جامعة جنوب الوادى

كلية التربية بالغردقة

الفرقة الثالثة عام رياضيات

المادة : تطبيقية (5) (الطرق الرياضية)

إستاذ المادة / د. محمد محمد عبد العزيز

الفصل الدراسى الأول 2022-2023

.

جامعة جنوب الوادي
SOUTH VALLEY UNIVERSITY
قسم الرياضيات

محاضرات في
الطرق الرياضية

إعداد

كلية العلوم-قسم الرياضيات

الفصل الأول

متسلسلة فورير ..... Fourier Series

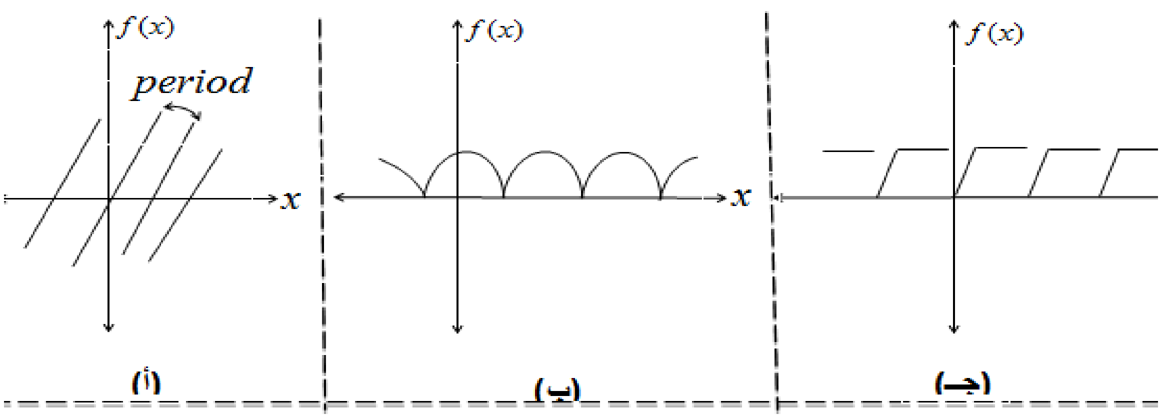
رأينا في المثال الأخير ضرورة التعرف علي طريقة للتعبير عن أي دالة $f(x)$ كمجموع عدة من دوال الجيوب وجيوب التمام ، ولما كانت هذة الأخيرة دوال دورية وجب أيضاً أن تكون الدالة $f(x)$ دورية (.....Periodic) حتي يمكن التعبير عنها بدوال دورية .

تعريـــف:

تسمي $f(x)$ دالة دورية إذا كان $f(x+p)=f(x)$ حيث p ثابت موجب وأقل قيمة للثابت p تحقق العلاقة السابقة تسمي الدورة (..... Period) .

فمثلاً $f(x)$ $\sin x$ دورتها 2π ، $\tan x$ دورتها π ، $\cos nx$ دورتها $\dfrac{2\pi}{n}$.

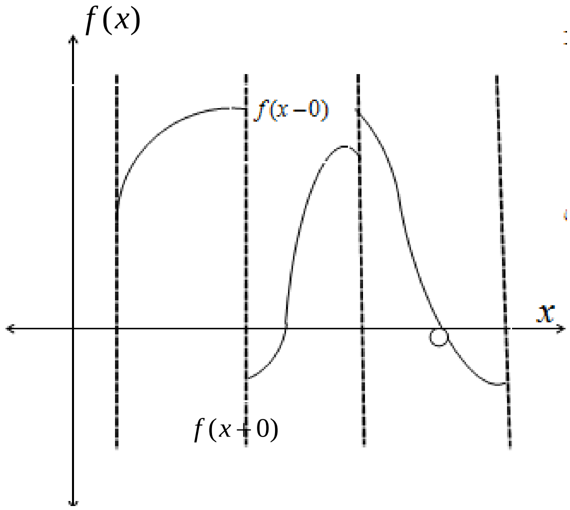
وفي الأشكال الأتية أمثلة لدوال دورية :



(أ)   (ب)   (جـ)

الدوال المتصلة جزئياً .... PiecewiseContinuousFunctions:

تسمي الدالة متصلة جزئياًفي فترة ما إذا كان :



أ - الفترة يمكن تقسيمها إلي عدد محدود م

الترات تكون الدالة متصلة علي كل منها .

ب- نهايات الدالة عند نقط عدم الإتصال تكون

قيمتهامحدودة وبتعبير مختصر تكون الدالة

متصلةجزئياً علي فترة معينة إذا كان للدالة

علي هذه الفترةعدد محدود من الفتراتالمحدودة .

متسلسلة فورير:

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة علي الفترة $(-L, L)$ وكانت دورة الدالة $2L$ فإن متسلسلة فورير لها هي :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad .... \quad (1)$$

حيث يتم حساب المعاملات a_n , b_n من الصيغ الأتية :

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \;.......\; (2)$$

مع ملاحظة أنه يمكن أخذ بداية التكامل عند أي نقطة علي محور x ونهايته عند نقطة تبعد عن نقطة البداية بمسافة تساوي دورة كاملة أي أن :

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \end{aligned}\right\} \;..\; (3)$$

ومع ذلك فنحن لا نعلم متي تكون هذه المتسلسلة تقاربية وحتي إذا كانت تقاربية لا نعلم إن كانت تقترب من $f(x)$ أم لا وهناك شروط تسمي **شروط ديرشلت** توضح هذ الموقف وهي :

أ-إذا كانت $f(x)$ معروفة ووحيدة القيمة في الفترة $(-L, L)$ باستثناء عدد محدود من النقط ، وهذ الشرط ليس كافياً.

ب- $f(x)$ دورية ودورتها $2L$.

جـ- $f(x)\,,\; f'(x)$ متصلة جزئياً .

إذا توفرت هذه الشروط فإن المتسلسلة (1) بالمعاملات $(3)\,,\,(2)$ تقترب من $f(x)$ إذا كانت x نقطة اتصال للدالة

ولكن عند نقط عدم الإتصال فإن المتسلسلة تقترب من

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

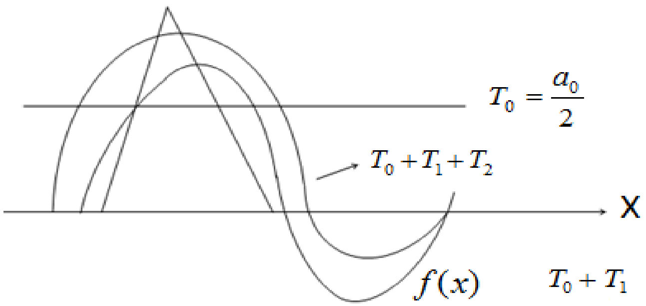
في هذه الحالة نستطيع أن نكتب :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

كذلك يمكننا ملاحظة اقتراب المتسلسلة من الدالة من الشكل الأتي :

نفرض أن $f(x) = T_0 + T_1 + T_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

حيث : ... $T_0 = \dfrac{a_0}{2}$, $T_1 = a_1 \cos\dfrac{\pi x}{L}$, $T_2 = a_2 \cos\dfrac{2\pi x}{L}$, ...



الدوال الزوجية والدوال الفردية .... Odd & Even Functions:

تسمي $f(x)$ فردية إذا كان $f(-x) = -f(x)$

مثال ذلك الدوال $x^3 \;,\; x^5 - 3x^3 + 2x \;,\; \sin x \;,\; \tan 3x$

وتسمي الدالة زوجية إذا كان

$$f(-x) = f(x)$$

مثال ذلك الدوال

$$x^4 \;,\; 2x^2 + 5 \;,\; \cos x \;,\; e^x + e^{-x}$$

متسلسلة نصف المدى .... Half –Range Series :

إذا كانت الدالة فردية فإن حدود جيوب التمام تتقدم في متسلسلاتها .

وإذا كانت زوجية تتقدم في المتسلسلة حدود الجيب وتأخذ المعاملات الصيغ الآتية :

<u>فردية</u> $a_n = 0 \quad , \quad b_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{L}\,dx$

زوجية $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad , \quad b_n = 0$

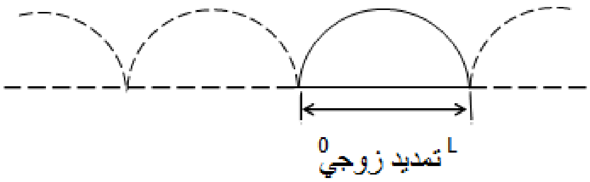
فائدة متسلسلة نصف المدي:

هناك بعض الدوال ليست دورية علي الإطلاق بل قد تكون معرفة علي فترة ما وغير معرفة خارج هذه الفترة ومع ذلك يمكن أن نوجد لها متسلسلة فورير (نصف المدي) .

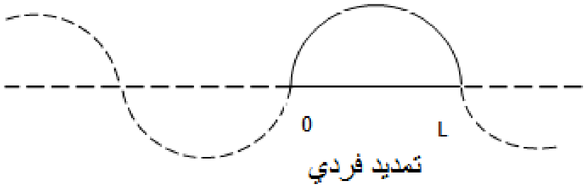
مثال ذلك نفرض أن قضيب طوله L طرفاه

$x = 0 \quad , \quad x = L$

وأن $f(x)$ هي دالة توزيع الحمل علي هذا العتب.



أي أن $f(x)$ معرفة في الفترة $(0, L)$ وغير معرفة خارج هذه الفترة.



في هذه الحالة يمكننا عمل تمديد فرضي

للدالةعلي الفترة $(-L , 0)$ ويكون التمديد زوجي أو فردي حسب رغبتنا كما في الشكل .. ثم نعتبر أيضاً أن الدالة تتكرر دورياقبل وبعد الفترة $(-L , L)$ ثم يمكننا إيجاد متسلسلة نصف المدي للدالة الممدة الدورية التي أنشأناها ولنفرض أن هذه الدالةهي $F(x)$.

واضح أن قيم $F(x)$ الممدة الدورية تتفق مع قيم الدالة $f(x)$ الغير دورية وذلك في الفترة $(0, L)$ولذا يمكن أخذ $F(x)$ كممثلة للدالة $f(x)$ في الفترة $(0, L)$ مع عدم الاهتمام بقيم الدالة $F(x)$ خارج هذه الفترة.

متسلسلة فورير المركبة .... Complex Fourier Series:

بسبب المتطابقة $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ متسلسلة فورير تأخذ الصور :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\frac{n\pi x}{L}} \qquad ; \quad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\,dx$$

متسلسلة فورير المزدوجة .... Double Fourier Series:

الفكرة في استخدام متسلسلة فورير لدالة ذات متغير واحديمكن تعميمها للحصول علي متسلسلة فورير لدوال ذات متغيرين.

في هذه الحالة تكون متسلسلة فورير الجيبية المزدوجة :

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\ \sin\frac{m\pi x}{L_1}\ \sin\frac{n\pi y}{L_2}$$

وهناك صيغ شبيهه لمتسلسلة جيب التمام المزدوجة أو المتسلسلة المختلطة . كما أنه يمكن التعميم للدوال ذات ثلاث متغيرات أو أكثر .

أمـثـلـــة

مثال (1) : برهن علي ما يأتي :

$$(a)\quad \int_{-L}^{L}\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx=\int_{-L}^{L}\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx=0\quad ;\quad k=1,2,3,\ldots..$$

$$(b)\quad \int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx=$$

$$=\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\ \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$=\begin{cases}0 & : \quad m\neq n\\ L & : \quad m=n\end{cases}$$

$$(c)\quad \int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\ \cos\frac{m\pi x}{L}\,dx=0$$

الحـــــــل

$$(a)\quad \int_{-L}^{L}\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx=-\frac{L}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{L}\Bigg]_{-L}^{L}$$

$$=-\frac{L}{k\pi}\left(\ \cos k\pi-\cos(-k\pi)\ \right)=0$$

وبنفس الطريقة يمكن اثبات أن :

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{k\pi x}{L} \, dx = 0$$

(b) إذا كانت $m \neq n$ فإن :

$$(b) \quad \int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \; \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx = \tfrac{1}{2} \left[\int_{-L}^{L} \cos \frac{(m-n)\pi x}{L} \, dx + \int_{-L}^{L} \cos \frac{(m+n)\pi x}{L} \, dx \right] = 0$$

وبنفس الطريقة يمكن اثبات أن :

$$\int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \; \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx = 0$$

أما إذا كانت $m = n$ فإن :

$$\int_{-L}^{L} \cos^2 \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = \tfrac{1}{2} \int_{-L}^{L} \left(1 + \cos \frac{2n\pi x}{L} \right) dx = L$$

كذلك

$$\int_{-L}^{L} \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = \tfrac{1}{2} \int_{-L}^{L} \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{L} \right) dx = L$$

$$(c)\quad \int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \tfrac{1}{2}\left[\int_{-L}^{L}\sin\frac{(m-n)\pi x}{L}\,dx + \int_{-L}^{L}\sin\frac{(m+n)\pi x}{L}\,dx\right] = 0$$

مثال (2) : إذا كانت:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

فاثبت أن :

(أ) $$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

(ب) $$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

<u>الحـــــــــــل</u>

(أ)بإجراء التكامل علي الطرفين من $-L$ إلي L ينتج أن :

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx + b_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right]$$

$$= \frac{a_0}{2}\,.\,2L + 0 = a_0 L$$

$$Thus \qquad a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

بضرب الطرفين في $\cos \dfrac{m\pi x}{L}$ والتكامل ينتج أن:

$$\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \, dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \, dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \, dx$$

$$= 0 + a_m L + 0$$

$$Thus\ a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} \, dx \qquad ; m = 1 , 2 , 3 , \ldots\ldots\ldots\ldots$$

(ب) بالضرب في $\sin \dfrac{m\pi x}{L}$ والتكامل نجد أن :

$$\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \, dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \, dx = 0 + 0 + b_m L$$

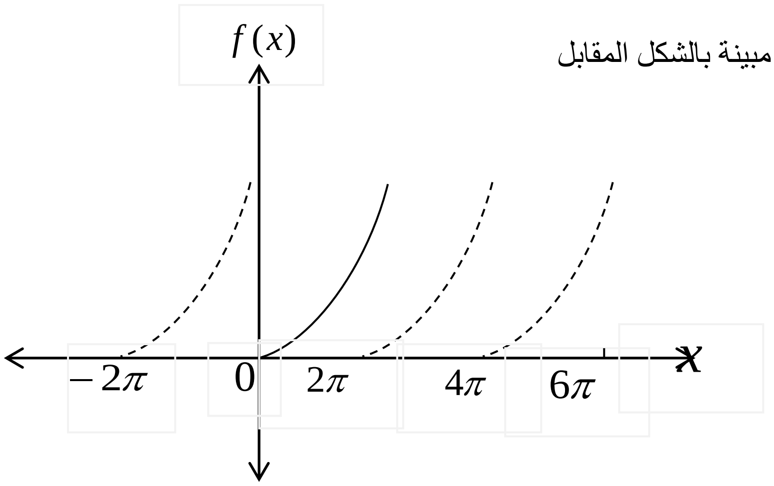
$$Thus \qquad b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} \, dx$$

مثال (3) : أوجد متسلسلة فورير للدالة الدورية المعرفة علي دورة كالآتي :

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

الحـــــــــــل

الدالة مبينة بالشكل المقابل



لايجاد متسلسلة فورير لهذه الدالة نوجد المعاملات $a_0 \;,\; a_n \;,\; b_n$ كالآتي :

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x^2\frac{\sin nx}{n} - 2x\left(\frac{-\cos nx}{n^2}\right) + 2\left(\frac{-\sin nx}{n^3}\right)\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2} \quad ; \quad n \neq 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\ \sin\frac{n\pi x}{L}\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2\ \sin\frac{n\pi x}{\pi}\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2\ \sin nx\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x^2\left(\frac{-\cos nx}{n}\right) - 2x\left(\frac{-\sin nx}{n^2}\right) + 2\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{-4\pi}{n}$$

ومن ثم فإن متسلسلة فورير للدالة الدورية $f(x) = x^2$ تأخذ الصورة :

$$f(x) = x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$$

$$= \frac{4\pi^2}{3} + 4\cos x + \cos 2x + \frac{4}{9}\cos 3x + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$- 4\pi\sin x - 2\pi\sin 2x - \frac{4\pi}{3}\sin 3x - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

مثال (4) : أ- بين أن الدالة الزوجيةلا تحتوي متسلسلتها علي دوال الجيب .

ب- بين أن معاملات الدالة الزوجية هي :

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\ \cos\frac{n\pi x}{L}\ dx$$

<u>الحـــــــــل</u>

(أ)

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ \sin\frac{n\pi x}{L}\ dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\ \sin\frac{n\pi x}{L}\ dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\ \sin\frac{n\pi x}{L}\ dx$$

والآن نتناول التكامل الأول ونرمز له بالرمز I_1 ونعتبر التحويل $x = -u$.

$$I_1 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(-u)\ \sin(\frac{-n\pi u}{L})\ d(-u) = \frac{-1}{L}\int_{0}^{L} f(u)\ \sin\frac{n\pi u}{L}\ du$$

$$= \frac{-1}{L}\int_{0}^{L} f(-x)\ \sin(\frac{-n\pi x}{L})\ d(-x) = \frac{-1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\ \sin\frac{n\pi x}{L}\ dx$$

واضح أن قيمة هذا التكامل تساوي وتضاد في الإشارة لقيمة التكامل الثاني .

وينتج عن هذا أن $b_n = 0$

و هذا يعني أن الدالة الزوجية لا تحتوي متسلسلتها علي دوال الجيب .

(ب)

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\ \cos\frac{n\pi x}{L}\ dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\ \cos\frac{n\pi x}{L}\ dx$$

بعمل التحويل $x = -u$ في التكامل الأول نجد أن قيمته تساوي تماماً قيمة التكامل الثاني أي أن :

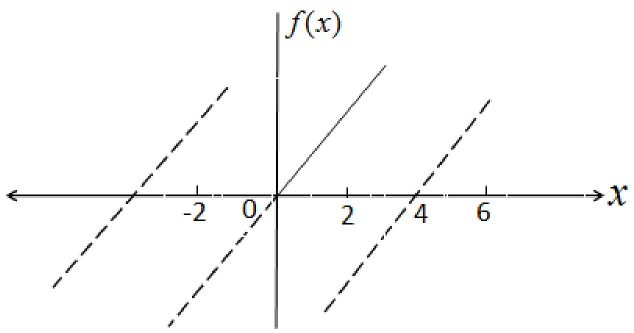
$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\ \cos\frac{n\pi x}{L}\ dx$$

مثال (5) : أوجد متسلسلة نصف المدي (أ) الجيبية (ب) جيبية التمام للدالة

$$f(x) = x \qquad ; \qquad 0 < x < 2$$

<u>الحـــــــــــل</u>

أ- الشكل يبين الدالة الأصلية والدالة بعد تمديدها تمديداً فردياً :



لايجاد متسلسلة فورير لهذه الدالة نوجد المعاملات b_n , a_n , a_0 كالآتي :

$$a_n = 0 \quad \Rightarrow a_0 = 0$$

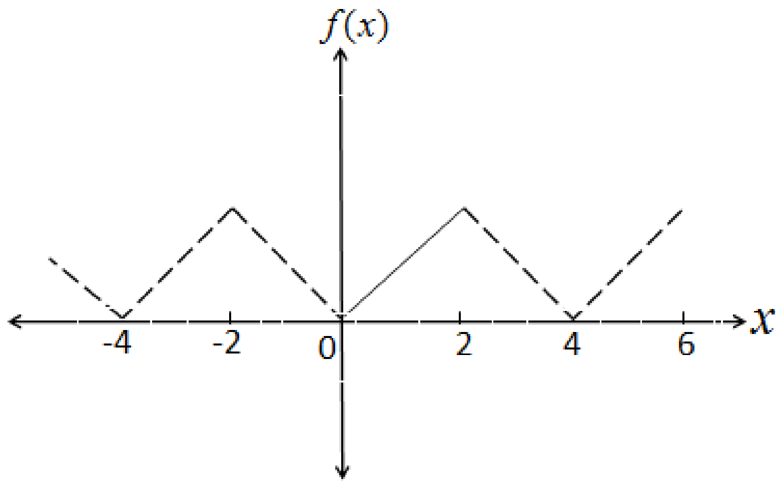
$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{2} \int_0^2 x \sin\frac{n\pi x}{2}\, dx = \frac{4}{n\pi} \cos n\pi$$

ومن ثم فإن متسلسلة فورير لهذه الدالة تصبح علي الصورة :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4 \cos n\pi}{n} \sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2} \sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin\frac{3\pi x}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right)$$

ب- الشكل يبين الدالة الأصلية والدالة بعد تمديدها تمديداً زوجياً :



$$b_n = 0 \quad , \quad a_0 = \int_0^2 x \, dx = 2$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx = \frac{2}{2} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} \, dx = \frac{-4 \, (\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \quad , \quad n \neq 0$$

ومن ثم فإن متسلسلة فورير لهذه الدالة تصبح علي الصورة :

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \, (\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2}$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi x}{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right)$$

لاحظ أن المتسلسلة الثانية تتقارب بطريقة أسرع كثيراً من المتسلسلة الأولي .

مثال (6) : في حالة متسلسلة فورير المزدوجة :

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L_1} \sin \frac{n\pi y}{L_2}$$

أوجد الصيغة التي تحسب منها المعاملات B_{mn}.

<u>الحــــــــل</u>

إذا اعتبرنا y بارامتر فإنه يمكن كتابة المتسلسلة كالآتي :

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin \frac{m\pi x}{L_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

حيث

$$C_m = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{n\pi y}{L_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

في هذه الحالة تكون C_m دالة في y .

وبالنظر إلي المتسلسلة (2) باعتبارها مفكوك فورير للدالة C_m فإن :

$$B_{mn} = \frac{2}{L_2} \int_0^{L_2} C_m \sin \frac{n\pi y}{L_2}\, dy$$

كذلك من (1) نجد أن :

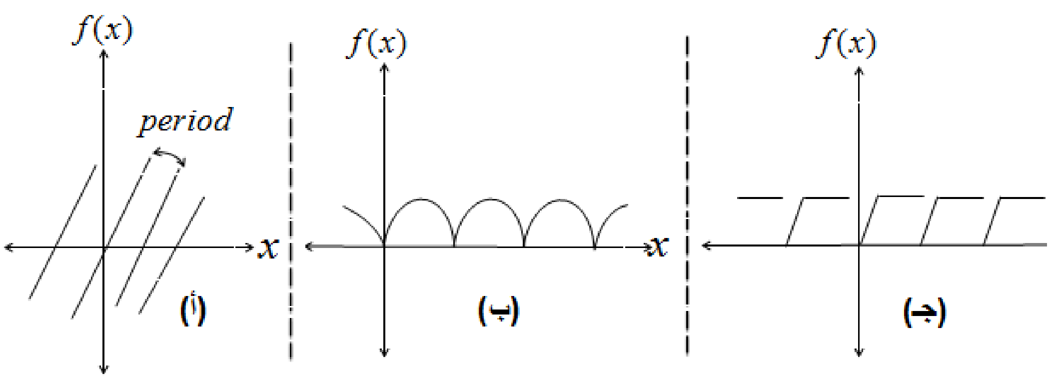
$$C_m = \frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} f(x,y) \sin \frac{m\pi x}{L_1}\, dx$$

أي أن :

$$B_{mn} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x,y) \sin \frac{m\pi x}{L_1} \sin \frac{n\pi x}{L_2}\, dxdy$$

<u>تمـــــــاريـــن</u>

1) بين أي الدوال الآتية زوجية وأيها فردية :



2) إذا كانت $f(x) = const.$ فهل هذه الدالة دورية ؟

وإذا كانت كذلك فما مقدار دورتها ؟

****

3) أ- أوجد معاملات فورير للدالة الدورية :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad -5 < x < 0 \\ 3 & : \quad 0 < x < 5 \end{cases}$$

ب- ارسم شكلاً للدالة وأوجد متسلسلة فورير لها .

جـ - كيف يمكن تعريف الدالة عند النقط
$x = -5 \;,\; x = 0 \;,\; x = 5$ حتي تكون المتسلسلة تقاربية

للدالة في الفترة $-5 \le x \le 5$.

---

4) أ- أوجد متسلسلة نصف المدي جيبية التمام للدالة الآتية وارسم شكلاً لها :

$$f(x) = \sin x \qquad ; \quad 0 < x < \pi$$

<u>تطبيقات على تحليل فورير:</u>

مثال (1) : قرص معدني رقيق نصف قطره الوحدة معزول الوجهين نصف حافته محفوظ علي درجة حرارة

ثابتة u_1 والنصف الأخر علي درجة حرارة ثابتة u_2 .

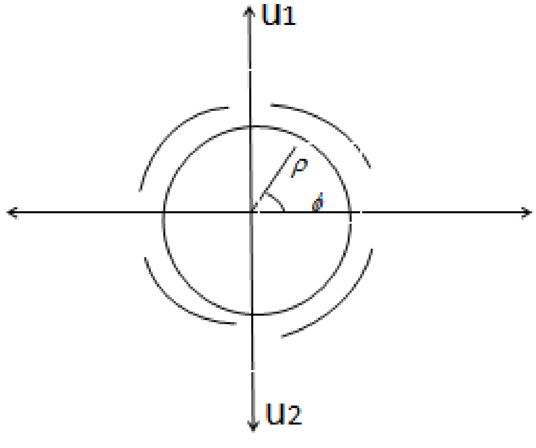
أوجد التوزيع الحراري في الحالة المستقرة .

<u>الحـــــــل</u>

نستخدم هنا الإحداثيات القطبية المستوية

(والتي هي حالة خاصة من الإحداثيات الاسطوانية

حيث $Z = 0$) .



معادلة الحالة المستقرة للتوصيل الحراري

هي معادلة لابلاس $\nabla^2 u = 0$.

أي أن

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

الشروط الحدية هي :

$$u(1,\phi) = \begin{cases} u_1 & : \quad 0 < \phi < \pi \\ u_2 & : \quad \pi < \phi < 2\pi \end{cases}$$

$$, \quad \left| u(\rho, \phi) \right| < M$$

لفصل المتغيرات نفرض أن :

$$u(\rho, \phi) = P(\rho)\ \Phi(\phi)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية والقسمة علي $P\,\Phi$ ينتج أن :

$$\frac{\rho^2 P'' + \rho P'}{P} = \frac{-\Phi''}{\Phi} = \lambda^2$$

ومن ذلك ينتج أن :

$$\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0 \qquad , \qquad \rho^2 P'' + \rho P' - \lambda^2 P = 0$$

ملحوظـــــة:اختيرت إشارة الثابت بحيث يكون كل طرف بعد فصل المتغيرات مساوياً المقدار λ^2 وليس $-\lambda^2$ كما حدث في مثال سابق . وليس السبب هنا أن يتحقق الشرط $\left| u(\rho, \phi) \right| < M$ كما حدث في مثال سابق . ولكن السبب هنا أن تكون معادلة Φ هي $\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0$.

حتي يكون الحل متضمناً لدوال الجيب وجيب التمام وذلك لأن الدالة $\Phi\,(\phi)$ دورية ويجب أن ترجع قيمتها إلي نفس القيمة . وهذا يتحقق بالاختيار الذي أشرنا إليه . أما إذا كنا قد اخترنا الثابت بإشارة عكسية لكان حل معادلة الدالة $\Phi\,(\phi)$ متضمناً لدوال أسية وهي دوال ليست دورية وبالتالي لا تكون مناسبة لحالة المسألة .

نعود الآن لحل المعادلتين العاديتين اللتان نتجتا عن فصل المتغيرات الأولي منهما حلها

$$\Phi(\phi) = A_1 \cos\lambda\phi + B_1 \sin\lambda\phi$$

والثانية من نوع معادلات أويلر وحلولها الخاصة $\rho^{-\lambda}$, ρ^{λ} وحلها العام :

$$P(\rho) = A_2\,\rho^{\lambda} + B_2\,\rho^{-\lambda}$$

وهنا يجيء دور شرط أن تكون الدالة محدودة . واضح أن كلاً من الحدين ρ^{λ} , $\rho^{-\lambda}$ لا يصل إلي قيمة لا نهائية عندما تصل ρ إلي أقصي قيمتها عند محيط الدائرة حيث نصفي القطر قيمة محدودة . ولكن المشكلة تظهر عند مركز القرص حيث $\rho = 0$ ، حيث الحد الثاني $\rho^{-\lambda} = \dfrac{1}{\rho^{\lambda}}$ يصل إلي قيمة لا نهائية .

لذا يجب أن يكون $B_2 = 0$ وهذا نتيجة تطبيق شرط أن تكون الدالة محدودة في كل مكان . كذلك – كما أشرنا – يجب أن يكون الحل في ϕ دوري ، ويجب أيضاً أن تكون دورته 2π بالتحديد . لذا فإن λ يجب أن تكون بالصيغة
$\lambda = m \quad , \quad m = 0, 1 , 2 , 3 , ...$.

<u>والخلا صـــة:</u>

$$u\,(\rho\,,\,\phi\,) = \rho^{m}\,(\,A_m \cos m\phi \;+\; B_m\,\sin m\phi\,)$$

وبتطبيق مبدأ الإضافة :

$$u\,(\rho\,,\,\phi\,) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{m}\,(\,A_m \cos m\phi \;+\; B_m\,\sin m\phi\,)$$

وبتطبيق الشرط الحدي ينتج أن :

$$u\,(1\,,\ \phi\,) \;=\; \frac{A_0}{2} \;+\; \sum_{m=1}^{\infty} \left(\; A_m \cos m\phi \;+\; B_m \;\sin\; m\phi \;\right)$$

وحسب نظرية فورير نحصل علي المعاملات $A_m \;,\;\; B_m$ كالآتي :

$$A_m \;=\; \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u\,(1\,,\ \phi\,)\;\; \cos m\phi \;\; d\phi$$

$$=\; \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_1 \;\cos m\phi \;\; d\phi \;\;+\;\; \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} u_2 \;\cos m\phi \;\; d\phi$$

والنتيجة هي :

$$A_m \;=\; \begin{cases} \quad 0 & : \qquad m \;>\; 0 \\ u_1 + u_2 & : \qquad m \;=\; 0 \end{cases}$$

أي أن كل المعاملات A_m تتقدم فيما عدا $A_0 \;=\; u_1 + u_2$.

والمجموعة الأخري من المعاملات B_m نحصل عليها من :

$$B_m \;=\; \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_1 \;\sin m\phi \;\; d\phi \;\;+\;\; \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} u_2 \;\sin m\phi \;\; d\phi$$

$$=\; \frac{(\,u_1 - u_2\,)\;\,(\,1 - \;\cos\; m\pi\;)}{m\pi}$$

ومن ثم فإن التوزيع الحراري في الحالة المستقرة يصبح علي الصورة :

$$u\,(\,\rho\,,\ \phi\,) \;=\; \frac{u_1 \,+\, u_2}{2} \;+\; \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\,u_1 - u_2\,)\;(\,1 - \;\cos\; m\pi\;)\;\rho^m}{m\pi} \;\;\; \sin m\phi$$

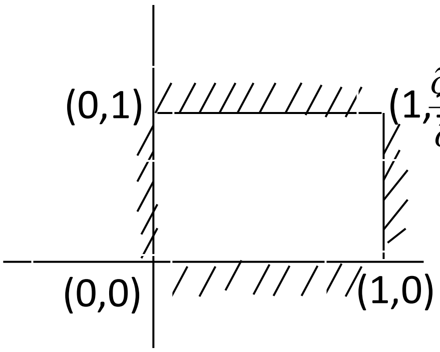
$$=\; \frac{u_1 \,+\, u_2}{2} \;+\; \frac{2\,(\,u_1 - u_2\,)}{\pi} \;\;\left(\;\; \rho \;\sin\phi \;+\; \frac{1}{3}\;\rho^3 \sin 3\phi \;+\; .... \;\right)$$

مثال (2) صفيحة رقيقة علي هيئة مربع طول ضلعه الوحدة معزول الوجهين وأحرفه كلها محفوظة في درجة

الصفر ... فإذا كان التوزيع الحراري الابتدائي معلوم فأوجد التوزيع العام .

الحـــــــــــل

المعادلة التفاضلية هـــــــي :



$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

والشروط هـــــي :

$$|u(x,\ y)| < M\ ,$$

$$u(0\,,y\,,t) = u(1\,,y\,,t) = u(x\,,0\,,t) = u(x\,,1\,,t) = 0$$

$$u(x\,,y\,,0) = f(x,y)$$

حيث $f(x,y)$ هي دالة التوزيع الحراري الابتدائي المعلومة

لفصل المتغيرات افترض أن : $u = X(x)\ Y(y)\ T(t)$

بعد التعويض في المعادلة والقسمة علي $K\ X\ Y\ T$

نجدأن :
$$\frac{T'}{KT} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$

أي أن :
$$T' + K\lambda^2 T = 0 \quad , \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$

ونكون بذلك طبقنا الشرط الأول للدالة المحدودة . والمعادلة الثانية يجري عليها أيضاً فصل المتغيرات فنحصل علي :

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda^2 = -\mu^2$$

حيث $-\mu^2$ هو ثابت آخر اختياري . وقد تم اختياره بحيث يكون سالباً . أما لو اخترناه موجباً ثم طبقنا الشروط الباقية لكنا قد حصلنا علي الحل التافه . ويمكن للطالب التحقق من ذلك .

أي أن $X'' + \mu^2 X = 0 \quad , \quad Y'' + (\lambda^2 - \mu^2)\, Y = 0$

وحلول هذه المعادلات هـــــي:

$$X = a_1 \cos \mu x + b_1 \sin \mu x \ ,$$

$$Y = a_2 \cos \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\ y + b_2 \sin \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\ y \ ,$$

$$T = a_3 e^{-K\lambda^2 t}$$

$$u(x, y, t) = e^{-K\lambda^2 t} (a_1 \cos \mu x + a_2 \sin \mu x)$$
$$(a_2 \cos \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\ y + b_2 \sin \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\ y)$$

حيث قد ادمجنا a_3 في باقي الثوابت .

بتطبيق الشرط $u(0, y, t) = 0$ نحصل علي $a_1 = 0$.

بتطبيق الشرط $u(x, 0, t) = 0$ نحصل علي $a_2 = 0$.

أي أن :

$$u(x, y, t) = B\, e^{-K\lambda^2 t} \sin \mu x \ \sin \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\ y)$$

بتطبيق الشرط $u(1, y, t) = 0$ نحصل علي $\mu = m\pi$.

بتطبيق الشرط $u(x, 1, t) = 0$ نحصل علي $\sqrt{\lambda^2 - \mu^2} = n\pi$

.

أي أن : $\lambda = \sqrt{m^2 + n^2}$

وبتطبيق مبدأ الإضافة نحصل علي الحل العام وهو :

$$u\,(x\,,y\,,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\;B_{mn}\;e^{-K\,(m^2+n^2)\,\pi^2 t}\;\sin m\pi\,x\;\;\sin n\pi\,y$$

وبتطبيق الشرط $u\,(x\,,y\,,0)\;=\;f\,(x,y)$ نحصل علي :

$$f\,(x,y)\;=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\;B_{m\,n}\;\sin\;m\pi\,x\;\;\sin\;n\pi\,y$$

وهي متسلسلة فورير المزدوجة معاملاتها هي :

$$B_{m\,n}\;=\;4\int_0^1\int_0^1\;f\,(x,y)\;\sin m\pi\,x\;\;\sin n\pi\,y\;\;dx\,dy$$

وإذا كانت $f\,(x,y)$ دالة معروفة لأمكننا حساب هذا التكامل والحصول علي القيم الرقيمة للمعاملات $B_{m\,n}$ ثم التعويض عنها في الصيغة النهائية للدالة $u\,(x\,,y\,,t)$.

تـــمـــاريـــن

1)أوجد حل مسألة التوصيل الحراري لساق رفيعة حيث :

$$\frac{\partial u}{\partial t}\;=2\;\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad ,\qquad 0\;<\;x\;<3$$

علماً بأن $u\,(0\,,t)\;=\;u\,(3\,,t)\;=0$.

وعلماً بأن درجة الحرارة الابتدائية $25\;^\circ C$ لكل نقط الساق .

2) ساق رفيعة معزولة الجوانب ومعزولة الطرفين $x=0\;\;,\;\;x=L$ فإذا كان التوزيع الحراري الابتدائي

يعطي بالدالة $f\,(x)$ ..... فأوجد التوزيع العام .

3) حل معادلة لابلاس في بعدين : صفيحة رقيقة مربعة طول ضلعها الوحدة ثلاث أضلاع منها محفوظة علي

درجة الصفر والضلع الرابع علي درجة μ . أوجد التوزيع الحراري في الحالة المستقرة

الفصل الثانى

تكامـــــــل فوريـــــــــر ..... Fourier Integral

الحاجة الي تكامل فورير:

فيما سبق تناولنا دوال دورية دورتها اما اذا كانت $L \to \infty$ واذا كانت الفتره المعرفة عليها الدالة غير محدودة فاننا سنجد ان متسلسلة فورير يؤول تكامل فورير .

تكامــــــــل فوريـــــــر:

أ- اذا كانت $f'(x)$, $f(x)$ متصلة جزئيا في كل فترة محدودة

ب- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ متقارب

فإن نظرية تكامل فورير تقرر ان :

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x] dx \quad (1)$$

حيـــــــث

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha u \, du \quad (2)$$

$$B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-\infty} f(u)\sin\alpha u\,du$$

كما ان تكامل فورير يقترب من الدالة $f(x)$ عند نقطة عدم الاتصال ومن متوسط الدالة عند نقطة عدم الاتصال كما كان الحال في متسلسله فورير والطرف الايمن للمعادلة (1) يسمى تكامل فورير للدالة $f(x)$.

صيغ مكافئـــــــــــــــة:

يمكن التعبير عن (2) ,(1) بصيغة واحده هـــــــي :

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha=0}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(x-u)\,dudx \qquad (3)$$

or $$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha(x-u)}\,dud\alpha$$

or $$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u}\,du \qquad (4)$$

وفي حالة f دالة فردية فـــــإن :

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin\alpha x\,d\alpha\int_{0}^{\infty} f(u)\sin\alpha u\,du \qquad (5)$$

وفي حالة f دالة زوجية فـــــإن :

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\alpha x\,d\alpha\int_{0}^{\infty} f(u)\cos\alpha u\,du \qquad (6)$$

تحويـــــــــــل فـــورير ....Fourier Transform:

من المعادلة (4) نجــــــــد أن :

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\alpha u} du \qquad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha u} dx \qquad (8)$$

الدالة $F(\alpha)$ تسمى تحويل فورير للدالة $f(x)$ وتكتب :

$F(\alpha) = \Im\{f)(x)\}$ والدالة $f(x)$ هي تحويل فورير

العكســـــــــــي للدالة $F(\alpha)$ وتكتب $f(x) = \Im^{-1}\{F(\alpha)\}$

تحويل فـــــــوريــر الجيبى وجيبى التمام :

اذا كانت $f(x)$ دالة فردية فان تكامل فوريريختزل الى صيغة (5) وهي :

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} F_s(\alpha) \sin \alpha x d\alpha$$

اما اذا كانت الدالة زوجية فـــــــإن:

$$F_c(\alpha)=\int_0^\infty f(u)\cos\alpha u du \ , \ f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_c(\alpha)\cos\alpha x d\alpha$$

حيث $F_c(\alpha)\ ,\ F_s(\alpha)$ تسمى بتحويل فورير جيبي التمام والجيبي للدالة $f(x)$.

<u>نظرية الاندمـــــــــــــاج .... ConvolutionTheorem :</u>

اندمـــــــــــــاج الدالة $f(x)\ ,\ g(x)$ يعرف بانه :-

$$f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du$$

ونظرية الاندماج تقرر ان تحويل فورير لاندماج $f\ ,\ g$ اي الدالة $f*g$ يساوي حاصل ضرب تحويل فورير للدالتين $f\ ,\ g$ بمعنى ان :

$$\Im\{f*g\}=\Im\{f\}\Im\{g\}$$

كما ان الاندماج يحقق قوانين التبادلالملازم والتوزيع اي ان :

$$f*g=g*f\ ,\ f*(g*h)=(f*g)*h$$

$$,\quad f*(g+h)=f*g+f*h$$

<u>أمثـــــــــــــــــــــلة</u>

مثال (1) بين ان المعادلتين (3) , (1) متكافئة .

الحـــــــــل:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha=0}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty}f(u)\cos\alpha(x-u)dudx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha=0}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty}f(u)\{\cos\alpha x\cos\alpha u+\sin\alpha x\sin\alpha u\}dudx$$

حيـــــــــــث

$$=\int_{\alpha=0}^{\infty}[A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x]dudx$$

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\alpha udx$$

$$B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin\alpha udx$$

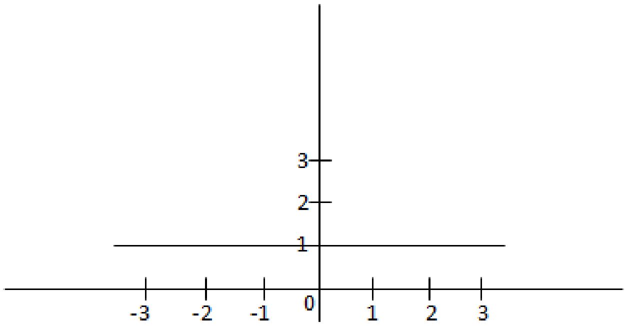
مثال (2) أ- اوجد تحويل فورير للدالة :

$$f(x)=\begin{cases}1 & : \quad |x|<a\\ 0 & : \quad |x|>a\end{cases}$$

ب – ارسم منحنى الدالة $f(x)$ ومنحى تحويل فوريـــر لها في حالة $a=3$

منحى الدالة

عندما $a=3$

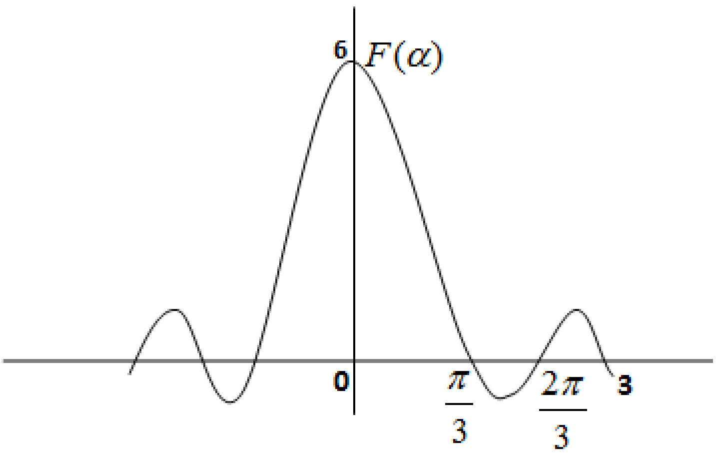


أ- $F(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u}du=\int_{-a}^{a} e^{-i\alpha u}du$

$$=\frac{e^{-i\alpha u}-e^{-i\alpha a}}{-i\alpha}=\frac{2\sin\alpha a}{\alpha}$$

$$=\frac{e^{-i\alpha u}}{-i\alpha}\Big|_{-a}^{a}$$

مع ملاحظة ان $F(0)=2a$ والشكل الاتي يبين منحى التحويل عندما $a=3$



مثال (3)

استخدم نتيجة المثال السابق في إيجاد قيم التكاملين الاتيين :

(أ) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha a \cos \alpha}{\alpha} d\alpha$$

(ب) $$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$$

<u>الحـــــــــــل:</u>

للدالة المعرفة في المثال السابق اثبتنا ان :

$$F(\alpha) = \frac{2\sin \alpha a}{\alpha}$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin \alpha a}{\alpha} e^{i\alpha x} d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha a \cos \alpha x}{\alpha} d\alpha + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha a \sin \alpha x}{\alpha} d\alpha$$

وحيث ان كلا من .... $\alpha, \sin \alpha a,$ دوال فردية في α فـــإن الدالة التى على علامة التكامل تكون دالة فردية ولذا ينعدم التكامل الثاني ويصبح:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha a \cos \alpha a}{\alpha} d\alpha$$

اي ان قيم التكامل هي نفس قيم الدالة $f(x)$ المعرفة في المثال وحسب نظرية فورير يقترب التكامل من قيم الدالة او متوسط قيمتها .

اي ان :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha a \cos \alpha a}{\alpha}\, d\alpha = \begin{cases} \pi & : \quad |x| < a \\ \dfrac{\pi}{2} & : \quad |x| = a \\ 0 & : \quad |x| < a \end{cases}$$

ب – بوضع $a = 1\ ,\ x = 0$ في نتيجة (أ) ينتج أن :

$$\text{or} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha = \pi \int_{0}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2}$$

مثال (4) : وهو تطبيق على نظرية الاندماج .

حل المعادلة التكاملية :

$$y(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} y(u) r(x-u) du$$

حيث $g(x)\ ,\ r(x)$ دوال معطاه .

<u>الحـــــــــــل</u>

بأخذ تحويل فورير للطرفين وتطبيق نظرية الاندماج فـــــإن:

$$y(\alpha) = G(\alpha) + Y(\alpha) R(\alpha)$$

حيث $G(\alpha)\ ,\ R(\alpha)$ دوال معلومة لانها تحويل فورير لدوال معلومـــة .

ومن هذا ينتج ان:

$$y(\alpha) = \frac{G(\alpha)}{1 - R(\alpha)}$$

اي ان $Y(\alpha)$ ولو ان تحويل لدالة مجهولة اننا استطعنا ايجاده بدلاة تحويلات معلومة لدوال معلومة .

وللحصول على نفس الدالة $y(x)$ نجري التحويـــــــــــــل العكســــــــــي .

اي ان :-

$$y(x)=\Im^{-1}\left\{\frac{G(\alpha)}{1-R(\alpha)}\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(\alpha)}{1-R(\alpha)}e^{i\alpha x}d\alpha$$

حيث كل الدوال التى تلي علامة التكامل دوال معلـــــــومة.

مثال (5) :

اوجد حل المعادلة التكامليـــــــة

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y(u)\,du}{(x-u)^2+a^2}=\frac{1}{x^2+b^2}$$

<u>الحــــــــــــل:</u>

نحسب أولا تحويل فورير للطرف الأيمن :

$$\Im\left\{\frac{1}{x^2+b^2}\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\alpha x}}{x^2+b^2}dx$$

$$=2\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^2+b^2}dx$$

هذا التكامل معطى كتمرين (2) ونتيجه هي

$$\Im\left\{\frac{1}{x^2+b^2}\right\}=\frac{\pi}{b}e^{-b\alpha} \quad (1)$$

ومن ذلك ينتج ايضا ان (2) $\Im\left\{\frac{1}{x^2+b^2}\right\}=\frac{\pi}{a}e^{-a\alpha}$

بإجراء التحويل على طرفي المعادلة ينتج ان :

$$\Im\{y\}\Im\left\{\frac{1}{x^2+b^2}\right\}=F\left\{\frac{1}{x^2+b^2}\right\} \quad (3)$$

وبالتعويض عن (2) , (1) في (3) ينتج ان :

$$Y(\alpha)\frac{\pi}{a}e^{-a\alpha}=\frac{\pi}{b}e^{-b\alpha}$$

اي ان $Y(\alpha)=\frac{a}{b}e^{-(b-\alpha)\alpha}$

ويكون $y(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}Y(\alpha)d\alpha$

$$=\frac{a}{b\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-(b-a)\alpha}\cos\alpha x d\alpha$$

$$=\frac{a(b-a)}{b\pi\left[x^2+(b-a)^2\right]}$$

حيث استخدمنا العلاقة .... $e^{i\alpha x}=\cos\alpha x+i\sin\alpha x$
وحذفنـــــــا الحد الثاني باعتباره دالة فردية ينعدم تكاملة وضاعفنا قيمة التكامل بعد تغير الحدود من صفر الى α بدلا من $-\infty$ الى ∞

تمـــــــــــــــاريـــــن:

1) – بين ان المعادلتين (4) , (3) في نظرية تكامل فورير متكافئتان .

2) – أ- اوجد تحويل فورير جيببي التمام للدالة $f(x) = e^{-mx}$

ب – استخدم نتيجة (أ) في اثبات ان :

$$\int_0^\infty \frac{\cos pv dv}{v^2+\beta^2} = \frac{\pi}{2\beta} e^{-P\beta}$$

3) – أوجد حل المعادلة التكاملية :

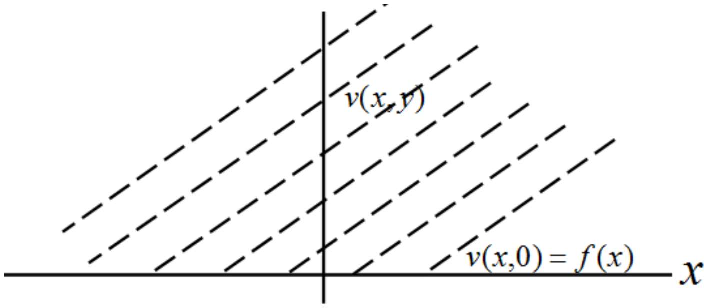
$$\int_0^\infty f(x)\sin\alpha x dx = \begin{cases} 1-\alpha : 0 \le \alpha \le 1 \\ 0 : \alpha > 1 \end{cases}$$

تطبيقات على تكامل فورير :-

مثال (1) اوجد الحل المحدود لمعادلة لابلاس $\nabla^2 v = 0$ لنصف المستوى $y > 0$ اذا علم انه على محور x تكون v معطاه باالدالـــــة $f(x)$

الحـــــــــل:

المسألة الحدية هـــــــى:



$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \; v(x,0) = f(x), \; |v(x,y)| < M$$

لفصل المتغيرات ضع $v = XY$

$$\text{TThen } \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \text{ , } Y'' - \lambda^2 Y = 0$$

$$v(x,y) = (a_1 \cos\lambda x + b_1 \sin\lambda x)(a_2 e^{\lambda y} + b_2 e^{-\lambda y})$$

وبسبب ان $v(x,y)$ يجب ان تكون محدودة فإن $a_2 = 0$

$$, v(x,y) = e^{-\lambda y}(A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)$$

وبسبب عدم وجود شروط على البارامتر λ فإنه بتطبيق مبدأ الأضافة ينتج أن :

$$v(x,y) = \int_0^\infty e^{-\lambda y}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda$$

وبسبب الشرط $v(x,0) = f(x)$ فـــإن :

$$f(x) = \int_0^\infty \left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda$$

ومن نظرية تكامل فورير نجـــد أن :

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda u du$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\lambda u du$$

والنتيجة أن :

$$v(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{\lambda=0}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty}e^{-\lambda y}f(u)\cos\lambda(x-u)\,du\,d\lambda$$

مثال (2) :بين ان نتيجة المثال السابق يمكن ان تختزل الى :

$$v(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(u)}{y^2+(u-x)^2}\,du$$

الحـــــــــــل:

$$v(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\left[\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda y}\cos\lambda(x-u)\,d\lambda\right]du$$

وبإجراء التكامل الداخلي نجـــــد أن :

$$\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda y}\cos\lambda(x-u)\,d\lambda=\frac{y}{y^2+(u-x)^2}$$

$$\therefore v(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(u)}{y^2+(u-x)^2}du$$

مثال (3) : أ – استخدم تحويل فوريــر لحل المسألة الحدية الاتيـــــــــــه :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial u}{\partial x^2}\ ,u(x,0)=f(x)\ ,|u(x,t)<u|\ ,-\infty<x<\infty$$

ب –استنتج المعنى الطبيعي للمسألة:

الحـــــــــــل:

أ – بأخذ تحويـل فورير المعادلة ينتج أن :

$$\frac{d}{dt}\Im\{u\}=-k\alpha^2\Im\{u\}$$

وهذة مسألة تفاضلية عادية للدالة $\Im\{u\}$ وحلها هـــــــو:

$$\Im\{u\}=c(\alpha)e^{-k\alpha^2 t}$$

ويوضع $t=0$ نحصل على :

$$\Im\{u(x,0)\}=\Im\{f(x)\}=c(\alpha)$$

اي ان :

$$\Im\{u\}=\Im\{f\}.e^{-k\alpha^2 t} \qquad (1)$$

وحتى يصبح في الامكان تطبيق نظرية الاندماج فإنه يجب ان يكتب العامل التاني في الطرف الايمن على هيئة تكامل . وهناك تكامل معروف هـــــــو :

$$\int_0^\infty e^{-Mx^2}\cos\beta x dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{M}}e^{\frac{-\beta^2}{4M}}$$

ومن ذلك نجــــــد ان :

$$e^{-k\alpha^2 t}=2\sqrt{\frac{1}{4k\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4kt}}\cos\alpha x dx$$

اي ان : $$=2\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{4k\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}\cos\alpha x dx$$

$$e^{-k\alpha^2 t}=\Gamma\left\{\sqrt{\frac{1}{4k\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right\} \qquad (2)$$

من (1) , (2) نجـــــد ان :

$$\Im\{u\} = \Im\{f\}.\Im\left\{\sqrt{\frac{1}{4k\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right\}$$

وبتطبيق نظرية الأندماج فـــإن :

$$u(x,t) = f(x) * \sqrt{\frac{1}{4k\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(w)\sqrt{\frac{1}{4k\pi t}}e^{-\frac{(x-w)^2}{4kt}}dw$$

هذا ويمكن تبسيط النتيجة اذا اجرينا التحويل الاتـــــى :

$$\text{Or} \frac{(w-x)^2}{4kt} = z^2 \quad z = \frac{x-w}{2\sqrt{kt}}$$

والنتيجة هـــــى:

$$\therefore u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} f(x-2z\sqrt{kt})dz$$

ب – المعنى الطبيعي توصيل حراري في ساق رفيعه لا نهائيه الطول .

مثال (4) : لانهائي الطول ليعطي الازاحة الابتدائية $y(x,0) = f(x)$
ثم يترك ليهتز .اثبت ان الازاحة العامة تعطي من :

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+at) + f(x-at)\right]$$

ثم وضح معنى هذة النتيجة :

الحـــــــــــــــل:

المسألة الحدية الخاصة بهذا المثال هـــــــى:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad , \; y(x,0) = f(x) \quad , y_t(x,0) = 0 \quad , \; |y(x,t)| < M \quad , -\infty < x < \infty$$

بعد تطبيق مبدأ الاضافة (بالتكامل)فالحل العام هـــو :

$$y(x,t) = \int_0^\infty [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\cos\lambda at d\lambda$$

بوضع $t = 0$ وتطبيق الشرط الأول فـــإن :

$$f(x) = \int_0^\infty [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x] d\lambda$$

حيـث :

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda u du,$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\lambda u du,$$

وبالتعويض في صيغة الدالة $y(x,t)$ ينتج أن :

$$y(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty} f(u)[\cos\lambda x\cos\lambda u+\sin\lambda x\sin\lambda u]\cos\lambda at\,du\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)[\cos(\lambda x-\lambda u)]\cos\lambda at\,du\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)[\cos(x+at-u)+\cos\lambda(x-at-u)]\,du\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda(x+at-u)\,du\,d\lambda \qquad (1)$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda(x-at-u)\,du\,d\lambda$$

ولكن احدى صيغ نظرية فورير:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda(x-u)\,du\,d\lambda \qquad (2)$$

وبمقارنة (2) و(1) نجـــد أن :

$$y(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]$$

التفسير الطبيعي لهذة النتيجة لا يتم الا بعد تحليل دقيق لها كالأتي :-

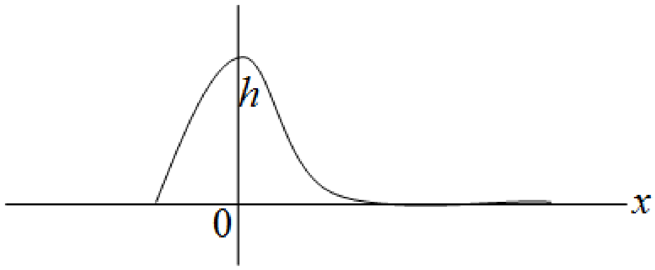
نفرض أن $y(x,t)=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$

حيـث $y_1 = f(x+at)\ , y_2 = f(x-at)$

وعلينا الان نتبع تغيرات الدالة $y_2 = f(x-at)$ في أزمنة مختلفة.

عند $t=0$ يكون $y_2(x,0) = f(x)$ حيث $f(x)$ هو التوزيع الابتدائي للإزاحات او بمعنى اخر ان $y_2 = f(x)$ هى الدالة التي تعطى شكل الوتر في الحالة الابتدائيه ونفرض الشكل الاتي يمثل الدالة

$$y_2(x,0) = f(x)$$



ولنفرض ان قيمة الدالة عند $x=0$ هي العدد h اي ان ارتفاع الوتر عند نقطة الاصل عند بداية الحركة هو العدد h.

نركز النظر على هذة القيمة h عندما ندع الزمن والمسافة تتغيران معا كما يحدث عندما يركز الأنسان نظره على قمة موجة تنتشر في البحر فيجد ان هذة القمة تتحرك .

وحيث أنه لأي زمن وايمسافة يكون $y_2 = f(x-at)$ وحيث اننا نريد ان يكون دائــما $(x-at) = h$............ وحيث انه $f(0) = h$.

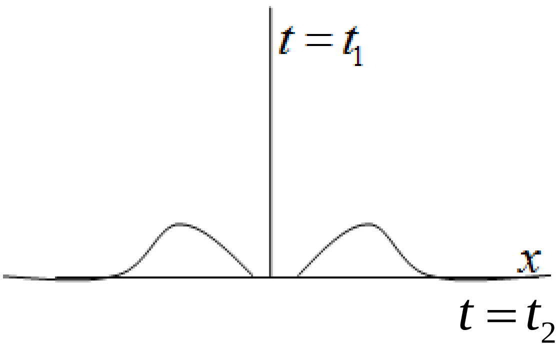
لذا فان الشرط يتحقق عندما $x - at = 0$.

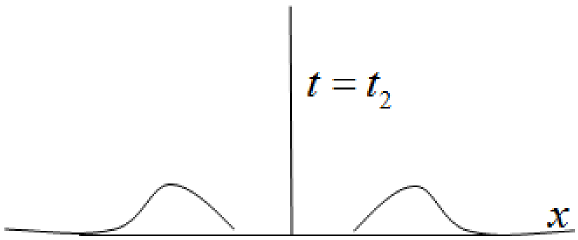
بمعنى اخر لان $x-at$ حيث x هنا تعبر عن النقطة التى ازاحتها L ومعنى هذا ان هذة النقطة التى لها هذة الازاحة تتحرك الى اليمين بسرعة قدرها a .

ونفس الطريقة لو تأملنا الدالة فاننا نجد ان هناك نقطة اخرى لها نفس الازاحة ولكنها تتحرك يسارا بسرعة α .

وبتطبيق هذا الاستنتاج ايضا على اي نقطة اخرى لها ازاحة وتختلف عن L ولذا نستطيع ان نقول ان الشكل الابتدائي للوتر يتحرك كله (الشكل وليس الوتر) الى اليمين والي اليسار بسرعة a .

والشكل الاتي يوضح الامر .





اما الازاحة العامة فهـــــــــــى :

$$y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$$

وهى من حيث القيمة العددية مساويه لقيمة $f(x)$.

تمـــــــــــاريـــــــــــن

1) – ساق نصف لانهائية $(x \geq 0)$ معزولة الجوانب والتوزيع الحراري الابتدائي لهـــــا معطى بالدالة $f(x)$. حيث الطرف الايسر على درجه الصفر والمطلوب .

أ – كتابة المسألة الحديــــــــــة .

ب – أثبت :

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(v)e^{-k^2\lambda t}\sin\lambda v\sin\lambda x\,dv\,d\lambda$$

2) – اذا اخـــذ تحويل فورير للدالة $v(x,t)$ بالنسبة المتغير x

فاثبت ان :-

أ – $\Im\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\} = i\alpha\Gamma\{v\}$

ب – $\Im\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\} = -\alpha^2\Gamma\{v\}$

جـ – $\Im\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\Gamma\{v\}$

علما بان: $x \to \pm\infty$ $v_1 \frac{\partial v}{\partial x} \to 0$ as

الفصل الثالث

تحاويـــــــــل لابـــــــــلاس ..... Laplace Transform

التحويـــــل التكامـــــل ....Integral Transform

عند دراستنا لتكامل فورير رأينا انه تحت شروط معينة فان الدالة $f(x)$

يمكن تمثيلها بالتكامل $f(x)=\int_0^\infty A(\lambda)\cos\lambda x d\lambda$

حيـــث $A(\lambda)=\dfrac{2}{\pi}\int_0^\infty f(u)\cos\lambda u du$

وبعد تعديل بسيط في الرموز يمكننا ان نقول انه اذا كانت $F(t)$ دالـــــة في المتغير t فان التحويل التكاملي لها هو بصفة عامـــــــة :

$$f(s)=\int_a^b F(t)K(s,t)dt$$

حيث $f(s)$ تسمى التحويل التكاملي للدالة $F(t)$ وحيث $k(s,t)$ تسمى نواة التحويل وواضح ان نوع التحويل يتوقف على كيفية اختيار النواة $k(s,t)$ كما يتوقف على حدود التكامل a,b.

فمثلا تحويل فورير نحصل عليه باختيار $k(s,t)=\cos st$ او $k(s,t)=\sin st$ وباختيار $b=\infty$, $a=0$

والتحويلات التكاملية تلعب دورا هاما في حلول بعض المسائل الحدية وغيرها حيث نستبدل حل المسألة التى تتضمن الدالة $F(t)$ بحل مسألة أخــــرى تتضمن دالة التحـــويل $f(s)$ والمســألة الثانية تكون عادة اسهل كثيرا في حلها من المسألة الأصلية وبعد إيجاد الحل للدالة...... $f(s)$ نرجع فنجرى عليهما التحويل العكسي حتى نحصل على الحل المقابل وهو الدالة $F(t)$.

اما تحويل لابلاس فيكون باختيار $K(s,t)=e^{-st}$ وتكون حدود التكامل هــي $a=0 . b=\infty$,

وفي هذة الحالة يكون :

$$f(s)=\int_{0}^{\infty} F(t)e^{-st}dt$$

هذا ولا يجب ان يعتبر ان تحويل فوريـر او تحويل لابلاس هو اول ما قابلنا من تحويلات اذ اننا في الحقيقة قد استخدمنا نوعا من التحويل ــ حتى وإن لم يكن تحويلا تكامليا ـــ حيث كنا نستعين على حل بعض المسائل الحسابية التى تتضمن عمليات الضرب والقسمة لبعض الأعداد او قوى الأعداد والجذور .عندئذ كنا نحسب أولا لوغاريتمات الأعداد وهذة العملية في حد ذاتها ماهـــى الا عملية تحويل العدد الى عدد اخر بطريقة معينة هــــى حساب لوعاريتم هذا العدد .بعد ذلــــك تتحول المسألة الاصلية الى مسألة اخرى تتضمن لوغاريتمات الاعداد وليست الاعداد نفسها خيـــــث نجري على هذة اللوغاريتمات (اي التحويلات اللوغاريتميه للاعداد) عمليات حسابية اخــري غير العمليات الأولى حيث تكون العمليات الجديدة هى مجـرد جمع وطرح التحويلات اللوغاريتميه للأعداد بدلا من عمليات الضرب والقسمة في المسألة الأصلية .وبعد الحصول على الحل اي بعد الحصول على التحويل اللوغاريتمي لجواب المسألة الأصلية نرجع فنجري التحويل العكسي عـــلى اللوغاريتم فنحصل على العدد من لوغاريتمية بعملية حسابية معينة .

وفي تحويل لابلاس يؤخذ المتغير s حقيقي ولو أنه في بعض الأحيان يؤخذ المتغير s بإعتباره متغير مركـــب .

كما أن التحويل $f(s)$ للدالة $F(t)$ يكتب كالاتـــــــي :

$$\ell\{F(t)\} = f(s) = \int_0^\infty F(t)e^{-st}dt$$

ويقال ان التحويل $f(s)$ يوجد اذا كان التكامل متقارب ويحدث هذا اذا توافرت شروط معينة في الدالة $F(t)$ سنناقشـــها فيما بعد .

وفيما يلي جدول تحويلات لبعض الدوال البسيطة .وهذة التحويلات سوف نبرهن على صحتها من خلال الامثلة والتماريــــــن :

$F(t)$	$F(t) = f(s)$
1	$\frac{1}{s} \quad , s > 0$
t	$\frac{1}{s^2} \quad , s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad , s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a} \quad , s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2} \quad , s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2} \quad , s > 0$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2} \quad , s > \lvert a\rvert$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2} \quad , s > \lvert a\rvert$

الدوال ذات الرتبـــة الأسيـــة .... Function of exponential order :

نظريات عن تحويل لابلاس :

(1) خاصـــية الخطيـــــــــة.......... Linearity Property :

اذا كانت c_1, c_2 ثوابت وكانت $F_1(t), F_2(t)$ دوال وكانت $f_1(s), f_2(s)$ هي تحويلات لابلاس لهـذة الدوال على الترتيب

فـــإن :

$$\ell\{c_1F_1(t)+c_2F_2(t)\}=c_1\ell\{F_1(t)\}+c_2\ell\{F_2(t)\}$$
$$=c_1 f_1(s)+c_2 f_2(s)$$

مثال ذلك :

$$\ell\{4t^2-3\cos 2t+5e^{-t}\}=4\ell\{t^2\}-3\ell\{\cos 2t\}+5\ell\{c^{-t}\}$$
$$=4(\frac{2}{s^3})-3(\frac{s}{s^2+4})+5(\frac{1}{s+1})$$
$$=\frac{8}{s^3}-\frac{3s}{s^2+4}+\frac{5}{s+1}$$

(2) خاصية الازاحة الاولى .... First Chifting Property :

اذا كان $\ell\{F(t)\}=f(s)$ فإن $\ell\{e^{at}F(t)\}=f(s-a)$

مثال ذلك : $\ell\{e^{-t}\cos 2t\}=\dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}=\dfrac{s+1}{s^2+2s+5}$

(3) خاصية الأزاحة الثانيـــــة :

اذا كان $\ell\{F(t)\}=f(s)$ فإن $e^{-as}f(s)=\ell\{G(t)\}$

حيث
$$G(t)=\begin{cases}F(t-a) & : t>a\\ 0 & : t<a\end{cases}$$

مثال ذلك :

حيث أن $\ell\{t^3\}=\dfrac{3!}{s^4}=\dfrac{6}{s^4}$ فإن $\dfrac{6e^{-2s}}{s^4}$

يكون تحويل لابلاس للدالة $G(t)$ حيث

$$G(t)=\begin{cases}(t-2)^3 & : t>2\\ 0 & : t<2\end{cases}$$

(4) <u>خاصية تغير المقاس ....Change of scale Property:</u>

اذا كان $\ell\{F(t)\}=f(s)$ فــإن $\ell\{F(at)\}=\dfrac{1}{a}f(\dfrac{s}{a})$

مثال ذلك $\ell\{\sin t\}=\dfrac{1}{s^2+1}$ لذا فــإن :

$$\ell\{\sin 3t\}=\frac{1}{3}\frac{1}{(\frac{s}{3})^2+1}=\frac{3}{s^2+9}$$

(5) <u>تحويل لابلاس للمشتقات :</u>

أ ـ إذا كان

$\ell\{F(t)\}=f(s)....$ فــأن $\ell\{F'(t)\}=sf(s)-F(0)$

مثال ذلك $\ell\{\cos 3t\}=\dfrac{s}{s^2+9}$

لذا فــإن :

$$\ell\{-3\sin 3t\}=s(\frac{s}{s^2+9})-1=\frac{-9}{s^2+9}$$

ب- كذلك

$$\ell\left\{F^{n}(t)\right\}=s^{2} f(s)-sF(0)-F'(0)$$

او على وجه العموم .

$$\ell\left\{F^{(n)}(t)\right\}=s^{n} f(s)-s^{n-1}F(0)-s^{n-2}F'(0)-.....-sF^{(n-2)}(0)-F^{(n-1)}(0)$$

(6) <u>تحويل لابلاس للتكاملات :</u>

اذا كان $\ell\left\{F(t)\right\}= f(s)$ فـــإن $\ell\left\{\int_0^t F(u)du\right\}=\dfrac{f(s)}{s}$

مثال ذلك : $\ell\left\{\sin 2t\right\}=\dfrac{2}{s^{2}+4}$ لذا فـــإن :

$$\ell\left\{\int_0^t \sin 2u du\right\}=\frac{2}{s(s^{2}+4)}$$

والتحقيق من ذلك فــإن :

$$F(t)=\int_0^t \sin 2u du=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)$$

$$\therefore\ \ell\left\{F(t)\right\}=\frac{1}{2}\left[\ell\{1\}-\ell\{\cos 2t\}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^{2}+4}\right]=\frac{2}{s(s^{2}+4)}$$

(7) <u>الضرب في العامل t^{n} :</u>

اذا كان $\ell\left\{F(t)\right\}= f(s)$ فـــإن :

$$\ell\left\{t^{n}F(t)\right\}=(-1)^{n}\frac{d^{n}}{ds^{n}} f(s)=(-1)^{n} f^{(n)}(s)$$

مثال ذلك $\ell\{e^{2t}\} = \dfrac{1}{s-2}$ لذا فـــإن :

$$\ell\{te^{2t}\} = -\frac{d}{ds}(\frac{1}{s-2}) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

وكذلك $$\ell\{t^2e^{2t}\} = \frac{d^2}{ds^2}(\frac{1}{s-2}) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

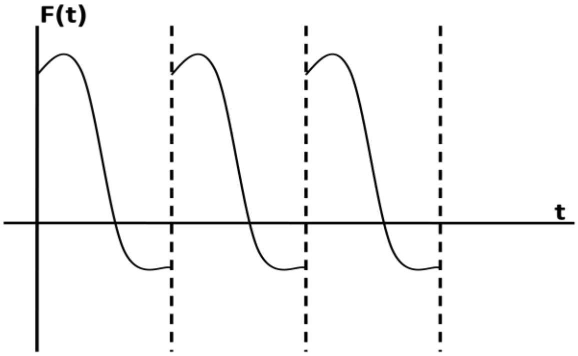
(8) القسمة على t :

إذا كان $\ell\{F(t)\} = f(s)$ فـإن $\ell\left\{\dfrac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)du$

مثال ذلك : حيث أن $\ell\{\sin t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$ وحيث أن $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} == 1$

فـإن $$\ell\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{du}{u^2 \oplus 1} = \tan^{-1}(\frac{1}{s})$$

(9) اذا كانت $F(t)$ دالة دورتها T كما بالشكل فـإن :



$$\ell\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} F(t)\,dt}{1-e^{-st}}$$

(10) دالة التحويل عند النقطة اللانهاية :

اذا كان $\ell\{F(t)\} = f(s)$ فـإن $\lim_{s\to\infty} f(s) = 0$

(11) نظريه القيمة الابتدائية .... Initial –value Theorm :

تنص هذة النظرية على أن $\lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{s\to\infty} sf(s)$

وذلك بفرض تواجد النهايات المذكوره .

(12) نظريه القيمة النهائية .... Final –value Theorm :

تنص هذة النظريه على أن $\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} sf(s)$

وذلك بفرض تواجد النهايات المذكورة .

(13) تعميم نظرية القيمة الابتدائيه :

اذا كان $\lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{G(t)} = 1$ فإن قيم الدالـــــــه $F(t)$ تكون قريبة من قيم الدالة $G(t)$ عندما تكون t صغيرة ويعبر عن ذلك كالاتي :

$$F(t) \approx G(t) \quad \text{as } t \to 0$$

بالمثل اذا كان $\lim_{s\to\infty}\frac{f(s)}{g(s)}=1$ فإنه للقيم الكبيرة للمتغير s تكون قيم $f(s)$ قريبه من قيم $g(s)$ ويعبر عن ذلك كالاتي :

$$\text{as } f(s)\approx g(s)\ s\to\infty$$

لهذا يمكن اعادة صياغه نظرية القيمة الابتدائية كالاتي :

اذا كان $F(t)\approx G(t)\ t\to 0$ as

فــــإن $f(s)\approx g(s)\ s\to\infty$ as

حيث $f(s)=\ell\{F(t)\},\qquad g(s)=\ell\{g(t)\}$

(14) تعميم نظرية القيمة النهائيــــــــــة :

اذا كان $F(t)\approx G(t)\ t\to\infty$ as فـــإن $s\to 0$ as

$$f(s)\approx g(s)$$

حيث $f(s)=\ell\{F(t)\}\quad,\quad g(s)=\ell\{g(t)\}$

<u>طرق لإيجــاد تحويلات لابلاس :</u>

1) الطريقة المباشرة $f(s)=\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$

2) طريقة المتسلسلات اذا كانت $F(t)$ يمكن كتابتها كمتسلسله قوى –
اي اذا كان :

$$F(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+..........=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$$

فان تحويل لابلاس لها يمكن ايجاده كمجموع تحويلات لابلاس لحدود المتسلسه اي ان :

$$\ell\{F(t)\}=\frac{a_0}{s}+\frac{a_1t}{s^2}+\frac{a_2t^2}{s^3}+..........=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!a_n}{s^{n+1}}$$

على شرط ان تكون المتسلسه الاخيرة تقاربيـــــــه :

3) الاشتقاق بالنسبه لبارامتر وهذا ماسيتضح من الامثلة.

4) استخدام جداول التحويـــــــــــــل .

أمثلة و تمـاريـــــــــــن

1) اثبت ان: (أ) $\ell\{1\}=\dfrac{1}{s}$

(ب) $\ell\{t\}=\dfrac{1}{s^2}$

(ج) $\ell\{e^{at}\}=\dfrac{1}{s-a}$

2) اثبت ان (أ) $\ell\{\sin at\}=\dfrac{a}{s^2+a^2}$

(ب) $\ell\{\cos at\}=\dfrac{s}{s^2+a^2}$

3) اثبت ان (أ) $\ell\{\sinh at\}=\dfrac{a}{s^2-a^2}$

(ب) $\ell\{\cosh at\}=\dfrac{s}{s^2-a^2}$

4) اوجد $\ell\{F(t)\}$ حيث $F(t)=\begin{cases}5: & 0<t<3\\ 0: & t>3\end{cases}$

5) اوجد $\ell\{4e^{5t}+6t^{3}-3\sin 4t+2\cos 2t\}$

6) برهن على خاصية الازاحة الاولى .

7)اوجد كلا مما يأتي :

$$\ell\{t^{2}e^{3t}\}\ ,\ell\{e^{-2t}\sin 4t\}\ ,\ \ell\{e^{3t}\cosh 5t\}\ ,\ \ell\{e^{-2t}(3\cos 6t-5\sin 6t)\}$$

8) اثبت خاصية الازاحة الثانية .

9) اذا كانت $F(t)=\begin{cases}\cos(t-\frac{2\pi}{3}) & :t>\frac{2\pi}{3}\\ 0 & :t<\frac{2\pi}{3}\end{cases}$

فأوجد $\ell\{F(t)\}$

10) اثبت خاصية تغير المقياس .

11) اذا كان $\ell\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\tan^{-1}(\frac{1}{s})$ فــأوجد $\ell\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}$

12) اذا كان $\ell\{F(t)\}=f(s)$ فأثبت ان:

$$\ell\{F'(t)\}=sf(s)-F(0)$$

13) اذا كان $\ell\{F(t)\}=f(s)$ فأثبت أن:

$$\ell\{F''(t)\}=s^{2}f(s)-sF(0)-F'(0)$$

14) اذا كانت $\ell\{F(t)\}=f(s)$ فاثبت ان :

$$\ell\left\{\int_0^t F(u)du\right\}=\frac{f(s)}{s}$$

15) اوجد $\ell\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}du\right\}$

16) أثبت ان $\ell\{t^n F(t)\}=(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s)$

17) أ- اوجد $\ell\{t\sin at\}$ ب- أوجد $\ell\{t^2\cos at\}$

18) اذا كان $\ell\{F(t)\}=f(s)$ فأثبت ان :

$$\ell\left\{\frac{F(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty f(u)du.$$

19) أ- أثبت ان $\int_0^\infty \frac{F(t)}{t}dt=\int_0^\infty f(u)du$

ب- أثبت ان $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$

20) اذا كانت $F(t)$ دورية دورتها T فاثبت ان:

$$\ell\{F(t)\}=\frac{\int_0^T e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-sT}}$$

21) أ- ارسم منحنى الدالة $F(t)=\begin{cases}\sin(t) : t<\pi \\ 0 \quad : \pi<t<2\pi\end{cases}$ علما

بإن الدالة دورية و دورتها 2π

ب- اوجد $\ell\{F(t)\}$

22) اثبت نظرية القيمة الابتدائية وهى $\lim_{t\to 0} F(t)=\lim_{s\to\infty} sf(s)$

23) اثبت نظرية القيمة الابتدائية وهى $\lim_{t\to\infty} F(t)=\lim_{s\to\infty} sf(s)$

24) حقق نظريات القيمة الابتدائية والنهائية للدالة ....

$F(t)=3se^{-2t}$

حلول بعض التمـــــــــــارين

2) المطلوب اثبات (أ) $\ell\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$

(ب) $\ell\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2 + a^2}$

الحـــــــــــــل

أ- $\ell\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st} \sin at dt$

$$= \frac{e^{-st}(-\sin at - a\cos at)}{s^2 + a^2} \Big|_0^\infty = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

ب- $\ell\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos at dt$

$$= \frac{e^{-st}(-a\cos at + a\sin at)}{s^2 + a^2} \Big|_0^\infty = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$= \frac{e^{-st}(-a\cos at + a\sin at)}{s^2 + a^2} \Big|_0^\infty = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

حل اخــــــــر

$$\ell\{e^{iat}\} = \frac{1}{s - ia} = \frac{s + ia}{s^2 + a^2}$$

ولكن $e^{iat} = \cos at + i \sin at$ ومن ذلك ينتج ان :

$$\ell\{\cos at\} + i\ell\{\sin at\} = \ell\{e^{iat}\} == \frac{s+ia}{s^2+a^2}$$

وبمساواة الحقيقي والتخيلي نحصل على التحويلين في وقت واحد .

(4
$$F(t) = \begin{cases} 5 & : 0 < t < 3 \\ 0 & : t > 3 \end{cases}$$

$$\ell\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt = \int_0^3 5e^{-st} dt + \int_3^\infty 0.e^{-st} dt$$

$$\ell\{F(t)\} = 5 \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^3 = \frac{5(1-e^{-3s})}{s}$$

(6
$$\ell\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt = f(s)$$

$$\ell\{e^{at} F(t)\} = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} F(t) dt = f(s-a)$$

(7

$$\ell\{t^2\} = \frac{2}{s^3}, \quad then\ \ell\{t^2 e^{3t}\} = \frac{2}{(s-a)^3} \quad ,then\ \ \ell\{\sin 4t\} = \frac{4}{s^2+16} \quad ,$$

$$\ell\{e^{-2t} \sin 4t\} = \frac{4}{(s+2)^2+16} \quad ,then\ \ell\{\cosh 5t\} = \frac{s}{s^2-25} \quad ,$$

$$\ell\{e^{4t} \cosh 5t\} = \frac{s-4}{(s-4)^2-25},$$

حل اخــــر: $\ell\{\cosh 5t\} = \dfrac{s}{s^2-25},$

$$\ell\{e^{4t}\cosh 5t\} = \ell\left\{e^{4t}\left(\frac{e^{5t}+e^{-5t}}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\ell\{e^{9t}\} + \frac{1}{2}\ell\{e^{-t}\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-9}+\frac{1}{s+1}\right)$$

$$= \frac{s-4}{s^2-8s-9} = \frac{s-4}{(s-4)^2-25}$$

$$\ell\{3\cos 6t - 5\sin 6t\} = 3\left(\frac{s}{s^2+36}\right) - 5\left(\frac{6}{s^2+36}\right) = \frac{3s-30}{s^2+36}$$

$$\therefore \ell\{e^{-2t}(3\cos 6t - 5\sin 6t)\} = \frac{3(s+2)-30}{(s+2)^2+36}$$

(8
$$G(t) = \begin{cases} F(t-a) & : t > a \\ 0 & : t < a \end{cases}$$

$$\ell\{G(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}G(t)dt = \int_0^a e^{-st}G(t)dt + \int_a^\infty e^{-st}G(t)dt$$

$$= 0 + \int_{t=a}^\infty e^{-st}F(t-a)dt$$

باستخدام التحويــل $u = t - a$ نجـد أن :

$$\ell\{G(t)\} = \int_{u=0}^{\infty} e^{-s(u+a)}F(u)du = e^{-as}\int_{0}^{\infty} e^{-su}F(u)du = e^{-as}f(s)$$

(9

$$F(t) = \begin{cases} \cos(t-\frac{2\pi}{3}) & : t > \frac{2\pi}{3} \\ 0 & : t < \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\ell\{F(t)\} = \int_{0}^{2\pi/3} 0.e^{-st}dt + \int_{2\pi/3}^{\infty} e^{-st}\cos(t-\frac{2\pi}{3})dt$$

$$= \int_{u+0}^{\infty} e^{-s(u+\frac{2\pi}{3})}\cos u du = e^{\frac{-2\pi s}{3}}\int_{u+0}^{\infty} e^{-su}\cos u du = \frac{se^{-\frac{2\pi s}{3}}}{s^2+1}$$

كان هذا هو الحل المباشر اما الحل بتطبيق نظرية الأزاحة الثانيه فهو :

$$\ell\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1} \therefore \ell\{F(t)\} = \frac{se^{-\frac{2\pi s}{3}}}{s^2+1}$$

14) نفرض ان $G(u) = \int_{0}^{t} F(u)du$ ومن ذلك ينتج أن :

$$G'(t) = F(t), G(0) = 0$$

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين ينتج أن :

$$\ell\{F(t)\} = \ell\{G'(t)\} = s\ell\{G\} - G(0) = s\ell\{G(t)\}$$

$$\therefore \ell\left\{\int_0^t F(u)du\right\} = \ell\{G\} = \frac{f(s)}{s}$$

(16
$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt$$

$$\frac{df}{ds} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} F(t)dt = -\int_0^\infty e^{-st} tF(t) = -\ell\{tF(t)\}$$

ومن هذا تجد ان النظرية صحيحة في حالة $n=1$ ولإثباتصحتها في الحالة العامة نفترض صحتها في حالة $n=k$ اي نفرض ان :

$$\int_0^\infty e^{-st}\left[t^k F(t)\right]dt = (-1)^k f^k(s)$$

$$\therefore \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}\left[t^k F(t)\right]dt = (-1)^k f^{(k+1)}(s)$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-st}\left[t^{k+1} F(t)\right]dt = (-1)^{k+1} f^{(k+1)}(s)$$

اي انه اذا كانت النظرية صحيحة في حالة $n=k$ فهى صحيحة في حالة $n=k+1$ وحيث انها صحيحة في حالة $n=1$ فهى صحيحة على الاطلاق .

18) نفرض ان $G(t) = \dfrac{F(t)}{t}$ اي ان $F(t) = tG(t)$

بأخذ تحويل لابلاس ينتج أن :

$$\ell\{F(t)\} = -\frac{d}{ds}\ell\{G(t)\} \therefore\ f(s) = -\frac{dg}{ds}$$

$$\therefore\ g(s) = -\int_{\infty}^{s} f(u)du = \int_{s}^{\infty} f(u)du$$

وهنا أخترنا الحد الادنى المتكامل $s = \infty$ لانه عند هذة النقطة يكون

$$\lim_{s\to\infty} f(s) = 0$$

(20

$$\ell\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}F(t)dt = \int_0^{T} e^{-st}F(t)dt + \int_T^{2T} e^{-st}F(t)dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st}F(t)dt + \ldots$$

في التكامل التاني نضع $t = u+T$ وفي الثالث نضع $t = u+2T$

وهكذا

$$\ell\{F(t)\} = \int_0^{T} e^{-su}F(u)du + \int_0^{T} e^{-s(u+T)}F(u+T)du + \int_0^{T} e^{-s(u+2T)}F(u+2T)du + \ldots.$$

$$= \int_0^{T} e^{-su}F(u)du + e^{-sT}\int_0^{T} F(u)du + e^{-sT}\int_0^{T} F(u)du + e^{-2sT}\int_0^{T} F(u)du + \ldots$$

$$= (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \ldots.)\int_0^{T} e^{-su}F(u)du$$

$$= \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^{T} e^{-su}F(u)du$$

$$\ell\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F'(t)\,dt = sf(s) - F(0) \qquad (22$$

وحيث انه يفترض ان $F'(t)$ من رتبة أسية فإن :

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^\infty e^{-st} F'(t)\,dt = 0$$

اي ان $0 = \lim_{s\to\infty} sf(s) - F(0)$

$$\therefore \lim_{s\to\infty} sf(s) = F(0) = \lim_{t\to 0} F(t)$$

الفصل الرابع

تحويــــلات لابلاس العكسي

The Inverse Laplace Transform

اذا كان $f(s)=\ell\{F(t)\}$ فان الدالة $F(t)$ تسمى تحويل لابلاس العكسي للدالة $f(s)$ ويكتب $F(t)=\ell^{-1}\{f(s)\}$ مثال ذلك

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}=e^{-3t}$$

وبطبيعة الحال اذا وجد جدول لتحويلات لابلاس فإنه يمكن عمل جدول أخر لتحويل لابلاس العكسي كما انه من الخاصة بتحويل لابلاس يمكن اشتقاق النظريات والقواعد المقابلة للتحويل العكسي وهــــــى :-

1- نظرية الخطية:

$$\ell^{-1}\{c_1 f_1(s)+c_2 f_2(s)\}=c_1\ell^{-1}\{f(s)\}+c_2\ell^{-1}\{f(s)\}$$

$$=c_1F_1(t)+c_2F_2(t)$$

مثال ذلك :

$$\left\{\frac{4}{s-2}-\frac{3s}{s^2+16}+\frac{5}{s^2+4}\right\}=4\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}-3\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\}+5\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

$$=4e^{2t}-3\cos 4t+\frac{5}{2}\sin 2t$$

2-خاصية الازاحة الأولى :

$$\ell^{-1}\{f(s-a)\}=e^{2t}F(t)$$

مثال ذلك :حيث ان $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{2}\sin 2t$ فإن :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\right\}=\frac{1}{2}e^t\sin 2t$$

3-خاضية الازاحة الثانية:

$$\ell^{-1}\left\{e^{-as}f(s)\right\}=\begin{cases}F(t-a):t>a\\ 0:t<a\end{cases}$$

مثال ذلك حيث أن : $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$ فإن :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi s}{3}}}{s^2+1}\right\}=\begin{cases}\sin(t-\frac{\pi}{3}) & :t>\frac{\pi}{3}\\ 0 & :t<\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

4-خاصية تغيير المقياس :

$$\ell^{-1}\left\{f(\lambda s)\right\}=\frac{1}{\lambda}F(\frac{t}{\lambda})$$

مثال ذلك : $\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\}=\cos 4t$ وينتج عن ذلك ان :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{2s}{(2s)^2+16}\right\}=\frac{1}{2}\cos\frac{4t}{2}=\frac{1}{2}\cos 2t$$

-5 $\ell^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n}f(s)\right\}=(-1)^n t^n F(t)$

مثال ذلك: $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$ وينتج عن ذلك ان :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right\}=-t\sin t$$

-6 $\ell^{-1}\left\{\int_s^\infty f(u)du\right\}=\frac{F(t)}{t}$

مثال ذلك حيث أنه :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right\}=1-e^{-t}$$

فإن $\ell^{-1}\left\{\int_s^\infty (\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1})du\right\}=\ell^{-1}\left\{\ln(1+(\frac{1}{s})\right\}=\frac{1-e^{-t}}{t}$

-7 إذا كان $\ell^{-1}\{f(s)\}=F(t)$ وكان $F(0)=0$

فإن $\ell^{-1}\{sf(s)\}=F'(t)$ وإذا كان $F(0)\neq 0$ فإن

$$\ell^{-1}\{sf(s)-F(0)\}=F'(t)$$

مثال ذلك حيث أن $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$ وحيث أن $\sin 0=0$

فإن $\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}=\frac{d}{dt}\sin t=\cos t$

8- $\ell^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\}=\int_0^t F(u)du$

ونلاحظ من (8) , (7) ان الضرب في s والقسمة على s تأثيره على $F(t)$ هو الاشتقاق والتكامل على الترتيب .

مثال ذلك : حيث ان $\frac{1}{2}\sin 2t = \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$ فإن :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}=\int_0^t \frac{1}{2}\sin 2u du=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)$$

<u>9- نظرية الادماج .... Convolution Theoem :</u>

تنص على انه اذا كان $\ell^{-1}\{g(s)\}=G(t)$, $\ell^{-1}\{f(s)\}=F(t)$

فإن $$\ell^{-1}\{f(s).g(s)\}=\int_0^t F(u)G(t-u)du=F*G$$

مثال ذلك حيث أن $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}=e^{2t}$, $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}=e^{t}$ فإن

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\}=\int_0^t e^u e^{2(t-u)}du=\int_0^t e^{2t}e^{-u}du$$

$$=e^{2t}\int_0^t e^{-u}du=e^{2t}-e^t$$

بعض الطرق للحصول على تحويل لابلاس العكســــــــــي :

1- الكسور الجزيئية : اذا كان كل من $P(s), Q(s)$..... كثيرات حدود وكانت درجة اقل من درجه $Q(s)$.

فإن الكسر $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ يمكن كتابته كمجموع عدة كسور جزيئية بالصيغه:

$$\frac{A}{(as+b)^r} \quad , \quad \frac{AS+B}{(as^2+bs+c)^r}$$

وبعد إيجاد تحويل لابلاس العكسي لكل كسر والجمع نحصل على التحويل العكسي للكسر $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$

مثال ذلك :

$$\frac{2S-5}{(3s-4)(2s+1)^3} = \frac{A}{3s-4} + \frac{B}{(2s+1)^3} + \frac{C}{(2s+1)^2} + \frac{D}{2s+1}$$

وكذلك:

$$\frac{3s^2-4s+2}{(s^2+2s+4)^2(s-5)} = \frac{As+B}{(s^2+2s+4)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+4} + \frac{E}{s-5}$$

2- طريقة المتسلسلات :

اذا كان $f(s) = \dfrac{a_0}{s} + \dfrac{a_1}{s^2} + \dfrac{a_2}{s^3} + \dots\dots\dots$

فإن

$$\ell^{-1}\{f(s)\} = F(t) = a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2 t^2}{2!} + \frac{a_3 t^3}{3!} + \dots\dots\dots$$

<u>3- طريقة الأشتقاق بالنسبة لبارامتر وهو مايتضح من الأمثلة .</u>

<u>4- استخدام الجدول .</u>

<u>5- صيغة التحويل العكسي للمركب .</u>

<u>6- مفكوك هيفيسيد ....Heaviside Expansion Formula</u>

وتنص على انه اذا كان كل من $Q(s)$, $P(s)$ كثيرات الحدود وكانت درجة $P(s)$ أقل من درجة $Q(s)$ وكان للدالة $Q(s)$ عدد قدره n من الجزور المختلفة هى $\alpha_k , k = 1,2,....., n$

فــإن :
$$\ell^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{Q(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$$

أمثلة و تمـاريـــــــــــن

مقدمـــــــة : العدد $n!$ دالة للعدد n وهذه الدالة تعتبر حالة خاصة من الدالة المسماه دالة جاما $\Gamma(x)$. وفى الوقت الذى يكون فيه $n!$ معرفة فقط للاعداد الصحيحة الموجبه فإن $\Gamma(x)$ معرفة للأعداد الصحيحة والكسرية والسالبة والموجبة . وفى حالة x صحيح موجب

فإن $\Gamma(x+1)=n!$ وفى حالة $x=\dfrac{1}{2}$ فإن $\Gamma(\dfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

وفى حالة n صحيح موجب فإن $n!=n(n-1)(n-2)$ 2.1

وفى الحالة العامة للدالة $\Gamma(x)$ نوجد صيغة مشابهة يوضحها المثال الأتى :

$$\Gamma(\frac{9}{2})=\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\ \Gamma(\frac{1}{2})=\frac{105}{16}\sqrt{\pi}$$

1) أ- أوجد $\ell^{-1}\left\{\dfrac{5s+4}{s^3}-\dfrac{2s-18}{s^2+9}+\dfrac{24-30\sqrt{s}}{s^4}\right\}$

ب-أوجد $\ell^{-1}\left\{\dfrac{6}{2s-3}-\dfrac{3+4s}{9s^2-16}+\dfrac{8-6s}{16s^2+9}\right\}$

2) أوجد كلا مما يأتى :

أ- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\}$ ب- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$

ج- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{4s+12}{s^2+8s+16}\right\}$ د- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2s+3}}\right\}$

3) إذا علم أن $\ell^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\frac{1}{s}}}{s^{\frac{1}{2}}}\right\}=\dfrac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}$ فأوجد $\ell^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\frac{a}{s}}}{s^{\frac{1}{2}}}\right\}$

4) طبق القاعدة .... $\ell^{-1}\left\{f^{(n)}(s)\right\}=(-1)^n t^n F(t)$ لإيجــاد

$$\ell^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$$

5) أوجد $\ell^{-1}\left\{\ln(1+\dfrac{1}{s^2})\right\}$

6) إستخدم القاعدة .... $\ell^{-1}\left\{\dfrac{f(s)}{s}\right\}=\displaystyle\int_0^t F(u)\,du$ لإيجــاد

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\}$$

7) إذا علم أن $\ell^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right\}=\dfrac{1}{2}t\sin t$ فأوجد

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$$

8) بتطبيق نظرية الأندماج أوجد كلا مما يأتى :

أ- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$ ب- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s+1)^2}\right\}$

9) بإستخدام الكسور الجزيئية أوجد كلا مما يأتى :

أ- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$ ب- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\}$

ج- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\}$ د- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{3s+1}{(s-1`)(s^2+1)}\right\}$

هـ - $\ell^{-1}\left\{\dfrac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right\}$

10) أثبت صيغة مفكوك هفيسيد .

11) بتطبيق مفكوك هفيسيد أوجد :

أ- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\}$

ب- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$

حلول بعض التمـــــــــاريــــن

1)أ-

$$\ell^{-1}\{.......\}=\ell^{-1}\left\{\frac{5}{s^2}+\frac{4}{s^3}-\frac{2s}{s^2+9}+\frac{18}{s^2+9}+\frac{24}{s^4}-\frac{30}{s^{7/2}}\right\}$$

$$=5t+4(\frac{t^2}{2!})-2\cos 3t+18(\frac{1}{3}\sin 3t)+24\frac{t^3}{3!}-30(\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{7}{2})})$$

$$=5t+2t^2-2\cos 3t+6\sin 3t+4t^3-\frac{16}{\sqrt{\pi}}t^{5/2}$$

ب-

$$\ell^{-1}\{.......\}=\ell^{-1}\left\{\frac{3}{s-3/2}-\frac{1}{3}(\frac{1}{s^2-16/9})-\frac{4}{9}(\frac{s}{s^2-16/9})+\frac{1}{2}(\frac{1}{s^2+9/16})-\frac{3}{8}(\frac{s}{s^2+9/16})\right\}$$

$$=3e^{3t/2}-\frac{1}{4}\sinh\frac{4}{3}t-\frac{4}{9}\cosh\frac{4}{3}t+\frac{2}{3}\sin\frac{3}{4}t-\frac{3}{8}\cos\frac{3}{4}t$$

3) أ- $$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^4}\right\}-e^{2t}\,\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}=t^3\frac{e^{2t}}{3!}=\frac{1}{6}t^3e^{2t}$$

ومن ذلك ينتج أن :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\right\}=\begin{cases}\frac{1}{6}(t-5)^3\,e^{2(t-5)} & :t>5\\ 0 & :t<5\end{cases}$$

$$=\frac{1}{6}(t-5)^3\;e^{2(t-5)}\,u(t-5)$$

حيث $u(t-5)$ هي دالة الخطوة الوحدة المنسوبة الى هيفيسيد وتعريفها كالاتي :

$$u(t-a)=\begin{cases} 1 & :t>a \\ 0 & :t<a \end{cases}$$

ب- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+25}\right\}=\cos 5t$

$$\therefore\ \ell^{-1}\left\{\frac{s\ e^{-\frac{4}{5}\pi s}}{s^2+25}\right\}=\cos\left(5t-\frac{4}{5}\pi\right)\ u\left(t-\frac{4}{5}\pi\right)$$

جـ - $\ell^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2+s+1}\right\}=\ell^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}=\ell^{-1}\left\{\dfrac{(s+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}$

$$=\ell^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}+\frac{1}{2}\ \ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{\sqrt{3}}\left(3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$\therefore\ \ell^{-1}\left\{\frac{(s+1)\ e^{-\pi s}}{s^2+s+1}\right\}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ e^{-\frac{1}{2}(t-\pi)}\left[\sqrt{3}\ \cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)+\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)\bullet u(t-\pi)\right]$$

د-

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^{5/2}}\right\}=e^{-4t}\ \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^{5/2}}\right\}=e^{-4t}\ \frac{t^{3/2}}{\Gamma(5/2)}=-\frac{5}{3\sqrt{\pi}}\ t^{3/2}\ e^{-4t}$$

8) أ-

$$\ell^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\ \cdot\frac{1}{s^2+a^2}\right\}$$

ولكن

$$\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}=\cos at\quad,\quad \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\}=\frac{\sin at}{a}$$

$$\therefore\ \ell^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}=\frac{1}{a}\int_0^t \cos au\ \sin a(t-u)\ du$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^t \cos au(\sin at\cos au-\cos at\sin au)\,du$$

$$=\frac{1}{a}\ \sin at\int_0^t \cos^2 au\,du-\frac{1}{a}\ \cos at\int_0^t \sin au\cos au\,du$$

$$=\frac{1}{a}\ \sin at\int_0^t \frac{1+\cos 2au}{2}du-\frac{1}{a}\ \cos at\int_0^t \frac{\sin 2au}{2}du$$

$$=\frac{1}{a}\ \sin at\ \left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2at}{4a}\right)-\frac{1}{a}\ \cos at\left(\frac{1-\cos 2at}{4a}\right)$$

$$=\frac{1}{a}\ \sin at\ \left(\frac{t}{2}+\frac{\sin at\cos at}{2a}\right)-\frac{1}{a}\ \cos at\left(\frac{\sin^2 at}{2a}\right)$$

$$= \frac{t \sin at}{2a}$$

ب- $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t \qquad , \ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = t \ e^{-t}$

$$\therefore \quad \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2\ (s+1)^2}\right\} = \int_0^t u\ e^{-u}\ (t-u)\ du \ = \int_0^t e^{-u}\ (ut-u^2)\ du$$

وبعد إجراء التكامل بالتجزئ نحصل على :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2\ (s+1)^2}\right\} = t\ e^{-t} + 2\ e^{-t} + t - 2$$

12) جـ -

$$\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s-2)^3} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{(s-2)}$$

للحصول على A , B , C , D نضرب الطرفين فى $(s+1)$ ثم نضع $s=-1$, بعد ذلك نضرب الطرفين فى $(s-2)^3$ ثم نضع $s=2$,
ومن ذلك نحصل على كل من $A\ ,\ B$, ولكن هذه الطريقة لا تصلح بعد ذلك . وللحصول على C , D نعوض عن S بقيمتين عدديتين مناسبتين وذلك بعد أن نكون إستفدنا من تعيين $A\ ,\ B$

بالطريقة السابقة والنتيجة هى :

$$\ell^{-1}\{.......\} = -\ \frac{1}{3}\ e^{-t} - \frac{7}{2}\ t^2\ e^{2t} + 4\ t\ e^{2t} + \frac{1}{3}\ e^{2t}$$

10) - حيث أن $Q(s)$ كثيرة حدود جذورها مختلفة وهى

$\alpha_1 , \alpha_2 , ..., \alpha_n$

$$\therefore \quad \frac{p(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-\alpha_1} + \frac{A_2}{s-\alpha_2} + ..., \frac{A_n}{s-\alpha_n}$$

بضرب الطرفين فى $s-\alpha_k$ وأخذ نهاية الطرفين عندما $s \to \alpha_k$
ينتج أن :

$$A_k = \lim_{s\to\alpha_k} \frac{p(s)}{Q(s)} (s-\alpha_k) = \lim_{s\to\alpha_k} p(s)\left\{\frac{s-\alpha_k}{Q(s)}\right\} = P(\alpha_k) \lim_{s\to\alpha_k} \left\{\frac{s-\alpha_k}{Q(s)}\right\}$$

ولكن عند التعويض من $s=\alpha_k$ فى الكسر $\dfrac{s-\alpha_k}{Q(s)}$ فإننا نحصل عتى

كمية غير معينة بالصورة $\dfrac{0}{0}$ ولكن بتطبيق قاعدة لوبيتال نحصل على :

$$\lim_{s\to\alpha_k} \left\{\frac{s-\alpha_k}{Q(s)}\right\} = \frac{1}{Q'(\alpha_k)}$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$A_k = P(\alpha_k)\left\{\frac{1}{Q'(s)}\right\} = \frac{p(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$$

وبالتالى يكون :

$$\frac{p(s)}{Q(s)} = \frac{p(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}\frac{1}{s-\alpha_1} + \frac{p(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)}\frac{1}{s-\alpha_2} + ...+ \frac{p(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}\frac{1}{s-\alpha_n}$$

$$\therefore \quad \ell^{-1}\left\{\frac{p(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{p(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$$

11) أ-

$$p(s)=3s+1 \quad , Q(s)=s^3-s^2+s-1 \quad , Q'(s)=3s^2-2s+1$$

$$\alpha_1=1 \quad , \quad \alpha_2=i \quad , \quad \alpha_3=-i$$

ب-

$$\ell^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}=\frac{P(1)}{Q'(1)}\ e^t+\frac{P(i)}{Q'(i)}\ e^{it}+\frac{P(-i)}{Q'(-i)}\ e^{-it}$$

$$=\frac{4}{2}e^t+\frac{3i+1}{-2-2i}e^{it}+\frac{-3i+1}{-2+2i}e^{-it}$$

$$=2e^t+(-1-\frac{1}{2}i)(\cos t+i\sin t)+(-1+\frac{1}{2}i)(\cos t-i\sin t)$$

$$=2e^t-2\cos t+\sin t$$

الفصل الخامس

تطبيق تحويـــــل لابـــــلاس فى حل المعادلات التفاضلية العادية

المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات الثابتة :

يستخدم تحويل لابلاس فى حل هذا النوع من المعادلات . فمثلا إذا كان المطلوب حل المعادلة الخطية من الرتبة الثانية :

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+\alpha\frac{dY}{dt}+\beta Y=F(t) \quad ,or\ Y''+\alpha Y'+\beta Y=F(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث α, β ثوابت وحيث يكون الحل محققا للشروط الابتدائية :

$$Y(0)=A \quad , \quad Y'(0)=B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

حيث A , B ثوابت معلومة . فإنه بأخذ تحويل لابلاس لطرفى المعادلة (1) وتطبيق الشروط (2) نحصل

غلى معادلة جبرية تتضمن الدالة $y(s)=\ell\{Y(t)\}$. ويصبح المطلوب هو إيجاد التحويل العكسى للدالة $y(s)$.

هذه الطريقة يمكن أيضا تطبيقها على معادلات من رتب أعلى من الرتبة الثانية كما سيتضح من الامثلة .

المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات النتغيره:

يستخدم تحويل لابلاس لحل بعض المعادلات من هذا النوع خاصه عندما تكون حدود المعادله بالصورة:

$t^mY^{(n)}(t)$ حيث يكون تحويل لابلاس لمثل هذا الحد هو:

$$(-1)^m\frac{d^m}{ds^m}\ell\{Y^{(n)}(t)\}$$

وسنري في التمارين امثله لهذا النوع.

المعادلات التفاضلية الأتيه:

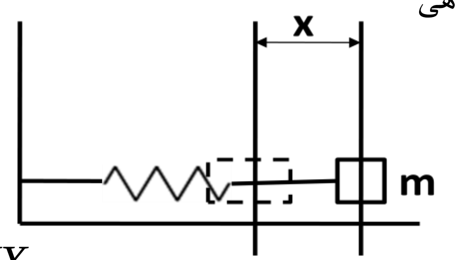
يستخدم تحويل لابلاس لحل اثنين او اكثرمن المعادلات التقاضليه الأتيه كما سيتضح من الامثله .

تطبيقات الميكانيكا:

نفرض أن الكتلة m مربوطة بخيط مرن مثبت طرفه فى O وأن الكتلة قابلة الحركة على مستوى أفقى أملس كما

بالشكل فإذا كانت $X(t)$ هى الازاحة اللحظية للكتلة

فى الزمن t عن موضع الاتزان فإنه توجد قوة شد



وتسمى القوة الراجعة وتساوى $-KX$ حيث K ثابت الخيط .

وطبقا لقانون نيوتن فإن

$$m\frac{d^2X}{dt^2}=-K\,X \qquad or \qquad mX''+kX=0$$

أما إذا كان المستوى الذى تتحرك عليه الكتلة خشنا أو إذا كانت الكتلة تتحرك فى وسط مقاوم فإن معادلة الحركة

تصبح :

$$m\frac{d^2X}{dt^2}=-K\,X-\beta\,\frac{dX}{dt} \qquad or \qquad mX''+\beta\,X'+kX=0$$

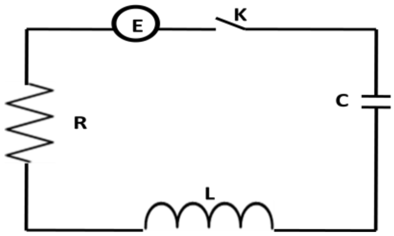
حيث β ثابت يسمى ثابت المقاومة .

كذلك فإنه فى أحيان كثيرة تكون هناك قوة خارجية $\phi(t)$ تتغير مع الزمن وتؤثر على الكتلة وفى هذه الحالة تصبح معادلة الحركة كالاتـــــــي

$$m\frac{d^2X}{dt^2}=-KX-\beta\frac{dX}{dt}+\phi(t) \qquad or \qquad mX''+\beta X'+kX=\phi(t)$$

وبإجراء تحويل لابلاس على طرفى المعادلة وإستخدام الشروط الابتدائية يمكن الحصول على الازاحة اللحظية $X(t)$.

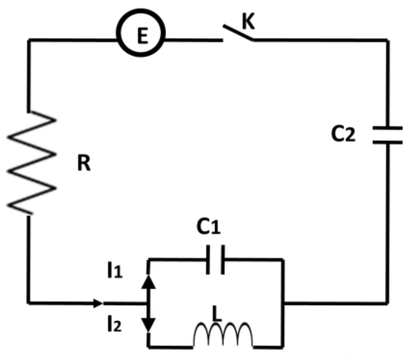
تطبيقات الدوائر الكهربية :



فى الشكل دائرة كهربية بسيطة تحتوى على مولدا وبطارية قوتها الدافعة الكهربية E ومقاومة R وملف معامل الحث له L ومكثف سعته C وعندما تغلق الدائرة بواسطة المفتاح K

ونجد أن الشحنة Q تندفع فى الدائرة حيث يسرى فى الدائرة تيار $\frac{dQ}{dt}$

كما أنه يمكن معالجة دوائر أكثر من ذلك تعقيدا كالدائرة التى بالشكل ويكون المطلوب فى الحل هو معرفة الشحنة Q والتيار I كدوال للزمن



t التى تجقق المعادلة التفاضلية الاتية :

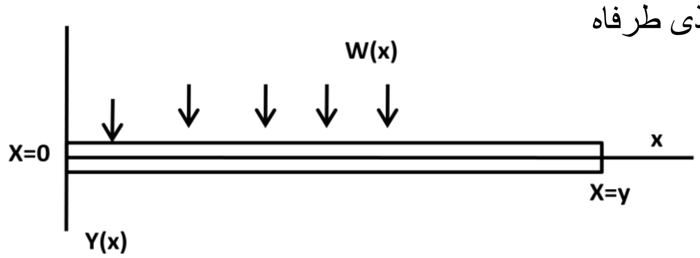
$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{Q}{C}=E$$

أما الدائرة الثانية فتجتاج لحل معادلتين تفاضليتن انيتين .

كما اننا سنلاحظ التشابه الكبير بين الدائرة الكهربائية البسيطة ومعادلة الحركة للكتلة فى وسط مقاوم عندما تتحرك أفقيا بعد ربطها بخيط مرن .

تطبيقات الاعتاب:

نفرض أن العتب الذى طرفاه
$x=0 \;\; , x=l$



والمنطبق محوره
على محور x .
وبفرض

تحميل عرضى $w(x)$ لكل وحدة طول .

نتيجة لذلك يحدث إنجراف العتب $Y(x)$ عند النقطة X . والدالة $Y(x)$
تخضع للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^4Y}{dx^4}=\frac{w(x)}{EI}$$ حيث EI ثابت .

كما أن الشروط الحدية لهذه الحالة تتوقف على طريقة تثبيت العتب .

فإذا كان الطرف ثابتا كان الشرط عنده هو $Y=Y'=0$ وإذا كان الطرف متصلا اتصالا مفصليا أو كان مرتكزا إرتكازا حرا فإن الشرط عنده هو $Y=Y''=0$ أما الطرف الحر فالشرط عنده هو $Y''=Y'''=0$.

المعادلات التفاضلية الجزيئيـــة:

يستخدم تحويل لابلاس كثيرا في حل المعادلات التفاضلية الجزيئية الخاضعة لشروط حديه ـــ اي في حل المسائل اي في حل المسائل الحدية .كما سنرى في الامثلة .

أمثـــــلة وتمـــــــاريـــــن

1) أوجد حل المعادلة الاتية مع الشروط المذكورة.

$$Y'' + Y = t \quad , \quad Y(0)=1 \quad , \quad Y'(0)=-2$$

2) أوجد حل المعادلة الاتية مع الشروط المذكورة .

$$Y'' - 3Y' + 2Y = 4e^{2t} \quad , \quad Y(0)=-3 \quad , \quad Y'(0)=5$$

3) أوجد حل المعادلة الاتية مع الشروط المذكورة.

$$Y'' + 2Y' + 5Y = e^{-t}\sin t \quad , \quad Y(0)=0 \quad , \quad Y'(0)=1$$

4) أوجد حل المعادلة الاتية مع الشروط المذكورة .

$$Y''' - 3Y'' + 3Y' - Y = t^2\, e^t \quad , \quad Y(0)=1 \quad , \quad Y'(0)=0 \quad , Y''(0)=-2$$

5) أوجد حل المعادلة الاتية مع الشروط المذكورة .

$$Y'' + 9Y = \cos 2t \quad , \quad Y(0)=1 \quad , \quad Y(\pi/2)=-1$$

6) أوجد حل المعادلة الاتية مع الشروط المذكورة

$$Y'' + a^2 Y = F(t) \quad , \quad Y(0)=1 \quad , \quad Y'(0)=-2$$

7) أوجد حل المعادلة الاتية مع الشروط المذكورة

$$tY'' + 2Y' + tY = 0 \quad , \quad Y(0)=1 \quad , \quad Y(\pi)=0$$

8) أوجد حل المعادلتين الانيتين الاتيتين مع الشروط المذكورة

$$\frac{dX}{dt} = 2X - 3Y \qquad , \qquad X(0) = 8$$

$$\frac{dY}{dt} = Y - 2X \qquad , \qquad Y(0) = 3$$

9)أوجد حل المعادلتين الانيتين الاتيتين مع الشروط المذكورة

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{dY}{dt} + 3X = 15e^{-t} \qquad X(0) = 35 \qquad , X'(0) = -48$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} - 4\frac{dX}{dt} + 3Y = 15\sin 2t \qquad Y(0) = 27 \qquad Y'(0) = -55$$

10) نقطة مادية كتلتها $2mg$ تتجرك فى إتجاه محور x تحت تأثير قوة جذب نحو نقطة الاصل O مقدارها $8x$.فإذا بدأت النقطة الحركة من السكون عندما كانت $x=10$, فأوجد موضع النقطة فى أى تحظة وذلك فى

الحالات الاتية :

أ- إذا كانت هناك قوة مقاومة قدر بثمانية أمثال السرعة اللحظية .

ب- إذا لم تكن هناك مقاومات للحركة .

11) نقطة مادية كتلتها mg تتجرك فى إتجاه محور x تحت تأثير قوة جذب نحو نقطة الاصل o مقدارها kx.

وتؤثر عليها قوة مقاومة $\beta\frac{dx}{dt}$,ناقش الحركة فى الحالات المختلفة علما بأن

$: X(0)=X_0 \; , \; X'(0)=V_0$.

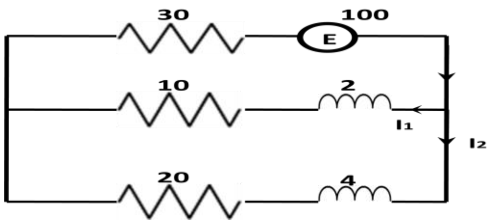
12) ملف معامل حثه $2\,henry$ ومقاومة قدرها $16\,ohm$ ومكثف سعته $0.02\ farad$ متصلة على التوالى مع

قوة دافعة قدرها $E\,Volt$. عند الزمن $t=0$ كانت الشحنة على المكثف قدرها 0 وكان التيار قدره 0 . أوجد

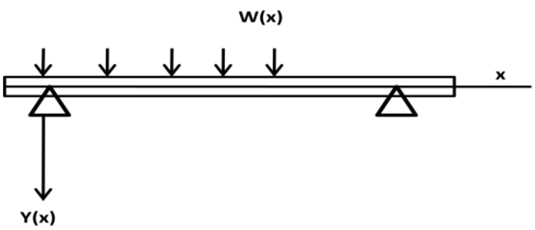
كلا من الشحنة والتيار فى أى زمن t فى الحالات الاتية :

أ- عندما تكون $E=300\ V$ ب- عندما تكون $E=100\sin 3t\ V$.

13) الشكل يبين شبكة كهربائية أوجد التيار فى الفروع المختلفة علما بأن القيم الابتدائية للتيارات هى الصفر.

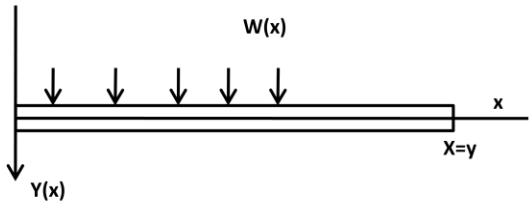


14) بالشكل عتب مثبت مفصليا من من طرفين $x=0\ ,\ x=l$ والتحميل العرضى عليه منتظم وقدره W_0 .



لكل وحدة طول ...أوجد الأنحراف عند أي نقطة من العتب .

15) الكابولى المبين بالشكل مثبت فى حائط عند الطرف $x=0$ أما الطرف $x=l$ فهو حر



والتحميل كالاتى : $W(x)=\begin{cases} W_0 & : 0 \prec x \prec l/2 \\ 0 & : l/2 \prec x \prec l \end{cases}$ أوجد الانحراف .

16) نقطة مادية كتلتها $2mg$ مربوطة فى خيط مرن ثابت طوله $8cm$ تتحرك على مستوى أفقى أملس وتؤثر عليهاقوة خارجيه $\phi(t)$. إحسب إزاحة النقطة فى حالة $\phi(t)=F_0\cos wt$ علما بأنها بدأت الحركة من السكون من على بعد $10\,cm$ من موضع الاتزان .

حلول بعض التمـــــــاريـــن

(2 $\ell\{Y''\}-3\ell\{Y'\}+2\ell\{Y\}=4\,\ell\{e^{2t}\}$

$$s^2 y - sY(0) - Y'(0) - 3[s\,y - Y(0)] + 2\,y = \frac{4}{s-2}$$

$$(s^2\,y - 3s - 5) - 3(sy+3) + + 2\,y = \frac{4}{s-2}$$

$$(s^2 - 3s + 2)\;y + 3s - 14 = \frac{4}{s-2}$$

$$y = \frac{4}{(s^2-3s+2)(s-2)} + \frac{14-3s}{(s^2-3s+2)} = \frac{-3s^2+20s-24}{(s-1)(s-2)^2}$$

$$y = \frac{-7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}$$

$$Y = -7e^t + 4e^{2t} + 4t\,e^{2t}$$

5) حيث أن $Y'(0)$ غير معلومة فلنفرض أن قيمتها C :

$$(s^2 y - sY(0) - Y'(0)) + 9\,y = \frac{s}{s^2+4}$$

$$(s^2+9)\,y - s - c = \frac{s}{s^2+4}$$

$$y = \frac{s+c}{s^2+9} + \frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)}$$

$$y = \frac{s}{s^2+9} + \frac{c}{s^2+9} + \frac{s}{5\,(s^2+4)} - \frac{s}{5(s^2+9)}$$

$$y = \frac{4}{5}(\frac{s}{s^2+9}) + \frac{c}{s^2+9} + - \frac{s}{5(s^2+4)}$$

$$Y = \frac{4}{5}\ \cos 3t\ +\ \frac{c}{3}\ \sin 3t\ +\ \frac{1}{5}\ \cos 2t$$

ولتحديد قيمة الثابت c نستخدم الشرط $Y(\frac{\pi}{2}) = -1$ فنحصل على $c = \frac{12}{5}$

ومن ذلك ينتج أن :

$$Y = \frac{4}{5}\ \cos 3t\ +\ \frac{4}{5}\sin 3t\ + \frac{1}{5}\ \cos 2t$$

6) $$(s^2 y - sY(0) - Y'(0)) + a^2\ y = \ell\{F(t)\} = f(s)$$

$$(s^2 y - s + 2) + a^2\ y = \ f(s)$$

$$y = \frac{s-2}{s^2+a^2} + \frac{f(s)}{s^2+a^2}$$

$$Y = \cos\ at - \frac{2}{a}\ \sin at + F(t) * \frac{\sin at}{a}$$

$$Y = \cos\ at - \frac{2}{a}\ \sin at + \frac{1}{a}\int_0^t F(u)\ \sin a(t-u)\ du$$

7) نفرض أن $Y'(0)=c$ وبأخذ تحويل لابلاس ينتج أن :

$$-\frac{d}{ds}(s^2 y - sY(0) - Y'(0)) + 2(sy - Y(0)) - \frac{dy}{ds} = 0$$

$$-s^2 y' - 2sy + 1 + 2sy - 2 - y' = 0$$

$$-(s^2+1)y' - 1 = 0 \qquad or \qquad y' = \frac{-1}{s^2+1}$$

وحل هذه المعادلة $y = -\tan^{-1} s + A$

ولكن من خاصية القيم النهائية نجد أن $y \to 0 \quad as \quad s \to \infty$

وينتج عن هذا أن $A = \frac{\pi}{2}$ أن :

$$\therefore Y(t) = \frac{\sin t}{t}$$

$$y = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s = \tan^{-1}\frac{1}{s} = \int_s^\infty \frac{du}{u^2+1} = \ell\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$$

واضح أن هذه الدالة تحقق الشرط : $Y(\pi) = 0$ لذا فهى الحل المطلوب .

8) نفرض أن $\ell\{Y\} = y \quad , \quad \ell\{X\} = x$ فيكون

$$s\,x - 8 = 2x - 3 \qquad or \quad (s-2)x + 3y = 8$$

$$s\,y - 3 = y - 2 \qquad or \quad 2x + (s-1)y = 3$$

وبحل هاتين المعادلتين الجبريتين بالنسبة إلى $y \;,\; x$ ينتج أن :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{8s-17}{s^2-3s-4} = \frac{8s-17}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} s-2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}}=\frac{3s-22}{s^2-3s-4}=\frac{3s-22}{(s+1)(s-4)}=\frac{5}{s+1}-\frac{2}{s-4}$$

$$\therefore\ X=\ell^{-1}\{x\}=3e^{-t}+3e^{4t}$$

$$Y=\ell^{-1}\{y\}=5e^{-t}-2e^{4t}$$

(11 $$mX''+\beta X'+kX=0 \qquad or \qquad X''+2\alpha X'+w^2X=0$$

حيث $\alpha=\dfrac{\beta}{m} \quad , \quad w^2=\dfrac{k}{m}$

بإجراء تحويل لابلاس مع ملاحظة الشروط الابتدائية ينتج أن :

$$s^2x+X_0s-V_0+2\alpha(sx-X_0)+w^2x=0$$

$$x=\frac{sX_0+(V_0+2\alpha X_0)}{s^2+2\alpha s+w^2}=\frac{(s+\alpha)X_0}{(s+\alpha)^2+(w^2-\alpha^2)}+\frac{V_0+\alpha X_0}{(s+\alpha)^2+(w^2-\alpha^2)}$$

وهنا نواجه الحالات المختلفة الاتية :

أ- إذا كان $w^2-\alpha^2\succ 0$ فإن :

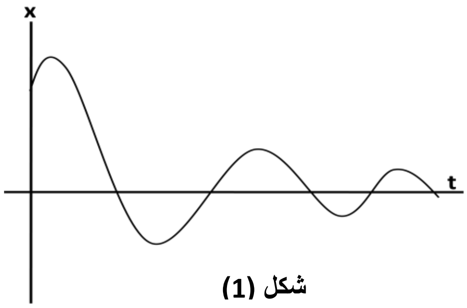
$$X=X_0e^{-\alpha t}\cos\sqrt{w^2-\alpha^2}\ t+\frac{V_0+\alpha X_0}{\sqrt{w^2-\alpha^2}}e^{-\alpha t}\sin\sqrt{w^2-\alpha^2}\,t$$

وفى هذه الجالة نجد أن الحركة اهتزازية ولكن سعة الاهتزازة تتناقص مع الزمن بسبب العامل $e^{-\alpha t}$. أى أن

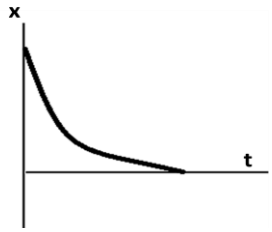
الحركة الاهتزازية متصلة كما بالشكل (1). كما أن زمن الدورة هو

$\dfrac{2\pi}{\sqrt{w^2-\alpha^2}}$ وترددها هو $\dfrac{\sqrt{w^2-\alpha^2}}{2\pi}$

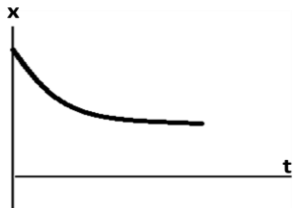
أما الكمية $\dfrac{w}{2\pi}$ (وهو التردد عندما يكون $\alpha = 0$) فيسمى التردد الطبيعى .



شكل (1)



شكل (2)



شكل (3)

ب- إذا كان $w^2-\alpha^2=0$ فإن :

$$X=\ell^{-1}\left\{\frac{X_0}{s+\alpha}+\frac{V_0+\alpha X_0}{(s+\alpha)^2}\right\}=X_0\ e^{-\alpha t}+(V_0+\alpha\ X_0)t\ e^{-\alpha t}$$

وهنا نجد أن الجسم لا يهتز ولكن يقترب بالتدريج من نقطة الاصل ولكنه لا يصل إليها أبدا كما بالشكل (2) .

وتسمى هذه الحالة بالحالة الضحلة الحركة إذ أن زيادة فى عامل المقاومة β يترتب عليه إهتزاز الجسم .

ج- إذا كان $w^2-\alpha^2\prec 0$ فإن :

$$X=\ell^{-1}\left\{(\frac{(s+\alpha)\,X_0}{(s+\alpha)^2-(\alpha^2-w^2)}+\frac{V_0+\alpha X_0}{(s+\alpha)^2-(\alpha^2-w^2)}\right\}$$

$$=X_0\ e^{-\alpha t}\ \cosh\sqrt{\alpha^2-w^2}\ t+\frac{V_0+\alpha\ X_0}{\sqrt{\alpha^2-w^2}}\ \ e^{-\alpha t}\ \sinh\sqrt{\alpha^2-w^2}\ t$$

وهى حركة إهتزازية كما بالشكل (3).

13) المعادلاتهى :

$$I = I_1 + I_2 \quad , \quad I_1(0)=0 \quad , \quad I_2(0)=0$$

$$\therefore 10\ I_1 - 2\frac{d\,I_1}{d\,t} + 4\frac{d\,I_2}{d\,t} + 20\ I_2 = 0$$

$$\therefore 30\ I - 110 + 2\frac{d\,I_1}{d\,t} + 10\ I_1 = 0$$

$$\text{OR}\therefore -5\ I_1 - y\frac{d\,I_1}{d\,t} + 2\frac{dI_1}{dt} + 10\ I_2 = 0$$

$$\frac{d\,I_1}{d\,t} + 20\,I_1 + 15\,I_2 = 55$$

بأخذ تحويل لابلاس لمجموعة المعادلتين وملاحظة القيم الابتدائية ينتج أن :

$$-s\,I_1 - \left[sI_1 - I_1(0)\right] + 2\left[s\,I_2 - I_2(0)\right] + 10I_2 = 0$$

$$\left[s\,I_1 - I_1(0)\right] + 20\,I_1\ 15\,I_2 = \frac{55}{s}$$

$$(s+9)\,I_1 - (2\,s+10)\,I_2 = 0 \quad , \quad (s+20)\,I_1 + 15\ I_2 = \frac{55}{s}$$

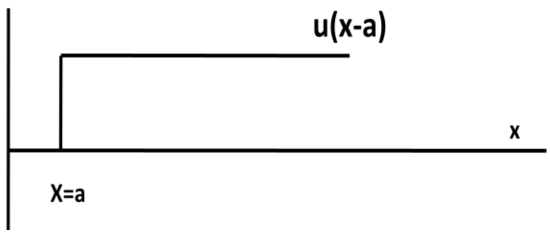
من المعادلة الاولى ينتج أن $I_1 = 2\,I_2$ وبالتعويض فى الثانية ينتج أن :

$$(2s+55)\ I_2 = \frac{55}{s} \quad or \quad I_2 = \frac{55}{s\ (2s+55)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{2s+55}$$

15) **<u>مقدمـــــــــة:</u>**

سبق الاشارة إلى دالة الخطوة الوحدة

لهفيسيد والمبينة بالشكل المقابل



والمعرفة كالاتى : $u(t-a)=\begin{cases} 0 & :t \prec a \\ 1 & :t \succ a \end{cases}$

وتحويل لابلاس لهذه الدالة هو :

$$\ell\{u(t-a)\}=\int_0^\infty u(t-a)\, e^{-st}\; dt$$

$$=\int_0^a 0.\, e^{-st}\; dt \;+\int_a^\infty 1\,.\, e^{-st}\; dt$$

$$=\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_a^\infty=\frac{e^{-as}}{s}$$

ومن ذلك ينتج أن : $\ell^{-1}\left\{\dfrac{e^{-as}}{s}\right\}=u(t-a)$

كما أنه يمكن الوصول إلى نفس النتيجة بتطبيق خاصية الازاحة الثانية التى تنص على أن :

$$\ell^{-1}\left\{e^{-as}\; f(s)\right\}=\begin{cases} F(t-a) & :t \succ a \\ 0 & :t \prec a \end{cases}$$

وبوضع $f(s)=\dfrac{1}{s}$ حيث $F(t)=1$ لهذا التحويل فإن :

$$\ell^{-1}\left\{e^{-as}.1\right\}=\begin{cases} 1 & :t \succ a \\ 0 & :t \prec a \end{cases}=u(t-a)$$

ونعود الان إلى حل المثال فنعبر عن التحميل بإستخدام دالة الخظوة نجد أن :

$$w(x)=w_0\left[u(x)-u(x-\frac{l}{2})\right]$$

والمعادلة التفاضلية هى :

$$\frac{d^n Y}{d x^n} = \frac{w(x)}{EI} \qquad (1)$$

والشروط هى :

$$Y(0) = 0 \quad , \quad Y^{'}(0) = 0 \quad , \quad Y^{''}(l) = 0 \quad , \quad Y^{'''}(l) = 0 \quad (2)$$

وبأخذ تحويل لابلاس لطرفى المعادلة فإن :

$$s^4 y - s^3 Y(0) - s^2 Y^{'}(0) - s Y^{''}(0) - Y^{'''}(0) = \frac{w_0}{EI} \ (\frac{1-0}{s^3})$$

وبالتعويض عن $Y^{''}(0) = c_2$, $Y^{''}(0) = c_1$ وإستخدام الشروط فإن

$$y = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{w_0}{EI} \ (\frac{1-0}{s^3}) :$$

$$\therefore Y(x) = \frac{c_1 x^2}{2!} + \frac{c_2 x^3}{3!} + \frac{w_0}{EI} \ \frac{x^4}{4!} - \frac{w_0 (x - \frac{l}{2})^4}{4!} \ u(x - \frac{l}{2})$$

وهذا معناه أن :

$$Y(x) = \begin{cases} \dfrac{c_1 x^2}{2} + \dfrac{c_2 x^3}{6} + \dfrac{w_0}{24 EI} x^4 & : 0 < x < \dfrac{l}{2} \\ \dfrac{c_1 x^2}{2} + \dfrac{c_2 x^3}{6} + \dfrac{w_0}{24 EI} x^4 - \dfrac{w_0}{24 EI} \ (x - \dfrac{l}{2})^4 & : x > \dfrac{l}{2} \end{cases}$$

و الان نظبق المجموعة الاخيرة من الشروط المعروفة وهى :

$$Y^{''}(0) = 0 \qquad , \qquad Y^{''}(0) = 0$$

فنحصل على :

$$c_1 = \frac{w_0\, l^2}{EI} \qquad , \qquad c_2 = \frac{w_0\, l}{2EI}$$

$$\therefore \quad Y(x) = \frac{w_0\, l^2}{16EI}\, x^2 - \frac{w_0\, l}{12EI} x^3 - \frac{w_0}{24EI} x^4 - \frac{w_0}{24EI}\, (x - \frac{l}{2})^4\, u(x - \frac{l}{2}).$$