جامعة جنوب الوادى

كلية التربية بالغردقة

الفرقة الثانية عام فيزياء & كيمياء

المادة : رياضيات (جزء الأستاتيكا والهيدروإستاتيكا)

إستاذ المادة / د. محمد محمد عبد العزيز

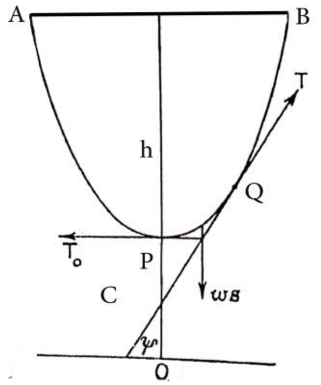
الفصل الدراسى الأول 2022-2023

الفصل الأول

الكتينة

تعريف (الكتينة العادية):

الكتينة هى المنحى الذى يعبرعن حالة خيط أو سلسلة منتظمة معلقة بحرية من نقطتين



$A\&B$ كما هوموضح بالشكل .

دعنا نعين الشد عند أسفل نقطة ب T_0 ,

والذى سوف يكون أفقيا .طول أى جزء منالسلسلة

مقاسا من النقطة p إلىأى نقطة Q.

الشد عندهذة النقطة يعين ب T وهذايمبل على الأفقى

بزاوية ψ . الوزن لوحدة الأطوال من السلسلة يعين ب ω .

الجزئ PQ من السلسلة يكون فى حالة إتزان تحت تأثير ثلاث قوى هى الوزن ωs

T_0, و T الشدود عند $P\&Q$.

المعادلة الذاتية للكتينة:

بتحليل قوى الأتزانرأسيا وأفقيا نحصل على

$$T \sin \psi = \omega s \qquad , \qquad T \cos \psi = T_0$$

إنه من المناسب أن ندخل ثابت آخر c بحيث يكون $T_0 = c\,\omega$

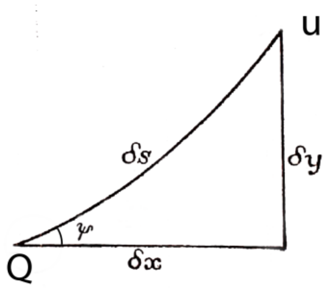
$$T \sin\psi = \omega s \qquad , \qquad T \cos\psi = \omega c$$

بالقسمة نحصل على

$$s = c \tan\psi \qquad (i)$$

هذه هى المعادلة الذاتية لمنحنى الكتينة (c يسمى باراميتر الكتينة) .

المعادلة الكارتيزية للكتينة:



لأيجاد المعادلة الكرتيزية لمنحنى الكتينة نتبع :

حيث أن $\tan\psi = \frac{dy}{dx}$ فإنه من (i) $\frac{dy}{dx} = \frac{s}{c}$

حيث أن $\tan\psi = \frac{dy}{dx}$ فإنه من (i) $\frac{dy}{dx} = \frac{s}{c}$

نعتبر العنصر الصغير δs من المنحنى والذى يربط النقطتين $Q \& U$ واللذين لهم الأحداثيات $(x,y) \& (x+\delta x, y+\delta y)$ على الترتيب و, إذن

$$(\delta s)^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2$$

بالقسمة على $(\delta x)^2 \& (\delta y)^2$ على التوالى نحصل على

$$\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right)^2 \cong 1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2$$

$$\left(\frac{\delta s}{\delta y}\right)^2 \cong 1 + \left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^2$$

وعندما يكون

$\delta s, \delta x, \delta y \to 0$

فإن المعادلات السابقة تؤول إلى

$$\left(\frac{d s}{d x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{d y}{dx}\right)^2 \qquad (ii)$$

$$\left(\frac{d s}{d y}\right)^2 = 1 + \left(\frac{d x}{d y}\right)^2 \qquad (iii)$$

من (ii) نحصل على :

$$\left(\frac{d s}{d x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{s}{c}\right)^2$$

$$\therefore \frac{d s}{d x} = \frac{\sqrt{c^2 + s^2}}{c}$$

$$\therefore dx = \frac{c}{\sqrt{c^2 + s^2}} \, ds$$

$$\therefore x = c \sinh^{-1} \frac{s}{c} \qquad (iv)$$

أو $$s = c \sinh \frac{x}{c} \qquad (v)$$

حيث $x = 0$ عندما $s = 0$

من (iii) نحصل على :

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1+\left(\frac{c}{s}\right)^2$$

$$\therefore \frac{ds}{dy} = \frac{\sqrt{c^2+s^2}}{s}$$

$$\therefore dy = \frac{s}{\sqrt{c^2+s^2}}\, ds$$

$$\therefore y = \sqrt{c^2+s^2}$$

أو $y^2 = s^2 + c^2 \qquad (vi)$

حيث $y = c$ عندما $s = 0 \,\&\, x = 0$

بالتعويض من (v) فى (vi) نحصل على :

$$y^2 = c^2\left(1+\sinh^2 \frac{x}{c}\right)$$

$$y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right) \qquad (vii)$$

وهذه هى المعادلة الكاتيزية لمنحى الكتينة .

المعادلات البارامترية للكتينة:

تلاحظ مما سبق أن $y = \sqrt{c^2+s^2}$ $\qquad x = c\sinh^{-1}\frac{s}{c}$

أى امكن التعبير عن الأحداثيات الكارتيزية $x \,\&\, y$ بدلالة المتغير s (براميتر)

أى أن المعادلتين السابقتين تمثلان المعادلات البارامترية لمنحنى الكتينة .

الشد عند أى نقطةعلى الكتينة:

حيث أن :

$$T \sin \psi = \omega \; s \qquad , \qquad T \cos \psi = \omega \; c$$

فإن :

$$T^2 = \omega^2 \left(s^2 + c^2 \right)$$

بالتعويض من (vi) نحصل غلى :

$$T^2 = \omega^2 \; y^2$$

$$\therefore \; T = \omega \; y$$

هكذا نجد أن الشد أى نقطة غلى الكتينة يكون متناسب مع إرتفاع النقطة فوق محور ox والذى يسمى غادة بدليل الكتينة أى يعتمد على الأحداثى y .

أسالاك البرق والتليفون:

عندما تكون c كبيرة فإنه من (vii) نحصل على :

$$y = c \cosh \left(\frac{x}{c} \right) = \frac{c}{2} \left(e^{x/2} + e^{-x/2} \right)$$

$$=\frac{c}{2}\left\{\left(1+\frac{x}{c}+\frac{x^2}{2c^2}+........\right)+\left(1-\frac{x}{c}+\frac{x^2}{2c^2}-........\right)\right\}$$

$$=c+\frac{x^2}{2c^2}+.......$$

$$\therefore y-c\cong\frac{x^2}{2c^2}\qquad(x)$$

ذلك مع الوضع فى الأعتبار أن c كبيرة ونتيجة لهذه النتيجةفإن المنحى يكون تقريبا قطع مكافئ ذات وتر بؤرى طوله هو $2c$

تعريف (بحرالكتينة):

بحر الكتينة هو المسافة AB أى المسافة بين نقطتى التعليق .

إذا كان نصف بحر الكتينة هو $k=\frac{1}{2}AB$ فإن نصف طول السلسة $s=s_A=s_B$ يعطى من v على الصورة :

$$s=\frac{c}{2}\sinh\frac{x}{c}=\frac{c}{2}\left\{\left(1+\frac{k}{c}+\frac{k^2}{2c^2}+\frac{k^3}{6c^3}+.......\right)-\left(1-\frac{k}{c}+\frac{k^2}{2c^2}-\frac{k^3}{6c^3}+.......\right)\right\}$$

$$=\frac{c}{2}\left\{\frac{2k}{c}+\frac{k^3}{3c^3}+........\right\}$$

وبفرض أن c كبيرة فإن :

$$s=k+\frac{k^3}{6c^2}$$

$$\therefore\ s-k=\frac{k^3}{6c^2}\qquad(xi)$$

تعريف (سهم الكتينة):

سهم الكتينة هو المسافة العمودية من أسفل نقطة P إلى بحر الكتينة AB .

العلاقة بين بحر وسهم الكتينة:

إذا كان h هو سهم الكتينة , فإنه عندما $x=0\ ,y=c\ \ \&\ \ x=k\ \ ,y\cong c+\dfrac{k^2}{2\,c}$

وهذا يأتى من (x) هنا يمكن الحصول على :

$$h=\frac{k^2}{2\,c} \qquad (*)$$

وهذا يؤدى إلى $\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{4h^2}{k^4} \qquad (*)$

عندئذ من (xi) نحصل على :

$$s-k=\frac{k^3}{6\,c^2}=\left(\frac{k^3}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{c^2}\right)=\left(\frac{k^3}{6}\right)\cdot\left(\frac{4h^2}{k^4}\right)=\frac{4\,h^2}{6k}$$

$$\therefore\ 2\,(s-k)=\left(\frac{8}{3}\right)\cdot\left(\frac{h^2}{2k}\right)$$

هذا يعنى أن الفرق بين طول السلسلة $2\,s$ وبحر الكتينة $2\,k$ يكون مساويا للنتيجة :

$$\therefore\ 2\,(s-k)=\left(\frac{8}{3}\right)\cdot\left(\frac{\left((sag)^2\right)}{span}\right) \qquad (*\,*)$$

العلاقتين $(*)$ & $(**)$ توضحان العلاقة بين بحر وسهم الكتينة .

ملاحظة:

عندما c . تكون كبيرة كما ذكر اعلاه فإن السلسلة أو السلك تعبر عن أسلاك البرق والتليفون . فى هذه الحالة يكون طول السلك $2s$ يكون أكبر قليلا عن بحر الكتينة AB . وبالتالى يكون السهم صغيرا .

أمثلة

كثير من المسائل التى تشمل الكتينة يمكن أن تحل بإستعمال الصيغ الآتية :

$$s = c\sinh\frac{x}{c} \quad (i) \qquad s = c\tan\psi \quad (ii)$$

$$y = \sqrt{s^2 + c^2} \quad (iv) \qquad x = c\sinh^{-1}\frac{s}{c} \quad (iii)$$

$$y^2 = s^2 + c^2 \quad (vii) \qquad y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right) \quad (vi)$$

$$T_0 = c\,\omega \quad (viii) \qquad T = \omega\, y \quad (x)$$

كل البارامترات المذكورة فى المعادلات السابقة تم تعريفها مسبقا .

==

مثال(1):

سلك كهرباء طوله $140 \ m$ وكتلة وجدة الاطوال منه هى $3\,kg/m$ ومعلق بين برجين يبعدان عن بعضهما مسافة $120 \ m$ ويقعان على نفس الأرتفاع . عين سهم الكتينة وقيمة أقصى شد فى السلك .

الحل

السهم h يمكن إيجاده من المعادلة (vii) على أساس أنه يمكن تعيين c يين كما يلى

$$y_B^2 - s_B^2 = c^2 \qquad (vii)$$

$$(h+c)^2 - (70)^2 = c^2 \qquad (1)$$ أو

المسافة c يمكن تعينها من المعادلة (i) :

$$s_B = c \ \sinh \frac{x_B}{c} \qquad (i)$$

أو

$$70 \ m = c \ \sinh \frac{60}{c} \qquad (2)$$

هذه المعادلة يجب أن تحل عدديا لأيجاد c أو بإستخدام آلة حاسبة حديثة لتكون :

$$c = 61.45 \ m$$

حل آخر محتمل هو $c = -61.45 \ m$ ولكن هذا الحل ليس له معننا طبيعيا .

الآن بالتعويض بهذه القيمة فى المعادلة (1) نحصل على:

$$(h + 61.45 \ m)^2 - (70 \ m)^2 = (61,45 m)^2$$

حل هذه المعادلة يعطى :

$$h = 31.70 \ m$$

القيمة الأخرى السالبة تهمل لأن ليس اها معنى .

أقصى قيمة للشد T_{max} تحدث عند النقط $B\ or\ A$ وهذا يمكن حسابه من المعادلة (x)

$$T_{max} = \omega\, y_B \qquad (x)$$

$$T_{max} = \left[(3kg/m)(98.1\ m/s^2)\right]\ [31.70m + 61.45m]$$
$$= 2740\ \ N = 2.74\ K$$

مثال(2):

سلسلة معلقة بين نقطتين على نفس الأرتفاع ويبعدان عن بعضهما مسافة قدرها $400\ ft$ فإذا كان سهم الكتينة هو $40\ ft$ ووزن وحدة الأطوال من السلسلة هو $4Ib/ft$. عين طول الكتينة وقيمة الشد عند أسفل نقطة .

الحل

طول السلسلة s_B يمن أسفل نقطة إلى النقطة B يمكن إيجاده من المعادلة (i) على أساس أنه يمكن تعيين c يبين كما يلى :

$$s = c\ \sinh\ \frac{x}{c} \qquad (i)$$
$$= c\sinh\ 200\ /c \qquad (1)$$

المسافة c يمكن تعينها من المعادلة (vi)

$$y_B = c\cosh\left(\frac{x_B}{c}\right) \qquad (vi)$$

أو

$$c + 40\ ft = c\cosh 200\ ft\ /c \qquad (2)$$

هذه المعادلة يجب أن تحل عدديا لأيجاد c أو بإستخدام آلة حاسبة حديثة لتكون :

$$c = 506.53\ ft$$

الآن بالتعويض بهذه القيمة فى المعادلة (1) المعادلة نحصل على:

$$\begin{aligned} s_B &= c\sinh\frac{x_B}{c} \\ &= (506.53)\sinh 200\ ft/506.53\,ft \\ &= 205.237\ ft \end{aligned}$$

الشد عند أسفل نقطة يكون أفقيا , ويمكن إيجاده من المعادلة $(viii)$

$$\begin{aligned} T_0 &= (4\,Ib/ft)\ (506.53). \\ &= 2.025\ IB. \end{aligned}$$

مثال(3):

سلسلة معلقة بين نقطتين على نفس الأرتفاع ويبعدان عن بعضهما مسافة قدرها $20\ m$ فإذا كان سهم الكتينة هو $6\ m$. فإذا كانت الكتلة الكلية للسلسلة هى $45\ kg$ فعين المسافة بين نقطتى التعليق وكذلك أقصى قيمة للشد .

الحل

المسافة بين نقطتى التعليق $2x_B$ حيث x_B يمكن تعينها من المعادلة (i) على أساس أنه يمكن تعيين c كما يلى :

$$s_B = c \sinh \frac{x_B}{c} \qquad (i)$$

وبالتعويض عن

$s_B = 10\, m$ نحصل

على :

$$10\ m = c \sinh \frac{x_B}{c} \qquad (1)$$

المسافة c يمكن إيجادها من المعادلة (vii)

$$y_B^2 - s_B^2 = c^2 \qquad (vii)$$

أو

$$(h + c)^2 - (70)^2 = c^2$$

$$(6\, m + c)^2 - (10)^2 = c^2$$

هذه المعادلة تأخذ الصورة :

$$36 + 12\, c + c^2 - 100 = c^2$$

الحدود c^2 تلغى بعضها البعض وتتحول المعادلة إلى معادلة خطية حلها هو :

$$c = 5.333\ m$$

وبالتعويض فى المعادلة (1) لتكون :

$$10 = 5.333 \sinh \frac{x_B}{5.333}$$

وبحلها عدديا نحصل على :

$$x_B = 7.393\ m$$

وعلى ذلك تكون المسافة بين نقطتى التعليق هى :

$$2\,x_B = 14.786\ m$$

أقصى شد يحدث عند النقطة B عند النقطة والذى يمكن تعيينه من المعادلة (x)

$$T_{max} = \omega\, y_B \qquad (x)$$

$$T_{max} = \left(\frac{Total\ \ weight\ \ of\ \ the\ \ chain}{Total\ \ length\ \ of\ \ the\ \ chain} \right) y_B$$

$$= \left(\frac{(45.kg)\ (98.1\, m/s^2)}{20\, m} \right) (6\, m + 5.333\, m\ ) = 250\ N.$$

مثال(4):

سلسلة معلقة بين نقطتين على نفس الأرتفاع .طولها $50\ m$. فإذا كانت الكتلة الكلية للسلسلة هى $50\ kg$وكان أقصى شد فى السلسلة لا يزيدعن $500\ N$.فعين أقصى بحر للسلسلة وكذلك سهم الكتينة .

الحل

أقصى شدتم تحديده فى رأس المسألةليكون $T_{\max} = 500\ N$ والذى سوف يكونعند النقطة B وبالتعويض فى المعادلة

$$T_{\max} = \omega\, y_B \qquad (x)$$

نحصل على :

$$y_B = \frac{T_{\max}}{\omega} = \frac{T_{\max}}{\left(\dfrac{Total\ \ weight\ \ of\ \ the\ \ chain}{Total\ \ length\ of\ \ the\ \ chain}\right)}$$

$$= \frac{500\ N}{\left(\dfrac{(50\,kg)\ (98.1\,m/s^2)}{50\ m}\right)} = 50.97\,m$$

المسافة بين نقطتى التعليق هي $2x_B$ وسوف نحتاج لأستعمال قيمة y_B السابقة لتعيين x_B وذلك بالتعويض فى المعادلة (vi)

$$50.97m = c\cosh\left(\frac{x_B}{c}\right) \qquad (1)$$

المسافة c يمكن تعينها الأن من المعادلة :

$$y_B^2 - s_B^2 = c^2 \qquad (vii)$$

أى

$$(50.97\ m)^2 - (25\ m)^2 = c^2$$

وحلها هو

$$c = \pm\, 44.42\,m$$

الأشارة السالبة ليس لها معننا فيزيائيا وبالتعويض بالقيمة الموجبة فى المعادلة (1)نحصل على:

$$50.97m = 44.42 \cosh\left(\frac{x_B}{44.42}\right) \qquad (2)$$

بحل المعادلة (1) عدديا نحصل على :

$$x_B = 23.836 \ m$$

وبذلك تكون المسافة بين نقطتى التعليق هي :

$$2x_B = 47.7 \ m$$

وحيث أن كلا من $c \ \& \ x_B$ معروفة فإن سهم الكتية

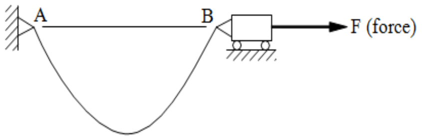
$$h = y_B - c = (50.97 \ m) \ (44.42 \ m) = 6.55 \ m \ .$$

يتعين بالشكل :

مثال(5):

سلسلة معلقة بين نقطتين $A \& B$ حيث النقطة A ثابتة و النقطة B متحركة, فإذا كانطولها $80 \ ft$ ووزن وحدة الأطوال هو $0.3 \ Ib/ft$,وكان بحر الكتينة هو $50 \ ft$, فعين القوة F والتى تثبت النقطة المتحركة B وأيضا عين سهم الكتينة .

الحل



القوة F المؤثرة عند النقطة المتحركة B تساوى

المركبة الأفقية للشد T_0 عند أسفل نقطة للكتينة أى

$F = T_0$ حيث يمكن تعينها من المعادلة $T_0 = \omega \ c$

وبالتالى نحصل على :

$$F = (0.3 \ Ib/ft)c \qquad (1)$$

المسافة c يمكن إيجادها من

المعادلة (i)

$$s_B = c \ \sinh \ \frac{x_B}{c} \qquad (i)$$

أو

$$40 \ ft = c \ \sinh \ 25 \ ft \ /c \qquad (2)$$

هذه المعادلة يجب أن تحل عدديا لأيجاد c فتكون النتيجة هى :

$$c = \pm 14.229 \ ft$$

القيمة السالبة ليس لها معنى وبإستعمال القيمة الموجبة فإن القوة الأفقية المطلوبة فى المعادلة (1) تأخذ القيمة :

$$F = (0.3 \ Ib/ft) \ (14.299 \ ft) = 4.27 \ Ib$$

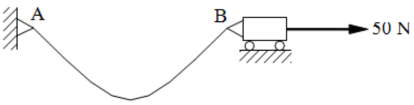
ولأيجاد سهم الكتينة h نعوض فى المعادلة :

$$\begin{aligned} h &= y_B - c = c \cosh \ (x_B/c) - c \\ &= (14.299 \ ft) \cosh \ (25 . ft/14.299 \ ft) - 14.299 \ ft \\ &= 28.2 \ ft. \end{aligned}$$

مثال(6):

سلسلة معلقة بين نقطتين $A \& B$ حيث النقطة A ثابتةو النقطة B متحركة, فإذا كانطولها $40\ m$ وكتلة وحدة الأطوال هو $0.4\ kg/m$,وكانت القوة F والتى تثبت النقطة المتحركة B هى $50\ N$ فى الأتجاه الأفقى , فعين بحر وسهم الكتينية .

الحل



المسافة بين نقطتى التعليق $2x_B$ حيث x_B يمكن تعينها من المعادلة (i) على أساس أنه يمكن تعيين c كما يلى :

$$s_B = c \sinh \frac{x_B}{c} \qquad (1)$$

القوة F المؤثرة عند النقطة المتحركة B تساوى المركبة الأفقية للشد T_0 عند أسفل نقطة للكتينة أى $F = T_0$ حيث يمكن تعين c من المعادلة $T_0 = \omega c$ وبالتالى نحصل على :

$$50 = \left[(0.4\ kg/m)(9.81\ m/s^2)\right] c$$

والتى تعطى :

$$c = 12.742\ m$$

وبالتعويض بهذه القيمة وقيمة $s_B = 20\ m$ فى المعادلة (1) نحصل على :

$$20\,m = (12.742\ m)\sinh\frac{x_B}{12.742\ m}$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على :

$$x_B = 15.708\ m$$

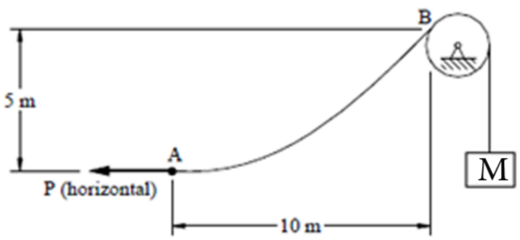
وبالتالى فإن بحر الكتينة هو :

$$2x_B = 2\,(15.708\ m) = 31.4\,m$$

ولأيجاد سهم الكتينة h نعوض فى المعادلة :

$$\begin{aligned} h &= y_B - c = c\cosh(x_B/c) - c \\ &= (12.742\ m)\cosh(15.708\ m/12.742\ m) - 12.742\ m \\ &= 28.2\ m \end{aligned}$$

مثال(7):



سلسلة تمرعلى بكرة ملساء مثبتة عند النقطة B بحيث

يتدلى جزء من السلسلة يحمل فى نهايته كتلة M.

الطرف الأخر من السلسلة مسحوب بواسطة قوة.

أفقية P عند النقطة A. فإذا كانت كتلة وحدة

الأطوال من السلسلة هى $0.3\ kg/m$,

فعين كلا من $P \,\&\, M$ والتى تحافظ على السلسلة فى الوضع المبين فى لشكل المقابل .

الحل

القوة P المؤثرة عند النقطة A تساوى المركبة الأفقية للشد T_0 عند أسفل نقطة للكتينة أى $P = T_0 = \omega\ c$ وبالتالى نحصل على :

$$P = (0.3\ kg/m)(9.81\ m/s^2)\ c = (2.943\ N/m)\ c \qquad (1)$$

المسافة c يمكن إيجادها من المعادلة (vi)

$$y_B = c \cosh\left(\frac{xB}{c}\right) \qquad (vi)$$

أو

$$5\,m + c = c\ \cosh\ 10m/c$$

هذه المعادلة يجب أن تحل عدديا لأيجاد c فتكون النتيجة هى :

$$c = 10.743\ m$$

وبالتعويض بهذه القيمة فى المعادلة (1) نحصل على :

$$P = (0.3\ kg/m)(9.81\ m/s^2)\ (c = 10.743\ m) = 31.617\ N$$

ولتعيين الكتلة M نعلم أن الشد عند النقطة P يجب أن يساوى الوزن Mg أى :

$$T_B = Mg$$

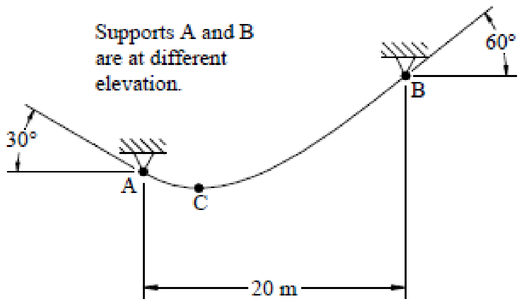
وبالتالى فإن الكتلة تكون :

$$M = T_B / g \qquad (2)$$

وحيث أن $T_B = \omega y_B$ فإن المعادلة (2) تعطى :

$$M = [(2.943\ N/m)\ (5\,m + 10.743\ m)]/(9.81\,m/s^2) = 4.72\ Kg$$

مثال(8):



سلسلة تصنع الزوايا $60°$, $30°$ عند نقط التعليق

كما هو موضح بالشكل المقابل . عين موضع النقطة

c بالنسبة للنقطة A .عين أيضا الشد عند نفس النقطة

إذا كانت الكتلة لوحدة الطول من السلسلة هى

$0.6\,kg/m$.

الحل

البيانات الهندسية موضحة بالشكل . لتعيين موضع النقطة c بالنسبة للنقطة A نحتاج لتعيين الأحداثيات x_A , y_B . يمكن الحصول على هذه الأحداثيات بإستعمال حقيقة أن الميل عند النقطة A معروف وذلك من المعادلة :

$$-\tan 30° = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{at\ A} = \left[\frac{d\,(c\cosh\,(x/c))}{dx}\right]_{at\ A} = \sinh\,(x_A/c)$$

ومنهايمكن إيجاد :

$$x_A = c\sinh^{-1}(-\tan 30^\circ) \qquad (1)$$

وبالمثل عند النقطة B نحصل على :

$$x_B = c\sinh^{-1}(\tan 60^\circ) \qquad (2)$$

الأحداثيات x_A & x_B البعد بينهما $20-m$ يرتبطان ببعضهما بالمعادلة :

$$x_A - x_B = 20 - m$$

وبالتعويض من المعادلتين (2) & (1) نحصل على :

$$c\sinh^{-1}(-\tan 30^\circ) - c\sinh^{-1}(\tan 60^\circ) = 20$$

وبما أن هذه المعادلة خطية فى c, فمن السهولة أن تحل لتعطى $c = 10.717\ m$

الآن المعادلة (1) تعطى :

$$x_A = 10.717\ m\ \sinh^{-1}(-\tan 30^\circ) = -5.887\ m$$

الأحداثى y للنقطة A يمكن الآن حسابه من المعادلة (vi) أى :

$$y_A = c\cosh\left(\frac{x_A}{c}\right) = (10.717\ m)\cosh\left(\frac{-5.887\ m}{10.717\ m}\right) = 12.375\ m$$

المسافة الرأسية بين نقطة التعليق A وأسفل نقطة c تعطى من :

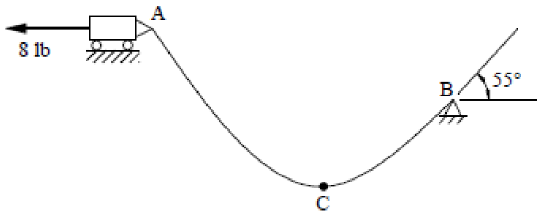
$$d = y_A - c = 12.375\ m - (10.717\ m) = 1.658\ m$$

الشد عند النقطة A يعطى من المعادلة (x)

$$T = \omega\, y_A = [(0.6\ Kg/m)\ (9.81\ m/s^2)](12.375\ m) = 72.8\ N$$

مثال(9):

سلك يزن $0.2\ lb/ft$ معلق بنقطة متحركة A



ويصنع زاوية 55° عند نقطة ثابتة B.
نقاط

التعليق $A \,\&\, B$ ليست على نفس الأرتفاع
كما

هو موضح بالشكل المقابل . عين موضع النقطة

c بالنسبة للنقطة B .عين أيضا الشد عند النقطة c

الحل

البيانات الهندسية موضحة بالشكل . لتعيين موضع النقطة c بالنسبة للنقطة B نحتاج لتعيين الأحداثيات $x_B,\ y_B$. يمكن الحصول على هذه الأحداثيات بإستعمال حقيقة أن الميل عند النقطة B معروف وذلك من المعادلة :

$$\tan 55^\circ = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{at\ B} = \left[\frac{d\ (c\cosh (x/c))}{dx}\right]_{at\ B} = \sinh (x_B/c)$$

ومنهايمكن إيجاد :

$$x_B = c \sinh^{-1}(\tan 55^\circ)$$

وبالمثل عند النقطة B نحصل على :

$$x_B = c \sinh^{-1}(\tan 60^\circ) \qquad (1)$$

قيمة c يمكن تعينها من ملاحظة أن القوة عند النقطة A تساوي المركبة الأفقية للشد T_0 ملاحظةعند النقطة A. المعادلة $(viii)$ فى الصورة:

$$T_0 = c\,\omega$$

وبالتعويض فى هذهالمعادلة من البيانات المعطاة نحصل على :

$$8\,lb = (0.2\,lb/ft)\,c$$

ومنها نحصل على :

$$c = 40\ ft \qquad (2)$$

وبالتعويض فى المعادلة (1) نحصل على :

$$x_B = (40\ ft)\sinh^{-1}(\tan 60^\circ) = 46.169\ ft$$

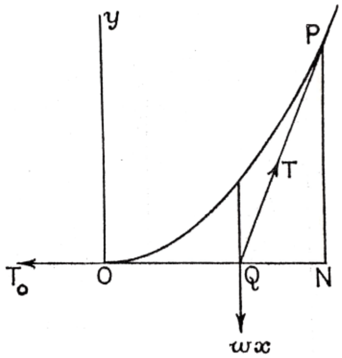
المسافة الرأسية بين النقطة B وأسفل نقطة c تعطى من :

$$d = y_B - c = c\cosh(x_B/c) - c$$
$$= (40\ ft)\cosh(46.169\ ft/40\ ft)) - 40\ ft = 29.7\ ft$$

الشد عند النقطة B يعطى من المعادلة $T_0 = 8\,lb$ (x) :

أمثلة عملية

مثال (1) (الكوبرى المعلق):



إذا كانت سلسلة معلقة تحمل حملا متصل موزع بإنتظام افقيا بحيث تأخذ شكل قطع مكافئ

إذا كانت O هى أسفل نقطة من السلسلة ,

وكانت P هى اى نقطة من السلسلة والتى إحداثياتها (x, y) فى النظام الكارتيزى, وكان الحمل بواسطة الجزء OP يتناسب مع المسافة ألفقية ON

والذى يؤثر عند النقطة Q والتى هى منتصف المسافة $x = ON$, فإن الحمل سوف يكون ωx حيث ω هى وزن وحدة الأطوال من السلسلة. القوى الأخرى والتى تؤثر على الجزء OP هى الشد الأفقى عند أسفل نقطة T_0 والشد T عند النقطة P, هذه القوى الثلاث تتقاطع عند النقطة Q ويكون المثلث PNQ هو مثلث القوى فيكون :

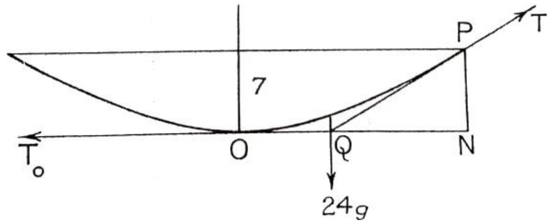
$$\frac{\omega x}{PN} = \frac{T_0}{NQ} \qquad \therefore \quad T_0 y = \frac{1}{2}\omega x^2$$

عندئذ إذا إعتبرنا أن $T_0 = \omega c$ فإننا نحصل على $y = \frac{x^2}{2\,c}$

وهذا يعنى أن منحنى السلسلة يأخذ شكل القطع المكافئ .

فإذا أعتبرنا أن بحر الكتينة للكوبرى المعلق هو $96\ m$ وأن سهم الكتينة هو $7\ m$, وكان فرعى السلسلة يحملان حمل قدره $1000\ kg$ لكل متر أفقى .فأوجد الشد عند أسفل نقطة وعند أقصى نقطة .

الحل



الحمل بواسطة الجزء OP يكون $48gkN$ ويكون المثلث PNQ هو مثلث القوى حيث :

$$QN = 48\,m \quad , \quad PN = 7\,m \qquad \therefore Qp = 25\,m$$

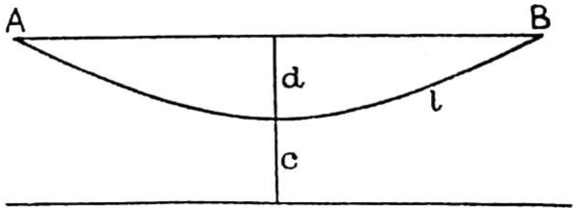
$$\frac{T_0}{24} = \frac{T}{25} = \frac{48g}{7}$$

$$\therefore T = 1680\,kN \quad , \quad T_0 \cong 1612.8\ \ kN$$

مثال (2) :

سلسلة منتظمة طولها $2l$ ووزن وحدة الأطوال منها هو ω وكانت السلسلة معلقة بين نقطتين فى مستوى أفقى واحد , وكان أقصى عمق للسلسلة هو d . أثبت أن الشد عند أسفل نقطة لها هو $\omega\,(l^2 - d^2)/2d$.وإذا كان $d = 20\,m \quad \& \quad l = 50\,m$ فأوجد المسافة بين نقطتى التعليق .

الحل



لمنحى الكتينة يكون : $y^2 = c^2 + s^2$

عند النقطة B يكون $s = l$, $By = c + d$

$$\therefore \quad (c+d)^2 = c^2 + l^2$$

ومنها يكون

$$2cd = l^2 - d^2$$

$$\therefore \quad c = l^2 - d^2/2d$$

وبالتالى يكون الشد عند أسفل نقطة هو:

$$T_0 = \omega c = \omega\,(l^2 - d^2)/2d$$

الآن إذا كان $l = 50\,m$ & $d = 20\,m$ فإن :

$$c = 2500 - 400/40 = 105/2$$

ولكن

$$s = c \sinh x/c$$

أو

$$x = c \sinh^{-1} s/c$$

$$\therefore \qquad x = (105/2)\sinh^{-1}(20/21)$$

$$= (105/2)lin\left[(20/21) + \sqrt{\{1 + (20/21)^2\}}\right]$$

$$= (105/2)lin(49/21)$$

عندئذ يكون

$$AB = 2x = AB = 105 \times 2.303\ log_{10}(49/21) \cong 89\ m$$

==

EXERCISES:

(1)A rope has an effective length of $20\ m$and mass$5\ kg$ per miter. One end of the rope is $4\ m$ higher than the other. Find the maximum tension in the rope when the tangent at the lower end is horizontal.

(2)A uniform chain of length $2l$ has its ends fixed at two points at the same level. The sag at the middle is h .prove that the span is $[(l^2 - h)/h]lin[(l + h)/(l - h)]$.

(3)A uniform wire hangs freely from tow points at the same level $200\ m$apart. The sag is $15\ m$. Show the greatest tension is approximately $348\ \omega$ and the length of wire is approximately $203\ m$

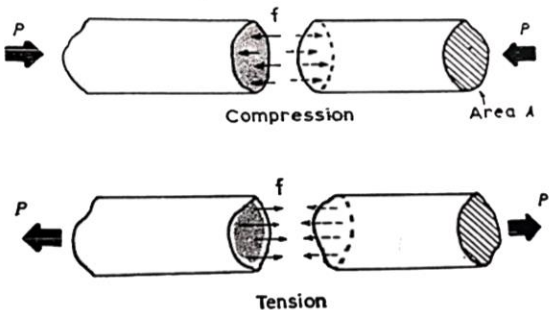
الفصل الثانى

الأجهاد والأنفعال

تعريف (الأجهاد):

الأجهاد هو النسبة بين الحمل (الثقل) P ومساحة المقطع من الجسم A أو هو القوة لوحدة المساحات أى :

$$f = \frac{P}{A}$$



ووحدة القياس هنا هى lb/in^2 فى النظامالأنجليزى أو N/m^2 فى النظام الفرنسى.
الوحدة الفرنسية N/m^2 تسمى بسكال إختصارا Pa وهى وحدة صغيرة ولذا توجد وحدات أخرى أكبر وهى :

$$1\,KPa = 10^3\ Pa = 10^3\ N/m^2 \quad (KPa = Kilo\ \ Pascal)$$

$$1\,MPa = 10^6\ Pa = 10^6\ N/m^2 = 1\ \ N/mm^2 \quad (MPa = Mega\ \ Pascal)$$

$$1\,GPa = 10^9\ Pa = 10^9\ N/m^2 \quad (GPa = Gega\ \ Pascal)$$

تعريف (الأنفعال):

الأنفعال هو النسبة بين الزيادة (النقصان)فى الطول (التغير فى الطول) x والطول الأصلى lأو هو الزيادة(النقصان)فى الطول لوحدة الأطوال وذلك طبقا هل الحمل هو شد أو ضغط :

$$e = \frac{x}{l}$$

العلاقة بين الأحهاد والأنفعال:

قانون هوك يعنى أن

$$E = \frac{f}{e}$$

E يسمى معمل ينج ووحداته هى وحدات الأجهاد .

والتى يمكن كتابتها فى الصور الآتية :

$$e = \frac{f}{E} \quad \& \quad f = e\,E$$

==

أمثلة

مثال(1):

قطعة من المطاط تحمل ماكينة حملها $1000\ lb$ لتنضغط بمقدار $0.2\ in$. إذا كان الأنفعال لا يزيد عن $40\ lb/in^2$. عين قطر وسمك قطعة المطاط ذات المقطع الدائرى . إعتبر $E = 150\ lb/in^2$.

الحل

$$f = \frac{P}{A} = \frac{1000}{\pi (d/2)^2}$$

أى :

$$40 = \frac{1000}{\pi d^2/4}$$

حيث d هو قطر القطعة الدائرية. ومنها نحصل على :

$$d^2 = 31.83\ in^2$$

وعلى ذلك فإن :

$$d = 5.64\ in$$

أيضا الأنفعال يتعين من :

$$e = \frac{x}{l}$$

ولكن

$$e = \frac{f}{E}$$

إذن:

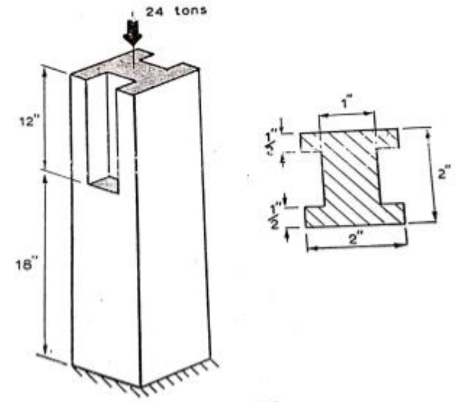
$$e = \frac{40}{150} = \frac{0.2}{l}$$

وعلى ذلك فإن سمك قطعة المطاط هى :

$$l = 0.75 \ in$$

مثال(2):

الشكل يوضح قطعة من الحديد على شكل منشور رباعى ذو قاعدة مربعة طول ضلعها $2\ in$ وإرتفاعه $30\ in$ فإذا تم عمل تجويفينمتكافئين متواجهين كما هو موضح .فإذا كان المنشور يحمل ثقلا قدره $24\ tons$ وكان $E = 1250\ ton/in^2$ فأوجد مقدار النقص فى الطول .



الحل

أولا : فى الجزء الصلب ذو الطول $18 \ in$

$$x_1 = e_1 \, l_1 = 18 \ e_1$$

وكذلك $f_1 = \frac{P}{A_1} = \frac{24}{2 \times 2} = 6 \ ton / in^2$

إذن $e_1 = \frac{f_1}{E} = \frac{6}{E}$

ثانيا : فى الجزء الأجوف ذو الطول $12 \ in$

$$x_2 = e_2 \, l_2 = 12 \ e_2$$

وكذلك $f_2 = \frac{P}{A_2} = \frac{24}{(2 \times 2) - 2\,(1 \times (1/2))} = \frac{24}{(2 \times 2) - 1} = \frac{24}{3} = 8 \ ton / in^2$

إذن $e_2 = \frac{f_2}{E} = \frac{8}{E}$

وبالتالى فإن مقدار النقص الحادث فى الطول هو :

$$x = x_1 + x_2 = 18 \times \frac{6}{E_1} + 12 \times \frac{8}{E} = \frac{204}{E} = \frac{204}{1250} = 0.0163 \ in$$

=====================================

مثال(3):

قضيب ذات مقطع $10\ mm \times 10\ mm$ يتحمل شد محورى مقداره $10\ KN$. إحسب الأحهاد الواقع عليه .

الحل

$$f = \frac{P}{A} = \frac{10\ KN}{10\ mm \times 10\ mm} = \frac{10 \times 10^{3}\ N}{10^{2}(mm)^{2}} = \frac{10 \times 10^{3} N}{10^{2}(m/1000)^{2}}$$

$$= \frac{10 \times 10^{3} \times 10^{6}}{10^{2}} \times \frac{N}{m^{2}} = 100 \times 10^{6} \frac{N}{m^{2}} = 100\,MPa$$

==

مثال(4):

قضيب طوله $10\ mm$ يتحمل شد محورى مقداره $10\ KN$. فإذا كان الطول بعد تأثير الشد هو $100.1\ mm$. فإحسب الأنفعال الناتج .

الحل

$$e = \frac{x}{l} = \frac{(100.1 - 100)\,mm}{100\ mm} = \frac{0.1\ mm}{100\ mm} = 0.001$$

==

مثال(5):

قضيب طوله $10\ mm$ يتحمل ضغط محورى مقداره $10\ KN$. فإذا كان الطول بعد تأثير الضغط هو $99\ mm$ فإحسب الأنفعال الناتج .

الحل

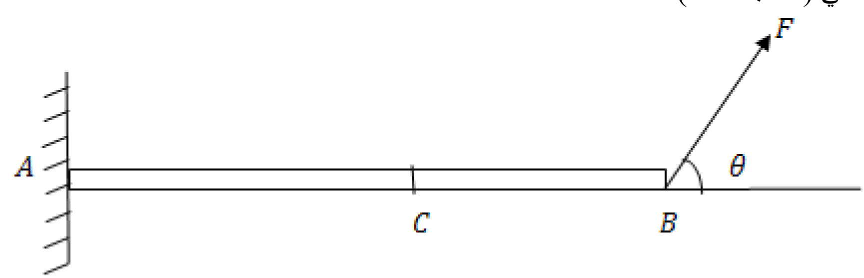
$$e = \frac{x}{l} = \frac{(99 - 100)\ mm}{100\ mm} = \frac{-1\ mm}{100\ mm} = -0.01$$

الباب الثالث

اتزان القضبان الرفيعة تحت تأثير قوي غير محورية

أولا:القوي القاصة وعزم الانحناء

درسنا فيما سبق اتزان القضبان الرفيعة تحت تأثير قوي محورية ، أي أن القوي تؤثر في اتجاه محور القضيب وعرفنا إنه يكون في القضبان قوي أو إجهادات داخلية .
وسوف ندرس في هذا الباب دراسة اتزان القضبان الرفيعة عندما تؤثر عليها قوي غير محوريه . في هذه الحالة تنشأ إجهادات داخلية في القضبان وتظهر عند المقاطع قوي قاصة عمودية علي محاور القضبان وعزوم انحناء.
في بعض المجالات مثل المباني والإنشاءات الهندسية يكون من المهم حساب هذه القوي القاصة وعزوم الانحناء .
ويجب الإشارة هنا إلي أن هذا الموضوع من الموضوعات التي تهم المهندسين ويدرسه طلاب كلية الهندسة وذلك لأهمية دراسة التأثيرات الناتجة من قوي التحميل المختلفة وعلاقتها بالإجهادات الداخلية من شد أو ضغط وقوي قاصة وكذلك عزوم الانحناء وذلك في الإنشاءات الهندسية المختلفة.
ولكي نلمس وجود هذه القوي الداخلية من شد أو ضغط وقوي قاصة وعزوم انحناء نعتبر اتزان قضيب أفقي خفيف AB مثبت أحد طرفية A في حائط رأسي ويؤثر في الطرف الحر B للقضيب قوة مقدارها F في اتجاه يصنع زاوية θ مع الأفقي (كما بالشكل)



نعتبر مقطع للقضيب عند C . لكي يتزن الجزء CB من القضيب فإنه يجب أن تظهر عند المقطع C قوتان إحداهما T في اتجاه محور القضيب وتساوي مركبة القوه F في اتجاه محور القضيب

أي أن

$$T = F \cos \theta \qquad (3.1.1)$$

والثانية N في اتجاه العمودي علي القضيب وتساوى مركبة القوة F في اتجاه العمودي علي محور القضيب أي أن

$$N = F \sin \theta \qquad (3.1.2)$$

وكذلك يظهر عند المقطع C الازدواج M كما هو مبين بالشكل أي في اتجاه دوران عقارب الساعة ويساوي الازدواج المكون من القوتين المتساويتين $N, F \sin \theta$ في المقدار وعكسه في الاتجاه أي أن

$$M = CB . F \sin \theta \qquad (3.1.3)$$

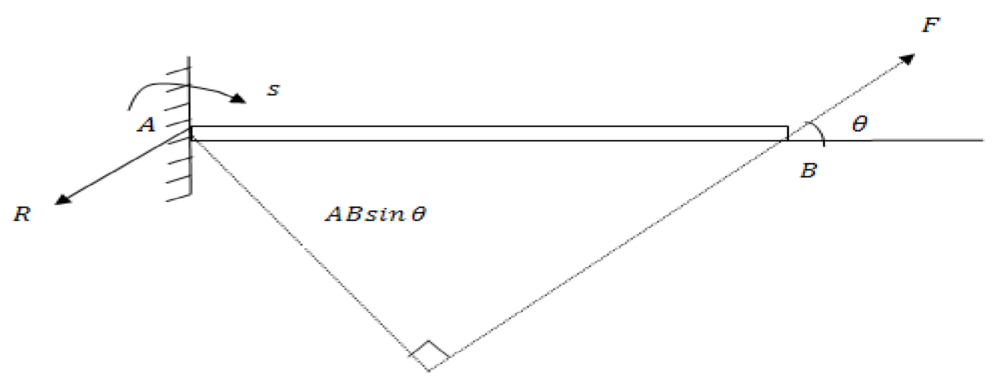
ويجب ملاحظة أن الجزء الأيسر من القضيب AC يؤثر علي الجزء الأيمن CB بالقوتين T في اتجاه محور القضيب والقوي القاصة N وعزم الانحناء M وكذلك فإن الجزء الأيمن CB يؤثر علي الجزء الأيسر AC بنفس القوتين السابقتين وعزم الانحناء ولكن في الاتجاهات المضادة

نلاحظ انه باعتبار اتزان القضيب كله AB فإنه عند موضع التثبيت A يؤثر رد الفعل R يوازي ويساوي في المقدار القوه F عند الطرف B ولكن في اتجاه مخالف .

أي أن $R = F$ كذلك يؤثر عند الطرف المثبت A ازدواج S يساوي في المقدار الازدواج المكون من القوتين R, F وعكسه في الاتجاه أي أن

$$S = AB . F \sin \theta$$

وفيما يلي نعطي بعض الأمثلة لتوضيح كيفية تعيين القوي القاصة وعزوم الانحناء عند مقاطع القضيب المختلفة وسوف نقوم برسم المنحنيات التي تمثل القوي القاصة ، عزوم الانحناء

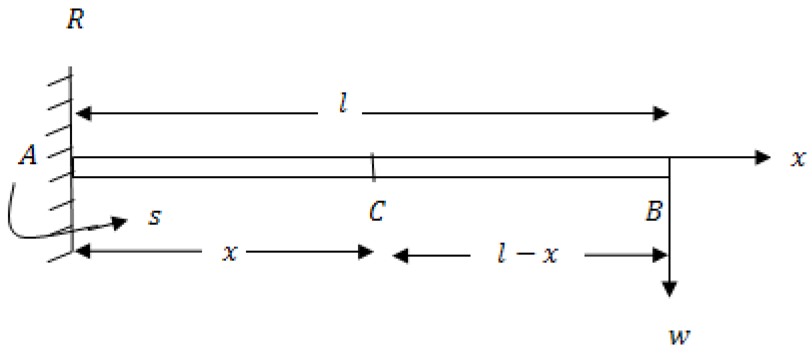


أمثلة محلولة

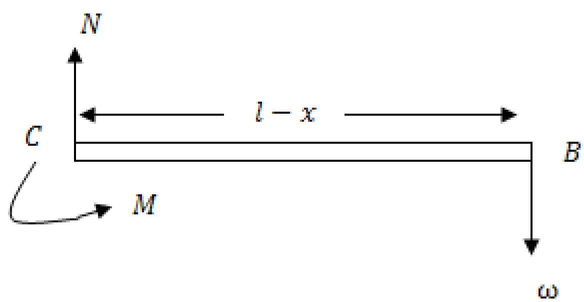
مثال1:

أوجد القوي القاصة وعزوم الانحناء عند أي مقطع لقضيب خفيف أفقي طوله l مثبت من أحد الطرفين في حائط رأسي إذا وضع ثقل ω عند الطرف الحر للقضيب.

الحل



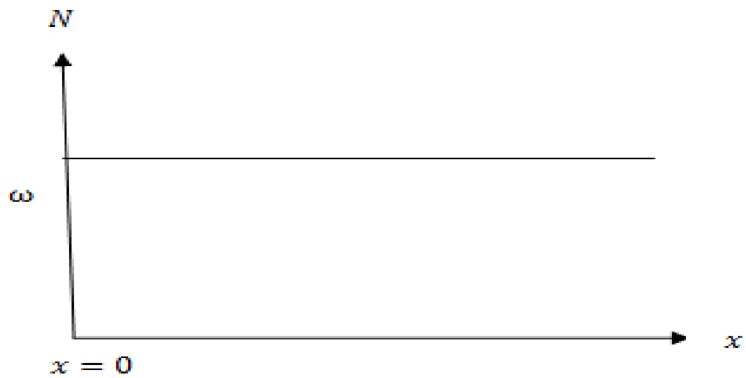
نفرض أن القضيب هو AB وإنه مثبت عند الطرف A ونأخذ مقطع للقضيب عند C حيث $AC = x$.
لإيجاد القوه القاصة N وعزوم الانحناء M عند المقطع C.
ندرس اتزان أحد الجزئيين AC أو CB .



نلاحظ أن دراسة اتزان الجزء الأيمن من القضيب CB أسهل من دراسة اتزان الجزء الأيسر AC وذلك لوجود رد فعل R وازدواج S.
باعتبار اتزان الجزء الأيمن من القضيب CB نلاحظ إنه لكي يتزن هذا الجزء يجب أن يكون عند C قوة قاصة N راسيا لأعلي وازدواج موجب (أي في اتجاه مضاد لدوران عقارب الساعة) وليكن M كما بالشكل حيث

$$N = \omega \qquad (1)$$
$$M = \omega(l - x) \qquad (2)$$

المعادلة (1) توضح لنا أن القوة القاصة ثابتة عند جميع مقاطع القضيب وباعتبار محور القضيب AB هو المحور الأفقي x فإن منحني القوة القاصة N يكون خطا مستقيما أفقيا يبعد عن المحور x مسافة تساوى ω كما بالشكل .

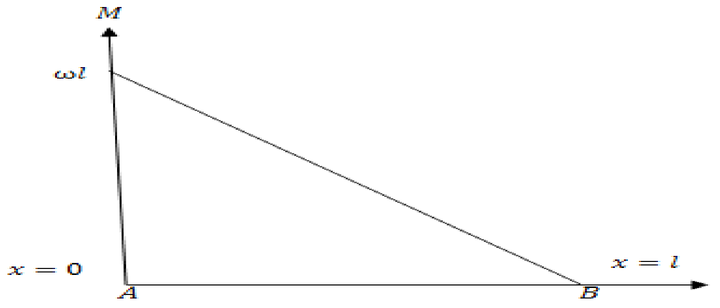


أما المعادلة (2) تعطينا عزوم الانحناء M عند المقطع C وواضح أن عزوم الانحناء يعتمد علي x . أي يتغير من مقطع لآخر .
وبرسم المنحني الذي يمثل عزوم الانحناء عند المقاطع المختلفة للقضيب نجد أنه يمثل خطا مستقيما يمر بالنقطتين $(l, o), (o, \omega l)$
نلاحظ أن عزوم الانحناء أكبر ما يمكن عندما $x = 0$ (أي عند الطرف المثبت A) ويساوي ωl بينما ينعدم عزوم الانحناء عند $x = l$ (أي عند الطرف الحر B) .

<u>ملحوظة</u>: نلاحظ انه بدراسة اتزان القضيب كله AB فإننا نعين رد الفعل R والازدواج S .

من الاتزان نجد أن

$$R = \omega, S = \omega l$$



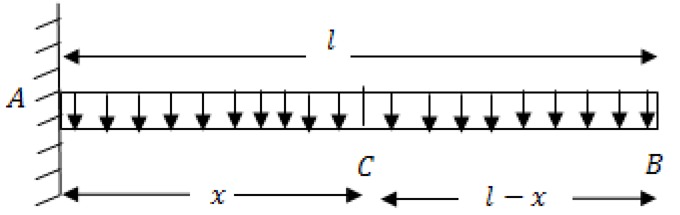
واتجاهيها كما بالشكل الموضح

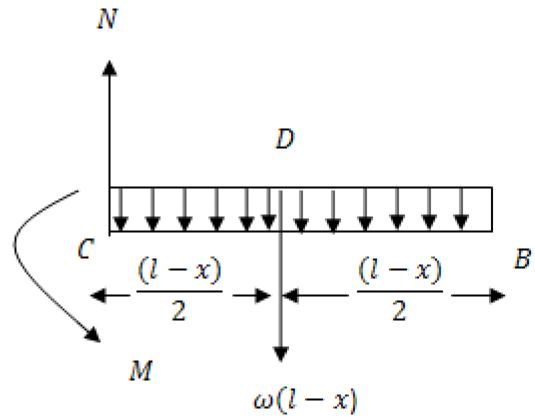
مثال2:

أوجد القوي القاصة وعزوم الانحناء لقضيب أفقي AB طوله l مثبت من طرفة A ومحمل تحميلا منتظما قدرة ω لوحده الأطوال .

الحل

نفرض مقطع عند C يبعد مسافة x عن الطرف المثبت A .





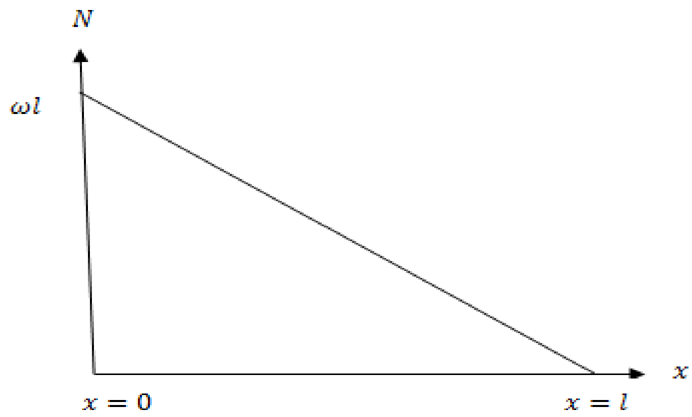
لإيجاد القوي القاصة وعزوم الانحناء عند المقطع c فإننا ندرس اتزان Bc .
نلاحظ أن التحميل الواقع علي الجزء CB يساوي $\omega(l-x)$ ويؤثر عند منتصفة عند نقطة D $(CB = DB)$
وبالتالي فإنه من اتزان هذا الجزء نجد أن

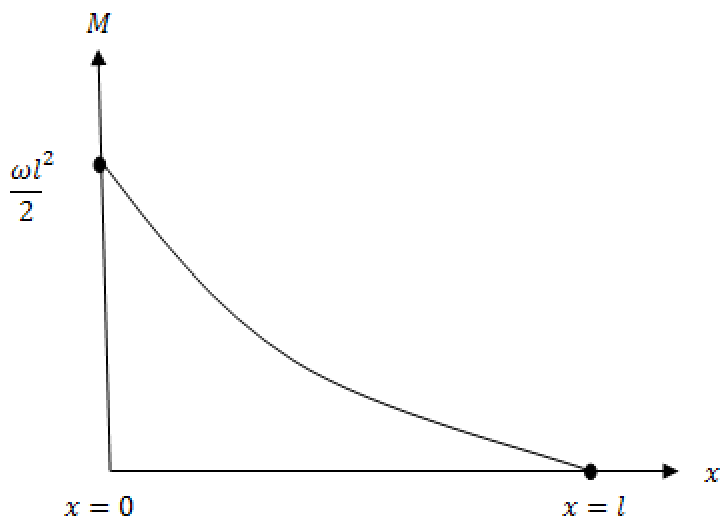
$$N = \omega(l-x) \qquad (1)$$

$$M = \omega(l-x)\frac{1}{2}(l-x)$$

$$M = \frac{\omega}{2}(l-x)^2 \qquad (2)$$

المعادلة (1) تعين القوي القاصة عند أي مقطع للقضيب ونلاحظ أنها تتغير من مقطع لآخر ويمثلها خط مستقيم مار بالنقطتين $(l,o),(o,\omega l)$ كما بالشكل.
نلاحظ أيضا أن أكبر قوة قاصة تكون عند الطرف المثبت للقضيب $(x=0)$ وتساوي ωl وأن القوة القاصة تتلاشي عند الطرف الحر للقضيب $x = l$.





المعادلة(2) تعين عزوم الانحناء عند مقاطع القضيب المختلفة ونجد إنها تتغير من مقطع لآخر . وبتمثيل منحني عزوم الانحناء نجد أنة قطع مكافئ رأسه النقطة (l, o) مفتوح لأعلي وطول وتره البؤري العمودي يساوي $\frac{2}{\omega}$.

وأكبر عزوم انحناء يكون عند الطرف المثبت للقضيب ويساوي $\frac{\omega l^2}{2}$ ويكون مساويا الصفر عند الطرف الحر للقضيب $(x = l)$.

مثال3:

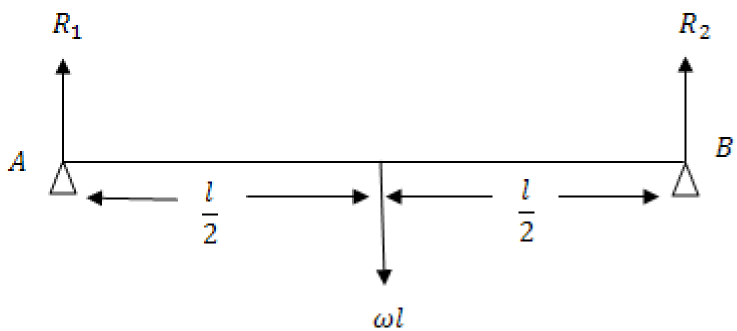
أوجد القوي القاصة وعزوم الانحناء لقضيب ثقيل منتظم AB طوله l ووزن وحده الأطوال منة ω ويرتكز بطرفيه على وتدين في مستوي أفقي.

الحل

باعتبار اتزان القضيب كله AB

$$R_1 + R_2 = \omega l$$

ومن التماثل في الشكل



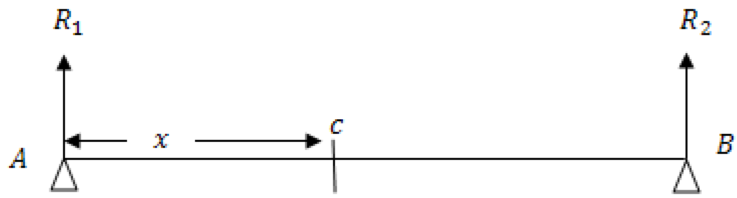
نجد أن

$$R_1 + R_2 = \frac{1}{2}\omega l$$

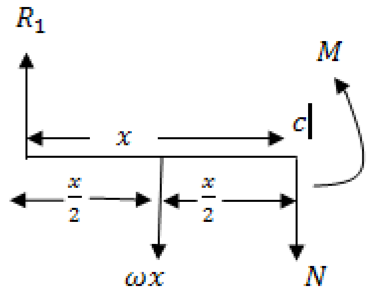
نعتبر مقطع للقضيب عند c حيث $Ac = x$ وباعتبار اتزان الجزء Ac فإنه في الاتجاه الرأسي يكون

$$R_1 = \omega x + N$$

$$\frac{1}{2}\omega l = \omega x + N$$



$$N = \omega(l/2 - x) \tag{1}$$

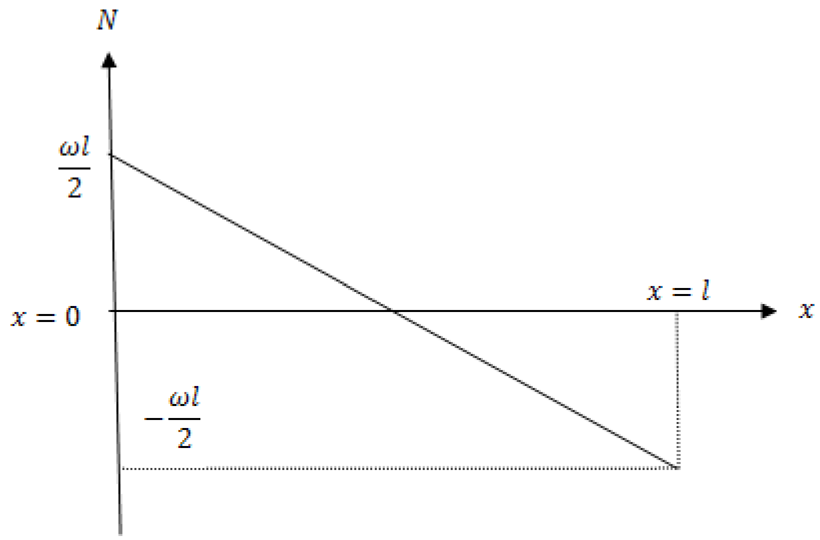


بأخذ العزوم حول c نحصل علي

$$M + \omega x(\frac{x}{2}) = R_1 x$$

$$M = \frac{1}{2}\omega lx - \frac{\omega x^2}{2} = -\frac{\omega}{2}(x^2 - lx) \tag{2}$$

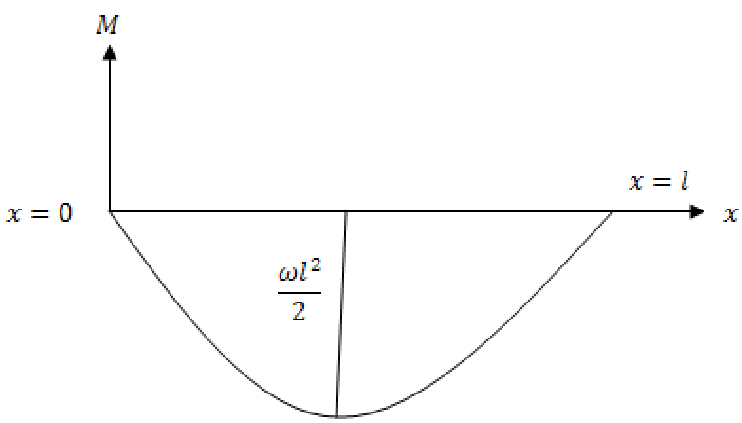
المعادلة (1) هي خط مستقيم كما بالشكل



وواضح إن أكبر قوة قاصة عند طرف القضيب A $(x = 0)$ وتساوي $\frac{1}{2}\omega l$ وبتزايد x تتناقص القوة القاصة إلي أن تنعدم عند منتصف القضيب عندما $x = l/2$ ثم تعكس اتجاهها في النصف الأيمن من القضيب AB .

المعادلة (2) تمثل معادلة قطع مكافئ

وواضح أن عزم الانحناء ينعدم عند طرفي القضيب أي عندما $x = l, x = 0$ ويأخذ أكبر قيمة عندما $x = l/2$ عند منتصف القضيب



تمرين

(1) قضيب خفيف أفقي طوله l يرتكز عند طرفية D, A علي حاملين وضح ثقلين متساويين كل منهما ω عند النقطتين C, B حيث $AB = CD = a(a < 1/2)$. أوجد القوة القاصة وعزوم الانحناء عند أي مقطع للقضيب.

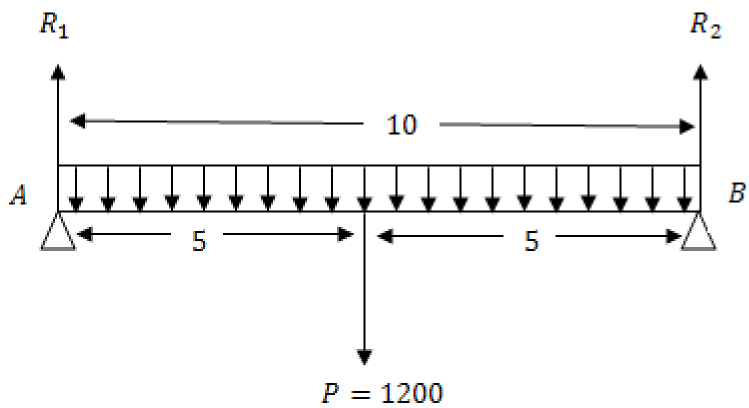
مثال4:

قضيب خفيف AB مرتكز عند طرفية A, B طوله $10\ ft$. محمل بتحميل منتظم حيث وزن وحده الأطوال تساوي $120\ Ib$. عين القوة القاصة وكذلك عزوم الانحناء والتمثيل الهندسي لها علي بعد x من الطرف A .

الحل

الحمل الكلي الذي يؤثر علي القضيب يكون مساويا

$$P = 120 \times 10 = 1200\ Ib$$



ومن التماثل في الشكل نجد أن

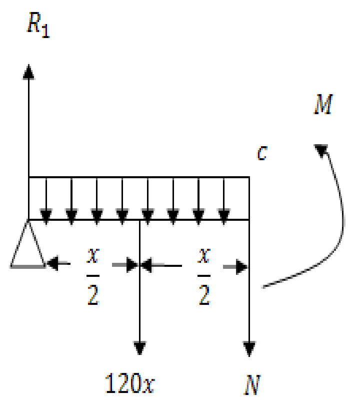
$$R_1 = R_2 = 600\ Ib$$

تعتبر المحور x في اتجاه محور القضيب ويأخذ نقطة A نقطة أصل وباعتبار مقطع من القضيب علي بعد x من النقطة A ودراسة اتزان نجد أن
القوة القاصة عند c يكون مساويا

$$N = R_1 - 120\ x$$

$$N = 600 - 120x \qquad (1)$$

وحيث إنه لا توجد تحميل آخر علي القضيب غير الحمل الموزع توزيع منتظم فإن N تمثل هنا القوة القاصة عند أي نقطة علي القضيب

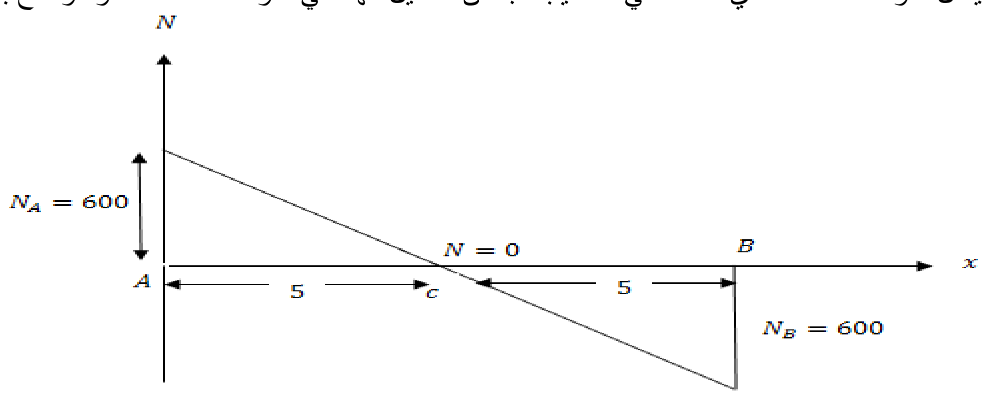


وعزم الانحناء عند c يكون مساويا

$$M = R_1 x - 120x.\frac{x}{2}$$

$$= 600x - 60x^2 \qquad (2)$$

نلاحظ أن N هي دالة خطية في x وتنعدم عند منتصف القضيب وبأخذ القضيب هو المحور السيني والعمودي علية يمثل القوة القاصة عند أي نقطة علي القضيب نجد أن التمثيل الهندسي للقوة القاصة كما هو موضح بالرسم .



عزوم الانحناء عند A يكون مساويا

$$M_A = 0$$

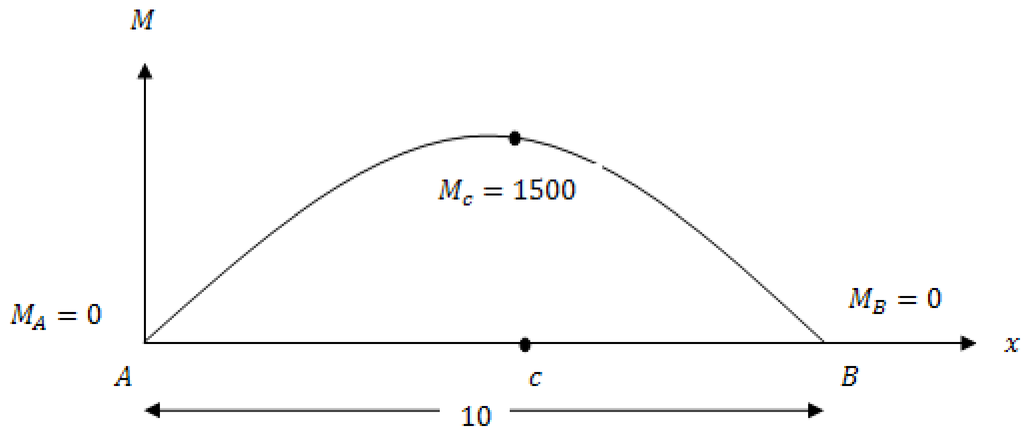
عزوم الانحناء عند B يكون مساويا

$$M_B = 0$$

عزوم الانحناء عند c يكون مساويا

$$M_c = 600 \times 5 - 60 \times 25$$
$$= 3000 - 1500 = 1500 \; Ib.ft.$$

ونلاحظ أن المعادلة (2) تمثل معادلة قطع مكافئ



مثال5:

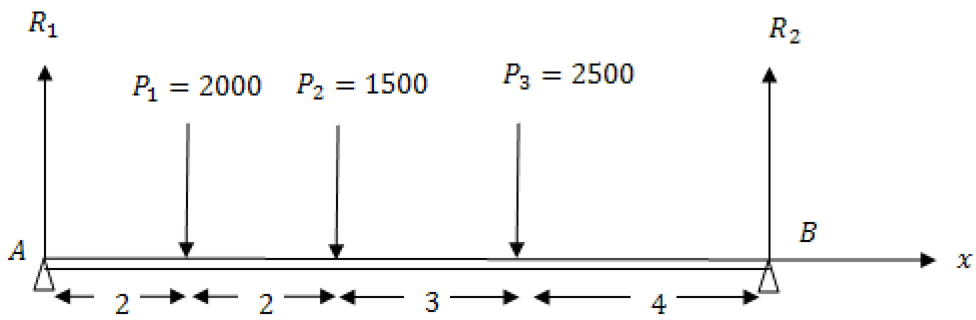
قضيب خفيف AB **مرتكز عند طرفية** A, B **طوله** $11\ ft$ **تؤثر علية ثلاثة أحمال خارجية هي علي التوالي** $2500,\ 1500,\ 2000\ Ib$ **عند النقط التي تبعد** $2,4,7\ ft$ **من الطرف** A **أوجد القوي القاصة وعزوم الانحناء وكذلك التمثيل الهندسي لكل منها .**

الحل

بدراسة اتزان القضيب AB نجد أن

$$R_1 + R_2 = 6000 \qquad (1)$$

وبأخذ العزوم حول B نحصل علي



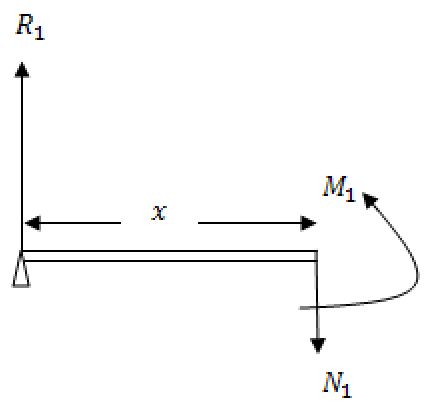
$$11\, R_1 = 2000 \times 9 + 1500 \times 7 + 2500 \times 4$$
$$= 18000 + 10500 + 10000$$
$$11\, R_1 = 38500$$
$$R_1 = 3500 \ Ib. \qquad (2)$$

بالتعويض من (2) في (1) نجد أن

$$R_2 = 2500 \qquad Ib$$

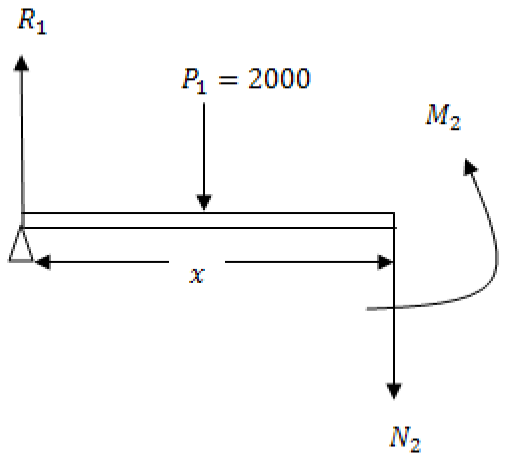
نعتبر المحور السيني في اتجاه القضيب .
لتعين القوة القاصة وعزوم الانحناء عند أي نقطة تعتبر اتزان المقاطع التي تبدأ من الطرف الأيسر

أولا: عندما تكون $0 < x < 2$



$$N_1 = R_1 = 3500 \ Ib$$
$$M_1 = R_1 x = 35001 \ x \ \ Ib.ft$$

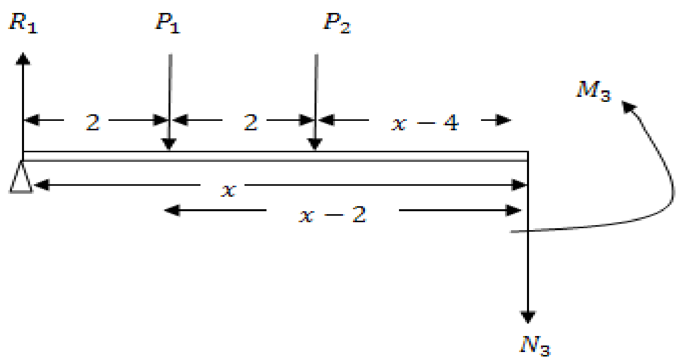
ثانيا: عندما تكون $2 < x < 4$



$$N_2 = R_1 - p_1 = 3500 - 2000 = 1500$$

$$M_2 = 3500\ x - 2000\ (x - 2)$$

ثالثا : عندما تكون $4 < x < 7$



$$N_3 = R_1 - p_1 - p_2$$

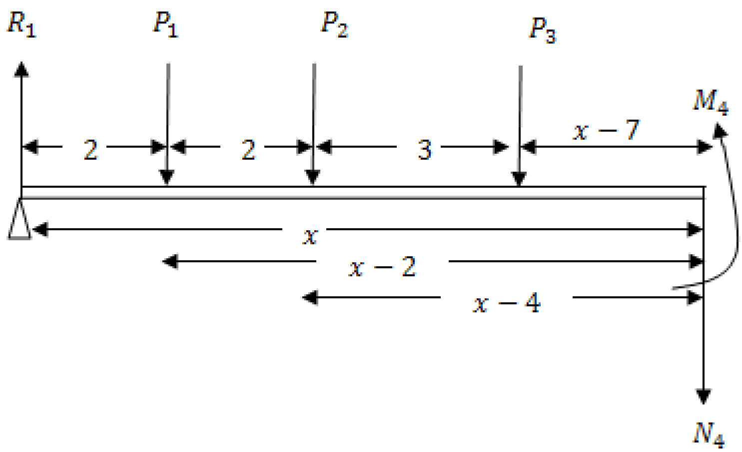
$$= 3500 - 2000 - 1500$$

$$N_3 = 0$$

$$M_3 = R_1 x - 2000\ (x - 2)$$

$$- 1500\ (x - 4)$$

رابعا : عندما تكون $7 < x < 11$



$$N_4 = R_1 - p_1 - p_2 - p_3$$

$$N_4 = 3500 - 2000 - 1500 - 2500$$

$$N_4 = -2500$$

$$m_4 = 3500\ x - 2000\ (x-2) - 1500\ (x-4) - 2500\ (x-7)$$

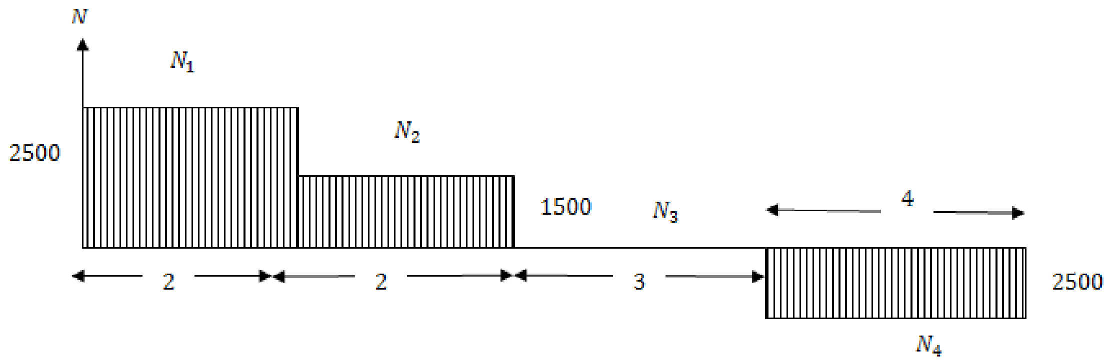
$$M_3 = 3500\ x - 2000\ (x-2)$$
$$-1500\ (x-4)$$

التمثيل الهندسي للقوة القاصة .

نأخذ اتجاه القضيب لمحور سيني نقطه A هي نقطه الأصل أعلي القضيب يمثل القيم الموجبة للقوه القاصة وأسفل القضيب يمثل القيم السالبة للقوة القاصة .

وبالتالي بالنسبة إلي $N_1 = 3500$ عبارة عن مستقيم يوازي المحور ox وكل نقطة علية علي بعد 3500 لأعلي .

وبالمثل N_2 ونلاحظ أن $N_3 = 0$ أي المحور ox نفسه هو الممثل للقوة القاصة N_3 أما بالنسبة إلي N_4 فهي سالبة وبذلك نرسم مستقيم يوازي ox وينخفض مسافة مقدارها 2500 وبذالك تكون قد رسمنا التمثيل الهندسي للقوة القاصة كما هو مبين بالرسم التالي



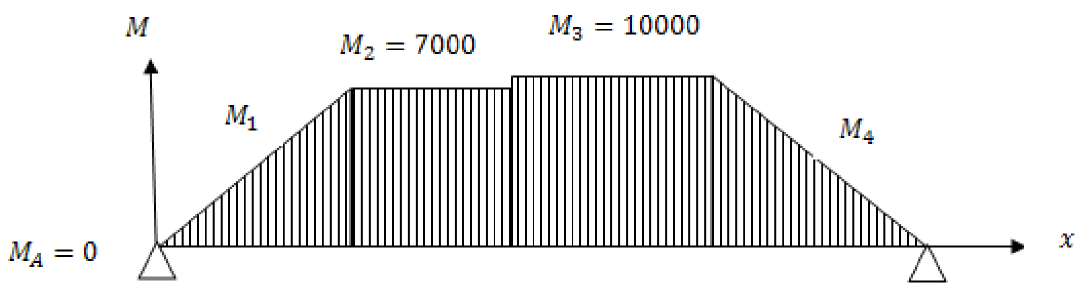
التمثيل الهندسي لعزوم الانحناء :

لكي يمكن تمثيل كل من M_1, M_2, M_3, M_4 هندسيا يجب معرفة عزوم الانحناء عند نقط تأثير p_1, p_2, p_3 عزوم الانحناء عند p_1 يعطي

$$(M_1)_{x=2} = 3500 \times 2 = 7000 \ Ib.ft$$

$$(M_2)_{x=4} = 10000 \ Ib.ft, (M_3)_{x=7} = 10000 \ Ib.ft$$

حيث أن القضيب مرتكز عن A, B فإن عزوم الانحناء عند نقط الارتكاز واضح من المعادلات التي تعطي عزوم الانحناء أنها فقط دالة خطية في x أي يمكن تمثلها بخط مستقيم .

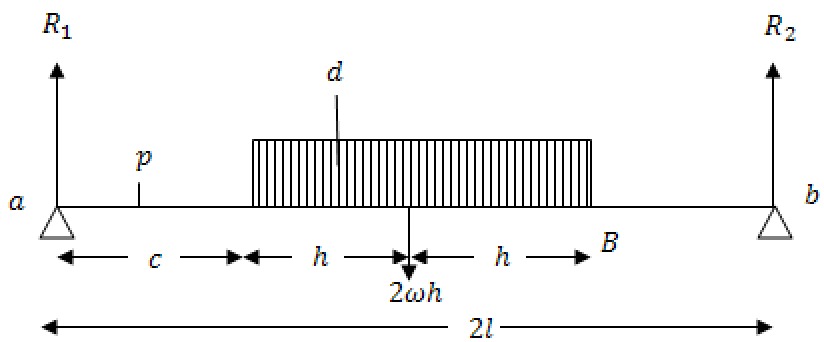


مثال6:

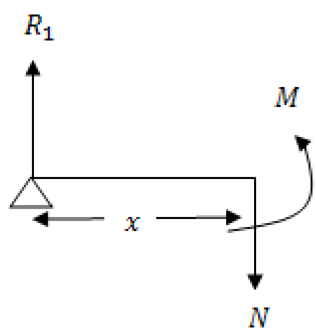
قضيب خفيف أفقي ab طوله $2l$ مرتكز عند نهايتيه ويحمل ثقل متحرك AB طوله $2h\ (h < l)$ ووزن وحدة الطول منه ω . أوجد أكبر عزم انحناء عند نقطة ما علي القضيب وأثبت أنه في هذه الحالة تقسم هذه النقطة المستقيم AB بنفس النسبة التي تقسم بها المستقيم ab

---

الحل



بأخذ وضعا للقضيب ab (كما بالشكل) بحيث يكون $aA = c$ نوجد قيمة c بحيث يكون عزوم الانحناء عند d أكبر ما يمكن لذلك باعتبار اتزان القضيب ab كله نجد أن



$$R_1 + R_2 = 2\omega h$$

وبأخذ العزوم حول النقطة b نجد أن

$$R_1 \times 2l = 2\omega l(2l - c - h)$$

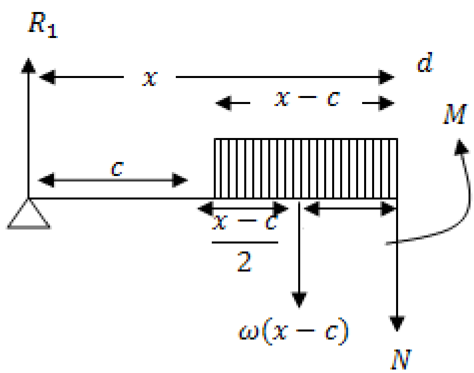
$$\therefore\ R_1 = \frac{\omega h}{l}(2l - c - h) \qquad (2)$$

وبأخذ مقطع للقضيب عند p حيث $ap = x$ وبشرط أن $x < c$ في حالة $x < c$

$$N = R_1 = \frac{\omega h}{l}(2l - c - h) \qquad (3)$$

$$M = R_1 x = \frac{\omega h}{l}(2l - c - h)x \qquad (4)$$

وأخذ مقطع عند النقطة d علي بعد x من النقطة a بحيث تكون $ad = x$ أي أن $x > c$.
القوة القاصة وعزوم الانحناء في هذه الحالة تكون



$$N = R_1 - \omega(x - c)$$

$$N = \frac{\omega h}{l}(2l - c - h) - \omega(x - c) \qquad (5)$$

$$M = \frac{\omega h}{l}(2l - c - h)x - \frac{1}{2}\omega(x - c)^2 \qquad (6)$$

واضح أن عزوم الانحناء M يتغير بتغير c .

M نهاية عظمي عندما تحقق c الشرط الآتي

$$\frac{dM}{dc} = 0 \qquad (7)$$

$$-\frac{x\omega h}{l} + \omega(x - c) = 0$$

ومنها

$$c = (1 - \frac{h}{l})x \qquad (8)$$

وبالتعويض بهذه القيمة c فإننا نحصل علي أكبر عزوم انحناء بالصورة

$$\begin{aligned} M_{max} &= (M)_{c = x(1 - h/l)} \\ &= \frac{\omega h}{l}[2l - h - x(1 - h/l)]x \\ &\quad - \frac{1}{2}\omega[x - x(1 - h/l]^2 x \end{aligned} \qquad (9)$$

وفي هذه الحالة فإن النسبة $\frac{Ad}{dB}$ نأخذ الصورة

$$\frac{Ad}{dB} = \frac{x - c}{2h - (x - c)} \qquad (10)$$

بالتعويض عن قيمة c من المعادلة (8) ينتج أن

$$\begin{aligned} \frac{Ad}{dB} &= \frac{\frac{h}{l}}{2h - \frac{h}{l}x} = \frac{h/l(x)}{\frac{h}{l}(2l - x)} \\ &= \frac{x}{2l - x} = \frac{ad}{db} \end{aligned}$$

أي أن النقطة d التي عندها عزوم الانحناء أكبر ما يمكن تقسم الثقل المتحرك AB بنفس النسبة التي تقسم بها القضيب ab.

مثال7:

قضيب أفقي AB طوله l مثبت طرفه B في حائط رأسي ومحمل بثقل W موزع خطيا علي طول القضيب بازدياد منتظم يبدأ من الصفر عند الطرف الحر A . أوجد القوة القاصة وعزوم الانحناء عند أي مقطع للقضيب .

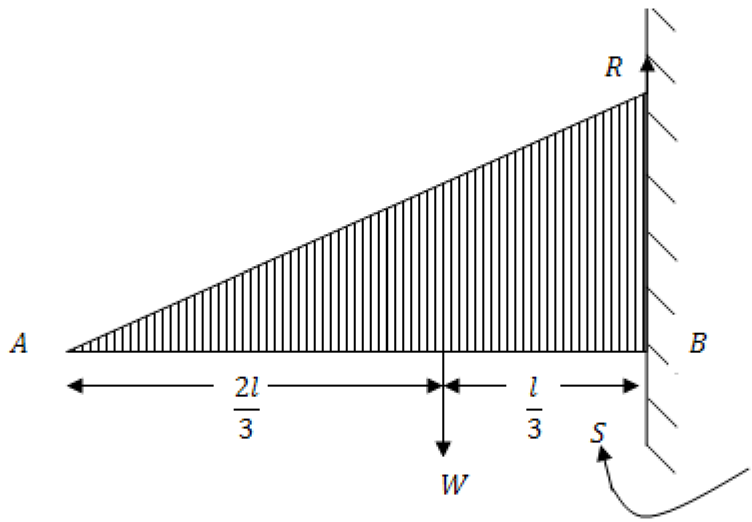
الحل

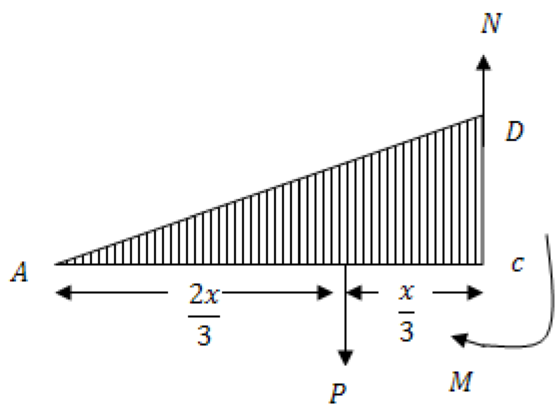
حيث أن كثافة التحميل $\omega(x)$ عند المقطع c علي بعد x من الطرف الحر A موزعا توزيعا خطيا علي طول القضيب فإن هذا الخط المستقيم يجب أن يمر بنقطة الأصل لذا فإن العلاقة بين $x, \omega(x)$ هي

$$\omega(x) = \lambda x \qquad (1)$$

حيث λ هي ميل الخط المستقيم .

كثافة تحميل $\omega(x)$ عند المقطع c تعبر عن الارتفاع DC ويكون الثقل الواقع علي عنصر صغير طوله dx من القضيب يساوي $\omega(x)dx$ وعلي ذلك يكون التحميل الكلي الواقع علي القضيب AB يتعين من





$$W = \int_0^l \omega(x)dx$$

$$W = \int_0^l \lambda x dx$$

$$W = \frac{\lambda l^2}{2} \qquad (2)$$

ومنها نعين قيمة λ وتساوي

$$\lambda = \frac{2W}{l^2} \qquad (3)$$

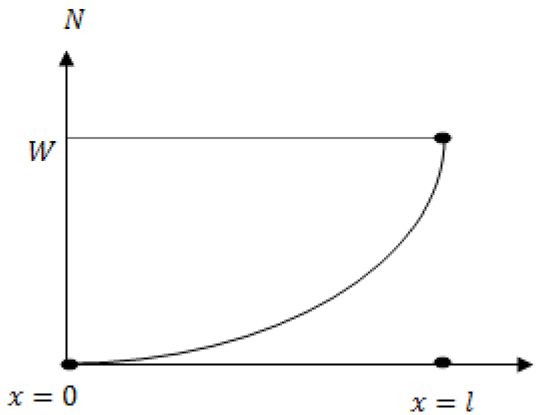
أي أن كثافة التحميل $\omega(x)$ تكون في الصورة

$$\omega(x) = \frac{2W}{l^2} x \qquad (4)$$

باعتبار اتزان الجزء Ac من القضيب نجد أن القوة القاصة N تساوي الثقل p الواقع علي الجزء Ac, أي أن

$$N = p = \int_0^x \omega(x) dx = \int_0^x \frac{2W}{l^2} x \, dx$$

$$N = \frac{Wx^2}{l^2} \qquad (5)$$



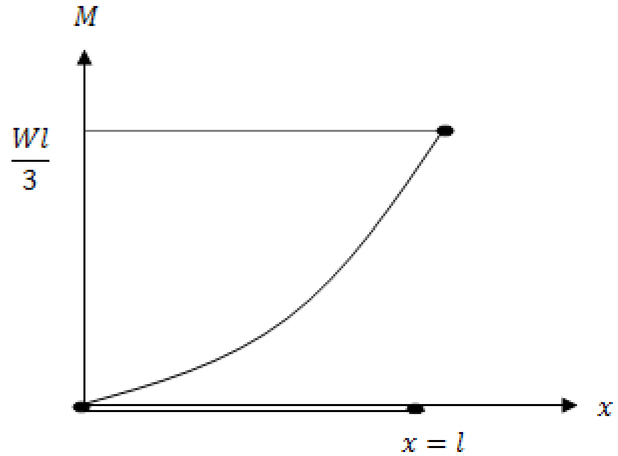
حيث يقسم الثقل p المسافة Ac بنسبة $1:2$, أي أن

$$AE = 2Ec = \frac{2x}{2}$$

واضح أن العلاقة (5) تعين القوة القاصة عند أي مقطع للقضيب وواضح أيضا أنها تمثل قطع مكافئ رأسه عند نقطة الأصل (كما بالشكل) وأن القوة القاصة تساوي صفر عندما $x = 0$ (أي عند الطرف الحر A) وأن أكبر قيمة للقوة القاصة عندما $x = l$ أي عند الطرف المثبت في الحائط B وتساوي W

وبأخذ العزوم حول المقطع c نجد أن

$$M = p\frac{x}{3} = \frac{Wx^2}{l^2}\frac{x}{3} = \frac{Wx^3}{3l^2} \qquad (6)$$



المعادلة (6) تعطي عزوم الانحناء عند أي مقطع وهي علاقه من الدرجة الثالثة في x ونلاحظ أن $M = 0$ عندما $x = 0$ (أي عند الطرف الحر A يتلاشي عزوم الانحناء) .

أيضا عزوم الانحناء يكون أكبر ما يمكن عندما $x = l$ (أي عند الطرف المثبت B) ويساوي $\frac{1}{2}Wl$ وفي الاتجاه الموجب أي في اتجاه عكس دوران عقارب الساعة .

ملحوظة:

يمكن إيجاد رد الفعل R والازدواج S عند الطرف المثبت B وذلك باعتبار الاتزان القضيب كله AB فنجد أن

$$R = W$$

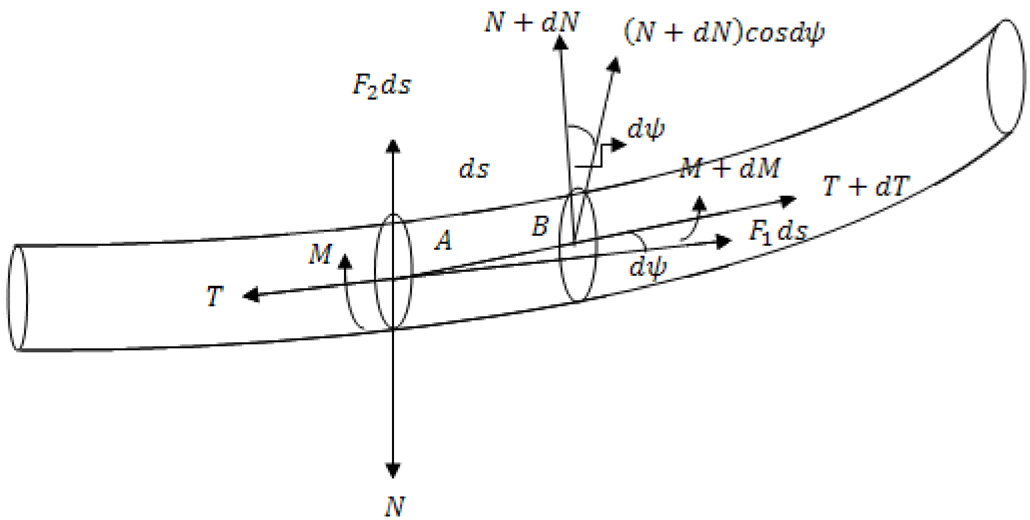
$$S = \frac{1}{3}Wl$$

وذلك لأن الثقل W يؤثر في نقطة تقسم القضيب AB بنسبة 2:1 أي أن

$$AF = 2FB = \frac{2}{3}l$$

ثانيا:- معادلات الاتزان لقضيب رفيع منحني :

بفرض اتزان عنصر طوله dS من قضيب رفيع منحني ونفرض أن T القوة في اتجاه محور القضيب (المماس عند A)، N القوة القاصة العمودية علي محور القضيب , M عزوم الانحناء علي المقطع الأيسر .
ونفرض أن $T + dT$ القوة في اتجاه محور القضيب (المماس عندB) و $N + dN$ هي القوة القاصة العمودية علي محور القضيب عند B , $\mathrm{M} + d\mathrm{M}$ هي عزوم الانحناء علي المقطع الأيمن .
ونفرض أن مركبتي القوة الخارجية المؤثرة علي العنصر في اتجاهي محور القضيب (المماس عند A) والعمودي علية هما $F_1 dS$, $F_2 dS$ كما بالشكل .



بكتابة معادلات الاتزان في اتجاهي محور القضيب (المماس عند A) والعمودي علية وأخذ العزوم حول A فإن

$$(T + dT)\cos d\psi + F_1 dS - T - (N + dN)\sin d\psi = 0 \tag{3.2.1}$$

$$(T + dT)\sin d\psi + (N + dN)\cos d\psi + F_2 dS - N = 0 \tag{3.2.2}$$

$$(\mathrm{M} + d\mathrm{M}) - \mathrm{M} + (N + dN)dS = 0 \tag{3.2.3}$$

وحيث أن $d\psi$ زاوية صغيره جدا فإن

$$\sin d\psi = d\psi , \cos d\psi = 1$$

وبإهمال الكميات الصغيرة من الدرجة الثانية فإن المعادلات السابقة تأخذ الصورة

$$dT + F_1 dS - N d\psi = 0 \tag{3.2.4}$$

$$dN + T d\psi + F_2 dS = 0 \tag{3.2.5}$$

$$dM + N dS = 0 \tag{3.2.6}$$

وبالقسمة على dS تصبح المعادلات (3.2.4-3.2.6) فى الصورة

$$\frac{dT}{dS} - N\frac{d\psi}{dS} + F_1 = 0 \tag{3.2.7}$$

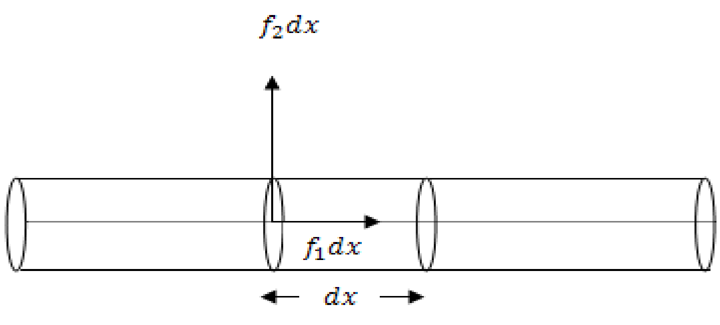
$$\frac{dN}{dS} + T\frac{d\psi}{dS} + F_2 = 0 \tag{3.2.8}$$

$$\frac{dM}{dS} + N = 0 \tag{3.2.9}$$

حيث $\rho = \frac{dS}{d\psi}$ هو نصف قطر الانحناء قطر الانحناء (النقوس) لمحور القضيب المعادلات (3.2.7 – 3.2.9) هي معادلات الاتزان لقضيب رفيع منحنى.

حالة خاصة:

عندما يكون القضيب مستقيما فان نصف قطر الانحناء يكون مالانهايه $\rho = \infty$ ونأخذ معادلات الاتزان لقضيب مستقيم الصورة



$$\frac{dT}{dx} + F_1 = 0 \tag{3.2.10}$$

$$\frac{dN}{dx} + F_2 = 0 \tag{3.2.11}$$

$$\frac{dM}{dx} + N = 0 \tag{3.2.12}$$

ملحوظة :

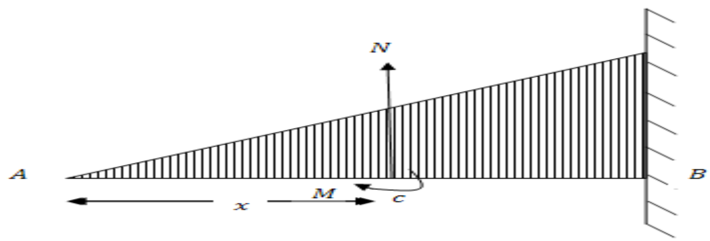
يمكن حذف القوة الفاصلة N بين المعادلتين (3.2.11),(3.2.12) وذلك بتفاضل المعادلة (3.2.12) بالنسبة إلى x وطرح (3.2.11) من الناتج نحصل على معادلة تفاضلية تربط عزم الانحناء M بمركبة القوى الخارجية F_2 في الصورة

$$\frac{d^2M}{dx^2} = F_2 \tag{3.2.13}$$

مثال (1)

حل مثال (7) السابقة مستخدما معادلات الاتزان لقضيب رفيع مستقيم.

الحل



فى هذه الحالة كثافة التحميل $\omega(x)$ تساوى $\frac{2W}{l^2}x$ ويكون

$$F_2 = -\omega(x) = -\frac{2W}{l^2}x$$

وباستخدام العلاقة (11) فان القوة القاصة N عند اى مقطع تكون

$$N = -\int F_2 dx = +\int_o^x \frac{2W}{l^2} x dx$$

$$N = \frac{Wx^2}{2l^2}$$

وباستخدام المعادلة (12) نحصل على عزم الانحناء M في الصورة

$$M = -\int N dx = -\frac{W}{l^2}\int_o^x x^2 dx \qquad = -\frac{Wx^3}{3l^2}$$

وهى نفس النتائج التى حصلنا عليها فى الحل السابق لمثال (7) .

تمارين على الباب الثالث

(1) قضيب AB يمكنه الدوران حول طرفه A ويرتكز بطرفة الآخر B على حائط رأسي أملس. اثبت ان عزم الانحناء عند نقطة c على القضيب يتناسب مع $CA.CB$.

(2) ثلاث قضبان متساوية متصلة عند نهايتها العليا ومرتكزة عند نهايتها السفلى على مستوى افقى وتحمل عند أعلى نقطة ثقل F. اذا كان طول اى قضيب يساوى $2l$ ويصنع زاوية α مع الرأسي وان ω وزن وحدة الطول لكل منها. فاوجد عزم الانحناء عند اى نقطة من القضيب واثبت انه لا يعتمد على الثقل F.

(3) وضع طوق الدائري على مستوى افقى بحيث كان مستواه راسيا. اثبت أن عزم الانحناء الناشئ عن الطوق يكون اكبر ما يمكن عند نقطة بعدها الزاوي θ عن أعلى نقطة من الطوق يتعين من

$$\theta + \tan\theta = 0$$

(4) قضيب طوله $3l$ ووزن وحدة الأطوال منه ω. وزع توزيعا متصلا على الثلث الأوسط منه بكثافة وزنها p لوحدة الأطوال. ادرس القوى القاصة وعزوم الانحناء عند مقاطع القضيب المختلفة عندما يرتكز القضيب عند نهايتية على وتدين أملسين.

(5) ثقل مستمر ω طن لكل قدم يتحرك ببطىء على كوبري طوله l قدم إذا أهمل وزن الكوبري فاثبت أن اكبر قوة قاصة عند نقطة p على بعد λ من الطرف الأقرب تساوى تساوى $\frac{\omega}{2l}(l-\lambda)^2$.

(6) رجل وزنه ω يمكنه أن يعبر قضيب مرتكز عند نهايتيه وزنه $\omega\eta$ وطوله l بدون أن ينكسر. إذا ثبت القضيب من احد نهايتيه بحيث كان المماس عندها افقيا فاثبت أن أقصى مساحة يمكن الرجل أن يتحركها على القضيب تساوى $\frac{1}{4}l\left(1-\frac{3}{2}\eta\right)$.

(7) قضيب AB طوله $12\ ft$ يرتكز عند نهايتيه على حاملين في مستوى افقى ويحمل ثقلا يزيد بانتظام من الصفر عند الطرف الأيسر A حتى اكبر قيمة $600\ Ib/ft$ عند الطرف B. اوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند اى مقطع.

(8) قضيب خفيف AB طوله l مثبت عند نهايتيه اليمنى B ومحمل نصفه الأيمن تحميلا منتظما كثافته ω_0 لوحدة الأطوال. فإذا وضع ثقل ω عند الطرف الحر A فاوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند اى نقطة من القضيب.

(9) قضيب راسي طوله $3\ ft$ مثبت على ارض أفقية. اوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند الطرف المثبت وعند نقطتي تثليث القضيب إذا أثرت علي الطرف العلوي للقضيب قوة أفقية مقدارها $200\ Ib$.

(10) قضيب oAB مثبت أفقيا عند طرفة o بحيث يكون $oA = 2AB = 2\ ft$ وضع ثقلين $300\ Ib, 200\ Ib$ عند B, A على الترتيب. اوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند النقطتين اللتين تنصفان AB, oA .

(11) قضيب منتظم طوله $2l$ يرتكز في وضع متماثل على حاملين في نفس المستوى الافقى المسافة بينهما $2h$. إذا كان $l < 2h$ فاثبت إن عزم الانحناء يكون نهاية عظمى عند الحامل أو في المنتصف حسبما يكون $2l \gtrless (2+\sqrt{2})h$ وإذا كان $l > 2h$ فاثبت إن عزم الانحناء عند الحامل يكون نهاية عظمى عند الحامل واوجد قيمته.

(12) قضيب خفيف أفقي طوله l مرتكز عند نهايتيه ومحمل بحيث يتناسب عزم الانحناء عند اى نقطة مع وزن وحدة الطول عند نفس النقطة . اثبت ان الوزن عند اى نقطة يتناسب مع $\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ حيث x بعد النقطة عن احد طرفي القضيب .

(13) قضيب ثقيل وزنه W وطوله $3l$ يرتكز على حاملين املسيين احدهما عند طرفة والأخر على بعد l من الطرف الأخر . وزع ثقلا مقداره $2lp$ توزيعا منتظما علي المسافة المحصورة بين الوتدين من القضيب . ادرس منحنيات القوى القاصة وعزوم الانحناء.

(14) قضيب يرتكز عند نهايتيه على حاملين ومحمل تحميلا كثافته لوحدة الأطول عند اى نقطة تعطى من العلاقة $\omega(x) = \omega_0(a+bx)$ حيث b, a ثابتين .اوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند اى نقطة واستنتج الحالات الخاصة التي فيها $b = 0$ ثم $a = 0$.

(15) حل التمرين السابق (14) إذا كان القضيب مثبت عند الطرفين .

(16) قضيب افقى AB طوله $8\ ft$ مثبت طرفة الأيمن B في حائط راسي وحمل النصف الأيسر من القضيب بانتظام بكثافة $100\ Ib/ft$. اوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند اى مقطع من مقاطع القضيب المختلفة.
