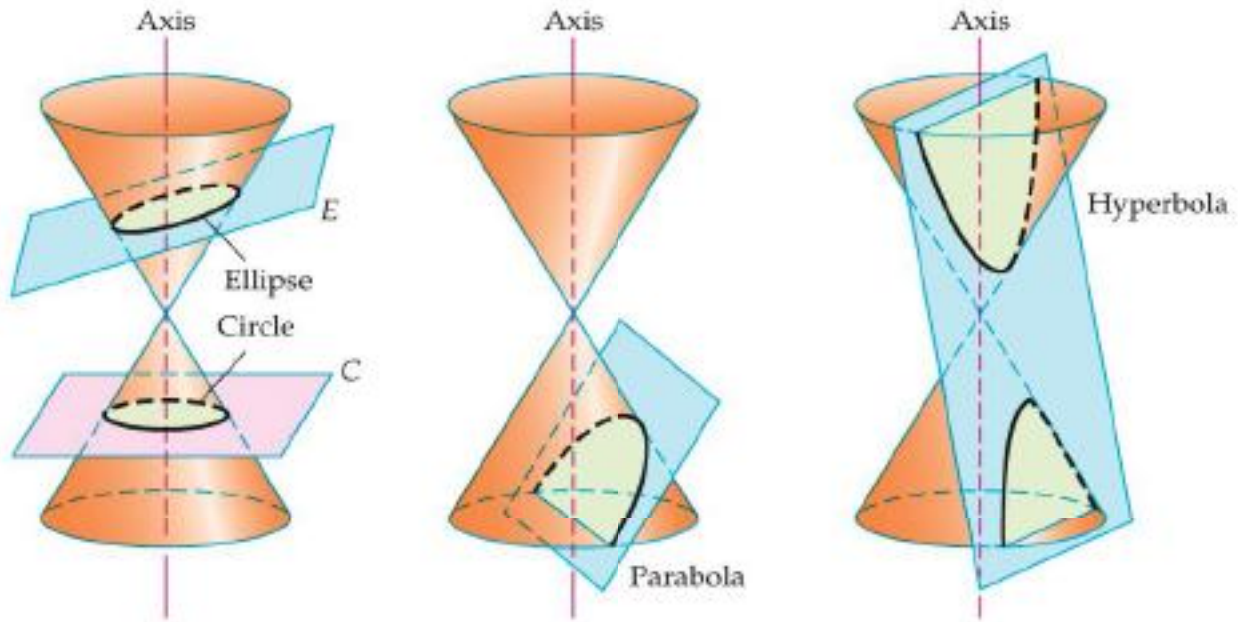


محاضرات في

بجثة ٣ "جبر وهندسة مستوية"



لطلاب الفرقة الأولى بكلية التربية

إعداد

الدكتور / محمد السيد أحمد العاطون

مدرس الرياضيات البجثة بقسم الرياضيات - كلية العلوم بقنا

العام الجامعي: ٢٠١٩ - ٢٠٢٠

تحذير: لا يجوز النسخ أو التصوير من هذه المذكرة أو استخدامها دون إذن القائم بإعدادها.

محاضرات

بحة (٢) "جبر وهندسة المستوية"

المحتويات

٢ ص	الباب الأول: الكسور الجزئية	
١٠ ص	الباب الثاني: الاستنتاج الرياضي	
١٨ ص	الباب الثالث: جمع المتسلسلات المحدودة	
٢٧ ص	الباب الرابع: متسلسلة ذات الحدين	
٣٦ ص	الباب الخامس: جمع المتسلسلات التلثية باستخدام الأعداد المركبة	
٤٨ ص	الباب السادس: تقارب وتباعد المتسلسلات الغير محدودة	
٦١ ص	الباب السابع: نظم الإحداثيات في المستوي	
٦٦ ص	الباب الثامن: التحويلات الهندسية واختزال معادلة الدرجة الثانية	
٧٧ ص	الباب التاسع: القطاعات المخروطية	القطاعات المخروطية
٨٠ ص		القطع المكافئ
٩٨ ص		القطع الناقص
١١٥ ص		القطع الزائد
١٣٦ ص		المعادلات القطبية للقطاعات
١٤٢ ص	الباب العاشر: المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين	

الباب الأول

الكسور الجزئية

مفهوم الكسور الجزئية: في الأعوام السابقة تعرضنا بالدراسة لكيفية إجراء العمليات الجبرية علي

الكسور، فمثلاً: $\frac{2}{x-3} + \frac{1}{2x+1} = \frac{5x-1}{(x-3)(2x+1)}$ أي أنه يمكن القول بأن الكسر $\frac{5x-1}{(x-3)(2x+1)}$

يمكن التعبير عنه كمجموع كسرين أبسط منه وفي هذه الحالة يقال أن الكسر حُلل إلى كسوره الجزئية

وهي $\frac{2}{x-3}$ ، $\frac{1}{2x+1}$ وبوجه عام إذا كانت $P(x)$ ، $Q(x)$ كثيرتي حدود في x على الصورة:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n, \quad Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_m$$

حيث أن $a_i \in \mathbb{Q}$ (أي جميع المعاملات قياسية)، $m, n \geq 1$. إذا أمكن بطريقة ما التعبير عن

الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ بدلالة المجموع الجبري لكسور أبسط منه، فإنه يقال أن هذا الكسر قد حُلل إلى كسوره

الجزئية. وعملية تحليل الكسر إلى كسور جزئية لها قواعد تتوقف على نوع الكسر المراد تحليله وفيما

يلي سنوجز هذه القواعد.

أنواع الكسور: يقال أن الكسر الذي علي الصورة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث أن $P(x)$ ، $Q(x)$ كثيرتي حدود في

x انه كسر حقيقي إذا كانت درجه البسط اقل من درجه المقام وخلاف ذلك فيقال أن الكسر هو كسر

غير حقيقي.

قواعد تحليل كسر إلي كسوره الجزئية: ليكن $\frac{P(x)}{Q(x)}$ كسر حيث أن $P(x)$ ، $Q(x)$ كثيرتي حدود

في x فإن عمليه تحليله إلي كسور جزئيه تعتمد علي العلاقة بين درجتي البسط والمقام وعلي هذا

الأساس فإن عمليه تحليل الكسور إلي كسورها الجزئية تنقسم إلي حالتان:

الحالة الأولى: درجة البسط أقل من درجة المقام

❖ كل عامل خطي (من الدرجة الأولى) $ax+b$ للدالة $Q(x)$ يقابله كسر جزئي علي الصورة:

$$\frac{A}{ax+b} \text{ حيث } A \text{ ثابت.}$$

❖ كل عامل خطى مكرر $(ax+b)^n$ للدالة $Q(x)$ يقابله n كسر جزئي على الصورة:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

حيث أن A_1, \dots, A_n ثوابت، n عدد صحيح موجب بحيث $n \geq 2$.

❖ كل عامل من الدرجة الثانية وغير قابل للتحليل ax^2+b أو ax^2+bx+c للدالة $Q(x)$

يقابله كسر جزئي على الصورة $\frac{Ax+B}{ax^2+b}$ أو $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ حيث A, B ثوابت.

❖ كل عامل مكرر من الدرجة الثانية وغير قابل للتحليل $(ax^2+b)^n$ أو $(ax^2+bx+c)^n$ للدالة

$Q(x)$ يقابله n كسر جزئي على الصورة:

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+b)} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+b)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+b)^n}$$

أو

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

حيث أن A_1, \dots, A_n ، B_1, \dots, B_n ثوابت حقيقية مطلوب إيجاد قيمه كلاً منها، n عدد

صحيح موجب بحيث $n \geq 2$.

الحالة الثانية: درجة البسط أكبر من أو تساوي لدرجة المقام

❖ إذا كانت درجة $P(x)$ تساوي درجة $Q(x)$ فإننا نضيف ثابت وليكن λ إلى الكسور الجزئية

الموجودة في الحالة الأولى.

❖ إذا كانت درجة $P(x)$ أعلى بمقدار درجة واحدة من درجة $Q(x)$ فإننا نضيف المقدار $\lambda x + \lambda_1$

إلى الكسور الجزئية الموجودة في الحالة الأولى.

❖ إذا كانت درجة $P(x)$ أعلى بمقدار درجتين عن $Q(x)$ فإننا نضيف المقدار $\lambda x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2$ إلى

الكسور الجزئية الموجودة في الحالة الأولى. وهكذا...

طرق تعيين الثوابت: نطابق الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ بمجموع الكسور الجزئية المقابلة له كما سبق الحصول عليها ثم نضرب المتطابقة في $Q(x)$ وبذلك نحصل على متطابقة جديدة صحيحة لجميع قيم x يمكن من خلالها تعيين قيم جميع الثوابت المطلوبة وذلك باستخدام الطرق الآتية:

- ❖ نعطى قيم مناسبة للمتغير x ، ويفضل أن نستخدم أصفار المقام أولاً ثم القيم الأخرى.
- ❖ نساوي المعاملات المتناظرة في الطرفين لقوى x المختلفة، ويفضل أن نبدأ بمقارنة الحد المطلق ثم مقارنة معاملات اعلي قوي للمتغير x في الطرفين ثم الذي يليه حتى نصل إلي مقارنة معاملات x في الطرفين.

أمثله محلوله

مثال (١): حلل الكسر $\frac{5x+1}{(x^2-1)(x+2)}$ إلي كسوره الجزئية.

الحل

نلاحظ أن درجه البسط أقل من درجه المقام أي أن الكسر حقيقي والمقام يمكن تحليله كالآتي:

$$(x^2-1)(x+2) = (x-1)(x+1)(x+2)$$

نلاحظ أن المقام عبارة عن حاصل ضرب ثلاث عوامل من الدرجة الأولى وبالتالي يمكن تحليل الكسر المعطى بالصورة:

$$\frac{5x+1}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{5x+1}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} \quad (1)$$

ويمكن تعيين قيمة كلاً من A ، B ، C باتباع الخطوات الآتية:

بضرب طرفي المعادلة (١) في $(x-1)(x+1)(x+2)$ نجد أن:

$$5x+1 = A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1) \quad (2)$$

❖ بوضع $x=1$ في المعادلة (٢) نحصل علي $6 = 6A \Rightarrow A=1$

❖ بوضع $x=-1$ في المعادلة (٢) نحصل علي $-4 = -2B \Rightarrow B=2$

❖ بوضع $x=-2$ في المعادلة (٢) نحصل علي $-9 = 3B \Rightarrow B=-3$

وبالتعويض عن قيمة كلاً من A ، B ، C في المعادلة (١) نجد أن:

$$\frac{5x+1}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{-3}{x+2}$$

مثال (٢): حلل الكسر $\frac{3x+1}{(x^2-1)(x-1)}$ إلي كسوره الجزئية.

الحل

نلاحظ أن درجه البسط أقل من درجه المقام أي أن الكسر حقيقي والمقام يمكن تحليله كالآتي:

$$(x^2-1)(x-1) = (x-1)(x+1)(x-1) = (x+1)(x-1)^2$$

نلاحظ أن المقام عبارة عن حاصل ضرب عامل من الدرجة الأولى مكرر في عامل آخر من الدرجة الأولى

وبالتالي يمكن تحليل الكسر المعطى بالصورة:

$$\frac{3x+1}{(x^2-1)(x-1)} = \frac{5x+1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \quad (1)$$

ويمكن تعيين قيمة كلاً من A ، B ، C باتباع الخطوات الآتية:

بضرب طرفي المعادلة (١) في $(x+1)(x-1)^2$ نجد أن:

$$3x+1 = A(x-1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x+1) \quad (2)$$

❖ بوضع $x=-1$ في المعادلة (٢) نحصل علي: $-2 = 4A \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

❖ بوضع $x=1$ في المعادلة (٢) نحصل علي: $4 = 2C \Rightarrow C = 2$

❖ بوضع $x=0$ (أو بمقارنة الحد المطلق) في طرفي المعادلة (٢) نحصل علي:

$$1 = A - B + C \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

وبالتعويض عن قيمة كلاً من A ، B ، C في المعادلة (١) نجد أن:

$$\frac{3x+1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

مثال (٣): حلل الكسر $\frac{x^2-x+4}{x^4-1}$ إلي كسوره الجزئية.

الحل

نلاحظ أن درجه البسط أقل من درجه المقام أي أن الكسر حقيقي والمقام يمكن تحليله كالآتي:

$$(x^4-1) = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

نلاحظ أن المقام عبارة عن حاصل ضرب عاملين من الدرجة الأولى في عامل آخر من الدرجة الثانية وبالتالي يمكن تحليل الكسر المعطى بالصورة:

$$\frac{x^3 - x + 4}{x^4 - 1} = \frac{x^3 - x + 4}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3x + A_4}{x^2+1} \quad (1)$$

وبضرب طرفي المعادلة (١) في $(x-1)(x+1)(x^2+1)$ نحصل علي:

$$x^3 - x + 4 = A_1(x+1)(x^2+1) + A_2(x-1)(x^2+1) + (A_3x + A_4)(x-1)(x+1) \quad (2)$$

ولإيجاد قيمة كلاً من A_1, A_2, A_3, A_4 نتبع الخطوات الآتية:

❖ بوضع $x=1$ في طرفي المعادلة (١) نجد أن: $4 = 4A_1 \Rightarrow A_1 = 1$

❖ بوضع $x=-1$ في طرفي المعادلة (١) نجد أن: $6 = -4A_2 \Rightarrow A_2 = -\frac{3}{2}$

❖ بوضع $x=0$ (أو بمقارنه الحد المطلق) في طرفي المعادلة (٢) نجد أن

$$4 = A_1 - A_2 - A_4 \Rightarrow A_4 = A_1 - A_2 - 4 \Rightarrow A_4 = \frac{1}{2}$$

❖ بمقارنه معاملات x^2 في طرفي المعادلة (٢) نجد أن:

$$0 = A_1 + A_2 + A_3 \Rightarrow A_3 = -A_1 - A_2 \Rightarrow A_3 = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{x^3 - x + 4}{x^4 - 1} = \frac{1}{x-1} + \frac{-\frac{3}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}{x^2+1}$$

مثال (٤): حلل الكسر $\frac{2x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2}$ إلي كسوره الجزئية.

الحل

نلاحظ أن درجه البسط أقل من درجه المقام أي أن الكسر حقيقي ونلاحظ أن المقام عبارة عن حاصل ضرب عامل من الدرجة الأولى في عامل آخر من الدرجة الثانية مكرر وبالتالي يمكن تحليل الكسر المعطى بالصورة:

$$\frac{2x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2x + A_3}{x^2 + 2} + \frac{A_4x + A_5}{(x^2 + 2)^2} \quad (1)$$

وبضرب طرفي المعادلة (١) في $x(x^2 + 2)^2$ نحصل علي

$$2x^2 + x + 4 = A_1(x^2 + 2)^2 + (A_2x + A_3)x(x^2 + 2) + (A_4x + A_5)x \quad (2)$$

ولإيجاد قيمة كلاً من A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 ، A_5 نتبع الخطوات الآتية:

❖ بوضع $x=0$ (أو بمقارنة الحد المطلق) في طرفي المعادلة (٢) نجد أن: $4 = 4A_1 \Rightarrow A_1 = 1$

❖ بمقارنة معاملات x^4 في طرفي المعادلة (٢) نجد أن:

$$0 = A_1 + A_2 \Rightarrow A_2 = -A_1 \Rightarrow A_2 = -1$$

❖ بمقارنة معاملات x^3 في طرفي المعادلة (٢) نجد أن: $0 = A_3 \Rightarrow A_3 = 0$

❖ بمقارنة معاملات x^2 في طرفي المعادلة (٢) نجد أن:

$$2 = A_1 + 2A_2 + A_4 \Rightarrow A_4 = 2 - A_1 - 2A_2 \Rightarrow A_4 = 0$$

❖ بمقارنة معاملات x في طرفي المعادلة (٢) نجد أن

$$1 = 2A_3 + A_5 \Rightarrow A_5 = 1 - 2A_3 \Rightarrow A_5 = 1$$

$$\therefore \frac{2x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2 + 2} + \frac{1}{(x^2 + 2)^2}$$

مثال (٥): حلل الكسر $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ إلى كسوره الجزئية.

الحل

نلاحظ أن درجة البسط تساوي درجة المقام وبالتالي نضيف ثابت وليكن λ إلى التحليل. وحيث أن

المقام $x^2 + 2x + 1$ يمكن تحليله إلى عامل خطي مكرر علي الصورة $(x+1)^2$ فإن الكسر المعطى يمكن

تحليله إلى كسورة الجزئية علي الصورة:

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2} = \lambda + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \quad (1)$$

بضرب المعادلة (١) في $(x+1)^2$ نجد أن:

$$x^2 + x + 1 = \lambda(x+1)^2 + A(x+1) + B \quad (2)$$

$$1 - 1 + 1 = B \Rightarrow B = 1$$

بوضع $x = -1$ في (٢) نجد أن:

بمساواة معاملات x^2 في طرفي المعادلة (٢) نجد أن: $\lambda = 1$

بمساواة معاملات x في طرفي المعادلة (٢) نجد أن: $1 = 2\lambda + A \Rightarrow A = 1 - 2\lambda = 1 - 2 = -1$

بالتعويض عن λ, A, B في (١) نجد أن: $\frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$

مثال (٦): أوجد قيمة كل من c, b, a إذا كان $\frac{x^3 - 1}{(x+1)(x+2)} = x + a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$

الحل

الكسر المعطي كسر غير حقيقي حيث أن درجه البسط أكبر من درجه المقام. وبإجراء القسمة المطولة نجد أن:

$$\frac{x^3 - 1}{(x+1)(x+2)} = x - 3 + \frac{7x+5}{(x+1)(x+2)}$$

ولكن الكسر الحقيقي $\frac{7x+5}{(x+1)(x+2)}$ يمكن كتابته علي الصورة:

$$\frac{7x+5}{(x+1)(x+2)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2}$$

وبضرب الطرفين في $(x+1)(x+2)$ نجد أن:

$$7x+5 = A_1(x+2) + A_2(x+1)$$

بوضع $x = -1$ نجد أن: $-2 = A_1$

بوضع $x = -2$ نجد أن: $-9 = -A_2 \Rightarrow A_2 = 9$

$$\therefore \frac{7x+5}{(x+1)(x+2)} = \frac{-2}{x+1} + \frac{9}{x+2}$$

وبالتالي نجد أن:

$$\frac{x^3 - 1}{(x+1)(x+2)} = x - 3 + \frac{-2}{x+1} + \frac{9}{x+2} = x + a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

وبالتالي نجد أن: $c = 9, b = -2, a = -3$

ملحوظة: يمكن إتباع نفس خطوات مثال (٥) لحل المثال السابق.

تمارين (١)

حلل الكسور الآتية إلي كسورها الجزئية

$$\frac{3x-1}{(1-x^2)(1-x)} \quad (١)$$

$$\frac{4x}{(x-1)(x+2)^2} \quad (٢)$$

$$\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)} \quad (٣)$$

$$\frac{x^2-x+4}{1-x^4} \quad (٤)$$

$$\frac{5x+1}{(1-x^2)(2+x)} \quad (٥)$$

$$\frac{3x+1}{(1-x^2)(1-x)} \quad (٦)$$

$$\frac{1}{x^4-1} \quad (٧)$$

$$\frac{5x-7}{(x+1)(x^2+3)} \quad (٨)$$

$$\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)} \quad (٩)$$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x-4)} \quad (١٠)$$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} \quad (١١)$$

$$\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x+2)} \quad (١٢)$$

$$\frac{4}{x(x^2+2)^2} \quad (١٣)$$

الباب الثاني

مبدأ الاستنتاج الرياضي

الاستنتاج الرياضي: هي طريقة لإثبات صحة علاقة ما أو نظرية أو قانون تعتمد على الأعداد الطبيعية ونلجأ لهذه الطريقة لعدم استطاعتنا إثبات صحة هذه العلاقة أو القانون بطريقة مباشرة.

طريقة الاستنتاج الرياضي: لتكن $f(n) = h(n)$ علاقة رياضية حيث أن n عدد صحيح موجب، فإن طريقة الاستنتاج الرياضي لإثبات صحة هذه العلاقة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة تعتمد على الخطوات التالية:

❖ نتحقق من صحة العلاقة عندما تكون $n = 1$.

❖ نفترض صحة العلاقة عندما تكون $n = k$ (حيث k عدد صحيح موجب).

❖ نثبت صحة العلاقة عندما $n = k + 1$.

والخطوات الثلاثة في طريقة الاستنتاج الرياضي متلازمة ولا يمكن الاستغناء عن أحدهما، ويمكن فهم واستيعاب طريقة الاستنتاج الرياضي من حلول الأمثلة الآتية:

أمثله محلوله

مثال (1): باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي برهن أن:

$$(i) \sum_{r=1}^n r = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (ii) \sum_{r=1}^n r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad (iii) \sum_{r=1}^n r^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

ملحوظة: يجب على الطالب أن يتذكر دائما القوانين الثلاثة السابقة وذلك للحاجة إليها في بعض مسائل جمع المتسلسلات فيما بعد.

الحل

$$f(n) = \sum_{r=1}^n r, \quad h(n) = \frac{n(n+1)}{2} \quad (i) \text{ بفرض أن:}$$

(1) إثبات صحة العلاقة عندما $n = 1$: بوضع $n = 1$ نجد أن:

$$f(1) = \sum_{r=1}^1 r = 1, \quad h(1) = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \left\} \Rightarrow f(1) = h(1)\right.$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

$$(2) \text{ يفرض أن العلاقة صحيحة عندما } n = k \text{ أي أن: } f(k) = h(k) \Rightarrow \sum_{r=1}^k r = \frac{k(k+1)}{2}$$

(3) إثبات صحة العلاقة عندما $n = k + 1$:

$$\therefore h(k+1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\therefore f(k+1) = \sum_{r=1}^{k+1} r = \underbrace{\sum_{r=1}^k r}_{f(k)} + \sum_{r=k+1}^{k+1} r = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2}{2}(k+1)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = h(k+1)$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n = k + 1$ ، وبذلك تكون العلاقة صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

(ii) يتترك للطالب كتمرين.

$$f(n) = \sum_{r=1}^n r^3, \quad h(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad (iii) \text{ يفرض أن:}$$

(1) إثبات صحة العلاقة عندما $n = 1$: بوضع $n = 1$ نجد أن:

$$f(1) = \sum_{r=1}^1 r^3 = 1^3 = 1, \quad h(1) = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1 \left\} \Rightarrow f(1) = h(1)\right.$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

$$(2) \text{ يفرض أن العلاقة صحيحة عندما } n = k \text{ أي أن: } f(k) = h(k) \Rightarrow \sum_{r=1}^k r^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$$

(3) إثبات صحة العلاقة عندما $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} f(k+1) &= \sum_{r=1}^{k+1} r^3 = \underbrace{\sum_{r=1}^k r^3}_{f(k)} + \sum_{r=k+1}^{k+1} r^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4}{4}(k+1)^3 \\ &= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore f(k+1) = \frac{(k+1)^3(k+2)^2}{4} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2 = h(k+1)$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n = k + 1$ ، وبذلك تكون العلاقة صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال (٢): باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي برهن أن $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.

الحل

بفرض أن: $f(n) = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$, $h(n) = \cos n\theta + i \sin n\theta$

(١) إثبات صحة العلاقة عندما $n = 1$: بوضع $n = 1$ نجد أن:

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= (\cos \theta + i \sin \theta)^1 = \cos \theta + i \sin \theta, \\ h(1) &= \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) = h(1)$$

وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

(٢) بفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n = k$ أي أن:

$$f(k) = h(k) \Rightarrow (\cos \theta + i \sin \theta)^k = \cos k\theta + i \sin k\theta$$

(٣) إثبات صحة العلاقة عندما $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} f(k+1) &= (\cos \theta + i \sin \theta)^{k+1} = (\cos \theta + i \sin \theta)^k (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (\cos k\theta + i \sin k\theta)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (\cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta + i(\sin k\theta \cos \theta + \cos k\theta \sin \theta)) \\ &= \cos(k+1)\theta + i \sin(k+1)\theta = h(k+1) \end{aligned}$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n = k + 1$ ، وبذلك تكون العلاقة صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال (٣): باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي برهن أن $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$.

الحل

بفرض أن: $f(n) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$, $h(n) = na^{n-1}$

(١) إثبات صحة العلاقة عندما $n = 1$: بوضع $n = 1$ نجد أن:

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x - a} = 1, \\ h(1) &= 1a^{1-1} = a^0 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) = h(1)$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

(٢) بفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n = k$ أي أن: $f(k) = h(k) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^k - a^k}{x - a} = ka^{k-1}$

(٣) إثبات صحة العلاقة عندما $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} \therefore h(k+1) &= (k+1)a^{(k+1)-1} \\ \therefore f(k+1) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{k+1} - a^{k+1}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x \cdot x^k - a \cdot a^k}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{xx^k - a \cdot a^k + xa^k - xa^k}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(xx^k - xa^k) + (xa^k - a \cdot a^k)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x(x^k - a^k) + a^k(x - a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x(x^k - a^k) + a^k(x - a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x(x^k - a^k)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^k(x - a)}{x - a} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow a} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^k - a^k}{x - a} \right) + \lim_{x \rightarrow a} a^k = a \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^k - a^k}{x - a}}_{f(k)} + a^k = ka^k + a^k \\ &= (k+1)a^k = (k+1)a^{(k+1)-1} = h(k+1) \end{aligned}$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n = k + 1$ ، وبذلك تكون العلاقة صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال (٤): باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي برهن أن $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.

الحل

بفرض أن: $f(n) = \frac{d}{dx}(x^n)$, $h(n) = nx^{n-1}$

(١) إثبات صحة العلاقة عندما $n = 1$: بوضع $n = 1$ نجد أن:

$$f(1) = \frac{d}{dx}(x) = 1, \quad h(1) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \Rightarrow f(1) = h(1)$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

(٢) بفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n = k$ أي أن: $f(k) = h(k) \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^k) = kx^{k-1}$

(٣) إثبات صحة العلاقة عندما $n = k + 1$:

$$\therefore f(k+1) = \frac{d}{dx}(x^{k+1}) = \frac{d}{dx}(x x^k) = \frac{d}{dx}(x) x^k + x \cdot \frac{d}{dx}(x^k) = x^k + x \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}(x^k)}_{f(k)} = x^k + x \cdot k x^{k-1}$$

$$\therefore f(k+1) = x^k + x k x^{k-1} = (k+1)x^k = (k+1)x^{(k+1)-1} = h(k+1)$$

\therefore العلاقة صحيحة عندما $n = k+1$ ، وبذلك تكون العلاقة صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال (5): باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي برهن أن: $\sum_{r=1}^n \frac{r 2^r}{(r+2)!} = 1 - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$

الحل

بفرض أن: $f(n) = \sum_{r=1}^n \frac{r 2^r}{(r+2)!}$ $h(n) = 1 - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$

(1) أثبات صحة العلاقة عندما $n=1$: بوضع $n=1$ نجد أن:

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \sum_{r=1}^1 \frac{r 2^r}{(r+2)!} = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3} \\ h(1) &= 1 - \frac{2^{1+1}}{(1+2)!} = 1 - \frac{2^2}{(1+2)!} = 1 - \frac{4}{3!} = 1 - \frac{4}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) = h(1)$$

\therefore العلاقة صحيحة عندما $n=1$.

(2) بفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n=k$ أي أن: $f(k) = h(k) \Rightarrow \sum_{r=1}^k \frac{r 2^r}{(r+2)!} = 1 - \frac{2^{k+1}}{(k+2)!}$

(3) أثبات صحة العلاقة عندما $n=k+1$:

$$\therefore h(k+1) = 1 - \frac{2^{(k+1)+1}}{((k+1)+2)!}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(k+1) &= \sum_{r=1}^{k+1} \frac{r 2^r}{(r+2)!} = \underbrace{\sum_{r=1}^k \frac{r 2^r}{(r+2)!}}_{f(k)} + \sum_{r=k+1}^{k+1} \frac{r 2^r}{(r+2)!} = 1 - \underbrace{\frac{2^{k+1}}{(k+2)!}}_{h(k)} + \frac{(k+1) 2^{k+1}}{(k+3)!} \\ &= 1 + \frac{(k+1) 2^{k+1}}{(k+3)!} - \frac{2^{k+1}}{(k+2)!} = 1 + \frac{((k+1) - (k+3)) 2^{k+1}}{(k+3)!} \\ &= 1 - \frac{2 \cdot 2^{k+1}}{(k+3)!} = 1 - \frac{2^{(k+1)+1}}{((k+1)+2)!} = h(k+1) \end{aligned}$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n = k + 1$ ، وبذلك تكون العلاقة صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال (٦) : باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي برهن أن : $\sum_{r=1}^n r \cdot r! = (n+1)! - 1$

الحل

$$f(n) = \sum_{r=1}^n r \cdot r! , \quad h(n) = (n+1)! - 1 \quad \text{بفرض أن:}$$

(١) إثبات صحة العلاقة عندما $n = 1$: بوضع $n = 1$ نجد أن :

$$f(1) = \sum_{r=1}^1 r \cdot r! = 1 \cdot 1! = 1, \quad h(1) = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1 \quad \left. \vphantom{f(1)} \right\} \Rightarrow f(1) = h(1)$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

$$(٢) \text{ بفرض أن العلاقة صحيحة عندما } n = k \text{ أي أن: } \sum_{r=1}^k r \cdot r! = (k+1)! - 1$$

(٣) إثبات صحة العلاقة عندما $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} f(k+1) &= \sum_{r=1}^{k+1} r \cdot r! = \underbrace{\sum_{r=1}^k r \cdot r!}_{f(k)} + \sum_{r=k+1}^{k+1} r \cdot r! = \underbrace{(k+1)! - 1}_{h(k)} + (k+1)(k+1)! = [1+k+1](k+1)! - 1 \\ &= (k+2)(k+1)! - 1 = (k+2)! - 1 = h(k+1) \end{aligned}$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n = k + 1$ ، وبذلك تكون العلاقة صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال (٧) : باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي برهن أن : $\sum_{r=1}^n x^{r-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}, \quad x \neq 0$

الحل

$$f(n) = \sum_{r=1}^n x^{r-1}, \quad h(n) = \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad \text{بفرض أن:}$$

(١) إثبات صحة العلاقة عندما $n = 1$: بوضع $n = 1$ نجد أن :

$$f(1) = \sum_{r=1}^1 x^{r-1} = x^0 = 1, \quad h(1) = \frac{x^1 - 1}{x - 1} = \frac{x - 1}{x - 1} = 1 \quad \left. \vphantom{f(1)} \right\} \Rightarrow f(1) = h(1)$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

$$(2) \text{ بفرض أن العلاقة صحيحة عندما } n=k \text{ أي أن: } \sum_{r=0}^k x^{r-1} = \frac{x^k - 1}{x-1}$$

(3) أثبات صحة العلاقة عندما $n=k+1$:

$$\therefore f(k+1) = \sum_{r=1}^{k+1} x^{r-1} = \sum_{r=1}^k x^{r-1} + \sum_{r=k+1}^{k+1} x^{r-1} = \frac{x^k - 1}{\underbrace{x-1}_{h(k+1)}} + x^k = \frac{x^k - 1}{x-1} + \frac{(x-1)x^k}{x-1}$$

$$\therefore f(k+1) = \frac{x^k(1+x-1)-1}{x-1} = \frac{x^{k+1}-1}{x-1} = h(k+1)$$

\therefore العلاقة صحيحة عندما $n=k+1$ ، وبذلك تكون العلاقة صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال (8) : باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي برهن أن المقدار $5^n - 2^n$ تقبل القسمة علي 3 بدون باقي لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

الحل

بفرض أن: $f(n) = 5^n - 2^n$

(1) إثبات صحة العلاقة عندما $n=1$: بوضع $n=1$ نجد أن: $f(1) = 5 - 2 = 3$

واضح أن $f(1)$ تقبل القسمة علي 3 .

\therefore العلاقة صحيحة عندما $n=1$.

(2) بفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n=k$ أي أن $f(k) = 5^k - 2^k$ تقبل القسمة علي 3 .

(3) إثبات صحة العلاقة عندما $n=k+1$:

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 5^{(k+1)} - 2^{(k+1)} = 5 \cdot 5^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 5 \cdot 5^k - 2 \cdot 2^k + (5 \cdot 2^k - 5 \cdot 2^k) \\ &= (5 \cdot 5^k - 5 \cdot 2^k) + (5 \cdot 2^k - 2 \cdot 2^k) \end{aligned}$$

$$\therefore f(k+1) = 5(5^k - 2^k) + (5-2)2^k = 5(5^k - 2^k) + 3 \cdot 2^k$$

واضح أن الحد الأول من $f(k+1)$ يقبل القسمة علي 3 وذلك من الخطوة رقم (2) وكذلك واضح أن

الحد الثاني يقبل القسمة 3 أيضا .

\therefore العلاقة صحيحة عندما $n=k+1$ ، وبذلك تكون العلاقة صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

تمارين (٢)

باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي برهن أن:

$$\sum_{r=1}^n r(r+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \quad (١)$$

$$\sum_{r=1}^n \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1} \quad (٢)$$

$$\sum_{r=1}^n \frac{r}{(r+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \quad (٣)$$

$$\sum_{r=1}^n (2r-1)^2 = \frac{n}{3}(4n^2-1) \quad (٤)$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \quad (٥)$$

(٦) المقدار: $x^n - y^n$ يقبل القسمة علي $x-y$ لجميع قيم n الصحيحة الموجبة حيث أن $x \neq y$.

(٧) المقدار: $2^{4n} - 1$ تقبل القسمة علي 15 بدون باقي لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

(٨) المقدار $2^{2n} + 5$ تقبل القسمة علي 3 بدون باقي لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

الباب الثالث

جمع المتسلسلات المحدودة

مفهوم المتسلسلة: المتسلسلة هي مجموع حدود متتابعة. فمثلا إذا كانت $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ متتابعة

محدودة فإن المجموع: $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{r=1}^n a_r$ يمثل المتسلسلة المحدودة المناظرة لهذه المتتابعة.

أما إذا كانت لدينا المتتابعة اللانهائية $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ والتي حددها العام هو a_r فإن المجموع:

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

يمثل المتسلسلة اللانهائية المناظرة لهذه المتتابعة. والهدف الآن هو دراسة طرق جمع المتسلسلات المحدودة.

المتسلسلات العددية: المتسلسلة العددية هي متسلسلة يمكن كتابتها علي الصورة:

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n-1)d) = \sum_{r=1}^n (a + (r-1)d)$$

حيث أن a تمثل الحد الأول، $a + d$ تمثل الحد الثاني، d تسمى أساس المتسلسلة العددية وهو

عبارة عن الفرق بين أي حد من حدود المتسلسلة والحد السابق له مباشرة والحد العام لهذا النوع من

المتسلسلات هو $a_r = a + (r-1)d$ والحد الأخير $a_n = a + (n-1)d$ بينما مجموع n حدا من حدود

المتسلسلة العددية فيرمز له بالرمز S_n ونحصل عليه من العلاقة: $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ أو من

$$العلاقة: S_n = \frac{n}{2}[a + a_n]$$

المتسلسلات الهندسية: المتسلسلة الهندسية هي متسلسلة يمكن كتابتها علي الصورة:

$$\sum_{r=1}^n ax^{r-1} = a + ax + ax^2 + \dots + ax^{n-1}$$

حيث أن a تمثل الحد الأول، ax يمثل الحد الثاني، x تسمى أساس المتسلسلة الهندسية وهو عبارة عن

نتج قسمه أي حد من حدود المتسلسلة والحد السابق له مباشرة والحد العام لهذا النوع من المتسلسلات

هو $a_r = ax^{r-1}$ أما مجموع n حدا من حدود المتسلسلة الهندسية فيرمز له بالرمز S_n ونحصل عليه

$$S_n = \begin{cases} \frac{a(x^n - 1)}{x - 1}, & x > 1 \\ \frac{a(1 - x^n)}{1 - x}, & x < 1 \\ an, & x = 1 \end{cases} \quad \text{من العلاقة:}$$

وبصفة عامة ليس من اليسير الحصول علي مجموع أي متسلسلة ولكن توجد طرق جديره تمكنا من الحصول علي مجموع بعض المتسلسلات سنقدم بعض من هذه الطرق في هذا الباب.

طرق جمع المتسلسلات المحدودة

أولاً: طريقة الفروق لجمع المتسلسلات المحدودة

نظريه الفروق (١): في المتسلسلة $\sum_{r=1}^n a_r$ إذا وجدت داله f بحيث أنه يمكن التعبير عن الحد العام a_r

في الصورة: $a_r = f(r+1) - f(r)$ فإن مجموع هذه المتسلسلة يكون علي الصورة:

$$S_n = \sum_{r=1}^n a_r = f(n+1) - f(1)$$

البرهان: في المتسلسلة $\sum_{r=1}^n a_r$ بفرض انه وجدت داله f بحيث أن $a_r = f(r+1) - f(r)$

$$a_1 = f(2) - f(1) \quad \text{بوضع } r=1 \text{ نجد أن:}$$

$$a_2 = f(3) - f(2) \quad \text{بوضع } r=2 \text{ نجد أن:}$$

$$a_3 = f(4) - f(3) \quad \text{بوضع } r=3 \text{ نجد أن:}$$

$$a_{n-1} = f(n) - f(n-1) \quad \text{وبوضع } r=n-1 \text{ نجد أن:}$$

$$a_n = f(n+1) - f(n) \quad \text{بوضع } r=n \text{ نجد أن:}$$

$$S_n = \sum_{r=1}^n a_r = f(n+1) - f(1) \quad \text{وبالجمع نجد أن:}$$

نظريه الفروق (٢): في المتسلسلة $\sum_{r=1}^n a_r$ إذا وجدت داله f بحيث أنه يمكن التعبير عن الحد العام a_r

في الصورة: الصورة: $a_r = f(r) - f(r+1)$ فإن مجموع هذه المتسلسلة يكون علي الصورة:

$$S_n = \sum_{r=1}^n a_r = f(1) - f(n+1)$$

البرهان: بطريقه مماثله لبرهان نظريه الفروق (١).

باستخدام طريقه الفروق يمكن إيجاد مجموع بعض المتسلسلات كما سيتضح في الأمثلة التالية.

أمثلة محلولة

مثال (١): أوجد مجموع المتسلسلة $1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots$ إلي n حدا

الحل

واضح أن الحد العام للمتسلسلة المعطاة يمكن التعبير عنه بالصورة: $a_r = r(r+1)$

دراسة الفروق:

$$\therefore r(r+1)(r+2) - (r-1)(r)(r+1) = r(r+1)[(r+2) - (r-1)] = 3r(r+1) = 3a_r$$

$$\therefore a_r = \frac{1}{3}[r(r+1)(r+2) - (r-1)(r)(r+1)] = f(r+1) - f(r)$$

$$f(r+1) = \frac{1}{3}r(r+1)(r+2), \quad f(r) = \frac{1}{3}(r-1)(r)(r+1) \quad \text{حيث أن:}$$

وبالتالي فإن المجموع يكون بالصورة:

$$\sum_{r=1}^n a_r = \sum_{r=1}^n r(r+1) = f(n+1) - f(1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - (1-1)(1)(1+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

مثال (٢): أوجد مجموع المتسلسلة $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots$ إلي n حدا.

الحل

واضح أن الحد العام للمتسلسلة المعطاة هو $a_r = r(r+1)(r+2)$

دراسة الفروق:

$$\begin{aligned} \therefore r(r+1)(r+2)(r+3) - (r-1)(r)(r+1)(r+2) &= r(r+1)(r+2)[(r+3) - (r-1)] \\ &= 4r(r+1)(r+2) = 4a_r \end{aligned}$$

$$\therefore a_r = \frac{1}{4} [r(r+1)(r+2)(r+3) - (r-1)(r)(r+1)(r+2)] = f(r+1) - f(r)$$

$$f(r) = \frac{1}{4} (r-1)(r)(r+1)(r+2), \quad f(r+1) = \frac{1}{4} r(r+1)(r+2)(r+3) \quad \text{حيث أن}$$

وبالتالي فإن المجموع يكون بالصورة:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n a_r &= \sum_{r=1}^n r(r+1)(r+2) = f(n+1) - f(1) \\ &= \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) - \frac{1}{4} (1-1)(1)(1+1)(1+2) \\ &= \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) - 0 = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

مثال (٣): أوجد مجموع المتسلسلة $1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots$ إلي n حدا.

الحل

واضح أن الحد العام للمتسلسلة المعطاة هو $a_r = r.r!$

$$\therefore (r+1)! - r! = (r+1)r! - r! = [(r+1) - 1]r! = r.r! = a_r \quad \text{دراسة الفروق:}$$

$$\therefore a_r = (r+1)! - r! = f(r+1) - f(r)$$

$$f(r) = r!, \quad f(r+1) = (r+1)! \quad \text{حيث أن:}$$

$$\sum_{r=1}^n a_r = \sum_{r=1}^n r.r! = f(n+1) - f(1) = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1 \quad \text{وبتطبيق نظرية الفروق نجد أن:}$$

مثال (٤): أوجد مجموع المتسلسلة $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots$ إلي n حدا.

الحل

واضح أن الحد العام لهذه المتسلسلة هو $a_r = \frac{1}{r(r+1)}$

دراسة الفروق: باستخدام الكسور الجزئية يمكن كتابه الحد العام علي الصورة:

$$a_r = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1} = f(r) - f(r+1)$$

$$f(r) = \frac{1}{r}, \quad f(r+1) = \frac{1}{r+1} \quad \text{حيث أن:}$$

وبتطبيق نظرية الفروق (٢) نجد أن:

$$\sum_{r=1}^n a_r = f(1) - f(n+1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

مثال (٥): أوجد مجموع المتسلسلة ... $\frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6}$ إلي n حدا.

الحل

واضح أن الحد العام لهذه المتسلسلة هو: $a_r = \frac{1}{(r+1)(r+2)(r+3)}$

دراسة الفروق:

$$\therefore \frac{1}{(r+1)(r+2)} - \frac{1}{(r+2)(r+3)} = \frac{(r+3) - (r+1)}{(r+1)(r+2)(r+3)} = \frac{2}{(r+1)(r+2)(r+3)} = 2a_r$$

وبالتالي فإن الحد العام يمكن كتابته علي الصورة:

$$a_r = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(r+1)(r+2)} - \frac{1}{(r+2)(r+3)} \right] = f(r) - f(r+1)$$

$$f(r) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(r+1)(r+2)} \right] \quad f(r+1) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(r+2)(r+3)} \right] \quad \text{حيث أن:}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n a_r = f(1) - f(n+1) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2.3} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right]$$

مثال (٦): أوجد مجموع المتسلسلة ... $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!}$ إلي n حدا.

الحل

واضح أن الحد العام للمتسلسلة المعطاة هو $a_r = \frac{r}{(r+1)!}$

$$\therefore a_r = \frac{r}{(r+1)!} = \frac{(r+1) - 1}{(r+1)!} = \frac{r+1}{(r+1)!} - \frac{1}{(r+1)!} \quad \text{دراسة الفروق:}$$

وحيث أن $(r+1)! = (r+1)r!$ فإن الحد العام يمكن التعبير عنه بالصورة:

$$a_r = \frac{r+1}{(r+1)r!} - \frac{1}{(r+1)!} = \frac{1}{r!} - \frac{1}{(r+1)!} = f(r) - f(r+1)$$

$$f(r) = \frac{1}{r!}, \quad f(r+1) = \frac{1}{(r+1)!} \quad \text{حيث أن:}$$

وبتطبيق نظرية الفروق نجد أن:

$$\sum_{r=1}^n a_r = \sum_{r=1}^n \frac{r}{(r+1)!} = f(1) - f(n+1) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

مثال (٧): أوجد مجموع المتسلسلة $1.2 + \frac{2.2^2}{4!} + \frac{3.2^3}{5!} + \dots$ إلي حد n .

الحل

واضح أن الحد العام للمتسلسلة المعطاة هو: $a_r = \frac{r2^r}{(r+2)!}$ ، وبدراسة الفروق نجد أن:

$$\therefore \frac{2^r}{(r+1)!} - \frac{2^{r+1}}{(r+2)!} = \frac{(r+2)2^r - 2^{r+1}}{(r+2)!} = \frac{r2^r + 2^{r+1} - 2^{r+1}}{(r+2)!} = \frac{r2^r}{(r+2)!} = a_r$$

$$\therefore a_r = \frac{2^r}{(r+1)!} - \frac{2^{r+1}}{(r+2)!} = f(r) - f(r+1)$$

$$f(r) = \frac{2^r}{(r+1)!}, \quad f(r+1) = \frac{2^{r+1}}{(r+2)!} \quad \text{حيث أن}$$

وبتطبيق نظرية الفروق نجد أن:

$$\sum_{r=1}^n a_r = f(1) - f(n+1) = \frac{2}{(1+1)!} - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} = \frac{2}{2!} - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} = 1 - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$$

ثانياً: طريقة التعويض لجمع المتسلسلات المحدودة

باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي تم التحقق من صحة القوانين الآتية:

$$(i) \sum_{r=1}^n r = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(ii) \sum_{r=1}^n r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(iii) \sum_{r=1}^n r^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

وباستخدام هذه القوانين يمكن إيجاد مجموع بعض المتسلسلات كما يتضح من الأمثلة الآتية.

مثال (٨): أوجد مجموع المتسلسلة $1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots$ إلي حد n .

الحل

واضح أن الحد العام للمتسلسلة المعطاة يمكن التعبير عنه بالصورة: $a_r = r(r+1)$

$$\therefore a_r = r(r+1) = r^2 + r$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{r=1}^n a_r &= \sum_{r=1}^n r(r+1) = \sum_{r=1}^n (r^2 + r) = \sum_{r=1}^n r^2 + \sum_{r=1}^n r = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)[2n+1+3] = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

مثال (٩): أوجد مجموع المتسلسلة ... + 3.5 + 2.4 + 1.3 إلى حد n .

الحل

واضح أن الحد العام للمتسلسلة المعطاة يمكن التعبير عنه بالصورة: $a_r = r(r+2)$ وبالتالي نجد أن

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n a_r &= \sum_{r=1}^n (r^2 + 2r) = \sum_{r=1}^n r^2 + 2 \sum_{r=1}^n r = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{12} [2(2n+1) - 6] = \frac{n(n+1)}{12} [4n - 4] = \frac{n(n+1)(n-1)}{3} \end{aligned}$$

مثال (١٠): أوجد مجموع المتسلسلة ... + 5² + 3² + 1² إلى حد n .

الحل

الحد العام لهذه المتسلسلة يمكن كتابته في الصورة:

$$a_r = (1 + (3-1)(r-1))^2 = (2r-1)^2 = 4r^2 - 4r + 1$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n a_r = \sum_{r=1}^n (4r^2 - 4r + 1) = 4 \sum_{r=1}^n r^2 - 4 \sum_{r=1}^n r + \sum_{r=1}^n 1$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n a_r = 4 \left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \right] - 4 \left[\frac{1}{2}n(n+1) \right] + n$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n a_r = n \left[\frac{2}{3}(n+1)(2n+1) - 2(n+1) + 1 \right] = n \left[\frac{2}{3}(n+1)(2n+1-3) + 1 \right]$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n a_r = \frac{1}{3}n[2(n+1)(2n-2) + 3] \Rightarrow \sum_{r=1}^n a_r = \frac{1}{3}n[4n^2 - 4 + 3] = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$$

رابعاً: طريقة جمع المتسلسلات العددية الهندسية

المتسلسلة العددية الهندسية هي متسلسلة علي الصورة:

$$a + (a+d)x + (a+2d)x^2 + \dots + [a+(n-1)d]x^{n-1}$$

ولإيجاد مجموع هذا النوع من المتسلسلات نتبع الآتي:

$$S_n = a + (a+d)x + (a+2d)x^2 + \dots + [a+(n-1)d]x^{n-1}$$

وبضرب طرفي هذه المعادلة في x نحصل علي:

$$xS_n = ax + (a+d)x^2 + (a+2d)x^3 + \dots + [a+(n-1)d]x^n$$

وبالطرح نحصل علي:

$$\begin{aligned} S_n - xS_n &= a + dx + dx^2 + \dots + dx^{n-1} - [a+(n-1)d]x^n \\ &= a + dx \underbrace{(1+x+\dots+x^{n-2})}_{\frac{x^{n-1}-1}{x-1} \cdot \frac{1-x^{n-1}}{1-x}} - [a+(n-1)d]x^n \end{aligned}$$

$$\therefore (1-x)S_n = a + d \left(\frac{1-x^{n-1}}{1-x} \right) x - [a+(n-1)d]x^n$$

$$\therefore S_n = \frac{[a+(n-1)d]x^n - a}{x-1} - d \left(\frac{1-x^{n-1}}{(1-x)^2} \right) x$$

مثال (١٠): أوجد مجموع المتسلسلة $1+2x+3x^2+\dots$ إلي n حدا.

الحل

واضح أن الحد العام للمتسلسلة المعطاة يمكن التعبير عنه بالصورة: $a_r = rx^{r-1}$ وبالتالي نجد أن:

$$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}$$

$$\therefore xS_n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + (n-1)x^{n-1} + nx^n$$

$$\therefore S_n - xS_n = 1 + (2-1)x + (3-2)x^2 + (4-3)x^3 + \dots + (n-(n-1))x^{n-1} - (n)x^n$$

$$\therefore S_n - xS_n = \underbrace{1+x+x^2+x^3+\dots+x^{n-1}}_{\frac{x^n-1}{x-1} \cdot \frac{1-x^n}{1-x}} - nx^n$$

$$\therefore (1-x)S_n = \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n \Rightarrow S_n = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

تمرين: أوجد مجموع المتسلسلة $1+3x+5x^2+\dots$ إلي n حدا.

تمارين (٣)

١) باستخدام طريقة الفروق أوجد مجموع المتسلسلات الآتية إلى n حداً :

$$2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots \quad \blacklozenge$$

$$2.2! + 3.3! + 4.4! + \dots \quad \blacklozenge$$

$$\frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \dots \quad \blacklozenge$$

$$\frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \dots \quad \blacklozenge$$

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots \quad \blacklozenge$$

$$\frac{1}{2.5.8} + \frac{1}{5.8.11} + \frac{1}{8.11.14} + \dots \quad \blacklozenge$$

٢) باستخدام طريقة الفروق لجمع المتسلسلات برهن صحة العلاقات الآتية ثم تحقق من صحة ذلك

باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي :

$$\sum_{r=1}^n r(r+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \quad \blacklozenge$$

$$\sum_{r=1}^n \frac{r}{(r+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \quad \blacklozenge$$

$$\sum_{r=1}^n \frac{1}{(3r-2)(3r+1)} = \frac{n}{3n+1} \quad \blacklozenge$$

$$\sum_{r=1}^n \frac{r2^r}{(r+2)!} = 1 - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} \quad \blacklozenge$$

٣) باستخدام طريقة التعويض أوجد مجموع المتسلسلات الآتية إلى n حداً.

$$5 + 9 + 13 + \dots \quad \blacklozenge$$

$$1.4 + 4.7 + 7.10 + \dots \quad \blacklozenge$$

٤) باستخدام طريقة التعويض لجمع المتسلسلات برهن أن $\sum_{n=1}^n (2r-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$ ثم تحقق

من صحة ذلك باستخدام الاستنتاج الرياضي.

٥) أوجد مجموع المتسلسلة $1 + 5x + 9x^2 + \dots$ إلى n حداً.

الباب الرابع

متسلسلة ذات الحدين

احدي التطبيقات الهامة لتسلسلات القوي هو متسلسلة ذات الحدين والتي تمكننا من إيجاد مفكوك المقادير المكونة من حدين ومرفوعة إلي أي أس والتي تعرف في علم الجبر باسم "نظريه ذات الحدين".

أولاً: نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

نظريه ذات الحدين بأس صحيح موجب فنص علي أنه إذا كان n عددا صحيحا موجيا فإن:

$$\begin{aligned}(a+x)^n &= C_0^n a^n x^0 + C_1^n a^{n-1} x + C_2^n a^{n-2} x^2 + \dots + C_r^n a^{n-r} x^r + \dots + C_n^n a^0 x^n \\ &= \binom{n}{0} a^n x^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} x + \binom{n}{2} a^{n-2} x^2 + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r} x^r + \dots + \binom{n}{n} a^{n-n} x^n \\ &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} x^r\end{aligned}$$

ويكون هذا المفكوك صحيح لجميع قيم x الحقيقية. وهو عبارة عن متسلسلة ماكلورين للدالة $(a+x)^n$ ومن ناحية أخرى يمكن استخدام طريقة الاستنتاج الرياضي لإثبات صحته. وفي هذا المفكوك يكون

الحد الذي رتبته $r+1$ هو $\binom{n}{r} a^{n-r} x^r$ ، حيث أن معاملات ذات الحدين تكون بالصورة:

$$\begin{aligned}C_r^n &= \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!r!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-r+1)}{r!}\end{aligned}$$

ملحوظة: معاملات ذات الحدين تكون كالآتي:

$$C_0^n = \binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!} = 1, \quad C_1^n = \binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$C_2^n = \binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2!}$$

$$C_3^n = \binom{n}{3} = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

وهكذا يكون

$$C_{n-1}^n = \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-(n-1))!(n-1)!} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n, \quad C_n^n = \binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

وبالتالي نجد أن: $C_0^n = C_n^n, C_1^n = C_{n-1}^n, C_2^n = C_{n-2}^n$ وبوجه عام يكون:

$$C_r^n = C_{n-r}^n, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n$$

حالات خاصة من متسلسلة (مفكوك) ذات الحدين في قوي x التصاعدية

(1) إذا كانت $a = 1$ فإن المفكوك يصبح بالصورة

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-r+1)}{r!}x^r + \dots + x^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r$$

(2) بوضع $-x$ بدلا من x فإن المفكوك يكون بالصورة:

$$(1-x)^n = 1 + n(-x) + \frac{n(n-1)}{2!}(-x)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(-x)^3 + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-r+1)}{r!} \underbrace{(-x)^r}_{(-1)^r} + \dots + x^n$$

$$\therefore (1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-r+1)}{r!}(-1)^r x^r + \dots + x^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-1)^r x^r$$

ثانياً: نظرية ذات الحدين بأس ليس صحيحاً موجبا

باستخدام نظرية تيلور في التحليل الرياضي (انظر مقرر التفاضل) يمكن استنتاج أنه إذا كان n عدداً

صحيحاً سالباً أو كسرياً موجباً أو سالباً فإن مفكوك ذات الحدين للمقدار $(1+x)^n$ يكون بالصورة:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-r+1)}{r!}x^r + \dots$$

حيث أن المفكوك في هذه الحالة يكون متداً إلي ما لانهاية، كما أنه يكون صحيحاً فقط إذا

كان $|x| < 1$. وفي هذه الحالة لا يكون معني للتوافيق، مع ملاحظة أنه إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً

نحصل علي نفس المفكوك الذي حصلنا عليه من ذي قبل حيث أن الحدود ستندم اعتبارا من الحد الذي رتبته $n+2$ في هذا المفكوك.

وقياسا علي ما سبق يكون مفكوك المقدار $(a+x)^n$ في قوي x التصاعدي علي الصورة:

$$(a+x)^n = \left[a \left(1 + \frac{x}{a} \right) \right]^n = a^n \left(1 + n \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \dots \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (n-r+1)}{r!} \left(\frac{x}{a} \right)^r + \dots \right), \left| \frac{x}{a} \right| < 1$$

بينما يكون مفكوكه في قوي $\frac{1}{x}$ علي الصورة:

$$(a+x)^n = \left[x \left(1 + \frac{a}{x} \right) \right]^n = x^n \left(1 + n \left(\frac{a}{x} \right) + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{a}{x} \right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{a}{x} \right)^3 + \dots \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (n-r+1)}{r!} \left(\frac{a}{x} \right)^r + \dots \right), \left| \frac{a}{x} \right| < 1$$

بعض المفكوكات الهامة

(١) بالتعويض عن $n = -1$ نجد إن

$$(1+x)^{-1} = 1 + (-1)x + \frac{(-1)(-1-1)}{2!} x^2 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!} x^3 \\ + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)(-1-3)}{4!} x^4 + \dots \\ \therefore (1+x)^{-1} = 1 - x + \frac{2}{2!} x^2 - \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} x^3 + \frac{(-1)(-2)(-3)(-4)}{4!} x^4 + \dots \\ = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^r x^r + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r x^r \quad (1)$$

(٢) بوضع $-x$ بدلا من x في (١) نجد أن:

$$\therefore (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^r + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} x^r \quad (2)$$

(٣) بالتعويض عن $n = -2$ نجد أن

$$(1+x)^{-2} = 1 + (-2)x + \frac{(-2)(-2-1)}{2!} x^2 + \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} \therefore (1+x)^{-2} &= 1 + (-2)x + \frac{(-2)(-3)}{2!}x^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}x^3 + \dots \\ &= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 + \dots + (-1)^r (r+1)x^r + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (r+1)x^r \end{aligned} \quad (3)$$

(٤) بوضع $-x$ بدلا من x في (٣) نجد أن:

$$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots + (r+1)x^r + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} (r+1)x^r \quad (4)$$

أمثله محلوله

مثال (١): أوجد المفكوكات الآتية في قوي x التصاعديّة:

$$\sqrt[3]{1+2x} \quad (٤) \quad , \quad (1-4x)^{-\frac{2}{3}} \quad (٣) \quad , \quad (1-x)^{-\frac{1}{2}} \quad (٢) \quad , \quad (1+x)^{-\frac{1}{2}} \quad (١)$$

الحل

$$\begin{aligned} \therefore (1+x)^n &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-r+1)}{r!}x^r + \dots + x^n \end{aligned}$$

(١) بالتعويض عن $n = -\frac{1}{2}$ نجد أن

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\therefore (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!} \frac{(-1)(-3)}{2^2}x^2 + \frac{1}{3!} \frac{(-1)(-3)(-5)}{2^3}x^3 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \dots + (-1)^r \frac{1.3.5\dots(2r-1)}{2.4.6\dots 2r}x^r + \dots$$

وبالمثل نجد أن:

$$\therefore (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \dots + \frac{1.3.5\dots(2r-1)}{2.4.6\dots 2r}x^r + \dots$$

(٣) بالتعويض عن $n = -\frac{2}{3}$ ووضع $-4x$ بدلا من x نجد أن:

$$(1-4x)^{\frac{2}{3}} = 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)(-4x) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{2}{3}-1\right)(-4x)^2 + \frac{1}{3!} \left(-\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{2}{3}-1\right) \left(-\frac{2}{3}-2\right)(-4x)^3 + \dots$$

$$\therefore (1-4x)^{\frac{2}{3}} = 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)(-4x) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{5}{3}\right)(-4x)^2 + \frac{1}{3!} \left(-\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{5}{3}\right) \left(-\frac{8}{3}\right)(-4x)^3 + \dots$$

$$\therefore (1-4x)^{\frac{2}{3}} = 1 + (-4) \frac{(-2)}{3} x + \frac{(-4)^2 (-2)(-5)}{2! 3^2} x^2 + \frac{(-4)^3 (-2)(-5)(-8)}{3! 3^3} x^3 + \dots$$

$$\therefore \sqrt[3]{1+2x} = (1+2x)^{\frac{1}{3}} \quad (4)$$

وبالتعويض عن $n = \frac{1}{3}$ ووضع $2x$ بدلا من x نجد أن:

$$(1+2x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}(2x) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}-1\right)(2x)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}-1\right) \left(\frac{1}{3}-2\right)(2x)^3 + \dots$$

$$\therefore (1+2x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}(2x) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{2}{3}\right)(2x)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{5}{3}\right)(2x)^3 + \dots$$

$$\therefore (1+2x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{2^2 (1)(-2)}{2! 3^2} x^2 + \frac{2^3 (1)(-2)(-5)}{3! 3^3} x^3 + \dots$$

$$(3+x^2)^{-1} = \frac{1}{3} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{2r} \quad \text{مثال (٢): برهن أن:}$$

الحل

$$\therefore (3+x^2)^{-1} = \left[3 \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)\right]^{-1} = 3^{-1} \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-1}$$

$$\therefore (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots \quad (1)$$

ويوضع $\frac{x^2}{3}$ بدلا من x في المقلوك (١) نجد أن:

$$\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-1} = 1 + (-1) \left(\frac{x^2}{3}\right) + \frac{(-1)(-1-1)}{2!} \left(\frac{x^2}{3}\right)^2 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!} \left(\frac{x^2}{3}\right)^3 + \dots$$

$$\therefore \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-1} = 1 + (-1) \left(\frac{x^2}{3}\right) + \frac{(-1)(-2)}{2!} \left(\frac{x^2}{3}\right)^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} \left(\frac{x^2}{3}\right)^3 + \dots$$

$$= 1 - \left(\frac{x^2}{3}\right) + \left(\frac{x^2}{3}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{3}\right)^3 + \dots + (-1)^r \left(\frac{x^2}{3}\right)^r + \dots$$

$$\therefore \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{x^2}{3}\right)^r = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{2r} \Rightarrow$$

$$\left(3 + x^2\right)^{-1} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{3} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{2r}$$

مثال (3): إذا كان: $|x| < 1$ ، $1 + ax)^n = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1.3}{3.6}x^2 + \frac{1.3.5}{3.6.9}x^3 + \dots$ فأوجد a ، n واستنتج مجموع التسلسلة إلى ∞ عندما $x = \frac{1}{3}$.

الحل

$$\therefore (1 + ax)^n = 1 + nax + \frac{n(n-1)}{2!} a^2 x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^3 x^3 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1.3}{3.6}x^2 + \frac{1.3.5}{3.6.9}x^3 + \dots, |x| < 1 \quad (1)$$

وبمقارنة معاملات x ، x^2 في الطرفين نجد أن:

$$na = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{n(n-1)}{2!} a^2 = \frac{1.3}{3.6} \quad (3)$$

من المعادلة (2) نجد أن:

$$a = \frac{1}{3n} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{9n^2} \quad (4)$$

بالتعويض من (4) في (3) نجد أن:

$$\frac{1}{9n^2} \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{1.3}{3.6} \Rightarrow \frac{n-1}{n} = 3 \Rightarrow n = -\frac{1}{2} \quad (5)$$

وبالتعويض من (5) في (2) نجد أن:

$$a = -\frac{2}{3} \quad (6)$$

وللتأكد علي صحة الحل نحسب معامل x^3 في الفكوك (1):

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^3 = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!} \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1.3.5}{3^3 \cdot 3!} = \frac{1.3.5}{(3)(3^2)(2.3)} = \frac{1.3.5}{3.6.9}$$

وهو نفس العامل العطي في الفكوك (١). وكذلك يكون مجموع التسلسلة المعطاة إلي ∞ عندما $x = \frac{1}{3}$

$$.1 + \frac{1}{3}x + \frac{1.3}{3.6}x^2 + \frac{1.3.5}{3.6.9}x^3 + \dots = \left(1 + \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{2}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{7}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

مثال (٤): برهن علي أن التسلسلة $1 + \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.8} + \frac{1.3.5}{4.8.12} + \dots$ هي متسلسلات ذات الحدين وأن مجموعها إلي ما لانهاية يساوي $\sqrt{2}$.

الحل

بقرض أن

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.8} + \frac{1.3.5}{4.8.12} + \dots \quad (1)$$

وبمقارنة الحدين الثاني والثالث في الطرفين نجد أن:

$$nx = \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{n(n-1)}{2!}x^2 = \frac{1.3}{4.8} \quad (3)$$

من المعادلة (٢) نجد أن:

$$x = \frac{1}{4n} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4^2 n^2} \quad (4)$$

بالتعويض من (٤) في (٣) نجد أن:

$$\frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{4^2 n^2} = \frac{1.3}{4.8} \Rightarrow n = -\frac{1}{2} \quad (5)$$

وبالتعويض من (٥) في (٢) نجد أن:

$$x = -\frac{1}{2} \quad (6)$$

وبالتالي يكون مجموع التسلسلة المعطاة

$$.1 + \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.8} + \frac{1.3.5}{4.8.12} + \dots = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

مثال (5): برهن أن المتسلسلة $1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6} + \dots$ هي متسلسلة ذات الحدين وأن مجموعها إلي ما لانهاية يساوي $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

الحل

بقرض أن

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6} + \dots \quad (1)$$

وبمقارنة الحدين الثاني والثالث في الطرفين نجد أن:

$$nx = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{n(n-1)}{2!}x^2 = \frac{1.3}{2.4} \Rightarrow n(n-1)x^2 = \frac{3}{4} \quad (3)$$

من المعادلة (2) نجد أن:

$$x = -\frac{1}{2n} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2^2 n^2} \quad (4)$$

بالتعويض من (4) في (3) نجد أن:

$$n(n-1) \frac{1}{2^2 n^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow (n-1) = 3n \Rightarrow n = -\frac{1}{2} \quad (5)$$

وبالتعويض من (5) في (2) نجد أن:

$$x = -1 \quad (6)$$

وبالتالي يكون مجموع المتسلسلة المعطاة هو: $(1+1)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

تمارين (٤)

(١) أوجد المفكوكات الآتية في قوي x التصاعدية: $(4+x^2)^{\frac{1}{2}}$ ، $(2+3x)^{-2}$.

(٢) باستخدام نظرية ذات الحدين برهن أن:

$$(i) (1+x)^{-2} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (r+1) x^r$$

$$(ii) (3-x^2)^{-1} = \frac{1}{3} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{2r}$$

$$(iii) (2+x^2)^{-2} = \frac{1}{4} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (r+1) \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2r}$$

(٣) برهن علي أن المتسلسلات الآتية هي متسلسلات ذات الحدين وأوجد مجموعها إلي ما لانهاية:

$$.1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots \quad \blacklozenge$$

$$.1 - \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.8} - \frac{1.3.5}{4.8.12} + \dots \quad \blacklozenge$$

(٤) إذا كان: $|x| < 1$ ، $1 + \omega x = 1 + \frac{3}{8}x + \frac{3.5}{8.16}x^2 + \frac{3.5.7}{8.16.24}x^3 + \dots$ فأوجد ω ، n واستنتج

مجموع المتسلسلة إلي ω عندما $x = \frac{5}{3}$.

(٥) إذا كانت $1 + x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \dots$ فأوجد قيمة كلاً من x ، n وأوجد مجموع

المتسلسلة إلي ما لانهاية.

الباب الخامس

جمع المتسلسلات المثلثية باستخدام الأعداد المركبة

العدد المركب: ظهرت فكرة الأعداد المركبة (التخيلية) عند حل المعادلة العامة من الدرجة الثانية:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

حيث أن جذور هذه المعادلة تعطى من العلاقة $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ، والتي ليس لها معنى إذا كان

$b^2 - 4ac < 0$ ، لأنه كان يشترط أن تكون الأعداد الحقيقية تحت علامة الجذر التربيعي موجبة. وقد

كان أويلر (1707-1783) هو أول الرياضيين الذي أدخل مفهوم العدد التخيلي $i = \sqrt{-1}$ علي أنه

أحد جذور المعادلة $x^2 + 1 = 0$ والتي لا نجد لها جذوراً بين الأعداد الحقيقية. ونلاحظ أن:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -i, \dots, \quad i^{2n} = (-1)^n, \quad i^{2n+1} = (-1)^n i$$

وفي سياق مفهوم العدد التخيلي i نجد أن المعادلة التي علي الصورة $x^2 + a^2 = 0$ تكون جذورها هي

$x = \pm ia$ وجذور المعادلة $x^2 + 2x + 5 = 0$ هي $-1 \pm 2i$. ونلاحظ أن الجذرين الأخيرين يحتويان

علي جزء حقيقي وهو -1 وجزء تخيلي ± 2 ومن هذا المنطلق فإن العدد المركب يمكن كتابته علي

الصورة: $z = x + iy$ حيث x, y أعداد حقيقية. ويسمى x بالجزء الحقيقي للعدد المركب z ويرمز له

بالرمز $x = \text{Re}(z)$ ، ويسمى y بالجزء التخيلي ويرمز له بالرمز $y = \text{Im}(z)$. وتسمى هذه الصورة بالصورة

القياسية (المعتادة) للعدد المركب. ويمكن أيضاً أن نكتب العدد المركب علي صورة زوج مرتب من الأعداد

الحقيقية علي الصورة $z = (x, y)$ أي أن: $z = (x, y) = x + iy$.

جبر الأعداد المركبة: بفرض أن $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ عدنان مركبان فإن:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$$

❖ التساوي

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

❖ الجمع

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

❖ الطرح

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

❖ الضرب

مرافق العدد المركب: العدد المركب الذي علي الصورة $x - iy$ يسمي بمرافق العدد المركب الذي علي

الصورة $z = x + iy$ يرمز له بالرمز \bar{z} أي أن $\bar{z} = x - iy$.

نظريته: ليكن $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ عدنان مركبان فإن:

$$(i) \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

$$(ii) \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$(iii) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad z_2 \neq 0$$

$$(iv) z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

$$(v) \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$(vi) \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

البرهان: يترك للطالب كتمرين

ويستخدم مرافق العدد المركب في قسمة الأعداد المركبة كالتالي: إذا كان $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

حيث أن $z_2 \neq 0$ فإن:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

مقياس العدد المركب: مقياس العدد المركب الذي علي الصورة $z = x + iy$ هو العدد الحقيقي

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

نظريته: ليكن $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ عدنان مركبان فإن:

$$(i) |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| \pm |z_2|$$

$$(ii) |z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$(iii) \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$$

البرهان: يترك للطالب كتمرين

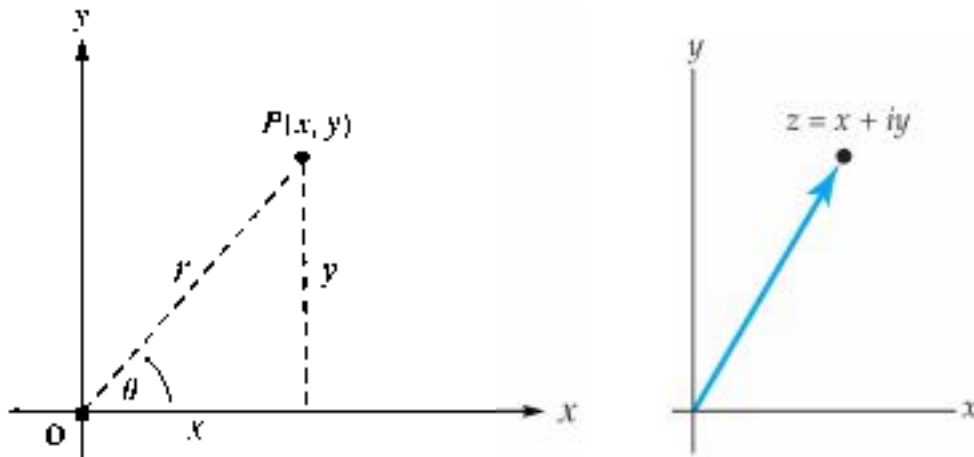
الصورة المثلثية (القطبية) للعدد المركب

تعلمنا من الهندسة التحليلية أن أي زوج مرتب من الأعداد الحقيقية (x, y) يمكن تمثيله في المستوى

هندسياً وذلك أما عن طريق الإحداثيات الكارتيزية أو عن طريق الإحداثيات القطبية. فإذا مثلنا

مجموعة الأعداد المركبة في المستوى واعتبرنا أن محور ox يمثل الأجزاء الحقيقية للأعداد المركبة،

ومحور oy يمثل معاملات الأجزاء التخيلية، فإننا بذلك نحصل على مستوى الأعداد المركبة أو مستوى أرجند. وبفرض أن عددا مركبا، هذا العدد سيعين نقطة واحدة p في المستوى. من الواضح أن هذه النقطة تتعين تماما إذا علمنا بعد هذه النقطة r عن نقطة الأصل وكذلك الزاوية التي يعينها op مع محور ox ، كما بالشكل المقابل، من الشكل المقابل:



واضح أن: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ وبالتالي فإن العدد المركب $z = x + iy$ يمكن كتابته بالصورة: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ وتسمى هذه

الصورة بالصورة أثلثية (القطبية) للعدد المركب z . يسمى العدد r بمقياس العدد المركب z ويرمز له بالرمز $r = |z|$ أي أن:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq r < \infty$$

وتسمى θ بسعة هذا العدد المركب ويرمز لها بالرمز $\arg z$ أي أن $\theta = \arg z$. وواضح أن السعة للعدد المركب تتعين من العلاقة: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, $-\infty < \theta < \infty$ وحيث أن النسب أثلثية لأي زاوية لا تتغير بإضافة مضاعفات 2π لهذه الزاوية فإن سعة العدد المركب θ تأخذ عددها لانهائي من القيم الحقيقية والقيمة التي تحقق الشرط $-\pi \leq \theta \leq \pi$ تسمى بالقيمة الأساسية للسعة.

صورة اويلر (الصورة الآسية) للعدد المركب

من مفكوك ماكلورين للدالة e^x (انظر مقرر التفاضل) نعلم أن: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ وبوضع $x = i\theta$ نجد أن: $e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \dots$ وبفصل

الجزء الحقيقي عن الجزء التخيلي نجد أن :

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \right)$$

ومن مفكوك ماكلورين للدوال $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ (انظر مقرر التفاضل) نجد أن :

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots, \quad \sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

وبالتالي نجد أن : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ وبالتالي فإن أي عدد مركب $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ يمكن

كتابته علي الصورة : $z = r e^{i\theta}$ وهذه الصورة تسمى بصورة أويلر للعدد المركب .

وقياسا علي ما سبق نجد أن : $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$ وبالتالي نجد أن مرافق

العدد المركب $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$ يمكن كتابته بالصورة $\bar{z} = r e^{-i\theta}$. وبالتالي نستنتج أن :

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

إيجاد مقياس وسعة حاصل ضرب وخارج قسمة عددين مركبين

بقرض أن $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ عددان مركبان فإن :

$$(i) z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)], \quad (ii) \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

ويمكن التحقق من صحة ذلك باستخدام صورة اويلر للعدد المركب كما يأتي :

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$$

وبالتالي يكون :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = r_1 r_2 e^{i\theta_1} \cdot e^{-i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

وبالتالي نلاحظ أن :

❖ $|z_1 z_2| = r_1 r_2$ ، أي أن مقياس حاصل ضرب عددين مركبين هو حاصل ضرب مقياسي العددين

المركبين .

❖ $Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$ ، أي أن سعة حاصل ضرب عددين مركبين يساوي مجموع سعتي العددين.

❖ $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{r_1}{r_2}$ ، أي أن مقياس خارج قسمة عددين مركبين يساوي خارج قسمة مقياسيهما.

❖ $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$ ، أي أن سعة خارج قسمة عددين مركبين يساوي الفرق بين سعتهما.

ويمكن تعميم العلاقة الأولى لعدد n من الأعداد المركبة كما يلي: بفرض أن

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}, \dots, z_n = r_n e^{i\theta_n}$$

عدد n من الأعداد المركبة فإن:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = r_1 r_2 \dots r_n e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)} = [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)]$$

وإذا كانت $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ فإن العلاقة السابقة تصبح بالصورة:

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)] \Rightarrow r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

$$\therefore (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad (*)$$

والعلاقة (*) هي علاقة شهيرة تعرف باسم "نظريته دي موافر" نسبتا إلي العلامة الفرنسي دي موافر ومن الاستنتاج السابق يتضح أن هذه علاقة صحيحة عندما تكون n عدد صحيح موجب وهي أيضا صحيحة عندما تكون n عدد صحيح سالب أو عدد كسري. والمنطوق الكامل لنظرية دي موافر يكون كما يلي:

نظرية دي موافر

■ إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً أو سالباً فإن: $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

■ إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فإن:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{\frac{1}{n}} = \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

البرهان:

أولاً: عندما تكون n عدد صحيح موجب نستخدم طريقة الاستنتاج (انظر باب الاستنتاج الرياضي).

ثانياً: إذا كان عدداً صحيحاً سالباً، نضع $n = -m$ حيث أن m عدد صحيح موجب فيكون:

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^{-m} &= \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)^m} = \frac{1}{\cos m \theta + i \sin m \theta} \\ &= \frac{1}{\cos m \theta + i \sin m \theta} \cdot \frac{\cos m \theta - i \sin m \theta}{\cos m \theta - i \sin m \theta} \\ &= \frac{\cos m \theta - i \sin m \theta}{\cos^2 m \theta + \sin^2 m \theta} = \cos m \theta - i \sin m \theta \\ &= \cos(-m)\theta + i \sin(-m)\theta = \cos n \theta + i \sin n \theta \end{aligned}$$

ثالثاً: بفرض أن $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n$ وبالتالي نجد أن:

$$(\cos \theta + i \sin \theta) = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^{\frac{1}{n}} = (\cos n \alpha + i \sin n \alpha)$$

وبالتالي نحصل على: $\cos \theta + i \sin \theta = \cos n \alpha + i \sin n \alpha$ وبالتالي نجد أن:

$$\therefore \cos n \alpha = \cos \theta, \quad \sin n \alpha = \sin \theta$$

ومن ذلك نستنتج أن: $n \alpha = \theta + 2k\pi, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ وبالتالي نجد أن:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{\frac{1}{n}} = \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

ملحوظة: قياسا على ما سبق، ليكن n عدداً صحيحاً موجباً، m عدداً صحيحاً موجباً أو سالباً فإن:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{\frac{m}{n}} = \cos\left(\frac{m\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{m\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

تطبيقات الأعداد المركبة في جمع بعض المتسلسلات المثلثية

باستخدام الأعداد المركبة يمكن إيجاد مجموع بعض المتسلسلات المثلثية في جيوب وجيوب تمام الزاوية

θ ، ويكن توضيح ذلك من خلال الأمثلة الآتية:

مثال (1): أوجد مجموع المتسلسلة:

$$\cos \theta - \binom{n}{1} \cos 2\theta + \binom{n}{2} \cos 3\theta + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \cos(n+1)\theta$$

الحل

بقرض أن

$$A = \cos \theta - \binom{n}{1} \cos 2\theta + \binom{n}{2} \cos 3\theta + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \cos(n+1)\theta$$

$$B = \sin \theta - \binom{n}{1} \sin 2\theta + \binom{n}{2} \sin 3\theta + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \sin(n+1)\theta$$

وبالتالي يكون

$$\begin{aligned} \therefore A + iB &= (\cos \theta + i \sin \theta) - \binom{n}{1} (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + \binom{n}{2} (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) + \dots \\ &\quad + (-1)^n \binom{n}{n} (\cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore A + iB &= z - \binom{n}{1} z^2 + \binom{n}{2} z^3 + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} z^{n+1} = z \left[1 - \binom{n}{1} z + \binom{n}{2} z^2 + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} z^n \right] \\ &= z(1-z)^n \end{aligned}$$

$$\therefore A + iB = (\cos \theta + i \sin \theta) \underbrace{(1 - \cos \theta - i \sin \theta)^n}_{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$= (\cos \theta + i \sin \theta) \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right)^n$$

$$= (\cos \theta + i \sin \theta) \left(2^n \sin^n \frac{\theta}{2} \right) \left(\sin \frac{\theta}{2} - i \cos \frac{\theta}{2} \right)^n$$

$$= (\cos \theta + i \sin \theta) \left(2^n \sin^n \frac{\theta}{2} \right) \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) \right]^n$$

$$= (\cos \theta + i \sin \theta) \left(2^n \sin^n \frac{\theta}{2} \right) \left[\cos \frac{n(\pi - \theta)}{2} - i \sin \frac{n(\pi - \theta)}{2} \right]$$

$$\begin{aligned} \therefore A + iB &= \left(2^n \sin^n \frac{\theta}{2}\right) (\cos \theta + i \sin \theta) \left[\cos \frac{n(\pi - \theta)}{2} - i \sin \frac{n(\pi - \theta)}{2} \right] \\ &= \left(2^n \sin^n \frac{\theta}{2}\right) \left[\begin{aligned} &\cos \theta \cos \frac{n(\pi - \theta)}{2} - i \cos \theta \sin \frac{n(\pi - \theta)}{2} \\ &+ i \sin \theta \cos \frac{n(\pi - \theta)}{2} + i \sin \theta \left(-i \sin \frac{n(\pi - \theta)}{2}\right) \end{aligned} \right] \\ &= \left(2^n \sin^n \frac{\theta}{2}\right) \left[\begin{aligned} &\cos \theta \cos \frac{n(\pi - \theta)}{2} + \sin \theta \sin \frac{n(\pi - \theta)}{2} \\ &+ i \left(\sin \theta \cos \frac{n(\pi - \theta)}{2} - \cos \theta \sin \frac{n(\pi - \theta)}{2} \right) \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

وبالتالي نجد أن:

$$\begin{aligned} \therefore A &= \left(2^n \sin^n \frac{\theta}{2}\right) \left[\cos \theta \cos \frac{n(\pi - \theta)}{2} + \sin \theta \sin \frac{n(\pi - \theta)}{2} \right] \\ &= \left(2^n \sin^n \frac{\theta}{2}\right) \cos \left[\frac{2\theta}{2} - \frac{n(\pi - \theta)}{2} \right] = \left(2^n \sin^n \frac{\theta}{2}\right) \cos \left(\frac{(n+2)\theta - n\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

والمثل نجد أن

$$\therefore B = \left(2^n \sin^n \frac{\theta}{2}\right) \left[\sin \theta \cos \frac{n(\pi - \theta)}{2} - \cos \theta \sin \frac{n(\pi - \theta)}{2} \right] = \left(2^n \sin^n \frac{\theta}{2}\right) \sin \left(\frac{(n+2)\theta - n\pi}{2} \right)$$

مثال (٢): أوجد مجموع المتسلسلة $\cos \theta + \binom{n}{1} \cos 2\theta + \binom{n}{2} \cos 3\theta + \dots + \binom{n}{n} \cos(n+1)\theta$

الحل

بقرض أن

$$A = \cos \theta + \binom{n}{1} \cos 2\theta + \binom{n}{2} \cos 3\theta + \dots + \binom{n}{n} \cos(n+1)\theta$$

$$B = \sin \theta + \binom{n}{1} \sin 2\theta + \binom{n}{2} \sin 3\theta + \dots + \binom{n}{n} \sin(n+1)\theta$$

وبالتالي يكون

$$\begin{aligned} \therefore A + iB &= (\cos \theta + i \sin \theta) + \binom{n}{1} (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + \binom{n}{2} (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) + \dots \\ &\quad + \binom{n}{n} (\cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore A + iB &= z + \binom{n}{1}z^2 + \binom{n}{2}z^3 + \dots + \binom{n}{n}z^{n+1} = z \left[1 + \binom{n}{1}z + \binom{n}{2}z^2 + \dots + \binom{n}{n}z^n \right] \\ &= z(1+z)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore A + iB &= (\cos \theta + i \sin \theta) \underbrace{(1 + \cos \theta + i \sin \theta)^n}_{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta) \left(2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right)^n \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta) \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right)^n \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)^n \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta) \left(2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \frac{n\theta}{2} + i \sin \frac{n\theta}{2} \right) \\ \therefore A + iB &= \left(2^n \sin^n \frac{\theta}{2} \right) (\cos \theta + i \sin \theta) \left(\cos \frac{n\theta}{2} + i \sin \frac{n\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

وبالتالي نجد أن:

$$A = \left(2^n \sin^n \frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \theta \cos \frac{n\theta}{2} - \sin \theta \sin \frac{n\theta}{2} \right) = 2^n \sin^n \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{(n+2)\theta}{2} \right)$$

مثال (3): أوجد مجموع التسلسلة $\binom{n}{1} \sin \theta + \binom{n}{2} \sin 2\theta + \binom{n}{3} \sin 3\theta + \dots + \binom{n}{n} \sin n\theta$

الحل

بقرض أن

$$\begin{aligned} B &= \binom{n}{1} \sin \theta + \binom{n}{2} \sin 2\theta + \binom{n}{3} \sin 3\theta + \dots + \binom{n}{n} \sin n\theta \\ A &= \binom{n}{1} \cos \theta + \binom{n}{2} \cos 2\theta + \binom{n}{3} \cos 3\theta + \dots + \binom{n}{n} \cos n\theta \end{aligned}$$

وبالتالي نجد أن:

$$\begin{aligned} A + iB &= \binom{n}{1} [\cos \theta + i \sin \theta] + \binom{n}{2} [\cos 2\theta + i \sin 2\theta] + \dots + \binom{n}{n} [\cos n\theta + i \sin n\theta] \\ &= \binom{n}{1} e^{i\theta} + \binom{n}{2} (e^{i\theta})^2 + \binom{n}{3} (e^{i\theta})^3 + \dots + \binom{n}{n} (e^{i\theta})^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (1 + A) + iB &= 1 + \binom{n}{1} e^{i\theta} + \binom{n}{2} (e^{i\theta})^2 + \binom{n}{3} (e^{i\theta})^3 + \dots + \binom{n}{n} (e^{i\theta})^n \\ &= (1 + e^{i\theta})^n = \left(e^{\frac{i\theta}{2}} \left[e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}} \right] \right)^n \\ &= e^{\frac{i\pi}{2}\theta} \left[e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}} \right]^n = e^{\frac{i\pi}{2}\theta} \left[e^{\frac{i\theta}{2}} + e^{-\frac{i\theta}{2}} \right]^n \\ \therefore (1 + A) + iB &= e^{\frac{i\pi}{2}\theta} \left[2 \cos \frac{\theta}{2} \right]^n = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{n\theta}{2} + i \sin \frac{n\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

وبالتالي نجد أن مجموع المتسلسلة المعطاة يكون علي الصورة:

$$B = 2^n \cos^n \left(\frac{\theta}{2} \right) \sin \left(\frac{n\theta}{2} \right)$$

مثال (٦): أوجد مجموع المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\cos r\theta}{r!} = \cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{2!} + \frac{\cos 3\theta}{3!} + \dots$

الحل

بفرض أن

$$A = \cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{2!} + \frac{\cos 3\theta}{3!} + \dots, \quad B = \sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{2!} + \frac{\sin 3\theta}{3!} + \dots$$

وبالتالي نجد أن

$$A + iB = \cos \theta + i \sin \theta + \frac{\cos 2\theta + i \sin 2\theta}{2!} + \frac{\cos 3\theta + i \sin 3\theta}{3!} + \dots$$

بوضع $z = \cos \theta + i \sin \theta$ نجد أن:

$$\begin{aligned} A + iB &= z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} = e^z - 1 \\ &= e^{\cos \theta + i \sin \theta} - 1 \\ &= e^{\cos \theta} e^{i \sin \theta} - 1 \\ &= e^{\cos \theta} [\cos(\sin \theta) + i \sin(\sin \theta)] - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore A = e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) - 1, \quad B = e^{\cos \theta} \sin(\sin \theta)$$

مثال (٧): أوجد مجموع المتسلسلة

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\cos^r \theta \cos r\theta}{r!} = \cos \theta \cdot \cos \theta + \frac{\cos^2 \theta \cos 2\theta}{2!} + \frac{\cos^3 \theta \cos 3\theta}{3!} + \dots$$

الحل

بقض أن

$$A = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\cos^r \theta \cos r\theta}{r!} = \cos \theta \cdot \cos \theta + \frac{\cos^2 \theta \cos 2\theta}{2!} + \frac{\cos^3 \theta \cos 3\theta}{3!} + \dots$$

$$B = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\cos^r \theta \sin r\theta}{r!} = \cos \theta \cdot \sin \theta + \frac{\cos^2 \theta \sin 2\theta}{2!} + \frac{\cos^3 \theta \sin 3\theta}{3!} + \dots$$

وبالتالي نجد أن

$$A + iB = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\cos^r \theta \cos r\theta}{r!} + i \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\cos^r \theta \sin r\theta}{r!} = \sum_{r=1}^{\infty} \cos^r \theta \frac{[\cos r\theta + i \sin r\theta]}{r!}$$

$$= \cos \theta [\cos \theta + i \sin \theta] + \cos^2 \theta \frac{[\cos 2\theta + i \sin 2\theta]}{2!} + \cos^3 \theta \frac{[\cos 3\theta + i \sin 3\theta]}{3!} + \dots$$

بوضع $z = \cos \theta + i \sin \theta$ نجد أن:

$$A + iB = \cos \theta z + \cos^2 \theta \frac{z^2}{2!} + \cos^3 \theta \frac{z^3}{3!} + \dots = z \cos \theta + \frac{(z \cos \theta)^2}{2!} + \frac{(z \cos \theta)^3}{3!} + \dots$$

$$= e^{z \cos \theta} - 1$$

$$\therefore A + iB = e^{z \cos \theta} - 1 = e^{(\cos \theta + i \sin \theta) \cos \theta} - 1$$

$$= e^{\cos^2 \theta} e^{i \sin \theta \cos \theta} - 1$$

$$= e^{\cos^2 \theta} [\cos(\sin \theta \cos \theta) + i \sin(\sin \theta \cos \theta)] - 1$$

$$= e^{\cos^2 \theta} \left[\cos\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right) \right] - 1$$

$$A = e^{\cos^2 \theta} \cos\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right) - 1, \quad B = e^{\cos^2 \theta} \sin\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)$$

تمارين (٥)

(١) أوجد مجموع المتسلسلات الآتية:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\cos r\theta}{r!} \triangleright$$

$$\sum_{r=1}^n \cos r\theta \triangleright$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin r\theta}{r!} \triangleright$$

$$\sum_{r=1}^n (-1)^r \binom{n}{r} \cos r\theta \triangleright$$

الباب السادس

تقارب وتباعد المتسلسلات الغير محدودة

المتسلسلات (الغير محدودة) اللانهائية

تعريف: المتسلسلة اللانهائية هي عبارة عن مجموع حدود متقاربة اللانهائية، فمثلا إذا كانت

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \text{ متقاربة لانهاية فإن المجموع } \sum_{r=1}^{\infty} a_r = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \text{ يمثل المتسلسلة}$$

اللانهاية المناظرة لهذه المتقاربة. وهذا النوع من المتسلسلات يحتوي علي عدد لانهاية من الحدود.

المجاميع الجزئية للمتسلسلات اللانهائية

مجموع عدد n من حدود المتسلسلة $\sum_{r=1}^n a_r$ يسمي بالمجموع الجزئي للمتسلسلة ويرمز له عادة بالرمز

$$S_n, \text{ وبالتالي يكون } S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{r=1}^n a_r \text{ أي أن:}$$

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{r=1}^n a_r$$

وبهذا يكون لدينا المتقاربة (S_1, S_2, \dots, S_n) من المجاميع الجزئية. ولاختبار المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ من حيث

التقارب والتباعد يكون لدينا الآن أن ندرس الاحتمالات الأربعة الآتية:

تقارب وتباعد المتسلسلات اللانهائية

الاحتمال (١): في المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = l$ ، عددًا محدودًا فإنه يقال أن المتسلسلة

تقاربيه وأن مجموعها يساوي l ، أي أن المتسلسلة تكون تقاربيه إذا كان مجموعها عددًا محدودًا.

الاحتمال (٢): في المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ أو $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ فإنه يقال أن

المتسلسلة تباعديه.

الاحتمال (٣): في المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ تتذبذب بين عددين محدودين فإنه يقال أن

المتسلسلة تتذبذب تذبذباً محدوداً وفي هذه الحالة تكون المتسلسلة تباعديه أيضاً.

الاحتمال (٤): في المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ تتذبذب بين ∞ ، $-\infty$ فإنه يقال أن

المتسلسلة تتذبذب تذبذباً غير محدوداً وفي هذه الحالة تكون المتسلسلة تباعديه أيضاً.

ملحوظة (١): المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ يقال أنها تباعديه إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ أو $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ أو

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ تذبذبية.

ملحوظة (٢): تقارب أي المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ يعتمد علي تقارب مجموعها الجزئي، أي أن النهاية

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ تكون موجودة وتساوي عدداً محدوداً.

مثال (١): أدرس تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad (٢) \quad ، \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad (١)$$

الحل

(١) الحد العام للمتسلسلة المعطاة هو $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ وبتطبيق نظرية الفروق نجد أن مجموع هذه

المتسلسلة يكون بالصورة $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)}$ وبالتالي تكون $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)}\right) = 1$ وبالتالي

فإن المتسلسلة المعطاة تكون تقاربيه ومجموعها يسوي الواحد الصحيح.

(٢) الحد العام للمتسلسلة المعطاة هو $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ وبتطبيق نظرية الفروق نجد أن مجموع

هذه المتسلسلة يكون بالصورة $S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$ وبالتالي تكون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

وبالتالي فإن المتسلسلة المعطاة تكون تقاربيه ومجموعها يساوي $\frac{1}{4}$.

المتسلسلة الهندسية اللانهائية

المتسلسلة التي تأخذ الصورة $\sum_{r=1}^{\infty} x^{r-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$ تسمى بالمتسلسلة الهندسية اللانهائية حيث أن 1 هو الحد الأول ، x هو الأساس.

تقارب وتباعد المتسلسلة الهندسية اللانهائية

مثال (٢): برهن أن المتسلسلة الهندسية $\sum_{r=1}^{\infty} x^{r-1}$ تكون:

(١) تقاربه إذا كانت $|x| < 1$ أي أن $-1 < x < 1$.

(٢) تباعديه إذا كانت $|x| > 1$.

(٣) تذبذبيه (تباعديه أيضا) إذا كانت $x = -1$.

وهذا يعني أن المتسلسلة الهندسية تكون تقاربه إذا كانت $-1 < x < 1$ وماعدا ذلك تكون تباعديه.

الحل

$$S_n = \begin{cases} \frac{x^n - 1}{x - 1}, & x > 1 \\ \frac{1 - x^n}{1 - x}, & x < 1 \\ n, & x = 1 \end{cases}$$

مجموع هذه المتسلسلة يعطي من العلاقة:

والآن ندرس الحالات الآتية:

الحالة الأولى: إذا كانت $|x| < 1$ أي أن $-1 < x < 1$ فإن $x^n \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow \infty$ وبالتالي تكون:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - x}$$

وبالتالي فإن المتسلسلة تكون تقاربه ومجموعها يساوي $\frac{1}{1 - x}$.

الحالة الثانية: إذا كانت $x > 1$ فإن $x^n \rightarrow \infty$ عندما $n \rightarrow \infty$ وبالتالي تكون:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \infty$$

وبالتالي فإن المتسلسلة تكون تباعديه في هذه الحالة.

الحالة الثالثة: إذا كانت $x = -1$ فإن

$$S_n = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = \frac{1-(-1)^n}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} 1, & n \text{ is odd} \\ 0, & n \text{ is even} \end{cases}$$

وبالتالي فإن المتسلسلة في هذه الحالة تكون تذبذبية تذبذبا محدودا وبالتالي فهي تباعديه.

الحالة الرابعة: إذا كانت $x < -1$ فإنه بوضع $x = -\alpha$ نجد أن $\alpha > 1$ ويكون

$$S_n = \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{(-\alpha)^n - 1}{(-\alpha) - 1} \Rightarrow \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} \infty, & n \text{ is odd} \\ -\infty, & n \text{ is even} \end{cases}$$

وبالتالي فإن المتسلسلة في هذه الحالة تكون تذبذبية تذبذبا لانهائي وبالتالي فهي تباعديه.

الشرط الضروري لتقارب متسلسلة

نظرية: الشرط الضروري لكي تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربيه هو أن تكون $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

نتيجة: المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون تباعديه إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$.

ملحوظة (3): هذا الشرط ضروري ولكن غير كافي بمعنى أن المتسلسلة التقاربيه يجب أن تحقق هذا

الشرط ولكن تحقق هذا الشرط لا يؤكد أن المتسلسلة تكون تقاربيه وفي هذه الحالة نكون بحاجة إلي

وسيله إضافية لتأكيد التقارب من عدمه.

مثال (3): ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{3n^2 + n + 1} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + 1}{4n + 1} \quad (1)$$

الحل

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{4n + 1} = \frac{3}{4} \neq 0 \quad (1)$$

وبالتالي فإن المتسلسلة المعطاة تكون تباعديه.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{3n^2 + n + 1} = \frac{1}{3} \neq 0 \quad (2)$$

وبالتالي فإن المتسلسلة المعطاة تكون تباعديه.

اختبارات التقارب والتباعد للمتسلسلات الغير محدودة

مما سبق نلاحظ أن تقارب أي المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ يعتمد علي تقارب مجموعها الجزئي، أي أن النهاية $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ تكون موجودة وتساوي عددًا محددًا. والهدف الآن هو دراسة بعض الطرق التي يمكننا من خلالها التعرف علي خواص متسلسلة ما من حيث كونها تقاربيه أم تباعديه وذلك دون التطرق إلي عملية إيجاد مجموع هذه المتسلسلة. وتعرف هذه الطرق باسم اختبارات التقارب والتباعد للمتسلسلات الغير محدودة.

أولاً: اختبارات التقارب والتباعد للمتسلسلات ذات الحدود الموجبة

الاختبار الأول: اختبار المقارنة (الصورة الأولي)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلتين ذات حدود موجبه فإنه إذا كانت:

$$(1) \quad a_n \leq b_n \text{ لجميع قيم } n \text{ وكانت المتسلسلة } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ تقاربيه فإن المتسلسلة } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ تكون تقاربيه.}$$

$$(2) \quad a_n \geq b_n \text{ لجميع قيم } n \text{ وكانت المتسلسلة } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ تباعديه فإن المتسلسلة } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ تكون تباعديه.}$$

نظريه: المتسلسلة التي علي الصورة: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ تكون:

$$(1) \quad \text{تقاربيه إذا كانت } k > 1.$$

$$(2) \quad \text{تباعديه إذا كانت } k \leq 1.$$

البرهان: يمكن التحقق بسهولة من صحة هذه النظرية وذلك باستخدام اختبار المقارنة من خلال دراسة الحالات الآتية:

$$\text{الحالة الأولي عندما } k=1: \text{ أي دراسة تقارب وتباعد المتسلسلة } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$\because a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

وبالتالي يكون شرط التقارب متحقق علي الرغم من أن هذه المتسلسلة تباعديه كما يتضح من الخطوات

الآتية :

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \quad (1)$$

وبمقارنه كل حد من حدود هذه المتسلسلة بالحد المناظر له في المتسلسلة

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \quad (2)$$

لاحظ أن كل حد في حدود المتسلسلة (١) اكبر من أو يساوي الحد المناظر له في المتسلسلة (٢) أي أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty$$

وحيث أن المتسلسلة (٢) تباعديه فإن المتسلسلة (١) تكون تباعديه.

الحالة الثانية عندما $k > 1$: أي دراسة تقارب وتباعد المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots, k > 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{5^k} + \frac{1}{6^k} + \frac{1}{7^k} + \frac{1}{8^k} + \dots$$

$$< 1 + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right) + \left(\frac{1}{4^k} + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4^k}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{8^k} + \frac{1}{8^k} + \frac{1}{8^k} + \frac{1}{8^k} + \frac{1}{8^k} + \frac{1}{8^k} + \frac{1}{8^k} + \frac{1}{8^k}\right) + \dots$$

$$= 1 + \left(\frac{2}{2^k}\right) + \left(\frac{4}{4^k}\right) + \left(\frac{8}{8^k}\right) + \dots = 1 + \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) + \left(\frac{1}{4^{k-1}}\right) + \left(\frac{1}{8^{k-1}}\right) + \dots$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^3 + \dots = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^{r-1}$$

والمتسلسلة الأخيرة متسلسلة هندسية أساسها هو $\frac{1}{2^{k-1}}$ ، $k > 1$ وهو اقل من الواحد الصحيح وبالتالي

فهي متسلسلة تقاربيه ومن ثم فإن المتسلسلة العطاء تكون تقاربيه.

الحالة الثالثة عندما $k < 1$: أي دراسة تقارب وتباعد المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots, k < 1$$

في هذه الحالة نلاحظ أن $n^k \leq n \Rightarrow \frac{1}{n^k} \geq \frac{1}{n}$ وحيث المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ تباعديه فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}, k < 1$ تكون تباعديه باستخدام اختبار المقارنة.

ملحوظة (٤): المتسلسلة التي علي الصورة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ تسمى بالمتسلسلة التوافقية.

مثال (٤): ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (١) \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n} \quad (٢) \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n + n} \quad (٣)$$

الحل

(١) نلاحظ أن $n \geq \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ وحيث أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ تباعديه فإن المتسلسلة المعطاة تكون تباعديه.

(٢) نلاحظ أن $n \geq \log n \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\log n}$ وحيث أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ تباعديه فإن المتسلسلة المعطاة تكون تباعديه.

(٣) نلاحظ أن $4^n + n \geq 4^n \Rightarrow \frac{1}{4^n + n} \leq \frac{1}{4^n} \Rightarrow \frac{3^n}{4^n + n} \leq \frac{3^n}{4^n} = \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ وحيث أن المتسلسلة

هي متسلسلة هندسية وأساسها اقل من الواحد الصحيح فهي تكون تقاربيه وبالتالي فإن المتسلسلة المعطاة تكون تقاربيه.

الاختبار الثاني: اختبار المقارنة (الصورة الثانية)

بفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلتين ذات حدود موجبه فإنه إذا كانت: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$ حيث

أن l عدد محدود فإن المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ يتقاربان معا أو يتباعدان معا.

مثال (٥): ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-n}{n^3+1} \quad (١) \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^3+n+1} \quad (٢)$$

الحل

(١) نقارن المتسلسلة المعطاة بالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ وحيث أن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - n^3}{n^3 + 1} = -1 \neq 0$$

وبالتالي فإن المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ يتقربان معاً أو يتباعدان معاً. وحيث أن المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(٢) باستخدام اختبار المقارنة (الصورة الثانية)

$$a_n = \frac{n+1}{2n^2 + n + 3}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n^2 + n + 3} \right) \left(\frac{n}{1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{2n^2 + n + 1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

وحيث أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ تباعده فإن المتسلسلة المعطاة تكون تباعده.

ملحوظة: يستخدم اختبار المقارنة (الصورة الثانية) إذا كان الحد العام للمتسلسلة المعطاة عبارة عن

كسر فيه درجة البسط لا تساوي درجة المقام ويكون اختيار المتسلسلة b_n بحيث تكون بالصورة

$$b_n = \frac{1}{n^k} \text{ حيث أن } k \text{ تساوي الفرق بين درجتي المقام و البسط.}$$

الاختبار الثالث: اختبار الجذر (اختبار كوشي)

بفرض أن $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ متسلسلة ذات حدود موجبه فإنه إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ فإن:

(١) المتسلسلة تكون تقاربه إذا كانت $l < 1$.

(٢) المتسلسلة تكون تباعده إذا كانت $l > 1$.

(٣) يقشل الاختبار إذا كانت $l = 1$.

مثال (٦): ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{1-n} \quad (2) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n} \quad (1)$$

الحل

(1) حيث أن $a_n = \frac{1}{(\log n)^n}$ فإن: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\log n)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} = 0 < 1$ وبالتالي فإن هذه المتسلسلة تكون تقاربيه.

(2) باستخدام اختبار كوشي (الجذر)

$$\because a_n = \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{1-n} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{\frac{1-n}{n}} = \left(\frac{1}{(3n-1)/n}\right)^{\frac{1-n}{n}} = \left(\frac{1}{3-(1/n)}\right)^{\frac{1-n}{n}}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3-(1/n)}\right)^{\frac{1-n}{n}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3 > 1$$

وبالتالي فإن المتسلسلة المعطاة تكون تباعديه.

الاختبار الرابع: اختبار النسبة (الصورة الأولى)

بفرض أن $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ متسلسلة ذات حدود موجبه فإنه إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ فإن:

(1) المتسلسلة تكون تقاربيه إذا كانت $l < 1$.(2) المتسلسلة تكون تباعديه إذا كانت $l > 1$.(3) يفشل الاختبار إذا كانت $l = 1$.

مثال (7): ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} \quad (1)$$

الحل

(1) باستخدام اختبار النسبة حيث أن: $a_n = \frac{n^3}{3^n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3} = \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^3 = \frac{1}{3} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)^3 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 = \frac{1}{3} < 1$$

وبالتالي فإن التسلسلة المعطاة تكون تقاربية.

$$(2) \text{ باستخدام اختبار النسبة حيث أن } a_n = \frac{2^n}{n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n} = \frac{2 \cdot 2^n}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+1/n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1+1/n} \right) = 2 > 1$$

وبالتالي فإن التسلسلة المعطاة تكون تباعديه.

(3) باستخدام اختبار النسبة حيث أن:

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)n!}{(n+1)(n+1)^n} = \frac{n!}{(n+1)^n}$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^n = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

وبالتالي فإن التسلسلة المعطاة تكون تقاربية.

$$(4) \text{ باستخدام اختبار النسبة حيث أن: } a_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{1}{(n+1)n!} \cdot n! = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1+1/n} = 0 < 1$$

وبالتالي فإن التسلسلة المعطاة تكون تقاربية.

ثانياً: تقارب وتباعد التسلسلات التذبذبية

التسلسلات التذبذبية: جميع اختبارات التقارب السابقة تتعامل فقط مع التسلسلات ذات الحدود

الموجبة حيث تكون المجاميع الجزئية لهذا النوع من المتسلسلات متزايدة ولكن إذا اعتبرنا المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots$$

والتي لها حدود موجبة وحدود أخرى سالبة فإن المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة لا تكون متزايدة.

تعريف: المتسلسلة التي علي الصورة: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$, $a_n > 0$ حيث

أن a_n أعداد حقيقية (غير سالبة) تسمى بالمتسلسلة التذبذبية (التبادلية أو التعاقبية).

الاختبار الخامس (اختبار ليبنز للمتسلسلات التذبذبية)

نظريه: المتسلسلة التذبذبية $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n > 0$ تكون تقاربية إذا تحققت الشروط الآتية:

(١) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots \geq 0$ (أي أن حدود المتسلسلة تكون تناقصية).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (٢)$$

مثال (٨): اختبار تقارب وتباعد المتسلسلات التذبذبية الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \quad (٢)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad (١)$$

الحل

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad (١)$$

في المتسلسلة واضح المعطاة أن $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$ أي أن حدود المتسلسلة تنازليه.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

وبالتالي فإن المتسلسلة المعطاة تكون تقاربيه.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (٢)$$

في المتسلسلة المعطاة واضح أن $1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \frac{1}{7} > \dots$ أي أن حدود المتسلسلة تنازليه، وحيث أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$$

فإن المتسلسلة المعطاة تكون تقاربيه.

الاختبار السادس: الصورة العامة لاختبار النسبة (اختبار النسبة المطلق)

$$\text{فإن: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \text{ حدودها غير صفرية وكانت } \sum_{r=1}^{\infty} a_r$$

(١) المتسلسلة تكون مطلقة التقارب (تقاربيه) إذا كانت $l < 1$.

(٢) المتسلسلة تكون تباعديه إذا كان $l > 1$.

(٣) يفشل الاختبار إذا كان $l = 1$

مثال (٩): ادرس تقارب وتباعد التسلسلات الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^n}{n} \quad (٢) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n!}} \quad (١)$$

الحل

(١) باستخدام اختبار النسبة (الصورة العامة) حيث أن:

$$\because a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n!}} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{\sqrt{(n+1)!}}$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+2}}{\sqrt{(n+1)!}} \cdot \frac{\sqrt{n!}}{(-1)^{n+1}} = \frac{-(-1)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)n!}} \cdot \frac{\sqrt{n!}}{(-1)^{n+1}} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}} = -\sqrt{\frac{1}{n+1}} = -\sqrt{\frac{1/n}{1+1/n}}$$

$$\therefore \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \sqrt{\frac{1/n}{1+1/n}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{1/n}{1+1/n}} \right) = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1+1/n}} = \sqrt{0} = 0$$

وبالتالي فإن المتسلسلة المعطاة تكون مطلقة التقارب (تقاربيه).

(٢) باستخدام اختبار النسبة (الصورة العامة):

$$\because a_n = \frac{(-1)^{n+1} e^n}{n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2} e^{n+1}}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} e^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(-1)^{n+1} e^n} \right| = e \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = e > 1$$

وبالتالي فإن المتسلسلة تكون تباعديه.

تمارين (٦)

(١) ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{5n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \spadesuit$$

(٢) باستخدام اختبار المقارنة ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n}{n^4+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^2+2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+n+1}{n^5+n+1} \quad \spadesuit$$

(٣) باستخدام اختبار الجذر ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{4n+1} \right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1} \quad \spadesuit$$

(٤) باستخدام اختبار النسبة ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad \spadesuit$$

(٥) باستخدام الصورة العامة لاختبار النسبة ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية :

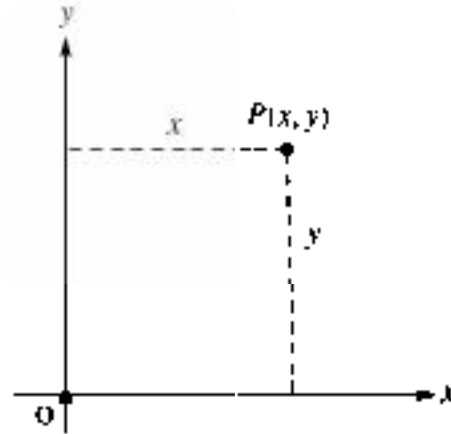
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^n}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^n}{n!} \quad \spadesuit$$

الباب السابع

نُظْم الإحداثيات في المستوى

أولاً: نظام الإحداثيات الكارتيزيه

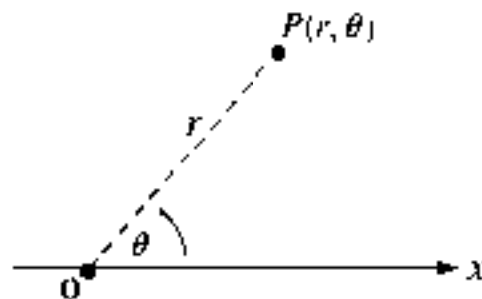
من نقطة ثابتة O في المستوى تُسمى نقطة الأصل نرسم مستقيمين متعامدين Ox, Oy يُسميان محاور الإحداثيات. فإذا كانت P نقطة ما في المستوى فإن P تتحدد تحديداً تاماً بواسطة كميتين عدديتين (x, y) تُسميان إحداثيات النقطة في المستوى، حيث x تمثل البعد العمودي للنقطة P عن محور Oy ، وتمثل y البعد العمودي للنقطة P عن محور Ox ، كما بالشكل المقابل:



ثانياً: نظام الإحداثيات القطبية

نظام الإحداثيات القطبية هو نظام إحداثي ثنائي الأبعاد يحدد إحداثيات أي نقطة P في المستوى تحديداً تاماً من خلال المسافة r بين النقطة P ونقطة ثابتة في المستوى O والزاوية θ بين r واتجاه ثابت في المستوى.

لتكن O نقطة ثابتة في المستوى. من هذه النقطة الثابتة نرسم مستقيماً ثابتاً أفقياً ينطبق على المحور Ox ، كما بالشكل المقابل:



الحل

$$\therefore r = \frac{6}{2 - \sin \theta} \Rightarrow r(2 - \sin \theta) = 6 \Rightarrow 2r - r \sin \theta = 6$$

وبالتعويض عن $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y = r \sin \theta$ نجد أن:

$$2r - r \sin \theta = 6 \Rightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} - y = 6 \Rightarrow 4(x^2 + y^2) = (6 + y)^2$$

$$\therefore 4x^2 + 4y^2 = y^2 + 12y + 36 \Rightarrow 4x^2 + 3y^2 - 12y - 36 = 0$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة:

$$4x^2 + 3(y^2 - 4y) - 36 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 3[(y - 2)^2 - 4] - 36$$

ومنها نحصل على: $4x^2 + 3(y - 2)^2 = 48$ وبالتالي نجد أن الصورة الكارتيزية للمعادلة المعطاة تصبح

$$\frac{x^2}{12} + \frac{(y - 2)^2}{16} = 1 \text{ بالصورة:}$$

وهي معادلة قطع ناقص سوف يدرس بالتفصيل لاحقاً.

تمرين: حول المعادلات الآتية إلى الصورة الكارتيزية:

$$r = \frac{6}{2 + \sin \theta} \quad (٣)$$

$$r = \frac{6}{2 + \cos \theta} \quad (٢)$$

$$r = \frac{6}{2 - \cos \theta} \quad (١)$$

تمارين (٧)

١) حول المعادلات الآتية إلى الصورة القطبية:

$$(i) y^2 = -4(x-1), \quad (ii) x^2 + y^2 = a^2, \quad (iii) \frac{x^2}{12} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

٢) حول المعادلات الآتية إلى الصورة الكارتيزية:

$$(i) r^2 = 9, \quad (ii) r = a \cos \theta, \quad (iii) r = \frac{6}{2 - \sin \theta}, \quad (iv) \frac{5}{r} = 1 + \cos \theta$$

الباب الثامن

التحويلات الهندسية واختزال معادلة الدرجة الثانية

المعادلة العامة من الدرجة الثانية في متغيرين

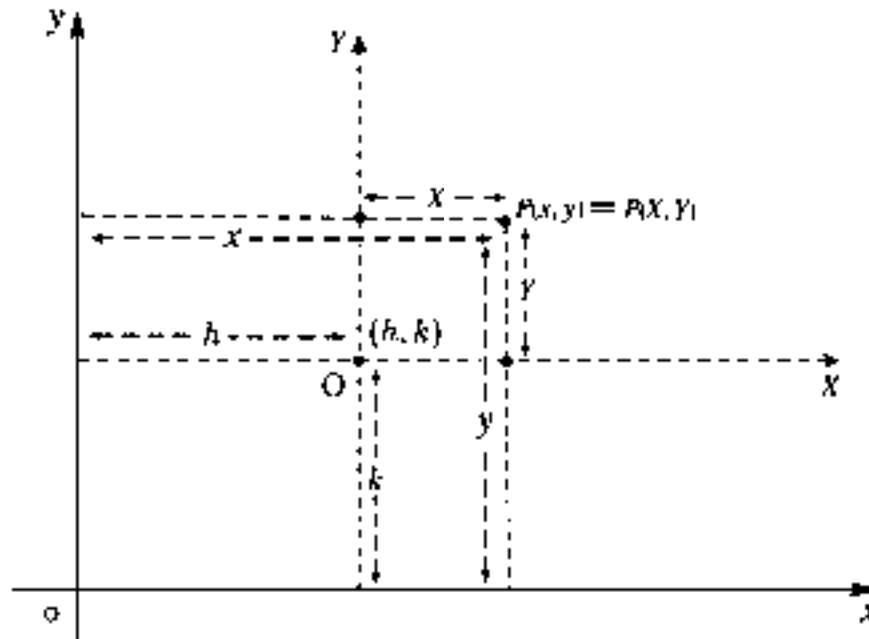
المعادلة التي علي الصورة: $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ تسمى بمعادلة الدرجة الثانية في متغيرين x, y . وهذه المعادلة تمثل معادلة منحنى ناتج من حركة نقطة في المستوى.

تغيير محاور الإحداثيات في المستوى

في بعض المواقف الهندسية يكون من المناسب السعي إلي تغيير وضع محاور الإحداثيات. ويكون الغرض من ذلك هو وضع معادلات المنحنيات الممثلة بمعادلة الدرجة الثانية في أبسط صورة لها حتى تتمكن من دراسة خصائصها ومعرفة نوعها بسهولة مقارنة بصورتها الأصلية. وفيما يلي سندرس طريقتين لتغيير المحاور.

أولاً : نقل نقطة الأصل (نقل محاور الإحداثيات موازية لنفسها)

إذا كانت (x, y) هي إحداثيات أي نقطة P في المستوى، ونقلت نقطة الأصل $O(0,0)$ إلى نقطة أخرى ولتكن $O(h, k)$ مع الإبقاء على اتجاه المحاور موازياً للمحاور الأصلية، وكانت إحداثيات النقطة P بالنسبة للمحاور الجديدة هي (X, Y) ، فإنه من الشكل المقابل:



يتضح أن معادلات التحويل بين الإحداثيات الجديدة والإحداثيات الأصلية يمكن كتابتها بالصورة:

$$x = X + h, y = Y + k.$$

حذف حدود الدرجة الأولى من معادلة الدرجة الثانية في متغيرين

نظرية (١): إحداثيات النقطة (x_1, y_1) التي يجب نقل محاور الإحداثيات إليها لحذف حدود الدرجة

الأولى من معادلة الدرجة الثانية $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ يمكن الحصول عليها من

$$\text{حل المعادلتين: } ax_1 + hy_1 + g = 0, hx_1 + by_1 + f = 0.$$

البرهان: عندما نُنقل نقطة الأصل $(0,0)$ إلى النقطة (x_1, y_1) فإن معادلات بين الإحداثيات الأصلية

x, y والإحداثيات الجديدة X, Y تكون بالصورة:

$$x = X + x_1, \quad y = Y + y_1 \quad (1)$$

وبالتعويض من معادلات التحويل (١) في المعادلة العطاء نجد أن:

$$f(X, Y) = a(X + x_1)^2 + 2h(X + x_1)(Y + y_1) + b(Y + y_1)^2 + 2g(X + x_1) + 2f(Y + y_1) + c = 0$$

وبالفك نجد أن هذه المعادلة تصبح بالصورة:

$$f(X, Y) = aX^2 + 2hXY + bY^2 + 2(ax_1 + hy_1 + g)X + 2(hx_1 + by_1 + f)Y + C = 0 \quad (2)$$

حيث أن C يعطي من العلاقة:

$$C = ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

ومن هذه المعادلة نجد أن:

$$(1) \text{ معامل } X \text{ هو } 2(ax_1 + hy_1 + g)$$

$$(2) \text{ معامل } Y \text{ هو } 2(hx_1 + by_1 + f)$$

ولكي تصبح هذه المعادلة خالية من حدود الدرجة الأولى يجب إن يكون معاملات حدود الدرجة

الأولى مساوية للصفر. وبوضع معامل $X = 0$ ، معامل $Y = 0$ نجد أن:

$$ax_1 + hy_1 + g = 0, \quad hx_1 + by_1 + f = 0$$

وهما معادلتان في مجهولين x_1, y_1 وبحلها جبرياً معاً نحصل علي إحداثيات النقطة التي يجب نقل

مثال (٣): باستخدام نقل محاور الإحداثيات ضع المعادلة $y = 2x^2 + 4x + 3$ في أبسط صورة ممكنة:

الحل

نضع المعادلة المعطاة على الصورة الآتية:

$$y = 2x^2 + 4x + 3 \Rightarrow y - 3 = 2x^2 + 4x \Rightarrow y - 3 = 2(x+1)^2 - 2$$

$$\Rightarrow y - 1 = 2(x+1)^2 \Rightarrow (x+1)^2 = \frac{1}{2}(y-1).$$

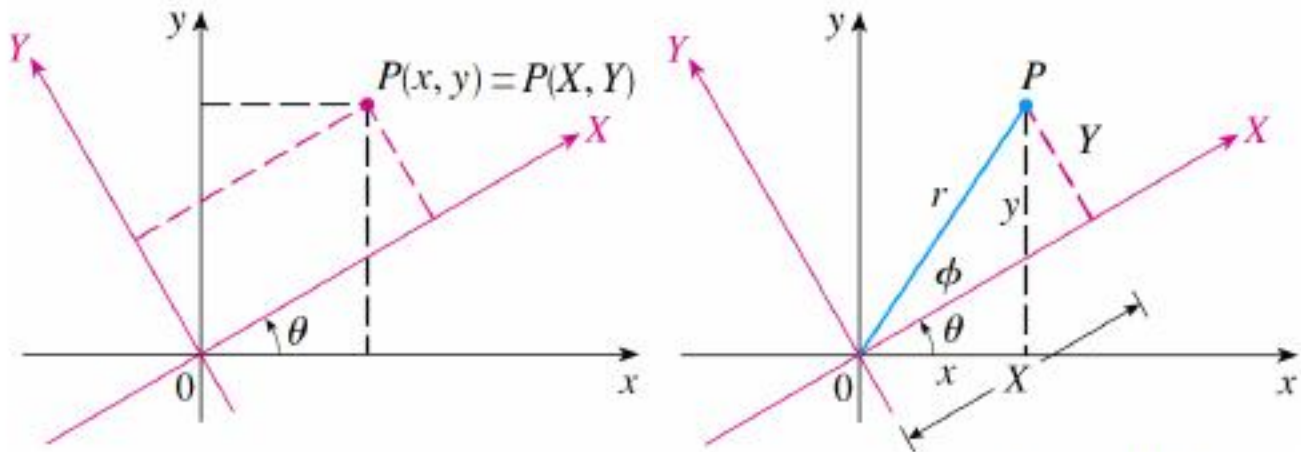
وينقل محاور الإحداثيات إلى النقطة $(-1,1)$ فنجد أن: $x = X - 1, Y = y + 1$ أن:

$$X = x + 1, Y = y - 1$$

وبالتالي نجد أن المعادلة المعطاة تصبح بالصورة: $X^2 = \frac{1}{2}Y$.

ثانياً: دوران محاور الإحداثيات

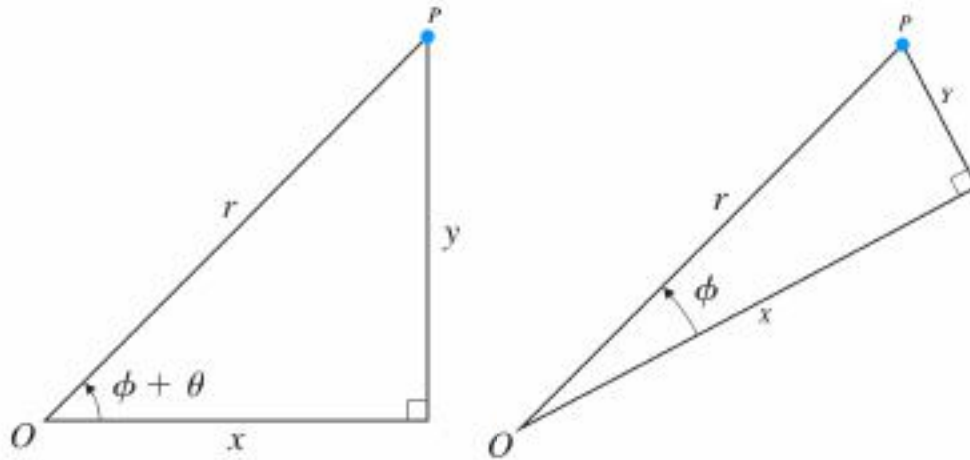
نعتبر المحاور ox, oy أدبرت بزاوية θ في اتجاه موجب مع الإبقاء على موضع نقطة الأصل o ، نفرض أن المحاور الجديدة هي oX, oY على الترتيب، وإذا كانت (x, y) ، (X, Y) هي إحداثيات النقطة P بالنسبة للمحاور الأصلية ox, oy ، وبالنسبة للمحاور الجديدة oX, oY على الترتيب، كما بالشكل المقابل:



ومن الشكل المقابل نجد أن:

$$x = r \cos(\theta + \phi) = r(\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) = (r \cos \phi) \cos \theta - (r \sin \phi) \sin \theta$$

$$= X \cos \theta - Y \sin \theta$$



وبالمثل نجد أن:

$$y = r \sin(\theta + \phi) = r(\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi) = (r \cos \phi) \sin \theta + (r \sin \phi) \cos \theta = X \sin \theta + Y \cos \theta$$

أي أن معادلات التحويل التي علي الصورة:

$$\left. \begin{aligned} x &= X \cos \theta - Y \sin \theta \\ y &= X \sin \theta + Y \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

تعطي الإحداثيات الأصلية (x, y) بدلالة الإحداثيات الجديدة (X, Y) . وبحل معادلات التحويل (1)

بالنسبة إلي X, Y نحصل علي معادلات التحويل الآتية:

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ Y &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

وهذه المعادلات هي التي تعين الإحداثيات الجديدة X, Y بدلالة الإحداثيات الأصلية x, y وذلك في

حالة دوران محاور الإحداثيات بزاوية θ حول نقطه الأصل.

ملحوظة (3): معادلات التحويل السابقة بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة في حالة

دوران محاور الإحداثيات بزاوية θ حول نقطة الأصل يمكن تذكرها من خلال الجدول التالي:

	X	Y
x	$\cos \theta$	$-\sin \theta$
y	$\sin \theta$	$\cos \theta$

المعادلة المعطاة خالية من حدود الدرجة الأولى ولكي تصبح في أبسط صورة ممكنة لا بد من تحويلها إلى معادلة أخرى خالية من الحد المشترك علي xy . ولكي تتحول المعادلة المعطاة إلى معادلة أخرى خالية من الحد xy فإنه يجب تدوير محاور الإحداثيات زاوية مناسبة θ تتعين من العلاقة (نظريه ٢):

$$\tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}$$

ومن المعادلة المعطاة نجد أن $2h=12, a=8, b=17$ وبذلك تكون:

$$\tan 2\theta = \frac{12}{8-17} = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = -\frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$2\tan^2\theta - 3\tan\theta - 2 = 0 \Rightarrow (2\tan\theta + 1)(\tan\theta - 2) = 0$$

وبالتالي نجد أن: $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ ، $\tan\theta = 2$ والتي كلاً منها تحقق المعادلة (١). وباختيار $\tan\theta = 2$

$$\text{(الزاوية الحادة) نجد أن: } \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

وإذا دارت محاور الإحداثيات زاوية θ فإن معادلات التحويل بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة تكون بالصورة:

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta, \quad y = X \sin \theta + Y \cos \theta.$$

وبالتعويض عن قيمه كل من $\sin\theta, \cos\theta$ نجد أن معادلات التحويل تصبح بالصورة:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(X - 2Y), \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y).$$

وبالتعويض من معادلات التحويل السابقة في المعادلة الأصلية نجد أن:

$$\frac{8}{5}(X - 2Y)^2 + \frac{12}{5}(X - 2Y)(2X + Y) + \frac{17}{5}(2X + Y)^2 = 20 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{8}{5} + \frac{24}{5} + \frac{68}{5} \right] X^2 + \left[-\frac{32}{5} + \frac{12}{5} - \frac{48}{5} + \frac{68}{5} \right] XY + \left[\frac{32}{5} - \frac{24}{5} + \frac{17}{5} \right] Y^2 = 20 \Rightarrow$$

وبالاختصار نجد أن:

$$\frac{100}{5} X^2 + \frac{25}{5} Y^2 = 20 \Rightarrow 20X^2 + 5Y^2 = 20 \Rightarrow \frac{X^2}{1} + \frac{Y^2}{4} = 1$$

وهي معادلة قطع ناقص في الصورة القياسية بالنسبة لمحاور الإحداثيات الجديدة.

$$X = X' \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - Y' \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{X' - Y'}{\sqrt{2}}, \quad Y = X' \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + Y' \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{X' + Y'}{\sqrt{2}}$$

وبالتعويض في المعادلة (1) نجد إنها تصبح بالصورة:

$$5\left(\frac{X' - Y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 6\left(\frac{X' - Y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{X' + Y'}{\sqrt{2}}\right) + 5\left(\frac{X' + Y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2X'^2 + 8Y'^2 = 8$$

وهذه المعادلة يمكن وضعها في الصورة: $\frac{X'^2}{4} + \frac{Y'^2}{1} = 1$ وهي تمثل معادله قطع ناقص في الصورة

القياسية بالنسبة لنظام الإحداثيات الجديدة $X'Y'$ سناقش بالتفصيل لاحقاً.

تمارين (٨)

(١) أوجد الإحداثيات الجديدة للنقطة $P(-3,4)$ عندما تُنقل نقطة الأصل إلى النقطة $(2,-5)$.

(٢) باستخدام نقل محاور الإحداثيات ضع المعادلات الآتية في أبسط صورة ممكنة:

$$.x^2 - 4x + 8y + 12 = 0 \quad \spadesuit$$

$$.y^2 + 6y + 2x + 5 = 0 \quad \spadesuit$$

$$.x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0 \quad \spadesuit$$

$$.x^2 + 4y^2 - 2x + 8y + 1 = 0 \quad \spadesuit$$

(٣) باستخدام دوران محاور الإحداثيات ضع كلاً من المعادلات الآتية في أبسط صورة ممكنة:

$$8x^2 - 12xy + 17y^2 = 20 \quad \spadesuit$$

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 - 20 = 0 \quad \spadesuit$$

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 - 20 = 0 \quad \spadesuit$$

$$.5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8 \quad \spadesuit$$

$$.5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8 \quad \spadesuit$$

(٤) إذا نقلت نقطة الأصل إلى النقطة $(-1,2)$ ، ثم دارت محاور الإحداثيات زاوية $\theta = \frac{\pi}{4}$ فأوجد

$$.5x^2 - 6xy + 5y^2 + 22x - 26y + 29 = 0$$
 الصورة الجديد للمعادلة:

(٥) منحنى إذا دارت محاور الإحداثيات بزاوية $\theta = \frac{\pi}{3}$ تصبح معادلته بالنسبة لمحاور الإحداثيات

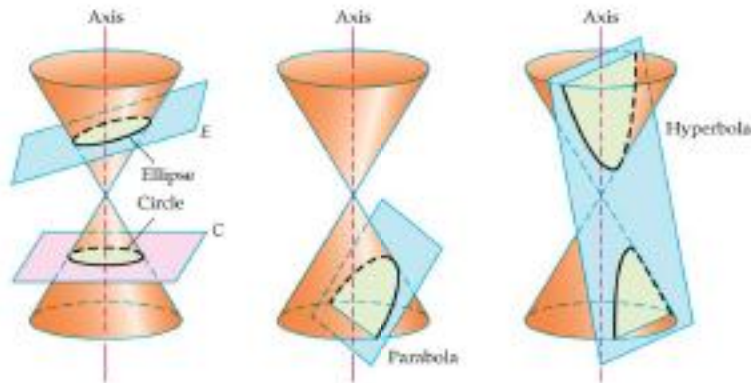
$$. \frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{4} = 1$$
 الجديدة علي الصورة: أوجد معادلته بالنسبة للمحاور الإحداثيات الأصلية.

(٦) بدوران محاور الإحداثيات زاوية مناسبة احذف الحد xy من المعادلة $xy = 2$.

الباب التاسع

القطاعات المخروطية

تنشأ القطاعات المخروطية من تقاطع مستوي مع مخروط دائري قائم بحيث لا يمر المستوي برأس المخروط. ومن منطلق هذه النشأة الهندسية هناك أربعة حالات لمنحني التقاطع (المنحني الناتج من تقاطع المستوي مع المخروط) كما بالشكل المقابل:



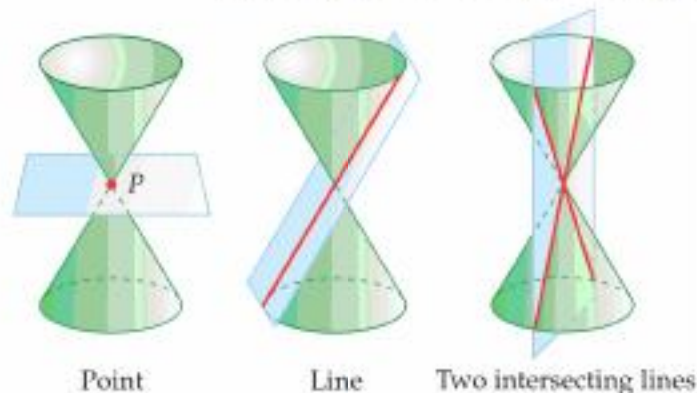
❖ منحني التقاطع دائرة: عندما يكون المستوي القاطع عمودي علي محور المخروط.

❖ منحني التقاطع قطع مكافئ: عندما يكون المستوي القاطع موازيا لأحد روااسم المخروط.

❖ منحني التقاطع قطع ناقص: عندما يكون المستوي القاطع مائل علي محور المخروط ولا يوازي أي راسم من روااسمه .

❖ منحني التقاطع قطع زائد: عندما يكون المستوي القاطع موازيا لراسمين من روااسم المخروط.

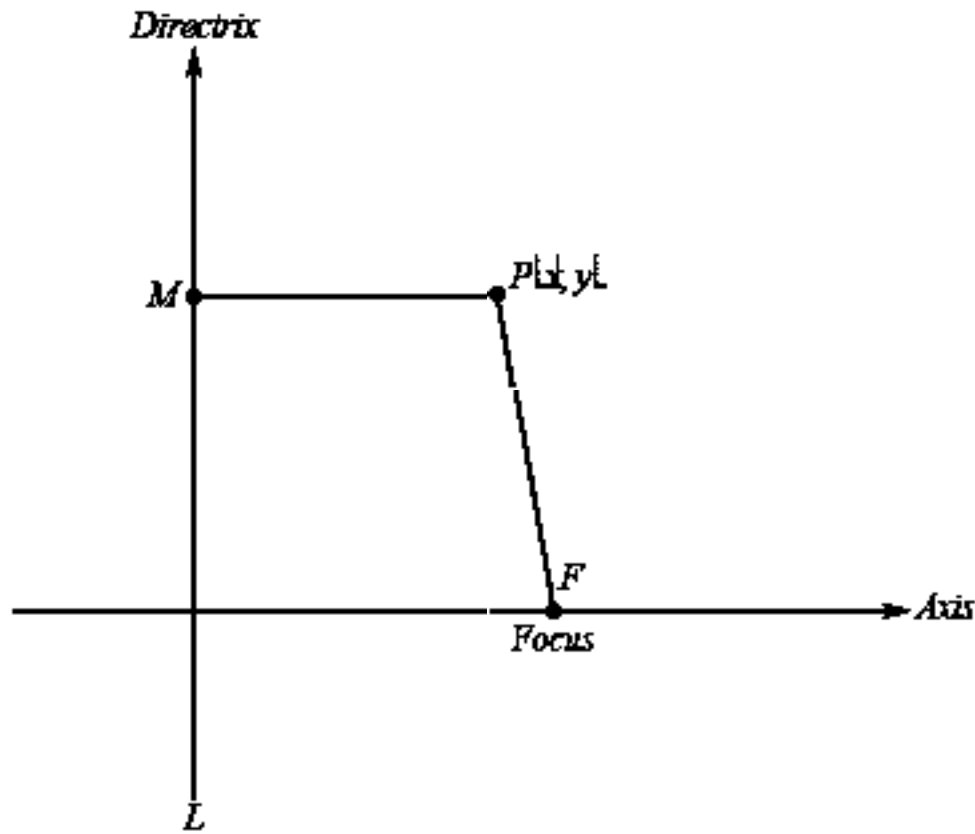
وعندما يقطع المستوي المخروط مارا براسة تنتج القطاعات المخروطية "المشوهة" وهي النقطة والخط المستقيم والخطين المستقيمين المتقاطعين، كما بالشكل المقابل:



التعريف الهندسي للقطاعات المخروطية

من جهة أخرى تعرف القطاعات المخروطية علي أنها المحل الهندسي لنقطة $P(x,y)$ تتحرك في المستوي بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة F إلي بعدها عن خط مستقيم ثابت L (F, L) في نفس المستوي مرتباً بالعلاقة:

$$\frac{FP}{PM} = e \quad (1)$$



حيث أن e مقدار حقيقي. يسمى e بالاختلاف المركزي ، L بدليل القطع ، F بالبيؤرة . ويوجه عام فإن الخط المستقيم المار بالبيؤرة عمودياً علي الدليل يسمى بمحور القطع . مع ملاحظه أنه في حالة القطاعات الناقص والذائد يكون لكلا منهما دليلين ويؤثرين.

وبصفة عامه يقال أن القطع المخروطي أفقي إذا كلٌّ محوره منطبقاً أو موازياً لمحور ox وكذلك يقال أنه رأسي إذا كان محوره منطبقاً أو موازياً لمحور oy . وعلي هذا النحو يقال أن القطع المخروطي مائل إذا كان محوره يميل علي محور ox بزوايه ما ولتكن θ .

ويختلف شكل القطع المخروطي الناتج من حركة النقطة $P(x,y)$ في ظل العلاقة (١) تبعاً لقيمه الاختلاف المركزي e كما يلي:

❖ عندما تكون $e = 1$ فإن المنحني الناتج يكون قطع مكافئ.

❖ عندما تكون $e < 1$ فإن المنحني الناتج يكون قطع ناقص.

❖ عندما تكون $e > 1$ فإن المنحني الناتج يكون قطع زائد.

❖ عندما تكون $e = 0$ فإن المنحني الناتج يكون دائرة.

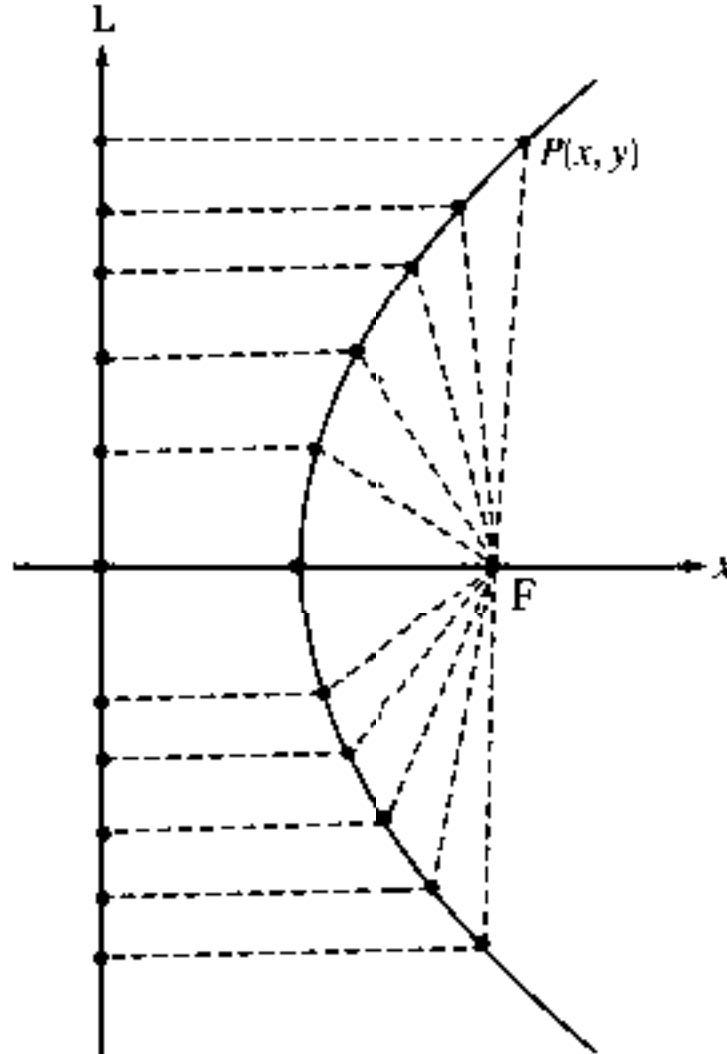
❖ عندما تكون $e \rightarrow \infty$ فإن المنحني الناتج يكون خطين مستقيمين متقاطعين.

ويمكن الحصول علي الدائرة كحالة خاصة من للقطع الناقص كما يمكن الحصول علي الخطيين المستقيمين المتقاطعين كحالة خاصة من القطع الزائد.

وفيما يلي دراسة تفصلية للقطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد.

أولاً: القطع المكافئ

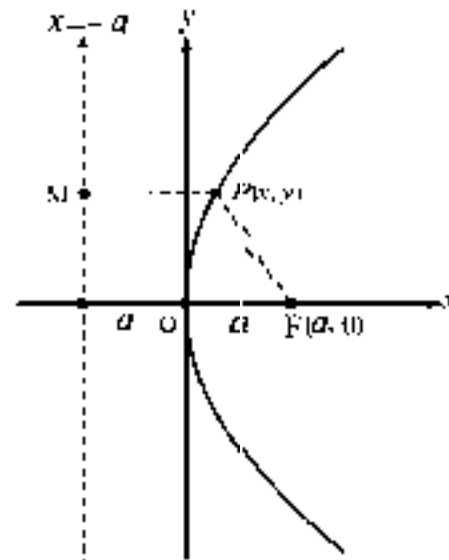
تعريف: القطع المكافئ هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة F (تسمى البؤرة) مساوياً لبعدها عن خط مستقيم ثابت L (يسمى الدليل).



يسمى الخط المستقيم المار بالبؤرة عمودياً على الدليل بمحور القطع المكافئ ، وتسمى نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محوره برأس القطع المكافئ (منتصف المسافة بين البؤرة والدليل) ، والقطع المكافئ يكون متماثل حول محوره. عندما تكون رأس القطع المكافئ عند نقطة أصل محاور الإحداثيات ومحوره ينطبق على احدي محوري الإحداثيات فإن معادلة القطع تكون في أبسط صورة لها وتسمى في هذه الحالة "بالصورة القياسية". والمعادلة القياسية للقطع المكافئ لها أربع حالات مختلفة. وفيما يلي سوف نشق المعادلات القياسية الخاصة بالقطع المكافئ لحالاته المختلفة.

المعادلة القياسية للقطع المكافئ

نعتبر قطع مكافئ مفتوح في الاتجاه الموجب لمحور ox ، كما بالشكل المقابل:



وطبقاً للتعريف العام للقطع المكافئ يكون: $\overline{PF} = \overline{PM}$ أي أن: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = x+a$ وبترتيب

الطرفين نحصل علي: $(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$ ومنها نجد أن: $y^2 = (x+a)^2 - (x-a)^2$ ومنها نحصل

علي معادلة القطع في صورتها القياسية وهي:

$$y^2 = 4ax \quad (1)$$

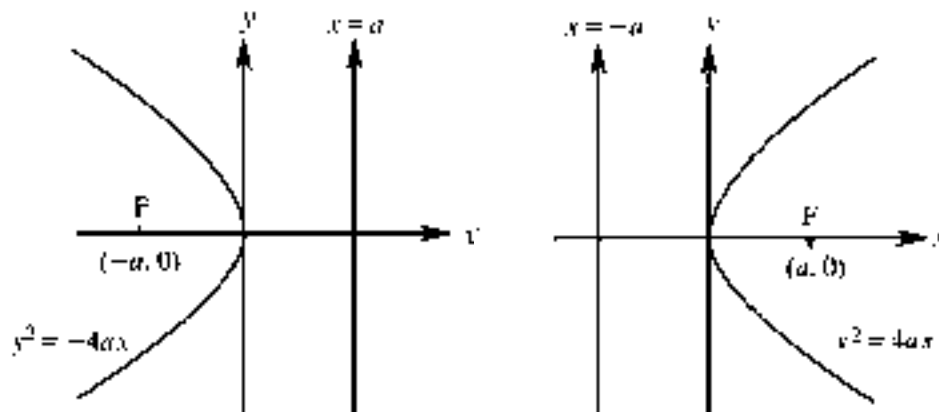
ويمكن أن تأخذ المعادلة القياسية الصور الآتية:

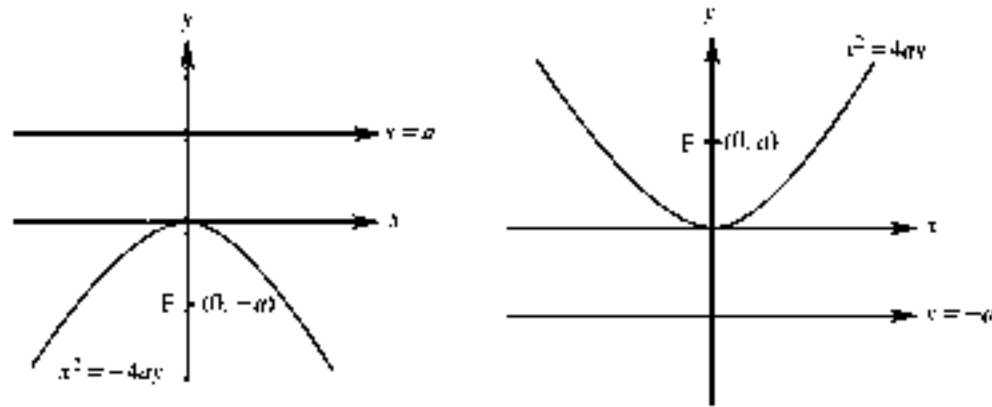
$$y^2 = -4ax \quad (2)$$

$$x^2 = 4ay \quad (3)$$

$$x^2 = -4ay \quad (4)$$

ويمكن استنتاج هذه المعادلات بسهولة من التعريف السابق. وجميعها موضحة بالإشكال أسفلة:

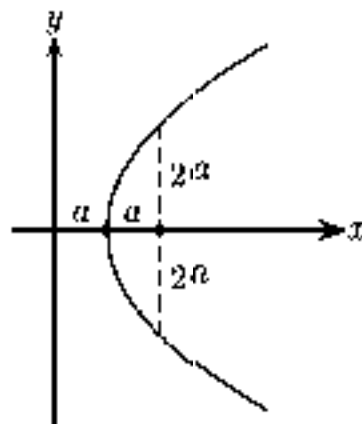




والصفات الهندسية للصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ موضحة بالجدول الآتي:

المعادلة القياسية	$x^2 = 4ay$	$x^2 = -4ay$	$y^2 = -4ax$	$y^2 = 4ax$
إحداثيات البؤرة	$(0, a)$	$(0, -a)$	$(-a, 0)$	$(a, 0)$
معادلة الدليل	$y = a$	$y = -a$	$x = a$	$x = -a$
معادلة المحور	$x = 0$	$x = 0$	$y = 0$	$y = 0$
إحداثيات الرأس	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
معادلة المماس عند الرأس	$y = 0$	$y = 0$	$x = 0$	$x = 0$

الوتر البؤري العمودي لقطع مكافئ: الوتر للقطع المكافئ هو المستقيم الذي يقطع القطع في نقطتين مختلفتين وإذا مر الوتر بالبؤرة يسمى وتر بؤري. وإذا مر الوتر بالبؤرة عمودياً على محور القطع فيسمى في هذه الحالة بالوتر البؤري العمودي. وطول هذا الوتر هو الذي يحدد اتساع القطع المكافئ وطول الوتر البؤري العمودي للقطع المكافئ يساوي $4a$ ، ويمكن إثبات ذلك كما يلي:

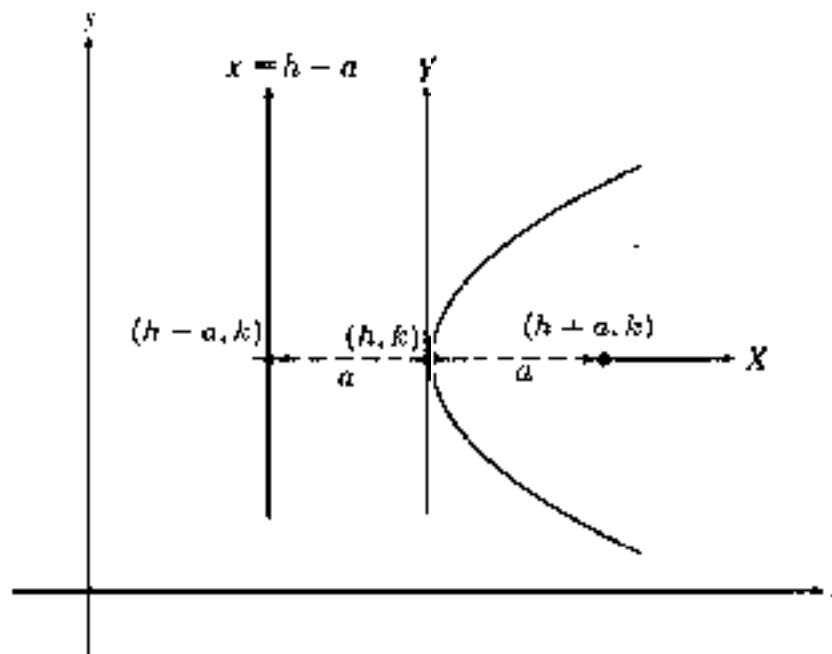


يفرض أن P هي نقطة تقاطع الوتر البؤري العمودي مع الجزء العلوي من القطع وبالتعمييض عن $x=a$ في معادلة القطع المكافئ التي علي الصورة: $y^2=4ax$ نجد أن: $y=2a$ وبالتالي يكون طول الوتر البؤري العمودي يساوي $4a$ أي يساوي ضعف بعد البؤرة عن الدليل.

ملحوظة: في الصور الأربع السابقة يمس القطع المكافئ محورا من محاور الإحداثيات عند نقطة الأصل والتي تسمي في هذه الحالة رأس القطع وبالطبع يمكن أن تكون رأس القطع أي نقطة أخرى غير نقطة الأصل ولكن تتحول معادلة القطع في هذه الحالة إلي صورة أخرى غير الصورة القياسية. ومن معرفتنا السابقة بتغيير محاور الإحداثيات يمكن عن طريق تحويلات مناسبة للإحداثيات التعبير عن معادلة القطع الغير قياسية في صورة قياسية.

المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي محوره يوازي أحد محاور الإحداثيات
أولاً: إذا كان محور القطع يوازي محور OX :

نعتبر قطع مكافئ رأسه النقطة (h,k) ومحوره يوازي محور OX والمماس عند الرأس يوازي محور OY ، كما بالشكل المقابل:



وينقل محاور الإحداثيات موازية لنفسها إلي النقطة (h,k) حيث أن المحاور الجديدة هي OXY ، فتكون معادلة القطع المكافئ منسوبة إلي المحاور الجديدة علي الصورة: $Y^2=4aX$ باستخدام

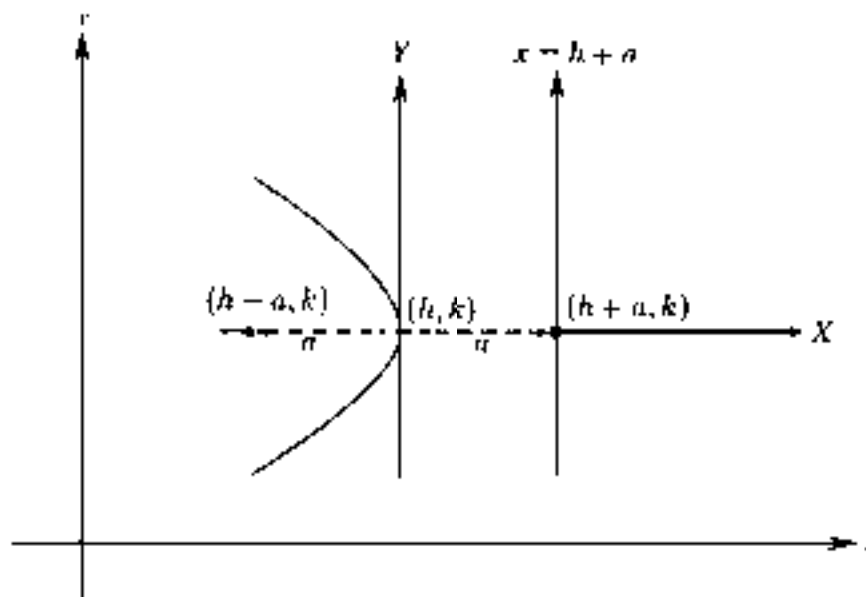
معادلات التحويل بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة والتي علي الصورة: $X = x - h$ ،
 $Y = y - k$ نحصل علي معادلة القطع منسوبة إلي الإحداثيات الأصلية في الصورة:

$$(y - k)^2 = 4a(x - h)$$

وهي المعادلة المطلوبة عندما يكون القطع مفتوح في الاتجاه الموجب لمحور ox . وتكون الصفات الهندسية للقطع في هذه الحالة كما هو موضحاً بالجدول التالي:

بالنسبة للمحاور oxy	بالنسبة للمحاور OXY	
$(y - k)^2 = 4a(x - h)$	$Y^2 = 4aX$	المعادلة القياسية
(h, k)	$(0, 0)$	إحداثيات الرأس
$y - k = 0$	$Y = 0$	معادلة المحور
$x - h = 0$	$X = 0$	معادلة المماس عند الرأس
$(h + a, k)$	$(a, 0)$	إحداثيات البؤرة
$x - h = -a$	$X = -a$	معادلة الدليل

وعندما يكون القطع مفتوح في الاتجاه السالب لمحور ox تكون معادلته منسوبة إلي الإحداثيات الأصلية علي الصورة: $(y - k)^2 = -4a(x - h)$ ، كما بالشكل المقابل:

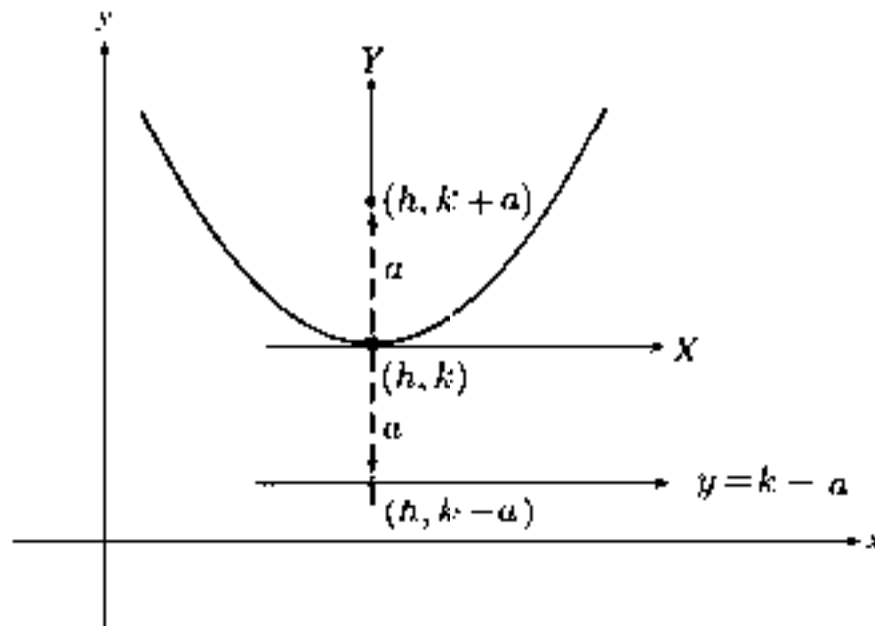


وتكون صفاته الهندسية كما هو موضحاً بالجدول التالي:

بالنسبة للمحاور oxy	بالنسبة للمحاور OXY	
$(y-k)^2 = -4a(x-h)$	$Y^2 = -4aX$	المعادلة القياسية
(h, k)	$(0, 0)$	إحداثيات الرأس
$y - k = 0$	$Y = 0$	معادلة المحور
$x - h = 0$	$X = 0$	معادلة المماس عند الرأس
$(h - a, k)$	$(-a, 0)$	إحداثيات البؤرة
$x - h = a$	$X = a$	معادلة الدليل

ثانياً: إذا كان محور القطع يوازي محور oy

نعتبر قطع مكافئ رأسه النقطة (h, k) ومحوره يوازي محور oy والمماس عند الرأس يوازي محور ox ، كما بالشكل المقابل:



وبنقل المحاور موازية لنفسها إلى النقطة (h, k) نحصل علي معادلة القطع المكافئ منسوبة للإحداثيات الجديدة في الصورة: $Y^2 = 4aX$ وبتطبيق معادلات التحويل بين الإحداثيات والتي علي الصورة:

$$X = x - h, \quad Y = y - k$$

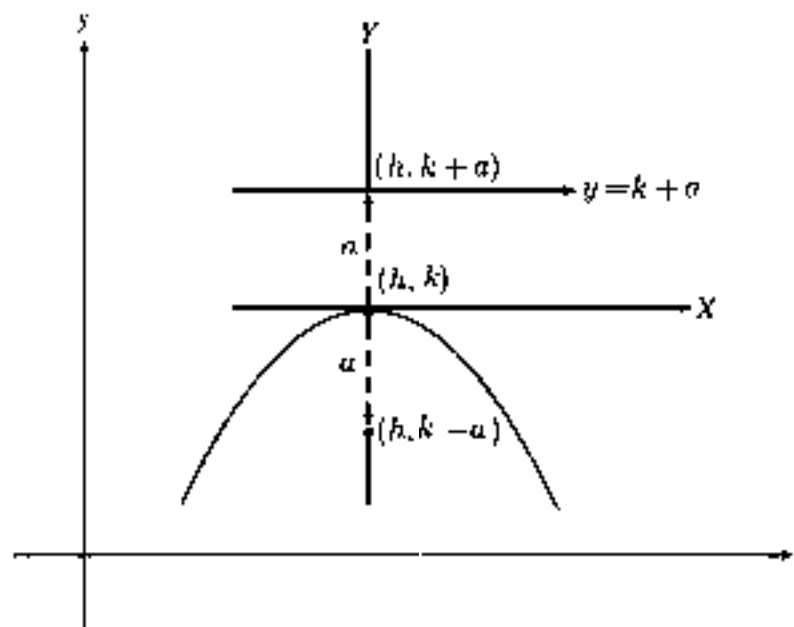
نحصل علي معادلة القطع منسوبة للإحداثيات الأصلية في الصورة:

$$(x-h)^2 = 4a(y-k)$$

وذلك عندما يكون القطع مفتوح في الاتجاه الموجب لمحور oy . والجدول التالي يعطي الصفات الهندسية لهذا القطع:

بالتنسبة للمحاور oxy	بالتنسبة للمحاور OXY	
$(x-h)^2 = 4a(y-k)$	$X^2 = 4aY$	المعادلة القياسية
(h, k)	$(0,0)$	إحداثيات الرأس
$x-h=0$	$X=0$	معادلة المحور
$y-k=0$	$Y=0$	معادلة المماس عند الرأس
$(h, k+a)$	$(0, a)$	إحداثيات البؤرة
$y-k=-a$	$Y=-a$	معادلة الدليل

ولكن بالنسبة للحالة التي يكون فيها القطع مفتوح في الاتجاه السالب لمحور oy فإن معادله يمكن وصفها بالصورة: $(x-h)^2 = -4a(y-k)$ ، كما بالشكل المقابل:



والجدول التالي يوضح الصفات الهندسية للقطع في هذه الحالة :

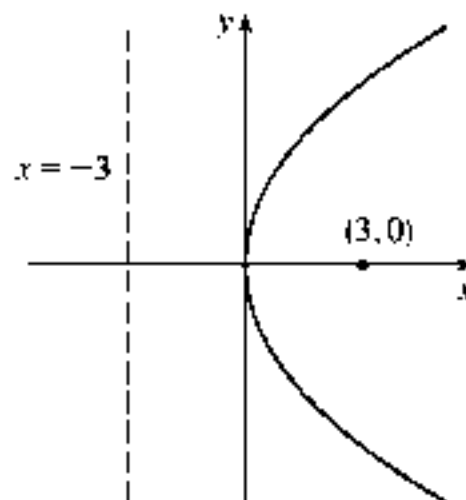
بالنسبة للمحاور oxy	بالنسبة للمحاور OXY	
$(x-h)^2 = -4a(y-k)$	$X^2 = -4aY$	المعادلة القياسية
(h, k)	$(0,0)$	إحداثيات الرأس
$x-h=0$	$X=0$	معادلة المحور
$y-k=0$	$Y=0$	معادلة المماس عند الرأس
$(h, k-a)$	$(0, -a)$	إحداثيات البؤرة
$y-k=a$	$Y=a$	معادلة الدليل

أمثلة محلولة

مثال (١): أرسم القطع المكافئ $y^2 = 12x$ وعين البؤرة والدليل.

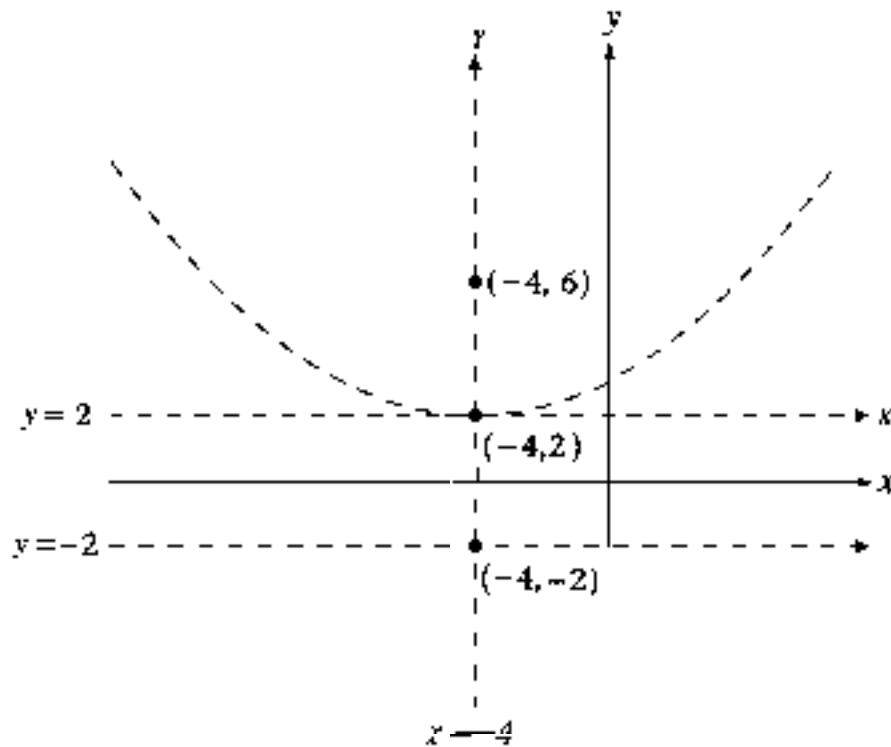
الحل

بمقارن المعادلة المعطاة بالمعادلة القياسية للقطع المكافئ والتي علي الصورة: $y^2 = 4ax$ نجد أن $4a = 12 \Rightarrow a = 3$ وبالتالي فإن بؤرة القطع هي النقطة $(3,0)$ ورأسه النقطة $(0,0)$ ومعادلة دليله هي $x = -3$.



مثال (٢): أرسم القطع المكافئ $4y + x^2 = 0$ وعين البؤرة والدليل.

$(h, k + a) = (-4, 6)$	$(0, a) = (0, 4)$	إحداثيات البؤرة
$y - 2 = -4 \Rightarrow y = -2$	$Y = -a$	معادلة الدليل



مثال (٦): بالتحويل إلى الإحداثيات الكارتيزية ونقل محاور الإحداثيات إلى نقطة مناسبة استنتج

الصفات الهندسية للقطع المكافئ الذي معادلته $r = \frac{6}{1 - \cos \theta}$.

الحل

$$r = \frac{6}{1 - \cos \theta} \Rightarrow r(1 - \cos \theta) = 6 \Rightarrow r - r \cos \theta = 6$$

وبالتعويض عن $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $x = r \cos \theta$ نجد أن:

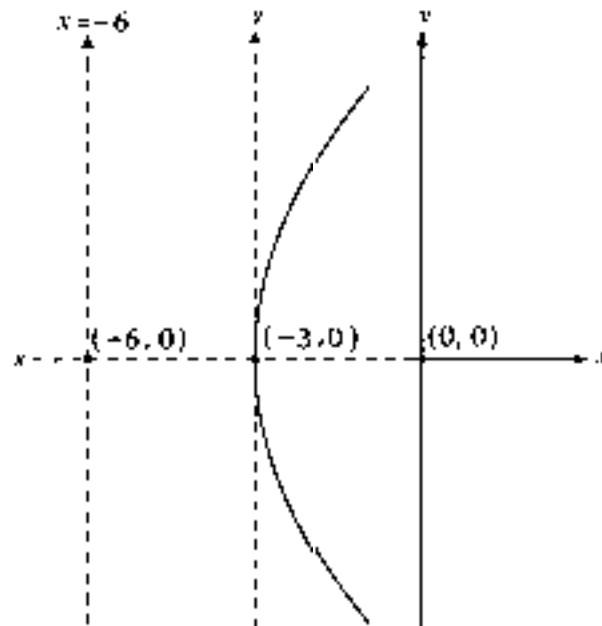
$$r - r \cos \theta = 6 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - x = 6 \Rightarrow x^2 + y^2 = (x + 6)^2$$

وبالفك والاختصار نحصل على: $y^2 = 12(x + 3)$ وينقل محاور الإحداثيات إلى النقطة $(-3, 0)$ نجد

أن: $X = x + 3, Y = y$ وبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن:

$$Y^2 = 12X$$

وهي معادلة قطع مكافئ مفتوح في الاتجاه الموجب لمحور ox ، كما بالشكل المقابل:



والخواص الهندسية لهذا القطع كما بالجدول التالي :

بالنسبة للمحاور oxy	بالنسبة للمحاور OXY	
$y^2 = 12(x+3)$	$F^2 = 12X$	المعادلة القياسية
$(h, k) = (-3, 0)$	$(0, 0)$	إحداثيات الرأس
$y = 0$	$F = 0$	معادلة المحور
$x+3=0 \Rightarrow x=-3$	$X = 0$	معادلة المماس عند الرأس
$(h+a, k) = (0, 0)$	$(a, 0) = (3, 0)$	إحداثيات البؤرة
$x+3=-3 \Rightarrow x=-6$	$X = -3$	معادلة الدليل

معادلتى المماس والعمودي للقطع المكافئ

معادلة المماس للقطع المكافئ $y^2 = 4ax$ عند النقطة (x_1, y_1) الواقعة عليه تكون بالصورة

$yy_1 = 2a(x + x_1)$ ومعادلة العمودي عند نفس النقطة تكون بالصورة $y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$ ويمكن

استنتاج ذلك كما يأتي : لتكن معادلة القطع المكافئ هي $y^2 = 4ax$ ، ولتكن (x_1, y_1) نقطة ما واقعة

على القطع فهي تحقق معادته ومن ثم يكون $y_1^2 = 4ax_1$ ، ويميل المماس للقطع عند النقطة (x_1, y_1)

نحصل عليه كما يلي :

$$2y \frac{dy}{dx} = 4a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$$

وإذا ميل المماس للقطع عند النقطة (x_1, y_1) يكون هو $\frac{2a}{y_1}$. وبالتالي فإن معادلة المماس للقطع المكافئ عند النقطة (x_1, y_1) تكون بالصورة:

$$(y - y_1) = \frac{2a}{y_1}(x - x_1) \Rightarrow yy_1 - y_1^2 = 2ax - 2ax_1.$$

وبالتعويض عن $y_1^2 = 4ax_1$ نحصل على: $yy_1 - 4ax_1 = 2ax - 2ax_1$ ومنها نحصل على:

$$yy_1 = 2a(x + x_1) \quad (1)$$

وهذه المعادلة هي معادلة المماس للقطع المكافئ $y^2 = 4ax$ عند النقطة (x_1, y_1) .

المعادلات البارامترية للقطع المكافئ

المقصود بالصورة البارامترية للمنحني هو التعبير عن إحداثيات أي نقطه (x, y) عليه بدلالة بارامتر وليكن t (أي: $x = x(t), y = y(t)$) وهذه الإحداثيات تحقق معادلة المنحني في الصورة القياسية بدلالة x, y . بالنسبة للقطع المكافئ $y^2 = 4ax$ نجد أن $y = 2\sqrt{ax}$ وبالتالي أنا وضعنا $x = at^2$ نجد أن $y = 2at$. وبالتالي تكون المعادلات: $x = at^2, y = 2at$ هي المعادلات البارامترية للقطع المكافئ $y^2 = 4ax$. ومن الملاحظ أن المعادلات البارامترية لنفس المنحني يمكن أن تأخذ أشكالاً متعددة. فمثلاً المعادلات: $x = t, y = 2\sqrt{at}, t \geq 0$ هي أيضاً صورته بارامترية للقطع المكافئ $y^2 = 4ax$. وبالنسبة للصور القياسية الأخرى للقطع المكافئ يمكن وضع معادلات بارامترية مشابهة.

المعنى الهندسي لبارامتر القطع المكافئ

من حساب التفاضل نعلم أن $\frac{dy}{dx}$ تمثل ميل المماس عند أي نقطه من نقاط منحني ما وفي حالة القطع المكافئ بالمعادلات البارامترية أعلاه يكون:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{m}$$

أي أن البارامتر t هنا هو مقلوب ميل المماس وهو يساوي " - ميل العمودي ".

وتكون معادلة المماس عند أي نقطة $(at^2, 2at)$ على القطع المكافئ هي:

$$\frac{y-2at}{x-at^2} = \frac{1}{t}$$

أي أن:

$$y = \frac{1}{t}x + at \text{ or } ty - x - at^2 = 0 \quad (2)$$

هي معادلة المماس للقطع المكافئ $y^2 = 4ax$ وهي معادلة من الدرجة الثانية في البارامتر t أي أنه لأي نقطة (x_1, y_1) توجد قيمتين للبارامتر t تحقق المعادلة وهذا يعني أنه من أي نقطة لا تقع علي القطع يمكن رسم مماسان للقطع ومعادله العمودي عند أي نقطه علي القطع المكافئ تكون بالصورة:

$$\frac{y-2at}{x-at^2} = -t$$

أي:

$$y + tx - at^3 - 2at = 0$$

معادله وتر في القطع مكافئ

معادله وتر القطع مكافئ الذي يصل بين النقطتين $P(at_1^2, 2at_1)$ ، $Q(at_2^2, 2at_2)$ هي:

$$\frac{x - at_1^2}{y - 2at_1} = \frac{at_2^2 - at_1^2}{2at_2 - 2at_1} = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها علي الصورة

$$2x - (t_1 + t_2)y + 2at_1t_2 = 0 \quad (3)$$

وبضرب طرفي المعادلة (1) في $a(t_1 - t_2)$ نحصل علي:

$$2a(t_1 - t_2)x - 2a(t_1 - t_2)(t_1 + t_2)y + 2a^2t_1t_2(t_1 - t_2) = 0$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها علي الصورة:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2at_1^2 & 2at_1 & 1 \\ 2at_2^2 & 2at_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

وهذه المعادلة هي صورة أخرى لمعادلة الوتر لقطع مكافئ بدلالة البارامتر t . وكذلك يمكن استنتاج معادلة الوتر بدلالة الإحداثيات الكارتيزية.

معادله وتر القطع مكافئ الذي يصل بين النقطتين $P(x_1, y_1)$ ، $Q(x_2, y_2)$ هي :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (5)$$

وحيث أن القطع يمر بالنقطتين $P(x_1, y_1)$ ، $Q(x_2, y_2)$ فيكون :

$$y_1^2 = 4ax_1 \quad (7)$$

$$y_2^2 = 4ax_2, \quad (6)$$

من المعادلتين (٦) ، (٧) نحصل علي : $y_2^2 - y_1^2 = 4a(x_2 - x_1)$ وبالتعويض في المعادلة (٥) والاختصار نحصل علي معادلة الوتر في الصورة :

$$4ax - (y_1 + y_2)y + y_1y_2 = 0 \quad (8)$$

ملحوظة : حيث أن لمماس لمنحني : هو الخط المستقيم الذي يقطع المنحني في نقطتين متطابقتين فإنه يمكن الحصول علي معادلة المماس من معادلة الوتر حيث أنه بوضع $t_1 = t_2$ في المعادلة (٣) نحصل علي المعادلة (٢) ، وكذلك بوضع $x_1 = x_2$ ، $y_1 = y_2$ في المعادلة (٧) نحصل علي المعادلة (١).

شرط تماس خط مستقيم لقطع مكافئ

شرط تماس الخط المستقيم $y = mx + c$ للقطع المكافئ $y^2 = 4ax$ هو $c = \frac{a}{m}$ وإحداثيات نقطة التماس تكون $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ ، ويمكن إثبات ذلك كما يأتي :

معادلة المماس للقطع المكافئ $y^2 = 4ax$ هي $y = \frac{2a}{y_1}(x + x_1)$ حيث أن (x_1, y_1) هي إحداثيات نقطة

التماس. ولكي يكون الخط المستقيم $y = mx + c$ مماسا للقطع يجب أن يكون :

$$m = \frac{2a}{y_1}, \quad c = \frac{2ax_1}{y_1}$$

وبالتالي نجد أن :

$$y_1 = \frac{2a}{m}, \quad x_1 = \frac{cy_1}{2a} = \left(\frac{c}{2a}\right)\left(\frac{2a}{m}\right) = \frac{c}{m}$$

أي أن النقطة $\left(\frac{c}{m}, \frac{2a}{m}\right)$ هي نقطة التماس. وحيث أن (x_1, y_1) هي إحداثيات نقطة التماس (نقطة تقع علي القطع) فيكون:

$$y_1 = mx_1 + c \Rightarrow \frac{2a}{m} = m\left(\frac{c}{m}\right) + c \Rightarrow c = \frac{a}{m}$$

وبالتالي تكون المعادلة التي علي الصورة: $y = mx + \frac{a}{m}$ هي معادلة التماس للقطع المكافئ $y^2 = 4ax$ لجميع قيم m الحقيقية وتكون النقطة $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ هي نقطة التماس.

تمارين (٩-١)

١) أوجد معادلة القطع المكافئ إذا كانت:

❖ البؤرة $(-1,2)$ والدليل $x=0$.

❖ البؤرة $(3,6)$ والدليل $y=2$.

❖ البؤرة $(-4,1)$ والدليل $y=-1$.

❖ البؤرة $(-3,-6)$ والدليل $y=0$.

٢) بالتحويل إلى الإحداثيات الكارثيزية ونقل محاور الإحداثيات إلى نقطة مناسبة استنتج الصفات

الهندسية للقطاعات المكافئة الآتية:

❖ $r = \frac{6}{1+\sin\theta}$ ، $r = \frac{6}{1-\sin\theta}$ ، $r = \frac{6}{1+\cos\theta}$

٣) بنقل نقطة الأصل إلى نقطة مناسبة استنتج الخواص الهندسية للقطاعات المكافئة الممثلة بالمعادلات

الآتية:

❖ $y^2 + 2y + 12x + 25 = 0$

❖ $y^2 - 4y - 8x + 20 = 0$

❖ $x^2 - 8x + 4y + 12 = 0$

❖ $x^2 + 8x - 16y + 48 = 0$

٤) أوجد معادلتَي المماسين المرسومين من النقطة $(-3,-2)$ للقطع المكافئ $y^2 = 4x$. وأوجد إحداثيات

نقطتي التماس. ومن ثم أوجد معادلة الوتر الواصل بين نقطتي التماس.

٥) أوجد معادلتَي المماسين المرسومين من النقطة $(2,-3)$ للقطع المكافئ $y^2 = 4x$. وأوجد إحداثيات

نقطتي التماس.

٦) برهن أن المحل الهندسي لنقطة تقاطع مماسين متعامدين لقطع مكافئ هو الدليل.

٧) أوجد معادلة المماس للقطع المكافئ $y^2 = 12x$ والذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور ox .

ثانياً: القطع الناقص

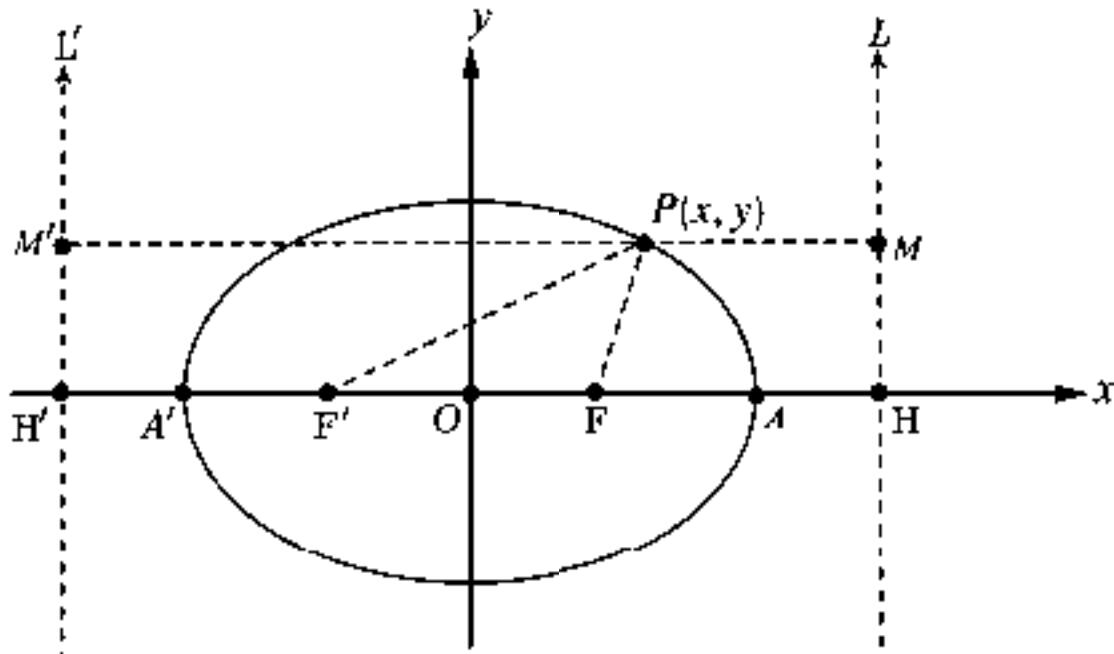
من التعريف العام للقطاعات المخروطية يعرف القطع الناقص: علي أنه هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة F (البؤرة) إلي بعدها عن خط مستقيم ثابت L (الدليل) يساوي مقدار ثابت (الاختلاف المركزي) اقل من الواحد الصحيح .

وهذا يعني أن القطع الناقص هو المنحني الناتج من حركة نقطة $P(x,y)$ بحيث يكون بعدها عن البؤرة F إلي بعدها عن الدليل L مرتبطاً بالعلاقة:

$$PF = ePM, e < 1 \quad (1)$$

من هذا التعريف يمكن استنتاج المعادلة القياسية للقطع الناقص كما يلي:

لإيجاد المعادلة القياسية للقطع الناقص نفرض أن البؤرة F تقع علي محور ox وأن الدليل L يكون عمودي علي محور ox والنقطة $P(x,y)$ هي النقطة التي تتحرك في المستوى بحيث تحقق العلاقة (1). وبالتالي فإن النقطة $P(x,y)$ خلال حركتها تقطع محور ox في النقطتين A, A' (نقطتي التقسيم من الداخل والخارج)، كما بالشكل المقابل:



ومن تعريف القطع الناقص نجد أن:

$$\frac{AF}{AH} = \frac{A'F'}{A'H'} = e, e < 1$$

وبفرض أن المسافة بين النقطتين A, A' هي مقدار ثابت $2a$ بحيث أن نقطة الأصل تقع في منتصف المسافة بينهما أي أن $OA' = OA$ وبذلك تكون إحداثيات النقطتين A, A' هما $A(a,0), A'(-a,0)$. وبالتالي من الشكل نجد أن:

$$AF = eAH \Rightarrow OA - OF = e(OH - OA) \quad (1)$$

$$A'F = eA'H \Rightarrow OA' + OF = e(OH + OA) \quad (2)$$

يجمع المعادلتين (1)، (2) نجد أن:

$$AF + A'F = 2e OH \Rightarrow 2a = 2e OH \Rightarrow OH = \frac{a}{e}$$

أي أن الدليل يبعد عن المركز مسافة قدرها $\frac{a}{e}$. وتكون معادلة الدليل هي $x = \frac{a}{e}$. وبطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نجد أن:

$$2OF = e(2OA) \Rightarrow OF = ae$$

أي أن البؤرة تبعد عن نقطة الأصل مسافة قدرها ae وتكون إحداثيات البؤرة هي $F(ae,0)$ والبعد PM هو $\frac{a}{e} - x$. وإذا كانت النقطة $P(x,y)$ تقع على القطع الناقص فإن:

$$\overline{PF}^2 = e^2 \overline{PM}^2 \Rightarrow (x - ae)^2 + y^2 = e^2 \left(\frac{a}{e} - x \right)^2$$

وبالفك والاختصار نجد أن: $x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$ وحيث أن $e < 1$ فإن $1 - e^2$ يكون مقدار موجب دائما، وبوضع: $b^2 = a^2(1 - e^2)$ نحصل على:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

وذلك هي معادلة لقطع الناقص في صورتها القياسية عندما تقع بؤرته على محور ox ويكون دليله موازيا لمحور oy . ومن العلاقة $b^2 = a^2(1 - e^2)$ نلاحظ أن $a^2 > b^2$. ومن معادلة القطع نجد أن:

$$x = \pm a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

وهذا يعني أن القطع الناقص يكون متمائل حول محوري الإحداثيات وكذلك متمائل حول نقطة الأصل ولكي نحصل على قيم حقيقية للمتغير x يجب أن يكون :

$$1 - \frac{y^2}{b^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow y^2 \leq b^2 \Rightarrow |y| \leq b$$

وبالمثل لكي نحصل على قيم حقيقية للمتغير y يجب أن يكون :

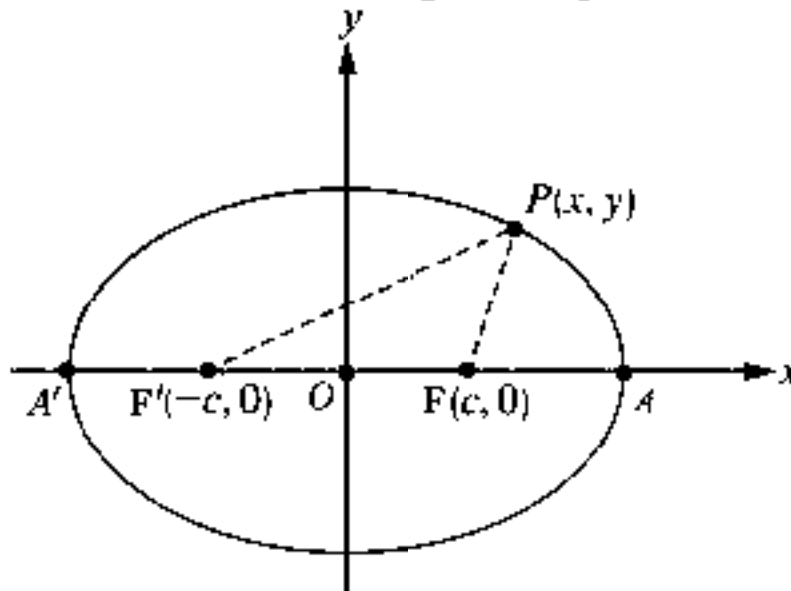
$$1 - \frac{y^2}{b^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow y^2 \leq b^2 \Rightarrow |y| \leq b$$

من تماثل القطع الناقص نجد أنه توجد له بؤرة أخرى هي $F'(-ae, 0)$ ودليل آخر معادلته $x = -\frac{a}{e}$ وكذلك نجد أن القطع يقطع محور oy في نقطتين ويكون منحنى القطع مغلق.

ومن الشكل نعلم أن: $\overline{PF} = e\overline{PM}$, $\overline{PF'} = e\overline{PM'}$ ومنها نجد أن:

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = e(\overline{PM} + \overline{PM'}) = e\overline{HH'} = e\left(\frac{2a}{e}\right) = 2a$$

ومن هنا نستنتج تعريفاً آخر للقطع الناقص وهو أن: القطع الناقص هو الحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بعدها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي مقدار ثابت (وهو طول المحور الأكبر). ومن هذا التعريف يمكن استنتاج معادلة القطع الناقص كما يأتي: لتكن بؤرتي القطع الناقص هما النقطتين $F(c, 0), F'(-c, 0)$ حيث c يُعد كلاً من البؤرتين عن نقطة الأصل. ولتكن $P(x, y)$ نقطة في المستوى تقع على القطع، كما بالشكل المقابل:



ومن التعريف السابق للقطع الناقص يكون:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a.$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$\Rightarrow -4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Rightarrow a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

وبتربيع الطرفين نجد أن:

$$a^2[(x+c)^2 + y^2] = (a^2 + cx)^2 \Rightarrow a^2[x^2 + 2cx + c^2 + y^2] = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow$$

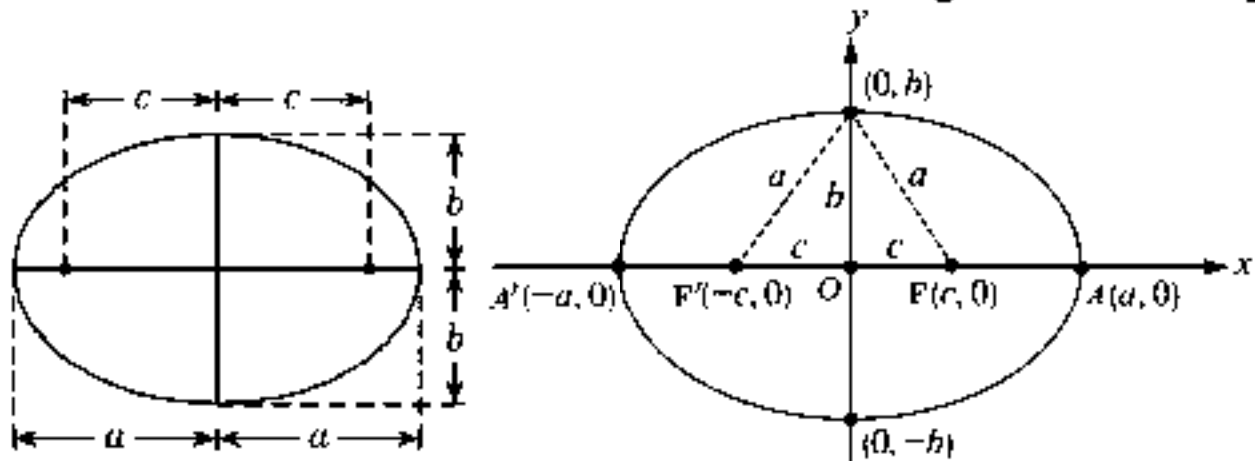
$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

وبالقسمة على $a^2(a^2 - c^2)$ نحصل على: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ وحيث أن $a > c$ فإن المقدار

$a^2 - c^2$ يكون موجب دائما، وبوضع $b^2 = a^2 - c^2$ نحصل على:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

وهي المعادلة القياسية للقطع الناقص، كما بالشكل المقابل:



ملاحظات:

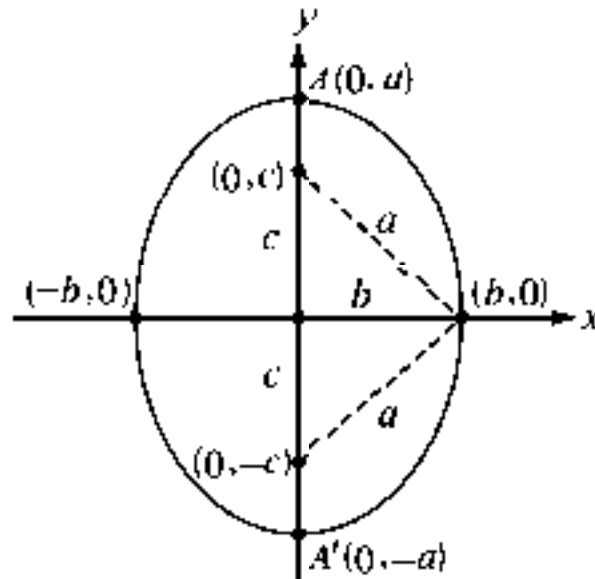
- ❖ النقطتين النابتتين $F(c, 0) = (ae, 0)$, $F'(-c, 0) = (-ae, 0)$ تسمي ببؤرتي القطع الناقص.
- ❖ الخط المستقيم المار بالبؤرتين يسمي بالمحور الأكبر وطوله $2a$.
- ❖ الخط المستقيم العمودي على المحور الأكبر من منتصفه يسمي بالمحور الأصغر وطوله $2b$.
- ❖ نقطة تقاطع المحور الأكبر مع المحور الأصغر تسمي بمركز القطع الناقص.

❖ نقطتي تقاطع المحور الأكبر مع منحنى القطع تسمى برأسي القطع الناقص.

وبالتالي نجد أن المعادلة (٤) تمثل قطع ناقص مركزه نقطة الأصل، ومحوره الأكبر منطبق على محور ox ومحوره الأصغر منطبق على محور oy . وإحداثيات بؤرتيه $(\pm c, 0)$ حيث $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ وطول محوره الأكبر يساوي $2a$ وطول محوره الأصغر يساوي $2b$ وطول وتره البؤري العمودي يساوي $\frac{2b^2}{a}$

والاختلاف المركزي له $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1$. ومعادلتني دليليه هما $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c}$.

ملحوظة (١): وإذا كان المحور الأكبر للقطع الناقص منطبق على محور oy ومحوره الأصغر منطبق على محور ox كما بالشكل:



فإن معادلته تكون على الصورة:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

إحداثيات بؤرتيه $(0, \pm c)$ حيث أن $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. وبالتالي تكون المعادلة (٤) تمثل قطع ناقص أفقي والمعادلة (٥) تمثل قطع ناقص رأسي كما بالجداول التالي:

رأسي	أفقي	اتجاه القطع
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	المعادلة القياسية
$(0, 0)$	$(0, 0)$	المركز

$A(0,a), A'(0,-a),$	$A(a,0), A'(-a,0),$	إحداثيات الرأسين
$x=0$	$y=0$	معادلة المحور الأكبر
$y=0$	$x=0$	معادلة المحور الأصغر
$F'(0,-c) = (0,-ae)$ $F(0,c) = (0,ae)$	$F'(-c,0) = (-ae,0)$ $F(c,0) = (ae,0)$	إحداثيات البؤرتين
$y = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c}$	$x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c}$	معادلة الدليلين
$(\pm a,0)$	$(0,\pm b)$	نهايتي المحور الأصغر

ملحوظة (٢):

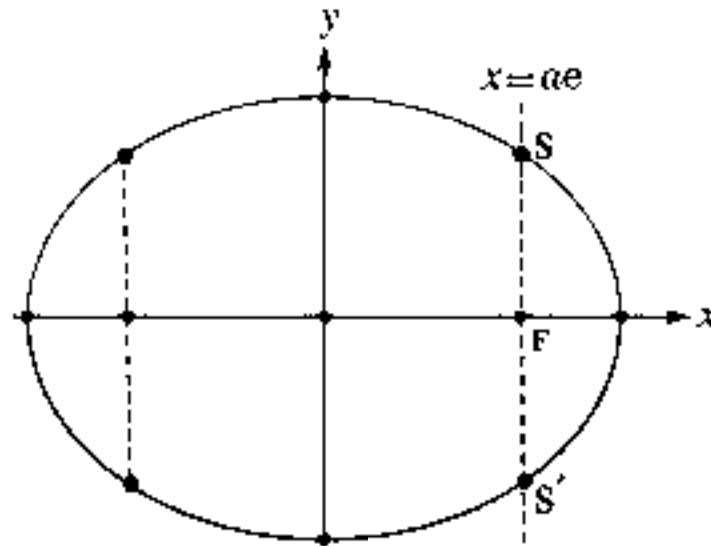
❖ من المعادلتين (٣)، (٤) نجد أن: $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ وهو الاختلاف المركزي.

❖ إذا كانت $e = 0 \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = 0 \Rightarrow a = b$ وذلك تنطبق البؤرتين والمركز وتصبح المعادلة في

الصورة: $x^2 + y^2 = a^2$ وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a . أي أن الدائرة هي حالة خاصة من القطع الناقص عندما $e = 0$.

الوتر البؤري العمودي للقطع الناقص

الوتر البؤري العمودي للقطع الناقص هو الوتر المار بالبؤرة عموديا علي المحور الأكبر ويمكن حساب طوله كالآتي: حيث أن الوتر البؤري العمودي يمر بالبؤرة موازيا للدليل (كما بالشكل المقابل)، فتكون



معادلة الوتر البؤري العمودي هي $x = ae$ وهذا الوتر يقطع القطع الناقص في النقطتين $S(ae, y)$ ،
 $S'(ae, -y)$ وبالتالي فإن النقطة $S(ae, y)$ تحقق معادلة القطع أي أن:

$$\frac{a^2 e^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{e^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = (1 - e^2)b^2 = \frac{b^2}{a^2} b^2 \Rightarrow y^2 = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow y = \pm \frac{b^2}{a}$$

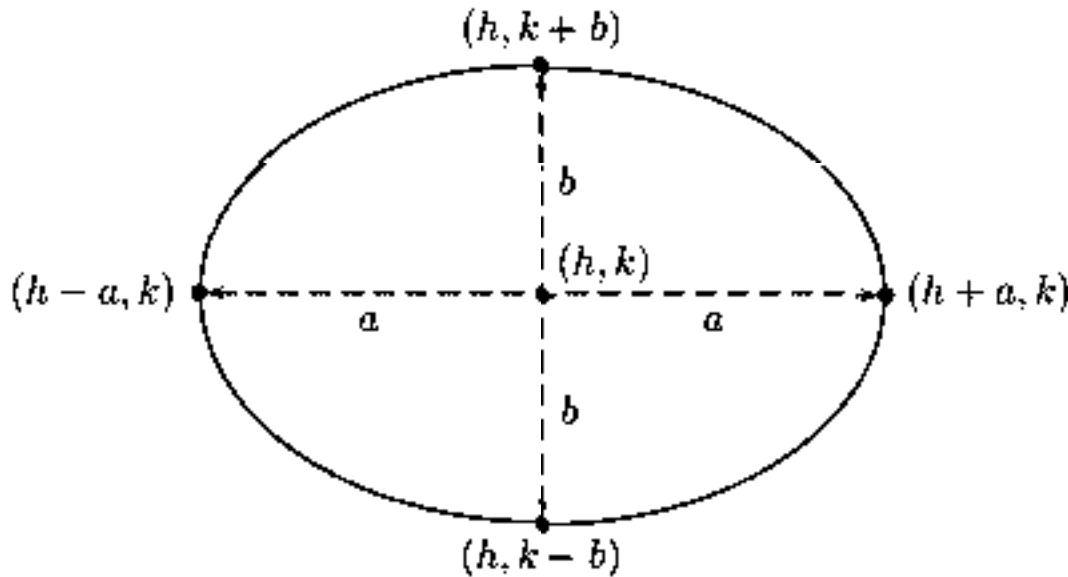
وبالتالي يكون طول الوتر البؤري العمودي للقطع الناقص هو:

$$SS' = |2y| = \frac{2b^2}{a}$$

المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي محوريه: يوازيان محوري الإحداثيات

أولاً: إذا كان المحور الأكبر للقطع يوازي محور ox : نعتبر قطع ناقص مركزه النقطة (h, k)

ومحوره الأكبر يوازي محور ox ومحوره الأصغر يوازي محور oy ، كما بالشكل المقابل:



وننقل محاور الإحداثيات موازية لنفسها إلى النقطة (h, k) حيث أن المحاور الجديدة هي OXY ،

فتكون معادلة القطع الناقص منسوبة إلى المحاور الجديدة علي الصورة: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ باستخدام

معادلات التحويل بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة والتي علي الصورة:

$$X = x - h, \quad Y = y - k$$

نحصل علي معادلة القطع الناقص بالنسبة إلى الإحداثيات الأصلية في الصورة:

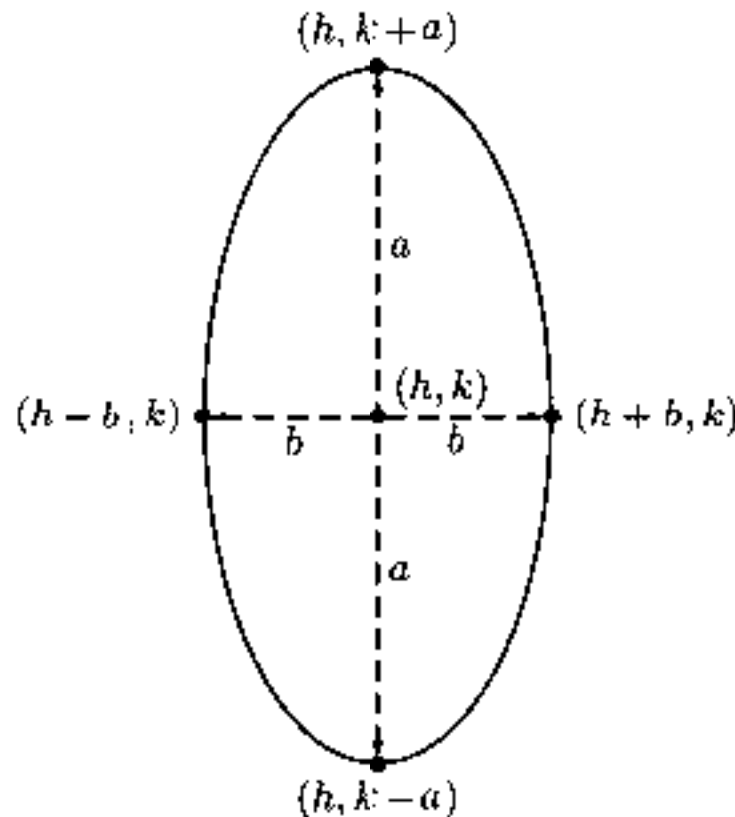
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

وصفاته الهندسية كما في الجدول التالي :

بالنسبة للمحاور oxy	بالنسبة للمحاور $oX'Y'$	
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$	المعادلة القياسية
(h, k)	$(0, 0)$	إحداثيات المركز
$y - k = 0$	$Y = 0$	معادلة المحور الأكبر
$x - h = 0$	$X = 0$	معادلة المحور الأصغر
$(h \pm c, k)$	$(\pm c, 0)$	إحداثيات البؤرتين
$(h \pm a, k)$	$(\pm a, 0)$	إحداثيات الرأسين
$x - h = \pm \frac{a}{e}$	$X = \pm \frac{a}{e}$	معادلة الدليلين
$(h, k \pm b)$	$(0, \pm b)$	نهايتي المحور الأصغر

ثانياً: إذا كان المحور الأكبر للقطع يوازي محور oy : نعتبر قطع ناقص مركزه النقطة (h, k)

ومحوره الأكبر يوازي محور oy ومحوره الأصغر يوازي محور ox ، كما بالشكل المقابل :



وننقل محاور الإحداثيات موازية لنفسها إلى النقطة (h, k) حيث أن المحاور الجديدة هي OXY ، فتكون معادلة القطع الناقص منسوبة إلى المحاور الجديدة علي الصورة: $\frac{Y^2}{a^2} + \frac{X^2}{b^2} = 1$ وباستخدام معادلات التحويل بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة والتي علي الصورة:

$$X = x - h, \quad Y = y - k$$

نحصل علي معادلة القطع الناقص بالنسبة إلى الإحداثيات الأصلية في الصورة:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

والصفات الهندسية لهذا القطع كما في الجدول التالي:

بالنسبة للمحاور oxy	بالنسبة للمحاور OXY	
$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	$\frac{X^2}{b^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1$	المعادلة القياسية
(h, k)	$(0, 0)$	إحداثيات المركز
$x - h = 0$	$X = 0$	معادلة المحور الأكبر
$y - k = 0$	$Y = 0$	معادلة المحور الأصغر
$(h, k \pm c)$	$(0, \pm c)$	إحداثيات البؤرتين
$(h, k \pm a)$	$(\pm a, 0)$	إحداثيات الرأسين
$y - k = \pm \frac{a}{e}$	$Y = \pm \frac{a}{e}$	معادلة الدليلين
$(h \pm b, k)$	$(\pm b, 0)$	نهائتي المحور الأصغر

أمثلة محلولة

مثال (١): أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $(\pm 2, 0)$ واختلافه المركزي يساوي $\frac{1}{2}$.

الحل

من المعطيات نلاحظ أن بؤرتي القطع تقع علي محور ox وبالتالي فإن معادلة القطع المطلوبة يجب أن

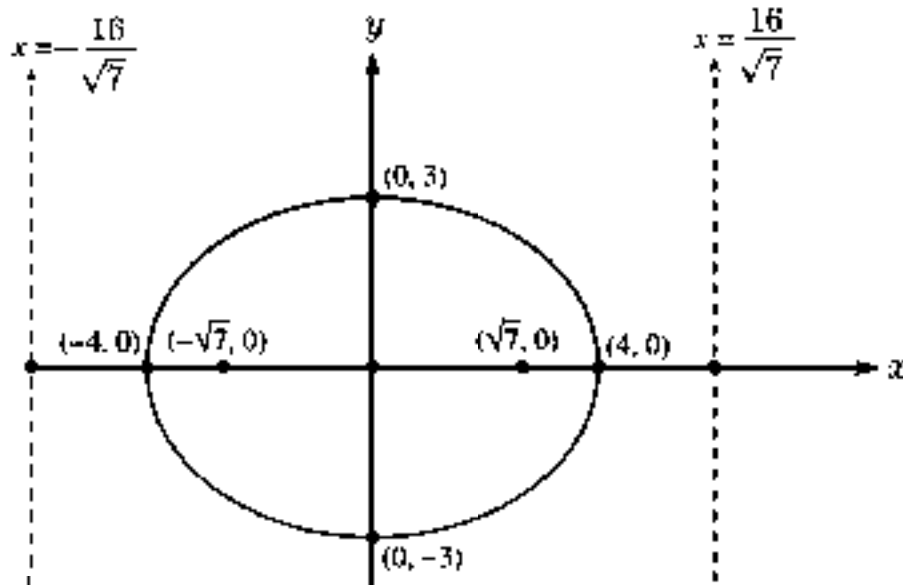
تكون علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، ومن المعطيات نجد أن :

وبالتالي تكون:

❖ إحداثيات البؤرتين هما $(\pm c, 0) = (\pm\sqrt{7}, 0)$.

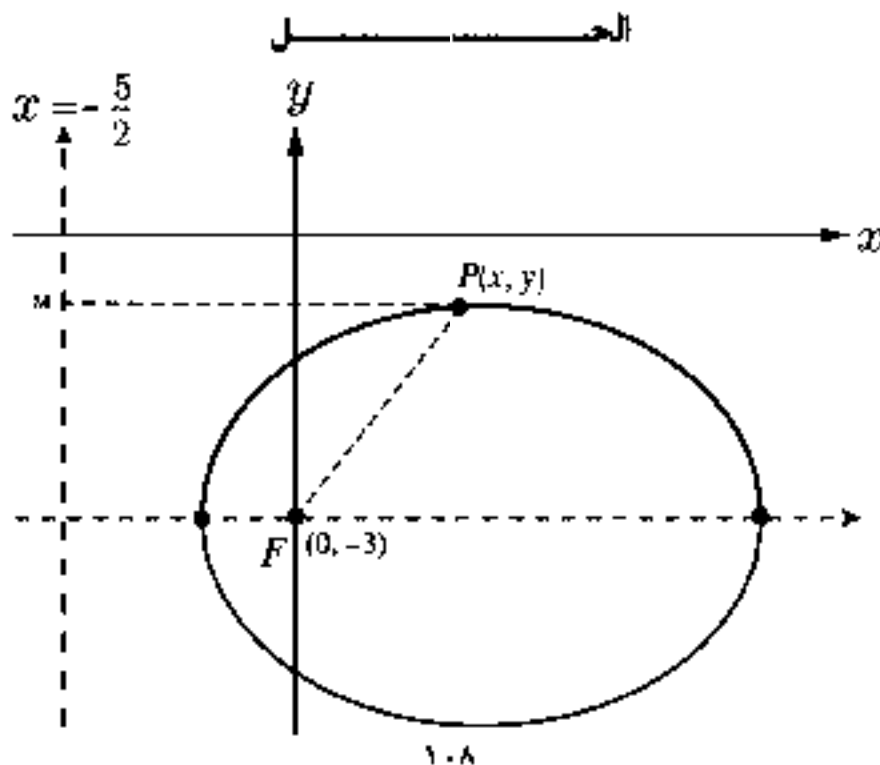
❖ إحداثيات نهايتي محوره الأكبر هما $(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$.

❖ إحداثيات نهايتي محوره الأصغر هما $(0, \pm b) = (0, \pm 3)$.

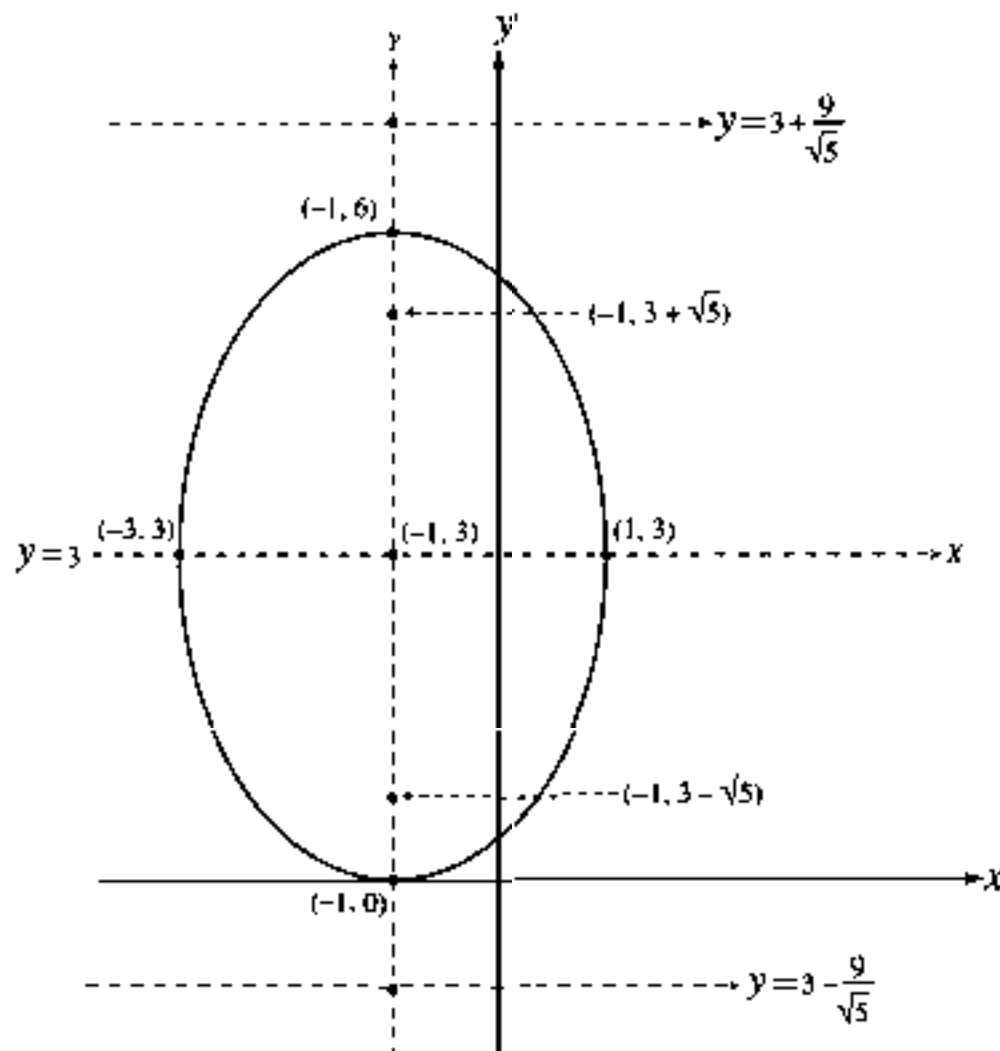


مثال (4): أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $(0, -3)$ ودليلة الخط المستقيم $x = -\frac{5}{2}$ واختلافه

$$e = \frac{2}{3}$$
 المركزي



وننقل محاور الاحداثيات الي النقطة $(-1,3)$ نجد أن: $X=x+1, Y=y-3$ وبالتالي فإن المعادلة المعطاة يمكن كتابتها علي الصورة: $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1$ وهي معادلة قطع ناقص رأسي، كما بالشكل المقابل:



ويمكن استنتاج صفات الهندسية كما يلي:

من معادلة القطع نجد أن: $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3, \quad b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

وبالتالي نجد أن: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

وبالتالي تكون الصفات الهندسية للقطع الناقص كما بالجدول التالي:

بالنسبة للمحاور oxy	بالنسبة للمحاور OXY	
$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$	$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1$	المعادلة القياسية
$(-1,3)$	$(0,0)$	إحداثيات المركز

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$	$X=0$	معادلة المحور الأكبر
$y-3=0 \Rightarrow y=3$	$Y=0$	معادلة المحور الأصغر
$(h, k \pm c) = (-1, 3 \pm \sqrt{5})$	$(0, \pm c) = (0 \pm \sqrt{5})$	إحداثيات البؤرتين
$(h, k \pm a) = (-1, 3 \pm 3)$	$(0, \pm a) = (0, \pm 3)$	إحداثيات الرأسين
$y-3 = \pm \frac{9}{\sqrt{5}} \Rightarrow y = 3 \pm \frac{9}{\sqrt{5}}$	$Y = \pm \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c} = \pm \frac{9}{\sqrt{5}}$	معادلة الدليلين
$(h \pm b, k) = (-1 \pm 2, 3)$	$(\pm b, 0) = (\pm 2, 0)$	نهايتي المحور الأصغر

معادلة المماس والعمودي للقطع الناقص

نعتبر القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، وبفرض أن النقطة (x_1, y_1) نقطة عليّة وبالتالي فإن ميل المماس

لهذا القطع عند أي نقطة عليّة هو: $m = \frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$ وبالتالي فإن ميل المماس للقطع الناقص عند

النقطة (x_1, y_1) الواقعة عليّة هو: $m_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}$ وبالتالي تكون معادلة المماس للقطع الناقص عند النقطة (x_1, y_1) الواقعة عليّة هي:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}$$

ومنها نحصل علي: $\frac{y_1 y - y_1^2}{b^2} = -\frac{x_1 x - x_1^2}{a^2}$ وهذه المعادلة يمكن كتابتها علي الصورة:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

وحيث أن النقطة (x_1, y_1) تقع علي القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ فهي تحقق معادلته أي أن:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

وبالتالي فإن معادلة المماس للقطع الناقص الذي معادلته بالصورة:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

عند النقطة (x_1, y_1) الواقعة على الصورة: $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ ومعادلة العمودي لهذا القطع عند

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} \text{ : النقطة } (x_1, y_1) \text{ تكون بالصورة:}$$

المعادلات البارامترية للقطع الناقص

المعادلات البارامترية للقطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ هي:

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta$$

حيث أن θ تسمى زاوية الاختلاف المركزي. لانه بحذف البارامتر θ بين المعادلتين ينتج أن:

$$\cos \theta = \frac{x}{a}, \quad \sin \theta = \frac{y}{b}$$

أي أن:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

ومعادلة المماس للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ عند النقطة $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ الواقعة على الصورة:

$$\frac{x \cos \theta}{a} + \frac{y \sin \theta}{b} = 1$$

شرط تماس خط مستقيم لقطع ناقص

الشرط اللازم لكي يكون الخط المستقيم $y = mx + c$ مماسا للقطع الناقص الذي معادلته على الصورة:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ هو أن يكون } c = \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2} \text{ ومعادلة المماس هي } y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

وإحداثيات نقط التماس هي:

$$\left(\frac{-a^2 m}{\pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}}, \frac{b^2}{\pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}} \right)$$

ويمكن استنتاج ذلك كالآتي:

معادلة المماس للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ يمكن إعادة كتابتها على الصورة:

$$y = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_1}{y_1} x + \frac{b^2}{y_1}$$

حيث أن (x_1, y_1) هي نقطة التماس. وبالتالي لكي يكون الخط المستقيم $y = mx + c$ مماساً للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ يجب أن يكون:

$$m = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_1}{y_1}, \quad c = \frac{b^2}{y_1}$$

وبالتالي نجد أن:

$$y_1 = \frac{b^2}{c}, \quad x_1 = -\frac{ma^2}{b^2} y_1 = \left(-\frac{a^2}{b^2}\right) \left(\frac{b^2}{c}\right) = -\frac{ma^2}{c}$$

وبالتالي فإن نقطة التماس للقطع هي $(x_1, y_1) = \left(-\frac{ma^2}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$.

وحيث أن النقطة $(x_1, y_1) = \left(-\frac{ma^2}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$ هي نقط التماس فهي تحقق معادلة المماس أي أن:

$$y_1 = mx_1 + c \Rightarrow \frac{b^2}{c} = m \left(-\frac{ma^2}{c}\right) + c \Rightarrow c = \frac{b^2}{c} + \frac{m^2 a^2}{c} \Rightarrow c^2 = m^2 a^2 + b^2$$

أي أن الشرط اللازم لكي يكون المستقيم $y = mx + c$ مماساً للقطع الناقص هو أن:

$$c = \pm \sqrt{m^2 a^2 + b^2}$$

ويكون المستقيمان $y = mx + \pm \sqrt{m^2 a^2 + b^2}$ دائماً يمسان القطع الناقص لجميع قيم m الحقيقية وتكون نقطتي التماس هما:

$$\left(\frac{-ma^2}{\pm \sqrt{m^2 a^2 + b^2}}, \frac{b^2}{\pm \sqrt{m^2 a^2 + b^2}} \right)$$

تمارين (٩-٢)

(١) أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرته $F(3,0)$ ودليلة الخط المستقيم $L: y = \frac{5}{2}$ واختلافه

$$e = \frac{2}{3} \text{ المركزي}$$

(٢) بنقل نقطة الأصل إلى نقطة مناسبة استنتج الصلوات الهندسية للقطاعات الناقصة الآتية:

$$9x^2 + 16y^2 - 18x - 96y + 9 = 0 \quad \spadesuit$$

$$5x^2 - 20x + 9y^2 + 54y + 56 = 0 \quad \spadesuit$$

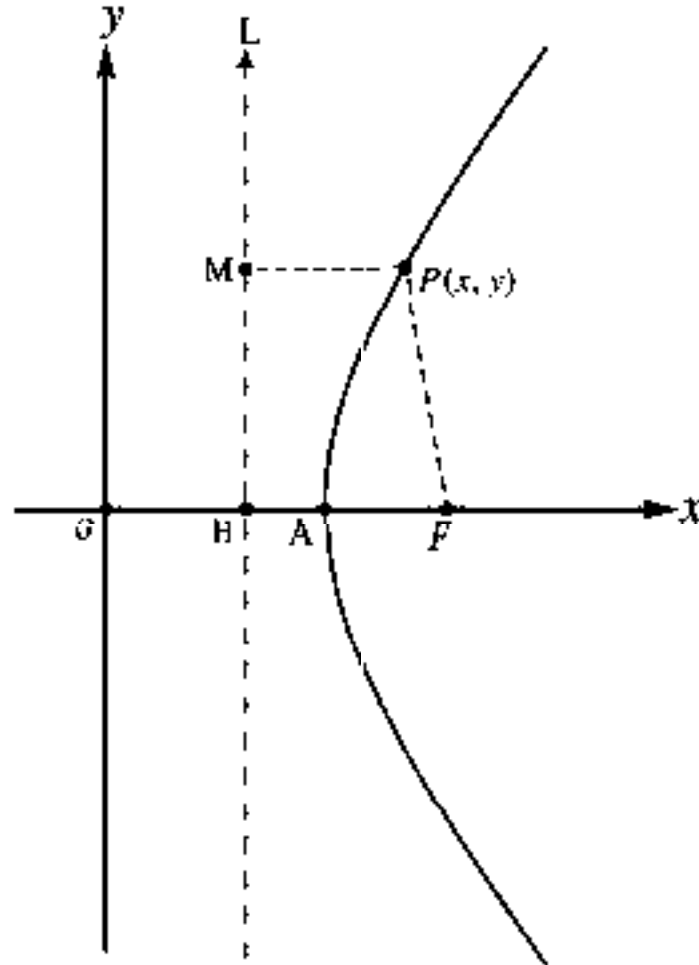
(٣) بالتحويل إلى الإحداثيات الكارتيزية استنتج الصلوات الهندسية للقطع الناقص الذي معادلته

$$r = \frac{6}{2 - \sin \theta} \text{ القطبية}$$

(٤) أوجد الشرط اللازم لكي يكون المستقيم $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ مماساً للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ثالثاً: القطع الزائد

تعريف: القطع الزائد هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة F (البؤرة) إلى بعداً عن خط مستقيم ثابت L (الدليل) يساوي مقدار ثابت (الاختلاف المركزي) أكبر من الواحد الصحيح .



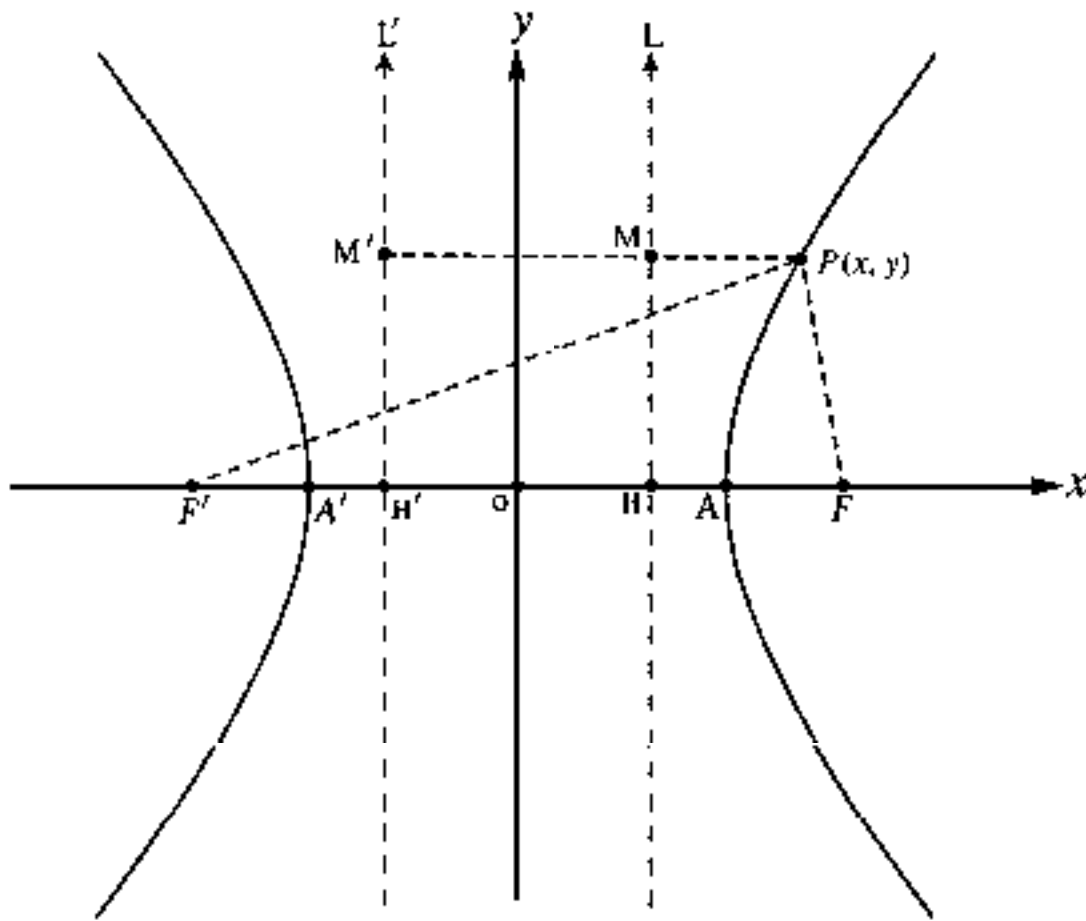
وهذا يعني أن القطع الزائد هو المنحني الناتج من حركة نقطة $P(x, y)$ بحيث يكون بعدها عن البؤرة F إلى بعدها عن الدليل L مرتبطاً بالعلاقة:

$$PF = ePM, \quad e > 1 \quad (1)$$

من هذا التعريف يمكن استنتاج المعادلة القياسية للقطع الزائد كما يلي:

لإيجاد المعادلة القياسية للقطع الزائد نفرض أن البؤرة F تقع على محور ox وأن الدليل L يكون عمودي على محور ox والنقطة $P(x, y)$ هي النقطة التي تتحرك في المستوى بحيث تحقق العلاقة (1).

وبالتالي فإن النقطة $P(x,y)$ خلال حركتها تقطع محور ox في النقطتين A, A' (نقطتي التقسيم من الداخل والخارج)، كما بالشكل المقابل:



ومن تعريف القطع الزائد نجد أن: $\frac{AF}{AH} = \frac{A'F}{A'H} = e, e > 1$ وبفرض أن المسافة بين النقطتين A, A' هي مقدار ثابت $2a$ بحيث أن نقطة الأصل تقع في منتصف المسافة بينهما أي أن $OA' = OA$ وبذلك تكون إحداثيات النقطتين A, A' هما $A(a,0), A'(-a,0)$. وبالتالي من الشكل نجد أن:

$$AF = eAH \Rightarrow OF - OA = e(OA - OH) \quad (2)$$

$$A'F = eA'H \Rightarrow OF + OA' = e(OA' + OH) \quad (3)$$

يجمع المعادلتين (2)، (3) نجد أن: $AF + A'F = (eOA + OA') \Rightarrow 2OF = 2eOA \Rightarrow OF = ae$: أي أن البؤرة تبعد عن نقطة الأصل مسافة قدرها ae أي أن البؤرة هي النقطة $F(ae,0)$.

وبطرح المعادلة (2) من المعادلة (3) نجد أن: $2OA = e(2OH) \Rightarrow OH = \frac{a}{e}$: أي أن الدليل يبعد عن

المركز مسافة قدرها $\frac{a}{e}$ ، ومعادلته تكون بالصورة $x = \frac{a}{e}$. واليعد PM هو $x - \frac{a}{e}$.

وإذا كانت النقطة $P(x,y)$ تقع على القطع الزائد فإن:

$$\overline{PF} = e\overline{PM} \Rightarrow \sqrt{(x-ae)^2 + y^2} = e\left(x - \frac{a}{e}\right)^2$$

وبالفك والاختصار نجد أن: $x^2(e^2 - 1) - y^2 = a^2(e^2 - 1)$ وحيث أن $e > 1$ فإن $e^2 - 1$ يكون مقدار موجب دائماً، وبوضع: $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ نحصل على:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

وذلك هي معادلة لقطع الزائد في صورتها القياسية عندما تقع بؤرته على محور ox ويكون دليلاً موازياً

لمحور oy . ومن معادلة القطع نجد أن: $x = \pm a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}$ وهذا يعني أن القطع الناقص يكون متماثل

حول محور ox ويقطعه في نقطتين حقيقيتين هما $A(a,0)$ ، $A'(-a,0)$. وكذلك من معادلة القطع نجد

أن: $y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ وهذا يعني أن القطع الزائد يكون متماثل حول محور oy ولا يقطعه في أي

نقطة حقيقية، وكذلك يكون القطع متماثل حول نقطة الأصل أيضاً والتي تمثل مركز القطع. ومن

تماثل القطع الزائد حول محوري الإحداثيات وحول نقطة الأصل نجد أنه توجد له بؤرة أخرى هي

النقطة $F'(-ae,0)$ وكذلك يوجد للقطع دليل آخر هو المستقيم الذي معادلته $x = -\frac{a}{e}$.

ومن الشكل المقابل نجد أن: $\overline{PF'} = e\overline{PM'}$ ، $\overline{PF} = e\overline{PM}$ ومنها نجد أن:

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = e(\overline{PM'} - \overline{PM}) = e\overline{MM'} = e\overline{HH'} = e\left(\frac{2a}{e}\right) = 2a$$

ومن هنا يمكن صياغة تعريف آخر للقطع الزائد كما لاتي: القطع الزائد هو الحل الهندسي لنقطة

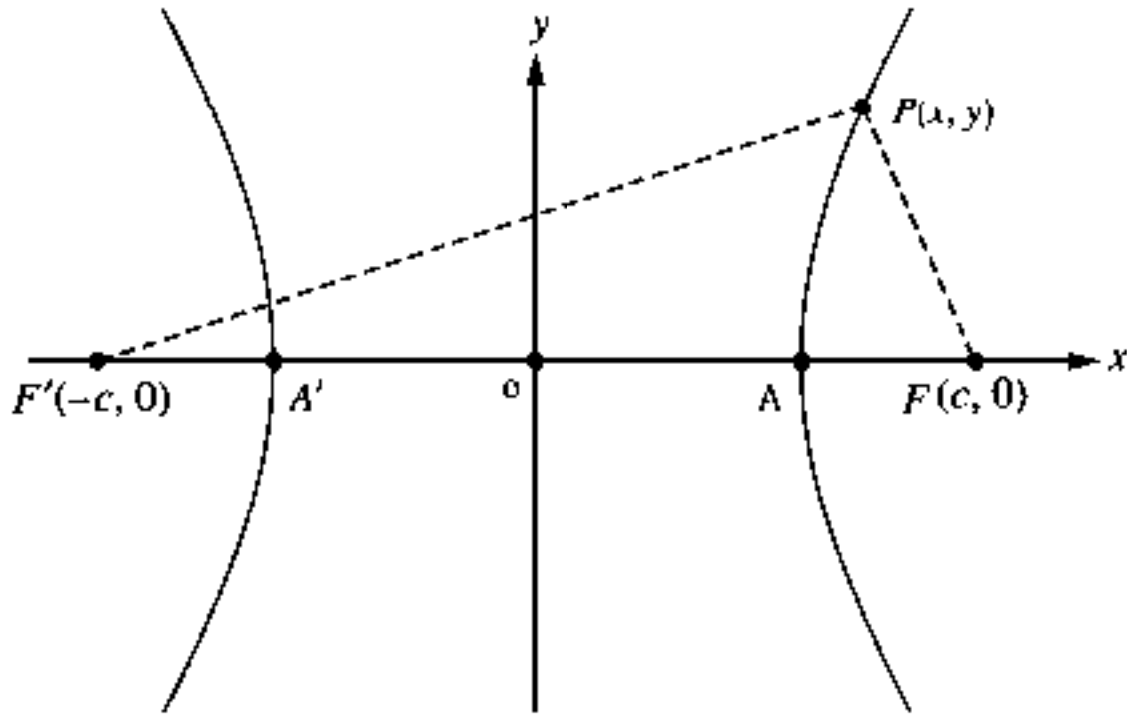
$P(x,y)$ تتحرك في المستوى بحيث يكون الفرق بين بعدها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي

مقدار ثابت (يساوي طول المحور القاطع للقطع الزائد). حيث أن المحور القاطع هو الخط المستقيم المار

بالبؤرتين F ، F' وطوله يساوي $AA' = 2a$. ومن هذا التعريف يمكن استنتاج معادلة القطع الزائد

كما يأتي: بفرض أن النقطتين الثابتتين هما $F(c,0)$ ، $F'(-c,0)$ حيث أن c هو بعد أي منهما عن

نقطة الأصل. ولتكن $P(x,y)$ نقطة في المستوى تقع على القطع الزائد، كما بالشكل المقابل:



ومن التعريف السابق للقطع الزائد يكون: $c > a$ ، $\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a$ ، أي أن:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

وبالاختصار كما فعلنا في استنتاج المعادلة القياسية للقطع الناقص نحصل على:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

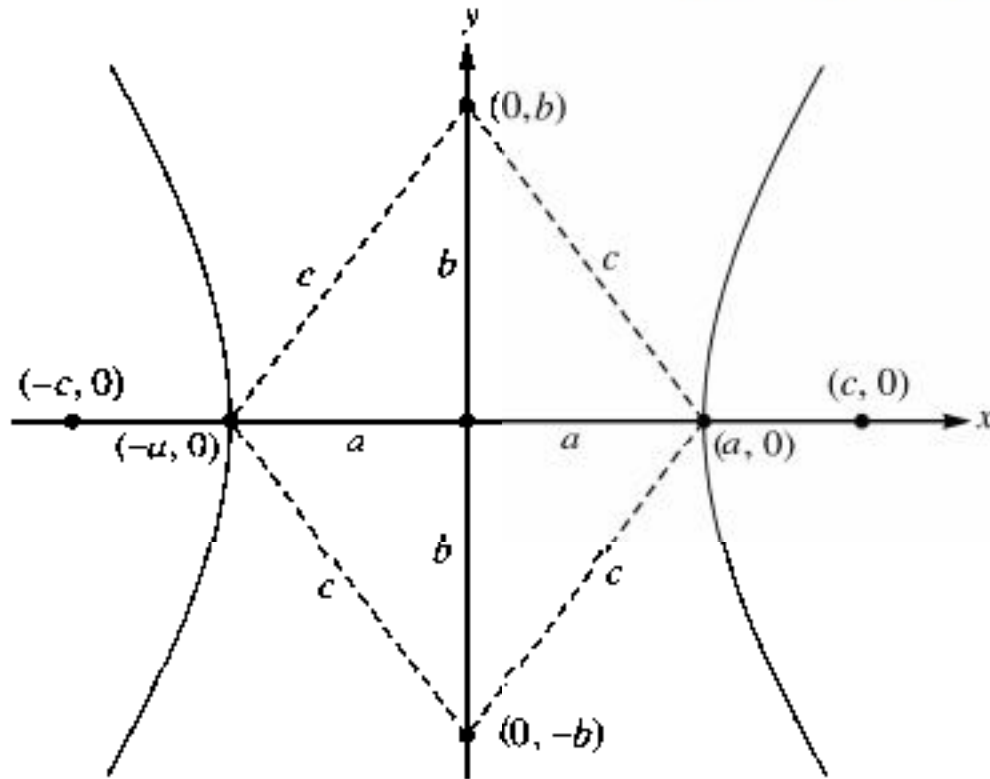
ونظراً لأن $c > a$ فإن $c^2 - a^2 > 0$ وبوضع: $b^2 = c^2 - a^2$ (أي أن: $c^2 = a^2 + b^2$) نجد أن الصورة

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
 القياسية لمعادلة القطع الزائد تكون بالصورة:

ملاحظات:

- ❖ النقطتين الثابتتين F' ، F تسمى بؤرتي القطع الزائد.
- ❖ الخط المستقيم المار ببؤرتي القطع الزائد F' ، F يسمى المحور للقاطع القطع الزائد.
- ❖ الخط المستقيم العمودي على المحور القاطع من منتصفه (النقطة O) يسمى المحور المرافق أو المحور التخيلي للقطع الزائد.
- ❖ نقطة تقاطع المحور القاطع مع المحور المرافق (النقطة O) تسمى مركز القطع الزائد.
- ❖ نقطتي تقاطع المحور القاطع مع منحنى القطع (النقطتين A' ، A) تسمى برأسي القطع الزائد.

وبذلك تكون المعادلة التي علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ هي المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، ومحوره القاطع هو محور ox وطوله يساوي $2a$ ومحوره المرافق هو محور oy وطوله يساوي $2b$. وبؤرتيه هما النقطتين $(\pm c, 0) = (\pm ae, 0)$ حيث أن $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ، ورؤسيه هما النقطتين $(\pm a, 0)$ ، كما بالشكل المقابل:



الاختلاف المركزي للقطع الزائد: مما سبق نلاحظ أن بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته القياسية علي

الصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ هما النقطتين $(\pm c, 0) = (\pm ae, 0)$ حيث أن $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ، وبالتالي فإن

الاختلاف المركزي للقطع الزائد يتعين من العلاقة: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$ وبالتالي نجد

أن معادلتها اندليلين لهذا القطع هما: $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c}$.

الخطان التقاربيان للقطع الزائد: الخطان التقاربين للقطع الزائد هما خطان مستقيمان يمسان القطع

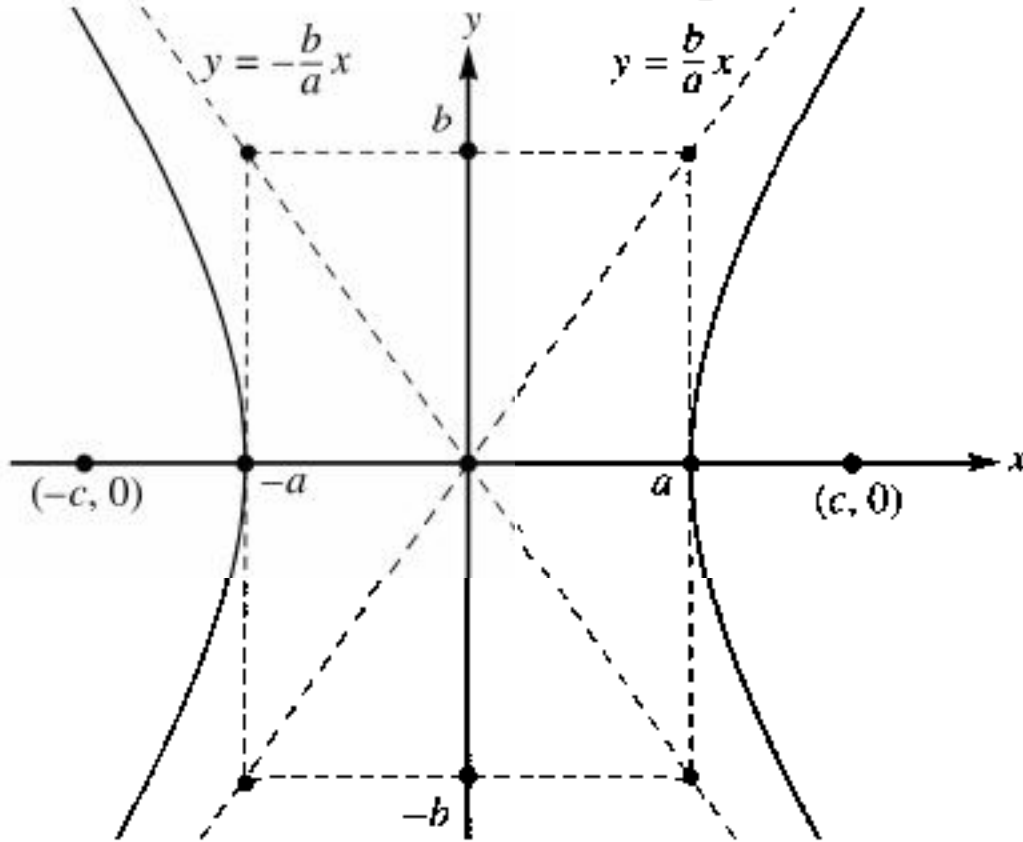
في نقطة عند اللانهاية، ويمكن الحصول معادليهما من المعادلة القياسية للقطع وذلك بأن نجعل

قيمة x تزيد إلي ما لانهاية. من المعادلة القياسية للقطع الزائد نستنتج أن:

$$y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)} = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)}$$

وعندما $x \rightarrow \infty$ فإن المقدار $\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \rightarrow 1$ وتصبح معادلة الخطان التقاربين بالصورة: $y = \pm \frac{b}{a} x$ وهما

خطين مستقيمين يمران بمركز القطع، كما بالشكل المقابل:



والمعادلة المشتركة للخطان التقاربين هي:

$$\left(y - \frac{b}{a}x\right)\left(y + \frac{b}{a}x\right) = 0 \Rightarrow y^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

أي أن المعادلة التي علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ هي المعادلة المشتركة للخطان التقاربين للقطع الزائد

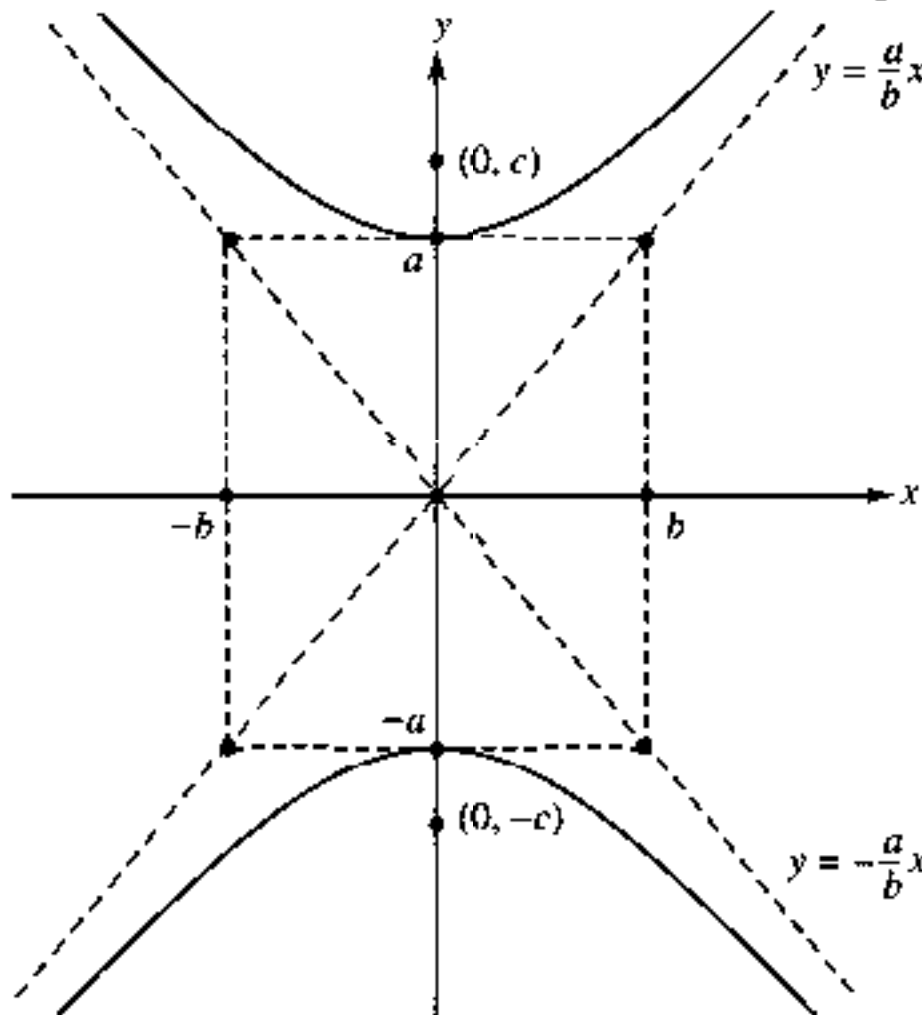
الذي معادلته علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، وهي تختلف عن معادلة القطع في الحد المطلق فقط. وهذا

يعني أن معادلتَي الخطين التقاربين للقطع الزائد تنتجان مباشرة من المعادلة القياسية يجعل الحد

المطلق مساوياً للصفر أي أن: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b} \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a}x$ ويعتبر الخطان التقاربين

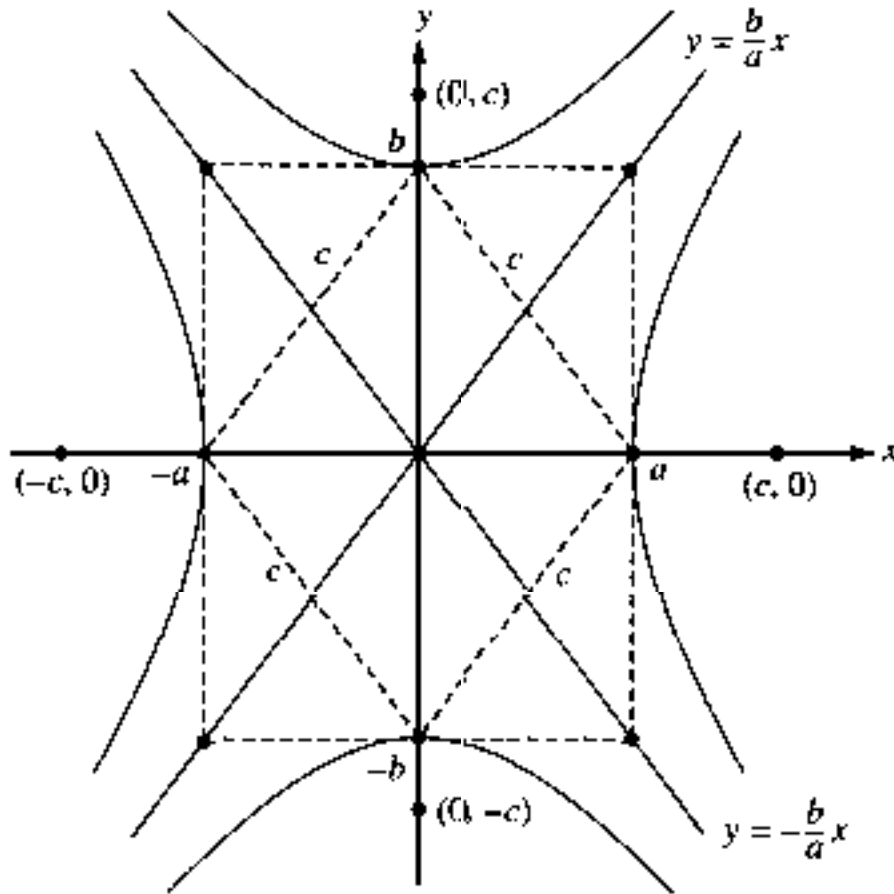
عناصر مساعدة لرسمة القطع الزائد بدقة.

القطع الزائد الذي محوره القاطع هو محور oy : إذا كانت بؤرتي القطع الزائد هما النقطتين $(0, c)$ ، $(0, -c)$ فإن المعادلة القياسية للقطع تأخذ الصورة : $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ وفي هذه الحالة يكون المحور القاطع هو محور oy ومحوره المرافق هو محور ox وتكون رأسي القطع هما النقطتين $(0, a)$ ، $(0, -a)$ ، والمعادلة المشتركة لخطاه التقاربيين تكون على الصورة : $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$ ، أي أن خطاه التقاربيين هما : $y = \pm \frac{a}{b}x$ ، كما بالشكل المقابل :

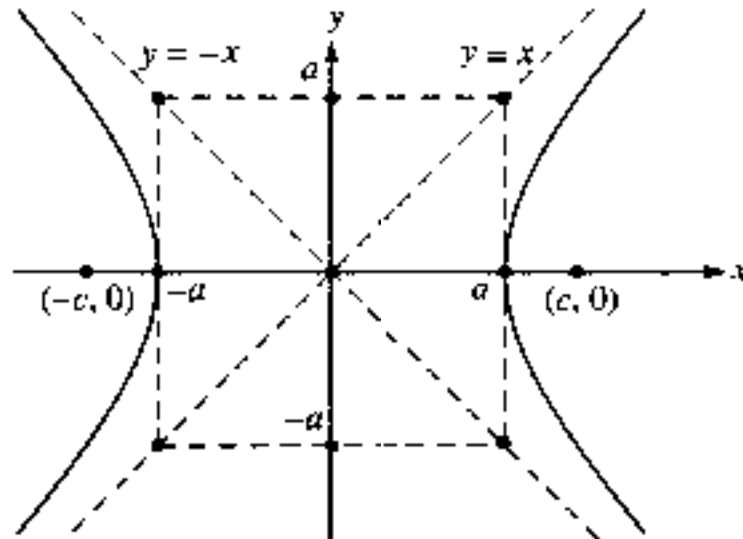


وهذا القطع يمكن إعادة كتابة معادلته على الصورة : $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$ وبذلك تكون الصورة العامة للمعادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وتقع بؤرتاه على احدي محوري الإحداثيات هي : $Ax^2 - By^2 = \pm 1$ ونأخذ الإشارة الموجبة إذا وقعت البؤرتان على محور ox ونأخذ الإشارة السالبة إذا وقعت البؤرتان على محور oy .

القطع الزائد المرافق: القطع الزائد المرافق للقطع $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ هو القطع الزائد الذي له نفس المركز ومحوره القاطع هو المحور المرافق للقطع الأول وله نفس الخطان التقاربيين ومعادلته هي $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ، كما بالشكل المقابل:

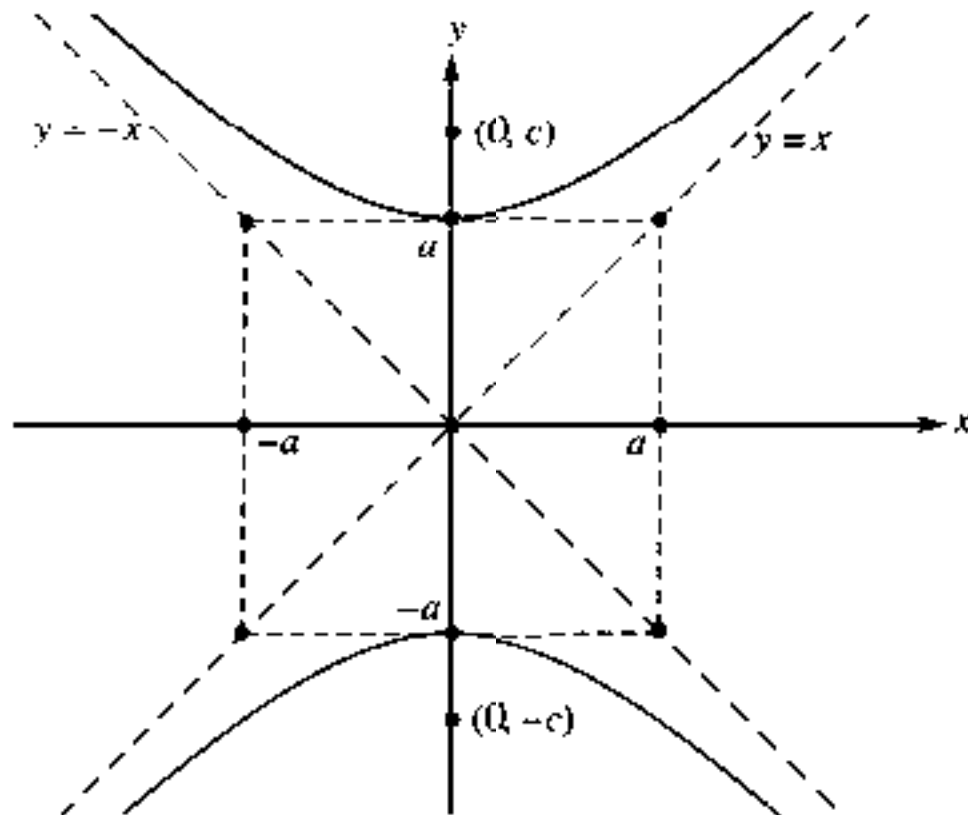


القطع الزائد القائم: عند تساوي طول المحور القاطع بطول المحور المرافق في حالة القطع الزائد الذي معادلته القياسية علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ نحصل علي: $x^2 - y^2 = a^2$ ويسمي القطع الزائد في هذه الحالة بالقطع الزائد القائم، والاختلاف المركزي للقطع الزائد القائم هو $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{a^2}} = \sqrt{2} > 1$ والخطان التقاربيين لهذا القطع هما $y = \pm x$ وهما خطان مستقيمان يتقاطعان علي التعمد عند مركز القطع أي عند نقطة الأصل ونلاحظ أن ميل المستقيم الأول هو 1 أي يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع محور ox وبالتالي يصنع المستقيم الثاني زاوية $\frac{3\pi}{4}$ أو $-\frac{\pi}{4}$ مع محور ox ، كما بالشكل المقابل:

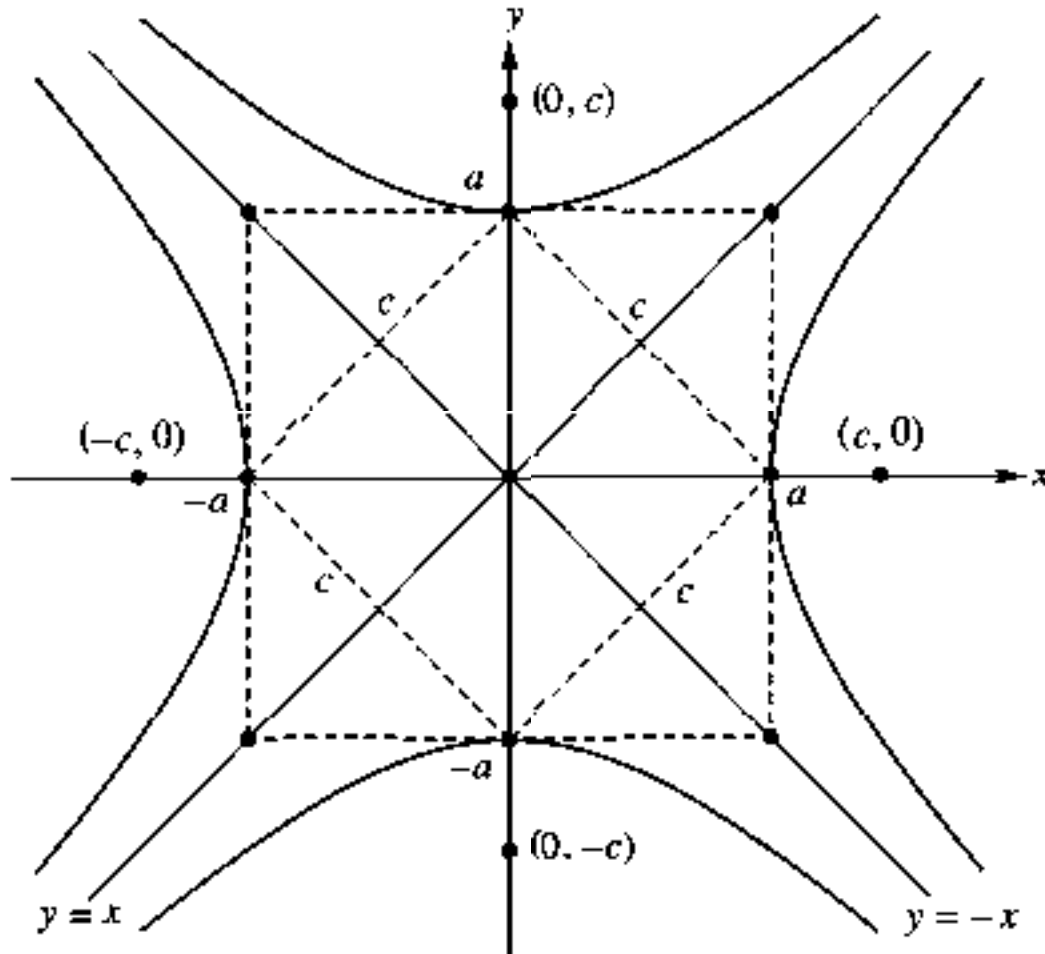


ويتدوير محاور الإحداثيات زاوية $\theta = \frac{\pi}{4}$ نحصل علي العلاقات الآتية: $x = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$

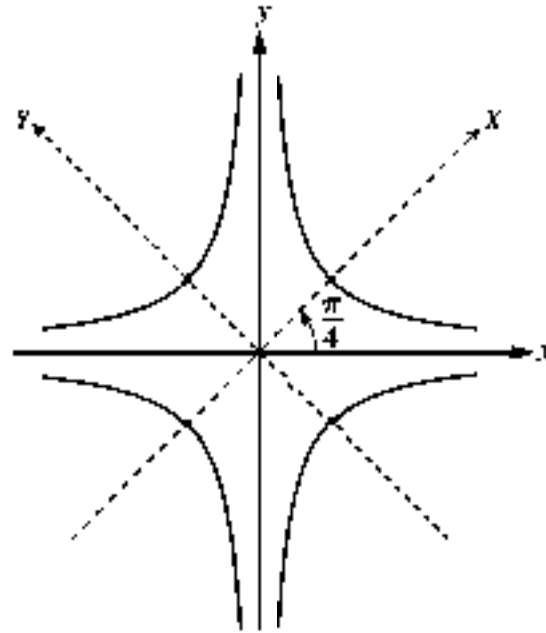
وبالتعويض من هاتين المعادلتين في المعادلة: $x^2 - y^2 = a^2$ نحصل علي: $XY = -a^2$ وهي صورة قياسية أخرى لمعادلة القطع الزائد القائم ونلاحظ أن الخطوط لتقاربه لهذا القطع هي محاور الإحداثيات الجديدة X ، Y . والقطع الزائد الذي معادلته $y^2 - x^2 = a^2$ هو القطع الزائد المرافق للقطع الزائد القائم الذي معادلته $x^2 - y^2 = a^2$ ، وهو قطع زائد قائم أيضاً محوره المقاطع هو محور oy ، كما بالشكل المقابل:



وبتدوير محاور الإحداثيات زاوية $\theta = \frac{\pi}{4}$ مع بقاء نقطة الأصل ثابتة نجد أن معادلة القطع الزائد القائم $y^2 - x^2 = a^2$ تتحول إلى الصورة $XY = a^2$ وهي صورة أخرى للقطع الزائد القائم الذي محوره القاطع هو محور OY . ونلاحظ أن الخطوط التقاربية لهذا القطع هي محاور الإحداثيات الجديدة X, Y . وبالتالي نجد أن القطع الزائد الذي معادلته (بالنسبة للمحاور الإحداثيات الجديدة X, Y) علي الصورة: $XY = a^2$ هو القطع الزائد المرافق للقطع الزائد الذي معادلته (بالنسبة للمحاور الإحداثيات الجديدة X, Y) علي الصورة: $XY = -a^2$ وكلاً منهما قطع زائد قائم، كما بالشكل المقابل:



ملحوظة (١): قياساً علي ما سبق نستنتج أن المعادلة التي علي الصورة: $xy = \pm k^2$ حيث أن k ثابت تمثل عائلة من القطاعات الزائدة القائم التي خطوطها التقاربية هي محاور الإحداثيات الأصلية. ويقع أحد فرعي أي من هذه القطاعات في الربع الأول ويقع الفرع الثاني في الربع الثالث عندما نأخذ الإشارة الموجبة، ويقع أحد فرعي أي من هذه القطاعات في الربع الثاني والفرع الآخر يقع في الربع الرابع عندما نأخذ الإشارة السالبة، كما بالشكل المقابل:

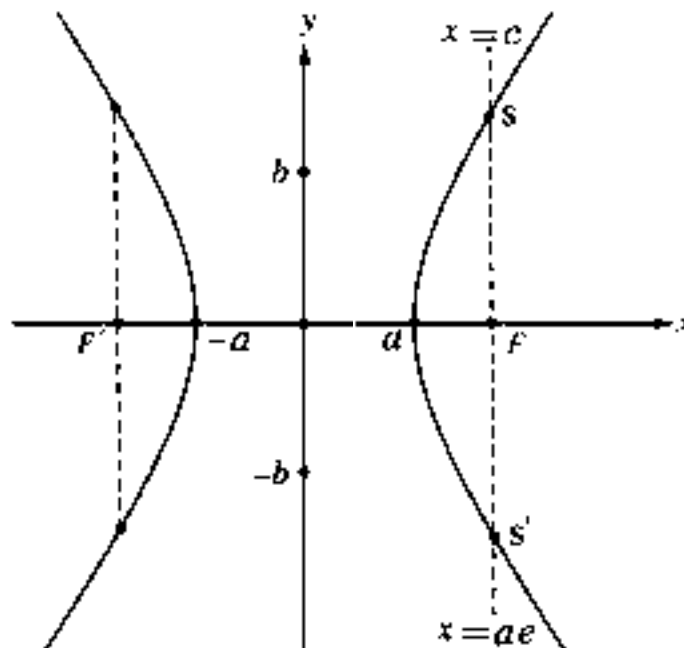


ويتدوير محاور الإحداثيات زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع بقاء نقطة الأصل ثابتة نجد أن معادلة عائلة القطاعات الزائدة القائم والتي علي الصورة $xy = \pm k^2$ تتحول إلي الصورة: $X^2 - Y^2 = \pm 2k^2$ وهي صورة أخرى لمعادله عائلة القطاعات الزائدة القائم التي خطوطها التقاربييه هي محاور الإحداثيات الأصلية.

الوتر البؤري العمودي للقطع الزائد: بالتشابه مع حالة القطع الناقص يمكن إثبات بسهولة أن طول

الوتر البؤري العمودي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ هو $ss' = |2y| = \frac{2b^2}{a}$ ، كما

بالشكل المقابل:



معادلة القطع الزائد الذي محوره القاطع يوازي أحد محوري الإحداثيات

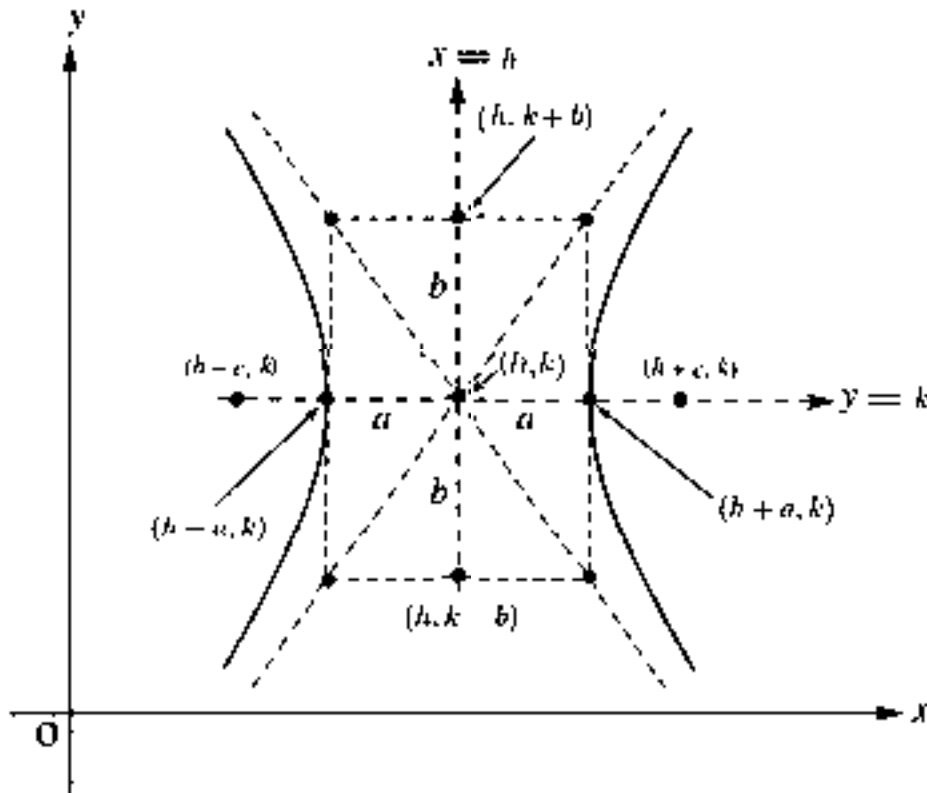
ملحوظة (٣): إذا كان مركز القطع هو النقطة (h, k) وكان محوره القاطع يوازي محور ox فإن الصورة

القياسية لمعادلة القطع الزائد تكون علي الصورة: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ وتكون بؤرتي القطع في

هذه الحالة هما النقطتين $(h-c, k)$ ، $(h+c, k)$ ورأسيه هما النقطتين $(h+a, k)$ ،

$(h-a, k)$ وخطاه التقاربيان هما $y-k = \pm \frac{b}{a}(x-h)$ ، ومعادلة محوره القاطع هي $y=k$ ومعادلة

محوره المرافق هي $x=h$ ، كما بالشكل المقابل:



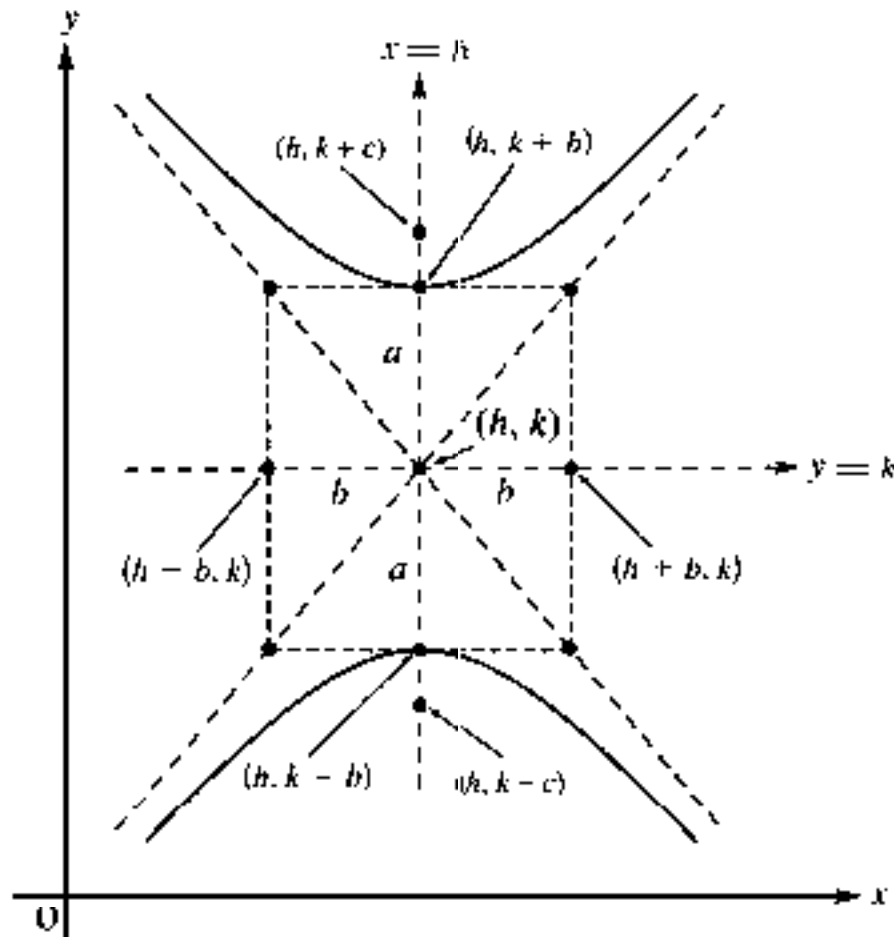
ملحوظة (٤): إذا كان مركز القطع هو النقطة (h, k) وكان محوره القاطع يوازي محور oy فإن الصورة

القياسية لمعادلة القطع الزائد تكون علي الصورة: $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ وتكون بؤرتي القطع في

هذه الحالة هما النقطتين $(h, k-c)$ ، $(h, k+c)$ ورأسيه هما النقطتين $(h, k-a)$ ،

$(h, k+a)$ وخطاه التقاربيان هما $y-k = \pm \frac{a}{b}(x-h)$ ، ومعادلة محوره القاطع هي $x=h$ ومعادلة محوره المرافق

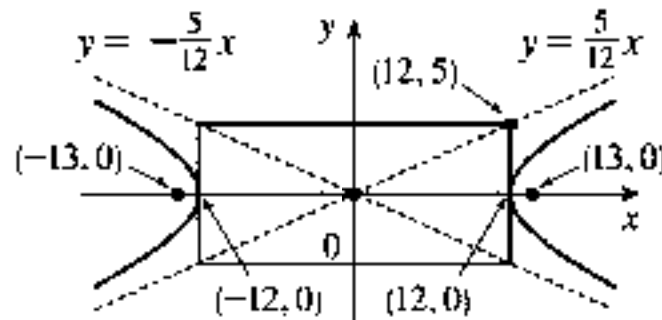
هي $y=k$ ، كما بالشكل المقابل:



أمثلة محلولة

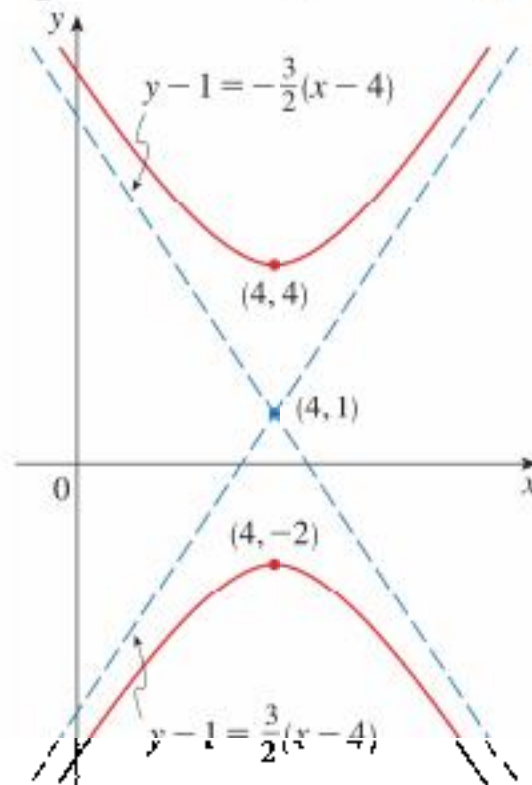
مثال (١): ارسم القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ ثم وأوجد إحداثيات كلٍّ من بؤرتيه ورأسية ومعادلتَي خطاه التقاربيان.

الحل



بمقارنة المعادلة المعطاة بمعادلة القطع الزائد التي علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ نحصل علي: $a = 12$ ،
 $b = 5$ ، وبالتالي نجد أن: $c = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow c = 13$ وبالتالي يكون مركز القطع هو نقطة الأصل

وبالتالي فإن $a^2 = 9$ ، $b^2 = 4$ ، $c^2 = 13$ وبالتالي تكون بؤرتي القطع هما $(4, 1 \pm \sqrt{13})$ ، ورأسيه هما النقطتين $(4, 4)$ ، $(4, -2)$ ومعادلتا الخطان التقاربيان هما: $y - 1 = \pm \frac{3}{2}(x - 4)$ ، كما بالشكل المقابل:



معادلة المماس والعمودي للقطع الزائد

كما في حالة القطع الناقص يمكن استنتاج أن معادلة المماس للقطع الزائد الذي معادلته علي الصورة:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{عند النقطة } (x_1, y_1) \text{ الواقعة عليه تكون بالصورة:}$$

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

ومعادلة العمودي لهذا القطع عند النقطة (x_1, y_1) الواقعة عليه تكون بالصورة:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{a^2 x_1}{b^2 y_1}$$

المعادلات البارامتريّة للقطع الزائد

المعادلتان البارامتريتان للقطع الزائد الذي معادلته بالصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ هما: $x = a \sec \varphi$ ،

$y = b \tan \varphi$ ، لانه بحذف البارامتر φ بين المعادلتين ينتج أن: $\tan \varphi = \frac{y}{b}$ ، $\sec \varphi = \frac{x}{a}$ أي أن:

وكذلك يمكن تمثيل القطع الزائد باراً مترياً بالمعادلتين:
 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \sec^2 \varphi - \tan^2 \varphi = 1$
 ، أما المعادلات البارامتريّة للقطع الزائد القائم هي: $x = a \cosh \varphi$ ، $y = b \sinh \varphi$
 $x = ct$ ، $xy = c^2$ هي: $y = \frac{c}{t}$ ومعادلة المماس للقطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ عند النقطة $(a \sec \varphi, b \tan \varphi)$ الواقعة عليه تكون بالصورة:

$$\frac{x \sec \varphi}{a} - \frac{y \tan \varphi}{b} = 1$$

شرط تماس خط مستقيم لقطع زائد

بالتشابه مع حالة القطع الناقص نجد أن الشرط اللازم لكي يكون الخط المستقيم $y = mx + c$ مماساً للقطع الزائد الذي معادلته على الصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ هو أن يكون $c = \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$ ومعادلة المماس هي: $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$ وإحداثيات نقط التماس هي:

$$\left(\frac{-a^2 m}{\pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}}, \frac{-b^2}{\pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}} \right)$$

تمارين (٩-٣)

١) أوجد معادلة القطع الذي بؤرته النقطة (5-3) ودليلة الخط المستقيم الذي معادلته $x = -\frac{1}{5}$

واختلافه المركزي $e = \frac{5}{3}$. ثم استنتج صفاته الهندسية

٢) ارسم كلاً من القطاعات الزائده الاتية موضحا الصفات الهندسية:

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1 \quad \spadesuit$$

$$\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1 \quad \spadesuit$$

٣) ينقل محاور الإحداثيات إلى نقطة مناسبة استنتج أبسط صورة ممكنة للمعادلة المشتركة التي تمثل

$$x^2 - 4y^2 - 4x - 8y - 4 = 0$$

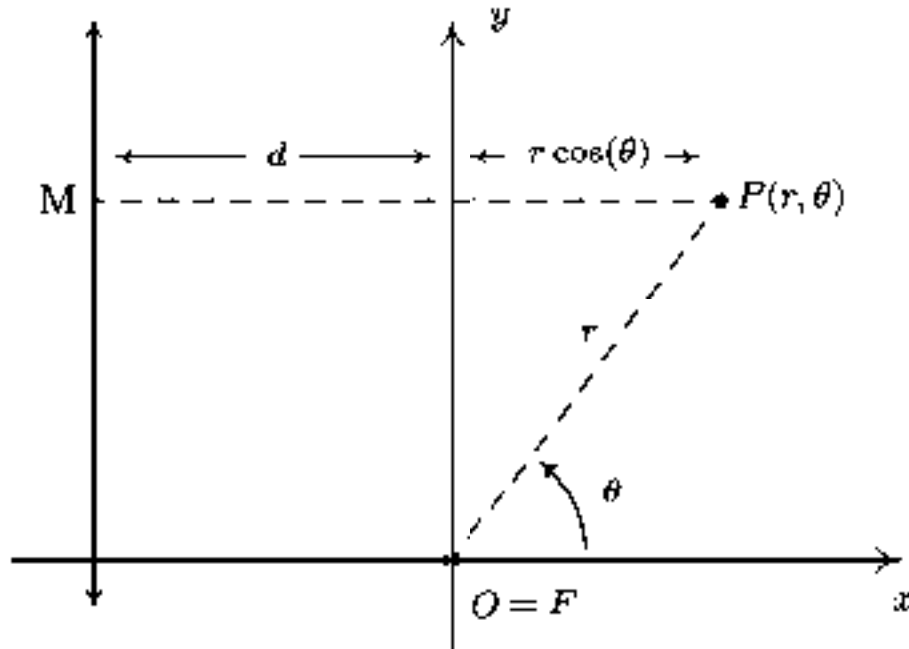
٤) أوجد معادلة القطع الزائد الذي اختلافه المركزي $e = 3$ ومركزه نقطة الأصل وبؤرتيه تقع علي

محور ox ويمر بالنقطة (2,4).

٥) أوجد معادلة المعاس والعمودي عند نهايتي الوتر اليؤري العمودي للقطع الزائد $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

رابعاً: المعادلة القطبية للقطاعات المخروطية

الهدف الآن هو اشتقاق المعادلة القطبية للقطاعات المخروطية وذلك بدلالة البؤرة والدليل. وبفرض أن البؤرة عند قطب الإحداثيات القطبية والدليل عمودي علي الخط القطبي (أو موازيا للخط القطبي). إذا كان الدليل موازيا للخط القطبي فإن موقع الدليل قد يكون أسفل أو علي من القطب أما إذا كان الدليل عمودي علي الخط القطبي فإن موقع الدليل قد يكون علي يمين أو علي يسار القطب وبالتالي توجد أربعة حالات مختلفة يمكن أخذها في الاعتبار. وهنا سوف نشق معادلة القطع المخروطي للحالة التي يكون فيها الدليل عموديا علي الخط القطبي ويقع علي يسار القطب، كما بالشكل المقابل:



إذا كانت $P(r, \theta)$ هي نقطة علي القطع المخروطي الذي اختلافه المركزي يساوي e فإنه يكون:

$$PF = ePM \quad (1)$$

ومن الشكل المقابل نجد أن:

$$PF = r, \quad PM = d + r \cos \theta$$

وبالتالي فإن المعادلة (1) يمكن كتابتها بالصورة:

$$r = e(d + r \cos \theta)$$

ومنها نجد أن:

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$$

وهذه المعادلة هي المعادلة العامة للقطاعات المخروطية في الإحداثيات القطبية ويختلف نوع القطع المخروطي الذي تمثله هذه المعادلة تبعاً لقيمة الاختلاف المركزي e أي أن هذه المعادلة تمثل:

(١) قطع مكافئ عندما يكون $e = 1$.

(٢) قطع ناقص عندما يكون $e < 1$.

(٣) قطع زائد عندما يكون $e > 1$.

وذلك علي النقيض من حالة الإحداثيات الكارتيزية والتي يكون فيها لكل قطع مخروطي معادلة تختلف عن بقية القطاعات المخروطية الأخرى. والحالات الثلاثة الأخرى للمعادلة القطبية للقطاعات المخروطية والتي تعتمد علي وضع الدليل بالنسبة القطب (البؤرة) والخط القطبي يمكن اشتقاقها بطريقة مشابهة. والمعادلات التي تمثل القطاعات المخروطية في هذه الحالات الأربعة تكون كما في النظرية التالية:

نظريته: في الإحداثيات القطبية القطع المخروطي الذي اختلافه المركزي e وبؤرته تنطبق علي القطب ودليله يبعد مسافة قدرها d عن البؤرة بحيث يكون عمودياً علي الخط القطبي (أو موازياً للخط القطبي) فإن معادلته تكون علي الصورة:

$$\diamond r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta} \text{ عندما يكون الدليل عمودي علي الخط القطبي و علي يمين القطب.}$$

$$\diamond r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta} \text{ عندما يكون الدليل عمودي علي الخط القطبي و علي يسار القطب.}$$

$$\diamond r = \frac{ed}{1 + e \sin \theta} \text{ عندما يكون الدليل موازياً للخط القطبي و اعلي القطب.}$$

$$\diamond r = \frac{ed}{1 - e \sin \theta} \text{ عندما يكون الدليل موازياً للخط القطبي و أسفل القطب.}$$

وهذا يعني أن المعادلتين $r = \frac{ed}{1 \pm e \cos \theta}$ هي معادلات قطبية للقطاعات المخروطية عندما يكون الدليل عمودياً علي الخط القطبي أي عندما يكون الدليل موازياً لمحور oy (والخط القطبي ينطبق علي محور ox). وبالمثل تكون المعادلتين $r = \frac{ed}{1 \pm e \sin \theta}$ هي معادلات قطبية للقطاعات المخروطية عندما يكون

الدليل موازيا للخط القطبي أي عندما يكون الدليل موازيا لمحور ox (الخط القطبي ينطبق على محور ox).

ملحوظة: في أي من القطاعات المخروطية (الكافئ والناقص والزائد) يمكن إثبات بسهولة أن البعد بين البؤرة والدليل والاختلاف المركزي يرتبطان بالعلاقة $d = \frac{\lambda}{e}$ حيث أن λ هي نصف طول الوتر البؤري العمودي للقطع المخروطي، d هي البعد بين البؤرة والدليل، e هو الاختلاف المركزي، أي أن $\lambda = ed$ وبالتالي نلاحظ أن:

$$\diamond \text{ للقطع الكافئ يكون } ed = 2a$$

$$\diamond \text{ للقطع الناقص والزائد يكون } ed = \frac{b^2}{a}$$

المعادلة القطبية للقطع الكافئ: في حالة القطع الكافئ نلاحظ أن الاختلاف المركزي $e = 1$ وبعد البؤرة عن الدليل يساوي $d = 2a$ وبالتالي فإن المعادلة القطبية للقطع الكافئ تكون:

$$\diamond r = \frac{2a}{1 \pm \cos \theta} \text{ عندما يكون الدليل عمودي على الخط القطبي.}$$

$$\diamond r = \frac{2a}{1 \pm \sin \theta} \text{ عندما يكون الدليل موازيا للخط القطبي.}$$

المعادلة القطبية للقطع الناقص: في حالة القطع الناقص نلاحظ أن الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} < 1$ ونصف طول الوتر البؤري العمودي يساوي $ed = \frac{b^2}{a}$ وبالتالي فإن المعادلة القطبية للقطع الناقص تكون بالصورة:

$$\diamond r = \frac{b^2}{a(1 \pm e \cos \theta)} \text{ عندما يكون الدليل عمودي على الخط القطبي.}$$

$$\diamond r = \frac{b^2}{a(1 \pm e \sin \theta)} \text{ عندما يكون الدليل موازيا للخط القطبي.}$$

المعادلة القطبية للقطع الزائد: في حالة القطع الزائد نلاحظ أن الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} > 1$ ونصف طول الوتر البؤري العمودي يساوي $ed = \frac{b^2}{a}$ وبالتالي فإن المعادلة القطبية للقطع الزائد تكون:

$$\diamond r = \frac{b^2}{a(1 \pm e \cos \theta)} \text{ عندما يكون الدليل عمودي على الخط القطبي.}$$

تمرين (٩-٤)

١) بين نوع القطع المخروطي الذي تمثله كلا من المعادلات القطبية الآتية واوجد اختلافه المركزي وطول الوتر البيوري العمودي ومعادلة دليته وصورته القياسية

$$.r = \frac{2}{1 - \cos \theta} \quad \blacklozenge$$

$$.r = \frac{3}{2 - \cos \theta} \quad \blacklozenge$$

$$.r = \frac{4}{1 + 3 \cos \theta} \quad \blacklozenge$$

$$.r = \frac{3}{2 + \sin \theta} \quad \blacklozenge$$

$$.r = \frac{2}{1 + \sin \theta} \quad \blacklozenge$$

$$.r = \frac{2}{1 - 2 \sin \theta} \quad \blacklozenge$$

٢) أوجد طول الوتر البيوري العمودي وإحداثيات الرأس للقطع المكافئ الذي معادلته

$$.r = \frac{12}{5 - 5 \sin \theta}$$

٣) أوجد المعادلة القطبية للقطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

$$L_1 : y = m_1x , L_2 : y = m_2x.$$

وهما خطين مستقيمين يمران بنقطة الأصل أي أن:

$$\left(\frac{a}{b}\right)x^2 + \left(\frac{2h}{b}\right)xy + y^2 = (y - m_1x)(y - m_2x) = 0$$

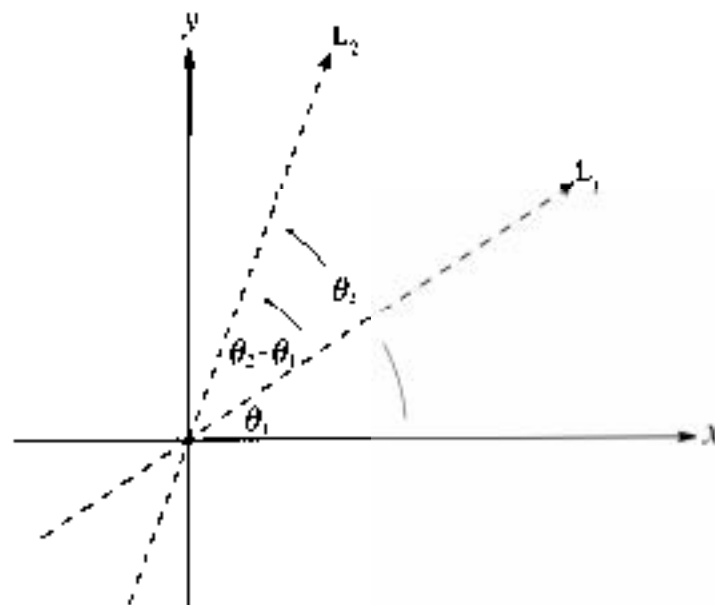
أي أن:

$$\left(\frac{a}{b}\right)x^2 + \left(\frac{2h}{b}\right)xy + y^2 = y^2 - (m_1 + m_2)xy + (m_1m_2)x^2$$

وبمساواة معاملات xy , x^2 في الطرفين نحصل علي:

$$m_1m_2 = \frac{a}{b}, \quad -(m_1 + m_2) = \frac{2h}{b}.$$

وإذا كانت θ هي الزاوية بين الخطين المستقيمين (كما بالشكل المقابل) فإن:



$$\tan \theta = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2} = \frac{\sqrt{(m_1 - m_2)^2}}{1 + m_1m_2} = \frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2}}{1 + m_1m_2}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sqrt{\left(-\frac{2h}{b}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{b}\right)}}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}.$$

وبالتالي فإن الزاوية بين الخطين المستقيمين المثلين بالمعادلة المتجانسة من الدرجة الثانية تتعين من

العلاقة:

ولكي تصبح المعادلة المعطاة خالية من حدود الدرجة الأولى يجب أن يكون معامل $X=0$ ، معامل $0=Y$ بوضع معامل $X=0$ ، معامل $0=Y$ نحصل علي المعادلتين:

$$y_1 - 4x_1 - 5 = 0, \quad 2y_1 + x_1 - 1 = 0,$$

وهما معادلتين في مجهولين x_1, y_1 وبحلها معاً نجد أن إحداثيات النقطة المطلوبة هي $(-1, 1)$. وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد أن:

$$(Y+1)^2 + (X-1)(Y+1) - 2(X-1)^2 - 5(X-1) - (Y+1) - 2 = 0$$

وبالفك والاختصار نجد أن هذه المعادلة تصبح بالصورة: $Y^2 + XY - 2X^2 = 0$ وهي تمثل المعادلة المتجانسة للمعادلة الأصلية ولكنها بدلالة الإحداثيات الجديدة، وهي المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين مارين بالنقطة $(-1, 1)$ والتي تمثل نقطة أصل محاور الإحداثيات الجديدة وبالتالي تكون المعادلة المعطاة تمثل المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين مارين بالنقطة $(-1, 1)$ (نقطة تقاطعها) ويمكن الحصول علي معادلتَي الخطين المستقيمين بدلالة الإحداثيات الأصلية كالآتي: بتحليل المعادلة المتجانسة بدلالة الإحداثيات الجديدة نحصل علي: $(Y+2X)(Y-X)=0$ ومنها نجد أن معادلتَي الخطين المستقيمين بالنسبة للمحاور الجديدة هما:

$$Y+2X=0, \quad Y-X=0$$

وبتطبيق معادلات التحويل بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة والتي علي الصورة:

$$X=x+1, \quad Y=y-1.$$

نحصل علي معادلتَي الخطين المستقيمين المثلين بالمعادلة المعطاة بالنسبة للإحداثيات الأصلية بالصورة:

$$y-1+2(x+1)=0 \Rightarrow y+2x+1=0, \quad y-1-(x+1)=0 \Rightarrow y-x-2=0$$

ويحل معادلتَي الخطين المستقيمين معاً جبرياً نجد أن نقطة تقاطعها هي النقطة $(-1, 1)$ وهي نفس النقطة التي تم نقل محاور الإحداثيات إليها. والزاوية بين الخطين المستقيمين تتعين من العلاقة:

تمارين (١٠)

(١) ينقل نقطة الأصل إلى نقطة مناسبة برهن أن كلاً من المعادلات الآتية تمثل المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين وأوجدتهما:

$$.y^2 + xy - 2x^2 - 5x - y - 2 = 0 \quad \checkmark$$

$$.2x^2 - xy - 3y^2 - 7x + 8y + 3 = 0 \quad \checkmark$$

$$.3x^2 + 2xy - y^2 + x - 3y - 2 = 0 \quad \checkmark$$

$$.2x^2 - 13xy - 7y^2 + x + 23y - 6 = 0 \quad \checkmark$$

$$.x^3 - y^3 + x - y = 0 \quad \checkmark$$

(٢) بنقل محاور الإحداثيات إلى نقطة مناسبة استنتج معادلتين الخطين المستقيمين المثلين بالمعادلة المشتركة $y^2 + xy - 2x^2 - 5x - y - 2 = 0$ وأوجد الزاوية بينهما.