول ما قابلنا من تحويلات اذ اننا في الحقيقة قد استخدمنا نوعا من التحويل — حتى وإن لم يكن تحويلا تكامليا — حيث كنا نستعين على حل بعض المسائل الحسابية التي تتضمن عمليات الضرب والقسمة لبعض الأعداد او قوى الأعداد والجذور . عندئذ كنا نحسب أولا لوغاريتمات الأعداد وهذه العملية في حد ذاتها ماهى الا عملية تحويل العدد الى عدد اخر بطريقة معينة هى حساب لوغاريتم هذا العدد . بعد ذلك تتحول المسألة الاصلية الى مسألة اخرى تتضمن لوغاريتمات الاعداد الاعداد وليست الاعداد نفسها خيث نجري على هذه اللوغاريتمات (اي التحويلات اللوغاريتميه للاعداد ) عمليات حسابية اخري غير العمليات الأولى حيث تكون العمليات الجديدة هى مجرد جمع وطرح التحويلات اللوغاريتميه للأعداد بدلا من عمليات الضرب والقسمة في المسألة الأصلية . وبعد الحصول على الحل اي بعد الحصول على التحويل اللوغاريتمى لجواب المسألة الأصلية نرجع فنجرى التحويل العكسي على اللوغاريتم فنحصل على العدد من لوغاريتمية بعملية حسابية معينة .

وفي تحويل لابلاس يؤخذ المتغير  $s$  حقيقي ولو أنه في بعض الأحيان يؤخذ المتغير  $s$  بإعتباره متغير مركب .

كما أن التحويل  $f(s)$  للدالة  $F(t)$  يكتب كالاتي :

$$\ell\{F(t)\} = f(s) = \int_0^{\infty} F(t)e^{-st} dt$$

ويقال ان التحويل  $f(s)$  يوجد اذا كان التكامل متقارب ويحدث هذا اذا توافرت شروط معينة في الدالة  $F(t)$  سنناقشها فيما بعد .

وفيما يلي جدول تحويلات لبعض الدوال البسيطة . وهذه التحويلات سوف نبرهن على صحتها من خلال الامثلة والتمارين :

$F(t)$	$F(t) = f(s)$
1	$\frac{1}{s}, s > 0$
$t$	$\frac{1}{s^2}, s > 0$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}, s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, s >  a $
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, s >  a $

**الدوال ذات الرتبة الأسية ..... Function of exponential**  
**: order**

**نظريات عن تحويل لابلاس :**

**(1) خاصية الخطئية..... Linearity Property :**

إذا كانت  $c_1, c_2$  ثوابت وكانت  $F_1(t), F_2(t)$  دوال وكانت  
 $f_1(s), f_2(s)$  هي تحويلات لابلاس لهذه الدوال على الترتيب  
 فإن :

$$\begin{aligned} \ell\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\} &= c_1 \ell\{F_1(t)\} + c_2 \ell\{F_2(t)\} \\ &= c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s) \end{aligned}$$

مثال ذلك :

$$\begin{aligned} \ell\{4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}\} &= 4\ell\{t^2\} - 3\ell\{\cos 2t\} + 5\ell\{e^{-t}\} \\ &= 4\left(\frac{2}{s^3}\right) - 3\left(\frac{s}{s^2 + 4}\right) + 5\left(\frac{1}{s+1}\right) \\ &= \frac{8}{s^3} - \frac{3s}{s^2 + 4} + \frac{5}{s+1} \end{aligned}$$

**(2) خاصية الازاحة الاولى ..... First Chifting Property :**

إذا كان  $\ell\{F(t)\} = f(s)$  فإن  $\ell\{e^{at} F(t)\} = f(s-a)$   
 مثال ذلك :  $\ell\{e^{-t} \cos 2t\} = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 5}$

**(3) خاصية الأزاحة الثانية :**

إذا كان  $\ell\{F(t)\} = f(s)$  فإن  $e^{-as} f(s) = \ell\{G(t)\}$

$$G(t) = \begin{cases} F(t-a) & : t > a \\ 0 & : t < a \end{cases} \quad \text{حيث}$$

مثال ذلك :

$$\frac{6e^{-2s}}{s^4} \quad \text{حيث أن } \ell\{t^3\} = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4} \quad \text{فإن}$$

يكون تحويل لابلاس للدالة  $G(t)$  حيث

$$G(t) = \begin{cases} (t-2)^3 & : t > 2 \\ 0 & : t < 2 \end{cases}$$

**(4) خاصية تغير المقاس.....:Change of scale Property**

$$\ell\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{فإن } \ell\{F(t)\} = f(s) \quad \text{إذا كان}$$

$$\ell\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1} \quad \text{مثال ذلك} \quad \text{لذا فإن :}$$

$$\ell\{\sin 3t\} = \frac{1}{3} \frac{1}{\left(\frac{s}{3}\right)^2 + 1} = \frac{3}{s^2 + 9}$$

**(5) تحويل لابلاس للمشتقات :**

أ - إذا كان

$$\ell\{F'(t)\} = sf(s) - F(0) \quad \text{فإن } \ell\{F(t)\} = f(s)....$$

$$\ell\{\cos 3t\} = \frac{s}{s^2 + 9} \quad \text{مثال ذلك}$$

لذا فإن :

$$\ell\{-3 \sin 3t\} = s\left(\frac{s}{s^2 + 9}\right) - 1 = \frac{-9}{s^2 + 9}$$

ب- كذلك



$$\ell\{F^n(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$$

أو على وجه العموم .

$$\ell\{F^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \dots - sF^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0)$$

### (6) تحويل لابلاس للتكاملات :

$$\ell\left\{\int_0^t F(u)du\right\} = \frac{f(s)}{s} \quad \text{فإن} \quad \ell\{F(t)\} = f(s) \quad \text{إذا كان}$$

$$\text{مثال ذلك :} \quad \ell\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2 + 4} \quad \text{لذا فإن :}$$

$$\ell\left\{\int_0^t \sin 2udu\right\} = \frac{2}{s(s^2 + 4)}$$

والتحقيق من ذلك فإن :

$$F(t) = \int_0^t \sin 2udu = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$$

$$\therefore \ell\{F(t)\} = \frac{1}{2}[\ell\{1\} - \ell\{\cos 2t\}] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4}\right] = \frac{2}{s(s^2 + 4)}$$

### (7) الضرب في العامل $t^n$ :

$$\text{إذا كان} \quad \ell\{F(t)\} = f(s) \quad \text{فإن :}$$

$$\ell\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s)$$

مثال ذلك  $\ell\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$  لذا فإن :

$$\ell\{te^{2t}\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

وكذلك  $\ell\{t^2e^{2t}\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{2}{(s-2)^3}$

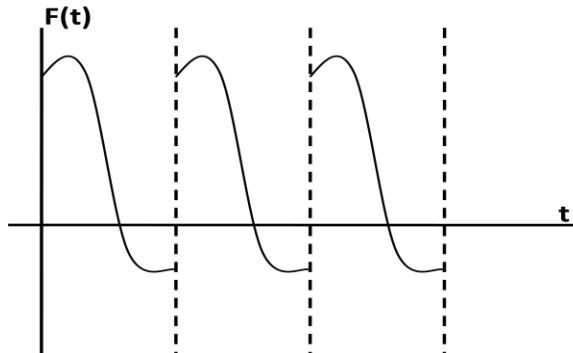
(8) القسمة على  $t$  :

إذا كان  $\ell\{F(t)\} = f(s)$  فإن  $\ell\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)du$

مثال ذلك :  $\ell\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$  حيث أن  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$  وحيث أن

فإن  $\ell\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{du}{u^2 \oplus 1} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$

(9) إذا كانت  $F(t)$  دالة دورتها  $T$  كما بالشكل فإن :



$$\ell\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-st}}$$

(10) دالة التحويل عند النقطة اللانهائية :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 0 \text{ فإن } \ell\{F(t)\} = f(s) \text{ اذا كان}$$

(11) نظريه القيمة الابتدائية ..... Initial –value Theorm :

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) \text{ تنص هذه النظرية على أن}$$

وذلك بفرض تواجد النهايات المذكوره .

(12) نظريه القيمة النهائية ..... Final –value Theorm :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s) \text{ تنص هذه النظرية على أن}$$

وذلك بفرض تواجد النهايات المذكورة .

(13) تعميم نظرية القيمة الابتدائية :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{G(t)} = 1 \text{ اذا كان } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{G(t)} = 1 \text{ فإن قيم الدالة } F(t) \text{ تكون قريبة من قيم الدالة}$$

$G(t)$  عندما تكون  $t$  صغيرة ويعبر عن ذلك كالآتي :

$$\text{as } F(t) \approx G(t) \text{ } t \rightarrow 0$$

بالمثل اذا كان  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{g(s)} = 1$  فإنه للقيم الكبيرة للمتغير  $s$  تكون قيم

$f(s)$  قريبا من قيم  $g(s)$  ويعبر عن ذلك كالآتي :

$$\text{as } f(s) \approx g(s) \quad s \rightarrow \infty$$

لهذا يمكن اعادة صياغه نظرية القيمة الابتدائية كالآتي :

$$\text{as } F(t) \approx G(t) \quad t \rightarrow 0 \quad \text{اذا كان}$$

$$\text{as } f(s) \approx g(s) \quad s \rightarrow \infty \quad \text{فإن}$$

$$f(s) = \ell\{F(t)\}, \quad g(s) = \ell\{g(t)\} \quad \text{حيث}$$

$$(14) \quad \text{تعميم نظرية القيمة النهائية :}$$

اذا كان  $\text{as } F(t) \approx G(t) \quad t \rightarrow \infty$  فإن  $\text{as } s \rightarrow 0$

$$f(s) \approx g(s)$$

$$f(s) = \ell\{F(t)\} \quad , \quad g(s) = \ell\{g(t)\} \quad \text{حيث}$$

طرق لإيجاد تحويلات لابلاس :

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (1) \quad \text{الطريقة المباشرة}$$

(2) طريقة المتسلسلات اذا كانت  $F(t)$  يمكن كتابتها كمتسلسلة قوى -

اي اذا كان :

$$F(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

فان تحويل لابلاس لها يمكن ايجاده كمجموع تحويلات لابلاس لحدود المتسلسه اي ان :

$$\ell\{F(t)\} = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1t}{s^2} + \frac{a_2t^2}{s^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!a_n}{s^{n+1}}$$

على شرط ان تكون المتسلسه الاخيرة تقاربيه :

(3) الاشتقاق بالنسبه لبارامتر وهذا ماسيتضح من الامثله.

(4) استخدام جداول التحويل .

### أمثلة و تمارين

$$\ell\{1\} = \frac{1}{s} \quad (1) \text{ اثبت ان: (أ)}$$

$$\ell\{t\} = \frac{1}{s^2} \quad (ب)$$

$$\ell\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad (ج)$$

$$\ell\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad (2) \text{ اثبت ان (أ)}$$

$$\ell\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad (ب)$$

$$\ell\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad (3) \text{ اثبت ان (أ)}$$

$$\ell\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2} \quad (ب)$$

$$F(t) = \begin{cases} 5: 0 < t < 3 \\ 0: t > 3 \end{cases} \quad \text{حيث } \ell\{F(t)\} \text{ اوجد (4)}$$

$$\ell\{4e^{5t} + 6t^3 - 3\sin 4t + 2\cos 2t\} \quad \text{اوجد (5)}$$

(6) برهن على خاصية الازاحة الاولى .

(7) اوجد كلا مما يأتي :

$$\ell\{t^2 e^{3t}\}, \ell\{e^{-2t} \sin 4t\}, \ell\{e^{3t} \cosh 5t\}, \ell\{e^{-2t} (3\cos 6t - 5\sin 6t)\}$$

(8) اثبت خاصية الازاحة الثانية .

$$F(t) = \begin{cases} \cos(t - \frac{2\pi}{3}) : t > \frac{2\pi}{3} \\ 0 : t < \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad \text{اذا كانت (9)}$$

$$\ell\{F(t)\} \quad \text{فأوجد}$$

(10) اثبت خاصية تغير المقياس .

$$\ell\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} \quad \text{فأوجد} \quad \ell\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \quad \text{اذا كان (11)}$$

$$\ell\{F(t)\} = f(s) \quad \text{اذا كان (12) فأثبت ان:}$$

$$\ell\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$$

$$\ell\{F(t)\} = f(s) \quad \text{اذا كان (13) فأثبت أن:}$$

$$\ell\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$$

(14) إذا كانت  $\ell\{F(t)\} = f(s)$  فأثبت ان :

$$\ell\left\{\int_0^t F(u)du\right\} = \frac{f(s)}{s}$$

$$\ell\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u} du\right\} \quad \text{اوجد (15)}$$

(16) أثبت ان  $\ell\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s)$

(17) أ- اوجد  $\ell\{t \sin at\}$  ب- اوجد  $\ell\{t^2 \cos at\}$

(18) إذا كان  $\ell\{F(t)\} = f(s)$  فأثبت ان :

$$\ell\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)du .$$

(19) أ- أثبت ان  $\int_0^\infty \frac{F(t)}{t} dt = \int_0^\infty f(u)du$

ب- أثبت ان  $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

(20) إذا كانت  $F(t)$  دورية دورتها  $T$  فأثبت ان:

$$\ell\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

$$(21) \text{ أ- ارسم منحنى الدالة } F(t) = \begin{cases} \sin(t) : t < \pi \\ 0 : \pi < t < 2\pi \end{cases} \text{ علما}$$

بان الدالة دورية و دورتها  $2\pi$

ب- اوجد  $\ell\{F(t)\}$

$$(22) \text{ اثبت نظرية القيمة الابتدائية وهي } \lim_{t \rightarrow 0} F(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s)$$

$$(23) \text{ اثبت نظرية القيمة الابتدائية وهي } \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s)$$

(24) حقق نظريات القيمة الابتدائية والنهائية للدالة .....

$$F(t) = 3se^{-2t}$$


---



حلول بعض التمارين

$$\ell\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \text{(أ) المطلوب اثبات}$$

$$\ell\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \text{(ب)}$$

الحل

$$\ell\{\sin at\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin at dt \quad \text{أ-}$$

$$= \frac{e^{-st}(-\sin at - a \cos at)}{s^2 + a^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\ell\{\cos at\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos at dt \quad \text{ب-}$$

$$= \frac{e^{-st}(-a \cos at + a \sin at)}{s^2 + a^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$= \frac{e^{-st}(-a \cos at + a \sin at)}{s^2 + a^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

حل اخر

$$\ell\{e^{iat}\} = \frac{1}{s - ia} = \frac{s + ia}{s^2 + a^2}$$

ولكن  $e^{iat} = \cos at + i \sin at$  ومن ذلك ينتج ان :

$$\ell\{\cos at\} + i\ell\{\sin at\} = \ell\{e^{iat}\} = \frac{s + ia}{s^2 + a^2}$$

وبمساواة الحقيقي والتخيلي نحصل على التحويلين في وقت واحد .

$$F(t) = \begin{cases} 5 & : 0 < t < 3 \\ 0 & : t > 3 \end{cases} \quad (4)$$

$$\ell\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = \int_0^3 5e^{-st} dt + \int_3^{\infty} 0 \cdot e^{-st} dt$$

$$\ell\{F(t)\} = 5 \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^3 = \frac{5(1 - e^{-3s})}{s}$$

$$\ell\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = f(s) \quad (6)$$

$$\ell\{e^{at} F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} F(t) dt = f(s-a)$$

(7)

$$\ell\{t^2\} = \frac{2}{s^3}, \text{ then } \ell\{t^2 e^{3t}\} = \frac{2}{(s-a)^3}, \text{ then } \ell\{\sin 4t\} = \frac{4}{s^2 + 16},$$

$$\ell\{e^{-2t} \sin 4t\} = \frac{4}{(s+2)^2 + 16}, \text{ then } \ell\{\cosh 5t\} = \frac{s}{s^2 - 25},$$

$$\ell\{e^{4t} \cosh 5t\} = \frac{s-4}{(s-4)^2 - 25},$$

$$\ell\{\cosh 5t\} = \frac{s}{s^2 - 25}, \quad \text{حل آخر:}$$

$$\ell\{e^{4t} \cosh 5t\} = \ell\left\{e^{4t} \left(\frac{e^{5t} + e^{-5t}}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2} \ell\{e^{9t}\} + \frac{1}{2} \ell\{e^{-t}\} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-9} + \frac{1}{s+1}\right)$$

$$= \frac{s-4}{s^2 - 8s - 9} = \frac{s-4}{(s-4)^2 - 25}$$

$$\ell\{3\cos 6t - 5\sin 6t\} = 3\left(\frac{s}{s^2 + 36}\right) - 5\left(\frac{6}{s^2 + 36}\right) = \frac{3s - 30}{s^2 + 36}$$

$$\therefore \ell\{e^{-2t} (3\cos 6t - 5\sin 6t)\} = \frac{3(s+2) - 30}{(s+2)^2 + 36}$$

$$G(t) = \begin{cases} F(t-a) & : t > a \\ 0 & : t < a \end{cases} \quad (8)$$

$$\ell\{G(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} G(t) dt = \int_0^a e^{-st} G(t) dt + \int_a^{\infty} e^{-st} G(t) dt$$

$$= 0 + \int_{t=a}^{\infty} e^{-st} F(t-a) dt$$

باستخدام التحويل  $u = t - a$  نجد أن :

$$\ell\{G(t)\} = \int_{u=0}^{\infty} e^{-s(u+a)} F(u) du = e^{-as} \int_0^{\infty} e^{-su} F(u) du = e^{-as} f(s)$$

$$F(t) = \begin{cases} \cos(t - \frac{2\pi}{3}) & : t > \frac{2\pi}{3} \\ 0 & : t < \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \ell\{F(t)\} &= \int_0^{2\pi/3} 0 \cdot e^{-st} dt + \int_{2\pi/3}^{\infty} e^{-st} \cos(t - \frac{2\pi}{3}) dt \\ &= \int_{u+0}^{\infty} e^{-s(u+\frac{2\pi}{3})} \cos u du = e^{-\frac{2\pi s}{3}} \int_{u+0}^{\infty} e^{-su} \cos u du = \frac{se^{-\frac{2\pi s}{3}}}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

كان هذا هو الحل المباشر اما الحل بتطبيق نظرية الأزاحة الثانية فهو :

$$\ell\{\cos t\} = \frac{s}{s^2 + 1} \therefore \ell\{F(t)\} = \frac{se^{-\frac{2\pi s}{3}}}{s^2 + 1}$$

(14) نفرض ان  $G(u) = \int_0^t F(u) du$  ومن ذلك ينتج أن :

$$G'(t) = F(t), G(0) = 0$$

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين ينتج أن :

$$\ell\{F(t)\} = \ell\{G'(t)\} = s\ell\{G\} - G(0) = s\ell\{G(t)\}$$

$$\therefore \ell \left\{ \int_0^t F(u) du \right\} = \ell \{G\} = \frac{f(s)}{s}$$

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (16)$$

$$\frac{df}{ds} = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} F(t) dt = - \int_0^{\infty} e^{-st} t F(t) dt = -\ell \{tF(t)\}$$

ومن هذا نجد ان النظرية صحيحة في حالة  $n = 1$  ولإثباتصحتها في الحالة العامة نفترض صحتها في حالة  $n = k$  اي نفرض ان :

$$\int_0^{\infty} e^{-st} [t^k F(t)] dt = (-1)^k f^k(s)$$

$$\therefore \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} [t^k F(t)] dt = (-1)^k f^{(k+1)}(s)$$

$$\therefore \int_0^{\infty} e^{-st} [t^{k+1} F(t)] dt = (-1)^{k+1} f^{(k+1)}(s)$$

اي انه اذا كانت النظرية صحيحة في حالة  $n = k$  فهي صحيحة في حالة  $n = k + 1$  وحيث انها صحيحة في حالة  $n = 1$  فهي صحيحة على الاطلاق .

$$F(t) = tG(t) \quad \text{اي ان} \quad G(t) = \frac{F(t)}{t} \quad (18) \text{ نفرض ان}$$

بأخذ تحويل لابلاس ينتج أن :

$$\ell\{F(t)\} = -\frac{d}{ds} \ell\{G(t)\} \therefore f(s) = -\frac{dg}{ds}$$

$$\therefore g(s) = -\int_{\infty}^s f(u)du = \int_s^{\infty} f(u)du$$

وهنا اخترنا الحد الأدنى المتكامل  $s = \infty$  لانه عند هذه النقطة يكون

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 0$$

$$\ell\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)dt = \int_0^T e^{-st} F(t)dt + \int_T^{2T} e^{-st} F(t)dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st} F(t)dt + \dots \quad (20)$$

في التكامل الثاني نضع  $t = u + T$  وفي الثالث نضع  $t = u + 2T$

وهكذا

$$\begin{aligned} \ell\{F(t)\} &= \int_0^T e^{-su} F(u)du + \int_0^T e^{-s(u+T)} F(u+T)du + \int_0^T e^{-s(u+2T)} F(u+2T)du + \dots \\ &= \int_0^T e^{-su} F(u)du + e^{-sT} \int_0^T F(u)du + e^{-sT} \int_0^T F(u)du + e^{-2sT} \int_0^T F(u)du + \dots \\ &= (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots) \int_0^T e^{-su} F(u)du \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-su} F(u)du$$

$$\ell\{F'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F'(t) dt = sf(s) - F(0) \quad (22)$$

وحيث انه يفترض ان  $F'(t)$  من رتبة أسية فإن :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-st} F'(t) dt = 0$$

$$0 = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) - F(0) \quad \text{اي ان}$$

$$\therefore \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) = F(0) = \lim_{t \rightarrow 0} F(t)$$

## الفصل الرابع

### تحويلات لابلاس العكسي

#### The Inverse Laplace Transform

إذا كان  $f(s) = \ell\{F(t)\}$  فان الدالة  $F(t)$  تسمى تحويل لابلاس العكسي للدالة  $f(s)$  ويكتب  $F(t) = \ell^{-1}\{f(s)\}$  مثال ذلك

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}$$

وبطبيعة الحال اذا وجد جدول لتحويلات لابلاس فإنه يمكن عمل جدول آخر لتحويل لابلاس العكسي كما انه من الخاصة بتحويل لابلاس يمكن اشتقاق النظريات والقواعد المقابلة للتحويل العكسي وهى :-

#### 1- نظرية الخطية:

$$\begin{aligned} \ell^{-1}\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\} &= c_1 \ell^{-1}\{f_1(s)\} + c_2 \ell^{-1}\{f_2(s)\} \\ &= c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) \end{aligned}$$

مثال ذلك :

$$\begin{aligned} \left\{\frac{4}{s-2} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{5}{s^2+4}\right\} &= 4\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - 3\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} + 5\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} \\ &= 4e^{2t} - 3\cos 4t + \frac{5}{2}\sin 2t \end{aligned}$$

#### 2-خاصية الازاحة الأولى :

$$\ell^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at} F(t)$$

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2t \quad \text{فإن :}$$

مثال ذلك :حيث ان



$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 2s + 5}\right\} = \ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2 + 4}\right\} = \frac{1}{2}e^t \sin 2t$$

3-خاصية الازاحة الثانية:

$$\ell^{-1}\{e^{-as} f(s)\} = \begin{cases} F(t-a) : t > a \\ 0 : t < a \end{cases}$$

مثال ذلك حيث أن :  $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} = \sin t$  فإن :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi s}{3}}}{s^2 + 1}\right\} = \begin{cases} \sin(t - \frac{\pi}{3}) & : t > \frac{\pi}{3} \\ 0 & : t < \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

4-خاصية تغيير المقياس :

$$\ell^{-1}\{f(\lambda s)\} = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{t}{\lambda}\right)$$

مثال ذلك :  $\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 16}\right\} = \cos 4t$  وينتج عن ذلك ان :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{2s}{(2s)^2 + 16}\right\} = \frac{1}{2} \cos \frac{4t}{2} = \frac{1}{2} \cos 2t$$

$$\ell^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n} f(s)\right\} = (-1)^n t^n F(t) \quad -5$$

مثال ذلك:  $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$  وينتج عن ذلك ان :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right\} = -t \sin t$$

$$\ell^{-1}\left\{\int_s^\infty f(u)du\right\} = \frac{F(t)}{t} \quad -6$$

مثال ذلك حيث أنه :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\} = 1 - e^{-t}$$

$$\ell^{-1}\left\{\int_s^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du\right\} = \ell^{-1}\left\{\ln\left(1 + \frac{1}{s}\right)\right\} = \frac{1 - e^{-t}}{t} \quad \text{فإن}$$

7- إذا كان  $\ell^{-1}\{f(s)\} = F(t)$  وكان  $F(0) = 0$

فإن  $\ell^{-1}\{sf(s)\} = F'(t)$  وإذا كان  $F(0) \neq 0$

$$\ell^{-1}\{sf(s) - F(0)\} = F'(t)$$

مثال ذلك حيث أن  $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$  وحيث أن  $\sin 0 = 0$

$$\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \frac{d}{dt} \sin t = \cos t \quad \text{فإن}$$

$$\ell^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u)du \quad \text{8}$$

ونلاحظ من (8) , (7) ان الضرب في  $s$  والقسمة على  $s$  تأثيره على  $F(t)$  هو الاشتقاق والتكامل على الترتيب .

$$\text{مثال ذلك : حيث ان } \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2t \quad \text{فان :}$$

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2}\sin 2udu = \frac{1}{2}(1-\cos 2t)$$

### 9- نظرية الادماج ..... Convolution Theoem :

تنص على انه اذا كان  $\ell^{-1}\{f(s)\} = F(t)$  ,  $\ell^{-1}\{g(s)\} = G(t)$

$$\ell^{-1}\{f(s).g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du = F * G \quad \text{فان}$$

$$\text{مثال ذلك حيث أن } \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t \quad , \quad \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t} \quad \text{فان}$$

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\} = \int_0^t e^u e^{2(t-u)} du = \int_0^t e^{2t} e^{-u} du$$

$$= e^{2t} \int_0^t e^{-u} du = e^{2t} - e^t$$

بعض الطرق للحصول على تحويل لابلاس العكسي :

**1- الكسور الجزئية :** اذا كان كل من  $P(s), Q(s), \dots$  كثيرات

حدود وكانت درجة اقل من درجة  $Q(s)$  .

فإن الكسر  $\frac{P(s)}{Q(s)}$  يمكن كتابته كمجموع عدة كسور جزئية بالصيغة:

$$\frac{A}{(as+b)^r} , \frac{AS+B}{(as^2+bs+c)^r}$$

وبعد إيجاد تحويل لابلاس العكسي لكل كسر والجمع نحصل على

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \text{ التحويل العكسي للكسر}$$

مثال ذلك :

$$\frac{2s-5}{(3s-4)(2s+1)^3} = \frac{A}{3s-4} + \frac{B}{(2s+1)^3} + \frac{C}{(2s+1)^2} + \frac{D}{2s+1}$$

وكذلك:

$$\frac{3s^2-4s+2}{(s^2+2s+4)^2(s-5)} = \frac{As+B}{(s^2+2s+4)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+4} + \frac{E}{s-5}$$

2- طريقة المتسلسلات :

$$f(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{a_2}{s^3} + \dots \text{ اذا كان}$$

فإن

$$\ell^{-1}\{f(s)\} = F(t) = a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2 t^2}{2!} + \frac{a_3 t^3}{3!} + \dots$$

3- طريقة الاشتقاق بالنسبة لبارامتر وهو مايتضح من الأمثلة .

4- استخدام الجدول .

5- صيغة التحويل العكسي للمركب .

6- مفكوك هيفيسيد Heaviside Expansion Formula.....

وتنص على انه اذا كان كل من  $P(s)$  ,  $Q(s)$  كثيرات الحدود وكانت  
درجة  $P(s)$  أقل من درجة  $Q(s)$  وكان للدالة  $Q(s)$  عدد قدره  
 $n$  من الجذور المختلفة هي  $\alpha_k, k = 1, 2, \dots, n$

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{P(s)}{Q(s)} \right\} = \sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k)}{Q(\alpha_k)} e^{\alpha_k t} \quad \text{فإن :}$$

## أمثلة و تمارين

**مقدمة:** العدد  $n!$  دالة للعدد  $n$  وهذه الدالة تعتبر حالة خاصة من الدالة المسماة دالة جاما  $\Gamma(x)$ . وفي الوقت الذي يكون فيه  $n!$  معرفة فقط للأعداد الصحيحة الموجبة فإن  $\Gamma(x)$  معرفة للأعداد الصحيحة والكسرية والسالبة والموجبة. وفي حالة  $x$  صحيح موجب

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \text{فإن } x = \frac{1}{2} \quad \text{وفي حالة } \Gamma(x+1) = n!$$

وفي حالة  $n$  صحيح موجب فإن  $n! = n(n-1)(n-2) \dots 2.1$   
 وفي الحالة العامة للدالة  $\Gamma(x)$  نوجد صيغة مشابهة يوضحها المثال الآتي :

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{105}{16} \sqrt{\pi}$$

$$(1) \quad \text{أ- أوجد } \ell^{-1} \left\{ \frac{5s+4}{s^3} - \frac{2s-18}{s^2+9} + \frac{24-30\sqrt{s}}{s^4} \right\}$$

$$\text{ب- أوجد } \ell^{-1} \left\{ \frac{6}{2s-3} - \frac{3+4s}{9s^2-16} + \frac{8-6s}{16s^2+9} \right\}$$

(2) أوجد كلا مما يأتي :

$$\text{أ- } \ell^{-1} \left\{ \frac{6s-4}{s^2-4s+20} \right\} \quad \text{ب- } \ell^{-1} \left\{ \frac{3s+7}{s^2-2s-3} \right\}$$

$$\text{ج- } \ell^{-1} \left\{ \frac{4s+12}{s^2+8s+16} \right\} \quad \text{د- } \ell^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2s+3}} \right\}$$

$$(3) \quad \ell^{-1} \left\{ \frac{e^{-\frac{a}{s}}}{s^{\frac{1}{2}}} \right\} \text{ فأوجد } \ell^{-1} \left\{ \frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s^{\frac{1}{2}}} \right\} = \frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}} \text{ إذا علم أن}$$

$$(4) \quad \text{طبق القاعدة } \ell^{-1} \{f^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n F(t) \dots \dots \dots \text{ لإيجاد}$$

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \right\}$$

$$(5) \quad \text{أوجد } \ell^{-1} \left\{ \ln \left( 1 + \frac{1}{s^2} \right) \right\}$$

$$(6) \quad \text{إستخدم القاعدة } \ell^{-1} \left\{ \frac{f(s)}{s} \right\} = \int_0^t F(u) du \dots \dots \dots \text{ لإيجاد}$$

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3 (s^2 + 1)} \right\}$$

$$(7) \quad \text{إذا علم أن } \ell^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + 1)^2} \right\} = \frac{1}{2} t \sin t \text{ فأوجد}$$

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \right\}$$

(8) بتطبيق نظرية الاندماج أوجد كلا مما يأتي :

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 (s+1)^2} \right\} \quad \text{ب-} \quad \ell^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \right\} \text{-أ}$$

(9) بإستخدام الكسور الجزئية أوجد كلا مما يأتي :

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-2)(s-3)} \right\} \text{ -ب- } \ell^{-1} \left\{ \frac{3s+7}{s^2 - 2s - 3} \right\} \text{ -أ-}$$

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} \right\} \text{ -د- } \ell^{-1} \left\{ \frac{5s^2 - 15s - 11}{(s+1)(s-2)^3} \right\} \text{ -ج-}$$

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)} \right\} \text{ -ه-}$$

(10) أثبت صيغة مفكوك هفيسيد .

(11) بتطبيق مفكوك هفيسيد أوجد :

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-2)(s-3)} \right\} \text{ -أ-}$$

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} \right\} \text{ -ب-}$$



حلول بعض التمارين

أ- (1)

$$\ell^{-1}\{\dots\dots\} = \ell^{-1}\left\{\frac{5}{s^2} + \frac{4}{s^3} - \frac{2s}{s^2+9} + \frac{18}{s^2+9} + \frac{24}{s^4} - \frac{30}{s^{7/2}}\right\}$$

$$= 5t + 4\left(\frac{t^2}{2!}\right) - 2\cos 3t + 18\left(\frac{1}{3}\sin 3t\right) + 24\frac{t^3}{3!} - 30\left(\frac{t^{5/2}}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}\right)$$

$$= 5t + 2t^2 - 2\cos 3t + 6\sin 3t + 4t^3 - \frac{16}{\sqrt{\pi}}t^{5/2}$$

ب-

$$\ell^{-1}\{\dots\dots\} = \ell^{-1}\left\{\frac{3}{s-3/2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2-16/9}\right) - \frac{4}{9}\left(\frac{s}{s^2-16/9}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+9/16}\right) - \frac{3}{8}\left(\frac{s}{s^2+9/16}\right)\right\}$$

$$= 3e^{3t/2} - \frac{1}{4}\sinh \frac{4}{3}t - \frac{4}{9}\cosh \frac{4}{3}t + \frac{2}{3}\sin \frac{3}{4}t - \frac{3}{8}\cos \frac{3}{4}t$$

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^4}\right\} - e^{2t}\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = t^3\frac{e^{2t}}{3!} = \frac{1}{6}t^3e^{2t} \quad \text{أ- (3)}$$

ومن ذلك ينتج أن :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\right\} = \begin{cases} \frac{1}{6}(t-5)^3 e^{2(t-5)} & : t > 5 \\ 0 & : t < 5 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{6}(t-5)^3 e^{2(t-5)} u(t-5)$$

حيث  $u(t-5)$  هي دالة الخطوة الوحدة المنسوبة الى هيفيسيد وتعريفها كالاتي :

$$u(t-a) = \begin{cases} 1 & : t > a \\ 0 & : t < a \end{cases}$$

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 25} \right\} = \cos 5t \text{ ب.}$$

$$\therefore \ell^{-1} \left\{ \frac{s e^{-\frac{4}{5}\pi s}}{s^2 + 25} \right\} = \cos \left( 5t - \frac{4}{5}\pi \right) u \left( t - \frac{4}{5}\pi \right)$$

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^2 + s + 1} \right\} = \ell^{-1} \left\{ \frac{s+1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right\} = \ell^{-1} \left\{ \frac{\left(s + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right\} \rightarrow$$

$$= \ell^{-1} \left\{ \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right\} + \frac{1}{2} \ell^{-1} \left\{ \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right\}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{\sqrt{3}} \left( 3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$$

$$\therefore \ell^{-1} \left\{ \frac{(s+1) e^{-\pi s}}{s^2 + s + 1} \right\} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}(t-\pi)} \left[ \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} (t-\pi) + \sin \frac{\sqrt{3}}{2} (t-\pi) \right] \bullet u(t-\pi)$$

د-

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^{5/2}}\right\} = e^{-4t} \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^{5/2}}\right\} = e^{-4t} \frac{t^{3/2}}{\Gamma(5/2)} = -\frac{5}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2} e^{-4t}$$

$$\ell^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2} \cdot \frac{1}{s^2+a^2}\right\} \quad \text{أ (8)}$$

ولكن

$$\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at \quad , \quad \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{\sin at}{a}$$

$$\therefore \ell^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \frac{1}{a} \int_0^t \cos au \sin a(t-u) du$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^t \cos au (\sin at \cos au - \cos at \sin au) du$$

$$= \frac{1}{a} \sin at \int_0^t \cos^2 au du - \frac{1}{a} \cos at \int_0^t \sin au \cos au du$$

$$= \frac{1}{a} \sin at \int_0^t \frac{1+\cos 2au}{2} du - \frac{1}{a} \cos at \int_0^t \frac{\sin 2au}{2} du$$

$$= \frac{1}{a} \sin at \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2at}{4a}\right) - \frac{1}{a} \cos at \left(\frac{1-\cos 2at}{4a}\right)$$

$$= \frac{1}{a} \sin at \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin at \cos at}{2a}\right) - \frac{1}{a} \cos at \left(\frac{\sin^2 at}{2a}\right)$$

$$= \frac{t \sin at}{2a}$$

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t \quad , \quad \ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = t e^{-t} \text{ ب.}$$

$$\therefore \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 (s+1)^2}\right\} = \int_0^t u e^{-u} (t-u) du = \int_0^t e^{-u} (ut - u^2) du$$

وبعد إجراء التكامل بالتجزئ نحصل على :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 (s+1)^2}\right\} = t e^{-t} + 2 e^{-t} + t - 2$$

(12) ->

$$\frac{5s^2 - 15s - 11}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s-2)^3} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{(s-2)}$$

للحصول على  $A, B, C, D$  نضرب الطرفين في  $(s+1)$  ثم نضع

$s = -1$  , بعد ذلك نضرب الطرفين في  $(s-2)^3$  ثم نضع  $s = 2$  ,  
ومن ذلك نحصل على كل من  $A, B$  , ولكن هذه الطريقة لا تصلح بعد ذلك  
. وللحصول على  $C, D$  نعوض عن  $s$  بقيمتين عدديتين مناسبتين وذلك

بعد أن نكون إستفدنا من تعيين  $A, B$  ,

بالطريقة السابقة والنتيجة هي :

$$\ell^{-1}\{\dots\dots\} = -\frac{1}{3} e^{-t} - \frac{7}{2} t^2 e^{2t} + 4 t e^{2t} + \frac{1}{3} e^{2t}$$

(10) - حيث أن  $Q(s)$  كثيرة حدود جذورها مختلفة وهي

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

$$\therefore \frac{p(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-\alpha_1} + \frac{A_2}{s-\alpha_2} + \dots, \frac{A_n}{s-\alpha_n}$$

بضرب الطرفين في  $s - \alpha_k$  وأخذ نهاية الطرفين عندما  $s \rightarrow \alpha_k$  ينتج أن :

$$A_k = \lim_{s \rightarrow \alpha_k} \frac{p(s)}{Q(s)} (s - \alpha_k) = \lim_{s \rightarrow \alpha_k} p(s) \left\{ \frac{s - \alpha_k}{Q(s)} \right\} = P(\alpha_k) \lim_{s \rightarrow \alpha_k} \left\{ \frac{s - \alpha_k}{Q(s)} \right\}$$

ولكن عند التعويض من  $s = \alpha_k$  في الكسر  $\frac{s - \alpha_k}{Q(s)}$  فإننا نحصل على

كمية غير معينة بالصورة  $\frac{0}{0}$  ولكن بتطبيق قاعدة لوبيتال نحصل على :

$$\lim_{s \rightarrow \alpha_k} \left\{ \frac{s - \alpha_k}{Q(s)} \right\} = \frac{1}{Q'(\alpha_k)}$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$A_k = P(\alpha_k) \left\{ \frac{1}{Q'(s)} \right\} = \frac{p(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$$

وبالتالي يكون :

$$\frac{p(s)}{Q(s)} = \frac{p(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)} \frac{1}{s-\alpha_1} + \frac{p(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)} \frac{1}{s-\alpha_2} + \dots + \frac{p(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)} \frac{1}{s-\alpha_n}$$

$$\therefore \ell^{-1} \left\{ \frac{p(s)}{Q(s)} \right\} = \sum_{k=1}^n \frac{p(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$$

(11) أ-

$$p(s) = 3s + 1, \quad Q(s) = s^3 - s^2 + s - 1, \quad Q'(s) = 3s^2 - 2s + 1$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = i, \quad \alpha_3 = -i$$

-ب-

$$\begin{aligned} \ell^{-1} \left\{ \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} \right\} &= \frac{P(1)}{Q'(1)} e^t + \frac{P(i)}{Q'(i)} e^{it} + \frac{P(-i)}{Q'(-i)} e^{-it} \\ &= \frac{4}{2} e^t + \frac{3i+1}{-2-2i} e^{it} + \frac{-3i+1}{-2+2i} e^{-it} \\ &= 2e^t + \left(-1 - \frac{1}{2}i\right) (\cos t + i \sin t) + \left(-1 + \frac{1}{2}i\right) (\cos t - i \sin t) \\ &= 2e^t - 2\cos t + \sin t \end{aligned}$$


---

### الفصل الخامس

#### تطبيق تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية العادية

#### المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات الثابتة :

يستخدم تحويل لابلاس في حل هذا النوع من المعادلات . فمثلا إذا كان المطلوب حل المعادلة الخطية من الرتبة الثانية :

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \alpha \frac{dY}{dt} + \beta Y = F(t) \quad , \text{ or } Y'' + \alpha Y' + \beta Y = F(t) \dots \dots \dots (1)$$

حيث  $\alpha, \beta$  ثوابت وحيث يكون الحل محققا للشروط الابتدائية :

$$Y(0) = A \quad , \quad Y'(0) = B \dots \dots \dots (2)$$

حيث  $A, B$  ثوابت معلومة . فإنه بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة (1) وتطبيق الشروط (2) نحصل

على معادلة جبرية تتضمن الدالة  $y(s) = \ell\{Y(t)\}$  . ويصبح المطلوب هو إيجاد التحويل العكسي للدالة  $y(s)$  .

هذه الطريقة يمكن أيضا تطبيقها على معادلات من رتب أعلى من الرتبة الثانية كما سيوضح من الامثلة .

#### المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات المتغيرة:

يستخدم تحويل لابلاس لحل بعض المعادلات من هذا النوع خاصة عندما تكون حدود المعادله بالصورة:

$$t^m Y^{(n)}(t) \text{ حيث يكون تحويل لابلاس لمثل هذا الحد هو:}$$

$$(-1)^m \frac{d^m}{ds^m} \ell\{Y^{(n)}(t)\}$$

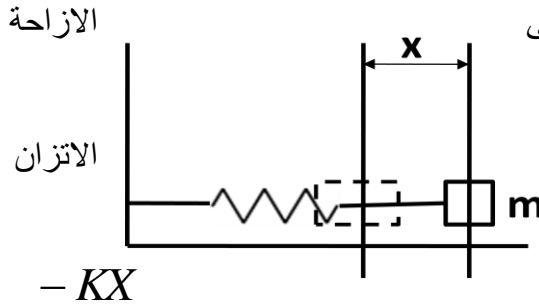
وسنري في التمارين امثله لهذا النوع.

### المعادلات التفاضلية الأتية:

يستخدم تحويل لابلاس لحل اثنين او اكثر من المعادلات التفاضليه الأتية كما سيتضح من الامثله .

### تطبيقات الميكانيكا:

نفرض أن الكتلة  $m$  مربوطة بخيط مرن مثبت طرفه في  $O$  وأن الكتلة قابلة الحركة على مستوى أفقى أملس كما



بالشكل فإذا كانت  $X(t)$  هي

اللحظة للكتلة

في الزمن  $t$  عن موضع

فإنه توجد قوة شد

وتسمى القوة الراجعة وتساوى

حيث  $K$  ثابت الخيط .

وطبقا لقانون نيوتن فإن

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -K X \quad \text{or} \quad mX'' + kX = 0$$

أما إذا كان المستوى الذي تتحرك عليه الكتلة خشنا أو إذا كانت الكتلة تتحرك

في وسط مقاوم فإن معادلة الحركة

تصبح :

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -K X - \beta \frac{d X}{d t} \quad \text{or} \quad mX'' + \beta X' + kX = 0$$

حيث  $\beta$  ثابت يسمى ثابت المقاومة .

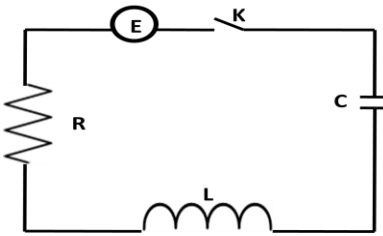


كذلك فإنه في أحيان كثيرة تكون هناك قوة خارجية  $\phi(t)$  تتغير مع الزمن وتؤثر على الكتلة وفي هذه الحالة تصبح معادلة الحركة كالاتي

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -K X - \beta \frac{d X}{dt} + \phi(t) \quad \text{or} \quad mX'' + \beta X' + kX = \phi(t)$$

وبإجراء تحويل لابلاس على طرفي المعادلة وإستخدام الشروط الابتدائية يمكن الحصول على الازاحة اللحظية  $X(t)$ .

### تطبيقات الدوائر الكهربائية :



في الشكل دائرة كهربائية بسيطة تحتوي على

مولدا وبطارية قوتها الدافعة الكهربائية  $E$

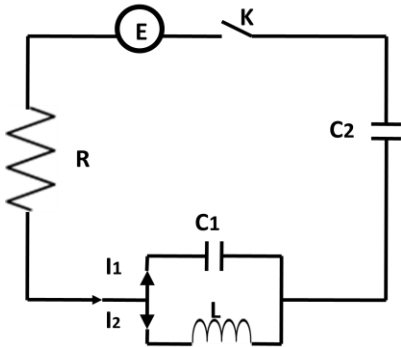
ومقاومة  $R$  وملف معامل الحث له  $L$  ومكثف

سعته  $C$  وعندما تغلق الدائرة بواسطة المفتاح  $K$

ونجد أن الشحنة  $Q$  تندفع في الدائرة حيث يسرى في الدائرة تيار  $\frac{dQ}{dt}$

كما أنه يمكن معالجة دوائر أكثر من ذلك تعقيدا كالدائرة التي بالشكل ويكون المطلوب في الحل هو معرفة الشحنة  $Q$  والتيار  $I$  كدوال للزمن

$t$  التي تحقق المعادلة التفاضلية الآتية :



$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{d q}{dt} + \frac{Q}{C} = E$$

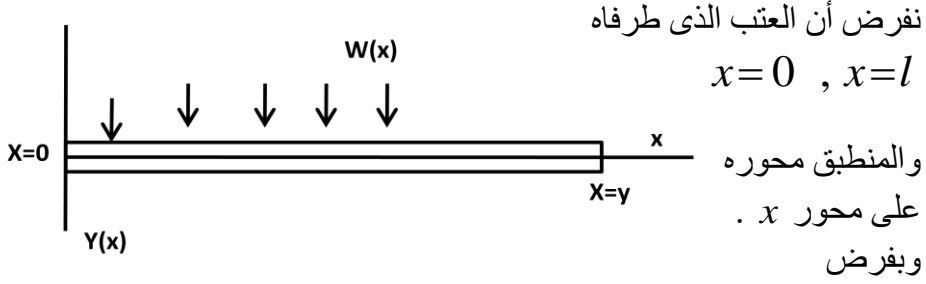
أما الدائرة الثانية فتحتاج لحل معادلتين تفاضليتين انيتيين .

كما اننا سنلاحظ التشابه الكبير بين الدائرة الكهربائية البسيطة

ومعادلة الحركة للكتلة في وسط مقاوم عندما تتحرك أفقيا بعد ربطها بخيط

مرن .

### تطبيقات الاعتاب:



تحميل عرضي  $w(x)$  لكل وحدة طول .

نتيجة لذلك يحدث إنجراف العتب  $Y(x)$  عند النقطة  $x$  . والدالة  $Y(x)$  تخضع للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^4 Y}{d x^4} = \frac{w(x)}{EI}$$

حيث  $EI$  ثابت .

كما أن الشروط الحدية لهذه الحالة تتوقف على طريقة تثبيت العتب .

فإذا كان الطرف ثابتا كان الشرط عنده هو  $Y=Y'=0$  وإذا كان الطرف متصلا اتصالا مفصليا أو كان مرتكزا إرتكازا حرا فإن الشرط عنده هو

$$Y=Y''=0$$

أما الطرف الحر فالشرط عنده هو  $Y''=Y'''=0$  .

### المعادلات التفاضلية الجزئية:

يستخدم تحويل لابلاس كثيرا في حل المعادلات التفاضلية الجزئية الخاضعة لشروط حدية — اي في حل المسائل اي في حل المسائل الحدية . كما سنرى في الامثلة .

### أمثلة وتمارين

(1) أوجد حل المعادلة الآتية مع الشروط المذكورة.

$$Y'' + Y = t \quad , \quad Y(0) = 1 \quad , \quad Y'(0) = -2$$

(2) أوجد حل المعادلة الآتية مع الشروط المذكورة.

$$Y'' - 3Y' + 2Y = 4e^{2t} \quad , \quad Y(0) = -3 \quad , \quad Y'(0) = 5$$

(3) أوجد حل المعادلة الآتية مع الشروط المذكورة.

$$Y'' + 2Y' + 5Y = e^{-t} \sin t \quad , \quad Y(0) = 0 \quad , \quad Y'(0) = 1$$

(4) أوجد حل المعادلة الآتية مع الشروط المذكورة.

$$Y''' - 3Y'' + 3Y' - Y = t^2 e^t \quad , \quad Y(0) = 1 \quad , \quad Y'(0) = 0 \quad , \quad Y''(0) = -2$$

(5) أوجد حل المعادلة الآتية مع الشروط المذكورة.

$$Y'' + 9Y = \cos 2t \quad , \quad Y(0) = 1 \quad , \quad Y(\pi/2) = -1$$

(6) أوجد حل المعادلة الآتية مع الشروط المذكورة

$$Y'' + a^2 Y = F(t) \quad , \quad Y(0) = 1 \quad , \quad Y'(0) = -2$$

(7) أوجد حل المعادلة الآتية مع الشروط المذكورة

$$tY'' + 2Y' + tY = 0 \quad , \quad Y(0) = 1 \quad , \quad Y(\pi) = 0$$

(8) أوجد حل المعادلتين الايتيين مع الشروط المذكورة

$$\frac{dX}{dt} = 2X - 3Y \quad , \quad X(0) = 8$$

$$\frac{dY}{dt} = Y - 2X \quad , \quad Y(0) = 3$$

(9) أوجد حل المعادلتين الايتيين مع الشروط المذكورة

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{dY}{dt} + 3X = 15 e^{-t} \quad X(0) = 35 \quad , \quad X'(0) = -48$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} - 4 \frac{dX}{dt} + 3Y = 15 \sin 2t \quad Y(0) = 27 \quad Y'(0) = -55$$

(10) نقطة مادية كتلتها  $2mg$  تتحرك في إتجاه محور  $x$  تحت تأثير قوة

جذب نحو نقطة الاصل  $O$  مقدارها  $8x$ . فإذا بدأت النقطة الحركة من السكون عندما كانت  $x=10$ , فأوجد موضع النقطة في أى لحظة وذلك في

الحالات الاتية :

أ- إذا كانت هناك قوة مقاومة قدر بثمانية أمثال السرعة اللحظية .

ب- إذا لم تكن هناك مقاومات للحركة .

(11) نقطة مادية كتلتها  $mg$  تتحرك في إتجاه محور  $x$  تحت تأثير قوة جذب

نحو نقطة الاصل  $O$  مقدارها  $kx$  .

وتؤثر عليها قوة مقاومة  $\beta \frac{dx}{dt}$ , ناقش الحركة في الحالات المختلفة علماً بأن

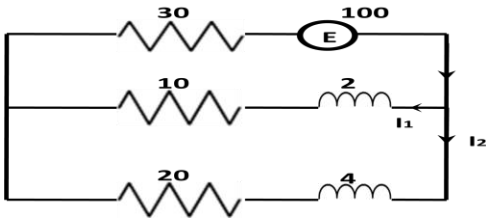
$X(0) = X_0$  ,  $X'(0) = V_0$  :

(12) ملف معامل حثه  $2 \text{ henry}$  ومقاومة قدرها  $16 \text{ ohm}$  ومكثف سعته  $0.02 \text{ farad}$  متصلة على التوالي مع

قوة دافعة قدرها  $E \text{ Volt}$ . عند الزمن  $t=0$  كانت الشحنة على المكثف قدرها  $0$  وكان التيار قدره  $0$ . أوجد

كلا من الشحنة والتيار فى أى زمن  $t$  فى الحالات الاتية :

أ- عندما تكون  $E = 300 \text{ V}$  ب- عندما تكون  $E = 100 \sin 3t \text{ V}$ .



(13) الشكل يبين شبكة كهربائية أوجد

التيار فى الفروع المختلفة علما

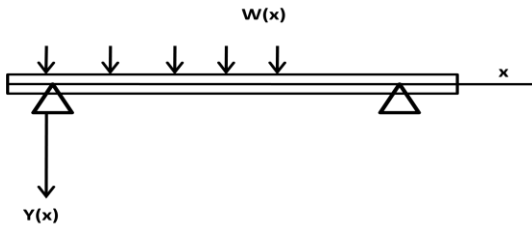
بأن القيم الابتدائية للتيارات هى الصفر.

(14) بالشكل عتب مثبت مفصليا من

من طرفين  $x=0, x=l$

والتحميل العرضى عليه منتظم

وقدره  $W_0$ .

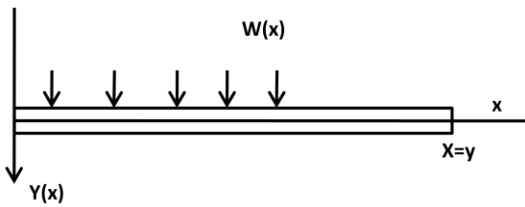


لكل وحدة طول ... أوجد الانحراف عند أي نقطة من العتب .

(15) الكابولى المبين بالشكل مثبت

فى حائط عند الطرف  $x=0$

أما الطرف  $x=l$  فهو حر



$$W(x) = \begin{cases} W_0 & : 0 < x < l/2 \\ 0 & : l/2 < x < l \end{cases} \text{ والتحميل كالاتى : أوجد الانحراف .}$$

16) نقطة مادية كتلتها  $2mg$  مربوطة في خيط مرن ثابت طوله  $8cm$  تتحرك على مستوى أفقى أملس وتؤثر عليها قوة خارجيه  $\phi(t)$ . إحسب إزاحة النقطة في حالة  $\phi(t) = F_0 \cos wt$  علما بأنها بدأت الحركة من السكون من على بعد  $10cm$  من موضع الاتزان .

حلول بعض التمارين

$$\ell\{Y''\} - 3\ell\{Y'\} + 2\ell\{Y\} = 4\ell\{e^{2t}\} \quad (2)$$

$$s^2 y - sY(0) - Y'(0) - 3[sy - Y(0)] + 2y = \frac{4}{s-2}$$

$$(s^2 y - 3s - 5) - 3(sy + 3) + 2y = \frac{4}{s-2}$$

$$(s^2 - 3s + 2) y + 3s - 14 = \frac{4}{s-2}$$

$$y = \frac{4}{(s^2 - 3s + 2)(s-2)} + \frac{14-3s}{(s^2 - 3s + 2)} = \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-1)(s-2)^2}$$

$$y = \frac{-7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}$$

$$Y = -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}$$

(5) حيث أن  $Y'(0)$  غير معلومة فلنفرض أن قيمتها  $C$  :

$$(s^2 y - sY(0) - Y'(0)) + 9y = \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$(s^2 + 9)y - s - c = \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$y = \frac{s+c}{s^2+9} + \frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)}$$

$$y = \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{c}{s^2 + 9} + \frac{s}{5(s^2 + 4)} - \frac{s}{5(s^2 + 9)}$$

$$y = \frac{4}{5} \left( \frac{s}{s^2 + 9} \right) + \frac{c}{s^2 + 9} + \frac{s}{5(s^2 + 4)}$$

$$Y = \frac{4}{5} \cos 3t + \frac{c}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \cos 2t$$

ولتحديد قيمة الثابت  $c$  نستخدم الشرط  $Y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$  فنحصل على  $c = \frac{12}{5}$

ومن ذلك ينتج أن :

$$Y = \frac{4}{5} \cos 3t + \frac{4}{5} \sin 3t + \frac{1}{5} \cos 2t$$

$$(s^2 y - sY(0) - Y'(0)) + a^2 y = \ell\{F(t)\} = f(s) \quad (6)$$

$$(s^2 y - s + 2) + a^2 y = f(s)$$

$$y = \frac{s - 2}{s^2 + a^2} + \frac{f(s)}{s^2 + a^2}$$

$$Y = \cos at - \frac{2}{a} \sin at + F(t) * \frac{\sin at}{a}$$

$$Y = \cos at - \frac{2}{a} \sin at + \frac{1}{a} \int_0^t F(u) \sin a(t - u) du$$



(7) نفرض أن  $Y'(0)=c$  وبأخذ تحويل لابلاس ينتج أن :

$$-\frac{d}{ds}(s^2 y - sY(0) - Y'(0)) + 2(sy - Y(0)) - \frac{dy}{ds} = 0$$

$$-s^2 y' - 2sy + 1 + 2sy - 2 - y' = 0$$

$$-(s^2 + 1)y' - 1 = 0 \quad \text{or} \quad y' = \frac{-1}{s^2 + 1}$$

وحل هذه المعادلة  $y = -\tan^{-1} s + A$

ولكن من خاصية القيم النهائية نجد أن  $y \rightarrow 0$  as  $s \rightarrow \infty$

وينتج عن هذا أن  $A = \frac{\pi}{2}$  أن :

$$\therefore Y(t) = \frac{\sin t}{t}$$

$$y = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s = \tan^{-1} \frac{1}{s} = \int_s^{\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = \ell \left\{ \frac{\sin t}{t} \right\}$$

واضح أن هذه الدالة تحقق الشرط :  $Y(\pi) = 0$  لذا فهي الحل المطلوب .

(8) نفرض أن  $\ell\{Y\} = y$  ,  $\ell\{X\} = x$  فيكون

$$sx - 8 = 2x - 3 \quad \text{or} \quad (s-2)x + 3y = 8$$

$$sy - 3 = y - 2 \quad \text{or} \quad 2x + (s-1)y = 3$$

وبحل هاتين المعادلتين الجبريتين بالنسبة إلى  $x$  ,  $y$  ينتج أن :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{8s-17}{s^2-3s-4} = \frac{8s-17}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} s-2 & 8 \\ 2 & 3 \\ s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}}{s^2 - 3s - 4} = \frac{3s-22}{(s+1)(s-4)} = \frac{3s-22}{s+1} - \frac{2}{s-4}$$

$$\therefore X = \ell^{-1}\{x\} = 3e^{-t} + 3e^{4t}$$

$$Y = \ell^{-1}\{y\} = 5e^{-t} - 2e^{4t}$$

$$mX'' + \beta X' + kX = 0 \quad \text{or} \quad X'' + 2\alpha X' + w^2 X = 0 \quad (11)$$

$$\alpha = \frac{\beta}{m}, \quad w^2 = \frac{k}{m} \quad \text{حيث}$$

بإجراء تحويل لابلاس مع ملاحظة الشروط الابتدائية ينتج أن :

$$s^2 x + X_0 s - V_0 + 2\alpha(sx - X_0) + w^2 x = 0$$

$$x = \frac{sX_0 + (V_0 + 2\alpha X_0)}{s^2 + 2\alpha s + w^2} = \frac{(s + \alpha)X_0}{(s + \alpha)^2 + (w^2 - \alpha^2)} + \frac{V_0 + \alpha X_0}{(s + \alpha)^2 + (w^2 - \alpha^2)}$$

وهنا نواجه الحالات المختلفة الآتية :

أ- إذا كان  $w^2 - \alpha^2 > 0$  فإن :

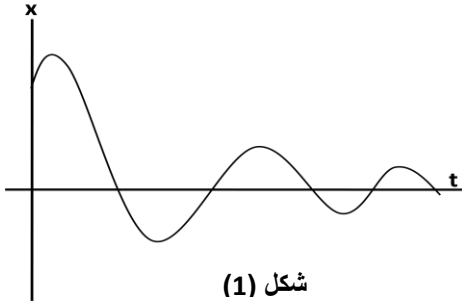
$$X = X_0 e^{-\alpha t} \cos \sqrt{w^2 - \alpha^2} t + \frac{V_0 + \alpha X_0}{\sqrt{w^2 - \alpha^2}} e^{-\alpha t} \sin \sqrt{w^2 - \alpha^2} t$$

وفى هذه الحالة نجد أن الحركة اهتزازية ولكن سعة الاهتزازة تتناقص مع الزمن بسبب العامل  $e^{-\alpha t}$ . أى أن

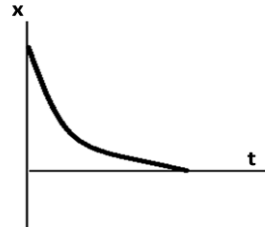
الحركة الاهتزازية متصلة كما بالشكل (1). كما أن زمن الدورة هو

$$\frac{2\pi}{\sqrt{w^2 - \alpha^2}} \text{ وترددها هو } \frac{\sqrt{w^2 - \alpha^2}}{2\pi}$$

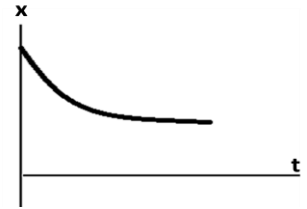
أما الكمية  $\frac{w}{2\pi}$  (وهو التردد عندما يكون  $\alpha = 0$ ) فيسمى التردد الطبيعي .



شكل (1)



شكل (2)



شكل (3)

ب- إذا كان  $w^2 - \alpha^2 = 0$  فإن :

$$X = \ell^{-1} \left\{ \frac{X_0}{s + \alpha} + \frac{V_0 + \alpha X_0}{(s + \alpha)^2} \right\} = X_0 e^{-\alpha t} + (V_0 + \alpha X_0) t e^{-\alpha t}$$

وهنا نجد أن الجسم لا يهتز ولكن يقترب بالتدريج من نقطة الاصل ولكنه لا يصل إليها أبداً كما بالشكل (2) .

وتسمى هذه الحالة بالحالة الضحلة الحركة إذ أن زيادة في عامل المقاومة  $\beta$  يترتب عليه إهتزاز الجسم .

ج- إذا كان  $w^2 - \alpha^2 < 0$  فإن :

$$X = \ell^{-1} \left\{ \left( \frac{(s + \alpha) X_0}{(s + \alpha)^2 - (\alpha^2 - w^2)} + \frac{V_0 + \alpha X_0}{(s + \alpha)^2 - (\alpha^2 - w^2)} \right) \right\}$$

$$= X_0 e^{-\alpha t} \cosh \sqrt{\alpha^2 - w^2} t + \frac{V_0 + \alpha X_0}{\sqrt{\alpha^2 - w^2}} e^{-\alpha t} \sinh \sqrt{\alpha^2 - w^2} t$$

وهي حركة إهتزازية كما بالشكل (3) .

(13) المعادلاتهى :

$$I = I_1 + I_2 \quad , \quad I_1(0) = 0 \quad , \quad I_2(0) = 0$$

$$\therefore 10 I_1 - 2 \frac{d I_1}{d t} + 4 \frac{d I_2}{d t} + 20 I_2 = 0$$

$$\therefore 30 I - 110 + 2 \frac{d I_1}{d t} + 10 I_1 = 0$$

$$\text{OR} \therefore -5 I_1 - y \frac{d I_1}{d t} + 2 \frac{d I_1}{d t} + 10 I_2 = 0$$

$$\frac{d I_1}{d t} + 20 I_1 + 15 I_2 = 55$$

بأخذ تحويل لابلاس لمجموعة المعادلتين وملاحظة القيم الابتدائية ينتج أن :

$$-s I_1 - [s I_1 - I_1(0)] + 2[s I_2 - I_2(0)] + 10 I_2 = 0$$

$$[s I_1 - I_1(0)] + 20 I_1 + 15 I_2 = \frac{55}{s}$$

$$(s+9) I_1 - (2s+10) I_2 = 0 \quad , \quad (s+20) I_1 + 15 I_2 = \frac{55}{s}$$

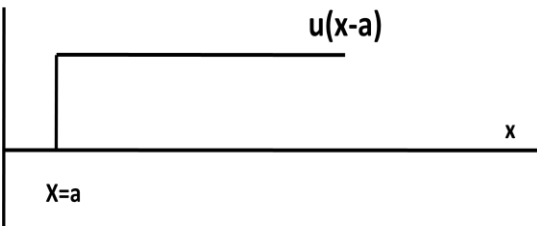
من المعادلة الاولى ينتج أن  $I_1 = 2 I_2$  وبالتعويض فى الثانية ينتج أن :

$$(2s+55) I_2 = \frac{55}{s} \quad \text{or} \quad I_2 = \frac{55}{s(2s+55)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{2s+55}$$

(15) مقدمة:

سبق الاشارة إلى دالة الخطوة الوحدة

لهفيسيد والمبينة بالشكل المقابل



$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & : t < a \\ 1 & : t > a \end{cases} \quad \text{والمعرفة كالاتى}$$

وتحويل لابلاس لهذه الدالة هو :

$$\begin{aligned} \ell\{u(t-a)\} &= \int_0^{\infty} u(t-a) e^{-st} dt \\ &= \int_0^a 0 \cdot e^{-st} dt + \int_a^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt \\ &= \frac{e^{-st}}{s} \Big|_a^{\infty} = \frac{e^{-as}}{s} \end{aligned}$$

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{e^{-as}}{s} \right\} = u(t-a) \quad \text{ومن ذلك ينتج أن :}$$

كما أنه يمكن الوصول إلى نفس النتيجة بتطبيق خاصية الازاحة الثانية التى تنص على أن :

$$\ell^{-1} \left\{ e^{-as} f(s) \right\} = \begin{cases} F(t-a) & : t > a \\ 0 & : t < a \end{cases}$$

وبوضع  $f(s) = \frac{1}{s}$  حيث  $F(t) = 1$  لهذا التحويل فإن :

$$\ell^{-1} \left\{ e^{-as} \cdot 1 \right\} = \begin{cases} 1 & : t > a \\ 0 & : t < a \end{cases} = u(t-a)$$

ونعود الان إلى حل المثال فنعبر عن التحويل باستخدام دالة الخطوة نجد أن :

$$w(x) = w_0 \left[ u(x) - u\left(x - \frac{l}{2}\right) \right]$$

والمعادلة التفاضلية هي :

$$\frac{d^n Y}{d x^n} = \frac{w(x)}{EI} \quad (1)$$

والشروط هي :

$$Y(0)=0 \quad , \quad Y'(0)=0 \quad , \quad Y''(l)=0 \quad , \quad Y'''(l)=0 \quad (2)$$

وبأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة فإن :

$$s^4 y - s^3 Y(0) - s^2 Y'(0) - s Y''(0) - Y'''(0) = \frac{w_0}{EI} \left( \frac{1-0}{s^3} \right)$$

وبالتعويض عن  $Y''(0) = c_1$  ,  $Y'(0) = c_2$  وإستخدام الشروط فإن

$$y = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{w_0}{EI} \left( \frac{1-0}{s^3} \right):$$

$$\therefore Y(x) = \frac{c_1 x^2}{2!} + \frac{c_2 x^3}{3!} + \frac{w_0}{EI} \frac{x^4}{4!} - \frac{w_0 (x - \frac{l}{2})^4}{4!} u(x - \frac{l}{2})$$

وهذا معناه أن :

$$Y(x) = \begin{cases} \frac{c_1 x^2}{2} + \frac{c_2 x^3}{6} + \frac{w_0}{24EI} x^4 & : 0 < x < \frac{l}{2} \\ \frac{c_1 x^2}{2} + \frac{c_2 x^3}{6} + \frac{w_0}{24EI} x^4 - \frac{w_0}{24EI} (x - \frac{l}{2})^4 & : x > \frac{l}{2} \end{cases}$$

و الآن نطبق المجموعة الاخيرة من الشروط المعروفة وهي :

$$Y''(0)=0 \quad , \quad Y''(l)=0$$

فنحصل على :

$$c_1 = \frac{w_0 l^2}{EI} \quad , \quad c_2 = \frac{w_0 l}{2EI}$$

$$\therefore Y(x) = \frac{w_0 l^2}{16EI} x^2 - \frac{w_0 l}{12EI} x^3 - \frac{w_0}{24EI} x^4 - \frac{w_0}{24EI} \left(x - \frac{l}{2}\right)^4 u\left(x - \frac{l}{2}\right).$$