

جامعة جنوب الوادى

كلية التربية بالغردقة

الفرقة الثانية أساسى رياضيات

المادة: أستاتيكا

إستاذ المادة / د. محمد محمد عبد العزيز

الفصل الدراسى الأول 2022-2023

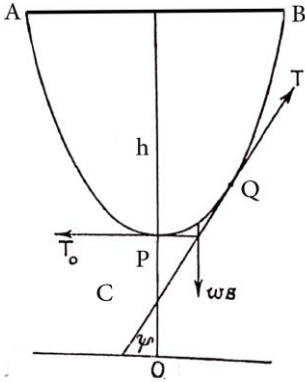
# الفصل الأول

## الكتينة

### تعريف (الكتينة العادية):

الكتينة هي المنحى الذى يعبر عن حالة خيط أو سلسلة منتظمة معلقة بحرية من نقطتين

$A$  &  $B$  كما هو موضح بالشكل .



دعنا نعين الشد عند أسفل نقطة ب  $T_0$  ,

والذى سوف يكون أفقيا . طول أى جزء منالسلسلة

مقاسا من النقطة  $P$  إلىأى نقطة  $Q$  .

الشد عندهذه النقطة يعين ب  $T$  وهذايميل على الأفقى

بزاوية  $\psi$  . الوزن لوحدة الأطوال من السلسلة يعين ب  $\omega$  .

الجزئ  $PQ$  من السلسلة يكون فى حالة إتزان تحت تأثير ثلاث قوى هى الوزن  $\omega s$

$T_0$  , و  $T$  الشدود عند  $P$  &  $Q$  .

### المعادلة الذاتية للكتينة:

بتحليل قوى الأتزانرأسيا وأفقيا نحصل على

$$T \sin \psi = \omega s \quad , \quad T \cos \psi = T_0$$

إنه من المناسب أن ندخل ثابت آخر  $c$  بحيث يكون  $T_0 = c \omega$

$$T \sin \psi = \omega s \quad , \quad T \cos \psi = \omega c$$

بالقسمة نحصل على

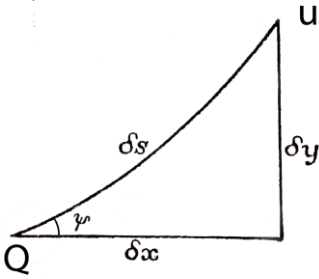
$$s = c \tan \psi \quad (i)$$

هذه هي المعادلة الذاتية لمنحنى الكتينة (  $c$  يسمى باراميتر الكتينة ) .

## المعادلة الكارتيزية للكتينة:

لأيجاد المعادلة الكارتيزية لمنحنى الكتينة نتبع :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{c} \quad (i) \quad \text{حيث أن } \tan \psi = \frac{dy}{dx} \text{ فإنه من}$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{c} \quad (i) \quad \text{حيث أن } \tan \psi = \frac{dy}{dx} \text{ فإنه من}$$

نعتبر العنصر الصغير  $\delta s$  من المنحنى والذي يربط النقطتين  $Q$  و  $U$  واللذين لهم الأحداثيات  $(x, y)$  و  $(x + \delta x, y + \delta y)$  على الترتيب و, إذن

$$(\delta s)^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2$$

بالقسمة على  $(\delta x)^2$  و  $(\delta y)^2$  على التوالي نحصل على

$$\left( \frac{\delta s}{\delta x} \right)^2 \cong 1 + \left( \frac{\delta y}{\delta x} \right)^2$$

$$\left( \frac{\delta s}{\delta y} \right)^2 \cong 1 + \left( \frac{\delta x}{\delta y} \right)^2$$

وعندما يكون

$$\delta s, \delta x, \delta y \rightarrow 0$$

فإن المعادلات السابقة تؤول إلى

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad (ii)$$

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \quad (iii)$$

من (ii) نحصل على :

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{s}{c}\right)^2$$

$$\therefore \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{c^2 + s^2}}{c}$$

$$\therefore dx = \frac{c}{\sqrt{c^2 + s^2}} ds$$

$$\therefore x = c \sinh^{-1} \frac{s}{c} \quad (iv)$$

$$s = c \sinh \frac{x}{c} \quad (v) \quad \text{أو}$$

حيث  $s = 0$  عندما  $x = 0$

من (iii) نحصل على :

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{c}{s}\right)^2$$

$$\therefore \frac{ds}{dy} = \frac{\sqrt{c^2 + s^2}}{s}$$

$$\therefore dy = \frac{s}{\sqrt{c^2 + s^2}} ds$$

$$\therefore y = \sqrt{c^2 + s^2}$$

$$y^2 = s^2 + c^2 \quad (vi) \quad \text{أو}$$

حيث  $y = c$  عندما  $s = 0$  و  $x = 0$

بالتعويض من (v) في (vi) نحصل على :

$$y^2 = c^2 \left(1 + \sinh^2 \frac{x}{c}\right)$$

$$y = c \cosh \left(\frac{x}{c}\right) \quad (vii)$$

وهذه هي المعادلة الكاتيزية لمنحى الكتيبة .

## المعادلات البارامترية للكتيبة:

$$x = c \sinh^{-1} \frac{s}{c} \quad y = \sqrt{c^2 + s^2} \quad \text{تلاحظ مما سبق أن}$$

أى امكن التعبير عن الأحداثيات الكارتيزية  $x & y$  بدلالة المتغير  $s$  (براميتير) أى أن المعادلتين السابقتين تمثلان المعادلات البارامترية لمنحنى الكتينة .

## الشد عند أى نقطة على الكتينة:

حيث أن :

$$T \sin \psi = \omega s \quad , \quad T \cos \psi = \omega c$$

فإن :

$$T^2 = \omega^2 (s^2 + c^2)$$

بالتعويض من (vi) نحصل على :

$$T^2 = \omega^2 y^2$$

$$\therefore T = \omega y$$

هكذا نجد أن الشد أى نقطة على الكتينة يكون متناسب مع إرتفاع النقطة فوق محور  $ox$  والذى يسمى عادة بدليل الكتينة أى يعتمد على الأحداثى  $y$  .

## أسلاك البرق والتليفون:

عندما تكون  $c$  كبيرة فإنه من (vii) نحصل على :

$$y = c \cosh \left( \frac{x}{c} \right) = \frac{c}{2} (e^{x/2} + e^{-x/2})$$

$$= \frac{c}{2} \left\{ \left( 1 + \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} + \dots \right) + \left( 1 - \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} - \dots \right) \right\}$$

$$= c + \frac{x^2}{2c^2} + \dots$$

$$\therefore y - c \cong \frac{x^2}{2c^2} \quad (x)$$

ذلك مع الوضع فى الاعتبار أن  $c$  كبيرة ونتيجة لهذه النتيجة فإن المنحى يكون تقريبا قطع مكافئ ذات وتر بؤرى طوله هو  $2c$

## تعريف (بحر الكتينة):

بحر الكتينة هو المسافة  $AB$  أى المسافة بين نقطتى التعليق .

إذا كان نصف بحر الكتينة هو  $k = \frac{1}{2} AB$  فإن نصف طول السلسلة  $s = s_A = s_B$  يعطى من  $v$  على الصورة :

$$s = \frac{c}{2} \sinh \frac{x}{c} = \frac{c}{2} \left\{ \left( 1 + \frac{k}{c} + \frac{k^2}{2c^2} + \frac{k^3}{6c^3} + \dots \right) - \left( 1 - \frac{k}{c} + \frac{k^2}{2c^2} - \frac{k^3}{6c^3} + \dots \right) \right\}$$

$$= \frac{c}{2} \left\{ \frac{2k}{c} + \frac{k^3}{3c^3} + \dots \right\}$$

وبفرض أن  $c$  كبيرة فإن

$$s = k + \frac{k^3}{6c^2}$$

$$\therefore s - k = \frac{k^3}{6c^2} \quad (xi)$$

## تعريف (سهم الكتينة):

سهم الكتينة هو المسافة العمودية من أسفل نقطة  $P$  إلى بحر الكتينة  $AB$ .

## العلاقة بين بحر وسهم الكتينة:

إذا كان  $h$  هو سهم الكتينة , فإنه عندما  $x = k$  ,  $y \cong c + \frac{k^2}{2c}$  &  $x = 0$  ,  $y = c$

وهذا يأتي من  $(x)$  هنا يمكن الحصول على :

$$h = \frac{k^2}{2c} \quad (*)$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{4h^2}{k^4} \quad (*)$$

وهذا يؤدي إلى

عندئذ من  $(xi)$  نحصل على :

$$s - k = \frac{k^3}{6c^2} = \left(\frac{k^3}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{c^2}\right) = \left(\frac{k^3}{6}\right) \cdot \left(\frac{4h^2}{k^4}\right) = \frac{4h^2}{6k}$$

$$\therefore 2(s - k) = \left(\frac{8}{3}\right) \cdot \left(\frac{h^2}{2k}\right)$$

هذا يعني أن الفرق بين طول السلسلة  $2s$  و بحر الكتينة  $2k$  يكون مساويا للنتيجة :

$$\therefore 2(s - k) = \left(\frac{8}{3}\right) \cdot \left(\frac{((sag)^2)}{span}\right) \quad (**)$$



العلاقتين (\*) & (\*\*) توضحان العلاقة بين بحر وسهم الكتينة .

## ملاحظة:

عندما  $c$  تكون كبيرة كما ذكر اعلاه فإن السلسلة أو السلك تعبر عن أسلاك البرق والتليفون . فى هذه الحالة يكون طول السلك  $s$  يكون أكبر قليلا عن بحر الكتينة  $AB$  . وبالتالي يكون السهم صغيرا .

## أمثلة

كثير من المسائل التى تشمل الكتينة يمكن أن تحل بإستعمال الصيغ الآتية :

$$s = c \tan \psi \quad (ii) \quad s = c \sinh \frac{x}{c} \quad (i)$$

$$x = c \sinh^{-1} \frac{s}{c} \quad (iii) \quad y = \sqrt{s^2 + c^2} \quad (iv)$$

$$y = c \cosh \left( \frac{x}{c} \right) \quad (vi) \quad y^2 = s^2 + c^2 \quad (vii)$$

$$T = \omega y \quad (x) \quad T_0 = c \omega \quad (viii)$$

كل البارامترات المذكورة فى المعادلات السابقة تم تعريفها مسبقا .

## مثال(1):

سلك كهرباء طوله  $140\text{ m}$  وكتلة وحدة الاطوال منه هي  $3\text{ kg/m}$  ومعلق بين برجين  
يبعدان عن بعضهما مسافة  $120\text{ m}$  ويقعان على نفس الارتفاع . عين سهم الكتينة وقيمة  
أقصى شد في السلك .

## الحل

السهم  $h$  يمكن إيجاده من المعادلة (vii) على أساس أنه يمكن تعيين  $c$  بين كما يلي

$$y_B^2 - s_B^2 = c^2 \quad (vii)$$

$$(h+c)^2 - (70)^2 = c^2 \quad (1) \quad \text{أو}$$

المسافة  $c$  يمكن تعيينها من المعادلة (i) :

$$s_B = c \sinh \frac{x_B}{c} \quad (i)$$

$$70\text{ m} = c \sinh \frac{60}{c} \quad (2) \quad \text{أو}$$

هذه المعادلة يجب أن تحل عددياً لأيجاد  $c$  أو باستخدام آلة حاسبة حديثة لتكون :

$$c = 61.45\text{ m}$$

حل آخر محتمل هو  $c = -61.45\text{ m}$  ولكن هذا الحل ليس له معناً طبيعياً .

الآن بالتعويض بهذه القيمة في المعادلة (1) نحصل على:

$$(h + 61.45\text{ m})^2 - (70\text{ m})^2 = (61.45\text{ m})^2$$

حل هذه المعادلة يعطى :

$$h = 31.70\text{ m}$$

القيمة الأخرى السالبة تهمل لأن ليس لها معنى .

أقصى قيمة للشد  $T_{\max}$  تحدث عند النقط  $B$  or  $A$  وهذا يمكن حسابه من المعادلة (x)

$$T_{\max} = \omega y_B \quad (x)$$

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \left[ (3\text{kg/m})(98.1\text{ m/s}^2) \right] [31.70\text{m} + 61.45\text{m}] \\ &= 2740\text{ N} = 2.74\text{ K} \end{aligned}$$

## مثال (2):

سلسلة معلقة بين نقطتين على نفس الارتفاع ويبعدان عن بعضهما مسافة قدرها  $400\text{ ft}$  فإذا كان سهم الكتينة هو  $40\text{ ft}$  ووزن وحدة الأطوال من السلسلة هو  $4\text{ lb/ft}$ . عين طول الكتينة وقيمة الشد عند أسفل نقطة .

## الحل

طول السلسلة  $s_B$  يمن أسفل نقطة إلى النقطة  $B$  يمكن إيجاده من المعادلة (i) على أساس أنه يمكن تعيين  $c$  بين كما يلي :

$$\begin{aligned} s &= c \sinh \frac{x}{c} \quad (i) \\ &= c \sinh 200 / c \quad (1) \end{aligned}$$

المسافة  $c$  يمكن تعيينها من المعادلة (vi)

$$y_B = c \cosh \left( \frac{x_B}{c} \right) \quad (vi)$$

$$c + 40 \text{ ft} = c \cosh 200 \text{ ft} / c \quad (2)$$

أو

هذه المعادلة يجب أن تحل عددياً لإيجاد  $c$  أو باستخدام آلة حاسبة حديثة لتكون :

$$c = 506.53 \text{ ft}$$

الآن بالتعويض بهذه

القيمة في المعادلة

(1) المعادلة نحصل

على:

$$\begin{aligned} s_B &= c \sinh \frac{x_B}{c} \\ &= (506.53) \sinh 200 \text{ ft} / 506.53 \text{ ft} \\ &= 205.237 \text{ ft} \end{aligned}$$

(viii) الشد عند أسفل نقطة يكون أفقياً , ويمكن إيجاده من المعادلة

$$\begin{aligned} T_0 &= (4 \text{ Ib/ft}) (506.53) . \\ &= 2.025 \text{ IB} . \end{aligned}$$

### مثال (3):

سلسلة معلقة بين نقطتين على نفس الأرتفاع ويبعدان عن بعضهما مسافة قدرها  $20 \text{ m}$  فإذا كان سهم الكتينة هو  $6 \text{ m}$  . فإذا كانت الكتلة الكلية للسلسلة هي  $45 \text{ kg}$  فعين المسافة بين نقطتي التعليق وكذلك أقصى قيمة للشد .

## الحل

المسافة بين نقطتى التعليق  $x_B$  حيث  $2x_B$  يمكن تعيينها من المعادلة (i) على أساس أنه يمكن تعيين  $c$  كما يلي :

$$s_B = c \sinh \frac{x_B}{c} \quad (i)$$

وبالتعويض عن

$$s_B = 10 \text{ m}$$

$$10 \text{ m} = c \sinh \frac{x_B}{c} \quad (1) \quad \text{على :}$$

المسافة  $c$  يمكن إيجادها من المعادلة (vii)

$$y_B^2 - s_B^2 = c^2 \quad (vii)$$

$$(h+c)^2 - (70)^2 = c^2 \quad \text{أو}$$

$$(6 \text{ m} + c)^2 - (10)^2 = c^2$$

هذه المعادلة تأخذ الصورة :

$$36 + 12c + c^2 - 100 = c^2$$

الحدود  $c^2$  تلغى بعضها البعض وتتحول المعادلة إلى معادلة خطية حلها هو :

$$c = 5.333 \text{ m}$$

وبالتعويض فى المعادلة (1) لتكون :

$$10 = 5.333 \sinh \frac{x_B}{5.333}$$

وبحلها عدديا نحصل على :

$$x_B = 7.393 \text{ m}$$

وعلى ذلك تكون المسافة بين

نقطتى التعليق هي :

$$2 x_B = 14.786 \text{ m}$$

أقصى شد يحدث عند النقطة  $B$  عند النقطة والذي يمكن تعيينه من المعادلة (x)

$$T_{\max} = \omega y_B \quad (x)$$

$$T_{\max} = \left( \frac{\text{Total weight of the chain}}{\text{Total length of the chain}} \right) y_B$$

$$= \left( \frac{(45 \text{ kg}) (98.1 \text{ m/s}^2)}{20 \text{ m}} \right) (6 \text{ m} + 5.333 \text{ m}) = 250 \text{ N}.$$

## مثال (4):

سلسلة معلقة بين نقطتين على نفس الأرتفاع . طولها  $50 \text{ m}$  . فإذا كانت الكتلة الكلية للسلسلة هي  $50 \text{ kg}$  وكان أقصى شد في السلسلة لا يزيد عن  $500 \text{ N}$  . فعيّن أقصى بحر للسلسلة وكذلك سهم الكتينة .

## الحل

أقصى شدة تم تحديده في رأس المسألة ليكون  $T_{\max} = 500 \text{ N}$  والذي سوف يكون عند النقطة  $B$  وبالتعويض في المعادلة

$$T_{\max} = \omega y_B \quad (x)$$

نحصل على :

$$y_B = \frac{T_{\max}}{\omega} = \frac{T_{\max}}{\left( \frac{\text{Total weight of the chain}}{\text{Total length of the chain}} \right)}$$

$$= \frac{500 \text{ N}}{\left( \frac{(50 \text{ kg}) (98.1 \text{ m/s}^2)}{50 \text{ m}} \right)} = 50.97 \text{ m}$$

المسافة بين نقطتي التعليق هي  $2x_B$  وسوف نحتاج لأستعمال قيمة  $y_B$  السابقة لتعيين  $x_B$  وذلك بالتعويض في المعادلة (vi)

$$50.97 \text{ m} = c \cosh \left( \frac{x_B}{c} \right) \quad (1)$$

المسافة  $c$  يمكن تعيينها الآن من المعادلة :

$$y_B^2 - s_B^2 = c^2 \quad (vii)$$

أى

$$(50.97 \text{ m})^2 - (25 \text{ m})^2 = c^2$$

وحلها هو

$$c = \pm 44.42 \text{ m}$$

الأشارة السالبة ليس لها معنا فيزيائيا وبالتعويض بالقيمة الموجبة في المعادلة (1) نحصل على:

$$50.97m = 44.42 \cosh \left( \frac{x_B}{44.42} \right) \quad (2)$$

بحل المعادلة (1) عدديا نحصل على :

$$x_B = 23.836 \text{ m}$$

وبذلك تكون المسافة بين نقطتي التعليق هي :

$$2x_B = 47.7 \text{ m}$$

وحيث أن كلا من

$x_B$  &  $c$  معروفة

فإن سهم الكتية

$$h = y_B - c = (50.97 \text{ m}) - (44.42 \text{ m}) = 6.55 \text{ m} .$$

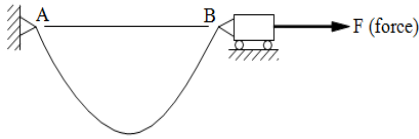
يتعين بالشكل :

## مثال (5):

سلسلة معلقة بين نقطتين  $A$  &  $B$  حيث النقطة  $A$  ثابتة و النقطة  $B$  متحركة, فإذا كانت طولها  $80 \text{ ft}$  ووزن وحدة الأطوال هو  $0.3 \text{ lb / ft}$ , وكان بحر الكتية هو  $50 \text{ ft}$ , فعين القوة  $F$  والتي تثبت النقطة المتحركة  $B$  وأيضا عين سهم الكتية .

## الحل





القوة  $F$  المؤثرة عند النقطة المتحركة  $B$  تساوى  
المركبة الأفقية للشد  $T_0$  عند أسفل نقطة للكتينة أى  
 $F = T_0$  حيث يمكن تعيينها من المعادلة  $T_0 = \omega c$   
وبالتالى نحصل على :

$$F = (0.3 \text{ lb / ft}) c \quad (1)$$

المسافة  $c$  يمكن إيجادها من  
المعادلة (i)

$$s_B = c \sinh \frac{x_B}{c} \quad (i)$$

أو

$$40 \text{ ft} = c \sinh 25 \text{ ft} / c \quad (2)$$

هذه المعادلة يجب أن تحل عددياً لإيجاد  $c$  فتكون النتيجة هي :

$$c = \pm 14.229 \text{ ft}$$

القيمة السالبة ليس لها معنى وباستعمال القيمة الموجبة فإن القوة الأفقية المطلوبة فى  
المعادلة (1) تأخذ القيمة :

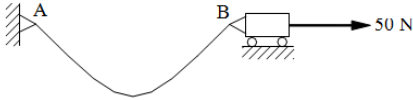
$$F = (0.3 \text{ lb / ft}) (14.229 \text{ ft}) = 4.27 \text{ lb}$$

ولإيجاد سهم الكتينة  $h$  نعوض فى المعادلة :

$$\begin{aligned} h &= y_B - c = c \cosh (x_B / c) - c \\ &= (14.229 \text{ ft}) \cosh (25 \text{ ft} / 14.229 \text{ ft}) - 14.229 \text{ ft} \\ &= 28.2 \text{ ft}. \end{aligned}$$

**مثال (6):**

سلسلة معلقة بين نقطتين  $A$  و  $B$  حيث النقطة  $A$  ثابتة والنقطة  $B$  متحركة, فإذا كانت طولها  $40\text{ m}$  وكتلة وحدة الأطوال هو  $0.4\text{ kg/m}$ , وكانت القوة  $F$  والتي تثبت النقطة المتحركة  $B$  هي  $50\text{ N}$  فى الاتجاه الأفقى, فعين بحر وسهم الكتينة .

**الحل**

المسافة بين نقطتى التعليق  $x_B$  حيث  $2x_B$  يمكن تعيينها من المعادلة (i) على أساس أنه يمكن تعيين  $c$  كما يلى :

$$s_B = c \sinh \frac{x_B}{c} \quad (1)$$

القوة  $F$  المؤثرة عند النقطة المتحركة  $B$  تساوى المركبة الأفقية للشد  $T_0$  عند أسفل نقطة للكتينة أى  $F = T_0$  حيث يمكن تعيين  $c$  من المعادلة  $T_0 = \omega c$  وبالتالي نحصل على :

$$50 = \left[ (0.4\text{ kg/m}) (9.81\text{ m/s}^2) \right] c$$

والتي تعطى :

$$c = 12.742\text{ m}$$

وبالتعويض بهذه القيمة وقيمة  $s_B = 20\text{ m}$  فى المعادلة (1) نحصل على :

$$20 \text{ m} = (12.742 \text{ m}) \sinh \frac{x_B}{12.742 \text{ m}}$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على :

$$x_B = 15.708 \text{ m}$$

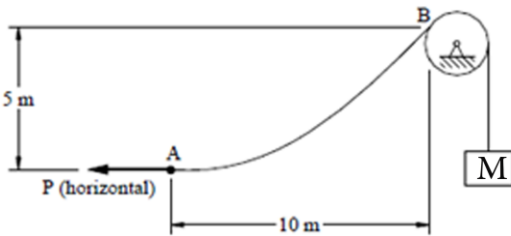
وبالتالى فإن بحر الكتينة هو :

$$2x_B = 2 (15.708 \text{ m}) = 31.4 \text{ m}$$

ولأيجاد سهم الكتينة  $h$  نعوض فى المعادلة :

$$\begin{aligned} h &= y_B - c = c \cosh (x_B / c) - c \\ &= (12.742 \text{ m}) \cosh (15.708 \text{ m} / 12.742 \text{ m}) - 12.742 \text{ m} \\ &= 28.2 \text{ m} \end{aligned}$$

## مثال (7):



سلسلة تمر على بكرة ملساء مثبتة عند النقطة  
بحيث  $B$

يتدلى جزء من السلسلة يحمل فى نهايته كتلة  
 $M$

الطرف الأخر من السلسلة مسحوب بواسطة قوة

أفقية  $P$  عند النقطة  $A$ . فإذا كانت كتلة وحدة

الأطوال من السلسلة هي  $0.3 \text{ kg/m}$ ,

فعين كلا من  $P$  &  $M$  والتي تحافظ على السلسلة فى الوضع المبين فى لشكل المقابل .

## الحل

القوة  $P$  المؤثرة عند النقطة  $A$  تساوى المركبة الأفقية للشد  $T_0$  عند أسفل نقطة للكتينة أى  $P = T_0 = \omega c$  وبالتالي نحصل على :

$$P = (0.3 \text{ kg/m}) (9.81 \text{ m/s}^2) c = (2.943 \text{ N/m}) c \quad (1)$$

المسافة  $c$  يمكن إيجادها من المعادلة (vi)

$$y_B = c \cosh \left( \frac{x_B}{c} \right) \quad (vi)$$

أو

$$5 \text{ m} + c = c \cosh 10 \text{ m} / c$$

هذه المعادلة يجب أن تحل عددياً لإيجاد  $c$  فتكون النتيجة هى :

$$c = 10.743 \text{ m}$$

وبالتعويض بهذه القيمة فى المعادلة (1) نحصل على :

$$P = (0.3 \text{ kg/m}) (9.81 \text{ m/s}^2) (c = 10.743 \text{ m}) = 31.617 \text{ N}$$

ولتعيين الكتلة  $M$  نعلم أن الشد عند النقطة  $P$  يجب أن يساوى الوزن  $Mg$

أى :

$$T_B = Mg$$

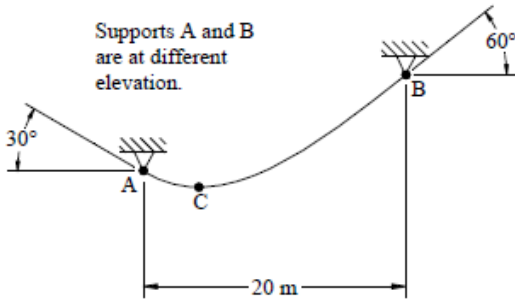
وبالتالى فإن الكتلة تكون :

$$M = T_B / g \quad (2)$$

وحيث أن  $T_B = \omega y_B$  فإن المعادلة (2) تعطى :

$$M = [(2.943 \text{ N/m}) (5 \text{ m} + 10.743 \text{ m})] / (9.81 \text{ m/s}^2) = 4.72 \text{ Kg}$$

## مثال (8):



سلسلة تصنع الزوايا  $30^\circ$  ,  $60^\circ$  عند نقط التعليق

كما هو موضح بالشكل المقابل . عين موضع النقطة

$c$  بالنسبة للنقطة A . عين أيضا الشد عند نفس النقطة

إذا كانت الكتلة لوحدة الطول من السلسلة هي

$$. 0.6 \text{ kg/m}$$

## الحل

البيانات الهندسية موضحة بالشكل . لتعيين موضع النقطة  $c$  بالنسبة للنقطة A نحتاج لتعيين الأحداثيات  $x_A$  ,  $y_B$  . يمكن الحصول على هذه الأحداثيات بإستعمال حقيقة أن الميل عند النقطة A معروف وذلك من المعادلة :

$$-\tan 30^\circ = \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{at A} = \left[ \frac{d(c \cosh(x/c))}{dx} \right]_{at A} = \sinh(x_A/c)$$

ومنها يمكن إيجاد :

$$x_A = c \sinh^{-1}(-\tan 30^\circ) \quad (1)$$

وبالمثل عند النقطة B نحصل على :

$$x_B = c \sinh^{-1}(\tan 60^\circ) \quad (2)$$

الأحداثيات  $x_A$  &  $x_B$  البعد بينهما  $20 - m$  يرتبطان ببعضهما بالمعادلة :

$$x_A - x_B = 20 - m$$

وبالتعويض من المعادلتين (1) & (2) نحصل على :

$$c \sinh^{-1}(-\tan 30^\circ) - c \sinh^{-1}(\tan 60^\circ) = 20$$

وبما أن هذه المعادلة خطية في  $c$ , فمن السهولة أن تحل لتعطي  $c = 10.717 \text{ m}$

الآن المعادلة (1) تعطي :

$$x_A = 10.717 \text{ m} \sinh^{-1}(-\tan 30^\circ) = -5.887 \text{ m}$$

الأحداثيات  $y$  للنقطة A يمكن الآن حسابه من المعادلة (vi) أى :

$$y_A = c \cosh\left(\frac{x_A}{c}\right) = (10.717 \text{ m}) \cosh\left(\frac{-5.887 \text{ m}}{10.717 \text{ m}}\right) = 12.375 \text{ m}$$

المسافة الرأسية بين نقطة التعليق A وأسفل نقطة  $c$  تعطي من :

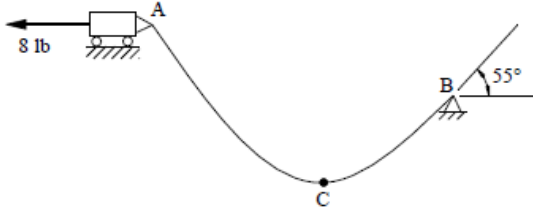
$$d = y_A - c = 12.375 \text{ m} - (10.717 \text{ m}) = 1.658 \text{ m}$$

الشد عند النقطة A يعطى من المعادلة (x)

$$T = \omega y_A = \left[ (0.6 \text{ Kg/m}) (9.81 \text{ m/s}^2) \right] (12 \cdot 375 \text{ m}) = 72.8 \text{ N}$$

## مثال (9):

سلك يزن  $0.2 \text{ lb/ft}$  معلق بنقطة متحركة A



ويصنع زاوية  $55^\circ$  عند نقطة ثابتة B .  
نقاط

التعليق A & B ليست على نفس الأرتفاع  
كما

هو موضح بالشكل المقابل . عين موضع النقطة

c بالنسبة للنقطة B . عين أيضا الشد عند النقطة c

## الحل

البيانات الهندسية موضحة بالشكل . لتعيين موضع النقطة c بالنسبة للنقطة B نحتاج  
لتعيين الأحداثيات  $x_B, y_B$  . يمكن الحصول على هذه الأحداثيات بإستعمال حقيقة أن  
الميل عند النقطة B معروف وذلك من المعادلة :

$$\tan 55^\circ = \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{\text{at } B} = \left[ \frac{d (c \cosh (x/c))}{dx} \right]_{\text{at } B} = \sinh (x_B/c)$$

ومنهاممكن إيجاد :

$$x_B = c \sinh^{-1} (\tan 55^\circ)$$

وبالمثل عند النقطة  $B$  نحصل على :

$$x_B = c \sinh^{-1}(\tan 60^\circ) \quad (1)$$

قيمة  $c$  يمكن تعيينها من ملاحظة أن القوة عند النقطة  $A$  تساوي المركبة الأفقية للشد  $T_0$  ملاحظة عند النقطة  $A$ . المعادلة (viii) في الصورة:

$$T_0 = c \omega$$

وبالتعويض في هذه المعادلة من البيانات المعطاة نحصل على :

$$8 \text{ lb} = (0.2 \text{ lb / ft}) c$$

ومنها نحصل على :

$$c = 40 \text{ ft} \quad (2)$$

وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على :

$$x_B = (40 \text{ ft}) \sinh^{-1}(\tan 60^\circ) = 46.169 \text{ ft}$$

المسافة الرأسية بين النقطة  $B$  وأسفل نقطة  $c$  تعطى من :

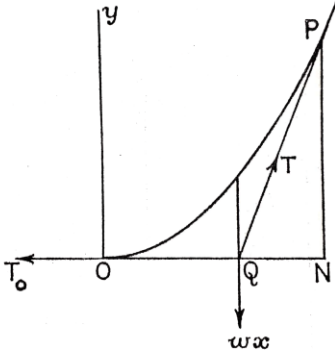
$$\begin{aligned} d &= y_B - c = c \cosh(x_B/c) - c \\ &= (40 \text{ ft}) \cosh(46.169 \text{ ft}/40 \text{ ft}) - 40 \text{ ft} = 29.7 \text{ ft} \end{aligned}$$

الشد عند النقطة  $B$  يعطى من المعادلة  $T_0 = 8 \text{ lb}$  (x) :



## أمثلة عملية

### مثال (1) (الكوبرى المعلق):



إذا كانت سلسلة معلقة تحمل حملا متصل موزع

بانتظام افقيا بحيث تأخذ شكل قطع مكافئ

إذا كانت  $O$  هي أسفل نقطة من السلسلة ,

وكانت  $P$  هي أى نقطة من السلسلة والتي إحداثياتها

فى النظام الكارتيذى, وكان الحمل بواسطة

الجزء  $OP$  يتناسب مع المسافة أفقية  $ON$

والذى يؤثر عند النقطة  $Q$  والتي هي منتصف المسافة  $x = ON$ , فإن الحمل سوف

يكون  $\omega x$  حيث  $\omega$  هي وزن وحدة الأطوال من السلسلة. القوى الأخرى والتي تؤثر

على الجزء  $OP$  هي الشد الأفقى عند أسفل نقطة  $T_0$  والشد  $T$  عند النقطة  $P$ , هذه

القوى الثلاث تتقاطع عند النقطة  $Q$  ويكون المثلث  $PNQ$  هو مثلث القوى فيكون :

$$\frac{\omega x}{PN} = \frac{T_0}{NQ} \quad \therefore T_0 y = \frac{1}{2} \omega x^2$$

$$y = \frac{x^2}{2c} \quad \text{عندئذ إذا اعتبرنا أن } T_0 = \omega c \text{ فإننا نحصل على}$$

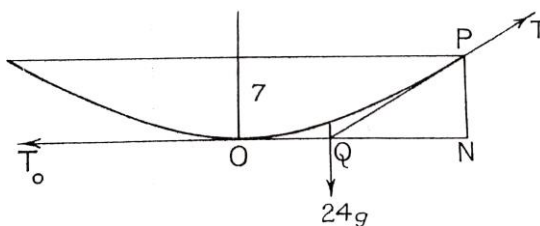
وهذا يعنى أن منحنى السلسلة يأخذ شكل القطع المكافئ .

فإذا اعتبرنا أن بحر الكتينة للكوبرى المعلق هو  $96 \text{ m}$  وأن سهم الكتينة هو  $7 \text{ m}$ , وكان

فرعى السلسلة يحملان حمل قدره  $1000 \text{ kg}$  لكل متر أفقى. فأوجد الشد عند أسفل نقطة

وعند أقصى نقطة .

## الحل



الحمل بواسطة الجزء  $OP$  يكون  $48gkN$  ويكون المثلث  $PNQ$  هو مثلث القوى حيث :

$$QN = 48 m , PN = 7 m \quad \therefore Qp = 25 m$$

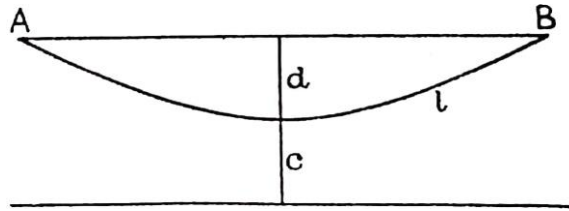
$$\frac{T_0}{24} = \frac{T}{25} = \frac{48g}{7}$$

$$\therefore T = 1680 kN \quad , \quad T_0 \cong 1612.8 kN$$

## مثال (2) :

سلسلة منتظمة طولها  $2l$  ووزن وحدة الأطوال منها هو  $\omega$  وكانت السلسلة معلقة بين نقطتين في مستوى أفقى واحد , وكان أقصى عمق للسلسلة هو  $d$  . أثبت أن الشد عند أسفل نقطة لها هو  $\omega (l^2 - d^2)/2d$  . وإذا كان  $l = 50 m$  &  $d = 20 m$  فأوجد المسافة بين نقطتى التعليق .

## الحل



لمنحى الكتيبة يكون :  $y^2 = c^2 + s^2$

عند النقطة B يكون  $s = l$  ,  $By = c + d$

$$\therefore (c + d)^2 = c^2 + l^2$$

ومنها يكون

$$2cd = l^2 - d^2$$

$$\therefore c = l^2 - d^2 / 2d$$

وبالتالى يكون الشد عند أسفل نقطة هو:

$$T_0 = \omega c = \omega (l^2 - d^2) / 2d$$

الآن إذا كان  $d = 20 \text{ m}$  &  $l = 50 \text{ m}$  فإن :

$$c = 2500 - 400 / 40 = 105 / 2$$

ولكن

$$s = c \sinh x / c$$

أو

$$x = c \sinh^{-1} s / c$$

$$\begin{aligned}
 \therefore x &= (105/2) \sinh^{-1}(20/21) \\
 &= (105/2) \ln[(20/21) + \sqrt{1 + (20/21)^2}] \\
 &= (105/2) \ln(49/21)
 \end{aligned}$$

عندئذ يكون

$$AB = 2x = AB = 105 \times 2.303 \log_{10}(49/21) \cong 89 \text{ m}$$

### EXERCISES:

- (1) A rope has an effective length of 20 m and mass 5 kg per meter. One end of the rope is 4 m higher than the other. Find the maximum tension in the rope when the tangent at the lower end is horizontal.
- (2) A uniform chain of length  $2l$  has its ends fixed at two points at the same level. The sag at the middle is  $h$ . Prove that the span is  $[(l^2 - h)/h] \ln[(l + h)/(l - h)]$ .
- (3) A uniform wire hangs freely from two points at the same level 200 m apart. The sag is 15 m. Show the greatest tension is approximately  $348 \omega$  and the length of wire is approximately 203 m.

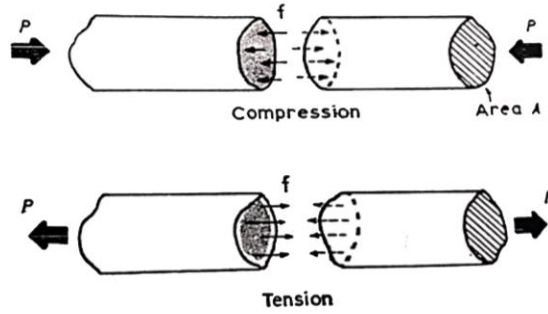
# الفصل الثانى

## الأجهاد والأنفعال

### تعريف (الأجهاد):

الأجهاد هو النسبة بين الحمل (الثقل)  $P$  ومساحة المقطع من الجسم  $A$  أو هو القوة لوحدة المساحات أى :

$$f = \frac{P}{A}$$



ووحدة القياس هنا هى  $lb/in^2$  فى النظام الأنجليزى أو  $N/m^2$  فى النظام الفرنسى.  
الوحدة الفرنسية  $N/m^2$  تسمى بسكال إختصارا  $Pa$  وهى وحدة صغيرة ولذا توجد وحدات أخرى أكبر وهى :

$$1 KPa = 10^3 Pa = 10^3 N/m^2 \quad (KPa = Kilo Pascal)$$

$$1MPa = 10^6 Pa = 10^6 N/m^2 = 1 N/mm^2 \quad (MPa = Mega Pascal)$$

$$1GPa = 10^9 Pa = 10^9 N/m^2 \quad (GPa = Gega Pascal)$$

## تعريف (الأنفعال):

الأنفعال هو النسبة بين الزيادة (النقصان) في الطول (التغير في الطول)  $x$  والطول الأصلي  $l$  أو هو الزيادة (النقصان) في الطول لوحدة الأطوال وذلك طبقا هل الحمل هو شد أو ضغط :

$$e = \frac{x}{l}$$

## العلاقة بين الأجهاد والأنفعال:

قانون هوك يعنى أن

$$E = \frac{f}{e}$$

$E$  يسمى معمل ينج ووحداته هي وحدات الأجهاد .

والتي يمكن كتابتها في الصور الآتية :

$$e = \frac{f}{E} \quad \& \quad f = e E$$

## أمثلة

### مثال (1):

قطعة من المطاط تحمل ماكينة حملها  $1000 \text{ lb}$  تنتضغط بمقدار  $0.2 \text{ in}$ . إذا كان الأنفعال لا يزيد عن  $40 \text{ lb/in}^2$ . عين قطر وسمك قطعة المطاط ذات المقطع الدائري. إعتبر  $E = 150 \text{ lb/in}^2$ .

### الحل

$$f = \frac{P}{A} = \frac{1000}{\pi (d/2)^2}$$

أى :

$$40 = \frac{1000}{\pi d^2/4}$$

حيث  $d$  هو قطر القطعة الدائرية. ومنها نحصل على :

$$d^2 = 31.83 \text{ in}^2$$

وعلى ذلك فإن :

$$d = 5.64 \text{ in}$$

أيضا الأنفعال يتعين من :

$$e = \frac{x}{l}$$

ولكن

$$e = \frac{f}{E}$$

إذن:

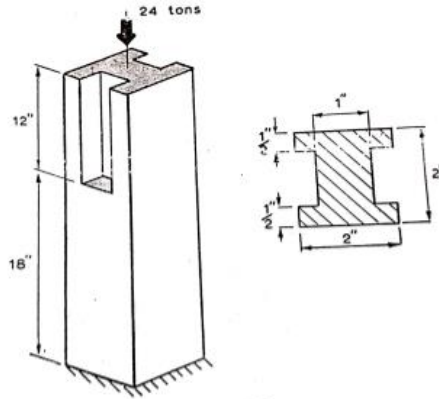
$$e = \frac{40}{150} = \frac{0.2}{l}$$

وعلى ذلك فإن سمك قطعة المطاط هي :

$$l = 0.75 \text{ in}$$

## مثال (2):

الشكل يوضح قطعة من الحديد على شكل منشور رباعي ذو قاعدة مربعة طول ضلعها 2 in وإرتفاعه 30 in فإذا تم عمل تجويفين متكافئين متواجهين كما هو موضح. فإذا كان المنشور يحمل ثقلا قدره 24 tons وكان  $E = 1250 \text{ ton/in}^2$  فأوجد مقدار النقص في الطول .





## الحل

أولاً : فى الجزء الصلب ذو الطول 18 in

$$x_1 = e_1 l_1 = 18 e_1$$

$$f_1 = \frac{P}{A_1} = \frac{24}{2 \times 2} = 6 \text{ ton / in}^2 \text{ وكذلك}$$

$$e_1 = \frac{f_1}{E} = \frac{6}{E} \text{ إذن}$$

ثانياً : فى الجزء الأجوف ذو الطول 12 in

$$x_2 = e_2 l_2 = 12 e_2$$

$$f_2 = \frac{P}{A_2} = \frac{24}{(2 \times 2) - 2(1 \times (1/2))} = \frac{24}{(2 \times 2) - 1} = \frac{24}{3} = 8 \text{ ton / in}^2 \text{ وكذلك}$$

$$e_2 = \frac{f_2}{E} = \frac{8}{E} \text{ إذن}$$

وبالتالى فإن مقدار النقص الحادث فى الطول هو :

$$x = x_1 + x_2 = 18 \times \frac{6}{E_1} + 12 \times \frac{8}{E} = \frac{204}{E} = \frac{204}{1250} = 0.0163 \text{ in}$$

**مثال(3):**

قضييب ذات مقطع  $10\text{ mm} \times 10\text{ mm}$  يتحمل شد محورى مقداره  $10\text{ KN}$ . إحسب الأحهاد الواقع عليه .

**الحل**

$$f = \frac{P}{A} = \frac{10\text{ KN}}{10\text{ mm} \times 10\text{ mm}} = \frac{10 \times 10^3\text{ N}}{10^2 (mm)^2} = \frac{10 \times 10^3\text{ N}}{10^2 (m/1000)^2}$$

$$= \frac{10 \times 10^3 \times 10^6}{10^2} \times \frac{N}{m^2} = 100 \times 10^6 \frac{N}{m^2} = 100\text{ MPa}$$

**مثال(4):**

قضييب طوله  $10\text{ mm}$  يتحمل شد محورى مقداره  $10\text{ KN}$ . فإذا كان الطول بعد تأثير الشد هو  $100.1\text{ mm}$ . إحسب الأنفعال الناتج .

**الحل**

$$e = \frac{x}{l} = \frac{(100.1 - 100)\text{ mm}}{100\text{ mm}} = \frac{0.1\text{ mm}}{100\text{ mm}} = 0.001$$

**مثال (5):**

قضيب طوله  $10\text{ mm}$  يتحمل ضغط محوري مقداره  $10\text{ KN}$ . فإذا كان الطول بعد تأثير الضغط هو  $99\text{ mm}$  فاحسب الأنفعال الناتج .

**الحل**

$$e = \frac{x}{l} = \frac{(99 - 100)\text{ mm}}{100\text{ mm}} = \frac{-1\text{ mm}}{100\text{ mm}} = -0.01$$

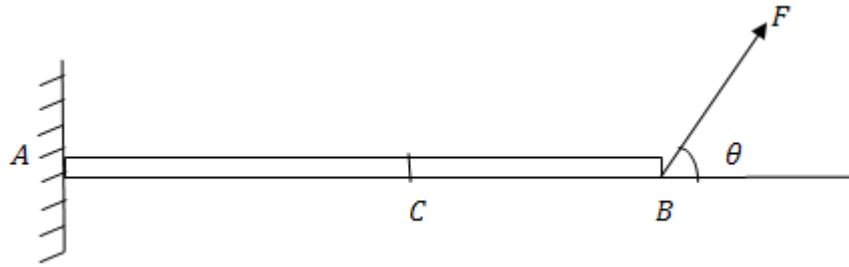
-----

## الباب الثالث

### اتزان القضبان الرفيعة تحت تأثير قوي غير محورية

#### أولاً: القوي القاصة وعزم الانحناء

درسنا فيما سبق اتزان القضبان الرفيعة تحت تأثير قوي محورية ، أي أن القوي تؤثر في اتجاه محور القضيب وعرافنا إنه يكون في القضبان قوي أو إجهادات داخلية . وسوف ندرس في هذا الباب دراسة اتزان القضبان الرفيعة عندما تؤثر عليها قوي غير محورية . في هذه الحالة تنشأ إجهادات داخلية في القضبان وتظهر عند المقاطع قوي قاصة عمودية علي محاور القضبان وعزوم انحناء . في بعض المجالات مثل المباني والإنشاءات الهندسية يكون من المهم حساب هذه القوي القاصة وعزوم الانحناء . ويجب الإشارة هنا إلي أن هذا الموضوع من الموضوعات التي تهتم المهندسين ويدرسه طلاب كلية الهندسة وذلك لأهمية دراسة التأثيرات الناتجة من قوي التحميل المختلفة وعلاقتها بالإجهادات الداخلية من شد أو ضغط وقوي قاصة وكذلك عزوم الانحناء وذلك في الإنشاءات الهندسية المختلفة . ولكي نلمس وجود هذه القوي الداخلية من شد أو ضغط وقوي قاصة وعزوم انحناء نعتبر اتزان قضيب أفقي خفيف  $AB$  مثبت أحد طرفية  $A$  في حائط رأسي ويؤثر في الطرف الحر  $B$  للقضيب قوة مقدارها  $F$  في اتجاه يصنع زاوية  $\theta$  مع الأفقي (كما بالشكل )



نعتبر مقطع للقضيب عند  $C$  . لكي يتزن الجزء  $CB$  من القضيب فإنه يجب أن تظهر عند المقطع  $C$  قوتان إحداهما  $T$  في اتجاه محور القضيب وتساوي مركبة القوه  $F$  في اتجاه محور القضيب



أي أن

$$T = F \cos \theta \quad (3.1.1)$$

والثانية  $N$  في اتجاه العمودي علي القضيب وتساوي مركبة القوة  $F$  في اتجاه العمودي علي محور القضيب أي أن

$$N = F \sin \theta \quad (3.1.2)$$

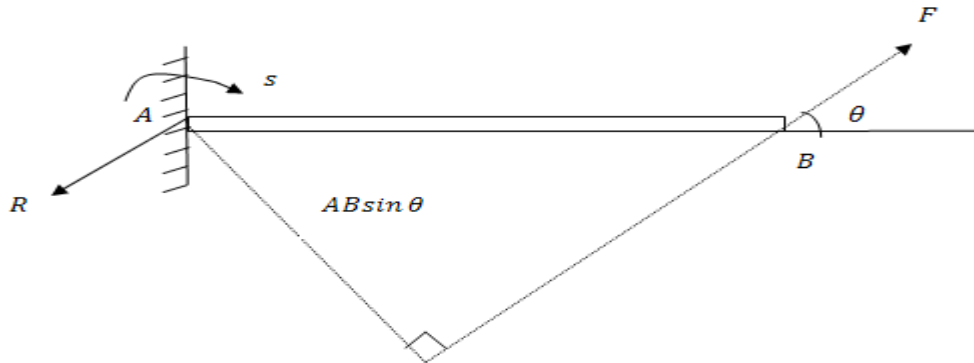
وكذلك يظهر عند المقطع  $C$  الازدواج  $M$  كما هو مبين بالشكل أي في اتجاه دوران عقارب الساعة ويساوي الازدواج المكون من القوتين المتساويتين  $N, F \sin \theta$  في المقدار وعكسه في الاتجاه أي أن

$$M = CB . F \sin \theta \quad (3.1.3)$$

ويجب ملاحظة أن الجزء الأيسر من القضيب  $AC$  يؤثر علي الجزء الأيمن  $CB$  بالقوتين  $T$  في اتجاه محور القضيب والقوي القاصة  $N$  وعزم الانحناء  $M$  وكذلك فإن الجزء الأيمن  $CB$  يؤثر علي الجزء الأيسر  $AC$  بنفس القوتين السابقتين وعزم الانحناء ولكن في الاتجاهات المضادة نلاحظ انه باعتبار اتزان القضيب كله  $AB$  فإنه عند موضع التثبيت  $A$  يؤثر رد الفعل  $R$  يوازي ويساوي في المقدار القوة  $F$  عند الطرف  $B$  ولكن في اتجاه مخالف .  
أي أن  $R = F$  كذلك يؤثر عند الطرف المثبت  $A$  ازدواج  $S$  يساوي في المقدار الازدواج المكون من القوتين  $R, F$  وعكسه في الاتجاه أي أن

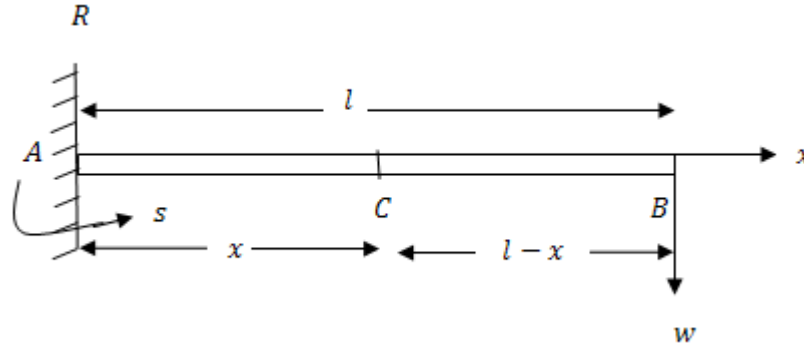
$$S = AB . F \sin \theta$$

وفيما يلي نعطي بعض الأمثلة لتوضيح كيفية تعيين القوي القاصة وعزوم الانحناء عند مقاطع القضيب المختلفة وسوف نقوم برسم المنحنيات التي تمثل القوي القاصة ، عزوم الانحناء

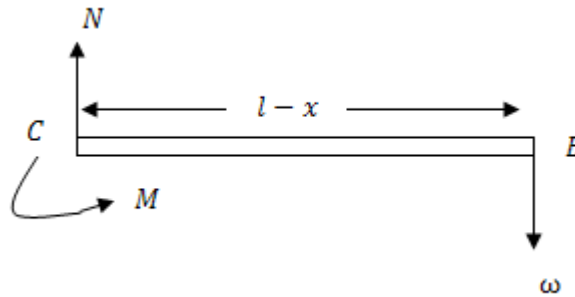


أمثلة محلولةمثال 1:

أوجد القوي القاصة وعزوم الانحناء عند أي مقطع لقضيب خفيف أفقي طوله  $l$  مثبت من أحد الطرفين في حائط رأسي إذا وضع ثقل  $w$  عند الطرف الحر للقضيب.

الحل

نفرض أن القضيب هو  $AB$  وأنه مثبت عند الطرف  $A$  ونأخذ مقطع للقضيب عند  $C$  حيث  $AC = x$ . لإيجاد القوه القاصة  $N$  وعزوم الانحناء  $M$  عند المقطع  $C$ . ندرس اتزان أحد الجزئين  $AC$  أو  $CB$ .



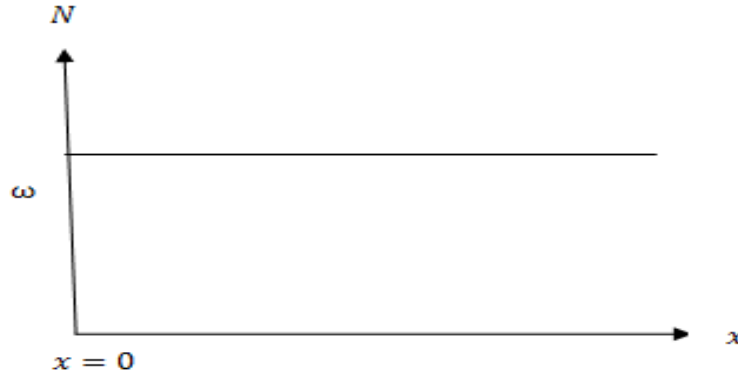
نلاحظ أن دراسة اتزان الجزء الأيمن من القضيب  $CB$  أسهل من دراسة اتزان الجزء الأيسر  $AC$  وذلك لوجود رد فعل  $R$  وازدواج  $S$ .

باعتبار اتزان الجزء الأيمن من القضيب  $CB$  نلاحظ إنه لكي يتزن هذا الجزء يجب أن يكون عند  $C$  قوة قاصة  $N$  رأسيا لأعلي وازدواج موجب ( أي في اتجاه مضاد لدوران عقارب الساعة ) وليكن  $M$  كما بالشكل حيث

$$N = \omega \quad (1)$$

$$M = \omega(l - x) \quad (2)$$

المعادلة (1) توضح لنا أن القوة القاصة ثابتة عند جميع مقاطع القضيب وباعتبار محور القضيب  $AB$  هو المحور الأفقي  $x$  فإن منحنى القوة القاصة  $N$  يكون خطا مستقيما أفقيا يبعد عن المحور  $x$  مسافة تساوى  $\omega$  كما بالشكل .



أما المعادلة (2) تعطينا عزوم الانحناء  $M$  عند المقطع  $C$  وواضح أن عزوم الانحناء يعتمد علي  $x$  . أي يتغير من مقطع لآخر .

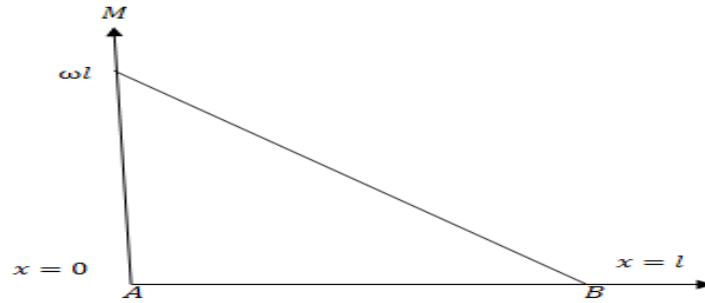
ويرسم المنحني الذي يمثل عزوم الانحناء عند المقاطع المختلفة للقضيب نجد أنه يمثل خطا مستقيما يمر بالنقطتين  $(l, 0)$ ,  $(0, \omega l)$

نلاحظ أن عزوم الانحناء أكبر ما يمكن عندما  $x = 0$  (أي عند الطرف المثبت  $A$ ) ويساوي  $\omega l$  بينما ينعدم عزوم الانحناء عند  $x = l$  (أي عند الطرف الحر  $B$ ) .

**ملحوظة:** نلاحظ انه بدراسة اتزان القضيب كله  $AB$  فإننا نعين رد الفعل  $R$  والازدواج  $S$  .

من الاتزان نجد أن

$$R = \omega, S = \omega l$$



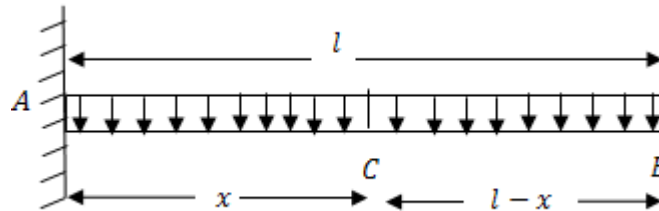
واتجاهيها كما بالشكل الموضح

### مثال 2:

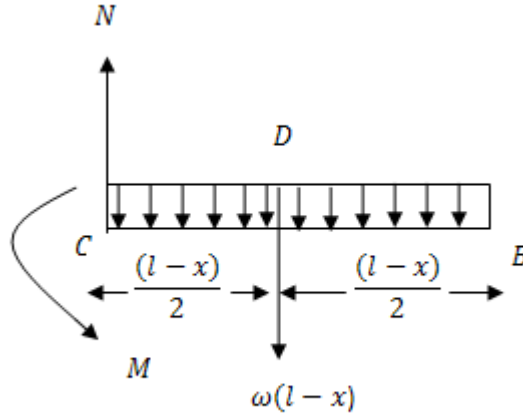
أوجد القوي القاصة وعزوم الانحناء لقضيب أفقي  $AB$  طوله  $l$  مثبت من طرفه  $A$  ومحمل تحميلا منتظما قدرة  $\omega$  لوحده الأطوال .

### الحل

نفرض مقطع عند  $C$  يبعد مسافة  $x$  عن الطرف المثبت  $A$  .







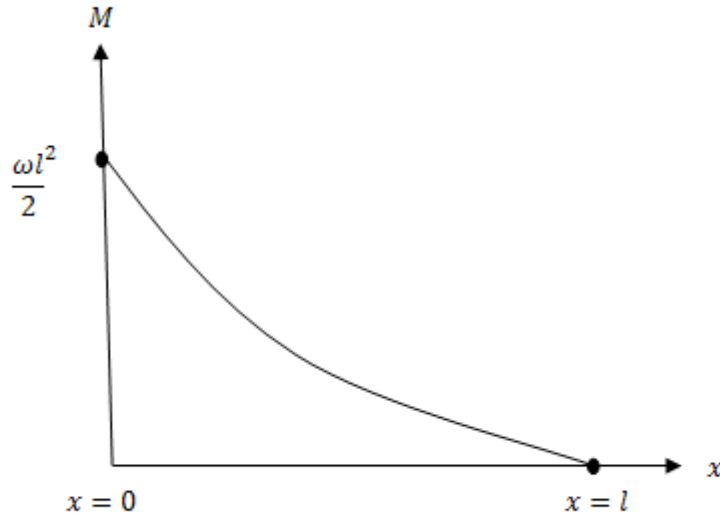
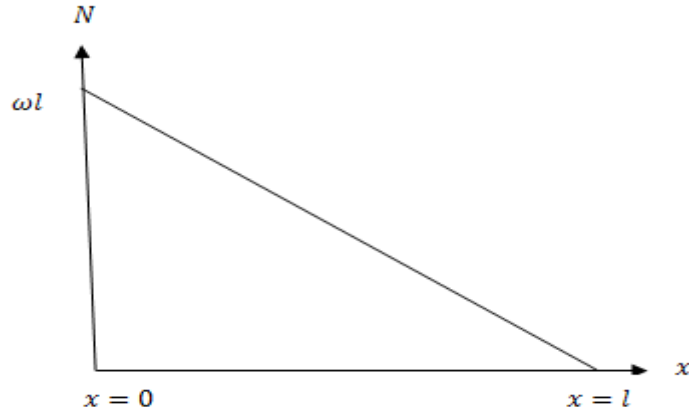
لإيجاد القوي القاصة وعزوم الانحناء عند المقطع  $c$  فإننا ندرس اتزان  $Bc$ .  
 نلاحظ أن التحميل الواقع علي الجزء  $CB$  يساوي  $\omega(l-x)$  ويؤثر عند منتصفه عند نقطة  $D$  ( $CB = DB$ )  
 وبالتالي فإنه من اتزان هذا الجزء نجد أن

$$N = \omega(l-x) \quad (1)$$

$$M = \omega(l-x) \frac{1}{2}(l-x)$$

$$M = \frac{\omega}{2}(l-x)^2 \quad (2)$$

المعادلة (1) تعين القوي القاصة عند أي مقطع للقضيب ونلاحظ أنها تتغير من مقطع لآخر ويمثلها خط مستقيم مار بالنقطتين  $(l, 0)$ ,  $(0, \omega l)$  كما بالشكل.  
 نلاحظ أيضا أن أكبر قوة قاصة تكون عند الطرف المثبت للقضيب ( $x=0$ ) وتساوي  $\omega l$  وأن القوة القاصة تتلاشي عند الطرف الحر للقضيب  $x=l$ .



المعادلة (2) تعين عزوم الانحناء عند مقاطع القضيب المختلفة ونجد إنها تتغير من مقطع لآخر . ويتمثيل منحنى عزوم الانحناء نجد أنه قطع مكافئ رأسه النقطة  $(l, 0)$  مفتوح لأعلي وطول وتره البؤري العمودي يساوي  $\frac{2}{\omega}$  . وأكبر عزوم انحناء يكون عند الطرف المثبت للقضيب ويساوي  $\frac{\omega l^2}{2}$  ويكون مساويا للصفر عند الطرف الحر للقضيب  $(x = l)$  .

**مثال 3:**

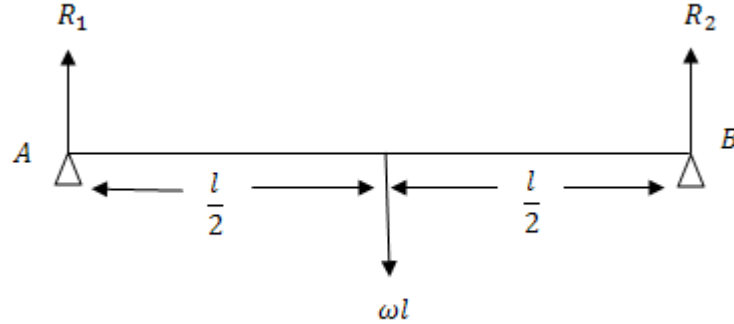
أوجد القوي القاصة وعزوم الانحناء لقضيب ثقيل منتظم  $AB$  طوله  $l$  ووزن وحده الأطوال منة  $\omega$  ويرتكز بطرفيه على وتدتين في مستوي أفقي.

**الحل**

باعتبار اتزان القضيب كله  $AB$

$$R_1 + R_2 = \omega l$$

ومن التماثل في الشكل



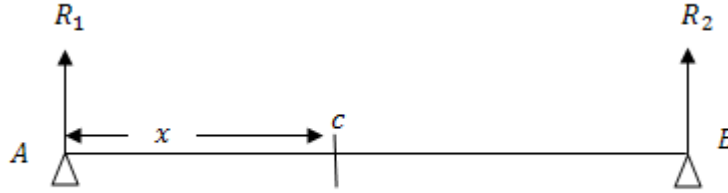
نجد أن

$$R_1 + R_2 = \frac{1}{2} \omega l$$

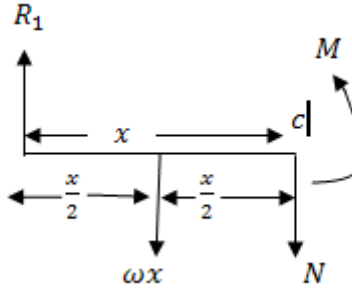
نعتبر مقطع للقضيب عند  $c$  حيث  $c = x$  وباعتبار اتزان الجزء  $Ac$  فإنه في الاتجاه الرأسي يكون

$$R_1 = \omega x + N$$

$$\frac{1}{2} \omega l = \omega x + N$$



$$N = \omega\left(\frac{l}{2} - x\right) \quad (1)$$

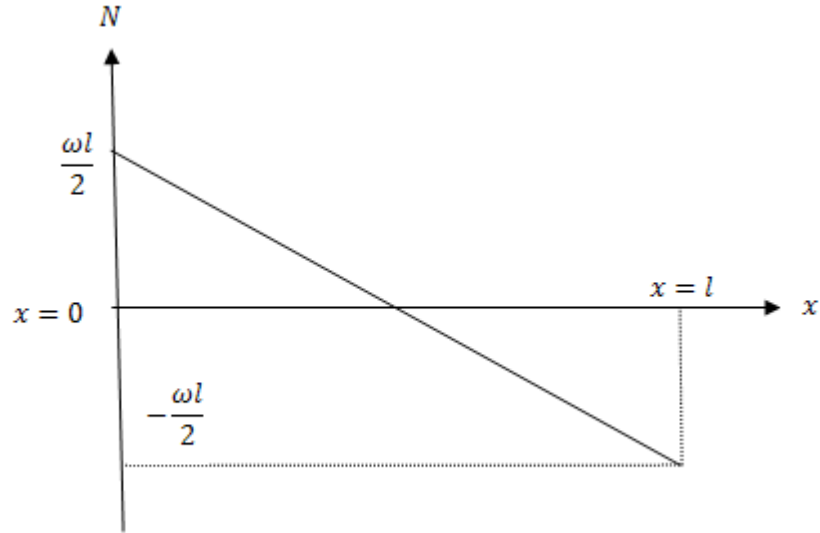


يأخذ العزوم حول  $c$  نحصل علي

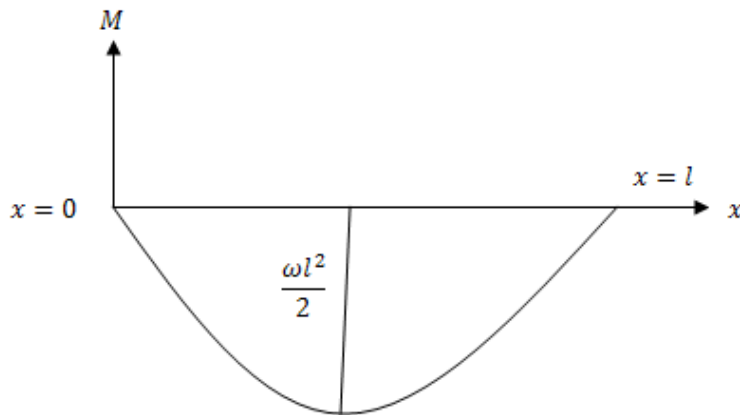
$$M + \omega x\left(\frac{x}{2}\right) = R_1 x$$

$$M = \frac{1}{2} \omega l x - \frac{\omega x^2}{2} = -\frac{\omega}{2} (x^2 - lx) \quad (2)$$

المعادلة (1) هي خط مستقيم كما بالشكل



وواضح إن أكبر قوة قاصة عند طرف القضيب  $A$  ( $x = 0$ ) وتساوي  $\frac{1}{2}\omega l$  وبتزايد  $x$  تتناقص القوة القاصة إلي أن تنعدم عند منتصف القضيب عندما  $x = l/2$  ثم تعكس اتجاهها في النصف الأيمن من القضيب  $AB$ . المعادلة (2) تمثل معادلة قطع مكافئ وواضح أن عزم الانحناء ينعدم عند طرفي القضيب أي عندما  $x = l, x = 0$  ويأخذ أكبر قيمة عندما  $x = l/2$  عند منتصف القضيب



**تمرين**

(1) قضيب خفيف أفقي طوله  $l$  يرتكز عند طرفية  $A, D$  علي حاملين وضع ثقلين متساويين كل منهما  $w$  عند النقطتين  $C, B$  حيث  $AB = CD = a (a < l/2)$ . أوجد القوة القاصة وعزوم الانحناء عند أي مقطع للقضيب.

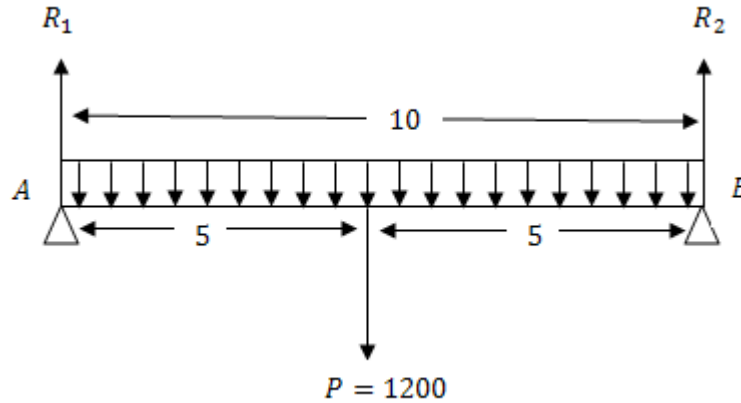
**مثال 4:**

قضيب خفيف  $AB$  مرتكز عند طرفية  $A, B$  طوله  $10 \text{ ft}$ . محمل بتحميل منتظم حيث وزن وحده الأطوال تساوي  $120 \text{ Ib}$ . عين القوة القاصة وكذلك عزوم الانحناء والتمثيل الهندسي لها علي بعد  $x$  من الطرف  $A$ .

**الحل**

الحمل الكلي الذي يؤثر علي القضيب يكون مساويا

$$P = 120 \times 10 = 1200 \text{ Ib}$$



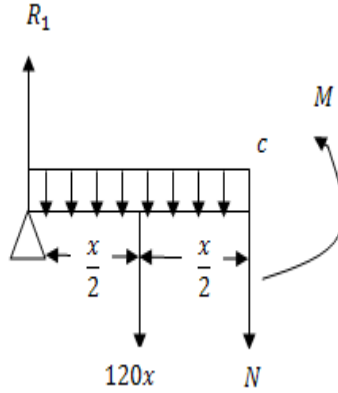
ومن التماثل في الشكل نجد أن

$$R_1 = R_2 = 600 \text{ Ib}$$

تعتبر المحور  $x$  في اتجاه محور القضيب ويأخذ نقطة  $A$  نقطة أصل وباعتبار مقطع من القضيب علي بعد  $x$  من النقطة  $A$  ودراسة اتزان نجد أن القوة القاصة عند  $C$  يكون مساويا

$$N = R_1 - 120 x$$

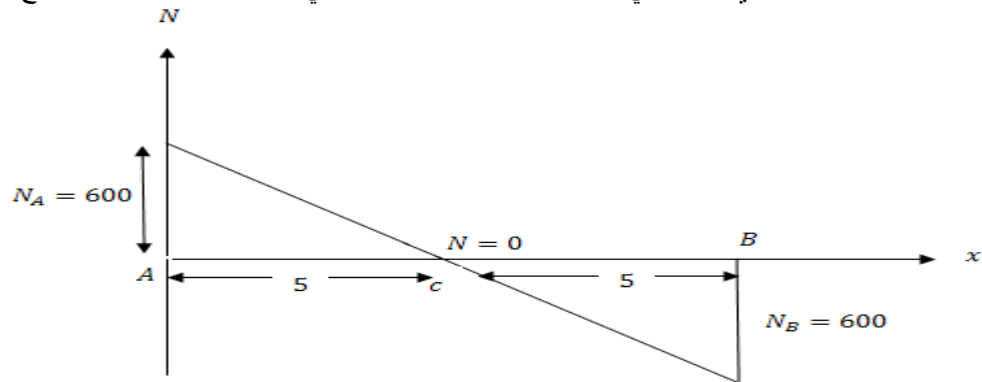
(1)  $N = 600 - 120x$   
 وحيث إنه لا توجد تحميل آخر علي القضيب غير الحمل الموزع توزيع منتظم فإن  $N$  تمثل هنا القوة القاصة عند أي نقطة علي القضيب



وعزم الانحناء عند  $c$  يكون مساويا

$$\begin{aligned} M &= R_1 x - 120x \cdot \frac{x}{2} \\ &= 600x - 60x^2 \end{aligned} \quad (2)$$

نلاحظ أن  $N$  هي دالة خطية في  $x$  وتنعدم عند منتصف القضيب وبأخذ القضيب هو المحور السيني والعمودي عالية يمثل القوة القاصة عند أي نقطة علي القضيب نجد أن التمثيل الهندسي للقوة القاصة كما هو موضح بالرسم .



عزوم الانحناء عند  $A$  يكون مساويا

$$M_A = 0$$

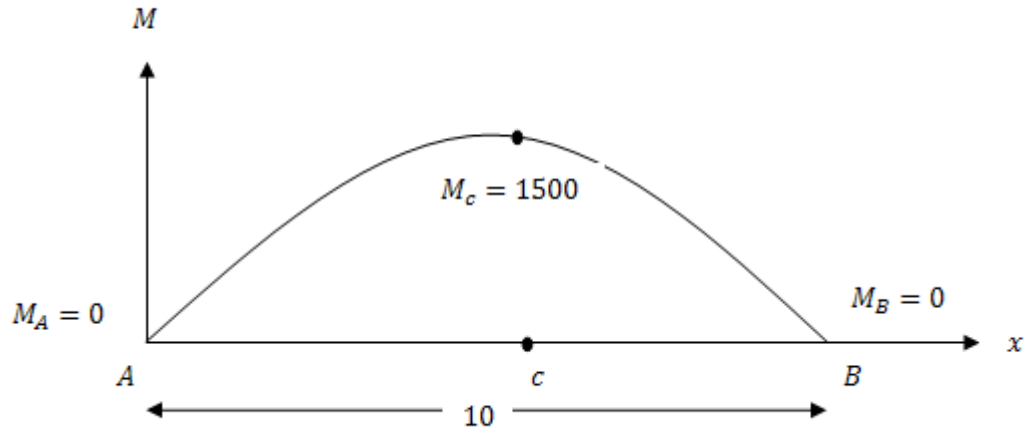
عزوم الانحناء عند  $B$  يكون مساويا

$$M_B = 0$$

عزوم الانحناء عند  $c$  يكون مساويا

$$\begin{aligned} M_c &= 600 \times 5 - 60 \times 25 \\ &= 3000 - 1500 = 1500 \text{ lb.ft.} \end{aligned}$$

ونلاحظ أن المعادلة (2) تمثل معادلة قطع مكافئ



### مثال 5:

قضيب خفيف  $AB$  مرتكز عند طرفية  $A, B$  طوله  $11 \text{ ft}$  تؤثر عليه ثلاثة أحمال خارجية هي علي التوالي  $2000 \text{ lb}, 1500, 2500$  عند النقط التي تبعد  $2, 4, 7 \text{ ft}$  من الطرف  $A$  أوجد القوي القاصة وعزوم الانحناء وكذلك التمثيل الهندسي لكل منها .

### الحل

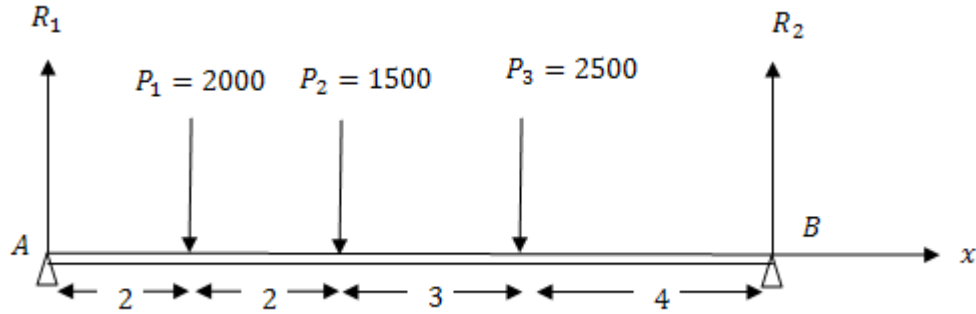
$$R_1 + R_2 = 6000$$

بدراسة اتزان القضيب  $AB$  نجد أن

(1)

وبأخذ العزوم حول  $B$  نحصل علي





$$11 R_1 = 2000 \times 9 + 1500 \times 7 + 2500 \times 4$$

$$= 18000 + 10500 + 10000$$

$$11 R_1 = 38500$$

$$R_1 = 3500 \text{ lb.}$$

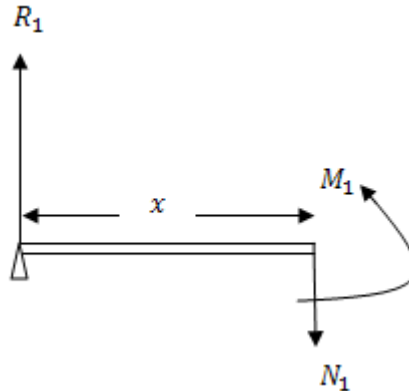
(2)

بالتعويض من (2) في (1) نجد أن

$$R_2 = 2500 \text{ lb}$$

نعتبر المحور السيني في اتجاه القضيبي .  
لتعين القوة القاصة وعزوم الانحناء عند أي نقطة تعتبر اتزان المقاطع التي تبدأ من الطرف الأيسر

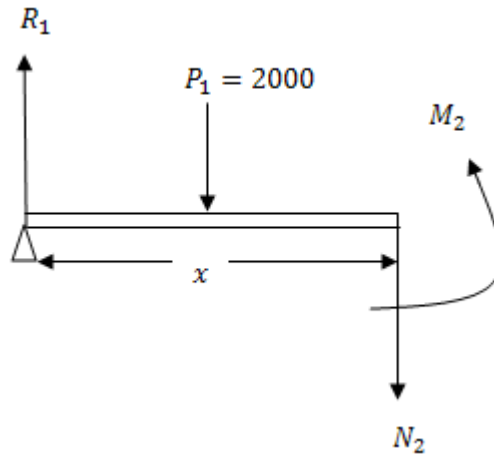
أولاً: عندما تكون  $0 < x < 2$



$$N_1 = R_1 = 3500 \text{ lb}$$

$$M_1 = R_1 x = 3500x \text{ lb.ft}$$

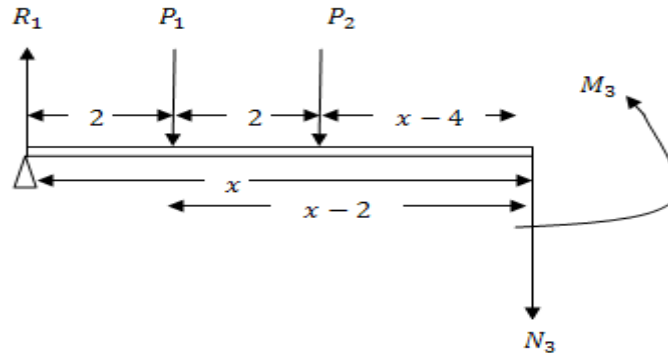
ثانياً: عندما تكون  $2 < x < 4$



$$N_2 = R_1 - p_1 = 3500 - 2000 = 1500$$

$$M_2 = 3500x - 2000(x - 2)$$

ثالثاً: عندما تكون  $4 < x < 7$

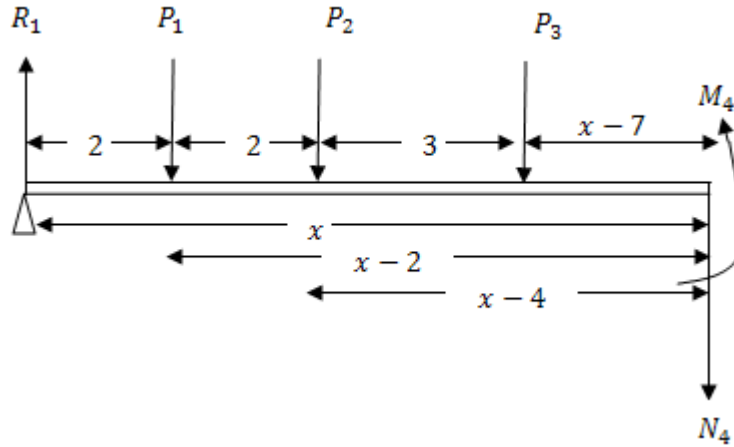


$$\begin{aligned} N_3 &= R_1 - p_1 - p_2 \\ &= 3500 - 2000 - 1500 \end{aligned}$$

$$N_3 = 0$$

$$\begin{aligned} M_3 &= R_1x - 2000(x - 2) \\ &\quad - 1500(x - 4) \end{aligned}$$

رابعاً: عندما تكون  $7 < x < 11$



$$N_4 = R_1 - P_1 - P_2 - P_3$$

$$N_4 = 3500 - 2000 - 1500 - 2500$$

$$N_4 = -2500$$

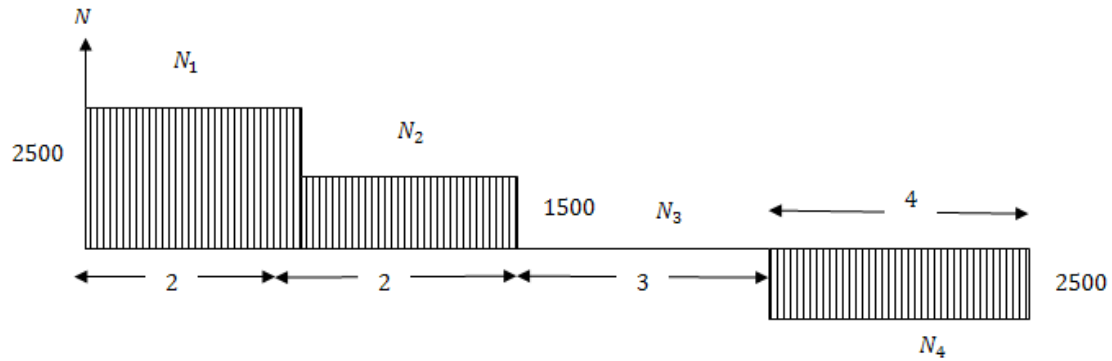
$$m_4 = 3500x - 2000(x-2) - 1500(x-4) - 2500(x-7)$$

$$M_3 = 3500x - 2000(x-2)$$

$$- 1500(x-4)$$

### التمثيل الهندسي للقوة القاصة .

نأخذ اتجاه القضيب لمحور سيني نقطه  $A$  هي نقطه الأصل أعلي القضيب يمثل القيم الموجبة للقوة القاصة وأسفل القضيب يمثل القيم السالبة للقوة القاصة .  
وبالتالي بالنسبة إلي  $N_1 = 3500$  عبارة عن مستقيم يوازي المحور  $ox$  وكل نقطة علي بعد  $3500$  لأعلي .  
وبالمثل  $N_2$  ونلاحظ أن  $N_3 = 0$  أي المحور  $ox$  نفسه هو الممثل للقوة القاصة  $N_3$  أما بالنسبة إلي  $N_4$  فهي سالبة وبذلك نرسم مستقيم يوازي  $ox$  وينخفض مسافة مقدارها  $2500$  وبذلك تكون قد رسمنا التمثيل الهندسي للقوة القاصة كما هو مبين بالرسم التالي



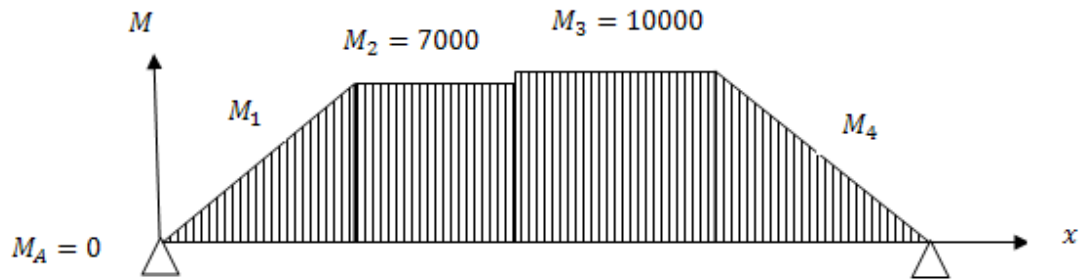
### التمثيل الهندسي لعزوم الانحناء :

لكي يمكن تمثيل كل من  $M_1, M_2, M_3, M_4$  هندسيا يجب معرفة عزوم الانحناء عند نقط تأثير  $p_1, p_2, p_3$  عزوم الانحناء عند  $p_1$  يعطي

$$(M_1)_{x=2} = 3500 \times 2 = 7000 \text{ Ib.ft}$$

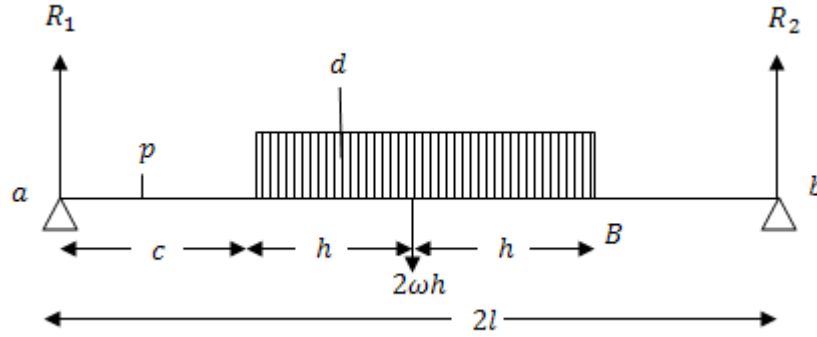
$$(M_2)_{x=4} = 10000 \text{ Ib.ft}, (M_3)_{x=7} = 10000 \text{ Ib.ft}$$

حيث أن القضيب مرتكز عن  $A, B$  فإن عزوم الانحناء عند نقط الارتكاز واضح من المعادلات التي تعطي عزوم الانحناء أنها فقط دالة خطية في  $x$  أي يمكن تمثيلها بخط مستقيم .

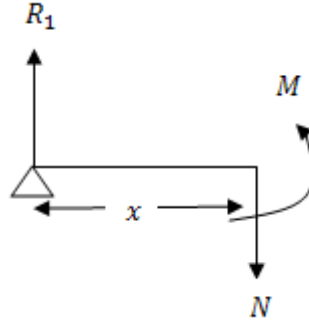


**مثال 6:**

قضيب خفيف أفقي  $ab$  طوله  $2l$  مرتكز عند نهايتيه ويحمل ثقل متحرك  $AB$  طوله  $(h < l)2h$  ووزن وحدة الطول منه  $\omega$ . أوجد أكبر عزم انحناء عند نقطة ما علي القضيب وأثبت أنه في هذه الحالة تقسم هذه النقطة المستقيم  $AB$  بنفس النسبة التي تقسم بها المستقيم  $ab$

**الحل**

بأخذ وضعاً للقضيب  $ab$  (كما بالشكل) بحيث يكون  $aA = c$  نوجد قيمة  $c$  بحيث يكون عزم الانحناء عند  $d$  أكبر ما يمكن لذلك باعتبار اتزان القضيب  $ab$  كله نجد أن



$$R_1 + R_2 = 2\omega h$$

وبأخذ العزوم حول النقطة  $b$  نجد أن

$$R_1 \times 2l = 2\omega l(2l - c - h)$$

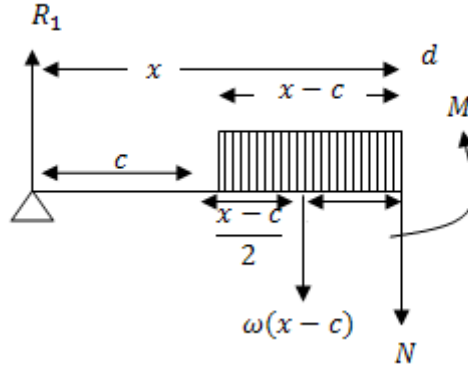
$$\therefore R_1 = \frac{\omega h}{l}(2l - c - h) \quad (2)$$

وبأخذ مقطع للقضيب عند  $p$  حيث  $ap = x$  وبشرط أن  $x < c$  في حالة  $x < c$

$$N = R_1 = \frac{\omega h}{l}(2l - c - h) \quad (3)$$

$$M = R_1 x = \frac{\omega h}{l}(2l - c - h)x \quad (4)$$

وأخذ مقطع عند النقطة  $d$  علي بعد  $x$  من النقطة  $a$  بحيث تكون  $ad = x$  أي أن  $x > c$ . القوة القاصة وعزوم الانحناء في هذه الحالة تكون



$$N = R_1 - \omega(x - c)$$

$$N = \frac{\omega h}{l}(2l - c - h) - \omega(x - c) \quad (5)$$

$$M = \frac{\omega h}{l}(2l - c - h)x - \frac{1}{2}\omega(x - c)^2 \quad (6)$$

واضح أن عزوم الانحناء  $M$  يتغير بتغير  $c$ .

$M$  نهاية عظمي عندما تحقق  $c$  الشرط الآتي

$$\frac{dM}{dc} = 0 \quad (7)$$

$$-\frac{x\omega h}{l} + \omega(x - c) = 0$$

ومنها

$$c = (1 - \frac{h}{l})x \quad (8)$$

وبالتعويض بهذه القيمة  $c$  فإننا نحصل علي أكبر عزوم انحناء بالصورة

$$\begin{aligned} M_{\max} &= (M)_{c=x(1-h/l)} \\ &= \frac{\omega h}{l} [2l - h - x(1 - h/l)]x \\ &\quad - \frac{1}{2} \omega [x - x(1 - h/l)]^2 x \end{aligned} \quad (9)$$

وفي هذه الحالة فإن النسبة  $\frac{Ad}{dB}$  نأخذ الصورة

$$\frac{Ad}{dB} = \frac{x - c}{2h - (x - c)} \quad (10)$$

بالتعويض عن قيمة  $c$  من المعادلة (8) ينتج أن

$$\begin{aligned} \frac{Ad}{dB} &= \frac{\frac{h}{l}}{2h - \frac{h}{l}x} = \frac{h/l(x)}{\frac{h}{l}(2l - x)} \\ &= \frac{x}{2l - x} = \frac{ad}{db} \end{aligned}$$

أي أن النقطة  $d$  التي عندها عزوم الانحناء أكبر ما يمكن تقسم الثقل المتحرك  $AB$  بنفس النسبة التي تقسم بها القضيب  $ab$ .

### مثال 7:

قضيب أفقي  $AB$  طوله  $l$  مثبت طرفه  $B$  في حائط رأسي ومحمل بتقل  $W$  موزع خطيا علي طول القضيب بازدياد منتظم يبدأ من الصفر عند الطرف الحر  $A$ . أوجد القوة القاصة وعزوم الانحناء عند أي مقطع للقضيب.

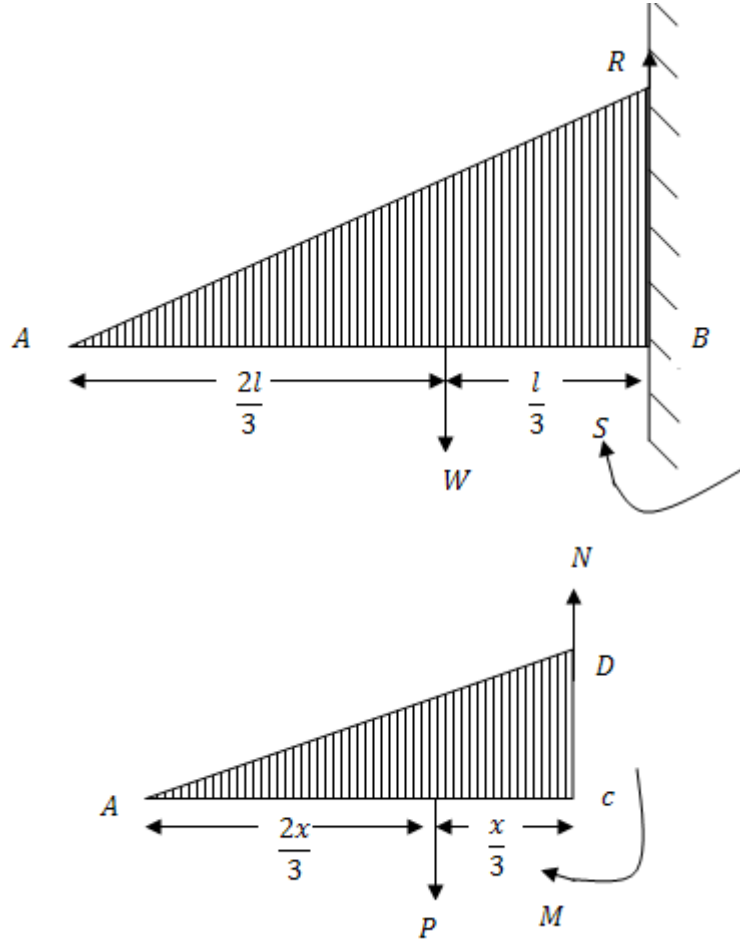
### الحل

حيث أن كثافة التحميل  $\omega(x)$  عند المقطع  $c$  علي بعد  $x$  من الطرف الحر  $A$  موزعا توزيعا خطيا علي طول القضيب فإن هذا الخط المستقيم يجب أن يمر بنقطة الأصل لذا فإن العلاقة بين  $x, \omega(x)$  هي

$$\omega(x) = \lambda x \quad (1)$$

حيث  $\lambda$  هي ميل الخط المستقيم.

كثافة تحميل  $\omega(x)$  عند المقطع  $c$  تعبر عن الارتفاع  $DC$  ويكون الثقل الواقع علي عنصر صغير طوله  $dx$  من القضيب يساوي  $\omega(x)dx$  وعلي ذلك يكون التحميل الكلي الواقع علي القضيب  $AB$  يتعين من



$$W = \int_0^l \omega(x) dx$$

$$W = \int_0^l \lambda x dx$$

$$W = \frac{\lambda l^2}{2}$$

(2)



ومنها نعين قيمة  $\lambda$  وتساوي

$$\lambda = \frac{2W}{l^2} \quad (3)$$

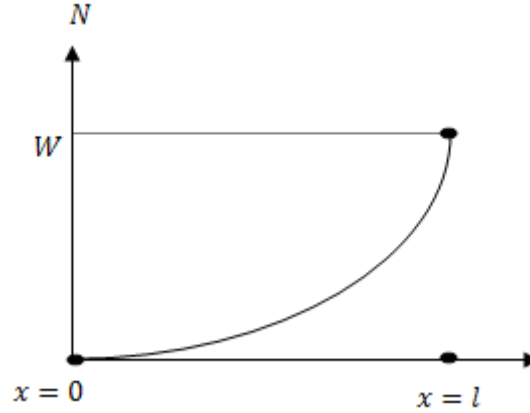
أي أن كثافة التحميل  $\omega(x)$  تكون في الصورة

$$\omega(x) = \frac{2W}{l^2} x \quad (4)$$

باعتبار اتزان الجزء  $Ac$  من القضيب نجد أن القوة القاصة  $N$  تساوي الثقل  $p$  الواقع علي الجزء  $Ac$ , أي أن

$$N = p = \int_0^x \omega(x) dx = \int_0^x \frac{2W}{l^2} x dx$$

$$N = \frac{Wx^2}{l^2} \quad (5)$$

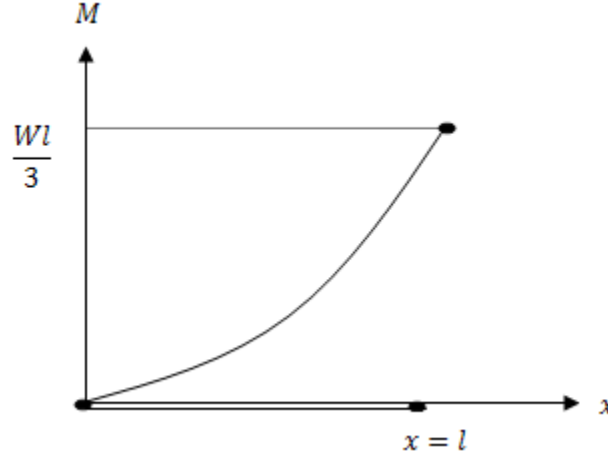


حيث يقسم الثقل  $p$  المسافة  $Ac$  بنسبة 2:1, أي أن

$$AE = 2Ec = \frac{2x}{2}$$

واضح أن العلاقة (5) تعين القوة القاصة عند أي مقطع للقضيب وواضح أيضا أنها تمثل قطع مكافئ رأسه عند نقطة الأصل (كما بالشكل) وأن القوة القاصة تساوي صفر عندما  $x = 0$  (أي عند الطرف الحر  $A$ ) وأن أكبر قيمة للقوة القاصة عندما  $x = l$  أي عند الطرف المثبت في الحائط  $B$  وتساوي  $W$  وبأخذ العزوم حول المقطع  $c$  نجد أن

$$M = p \frac{x}{3} = \frac{Wx^2}{l^2} \frac{x}{3} = \frac{Wx^3}{3l^2} \quad (6)$$



المعادلة (6) تعطي عزوم الانحناء عند أي مقطع وهي علاقه من الدرجة الثالثة في  $x$  ونلاحظ أن  $M = 0$  عندما  $x = 0$  (أي عند الطرف الحر  $A$  يتلاشي عزوم الانحناء).

أيضا عزوم الانحناء يكون أكبر ما يمكن عندما  $x = l$  (أي عند الطرف المثبت  $B$ ) ويساوي  $\frac{1}{2}Wl$  وفي الاتجاه الموجب أي في اتجاه عكس دوران عقارب الساعة.

### ملحوظة:

يمكن إيجاد رد الفعل  $R$  والازدواج  $S$  عند الطرف المثبت  $B$  وذلك باعتبار الاتزان القضيبي كله  $AB$  فنجد

أن

$$R = W$$

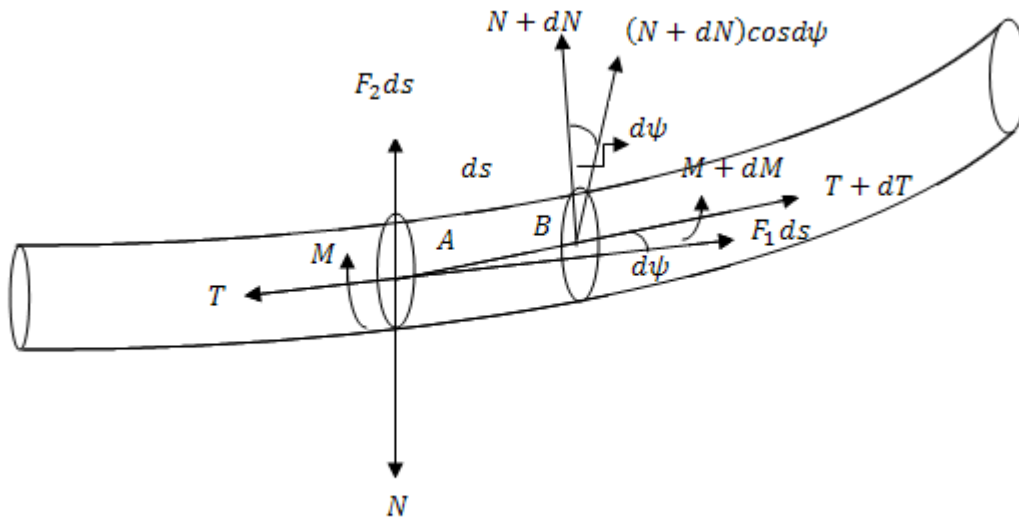
$$S = \frac{1}{3}Wl$$

وذلك لأن الثقل  $W$  يؤثر في نقطة تقسم القضيب  $AB$  بنسبة 2:1 أي أن

$$AF = 2FB = \frac{2}{3}l$$

**ثانياً:- معادلات الاتزان لقضيب رفيع منحنى :**

بفرض اتزان عنصر طوله  $dS$  من قضيب رفيع منحنى ونفرض أن  $T$  القوة في اتجاه محور القضيب (المماس عند  $A$ )،  $N$  القوة القاصة العمودية علي محور القضيب،  $M$  عزوم الانحناء علي المقطع الأيسر . ونفرض أن  $T + dT$  القوة في اتجاه محور القضيب (المماس عند  $B$ ) و  $N + dN$  هي القوة القاصة العمودية علي محور القضيب عند  $B$ ،  $M + dM$  هي عزوم الانحناء علي المقطع الأيمن . ونفرض أن مركبتي القوة الخارجية المؤثرة علي العنصر في اتجاهي محور القضيب (المماس عند  $A$ ) والعمودي عليه هما  $F_1 dS$ ،  $F_2 dS$  كما بالشكل .



بكتابة معادلات الاتزان في اتجاهي محور القضيب (المماس عند  $A$ ) والعمودي عليه وأخذ العزوم حول  $A$  فإن

$$(T + dT) \cos d\psi + F_1 dS - T - (N + dN) \sin d\psi = 0 \quad (3.2.1)$$

$$(T + dT) \sin d\psi + (N + dN) \cos d\psi + F_2 dS - N = 0 \quad (3.2.2)$$

$$(M + dM) - M + (N + dN) dS = 0 \quad (3.2.3)$$

وحيث أن  $d\psi$  زاوية صغيره جدا فإن

$$\sin d\psi = d\psi, \cos d\psi = 1$$

وبإهمال الكميات الصغيرة من الدرجة الثانية فإن المعادلات السابقة تأخذ الصورة

$$dT + F_1 dS - Nd\psi = 0 \quad (3.2.4)$$

$$dN + Td\psi + F_2 dS = 0 \quad (3.2.5)$$

$$dM + NdS = 0 \quad (3.2.6)$$

وبالقسمة على  $dS$  تصبح المعادلات (3.2.4-3.2.6) في الصورة

$$\frac{dT}{dS} - N \frac{d\psi}{dS} + F_1 = 0 \quad (3.2.7)$$

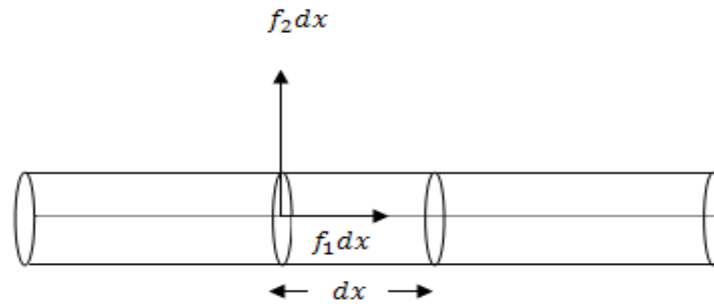
$$\frac{dN}{dS} + T \frac{d\psi}{dS} + F_2 = 0 \quad (3.2.8)$$

$$\frac{dM}{dS} + N = 0 \quad (3.2.9)$$

حيث  $\frac{dS}{d\psi} = \rho$  هو نصف قطر الانحناء قطر الانحناء (النقوس) لمحور القضيبي المعادلات (3.2.7 – 3.2.9) هي معادلات الاتزان لقضيبي رفيع منحنى.

### حالة خاصة:

عندما يكون القضيبي مستقيما فان نصف قطر الانحناء يكون ما لانهايه  $\rho = \infty$  ونأخذ معادلات الاتزان لقضيبي مستقيم الصورة



$$\frac{dT}{dx} + F_1 = 0 \quad (3.2.10)$$

$$\frac{dN}{dx} + F_2 = 0 \quad (3.2.11)$$

$$\frac{dM}{dx} + N = 0 \quad (3.2.12)$$

### ملحوظة :

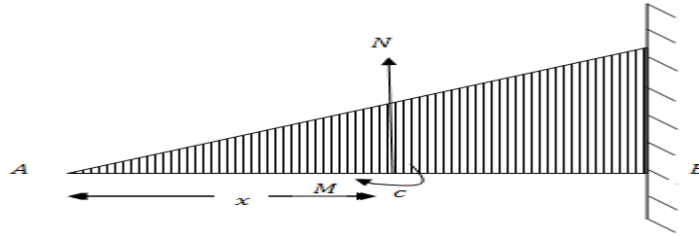
يمكن حذف القوة الفاصلة  $N$  بين المعادلتين (3.2.11), (3.2.12) وذلك بتفاضل المعادلة (3.2.12) بالنسبة إلى  $x$  وطرح (3.2.11) من الناتج نحصل على معادلة تفاضلية تربط عزم الانحناء  $M$  بمركبة القوى الخارجية  $F_2$  في الصورة

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = F_2 \quad (3.2.13)$$

### مثال (1)

حل مثال (7) السابقة مستخدماً معادلات الاتزان لقضيب رفيع مستقيم.

### الحل



في هذه الحالة كثافة التحميل  $w(x)$  تساوى  $\frac{2W}{l^2}x$  ويكون

$$F_2 = -w(x) = -\frac{2W}{l^2}x$$

وباستخدام العلاقة (11) فإن القوة الفاصلة  $N$  عند أى مقطع تكون

$$N = -\int F_2 dx = +\int_0^x \frac{2W}{l^2} x dx$$

$$N = \frac{Wx^2}{2l^2}$$

وباستخدام المعادلة (12) نحصل على عزم الانحناء  $M$  في الصورة

$$M = -\int N dx = -\frac{W}{l^2} \int_0^x x^2 dx = -\frac{Wx^3}{3l^2}$$

وهي نفس النتائج التي حصلنا عليها في الحل السابق لمثال (7) .

### تمارين على الباب الثالث

(1) قضيب  $AB$  يمكنه الدوران حول طرفه  $A$  ويرتكز بطرفة الآخر  $B$  على حائط رأسي أملس. اثبت ان عزم الانحناء عند نقطة  $c$  على القضيب يتناسب مع  $CA \cdot CB$ .

(2) ثلاث قضبان متساوية متصلة عند نهايتها العليا ومرتكزة عند نهايتها السفلى على مستوى افقى وتحمل عند أعلى نقطة ثقل  $F$ . اذا كان طول اى قضيب يساوى  $2l$  ويصنع زاوية  $\alpha$  مع الرأسى وان  $\omega$  وزن وحدة الطول لكل منها. فاوجد عزم الانحناء عند اى نقطة من القضيب واثبت انه لا يعتمد على الثقل  $F$ .

(3) وضع طوق دائري على مستوى افقى بحيث كان مستواه راسيا. اثبت أن عزم الانحناء الناشئ عن الطوق يكون اكبر ما يمكن عند نقطة بعدها الزاوي  $\theta$  عن أعلى نقطة من الطوق يتعين من

$$\theta + \tan \theta = 0$$

(4) قضيب طوله  $3l$  ووزن وحدة الأطوال منه  $\omega$ . وزع توزيعا متصلا على الثلث الأوسط منه بكثافة وزنها  $p$  لوحدة الأطوال. ادرس القوى القاصة وعزوم الانحناء عند مقاطع القضيب المختلفة عندما يرتكز القضيب عند نهايته على وتدين أملسين.

(5) ثقل مستمر  $\omega$  طن لكل قدم يتحرك ببطء على كوبري طوله  $l$  قدم إذا أهمل وزن الكوبري فاثبت أن اكبر قوة قاصة عند نقطة  $p$  على بعد  $\lambda$  من الطرف الأقرب تساوى تساوى  $\frac{\omega}{2l}(l - \lambda)^2$ .

(6) رجل وزنه  $\omega$  يمكنه أن يعبر قضيب مرتكز عند نهايته وزنه  $\omega\eta$  وطوله  $l$  بدون أن ينكسر. إذا ثبت القضيب من احد نهايته بحيث كان المماس عندها افقيا فاثبت أن أقصى مساحة يمكن الرجل أن يتحركها على القضيب تساوى  $\frac{1}{4}l\left(1 - \frac{3}{2}\eta\right)$ .

(7) قضيب  $AB$  طوله  $12 \text{ ft}$  يرتكز عند نهايته على حاملين في مستوى افقى ويحمل ثقلا يزيد بانتظام من الصفر عند الطرف الأيسر  $A$  حتى اكبر قيمة  $600 \text{ lb / ft}$  عند الطرف  $B$ . اوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند اى مقطع.

(8) قضيب خفيف  $AB$  طوله  $l$  مثبت عند نهايته اليمنى  $B$  ومحمل نصفه الأيمن تحميلا منتظما كثافته  $\omega_0$  لوحدة الأطوال. فإذا وضع ثقل  $\omega$  عند الطرف الحر  $A$  فاوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند اى نقطة من القضيب.

(9) قضيب راسي طوله  $3 \text{ ft}$  مثبت على ارض أفقية. اوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند الطرف المثبت وعند نقطتي تثليث القضيب إذا أثرت على الطرف العلوي للقضيب قوة أفقية مقدارها  $200 \text{ Ib}$ .

(10) قضيب  $oAB$  مثبت أفقيا عند طرفه  $o$  بحيث يكون  $oA = 2AB = 2 \text{ ft}$  وضع ثقلين  $200 \text{ Ib}$ ,  $300 \text{ Ib}$  عند  $B, A$  على الترتيب. اوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند النقطتين اللتين تنصفان  $AB, oA$ .

(11) قضيب منتظم طوله  $2l$  يرتكز في وضع متمائل على حاملين في نفس المستوى الافقى المسافة بينهما  $2h$ . إذا كان  $l < 2h$  فاثبت إن عزم الانحناء يكون نهاية عظمى عند الحامل أو في المنتصف حسبما يكون  $l > 2h$  وإذا كان  $l > (2 + \sqrt{2})h$  فاثبت إن عزم الانحناء عند الحامل يكون نهاية عظمى عند الحامل واوجد قيمته.

(12) قضيب خفيف أفقي طوله  $l$  يرتكز عند نهايته ومحمل بحيث يتناسب عزم الانحناء عند أي نقطة مع وزن وحدة الطول عند نفس النقطة. اثبت ان الوزن عند أي نقطة يتناسب مع  $\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$  حيث  $x$  بعد النقطة عن احد طرفي القضيب.

(13) قضيب ثقيل وزنه  $W$  وطوله  $3l$  يرتكز على حاملين املييين احدهما عند طرفه والآخر على بعد  $l$  من الطرف الآخر. وزع ثقلا مقداره  $2lp$  توزيعا منتظما على المسافة المحصورة بين الوتدين من القضيب. ادرس منحنيات القوى القاصة وعزوم الانحناء.

(14) قضيب يرتكز عند نهايته على حاملين ومحمل تحميلا كثافته لوحدة الأطول عند أي نقطة تعطى من العلاقة  $\omega(x) = \omega_0(a + bx)$  حيث  $a, b$  ثابتين. اوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند أي نقطة واستنتج الحالات الخاصة التي فيها  $b = 0$  ثم  $a = 0$ .

(15) حل التمرين السابق (14) إذا كان القضيب مثبت عند الطرفين.

(16) قضيب افقى  $AB$  طوله  $8 \text{ ft}$  مثبت طرفه الأيمن  $B$  في حائط راسي وحمل النصف الأيسر من القضيب بانتظام بكثافة  $100 \text{ Ib / ft}$ . اوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند أي مقطع من مقاطع القضيب المختلفة.



## الباب الرابع

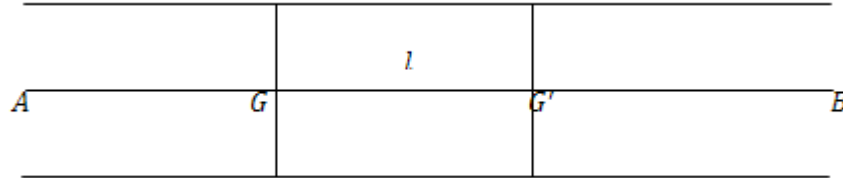
### القضبان قليلة القابلية للانحناء

فيما سبق كنا نفترض دائما وجود اجسام صلبة ذات شكل ثابت لا يتغير مهما كانت القوة المؤثرة عليه . او نفترض وجود خيوط طولها ثابت لا يزيد تحت تأثير ايه شد . ولكن المواد في طبيعتها تختلف عن ذلك فجميع الاجسام تتغير تحت تأثير القوى المؤثرة تغييرا يتوقف من حيث المقدار والنوع تبعا لمادة الجسم وشكله ومقدار هذه القوة . وسوف نقتصر في هذا الباب على دراسة هذه التغيرات فبالقضبان الرفيعة وفي ابسط الحالات في تلك التي يمكن حساب الشد فيها تبعا لقانون هوك .

### اولا: انحناء القضبان:

اذا حمل قضيب بطريقة ما فانه ينحني نتيجة لهذا الحمل . ويبدو ان هناك علاقة ما بين شكل القضيب وعزم الانحناء وعن طريقة التجربة توصل برنوللى Bernoulli ، ايلر Euler / ان عزم الانحناء عند اية نقطة على قضيب رفيع يتناسب تناسباً عكسياً مع نصف قطر الانحناء عند هذه النقطة . وفيما يلي برهاننا لهذه العلاقة في حالات خاصة وباستخدام فروض ليست صحيحة تماما .

نعتبر قضيبا مستقيما اثرت عليه مجموعة من القوى الخارجية يضمها مستوى واحد بقسم القضيب الى قسمين متماثلين .



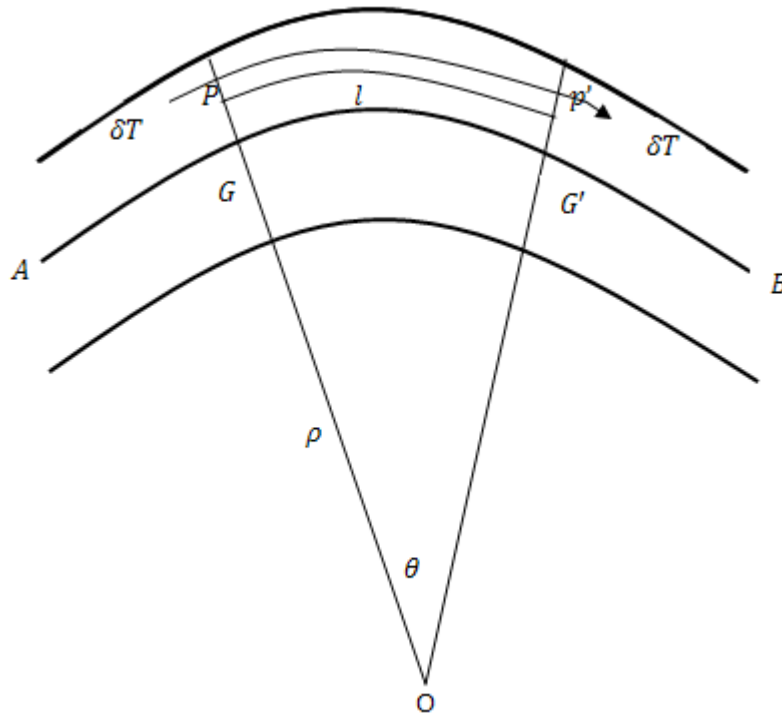
شكل (أ)

في الشكل (أ)  $AB$  هو مقطع القضيب بواسطة مستوى القوى وفي الشكل (ب) نفس المقطع بعد انحناء القضيب تحت تأثير هذه القوى نتيجة لهذا الانحناء فان الالياف التي يتكون منها القضيب يزداد طولها اذا كانت اقرب الى السطح العلوي وبذلك تكون في حالة شد ويقل طولها اذا كانت اقرب الى السطح السفلى وبذلك تكون في حالة ضغط اما الالياف التي تفصل بين هذه وتلك فلن بتغير طولها بالانحناء وتعرف باسم خطوط التعادل Neutral Lines في الشكل  $GG'$  هو خط التعادل في مقطع القضيب بواسطة مستوى القوى ويعرف بمحور القضيب . اما ابعاد القضيب العرضية فإنها سوف تتغير هي الاخرى نتيجة لانحناء القضيب الا اننا سوف نهمل هذا التغير نظرا لصغره . كذلك سوف نفترض ان اية مقطع عرضي للقضيب وهو مستقيما يظل مقطعا عرضيا لة وهو منحنى ومحتويا على نفس الجزيئات . نعتبر مقطعين عرضيين عند  $G, G'$  بينهما مسافة صغيرة  $L$  ونفترض انهما عند الانحناء تقابلا في  $O$  .

فإذا كانت  $\rho$  هي نصف قطر إنحناء محور القضيب ،  $\theta$  الزاوية التي يحصرها  $GG'$  عند  $O$  فإن

$$l = \rho\theta \quad (4.1.1)$$

كذلك نعتبر الالياف عند اية نقطة  $P$  على المقطع عند  $G$  وتبعد مسافة  $y$  عنها فإذا أصبح طول هذه الالياف بعد إنحناء القضيب  $l + h$  فإن



شكل (ب)

$$l + h = (\rho + y)\theta$$

$$\therefore h = y\theta$$

$$(4.1.2)$$

ومن العلاقة (4.1.1) ، (4.1.2) ينتج ان

$$\frac{h}{y} = \frac{l}{\rho} \quad (4.1.3)$$

وبستخدام قانون هوك فان الشد في  $pp'$

$$E \delta A \frac{h}{l} = E \delta A \frac{y}{\rho} \quad (4.1.4)$$

حيث  $\delta A$  هي مساحة مقطع الالياف  $pp'$  و  $E$  معامل ينج لمادة القضب .

∴ محصلة الشد التى تؤثر على المقطع عند  $G$  يعطى من العلاقة

$$T = \int \frac{E}{\rho} y dA \quad (4.1.5)$$

ويحسب هذا التكامل على هذا المقطع

$$T = \frac{E}{\rho} \bar{y} A \quad (4.1.6)$$

وفيها  $A$  هي مساحة المقطع  $\bar{y}$  بعد مركز ثقله عن  $G$  هذه العلاقة تحدد وضع محور القضيب بالنسبة لمراكز ثقل مقاطعه . وفي تلك الحالات التى ينحنى فيها القضيب نتيجة لقوى عمودية عليه فإن  $T$  تساوى صفر عند ايه مقطع ومنها  $\bar{y}$  يساوى صفر اى ان محور القضيب فى هذه الحالات يمر بمراكز ثقل مقاطع القضيب العرضية .

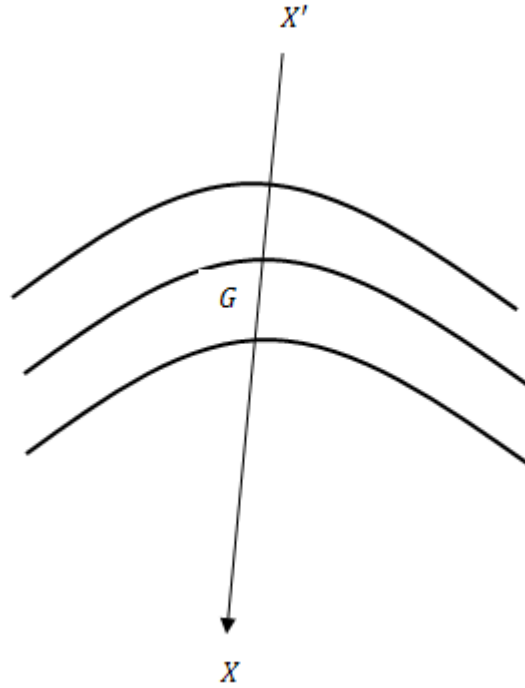
كذلك يمكن حساب عزم الانحناء  $M$  عند المقطع عند  $G$  وذلك باخذ عزوم الشد فى الالياف حول المحور  $XGX$  العمودى على مستوى القوى الخارجية

$$\therefore M = \int \frac{E}{\rho} y^2 dA \quad (4.1.7)$$

حيث

$$\therefore I = \int y^2 dA \quad (4.1.8)$$

هى عزوم القصور الذاتى لمساحة مقطع القضيب حول  $XGX$  .



$$\therefore M = \frac{EI}{\rho} \quad (4.1.9)$$

المقدار  $EI$  يعرف بمعامل المرونة الحجمى Rigidty Flexural ويرمز له عادة بالرمز  $K$

$$\therefore M = \frac{K}{\rho} \quad (4.1.10)$$

تدل العلاقة السابقة اذا كانت  $M$  ثابتة لجميع نقط قضيب منتظم فان  $\rho$  ايضا ثابتة . اى انه اذا اثرفى طرفى قضيب خفيف منتظم ازدواجين متضادين، ومقدار عزمها متساويان وفى مستوى واحد يضم القضيب سوف ينحنى متخذاً شكل دائرة .

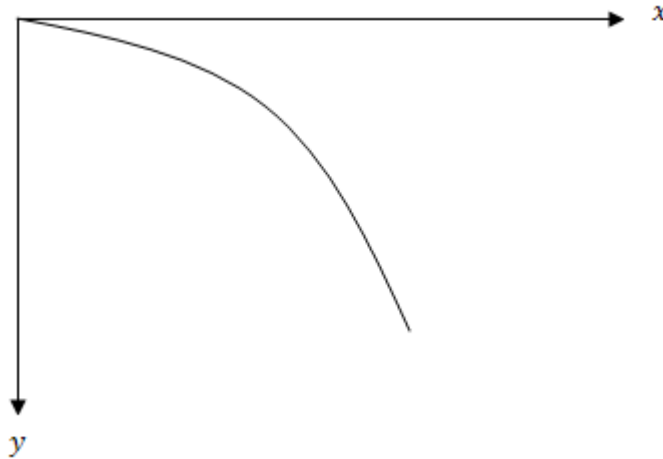
باخذ محور القضيب وهو مستقيماً كمحور  $x$  فان

$$M = \frac{K}{\rho} = \frac{\pm K \frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (4.1.11)$$

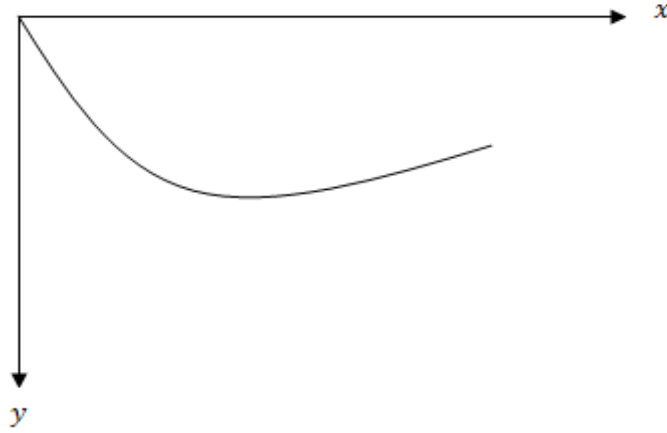
حيث  $y$  تمثل ازاحة النقطة  $x$  من محور القضيب عن موضعها عندما كان القضيب مستقيماً . وعندما يكون القضيب قليل المرونة فان  $K$  كبيرة . اما  $\frac{dy}{dx}$ ، فكميات صغيرة يمكن اهمال مربعاتها وبذلك يمكن تقريب المعادلة (4.1.11) الى

$$M = \pm K \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (4.12)$$

وتؤخذ الاشارة المناسبة التي تجعل طرفي العلاقة (4.1.12) لها نفس الاشارة . فاذا كانت القوى المؤثرة في مستوى راسي مثلاً واتخذنا الراسي الى اسفل هو الاتجاه الموجب لمحور  $y$  فانه باتباع القاعدة المتفق عليها في تحديد اشارة عزم الانحناء نرى ان الاشارة الموجبة هي الواجب استعمالها . ذلك لانه في الاجزاء التي تكون فيها  $M$  موجبة فان القضيب سوف ينحني الى اعلى كما في الشكل (أ) وفيه تزيد  $\frac{dy}{dx}$  بزيادة  $x$  اي ان  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  موجبة ولذا تاخذ الاشارة الموجبة في تلك الاجزاء التي تكون فيها  $M$  سالبة فان القضيب سوف ينحني الى اسفل كما بالشكل (ب) وفيه



شكل (أ)



شكل (ب)

تتناقص  $\frac{dy}{dx}$  بزيادة  $x$  أي أن  $\frac{d^2y}{dx^2}$  تكون سالبة على ذلك تستخدم الإشارة الموجبة حتى يكون طرفا العلاقة السابقة سالبتين .

### شروط تحقق عند نقط خاصة في القضبان المثبتة :

(أ) عند الاطراف الحرة للقضبان يتلاشى كلا من عزم الانحناء وقوه القص أي أن  $y'' = 0, y''' = 0$  عند هذه الاطراف

(ب) إذا ارتكز القضيب ارتكازا بسيطا مفصليا فان عزم الانحناء يساوي صفر أي أن  $y'' = 0$  عند نقطة الارتكاز هذه اما  $y$  فتكون معلومة عندها .

(ج) القضبان المثبتة نثبيتا كاملا فان  $y, \frac{dy}{dx}$  معلومتان عند الطرف المثبت.

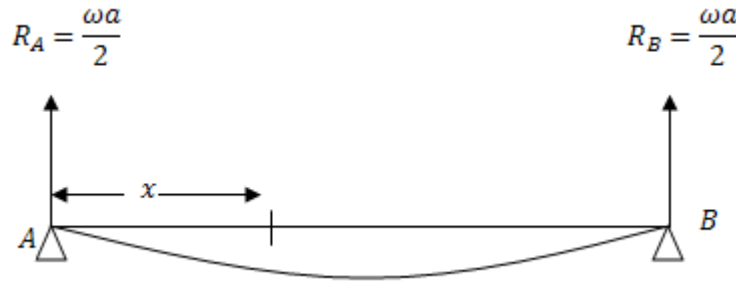
لايجاد شكل القضيب انحنى نتيجة لحمل معين نحل المعادلة التفاضلية

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

مع استخدام الشرط المناسب تبعا لنوع التثبيت كما في الامثلة التالية :

**مثال (1):**

ارتكز قضيب منتظم عند نهايتيه على وتدين في نفس المستوى الافقى . أثبت ان الانخفاض عند مسافة  $x$  من إحدى نهايتيه يساوى  $\frac{\omega x}{24 EI} (a - x)(a^2 + ax - x^2)$  حيث  $a$  طول القضيب ، و  $\omega a$  وزنة .

**الحل**

عزم الانحناء عند ايه نقطة تبعد مسافة  $x$  عن الطرف  $A$  يساوى

$$M = -\frac{\omega a}{2}x + \frac{\omega x^2}{2} \quad (1)$$

حيث ان

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M \quad (2)$$

$$\therefore EIy'' = -\frac{\omega ax}{2} + \frac{\omega x^2}{2} \quad (3)$$

بالتكامل

$$EIy' = \frac{\omega ax^2}{4} + \frac{\omega x^3}{6} + c \quad (4)$$

$$EIy = -\frac{\omega ax^3}{12} + \frac{\omega x^4}{24} + cx + c^1 \quad (5)$$

الايجاد الثوابت  $c, c^1$  تنطبق الشروط الابتدائية في المسألة

عند الطرف  $A$  :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \therefore c^1 = 0$$

عند الطرف B :

$$x = a, \quad y = 0, \quad \therefore c = \frac{\omega a^3}{24}$$

بالتعويض عن  $c, c^1$  في المعادلة السابقة (5)

$$\therefore EIy = \frac{\omega x}{24}(a^3 + x^3 - 2ax^2)$$

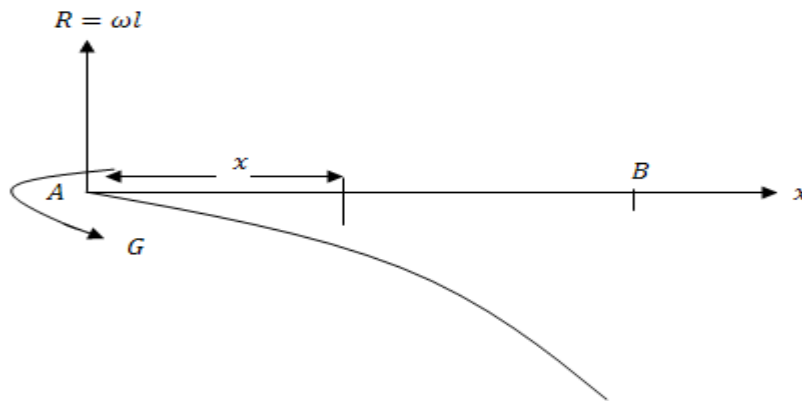
$$\therefore y = \frac{\omega x}{24 EI}(a - x)(a^2 + ax - x^2)$$

## مثال (2):

ثبت قضيب منتظم تثبيتا افقيا عند إحدى نهايتيه فانحنى تحت تأثير وزنه . إثبت ان الانخفاض عند نهايته يساوى  $\frac{3}{8}$  الانخفاض الذى يحدث اذا اعتبر القضيب خفيفا وعلق من نهايته ثقلا مساوى لوزنه .

## الحل

نفرض ان طول القضيب  $l$ , ووزن وحدة الاطوال  $\omega$ .





**الحالة الاولى:**

القضيب ثقيل . عزم الانحناء عند اى نقطة من القضيب تبعد مسافة  $l - x$  عن الطرف الحر يساوى

$$M = \frac{\omega}{2}(l - x)^2 \quad (1)$$

$$Ky'' = \frac{\omega}{2}(l^2 - 2lx + x^2) \quad (2)$$

بالتكامل

$$Ky' = \frac{\omega}{2} \left[ l^2 x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right] + c$$

لايجاد  $c$  تطبيق الشرط الابتدائى عند نقطه التثبيت  $A$

$$x = 0 \quad y' = 0 \quad \therefore c = 0$$

$$\therefore Ky' = \frac{\omega}{2} \left[ l^2 x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right] \quad (3)$$

بالتكامل مره اخرى

$$Ky = \frac{\omega}{2} \left[ \frac{1}{2} l^2 x^2 - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right] + c_1 \quad (4)$$

لايجاد  $c_1$

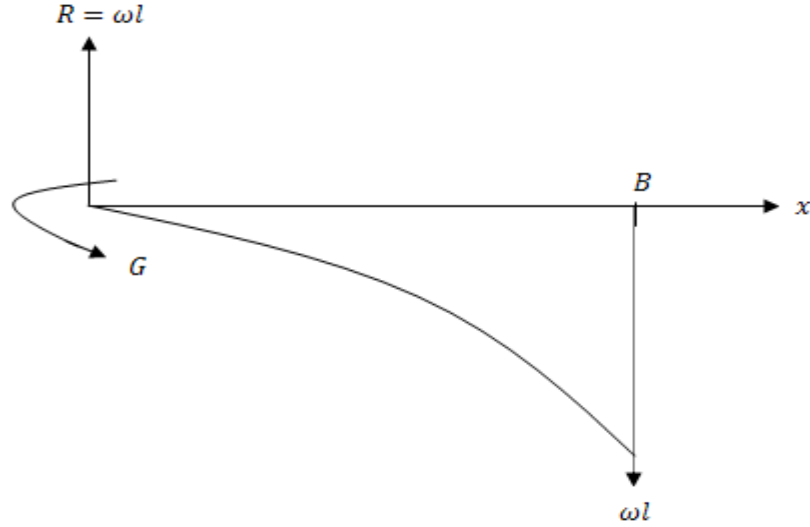
$$y = 0 \quad x = 0 \quad c_1 = 0$$

لايجاد الانخفاض عند الطرق الحر نضع  $x = l$  في المعادلة (4) تجد ان

$$y_1 = \frac{\omega l^4}{8k} \quad (5)$$

**الحالة الثانية:**

القضيب خفيف ومعلق ثقلا  $\omega l$  عند طرفه الحر . عزم الانحناء عند اى نقطه تبعد مسافه  $l - x$  عن الطرف الحر يساوي



$$M = \omega l(l - x) \quad (1)$$

$$Ky'' = \omega l(l - x) \quad (2)$$

بالتكامل

$$Ky' = \omega l \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + c \quad (3)$$

ثابت التكامل يساوي صفر لان  $x = 0$  at  $y' = 0$  وبالتعويض عن الثابت والتكامل مرة اخرى

$$Ky = \omega l \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + c_1 \quad (4)$$

ثابت التكامل يساوي صفر لان عند

$$x = 0 \quad y = 0$$

$$\therefore Ky = \omega l \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad (5)$$

وعند  $x = l$ ,  $y = y_2$ ,

$$y_2 = \frac{\omega l^4}{3K} \quad (6)$$

النسبة بين الانخفاضين

$$\frac{Ky_1}{Ky_2} = \frac{3}{8}$$

$$\therefore y_1 = \frac{3}{8} y_2. \quad (7)$$

**ملاحظة:**

إذا اثر الوزن والثقل معا فإن نتيجة لحل المعادلة التفاضلية والشروط الحدية المستخدمة في حلها يكون إنخفاض الطرف الحر

$$y = \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \right) \frac{\omega l^4}{K} = \frac{11}{24} \frac{\omega l^4}{K}.$$

**مثال(3):**

كابولي من مادة متجانسة على شكل قطع مكافئ دوراني طوله  $l$  ونصف قطر طرفه المثبت  $a$ . إذا كانت  $\omega$  هي وزن وحدة الحجم من الكابولي وكان محوره عند الطرف المثبت افقيا . أوجد انخفاض الطرف الحر .

**الحل**

الشكل المقابل هو مقطع الكابولي بواسطة المستوى الرأسى المار بمحوره . نفرض ان معادلة المقطع بالنسبة للمحاور المبينة

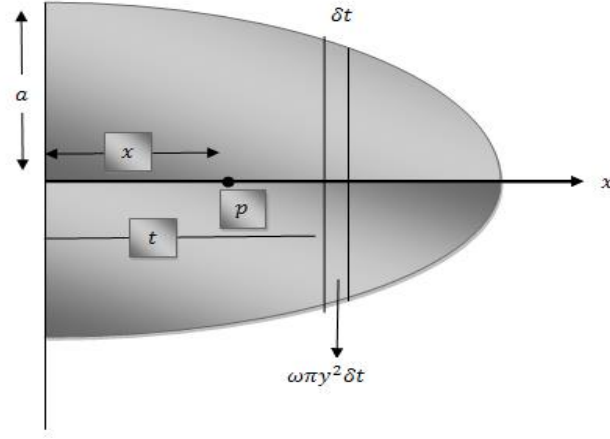
$$y^2 = Ax + B \quad (1)$$

عند  $x = 0$  وكانت  $y = a$  ومنها  $B = a^2$  وكذلك عند  $x = l$  كانت  $y = 0$  ومنها  $A = -a^2/l$  .  
∴ معادلة المقطع هي

$$y^2 = a^2 \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \quad (2)$$

$$= \int_x^l \omega \pi y^2 (t - x) dt.$$

عزم الانحناء عند اية  $p$  على بعد  $x$  من 0



$$\begin{aligned} \therefore M &= \frac{w \pi a^2}{l} \int_x^l (l-t)(t-x) dt \\ &= \frac{w \pi a^2}{6l} (l-x)^3 \end{aligned} \quad (3)$$

عزم القصور الذاتي لمقطع الكابولي عند  $p$  حول محور افقى (مقطع الكابولى العرضى للمساحة) يساوى

$$\begin{aligned} I &= \pi y^2 \cdot \frac{y^2}{4} \\ &= \frac{\pi a^2}{4l^2} (l-x)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\pi a^2}{4l^2} E y'' (l-x)^2 &= \frac{\omega \pi a^2}{6l} (l-x)^3 \\ \therefore y'' &= \frac{2}{3} \frac{\omega l}{E a^2} (l-x) \end{aligned} \quad (5)$$

$$y' = \frac{2\omega l}{3a^2 E} \left[ lx - \frac{x^2}{2} \right] + c$$

وبالتعويض عن الثابت  $x=0, y'=0 \therefore c=0$

$$y' = \frac{2\omega l}{3a^2 E} \left[ lx - \frac{x^2}{2} \right] \quad (6)$$

بالتكامل مرة اخرى

$$y = \frac{2\omega l}{3a^2 E} \left[ \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right] + c_1 \quad (7)$$

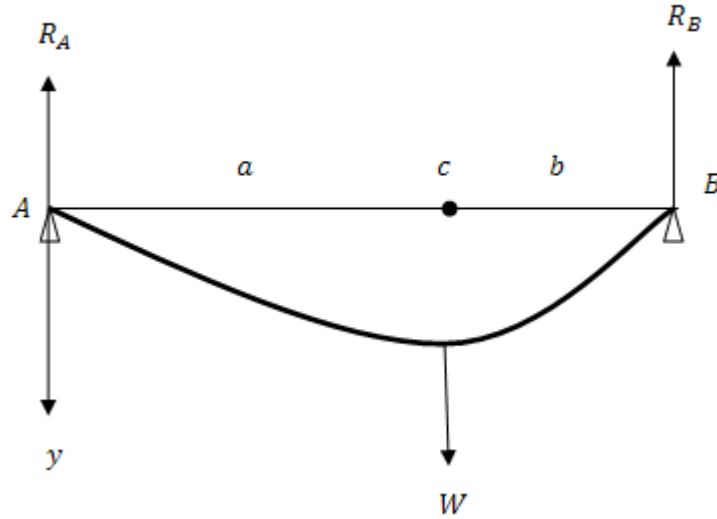
$$x = 0 \text{ at } y = 0 \therefore c_1 = 0$$

بوضع  $x = l$  والتعويض عن  $c_1 = 0$  في معادلة (7) ينتج انخفاض الطرف الحر يساوى  $-\frac{2}{9} \frac{\omega l^4}{Ea^2}$

### مثال (4):

قضيب خفيف  $AB$  طولة  $(a + b)$  يرتكز بطرفيه على وتدين رأسيين في مستوى افقى واحد ويحمل ثقلا  $W$  عند نقطة تبعد مسافة  $a$  عن الطرف الحر. أوجد شكل القضيب وعين اقصى انخفاض له.

### الحل



ردا الفعل عند  $B, A$  على الترتيب

$$R_A = \frac{Wb}{a+b}$$

$$R_B = \frac{Wa}{a+b}$$

شكل القضيبي يتعين من المعادلتين

$$0 \leq x \leq a \quad a \leq x \leq b+a$$

$$Ky'' = -\frac{wb}{a+b}x, \quad Ky'' = \frac{-wb}{a+b}x + w(x+a)$$

$$Ky' = \frac{-wb}{a+b} \frac{x^2}{2} + c, \quad Ky' = \frac{-wb}{a+b} \frac{x^2}{2} + \frac{w}{2}(x-a)^2 + c'$$

وحيث ان  $y'$  متصلة عند  $x = a$  فإن  $c = c'$ 

$$\therefore Ky = \frac{-wb}{a+b} \frac{x^3}{6} + cx + D; \quad Ky = \frac{-wbx^3}{6(a+b)} + \frac{w}{6}(x-a)^3 + c'x + D^1$$

وحيث ان  $y$  متصلة عند  $x = a$  فإن  $D = D^1$  عند الطرف  $A$ :

$$x = 0 \quad y = 0 \quad \therefore D = 0$$

عند الطرف  $B$ :

$$x = a+b, \quad y = 0$$

$$\therefore C = \frac{wba}{6} \frac{a+2b}{a+b}$$

اي ان شكل القضيبي هو المنحنى في حالة  $a \leq x \leq a+b$ 

$$Ky = \frac{-wb}{a+b} \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{wba}{6} \frac{a+2b}{a+b} x \quad (1)$$

$$Ky = \frac{-wb}{a+b} \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{wba}{6} \frac{a+2b}{a+b} x + \frac{w}{6}(x-a)^3 \text{ in } a \leq x \leq a+b \quad (2)$$

وقد تساوت ثوابت التكامل في جزأى القضيبي لاتصال  $y$ ,  $\frac{dy}{dx}$  عند  $x = a$  ولإن الحدود الزيادة في الجزء  $a \leq x \leq a + b$  كتبت وكوملت بدلالة  $(x - a)$  حتى تتلاشى عند  $x = a$  وفي هذه الحالة لا داعى لتكرار الحدود المتشابهة ونكتفى فقط بإضافة الحدود الازمة للجزء الثانى من القضيبي . وتعرف طريقة التكامل هذه بطريقة ماكولى (Macaulay,s Method).

لايجاد اقصى إنخفاض نبحت عن الاوضاع التى تتلاشى عندها ميل القضيبي من المعادلات السابقة .

$$a \leq x \leq a \qquad a \leq x \leq a + b$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{wb}{a+b} \frac{x^2}{2} + \frac{wba}{6} \frac{a+2b}{a+b} + \frac{w}{2}(x-a)^2$$

وهذان يتلاشى عند

$$x_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{3}a(a+2b)}, x_2 = a+b \pm \sqrt{\frac{1}{3}b(b+2a)}$$

وتهمل الاشارة السالبة في  $x_1$  والموجبة في  $x_2$  اذ انها تعطيان نقطا خارج القضيبي واذا كانت  $a > b$  فان كلا من

$x_1, x_2$  اقل من  $a$  وعلى ذلك فان  $\frac{dy}{dx}$  تساوى الصفر عند نقطة على القضيبي تبعد مسافة  $\sqrt{\frac{1}{3}b(b+2a)}$  من

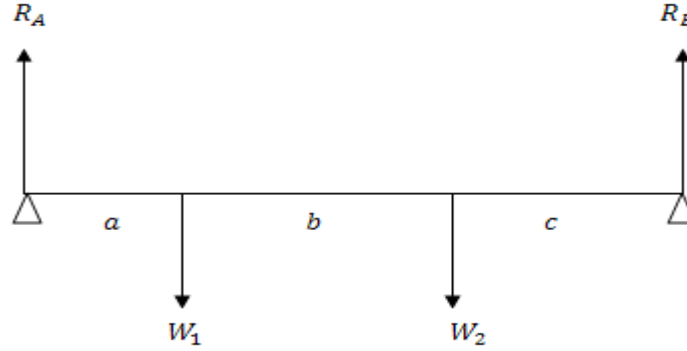
الطرف الحر. وبالتعويض في (1) للجزء  $0 \leq x \leq a$  يمكن الحصول على أقصى انخفاض . وبالمثل اذا كانت

$b > a$  فان  $\frac{dy}{dx} = 0$  عند نقطة على القضيبي تبعد مسافة  $\sqrt{\frac{1}{3}b(b+2a)}$  من  $B$  أى مسافة

$$. A \text{ من } (a+b) - \sqrt{\frac{1}{3}b(b+2a)}$$

**مثال (5):**

قضيب خفيف  $AB$  طولة  $a + b + c$  يرتكز في وضع افقى على وتدين رأسيين عند طرفية ويحمل ثقلين عند نقطتين تبعدان مسافة  $a, a + b$  من الطرف  $A$  على الترتيب أوجد شكل القضيب  $w_1, w_2$ .

**الحل**

باخذ العزوم حول  $A$  ثم حول  $B$  ينتج ان

$$R_A = \frac{W_1(b+c) + W_2c}{a+b+c},$$

$$R_B = \frac{W_1a + W_2(a+b)}{a+b+c}.$$

شكل القضيب يتعين من :

$$a \leq x \leq a \quad a \leq x \leq a+b \quad a+b \leq x \leq a+b+c$$

$$Ky'' = -R_A x + W_1(x-a) + W_2(x-a-b)$$

$$Ky' = -R_A \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}W_1(x-a)^2 + \frac{1}{2}W_2(x-a-b)^2$$

وقد تساوت ثوابت التكامل في النطاق الثلاث لان  $y, y'$  دالتان متصلتان.

$$Ky = -R_A \frac{x^3}{6} + \frac{1}{6}W_1(x-a)^3 + \frac{1}{6}W_2(x-a-b)^3 \quad (1)$$



**الحالات غير المحددة إستاتيكيًا:**

هناك بعض حالات القضبان المرتكزة او المثبتة لا تكفي فيها معادلات الاتزان العادية لحساب ردود الافعال فيها . ويطلق على مثل هذه الحالات إنها غير محددة استاتيكيًا ، اما اذا اتخذنا مرونة هذه القضبان في الحسبان فانه باستخدام القانون  $Ky'' = M$  .

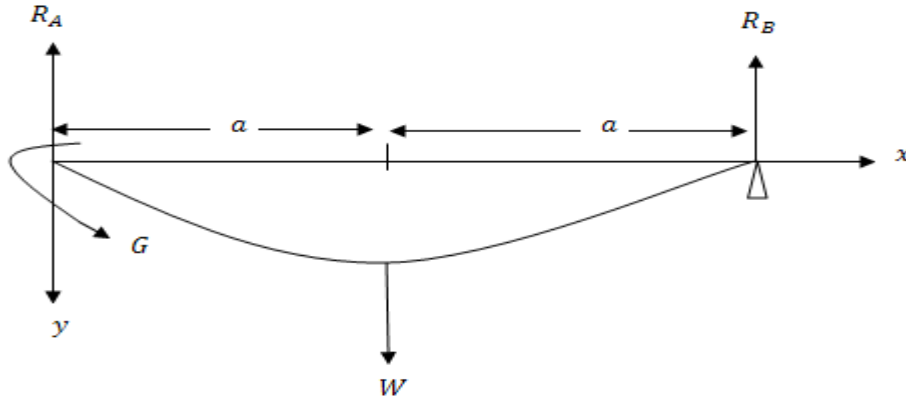
يمكن حساب ردود الافعال هذه. وهذا يتضح في الامثلة التالية:

**مثال (1):**

قضيب خفيف  $AB$  طولها  $2a$  طرفه  $A$  مثبت أفقيا وطرفه  $B$  يرتكز على وتد رأسى بحيث كان الطرفان في مستوى أفقى واحد . فاذا علق من منتصف القضيب ثقلا  $W$  أوجد انخفاض الثقل  $W$  عن الطرفين  $B, A$  وارسم منحنى عزم الانحناء.

**الحل**

نفرض ان ردى الفعل عند  $B, A$  هما  $R_B, R_A$  وان عزم التثبيت  $A$  هو  $G$  .



$$R_A + R_B = W \quad (1)$$

$$2aR_A = G + Wa \quad (2)$$

وباتخاذ الأفقى  $AB$  محور  $x$  والراسى الى الی اسفل عند  $A$  هو محور  $y$  فان

$$0 \leq x \leq a \quad a \leq x \leq 2a$$

$$M = EIy'' = G - R_A x + W(x - a) \quad (3)$$

$$\therefore EIy' = Gx - R_A \frac{x^2}{2} + \frac{W}{2}(x - a)^2 \quad (4)$$

$$EIy = \frac{1}{2}Gx^2 - R_A \frac{x^3}{6} + \frac{W}{6}(x - a)^3 \quad (5)$$

وقد تلاشى ثابتا التكامل في (4) و(5) لتلاشى  $y, y'$  عند  $x = 0$ .  
وحيث ان  $y = 0$  عند  $x = 2a$

$$\therefore 2G - \frac{4}{3}aR_A + \frac{Wa}{6} = 0 \quad (6)$$

بحل المعادلات (1) و(2) و(6) ينتج ان

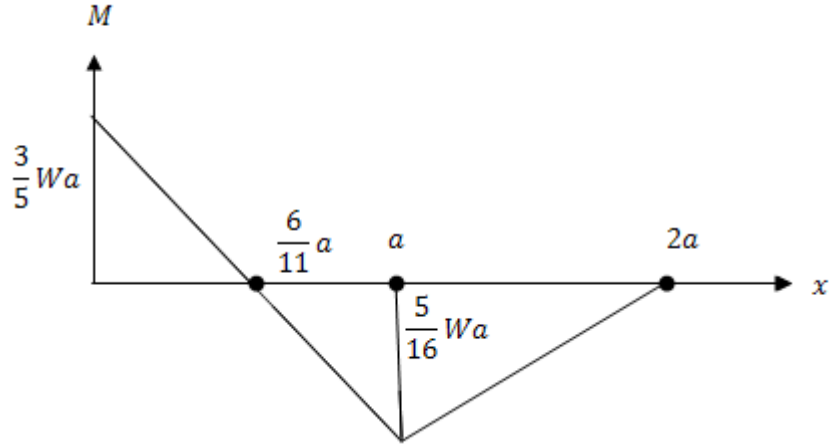
$$R_A = \frac{11}{16}W, R_B = \frac{5}{16}W, G = \frac{3}{8}Wa.$$

وعلى ذلك فإن القضيبي ياخذ شكل المنحنى

$$EIy = \frac{Wx^2}{96}(18a - 11x) \quad 0 \leq x \leq a.$$

$$EIy = \frac{Wx^2}{96}(18a - 11x) + \frac{W}{6}(x - a)^3 \quad a \leq x \leq 2a$$

بوضع  $x = a$  ينتج ان إنخفاض الثقل  $W$  عن الطرفين  $A, B$  يساوى  $\frac{7}{96} \frac{Wa^3}{EI}$ .



شكل (أ)

وكذلك فان عزم الانحناء تعطية المعادلتان

$$M = \frac{W}{16} (6a - 11x) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$M = \frac{5W}{16} (x - 2a) \quad a \leq x \leq 2a$$

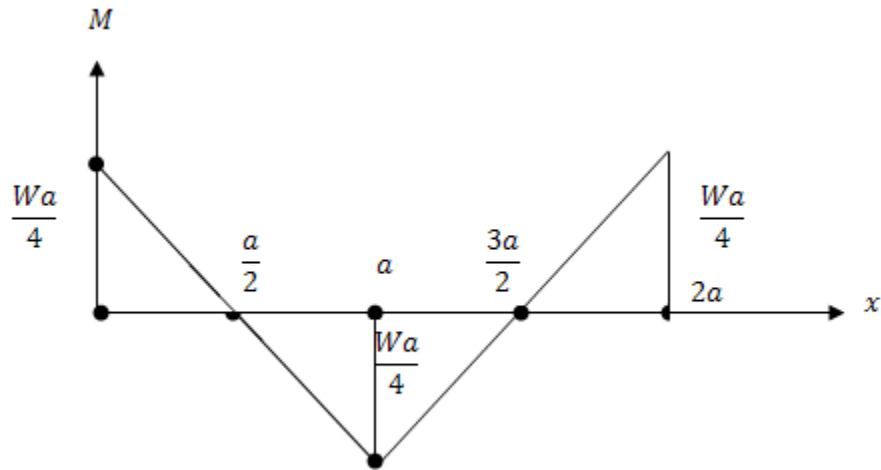
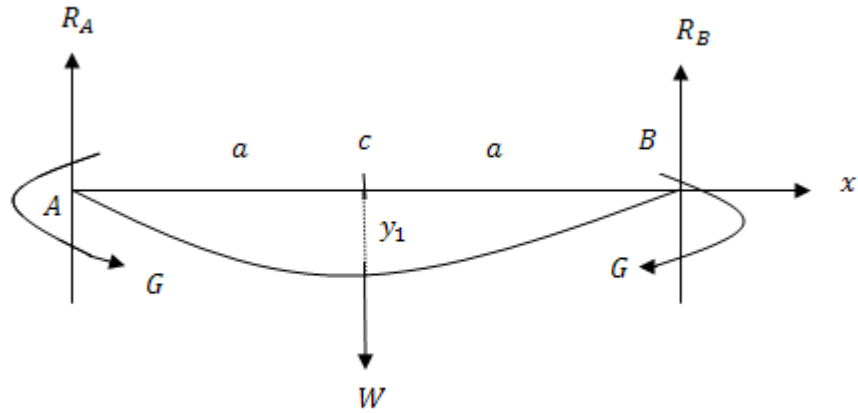
والشكل (أ) يبين هذا المنحنى .

## مثال (2):

قضيب خفيف  $AB$  طولة  $2a$  مثبت من طرفية  $A, B$  بحيث كان الطرفان في مستوى افقى واحد. فإذا علق من منتصف القضيب ثقلا  $W$  اوجد انخفاض الثقل  $W$  عند الطرفين  $A, B$  وارسم عزم الانحناء.

## الحل

في هذه الحالة يصبح القضيب متمثلا حول الثقل المعلق وينتج عن ذلك ان :



شكل (ب)

$$R_A = R_B = \frac{W}{2} \quad (1)$$

وان مقدار العزم (التثبيت) واحد عند الطرفين  $G$ . نتيجة للتماثل في الشكل يكفي اعتبار نصف القضيب الايسر مثلا. شكل هذا النصف يتحدد من العلاقة .

$$EIy'' = G - \frac{W}{2}x \quad 0 \leq x \leq a \quad (2)$$

$$EIy' = Gx - \frac{Wx^2}{4} \quad 0 \leq x \leq a \quad (3)$$

$$EIy = \frac{1}{2}Gx^2 - \frac{Wx^3}{12} \quad 0 \leq x \leq a \quad (4)$$

وقد تلاشى ثابتا التكامل لتلاشى  $y, y'$  عند  $x = 0$  من التماثل  $y' = 0$  عند  $x = a$  ومنها ينتج ان

$$G = \frac{Wa}{4} \quad (5)$$

∴ معادلة النصف الايسر للقضيب هي

$$EIy = \frac{Wx^2}{24}(3a - 2x) \quad (6)$$

بوضع  $x = a$  ينتج ان انخفاض الثقل  $w$  عن الطرفين يساوى

$$y_1 = \frac{Wa^3}{24EI} \quad (7)$$

عزم الانحناء عند اية نقطة على القضيب تعطية المعادلتان

$$M = \frac{W}{4}(a - 2x) \quad 0 \leq x \leq a \quad (8)$$

and

$$M = \frac{W}{4}(2x - 3a) \quad a \leq x \leq 2a \quad (9)$$

والشكل (ب) يبين منحنى عزم الانحناء .

**مثال (3):**

قضيب  $AB$  طولة  $l$  ووزنه  $\omega$  لكل وحدة طول. ثبت طرفه  $A$  أفقيا وارتكز الطرف  $B$  على وتد رأسي بحيث كان الطرفان  $B, A$  في مستوى أفقي واحد. عين رد الفعل والازدواج التثبيت عند  $A$ .

إثبت ان الانخفاض منتصف القضيب عن الطرفين  $\frac{\omega l^4}{192 EI}$  وارسم منحنى عزم الإنحناء.

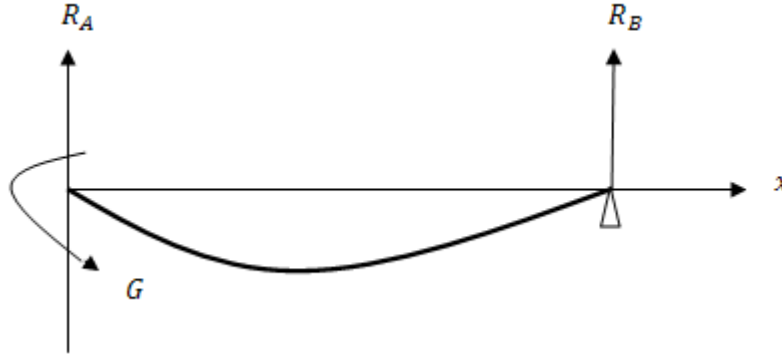
**الحل**

نفرض ان رد الفعل عند  $B, A$  هما  $R_B, R_A$  وان عزم التثبيت عند  $A$  هو  $G$ .

$$\therefore R_A + R_B = \omega l \quad (1)$$

$$R_A l = G + \frac{\omega l^2}{2} \quad (2)$$

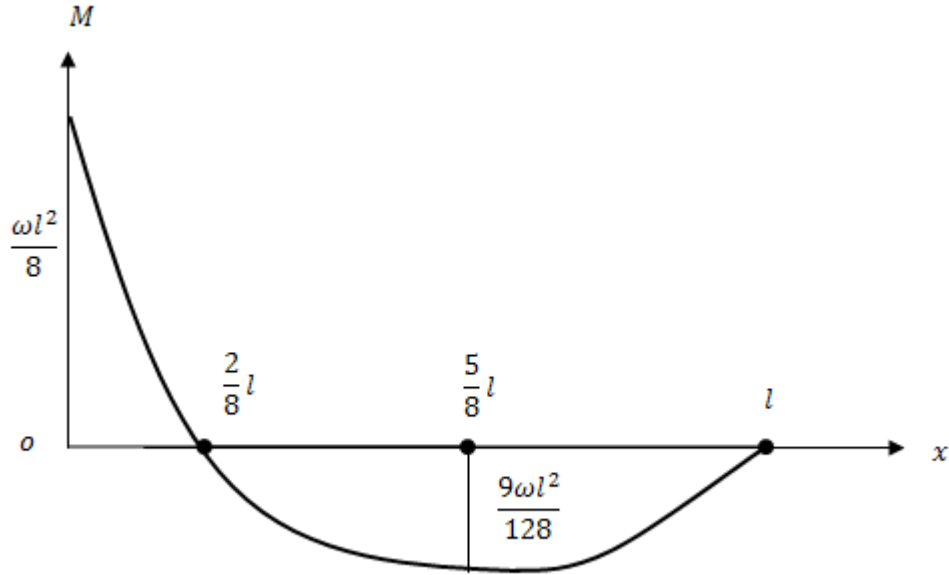
بإتخاذ محورين إحداهما أفقي والآخر رأسي عند  $A$ .



$$EIy'' = G - R_A x + \frac{\omega x^2}{2} \quad (3)$$

$$EIy' = Gx - \frac{1}{2}R_A x^2 + \frac{\omega x^3}{6} + c_1 \quad (4)$$

$$EIy = \frac{1}{2}Gx^2 - \frac{1}{6}R_A x^3 + \frac{\omega x^4}{24} + c_1 x + c_2 \quad (5)$$



شكل (ج)

$$x = 0 \quad y' = 0 \quad c_1 = 0$$

$$x = 0 \quad y = 0 \quad c_2 = 0$$

$$\therefore EIy = \frac{1}{2}Gx^2 - \frac{1}{6}R_A x^3 + \frac{\omega x^4}{24} \quad (6)$$

وحيث ان  $y = 0$  عند  $x = l$

$$\therefore \frac{1}{2}G - \frac{l}{6}R_A + \frac{\omega l^2}{24} = 0 \quad (7)$$

بحل المعادلات (1) و(2) و(7) ينتج ان

$$R_A = \frac{5}{8}\omega l \quad ; R_B = \frac{3}{8}\omega l \quad ; G = \frac{1}{8}\omega l^2$$

∴ شكل القضيب يتحدد بالمعادلة

$$EIy = \frac{11}{16}l^2x^2 - \frac{5\omega}{48}lx^3 + \frac{\omega}{24}x^4$$

i.e

$$EIy = \frac{\omega x^2}{48}(2x - 3l)(x - l)$$

وبوضع  $x = l/2$  ينتج ان إنخفاض منتصف القضيب عن طرفيه يساوى  $\frac{\omega l^2}{192 EI}$

عزم الانحناء عند اى نقطة على القضيب تعطية المعادلة .

$$M = \frac{1}{8}\omega l^2 - \frac{5}{8}\omega lx + \frac{1}{2}\omega x^2$$

$$= \frac{\omega}{2} \left[ \left(x - \frac{5}{8}l\right)^2 - \frac{9}{64}l^2 \right]$$

والشكل (ج) يبين منحنى عزم الانحناء.

### مثال (4):

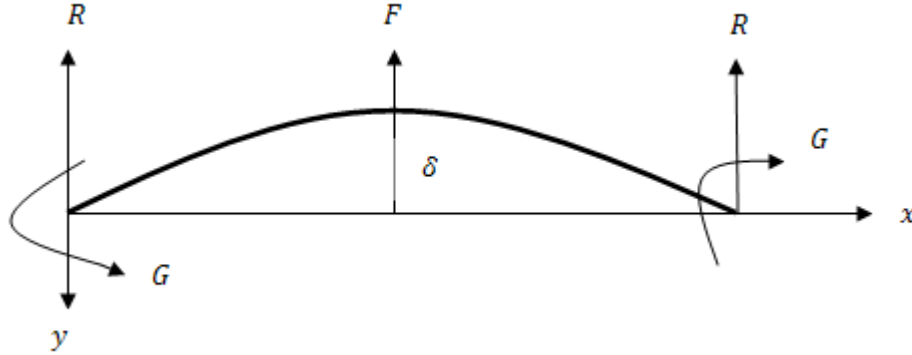
قضيب منتظم مثبت افقيا عند كل من نهايتيه. اذا رفع القضيب من منتصفه الى اعلى بقوة مسافة مقدارها  $\delta$  فوق النهايتين . اثبت ان القوة تساوى  $\frac{24 K \delta}{a^3} + \frac{W}{2}$  وان العزم عند النهايتين يساوى  $-\frac{6K\delta}{a^2} + \frac{Wa}{24}$  حيث  $2a$  طول القضيب و  $W$  وزنة و  $K = EI$ .

### الحل

من التماثل رد الفعل  $R$  واحد عند الطرفين وكذلك عزم الانحناء  $G$  نفرض ان القوة المؤثرة عند منتصف القضيب هي  $F$ .

معادلة الاتزان تعطى من :





$$F + 2R = W \quad (1)$$

بإتخاذ الأفقى  $AB$  محور  $x$  والرأسى الى اسفل عند  $A$  محور  $y$  فإن شكل النصف الأيسر من القضيب  $0 \leq x \leq a$  يتحدد من المعادلة

$$M = EIy'' = Gx - Rx + \frac{W}{2a} \frac{x^2}{2} \quad (2)$$

$$\therefore EIy' = Gx - \frac{1}{2}Rx^2 + \frac{W}{2a} \frac{x^3}{6} \quad (3)$$

$$EIy = \frac{Gx^2}{2} - \frac{1}{6}Rx^3 + \frac{W}{2a} \frac{x^4}{24} \quad (4)$$

وقد تلاشى ثابت التكامل فى (3) و(4) لتلاشى  $y, y'$  عند  $x = 0$ .  
وحيث ان  $y = -\delta$  عند  $x = a$  وبالتعويض فى (4)

$$\therefore -\frac{2EI\delta}{a^2} = G - \frac{Ra}{3} + \frac{Wa}{24} \quad (5)$$

وحيث ان  $y' = 0$  عند  $x = a$

$$0 = G - \frac{1}{2}Ra + \frac{Wa}{12} \quad (6)$$

بحل المعادلتين (6) و(5) والمعادلة (1) نحصل على

$$R = \frac{W}{4} - \frac{12K\delta}{a^3}, F = \frac{24K\delta}{a^3} + \frac{W}{2},$$

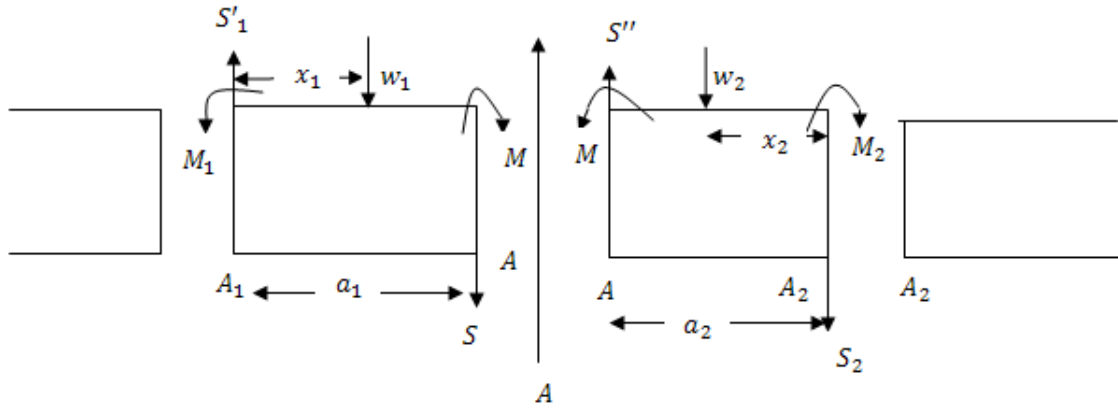
$$G = -\frac{6K\delta}{a^2} + \frac{Wa}{24}.$$

## ثانيا: معادلة كلايرون Clapeyron,s للعزوم الثلاثة:

### اولا-معادلة كلايرون للعزوم الثلاثة لأحمال المركزة :

تعتبر جزئين  $AA_2, A_1A$  من قضيب خفيف منتظم طولها  $a_2, a_1$  لنفرض أن القضيب اتزن والجزءان  $AA_2, A_1A$  محملان بثقلين  $w_2, w_1$  عند نقطتين منها تبعدان مسافتين  $x_2, x_1$  عن  $A_2, A_1$  على الترتيب فإذا كانت  $M_2, M, M_1$  هي عزوم الأحناء عند  $A_2, A, A_1$  وكانت  $\delta_2, \delta_1$  هي مقدار إنخفاض  $A$  عن الأفقى عن  $A_2, A_1$  فإن

$$a_1 M_1 + 2(a_1 + a_2)M + a_2 M_2 = \frac{w_1 x_1 (a_1^2 - x_1^2)}{a_1} + \frac{w_2 x_2 (a_2^2 - x_2^2)}{a_2} - 6EI \left( \frac{\delta_1}{a_1} + \frac{\delta_2}{a_2} \right).$$



لإثبات ذلك:

نفرض أن قوى القص عند  $A_2, A, A_1$  كما هي مبينة بالشكل وإذا كانت إحدى النقط الثلاث فقط نقط ارتكاز للقضيب - وفي الشكل إتخذت  $A$  نقطة ارتكاز - فإن قوة القص تكون غير متصلة بمقدار  $(S^1 - S)$  يساوى رد الفعل عندها باعتبار إتزان  $AA_2, A_1A$  كل على حده واخذ العزوم حول  $A_2, A$  على الترتيب نحصل على .

$$- a_1 S_1^1 + w_1 (a_1 - x_1) + M_1 - M = 0 \quad (4.2.1)$$

$$- a_2 S^1 + w_2 x_2 + M - M_2 = 0 \quad (4.2.2)$$

إذا أخذنا محورى الاحداثيات عند  $A_1$  فإن شكل  $A_1A$  يتعين من العلاقات الآتية

$$\begin{aligned}
& \dots\dots\dots 0 \leq x \leq x_1 & x_1 \leq x \leq a_1 \\
EIy'' = M_1 - S_1^1 x & & + w_1(x - x_1) \\
EIy' = c_1 + M_1 x - \frac{1}{2} S_1^1 x^2 & & + \frac{w_1}{2}(x - x_1)^2 \\
EIy = D_1 + c_1 x + \frac{1}{2} M_1 x^2 - \frac{1}{6} S_1^1 x^3 & & + \frac{w_1}{6}(x - x_1)^3
\end{aligned}$$

لكن  $y = 0$  عند  $x = 0$  ، عند  $x = a_1$   $y = \delta_1$

$$\therefore D_1 = 0$$

$$\text{and } c_1 + \frac{1}{2} M_1 a_1 - \frac{1}{6} S_1^1 a_1^2 + \frac{1}{6} \frac{w_1}{a_1} (a_1 - x_1)^3 = EI \frac{\delta_1}{a_1} \quad (4.2.3)$$

للجزء  $AA_2$  للقضيب نأخذ محوري الاحداثيات عند  $A$

$$\begin{aligned}
0 \leq x \leq a_2 - x_2 & & a_2 - x_2 \leq x \leq a_2 \\
EIy'' = M - S^1 x & & + w_2(x - a_2 + x_2) \\
EIy' = c_2 + Mx - 1/2 S^1 x^2 & & + \frac{w_2}{2}(x - a_2 + x_2)^2 \\
EIy = D_2 + c_2 x + \frac{1}{2} Mx^2 + \frac{1}{6} S^1 x^3 & & + \frac{w_2}{6}(x - a_2 + x_2)^3
\end{aligned}$$

وحيث ان  $y = 0$  عند  $x = 0$  ، عند  $x = a_2$   $y = \delta_2$

$$\therefore D_2 = 0$$

$$c_2 + \frac{1}{2} M a_2 - \frac{1}{6} S^1 a_2^2 + \frac{1}{6} \frac{w_2}{a_2} x_2^3 = -EI \frac{\delta_2}{a_2} \quad (4.2.4)$$

كذلك ميل  $A_1 A_2$  عند  $A$  هو نفسة ميل  $AA_2$  عند النقطة  $A$

$$c_1 + M_1 a_1 - \frac{1}{2} S_1^1 a_1^2 + \frac{1}{2} w_1 (a_1 - x_1) + c_2 \quad (4.2.5)$$

بحذف  $c, c_1$  من المعادلات (4.2.3) و(4.2.4) و(4.2.5) نحصل على:

$$\frac{1}{2}M_1a_1 + \frac{1}{2}Ma_2 - \frac{1}{3}S_1^1a_1^2 - \frac{1}{6}S^1a_2^2 + \frac{w_1}{6a_1}(a_1 - x_1)^2$$

$$x(2a_1 + x_1) + \frac{w_2}{6a_2}x_2^2 = -EI \left( \frac{\delta_1}{a_1} + \frac{\delta_2}{a_2} \right)$$

بالتعويض في هذه العلاقة عن  $S', S_1'$  من (1) و(2) ينتج ان

$$M_1a_1 + 2M(a_1 + a_2) + M_2a_2 = \frac{w_1x_1(a_1^2 - x_1^2)}{a_1} + \frac{w_2x_2(a_2^2 - x_2^2)}{a_2} - 6EI \left( \frac{\delta_1}{a_1} + \frac{\delta_2}{a_2} \right) \quad (4.2.6)$$

والحد الاخير يعطى تأثير انخفاض  $A$  عن  $A_2, A_1$  على عزوم الانحناء عند هذه المواضع .

هذه العلاقة يمكن تعميمها لاكثر من ثقل على الجزئين  $AA_2, A_1A$  وتكون النتيجة على الصورة :

$$M_1a_1 + 2M(a_1 + a_2) + M_2a_2 = \frac{\sum w_i x_i (a_1^2 - x_i^2)}{a_1} + \frac{\sum w_j x_j (a_2^2 - x_j^2)}{a_2} - 6EI \left( \frac{\delta_1}{a_1} + \frac{\delta_2}{a_2} \right) \quad (4.2.7)$$

وفيها  $x_i$  هي ابعاد  $w_i$  عن  $A_1$  ،

$x_j$  هي ابعاد  $w_j$  عن  $A_2$  .

### ثانياً: معادلة العزوم الثلاثة لقضيب محمل بانتظام:

نفرض أنه بدلاً من الأحمال المركزة في البند السابق هناك حملاً  $w_1$  لكل وحدة طول عند أية نقطة من جزء

القضيب  $AA_2$  ، لكل وحدة طول عند أية نقطة من  $AA_2$  بالتعويض عن  $w_i, w_j$  بالكميتين  $w_1 \delta x_1, w_2 \delta x_2$  على

الترتيب واستبدال عملية الجمع بعملية تكامل ينتج ان

$$M_1a_1 + 2M(a_1 + a_2) + M_2a_2 = \int_0^{a_1} \frac{w_1 x_1}{a_1} (a_1^2 - x_1^2) dx_1 + \int_0^{a_2} \frac{w_2 x_2}{a_2} (a_2^2 - x_2^2) dx_2 - 6EI \left( \frac{\delta_1}{a_1} + \frac{\delta_2}{a_2} \right)$$

وهذه الاحمال المنتظمة تعطى

$$M_1a_1 + 2M(a_1 + a_2) + M_2a_2 = \frac{w_1 a_1^3}{4} + \frac{w_2 a_2^3}{4} - 6EI \left( \frac{\delta_1}{a_1} + \frac{\delta_2}{a_2} \right) \quad (4.2.8)$$

**ثالثا: المعادلة العامة للعزوم الثلاثة:**

إذا كان الجزءان  $AA_2$  و  $A_1A$  من القضيب محملين أحمالا موزعة توزيعا منتظما واخرى مركزة بينما النقط  $A_2, A, A_1$  ليست في مستوى افقى واحد فإن:

$$M_1 a_1 + 2M(a_1 + a_2) + M_2 a_2 = \frac{w_1 a_1^3}{4} + \frac{w_2 a_2^3}{4} + \frac{\sum w_i x_i (a_1^2 - x_i^2)}{a_1} + \frac{\sum w_j x_j (a_1^2 - x_j^2)}{a_2} - 6EI \left( \frac{\delta_1}{a_1} + \frac{\delta_2}{a_2} \right) \quad (4.2.9)$$

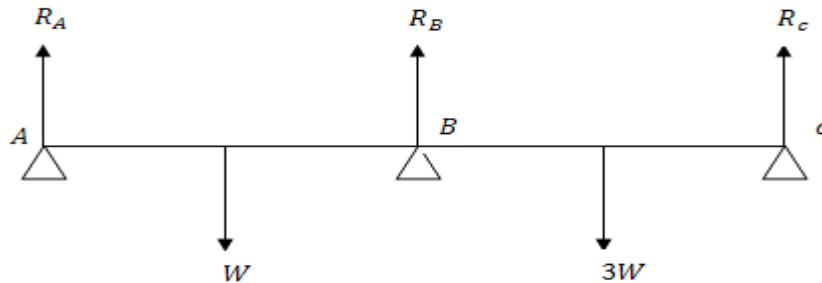
والرموز في هذه العلاقة تحمل نفس المعنى الذى استخدمت فيه من قبل. تعرف هذه العلاقة بمعادلة كلايرون والصور السابقة حالات خاصة منها.

**أمثلة:****مثال(1):**

قضيب خفيف  $AC$  يرتكز عند طرفيه  $A, C$  وعند منتصفه  $B$  على ثلاث أوتاد فى مستوى أفقى واحد . وحمل عند منتصف  $AB, BC$  بحملين  $W, 3W$  على الترتيب . احسب ردود الأفعال على الأوتاد . واثبت أن القضيب أفقى عند طرفه  $A$  .

**الحل**

عزم الانحناء عند الطرفين  $A, C$  يساوى صفرا. نفرض ان عزم الانحناء عند  $B$  هو  $M$  .  
بتطبيق معادلة كلايرون للعزوم الثلاثة للاوزان المركزة على نقط الارتكاز  $C, B, A$  نحصل على :



$$8aM = W \left( \frac{a - 3a^2}{2a} \right) + 3W \left( \frac{a - a^2}{2a} \right)$$

$$i.e. M = \frac{3}{4}Wa \quad (1)$$

حيث  $4a$  طول القضيب

يفرض أن ردود الأفعال عند  $A, B, C$  هي  $R_A, R_B, R_C$  على الترتيب. اذن عزم الانحناء عند  $B$ .

$$M = \frac{3aW}{4} = -2aR_A + Wa \quad (2)$$

$$= -(2aR_C - 3aW)$$

$$\therefore R_A = \frac{1}{8}W, R_C = \frac{9}{8}W \quad (3)$$

ولكن إتزان القضيب

$$R_A + R_B + R_C = 4W \quad (4)$$

$$\therefore R_B = \frac{11}{4}W \quad (5)$$

شكل الجزء  $AB$  يتعين من العلاقات

$$0 \leq x \leq a$$

$$EIy'' = -\frac{1}{8}Wx$$

$$EIy' = c - \frac{1}{16}Wx^2$$

$$EIy = D + cx - \frac{1}{32}Wx^3 + \frac{W}{6}(x-a)^3$$

$$a \leq x \leq 2a$$

$$+ W(x-a)$$

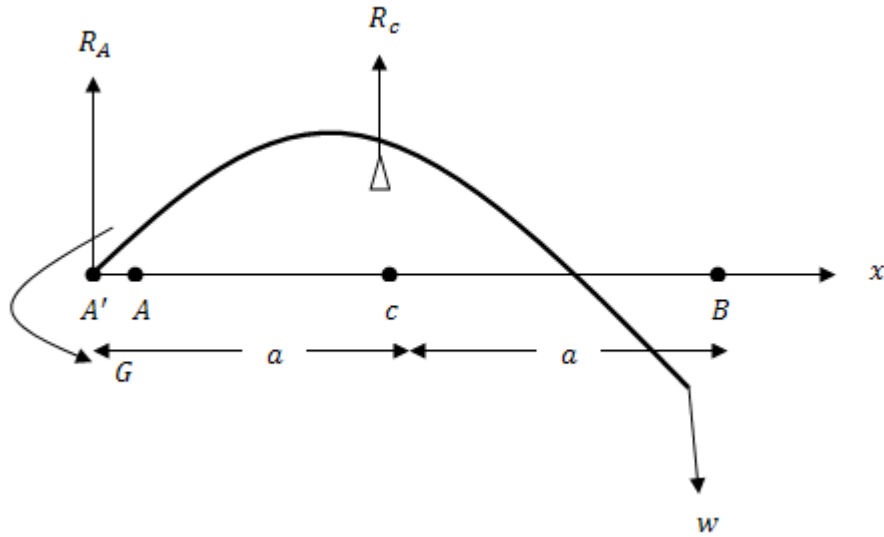
$$+ \frac{W}{2}(x-a)^2$$

ولكن  $y = 0$  عند  $x = 2a, x = 0$  ينتج ان  $D = 0$ .

وايضا  $c = 0$  وهذا يعنى ان ميل القضيب عند  $A$  يساوى صفرا. أى ان القضيب افقى فى هذا الطرف.

**مثال (2) :-**

قضيب خفيف  $AB$  طولة  $2a$  ثبت طرفه  $A$  أفقيا، وارتكز منتصفه  $c$  على وتد يرتفع مسافة  $\frac{1}{6} \frac{wa^2}{EI}$  فإذا علق ثقلا  $w$  من الطرف الحر  $B$ . أحسب انخفاض الطرف  $B$  عن  $A$ . كذلك أوجد ردود الأفعال عند  $c, A$ .

**الحل**

نفرض ان ردى الفعل عند  $c, A$  هما  $R_c, R_A$  وان عزم الانحناء عند  $A$  هو  $G$  أما عزم الانحناء عند  $c$  هو  $wa$ . التثبيت عند  $A$  يمكن اعتباره تركيزا عند نقطتين إحداها  $A$  والاخرى  $A'$  قريبه جدا من  $A$  بحيث يمكن إعتبار  $AA' = 0$  كذلك فان النسبة  $\frac{\delta_1}{a_1}$  تؤول الى الصفر حيث انها تعطى ميل الجزء  $AA'$  على الأفقى وهذا يساوى صفرا لان هذا الطرف للقضيب مثبت أفقيا بتطبيق معادلة كلايبيرون للعزوم الثلاثة لاحمال المركزة عند  $c, A, A'$  ينتج ان

$$2G.a + wa.a = -6EI \frac{wa^2}{6EI}$$

$$i.e G = -wa$$

وبتطبيق معادلة كلايرون عند النقط  $B, c, A$

$$G.a + 4a - wa = -6EI \left( -\frac{wa^3}{6Ela} + \frac{\delta}{a} \right)$$

$$i.e \delta = -\frac{1}{3} \frac{wa^3}{EI}$$

اي ان  $c$  تعلو  $B$  مسافة  $\frac{wa^3}{3EI}$  وتعلو  $A$  مسافة  $\frac{1}{6} \frac{wa^3}{EI}$ . اذن  $B$  اسفل  $A$  مسافة  $\frac{wa^3}{6EI}$ .

لحساب ردود الافعال نعتبر إتزان  $AB$ . بأخذ العزوم حول  $A$

$$R_c = 3w$$

ومنها

$$R_A = -2w$$

### مثال (3):

باستخدام معادلة كلايرون حل هذه المسألة.

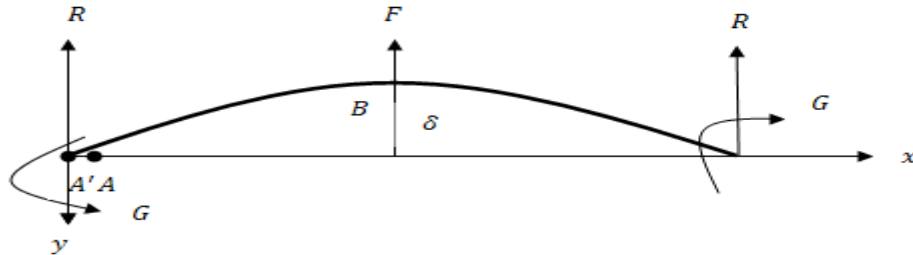
قضيب منتظم مثبت افقيا عند كلا من نهايته. اذا رفع القضيب من منتصفه الى اعلى بقوة مسافة مقدارها

$\delta$  فوق النهايتين. اثبت ان القوة تساوى  $\frac{24K\delta}{a^2} + \frac{w}{2}$  وان العزم عند النهايتين يساوى  $-\frac{6K\delta}{a^2} + \frac{w}{24}$  حيث

$2a$  طول القضيب  $w$  وزنه ،  $K = EI$ .

### الحل

باعتبار نقط التثبيت عند  $A$  تركيزا عند نقطتين متقاربتين جدا احدهما  $A$  والأخرى  $A^1$  بحيث يمكن اعتبار





$$AA^1 = 0$$

$$\delta_1 = 0$$

$$\frac{\delta_1}{A^1 A} \approx 0$$

(كما اوضحنا في المثال السابق)

بتطبيق معادلة كلايرون للعزوم الثلاثة عند النقط  $A^1, A, B$  مع ملاحظة ان

$$a_1 = 0, a_2 = a$$

$$M_1 = G, M = G, M_2 = M_B$$

نحصل على

$$2aG + aM_B = \frac{w}{2a} \left( \frac{a^3}{4} \right) - 6K \frac{\delta}{a} \quad (1)$$

بتطبيق معادلة كلايرون للعزوم الثلاثة عند النقط  $A, B, c$  مع ملاحظة ان

$$a_1 = a, a_2 = a$$

$$M_1 = G, M = M_B, M_2 = G$$

نحصل على

$$aG + 4aM_B + aG = \frac{w}{2a} \left( \frac{a^3}{4} + \frac{a^3}{4} \right) - 6K \left( -\frac{\delta}{a} - \frac{\delta}{a} \right)$$

$$i.e \ 2G + 4M_B = \frac{wa}{4} + \frac{12K\delta}{a^2} \quad (2)$$

بحل المعادلتين (1) و (2) نجد ان

$$M_B = \frac{wa}{24} + \frac{6K\delta}{a^2}, G = \frac{wa}{24} - \frac{6k\delta}{a^2},$$

باعتبار الجزء  $AB$  فان عزوم الانحناء عند  $B$ .

$$M_B = G - Ra + \frac{wa}{4}$$

$$\therefore R = \frac{w}{4} - \frac{12 KG}{a^3}$$

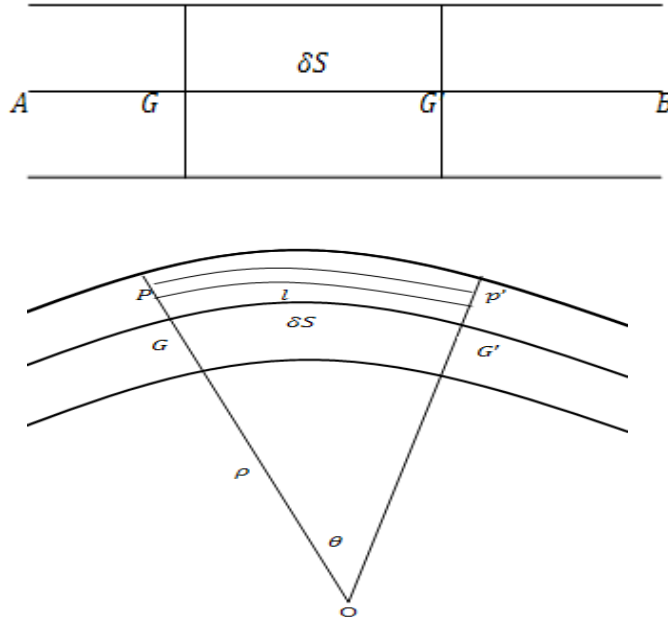
من ائزان القضيب كله

$$F = W - 2R$$

$$= \frac{W}{2} + \frac{24 K \delta}{a^3}$$

### ثالثاً:- طاقة جهد قضيب نتيجة لانحنائه:

نفرض ان  $AB$  هو مقطع القضيب بواسطة المستوى الذي يضم القوى المؤثرة عالية وان  $GG^1$  جزء صغير من محور القضيب طوله  $\delta S$ . ونعتبر جزء القضيب المحصور بين المقطعين العرضيين له  $G, G^1$ .



نفرض انه عند إنحناء القضيب تقاطع هذان المقطعان في  $o$  الالياف عند ايه نقط  $p$  على المقطع عند  $G$  وعلى بعد  $y$  منها تتغير طولها بالانحناء.

نفرض انه اصبح  $\delta S + h$  فاذا كانت  $\rho$  هي نصف قطر انحناء محور القضيب عند  $G$  فإن

$$\frac{h}{y} = \frac{\delta S}{\rho} \quad (4.3.1)$$

إذا كانت  $\delta A$  هي مسافة مقطع الالياف عند  $p$ . فان طاقة جهد هذه الالياف نتيجة لاستطالتها تساوى

$$\frac{1}{2} \frac{E \delta A}{\delta S} h^2 \quad (4.3.2)$$

$$= \frac{1}{2} E \frac{y^2}{\rho^2} \delta A \delta S$$

∴ طاقة جهد جزء طول  $\delta S$  من القضيب

$$= \frac{1}{2} \frac{E \delta S}{\rho^2} \int y^2 dA \quad (4.3.3)$$

ويحسب التكامل على مقطع القضيب عند  $p$  وهذا يساوى عزم القصور الذاتى  $I$  لمقطع القضيب عند  $G$  حول محور عندها عمودى على مستوى القوى.

إذا كانت  $V$  هي طاقة جهد القضيب نتيجة لانحنائه فان

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{EI}{\rho^2} ds \quad (4.3.4)$$

وهذا التكامل محسوبا على محور القضيب.

عندما يكون القضيب فى حالته الطبيعية على شكل منحنى ثم تغير هذا الانحناء فان يمكن اثبات ان طاقة الجهد  $U$  المخزونة نتيجة لهذا الانحناء تعطى العلاقة

$$U = \frac{1}{2} \int EI \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right)^2 ds \quad (4.3.5)$$

محسوبا على محور القضيب  $\rho, \rho_0$  هما نصف قطر الانحناء لمحور القضيب عند اية نقطة فيه قبل وبعد التغير فى انحنائه.

$$\therefore M = \frac{EI}{\rho} \quad (4.3.6)$$

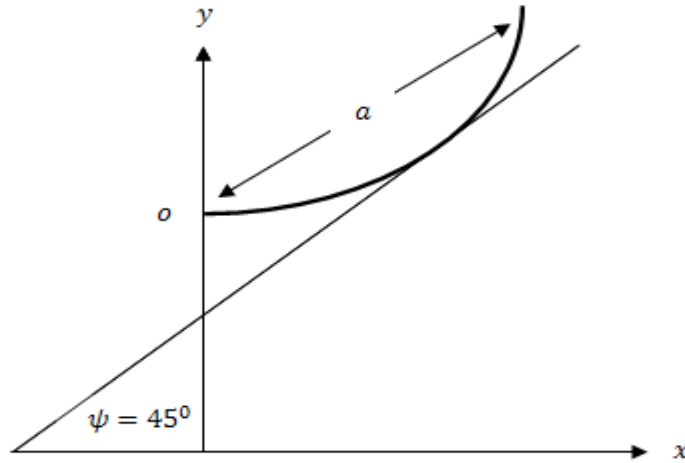
يمكن كتابة طاقة جهد القضيب بدلالة عزم الانحناء  $M$  وذلك بالتعويض من (4.3.6) فى (4.3.4) ينتج ان

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} ds \quad (4.3.7)$$

وهذا التكامل محسوبا على محور القضيب

أمثلة:مثال(1):-

قضييب طولها  $a$  شكله الطبيعي كتينة ذات بارامتر  $a$  احد طرفية عند راسها انحنى القضييب بعد ذلك ليأخذ شكل دائرة نصف قطرها  $a$  : أثبت ان الطاقة المخزونة فيه تساوى  $\frac{EI}{16a} (10 - 3\pi)$

الحل

المعادلة الذاتية لمنحنى الكتينة هي

$$S = a \tan \psi \quad (1)$$

حيث  $S$  مقاسة من راس الكتينة ،  $\psi$  زاوية ميل المماس عند اى نقطة على منحنى الكتينة على الافقى .  
∴ نصف قطر انحناء القضييب عند اية نقطة فية قبل انحنائه

$$\rho_0 = \frac{dS}{d\psi} = a \sec^2 \psi \quad (2)$$

نصف قطر انحناء القضييب بعد انحنائه

$$\rho = a \quad (3)$$

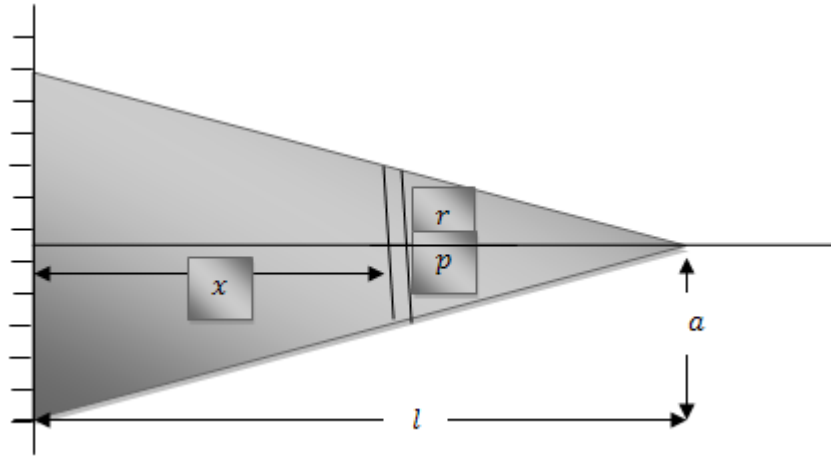
∴ الطاقة المخزونة في القضيب نتيجة إنحنائه

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^a EI \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right)^2 ds \\
 &= \frac{EI}{2} \int_0^{\pi/4} \left[ \frac{1}{a} - \frac{\cos^2 \psi}{a} \right]^2 a \sec^2 \psi d\psi \\
 &= \frac{EI}{2a} \int_0^{\pi/4} (\sec^4 \psi - 2 + \cos^2 \psi) d\psi \\
 &= \frac{EI}{16a} (10 - 3\pi) \quad (4)
 \end{aligned}$$

## مثال (2):-

كابولي على شكل مخروط ، ارتفاعه  $a$  ونصف قطر قاعدته المثبتة  $a$  ووزنه  $\sigma$  لكل وحدة حجم .  
إحسب الطاقة المخزونة فيه نتيجة لإنحنائه تحت تأثير ثقله.

### الحل



باخذ مركز القاعدة المثبتة كنقطة اصل للاحداثيات  $o$  ومحور الكابولي قبل انحنائه محور  $x$  فاذا كانت  $r$  هي نصف قطر المقطع عند اية نقطة على بعد  $x$  من  $o$  فان

$$\frac{r}{l-x} = \frac{a}{l} \quad (1)$$

ويكون وزن وحدة الطول عند  $p$

$$\begin{aligned} \omega &= \sigma \pi r^2 \\ &= \frac{\sigma \pi a^2}{l^2} (l-x)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

∴ قوة القص تعطى من العلاقة

$$\frac{dS}{dx} = -\omega \quad (3)$$

$$\therefore = \frac{\sigma \pi a^2}{l^2} (l-x)^2$$

بالتكامل

$$S = \frac{\sigma \pi a^2}{3l^2} (l-x)^2 \div c$$

ولكن  $S = 0$  عند الطرف الحر  $x = l$   
اذن  $c = 0$

$$\therefore S = \frac{\sigma \pi a^2}{3l^2} (l-x)^3 \quad (3)$$

كذلك فان عزم الانحناء  $M$  تعطى من العلاقة

$$\frac{dM}{dx} = -S \quad (4)$$

$$\frac{dM}{dx} = -\frac{\sigma \pi a^2}{3l^2} (l-x)^3 \quad (5)$$

$$M = -\frac{\sigma \pi a^2}{12l^2} (l-x)^4 \quad (6)$$

ويتلشى ثابت التكامل لتلاشى  $M$  عند الطرف الحر  $x = l$ .  
∴ عزم القصور الذاتى لمقطع الكابولى عند  $p$ .

$$I = \frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{\pi a^4}{4 l^4} (l-x)^4 \quad (7)$$

∴ الطاقة المخزونة في الكابولي نتيجة لانحنائه

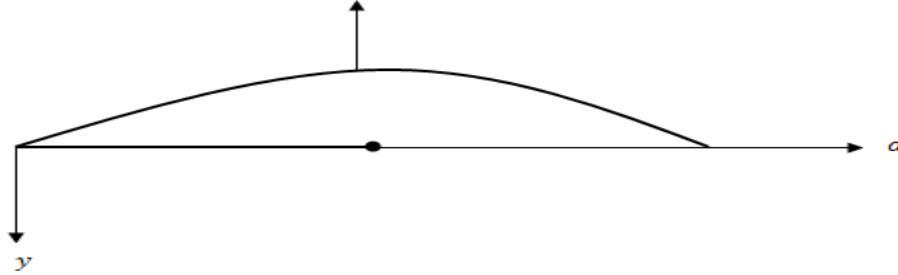
$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx \\
 &= \frac{\sigma^2 \pi}{18 E} \int_0^l (l-x)^4 dx \\
 \therefore U &= \frac{\sigma^2 \pi}{90 E} l^5 \quad (8)
 \end{aligned}$$

### مثال (3):

قضيب منتظم طوله  $2a$  وزنه  $W$  يرتكز على مستوى افقى. اثرت على منتصفه قوة راسية رفعتة الى ان ترك طرفاه المستوي. أثبت ان الشغل المبذول  $\frac{W^2 a^3}{20 EI}$ .

### الحل

لايجاد شكل القضيب فى وضعه النهائى ناخذ محورين احدهما افقى والاخر راسى الى أسفل عند احد طرفى القضيب وليكن الطرف الايسر  $o$ .



شكل النصف الايمن من القضيب تحدة العلاقة

$$EIy'' = \frac{W}{4a} x^2 \quad (1)$$

$$EIy' = \frac{Wx^3}{12a} + c \quad (2)$$

وحيث ان القضيب متمائل حول الرأسى عند منتصف القضيب .

فان  $y' = 0$  عند  $x = a$  ومنها .

$$c = -\frac{Wa^3}{12a} = -\frac{Wa^2}{12}$$

$$\therefore EIy' = \frac{Wx^3}{12a} - \frac{Wa^2}{12} = \frac{W}{12a}[x^3 - a^3] \quad (3)$$

$$\therefore EIy = \frac{W}{12a} \left[ \frac{x^4}{4} - a^3x \right] + c$$

ويتلشى ثابت التكامل لان  $x = 0, y = 0$

$$\therefore EIy = \frac{W}{12a} \left[ \frac{x^4}{4} - a^3x \right] \quad (4)$$

باتخاذ المستوى الافقى موضع قياسى فان طاقة جهد القضيب نتيجة لوضعة

$$= 2 \int_0^a -y \frac{W}{2a} dx$$

$$= \frac{W^2}{12a^2EI} \int_0^a \left[ a^3x - \frac{x^4}{4} \right] dx = \frac{3W^2a^3}{80EI} \quad (5)$$

طاقة جهد القضيب نتيجة لانحنائة

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^a \frac{M^2}{EI} dx$$

$$= \frac{W^2}{16a^2EI} \int_0^a x^4 dx = \frac{W^2a^3}{80EI} \quad (6)$$

∴ الشغل المبذول بواسطة القوة الرأسية يساوى مجموع طاقتى الجهد اللتين اكتسبها نتيجة لموضعة ونتيجة لانحنائة اى تساوى

$$= \frac{Wa^3}{20EI} \quad (7)$$



## تمارين على الباب الرابع

1. قضيب منتظم طوله  $l$  ووزن وحدة الاطوال منه  $\omega$  مرتكز في وضع افقى عند نهايته . أوجد هبوط اى نقطة من نقاط القضيب .

2. قضيب منتظم وزن وحدة الاطوال منه تساوى  $\omega$  ومرتكز في وضع افقى عند نهايته . وقف رجل ثقله  $W$  عند نقطة على بعد  $a$  من طرف  $b$ , من الطرف الاخر . أثبت ان انخفاض النقطة التى يقف عليها الرجل عن مستوى الحاملين يساوى

$$\frac{ab}{24 EI} \left[ \omega(a^2 + 3ab + b^2) + \frac{8ab}{a+b} W \right]$$

3. قضيب منتظم مرتكز عند نقطتى ثلثيه  $A, B$  افقيا . أثبت ان النسبة بين ارتفاع منتصف القضيب عن  $AB$  الى انخفاض نهاية القضيب عن  $AB$  تساوى 128 : 19 .

4. قضيب منتظم طوله  $4l$  وضع ثقل  $W$  عند منتصفه ومرتكز افقيا عند نقطتين على بعدين متساويين  $l$  من منتصفه (مركزه) . اذا كان القضيب عند كل من نقطتى الارتكاز . فاثبت ان  $W$  تساوى  $\frac{1}{6}$  وزن القضيب .

5. قضيب منتظم طوله  $4l$  مرتكز عند خمس نقاط على نفس الخط الافقى ولى ابعاد متساوية  $l$  من بعضهما . اثبت ان ردود الافعال عند نقاط الارتكاز تتناسب مع 32 : 26 : 11 اثبت ايضا ان عزم الانحناء عند منتصف القضيب وعند كل من نقطتى الارتكاز المجاوره له هو  $\frac{wl}{56}$ ,  $\frac{3wl}{112}$  حيث  $w$  وزن القضيب .

6. قضيب منتظم وزن وحدة الاطوال منه  $\omega$  وطوله  $3l$  مثبت عند طرفيه بحيث كان المماس للقضيب عند كل منهما افقيا . ارتكز أيضا عند نقطة منه تبعد مسافة  $l$  عن احد الطرفين . فاذا كان طرفا القضيب ونقطة الارتكاز على خط افقى واحد . فأوجد ردود الافعال وعزوم الانحناء عند الطرفين ونقطة الارتكاز .

7. قضيب منتظم  $ABCD$  وزن وحدة الاطوال منه  $\omega$  وطوله  $3l$  يرتكز عند النقط  $A, B, C, D$  حيث  $AB = BC = CD$  بحيث كان الخط الواصل بين النقط الاربعة افقيا . اوجد عزوم الانحناء عند كل من  $B, C$  ورد الفعل عند كل من النقط الاربعة .

- 8.** قضيب منتظم طوله  $2l$  يرتكز في وضع متمائل على حاملين على نفس الخط الافقى المسافة بينهما  $2a$ . اذا كانت  $l < 2a$ ، فأثبت ان عزم الانحناء يكون نهايه عظمى عند الحامل او عند المنتصف حسبما  $2l \geq (2 + \sqrt{2})a$  اذا كانت  $l > 2a$  فان عزم الانحناء يكون نهاية عظمى عند الحامل .
- 9.** قضيب مرن منتظم مثبت من احد طرفيه بحيث كان افقيا عندها . فإذا علق عند منتصف القضيب ثقلا مساو لوزنه . فأوجد انخفاض النهاية الحرة للقضيب.
- 10.** قضيب منتظم طوله  $5l$  ومرتكز في وضع متمائل على حاملين على نفس الخط الافقى كل منهما يبعد مسافة  $2l$  عن الطرف . أوجد النسبة بين ارتفاع منتصف القضيب عن مستوى الحاملين الى انخفاض النهاية الحرة عنها.
- 11.** قضيب مهمل الوزن  $AB$  ، صلابته  $EI$  وطوله  $2l$  طرفية مثبتان في حانطين راسيين بحيث كان المماس للقضيب عند كل من الطرفين افقيا. علق ثقل مقداره  $4\omega l$  من منتصف القضيب  $C$  ، كما حمل الجزء  $AC$  تحميلا منتظما كثافته الطولية  $\omega$  ، وحمل الجزء  $CB$  تحميلا منتظما كثافته الطولية  $2\omega$  ، اوجد ردود الافعال وعزم الانحناء عند كل من  $A, B$  . اوجد ايضا الهبوط عند المنتصف  $C$  .
- 12.** اثبت انه اذا ارتكز قضيب رفيع منتظم  $AB$  طوله  $l$  على حاملين ، احدهما عند الطرف  $A$  والاخر عند الطرف  $C$  تبعد مسافة  $(2l/3)$  عن  $A$  فان المماس للقضيب عند  $C$  يكون افقيا.
- 13.** قضيب ثقيل منتظم يرتكز على أربعة اوتاد في نفس المستوى بحيث كانت المسافة بين كل وتدين متتاليين  $100 \text{ ft}$  وكانت كتلته وحدة الاطوال من القضيب  $2 \tan s / \text{ft}$  احسب ردود الافعال عند الاوتاد وارسم منحني عزم الانحناء للقضيب كلة .
- 14.** قضيب منتظم مرتكز على اربعة اوتاد في خط افقى واحد اذا كانت المسافة الوسطى تساوى  $15 \text{ ft}$  والمسافتان الاخرتان  $10 \text{ ft}$  وكان القضيب يحمل ثقلا قدرة  $200 \text{ Ib / ft}$  موزع توزيعا منتظما على القضيب. ارسم عزم الانحناء عند اية نقطة من القضيب . واوجد الانخفاض عند اية نقط منه .
- 15.** بين ان الشغل المبذول في انحناء سلك مستقيم طوله  $2\pi a$  ليكون شكل دائرة نصف قطرها  $a$  هو 
$$\frac{\pi EI}{a}$$