محاضـــــــــــــرات في

بحتة (٥) "نظرية المعادلات الجبرية"

لطلاب الفرقة الثانية بكلية التربية

إعداد

الدكتور/ محمد السيد أحمد العاطون

عضو هيئة التدريس بقسم الرياضيات - كلية العلوم بقنا

العام الجامعي: ٢٠٢٠-٢٠٢١م

الباب الأول

نظريه المعادلات الجبرية

مفهوم كثيرة حدود

تعريف: التعبير الجبري الذي علي الصورة:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$$

يسمي كثيرة حدود من الدرجة n في المتغير x حيث أن $a_0 \neq 0$ ، $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ هي عوامل كثيرة الحدود وجميعها أعداد حقيقية أو مركبة، n عدد صحيح غير سالب.

وعادة ما تستخدم الرموز $f(x)$ ، $p(x)$ التعبير عن كثيرات الحدود. ويقال أن $p(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n وتكتب علي الصورة:

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n .$$

مفهوم المعادلة الجبرية

تعريف: لتكن $p(x)$ كثرة حدود من الدرجة $n \geq 1$ ، فإن التعبير الجبري $p(x) = 0$ يسمي معادلة جبرية من الدرجة $n \geq 1$.

ويكون هذا التعبير معادلة جبرية من الدرجة الأولي عندما $n = 1$ ، ومعادلة جبرية من الدرجة الثانية عندما $n = 2$ ، ومعادلة جبرية من الدرجة الثالثة عندما $n = 3$ ، ...وهكذا.

العمليات الجبرية على كثيرات الحدود

تساوي كثيرات الحدود:

كثيرتي الحدود $f(x)$ ، $g(x)$ من الدرجة $n \geq 1$ تكون متساويتان إذا تساوت عوامل متغيراتها المرفوعة لنفس القوي.

مجموع (أو الفرق بين) كثيرتي حدود

مجموع (الفرق بين) كثيرتي حدود $f(x)$ ، $g(x)$ هو كثيرة حدود أيضا عواملها تساوي مجموع (الفرق بين) عوامل كثيرتي الحدود $f(x)$ ، $g(x)$ المرفوعة لنفس القوي. فمثلا: إذا كانت:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 1,$$

$$g(x) = x^2 + 1$$

فإن:

$$h(x) = f(x) + g(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2,$$
$$k(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 5x^2 + x$$

عملية ضرب كثيرات الحدود

حاصل ضرب أي كثيرتي حدود $f(x)$ ، $g(x)$ هو كثيرة حدود أيضا درجتها تساوي مجموع درجتي كثيرات الحدود $f(x)$ ، $g(x)$. فمثلا: إذا كانت:

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 5,$$

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$$

فإن:

$$\begin{aligned} L(x) &= f(x).g(x) \\ &= (2x^2 - 5x + 5)(x^3 - 3x^2 + 2x - 5) \\ &= 2x^5 - 11x^4 + 22x^3 - 29x^2 + 31x - 15 \end{aligned}$$

قسمة كثيرات الحدود:

في المراحل قبل الجامعية تعرف الطالب علي طريقة القسمة المطولة لكثيرات الحدود، وبصفة عامة ليس من الممكن دائما قسمة كثيرة حدود علي أخري بدون باقي. فمثلا: قسمة $p(x) = 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 7x + 3$ علي $g(x) = x + 2$ تكون كالآتي:

$$
\begin{array}{r}
3x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 1 \\
x+2 \overline{\big)\; 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 \qquad + 7x + 3} \\
-3x^5 - 6x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \\
\hline
-x^4 - 4x^3 \qquad\qquad\qquad \\
x^4 + 2x^3 \qquad\qquad\qquad \\
\hline
-2x^3 \qquad\qquad\qquad \\
2x^3 + 4x^2 \qquad\qquad \\
\hline
4x^2 + 7x \qquad \\
-4x^2 - 8x \qquad \\
\hline
-x + 3 \\
x + 2 \\
\hline
5
\end{array}
$$

وبذلك يكون خارج القسمة هو كثيرة الحدود:

$$q(x) = 3x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 1$$

والباقي يساوي 5. وبالتالي نجد أن كثيرة الحدود المعطاة يمكن كتابتها علي الصورة:

$$p(x) = (x+2)q(x) + 5 \; .$$

نظرية: لتكن $p(x)$ ، $g(x)$ كثيرتي حدود من درجة $n \geq 1$ ، $m \geq 1$ علي الترتيب حيث أن $g(x) \neq 0$ ، $n \geq m$ فإنه ينتج عن قسمة $p(x)$ على $g(x)$ كثيرتي حدود $q(x)$ ، $r(x)$ بحيث أن: $p(x) = g(x)q(x) + r(x)$ حيث $q(x)$ ، $r(x)$ يتعينان بشكل وحيد. وتكون درجة كثيرة الحدود $r(x)$ أصغر من درجة كثيرة الحدود $g(x)$.

ملحوظة: في النظرية السابقة تسمي كثيرة الحدود $p(x)$ بالمقسوم و كثير الحدود $g(x)$ بالمقسوم عليه و كثيرة الحدود $q(x)$ بحاصل القسمة و كثيرة الحدود $r(x)$ هي باقي القسمة. وإذا كانت $r(x) = 0$ يقال أن كثيرة الحدود $p(x)$ تقبل القسمة علي $g(x)$ بدون باقي ومن ثم يكون: $p(x) = g(x)q(x)$ ويقال في هذه الحالة أن $g(x)$ تقسم $p(x)$ وأن $g(x)$ ، $q(x)$ عوامل لكثيرة الحدود $p(x)$ وبالتالي تكون كثيرة الحدود $p(x)$ قابلة للتحليل.

طريقة القسمة التركيبة (طريقة هورنر أو طريقة القسمة التحليلية)

نعلم أنة عند قسمة كثيرة الحدود $p(x)$ من درجة $n \geq 1$ علي $x-c$ فأنة ينتج بصفة عامة خارج قسمة هو كثيرة حدود $q(x)$ من درجة $n-1$ وباقي قسمة (عدد ثابت) أي أن:

$$p(x) = (x-c)q(x) + r$$

وإذا كانت $p(x)$ هي كثيرة حدود من درجة $n \geq 1$ بالصورة:

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \text{ ،}$$

وبفرض أن خارج القسمة هو كثيرة حدود علي الصورة:

$$q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

وبالتالي يكون:

$$\begin{aligned}
p(x) &= q(x)(x-c) + r \\
&= (x-c)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + r \\
&= x(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) - c(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + r \\
&= b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x - c(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + r \\
&= b_0x^n + (b_1 - cb_0)x^{n-1} + (b_2 - cb_1)x^{n-2} + \ldots + (b_{n-1} - cb_{n-2})x + r - cb_{n-1}
\end{aligned}$$

فالمطلوب الآن هو تعيين b_0 ، b_1 ، ... ، b_{n-1} ، r.

وحيث أن العلاقة السابقة متطابقة ، فإنه يمكن أن نقارن معاملات قوي x المختلفة في طرفي هذه المتطابقة كالتالي:

بمقارنة معاملات x^n في الطرفين نجد أن:

$$a_0 = b_0,$$

بمقارنة معاملات x^{n-1} في الطرفين نجد أن:

$$a_1 = b_1 - cb_0 \Rightarrow b_1 = a_1 + cb_0,$$

وبمقارنة معاملات x^{n-2} في الطرفين نجد أن:

$$a_2 = b_2 - cb_1 \Rightarrow b_2 = a_2 + cb_1$$

وهكذا...،

وبمقارنة معاملات x^{n-r} في الطرفين نجد أن:

$$a_r = b_r - cb_{r-1} \Rightarrow b_r = a_r + cb_{r-1}$$

وهكذا حتى نصل إلي مقارنة معاملات x،

$$a_{n-1} = b_{n-1} - cb_{n-2} \Rightarrow b_{n-1} = a_{n-1} + cb_{n-2}$$

ومقارنة الحد المطلق في الطرفين فنجد أن

$$a_n = r - cb_{n-1} \Rightarrow r = a_n + cb_{n-1}$$

وهذه الخطوات يمكن ترتيبها في الجدول التالي:

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ c & \downarrow & cb_0 & cb_1 & \cdots & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\ \hline & b_0 = a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & r \end{array}$$

وفي هذه الحالة يكون خارج القسمة هو كثيرة حدود علي الصورة:

$$q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2} x + b_{n-1}$$

ويكون الباقي هو $r = a_n + cb_{n-1}$. وتعرف هذه الطريقة بطريقة القسمة التركيبية وهي طريقة سريعة لقسمة كثيرات الحدود.

مثال (١): أوجد خارج القسمة والباقي عند قسمة: $p(x) = 2x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 4$ علي $x - 3$.

الحـــــــــــــــــل

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -8 & 5 & 0 & 4 \\ 3 & \downarrow & 6 & -6 & -3 & -9 \\ \hline & 2 & -2 & -1 & -3 & -5 \end{array}$$

أي أن كثيرة الحدود المعطاة يمكن التعبير عنها بالصورة:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 4 \\ &= (x-3)(2x^3 - 2x^2 - x - 3) - 5 \\ &= (x-3)q(x) + r \end{aligned}$$

حيث أن خارج القسمة هو كثيرة الحدود:

$$q(x) = 2x^3 - 2x^2 - x - 3$$

والباقي هو $r = -5$.

مثال (٢): أوجد خارج القسمة والباقي عند قسمة $p(x) = 2x^4 + 3x^3 + 8x - 11$ علي $x+3$.

الحــــــــــــــــل

$$\begin{array}{c|ccccc} -3 & 2 & 3 & 0 & 8 & -11 \\ & \downarrow & -6 & 9 & -27 & 57 \\ \hline & 2 & -3 & 9 & -19 & 46 \end{array}$$

أي أن كثيرة الحدود المعطاة يمكن كتابتها الصورة:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 4 \\ &= (x+3)(2x^3 - 3x^2 + 9x - 19) + 46 \\ &= (x+3)q(x) + r \end{aligned}$$

حيث أن خارج القسمة هو كثيرة الحدود:

$$q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 19$$

والباقي هو $r = 46$.

ملحوظة (١): إذا كنا نقسم كثيرة الحدود $p(x)$ من درجة $n \geq 1$ علي $(x-a)(x-b)$ فإننا نقسم أولا –مثلا– علي $(x-a)$ فنحصل علي:

$$p(x) = (x-a)q_1(x) + r_1$$

حيث $q_1(x)$ كثيرة حدود من درجة $n-1$ ثم نقسم $q_1(x)$ علي $(x-b)$ فنحصل علي:

$$q_1(x) = (x-b)q_2(x) + r_2$$

حيث $q_2(x)$ كثيرة حدود من درجة $n-2$ وبالتالي يكون لدينا:

$$\begin{aligned} p(x) &= \big((x-b)q_2(x) + r_2\big)(x-a) + r_1 \\ &= (x-b)(x-a)q_2(x) + r_2(x-a) + r_1 \end{aligned}$$

أي أن خارج القسمة هو $q_2(x)$ من درجة $n-2$، وباقي القسمة هو $r_2(x-a)+r_1$ من الدرجة الأولي.

وبالتكرار فإنه بقسمة $q_2(x)$ علي $(x-c)$ نحصل علي:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-a)(x-b)\big((x-c)q_3(x) + r_3\big) + r_2(x-a) + r_1 \\ &= (x-a)(x-b)(x-c)q_3(x) + r_3(x-a)(x-b) + r_2(x-a) + r_1 \end{aligned}$$

حيث $q(x)$ كثيرة حدود من درجة $n-3$، وباقي القسمة هو:

$$r_3(x-a)(x-b) + r_2(x-a) + r_1$$

وهو يمثل كثيرة حدود من الدرجة الثانية. ويمكن تكرار هذه العملية.

مثال (٣): أوجد خارج القسمة والباقي عند قسمة $p(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ علي $(x-2)(x+5)$.

الحــــــــــــــل

سنقسم أولا علي $x-2$، ثم نقسم خارج القسمة علي $x+5$ كالآتي:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 2 & \downarrow & 4 & 2 & 12 & 14 \\ \hline & 2 & 1 & 6 & 7 & 20 \end{array}$$

أي أن كثيرة الحدود المعطاة يمكن كتابتها الصورة:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \\ &= (x-2)(2x^3 + x^2 + 6x + 7) + 20 \\ &= (x-2)q_1(x) + r_1 \end{aligned}$$

حيث أن خارج القسمة هو كثيرة الحدود:

$$q_1(x) = 2x^3 + x^2 + 6x + 7$$

والباقي هو $r_1 = 20$.

والآن نقسم خارج القسمة $q_1(x) = 2x^3 + x^2 + 6x + 7$ علي $x+5$ كالآتي:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & 6 & 7 \\ -5 & \downarrow & -10 & 45 & -255 \\ \hline & 2 & -9 & 51 & -248 \end{array}$$

أي أن كثيرة الحدود: $q_1(x) = 2x^3 + x^2 + 6x + 7$ يمكن كتابتها بالصورة:

$$\begin{aligned} q_1(x) &= 2x^3 + x^2 + 6x + 7 \\ &= (x+5)(2x^2 - 9x + 51) - 248 \\ &= (x+5)q_2(x) + r_2 \end{aligned}$$

حيث أن خارج القسمة هو كثيرة الحدود:

$$q_2(x) = 2x^2 - 9x + 51$$

والباقي هو $r_2 = -248$.

ومن ثم فإن كثيرة الحدود المعطاة يمكن التعبير عنها بالصورة:

$$p(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6=(x-2)q_1(x)+r_1$$
$$=(x-2)(2x^3+x^2+6x+7)+20=(x-2)\big((x+5)q_2(x)+r_2\big)+20$$
$$=(x-2)\big((x+5)(2x^2-9x+51)-248\big)+20$$
$$=(x-2)(x+5)(2x^2-9x+51)-248(x-2)+20$$
$$=(x-2)(x+5)q_2(x)+r(x)$$

وبالتالي يكون خارج القسمة عند قسمة كثيرة الحدود المعطاة علي $(x-2)(x+5)$ هو:

$$q_2(x)=2x^2-9x+51$$

وباقي القسمة هو كثيرة الحدود:

$$r(x)=-248(x-2)+20$$

ملحوظة (٢): إذا كنا نقسم كثيرة الحدود $f(x)$ علي $ax+b$ ،حيث $a\neq 0$ ، فإننا نكتب:

$$f(x)=q(x)\ (ax+b)+r=a\,q(x)\ \left(x+\frac{b}{a}\right)+r$$

وبالتالي فإننا نجري القسمة علي $x+\dfrac{b}{a}$ مع مراعاة أن خارج القسمة المطلوب هو خارج القسمة الذي حصلنا عليه مقسوما علي a .

كذلك يمكننا أن نكتب :

$$\frac{1}{a}f(x)=q(x)\ \left(x+\frac{b}{a}\right)+\frac{r}{a}$$

أي أننا في هذه الحالة نقسم $\dfrac{1}{a}f(x)$ علي $x+\dfrac{b}{a}$ مع مراعاة أن باقي القسمة المطلوب هو باقي القسمة الذي حصلنا عليه مضروبا في a .

مثال (٤): أوجد بطريقتين خارج القسمة والباقي عند قسمة $p(x)=2x^5-5x^4+7x^3+28x^2-63x+23$ علي $2x-3$.

الحـــــــــــــــل

الطريقة الأولي: سنقسم كثيرة الحدود علي $x-\frac{3}{2}$ كالآتي:

$$\begin{array}{c|cccccc} \frac{3}{2} & 2 & -5 & 7 & 28 & -63 & 23 \\ & \downarrow & 3 & -3 & 6 & 51 & -18 \\ \hline & 2 & -2 & 4 & 34 & -12 & 5 \end{array}$$

أي أن كثيرة الحدود المعطاة يمكن كتابتها الصورة:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^5-5x^4+7x^3+28x^2-63x+23 \\ &= (x-\frac{3}{2})(2x^4-2x^3+4x^2+34x-12)+5 \\ &= 2(x-\frac{3}{2})(x^4-x^3+2x^2+17x-6)+5 \\ &= (2x-3)(x^4-x^3+2x^2+17x-6)+5 \\ &= (2x-3)q(x)+r \end{aligned}$$

حيث أن خارج القسمة هو:

$$q(x)=x^4-x^3+2x^2+17x-6$$

والباقي هو $r=5$.

الطريقة الثانية: سنقسم هنا $\frac{1}{2}p(x)$ علي $x-\frac{3}{2}$ كالآتي:

$$\begin{array}{c|cccccc} \frac{3}{2} & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 14 & -\frac{63}{2} & \frac{23}{2} \\ & \downarrow & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 3 & \frac{51}{2} & -\frac{18}{2} \\ \hline & 1 & -1 & 2 & 17 & -6 & \frac{5}{2} \end{array}$$

أي أن كثيرة الحدود $\frac{1}{2}p(x)$ يمكن التعبير عنها بالصورة:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}p(x) &= x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{7}{2}x^3+14x^2-\frac{63}{2}x+\frac{23}{2} \\ &= \left(x-\frac{3}{2}\right)(x^4-x^3+2x^2+17x-6)+\frac{5}{2} \end{aligned}$$

وبضرب طرفي المعادلة السابقة في "2" نجد أن كثيرة الحدود المعطاة يمكن كتابتها بالصورة:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2\left(x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{7}{2}x^3 + 14x^2 - \frac{63}{2}x + \frac{23}{2}\right) \\ &= 2\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)(x^4 - x^3 + 2x^2 + 17x - 6) + \frac{5}{2}\right) \\ &= (2x-3)(x^4 - x^3 + 2x^2 + 17x - 6) + 5 \\ &= (2x-3)q(x) + 5 \end{aligned}$$

حيث أن خارج القسمة هو:

$$q(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 17x - 6$$

والباقي هو $r = 5$.

تحويل معادله إلى معادله أخرى جذورها تنقص(أو تزيد) عن جذور معادله معلومة:

ليكن لدينا المعادلة الجبرية $p(x) = 0$ من درجة $n \geq 1$ حيث أن:

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

والمطلوب هو تحويل المعادلة $p(x) = 0$ إلي معادلة أخري $f(x) = 0$ من درجة $n \geq 1$ بحيث ينقص كل جذر من جذورها عن الجذر المناظر له في المعادلة $p(x) = 0$ بمقدار ثابت α.

بفرض أن x هو احد جذور المعادلة $p(x) = 0$ و أن y هو الجذر المناظر له في المعادلة المطلوبة $f(x) = 0$ فيكون $y = x - \alpha$ أي أن $x = y + \alpha$ وبذلك تكون المعادلة المطلوبة علي الصورة $p(y + \alpha) = 0$ حيث أن:

$$f(y) = p(y+\alpha) = a_0(y+\alpha)^n + a_1(y+\alpha)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(y+\alpha) + a_n \qquad (2)$$

واضح أن المعادلة $p(y + \alpha) = 0$ بعد إعادة ترتيب حدودها يمكن التعبير عنها بالصورة:

$$f(y) = p(y+\alpha) = b_0y^n + b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2} + \cdots + b_{n-1}y + b_n = 0 \qquad (3)$$

حيث أن $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n$ هي العاملات المطلوب تعينها.

وبالتعويض عن $y=x-\alpha$ في (٣) نجد أن كثيرة الحدود $p(x)$ يمكن التعبير عنها بالصورة:

$$p(x)=f(x-\alpha)=b_0(x-\alpha)^n+b_1(x-\alpha)^{n-1}+\cdots+b_{n-1}(x-\alpha)+b_n \tag{4}$$

وبقسمه $p(x)$ على $x-\alpha$ نجد أن خارج القسمة يكون كثيرة حدود بالصورة:

$$q(x)=b_0(x-\alpha)^{n-1}+b_1(x-\alpha)^{n-2}+b_2(x-\alpha)^{n-3}+\cdots+b_{n-1}$$

ويكون الباقي هو b_n، أي أن b_n هو الباقي عند قسمه $p(x)$ على $x-\alpha$ وكذلك يكون b_{n-1} هو الباقي عند قسمه $q(x)$ على $x-\alpha$، وهكذا ... ويمكن إجراء عمليات القسمة المتتالية بالطريقة التحليلية. وبطريقه مماثله إذا كان المطلوب إيجاد معادله يزيد كل جذر من جذورها بمقدار ثابت α عن الجذر المناظر له في المعادلة الجبرية $p(x)=0$.

ملحوظة (٣): المعادلة (٤) تمثل تعبير جبري لكثيرة الحدود $p(x)$ بدلالة قوي الفروق أي وضع كثيرة الحدود $p(x)$ علي الصورة: $f(x-\alpha)$ بحيث أن $p(x)=f(x-\alpha)$ وهي تكافئ إيجاد كثيرة الحدود $p(x+\alpha)$.

مثال (٥): عبر بدلالة قوي y حيث $y=x-2$ عن كثيرة الحدود $p(x)$ حيث أن:

$$p(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$$

الحــــــــــــل

واضح أن كثيرة الحدود في y ستكون كذلك من الدرجة الرابعة، وإذا قسمنا $f(x)$ علي $x-2$ سينتج خارج قسمة من الدرجة الثالثة وباقي قسمة، وبتكرار قسمة خارج القسمة ثلاث مرات أخري يكون لدينا خارج قسمة وهو عدد ثابت، وباقي قسمة هو أيضا عدد ثابت، ونكون قد انتهينا من التعبير عن $f(x)$ بدلالة قوي $x-2$، أي بدلالة y والآن ننفذ هذا الإجراء كالآتي:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 2 & \downarrow & 4 & 2 & 12 & 14 \\ \hline & 2 & 1 & 6 & 7 & 20 \end{array}$$

أي أن:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \\ &= (x-2)(2x^3 + x^2 + 6x + 7) + 20 \\ &= (x-2)q(x) + r \qquad (1) \end{aligned}$$

والآن نكرر قسمة خارج القسمة $q(x) = 2x^3 + x^2 + 6x + 7$ علي $x-2$ كالآتي:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & 6 & 7 \\ 2 & \downarrow & 4 & 10 & 32 \\ \hline & 2 & 5 & 16 & 39 \end{array}$$

فيكون:

$$2x^3 + x^2 + 6x + 7 = (x-2)(2x^2 + 5x + 16) + 39 \qquad (2)$$

ومرة ثالثة:

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 5 & 16 \\ 2 & \downarrow & 4 & 18 \\ \hline & 2 & 9 & 34 \end{array}$$

أي أن:

$$2x^2 + 5x + 16 = (x-2)(2x+9) + 34 \qquad (3)$$

وأخيرا نقسم $2x+9$ علي $x-2$ كالآتي:

$$\begin{array}{r|rr} & 2 & 9 \\ 2 & \downarrow & 4 \\ \hline & 2 & 13 \end{array}$$

أي أن:

$$2x + 9 = 2(x-2) + 13 \qquad (4)$$

من (1) ، (2) ، (3) ، (4) لدينا:

$$2x^4-3x^3+4x^2-5x+6=(x-2)(2x^3+x^2+6x+7)+20$$
$$=(x-2)\left[(x-2)(2x^2+5x+16)+39\right]+20$$
$$=(x-2)\left[(x-2)(x-2)(2x+9)+34)+39\right]+20$$
$$=(x-2)\left[(x-2)\big((x-2)(2(x-2)+13)+34\big)+39\right]+20$$

وبوضع $y=x-2$ نجد أن:

$$p(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$$
$$=y\left[y\big(y(2y+13)+34\big)+39\right]+20$$
$$=2y^4+13y^3+34y^2+39y+20$$
$$=2(x-2)^4+13(x-2)^3+34(x-2)^2+39(x-2)+20$$

ويمكننا أن نؤدي هذه الخطوات باختصار كما هو موضح في الجدول التالي:

2	2	−3	4	−5	6
		4	2	12	14
2	2	1	6	7	20
		4	10	32	
2	2	5	16	39	
		4	18		
2	2	9	34		
		4			
	2	13			

وتكون

$$f(x)=2x^4+13x^3+34x^2+39x+20$$
$$=p(x+2)$$
$$=2(x+2)^4-3(x+2)^3+4(x+2)^2-5(x+2)+6$$

هي كثيرة الحدود التي جذورها تنقص بمقدار 2عن جذور كثيرة الحدود المعطاة. وكذلك يمكن التعبير عن كثيرة الحدود المعطاة بالصورة:

$$p(x)=f(x-2)$$
$$=2(x-2)^4+13(x-2)^3+34(x-2)^2+39(x-2)+20$$

ملحوظة: طلب هذا التعبير يتكافأ تماما مع طلب إيجاد كثيرة الحدود التي جذورها تنقص عن جذور كثيرة الحدود المعطاة بـمقدار 2 والتي تكافئ إيجاد كثيرة الحدود $p(x+2)$.

مثال (٦): أوجد كثيرة الحدود التي تزيد جذورها بمقدار"2" عن جذور كثيرة الحدود $p(x)$ حيث أن: $p(x)=x^4+6x^3+12x^2+11x+1$.

الحــــــــــــــل

سنجري الطريقة السابقة مع مراعاة الزيادة في الجذور بدلا من النقص فيها وذلك كالآتي:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 6 & 12 & 11 & 1 \\ -2 & \downarrow & -2 & -8 & -8 & -6 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 3 & -5 \end{array}$$

أي أن:

$$x^4+6x^3+12x^2+11x+1=(x+2)(x^3+4x^2+4x+3)-5 \qquad (1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 4 & 3 \\ -2 & \downarrow & -2 & -4 & 0 \\ \hline & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}$$

أي أن:

$$x^3+4x^2+4x+3=(x+2)(x^2+2x)+3 \qquad (2)$$

$$\begin{array}{r|rr} & 1 & 2 \\ -2 & \downarrow & -2 \\ \hline & 1 & 0 \end{array}$$

أي أن:

$$x^2+2x=(x+2)(x+0) \qquad (3)$$

$$\begin{array}{r|rr} & 1 & 0 \\ -2 & \downarrow & -2 \\ \hline & 1 & -2 \end{array}$$

أي أن:

$$x = 1.(x+2) - 2 \qquad (4)$$

من (1) ، (2) ، (3) ، (4) ينتج أن:

$$\begin{aligned} x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 11x + 1 &= (x+2)(x^3 + 4x^2 + 4x + 3) - 5 \\ &= (x+2)\left[(x+2)(x^2 + 2x) + 3\right] - 5 \\ &= (x+2)\left[(x+2)\left((x+2)x + 0\right) + 3\right] - 5 \\ &= (x+2)\left[(x+2)\left((x+2)((x+2) - 2) + 0\right) + 3\right] - 5 \end{aligned}$$

وبوضع $y = x + 2$ نحصل علي:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 11x + 1 \\ &= y\left[y\left(y(y-2) + 0\right) + 3\right] - 5 \\ &= y^4 - 2y^3 + 3y - 5 \\ &= (x+2)^4 - 2(x+2)^3 + 3(x+2) - 5 \end{aligned}$$

وتكون

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 2x^3 + 3x - 5 \\ &= p(x-2) \\ &= (x-2)^4 + 6(x-2)^3 + 12(x-2)^2 + 11(x-2) + 1 \end{aligned}$$

هي كثيرة الحدود التي جذورها تزيد بمقدار 2 عن جذور كثيرة الحدود المعطاة. في هذه الحالة يمكن التعبير عن كثيرة الحدود المعطاة بالصورة:

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x+2) \\ &= (x+2)^4 - 2(x+2)^3 + 3(x+2) - 5 \end{aligned}$$

ويمكننا أن نؤدي هذه الخطوات باختصار كما هو موضح في الجدول التالي:

-2	1	6	12	11	1
		-2	-8	-8	-6
-2	1	4	4	3	-5
		-2	-4	0	
-2	1	2	0	3	
		-2	0		
-2	1	0	0		
		-2			
	1	-2			

ملحوظة (٤): المثال السابق يتكافأ تماما مع طلب التعبير عن كثيرة الحدود $p(x)$ بدلالة قوي y حيث $y = x+2$ والتي تكافئ إيجاد كثيرة الحدود $p(x-2)$.

مثال (٧) : أوجد كثيرة الحدود التي تنقص جذورها بمقدار "2"عن جذور كثيرة الحدود $p(x)$ حيث أن: $p(x) = x^3 - 2x - 5$

الحــــــــــــل

واضح أن كثيرة الحدود المعطاة من الدرجة الثالثة، وإذا قسمنا $p(x)$ علي $x-2$ سينتج خارج قسمة من الدرجة الثانية وباقي قسمة، وبتكرار قسمة خارج القسمة مرتين متتاليتين يكون لدينا خارج قسمة وهو عدد ثابت، وباقي قسمة هو أيضا عدد ثابت، كما هو موضح بالجدول التالي:

2	1	0	-2	-5
		2	4	4
2	1	2	2	-1
		2	8	
2	1	4	**10**	
		2		
	1	**6**		

وبالتالي تكون كثيرة الحدود التي تنقص جذورها بمقدار "2"عن جذور كثيرة الحدود المعطاة هي:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 10x - 1$$
$$= p(x+2)$$
$$= (x+2)^3 - 2(x+2) - 5$$

وفي هذه الحالة يمكن أيضا التعبير عن كثيرة الحدود المعطاة بالصورة:

$$p(x) = x^3 - 2x - 5$$
$$= f(x-2)$$
$$= (x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 10(x-2) - 1$$

مثال (٨): أوجد كثيرة الحدود التي تنقص جذورها بمقدار"2"عن جذور كثيرة الحدود $p(x)$ حيث أن: $p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x - 4$.

الحـــــــــــــــل

واضح أن كثيرة الحدود المعطاة من الدرجة الرابعة، وإذا قسمنا $p(x)$ علي $x-2$ سينتج خارج قسمة من الدرجة الثالثة وباقي قسمة، وبتكرار قسمة خارج القسمة ثلاث مرات متتاليتين يكون لدينا خارج قسمة وهو عدد ثابت، وباقي قسمة هو أيضا عدد ثابت،كما هو موضح بالجدول التالي:

2	1	1	−3	−1	−4
		2	6	6	10
2	1	3	3	5	**6**
		2	10	26	
2	1	5	13	**31**	
		2	14		
2	1	7	**27**		
		2			
	1	**9**			

وبالتالي تكون كثيرة الحدود التي تنقص جذورها بمقدار"2"عن جذور كثيرة الحدود المعطاة هي:

$$f(x) = x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 32x + 6$$
$$= p(x+2)$$
$$= (x+2)^4 + (x+2)^3 - 3(x+2)^2 - (x+2) - 4$$

وفي هذه الحالة يمكن أيضا التعبير عن كثيرة الحدود المعطاة بالصورة:

$$p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x - 4$$
$$= f(x-2)$$
$$= (x-2)^4 + 9(x-2)^3 + 27(x-2)^2 + 32(x-2) + 6$$

ملحوظة (٥): من الأمثلة السابقة يتضح أنة إذا كانت $p(x)$ كثيرة حدود من درجة $n \geq 1$ فإن:

- $p(x+\alpha)$ هي كثيرة الحدود من درجة $n \geq 1$ جذورها تنقص بمقدار α عن جذور $p(x)$.
- $p(x-\alpha)$ هي كثيرة الحدود من درجة $n \geq 1$ جذورها تزيد بمقدار α عن جذور $p(x)$.

حالة خاصة (حذف الحد الثاني من كثرة حدود):

التحويل السابق يستخدم في حذف الحد الثاني من المعادلة $p(x) = 0$ وذلك بوضع $x = y + \alpha$ وفي هذه الحالة تصبح المعادلة $p(x) = 0$ بالصورة:

$$p(y+\alpha) = a_0(y+\alpha)^n + a_1(y+\alpha)^{n-1} + a_2(y+\alpha)^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

وبفك الحدين الأول والثاني باستخدام نظرية ذات الحدين والتجميع نجد أن معامل y^{n-1} في هذه المعادلة هو $na_0\alpha + a_1$ ، ولحذف الحد الثاني من هذه المعادلة نضع :

$$na_0\alpha + a_1 = 0$$

أي أن:

$$\alpha + \frac{a_1}{na_0} = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{a_1}{na_0}.$$

وبالتالي نجد أن المعادلة الخالية من الحد الثاني هي المعادلة التي تنقص جذورها بمقدار $-\frac{a_1}{na_0}$ عن جذور المعادلة الأصلية.

مثال(٩): احذف الحد الثاني من المعادلة $p(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 5 = 0$.

الحــــــــــــل

لحذف الحد الثاني في المعادلة المعطاة نوجد المعادلة التي جذورها تنقص بمقدار $-1 = \frac{-3}{(3)(1)} = \alpha$ (تزيد بمقدار) عن جذور المعادلة المعطاة وذلك كما يلي:

-1	1	3	-2	5
		-1	-2	4
-1	1	2	-4	**9**
		-1	-1	
-1	1	1	-5	
		-1		
	1	0		

وبالتالي تكون المعادلة المطلوبة (المعادلة التي تنقص جذورها بمقدار"-1" أو المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار"1") عن جذور المعادلة المعطاة هي: $f(x) = x^3 - 5x + 9 = 0$. وفي هذه الحالة يمكن أيضا التعبير عن كثيرة الحدود المعطاة بالصورة:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \\ &= f(x+1) \\ &= (x+1)^3 - 5(x+1) + 9 = 0 \end{aligned}$$

ويمكن التحقق من ذلك كما يأتي:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \\ &= (x+1)(x^2 + 2x - 4) + 9 \\ &= (x+1)\left[(x+1)(x+1) - 5\right] + 9 \\ &= (x+1)^3 - 5(x+1) + 9 \end{aligned}$$

تمارين (١)

١) بطريقة القسمة التحليلية أوجد خارج وباقي قسمة

- $x^5-4x^4+9x^3-6x^2-16x+13=0$ علي $x^2-2x+1=0$.
- $x^4-3x^3+4x^2+x+5$ علي $2x-1$.
- $2x^6-4x^5+6x^4-3x+1$ علي x^2+x-6 .

٢) بين أن كثيرة الحدود $x^4-3x^3+3x^2-3x+2$ تقبل القسمة علي x^2-3x+2 .

٣) بطريقة القسمة التحليلية أوجد المعادلة التي جذورها:

- تزيد بمقدار 2 عن جذور المعادلة $x^3-4x^2+3x-1=0$.
- تنقص بمقدار 3 عن جذور المعادلة $x^4-12x^3-48x^2-72x+35=0$.
- تنقص جذورها بمقدار 4 عن جذور المعادلة : $x^4-6x^3+35x-17=0$.
- تزيد جذورها بمقدار 3 عن جذور المعادلة : $4x^4+48x^3+151x^2+42x-245=0$ وبحل المعادلة الناتجة أوجد جذور المعادلة الأصلية.

٤) إذا كانت $p(x)=x^4+x^3-3x^2-x-4$ فأوجد بطريقة القسمة التحليلية $p(x+4)$ ، $p(x-3)$.

٥) احذف الحد الثاني من المعادلات الآتية :

(1) $x^3-6x^2+10x-3=0,$ (2) $x^3+3x^2-15x-52=0,$ (3) $x^4+4x^3+2x^2-4x-2=0$

الباب الثاني

جذور كثيرات الحدود

جذور كثيرات الحدود

تعريف: لتكن $p(x)$ كثيرة حدود من درجة $n \geq 1$ قيمتها مساوية للصفر عندما: $x = \alpha$ فإنه يقال أن العدد α جذرا لكثيرة الحدود $p(x)$ وأن $p(x) = 0$ حيث أن $x = \alpha$.

النظرية الأساسية في جبر كثيرات الحدود

نظرية: كثيرة الحدود $p(x)$ من درجة $n \geq 1$ (ذات المعاملات الحقيقية أو المركبة) يوجد لها علي الأقل جذر (حقيقي أو مركب) واحد.

وعلي أساس هذه النظرية يمكن استخلاص النتيجة الآتية:

نتيجة: كثيرة الحدود $p(x)$ من درجة $n \geq 1$ (ذات المعاملات الحقيقية أو المركبة) لها بالضبط n من الجذور.

البرهان: من النظرية الأساسية في الجبر يتضح أن كثيرة الحدود $p(x)$ لها علي الأقل جذر واحد، وليكن هذا الجذر هو α. وبالتالي يكون $p(\alpha) = 0$ ومن ثم تكون:

$$\begin{aligned}
p(x) &= p(x) - p(\alpha) \\
&= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \\
&\quad - (a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n) \\
&= a_0(x^n - \alpha^n) + a_1(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + a_2(x^{n-2} - \alpha^{n-2}) + \cdots + a_{n-1}(x - \alpha) \\
&= (x - \alpha)Q_1(x)
\end{aligned}$$

حيث أن $Q_1(x)$ كثيرة حدود من درجة $n-1$.

وبتطبيق النظرية الأساسية للجبر مرة ثانية علي كثيرة الحدود $Q_1(x)$ نجد أن $Q_1(x)$ لها علي الأقل جذر واحد، ليكن β وبالتالي تكون:

$$p(x) = (x-\alpha)(x-\beta)Q_2(x)$$

حيث أن $Q_2(x)$ كثيرة حدود من درجة $n-2$. وبتكرار هذه العملية نجد أن كثيرة الحدود $p(x)$ لها بالفعل عدد n من الجذور.

نظرية: لتكن $p(x)$ كثيرة حدود من درجة $n \geq 1$ فإن $x=\alpha$ يكون جذراً للمعادلة: $p(x)=0$ إذا كان وكان فقط $p(x)$ تقبل القسمة علي $x-\alpha$ بدون باقي.

وفي هذه الحالة نجد أن: $p(x)=(x-\alpha)Q(x)$ حيث أن $Q(x)$ خارج قسمة كثيرة الحدود $p(x)$ علي $x-\alpha$ وهي كثيرة حدود درجتها اقل من درجة كثيرة الحدود $p(x)$ بمقدار الوحدة.

حالة خاصة (الجذور المكررة)

إذا كانت كثيرة الحدود $p(x)$ تقبل القسمة علي $(x-\alpha)^2$ بدون باقي يقال أن كثيرة الحدود $p(x)$ لها جذر α مكرر مرتين. وبوجه عام يمكن تقديم التعريف الآتي:

تعريف: لتكن $p(x)$ كثيرة حدود من درجة $n \geq 1$، فإنه يقال أن المعادلة $p(x)=0$ لها جذر α مكرر k من المرات إذا كانت $p(x)$ تقبل القسمة علي $(x-\alpha)^k, k \geq 1$ بدون باقي.

وفي هذه الحالة نجد أن:

$$p(x) = (x-\alpha)^k Q(x) \qquad (1)$$

حيث أن $Q(x)$ هي كثيرة حدود من درجة $n-k$.

وبتفاضل المعادلة (١) نجد أن:

$$\begin{aligned} p'(x) &= k(x-\alpha)^{k-1}Q(x) + (x-\alpha)^k Q'(x) \\ &= (x-\alpha)^{k-1}\left(kQ(x) + (x-\alpha)Q'(x)\right) \end{aligned}$$

وبالتالي نجد أن $p'(x)$ لها جذر α مكرر $k-1$ من المرات. وبنفس الطريقة نجد أن $p''(x)$ لها جذر α مكرر $k-2$ من المرات، ...وهكذا. وبالتالي نقدم النظرية الآتية:

نظرية: لأي كثيرة حدود $p(x)$ جذر c مكرر k من المرات إذا كان:

$$p(\alpha)=0=p'(\alpha)=0=p''(\alpha)=...=p^{(k-1)}(\alpha)=0,\ p^{(k)}(\alpha)\neq 0$$

وهذا يعني أن: لأي كثيرة حدود $p(x)$ جذر α مكرر k من المرات إذا كانت قيمة كثيرة الحدود ومشتقاتها المتتالية حتى الرتبة $k-1$ تكون مساوية للصفر عندما $x=\alpha$ ، $p^{(k)}(\alpha)\neq 0$.

مثال (١): اوجد جذور المعادلة: $p(x)=x^5-2x^4-2x^3+8x^2-7x+2=0$ إذا علم أن لها جذر مكرر أربع مرات.

الحـــــــــل

نلاحظ أن المعادلة المعطاة من الدرجة الخامسة وبالتالي يكون لهذه المعادلة خمسة جذور وذلك حسب النظرية الأساسية لجبر كثيرات الحدود. وبفرض أن α هو الجذر المكرر أربع مرات ، وبفرض أن β هو الجذر الخامس.

وحيث أن α هو جذر مكرر أربع مرات فإنه يجب أن يكون جذرا للمعادلة: $p'''(x)=0$.

ومن المعادلة المعطاة نجد أن:

$$p'(x)=5x^4-8x^3-6x^2+16x-7$$

$$p''(x)=20x^3-24x^2-12x+16$$

$$p'''(x)=60x^2-48x-12$$

وبحل المعادلة $p'''(x)=60x^2-48x-12=0$ نجد أن:

$$p'''(x)=0\Rightarrow 5x^2-4x-1=0\Rightarrow (x-1)(5x+1)=0\Rightarrow x=1,-\frac{1}{5}$$

وباستخدام القسمة التحليلية أو بالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن:

$$
\begin{array}{c|rrrrrr}
 & 1 & -2 & -2 & 8 & -7 & 2 \\
1 & \downarrow & 1 & -1 & -3 & 5 & -2 \\
\hline
 & 1 & -1 & -3 & 5 & -2 & 0
\end{array}
$$

$$p(1) = (1)^5 - 2(1)^4 - 2(1)^3 + 8(1)^2 - 7(1) + 2 = 1 - 2 - 2 + 8 - 7 + 2 = 0$$

وبالتالي نجد أن "1" يمثل جذر للمعادلة المعطاة.

$$p\left(-\frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5}\right)^5 - 2\left(-\frac{1}{5}\right)^4 - 2\left(-\frac{1}{5}\right)^3 + 8\left(-\frac{1}{5}\right)^2 - 7\left(-\frac{1}{5}\right) + 2 \neq 0$$

وبالتالي نجد أن "$-\frac{1}{5}$" لا يمثل جذر للمعادلة المعطاة.

وبالتالي يكون "1" هو الجذر المكرر أربع مرات للمعادلة المعطاة. وباستخدام القسمة التحليلية يمكن استنتاج الجذر الخامس كما يأتي:

$$
\begin{array}{c|rrrrrr}
 & 1 & -2 & -2 & 8 & -7 & 2 \\
1 & \downarrow & 1 & -1 & -3 & 5 & -2 \\
\hline
 & 1 & -1 & -3 & 5 & -2 & 0 \\
1 & \downarrow & 1 & 0 & -3 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 0 & -3 & 2 & 0 & \\
1 & \downarrow & 1 & 1 & -2 & & \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & 0 & & \\
1 & \downarrow & 1 & 2 & & & \\
\hline
 & 1 & 2 & 0 & & &
\end{array}
$$

وبالتالي نجد أن:

$$p(x) = (x-1)^4(x+2) = 0$$

وبالتالي فإن الجذر الخامس هو "-2".

نظرية الباقي: لتكن $p(x)$ كثيرة حدود من درجة $n \geq 1$، باقي قسمة $p(x)$ على كثيرة الحدود $g(x) = x - \alpha$ يساوي قيمة كثيرة الحدود $p(x)$ عندما $x = \alpha$، أي أن $r = p(a)$.

البرهان: عند قسمة كثيرة الحدود $p(x)$ على $g(x) = x - \alpha$ نجد أن:

$$p(x) = (x - \alpha)Q(x) + r,$$

ونظرا لأن تلك العلاقة صحيحة عندما $x = a$ فيكون:

$$p(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + r$$

ومنها نجد أن الباقي هو: $p(\alpha) = r$.

مثال (٢): أوجد باقي قسمة كثيرة الحدود $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 4$، علي $g(x) = x - 2$.

الحـــــــــــل

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & \downarrow & 2 & 8 & 10 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 4 = (x - 2)(x^2 + 4x + 5) + 6$$

حيث أن خارج القسمة هو:

$$q(x) = 2x^3 - 2x^2 - x - 3$$

والباقي هو $r = 6$. يمكن الحصول على هذا الناتج بتطبيق نظرية الباقي:

$$r = (2)^3 + 2(2)^2 - 3(2) - 4 = 6.$$

مثال (٣): أوجد قيمة k التي تجعل باقي قسمة كثيرة الحدود $p(x) = x^3 + (k-5)x^2 + (2k+1)x + 2$، تقبل القسمة علي $x + 3$ بدون باقي.

الحـــــــــــل

من نظرية الباقي نعلم أن باقي قسمة كثيرة الحدود $p(x)$ علي $x-\alpha$ يساوي $p(\alpha)$. وحيث أن كثيرة الحدود المعطاة تقبل القسمة بدون باقي علي $x+3$ فإن

$$p(-3)=0 \Rightarrow p(x)=(-3)^3+(k-5)(-3)^2+(2k+1)(-3)+2=0$$
$$\Rightarrow 9k-6k-27+45-3+2=0 \Rightarrow 3k+17=0 \Rightarrow k=-\frac{17}{3}$$

نظرية العامل: لتكن $p(x)$ كثيرة حدود من درجة $n\ge 1$ ، فإنه إذا كان α جذر للمعادلة $p(x)=0$ فإن $x-\alpha$ يكون عامل لكثيرة الحدود $p(x)$.

وهذا يعني أن: $x-\alpha$ يكون عامل لكثيرة الحدود $p(x)$ إذا كانت $p(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ بدون باقي. والعكس صحيح أي انه إذا كان $x-\alpha$ عامل لكثيرة الحدود $p(x)$ فإن α يكون جذرا للمعادلة $p(x)=0$.

مثال (٤): تحقق من أن $x=-2$ ، $x=2$ جذور لكثيرة الحدود

$$p(x)=2x^4-x^3-6x^2+4x-8 .$$

الحـــــــــــل

2	2	−1	−6	4	−8
		4	6	0	8
−2	2	3	0	4	0
		−4	2	−4	
	2	−1	2	0	

وبالتالي نجد أن:

$$p(x)=2x^4-x^3-6x^2+4x-8$$
$$=(x-2)(x+2)(2x^2-x+2)$$

الجذور التخيلية لكثيرات الحدود

نظريه: :لتكن $p(x)$ كثيرة حدود من درجة $n \geq 1$ "ذات معاملات صحيحة"، فإنه إذا كان $\alpha + i\beta$ جذرا للمعادلة الجبرية $p(x) = 0$ فإن $\alpha - i\beta$ يكون جذرا للمعادلة أيضا.

الجذور الصماء لكثيرات الحدود

نظريه: لتكن $p(x)$ كثيرة حدود "ذات معاملات حقيقية" من درجة $n \geq 1$ ، فإنه إذا كان $\alpha + \sqrt{\beta}$ جذرا للمعادلة الجبرية $P(x) = 0$ فإن $\alpha - \sqrt{\beta}$ يكون جذرا للمعادلة أيضا،حيث أن α ، β أعداد حقيقية، β ليس مربعا كاملا.

العلاقة بين جذور معادلة جبرية ومعاملاتها

بفرض أن $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ هي جذور المعادلة الجبرية $p(x) = 0$ ذات المعاملات الصحيحة من درجه $n \geq 1$ حيث أن: $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ ، فإن هذه المعادلة تكون الصورة:

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_n) = 0$$

وكحالة خاصة عندما $n = 2$ (عندما تكون $p(x)$ معادلة جبرية من الدرجة الثانية) فإن:

$$p(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0 \Rightarrow x^n + \frac{a_1}{a_0} x + \frac{a_2}{a_0} = 0$$

وبالتالي يكون

$$x^2 + \frac{a_1}{a_0} x + \frac{a_2}{a_0} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1 \alpha_2$$

وبالتالي نلاحظ أن:

- ✓ مجموع الجذرين يحقق:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{a_1}{a_0}$$

- ✓ حاصل ضرب الجذرين يحقق:

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{a_2}{a_0}$$

وعندما $n = 3$ (عندما تكون $p(x)$ معادلة جبرية من الدرجة الثالثة) فإن:

$$p(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \Rightarrow x^3 + \frac{a_1}{a_0}x^2 + \frac{a_2}{a_0}x + \frac{a_3}{a_0} = 0$$

وبالتالي يكون

$$x^3 + \frac{a_1}{a_0}x^2 + \frac{a_2}{a_0}x + \frac{a_3}{a_0} = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) = 0$$

أي أن:

$$x^3 + \frac{a_1}{a_0}x^2 + \frac{a_2}{a_0}x + \frac{a_3}{a_0} = x^3 - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0$$

وبالتالي نلاحظ أن:

- ✓ مجموع الجذور يحقق:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = -\frac{a_1}{a_0}$$

- ✓ حاصل ضرب الجذور مثني يحقق:

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3 = \frac{a_2}{a_0}$$

- ✓ حاصل ضرب الجذور يحقق:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{a_3}{a_0}$$

وبوجه عام تكون:

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \Rightarrow x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \frac{a_2}{a_0}x^{n-2} + \ldots + \frac{a_n}{a_0} = 0$$

وبالتالي يكون

$$x^n+\frac{a_1}{a_0}x^{n-1}+\frac{a_2}{a_0}x^{n-2}+\ldots+\frac{a_n}{a_0}=0=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n)=0$$

$$=x^n-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)x^{n-1}$$
$$+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n)x^{n-2}$$
$$-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)x^{n-3}$$
$$+\ldots+(-1)^n(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n)=0.$$

وبذلك تكون العلاقة بين معاملات وجذور المعادلة $p(x)=0$ تكون بالصورة:

✓ بمقارنة معاملات x^{n-1} نجد أن مجموع الجذور يحقق:

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=-\frac{a_1}{a_0}$$

✓ بمقارنة معاملات x^{n-2} نجد أن حاصل ضرب الجذور مثني يحقق:

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{a_2}{a_0}$$

✓ بمقارنة معاملات x^{n-3} نجد أن حاصل ضرب الجذور ثلاثي يحقق:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n=-\frac{a_3}{a_0}$$

وهكذا...،

✓ بمقارنة الحد المطلق نجد أن حاصل ضرب الجذور يحقق:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n=(-1)^n\ \frac{a_n}{a_0}$$

وهى المعادلة المطلوبة.

مثال (٥): أوجد جذور المعادلة $x^3-3x^2-6x+8=0,$ إذا علمت أن جذورها تكون متتابعة عددية

الحـــــــــــل

بفرض أن الجذور هي $a-d$ ، a ، $a+d$ وبالتالي فإن

مجموع الجذور يحقق:

$$3a=\frac{-(-3)}{1}=3\Rightarrow a=1$$

حاصل ضرب الجذور يحقق

$$a(a-d)(a+d)=-\frac{8}{1}=-8\Rightarrow((1-d)(1-d)=-8\Rightarrow 1-d^2=8\Rightarrow d=\pm 3$$

وبالتالي تكون الجذور هي -2 ، 1، 4.

مثال (٦): أوجد جذور المعادلة $x^3-7x^2+14x-8=0$, إذا علمت أن جذورها تكون متتابعة هندسية.

الحــــــــــــل

بفرض أن الجذور هي $\frac{a}{r}$ ، a ، ar وبالتالي فإن

حاصل ضرب الجذور يحقق

$$ar(a)\left(\frac{a}{r}\right)=-(-8)\Rightarrow a^3=8\Rightarrow a=2$$

مجموع الجذور يحقق:

$$\frac{a}{r}+a+ar=-(-7)=7\Rightarrow\frac{2}{r}+2+2r=7\Rightarrow$$
$$\frac{2}{r}+2r=5\Rightarrow 2r^2-5r+2=0\Rightarrow(2r-1)(r-2)=0\Rightarrow r=\frac{1}{2},2$$

وبالتالي تكون الجذور هي 1، 2 ، 4 .

مثال (٧): حل المعادلة $x^4-7x^3+19x^2-23x+10=0$ إذا علمت أن احد جذورها $2+i$.

الحــــــــــــل

نعلم أن الجذور المركبة للمعادلات تظهر مترافقة ومن ثم فإنه إذا كان $2+i$ جذراً للمعادلة المعطاة فإن $2-i$ يكون جذر أيضا لهذه المعادلة. وبفرض أن الجذران الآخران هما α ، β .

وبالتالي يكون لدينا:

- ✓ مجموع الجذور:

$$2+i+2-i+\alpha+\beta=7 \Rightarrow \alpha+\beta=3$$

- ✓ حاصل ضرب الجذور

$$(2+i)(2-i)\alpha\beta=10 \Rightarrow \alpha\beta=2$$

وبالتالي نجد أن:

$$\alpha+\frac{2}{\alpha}=2 \Rightarrow \alpha^2-3\alpha+2=0 \Rightarrow \alpha=1, \alpha=2$$

وبالتالي فإن الجذور الأربعة هي 1، 2 ، $2+i$ ، $2-i$.

مثال (٨): إذا كان $1+i$ جذرا للمعادلة $x^4-2x^3-2x^2+8x-8=0$ فأوجد باقي الجذور.

الحـــــــــــــل

يترك كتمرين للطالب

مثال (٩): أوجد جذور المعادلة $2x^3-5x^2-14x-3=0$ إذا علمنا أن $2-\sqrt{5}$ هو احد جذورها.

الحـــــــــــــل

يترك كتمرين للطالب مع مراعاة أتباع نفس خطوات مثال (٧).

الجذور الموجبة والجذور السالبة لكثيرات الحدود

قاعدة ديكارت للإشارات للجذور الموجبة: تنص قاعدة ديكارت للإشارات علي أنة "عدد الجذور الموجبة للمعادلة الجبرية $p(x)=0$ ذات المعاملات الصحيحة يكون إما مساويا لعدد تغيرات الإشارات في كثيرة الحدود $p(x)$ أو اقل من هذا العدد بعدد صحيح زوجي موجب"، **قاعدة ديكارت للإشارات للجذور السالبة:** عدد الجذور السالبة للمعادلة الجبرية $p(x)=0$ ذات المعاملات الصحيحة يكون إما مساويا لعدد تغيرات الإشارة في كثيرة الحدود $p(-x)$ أو اقل من هذا العدد بعدد زوجي موجب.

مثال(١٠): ابحث الجذور الموجبة والجذور السالبة للمعادلة الجبرية $p(x)=0$ حيث أن $p(x)=x^3-4x^2+6x+9$.

الحـــــــــــل

واضح أنة في كثيرة الحدود $p(x)$ يوجد تغيران في الإشارة وطبقا لقاعدة الإشارات يكون للمعادلة $p(x)=0$ إما جذرين موجبين أو لا توجد جذور موجبه على الإطلاق. ولبحث الجذور السالبة للمعادلة الجبرية $p(x)=0$ نعتبر كثيرة الحدود $p(-x)$ حيث أن:

$$p(-x)=(-x)^3-4(-x)^2+6(-x)+9=-x^3-4x^2-6x+9$$

واضح أنة في كثيرة الحدود $p(-x)$ يوجد تغير واحد فقط في الإشارة وبالتالي يكون للمعادلة المعطاة جذر سالب واحد فقط. ومن ثم نستنتج في النهاية أن المعادلة المعطاة يكون لها جذران موجبان وجذر سالب واحد فقط أو يكون لها جذر سالب واحد فقط وجذرين تخيليان مترافقان.

لجذور الصحيحة لكثيرات الحدود:

نظريه: لتكن $p(x)$ كثيرة حدود "ذات معاملات صحيحة" من درجة $n \geq 1$، فإنه إذا وجد جذر صحيح للمعادلة الجبرية $p(x)=0$ فيجب أن يكون عامل من عوامل الحد المطلق.

مثال (١١): ابحث الجذور الصحيحة للمعادلة الجبرية $5x^3-9x+14=0$.

الحـــــــــــل

الإعداد الصحيحة التي يحتمل إن تكون جذور للمعادلة: $5x^3-9x+14=0$ هي $\pm1, \pm2, \pm7, \pm14$ (عوامل الحد المطلق)، وعندما نجرب كل هذه الإعداد باستخدام القسمة التحليلية نجد انه لا يوجد جذر من هذه الإعداد وبذلك نستنتج أن المعادلة السابقة لا يوجد لها جذور صحيحة على الإطلاق.

فمثلا عند قسمة $5x^3-9x+14=0$ علي $x-1$ نجد أن باقي القسمة هو $r=28 \neq 0$،

	5	0	9	14
1	$\downarrow$	5	5	14
	5	5	14	28

وبالتالي فإن 1 ليست جذرا لهذه المعادلة.

وعند قسمة $5x^3-9x+14=0$ علي $x+1$ نجد أن باقي القسمة هو $r=10 \neq 0$،

	5	0	9	14
-1	$\downarrow$	-5	-5	-4
	5	-5	4	10

وبالتالي فإن -1 ليست جذرا لهذه المعادلة.

وعند قسمة $5x^3-9x+14=0$ علي $x-2$ نجد أن باقي القسمة هو $r=58 \neq 0$،

	5	0	9	14
2	$\downarrow$	10	20	58

$$\begin{array}{|cccc} 5 & 10 & 29 & 72 \end{array}$$

وبالتالي فإن 2 ليست جذرا لهذه المعادلة .

وعند قسمة $5x^3-9x+14=0$ علي $x+2$ نجد أن باقي القسمة هو $r=-44\neq 0$ ،

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & 0 & 9 & 14 \\ -2 & \downarrow & -10 & 20 & -58 \\ \hline & 5 & -10 & 29 & -44 \end{array}$$

وبالتالي فإن -2 ليست جذرا لهذه المعادلة .وهكذا نجد أن $\pm 7, \pm 14$ ليست جذور لهذه المعادلة.

الجذور الكسريه

نظريه: إذا كان للمعادلة الجبرية $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=0$ ذات المعاملات الصحيحة جذر كسري على الصورة $\frac{\alpha}{\beta}$ حيث α ، β أعداد صحيحة، فإن α تكون عامل من عوامل الحد المطلق a_n ، β تكون عامل من عوامل a_0.

مثال(١٢): اوجد الجذور الكسرية للمعادلة $p(x)=2x^4+3x+1=0$. ومن ثم اوجد بقية الجذور.

الحـــــــــــــل

الإعداد الكسريه التي من المحتمل أن تكون جذور للمعادلة: $p(x)=0$ هي ± 1 (عوامل الحد المطلق a_n) كبسط , $\pm 1, \pm 2$ (عوامل a_0) كمقام. أي الإعداد $\pm 1, \pm\frac{1}{2}$ وعندما نجرب هذه الإعداد باستخدام القسمة التحليلية فإننا نجد أن -1 هو الجذر الكسرى الوحيد للمعادلة المعطاة.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & \downarrow & 2 & 2 & 2 & 5 \\ \hline & 2 & 2 & 2 & 5 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & \downarrow & -2 & 2 & -2 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

مثال(١٣): أوجد الجذور الكسرية للمعادلة $p(x)=2x^3-7x^2+6x+5=0$. ومن ثم اوجد بقية الجذور.

الحـــــــــــل

الإعداد الكسريه التي من المحتمل أن تكون جذور للمعادلة: $p(x)=0$ هي $\pm1,\pm5$ (عوامل الحد المطلق a_n) كبسط , $\pm1,\pm2$ (عوامل a_0) كمقام. أي الإعداد $\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm5,\pm\frac{5}{2}$ وعندما نجرب هذه الإعداد باستخدام القسمة التحليلية فإننا نجد أن $-\frac{1}{2}$ هو الجذر الكسرى الوحيد للمعادلة المعطاة.

فمثلا عند قسمة $p(x)=2x^3-7x^2+6x+5=0$ علي $x-1$ نجد أن باقي القسمة هو $r=6\neq0$ ،

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -7 & 6 & 5 \\ 1 & \downarrow & 2 & -5 & 1 \\ \hline & 2 & -5 & 1 & 6 \end{array}$$

وبالتالي فإن 1 ليست جذرا لهذه المعادلة.

وعند قسمة $p(x)=2x^3-7x^2+6x+5=0$ علي $x+1$ نجد أن باقي القسمة هو $r=-10\neq0$ ،

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 6 & 5 \\ -1 & \downarrow & -2 & -9 & -15 \\ \hline & 2 & -9 & 15 & -10 \end{array}$$

وبالتالي فإن -1 ليست جذرا لهذه المعادلة.

عند قسمة $p(x)=2x^3-7x^2+6x+5=0$ علي $x-\frac{1}{2}$ نجد أن باقي القسمة هو $r=\frac{13}{2}\neq 0$،

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 6 & 5 \\ \frac{1}{2} & \downarrow & 1 & -3 & \frac{3}{2} \\ \hline & 2 & -6 & 3 & \frac{13}{2} \end{array}$$

وبالتالي فإن $\frac{1}{2}$ ليست جذرا لهذه المعادلة .

عند قسمة $p(x)=2x^3-7x^2+6x+5=0$ علي $x+\frac{1}{2}$ نجد أن باقي القسمة هو $r=0$،

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 6 & 5 \\ -\frac{1}{2} & \downarrow & -1 & 4 & -5 \\ \hline & 2 & -8 & 10 & 0 \end{array}$$

وبالتالي فإن $-\frac{1}{2}$ جذرا لهذه المعادلة ويكون لدينا:

$$2x^3-7x^2+6x+5=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-8x+10)$$

أي أن الجذرين الآخرين هما جذور المعادلة $2x^2-8x+10=0$ أي جذور المعادلة $x^2-4x+5=0$ وهما

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}=2\pm i$$

ويكون الجذر الكسري الوحيد هو $-\frac{1}{2}$.

مثال(١٤): ابحث الجذور الكسريه للمعادلة الجبرية $p(x)=2x^3+7x^2+2x-6=0$.

الحــــــــــــل

الإعداد الكسريه التي من المحتمل أن تكون جذور للمعادلة: $p(x)=0$ هي $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$ (عوامل الحد المطلق a_n) كبسط , $\pm1,\pm2$ (عوامل a_0) كمقام. أي الإعداد $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm1/2,\pm3/2$ وعندما نجرب هذه الإعداد باستخدام القسمة التحليلية فإننا نجد أن $-\frac{3}{2}$هو الجذر الكسرى الوحيد للمعادلة المعطاة. وقاعدة الإشارات تؤكد انه يوجد جذر موجب واحد فقط لهذه المعادلة، وبذلك يكون هذا الجذر عدد غير كسرى، وكذلك يكون للمعادلة المعطاة جذرا سالب أخر وهذا الجذر يجب أن يكون عدد غير كسرى. وبحل المعادلة الجبرية $2x^2+4x-4=0$ (الناتجة من خارج القسمة) نجد أن الجذران الآخران للمعادلة المعطاة هما $-1\pm\sqrt{3}$.

نتيجة: أي جذر كسرى للمعادلة الجبرية $p(x)=0$ حيث $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ كثيرة حدود ذات معاملات صحيحة بحيث أن $a_0=1$ يكون عدد صحيح من بين عوامل الحد المطلق a_n .

مثال(١٥): ابحث الجذور الكسريه للمعادلة $p(x)=x^3+12x^2-7x+4$.

الحــــــــــــل

الإعداد الكسريه التي يمكن أن تكون جذور المعادلة $p(x)=0$ هي $\pm1,\pm2,\pm4$ (عوامل الحد المطلق)، وعندما نجرب هذه الإعداد بواسطة القسمة التحليلية نجد انه لا يوجد بينهم أي جذر للمعادلة المعطاة، وبذلك نستنتج انه إذا وجدت جذور حقيقية للمعادلة المعطاة فإنها تكون إعداد غير كسريه. وبتطبيق قاعدة الإشارات على هذه المعادلة نجد انه يوجد لها جذر

حقيقي سالب، وأيضا يوجد لها إما جذران موجبان أو لا توجد جذور موجبه على الإطلاق وفى هذه الحالة يكون الجذران الآخران تخيليان مترافقان.

تمارين (٢)

١) ابحث الجذور الموجبة والسالبة لكثيرة الحدود $p(x)=x^3-2x^2-7x+2$. وإذا علم أن $2+\sqrt{3}$ جذرا للمعادلة $p(x)=0$ فاوجد باقي الجذور.

٢) أوجد الجذور الكسرية للمعادلة $2x^3-7x^2+6x+5=0$. ومن ثم اوجد باقي الجذور.

٣) أوجد الجذور الصحيحة للمعادلة $x^4-x^2-4x-4=0$. ومن ثم اوجد باقي الجذور.

٤) ابحث الجذور الموجبة والجذور السالبة والجذور الصحيحة للمعادلة $2x^3-5x^2-14x-7=0$.

٥) أوجد جذور المعادلة $x^4+x^3-25x^2+53x+66=0$ إذا علم أن احد جذورها هو $1+2i$.

الباب الثالث

الحلول الجبرية للمعادلات الجبرية

أولاً: معادلة الدرجة الثانية:

معادلة الدرجة الثانية هي معادلة جبرية علي الصورة: $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ حيث أن a ، b ، c ثوابت لا تعتمد علي x . وجذور هذه المعادلة تتعين من القانون العام بالصورة

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ومجموع الجذرين لها هو $-\frac{b}{a}$ وحاصل ضرب الجذرين $\frac{c}{a}$. ويسمي المقدار b^2-4ac مميز المعادلة . وإذا كان المميز $b^2-4ac=0$ فإن المعادلة يكون لها جذران متساويان أي لها جذر واحد مكرر هو $-\frac{b}{2a}$. أما إذا كان المميز $b^2-4ac>0$ فإن المعادلة يكون لها جذرين حقيقيين مختلفين. أما إذا كان المميز $b^2-4ac<0$ فإن المعادلة يكون لها جذرين مركبان مترافقان.

ثانيا : معادلة ذات درجة اعلي من الثانية تؤول إلي معادلة من الدرجة الثانية

أ) المعادلة التي علي الصورة:

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)+c=0$$

حيث $a_1+a_2=a_3+a_4$.

هذه المعادلة يمكن أعاده كتابتها بالصورة

$$(x^2-(a_1+a_2)x+a_1a_2)(x^2-(a_3+a_4)x+a_3a_4)+c=0$$

وحيث أن $a_1+a_2=a_3+a_4$ فإنه يمكن وضع

$$x^2-(a_1+a_2)x=x^2-(a_3+a_4)x=y$$

وبالتالي تصبح المعادلة الأصلية علي الصورة:

$$(y+a_1a_2)(y+a_3a_4)+c=0$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في y. وبحلها يمكن الحصول علي جذور المعادلة الأصلية.

مثال (١): أوجد جذور المعادلة $(x-1)(x-4)(x+3)(x+6)-22=0$.

الحـــــــــــل

نلاحظ أن $-1+3=2=-4+6$ وبالتالي فإن المعادلة يمكن أعاده كتابتها بالصورة:

$$(x-1)(x+3).(x-4)(x+6)-22=0$$

أي أن:

$$(x^2+2x-3).(x^2+2x-24)-22=0$$

وبوضع $y=x^2+2x$ نجد أن:

$$(y-3)(y-24)-22=0 \Rightarrow y^2-27y+50=0 \Rightarrow y=2,\ y=25$$

وبالتالي نجد أن

$$y=2 \Rightarrow x^2+2x-2=0 \Rightarrow x=1\pm\sqrt{3}$$

$$y=50 \Rightarrow x^2+2x-50=0 \Rightarrow x=1\pm\sqrt{26}$$

ب) معادلة التي علي الصورة:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0,\ \ a\neq 0$$

وهذه المعادلة يمكن إعادة كتابتها بالصورة:

$$a(x^4+1)+b(x^3+x)+cx^2=0,\ \ a\neq 0 \qquad (1)$$

وبقسمة طرفي هذه المعادلة علي x^2 نجد أن:

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0,\ \ a\neq 0 \qquad (2)$$

وبوضع $y=x+\dfrac{1}{x}$ نجد أن:

$$y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}\Rightarrow y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$$

وبالتعويض في المعادلة (٢) نجد أن:

$$a(y^2-2)+by+c=0,\ \ a\neq 0$$

أي أن:

$$ay^2+by+c-2a=0,\ \ a\neq 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية بحلها نحصل علي قيم y ومن ثم يمكن الحصول علي قيم x المناظرة (جذور المعادلة الأصلية).

مثال (٢): أوجد جذور المعادلة $x^4+5x^3-4x^2+5x+1=0,$.

الحـــــــــــــــل

المعادلة المعطاة يمكن إعادة صياغتها بالصورة:

$$(x^4+1)+5(x^3+x)-4x^2=0,$$

وبالقسمة علي x^2 نحصل علي

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0,$$

وبوضع $y=x+\dfrac{1}{x}$ وبالتالي نجد أن:

$$y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}\Rightarrow y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$$

وبالتالي نجد أن:

$$y^2-2+5y-4=0 \Rightarrow y^2+5y-6=0$$

وجذور هذه المعادلة هي $y=1,-6$. وبالتعويض عن $y=1$ نجد أن :

$$y=x+\frac{1}{x} \Rightarrow x+\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x^2-x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

وبالتعويض عن $y=-6$ نجد أن :

$$y=x+\frac{1}{x} \Rightarrow x+\frac{1}{x}=-6 \Rightarrow x^2+6x+1=0 \Rightarrow x=-3\pm\sqrt{8}$$

ثالثا: طريقة كاردان لحل معادلة الدرجة الثالثة

المعادلة العامة من الدرجة الثالثة في x هي: $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0,\ \ a_0\neq 0$ وبالقسمة علي a_0 تصبح هذه المعادلة بالصورة:

$$x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0,$$

وبحذف الحد الثاني من هذه المعادلة نجد أنها تصبح بالصورة:

$$x^3+ax+b=0 \qquad (1)$$

وتسمي هذه المعادلة بالصورة القياسية للمعادلة الدرجة الثالثة.

وبوضع :

$$x=y+z \qquad (2)$$

نجد أن:

$$x^3=y^3+3y^2z+3yz^2+z^3=3yz(y+z)+y^3+z^3$$

ومن ثم يكون:

$$x^3-3yz(y+z)-(y^3+z^3)=0 \qquad (3)$$

وبالتعويض عن $y+z=x$ نجد أن :

$$x^3-(3yz)x-(y^3+z^3)=0 \qquad (4)$$

وبمقارنة المعادلتين (١)، (٤) نجد أن:

$$y^3+z^3=-b \qquad (5)$$

$$yz=-\frac{a}{3}\Rightarrow y^3z^3=\left(-\frac{a}{3}\right)^3 \qquad (6)$$

من المعادلتين(٥) ، (٦) نكون معادلة من الدرجة الثانية يكون جذريها هما y^3 ، z^3 وهي:

$$m^2-(y^3+z^3)m+y^3z^3=0\Rightarrow m^2+bm-\left(\frac{a}{3}\right)^3=0$$

وجذور هذه المعادلة هي:

$$m=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4\left(\frac{a}{3}\right)^3}}{2}$$

وبالتالي نجد أن:

$$y^3=\frac{-b+\sqrt{b^2+4\left(\frac{a}{3}\right)^3}}{2},$$

$$z^3=\frac{-b-\sqrt{b^2+4\left(\frac{a}{3}\right)^3}}{2}$$

ومن ثم نجد أن:

$$y^3=-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3},$$

$$z^3=-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

وعلى ذلك يكون :

$$y^3 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\Delta},$$

$$z^3 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\Delta}$$

حيث أن

$$\Delta = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}$$

(يسمى مميز المعادلة القياسية من الدرجة الثالثة) وبالتالي نجد أن:

$$y = \left[-\frac{b}{2} + \sqrt{\Delta}\right]^{\frac{1}{3}},$$

$$z = \left[-\frac{b}{2} - \sqrt{\Delta}\right]^{\frac{1}{3}} \tag{7}$$

وبالتعويض في (٢) نحصل على:

$$x = \left[-\frac{b}{2} + \sqrt{\Delta}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{b}{2} - \sqrt{\Delta}\right]^{\frac{1}{3}}$$

وهذه هي الصيغة العامة لجذور المعادلة القياسية من الدرجة الثالثة. وواضح أن هذه الجذور هي في الواقع عبارة عن الجذور التكعيبية للمقدارين y^3، z^3 بحيث تتحقق المعادلتين (٥)، (٦) وهذا يتوقف على قيمه المميز:

$$\Delta = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}$$

ولذلك يوجد لدينا ثلاث حالات:

الحالة الأولى: إذا كان $\Delta > 0$ يكون للمعادلة جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان .وتكون هذه الجذور على الصورة:

$$y + z \ , \ \omega y + \omega^2 z \ , \ \omega^2 y + \omega z$$

حيث y ، z هما الجذران التكعيبيان اللذان نحصل عليهما من (7)،

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},$$
$$\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.

الحالة الثانية: إذا كان $\Delta=0$ تكون جميع جذور المعادلة حقيقية ويكون احد الجذور مكرر. وذلك لأنه في هذه الحالة ومن العلاقة (7) يكون الجذران التكعيبيان اللذين نحصل عليهما وليكونا مثلا A,A حيث A كميه حقيقية، وتصبح جذور المعادلة على الصورة:

$$A+A\ ,\ \omega A+\omega^2 A\ ,\ \omega^2 A+\omega A$$

حيث أن $1+\omega+\omega^2=0$، وعلى هذا تكون جذور المعادلة هي : $2A,-A,-A$. واضح أن الجذور جميعها حقيقية، واثنان منها متساويان. ويمكن الحصول على الجذر المكرر للمعادلة بسهوله حيث أن الجذر المكرر يجب أن يكون جذر للمعادلة الناتجة عن تفاضل المعادلة الأصلية بالنسبة إلى المتغير x وهي: $3x^2+a=0$ فيكون الجذر المكرر للمعادلة الأصلية هو:

$$x=\pm\sqrt{\frac{-a}{3}}$$

ونختار منها القيمة التي تحقق المعادلة الأصلية، وبمعرفه الجذر المكرر للمعادلة يمكن استنتاج الجذر الثالث حيث أن مجموع الجذور الثلاث يساوى الصفر.

الحالة الثالثة: إذا كان $\Delta<0$ تكون جميع جذور المعادلة حقيقية مختلفة .وذلك لأنه في هذه الحالة ومن العلاقة (٦) تكون y^3 ، z^3 عددان تخيليان مترافقان، ويمكن الحصول على جذور المعادلة باستخدام نظريه دى موافر كما في الأعداد المركبة، حيث أن:

$$y^3=p+iq=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ ,$$
$$z^3=p-iq=r(\cos\theta-i\sin\theta)$$

وبتطبيق نظرية دي موافر نجد أن:

$$y_k = r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{3}\right) = r^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{3}\right)}, k=0,1,2$$

$$z_k = r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{3} - i\sin\frac{\theta+2k\pi}{3}\right) = r^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{-\theta+2k\pi}{3}\right)}, k=0,1,2$$

وبالتالي تكون جذور المعادلة هي:

$$2r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{3}\right), k=0,1,2$$

وهي جذور كلها حقيقية مختلفة.

مثال(٣): أوجد جذور المعادلة $x^3-18x-35=0$.

الحـــــــــــــل

الصورة القياسية لمعادله الدرجة الثالثة هي: $x^3+ax+b=0$ وعلى ذلك يكون للمعادلة المعطاة $a=-18$, $b=-35$ ومميز المعادلة المساعدة يكون:

$$\Delta = \frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27} = \frac{(-35)^2}{4}+\frac{(-18)^3}{27} = \frac{361}{4} > 0$$

واضح أن المميز كميه حقيقية موجبه، وعلى ذلك فإن جذور المعادلة تعطى من:

$$y^3 = -\frac{b}{2}+\sqrt{\Delta} = -\frac{-35}{2}+\frac{19}{2} = 27,$$

$$z^3 = -\frac{b}{2}-\sqrt{\Delta} = -\frac{-35}{2}-\frac{19}{2} = 8$$

فتكون جذور المعادلة هي:

$$x=5,\ \ 2\omega+3\omega^2,\ \ 2\omega^2+3\omega;$$

حيث أن:

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

ومن ثم فإن جذور المعادلة المعطاة تكون هي:

$$.5,\ -\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad -\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

مثال(٤): أوجد جذور المعادلة $p(x)=0$ حيث أن $p(x)=x^3-12x+16$.

الحـــــــــــل

بمقارنة المعادلة المعطاة بالمعادلة $x^3+ax+b=0$ نجد أن: $a=-12$ ، $b=16$ وبالتالي نجد أن المميز للمعادلة المعطاة يكون بالصورة:

$$\Delta=\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}=\frac{(16)^2}{4}+\frac{(-12)^3}{27}=0$$

وبالتالي يكون للمعادلة جذر مكرر يحقق المعادلة $3x^2+a=0$ أي يحقق المعادلة:

$$3x^2-12=0$$

وجذرا هذه المعادلة هما $x=\pm 2$ ، وحيث أن $x=-2$ لا يحقق المعادلة الأصلية، فيكون الجذر المكرر للمعادلة الأصلية هو $x=2$. وحيث أن مجموع جذور المعادلة الأصلية يساوى الصفر فيكون الجذر الثالث للمعادلة هو -4 وتكون جذور المعادلة هي $-4,2,2$.

مثال(٥): أوجد جذور المعادلة $x^3-6x-4=0$.

الحـــــــــــل

بمقارنة المعادلة المعطاة بالمعادلة $x^3+ax+b=0$ نجد أن: $a=-6$ ، $b=-4$ وبالتالي نجد أن المميز للمعادلة المعطاة يكون بالصورة:

$$\Delta=\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}=\frac{(-4)^2}{4}+\frac{(-6)^3}{27}=-4<0$$

وبالتالي يكون للمعادلة المعطاة ثلاث جذور حقيقية مختلفة، تتعين من:

$$y^3 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\Delta} = -\frac{-4}{2} + \sqrt{-4} = 2 + i2 = 2(1+i) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z^3 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\Delta} = -\frac{-4}{2} - \sqrt{-4} = 2 - i2 = 2(1-i) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

وبالتالي نجد أن:

$$y = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12} - i\sin\frac{9\pi}{12}\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} - i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$

ومن ثم تكون جذور المعادلة المعطاة هي:

$$x = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}\right),\ -2,\ 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}\right).$$

رابعا: حل معادلة الدرجة الرابعة

أ) طريقه فراري لحل معادلة الدرجة الرابعة

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الرابعة في xهي:

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0,\ a_0 \neq 0 \qquad (1)$$

وبالقسمة علىa_0 تصبح هذه المعادلة بالصورة:

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + k = 0 \qquad (2)$$

وبإعادة كتابه المعادلة (٢) على الصورة:

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}x + \lambda\right)^2 - (\alpha x + \beta)^2 = 0 \qquad (3)$$

أي أن:

$$x^4 + px^3 + \left(2\lambda + \frac{p^2}{4} - \alpha^2\right)x^2 + (p\lambda - 2\alpha\beta)x + \left(\lambda^2 - \beta^2\right) = 0 \qquad (4)$$

بمقارنه المعاملات في المعادلتين (٢)، (٤) نحصل على:

$$\left.\lambda+\frac{p^2}{4}-\alpha^2=q,\quad 2p\lambda-2\alpha\beta=r,\qquad \lambda^2-\beta^2=k\right\}$$

وبالتالي نجد أن:

$$\left.\alpha^2=2\lambda+\frac{p^2}{4}-q,\quad \alpha\beta=\frac{1}{2}(p\lambda-r),\qquad \beta^2=\lambda^2-k\quad\right\}\qquad (5)$$

وبحذف α,β بين هذه المعادلات ينتج أن :

$$\frac{1}{4}(p\lambda-r)^2=\left(\lambda^2-k\right)\left(2\lambda+\frac{p^2}{4}-q\right)$$

وبفك الأقواس وإعادة ترتيب الحدود بالنسبة لقوى λ نجد أن:

$$2\lambda^3-q\lambda^2-2\left(k-\frac{pr}{4}\right)\lambda-\left(qk+\frac{pk+r^2}{4}\right)=0$$

وهذه معادله من الدرجة الثالثة في λ لها على الأقل جذر حقيقي واحد، وباستخدام هذه القيمة الحقيقية للمقدار λ يمكن الحصول على α ، β من (٥) ثم من المعادلة (٣) ينتج أن:

$$x^2+\frac{p}{2}x+\lambda=\pm(\alpha x+\beta)$$

وهاتين معادلتين من الدرجة الثانية في x يمكن منهما الحصول على جذور المعادلة الأصلية.

مثال(٦): أوجد حل المعادلة الآتية بطريقه فراري

$$x^4+6x^3+12x^2+14x+3=0\qquad (1)$$

الحـــــــــــل

بكتابة المعادلة في الصورة :

$$(x^2+3x+\lambda)^2-(\alpha x+\beta)^2=0\qquad (2)$$

بمقارنه معاملات x^2 ، x ، الحد المطلق في المعادلتين (١)، (٢) نجد أن:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 &= 2\lambda - 3, \\ \alpha\beta &= \lambda^2 - 3, \\ \alpha\beta &= 3\lambda - 7 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

بحذف α, λ بين مجموعه المعادلات (3) نحصل على:

$$(3\lambda-7)^2 = (2\lambda-3)(\lambda^2-3) \Rightarrow 2\lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda - 40 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 18\lambda - 20 = 0.$$

وبالتجربة لعوامل الحد المطلق نجد أن $\lambda = 2$ (عامل من عوامل الحد المطلق) تحقق هذه المعادلة، وبالتعويض في (٣) نجد أن:

$$\alpha^2 = 1, \beta^2 = 1, \alpha\beta = -1$$

وبالتالي تكون:

$$\alpha = -1, \beta = 1 \text{ أو } \alpha = 1, \beta = -1$$

وبالتعويض في (٢) نجد أن:

$$(x^2+3x+2)^2 - (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x^2+3x+2 = \pm(x-1)$$

وبالتالي نجد أن:

$$x^2+3x+2 = x-1 \Rightarrow x^2+2x+3 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm i\sqrt{2},$$
$$x^2+3x+2 = -x+1 \Rightarrow x^2+4x+1 = 0 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{3}$$

ومن ثم تكون جذور المعادلة الأصلية هي :

$$x = -1 \pm i\sqrt{2}, -2 \pm \sqrt{3}.$$

مثال (٧): أوجد حل المعادلة الآتية بطريقه فرارى

$$x^4 + 11x^2 + 10x + 50 = 0 \qquad (1)$$

الحـــــــــل

نكتب المعادلة علي الصورة:

$$\left(x^2+\lambda\right)^2-(\alpha x+\beta)^2=0 \qquad (2)$$

بمقارنه المعاملات في المعادلتين نجد أن:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^2=2\lambda-11\\ \beta^2=\lambda^2-50\\ \alpha\beta=-5\end{array}\right\} \qquad (3)$$

بحذف β , α بين مجموع المعادلات (3) نحصل على :

$$(-5)^2=(2\lambda-11)\left(\lambda^2-50\right)$$

$$\therefore 2\lambda^3-11\lambda^2-100\lambda+525=0$$

وجذور هذه المعادلة هي: $\lambda=5,-7,\frac{15}{2}$ ونختار منها الجذر $\frac{15}{2}$ لأنه بذلك تكون قيم α,β حقيقية من المعادلات (٣) فيكون :

$$\alpha^2=4\Rightarrow\alpha=\pm2,\ \beta^2=\frac{25}{4}\Rightarrow\beta=\pm\frac{5}{2},\ \ \alpha\beta=-5$$

وحتى يتحقق أن: $\alpha\beta=-5$ لابد أن تكون $\alpha=2,\beta=-\frac{5}{2}$, بالتعويض في (2) نحصل على:

$$\left(x^2+\frac{15}{2}\right)^2-\left(2x-\frac{5}{2}\right)^2=0\Rightarrow\left(x^2+\frac{15}{2}\right)=\pm\left(2x-\frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2x^2-4x+17=0\Rightarrow x=1\pm3i\ ,$$

$$\Rightarrow 2x^2+4x+13=0\Rightarrow x=-1\pm2i$$

وبالتالي تكون جذور المعادلة الأصلية (1) هي : $x=1\pm3i,-1\pm2i$

ب) طريقه دى- كارت لحل معادله من الدرجة الرابعة:

الصورة القياسية للمعادلة من الدرجة الرابعة هي:

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0 \qquad (1)$$

بحذف الحد الثاني من المعادلة وذلك بالتعويض عن $x-\dfrac{a_1}{4a_0}$ بدلا من x فتصبح المعادلة على الصورة:

$$x^4+px^2+qx+r=0 \qquad (2)$$

نفرض انه يمكن كتابه هذه المعادلة على الصورة:

$$\left(x^2+\lambda x+\alpha\right)\left(x^2-\lambda x+\beta\right)=0 \qquad (3)$$

وبمقارنه المعاملات في المعادلتين (3),(2) نحصل على :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta-\lambda^2=p\ , \\ \lambda(\alpha-\beta)=q\ , \\ \alpha\beta=r\end{array}\right\}\Rightarrow 2\alpha=\lambda^2+p-\frac{q}{\lambda}\ ,2\beta=\lambda^2+p+\frac{q}{\lambda}\ ,\alpha\beta=r \qquad (4)$$

بحذف $\alpha\ ,\beta$ بين مجموعه المعادلات (4) نحصل على :

$$\left(\lambda^2+p-\frac{q}{\lambda}\right)\left(\lambda^2+p+\frac{q}{\lambda}\right)=4r\Rightarrow\lambda^6+2p\lambda^4+\left(p^2-4r\right)\lambda^2-q^2=0$$

وهذه معادله من الدرجة الثالثة في λ^2 لها على الأقل جذر واحد حقيقي موجب λ فإذا علمنا λ يمكن تعيين $\alpha\ ,\beta$ من العلاقات (4) وبالتعويض في المعادلة (3) عن قيم $\lambda, \alpha\ ,\beta$ نحصل على معادلتين من الدرجة الثانية هما :

$$x^2+\lambda x+\alpha=0 \quad , \quad x^2-\lambda x+\beta=0$$

يكون لهما أربع جذور هي جذور المعادلة (2). وأخيرا تكون جذور المعادلة الأصلية (1) تزيد بمقدار $\dfrac{-a_1}{4a_0}$ عن جذور المعادلة (2).

مثال (٨): أوجد حل المعادلة الآتية بطريقه دى-كارت

$$x^4+6x^3+12x^2+14x+3=0 \qquad (1)$$

الحـــــــــــل

بحذف الحد الثاني من المعادلة وذلك بالتعويض عن $x-\frac{a_1}{4a_0}$ بدلا من x حيث $a_1=6$, $a_0=1$ أي بوضع $x-\frac{3}{2}$ بدلا من x أي نحول المعادلة إلى أخرى جذورها تنقص بمقدار $-\frac{3}{2}$ عن جذور المعادلة المعطاة فتصبح المعادلة على الصورة:

$$x^4-\frac{3}{2}x^2+5x-\frac{99}{16}=0 \qquad (2)$$

نكتب هذه المعادلة على الصورة:

$$\left(x^2+\lambda x+\alpha\right)\left(x^2-\lambda x+\beta\right)=0 \qquad (3)$$

بمقارنه المعاملات في المعادلتين $(3),(2)$ نحصل على :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta-\lambda^2=-\frac{3}{2}\\ (\alpha-\beta)\lambda=5\\ \alpha\beta=-\frac{99}{16}\end{array}\right\}\Rightarrow 2\alpha=\lambda^2-\frac{3}{2}-\frac{5}{\lambda}\ \ ,\ \ 2\beta=\lambda^2-\frac{3}{2}+\frac{5}{\lambda}$$

بحذف β , α نحصل على:

$$\left(\lambda^2-\frac{3}{2}-\frac{5}{\lambda}\right)\left(\lambda^2-\frac{3}{2}+\frac{5}{\lambda}\right)=4\left(\frac{-99}{16}\right)\Rightarrow$$
$$4\lambda^6-12\lambda^4+108\lambda^2-100=0 \qquad (5)$$

وواضح أن $\lambda^2=1$ هو احد جذور هذه المعادلة فإذا أخذنا القيمة $\lambda=1$ فبالتعويض في (4) نحصل على:

$$\alpha=-\frac{11}{4}\ ,\ \beta=\frac{9}{4}$$

بالتعويض عن القيم λ , β , α في (3) نحصل على المعادلتين :

$$x^2 + x - \frac{11}{4} = 0 \ , \ x^2 - x + \frac{9}{4} = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3} \ , \ \frac{1}{2} \pm i\sqrt{2}$$

وهذه جذور المعادلة (2) التي تنقص جذورها عن جذور المعادلة الأصلية (1) بمقدار ثابت $\frac{-3}{2}$

وعلى ذلك تكون جذور المعادلة الأصلية مطلوبة هي: $x = -2 \pm \sqrt{3} \ , \ -1 \pm i\sqrt{2}$.

تمارين (٣)

١) أوجد حل المعادلات الآتية :

$$(1)\ x^3-9x+28=0,\quad (2)\ x^3-6x^2+4=0,\quad (3)\ x^3-15x^2-33x+847=0$$

٢) بطريقة فراري اوجد جذور المعادلات الآتية :

$$(1)\ x^4+4x^3-6x^2+20x+8=0,\qquad (2)\ x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$$

$$(3)\ x^4-6x^3+13x^2-12x+4=0\qquad (4)\ 2x^4+6x^3-3x^2+2=0$$

ملحق للباب الثالث

الأعداد المركبة والجذور التكعيبية للواحد الصحيح

العدد المركب: ظهرت فكرة الأعداد المركبة (التخيلية) عند حل المعادلة العامة من الدرجة الثانية :

$$ax^2 + bx + c = 0,\ \ a,b,c \in R$$

حيث أن جذور هذه المعادلة تعطى من العلاقة $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ، والتي ليس لها معنى إذا كان $b^2 - 4ac < 0$ ، لأنه كان يشترط أن تكون الأعداد الحقيقية تحت علامة الجذر التربيعي موجبة. وقد كان أويلر (١٧٠٧–١٧٨٣) هو أول الرياضيين الذي ادخل مفهوم العدد التخيلي $i = \sqrt{-1}$ علي أنة أحد جذور المعادلة $x^2 + 1 = 0$ والتي لا نجد لها جذوراً بين الإعداد الحقيقية. ونلاحظ أن :

$$i^2 = -1,\ \ i^3 = -i,\ \ i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -i, \ldots, i^{2n} = (-1)^n, i^{2n+1} = (-1)^n i$$

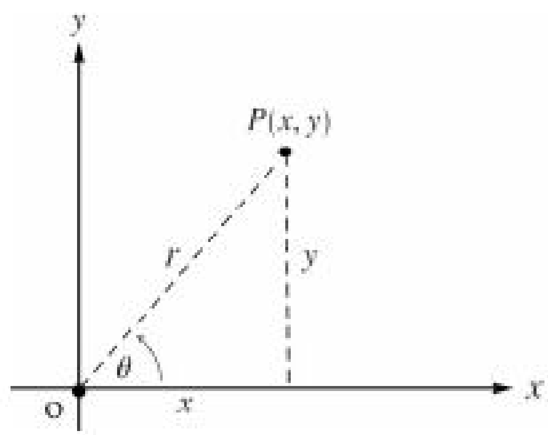
وفي سياق مفهوم العدد التخيلي i نجد أن المعادلة التي علي الصورة $x^2 + a^2 = 0$ تكون جذورها هي $x = \pm ia$ وجذور المعادلة $x^2 + 2x + 5 = 0$ هي $-1 \pm 2i$. ونلاحظ أن الجذرين الأخيرين يحتويان علي جزء حقيقي وهو -1 وجزء تخيلي ± 2 ومن هذا المنطلق فإن العدد المركب يمكن كتابته علي الصورة: $z = x + iy$ حيث x ، y أعداد حقيقية. ويسمى x بالجزء الحقيقي للعدد المركب z ويرمز له بالرمز $x = \mathrm{Re}(z)$ ،ويسمى y بالجزء التخيلي ويرمز له بالرمز $y = \mathrm{Im}(z)$. وتسمى هذه الصورة بالصورة القياسية (المعتادة) للعدد المركب.ويمكن أيضا أن نكتب العدد المركب علي صورة زوج مرتب من الإعداد الحقيقية علي الصورة $z = (x, y)$ أي أن: $z = (x, y) = x + iy$.

مرافق العدد المركب: العدد المركب الذي علي الصورة $x - iy$ يسمي بمرافق العدد المركب الذي علي الصورة $z = x + iy$ يرمز له بالرمز $\bar{z}$ أي أن $\bar{z} = x - iy$.

مقياس العدد المركب: مقياس العدد المركب الذي علي الصورة $z = x + iy$ هو العدد الحقيقي $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

الصورة المثلثية (القطبية) للعدد المركب

تعلمنا من الهندسة التحليلية أن أي زوج مرتب من الأعداد الحقيقية (x,y) يمكن تمثيله في المستوى هندسياً وذلك أما عن طريق الإحداثيات الكارتيزية أو عن طريق الإحداثيات القطبية. فإذا مثلنا مجموعة الأعداد المركبة في المستوى واعتبرنا أن محور ox يمثل الأجزاء الحقيقية للأعداد المركبة، ومحور oy يمثل معاملات الأجزاء التخيلية، فإننا بذلك نحصل على مستوى الأعداد المركبة أو مستوي آرجند. وبفرض أن $z=x+iy$ عددا مركبا، هذا العدد سيعين نقطة واحدة p في المستوى. من الواضح أن هذه النقطة تتعين تماماً إذا علمنا بعد هذه النقطة r عن نقطة الأصل وكذلك الزاوية التي يعينها op مع محور ox ، كما بالشكل المقابل،من الشكل المقابل:



واضح أن: $x=r\cos\theta\ ,\ y=r\sin\theta$ وبالتالي فإن العدد المركب $z=x+iy$ يمكن كتابته بالصورة: $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ وتسمى هذه

الصورة بالصورة المثلثيه (القطبية) للعدد المركب z. يسمى العدد r بمقياس العدد المركب z ويرمز له بالرمز $r=|z|$ أي أن: $r=\sqrt{x^2+y^2},\quad 0\le r<\infty$ وتسمى θ بسعة هذا العدد المركب ويرمز لها بالرمز $\arg z$ أي أن $\theta=\arg z$. وواضح أن السعه للعدد المركب تتعين من العلاقة: $\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right), -\infty<\theta<\infty$ وحيث أن النسب المثلثيه لأي زاوية لا تتغير بإضافة مضاعفات 2π لهذه الزاوية فإن سعه العدد المركب θ تأخذ عددها لانهائي من القيم الحقيقية والقيمة التي تحقق الشرط $-\pi\le\theta\le\pi$ تسمى بالقيمة الأساسية للسعة.

نظرية دي موافر

- إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا أو سالبًا فإن: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.
- إذا كان n عددا صحيحا موجبا فإن:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{n}} = \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,\ldots,n-1$$

ملحوظة: قياسا علي ما سبق، ليكن n عددًا صحيحًا موجبًا، m عددًا صحيحا موجبًا أو سالبًا فإن:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{m}{n}} = \cos\left(\frac{m\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{m\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,\ldots,n-1.$$

تطبيقات علي نظريه دي موافر

(١) حل المعادلة $x^n = z$ حيث أن z عدد مركب أو عدد حقيقي

لحل المعادلة التي علي الصورة: $x^n = z$ حيث أن z عدد مركب نتبع الخطوات التالية: نضع العدد المركب z في الصورة ألمثلثيه $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ وحيث أن:

$$x^n = z \Rightarrow x = z^{\frac{1}{n}} \Rightarrow x = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{1}{n}}$$

وبتطبيق نظريه دي موافر نجد أن المعادلة المعطاة لها عدد n من الجذور تتعين من العلاقة:

$$x_k = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right], \; k = 0,1,\ldots\ldots,n-1, \; r = |z|$$

وهذا يعني انه حينما نوجد جذور المعادلة $x^n = z$ فكأننا نوجد القيم المختلفة للمقدار $x = z^{\frac{1}{n}}$، أي نوجد الجذر النوني للعدد المركب $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، ومعني ذلك أن الجذر النوني لأي عدد مركب له n من القيم تتعين من العلاقة السابقة، والأمثلة الآتية توضح ذلك.

مثال (١): أوجد جذور المعادلة $x^3 = z$ حيث أن $z = i$.

الحـــــــــــل

$$\because x^3 = i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

وبالتالي فإن

$$x_k=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi+4k\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+4k\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{(4k+1)\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{(4k+1)\pi}{6}\right),\ k=0,1,2$$

وبالتالي فإن جذور المعادلة المعطاة تكون بالصورة:

$$k=0\Rightarrow x_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,$$

$$k=1\Rightarrow x_1=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,$$

$$k=2\Rightarrow x_2=\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}=-\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i.$$

مثال(٢): أوجد جذور المعادلة $x^3=-8$.

الحـــــــــــل

المعادلة المعطاة يمكن أعاده صياغتها علي الصورة:

$$x^3=-2^3=2^3(\cos\pi+i\sin\pi)$$

حيث أن $-1=\cos\pi+i\sin\pi$. وبالتالي فإن جذور المعادلة المعطاة تتعين من العلاقة:

$$x_k=\left(2^3(\cos\pi+i\sin\pi\right)^{\frac{1}{3}}=2\left[\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\right],$$

$$=2\left[\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{3}\right)\right],k=0,1,2$$

وبالتالي فإن جذور المعادلة المعطاة تكون بالصورة:

$$k=0\Rightarrow x_0=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=1+\sqrt{3}\,i,$$

$$k=1\Rightarrow x_1=2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{3}\right)\right]=2[\cos\pi+i\sin\pi]=-2,$$

$$k=2 \Rightarrow x_2 = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]=1-\sqrt{3}\,i$$

(٢) الجذور النونية للواحد الصحيح

المعادلة التي علي الصورة $x^n=1$ لها عدد n من الجذور تسمي بالجذور النونية للواحد الصحيح ويمكن إيجاد جذور هذه المعادلة بإتباع نفس الخطوات السابقة أي بوضع :

$$1=\cos\theta+i\sin\theta \Rightarrow r=1,\ \cos\theta=1,\ \sin\theta=0 \ \Rightarrow \theta=0 \Rightarrow x^n=\cos 0+i\sin 0$$

وبالتالي فإن جذور المعادلة $x^n=1$ تكون بالصورة:

$$x_k=\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,2,..,n-1$$

عندما $k=0$ نجد أن: $x_0=\cos 0+i\sin 0=1$ وعندما $k=1$ يكون $x_1=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

وهكذا يكون $x_{n-1}=\cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$ وهذه هي الجذور النونية للواحد الصحيح.

وبوضع $\omega=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ وبالتالي فإن $x_1=\omega, x_2=\omega^{2},......,x_{n-1}=\omega^{n-1}$. وبالتالي فإن الجذور النونية للواحد الصحيح تكون هي $1,\omega,\omega^{2},...,\omega^{n-1}$ حيث $\omega=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

مثال(٦): أوجد جذور المعادلة $x^3=1$. (الجذور التكعيبية للواحد الصحيح).

الحـــــــــــل

$$\because x^3=1=\cos 0+i\sin 0$$

وبالتالي فإن جذور المعادلة $x^3=1$ تكون بالصورة: $x_k=\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right), k=0,1,2$ وبالتالي نجد أن:

$$k=0 \Rightarrow x_0=\cos 0+i\sin 0=1,\quad k=1 \Rightarrow x_1=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},$$

$$k=2 \Rightarrow x_2=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

وتسمي جذور هذه المعادلة بالجذور التكعيبية للواحد الصحيح.