الباب الأول

المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الاولي و الدرجة الاولي

مقدمة

المعادلات التفاضلية من الموضوعات الهامة لورودها في كثير العلوم مثل الرياضيات البحتة و التطبيقية وفي الطبيعة و الكيمياء وفي كثير من العلوم الهندسية فكثير من مسائل الانحناء تعتمد في حلها علي المعادلات التفاضلية وكذلك تذبذب الاجسام و الذبذبات الكهربية وانتقال الحرارة وانتشار الاجسام الذائبة وسرعة التفاعلات الكيميائية.

(1.1) تعريف المعادلة التفاضلية

نفرض أن y دالة في المتغير x وأن $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ المشتقات التفاضلية من الرتبة الاولي و الثانية حتي المشتقة النونية للمتغير y بالنسبة إلي x فإن إي علاقة تربط بين x, y وأحد المشتقات السابقة تسمي "معادلة تفاضلية عادية" أما إذا كانت y دالة في أكثر من متغير ولها مشتقات جزئية فإنها تسمي "معادلة تفاضلية جزئية " ونذكر الان بعض الامثلة المختلفة للمعادلات التفاضلية العادية.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^2y}{dx^2} - 5x = \cos 2x \qquad (2)$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 2xy = 5 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial y}{\partial x} \qquad (5)$$

(2.1) رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية

رتبة المعادلة التفاضلية: هي رتبة أعلي مشتقة موجوده في المعادلة التفاضلية.

درجة المعادلة التفاضلية: هي الاس الذي يرفع اليه أعلي معاملي تفاضلي محدد لرتبة المعادلة.

فمثلاً المعادلة (1) هي معادلة من الرتبة الثانية والدرجة الاولي . والمعادلة (2) من الرتبة الرابعة والدرجة الأولي. والمعادلة (3) معادلة من الرتبة الثالثة و الدرجة الثانية .و المعادلات (4)،(5) هي معادلات تفاضلية جزئية.

(3.1) تكوين المعادلة التفاضلية

يتم تكوين المعادلة التفاضلية بحذف الثوابت الاختيارية نفرض أن لدينا العلاقة

$$f(x, y, c) = 0 \qquad (1)$$

هذه المعادلة تمثل مجموعة المنحنيات المستوية ذات البارامتر الواحد وبتفاضل العلاقة (1) بالنسبة إلي x نحصل علي معادلة تحتوي علي x, y, y', c ولتكن

$$\phi\left(x, y, y', c\right)=0 \qquad (2)$$

وبحذف c من (1) ، (2) نحصل علي علاقة في الصورة

$$\psi(x, y, y')=0 \qquad (3)$$

و العلاقة (3) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الاولي حصلنا عليها نتيجة لحذف ثابت اختياري واحد وتسمي هذه المعادلة بالمعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات (1).

ولتوضيح ذلك نعتبر المثال الاتي

مثال (1)

اوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات الاتية

$$y^2=4a\left(x-c\right)$$

الحل

هذه المعادلة تمثل مجموعة من القطاعات المكافئة التي محورها المحور السيني ووترها البؤري العمودي $4a$. بالتفاضل نحصل علي

$$y\frac{dy}{dx}=2a$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية لمجموعة القطاعات المكافئة.

وفي الحالة العامة اذا اعتبرنا العلاقة

$$f(x, y, c_1, c_2, \cdots, c_n)=0 \qquad (4)$$

وهذه العلاقة تحتوي علي n من البارامترات $c_1, c_2, \cdots, c_n$ للحصول علي المعادلة التفاضلية المناظرة.

نفاضل هذه العلاقة n من المرات المتتالية بالنسبة الي x فنحصل علي n من العلاقات في الصورة

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(x, y, y', c_1, c_2, \cdots, c_n)=0 \\ \varphi_2(x, y, y', y'', c_1, \cdots, c_n)=0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \varphi_n(x, y, y', \cdots, y^{(n)}, c_1, \cdots, c_n)=0\end{array}\right\} \qquad (5)$$

من العلاقات (4) ، (5) وعددها $n+1$ يمكن حذف الثوابت $c_1, c_2, \cdots, c_n$ وتكون النتيجة هي الحصول علي معادلة تفاضلية عادية ورتبتها n علي الصورة

$$\psi(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$$

مثال (2)

اوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات

$$c_1x+(y-c_2)^2=0 \qquad (1)$$

الحل

حيث ان معادلة مجموعة المنحنيات (1) تحتوي علي بارا مترين فإننا نفاضلها مرتين لنحصل علي

$$c_1 + 2(y - c_2)y' = 0 \qquad (2)$$

$$2y'^2 + 2(y - c_2)y'' = 0 \qquad (3)$$

من المعادلة (2) نحصل علي

$$c_1 = -2(y - c_2)y' \qquad (4)$$

نعوض من (4) في (1) نجد ان

$$-2xy'(y - c_2) + (y - c_2)^2 = 0 \qquad (5)$$

من المعادلة (3) نحصل علي

$$y - c_2 = -y'^2 / y'' \qquad (6)$$

بالتعويض من (6) في (5) نحصل علي المعادلة التفاضلية المطلوبة وهي

$$y' + 2xy'' = 0$$

مثال (3)

أوجد المعادلة التفاضلية للقطاعات المكافئة راسية المحور.

الحل

معادلة القطاعات المكافئة راسية المحور هي

$$x^2 = \alpha x + \beta y + c \qquad (1)$$

و حيث ان هذه المعادلة (1) تحتوي علي ثلاث ثوابت α, β, c . بالتالي نفاضلها ثلاث مرات متتالية لنحصل علي

$$2x = \alpha + \beta\frac{dy}{dx}, \qquad 2 = \beta\frac{d^2y}{dx^2}, \qquad 0 = \beta\frac{d^3y}{dx^3}$$

و تكون المعادلة التفاضلية المطلوبة هي

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

مثال (4)

إذا كانت

$$y = a\,e^{2x} + b\,e^{-x} \qquad (1)$$

فاثبت إن

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

الحل

بالتفاضل للمعادلة (1) نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = 2a\,e^{2x} - b\,e^{-x} \qquad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4a\,e^{2x} + b\,e^{-x} \qquad (3)$$

بجمع (1)، (2) نجد أن

$$\frac{dy}{dx} + y = 3a\,e^{2x} \qquad (4)$$

وبجمع (2)، (3) ينتج أن

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 6a\,e^{2x} \qquad (5)$$

بمقارنة (4) ، (5) نجد ان

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{dy}{dx} + y\right)$$

و منها ينتج

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

وهو المطلوب.

(4.1) حل المعادلات التفاضلية

حل المعادلة التفاضلية هو عملية الحصول علي الأصل الكامل للمعادلة التفاضلية إي عملية عكس عملية تكوين المعادلة و التي درسناها. ويمكن تقسيم هذه المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولي و الدرجة الاولي من حيث طرق حلها إلي الانواع الاتية:

1- المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات القابلة للانفصال.
2- المعادلات التفاضلية المتجانسة.
3- المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية.
4- المعادلات التفاضلية التامة.
5- المعادلات التفاضلية الخطية.
6- معادلات برنولي.
7- معادلات ريكاتي.

و سوف ندرس كل نوع علي حدة

(1.4.1) المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات القابلة للانفصال

يمكن كتابة المعادلات التي يمكن فيها فصل المتغيرات علي الشكل الاتي

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (1)$$

او

$$M(y)dx + N(x)dy = 0 \qquad (2)$$

المعادلة (2) يمكن تحويلها إلي صورة المعادلة (1) وذلك بالقسمة علي $N(x)M(y)$ أي أن

$$\frac{dx}{N(x)} + \frac{dy}{M(y)} = 0$$

وهذه المعادلات يمكن حلها بفصل كل متغير في طرف و إجراء التكامل مباشرة.

مثال (1)

أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$x\sqrt{y^2-1}\,dx + y\sqrt{x^2-1}\,dy = 0$$

الحل

بقسمة طرفي المعادلة علي المقدار $\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}$ نحصل علي

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}dy = 0$$

وبتكامل هذه المعادلة نحصل علي

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-1}} = c \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{x^2-1} + \sqrt{y^2-1} = c$$

المعادلة الاخيرة تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية.

مثال (2)

أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \cos(y-x)$$

الحل

Let $u = y - x$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + 1$$

$$\therefore \frac{du}{dx}+1=\cos u$$

$$\frac{du}{dx}=\cos u-1 \Rightarrow du=\left(\cos u-1\right)dx$$

$$\int \frac{du}{\cos u-1}=\int dx \qquad \Rightarrow -\frac{1}{2}\int \operatorname{cosec}^2\frac{u}{2}\,du=\int dx$$

$$\cot\frac{u}{2}=x+c_1 \qquad \Rightarrow \quad \frac{u}{2}=\cot^{-1}\left(x+c_1\right)$$

$$u=2\cot^{-1}\left(x+c_1\right) \qquad \Rightarrow \quad y=x+2\cot^{-1}\left(x+c_1\right)$$

المعادلة الاخيرة تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية.

مثال (3)

أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$xy^3\frac{dy}{dx}=1-x^2+y^2-x^2y^2$$

الحل

نضع المعادلة علي الصورة

$$xy^3\frac{dy}{dx}=(1-x^2)+y^2(1-x^2) \quad \Rightarrow \quad xy^3\frac{dy}{dx}=(1-x^2)(1+y^2)$$

$$xy^3dy=(1-x^2)(1+y^2)dx$$

بقسمة طرفي المعادلة علي $x(1+y^2)$

$$\frac{y^3}{1+y^2}dy=\frac{1-x^2}{x}dx$$

وبالتكامل نحصل علي

$$\int \frac{y^3}{1+y^2}dy = \int \frac{1-x^2}{x}dx$$

$$\int\left(y-\frac{y}{y^2+1}\right)dy=\int\left(\frac{1}{x}-x\right)dx+c$$

$$\frac{y^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(y^2+1)=\ln x-\frac{x^2}{2}+c,$$

$$x^2+y^2=2\ln\left(x\sqrt{y^2+1}\right)+c$$

المعادلة الاخيرة تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية.

مثال (4)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}=\left(8x+2y+1\right)^{2} \qquad (1)$$

الحل

بفرض ان

$$u=8x+2y+1$$

ثم بالتفاضل بالنسبة إلي x نحصل علي

$$u'=8+2y', \quad y'=\frac{1}{2}\left(u'-8\right)$$

بالتعويض عن قيمة y' في المعادلة (1) نحصل علي

$$u'-8=2u^{2}, \qquad \frac{du}{dx}=2u^{2}+8$$

بالتكامل نحصل علي

$$\int\frac{du}{u^{2}+4}=2\int dx+c \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{u}{2}=2x+c$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هي

$$\tan^{-1}\left(\frac{8x+2y+1}{2}\right)=4x+c_{1}, \quad \left(c_{1}=2c\right)$$

المعادلة الاخيرة تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية.

(2.4.1) المعادلات التفاضلية المتجانسة

يقال للدالة $f\left(x,y\right)$ إنها متجانسة من درجة n إذا امكن وضعها علي الصورة

$$f(x,y)=x^{n}\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow f(x,y)=x^{n}g(x,y)$$

حيث g دالة للمتغير $\frac{y}{x}$.

ويقال للمعادلة التفاضلية الآتية

$$f(x,y)dx+g(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

انها متجانسة إذا كانت كل من الدالتين $f\left(x,y\right)$ ، $g\left(x,y\right)$ متجانسة من نفس الدرجة إي إن

$$f(x,y)=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad g(x,y)=x^n\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

و بالتالي المعادلة (1) يمكن وضعها علي الصورة

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx+\psi\left(\frac{y}{x}\right)dy=0 \qquad (2)$$

ويمكن تحويل هذه المعادلة إلي معادلة ذات متغيرات قابلة للانفصال وذلك بفرض أن

$$z=\frac{y}{x} \;\Rightarrow\; y=xz \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=x\frac{dz}{dx}+z$$

وبوضع المعادلة (2) علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\phi\left(\frac{y}{x}\right)}{\psi\left(\frac{y}{x}\right)} \;\Rightarrow\; x\frac{dz}{dx}+z=-\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \;\Rightarrow\; x\frac{dz}{dx}=-\left[z+\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right]$$

وهذه معادلة ذات متغيرات قابلة للانفصال يمكن حلها كما سبق.

مثال (1)

أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$(x^2-y^2)dx+2xydy=0$$

الحل

المعادلة السابقة يمكن وضعها علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy}$$

وبوضع $y=xz$ نجد أن

$$x\frac{dz}{dx}+z=\frac{z^2-1}{2z} \;\Rightarrow\; x\frac{dz}{dx}=-\frac{1+z^2}{2z}$$

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{2z}{1+z^2}dz \;\Rightarrow\; \ln x=-\ln(1+z^2)+\ln c$$

$$x(1+z^2)=c \;\Rightarrow\; x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=c$$

$$x^2+y^2-cx=0$$

المعادلة الاخيرة تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية وهي معادلة مجموعة من الدوائر.

مثال (2)

أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$\left(2ye^{\frac{y}{x}}-x\right)\frac{dy}{dx}+2x+y=0$$

الحل

يمكن كتابة المعادلة السابقة علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{x-2ye^{\frac{y}{x}}}$$

بوضع $y=zx$ نجد أن

$$z+x\frac{dz}{dx}=\frac{2+z}{1-2z\,e^{z}}\quad\Rightarrow x\frac{dz}{dx}=\frac{2(1+z^2\,e^{z})}{1-2z\,e^{z}}$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{1-2z\,e^{z}}{2(1+z^2\,e^{z})}dz\quad\Rightarrow 2\ln x=\int\frac{e^{-z}-2z}{e^{-z}+z^2}dz$$

$$2\ln x=-\ln\left(z^2+e^{-z}\right)+\ln c\quad\Rightarrow x^2(z^2+e^{-z})=c$$

$$x^2\left(\frac{y^2}{x^2}+e^{-y/x}\right)=c\quad\Rightarrow y^2+x^2\,e^{-y/x}=c$$

المعادلة الاخيرة تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية.

مثال (3)

أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y'$$

الحل

$$y'=\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}+\frac{y'}{x}$$

نضع $y=zx$ نجد إن

$$y'=xz'+z\quad\Rightarrow xz'+z=\sqrt{1-z^2}+z$$

$$xz'=\sqrt{1-z^2}\quad\Rightarrow\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\sin^{-1}z=\ln cx\quad\Rightarrow y=x\sin\left(\ln cx\right)$$

(3.4.1) المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية تكون علي كصورة الآتية

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0 \qquad (1)$$

أو تكتب علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$$

وهذه المعادلات ذات المعاملات الخطية يمكن تحويلها إلي

1- معادلات متجانسة.

2- معادلات ذات متغيرات قابلة للانفصال.

أولا: المعادلات ذات المعاملات الخطية والتي يمكن تحويلها إلي معادلات متجانسة

في هذه الحالة المستقيمان

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad , \quad a_2x+b_2y+c_2=0$$

يتلاقيان في نقطة و لتكن (α,β) وهذا يعني إن محدد المعاملات $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ لا يساوي الصفر.

نضع $y=v+\beta$, $x=u+\alpha$ ، فيكون $\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du}$ ، و المعادلة (1) تصبح

$$\frac{dv}{du}=-\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة فيمكن حلها كما سبق.

ثانيا: معادلات يمكن تحويلها إلي معادلات تفاضلية ذات متغيرات قابلة للانفصال

في هذه الحالة يكون محدد المعاملات $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ يساوي الصفر أي أن $a_1b_2=a_2b_1$ والمستقيمان

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad , \quad a_2x+b_2y+c_2=0$$

يكونان متوازيان ويكون

$$a_2x+b_2y=\alpha(a_1x+b_1y)$$

نضع

$$u=a_1x+b_1y \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx}=a_1+b_1\frac{dy}{dx} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=\frac{1}{b_1}\left(\frac{du}{dx}-a_1\right)$$

والمعادلة (1) تصبح

$$\frac{1}{b_1}(\frac{du}{dx}-a_1)=-\frac{u+c_1}{\alpha u+c_2}$$

وهذه معادلة ذات متغيرات قابلة للانفصال فيمكن حلها كما سبق.

مثال (1)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(2x-y+4)dy+(x-2y+5)dx=0 \qquad (1)$$

الحل :-

نلاحظ أن محدد المعاملات $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ لا يساوي الصفر و بالتالي المعادلة التفاضلية (1) يمكن تحويلها إلي معادلة تفاضلية متجانسة.

أولا : نوجد نقطة التقاطع للمستقيمين

$$2x-y+4=0, \quad x-2y+5=0$$

فنحصل علي نقطة التقاطع $(\alpha,\beta)=(-1,2)$.

باستخدام التعويض

$$x=u-1\ ,\ y=v+2$$
$$dx=du\ ,\ dy=dv$$

المعادلة (1) تصبح علي الصورة

$$(2u-v)dv+(u-2v)du=0 \qquad (2)$$

باستخدام التعويض $v=uz$ فيكون $\frac{dv}{du}=z+u\frac{dz}{du}$

المعادلة (2) تصبح علي الصورة

$$(2-z)\left(z+u\frac{dz}{du}\right)+(1-2z)=0 \ \Rightarrow z+u\frac{dz}{du}=-\frac{1-2z}{2-z}$$

$$u\frac{dz}{du}=\frac{2z-1}{2-z}-\frac{2z-z^2}{2-z}=\frac{z^2-1}{2-z}$$

$$\frac{2-z}{z^2-1}dz=\frac{du}{u} \ \Rightarrow \ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{3}{z+1}\right)dz=\frac{du}{u}$$

باجراء التكامل نحصل علي

$$\frac{1}{2}\ln(z-1)-\frac{3}{2}\ln(z+1)=\ln u+\ln c$$

$$\ln\frac{z-1}{(z+1)^3}=2\ln|cu| \quad \Rightarrow \quad \frac{z-1}{(z+1)^3}=c^2u^2$$

بالتعويض عن قيم z, v, u نحصل علي

$$\frac{y-x-3}{(y+x-1)^3}=c_1, \quad \left(c_1=c^2\right)$$

مثال (2) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$(2x-4y+5)\frac{dy}{dx}+x-2y+3=0$$

الحل

نلاحظ إن محدد المعاملات $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ يساوي الصفر.

نضع

$$x-2y=u, \qquad 1-2\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{du}{dx}\right)$$

المعادلة التفاضلية تصبح علي الصورة

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{du}{dx}=-\frac{u+3}{2u+5} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}=\frac{4u+11}{2u+5}$$

باجراء التكامل نحصل علي

$$\int dx=\int\frac{2u+5}{4u+11}du=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{4u+11}\right)du$$

$$2x+c=u-\frac{1}{4}\ln(4u+11)$$

$$8x+c=4x-8y-\ln(4x-8y+11)$$

$$4x+8y+\ln(4x-8y+11)+c=0$$

(4.4.1) المعادلات التفاضلية الكاملة (التامة)

يقال للمعادلة التفاضلية الآتية

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

أنها كاملة (تامة) إذا تحقق للدالتين M, N المتصلتين العلاقة

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

حيث كل من $\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ دالة متصلة و بذلك يكون الطرف الأيسر للمعادلة (1) عنصراً تفاضليا تاماً لدالة ما و لتكن $f(x,y)$ بالنسبة للمتغيرين x, y إي أن

$$df(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

والشرط الضروري و الكافي لذلك هو إن تحقق العلاقة (2).

مثال (1)

اثبت أن المعادلة التفاضلية الآتية تامة و أوجد أصلها التام.

$$(2y^2+4xy-x^2)dx+(2x^2+4xy-y^2)dy=0 \qquad (1)$$

الحل

نفرض أن

$$M(x,y)=2y^2+4xy-x^2 \;, \quad N(x,y)=2x^2+4xy-y^2$$

فيكون

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4y+4x \;, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=4x+4y$$

$$\therefore \; \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

اذن المعادلة تامة.

نفرض أن حل المعادلة علي الصورة

$$f(x,y)=c$$

فيكون

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)=2y^2+4xy-x^2 \qquad (3)$$

بتكامل المعادلة (3) بالنسبة إلي x

$$f(x,y)=2y^2x+2x^2y-\frac{x3}{3}+\varphi(y) \qquad (4)$$

وبتفاضل العلاقة (4) جزئيا بالنسبة إلي y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = 2x^2 + 4xy - y^2 = 4xy + 2x^2 + \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = -y^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = -\frac{y^3}{3} + c$$

$$f(x,y) = 2xy^2 + 2x^2 y - \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3} = c$$

مثال (2)

أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$\left(\cos x\, e^{\sin x} + \sin y \cos x\right)dx + \cos y \sin x\, dy = 0 \qquad (1)$$

الحل

بوضع

$$M(x,y) = \cos x\, e^{\sin x} + \sin y \cos x$$
$$N(x,y) = \sin x \cos y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos y \cos x \;,\; \frac{\partial N}{\partial x} = \cos x \cos y$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

بالتالي المعادلة تامة. فيكون الحل في الصورة التالية

$$f(x,y) = e^{\sin x} + \sin x \sin y = c$$

❖ العوامل المكاملة

إذا كانت المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى والرتبة الأولى

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

غير تامة أي يكون

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

فإنه يمكن تحويلها إلي معادلة تامة وذلك بضربها في عامل مكامل $\mu(x,y)$ والعامل المكامل $\mu(x,y)$ يكون غالبا دالة في (x,y).

بضرب المعادلة (1) في العامل المكامل $\mu(x,y)$ لكي تصبح تامة

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \qquad (2)$$

المعادلة (2) اصبحت تامة و بذلك يكون

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y}-N\frac{\partial \mu}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0 \qquad (3)$$

ومن المعادلة (3) يتعين العامل المكامل μ كدالة في (x, y).

ولكن الحصول علي العامل المكامل في الحالة العامة هي مسألة رياضية غير بسيطة لذلك سوف نعتبر أن μ دالة في x فقط أو μ دالة في y فقط.

أولا : شرط وجود عامل مكامل دالة في x فقط

نفرض أن المعادلة (1) لها عامل مكامل $\mu=\mu(x)$ وبذلك تصبح المعادلة (3) علي الصورة

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x}=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) \qquad (4)$$

واضح أن الطرف الأيسر للمعادلة (4) دالة في x فقط وبذلك فإن الطرف الأيمن دالة في x فقط.

الشرط الضروري والكافي كي يكون للمعادلة (1) عامل مكامل دالة في x فقط هو أن يكون المقدار $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ دالة في x فقط.

وبتكامل المعادلة (4) يكون

$$\ln \mu(x)=\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx \;\Rightarrow\; \mu(x)=\mathrm{e}^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$$

وهذه العلاقة تعطي العامل المكامل بصورة صريحة كدالة في x.

ثانيا : شرط و جود عامل مكامل دالة في y فقط

نفرض أن المعادلة (1) لها عامل مكامل في y وبذلك تصبح المعادلة (3) علي الصورة

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y}=\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right) \qquad (5)$$

واضح أن الطرف الأيسر للمعادلة هو دالة في y فقط وبذلك فإن الطرف الأيمن يكون كذلك دالة في y فقط.

الشرط الضروري والكافي لكي يكون للمعادلة (1) عامل مكامل دالة في y فقط هو أن يكون المقدار $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$ دالة في y فقط.

وبتكامل هذه المعادلة (5)

$$\ln \mu(y)=\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dy \quad \Rightarrow \quad \mu(y)=e^{\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dy}$$

وهذه العلاقة تعطي العامل المكامل بصورة صريحة كدالة في y .

مثال (1)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$xy^3dx+(x^2y^2-1)dy=0 \qquad (1)$$

الحل

$$M(x,y)=xy^3 \;,\; N(x,y)=x^2y^2-1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3xy^2 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x}=2xy^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

المعادلة غير تامة.

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=xy^2$$

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{y}$$

بالتالي يوجد عامل مكامل μ دالة في y فقط يتعين من

$$\mu(y)=e^{-\int \frac{dy}{y}}=\frac{1}{y}$$

بضرب المعادلة (1) في العامل المكامل $\mu(y)$ تصبح المعادلة (1) تامة و علي الصورة

$$xy^2dx+\left(x^2y-\frac{1}{y}\right)dy=0 \qquad (2)$$

و يكون حل المعادلة التفاضلية (2) علي الصورة

$$f\;(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2+\ln y=c$$

مثال (2)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(1-xy)dx+(xy-x^2)dy=0 \qquad (1)$$

الحل

$$M = 1 - xy \quad , \quad N = xy - x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -x \ , \ \frac{\partial N}{\partial x} = y - 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

اذن المعادلة (1) غير تامة.

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = x - y \ , \qquad \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{x-y}{x(y-x)} = -\frac{1}{x}$$

يوجد عامل مكامل $\mu(x)$ دالة في x فقط يتعين من

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx} = \mathrm{e}^{-\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x}$$

بعد الضرب في العامل المكامل تصبح المعادلة التفاضلية (1) تامة و علي الصورة

$$\left(\frac{1-xy}{x}\right)dx + \left(\frac{xy-x^2}{x}\right)dy = 0$$

واضح أن حل المعادلة التفاضلية التامة السابقة هو

$$f(x,y) = \ln x - xy + \frac{y^2}{2} = c$$

(5.4.1) المعادلات التفاضلية الخطية

المعادلة التفاضلية تكون خطية إذا كانت y ومشتقاتها التفاضلية بالنسبة إلي x من الدرجة الأولي وغير مضروبة ببعضها وتكون الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n هي

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

حيث أن $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n, f(x)$ دوال في x.

والمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولي و الدرجة الأولي تكون علي الصورة

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = \varphi(x) \qquad (1)$$

or

$$\frac{dx}{dy} + R(y)x = \psi(y) \qquad (2)$$

ولحل هذه المعادلة نقوم بتحويلها إلي صورة معادلة تامة وذلك يضرب المعادلة (1) في عامل مكامل $\mu = \mu(x)$

فتتحول المعادلة (1) الي الصورة

$$\mu(x)\,dy+\left[\mu(x)\,p(x)\,y-\mu(x)\,\varphi(x)\right]dx=0 \qquad (3)$$

و المعادلة (3) تكون تامة إذا تحقق الشرط

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x)\,p(x)\,y-\mu(x)\varphi(x)\right]$$

ومنها يكون

$$\frac{d\mu}{dx}=\mu p \;\Rightarrow\; \frac{d\mu}{\mu}=pdx \;\Rightarrow\; \mu=\mathrm{e}^{\int pdx} \qquad (4)$$

من (4) نحصل علي

$$d\mu=\mu pdx \qquad (5)$$

وبالتعويض من (5) في (3) نحصل علي الصورة

$$\mu\,dy+y\,d\mu=\mu\,\varphi\,dx \;\Rightarrow d(\mu y)=\mu\varphi\,dx$$

و بتكامل هذه المعادلة نحصل علي

$$\mu y=\int\mu\varphi dx+c \;\Rightarrow\; y=\frac{1}{\mu}\int\mu\varphi dx+\frac{c}{\mu}$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية (1).

وبالمثل يمكن إيجاد حل المعادلة التفاضلية (2) علي الصورة

$$x=\frac{1}{\mu}\int\mu\psi\,dy+\frac{c}{\mu}, \qquad \left(\mu=\mathrm{e}^{\int R\,dy}\right)$$

مثال (1)

أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}+y\cot x=\sec x$$

الحل

نوجد أولا عاملاً مكاملاً يعتمد علي x

$$\mu=\mathrm{e}^{\int\cot x\,dx}=\sin x$$

الحل العام للمعادلة يصبح علي الصورة

$$\frac{d}{dx}(y\sin x)=\tan x \;\Rightarrow\; y\sin x=\int\tan x dx+c$$

$$y=(\operatorname{cosec}x)(\ln\sec x)+c\operatorname{cosec}x$$

المعادلة الاخيرة تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية.

مثال (2)

أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية:

$$x\frac{dy}{dx}+(x+1)y=3x^2e^x$$

الحل

يمكن كتابة المعادلة علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}+\left(1+\frac{1}{x}\right)y=3x^2\,\mathrm{e}^x \quad\Rightarrow\; \mu=\mathrm{e}^{\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx}=x\,\mathrm{e}^x$$

$$\frac{d}{dx}\left(yx\,\mathrm{e}^x\right)=3x^3\,\mathrm{e}^{2x} \quad\Rightarrow\; yx\,\mathrm{e}^x=3\int x^3\,\mathrm{e}^{2x}\,dx+c$$

$$xy=\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{9}{8}\right)\mathrm{e}^x+c\,\mathrm{e}^{-x}$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية

(6.4.1) معادلة برنولي

هي المعادلة تكون علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}+yp(x)=Q(x)y^n \qquad (1)$$

حيث n عدد حقيقي لا يساوي واحد.

لحل هذه المعادلة يتم تحويلها أولاً إلي معادلة خطية وذلك بالقسمة علي y^n

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{1-n}p(x)=Q(x) \qquad (2)$$

ثم نفرض أن $u=y^{1-n}$ فيكون

$$\frac{du}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \qquad (3)$$

وبالتعويض من (3) في (2) نحصل علي

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx}+p(x)u=Q(x) \quad\Rightarrow\; \frac{du}{dx}+(1-n)p(x)u=(1-n)Q(x)$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية يمكن حلها كما سبق.

مثال (1)

أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2x}=5x^2y^5$$

الحل

بالقسمة علي y^5 نجد أن

$$y^{-5}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y^{-4}=5x^2$$

نفرض أن $y^{-4}=u$ فيكون لدينا

$$-4y^{-5}\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\ \Rightarrow\ -\frac{1}{4}\frac{du}{dx}-\frac{u}{2x}=5x^2$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{2u}{x}=-20x^2$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية لايجاد حلها ونوجد أولاً العامل مكامل وهو

$$\mu(x)=e^{2\int\frac{dx}{x}}=x^2$$

فيكون لدينا

$$\frac{d}{dx}(ux^2)=-20x^4$$

$$ux^2=-4x^5+c\ \Rightarrow\ u=-4x^3+\frac{c}{x^2}=\frac{c-4x^5}{x^2}=y^{-4}$$

الحل العام المعادلة هو

$$y^4=\frac{x^2}{c-4x^5}$$

(7.4.1) معادلة ريكاتي

معادلة ريكاتي هي المعادلة التي تكون علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y^2+Q(x)y+R(x) \qquad (1)$$

حيث R,Q,P دوال في x فقط ويمكن حل هذه المعادلة إلي علم أحد الحلول الخاصة لها $y=y_1$ حيث y_1 دالة في x

وفي هذه الحالة فالأصل التام للمعادلة (1) يعطي بالتعويض

$$y=y_1+\frac{1}{u} \qquad (2)$$

حيث أن u دالة في x يمكن ايجادها علي النحو التالي

حيث أن $y = y_1$ حل للمعادلة (1) فانه يحقق المعادلة (1) و يكون

$$\frac{dy_1}{dx} = p(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x) \qquad (3)$$

يطرح المعادلة (3) من المعادلة (1) ينتج أن

$$\frac{d}{dx}(y - y_1) = p(x)(y^2 - y_1^2) + Q(x)(y - y_1) \qquad (4)$$

من المعادلة (2) نحصل علي

$$\frac{d}{dx}(y - y_1) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}$$

المعادلة (4) تصبح علي

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} = \left(y_1^2 + \frac{1}{u^2} + \frac{2y}{u} - y_1^2\right)p(x) + \frac{1}{u}Q(x)$$

$$\frac{du}{dx} + \left[2y_1 p(x) + Q(x)\right]u = -p(x)$$

وهذه معادلة خطية يمكن حلها كما سبق.

مثال (1)

اثبت أن $y = 1$ حل خاص للمعادلة التفاضلية الآتية ثم أوجد حلها العام

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)(xy - y - x)$$

الحل

بوضع المعادلة التفاضلية علي الصورة

$$\frac{dy}{dx} = (x-1)y^2 + (1-2x)y + x \qquad (1)$$

وهذه معادلة تمثل معادلة ريكاتي

بالتعويض $y = 1$ في المعادلة (1) نحصل علي

$$x - 1 + (1 - 2x) + x = 0$$

ولذلك فإن $y = 1$ حل خاص للمعادلة التفاضلية (1).

نفرض أن الحل العام للمعادلة التفاضلية علي الصورة

$$y = 1 + \frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل علي

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}=(x-1)\left(1+\frac{1}{u}\right)^2+(1-2x)\left(1+\frac{1}{u}\right)+x$$

$$\frac{du}{dx}+(x-1)(u+1)^2+(1-2x)(u^2+u)+u^2x=0$$

$$\frac{du}{dx}+u^2(x-1+1-2x+x)+u(2x-2+1-2x)+x-1$$

$$\frac{du}{dx}-u=1-x \qquad (2)$$

وهذه المعادلة معادلة خطية العامل المكامل لها هو

$$\mu(x)=\mathrm{e}^{-\int dx}=\mathrm{e}^{-x}$$

حل هذه المعادلة هو

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{e}^{-x}u)=(1-x)\mathrm{e}^{-x} \quad \Rightarrow \mathrm{e}^{-x}u=\int(1-x)\mathrm{e}^{-x}\,dx+c=x\,\mathrm{e}^{-x}+c$$

$$u=x+c\,\mathrm{e}^{x}$$

إي أن الحل العام لمعادلة (1) هو

$$\frac{1}{y-1}=x+c\,\mathrm{e}^{x}$$

تمارين (1)

(1) اوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات الآتية

(i) $y=(x-c)^3$ (ii) $y=\sin(x+c)$

(iii) $x^2+cy^2=2y$ (iv) $y=c(x-2)^2$

(v) $y=ax^2+b\,e^x$ (vi) $y=ax^3+bx^2+cx$

(vii) $y=\alpha\cos(\ln x)+\beta\sin(\ln x)$

(viii) $y=a\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]^n+b\left[x-\sqrt{x^2-1}\right]^n$

حيث n ثابت مطلق.

(ix) $y=(a+bx)\cosh mx$

حيث m ثابت مطلق.

(x) $y=a(\sin^{-1}x)^2+b(\cos^{-1}x)^2$

(xi) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

(xii) $y=\alpha e^{\beta x}$

(xiii) $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2$

(2) أوجد المعادلة التفاضلية للقطاعات المكافئة التي محورها هو المحور السيني.

(3) اوجد المعادلة التفاضلية للدوائر التي نصف قطرها الواحد الصحيح ومركزها تقع علي المستقيم $y=2x$.

(4) اوجد حل المعادلات التفاضلية الآتية بطريقة فصل المتغيرات

(i) $\dfrac{dy}{dx}=\cos(y-x)$ (ii) $\tan x\sin^2 y\,dx+\cos^2 x\cot y\,dy=0$

(iii) $x\dfrac{dy}{dx}-y=y^2$ (iv) $xy\dfrac{dy}{dx}=1-x^2$

(v) $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{4x+2y-1}$ (vi) $x^2\dfrac{dy}{dx}+y=a$

(vii) $xy^3\dfrac{dy}{dx}=1-x^2+y^2-x^2y^2$

(viii) $x(1-x^2)dy=(x^2-x+1)y\,dx$

(ix) $(x+y)^2\left(x\dfrac{dy}{dx}+y\right)=xy\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)$

(5) اوجد حل المعادلات التفاضلية المتجانسة الآتية

(i) $(x+2y)dx - xdy = 0$ (ii) $xy' = y - x\,e^{y/x}$

(iii) $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$ (iv) $xy' = y\cos\left(\ln\dfrac{y}{x}\right)$

(v) $xy' - y = x\tan\dfrac{y}{x}$ (vi) $(x^2 - 2xy - y^2)\dfrac{dy}{dx} = x^2 + 2xy - y^2$

(vii) $(x+y)^2\dfrac{dy}{dx} = x^2 - 2xy + 5y^2$ (viii) $x\dfrac{dy}{dx} = y - x\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$

(6) اوجد حل المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية الآتية

(i) $y' = \dfrac{4x - y + 7}{2x + y - 1}$ (ii) $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$

(iii) $(x - y - 1) + (y - x + 2)y' = 0$ (iv) $(3y - x)y' = 3x - y + 4$

(v) $(x - 5y + 5)dy + (5x - y + 1)dx = 0$ (vi) $x^2\dfrac{dy}{dx} = (2x - y + 1)^2$

(vii) $(\mathrm{y} + \mathrm{ax} + \mathrm{b})\dfrac{dy}{dx} = y + ax - b$

(7) بين أن المعادلات الآتية تامة واوجد الحل العام

(i) $2xydx + (x^2 - y^2)dy$ (ii) $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0$

(iii) $(x^3 - 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^3y)dy = 0$

(iv) $xdx + ydy = a^2\left(\dfrac{xdx - ydy}{x^2 + y^2}\right)$ (v) $(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 3y^2)dy = 0$

(vi) $(\cos x - x\cos y)dy - (\sin y + y\sin x)dx = 0$

(vii) $e^{-y}\,dx - (2y + x\,e^{-y})dy = 0$ (viii) $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$

(ix) $\dfrac{2x^2 + y^2}{y^2}dx - \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0$ (x) $(1 + y^2\sin 2x)dx - 2y\cos^2 x\,dy = 0$

(xi) $\left(\dfrac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \dfrac{(x^2 + 1)\cos y}{\cos 2y - 1}dy = 0$

(xii) $\sin x\cos y\,dy + \cos x\sin y\,dx + \cos x\,e^{\sin x}\,dx = 0$

(xiii) $\left[3ax^2 + 2(a+2h)xy + (b+2h)y^2\right]dx + \left[(a+2h)x^2 + 2(b+2h)xy + 3by^2\right]dy = 0$

(8) أوجد عامل مكامل يعتمد علي x فقط لكل من المعادلات التفاضلية الآتية ومن ثم أوجد احلها التام

(i) $(x^3+y^4)dx+8xy^3dy=0$ (ii) $(1-xy)dx+(1-x^2)dy=c$

(iii) $(x^3+2y^3-3xy)dx+3x(y^2+x)dy=0$

(iv) $(2x^2+xy+a^2)ydx+(x+2y)(x^2+a^2)dy=0$

(9) أوجد عامل مكامل يعتمد علي y فقط لكل من المعادلات التفاضلية الآتية ومن ثم أوجد احلها التام

(i) $xy^3dx+(x^2y^2-1)dy=0$ (ii) $y^2dx+(xy+1)dy=0$

(iii) $(y+1)dx+(xy+y^2+y+1)dy=0$ (iv) $dx+\{1+(x+y)\tan y\}dy=0$

(10) أوجد الحل العام لكل من المعادلات الخطية الآتية

(i) $(x+1)\dfrac{dy}{dx}-y=3x^4+4x^5$ (ii) $\left[2x\dfrac{dy}{dx}+y\right]\sqrt{1+x}=1+2x$

(iii) $2(x^2+x+1)\dfrac{dy}{dx}+(2x+1)y=8x^2+1$ (iv) $2(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}-(1+x)y=\sqrt{1-x^2}$

(v) $(1+x^2)^2\dfrac{dy}{dx}+(1+x)(1-x^2)y=2$ (vi) $\dfrac{dy}{dx}+y\tan x=\sin 2x$

(vii) $\dfrac{dy}{dx}\sin x\cos^3 x+y\cos 2x\cos^2 x=0$

(viii) $\dfrac{1}{2}\dfrac{dy}{dx}=y\tan 2x+1+\sec 2x$ (ix) $\dfrac{dy}{dx}+2y=x^2+3\cosh x$

(x) $\dfrac{dy}{dx}+2y\operatorname{cosec}2x=2\cot^2 x\cos 2x$ (xi) $\dfrac{dy}{dx}\cot x-y=\operatorname{cosec}2x+\cos 2x$

(xii) $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}+xy=x\sin^{-1}x+(1-x)\sqrt{1-x^2}$

(11) حول المعادلات التفاضلية الآتية إلي معادلات خطية ثم أكمل حلها

(i) $(xy-y^2)\dfrac{dy}{dx}=y^2-1$ (ii) $\left\{x\left(\dfrac{1-y^2}{1ty^2}\right)-1\right\}\dfrac{dy}{dx}=y$

(iii) $\{(2y^2-1)x+y^3\}\dfrac{dy}{dx}=y(1-y^2)^2$ (iv) $x\dfrac{dy}{dx}=4y-4\sqrt{y}$

(v) $2x\dfrac{dy}{dx}-y=\dfrac{2x^3-1}{y}$ (vi) $x^3\dfrac{dy}{dx}=2x^2y+y^3$

(vii) $\dfrac{dy}{dx}\cos x+y\sin x+y^3=0$ (viii) $2(1+x)y\dfrac{dy}{dx}+2x-3x^2+y^2=0$

(12) أثبت أن $y=1$ حل خاص للمعادلة التفاضلية الآتية ثم أوجد أصلها التام

$$\frac{dy}{dx}=(y-1)(xy-y-x)$$

(13) اثبت أن $y=\dfrac{x+1}{x^2}$ حل خاص للمعادلات التفاضلية الآتية واوجد أصلها التام

$$\frac{dy}{dx}+y^2=\frac{1}{x^4}$$

(14) أثبت أن $y=x$ حل خاص لكل من المعادلات التفاضلية الآتية ثم أوجد حلها العام .

(i) $x\dfrac{dy}{dx}+(n-1)ax^n(y-x)^2+y-2x=0$

(ii) $\dfrac{dy}{dx}+xy^2-(2x^2+1)y+x^3+x-1=0$

(iii) $(x^2+a)\dfrac{dy}{dx}+2y^2-3xy-a=0$

الباب الثاني

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجات العليا

(1.2) المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجات العليا

درسنا في الباب الأول كيفية حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجة الأولي وفي هذا الباب سوف ندرس كيفية حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجات الأعلى و المعادلات التي سوف ندرسها هي

(1) معادلات قابلة للحل في $p=\dfrac{dy}{dx}$ (2) معادلات قابلة للحل في x

(3) معادلات قابلة للحل في y

وكذلك سوف ندرس الحلول الشاذة لبعض المعادلات التي من درجة أعلي من الأولي.

(1.1.2) المعادلات القابلة للحل في p

الصورة العامة للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجات العليا هي

$$L_0\left(\frac{dy}{dx}\right)^n+L_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1}+.....+L_{n-1}\frac{dy}{dx}+L_n=0 \qquad (1)$$

حيث أن $L_0, L_1, ..., L_n$ دوال في x, y.

بفرض أن $p=\dfrac{dy}{dx}$ ، المعادلة (1) تصبح علي الصورة

$$L_0p^n+L_1p^{n-1}+.....+L_{n-1}p+L_n=0 \qquad (2)$$

الطرف الأيسر لهذه المعادلة عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة n من المكن تحليلها بالنسبة إلي p علي الصورة

$$(p-\varphi_1)(p-\varphi_2)......(p-\varphi_n)=0$$

حيث $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ دوال في x, y.

و هذه مجموعة من المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجة الأولي علي الصورة

$$p=\varphi_1,\ \ p=\varphi_2,\ ...., \ p=\varphi_n$$

$$\frac{dy}{dx}=\varphi_1(x,y),\quad \frac{dy}{dx}=\varphi_2(x,y),\quad .....,\quad \frac{dy}{dx}=\varphi_n(x,y)$$

حلول هذه المعادلات يمكن فرضها علي الصورة

$$f_1(x,y,c_1)=0,\ f_2(x,y,c_2)=0,\ ...,\ f_n(x,y,c_n)=0$$

ويكون الحل العام للمعادلة (1) هو

$$f_1(x,y,c_1)\ f_2(x,y,c_2)....f_n(x,y,c_n)=0 \qquad (3)$$

المعادلة (3) تمثل مجموعات من المنحنيات علي الشكل

$$f_1(x,y,c_1)=0,\quad f_2(x,y,c_2)=0,\ \ ....,\quad f_n(x,y,c_n)=0$$

إذا استبدلنا $c_1, c_2, \ldots, c_n$ بالثابت الاختياري c ورسمنا المنحنيات

$$f_1(x,y,c)=0,\ f_2(x,y,c)=0,....,\ f_n(x,y,c)=0$$

وجعلنا c تتغير من $-\infty$ إلي ∞ فإننا نحصل علي نفس المنحنيات. و يكون الحل العام للمعادلة (1) هو

$$f_1(x,y,c)\ f_2(x,y,c)....f_n(x,y,c)=0$$

وهو يحتوي علي ثابت اختياري واحد لآن المعادلة (1) من الرتبة الأولي.

مثال (1)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\frac{dy}{dx}\cosh x+1=0$$

الحل

بوضع $\dfrac{dy}{dx}=p$

$$p^2-p(e^x+e^{-x})+e^x\,e^{-x}=0$$

بالتحليل

$$(p-e^x)(p-e^{-x})=0$$

$$\frac{dy}{dx}=e^x,\quad \frac{dy}{dx}=e^{-x}$$

$$y=e^x+c_1,\quad y=e^{-x}+c_2$$

يكون الأصل التام للمعادلة هو

$$(y-e^x-c)(y+e^{-x}-c)=0$$

مثال (2)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$p^2-(x+y)p+xy=0$$

(حيث $p = \frac{dy}{dx}$)

الحل

بالتحليل

$$(p-x)(p-y)=0,$$
$$p=x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=x \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{2}x^2+c_1$$
$$p=y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=y \quad \Rightarrow \quad y=c_2e^x$$

و يكون الحل العام هو

$$(y-\frac{1}{2}x^2-c)(y-ce^x)=0$$

(2.1.2) المعادلات القابلة للحل في x

المعادلات التفاضلية القابلة للحل في x تأخذ الصورة

$$x=f(y,p) \qquad (1)$$

حيث $p=\frac{dy}{dx}$.

وبمفاضلة المعادلة (1) بالنسبة إلي y نحصل علي

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}$$

وهذه معادلة تفاضلية في المتغيرين y, p فإذا أمكن حلها علي الصورة

$$y=\varphi(p,c) \qquad (2)$$

فإنه بالتعويض عن y في المعادلة (1) نحصل علي

$$x=\psi(p,c) \qquad (3)$$

الحل العام للمعادلة (1) ينتج بحذف p من المعادلتين (2) ، (3) و إذا لم يمكن حذف p من المعادلتين فإن المعادلتين (2)، (3) تسميان بالمعادلات البارا مترية للحل.

مثال (1)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x=y+2ap-ap^2 \qquad (1)$$

حيث a ثابت مطلق.

الحل

بالتفاضل بالنسبة إلي y نجد أن

$$\frac{1}{p}=1+(2a-2ap)\frac{dp}{dy} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p}(1-p)=2a(1-p)\frac{dp}{dy}$$

و منها نحصل علي

$$dy=2ap\,dp$$

$$y=ap^2+c \qquad (2)$$

وبالتعويض عن قيمة y من المعادلة (2) في المعادلة (1) نحصل علي

$$x=2ap+c \qquad (3)$$

نلاحظ أنه يمكن حذف p من المعادلة (2) ، (3) وذلك كما يلي

$$p^2=\frac{y-c}{a} \quad , \quad p=\frac{x-c}{2a}$$

$$\frac{(x-a)^2}{4a^2}=\frac{y-c}{a}$$

$$(x-c)^2=4a(y-c)$$

وهي مجموعة من القطاعات المكافئة

مثال (2)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x=yp-p^2 \qquad (1)$$

حيث $p=\dfrac{dy}{dx}$.

الحل

بالتفاضل بالنسبة إلي y

$$\frac{1}{p} = p + y\frac{dp}{dy} - 2p\frac{dp}{dy} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dy}(y-2p) = \frac{1}{p} - p$$

$$y - 2p = \left(\frac{1}{p} - p\right)\frac{dy}{dp} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{p} - p\right)\frac{dy}{dp} - y = -2p$$

$$\frac{dy}{dp} - \frac{p}{1-p^2}\,y = -\frac{2p^2}{1-p^2}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولي، العامل المكامل لها

$$\mu(p) = e^{\int \frac{p}{p^2-1}dp} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{2p}{p^2-1}dp} = e^{\ln\sqrt{p^2-1}} = \sqrt{p^2-1}$$

$$\frac{d}{dp}\left(y\sqrt{p^2-1}\right) = -\frac{2p^2}{1-p^2}\sqrt{p^2-1} = \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}}$$

$$y\sqrt{p^2-1} = \int \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}}dp + c$$

و لإيجاد هذا التكامل نستخدم التعويض

$$p = \cosh\theta \qquad dp = \sinh\theta d\theta$$

$$\int \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}}dp = \int \frac{2\cosh^2\theta}{\sinh\theta}\,.\,\sinh\theta d\theta = \int 2\cosh^2\theta d\theta$$

$$= \int (1+\cosh 2\theta)d\theta = \theta + \frac{1}{2}\sinh 2\theta$$

$$= \theta + \sinh\theta\,\cosh\theta$$

$$y\sqrt{p^2-1} = \theta + \sinh\theta\cosh\theta + c$$

$$= \cosh^{-1}p + p\sqrt{p^2-1} + c$$

ومنها نجد

$$y = p + \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}\,(\cosh^{-1}p + c) \qquad (2)$$

بالتعويض عن y في المعادلة الأصلية (1)

$$x = yp - p^2$$

$$= p^2 + \frac{p}{\sqrt{p^2-1}}(\cosh^{-1}p + c) - p^2$$

وتكون

$$x = \frac{p}{\sqrt{p^2-1}}(\cosh^{-1} p + c) \qquad (3)$$

المعادلتان (2) ، (3) تمثلان الحل البارامتري للمعادلة المطلوبة.

(3.1.2) المعادلات القابلة للحل في y

المعادلات القابلة للحل في y يمكن كتابتها علي الصورة

$$y = f(x,p) \qquad (1)$$

بتفاضل بالنسبة إلي x

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\ \frac{\partial p}{\partial x}$$

وهذه معادلة تفاضلية في x, p فإذا أمكن حلها علي الصورة

$$x = \varphi(p,c) \qquad (2)$$

فأنه بالتعويض عن قيمة x في المعادلة (1) نحصل علي

$$y = \psi(p,c) \qquad (3)$$

الحل العام للمعادلة (1) ينتج بحذف p من المعادلتين (2)، (3) و إذا تعذر الحذف تسمي المعادلتين (2)، (3) بالمعادلات البارامترية للحل.

مثال (1) حل المعادلة التفاضلية الآتية

$$y = p + p^3 \qquad (1)$$

الحل

بالتفاضل بالنسبة إلي x نجد أن

$$p = \frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx}(1+3p^2)$$

$$\int dx = \int \frac{1+3p^2}{p}\,dp + c$$

لذلك يكون

$$x = \ln p + \frac{3}{2} p^2 + c \qquad (2)$$

المعادلتين (1)،(2) تمثل المعادلات البارا مترية للحل.

مثال (2)

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$y = xp^2 + p \qquad (1)$$

الحل

بتفاضل هذه المعادلة بالنسبة إلي x نحصل علي

$$p = p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}$$

$$p(1-p) = (2xp+1)\frac{dp}{dx}$$

و التي يمكن وضعها علي الصورة

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2}{1-p}x = \frac{1}{p(1-p)}$$

وهذه معادلة خطية العامل المكامل لها هو

$$\mu(p) = e^{\int -\frac{2dp}{1-p}} = e^{2\ln(1-p)} = (1-p)^2$$

و يكون حلها علي الصورة

$$\frac{d}{dp}[x(1-p)^2] = \frac{1-p}{p}$$

وبالتكامل نحصل علي

$$x(1-p)^2 = \int \frac{1-p}{p}dp + c$$

$$x(1-p)^2 = \ln p - p + c$$

ويكون

$$x = \frac{\ln p - p + c}{(1-p)^2} \qquad (2)$$

بالتعويض من (2) عن قيمة x في (1) نحصل علي

$$y = \frac{p^2 \ln p - p^3 + p^2 c}{(1-p)^2} + p \qquad (3)$$

و المعادلتين (2)، (3) تمثلان الحل العام في الصورة البارا مترية.

(4.1.2) معادلة كليروت

معادلة كليروت تكون على الصورة

$$y = xp + f(p) \qquad (1)$$

حيث $p = \dfrac{dy}{dx}$ بالتفاضل بالنسبة إلى x تحصل على

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}[x + f'(p)] = 0$$

من المعادلة الاخيرة يكون اما $\dfrac{dp}{dx} = 0$ او $x + f'(p) = 0$

في حالة $\dfrac{dp}{dx} = 0$ يكون $p = c$ وبالتعويض في (1) نحصل علي

$$y = cx + f(c) \qquad (2)$$

وهى معادلة مجموعة من الخطوط المستقيمة.

و في حالة $x + f'(p) = 0$

يكون

$$x = -f'(p) \qquad (3)$$

وبالتعويض في (1) عن x نحصل علي

$$y = -f'(p)p + f(p) \qquad (4)$$

بحذف p بين (3) ، (4) نحصل على علاقة بين (x, y) على الصورة الاتية

$$\phi(x, y) = 0 \qquad (5)$$

المعادلة (5) تمثل حل أخر للمعادلة (1) وتكون المعادلتين (3) ، (4) هما المعادلتين البارامتريتين لهذا الحل.

المعادلة (5) لا تحتوى على ثابت اختياري فهي حل خاص وعلى العموم لا يمكن استنتاج هذا الحل من الحل العام بوضع قيمة خاصة للثابت c.

الحل الخاص (5) هو "حل شاذ " أو حل "مفرد" للمعادلة التفاضلية (1).

المعادلة (2) تمثل الحل العام وهى معادلة مجموعة من المستقيمات ذات البارامتر c .

مثال (1)

أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية الأتية

$$y = xp + ap(1-p) \qquad (1)$$

الحل

بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + (a-2ap)\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}(x+a-2ap) = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

و منها يكون الحل العام للمعادلة هو

$$y = cx + ac - ac^2$$

أو يكون

$$x + a - 2ap = 0 \qquad (2)$$

بحذف p من المعادلتين (1) ، (2) نجد أن

$$y = \frac{(x+a)^2}{4a}$$

أي أن

$$(x+a)^2 = 4ay$$

وهذا هو الحل المفرد ويمثل غلاف مجموعة المستقيمات الممثلة بالحل العام.

مثال (2)

أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية

$$y = xp + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} \qquad (1)$$

الحل

بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{a}{(1+p^2)^{3/2}}\ \frac{dp}{dx}$$

بذلك يكون

$$\left[x + \frac{a}{(1+p^2)^{3/2}}\right]\frac{dp}{dx} = 0$$

منها يكون أما $\frac{dp}{dx} = 0 \Leftarrow p = c$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$y = xc + \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}} \qquad (2)$$

وهى تمثل مجموعة من المستقيمات.

أو

$$x = -\frac{a}{(1+p^2)^{3/2}} \qquad (3)$$

بالتعويض من (3) في (1) عن قيمة x نجد أن

$$y = \frac{ap^3}{(1+p^2)^{3/2}} \qquad (4)$$

المعادلتان (3)، (4) هما المعادلتان البارامتريتان للحل المفرد وبحذف p بين (3) ، (4) نحصل علي المعادلة الكارتيزية للحل المفرد.

من (3) نجد أن

$$p^2 = \left(-\frac{a}{x}\right)^{2/3} - 1\ , \quad y = -xp^3$$

$$y^{2/3} = (-x)^{2/3}p^2 = (-x)^{2/3}\left[\left(-\frac{a}{x}\right)^{2/3} - 1\right]$$

$$y^{2/3} = a^{2/3} - (-x)^{2/3} = a^{2/3} - x^{2/3}$$

و يكون الحل المفرد للمعادلة التفاضلية

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

وهو غلاف مجموعة المستقيمات التي يمثلها الحل العام .

مثال (3)

أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية

$$\sin px \cos y = \cos px \sin y + p$$

الحل

نكتب المعادلة على الصورة

$$\sin px \cos y - \cos px \sin y = p$$
$$\sin(xp - y) = p$$
$$xp - y = \sin^{-1} p$$

و بالتالي يكون

$$y = xp - \sin^{-1} p \qquad (1)$$

وهذه صورة معادلة كليروت.

بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن

$$p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\frac{dp}{dx}$$
$$\frac{dp}{dx}\left[x - \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\right] = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

و يكون الحل العام هو

$$y = cx - \sin^{-1} c$$

ومن الناحية الأخرى

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \Rightarrow p = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

بالتعويض في (1) نجد أن

$$y = \sqrt{x^2-1} - \sin^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \sqrt{x^2-1} - \sin^{-1} x^{-1}\sqrt{x^2-1}$$

وهذا هو الحل المفرد ويمثل غلاف المستقيمات.

(2.2) المعادلات التفاضلية من الرتب العليا التي يمكن تخفيض رتبتها

الصورة العامة للمعادلة التفاضلية من الرتبة n هي

$$f(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

ولا يوجد حتى الأن طريقة مباشره لحل مثل هذه المعادلات.

و سوف نعرض في الأبواب القادمة طرق لايجاد الحل لبعض الحالات الخاصة من هذه المعادلات وهى التي تكون فيها المعادلة (1) خطية.

ونلاحظ أنه حتى في هذه الحالة الخاصة لن نستطيع أن نحصل على طريقة مباشره نوجد بها الحل العام لأى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة n إلا في الحالات التي تكون فيها المعاملات ثوابت.

وسوف ندرس الأن بعض الحالات للمعادلة (1) التي يمكن فيها باستخدام تعويض مناسب تحويلها الى معادلة تفاضلية أخرى ذات رتبة أقل.

(1.2.2) المعادلات التفاضلية التي لا تحتوى على y بصورة صريحة

الصورة العامة لها هي

$$f\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

وفى هذه الحالة فإن رتبة المعادلة يمكن أن تؤول الى $n-k$ وذلك بوضع $y^{(k)} = z$

المعادلة (1) تأخذ الصورة

$$f\left(x, z, z', \cdots, z^{(n-k)}\right) = 0 \qquad (2)$$

وهذه المعادلة التفاضلية من الرتبة $(n-k)$ في المتغيرين x, z فإذا أمكن حلها على الصورة

$$z = z(x, c_1, c_2, \ldots\ldots, c_{n-k}) = 0 \qquad (3)$$

وبإجراء التكامل k من المرات للمعادلة (3) نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية (1).

مثال (1)

اوجد الحل العام للمعادلة

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{1}{x}\frac{d^3 y}{dx^3} = 0 \qquad (1)$$

الحل

$$\text{Let } \frac{d^3 y}{dx^3} = z \quad \Rightarrow \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{dz}{dx}$$

تصبح المعادلة التفاضلية (1) على الصورة

$$\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=0$$

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x}\Rightarrow \ln z=\ln x+\ln c_1 \quad\Rightarrow z=c_1x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=c_1x \quad\Rightarrow y=\frac{c_1}{24}x^4+\frac{c_2}{2}x^2+c_3x+c_4$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة التفاضلية (1).

مثال (2)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$2x\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1 \qquad (1)$$

الحل

$$\text{Let } \frac{dy}{dx}=z\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}$$

المعادلة (1) تصبح على الصورة

$$2xz\frac{dz}{dx}=z^2-1 \quad\Rightarrow \frac{2zdz}{z^2-1}=\frac{dx}{x}$$

$$\ln(z^2-1)=\ln x+\ln c_1 \quad\Rightarrow z^2-1=c_1x$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=c_1x+1 \quad\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{c_1x+1}$$

$$y=\pm\int\sqrt{c_1x+1}\,dx \quad\Rightarrow y=\pm\frac{2}{3c_1}(c_1x+1)^{3/2}+c_2$$

$$9c_1^2(y-c_2)^2=4(c_1x+1)^3$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية (1).

(2.2.2) المعادلات التفاضلية التي لا تحتوى x بصورة صريحة

هذا النوع من المعادلات يكون على الصورة

$$f\left(y,y',y'',\cdots,y^{(n)}\right)=0 \qquad (1)$$

وباستخدام التعويض $y'=p$ يمكن تخفيض رتبة المعادلة كما يلى

$$\frac{dy}{dx} = p\ ,\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2$$

وبالمثل بالنسبة الى باقي المشتقات من الرتب الأعلى وبالتعويض عن قيم $y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}$ فإن المعادلة (1) تصبح على الصورة

$$\varphi\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2p}{dy^2}, \cdots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة $(n-1)$ في المتغيرين y, p فإذا أمكن حل المعادلة الأخيرة وإيجاد p كدالة في y فإنه باستخدام الفرض $y' = p$ نحصل على معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى وبحلها نوجد الحل العام للمعادلة (1).

مثال (1)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الأتية

$$y(y-1)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \qquad (1)$$

الحل

نضع

$$\frac{dy}{dx} = p \ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$$

المعادلة (1) تصبح على الصورة

$$y(y-1)p\frac{dp}{dy} + p^2 = 0 \ \Rightarrow y(y-1)\frac{dp}{dy} + p = 0$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y(y-1)} = \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y-1}\right]dy$$

$$\ln p = \ln\frac{y}{y-1} + \ln c_1 \ \Rightarrow p = \frac{c_1 y}{y-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{c_1 y}{y-1} \ \Rightarrow \int\frac{y-1}{y}dy = \int c_1 dx$$

$$y - \ln y = c_1 x + c_2$$

وهو الحل العام للمعادلة (1).

ملحوظة

إذا كانت المعادلة التفاضلية خالية من x, y فإن يمكن حل المعادلة بأخذ أحد التعويضين السابقين. ولكن نلاحظ أن استخدام التعويض $y' = p \Leftarrow \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$ يكون أسهل في الحل.

مثال (2)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2} = m\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (1)$$

حيث m ثابت مطلق.

الحل

سوف ندرس حل المعادلة (1) باعتبارها معادلة لا تحتوى على x بصورة صريحة (ويترك دراستها باعتبارها معادلة لا تحتوى على y بصورة صريحة كتمرين) .

باستخدام التعويض

$$\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$$

المعادلة تصبح على الصورة

$$\sqrt{1+p^2} = mp\frac{dp}{dy} \qquad \Rightarrow \int \frac{mpdp}{\sqrt{1+p^2}} = \int dy$$

$$m\sqrt{1+p^2} = y + c_1 \qquad \Rightarrow 1+p^2 = \frac{1}{m^2}(y+c_1)^2$$

$$p^2 = \frac{(y+c_1)^2}{m} - 1 \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(y+c_1)^2 - m^2}}{m}$$

$$\int \frac{mdy}{\sqrt{(y+c_1)^2 - m^2}} = \int dx + c_2 \qquad \Rightarrow m\cosh^{-1}\left(\frac{y+c_1}{m}\right) = c_2 + x$$

$$y = m\cosh\frac{x+c_2}{m} - c_1$$

وهو الحل العام.

(3.2.2) المعادلات المتجانسة

تعريف : المعادلة التفاضلية تكون متجانسة إذا كانت كل حدودها من نفس البعد

إذا اعتبرنا x, y من البعد الواحد فإن

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

اذن المشتقة $\frac{dy}{dx}$ من البعد صفر.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x}$$

اذن المشتقة $\frac{d^2 y}{dx^2}$ من البعد -1 . و هكذا نلاحظ أن $\frac{d^3 y}{dx^3}$ من البعد -2 ، $\frac{d^n y}{dx^n}$ تكون من البعد $(1-n)$.

فمثلاً المعادلة التفاضلية

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 4x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2y^2 = 0$$

هي معادلة متجانسة من البعد 2 . و المعادلة التفاضلية

$$(x^2 - 4xy)\frac{dy}{dx} + 8y\frac{dy}{dx} = 0$$

هي معادلة متجانسة من البعد 1. و لحل المعادلات المتجانسة نعتبر الحالات الأتية

(أ) إذا كانت المعادلة التفاضلية يمكن كتابتها على الصورة الأتية

$$\varphi\left(y, x\frac{dy}{dx}, x^2 \frac{d^2 y}{dx^2}, \cdots, x^n \frac{d^n y}{dx^n} \right) = 0$$

يمكن حل هذه المعادلة باستخدام التعويض

$$x = \mathrm{e}^t \quad \Rightarrow t = \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

وهكذا يمكن إيجاد بقية الحدود وبالتعويض تصبح المعادلة (1) على الصورة

$$\varphi\left(y,\frac{dy}{dt},\frac{d^2y}{dt^2},\cdots\right)=0$$

هذه المعادلة لا تحتوى على t بصفة صريحة ويمكن حلها باستخدام التعويض

$$y'=p \quad \Rightarrow y''=p\frac{dp}{dy}$$

وبذلك يمكن تخفيض رتبة المعادلة بمقدار الوحدة.

مثال (1)

أوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$y\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=4y\left(x\frac{dy}{dx}\right)$$

الحل

هذه المعادلة متجانسة وتكون على الصورة

$$f\left(y,x\frac{dy}{dx},x^2\frac{d^2y}{dx^2},\cdots\right)=0$$

باستخدام التعويض $x=\mathrm{e}^t$ نجد أن

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}$$

المعادلة تصبح على الصورة

$$y\frac{d^2y}{dt^2}-4y\frac{dy}{dt}+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=0$$

بوضع

$$\frac{dy}{dt}=p \quad \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}=p\frac{dp}{dy}$$

$$yp\frac{dp}{dy}-4yp+p^2=0 \quad \Rightarrow \frac{dp}{dy}+\frac{1}{y}p=4$$

وهذه معادلة خطية يكون عاملها الكامل هو

$$\mu(y) = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{y} dy} = y$$

$$\frac{d}{dy}(py) = 4y \;\Rightarrow\; yp = 2y^2 + c_1$$

$$p = 2y + \frac{c_1}{y} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dt} = 2y + \frac{c_1}{y}$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{4y\,dy}{2y^2 + c_1} = \int dt \;\Rightarrow\; \ln\left(\sqrt[4]{2y^2 + c_1}\right) = \ln c_2 x$$

$$\sqrt[4]{2y^2 + c_1} = xc_2 \;\Rightarrow\; 2y^2 + c_1 = x^4 c_2^4$$

$$y^2 = \frac{x^4 c_2^4}{2} - \frac{c_1}{2}$$

وهو الحل العام.

(ب) إذا كانت المعادلة التفاضلية على الصورة

$$f\left(\frac{y}{x}, \frac{dy}{dx}, x\frac{d^2y}{dx^2}, \cdots\right) = 0 \qquad (1)$$

أي ان المعادلة التفاضلية تكون متجانسة من البعد صفر. وفى هذه الحالة نضع

$$y = zx, \;\; x = \mathrm{e}^t$$

فيكون

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} \;\Rightarrow\; \frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dz}{dx} + x\frac{d^2z}{dx^2}$$

ولكن

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt}, \quad x^2\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = z + \frac{dz}{dt}, \qquad (2)$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = 2x\frac{dz}{dx} + x^2\frac{d^2z}{dx^2} = 2\frac{dz}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}$$

$$\therefore x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \qquad (3)$$

وبالتعويض عن (2)، (3) تتحول المعادلة (1) الى الصورة

$$\varphi\left(z, \frac{dz}{dt}, \frac{d^2z}{dt^2}, \cdots\right) = 0$$

وهى معادلة خالية من t ويمكن حلها كما سبق.

مثال (1)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة الأتية

$$(x^2 + y^2)(y - xy') + x^2 y^2 y'' = 0 \qquad (1)$$

الحل : بالقسمة علي x^3 نجد أن

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\left(\frac{y}{x} - y'\right) + \frac{y^2}{x^2} x y'' = 0$$

بوضع

$$y = zx, \quad x = e^t$$

تتحول المعادلة التفاضلية (1) الى الصورة

$$\left(1 + z^2\right)\left(z - z - \frac{dz}{dt}\right) + z^2\left(\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\right) = 0$$

$$-\frac{dz}{dt} - z^2\frac{dz}{dt} + z^2\frac{d^2z}{dt^2} + z^2\frac{dz}{dt} = 0$$

$$z^2\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dz}{dt}$$

بوضع

$$\frac{dz}{dt} = p \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2z}{dt^2} = p\frac{dp}{dz}$$

تتحول المعادلة التفاضلية

$$z^2 p\frac{dp}{dz} = p \;\Rightarrow\; \int dp = \int \frac{dz}{z^2}$$

$$p = -\frac{1}{z} + \frac{1}{a} = \frac{z-a}{az} \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dt} = \frac{z-a}{az}$$

$$\int \frac{az\,dz}{z-a} = \int dt \;\Rightarrow t - \ln b = a\int\left[1 + \frac{a}{z-a}\right]dz = az + a^2\ln(z-a)$$

$$t = az + a^2\ln(z-a) + \ln b \;\Rightarrow \ln x = \frac{a\,y}{x} + a^2\ln\left(\frac{y}{x} - a\right) + \ln b$$

و يكون

$$x = b\left(\frac{y}{x} - a\right)^{a^2} \mathrm{e}^{\frac{ay}{x}}$$

وهو الحل العام.

(4.2.2) المعادلات التفاضلية يكمن كتابتها علي صورة مشتقة لمقدار تفاضلي اقل من رتبة المعادلة بمقدار الوحدة

في هذه الحالة الطرف الأيسر للمعادلة

$$f(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

يكون عبارة عن المشتقة الاولي لمقدار تفاضلي ما من الرتبة $(n-1)$ وليكن مثلاً:

$$\varphi = \varphi\left(c, x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$$

هنا يمكن كتابة المعادلة (1) علي الصورة $\dfrac{d\varphi}{dx} = 0$ ومنها $\varphi = c$.

مثال (1)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$yy'' + y'^2 = 0$$

الحل

هذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{d}{dx}(yy') = 0$$

ومنها يكون

$$yy' = c_1 \;\Rightarrow\; y^2 = c_1 x + c_2$$

مثال(2)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$yy'' = y'^2$$

الحل

بالقسمة على yy' نحصل على

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y} \Rightarrow \int \frac{y''}{y'} = \int \frac{y'}{y} \Rightarrow \ln y' = \ln y + \ln c$$

$$y' = yc \Rightarrow \frac{dy}{dx} = yc$$

$$\frac{dy}{y} = cdx \Rightarrow \ln y = cx + \ln c_1 \Rightarrow y = c_1 e^{cx}$$

و هو الحل العام.

مثال (3)

حل المعادلة التفاضلية الاتية

$$y' y''' = 2y''^2$$

الحل: بالقسمة على $y' y''$ نحصل على

$$\frac{y'''}{y''} = 2\frac{y''}{y'} \Rightarrow \int \frac{y'''}{y''} = 2\int \frac{y''}{y'}$$

$$\ln y'' = 2\ln y' + \ln c \Rightarrow y'' = cy'^2$$

وبوضع $y' = z$

$$\frac{dz}{dx} = cz^2 \Rightarrow \frac{dz}{z^2} = cdx \Rightarrow -\frac{1}{z} = cx + c_1$$

$$z = -\frac{1}{cx + c_1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{cx + c_1}$$

$$y = -\frac{1}{c}\ln\left(cx + c_1\right) + c_2$$

وهو الحل العام.

تمارين (2)

(1) أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية بحلها بالنسبة إلى p ، $p=\dfrac{dy}{dx}$

(i) $y^2p^2-3xyp+2x^2=0$ (ii) $p^2-(xy+2x)p+2x^2y=0$

(iii) $p^2-p-6=0$ (iv) $p^3-p\left(x^2+xy+y^2\right)+xy(x+y)=0$

(v) $p^2-2\cos x-1=0$ (vi) $x+yp^2=p(1+xy)$

(2) أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الأتية باعتبارها قابلة للحل في x

(i) $x=4p+4p^3$ (ii) $p^2-2xp+1=0$

(iii) $2y+p^2+2p=2x(p+1)$ (iv) $p=\tan\left(x-\dfrac{p}{1+p^2}\right)$

(v) $p^3-p(y+3)+x=0$

(3) أوجد الحل العام لكل من للمعادلات التفاضلية الأتية باعتبارها قابلة للحل في y

(i) $y=xp^2+p$ (ii) $y=x+p^3$

(iii) $p^2+p=e$ (iv) $y=p\sin p+\cos p$

(v) $y=p\tan p+\ln\cos p$ (vi) $\mathrm{e}^{p-y}=p^2-1$

(4) أوجد الحل العام والحل المفرد لمعادلات كليروت التفاضلية الآتية

(i) $y=xp+p^2$ (ii) $y=xp+p^3$

(iii) $y=xp+\cos p$ (iv) $y=xp+\sqrt{a^2p^2+b^2}$

(v) $p=\ln(xp-y)$ (vi) $\cosh xp\cosh y=\sinh px\sinh y+p$

(vii) $y=xp+\dfrac{p}{p+1}$ (viii) $y=xp+\sqrt{p^2-1}$

(ix) $y=xp+\dfrac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$ (x) $y=xp+\sqrt{p^2+1}-p\ln(p+\sqrt{p^2+1})$

(5) حل المعادلات التفاضلية الاتية باعتبارها خالية من y

(i) $2xy'y''=y'^2-1$ (ii) $x^2y''=y'^2$

(iii) $y''^2+y'=xy''$ (iv) $y''\operatorname{cosec}x=1$

(v) $x(1-x)y''+2(1-x)y'=1$ (vi) $y^{(n)}-2y^{(n-1)}=\mathrm{e}^x$

(6) حل المعادلات التفاضلية الاتية باعتبارها خالية من x

(i) $yy'' = y'^2 y''$ (ii) $y'^2 - (3y - 2y')y'' = 0$

(iii) $yy'' + 1 = y'^2$ (iv) $y'' + y'^2 = 1$

(v) $2yy'' = y'^2$ (vi) $yy'' = y'^2 - y'^3$

(vii) $yy'' + y'^2 + 2y^2 = 0$

(7) حل المعادلات التفاضلية المتجانسة الأتية

(i) $xy'' - xy' + y = 0$ (ii) $x^2 y'' - xy' + 5y = 0$

(iii) $2x^2 yy'' + y^2 = x^2 y'^2$ (iv) $(2yy'' - y'^2)x^2 + y^2 = 0$

الفصل الاول

الحل الخاص للمعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة

(1.3) مقدمة

الصورة العامة للمعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة هي

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x) \qquad (1)$$

حيث $a_0, a_1, \cdots, a_n$ مقادير ثابتة، $f(x)$ دالة في المتغير x.

وهذا النوع من المعادلات ذات أهمية كبيرة في المتذبذبات بكل أنواعها والميكانيكا والكهرباء وغير ذلك.

فإذا رمزنا للتفاضلات من الرتبة r ، $\frac{d^r}{dx^r}$ ، $(r = 1, 2, \cdots, n)$ بالرموز الاتية

$$\frac{d}{dx} \equiv D, \ \frac{d^2}{dx^2} \equiv D^2, \cdots, \frac{d^n}{dx^n} \equiv D^n$$

(حيث D يسمي "المعامل التفاضلي" أو " المؤثر التفاضلي " أو " عامل الاشتقاق ")، فانه يمكن كتابة المعادلة (1) علي الصورة

$$\left(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n\right) y = f(x)$$

أو

$$F(D) y = f(x)$$

حيث $F(D)$ كثيرة حدود من الدرجة n في المؤثر التفاضلي D.

(2.3) المؤثرات التفاضلية

(1.2.3) خواص المؤثر التفاضلي D

(أ) إذا كانت y, z دوال للمتغير x وكانت D ترمز للتفاضل بالنسبة الى x فإن

$$D\left(y(x) + z(x)\right) = Dy(x) + Dz(x)$$

وهو قانون توزيع المؤثر علي الجمع.

(ب) إذا كانت y دالة للمتغير x ، c مقدار ثابت فإن

$$D\left(cy(x)\right) = cDy(x)$$

وهو قانون التبادل مع الثوابت.

(ج) إذا كانت y دالة للمتغير x ، m,n عددين صحيحين موجبين فإن

$$D^m\{D^n y(x)\} = D^n\{D^m y(x)\} = D^{m+n} y(x)$$

وهو قانون الأسس.

أي أن المؤثر D يخضع للقوانين الجبرية فيما عدا أنه لا يتبادل مع المتغيرات وذلك لا نه $yDz \neq zDy$ إذا كانت y,z دالتين مختلفين للمتغير x على ذلك فمن الممكن أن تجرى العمليات الجبرية على المؤثر D كأي رمز جبري بشرط أن تكون قوى D صحيحة وموجبة.

(2.2.3) خواص المؤثر التفاضلي $F(D)$

(أ) من تعريف المؤثر التفاضلي D فإن $F(D)$ دالة تفاضلية تأثيرية وتسمى مؤثر تفاضلي خطى لأنها تحقق الشرطين الاتيين

$$\text{(i)}\quad F(D)\{cy(x)\} = cF(D)y(x)$$

$$\text{(ii)}\quad F(D)\{y(x)+z(x)\} = F(D)y(x) + F(D)z(x)$$

حيث y,z دوال للمتغير x ، c ثابت.

(ب) إذا كانت $F_1(D), F_2(D)$ دالتين في المتغير D ، y دالة في المتغير x فإن مجموع وحاصل ضرب دالتين تأثيرين يعرف كالاتي

$$\text{(i)}\quad \{F_1(D)+F_2(D)\}\, y(x) = F_1(D)y(x) + F_2(D)y(x)$$

$$\text{(ii)}\quad F_1(D)F_2(D)\{y(x)\} = F_1(D)\{F_2(D)y(x)\}$$

البرهان

لاثبات رقم (ii)

من المعروف أن كل كثيرة حدود من الدرجة n والتي جميع معاملاتها أعداد حقيقية لها يوجه عام n من الجذور وقد يكون بعضها متكرر كما أنها قد تكون حقيقية أو مركبة وعلى ذلك فإنه قد يمكن تحليل $F(D)$ إلى n من العوامل الخطية ويكون

$$\begin{aligned} F(D)y &= \left(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n\right) y \\ &= (D-\alpha_1)(D-\alpha_2).....(D-\alpha_n) y \end{aligned}$$

حيث α_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ هي جذور المعادلة الجبرية

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$$

ويلاحظ أن

$$(D-a_1)(D-a_2)y = (D-a_2)(D-a_1)y$$

لأن

$$(D-a_1)(D-a_2)y=(D-a_1)(y'-a_2y)=y''-a_2y'-a_1y'+a_1a_2y$$
$$=y''-(a_1+a_2)y'+a_1a_2y$$
$$(D-a_2)(D-a_1)y=(D-a_2)(y'-a_1y)=y''-a_1y'-a_2y'+a_2a_1y$$
$$=y''-(a_1+a_2)y'+a_2a_1y$$

وبالمثل يمكن أثبات أن

$$[F_1(D)F_2(D)]y=[F_2(D)F_1(D)]y$$

وذلك إذا كانت معاملات $F_2(D), F_1(D)$ مقادير ثابتة

(3.2.3) بعض المتطابقات الهامة

(أ) (قانون التعويض)

$$F(D)\,\mathrm{e}^{ax}=F(a)\,\mathrm{e}^{ax}$$

حيث $F(D)$ كثيرة حدود ذات معاملات ثابتة، a مقدار ثابت.

البرهان

بما أن $D^r\,\mathrm{e}^{ax}=a^r\,\mathrm{e}^{ax}$ ، حيث r عدد صحيح موجب فإن

$$F(D)\,\mathrm{e}^{ax}=(a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n)\,\mathrm{e}^{ax}$$
$$=a_0D^n\,\mathrm{e}^{ax}+a_1D^{n-1}\,\mathrm{e}^{ax}+.....+a_{n-1}D\,\mathrm{e}^{ax}+a_n\,\mathrm{e}^{ax}$$
$$=a_0a^n\,\mathrm{e}^{ax}+a_1a^{n-1}\,\mathrm{e}^{ax}+\cdots+a_{n-1}a\,\mathrm{e}^{ax}+a_n\,\mathrm{e}^{ax}$$
$$=F(a)\,\mathrm{e}^{ax}$$

(ب) (قانون الإزاحة)

$$D^n\{\mathrm{e}^{ax}\,z(x)\}=\mathrm{e}^{ax}(D+a)^n z(x)$$

حيث $z(x)$ دالة للمتغير x ، a مقدار ثابت ، n عدد صحيح موجب و منها نستنتج أن

$$F(D)\{\mathrm{e}^{ax}\,z(x)\}=\mathrm{e}^{ax}\,F(D+a)z(x)$$

البرهان:

نبرهن ذلك بالاستنتاج الرياضي

في حالة $n=1$

$$D\{e^{ax} z(x)\} = e^{ax} Dz(x) + z(x) D e^{ax} = e^{ax} Dz(x) + az(x) e^{ax}$$
$$= e^{ax}(D+a)z(x)$$

إذن العلاقة صحيحة في حالة $n=1$

نفرض أن العلاقة صحيحة في حالة $n=m$ أي أن

$$D^m\{e^{ax} z(x)\} = e^{ax}(D+a)^m z(x)$$

المطلوب أثبات صحة العلاقة في حالة $n=m+1$

$$D^{m+1}\{e^{ax} z(x)\} = D\, D^m\{e^{ax} z(x)\} = D\left\{e^{ax}\left[(D+a)^m z(x)\right]\right\}$$
$$= e^{ax}(D+a)\left\{(D+a)^m z(x)\right\} = e^{ax}(D+a)^{m+1} z(x)$$

إذن العلاقة صحيحة في حالة $n=m+1$ إذن فهي صحيحة لجميع قيم m الموجبة.

(ج)

$$F(D^2)\sin(ax+b) = F(-a^2)\sin(ax+b)$$
$$F(D^2)\cos(ax+b) = F(-a^2)\cos(ax+b)$$

حيث a,b مقادير ثابتة.

البرهان

إذا كانت r عدداً صحيحاً موجباً فإن

$$D^{2r}\sin(ax+b) = a^{2r}\sin(ax+b+2r\cdot\frac{\pi}{2})$$
$$= (-1)^r a^{2r}\sin(ax+b) = (-a^2)^r\sin(ax+b)$$
$$F(D^2)\sin(ax+b) = \left\{a_0 D^{2n} + a_1 D^{2n-2} + \cdots + a_{n-1}D^2 + a_n\right\}\sin(ax+b)$$
$$= a_0(-a^2)^n\sin(ax+b) + a_1(-a^2)^{n-1}\sin(ax+b) + ... + a_n\sin(ax+b)$$
$$= \{a_0(-a^2)^n + a_1(-a^2)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(-a^2) + a_n\}\sin(ax+b)$$
$$= F(-a^2)\sin(ax+b)$$

وبنفس الطريقة السابقة يمكن أثبات أن

$$F(D^2)\cos(ax+b) = F(-a^2)\cos(ax+b)$$

(3.2.3) المؤثرات التفاضلية العكسية $\frac{1}{D}, \frac{1}{F(D)}$

تعريف

المعامل التفاضلي العكسي $\frac{1}{D}$ هو المعامل الذى تأثيره على دالة في المتغير x هو عكس تأثير العامل التفاضلي D على نفس الدالة.

أي إذا كانت y دالة للمتغير x فإن

$$\frac{1}{D}\{Dy(x)\} = D\left\{\frac{1}{D}y(x)\right\} = y(x)$$

ومن ذلك يتضح أن $\frac{1}{D}$ هو المعكوس الجبري للمعامل D ولذلك فهو معامل تكاملي

$$\frac{1}{D}y(x) = \int y(x)dx$$

بدون وجود ثابت للتكامل لكى تتحقق العلاقة

$$\frac{1}{D}\{Dy(x)\} = y(x)$$

وبالمثل $\frac{1}{F(D)}$ ترمز للمعامل التفاضلي العكسي الذى تأثيره على دالة ما للمتغير x هو عكس تأثير المعامل التفاضلي $F(D)$ على نفس الدالة. أي أن

$$\frac{1}{F(D)}\{F(D)y(x)\} = F(D)\left\{\frac{1}{F(D)}\right\}y(x) = y(x)$$

وباستخدام هذه العلاقة وبمراعاة أن $F(D)$ دالة تأثيرية يمكن أثبات أن $\frac{1}{F(D)}$ أيضاً دالة تأثيرية خطية أي أن .

$$\text{(i)} \quad \frac{1}{\mathrm{F}(D)}\{cy(x)\} = c\frac{1}{\mathrm{F}(D)}y(x)$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{1}{\mathrm{F}(D)}\{y(x)+z(x)\} = \frac{1}{\mathrm{F}(D)}y(x) + \frac{1}{\mathrm{F}(D)}z(x)$$

حيث y, z دوال للمتغير x ، c مقدار ثابت.

البرهان

(i) نؤثر على الطرف الأيسر بالدالة التأثيرية $F(D)$

$$F(D)\left\{\frac{1}{F(D)}\left[cy(x)\right]\right\}=cy(x) \qquad (*)$$

نؤثر على الطرف الأيمن بالدالة التأثيرية $F(D)$

$$F(D)\left\{c\frac{1}{F(D)}y(x)\right\}=cF(D)\left\{\frac{1}{F(D)}y(x)\right\}=cy(x) \quad (**)$$

بمقارنة $(*)$ ، $(**)$ نحصل علي المطلوب.

$$F(D)\left\{c\frac{1}{F(D)}y(x)\right\}=cF(D)\left\{\frac{1}{F(D)}y(x)\right\}=cy(x)$$

(ii) نؤثر على الطرف الأيمن بالدالة التأثيرية $F(D)$

$$F(D)\left\{\frac{1}{F(D)}y(x)+\frac{1}{F(D)}z(x)\right\}=F(D)\left\{\frac{1}{F(D)}y(x)\right\}+F(D)\left\{\frac{1}{F(D)}z(x)\right\}$$
$$=y(x)+z(x)$$

نؤثر على كل من طرفي المعادلة السابقة بالدالة التأثيرية $\frac{1}{F(D)}$ نحصل علي

$$\frac{1}{F(D)}y(x)+\frac{1}{F(D)}z(x)=\frac{1}{F(D)}\{y(x)+z(x)\}$$

وبنفس الطريقة السابقة يمكن البرهنة على صحة المتطابقات الثلاث الاتية إذا كانت الدالة التأثيرية لها هي $\frac{1}{F(D)}$

(أ)

$$\frac{1}{F(D)}\mathrm{e}^{ax}=\frac{1}{F(a)}\mathrm{e}^{ax}$$

حيث $F(a)\neq 0$ ، a مقدار ثابت.

البرهان

نؤثر على الطرف الأيسر بالدالة التأثيرية $F(D)$

$$F(D)\left\{\frac{1}{F(D)}\mathrm{e}^{ax}\right\}=\frac{1}{F(D)}\left\{F(D)\mathrm{e}^{ax}\right\}=\mathrm{e}^{ax}$$

نؤثر على الطرف الأيمن بالدالة التأثيرية $F(D)$

$$F(D)\left\{\frac{1}{F(a)}\mathrm{e}^{ax}\right\}=\frac{1}{F(a)}F(D)\mathrm{e}^{ax}=\frac{1}{F(a)}F(a)\mathrm{e}^{ax}=\mathrm{e}^{ax}$$

حيث أن $F(a)$ ثابت. بالتالي نحصل علي

$$\frac{1}{F(D)}\mathrm{e}^{ax}=\frac{1}{F(a)}\mathrm{e}^{ax}$$

(ب)

$$\frac{1}{F(D)}\{\mathrm{e}^{ax}\,z(x)\}=\mathrm{e}^{ax}\,\frac{1}{F(D+a)}\{z(x)\}$$

البرهان

نؤثر على الطرف الأيمن بالمؤثر التفاضلي $F(D)$

$$F(D)\left[\mathrm{e}^{ax}\left\{\frac{1}{F(D+a)}z(x)\right\}\right]=\mathrm{e}^{ax}\,F(D+a)\left\{\frac{1}{F(D+a)}z(x)\right\}=\mathrm{e}^{ax}\,z(x)$$

نؤثر على كل من الطرفين في المعادلة السابقة بالدالة التأثيرية $\dfrac{1}{F(D)}$

$$\mathrm{e}^{ax}\,\frac{1}{F(D+a)}z(x)=\frac{1}{F(D)}\{\mathrm{e}^{ax}\,z(x)\}$$

(ج)

$$\frac{1}{F(D^2)}\sin(ax+b)=\frac{1}{F(-a^2)}\sin(ax+b)$$

$$\frac{1}{F(D^2)}\cos(ax+b)=\frac{1}{F(-a^2)}\cos(ax+b)$$

حيث $F(-a^2)\neq 0$ ، a مقدار ثابت.

البرهان

تؤثر على الطرف الأيمن بالدالة التأثيرية $F(D^2)$

$$F(D^2)\left\{\frac{1}{F(-a^2)}\sin(ax+b)\right\}=\frac{1}{F(-a^2)}F(D^2)\sin(ax+b)$$

$$=\frac{1}{F(-a^2)}F(-a^2)\sin(ax+b)=\sin(ax+b)$$

تؤثر على كل من الطرفين للمعادلة السابقة بالدالة التأثيرية $\dfrac{1}{F(D^2)}$

$$\frac{1}{F(-a^2)}\sin(ax+b)=\frac{1}{F(D^2)}\sin(ax+b)$$

وبالمثل يمكن إثبات العلاقة الثانية.

التكامل الخاص للمعادلات التفاضلية الخطية ذوات المعاملات الثابتة.

في هذا الجزء سوف نهتم بإيجاد التكامل الخاص (الحل الخاص) للمعادلة التفاضلية الخطية

$$F(D)y=f(x) \qquad (1)$$

وذلك في بعض الحالات الخاصة للدالة $f(x)$.

أولاً

إذا كانت $f(x)=\mathrm{e}^{ax}$ أي أن $F(D)y=e^{ax}$. من تعريف المؤثر التفاضلي العكسي $\dfrac{1}{F(D)}$ ينتج أن

$$\frac{1}{F(D)}\{F(D)y(x)\}=\frac{1}{F(D)}\mathrm{e}^{ax}$$

$$y(x)=\frac{1}{F(D)}\mathrm{e}^{ax}$$

فإذا كانت $F(a)\neq 0$ فإن التكامل الخاص للمعادلة هو

$$y_p(x)=\frac{1}{F(a)}\mathrm{e}^{ax}$$

وإذا كانت $F(a)=0$ فإنه يمكن كتابة $F(D)$ على الصيغة

$$F(D)=(D-a)^r\psi(D)$$

حيث r عدد صحيح موجب ، $\psi(a)\neq 0$. وهذا معناه أن a جذر متكرر r من المرات للدالة $F(D)$ وفى هذه الحالة يكون

$$F(a)=0,F'(a)=0,F''(a)=0,\cdots,F^{(r-1)}(a)=0$$

أما $F^{(r)}(a)\neq 0$

$$\frac{1}{F(D)}\mathrm{e}^{ax}=\frac{1}{(D-a)^r\psi(D)}\mathrm{e}^{ax}=\frac{1}{(D-a)^r}\left\{\frac{1}{\psi(D)}\mathrm{e}^{ax}\right\}$$

$$=\frac{1}{(D-a)^r}\left\{\frac{1}{\psi(a)}\mathrm{e}^{ax}\right\}=\frac{1}{\psi(a)}\ \frac{1}{(D-a)^r}\left\{\mathrm{e}^{ax}\cdot 1\right\}$$

$$\frac{1}{F(D)}\mathrm{e}^{ax}=\frac{1}{\psi(a)}\cdot\ \mathrm{e}^{ax}\ \frac{1}{D^r}\{1\}=\frac{1}{\psi(a)}\mathrm{e}^{ax}\ \frac{x^r}{r!}=\frac{x^r}{\psi(a)r!}\mathrm{e}^{ax}\qquad(1)$$

ولكن

$$F(D)=(D-a)^r\psi(D)$$

بمفاضلة هذه العلاقة r من المرات باستخدام نظرية ليبنز فإن

$$F^{(r)}(D)=\psi(D)r!+C_1^r\psi'(D)r!(D-a)+\cdots+(D-a)^r\psi^{(r)}(D)$$

$$F^{(r)}(a)=\psi(a)r!\ \ \Rightarrow\frac{1}{F(D)}\mathrm{e}^{ax}=\frac{x^r}{\psi(a)r!}\mathrm{e}^{ax}=\frac{x^r}{F^{(r)}(a)}\mathrm{e}^{ax}$$

أي أنه إذا كانت r هي رتبة أول معامل تفاضلي للدالة F لا ينعدم عند القيمة a فإن التكامل الخاص للمعادلة

$$F(D)y(x)=\mathrm{e}^{ax}$$

حيث $F(a)=0$ يكون

$$y(x)=\frac{x^r}{F^{(r)}(a)}\mathrm{e}^{ax}$$

أمثلة محلولة

مثال (1)

أوجد التكامل الخاص لكل من المعادلات التفاضلية الأتية

$$\text{(i)}\quad \frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+8y=2e^{3x}$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+9y=50e^{2x}$$

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=50e^{2x}$

(iv) $\frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{dy}{dx}-y=6e^{-x}$

الحل

(i) المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2-6D+8)y=2\,\mathrm{e}^{3x}$$

التكامل الخاص هو

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2-6D+8}\left\{2\,\mathrm{e}^{3x}\right\}=2\frac{1}{D^2-6D+8}\mathrm{e}^{3x}$$
$$=2\frac{1}{9-18+8}\mathrm{e}^{3x}=-2\,\mathrm{e}^{3x}$$

(ii) المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2+6D+9)y=50e^{2x}$$

التكامل الخاص هو

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2+6D+9}\left\{50\,\mathrm{e}^{2x}\right\}=50\cdot\frac{1}{D^2+6D+9}\left\{\mathrm{e}^{2x}\right\}$$
$$y_p(x)=50\cdot\frac{1}{4+12+9}\mathrm{e}^{2x}=2\,\mathrm{e}^{2x}$$

(iii) المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2-4D+4)y=50e^{2x}$$

التكامل الخاص هو

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2-4D+4}\{50e^{2x}\}=50\cdot\frac{1}{D^2-4D+4}e^{2x}$$
$$F(D)=D^2-4D+4,\quad F(2)=0$$
$$F'(D)=2D-4,\quad F'(2)=0$$
$$F''(D)=2\,,\quad F''(2)=2$$

بالتالي يكون التكامل الخاص هو

$$y_p(x)=50\cdot\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{2x}=25x^2\,\mathrm{e}^{2x}$$

حل أخر (باستخدام قانون الإزاحة)

التكامل الخاص هو

$$y_p(x)=\frac{1}{(D-2)^2}\{50e^{2x}\}=50e^{2x}\frac{1}{(D+2-2)^2}\{1\}$$
$$=50e^{2x}\cdot\frac{1}{D^2}\{1\}=\frac{50e^{2x}x^2}{2}=25x^2e^{2x}$$

(iv) المعادلة التفاضلية هي

$$(D^4+2D^3-2D-1)y=6\,\mathrm{e}^{-x}$$

التكامل الخاص هو

$$y_p=\frac{1}{D^4+2D^3-2D-1}\{6\,\mathrm{e}^{-x}\}=6\frac{1}{D^4+2D^3-2D-1}\{\mathrm{e}^{-x}\}$$
$$F(D)=D^4+2D^3-2D-1\,,\qquad F(-1)=0$$
$$F'(D)=4D^3+6D^2-2,\qquad F'(-1)=0$$
$$F''(D)=12D^2+12D,\qquad F''(-1)=0$$
$$F'''(D)=24D+12,\qquad F'''(-1)=-12$$

بالتالي يكون التكامل الخاص هو

$$y_p(x)=6\cdot\frac{1}{(-12)}x^3\,\mathrm{e}^{-x}=-\frac{1}{2}x^3\,\mathrm{e}^{-x}$$

تمرين
أوجد التكامل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$y''-k^2y=\sinh kx$$

ثانياً
إذا كانت

$$f(x)=\sin(ax+b)\quad\text{or}\quad f(x)=\cos(ax+b)$$

أي أن

$$F(D)y(x)=\sin(ax+b)$$

فيكون التكامل الخاص هو

$$y_p(x)=\frac{1}{F(D)}\sin(ax+b)$$

ولكن $F(D)$ يمكن كتابتها على الصورة

$$F(D)=g(D^2)+h(D^2)D$$

وبفرض أن

$$c_1=g(-a^2),\qquad c_2=h(-a^2)$$

إذن التكامل الخاص هو

$$y_p(x)=\frac{1}{c_1+c_2D}\sin(ax+b)$$

وبالتأثير على الطرف الأيمن بالمؤثر التفاضلي $(c_1 - c_2 D)$ و المؤثر العكسي له. نحصل على

$$y_p(x) = (c_1 - c_2 D)\frac{1}{c_1 - c_2 D}\left\{\frac{1}{c_1 + c_2 D}\sin(ax+b)\right\}$$

$$= (c_1 - c_2 D)\left\{\frac{1}{c_1^2 - c_2^2 D^2}\sin(ax+b)\right\}$$

$$= (c_1 + c_2 D)\left\{\frac{1}{c_1^2 + c_2^2 a^2}\sin(ax+b)\right\}$$

$$= \frac{1}{c_1^2 + c_2^2 a^2}\{c_1 \sin(ax+b) - c_2 a\cos(ax+b)\}$$

وبنفس الطريقة يمكن أثبات أن التكامل الخاص للمعادلة

$$F(D)y = \cos(ax+b)$$

هو

$$y_p(x) = \frac{1}{c_1^2 + a^2 c_2^2}\{c_1 \cos(ax+b) + c_2 a\sin(ax+b)\}$$

مثال (2)

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 16y = 5\sin 3x + 3\cos 5x$$

الحل

المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2 + 16)y = 5\sin 3x + 3\cos 5x$$

التكامل الخاص هو

$$y_p(x) = \frac{1}{D^2 + 16}\{5\sin 3x + 3\cos 5x\}$$

$$= 5\cdot\frac{1}{D^2 + 16}\sin 3x + 3\cdot\frac{1}{D^2 + 16}\cos 5x$$

$$= 5\cdot\frac{1}{-9 + 16}\sin 3x + 3\cdot\frac{1}{-25 + 16}\cos 5x$$

$$= \frac{5}{7}\sin 3x - \frac{1}{3}\cos 5x$$

مثال (3)

أوجد التكامل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=\cos 2x$$

الحل

المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2+3D+2)y=\cos 2x$$

التكامل الخاص لها هو

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2+3D+2}\cos 2x=\frac{1}{(-4)+3D+2}\cos 2x$$

$$=\frac{1}{-2+3D}\cos 2x$$

$$y_p(x)=(-2-3D)\left\{\frac{1}{-9D^2+4}\cos 2x\right\}=\frac{1}{40}(-2-3D)\{\cos 2x\}$$

$$=-\frac{1}{40}\{-6\sin 2x+2\cos 2x\}=\frac{1}{20}\{3\sin 2x-\cos 2x\}$$

مثال (4)

اوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}+12y=\mathrm{e}^{5x}\sin 2x$$

الحل

المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2-7D+12)y=\mathrm{e}^{5x}\sin 2x$$

الحل الخاص لها هو

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2-7D+12}\mathrm{e}^{5x}\sin 2x=\frac{1}{(D-3)(D-4)}\{\mathrm{e}^{5x}\sin 2x\}$$

$$=\mathrm{e}^{5x}\frac{1}{(D+2)(D+1)}\{\sin 2x\}=\mathrm{e}^{5x}\frac{1}{D^2+3D+2}\{\sin 2x\}$$

$$y_p(x)=\mathrm{e}^{5x}\frac{1}{-4+3D+2}\{\sin 2x\}=\mathrm{e}^{5x}(-2-3D)\frac{1}{4-9D^2}\sin 2x$$

$$=\mathrm{e}^{5x}(-2-3D)\frac{1}{4+36}\sin 2x=\frac{\mathrm{e}^{5x}}{40}(-2\sin 2x-6\cos 2x)$$

$$=-\frac{\mathrm{e}^{5x}}{20}(\sin 2x+3\cos 2x)$$

ملحوظة

إذا كانت $F(-a^2)=0$ فإنه لإيجاد التكامل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$F(D)y = \sin(ax+b)$$

or

$$F(D)y = \cos(ax+b)$$

فإننا نستخدم قيمة الجيب و الجيب التام للدالة الأسية وتساوي الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيلية.

مثال (5)

أوجد التكامل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = \cos\alpha x$$

الحل

المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2+\alpha^2)y = \cos\alpha x$$

الحل الخاص هو

$$y_p(x) = \frac{1}{D^2+\alpha^2}\cos\alpha x = \text{Real part of}\left\{\frac{1}{D^2+\alpha^2}e^{i\alpha x}\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{D^2+\alpha^2}e^{i\alpha x}\right\}$$

ولكن

$$F(D) = D^2+\alpha^2, \quad F(i\alpha) = 0$$

$$F'(D) = 2D, \quad F'(i\alpha) = 2i\alpha$$

و بالتالي يكون

$$\frac{1}{D^2+\alpha^2}\mathrm{e}^{i\alpha x} = \frac{x}{2\alpha i}\mathrm{e}^{i\alpha x} = \frac{x}{2\alpha i}(\cos\alpha x + i\sin\alpha x)$$

$$= \frac{x}{2\alpha}(\frac{1}{2}\cos\alpha x + \sin\alpha x) = \frac{x}{2\alpha}(\sin\alpha x - i\cos\alpha x)$$

و يكون التكامل الخاص هو

$$y_p(x) = \frac{x}{2\alpha}\sin\alpha x$$

ثالثاً

إذا كانت $f(x)$ عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة r في x أي أن المعادلة التفاضلية علي الصورة

$$F(D)y = a_0x^r + a_1x^{r-1} + \ldots + a_{r-1}x + a_r$$

التكامل الخاص هو

$$y_p(x) = \frac{1}{F(D)}\{a_0x^r + a_1x^{r-1} + \ldots + a_{r-1}x + a_r\}$$

لإيجاد التكامل الخاص y_p نقوم بفك المؤثر $\dfrac{1}{F(D)}$ في صورة كثيرة حدود في D حسب قوي D التصاعدية وذلك بتحليل المؤثر $\dfrac{1}{F(D)}$ إلي كسوره الجزئية ثم استخدام نظرية ذات الحدين.

ملحوظة

مفكوك ذات الحدين باي اس $\alpha \in \mathbb{R}$ يكون علي الصورة التالية

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots, \quad |x|<1$$

مثال (6)

أوجد التكامل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^3y}{dx^3}+4\frac{dy}{dx}=x^2-5$$

الحل

المعادلة التفاضلية هي

$$(D^3+4D)y=x^2-5$$

الحل الخاص لها هو

$$y_p(x)=\frac{1}{D^3+4D}\{x^2-5\}=\frac{1}{4D\left(1+\dfrac{D^2}{4}\right)}(x^2-5)$$

$$=\frac{1}{4D}\left(1+\frac{D^2}{4}\right)^{-1}(x^2-5)=\frac{1}{4D}\left(1-\frac{D^2}{4}+\cdots\right)(x^2-5)$$

$$=\frac{1}{4D}\left(x^2-5-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{11}{2}x\right)=\frac{x}{24}\left(2x^2-33\right)$$

قاعدة هامة (طريقة المعاملات غير المعينة)

نلاحظ من المثال السابق أنه إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة r_1 وكانت r_2 رتبة المشتقة ذات الأقل رتبة في الدالة $F(D)$ فإنه التكامل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$F(D)=f(x)$$

يكون كثيرة حدود من درجة r_1+r_2 ويمكن فرصة علي الصورة

$$y(x)=b_0x^r+b_1x^{r-1}+\ldots+b_{r-1}x+b_r$$

حيث $r=r_1+r_2$. و تعيين $b_0,b_1,\cdots,b_r$ بالتعويض عن y و مشتقاتها في المعادلة التفاضلية ثم مساواة معاملات x المختلفة في الطرفين.

مثال (7)

بطريقة المعاملات غير المعينة أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+3y=27x^2-9x$$

الحل

بما ان $r_1=2\ ,\ \ r_2=0$ فان $r=r_1+r_2=2$

نفرض أن

$$y(x)=b_0x^2+b_1x+b_2 \ \Rightarrow\ y'=2b_0x+b_1 \ \Rightarrow\ y''=2b_0$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية عن $y(x)$ ، $y'(x)$ ، $y''(x)$

$$2b_0-4(2b_0x+b_1)+3(b_0x^2+b_1x+b_2)=27x^2-9x$$
$$3b_0x^2+(3b_1-8b_0)x+(3b_2-4b_1+2b_0)=27x^2-9x$$

بمقارنه معاملات قوي x

$$3b_0=27 \ \Rightarrow\ b_0=9 \ \Rightarrow 3b_1-8b_0=-9 \ \Rightarrow b_1=21$$
$$3b_2-4b_1+2b_0=0 \ \Rightarrow b_2=22$$

الحل الخاص هو

$$y_p(x)=9x^2+21x+22$$

ملحوظة

إذا كانت $f(x)=e^{ax}p(x)$ حيث $p(x)$ كثيرة حدود في x ، a ثابت فإنه التكامل الخاص للمعادلة
$$F(D)y=\mathrm{e}^{ax}\ p(x)$$
يكون هو

$$y_p(x)=\frac{1}{F(D)}\left\{\mathrm{e}^{ax}\ p(x)\right\}=\mathrm{e}^{ax}\frac{1}{F(D+a)}\,p(x)$$

مثال (8)

أوجد التكامل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=\mathrm{e}^x(8x^3-20x^2)$$

الحل

المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2-5D+6)y=\mathrm{e}^x(8x^3-20x^2)$$

التكامل الخاص هو

$$y_p(x) = \frac{1}{D^2 - 5D + 6}\left\{e^x(8x^3 - 20x^2)\right\} = \frac{1}{(D-3)(D-2)}\left\{e^x(8x^3 - 20x^2)\right\}$$

$$= e^x \frac{1}{(D-2)(D-1)}\left\{8x^3 - 20x^2\right\} = e^x\{\frac{1}{D-2} - \frac{1}{D-1}\}\{8x^3 - 20x^2\}$$

$$= e^x\left\{-\frac{1}{2}\left(1 - \frac{D}{2}\right)^{-1} + (1-D)^{-1}\right\}\{8x^3 - 20x^2\}$$

$$y_p(x) = e^x\left\{-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{4} + \frac{D^3}{8} + \cdots\right)\right.$$

$$\left. + \left(1 + D + D^2 + D^3 + \cdots\right)\right\}\{8x^3 - 20x^2\}$$

$$= e^x\left\{1/2 + \frac{3}{4}D + \frac{7}{8}D^2 + \frac{15}{16}D^3 + \cdots\right\}\{8x^3 - 20x^2\}$$

$$= e^x\{4x^3 - 10x^2 + 18x^2 - 30x + 42x - 35 + 45\}$$

$$= e^x\{4x^3 + 8x^2 + 12x + 10\}$$

ملحوظة

إذا كانت

$$f(x) = p(x)\sin\alpha x$$

or

$$f(x) = p(x)\cos\alpha x$$

حيث $p(x)$ كثيرة حدود في x ، a ثابت فإن التكامل الخاص للمعادلة

$$F(D)y = p(x)\sin\alpha x$$

هو

$$y_p(x) = \text{Imaginary part of}\left(\frac{1}{F(D)}\{e^{i\alpha x}p(x)\}\right)$$

$$= \text{Im}\left(\frac{1}{F(D)}\{e^{i\alpha x}p(x)\}\right)$$

$$= \text{Im}\left\{e^{i\alpha x}\frac{1}{F(D+ia)}e^{i\alpha x}p(x)\right\}$$

وبالمثل التكامل الخاص للمعادلة

$$F(D)y = p(x)\cos\alpha x$$

$$y_p = \text{Real part of}\left(\frac{1}{F(D)}\{e^{iax}\ p(x)\}\right)$$

$$= \text{Re}\left(\frac{1}{F(D)}\{e^{iax}\ p(x)\}\right)$$

$$= \text{Re}\left\{e^{iax}\cdot\frac{1}{F(D+ia)}\,p(x)\right\}$$

مثال (9)

أوجد التكامل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\ddot{x} - 9x = 25t\ \sin 4t\ , \qquad D \equiv \frac{d}{dt}$$

الحل

المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2-9)x = 25t\ \sin t, \qquad D \equiv \frac{d}{dt}$$

التكامل الخاص هو

$$x_p = \frac{1}{D^2-9}\{25t\ \sin 4t\} = \text{Im}\left\{\frac{1}{D^2-9}25te^{i4t}\right\}$$

$$= \text{Im}\left\{e^{i4t}\,\frac{1}{(D-3+4i)(D+3+4i)}25t\right\}$$

$$\frac{1}{(D-3+4i)(D+3+4i)} = \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{D-3+4i} - \frac{1}{D+3+4i}\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{4i-3}\left(1+\frac{D}{4i-3}\right)^{-1} - \frac{1}{(4i+3)}\left(1+\frac{D}{4i+3}\right)^{-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{4i-3}\left(1-\frac{D}{4i-3}+\cdots\right) - \frac{1}{4i+3}\left(1-\frac{D}{4i+3}+\cdots\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{4i-3} - \frac{1}{4i+3} - \frac{D}{(4i-3)^2} + \frac{D}{(4i+3)^2} + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{6}{(4i-3)(4i+3)} - \frac{(4i+3)^2-(4i-3)^2}{(4i-3)^2(4i+3)^2}D + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{6}{-25} - \frac{48i}{(-25)^2}D + \cdots\right\} = -\frac{1}{25} - \frac{8}{625}iD + \cdots$$

إذن

$$e^{4it}\frac{1}{(D-3+4i)(D+3+4i)}25t = e^{4it}\left(-\frac{1}{25}-\frac{8}{625}iD+....\right)(25t)$$

$$= e^{4it}(-t-\frac{8}{25}i) = -(\cos 4t + i\sin 4t)(t+\frac{8}{25}i)$$

$$= -t\cos 4t + \frac{8}{25}\sin 4t - i(t\sin 4t + \frac{8}{25}\cos 4t)$$

$$x_p = \mathrm{Im}\left\{e^{4it}\frac{1}{(D-3+4i)(D+3+4i)}25t\right\} = -(t\sin 4t + \frac{8}{25}\cos 4t)$$

تمارين (3)

أوجد التكامل الخاص لكل من المعادلات التفاضلية الآتية

(1) $(D^2-2D+2)y=\mathrm{e}^x$ (2) $(D^2-13D+12)y=36$

(3) $(D^2+13D+42)y=112\,\mathrm{e}^x$ (4) $(D^2+6D+25)y=104\,\mathrm{e}^{3x}$

(5) $(D^2-9)y=54\,\mathrm{e}^x$ (6) $(D^2-a^2)y=a\sinh ax$

(7) $(D^3-D)y=2\cosh x$ (8) $(D^3-D)y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$

(9) $(D^3+4D^2+4D)y=8\,\mathrm{e}^{-2x}$ (10) $(D+1)y=10\sin 2x$

(11) $(D^2-5D+6)y=100\sin 4x$

(12) $(D^2+2D+401)y=\sin 20x+40\cos 20x$

(13) $(D^2+8D+25)y=18\cos x-16\sin x$

(14) $(D^3+6D^2+11D+6)y=2\sin 3x$

(15) $(D^2+1)y=4\cos x$ (16) $(D-1)y=(x+3)\,\mathrm{e}^{2x}$

(17) $(D^3-3D-2)y=540x^3\,\mathrm{e}^{-x}$ (18) $(D^2+2D+2)y=2\,\mathrm{e}^{-x}\sin x$

(19) $(D^2+1)^2y=24x\cos x$ (20) $(D^5-D)y=12\,\mathrm{e}^x+8\sin x-2x$

(21) $(D^2-6D+25)y=2\,\mathrm{e}^{3x}\cos 4x+8\,\mathrm{e}^{3x}(1-2x)\sin 4x$

(22) $(D+1)y=x^3$ (23) $(D^2+2D)y=24x$

(24) $(D^2-6D+9)y=54x+18$

(25) $(D^4-6D^3+9D^2)y=54x+18$ (26) $(D^2-D-2)y=44-76x-48x^2$

(27) $(D^3-D^2-2D)y=44-76x-48x^2$

(28) $(D-k)^k\,y=k^x$ k عدد صحيح موجب

(29) $(D^2+1)y=\sec x$ (30) $(D-1)^3y=\dfrac{e^x}{x^2}$

(31) $(D-2)^2y=8(x^2e^{2x})\sin 2x$

الفصل الثاني

الدالة المكملة للمعادلات التفاضلية ذوات المعاملات الثابتة

(1.3) مقدمة

نفرض أن $y = y_p(x)$ حل خاص للمعادلة التفاضلية

$$F(D)y(x) = f(x)$$

ونفرض أن الحل العام هو

$$y(x) = y_p(x) + z(x)$$

حيث $y_p(x)$ ، $z(x)$ دوال للمتغير x.

أي أن

$$F(D)\{y_p(x) + z(x)\} = f(x)$$
$$F(D)y_p(x) + F(D)z(x) = f(x)$$

ولكن $F(D)y_p(x) = f(x)$ لأن $y_p(x)$ حل خاص. لذلك يكون

$$F(D)z(x) = 0$$

حيث $z(x)$ هي الحل العام للمعادلة التفاضلية المختزلة الناتجة من المعادلة الأصيلة بوضع الطرف الأيمن يساوي صفر وتسمي $z(x)$ بالدالة المكملة أو الحل المكمل للمعادلة الأصلية وعلي ذلك فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية يساوي الدالة المكملة تضاف إليها أي تكامل خاص للمعادلة $F(D)y_p(x) = f(x)$.

بفرض أن $z_1, z_2, \ldots, z_n$ حلول خاصة للمعادلة المختزلة $F(D)z(x) = 0$ و أن $c_1, c_2, \cdots, c_n$ ثوابت اختيارية.

نعتبر الدالة

$$z(x) = c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x) + \cdots + c_n z_n(x)$$

فيكون

$$\begin{aligned} F(D)z &= F(D)\{c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x) + \cdots + c_n z_n(x)\} \\ &= F(D)\{c_1 z_1(x)\} + F(D)\{c_2 z_2(x)\} + \cdots + F(D)\{c_n z_n(x)\} \\ &= c_1 F(D) z_1(x) + c_2 F(D) z_2(x) + \cdots + c_n F(D) z_n(x) \\ &= c_1.0 + c_2.0 + \ldots + c_n.0 = 0 \end{aligned}$$

أي أنه إذا كانت كل من $z_1, z_2, \ldots, z_n$ حلول خاصة للمعادلة المختزلة

$$F(D)z(x)=0$$

فإن الدالة

$$z(x)=c_1z_1(x)+c_2z_2(x)+\cdots+c_nz_n(x)$$

تكون أيضاً حل لهذه المعادلة وذلك لجميع قيم الثوابت الاختيارية $c_1,\cdots,c_n$.

(2.3) إيجاد الحل العام للمعادلة المختزلة (الدالة المكملة)

تعتبر المعادلة التفاضلية

$$F(D)y(x)=0 \qquad (1)$$

نفرض أن $y=\mathrm{e}^{\alpha x}$ حل خاص أي أنه يحقق المعادلة التفاضلية

$$F(D)\mathrm{e}^{\alpha x}=0 \;\Rightarrow F(\alpha)\mathrm{e}^{\alpha x}=0$$

و حيث ان $\mathrm{e}^{\alpha x}\neq 0$ نجد ان $F(\alpha)=0$. أي أن $y=\mathrm{e}^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة (1) إذا كان $F(\alpha)=0$ أي إذا كانت α جذر للمعادلة المساعدة

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\alpha+a_n=0 \qquad (2)$$

حيث $a_0,a_1,\cdots,a_n$ ثوابت حقيقية للمعادلة (1) وتحدد طبيعة جذور المعادلة المميزة (2) الحلول الخاصة للمعادلة التفاضلية (1) وهناك ثلاث حالات.

(1.2.3) الحالة الأولي: إذا كانت جميع جذور المعادلة المساعدة حقيقية ومختلفة.

نفرض أن جذور المعادلة المساعدة (2) هي $\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n$ و جميعها حقيقية مختلفة. في هذه الحالة تكون الحلول الخاصة للمعادلة المختزلة (1) هي

$$\mathrm{e}^{\alpha_1 x},\mathrm{e}^{\alpha_2 x},\cdots,\mathrm{e}^{\alpha_n x}$$

وهذه دوال مستقلة خطياً ويكون الحل العام للمعادلة المختزلة (1) هو

$$y_c(x)=c_1\,\mathrm{e}^{\alpha_1 x}+c_2\,\mathrm{e}^{\alpha_2 x}+\cdots+c_n\,\mathrm{e}^{\alpha_n x}$$

أمثلة

مثال (1)

اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية

$$\text{(i)}\quad 2\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+2y=0$$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-15y=0$

(iii) $\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}=0$

الحل

(i) نفرض أن $y=e^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة ، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$2\alpha^2+5\alpha+2=0 \;\Rightarrow (2\alpha+1)(\alpha+2)=0$$

جذور المعادلة المساعدة هي

$$\alpha=-1/2 \quad , \quad \alpha_2=-2$$

و تكون الحلول الخاصة هي

$$e^{-(1/2)x},\; e^{-2x}$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x)=Ae^{-(1/2)x}+Be^{-2x}$$

حيث A, B ثوابت اختيارية.

(ii) نفرض أن $y=e^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة ، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$\alpha^2+2\alpha-15=0 \;\Rightarrow (\alpha-3)(\alpha+5)=0$$

جذور المعادلة المساعدة هي

$$\alpha_1=3,\quad \alpha_2=-5$$

و تكون الحلول الخاصة هي

$$e^{3x} \;,\; e^{-5x}$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x)=Ae^{3x}+Be^{-2x}$$

(iii) نفرض أن $y=e^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$\alpha^3+\alpha^2-2\alpha=0 \;\Rightarrow \alpha(\alpha^2+\alpha-2)=0$$
$$\alpha(\alpha-1)(\alpha+2)=0$$

جذور المعادلة المساعدة هي

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -2$$

و تكون الحلول الخاصة هي

$$1, \ e^{x}, \quad e^{-2x}$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x) = A + Be^{x} + Ce^{-2x}$$

(2.2.3)الحالة الثانية : إذا كانت بعض جذور المعادلة المساعدة أعداد مركبة

نفرض أن $p+iq$ هو أحد جذور المعادلة المساعدة (2). و حيث ان معاملات المعادلة المساعدة اعداد حقيقية فان $p-iq$ هو أيضاً جذر للمعادلة المساعدة (2) ويكون $e^{(p-iq)x}, e^{(p+iq)x}$ حلان خاصان للمعادلة التفاضلية (1).

وحيث ان المعادلة التفاضلية (1) معادلة خطية فيكون

$$\frac{1}{2} e^{(p+iq)x} + \frac{1}{2} e^{(p-iq)x} = e^{px} \cos qx$$

حل خاص.

كذلك

$$-\frac{1}{2} i\, e^{(p+iq)z} + \frac{1}{2} i\, e^{(p-iq)z} = e^{px} \sin qx$$

حل خاص.

ويكون جزء الحل العام للمعادلة المختزلة المناظر للجذرين $p+iq, \ p-iq$ هو

$$\begin{aligned} y_c(x) &= c_1\, e^{px} \cos qx + c_2\, e^{px} \sin qx \\ &= e^{px}(c_1 \cos qx + c_2 \sin qx) \end{aligned}$$

مثال (2)

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية

$$\text{(i)} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 13y = 0$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + 25y = 0$$

الحل

(i) نفرض أن $y = e^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$\alpha - 6\alpha + 13 = 0 \;\Rightarrow \alpha_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = 3 \pm 2i$$

و تكون الحلول الخاصة هي

$$e^{3x}\cos 2x,\quad e^{3x}\sin 2x$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x) = \mathrm{e}^{3x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)$$

(ii) نفرض أن $y = e^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$\alpha^2 + 25 = 0 \;\Rightarrow \alpha_{1,2} = \pm 5i$$

و تكون الحلول الخاصة هي

$$\cos 5x, \sin 5x$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x) = c_1\cos 5x + c_2\sin 5x$$

مثال (3)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الاتية

$$y''' - y'' + 9y' - 9y = 0$$

الحل

نفرض أن $y = \mathrm{e}^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$\alpha^3 - \alpha^2 + 9\alpha - 9 = 0 \;\Rightarrow (\alpha - 1)(\alpha^2 + 9) = 0$$

فتكون الحلول الخاصة هي

$$\mathrm{e}^x,\ \cos 3x\ ,\ \sin 3x$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x) = c_1 e^x + c_2\cos 3\mathrm{x} + c_3\sin 3x$$

(3.2.3) الحالة الثالثة : إذا كان بعض جذور المعادلة المساعدة مكرراً

نفرض أن $\alpha = m$ جذر للمعادلة المساعدة (2) مكرر r من المرات فيكون $(D-m)^r$ عامل للدالة $F(D)$

$$F(D)=(D-m)^r\psi(D)\ ,\ \psi(m)\neq 0$$

وتكون المعادلة التفاضلية (1) هي

$$F(D)y(x)=(D-m)^r\psi(D)y(x)=0 \qquad (3)$$

بفرض ان $\psi(D)y(x)=u(x)$ فتصبح المعادلة التفاضلية (3) علي الشكل

$$(D-m)^r u(x)=0 \qquad (4)$$

واضح أن $u(x)=\mathrm{e}^{mx}$ حل خاص لهذه المعادلة وهذا الحل مكرر r من المرات و لكنه في الحقيقة حل واحد لأنه لن يكون هناك إلا ثابت واحد وعلي هذا فإن هذا الحل ناقص. لذا نفرض أن الحل العام هو

$$u(x)=\mathrm{e}^{mx}\,z(x)$$

حيث z دالة للمتغير x

$$(D-m)^r\{\mathrm{e}^{mx}\,z\}=0\Rightarrow \mathrm{e}^{mx}\,D^r u(x)=0$$

و منها نجد ان

$$D^r u(x)=0$$

واضح أن الدوال $1,\ x,\ x^2,\cdots,\ x^{r-1}$ حلول خاصة للمعادلة الأخيرة. و تكون الحلول الخاصة المناظرة للجذر $\alpha=m$ المكرر r مرة هي

$$\mathrm{e}^{mx}, x\,\mathrm{e}^{mx},\cdots, x^{r-1}\,\mathrm{e}^{mx}$$

وهذه دوال مستقلة خطياً. ويكون

$$u(x)=\mathrm{e}^{mx}\left(c_0+c_1x+\cdots+c_{r-1}x^{r-1}\right)$$

هو الحل العام للمعادلة المختزلة المناظر للجذر $\alpha=m$ المكرر r مرة.

مثال (4)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

(i) $\dfrac{d^4y}{dx^4}+4\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$

(ii) $\dfrac{d^4y}{dx^4}+6\dfrac{d^3y}{dx^3}+5\dfrac{d^2y}{dx^2}-24\dfrac{dy}{dx}-36y=0$

(iii) $\dfrac{d^4y}{dx^4}-\dfrac{d^3y}{dx^3}-9\dfrac{d^2y}{dx^2}-11\dfrac{dy}{dx}-4y=0$

الحل

(i) نفرض أن $y = e^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$\alpha^4 + 4\alpha^2 = 0$$

جذور المعادلة المساعدة هي

$$\alpha_{1,2} = 0,0 \ , \ \alpha_{3,4} = \pm 2i$$

فتكون الحلول الخاصة هي

$$1, \ x, \ \cos 2x, \ \sin 2x$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$$

(ii) نفرض أن $y = e^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$\alpha^4 + 6\alpha^3 + 5\alpha^2 - 24\alpha - 36 = 0$$
$$(\alpha - 2)(\alpha + 2)(\alpha + 3)^2 = 0$$

فتكون الحلول الخاصة هي

$$e^{2x}, e^{-2x}, e^{-3x}, x e^{-3x}$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + (c_3 + c_4 x) e^{-3x}$$

(iii) نفرض أن $y = e^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$\alpha^4 - \alpha^3 - 9\alpha^2 - 11\alpha - 4 = 0$$
$$(\alpha + 1)^3 (\alpha - 4) = 0$$

فتكون الحلول الخاصة هي

$$e^{-x}, \ x e^{-x}, \ x^2 e^{-x}, \ e^{4x}$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x) = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{-x} + c_4 e^{4x}$$

أمثلة متنوعة

مثال (1)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+4y=3-2x$$

الحل

المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2+5D+4)y=3-2x$$

حيث $D\equiv\frac{d}{dx}$.

أولاً

نوجد حل المعادلة المختزلة

$$(D^2+5D+4)y=0$$

نفرض أن $y=\mathrm{e}^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة المختزلة، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$\alpha^2+5\alpha+4=0 \;\Rightarrow (\alpha+1)(\alpha+4)=0$$

الحلول الخاصة هي

$$\mathrm{e}^{-x},\mathrm{e}^{-4x}$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x)=c_1\,\mathrm{e}^{-x}+c_2\,\mathrm{e}^{-4x}$$

ثانياً

نوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية المعطاة

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2+5D+4}\{3-2x\}=\frac{1}{(D+1)(D+4)}\{3-2x\}$$

$$=\frac{1}{4(D+1)\left(1+\dfrac{D}{4}\right)}\{3-2x\}=\frac{1}{4}\left[(1+D)^{-1}\left(1+\frac{D}{4}\right)^{-1}\right]\{3-2x\}$$

$$=\frac{1}{4}\left[(1-D+D^2-\cdots)\left(1-\frac{D}{4}+\frac{D^2}{16}-\cdots\right)\right]\{3-2x\}$$

$$=\frac{1}{4}\left[1-\frac{5D}{4}+\cdots\right]\{3-2x\}=\frac{1}{4}\left[\frac{11}{2}-2x\right]=\frac{1}{8}[11-4x]=\frac{11}{8}-\frac{1}{2}x$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y(x)=c_1\,\mathrm{e}^{-x}+c_2\,\mathrm{e}^{-4x}-\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}$$

مثال (2)

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الاتية

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=\mathrm{e}^{2x}\,x^3$$

الحل

أولاً

نوجد حل المعادلة المختزلة

$$(D^2-5D+6)y=0$$

نفرض أن $y=e^{\alpha x}$ حل خاص للمعادلة المختزلة، فتكون المعادلة المساعدة هي

$$\alpha^2-5\alpha+6=0\ \Rightarrow(\alpha-2)(\alpha-3)=0$$

فتكون الحلول الخاصة هي

$$\mathrm{e}^{2x},\ \mathrm{e}^{3x}$$

بالتالي فان الحل العام للعادلة المختزلة هو

$$y_c(x)=c_1\,\mathrm{e}^{2x}+c_2\,\mathrm{e}^{3x}$$

ثانياً

نوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية المعطاة

$$y_p(x) = \frac{1}{D^2-5D+6}\left\{e^{2x}\,x^3\right\} = \frac{1}{(D-2)(D-3)}\left\{e^{2x}\,x^3\right\} = e^{2x}\,\frac{1}{D(D-1)}\,x^3$$

$$= -e^{2x}\left(\frac{1}{D}+\frac{1}{1-D}\right)x^3$$

$$y_p(x) = -e^{2x}\left(\frac{1}{D}+(1-D)^{-1}\right)x^3 = -e^{2x}\left(\frac{1}{D}+(1+D+D^2+....)\right)x^3$$

$$= -e^{2x}\left(\frac{1}{4}x^4+x^3+3x^2+6x+6\right)$$

بالتالي فان الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y(x) = c_1\,e^{2x}+c_2\,e^{3x}-e^{2x}\left(\frac{1}{4}x^4+x^3+3x^2+6x+6\right)$$

مثال (3)

اثبت أن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2s}{dt^2}+2k\frac{ds}{dt}+p^2s = a\cos qt$$

يمكن كتابته علي الصورة

$$s_p(t) = b\cos(qt-\epsilon)$$

حيث

$$b = \frac{a}{\left\{(p^2-q^2)^2+4k^2q^2\right\}^{1/2}}\,,\quad \tan\epsilon = \frac{2kq}{p^2-q^2}$$

وإذا كانت k صغيرة جداً تبين أنه عندما تكون السعة b أكبر ما يمكن يكون الزمن الدوري للذبذبات القهرية يساوي تقريبا الزمن الدوري للذبذبات الحرة. وفي هذه الحالة فإنه

$$\epsilon = \frac{\pi}{2}\,,\quad b = \frac{a}{2kp}$$

الحل

المعادلة التفاضلية هي

$$(D^2+2kD+p^2)s = a\cos qt$$

حيث $D \equiv \dfrac{d}{dt}$

فيكون الحل الخاص للمعادلة التفاضلية المعطاة

$$
\begin{aligned}
s_p(t) &= \frac{1}{D^2+2kD+p^2}\{a\cos qt\} \\
&= \frac{1}{\left(p^2-q^2\right)+2kD}\{a\cos qt\} \\
&= \left[\left(p^2-q^2\right)-2kD\right]\frac{1}{\left(p^2-q^2\right)-4k^2D^2}\{a\cos qt\} \\
&= a\frac{1}{\left(p^2-q^2\right)^2+4k^2q^2}\left[\left(p^2-q^2\right)-2kD\right]\{\cos qt\} \\
&= \frac{a}{\left(p^2-q^2\right)^2+4k^2q^2}\left\{\left(p^2-q^2\right)\cos qt+2kq\sin qt\right\} \\
&= \frac{a}{\sqrt{\left(p^2-q^2\right)^2+4k^2q^2}}\left\{\frac{\left(p^2-q^2\right)}{\sqrt{\left(p^2-q^2\right)^2+4k^2q^2}}\cos qt+\frac{2kq}{\sqrt{\left(p^2-q^2\right)^2+4k^2q^2}}\sin qt\right\} \\
&= b\cos(qt-\epsilon)
\end{aligned}
$$

حيث

$$
b=\frac{a}{\sqrt{(p^2-q^2)^2+4k^2q^2}}, \quad \tan\epsilon=\frac{2kq}{p^2-q^2}
$$

للحصول علي النهاية العظمي للسعة b فإننا نوجد $\frac{db}{dq}$ ونساويها بالصفر .

$$
\begin{aligned}
&2\left(p^2-q^2\right)(-2q)+8k^2q=0 \\
&-4q(p^2-q^2-2k^2)=0 \;\Rightarrow q=0 \;\text{ Or }\; q^2=p^2-2k^2
\end{aligned}
$$

الزمن الدوري للذبذبة القهرية هو

$$
\frac{2\pi}{p}\cong\frac{2\pi}{\sqrt{p^2-2k^2}}=\frac{2\pi}{q}
$$

لان k صغيرة جداً.

لإيجاد الزمن الدوري للذبذبة الحرة نحل المعادلة المختزلة.

$$\left(D^2+2kD+p^2\right)s=0$$

$$\alpha_{1,2}=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4p^2}}{2}=-k\pm\sqrt{k^2-p^2}=-k\pm i\sqrt{p^2-k^2}=-k\pm ip$$

لأن k صغيرة جداً

$$s_c(t)=\mathrm{e}^{-kt}\left(c_1\cos pt+c_2\sin pt\right)=c_3\,\mathrm{e}^{-kt}\cos(pt-c_4),\quad \left(c_1=c_3\cos c_4\ ,\ c_2=c_3\sin c_4\right)$$

الزمن الدوري للذبذبة الحرة $\frac{2\pi}{p}$ اي ان الزمن الدوري للذبذبة القهرية يساوي تقريباً الزمن الدوري للذبذبة الحرة.

في هذه الحالة يكون

$$\tan\epsilon=\frac{2kq}{p^2-q^2}=\frac{2kq}{p^2-(p^2-2k^2)}$$

$$\tan\epsilon=\frac{2kq}{2k^2}=\frac{q}{k}\to\infty\ \Rightarrow\ \epsilon=\frac{\pi}{2}$$

$$b=\frac{a}{\sqrt{(p^2-q^2)^2+4k^2q^2}}=\frac{a}{\sqrt{(2k^2)^2+4k^2(p^2-2k^2)}}$$

$$=\frac{a}{2k\sqrt{p^2-k^2}}=\frac{a}{2kp}$$

تمارين (3)

(1) أوجد الحل العام لجميع المعادلات التفاضلية المعطاة في تمارين (2)

(2) اثبت أن

$$y(x)=\frac{\cos ax-\cos(a+\epsilon)x}{(a+\epsilon)^2-a^2}$$

حل للمعادلة التفاضلية

$$\left(D^2+a^2\right)y=\cos(a+\epsilon)x$$

ثم استنتج التكامل الخاص للمعادلة

$$\left(D^2+a^2\right)y=\cos ax$$

(3) بين أن التكامل الخاص للمعادلة

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2h\frac{dy}{dt}+\left(h^2+p^2\right)y=k\,\mathrm{e}^{-ht}\cos pt$$

يمثل ذبذبذية سعتها $\frac{k}{2p}\mathrm{e}^{-ht}$ ، أوجد أقصي سعة وبين أنها تكون كبيرة جداً إذا كانت h صغيرة جداً. أوجد السعة عندما $t\to\infty$.

(4) بين أن حل المعادلة

$$(D^{2n+1}-1)y=0$$

يمكن وضعه على الصورة

$$y=Ae^x+\sum_{r=1}^{n}e^{ax}(B_r\cos\beta x+C_r\sin\beta x)$$

حيث

$$\alpha=\cos\frac{2\pi r}{2n+1},\beta=\sin\frac{2\pi r}{2n+1}$$

(5) إذا كان $\mathrm{F}(\mathrm{D}_1), D_1=x\frac{d}{dx}$ كثيرة حدود من الدرجة n فإثبت أن

(i) $\dfrac{1}{F\left(D_1\right)} x^r = \dfrac{1}{F(r)} x^r, \quad F(r) \neq 0$

(ii) $\dfrac{1}{F\left(D_1\right)} \left\{ x^r z(x) \right\} = x^r \dfrac{1}{F\left(D_1 + r\right)} z(x)$

حيث z دالة في المتغير x.