الباب الأول
الدوال في اكثر من متغير

لقد درسنا فيما سبق دوال المتغير الواحد ونهايتها واتصالها وكذلك تفاضلها وتكاملها بالتفصيل وفى هذا الباب سوف نقوم بدراسة دوال المتغيرات المتعدده والتى غالبا ما تقابلنا فى القوانين الرياضية والتطبيقات الفيزيائية والهندسيه والعلوم المختلفة وسوف ندرس نهايتها واتصالها وكذلك تفاضلها بالتفصيل.

أمثلة للدوال فى اكثر من متغير

(١) مساحة المستطيل A هى دالة فى طولة x وعرضة y أى أن:

$$A = f(x, y) = xy$$

(٢) حجم متوازى المستطيلات V هو دالة فى طولة x وعرضة y وارتفاعة z أى أن:

$$V = f(x, y, z) = xyz$$

سوف نرمز للمستوى بالرمز R^2 أى أن:

$$R^2 = (x, y) : \ x, y \in R$$

سوف نرمز للفراغ النونى بالرمز R^n أى أن:

$$R^n = (x_1, x_2, ..., x_n) : \ x_1, x_2, ..., x_n \in R$$

تعريف: الدوال في متغيرين:

إذا كانت $z = f(x, y)$ فإنه يقال أن z متغير تابع وأن كل من x, y متغيرات مستقلة ويقال أن الدالة f وحيدة القيمة إذا ناظر كل زوج مرتب (x, y) قيمة وحيدة للمتغير z ويقال أن الدالة f متعددة القيمة إذا كان للمتغير z أكثر من قيمة مناظرة للزوج المرتب (x, y).

مجال الدوال في متغيرين

مجال تعريف الدالة $z = f(x, y)$ يقصد به مجموعة النقاط (x, y) في المستوي R^2 والتي تكون عندها الداله معرفة أي تاخد قيما حقيقية .

أي أن مجال الدالة $z = f(x, y)$ يكون علي الصورة:

$$D = (x, y) : x, y \in R \subset R^2$$

ويكون العدد $f(x,y)$ هو قيمة الدالة f عند (x,y) وتسمى المجموعة D بنطاق الدالة أو مجال الدالة f وتسمى مجموعة القيم $f(x,y)$ بالنطاق المصاحب أو المدى للدالة f .

مثال(١)

أوجد مجال تعريف الدالة $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

الحل:

حيث ان الجذر $\sqrt{4-x^2-y^2}$ فى مقام المقدار $f(x,y)$ فإن نطاق الدالة يجب أن يكون كل النقاط (x,y) بحيث $4-x^2-y^2>0$ أى أن $x^2+y^2<4$ أي أن:

$$D=\{(x,y):4-x^2-y^2>0\}=\{(x,y):x^2+y^2<4\}$$

وهذا يعني أن D هى مجموعة كل النقاط (x,y) التى تقع داخل الدائرة التى مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها 2.

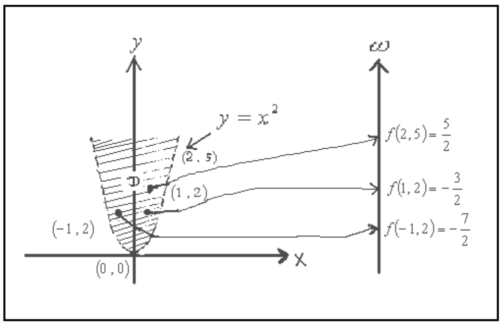
مثال(٢)

أوجد نطاق ومدى الدالة $f(x,y)=\dfrac{xy-5}{2\sqrt{y-x^2}}$ وقيمتها عند النقاط

$f(-1,2),\ f(1,2),\ f(2,5)$

الحل:

نطاق الدالة D هو مجموعة النقاط (x,y) بحيث $y-x^2>0$ أى أن $y>x^2$ هى مجموعة جزئية فى المستوى أعلى (وداخل) القطع المكافىء $y=x^2$ كما بالشكل التالى :



وقيمة الدالة عند النقاط المعطاة هى

$$f(2,5)=\frac{2\times5-5}{2\sqrt{5-2^2}}=\frac{5}{2}\ ,\qquad f(-1,2)=-\frac{7}{2}\quad ,\qquad f(1,2)=-\frac{3}{2}$$

ومدى هذه الدالة هو R

مثال(٣)

أوجد نطاق ومدى كلا من الدوال الاتية

$(i)\ f(x,y)=\ln(x+y-2)$

$(ii)\ f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-36}}{2x+y-4}$

$(iii)\ f(x,y)=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-2x^2-y^2}$

الحل:

(i) حيث ان $\ln(t)$ تعرف اذا كان وكان فقط $t>0$ فإنه ينتج أن مجال الدالة المعطاه معرف في النصف المفتوح من المستوى أى في المنطقة $x+y-2>0$ (الحدود $x+y-2=0$ لا تدخل فى هذه المنطقة). ومدى الدالة هو $(-\infty,\infty)$.

(ii) نطاق الدالة $f(x,y)$ يتكون من كل الازواج المرتبه (x,y) والتى لها $x^2+y^2-36\geq 0$ ، $2x+y-4\neq 0$. وهذه فئة النقط التى تكون إما على الدائرة $x^2+y^2=36$ التى نصف قطرها 6 ومركزها $(0,0)$ أو فى خارج المنطقة المحيطة بها (باستثناء النقاط التى تقع على الخط المستقيم $2x+y-4\neq 0$). المدي هو

R

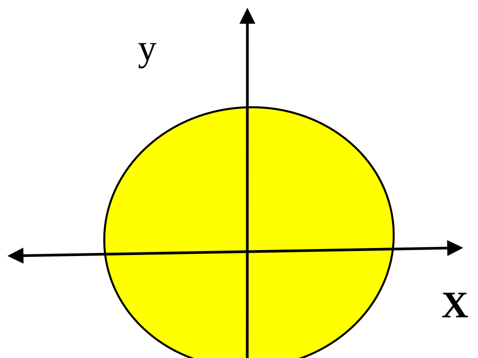
(iii) عندما $z=f(x,y)=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-2x^2-y^2}$ يكون هو الشكل البيانى للنصف العلوى للمجسم الناقص التالى : $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$ والنطاق هو كل (x,y) بحيث أن $2x^2+y^2\leq 4$ والذى يكون قطع ناقص $2x^2+y^2=4$ ، والذى مركزه عند $(0,0)$ مع داخله. المدى يكون هو $0\leq z\leq 1$

مثال(٤)

أوجد مجال تعريف الدالة $$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

الحل:

حيث ان الجذر $\sqrt{4-x^2-y^2}$ فى مقام المقدار $f(x,y)$ فإن النطاق D يجب أن يكون كل النقاط (x,y) بحيث $4-x^2-y^2>0$ أى أن $x^2+y^2<4$ وبالتالى فإن D هى مجموعة كل النقاط التى تقع داخل الدائرة التى مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها 2.



مثال(٥)

أوجد مجال تعريف الدالة $f(x,y)=\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{xy}$

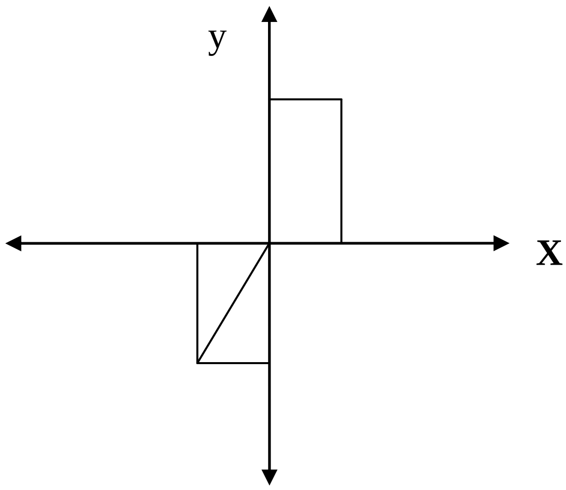
الحل:

الحد الاول من الدالة معرف لكل $-2\le x\le 2$ والحد الثانى يأخذ قيما حقيقية اذا كان $xy\ge 0$

وهذا يحدث عندما:

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} x\le 0 \\ y\le 0 \end{cases}$$

اى ان مجال تعريف الدالة الموضح بالشكل



مثال(٦)

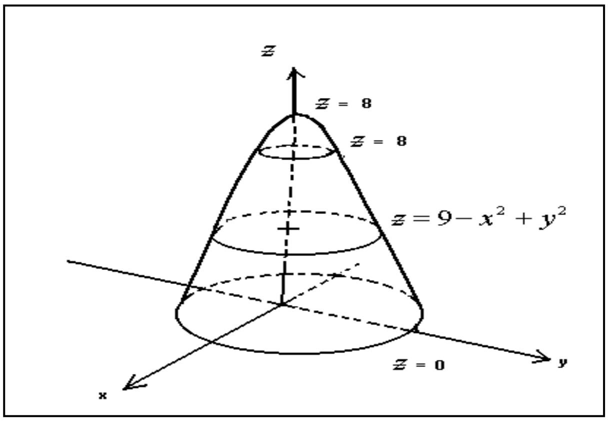
ارسم الدالة f المعرفة بـ

$$f(x,y)=9-x^2-y^2 \; : \; D=\{(x,y) \; ; \; x^2+y^2\le 9\}$$

الحل:

لــدينا D منطقــة دائريــة مركزهــا $(0,0)$ ونصــف قطرهــا 3 فــى المســتوى xy و $z=9-(x^2+y^2)\ge 0$ لكل (x,y) فى D

$\therefore$ فالدالــة $z=f(x,y)$ تمثــل ســطحاً يقــع أعلــى المســتوى xy ويقطــع محــور z عنــد النقطــة $(0,0,9)$ لكــل $0\le k\le 9$ فــإن $9-(x^2+y^2)=K$ هــى معادلــة دائــرة مركزهــا $(0,0,k)$ ونصف قطرها $0\le\sqrt{9-k}$ هى تقاطع السطح $z=9-(x^2+y^2)$ والمستوى $z=k$ وبالتالى فإن $z=f(x,y)$ تمثل سطح المخروط الدائرى كما هو مبين بالشكل



مثال(٧)

إرسم نطاق كلا من الدوال الاتية :

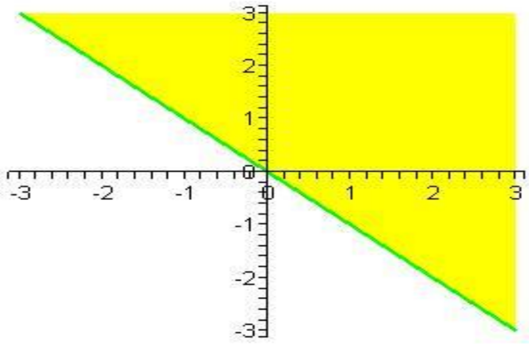
(1) $f(x,y)=\sqrt{x+y}$

(2) $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

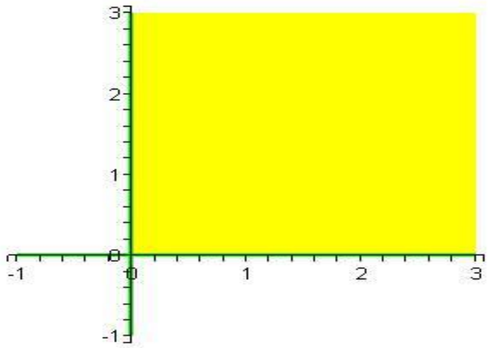
(3) $f(x,y)=\ln(9-x^2-9y^2)$

الحل:

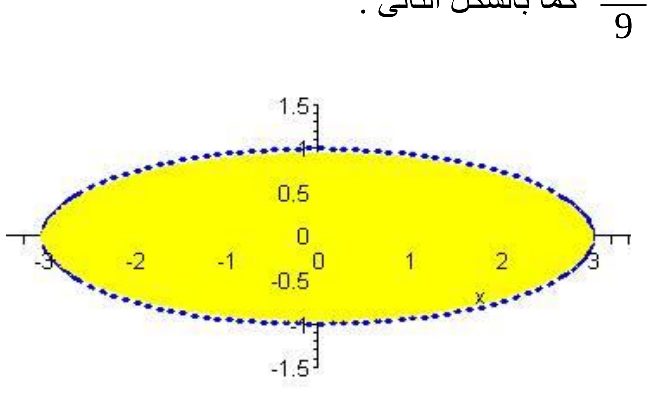
(١) واضـح أن الدالـة $f(x,y)$ معرفـة لجميـع القـيم الحقيقيـة التـى تحقـق المتباينـة الاتيـة $x+y\ge 0$ وبالتالى فإن النطاق D هى مجموعة كل النقاط (x,y) التى تحقق المتباينة الاتية $x\ge -y$ كما بالشكل التالى :



(٢) واضح أن الدالة $f(x,y)$ معرفة لجميع القيم الحقيقية التى تحقق كلا من المتباينات الاتية $x\ge 0$، $y\ge 0$ وبالتالى فإن النطاق D هى مجموعة كل النقاط (x,y) التـى تحقق المتباينة الاتية $x\ge -y$ كما بالشكل التالى :



(٣) واضـح أن المقـدار $9-x^2-9y^2$ يجـب ان يكـون موجـب ولا يسـاوى الصـفر اى ان $9-x^2-9y^2>0$ ويمكن كتابة المتباينه بالصورة الاتيه $\frac{x^2}{9}+y^2<1$ وبالتالى فإن النطـاق D هى مجموعة كل النقاط (x,y) التى تقع داخل القطع النـاقص ولا تقع علـى حدوده والـذى معادلتة $\frac{x^2}{9}+y^2<1$ كما بالشكل التالى :



نهاية الدالة فى متغيرين

يقال أن الدالة f تؤول إلى النهاية L عندما تؤول النقطة (x,y) إلى النقطة (x_0,y_0) وذلك إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يمكن ايجاد $\delta>0$ بحيث يكون:

$$|f(x,y)-L|<\varepsilon$$

كلما كان

$$|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta$$

وتكتب على الصورة :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L \quad or \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=L$$

وتسمي هذه النهاية بالنهاية الانية للدالة في متغيرين.

العمليات على النهايات

نظرية: إذا كان لكل $f(x,y),g(x,y)$ معرفة فى المنطقة D وأن النقطة $(x_0,y_0)\in D$ وبفرض ان

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L \quad ; \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=M$$

ونفرض ان α عدد حقيقى فإن:

$$i)\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)\pm g(x,y)]=L\pm M$$

$$ii)\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f,g)(x,y)=LM$$

$$iii)\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{L}{M} \quad ;\ M\neq 0$$

$$(iv)\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \alpha f(x,y)=\alpha L$$

$$(v)\ \ if\ f(x,y)\le g(x,y)\ ,(x,y)\in D\Rightarrow L\le M$$

نظرية: إذا كانت $f(x,y)$ معرفة فى المنطقة D وأن $(x_0,y_0)\in D$ وبفرض أن

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

وكانت $y=\varphi(x)$ فإن:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{x\to x_0} f(x,\varphi(x))=L$$

نتيجة(١): إذا كانت $f(x,y)$ معرفة فى المنطقة D وأن $(x_0,y_0)\in D$ وامكن ايجاد العلاقتين

$y=\varphi_1(x)$ ، $y=\varphi_2(x)$ بحيث أن $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\varphi_2(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\varphi_1(x))$ فإن النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ تكون موجودة،

وهذا يعني أن إذا كان للنهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ قيمتين مختلفتين عند الاقتراب من النقطة (x_0,y_0) خلا مسارين مختلفين فإنه نهاية الدالة $f(x,y)$ عند النقطة (x_0,y_0) تكون غير موجودة.

نتيجة(٢): إذا كانت $f(x,y)$ معرفة فى المنطقة D وأن $(x_0,y_0)\in D$ وامكن ايجاد العلاقة

$y=\varphi(mx)$ بحيث أن $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\varphi_1(x))=g(m)$ فإن النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ تكون غير موجودة.

مثال٨:

اثبت أن $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (x^2+2y)=5$

الحل :

باستخدام تعريف النهاية يجب أن نثبت بأنه لأى $\varepsilon>0$ يمكن أن نجد $\delta>0$ بحيث أن لكل

$|x-1|<\delta, |y-2|<\delta$ فإن $|x^2+2y-5|<\varepsilon$

إذا كان $|x-1|<\delta, |y-2|<\delta$ فإن $2-\delta<y<2+\delta \quad , \quad 1-\delta<x<1+\delta$

مستبعدا النقطة $(x,y)=(1,2)$ وبالتالى فإن

$$1-2\delta+\delta^2<x^2<1+2\delta+\delta^2$$

$$4-2\delta<2y<4+2\delta$$

وبالجمع نحصل على $5-4\delta+\delta^2<x^2+2y<5+4\delta+\delta^2$

أى أن $-4\delta+\delta^2<x^2+2y-5<4\delta+\delta^2$

فإذا كان $\delta\le 1$ فإنه يتضح أن $-5\delta<x^2+2y-5<5\delta$

أى أن $|x^2+2y-5|<5\delta=\varepsilon$

وبالتالى نأخذ $\delta=\varepsilon/5$ (أو $\delta=1$ أيهما أصغر)

وبالتالى فإنه إذا كان $|x-1|<\delta, |y-2|<\delta$ فإن $|x^2+2y-5|<\varepsilon$

وعلية فإن

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2+2y)=5$$

مثال٩:

اثبت أن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=0$

الحل:

باستخدم الاحداثيات القطبية نحصل على

$$\left|xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0\right|=\left|r^2\cos\theta\sin\theta\cos 2\theta\right|=\left|\frac{r^2}{4}\sin 4\theta\right|\le\frac{r^2}{4}=\frac{x^2+y^2}{4}<\varepsilon$$

بفرض أن $\frac{\varepsilon}{2}>\frac{y^2}{4}$ ، $\frac{\varepsilon}{2}>\frac{x^2}{4}$ فإنة لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث يكون

$|x|<\delta, |y|<\delta$ ، $\left|xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=0$$

مثال١٠:

بين أن النهاية $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ غيرموجودة

الحل

بالاقتراب من النقطة $(0,0)$ على الخط المستقيم $y=mx$ نجد أن

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^3}{x^4+m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{x^2+m^2}=0$$

أى أن الاقتراب إلى نقطة الاصل على أى خط مستقيم يعطى النهاية صفرا.

ولكن بالاقتراب من النقطة $(0,0)$ خلال منحنى القطع المكافئ $y=mx^2$ فإن

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^4}{x^4+m^2x^4}=\frac{m}{1+m^2}=g(m)$$

نلاحظ أن هذه النهاية تعتمد علي قيمة m وبالتالى فإن قيمة النهاية تختلف قيمتها بناء على الطريقة التى نقترب بها من النقطة$(0,0)$ وعلية فإن هذه النهاية غير موجودة .

مثال١١: بين أن النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ غيرموجودة .

الحل

بالاقتراب من النقطة $(0,0)$ خلال الخط المستقيم $y=mx$ نجد أن:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2} = g(m)$$

أى أن قيمة النهاية تعتمد على العدد m وحيث أن m أختيارية وأن النهاية تكون وحيدة (أن وجدت) بغض النظر عن كيفية الاقتراب من $(0,0)$وعلية فإن نهاية الدالة المعطاة غير موجودة.

طريقة أخرى:

نستخدم الاحداثيات القطبية $x=r\cos\theta\,, y=r\sin\theta$ فنحصل على

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta$$

أى أن قيمة النهاية تعتمد على قيمة θ وبالتالى فهى غير موجودة.

النهايات المتتالية(المكررة) للدوال في اكثر من متغير

إذا كانت الدالة $f(x,y)$ معرفة فى جوار النقطة (x_0,y_0) فإن النهاية $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ إن وجدت فهى دالة فى x ولتكن $\phi(x)$ وعلية فإن قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to x_0} \phi(x)$ تكون موجودة وتساوى α (مثلا) وتكتب

$$\lim_{x\to x_0}\left\{\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right\} = \lim_{x\to x_0} \phi(x) = \alpha$$

وبالتالى تكون α هى النهاية المتتالية للدالة $f(x,y)$ عندما $y\to y_0$ أولا ثم عندما$x\to x_0$.وإذا بدلنا ترتيب النهاية فإننا نحصل على نهاية متتالية

أخرى وذلك بإفتراض أن $\lim_{x \to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$ هى دالة فى y بينما $\lim_{y \to y_0} \varphi(y)$ موجودة وتساوى α' وهذا يعنى

$$\lim_{y \to y_0} \left\{ \lim_{x \to x_0} f(x,y) \right\} = \lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \alpha'$$

وعموما يمكن أن تكون هاتان النهايتان متساويتان أو لا.

ملاحظات:

١. اذا وجدت النهايتان $\lim_{x\to x_0} \left\{ \lim_{y\to y_0} f(x,y) \right\}$ ، $\lim_{y\to y_0} \left\{ \lim_{x\to x_0} f(x,y) \right\}$ ليس بالضرورة أن تكون متساويتان.

٢. قد تكون النهايتان $\lim_{x\to x_0} \left\{ \lim_{y\to y_0} f(x,y) \right\}$ ، $\lim_{y\to y_0} \left\{ \lim_{x\to x_0} f(x,y) \right\}$ موجودتين ولكن النهاية الانية $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ غير موجودة.

٣. اذا كانت النهايه الانية $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ موجودة فأنة يكون $\lim_{y \to y_0} \left\{ \lim_{x \to x_0} f(x,y) \right\} = \lim_{x \to x_0} \left\{ \lim_{y \to y_0} f(x,y) \right\}$ ولكن العكس غير صحيح.

مثال١٢: بين أن النهاية $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$ غيرموجودة

الحل

$$\lim_{y \to 0} \left\{ \lim_{x \to 0} \frac{x-y}{x+y} \right\} = \lim_{y \to 0} (-1) = -1, \quad \lim_{x \to 0} \left\{ \lim_{y \to 0} \frac{x-y}{x+y} \right\} = \lim_{x \to 0} (1) = 1$$

أى أن النهايات المكررة غير متساوية وكذلك $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$ غيرموجودة

مثال١٣: أدرس وجود النهاية

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(-x+y)}{(x+y)} \cdot \frac{(1+x)}{(1+y)}$$

الحل

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{(-x+y)}{(x+y)}\cdot\frac{(1+x)}{(1+y)}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(-x)}{(x)}\cdot\frac{(1+x)}{(1)}=-1$$

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{(-x+y)}{(x+y)}\cdot\frac{(1+x)}{(1+y)}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(y)}{(y)}\cdot\frac{(1)}{(1+y)}=1$$

أى أن النهايات المكررة غيرمتساوية

وكذلك

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(-x+y)}{(x+y)}\cdot\frac{(1+x)}{(1+y)}$$

غيرموجودة

مثال١٤: ادرس وجود نهاية للدالة $f(x,y)$ عند النقطة $(0,0)$ حيث

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الحل

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right\}=\lim_{y\to 0}0=0$$

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right\}=\lim_{x\to 0}0=0$$

أى أن النهايات المتتالية متساوية ولكن النهاية الانية للدالة غيرموجودة.

اتصال الدوال في اكثر من متغير

الاتصال عند نقطة للدوال في اكثر من متغير

تعريف: إذا كانت الدالة $f(x,y)$ معرفة فى المنطقة D وأن النقطة $(x_0,y_0)\in D$ فإنة يقال أن الدالة $f(x,y)$ متصلة عند النقطة (x_0,y_0) إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد عدد $\delta>0$ بحيث أن $(x,y)\in N_\delta(x_0,y_0)$ لكل $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$.

تعريف: إذا كانت الدالة $f(x,y)$ معرفة فى المنطقة D وأن النقطة $(x_0,y_0)\in D$ فإنة يقال أن الدالة $f(x,y)$ متصلة عند النقطة (x_0,y_0) اذا تحققت الشروط التالية:

١) الدالة $f(x,y)$ معرفة عند النقطة (x_0,y_0).

٢) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ موجودة.

٣) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

اتصال الدوال في اكثر من متغير على منطقة

تكون الدالة $f(x,y)$ متصلة فى المنطقة D إذا كانت متصلة عند كل نطاقها.

قاعدة : بتطبيق قواعد النهايات السابقة يمكن إثبات أن المجموع والفرق بين الدوال المتصلة فى متغيرين أو أكثر هى أيضاً دوال متصلة كذلك حواصل ضرب والمضاعفات الثابتة(حواصل الضرب فى مقادير ثابتة) للدوال المتصلة تعرف دوال متصلة ،حاصل قسمة دالتين متصلتين هو دالة متصلة عند كل نقطة يكون عندها المقام غير صفري ،كثيرات الحدود والدوال القياسية هي دوال متصلة عند كل نقطة في نطاقها

مثال١٥: ادرس إتصال كل من الدوال الآتية:

$$(1)\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$(2)\quad f(x,y)=\begin{cases}x^2+2y, & (x,y)\neq(1,2)\\ 0, & (x,y)=(1,2)\end{cases}$$

$$(3)\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$(4)\quad f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\neq(0,0)$$

الحل

(١) اثبتنا سابقا أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة وعلى ذلك تكون الدالة غير متصلة عند النقطة $(0,0)$ ومتصلة عند باقى نقاط المستوى.

(٢) نبحث نهاية الدالة عند النقطة $(1,2)$ نجد أن $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)=5$ والدالة معرفة عند النقطة $(1,2)$ حيث أن $f(1,2)=0$ ،اذن $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)\neq f(1,2)$ ومنها الدالة غير متصلة عند النقطة $(1,2)$ ومتصلة عند باقى نقاط المستوى.

(٣) اثبتنا سابقا أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة وعلى ذلك تكون الدالة غير متصلة عند النقطة $(0,0)$ ومتصلة عند باقى نقاط المستوى

(٤) الدالة غير معرفة عند النقطة $(0,0)$ وبالتالى فإنها غير متصلة عند النقطة $(0,0)$ ومتصلة عند باقى نقاط المستوى.

مثال١٦: ادرس إتصال الدالة
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الحل

بالاقتراب من النقطة $(0,0)$ خلال الخط المستقيم $y=mx$ نجد أن:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{\sqrt{x^2+m^2x^2}}=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\lim_{x\to 0} x=0$$

و حيث أن الدالة معرفة عند $(0,0)$ حيث أن $f(0,0)=0$ وبالتالي يكون:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$$

وبالتالي تكون الدالة المعطاة متصلة عند النقطة $(0,0)$ ومتصلة عند باقى نقاط المستوى.

مثال١٧:

ادرس إتصال كل من الدوال الآتية:

$$(1)\quad f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left[\dfrac{1}{x^2+y^2}\right] & , \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الحل

لكل $(x,y)\neq(0,0)$ نحصل على

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|(x^2+y^2)\sin\left[\frac{1}{x^2+y^2}\right]-0\right|$$

$$\therefore |f(x,y)-f(0,0)|=\left|x^2+y^2\right|\left|\sin\left[\frac{1}{x^2+y^2}\right]\right|\leq x^2+y^2<\varepsilon$$

أذن $|f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon$ عند $\varepsilon=\delta^2$, $x^2+y^2<\delta^2$ أذن الدالة متصلة عند $(0,0)$

تمارين (١)

(١) اذا كانت $f(x,y)=x^3-2xy+3y^2$ فاوجد

(1) $f(-2,3)$; (2) $f\left(\frac{1}{x},\frac{3}{y}\right)$; (3) $\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k},\ k\neq 0$

(٢)عين نطاق ومدى الدوال الاتية:

(1) $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$

(2) $f(x,y)=1/xy$

(3) $f(x,y)=\sin(xy)$

(4) $f(x,y)=-1/(x^2+y^2)$

(5) $f(r,s)=\sqrt{1-r}\,e^{r/s}$

(6) $f(u,v)=\frac{uv}{u-2v}$

(7) $f(x,y)=\ln(x+y)$

(8) $f(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

(٣) أوجد كل من النهايات التالية

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-2}{3+xy}$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},1)}\frac{y+1}{2-\cos x}$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\frac{x^4-2x^3+x^2+x^2y^2}{(x-1)^2+y^2}$

(5) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,0,0)}\frac{x^4-2x^3+x^2+x^2(y^2+z^2)^2}{(x-1)^2+y^2+z^2}$

(6) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x^3-x^2y+z^2y+x(y^2+z^2)^2-y^3}{x^2+y^2+z^2}$

(٤) بين أن كل من النهايات التالية غيرموجودة

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}$

(4) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,0,0)}\frac{(x-2)yz^2}{(x-2)^4+y^4}$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy+5y^2}{3x^2+4y^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+y^3+z^3}{3yz}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,1)} \frac{xy-x+2y-2}{(x+2)^2+(y-1)^2}$

(6) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2}$

(٥) استخدم الاحداثيات القطبية لإيجاد النهاية (إن وجدت):

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,1)} \frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}$

(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)}$

(٦) أوجد النقاط (x,y) فى المستوى xy التى تكون عندها الدوال التالية متصلة

(1) $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{xy}$

(3) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y}$

(2) $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2+1}$

(4) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-3x+2}$

الباب الثاني
المشتقات الجزئية

تعريف: اذا كان لدينا الدالة $z = f(x,y)$ دالة متصلة فى المتغيرين المستقلين x, y فإذا جعلنا المتغير المستقل y ثابت وبالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على المشتقة الجزئية للدالة $z = f(x,y)$ عند النقطة (x,y) بالنسبة إلى x ونرمز لها بأى من الرموز الأتية:

$$f_x(x,y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = D_x f$$

ويصاغ ذلك رياضيا كالأتى

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

وبالمثل إذا جعلنا المتغير المستقل x ثابت وبالتفاضل بالنسبة إلى y نحصل على المشتقة الجزئية للدالة $z = f(x,y)$ عند النقطة (x,y) بالنسبة إلى y ونرمز لها بأى من الرموز الأتية:

$$f_y(x,y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = D_y f$$

ويصاغ ذلك رياضيا كالأتى

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$$

تعميم: إذا كانت f دالة فى n من المتغيرات المستقلة $x_1, x_2, ..., x_n$ فإن التفاضل الجزئى للدالة بالنسبة إلى x_1 مع اعتبار باقى المتغيرات $x_1, x_2, ..., x_n$ ثابتة نرمز له بالرمز f_{x_1} أو $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ ويصاغ ذلك رياضيا كالأتى:

$$f_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{h}$$

وعلى وجه العموم يكون:

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, x_i+h, ..., x_n) - f(x_1, x_2, x_i, ..., x_n)}{h}$$

حيث $i=1,2,...,n$ وذلك بشرط وجود نهاية لهذه الدوال.

مثال١: إذا كانت $f(x,y)=2x^2-xy+2y^2+1$ أوجد f_x, f_y .

الحل:

الطريقة الأولى (بأستخدام التعريف)

$$f_x=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[2(x+h)^2-(x+h)y+2y^2+1]-[2x^2-xy+2y^2+1]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(x^2+2h+h^2)-xy-hy+2y^2+1-2x^2+xy-2y^2-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(4x+2h-y)}{h}=4x-y$$

$$\therefore f_x\big|_p=4-2=2$$

بالمثل

$$f_y=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{[2x^2-x(y+k)+2(y+k)^2+1]-[2x^2-xy+2y^2+1]}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{k(-x+2k+4y)}{k}=-x+4y$$

$$\therefore f_y\big|_p=-1+8=7$$

الطريقة الثانية:

بتفاضل الدالة f مباشرة بالنسبة إلى x مع اعتبار y ثابتا نحصل على:

$$f_x=4x-y$$

وبتفاضل الدالة f مباشرة بالنسبة إلى y مع اعتبار x ثابتا نحصل على:

$$f_y=-x+4y$$

مثال٢ : اذا كانت $z=x^2y^3$ **فاوجد** z_x ، z_y .

الحل

$$z_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y^3\right)=2xy^3$$

$$z_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y^3\right)=3x^2y^2$$

مثال٣ : اذا كانت $z=\frac{y}{x}$ **فأوجد** z_x ، z_y **.**

الحل

$$z_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)=y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{y}{x^2}$$

$$z_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}(y)=\frac{1}{x}$$

مثال: إذا كانت $z=e^{x^2+y^2}$ أوجد z_x,z_y ثم برهن أن $z_x+z_y=2(x+y)z$.

الحـــــــــــــــــــــل

$$z_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^2+y^2}\right)=e^{x^2+y^2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)=2xe^{x^2+y^2}$$

$$z_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2+y^2}\right)=e^{x^2+y^2}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)=2ye^{x^2+y^2}$$

وبالتالي نجد أن

$$z_x+z_y=2ye^{x^2+y^2}+2ye^{x^2+y^2}=2(x+y)e^{x^2+y^2}=2(x+y)z$$

مثال: إذا كانت $z=e^{f(x,y)}$ أوجد z_x,z_y ثم برهن أن $z_x+z_y=(f_x+f_y)z$.

الحـــــــــــــــــــــل

$$z_x=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{f(x,y)}\right)=e^{f(x,y)}\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=e^{f(x,y)}f_x(x,y)$$

$$z_y=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{f(x,y)}\right)=e^{f(x,y)}\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=e^{f(x,y)}f_y(x,y)$$

وبالتالي نجد أن

$$z_x+z_y=e^{f(x,y)}f_x+e^{f(x,y)}f_y=(f_x+f_y)e^{f(x,y)}=(f_x+f_y)z$$

مثال: أوجد f_x,f_y للدوال الأتية:

(1) $f(x,y)=x^2+3xy+y-1$ (2) $f(x,y)=y\sin(xy)$

(3) $f(x,y)=\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ (4) $f(x,y)=\frac{2y}{y+\cos x}$

الحـــــــــــــــــــــل

(1) $f_x(x,y)=2x+3y$, $f_y(x,y)=3x+1$

(2) $f_x(x,y)=y^2\cos(xy)$, $f_y(x,y)=\sin(xy)+xy\cos(xy)$

(3) $f_x=-\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$, $f_y(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$

(4) $f_x(x,y)=\frac{2y\sin x}{(y+\cos x)^2}$, $f_y(x,y)=\frac{2\cos x}{(y+\cos x)^2}$

مثال: إذا كانت $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ أوجد f_x,f_y .

الحل

$$f_x = \frac{1}{1+(y/x)^2}(-y/x^2) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f_y = \frac{1}{1+(y/x)^2}(1/x) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

مثال: إذا كانت $f(x,y) = \sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{x^3+y^3}$ أثبت أن $x\, f_x + y\, f_y = \sqrt{x^2-y^2}$.

الحل

$$f_x = (-y/x^2)\frac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$\therefore\ x\, f_x = (-y/x)\frac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-y^2}} \qquad (١)$$

$$f_y = (-1/x)\frac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$\therefore\ y\, f_y = (-y/x)\frac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2-y^2}} \qquad (٢)$$

بجمع (١)،(٢) نحصل على

$$x\, f_x + y\, f_y = \sqrt{x^2-y^2}$$

ملاحظات :

١-إذا كان للدالة $f(x,y)$ لمشتقتين f_x, f_y وكانتا متصلتين فى المنطقة D فإن الدالة $f(x,y)$ تكون متصلة فى هذه المنطقة

٢- وجود المشتقة الجزئية عند نقطة ما فى المنطقة D لا يضمن اتصال الدالة $f(x,y)$ عند هذه النقطة

مثال : اثبت أن كل من f_x, f_y موجودة عند $(0,0)$ ولكن ليست متصلة عند $(0,0)$ للدالة

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2} & , \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

الحل :

نوجد كل من f_x, f_y عند $(0,0)$ باستخدام التعريف

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=0$$

إذا وضعنا $y=mx$ وجعلنا $x\to 0$ نجد أن

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

أى أن قيمة النهاية تعتمد على العدد m وحيث أن m أختيارية وأن النهاية تكون وحيدة (إن وجدت) بغض النظر عن كيفية الاقتراب من $(0,0)$ وعلية فإن نهاية الدالة المعطاة غير موجودة.أى أن الدالة غير متصلة عند النقطة $(0,0)$

<u>الشرط الكافى للاتصال :</u>

<u>نظرية:</u>

الشرط الكافى لتكون $f(x,y)$ دالة متصلة عند النقطة (x_0,y_0) هو أن تكون $f_y(x_0,y_0)$ ، $f_x(x_0,y_0)$ موجودتان وكلا من f_x, f_y محدوده فى جوار النقطة (x_0,y_0).

المشتقات الجزئية من الرتب العليا

إذا كانت $z=f(x,y)$ لها مشتقات جزئية من الرتبة الأولى عند النقطة (x,y) على منطقة تعريفها فإن f_x, f_y تكون دوال فى x,y ويكون لها مشتقات جزئية وتسمى المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة $f(x,y)$ ويرمز لها كالتالى

$$f_{xx}(x,y)=f_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$
$$f_{yy}(x,y)=f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
$$f_{xy}(x,y)=f_{xy}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$
$$f_{yx}(x,y)=f_{yx}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

وبنفس الطريقة يمكن تعريف المشتقة الجزئية من الرتبة الثالثة وعلى سبيل المثال

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial x\partial y}=f_{xxy}\ ,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial y}=f_{xyy}\ ,..........$$

والتعريف الرياضى للمشتقات الجزئية من الرتبة الثانية عند النقطة (x_0,y_0) يكون على الصورة

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(x+h,y)-f_x(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \lim_{k\to 0} \frac{f_y(x,y+k)-f_y(x,y)}{k}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(x,y+k)-f_x(x,y)}{k}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(x+h,y)-f_y(x,y)}{h}$$

مثال: أوجد f_x, f_y, f_z للدوال الأتية:

(1) $f(x,y,z)=1+xy^2-2z^2$ (4) $f(x,y,z)=\sec^{-1}(x+xz)$

(2) $f(x,y,z)=x-\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (5) $f(x,y,z)=x(1-\cos\ y)-z$

(3) $f(x,y,z)=\cos^{-1}(xyz)$ (6) $f(x,y,z)=z\sin x\cos\ y$

الحل

(1) $f_x=y^2$, $f_y=2xy$, $f_z=-4z$

(2) $f_x=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $f_y=\dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$f_z=\dfrac{-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(3) $f_x=\dfrac{-yz}{\sqrt{1-(xyz)^2}}$, $f_y=\dfrac{-xz}{\sqrt{1-(xyz)^2}}$, $f_z=\dfrac{-xy}{\sqrt{1-(xyz)^2}}$

4) $f_x=\dfrac{1}{(x+yz)\sqrt{(x+yz)^2-1}}$

$f_y=\dfrac{z}{(x+yz)\sqrt{(x+yz)^2-1}}$

$f_z=\dfrac{y}{(x+yz)\sqrt{(x+yz)^2-1}}$

(5) $f_x=1-\cos y$, $f_y=x\sin y$, $f_z=-1$

(6) $f_x=z\cos\ x\cos\ y$, $f_y=-z\sin x\sin y$, $f_z=\sin x\cos y$

مثال: أوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى والثانية والثالثة للدالة:

$$f(x,y)=x\,cos\,y+ye^x$$

الحل

$f_x=\cos y+ye^x$, $f_y=x\sin y+e^x$

$f_{xx}=ye^x$, $f_{yy}=x\cos y$

$$f_{xy} = -\sin y + e^x \quad , \quad f_{yx} = (-x\sin y + e^x)x = -x\sin y + e^x$$

$$f_{xxx} = ye^x \quad , \quad f_{xxy} = e^x$$

$$f_{xyy} = -\cos y \quad , \quad f_{yyy} = x\sin y \quad ,.......$$

مثال: أوجد f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} للدوال الأتية:

(1) $f(x,y) = x + y + xy$ (3) $f(x,y) = \ln(2x+3y)$

(2) $f(x,y) = x^2 y + \cos y + y\sin x$ (4) $f(x,y) = \tan^{-1}(y/x)$

الحـــــــــــــــــــــل

(1) $f_x = 1 + y \quad , \quad f_y = 1 + x$

$f_{xx} = f_{yy} = 0 \quad , \quad f_{xy} = 1$

(2) $f_x = 2xy + y\cos x \quad , \quad f_y = x^2 - \sin y + \sin x$

$f_{xx} = 2y - y\sin x \quad , \quad f_{yy} = -\cos y$

$f_{xy} = 2x + \cos y$

(3) $f_x = \dfrac{2}{(2x+3y)} \quad , \quad f_y = \dfrac{3}{(2x+3y)} \quad , \quad 2x+3y \neq 0$

$f_{xx} = \dfrac{-4}{(2x+3y)^2} \quad , \quad f_{yy} = \dfrac{-9}{(2x+3y)^2} \quad , \quad 2x+3y \neq 0$

$f_{xy} = \dfrac{-6}{(2x+3y)^2} \quad , \quad 2x+3y \neq 0$

(4) $f_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \quad , \quad f_y = \dfrac{x}{x^2+y^2} \quad , \quad (x,y) \neq (0,0)$

$f_{xx} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad , \quad f_{yy} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad , \quad (x,y) \neq (0,0)$

$f_{xy} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad , \quad (x,y) \neq (0,0)$

مثال: إذا كانت $z = e^{-y}\sin x$ فأوجد z_{xx} ، z_{yy} .

الحـــــــــــــــــــــل

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-y}\sin x\right) = e^{-y}\cos x$$

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(z_x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-y}\cos x\right) = -e^{-y}\sin x$$

وبالمثل نجد أن:

$$z_y = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-y}\sin x\right) = -e^{-y}\sin x$$

$$z_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(z_y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-e^{-y}\sin x\right) = -e^{-y}\cos x$$

مثال: إذا كانت $z=e^{x^2+y^2}$ أوجد z_{xy}, z_{yx} ثم برهن أن $z_{xy}+z_{yx}=2(xz_x+yz_y)$.

الحـــــــــــــــــــــل

$$z_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^2+y^2}\right)=e^{x^2+y^2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)=2xe^{x^2+y^2}$$

$$z_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2+y^2}\right)=e^{x^2+y^2}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)=2ye^{x^2+y^2}$$

$$z_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(2xe^{x^2+y^2}\right)=2xe^{x^2+y^2}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)=4xye^{x^2+y^2}$$

$$z_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2ye^{x^2+y^2}\right)=2ye^{x^2+y^2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)=4xye^{x^2+y^2}$$

وبالتالي نجد أن:

$$z_{xy}+z_{yx}=8xye^{x^2+y^2}$$

$$yz_x+xz_y=2xye^{x^2+y^2}+2xye^{x^2+y^2}=4xye^{x^2+y^2}$$

وبالتالي نجد أن

$$z_{xy}+z_{yx}=2(xz_x+yz_y)$$

مثال: إذا كانت $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ فأثبت أن $f_{xx}+f_{yy}=0$.

الحـــــــــــــــــــــل

بالتفاضل الجزئى للعلاقة بالنسبة إلى x مرة وبالنسبة الى y مرة نحصل على

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x^2+y^2}(2x)=\frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(f_x)=\frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \qquad (١)$$

$$f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{x^2+y^2}(2y)=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial f}{\partial y}(f_y)=\frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \qquad (٢)$$

بجمع العلاقات (١) ، (٢) نحصل على $f_{xx}+f_{yy}=0$.

مثال: إذا كانت $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ فأثبت أن $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=0$.

الحـــــــــــــــــــــل

$$z_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[x^2+y^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2}\left[x^2+y^2\right]^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)$$

$$=-x\left[x^2+y^2\right]^{-\frac{3}{2}}=-x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x^2}}\right)^3=-xf^3(x,y),$$

$$z_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-xf^3(x,y)\right)=-\left(f^3\frac{\partial}{\partial x}(x)+x\frac{\partial}{\partial x}(f^3)\right)=-f^3-3xf^2f_x=-f^3+3x^2f^5$$

وبالمثل نجد أن:

$$z_{yy}=-f^3+3y^2f^5$$
$$z_{zz}=-f^3+3z^2f^5$$

وبالتالي نجد أن:

$$f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=-3f^3+3(x^2+y^2+z^2)f^5$$

وحيث أن

$$f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Rightarrow f^2=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\Rightarrow x^2+y^2+z^2=\frac{1}{f^2}$$

وبالتالي نجد أن:

$$f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=-3f^3+3\frac{f^5}{f^2}=-3f^3+3f^3=0$$

ملحوظة: معادلة لابلاس فى بعدين هى $f_{xx}+f_{yy}=0$ وهى تصف التوزيع المستقر للحرارة فى جسم مستقر (كصفيحة) ومعادلة لابلاس فى ثلاثة أبعاد هى $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=0$ ،

مثال: بين أن كل من الدوال التالية تحقق معادلة لابلاس:

(1) $f(x,y)=x^2-y^2$ (4) $f(x,y,z)=e^{3x+4y}\cos 5z$

(2) $f(x,y)=e^{-2y}\cos 2x$ (5) $f(x,y,z)=\cos 3x\cos 4y\sinh 5z$

(3) $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

الحــــــــــــــل

(1) $f_x=2x$, $f_{xx}=2$, $f_y=-2y$, $f_{yy}=-2$

$$\therefore f_{xx}+f_{yy}=2-2=0$$

(2) $f_x=-2e^{-2y}\sin 2x$, $f_{xx}=-4e^{-2y}\cos 2x$

$f_y=-2e^{-2y}\cos 2x$, $f_{yy}=4e^{-2y}\cos 2x$

$$\therefore f_{xx}+f_{yy}=-4e^{-2y}\cos 2x+4e^{-2y}\cos 2x=0$$

(3) $f_x=-x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2},$

$$f_{xx}=(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\left[-(x^2+y^2+z^2)+3x^2\right]$$

بالمثل نجد أن

$$f_{yy}=(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\left[-(x^2+y^2+z^2)+3y^2\right]$$

$$f_{zz}=(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\left[-(x^2+y^2+z^2)+3z^2\right]$$

ومنها نحصل على:

$$f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\left\{-3(x^2+y^2+z^2)+3y^2+3z^2+3y^2\right\}=0$$

(4) $f_x=3e^{3x+4y}\cos 5z \quad , \quad f_{xx}=9e^{3x+4y}\cos 5z$

$f_y=4e^{3x+4y}\cos 5z \quad , \quad f_{yy}=16e^{3x+4y}\cos 5z$

$f_z=-5e^{3x+4y}\sin 5z \quad , \quad f_{zz}=-25e^{3x+4y}\cos 5z$

وبالتالى فإن

$$\therefore \quad f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=(9+16-25)e^{3x+4y}\cos 5z=0$$

(5) $f_x=-3\sin 3x\cos 4y\sinh 5z$

$\therefore \quad f_{xx}=-9\cos 3x\cos 4y\sinh 5z=-9f(x,y,z)$

$f_y=-4\cos 3x\sin 4y\sinh 5z$

$\therefore \quad f_{yy}=-16\cos 3x\cos 4y\sinh 5z=-16\,f(x,y,z)$

$f_z=5\,\cos 3x\cos 4y\cosh 5z$

$\therefore \quad f_{zz}=25\cos 3x\cos 4y\sinh 5z=25f(x,y,z)$

ومن ذلك ينتج أن

$$\therefore f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=(-9-16+25)f=0$$

نظرية : إذا كانت $z=f(x,y)$ معرفة فى منطقة D وكانت كل من المشتقات الجزئية f_x ، f_y ، f_{xy} ، f_{yx} موجودة ومتصلة فى جوار النقطة (x_0,y_0) فإن $f_{xy}=f_{yx}$ عند هذه النقطة.

مثال : اذا كانت $z=x\tan y$ فبرهن أن: $z_{xy}=z_{yx}$.

الحــــــــــــــل

$$z_x=\frac{\partial}{\partial x}(x\tan y)=\tan y, \qquad z_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}(z_x)=\frac{\partial}{\partial y}(\tan y)=\sec^2 y$$

$$z_y=\frac{\partial}{\partial y}(x\tan y)=x\sec^2 y, \qquad z_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}(z_y)=\frac{\partial}{\partial x}(x\sec^2 y)=\sec^2 y$$

وبالتالي نجد أن: $z_{xy} = z_{yx}$.

مثال : اذا كانت $f = x^3 y + e^{xy^2}$ فبرهن أن: $f_{xy} = f_{yx}$.

الحـــــــــــــــــل

$$\therefore f_x = 3x^2 y + y^2 e^{xy^2} \;, \qquad f_{yx} = 3x^2 + 2y e^{xy^2} + 2x y^3 e^{xy^2}$$

وكذلك

$$\therefore f_y = x^3 + 2xy e^{xy^2} \;, \qquad f_{xy} = 3x^2 + 2y e^{xy^2} + 2x y^3 e^{xy^2}$$

$$\therefore f_{xy} = f_{yx}$$

مثال : إذا كانت $f(x,y) = x^2 \sin y + y^2 \cos x$ فبرهن أن: $f_{xy} = f_{yx}$.

الحـــــــــــــــــل

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \sin y + y^2 \cos x\right) = 2x \sin y - y^2 \sin x,$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(z_x) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x \sin y - y^2 \sin x\right) = 2x \cos y - 2y \sin x$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 \sin y + y^2 \cos x\right) = x^2 \cos y + 2y \cos x,$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(z_y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \cos y + 2y \cos x\right) = 2x \cos y - 2y \sin x$$

وبالتالي نجد أن: $f_{xy} = f_{yx}$.

<u>نظرية :</u>

إذا كانت $z = f(x,y)$ معرفة فى منطقة D وكانت كل من المشتقات الجزئية f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} موجودة ومتصلة فى جوار النقطة (x_0, y_0) فإن $f_{xy} = f_{yx}$ عند هذه النقطة

<u>مثال :</u> ابحث هل $f_{xy} = f_{yx}$ للدالة $f = x^3 y + e^{xy^2}$

<u>الحل :</u>

$$\therefore f_y = x^3 + 2xy e^{xy^2} \;, \qquad f_{xy} = 3x^2 + 2y e^{xy^2} + 2x y^3 e^{xy^2}$$

وكذلك

$$\therefore f_x = 3x^2 y + y^2 e^{xy^2} \;, \qquad f_{yx} = 3x^2 + 2y e^{xy^2} + 2x y^3 e^{xy^2}$$

$$\therefore \quad f_{xy} = f_{yx}$$

<u>مثال :</u> أثبت أن $f_{xy} \neq f_{yx}$ إذا كان

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

الحل :

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}$$

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=0$$

$$f_y(h,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(h,k)-f(h,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{hk(h^2-k^2)}{k(h^2+k^2)}=h$$

$$\therefore f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=0$$

بالمثل

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}$$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$$f_x(0,k)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,k)-f(h,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{hk(h^2-k^2)}{h(h^2+k^2)}=-k$$

$$\therefore f_{yx}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{-k-0}{k}=-1$$

ومنها نجد أن $f_{xy}\neq f_{yx}$

التفاضل الكلي للدوال في اكثر من متغير

يعرف التفاضل الكلي للدالة $f(x,y)$ بالصورة:

$$dz=f_x dx+f_y dy$$

والتفاضل الكلي للداله $f(x,y,z)$ يكون بالصورة:

$$df=f_x dx+f_y dy+f_z dz$$

وبصفة عامة إذا كانت $z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ فإن

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\ .$$

مثال: أوجد التفاضل الكلي للدوال الاتيه:

$(i)\ f(x,y)=\frac{x}{y}e^x \qquad (ii)\ f(x,y)=\frac{x}{y} \qquad (iii)\ f(x,y,z)=e^{x^2+y^2}\sin z^2$

الحـــــــــــــــل

يترك للطالب كتمرين

تفاضل دالة الدالة:

نظرية: لتكن $z = f(x,y)$ دالة قابلة للتفاضل بالنسبة إلى x ، y حيث أن $x = x(u,v)$ ، $y = y(u,v)$ فإن:

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = f_x x_u + f_y y_u \;\; or \;\; z_u = \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = z_x x_u + z_y y_u$$

$$f_v = \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = f_x x_v + f_y y_v \;\; or \;\; z_v = \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = z_x x_v + z_y y_v$$

نتيجة(١): نفرض أن $z = f(x,y)$ قابلة للتفاضل بالنسبة إلى x, y حيث أن $x = x(t), y = y(t)$ فيكون

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = f_x x'(t) + f_y y'(t) \;\; or \;\; \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = z_x x'(t) + z_y y'(t)$$

ويسمى $\frac{df}{dt}$ أو $\frac{dz}{dt}$ بالمعامل التفاضلى الكلى.

نتيجة(٢): نفرض أن $z = f(r)$ قابلة للتفاضل بالنسبة إلى r حيث أن $r = r(x,y)$ فيكون

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = r_x f'(r)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} = r_y f'(r)$$

مثال : اذا كانت $z = f(x,y)$ حيث أن $x = r\cos\theta \;,\; y = r\sin\theta$ فبرهن أن:

$$z_x^2 + z_y^2 = z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta^2$$

الحـــــــــــــــل

$$z_r = \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial r}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r} = z_x \cos\theta + z_y \sin\theta \qquad (1)$$

$$z_\theta = \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \theta} = z_x(-r\sin\theta) + z_y(r\cos\theta) \qquad (2)$$

بقسمة الطرفين فى المعادلة (٢) على r نحصل على

$$\frac{1}{r} z_\theta = -z_x \sin\theta + z_y \cos\theta \qquad (3)$$

اذن من (١) ،(٣) بالتربيع والجمع نحصل على

$$z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta^2 = (z_x \cos\theta + z_y \sin\theta)^2 + (-z_x \sin\theta + z_y \cos\theta)^2 = z_x^2 + z_y^2$$

مثال : أثبت أن الدالة $z = f(x^2 y)$ تحقق العلاقة $xz_x = 2yz_y$.

الحـــــــــــــــل

نفرض أن $u = x^2 y$ أذن $z = f(u)$ ويكون

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = 2xyf'(u)$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 f'(u)$$

$$\therefore\ xz_x = f'(u).2x^2 y = 2y(f'(u).x^2) = 2yz_y$$

مثال : إذا كانت $z = f(x^2+y^2)$ فأثبت أن $yz_x - xz_y = 0$.

الحـــــــــــــــــــل

بوضع $u = x^2+y^2$ نجد أن $z = f(u)$ ويكون:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = 2xf'(u)$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = 2yf'(u)$$

$$\therefore\ yz_x = 2xyf'(u),\ xz_y = 2xyf'(u)$$

$$yzx - xz_y = 2xyf'(u) - 2xyf'(u)$$

مثال : إذا كانت $z = f(x+ct)+g(x-ct)$ فبرهن أن: $z_{tt} = c^2 z_{xx}$.

الحـــــــــــــــــــل

نفرض أن $u = x+ct$ ، $v = x-ct$ أذن $z = f(u)+g(v)$ ويكون

$$z_x = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dg}{dv}\frac{\partial v}{\partial x} = f'(u)+g'(v),\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 1$$

$$z_{xx} = \frac{df'}{du}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dg'}{dv}\frac{\partial v}{\partial x} = f''(u)+g''(v)$$

وبالمثل يكون:

$$z_t = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dg}{dv}\frac{\partial v}{\partial t} = c\left[f'(u)-g'(v)\right],\ \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial t} = c$$

$$z_{tt} = \frac{df'}{du}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dg'}{dt}\frac{\partial v}{\partial x} = c^2\left[f''(u)+g''(v)\right]$$

وبالتالي يكون:

$$z_{tt} = c^2 z_{xx}$$

مثال : إذا كانت $z = f(r),\ r = \sqrt{x^2+y^2}$ فبرهن أن: $z_{xx}+z_{yy} = f''(r) + \frac{1}{r}f'(r)$

.

الحـــــــــــــــــــل

$$\because\ z_x = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\ r_x,$$

$$\therefore\ z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'(r)r_x) = \frac{\partial}{\partial x}(f'(r))r_x + f'(r)\frac{\partial}{\partial x}(r_x)$$

$$= \frac{df'}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}.r_x + f'(r)r_{xx}$$

$$= f''(r)(r_x)^2 + f'(r)r_{xx}$$

وبالمثل نجد أن

$$z_{yy} = f''(r).(r_y)^2 + f'(r)r_{yy}$$

وبالتالي نجد أن:

$$z_{xx} + z_{yy} = f''(r)\left[(r_x)^2 + (r_y)^2\right] + f'(r)\left[r_{xx} + r_{yy}\right]$$

ولكن

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}, \quad r_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{r - xr_x}{r^2} = \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}$$

وبالمثل نجد أن

$$r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r}, \quad r_{yy} = \frac{x^2}{r^3}$$

وبالتالي نجد أن:

$$(r_x)^2 + (r_y)^2 = 1, \ r_{xx} + r_{yy} = \frac{1}{r}$$

$$z_{xx} + z_{yy} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r)$$

مثال : اذا كانت $z = f(x,y)$ حيث $x = r\cos\theta \ , y = r\sin\theta$ أوجد كلاً من f_{xx}, f_{yy} ثم أثبت أن

$$f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta}$$

الحـــــــــــــــــل

من العلاقات $x = r\cos\theta \ , y = r\sin\theta$ نستنتج أن

$$r^2 = x^2 + y^2 \ , \ \theta = \tan^{-1}(y/x)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1+(y/x)^2} . \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-y}{r^2} = -\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{1+(y/x)^2} . \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{\partial f}{\partial r} . \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} . \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos\theta \, f_r - \frac{\sin\theta}{r} f_\theta$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial r}(f_x) . \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}(f_x) . \frac{\partial \theta}{\partial x} == \cos\theta \frac{\partial f_x}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial f_x}{\partial \theta}$$

$$= \cos\theta \frac{\partial}{\partial r}\left[\cos\theta \, f_r - \frac{\sin\theta}{r} f_\theta\right] - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\cos\theta \, f_r - \frac{\sin\theta}{r} f_\theta\right]$$

$$= \cos^2\theta \, f_{rr} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} f_\theta - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r} f_{\theta r}$$

$$-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} f_{r\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r} f_r+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} f_\theta+\frac{\sin^2\theta}{r^2} f_{\theta\theta}$$

وبالتالي نجد أن:

$$\therefore f_{xx}=\cos^2\theta f_{rr}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\left[f_{r\theta}+f_{\theta r}\right]+2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} f_\theta$$

$$+\frac{\sin^2\theta}{r} f_r+\frac{\sin^2\theta}{r^2} f_{\theta\theta} \qquad (1)$$

بالمثل

$$\frac{\partial f}{\partial y}=f_y=\frac{\partial f}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial\theta}.\frac{\partial\theta}{\partial y}=\sin\theta\, f_r+\frac{\cos\theta}{r} f_\theta$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]=\frac{\partial}{\partial r}(f_y).\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\theta}(f_y).\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial}{\partial r}\left[\sin\theta\, f_r+\frac{\cos\theta}{r} f_\theta\right].\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\, f_r+\frac{\cos\theta}{r} f_\theta\right].\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$=\left[\sin\theta\, f_{rr}+\frac{\cos\theta}{r} f_{r\theta}-\frac{\cos\theta}{r^2} f_\theta\right].\sin\theta$$

$$+\left[\sin\theta\, f_r+\sin\theta\, f_{\theta r}+\frac{\cos\theta}{r} f_{\theta\theta}-\frac{\sin\theta}{r} f_\theta\right].\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\therefore f_{yy}=\sin^2\theta f_{rr}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\left[f_{r\theta}+f_{\theta r}\right]-2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} f_\theta$$

$$+\frac{\cos^2\theta}{r} f_r+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} f_{\theta r}+\frac{\cos^2\theta}{r^2} f_{\theta\theta} \qquad (2)$$

وبجمع $f_{\theta r}=f_{r\theta}$ متصلة ومشتقاتها الجزئية متصلة فإن f وحيث أن الدالة (١) ، (٢) نحصل على معادلة لابلاس فى الأحداثيات القطبية

$$f_{xx}+f_{yy}=f_{rr}+\frac{1}{r} f_r+\frac{1}{r^2} f_{\theta\theta}$$

ملحوظة : النتيجة السابقة يمكن كتابتها على الصورة

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) f$$

حيث يعرف المؤثر التفاضلى $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ بمؤثر لابلاس بدلالة الاحداثيات الكارتيزية x,y ؛ وعليه فإن الصورة $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)$ تعطى مؤثر لابلاس بدلالة الاحداثيات القطبية r,θ

بصورة عامة يعرف مؤثر لابلاس فى الفراغ في الإحداثيات الكارتيزية

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}==\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi})+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

الدوال المتجانسة:

تعريف : الدالة $f(x,y)$ تسمى دالة متجانسة من الدرجة n فى x,y إذا كان:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y) \qquad (١)$$

حيث أن $\lambda \neq 1$ مقدار ثابت.

وعموما يقال أن $f(x_1,x_2,...,x_n)$ أنها دوال متجانسة من الدرجة n فى $x_1,x_2,...,x_n$ إذا كان

$$f(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n)=\lambda^n f(x_1,x_2,...,x_n) \qquad (٢)$$

بوضع $\lambda=\frac{1}{x}$ فى (١) نحصل على

$$f(1,y/x)=\frac{1}{x^n}f(x,y)=f(y/x)$$

$$f(x,y)=x^n f(y/x) \qquad (٣)$$

وهذا هو الصورة العامة لدالة متجانسة من الدرجة النونية

مثال : برهن أن الدالة $f(x,y)=x^4-5y^4+2xy^3$ متجانسة.

الحـــــــــــــــــــل

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^4-5(\lambda y)^4+2(\lambda x)(\lambda y)^3=\lambda^4(x^4-5y^4+2xy^3)$$

أذن الدالة متجانسة من الدرجة الرابعة.

نظرية أويلر للدوال المتجانسة:

نظريه: إذا كانت $f(x,y)$ دالة متجانسة من الدرجة n فى x,y فإن

$$x\,f_x+y\,f_y=nf$$

البرهان :

حيث أن $f(x,y)$ دالة متجانسة من الدرجة n فى x,y فإن $f(x,y)=x^n g(y/x)$ وبالتالى فإن

$$f_x=nx^{n-1}g(y/x)+x^n g'(y/x).(y/x^2)$$

$$=nx^{n-1}g(y/x)-y\,x^{n-2}g'(y/x)$$

$$f_y=x^n g'(y/x).(1/x)$$

بالتعويض عن f_x,f_y نحصل على

$$x\,f_x+y\,f_y=nx^{n-1}g(y/x)-y\,x^{n-2}g'(y/x)+x^n g'(y/x).(1/x)$$

$$=nx^n g(y/x)=n\,f(x,y)$$

مثال: حقق نظرية أويلر للدوال المتجانسة للدالة $f(x,y,z)=5x^2-2y^2+7z^2$.

الحـــــــــــــــــــل

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=5(\lambda x)^2-2(\lambda y)^2+7(\lambda z)^2=\lambda^2 f(x,y,z)$$

أى أن الدالة متجانسة من الدرجة الثانية وبالتالي يكون:

$$\therefore x\, f_x + y\, f_y = 2f$$

مثال : إذا كانت $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ فأثبت أن $xf_x + yf_y = 0$.

الحـــــــــــــــــــــل

$$\because f_x(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\because f_y(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\therefore xf_x + yf_y = -\frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

مثال : إذا كانت $z=\dfrac{x-y}{x+y}$ فأثبت أن $xz_x + yz_y = 0$

الحـــــــــــــــــــــل

يترك للطالب كتمرين

مثال : إذا كانت $f(x,y) = x\,y\,e^{y/x}$ فأثبت أن $xf_x + yf_y = 2f$

الحـــــــــــــــــــــل

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\,y\,e^{y/x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x\,y\,)e^{y/x} + x\,y\frac{\partial}{\partial x}\left(\,e^{y/x}\right)$$

$$= ye^{y/x} + x\,y\,e^{y/x}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= ye^{y/x} + x\,y\,e^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$= ye^{y/x} - \frac{y^2}{x}e^{y/x} = \left(y - \frac{y^2}{x}\right)e^{y/x}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\,y\,e^{y/x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x\,y\,)e^{y/x} + x\,y\frac{\partial}{\partial y}\left(\,e^{y/x}\right)$$

$$= xe^{y/x} + x\,y\,e^{y/x}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= xe^{y/x} + x\,y\,e^{y/x}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= xe^{y/x} + y\,e^{y/x} = (x+y)e^{y/x}$$

$$xf_x + yf_y = x\left(y - \frac{y^2}{x}\right)e^{y/x} + y(x+y)e^{y/x}$$

$$= (xy - y^2)e^{y/x} + (xx + y^2)e^{y/x}$$

$$= \left[xy - y^2 + xy + y^2\right]e^{y/x} = 2xye^{y/x} = 2\,f\,(x,y)$$

مثال:ـ إذا كانت $z=\sin^{-1}\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ فأثبت أن $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{df}{dy} = \tan z$.

الحـــــــــــــــــــــل

بما أن $z=\sin^{-1}\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ أذن $f=\sin z=\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$

وهى دالة متجانسة من الدرجة الأولى ، وباستخدام نظرية أويلر نحصل على

$$x\frac{\partial}{\partial x}(\sin z)+y\frac{d}{dy}(\sin z)=1.\sin z$$

وبالتالي نجد أن

$$x\frac{\partial}{\partial z}(\sin z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{d}{dz}(\sin z)\frac{\partial z}{\partial y}=\sin z$$

$$x\cos z\frac{\partial z}{\partial x}+y\cos z\frac{\partial z}{\partial y}=\sin z$$

بالقسمة على $\cos z$ نحصل على: $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\tan z$.

الدوال الضمنية

يمكن استخدام المشتقات الجزئيه الدوال في اكثر من متغير لايجاد مشتقات الدوال المعرفة ضمنيا، فمثلا المعادلة: $e^{xy}+\sin(x+y)=0$ هي دالة ضمنية علي الصورة $F(x,y)=0$ وهي معادلة تعرف دالة ضمنية في متغير واحد x بحيث أن $F(x,y)=0, y=f(x)$ أو $F(x, f(x))=$ ، وكذلك المعادلة $F(x,y,z)=0$ تعرف دالة ضمنية فى المتغيرين x ، y حيث أن $z=f(x,y)$ ويكون $F(x,y,f(x,y))=0$ او $F(x,y,z)=0,\ z=f(x,y)$.

نظرية: اذا كانت المعادلة $F(x,y)=0$ تعرف دالة ضمنية قابلة للتفاضل في متغير واحد x بحيث أن $y=f(x)$ فإن $y'=-\dfrac{F_x}{F_y}$.

البرهان

بفرض أن المعادلة $F(x,y)=0$ تعرف دالة في متغير واحد x بحيث أن $F(x,f(x))=0$ ، وبفرض أن:

$$z = F(x,y) = 0, y = f(x)$$

وبتطبيق قاعدة السلسلة نجد أن:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(1) + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow F_x + F_y y' = 0$$

وبالتالي نجد أن:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $xe^y + ye^x = 0$.

الحـــــــــــــل

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{(y+1)e^x}{(x+1)e^x} = -\frac{y+1}{x+1}$$

مثال: اذا كانت $y = f(x)$ تحقق المعادلة $y^4 + 3y - 4x^3 - 5x - 1 = 0$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحـــــــــــــل

بفرض أن $F(x,y) = y^4 + 3y - 4x^3 - 5x - 1 = 0$ فيكون $y' = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{12x^2+5}{4y^3+3}$.

نظرية: اذا كانت المعادلة $F(x,y,z) = 0$ تعرف دالة ضمنية فى المتغيرين x ، y بحيث أن $z = f(x,y)$ فإن $z_x = -\frac{F_x}{F_z},\ z_y = -\frac{F_y}{F_z}$.

البرهان: بفرض أن المعادلة $F(x,y,z) = 0$ تعرف دالة ضمنية فى المتغيرين x ، y حيث أن $z = f(x,y)$ فيكون:

$$F(x,y,f(x,y)) = 0$$

أو

$$F(x,y,z) = 0, \quad z = f(x,y)$$

وبتطبيق قاعده السلسلة نجد أن:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0\ ,$$

وبالتالي نجد أن:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1) + \frac{\partial F}{\partial y}(0) + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow F_x + F_z z_x = 0 \Rightarrow z_x = -\frac{F_x}{F_z}$$

حيث أن $F_z \neq 0$

وبالمثل يمكن الحصول علي:

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

مثال: اذا كانت الداله $z = f(x,y)$ تحقق الدالة الضمنية $x^2z^2 + xz^2 - z^3 + 4yz - 5 = 0$.

الحــــــــــــــل

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{2xz^2 + y^2}{2x^2z - 3z^2 + 4z}$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2xy + 4z}{2x^2z - 3z^2 + 4y}$$

المشتقة الاتجاهيه للدوال في اكثر من متغير

تعريف: معدل تغير الدالـة $f(x,y)$ فـي اتجـاة متجـة الوحـدة $\vec{u} = (a,b)$ يسـمي بالمشـتقة الاتجاهيـه لهـذه الدالـة ويرمـز لهـا بـالرمز $D_{\vec{u}} f$ وهـذه المشـتقة تعرف بالصورة:

$$D_{\vec{u}} f = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+ah, y+bh) - f(x,y)}{h}$$

وبوجه عام فإن حساب هذه النهاية يكون في غاية الصعوبة ولذلك نحن بحاجة الي طريقه اكثر سهولة لحساب المشتقة الاتجاهيه وذلك من خلال استنتاج صيغة تكافئ هذا التعريف . ولاستنتاج صيغة تكافئ هذه النهاية لحساب المشتقة الاتجاهيه للدالة $f(x,y)$ نتبع التالي:

نعرف دالة جديدة في متغير واحد بالصورة:

$$g(z) = f(x_0 + az, y_0 + bz)$$

حيث أن x_0 ، y_0 ، a ، b ثوابت اختيارية.

وبالتالي من خلال تعريف المشتقة للدوال في متغير واحد نجد أن:

$$g'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h}$$

وبالتالي نجد أن:

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h}$$

وبالتعويض في العلاقة السابقة عن $g(z)$ نجد أن:

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h} = D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$$

وبالتالي يكون لدينا العلاقة:

$$g'(0) = D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) \qquad (*)$$

نظرية: المشتقة الاتجاهية للدالة $f(x,y)$ عند النقطة (x_0, y_0) في اتجاة متجة الوحدة $u = (a,b)$ تعطي من العلاقة:

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b$$

والمشتقة الاتجاهية للدالة $f(x,y,z)$ في اتجاة متجة الوحدة $u=(a,b,c)$ تعطي بالصورة:

$$D_{\vec{u}} f = f_x a + f_y b + f_z c$$

البرهان

لتحقق من صحة هذه النظريه نعتبر الدالة

$$g(z) = f(x,y), \qquad x = x_0 + az, \qquad y = y_0 + bz$$

وبتطبيق قاعده السلسلة نجد أن:

$$g'(z) = \frac{dg}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dz} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dz} = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$$

وبوضع $z=0$ نجد أن $x=x_0$ ، $y=y_0$ وبالتالي يكون

$$g'(0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b \qquad (**)$$

ومن العلاقتين (*) ، (**) نجد أن المشتقة الاتجاهية للدالة $f(x,y)$ عند النقطة (x_0, y_0) تعطي من العلاقة:

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = g'(0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b$$

ملحوظة: في سياق النظرية السابقة تكون المشتقة الاتجاهية للدالة $f(x,y)$ عند النقطة (x,y) في اتجاة متجة الوحدة $u=(a,b)$ تعطي بالصورة:

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$$

والمشتقة الاتجاهية للدالة $f(x,y,z)$ عند النقطة (x,y,z) في اتجاة متجة الوحدة $u=(a,b,c)$ تعطي بالصورة:

$$D_{\vec{u}} f(x,y,z) = f_x(x,y,z)a + f_y(x,y,z)b + f_z(x,y,z)c$$

ملحوظة: متجة الوحدة $\vec{u}$ في اتجاة المتجة الذي يصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور ox هو $\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$.

مثال: اذا كانت $f(x,y) = xe^{xy} + y$ فاوجد $D_{\vec{u}} f(2,0)$ حيث أن $\vec{u}$ هو متجة وحدة في الاتجاة $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

الحـــــــــــــــل

في هذه الحالة متجه الوحدة $\vec{u}$ يعطي بالصورة:

$$\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

وبالتالي نجد أن:

$$\because D_{\vec{u}} f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b = \left(-\frac{1}{2}\right)(e^{xy} + xye^{xy}) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x^2e^{xy} + 1)$$

وبالتالي نجد أن:

$$D_{\vec{u}} f(2,0)=\left(-\frac{1}{2}\right)(1)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(5)=\frac{5\sqrt{3}-1}{2}$$

مثال: اذا كانت $f(x,y,z)=x^2z+y^3z^2-xyz$ فاوجد $D_{\vec{u}} f(x,y,z)$ في اتجاه المتجة $\vec{v}=(-1,0,3)$.

الحـــــــــــــــل

متجة الوحدة $\vec{u}$ في اتجاه المتجة $\vec{v}=(-1,0,3)$ يعطي بالصورة:

$$\vec{u}=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=\frac{1}{\sqrt{10}}(-1,0,3)$$

وبالتالي نجد أن:

$$D_{\vec{u}} f(x,y,z)=f_x(x,y,z)a+f_y(x,y,z)b+f_z(x,y,z)c$$

$$=\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)(2xz-yz)+(0)(3y^2z^2-xy)+\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)(x^2+2y^2z-xy)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{10}}(3x^2+6y^3z-3xz+yz)$$

الانحدار للدوال في اكثر من متغير

متجة الميل او الانحدارللدالة $f(x,y)$ يعطي بالصورة:

$$\nabla f=(f_x,f_y)=f_x\vec{i}+f_y\vec{j}$$

والانحدار للدالة $f(x,y,z)$ تكون بالصورة:

$$\nabla f=(f_x,f_y,f_z)=f_x\vec{i}+f_y\vec{j}+f_z\vec{k}$$

وبالتالي يمكن حساب المشتقة الاتجاهيه الدوال في اكثر من متغير من خلال متجة الميل لهذه الدوال كمايلي:

$$\because D_{\vec{u}} f(x,y,z)=f_x(x,y,z)a+f_y(x,y,z)b+f_z(x,y,z)c=(f_x,f_y,f_z).(a,b,c)=\nabla f.(a,b,c)$$

وبالتالي نجد أن:

$$D_{\vec{u}} f(x,y,z)=\nabla f.\vec{u}$$

مثال: اذا كانت $f(x,y)=x\cos y$ فاوجد $D_{\vec{u}} f(x,y)$ في اتجاة المتجه $\vec{v}=(2,1)$.

الحـــــــــــــــل

نوجد متجة الوحدة $\vec{u}$في اتجاه المتجة $\vec{v}=(2,1)$:

$$\vec{u}=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

وبحساب متجة الميل (الانحدار) نجد أن:

$$\nabla f=(f_x,f_y)=(\cos y,-x\sin y)$$

وبالتالي نجد أن:

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = \nabla f.\vec{u} = (\cos y, -x\sin y)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\cos y - x\sin y)$$

مثال: اذا كانت $f(x,y,z) = \sin(yz) + \ln(x^2)$ **فأوجد** $D_{\vec{u}} f(x,y,z)$ عند النقطة $(1,1,\pi)$ في اتجاة المتجه $\vec{v} = (1,1,-1)$ **.**

الحـــــــــــــــل

نوجد متجة الوحدة $\vec{u}$في اتجاه المتجة $\vec{v} = (1,1,-1)$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

وبحساب متجة الميل (الانحدار) نجد أن:

$$\nabla f(x,y,z) = (f_x, f_y, f_z) = \left(\frac{2}{x}, z\cos yz, y\cos yz\right)$$

وبالتالي نجد أن:

$$\nabla f(1,1,\pi) = \left(\frac{2}{1}, \pi\cos\pi, \cos\pi\right) = (2, -\pi, -1)$$

وبالتالي تكون:

$$D_{\vec{u}} f(1,1,\pi) = (2,-\pi,-1).\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2-\pi+1) = \frac{3-\pi}{\sqrt{3}}$$

تمارين (٢)

(١) أوجد المشتقات الجزئية الأولى لكل من الدوال التالية :

(1) $f(x,y) = 2x^2 - 3y - 4$

(2) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(3) $f(x,y) = \ln xy$

(4) $f(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

(5) $f(x,y,z) = 1 + yx^2 - 2z^2$

(6) $f(x,y,z) = \sin^{-1}(xyz)$

(7) $f(x,y) = (xy-1)^2$

(8) $f(x,y) = x^y$

(9) $f(x,y) = e^{-y}\sin(x+y)$

(10) $f(x,y,z) = \sec^{-1}(x+yz)$

(11) $f(x,y,z) = x - \sqrt{y^2 + z^2}$

(12) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(٢) أوجد المشتقات الجزئية الثانية لكل من الدوال التالية:

(1) $f(x,y) = x + y + xy$

(2) $f(x,y) = \ln(x+y)$

(3) $f(x,y) = \sin(xy)$

(4) $h(x,y) = xe^y y + 1$

(٣) بين أن $w_{xy} = w_{yx}$لكل من

(1) $w = \ln(2x+3y)$

(2) $w = e^x + x\ln y + y\cos x$

(3) $w = x\sin y + y\sin x$

(4) $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(٤) أوجد المشتقة f_{xyz} إذا كان $f=3x^2y^3z+2xy^4z^2-yz$

(١٠) بين أن الدوال التالية تحقق الشرط $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$

(1) $u(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

(2) $u(x,y,z)=e^{3x+4y}\cos 5z$

(3) $u(x,y,z)=\cos 3x\cos 4y\sinh 5z$

(١١) أوجد $\dfrac{dw}{dt}$ إذا كان

(1) $w=x^2+y^2$, $x=\cos t$, $y=\sin t$

(2) $w=x^2+y^2$, $x=\cos t+\sin t$, $y=\cos t-\sin t$

(3) $w=\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{z}$, $x=\cos^2 t$, $y=\sin^2 t$, $z=\dfrac{1}{t}$

(4) $w=z-\sin xy$, $x=t$, $y=\ln t$, $z=e^t$

(١٢) أوجد w_r, w_θ اذا كان

(1) $w=4e^x\ln y$, $x=\ln(r\cos\theta)$, $y=r\sin\theta$

(2) $w=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$, $y=r\cos\theta$, $x = r\sin\theta$

(١٣) أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ من العلاقات الآتية:

(1) $x^3-2y^2+xy=0$

(2) $xy+y^2-3x-3=0$

(3) $xe^y+\sin xy+y=\ln 2$

(١٤) أوجد z_x, z_y إذا كانت

(1) $z^3-xy+yz+y^3-2=0$

(2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$

(3) $\sin(x+y)+\sin(y+z)+\sin(x+z)=0$

(١٥) برهن أن الدوال الاتية تحقق نظرية أويلر للدوال المتجانسة:

(1) $f(x,y)=2x^3+3x^2y+y^3$

(2) $f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$

(3) $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

(١٦) إذا كان $z=\cos(x+y)+\cos(x-y)$ أثبت أن $z_{xx}-z_{yy}=0$

الباب الثالث

تطبيقات على المشتقات الجزئية

تطبيقات هندسية:

في الفراغ الثلاثي والذي يتحدد بالإحداثيات الكارتيزية المتعامدة (x, y, z) المعادلة $f(x, y, z) = c$ هي معادلة السطح S في R^3. وسوف ندرس بعض المفاهيم الهندسية على هذا السطح.

تعريف: يسمى السطح $f(x, y, z) = c$ بالسطح التفاضلى عند النقطة (x_0, y_0, z_0) إذا كانت المشتقات الجزئية f_x, f_y, f_z كلها موجودة ومتصلة عند النقطة (x_0, y_0, z_0).

وبما أن لأى مستوى يوجد مماس وحيد (إن وجد) عند كل نقطة عليه. فبالمثل لأى سطح S يوجد مماس وحيد (إن وجد) عند كل نقطة عليه.

وعليه نجد أن المستوى المماس للسطح عند النقطة (x_0, y_0, z_0) يحتوى على كل خطوط التماس عند النقطة (x_0, y_0, z_0).

لتعيين معادلة المستوى المماس للسطح عند النقطة $P(x_0, y_0, z_0)$. نفرض أن النقطة $Q(x, y, z)$ تقع فى هذا المستوى. وليكن $\underline{r}, \underline{r}_0$ المتجهين المرسومين من نقطة الأصل إلى النقطتين P, Q على الترتيب، وعليه فإن المتجه $(\underline{r} - \underline{r}_0)$ يقع فى المستوى المطلوب. ليكن أيضا المتجه العمودى على السطح عند النقطة P هو $\underline{N}_0 = \underline{\nabla} f|_p$ والرمز السفلى P يشير إلى معدل التغير العمودى يحسب عند النقطة P. فتكون معادلة المستوى المماس هى:

$$(\underline{r} - \underline{r}_0).\underline{N}_0 = (\underline{r} - \underline{r}_0).\underline{\nabla} f|_p = 0 \qquad (١)$$

لأن المتجه $(\underline{r} - \underline{r}_0)$ عمودى على المتجه $\underline{N}_0$ (العمودى على السطح S).

ويمكن كتابة المعادلة (١) فى الصورة الكارتيزية وهى:

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_p+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_p+(z-z_0)\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_p=0 \qquad (٢)$$

نظرية: في السطح $f(x,y,z)=c$ يكون $\underline{\nabla} f$ هو متجه عمودى على السطح.

البرهـان: نفـرض أن $\underline{r}=x\,\underline{i}+y\,\underline{j}+z\,\underline{k}$ هـو متجـه الموضـع لأى نقطـة $P(x,y,z)$ على السطح وبالتالي فإن:

$$d\underline{r}=dx\,\underline{i}+dy\,\underline{j}+dz\,\underline{k} \qquad (١)$$

يقـع فـى المستوى الممـاس للسـطح عنـد P . وبكتابـة معادلـة السـطح علـى الصورة $\phi(x,y,z)=f(x,y,z)-c=0$ فنحصل على

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz \qquad (٢)$$

ويمكن كتابة هذا المقدار كحاصل ضرب قياسى لمتجهين على النحو التالى:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\underline{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\underline{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\underline{k}\right).(dx\,\underline{i}+dy\,\underline{j}+dz\,\underline{k})=0$$

من (١) ، (٢) يكون $\underline{\nabla}\phi\,.\,d\underline{r}=0$

أى أن $\underline{\nabla}\phi$ يكون عموديا على $d\underline{r}$ ولذلك فهو عمودي على السطح .

ملاحظات:

١- يمكن إيجاد معادلة المستوى المماس لسطحين S_1,S_2 عند نقطة التماس بنفس الطريقة السابقه.

٢- يكون السطحان متماسين من الداخل إذا كان المتجهان العموديان على السطحين عند نقطة تماسهما متوازيين ولهما نفس الاتجاه.

٣- يكون السطحان متماسين من الخارج إذا كان المتجهان العموديان على السطحين عند نقطة تماسهما متوازيين ولكن اتجاههما مختلفين .

معادلة الخط العمودى على السطح:

لإيجاد معادلات الخط العمودى على السطح S عند النقطة P نفرض أن النقطة $R(x,y,z)$ تقع على العمود $\underline{N}_0$ على السطح عند P ويكون $\underline{r}$ هو المتجه المرسوم من o إلى النقطة R .وعلى ذلك يكون المتجه $(\underline{r}-\underline{r}_0)$ ينطبق على المتجه $\underline{N}_0$ وبالتالى تكون معادلة العمودى على السطح على الصورة:

$$(\underline{r}-\underline{r}_0)\,/\!/\,\underline{N}_0$$

أى أن $(\underline{r}-\underline{r}_0)=\lambda\ \underline{N}_0$ (حيث بارامتر).
وعليه فيكون

$$(x-x_0)\underline{i}+(y-y_0)\underline{j}+(z-z_0)\underline{k}=\lambda\left[\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_p \underline{i}+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_p \underline{j}+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_p \underline{k}\right] \quad (٣)$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة:

$$\frac{(x-x_0)}{(f_x)_p}=\frac{(y-y_0)}{(f_y)_p}=\frac{(z-z_0)}{(f_z)_p}=t \quad (٤)$$

مثال: أوجد معادلة المستوى المماس والمستقيم العمودى على السطح

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z-9=0$$

عند النقطة $p(1,2,4)\in S$

الحـــــــــــــــل

نوجد أولاً المشتقات الجزئية عند النقطة $p(1,2,4)$

$$f_y=2y\Rightarrow(f_y)_p=4\ ;\ f_x=2x\Rightarrow(f_x)_p=2\ :\ f_z=1\Rightarrow(f_z)_p=1$$

$\therefore$ معادلة المستوى المماس للسطح عند النقطة $(1,2,4)$ هي

$2(x-1)+4(y-2)+(z-4)=0$ أو $2x+4y+z=14$

معادلات الخط العمودى على السطح عندالنقطة $(1,2,4)$ هي

$$\frac{(x-1)}{2}=\frac{(y-2)}{4}=\frac{(z-4)}{1}=t$$

أي $x=1+2t \quad , \quad y=2+4t \quad , \quad z=4+t$

مثال : أوجد معادلة المستوى المماس والخط العمودى على السطح

$x^2+xyz-z^3=1$ عند النقطة $(1,1,1)$

الحـــــــــــــــل

نوجد أولاً المشتقات الجزئية عند النقطة $p(1,1,1)$

$$f_x=(2x+yz)\Rightarrow(f_x)_p=3$$

$$f_y=xz\Rightarrow(f_y)_p=1$$

$$f_z=xy-3z^2\Rightarrow(f_z)_p=-2$$

$\therefore$ معادلة المستوى المماس للسطح عند النقطة $(1,1,1)$ هي

$$3(x-1)+(y-1)-2(z-1)=0$$

أو

$$3x+y-2z=2$$

معادلات الخط العمودى على السطح عندالنقطة $(1,1,1)$ هى

$$\frac{(x-1)}{3}=\frac{(y-1)}{1}=\frac{(z-1)}{-2}=t$$

أي $x=1+3t \quad , \quad y=1+t \quad , \quad z=1-2t$

مثال : أوجد معادلة المستوى المماس والخط العمودى على السطح

$$S: x^2+y^2+z^2=4x-6y+2z-5\sqrt{2}$$

عند النقطة $(4,-1,2)$.

الحـــــــــــــــل

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+5$$

نوجد أولاً المشتقات الجزئية عند النقطة $p(4,-1,2)$

$$f_x=(2x-4)\Rightarrow (f_x)_p=4$$

$$f_y=2y+6\Rightarrow (f_y)_p=4$$

$$f_z=2z-2\Rightarrow (f_z)_p=2$$

$\therefore$معادلة المستوى المماس للسطح عند النقطة $(4,-1,2)$ **هي**

$4(x-4)+4(y+1)+2(z-2)=0$ أو $2x+2y+z=8$

معادلات الخط العمودى على السطح عندالنقطة $(4,-1,2)$ **هي**

$$\frac{(x-4)}{4}=\frac{(y+1)}{4}=\frac{(z-2)}{2}=t$$

أي $x=4+2t \quad , \quad y=-1+2t \quad , \quad z=2+t$

مفكوك تايلور:

درسنا في العام السابق مفكوك تايلور للدالة $f(x)$حول $x=a$ وكان على الصورة

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{(n)}}{n!}f^{n}(a)+R_n$$

حيث R_n هو الباقى بعد n من الحدود ومقداره

$$R_n=\frac{(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta x)\ ,\ 0<\theta<1$$

والآن يمكننا تعميم مفكوك تايلور للدالة $f(x,y)$حول النقطة(a,b)

مفكوك تايلورللدوال فى متغيرين

إذا كانت $f(x,y)$ دالة لها مشتقات جزئية متصلة من الرتبة النونية فى منطقة مغلقة تحتوى النقطة (a,b)وهذه المنطقة كبيرة بدرجة ما لتحتوى النقطة $(a+h,b+k)$بداخلها فإنه يوجد عدد موجب $0<\theta<1$ بحيث أن :

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)+...+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)+R_n$$

حيث R_n هو الباقي بعد n من الحدود ومقداره

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(a+\theta h,b+\theta k)\ ,\ 0<\theta<1$$

وتسمى بنظرية تايلور أو مفكوك تايلور حول النقطة (a,b)

يمكن كتابة مفكوك السابق على الصورة المختصرة :

$$f(x,y)=\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^r f\,|_{(a,b)}+R_n$$

وعندما $n\to\infty$ تسمى المتسلسلة التالية متسلسة تيلور للدالة $f(x,y)$ حول النقطة (a,b) :

$$f(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^r f\,|_{(a,b)}$$

صيغ تايلور السابقة تعد المصدر القياسى لتقريب الدوال فى متغيرين بإستخدام كثيرات حدود في x,y .الحدود ال n الاولى تعطى كثيرة الحدودية التقريب والحد الأخير يعطى الخطأ فى التقريب . الثالثة حدود الاولى فى صيغة تيلور لدالة تعطى التقريب الخطى للدالة.لتحسين التقريب الخطى نضيف حدود القوى الأعلى .

مثال: أوجد الحدود الثلاثة الأولى فى مفكوك تايلور للدالة $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ حول النقطة $(1,1)$

الحــــــــــــــــل

$$\because f(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$f(1,1)=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$$

$$f_x(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}\qquad \therefore\quad f_x(1,1)=-\frac{1}{2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}\qquad \therefore\quad f_y(1,1)=\frac{1}{2}$$

$$f_{xx}(x,y)=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\qquad \therefore\quad f_{xx}(1,1)=\frac{1}{2}$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\qquad \therefore\quad f_{xy}(1,1)=0$$

$$f_{yy}(x,y) = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad \therefore \quad f_{yy}(1,1) = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x,y) = f(1,1) + \left\{(x-1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right\} f(1,1)$$

$$+\frac{1}{2}\left\{(x-1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right\}^2 f(1,1) + \ldots.$$

$$= f(1,1) + (x-1)f_x(1,1) + (y-1)f_y(1,1)$$

$$+\frac{1}{2}(x-1)^2 f_{xx}(1,1) + x\,y\,f_{xy}(1,1) + \frac{1}{2}(y-1)^2 f_{yy}(1,1) + ..$$

$$\therefore f(x,y) = \tan^{-1}\frac{x}{y} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(y-1)^2 + \ldots\ldots$$

مثـــال: أوجـــد كثيـــرة الحـــدود مـــن الدرجـــة الثانيـــة لتقريـــب الدالـــة $f(x,y) = \sin x \sin y$ حـــول نقطـــة الأصـــل .ووضـــح درجـــة دقـــة التقريـــب إذا كان $|y| \le 0{\cdot}1$ و $|x| \le 0{\cdot}1$

الحـــــــــــــــــــل

$$f(x,y) = \sin x \sin y \qquad \therefore \quad f(0,0) = \sin 0 \sin 0 = 0$$

$$f_x(x,y) = \cos x \sin y \qquad \therefore \quad f_x(0,0) = \cos 0 \sin 0 = 0$$

$$f_y(x,y) = \cos y \sin x \qquad \therefore \quad f_y(0,0) = \cos 0 \sin 0 = 0$$

$$f_{xx}(x,y) = -\sin x \sin y \qquad \therefore \quad f_{xx}(0,0) = -\sin 0 \sin 0 = 0$$

$$f_{yy}(x,y) = -\sin x \sin y \qquad \therefore \quad f_{yy}(0,0) = -\sin 0 \sin 0 = 0$$

$$f_{xy}(x,y) = \cos x \cos y \qquad \therefore \quad f_{xy}(0,0) = \cos 0 \cos 0 = 1$$

$$\therefore f(x,y) = f(0,0) + \left\{x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right\} f(0,0) + \frac{1}{2}\left\{x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right\}^2 f(0,0) + \ldots.$$

$$= f(0,0) + x f_x(0,0) + y f_y(0,0)$$

$$+\frac{1}{2}x^2 f_{xx}(0,0) + x\,y\,f_{xy}(0,0) + \frac{1}{2}y^2 f_{yy}(0,0) + ..$$

$$\therefore f(x,y) = \sin x \sin y = 0 + 0 + 0 + 0 + xy + R_2 = xy + R_2$$

هـــذه هـــي كثيـــرة الحـــدود مـــن الدرجـــة الثانيـــة لتقريـــب الدالة $f(x,y) = \sin x \sin y$ عند نقطة الأصل ويقدر الخطأ في التقريب

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(a+\theta h, b+\theta k)$$

$$R_2 = \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy}) f(a+\theta h, b+\theta k)$$

كل المشتقات الجزئية من الرتبة الثالثة لا تزيد قيمتها المطلقة عن الواحد

$$\therefore |R_2| \le \frac{1}{6}\left[(0.1)^3 + 3(0.1)^3 + 3(0.1)^3 + (0.1)^3\right] \le \frac{8}{6}(0\cdot1)^3 \le 0.0014$$

أي أن الخطأ فى تقريب $\sin x \sin y$ حول نقطة الأصل باستخدام كثيرة حدود من الدرجة الثانية لا يزيد عن ≤ 0.0014 لما كانت $|y| \le 0\cdot1$ و $|x| \le 0\cdot1$

مثال: أثبت أن لجميع قيم x, y المتناهية في الصغر يكون

$$e^x \ln(1+y) = y + xy - \frac{1}{2}y^2$$

الحــــــــــــــــل

نفرض أن $f(x,y) = e^x \ln(1+y)$

$$\therefore f(0,0) = 0$$

$$f_x(x,y) = e^x \ln(1+y) \qquad \therefore\ f_x(0,0) = 0$$

$$f_y(x,y) = e^x \cdot \frac{1}{1+y} \qquad \therefore\ f_y(0,0) = 1$$

$$f_{xx}(x,y) = f_{xxx}(x,y) = ... = e^x \ln(1+y)$$

$$\therefore \quad f_{xx}(0,0) = f_{xxx}(0,0) = ... = 0$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{-e^x}{(1+y)^2} \qquad \therefore\ f_{yy}(x,y) = -1$$

$$f_{yyy}(x,y) = \frac{2(-1)^2 e^x}{(1+y)^3} \qquad \therefore\ f_{yyy}(0,0) = 2$$

وعليه فإن

$$\frac{\partial^r}{\partial y^r} f(x,y) = \frac{(-1)^{r-1}(r-1)}{(1+y)^r} e^x \qquad \therefore\ \frac{\partial^r}{\partial y^r} f(0,0) = (r-1)(-1)^{r-1}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{e^x}{1+y} \qquad \therefore\ f_{xy}(0,0) = 1$$

$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial x^s \partial y^r} f(x,y) = \frac{(-1)^{r-1}(r-1)!e^x}{(1+y)^r} \qquad \therefore\ \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^s \partial y^r} f(0,0) = (r-1)(-1)^{r-1}$$

$$\therefore \qquad e^x \ln(1+y) = 0 + x(0) + y(1) + \frac{1}{2}x^2(0) + xy(1) + \frac{1}{2}y^2(-1) + ...$$

ولقيم x, y المتناهية فى الصغر يمكن إهمال قوى x, y ابتداء من الدرجة الثالثة فتحصل على

$$e^x \ln(1+y) = y + xy - \frac{1}{2}y^2$$

لقيم x, y المتناهية في الصغر

حل آخر:من صغية تيلور لدالة فى متغير واحد ؛ نعلم أن

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ...$$

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + ...$$

$$e^x \ln(1+y) = \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ...\right)\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + ...\right) = y + xy - \frac{1}{2}y^2$$

بإهمال حدود الدرجة الثالثة فأكثر في x, y وذلك لقيم x, y المتناهية فى الصغر

مثال: أوجد مفكوك الدالة $f(x,y) = x^2y + 3y - 2$ في قوى $(x-1), (y+2)$

الحـــــــــــــــل

نستخدم مفكوك تايلور حيث أن $(a,b) = (1,-2)$ وعلية فإن

$f(x,y) = x^2y + 3y - 2 \qquad \therefore\ f(1,-2) = -10$

$f_x(x,y) = 2xy \qquad \therefore\ f_x(1,-2) = -4$

$f_y(x,y) = x^2 + 3 \qquad \therefore\ f_y(1,-2) = -4$

$f_{xx}(x,y) = 2y \qquad \therefore\ f_{xx}(1,-2) = -4$

$f_{yy}(x,y) = 0 \qquad \therefore\ f_{yy}(1,-2) = 0$

$f_{xy}(x,y) = 2x = f_{yx}(x,y) \qquad \therefore\ f_{xy}(1,-2) = 2 = f_{yx}(1,-2)$

$f_{xxy}(x,y) = 2 = f_{yxx}(x,y) \qquad \therefore\ f_{xxy}(1,-2) = 2 = f_{yxx}(1,-2)$

والمشتقات العليا الأخرى كلها تساوى صفرا

$$f_{xyy}(x,y) = f_{yyy}(x,y) = f_{yxy}(x,y) = 0$$

وعلية فإن

$$x^2y + 3y - 2 = -10 - 4(x-1) + 4(y+2) + \frac{1}{2}\left[-4(x-1)^2 + 4(x-1)(y+2)\right]$$
$$+ \frac{1}{6}\left[3(x-1)^3(y+2)(2) + 0\right]$$

$$x^2y + 3y - 2 = -10 - 4(x-1) + 4(y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2)$$
$$+ (x-1)^2(y+2)$$

مفكوك مكلورين للدوال فى متغيرين:

إذا وضعنا $a = 0$ ، $b = 0$ ، $h = x,\ y = k$ فى مفكوك تايلور نحصل على

$$f(x,y) = f(0,0) + \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) f(0,0)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0) + ... + \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0) + R_n$$

حيث R_n هو الباقي بعد n من الحدود ومقداره

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(\theta x, \theta y)\ ,\ 0<\theta<1$$

وهو ما يسمى بمفكوك مكلورين للدالة $f(x,y)$ حول نقطة $(0,0)$
يمكن كتابة مفكوك السابق على الصورة المختصرة :

$$f(x,y) = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!}\left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right]^{r} f\,\big|_{(0,0)} + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(\theta x, \theta y)\ \ ,0<\theta<1$$

تمارين (٣)

(١)أوجد معادلة المستوى المماس والخط العمودى للسطوح التالية عند النقاط المبينة أمام كل منها:

(1) $\quad x^2+y^2+z^2=1 \qquad , \quad (1,0,0)$

(2) $xy^2 - yz^2 + zx^2 = 1$, $(1,1,1)$

(3) $xyz = 4$, $(1,2,2)$

(4) $xe^y = ye^x$, $(0,0,1)$

(5) $\sin x\,y - 2\cos y\,z = 0$, $(\pi/2, 1, \pi/3)$

(٢) أوجد معادلة المستوى المماس المشترك للسطحين عند النقطة $(1,-2,3)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14 \quad , \quad x - 2y + 3z = 9 + 5\cosh(3x^2 - z)$$

(٣) أوجد مفكوك الدالة $f(x,y) = e^x \tan^{-1} y$ حول النقطة $(1,1)$ حتى حدود من الدرجة الثانية فى قوى $(x-1),(y-1)$.

(٤) أوجد مفكوك الدالة $x^4 + x^2y^2 - y^4$ حول النقطة $(1,1)$ حتى حدود من الدرجة الثانية.

(٥) أوجد مفكوك الدالة $x^2y + 3y - 2$ في قوى $(x-1),(y+2)$.

(٦) أوجد مفكوك الدالة $\sin^{-1}\dfrac{y}{x}$ حول النقطة $(2,1)$.

(٧) أوجد مفكوك الدالة $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ في قوى $(x-1),(y-1)$.

تمارين (٢)

(١) أوجد المشتقات الجزئية الأولى لكل من الدوال التالية :

(1) $f(x,y) = 2x^2 - 3y - 4$

(2) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(3) $f(x,y) = \log x$

(4) $f(x,y) = \tan^{-1}(y/x)$

(5) $f(x,y,z) = 1 + yx^2 - 2z^2$

(6) $f(x,y,z) = \sin^{-1}(xyz)$

(7) $f(x,y) = (xy-1)^2$

(8) $f(x,y) = x^y$

(9) $f(x,y) = e^{-y}\sin(x+y)$

(10) $f(x,y,z) = \sec^{-1}(x + yz)$

(11) $f(x,y,z) = x - \sqrt{y^2 + z^2}$

(12) $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

(٢) أوجد المشتقات الجزئية الثانية لكل من الدوال التالية:

(1)	$f(x,y)=x+y+xy$	(3)	$f(x,y)=\sin(xy)$
(2)	$f(x,y)=\ln(x+y)$	(4)	$h(x,y)=xe^{y}y+1$

(٣) بين أن $w_{xy}=w_{yx}$ لكل من

(1)	$w=\ln(2x+3y)$	(3)	$w=x\sin y+y\sin x$
(2)	$w=e^{x}+x\ln y+y\cos x$	(4)	$w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(٤) أوجد المشتقة f_{xyz} إذا كان $f=3x^2y^3z+2xy^4z^2-yz$

(٥) أوجد المشتقة f_{tut} إذا كان $f=u^4t^2v-3uv^2t^3$

(٦) أوجد المشتقة u_{rvr} إذا كان $u=v\sec(rt)$

(٧) أوجد المشتقة v_{zzy} إذا كان $v=y\ln(x^2+z^4)$

(٨) أوجد المشتقة $\dfrac{\partial^3 w}{\partial z\partial y\partial x}$ إذا $w=\sin(xyz)$

(٩) أوجد المشتقة $\dfrac{\partial^5 w}{\partial x^2\partial y^3}$ إذا كان

(1) $w=y^2x^6e^{x}+2$

(2) $w=y^2+y(\sin x-x)$

(١٠) بين أن الدوال التالية تحقق الشرط $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$

(1) $u(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

(2) $u(x,y,z)=e^{3x+4y}\cos 5z$

(3) $u(x,y,z)=\cos 3x\cos 4y\sinh 5z$

(١١) أوجد $\dfrac{dw}{dt}$ إذا كان

(1)	$w=x^2+y^2$	$x=\cos t$	$y=\sin t$	
(2)	$w=x^2+y^2$	$x=\cos t+\sin t$	$y=\cos t-\sin t$	
(3)	$w=\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{z}$	$x=\cos^2 t$	$y=\sin^2 t$	$z=\dfrac{1}{t}$
(4)	$w=z-\sin xy$	$x=t$	$y=\ln t$	$z=e^{t}$

(١٣) أوجد w_r, w_θ اذا كان

(1) $w = 4e^x \ln y \quad , \quad x = \ln(r\cos\theta) \quad , \quad y = r\sin\theta$

(2) $w = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \quad , \quad y = r\cos\theta \quad , \quad x = r\sin\theta$

(١٣) بـــين أنـــه إذا كانـــت $w = f(u,v)$ تحقـــق معادلـــة لابـــلاس $f_{uu} + f_{vv} = 0$ وكانـــت $u = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2),\ v = xy$ فإن $w_{xx} + w_{yy} = 0$