جامعة جنوب الوادى

كلية التربية بالغردقة

الفرقة الثالثة عام رياضيات Math

المادة : (5) Applied (Mathematical Method)

إستاذ المادة / د. محمد محمد عبد العزيز

الفصل الدراسى الأول 2022-2023

CHAPTER I

Fourier Series

I.1 Periodic Functions:

Let $f(x)$ be defined on the real x-axis. If $f(x+T) = f(x)$, for all $x \in (-\infty, \infty)$, T is a real constant, $f(x)$ is said to be periodic with period T.

It is clear that $f(x+nT) = f(x+(n-1)T) = \ldots$

$$= f(x+T) = f(x),$$

Where n is a positive integer. The last value of $T > 0$ is called the least period or simply the period of $f(x)$.

For example: $\cos x = \cos(x+2\pi) = \cos(x+4\pi) = \ldots$

$$= \cos(x+2n\pi),$$

Then the period of $\cos x$ is 2π. Also the period of $\sin x$ is 2π, the period of $\tan x$ is π and the period of a constant function is any positive number.

If $f(x)$ has the period T then the function :

$g(x) = f(ax)$ has the period T/a, since

$g(x+T/a) = f(a(x+T/a)) = f(ax+T) = f(ax) = g(x)$.

It is clear that cos 2x has the period π, the period of sin 4x is $\frac{\pi}{2}$.

If f(x) has the period T, then :

$$\int_{C}^{C+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx \qquad \text{(prove it?)}$$

It is apparent that a sum, a difference , a product and a ratio of periodic functions with the same period T are again periodic functions with period T, (not necessary the least period). It is clear that $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$,the period ofsinx, cos x is 2π, but the period of tan x is π .

I.2 Odd and Even Functions:

A function f(x) is said to be odd if :

$f(-x) = - f(x)$ for all x .

It is easy to see that : x^5, $x^3 - 2x$, sin x , tan x , ($e^x - e^{-x}$) are odd functions.

A function f(x) is said to be even if $f(-x) = f(x)$ for all x .

Thus x^2 , $x^4 + 3x^2 + 7$, $\cos x$, $(e^x + e^{-x})$ are even functions.

These definations imply that the graph of an even function is symmetric with respect to the axis of ordinates and the graph of an odd function is symmetric with respect to the origin.
It is clear that a linear combination of an even (odd) functions is also even (odd) function

If $f(x)$ is integrable on the interval $[-a, a]$, then :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Replacing x by -x in the first integral, we get:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx$$

Then :-

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} (\ f(x)+f(-x)\ )dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & \text{if } f(x) - \text{even function.} \\ 0\ , & \text{if } f(x) - \text{odd function.} \end{cases}$$

In general, any function $f(x)$ can be represented as the sum of even and odd functions. It is obvious that :

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = F(x) + G(x),$$

Where :

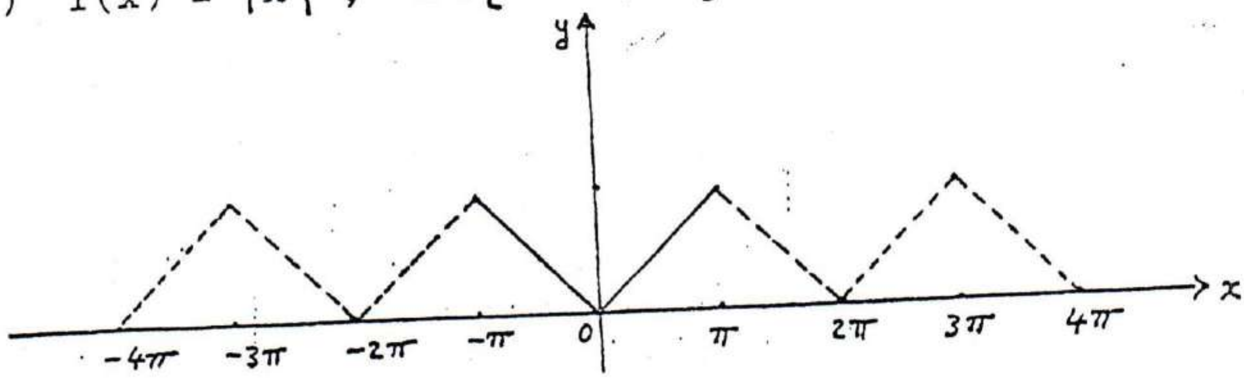
$$F(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad , \quad G(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

$F(x)$ - even function and $G(x)$ - odd function.

Every function $f(x)$ defined on the interval of the form $[-a, a]$ can be represented as the sum of the corresponding even and odd functions.

Example 1.1: Graph each of the following functions

a) $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$ and has a period 2π

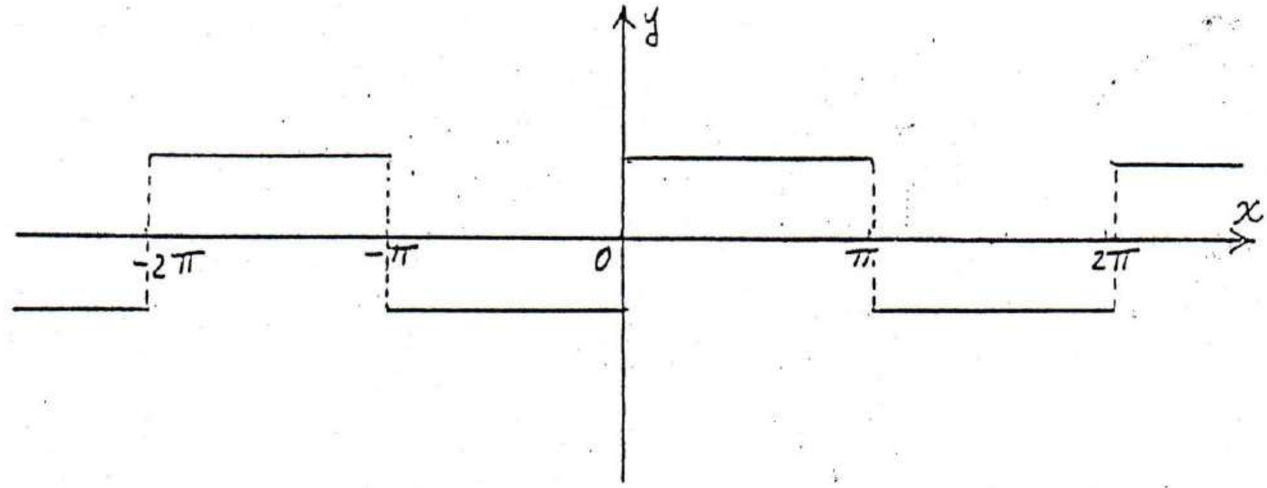


Since the period is 2π, that portions of the graph in $-\pi \leq x \leq \pi$ is extended periodically.

outside this range. It is clear that $|-X| = |x|$, then $f(x)$ is an even function.

b)

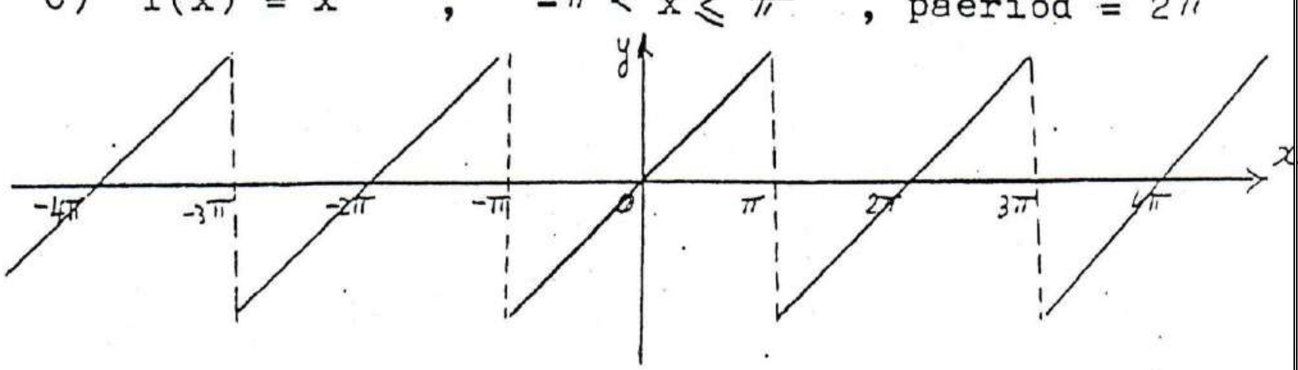
$$f(x) = \begin{cases} -\pi/4 , & x \in (-\pi , 0) \\ \pi/4 , & x \in (0 , \pi) \end{cases} , \quad \text{period} = 2\pi .$$



It is clear that, $f(x)$ is not defined at $x=0, \pm\pi, \pm 2\pi$, ... etc.

These values are the discontinuities of $f(x)$. It is obvious that $f(x)$ is an odd function.

C) $f(x) = x$, $-\pi < x \leqslant \pi$, paeriod $= 2\pi$



Exercises 1.1

Graph each of the following functions and classify each of them according as they are even, odd, or neither even nor odd.

1) $$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 < x < 3 \\ -2 & -3 < x < 0 \end{cases} \qquad \text{period} = 6$$

2) $$f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases} \qquad \text{period} = 2\pi$$

3) $$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases} \qquad \text{period} = 2\pi$$

4) $$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x < \pi \\ \cos x & \pi < x < 2\pi \end{cases} \qquad \text{period} = 2\pi$$

5) $$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & 2 \leq x < 3 \end{cases} \qquad \text{period} = 3$$

6) $$f(x) = \begin{cases} 5 & 0 < x < 3 \\ -5 & -3 < x < 0 \end{cases} \qquad \text{period} = 6$$

7) $f(x) = x\,(5 - x) \qquad 0 < x < 5 \quad \text{period} = 5$

1.3 Fourier Series :

Let $f(x)$ be defined in the interval $(-T,T)$ and outside of this interval by $f(x+2T) = f(x)$, i.e. assume that $f(x)$ has the period $2T$. The Fourier expansion or Fourier series corresponding to $f(x)$ is given by :

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \right) \quad (1)$$

Where a_n, b_n are called Fourier Coefficients and given by :

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \cos \frac{n\pi x}{T}\, dx = \frac{1}{T} \int_{C}^{C+2T} f(x) \cos \frac{n\pi x}{T}\, dx \\ & \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (2) \\ b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \sin \frac{n\pi x}{T}\, dx = \frac{1}{T} \int_{C}^{C+2T} f(x) \sin \frac{n\pi x}{T}\, dx \end{aligned}\right\}$$

(Where C is any real number)

To determine a_o in (1), we are use (2) with n=0,

hence ,

$$a_o = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx$$

The constant term in (1) is equal to :

$$\frac{a_o}{2} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx ,$$

which is the mean of f(x) over a period. It is clear that $b_o = 0$, since $\sin 0 = 0$.

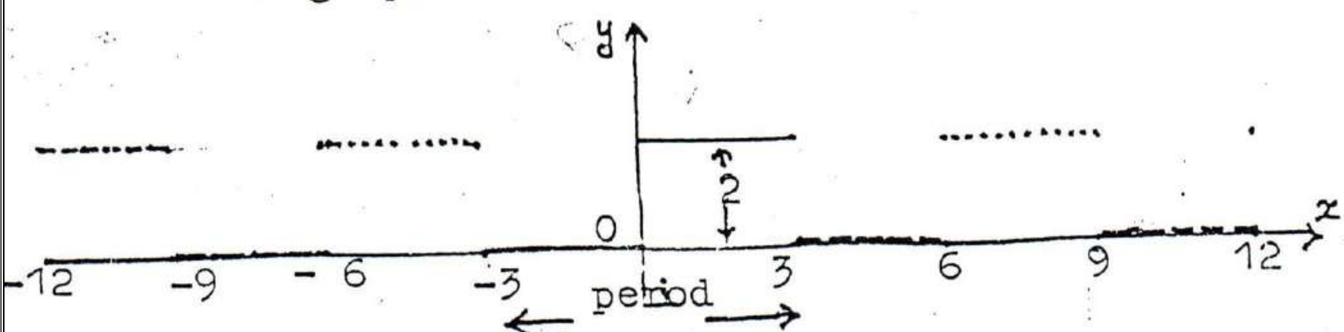
<u>Example 1.2</u>:

Find the Fourier coefficients corresponding to the function :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -3 < x < 0 \\ 2 & 0 < x < 3 \end{cases} \qquad \text{period} = 6$$

<u>Solution</u>:

The graph of f(x) is shown below



Period = 2T = 6, and T = 3 , Then

$$a_n = \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} f(x) \cos\frac{n\pi x}{3}\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \left(\int_{-3}^{0} (0) \cos \frac{n\pi x}{3} dx + \int_{0}^{3} (2) \cos \frac{n\pi x}{3}\, dx \right)$$

$$= \frac{2}{3} \int_{0}^{3} \cos\frac{n\pi x}{3} dx = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{n\pi} \sin\frac{n\pi x}{3} \right) \Big|_{0}^{3} = 0$$

for all $n = 1,2,3,\ldots\ldots$,

$$a_o = \frac{2}{3} \int_{0}^{3} dx = 2 .$$

Similarly ,

$$b_n = (2/3) \int_{0}^{3} \sin (n\pi x/3)\ dx = (2/3) \left(- \frac{3}{n\pi} \cdot \cos (n\pi x/3) \right)\Big|_{0}^{3} = 2 (1-\cos n\pi) /n\pi$$

$$= \frac{2 (1 - (-1)^n)}{n\pi} = \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is even} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

i.e. $b_1 = 4/\pi$, $b_2 = 0$, $b_3 = 4/3\pi$, $b_4 = 0$, $b_5 = 4/5\pi$, $b_6 = 0$ etc.

Therefor ,

$b_2 = b_4 = b_6 = \ldots = b_{2m} = 0$, $b_{2m+1} = 4/(2m+1)\pi$

for all m , $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_m = 0$, $a_o = 2$

Exercises 1.2

Prove that :-

1) $$\int_{-T}^{T} \sin(n\pi x/T)dx = \int_{-T}^{T} \cos(n\pi x/T)dx = 0 \ , \ n=1,2,\ldots$$

2) $$\int_{-T}^{T} \sin(n\pi x/T) \cos(n\pi x/T) \, dx = 0 \quad n=1,2,\ldots$$

3) $$\int_{-T}^{T} \cos(n\pi x/T) \cos(m\pi x/T) \, dx =$$

$$= \int_{-T}^{T} \sin(n\pi x/T) \sin(m\pi x/T) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n, \\ T & \text{if } m = n. \end{cases}$$

Find the Fourier coefficients corresponding to the functions:

4) $$f(x) = \begin{cases} 0 & -2 < x < 0 \\ 5 & 0 < x < 2 \end{cases} \quad \text{period} = 4$$

[Answers: $a_o = 5$, $a_n = 0$, $b_{2m} = 0$, $b_{2m+1} = 10/(2m+1)\pi$]

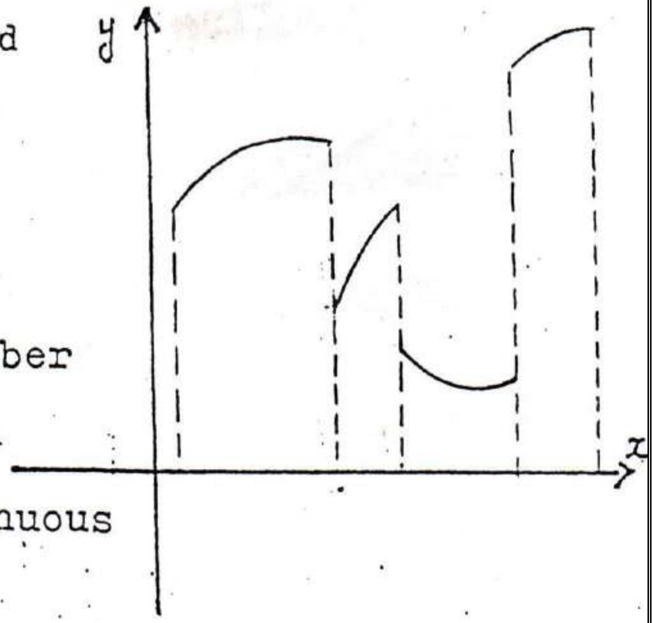
5) $f(x) = (\pi - x)/2$, $x \in (0, 2\pi)$,
period $= 2\pi$
(Answers: $a_0 = a_n = 0$, $b_n = 1/n$)

6) $f(x) = |x|$, $-1 < x < 1$ period $= 2$
[Answers: $a_0 = 1$, $a_{2n} = 0$, $a_{2n+1} = -4/\pi^2(2n+1)^2$
$b_n = 0$]

1.4 Convergence of Fourier series:

Definition : Piecewise continuity:

A fuction $f(x)$ is said to be piecewise continuous in an interval if :



1) the interval can be divided into a finite number of subintervals in each of which $f(x)$ is continuous and ,
2) the limits of $f(x)$ as x approaches the end-points of each subinterval are finite i.e. the

piecewise continuous function is one that has only a finite number of finite discontinuities.

Now, we shall state a theorem that will yield suffieient conditions for representing a function f(x) by a Fourier series.

Theorem (Dirichlet conditions):

Suppose that:(1) f(x) is defined and single - valued except possibly at a finite number of points in (-T , T) ,

(2) f(x) is periodic outside (-T , T) with period 2T .

(3) f(x) and $f'(x)$ are piecewise continuous in (-T , T) .

Then the series (1) with coefficients (2) converges to :

a) f(x) if x is a point of continuity.

b) $\dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ if x is point of discontinuity,

Where $f(x+0) = \lim\limits_{\epsilon \to 0_+} f(x+\epsilon)$, $f(x-0) = \lim\limits_{\epsilon \to 0_+} f(x-\epsilon)$

The conditions (1) , (2) and (3) imposed on f(x) are sufficient but not necessary, and are generally satisfied in practice. There are at present no known necessary and sufficient condition for convergence of Fourier series.

In Example (1.2); the Fourier series corresponding to f(x) is :

$$1 + 4/\pi \left\{ \sin(\pi x/3) + 1/3 \sin(3\pi x/3) + 1/5 \sin(5\pi x/3) + 1/7 \sin(7\pi x/3) + \dots \right\}$$

Since f(x) satisfies the Dirichlet conditions, we can say that the serier converges to f(x) at all points of continuity and to $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ at points of discontinuity. At x = -3,0 and 3 which are points of discontinuity, the series converges to $\frac{2+0}{2} = 1$ as seen from the graph.

If we redefine f(x) as follows :

$\frac{2+0}{2} = 1$.

$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = -3 \\ 2 & -3 < x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ 2 & 0 < x < 3 \\ 1 & x = 3 \end{cases} \qquad \text{period} = 6$$

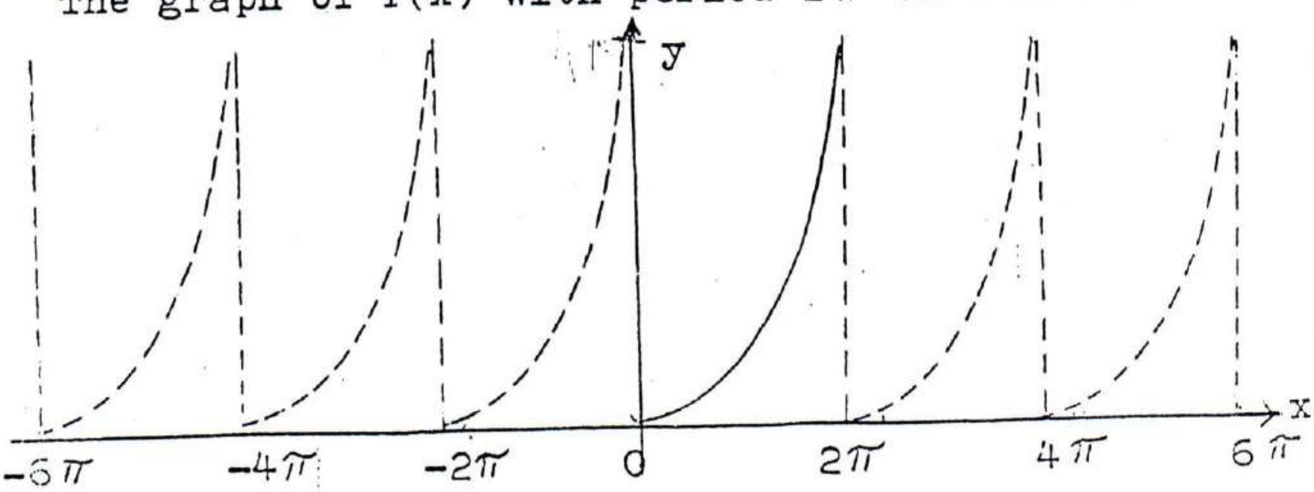
Then the series will converge to f(x) for $-3 \leq x \leq 3$.

Example 1.3:

Expand $f(x) = x^2$, $0 < x < 2\pi$ with period 2π, in Fourier series.

Solution:

The graph of f(x) with period 2π is shown below:



Period = $2T = 2\pi$ and $T = \pi$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \, dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{3\pi} = \frac{8}{3}\pi^2.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \, d(\sin nx) =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(\cancel{x^2 \sin nx}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x \sin nx \, dx\right)$$

$$= (-2/n\pi)\,(-1/n)\int_0^{2\pi} x \, d(\cos nx) =$$

$$= (2/n^2\pi)\left(x \cos nx\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx\right) =$$

$$= (2/n^2\pi)\left\{2\pi \cos(2n\pi) - \left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right\} =$$

$$= (4\pi/n^2\pi)\,\left((-1)^{2n}\right) = 4/n^2, \; n \neq 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{(x^2)\left(\frac{-\cos nx}{n}\right) - (2x)\left(\frac{-\sin nx}{n^2}\right) + \right.$$

$$\left. + (2)\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)\right\}\Bigg|_0^{2\pi} = 4\pi/n$$

Then

$$f(x) = x^2 = (4\pi^2/3) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big((4/n^2)\cos nx -$$

$$-(4\pi/n)\sin nx\Big) .$$

This is valid for $0 < x < 2\pi$. At x=0 and $x = 2\pi$ the series converges to $(0+4\pi^2)/2 = 2\pi^2$. At x=0 the Fourier series reduces to $\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$,

By Dirichlet condition, the series converges at $x = 0$ to $2\pi^2$

Then
$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = 2\pi^2$$

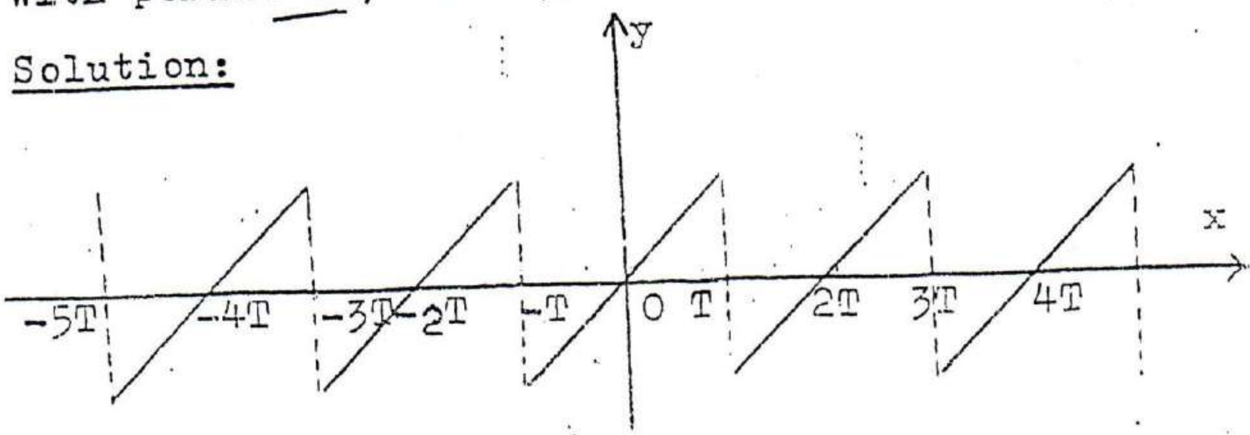
i.e.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = (2 - 4/3)\pi^2 = (2/3)\pi^2$$

Hence
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

Example 1.4:

Let us take the periodic function $f(x) = x$ regarded as being defined on the interval $[-T, T]$ with period 2T, and expand it into a Fourier series.

Solution:



It is clear that, this function is an odd function, then $f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}$ is an odd function and $f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}$ is an even function.

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\,dx = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} x\cos\frac{n\pi x}{T}\,dx =$$

$$= 0 \qquad n = 1,2,3,\ldots\ldots$$

$$a_o = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} x\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\,dx = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} x\sin\frac{n\pi x}{T}\,dx$$

$$= \frac{2}{T}\int_{0}^{T} x\sin\frac{n\pi x}{T}\,dx$$

$$= \frac{2}{T}\left\{\left(-\frac{xT}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{T}\right)\Bigg|_{0}^{T} + \frac{T}{n\pi}\int_{0}^{T}\cos\frac{n\pi x}{T}\,dx\right\} =$$

$$= \frac{2T}{n\pi}\,(-1)^{n+1},$$

Consequently, according to the convergence theorem, we have

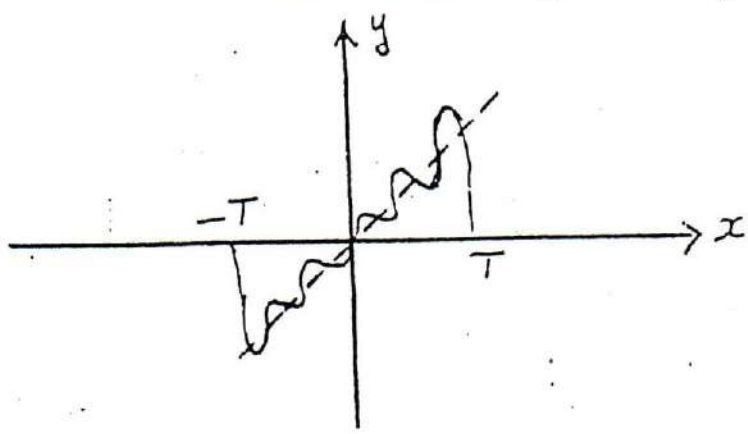
$$S(x) = \frac{2T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{T} = \begin{cases} x & \text{for } -T<x<T, \\ \dfrac{f(-T+0)+f(T-0)}{2} = \\ = \dfrac{-T+T}{2} = 0 & \text{for } x = \pm T. \end{cases}$$

It is clear that the function S(x) is periodic with period 2T , and S(x) = x only for $-T < x < T$ At the points $x = (2m+1)T$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ etc., the function x has discontinuites, its left - hand and right - hand limits being, respectively, equal to -T and +T , but S(x) assumes the value which is the half - sum of the left - hand and righ - hand limits i.e. equal to (-T + T) = 0 .

In the following graph we see the graph of the partial sum $S_5(x)$:

$$S_5(x) = (2T/\pi) \Big[\sin(\pi x/T) - (1/2)\sin(2\pi x/T) + (1/3)\sin(3\pi x/T) - (1/4)\sin(4\pi x/T) + (1/5)\sin(5\pi x/T) \Big]$$

constructed on the interval [-T , T]



In the following, we give some important integrals:

$$\int x \cos ax \, dx = \frac{1}{a^2}\left[\cos ax + ax \sin ax\right] + C$$

$$\int x^2 \cos ax \, dx = \frac{1}{a^3}\left[2ax \cos ax + (a^2 x^2 - 2) \cdot \sin ax\right] + C ,$$

$$\int x^3 \cos ax \, dx = \frac{1}{a^4}\left[(3a^2x^2 - 6) \cos ax + (a^3 x^3 - 6ax) \sin ax\right] + C ,$$

$$\int x^4 \cos ax \, dx = \frac{1}{a^5}\left[(4a^3 x^3 - 24ax) \cos ax + (a^4 x^4 - 12a^2 x^2 + 24) \sin ax\right] + C$$

$$\int x \sin ax \, dx = \frac{1}{a^2}\left[\sin ax - ax \cos ax\right] + C ,$$

$$\int x^2 \sin ax \, dx = \frac{1}{a^3}\left[2ax \sin ax - (a^2x^2 - 2) \cdot \cos ax\right] + C ,$$

$$\int x^3 \sin ax \, dx = \frac{1}{a^4}\left[(3a^2x^2 - 6) \sin ax - (a^3 x^3 - 6ax) \cos ax\right] + C ,$$

$$\int x^4 \sin ax \, dx = \frac{1}{a^5}\left[(4a^3x^3 - 24ax) \sin ax - (a^4x^4 - 12 a^2x^2 + 24) \cos ax\right] + C$$

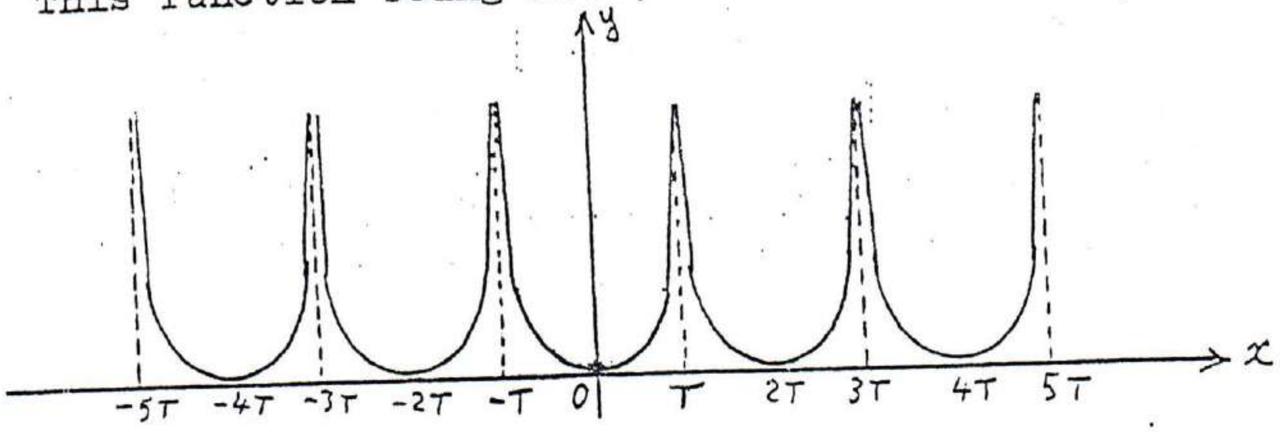
$$\int e^{ax} \sin nx \; dx = \frac{e^{ax}}{a^2+n^2} (a \sin nx - n \cos nx) + C \; ,$$

$$\int e^{ax} \cos nx \; dx = \frac{e^{ax}}{a^2+n^2} (a \cos nx + n \sin nx) + C.$$

Example 1.5:

Let us take the periodic function $f(x) = x^2$ on the interval $[-T\,,\ T]$ with period $2T$.

This function being even, we have :



$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x^2 dx = \frac{2}{3T} \left(x^3 \right) \Big|_0^T = \frac{2}{3} T^2 \; ,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x^2 \cos \frac{n\pi x}{T} \, dx = \frac{2}{T} \left[\left(\frac{T}{n\pi} \right)^3 \right] \left[\frac{2n\pi x}{T} \cdot \cos \frac{n\pi x}{T} + \left(\left(\frac{n\pi}{T} x \right)^2 - 2 \right) \sin \frac{n\pi x}{T} \;\;) \right] \Bigg|_0^T$$

$$a_n = \frac{2\,T^2}{n^3\pi^3}\left[(2n\pi\cos n\pi + (n^2\pi^2 - 2)\cancel{\sin n\pi}\right]$$

$$= \frac{4\;T^2}{n^2\,\pi^2}\;(-1)^n\;,$$

$$b_n = (1/T)\int_{-T}^{T} x^2 \sin\frac{n\pi\,x}{T}\,dx = 0$$

Then :

$$S(x) = \frac{T^2}{3} + \frac{4\;T^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi\,x}{T}$$

$$= x^2 \qquad -T \leqslant x \leqslant T$$

The function x^2 and the sum $S(x)$ of Fourier's series are continuous everywhere including the points $x = (2m+1)T$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$ Since for the function $f(x) = x^2$ we have , $f(-T+0) = f(T-0) = T^2$.

If $T = \pi$ we get :

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{T} \quad , \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

Substituting $\underline{x = 0}$, we obtain the useful relation

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots + (-1)^{(m-1)}\frac{1}{m^2} + \cdots$$

1.5 Fourier series for even and odd functions:

From the definition of an even and odd functions it follows that :

$$\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^T f(x)\,dx & \text{if } f(x) \text{ is an even func.} \\ 0 & \text{if } f(x) \text{ is an odd function.} \end{cases}$$

Now, if an odd function $f(x)$ is expanded in Fourier series, then the product $f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x$ is also an odd function, while $f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x$ is an even function; hence ,

$$a_o = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = 0 ,$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\,dx = 0 , \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\,dx = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\,dx$$

Thus the Fourier series of an odd function contains only Sines (see Example 1.4)

If an even function f(x) is expanded in a Fourier series, then the product $f(x) \cos \frac{n\pi}{T} x$ is also an even function, while $f(x) \sin \frac{n\pi}{T} x$ is an odd function ; hence ,

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\frac{n\pi}{T} x\, dx \qquad n=1,2,3,\ldots$$

$$b_n = 0$$

Thus, the Fourier series of an even functions contains only cosines (see Example 1.5).

The formulas obtained permit simplifying computations when seeking Fourier coefficients in cases when the given function is even or odd. It is obvious that not every periodic function is even or odd, for example $f(x) = \sin x + \cos x$.

1.6 Half range Fourier Sine or Cosine series:

A half range Fourier sine or cosine series is a series in which only sine terms or only cosine terms are present respectively. When a half range series corresponding to a given function is desired, the function is generally defined in the interval (0, T) and then the function is specified as odd or even, so that it is clearly defined in the other half of the interval, namely (-T, 0) . In such case, we have :

$$a_n = 0 \;,\; b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \sin\frac{n\pi}{T} x \; dx$$ for

half range Sine series,

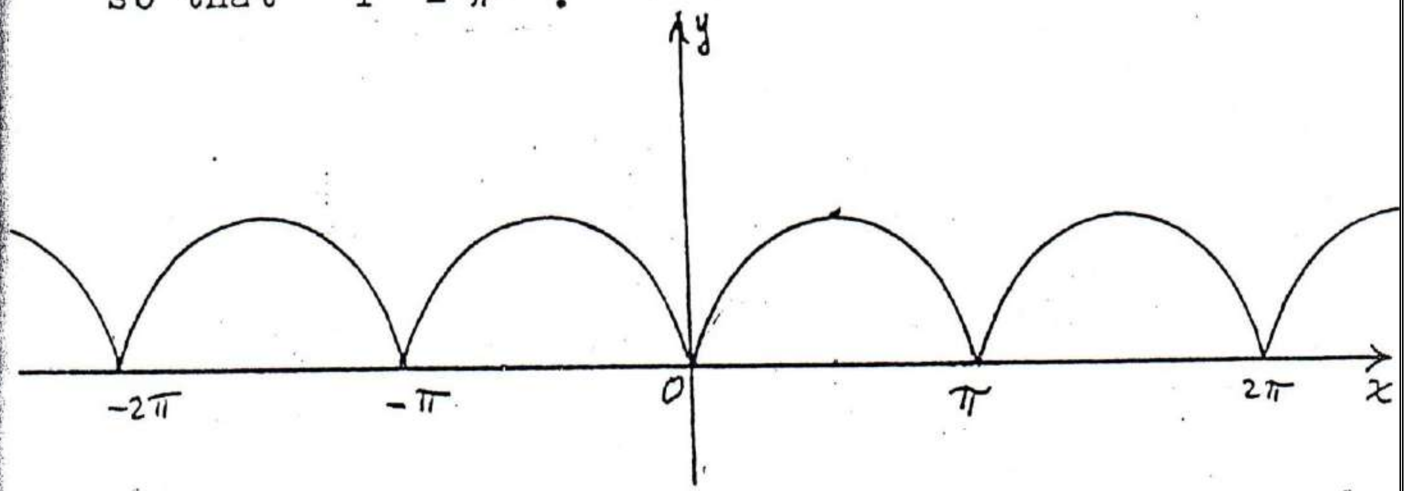
$$b_n = 0 \;,\; a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \cos\frac{n\pi}{T} x \; dx$$ for half

range Cosine series.

Example 1.6:

Expand $f(x) = \sin x \;,\; 0 < x < \pi$ in a Fourier Cosine series.

A Fourier series consisting of cosine terms alone is obtained only for an even function. Hence we extend the definition of f(x) so that it becomes even. With this extension, f(x) is then defined in an interval of length 2π .
Taking the period as 2π , we have $2T = 2\pi$ so that $T = \pi$.



$$a_o = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \; dx = \frac{2}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^\pi = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos nx \; dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[\sin(x+nx) + \sin(x-nx)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{(n+1)} + \frac{\cos(n-1)x}{(n-1)}\right]\Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos(n+1)\pi}{(n+1)} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{(n-1)}\right] =$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1+\cos n\pi}{n+1} - \frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right]$$

$$= \frac{(1+\cos n\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right]$$

$$= -\frac{2(1+\cos n\pi)}{\pi(n^2-1)} \qquad \text{if } n \neq 1$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x \;\, dx = -\frac{1}{2\pi}(\cos 2x)\Big|_0^{\pi} = 0$$

$$\text{Then}\quad S(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+\cos n\pi}{\pi(n^2-1)}\cos nx =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{2^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \frac{\cos 6x}{6^2-1} + \ldots\right]$$

<u>Example 1.7</u>

Expand $f(x) = x$, $0 \leqslant x \leqslant T$, in a half range

a) Sine series , b) Cosine series.

odd fn even fn

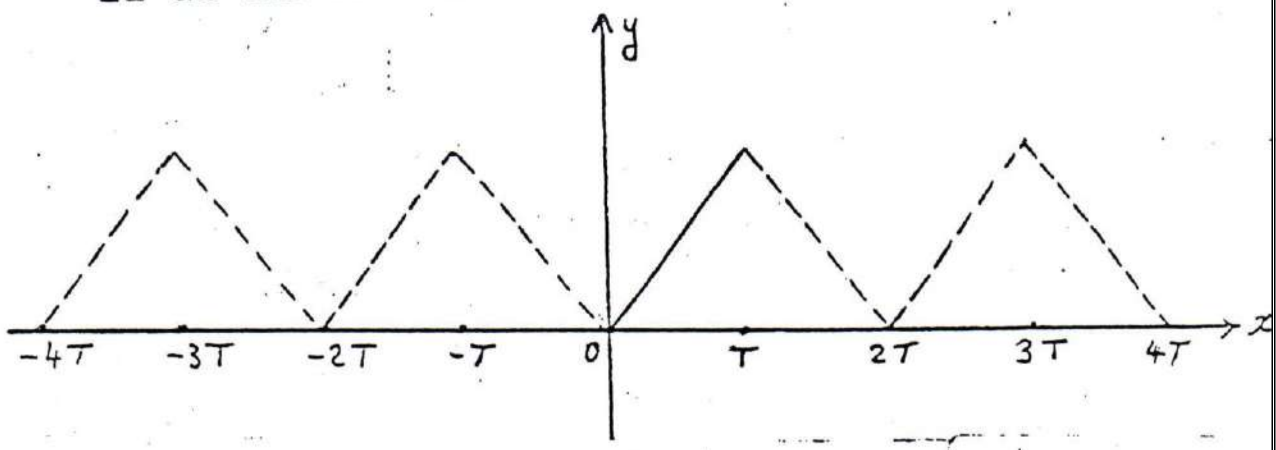
<u>Solution</u> :

a) Extend the definition of the given function to that of the odd function of period 2T (See Example 1.4) i.e. $f(x) = x$ in the interval $[-T , T]$.

Then

$$S(x) = \frac{2T}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{T}$$

b) Extend the definition of the given function $f(x)$ to that of the even function of period $2T$ as shown below :



Thus

$$b_n = 0 , \quad n = 1,2,3,\ldots\ldots$$

$$a_o = \frac{2}{T}\int_0^T x \, dx = \frac{1}{T} (x^2) \Big|_0^T = T$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x \cos \frac{n\pi x}{T} . dx =$$

$$a_n = \frac{2}{T}\left(\frac{T}{n - \pi} \right)^2 \left[\cos \frac{n\pi}{T}x + \frac{n\pi}{T}x \sin \frac{n\pi}{T}x \right]$$

$$= \frac{2\ T}{n^2\pi^2}\left[\left(\cos n\pi + \cancel{n\pi \sin n\pi} \right) - (1 + 0) \right]$$

$$= \frac{2\ T}{n^2\pi^2} \left[(-1)^n - 1 \right]$$

Then

$$S(x) = \frac{T}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\ T}{n^2\pi^2} \left((-1)^n - 1 \right) \cos \frac{n\pi}{T}x$$

$$= \frac{T}{2} - \frac{4T}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1)^2 \cos \frac{(2m-1)\pi}{T} x =$$

$$= \frac{T}{2} - \frac{4T}{\pi^2} \left[\frac{\cos(\pi x/T)}{1^2} + \frac{\cos(3\pi x/T)}{3^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos(5\pi x/T)}{5^2} + \dots \right]$$

It should be noted that the given function $f(x) = x$, $0 < x < T$, is represented equally well by two different series in (a) and (b) .

Example 1.8

Expand $f(x) = x^2$, $0 \leq x < T$; in a half range.

a) Cosine series b) Sine series.

Solution:

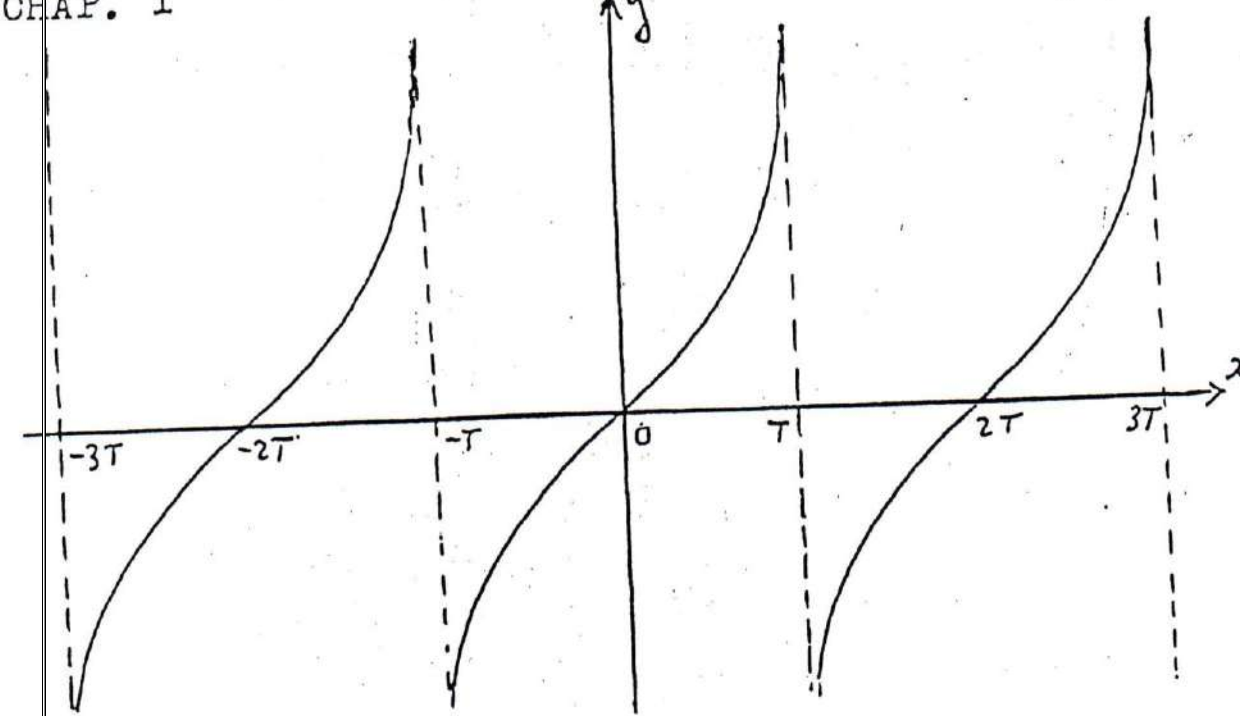
a) Extend the definition of the given function to that of the even function of period 2T (See Example 1.5) i.e. $f(x) = x^2$, $-T < x < T$.

Then

$$S(x) = \frac{T^2}{3} - \frac{4T^2}{\pi^2}\left[\frac{\cos(\pi x/T)}{1^2} - \frac{\cos(2\pi x/T)}{2^2} + \frac{\cos(3\pi x/T)}{3^2} - \frac{\cos(4\pi x/T)}{4^2} + \ldots\right]$$

b) Extend the definition of the given function $f(x)$ to that of the odd function of period 2T

i.e. $$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0 < x < T \\ -x^2 & -T < x \leq 0 \end{cases}$$



Then $a_0 = a_n = 0$, $n = 1,2,3,\ldots\ldots$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x^2 \sin\frac{n\pi}{T}x \; dx$$

$$= \frac{2}{T}(T/n\pi)^3 \left[\frac{2n\pi x}{T}\sin\frac{n\pi x}{T} - \left((n\pi x/T)^2 - 2\right)\cdot \cos(n\pi x/T)\right]\Big|_0^T =$$

$$= \frac{2T^2}{n^3\pi^3}\left[-(n^2\pi^2-2)\cos n\pi - 2\right]$$

$$= -(2T^2/n^3\pi^3)\left[(n^2\pi^2-2)(-1)^n + 2\right]$$

$$= -(2T^2/(n^3\pi^3))\left[(-1)^n n^2\pi^2 + 2(1-(-1)^n)\right]$$

$$= \left((-1)^{n+1}(2T^2/n\pi)\right) - \left((4T^2/n^3\pi^3)(1+(-1)^{n+1})\right)$$

Then

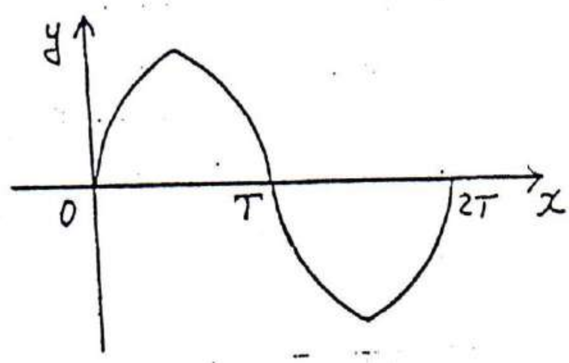
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} (2T^2/(n\pi)) - (4T^2/(n^3\pi^3)) \right.$$
$$\left. (1 + (-1)^{n+1}) \right] \sin (n\pi x/T) =$$
$$= \frac{2T^2}{\pi} \left[\frac{\sin(\pi x/T)}{1} - \frac{\sin(2\pi x/T)}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin(3\pi x/T)}{3} - \frac{\sin(4\pi x/T)}{4} + \ldots \right] -$$
$$- \frac{8\,T^2}{\pi^3} \left[\frac{\sin(\pi x/T)}{1^3} + \frac{\sin(3\pi x/T)}{3^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin(5\pi x/T)}{5^3} + \frac{\sin(7\pi x/T)}{7^3} + \ldots \right]$$

1.7 Harmonic analysis:

This is the determination of the Fourier coefficients a_o, a_1, a_2, ... , b_1, b_2, ... In technology it is frequently used to analyse periodic phenomena. An oscillation is split up by harmonic analysis into a sum of pure sine oscillations (harmonic oscillations) and a constant part.

Apart from the fundamental oscillations there occure the so-called "hermonics" whose frequency is twice, three times etc. the fundamental freque-ncy. Much labour can be saved in harmonic analysis of one observes certain symmetry properties of the function $f(x)$ to be analysed.

i) For the function with the property $f(x+T) = - f(x)$ (odd harmonic) the absolute term is $a_o = 0$ and only coefficients with an odd index occur



i.e. $a_2 = a_4 = \dots = b_2 = b_4 = \dots = 0$.

It is clear that:

$$a_o = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x)\,dx = \frac{1}{T} \left(\int_{-T}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{T} f(x)dx \right)$$

in the first integral, put $x=u-T$ and $dx = du$

20. Using the expansions of the functions x and x^2 in the interval $(0,\pi)$ in cosines series, prove the equality :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

21. Expand the function $f(x) = \sin^4 x$ in a Fourier series.

(Answer: $\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$)

22. For the periodic functions with the property $f(2\pi - x) = f(x)$ prove that :
$b_n = 0$ for all $n = 1,2,\ldots$.

23. For the periodic functions with the property $f(2\pi - x) = -f(x)$ prove that :-
$a_o = a_n = 0$ for all $n = 1,2,3,\ldots$.

24. Expand the function $f(x) = \cos^3 x$ in a Fourier series. (Answer: $\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$)

25. Expand the function $f(x) = \sin 3x$ in a Fourier series $x \in [-\pi, \pi]$, period $= 2\pi$

CHAPTER 2

FOURIER INTEGRALS

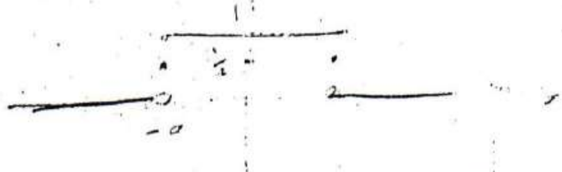
2.1 Theorem 2.1

Let f(x) satisfies the Dirichlet conditions in every finite interval (-T, T) and $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx$ converges (i.e. f(x) is absolutely integrable in $(-\infty, \infty)$, then :

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \Big[A(u) \cos ux + B(u) \sin ux \Big] \, du \quad (1)$$

Where
$$\left.\begin{aligned} A(u) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ux \, dx \\ B(u) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ux \, dx \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

The result (1) holds if x is a point of continuity of f(x). If x is a point of discontinuity, we must replace f(x) by $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ as in the case of Fourier series. Note that the above conditions are sufficient but not necessary. The right hand side of (1) is sometimes called Fourier integral expansions of f(x) .



Example 2.1

Find the Fourier integral of $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ \frac{1}{2} & x = a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$

Solution:

$$f(x) = \int_0^{\infty} \Big[A(u) \cos ux + B(u) \sin ux \Big] \, du ,$$

Where:

$$A(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ux \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \cos ux \, dx =$$

1)

$$= \frac{1}{u\pi} (\sin ux) \Big|_{-a}^{a} = \frac{1}{u\pi} \Big[\sin ua - \sin(-ua) \Big]$$

2)

$$= \frac{2}{u\pi} \sin ua ,$$

$$B(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ux \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \sin ux \, dx = 0$$

Therefore $f(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{u} \sin ua \cos ux \, dx =$

$$= \begin{cases} 1 & |x| < a \\ \frac{1}{2} & |x| = a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

at $x = \pm a$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin ua \cos ua}{u} \, du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin 2ua}{u} \, du$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin 2ua}{u} \, du$$

If $a = 1$

$$\pi = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin 2u}{u} \, du$$

2.2 Equivalent forms of Fourier's integral theorem:

Fourier's integral theorem can also be written in the forms :

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{u=0}^{\infty}\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t-x) \; dt \; du \qquad (3)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \, du \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, e^{iut} \, dt}_{F(u)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, e^{iu(t-x)} \, dt \; du \qquad (4)$$

Where it is understood that if $f(x)$ is not continuous at x the left side must be replaced by

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} .$$

The case of even functions :

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos ux \, du \int_{0}^{\infty} f(t) \cos ut \; dt \qquad \text{if } f(x) \text{ is even.} \qquad (5)$$

The case of odd functions :

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \sin ux \, du \int_{0}^{\infty} f(t) \sin ut \; dt \qquad \text{if } f(x) \text{ is odd} \qquad (6)$$

If we put :

$$\boxed{F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{iut}\, dt} \qquad (7)$$

in (4) , we get :-

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, e^{-iux}\, du} \qquad (8)$$

The function $F(u)$ is called the Fourier transform of $f(x)$ and is sometimes written $F(u) = \mathcal{F}\{f(x)\}$. The function $f(x)$ is the inverse Fourier transform of $F(u)$ and is written $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(u)\}$.

The constants preceding the integral signs in (7) and (8) were here taken as equal to $1/\sqrt{2\pi}$. However, they can be any constants different from zero so long as their product is $1/(2\pi)$. The above is called the symmetric form.

Equation (7) can be written as follows :

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{iut}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\cos ut + i \sin ut\right] dt =$$

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut \; dt \; +$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut \; dt \qquad (9)$$

Equation (8) can be written as follows:-

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \, e^{-iux} \, du \quad =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \, (\cos ux \; - i \sin ux \,) \, du \; =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cos ux \, du - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \sin ux \, du \qquad (10)$$

If $f(x)$ is an even function, then $f(t) \sin ut$ is odd and $f(t) \cos ut$ is even. Then the second integral on the right of (9) is zero and the result can be written

$$F_c(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \cos ut \; dt =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \cos ut \; dt \qquad (11)$$

From (11) it is clear that $F(-u) = F(u)$ so that $F(u)$ is an even function and $F(u) \cos ux$ is even and F(u) sin ux is odd. Then the second integral on the right of (10) is zero and the result can be written

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} F_c(u) \cos ux \; du =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(u) \cos ux \; du \qquad (12)$$

and we call $F_c(u)$ and $f(x)$ Fourier cosine transforms of each other.

A similar result holds for odd functions

$$\left.\begin{aligned} F_s(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \; dt \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(u) \sin ux \; du \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

and we call $F_s(u)$ and $f(x)$ Fourier sine transforms of each other .

<u>Example 2.2</u>

Find the Fourier transform of the function:-

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ \frac{1}{2} & x = a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Solution:

It is clear that f(x) - an even function, then the Fourier transform of f(x) is

$$F_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \; dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{a} \cos ut \; dt =$$

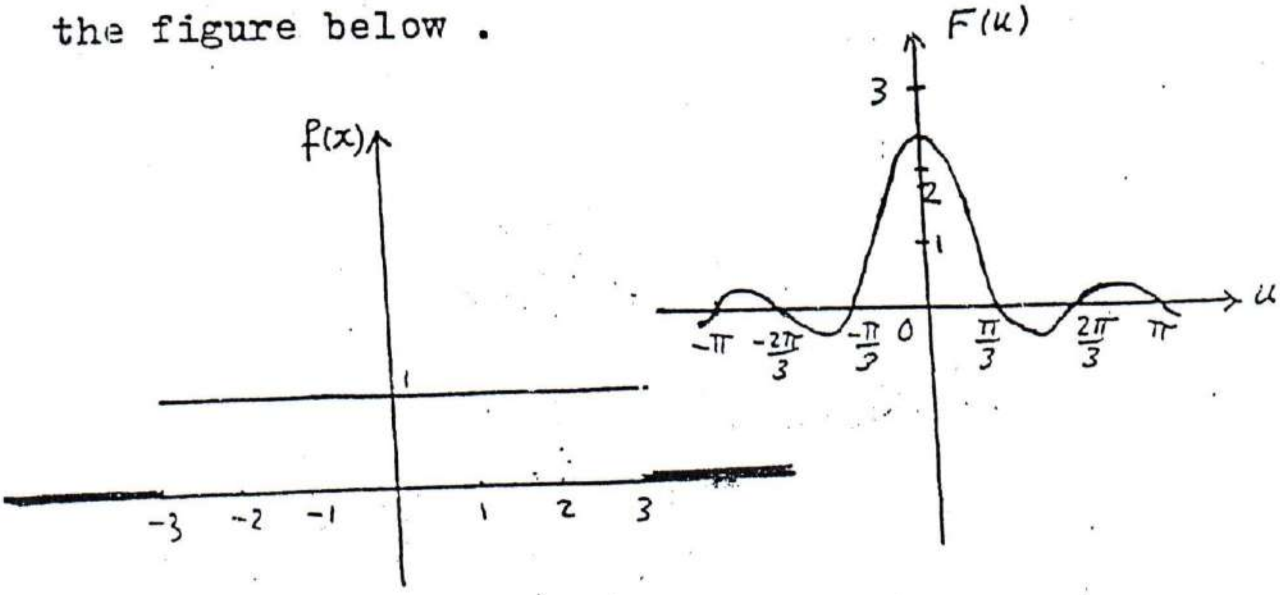
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left[\frac{\sin ut}{u} \right]\Bigg|_0^a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \; \frac{1}{u} (\sin ua) ,$$

$$u \neq 0$$

For u = 0, we obtain $F_c(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \, dt =$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{a} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad a$$

The graphs of f(x) and F(u) for a=3 are shown in the figure below .



Since we have $F_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \frac{\sin ua}{u}$, then

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ua}{u} \cos ux \, du$$

i.e. $$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin ua \cos ux}{u} du = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ \frac{1}{2} & |x| = a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Hence $$2 \int_0^\infty \frac{\sin ua \cos ux}{u} du =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin ua \cos ux}{u} du = \begin{cases} \pi & |x| < a \\ \pi/2 & |x| = a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Putting $x = 0$ and $a = 1$ we get

$$2 \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin u}{u} du = \pi$$

<u>Example 2.3</u>

Solve the integral equation

$$\int_0^\infty f(x) \cos ux \, dx = \begin{cases} 1-u & 0 \leq u \leq 1 \\ 0 & u > 1 \end{cases}$$

and then prove that $\int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du = \frac{\pi}{2}$

Solution:

Let $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos ux \, dx = F_c(u)$ and then

$$F_c(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(1-u) & 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 & u > 1 \end{cases}$$

Then $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F(u) \cos ux \, du =$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(1-u) \cos ux \, du$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-u) \cos ux \, du = \frac{2(1-\cos x)}{\pi x^2}$$

Hence :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{2(1-\cos x)}{\pi x^2} \cdot \cos ux \, dx = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(1-u) & 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 & u > 1 \end{cases}$$

Taking the lim as $u \longrightarrow 0+$, we find

$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$, But this integral can be written as :

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du = \frac{\pi}{2}$$

Example 2.4

Find the Fourier cosine (sine) transform of $f(x) = e^{-ax}$ $(a > 0,\ x \geqslant 0)$, and then prove that

$$\int_0^\infty \frac{\cos ux}{u^2+1}\,du = \frac{\pi}{2}\,e^{-x} \qquad , \quad x \geqslant 0\ ,$$

$$\int_0^\infty \frac{u\sin ux}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{2}\,e^{-x} \qquad , \quad x \geqslant 0\ .$$

Solution:

From (11) we determine the Fourier cosine transform

$$F_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-at}\cos ut\,dt$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{e^{-at}}{a^2+u^2}(-a\cos ut + u\sin ut)\right]_0^\infty =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+u^2}$$

and from (12) we get

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \; \frac{a}{a^2 + u^2} \cos ux \; du$$

i.e. $$\frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos ux}{a^2 + u^2} \, du = e^{-ax} \qquad (i)$$

From (13) we determine the Fourier sine transform:

$$F_s(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin ut \; dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-at} \sin ut \; dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{e^{-at}}{a^2 + u^2} (-a \sin ut - u \cos ut) \right] \Bigg|_0^\infty =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \frac{u}{a^2 + u^2}$$

and therefore $$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \; \frac{u}{a^2 + u^2} \sin ux \; du$$

i.e. $$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{u \sin ux}{a^2 + u^2} \, du = e^{-ax} \qquad (ii)$$

In (i) , (ii) put $a = 1$, we get

$$\int_0^\infty \frac{\cos ux}{1 + u^2} \, du = \frac{\pi}{2} e^{-x} \qquad x \geqslant 0$$

$$\int_0^\infty \frac{u \sin ux}{1 + u^2} \, du = \frac{\pi}{2} e^{-x} \qquad x \geqslant 0$$

(82)

CHAPTER 7

LAPLACE TRANSFORMS

§7.1 : The Laplace Integral:

Let f(t) be a function of t specified for all t, $0 < t < \infty$, and consider

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{T \to \infty} \int_{\epsilon}^{T} e^{-st} f(t)\, dt \,, \qquad (7.1)$$

for some complex s . If the double limit exists, we shall write this as the improper integral

$$\int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \qquad ; \qquad (7.2)$$

and denote it by $L\{f(t)\} = F(s)$.

If the function of t is indicated in terms of a small (lower case) letter, such as f(t) , g(t) , y(t) , etc., the Laplace integral or the Laplace transform of the function is denoted by the corresponding capital letter, i.e. F(s) , G(s) , Y(s) ,etc. In other cases, a tilde (~) can be used to denote the Laplace integral (or the Laplace transform) . Thus, for example, the Laplace transform of f(t) is $\tilde{f}(s)$ or $L\{f(t)\}$ or F(s) . We shall write $f(t) \risingdotseq F(s)$ to denote that $L\{f(t)\} = F(s)$.

Definition: Exponential order

A function f(t) is said to be of exponential order for $t > T$ if we can find constants M and α such that $|f(t)| \leqslant M e^{\alpha t}$ for $t > T$.

Theorem 7.1

If f(t) is piecewise continuous in every finite interval $0 \leqslant t \leqslant T$ and is of exponential order for $t > T$, then the double limit (7.1) exists .

It must be emphasized that the stated conditions are sufficient to gurantee the existence of the Laplace transform. If the conditions are not satisfied, however, the Laplace transform may or may not exist. Thus the conditions are not necessary for the existence of the Laplace transform.

§7.2 Some important properties of Laplace transforms:

In the following list of theorems we assume that all functions $f(t)$ possesses a Laplace transform i.e. the double limit (7.1) exists .

1. Linearity property:

Theorem 7.2

If $L\{f(t)\} = F(s)$ and $L\{g(t)\} = G(s)$, then for any constants a and b

$$L\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s) \quad . \qquad (7.3)$$

Proof:

$$L\{af(t)+bg(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left[af(t)+bg(t)\right] dt =$$

$$= a\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + b\int_0^\infty e^{-st} g(t)dt = aF(s) + bG(s). \blacksquare$$

The result is easily extended to more than two functions. This implies that the taking of a Laplace transform is a linear operation.

2. Translation property or Shifting property:

Theorem 7.3 First translation theorem

If $L\{f(t)\} = F(s)$, then $L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$.

Proof:

$$L\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)dt$$

$$= F(s-a) \ . \ \blacksquare$$

Theorem 7.4 Second translation theorem

If $L\{f(t)\} = F(s)$, and $g(t) = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$

$$L\{g(t)\} = e^{-as} F(s) \quad .$$

Proof:

$$L\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt = \int_0^a e^{-st} g(t)dt + \int_a^\infty e^{-st} g(t)dt =$$

$$= \int_0^a e^{-st}(0)dt + \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt = \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u)du = e^{-sa}\int_0^\infty e^{-su}f(u)du = e^{-as}\,F(s)\ .\ \blacksquare$$

Theorem 7.5 Change of scale property

If $L\{f(t)\} = F(s)$ then $L\{f(at)\} = \frac{1}{a}\ F(s/a).$

Proof: →
$L\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(at)dt = \int_0^\infty e^{-s(u/a)}f(u)\ d(u/a) =$

$$=(1/a)\int_0^\infty e^{-su/a}\ f(u)\ du = \frac{1}{a}\ F(s/a)\ .\ \blacksquare$$

Theorem 7.6 Laplace transform of derivatives ——

If $f(t)$ is continuous for $0 \leq t \leq N$ and of exponential order for $t > N$ while $f'(t)$ is piecewise continuous for $0 \leq t \leq N$ and $L\{f(t)\} = F(s)$, then

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)\ .$$

Proof:

Using integration by parts , we have:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}f'(t)\ dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left\{e^{-st}f(t)\Big|_0^T + s\int_0^T e^{-st}f(t)\ dt\right\} =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left\{e^{-sT}f(T) - f(0) + s\int_0^T e^{-st}f(t)\ dt\right\} =$$

$$= s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt - f(0) + \lim_{T\to\infty} e^{-sT}f(T) = sF(s)-f(0).$$

Using the fact that $f(t)$ is of exponential order γ as $t \to \infty$, so that $\lim_{T\to\infty} e^{-sT}\ f(T) = 0$ for $s > \gamma$. $\blacksquare$

Theorem 7.7

If in Theorem 7.6, $f(t)$ fails to be continuous at $t=0$, but $\lim_{t\to 0} f(t) = f(0+)$ exists (but is not equal to $f(0)$, which may or may not exist) , then

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0+)\ .$$

Theorem7.8

If in Theorem 7.6, $f(t)$ fails to continuous at $t=a$, then : $L\left\{f'(t)\right\} = s\,F(s) - f(o) -$
$- e^{-as}\left[f(a+) - f(a-)\right]$,
where $\left[f(a+) - f(a-)\right]$ is called the jump at the discontinuity $t = a$.

Theorem 7.9

If $f(t)$ and $f'(t)$ are continuous for $o \leqslant t \leqslant N$ and of exponential order for $t > N$ while $f''(t)$ is piecewise continuous for $o \leqslant t \leqslant N$, and $L\{f(t)\} = F(s)$, then $L\{f''(t)\} = s^2\,F(s) - s\,f(o) - f'(o)$.

Proof :

By Theorem 7.6 : $L\{g'(t)\} = s\,G(s) - g(o)$,
Let $g(t) = f'(t)$. Then

$$
\begin{aligned}
L\{f''(t)\} &= s\,G(s) - g(o) = s\,L\{g(t)\} - f'(o) = \\
&= s\,L\{f'(t)\} - f'(o) = s\{sF(s) - f(o)\} - f'(o) = \\
&= s^2\,F(s) - s\,f(o) - f'(o) .
\end{aligned}
$$

The generalization to higher order derivatives can be proved by using Mathematical induction .
If $f(t)$ and $f'(t)$ have discontinuities, appropriate modification can be made as in Theorems 7.7 and 7.8.

Theorem 7.10

If $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ are continuous for $o \leqslant t \leqslant N$ and of exponential order for $t > N$ while $f^{(n)}(t)$ is piecewise continuous for $o \leqslant t \leqslant N$, and $L\{f(t)\} = F(s)$, then

$$
\begin{aligned}
L\{f^{(n)}(t)\} = s^n\,F(s) - s^{n-1}f(o) - s^{n-2}f'(o) - \ldots - \\
- \ldots - sf^{(n-2)}(o) - f^{(n-1)}(o) .
\end{aligned}
$$

Theorem 7.11 Multiplication by powers of t :

If $L\{f(t)\} = F(s)$, then

$$L\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n F^{(n)}(s) ,$$

where $n = 1,2,3,\ldots$.

Proof:

We have $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$

Then by Leibnitz's rule for differentiating under the integral sign ,

$$\frac{dF}{ds} = F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} f(t)\, dt =$$

$$= -\int_0^\infty e^{-st}\{t\, f(t)\}\, dt = -L\{tf(t)\} .$$

Thus $L\{tf(t)\} = -\frac{dF}{ds} = -F'(s)$, which proves the theorem for n=1 .We shall using Mathematical induction. Assume the theorem true for n=k, i.e. assume

$$\int_0^\infty e^{-st}\left[t^k f(t)\right] dt = (-1)^k F^{(k)}(s) \qquad (1)$$

Then $\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}\left[t^k f(t)\right] dt = -\int_0^\infty e^{-st}\left[t^{k+1} f(t)\right] dt$

i.e. $\int_0^\infty e^{-st}\left[t^{k+1} f(t)\right] dt = (-1)^{k+1} F^{(k+1)}(s) \qquad (2)$

It follows that if (1) is true, i.e. if the theorem holds for n = k ,then (2) is true, i.e. the theorem holds for n=k+1. But the theorem is true for n=1 . Hence it is true for n=2 and n=3, etc., and thus for all positive integer value of n . ∎

Theorem 7.12 Laplace transform of integrals

If $L\{f(t)\} = F(s)$, then $L\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$.

Proof:

Let $g(t) = \int_0^t f(u)\, du$. Then $g'(t) = f(t)$ and $g(o)=o$. Taking the Laplace transform of both sides, we have

$$L\{f(t)\} = L\{g'(t)\} = s\,L\{g(t)\} - g(o) = s\,L\{g(t)\} .$$

Thus $L\{g(t)\} = \frac{1}{s}\, L\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s}$

or $L\left\{\int_0^t f(u)\, du\right\} = F(s) / s$. ∎

Theorem 7.13 Division by t :

If $\lim_{t\to 0} f(t) / t$ exists and $L\{f(t)\} = F(s)$, then $L\left\{f(t)/t\right\} = \int_s^\infty F(u)\,du$.

Proof:

Let $g(t) = f(t)/t$ or $f(t) = t\,g(t)$,

$$F(s) = L\{f(t)\} = L\{tg(t)\} = -\frac{d}{ds}L\{g(t)\} = -\frac{d}{ds}G(s) \;.$$

Thus $G(s) = -\int_c^s F(u)\,du = \int_s^c F(u)\,du$.

Now since $g(t)$ satisfies the conditions of Theorem 7.1, it follows that $\lim_{s\to\infty} G(s) = 0$. Then c must be infinite and so $G(s) = L\left\{f(t)/t\right\} = \int_s^\infty F(u)\,du$.

Theorem 7.14 Convolution theorem:

If $L\{f(t)\} = F(s)$, $L\{g(t)\} = G(s)$,

then $L\left\{\int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du\right\} = F(s)\,G(s)$.

We call the above integral the convolution of f and g ; and write

$$f*g = \int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du \;.$$

§7.3 Laplace Transforms of elementary functions.

Example 7.1:

Prove that (a) $L\{1\} = 1/s$, $s > 0$
(b) $L\{t\} = 1/s^2$, $s > 0$ (c) $L\{e^{at}\} = 1/(s-a)$, $s > a$

Solution :

(a) $L\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}\,dt =$

$= \lim_{T\to\infty} e^{-st}/(-s)\Big|_0^T = \lim_{T\to\infty}(1-e^{-sT})/s =$

$L\{1\} = 1/s$ if $s > 0$.

(b) $L\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}(t)\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T t\,e^{-st}\,dt =$

$= \lim_{T\to\infty}\left[t(e^{-st}/-s) - (1)(e^{-st}/s^2)\right]\Big|_0^T =$

$$= \lim_{T\to\infty} \left[\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-sT}}{s^2} - \frac{T\,e^{-sT}}{s} \right] = \frac{1}{s^2} \text{ if } s > o .$$

(c) $L\{e^{at}\} = \int_o^\infty e^{-st}\, e^{at}\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_o^T e^{-(s-a)t} dt =$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \Big|_o^T = \lim_{T\to\infty} \frac{1-e^{-(s-a)T}}{s-a} = \frac{1}{s-a} ,$$

if $s > a$

Another method:

It is clear that $L\{f'(t)\} = s\,L\{f(t)\} - f(o)$

(see theorem 7.6)

(a) Let $f(t) = 1$, then $f'(t) = o$, $f(o) = 1$ then

$L\{o\} = o = s\,L\{1\} - 1$ or $L\{1\} = 1/s$

(b) Let $f(t) = t$, then $f'(t) = 1$, $f(o) = o$, using part (a) we get $L\{1\} = 1/s = s\,L\{t\} - o$

or $L\{t\} = 1/s^2$

By using mathematical induction we can similarly show that $L\{t^n\} = n!/s^{(n+1)}$ for any positive integer n .

(c) Let $f(t) = e^{at}$. Then $f'(t) = a\,e^{at}$, $f(o) = 1$,

then $L\{a\,e^{at}\} = s\,L\{e^{at}\} - 1$

i.e. $a\,L\{e^{at}\} = s\,L\{e^{at}\} - 1$ or $L\{e^{at}\} = 1/(s-a)$.

Example 7.2

Prove that: (a) $L\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$,

(b) $L\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2 + a^2}$ if $s > o$.

Solution:

(a) $L\{\sin at\} = \int_o^\infty e^{-st} \sin at\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_o^T e^{-st} \sin at\, dt =$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{e^{-st}(-s \sin at - a \cos at)}{s^2 + a^2} \Big|_o^T =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left\{ \frac{a}{s^2+a^2} - \frac{e^{-sT}(s \sin aT + a \cos at)}{s^2 + a^2} \right\} =$$

$$= \frac{a}{s^2 + a^2} \qquad \text{if} \quad s > o .$$

Another methods:

i) From Theorem 7.9 we have

$$L\left\{f''(t)\right\} = s^2 L\{f(t)\} - s\, f(o) - f'(o) .$$

(a) Let $f(t) = \sin at$, $f''(t) = -a^2 \sin at$, $f(o) = o$, $f'(o) = a$, then $L\left\{-a^2 \sin at\right\} = s^2 L\{\sin at\} - a$,

i.e. $(s^2+a^2)\, L\{\sin at\} = a$ or $L\left\{\sin at\right\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$.

(b) Let $f(t) = \cos at$, $f''(t) = -a^2 \cos at$, $f(o) = 1$, $f'(o) = o$, then $L\left\{-a^2 \cos at\right\} = s^2 L\{\cos at\} - s$.

i.e. $(s^2+a^2)L\{\cos at\} = s$ or $L\left\{\cos at\right\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$.

ii) From Example 7.1 part (c) we have

$$L\left\{e^{iat}\right\} = 1/(s-ia) = (s+ia)/(s^2+a^2) \qquad . (*)$$

But $e^{iat} = \cos at + i \sin at$. Hence

$$L\left\{e^{iat}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}(\cos at + i \sin at)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \cos at\, dt + i \int_0^\infty e^{-st} \sin at\, dt =$$

$$= L\left\{\cos at\right\} + i\, L\left\{\sin at\right\} = \frac{s + i a}{s^2 + a^2}$$

On equating real and imaginary parts, we get :

$$L\left\{\cos at\right\} = \frac{s}{s^2 + a^2} , \quad L\left\{\sin at\right\} = \frac{a}{s^2 + a^2} .$$

Example 7.3 :

Using the linearty property to prove that :

(a) $L\left\{\sinh at\right\} = \dfrac{a}{s^2 - a^2}$ (b) $L\left\{\cosh at\right\} = \dfrac{s}{s^2 - a^2}$

if $s > |a|$.

Solution:

a) $L\left\{\sinh at\right\} = L\left\{\tfrac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})\right\} = \tfrac{1}{2}L\left\{e^{at}\right\} - \tfrac{1}{2}L\left\{e^{-at}\right\} =$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right] = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad \text{for } s > |a| .$$

b) $L\{\cosh at\} = L\{\tfrac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})\} = \tfrac{1}{2}L\{e^{at}\} + \tfrac{1}{2}L\{e^{-at}\} =$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right] = \frac{s}{s^2-a^2} \quad \text{for } s > |a| .$$

تحفظ

Short Table Of Special Laplace Transforms

هذه القيم تحفظ

Nº	$f(t)$	$L\{f(t)\} = F(s)$	conditions
1	1	$1/s$	$s > 0$
2	t	$1/s^2$	$s > 0$
3	t^n	$n!/s^{n+1}$	$\begin{cases} s > 0 \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$
4	e^{at}	$1/(s-a)$	$s > a$
5	$\sin at$	$a/(s^2+a^2)$	$s > 0$
6	$\cos at$	$s/(s^2+a^2)$	$s > 0$
7	$\sinh at$	$a/(s^2-a^2)$	$s > \|a\|$
8	$\cosh at$	$s/(s^2-a^2)$	$s > \|a\|$
9	t^p	$\Gamma(p+1)/s^{(p+1)}$	$s > 0$, $p > -1$

Example 7.4:

Prove that: $L\{t^p\} = \dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{(p+1)}}$ if $s > 0$ and $p > -1$.

Solution:

$L\{t^p\} = \int_0^\infty e^{-st}\, t^p\, dt$, Let $st = u$ and note that in order for the integral to converge we must have $s > 0$. Then

$$L\{t^p\} = \frac{1}{s^{p+1}} \int_0^\infty u^p e^{-u}\, du = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{(p+1)}}$$

the restriction $p > -1$ occurs because the integral defining the gamma function converges if and only if $p > -1$.

Example 7.5

Find the Laplace transforms of each of the following:

a) $4e^{-3t}$, b) $3t^2$, c) $5\cos 4t$, d) $\sin \pi t$, e) $-5/\sqrt{t}$.

Solution:

a) $L\{4e^{-3t}\} = 4L\{e^{-3t}\} = \frac{4}{s-(-3)} = \frac{4}{s+3}$, $s>-3$.

b) $L\{3t^2\} = 3L\{t^2\} = 3\frac{2!}{s^3} = \frac{6}{s^3}$, $s>0$.

c) $L\{5\cos 4t\} = 5L\{\cos 4t\} = 5\frac{s}{s^2+4^2} = \frac{5s}{s^2+16}$,

d) $L\{\sin \pi t\} = \pi/(s^2+\pi^2)$, $s>0$.

e) $L\left\{\frac{-5}{\sqrt{t}}\right\} = -5L\{t^{-1/2}\} = -5\frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = -5\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$, $s>0$.

Example 7.6:

Find the Laplace transforms of each of the following:

a) $e^{-t}\cos 2t$ b) $4t^2-3\cos 2t+5e^{-t}$ c) $t^2 e^{3t}$

d) $e^{4t}\cosh 5t$ e) $e^{-2t}(3\cos 6t-5\sin 6t)$ f) $t\sin at$

g) $t^2\cos at$.

Solution:

a) Using theorem 7.3 we get

$$L\{e^{-t}\cos 2t\} = F(s+1) = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{s^2+2s+5} ,$$

b) $L\{4t^2-3\cos 2t+5e^{-t}\} = 4L\{t^2\}-3L\{\cos 2t\}+5L\{e^{-t}\} =$

$$= 4\left(\frac{2!}{s^3}\right)-3\left(\frac{s}{s^2+4}\right)+5\left(\frac{1}{s+1}\right) = \frac{8}{s^3}-\frac{3s}{s^2+4}+\frac{5}{s+1} ,$$

c) $L\{t^2 e^{3t}\} = F(s-3) = 2/(s-3)^3$, $\mathcal{L}\{t e^{3t}\} = (-1)\frac{d}{ds}\frac{1}{s-3}$

where $F(s) = 2!/s^3 = L\{t^2\}$, $= \frac{1}{(s-3)^2}$

d) $L\{\cosh 5t\} = s/(s^2-25)$. Then

$$L\{e^{4t}\cosh 5t\} = \frac{s-4}{(s-4)^2-25} = \frac{\quad}{s^2}$$

$\mathcal{L}\{t^2 e^{3t}\} = (-1)\frac{d}{ds}\frac{1}{(s-3)^2} = \frac{2}{(s-3)^3}$

e) $L\{3\cos 6t-5\sin 6t\} = 3L\{\cos 6t\} -5L\{\sin 6t\} =$

$$= 3\left[\frac{s}{s^2+36}\right] -5\left[\frac{6}{s^2+36}\right] = \frac{3s-30}{s^2+36},$$

Then

$$L\{e^{-2t}(3\cos 6t-5\sin 6t)\} = F(s+2) = \frac{3(s+2)-30}{(s+2)^2+36}$$

$$= \frac{3s-24}{s^2+4s+40},$$

$L\{t^2 \sin at\} = (-1)\frac{d}{ds}\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$

f) Since $L\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$, we have $L\{t\cos at\} = \dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$

$$L\{t \sin at\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2},$$

g) Since $L\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$, we have

$$L\{t^2 \cos at\} = \frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \frac{2s^3-6a^2s}{(s^2+a^2)^3}, \text{ since}$$

$$\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right]'' = \left[\frac{a^2-s^2}{(s^2+a^2)^2}\right]' = \frac{2s(s^2-3a^2)}{(s^2+a^2)^3}$$

Example 7.7

a) Prove that $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty F(s)\,ds$

provided that the integrals converge.

b) Show that $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \tfrac{1}{2}\pi$.

Solution:

a) From Theorem 7.13, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}\,\frac{f(t)}{t}\,dt = \int_s^\infty F(u)\,du$.

Then taking the limit as $s \to 0+$, assuming the integrals converge, the required result is obtained

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty F(u)\,du.$$

b) Let $f(t) = \sin t$. Then $F(s) = 1/(s^2+1)$.

Hence $$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{ds}{s^2+1} = \tan^{-1} s\Big|_0^\infty = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Example 7.8

Find $L\{f(t)\}$ if

$$a)\ f(t) = \begin{cases} 3 & 0 < t < 5 \\ 0 & t \geqslant 5 \end{cases} \quad ,b)\ f(t) = \begin{cases} \cos(t-\frac{\pi}{3}) & t > \frac{\pi}{3} \\ 0 & t \leqslant \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Solution:

a) By definition , $L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt =$

$$= \int_0^5 e^{-st}(3)dt + \int_5^\infty e^{-st}(0)dt = 3\int_0^5 e^{-st}\, dt =$$

$$= 3\,\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^5 = \frac{3(1-e^{-5s})}{s} \quad ,$$

b) $L\{f(t)\} = \int_0^{\pi/3} e^{-st}\cancel{(0)}dt + \int_{\pi/3}^\infty e^{-st} \cos(t-\frac{\pi}{3})dt =$

$$= \int_0^\infty e^{-s(u+\frac{\pi}{3})} \cos u\, du = e^{-\pi s/3} \int_0^\infty e^{-su} \cos u\, du =$$

$$= s\ e^{-\pi s/3} / (s^2+1) \ .$$

Theorem 7.15 Periodic functions

Let $f(t)$ have period $T > 0$ then $L\{f(t)\} = \dfrac{\int_0^T e^{-st} f(t)dt}{1-e^{-sT}}$.

Proof:

$f(t)$ periodic function with period T, then

$f(u) = f(u+T) = f(u+2T) = \dots = f(u+nT)$ .We have

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t)dt + $$

$$+ \int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t)\, dt + \dots$$

In the second integral let $t = u+T$, in the third integral let $t = u+2T$, etc. Then

$$L\{f(t)\} = \int_0^T e^{-su} f(u)du + \int_0^T e^{-s(u+T)} f(u+T)\, du +$$

$$+ \int_0^T e^{-s(u+2T)} f(u+2T)\, du + \dots =$$

$$= \int_0^T e^{-su} f(u)du + e^{-sT} \int_0^T e^{-su} f(u)du +$$

$$+ e^{-2sT} \int_0^T e^{-su} f(u)\, du + \ldots =$$

$$= (1+e^{-sT}+e^{-2T}+\ldots) \int_0^T e^{-su} f(u) du =$$

$$= \frac{\int_0^T e^{-su} f(u)\, du}{1 - e^{-sT}} . \blacksquare$$

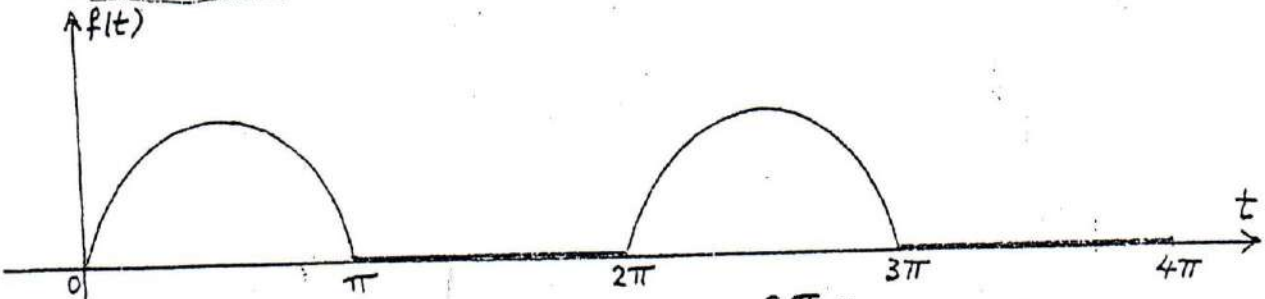
Example 7.9

Find the Laplace transform of the function of period 2π which in the interval $0 \leqslant t < 2\pi$ is given by

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \leqslant t < \pi \\ 0 & \pi \leqslant t < 2\pi \end{cases}$$

Solution:

The graph of this function, often called a rectified sine wave or a half wave rectified sine curve.



Since $T = 2\pi$, let $R = 1 - e^{-2\pi s}$, we have :

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} e^{-su} f(u)\, du = \frac{1}{R} \int_0^{\pi} e^{-st} \sin t\, dt =$$

$$= \frac{1}{R} \left\{ \frac{e^{-st}(-s\sin t - \cos t)}{s^2+1} \right\} \Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{R} \left[\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1} \right] =$$

$$= 1/(1-e^{-\pi s})(s^2+1) .$$

Theorem 7.16 Behavior of $F(s)$ as $s \longrightarrow \infty$:

If $L\{f(t)\} = F(s)$, then $\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$.

Theorem 7.17 Initial-value and Final-value theorem:

If the indicated limits exists , then

a) $\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s\, F(s)$, b) $\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$.

Example 7.10

Illustrate Theorems 7.16 and 7.17 for the function $f(t) = 2\, e^{-3t}$.

Solution:

We have $f(t) = 2\, e^{-3t}$, $F(s) = L\{2e^{-3t}\} = 2/(s+3)$.

It is clear that:

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = \lim_{s\to\infty} 2/(s+3) = 0 \quad , \qquad (1)$$

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty} 2s/(s+3) = 2 \quad , \qquad (2)$$

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} 2s/(s+3) = 0 \quad , \qquad (3)$$

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0} 2\, e^{-3t} = 2 \quad , \qquad (4)$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} 2\, e^{-3t} = 0 \quad , \qquad (5)$$

i.e. $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$, $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{s\to\infty} s\, F(s)$,

$\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} s\, F(s)$

§7.4 Some Special Functions:

I. Bessel Functions:

We define a Bessel function of order n by

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 - \frac{t^2}{2(2n+2)} + \frac{t^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - \cdots \right\}$$

Some important properties are

1. $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$ if n is a positive integer.
2. $J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t) - J_{n-1}(t)$
3. $\frac{d}{dt}\left\{t^n J_n(t)\right\} = t^n J_{n-1}(t)$, $J_0'(t) = -J_1(t)$.
4. $\exp.(\frac{1}{2}t(u-1)/u) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)\, u^n$

This is called the generating function for the Bessel functions .

5. $J_n(t)$ satisfies Bessel's differential equation:

$$t^2\, y''(t) + t\, y'(t) + (t^2-n^2)\, y(t) = 0$$

It is convenient to define $J_n(it) = i^{-n}\, I_n(t)$, where $I_n(t)$ is called the modified Bessel function of order n .

Example 7.11:

a) Find $L\{J_o(t)\}$ and then use it to find $L\{J_o(at)\}$. b) Find $L\{J_1(t)\}$.

Solution:

It is clear that $J_o(t) = 1 - \dfrac{t^2}{2^2} + \dfrac{t^4}{2^2.4^2} - \dfrac{t^5}{2^2 4^2 6^2} + \cdots$

Then $L\{J_o(t)\} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{2^2}\dfrac{2!}{s^3} + \dfrac{1}{2^2 4^2}\dfrac{4!}{s^5} - \dfrac{1}{2^2 4^2 6^2}\dfrac{6!}{s^7} + \cdots =$

$$= \frac{1}{s}\left\{1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{s^4}\right) - \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{1}{s^5}\right) + \ldots\right\} =$$

$$= (1/s)\left[1 + \frac{1}{s^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = 1/(s^2+1)^{\frac{1}{2}} .$$

Using the binomial theorem.

To find $L\{J_o(at)\}$ we use Theorem 7.5

i.e. $L\{f(at)\} = \dfrac{1}{a}\, F(s/a)$.

$$L\{J_o(at)\} = 1 \Big/ a\sqrt{(s/a)^2 + 1} = 1 \Big/ \sqrt{s^2+a^2} .$$

b) Since $J_o'(t) = -J_1(t)$, $L\{f'(t)\} = sF(s) - f(o)$, then

$$L\{J_1(t)\} = -L\{J_o'(t)\} = -\left[sL\{J_o(t)\} - 1\right] =$$

$$= 1 - \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \left(\sqrt{s^2+1} - s\right) \Big/ \sqrt{s^2+1} .$$

Another method: using differential equations.

a) The function $J_o(t)$ satisfies the D.E.

$$t\, J_o''(t) + J_o'(t) + t\, J_o(t) = 0 ,$$

Taking the Laplace transform of both sides and using $J_o(o) = 1$, $J_o'(o) = o$, $y = L\{J_o(t)\}$, we have

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2y - s(1) - 0\right] + \left[sy - 1\right] - \frac{dy}{ds} = 0$$

om which $\frac{dy}{ds} = -\frac{s\,y}{s^2+1}$. Thus $\frac{dy}{y} = -\frac{s\,ds}{s^2+1}$

d by integration $y = c/\sqrt{s^2+1}$.

ow $\lim_{s\to\infty} sy(s) = \lim_{s\to\infty} c\,s/\sqrt{s^2+1} = c$ and

$\lim_{t\to 0} J_0(t) = 1$. Thus by the initial-value theorem

.17(a) we have $c = 1$ and so $L\{J_0(t)\} = 1/\sqrt{s^2+1}$.

I The Unit Step Function

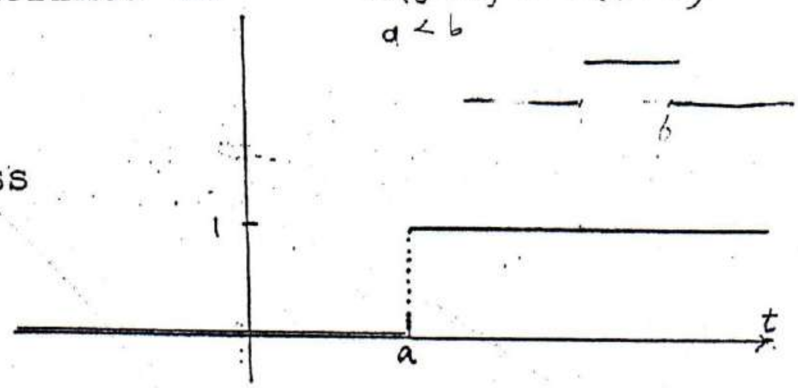
The unit step function, also called Heaviside's unit step function, is defined as

$u(t-a) - u(t-b)$

$a < b$

$$U(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

It is possible to express various discontinuous functions in terms of the unit step function.



It is clear that :

$$L\{U(t-a)\} = \int_0^\infty U(t-a)\, e^{-st}\, dt = \int_0^a e^{-st}(0)dt + \int_a^\infty e^{-st}(1)dt = 0 + \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_a^\infty = e^{-as}/s$$

if $s > 0$.

Example 7.12:

Express the function $f(t) = \begin{cases} 4 & t < 3 \\ 2 & t > 3 \end{cases}$ in terms of the unit step function and thus obtain $L\{f(t)\}$.

$f(t) = 4[u(t) - u(t-\ldots$
$+ 2u(t-3)$

Solution:

We have $f(t) = 4 + \begin{cases} 0 & t < 3 \\ -2 & t > 3 \end{cases} = 4 - 2\begin{cases} 0 & t < 3 \\ 1 & t > 3 \end{cases}$ $= 4u(t) - 2u(t\ldots$ $=$

$= 4 - 2\,U(t-3)$.

$$L\{f(t)\} = L\{4 - 2U(t-3)\} = L\{4\} - 2L\{U(t-3)\} =$$

$$= 4/s - 2e^{-3s}/s = (4 - 2e^{-3s})/s .$$

It is clear that, the second translation theorem 7.4 can be written as follows:

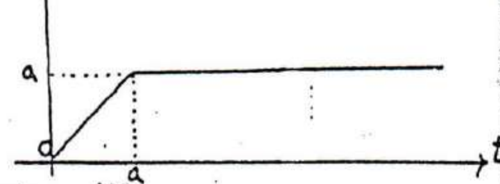
Theorem 7.4'

If $L\{f(t)\} = F(s)$ and $g(t) = f(t-a)\,U(t-a)$, then
$$L\{g(t)\} = L\{f(t-a)U(t-a)\} = e^{-as}\,F(s) .$$

Example 7.13

Find $L\{f(t)\}$ where $f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t & 0<t<a \\ a & t>a \end{cases}$, $a>0$.

Solution:



$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt =$$
$$= \int_0^a t\,e^{-st}dt + \int_a^\infty a e^{-st}dt =$$
$$= \left[-te^{-st}/s - e^{-st}/s^2\right]\Big|_0^a \quad -ae^{-st}/s\,\Big|_a^\infty =$$
$$= -ae^{-as}/s - e^{-as}/s^2 + 1/s^2 + ae^{-as}/s = \frac{1-e^{-as}}{s^2} .$$

Using the unit function, we can express $f(t)$ as follows :
$$f(t) = t\,\{U(t) - U(t-a)\} + aU(t-a) = tU(t) - (t-a)U(t-a) .$$

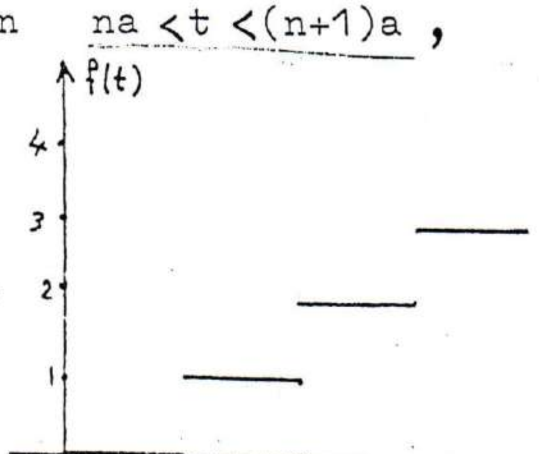
Hence $L\{f(t)\} = 1/s^2 - e^{-as}/s^2$.

Example 7.14

Find $L\{f(t)\}$ where $f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ n & na<t<(n+1)a \end{cases}$,

$n = 0,1,2,3,\ldots$

Solution:



$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{na}^{(n+1)a} n\,e^{-st}\,dt =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,e^{-st}}{-s}\Big|_{na}^{(n+1)a} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{s}\left[e^{-nas} - e^{-(n+1)as}\right] = \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nas} =$$

$$= \frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})} = \frac{1}{s(e^{as}-1)} .$$

e can express f(t) as follows:

$$(t) = [U(t-a)-U(t-2a)] + 2[U(t-2a)-U(t-3a)] + \dots + n[U(t-na)-U(t-(n+1)a)] + \dots =$$

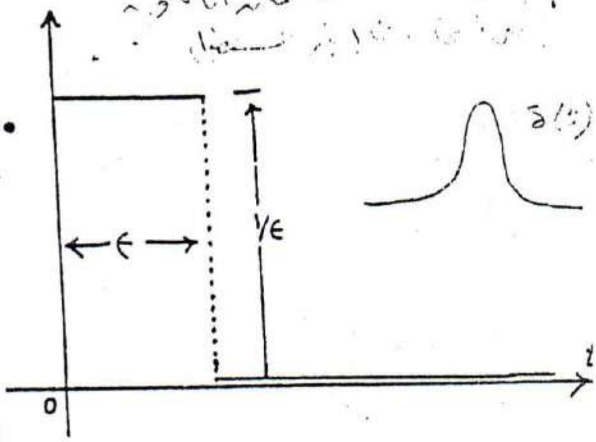
$$= U(t-a)+U(t-2a)+U(t-3a)+\dots+U(t-na)+\dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} U(t-na) \quad , \#\#$$

and $$L\{f(t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} L\{U(t-na)\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nas}}{s} =$$

$$= \frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})} = \frac{1}{s(e^{as}-1)} .$$

III <u>The Unit Impulse Function:</u>



The unit impulse function, also called Dirac delta function. Consider the function

$$F_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon & 0 \le t \le \epsilon \\ 0 & t > \epsilon, \end{cases}$$

where $\epsilon > 0$. It is geometrically evident that as $\epsilon \to 0$ the height of the rectangular region increases indefinitely and the width decreases in such a way that the area is always equal to 1, i.e. $\int_0^\infty F_\epsilon(t)\,dt = 1$.

This idea has led some engineers and physicists to think of a limiting functiondenoted by $\delta(t)$, approached by $F_\epsilon(t)$ as $\epsilon \to 0$. This limiting function they have called the impulse function of Dirac delta function. Some of its properties are

1. $\int_0^\infty \delta(t)\,dt = 1$, 2. $\int_0^\infty \delta(t)\,g(t)\,dt = g(0)$

3. $\int_0^\infty \delta(t-a)\,g(t)\,dt = g(a)$ for any continuous function $g(t)$.

t is clear that ,

$$L\{F_\epsilon(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F_\epsilon(t)\,dt = \int_0^\epsilon e^{-st}(\tfrac{1}{\epsilon})dt + \int_\epsilon^\infty \cancel{e^{-st}}(0)dt =$$

$$= \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon e^{-st}dt = \frac{1 - e^{-s\epsilon}}{\epsilon s}$$

nd $\lim_{\epsilon\to 0} L\{F_\epsilon(t)\} = \lim_{\epsilon\to 0}\dfrac{1-(1-s\epsilon+s^2\epsilon^2/2! - \dots)}{\epsilon s} =$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(1 - \frac{s\epsilon}{2!} + \dots\right) = 1 .$$

Although mathematically speaking such a limit: $\lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon(t)$ does not exist, so that $L\{\lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon(t)\}$ is not defined, manipulations or operations using it can be made rigorous. It proves useful to consider $\delta(t) = \lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon(t)$ to be such that $L\{\delta(t)\} = 1$.

Example 7.15

Show that $L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$.

Solution:

Let $g(t) = e^{-st}$ and from $\int_0^\infty \delta(t-a)\, g(t)\, dt = g(a)$ we get

$$L\{\delta(t-a)\} = \int_0^\infty \delta(t-a)\, e^{-st}\, dt = e^{-as} .$$

IV Null Functions:

If $N(t)$ is a function of t such that for all $t > 0$

$$\int_0^t N(u)\,du = 0 \qquad N(t)\,dt = 0$$

We call $N(t)$ a null function.

The function $f(t) = \begin{cases} 1 & t=1/4 \\ -1 & t=2 \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$ is a null function.

In general, any function which is zero at all but a countable set of points is a null function.

Example 7.16

Indicate which of the following are null functions:

a) $f(t) = \begin{cases} 2 & t = 3 \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$ b) $f(t) = \begin{cases} 1/2 & t=0 \\ 1 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$

) $f(t) = \delta(t)$.

lution:

) Since $\int_0^t f(u)\, du = 0$ for all $t > 0$,

$f(t)$ is a null function .

) $\int_0^t f(u)\, du = 0$ if $t < 1$,

$\int^t f(u)\, du = \int_1^t (1)\, du = t - 1$ if $1 \leq t \leq 2$,

$f(u)\, du = \int_1^2 (1)\, du = 1$ if $t > 2$.

ince $\int_0^t f(u)\, du \neq 0$ for all $t > 0$, $f(t)$ is not

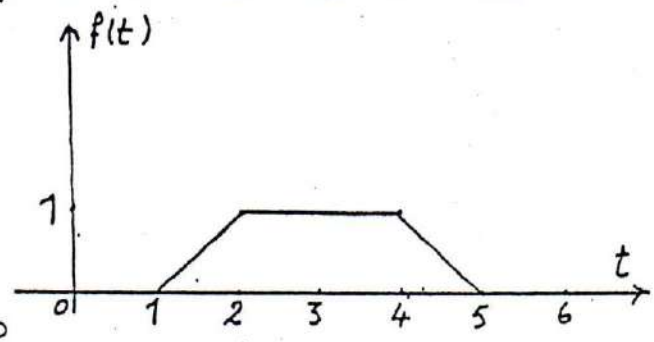
null function .

) $\int_0^t \delta(u)\, du = 1$ for all $t > 0$, $\delta(t)$ is not a null

unction .

xample 7.17

ind $L\{f(t)\}$ where $f(t)$ is given as showen in the igure.



olution:

It is clear that

$$f(t) = \begin{cases} t-1 & 1 \leq t \leq 2 \\ 1 & 2 \leq t \leq 4 \\ 5-t & 4 \leq t \leq 5 \end{cases},$$

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_1^2 (t-1) e^{-st}\, dt +$$

$$+ \int_2^4 e^{-st}\, dt + \int_4^5 (5-t)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= e^{-s}/s^2 - e^{-2s}/s^2 + e^{-5s}/s^2 - e^{-4s}/s^2 .$$

We can express $f(t)$ by using the unit step function $U(t-a)$ as follows :

$$f(t) = (t-1)\left[U(t-1) - U(t-2)\right] + \left[U(t-2) - U(t-4)\right] +$$

$$+ (5-t)\left[U(t-4) - U(t-5)\right] =$$

$= (t-1)U(t-1) - (t-2)U(t-2) - (t-4)U(t-4) + (t-5)U(t-5).$

Then $L\{f(t)\} = e^{-s}/s^2 - e^{-2s}/s^2 + e^{-5s}/s^2 - e^{-4s}/s^2.$

Example 7.18

Find $L\{f(t)\}$ where $f(t)$ is the square wave function

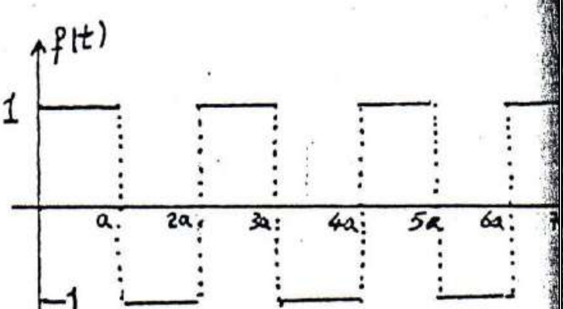
$$f(t) = f(t+2a) = \begin{cases} 1 \ , & 2na < t < (2n+1)a \ , \\ -1 \ , & (2n+1)a < t < (2n+2)a \ , \\ 0 \ , & t < 0 \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Solution:

$$f(t) = [U(t) - U(t-a)] - [U(t-a) - U(t-2a)] + [U(t-2a) - U(t-3a)] - \ldots =$$

$$= U(t) - 2U(t-a) + 2U(t-2a) - 2U(t-3a) + \ldots =$$

$$= U(t) - 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} U(t-na) \ ,$$



$$L\{f(t)\} = L\{U(t)\} - 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} L\{U(t-na)\} =$$

$$= \frac{1}{s} - 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{-nas}}{s} = \frac{1}{s} - \frac{2e^{-as}}{s(1+e^{-as})} =$$

$$= \frac{1-e^{-as}}{s(1+e^{-as})} = \frac{e^{\frac{1}{2}as} - e^{-\frac{1}{2}as}}{s(e^{\frac{1}{2}as} + e^{-\frac{1}{2}as})} = \frac{1}{s}\tanh\left(\tfrac{1}{2}as\right).$$

Example 7.19

Find $L\{f(t)\}$ where $f(t)$ is saw tooth wave function

$$f(t) = f(t+a) = \begin{cases} \frac{t}{a} - n \ , & na < t < (n+1)a \\ 0 \ , & t < 0 \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

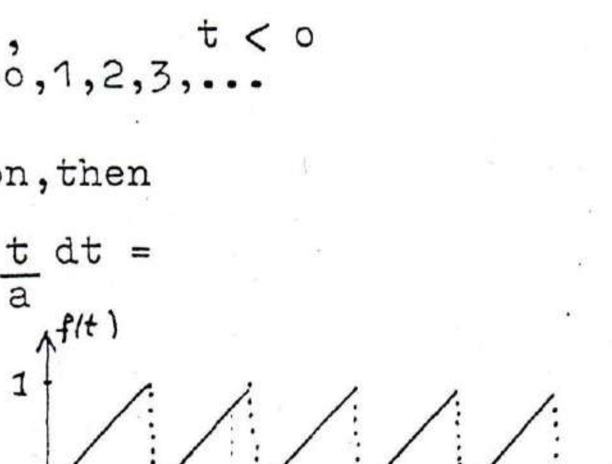
Solution:

$f(t)$ is a periodic function, then

$$\int_0^a e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^a e^{-st}\frac{t}{a}\, dt =$$

$$= \frac{-1}{as}\left[t + \frac{1}{s}\right] e^{-st}\Big|_0^a =$$

$$= \frac{1}{as}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{as}\left(a + \frac{1}{s}\right) e^{-as} =$$



$$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-as}}{as^2} = \frac{1-e^{-as}}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s}$$

$$L\{f(t)\} = \left[\frac{1-e^{-as}}{as^2} \quad \frac{e^{-as}}{s}\right] / \left(1 - e^{-sa}\right) =$$

$$= \frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$$

Example 7.20

Prove that $L\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right\} = \frac{1}{s}\tan^{-1}(1/s)$.

Solution:

Let $f(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du$. Then $f(o) = o$ and

$f'(t) = \frac{\sin t}{t}$ or $t\,f'(t) = \sin t$.

Taking the Laplace transform ,

$L\{t\,f'(t)\} = L\{\sin t\}$ or $-\frac{d}{ds}\left(sF(s)-f(o)\right) = \frac{1}{s^2+1}$.

i.e. $\frac{d}{ds}\left[sF(s)\right] = \frac{-1}{s^2+1}$

Integrating we get $sF(s) = -\tan^{-1} s + c$

By the initial value theorem 7.17(a) ,

$\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{t\to o} f(t) = f(o) = o$

so that $c = \pi/2$.

Thus $sF(s) = \pi/2 - \tan^{-1}s = \tan^{-1}(1/s)$

or $F(s) = \tan^{-1}(1/s) / s$.

§7.5 The Inverse Laplace Transform:

If the Laplace transform of a function f(t) is F(s) , i.e. if $L\{f(t)\} = F(s)$, then f(t) is called an inverse Laplace transform of F(s) and we write symbolically $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$, where L^{-1} is called the inverse Laplace transformation operator. For example, since $L\{e^{-2t}\} = 1/(s+2)$ we can write $L^{-1}\{1/(s+2)\} = e^{-2t}$.

Since the Laplace transform of a null function $N(t)$ is zero, it is clear that if $L\{f(t)\} = F(s)$ then also $L\{f(t)+N(t)\} = F(s)$. From this it follows that we can have two different functions with the same Laplace transform. If we disallow null functions (which do not in general arise in cases of physical interest). This result is indicated in

Theorem 7.18 Lerch's theorem:

If we restrict ourselves to functions $f(t)$ which are piecewise continuous in every finite interval $0 \leq t \leq N$ and of exponential order for $t > N$, then the inverse Laplace transform of $F(s)$, i.e. $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, is unique.

We shall always assume such uniqueness unless otherwise stated.

Short Table Of Special Inverse Laplace Transforms

Nº	$F(s)$	$f(t) = L^{-1} F(s)$	conditions
1	$1/s$	1	$s > 0$
2	$1/s^2$	t	$s > 0$
3	$1/s^{(n+1)}$	$t^n / n!$	$n = 0, 1, 2, \ldots$
4	$1/(s-a)$	e^{at}	$s > a$
5	$1/(s^2+a^2)$	$(\sin at)/a$	$s > 0$
6	$s/(s^2+a^2)$	$\cos at$	$s > 0$
7	$1/(s^2-a^2)$	$(\sinh at)/a$	$s > \lvert a \rvert$
8	$s/(s^2-a^2)$	$\cosh at$	$s > \lvert a \rvert$
9	$1/s^{(p+1)}$	$t^p/\Gamma(p+1)$	$s > 0,\ p > -1$

Some Important Properties Of Inverse Laplace Transforms:

In the following list we have indicated various important properties of inverse Laplace transforms. Note the analogy of properties 1-8 with the corresponding properties on Laplace transforms.

1. Linearity Property:

$$L^{-1}\left\{aF(s) + bG(s)\right\} = aL^{-1}\left\{F(s)\right\} + bL^{-1}\left\{G(s)\right\}.$$

Proof:

Since $L\left\{af(t) + bg(t)\right\} = aL\left\{f(t)\right\} + bL\left\{g(t)\right\} =$

$$= a\,F(s) + b\,G(s)\ .$$

Then $L^{-1}\left\{aF(s)+bG(s)\right\} = af(t)+bg(t) =$

$$= a\,L^{-1}\left\{F(s)\right\} + b\,L^{-1}\left\{G(s)\right\} .$$

2. First translation or shifting property:

If $L^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t)$, then $L^{-1}\left\{F(s-a)\right\} = e^{at} f(t)$.

3. Second translation or shifting property:

If $L^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t)$, then $L^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = f(t-a)U(t-a)$.

4. Change of scale property:

If $L^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t)$, then $L^{-1}\left\{F(as)\right\} = f(t/a)/a$.

5. Inverse Laplace transform of derivatives:

If $L^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t)$, then $L^{-1}\left\{F^{(n)}(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t)$.

6. Inverse Laplace transform of integrals :

If $L^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t)$, then $L^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(u)du\right\} = f(t)/t$.

7. Multiplication by s^n:

If $L^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t)$ and $f(o) = o$, then $L^{-1}\left\{sF(s)\right\} = f'(t)$.

Thus the multiplication by s has the effect of differentiating f(t) .

* If $f(o) \neq o$, then $L^{-1}\{sF(s) - f(o)\} = f'(t)$.

8. Division by s :

If $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, then $L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_{o}^{t} f(u)\, du$.

9. The convolution property:

If $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ and $L^{-1}\{G(s)\} = g(t)$, then

$$L^{-1}\{ F(s)G(s)\} = \int_{o}^{t} f(u)\, g(t-u)\, du = f*g$$

We call f*g the convolution or faltung of f and g.

The proofs are left to the students.

Example 7.21

Find $L^{-1}\left\{\frac{6}{2s-3} + \frac{5s+4}{s^3} - \frac{2s-18}{s^2+9} + \frac{3+4s}{9s^2-16}\right\} = A$

Solution:

$$A = L^{-1}\Big\{\frac{3}{s-3/2} + 5/s^2 + 4/s^3 - 2s/(s^2+9) + 18/(s^2+9) + $$
$$+ 1/3(s^2-16/9) + (4/9)(s/(s^2-16/9)) =$$
$$= 3e^{3t/2} + 5t + 4(t^2/2!) - 2\cos 3t + 18(\sin 3t)/3 +$$
$$+ (1/3)(3\sinh 4t/3)/4 + 4(\cosh 4t/3)/9 =$$
$$= 3\,e^{3t/2} + 5t + 2t^2 - 2\cos 3t + 6\sin 3t + \tfrac{1}{4}\sinh(4t/3) +$$
$$+ (4/9)\cosh(4t/3) .$$

Example 7.22

Find each of the following :

a) $L^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^2-4s+20}\right\}$ b) $L^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2+8s+16}\right\}$ c) $L^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$

d) $L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2s+3}}\right\}$ e) $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+s+1}\right\}$ f) $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^{5/2}}\right\}$.

Solution:

a) $$L^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^2-4s+20}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{3s-2}{(s-2)^2+16}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{3(s-2)+4}{(s-2)^2+16}\right\} =$$

$$= 3\,L^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+16}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{4}{(s-2)^2+16}\right\} =$$

$$= 3\,e^{2t}\cos 4t + e^{2t}\sin 4t = e^{2t}(3\cos 4t + \sin 4t),$$

b) $$L^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2+8s+16}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+4)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{(s+4)-1}{(s+4)^2}\right\} =$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^2}\right\} = e^{-4t} - te^{-4t} = e^{-4t}(1-t).$$

c) $$L^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{3s+7}{(s-1)^2-4}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{3(s-1)+10}{(s-1)^2-4}\right\} =$$

$$= 3L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2-4}\right\} + 5L^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2-4}\right\} =$$

$$= 3e^{t}\cosh 2t + 5e^{t}\sinh 2t = e^{t}(3\cosh 2t + 5\sinh 2t) =$$
$$= 4\,e^{3t} - e^{-t}.$$

d) $$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2s+3}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,L^{-1}\left\{(s+3/2)^{-1/2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-3t/2}\,\frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,t^{-1/2}\,e^{-3t/2}.$$

e) $$L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+s+1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1/2)^2+3/4}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{(s+1/2)+1/2}{(s+1/2)^2+3/4}\right\} =$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4}\right\} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}/2}{(s+1/2)^2+3/4}\right\} =$$

$$= e^{-1/2\,t}\cos\frac{\sqrt{3}\,t}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{-1/2\,t}\sin\frac{\sqrt{3}\,t}{2} =$$

$$= \frac{e^{-1/2\,t}}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}\,t}{2} + \sin\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right).$$

f) $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^{5/2}}\right\} = e^{-4t}\, L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{5/2}}\right\} = e^{-4t}\frac{t^{3/2}}{\Gamma(5/2)} =$

$= \left(4\, t^{3/2}\, e^{-4t}\right)/\left(3\sqrt{\pi}\right)$.

Example 7.23

Find each of the following:

a) $L^{-1}\left\{s/(s^2+a^2)^2\right\}$ b) $L^{-1}\left\{\ln(1+\frac{1}{s^2})\right\}$ c) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}$

d) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\}$ e) $L^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$ f) $L^{-1}\left\{\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\}$

Solution:

a) $\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{-2s}{(s^2+a^2)^2}$ i.e. $\frac{s}{(s^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right)$

Then since $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{\sin at}{a}$, we have by property (5)

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = -\frac{1}{2}\, L^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right)\right\} = \frac{t\sin at}{2\,a} .$$

b) Let $F(s) = \ln(1+\frac{1}{s^2}) = L\{f(t)\}$. $= \ln\frac{s^2+1}{s^2} = \ln(s^2+1) - 2\ln s$

Then $F'(s) = \frac{-2}{s(s^2+1)} = -2\left\{\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right\}$. $F'(s) = \frac{2s}{s^2+1} - \frac{2}{s}$

Thus since $L^{-1}\{F'(s)\} = -2(1-\cos t) = -tf(t)$,

$f(t) = \frac{2(1-\cos t)}{t}$.

c) Since $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$, we have by repeated application of property 8 , $\frac{1+s^2-s^2}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$

$t - \sin t$

$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \sin u\, du = 1 - \cos t$,

$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \int_0^t (1 - \cos u)\, du = t - \sin t$.

d)

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} = \int_0^t (\ u - \sin u\ )\, du = \frac{t^2}{2} + \cos t - 1.$$

e) By using the method of partial fractions we find

that $$\frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{\overset{A}{4}}{s-3} + \frac{\overset{B}{1}}{s+1}$$

Then $$L^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\} = 4\, L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} =$$

$$= 4\, e^{3t} - e^{-t}\ .$$

f) By partial fractions method we get

$$\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)} = \frac{-1/6}{s+1} - \frac{4/3}{s-2} + \frac{7/2}{s-3}$$

Thus $$L^{-1}\left\{\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\} = -\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{4}{-3}e^{2t} + \frac{7}{2}e^{3t}$$

Example 7.24

Find each of the following:

a) $L^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\}$ b) $L^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$

c) $L^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right\}$ d) $L^{-1}\left\{\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}\right\}$

e) $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$ f) $L^{-1}\left\{e^{-s}\left(\frac{s+2}{s^2+4}\right)\right\}$

Solution:

a) It is clear that

$$\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{-1/3}{s+1} + \frac{-7}{(s-2)^3} + \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{1/3}{(s-2)}\ .$$

Thus

$$L^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\} = -\frac{1}{3}e^{-t} - \frac{7}{2}t^2\, e^{2t} + 4te^{2t} + e^{2t}/3$$

b) Since $\dfrac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \dfrac{2}{s-1} + \dfrac{-2s+1}{s^2+1}$,

Therefore

$$L^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\} = 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} =$$

$$= 2\,e^{t} - 2\cos t + \sin t \, .$$

c) It is clear that $F(s) = \dfrac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)} =$

$$= \frac{1/3}{s^2+2s+2} + \frac{2/3}{s^2+2s+5} = \frac{1/3}{(s+1)^2+1} + \frac{2/3}{(s+1)^2+4}$$

Then $L^{-1}\{F(s)\} = \dfrac{e^{-t}\sin t}{3} + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\,e^{-t}\sin 2t =$

$$= e^{-t}\,(\sin t + \sin 2t\,)\,/\,3 \, .$$

d) Since $\dfrac{1}{s^2(s^2+9)} = \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s^2+9}\right)$, we have

$$\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)} = \frac{1}{9}\left[\left(2s+10+\frac{8}{s}+\frac{40}{s^2}\right) - \left(2s+10+\frac{-10s-50}{s^2+9}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{8}{s} + \frac{40}{s^2} + \frac{10s}{s^2+9} + \frac{50}{s^2+9}\right]$$

and so

$$L^{-1}\left\{\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}\right\} = \frac{1}{9}\left(8+40t+10\cos 3t+\frac{50\sin 3t}{3}\right) =$$

$$=(24+120t+30\cos 3t+50\sin 3t)/27 \, .$$

We can also use the method of partial fractions.

e) We can apply property 8. Since $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}$

and $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t$, then

$$L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{s}{s^2+1}\right)\right\} = \int_0^t e^{-(t-u)}\cos u\,du =$$

$$= e^{-t} \int_0^t e^u \cos u \, du = \tfrac{1}{2}(\cos t + \sin t - e^{-t}) .$$

f) It is clear that $F(s) = e^{-s}\left(\frac{s+2}{s^2+4}\right) = \frac{s\,e^{-s}}{s^2+4} + \frac{2\,e^{-s}}{s^2+4}$

Now $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \cos 2t$, $L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \sin 2t$.

Application of property 3 yields

$$L^{-1}\left\{\frac{se^{-s}}{s^2+4}\right\} = \cos 2(t-1)U(t-1), L^{-1}\left\{\frac{2e^{-s}}{s^2+4}\right\} = \sin 2(t-1)U(t-1)$$

Then property 1 (linearity) gives :

$$L^{-1}\{F(s)\} = \{\cos 2(t-1) + \sin 2(t-1)\} \; U(t-1) .$$

7.6 Solution of differential equations

The method of Laplace transforms is particularly useful for solving linear differential equations with constant coefficients and associated initial conditions. To accomplish this we take the Laplace transform of the given differential equation (or equations in the case of a system), making use of the initial conditions. This leads to an algebraic equations (or system of algebraic equations) in the Laplace transform and then taking the inverse, the required solution is obtained .

Example 7.25

Solve $y''(t) + y(t) = t$, given $y'(o)= -2$, $y(o)=1$.

Solution:

Take the Laplace transform of both sides of the given differential equation and let $Y = Y(s) = L\{y(t)\}$.

Then $L\{y''(t)+y(t)\} = L\{t\}$ or $s^2Y - sy(o) - y'(o) + Y = 1/s^2$.

Since $y(o)=1$, $y'(o)=-2$ this becomes

$$s^2Y - s + 2 + Y = \frac{1}{s^2} \quad , \; Y = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1}$$

$$\text{Then } Y = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}$$

nd $y = L^{-1}\{Y\} = t + \cos t - 3 \sin t$.

xample 7.26

olve $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}$, $y(o) = -3$, $y'(o) = 5$.

olution:

e have $L\{y''\} - 3L\{y'\} + 2L\{y\} = 4L\{e^{2t}\}$

$$[s^2Y - sy(o) - y'(o)] - 3[sY - y(o)] + 2Y = \frac{4}{s-2}$$

$$[s^2Y + 3s - 5] - 3[sY + 3] + 2Y = \frac{4}{s-2} ,$$

$$(s^2 - 3s + 2)Y + 3s - 14 = \frac{4}{s-2}$$

$$Y = \frac{4}{(s^2-3s+2)(s-2)} + \frac{14-3s}{s^2-3s+2} = \frac{-3s^2+20s-24}{(s-1)(s-2)^2} =$$

$$= \frac{-7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}$$

Thus $y(t) = L^{-1}\{Y\} = -7e^t + 4e^{2t} + 4t e^{2t}$.

Example 7.27

Solve $y'' + y = \cos t$ given $y(o) = o$, $y'(o) = o$.

Solution:

$L\{y''\} + L\{y\} = L\{\cos t\}$ i.e. $s^2Y + Y = \frac{s}{s^2+1}$

Hence

$$Y = \frac{s}{(s^2+1)^2} = \left(\frac{s}{s^2+1}\right)\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y\} = \int_o^t \cos u \sin(t-u)\, du =$$

$$= \left[\sin t\left(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}\sin u \cos u\right) - \cos t\left(\tfrac{1}{2}\sin^2 u\right)\right]\Big|_o^t =$$

$$= \tfrac{1}{2} t \sin t .$$

Example 7.28

Solve $y' + 4y + 4z = o$, $z' + 2y + 6z = o$ given $y(o) = 3$, $z(o) = 15$.

Solution:

$$[sY - y(o)] + 4Y + 4Z = o , \quad [sZ - z(o)] + 2Y + 6Z = o$$

$$(s+4)Y + 4Z = 3 , \quad (s+6)Z + 2Y = 15$$

$$Y = \frac{3(s+5)+15(-4)}{s^2+10s+16} = \frac{3s-42}{(s+2)(s+8)} = \frac{-8}{s+2} + \frac{11}{s+8},$$

$$Z = \frac{3(-2)+15(s+4)}{s^2+10s+16} = \frac{15s+54}{(s+2)(s+8)} = \frac{4}{s+2} + \frac{11}{s+8}.$$

ce $y(t) = L^{-1}\{Y\} = -8\ e^{-2t} + 11\ e^{-8t}$,

$z(t) = L^{-1}\{Z\} = 4\ e^{-2t} + 11\ e^{-8t}$.

mple 7.29

d the general solution of $y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 e^t$.

ution:

this case, we assume $y(o) = A$, $y'(o) = B, y''(o) = C$.

we have:

$$-s^2y(o)-sy'(o)-y''(o)] - 3[s^2Y - sy(o) - y'(o)] + 3[sY - y(o)] - Y = 2/(s-1)^3$$

e. $(s^3Y - As^2 - Bs - C) - 3(s^2Y - As - B) + 3(sY - A) - Y = \dfrac{2}{(s-1)^3}$

$$Y = \frac{As^2+(B-3A)s+3A-3B+C}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

nce A, B andC are arbitrary, so also is the polyn-ial in the numerator of the first term on the ght. We can thus write

$$= \frac{\alpha}{(s-1)^3} + \frac{\beta}{(s-1)^2} + \frac{\gamma}{(s-1)} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

d invert to find the required general solution

$$y = \tfrac{1}{2}\alpha t^2e^t + \beta te^t + \gamma e^t + \frac{t^5e^t}{60} = \delta t^2e^t + \beta te^t + \gamma e^t + \frac{t^5e^t}{60},$$

here $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are arbitrary constants.

It should be noted that finding the general olution is easier than finding the particular olution since we avoid the necessity of determining he constants in the partial fraction expansion.

EXERCISES 7

1. Find the Laplace transforms of each of the following functions. In each case specify the values of s for which the Laplace transform exists.

a) $2e^{4t}$, b) $3e^{-2t}$, c) $5t-3$, d) $2t^2-e^{-t}$,
e) $3\cos 5t$, f) $10\sin 6t$, g) $6\sin 2t-5\cos 2t$, h) $(t^2+1)^2$
i) $(\sin t-\cos t)^2$, j) $3\cosh 5t-4\sinh 5t$.

(Answers: a) $2/(s-4)$, $s>4$, b) $3/(s+2)$, $s>-2$,
c) $(5-3s)/s^2$, $s>0$, d) $(4+4s-s^3)/s^3(s+1)$,
e) $3s/(s^2+25)$, f) $60/(s^2+36)$, g) $(12-5s)/(s^2+4)$,
h) $(s^4+4s^2+24)/s^5$, i) $(s^2-2s+4)/s(s^2+4)$, $s>0$,
j) $(3s-20)/(s^2-25)$, $s>5$.)

2. Find the Laplace transforms of each of the following functions:
a) $4t^4-2t^3+4e^{-3t}-2\sin 5t+3\cos 2t$, b) t^3e^{-3t} c) $e^{-t}\cos 2$
d) $2e^{3t}\sin 4t$, e) $(t+2)^2e^t$, f) $e^{2t}(3\sin 4t-4\cos 4t)$,
g) $e^{-4t}\cosh 2t$, h) $e^{-t}(3\sinh 2t-5\cosh 2t)$.

(Answers: a) $72/s^5-12/s^4+4/(s+3)+3s/(s^2+4)-10/(s^2+2$
b) $6/(s+3)^4$, c) $(s+1)/(s^2+2s+5)$, d) $8/(s^2-6s+25)$,
e) $(4s^2-4s+2)/(s-1)^3$, f) $(20-4s)/(s^2-4s+20)$,
g) $(s+4)/(s^2+8s+12)$, h) $(1-5s)/(s^2+2s-3)$.)

3. Find a) $L\{e^{-t}\sin^2 t\}$, b) $L\{(1+te^{-t})^3\}$
(Answers:

$$a)\ \frac{2}{(s+1)(s^2+2s+5)}\ ,\quad b)\ \frac{1}{s}+\frac{3}{(s+1)^2}+\frac{6}{(s+6)^3}$$
$$+6/(s+3)^4.\ )$$

4. Show that:
a) $L\{f(t)\} = 2e^{-s}/s^3$ if $f(t) = \begin{cases}(t-1)^2 & t>1\\ 0 & 0<t<1\end{cases}$,

b) $L\{f(2t)\} = (s^2-2s+4)/4(s+1)^2(s-2)$,
if $L\{f(t)\} = (s^2-s+1)/(2s+1)^2(s-1)$,

الفصل الأول

<u>متسلسلة فورير Fourier Series .....</u>

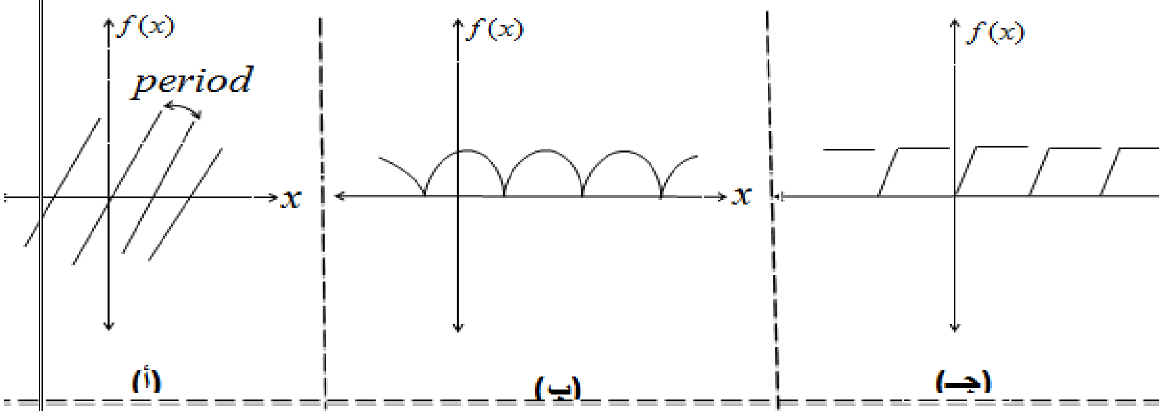
رأينا في المثال الأخير ضرورة التعرف علي طريقة للتعبير عن أي دالة $f(x)$ كمجموع عدة من دوال الجيوب وجيوب التمام ، ولما كانت هذة الأخيرة دوال دورية وجب أيضاً أن تكون الدالة $f(x)$ دورية (Periodic...... حتي يمكن التعبير عنها بدوال دورية)

<u>تعريـــف:</u>

تسمي $f(x)$ دالة دورية إذا كان $f(x+p)=f(x)$ حيث p ثابت موجب وأقل قيمة للثابت p تحقق العلاقة السابقة تسمي الدورة (Period ..... .)

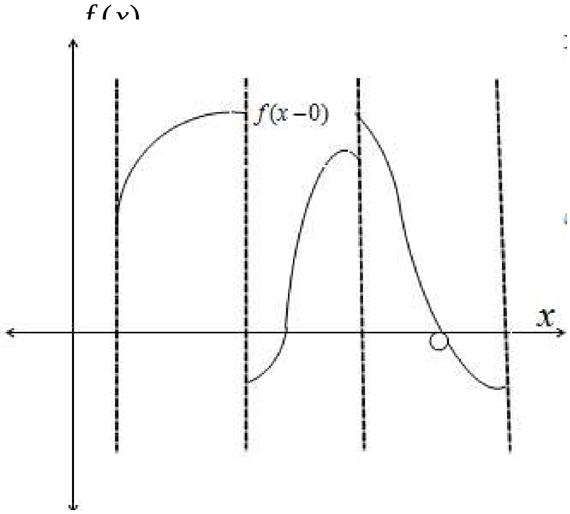
فمثلاً $\sin x$ دورتها 2π ، $\tan x$ دورتها π ، $\cos nx$ دورتها $\frac{2\pi}{n}$. $f(x)$

وفي الأشكال الأتية أمثلة لدوال دورية :



PiecewiseContinuousFunctions : الدوال المتصلة جزئياً ....

تسمي الدالة متصلة جزئياًفي فترة ما إذا كان :



أ - الفترة يمكن تقسيمها إلي عدد محدود م
الترات تكون الدالة متصلة علي كل منها .

ب- نهايات الدالة عند نقط عدم الإتصال تكون
قيمتهامحدودة وبتعبير مختصر تكون الدالة
متصلةجزئياً علي فترة معينة إذا كان للدالة
علي هذه الفترةعدد محدود من
الفتراتالمحدودة .

متسلسلة فورير:

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة علي الفترة $(-L,L)$ وكانت دورة الدالة $2L$ فإن متسلسلة فورير لها هي :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

حيث يتم حساب المعاملات a_n , b_n من الصيغ الأتية :

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

مع ملاحظة أنه يمكن أخذ بداية التكامل عند أي نقطة علي محور x ونهايته عند نقطة تبعد عن نقطة البداية بمسافة تساوي دورة كاملة أي أن :

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ومع ذلك فنحن لا نعلم متي تكون هذه المتسلسلة تقاربية وحتي إذا كانت تقاربية لا نعلم إن كانت تقترب من $f(x)$ أم لا وهناك شروط تسمي **شروط ديرشلت** توضح هذ الموقف وهي :

أ-إذا كانت $f(x)$ معروفة ووحيدة القيمة في الفترة $(-L,L)$ باستثناء عدد محدود من النقط ، و هذ الشرط ليس كافياً.

ب- $f(x)$ دورية ودورتها $2L$.

جـ- $f(x)\,,\ f'(x)$ متصلة جزئياً .

إذا توفرت هذه الشروط فإن المتسلسلة (1) بالمعاملات (3) , (2) تقترب من $f(x)$ إذا كانت x نقطة اتصال للدالة

ولكن عند نقط عدم الإتصال فإن المتسلسلة تقترب من

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

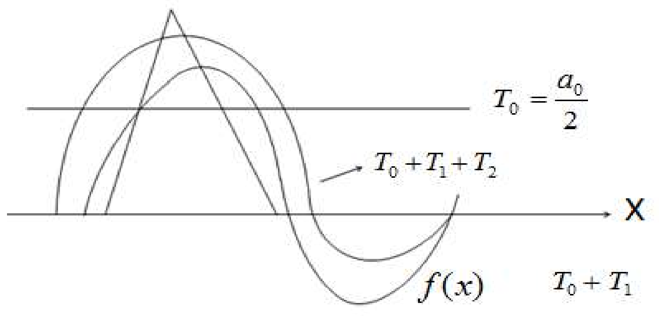
في هذه الحالة نستطيع أن نكتب :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

<u>كذلك يمكننا ملاحظة اقتراب المتسلسلة من الدالة من الشكل الأتي</u> :

نفرض أن $f(x) = T_0 + T_1 + T_2 + ...$

حيث :



$$T_0 = \frac{a_0}{2} \quad , \quad T_1 = a_1 \cos\frac{\pi x}{L} \quad , \quad T_2 = a_2 \cos\frac{2\pi x}{L} \quad , \ ...$$

Odd & Even Functions: الدوال الزوجية والدوال الفردية ....

تسمي $f(x)$ فردية إذا كان $f(-x) = -f(x)$

مثال ذلك الدوال $x^3 \;,\; x^5 - 3x^3 + 2x \;,\; \sin x \;,\; \tan 3x$

وتسمي الدالة زوجية إذا كان

$$f(-x) = f(x)$$

مثال ذلك الدوال

$$x^4 \;,\; 2x^2 + 5 \;,\; \cos x \;,\; e^x + e^{-x}$$

Half –Range Series: متسلسلة نصف المدي ....

إذا كانت الدالة فردية فإن حدود جيوب التمام تتقدم في متسلسلاتها .

وإذا كانت زوجية تتقدم في المتسلسلة حدود الجيب وتأخذ المعاملات الصيغ الآتية :

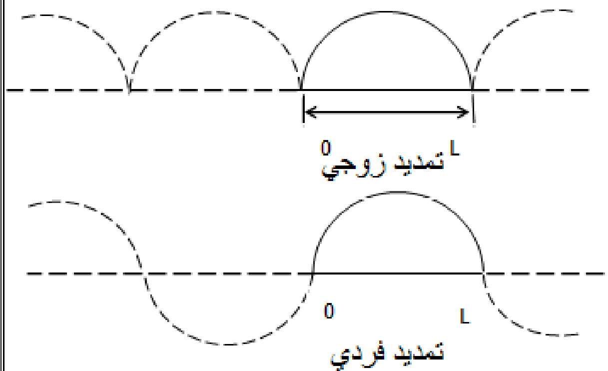
فردية $a_n = 0 \quad , \quad b_n = \dfrac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \dfrac{n\pi x}{L}\, dx$

زوجية $b_n = 0 \quad , \quad a_n = \dfrac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \dfrac{n\pi x}{L}\, dx$

فائدة متسلسلة نصف المدي:

هناك بعض الدوال ليست دورية علي الإطلاق بل قد تكون معرفة علي فترة ما وغير معرفة خارج هذه الفترة ومع ذلك يمكن أن نوجد لها متسلسلة فورير (نصف المدي) .

مثال ذلك نفرض أن قضيب طوله L طرفاه



وأن $f(x)$ $x = L$, $x = 0$

هي دالة توزيع الحمل علي هذا العتب.

أي أن $f(x)$ معرفة في الفترة $(0, L)$

وغير معرفة خارج هذه الفترة.

في هذه الحالة يمكننا عمل تمديد فرضي للدالةعلي الفترة $(-L, 0)$ ويكون التمديد زوجي أو فردي حسب رغبتنا كما في الشكل .. ثم نعتبر أيضاً أن الدالة تتكرر دورياقبل وبعد الفترة $(-L, L)$ ثم يمكننا إيجاد متسلسلة نصف المدي للدالة الممدة الدورية التي أنشأناها ولنفرض أن هذه الدالةهي $F(x)$.

واضح أن قيم $F(x)$ الممدة الدورية تتفق مع قيم الدالة $f(x)$ الغير دورية وذلك في الفترة $(0, L)$ولذا يمكن أخذ $F(x)$ كممثلة للدالة $f(x)$ في الفترة $(0, L)$ مع عدم الاهتمام بقيم الدالة $F(x)$ خارج هذه الفترة.

Complex Fourier Seriesمتسلسلسة فورير المركبة .... :

بسبب المتطابقة $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ متسلسلة فورير تأخذ الصور :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\frac{n\pi x}{L}} \qquad ; \quad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\, dx$$

Double Fourier Seriesمتسلسلسة فورير المزدوجة .... :

الفكرة في استخدام متسلسلة فورير لدالة ذات متغير واحديمكن تعميمها للحصول علي متسلسلة فورير لدوال ذات متغيرين.

في هذه الحالة تكون متسلسلسة فورير الجيبية المزدوجة :

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin\frac{m\pi x}{L_1} \sin\frac{n\pi y}{L_2}$$

وهناك صيغ شبيهه لمتسلسلة جيب التمام المزدوجة أو المتسلسلة المختلطة . كما أنه يمكن التعميم للدوال ذات ثلاث متغيرات أو أكثر .

أمـثــلـــة

مثال (1) : برهن علي ما يأتي :

$$(a)\quad \int_{-L}^{L} \sin\frac{k\pi x}{L}\,dx = \int_{-L}^{L} \cos\frac{k\pi x}{L}\,dx = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, 3, ...$$

$$(b)\quad \int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \quad = \int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\ \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \begin{cases} 0 & : \quad m \neq n \\ L & : \quad m = n \end{cases}$$

$$(c)\quad \int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\ \cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = 0$$

الحـــــــــل

$$(a)\quad \int_{-L}^{L} \sin\frac{k\pi x}{L}\,dx = -\frac{L}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{L}\Big]_{-L}^{L}$$

$$= -\frac{L}{k\pi}\left(\ \cos k\pi - \cos(-k\pi)\ \right) = 0$$

وبنفس الطريقة يمكن اثبات أن :

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{k\pi x}{L}\,dx = 0$$

(b) : فإن $\underline{m \neq n}$ إذا كانت

$$(b)\quad \int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\ \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \tfrac{1}{2}\left[\ \int_{-L}^{L} \cos\frac{(m-n)\pi x}{L}\,dx\right.$$

$$\left. + \int_{-L}^{L} \cos\frac{(m+n)\pi x}{L}\,dx\ \right] = 0$$

وبنفس الطريقة يمكن اثبات أن :

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\ \sin\frac{n\pi x}{L}\ dx = 0$$

أما إذا كانت $\underline{m=n}$ فإن :

$$\int_{-L}^{L} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \tfrac{1}{2}\int_{-L}^{L} \left(1+\cos\frac{2n\pi x}{L}\right) dx = L$$

كذلك

$$\int_{-L}^{L} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \tfrac{1}{2}\int_{-L}^{L} \left(1-\cos\frac{2n\pi x}{L}\right) dx = L$$

$$(c)\quad \int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\ \cos\frac{n\pi x}{L}\ dx = \tfrac{1}{2}\left[\int_{-L}^{L} \sin\frac{(m-n)\pi x}{L}\ dx\right.$$

$$\left. + \int_{-L}^{L} \sin\frac{(m+n)\pi x}{L}\ dx\right] = 0$$

مثال (2) : إذا كانت:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

فاثبت أن :

(أ) $$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\ dx$$

(ب) $$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\ dx$$

<u>الحـــــــــل</u>

(أ) بإجراء التكامل علي الطرفين من $-L$ إلي L ينتج أن :

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx + b_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right]$$

$$= \frac{a_0}{2}\,.\,2L + 0 = a_0\,L$$

$$Thus \qquad a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

بضرب الطرفين في $\cos\frac{m\pi x}{L}$ والتكامل ينتج أن:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx$$

$$= 0 + a_m\,L + 0$$

$$Thus\ a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx \qquad ;\ m = 1\,,\,2\,,\,3\,,\,\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(ب) بالضرب في $\sin\frac{m\pi x}{L}$ والتكامل نجد أن :

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = 0 + 0 + b_m\,L$$

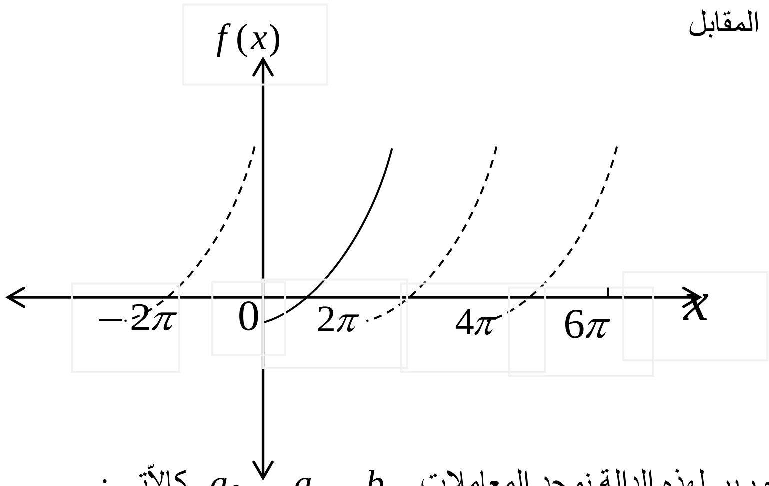
$$Thus \qquad b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} \, dx$$

مثال (3) : أوجد متسلسلة فورير للدالة الدورية المعرفة علي دورة كالآتي :

$$f(x) = x^2 \qquad ; \quad 0 < x < 2\pi$$

الحــــــــــل

الدالة مبينة بالشكل المقابل



لايجاد متسلسلة فورير لهذه الدالة نوجد المعاملات a_0 , a_n , b_n كالآتي :

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{c}^{c+2L} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \, dx = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{c}^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos \frac{n\pi x}{\pi} \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[x^2 \frac{\sin nx}{n} - 2x \left(\frac{-\cos nx}{n^2} \right) + 2 \left(\frac{-\sin nx}{n^3} \right) \right] \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2} \qquad ; \quad n \neq 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{c}^{c+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} x^2 \sin \frac{n\pi x}{\pi}\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} x^2 \sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[x^2 \left(\frac{-\cos nx}{n} \right) - 2x \left(\frac{-\sin nx}{n^2} \right) + 2 \left(\frac{\cos nx}{n^3} \right) \right] \Bigg|_{0}^{2\pi} = \frac{-4\pi}{n}$$

ومن ثم فإن متسلسلة فورير للدالة الدورية $f(x) = x^2$ تأخذ الصورة :

$$f(x) = x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$

$$= \frac{4\pi^2}{3} + 4 \cos x + \cos 2x + \frac{4}{9} \cos 3x + ...$$

$$- 4\pi \sin x - 2\pi \sin 2x - \frac{4\pi}{3} \sin 3x - ....$$

مثال (4) : أ- بين أن الدالة الزوجيةلا تحتوي متسلسلتها علي دوال الجيب .

ب- بين أن معاملات الدالة الزوجية هي :

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

<u>الحـــــــــل</u>

(أ)

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^{0} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx + \frac{1}{L} \int_{0}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

والآن نتناول التكامل الأول ونرمز له بالرمز I_1 ونعتبر التحويل $x = -u$.

$$I_1 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{0} f(-u) \sin\left(\frac{-n\pi u}{L} \right) d(-u) = \frac{-1}{L} \int_{0}^{L} f(u) \sin \frac{n\pi u}{L}\, du$$

$$= \frac{-1}{L} \int_{0}^{L} f(-x) \sin \left(\frac{-n\pi x}{L} \right) d(-x) = \frac{-1}{L} \int_{0}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

واضح أن قيمة هذا التكامل تساوي وتضاد في الإشارة لقيمة التكامل الثاني .

وينتج عن هذا أن $b_n = 0$

وهذا يعني أن الدالة الزوجية لا تحتوي متسلسلتها علي دوال الجيب .

(ب)
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

بعمل التحويل $x = -u$ في التكامل الأول نجد أن قيمته تساوي تماماً قيمة التكامل الثاني أي أن :

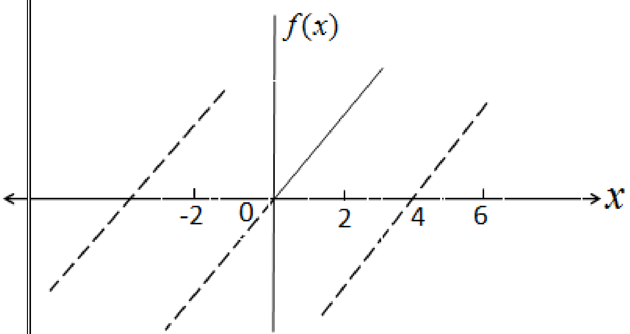
$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

مثال (5) : أوجد متسلسلة نصف المدي (أ) الجيبية (ب) جيبية التمام للدالة

$$f(x) = x \qquad ; \qquad 0 < x < 2$$

الحـــــــــل

أ- الشكل يبين الدالة الأصلية والدالة بعد تمديدها تمديداً فردياً :



لايجاد متسلسلة فورير لهذه الدالة نوجد المعاملات $a_0\ ,\ a_n\ ,\ b_n$ كالآتي :

$$a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0$$

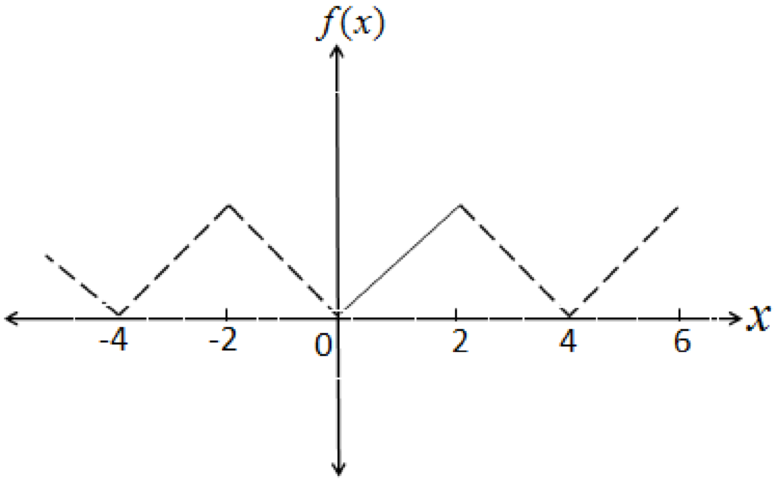
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x\,\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{4}{n\pi}\cos n\pi$$

ومن ثم فإن متسلسلة فورير لهذه الدالة تصبح علي الصورة :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4\cos n\pi}{n}\ \sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right)$$

ب- الشكل يبين الدالة الأصلية والدالة بعد تمديدها تمديداً زوجياً :



$$b_n = 0\quad ,\quad a_0 = \int_0^2 x\,dx = 2$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x\,\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{-4\,(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2}\quad ,\ n\neq 0$$

ومن ثم فإن متسلسلة فورير لهذه الدالة تصبح علي الصورة :

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\ (\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2}$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi x}{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots \right)$$

لاحظ أن المتسلسلة الثانية تتقارب بطريقة أسرع كثيراً من المتسلسلة الأولي .

مثال (6) : في حالة متسلسلة فورير المزدوجة :

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L_1} \sin \frac{n\pi y}{L_2}$$

أوجد الصيغة التي تحسب منها المعاملات B_{mn}.

<u>الحـــــــــــل</u>

إذا اعتبرنا y بارامتر فإنه يمكن كتابة المتسلسلة كالآتي :

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin \frac{m\pi x}{L_1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

حيث $$C_m = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{n\pi y}{L_2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

في هذه الحالة تكون C_m دالة في y .

وبالنظر إلي المتسلسلة (2) باعتبارها مفكوك فورير للدالة C_m فإن :

$$B_{mn} = \frac{2}{L_2} \int_0^{L_2} C_m \sin \frac{n\pi y}{L_2}\, dy$$

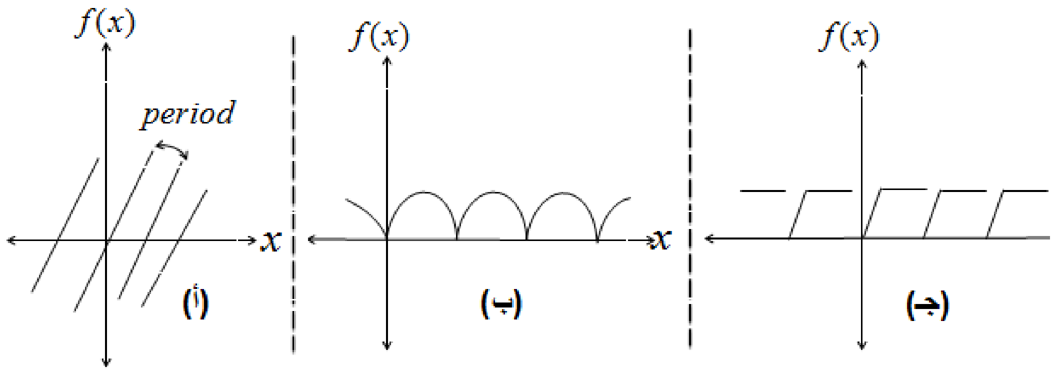
كذلك من (1) نجد أن :

$$C_m = \frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} f(x,y) \sin \frac{m\pi x}{L_1}\, dx$$

أي أن :
$$B_{mn} = \frac{4}{L_1 L_2}\int_0^{L_1}\int_0^{L_2} f(x,y)\ \sin\frac{m\pi x}{L_1}\ \sin\frac{n\pi x}{L_2}\ dxdy$$

تمـــــــاريـــــن

1) بين أي الدوال الآتية زوجية وأيها فردية :



2) إذا كانت $f(x) = const.$ فهل هذه الدالة دورية ؟

وإذا كانت كذلك فما مقدار دورتها ؟

****

3) أ- أوجد معاملات فورير للدالة الدورية :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad -5 < x < 0 \\ 3 & : \quad 0 < x < 5 \end{cases}$$

ب- ارسم شكلاً للدالة وأوجد متسلسلة فورير لها .

جـ - كيف يمكن تعريف الدالة عند النقط $x = 5$, $x = 0$, $x = -5$ حتي تكون المتسلسلة تقاربية

للدالة في الفترة $-5 \le x \le 5$.

---

4) أ- أوجد متسلسلة نصف المدي جيبية التمام للدالة الآتية وارسم شكلاً لها :

$$f(x) = \sin x \qquad ; \quad 0 < x < \pi$$

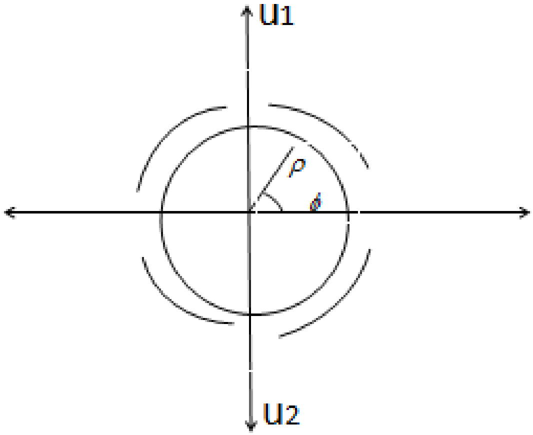
تطبيقات على تحليل فورير:

مثال (1) : قرص معدني رقيق نصف قطره الوحدة معزول الوجهين نصف حافته محفوظ علي درجة حرارة

ثابتة u_1 والنصف الأخر علي درجة حرارة ثابتة u_2 .

أوجد التوزيع الحراري في الحالة المستقرة .

الحــــــــــــل



نستخدم هنا الإحداثيات القطبية المستوية

(والتي هي حالة خاصة من الإحداثيات الاسطوانية

حيث $Z = 0$) .

معادلة الحالة المستقرة للتوصيل الحراري

هي معادلة لابلاس $\nabla^2 u = 0$

.

أي أن

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

الشروط الحدية هي :

$$u(1, \phi) = \begin{cases} u_1 & : \quad 0 < \phi < \pi \\ u_2 & : \quad \pi < \phi < 2\pi \end{cases}$$

$$, \quad |u(\rho, \phi)| < M$$

لفصل المتغيرات نفرض أن :

$$u(\rho, \phi) = P(\rho)\ \Phi(\phi)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية والقسمة علي $P\,\Phi$ ينتج أن :

$$\frac{\rho^2 P'' + \rho P'}{P} = \frac{-\Phi''}{\Phi} = \lambda^2$$

ومن ذلك ينتج أن :

$$\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0 \qquad , \qquad \rho^2 P'' + \rho P' - \lambda^2 P = 0$$

ملحوظــــــة: اختيرت إشارة الثابت بحيث يكون كل طرف بعد فصل المتغيرات مساوياً المقدار λ^2 وليس $-\lambda^2$ كما

حدث في مثال سابق . وليس السبب هنا أن يتحقق الشرط $|u(\rho , \phi)| < M$ كما حدث في مثال

سابق . ولكن السبب هنا أن تكون معادلة Φ هي $\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0$

.

حتي يكون الحل متضمناً لدوال الجيب وجيب التمام وذلك لأن الدالة $\Phi(\phi)$ دورية ويجب أن ترجع قيمتها إلي نفس القيمة .

وهذا يتحقق بالاختيار الذي أشرنا إليه . أما إذا كنا قد اخترنا الثابت بإشارة عكسية لكان حل معادلة الدالة $\Phi(\phi)$ متضمناً

لدوال أسية وهي دوال ليست دورية وبالتالي لا تكون مناسبة لحالة المسألة .

نعود الآن لحل المعادلتين العاديتين اللتان نتجتا عن فصل المتغيرات الأولي منهما حلها

$$\Phi(\phi) = A_1 \cos\lambda\phi + B_1 \sin\lambda\phi$$

والثانية من نوع معادلات أويلر وحلولها الخاصة $\rho^{\lambda} \,,\, \rho^{-\lambda}$ وحلها العام :

$$P(\rho) = A_2\, \rho^{\lambda} + B_2\, \rho^{-\lambda}$$

وهنا يجيء دور شرط أن تكون الدالة محدودة . واضح أن كلاً من الحدين $\rho^{\lambda} \,,\, \rho^{-\lambda}$ لا يصل إلي قيمة لا نهائية عندما تصل ρ إلي أقصي قيمتها عند محيط الدائرة حيث نصفي القطر قيمة محدودة . ولكن المشكلة تظهر عند مركز القرص حيث $\rho = 0$ ، حيث الحد الثاني $\rho^{-\lambda} = \dfrac{1}{\rho^{\lambda}}$ يصل إلي قيمة لا نهائية .

لذا يجب أن يكون $B_2 = 0$ وهذا نتيجة تطبيق شرط أن تكون الدالة محدودة في كل مكان .
كذلك – كما أشرنا – يجب أن يكون الحل في ϕ دوري ، ويجب أيضاً أن تكون دورته 2π
بالتحديد . لذا فإن λ يجب أن تكون بالصيغة $m = 0, 1, 2, 3, ...$, $\lambda = m$.

<u>والخلا صـــة:</u>

$$u(\rho, \phi) = \rho^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi)$$

وبتطبيق مبدأ الإضافة :

$$u(\rho, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi)$$

وبتطبيق الشرط الحدي ينتج أن :

$$u(1, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi)$$

وحسب نظرية فورير نحصل علي المعاملات A_m , B_m كالآتي :

$$A_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(1, \phi) \cos m\phi \, d\phi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_1 \cos m\phi \, d\phi + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} u_2 \cos m\phi \, d\phi$$

والنتيجة هي :

$$A_m = \begin{cases} 0 & : \quad m > 0 \\ u_1 + u_2 & : \quad m = 0 \end{cases}$$

أي أن كل المعاملات A_m تتقدم فيما عدا $A_0 = u_1 + u_2$.

والمجموعة الأخري من المعاملات B_m نحصل عليها من :

$$B_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_1 \sin m\phi \; d\phi + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} u_2 \sin m\phi \; d\phi$$

$$= \frac{(u_1 - u_2)\,(1 - \cos m\pi)}{m\pi}$$

ومن ثم فإن التوزيع الحراري في الحالة المستقرة يصبح علي الصورة :

$$u(\rho, \phi) = \frac{u_1 + u_2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(u_1 - u_2)\,(1 - \cos m\pi)\,\rho^m}{m\pi} \sin m\phi$$

$$= \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{2\,(u_1 - u_2)}{\pi} \left(\rho \sin\phi + \frac{1}{3}\rho^3 \sin 3\phi + \ldots\ldots\ldots\ldots \right)$$

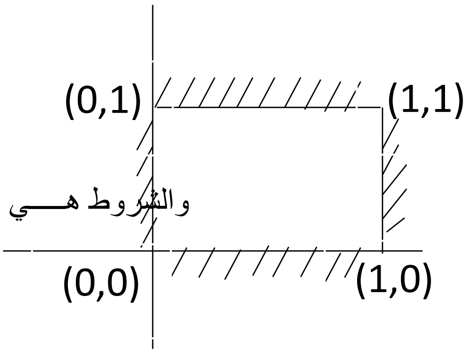
مثال (2) صفيحة رقيقة علي هيئة مربع طول ضلعه الوحدة معزول الوجهين وأحرفه كلها محفوظة في درجة

الصفر ... فإذا كان التوزيع الحراري الابتدائي معلوم فأوجد التوزيع العام .

الحـــــــــل

المعادلة التفاضلية هــــــي :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$



والشروط هـــي :

$$|u(x, y)| < M ,$$

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y)$$

حيث $f(x,y)$ هي دالة التوزيع الحراري الابتدائي المعلومة

لفصل المتغيرات افترض أن : $u = X(x)\, Y(y)\, T(t)$

بعد التعويض في المعادلة والقسمة علي $K\, X\, Y\, T$

نجدأن :
$$\frac{T'}{KT} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$

أي أن :
$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \quad , \quad T' + K\lambda^2 T = 0$$

ونكون بذلك طبقنا الشرط الأول للدالة المحدودة . والمعادلة الثانية يجري عليها أيضاً فصل المتغيرات فنحصل علي :

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda^2 = -\mu^2$$

حيث $-\mu^2$ هو ثابت آخر اختياري . وقد تم اختياره بحيث يكون سالباً . أما لو اخترناه موجباً ثم طبقنا الشروط الباقية لكنا قد حصلنا علي الحل التافه . ويمكن للطالب التحقق من ذلك .

أي أن
$$Y'' + (\lambda^2 - \mu^2)\, Y = 0 \quad , \quad X'' + \mu^2 X = 0$$

وحلول هذه المعادلات هـــــي:

$$X = a_1 \cos \mu x + b_1 \sin \mu x \ ,$$

$$Y = a_2 \cos \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\; y + b_2 \sin \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\; y \ ,$$

$$T = a_3\, e^{-K\lambda^2 t}$$

$$u(x, y, t) = e^{-K\lambda^2 t} \left(a_1 \cos \mu x + a_2 \sin \mu x \right)$$
$$\left(a_2 \cos \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\; y + b_2 \sin \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\; y \right)$$

حيث قد ادمجنا a_3 في باقي الثوابت .

بتطبيق الشرط $u(0, y, t) = 0$ نحصل علي $a_1 = 0$.

بتطبيق الشرط $u(x, 0, t) = 0$ نحصل علي $a_2 = 0$.

أي أن :

$$u(x, y, t) = B\, e^{-K\lambda^2 t} \sin \mu x \, \sin \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\; y \,)$$

بتطبيق الشرط $u(1, y, t) = 0$ نحصل علي $\mu = m\pi$.

بتطبيق الشرط $u(x,1,t) = 0$ نحصل علي $\sqrt{\lambda^2-\mu^2} = n\pi$.

أي أن : $\lambda = \sqrt{m^2+n^2}$

وبتطبيق مبدأ الإضافة نحصل علي الحل العام وهو :

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\; e^{-K(m^2+n^2)\pi^2 t} \sin m\pi x \;\sin n\pi y$$

وبتطبيق الشرط $u(x,y,0) = f(x,y)$ نحصل علي :

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin m\pi x \;\sin n\pi y$$

وهي متسلسلة فورير المزدوجة معاملاتها هي :

$$B_{mn} = 4\int_0^1\int_0^1 f(x,y) \sin m\pi x \;\sin n\pi y \; dx\, dy$$

وإذا كانت $f(x,y)$ دالة معروفة لأمكننا حساب هذا التكامل والحصول علي القيم الرقيمة للمعاملات B_{mn} ثم التعويض عنها في الصيغة النهائية للدالة $u(x,y,t)$.

تـــمـــاريـــن

1) أوجد حل مسألة التوصيل الحراري لساق رفيعة حيث :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad , \qquad 0 < x < 3$$

علماً بأن $u(0,t) = u(3,t) = 0$.

وعلماً بأن درجة الحرارة الابتدائية $25\ ^\circ C$ لكل نقط الساق .

2) ساق رفيعة معزولة الجوانب ومعزولة الطرفين $x=0$, $x=L$ فإذا كان التوزيع الحراري الابتدائي

يعطي بالدالة $f(x)$ ..... فأوجد التوزيع العام .

3) حل معادلة لابلاس في بعدين : صفيحة رقيقة مربعة طول ضلعها الوحدة ثلاث أضلاع منها محفوظة علي

درجة الصفر والضلع الرابع علي درجة μ . أوجد التوزيع الحراري في الحالة المستقرة

الفصل الثانى

تكامـــــــــل فوريـــــــــر ..... Fourier Integral

الحاجة الي تكامل فورير:

فيما سبق تناولنا دوال دورية دورتها اما اذا كانت $L \to \infty$ واذا كانت الفتره المعرفة عليها الدالة غير محدودة فاننا سنجد ان متسلسلة فورير يؤول تكامل فورير .

تكامـــــــــل فوريـــــــر:

أ- اذا كانت $f(x)\ ,\ f'(x)$ متصلة جزئيا في كل فترة محدودة

ب- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ متقارب

فإن نظرية تكامل فورير تقرر ان :

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} [A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x]\,dx \quad (1)$$

حيـــــــث

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha u\,du \quad (2)$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-\infty} f(u)\sin\alpha u\,du$$

كما ان تكامل فورير يقترب من الدالة $f(x)$ عند نقطة عدم الاتصال ومن متوسط الدالة عند نقطة عدم الاتصال كما كان الحال في متسلسله فورير .والطرف الايمن للمعادلة (1) يسمى تكامل فورير للدالة $f(x)$.

<u>صيغ مكافئـــــــــــــــة:</u>

يمكن التعبير عن (2) ,(1) بصيغة واحده هـــــــي :

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha=0}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(x-u)\,dudx \qquad (3)$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha(x-u)}\,dud\alpha \quad \text{or}$$

$$\text{or}\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u}\,du \qquad (4)$$

وفي حالة f دالة فردية فـــــإن :

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin\alpha x d\alpha\int_{0}^{\infty} f(u)\sin\alpha u\,du \qquad (5)$$

وفي حالة f دالة زوجية فـــــإن :

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\alpha x d\alpha\int_{0}^{\infty} f(u)\cos\alpha u\,du \qquad (6)$$

Fourier Transform: تحويـــــــــل فـــورير ....

من المعادلة (4) نجــــــد أن :

$$F(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u}du \qquad (7)$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{i\alpha u}dx \qquad (8)$$

الدالة $F(\alpha)$ تسمى تحويل فورير للدالة $f(x)$ وتكتب :

والدالة $f(x)$ هي تحويل فورير العكســـــــي للدالة $F(\alpha)=\Im\{f)(x)\}$
$F(\alpha)$ وتكتب $f(x)=\Im^{-1}\{F(\alpha)\}$

تحويل فـــــوريـــر الجيبى وجيبى التمام :

اذا كانت $f(x)$ دالة فردية فان تكامل فوريريختزل الى صيغة (5) وهي :

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_s(\alpha)\sin\alpha x d\alpha$$

اما اذا كانت الدالة زوجية فـــــإن:

$$F_c(\alpha)=\int_{0}^{\infty} f(u)\cos\alpha u du \ , \ f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_c(\alpha)\cos\alpha x d\alpha$$

حيث $F_c(\alpha)\ ,\ F_s(\alpha)$ تسمى بتحويل فورير جيبي التمام والجيبي للدالة $f(x)$.

ConvolutionTheorem: نظرية الاندمـــــــــاج ....

اندمـــــــــاج الدالة $f(x)\ ,\ g(x)$ يعرف بانه :-

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u) du$$

ونظرية الاندماج تقرر ان تحويل فورير لاندماج $f \;,\; g$ اي الدالة $f * g$ يساوي حاصل ضرب تحويل فورير للدالتين $f \;,\; g$ بمعنى ان :

$$\Im\{f * g\} = \Im\{f\}\Im\{g\}$$

كما ان الاندماج يحقق قوانين التبادلالملازم والتوزيع اي ان :

$$f * g = g * f \;,\; f * (g * h) = (f * g) * h$$

$$,\quad f * (g + h) = f * g + f * h$$

أمثـــــــــــــــــلة

مثال (1) بين ان المعادلتين (3) , (1) متكافئة .

الحـــــــــل:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=0}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u) \cos\alpha(x-u) du dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=0}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u) \{\cos\alpha x \cos\alpha u + \sin\alpha x \sin\alpha u\} du dx$$

حيـــــــــث

$$= \int_{\alpha=0}^{\infty} [A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x] du dx$$

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha u dx$$

$$B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\alpha u dx$$

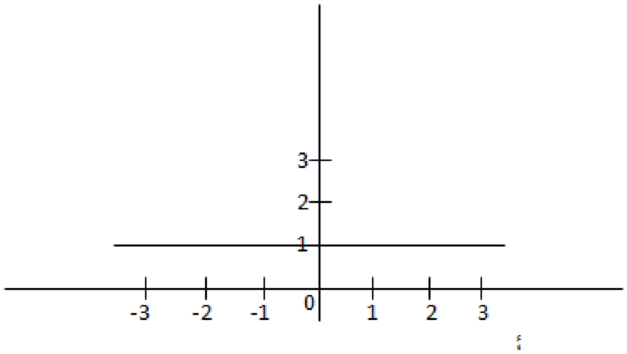
مثال (2) أ- اوجد تحويل فورير للدالة :

$$f(x)=\begin{cases}1 & : \quad |x|<a\\ 0 & : \quad |x|>a\end{cases}$$

ب – ارسم منحنى الدالة $f(x)$ ومنحى تحويل فوريــــر لها في حالة $a=3$

منحى الدالة

عندما $a=3$

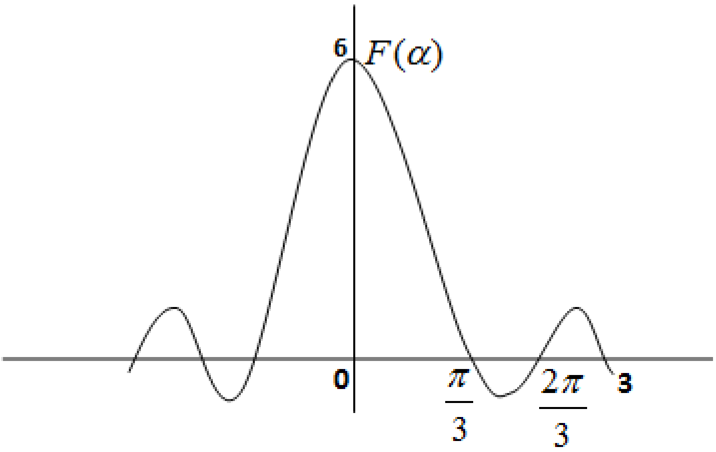


أ- $F(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u}du=\int_{-a}^{a} e^{-i\alpha u}du$

$$=\frac{e^{-i\alpha u}-e^{-i\alpha a}}{-i\alpha}=\frac{2\sin\alpha a}{\alpha}$$

$$=\frac{e^{-i\alpha u}}{-i\alpha}\Big|_{-a}^{a}$$

مع ملاحظة ان $F(0)=2a$ والشكل الاتي يبين منحى التحويل عندما $a=3$



مثال (3) استخدم
نتيجة المثال السابق
في إيجاد قيم التكاملين الاتيين :

(أ) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\alpha a \cos\alpha}{\alpha} d\alpha$$

(ب) $$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$$

<u>الحـــــــــل:</u>

للدالة المعرفة في المثال السابق اثبتنا ان :

$$F(\alpha)=\frac{2\sin\alpha a}{\alpha}$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin\alpha a}{\alpha}e^{i\alpha x}d\alpha$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha a\cos\alpha x}{\alpha}d\alpha+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha a\sin\alpha x}{\alpha}d\alpha$$

وحيث ان كلا من .... $\alpha,\sin\alpha a,$ دوال فردية في α فـــإن الدالة التى على علامة التكامل تكون دالة فردية ولذا ينعدم التكامل الثاني ويصبح:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha a\cos\alpha a}{\alpha}d\alpha$$

اي ان قيم التكامل هي نفس قيم الدالة $f(x)$ المعرفة في المثال وحسب نظرية فورير يقترب التكامل من قيم الدالة او متوسط قيمتها .

اي ان :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha a\cos\alpha a}{\alpha}\,d\alpha=\begin{cases}\pi & : \quad |x|<a\\ \dfrac{\pi}{2} & : \quad |x|=a\\ 0 & : \quad |x|<a\end{cases}$$

ب – بوضع $a=1\ ,\ x=0$ في نتيجة (أ) ينتج أن :

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha=\frac{\pi}{2}\ \text{or}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha=\pi$$

مثال (4) : وهو تطبيق على نظرية الاندماج .

حل المعادلة التكاملية :

$$y(x)=g(x)+\int_{-\infty}^{\infty}y(u)r(x-u)du$$

حيث $g(x)\ ,\ r(x)$ دوال معطاه .

الحـــــــــــــل

بأخذ تحويل فورير للطرفين وتطبيق نظرية الاندماج فــــإن:

$$y(\alpha)=G(\alpha)+Y(\alpha)R(\alpha)$$

حيث $G(\alpha)\ ,\ R(\alpha)$ دوال معلومة لانها تحويل فورير لدوال معلومـــــة .

ومن هذا ينتج ان:

$$y(\alpha)=\frac{G(\alpha)}{1-R(\alpha)}$$

اي ان $Y(\alpha)$ ولو ان تحويل لدالة مجهولة اننا استطعنا ايجاده بدلاة تحويلات معلومة لدوال معلومة .

وللحصول على نفس الدالة $y(x)$ نجري التحويـــــــــــــل العكســـــــــــي .

اي ان :-

$$y(x)=\Im^{-1}\left\{\frac{G(\alpha)}{1-R(\alpha)}\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(\alpha)}{1-R(\alpha)}e^{i\alpha x}d\alpha$$

حيث كل الدوال التى تلي علامة التكامل دوال معلـــــومة.

مثال (5) :

اوجد حل المعادلة التكامليـــــــة

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y(u)\,du}{(x-u)^2+a^2}=\frac{1}{x^2+b^2}$$

الحـــــــــــــل:

نحسب أولا تحويل فورير للطرف الأيمن :

$$\Im\left\{\frac{1}{x^2+b^2}\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\alpha x}}{x^2+b^2}dx$$

$$=2\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^2+b^2}dx$$

هذا التكامل معطى كتمرين (2) ونتيجه هي

$$\Im\left\{\frac{1}{x^2+b^2}\right\}=\frac{\pi}{b}e^{-b\alpha} \quad (1)$$

ومن ذلك ينتج ايضا ان (2) $\Im\left\{\frac{1}{x^2+b^2}\right\}=\frac{\pi}{a}e^{-a\alpha}$

بإجراء التحويل على طرفي المعادلة ينتج ان :

$$\Im\{y\}\Im\left\{\frac{1}{x^2+b^2}\right\}=F\left\{\frac{1}{x^2+b^2}\right\} \qquad (3)$$

وبالتعويض عن (2) , (1) في (3) ينتج ان :

$$Y(\alpha)\frac{\pi}{a}e^{-a\alpha}=\frac{\pi}{b}e^{-b\alpha}$$

اي ان $Y(\alpha)=\frac{a}{b}e^{-(b-\alpha)\alpha}$

ويكون $y(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}Y(\alpha)d\alpha$

$$=\frac{a}{b\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-(b-a)\alpha}\cos\alpha x d\alpha$$

$$= \frac{a(b-a)}{b\pi\left[x^2+(b-a)^2\right]}$$

حيث استخدمنا العلاقة .... $e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i\sin\alpha x$ وحذفنـــــا الحد الثاني باعتباره دالة فردية ينعدم تكاملة وضاعفنا قيمة التكامل بعد تغير الحدود من صفر الى α بدلا من $-\infty$ الى ∞

<u>تمـــــــــــاريــــن:</u>

1) – بين ان المعادلتين (4) , (3) في نظرية تكامل فورير متكافئتان .

2) – أ- اوجد تحويل فورير جيببي التمام للدالة $f(x) = e^{-mx}$

ب – استخدم نتيجة (أ) في اثبات ان :

$$\int_0^\infty \frac{\cos pv dv}{v^2+\beta^2} = \frac{\pi}{2\beta} e^{-P\beta}$$

3) – أوجد حل المعادلة التكاملية :

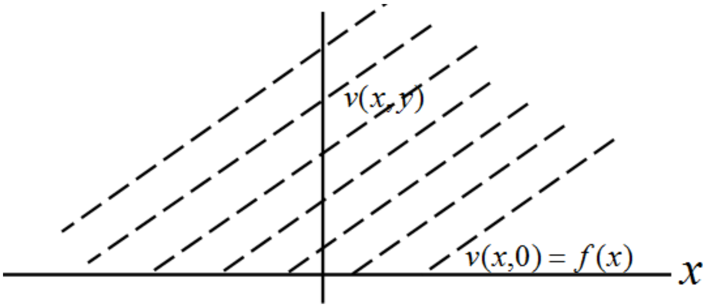
$$\int_0^\infty f(x)\sin\alpha x dx = \begin{cases} 1-\alpha : 0 \le \alpha \le 1 \\ 0 : \alpha > 1 \end{cases}$$

<u>تطبيقات على تكامل فورير :-</u>

مثال (1) اوجد الحل المحدود لمعادلة لابلاس $\nabla^2 v = 0$ لنصف المستوى $y > 0$ اذا علم انه على محور x تكون v معطاه باالدالـــــة $f(x)$

الحـــــــــــل:

المسألة الحدية هـــــــــى:



$$|v(x,y)| < M$$
$$v(x,0) = f(x),$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

لفصل المتغيرات ضع $v = XY$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$ TThen

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0 \;,\; X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$v(x,y) = (a_1 \cos\lambda x + b_1 \sin\lambda x)(a_2 e^{\lambda y} + b_2 e^{-\lambda y})$$

وبسبب ان $v(x,y)$ يجب ان تكون محدودة فإن $a_2 = 0$

$$, v(x,y) = e^{-\lambda y}(A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)$$

وبسبب عدم وجود شروط على البارامتر λ فإنه بتطبيق مبدأ الأضافة ينتج أن :

$$v(x,y) = \int_0^\infty e^{-\lambda y}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda$$

وبسبب الشرط $v(x,0) = f(x)$ فـــإن :

$$f(x) = \int_0^\infty [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda$$

ومن نظرية تكامل فورير نجــد أن :

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda u du$$

$$B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\lambda u du$$

والنتيجة أن :

$$v(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{\lambda=0}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y} f(u)\cos\lambda(x-u)dud\lambda$$

مثال (2) :بين ان نتيجة المثال السابق يمكن ان تختزل الى :

$$v(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(u)}{y^2+(u-x)^2}\,du$$

الحـــــــــل:

$$v(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left[\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda y}\cos\lambda(x-u)d\lambda\right]du$$

وبإجراء التكامل الداخلي نجــــد أن :

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda y}\cos\lambda(x-u)d\lambda=\frac{y}{y^2+(u-x)^2}$$

$$\therefore v(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(u)}{y^2+(u-x)^2}du$$

مثال (3) : أ – استخدم تحويل فوريـر لحل المسألة الحدية الاتيــــــــــه :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial u}{\partial x^2}\ ,u(x,0)=f(x)\ ,|u(x,t)<u|\ ,-\infty<x<\infty$$

ب –استنتج المعنى الطبيعي للمسألة:

الحـــــــــــــــل:

أ – بأخذ تحويـل فورير المعادلة ينتج أن :

$$\frac{d}{dt}\Im\{u\}=-k\alpha^2\Im\{u\}$$

و هذة مسألة تفاضلية عادية للدالة $\Im\{u\}$ وحلها هـــــــو:

$$\Im\{u\}=c(\alpha)e^{-k\alpha^2 t}$$

ويوضع $t=0$ نحصل على :

$$\Im\{u(x,0)\}=\Im\{f(x)\}=c(\alpha)$$

اي ان :

$$\Im\{u\}=\Im\{f\}.e^{-k\alpha^2 t} \qquad (1)$$

وحتى يصبح في الامكان تطبيق نظرية الاندماج فإنه يجب ان يكتب العامل التاني في الطرف الايمن على هيئة تكامل . و هناك تكامل معروف هـــــــو :

$$\int_0^\infty e^{-Mx^2}\cos\beta x dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{M}}e^{\frac{-\beta^2}{4M}}$$

ومن ذلك نجـــــد ان :

$$e^{-k\alpha^2 t}=2\sqrt{\frac{1}{4k\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4kt}}\cos\alpha x dx$$

اي ان :
$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{4k\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \cos\alpha x dx$$

$$e^{-k\alpha^2 t} = \Gamma\left\{\sqrt{\frac{1}{4k\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right\} \qquad (2)$$

من (1) , (2) نجـــــد ان :

$$\Im\{u\} = \Im\{f\}.\Im\left\{\sqrt{\frac{1}{4k\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right\}$$

وبتطبيق نظرية الأندماج فـــإن :

$$u(x,t) = f(x) * \sqrt{\frac{1}{4k\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(w) \sqrt{\frac{1}{4k\pi t}} e^{-\frac{(x-w)^2}{4kt}} dw$$

هذا ويمكن تبسيط النتيجة اذا اجرينا التحويل الاتـــــــى :

$$z = \frac{x-w}{2\sqrt{kt}} \text{ Or } \frac{(w-x)^2}{4kt} = z^2$$

والنتيجة هـــــى:

$$\therefore u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} f(x - 2z\sqrt{kt}) dz$$

ب – المعنى الطبيعي توصيل حراري في ساق رفيعه لا نهائيه الطول .

مثال (4) : لانهائي الطول ليعطي الازاحة الابتدائية $y(x,0) = f(x)$ ثم يترك ليهتز .اثبت ان الازاحة العامة تعطي من :

$$y(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+at)+f(x-at)\right]$$

ثم وضح معنى هذة النتيجة :

الحـــــــــل:

المسألة الحدية الخاصة بهذا المثال هــــــى:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\quad, y(x,0)=f(x)\quad, y_t(x,0)=0\quad, |y(x,t)|<M\quad, -\infty<x<\infty$$

بعد تطبيق مبدأ الاضافة (بالتكامل)فالحل العام هـــو :

$$y(x,t)=\int_0^\infty\left[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right]\cos\lambda at\,d\lambda$$

بوضع $t=0$ وتطبيق الشرط الأول فـــإن :

$$f(x)=\int_0^\infty\left[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda$$

حيث :

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\lambda u\,du,$$

$$B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin\lambda u\,du,$$

وبالتعويض في صيغة الدالة $y(x,t)$ ينتج أن :

$$y(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty} f(u)\left[\cos\lambda x\cos\lambda u+\sin\lambda x\sin\lambda u\right]\cos\lambda at\,du\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left[\cos(\lambda x-\lambda u)\right]\cos\lambda at\,du\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left[\cos(x+at-u)+\cos\lambda(x-at-u)\right]du\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda(x+at-u)\,du\,d\lambda \qquad (1)$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda(x-at-u)\,du\,d\lambda$$

ولكن احدى صيغ نظرية فورير:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda(x-u)\,du\,d\lambda \qquad (2)$$

وبمقارنة (2) و(1) نجـــد أن :

$$y(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+at)+f(x-at)\right]$$

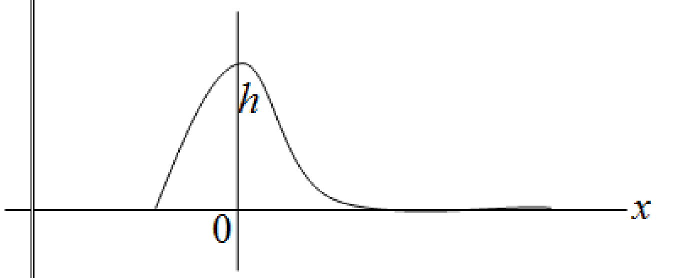
التفسير الطبيعي لهذة النتيجة لا يتم الا بعد تحليل دقيق لها كالأتي :-

نفرض أن $y(x,t)=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$

حيـث $y_2=f(x-at)\ ,y_1=f(x+at)$

وعلينا الان نتبع تغيرات الدالة $y_2 = f(x-at)$ في أزمنة مختلفة.

عند $t=0$ يكون $y_2(x,0) = f(x)$ حيث $f(x)$ هو التوزيع الابتدائي للإزاحات او بمعنى اخر ان $y_2 = f(x)$ هى الدالة التي تعطى شكل الوتر في الحالة الابتدائيه ونفرض الشكل الاتي يمثل الدالة $y_2(x,0) = f(x)$



ولنفرض ان قيمة الدالة عند
$x=0$ هي العدد h اي ان ارتفاع الوتر عند نقطة الاصل عند بداية الحركة هو العدد h.

نركز النظر على هذة القيمة h عندما ندع الزمن والمسافة تتغيران معا كما يحدث عندما يركز الأنسان نظره على قمة موجة تنتشر في البحر فيجد ان هذة القمة تتحرك .

وحيث أنه لأي زمن وايمسافة يكون $y_2 = f(x-at)$ وحيث اننا نريد ان يكون دائـــما $(x-at) = h..........$ وحيث انه $f(0) = h$.

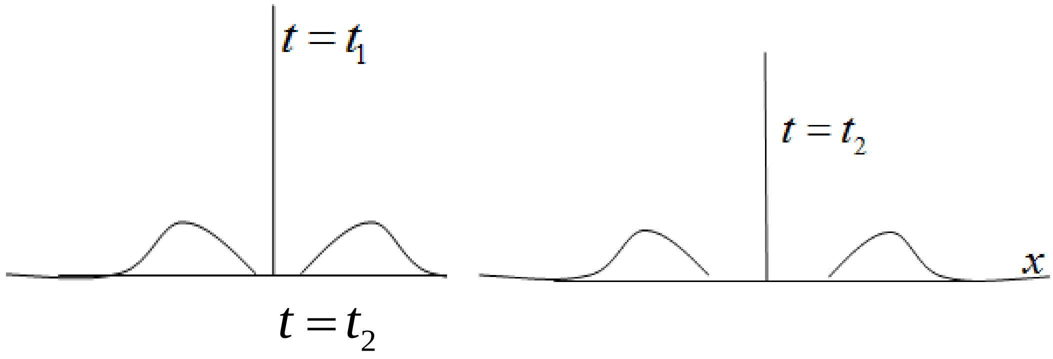
لذا فان الشرط يتحقق عندما $x-at=0$.

بمعنى اخر لان $x-at$ حيث x هنا تعبر عن النقطة التى ازاحتها L ومعنى هذا ان هذة النقطة التى لها هذة الازاحة تتحرك الى اليمين بسرعة قدرها a .

ونفس الطريقة لو تأملنا الدالة فاننا نجد ان هناك نقطة اخرى لها نفس الازاحة ولكنها تتحرك يسارا بسرعة α .

وبتطبيق هذا الاستنتاج ايضا على اي نقطة اخرى لها ازاحة وتختلف عن L ولذا نستطيع ان نقول ان الشكل الابتدائي للوتر يتحرك كله (الشكل وليس الوتر) الى اليمين والي اليسار بسرعة a .

والشكل الاتي يوضح الامر .



اما الازاحة العامة فهـــــــــــــى :

$$y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$$

وهى من حيث القيمة العددية مساويه لقيمة $f(x)$.

تمـــــــــاريـــــــــن

1) – ساق نصف لانهائية $(x \geq 0)$ معزولة الجوانب والتوزيع الحراري الابتدائي لهـــــا معطى بالدالة $f(x)$.حيث الطرف الايسر على درجه الصفر والمطلوب .

أ – كتابة المسألة الحديـــــــــة .

ب – أثبت :

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(v)e^{-k^2\lambda t}\sin\lambda v \sin\lambda x dv d\lambda$$

2) – اذا اخـــذ تحويل فورير للدالة $v(x,t)$ بالنسبة المتغير x

فاثبت ان :-

أ – $\Im\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\} = i\alpha\Gamma\{v\}$

ب – $\Im\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\} = -\alpha^2\Gamma\{v\}$

جـ – $\Im\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\Gamma\{v\}$

علما بان: $v_1 \frac{\partial v}{\partial x} \to 0$ as $x \to \pm\infty$

الفصل الثالث

Laplace Transform تحاويـــــــــل لابـــــــــلاس .....

Integral Transform التحويـــــل التكامـــــل ....

عند دراستنا لتكامل فورير رأينا انه تحت شروط معينة فان الدالة $f(x)$ يمكن تمثيلها

بالتكامل $f(x)=\int_0^\infty A(\lambda)\cos\lambda x d\lambda$

حيـــــث $A(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(u)\cos\lambda u du$

وبعد تعديل بسيط في الرموز يمكننا ان نقول انه اذا كانت $F(t)$ دالـــــة في المتغير t فان التحويل التكاملي لها هو بصفة عامـــــــة :

$$f(s)=\int_a^b F(t)K(s,t)dt$$

حيث $f(s)$ تسمى التحويل التكاملي للدالة $F(t)$ وحيث $k(s,t)$ تسمى نواة التحويل وواضح ان نوع التحويل يتوقف على كيفية اختيار النواة $k(s,t)$ كما يتوقف على حدود التكامل a,b .

فمثلا تحويل فورير نحصل عليه باختيار $k(s,t)=\cos st$ او $k(s,t)=\sin st$ وباختيار $a=0\ ,\ b=\infty$

والتحويلات التكاملية تلعب دورا هاما في حلول بعض المسائل الحدية وغيرها حيث نستبدل حل المسألة التى تتضمن الدالة $F(t)$ بحل مسألة أخـــــرى تتضمن دالة التحـــويل $f(s)$ والمســألة الثانية تكون عادة اسهل كثيرا في حلها من المسألة الأصلية وبعد إيجاد الحل للدالة...... $f(s)$ نرجع فنجرى عليهما التحويل العكسي حتى نحصل على الحل المقابل وهو الدالة $F(t)$.

اما تحويل لابلاس فيكون باختيار $K(s,t)=e^{-st}$ وتكون حدود التكامل هـــي $a=0\,,b=\infty$.

وفي هذة الحالة يكون :

$$f(s)=\int_0^\infty F(t)e^{-st}dt$$

هذا ولا يجب ان يعتبر ان تحويل فوريـر او تحويل لابلاس هو اول ما قابلنا من تحويلات اذ اننا في الحقيقة قد استخدمنا نوعا من التحويل ــ حتى وإن لم يكن تحويلا تكامليا ــــ حيث كنا نستعين على حل بعض المسائل الحسابية التى تتضمن عمليات الضرب والقسمة لبعض الأعداد او قوى الأعداد والجذور .عندئذ كنا نحسب أولا لوغاريتمات الأعداد وهذة العملية في حد ذاتها ماهــــى الا عملية تحويل العدد الى عدد اخر بطريقة معينة هــــى حساب لوغاريتم هذا العدد .بعد ذلــــك تتحول المسألة الاصلية الى مسألة اخرى تتضمن لوغاريتمات الاعداد الاعداد وليست الاعداد نفسها خيـــــث نجري على هذة اللوغاريتمات (اي التحويلات اللوغاريتميه للاعداد) عمليات حسابية اخـــري غير العمليات الأولى حيث تكون العمليات الجديدة هى مجــرد جمع وطرح التحويلات اللوغاريتميه للأعداد بدلا من عمليات الضرب والقسمة في المسألة الأصلية .وبعد الحصول على الحل اي بعد الحصول على التحويل اللوغاريتمي لجواب المسألة الأصلية نرجع فنجري التحويل العكسي عـــلى اللوغاريتم فنحصل على العدد من لوغاريتمية بعملية حسابية معينة .

وفي تحويل لابلاس يؤخذ المتغير s حقيقي ولو أنه في بعض الأحيان يؤخذ المتغير s بإعتباره متغير مركــــب .

كما أن التحويل $f(s)$ للدالة $F(t)$ يكتب كالاتــــــــي :

$$\ell\{F(t)\}= f(s)=\int_0^\infty F(t)e^{-st}dt$$

ويقال ان التحويل $f(s)$ يوجد اذا كان التكامل متقارب ويحدث هذا اذا توافرت شروط معينة في الدالة $F(t)$ سنناقشـــها فيما بعد .

وفيما يلي جدول تحويلات لبعض الدوال البسيطة .وهذة التحويلات سوف نبرهن على صحتها من خلال الامثلة والتماريـــــــن :

$F(t)$	$F(t) = f(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	$, s > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$, s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$, s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$, s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$, s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$, s > 0$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$, s > \|a\|$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$, s > \|a\|$

الدوال ذات الرتبـــة الأسيـــة .... Function of exponential order :

نظريات عن تحويل لابلاس :

(1) خاصـــية الخطيـــــــة.......... Linearity Property :

اذا كانت c_1, c_2 ثوابت وكانت $F_1(t), F_2(t)$ دوال وكانت

$f_1(s), f_2(s)$ هي تحويلات لابلاس لهـذة الدوال على الترتيب فـــإن :

$$\ell\{c_1F_1(t)+c_2F_2(t)\}=c_1\ell\{F_1(t)\}+c_2\ell\{F_2(t)\}$$
$$=c_1f_1(s)+c_2f_2(s)$$

مثال ذلك :

$$\ell\{4t^2-3\cos 2t+5e^{-t}\}=4\ell\{t^2\}-3\ell\{\cos 2t\}+5\ell\{c^{-t}\}$$
$$=4(\frac{2}{s^3})-3(\frac{s}{s^2+4})+5(\frac{1}{s+1})$$
$$=\frac{8}{s^3}-\frac{3s}{s^2+4}+\frac{5}{s+1}$$

(2) <u>خاصية الازاحة الاولى .... First Chifting Property :</u>

اذا كان $\ell\{F(t)\}=f(s)$ فإن $\ell\{e^{at}F(t)\}=f(s-a)$

مثال ذلك : $\ell\{e^{-t}\cos 2t\}=\frac{s+1}{(s+1)^2+4}=\frac{s+1}{s^2+2s+5}$

(3)<u>خاصية الأزاحة الثانيـــــة :</u>

اذا كان $\ell\{F(t)\}=f(s)$ فإن $e^{-as}f(s)=\ell\{G(t)\}$

حيث
$$G(t)=\begin{cases}F(t-a) & :t>a\\ 0 & :t<a\end{cases}$$

مثال ذلك :

حيث أن $\ell\{t^3\}=\frac{3!}{s^4}=\frac{6}{s^4}$ فإن $\frac{6e^{-2s}}{s^4}$

يكون تحويل لابلاس للدالة $G(t)$ حيث

$$G(t)=\begin{cases}(t-2)^3 & :t>2\\ 0 & :t<2\end{cases}$$

(4) خاصية تغير المقاس ....Change of scale Property:

اذا كان $\ell\{F(t)\} = f(s)$ فــإن $\ell\{F(at)\} = \frac{1}{a} f(\frac{s}{a})$

مثال ذلك $\ell\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$ لذا فــإن :

$$\ell\{\sin 3t\} = \frac{1}{3}\frac{1}{(\frac{s}{3})^2+1} = \frac{3}{s^2+9}$$

(5) تحويل لابلاس للمشتقات :

أ – إذا كان

$\ell\{F(t)\} = f(s)....$ فــأن $\ell\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$

مثال ذلك $\ell\{\cos 3t\} = \frac{s}{s^2+9}$

لذا فــإن :

$$\ell\{-3\sin 3t\} = s(\frac{s}{s^2+9}) - 1 = \frac{-9}{s^2+9}$$

ب- كذلك

$$\ell\{F^n(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$$

او على وجه العموم .

$$\ell\{F^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - ..... - sF^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0)$$

(6) تحويل لابلاس للتكاملات :

اذا كان $\ell\{F(t)\} = f(s)$ فـــإن $\ell\left\{\int_0^t F(u)du\right\} = \frac{f(s)}{s}$

مثال ذلك : $\ell\{\sin 2t\} = \dfrac{2}{s^2+4}$ لذا فـــإن :

$$\ell\left\{\int_0^t \sin 2u du\right\} = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

والتحقيق من ذلك فـــإن :

$$F(t) = \int_0^t \sin 2u du = \frac{1}{2}(1-\cos 2t)$$

$$\therefore \ell\{F(t)\} = \frac{1}{2}\left[\ell\{1\} - \ell\{\cos 2t\}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right] = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

(7) الضرب في العامل t^n :

اذا كان $\ell\{F(t)\} = f(s)$ فـــإن :

$$\ell\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s)$$

مثال ذلك $\ell\{e^{2t}\} = \dfrac{1}{s-2}$ لذا فـــــإن :

$$\ell\{te^{2t}\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

وكذلك $\ell\{t^2 e^{2t}\} = \dfrac{d^2}{ds^2}\left(\dfrac{1}{s-2}\right) = \dfrac{2}{(s-2)^3}$

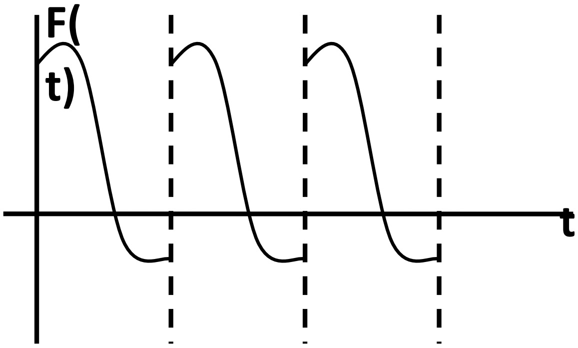
(8) القسمة على t :

إذا كان $\ell\{F(t)\} = f(s)$ فــإن $\ell\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)du$

مثال ذلك : حيث أن $\ell\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$ وحيث أن $1 == \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$

فــــإن $\ell\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{du}{u^2 \oplus 1} = \tan^{-1}(\frac{1}{s})$

(9) اذا كانت $F(t)$ دالة دورتها T كما بالشكل فـــإن :



$$\ell\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-st}}$$

(10) دالة التحويل عند النقطة اللانـهاية :

اذا كان $\ell\{F(t)\} = f(s)$ فــإن $\lim_{s\to\infty} f(s) = 0$

(11) نظريه القيمة الابتدائية .... Initial –value Theorm :

تنص هذة النظرية على أن $\lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{s\to\infty} sf(s)$

وذلك بفرض تواجد النهايات المذكوره .

(12) نظريه القيمة النهائية .... Final –value Theorm :

تنص هذة النظريه على أن $\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} sf(s)$

وذلك بفرض تواجد النهايات المذكورة .

(13) تعميم نظرية القيمة الابتدائيه :

اذا كان $\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)} = 1$ فإن قيم الدالـــــــه $F(t)$ تكون قريبة من قيم الدالة $G(t)$ عندما تكون t صغيرة ويعبر عن ذلك كالاتي :

$$t \to 0 \text{ as } F(t) \approx G(t)$$

بالمثل اذا كان $\lim_{s\to\infty}\frac{f(s)}{g(s)} = 1$ فإنه للقيم الكبيرة للمتغير s تكون قيم $f(s)$ قريبه من قيم $g(s)$ ويعبر عن ذلك كالاتي :

$$s \to \infty \text{ as } f(s) \approx g(s)$$

لهذا يمكن اعادة صياغه نظرية القيمة الابتدائية كالاتي :

اذا كان $F(t) \approx G(t) \text{ as } \quad t \to 0$

فـــإن $f(s) \approx g(s) \text{ as } \quad s \to \infty$

حيث $f(s) = \ell\{F(t)\}, \qquad g(s) = \ell\{g(t)\}$

(14) تعميم نظرية القيمة النـهائيـــــــــة :

اذا كان $F(t) \approx G(t)$ as $t \to \infty$ فــإن $f(s) \approx g(s)$ as $s \to 0$

حيث $g(s) = \ell\{g(t)\}$, $f(s) = \ell\{F(t)\}$

طرق لإيجــاد تحويلات لابلاس :

1) الطريقة المباشرة $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt$

2) طريقة المتسلسلات اذا كانت $F(t)$ يمكن كتابتها كمتسلسله قوى – اي اذا كان :

$$F(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

فان تحويل لابلاس لها يمكن ايجاده كمجموع تحويلات لابلاس لحدود المتسلسه اي ان :

$$\ell\{F(t)\} = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1 t}{s^2} + \frac{a_2 t^2}{s^3} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! a_n}{s^{n+1}}$$

على شرط ان تكون المتسلسه الاخيرة تقاربيـــــــه :

3) الاشتقاق بالنسبه لبارامتر وهذا ماسيتضح من الامثلة.

4) استخدام جداول التحويــــــــــــل .

أمثلة و تمـاريــــــــــن

1) اثبت ان: (أ) $\ell\{1\} = \dfrac{1}{s}$

(ب) $\ell\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$

(ج) $\ell\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$

2) اثبت ان (أ) $\ell\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$

(ب) $\ell\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$

3) اثبت ان (أ) $\ell\{\sinh at\} = \dfrac{a}{s^2-a^2}$

(ب) $\ell\{\cosh at\} = \dfrac{s}{s^2-a^2}$

4) اوجد $\ell\{F(t)\}$ حيث $F(t) = \begin{cases} 5: \ 0 < t < 3 \\ 0: \ t > 3 \end{cases}$

5) اوجد $\ell\{4e^{5t} + 6t^3 - 3\sin 4t + 2\cos 2t\}$

6) برهن على خاصية الازاحة الاولى .

7)اوجد كلا مما يأتي :

$$\ell\{t^2 e^{3t}\}\ ,\ \ell\{e^{-2t}\sin 4t\}\ ,\ \ell\{e^{3t}\cosh 5t\}\ ,\ \ell\{e^{-2t}(3\cos 6t - 5\sin 6t)\}$$

8) اثبت خاصية الازاحة الثانية .

9) اذا كانت

$$F(t) = \begin{cases} \cos(t - \frac{2\pi}{3}) : t > \frac{2\pi}{3} \\ 0 \qquad\qquad\qquad : t < \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

فأوجد $\ell\{F(t)\}$

10) اثبت خاصية تغير المقياس .

11) اذا كان $\ell\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \tan^{-1}(\frac{1}{s})$ فـــأوجد $\ell\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}$

12) اذا كان $\ell\{F(t)\} = f(s)$ فأثبت ان:

$$\ell\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$$

13) اذا كان $\ell\{F(t)\} = f(s)$ فأثبت أن:

$$\ell\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$$

14) اذا كانت $\ell\{F(t)\} = f(s)$ فاثبت ان :

$$\ell\left\{\int_0^t F(u)du\right\} = \frac{f(s)}{s}$$

15) اوجد $\ell\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u} du\right\}$

16) أثبت ان $\ell\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s)$

17) أ- اوجد $\ell\{t \sin at\}$ ب- أوجد $\ell\{t^2 \cos at\}$

18) اذا كان $\ell\{F(t)\} = f(s)$ فأثبت ان : .

$$\ell\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)du$$

19) أ- أثبت ان $\int_0^\infty \frac{F(t)}{t}dt = \int_0^\infty f(u)du$

ب- أثبت ان $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$

20) اذا كانت $F(t)$ دورية دورتها T فاثبت ان:

$$\ell\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-sT}}$$

21) أ- ارسم منحنى الدالة $F(t) = \begin{cases} \sin(t) : t < \pi \\ 0 \quad : \pi < t < 2\pi \end{cases}$ علما بإن الدالة دورية و دورتها 2π

ب- اوجد $\ell\{F(t)\}$

22) اثبت نظرية القيمة الابتدائية وهى $\lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{s\to\infty} sf(s)$

23) اثبت نظرية القيمة الابتدائية وهى $\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to\infty} sf(s)$

24) حقق نظريات القيمة الابتدائية والنهائية للدالة .... $F(t) = 3se^{-2t}$

حلول بعض التمـــــــــــــارين

2) المطلوب اثبات (أ) $\ell\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$

(ب) $\ell\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2 + a^2}$

الحـــــــــــل

أ- $\ell\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st} \sin at dt$

$$= \frac{e^{-st}(-\sin at - a\cos at)}{s^2 + a^2} \Big|_0^\infty = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

ب- $\ell\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos at dt$

$$= \frac{e^{-st}(-a\cos at + a\sin at)}{s^2 + a^2} \Big|_0^\infty = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$= \frac{e^{-st}(-a\cos at + a\sin at)}{s^2 + a^2} \Big|_0^\infty = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

حل اخـــــــر

$$\ell\{e^{iat}\} = \frac{1}{s-ia} = \frac{s+ia}{s^2+a^2}$$

ولكن $e^{iat} = \cos at + i\sin at$ ومن ذلك ينتج ان :

$$\ell\{\cos at\} + i\ell\{\sin at\} = \ell\{e^{iat}\} == \frac{s+ia}{s^2+a^2}$$

وبمساواة الحقيقي والتخيلي نحصل على التحويلين في وقت واحد .

(4
$$F(t) = \begin{cases} 5 & : 0 < t < 3 \\ 0 & : t > 3 \end{cases}$$

$$\ell\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt = \int_0^3 5e^{-st}dt + \int_3^\infty 0.e^{-st}dt$$

$$\ell\{F(t)\} = 5\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^3 = \frac{5(1-e^{-3s})}{s}$$

(6
$$\ell\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt = f(s)$$

$$\ell\{e^{at}F(t)\} = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}F(t)dt = f(s-a)$$

(7

$$\ell\{t^2\} = \frac{2}{s^3}, \quad then\ \ell\{t^2e^{3t}\} = \frac{2}{(s-a)^3} \quad ,then\ \ \ell\{\sin 4t\} = \frac{4}{s^2+16} \quad ,$$

$$\ell\{e^{-2t}\sin 4t\}=\frac{4}{(s+2)^2+16} \quad ,then\ \ell\{\cosh 5t\}=\frac{s}{s^2-25} \quad ,$$

$$\ell\{e^{4t}\cosh 5t\}=\frac{s-4}{(s-4)^2-25},$$

حل اخـــر:

$$\ell\{\cosh 5t\}=\frac{s}{s^2-25},$$

$$\ell\{e^{4t}\cosh 5t\}=\ell\left\{e^{4t}\left(\frac{e^{5t}+e^{-5t}}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\ell\{e^{9t}\}+\frac{1}{2}\ell\{e^{-t}\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-9}+\frac{1}{s+1}\right)$$

$$=\frac{s-4}{s^2-8s-9}=\frac{s-4}{(s-4)^2-25}$$

$$\ell\{3\cos 6t-5\sin 6t\}=3\left(\frac{s}{s^2+36}\right)-5\left(\frac{6}{s^2+36}\right)=\frac{3s-30}{s^2+36}$$

$$\therefore\ \ell\{e^{-2t}(3\cos 6t-5\sin 6t)\}=\frac{3(s+2)-30}{(s+2)^2+36}$$

(8

$$G(t)=\begin{cases}F(t-a) & :t>a\\ 0 & :t<a\end{cases}$$

$$\ell\{G(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}G(t)dt=\int_0^a e^{-st}G(t)dt+\int_a^\infty e^{-st}G(t)dt$$

$$= 0 + \int_{t=a}^{\infty} e^{-st} F(t-a)dt$$

باستخدام التحويل $u = t - a$ نجد أن :

$$\ell\{G(t)\} = \int_{u=0}^{\infty} e^{-s(u+a)} F(u)du = e^{-as}\int_{0}^{\infty} e^{-su} F(u)du = e^{-as} f(s)$$

(9

$$F(t) = \begin{cases} \cos(t - \frac{2\pi}{3}) & : t > \frac{2\pi}{3} \\ 0 & : t < \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\ell\{F(t)\} = \int_{0}^{2\pi/3} 0.e^{-st}dt + \int_{2\pi/3}^{\infty} e^{-st}\cos(t - \frac{2\pi}{3})dt$$

$$= \int_{u+0}^{\infty} e^{-s(u+\frac{2\pi}{3})}\cos u du = e^{\frac{-2\pi s}{3}}\int_{u+0}^{\infty} e^{-su}\cos u du = \frac{se^{-\frac{2\pi s}{3}}}{s^2+1}$$

كان هذا هو الحل المباشر اما الحل بتطبيق نظرية الأزاحة الثانيه فهو :

$$\ell\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1} \therefore \ell\{F(t)\} = \frac{se^{-\frac{2\pi s}{3}}}{s^2+1}$$

(14 نفرض ان $G(u) = \int_{0}^{t} F(u)du$ ومن ذلك ينتج أن :

$$G'(t) = F(t), G(0) = 0$$

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين ينتج أن :

$$\ell\{F(t)\} = \ell\{G'(t)\} = s\ell\{G\} - G(0) = s\ell\{G(t)\}$$

$$\therefore \ell\left\{\int_0^t F(u)du\right\} = \ell\{G\} = \frac{f(s)}{s}$$

(16
$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt$$

$$\frac{df}{ds} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} F(t)dt = -\int_0^\infty e^{-st} tF(t) = -\ell\{tF(t)\}$$

ومن هذا تجد ان النظرية صحيحة في حالة $n=1$ ولإثباتصحتها في الحالة العامة نفترض صحتها في حالة $n=k$ اي نفرض ان :

$$\int_0^\infty e^{-st}\left[t^k F(t)\right]dt = (-1)^k f^k(s)$$

$$\therefore \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}\left[t^k F(t)\right]dt = (-1)^k f^{(k+1)}(s)$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-st}\left[t^{k+1} F(t)\right]dt = (-1)^{k+1} f^{(k+1)}(s)$$

اي انه اذا كانت النظرية صحيحة في حالة $n=k$ فهى صحيحة في حالة $n=k+1$ وحيث انها صحيحة في حالة $n=1$ فهى صحيحة على الاطلاق .

18) نفرض ان $G(t) = \dfrac{F(t)}{t}$ اي ان $F(t) = tG(t)$

بأخذ تحويل لابلاس ينتج أن :

$$\therefore\ f(s) = -\frac{dg}{ds}\ \ell\{F(t)\} = -\frac{d}{ds}\ell\{G(t)\}$$

$$\therefore\ g(s) = -\int_{\infty}^{s} f(u)du = \int_{s}^{\infty} f(u)du$$

وهنا أخترنا الحد الادنى المتكامل $s=\infty$ لانه عند هذة النقطة يكون

$$\lim_{s\to\infty} f(s) = 0$$

(20

$$\ell\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt = \int_0^T e^{-st}F(t)dt + \int_T^{2T} e^{-st}F(t)dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st}F(t)dt + ...$$

في التكامل التاني نضع $t = u+T$ وفي الثالث نضع $t = u+2T$

وهكذا

$$\ell\{F(t)\} = \int_0^T e^{-su}F(u)du + \int_0^T e^{-s(u+T)}F(u+T)du + \int_0^T e^{-s(u+2T)}F(u+2T)du + ...$$

$$= \int_0^T e^{-su}F(u)du + e^{-sT}\int_0^T F(u)du + e^{-sT}\int_0^T F(u)du + e^{-2sT}\int_0^T F(u)du + ...$$

$$= (1+e^{-sT} + e^{-2sT} + ...)\int_0^T e^{-su}F(u)du$$

$$= \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-su}F(u)du$$

$$\ell\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F'(t)dt = sf(s) - F(0) \quad (22$$

وحيث انه يفترض ان $F'(t)$ من رتبة أسية فإن :

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty e^{-st}F'(t)dt=0$$

اي ان $0=\lim_{s\to\infty}sf(s)-F(0)$

$$\therefore \lim_{s\to\infty}sf(s)=F(0)=\lim_{t\to 0}F(t)$$

الفصل الرابع

تحويـــلات لابلاس العكسي

The Inverse Laplace Transform

اذا كان $f(s)=\ell\{F(t)\}$ فان الدالة $F(t)$ تسمى تحويل لابلاس العكسي للدالة $f(s)$ ويكتب $F(t)=\ell^{-1}\{f(s)\}$ مثال ذلك

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}=e^{-3t}$$

وبطبيعة الحال اذا وجد جدول لتحويلات لابلاس فإنه يمكن عمل جدول أخر لتحويل لابلاس العكسي كما انه من الخاصة بتحويل لابلاس يمكن اشتقاق النظريات والقواعد المقابلة للتحويل العكسي وهـــــى :-

1- نظرية الخطية:

$$\ell^{-1}\{c_1 f_1(s)+c_2 f_2(s)\}=c_1\ell^{-1}\{f(s)\}+c_2\ell^{-1}\{f(s)\}$$

$$=c_1F_1(t)+c_2F_2(t)$$

$$\left\{\frac{4}{s-2}-\frac{3s}{s^2+16}+\frac{5}{s^2+4}\right\}=4\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}-3\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\}+5\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

مثال ذلك :

$$=4e^{2t}-3\cos 4t+\frac{5}{2}\sin 2t$$

2-خاصية الازاحة الأولى :

$$\ell^{-1}\{f(s-a)\}=e^{2t}F(t)$$

مثال ذلك :حيث ان $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{2}\sin 2t$ فإن :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\right\}=\frac{1}{2}e^{t}\sin 2t$$

3-خاضية الازاحة الثانية:

$$\ell^{-1}\{e^{-as}f(s)\}=\begin{cases}F(t-a):t>a\\ 0:t<a\end{cases}$$

مثال ذلك حيث أن : $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$ فإن :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi s}{3}}}{s^2+1}\right\}=\begin{cases}\sin(t-\frac{\pi}{3}) & : t>\frac{\pi}{3}\\ 0 & : t<\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

4-خاصية تغيير المقياس :

$$\ell^{-1}\{f(\lambda s)\}=\frac{1}{\lambda}F(\frac{t}{\lambda})$$

مثال ذلك : $\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\}=\cos 4t$ وينتج عن ذلك ان :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{2s}{(2s)^2+16}\right\}=\frac{1}{2}\cos\frac{4t}{2}=\frac{1}{2}\cos 2t$$

5- $\ell^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n}f(s)\right\}=(-1)^n t^n F(t)$

مثال ذلك: $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$ وينتج عن ذلك ان :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right\}=-t\sin t$$

-6 $$\ell^{-1}\left\{\int_s^{\infty} f(u)du\right\} = \frac{F(t)}{t}$$

مثال ذلك حيث أنه :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\} = 1 - e^{-t}$$

فإن $$\ell^{-1}\left\{\int_s^{\infty} (\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1})du\right\} = \ell^{-1}\left\{\ln(1+(\frac{1}{s})\right\} = \frac{1-e^{-t}}{t}$$

-7 إذا كان $\ell^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ وكان $F(0) = 0$

فإن $\ell^{-1}\{sf(s)\} = F'(t)$ وإذا كان $F(0) \neq 0$ فإن

$$\ell^{-1}\{sf(s) - F(0)\} = F'(t)$$

مثال ذلك حيث أن $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$ وحيث أن $\sin 0 = 0$

فإن $$\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \frac{d}{dt}\sin t = \cos t$$

-8 $$\ell^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u)du$$

ونلاحظ من (8) , (7) ان الضرب في s والقسمة على s تأثيره على $F(t)$ هو الاشتقاق والتكامل على الترتيب .

مثال ذلك : حيث ان $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2t$ فإن :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}=\int_0^t \frac{1}{2}\sin 2u du=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)$$

9- نظرية الادماج Convolution Theoem: ....

تنص على انه اذا كان $\ell^{-1}\{f(s)\}=F(t) \quad , \ell^{-1}\{g(s)\}=G(t)$

فإن
$$\ell^{-1}\{f(s).g(s)\}=\int_0^t F(u)G(t-u)du=F*G$$

مثال ذلك حيث أن $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}=e^{2t} \quad , \quad \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}=e^{t}$ فإن

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\}=\int_0^t e^u e^{2(t-u)}du=\int_0^t e^{2t}e^{-u}du$$

$$=e^{2t}\int_0^t e^{-u}du = e^{2t}-e^t$$

بعض الطرق للحصول على تحويل لابلاس العكســــــــــى :

1- الكسور الجزيئية : اذا كان كل من $P(s),Q(s)$..... كثيرات حدود وكانت درجة اقل من درجه $Q(s)$.

فإن الكسر $\frac{P(s)}{Q(s)}$ يمكن كتابته كمجموع عدة كسور جزيئية بالصيغه:

$$\frac{A}{(as+b)^r} \quad , \quad \frac{AS+B}{(as^2+bs+c)^r}$$

وبعد إيجاد تحويل لابلاس العكسي لكل كسر والجمع نحصل على التحويل العكسي للكسر $\frac{P(s)}{Q(s)}$

مثال ذلك :

$$\frac{2S-5}{(3s-4)(2s+1)^3}=\frac{A}{3s-4}+\frac{B}{(2s+1)^3}+\frac{C}{(2s+1)^2}+\frac{D}{2s+1}$$

وكذلك:

$$\frac{3s^2-4s+2}{(s^2+2s+4)^2(s-5)}=\frac{As+B}{(s^2+2s+4)^2}+\frac{Cs+D}{s^2+2s+4}+\frac{E}{s-5}$$

2- طريقة المتسلسلات :

اذا كان $f(s)=\frac{a_0}{s}+\frac{a_1}{s^2}+\frac{a_2}{s^3}+..........$

فإن

$$\ell^{-1}\{f(s)\}=F(t)=a_0+\frac{a_1}{t}+\frac{a_2t^2}{2!}+\frac{a_3t^3}{3!}+..........$$

3- طريقة الأشتقاق بالنسبة لبارامتر وهو مايتضح من الأمثلة .

4- استخدام الجدول .

5- صيغة التحويل العكسي للمركب .

6- مفكوك هيفيسيد Heaviside Expansion Formula.........

وتنص على انه اذا كان كل من $Q(s)$, $P(s)$ كثيرات الحدود وكانت درجة $P(s)$ أقل من درجة $Q(s)$ وكان للدالة $Q(s)$ عدد قدره n من الجزور المختلفة هى $\alpha_k, k=1,2,....., n$

فــإن :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q(\alpha_k)}e^{\alpha_k t}$$

أمثلة و تمـاريـــــــــن

مقدمـــــــة : العدد $n!$ دالة للعدد n وهذه الدالة تعتبر حالة خاصة من الدالة المسماه دالة جاما $\Gamma(x)$. وفى الوقت الذى يكون فيه $n!$ معرفة فقط للاعداد الصحيحة الموجبه فإن $\Gamma(x)$ معرفة للأعداد الصحيحة والكسرية والسالبة والموجبة . وفى حالة x صحيح موجب

فإن $\Gamma(x+1) = n!$ وفى حالة $x = \frac{1}{2}$ فإن $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

وفى حالة n صحيح موجب فإن $n! = n(n-1)(n-2)$ 2.1

وفى الحالة العامة للدالة $\Gamma(x)$ نوجد صيغة مشابهة يوضحها المثال الأتى :

$$\Gamma(\frac{9}{2}) = \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{105}{16}\sqrt{\pi}$$

1) أ- أوجد $\ell^{-1}\left\{\frac{5s+4}{s^3} - \frac{2s-18}{s^2+9} + \frac{24-30\sqrt{s}}{s^4}\right\}$

ب-أوجد $\ell^{-1}\left\{\frac{6}{2s-3}-\frac{3+4s}{9s^2-16}+\frac{8-6s}{16s^2+9}\right\}$

2) أوجد كلا مما يأتى :

أ- $\ell^{-1}\left\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\}$ ب- $\ell^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$

ج- $\ell^{-1}\left\{\frac{4s+12}{s^2+8s+16}\right\}$ د- $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2s+3}}\right\}$

3) إذا علم أن $\frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}=\ell^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s^{\frac{1}{2}}}\right\}$ فأوجد $\ell^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{a}{s}}}{s^{\frac{1}{2}}}\right\}$

4) طبق القاعدة .... $\ell^{-1}\left\{f^{(n)}(s)\right\}=(-1)^n t^n F(t)$ لإيجـاد
$\ell^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$

5) أوجد $\ell^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\}$

6) إستخدم القاعدة .... $\ell^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\}=\int_0^t F(u)\,du$ لإيجـاد
$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\}$

7) إذا علم أن $\ell^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}=\frac{1}{2}t\sin t$ فأوجد $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$

8) بتطبيق نظرية الأندماج أوجد كلا مما يأتى :

أ- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$ ب- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s+1)^2}\right\}$

9) بإستخدام الكسور الجزيئية أوجد كلا مما يأتى :

أ- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$ ب- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\}$

ج- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\}$ د- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{3s+1}{(s-1`)(s^2+1)}\right\}$

هـ - $\ell^{-1}\left\{\dfrac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right\}$

10) أثبت صيغة مفكوك هفيسيد .

11) بتطبيق مفكوك هفيسيد أوجد :

أ- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\}$

ب- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$

حلول بعض التمـــــــاريـــــن

1)أ-
$$\ell^{-1}\{.......\}=\ell^{-1}\left\{\frac{5}{s^2}+\frac{4}{s^3}-\frac{2s}{s^2+9}+\frac{18}{s^2+9}+\frac{24}{s^4}-\frac{30}{s^{7/2}}\right\}$$

$$=5t+4(\frac{t^2}{2!})-2\cos 3t+18(\frac{1}{3}\sin 3t)+24\frac{t^3}{3!}-30(\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{7}{2})})$$

$$=5t+2t^2-2\cos 3t+6\sin 3t+4t^3-\frac{16}{\sqrt{\pi}}t^{5/2}$$

ب-
$$\ell^{-1}\{.......\}=\ell^{-1}\left\{\frac{3}{s-3/2}-\frac{1}{3}(\frac{1}{s^2-16/9})-\frac{4}{9}(\frac{s}{s^2-16/9})+\frac{1}{2}(\frac{1}{s^2+9/16})-\frac{3}{8}(\frac{s}{s^2+9/16})\right\}$$

$$=3e^{3t/2}-\frac{1}{4}\sinh\frac{4}{3}t-\frac{4}{9}\cosh\frac{4}{3}t+\frac{2}{3}\sin\frac{3}{4}t-\frac{3}{8}\cos\frac{3}{4}t$$

3) أ-
$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^4}\right\}-e^{2t}\,\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}=t^3\frac{e^{2t}}{3!}=\frac{1}{6}t^3e^{2t}$$

ومن ذلك ينتج أن :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\right\}=\begin{cases}\frac{1}{6}(t-5)^3e^{2(t-5)} & :t>5\\ 0 & :t<5\end{cases}$$

$$=\frac{1}{6}(t-5)^3 \quad e^{2(t-5)}\, u(t-5)$$

حيث $u(t-5)$ هي دالة الخطوة الوحدة المنسوبة الى هيفيسيد وتعريفها كالاتي :

$$u(t-a)=\begin{cases} 1 & : t>a \\ 0 & : t<a \end{cases}$$

ب- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+25}\right\}=\cos 5t$

$$\therefore \ell^{-1}\left\{\frac{s\, e^{-\frac{4}{5}\pi s}}{s^2+25}\right\}=\cos\,(5t-\frac{4}{5}\pi)\; u\,(t-\frac{4}{5}\pi)$$

جـ- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2+s+1}\right\}=\ell^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}=\ell^{-1}\left\{\dfrac{(s+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}$

$$=\ell^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}+\frac{1}{2}\,\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,t+\frac{1}{3}\,e^{-\frac{1}{2}t}\sin\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,t$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{\sqrt{3}}(3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,t+\sin\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,t\,)$$

$$\therefore \ell^{-1}\left\{\frac{(s+1)\,e^{-\pi s}}{s^2+s+1}\right\}=\frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{-\frac{1}{2}(t-\pi)}\left[\sqrt{3}\,\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)+\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)\bullet u(t-\pi)\right]$$

د- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+4)^{5/2}}\right\}=e^{-4t}\;\ell^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{5/2}}\right\}=e^{-4t}\;\dfrac{t^{3/2}}{\Gamma(5/2)}=-\dfrac{5}{3\sqrt{\pi}}\,t^{3/2}\;e^{-4t}$

8) أ- $\ell^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2} \cdot \frac{1}{s^2+a^2}\right\}$

ولكن $\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at \quad , \quad \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{\sin at}{a}$

$$\therefore \ \ell^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \frac{1}{a}\int_0^t \cos au \sin a(t-u)\, du$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^t \cos au(\sin at \cos au - \cos at \sin au)\, du$$

$$= \frac{1}{a}\sin at \int_0^t \cos^2 au\, du - \frac{1}{a}\cos at \int_0^t \sin au \cos au\, du$$

$$= \frac{1}{a}\sin at \int_0^t \frac{1+\cos 2au}{2} du - \frac{1}{a}\cos at \int_0^t \frac{\sin 2au}{2} du$$

$$= \frac{1}{a}\sin at \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2at}{4a}\right) - \frac{1}{a}\cos at \left(\frac{1-\cos 2at}{4a}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\sin at \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin at \cos at}{2a}\right) - \frac{1}{a}\cos at \left(\frac{\sin^2 at}{2a}\right)$$

$$= \frac{t \sin at}{2a}$$

ب- $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t \quad , \ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = t\ e^{-t}$

$$\therefore \quad \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2\ (s+1)^2}\right\} = \int_0^t u\ e^{-u}\ (t-u)\ du\ = \int_0^t e^{-u}\ (ut-u^2)\ du$$

وبعد إجراء التكامل بالتجزئ نحصل على :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2\ (s+1)^2}\right\} = t\ e^{-t}\ +2\ e^{-t}\ +t-2$$

12) جـ -

$$\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s-2)^3} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{(s-2)}$$

للحصول على $A\ ,B\ ,C\ ,D$ نضرب الطرفين فى $(s+1)$ ثم نضع $s=-1$,

بعد ذلك نضرب الطرفين فى $(s-2)^3$ ثم نضع $s=2$, ومن ذلك نحصل على كل من $A\ ,\ B$, ولكن هذه الطريقة لا تصلح بعد ذلك . وللحصول على $C\ ,D$ نعوض عن S بقيمتين عدديتين مناسبتين وذلك بعد أن نكون إستفدنا من تعيين $A\ ,\ B$ بالطريقة السابقة والنتيجة هى :

$$\ell^{-1}\{.......\} = -\ \frac{1}{3}\ e^{-t}\ -\frac{7}{2}\ t^2\ e^{2t}\ +4\ t\ e^{2t}\ +\frac{1}{3}\ e^{2t}$$

10) - حيث أن $Q(s)$ كثيرة حدود جذورها مختلفة وهى

$$\alpha_1\ ,\alpha_2\ ,..........,\alpha_n$$

$$\therefore \quad \frac{p(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-\alpha_1} + \frac{A_2}{s-\alpha_2} + ...,\frac{A_n}{s-\alpha_n}$$

بضرب الطرفين فى $s-\alpha_k$ وأخذ نهاية الطرفين عندما $s\to\alpha_k$ ينتج أن :

ولكن عند التعويض من $s=\alpha_k$

$$A_k=\lim_{s\to\alpha_k}\frac{p(s)}{Q(s)}(s-\alpha_k)=\lim_{s\to\alpha_k}p(s)\left\{\frac{s-\alpha_k}{Q(s)}\right\}=P(\alpha_k)\lim_{s\to\alpha_k}\left\{\frac{s-\alpha_k}{Q(s)}\right\}$$

فى الكسر $\dfrac{s-\alpha_k}{Q(s)}$ فإننا نحصل عتى كمية

غير معينة بالصورة $\dfrac{0}{0}$ ولكن بتطبيق قاعدة لوبيتال نحصل على :

$$\lim_{s\to\alpha_k}\left\{\frac{s-\alpha_k}{Q(s)}\right\}=\frac{1}{Q'(\alpha_k)}$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$A_k=P(\alpha_k)\left\{\frac{1}{Q'(s)}\right\}=\frac{p(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$$

وبالتالى يكون :

$$\frac{p(s)}{Q(s)}=\frac{p(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}\frac{1}{s-\alpha_1}+\frac{p(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)}\frac{1}{s-\alpha_2}+\dots\dots\dots\dots\dots\dots+\frac{p(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}\frac{1}{s-\alpha_n}$$

$$\therefore\quad \ell^{-1}\left\{\frac{p(s)}{Q(s)}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\frac{p(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}\,e^{\alpha_k t}$$

(11 أ-

$$p(s)=3s+1\quad,\ Q(s)=s^3-s^2+s-1\quad,\ Q'(s)=3s^2-2s+1$$

$$\alpha_1=1\quad,\quad \alpha_2=i\quad,\quad \alpha_3=-i$$

ب-

$$\ell^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}=\frac{P(1)}{Q'(1)}\,e^{t}+\frac{P(i)}{Q'(i)}\,e^{it}+\frac{P(-i)}{Q'(-i)}\,e^{-it}$$

$$= \frac{4}{2}\, e^{t} + \frac{3i+1}{-2-2i}\, e^{it} + \frac{-3i+1}{-2+2i}\, e^{-it}$$

$$= 2e^{t} + \left(-1-\frac{1}{2}\, i\right)(\cos t + i\sin t) + \left(-1+\frac{1}{2}\, i\right)(\cos t - i\sin t)$$

$$= 2e^{t} - 2\cos t + \sin t$$

الفصل الخامس

تطبيق تحويـــــــــل لابــــــــــلاس فى حل المعادلات التفاضلية العادية

المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات الثابتة :

يستخدم تحويل لابلاس فى حل هذا النوع من المعادلات . فمثلا إذا كان المطلوب حل المعادلة الخطية من الرتبة الثانية :

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+\alpha\frac{dY}{dt}+\beta Y=F(t) \quad ,or\ Y''+\alpha Y'+\beta Y=F(t)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

حيث α,β ثوابت وحيث يكون الحل محققا للشروط الابتدائية :

$$Y(0)=A \quad , \quad Y'(0)=B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

حيث $A\,,B$ ثوابت معلومة . فإنه بأخذ تحويل لابلاس لطرفى المعادلة (1) وتطبيق الشروط (2) نحصل

غلى معادلة جبرية تتضمن الدالة $y(s)=\ell\{Y(t)\}$. ويصبح المطلوب هو إيجاد التحويل العكسى للدالة $y(s)$.

هذه الطريقة يمكن أيضا تطبيقها على معادلات من رتب أعلى من الرتبة الثانية كما سيتضح من الامثلة .

المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات النتغيره:

يستخدم تحويل لابلاس لحل بعض المعادلات من هذا النوع خاصه عندما تكون حدود المعادله بالصورة:

حيث يكون تحويل لابلاس لمثل هذا الحد هو: $t^mY^{(n)}(t)$

$$(-1)^m\frac{d^m}{ds^m}\ell\{Y^{(n)}(t)\}$$

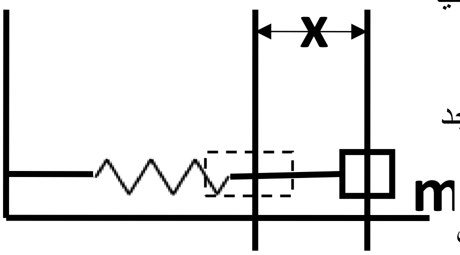
وسنري في التمارين امثله لهذا النوع.

المعادلات التفاضلية الأتيه:

يستخدم تحويل لابلاس لحل اثنين او اكثرمن المعادلات التقاضليه الأتيه كما سيتضح من الامثله .

تطبيقات الميكانيكا:

نفرض أن الكتلة m مربوطة بخيط مرن مثبت طرفه فى O وأن الكتلة قابلة الحركة على مستوى أفقى أملس كما بالشكل



فإذا كانت $X(t)$ هى الازاحة اللحظية للكتلة فى الزمن t عن موضع الاتزان فإنه توجد قوة شد وتسمى القوة الراجعة وتساوى $-KX$ حيث K ثابت الخيط .

وطبقا لقانون نيوتن فإن

$$m\frac{d^2X}{dt^2}=-K\,X \qquad or \qquad mX''+kX=0$$

أما إذا كان المستوى الذى تتحرك عليه الكتلة خشنا أو إذا كانت الكتلة تتحرك فى وسط مقاوم فإن معادلة الحركة تصبح :

$$m\frac{d^2X}{dt^2}=-K\,X-\beta\,\frac{dX}{dt} \qquad or \qquad mX''+\beta\,X'+kX=0$$

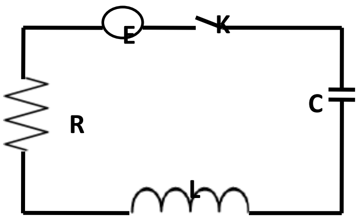
حيث β ثابت يسمى ثابت المقاومة .

كذلك فإنه فى أحيان كثيرة تكون هناك قوة خارجية $\phi(t)$ تتغير مع الزمن وتؤثر على الكتلة وفى هذه الحالة تصبح معادلة الحركة كالاتـــــــي

$$m\frac{d^2X}{dt^2}=-K\,X-\beta\,\frac{dX}{dt}+\phi(t) \qquad or \qquad mX''+\beta\,X'+kX=\phi(t)$$

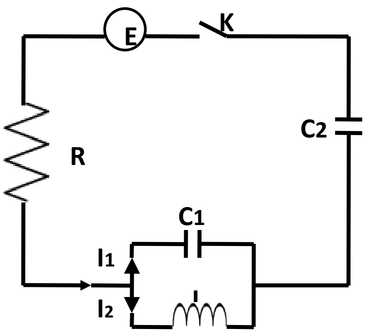
وبإجراء تحويل لابلاس على طرفى المعادلة وإستخدام الشروط الابتدائية يمكن الحصول على الازاحة اللحظية $X(t)$.

تطبيقات الدوائر الكهربية :



فى الشكل دائرة كهربية بسيطة تحتوى على مولدا وبطارية قوتها الدافعة الكهربية E ومقاومة R وملف معامل الحث له L ومكثف سعته C وعندما تغلق الدائرة بواسطة المفتاح K

ونجد أن الشحنة Q تندفع فى الدائرة حيث يسرى فى الدائرة تيار $\frac{dQ}{dt}$ كما أنه يمكن معالجة دوائر أكثر من ذلك تعقيدا كالدائرة التى بالشكل ويكون المطلوب فى الحل هو معرفة الشحنة Q والتيار I كدوال للزمن



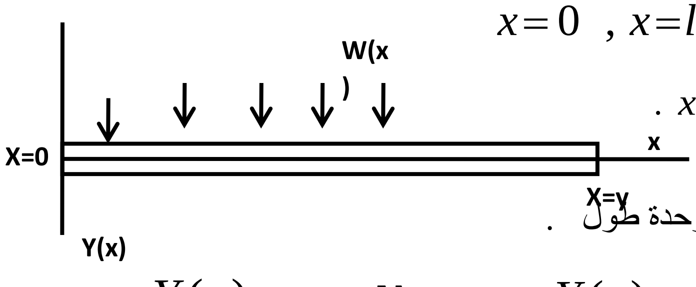
التى تجقق المعادلة التفاضلية الاتية : t

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{Q}{C}=E$$

أما الدائرة الثانية فتحتاج لحل معادلتين تفاضليتن انيتين .

كما اننا سنلاحظ التشابه الكبير بين الدائرة الكهربائية البسيطة ومعادلة الحركة للكتلة فى وسط مقاوم عندما تتحرك أفقيا بعد ربطها بخيط مرن .

تطبيقات الاعتاب:



نفرض أن العتب الذى طرفاه $x=0\ ,\ x=l$ والمنطبق محوره على محور x . وبفرض تحميل عرضى $w(x)$ لكل وحدة طول .

نتيجة لذلك يحدث إنجراف العتب $Y(x)$ عند النقطة X . والدالة $Y(x)$ تخضع للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^4Y}{dx^4}=\frac{w(x)}{EI}$$ حيث EI ثابت .

كما أن الشروط الحدية لهذه الحالة تتوقف على طريقة تثبيت العتب .

فإذا كان الطرف ثابتا كان الشرط عنده هو $Y = Y' = 0$ وإذا كان الطرف متصلا اتصالا مفصليا أو كان مرتكزا إرتكازا حرا فإن الشرط عنده هو $Y = Y'' = 0$ أما الطرف الحر فالشرط عنده هو $Y'' = Y''' = 0$.

<u>المعادلات التفاضلية الجزيئيـــة:</u>

يستخدم تحويل لابلاس كثيرا في حل المعادلات التفاضلية الجزيئية الخاضعة لشروط حديه ـــ اي في حل المسائل اي في حل المسائل الحدية .كما سنرى في الامثلة .

<u>أمثـــــلة وتمـــــــــاريـــــن</u>

1) أوجد حل المعادلة الاتية مع الشروط المذكورة .

$$Y'' + Y = t \quad , \quad Y(0) = 1 \quad , \quad Y'(0) = -2$$

2) أوجد حل المعادلة الاتية مع الشروط المذكورة .

$$Y'' - 3Y' + 2Y = 4e^{2t} \quad , \quad Y(0) = -3 \quad , \quad Y'(0) = 5$$

3) أوجد حل المعادلة الاتية مع الشروط المذكورة.

$$Y'' + 2Y' + 5Y = e^{-t}\sin t \quad , \quad Y(0) = 0 \quad , \quad Y'(0) = 1$$

4) أوجد حل المعادلة الاتية مع الشروط المذكورة .

$$Y''' - 3Y'' + 3Y' - Y = t^2\ e^t \quad , \quad Y(0)=1 \quad , \quad Y'(0)=0 \quad , Y''(0)=-2$$

5) أوجد حل المعادلة الاتية مع الشروط المذكورة .

$$Y'' + 9Y = \cos 2t \quad , \quad Y(0)=1 \quad , \quad Y(\pi/2)=-1$$

6) أوجد حل المعادلة الاتية مع الشروط المذكورة

$$Y'' + a^2 Y = F(t) \quad , \quad Y(0)=1 \quad , \quad Y'(0)=-2$$

7) أوجد حل المعادلة الاتية مع الشروط المذكورة

$$tY'' + 2Y' + tY = 0 \quad , \quad Y(0)=1 \quad , \quad Y(\pi)=0$$

8) أوجد حل المعادلتين الانيتين الاتيتين مع الشروط المذكورة

$$\frac{dX}{dt} = 2X - 3Y \qquad , \qquad X(0)=8$$

$$\frac{dY}{dt} = Y - 2X \qquad , \qquad Y(0)=3$$

9)أوجد حل المعادلتين الانيتين الاتيتين مع الشروط المذكورة

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{dY}{dt} + 3X = 15\,e^{-t} \qquad X(0)=35 \qquad , X'(0)=-48$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} - 4\frac{dX}{dt} + 3Y = 15\sin 2t \qquad Y(0)=27 \qquad Y'(0)=-55$$

10) نقطة مادية كتلتها $2mg$ تتحرك فى إتجاه محور x تحت تأثير قوة جذب نحو نقطة الاصل O مقدارها $8x$.فإذا بدأت النقطة الحركة من السكون عندما كانت $x=10$, فأوجد موضع النقطة فى أى لحظة وذلك فى

الحالات الاتية :

أ- إذا كانت هناك قوة مقاومة قدر بثمانية أمثال السرعة اللحظية .

ب- إذا لم تكن هناك مقاومات للحركة .

11) نقطة مادية كتلتها mg تتجرك فى إتجاه محور x تحت تأثير قوة جذب نحو نقطة الاصل o مقدارها kx.

وتؤثر عليها قوة مقاومة $\beta \frac{dx}{dt}$, ناقش الحركة فى الحالات المختلفة علما بأن :

$X(0)=X_0 \;,\; X'(0)=V_0$.

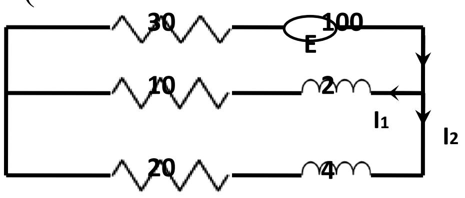
12) ملف معامل حثه $2\,henry$ ومقاومة قدرها $16\,ohm$ ومكثف سعته $0.02\ farad$ متصلة على التوالى مع

قوة دافعة قدرها $E\,Volt$. عند الزمن $t=0$ كانت الشحنة على المكثف قدرها 0 وكان التيار قدره 0 . أوجد

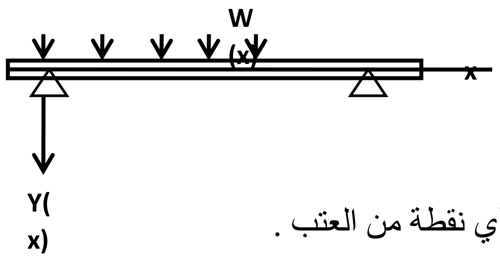
كلا من الشحنة والتيار فى أى زمن t فى الحالات الاتية :

أ- عندما تكون $E=300\ V$ ب- عندما تكون $E=100\sin 3t\ V$.

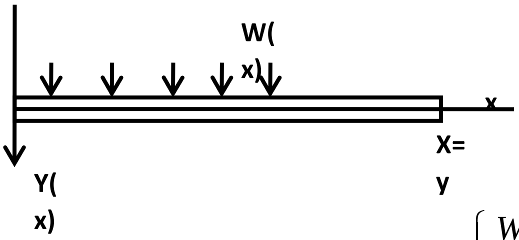
13) الشكل يبين شبكة كهربائية أوجد التيار فى الفروع المختلفة علما بأن القيم الابتدائية للتيارات هى الصفر.



14) بالشكل عتب مثبت مفصليا من من طرفين $x=0 \;,\; x=l$ والتحميل العرضى عليه منتظم وقدره W_0 .



لكل وحدة طول ...أوجد الأنحراف عند أي نقطة من العتب .



15) الكابولى المبين بالشكل مثبت

فى حائط عند الطرف $x=0$

أما الطرف $x=l$ فهو حر

والتحميل كالاتى : $W(x)=\begin{cases} W_0 & : 0 \prec x \prec l/2 \\ 0 & : l/2 \prec x \prec l \end{cases}$ أوجد الانحراف .

16) نقطة مادية كتلتها $2mg$ مربوطة فى خيط مرن ثابت طوله $8cm$ تتحرك على مستوى أفقى أملس وتؤثر عليهاقوة خارجيه $\phi(t)$. إحسب إزاحة النقطة فى حالة $\phi(t)=F_0\cos wt$ علما بأنها بدأت الحركة من السكون من على بعد $10\,cm$ من موضع الاتزان .

حلول بعض التمـــــــاريــــن

(2 $\ell\{Y''\}-3\ell\{Y'\}+2\ell\{Y\}=4\,\ell\{e^{2t}\}$

$$s^2y-sY(0)-Y'(0)-3[s\,y-Y(0)]+2\,y=\frac{4}{s-2}$$

$$(s^2\,y-3s-5)-3(sy+3)++2\,y=\frac{4}{s-2}$$

$$(s^2-3s+2)\;y+3s-14=\frac{4}{s-2}$$

$$y=\frac{4}{(s^2-3s+2)(s-2)}+\frac{14-3s}{(s^2-3s+2)}=\frac{-3s^2+20s-24}{(s-1)(s-2)^2}$$

$$y=\frac{-7}{s-1}+\frac{4}{s-2}+\frac{4}{(s-2)^2}$$

$$Y=-7e^t+4e^{2t}+4te^{2t}$$

5)حيث أن $Y'(0)$ غير معلومة فلنفرض أن قيمتها C :

$$(s^2y-sY(0)-Y'(0))+9y=\frac{s}{s^2+4}$$

$$(s^2+9)y-s-c=\frac{s}{s^2+4}$$

$$y=\frac{s+c}{s^2+9}+\frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)}$$

$$y=\frac{s}{s^2+9}+\frac{c}{s^2+9}+\frac{s}{5\,(s^2+4)}-\frac{s}{5(s^2+9)}$$

$$y=\frac{4}{5}(\frac{s}{s^2+9})+\frac{c}{s^2+9}+-\frac{s}{5(s^2+4)}$$

$$Y=\frac{4}{5}\cos 3t+\frac{c}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\cos 2t$$

ولتحديد قيمة الثابت c نستخدم الشرط $Y(\frac{\pi}{2})=-1$ فنحصل على $c=\frac{12}{5}$ ومن ذلك ينتج أن :

$$Y=\frac{4}{5}\cos 3t+\frac{4}{5}\sin 3t+\frac{1}{5}\cos 2t$$

(6 $(s^2 y - sY(0) - Y'(0)) + a^2 y = \ell\{F(t)\} = f(s)$

$$(s^2 y - s + 2) + a^2 y = f(s)$$

$$y = \frac{s-2}{s^2+a^2} + \frac{f(s)}{s^2+a^2}$$

$$Y = \cos at - \frac{2}{a} \sin at + F(t) * \frac{\sin at}{a}$$

$$Y = \cos at - \frac{2}{a} \sin at + \frac{1}{a} \int_0^t F(u) \sin a(t-u)\, du$$

7) نفرض أن $Y'(0) = c$ وبأخذ تحويل لابلاس ينتج أن :

$$-\frac{d}{ds}(s^2 y - sY(0) - Y'(0)) + 2(sy - Y(0)) - \frac{dy}{ds} = 0$$

$$-s^2 y' - 2sy + 1 + 2sy - 2 - y' = 0$$

$$-(s^2+1)y' - 1 = 0 \qquad or \qquad y' = \frac{-1}{s^2+1}$$

وحل هذه المعادلة $y = -\tan^{-1} s + A$

ولكن من خاصية القيم النهائية نجد أن $y \to 0 \quad as \quad s \to \infty$

وينتج عن هذا أن $A = \frac{\pi}{2}$ أن :

$$\therefore Y(t) = \frac{\sin t}{t}$$

$$y=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s=\tan^{-1}\frac{1}{s}=\int_s^{\infty}\frac{du}{u^2+1}=\ell\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$$

واضح أن هذه الدالة تحقق الشرط : $Y(\pi)=0$ لذا فهى الحل المطلوب .

8) نفرض أن $\ell\{Y\}=y \quad , \quad \ell\{X\}=x$ فيكون

$$s\,x-8=2x-3 \qquad or \quad (s-2)\,x+3y=8$$

$$s\,y-3=y\;-2 \qquad or \;\; 2\,x+(s-1)\,y=3$$

وبحل هاتين المعادلتين الجبريتين بالنسبة إلى $y \;,\; x$ ينتج أن :

$$x=\frac{\begin{vmatrix}8 & 3\\ 3 & s-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s-2 & 3\\ 2 & s-1\end{vmatrix}}=\frac{8s-17}{s^2-3s-4}=\frac{8s-17}{(s+1)(s-4)}=\frac{5}{s+1}+\frac{3}{s-4}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}s-2 & 8\\ 2 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s-2 & 3\\ 2 & s-1\end{vmatrix}}=\frac{3s-22}{s^2-3s-4}=\frac{3s-22}{(s+1)(s-4)}=\frac{5}{s+1}-\frac{2}{s-4}$$

$$\therefore\; X=\ell^{-1}\{x\}=3e^{-t}+3e^{4t}$$

$$Y=\ell^{-1}\{y\}=5e^{-t}-2e^{4t}$$

11) $X''+2\alpha\,X'+w^2\,X=0 \qquad or \qquad m\,X''+\beta\,X'+k\,X=0$

حيث $w^2=\dfrac{k}{m} \quad , \quad \alpha=\dfrac{\beta}{m}$

بإجراء تحويل لابلاس مع ملاحظة الشروط الابتدائية ينتج أن :

$$s^2\,x+X_0\,s-V_0+2\alpha\,(sx-X_0)+w^2\,x=0$$

$$x=\frac{sX_0+(V_0+2\alpha X_0)}{s^2+2\alpha s+w^2}=\frac{(s+\alpha)X_0}{(s+\alpha)^2+(w^2-\alpha^2)}+\frac{V_0+\alpha X_0}{(s+\alpha)^2+(w^2-\alpha^2)}$$

وهنا نواجه الحالات المختلفة الاتية :

أ- إذا كان $w^2-\alpha^2\succ 0$ فإن :

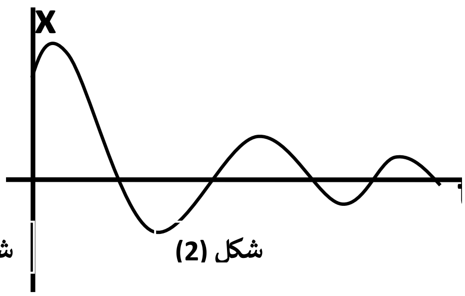
$$X=X_0\,e^{-\alpha t}\cos\sqrt{w^2-\alpha^2}\;t+\frac{V_0+\alpha X_0}{\sqrt{w^2-\alpha^2}}e^{-\alpha t}\sin\sqrt{w^2-\alpha^2}\,t$$

وفى هذه الجالة نجد أن الحركة اهتزازية ولكن سعة الاهتزازة تتناقص مع الزمن بسبب العامل $e^{-\alpha t}$. أى أن

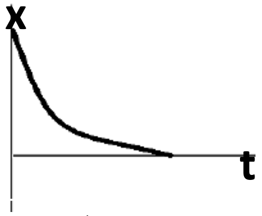
الحركة الاهتزازية متصلة كما بالشكل (1). كما أن زمن الدورة هو $\dfrac{2\pi}{\sqrt{w^2-\alpha^2}}$

وترددها هو $\dfrac{\sqrt{w^2-\alpha^2}}{2\pi}$

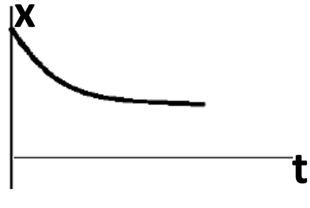
أما الكمية $\dfrac{w}{2\pi}$(وهو التردد عندما يكون $\alpha=0$) فيسمى التردد الطبيعى .



شكل (1)



شكل (2)



شكل (3)

ب- إذا كان $w^2-\alpha^2=0$ فإن :

$$X=\ell^{-1}\left\{\frac{X_0}{s+\alpha}+\frac{V_0+\alpha X_0}{(s+\alpha)^2}\right\}=X_0\,e^{-\alpha t}+(V_0+\alpha X_0)t\,e^{-\alpha t}$$

وهنا نجد أن الجسم لا يهتز ولكن يقترب بالتدريج من نقطة الاصل ولكنه لا يصل إليها أبدا كما بالشكل (2) .

وتسمى هذه الحالة بالحالة الضحلة الحركة إذ أن زيادة فى عامل المقاومة β يترتب عليه إهتزاز الجسم .

ج- إذا كان $w^2-\alpha^2 \prec 0$ فإن :

$$X=\ell^{-1}\left\{\left(\frac{(s+\alpha)X_0}{(s+\alpha)^2-(\alpha^2-w^2)}+\frac{V_0+\alpha X_0}{(s+\alpha)^2-(\alpha^2-w^2)}\right\}\right.$$

$$=X_0\ e^{-\alpha t}\ \cosh\sqrt{\alpha^2-w^2}\ t+\frac{V_0+\alpha X_0}{\sqrt{\alpha^2-w^2}}\ e^{-\alpha t}\ \sinh\sqrt{\alpha^2-w^2}\ t$$

وهى حركة إهتزازية كما بالشكل (3).

13) المعادلاتهى :

$$I=I_1+I_2 \quad , \quad I_1(0)=0 \quad , \quad I_2(0)=0$$

$$\therefore 10\ I_1-2\frac{d\,I_1}{d\,t}+4\frac{d\,I_2}{d\,t}+20\ I_2=0$$

$$\therefore 30\ I-110+2\frac{d\,I_1}{d\,t}+10\ I_1=0$$

$$\therefore -5\ I_1-y\frac{d\,I_1}{d\,t}+2\frac{dI_1}{dt}+10\ I_2=0\ \text{OR}$$

$$\frac{d\,I_1}{d\,t}+20\,I_1+15\,I_2=55$$

بأخذ تحويل لابلاس لمجموعة المعادلتين وملاحظة القيم الابتدائية ينتج أن :

$$-s\,I_1-\left[sI_1-I_1(0)\right]+2\left[s\,I_2-I_2(0)\right]+10I_2=0$$

$$\left[s\,I_1-I_1(0)\right]+20\,I_1\ 15\,I_2=\frac{55}{s}$$

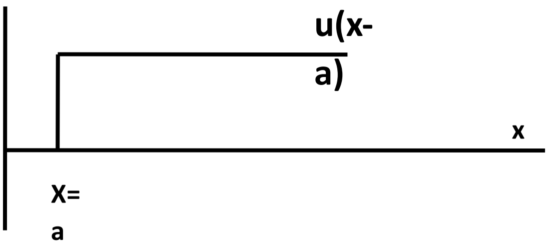
$$(s+9)\,I_1-(2\,s+10)\,I_2=0 \quad , \quad (s+20)\,I_1+15\ I_2=\frac{55}{s}$$

من المعادلة الاولى ينتج أن $I_1 = 2I_2$ وبالتعويض فى الثانية ينتج أن :

$$(2s+55)\ I_2 = \frac{55}{s} \quad or \quad I_2 = \frac{55}{s\ (2s+55)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{2s+55}$$

15) **مقدمـــــــــة:**

سبق الاشارة إلى دالة الخطوة الوحدة لهفيسيد والمبينة بالشكل المقابل والمعرفة كالاتى :



$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & : t \prec a \\ 1 & : t \succ a \end{cases}$$

وتحويل لابلاس لهذه الدالة هو :

$$\ell\{u(t-a)\} = \int_0^\infty u(t-a)\ e^{-st}\ dt$$

$$= \int_0^a 0.\ e^{-st}\ dt + \int_a^\infty 1\ .\ e^{-st}\ dt$$

$$= \left. \frac{e^{-st}}{s} \right|_a^\infty = \frac{e^{-as}}{s}$$

ومن ذلك ينتج أن : $\ell^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\} = u(t-a)$

كما أنه يمكن الوصول إلى نفس النتيجة بتطبيق خاصية الازاحة الثانية التى تنص على أن :

$$\ell^{-1}\left\{e^{-as}\ f(s)\right\} = \begin{cases} F(t-a) & : t \succ a \\ 0 & : t \prec a \end{cases}$$

وبوضع $f(s) = \frac{1}{s}$ حيث $F(t) = 1$ لهذا التحويل فإن :

$$\ell^{-1}\left\{e^{-as}.1\right\}=\begin{cases} 1 & : t \succ a \\ 0 & : t \prec a \end{cases} = u(t-a)$$

ونعود الان إإلى حل المثال فنعبر عن التحميل بإستخدام دالة الخظوة نجد أن :

$$w(x) = w_0\left[u(x)-u(x-\frac{l}{2})\right]$$

والمعادلة التفاضلية هى :

$$\frac{d^n Y}{d x^n} = \frac{w(x)}{EI} \qquad (1)$$

والشروط هى :

$$Y(0)=0 \quad , \quad Y^{'}(0)=0 \quad , \quad Y^{''}(l)=0 \quad , \quad Y^{'''}(l)=0 \quad (2)$$

وبأخذ تحويل لابلاس لطرفى المعادلة فإن :

$$s^4 y - s^3 Y(0) - s^2 Y^{'}(0) - sY^{''}(0) - Y^{'''}(0) = \frac{w_0}{EI}\ (\frac{1-0}{s^3})$$

وبالتعويض عن $Y^{''}(0)=c_2$, $Y^{''}(0)=c_1$ وإستخدام الشروط فإن :

$$y = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{w_0}{EI}\ (\frac{1-0}{s^3})$$

$$\therefore Y(x) = \frac{c_1 x^2}{2!} + \frac{c_2 x^3}{3!} + \frac{w_0}{EI}\ \frac{x^4}{4!} - \frac{w_0\,(x-\frac{l}{2})^4}{4!}\ u(x-\frac{l}{2})$$

وهذا معناه أن :

$$Y(x) = \begin{cases} \dfrac{c_1 x^2}{2} + \dfrac{c_2 x^3}{6} + \dfrac{w_0}{24EI} x^4 & : 0 < x < \dfrac{l}{2} \\ \dfrac{c_1 x^2}{2} + \dfrac{c_2 x^3}{6} + \dfrac{w_0}{24EI} x^4 - \dfrac{w_0}{24EI}\ (x-\dfrac{l}{2})^4 & : x > \dfrac{l}{2} \end{cases}$$

و الان نظبق المجموعة الاخيرة من الشروط المعروفة وهى :

$$Y''(0)=0 \qquad , \qquad Y''(0)=0$$

فنحصل على :

$$c_1=\frac{w_0\, l^2}{EI} \qquad , \qquad c_2=\frac{w_0\, l}{2\,EI}$$

$$\therefore \quad Y(x)=\frac{w_0\, l^2}{16EI}\, x^2-\frac{w_0\, l}{12EI}x^3-\frac{w_0}{24EI}x^4-\frac{w_0}{24EI}\,(x-\frac{l}{2})^4\, u(x-\frac{l}{2}).$$