قسم الفيزياء

محاضرات في خواص المادة

د/ محمد نصارى

العام الدراسى ٢٠٢٠/٢٠٢١

فيزياء ١ (خواص مادة)

لطلاب الفرقة الاولى تربية عام رياضة

اعـــــداد

أ.د/ محمد محمد نصارى

استاذ الفيزياء بكلية العلوم

٢٠٢٢-٢٠٢٣ م

فهرس المحتويات

الكميات الفيزيائية والوحدات

الكميات الفيزيائية هى التى تبنى الفيزياء وبها تكتب المعادلات الكيميائية الفيزيائية.

من هذه الكميات، القوة، السرعة، الكثافة، درجات الحرارة، الشحنة، وغير ذلك.

ويستلزم عمل الفيزياء قياس الكميات الفيزيائية المختلفة وذلك للتعبير عن مقاديرها.

وللتعبير عن مقدار أى كمية فيزيائية يشمل جزئين هما: -

١- الوحدة التى تقاس بها الكمية وهذا يلزم أن تكون من نوع الكمية المقاسة.

٢- عدد يدل على مرات احتواء الكمية الفيزيائية على وحدتها.

الكميات الأساسية

تعتبر الكتلة والطول والزمن الكميات الأساسية التى تتحدد بها الكميات الفيزيقية المختلفة مرفوعة إلى القوة المختلفة، القوى التى يجب أن ترفع لتحصل على أى وحدة مشتقة تسمى أبعاد هذه الوحدة ويرمز لهذه الكميات الأساسية (الكتلة، الطول، الزمن) بالرموز (M, L, T) ومن السهل معرفة كيفية توقف أى كمية فيزيائية على هذه الكميات الثلاثة بكتابة ما يسمى بمعادلة الأبعاد.

الوحدات الأساسية

هى التى تستعمل فى قياس الكميات الأساسية أى الوحدات التى يقاس بها كلا من الطول والكتلة والزمن.

وحدة الطول

وحدة الطول العلمية هى السنتيمتر وهو جزء من مائة من المتر العيارى.

المتر العيارى

هو الطول المحصور بين علامتين منقوشتين على سبيكة مصنوعة من الايريديوم والبلاتين عند درجة الصفر المئوى وتحت ظروف الضغط الجوى المعتاد.

وينقسم هذا المتر إلى مائة جزء يسمى كل منها السنتيمتر وهو بدوره ينقسم إلى عشرة أجزاء يسمى الجزء منها بالمليمتر، وهناك وحدات أصغر كثيرا مثل الميكرون والأنجستروم. ووحدة الطول فى النظام الإنجليزى هى القدم.

فى الوقت الحديث تم الاتفاق على اختيار طول موجة الضوء البرتقالى الصادر من ذرة عنصر الكريبتون (K^{86}) كأساس للقياسات الطولية. للتعبير عن مضاعفات المتر أو أجزاءه تستعمل المقاطع الاتية:

أجزاء	مضاعفات
Deci $=10^{-1}$	Deca $=10$
Centi $=10^{-2}$	Hecto $=10^{2}$
Milli $=10^{-3}$	Kilo $=10^{3}$
Micro $=10^{-6}$	Mega$= 10^{6}$
Nano $=10^{-9}$	Tera $=10^{9}$
Pico $=10^{-12}$	

الانجستروم 10^{-10} من المتر او 10^{-8} من السم

الياردة = ٣ قدم = ٣٦ بوصة

الميل = ١٧٦٠ ياردة.

وحدة الكتل

وحدة الكتل العلمية المستعملة هى الجرام وهو واحد من الألف من كتلة قطعة من البلاتين والايريديوم محفوظة بالمكتب الدولى للمقاييس المترية بباريس.

وللتعبير عن أجزاء الجرام ومضاعفاته تستخدم البدايات السابقة ووحدة الكتل العلمية التى تستخدم فى القاعدة الإنجليزية هى الباوند.

وحدة الزمن

وحدة الزمن فى القاعدتين الإنجليزية والفرنسية واحدة وتم اختيار هذه الوحدة كجزء من متوسط اليوم الشمسى (زمن دوران الأرض دورة كاملة حول محورها)

الثانية $= \frac{1}{24*60*60} = \frac{1}{86400}$ من قيمة متوسط اليوم الشمسى (وهذا اليوم مقسم إلى ٢٤ ساعة والساعة إلى ٦٠ دقيقة والدقيقة إلى ٦٠ ثانية)

ولما كان دوران الأرض حول محورها يتغير بمرور الزمن فإن هذه الوحدة لا تعطى بالدقة المطلوبة فى بعض الأغراض العلمية الحديثة، لذا لجأ الباحثون حديثا إلى ابتكار الساعة الذرية وهي يتم ضبط أوقاتها على زمن ذبذبة ذرات عنصر السيزيوم. ولما كانت ترددات ذرات هذا العنصر عالية جدا فإن زمن الذبذبة الواحدة يكون بالتالى صغير جداً مما يحقق قدراً عاليا من الدقة فى قياسات الزمن وتسمى الساعة الذرية بمقياس زمن الحدث.

أبعاد الكميات الفيزيائية

تعرضنا من قبل إلى الكميات الفيزيائية وهنا نعنى بكلمة أبعاد أى العلاقة او القوى التى يجب أن ترفع لها الكميات الأساسية لنحصل على أى وحدة مشتقة لكمية فيزيائية ولإيضاح ذلك فإننا سنرمز لكل من الطول والزمن والكتلة بالرموز التالية على الترتيب M, T, L. ولإيجاد ابعاد بعض الكميات الفيزيائية نتبع التالى:

١- المساحة = الطول x العرض

وحيث أن كلاً من الطول والعرض هو L فإن

المساحة $= L \times L = L^2$

٢- الحجم = الطول x العرض x الارتفاع

الحجم $= L \times L \times L = L^3$

٣- الكثافة = $\frac{\text{الكتلة}}{\text{الحجم}}$

الكثافة = $\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{L^3}} = ML^{-3}$

فى نظام (السم - الجرام - الثانية) تكون وحدة الكثافة (جرام. سم$^{-3}$) ويلاحظ فى هذا النظام بعض الوحدات المشتقة لها اسماء مثلا وحدة القوة داين ووحدة الشغل إرج

٤- السرعة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{T}} = T^{-1}$

٥- العجلة = $\frac{\text{السرعة}}{\text{الزمن}} = \frac{\mathbf{LT^{-1}}}{\mathbf{T}} = LT^{-2}$

٦- القوة = الكتلة x العجلة = MLT^{-2}

٧- الضغط = $\frac{\text{القوة}}{\text{المساحة}} = \frac{\mathbf{MLT^{-2}}}{\mathbf{L^2}} = ML^{-1}T^{-2}$

٨- الزاوية = $LL^{-1} = L^0$

أى أن الزاوية ليست لها أبعاد وهي مجرد نسبة بين بعدين.

استعمالات نظرية الأبعاد

دراسة القوانين الطبيعية

يمكن كتابة العلاقات العامة

عمود من سائل P فى انبوبة رأسية على ارتفاع h وكثافة ρ وعجلة الجاذبية g

$$P = h^{\alpha}\rho^{\beta}g^{\gamma}$$

حيث أن γ, β, α أعداد غير معروفة.

الأبعاد لكل الكميات الموجودة على طرفى هذه المعادلة

$$[ML^{-1}T^{-2}] = [L]^{\alpha}\,[ML^{-3}]^{\beta}\,[LT^{-2}]^{\gamma}$$

وحيث أن أبعاد الكميات الثلاثة T, L, M يجب ان تتساوى فى طرفى المعادلة

بمساواة ابعاد الكتلة $1 = \beta$

بمساواة ابعاد الطول $-1 = \alpha - 3\beta + \gamma$

بمساواة ابعاد الزمن $-2 = -2\gamma$

بحل هذه المعادلات الثلاثة ينتج أن

$$\gamma = 1, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1$$

أى ان المعادلة المعروفة لحساب الضغط هى

$$P = h * \rho * g$$

اختبار صحة القوانين

قانون البندول البسيط

$$t = 2\pi\sqrt{L/g}$$

المقدار 2π عدد لا يعتمد على أى من الوحدات الأساسية وعلى ذلك فليس له وجود فى معادلة الأبعاد.

نكتب أبعاد الطرف الأيمن فنجد أن

$$[\frac{L}{LT^{-2}}]^{\frac{1}{2}} = T$$

وهذا يساوى الطرف الأيسر، وعلى ذلك يكون القانون صحيحا.

مسائل

١- أوجد وحدات وأبعاد كل من ثابت الجاذبية وثابت ستيفان.

الحل:

أ- قانون نيوتن للجاذبية هو:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

حيث (G) ثابت الجاذبية العالمى

$$\therefore G=\frac{F\,r^2}{m_1 m_2} \qquad (1)$$

بالتعويض بأبعاد الكميات التى بالطرف الأيمن للمعادلة رقم (1) ينتج ان أبعاد (G) هى

$$[G]=\frac{(MLT^{-2})L^2}{M^2}=M^{-1}L^3T^{-2}$$

وتكون وحدات الثابت (G) فى النظام الدولى للوحدات (SI) هى

$Kg^{-1}\,m^3\,s^{-2}$

لإيجاد قانون ستيفان، نعلم من قانون ستيفان ان كمية الحرارة (Q) المنبعثة من سطح أسود مساحته (A) ودرجة حرارته المطلقة (T) فى زمن مقداره (t) هى

$Q=\sigma\,A\,t\,T^4$

حيث (σ) هى ثابت استيفان.

$$\therefore \sigma=\frac{Q}{A\,t\,T^4} \qquad (2)$$

وبالتعويض بأبعاد الكميات التى بالطرف الايمن للمعادلة رقم (2) مع الاخذ فى الاعتبار أن أبعاد كمية الحرارة (Q) هى أبعاد طاقة أو شغل (ML^2T^{-2}) ينتج أن أبعاد (σ) هى

$$\sigma=\frac{M\,L^2\,T^{-2}}{L^2\,T\,K^4} \qquad (3)$$

$$\sigma=M\,T^{-3}\,K^{-4} \qquad (4)$$

وتكون وحدات (σ) فى النظام الدولى للوحدات هى من معادلة رقم (4) ($Kg\,s^{-3}\,K^{-4}$) ويمكن أن تكتب فى صورة أخرى من معادلة رقم (3) وهى ($J\,m^{-2}\,s^{-1}\,K^{-4}$).

٢- اختبر صحة المعادلة الآتية من وجهة نظر الأبعاد:

$$g = \frac{4}{3}\pi\, G\, \rho\, R$$

حيث (g) هى عجلة الجاذبية الارضية، (G) ثابت الجاذبية العالمى، (ρ) كثافة الأرض المتوسطة، (R) نصف قطر الأرض

الحل

لاختبار صحة المعادلة:

$$g = \frac{4}{3}\pi\, G\, \rho\, R \qquad (5)$$

أبعاد الطرف الأيسر هى

$$[g] = L\, T^{-2} \qquad (6)$$

أبعاد الطرف الأيمن علماً بأن المقدار الثابت $(\frac{4}{3}\pi)$ ليس له أبعاد:

$$\left[\frac{4}{3}\pi\, G\, \rho\, R\right] = (M^{-1}\, L^{3}\, T^{-2})(M\, L^{-3})(L) = L\, T^{-2} \qquad (7)$$

من المعادلتين $(6, 7)$ حيث أن أبعاد الطرف الأيمن للمعادلة (5) تساوى أبعاد طرفها الأيسر فالمعادلة صحيحة من وجهة نظر الأبعاد.

٣- إذا فرض ان القوة المقاومة لكرة متحركة فى الهواء تعتمد على السرعة ونصف قطر الكرة وكثافة الهواء فاستنتج المعادلة التى تعطى قوة المقاومة بدلالة المتغيرات السابقة.

الحل:

نفرض ان القوة المقاومة لحركة الكرة (F) دالة فى سرعة الكرة (v) ونصف قطرها (r) وكثافة الهواء(ρ).

$$\therefore F = f(v, r, \rho) \qquad (1)$$

بوضع هذه الدالة فى صورة أسية

$$F = K\, v^{\alpha}\, r^{\beta}\, \rho^{\gamma} \qquad (2)$$

حيث (K) ثابت عددى ليس له أبعاد.

بالتعويض عن أبعاد الكميات بطرفى المعادلة رقم (2) ينتج ان:

$$M\, L\, T^{-2} = (L\, T^{-1})^{\alpha}(L)^{\beta}(M\, L^{-3})^{\gamma}$$

$$M\, L\, T^{-2} = M^{\gamma}\, L^{\alpha+\beta-3\gamma}\, T^{-\alpha} \qquad (3)$$

ولكي تكون المعادلة صحيحة لابد وأن تكون متجانسة بمعنى أن أس اى بعد من الطرف الأيمن يساوى أس نفس البعد من الطرف الأيسر.

$$\therefore\ \gamma = 1 \qquad (4)$$

$$\therefore\ \alpha + \beta - 3\gamma = 1 \qquad (5)$$

$$\therefore\ \alpha = 2 \qquad (6)$$

بالتعويض من معادلة (4)، (6) فى معادلة (5) ينتج أن:

$$\therefore\ \beta = 2 \qquad (7)$$

بالتعويض عن (α, β, γ) فى المعادلة (2) ينتج أن:

$$F = K\, v^{2}\, r^{2}\, \rho$$

٤- إذا كان السائل ينساب انسيابا منتظما خلال أنبوبة بسرعة نهائية تعتمد على اللزوجة والكثافة ونصف قطر الأنبوبة. قارن بين السرعتين النهائيتين لسائلين A, B علماً بأن

$$\eta_A = 1.0x10^{-3}\ P_a.s, \qquad \eta_B = 1.2x10^{-3}\ P_a.s$$

$$\rho_A = 1000\ Kg\, m^{-3}, \qquad \rho_B = 800\ Kg\, m^{-3}$$

وأن الأنبوبة واحدة فى الحالتين

الحل:

نفرض أن السرعة النهائية للسائل (v) دالة فى معامل اللزوجة للسائل (η) وكثافته (ρ) ونصف قطر الأنبوبة (r).

$$\therefore v = f(\eta, \rho, r)$$

بوضع هذه الدالة فى صورة أسية

$$v = K\,\eta^{\alpha}\,\rho^{\beta}\,r^{\gamma} \qquad (1)$$

حيث (K) ثابت عددى ليس له أبعاد.

بالتعويض عن أبعاد الكميات بطرفى المعادلة رقم (1) ينتج ان:

$$L\,T^{-1} = (M\,L^{-1}\,T^{-1})^{\alpha}(ML^{-3})^{\beta}(L)^{\gamma}$$

$$M^{0}\,L\,T^{-1} = M^{\alpha+\beta}\,L^{-\alpha-3\beta+\gamma}\,T^{-\alpha} \qquad (2)$$

ولكي تكون المعادلة صحيحة لابد وأن تكون متجانسة بمعنى أن أس اى بعد من الطرف الأيمن يساوى أس نفس البعد من الطرف الأيسر.

$$\therefore\ \alpha + \beta = 0 \qquad (3)$$

$$\therefore\ -\alpha - 3\beta + \gamma = 1 \qquad (4)$$

$$\therefore\ \alpha = 1 \qquad (5)$$

من المعادلتين (5)، (3) ينتج أن:

$$\therefore\ \beta = -1 \qquad (6)$$

بالتعويض من المعادلتين (6) و (5) فى (4):

$$\therefore\ \gamma = -1 \qquad (7)$$

بالتعويض عن (α, β, γ) فى المعادلة (1) ينتج أن:

$$\therefore v = K\,\frac{\eta}{\rho\,r} \qquad (8)$$

وبالنسبة للسائلين (A, B)

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\eta_A}{\eta_B} \times \frac{\rho_B}{\rho_A}$$

لأن $r_A = r_B$ بالتعويض

$$\therefore \frac{v_A}{v_B} = \frac{1.0\text{x}10^{-3}\ \text{x}\ 800}{1.2\text{x}10^{-3}\ \text{x}\ 1000} = \frac{2}{3}$$

٥- تتذبذب قطرة ماء حول نفسها أثناء سقوطها فإذا كان زمن ذبذبتها (τ) يعتمد على نصف قطرها (r) وكثافتها (ρ) ومعامل التوتر السطحى (T). مستخدماً التحليل الأبعادى أستنتج القانون الذى يعطى زمن الذبذبة. واحسب الثابت العددى لهذا القانون إذا كان نصف قطر الكرة هو ($3\ mm$) وأن القطرة أثناء سقوطها الحر تصنع خمس ذبذبات كاملة فى مسافة قدرها ($0.24\ m$) علماً بان التوتر السطحى للماء هو ($4.2\ \text{x}\ 10^{-2}\ Nm^{-1}$).

الحل:

نفرض أن زمن الذبذبة دالة فى نصف القطر (r) والكثافة (ρ) ومعامل التوتر السطحى(T)

$$\therefore \tau = f(r, \rho, T)$$

$$\tau = K\, r^{\alpha}\, \rho^{\beta}\, T^{\gamma} \qquad (1)$$

أبعاد طرفى المعادلة (1) هى

$$T = L^{\alpha}(ML^{-3})^{\beta}(MT^{-2})^{\gamma}$$

$$L^0M^0\,T = L^{\alpha-3\beta}\,M^{\beta+\gamma}\,T^{-2\gamma} \qquad (2)$$

$$\therefore\ \alpha - 3\beta = 0 \qquad (3)$$

$$\therefore\ \beta + \gamma = 0 \qquad (4)$$

$$\therefore\ -2\gamma = 1$$

$$\therefore \gamma = -\frac{1}{2} \qquad (5)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \qquad (6)$$

$$\alpha = \frac{3}{2} \qquad (7)$$

بالتعويض عن (α, β, γ) فى المعادلة (1) ينتج أن:

$$\tau = K\ r^{\frac{3}{2}}\ \rho^{\frac{1}{2}}\ T^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \tau = K \sqrt{\frac{\rho\, r^3}{T}} \qquad (8)$$

وحيث ان القطرة تسقط تحت تأثير عجلة الجاذبية الأرضية

$$\therefore S = v_o\, t + \frac{1}{2} a\, t^2$$

بوضع $(a=9.5,\ S=0.24)$

$$\therefore 0.24 = \frac{1}{2} 9.5\, t^2 \quad \Rightarrow \quad t = 0.22 \text{ sec}$$

وحيث أن (t) زمن خمس ذبذبات فإن

$$\therefore \tau = \frac{0.22}{5} = 0.044 \text{ sec}$$

بالتعويض فى المعادلة (8)

$$\therefore 0.044 = K \sqrt{\frac{10^3 \text{ x } (3 \text{ x } 10^{-2})^3}{7.2 \text{ x} 10^{-2}}}$$

$$\therefore K = 2.3 \qquad (9)$$

$$\therefore \tau = 2.3 \sqrt{\frac{\rho\, r^3}{T}}$$

الحركة الدورانية والتذبذبية

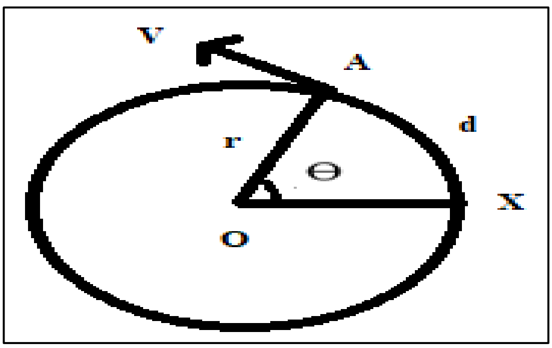
الحركة الدورانية

دراسة الحركة الدورانية هام جدا لتفهم بعض الظواهر الطبيعية الموجودة فى الحياة العملية ومن أمثلة هذه الظواهر دوران الكواكب فى أفلاكها حول الشمس ودوران الالكترونات حول النواه فى الذرة.

وكذلك يمكن من الحركة الدورانية الحصول على حركة إنتقالية ومثال ذلك حركة سيارة وانتقالها من مكان لاخر بسبب دوران عجلاتها. يدرس هذا الجزء من الحركة الدورانية.

المسافة الزاوية

إذا كان لدينا جسم مادى A يدور حول نقطة ثابته O فى دائرة نصف قطرها (r)، ولتحديد موضع الجسم عند أى زمن فعلينا أن ناخذ اتجاها ثابتا كالمحور (x) ولتكن (d) هى المسافة المقاسة على محيط الدائرة بدءاً من هذا المحور. ونفرض أن θ هى الزاوية المركزية المقابلة للقوس (d) الذى قطعه الجسم A وأن هذه الزاوية ومن تعريف الزاوية بالتقدير الدائرى.



$$\theta = \frac{d}{r} \quad \Longrightarrow \quad d = r\,\theta \qquad (1)$$

المسافة الخطية = المسافة الزاوية x نصف القطر

السرعة الزاوية

إذا اخذنا فى الإعتبار أن الجسم يقطع أقواساً متساوية فى ازمنه متساوية فتكون سرعة الجسم الخطية التى يتحرك بها هى طول القوس المقطوع فى وحدة الزمن.

فإذا قطع الجسم A قوسا فى الدائرة (d) فى زمن t فإن السرعة الخطية تساوى $(\frac{d}{t})$ وتكون فى إتجاه المماس للدائرة ويمكن تمثيلها بسهم حيث يمثل اتجاهها فى أى لحظة كما يمثل طوله مقدار السرعة وتسمى الزاوية المقطوعة فى وحدة الزمن السرعة الزاوية حيث ان الحركة منتظمه فإن هذا المقدار يكون ثابتا كما فى السرعة الخطية.

$$\therefore\ \omega = \frac{\theta}{t} \qquad \rightarrow \qquad \theta = \omega t$$

المسافة الزاوية = السرعة الزاوية x الزمن

$$\therefore\ d = \theta\, r$$

بالقسمة على t

$$\therefore\ \frac{d}{t} = \frac{\theta}{t}\ r \qquad \rightarrow \qquad v = \omega r \qquad (2)$$

السرعة الخطية = السرعة الزاوية x نصف القطر

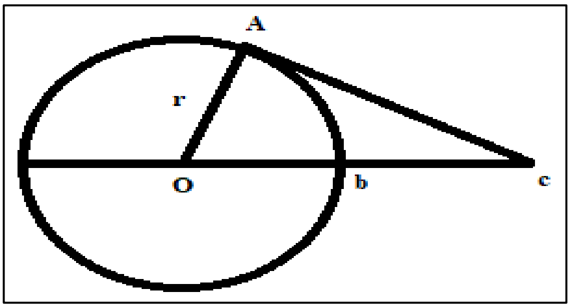
العجلة الزاوية

فى حالة نقطة متحركة بسرعة منتظمة v فى مسار دائرى نصف قطره (r) حول نقطة ثابته (o) فإن إتجاهها يكون دائم التغيير فإذا ما بدأت الحركة من A فإن السرعة المنتظمة (v) تتطلب ان تسير النقطة الى (c) ولكنها تمر فعلا بالنقطة d اى انها تكون اقرب الى (o) بالمسافة (bc) لذلك يكون لها عجلة نحو المركز (o) ويمكن تعيينها كما يلى:

$$\overline{oc}^2 = \overline{oA}^2 + \overline{Ac}^2$$

$$(r + bc)^2 = r^2 + \overline{Ac}^2$$

$$r^2 + 2r.bc + bc^2 = r^2 + \overline{Ac}^2$$



اذا كانت الزاوية $A\widehat{o}b$ صغيرة جداً كان bc صغير جداً بالنسبة الى r وبذلك يمكن إهمال bc^2 ويمكن أخذ $\overline{Ab}^2 + \overline{Ac}^2$

$$\therefore\ 2r.bc = \overline{Ac}^2 = \overline{Ab}^2$$

$$bc = \frac{\overline{Ab}^2}{2r} \qquad (3)$$

ولان السرعة عند A كانت متجة تماماً في الاتجاه Ac وبوصول النقطة الى (b) فانها قد تحركت مسافة bc مقتربة من (o).

وإذا اعتبرنا $A\widehat{o}b$ صغيرة جدا أمكن اعتبار bc عموديا على Ac ويكون الزمن المأخوذ في قطع المسافة Ab يساوي $\frac{Ab}{v}$

وحيث أن النقطة مبتدئة من الصفر

$$\therefore d = \frac{1}{2}at^2$$

$$\therefore bc = \frac{1}{2}a(\frac{Ab}{v})^2 \qquad (4)$$

حيث a العجلة نحو المركز ، من المعادلات $(3, 4)$

$$\therefore \frac{\overline{Ab}^2}{2r} = \frac{1}{2}a(\frac{Ab}{v})^2$$

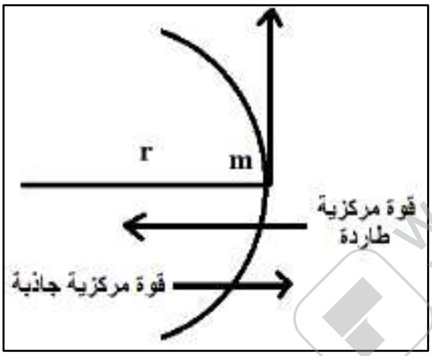
$$\because v = \omega r \qquad \therefore a = \frac{v^2}{r}$$

$$\therefore a = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r$$

وهذا يعنى أن النقطة التى تسير بسرعة v فى مسار دائرى يكون لها عجلة نحو المركز مقدارها $\frac{v^2}{r}$ أو $\omega^2 r$.

القوة المركزية الجاذبة والقوة المركزية الطارده

عند دوران جسم مادى كتلته (m) فى مسار دائرى نصف قطره (r) بسرعة خطية



(v) فإن عجلته نحو المركز هى ($\frac{v^2}{r}$) ولكى يكتسب الجسم هذه العجلة يجب ان تؤثر عليه قوة نحو المركز تساوى (a x m) هى القوة المركزية الجاذبة.

أى ان ($mr\omega^2 = \frac{m\,v^2}{r}$)

اما رد فعل النقطة لهذه القوى يسمى القوة الطاردة المركزية.

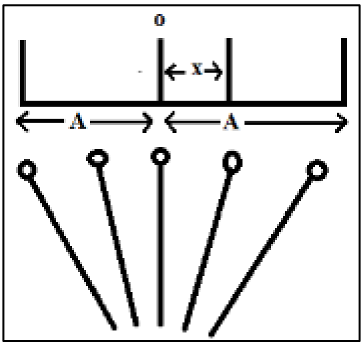
ويمكن تفهم القوة الطاردة المركزية من راكب الدراجة عندما يسير فى طريق منحنى يشعر بوجود هذه القوة وكلما زاد من سرعته كلما زادت هذه القوة لذلك فإن راكب الدراجة يعمل على إمالتها جهة المركز حتى لا يختل توازنه. كما أن هذه القوة هى التى تمكن راكب الموتوسيكل من الجريان على حائط إسطوانى كما نشاهد ذلك فى الملاهى.

كما انه بفعل هذه القوة تبقى الكواكب فى أفلاكها وبدونها لوقعت الارض على الشمس ولما كان هناك نظام شمسى وبسببها تفرطحت الأرض وهى رخوة فصار قطرها عند خط الإستواء أكبر منه بين القطبين.

الحركة التوافقية

سبق أن درسنا حالة الأجسام التى تتحرق تحت تأثير قوة ثابته كحركة جسم يسقط تحت تأثير الجاذبية الأرضية مثلا وفى هذه الحالة كانت العجلة التى تؤثر على هذه الاجسام ثابته أثناء الحركة.

سندرس الآن نوعا اخر من الحركة تتغير فيه القوة والعجلة حسب تغير اماكن الجسم. وأبسط نوع من هذه الحركة هى حركة طرف خيط أو قضيب مرن مثبت فى احد طرفيه فاذا اخذنا فى الإعتبار شريحة طويلة من الصلب مثبته رأسيا ومثبت بطرفها العلوى كرة صغيرة (كما بالشكل) عند التاثير بقوة تعمل على ازاحة الكرة مسافة (A) عند وضع اتزانها عند (o). فإن حركة الكرة بعد زوال تأثير القوة يمكن تلخيصها فيما يلى:-



١- نتيجة لمرونة شريحة الصلب تتولد قوة تعمل على عودة الكرة إلى وضع الاتزان. هذه القوة تعرف بالقوة الراده المرنه. وتساوى (-Kx) حيث(x) البعد عن وضع الاتزان ، (k) ثابت القوة.

٢- تتناقص قيمة هذه القوة إلى ان تصل للصفر عند (o).

٣- نتيجة للسرعة التى اكتسبتها الكرة فانها تتعدى فى حركتها النتقطة (o) الى اليسار.

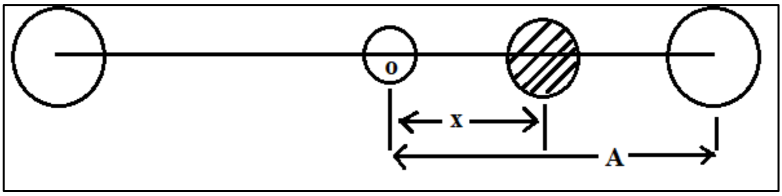
٤- بمجرد الابتعاد عن (o) فان القوة الرادة المرنه تبدأ فى العمل مرة أخرى ولكن فى الاتجاه المضاد.

٥- يصل الجسم الى وضع سكون عند نقطه على الجانب الأيسر ثم يبدأ فى إعادة حركته مرة أخرى.

وقد دلت كلا من التجارب العملية والنظرية على أن الحركة تكون محددة بالمدى $(\pm A)$ على جانبى وضع الإتزان.

معادلات الحركة التوافقية البسيطة:

الشكل يوضح وضع الكرة المتصلة بشريحة الصلب عند لحظة معينه تبعد فيها مسافة x عن وضع الإتزان.



القوة التى تؤثر على الكرة فى هذه الحالة هى القوة الرادة المرنة $(F = -K\,x)$ وبتطبيق قانون نيوتن

$$\therefore F = -K\,x = mg = mv\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore mv\frac{dv}{dx} + K\,x = 0$$

بإجراء التكامل

$$\therefore \int mv\,dv + \int K\,x\,dx = c_1$$

حيث c_1 ثابت

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K\,x^2 = c_1$$

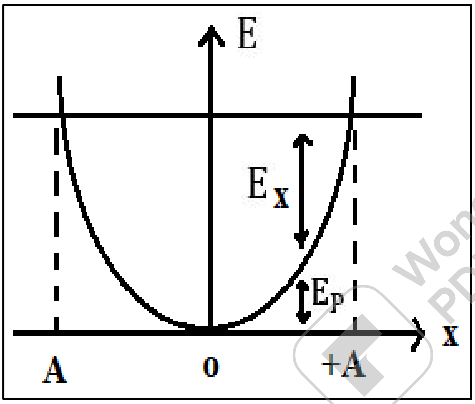
يمثل الحد $(\frac{1}{2}mv^2)$ طاقة حركة الجسم (E_x) بينما $(\frac{1}{2}K\,x^2)$ يمثل طاقة الوضع المرنة للجسم (E_P). المعادلة الاخيرة توضح أن الطاقة الكلية للجسم (E) ثابته وان ثابت التكامل $(E = c_1)$

$$\therefore E_K + E_P = E$$

إذا طاقة الجسم المتحرك حركة توافقية بسيطة عند أى لحظة عبارة عن مجموع طاقة وضعه + طاقة حركته. وتصبح طاقة الحركة صفر عندما تصل سرعته للصفر أى عندما تبلغ أقصى إزاحة له وعلى ذلك تصبح طاقته الكلية مساوية لطاقة وضعه عند النقطة وتصبح طاقة الموضع صفر عندما تبلغ سرعته نهايتها العظمى أى عندما يمر الجسم بمركز الحركة وتصبح طاقته الكلية مساوية لطاقة الحركة عند هذه النقطة

أى أن:-

الطاقة الكلية للجسم = طاقة الوضع عند أقصى إزاحة = طاقة الحركة عندما يمر الجسم بمركز الحركة



الشكل يبين التمثيل البيانى للمعادلة الأخيرة وفيه الخط الأفقى الذى يقطع القطع الزائد يحدد المدى الذى يمكن للجسم المتذبذب أن يتحرك خلاله $(\pm A)$. بالنسبة للنقط خارج هذا المدى فإن طاقة الوضع (E_P) تكون أكبر من الطاقة الكلية و هذا مستحيل.

يتضح من الشكل انه عند النقطة $(\pm A)$ تكون الطاقة الكلية فى صورة طاقة وضع وبالتالى تكون السرعة عند (A) تساوى صفر بينما عند النقطه (o) فإن الطاقة الكلية تكون فى صورة طاقة حركة لذلك تكون السرعة عند (o) فى قيمتها العظمى(v_{max})

$$\therefore \frac{1}{2} m v_{max}^2 = E$$

$$\therefore v_{max} = \pm\sqrt{2E/m}$$

عند نهاية الحركة تكون الازاحة أكبر ما يمكن (x_{max}) وتعرف بسعة الحركة (A)

$$\therefore \frac{1}{2} K\, x_{max}^2 = E$$

$$\therefore x_{max} = \sqrt{{}^{2E}/_{K}} = A$$

أ- من المعادلة $(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K\, x^2 = c_1 = E)$ فإن السرعة عند أى إزاحة (x)

تكون $\quad v = \sqrt{\frac{2E-Kx^2}{m}}$

بالتعويض عن $(A = \sqrt{\frac{2E}{K}})$ فإن

$$v = \left(\sqrt{\frac{K}{m}}\right) . \sqrt{A^2 - x^2}$$

ب- لإيجاد الإزاحة (x) عند أى زمن (t) فإننا نعوض فى المعادلة السابقة عن $.(v = \frac{dx}{dt})$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \left(\sqrt{\frac{K}{m}}\right) . \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{K}{m}} \int dt$$

$$\therefore \sin^{-1}\frac{x}{A} = \sqrt{\frac{K}{m}}\, t + c_2$$

حيث (c_2) ثابت التكامل

إذا فرضنا أنه عند $(t = 0)$ فإن $(x = x_0)$

إذا بالتعويض فى المعادلة الاخيرة ينتج ان

$$c_2 = \sin^{-1}\frac{x_o}{A} = \theta_o$$

$$\therefore \sin^{-1}\frac{x}{A} = \sqrt{\frac{K}{m}}\, t + \theta_o$$

$$\therefore x = A\sin(\sqrt{\frac{K}{m}}\, t + \theta_o)$$

وتعرف الزاوية بين القوسين فى المعادلة الاخيرة بزاوية الطور والزاوية (θ_o) بزاوية الطور الإبتدائية.

ت- الزمن الدورى للحركة التوافقية البسيطة (T)

إذا فرضنا أن الازاحة (x) فى المعادلة

$$x = A\sin(\sqrt{\frac{K}{m}}\, t)$$

أى باعتبار ($\theta = 0$) وبالتالى ($\sin\theta = 0$)

إذا عند زيادة (t) بالمقدار ($2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$) تصبح الإزاحة على الصورة

$$x = A\sin\sqrt{\frac{K}{m}}\,(t + 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}})$$

$$= A\sin(\sqrt{\frac{K}{m}}\, t + 2\pi)$$

$$= A\sin\sqrt{\frac{K}{m}}\, t$$

الزمن $\left(2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}\right)$ يسمى الزمن الدورى (T)

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

واضح أن الازاحة عند زمن (t) = الازاحة عند زمن (t+T) = الازاحة عند زمن (t+2T) ....إلخ.

ويكون التردد $\left(f = \frac{1}{T}\right)$ كما أن السرعة الزاوية (ω) تعطى بالعلاقة

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

من معادلة الازاحة

$$x = A\sin(\omega t + \theta)$$

يمكن الحصول على السرعة (v) وذلك بتفاضل الازاحة بالنسبة للزمن

$$\therefore v = A\omega\cos(\omega t + \theta) = \pm A\omega\sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \theta)}$$

$$= \pm A\omega\sqrt{1 - {x^2}/{A^2}}$$

$$\therefore v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

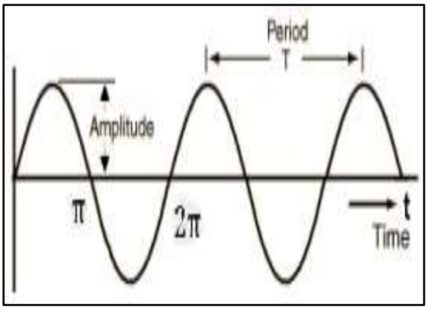
بالتفاضل بالنسبة للزمن فى المعادلة نحصل على العجلة أو تفاضل الإزاحة مرتين

$$\therefore a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \theta)$$

$$\therefore a = -\omega^2 x = -\frac{K}{m}x$$

الإشارة السابقة تعنى أن العجلة يكون إتجاها إلى النقطة (o) أى ان فى إتجاه ضد إتجاه تزايد (x) أى تزداد كلما قلت (x). يضح من المعادلة الأخيرة أن العجلة تتناسب مع الإزاحة.

من هذا يمكن تعريف الحركة التوافقية البسيطة على أنها حركة جسم فى خط مستقيم تحت تأثير قوة تتناسب مع بعد الجسم عند نقطة ثابته فى هذا الخط بحيث أن القوة تكون دائما موجهة نحو النقطة الثابته.



والعلاقة بين الإزاحة (x) والزمن (t) لجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة مبين (بالشكل) (هذا المنحنى يسمى منحنى جيبى).

حركة جسم معلق فى سلك زنبركى:

نأخذ سلكا زنبركيا من مادة مرنه ونثبته من طرفه العلوى ونترك طرفه السفلى حرا. يكون الزنبرك فى حالة إتزان تحت تأثير كلا من مرونته وثقله. فإذا علق ثقل (m) نجد أنه يستطيل بحيث تتزن قوة مرونته (إلى أعلى) مع الثقل المعلق (إلى أسفل). من قوانين المرونة وجد أن الاستطالة تتناسب مع القوة المؤثرة (قوة المرونة).اى ان

$F \alpha x$ $\therefore F = -Kx$

حيث (x) مقدار الإستطالة ، (F) قوة مرونة السلك ، (K) ثابت القوة ويعرف بأنه القوة التى تحدث إستطالة قدرها الوحدة. الإشارة السالبة لان قوة المرونة فى إتجاه عكس القوة المؤثرة (وزن الكتلة) (كذلك لأن القوة (F) لها عكس إتجاه قوة الإستطالة) وحيث الإستطالة الحادثة (x) فإنه يمكن التعبير عن القوة (F) بالعلاقة $(F = m\frac{d^2x}{dt^2})$. أيضا $(F = mg)$ عند الإتزان.

إذا يمكن أن نقول $F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$

إذا العجلة $(\ddot{x})$ تساوى $\ddot{x} = -\frac{K}{m}x$

وعند تناسب العجلة مع الإزاحة بإشارة مخالفة فإن الجسم يتذبذب بحركة توافقية بسيطة. وحيث ان العجلة $(\ddot{x})$ تساوى $\ddot{x} = -\omega^2 x$. بالمقارنة مع المعادلة الاخيرة

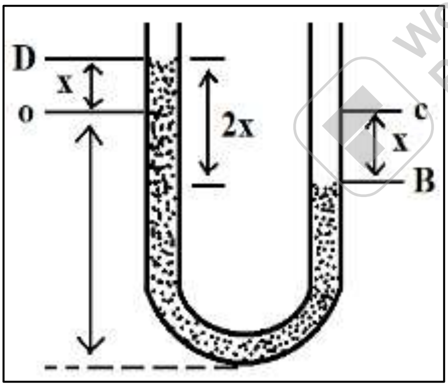
$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

وحيث أن زمن الذبذبة (T) يساوى

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

إهتزاز عمود السائل فى أنبوبة ذات شعبتين:

إذا وضع سائل فى أنبوبة ذات شعبتين (كما بالشكل) وكان مستوى السائل عند (o) ، (c). فإذا نفخنا بعضا من الهواء المظغوط فى احد الفرعين فإن السائل سوف يهبط فى هذا الفرع بينما يرتفع سطح السائل فى الفرع الأخر ويتحرك سطحى السائل فى حركة تذبذبية قبل ان يصلا إلى حالة الاستقرار النهائي.



عند لحظة معينة نفترض أن السائل فى أحد الفرعين عند (D) على ارتفاع (x) من الوضع (o) بينما فى الفرع الاخر يكون على نفس الارتفاع أسفل الوضع (c) اى عند (B). اى ان الفرق بين مستوى سطحى السائل فى الفرعين يصبح (2x).

وزن عمود السائل الذى طوله (2x) هذا سوف يؤثر على السائل الموجود فى الانبوبة ونتيجة لذلك يتحرك السائل حركة تذبذبية.

وزن عمود السائل هذا (أى القوة المؤثرة على السائل)

= الكتلة x العجلة = حجمه x كثافته x العجلة

$$= g\,\rho(2\,x\,A) = 2\,x\,A\,\rho\,g$$

حيث (ρ) كثافة السائل ، (A) مساحة مقطع الانبوبة ، (g) العجلة الارضية ، وكتلة السائل فى الانبوبة (فى كلا الفرعين) =$2\,h\,A\,\rho$

حيث (2h) تمثل الطول الكلى للسائل فى الفرعين. من قانون نيوتن نجد أن

$$-2\,x\,A\,\rho\,g = 2h\,A\,\rho\,.\,a$$

حيث (a) عجلة حركة السائل. وتدل الإشارة السالبة على أن القوة تتجه لاسفل أى فى إتجاه النقطة (o) فى حين أن الازاحة (x) تقاس من الوضع (o) للسائل قبل الحركة إلى (D) وضع السائل بعد الحركة. أى من أسفل إلى أعلى (اى عكس إتجاه القوة)

$$\therefore a = -\frac{g}{h}x = -\omega^2 x$$

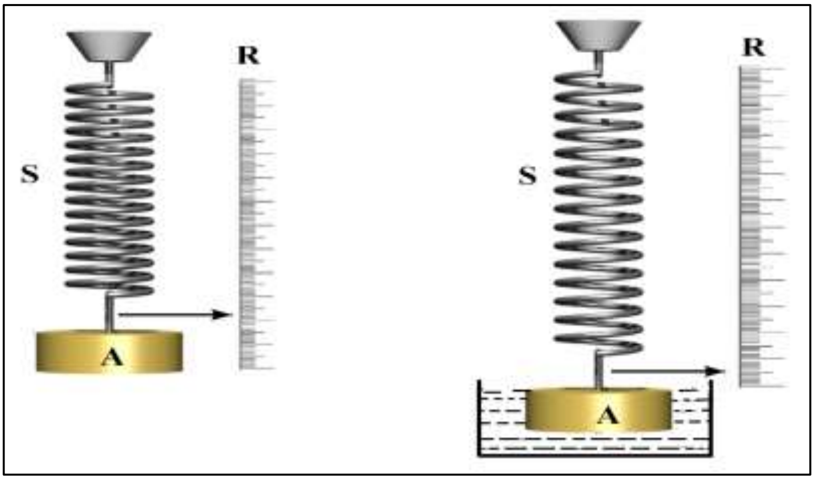
اى ان العجلة تتناسب مع إزاحة عمود السائل (x) او بمعنى اخر فإن حركة السائل حول النقطة (o) أو (c) إنما هى حركة توافقية بسيطة زمنها الدورى

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{h/g}$$

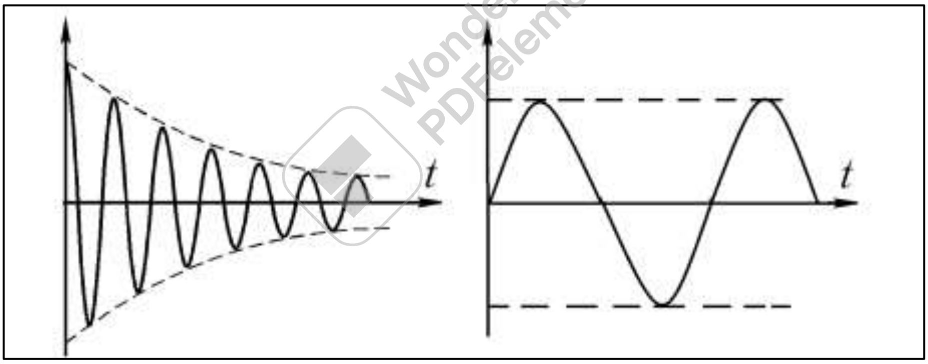
تخميد الحركة التوافقية البسيطة:

تستمر الحركة التوافقية بنفس سعتها إلى مالانهاية وذلك إذا لم يفقد الجسم المتحرك أى جزء من طاقته للوسط المحيط به (الهواء مثلا). هذا من الناحية النظرية ولكن من الناحية العملية يحدث مثل هذا الفقدان وبالتالى تقل سعة الحركة تدريجيا ويقال ان الحركة مخمدة وسوف نوضح هنا تجربة عملية يمكن بها ملاحظة هذا التخميد للحركة التوافقية البسيطة.

إذا علق ثقل مناسب (A) فى نهاية زنبرك (s) متصل به مؤشر (r) يتحرك على تدريج جانبى (R) - كما بالشكل - فإنه عند إزاحة الثقل الى اسفل فإنه يتذبذب فى حركة توافقية بسيطة يمكن قياس زمنها الدورى.



إذا غمر الثقل (A) فى زيت مثلا فإن الزمن الذى بعده تخمد هذه الذبذبات يكون أقصر منه فى الحالة الأولى. كذلك فإن سعة الحركة والتى يمكن ملاحظتها على التدريج (R) تقل فى الذبذبات المتتالية كما هو واضح من الشكل التالى:



ويكون نقصان سعة الحركة مع الزمن فى صورة دالة أسية كما يتضح فيما يلى:-

لقد أثبتت التجارب أن القوة المقاومة (قوة الاحتكاك) فى - حالة السرعات الصغيرة- تتناسب مع سرعة الجسم (v). أى أن قوة الاحتكاك (E_{Fr}) تساوى مقدار ثابت (b) يسمى معامل المقاومة (الاحتكاك) مضروبا فى السرعة.

$$\therefore \; E_{Fr} = bv$$

والاشارة السالبة توضح ان القوة متجهة فى الاتجاه المضاد للحركة. أى المضاد لاتجاه السرعة.

ويحدد ما فقد من طاقة الجسم بالشغل الذى تبذله قوة الاحتكاك وعلى ذلك فان المفقود من الطاقة (dE) خلال الفترة الزمنية (dt) هو

$$dE = E_{Fr} \,.\, dx = -b\, v^2\, dt$$

حيث (dx=v dt) تمثل ازاحة الجسم

$$\frac{dE}{dt} = -b\, v^2 = -\frac{2b}{m} - \frac{mv^2}{2}$$

وحيث ان القيمة المتوسطة لطاقة حركة الجسم المتذبذب تساوى نصف طاقته الكلية (E) فان المعادلة السابقة يمكن كتابتها على الصورة:

$$\frac{dE}{dt} = 2\, \gamma\, E$$

حيث $\gamma = {}^{b}/_{2m}$

يتضح من هذه المعادلة أن سرعة تناقص الطاقة تتناسب مع مقدار الطاقة نفسها.

$$\therefore \frac{dE}{E} = 2\, \gamma\, dt$$

بإجراء التكامل

$$\therefore \text{Ln}\, E = -2\, \gamma\, t + \text{Constant}$$

ولتعيين ثابت التكامل نفترض ان قيمة الطاقة فى اللحظة الابتدائية هى (E_O)

$$\therefore E = E_O\, e^{-2\gamma t}$$

من هذا نرى أن طاقة الذبذبة تتناقص نتيجة الاحتكاك وفقا لقانون اسى وحيث ان الطاقة تتناسب مع مربع السعة

$$\therefore A = A_O\, e^{\,\gamma t}$$

وتتحدد درجة تناقص السعة بالمقدار (γ) والذى يعرف بمعامل التخميد Damping Coefficient.

الذبذبات الاجبارية (القسرية)

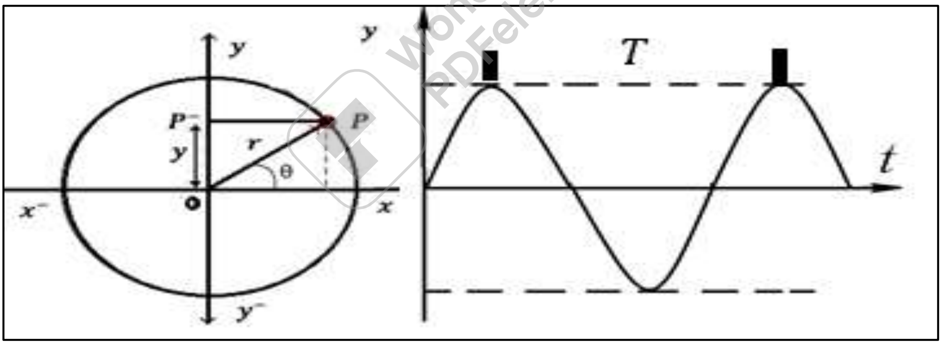
كما ذكرنا سابقا فى اي مجموعة متذبذبة تحدث عمليات احتكاك ولذلك تخمد هذه الذبذبات وتضمحل بمرور الزمن ولإحداث ذبذبة غير مخمده لابد من تعويض المفقود من الطاقة نتيجة الاحتكاك ويمكن ان يأتى هذا التعويض من مصدر خارجى للطاقة. وابسط الحالات هى حالة التأثير على المجموعة المتذبذبة بقوة خارجية اضافية دورية بجانب القوة المتناسبة مع الازاحة (القوة الاصلية).

هذه القوة تتغير مع الزمن بتردد (w)

$$F_{ext} = F_0 \cos w_0 t$$

حيث w_0 هو تردد الذبذبات الحرة. وتحت تأثير هذه القوة تنشا فى المجموعة ذبذبات تكون فى توافق مع القوة وهذه الذبذبات تعرف بالذبذبات القسرية.

العلاقة بين الحركة التوافقية البسيطة والحركة فى دائرة



نفرض ان لدينا نقطة مادية تدور حول محيط دائرة مركزها (o) ونصف قطرها (r) بسرعة ثابتة قيمتها (v) وان سرعتها الزاوية (w) وتبدأ النقطة المادية حركتها عند (x) عند الزمن (t=0) وبعد فترة زمنية (t) تكون وصلت الى النقطة (P) فتكون الزاوية ($wt = \theta = \angle Pox$) ويكون مسقط (P) على المحور الراسى عند (P\`) ويبعد عن المركزمسافة (y) تحسب من المعادلة

$$y = r \sin wt$$

ويمكن تمثيل ذلك بيانيا بأخذ الازاحة على محور (y) والزمن على المحور (x) ويمثل المنحنى المبين بالشكل حركة المسقط اثناء ذبذبة كاملة من (o) الى (y) الى (o) الى (y`) الى (o) وواضح ان هذا المنحنى يمثل دالة جيبية

واضح من المعادلة ان الازاحة (y) تكون أكبر ما يمكن عند (y=r) عندما $(wt = \frac{\pi}{2})$ وتكون السرعة (v) تساوى $v = \frac{dy}{dt} = rw\cos wt$

والعجلة (v`) تساوى $v` = \frac{d^2y}{dt^2} = -rw^2 \sin wt$

وهذه المعادلة تدل على ان العجلة سالبة واتجاهها نحو المركز (o) وتتناسب طرديا مع البعد (y) من المركز وكما نعلم الحركة التى يتوفر فيها هذان الشرطان تسمى حركة توافقية بسيطة. وبذلك يمكن اعتبار ان الحركة التوافقية هى مسقط حركة الجسم الدائر بسرعة زاوية ثابتة على اى مستقيم يمر بمركز الحركة مثل حركة النقطة (P`) على المستقيم (yoy`). والزمن اللازم لتحرك النقطة (P`) من (y) الى (y`) ثم الرجوع ثانية الى (y) هو نفس الزمن اللازم لتدور النقطة المادية دورة كاملة حول المركز اى الزمن اللازم لقطع زاوية دوران مقدارها (2π) اى ان $(T = \frac{2\pi}{W})$ حيث (w) هى الزاوية التى يصنعها الجسم الدائر فى ثانية واحدة.

امثلة محلولة

١- اكتب معادلة الحركة التوافقية البسيطة التى سعتها A=5cm إذا كان عدد الذبذبات في الدقيقة 150 cycle وزاوية الطور الابتدائية لهذه الحركة هى 45

الحل

المعادلة العامة للحركة التوافقية البسيطة هى

$$x = A\sin(wt + \theta)$$

$$\because A = 5cm \ , \quad f = \frac{150}{60} = \frac{5}{2} \ , \quad \theta = 45 = \frac{\pi}{4}$$

$\because w = 2\pi f$

$\therefore w = 5\pi$

معادلة الحركة التوافقية البسيطة تكون على الصورة

$$x = 5\sin(5\pi t + \frac{\pi}{4})$$

٢- إذا كانت سعة الذبذبة لحركة توافقية بسيطة هى A=50cm وكان زمن الدورة T=4 sec والطور الابتدائى $\theta = \frac{\pi}{4}$.

أ- اكتب معادلة الحركة التوافقية البسيطة

ب- اوجد مقدار الازاحة عند موضع الاتزان لنقطة مهتزة عند بداية الحركة ثم بعد زمن قدره t=1.5 sec.

٣- نقطة مادية كتلتها m=5gm تتحرك حركة توافقية ترددها f= 0.5Hz وسعة الذبذبة A=3cm اوجد:

أ- قيمة سرعة النقطة المادية عندما تكون ازاحتها x=1.5cm.

ب- القيمة العظمى للقوة المؤثرة على النقطة المادية.

الحل

$$v = \pm w\sqrt{A^2 - x^2} = \pm 2\pi f\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$v = \pm 2 \times 3.14 \times 0.5\sqrt{9 \times 10^{-4} - 1.5 \times 10^{-4}}$$

$$v = \pm 8.2 \times 10^{-2} m/sec$$

القوة المؤثرة على النقطة المهتزة يمكن حسابها من قانون نيوتن

$$F = ma$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -w^2 A \sin(wt + \theta)$$

$$F = -4\,\pi^2 f^2\ m\,A \sin(wt + \theta)$$

وتكون القيمة العظمى للقوة تساوى

$$F_{max} = -4\,\pi^2 f^2\ m\,A$$

$$F_{max} = -4\ \times 9.8 \times 0.5^2\ \times 5 \times 10^{-3} \times\ 3 \times 10^{-2}$$

$$= 1.43 \times 10^{-3}\ N$$

٤- وضعت انبوبة على شكل حرف (u) راسيا ملئت بالماء حتى ارتفاع ٣٠سم فاذا ضغط سطح الماء في أحد الفرعين ثم ترك بعد ذلك اثبت ان حركة الماء في الانبوبة هى حركة توافقية بسيطة ثم احسب زمنها الدورى.

٥- يتحرك جسم خلال خط مستقيم حركة توافقية بسيطة وعندما كانت ازاحة الجسم من موضع الاتزان تساوى ٢ قدم كانت سرعته ٥ قدم/ث. وعندما أصبحت مقدار الازاحة مساوية ٣قدم اصبحت سرعته ٤قدم/ث. اوجد طول مسار الجسم وتردد هذه الحركة التوافقية.

الحل

$$v = \pm w\sqrt{A^2 - x^2}$$

عندما تكون v= 5 Ft/sec فان x=2 Ft.

$$5 = \pm w\sqrt{A^2 - 4}$$

$$25 = w^2\ (A^2 - 4)\ \ \longrightarrow\ \ (1)$$

عندما تكون v= 4 Ft/sec فان x=3 Ft.

$$4 = \pm w\sqrt{A^2 - 9}$$

$$16 = w^2\,(A^2 - 9) \;\longrightarrow\; (2)$$

بقسمة المعادلتين نحصل على

$$\frac{25}{16} = \frac{A^2 - 4}{A^2 - 9}$$

$$\therefore 25(A^2 - 9) = 16(A^2 - 4)$$

$$9\,A^2 = 161$$

$$A = 4.23\ \text{Ft}$$

وهذا يعنى ان سعة الحركة تساوى ٤,٢٣ قدم وحيث ان المسار الذي يقطعه الجسم يساوى ضعف سعة الحركة حيث ان الجسم يتحرك مسافتين متساويتين على كل جانب من نقطة الاتزان ولذلك طول المسار = ٨,٤٦ قدم

وحيث ان التردد (F) يعطى من العلاقة

$$F = \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi}$$

من المعادلة (١) نوجد قيمة (w)

$$w^2 = \frac{25}{A^2 - 4}$$

$$w = \frac{5}{\sqrt{(4.23)^2 - 4}}$$

$$F = \frac{5}{2\pi\sqrt{(4.23)^2 - 4}} = 0.2135$$

المرونة

المرونة خاصية يستعيد بها الجسم شكله وحجمه الأصل بعد زوال القوى المؤثرة عليه التي غيرت من حجمه او شكله او كليهما فاذا استعاد الجسم حجمه او شكله الاصلى تماما بمجرد زوال القوى المؤثرة قيل ان الجسم تام المرونة وإذا لم يستعد الجسم شكله او حجمه تمام بمجرد زوال القوى المؤثرة قيل انه عديم المرونة.

والجسم المرن يظهر الخواص الاتية

١- نفس الاجهاد يجب ان ينتج دائما نفس الانفعال.

٢- استمرار نفس الاجهاد يجب ان يستمر معه نفس الانفعال.

٣- عند زوال الاجهاد يجب ان يزول معه الانفعال كليا.

الاجهاد

يعرف بانه القوة المؤثرة على وحدة المساحات ووحدة قياسه نيوتن/ متر٢.

فاذا فرضنا ان القوة المؤثرة على سطح جسم هي F داين وان مساحة سطح الجسم تساوى A سم٢. فان الاجهاد $= \frac{F}{A}$ داين/ سم٢.

فاذا اخذنا سلكين من مادة واحدة متساويين في الطوا ولكن مختلفين في القطر وثبتنا طرفيهما العلويين وعلقنا في طرفيهما السفليين ثقلين متساويين سنجد ان الاستطالة في السلك الرفيع أكبر منها في حالة السلك الغليظ وهذا يعنى ان الاجهاد المؤثر على السلك الرفيع أكبر من الاجهاد المؤثر على السلك الغليظ لان القوة المؤثرة على وحدة المساحات من مقطع السلك الرفيع أكبر منها في حالة السلك الغليظ نظرا لصغر مقطع السلك الرفيع بالنسبة للسلك الغليظ.

انواع الاجهاد

اجهاد استطالة

وينتج عنه زيادة في الطول وهو الاجهاد الذي يكون عموديا على سطح جسم مؤثر فيه كما في حالة الاثقال المعلقة في طرف السلك

اجهاد ضغط

وينتج عنه نقص في الطول او تغير في الحجم.

اجهاد مماس

وينتج عنه تغير في شكل الجسم الهندسى. وهو الاجهاد الذي يكون محوريا لسطح الجسم المؤثر فيه كما في حال القوة السطحية التي تؤثر الوجه العلوي لكتله من المطاط مكعبة الشكل.

الانفعال

هو استجابة الجسم للإجهاد المؤثر عليه.

وكذلك يعرف بانه النسبة بين مقدار التغير الحادث في الطول او الحجم او الشكل الى الطول او الحجم او الشكل الاصلى. وللانفعال أنواع مناظرة للإجهاد فهناك الانفعال الطولى، والانفعال الحجمى والانفعال القصى. والانفعال ليس له وحدات لانه نسبه بين كميتين متماثلتين.

الانفعال الطولى

هو تغير الطول لوحدة الاطوال من الطول الاصلى للجسم.

فاذا فرضنا سلكا طوله الاصلى L وعند تعليق اثقال في طرفه استطال بمقدار $L^`$

فيصبح الانفعال الطولى $= \frac{L^`}{L}$

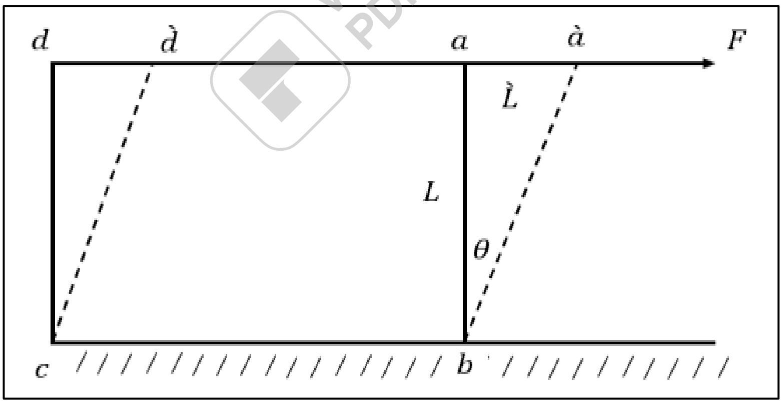
الانفعال الحجمى

هو التغير في الحجم لوحدة الحجوم من الحجم الاصلى للجسم.

فاذا فرضنا غاز حجمه الاصلى (V) سم٣ وأننا ضغطنا الغاز فنقص حجمه بمقدار (V`) سم٣.فان الانفعال الحجمى يساوى $= \frac{V`}{V}$.

الانفعال القصى

هو مقدار ازاحة احدى طبقتين افقيتين بالنسبة للأخرى ويكون البعد عنهما يساوى الوحدة فاذا فرضنا كتلة مكعبة الشكل من المطاط (abcd) ثبت وجهها السفلى (bc) في منضدة وأثرنا على وجهها العلوي (ad) بقوة منطبقة على هذا الوجه فأزيحت طبقات الكتلة بعضها بالنسبة لبعض واخذت شكل المنشور الذي وجهه الامامى (àbcd̀) ثم فرضنا ان طول ضلع المكعب (L) وان ازاحة الوجه العلوي بالنسبة للوجه السفلى ($L̀ = aà$).



إذا الازاحة حدثت بالنسبة لوجهين البعد بينهما $= L$

الانفعال القصى $= \quad \tan\theta = \frac{L`}{L}$

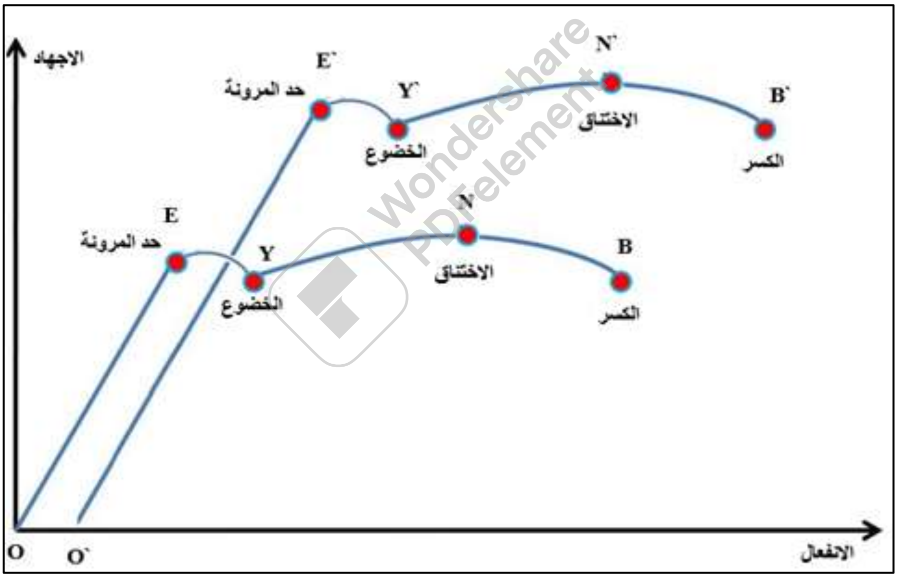
إذا كانت الازاحة (L`) صغيرة بالنسبة الى البعد (L) كما يحدث في الاجسام الصلبة فان الزاوية (θ) تكون صغيرة و هذا يعنى ان $\tan\theta = \theta$ مقدرة بالتقدير الدائرى.

إذا الانفعال القصى يساوى $\frac{L^{`}}{L} = \tan\theta = \theta$ والزاوية θ تسمى زاوية القص.

العلاقة بين الاجهاد والانفعال للمعادن القابلة للسحب

إذا أثرنا بقوة شد على سلك مثبت من أحد طرفيه ورسمنا العلاقة بين الإجهاد المباشر والانفعال الناتج فانه يلاحظ ما يأتي

١- يتناسب الاجهاد تناسبا طرديا مع الانفعال الى ان نقترب من النقطة (E) التى تسمى بحد المرونة. وإذا ازيل الاجهاد قبل ان نصل الى هذه النقطة يعود السلك الى طوله الاصلى اى ان السلك في هذه المنطقة يعتبر تام المرونة ويتبع سلوك قانون هوك.



٢- بعد النقطة (E) يصبح الجسم في حالة عدم استقرار ونلاحظ زيادة كبيرة في الانفعال وتكون العلاقة بين الاجهاد والانفعال غير خطية وربما تحدث زيادة في الانفعال حتى مع نقص الاجهاد حتى نصل الى النقطة (Y) وتسمى بنقطة الخضوع.

٣- بعد النقطة (Y) نجد ان اى اجهاد على الجسم مهما كان صغيرا ينتج عنه زيادة في انفعال بمعدل كبير الى ان نصل الى نقطة الاختناق (N) والتى تقابل

اقصى اجهاد وعندها تبدأ المادة في الاختناق حتى تصل الى نقطة الكسر (B) والتى عندها ينكسر الجسم.

٤- يلاحظ انه إذا وقع الاجهاد بعد حد المرونة فان الجسم لا يعود الى حالته الاصلية بل يصل الى نقطه اخرى $(O`)$ اى ان الجسم يكتسب انفعالا دائما $(OO`)$ كما هو مبين في الشكل وإذا اجريت التجربة ن جديد نحصل على منحنى اخر $(E`Y`N`B`)$ كما هو مبين في الشكل.

قانون هوك

قبل حد المرونة يتناسب الاجهاد تناسبا طرديا مع الاجهاد المؤثر اى ان يساوى مقدار ثابت ويسمى ثابت التناسب بمعامل المرونة ويتوقف معامل المرونة على طبيعة الانفعال وطبيعة المادة وهناك ثلاث انواع لمعامل المرونة طبقا لنوع الانفعال.

انواع معامل المرونة

١- معامل المرونة الطولية وهو في حالة تغير الشكل والحجم معا.
٢- معامل المرنة الحجمية وهو في حالة تغير الحجم فقط.
٣- معامل الصلابة وهو في حالة تغير الشكل فقط.

معامل المرونة الطولى او معامل ينج (Y)

هو نسبة الاجهاد الطولى الى الانفعال الطولى الحادث ويقدر الاجهاد بالقوة المؤثرة (F) في وحدة المساحات من مقطع السلك (A) ويقدر الانفعال الطولى بمقدار استطالة وحدة الطول من الطول الاصلى للسلك.

إذا ثبت سلك رفيع من أحد طرفية وجذب من الطرف الاخر بقوة (F) عموديا على مساحة مقطع السلك وزاد طوله الاصلى (L) بمقدار (L`) وكان نصف قطر السلك (r) فان معامل المرونة الطولى يعطى من المعادلة الاتية

$$Y = \frac{F/A}{L`/L} = \frac{F.L}{A.L`} = \frac{F}{\pi r^2}\ \frac{L}{L`}$$

معامل المرونة الحجمية (K)

توجد الاجسام عادة تأثير الضغط الجوى (P) وبالتالى فان ابعاد هذه الاجسام تكون مقاسة تحت تأثير الضغط الجوي

ولكن إذا أثرنا بقوة منتظمة (F) على جسم مساحته (A) فانه سوف نشا زيادة في الضغط مقدارها (ΔP) وتسوى $(\frac{F}{A})$ ويصبح الضغط المؤثر على الجسم مقداره $(P_0 + \Delta P)$ اى ان الجسم يكون تحت تاثير اجهاد مقداره $(\Delta P = \frac{F}{A})$ ونتيجة لهذا الاجهاد يتغير حجم الجسم بمقدار $(\Delta V))$ اى يحدث انفعال حجمى مقداره $(\frac{\Delta V}{V})$ ويعطى معامل المرونة الحجمية من المعادلة

$$K = \frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

$$K = -V\frac{dP}{dV} \qquad (2)$$

ووحداته هى داين /سم٢ والاشارة السالبة في العلاقة الاخيرة تعبر عن تناقص الحجم مع زيادة الضغط. ويعرف مقلوب معامل المرونة الحجمى بمعامل الانضغاط (β)

$$\beta = \frac{1}{K} = -\frac{1}{V}\left(\frac{dP}{dV}\right)_T \qquad (3)$$

معامل القص او معامل المتانة او معامل الصلابة

يعرف القص بانه التغير في شكل الجسم دون التغير في حجمه ويحدث ذلك تحت تأثير اجهاد مماس. ومعامل القص عبارة عن نسبة اجهاد القص الى الانفعال القصى. ويقدر اجهاد القص بالقوى السطحية المؤثرة في وحدة المساحات من سطح الجسم. ويقدر انفعال القص بزاوية القص.

لذلك فان معامل المتانة $= \frac{\text{اجهاد القص}}{\text{زاوية القص}}$

$$\text{معامل القص} = \frac{F}{A.\theta}$$

ووحدة قياسه هى داين/سم٢ ومن الجدير بالذكر المادة الواحدة تختلف قيم معاملات المرونة الثلاث لها نظرا لاختلاف التغير الحادث في كل من حالات المرونة الثلاث وكذلك تختلف قيمة اى معامل من المعاملات الثلاث باختلاف المادة.

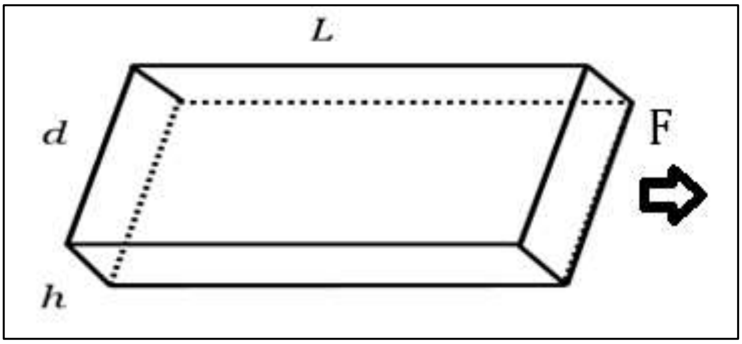
نسبة بواسون

نتيجة لتأثير القوة (F) على ساق معدنى ابعاده (d, h, L) يحدث انفعالا طوليا مقداره $(\frac{L`}{L})$ في اتجاه القوة ويصاحبه انفعال انكماش $(\frac{d`}{d})$، $(\frac{h`}{h})$ في الاتجاهين المتعامدين ويكونان متساويان ويسميان بالانفعالين المستعرضين ووجد انهما يتناسبان مع الانفعال الطولى اى ان

$$\frac{h`}{h} = \frac{d`}{d} = -\sigma\frac{L`}{L}$$

ويسمى ثابت التناسب (σ) بنسبة بواسون وهو ثابت للمادة الواحدة ويعتب من الخواص المميزة للمادة ويغرف بانه النسبة بين الانفعال المستعرض والانفعال الطولى والاشارة السالبة تعنى ان الزيادة في الانفعال الطولى يصاحبها نقص في الانفعال المستعرض

$$\sigma = \frac{\text{الانفعال المستعرض}}{\text{الانفعال الاطولى}} = \frac{d`}{d} \times \frac{L}{L`}$$



مثال (١) اثبت ان معامل المرونة الحجمى اغاز مثالى في حالة ثبوت درجة الحرارة يساوى ضغط الغاز

الحل

حيث ان الغاز مثالى ودرجة حرارته ثابتة فانه من قانون بويل

$$PV = const$$

بالتفاضل بالنسبة الى (V)

$$P + v\frac{dP}{dV} = 0$$

$$V\frac{dP}{dV} = P = K$$

مثال (٢) اثبت ان نسبة بواسون تساوى ٠,٥ للمواد التى لا تتغير حجمها تحت تأثير اجهاد شد.

الحل

إذا كان لدينا سلك اسطوانى نصف قطره (r) وطوله (L) فن حجمه (V) يعطى بالعلاقة

$$V = \pi r^2 L$$

إذا أثرنا عليه بإجهاد شد بحيث يصبح طوله $(L + \Delta L)$ فان نصف قطره سينكمش ويصبح $(r - \Delta r)$ وحيث ان الحجم ثابت فان

$$dV = 2\pi r\, L\, dr + \pi r^2 dL$$

$$0 = 2rl\, dr + r^2 dL$$

$$\frac{dr}{r} = -\frac{1}{2}\frac{dL}{L} \quad \Rightarrow \quad \sigma = -\frac{dr}{r} \Big/ \frac{dL}{L} = \frac{1}{2}$$

مثال (٣) علق مصعد بسلكين من مادة واحدة قطر الاول ثلاثة امثال قطر الثانى احسب النسبة بين قوة الشد في السلكين.

نفرض ان نصف قطر السلك الاول (a) ونصف قطر السلك الثانى (3a) وحيث ان المصعد مثبت في نهاية كل من السلكين سيكون طول السلكين ف اى لحظة متساوى وكذلك الزيادة في الطول وبما ان السلكين من مادة واحدة اة ان معامل ينج واحد

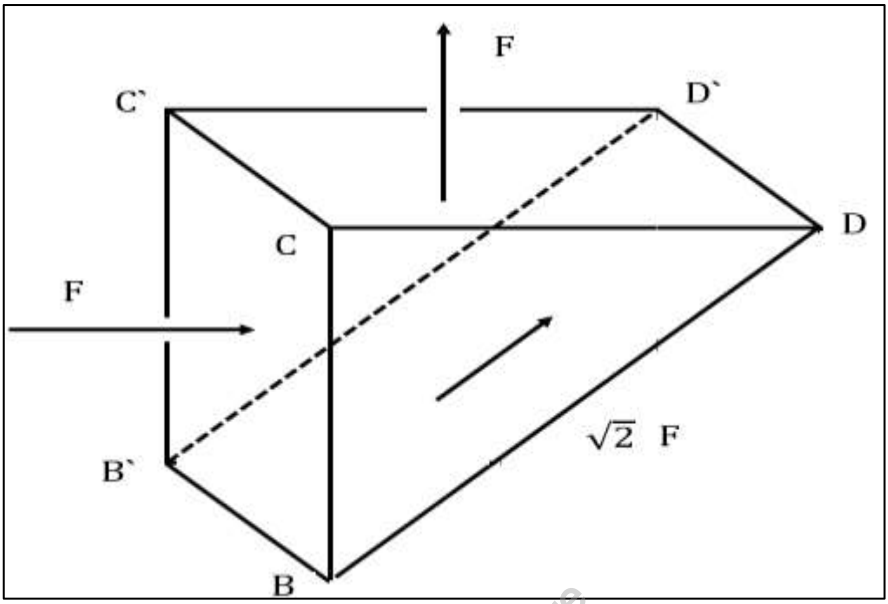
$$Y = \frac{F_1/\pi a^2}{\Delta L/L} = \frac{F_2/9\pi a^2}{\Delta L/L}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{9}$$

العلاقة بين معاملات المرونة

العلاقة بين اجهاد القص واجهاد الاستطالة واجهاد الضغط.

إذا فرضنا ان لدينا منشور قائم عبارة عن نصف مكعب طول ضلعه (L) ومثبت من سطحه المائل وأثرنا عليه بقوة شد الى اعلى وقوة ضغط جانبية وان محصلة القوتين تسبب اجهاد قصي في المستوى (BB`DD`).



اجهاد القص $= \dfrac{\sqrt{2}F}{L.L\sqrt{2}} = \dfrac{F}{L^2}$

اجهاد الاستطالة $= \dfrac{F}{L^2}$

اجهاد الضغط $= \dfrac{F}{L^2}$

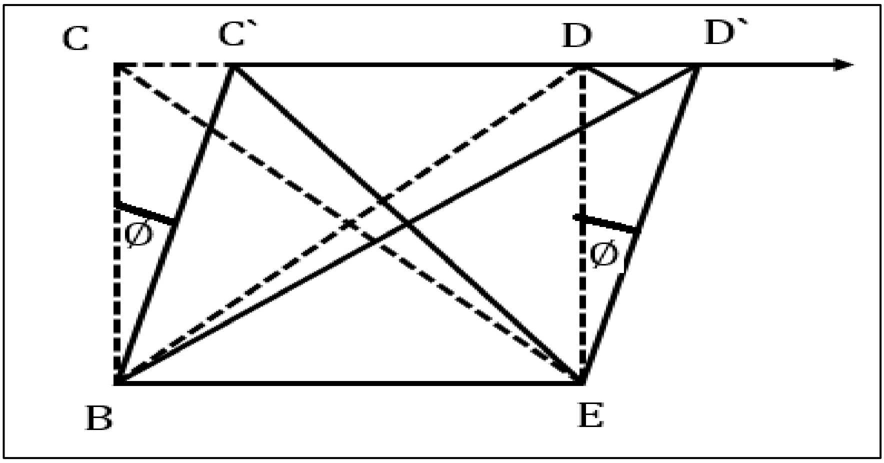
من المعادلات ٣،٢،١، نلاحظ ان الاجهادات الثلاثة متساوية وان التأثير عل الجسم باى اجهاد ينشا عنه الاجهادان الاخران.

العلاقة بين انفعال القص وانفعال الاستطالة وانفعال الضغط.

إذا أثرنا بقوة مماسيه (F) على السطح العلوي لمكعب طول ضلعه (L) وسطحه السفلى مثبت فان المكعب يتغير شكله ويستطيل القطر (BD) وينكمش القطر (CE).

انفعال الاستطالة في القطر (BD) يساوى

$$\frac{GD`}{BD}$$



في المثلث (BDE)

BG=BD

$$\frac{DE}{BD} = \text{Sin DBE} = \text{Sin } 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow BD = \sqrt{2}DE$$

في المثلث (DGD`)

$$\frac{GD`}{DD`} = \text{Sin GDD`} = \text{Sin } 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow GD` = DD`/\sqrt{2}$$

إذا انفعال الاستطالة في القطر (BD) يساوى

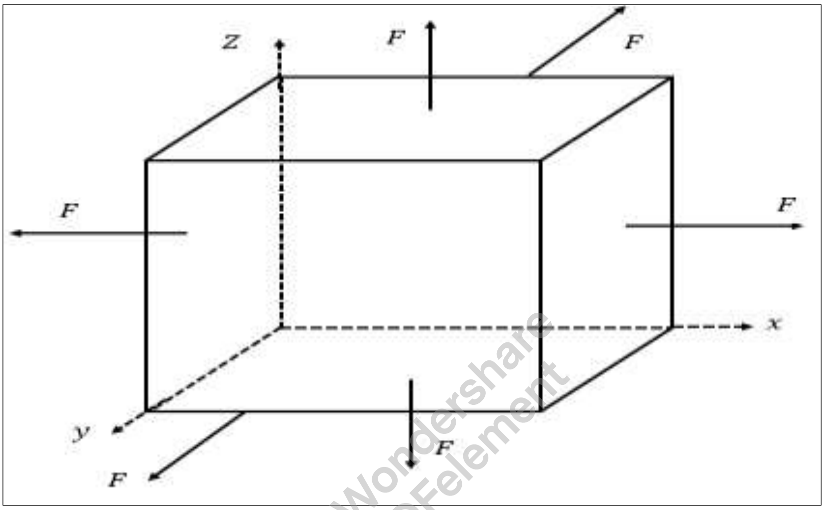
$$\frac{GD`}{BD} = \frac{DD`/\sqrt{2}}{\sqrt{2}DE} = \frac{DD`}{2DE} = \frac{1}{2}\tan\emptyset \cong \frac{1}{2}\emptyset$$

وبذلك يكون انفعال الاستطالة في القطر = نصف انفعال القص

حيث $\emptyset$ مقاسة بالتقدير الدائرى و هي تمثل انفعال القص وبنفس الطريقة يمكن اثبات ان انفعال الانكماش في الاتجاه العمودى يساوى () وعلى ذلك يمكن القول ان انفعال القص يكافئ انفعالين متساويين ومتعامدين أحدهما انفعال استطالة والاخر انفعال انكماش وقيمة كل منهما نصف قيمة انفعال القص.

العلاقة بين σ، K، Y.

إذا أثرنا على اوجه مكعب طول ضلعه الوحدة بقوى مقدارها (F) في جميع الاتجاهات كما هو موضح بالشكل فان القوى في اتجاه المحور (x) تعمل على استطالة اضلاع المكعب الموازية لمحور (x) وانكماش الاضلاع العمودية عليه.



$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L}$$

L=1, A=1

إذا الزيادة (ΔL) في طول ضلع اى ضلع موازي اخط عمل القوة (F)

$$\Delta L = \frac{F}{Y} \qquad (1)$$

$$\sigma = \frac{\Delta h/h}{\Delta L/L} = \frac{\text{الانفعال الستعرض}}{\text{الانفعال الطولى}}$$

$$H = 1, L = 1, \Delta L = \frac{F}{Y}$$

الانكماش او النقص في طول اى ضلع نتيجة القوة هو

$$\sigma = \frac{\Delta h Y}{F}$$

$$\Delta h = \sigma \frac{F}{Y} \qquad (2)$$

وحيث ان اى ضلع من اضلاع المكعب يزداد طوله نتيجة القوة الموازية وفى نفس الوقت ينقص نتيجة القوتين العموديتين عليه فان طول الضلع الجديد يصبح

$$(1 + \frac{F}{Y} - 2\sigma \frac{F}{Y})$$

حجم المكعب الجديد يصبح

$$[1 + \frac{F}{Y}(1 - 2\sigma)]^3$$

$$\text{الحجم الجديد} \cong [1 + 3\frac{F}{Y}(1 - 2\sigma)]$$

وتصبح الزيادة في الحجم تساوى

$$\Delta V = 3\frac{F}{Y}(1 - 2\sigma)$$

وحيث ان $V = 1, \; A = 1$ ، وحيث ان معامل المرونة الحجمى

$$K = \frac{F/A}{\Delta V/V} = \frac{F}{3\frac{F}{Y}(1 - 2\sigma)}$$

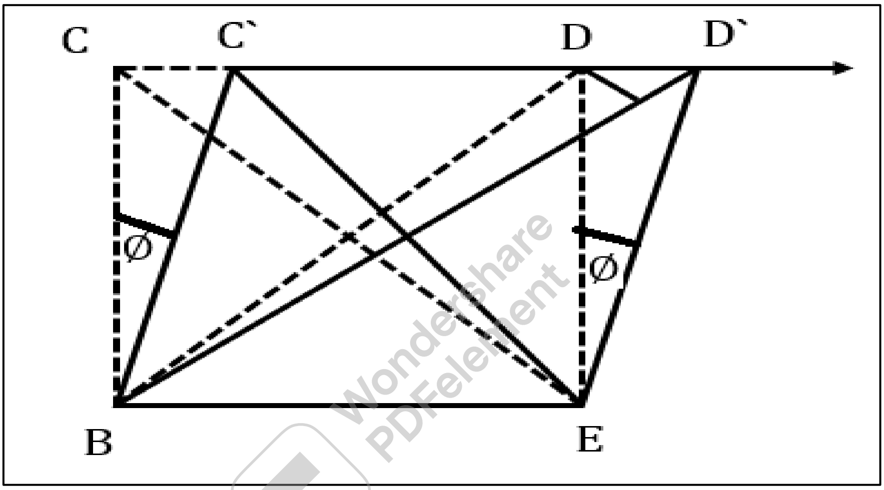
$$K = \frac{Y}{3(1 - 2\sigma)}$$

$$Y = 3K(1 - 2\sigma)$$

وحيث ان قيم كلا من K,Y موجبة دائما فان نسبة بواسون (σ) لا تزيد عن $(\frac{1}{2})$.

العلاقة بين σ، N، Y.

إذا أثرنا بقوة مماسيه (F) على السطح العلوي لمكعب طول ضلعه (L) وسطحه السفلى مثبت فان ينشا اجهاد قص مقداره $(\frac{F}{L^2})$ ولكننا أثبتنا ان اجهاد القص يكافئ اجهاد استطالة واخر انكماش متعامدين على بعضهما وكل منهما يساوى اجهاد القص.



اجهاد الاستطالة في اتجاه القطر $(BD) = \frac{F}{L^2}$

اجهاد الانكماش في اتجاه القطر $(CE) = \frac{F}{L^2}$

وحيث ان انفعال الاستطالة في اتجاه القطر (BD) = الانفعال الناتج من اجهاد استطالة في اتجاه القطر (BD)+ الانفعال الناتج من اجهاد الانكماش في اتجاه القطر (CE)

إذا انفعال الاستطالة في اتجاه القطر (BD)=

$$\frac{\sigma F/L^2}{Y} + \frac{F/L^2}{Y} = \frac{F}{L^2 Y}(1+\sigma)$$

ولقد أثبتنا سابقا ان انفعال الاستطالة يساوى نصف انفعال القص

$$\frac{F}{L^2Y}(1+\sigma)=\frac{1}{2}\,\emptyset \qquad (1)$$

وحيث ان معامل مرونة القص (N) يساوى

$$N=\frac{F/L^2}{\emptyset}$$

$$\emptyset=\frac{F}{L^2N} \qquad (2)$$

من ١ و٢ ينتج ان

$$\frac{F}{L^2Y}(1+\sigma)=\frac{1}{2}\frac{F}{L^2N}$$

$$\frac{1}{Y}(1+\sigma)=\frac{1}{2N}$$

$$Y=2N(1+\sigma) \qquad (3)$$

ومنها ينتج ان اقل قيمة لنسبة بواسون هى (-١)

العلاقة بين K، N، Y.

نعمل على حذف المقدار (σ) من العلاقتين التاليتين

$$Y=3K(1-2\sigma) \qquad (1)$$

$$Y=2N(1+\sigma) \qquad (2)$$

من المعادلة (٢) نحصل على

$$\sigma=\frac{Y}{2N}-1$$

بالتعويض عن (σ) في المعادلة (١)

$$Y=3K(1-\frac{2Y}{2N}+2)$$

$$Y = 3K(3 - \frac{Y}{N})$$

$$\therefore \frac{Y}{3K} = 3 - \frac{Y}{N}$$

بالقسمة على 3Y نحصل على

$$\frac{1}{9K} = \frac{1}{Y} - \frac{1}{3N}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Y} = \frac{1}{9K} + \frac{1}{3N}$$

الطاقة المختزنة فى الاجسام المرنة المنفعلة

عند اجهاد اى جسم مرن تختزن به كمية من الطاقة يمكن استخدامها اذا ما رفع الاجهاد عنه ولحساب هذه الطاقة المختزنة في الجسم وعلى سبيل المثال جسم منفعل طوليا مثل سلك مشدود

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L}$$

$$F = AY\frac{\Delta L}{L} \qquad (1)$$

عنصر الشغل (dw) الذي تبذله القوة (F) لإحداث عنصر استطالة مقدارها $d(\Delta L)$

$$dw = F\, d(\Delta L)$$

الشغل المبذول لإحداث استطالة (ΔL)

$$w = \int_0^{\Delta L} F\, d(\Delta L)$$

$$w = \int_0^{\Delta L} AY\frac{\Delta L}{L}\, d(\Delta L)$$

$$w = AY\frac{(\Delta L)^2}{L}$$

$$w = \frac{1}{2}\left(Y\frac{\Delta L}{L}\right)\frac{\Delta L}{L}AL$$

$$w = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{A}\right).\left(\frac{\Delta L}{L}\right)V$$

ومنها نجد ان

$$\text{الحجم} \times \text{الانفعال} \times \text{الاجهاد} \times \frac{1}{2} = \text{الشغل}$$

وهي نفس العلاقة بالنسبة للشغل الناتج من انفعال القص او الانفعال الحجمى ومن الجدير بالذكر ان

١- الاجسام المتجانسة من وجهة نظر دراستنا في المرونة هى تلك الاجسام التى لها معاملات مؤونة متساوية المقدار في جميع الاتجاهات اى ان

$$Y_X = Y_Y = Y_Z, \qquad K_X = K_Y = K_Z, \qquad N_X = N_Y = N_Z$$

٢- عرفنا معاملا ت المرونة بالنسبة للمواد الصلبة ولكن بالنسبة للموائع فإنها تحتفظ فقط بمعامل المرونة الحجمى لان الموائع لا يمكن استطالتها وبالتالى ليس لها معامل مرونة طولية وكذلك في الظروف العادية لا يمكن التأثير عليها بإجهاد مماسى وبالتالى ليس لها معامل قص.

٣- عند التأثير على الموائع بقوى مماسة فان طبقات المائع سوف تكتسب سرعة بالنسبة لبعضها البعض

مسائل

١- علق سلك طوله (1.8 m) وقطره (1.0 mm) من أحد طرفيه وثبت في طرفه الاخر كتله مقدارها (2.5 kg) فاستطال السلك بمقدار (0.6 mm) احسب الاجهاد المؤثر والانفعال ومعامل ينج والطاقة المختزنة في هذا السلك.

الحل

مساحة مقطع السلك هى

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3.14 \times (0.001)^2}{4} = 0.785 \times 10^{-6}\ m^2$$

الاجهاد المؤثر هو

$$= \frac{F}{A} = \frac{Mg}{A} = \frac{2.5 \times 9.8}{0.785 \times 10^{-6}} = 3.12 \times 10^{7}\ Nm^{-2}$$

الانفعال الناتج هو

$$= \frac{\Delta L}{L} = \frac{0.6 \times 10^{-3}}{1.8} = 3.33 \times 10^{-4}$$

معامل ينج يساوى

$$Y = \frac{\text{الاجهاد}}{\text{الانفعال}} = \frac{3.12 \times 10^{7}}{3.33 \times 10^{-4}} = 0.94 \times 10^{11}\ Nm^{-2}$$

الطاقة المختزنة تساوى

$$W = \frac{1}{2} \times \text{الاجهاد} \times \text{الانفعال} \times \text{الحجم} =$$

$$W = \frac{1}{2} \times \frac{F}{A} \times \frac{\Delta L}{L} \times AL = \frac{1}{2} F\Delta L$$

$$W = \frac{1}{2} \times 2.5 \times 9.8 \times 0.6 \times 10^{-3} = 7.35 \times 10^{-3}\ J$$

٢- قضيب من الحديد طوله $(0.25m)$ ومساحة مقطعه $(5 \times 10^{-5} m^2)$ وقضيب اخر من النحاس طوله $(0.3m)$ وجد ان الاستطالة الناتجة في كل من القضيبين متساوية إذا كانا واقعين تحت تأثير نفس الشد. فما هى مساحة مقطع القضيب النحاس إذا علمت ان معامل ينج للحديد $(2 \times 10^{11} Nm^{-2})$ ومعامل ينج للنحاس $(1.2 \times 10^{11} Nm^{-2})$.

الحل

نفرض ان معامل ينج للحديد هو Y_1 وللنحاس هو Y_2

$$\therefore Y_1 = \frac{F_1 L_1}{A_1 \Delta L_1}, \quad Y_2 = \frac{F_2 L_2}{A_2 \Delta L_2}$$

بالقسمة نحصل على

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{F_1}{F_2} \times \frac{L_1}{L_2} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{\Delta L_2}{\Delta L_1}$$

وحيث ان الشد وحد في الحالتين وكذلك الاستطالة فان

$$F_1 = F_2, \qquad \Delta L_1 = \Delta L_2$$

$$\therefore \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{L_1}{L_2} \times \frac{A_2}{A_1} \qquad \Longrightarrow \qquad A_2 = \frac{Y_1}{Y_2} \times \frac{L_2}{L_1} \times A_1$$

$$A_2 = \frac{2 \times 10^{11}}{1.2 \times 10^{11}} \times \frac{0.3}{0.25} \times 5 \times 10^{-5} = 10^{-4} m^2$$

٣- سلك طوله $(2.08m)$ مكون من سلكين أحدهما من النحاس وطوله $(1.08m)$ ومساحة مقطعه $(3mm^2)$ والاخر من الحديد ومساحة مقطعه $(2mm^2)$. علق السلك راسيا من أحد طرفيه وعلق في الطرف الاخر كتله مقدارها $(12\ Kg)$. احسب الاستطالة الناتجة في السلك إذا علم ان معامل ينج للحديد $(2 \times 10^{11} Nm^{-2})$ ومعامل ينج للنحاس $(1.2 \times 10^{11} Nm^{-2})$.

الحل

القوة المؤثرة على السلكين واحدة وتكون الاستطالة الكلية الناتجة هى مجموع الاستطالتين الناتجتين في السلكين

بالنسبة لسلك النحاس

$$Y_1 = \frac{FL_1}{A_1 \Delta L_1}$$

الاستطالة الناتجة من سلك النحاس هى

$$\Delta L_1 = \frac{F_1 L_1}{A_1 Y_1} = \frac{12 \times 9.8 \times 1.08}{3 \times 10^{-6} \times 1.2 \times 10^{11}} = 0.353 \times 10^{-3}\ \text{m}$$

طول سلك الحديد هو

$$L_2 = 2.08 - 1.08 = 1\text{m}$$

بالمثل الاستطالة الناتجة من سلك النحاس

$$\Delta L_2 = \frac{F_2 L_2}{A_2 Y_2} = \frac{12 \times 9.8 \times 1}{2 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{11}} = 0.294 \times 10^{-3}\text{m}$$

الاستطالة الكلية الناتجة من السلك هى

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2$$

$$\Delta L = 0.353 \times 10^{-3} + 0.294 \times 10^{-3} = 0.647 \times 10^{-3}\text{m}$$

٤- قرص ثقيل علق افقيا بواسطة أربع اسلاك راسية متساوية في الطول أحدهم من الحديد ومثبت في مركز القرص والثلاثة الاخرين من النحاس مثبتة على ابعاد متساوية من بعضهم وعلى ابعاد متساوية من حافة القرص وقطر كل منهم (1mm). ما هو قطر السلك الحديد إذا كان الشد فيه (mg/2) حيث (m) كتلة القرص إذا علم ان معامل ينج للحديد $(2 \times 10^{11}\text{Nm}^{-2})$ ومعامل ينج للنحاس $(1.2 \times 10^{11}\text{Nm}^{-2})$.

الحل

القوى المؤثرة على السلك الحديد والثلاث اسلاك النحاس هى

$$F = mg$$

وحيث ان القوى المؤثرة على السلك الحديد وحده هى

$$F_1 = \frac{mg}{2} \qquad (1)$$

القوى المؤثرة على الثلاث اسلاك النحاس هى

$$F_1 - F = mg - \frac{mg}{2} = \frac{mg}{2}$$

وتكون القوة المؤثرة على سلك نحاس واحد هى

$$F_2 = \frac{1}{3}\frac{mg}{2} = \frac{mg}{6} \qquad (2)$$

إذا فرضنا ان معامل ينج للحديد هو (Y_1) وللنحاس (Y_2)

$$Y_1 = \frac{FL_1}{A_1 \Delta L_1}, \qquad Y_2 = \frac{F_2 L_2}{A_2 \Delta L_2}$$

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{F_1}{F_2} \times \frac{L_1}{L_2} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{\Delta L_2}{\Delta L_1} \qquad (3)$$

وحيث ان طول الاسلاك متساوى والاستطالة الناتجة واحدة

$$L_1 = L_2, \qquad \Delta L_1 = \Delta L_2$$

بالتعويض في المعادلة (٣) نحصل على

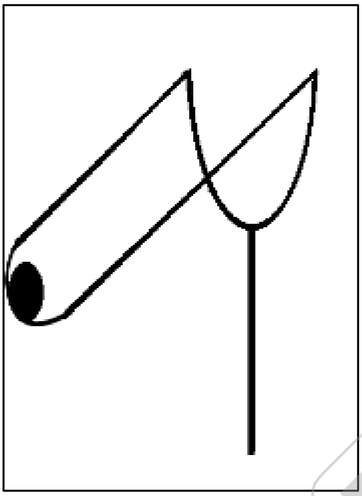
$$A_1 = \frac{F_1}{F_2} \times \frac{Y_2}{Y_1} \times A_2$$

$$\frac{\pi {D_1}^2}{4} = \frac{mg/2}{mg/6} \times \frac{Y_2}{Y_1} \times \frac{\pi {D_2}^2}{4}$$

$$D_1^{\,2} = 3 \times \frac{Y_2}{Y_1} \times D_2^{\,2} = \frac{3 \times 1.2 \times 10^{11} \times 10^{-6}}{2 \times 10^{11}} = 1.8 \times 10^{-6}$$

$$D_1 = 1.34 \times 10^{-3}\text{m}$$

٥- نبلة لها وترين من المطاط متوازيين طول كل منهما (0.16m) ومساحة مقطعه مربعة الشكل ابعادهما ($3\times 1\ mm$) وضع بين الوترين حجر صغير كتلته (0.03Kg) وقذف بواسطة شد الوترين مسافة قدرها (0.08m). عين سرعة القذف للحجر إذا كان معامل المرونة للمطاط هو ($10^7 Nm^2$).



الحل

عند شد الوترين يختزن بهما كمية من الطاقة مقدارها

$$W = 2 \times \frac{1}{2} \times \text{الاجهاد} \times \text{الانفعال} \times \text{الحجم}$$

$$W = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{F}{A} \times \frac{\Delta L}{L} \times AL$$

$$W = F\Delta L \qquad -- \ (1)$$

معامل ينج يحسب من

$$Y = \frac{F}{A}\frac{L}{\Delta L}$$

$$F = \frac{YA\Delta L}{L} \qquad -- \ (2)$$

من المعادلتين (١) و (٢)

$$W = \frac{YA(\Delta L)^2}{L} \qquad -- \ (3)$$

عند ترك الوترين المشدودين تتحول هذه الطاقة المختزنة الى طاقة حركة تكتسبها الكتلة وتتحرك بسرعة مقدارها (v) حيث

$$W = \frac{1}{2}mv^2 -- \quad (4)$$

من المعادلتين (٣) و (٤) ينتج ان

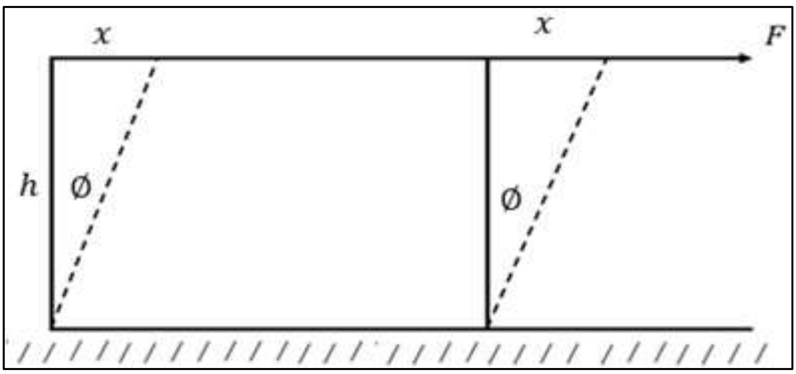
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{YA(\Delta L)^2}{L}$$

$$v = \Delta L\sqrt{\frac{2YA}{mL}} \quad -- \quad (5)$$

$$10^7\sqrt{\frac{2 \times 10^7 \times 9 \times 10^{-6}}{0.03 \times 0.16}}$$

$$v = 15.5\ m\ sec^{-1}$$

٦- متوازى مستطيلات من الألمونيوم ابعاد مقطعه الافقى (3 mm)، (0.4mm) مثبت قاعدته وأثرنا على سطحه العلوي الافقى بازدواج عزمه $(10^3 Nm)$ فاذا كان معامل الصلابة هو $(2.7 \times 10^3 Nm)$ اوجد الازاحة (x) للسطح العلوي بالنسبة للسطح السفلى.



الحل

نفرض ان ارتفاع متوازى المستطيلات هو (h) وان مساحة مقطعه الافقى هى (A) وان القوة المماسة للسطح العلوي والناتجة من عزم الازدواج هى (F) فيكون عزم الازدواج مساويا (Fh)

$$Fh = 10^3 Nm ------ (1)$$

معامل الصلابة $N = \frac{F}{A\emptyset}$

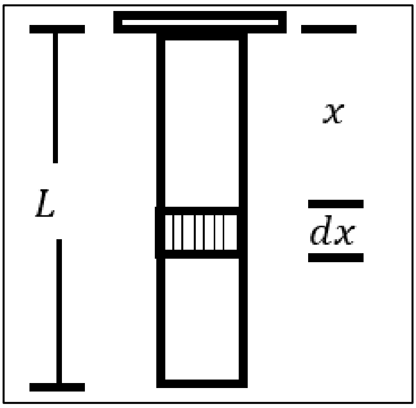
$$\emptyset = \tan\emptyset = \frac{x}{h}$$

$$N = \frac{Fh}{Ax}$$

$$x = \frac{Fh}{AN} ------ (2)$$

$$x = \frac{10^3}{0.4 \times 3 \times 10^{-6} \times 2.7 \times 10^{10}} = 3.1 \times 10^{-2} m$$

٧- كتلة من الحديد منتظمة المقطع طولها (5m) عندما تكوم موضوعة افقيا على الارض. فاذا علقت من أحد طرفيها راسيا فاحسب الزيادة في طولها إذا علم ان كثافة الحديد $(8000\ Kg\ m^{-3})$ ومعامل ينج للحديد $(2 \times 10^{-11} Nm^2)$



الحل

نفرض ان مساحة مقطع القضيب (A)

فتكون كتلة وحدة الاطوال هى

$$m = A\rho$$

فاذا اخذنا في الاعتبار جزء من القضيب طوله (x) تحت تأثير قوة شد الى أسفل ناتجة عن ثقل الجزء الذي طوله (dx) وينتج عن ذلك استطالة مقدارها $d(\Delta L)$ في الجزء الذي طوله (x) فان

$$Y = \frac{Fx}{A\, d(\Delta L)} = \frac{(A\rho dx)\, g\, x}{A\, d(\Delta L)}$$

$$d(\Delta L) = \frac{\rho\, g}{Y} x\, dx \qquad (1)$$

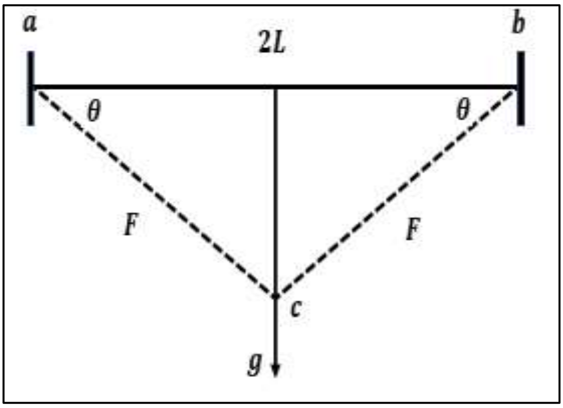
لإيجاد الاستطالة الكلية نكامل طرفى المعادلة (١)

$$\int_0^{\Delta L} d(\Delta L) = \frac{\rho\, g}{Y} \int_0^{L} x\, dx$$

$$\Delta L = \frac{\rho\, g}{2\, Y} L^2 \quad --- (2)$$

$$\Delta L = \frac{8000 \times 9.8 \times 25}{2 \times 2 \times 10^{11}} = 4.9 \times 10^{11}\ m$$

٨-سلك مساحة مقطعه (A) مثبت من نقطتين افقيتين المسافة بينهما (2L). علقت كتلة مقدارها (M) في منتصفه وازيحت الى أسفل الى ان اتزنت. فاذا كان بعد الكتلة عن الافقى بعد الاتزان هو (y)



اوجد:

ا- الاجهاد في السلك

ب-الانفعال في السلك

ج- معامل ينج لمادة السلك

د- الطاقة المختزنة في السلك

الحل

حيث ان الكتلة المعلقة في حالة اتزان فان

$$Mg = 2F\sin\theta \quad ---(1)$$

وحيث ان y<<1 فان θ تكون صغيرة جدا

$$\therefore \sin\theta = \tan\theta = \frac{y}{L} \quad ---(2)$$

بالتعويض من معادلة (١) و (٢)

$$Mg = 2F\frac{y}{L}$$

$$F = \frac{MgL}{2y}$$

$$\text{الاجهاد} == \frac{F}{A} = \frac{MgL}{2yA} \quad ---(3)$$

في المثلث (abc) طول الضلع (bc) هو $(L+\Delta L)$ حيث (ΔL) هى الاستطالة الناتجة في نصف طول السلك

$$(L+\Delta L)^2 = L^2 + y^2$$

وحيث ان (ΔL) صغيرة جدا فانه يمكن اهمال (ΔL^2)

$$L^2 + 2L\Delta L = L^2 + y^2$$

وتكون الاستطالة الكلية في السلك هى

$$2\Delta L = \frac{y^2}{L} \quad --- \quad (4)$$

$$\text{الانفعال} = \frac{2\Delta L}{2L} = \frac{y^2}{2L^2} \quad ---(5)$$

من المعادلتين (٥) و (٣) يمكن ايجاد معامل ينج للسلك

$$Y = \frac{\text{الاجهاد}}{\text{الانفعال}} = \frac{MgL}{2yA} \; \frac{2L^2}{y^2}$$

$$Y = \frac{MgL^3}{2Ay^3} \qquad ---(6)$$

الطاقة المختزنة في السلك هي

$$W = \frac{1}{2} \times \text{الاجهاد} \times \text{الانفعال} \times \text{الحجم}$$

$$W = \frac{1}{2} \times \frac{MgL}{2yA} \times \frac{y^2}{2L^2} \times 2LA$$

$$W = \frac{1}{2} Mgy$$

٩- سلك من الحديد قطره (0.8 mm) في درجة (14^0c) مثبت من طرفيه بحيث كان قوة الشد فيه هي (5.5N) عند اى درجة حرارة تصبح القوة المؤثرة على مواقع التثبيت مساوية للصفر إذا علم ان معامل التمدد الطولى للحديد هو ($1.1 \times 10^{-5}\,{}^0c^{-1}$) ومعامل ينج هو ($2 \times 10^{11} Nm^2$)

الحل

قوة الشد في السلك تسبب زيادة في طوله الاصلى بمقدار (ΔL) ولكي يتلاشى رد الفعل (F) المؤثر على مواقع التثبيت لابد من رفع درجة حرارة السلك بمقدار ($\Delta\theta$) حتى يتمدد بنفس المقدار ((ΔL))

$$Y = \frac{FL}{A\Delta L}$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{FL}{Ay} \qquad -----(1)$$

وإذا كان معامل التمدد الطولى للحديد هو (α) فان

$$\Delta L = \alpha L \Delta\theta$$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta L}{\alpha L} \quad ------(2)$$

بالتعويض في معادلة (١) في (٢) ينتج ان

$$\Delta\theta = \frac{F}{A\alpha Y}$$

$$\Delta\theta = \frac{5.5}{\pi(0.8\times10^{-3})^2\times1.1\times10^{-5}\times2\times10^{11}} = 5\,^0c$$

$$\Delta\theta = \theta_1 + \theta_2$$

$$\theta_2 = 14 + 5 = 19\,^0c$$

اى انه يجب رفع درجة حرارة السلك الى $(19\,^0c)$ حتى يتلاشى الشد في مواقع التثبيت.

الموائع في سريانها وسلوكها

تسمية الموائع تشمل كلا من السوائل والغازات وذلك لاشتراكها في بعض المظاهر العامة، فجزيئات كلا منهما لها حرية حركة أكبر من جزيئات المادة في الحالة الصلبة. وتنتقل تأثير القوى في كل منهما بواسطة هذه الجزيئات من خلال تصادمها ببعضها البعض وبالجسام الاخرى التى في طريقها مثل جدران الاناء او اى جسم اخر داخل المائع.

كما ان كلاهما يأخذ شكل الوعاء الذي يحويه وينساب بحريه من الوعاء إذا سمح له بالانسياب. وإذا كان ها الانسياب لا يحده وعاء فان المائع لا يأخذ شكلا معينا.

وعلى الرغم من اشتراكهما في المظاهر السابقة الا انهما يختلفان في مظاهر اخرى. فجزيئا السائل مثلا ترتبط ببعها بقوى بينية أكبر بكثير من تلك التى تربط جزيئات الغاز. كما ان السوائل تملا الوعاء الى حد معين حسب كمية السائل وسطح السائل بعيدا عن الجدران سوف يأخذ شكلا افقيا وبهذا يقال ان للسوائل في الاوعية التى تحويها سطحا حرا. بينا الغازات تملا الوعاء كاملا بانتظام مهما كانت كمية الغاز كما انها تنتشر في الهواء بمجرد فتح الوعاء الذي يحويها ولهذا يقال ان الغازات ليس لها سطحا حرا داخل الانية التى تحويها. واختلاف اخر بينهما هو ان للسوائل عادة كثافة أكبر بكثير من تلك التى للغازات وتنقسم الموائع من هذه الزاوية الى قسمين

١- موائع قابلة للانضغاط وهي الموائع التى تتغير كثافتها بتغير الضغط الواقع عليها مثل الغازات

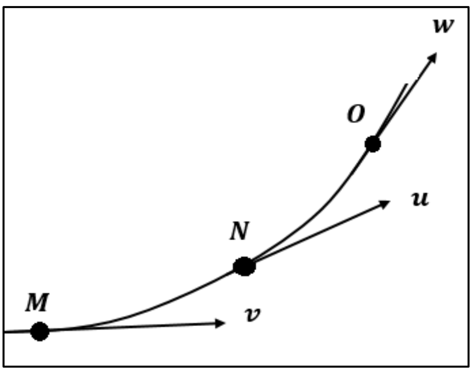
٢- موائع غير قابلة للانضغاط وهي الموائع التى لا تتغير كثافتها بتغير الضغط الواقع عليها مثل السوائل.

السريان الثابت او السريان المنتظم

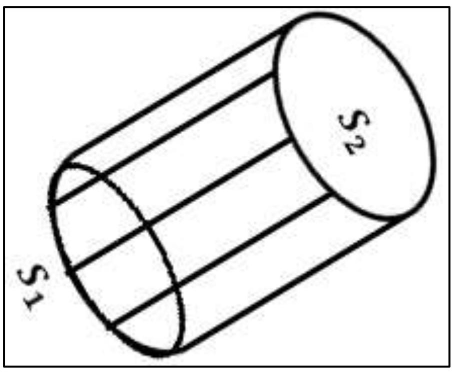
يوجد نوعان من الانسياب انسياب ثابت وفيه تكون سرعة المائع عند نقطة معينة ثابتة لا تتغير مع الزمن ويمكن ان تتغير السرعة من نقطة الى اخرى حسب مقطع الانبوبة. وانسياب غير ثابت وفيه تتغير سرعة عند نقطة معينة من لحظة الى اخرى.

انبوبة السريان

في حالة انسياب الثابت تكون سرعة المائع ثابتة مع الزمن عند نقطة معينة مثل (M) وعلى ذلك فان جميع جسيمات المائع التى تمر بالنقطة (M) سوف تتحرك بنفس السرعة (v) مقدارا واتجاها وكذلك الحال بالنسبة الى نقطة اخرى مثل (N) و (O) وبالتالى فان المسار (MNO) كما في شكل (1) يكون مسارا لكل جسيم بالنقطة (M) ويعرف هذا المنحنى باسم خط الانسياب ويتوازى خط الانسياب مع سرعة جزيئات المائع عند اى نقطة عليه ولا يمكن لخطى انسياب ان يتقاطعا في حالة الانسياب الثابت. ولرسم انبوبة السريان داخل المائع نتصور مساحة صغيرة عمودية على اتجاه السريان ويرسم من كل نقطة على محيط هذه المساحة خط سريان المائع المار بهذه النقطة وبذلك يتكون ما يسمى بأنبوبه السرين كما في الشكل (2) وهي انبوبة وهمية جدرانها خطوط السريان ومن واص انبوبة السريان ان المائع لا يخترق جدرانها لان اتجاه الجدار عند اى نقطه هو اتجاه السريان عند هذه النقطة .



شكل (١)



شكل (٢)

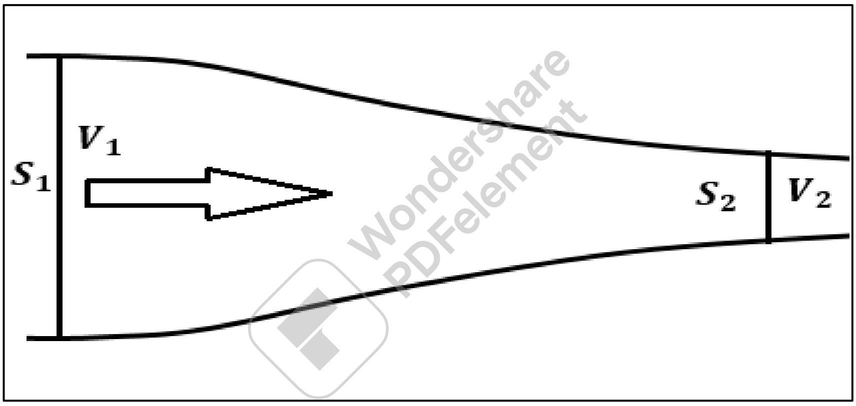
معادلة الاستمرار

إذا مر مائع في انبوبة مختلفة المقطع فان سرعته تتغير من مقطع لأخر ولكن كتلة المائع التى تمر خلال كل مقطع في الثانية الواحدة تكون ثابتة، فاذا كانت سرعة المائع عند المقطع الذي مساحته (s_1) هى (v_1) وكثافة المائع عند هذا المقطع هى (ρ_1) وكانت سرعة المائع عند المقطع (s_2) هى (v_2) والكثافة (ρ_2) فان

$$S_1V_1\,\rho_1 = S_2V_2\,\rho_2 = constant \quad --- (1)$$

وفى حالة السوائل تكون الكثافة ثابتة وبالتالى $\rho_1 = \rho_2$

$$S_1V_1 = S_2V_2 = constant \quad --- (2)$$



شكل (٣)

وتسمى كل من المعادلتين (١) و (٢) بمعادلة الاستمرار الاولى للموائع القابلة للانضغاط والثانية للسوائل الغير قابلة للانضغاط

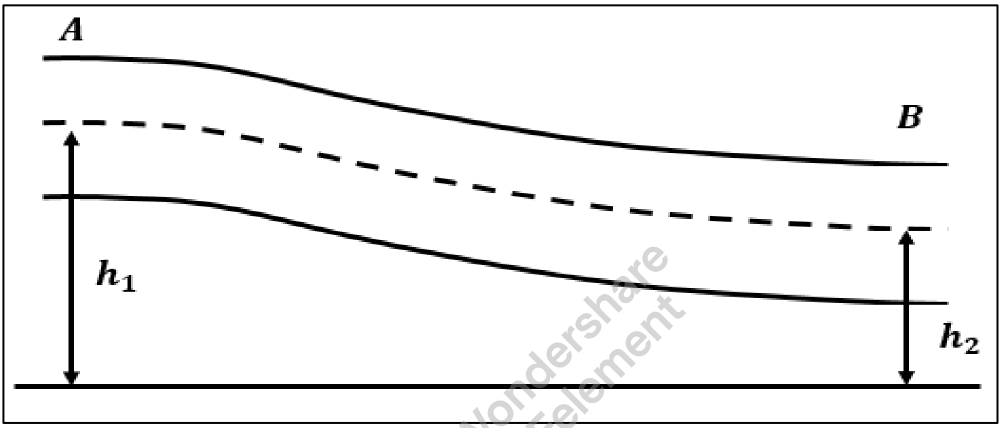
ومن المعادلة (٢) يتضح ان سرعة المائع تتناسب عكسيا مع مياحة مقطع الانبوبة ويمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$\frac{dm}{dt} = \rho\, S\, V = constant \quad --- (3)$$

حيث $\frac{dm}{dt}$ هى كتلة المائع المارة في وحدة الزمن.

معادلة برنولي

نفرض ان سائلا ينساب في انبوبة كالمبينة في الشكل (٤) وان الضغط عند النقطة (A) هو (P_1) ومساحة المقطع (S_1) وسرعة السريان هى (V_1) وان هذه القيم عند النقطة (B) هى (P_2, S_2, V_2) على الترتيب. نفرض ان ارتفاع المقطع (A) عن اى مستوى افقى هو (h_1) وارتفاع المقطع (B) عن المستوى هو (h_2).



شكل (٤)

كتلة السائل المار في الثانية الواحدة $= S\ V\ \rho$

طاقة الحركة في الثانية الواحدة $= \frac{1}{2}\ S\ V \rho\ V^2$

طاقة الضغط = القوة الناشئة من الضغط × المسافة المقطوعة في الثانية الواحدة

طاقة الضغط $= P\ S\ V$

طاقة الوضع= الكتلة × الارتفاع ×عجلة الجاذبية

طاقة الوضع= $S\ V\ \rho\ g\ h$

في هذه الحالة اكتسب السائل طاقة حركة على حساب طاقة الوضع وطاقة الضغط

الزيادة في طاقة الحركة في الثانية الواحدة = النقص في طاقة الضغط في الثانية الواحدة + النقص في طاقة الوضع في الثانية الواحدة

$$\frac{1}{2}S_2V_2\ \rho\, V_2{}^2 - \frac{1}{2}S_1V_1\ \rho\, V_2{}^2 =$$

$$(P_1S_1V_1\ - P_2S_2V_2) + (S_1V_1\,\rho\, g\, h_1 + S_2V_2\,\rho\, g\, h_2) - - - (4)$$

وحيث ان $S_1V_1\ = S_2V_2$

$$\frac{1}{2}\rho(\,V_2{}^2 -\ V_1{}^2) = (P_1\ - P_2) + \rho\, g(\ h_1 +\ \ h_2)$$

$$P_1 + \rho\, gh_1 + \frac{1}{2}\rho V_1{}^2 = P_2 + \rho\, gh_2 + \frac{1}{2}\rho V_2{}^2$$

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1{}^2 +\ gh_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2{}^2 + gh_2$$

$$\therefore \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + hg = constant$$

و هذه المعادلة تسمى معادلة برنولى

حيث ان طاقة الضغط = = $P\ S\ V$

وحيث ان الحجم المار في الثانية الواحدة = $S\ V$

وحيث ان طاقة الضغط لوحدة الكتل يساوى = $\frac{\boldsymbol{P\ S\ V}}{\boldsymbol{S\ V\rho}}$

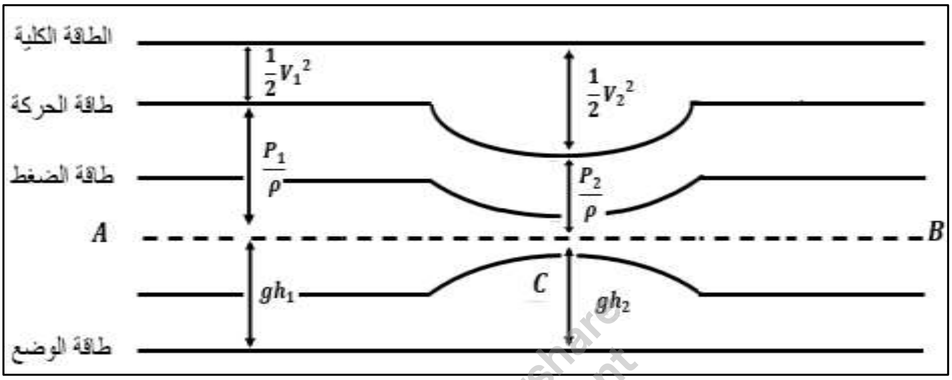
بالتالى فان $\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{\rho}}$ هى طاقة الضغط لوحدة الكتل وطبيعى ان $\frac{1}{2}V^2$ هى طاقة الحركة لوحدة الكتل و hg هى طاقة الوضع لوحدة الكتل. اى ان معادلة برنولى تنص على انه بالنسبة لوحدة الكتل فان

طاقة الضغط + طاقة الحركة + طاقة الوضع = مقدار ثابت

تطبيقات على معادلة برنولي

الانبوبة ذات الاختناق

إذا انساب سائل في انبوبة (AB) ذات اختناق (C) كما في شكل () فان سرعته عند(C) تكون أكبر من سرعة السائل عند (A) او (B).



شكل (٥)

بتطبيق معادلة برنولي

$$\frac{P_1}{\rho}+\frac{1}{2}{V_1}^2+\ gh_1=\frac{P_2}{\rho}+\frac{1}{2}{V_2}^2+gh_2$$

حيث $(V_1, P_1\ ,\ h_1)$ هم ارتفاع السائل عند $(A\ )$ وضغطه وسرعته على الترتيب.

و $(V_2, P_2\ ,\ h_2)$ هم ارتفاع السائل عند (B) وضغطه وسرعته على الترتيب.

وحيث ان $h_1\ =\ h_2$ لان الانبوبة افقية

$$\frac{1}{2}\left({V_2}^2-{V_1}^2\right)=\frac{P_2-P_1}{\rho}$$

وحيث ان $V_1\ <\ V_2$ فلابد ان يكون $P_2<\ P_1$

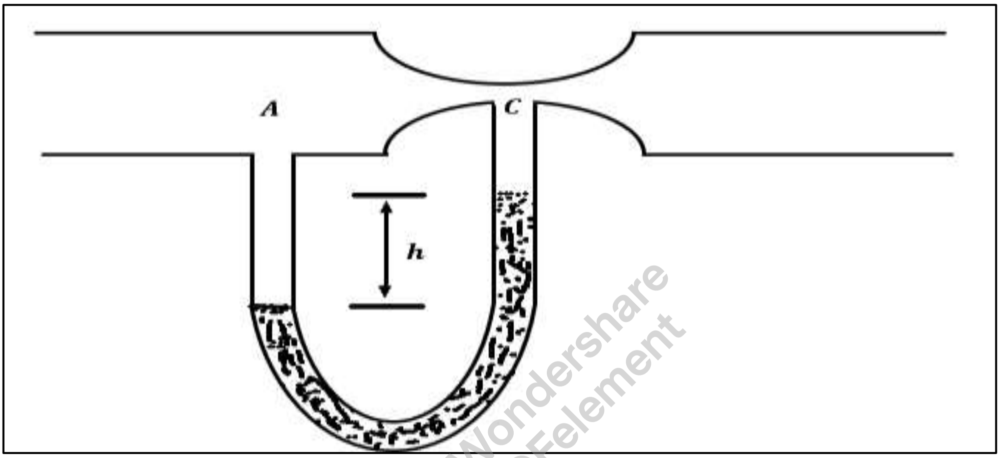
اى ان ضغط السائل عند المقطع الواسع يكون أكبر من ضغطه عند الاختناق حيث سرعته أكبر اى انه عند الاختناق تكون السرعة أكبر والضغط اقل.

جهاز منشورى لتقدير كمية وسرعة سريان السائل

الجهاز كما هو مبين في شكل (٦) عبارة عن انبوبة ذات اختناق عند النقطة (c).

يقاس فرق الضغط بين النقطتين ()، () بواسطة مانومتر وحيث ان

$$\frac{1}{2}\left(V_2{}^2 - V_1{}^2\right) = \frac{P_2 - P_1}{\rho} \qquad --- \quad (1)$$



شكل (٦)

$$\because S_1 V_1 = S_2 V_2$$

$$\therefore V_2 = \frac{S_1 V_1}{S_2} \qquad --- \quad (2)$$

بالتعويض من (٢) في (١)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{S_1{}^2 V_1{}^2}{S_2{}^2} - V_1{}^2\right) = \frac{P_2 - P_1}{\rho}$$

$$\frac{1}{2} V_1{}^2 \left(\frac{S_1{}^2}{S_2{}^2} - 1\right) = \frac{P_2 - P_1}{\rho}$$

$$V_1{}^2 = 2\frac{P_2 - P_1}{\rho(S_1{}^2 - S_2{}^2)} S_2{}^2$$

$$V_1 = S_2\sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho(S_1{}^2 - S_2{}^2)}} \quad --- \quad (3)$$

وبذلك يمكن حساب حجم السائل المار في الثانية الواحدة من المعادلة

$$S_1V_1 = S_1S_2\sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho(S_1{}^2 - S_2{}^2)}} \quad --- \quad (4)$$

تعطى المعادلة (٣) سرعة سريان السائل كما تعطى المعادلة (٤) حجم السائل المار في الثانية الواحدة خلال اى مقطع من مقاطع الانبوبة ويمكن حساب المقدار $(P_2 - P_1)$ من قراءة المانومتر

$$(P_2 - P_1) = hg(\rho` - \rho)$$

حيث $\rho`$ هى كثافة السائل داخل المانومتر

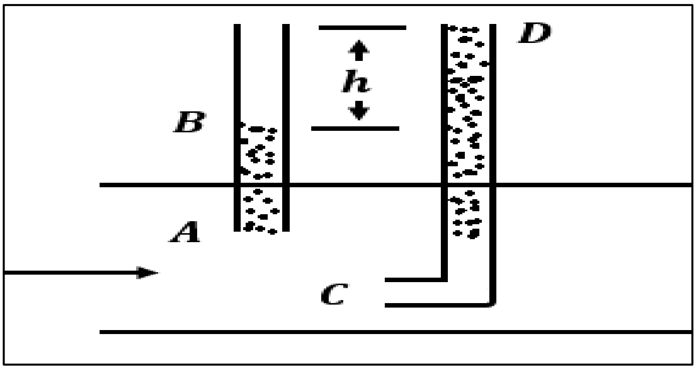
انبوبة بيتو

تستخدم لقياس سرعة وكمية سريان السائل وتتركب من انبوبة (AB) ذات فتحة ضيقة موازية لاتجاه سريان السائل وانبوبة اخرى (DC) ذات فتحة عمودية على اتجاه سريان السائل شكل (٧) عند النقطة (C) يقل سريان السائل وتكون سرعته تساوى صفر لان الفتحة راسية وتعتبر عائق.

باستخدام معادلة برنولى على الفتحتين (A,C)

$$\boldsymbol{\frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1{}^2 + gh_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2{}^2 + gh_2}$$

$$\frac{\mathrm{P_1}}{\rho} + \frac{1}{2}\mathrm{V_1}{}^2 + 0 = \frac{\mathrm{P_2}}{\rho} + 0 + 0$$



شكل (٧)

حيث (V_1)، (P_1) هما سرعة سريان السائل وضغطه عند (A)، و(V_2)، (P_2) هما سرعة سريان السائل وضغطه عند (C)، و ρ هى كثافة السائل

$$\frac{1}{2}{V_1}^2 = \frac{P_2 - P_1}{\rho}$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho}}$$

ويسمى $(P_2 - P_1)$ ضغط السرعة او الضغط الديناميكى = $h\rho g$

$$V_1 = \sqrt{2\,hg}$$

وإذا كان (S) هى مساحة مقطع الانبوبة فان حجم السائل المار في الانبوبة هو

$$SV_1 = S\sqrt{2\,hg}$$

في حالات كثيرة يحدث اضطراب في السريان مما يحدث تغير فى مقدار واتجاه سرعة جسيمات السائل وينتج عن ذلك ان تكون قراءة الجهاز أكبر من اللازم وعليه يجب تعديل المعادلة السابقة كالاتى $V_1 = C\sqrt{2\,hg}$

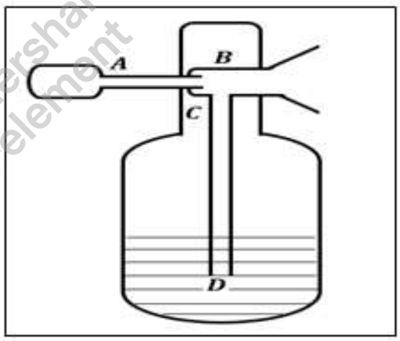
حيث (C) ثابت يسمى معامل انبوبة بيتو وهو اقل من الواحد الصحيح وتتراوح قيمته من ١ الى ٠,٩٧

مضخة الماء

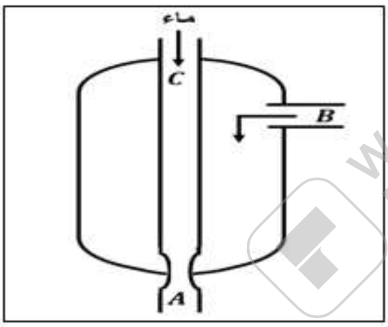
تتركب المضخة من انبوبة (AC) حيث مساحة المقطع عند (A) صغيرة، بذلك تكون سرعة الماء عند (A) كبيرة ويكون الضغط منخفضا. لتفريغ اى وعاء او ترشيح اى محلول نصله بالأنبوبة (B) فيندفع الهواء من الوعاء المراد تفريغه الى منطقة الضغط المنخفض حول (A) ثم ينتشر مع الماء الى المخرج.

البخاخة

إذا نفخ هواء في الانبوبة (AB) كما في شكل (٩) والتى مقطعها عند (B) صغيرا فان سرعة الهواء تكون كبيرة ويكون الضغط منخفضا. وعلى ذلك يرتفع السائل في الانبوبة (DC) وينتشر عند المنطقة (B) على شكل قطرات صغيرة.



شكل (9)



شكل (8)

امثلة محلولة

مثال (١)

انبوبة ذات اختناق يمر فيها ماء. إذا كانت قطر المقطع الواسع من الانبوبة ٦٠سم وقطر المقطع ند الاختناق ٢٠سم وفرق الضغط بين المقطعين ١٠٠سم من الماء. احسب معدل سريان الماء في الانبوبة.

الحل

كمية الماء المار في لثانية الواحدة تغطى بالمعادلة

$$Q = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho({S_1}^2 - {S_2}^2)}}$$

حيث S_2 و S_1 هما مساحتى مقطعى الانبوبة، $(P_2 - P_1)$ هو فرق الضغط بين المقطعين، ρ هى كثافة الماء

$$S_1 = \pi {r_1}^2 = \pi\,(30)^2$$

$$S_2 = \pi {r_2}^2 = \pi\,(10)^2$$

$$Q = \pi\,(30)^2 \times \pi\,(10)^2 \times \sqrt{\frac{2 \times 100 \times 1 \times 980}{(\pi\,(30)^2)^2 - (\pi\,(10)^2)^2}}$$

$$Q = 140000\ cm^2/sec$$

مثال (٢)

يمر ماء بانتظام في انبوبة افقية ذات مقاطع مختلفة ففى مقطع مساحته ١٦ بوصة مربعة تكون سرعة الماء ٤ قدم /ث وفى مقطع اخر تكون سرعته ٤٠ قدم/ث. اوجد فرق الضغط بين المقطعين وحجم الماء المار في ثانية واحدة بوحدات (c. g. s).

الحل

حيث ان الانبوبة افقية

$$\therefore h_1 = h_2$$

ولكن

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2}{V_1}^2 + gh_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2}{V_2}^2 + gh_2$$

وحيث ان كثافة الماء ١ جرام/سم

$$P_1 - P_2 = +\frac{1}{2}{V_2}^2 - \frac{1}{2}{V_1}^2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\,(40 \times 30.5)^2 \times \;(4 \times 30.5)^2$$

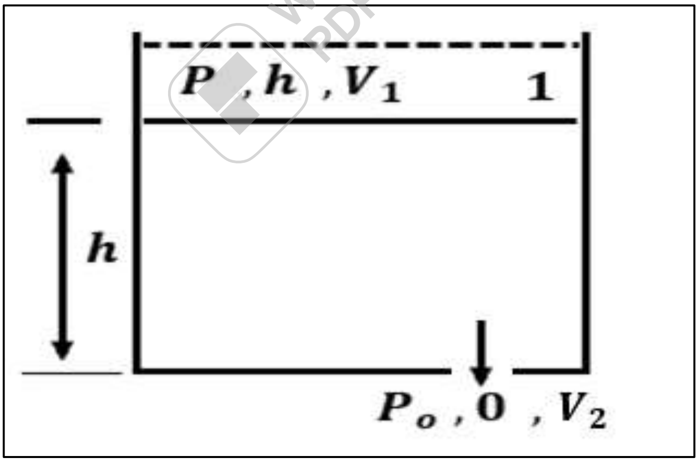
$$= 796.75\; dyn/\,cm^2$$

الحجم المار في الثانية الواحدة

$$S_1V_1 = S_2V_2 = \frac{16}{(254)^2} \times 4 \times 30.5 = 302.5\; cm^2/sec$$

نظرية تورشيللى (سرعة التدفق)

في الشكل (١٠) مقطع من مستودع ماء به فتحة من أسفل. الضغط فوق سطح الماء (P) وارتفاع سطح الماء (h) وسرعة سريان الماء عند السطح (سرعة انخفاض سطح الماء) هى (V_1) ومساحة سطح الماء هى (S_1) وذلك عندما يندفع الماء من الفتحة أسفل المستودع بسرعة (V_2) ومساحة الفتحة (S_2) والضغط عند هذه الفتحة هو الضغط الجوى (P_o) المطلوب حساب سرعة تدفق الماء عند الفتحة.



شكل (١٠)

بتطبيق قاعدة برنولى على المقطعين

$$P + \frac{1}{2}\rho V^2 + \;\rho g h \;= constant$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho {V_1}^2 + \rho gh = P_o + \frac{1}{2}{V_2}^2 + 0$$

$${V_2}^2 = {V_1}^2 + \frac{2(P - P_o)}{\rho} + 2gh$$

$$S_1 V_1 = S_2 V_2 \quad \rightarrow\rightarrow \quad V_1 = \frac{S_2 V_2}{S_1}$$

$${V_2}^2 \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right) = \frac{2(P - P_o)}{\rho} + 2gh$$

$$\therefore V_2 = \sqrt{\frac{\left(\frac{2(P - P_o)}{\rho} + 2gh\right)}{1 - \frac{{S_2}^2}{S_1}}}$$

بعض الحالات الخاصة:

(أ) إذا كان $S_1 \gg S_2$ اى ان $\frac{{S_2}^2}{S_1} = 0$

$$V_2 = \sqrt{\left(\frac{2(P - P_o)}{\rho} + 2gh\right)}$$

(ب) إذا كان $S_1 \gg S_2$ و الضغط فوق سطح الماء كبير جدا

$$\frac{2(P - P_0)}{\rho} \gg 2gh$$

$$V_2 = \sqrt{\left(\frac{2(P - P_0)}{\rho}\right)}$$

(ت) إذا كان $S_1 \gg S_2$ و المستودع مفتوح على الضغط الجوى

اى ان $P_1 = P_2$

$$V_2 = \sqrt{(2gh)}$$

اى ان سرعة تدفق السائل هى مثل حركة جسيم حر $(V_O = 0)$ يسقط تحت تأثير الجاذبية الارضية

حساب قوة الدفع في الصواريخ

المائع الخارج من فتحة الصاروخ يؤثر بقوة رد فعل على الصاروخ فيدفعه في الاتجاه المضاد. فاذا كانت سرعة اندفاع المائع هى (V) وكثافته (ρ) وكانت مساحة الفتحة (S) فان كتلة المائع المتدفق في فترة زمنية قدر ها (dt) يساوى $(\rho SVdt)$ وكمية حركتها تساوى (ρSV^2dt) فاذا أهملنا كمية حركة المائع داخل الصاروخ قبل ان يخرج من الفتحة

إذا التغير في كمية حركة المائع في زمن (dt)= $\rho SV^2dt - 0 = \rho SV^2dt$

معدل التغير في كمية الحركة = قوة رد الفعل = قوة الاندفاع

$$\rho SV^2 = \rho S - (P - P_o) = 2S(P - P_o)$$

مثال: الصاروخ المائى يحوي بداخله ماء فوق سطحه ضغطا كبيرا فاذا كان عذا الضغط يساوى $(3 \times 10^5\ Nm^{-2})$ احسب

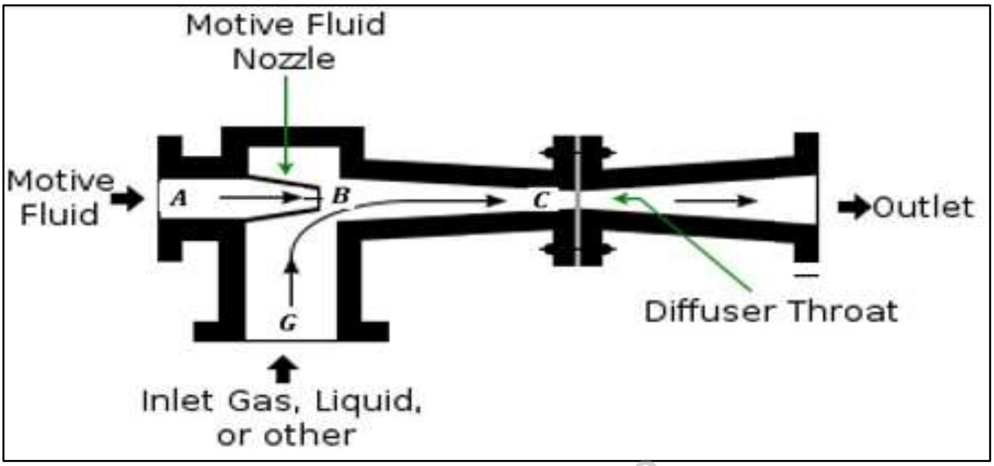
ا- سرعة اندفاع الماء من فتحة الصاروخ

ب- قوة دفع الصاروخ علما بان الضغط الجوى $(P_o = 10^5\ Nm^{-2})$ ومساحة فتحة الصاروخ $(S = 5 \times 10^{-5}\ m^2)$ وكثافة الماء $(\rho = 10^3 Kg\ m^{-3})$.

مضخة الماء النفاثة (Jet Water Pump) لرفع الماء من الاماكن المنخفضة.

شكل (١١) يوضح مثل هذه المضخة وفيها يتصل الانبوب (A) بالحنفية التى يندفع الماء من خلالها فيمر خلال الفتحة الضيقة (B) التى تعمل على زيادة سرعة اندفاع الماء ونقص في الضغط في هذه المنطقة ويتسبب ذلك النقص في عملية شفط الماء

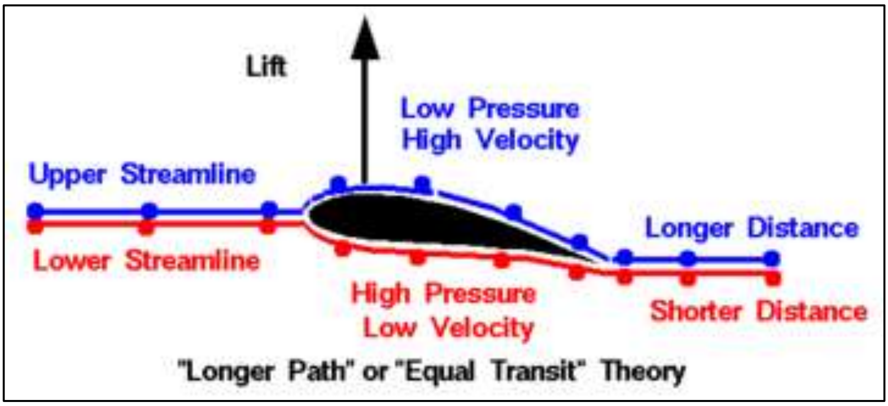
من القاع خلال الانبوبة (G) الذي يختلط بماء الحنفية عند (B) وينفث منه خلال الفتحة C.



شكل (١١)

نظرية الرفع في الطائرات

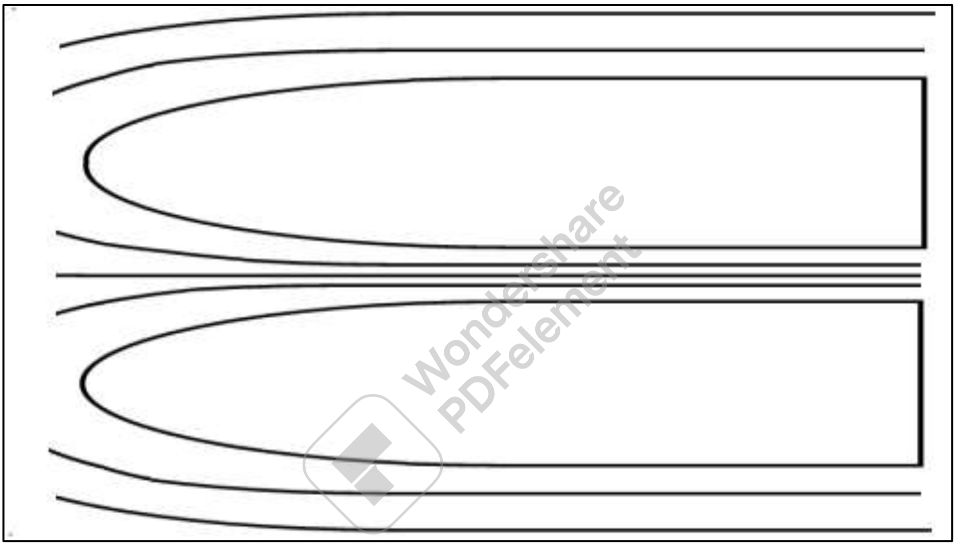
جناح الطائرة مصمم بحيث يجعل سرعة الهواء على سطحه العلوي أكبر من السرعة على سطحه السفلى فيكون الضغط أسفل الجناح أكبر من الضغط اعلاه و هذا الفرق في الضغط هو المسئول عن ثلثى قدرة الرفع اما الثلث الاخر فينشا عن دفع الهواء الى اعلى لسطح الطائرة كما في شكل (١٢) الذي يوضح مقطع من جناح طائرة.



شكل (١٢)

تعرض قاربى سباق لتصادم

عند اقتراب قاربى سباق من بعضهما البعض كما في الشكل فانهما يصبحان معرضان للتصادم نتيجة لاندفاع الماء الى الخلف في المنطقة الضيقة بين القاربين اثناء اندفاع القاربين الى الامام وبذلك تزداد سرعة الماء ويقل الضغط بين القاربين عن المناطق على الجانب الاخر لكل قارب فيعمل الضغط المتزايد في الجانب الاخر لكل قارب على دفع القاربين تجاه بعضهما البعض ويحدث التصادم.



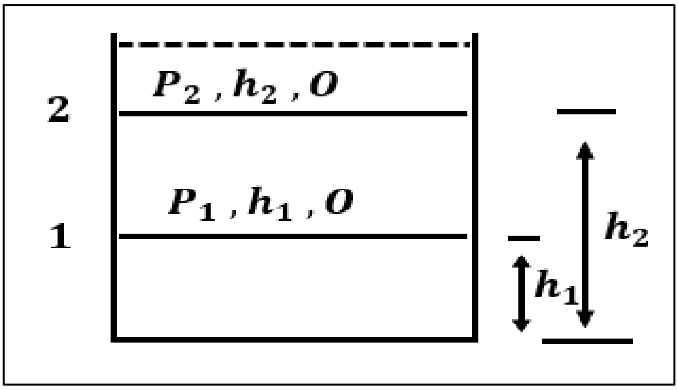
اتزان (سكون الموائع)

يمكن استنتاج شرط اتزان الموائع بتطبيق قاعدة برنولى

$$P + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g h = const.$$

ولما كانت السرعة في الموائع المتزنة تساوى صفر

$$P + \rho g h = const.$$



شكل (١٤)

وهذا يعنى ان الضغط عند جميع نقاط اى مستوى افقى $(h = const)$ يكون ثابتا فرق الضغط بين اى مستويين افقيين بسائل ساكن بتطبيق قاعدة برنولى على المقطعين (١) و (٢) كما في شكل (١٤).

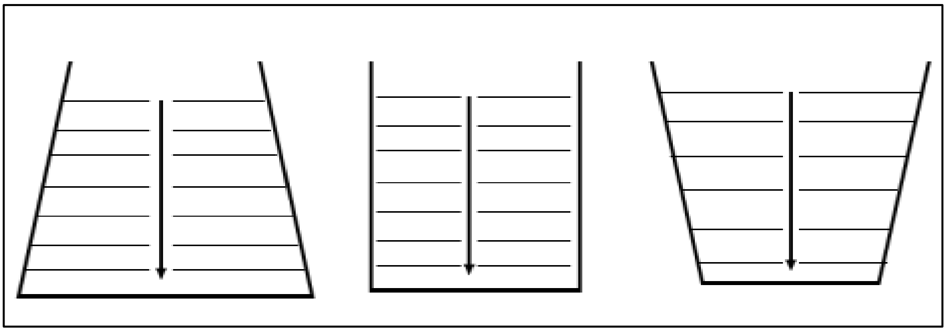
$$P_1 - P_2 = \rho g(h_2 - h_1)$$

$$\Delta P = \rho g h$$

حيث (h) هو فرق الارتفاعين.

<u>الموائع في سكونها</u>

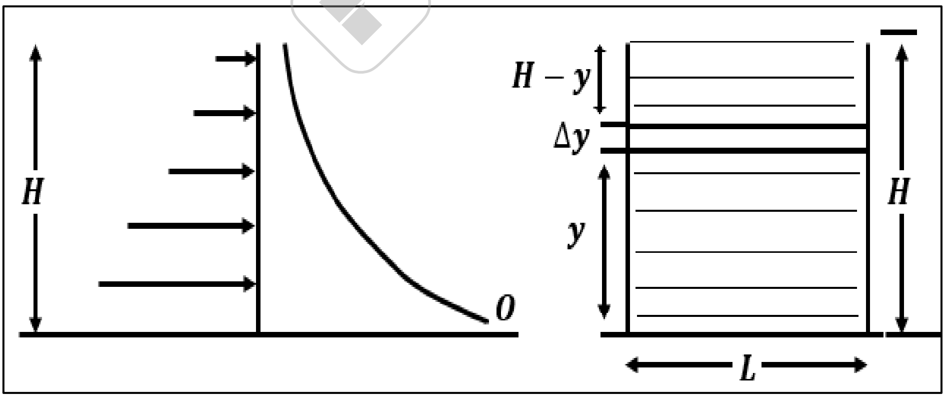
من التطبيق الاخير لقاعدة برنولى على السوائل المتزنة أمكن استنتاج ان ضغط السائل على اى طبقة فيه كما يمكن ايجاد السائل على قاع الاناء ويعرف الضغط عموما بانه القوة العمودية المؤثرة على وحدة المساحات وابعاده هى (MLT^{-2}) ووحداته هى (Nm^{-2}). والقوة الناتجة عن الضغط تختلف من سائل الى اخر. فالسوائل الاكبر كثافة تؤثر بقوة أكبر من السوائل الاقل في الكثافة. وقد سبق استنتاج ان الضغط الناشئ عن سائل يتوقف على ارتفاع السائل وكثافته وعليه فان السائل الواحد في الانية المختلفة الشكل يتساوى ضغطه إذا تساوى ارتفاع السائل في هذه الانية كما في شكل (١٥).



شكل (١٥)

ضغط السائل لا يؤثر فقط على قاع الاناء وانما على جدران الاناء وعلى جميع نقاط السائل وفى جميع الاتجاهات ويكون أكبر تأثيرا كلما زاد العمق ومن هنا تبنى السدود على الانهار بحيث يكون الاسفل اسمك واقوى اجزاءها حيث الضغط المؤثر على هذا الجزء يكون كبير جدا كما في شكل (١٦أ) ولحساب القوة المؤثرة على جسم السد نلاحظ ان الماء خلف السد يؤثر بمحصلة قوة افقية تحاول دفع السد في اتجاه التيار كما انها تؤثر بازدواج يحاول ادارة السد حول النقطة (o).

شكل (١٦ب) يمثل وجه السد المواجه للتيار.



شكل (١٦أ) شكل (١٦ب)

ضغط الماء المؤثر على العنصر الذي سمكه (Δy) يساوى

$$P = \rho g(h - y)$$

نلاحظ اننا أهملنا الضغط الجوى لأنه يؤثر على وجهي السد بنفس القوة

عنصر القوة (dF) المؤثر على عنصر المساحة (Ldy) يساوى:

$$dF = P\ L\ dy = \rho g(H - Y)\ L\ dy$$

لإيجاد القوة الكلية المؤثرة على جسم السد يجب جمع جميع عناصر القوة (dF) وهذا يتطلب اجراء تكامل. هنا سوف نجد القوة الكلية بطريقة أيسر مستفيدين من فكرة ان الضغط يتغير بانتظام مع تغير العمق وبهذه الطريقة يمكن ايجاد الضغط المتوسط (P_{av}). وهذا يحدث عند منتصف عمق الماء خلف السد (نتيجة لهذا التغير المنتظم)

$$P_{av} = \frac{1}{2}\rho g H$$

القوة الكلية = الضغط المتوسط × مساحة جزء السد المعرض

$$F = P_{av}\ A = \frac{1}{2}\rho g H(LH) = \frac{1}{2}(\rho g L)H^2$$

اى ان القوة الكلية المؤثرة على جسم السد تتناسب مع مربع عمق الماء خلف السد وهذا التناسب هو الاساس الذي تصمم على اساسه السدود.

$$\Delta P_1 = 10^3 \times 9.8\ \times 10 \times 10^{-2} - 784$$

$$\Delta P_1 = 196\ Nm^{-2}$$

بالتعويض من معادلة (٥) فى معادلة (١)

$$Q = \frac{\pi a^4 \rho \Delta P_1}{8\eta L}$$

$$= \frac{3.14 \times (10^{-3})^4 \times 196}{8 \times 1.5 \times 10^{-3} \times 0.03}$$

$$= 6.4 \times 10^{-4}\ m^{-3} s^{-1}$$

الطفو وقانون ارشميدس

بعض الأجسام يطفو على سطح الماء وبعضها يغوص فيه كما ان بعض الاجسام التى تطفو على سطح الماء قد تغوص فى الكحول وبعض الاجسام التى تغوص فى الماء قد تطفو على سطح الجلسرين. وعليه فان لجميع الموائع خاصية تسمى خاصية الطفو. وهذه الخاصية تعنى ان الموائع تؤثر على الاجسام الموجودة بها بقوة دفع لأعلى. وهذه القوة تختلف من مائع لأخر فهى إذا السبب المباشر الذي يفرق بين استجابة الاجسام لخاصية الطفو. فمعنى ان الاجسام التى وزنها اقل من قوة دفع السائل تطفو فوق سطح السائل مثل الخشب فوق سطح الماء والاجسام التى لها وزن أكبر تغوص مثل الحديد فى الماء.

ارشميدس كان اول من لاحظ ان الاجسام المغمورة جزئيا او كليا فى السوائل تزيح حجما من السائل مساويا لحجم الجسم المغمور من الجسم ومنها استنتج قوة دفع السوائل وصاغها فى قانون يعرف باسمه.

قانون ارشميدس

" الجسم المغمور كليا او جزئيا فى مائع، يؤثر عليه المائع بقوة دفع الى اعلى تساوى وزن السائل المزاح "

الاجسام الطافية فوق سطح سائل تغوص جزئيا فيه الى عمق بحيث تحصل ازاحة لجزء من السائل وزنه يساوى وزن الجسم نفسه.

تطبيقات قانون ارشميدس

بناء السفن من الصلب

ربما يتعجب البعض من امكانية تعويم السفن العملاقة المبنية من الصلب فوق سطح الماء الاقل كثافة من مادتها والسبب فى ذلك ان هذه السفن ذات الحجم الهائل ليست كلها من الصلب الأجم ولكن الفراغات التى بها والتى يشغلها الهواء تجعل للسفينة

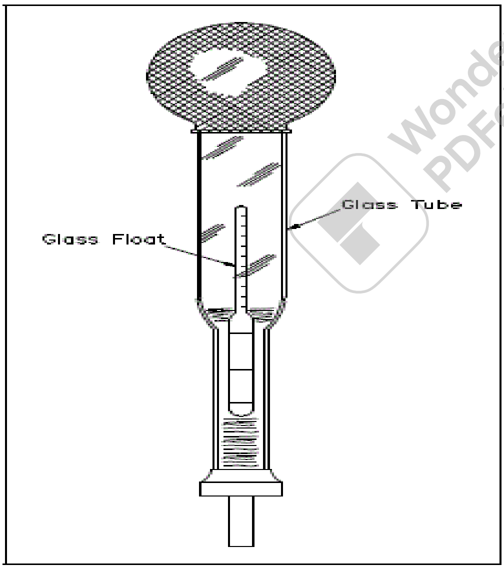
كثافة ظاهرية (ρ_a = الكتلة مقسومة على الحجم الكلى) أقل كثافة من الماء وبذلك يمكن أن تطفو.

بناء الغواصات

الفكرة فى تصميم الغواصات هو بناؤها بحيث يكون لها كثافة ظاهرية اقل قليلا من كثافة الماء وبالإضافة الى ذلك يبنى بها مستودعات يمكن ملؤها بماء البحر فتزداد كثافتها عن كثافة الماء فتغوص فيه وعند الرغبة فى تعويم الغواصة تفرغ مستودعاتها من الماء بدفعه بواسطة هواء مضغوط.

الهيدرومترات

هى أجهزة قياس كثافة السوائل وتستخدم فيها خاصية الطفو شكل (١٧) والهيدرومتر يغوص فى الماء المراد إيجاد كثافته الى ان يزيح كمية من الماء تساوى وزن الهيدرومتر. وعند غمر الهيدرومتر فى الموائع الاكبر كثافة يغوص منه جزء اقل بينما فى الموائع الاقل كثافة يغوص منه جزء أكبر. وتعاير الهيدرومترات على هذا الاساس بحيث تؤخذ قراءة كثافة المائع عند السطح الحر للمائع.



شكل (17)

الطب العلاجى

تستخدم خاصية الطفو فى العلاج الطبيعى المرضى حيث فى بعض الاحيان لا يستطيع المريض تحريك أحد اطرافه فى حالة تمزق فى العضلات او فى المفصل وعندما يوضع المريض فى الماء يصير وزنه تقريبا منعدما لان الكثافة الظاهرية

لجسم الانسان أكبر بقليل من كثافة الماء وبهذا فان القوة اللازمة للمريض كى يحرك طرفه تصبح صغيرة ويتمكن بذلك من مزاولة علاجه الطبيعي بيسر.

قانون باسكال

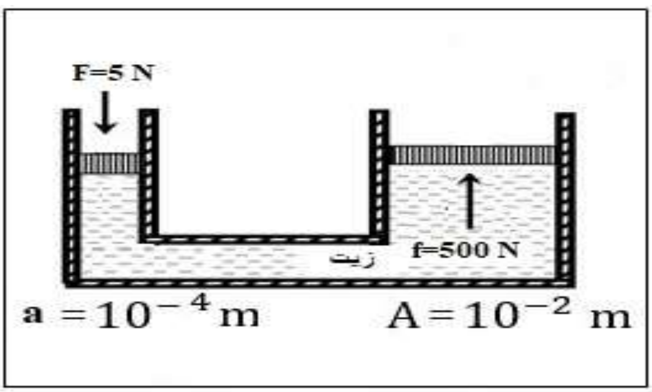
لقد اكتشف باسكال خاصية اخرى من خواص السوائل وصاغها فى قانون يعرف باسمه ولقد ظهرت لها تطبيقات عملية كثيرة وينص القانون على:

" الضغط المسلط على اى جزء من سائل فى وعاء مقفل ينتقل بانتظام لجميع اجزاء السائل ويعمل فى جميع الاتجاهات "

تطبيقات قانون باسكال

تكبير القوة

شكل (18) يمثل اسطوانتين متصلتين يملؤهما زيت ومجهزتين بمكبسين. عند التاثير بقوة مقدارها (5 N) الى اسفل على المكبس الاصغر (على الشمال) فانه ينشأ عنها ضغط الى اسفل مقداره ($5 \times 10^4\ Nm^{-2}$) الذى ينتقل خلال الزيت ليعمل الى اعلى على المكبس الاكبر ($A = 10^{-2}\ m^2$) وبذلك فان القوة التى تؤثر الى اعلى على هذا المكبس تساوى(500 N) وبذلك يمكن مضاعفة القوة المؤثرة الى مائة ضعف كما امكن عكس اتجاهها.



شكل (18)

يجدر بنا أن نبين ان المكسب فى القوة المؤثرة على المكبس الايسر يكون على حساب حركة هذا المكبس على سبيل المثال لو تحرك المكبس الايسر $(1\ m)$ يكون الشغل المبذول فى ذلك هو $(5\ J)$ وهى نفس الكمية التى سوف تبذل فى تحريك المكبس الايمن اى ان المكبس الايمن يتحرك مسافة $(\frac{5\ J}{500\ N} = 0.1\ m)$.

ضخ مياه الشرب فى شبكات المدن

الضغط المتولد من المضخات بمحطة الضخ يتوزع بشبكة المياه فى جميع الاتجاهات خلال ماء الشرب ويصل نفس هذا الضغط الى المنازل وذلك إذا كانت الحنفيات مقفلة جميعها (اى ان الماء ساكن). أما إذا كانت الحنفيات مفتوحة فيحدث سريان للماء.

المكبس الهيدروليكى

توجد تطبيقات كثيرة للمكبس الهيدروليكى مثل الفرامل الهيدروليكية بالسيارات، كرسى الحلاقة الذي يمكن رفعه وخفضه هيدروليكيا باستخدام قوة صغيرة. وتستخدم شركة سيتروين للسيارات نظام هيدروليكى فى سياراتها بدلا من نظام المساعدين واليايات فى السيارات الاخرى.

بعد دراستنا للموائع فى حال سريانها وحال سكونها لابد لنا من لفت النظر الى اختلاف جوهرى بين الحالتين. بينما الضغط يتساوى عند جميع نقاط السائل التى على نفس العمق فى السوائل الساكنة فإن الحال يختلف فى السوائل السارية فالماء المنساب فى انبوب افقى منتظم المقطع يتناقص الضغط بانتظام على طول الانبوب فى اتجاه السريان. وسبق ان ذكرنا ان الماء فى شبكة مياه الشرب الضغط فيها عند المنازل وعند المحطة متساوى وكان كلامنا مشروطا بان تكون جميع الحنفيات مقفولة وهذا يعنى ان الماء ساكن فى الشبكة وهذا طبعا شرطا غير متوفر عمليا لان كثير من الحنفيات سيكون مفتوحا ويتبع ذلك سريان الماء من المحطة الى المنازل.

هذا السريان يتبعه تناقص فى الضغط على طول الشبكة ولهذا تصمم محطات ضخ على طول الشبكة لتقوية ما فقد من ضغط أثناء سريان الماء.

مسائل

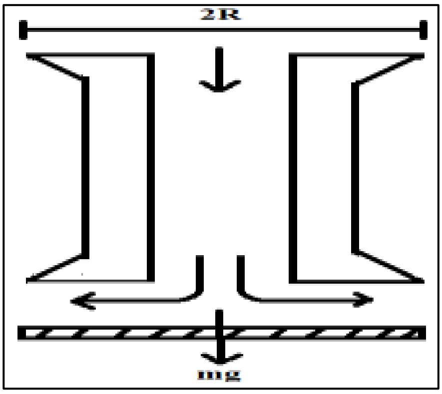
١- وضعت بكرة خيط على ترس دائرى من الكرتون. فإذا نفخ فى الفتحة العلوية للبكرة وارتفعت إلى أعلى نجد أن القرص الكرتون يرتفع معها ولا يسقط الا إذا توقف النفخ. علل ذلك.

وإذا كان وزن القرص $(2.5x10^{-3}Kg)$ وقطر قاعدة البكرة هو $(3x10^{-2}m)$ فما هو النقص اللازم فى الضغط فى المنطقة بين قاعدة البكرة وقرص الكرتون حتى يمكن رفعه.

الحل

نتيجة اندفاع الهواء بسرعة فى المنطقة الضيقة بين قاعدة البكرة والقرص الكرتون يقل الضغط بمقدار (ΔP) عن الضغط الجوى فيرتفع القرص مع البكرة تحت تأثير هذا الفرق من الضغط ولا يسقط الا إذا توقف النفخ.

فى وضع الاتزان يكون القرص متزنا تحت تأثير وزنه الى اسفل والقوة الناتجة من النقص فى الضغط (ΔP) الى اعلى أى ان



$$\pi R^2 \Delta P = mg$$

$$\Delta P = \frac{mg}{\pi R^2}$$

$$\Delta P = \frac{2.5x10^{-3}x9.8}{3.14(1.5x10^{-2})^2}$$

$$\Delta P = 35\ Nm^{-2}$$

٢- ماسورة مياه مساحة مقطعها الداخلى $(8x10^{-3}\ m^2)$ بها إختناق مساحة مقطعه الداخلى $(5x10^{-3}\ m^2)$ وينساب الماء خلالها انسيابا منتظما بمعدل $(2x10^{-2}\ m^3s^{-1})$. اوجد ما ياتى:

أ- سرعة الانسياب عند المقطعين الواسع والضيق.

ب- الفرق فى طاقة الحركة لوحدة الكتل للماء عند كل من المقطع الواسع والاختناق فى الانبوبة.

ت- الفرق فى الضغط بين المقطعين.

الحل

من معادلة الاستقرار

$$v_1 s_1 = v_2 s_2 = Q$$

حيث (s_1) مساحة المقطع الواسع، (v_1) سرعة الانسياب عند المقطع الواسع، (s_2) مساحة المقطع عند الاختناق (v_2) سرعة الانسياب عند الاختناق، Q معدل الانسياب.

$$\therefore v_1 = \frac{Q}{s_1}$$

$$v_1 = \frac{2x10^{-2}}{8x10^{-3}} = 2.5\ ms^{-1} \qquad (1)$$

$$\therefore v_2 = \frac{Q}{s_2}$$

$$v_1 = \frac{2x10^{-2}}{5x10^{-3}} = 4\ ms^{-1} \qquad (2)$$

الفرق فى طاقة الحركة لوحدة الكتل هو

$$\Delta E = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}(16 - 6.25) = 4.88\ J$$

وبتطبيق معادلة برنولى على المقطعين مع ملاحظة ان الانبوبة أفقية أى ان

$$h_1 = h_2 = h$$

$$\frac{\rho_1}{\rho} + \frac{1}{2}v_1^2 + gh = \frac{\rho_2}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2 + gh$$

ويكون الفرق فى الضغط بين المقطعين هو

$$(P_1 - P_2) = \frac{\rho_2}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

$$= \frac{10^3}{2}(16 - 6.25)$$

$$= 4.88x10^3\ Nm^{-2}$$

٣- إناء اسطواني قطره $(0.1\ m)$ وارتفاعه $(0.2\ m)$ به ثقب فى القاع مساحة مقطعه $(1\ cm^2)$. فإذا صب ماء من هذا الاناء بمعدل مقداره $(1.4x10^{-4}\ m^3s^{-1})$.

أ- عين الى ارتفاع سوف يصل السائل فى الاناء مع استمرار صب الماء.

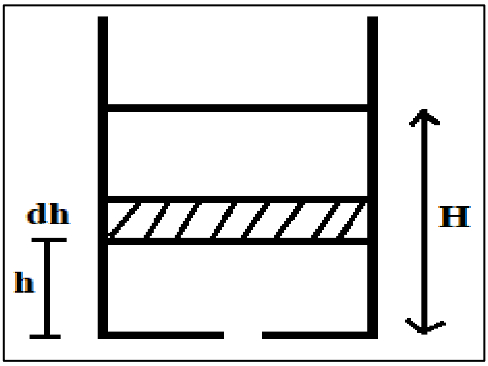
ب- بعد الوصول لأقصى ارتفاع توقف صب الماء داخل الاناء. فما هو الزمن اللازم لتفريغ هذا الاناء.

الحل

يثبت ارتفاع الماء داخل الاناء عندما يتساوى معدل انسياب الماء من الثقب مع معدل صب الماء داخل الاناء. فى هذه الحالة يثبت سطح الماء داخل الاناء وبالتالى فان سرعته (v_1) تكون مساوية للصفر وبتطبيق معادلة برنولى على مقطع الاناء ومقطع الثقب.

$$\frac{\rho_1}{\rho}+\frac{1}{2}v_1^2+gh_1=\frac{\rho_2}{\rho}+\frac{1}{2}v_2^2+gh_2$$

$$\because P_1=P_2=P_0\,,\qquad h_1=H,\qquad h_2=0$$



يكون معدل انسياب الماء فى الثقب هو

$$Q=v_2s_2=s_2\sqrt{2gH}\qquad\qquad(1)$$

وإذا كان معدل صب الماء فى الاناء هو (Q_1) فإن الارتفاع (H) يثبت عندما

$$Q_1=Q_2$$

$$1.4x10^{-4}=10^{-4}\sqrt{2x9.8xH}$$

$$\therefore H=0.1\ m\qquad\qquad(2)$$

ولإيجاد الزمن اللازم لتفريغ الاناء بعد التوقف عن صب الماء. نفرض أنه فى لحظة ماء كان ارتفاع السائل فى الاناء هو (h) وبعد فترة زمنية (dt) انخفض سطح السائل بمقدار (dh) فيكون حجم السائل الذي ينساب من الثقب فى الثانية الواحدة هو

$$-s_1\frac{dh}{dt}=\ v_2s_2=s_2\sqrt{2gh}\qquad\qquad(3)$$

والاشارة السالبة لانه بزيادة الزمن (t) يقل ارتفاع (h).

$$dh=-\frac{s_1}{s_2\sqrt{2g}}\int_H^0\frac{dh}{\sqrt{h}}\qquad\qquad(4)$$

بتكامل المعادلة (4)

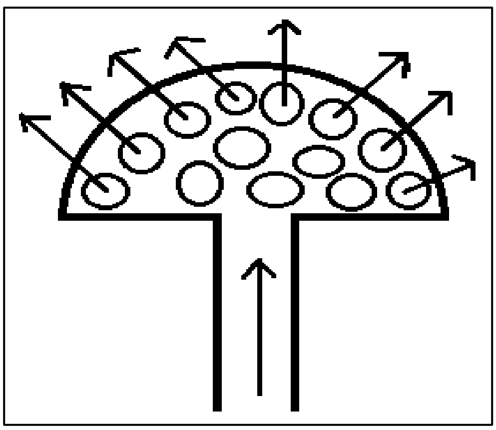
$$t = \frac{s_1}{s_2}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$t = \frac{\pi x(0.1)^2}{4x10^{-4}}\sqrt{\frac{2x0.1}{9.8}} \;=\; 11.2 \;\; s$$

٤- رشاش مياه به (150) ثقب ومساحة مقطع الثقب الواحد $(2\ mm^2)$. يدخل الماء الى الرشاش بمعدل ثابت هو $(3x10^{-3}m^3s^{-1})$ فما هى السرعة المتوسطة للماء الخارج من الرشاش.

الحل

حجم الماء الخارج من جميع الثقوب فى الثانية يساوى حجم الماء الداخل الى الرشاش فى الثانية لأنه لا يوجد تراكم للماء داخل الرشاش. وإذا كانت المسافة الكلية للثقوب هى (s) وسرعة خروج الماء من الثقوب هى (v) ومعدل دخول الماء الى الرشاش هو (Q) فان



$$Q = vs$$

$$3x10^{-3} = 150x2x10^{-6}x\ v$$

$$\therefore v = 10\ ms^{-1}$$

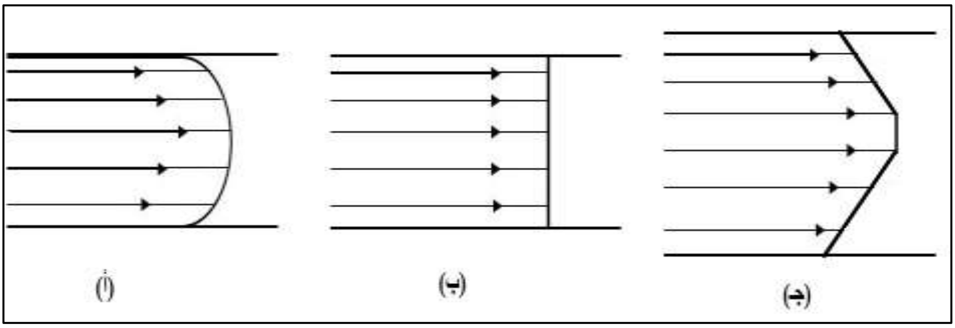
اللزوجة

تطلق اللزوجة على خاصية مقاومة السائل للانسياب. حتى نشرح المعنى الطبيعى لهذه الخاصية نفترض ان لدينا سائل منساب على سطح أفقى (داخل انبوبة ضيقة منتظمة المقطع). ونتصور ان السائل مكون من قشور اسطوانية منتظمة السمك وذات محور مشترك هو المحور الاصلى للأنبوبة الضيقة. وإذا أخذنا مقطع فى هذه الانبوبة بحيث يمر بالمحور الاصلى لها فان السائل المتحرك يظهر كأنه مكون من طبقات متوازية وذات سمك منتظم رقيق.

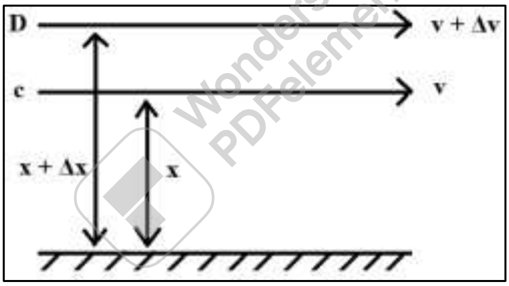
فى هذه الحالة لو اخذنا فى الاعتبار السرعة التى تتحرك بها هذه الطبقات اثناء انسياب السائل لوجدنا ان طبقة السائل التى تلامس سطح الانبوبة تكون فى حالة سكون اى تبقى فى مكانها دون ان تتحرك وذلك بسبب التجاذب بينها وبين السطح اما الطبقة التى تعلوها من السائل فى اتجاه محور الانبوبة فسوف تنزلق عليها والطبقة الثالثة من السائل ستتحرك بسرعة أكبر من الثانية وهكذا. اى ان سرعة كل طبقة ستزيد كلما زاد بعدها عن السطح الثابت الذي ينساب فوقه. أى ان اكبر قيمة لسرعة انتقال سائل داخل انبوبة زجاجية ستكون لتلك الطبقة من السائل التى تتحرك على امتداد محور الانبوبة (شكل أ) نلاحظ أنه عند استنتاجنا لمعادلة برنولى اهملنا لزوجة السائل وعلى ذلك كانت سرعة جميع نقط السائل عند اى مقطع فى الانبوبة التى يمر فيها السائل متساوية، وكان السائل يتحرك كوحدة واحدة داخل الانبوبة (شكل ب). أما عندما يكون للسائل لزوجة وسرعته ليست كبيرة (عند حد معين) فإن سريانه يكون طبقياً وتكون قيمة سرعة أجزاء السائل اثناء مروره داخل الأنبوبة ممثلة بالشكل (أ).

ويجب ملاحظة انه عندما تزيد سرعة مرور السائل فى الانبوبة عن قيمة معينه (حرجة) فان سريان السائل يصبح غير منتظم اذ تتكون فى السائل دوامات

واضطرابات مختلفة وتمثل سرعة أجزاء السائل (الشكل جـ). ويسمى الانسياب فى هذه الحالة بالانسياب الثائر.



نفرض أن (v) سرعة الطبقة (C) من السائل التى تبعد عن السطح الساكن مسافة (x) وأن ($v + \Delta v$) هى سرعة الطبقة (D) التى تبعد عن نفس السطح مسافة ($x + \Delta x$).



يعرف معدل تغير السرعة مع البعد عن السطح الثابت ($-\frac{\Delta v}{\Delta x}$) بإنحدار السرعة.

ونتيجة لإختلاف سرعة الطبقتين (D, C) فإن الطبقة (D) ذات السرعة الاكبر تحاول ان تكسب الطبقة الاخرى نفس سرعتها اى تزيد من سرعة الطبقة السفلى (C) وفى نفس الوقت تعمل الطبقة (C) ذات السرعة المنخفضة على إنقاص سرعة الطبقة العليا(D) اى ان الطبقتان (D, C) سوف يميلا الى هدم الحركة النسبية بينهما. هذا كأن هناك قوة احتكاك (قوة معاوقة) مماسيه عكسية تعمل بين هذه الطبقات وبالتالى للحفاظ على وجود سرعة نسبية ثابته بين هاتين الطبقتين فانه يلزم ان تؤثر قوة خارجية للتغلب على القوة المعوقة العكسية.

وفى غياب هذه القوة الخارجية فان الحركة النسبية بين طبقات السائل سوف تنهار وبالتالى يتوقف وينقطع انسياب السائل.

هذه الخاصية للسائل والتى بواسطتها يعاكس ويضاد الحركة النسبية بين طبقاته المختلفة تعرف باللزوجة او الاحتكاك الداخلى للسائل.

اى ان لزوجة السائل اشبه بقوى الاحتكاك بين طبقاته المختلفة وتعمل فى اتجاه يضاد حركة السائل.

معامل اللزوجة (η)

لقد أوضح نيوتن انه فى حالة انسياب سائل لزج فان مقدار القوة المعوقة لحركة السائل والتى تعمل فى اتجاه مماس لاحدى طبقات السائل (F) تتناسب طرديا مع مساحة سطح هذه الطبقة وليكن (A) سم^2 وكذلك تتناسب طرديا مع انحدار السرعة $(-\frac{\Delta v}{\Delta x})$ اى ان

$$F \propto A$$

$$F \propto -\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore F = -\eta \frac{dv}{dx} A$$

الاشارة السالبة هنا تعنى ان إتجاه القوة يكون عكس اتجاه السرعة أى عكس اتجاه السريان. المقدار الثابت (η) يعرف بمعامل اللزوجة للسائل وفى حالة $(\frac{\Delta v}{\Delta x} = 1)$

A=١ سم^2

$\therefore F = \eta$ عددياً

أى انه يمكن تعريف معامل اللزوجة بأنه عدديا القوة المماسية التى تؤثر على وحدة المساحات من سطح السائل عندما يكون الفرق بين سرعتي طبقتين منه المسافة بينهما ١ سم هو ١ سم/ثانية (أى عندما يكون انحدار السرعة يساوى الوحدة).

$$\eta = \frac{F}{A\,\frac{dv}{dx}}$$

ولإيجاد وحدات معامل اللزوجة

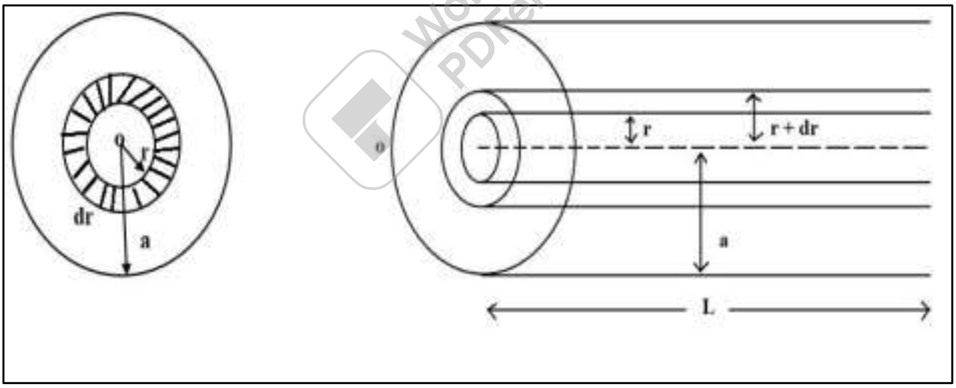
$$\eta = \frac{\text{قوة}}{\text{مساحة}\ \frac{\text{سرعة}}{\text{مسافة}}} = \frac{\text{قوة}\ x\ \text{مسافة}}{\text{سرعة}\ x\ \text{مساحة}}$$

$$\eta = \frac{\text{dyne} \times \text{cm}}{\text{cm}^2\ \frac{\text{cm}}{\text{sec}}} = dyne.\frac{sec}{\text{cm}^2}$$

داين. ثانية/سم٢ أو جم/سم. ثانية وهذا فى النظام الفرنسى

وتسمى لزوجة مقدارها ١ داين. ثانية/سم٢ (بالبويز)

معادلة بواسيل لانتقال السائل خلال انبوبة ضيقة



عندما يسرى سائل لزج خلال انبوبة شعرية سريانا منتظما فان سرعة طبقات السائل الملاصقة للجدار تكويا مساوية للصفر. وتزداد السرعة كلما بعدنا عن الجدار الى ان تصل الى قيمة عظمى (v_o) عند محور الانبوبة.

فإذا فرضنا انبوبة اسطوانية من السائل لها نفس محور الانبوبة طولها (L) وقطرها الداخلى (r) والخارجى (r+dr).

وبفرض ان سرعة السائل على الجانب الداخلى للاسطوانة (طبقة السائل) هو (v)

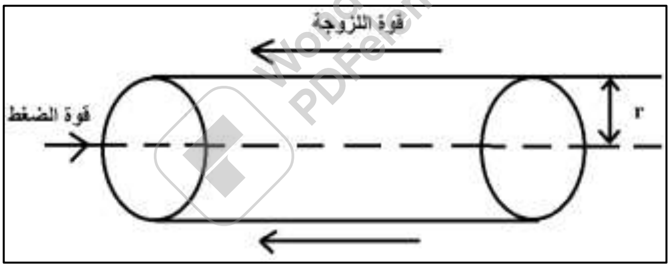
وعلى الجانب الخارجى(v-dv) وعلى ذلك فإن انحدار السرعة $(-\frac{dv}{dr})$.

وحيث ان المساحة السطحية للطبقة الاسطوانية = $2\pi\, r\, L$

إذا القوة المماسية (F) والناتجة من الاحتكاك الداخلى والتى يؤثر بها السائل خارج الطبقة الاسطوانية على السائل الموجود بداخلها تعطى بالعلاقة

$$F = -\eta\, A \frac{dv}{dx} = -\eta\, (2\pi\, r\, L) \frac{dv}{dx}$$

*بالإضافة الى هذه القوة تؤثر أيضا القوة الناتجة عن فرق الضغط على قاعدتى الاسطوانة فاذا كان الفرق فى الضغط بين طرفى الاسطوانة هو (أ) فان القوة المسببة للسريان تساوى = $p(\pi r^2)$ هذه القوة تعمل على اكساب السائل عجلة معينة بينما القوة (F) والمؤثرة فى الاتجاه المضاد يكون لها عكس هذا التأثير.



إذا فى حالة (الانسياب المنتظم) أى حالة الاتزان فان هاتين القوتين يجب ان تكونا متزنتين. اى ان

$$\eta\, (2\pi\, r\, L) \frac{dv}{dr} = P(\pi r^2)$$

$$\therefore \frac{dv}{dr} = -\frac{P}{2\eta L} r$$

واضح من هذه المعادلة ان انحدار السرعة يتناسب مع بعد طبقة السائل عن محمور الانبوبة ويصبح مساويا للصفر عند هذا المحور.

$$\therefore dv = -\frac{P}{2\eta L} r\, dr$$

بالتكامل ينتج ان

$$\therefore v = -\frac{P}{2\eta L}\frac{r^2}{2} + c$$

حيث c ثابت التكامل

ولإيجاد قيمة ثابت التكامل هذا. نحن نعلم أن سرعة السائل الملامس لجدار الانبوبة يساوى صفرا أى ان

$$\text{at} \quad r = a \qquad\qquad \therefore v = 0$$

$$\therefore c = \frac{P}{2\eta L}\frac{a^2}{2}$$

$$\therefore v = \frac{P(a^2 - r^2)}{4\eta L}$$

هذه المعادلة تعطى سرعة سريان السائل عن بعد (r) من محور الانبوبة وحيث ان مساحة مقطع الطبقة الاسطوانية ذات نصف القطر (r) والسمك (dr) تساوى (2π r dr).

إذا حجم السائل المار خلال تلك المساحة فى وحدة الزمن (dG) هو

$$dG = 2\pi\, r.\, dr.\, v$$

وعلى ذلك فان حجم السائل المار فى وحدة الزمن خلال الانبوبة (كل الانبوبة) ذات نصف القطر (a) (اى معدل سريان السائل) تعطيها العلاقة

$$G = \int_0^a 2\pi\, r.\, dr.\, v$$

$$G = \int_0^a \frac{P(a^2 - r^2)}{4\eta L}.\, 2\pi\, r\, dr$$

$$G = \frac{\pi P}{2\eta L}\int_0^a (a^2 r - r^3)\, dr$$

$$G = \frac{\pi P}{2\eta L}\left[\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a$$

$$G = \frac{\pi P}{2\eta L}\left[\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}\right]$$

$$\therefore G = \frac{\pi\, P\, a^4}{8\eta L}$$

$$\therefore G = \frac{\pi}{8}\frac{P}{\eta}\frac{a^4}{L} \qquad (1)$$

كتلة السائل الذي ينساب فى الثانية الواحدة

$$Q = \rho G$$

حيث ρ كثافة السائل

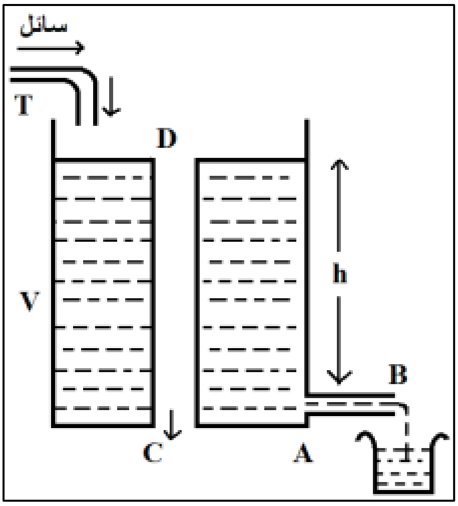
$$\therefore Q = \frac{\pi\rho}{8}\frac{P}{\eta}\frac{a^4}{L} \qquad (2)$$

تعرف المعادلات (1, 2) بعلاقة او معادلة بواسيل. منها يتضح ان معدل انسياب السائل يتناسب مع فرق الضغط ومع نصف قطر الانبوبة مرفوعا الى الاس الرابع ويتناسب عكسيا مع طول الانبوبة.

من المعادلة السابقة يتضح انه إذا أمكن معرفة كل من (a, P, G, L) فانه يمكن تعيين معامل اللزوجة (η).

بعض الطرق المختلفة لتعيين معامل اللزوجة لسائل

طريقة بواسيل



من الطرق المناسبة لقياس معامل اللزوجة تغير معدل سريان سائل خلال انبوبة شعرية والجهاز المستخدم مبين بالشكل وفيه توضع الانبوبة الشعرية (AB) فى وضع أفقى بحيث يعلوها سطح السائل بمقدار (h) سم. بوضع السائل فى قارورة كبيرة (V) حيث يصب فيه من الصنبور(T) بحيث يكون معدل انسياب السائل من الصنبور أكبر من معدل تصريفه من القارورة دائما ثابت ويتصرف الزاد من السائل عن طريق الانبوبة (C) وبالتالى فان فرق الضغط بين طرفى الانبوبة يظل دائما ثابت. هذا الفرق فى الضغط الذي يدفع السائل للمرور فى الانبوبة الشعرية. ثم نجمع كمية من السائل ولتكن كتلتها (W) خلال زمن (t) فى كأس. وبالتالى يكون حجم السائل (V) المنساب خلال الثانية الواحدة يساوى $(\frac{W}{\rho t})$ حيث (ρ) كثافة السائل. وكما هو واضح من الشكل (h) تمثل ارتفاع السائل فى القارورة عن محور الانبوبة الشعرية وبذلك فان فرق الضغط

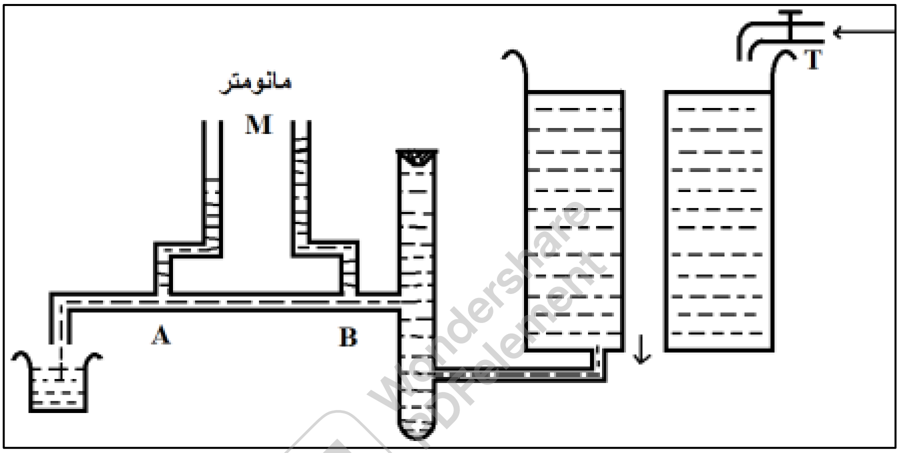
$$p = h\rho g$$

ثم نطبق فى معادلة بواسيل

$$G = \frac{\pi}{8}\frac{P}{\eta}\frac{a^4}{L}$$

حيث (L) طول الانبوبة الشعرية ويمكن قياسها، كذلك (a) نصف القطر الانبوبة ، يمكن تعيينه بواسطة وزن كمية من الزئبق تملأ طول معينه من هذه الانبوبة وبذلك يمكن تعيين (η).

*تعتبر هذه التجربة بذلك الجهاز غير كاملة الدقة حيث لا يمكن ضمان عدم تعجيل السائل عند دخوله الى الانبوبة الشعرية. كذلك فارق الضغط يصعب بهذا الجهاز التحكم فيه حيث يكون ثابت دائما. لذلك فقد أمكن تحسين هذا الجهاز فى الشكل التالى



فى هذا الشكل (AB) الانبوبة الشعرية. الفارق فى الضغط بين طرفيها يمكن تعيينه مباشرة باستخدام مانومتر(M). فى هذه التجربة الانبوبة الشعرية (AB) يجب الا يقل طولها عن ١٠سم حتى نضمن ان تصبح سرعة سريان السائل تقريبا منتظمة بقدر الامكان.

وبالتالى فانه باستخدام معدل سريان بطئ نسبيا وذلك بالتحكم فى صنبور الماء (T) وكذلك يجب ان تكون الفتحات عند (A) ، (B) صغيرة قدر الامكان بهذا يمكن الحصول على نتائج دقيقة لمعامل اللزوجة.

قانون ستوكس

إذا تركت كرة معدنية لتسقط فى سائل لزج مثل الجلسرين، فان الكرة ستهبط بسرعة متزايدة ولكن هذه السرعة سرعان ما تبلغ قيمة معينة تظل ثابته عندها لا تتعداها وتسمى هذه السرعة بالسرعة النهائية.

لدراسة هذه الظاهرة نعلم ان الكرة الموجودة فى السائل تؤثر عليها القوتان

أ- وزنها (mg) ويؤثر لأسفل.

ب- قوة دفع السائل (u) ويدفعها لأعلى.

وحيث ان الكرة معدنية فان وزنها (mg) سيكون أكبر من قوة الدفع ولذلك ستغوص الكرة داخل السائل تحت تأثير القوة الكلية (mg-u) وبذلك ستزداد سرعتها تدريجيا تحت تأثير هذه القوة.

ولكن هناك قوة ثالثة تؤثر على الكرة وهي:

ت- قوة اللزوجة (F) وتؤثر فى عكس اتجاه حركة الكرة أى الى اعلى.

وقوة اللزوجة (F) استنتج قيمتها ستوكس على الصورة

$$F = 6\pi\eta rv \qquad (1)$$

حيث (r) نصف قطر الكرة المعدنية، (v) سرعته تحركها

من المعادلة (١) يتضح ان قوة اللزوجة (F) تتناسب مع سرعة السقوط وهذا يعنى ان السائل اللزج سوف يقاوم حركة سقوط الكرة خلاله وان هذه المقاومة ستزيد كلما زادت سرعة الكرة.

وهكذا سرعان ما نصل الى الحالة التى تكون فيها قوة اللزوجة المتزايدة والمتجهة الى اعلى تساوى القوة (mg-u) التى تدفع السائل الى أسفل اى ان

$$F = mg - u \qquad (2)$$

وفى هذه الحالة تصبح الكرة الهابطة فى السائل متحركة دون ان تؤثر عليها قوة وبذلك تتحرك بسرعة منتظمة هى السرعة النهائية (v).

لذلك عندما نضع الكرة فى اول الامر فى السائل فان سرعتها ستزداد تدريجيا من الصفر الى السرعة النهائية (v) وعندئذ تثبت عند هذه القيمة وتسقط بسرعة منتظمة. فاذا كانت (ρ_1) هى كثافة فان وزن الكرة (mg) يساوى

$$mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g \qquad (3)$$

وإذا كانت (ρ) هى كثافة السائل فان قوة الدفع (u) تساوى حجم الكرة فى كثافة السائل فى عجلة الجاذبية

$$u = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho\, g \qquad (4)$$

من المعادلات (1, 2, 3, 4) نجد ان

$$6\pi\eta r v = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_1 - \rho)$$

$$\eta = \frac{2}{9}\frac{r^2}{v} g(\rho_1 - \rho)$$

من هذه المعادلات يتضح انه إذا كانت كثافة السائل أكبر من كثافة مادة الكرة اى ان $(\rho_1 < \rho)$ فان السرعة الثابته (v) تكون سالبة وبالتالى فان الكرة تتحرك الى اعلى.

مسائل

١- احسب سرعة الجسم كدالة فى الزمن عندما يسير هذا الجسم فى سائل لزج فى خط مستقيم تحت تأثير قوة ثابته علما بان الحركة تبدأ من السكون.

الحل

إذا فرضنا ان الجسم يتحرك بسرعة (v) تحت تأثير القوة المحركة (F) فانه يلاقى قوة مقاومة مقدارها $(c\eta v)$ حيث (η) هو معامل اللزوجة للسائل، (c) هو مقدار ثابت ومن قانون نيوتن نجد أن

$$m\frac{dv}{dt} = F - c\eta v$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} - \frac{c\eta}{m}v = \frac{c\eta}{m}(\frac{F}{c\eta} - v)$$

$$\therefore \frac{dv}{\frac{F}{c\eta} - v} = \frac{c\eta}{m}dt \qquad (1)$$

بتكامل المعادلة (١)

$$\int_0^v \frac{dv}{\frac{F}{c\eta} - v} = \frac{c\eta}{m}\int_0^t dt$$

$$[-\ln\left(\frac{F}{c\eta} - v\right)]_0^v = \frac{c\eta}{m}t$$

$$\frac{\ln\left(\frac{F}{c\eta} - v\right)}{\frac{F}{c\eta}} = -\frac{c\eta}{m}t$$

$$\frac{F}{c\eta} - v = \frac{F}{c\eta}e^{-\frac{c\eta}{m}t}$$

$$\therefore v = \frac{F}{c\eta}(1 - e^{-\frac{c\eta}{m}t})$$

٢- وصلت انبوبتان طول كل منها (0.25m) وقطرهما (0.1 mm, 2.4 mm) مع بعضهما ليكونا انبوبة واحدة ثم علقت هذه الانبوبة راسيا بحيث يكون مقطعها الواسع الى اعلى وادخل فى هذا المقطع الواسع قطرة من الزئبق طولها ($8 \text{ x } 10^{-2}$m) وتركت لتسقط بسرعة منتظمة مقدارها (1.3 mm.s^{-1}).

احسب مقدار لزوجة الهواء إذا علمت ان كثافة الزئبق $(13.6x10^3\ Kgm^{-3})$
وان لزوجة الهواء فى المقطع الواسع مهملة.

الحل

معادلة بواسيل الخاصة بانسياب الغازات فى الانابيب الشعرية هى

$$Q_1 = \frac{\pi r^4}{16\eta L}(P_1^2 - P_2^2) \qquad (1)$$

حيث (P_1) هو ضغط الهواء عند طرف الانبوبة (a) وهو يساوى

$$P_1 = P_2 + \rho gh$$

$$P_1 = 10^5 + 13600 \text{ x } 9.8 \text{ x } 0.08$$

$$= 1.11 \text{ x } 10^5 \quad Nm^{-2} \qquad (2)$$

حيث (P_2) هو ضغط الهواء عند طرف الانبوبة (b) وهو يساوى الضغط الجوى.

$$P_2 = 10^5 \quad Nm^{-2} \qquad (3)$$

(Q_1) هو معدل دخول الهواء فى الانبوبة (ab)

$$Q_1 = \pi R^2 v$$

$$= 3.14 \text{ x } (1.2 \text{ x } 10^{-3})^2 \text{ x } 1.3 \text{ x } 10^{-3}$$

$$= 5.88 \text{ x } 10^{-9} \quad m^3s^{-1} \qquad (4)$$

بالتعويض من $(2, 3, 4)$ فى (1) ينتج أن

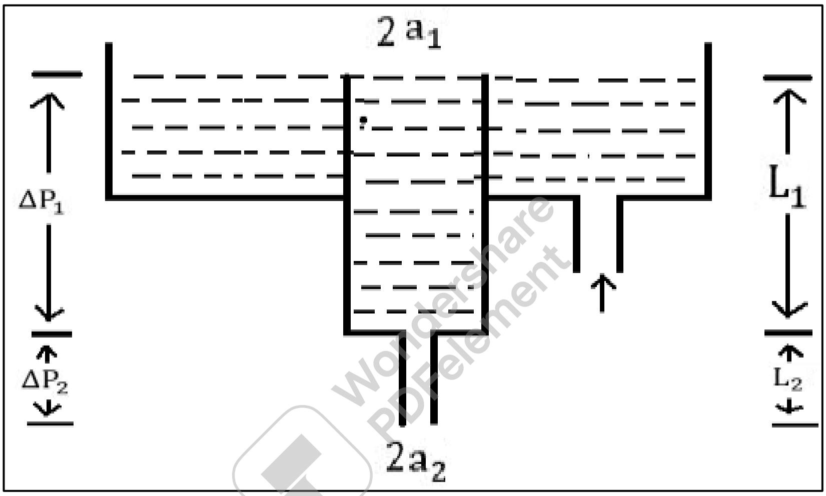
$$1.11 \text{ x } 10^5 \text{ x } 5.88 \text{ x } 10^{-9}$$

$$= \frac{3.14 \text{ x } (0.05 \text{ x } 10^{-3})^4}{16 \text{ x } 0.25 \text{ x } \eta}[(1.11)^2 - 1] \text{ x } 10^{10}$$

$$\therefore \eta = 1.72 \text{ x } 10^{-5} \qquad \text{بويز } (Pa.s)$$

٣- أنبوبة رأسية تتكون من جزئين العلوي طوله (8×10^{-2}) وقطره $(2\ mm)$ والسفلى طوله (2×10^{-2}) وقطره $(1\ mm)$ وضعت كما فى الشكل بحيث يكاد الماء يغطى فوهة الانبوبة. احسب الفرق فى الضغط بين طرفى كل من الجزئين وحجم الماء الذي ينساب فى الانبوبة فى الثانية الواحدة علما بان معامل لزوجة الماء هو $(1.5 \times 10^{-3}\ Pa.s)$.

الحل



حيث ان معدل انسياب الماء واحد فى كل من الانبوبتين.

$$\Delta P_1 = \frac{8\eta L_1}{\pi a_1^4} Q \qquad (1)$$

$$\Delta P_2 = \frac{8\eta L_2}{\pi a_2^4} Q \qquad (2)$$

$$(\Delta P_1 + \Delta P_2) = \rho g (L_1 + L_2)$$

حيث (ρ) هى كثافة الماء

$$\therefore \Delta P_1 = \rho g (L_1 + L_2) - \Delta P_2 \qquad (3)$$

بقسمة المعادلتين (1)، (2) والتعويض من معادلة (3).

$$\frac{\rho g(L_1 + L_2) - \Delta P_2}{\Delta P_2} = \frac{L_1\, a_2^4}{L_2\, a_1^4}$$

$$\therefore \Delta P_2 = \rho g(L_1 + L_2) - \Delta P_2/(\frac{L_1\, a_2^4}{L_2\, a_1^4} + 1)$$

$$= 10^3 \text{ x } 9.8 \text{ x } 10 \text{ x } 10^{-2} \;/\; (4 \text{ x } (0.5)^4 + 1)$$

$$\therefore \Delta P_2 = 784 \qquad Nm^{-2} \qquad\qquad (4)$$

بالتعويض من معادلة (4) فى معادلة (3)

$$\therefore \Delta P_1 = 10^3 \times 9.8 \times 10 \times 10^{-2} - 784$$

$$\Delta P_1 = 196\ Nm^{-2} \qquad\qquad (5)$$

بالتعويض من معادلة (5) فى معادلة (1)

$$Q = \frac{\pi a^4 \rho \Delta P_1}{8\eta L}$$

$$= \frac{3.14 \times (10^{-3})^4 \times 196}{8 \times 1.5 \times 10^{-3} \times 0.08}$$

$$Q = 6.4 \times 10^{-4} \qquad m^3 s^{-1}$$

التوتر السطحى

التوتر السطحى ظاهرة تنشا عن قوى التماسك وقوى الالتصاق فى السوائل وتعمل قوى الجذب بين الجزيئات المتماثلة على تماسك المادة سواء فى حالتها الجامدة او السائلة ولذلك سميت بقوى التماسك

وتوجد بالمثل قوى تعمل بين جزيئات المواد المختلفة وتسمى هذه القوة بقوى الالتصاق. وتظهر هذه القوى بوضوح فى حالة التصاق بعض السوائل بالسطوح الجامدة وقد لا تظهر هذه القوى بوضوح بين فى حالة سطحين جامدين فاذا وضعنا سطحين زجاجيين فوق بعضهما نجد انهما لا يتماسكان فى حين اننا إذا بللناهما بالماء يتماسكا بقوة كبيرة.

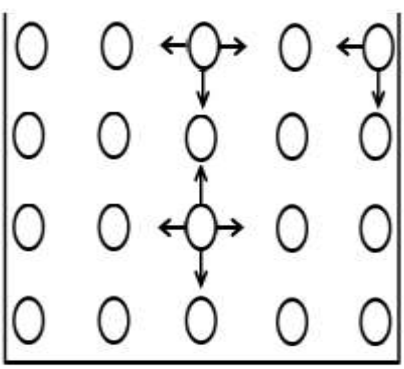
وتدل شواهد عديدة على خاصية التوتر السطحى بذكر منها ما يلي:

١- قطرات الماء المتساقطة من صنبور الماء تظل عالقة لفترة ثم تسقط كروية متماسكة.

٢- سطح السائل يعمل كما لو كان غشاء مشدود. فالإبرة الغير مبتلة تطفو افقيا على سطح الماء رغم ان كثافتها تزيد كثيرا عن كثافة الماء وبعض الكائنات الحية تستطيع ان تمشى على الماء دون ان تغرق.

٣- تقعر سطوح السوائل او تحدبها فى الانابيب الزجاجية

ويمكن تفسير هذه الخواص التى تتميز بها سطوح السوائل الى وجود قوى تماسك بين الجزيئات. فالجزيء الموجود عند السطح لا تجذبه الجزيئات الاخرى بالتساوى فى جميع الاتجاهات المختلفة وبذلك تنشا الظاهرة المعروفة بالتوتر السطحى والشكل



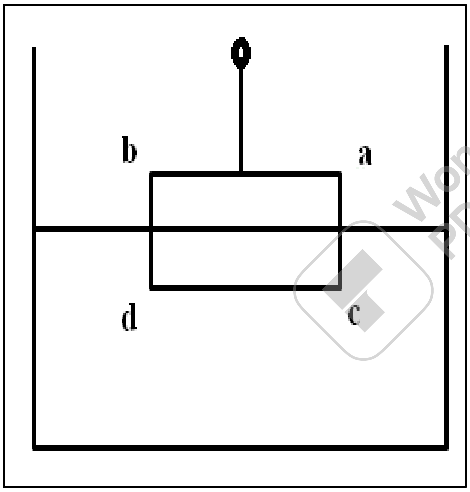
يوضح ذلك. ويمكن القول بان القوة التى تؤثر على وحدة الاطوال عند السطح تسمى بقوة التوتر السطحى.

والسطح الذي يحتفظ بشكله تحت تأثير طاقة تسمى طاقة التوتر السطحى للسائل

معامل التوتر السطحى

هو القوة المؤثرة على وحدة الاطوال من خط مرسوم فى سطح السائل بحيث يكون اتجاهها عموديا على ذلك الخط والتى تحاول ان تشد السطح خلال هذا الخط ويقدر بوحدات (داين/سم).

تعيين التوتر السطحى بطريق الميزان:



خذ اطارا معدنيا (abcd) ذى خطاف يعلق منه بواسطة خيط رفيع فى كفة ميزان ويوضع أسفل الإطار كاس به محلول الصابون بشرط ان يرتكز الكاس على قنطرة خشبية وينغمر جزء من الإطار فى المحلول كما هو مبين فى الشكل، ثم يعادل الإطار بصنجات ويعرف مقدارها. بعد هذا يرفع الكاس باليد قليلا حتى ينغمس كل الإطار فى المحلول فيتكون غشاء من محلول الصابون بين الضلع الاعلى (ab) ويعين سطح المحلول فى الكاس.

وتعمل قوة التوتر السطحى (T) لهذا الغشاء على جذب الاطار الى اسفل فاذا رفع قب الميزان عندئذ وجد انه يمثل جهة الاطار وهذا يدل على ان الصنجات لم تصبح كافية لأقرانه نظرا لوجود قوة التوتر السطحى لغشاء المحلول وهى تؤثر على الاطار الى اسفل فتكمل اذ ذاك الصنجات حتى يعود قب الميزان افقسا مرة اخرى فتكون

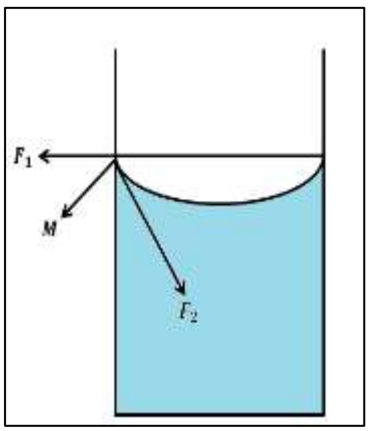
الصنجات التى اضيفت معادلة لقوى التوتر السطحى للغشاء المؤثرة فى الضلع (ab) فاذا فرضنا ان كتلة هذه الصنجات (m) وان طول الضلع هو (l) وان التوتر السطحى (T) وبما ان الغشاء ذو وجهين فيكون طول الغشاء الملامس (2l).

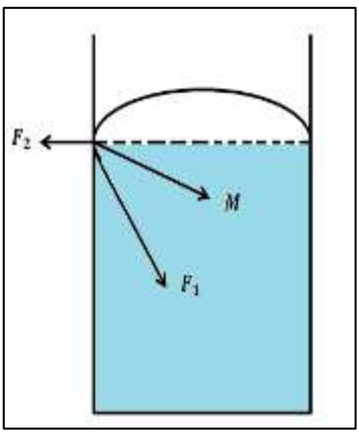
$$m = 2l.T$$

وبمعرفة كتلة الصنجات المضافة لإعادة الاتزان (m) وقياس طول الضلع (l) يمكن تطبيق العلاقة السابقة ايجاد التوتر السطحى (T).

الخاصية الشعرية

إذا غمسنا انبوبة شعرية ذات قطر داخلى صغير جدا فى سائل فإننا نلاحظ ارتفاع السائل فى بعض الاحيان وانخفاضه فى احيان اخرى ويرجع السبب فى ذلك الى خاصية التوتر السطحى. فكما تعمل قوى التوتر السطحى فى اجزاء سطح السائل كذلك تؤثر على الاجسام الملتصقة به نتيجة لقوى الالتصاق. وتعمل قوة الالتصاق (F_2) عموديا على سطح الانبوبة فاذا كانت (F_2) أكبر من قوة التماسك (F_1)، وكانت المحصلة عمودية على سطح السائل فان السطح فى هذه الحالة يكون مقعرا. اما إذا كانت قوة التماسك أكبر من قوة الالتصاق وهذا يحدث فى الحالة السوائل التى لا تلتصق بالجدران اى لا تبللها فان المحصلة (M) تكون عمودية على السطح وتعمل الى الداخل ويتخذ السطح شكلا محدبا.





إذا رسم مماس لسطح السائل عند موضع اتصاله بجسم صلب سميت الزاوية المحصورة بين المماس وسطح الجسم زاوية التماس. زاوية التماس بين الزئبق والزجاج أكبر من ٩٠ فى حين انها اقل من ٩٠ فى حالة السوائل الاخرى وإذا كان الماء نقيا والزجاج نظيفا فزاوية التماس بينهما تساوى صفر ولذا يقال ان الماء يلتصق بالزجاج.

تفسير ارتفاع السوائل فى الانابيب الشعرية وانخفاضها

تعمل فى كل نقطة على محيط دائرة التماس بين السائل والانبوبة قوى التوتر السطحى فى اتجاه المماس لسطح سائل عند هذه النقطة، وتؤثر على جدران الانبوبة كما تؤثر الانبوبة بقوى مساوية ومضادة على سطح السائل ولما كانت الحركة الراسية للسائل هى التى تهمنا الان فإننا اخذنا مركبة القوة فى الاتجاه الراسى $(T\cos\theta)$. مجموعة المركبات الراسية المؤثرة فى محيط دائرة التماس تساوى $(2\pi r\, T\cos\theta)$ حيث (r) نصف القطر الداخلى للانبوبة.

لدينا الان قوتان أحدهما تؤثر على الانبوبة تحاول جذبها الى أسفل والاخرى تؤثر على السائل (رد فعل) تحاول رفعه الى اعلى الى ان تتزن المركبة الراسية مع وزن عمود السائل فى الانبوبة عندئذ يتوقف عن الارتفاع.

فى حالة الاتزان يكون

$$2\pi r\, T\cos\theta = \pi r^2 h\rho g$$

حيث (g) عجلة الجاذبية الارضية، (ρ) هى كثافة السائل

$$T = \frac{rh\rho g}{2\cos\theta}$$

فى حالة الماء $\theta = 0, \rightarrow \cos\theta = 1$

$$T = \frac{rh\rho g}{2}$$

يتوقف الارتفاع والانخفاض على الزاوية (θ) فاذا كانت بين صفر، ٩٠ ارتفع السائل وإذا كانت أكبر من ٩٠ انخفض السائل لان $(\cos\theta)$ فى هذه الحالة تكون سالبة.

<u>تعيين التوتر السطحى باستخدام الانابيب الشعرية</u>

١- يعين اولا نصف قطر الانبوبة الشعرية وذلك بوضع كمية من الزئبق فيها ثم يقاس طول عمود الزئبق بشرط ان تكون الانبوبة افقية وليكن (L) ثم يوزن الزئبق ولتكن كتلته (m) وكثافته (ρ_1).

$$m = V.\rho_1 = \pi r^2 L\,\rho_1$$

ومن هذه المعادلة يمكن استنتاج (r) نصف قطر الانبوبة

٢- تثبت المسطرة راسيا فى الحامل ثم توضع امامها الانبوبة الشعرية بحيث تكون راسيا ايضا وملاصقة للتدريج وسوف يشاهد ان مستوى السائل فى الانبوبة اقل او اعلى من سطحه فى الكاس.

٣- يقرا الفرق بين الارتفاعين ويعاد العمل عدة مرات ويؤخذ المتوسط وهو ارتفاع السائل فى الانبوبة (h).

يطبق فى القانون $T = \frac{rh\rho g}{2}$

مسائل

١- اوجد التوتر السطحى للماء إذا كان ارتفاعه فى الانبوبة الشعرية التى نصف قطرها (٠,١ جم) هو (١٠ سم).

الحل

$$T = \frac{rh\rho g}{2} = \frac{0.1 \text{ x } 15 \text{ x } 980}{10 \text{ x } 2} = 73.5$$ داين/سم

٢- عند تعيين التوتر السطحى بالميزان كان عرض السلك فى الإطار المعدنى (2.81 cm) والقوة اللازمة لدفع السلك من الماء (0.422) ودرجة الحرارة ($15\ c^{o}$) – اوجد التوتر السطحى عند تلك الدرجة.

الحل

$$mg = 2TL$$

$$0.422 \times 980 = 2T \times 2.81$$

$$T = \frac{0.422 \times 980}{2 \times 2.81} = 73.7 \quad \text{داين/سم}$$

٣- يصعد الماء فى انبوبة شعرية راسية الى ارتفاع (5.8 cm) فوق مستواه خارج الانبوبة. ماذا يحدث لمستوى الزئبق داخل نفس الانبوبة إذا وضعت فى كاس به زئبق. مع العلم التوتر السطحى للماء (75 dyne/cm) وللزئبق (547 dyne/cm) وزاوية تماس الزئبق مع الزجاج (130^{o})، كثافة الزئبق ($13.6\ gm/cm^{3}$).

الحل

فى حالة الماء

$$T = \frac{rh\rho g}{2}$$

$$75 = \frac{5.8\ r\ g}{10 \times 2} = 2.8\ g \qquad (1)$$

فى حالة الزئبق

$$\cos 130 = -\cos 50 = -0.6438 \qquad (1)$$

ولكن التوتر السطحى موجب وكل الكميات الاخرى فى المعادلة موجبة لذلك فإن (h_1) يجب ان تكون سالبة.

$$T = \frac{r\,h_1\,\rho_1\,g}{2\cos\theta}$$

$$547 = \frac{r\,h_1\,13.6\,g}{2 \times 0.6438} \qquad (2)$$

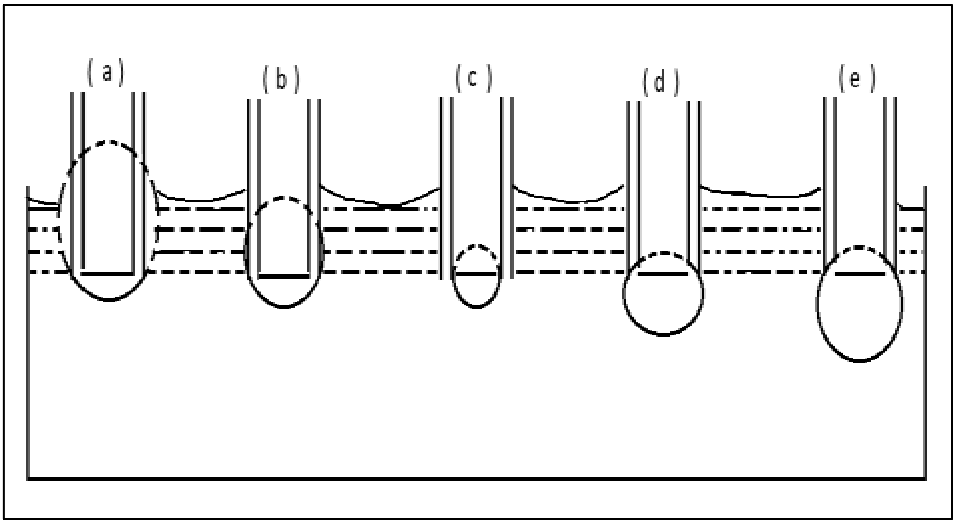
من (1) و (2) ينتج ان

$$h_1 = 2\ cm$$

<u>طريقة جيجر (طريقة الفقاعة)</u>

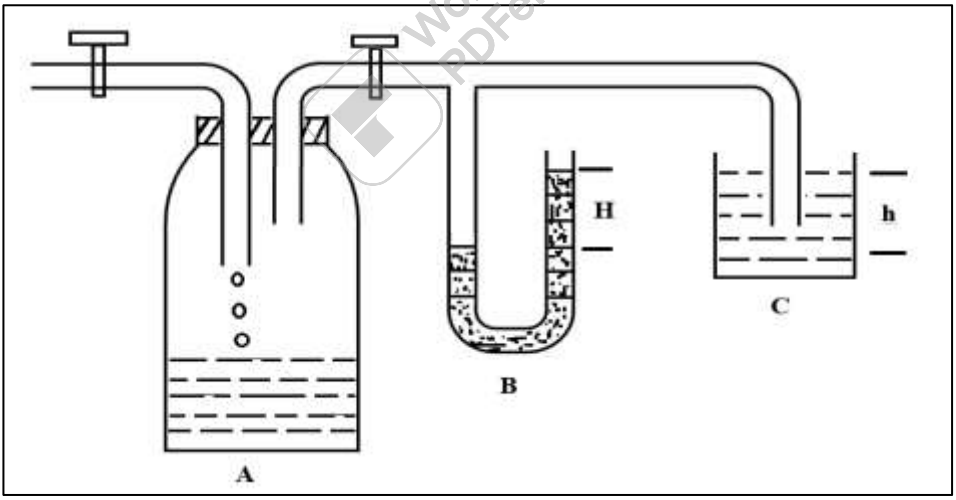
رأينا سابقا من قانون الفقاعة انه يمكن حساب التوتر السطحى (T) إذا أمكننا قياس الضغط داخل الفقاعة ونصف قطرها.

وطريقة جيجر هى طريقة عملية لتعيين هذين المقدارين. تعتمد هذه الطريقة على انه إذا دفع هواء خلال انبوبة مغمورة فى سائل فانه سيتكون فقاعة كما هو مبين بالشكل نصف قطر الفقاعة عندما تبدأ فى التكون يكون كبيرا كما نرى فى الشكل (a) وكلما زاد ضغط الهواء واستمرت الفقاعة فى اتمام تكوينها كلما قل نصف القطر حتى يصل الى نهايته الصغرى عندما يكون مركز الفقاعة فى مستوى فوهة الانبوبة المغمورة وتكون الفقاعة نصف كروية.



وإذا ما استمر الهواء فى الاندفاع ليتم تكوين الفقاعة يبدأ نصف قطر الفقاعة فى الكبر بعد ذلك كما هو مبين بالشكلين (d)، (e).

ولما كانت زيادة الضغط داخل الفقاعة والمتكونة فى باطن السائل تساوى $(p = \frac{2T}{r})$ فإنه فى هذه العلاقة يتضح ان الضغط يبلغ قيمته العظمى عندما يكون نصف قطر الفقاعة (r) عند قيمته الصغرى انه فى الوضع (c) أى عندما تكون الفقاعة نصف كروية وعلى ذلك اى زيادة فى الضغط للهواء المندفع – بعد الوضع (c) – سيزيد فى حجم الفقاعة المتكونة اى سيزيد فى نصف قطرها وحتى تتزن الفقاعة. وتبعا للعلاقة $(p = \frac{2T}{r})$ فإنه لابد من إنقاص الضغط داخلها ولكن هذا لايحدث – لذلك لن يكون هناك اتزان فى القوى المؤثرة على الفقاعة – حيث ان قيمة الضغط داخل الفقاعة يصبح أكبر من قيمة الضغط المطلوب للاتزان. وعلى ذلك سيدفع الضغط الداخلى المرتفع سطح الفقاعة الى الخارج فتكبر فى الحجم وتنفصل.



مبين بالشكل الجهاز المستخدم فى التجربة ويتكون من:

أ- قارورة كبيرة تستعمل فى الحصول على تيار منتظم بطيئا من الهواء مزودة بصنبور للتحكم فى سرعة تيار الهواء وذلك باستخدام تيار منتظم من ماء خلال الصنبور على شكل قطرات من الماء فتدفع الهواء بانتظام فى بقية اجزاء الجهاز.

ب- مانومتر يحتوي على سائل معروف الكثافة وليكن (ρ_2) لقياس ضغط الهواء داخل الفقاعة.

ت- انبوبة شعرية منتظمة المقطع مغمورة رأسيا فى السائل المراد اختباره الى عمق (h) وليكن كثافة السائل (ρ_1).

وتجرى التجربة بإمرار تيار من الماء خلال الصنبور على هيئة قطرات ثم نراقب تكون الفقاعة الهوائية فى السائل المراد اختباره وبضبط الصنبور يمكن التحكم فى معدل انفصال الفقاعة من الانبوبة الشعرية ليكن بواقع فقاعة كل ٢٠ ثانية مثلا.

وفى اللحظة التى تصل فيها الفقاعة الى الشكل النصف كروي نشاهد ارتفاع الضغط الى قيمته العظمى ثم هبوطه بسرعة عقب انفصال الفقاعة عند طرف الانبوبة وعلى ذلك تؤول القيمة العظمى لقراءة المانومتر على قيمة الضغط داخل الفقاعة فى الوضع النصف كروي اى الذي فيه نصف قطر الفقاعة مساوى لنصف القطر الداخلى لفوهة الانبوبة.

ليكن (H) هو اقصى فرق فى مستوى سطح المانومتر وفى هذه الحالة تتحقق العلاقة

الضغط خارج الفقاعة = الضغط الجوى + الضغط الناشئ عن عمود السائل من الفوهة حتى السطح $= P_o + h\,\rho_1 g$

حيث (g) عجلة الجاذبية الارضية.

الضغط داخل الفقاعة = الضغط الجوى + الفرق بين مستوى السائل فى المانومتر $= P_o + H\,\rho_2 g$

إذا زيادة الضغط داخل الفقاعة

$$(P_o + H\,\rho_2 g) - (P_o + h\,\rho_1 g) = g(H\,\rho_2 - h\,\rho_1)$$

وإذا كان (r) هو نصف قطر الفقاعة (المساوى لنصف قطر فوهة الانبوبة) ، (T) التوتر السطحى.

إذا زيادة الضغط $= \frac{2T}{r}$

$$\therefore \frac{2T}{r} = g(H\,\rho_2 - h\,\rho_1)$$

$$\therefore T = \frac{r\,g}{2}(H\,\rho_2 - h\,\rho_1)$$

من هذه المعادلة يمكن تعيين T.

من مزايا هذه الطريقة أنه يمكن تعيين (T) بدون معرفة زاوية التماس كذلك تستخدم هذه الطريقة عادة لمقارنة التوتر السطحى لبعض السوائل والمحاليل مثل معرفة العلاقة بين التوتر السطحى ودرجة تركيز ملح معين.

ومن عيوب هذه الطريقة انها لا تعطى قيمة مضبوطة للتوتر السطحى وذلك لعدم استقرار الفقاعة عند القيمة التى تخرج منها اثناء اخذ القراءات.

المراجع

١- " مبادئ فيزياء الحالة الصلبة" ، احمد سالم صالح، ٢١ أكتوبر ٢٠١٨.

٢- " الفيزياء العامة " ، منار عصام الهدمي ، دار دجلة ، ٠١ يناير ٢٠١٥.

٣- " أساسيات في علم الموائع" ، محمود أحمد عمري ، مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع ، ٠١ يناير ٢٠١٤.

٤- " ميكانيكا الموائع ونظرية المرونة" ، عبد المعطي محمد عبد الله ، خوارزم العلمية ناشرون ومكتبات ، ٠١ يناير ٢٠٠٨.

٥- " فيزياء الجوامد" ، محمد أمين سليمان ، أحمد فؤاد باشا ، شريف أحمد خيري ، دار الفكر العربي ، ٠١ يناير ٢٠٠٧.