رياضيات الأعمال
تطبيقات في المجالات التجارية

الجزء الأول

إعداد:
دكتور/ أبوبكر عبد الرحمن عبد المتعال

كلية التجارة
جامعة جنوب الوادي
قسم الأساليب الكمية

رياضيات الأعمال

تطبيقات في المجالات التجارية

إعداد:

دكتور/ أبوبكر عبد الرحمن عبد المتعال
كلية التجارة – جامعة جنوب الوادي
قسم الأساليب الكمية

الجزء الأول

العام الجامعي

٢٠٢٢ / ٢٠٢٣

إهـــداء

إلى الشموع التي أضاءت دياجير ظُلمتي ...

إلى ذكرى والديَّ ... إلى الفاضلة زوجتي ...

أهدي إليهم جميعاً هذا الكتاب ...

مقدّمة

لقد تنامت وتزايدت أهمية اســتخدام الأســاليب الرياضــية في كافة المجالات التطبيقية. ويهدف هذا الكتاب إلى تقديم بعض المبادئ الأساسية في الرياضيات والتي تساعد على اتخاذ القرار الصــحيح في المجالات المختلفة للعلوم التجارية مثل الاقتصــاد والمحاســبة والإدارة والتسويق والإنتاج، إلى غير ذلك من المجالات.

وفي تقديمي لهذا الكتاب راعيت البســاطة في العرض والســلاســة في الأســلوب قدر استطاعتي، آملاً أن يجد فيه القارئ ما هدفت من أجله في تقديم كتابي هذا. وقد استخدمت في ذلك – مجتهداً - بعض الرموز في المعادلات والتحليلات الرياضـية وذلك للافتقار إلى رموز متفق عليها باللغة العربية في هذا الشـأن. وقد كان حرصـي كبيراً في أن أقدم أكبر عدد ممكن من الأمثلة المحلولة وغير المحلولة ومن التطبيقات المحلولة وغير المحلولة في المجالات التجارية المختلفة. ولم يفوتني أن أُضـفى على موضـوعات هذا الكتاب صِـبغةً تجارية تجعل من دراسته أمراً مفيداً للدراس في مجالات الأعمال عموماً. وقد تمثَّل ذلك في تقديم العديد من التطبيقات المحلولة وغير المحلولة وذلك في مجالات الاقتصاد والمحاسبة والإدارة والتسويق والإنتاج، لعلها تقدم العون للقارئ على فهم واستيعاب ما نود عرضه في هذا الشأن.

ومع كل هذا، أقدم جُلَّ شكري وعظيم تقديري لكل من يسدى إليَّ نصحاً حول ما جاء في هذا الكتـاب، أملاً في تقـديمـه بصـــورة أفضــــل عنـد إعـادة طبعـه. وفقنـا الله وإيـاكم إلى ما يحب ويرضى.

واللهَ أرجو أن ينتفع بهذا الكتاب كل قارئ له، إنه سميع مجيب.

القاهرة

في أكتوبر ٢٠٢٢ **أبو بكر عبد الرحمن عبد المتعال**

بيانات الكتاب

الكلية: التجارة

الفرقة : الأولى (شعبة الدراسة باللغة العربية)

تاريخ النشر: ٢٠٢٣/٢٠٢٢

عدد الصفحات: ٤١٩ صفحة

المؤلف: دكتور/ أبوبكر عبد الرحمن عبد المتعال

محتويات الكتاب

(الجزء الأول)

الفصل الأول
العلاقات الرياضية
(١ – ٨١)

رقم الصفحة

الفصل الثاني
المتسلسلات
(٨٢ – ١١٩)

الفصل الثالث
الكسور الجزئية
(١٢٠ ـ ١٣٩)

الفصل الرابع
المحددات
(١٤٠ ـ ١٨٧)

الفصل الخامس
المصفوفات
(١٨٨ ـ ٢٤٠)

(الجزء الثاني)

الفصل السادس
التفاضل
(٢٤٣ ـ ٣٠٤)

الفصل السابع
وصف الدوال
(٣٠٥ ـ ٣٧٢)

الفصل الثامن
مبادئ التكامل
(٣٧٣ ـ ٤١٨)

الأشكال

الفصل الأول
العلاقات الرياضية

الفصل السادس
التفاضل

الفصل السابع
وصف الدوال

الفصل الثامن

مبادئ التكامل

الفصل الأول
العلاقات الرياضية

مقدمـــــة:

تنقسم الكميات الرياضية على وجه العموم إلى نوعيْن هما:

كميات ثابتة: وهي التي لا تتغير قيمها أثناء العمليات الحســـابية التي تدخل فيها. وعادة ما يُرمز إلى الكميات الثابتة بالرموز: أ ، ب، جـ...

كميات متغيرة: وهي التي تـأخـذ قيمـاً مختلفـة، ويُعبَّر عنهـا عـادة بمتغيرات ويُرمز إليهـا بـالرموز: س، ص، ع،.... وتتوقف قيم المتغيرات على القيم التي تـأخـذهـا متغيرات أخرى وذلك وفقاً لعلاقة رياضية معينة.

وفيما يلي بعض الأمثلة على الثوابت Constants والمتغيرات Variables والتي تفيد القارئ في كيفية التعامل معها فيما بعد.

- في حالـة وجود عدد من المثلثات: فإن مقاييس الزوايا تختلف من مثلث لآخر، أي أنـه يُعبَّر عن تلك المقاييس بمتغيرات. وأما مجموع الزوايا في أي مثلث فهو مقدار ثـابت يساوي دائما ١٨٠ درجة.
- أنه بالنسبة لعدة دوائر، فإن كلّاً من مساحة ومحيط الدائرة يختلف من دائرة لأخرى، أي أن كـلّاً منهما يُمثَّل بمتغيـر. وأما النسبة بين مساحة كل دائـرة ومحيطها فهو مقدار ثابت يساوي دائماً نصف قطـر الدائــرة ($\frac{\text{ط نق}^{٢}}{\text{٢ط نق}} = \frac{\text{نق}}{٢}$). وكذلك النسبة بين محيط أي دائرة وقطرها يســاوي دائما النسبة التقريبية ط ($\frac{\text{٢ط نق}}{\text{٢نق}} =$ ط).
- أنه فيما يتعلق بطلاب أي مدرسة أو كلية، فإن أوزان وأعمار هؤلاء الطلاب يمثلها متغيرات. إذ أن العمر والوزن من شأن أي منهما أن يتغير من طالب لآخر. في حين أن الرسوم الدراسية التي يدفعها الطلاب تعتبر مقداراً ثابتاً.

إلى غير ذلك من الأمثلة العديدة الواقعيـة التي توضح مفهوم كل من المتغير والثابت.

هذا والعلاقة الرياضـية هي صـيغة رياضـية تشـتمل على متغير (متغيرات) أو ثابت (ثوابت) يمكن من خلالهـا تحـديـد قيمـة أي متغير بمعرفـة قيم المتغير (المتغيرات) الأخرى. وهـذه الصيغة الرياضية تأخذ إحدى الصور التالية:

- المعادلات - المتباينات - الدوال

وسوف نتناول كلّاً منها بشيء من التفصيل في هذا الفصل.

المعـــادلات

أولاً: المعادلات وخصائصها

تعبِّر المعادلات Equations عن الحالات التي يكون فيها مقداران جبريان متســـاويان، والمقدار الجبري قد يمثله متغير أو أكثر. وفيما يلي بعض الأمثلة للمعادلات:

٥س – ٨ = ٦ – ٢س (أ)

٢س + ٣ص = ١٧ (ب)

ع^{٢} – ٢ع + ٥ = ٨ (جـ)

والمعادلة في (أ) هي معادلة من الدرجة الأولى First-Degree في متغير واحد هو س.
وأما المعادلة في (ب) فهي معادلة من الدرجة الأولى أيضـا ولكـــن في متغيرَيْن س، ص.
وأخيراً فإن المعادلة في (جـ) هي معادلة من الدرجة الثانية Second – Degree في متغير واحد هو المتغير ع. وبشكل عام، فإن درجة المعادلة تساوي أكبر أس تحمله المتغيرات التي تشملها المعادلة.
هذا وحل المعادلة هو إيجاد القيم التي لو عوضـنا عن المتغيرات فيها فإن المعادلة تتحقق. وقيم المتغيرات التي تحقق المعادلة تسمى جذور Roots المعادلة.
وهنا يجب أن نفرق بين ثلاثة أنواع من المعادلات. المعادلة المتطابقة Identity، وهي المعادلة التي تكون صحيحة لجميع قيم المتغيرات. وكأمثلة للمعادلة المتطابقة.

$$٣س + ٢ = \frac{٦س + ٤}{٢}$$

$$٤(س + ص) = ٤س + ٤ص$$

وفي هاتيْن المعادلتيْن فإن أي قيم تأخذها المتغيرات سوف يجعل طرفي كل منهما متساوييْن.

والنوع الثاني من المعادلات هو المعادلة الشرطية Conditional Equation، وهي المعادلة التي تكون صحيحة في حالة عدد محدود من القيم فقط للمتغيرات. ومثال ذلك:

س – ٣ = ٩

إذ أن هذه المعادلة صحيحة في حالة واحدة فقط وهي عندما س = ١٢.

وأمـا النـوع الثالـث مـن المعــادلات فهـو المعادلات الخاطئة False Statement or Contradiction. وهي المعادلات التي لا تكون صـحيحة أبداً، بمعنى أنه ليس هناك قيم للمتغيرات تحقق المعادلة. وكمثال لهذا النوع من المعادلات: س = س + ٣

وفي واقع الأمر فإن هذه لا تمثل معادلة إذ أن طرفيها لا يمكن أبداً أن يكونا متساويين. والتعبير الصحيح عن مثل هذه الحالة هو:

$$\text{س} \neq \text{س} + ٣$$

أي أن س لا تساوي س + ٣.

وكما سبق وأن أشرنا فإن حل المعادلة يتمثل في إيجاد قيم المتغيرات (الجذور) التي تحقق المعادلة. وفي حل المعادلة عادة ما يكون هناك نوع من المعالجة الجبرية تتمثل في إعادة ترتيب حدود المعادلة بالشكل الذي يمكِّن في النهاية من حلها. وهناك بعض الأسس والقواعد المتبعة في هذا الشأن، حيث يمكن إجراء بعض العمليات الجبرية على طرفي المعادلة والتي نوردها فيما يلي:

أ- إضافة (طرح) مقادير حقيقية على (من) طرفي المعادلة.

ب- ضرب (قسمة) طرفي المعادلة في (على) أي مقدار ثابت لا يساوي صفر.

جـ- ضرب طرفي المعادلة في مقدار يحتوي على متغيرات.

د- تربيع طرفي المعادلة.

هـ- قسمة طرفي المعادلة على مقدار جبري يحتوي على متغيرات ولا يساوي الصفر.

هذا وتؤدي القاعدتيْن في (أ)، (ب) إلى الحصول إلى معادلات متكافئة Equivalent Equations، وهي المعادلات التي لها نفس الجذور. وأما القاعدتيْن في (جـ)، (د) فيمكن أن تؤدي كل منهما إلى جذور تختلف عن جذور المعادلة الأصلية. وأخيراً فإن القاعدة في (هـ) قد تؤدي إلى معادلات تختلف بعض جذورها عن جذور المعادلة الأصلية، أو ربما تؤدي إلى معادلات لا تكون مكافئة للمعادلات الأصلية.

ثانياً: حل المعادلات من الدرجة الأولى في متغير واحد

Solving First-Degree Equations in One Variable

تأخذ المعادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد الصورة العامة:

$$\text{أس} + \text{ب} = \text{صفر}$$

حيث: أ، ب ثوابت ، أ $\neq$ صفر

إن طريقة حل أية معادلة تعتمد على طبيعة هذه المعادلة. فالمعادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد يمكن حلها بأسلوب غاية في البساطة، وبعيد كل البعد عن أي تعقيد.

ولنأخذ المعادلة التالية كمثال:

$$٣\text{س} = \text{س} + ٦$$

ويتمثل حل تلك المعادلة في جعل س، أو الحد الذي يحتوي على س، في طرف من طرفي المعادلة وجعل المقادير الثابتة في الطرف الآخر وذلك على النحو التالي:

$٣س − س = ٦$ ، أي أن: $٢س = ٦$

$$\therefore \quad س = \frac{٦}{٢} = ٣$$

ويلاحَظ هنا أنه بالتعويض عن قيمة س بـ ٣ في طرفي المعادلة الأصلية نجد أن طرفيها متساويان (كل منهما يساوي ٩).

ولنأخذ مثالا آخر:

$٥س − ٤ = ٣س + ٨$

وهنا نجد أن: $٥س − ٣س = ٨ + ٤$

$٢س = ١٢$ ، $س = ٦$

وهي قيمة س التي تحقق المعادلة.

مثال (١):

حِل المعادلة: $س − ٥ = \frac{-٢س + ١٠}{٣}$

الحــل:

بضرب طرفي المعادلة في ٣ ينتج أن:

$٣(س − ٥) = -٢س + ١٠$ وهذا يعطي $٣س + ٢س = ١٠ + ١٥$

$٣س − ١٥ = -٢س + ١٠$

$٥س = ٢٥$ ، أي أن: $س = ٥$

مثال (٢):

حِل المعادلة: $٢س − ٣ = \frac{٤س − ٦}{٢}$

الحــل:

بضرب طرفي المعادلة في ٢ نحصل على:

$٢(٢س − ٣) = ٤س − ٦$

$٤س − ٦ = ٤س − ٦$

ويلاحَظ هنا أن طرفي المعادلة متماثلان تماماً. أي أنه بالتعويض عن س بأي قيمة فإن المعادلة تتحقق. وإذا ما حاولنا أن نجعل س في طرف والمقدار الثابت في طرف آخر فإننا نجد أن: $-6 = -6$

وهذه متطابقة، وهي تشير إلى إمكانية إعطاء س أية قيمة.

وسوف نكتفي بهـــذا القدر في تناولنا لحل المعادلة الخطية من الدرجة الأولى في متغير واحد. إذ أن هذا الأمر من البســاطة بمكان إلى الحد الذي لا يســتحق معه الحديث عنه أكثر مما أسلفنا.

ثالثاً: حل المعادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد

Solving Second – Degree Equations in One Variable:

تأخذ المعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد، وليكن س، الصورة التالية:

$$أ س^2 + ب س + جـ = صفر$$

حيث: أ ، ب، جـ ثوابت ، أ $\neq$ صفر

وعادة ما يُطلق على المعادلة من الدرجة الثانية اســم المعادلة التربيعية Quadratic Equation. وإذا كانت أ = صفر فإن $س^2$ تختفي، ولا تعد المعادلة حينئذ من الدرجة الثانية بل تحولت إلى معادلة من الدرجة الأولى. وكأمثلة على المعادلة من الدرجة الثانية:

$س^2 + 8س + 12 =$ صفر ،

$2س^2 = 18$ ،

$3س^2 + 1 = 2س - 5$

والمعادلة من الدرجة الثانية (باســتثناء المتطابقة) قد يكون لها جذران حقيقيان أو جذر واحد حقيقي، وقد لا يكون لها جذور حقيقية على الإطلاق. ويمكن إيجاد جذور المعادلة من الدرجة الثانية باســتخدام عدة طرق، ولكنها جميعها تبدأ بالخطوة الأولية وهي إعادة كتابة المعادلة على الصورة:

$$أ س^2 + ب س + جـ = صفر$$

هذا ويمكن حل المعادلة من الدرجة الثانية باتباع عدة طرق ســوف ندرس منها هنا طريقتيْن فقط هما:

- طريقة التحليل إلى عوامل Factoring Method
- الصيغــة التربيعيــة Quadratic Formula

وفي دراســتنا لكل من هاتيْن الطريقتيْن نُذكِّر القارئ بأنه قبل تطبيق أي من الطريقتيْن يجب إعــادة صــيــاغــة المعــادلــة من الــدرجــة الثــانيــة بحيــث تكون على الصـــورة: أس٢ + بس + جـ = صفر، هذا إن لم تكن هي أصلاً كذلك.

١- طريقة التحليل إلى عوامل: Factoring Method

وفقاً لهذه الطريقة فإننا نقوم بتحليل المقدار في الطرف الأيمن من المعادلة إلى حاصـــل ضـــرب عوامل أولية كل منها من الدرجة الأولى. بعد ذلك يمكن تحديد جذور المعادلة وذلك كما يوضحه المثال التالي:

مثال (٣):

أوجد جذور المعادلة: س٢ ــ ٣س ــ ١٠ = صفر

الحـل:

حيث أن: س٢ ــ ٣س ــ ١٠ = صفر

فإنه يمكن تحليل المقدار في الطرف الأيمن إلى حاصل ضرب عامليْن كل منهما من الدرجة الأولى كما يلي:

(س ــ ٥) (س + ٢) = صفر

وبمـــا أن حاصل ضرب العاملين = صفر، فــإن ذلــك يعنــى إمــا أن (س ــ ٥) = صفر أو (س + ٢) = صفر

أي أنه إذا كان: س ــ ٥ = صفر ، فإن: س = ٥

أو إذا كــان: س + ٢ = صفر ، فإن: س = - ٢

وهكذا فإن جذري المعادلة هما:

س = ٥ و س = -٢

وهما قيمتا س التي تحقق كل منهما المعادلة الأصلية.

مثال (٤):

أوجد جذور المعادلة: س٢ = ٤س ــ ٤

الحــل:

كما ســبق وأن أشــرنا، فإنه يجب إعادة صــياغة المعادلة لتصــبح على الصــورة:
$أس^٢ + بس + جـ = صفر$، وفي مثالنا هذا، نعيد ترتيب المعادلة لتكون:

$$س^{٢} - ٤س + ٤ = صفر$$

$$(س - ٢)\ (س - ٢) = صفر$$

وبمساواة كل عامل بالصفر، نجد أن للمعادلة جذر واحد هو: $س = ٢$

وهنا قد يثير القارئ تســاؤلاً منطقياً وهو: وهل في الاســتطاعة دائماً التوصــل إلى العوامل الأولية - إن وُجدت - للمقدار في الطرف الأيمن؟ حيث أنه في بعض الحالات لا يكون من السـهل معرفة العوامل الأولية التي يتكون منها المقدار في الطرف الأيمن من المعادلة. وعلى سبيل المثال، المعادلة:

$$س^{٢} + ٩س - ٣٢٢ = صفر \qquad (أ)$$

أو المعادلـة: $س^{٢} - ٤٣س + ٤٤٢ = صفر$ (ب)

ربما يكون من الصـعب على القارئ التوصـل إلى العوامل الأولية للطرف الأيمن في كل من المعادلتيْن. ومثل تلك المعادلات نتعرض إلى حلها خاصــة في بعض التطبيقات الاقتصــادية، وهو ما سنراه لاحقا في هذا الفصل والفصول التالية.
أضـف إلى ذلك، أنه في حالات أخرى نجد أن المقدار التربيعي في الطرف الأيمن للمعادلة لا يمكن تحليله إلى عوامل أولية. فالمعادلة:

$$س^{٢} + ١٠س + ٢ = صفر$$

لا يمكن تحليل طرفها الأيمن إلى عوامل أولية.
وفي مثل تلك الحالات فإننا نلجأ عند إيجاد جذور المعادلة إلى اتباع الطريقة الثانية وذلك على النحو الموضح فيما يلي:

٢- طريقة الصيغة التربيعية: Quadratic Formula Method

وفي هذه الطريقة يمكن إيجاد جذري المعادلة من الدرجة الثانية والتي تأخذ الصورة:
$$أس^٢ + بس + جـ = صفر$$

باستخدام الصيغة التربيعية التالية:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

ولعل الأمثلة التالية توضح ذلك:

مثال (٥):

أوجد جذري المعادلة:

$$س^{٢} + ٩س - ٣٢٢ = صفر$$

لاحـــــظ أن هذه المعادلة هي التي أشـــرنا إليها من قبل في (أ) وذلك قبل تناولنا لتلك الطريقة مباشرة.

الحـل:

حيث أن: $س^{٢} + ٩س - ٣٢٢ = صفر$

فإن: $أ = ١$ ، $ب = ٩$ ، $جـ = -٣٢٢$

وبالتعويض عن أ ب، جـ في الصيغة:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

ينتج أن:

$$س = \frac{-٩ \pm \sqrt{(٩)^{٢} - ٤(١)(-٣٢٢)}}{٢(١)}$$

$$\therefore س = \frac{-٩ \pm \sqrt{٨١ + ١٢٨٨}}{٢} = \frac{-٩ \pm \sqrt{١٣٦٩}}{٢}$$

$$= \frac{-٩ \pm ٣٧}{٢}$$

وباستخدام إشارة الجمع:

$$س = \frac{-٩ + ٣٧}{٢} = \frac{٢٨}{٢} = ١٤$$

وباستخدام إشارة الطرح:

$$س = \frac{-٩ - ٣٧}{٢} = \frac{-٤٦}{٢} = -٢٣$$

وهكذا فإن القيمتين ١٤، - ٢٣ هما القيم الحقيقية الوحيدة لـــــ س والتي تحقق كل منهما المعادلة.

مثال (٦):

أوجد جذور المعادلة:

$$\text{س}^{٢} = ٢\text{س} - ١٥$$

الحـل:

نضع أولاً المعادلة على الصورة: $\text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{جـ} = \text{صفر}$

حيث نجد أن: $\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١٥ = \text{صفر}$

$\therefore$ أ = ١ ، ب = -٢ ، جـ = ١٥

$$\text{س} = \frac{-(-٢) \pm \sqrt{(-٢)^{٢} - ٤(١)(١٥)}}{٢(١)}$$

$$= \frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٦٠}}{٢} = \frac{٢ \pm \sqrt{-٥٦}}{٢}$$

وحيث أنه ليس هناك جذر حقيقي للمقدار – ٥٦، فإنه يمكننا استنتاج أنه ليس هناك قيم حقيقية لـ س تحقق المعادلة الأصلية.

أي أن المعادلة ليس لها جذور حقيقية.

هذا والمقدار الذي يوجد تحت الجذر التربيعي ($\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أجـ}$) يسمى المميِّز Discriminant. واستخدام هذا المميِّز يساعدنا على معرفة عدد جذور المعادلة من الدرجة الثانية حيث أنه:

إذا كان:

$\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أجـ} > \text{صفر}$ يكون للمعادلة جذران حقيقيان

$\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أجـ} = \text{صفر}$ يكون للمعادلة جذر واحد حقيقي

$\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أجـ} < \text{صفر}$ لا يوجد جذور حقيقية للمعادلة

رابعاً: المعادلات الخطية Linear Equations

إن دراســـة العلاقات الخطية على قدر كبير من الأهمية وذلك لعدة أســـباب. ومن هذه الأسباب أن معظم الظواهر الحقيقية نكون في حاجة إلى تمثيلها رياضياً، وعادة ما يكون هذا التمثيل خطياً أو يقترب بدرجة معقولة من التمثيل الخطي. ومن هنا فإن المعادلات الخطية تُطبَّق على نطاق واســـع في حياتنا العملية. أضـــف إلى ذلك أن العلاقات الخطية – بصـــفة

عامة – أيسر كثيرا في تطبيقها من العلاقات غير الخطية. وأخيراً، فإن الأساليب المتبعة في التحليل غير الخطي أحياناً ما تكون مشابهة أو امتداداً لتلك الأساليب المستخدمة في التحليل الخطي. ونتيجة لذلك فإن دراسة وفهم الأساليب الرياضية الخطية إنما يعتبر أمراً لازماً وضرورياً بوصفه شرطاً أو متطلَّباً أساسياً لدراسة الأساليب الرياضية غير الخطية.

وفي دراستنا للمعادلات الخطية سوف نقصر اهتمامنا على المعادلات الخطية في متغيريْن وذلك لحاجتنا إليها في بعض التطبيقات الاقتصادية في هذا الفصل والفصول التالية.

المعادلات الخطية في متغيريْن:

Linear Equations in Two Variables

الصورة العامة للمعادلة الخطية في متغيريْن هي:

أس + ب ص = جـ

حيث: أ ب، جـ ثوابت، أ أو ب أو كليهما لا يساوي الصفر.

وهنا تلزم الإشارة إلى أن المعادلة الخطية هي معادلة من الدرجة الأولى أي أن الأس لكل من المتغيريْن **س**، **ص** هو ١. ولو أن هناك متغيراً في المعادلة له أس يزيد عن ١، أو أن المعادلة تشتمل على حد يمثل حاصل ضرب متغيريْن كل منهما له الأس ١ أو أي أس آخر (على سبيل المثال: ٣سص) فإن المعادلة حينئذ لا تعتبر خطية. هذا وتسمى الثوابت أ، ب، جـ في المعادلة بالمَعلَمات Parameters. وفيما يلي بعض الأمثلة لمعادلات خطية في متغيريْن:

المعادلة	المعلمات أ	ب	جـ
٣س - ٢ص = ٥	٣	-٢	٥
٤ص + ٣ع = ٢	٤	٣	٢
٢س = ٣	٢	٠	٣

هذا ولو كان لدينا معادلة خطية على الصورة:

أس + ب ص + جـ = صفر

فإن حل هذه المعادلة يعنى إيجاد أزواج القيم (**س**، **ص**) والتي تحقق تلك المعادلة. وفي واقع الأمر، فإن هناك عدداً لانهائياً من أزواج القيم (**س**، **ص**) التي يمكن افتراضها وتحقق المعادلة. ولا يمكننا تحديد قيم أي زوج إلا إذا افترضنا قيمة لأحد المتغيريْن ثم عوضنا عنها في المعادلة وأوجدنا قيمة المتغير الآخر المناظرة لها. وهذه الطريقة تفترض أن كلا المتغيريْن موجود في المعادلة، أي أن: أ ≠ صفر، ب ≠ صفر.

والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (٧):

إذا كان لدينا المعادلة التالية:

٢س + ٣ص = ١٢

المطلوب:

١- حدد زوج القيم الذي يحقق المعادلـة عندما س = ٣.

٢- ما هو زوج القيم الذي يحقق المعادلة عندما ص = ٤؟

الحـل:

١- عندما س = ٣ نجد أن:

٢ × ٣ + ٣ص = ١٢

٣ص = ١٢ – ٦ = ٦ ، ص = ٢

أي أن زوج القيم هو: (٣، ٢)

٢- عندما ص = ٤ نجد أن:

٢س + ٣ × ٤ = ١٢

٢س = صفر ، س = صفر

أي أن زوج القيم هو: (صفر، ٤)

أي أن كلاًّ من زوجي القيم (٣، ٢) و (صفر، ٤) يحقق المعادلة.

ملحوظة هامة:

العدد اللانهائي من أزواج القيم التي تحقق معادلة من الدرجة الأولى في متغيريْن يأتي نتيجة لوجود معادلة واحدة ومتغيريْن. أي أن عدد المعادلات المستقلة يقل عن عدد المتغيرات (المجاهيل)، وهي الحالة التي يمكن أن نواجه فيها بعدد لا نهائي من قيم المتغيريْن التي تحقق المعادلة. ولا يأتي ذلك إلا – كما ذكرنا من قبل – بافتراض قيمة لأحد المتغيريْن ثم حساب القيمة المناظرة لها للمتغير الآخر.

التمثيل البياني للمعادلات الخطية في متغيريْن:

Graphing Two – Variable Linear Equations:

يمكن تمثيل المعادلة الخطية في متغيريْن بخط مستقيم وذلك باتباع الخطوات التالية:

١- **ارسم** المحوريْن الأفقي والرأسي بحيث يمثل المحور الأفقي المتغير س والمحور الرأسي المتغير ص.

٢- **حدِّد** زوجيْن من القيم التي تحقق المعادلة وذلك بالطريقة السابق شرحها، ثم عين موضع كل زوج من القيم على الرسم. لاحظ أن كل زوج من القيم سيمثله نقطة (س، ص) لها إحداثيان سيني وصادي (أي أفقي ورأسي)، ويُذكر الإحداثي السيني أولاً.

٣- **صِل** بين النقطتيْن بخط مستقيم.

٤- **اجعل** الخط المستقيم ممتدّاً في الاتجاهيْن إلى ما بعد النقطتيْن وذلك حسبما تقتضيه الضرورة، أو إلى الحد المرغوب فيه والذي يحقق الغرض الذي من أجله تم رسم هذا الخط.

وهنا تلزم الإشارة إلى ما يلي:

- أن نقطة الأصل تمثل القيمة صفر لكل من المتغيريْن (المحوريْن)، أي تمثل النقطة (صفر، صفر).
- أن أي نقطة تقع على الخط المستقيم يكون لها إحداثيان يمثلان قيمة المتغير س وقيمة المتغير ص على الترتيب. وقيم المتغيريْن عند هذه النقطة تحقق المعادلة مثلها مثل أية نقطة أخرى تقع على هذا الخط.
- أن أسهل طريقة لتحديد النقطتيْن هو أن نفترض أن: س = صفر ثم نوجد قيمة ص المناظرة، ولتكن أ. بعدها نفترض أن: ص = صفر ثم نوجد قيمة س المناظرة، ولتكن ب. وهنا فإن النقطتين هما (صفر، أ) و (ب، صفر).
- إذا كان من الممكن اعتبار أحد المتغيريْن متغيراً تابعاً (أي يتأثر بالمتغير الآخر) والآخر متغيراً مستقلاً (أي يؤثر في المتغير الآخر)، فإن المتغير التابع عادة ما يُرمز له بالرمز ص ويمثله المحور الرأسي، وأما المتغير المستقل فيُرمز له بالرمز س ويمثله المحور الأفقي.

مثال (٨):

مثِّل المعادلة الخطية التالية بيانياً: ٦س + ٣ص = ١٢

الحـل:

لتحديد النقطتين دعنا نفترض س = صفر مرة ثم نوجد قيمة ص المناظرة. ثم نفترض أن ص = صفر ونوجد قيمة س المناظرة.

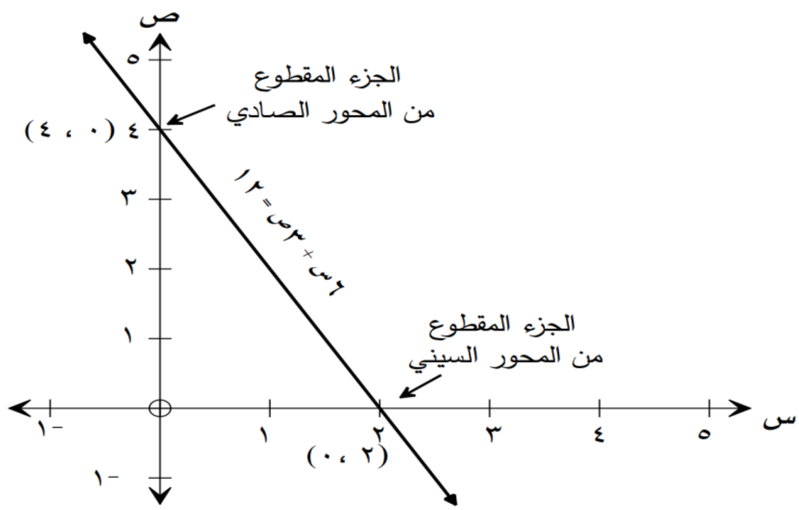
بوضع س = صفر

∴ ٣ص = ١٢ و ص = ٤

بوضع ص = صفر

∴ ٦س = ١٢ و س = ٢

∴ النقطتان اللتان تحددان الخط المستقيم هما (٠، ٤) و (٢، ٠). ويوضح ذلك الشكل (١ - ١).



الشكل (١ – ١)

التمثيل البياني للمعادلة: ٦س + ٣ص = ١٢

وهنا نؤكد مرة أخرى أن كل نقطة تقع على الخط المستقيم المرسوم يحقق إحداثياها (س، ص) المعادلة. وحيث أن الخط المستقيم يقع عليه عدد لا نهائي من النقط، فإن هذا يؤكد ما سبق وأن أشرنا إليه بأن هناك عدداً لا نهائياً من أزواج القيم (س، ص) التي تحقق المعادلة.

مثال (٩):

مثِّل المعادلة الخطية التالية بيانياً:

٤س – ٥ص = صفر

الحـل:

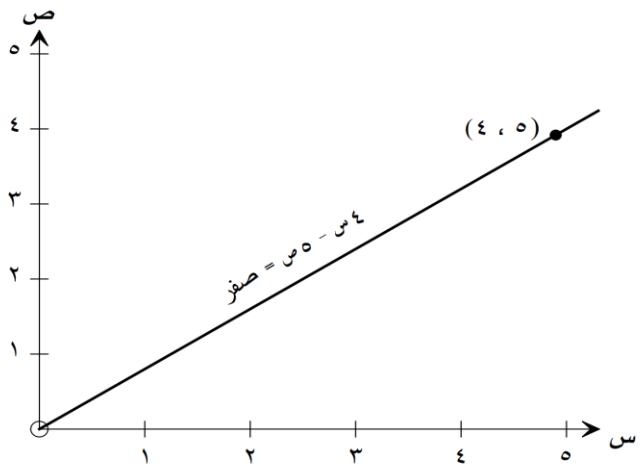
بوضع س = صفر ، نجد أن ص = صفر

بوضع س = ٥ ، نجد أن ص = ٤

∴ النقطتان هما: (صفر، صفر) و (٥، ٤)، ويوضح ذلك الشكل (١ – ٢).

ومن هذا المثال يمكننا أن نخرج بنتيجة مهمة وهي أن أي معادلة خطية في متغيريْن على الصورة: أس+ بص = صفر، أي أن: جـ = صفر يمثلها خط مستقيم لابد وأن يمر بنقطة الأصل.

والآن، وحتى لا نســـترســـل في ســـرد أمور قد لا تعنينا كثيراً فيما بعد عند دراســـتنا لموضـوعات هذا الكتاب. سوف نركز اهتمامنا على بعض المفاهيم المتعلقة بالمعادلة الخطية في متغيريْن. والتي نرى أن لها مدلولات اقتصـــادية يتحتم على كل قارئ أن يدرك معناها ويفهم فحواها وصـــولاً للحقيقة لا ســـواها، تاركين في ذلك جوانب كثيرة للمعادلات الخطية، جوانب ربما تخرج عن نطاق ما نهدف إليه من تطبيق الأســـاليب الرياضـــية على مجالات الاقتصاد المختلفة.



الشكل (١ – ٢)

التمثيل البياني للمعادلة: ٤س – ٥ص = صفر

ومن هذا المنطلق سوف نتناول الآن بالدراسة كلّاً من الموضوعات التالية:

- الجزء المقطوع من المحور السيني.
- الجزء المقطوع من المحور الصادي.
- ميل الخط المستقيم.
- تحديد معادلة الخط المستقيم بمعلومية:
  - نقطتان تقعان على الخط المستقيم.
  - ميل الخط المستقيم ونقطة تقع عليه.

الجزء المقطوع من المحور السيني: X-Intercept

الجزء المقطوع من المحور الســـيني لمعادلة خطية هو النقطة التي يقطع الخط عندها المحور السيني. وهو يمثل زوج القيم الذي نحصل عليه عندما ص = صفر.

الجزء المقطوع من المحور الصادي: Y-Intercept

الجزء المقطوع من المحور الصـــادي لمعادلة خطية هو النقطة التي يقطع الخط عندها المحور الصادي. وهو يمثل زوج القيم الذي نحصل عليه عندما س = صفر.

مثال (١٠):

أوجد الجزء المقطوع من المحور السـيني والجزء المقطوع من المحور الصـادي وذلك للمعادلة الواردة في مثال (٨).

الحـل:

الجزء المقطوع من المحور السـيني والجزء المقطوع من المحور الصـادي موضـحان على الشـكل البياني (١ – ١) في مثال (٨) وهما على الترتيب: (٢، ٠) و (٠، ٤). وهذا يعنى أن الخط المستقيم الممثل للمعادلة المعطاة في مثال (٨) يقطع المحور السـيني في نقطة تبعد عن نقطة الأصل بمقدار ٢، بينما يقطع المحور الصادي في نقطة تبعد عن نقطة الأصل بمقدار ٤.

وفي مثال (٨) تم تحديد النقطتـيْن بوضـع س = صفر ثم بوضـع ص = صفر. أي أنه تم تحديد هذين الجزئيْن قبل تمثيل المعادلة بيانياً. هذا مع الأخذ في الاعتبار أنه يمكن رسم الخط المستقيم عن طريق تحديد أي نقطتيْن أخريْين لا يوجد في إحداثيات أي منهما القيمة صفر.

مثال (١١):

أوجد الجزء المقطوع من المحور السيني والجزء المقطوع من المحور الصـادي للمعادلة الواردة في مثال (٩).

الحـل:

من الواضح أن الخط المستقيم الممثل لتلك المعادلة يمر بنقطة الأصل (صفر، صفر). لذلك فإن الجزء المقطوع من كل من المحوريْن واحد وهو (صفر، صفر). أي أنه ليس هناك جزء مقطوع من كل من المحورين (الشكل: ١ – ٢).

هذا ويجب التنويه إلى أن المعادلة الخطية في متغيريْن لها جزء مقطوع من المحور السـيني وجزء مقطوع من المحور الصـادي ما عدا حالتيْن خاصـتيْن نجد أن للمعادلة فيهما جزءاً مقطوعاً من محور واحد فقط. وهاتان الحالتان هما:

- عندما ب = صفر، فإن المعادلة تأخذ الصورة: $أس = جـ$ ، $س = \frac{جـ}{أ}$

أي أن المعادلة تأخذ الصيغة:

$$س = ل \quad ، \quad ل = \frac{جـ}{أ} \quad \text{مقدار ثابت}$$

وفي هذه الحالة يكون الخط المسـتقيم موازٍ للمحور الصـادي. وبذلك يكون هناك جزء مقطوع من المحور السـيني فقط ويمثله النقطة (ل، صـفر)، ولا يكون هناك جزء مقطوع من المحور الصادي [الشكل (١ – ٣)، د)].

- عندما أ = صفر، فإن المعادلة تصبح على الصورة: بص = جـ ، ص = $\frac{جـ}{ب}$

وبالمثل، فإننا نجد أن المعادلة تأخذ الصيغة:

ص = ل ، ل = $\frac{جـ}{ب}$ مقدار ثابت

ويكون الخط المستقيم في هذه الحالة موازٍ للمحور السيني. وبذلك يكون هناك جزء مقطوع من المحور الصادي ويمثله النقطة (صفر، ل) بينما لا يكون هناك جزء مقطوع من المحور السيني [الشكل (١ – ٣)، جـ].

الميـــل: Slope

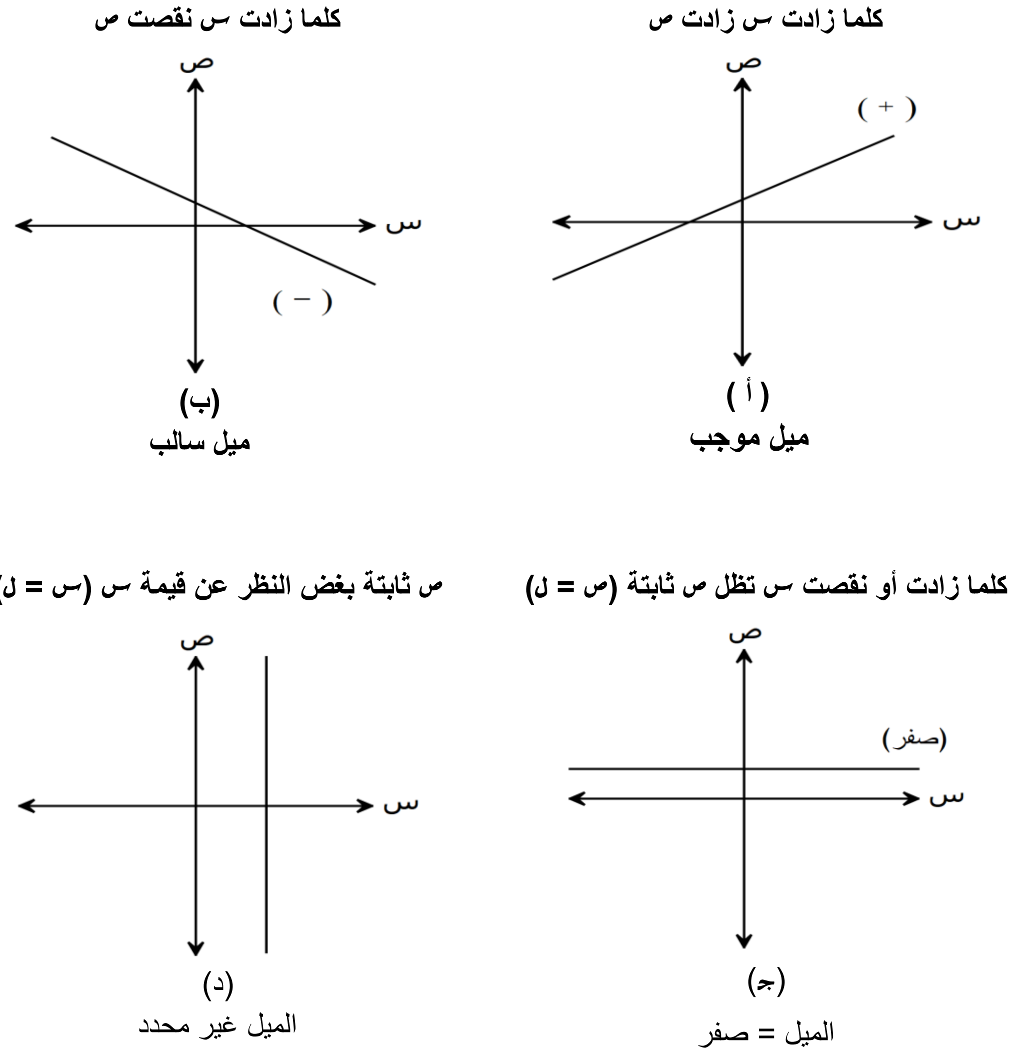
إن أي خط مستقيم – ما عدا الخطوط الرأسية (العمودية) – يمكن معرفـة خصائصه عن طريق معرفة ميله. ويقصـد بميل الخط المسـتقيم درجة انحداره، ارتفاعاً أو هبوطاً، كلما تحركنا من اليسـار إلى اليمين بطول المحور السـيني. هذا والمعدل الذي يرتفع به الخط أو يهبط إنما يقيسه ميل هذا الخط.

هذا وميل الخط المسـتقيم قد يكون موجباً أو سـالباً أو مسـاوٍ للصـفر أو غير محدد Undefined. والخط ذو الميل الموجب يرتفع من اليسـار إلى اليمين، أي يكون في حالة صـعود. ومثل هذا الخط يعبر عن علاقة طردية بين س، ص، بمعنى أنه كلما زادت س زادت ص والعكس صحيح [الشكل (١ – ٣)، أ]. وأما الخط ذو الميل السالب فإنه يهبط من اليسـار إلى اليمين أي يكون في حالة هبوط. وهنا فإنه كلما زادت س نقصـت ص والعكس صحيح، أي أن العلاقة حينئذ تكون عكسية [الشكل (١ – ٣)، ب]. وفي حالة الخط ذي الميل المساوي للصـفر، فإنه يكون خطاً أفقياً. وعندئذ فإنه بزيادة س أو نقصـانها تظل ص ثابتة. ويعبر عـن هـذه الحالـة الخاصة الخط المستقيم ص = ل، ل ثابت [الشكل (١ – ٣)، جـ]. وأما في حالة الخط العمودي والذي تأخذ فيه المعادلة الصـورة: س = ل، فإن ميل الخط يكون غير محدد [الشـكل (١ – ٣)، د]. حيث أنه طالما أن س ثابتة فإنه لا يمكننا مشـاهدة سلوك ص عند تغير س. ويوضح الشكل (١ – ٣) الحالات المختلفة لخط المستقيم.

هذا ويُقاس ميل الخط المسـتقيم بعدد حقيقي. كما أن إشـارة الميل تشـير إلى ما إذا كان الخط صـاعداً أم هابطاً (مرة أخرى متحركين من اليسـار إلى اليمين). وأما مقدار (القيمة المطلقة) للميل فيشير إلى درجة انحدار الخط. كما يخبرنا الميل إلى أي حد تتغير قيمة ص بتغير قيمة س. حيث أن الميل يقيس نسـبة التغير في ص نتيجة التحرك من نقطة لأخرى مقسـوماً على التغير المناظر في س. وبعبارة أخرى، فإن الميل يشـير إلى مقدار التغير في ص نتيجة للتغير في س بمقدار وحدة واحدة. ومن الناحية الحسـابية، فإن ميل الخط المسـتقيم: أس + بص= جـ يمكن قياسه كما يلي:

$$\text{ميل الخط المستقيم} = \frac{-\ \text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$$

وهو يقيس – من الناحية الهندسية – ظل الزاوية التي يصنعها الخط المستقيم مع المحور السيني.



الشكل (١ – ٣)
الحالات المختلفة لميل الخط المستقيم

وعلى سبيل المثال، فإن ظل الزاوية التي يصنعها الخط المستقيم الممثل للمعادلة المعطاة في مثال (٨) يساوي: $\frac{-٦}{٣}$ = -٢. وهذا يعنى أنه كلما زادت س بمقدار وحدة واحدة نقصت ص بمقدار وحدتيْن، والعكس صحيح. كما يفيد بأن مقياس الزاوية هو:

$ظا^{-1} - ٢ = ١١٦,٦°$ تقريباً (يمكن استخدام الآلة الحاسبة في هذا الشأن). وهذا يعنى أن الخط المستقيم يصنع مع المحور السيني زاوية مقدارها ١١٦,٦° تقريباً [راجع الشكل (١ – ١)].

وهنا يمكن للقارئ تطبيق مفهوم الميل كظل للزاوية التي يصنعها الخط المستقيم مع المحور السيني على الحالتين (جـ)، (د) في الشكل (١- ٣). حيث يجد أن ظل الزاوية ١٨٠° يساوي الصفر [الشكل (١– ٣)، جـ]، بينما يجد أن ظل الزاوية ٩٠ °يساوي مقداراً غير محدد.

هذا ويمكن إيجاد ميل الخط المستقيم بمعلومية نقطتيْن يمر بهما هذا الخط، أي نقطتيْن تحققان المعادلة التي يمثلها الخط المستقيم. فإذا كان الخط المستقيم يمر بالنقطتيْن ($س_١$، $ص_١$) و($س_٢$، $ص_٢$) فإن ميل هذا الخط يمكن إيجاده باستخدام الصيغة التالية:

$$\textbf{الميل (م)} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

ولعل المثال التالي يوضح ذلك.

مثال (١٢):

احسب ميل الخط المستقيم الذي يمثل المعادلة المعطاة في مثال (٩)، مستخدماً في ذلك طريقتيْن مختلفتيْن ثم فسر ما تحصل عليه من نتائج.

الحـل:

الطريقة الأولى:

$$\text{الميل} = \frac{-\text{معامل } س}{\text{معامل } ص} = \frac{-٤}{-٥} = ٠,٨$$

الطريقة الثانية:

$$\text{الميل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

وحيث أنه تم إثبات أن الخط المستقيم يمر بالنقطتيْن (صفر، صفر) و (٥، ٤)، فإن:

$$\text{الميل} = \frac{٤ - \text{صفر}}{٥ - \text{صفر}} = \frac{-٤}{-٥} = ٠,٨$$

وهي نفس النتيجة السابقة.

وتعنى هذه النتيجة أنه كلما زادت س بمقدار وحدة واحدة فإن ص تزيد أيضاً ولكن بمقدار ٠,٨ وحدة.

كما تشير هذه النتيجة بأن الخط المستقيم الممثل للمعادلة: ٤س - ٥ص = صفر

يصنع مع المحور السيني زاوية مقدارها: $ظا^{-1}$ ٠,٨ = ٣٨,٧° تقريباً.

مثال (١٣):

احسب ميل الخط المستقيم الذي يمثل المعادلة المبيَّنة في مثال (٨)، مستخدماً في ذلك نقطتيْن يمر بهما هذا الخط.

الحـل:

أثبتنا من قبل في مثال (٨) أن الخط المستقيم الممثل للمعادلة ٦س + ٣ص = ١٢ يمر بالنقطتيْن (٢، ٠) و (٠، ٤). وبذلك يمكن حساب ميل هذا الخط كما يلي:

$$\text{الميل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{٤ - \text{صفر}}{\text{صفر} - ٢} = \frac{٤}{-٢} = -٢$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من قبل.

إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية نقطتيْن أو نقطة واحدة والميل:

إذا مر الخط المستقيم بالنقطتيْن ($س_١$ ، $ص_١$) و($س_٢$ ، $ص_٢$) فإنه يمكن إيجاد المعادلة التي يمثلها هذا الخط وذلك باستخدام أي من الصيغتيْن التاليتيْن:

$$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

أو

$$\frac{ص - ص_٢}{س - س_٢} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

لاحظ أن الطرف الأيسر في كل من الصيغتيْن يمثل ميل الخط المستقيم. لذلك فإنه يمكن إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل (م) ونقطة واحدة يمر بها هذا الخط، ولتكن ($س_١$، $ص_١$)، وذلك وفقاً للصيغة التالية:

$$\textbf{الميل (م)} = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$$

ولعل المثاليْن التالييْن يوضحان ذلك.

مثال (١٤):

يمر خط مستقيم بالنقطتيْن: (- ٣ ، ١٠) و (٢ ، -٥).

المطلوب:

(١) إيجاد معادلة الخط المستقيم.

(٢) احسب ميل الخط المستقيم مستخدماً في ذلك:

- المعادلة المحسوبة في (١).
- النقطتان اللتان يمر بهما الخط المستقيم.

ثم تأكد من أن الميل واحد في الحالتيْن، مفسراً النتيجة التي حصلت عليها.

الحـل:

(١) حيث أن: $\dfrac{\text{ص} - \text{ص}_{٢}}{\text{س} - \text{س}_{٢}} = \dfrac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

فإن: $\dfrac{\text{ص} - (-٥)}{\text{س} - ٢} = \dfrac{-٥ - ١٠}{٢ - (-٣)} = \dfrac{-١٥}{٥} = -٣$

أي أن: $\dfrac{\text{ص} + ٥}{\text{س} - ٢} = -٣$

$\text{ص} + ٥ = -٣\text{س} + ٦$

∴ معادلة الخط المستقيم هي:

$٣\text{س} + \text{ص} = ١$

ويمكن إيجاد المعادلة بطريقة أخرى وفقاً للصيغة:

$\dfrac{\text{ص} - \text{ص}_{١}}{\text{س} - \text{س}_{١}} = \dfrac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

$\dfrac{\text{ص} - ١٠}{\text{س} - (-٣)} = -٣$ تم إثبات أن الطرف الأيسر يساوي -٣

$\text{ص} - ١٠ = -٣\text{س} - ٩$

أي أن: $٣\text{س} + \text{ص} = ١$

وهي نفس النتيجة السابقة.

(٢) ميل الخط المستقيم:

- باستخدام المعادلة:

$$\text{الميل} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٣}{١} = -٣$$

- باستخدام النقطتيْن:

$$\text{الميل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = -٣ \quad \text{تم إثبات ذلك من قبل}$$

أي أن الميل واحد في الحالتيْن.

حيث أن: الميل = - ٣، فإن ذلك يعنى أنه كلما زادت س بوحدة واحدة، أدى ذلك إلى نقصان ص بمقدار ثلاث وحدات. أي أن كل وحدة زيادة في س يترتب عليه نقصان في ص بمقدار ٣ وحدات.

مثال (١٥):

خط مستقيم ميله يساوي ٢ ويمر بالنقطة (٣، - ٤). أوجد معادلة هذا الخط، ثم تأكد من أن ميل الخط هو ٢ باستخدام المعادلة التي تحصل عليها.

الحـل:

حيث أن: الميل (م) = $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$

$$\therefore ٢ = \frac{ص + ٤}{س - ٣}$$

٢س – ٦ = ص + ٤ ، وهذا يعطي ٢س – ص = ١٠

أي أن معادلة هذا الخط هي:

٢س – ص = ١٠

ويبلغ ميل هذا الخط: $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٢}{-١} = ٢$

وهو مقدار الميل المعطى في المثال.

وبعد أن استعرضنا بالدراسة جوانب عدة للمعادلات، فإنه من الملائم أن نتعرض الآن إلى تطبيق أسلوب المعادلات على بعض الجوانب الخاصة بمجالات الأعمال عموماً (اقتصاد، محاسبة، إدارة) وذلك بهدف الوصول إلى القرارات المُثلى المتعلقة بتلك المجالات.

خامساً: تطبيقات في مجالات الأعمال (المعادلات)

في تناولنا للتطبيقات الاقتصـــادية ســـوف نأخذ في الاعتبار بعض الجوانب المهمة في الاقتصاد والمحاسبة والإدارة والتي نذكر منها:

الإنتاج المختلط – الاستثمار – سياسة التسعير – استهلاك الآلات – معدلات الأجور

وســـوف يتمثل منهجنا هنا في عرض مثال تطبيقي لكل مجال من تلك المجالات المشار إليها.

١- الإنتاج المختلط: Production Mix

مثال (١٦):

تنتج شركة نوعيْن من المنتَجات. وتبلغ ساعات العمل المتاحة أسبوعياً ٢٠٠ ساعة عمل. فإذا كانت كل وحدة من المنتَج الأول تتطلب ٤ ساعات عمل، كما تتطلب كل وحدة من المنتَج الثاني ٢,٥ ســاعة عمل. فإذا رغبت إدارة الشــركة في اســتعمال الطاقة القصــوى لســاعات العمل المتاحة.

المطلوب:

(١) أوجد المعادلة التي توضــح اســتخدام جميع ســاعات العمل المتاحة في إنتاج س وحدة على المنتَج الأول و ص وحدة من المنتَج الثاني.

(٢) حدد كلًّا من الجزء المقطوع من المحور السيني والجزء المقطوع من المحور الصادي، ثم بين دلالة كل منهما من الناحية الاقتصادية.

(٣) أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمثل المعادلـة المحسوبة في (١). ثم بيِّن دلالته اقتصادياً.

(٤) ما هو عدد الوحدات الذي يمكن إنتاجه من المنتَج الأول في حالة إنتاج ٦٠ وحدة من المنتَج الثاني؟

(٥) إذا قررت الشركة إنتاج منتَج واحد فقط، ما هو الحد الأقصى للكمية التي يمكن أن تنتجها من المنتَج الأول؟

الحـل:

(١) عدد ساعات العمل التي يتطلبها إنتاج س وحدة من المنتَج الأول

= ٤ × س = ٤س

عدد ساعات العمل التي يتطلبها انتاج ص وحدة من المنتَج الثاني

= ٢,٥ × ص = ٢,٥ص

وحيث أن الشـــركة ترغب في اســـتخدام جميع ســـاعات العمل المتاحة، فإن المعادلة المطلوبة هي:

٤س + ٢,٥ص = ٢٠٠

(٢) الجزء المقطوع من المحو السيني يمكن الحصول عليه بالتعويض عن ص بالقيمة صفر في المعادلة المحسوبة في (١).

٤س + ٢,٥ × صفر = ٢٠٠

∴ س = $\frac{٢٠٠}{٤}$ = ٥٠

أي أن الجزء المقطوع من المحور السيني هو: (٥٠، صفر)، وهو يعنى أنه لو أرادت الشركة استخدام جميع ساعات العمل في إنتاج المنتَج الأول فقط فإن كمية الإنتاج تبلغ حدها الأقصى من هذا المنتَج وهو ٥٠ وحدة، هذا في الوقت الذي لا يكون هناك إنتاج للمنتَج الثاني.

الجزء المقطوع من المحور الصادي يمكن تحديده بالتعويض عن س بالقيمة صفر في المعادلة المحسوبة في (١).

٤ × صفر + ٢,٥ × ص = ٢٠٠

∴ ص = $\frac{٢٠٠}{٢,٥}$ = ٨٠

أي أن الجزء المقطوع من المحور الصادي هو: (صفر، ٨٠)، وهو يشير إلى أنه لو أرادت الشركة استغلال جميع ساعات العمل المتاحة في إنتاج المنتَج الثاني فقط فإنها ستنتج حينئذ ٨٠ وحدة من هذا المنتَج، هذا في الوقت الذي ينعدم فيه الإنتاج تماماً من المنتَج الأول.

(٣) حيث أن المعادلة هي:

٤س + ٢,٥ص = ٢٠٠

الميل = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٤}{٢,٥}$ = -١,٦

وهو يشير إلى أنه في حالة استخدام جميع ساعات العمل فإن زيادة المنتَج الأول بوحدة واحدة تؤدي إلى نقص في المنتَج الثاني بمقدار ١,٦ وحدة في المتوسط.

(٤) في حالة إنتاج ٦٠ وحدة من المنتَج الثاني، فإن عدد الوحدات التي يمكن إنتاجها من المنتَج الأول في حالة استخدام جميع ساعات العمل المتاحة يتحدد كما يلي:

٤س + ٢,٥ × ٦٠ = ٢٠٠ ، وهذا يعطي: ٤س = ٢٠٠ – ١٥٠ = ٥٠

∴س = $\frac{٥٠}{٤}$ = ١٢,٥ وحدة

أي أن الكمية التي يمكن إنتاجها من المنتَج الأول في حالة إنتاج ٦٠ وحدة من المنتَج الثاني هي ١٢,٥ وحدة.

(٥) تمت الإجابة على هذه النقطة ضمنياً في المطلوب (٢). أي أن الحد الأقصى المطلوب هنا هو ٥٠ وحدة من المنتَج الأول.

٢- الاستثمار: Investment

مثال (١٧):

تستعد شركة كبيرة لتأجير السيارات لشراء سيارات جديدة للعام القادم. وقد رصدت هذه الشركة مبلغاً مقداره ٢٠ مليون جنيه لشراء نوعيْن من السيارات. فإذا كان سعر السيارة من النوع الأول هو ٧٥٠٠٠ جنيه، بينما سعر السيارة من النوع الثاني ٥٠٠٠٠ جنيه. وكان عدد السيارات المشتراة من النوع الأول يساوي س، وعدد السيارات المشتراة من النوع الثاني يساوي ص.

المطلوب:

(١) صياغة المعادلة التي توضح أن إجمالي المنفق على شراء السيارات الجديدة هو ٢٠ مليون جنيه.

(٢) إيجاد الميل، موضحا دلالته الاقتصادية.

(٣) تحديد الجزء المقطوع من المحور السيني مع تفسيره اقتصادياً.

الحل:

(١) حيث أن:

عدد السيارات من النوع الأول × سعر السيارة من هذا النوع + عدد السيارات من النوع الثاني × سعر السيارة من هذا النوع = ٢٠٠٠٠٠٠٠، فإن المعادلة هي:

$$٧٥٠٠٠س + ٥٠٠٠٠ص = ٢٠٠٠٠٠٠٠$$

(٢) الميل $= \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٧٥٠٠٠}{٥٠٠٠٠} = -١,٥$

وهذا يشير إلى أنه عند كل زيادة مقدارها سيارة واحدة في عدد السيارات المشتراة من النوع الأول سوف ينخفض عدد السيارات المشتراة من النوع الثاني بمقدار ١,٥ سيارة في المتوسط. وحتى يكون الأمر أقرب إلى الفهم، دعنا نقول إنه عند كل زيادة في عدد السيارات المشتراة من النوع الأول بمقدار سيارتيْن سوف ينقص عدد السيارات المشتراة من النوع الثاني بمقدار ثلاث سيارات.

(٣) الجزء المقطوع من المحور السيني يتحدد كما يلي:

$$٧٥٠٠٠ س + ٥٠٠٠٠ × صفر = ٢٠٠٠٠٠٠٠$$

أي أن: $س = \frac{٢٠٠٠٠٠٠٠}{٧٥٠٠٠} = ٢٦٦,٧$

أي أن الجزء المقطوع من المحور السيني هو: (٢٦٦,٧، صفر)

وهذا يعنى أنه لو قررت الشـركة إنفاق المبلغ كله على شـراء سـيارات من النوع الأول فقط فإنه يمكنها حينئذ شراء ٢٦٦,٧ سيارة.

٣- سياسة التسعير: Pricing Policy

مثال (١٨):

لو باع ناشر أحد الكتب بسعر ٢٠ جنيها للكتاب الواحد فإنه يستطيع بيع ٢٠٠٠٠ كتاب. ومن خبرة الناشر السابقة، فإنه يعلم أن كل جنيه زيادة في سعر الكتاب يؤدى إلى نقص عدد الكتب المُباعة بمقدار ٥٠٠ كتاب.

المطلوب:

ما هو السـعر الذي يجب أن يبيع به الناشـر الكتاب الواحد حتى يحقق دخلاً كلياً مقداره ٤٢٥٠٠٠ جنيه؟

الحـل:

نفترض أن الزيادة في سعر الكتاب = س جنيه

∴ السعر الجديد للكتاب = ٢٠ + س

حينئذ فإن عدد الكتب التي يمكن أن تباع وفقاً للسعر الجديد هو:

٢٠٠٠٠ – ٥٠٠س كتاب

الدخل الكلي = سعر الكتاب الواحد × عدد الكتب المُباعة.

أي أن: ٤٢٥٠٠٠ = (٢٠ + س)(٢٠٠٠٠ – ٥٠٠س)

وبذلك نحصل على:

$$س^{٢} - ٢٠س + ٥٠ = صفر$$

$$س = \frac{٢٠ \pm \sqrt{(٢٠)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٥٠}}{٢(١)}$$

$$= ١٠ \pm ٥\sqrt{٢} = ١٧ \text{ جنيها تقريباً}$$

أي أن: السعر الجديد للكتاب = ٢٠ + ١٧ = ٣٧ جنيهاً

وهكذا فإنه على الناشـــر أن يبيع الكتاب الواحد بســـعر ٣٧ جنيهاً حتى يحقق دخلاً مقداره ٤٢٥٠٠٠ جنيه.

٤- استهلاك الآلات: Machine Depreciation

عندما تقــوم شركـــة بشراء آلة أو أي شيء آخر يندرج تحت مسمـــى "الأصول الثابتة" مثل المعدات والمباني، فإن المحاسبين يُدْخِلون قيمة هذه الآلة في بند الأصول الثابتة في بيان الميزانية. وفي السنـــوات التالية، فإنه من الطبيعي أن تتناقص قيمة هذه الأصول الثابتة سنة بعد أخرى نتيجة للاســتعمال. وهذا التناقص التدريجي في قيمة الأصـــل الثابت هو ما يطلق عليه الاستهلاك (الإهلاك)، أو الانخفاض في قيمة الأصل نتيجة الاستعمال Depreciation. ومن الطرق الشـائعة في تقدير كمية الاسـتهلاك (الانخفاض في قيمة الأصـل الثابت) إنقاص قيمة الآلة بمقدار ثابت سنوياً بحيث يتحول الأصل الثابت في قيمته إلى سعر الخردة في نهاية العمر المقدَّر له بالسنوات. وهذا ما يطلق عليه الاستهلاك وفقاً لخط مستقيم Straight-Line Depreciation. ويطلق على قيمـة الآلـة في نقطـة زمنيـة محـددة "القيمـة الـدفتريـة" Book Value.

مثال (١٩):

من المتوقَّع أن تتناقص القيمة النقدية (ص) لآلة بمعدل خطي عبر ســـنوات عمرها. فإذا كان ســعر هذه الآلة عند النقطة الزمنية س = صـفر (أي عند الشــراء) هو ١٨٠٠٠ جنيه، وسعرها بعد مرور عام سوف يكون ١٤٥٠٠ جنيه.

المطلوب:

(١) تحديد المعادلة التي توضح العلاقة بين قيمة الآلة وعمرها.
(٢) إيجاد ميل المعادلة المحسوبة في (١)، ثم تفسير الدلالة الاقتصادية له.
(٣) إيجاد الجزء المقطوع من المحور الســـيني والجزء المقطوع من المحور الصـــادي، ثم تفسير النتيجة التي تحصل عليها من الناحية الاقتصادية.
(٤) ما هي قيمة الآلة بعد مرور أربع سنوات؟

الحــل:

(١) حيث أن قيمة الآلة (ص) تتناقص بمعدل خطي عبر سنوات عمرها (س)، فإن المعادلة المطلوبة تأخذ الصورة التالية:

ص = أ + ب س

حيث: ص قيمة الآلة بالجنية ، س عمر الآلة بالسنوات.

وهناك نقطتان ($س_١$، $ص_١$) و ($س_٢$، $ص_٢$) هما (صفر، ١٨٠٠٠) و (١، ١٤٥٠٠)، حيث تمثل كل منهما قيمة وعمر الآلة في زمنيْن مختلفيْن (عند الشراء وبعد مرور عام).

وباستخدام هاتيْن النقطتيْن يمكن إيجاد المعادلة على النحو التالي:

$$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$\frac{ص - ١٨٠٠٠}{س - ٠} = \frac{١٤٥٠٠ - ١٨٠٠٠}{١ - ٠}$$

$$\frac{ص - ١٨٠٠٠}{س} = \frac{١٤٥٠٠ - ١٨٠٠٠}{١ - ٠}$$

$$\frac{ص - ١٨٠٠٠}{س} = \frac{-٣٥٠٠}{١} = ٣٥٠٠$$

$$ص - ١٨٠٠٠ = -٣٥٠٠س$$

أي أن المعادلة هي:

$$ص = ١٨٠٠٠ - ٣٥٠٠س$$

(٢) يمكن صياغة المعادلة على الصورة:

$$ص + ٣٥٠٠س = ١٨٠٠٠$$

فإن: $الميل = \frac{- معامل س}{معامل ص} = \frac{-٣٥٠٠}{١} = -٣٥٠٠$

ويمكن إيجاد الميل بطريقة أخرى، حيث أن:

$$الميل = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١٤٥٠٠ - ١٨٠٠٠}{١ - ٠} = -٣٥٠٠$$

وهذا الميل يعنى أن لكل سنة زيادة في عمر الآلة تتناقص قيمتها بمقدار ٣٥٠٠ جنيه.

(٣) الجزء المقطوع من المحور الصادي:

$$ص = ١٨٠٠٠ - ٣٥٠٠ \times صفر = ١٨٠٠٠$$

وهو يشير إلى قيمة الآلة عندما يكون عمرها مساوٍ للصفر، أي عند شرائها جديدة.

الجزء المقطوع من المحور السيني:

$$صفر = ١٨٠٠٠ - ٣٥٠٠س$$

$$٣٥٠٠ س = ١٨٠٠٠$$

$$س = \frac{١٨٠٠٠}{٣٥٠٠} = ٥,١٤$$

وهو يعنى أن القيمة الدفترية للآلة ستصبح صفراً بعد مرور ٥,١٤ سنة.

(٤) قيمة الآلة بعد مرور أربع سنوات = ١٨٠٠٠ – ٣٥٠٠ × ٤

= ١٨٠٠٠ – ١٤٠٠٠ = ٤٠٠٠ جنيه

٥- معدلات الأجور: Wage Rates

مثال (٢٠):

يرغب رجل أعمال مبتدئ في إقامة مشـــروع صـــغير تبلغ تكاليفه الثابتة ٧٢٠ جنيه أسـبوعياً. وحسـب مخطط صـاحب المشـروع فإنه يحتاج إلى ٤٨ سـاعة عمل كل أسـبوع. كما أنه يرغب في أن يُباع مُنتَجه بزيادة قدرها ٤٠٪ عن التكلفة الكلية وأن تكون أرباحه مساوية لتكلفة العمل.

المطلوب:

(١) ما هو معدل الأجر للساعة الذي يجب أن يتحمله؟
(٢) بافتراض أن صاحب المشروع قام بتصنيع ٧٠ وحدة أسبوعياً، ما هو السعر الذي يجب عليه أن يبيعه به؟

الحـل:

(١) بافتراض أن معدل الأجر للساعة (جنيه / ساعة) هو م، فإن: تكلفة العمل = ٤٨م،

التكلفة الكلية (**ت**) = التكلفة الثابتة + تكلفة العمل (التكلفة المتغيرة)

= ٧٢٠ + ٤٨م

ملحوظة: ســوف نلقى المزيد من الضـــوء على مفهوم التكلفة الكلية والتكلفة المتغيرة في موضع لاحق من هذا الكتاب.

وحيث أن صاحب المشروع يرغب في أن تزيد المبيعات عن التكلفة الكلية بمقدار ٤٠٪، فإن:

الإيراد = ١,٤**ت**

وحيث أن: الأرباح = الإيراد – التكلفة الكلية

= ١,٤**ت** – **ت** = ٠,٤**ت**

= ٠,٤(٧٢٠ + ٤٨م)

أي أن: الأرباح = ٢٨٨ + ١٩,٢م

وحيث أن: الأرباح = تكلفة العمل

فإننا نحصل على:

٢٨٨ + ١٩,٢م = ٤٨م ، ∴ ٤٨م – ١٩,٢م = ٢٨٨

٢٨,٨م = ٢٨٨ ، م = ١٠ جنيهات

أي أنه على صـــاحب المشـــروع أن يدفع ١٠ جنيهات عن الســـاعة الواحدة حتى يحقق ما يهدف إليه.

(٢) حيث أن:

الدخل = ١,٤ت = ١,٤(٧٢٠ + ٤٨م)

= ١,٤(٧٢٠ + ٤٨ × ١٠)

= ١,٤ × ١٢٠٠ = ١٦٨٠ جنيه

∴ سعر البيع للوحدة الواحدة = $\frac{١٦٨٠}{٧٠}$ = ٢٤ جنيها

المتباينات

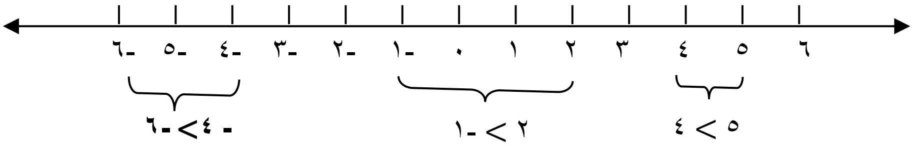
أولاً: المتباينات وأنواعها

تُعبّر المتباينات Inequalities عن الحالة التي يوجد فيها كميتان غير متســـاويتيْن. ويتم ذلك باستخدام رموز المتباينات > و <. وفيما يلي شرح لما تعنيه بعض أنواع المتباينات.

المتباينـــة	المعنـــى
(أ) ٤ < ٦	"٤ أقل من ٦"
(ب) س > ٢٥	"قيمة س أكبر من ٢٥"
(ج) ٣ < ص < ١٠	"قيمة ص أكبر من ٣ وأقل من ١٠"

وكل من هذه المتباينات تعتبر متباينة تامة Strict Inequality، وذلك نظراً لأن كل طرف من طرفي المتبـاينـة لا يمكن أن يســـاوي الآخر. والمتبـاينـة في (أ) هي متبـاينـة مطلقـة Absolute Inequality حيث أنها دائماً صحيحة، إذ أنه من المعروف أن الرقم ٤ هو دائماً أقل من الرقم ٦. وأما المتباينة الشـــرطية Conditional Inequality فهي المتباينة التي تكون صحيحة في ظل شروط معينة. فالمتباينة في (ب) تكون صحيحة فقط عندما تأخذ س قيمة أكبر من ٢٥. فلو كانت س = ٦٠، فإن المتباينة تكون صـــحيحة، وأما إذا كانت س = ١٠ فإنها تكون غير صـــحيحة. وأخيراً فإن المتباينة في (ج) هي ما تســـمى بالمتباينة المزدوجة Double Inequality.

هذا وتُيسِّر المتباينات عملية المقارنة بين الأعداد. ويوضح الشكل التالي خط الأعداد الحقيقية Real Number Line والذي يستخدم في هذا الشأن. فلو كان لدينا عددان حقيقيان أ، ب ، فإنه لو كانت أ < ب، فإن أ سوف تقع على يسار ب على خط الأعداد الحقيقية.



ولو كانت أ < ب، فإن كلًّا من التعبيرات التالية تعبر عن نفس المعنى:

- أ أقل من ب
- ب أكبر من أ
- أ < ب
- ب > أ
- أ - ب < صفر
- ب - أ > صفر

- أ تقع على يسار ب على خط الأعداد الحقيقية.
- ب تقع على يمين أ على خط الأعداد الحقيقة.

وهناك نوع آخر من المتباينات والتي تعبِّر عنها الرموز ≤ و ≥، ومثل هذا النوع من المتباينات يتضمن إمكانية تساوي طرفي المتباينة.

فعلى سبيل المثال:

المتباينة	**المعنى**
(أ) س - ٢ ≤ ١٥	"القيمة س - ٢ أقل من أو تساوي ١٥"
(ب) ص ≥ س	"قيمة ص أكبر من أو تساوي قيمة س"

وسوف نتناول الآن طريقة التعبير عن المتباينة باستخدام علامة الفترة Interval Notation. والفترة هي مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنحصر ما بين عددين أ، ب. ويمكن التعبير عن ذلك النحو التالي:

(أ ، ب) = {س | أ < س < ب}

هذا وتمثل (أ، ب) **فترة مفتوحة Open Interval** حديها (نقطتي بدايتها ونهايتها) هما أ، ب . وأما {س | أ < س < ب} فتشير إلى فترة مفتوحة حديها هما أ، ب وتتكون من أعداد حقيقية س بحيث تزيد قيمة س عن أ وتقل عن ب (ويعبَّر عن كلمة "حيث" الخط العمودي |). ويُقصد بفترة مفتوحة هنا هو أن أ، ب غير مشمولتيْن في الفترة.

وأما **الفترة المقفلة Closed Interval** فهي تلك الفترة التي تشمل قيمـــة كل من الحديْـــن أ، ب. وفي هذه الحالــة يُعبَّر عــن تلك الفترة بالشكل [أ، ب]، وبطريقة أوضح يمكن التعبير عن الفترة المقفلة كما يلي:

[أ، ب] = {س | أ ≤ س ≤ ب}

وهناك **فترة نصف مقفلة Half- Open Interval**، وهي الفترة التي تشمل أحد الحديْن أ أو ب وليس كليهما. وهنا إذا كانت أ فقط مشمولة ضمن الفترة فإنه يمكن كتابة الفترة على النحو التالي:

[أ، ب) = {س | أ ≤ س < ب}

وتسمى هذه الفترة بـ **"فترة مفتوحة من الطرف الأيسر"**.

وعلى الجانب الآخر، إذا كانت ب فقط هي المشمولة ضمن الفترة فإنه يمكن التعبير عن تلك الفترة كما يلي:

(أ، ب] = {س | أ < س ≤ ب}

ويُطلق على هذه الفترة **"فترة مفتوحة من الطرف الأيمن"**:

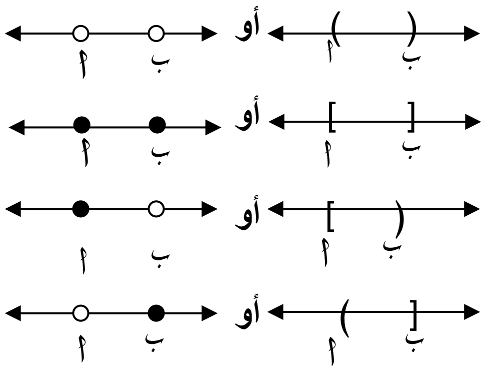
ويوضح الشكل التالي التمثيل البياني لكل نوع من أنواع الفترات المشار إليها سابقاً.

(أ ، ب) = {س | أ < س < ب}

[أ، ب] = {س | أ ≤ س ≤ ب}

[أ، ب) = {س | أ ≤ س < ب}

(أ، ب] = {س | أ < س ≤ ب}



ويلاحَظ من هذا الشــكل أن تمثيل الأنواع المختلفة من الفترات قد اســتخدم فيه الأقواس ( )، [ ]، كما اســتخدم فيه الدوائر المفرَّغة o والدائرة المصــمتة ●. حيث تفيد الدائرة المفرغة بأن الحد غير مشــمول ضــمن الفترة، وأما الدائرة المصــمتة فتشــير إلى أن الحد مشــمول ضمن الفترة.

مثال (٢١):

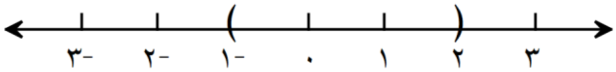
باستخدام الرسم التخطيطي، مثِّل كلا من الفترات التالية:

(أ) (-١، ٢)   (ب) (-٢، ١]   (جـ) [١، ٣]

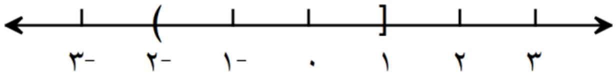
الحـل:

يمكن تمثيل كل من الفترات المشار إليها على النحو التالي:

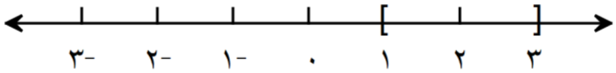
أ) (-١، ٢)



ب) (-٢، ١]



جـ) [١، ٣]



ثانياً: بعض خصائص المتباينات

سـوف نتناول الآن بعض خصـائص المتباينات والتي تفيد فيما بعد في حلها وذلك على النحو التالي:

١- إذا كانت: أ < ب، ب < جـ

فإن: أ < جـ

٢- إذا أضيف أو طُرح مقدار واحد من طرفي متباينـة، فإن المتباينة تظل صحيحة ولا يتغير اتجاهها. أي أن:

إذا كانت: أ < ب فإن:

أ + جـ < ب + جـ ،

أ - جـ < ب – جـ

٣- إذا ضُرب طرفا متباينة في مقدار موجب فإن المتباينة لا يتغير اتجاهها، أي أنه:

إذا كانت أ < ب

فإنه بضرب مقدار موجب جـ في طرفي المتباينة، نجد أن:

أ جـ < ب جـ

٤- إذا تم ضرب طرفي متباينة في مقدار سالب فإن المتباينة يتغير اتجاهها.

فإذا كانت: أ < ب

وكانت جـ مقدار سالباً، فإن: أ جـ > ب جـ

٥- يمكن جمع (أو طرح) المتباينات التي في نفس الاتجاه.

فإذا كانت: أ < ب ، جـ > ء

فإن: أ ± جـ < ب ± ء

ثالثاً: حل المتباينات **Solving Inequalities**

إن حل المتباينات يشبه حل المعادلات. حيث أنه في حل المتباينات نحاول إيجاد مجموعة القيم التي تحقق المتباينـــة. ونوضح الآن طرق حل المتباينات من الدرجـــة الأولى في متغير واحـد مستعينيـن في ذلك بالأمثلة التالية:

مثال (٢٢):

حِل المتباينة: -٢س + ٣ ≥ ٨

الحــل:

كما ســبق وأن ذكرنا فإن طريقة حل المتباينة هي نفس طريقة حل المعادلة، حيث أننا هنا نوجد قيمـة س التي تحقق المتبـاينـة. ويقوم ذلك على محـاولـة وضـــع س في أحد طرفي المتباينة ثم نتعامل بعد ذلك جبرياً وبنفس الطريقة المتبعة في حل المعادلات وذلك لإيجاد قيمة س. وهنـا، وفي حل المتبـاينـة، يوجد فارق واحد يختلف عن ما يكون الوضـــع عليـه في المعادلات. وهو أنه في حالة ضـــرب طرفي المتباينة في مقدار ســـالب فإن اتجاه المتباينة يتغير. أي تتحول العلامة > أو ≤ إلى < أو ≥ على الترتيب، والعكس صحيح.

وفي مثالنا الحالي:

حيث أن: -٢س + ٣ ≥ ٨

بطرح ٣ من الطرفين أو بتحريك المقدار الثابت في اليمين إلى اليسار

فإن: -٢س ≥ ٥

وبضرب طرفي المتباينة في -١ نحصل على:

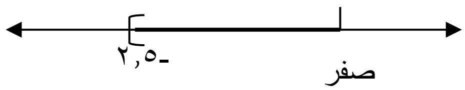
٢س ≤ -٥

لاحظ هنا أن اتجاه المتباينة قد تغير من ≥ إلى ≤ بعد ضرب طرفي المتباينة في -١.

وبقسمة طرفي المتباينة على ٢ نجد أن:

$$\text{س} \leq \frac{-٥}{٢}$$

ويمكن تمثيل ذلك كما يلي:



ملحوظة:

يمكن حل المتباينة أيضـــاً بجعل الحد الذي يحتوي على س في الطرف الأيســـر. وهذا معنـــاه أن المتباينة الأصلية تتحقق عنـــد أية قيمـــة لـــ س تزيد على أو تساوي – ٢,٥. وهذه

القيمة التي تحقق المتباينة الأصـــلية يمكن تمثيلها في مجموعة الأعداد الحقيقية الممثلة بالفترة (- ٥,٢، ∞).

مثال (٢٣):

حل المتباينة:

٣س + ٧ > ٥س – ١

الحــل:

حيث أن: ٣س + ٧ > ٥س – ١

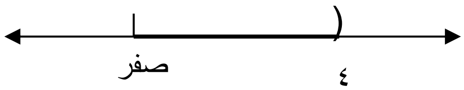
∴ -٢س + ٧ > -١ بطرح ٥س من الطرفيْن

-٢س > -٨ بطرح ٧ من الطرفيْن

وبضرب طرفي المتباينة في –١ نحصل على:

٢س < ٨ ، س < ٤

وهـذا يعنى أن أية قيمــة لــ س تقل عن ٤ تحقق المتباينة الأصلية. وهذا يفيد بدوره بأن الحل يتمثل في مجموعة الأعداد الحقيقية في الفترة (- ∞، ٤). أي أن:



مثال (٢٤):

حِل المتباينة: ص + $\frac{٣}{٤}$ ≥ $\frac{٥ص - ٢}{٣}$ + ١

الحــل:

قبل كل شــيء يجب أن نخلِّص المتباينة من أي كسـور وذلك تبسـيطاً للعمليات الحسـابية، ويتأتَّى ذلك بضرب طرفي المتباينة في ١٢.

أي أن: ١٢(ص + $\frac{٣}{٤}$) ≥ ١٢($\frac{٥ص - ٢}{٣}$ + ١)

١٢ص + ٩ ≥ ٤(٥ص - ٢) + ١٢

١٢ص + ٩ ≥ ٢٠ص - ٨ + ١٢

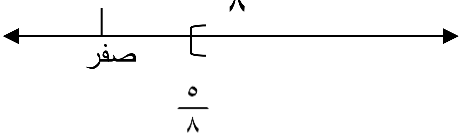
١٢ص + ٩ ≥ ٢٠ص + ٤

بتحريك الحد الذي يحتوي على ص من الطرف الأيســر إلى الأيمن، وبتحريك الحد الثابت من الطرف الأيمن إلى الأيسر، نجد أن:

-٨ص ≥ -٥ ، أي أن $\frac{٨ص}{٨} \le \frac{٥}{٨}$

لاحظ هنا أن اتجاه المتباينة قد تغير نتيجة قسمة الطرفيْن على مقدار سالب.

أي أن: $ص \le \frac{٥}{٨}$ وهذا يعني أن الحل يتمثل في مجموعة الأعداد الحقيقية التي تزيـــد على أو تساوي $\frac{٥}{٨}$، أي الأعداد الحقيقية في الفئة $[\frac{٥}{٨}$ ، $\infty)$.



مثال (٢٥):

حِل المتباينة: $\frac{٥}{س} > ٢$ ، $س \ne$ صفر

الحــل:

حيث أن $س \ne$ صــفر، فإن ذلك معناه أن س يمكن أن تكون أقل من الصــفر (أي تأخذ قيماً ســالبة)، أو تكون أكبر من الصـــفر (أي تأخذ قيماً موجبة). وســوف نأخذ في الاعتبار - عند حل المتباينة - كلاً من هاتيْن الحالتيْن.

١- عندما س < صفر:

حيث أن: $\frac{٥}{س} > ٢$ ، س < صفر

فإن: $\frac{٥}{س} \times \frac{س}{٥} < ٢ \times \frac{س}{٥}$

تغير اتجاه المتباينة نتيجة لضرب طرفيها في مقدار سالب $(\frac{س}{٥})$.

أي أن: ١ < ٠,٤س ، س > ٢,٥

وهنا لا يصبح معقولا أن تكون س > ٢,٥ وفي نفس الوقت س < صفر.

وهذا معناه أنه لا يوجد حل لتلك المتباينة في هذه الحالة. أي أن فئة الأعداد الحقيقية التي تمثل حلول تلك المتباينة هي الفئة الخالية (الفارغة) والتي نرمز لها بالرمز Φ، وهي الفئة التي لا تحتوي على أي عناصــر. وتفيد هذه النتيجة بأنه لا يمكن أن يكون المقدار $\frac{٥}{س}$ أكبر من ٢

وتكـون قيمـــة س سالبـة. وهذا أمر منطقي إذا أن أية قيمة سالبة لـ س سوف تجعل $\frac{٥}{س}$ مقداراً سالباً، أي أقل من الصفر.

٢- عندما س > صفر:

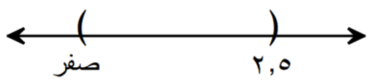
حيث أن: $\frac{٥}{س}$ > ٢ ، س > صفر

فإن: $\frac{٥}{س}$ × $\frac{س}{٥}$ > ٢ × $\frac{س}{٥}$

أي أن: ١ > ٠,٤س ، س < ٢,٥

وحيث أن: س > صفر

فإن الحل الذي يحقق الحالتين: س < ٢,٥، س > صـفر هو أن تكون قيم س محصـورة ما بين صـــفر، ٢,٥. أي أن الحل يتمثل في فئة الأعداد الحقيقية (صـــفر، ٢,٥). وهو ما يمكن تمثيله كالتالي:



رابعاً: تطبيقات اقتصادية (المتباينات من الدرجة الأولى)

قبل أن نتناول بعض التطبيقات الاقتصادية يلزم إلقاء بعض الضوء علـــى مفهوم التكلفة الكلية، وهو مفهوم ســوف نســتخدمه في كثير من التطبيقات الاقتصـــادية في هذا الفصـــل والفصول التالية.

التكلفة الكلية: Total Cost

عادة ما يُعرِّف المحاسـبون والاقتصـــاديون التكلفة الكلية بأنها عبارة عن مجموع نوعيْن من التكلفة، التكلفة الكلية المتغيرة Total Variable Costs والتكلفة الكلية الثابتة Total Fixed Costs. أي أن:

التكلفة الكلية = التكلفة الكلية المتغيرة + التكلفة الكلية الثابتة

هذا وتعتمد التكلفة الكلية المتغيرة على عدد الوحدات المنتَجة بالإضـــافة إلى متغيرات أخرى، وأما التكلفة الثابتة فيتحملها المنتج دون أن يتوقف ذلك على كمية الإنتاج. وعلى سبيل المثال، فإن دالة التكلفة: **ت(ك) = ٠,٥ك + ١٢٠٠٠** ، حيث ك هي عدد الوحدات المنتَجة توضـح

أن هناك تكلفة متغيرة مُعبَّراً عنها بالحد ٠,٥ك، أي أن تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من المنتَج هي ٠,٥، كما توضح الدالة أن هناك تكلفة ثابتة مقدارها ١٢٠٠٠، وهي تكلفة يتحملها المنتِج حتى لو لم يقم بإنتاج أي وحدات.

ولعله من الملائم هنا أن نوضح بعض العلاقات الاقتصادية الهامة والتي ستكون موضع تطبيق في أجزاء مختلفة من هذا الكتاب.

الإيراد الكلي = سعر الوحدة × عدد الوحدات المُباعة

الأرباح الكلية = الإيراد الكلي - التكلفة الكلية

والآن سوف نتناول بعض التطبيقات الاقتصادية للمتباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد وذلك بشأن اتخاذ القرارات في المجالات الاقتصادية التالية:

الأرباح - التصنيع - الإنتاج – الاستثمار

١- أرباح صاحب المصنع: Manufacturer's Profit

مثال (٢٦):

يبيع صاحب مصنع مُنتَجه بسعر ٦٠ جنيهاً للوحدة. فإذا كان إنتاج الوحدة الواحدة من هذا المنتَج يكلف ٤٠ جنيهاً للمواد الخام والعمل. هذا بالإضافة إلى تكاليف ثابتة مقدارها ٣٠٠٠ جنيه في الأسبوع، وذلك حتى يتمكن صاحب المصنع من تشغيل مصنعه.

المطلوب:

إيجاد عدد الوحدات التي يجب أن ينتجها صاحب المصنع ويبيعها حتى يحقق ارباحاً لا تقل عن ١٠٠٠ جنيه كل أسبوع.

الحـل:

لنفترض أن عدد الوحدات التي يجب أن تُنتَج وتُباع يساوي ك وحدة في الأسبوع. فإن التكلفة الكلية لإنتاج ك وحدة تتمثل في التكلفة الثابتة ومقدارها ٣٠٠٠ جنيه بالإضافة إلى التكلفة المتغيرة ومقدارها ٤٠ جنيهاً للوحدة الواحدة. أي أن:

التكلفة الكلية = ٤٠ك + ٣٠٠٠ جنيه

وحيث أن الإيراد يتحقق من بيع ك وحدة بسعر ٦٠ جنيهاً للوحدة الواحدة.

فإن: الإيراد = ٦٠ك

لذلك نجد الأرباح، والتي تتمثل في الفرق ما بين الإيراد والتكلفة، تساوي:

الأرباح = الإيراد - التكلفة

= ٦٠ك - (٤٠ك + ٣٠٠٠) = ٢٠ك - ٣٠٠٠

وحيث أننا بصدد تحقيق أرباح لا تقل عن ١٠٠٠ جنيه أسبوعياً، فـــإن:

الأرباح ≥ ١٠٠٠

أي أن: ٢٠ك - ٣٠٠٠ ≥ ١٠٠٠

ومنها نحصل على:

٢٠ك ≥ ٤٠٠٠ ، ك ≥ ٢٠٠

وهكذا يجب على صاحب المصنع أن ينتج على الأقل ٢٠٠ وحدة من منتَجه وذلك حتى يحقق أرباحاً أســـبوعية لا تقل عن ١٠٠٠ جنيه. ويلاحَظ هنا أنه كلما زاد عدد الوحدات عن ٢٠٠ وحدة كلما أخذت الأرباح الأسبوعية في الزيادة عن ١٠٠٠ جنيه.

٢- قرار التصنيع: Manufacturing Decision

مثال (٢٧):

ترغب إدارة أحد المصانع في إنتاج إحدى قطع الغيار التي تستخدمها في مصانعها وتقوم باسـتيرادها من الخارج بسـعر١,١جنيه للقطعة الواحدة. فإذا كان إنتاج المصـنع لقطع الغيار سـوف يكلف إدارة المصـنع ٨٠٠ جنيه كل شـهر، كما أن تكلفة المواد الخام والعمل سـوف تبلغ ٦٠ قرشاً للوحدة.

المطلوب:

ما هو عدد قطع الغيار التي يجب أن يســـتخدمها المصـــنع كل شـــهر والذي يبرر قيام المصنع بتصنيع قطع الغيار بنفسه؟

الحــل:

لنفترض أن عدد قطع الغيار المستخدمة شـهرياً بواسطة المصـنع هو ك. وعلى ذلك فإن تكلفة شـراء قطع الغيار بسـعر ١,١جنيه للقطعة الواحدة هي ١,١ جنيه. كما أن تكلفة تصـنيع ك قطعة غيار عبارة عن ٨٠٠ جنيه تكاليف ثابتة شـــهرياً بالإضـــافة إلى تكلفة متغيرة مقدارها ٠,٦ك.

وهكذا فإن التكلفة الكلية لتصنيع ك قطعة غيار هي:

٠,٦ك + ٨٠٠

وسـوف يكون هناك مبرر منطقي للمصـنع للقيام بتصـنيع قطع الغيار بنفســه إذا زادت تكلفة شراء قطع الغيار على تكلفة إنتاجها.

أي أن: تكلفة الشراء > تكلفة التصنيع

وهذا يعنى أن:

١,١ك > ٠,٦ك + ٨٠٠

٠,٥ك > ٨٠٠ ، ك > ١٦٠٠

إذاً يجب أن يســـتخدم المصـــنع ١٦٠٠ قطعة غيار على الأقل حتى يكون ذلك مبرراً لقيامه بتصنيع تلك القطع.

٣- قرار الإنتاج: Production Decision

مثال (٢٨):

يبيع صـاحب مصـنع مُنتَجه بسـعر ٣٠ جنيهاً للوحدة الواحدة. فإذا كانت التكاليف الثابتة للإنتاج تسـاوي ١٢٠٠٠ جنيه شـهرياً. وبالإضـافة إلى ذلك، فإن إنتاج الوحدة الواحدة يكلف صاحب المصنع ٢٢ جنيهاً.

المطلوب:

ما هو عدد الوحدات الذي يجب أن ينتجه صــاحب المصــنع ويبيعه شــهرياً وذلك حتى يحقق أرباحاً؟

الحـل:

إذا افترضنا أن عـدد الوحـدات الذي يجب أن يُنتج ويُباع شهريـاً هو ك وحدة.

الدخل = ٣٠ك

تكلفة الإنتاج = ٢٢ك + ١٢٠٠٠

وحتى يحقق صاحب المصنع أرباحاً، فإن الدخل يجب أن يزيد عن تكلفة الإنتاج. أي أن:

٣٠ك > ٢٢ك + ١٢٠٠٠

٨ك > ١٢٠٠٠

∴ ك > ١٥٠٠

وهكذا فإن على صاحب المصنع أن ينتج أكثر من ١٥٠٠ وحدة شهرياً حتى يتمكن من تحقيق أرباح من جَّراء إنتاجه.

٤- قرار الاستثمار: Investment Decision

مثال (٢٩):

رجل أعمال لديه مبلغ ٦٠٠٠٠ جنيه يرغب في اســتثماره. ويســتطيع رجل الأعمال أن يستثمر هذا المبلغ في سندات الحكومة بعائد يبلغ ٨٪. كما أن بمقدوره استثمار هذا المبلغ في شــراء أســهم بعض الشــركات وذلك بعائد يبلغ ١٠٪ ولكن بمخاطرة أكبر. فإذا رغب رجل الأعمال في استثمار هذا المبلغ في سندات الحكومة والأسهم معاً.

المطلوب:

ما هو الحد الأدنى للمبلغ الذي يجب أن يستثمره رجل الأعمال في أسهم الشركات وذلك حتى يحقق دخلاً سنوياً يفوق ذلك الدخل الذي يحصل عليه فيما لو أودعه في أحد البنوك كوديعة بفائدة ٩ $\frac{١}{٦}$٪ ؟

الحـل:

لنفترض أن المبلغ المستثمر في شراء الأسهم هو س جنيه. فإن المبلغ المستثمَر في سندات الحكومة يساوي (٦٠٠٠٠ - س) جنيه.

∴ العائد من الاستثمار = ١,٠س + ٠,٠٨(٦٠٠٠٠ - س)

الفائدة على الوديعة = ٦٠٠٠٠ × $\frac{٩\frac{١}{٦}}{١٠٠}$

= ٦٠٠٠٠ × $\frac{٥٥}{٦٠٠}$ = ٥٥٠٠ جنيه

وحتى تحقق الاستثمارات عائداً يفوق الفائدة عن الوديعة، فإن:

١,٠س + ٠,٠٨(٦٠٠٠٠ - س) > ٥٥٠٠

١,٠س + ٤٨٠٠ - ٠,٠٨س > ٥٥٠٠

٠,٠٢س > ٧٠٠ ، س < ٣٥٠٠٠

وهذا يعنى أنه على رجل الأعمال أن يستثمر مبلغاً يزيد عن ٣٥٠٠٠ جنيه في شراء أسهم الشركات، بينما يستثمر المبلغ المتبقي في شراء سندات الحكومة وذلك حتى يتمكن من تحقيق دخل سنوي يزيد على ٥٥٠٠ جنيه، وهو الدخل الذي يحصل عليه فيما لو أودع مبلغه في البنك كوديعة.

خامساً: المتباينات من الدرجة الثانية في متغير واحد

Quadratic Inequalities in One Variable

تأخذ المتباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد، وليكن س، الصيغة التالية:

أس٢ + ب س + جـ < صفر (أو > صفر)

أو أس٢ + ب س + جـ ≥ صفر (أو ≤ صفر)

حيث: أ ب،، جـ ثوابت ، أ ≠ صفر

ومرةً ثانية، فإنه لحل المتباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد، نكون بصدد إيجاد قيم هذا

المتغير والتي تحقق المتباينة. ويمكن حل تلك المتباينة إذا أمكن تحليل الكمية المربعة إلى عوامل أولية كل منها من الدرجة الأولى.

ويوضح ذلك المثال التالي:

مثال (٣٠):

حِل المتباينة: $٣ص^{٢} \leq ٤ - ١١ص$

الحـل:

حيث أن: $٣ص^{٢} \leq ٤ - ١١ص$

فـإن $٣ص^{٢} + ١١ص - ٤ \leq$ صفر

أي أن: (٣ص – ١)(ص + ٤) ≤ صفر

هذا والمقدار (٣ص – ١)(ص + ٤) ما هو إلا عبارة عن حاصل ضرب العامليْن (٣ص – ١) و (ص + ٤) في بعضهما. ومن المفروض أن يكون حاصل الضرب إما مساوٍ للصفر أو مقداراً موجباً. وسوف يكون حاصل الضرب موجباً في حالتيْن هما:

أ - عندما يكون كل من العامليْن موجباً.

ب- عندما يكون كل من العامليْن سالباً.

ويوضح الشكل التالي إشارات كل من العامليْن (٣ص – ١) و (ص + ٤):

−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	(٣ص - ١)
−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	(ص + ٤)

وهنا تلزم الإشارة إلى أن: (٣ص – ١) > صفر عندما ص > $\frac{١}{٣}$.

كما أن (٣ص – ١) < صفر عندما ـس > $\frac{١}{٣}$. ويمكن استنتاج ذلك بسهولة من الشكل السابق.

وأما بالنسبة للعامل (ص + ٤) فنجد أن: (ص + ٤) > صفر عندما ص > -٤، (ص + ٤) < صفر عندما (ص < - ٤). ومن الشكل السابق أيضاً يمكننا بسهولة أن نستنتج أن كلا العامليْن يكون موجباً عندما ص > $\frac{١}{٣}$، في حين يكون كلاهما سالباً عندما ص < -٤. وفي أي من الحالتيْن يكون حاصل ضربهما موجباً. وهكذا فإن:

(٣ص – ١)(ص + ٤) > صفر

عندما ص > ١/٣ أو ص < -٤

وفي هذا المثال فإننا معنيون بالمتباينة:

(٣ص – ١)(ص + ٤) ≤ صفر

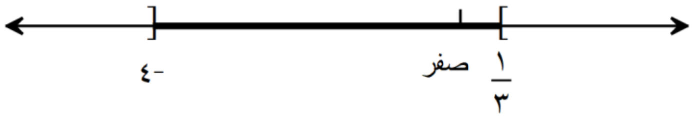
لذلك فإن حل المتباينة يشمل أيضا قيم ص التي تحقق:

(٣ص – ١)(ص + ٤) = صفر

أي أن الحديْن (نقطتي النهاية) ص = ١/٣ ، ص = -٤ مشمولان ضمن فترة الأعداد الحقيقية التي تمثل حلاً للمعادلة. وعلى ذلك فإن حل هذه المتباينة هو:

ص ≤ ١/٣ ، ص ≥ - ٤

وهو ما يوضحه الشكل التالي:



مثال (٣١):

حِل المتباينة:

٢س^{٢} – ٣س – ٢ < صفر

الحــل:

٢س^{٢} – ٣س – ٢ < صفر

(٢س + ١)(س – ٢) < صفر

وهذا يمكن أن يتحقق في حالتيْن:

أ- (٢س + ١) < صفر أو (س – ٢) > صفر

وهذا يؤدى إلى:

٢س < -١ و س > ٢

أي أن: س < ١/٢ و س > ٢

وهذا غير ممكن منطقياً، أي لا يوجد حل للمتباينة في هذه الحالة.

ب- (٢س + ١) > صفر و (س – ٢) < صفر

مما يعنى أن:

٢س > -١ ، س < ٢

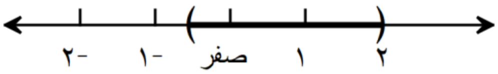
أي أن:

س > - $\frac{١}{٢}$ ، س < ٢

وهذا أمر ممكن.

أي أن حل المتباينة يتمثل في: - $\frac{١}{٢}$ < س < ٢

والذي يمثله الشكل:



سادساً: تطبيقات اقتصادية (المتباينات من الدرجة الثانية)

يمكـــــن اســتخدام المتباينات من الدرجة الثانية في متغير واحد في كثير من التطبيقات الاقتصــادية. ولعل الأمثلة التالية تلقى الضــوء على هذا الأمر فيما يتعلق باتخاذ القرارات في بعض الأمور الاقتصادية ذات الأهمية مثل:

الإنتاج والربحية – دخل صاحب المصنع – قرار التسعير – سياسات التسعير – الدخل من ضريبة المبيعات.

١- الإنتاج والربحية: Production and Profitability

مثال (٣٢):

إذا كانت مبيعات ك وحدة من منتَج معين عند ســـعر مقداره س جنيه للوحدة الواحدة تحددها العلاقة: س = ٢٠٠ – ٣ك. فإذا كانت تكاليف إنتاج ك وحدة من نفس المنتَج هي: ت = (٦٥٠ + ٥ك) جنيه.

المطلوب:

ما هو عدد الوحدات الذي يجب أن يُنتَج ويباع من هذه الســـلعة وذلك حتى يتم تحقيق أرباح شهرية مقدارها ٢٥٠٠ جنيه على الأقل؟

الحـل:

مقدار الإيراد الذي يمكن تحقيقه من بيع ك وحدة بسعر س جنيه للوحدة الواحدة هو:

الدخل = س × ك = سك

= ك(٢٠٠ – ٣ك)

أي أن: الإيراد = ٢٠٠ك – ٣ك^{٢}

وحيث أن تكلفة تصنيع ك وحدة هي:

التكلفة = ٦٥٠ + ٥ك

فإن الأرباح الناتجة عن بيع ك وحدة بسعر س جنيه للوحدة الواحدة تساوي:

الأرباح = الإيراد – التكلفة

= ٢٠٠ك – ٣ك^{٢} – (٦٥٠ + ٥ك)

= ١٩٥ك – ٣ك^{٢} – ٦٥٠

وحيث أن الأرباح المراد تحقيقها هو ٢٥٠٠ جنيه على الأقل شهرياً فإن:

الأرباح ≥ ٢٥٠٠

أو   ١٩٥ك – ٣ك^{٢} – ٦٥٠ ≥ ٢٥٠٠

أي أن   -٣ك^{٢} + ١٩٥ك – ٣١٥٠ ≥ صفر

وبقسمة طرفي المتباينة على – ٣ نحصل على:

ك^{٢} – ٦٥ك + ١٠٥٠ ≤ صفر   لاحظ تغير اتجاه المتباينة

(ك – ٣٠)(ك – ٣٥) ≤ صفر

هذا وحاصل ضرب العامليْن (ك – ٣٠) و (ك – ٣٥) يقل عن الصفر في هاتين الحالتيْن:

أ- (ك – ٣٠) > صفر و (ك – ٣٥) < صفر

ب- (ك – ٣٠) < صفر و (ك – ٣٥) > صفر

في الحالة (أ):

ك > ٣٠ و ك < ٣٥

وهو ما يعنى أن: ٣٠ < ك < ٣٥

في الحالة **(ب)**:

ك < ٣٠ و ك > ٣٥

وهو ما لا يتفق مع المنطق الرياضي، أي لا يوجد حل للمتباينة في هذه الحالة.

وحيث أننا معنيون أيضاً بالحالة التي يساوي فيها حاصل ضرب العامليْن الصفر. فإن ذلك معناه أن: ك = ٣٠ و ك = ٣٥، وأن هاتيْن النقطتيْن مشمولتان أيضاً ضمن فئة الأعداد الحقيقية التي تمثل حلاً للمتباينة. أي أن:

٣٠ ≤ ك ≤ ٣٥

وهكذا فإنه لتحقيق أرباح شهرية مقدارها ٢٥٠٠ جنيه، يجب على صاحب المصنع أن ينتج شهرياً من ٣٠ إلى ٣٥ وحدة.

٢- إيراد صاحب المصنع: Manufacturer's Revenue

مثال (٣٣):

يستطيع صاحب مصنع ما أن يبيع شهرياً ك وحدة من أحد منتَجاته بسعر س جنيه للوحدة الواحدة. فإذا كانت العلاقة بين عدد الوحدات المُباعة وسعر الوحدة تحكمها الصيغة:
س = ٦٠٠ – ٥ك.

المطلوب:

أولاً: إيجاد عدد الوحدات التي يجب أن يبيعها صاحب المصنع حتى يحقق إيراداً شهرياً يبلغ ١٨٠٠٠ كحد أدنى؟

ثانياً: تحديد سعر الوحدة الذي يحقق الإيراد المشار إليه في "أولاً".

الحـل:

أولاً: حيث أن: الإيراد = عدد الوحدات المباعة × سعر الوحدة

∴ الإيراد = ك س = ك (٦٠٠ – ٥ك)

= ٦٠٠ك – ٥ك^{٢}

وحيث أن الإيراد الشهري لا يجب أن يقل عن ١٨٠٠٠ جنيه، فإن:

٦٠٠ك – ٥ك^{٢} $\geq$ ١٨٠٠٠٠

-٥ك^{٢} + ٦٠٠ك – ١٨٠٠٠ $\geq$ صفر

بقسمة طرفي المتباينة على – ٥:

ك^{٢} – ١٢٠ك + ٣٦٠٠ $\leq$ صفر   لاحظ تغير اتجاه المتباينة

(ك – ٦٠)^{٢} $\leq$ صفر

وحيث أن (ك – ٦٠)^{٢} مربع كامل، فإن قيمته لا يمكن أن تقل بحال من الأحوال عن الصفر.

ويصبح الحل هو:

(ك – ٦٠)^{٢} = صفر

ومنها نجد أن: ك = ٦٠

أي أنه يجب على صاحب المصنع أن يبيع ٦٠ وحدة شهرياً وذلك حتى يحقق إيراداً شهرياً لا يقل عن ١٨٠٠٠ جنيه.

ثانياً: وجدنا في "أولا" أن: $ك س \leq ١٨٠٠٠$

وحيث أن: $ك = ٦٠$

$\therefore \; ٦٠ س \leq ١٨٠٠٠$

أي أن: $س \leq ٣٠٠$

وهذا يعنى أنه يجب على صاحب المصنع أن يبيع منتَجه بسعر ٣٠٠ جنيه على الأقل للوحدة، وذلك إذا ما رغب في تحقيق إيراد شهري مقداره ١٨٠٠٠ جنيه كحد أدنى.

حل آخر:

يمكن حل "ثانياً" بطريقة أخرى على النحو التالي:

حيث أن: $س = ٦٠٠ - ٥ك$

فإنه يمكن إثبات أن:

$$ك = ١٢٠ - \frac{س}{٥}$$

وبما أن الإيراد هو عبارة عن حاصل ضرب عدد الوحدات المُباعة في سعر بيع الوحدة، فإننا نجد أن:

$$\text{الإيراد} = س ك = س(١٢٠ - \frac{س}{٥})$$

$$= ١٢٠ س - \frac{س^{٢}}{٥}$$

وحيث أن الإيراد المطلوب هو ١٨٠٠٠ جنيه على الأقل شهرياً، فإن:

$$١٢٠ س - \frac{س^{٢}}{٥} \leq ١٨٠٠٠$$

$٦٠٠ س - س^{٢} \leq ٩٠٠٠٠$ بضرب طرفي المتباينة في ٥

$\therefore \; - س^{٢} + ٦٠٠ س - ٩٠٠٠٠ \leq \text{صفر}$

بضرب طرفي المتباينة في -١ نحصل على:

$س^{٢} - ٦٠٠ س + ٩٠٠٠٠ \geq \text{صفر}$

$(س - ٣٠٠)^{٢} \geq \text{صفر}$

وكما سـبق في "أولاً" فإننا نجد أن حل المتباينة يتمثل في $س = ٣٠٠$ ، وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من قبل.

٣- قرار التسعير: Pricing Decision

مثال (٣٤):

يستطيع صاحب مصنع أن يبيع ك وحدة من منتَجه بسعر س جنيه للوحدة الواحدة، حيث: س = ٢٠٠ – ك. فلو كانت تكلفة إنتاج ك وحدة من هذا المنتَج هي (٢٨٠٠ + ٤٥ك) جنيه.

المطلوب:

ما هو سعر الوحدة س الذي يجب أن يبيع به صاحب المصنع منتَجه وذلك حتى يحقق أرباحاً أسبوعية مقدارها ٣٢٠٠ جنيه على الأقل؟

الحل:

حيث أن: س = ٢٠٠ – ك

∴ ك = ٢٠٠ – س

وبما أن: الإيراد = سعر بيع الوحدة × عدد الوحدات المباعة

= س ك = س(٢٠٠ – س)

= ٢٠٠س – س^{٢}

وحيث أن:

الأرباح = الإيراد – التكلفة

= ٢٠٠س – س^{٢} – (٢٨٠٠ + ٤٥ك)

= ٢٠٠س – س^{٢} – ٢٨٠٠ – ٤٥ك

= ٢٠٠س – س^{٢} – ٢٨٠٠ – ٤٥(٢٠٠ – س)

= ٢٠٠س – س^{٢} – ٢٨٠٠ – ٩٠٠٠ + ٤٥س

= ٢٤٥س – س^{٢} – ١١٨٠٠

ولكى يحقق صاحب المصنع أرباحاً أسبوعية مقدارها ٣٢٠٠ جنيه على الأقل، فإنه يجب أن:

٢٤٥س – س^{٢} – ١١٨٠٠ ≤ ٣٢٠٠

-س^{٢} + ٢٤٥س – ١٥٠٠٠ ≤ صفر

بضرب طرفي المتباينة في –١ نحصل على:

س^{٢} – ٢٤٥س + ١٥٠٠٠ ≥ صفر

(س – ١٢٠)(س – ١٢٥) ≥ صفر

وباتباع نفس الأسلوب المستخدم في مثالي (١١)، (١٢)، نجد أن:

س ≤ ١٢٠ ، س ≥ ١٢٥

أي أن: ١٢٠ ≤ س ≤ ١٢٥

وهذا يفيد بأنه على صاحب المصنع أن يبيع منتَجه بسعر يتراوح من ١٢٠ إلى ١٢٥ جنيهاً وذلك حتى يحقق أرباحاً مقدارها ٣٢٠٠ جنيه على الأقل أسبوعياً.

حل آخر:

يمكن حل هذا المثال بطريقة أخرى مبنية على تحديد عدد الوحدات التي يجب بيعها لتحقيق الربح المطلوب. وسوف يتحقق ذلك بضرب ك ×س للحصول على الدخل. أي: ك(٢٠٠ – ك) كنقطة بداية لحل المثال. وفي هذه الحالة يكون الدخل مساوياً ٢٠٠ك – ٢٠٠ك^{٢}. وعلى القارئ أن يثبت حينئذ أنه لكي تبلغ الأرباح ٣٢٠٠ جنيه على الأقل شهرياً، فإنه يجب أن:

ك^{٢} – ١٥٥ك + ٦٠٠٠ ≥ صفر

وسوف يجد القارئ أن حل المتباينة هو:

٧٥ ≤ ك ≤ ٨٠

وبالتعويض عن قيمة ك في الدالة التي توضح العلاقة بين ك و س وهي س = ٢٠٠ – ك

نجد أن: ١٢٠ ≤ س ≤ ١٢٥

وهي نفس النتيجة التي توصلنا إليها من قبل.

٤- سياسة التسعير: Pricing Policy

مثال (٣٥):

وجد مدير أحد المتاجر أنه أمام كمية من البرتقال يجب أن تُباع وبسرعة وإلا تعرضت للتلف مما يحقق خسائر له. فإذا كان المدير يعرف من سابق خبرته أنه إذا عرض البرتقال بسعر س قرشاً للكيلو جرام الواحد فإنه يمكنه بيع ك كيلو جرام، حيث:

ك = ١٠٠٠ – ٢٠س.

المطلوب:

ما هو السعر الذي يجب أن يبيع به مدير المتجر كيلو البرتقال الواحد وذلك حتى يحقق إيراداً يزيد على ١٢٠ جنيها.

الحـل:

حيث أن: الإيراد = سعر بيع الكيلو جرام × الكمية المباعة بالكيلو جرام

= س × ك = س ك = س(١٠٠٠ – ٢٠س)

$= ١٠٠٠\text{س} - ٢٠٠\text{س}^{٢}$

ولكـى يحقـق مدير المتجر إيراداً مقداره ١٢٠ جنيها على الأقل، فإنه يجب أن:

$١٠٠٠\text{س} - ٢٠\text{س}^{٢} > ١٢٠٠٠$ بعد تحويل الجنيهات إلى قروش

$-٢٠\text{س}^{٢} + ١٠٠٠\text{س} - ١٢٠٠٠ >$ صفر

بضرب طرفي المتباينة في –١ نحصل على:

$٢٠\text{س}^{٢} - ١٠٠٠\text{س} + ١٢٠٠٠ <$ صفر

بقسمة طرفي المتباينة على ٢٠ نجد أن:

$\text{س}^{٢} - ٥٠\text{س} + ٦٠٠ <$ صفر

$(\text{س} - ٢٠)(\text{س} - ٣٠) <$ صفر

أ- إذا كانت: $(\text{س} - ٢٠) >$ صفر و $(\text{س} - ٣٠) <$ صفر

فإن: $\text{س} > ٢٠$ و $\text{س} < ٣٠$

أي أن حل المتباينة في هذه الحالة هو: $٢٠ < \text{س} < ٣٠$

ب- إذا كان: $(\text{س} - ٢٠) <$ صفر و $(\text{س} - ٣٠) >$ صفر

فإن: $\text{س} < ٢٠$ و $\text{س} > ٣٠$

وهو ما لا يتفق مع المنطق الرياضي، أي لا يوجد حل في هذه الحالة.

إذاً الحل النهائي هو: $٢٠ < \text{س} < ٣٠$

وهذا يفيد بأنه على مدير المتجر أن يبيع البرتقال بسـعر يزيد على ٢٠ قرشـاً ويقل عن ٣٠ قرشاً وذلك حتى يحقق إيراداً من بيعه لا يقل عن ١٢٠ جنيهاً.

٥- الدخل الحكومي من ضريبة المبيعات: Revenue from Sales Tax

مثال (٣٦):

تُباع سـلعة ترفيهية بمبلغ ١٠٠٠ جنيه للوحدة على مسـتوى بلد من البلدان ككل. وتبلغ كمية المبيعات من هذه السلعة ٢٠٠٠٠ وحدة كل عام. وتبحث حكومة هذا البلد فرض ضريبة على مبيعات هذه السـلعة. علماً بأنه لو وصـل مسـتوى الضـريبة المفروضـة على الوحدة الواحدة من هذه السـلعة إلى س٪ ، فإن كمية المبيعات سـوف تنخفض بمقدار ٥٠٠س في السنة.

المطلوب:

ما هو مستوى الضريبة س والذي يجب أن تفرضه الحكومة على مبيعات تلك السلعة حتى يجلب عليها دخلاً من وراء هذه الضريبة مقداره ١,٩٢ مليون جنيه على الأقل سنوياً؟

الحـل:

مقدار الضريبة على كل وحدة من السلعة = $\frac{\text{س}}{١٠٠}$ × ١٠٠٠ = ١٠س

كمية المبيعات بعد فرض الضريبـة = ٢٠٠٠٠ – ٥٠٠س

∴ مقدار المتحصَّل من فرض الضريبة = ١٠س(٢٠٠٠٠ – ٥٠٠س)

= ٢٠٠٠٠٠س – ٥٠٠٠س^{٢}

وحيث أن الحكومة تهدف من وراء فرض ضريبة على مبيعات تلك السلعة إلى تحصيل دخل مقداره ١,٩٢ مليون جنيه على الأقل سنوياً، فإنه يجب أن:

٢٠٠٠٠٠س – ٥٠٠٠س^{٢} ≤ ١٩٢٠٠٠٠

٤٠س – س^{٢} ≤ ٣٨٤

- س^{٢} + ٤٠س – ٣٨٤ ≤ صفر

س^{٢} – ٤٠س + ٣٨٤ ≥ صفر

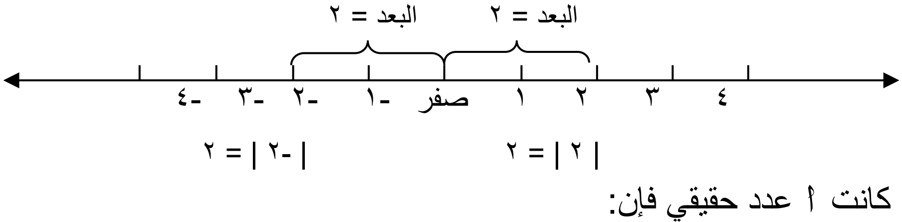
(س – ٢٤)(س – ١٦) ≥ صفر

وبحـل هذه المتباينة متبعين في ذلك الأسلوب السابق شرحه في المثالَيْن (١٠)، (١١) نجد أن: ١٦ ≥ س ≥ ٢٤.

أي أنه على الحكومة أن تفرض ضريبة على مبيعات هذه السلعة بواقع ١٦٪ إلى ٢٤٪ من سعر السلعة وذلك حتى تتمكن من الحصول على دخل من هذه الضريبة لا يقل عن ١,٩٢ مليون جنيه سنوياً.

سابعاً: القيم المطلقة Absolute Values

القيمة المطلقة لعدد حقيقي هو بُعد هذا العدد عن موقع الصفر على خط الأعداد الحقيقية، وهذا البعد يزيد عن الصفر أو يساويه. والقيمة المطلقة للعدد أ يرمز لها بالرمز |أ|. ووفقاً لهذا المفهوم فإن: |٢| = ٢ و |-٢| = ٢. ويوضح ذلك الشكل التالي:



هذا وإذا كانت أ عدد حقيقي فإن:

$$|أ| = \begin{cases} أ & \text{إذا كانت } أ \geq \text{صفر} \\ -أ & \text{إذا كانت } أ < \text{صفر} \end{cases}$$

مع ملاحظة أن القيمة المطلقة للعدد صفر تساوي الصفر. ويمكن التفكير في القيمة المطلقة من منطلق أنها مقدار العدد بغض النظر عن إشارته موجباً كان أم سالباً.

بعض خصائص القيم المطلقة: Some Properties of Absolute Values

سوف نتناول فيما يلي بعض خصائص القيم المطلقة للأعداد الحقيقية وذلك على النحو التالي:

١- القيمة المطلقة لأي عدد أكبر أو تساوي الصفر.

أي أن: $\boxed{|أ| \geq \text{صفر}}$

وعلى سبيل المثال:

$$|-٤| = ٤ \geq \text{صفر} \quad ، \quad |٨| = ٨ \geq \text{صفر}،$$

$$|\text{صفر}| = \text{صفر} \geq \text{صفر}$$

٢- القيمة المطلقة لأي عدد هي مقدار هذا العدد بغض النظر عن إشارته:

أي أن:

$\boxed{|أ| = |-أ| = أ}$

مثال: $|-٦| = |٦| = ٦$

٣- إذا كانت: $|أ| = ب$ ، حيث $ب \geq \text{صفر}$ فإن: $أ = ب$ أو $أ = -ب$

وكذلك إذا كانت: $|أ| = |ب|$ فإن: $أ = ب$ أو $أ = -ب$

مثال (٣٧):

إذا كانت: $|٣س - ٥| = ٤$ ، احسب قيمة س.

الحـل:

وفقاً لمفهوم القيمة المطلقة فإن:

$٣س - ٥ = ٤$ أو $٣س - ٥ = -٤$

حيث أن القيمة المطلقة لـ ٣س – ٥ تساوي ٤ في الحالتيْن:

وحيث أن: $٣س - ٥ = ٤$

$\therefore ٣س = ٥ + ٤ = ٩$ ، $س = ٣$

وكذلـك: $٣س - ٥ = -٤$ ، $٣س = ٥ - ٤ = ١$

$\therefore$ $س = \frac{١}{٣}$

وهكذا فإن كل من قيمتي س: ٣ ، $\frac{١}{٣}$ تحقق المعادلة المعطاة.

-٤ $\boxed{|س - ص| = |ص - س|}$

مثال (٣٨):

أجب عن المطلوب في مثال (٣٧) باستخدام الخاصية الحالية.

الحـل:

حيث أن: $|٣س - ٥| = ٤$

$\therefore$ $٣س - ٥ = ٤$ و $٥ - ٣س = ٤$

أي أن: $س = ٣$ و $س = \frac{١}{٣}$

وهي نفس النتيجة السابقة.

-٥ القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي هي عبارة عن الجذر التربيعي لمربع هذا العدد.

أي أن:

$$\boxed{|س| = \sqrt{س^٢}}$$

وذلك لأن المقصـــود بـالجذر التربيعي هو الجذر التربيعي غير الســــالب للمقدار. وعلى سبيل المثال:

$$|٨| = \sqrt{٨^٢}$$

-٦ القيمة المطلقة لحاصل ضرب عددين تساوي حاصل ضرب القيمة المطلقة للعدد الأول في القيمة المطلقة للعدد الثاني.

أي أن: $\boxed{|أب| = |أ| \times |ب|}$

وكذلك: $\boxed{\left|\frac{أ}{ب}\right| = \frac{|أ|}{|ب|}}$

مثال (٣٩):

إذا كانت: أ = ٢ ، ب = -٣

أثبت أن: (i) |أب| = |أ|×|ب| (ii) $\left|\frac{أ}{ب}\right| = \frac{|أ|}{|ب|}$

الحـل:

(i) أب = ٢(-٣) = -٦ ، |أب| = |-٦| = ٦ ،

|أ|.|ب| = |٢|×|-٣| = ٢ × ٣ = ٦

أي أن: |أب| = |أ|×|ب|

(ii) $\left|\frac{أ}{ب}\right| = \left|\frac{٢}{-٣}\right| = \frac{٢}{٣}$

$\frac{|أ|}{|ب|} = \frac{|٢|}{|-٣|} = \frac{٢}{٣}$

أي أن: $\left|\frac{أ}{ب}\right| = \frac{|أ|}{|ب|}$

٧- القيمة المطلقة لحاصل جمع مقدارين أقل من أو تساوي حاصل جمع القيم المطلقة للمقدارين.

أي أن:

$\boxed{|أ + ب| \le |أ| + |ب|}$

مثال (٤٠):

أثبت صحة الخاصية رقم (٧) في حالة:

(i) أ = ٢ ، ب = ٥

(ii) أ = ١٠ ، ب = - ٤

الحـل:

(i) |أ + ب| = |٢ + ٥| = |٧| = ٧

|أ| + |ب| = |٢| + |٥| = ٢ + ٥ = ٧

∴ |أ + ب| = |أ| + |ب|

(ii) $|\text{أ} + \text{ب}| = |١٠ - ٤| = |٦| = ٦$

$|\text{أ}| + |\text{ب}| = |١٠| + |-٤| = ١٠ + ٤ = ١٤$

$\therefore\ |\text{أ} + \text{ب}| < |\text{أ}| + |\text{ب}|$

ويتضح من (i)، (ii) أنه إذا كان أحد المقداريْن سالباً فإن:

$$|\text{أ} + \text{ب}| < |\text{أ}| + |\text{ب}|$$

وأما إذا كان كلا المقداريْن موجباً فإن:

$$|\text{أ} + \text{ب}| = |\text{أ}| + |\text{ب}|$$

وبشكل عام، يمكننا استنتاج أن:

$$|\text{أ} + \text{ب}| \leq |\text{أ}| + |\text{ب}|$$

٨- نظرية: **Theorem**

إذا كانت: $\text{أ} > \text{صفر}$ ، فإن:

$|\text{س}| < \text{أ}$	إذا كانت: $-\text{أ} < \text{س} < \text{أ}$ ،
$|\text{س}| > \text{أ}$	إذا كانت: $\text{س} > \text{أ}$ أو $\text{س} < -\text{أ}$

مثال (٤١):

حِل المتباينة: $|٣\text{س} - ٧| < ٢$

ثم عبِّر عن نتيجتك في صورة فترة.

الحــل:

حيث أنه إذا كانت: $-\text{أ} < \text{س} < \text{أ}$ فإن: $|\text{س}| < \text{أ}$ فإنه يمكن إعادة كتابة المتباينة المعطاة على الصورة التالية:

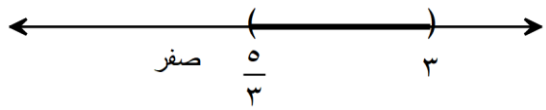
$$-٢ < ٣\text{س} - ٧ < ٢$$

وبإضافة ٧ لكل من أجزاء المتباينة نجد أن:

$$٥ < ٣\text{س} < ٩$$

أي أن: $\frac{٥}{٣} < \text{س} < ٣$

وهو ما يوضحه الشكل التالي:



مثال (٤٢):

حِل المتباينة:

|س – ٢| ≤ ٣ – س

الحــل:

هنا يمكن تطبيق النظرية المشار إليها في الخاصية (٨)، حيث نجد أن:

- (٣ – س) < (س – ٢) < ٣ – س

س – ٣ < (س – ٢) < ٣ – س

وحيث أن:

س – ٢ < ٣ – س

٢س < ٥ ، س < $\frac{٥}{٢}$

وبما أن: س < ٣ وكذلك س < $\frac{٥}{٢}$

فإن ذلك يفيد بأن: س < $\frac{٥}{٢}$

أي أن حل المتباينة يتمثل في الفئة: (-∞ ، $\frac{٥}{٢}$)

ملحوظة:

يلاحَظ أننا لم نستخدم العلاقة: س – ٣ < س – ٢، لأنها تفيد بأن: صفر < ١ وهو ما لا نبحث عنه.

مثال (٤٣):

حِل المتباينة: |٢س – ٣| > ٥

الحــل:

حيث أن: |٢س – ٣| > ٥ ، ٥ > ١

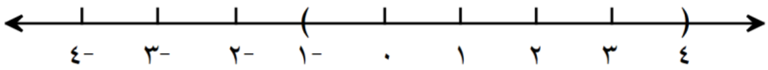
فإنه تطبيقاً للنظرية المشار إليها في الخاصية (٨) نجد أن:

٢س – ٣ > ٥ أو ٢س – ٣ < -٥

٢س > ٨ أو ٢س < -٢

س > ٤ أو س < -١

وهو ما يوضحه الشكل التالي:



الـدوال

أولاً: مفهوم الدالة

إن مفهوم الدالة **Function** هو واحد من أهم الأفكار التي يقوم عليها علم الرياضيات. حيث أنه يندر أن توجد دراسة تهتم بتطبيق الأساليب الرياضية في حل المشكلات المختلفة ولا تستخدم هذا المفهوم. وتُعبِّر الدالة عن كمية تعتمد في تحديدها على كميات أخرى. ومن أمثلة ذلك:

- تكاليف إنتاج سلعة من السلع تعتمد على عدد الوحدات المنتَجة.
- القوة الشرائية للجنيه المصري تتوقف على مؤشر غلاء المعيشة.
- كمية الطلب أو العرض على سلعة ما يتوقف على سعر هذه السلعة.
- مقدار الإنفاق الشهري للأسرة يتوقف على الدخل الشهري لها، وعلى حجم الأسرة، وعلى عدد الأبناء في مراحل التعليم المختلفة، إلى غير ذلك من العوامل الأخرى.

هذا وإذا ارتبط متغير ص بمتغير آخر س بعلاقة معينة بحيث تتحدد قيمة ص بمعرفة قيمة س، عندئذ يُقال بأن ص دالة للمتغير س. أو بمعنى آخر، يقال إن المتغير ص دالة للمتغير س عندما يتوقف تغير ص على تغير س. ويسمى المتغير س بالمتغير المستقل Independent Variable، وأما المتغير ص فيسمى بالمتغير التابع Dependent Variable. حيث نجد أن المتغير التابع يتغير بتغير المتغير المستقل وليس العكس.

وإذا ما أخذنا في الاعتبار الأمثلة التي أوردناها من قبل لقلنا أن تكاليف الإنتاج هي متغير تابع وهي دالة لعدد الوحدات المنتَجة (متغير مستقل). كما أن القوة الشرائية للجنيه المصري (متغير تابع) هي دالة لمؤشر غلاء المعيشة (متغير مستقل). وأما كمية الطلب على سلعة ما أو كمية المعروض منها (متغير تابع) فهي دالة لسعر هذه السلعة (متغير مستقل). وفي كل تلك الأمثلة الثلاث نجد أن هناك متغيراً مستقلاً واحداً. ولكن قد نجد في الدالة أكثر من متغير مستقل (اثنين فأكثر). فالإنفاق الشهري للأسرة - على سبيل المثال - هو متغير تابع، وهودالة في عدد من المتغيرات المستقلة منها الدخل الشهري للأسرة وحجم الأسرة وعدد الأبناء في مراحل التعليم المختلفة.

هذا ويمكن عرض العلاقة بين المتغير ص كمتغير تابع والمتغير س كمتغير مستقل على الصورة التالية:

ص = د(س)

وهذا التعبير لا يعنى أن ص هي حاصل ضرب د في س ، ولكن يُقرأ: ص دالة للمتغير س.

والعلاقة الدالية: ص = د(س) هي علاقة دالية بسيطة Simple Function. حيث أن المتغير التابع ص يعتمد على متغير مستقل واحد هو المتغير س.

وأما إذا كان هناك أكثر من متغير مستقل واحد يؤثر على المتغير التابع فإن العلاقة الدالية تكون علاقة دالية متعددة المتغيرات Multivariate Function . وعلى سبيل المثال، الإنفاق الشهري للأسرة - والذي أشرنا إليه من قبل - كدالة في الدخل الشهري وعدد أفراد الأسرة وعدد الأبناء في مراحل التعليم المختلفة يمثل دالة متعددة المتغيرات. ونسوق هنا مثاليْن آخريْن لهذا النوع من الدوال. حيث نجد أن كمية الطلب على سلعة معينة يتأثر بعدة عوامل منها: سعر تلك السلعة، أسعار السلع البديلة، دخل المستهلك، المستوى التعليمي، إلى غير ذلك من العوامل التي يمكن أن تؤثر على كمية الطلب على سلعة معينة. كما أن أرباح شركة من الشركات يتوقف على عدة عوامل منها: كمية الإنتاج، كمية المبيعات، المنصرف على الدعاية والإعلان، سعر السلعة، إلى غير ذلك من العوامل الأخرى. وفي كل من هذه الأمثلة نجد أن هناك متغيراً تابعاً واحداً وعدة متغيرات مستقلة، وهذه المتغيرات المستقلة تؤثر مجتمعةً على المتغير التابع.

وإذا رمزنا للمتغير التابع بالرمز ص وللمتغيرات المستقلة بالرموز:

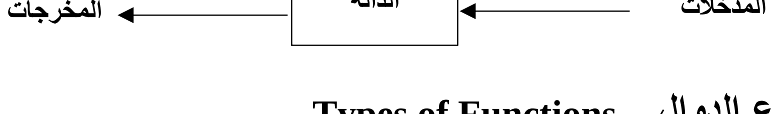
س١، س٢،...، سن. فإن العلاقة الدالية تكتب على الصورة:

ص = د(س١، س٢،..، سن)

أو: ص = Φ(س١، س٢،...، سن)

أو: ص = θ(س١، س٢،...، سن)

ويمكن النظر إلى الدالة كأداة مدخلات - مخرجات Input-output Device. وتتمثل المدخلات في القيم المختلفة للمتغير المستقل والتي يمكن التعويض عنها في الدالة، وأما المخرجات فهي قيمة المتغير التابع عند القيم المختلفة للمتغير المستقل. ويتم ذلك من خلال الأداة والتي تمثلها الدالة. ويمكن توضيح ذلك بالشكل التخطيطي التالي:



ثانياً: أنواع الدوال Types of Functions

يمكن تقسيم الدوال إلى عدة أنواع وذلك وفقاً لطبيعة وخصائص المتغيرات المستقلة الداخلة فيها. وسوف نتناول بعضاً من هذه الأنواع على النحو التالي:

١- الدالة الثابتة: Constant Function

وهذا النوع من الدوال يأخذ الصورة:

ص = د(س) = أ

حيث: أ مقدار ثابت حقيقي.

وعلى سبيل المثال: ص = د(س) = ١٢

هي دالة ثابتة. وبغض النظر عن قيمة س، فإن قيمة الدالة تساوي ١٢ دائماً. وهذا يعنى - على سبيل المثال - أن:

د(-٥) = ١٢ ، د(٦) = ١٢،

د(أ + ب) = ١٢ وهكذا...

وكمثال اقتصادي للدالة الثابتة نجد الإيراد الحدي Marginal Revenue. والمفهوم الاقتصادي للإيراد هو أحد التطبيقات الاقتصادية للدالة الثابتة. فالإيراد الحدي هو الإيراد الإضافي نتيجة بيع وحدة واحدة من المنتَج أو الخدمة. فلو أن منتَجاً معيناً بيعت وحداته بنفس السعر فإن الإيراد الحدي يساوي دائماً سعر الوحدة الواحدة من هذا المنتَج. وعلى سبيل المثال. لو كل سعر بيع الوحدة من منتج معين هي ٢٠ جنيهاً فإن الإيراد الحدي، ر ح، يمكن أن يُمثَّل بدالة على الصورة:

ر ح = د(س) = ٢٠

حيث: ر ح هو الإيراد الحدي، س عدد الوحدات المُباعة من المنتَج.

٢- الدالة الخطية: Linear Function

الدالة الخطية هي التي تمثل الخط المستقيم والتي معادلته من الدرجة الأولى. وهي تأخذ الصيغة:

ص = د(س) = أس + ب

حيث: أ ، ب ثوابت.

مثال (٤٤):

إذا كانت: د(س) = ٣س - ٢

أوجد قيمة الدالة عندما: س = ٢ ، س = ١ ، س = ٤

أي: د(٢) ، د(١) ، د(٤) على الترتيب.

الحـل:

لإيجاد قيم الدالة عند قيم س المختلفة فإننا نعوض في الدالة عن قيمة س في كل مرة. أي أن:

د(٢) = ٣ × ٢ - ٢ = ٦ - ٢ = ٤

د(١) = ٣ × ١ - ٢ = ٣ - ٢ = ١

د(٤) = ٣ × ٤ - ٢ = ١٢ – ٢ = ١٠

مثال (٤٥):

لنفترض أنك حصلت على وظيفة بائع. وأن صاحب العمل قرر أن يكون مقدار المرتب الأسبوعي الذي تتقاضاه متوقفاً على عدد الوحدات التي تستطيع أن تبيعها في الأسبوع الواحد. فإذا افترضنا أن:

ص = المرتب الأسبوعي بالجنيه،

س = عدد الوحدات المُباعة أسبوعياً.

فإن اعتماد المرتب الأسبوعي على المبيعات الأسبوعية يمكن تمثيله على الصورة:

ص = د(س)

حيث: د هي اسم دالة المرتب.

ولو افترضنا أن صاحب العمل قد قرر أن تحديد المرتب يكون وفقاً للدالة:

ص = د(س) = ٣س + ٢٥

فإنه بمعرفة قيمة س، يمكن التعويض عنها للحصول على قيمة ص المناظرة لتلك القيمة. وعلى سبيل المثال لو افترضنا أنك استطعت أن تبيع في أحد الأسابيع ١٠٠ وحدة. فإن مرتبك في هذا الأسبوع سوف يبلغ:

ص = ٣(١٠٠) + ٢٥ = ٣٢٥ جنيهاً

وبشكل عام، فإن قيمة د(س) عندما س = أ هي د(أ). أي أن:

د(١٠٠) = ٣٢٥ جنيهاً

وإذا بلغت كمية المبيعات في أحد الأسابيع ٨٠ وحدة، فإن المرتب في هذا الأسبوع يتحدد كما يلي:

د(٨٠) = ٣(٨٠) + ٢٥ = ٢٦٥ جنيهاً

وأما إذا كان هناك أسبوع لم تتمكن فيه من بيع أية وحدة، فإن المرتب حينئذ يكون:

د(صفر) = ٣(صفر) + ٢٥ = ٢٥ جنيهاً

هذا ويمكن تمثيل الدالة هنا بشـــكل تخطيطي يوضـــح طبيعتها كمدخلات ومخرجات وذلك كما يلي:

دالة المرتب الأسبوعي

المخرجات	ص المرتب الأسبوعي (بالجنيه)	**الدالة:** **د(س) = ٣س + ٢٥**	س عدد الوحدات المباعة أسبوعياً	المدخلات

٣- الدالة من الدرجة الثانية: Quadratic Function

الدالة من الدرجة الثانية هي من أكثر الدوال استخداماً في الحياة العملية. وتأخذ هذه الدوال الصيغة التالية:

ص = د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ

حيث: أ، ب، جـ ثوابت ، أ ≠ صفر

وعلى سبيل المثال، فإن الدالة:

ص = د(س) = ٣س^{٢} - ٢س + ١٠

هي دالة من الدرجة الثانية فيها:

أ = ٣ ، ب = -٢ ، جـ = ١٠

كما أن الدالة:

ص = د(س) = -٥س^{٢}

هي أيضا دالة من الدرجة الثانية فيها:

أ = -٥ ، ب = جـ = صفر

٤- الدالة من الدرجة الثالثة: Cubic Function

وهي تأخذ الصيغة التالية:

ص = د(س) = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـس + هـ

حيث: أ ، ب ، جـ ، هـ ثوابت ، أ ≠ صفر

فالدالة: ٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ٥س + ٨

هي دالة من الدرجة الثالثة فيها:

أ = ٢ ، ب = -٣ ، جـ = ٥ ، هـ = ٨

٥- الدالة متعدد الحدود: Polynomial Function

جميع الأشكال التي أشرنا إليهـا من قبل هي حالات خاصة للدوال متعددة الحدود. حيث أن الدالة متعددة الحدود من الدرجة $ن$ تأخذ الصورة:

$$ص = د(س) = أ_ن س^ن + أ_{ن-1} س^{ن-1} + ... + أ_1 س + أ_0$$

حيث: $أ_ن$، $أ_{ن-1}$،......، $أ_1$، $أ_0$ ثوابت، $أ_ن \neq$ صفر.

هذا ويجب أن يكون الأس لكل $س$ عدد صحيح غير سالب. كما أن درجة الدالة تقاس بقيمة أكبر أس موجود.

وعلى سبيل المثال الدالة:

$$ص = د(س) = س^٤$$

هي دالة من الدرجة الرابعة فيها:

$$أ_٤ = ١ \quad ، \quad أ_٣ = أ_٢ = أ_١ = أ_٠ = صفر$$

وهنا يجب ملاحظة أن الدوال الثابتة، الخطية، من الدرجة الثانية ومن الدرجة الثالثة، هي دوال متعددة الحدود من الدرجة صفر، ١، ٢، ٣ على الترتيب.

وتجدر الإشـــارة إلى أن الدوال من الدرجة الثانية أو أكثر هي دوال غير خطية Non – Linear، وذلك تمييزاً لها عن الدالة الخطية Linear.

هذا وهناك دوال مشهورة مثل الدوال اللوغاريتمية والدوال الأسية والتي لكل منها استخداماتها في مجال الاقتصـاد. ومع ذلك سـوف نتوقف عند هذا الحد في دراسـتنا للدوال مكتفين بهذا القدر الذي نحتاج إليه عند تطبيق الأساليب الرياضية في المجالات الاقتصادية في هذا الفصل وفصول تالية.

ثالثا: تطبيقات اقتصادية (الدوال)

في دراستنا للدوال وتطبيقاتها الاقتصادية سوف نأخذ في الاعتبار الموضوعات التالية: دالة الطلب - دالة العرض – توازن السـوق - دالة الدخل - دالة التكلفة - دالة الربح - نماذج تغطية النفقات.

وسـوف يكون تناولنا لتلك الموضوعات من خلال أمثلة عملية حتى تيسر على القارئ فهم واستيعاب هذا الأمر.

١- دالة الطلب: Demand Function

دالة الطلب هي علاقة رياضـية تعبِّر عن الطريقة التي تتغير وفقاً لها كمية الطلب على سلعة ما بتغير سعر تلك السلعة، والعلاقة بين هذيْن المتغيريْن (كمية الطلب والسعر) هي

علاقة عادة ما تكون عكسـية. بمعنى أن النقص في السـعر يؤدى عادة إلى زيادة في الطلب والعكس صحيـح. هذا والهدف من أي عملية بيع هو تحفيز أو حث المستَهلكين على الإقبال على شراء المنتَج. فلو أن متجراً أنقص سعر كيلو السكر بمقدار ٥٠ قرشاً، فإن ذلك من شأنه أن يؤدى إلى زيادة جوهرية في الطلب على السكر. ومن جهة أخرى، فإن الزيادة في سـعر سلعة معينة سوف تؤدي عادة إلى نقص في الطلب على هذه السلعة. فلو تصورنـا أن سعر كيلو السكر قد ارتفع فجأة ليصل إلى الضعف، هذا مع افتراض ثبات العوامل الأخرى مثل مستويات الدخل، فإن ذلك سيؤدى لا محالة إلى أن عدداً من المستَهلكين سوف يعجز عن شرائه بهذا السعر المرتفع.

ومما لاشك فيه، أن هناك استثناءات لهذا السلوك الاقتصادي، حيث نجد أن الطلب على بعض المنتَجات أو الخدمات والتي تعتبر من الضروريات يميل إلى التغير بدرجة أقل من التغيرات في الأسعار. ومثال ذلك العقاقيـر الطبية والخدمات الطبية وبعض أنواع الطعام. وفي واقع الأمر، فإن مرونة الطلب تصف طبيعة العلاقة في مثل تلك الحالات.

ودوال الطلب معظمها غير خطية، وإن كانت هناك حالات تكون فيها دوال الطلب إما خطية وإما تقترب بدرجة معقولة من الصورة الخطية. وتأخذ دالة الطلب الصورة التالية:

كمية الطلب = دالة(سعر الوحدة)

أي أن: **ك = د(س)**

حيث : ك كمية الطلب بالوحدات ، س سعر الوحدة من السلعة.

مثال (٤٦):

من الخبرة السـابقة لأحد المنتِجين فإن مسـتوى الطلب على منتَجه يصـل إلى ٦٠٠٠٠ وحدة عند سعر ٢٤ جنيهاً للوحدة الواحدة. كما يصل مستوى الطلب إلى ٤٤٠٠٠ وحدة عند سعر ٣٢ جنيهاً للوحدة الواحدة.

المطلوب:

(١) حدد دالة الطلب الخطية والتي تأخذ الصورة:

ك = د(س)

حيث: ك تمثل كمية الطلب ، س سعر الوحدة من المنتج.

(٢) إذا بلغت كمية الطلب ٨٠٠٠٠ وحدة، ما هو سعر بيع الوحدة الواحدة من المنتَج عندئذ؟

(٣) ما هي كمية الطلب المتوقَّعة إذا بلغ سعر الوحدة ٣٠ جنيهاً؟

(٤) فسِّر – اقتصادياً – معنى ميل دالة الطلب المحسوبة في (١).

الحـل:

(١) من البيانـات المعطـاة نسـتطيع القول بـأن معـادلـة الطلـب تمر بـالنقطتيْن ($س_١$، $ك_١$)، ($س_٢$، $ك_٢$) حيث:

$$س_١ = ٢٤ \quad ، \quad ك_١ = ٦٠٠٠٠ \quad ، \quad س_٢ = ٣٢ \quad ، \quad ك_٢ = ٤٤٠٠٠$$

∴ دالة الطلب يمكن إيجادها كما يلي.

$$\frac{ك - ك_١}{س - س_١} = \frac{ك_٢ - ك_١}{س_٢ - س_١}$$

$$\frac{ك - ٦٠٠٠٠}{س - ٢٤} = \frac{٤٤٠٠٠ - ٦٠٠٠٠}{٣٢ - ٢٤}$$

$$\frac{ك - ٦٠٠٠٠}{س - ٢٤} = \frac{-١٦٠٠٠}{٨}$$

وبإجراء العمليات الجبرية اللازمة يمكننا أن نصل إلى أن:

$$ك(س) = ١٠٨٠٠٠ - ٢٠٠٠س$$

(٢) سعر الوحدة عندما تبلغ كمية الطلب ٨٠٠٠٠ وحدة يتحدد كما يلي:

$$٨٠٠٠٠ = ١٠٨٠٠٠ - ٢٠٠٠س$$

$$٢٠٠٠س = ١٠٨٠٠٠ - ٨٠٠٠٠ = ٢٨٠٠٠$$

$$\therefore س = \frac{٢٨٠٠٠}{٢٠٠٠} = ١٤$$

أي أن السعر الذي تبلغ عنده كمية الطلب ٨٠٠٠٠ هو ١٤ جنيه.

(٣) كمية الطلب المتوقَّعة عند سعر ٣٠ جنيهاً يمكن إيجادها على النحو التالي:

$$ك(٣٠) = ١٠٨٠٠٠ - ٢٠٠٠ \times ٣٠$$

$$= ١٠٨٠٠٠ - ٦٠٠٠٠ = ٤٨٠٠٠ \text{ وحدة}$$

(٤) ميل دالة الطلب = $\frac{-\text{معامل السعر}}{\text{معامل الكمية}}$

يلزم أولاً أن نعيد صياغة دالة الطلب على الصورة: $ك أ + س ب = جـ$

أي أن: $ك + ٢٠٠٠س = ١٠٨٠٠٠$

$$\therefore \text{الميل} = \frac{-٢٠٠٠}{١} = -٢٠٠٠$$

وهذا يعنى أنه لكل جنيه واحد زيادة في سعر الوحدة فإن الطلب ينقص بمقدار ٢٠٠٠ وحدة.

٢- دالة العرض: Supply Function

دالة العرض هي أيضاً علاقة رياضية تفسر انعكاس سعر السوق على تحديد الكمية التي ينتجها المنتِج ويعرضها للبيع. وتفيد دالة العرض في تحديد الكمية التي يجب عرضها في الأسواق معتمدة في ذلك على السعر الذي يكون المستَهلكون على استعداد لدفعه مقابل اقتناء تلك السلعة. هذا وتتأثر الكمية المعروضة في الأسواق بشكل مباشر على سعر السلعة في السوق. حيث أنه كلما أرتفع سعر السلعة كلما شجع ذلك المنتِج على زيادة إنتاجه وعرضه للبيع، وكلما أدى ذلك بدوره أيضاً إلى انخفاض السعر الذي يريد المستَهلِك دفعه هذه السلعة.

وكما في دالة الطلب، فإن دالة العرض عادة ما تكون غير خطية، وإن كانت هناك حالات تقترب فيها دالة العرض بدرجة مقبولة من الصورة الخطية.

مثال (٤٧):

إذا كانت دالة العرض لإحدى السلع هي:

$$ك(س) = -٠,٥س + ٣٥$$

حيث: ك كمية المعروض من السلعة بالوحدات، س سعر الوحدة بالجنيه.

المطلوب:

(١) إيجاد الكمية المتوقَّعة للمعروض من السلعة عند السعر ٢٠ جنيهاً.

(٢) إيجاد ميل دالة العرض مع توضيح دلالته الاقتصادية.

الحـل:

(١) إذا بلغ سعر الوحدة من السلعة ٢٠ جنيهاً، فإن كمية المعروض منها يتحدد كالتالي:

$$ك(٢٠) = -٠,٥(٢٠) + ٣٥$$

$$= -١٠ + ٣٥ = ٢٥ \text{ وحدة}$$

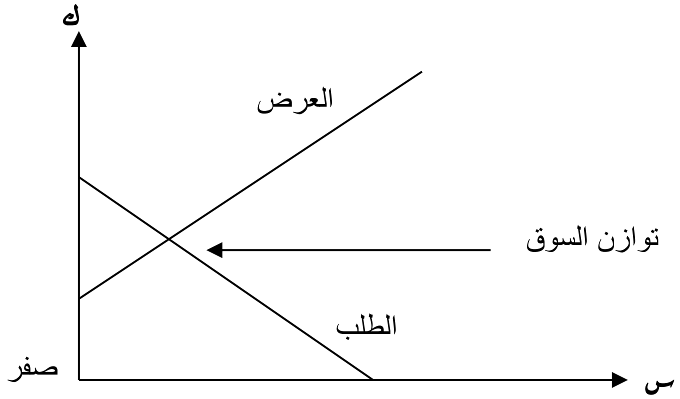
(٢) يمكن إعادة كتابة الدالة على الصورة: $ك + ٠,٥س = ٣٥$

$$\therefore \text{الميل} = \frac{-\text{معامل السعر}}{\text{معامل الكمية}} = \frac{-٠,٥}{١} = -٠,٥$$

وهذا يعنى أنه لكل جنيه واحد زيادة في سعر السلعة فإن كمية المعروض منها تنقص بمقدار نصف وحدة في المتوسط. وبتعبير آخر، نستطيع القول بأنه لكل جنيهيْن زيادة في سعر السلعة فإن كمية المعروض منها تنقص بمقدار وحدة واحدة.

٣- توازن السوق: Market Equilibrium

لو أن سعر سلعة معينة مرتفع جداً فإن المستَهلكين سوف يمتنعون عن شرائها، بينما لو كان سعرها منخفضاً جداً فإن المنتِجين سوف يمتنعون عن بيعها. وفي السوق التنافسي، عندما يعتمد سعر الوحدة على كمية الطلب على السلعة والعرض المتاح منها فقط، فإن السعر يتجه لأن يعدل نفسه وذلك بالصورة التي تتساوي فيها في النهاية الكمية المطلوبة من السلعة بواسطة المشترين مع الكمية التي يرغب المنتِج في عرضها. وهنا يحدث توازن السوق Market Equilibrium عند مستوى السعر الذي تتساوي عنده الكمية المطلوبة مع الكمية المعروضة. أي أن سعر التوازن يتحقق عند نقطة تقاطع دالتي الطلب والعرض. وبعبارة أخرى، فإن سعر وكمية التوازن يمكن تحديدها بحل دالتي الطلب والعرض معاً.



مثال (٤٨):

إذا كانت دالة الطلب لإحدى السلع هي:

س^{٢} + ك^{٢} = ١٦٩

حيث: ك كمية الطلب ، س سعر الوحدة

وكانت دالة العرض لنفس السلعة هي:

س = ك + ٧

أوجد سعر السلعة والكمية التي يتحقق عندهما توازن السوق.

الحـل:

من دالة الطلب نجد أن:

ك = $\sqrt{\text{١٦٩ − س}^{٢}}$

ومن دالة العرض نجد أن: ك = س - ٧

وحيث أن توازن السوق يحدث عندما تتساوي الكمية المطلوبة مع الكمية المعروضة فإن:

$\sqrt{١٦٩ - س^٢} = س - ٧$

وبتربيع الطرفيْن نحصل على:

$١٦٩ - س^٢ = س^٢ - ١٤س + ٤٩$

$٢س^٢ - ١٤س - ١٢٠ =$ صفر

$س^٢ - ٧س - ٦٠ =$ صفر

$(س - ١٢)(س + ٥) =$ صفر

$س = ١٢$ و $س = -٥$

وحيث أن القيمة السالبة للسعر غير مقبولة فإن: $س = ١٢$

وبالتعويض عن قيمة س في دالة العرض نحصل على:

$ك = ١٢ - ٧ = ٥$

أي أن توازن السوق يتحقق عندما يصل سعر السلعة إلى ١٢، وعند هذا السعر تكون كمية التوازن مساوية ٥ وحدات.

أي أنه عند مستوى السعر ١٢ نجد أن:

كمية الطلب = كمية العرض = ٥ وحدات

هذا وسوف نغطى بعض الجوانب الأخرى لتوازن السوق عند دراستنا لتطبيقات المحددات والمصفوفات في المجالات الاقتصادية المختلفة.

٤- دالة الإيراد الكلي: Total Revenue Function

سبق أن أشرنا إلى أن:

الإيراد الكلي = سعر بيع الوحدة × عدد الوحدات المباعة

وإذا كان لدينا دالة الطلب والتي تأخذ الصورة:

$ك = د(س)$

حيث: ك كمية الطلب ، س سعر الوحدة

فإنه يمكن أيضا تحديد دالة الإيراد الكلي باستخدام دالة الطلب.

وذلك على النحو التالي:

الإيراد الكلي $= س ك = س \times د(س)$

وهنا أمكن التعبير عن الإيراد الكلي كدالة تربيعية للسعر.

هذا ويمكن تحديد الإيراد الكلي كدالة للكمية المُباعة وذلك على النحو التالي:

يتم التعبير عن السلعة كدالة في كمية الطلب كما يلي:

$$س = د(ك)$$

$$\text{الإيراد الكلي} = ك س = ك \times د(ك)$$

مثال (٤٩):

إذا كانت دالة الطلب على أحد المنتَجات هي:

$$ك = د(س) = ١٥٠٠ - ٥٠ س$$

حيث: ك الكمية المطلوبة بآلاف الوحدات ، س سعر الوحدة بالجنيه

المطلوب:

(١) إيجاد دالة الإيراد الكلي.

(٢) ما هو الإيراد الكلي إذا بلغ سعر الوحدة ٢٠ جنيها؟

(٣) ما هو الإيراد الكلي إذا بلغت كمية المبيعات ٤٠٠ وحدة؟

الحـل:

(١) الإيراد الكلي (ر) = س ك

ولأن دالة الطلب تعرض ك كدالة لـــــ س، فإن الإيراد الكلي يمكن عرضه كدالة في السعر، أي أن:

$$\text{الإيراد الكلي} = ر(س) = س \times د(س)$$

$$= س(١٥٠٠ - ٥٠ س)$$

$$\therefore ر(س) = ١٥٠٠ س - ٥٠ س^{٢}$$

هي دالة الإيراد الكلي.

(٢) مقدار الإيراد إذا بلغ سعر الوحدة ٢٠ جنيهاً هو:

$$ر(٢٠) = ١٥٠٠(٢٠) - ٥٠(٢٠)^{٢}$$

$$= ٣٠٠٠٠ - ٢٠٠٠٠ = ١٠٠٠٠ \text{ جنيه}$$

(٣) يمكن إيجاد مقدار الإيراد عندما تبلغ كمية المبيعات ٤٠٠ وحدة وذلك باستخدام طريقتيْن مختلفتيْن:

الطريقة الأولى:

حيث أن: ك = ٤٠٠

فإنه بالتعويض عن قيمة ك في دالة الطلب ينتج أن:

$$٤٠٠ = ١٥٠٠ - ٥٠ س$$

$$٥٠س = ١٩٠٠ - ٤٠٠ = ١١٠٠$$

$$\therefore س = \frac{١١٠٠}{٥٠} = ٢٢ \text{ جنيهاً}$$

أي أن مقدار الإيراد عندما تبلغ كمية المبيعات ٤٠٠ وحدة هو نفســه مقدار الإيراد عندما يبلغ ســعر الوحدة ٢٢ جنيها. وهذا يعني أنه عند ســعر الوحدة الواحدة ٢٢ جنيها تتحقق مبيعات مقدارها ٤٠٠ وحدة.

$$\therefore ر(٢٢) = ١٥٠٠(٢٢) - ٥٠(٢٢)^{٢}$$

$$= ٣٣٠٠٠ - ٢٤٢٠٠ = ٨٨٠٠ \text{ جنيه}$$

الطريقة الثانية:

يمكن إعادة صياغة دالة الطلب في الصورة: السعر كدالـة للكمية، وذلك كما يلي:

حيث أن: ك = ١٥٠٠ – ٥٠س ، ٥٠س = ١٥٠٠ - ك

$$س = ٣٠ - \frac{١}{٥٠}ك$$

$$س = ٣٠ - ٠,٠٢ك$$

أي أن: السعر = د(الكمية)

$$س = د(ك) = ٣٠ - ٠,٠٢ك$$

وحيث أن: الإيراد الكلي = ك س

$$= (٣٠ - ٠,٠٢ك)ك = ٣٠ك - ٠,٠٢ك^{٢}$$

∴ دالة الإيراد الكلي كدالة لكمية المبيعات هي:

$$ر(ك) = ٣٠ك - ٠,٠٢ك^{٢}$$

ومن ثَمَّ فإن مقدار الإيـراد عندمـا تبلغ كمية المبيعات ٤٠٠ وحدة يتحدد كما يلي:

$$ر(٤٠٠) = ٣٠(٤٠٠) - ٠,٠٢(٤٠٠)^{٢}$$

$$= ١٢٠٠٠ - ٣٢٠٠ = ٨٨٠٠ \text{ وحدة}$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من قبل.

٥- دالة التكلفة الكلية ودالة الربح الكلي:

Total Cost and Total Revenue Functions

سبق وأن أشرنا في موضع سابق من هذا الفصل بأن التكلفة الكلية والربح الكلي يتحددان كما يلي:

التكلفة الكلية = التكلفة الكلية المتغيرة + التكلفة الثابتة

الربح الكلي = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية

والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (٥٠):

تســتطيع شــركة أن تبيع أحد منتَجاتها بســعر ٥٥ جنيهاً للوحدة الواحدة، وكانت التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة تســاوي ٢٣ جنيهاً، بينما تبلغ التكاليف الثابتة ٤٠٠٠٠٠ جنيه. فلو افترضنا أن ك هي عدد الوحدات التي تم إنتاجها وبيعها خلال السنة.

المطلـوب:

(١) إيجاد دالة التكلفة الكلية .

(٢) تحديد دالة الإيراد الكلي.

(٣) إيجاد دالة الأرباح.

(٤) ما هو مقدار الربح إذا تم إنتاج وبيع ١٥٠٠٠ وحدة خلال السنة؟

(٥) ما هي كمية الإنتاج المطلوبة لكي تحقق الشركة أرباحا مقدارها ٦٤٠٠٠جنيه؟

الحـل:

(١) حيث أن:

التكلفة الكلية = التكلفة الكلية المتغيرة + التكلفة الثانية

= ٢٣ك + ٤٠٠٠٠٠

أي أن دالة التكلفة الكلية هي: ت(ك) = ٢٣ك + ٤٠٠٠٠٠

(٢) حيث أن: الإيراد الكلي = سعر بيع الوحدة × عدد الوحدات المباعة

= ٥٥ك

∴ دالة الإيراد الكلي هي: ر(ك) = ٥٥ك

(٣) حيث أن: الأرباح الكلية = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية

= ٥٥ك – (٢٣ك + ٤٠٠٠٠٠)

= ٥٥ك – ٢٣ك – ٤٠٠٠٠٠

= ٣٢ك – ٤٠٠٠٠٠

∴ دالة الأرباح هي: ع(ك) = ٣٢ك – ٤٠٠٠٠٠

(٤) مقدار الربح إذا تم إنتاج وبيع ١٥٠٠٠ وحدة هو:

ع(١٥٠٠٠) = ٣٢(١٥٠٠٠) – ٤٠٠٠٠٠

= ٤٨٠٠٠٠ – ٤٠٠٠٠٠ = ٨٠٠٠٠ جنيه

(٥) لكي تحقق الشـــركة أرباحاً مقدارها ٦٤٠٠٠ جنيه فإن كمية الإنتاج يمكن تحديدها حينئذ كما يلي:

ع(ك) = ٦٤٠٠٠ = ٣٢ك – ٤٠٠٠٠٠

٣٢ك = ٤٠٠٠٠٠ + ٦٤٠٠٠ = ٤٦٤٠٠٠

ك = $\frac{٤٦٤٠٠}{٣٢}$ = ١٤٥٠٠ وحدة

مثال (٥١):

إذا كانت دالة الطلب لأحد المنتَجات تأخذ الصورة:

ك = ٧٥ – ٠,٢٥س

حيث: ك كمية الطلب على المنتَج ، س سعر الوحدة بالجنيه

وإذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج ك وحدة (بالمئات) تحددها الدالة:

ت(ك) = ك^{٢} – ١٥٠ك + ٥٠٠٠

المطلوب:

(١) صياغة كل من:

(أ) دالة الإيراد الكلي (ب) دالة الربح الكلي

(٢) ما هو عدد الوحدات الذي يجب أن يُنتَج وُيباع حتى يتحقق ربح مقداره ٤٠٠٠ جنيه؟

الحـل:

(١) حيث أن: ك = ٧٥ – ٠,٢٥س

فإنه يمكن إعادة صياغة الدالة كما يلي:

٠,٢٥س = ٧٥ – ك

س = ٣٠٠ – ٤ك

وحيث أن: الإيراد = سعر بيع الوحدة × عدد الوحدات المباعة

∴ الإيراد = (٣٠٠ – ٤ك)ك

= ٣٠٠ك – ٤ك^{٢}

أي أن دالة الإيراد الكلي هي:

ر(ك) = ٣٠٠ك – ٤ك^{٢}

وحيث أن:

الربح الكلي = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية

= (٣٠٠ك – ٤ك^{٢}) – (ك^{٢} - ١٥٠ك + ٥٠٠٠)

= ٣٠٠ك – ٤ك^{٢} – ك^{٢} + ١٥٠ك – ٥٠٠٠

= ٤٥٠ك – ٥ك^{٢} – ٥٠٠٠

أي أن دالة الربح الكلي هي:

ع(ك) = ٤٥٠ك – ٥ك^{٢} – ٥٠٠٠

(٢) حتى يتحقق ربح مقداره ٤٠٠٠ جنيه فإن:

٤٥٠ك – ٥ك^{٢} – ٥٠٠٠ = ٤٠٠٠

٤٥٠ك – ٥ك^{٢} – ٩٠٠٠ = صفر

٥ك^{٢} – ٤٥٠ك + ٩٠٠٠ = صفر

ك^{٢} – ٩٠ك + ١٨٠٠ = صفر بقسمة الطرفيْن على ٥

(ك – ٣٠)(ك – ٦٠) = صفر

ك = ٣٠ و ك = ٦٠

أي أنه لكي يتحقق ربح مقداره ٤٠٠٠ جنيه فإنه يجب إنتـــــاج ٣٠ وحــــــدة أو ٦٠ وحدة. والمنطق هنا يقول إنه لتحقيق هذا الربح فإنه يتم إنتاج ٣٠ وحدة فقط وليس ٦٠ وحدة وذلك توفيراً للوقت.

فكرة حل آخر:

يمكن للقارئ إعادة حل هذا المثال بطريقة أخرى تتمثـــل في التعبير عن كل من الإيراد والتكلفة والربح كدالة في الســـعر. وبعد تحديد الســـعر الذي يحقق الربح المطلوب يمكن التعويـض عن قيمته في دالة الطلب للحصول على الكمية التي تحقق الربح المرغوب فيه.

٦- نماذج تغطية التكلفة: Break - Even Models

إن أية مؤســـــة مهما اختلف نشـــاطها تهدف إلى تحقيق أرباح. لذلك فإن نماذج تغطية التكلفة تعتبر أداة هامة من أدوات التخطيط في إدارة تلك المؤسسات. حيث تُمكِّن هذه النماذج متخذي القرار من تحديد كمية الإنتاج التي تغطى عندها المؤســـــة تكلفة إنتاجها فقط دون تحقيق أي أرباح أو خســـائر. وهذا المســـتوى من الإنتاج يطلق عليه نقطة تغطية التكلفة Break-Even Point. وهذه النقطة تمثل كمية الإنتاج التي يتساوى عندها الإيراد الكلي مع

التكلفة الكلية، وأي بعد عن تلك النقطة (زيادة أو نقصاناً) سوف يحدث عنده إما ربح أو خسارة.

وعند تناولنا لنماذج تغطية التكلفة سوف نفترض بعض الافتراضات Assumptions والتي نلخصها فيما يلي:

- أن كلاًّ من دالة التكلفة الكلية ودالة الإيراد الكلي خطية. وافتراض أن دالة التكلفة الكلية خطية يعنى أن التكلفة المتغيرة لكل وحدة إما أن تكون ثابتة أو أنها من المفترض أن تكون ثابتة. كما يعنى ذلك أيضا أن التكلفة المتغيرة تعتمد على مستوى (كمية) الإنتاج.
- وأما افتراض أن دالة الإيراد الكلي خطية، فيشير إلى أن سعر البيع للوحدة ثابت. وفي الأحوال التي لا يكون فيها سعر البيع للوحدة مقداراً ثابتاً، فإن متوسط السعر أحياناً ما يؤخذ في الاعتبار عند إجراء هذا التحليل.
- أن سعر الوحدة الواحدة من المنتَج يكون أكبر من التكلفة المتغيرة للوحدة. ولنفكر في ذلك ولو للحظة، حيث نجد أنه لو كان سعر الوحدة أقل من تكلفتها المتغيرة، فإن المؤسسة سوف تحقق خسارة في كل وحدة تنتجها وتبيعها. حينئذ سوف لا يكون هناك حالة يمكن عندها تغطية التكلفة فقط دون تحقيق أي أرباح.

وفي تحليلنا لنماذج تغطية التكلفة سوف نأخذ في الاعتبار كمية الإنتاج التي تحقق تغطية التكلفة وذلك دون غيرها من العوامل مثل إيجاد قيمة المبيعات التي تحقق تغطية النفقات. ولكي نحدد نقطة تغطية التكلفة يجب اتباع الخطوات التالية:

أ- صياغة التكلفة الكلية كدالة في كمية الإنتاج مُعبَّراً عنها بعدد وحدات الإنتاج ك، ولتكن الدالة **ت**(ك).

ب- صياغة دالة الإيراد الكلي كدالة في عدد وحدات الإنتاج كولتكن الدالة ر(ك).

ج- حيث أن مجرد تغطية تكلفة الإنتاج يتحقق عندما تتساوي تكلفة الإنتاج مع الإيراد، فإنه يمكن تحديد نقطة تغطية النفقات بمساواة **ت**(ك) بـ ر(ك)

أي أن قيمة ك التي تحقق: **ت**(ك) = ر(ك) تمثل نقطة تغطية النفقات Break – Even Point.

وكخطوة بديلة للخطوة (ج)، يمكن إيجاد دالة الربح كدالة في كمية الإنتاج، وذلك بطرح دالة التكلفة من دالة الإيراد ثم مساواة دالة الربح بالصفر.

والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (٥٢):

تقوم شـــركة ببيع أحد منتَجاتها بســـعر ٤٥ جنيهاً للوحدة الواحدة. فإذا كانت التكاليف المتغيرة ٣٣ جنيها للوحدة والتكاليف الثابتة ٤٥٠٠٠٠ جنيـه. ما هو عدد الوحدات الذي يجب إنتاجه وبيعه حتى تغطى الشركة تكلفة إنتاجها دون تحقيق أي أرباح أو خسائر؟

الحــل:

لنفترض أن عدد الوحدات هو ك

دالة الإيراد الكلي: ر(ك) = ٤٥ك

دالة التكلفة الكلية: ت(ك) = ٣٣ك + ٤٥٠٠٠٠

وللحصول على تغطية التكلفة فإن:

ر(ك) = ت(ك)

أي أن: ٤٥ك = ٣٣ك + ٤٥٠٠٠٠

١٢ك = ٤٥٠٠٠٠

ك = $\frac{٤٥٠٠٠٠}{١٢}$ = ٣٧٥٠٠ وحدة

وهكذا فإنه يجب إنتاج ٣٧٥٠٠ وحدة حتى يغطى الإيراد تكلفة الإنتاج دون تحقيق أرباح أو خسائر.

ويلاحَظ أنه عند هذا المستوى من الإنتاج نجد أن:

ر(ك) = ٤٥ × ٣٧٥٠٠ = ١٦٨٧٥٠٠ جنيه

وكذلك ت(ك) = ٣٣ × ٣٧٥٠٠ + ٤٥٠٠٠٠

= ١٢٣٧٥٠٠ + ٤٥٠٠٠٠

= ١٦٨٧٥٠٠ جنيه

أي أن: ر(٣٧٥٠٠) = ت(٣٧٥٠٠)

وهذا يعنى أن نقطة تغطية التكلفة هي ٣٧٥٠٠ وحدة. وبعبارة أخرى، فإن إنتاج ٣٧٥٠٠ وحدة يحقق إيراداً يغطى تكلفة الإنتاج فقط دون تحقيق أي أرباح أو خسائر.

مثال (٥٣):

باستخدام بيانات **المثال (٥١)**، حدد نقطة تغطية التكلفة.

الحـل:

وجدنا في مثال (٥١) أن دالة الربح تأخذ الصيغة:

$$ع(ك) = ٤٥٠ك - ٥ك^{٢} - ٥٠٠٠$$

وللحصـــــول على نقطة تغطية التكلفة فإنه يجب مســـــاواة ع (ك) بالصفر. أي يجب تحديد قيمة ك التي تجعل ع(ك) مساوية للصفر.

أي أن:

$$ع(ك) = ٤٥٠ك - ٥ك^{٢} - ٥٠٠٠ = صفر$$

$$-٥ك^{٢} + ٤٥٠ك - ٥٠٠٠ = صفر$$

$$ك^{٢} - ٩٠ك + ١٠٠٠ = صفر \qquad \text{بقسمة طرفي المعادلة على -٥}$$

$$ك = \frac{٩٠ \pm \sqrt{(٩٠)^{٢} - ٤(١)(١٠٠٠)}}{٢}$$

$$= \frac{٩٠ \pm \sqrt{٤١٠٠}}{٢}$$

وهكـذا فـإن هنـاك نقطتيْن تحقق كـل منهمـا تغطيـة التكلفـة دون تحقيق أربـاح. وهـاتـان النقطتان هما:

$$ك = \frac{٩٠ + \sqrt{٤١٠٠}}{٢} \approx ٧٧ \text{ وحدة}$$

$$ك = \frac{٩٠ - \sqrt{٤١٠٠}}{٢} \approx ١٣ \text{ وحدة}$$

وهذا يعنى أنه لو قامت الشركة بإنتاج ٧٧ وحدة أو ١٣ وحدة فإن إيرادات الشركة تغطى فقط تكلفة إنتاجها دون تحقيق أرباح أو خسـائر. ويمكن للقارئ التحقق من ذلك بالتعويض عن ك بالقيمة ٧٧ أو ١٣ في دالة الربح، حيث سـيجد أن قيمة الأرباح عند كل من هذيْن المسـتوييْن للإنتاج تســاوي خمســة جنيهات فقط ويرجع تحقيق هذا القدر الضـــئيل جدا من الأرباح إلى عملية التقريب وإهمال الجزء الكســـرى في عدد وحدات الإنتاج (من المفترض أن مقدار الأرباح = صفر).

تمارين

الفصل الأول

المعادلات:

١- حِل المعادلات التالية:

أ- $\frac{٣س + ٧}{٢} = \frac{١ + س}{٣}$ **ب-** $\frac{٥ص - ٦}{٢} = ص - \frac{٢ - ص}{٢}$

جـ- $س^{٢} + (س + ١)^{٢} = (٢س - ١)(س + ٣)$

د- $(س - ٤)^{٢} = (س - ٢)^{٢}$

٢- حِل المعادلات التالية باستخدام طريقة التحليل إلى عوامل:

أ- $س^{٢} + ٥س + ٦ = صفر$ **ب-** $س^{٢} + ٢س - ٣ = صفر$

جـ- $٤س^{٢} - ٤س - ١٥ = صفر$ **د-** $٤س^{٢} - ٥س = صفر$

هـ- $٦س^{٢} + \frac{٥}{٢}س + \frac{١}{٤} = صفر$

٣- حِل المعادلات التالية باستخدام الصيغة التربيعية:

أ- $(٢س + ١)^{٢} = ٣(س + ١)$ **ب-** $(س + ١)^{٢} = ٢(س - ١)^{٢}$

جـ- $٢س^{٢} + ٥س - ٣ = صفر$ **د-** $٣س^{٢} + ٦س - ٢ = صفر$

هـ- $\sqrt{٢س + ٧} = س + ١$ **و-** $س + ٣ = \sqrt{٥س + ١١}$

٤- أوجد معادلة الخط المستقيم التي تحقق الشروط في كل من:

أ- يمر بالنقطة (٣، ٤) وميله يساوي الصفر.

ب- يمر بالنقطة (١، -٢) بميل يساوي -٣.

جـ- الميل = -٢ والجزء المقطوع من المحور الصادي = ٥

٥- احسب الميل والجزء المقطوع من المحور الصادي لكل من المعادلات الخطية التالية:

أ- $٤س + ٥ص = ٢٠$ **ب-** $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٤} = ١$

جـ- $ص - ٢س + ٣ = صفر$ **د-** $٣س + ٤ص = صفر$

٦- أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يصل بين أزواج النقط التالية، ثم حدد الميل لكل خط:

أ- (٢، ١) و (٥، ٧) **ب-** (٢، ١) و (٤، -١)

جـ- (-٣، ٢) و (-٣، ٤) **د-** (٣، ٥) و (-١، ٥)

٧- تقوم شركة بتصنيع نوعيْن من المنتَجات. وتبلغ ساعات العمل المتاحة في الأسبوع ١٢٠ ساعة عمل وذلك لتصنيع هذيْن المنتَجيْن. ولأن كلا المنتَجيْن يدر ربحاً جيداً على الشركة، فإنها تريد أن تستعمل جميع ساعات العمل المتاحة. فإذا علمت أن إنتاج وحدة واحدة من المنتَج الأول يتطلب ٣ ساعات عمل، بينما يتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من المنتَج الثاني ٢,٥ ساعة عمل.

المطلوب:

أولاً: إيجاد المعادلة التي توضح استخدام جميع ساعات العمل المتاحة في إنتاج س وحدة من المنتَج الأول و ص وحدة من المنتَج الثاني.

ثانياً: حدد الجزء المقطوع من المحور السيني والجزء المقطوع من المحور الصادي، موضحا الدلالة الاقتصادية لكل منهما.

ثالثاً: أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمثل المعادلة المحسوبة في (١) ثم وضح دلالته الاقتصادية.

رابعاً: ما هو عدد الوحدات الذي يمكن إنتاجه من المنتَج الأول في حالة إنتاج ٤٠ وحدة من المنتَج الثاني؟

٨- إذا أراد شخص أن يستثمر مبلغ ١٠٠٠٠٠ جنيه في نوعيْن من الاستثمارات. الأول يدر عليه ربحاً سنوياً بنسبة ٨٪، بينما يدر عليه النوع الثاني من الاستثمارات ١٠٪ سنوياً. ما هو المبلغ الذي يجب أن يستثمره في كلا النوعيْن من الاستثمارات إذا أراد أن يحقق دخلاً سنوياً مقداره ٨٥٠٠ جنيه؟

٩- باستخدام بيانات المثال (١٨)، إذا كانت تكلفة إنتاج النسخة الواحدة من الكتاب هي ١٦ جنيه للنسخة، ما هو السعر الذي يجب أن يبيع به الناشر الكتاب حتى يحقق ربحاً مقداره ٢٠٠٠٠ جنيه؟

١٠- يفتح محل تجارى للتنظيف الجاف للملابس ثماني ساعات يومياً في خمسة أيام في الأسبوع. ويقوم هذا المحل بإنجاز ١٥ معاملة في الساعة الواحدة، حيث تدر كل معاملة دخلاً مقداره ٦ جنيهات في المتوسط. وتبلغ تكلفة العمالة ١٦ جنيهاً للساعة الواحدة، كما أن هناك إيجاراً أسبوعياً للمحل مقداره ٥٦٠ جنيهاً. وأما التكلفة الوحيدة المتبقية فتتمثل في المواد الخام والتي تبلغ **ت** جنيهاً لكل معاملة.

المطلوب:

أ- صياغة دالة الأرباح الأسبوعية ع.

ب- بافتراض أن:

– المحل يحقق حالياً أرباحاً أسبوعية مقدارها ٦٠٠٠ جنيه.

– تكلفة المواد الخام سوف ترتفع بنسبة ٢٠٪ في الأسبوع القادم

– سوف ترتفع الأسعار بالنسبة للزبائن بنسبة ١٠٪.

– لا يحدث هناك أي تغييرات أخرى خلال ذلك.

ما هو مقدار الأرباح السنوية الجديدة؟

١١- إذا كان عدد الوحدات المطلوبة من منتَج معين يمكن توقعه وفقاً للمعادلة:

ك = ٥٠٠٠٠ – ١٢,٥س

حيث: ك كمية الطلب بالوحدات ، س سعر بيع الوحدة

المطلوب:

أولاً: إيجاد الجزء المقطوع من ك والجزء المقطوع من س موضحاً الدلالة الاقتصادية لكل منها.

ثانياً: أوجد إيجاد ميل المعادلة مع شرح دلالته الاقتصادية.

ثالثاً: ما هي كمية الطلب المتوقَّعة إذا بلغ سعر الوحدة ٢٠٠؟

رابعاً: إذا وصل مستوى الطلب إلى ٢٥٠٠٠ وحدة، ما هو سعر الوحدة المتوقَّع؟

المتباينات:

١٢- حِل المتباينات التالية:

أ- ٣(س – ١) > ٤ + ٥(س – ١)

ب- ٥س + ٧ > ٣١ – ٣س

جـ- ٣س – ٢ ≤ ٤س + ٨

د- $\text{س} + \frac{٤}{٣} > \frac{٢\text{س} - ٣}{٤} + ١$

هـ- $\frac{\text{ص} + ١}{٤} - \frac{\text{ص}}{٣} > ١ + \frac{٢\text{ص} - ١}{٦}$

و- ٦س – ١١ ≤ ٣س + ١ ≤ ٥س –٧

ز- $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ٢} > ٢$

١٣- حِل المتباينات التالية:

أ- $\text{س}^{٢}$ – ١٦ ≥ صفر

ب- $\text{س}^{٢}$ – ٩ ≤ صفر

جـ- $\text{س}^{٢}$ – ٢س – ٣ > صفر

د- ٢$\text{س}^{٢}$ – ٣س > ٢

هـ- $٢س^{٢} - س - ١٠ > صفر$ و- $٢س^{٢} + ٥س + ٣ < صفر$

ز- $٩س > س^{٢} + ١٤$ ح- $س^{٢} + ٧ > ٤س$

١٤- حل المتباينات التالية:

أ- $|٣س + ٧| > ٤$ ب- $٥ + ٢|٣ - ٢س| > ٧$

جـ- $\left|\frac{٢س - ٣}{٧}\right| \geq ١$ د- $|٦س - ١٥| \geq -٦$

هـ- $|س^{٢} - ٢| \geq ٢$ و- $|ص - ٥| \geq ٣$

ز- $\left|\frac{٣س - ٥}{س - ٤}\right| > ٢$، $س \neq ٤$

١٥- يستطيع تاجر أجهزة تليفونات أن يبيع الجهاز الواحد بسعر ١٥٠ جنيهاً. فإذا كانت التكلفة الثابتة ١٥٠٠٠ جنيه شهرياً لكل شهر، بالإضافة إلى أن تكلفة المواد الخام والعمل لكل جهاز تبلغ ١٠٠ جنيه. أوجد عدد الأجهزة التي يجب أن تُنتج وتُباع حتى يحقق التاجر أرباحاً أسبوعية مقدارها ١٠٠ جنيه على الأقل.

١٦- ترغب مؤسسة لصناعة السيارات في معرفة ما إذا كان يمكنها تصنيع سير المروحة والذي تستورده من الخارج بسعر ٢,٥ جنيه للسير الواحد. فإذا كان تصنيع سير المروحة بواسطة المؤسسة سوف يزيد التكلفة الثابتة بمقدار ١٥٠٠ جنيه كل شهر، ولكنه سيكلف المؤسسة في تصنيعه ١,٧ جنيه فقط للسير الواحد. ما هو عدد السيور الذي يجب أن تستخدمه المؤسسة كل شهر والذي يبرر إقدامها على تصنيعه بنفسها؟

١٧- يستطيع صاحب مصنع أن يبيع كل ما ينتجه بسعر ١٥ جنيهاً للوحدة. فإذا كانت تكلفة المواد الخام والعمل لكل وحدة هي ٨ جنيهات، بالإضافة إلى ٤٠٠٠ جنيه تكاليف ثابتة في الأسبوع ما هو عدد الوحدات الذي يجب أن ينتجه صاحب المصنع حتى يحقق أرباحا مقدارها ٣٠٠٠ جنيه على الأقل أسبوعياً؟

١٨- يبيع صاحب مصنع أحد المنتَجات بسعر ٢٥ جنيهاً للوحدة، وتتحدد التكلفة الكلية لإنتاج ك وحدة بالصيغة:

$$ت(ك) = ٣٠٠ + ٢٠ك - ٠,١ك^{٢}$$

ما هو عدد الوحدات الذي يجب أن يُنتَج ويباع أسبوعياً لكي يحقق صاحب المصنع أرباحاً؟

١٩- يستطيع صاحب مصنع أن يبيع ك وحدة من منتَجه أسبوعياً بسعر س جنيه للوحدة حيث: $س = ٢٠٠ - ك$. ما هو عدد الوحدات الذي يجب أن يُنتَج وُيباع أسبوعياً

حتى يحقق صـــاحب المصـــنع إيراداً شـــهرياً مقداره ٩٩٠٠ جنيه على الأقل؟ وما هو سعر الوحدة الذي يحقق هذا الإيراد؟

٢٠- يسـتقبل صـاحب مطعم للوجبات الخفيفة ١٢٠ زبوناً في المتوسـط كل يوم وبسـعر ٤ جنيهات لكل وجبة. فإذا كانت الزيادة بمقدار ٥٠ قرشـاً لكل وجبة تؤدي إلى نقص في عدد الزبائن بمقدار ٨ زبائن يومياً. ما هو الحد الأقصى لسعر الوجبة الذي يتقاضاه من كل زبون حتى يحقق صاحب المطعم دخلاً يومياً مقداره ٥٢٠ جنيه على الأقل؟

٢١- تباع سلعة ترفيهية بمبلـــــغ ٢٠٠٠ جنيه للوحدة على مستوى إحدى الدول ككل. وتبلغ كمية المبيعات من هذه الســـلعة ١٢٠٠٠ وحدة في العام. وتبحث حكومة هذه الدولة فرض ضـــريبة على مبيعات هذه الســلعة. علماً بأنه لو وصـــل مســـتوى الضـــريبة المفروضـة على الوحدة الواحدة من هذه السـلعة إلى س٪، فإن كمية المبيعات سـوف تنخفض بمقدار ٤٠٠س في الســـنة. ما هو مســـتوى الضـــريبة س والذي يجب أن تفرضـــه الحكومة على مبيعات تلك الســلعة حتى يجلب عليها دخلاً مقداره مليون جنيه على الأقل سنويًا؟

الـــدوال:

٢٢- حدد د(صفر) و د(-٢) و د(٣) لكل من الدوال التالية:

أ- د(س) = ٣س^{٢} – ٢س + ١٠ **ب-** د(س) = ١٥

جـ- د(ص) = ٨ص – ٥ **د-** د(س) = $\sqrt{س^{٢} – ٢س + ٩}$

٢٣- إذا كانت:

د(س، ص، ع) = س^{٢}ص ع^{٣}

أوجد: د(٤، ١، ٣)

٢٤- إذا كانت الخبرة السـابقة لأحد المنتِجين تفيد بأنه يسـتطيع بيع ٨٠٠٠٠ وحدة من منتَجه بسعر ٢٠ جنيهاً للوحدة الواحدة. كما أنه يستطيع أن يبيع ٦٢٥٠٠ وحدة عند سعر ٣٠ جنيهاً للوحدة.

المطلوب:

(أ) حدد دالة الطلب الخطية التي تأخذ الصورة: ك = د(س)

حيث: ك كمية الطلب ، س سعر الوحدة من المنتَج بالجنيه

(ب) إذا بلغت كمية الطلب ٧٠٠٠٠ وحدة، ما هو سعر بيع الوحدة الواحدة من المنتَج عندئذ؟
(جـ) أوجد ميل دالة الطلب مع تفسير دلالته الاقتصادية.
(د) ما هي كمية الطلب المتوقَّعة إذا بلغ سعر الوحدة ٢٥ جنيهاً؟

٢٥- إذا كانت دالة العرض لإحدى السلع تأخذ الصيغة التالية:

ك = ٠,٥س٢ - ٢٠٠

حيث: ك كمية العرض ، س سعر الوحدة بالجنيه

المطلوب:

(أ) إيجاد كمية المعروض من هذه السلعة إذا بلغ سعر الوحدة الواحدة ٤٠ جنيهاً.
(ب) تحديد ميل دالة العرض مع توضيح دلالته الاقتصادية.

٢٦- إذا كانت دالة الطلب ودالة العرض لإحدى السلع هما:

ك = ٨٥ - ٣س **دالة الطلب**

ك = ١٥س - ٥ **دالة العرض**

حيث: ك كمية المطلوب أو المعروض من السلعة،
س سعر الوحدة بالجنيه

المطلوب:

(أ) تفسير دالتي الطلب والعرض مستخدما في ذلك ميل كل دالة.
(ب) تحديد السعر والكمية التي يتحقق عندهما توازن السوق.
(ج) حدِّد كمية الطلب وكمية العرض لهذه السلعة عند مستوى السعر ٤، مبدياً ما تراه مناسباً من تعليق.

٢٧- إذا كانت دالة الطلب ودالة العرض لأحد المنتَجات هما:

ك = س٢ - ٤٠س + ٤٠٠ **دالة الطلب**

ك = س٢ - ١٠٠ **دالة العرض**

حدد سعر وكمية المنتَج اللذيْن يحققان توازن السوق.

٢٨- تبيع شركة منتَجاتها بسعر ٦٥ جنيهاً للوحدة الواحدة. فإذا بلغت التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة ٢٠ جنيهاً للمواد الخام و٢٧,٥ جنيهاً للعمل. وكانت التكلفة الثانية ١٠٠٠٠٠ جنيه.

المطلوب:

أولاً: التعبير عن الربح كدالة لعدد الوحدات المنتَجة والمُباعة ك.

ثانياً: إيجاد ميل دالة الربح المحسوبة في "أولاً" مع توضيح الدلالة الاقتصادية له.

ثالثاً: ما هو مقدار الربح الذي يمكن أن تجنيه الشركة نتيجة بيعها لـ ٢٠٠٠٠ وحدة؟

٢٩- إذا كانت التكاليف الثابتة في مصنع لإنتاج أجهزة التلفاز تبلغ ١٠٠٠٠ جنيه، في حين تبلغ تكلفة العمل والمواد الخام ٥٠٠ جنيه للجهاز الواحد.

المطلوب:

(أ) إيجاد دالة التكلفة الكلية كدالة في عدد أجهزة التلفاز المنتَجة والمُباعة.

(ب) لو افترضنا أن كل جهاز تم بيعه بمبلغ ٢٠٠٠ جنيه، حدد كلًّا من دالة الإيراد ودالة الربح.

(ج) ما هو مقدار الربح الذي يمكن أن يحققه هذا المصنع إذا تم إنتاج وبيع ٢٠٠ جهاز؟

٣٠- إذا كانت دالة الطلب على إحدى السلع تأخذ الصيغة التالية:

ك = د(س) = ٤٨٠٠٠ - ٣٠٠٠س

حيث: ك كمية الطلب ، س سعر الوحدة بالجنيه

المطلوب:

أولاً: التعبير عن الإيراد كدالة لـ:

- عدد الوحدات المنتَجة - سعر الوحدة

ثانياً: ما هو مقدار الإيراد إذا بلغ سعر الوحدة ١٠٠ جنيه؟

٣١- إذا كانت التكاليف الكلية لإنتاج منتَج معين هي:

ت = د(ك) = ١٠٠ك^{٢} + ١٣٠٠ك + ١٠٠٠

حيث: ك عدد الوحدات المنتَجة بالآلاف ، **ت** التكلفة الكلية بآلاف الجنيهات.

فإذا تم بيع كل وحدة من المنتَج بمبلغ ٢٠٠٠ جنيه للوحدة.

المطلوب:

أولاً: إيجاد دالة الإيراد الكلي.

ثانياً: تحديد كمية الإنتاج التي تغطى فقط تكلفة الإنتاج دون تحقيق أرباح أو خسائر.

ثالثاً: إيجاد دالة الربح الكلي، ثم حساب مقدار الربح الكلي عند إنتاج ٤ آلاف وحدة.

الفصل الثاني

المتسلسلات

تعريف:

إذا كان لدينا مجموعة من الأعداد أو الحدود المتتابعة وكانت مرتبة حسب قانون معين أو قاعدة ثابتة، أي تتوالى الأعداد فيها وفقا لنمط معين فإن مجموعة الأعداد أو الحدود تسمى "متسلسلة". فالمتواليات العددية والهندسية والتوافقية هي بعض الصور التي تأخذها المتسلسلات. وأيضاً على سبيل المثال:

المتسلسلة: $س ، \frac{س^٢}{٢} ، \frac{س^٣}{٣} ، .....$

هي متسلسلة حدها العام هو: $ع = \frac{س^ن}{ن}$

وكذلك المتسلسلة: $\frac{١}{٢} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٣}{٤} ، .....$

هي متسلسلة حدها العام هو: $ع = \frac{ن}{ن + ١}$

وفيما يلي نتناول بالدراسة بعض أنواع هذه المتسلسلات:

أولاً: بعض أنواع المتسلسلات

١- المتسلسلة التقاربية: Convergent Series

سبق أن عرَّفنا مجموعة الأعداد:

$$\frac{١}{٢} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٣}{٤} ، .....$$

بأنها متسلسلة حدها العام يأخذ الشكل: $ع = \frac{ن}{ن + ١}$

ويُلاحَظ أن حدود هذه المتوالية في زيادة مستمرة، بمعنى أن كل حد من حدودها أكبر من الحد الذي يسبقه، ويمكن التعبير عن ذلك كما يلي:

$$ع_{ن+١} - ع_ن = \frac{ن + ١}{ن + ٢} - \frac{ن}{ن + ١}$$

$$= \frac{(ن+1)^{٢} - ن(ن+٢)}{(ن+1)(ن+٢)} = \frac{ن^{٢} + ٢ن + ١ - ن^{٢} - ٢ن}{(ن+1)(ن+٢)}$$

$$= \frac{١}{(ن+١)(ن+٢)}$$

وهذا يعنى أن الفرق بين الحديْن $ع_{ن+١}$ و $ع_{ن}$ هو مقدار موجب، أي أن:

$ع_{ن+١} > ع_{ن}$ لجميع قيم $ن$

بمعنى أن:

$$ع_{ن+٢} - ع_{ن+١} = \frac{١}{(ن+٢)(ن+٣)}$$

$ع_{ن+٢} > ع_{ن+١}$ ، وهكذا بالنسبة لبقية الحدود.

حيث يمكننا استنتاج أن أي حد من حدود المتسلسلة المُشار إليها يزيد في قيمته عن الحد السابق له. وقد يشير هذا – في ظاهِرِه – إلى أن مجموع هذه المتسلسلة قد يؤول إلى ما لا نهاية عند زيادة حدودها إلى عدد لا نهائي من الحدود. إلا أن الواقع هو غير ذلك تماماً، حيث أن أي حد من حدود هذه المتوالية لن يتعدَّ الواحد الصحيح بأي حال من الأحوال وذلك لأن البسط ($ن$) أصغر من المقام ($ن+١$). وهذا يعنى أن النهاية الحتمية لأكبر حدود هذه المتسلسلة هو:

$$\lim_{ن \to \infty} \frac{ن}{ن+١} = ١$$

حينئذ يُقال إن هذه المتسلسلة هي متسلسلة تقاربية حيث تنشأ لها نهاية محدودة. وبصفة عامة، يقال للمتسلسلة أنها تقاربية إذا آل مجموعها ($جـ_{ن}$) إلى نهاية محدودة عندما تؤول $ن$ إلى ما لا نهاية.

وعلى سبيل المثـال:

المتسلسلة ١، $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٤}$، ..... هي متسلسلة تعرف بالمتوالية الهندسية اللانهائية التي حدها الأول ١ وأساسها ٠,٥. ويمكن إيجاد هذا المجموع باستخدام العلاقة:

$$جـ = \frac{أ}{١-ر} = \frac{١}{١-٠,٥} = ٢$$

أي أن: $جـ \to ٢$ عندما $ن \to \infty$

فالمتسلسلة إذاً تقاربية.

٢- المتسلسلة التباعدية: Divergent Series

وهي المتوالية التي تأخذ في الازدياد المســـتمر ولا يمكن تحديد نهايتها حيث يؤول مجموعها ($جـ_{ن}$) إلى ما لانهاية عندما تؤول $ن$ إلى ما لا نهاية، أي عندما $ن \leftarrow \infty$.

ومثال ذلك:

المتسلسلة التي حدها العام: $ح_{ن} = \frac{ن^{٢}}{ن + ١}$

يمثلها مجموعة الأعداد:

$$\frac{١}{٢} ، \frac{٤}{٣} ، \frac{٩}{٤} ، .....$$

هي متسلسلة تباعدية حيث أن كل حد من حدودها يزيد عن سابقه، كما أن:

$$\lim_{ن \to \infty} \frac{ن^{٢}}{ن + ١} = \infty$$

مما يعنى انه عندما يزداد عدد حدود هذه المتوالية إلى ما لا نهاية فإن الحد الأخير وحده يساوى ∞ مما يشير إلى أنها متسلسلة تباعدية.

٣- المتسلسلة المتذبذبة: Oscillating Series

هناك نوعان من هذه المتسلسلة هما:

أ- المتسلسلة المتذبذبة المحدودة: Finite Oscillating

وفيها يتم التذبذب بين نهايات محدودة، وكمثال على هذا النوع من المتســـلســـلات نجد المتسلسلة التي حدها العام:

$$ح_{ن} = ٣ + \frac{١}{ن} + ٢(-١)^{ن}$$

فإذا كانت $ن$ عدداً كبيراً فردياً فإن الحد النوني لهذه المتسلسلة يؤول إلى القيمة: $ح_{ن} = ١$ ،

وأما إذا كانت $ن$ عدداً كبيراً زوجياً فإن الحد النوني لهذه المتسلسلة يؤول إلى القيمة:

$$ح_{ن} = ٥$$

وهذا يعنى أن هذه المتسلسلة تتذبذب نهايتها ما بين القيمتيْن (١ ، ٥).

ب - المتسلسلة المتذبذبة غير المحدودة: Infinite Oscillating

وهي المتسـلسـلة التي تكون فيها فترة التذبذب غير محدودة، ومثال ذلك المتسـلسـلة التي حدها العام:

$$ح_{ن} = ٢ + \frac{١}{ن} + ن\left[١ + (-١)^{ن}\right]$$

فإذا كانت $ن$ عدداً كبيراً زوجياً نجد أن: $ح_{ن} = \infty$

وأما إذا كانت $ن$ عدداً كبيراً فردياً فإن: $ح_{ن} = ٢$

أي أن نهاية المتسلسلة تتذبذب ما بين (٢، ∞)، لذلك تسمى بالمتسلسلة المتذبذبة غير المحدودة.
وبذلك يمكننا استنتاج أن المتسلسلة المتذبذبة قد تكون تقاربية وقد تكون تباعدية.

٤- المتسلسلة مستمرة الزيادة أو مستمرة النقصان:
Monotonic Increasing or Decreasing Series

إذا كانت المتسلسلة ذات حدود موجبة وفي زيادة مستمرة، بمعنى أن كل حد من حدودها يزيد عن سابقه. أي أن:

$$ح_{ن+١} > ح_{ن} \quad \text{لجميع قيم } ن$$

بمعنى أن:

$$ح_{٢} > ح_{١} \ ، \ ح_{٣} > ح_{٢} \ ، \ \ldots \text{ وهكذا}$$

فإن المتسلسلة تسمى حينئذ متسلسلة مستمرة الزيادة.

على سبيل المثال:

المتسلسلة التي حدها العام: $ح_{ن} = ٣ - \frac{١}{ن}$

هي متسلسلة مستمرة الزيادة.

وأما إذا كانت المتسلسلة ذات حدود موجبة ومستمرة النقصان، أي أن:

$$ح_{ن+١} < ح_{ن} \quad \text{لجميع قيم } ن$$

$$ح_{٢} < ح_{١} \ ، \ ح_{٣} < ح_{٢} \ ، \ \ldots \text{ وهكذا}$$

فإن المتسلسلة تسمى حينئذ متسلسلة مستمرة النقصان. ومثال ذلك:

المتسلسلة التي حدها العام: $ح_{ن} = \frac{ن + ١}{ن^{٢}}$

هي متسلسلة مستمرة النقصان، حيث يمكننا استنتاج أن أي حد من حدودها يقل في قيمته عن الحد الذي يليه.

ويمكننا إثبات أن المتســلســلة مســتمرة الزيادة أو مســتمرة النقصــان وذلك باتباع إحدى الطريقتيْن التاليتيْن:

١- دراسة إشارة الفرق بين الحديْن $ح_{ن}$ ، $ح_{ن+١}$ **. أي الفرق:** $ح_{ن} - ح_{ن+١}$

٢- دراسة خارج قسمة الحد النوني على الحد الذي يليه. أي قيمة الكسر: $\frac{ح_{ن}}{ح_{ن+١}}$

هذا ويلاحَظ أنه في بعض المتســلســلات نجد أن حدودها لا تتعدى في قيمتها حداً معيناً على الإطلاق. وفي هذه الحالة يقال إن المتسلسلة محدودة بالحد الأعلى. ومثال ذلك:

المتسلسلة التي حدها العام:

$ح_{ن} = ٣ - \frac{٢}{ن}$ يكون الحد الأعلى لها مساوياً ٣.

ومن جهة أخرى قد ينشــأ حد أدنى للمتســلســلة وذلك عندما يكون من غير الممكن أن يقل أي من حدود المتسلسلة عن قيمة معينة. مثال ذلك:
المتسلسلة التي حدها العام:

$$ح_{ن} = ٤ + \frac{١}{ن}$$

تبلغ قيمة أصغر حد بين حدودها القيمة ٤.
ويسمى هذا النوع من المتسلسلات بالمتسلسلات المقيدة **Bounded Sequences**.

٥- المتسلسلات المحدودة: Finite Series

وهي المتســلســلات التي لها عدد محدود من الحدود. فالمتســلســلة التي يمكن التعبير عن مجموعها كما يلي:

$$جـ = ح_{١} + ح_{٢} + ... + ح_{ن}$$

هي متسلسلة محدودة.

ويمكن إيجاد مجموع المتســلســلة المحدودة وذلك باســتخدام طريقة الفروق، والتي تعتمد على التعبير عن الحد العام للمتســلســلة $ح_{ن}$ في صــورة فرق بين حديْن متتاليْن لإحدى الدوال، أي على الصورة:

$$ح_{ر} = د(ر + ١) - د(ر)$$

وهنا يمكن إيجاد مجموع المتسلسلة على النحو التالي:

$$جـ = ح_{١} + ح_{٢} + ... + ح_{ن}$$

$$= [د(٢) - د(١)] + [د(٣) - د(٢)] + ... + [د(ن + ١) - د(ن)]$$

$$= [د(ن + ١) - د(١)]$$

والمثال التالي يلقي بعض الضوء على كيفية استخدام هذه الطريقة في إيجاد مجموع المتسلسلة المحدودة:

مثال (١):

أوجد مجموع الحدود الأولى التي عددها ن من المتسلسلة التالية:

$$\frac{١}{١\times٢}، \frac{١}{٢\times٣}، \frac{١}{٣\times٤}، .....$$

الحـل:

الحد العام لهذه المتسلسلة يأخذ الصورة:

$$ع_ر = \frac{١}{ر(ر+١)}$$

حيث يمكن التعبير عنه كما يلي:

$$ع_ر = \frac{١}{ر(ر+١)} = \frac{١}{ر} - \frac{١}{ر+١}$$

وعلى ذلك يمكن إيجاد مجموع ن حداً الأولى من المتسلسلة على النحو التالي:

$$جـ = \frac{١}{١\times٢} + \frac{١}{٢\times٣} + \frac{١}{٣\times٤} + ... + \frac{١}{ن(ن+١)}$$

$$= \left(١ - \frac{١}{٢}\right) + \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}\right) + \left(\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}\right) + ... + \left(\frac{١}{ن} - \frac{١}{ن+١}\right)$$

$$= ١ - \frac{١}{ن+١} = \frac{١}{ن+١}$$

مثال (٢):

استعن بالمتطابقة:

$$(٢ر + ١)^٣ - (٢ر - ١)^٣ = ٢٤ر^٢ + ٢$$

في إيجاد مجموع مربعات الأعداد الطبيعية:

$$١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ... + ن^٢$$

الحـل:

يمكن استخدام المتطابقة المعطاة على النحو التالي:

حيث أن: $(٢ر + ١)^{٣} - (٢ر - ١)^{٣} = ٢٤ر^{٢} + ٢$

فإنه بالتعويض في المتطابقة عن ر = ١، ٢، ٣،...، ن

نحصل على:

عند ر = ١: $٣^{٣} - ١^{٣} = ٢٤ \times ١^{٢} + ٢$

عند ر = ٢: $٥^{٣} - ٣^{٣} = ٢٤ \times ٢^{٢} + ٢$

عند ر = ٣: $٧^{٣} - ٥^{٣} = ٢٤ \times ٣^{٢} + ٢$

.

.

عند ر = ن: $(٢ن + ١)^{٣} - (٢ن + ١)^{٣} = ٢٤ن^{٢} + ٢$

وبأخذ المتبقي في الطرفيْن نحصل على:

$$(٢ن + ١)^{٣} - ١^{٣} = ٢٤ \sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} + ٢ن$$

$$\therefore ٢٤ \sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} = (٢ن + ١)^{٣} - ١ - ٢ن = (٢ن + ١)^{٣} - (٢ن + ١)$$

$$= (٢ن + ١)\,[(٢ن + ١)^{٢} - ١]$$

$$= (٢ن + ١)\,[٤ن^{٢} + ٤ن + ١ - ١]$$

$$= (٢ن + ١)(٤ن^{٢} + ٤ن) = ٤ن(ن + ١)(٢ن + ١)$$

$$\therefore \sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} = \frac{٤ن(ن + ١)(٢ن + ١)}{٢٤} = \frac{ن(ن + ١)(٢ن + ١)}{٦}$$

ثانياً: بعض المتسلسلات المعروفة

سوف نتناول بعض المتسلسلات المعروفة وذلك على النحو الموضح فيما يلي:

- المتسلسلات: ذات الحديْن، الأسية، اللوغاريتمية.
- المتسلسلات التي تنشأ حدودها من حواصل الضرب للأعداد الطبيعية المتتالية.
- المتسلسلات التي تمثل مجموع القوى المختلفة للأعداد الطبيعية.

١- المتسلسلات: ذات الحدين ، الأسية ، اللوغاريتمية

أ- متسلسلة ذات الحدين: The Binomial Series

نعلم من نظرية ذات الحديْن أنه إذا كانت $|\text{س}| < 1$ وكانت ن سالبة أو كسرية فإن:

$$(1+\text{س})^{\text{ن}} = 1 + \text{ن}\text{س} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}\text{س}^{2} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{1\times 2\times 3}\text{س}^{3} + \dots$$

فإذا كانت $\text{ن} > 1$ فإن $\left(\frac{1}{\text{ن}}\right) < 1$، وبوضع $\text{س} = \frac{1}{\text{ن}}$ نحصل على:

$$\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = 1 + \text{ن}\left(\frac{1}{\text{ن}}\right) + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}\left(\frac{1}{\text{ن}}\right)^{2} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{1\times 2\times 3}\left(\frac{1}{\text{ن}}\right)^{3} + \dots$$

$$= 1 + \frac{\text{ن}}{\text{ن}} + \frac{1}{2!}\,\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\text{ن}\times\text{ن}} + \frac{1}{3!}\,\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{\text{ن}\times\text{ن}\times\text{ن}} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\text{ن}}{\text{ن}}\right)\left(\frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\text{ن}}{\text{ن}}\right)\left(\frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\right)\left(\frac{\text{ن}-2}{\text{ن}}\right) + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{ن}}\right) + \dots$$

وعندما تؤول ن إلى ما لا نهاية فإن كلاً من المقاديــر: $\frac{1}{\text{ن}}$، $\frac{2}{\text{ن}}$،..... تؤول إلى الصفر.

وبالتالي نجد أن:

$$\lim_{\text{ن}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \qquad \Leftarrow \qquad (1)$$

ويُرمز إلى مجموع المتسلسلة اللانهائية بالطرف الأيسر بالرمز هـ، أي أن:

$$\text{هـ} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \qquad \Leftarrow \qquad (2)$$

وهي متسلسلة تقاربية لها مجموع محدود، حيث يمكننا استنتاج أن:

$$\text{هـ} > 1 + 1 + \frac{1}{2}\text{، أي أن: } \text{هـ} > 2.5$$

بينما نجد أن:

$$\text{هـ} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$$

وذلك لأن: $\frac{١}{٣} > \frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٤} > \frac{١}{٨}$ وهكذا.

أي أن: هـ $>$ ١ + (١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٨}$ +...)

وحيث أن: ١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٨}$ +... هي متوالية هندسية لا نهائيـة مجموعها هو:

$$\frac{١}{١ - ٠,٥} = ٢$$

∴ هـ $<$ ١ + ٢ ، أي أقل من ٣

وهذا يعنى أن قيمة هـ تقع ما بين ٢,٥، ٣.

وبأخذ عدد كاف من الحدود نجد أن: هـ = ٢,٧١٨٢٨٢

مثال (٣):

أثبت أنه إذا كانت |ص| $<$ ١ فإن:

$$\frac{١}{١ - ص} = ١ + ص + ص^{٢} + ص^{٣} + ...$$

الحـل:

حيث أنه إذا كانت |س| $<$ ١ وكانت ن سالبة أو كسرية فإن:

$$\left(١+س\right)^{ن} = ١ + ن س + \frac{ن\left(ن-١\right)}{١\times٢}س^{٢} + \frac{ن\left(ن-١\right)\left(ن-٢\right)}{١\times٢\times٣}س^{٣} + ...$$

فإنه بوضع: س = -ص ، ن = -١ نحصل على:

$$\left(١-ص\right)^{-١} = ١ + \left(-١\right)\left(-ص\right) + \frac{\left(-١\right)\left(-٢\right)}{١\times٢}\left(-ص\right)^{٢} + \frac{\left(-١\right)\left(-٢\right)\left(-٣\right)}{١\times٢\times٣}\left(-ص\right)^{٣} + ...$$

أي أن: $\frac{١}{١ - ص} = ١ + ص + ص^{٢} + ص^{٣} + ...$ ⇦ (٣)

ب- المتسلسلة الأسية: Exponential Series

العدد هـ على جانب كبير من الأهمية في التطبيقات الرياضية، حيث أنه يستخدم كأساس للوغاريتمات الطبيعية. ويتميز هذا العدد بأنه إذا رفع لأية قوة (س مثلاً) فإن الناتج يكون متسلسلة تقاربية. وعلى سبيل المثال:

$$\text{هـ}^{\text{س}} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}} \left[\left(١+\frac{١}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}\right]^{\text{س}} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}} \left(١+\frac{١}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}\text{س}}$$

$$= \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}} \left[١+\text{ن}\text{س}\left(\frac{١}{\text{ن}}\right)+\frac{\text{ن}\text{س}(\text{ن}\text{س}-١)}{\underline{٢|}}\left(\frac{١}{\text{ن}}\right)^{٢}+\frac{\text{ن}\text{س}(\text{ن}\text{س}-١)(\text{ن}\text{س}-٢)}{\underline{٣|}}\left(\frac{١}{\text{ن}}\right)^{٣}+\ldots\right]$$

$$= \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}} \left[١+\frac{\text{ن}\text{س}}{\text{ن}}+\frac{١}{\underline{٢|}}\left(\frac{\text{ن}\text{س}}{\text{ن}}\right)\left(\frac{\text{ن}\text{س}-١}{\text{ن}}\right)+\frac{١}{\underline{٣|}}\left(\frac{\text{ن}\text{س}}{\text{ن}}\right)\left(\frac{\text{ن}\text{س}-١}{\text{ن}}\right)\left(\frac{\text{ن}\text{س}-٢}{\text{ن}}\right)+\ldots\right]$$

$$= \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}} \left[١+\frac{\text{س}}{١}+\frac{١}{\underline{٢|}}\text{س}\left(\text{س}-\frac{١}{\text{ن}}\right)+\frac{١}{\underline{٣|}}\text{س}\left(\text{س}-\frac{١}{\text{ن}}\right)\left(\text{س}-\frac{٢}{\text{ن}}\right)+\ldots\right]$$

أي أن:

$$\text{هـ}^{\text{س}} = ١+\frac{\text{س}}{\underline{١|}}+\frac{\text{س}^{٢}}{\underline{٢|}}+\frac{\text{س}^{٣}}{\underline{٣|}}+\ldots \qquad \Leftarrow \qquad (٤)$$

وبالمثل نجد أن:

$$\text{هـ}^{\text{جـ}\text{س}} = ١+\frac{\text{جـ}\text{س}}{\underline{١|}}+\frac{(\text{جـ}\text{س})^{٢}}{\underline{٢|}}+\frac{(\text{جـ}\text{س})^{٣}}{\underline{٣|}}+\ldots$$

وبوضع $\text{هـ}^{\text{جـ}} = \text{أ}$ ، نجد أن: $\text{جـ} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ}$

وينتج من ذلك أن:

$$\text{أ}^{\text{س}} = ١+\frac{\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ}}{\underline{١|}}+\frac{(\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ})^{٢}}{\underline{٢|}}+\frac{(\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ})^{٣}}{\underline{٣|}}+\ldots \qquad \Leftarrow \qquad (٥)$$

وتعرف المتسلسلة بالطرف الأيسر بالمتسلسلة الأسية وهي صحيحة لجميع قيم س.

مثال (٤):

أكتب الحدود الأربعة الأولى في مفكوك $\text{هـ}^{٢\text{س}}$.

الحـل:

حيث أن:

$$\text{هـ}^{\text{جـ}\text{س}} = ١+\frac{\text{جـ}\text{س}}{\underline{١|}}+\frac{(\text{جـ}\text{س})^{٢}}{\underline{٢|}}+\frac{(\text{جـ}\text{س})^{٣}}{\underline{٣|}}+\ldots$$

$$\therefore\ \text{هـ}^{\text{٢س}} = \text{١} + \frac{\text{٢س}}{\lfloor \text{١}} + \frac{(\text{٢س})^{\text{٢}}}{\lfloor \text{٢}} + \frac{(\text{٢س})^{\text{٣}}}{\lfloor \text{٣}} + \dots$$

مثال (٥):

أثبت أن:

$$\frac{\text{١}}{\text{هـ}} = \frac{\text{٢}}{\lfloor \text{٣}} + \frac{\text{٤}}{\lfloor \text{٥}} + \frac{\text{٦}}{\lfloor \text{٧}} + \dots$$

الحـل:

حيث أن: $\text{هـ}^{\text{س}} = \text{١} + \frac{\text{س}}{\lfloor \text{١}} + \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\lfloor \text{٢}} + \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\lfloor \text{٣}} + \frac{\text{س}^{\text{٤}}}{\lfloor \text{٤}} + \dots$

وبوضع $\text{س} = -\text{١}$

$$\therefore\ \text{هـ}^{-\text{١}} = \frac{\text{١}}{\text{هـ}} = \text{١} + \frac{-\text{١}}{\lfloor \text{١}} + \frac{(-\text{١})^{\text{٢}}}{\lfloor \text{٢}} + \frac{(-\text{١})^{\text{٣}}}{\lfloor \text{٣}} + \frac{(-\text{١})^{\text{٤}}}{\lfloor \text{٤}} + \dots$$

$$= \left(\text{١} - \frac{\text{١}}{\lfloor \text{١}}\right) + \left(\frac{\text{١}}{\lfloor \text{٢}} - \frac{\text{١}}{\lfloor \text{٣}}\right) + \left(\frac{\text{١}}{\lfloor \text{٤}} - \frac{\text{١}}{\lfloor \text{٥}}\right) + \dots$$

$$= \frac{\text{٣} - \text{١}}{\lfloor \text{٣}} + \frac{\text{٥} - \text{١}}{\lfloor \text{٥}} + \frac{\text{٧} - \text{١}}{\lfloor \text{٧}} + \dots = \frac{\text{٢}}{\lfloor \text{٣}} + \frac{\text{٤}}{\lfloor \text{٥}} + \frac{\text{٦}}{\lfloor \text{٧}} + \dots$$

مثال (٦):

أثبت أن:

$$\frac{\text{١}}{\text{٢}}\left(\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}}\right) = \text{س} + \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\lfloor \text{٣}} + \frac{\text{س}^{\text{٥}}}{\lfloor \text{٥}} + \dots$$

الحـل:

حيث أن: $\text{هـ}^{\text{س}} = \text{١} + \frac{\text{س}}{\lfloor \text{١}} + \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\lfloor \text{٢}} + \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\lfloor \text{٣}} + \frac{\text{س}^{\text{٤}}}{\lfloor \text{٤}} + \dots$

$$\text{هـ}^{-\text{س}} = \text{١} - \frac{\text{س}}{\lfloor \text{١}} + \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\lfloor \text{٢}} - \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\lfloor \text{٣}} + \frac{\text{س}^{\text{٤}}}{\lfloor \text{٤}} + \dots$$

وبالطرح نحصل على:

$$\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}} = \text{٢}\left(\frac{\text{س}}{\lfloor \text{١}} + \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\lfloor \text{٣}} + \frac{\text{س}^{\text{٥}}}{\lfloor \text{٥}} + \dots\right)$$

$$\therefore \frac{١}{٢}\left(هـ^{س} - هـ^{-س}\right) = س + \frac{س^{٣}}{\underline{|٣}} + \frac{س^{٥}}{\underline{|٥}} + ...$$

جـ - المتسلسلة اللوغاريتمية: **Logarithmic Series**

قبل أن نعرض المتسلسلة اللوغاريتمية فإنه من الملائم أن نقدم بعض التعريفات المتعلقة باللوغاريتمات وكذلك بعض خواص اللوغاريتمات، وذلك من قَبيل التذكير للقارئ.

إذا كانت أ، ص عدديْن حقيقييْن موجبيْن، أ $\neq$ ١، وكانت ص = أ^{س} فإننا نقول بأن س هي لوغاريتم ص للأساس أ. ويمكن التعبير عن ذلك كما يلي:

$$س = لو_{أ} ص$$

وعلى سبيل المثال:

$$لو_{١٠} ١٠٠ = لو_{١٠} (١٠)^{٢} = ٢ \quad ، \quad لو_{١٠} ١٠٠٠ = لو_{١٠} (١٠)^{٣} = ٣،$$

$$لو_{٢} ٨ = لو_{٢} (٢)^{٣} = ٣ \quad ، \quad لو_{٣} ٨١ = لو_{٣} (٣)^{٤} = ٤$$

وهنا يمكننا استنتاج أن:

$$لو_{أ} ١ = صفر \quad ، \quad لو_{أ} أ = ١$$

$$لو_{أ} (ب جـ) = لو_{أ} ب + لو_{أ} جـ،$$

$$لو_{أ}\left(\frac{ب}{جـ}\right) = لو_{أ} ب - لو_{أ} جـ$$

وعلى سبيل المثال:

$$لو_{١٠} ١٠ = ١ \quad ، \quad لو_{هـ} ١ = صفر،$$

$$لو_{١٠} ١ = صفر \quad ، \quad لو_{هـ} هـ = ١$$

هذا وهناك أساسان للوغاريتمات وهما الأساس ١٠ والأساس هـ (والتي سبق تعريفها). وتسمى اللوغاريتمات للأساس ١٠ باللوغاريتمات العادية Common Logarithms، بينما تسمى اللوغاريتمات للأساس هـ باللوغاريتمات الطبيعية Natural Logarithms.

والآن لعله من المناسب أن نعرِّف المتسلسلة اللوغاريتمية وذلك على النحو الموضح فيما يلي:

سبق أن أوضحنا أن:

$$\text{أ}^{\text{س}} = \text{١} + \frac{\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{أ}}{\underline{|\text{١}}} + \frac{\left(\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{أ}\right)^{\text{٢}}}{\underline{|\text{٢}}} + \frac{\left(\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{أ}\right)^{\text{٣}}}{\underline{|\text{٣}}} + \dots$$

وحيث أن هذا صحيح بالنسبة لجميع قيم س فإننا نجد أن:

$$\text{أ}^{\text{ص}} = \text{١} + \frac{\text{ص لو}_{\text{هـ}}\text{أ}}{\underline{|\text{١}}} + \frac{\left(\text{ص لو}_{\text{هـ}}\text{أ}\right)^{\text{٢}}}{\underline{|\text{٢}}} + \frac{\left(\text{ص لو}_{\text{هـ}}\text{أ}\right)^{\text{٣}}}{\underline{|\text{٣}}} + \dots$$

وبوضع أ = ١ + س نحصل على:

$$\left(\text{١} + \text{س}\right)^{\text{ص}} = \text{١} + \frac{\text{ص لو}_{\text{هـ}}\left(\text{١} + \text{س}\right)}{\underline{|\text{١}}} + \frac{\left[\text{ص لو}_{\text{هـ}}\left(\text{١} + \text{س}\right)\right]^{\text{٢}}}{\underline{|\text{٢}}}$$

$$+ \frac{\left[\text{ص لو}_{\text{هـ}}\left(\text{١} + \text{س}\right)\right]^{\text{٣}}}{\underline{|\text{٣}}} + \dots \qquad \Leftarrow \qquad (\text{٦})$$

وبافتراض أن |س| < ١ فإنه يمكن فك الطرف الأيمن من هذه المعادلة باستخدام نظرية ذات الحديْن وذلك كما يلي:

$$\left(\text{١} + \text{س}\right)^{\text{ص}} = \text{١} + \frac{\text{ص لو}_{\text{هـ}}\left(\text{١} + \text{س}\right)}{\underline{|\text{١}}} + \frac{\left[\text{ص لو}_{\text{هـ}}\left(\text{١} + \text{س}\right)\right]^{\text{٢}}}{\underline{|\text{٢}}} + \frac{\left[\text{ص لو}_{\text{هـ}}\left(\text{١} + \text{س}\right)\right]^{\text{٣}}}{\underline{|\text{٣}}} + \dots$$

$$= \text{١} + \frac{\text{ص س}}{\underline{|\text{١}}} + \frac{\text{ص}^{\text{٢}} - \text{ص}}{\underline{|\text{٢}}}\text{س}^{\text{٢}} + \frac{\text{ص}^{\text{٣}} - \text{٣ص}^{\text{٢}} + \text{٢ص}}{\underline{|\text{٣}}}\text{س}^{\text{٣}} + \dots$$

$$= \text{١} + \frac{\text{ص س}}{\underline{|\text{١}}} + \left(\frac{\text{ص}^{\text{٢}}\text{س}^{\text{٢}}}{\underline{|\text{٢}}} - \frac{\text{ص س}^{\text{٢}}}{\underline{|\text{٢}}}\right)$$

$$+ \left(\frac{\text{ص}^{\text{٣}}\text{س}^{\text{٣}}}{\underline{|\text{٣}}} - \frac{\text{٣ص}^{\text{٢}}\text{س}^{\text{٢}}}{\underline{|\text{٣}}} + \frac{\text{٢ص س}^{\text{٣}}}{\underline{|\text{٣}}}\right) + \dots \qquad \Leftarrow \qquad (\text{٧})$$

وحيث أن الطرف الأيمن في (٦) يساوى الطرف الأيمن في (٧)، فإن الطرف الأيسر في (٦) يساوى أيضاً الطرف الأيسر في (٧). وبمساواة معامل ص في الطرف الأيسر في المعادلتيْن (٦)، (٧) نحصل على:

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{١} + \text{س}\right) = \frac{\text{س}}{\text{١}} - \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} + \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{٣}} - \frac{\text{س}^{\text{٤}}}{\text{٤}} + \dots \qquad \Leftarrow \qquad (\text{٨})$$

وتُعرف المتسلسلة في الطرف الأيسر بالمتسلسلة اللوغاريتمية، وهي صحيحة عندما |س| < ١ وكذلك عندما س = ١.

مثال (٧):

احســـــب لــو ١,٢ مقرّباً نتائجك إلى أربعة أرقام عشـــرية، مســـتخدماً في ذلك المتسلسلة اللوغاريتمية.

الحـل:

$$لـو_{هـ}\ ١,٢ = لـو_{هـ}\ (١ + ٠,٢)$$

وحيث أن:

$$لـو_{هـ}(١+س) = \frac{س}{١} - \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{س^{٣}}{٣} - \frac{س^{٤}}{٤} + \ ...$$

وذلك لجميع قيم س التي تحقق |س| < ١، فإننا نحصل على:

$$لـو_{هـ}(١+٠,٢) = \frac{٠,٢}{١} - \frac{(٠,٢)^{٢}}{٢} + \frac{(٠,٢)^{٣}}{٣} - \frac{(٠,٢)^{٤}}{٤} + \frac{(٠,٢)^{٥}}{٥} - \ ...$$

يلاحظ هنا أن القيمة المطلوبة لا تتأثر ابتداءً من الحد الخامس. أي أن:

$$لـو_{هـ}(١+٠,٢) = ٠,٢ - ٠,٠٢ + ٠,٠٠٢٦٧ - ٠,٠٠٠٤$$

$$= ٠,١٨٢٣ \text{ تقريباً}$$

٢- المتسلسلات التي تنشأ حدودها من حواصل الضرب للأعداد الطبيعية المتتالية:

هذا النوع المتسلسلات يأخذ الصور التالية:

أ- $\sum_{ر=١}^{ن} ر(ر+١)$ ،

ب- $\sum_{ر=١}^{ن} ر(ر+١)(ر+٢)$ ،

جـ- $\sum_{ر=١}^{ن} ر(ر+١)(ر+٢)(ر+٣)$ وهكذا...

فإذا اعتبرنا أولى هذه المتســلســلات وأردنا إيجاد مجموعها، فإنه يمكننا اتباع طريقة الفروق المُشار إليها من قبل وذلك على النحو التالي:

لو أخذنا الدالة:

$$د(ر) = ر(ر + ١)(ر + ٢)$$

فإننا نجد أن:

$$\text{د}(\text{ر}) - \text{د}(\text{ر} - ١) = \text{ر}(\text{ر} + ١)(\text{ر} + ٢) - (\text{ر} - ١)\text{ر}(\text{ر} + ١)$$

$$= \text{ر}(\text{ر} + ١)(\text{ر} + ٢ - \text{ر} + ١)$$

$$= ٣\text{ر}(\text{ر} + ١)$$

أي أنه يمكن التعبير عن الحد العام للمتسلسلة في الصورة:

$$\text{ع}_{\text{ر}} = \frac{١}{٣}[\text{د}(\text{ر}) - \text{د}(\text{ر} - ١)]$$

وبأخذ مجموع الطرفيْن نحصل على:

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ر}} = \frac{١}{٣} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} [\text{د}(\text{ر}) - \text{د}(\text{ر} - ١)]$$

$$= \frac{١}{٣}\{[\text{د}(١) - \text{د}(٠)] + [\text{د}(٢) - \text{د}(١)]$$

$$+ [\text{د}(٣) - \text{د}(٢)] + \dots + [\text{د}(\text{ن}) - \text{د}(\text{ن} - ١)]\}$$

$$= \frac{١}{٣}[\text{د}(\text{ن}) - \text{د}(٠)]$$

وبالتالي يمكن كتابة مجموع المتسلسلة كما يلي:

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ر}} = \frac{١}{٣}[\text{ن}(\text{ن} + ١)(\text{ن} + ٢) - \text{صفر}(١)(٢)]$$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)(\text{ن}+٢)}{٣}$$

وأما في حالة إيجاد مجموع المتســـلســـلة التي حدها العام: $\text{ع}_{\text{ر}} = \text{ر}(\text{ر} + ١)(\text{ر} + ٢)$

فإنه يمكننا اعتبار الدالة:

$$\text{د}(\text{ر}) = \text{ر}(\text{ر} + ١)(\text{ر} + ٢)(\text{ر} + ٣)$$

وباتباع طريقة الفروق على النحو المشار إليه نحصل على:

$$\text{د}(\text{ر}) - \text{د}(\text{ر} - ١) = \text{ر}(\text{ر} + ١)(\text{ر} + ٢)(\text{ر} + ٣) - (\text{ر} - ١)\text{ر}(\text{ر} + ١)(\text{ر} + ٢)$$

$$= \text{ر}(\text{ر} + ١)(\text{ر} + ٢)\{(\text{ر} + ٣) - (\text{ر} - ١)\}$$

$$= \text{ر}(\text{ر} + ١)(\text{ر} + ٢)(٤)$$

$$= ٤\text{ر}(\text{ر} + ١)(\text{ر} + ٢)$$

$\therefore$ $ع_ر = \frac{١}{٤}\,[د(ر) - د(ر - ١)]$

أي أن: $\sum_{ر=١}^{ن} ع_ر = \frac{١}{٤} \sum_{ر=١}^{ن} [د(ر) - د(ر - ١)]$

$= \frac{١}{٤} \{[د(١) - ر(٠)] + [د(٢) - د(١)]$

$+ ... + [د(ن) - د(ن - ١)]\} = \frac{١}{٤}[د(ن) - د(٠)]$

$= \frac{ن(ن+١)(ن+٢)(ن+٣)}{٤}$

هذا وباتباع نفس الأسلوب يمكننا إثبات أن مجموع المتسلسلة التي حدهـا العام:

$ع_ر = ر\,(ر+١)\,(ر+٢)\,(ر+٣)$

هو $\frac{ن(ن+١)(ن+٢)(ن+٣)(ن+٤)}{٥}$

مع ملاحظة أن الدالة المستخدمة في هذه الحالة هي:

$د(ر) = ر\,(ر+١)\,(ر+٢)\,(ر+٣)$

٣- مجاميع القوى المختلفة للأعداد الطبيعية:

من أهم فوائد المتسلسلات السابقة أنه يمكن استخدامها في إيجاد مجاميع القوى المختلفة للأعداد الطبيعية وذلك على النحو الموضح في الأمثلة التالية:

مثال (٨):

أوجد مجموع مربعات الأعداد الطبيعية، أي:

$١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ... + ن^٢$

الحـل:

يمكننا إيجاد المجموع المطلوب بالاستعانة بالمتطابقة:

$ر^٢ = أ_١ ر\,(ر+١) + أ_٢ ر + أ_٣$

وبمساواة قوى ر في الطرفيْن نحصل على:

$أ_١ = ١$ ، $أ_٢ = -١$ ، $أ_٣ =$ صفر

أي أن: $ر^٢ = ر\,(ر+١) - ر$

وبأخذ مجموع الطرفيْن نحصل على:

$$\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} = \sum_{ر=١}^{ن} ر\,(ر+١) - \sum_{ر=١}^{ن} ر$$

وحيث أن:

$$\sum_{ر=١}^{ن} ر\,(ر+١) = \frac{ن(ن+١)(ن+٢)}{٣}$$ سبق إثبات ذلك

$$\therefore \sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} = \frac{ن(ن+١)(ن+٢)}{٣} - \frac{ن(ن+١)}{٢}$$

$$= ن(ن+١)\left(\frac{ن+٢}{٣} - \frac{١}{٢}\right) = ن(ن+١)\left(\frac{٢(ن+٢)-٣}{٦}\right)$$

$$= ن(ن+١)\left(\frac{٢ن+٤-٣}{٦}\right) = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$$

مثال (٩):

أوجد مجموع مكعبات الأعداد الطبيعية، أي:

$$١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + ... + ن^{٣}$$

الحـل:

يمكن إيجاد المجموع المطلوب باستخدام المتطابقة التالية:

$$ر^{٣} = أ_{١}\, ر\,(ر+١)\,(ر+٢) + أ_{٢}\, ر\,(ر+١) + أ_{٣}\, ر + أ_{٤}$$

وبمساواة قوى $ر$ في الطرفيْن نحصل على:

$$أ_{١} = ١ \;،\; أ_{٢} = -٣ \;،\; أ_{٣} = ١ \;،\; أ_{٤} = \text{صفر}$$

أي أن: $ر^{٣} = ر\,(ر+١)\,(ر+٢) - ٣ر\,(ر+١) + ر$

وبأخذ مجموع الطرفيْن نحصل على:

$$\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٣} = \sum_{ر=١}^{ن} ر\,(ر+١)\,(ر+٢) - ٣\sum_{ر=١}^{ن} (ر+١)\,ر + \sum_{ر=١}^{ن} ر$$

حيث أن:

$$\sum_{ر=١}^{ن} ر\,(ر+١)\,(ر+٢) = \frac{ن(ن+١)(ن+٢)(ن+٣)}{٤} \;،$$

$$\sum_{ر=1}^{ن} ر\left(ر+1\right) = \frac{ن\left(ن+1\right)\left(ن+2\right)}{3}$$

$$\therefore \sum_{ر=1}^{ن} ر^{3} = \frac{ن\left(ن+1\right)\left(ن+2\right)\left(ن+3\right)}{4} - 3\frac{ن\left(ن+1\right)\left(ن+2\right)}{3} + \frac{ن\left(ن+1\right)}{2}$$

$$= ن\frac{\left(ن+1\right)}{4}\left[\left(ن+2\right)\left(ن+3\right) - 4\left(ن+2\right) + 2\right]$$

$$= ن\frac{\left(ن+1\right)}{4}\left(ن^{2} + 5ن + 6 - 4ن - 8 + 2\right)$$

$$= ن\frac{\left(ن+1\right)}{4}\left(ن^{2} + ن\right) = ن\frac{\left(ن+1\right)}{4}\left[ن\left(ن+1\right)\right]$$

$$= \left[\frac{ن\left(ن+1\right)}{2}\right]^{2}$$

ثالثاً: المتسلسلات اللانهائية: Infinite Series

إذا اعتبرنا المتسلسلة: $ح_1 + ح_2 + ح_3 + ... \infty$ بحيث أن مجموعها يستمر إلى عدد غير محدود من الحدود فإن المتسلسلة تسمى حينئذ بالمتسلسلة اللانهائية.

هذا والمنطق الرياضي وراء عملية جمع حدود المتسلسلة إلى ∞ يمكن توضيحه على النحو التالي:

- بافتراض أن جـ تشير إلى مجموع الـ ن حدا الأولى من المتسلسلة، أي أن:

$$جـ_{ن} = ح_1 + ح_2 + ... + ح_{ن}$$

- النهاية التي يؤول إليها المجموع $جـ_{ن}$ تعطى تبريراً للمنطق الرياضي وراء عملية الجمع، بمعنى أنه إذا كانت:

$\lim_{ن \to \infty} جـ_{ن}$ = قيمة محدودة ، فإن المتسلسلة تكون تقاربية.

وإما إذا كانت: $\lim_{ن \to \infty} جـ_{ن} = \infty$ ، فإن المتسلسلة تكون تباعدية.

وفي بعض الحالات قد يكون المجموع الجزئي متذبذباً تذبذباً محدوداً أو غير محدود، حينئذ يطلق عليها المتسلسلة اللانهائية ذات التذبذب المحدود أو غير المحدود.

اختبارات التقارب والتباعد للمتسلسلات اللانهائية:

سوف نورد فيما يلي بعض الاختبارات التي يمكن من خلالها الحكم على تقارب أو تباعد المتسلسلات اللانهائية وذلك على النحو الموضح فيما يلي:

١- اختبار (١):

من الضروري لأي متسلسلة لا نهائية تقاربية أن يؤول حدها العام $ع_ن$ إلى الصفر وذلك عندما تؤول $ن$ إلى ما لا نهاية (أي: $\underset{ن \to \infty}{نهـا}\ ع_ن =$ صفر)، ولكن هذا الشرط غير كافٍ لإثبات تقارب المتسلسلة. فمجموعة المتسلسلات التي يأخذ حدها العام بالشكل:

$$ع = \frac{١}{ن^{أ}}$$

هي متسلسلات لا نهائية يؤول حدها العام إلى الصفر عندما تؤول $ن$ إلى ما لا نهاية. ولكن هذا لا يكفي للحكم على تقارب هذه المتسلسلات أو تباعدها. وفي واقع الأمر، فإن قيمة $أ$ هي التي تحدد ما إذا كانت المتسلسلة تقاربية أم تباعدية وذلك على النحو التالي:

إذا كانت: $أ \leq ١$ تكون المتسلسلة **تباعدية** ،

إذا كانت: $أ > ١$ تكون المتسلسلة **تقاربية**.

ومثال ذلك:

- المتسلسلة: $\frac{١}{١^{٢}}، \frac{١}{٢^{٢}}، \frac{١}{٣^{٢}}، .....$ هي متسلسلة تقاربية لأن: $أ = ٢ > ١$
- المتسلسلة: $\frac{١}{١}، \frac{١}{\sqrt{٢}}، \frac{١}{\sqrt{٣}}، .....$ هي متسلسلة تباعدية لأن: $أ = \frac{١}{٢} < ١$
- المتسلسلة: $\frac{١}{١^{٢}}، \frac{١}{٢^{١,٥}}، \frac{١}{٣^{١,٥}}، .....$ هي متسلسلة تقاربية لأن: $أ = ١,٥ > ١$

٢- اختبار (٢): اختبار المقارنة Comparison Test

وفقاً لهذا الاختبار يمكن الحكم على تقارب أو تباعد المتسلسلة وذلك من خلال مقارنة الحد العام لها بالحد العام لمتسلسلة أخرى معروف تقاربها أو تباعدها وذلك على النحو التالي:

أ- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{\infty} ع_ن$ موجبة الحدود، وكانت $ع < ك_ن$ لجميع قيم $ن$،

فإن المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{\infty} ع_ن$ تكون تقاربية إذا كانت المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{\infty} ك_ن$ تباعدية.

ب- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{\infty}$ موجبة الحدود، وكانــت $ع > ك_{ن}$ لجميع قيم ن،

فإن المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{\infty} ع_{ن}$ تكون تباعدية إذا كانــت المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{\infty} ك_{ن}$ تباعدية.

مثال (١٠):

اختبر المتسلسلة: $١ + \frac{١}{٢^{٢}} + \frac{١}{٣^{٢}} + \frac{١}{٤^{٢}} + ...$

من حيث التقارب أو التباعد وذلك باستخدام اختبار المقارنة.

الحـل:

في البداية تلزم الإشارة إلى أن هذه المتسلسلة تقاربية وهذا ما أثبتناه عند استخدامنا للاختبار (١)، حيث أن الشكل الذي يأخذه الحد العام لهذه المتسلسلة هو:

$$ع = \frac{١}{ن^{أ}}$$

كما أن: أ = ٢ وهي أكبر من ١، إذاً فالمتسلسلة تقاربية.

ولكن في هذا المثال نود أن نختبر تقارب أو تباعد هذه المتسلسلة وفقاً لاختبار المقارنة، وذلك من خلال مقارنتها بمتسلسلة أخرى معروف تقاربها أو تباعدها. فبمقارنة المتسلسلة:

$$١ + \frac{١}{٢^{٢}} + \frac{١}{٣^{٢}} + \frac{١}{٤^{٢}} + ...$$

بالمتسلسلة: $١ + \frac{١}{٢} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} + ...$

نجد أن كل حد من حدود المتسلسلة الأولى أقل من نظيره في المتسلسلة الثانية باستثناء الحد الأول والذي يأخذ القيمة واحد في كل من المتسلسلتيْن. وحيث أن المتسلسلة الثانية تمثل متوالية هندسية لا نهائية مجموعها ($\frac{١}{١ - ٠,٥} = ٢$)، أي أنها تقاربية. فإنه يمكن الحكم على المتسلسلة الأولى بأنها تقاربية أيضا.

مثال (١١):

اختبر المتسلسلة: $١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + ...$

من حيث التقارب أو التباعد.

الحــل:

يمكننا أيضـــاً اختبار التقارب أو التباعد للمتســـلســـلة المعطاة وذلك باســـتخدام أي من الاختبارين: اختبار (١) واختبار (٢) وذلك على النحو التالي:

باستخدام اختبار (١):

الحد العام لهذه المتسلسلة يأخذ الصورة التالية:

$$ع = \frac{١}{ن} \text{ ، أي أن: } أ = ١$$

إذاً المتسلسلة تباعدية.

باستخدام اختبار (٢):

بكتابة المتسلسلة: $١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + ...$ على الصورة:

$$١ + \frac{١}{٢} + \left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٤}\right) + \left(\frac{١}{٥} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٧} + \frac{١}{٨}\right) + ...$$

ثم مقارنتها بالمتسلسلة:

$$\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + \left(\frac{١}{٤} + \frac{١}{٤}\right) + \left(\frac{١}{٨} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{٨}\right) + ...$$

أي بالمتسلسلة:

$$\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + ...$$

نجد أن كل حد من حدود المتسلسلة الأولى (المطلوب اختبار تقاربها أو تباعدها) هو أكبر من نظيره في المتسلسلة الثانية (ما عدا الحد الثاني فهو متساوي في المتسلسلتيْن). وحيث أن المتسلسلة الثانية تمثل متوالية هندسية أساسها = ١، إذاً فهي تباعدية. وبذلك يمكننا استنتاج أن المتسلسلة المعطاة هي تباعدية أيضا. وهو ما يتفق مع النتيجة التي توصلنا إليها باستخدام اختبار (١).

مثال (١٢):

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة: $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{ن^{٢} + ٢}$

الحــل:

الحد العام لهذه المتسلسلة هو: $ع_{ن} = \frac{١}{ن^{٢} + ٢}$

وبمقارنة هذه المتسلسلة بالمتسلسلة:

$$\sum_{ن=1}^{\infty} \frac{1}{ن^{2}} \quad ، \quad \text{أي أن:} \quad ك_{ن} = \frac{1}{ن^{2}}$$

فإننا نلاحظ أن: $ع_{ن} < ك_{ن}$ لجميع قيم $ن$

وحيث أن المتسلسلة $\sum_{ن=1}^{\infty} \frac{1}{ن^{2}}$ تقاربية (أ = ٢ > ١)، وفقاً لاختبار (١)،

فإن المتسلسلة الأولى هي تقاربية أيضاً.

مثال (١٣):

اختبر المتسلسلة التالية من حيث التقارب أو التباعد:

$$\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{5\times6} + ...$$

الحـل:

بمقارنة هذه المتسلسلة بالمتسلسلة التالية:

$$\frac{1}{1\times1} + \frac{1}{2\times2} + \frac{1}{3\times3} + ...$$

فإننا نجد أن كل حد من حدود المتسلسلة الأصلية أصغر من نظيره في المتسلسلة المقارن بها.
وحيث أن الحد العام للمتسلسلة الثانية يأخذ الصورة التالية:

$ع_{ن} = \frac{1}{ن^{2}}$، إذاً فهي تقاربية، راجع اختبار (١)

وبذلك يمكننا استنتاج أن المتسلسلة:

$$\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{5\times6} + ...$$

هي متسلسلة تقاربية أيضاً.

٣- اختبار (٣): صورة بديلة لاختبار المقارنة

في هذا الاختبار إذا كانت النسبة بين $ع_{ن}$ (في المتسلسلة $\sum_{ن=1}^{\infty} ع_{ن}$) و$ك_{ن}$ (في المتسلسلة $\sum_{ن=1}^{\infty} ك_{ن}$) محدودة وغير مساوية للصفر عندما تؤول $ن$ إلى ما لا نهاية، فإن

المتسلسلتيْن $\sum_{ن=1}^{\infty} ع_ن$ ، $\sum_{ن=1}^{\infty} ك_ن$ لهما نفس السلوك. أي أنهما يتقاربان معاً أو يتباعدان معاً.

ويمكننا التعبير عن ذلك على النحو التالي:

إذا كانت: $\underset{ن \to \infty}{نهـا} \left(\frac{ع_ن}{ك_ن} \right) = أ \neq$ صفر

فإن المتسلسلتيْن $\sum_{ن=1}^{\infty} ع_ن$ ، $\sum_{ن=1}^{\infty} ك_ن$ يتقاربان معاً أو يتباعدان معاً.

مثال (١٤):

ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلة التالية: $\sum_{ن=1}^{\infty} \left(\frac{٣^ن}{٤^ن + ٢} \right)$

مستخدماً في ذلك:

أ- اختبار (٢) للمقارنة ب- اختبار (٣) للمقارن

الحـل:

أ- باستخدام اختبار (٢):

بمقارنة هذه المتسلسلة بالمتسلسلة $\sum_{ن=1}^{\infty} \left(\frac{٣}{٤} \right)^ن$ نجد أن كل حد من حدود المتسلسلة المطلوب اختبار تقاربها أو تباعدها يقل عن نظيره في المتسلسلة المقارن بها. وحيث أن المتسلسلة المقارن بها: $\sum_{ن=1}^{\infty} \left(\frac{٣}{٤} \right)^ن$ تمثل متوالية هندسية أساسها أقل من الواحد الصحيح فهي متسلسلة تقاربية. وبالتالي يمكننا استنتاج أن المتسلسلة المعطاة في المثال هي أيضا متسلسلة تقاربية.

ب- باستخدام اختبار (٣):

بمقارنـة المتسلسلة $\sum_{ن=1}^{\infty} \left(\frac{٣^ن}{٤^ن + ٢} \right)$ بالمتسلسلة $\sum_{ن=1}^{\infty} \left(\frac{٣}{٤} \right)^ن$ يمكننا استنتاج أن:

$$ع_ن = \frac{٣^ن}{٤^ن + ٢} \quad ، \quad ك_ن = \frac{٣^ن}{٤^ن}$$

أي أن:

$$\frac{ح_ن}{ك_ن} = \frac{٣^ن}{٤^ن + ٢} \div \frac{٣^ن}{٤^ن} = \frac{٣^ن}{٤^ن + ٢} \times \frac{٤^ن}{٣^ن} = \frac{٤^ن}{٤^ن + ٢}$$

$$\therefore \lim_{ن \to \infty} \left(\frac{ح_ن}{ك_ن} \right) = \lim_{ن \to \infty} \frac{٤^ن}{٤^ن + ٢}$$

= ١ وهو يختلف عن الصفر

أي أن المتسلسلتيْن تتقاربان معاً أو تتباعدان معاً. وحيث أن المتسلسلـــــة المقارَن بها تقاربية (سبق توضيح ذلك)، فإن المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{\infty} \left(\frac{٣^ن}{٤^ن + ٢} \right)$ هي أيضا متسلسلة تقاربية. وهو ما يتفق مع النتيجة التي توصلنا إليها في (أ).

مثال (١٥):

اختبر المتسلسلة التالية من حيث التقارب أو التباعد:

$$\frac{٤}{١+١} + \frac{٤}{٤+١} + \frac{٤}{٩+١} + \ldots\ldots$$

الحـل:

الحد العام لهذه المتسلسلة هو: $ح_ن = \frac{٤}{ن^٢ + ١}$

وبمقارنة هذه المتسلسلة بالمتسلسلة: $\sum_{ن=١}^{\infty} \left(\frac{١}{ن} \right)^٢$

نجد أن: $\frac{ح_ن}{ك_ن} = \frac{٤}{ن^٢ + ١} \div \frac{١}{ن^٢} = \frac{٤ن^٢}{ن^٢ + ١}$

أي أن: $\lim_{ن \to \infty} \left(\frac{ح_ن}{ك_ن} \right) = \lim_{ن \to \infty} \frac{٤ن^٢}{ن^٢ + ١}$

= ٤ وهي تختلف عن الصفر

أي أن المتسلسلتيْن تتقاربان معاً أو تتباعدان معاً. وحيث أن المتسلسلـــة $\sum_{ن=١}^{\infty} \left(\frac{١}{ن} \right)^٢$ هي متسلسلة تقاربية (راجع مثال (١٠)) فإن المتسلسلــة المُعطاة في هذا المثال هي أيضاً تقاربية.

٤- اختبار (٤): رتبة الحد العام

هذا الاختبار يمكِّننا في بعض الأحيان من الحكم على تقارب أو تباعد المتسلسلات من خلال تعرفنا على رتبة الحد العام للمتسلسلة، وذلك على النحو الموضح فيما يلي:

بعد تحديد رتبة الحد العام والتي تأخذ الشكل ($\frac{١}{\text{ن}^{\text{أ}}}$)، يمكننا تطبيق اختبار (١) على النحو السابق تناوله لتحديد تقارب أو تباعد المتسلسلة، حيث:

إذا كانت: أ > ١ تكون المتسلسلة **تقاربية**.

إذا كانت: أ ≥ ١ تكون المتسلسلة **تباعدية**.

مثال (١٦):

أدرس تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية:

- $\sum_{\text{ن}=١}^{\infty} \frac{٣}{\text{ن}+٢}$ - $\sum_{\text{ن}=١}^{\infty} \frac{٤\text{ن}+١}{\text{ن}(\text{ن}+٢)}$ - $\sum_{\text{ن}=١}^{\infty} \frac{٦\text{ن}-٥}{\text{ن}^{٢}(\text{ن}-١)}$

الحـل:

المتسلسلة $\sum_{\text{ن}=١}^{\infty} \frac{٣}{\text{ن}+٢}$ حدها العام رتبته ($\frac{١}{\text{ن}}$)، أي أن أ = ١

وبتطبيق **اختبار (١)** يمكننا استنتاج أن هذه المتسلسلة تباعدية.

المتسلسلة $\sum_{\text{ن}=١}^{\infty} \frac{٤\text{ن}+١}{\text{ن}(\text{ن}+٢)}$ حدها العام هو أيضاً من الرتبة ($\frac{١}{\text{ن}}$) وبالتالي فهي تباعدية.

المتسلسلة $\sum_{\text{ن}=١}^{\infty} \frac{٦\text{ن}-٥}{\text{ن}^{٢}(\text{ن}-١)}$ حدها العام من الرتبة ($\frac{١}{\text{ن}^{٢}}$)، أي أن: أ = ٢ > ١

وبتطبيق **اختبار (١)** يمكننا استنتاج أن هذه المتسلسلة تقاربية.

ملحوظة:

يمكننا تحديد رتبة الحد العام وذلك بمقارنة درجة البسط بدرجة المقام. ففي المتسلسلة الأولى كانت أكبر قوة لـــ س هي صفر وأكبر قوة لـــ س في المقام كانت ١. وأما في المتسلسلة الثالثة – على سبيل المثال – فقد كانت أكبر قوة لـــ س في البسط هي ١ وأكبر قوة لـــ س في المقام هي ٣. وبقسمة أكبر قوة في البسط على أكبر قوة في المقام نحصل على رتبة الحد العام.

٥- اختبار (٥): اختبار النسبة لدالمبرت D'ALAMBERT'S Ratio Test

وفقاً لهذا الاختبار يمكن الحكم على تقارب أو تباعد المتسلسلة من خلال النهاية التي يؤول إليها المقدار $\left(\frac{\text{ح}_{\text{ن}+١}}{\text{ح}_{\text{ن}}}\right)$ عندما تؤول ن إلى ما لا نهايــة.

ويمكن توضيح ذلك على النحو التالي:

إذا اعتبرنا المتسلسلة $\sum_{\text{ن}=١}^{\infty} \text{ح}_{\text{ن}}$ فإن المتسلسلة تكون تقاربية أو تباعدية وفقا للحالات التالية:

$$\text{نها}_{\text{ن}\to\infty}\left(\frac{\text{ح}_{\text{ن}+١}}{\text{ح}_{\text{ن}}}\right)=\begin{cases}\textbf{ل} < ١ \ \textbf{المتسلسلة تقاربية}\\ \textbf{ل} > ١ \ \textbf{المتسلسلة تباعدية}\\ \textbf{ل} = ١ \ \textbf{يتعذر الحكم ويُستخدم اختبار آخر}\end{cases}$$

مثال (١٧):

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة: $\sum_{\text{ن}=١}^{\infty} \frac{١}{\underline{|\text{ن}}}$

الحــل:

$$\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{١}{\underline{|\text{ن}}} \quad ، \quad \text{ح}_{\text{ن}+١} = \frac{١}{\underline{|\text{ن}+١}}$$

$$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ن}+١}}{\text{ح}_{\text{ن}}} = \frac{١}{\underline{|\text{ن}+١}} \div \frac{١}{\underline{|\text{ن}}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}+١}} = \frac{١}{\text{ن}+١}$$

أي أن: $\text{نها}_{\text{ن}\to\infty}\left(\frac{\text{ح}_{\text{ن}+١}}{\text{ح}_{\text{ن}}}\right) = \text{نها}_{\text{ن}\to\infty}\left(\frac{١}{\text{ن}+١}\right) = \text{صفر}$

$\therefore$ المتسلسلة تقاربية.

مثال (١٨):

أدرس تقارب أو تباعد المتسلسلة: $\frac{\underline{|١}}{١٠} + \frac{\underline{|٢}}{١٠^{٢}} + \frac{\underline{|٣}}{١٠^{٣}} + \ldots$

الحــل:

$$\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{١٠^{\text{ن}}} \quad ، \quad \text{ح}_{\text{ن}+١} = \frac{\underline{|\text{ن}+١}}{١٠^{\text{ن}+١}}$$

$$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ن}+١}}{\text{ح}_{\text{ن}}} = \frac{\underline{|\text{ن}+١}}{١٠^{\text{ن}+١}} \div \frac{\underline{|\text{ن}}}{١٠^{\text{ن}}} = \frac{\underline{|\text{ن}+١}}{١٠^{\text{ن}+١}} \times \frac{١٠^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}} = \frac{\text{ن}+١}{١٠}$$

أي أن: $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{ح}_{\text{ن}+١}}{\text{ح}_{\text{ن}}}\right) = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{ن}+١}{١٠}\right) = \infty$

∴ المتسلسلة تباعدية.

مثال (١٩):

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة: $١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + ...$

الحــل:

$$\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{١}{\text{ن}} \quad ، \quad \text{ح}_{\text{ن}+١} = \frac{١}{\text{ن}+١}$$

$$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ن}+١}}{\text{ح}_{\text{ن}}} = \frac{١}{\text{ن}+١} \div \frac{١}{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}+١}$$

أي أن: $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{ح}_{\text{ن}+١}}{\text{ح}_{\text{ن}}}\right) = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{ن}}{\text{ن}+١}\right) = ١$

وهنا لا يمكن الحكم على تقارب أو تباعد المتسلسلة ويلزم استخدام اختبار آخر وذلك على النحو الموضح في مثال (١١).

مثال (٢٠):

اختبر المتسلسلة الآتية من حيث التقارب أو التباعد:

$$٣ + \frac{٣^٢}{٢^٢} + \frac{٣^٣}{٣^٢} + \frac{٣^٤}{٤^٢} + ...$$

الحــل:

$$\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{٣^{\text{ن}}}{\text{ن}^٢} \quad ، \quad \text{ح}_{\text{ن}+١} = \frac{٣^{\text{ن}+١}}{(\text{ن}+١)^٢}$$

$$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ن}+١}}{\text{ح}_{\text{ن}}} = \frac{٣^{\text{ن}+١}}{(\text{ن}+١)^٢} \div \frac{٣^{\text{ن}}}{\text{ن}^٢} = \frac{٣^{\text{ن}+١}}{(\text{ن}+١)^٢} \times \frac{\text{ن}^٢}{٣^{\text{ن}}}$$

$$= ٣\left(\frac{\text{ن}}{\text{ن}+١}\right)^٢ = ٣\left(\frac{\text{ن}^٢}{\text{ن}^٢+٢\text{ن}+١}\right)$$

$$\therefore \lim_{ن \to \infty} \left(\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن}\right) = \lim_{ن \to \infty} ٣ \left(\frac{ن^٢}{ن^٢ + ٢ن + ١}\right) = \lim_{ن \to \infty} ٣ \left(\frac{١}{١ + \frac{٢}{ن} + \frac{١}{ن^٢}}\right)$$

$= ٣$ وهي أكبر من ١

∴ المتسلسلة تباعدية.

٦- اختبار (٦): اختبار كوشى

يستخدم هذا الاختبار إذا كانت جميع حدود المتسلسلة موجبة. ووفقاً لهذا الاختبار، يمكن الحكم على تقارب أو تباعد المتسلسلة على النحو التالي:

$$\lim_{ن \to \infty} \sqrt[ن]{ح_ن} = \begin{cases} ل \leq ١ & \text{المتسلسلة تقاربية} \\ ل > ١ & \text{المتسلسلة تباعدية} \end{cases}$$

مثال (٢١):

ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية:

ا- $\displaystyle\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{(لـو ن)^ن}$ ب- $\displaystyle\sum_{ن=١}^{\infty} \left(\frac{ن}{٢ن + ٣}\right)^ن$

الحـل:

(أ) المتسلسلة: $\displaystyle\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{(لـو ن)^ن}$

$$\sqrt[ن]{ح_ن} = \sqrt[ن]{\frac{١}{(لـو ن)^ن}} = \frac{١}{لـو ن}$$

$$\therefore \lim_{ن \to \infty} \sqrt[ن]{ح_ن} = \lim_{ن \to \infty} \frac{١}{لـو ن} = \text{صفر وهو أقل من ١}$$

∴ المتسلسلة تقاربية.

(ب) المتسلسلة: $\displaystyle\sum_{ن=١}^{\infty} \left(\frac{ن}{٢ن + ٣}\right)^ن$

$$\sqrt[ن]{ح_ن} = \sqrt[ن]{\left(\frac{ن}{٢ن + ٣}\right)^ن} = \frac{ن}{٢ن + ٣}$$

$$\therefore \lim_{ن \to \infty} \sqrt[ن]{ح_ن} = \lim_{ن \to \infty} \frac{ن}{٢ن + ٣} = \frac{١}{٢}$$ وهو أقل من ١

∴ المتسلسلة تقاربية.

٧- اختبار التقارب للمتسلسلات متبادلة الإشارة:

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{\infty} ح_ن$ تأخذ الصورة التالية:

$$جـ_ن = ح_١ - ح_٢ + ح_٣ - ح_٤ + ...$$

فإنها تسمى بالمتسلسلة متبادلة الإشارة **Alternating Series**.

وهناك نظرية أساسية يمكن بموجبها الحكم على تقارب مثل هذا النوع من المتسلسلات. وبموجب هذه النظرية، فإن المتسلسلة متبادلة الإشارة تكون تقاربية إذا تحقق الشرطان التاليان:

أ- $\lim_{ن \to \infty} |ح_ن| =$ صفر　　**ب-** $|ح_{ن+١}| < |ح_ن|$ لجميع قيم $ن$

أي أن المتسلسلة مستمرة النقصان.

مثال (٢٢):

أثبت أن المتسلسلة: $١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} + ...$

هي متسلسلة تقاربية.

الحــل:

حيث أن المتسلسلة متبادلة الإشارة فإنه لابد من التأكد من تحقق الشرطين المشار إليهما من قبل حتى يمكننا الحكم على هذه المتسلسلة بأنها تقاربية. ويمكن تحقيق ذلك على النحو التالي:

الشرط الأول:

$$ح_ن = (-١)^{ن+١} \left(\frac{١}{ن}\right)$$

$$\therefore \lim_{ن\to\infty} |ح_ن| = \lim_{ن\to\infty} \left(\frac{١}{ن}\right) = \text{صفر}$$

أي أن هذا الشرط قد تحقق.

الشرط الثاني:

$$|ح_{ن+١}| = \frac{١}{ن+١} \quad ، \quad |ح_ن| = \frac{١}{ن}$$

أي أن: $|ح_{ن+١}| < |ح_ن|$ وذلك لجميع قيم $ن$.

وهذا يعنى أن الشرط الثاني قد تحقق أيضاً.

إذاً يمكننا استنتاج أن المتسلسلة المعطاة هي متسلسلة تقاربية وذلك لتحقق الشرطيْن المُشار إليهما.

حل آخر:

من الممكن كتابة مجموع المتسلسلة على النحو التالي:

$$ج = \left(١ - \frac{١}{٢}\right) + \left(\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}\right) + \left(\frac{١}{٥} - \frac{١}{٦}\right) + ...$$

$$= \frac{١}{٢} + \frac{١}{١٢} + \frac{١}{١٥} + ...$$

$$= \frac{١}{٢} + \text{مقادير موجبة}$$

كما يمكن كتابة المجموع على الصورة التالية:

$$ج = ١ - \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}\right) - \left(\frac{١}{٤} - \frac{١}{٥}\right) - .....$$

$$= ١ - \frac{١}{٦} - \frac{١}{٢٠} - ..... = ١ - \text{مقادير موجبة}$$

وهذا يعنى أن مجموع المتسلسلة يقع بين $\frac{١}{٢}$، ١ مما يعنى بأنها تقاربية.

حل ثالث:

حيث أن مجموع المتسلسلة هو:

$$١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} + ...$$

وحيث أن:

$$لــو_{هـ}(١+س) = \frac{س}{١} - \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{س^{٣}}{٣} - \frac{س^{٤}}{٤} + ...$$ راجع العلاقة (٨)

وهذه العلاقة صـــحيحة في الحالات: |س| < ١، س = ١، فإنه بالتعويض عن س = ١ نحصل على:

$$لــو_{هـ}٢ = ١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} + ...$$

أي أن مجموعة المتسلسلة = $لــو_{هـ}٢$ = ٠,٦٩٣ تقريباً

مما يعنى أنها متسلسلة تقاربية.

مثال (٢٣):

أدرس تقارب المتسلسلة التالية:

$$\frac{١}{٢\times٤} - \frac{١}{٤\times٦} + \frac{١}{٦\times٨} - \frac{١}{٨\times١٠} + ...$$

الحـل:

حيث أن هذه المتسلسلة متبادلة الإشارة فإنه لابد من التأكد من تحقق الشرطيْن اللازميْن لكي تكون هذه المتسلسلة تقاربية.

الشرط الأول:

$$ح_{ن} = (-١)^{ن+١}\left(\frac{١}{٢ن(ن+٢)}\right)$$

$$\therefore |ح_{ن}| = \frac{١}{٢ن(ن+٢)}$$

$$|ح_{ن+١}| = \frac{١}{[٢(ن+١)][(ن+١)+٢]} = \frac{١}{(٢ن+٢)(ن+٣)}$$

ومن الواضح أن:

$$\lim_{ن\to\infty} |ح_{ن}| = \lim_{ن\to\infty} \frac{١}{٢ن(ن+٢)} = صفر$$

مما يعنى تحقق الشرط الأول.

الشرط الثاني:

من السهولة استنتاج أن: $|ح_{ن+1}| < |ح_ن|$

أي أن الشرط الثاني متحقق أيضاً.

إذاً يمكننا استنتاج أن المتسلسلة المعطاة تقاربية وذلك لتحقق الشرطيْن اللازميْن لذلك.

٨- التقارب المطلق والتقارب الشرطي:

Absolute Convergence & Conditional Convergence

لنفترض أن لدينا متسلسلة حدودها حقيقية ومتبادلة الإشارة، وكان مجموع هذه المتسلسلة هو:

$$جـ = ح_1 - ح_2 + ح_3 - ح_4 + ...$$

فإذا اعتبرنا المتسلسلة الناشئة من القيم المطلقة لحدود هذه المتسلسلة (أي بجعل جميع حدودها موجبة). فإنه إذا كانت المتسلسلة موجبة الحدود تقاربية، فإنه من باب أوْلى أن تكون المتسلسلة متبادلة الإشارة تقاربية أيضا. وفي هذه الحالة يطلق على تقارب المتسلسلة متبادلة الإشارة بـ "التقارب المطلق" ومثال ذلك المتسلسلة:

$$١ - \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} - \left(\frac{١}{٤}\right)^{٢} + ...$$

فهي متسلسلة متقاربة تقارباً مطلقاً وذلك لأن المتسلسلة:

$$١ + \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} + \left(\frac{١}{٤}\right)^{٢} + ...$$

هي متسلسلة تقاربية (راجع **اختبار (١)**).

وأما إذا كانت المتسلسلة موجبة الحدود (الناشئة من أخذ القيم المطلقة لحدود المتسلسلة متبادلة الإشارة) تباعدية وكانت المتسلسلة متبادلة الإشارة تقاربية فإن التقارب في هذه الحالة يسمى بـ "التقارب الشرطي". ومثال ذلك المتسلسلة:

$$١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} + ...$$

هي متسلسلة متقاربة تقارباً شرطياً وذلك لأن هذه المتسلسلة تقاربية (راجع مثال (٢٢)) في حين أن المتسلسلة:

$$١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + ...$$

هي متسلسلة تباعدية (راجع مثال (١١)).

٩- متسلسلات القوى – فترة التقارب:

Power Series – Interval of Convergence:

إذا كانت المتسلسلة محل الدراسة تتكون من القوى التصاعدية للمتغير س بمعاملات مختلفة $أ_١$، $أ_٢$، $أ_٣$،... وذلك وفقاً للصورة:

$$أ_٠ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + أ_٣ س^٣ + ...$$

فإن تقارب أو تباعد المتسلسلة لا يتوقف فقط على قيم هذه المعاملات وانما يتوقف أيضاً على الفترة (المدى) المعرَّف فيها المتغير س. ولتحديد الفترة التي تكون فيها المتسلسلة تقاربية، فإننا نستخدم اختبار النسبة لدالمبرت (**اختبار (٥)**) وذلك على النحو الموضح فيما يلي:

تحديد فترة التقارب:

إذا اعتبرنا متسلسلة القوى:

$$أ_٠ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + أ_٣ س^٣ + ...$$

فإن: $ح_ن = أ_ن س^ن$ ، $ح_{ن+١} = أ_{ن+١} س^{ن+١}$

$$\therefore \lim_{ن \to \infty} \left| \frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} \right| = \lim_{ن \to \infty} \left| \frac{أ_{ن+١} س^{ن+١}}{أ_ن س^ن} \right|$$

$$= |س| \lim_{ن \to \infty} \frac{أ_{ن+١}}{أ_ن} = ل$$

وباعتبار أن: $\lim_{ن \to \infty} \left| \frac{أ_{ن+١}}{أ_ن} \right| = ف$

فإننا نحصل على: $\lim_{ن \to \infty} \left| \frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} \right| = |س| \times ف$

حيث: $ل = |س| \times ف$

وكما سبق أن أوضحنا فإن المتسلسلة تكون تقاربية (وفقاً لاختبار النسبة) إذا كانت: $ل < ١$.
أي أن متسلسلة القوى تكون تقاربية إذا كان:

$$|س| \times ف < ١$$

أو بعبارة أخرى إذا كانت: $|س| < \frac{١}{ف}$

وهذا يعنى أن فترة التقارب تتحدد كما يلي:

$$-\frac{١}{ف} < س < \frac{١}{ف}$$

وبالتالي فإن متسلسلة القوى تكون تباعدية خارج هذه الفترة.

هذا وتجدر الإشـــارة إلى أنه عند تحديد تقارب أو تباعد متسـلســلات القوى، فإنه يجب علينا البحث عما إذا كانت النقطتان الطرفيَّتان ($س = -\frac{١}{ف}$، $س = \frac{١}{ف}$) تدخلان في فترة التقارب أم أنها لا تشملهما.

مثال (٢٤):

أوجد فترة التقارب للمتسلسلة التالية:

$$س - \frac{س^{٢}}{٢^{٢}} + \frac{س^{٣}}{٣^{٢}} - \frac{س^{٤}}{٤^{٢}} + ...$$

الحـل:

حيث أن: $|ح_{ن}| = \frac{س^{ن}}{ن^{٢}}$ ، $|ح_{ن+١}| = \frac{س^{ن+١}}{(ن+١)^{٢}}$

$$\therefore \left|\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}}\right| = \frac{س^{ن+١}}{(ن+١)^{٢}} \div \frac{س^{ن}}{ن^{٢}}$$

$$= \frac{س^{ن+١}}{(ن+١)^{٢}} \times \frac{ن^{٢}}{س^{ن}} = س\left(\frac{ن}{ن+١}\right)^{٢}$$

$$\therefore \lim_{ن\to\infty}\left|\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}}\right| = \lim_{ن\to\infty}\left|س\left(\frac{ن}{ن+١}\right)^{٢}\right|$$

$$= |س| \lim_{ن\to\infty}\left(\frac{ن}{ن+١}\right)^{٢}$$

وحيث أن: $\lim_{ن\to\infty}\left(\frac{ن}{ن+١}\right)^{٢} = ١$

$\therefore$ ف = ١

أي أن فترة التقارب تتحدد بالفترة (-١، ١)، وهذا يعنى أن المتسلسلة تكون تقاربية إذا كانت: $|س| < ١$.

والآن يجب علينا تحديد ما إذا كانت النقطتان (س = -١ ، س = ١) داخلتان في فترة التقارب أم أنها لا تشملهما وذلك على النحو التالي:

عند النقطة (س = ١):

تتحول المتسلسلة إلى:

$$١ - \frac{١}{٢^{٢}} + \frac{١}{٣^{٢}} - \frac{١}{٤^{٢}} + ...$$

وهي متقاربة تقارباً مطلقاً نظراً لأن المتسلسلة:

$$١ + \frac{١}{٢^{٢}} + \frac{١}{٣^{٢}} + \frac{١}{٤^{٢}} + ...$$

هي متسلسلة متقاربة (راجع **اختبار (١)**).

عند النقطة (س = -١):

تتحول المتسلسلة إلى:

$$١ - \frac{١}{٢^{٢}} - \frac{١}{٣^{٢}} - \frac{١}{٤^{٢}} - .....$$

وهي متسلسلة تقاربية.

أي أن النقطتين (س = -١ ، س = ١) تدخلان ضمن فترة التقارب.

ولعلنا الآن نكون قد وصلنا إلى نقطة يمكننا بعدها الاكتفاء بهذا القدر من تناولنا لموضوع المتسلسلات آملين أن يجد فيه القارئ ما يفيده.

تمارين
الفصل الثاني

١- استعن بالمتطابقة:

$$[ر\,(ر + ١)]^{٢} - [(ر - ١)\,ر\,]^{٢} = ٤ر^{٣}$$

في إثبات أن:

$$١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + ... + ن^{٣} = \left[\frac{ن(ن+١)}{٢}\right]^{٢}$$

٢- أوجد مجموع المتسلسلات التالية:

أ- $\sum\limits_{ر=٠}^{\infty} \frac{س^{ر}}{\underline{|ر+١}}$ **ب-** $\sum\limits_{ر=٠}^{\infty} \frac{س^{ر}}{\underline{|ر}}$ **جـ-** $\sum\limits_{ر=٠}^{\infty} \frac{س^{ر+١}}{\underline{|ر}}$

٣- أثبت أن:

$$\frac{١}{٢}\left(هـ^{س} - هـ^{-س}\right) = ١ + \frac{س^{٢}}{\underline{|٢}} + \frac{س^{٤}}{\underline{|٤}} + ...$$

٤- أثبت أن:

$$لـو_{هـ}\left(\frac{١+س}{١-س}\right) = س + \frac{٢س^{٣}}{٣} + \frac{٢س^{٥}}{٥} + \frac{٢س^{٧}}{٧} + \ ...$$

ثم استخدام المفكوك الناتج في إيجاد قيمة $لـو_{هـ}٣$ مقرباً نتيجتك إلى ثلاثة أرقام عشرية.

٥- احسب $لـو_{هـ}١,٥$ باستخدام المتسلسلة اللوغاريتمية مقرباً نتيجتك إلى أقرب أربعة أرقام عشرية.

٦- أثبت أن هـ تقع ما بين ٢، ٣ وأن قيمة هـ مقربة إلى ثلاثة أرقام عشرية هي ٢,٧١٨.

٧- استخدم المتسلسلة الأسية لإيجاد قيمة $\sqrt[٥]{١,٦٤٩}$ مقرباً النتيجة إلى أربعة أرقام عشرية إذا علمت أن: $لـو_{هـ}١,٦٤٩ = ٠,٥$

٨- أثبت أن مجموع المتسلسلة:

$$\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢\times ٢^{٢}} + \frac{١}{٣\times ٢^{٣}} - \frac{١}{٤\times ٢^{٤}} + \frac{١}{٥\times ٢^{٥}} - \cdots\cdots$$

يساوى $\text{لـو}_{هـ}٣ - \text{لـو}_{هـ}٢$

٩- بيِّن نوع المتسلسلة التالية من حيث كونها تقاربية أم تباعدية:

$$١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣\times ٢^{٣}} - \frac{١}{٤\times ٢^{٤}} + \frac{١}{٥\times ٢^{٥}} - \cdots\cdots$$

١٠- اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية:

أ - $١ + \frac{١}{١!} + \frac{١}{٢!} + \frac{١}{٣!} + \cdots$

ب- $\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢\times ٢^{٢}} + \frac{١}{٣\times ٢^{٣}} - \frac{١}{٤\times ٢^{٤}} + \frac{١}{٥\times ٢^{٥}} - \cdots\cdots$

جـ - $\sqrt{\frac{١}{٢}} + \sqrt{\frac{٢}{٣}} + \sqrt{\frac{٣}{٤}} + \cdots\cdots$

١١- ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية:

أ - $\frac{١}{\text{لـو}٢} + \frac{١}{\text{لـو}٣} + \frac{١}{\text{لـو}٤} + \cdots\cdots$

ب- $١ + \frac{١}{١+١} + \frac{١}{٢^{٢}+١} + \frac{١}{٣^{٢}+١} + \cdots\cdots$

١٢- استخدم اختبار النسبة لدالمبرت في دراسة تقارب أو تباعد المتسلسلة التالية:

$$\frac{١}{١\times ٢}\left(\frac{١}{٣}\right) + \frac{١}{٣\times ٤}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} + \frac{١}{٥\times ٦}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٣} + \cdots\cdots$$

١٣- اختبر تقارب أو تباعد كل من المتسلسلات التالية:

أ- $\frac{٢}{٢\times ٣\times ٤} + \frac{٤}{٣\times ٤\times ٥} + \frac{٦}{٤\times ٥\times ٦} + \cdots\cdots$

ب- $\frac{١}{٣} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٩} + ...$

جـ- $\frac{٢}{٢ \times ٣} + \frac{٤}{٣ \times ٤} + \frac{٦}{٤ \times ٥} + ...$

د- $\frac{١}{٣ - ٢} + \frac{١}{٩ - ٢} + \frac{١}{٢٧ - ٢} + ...$

١٤- ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية:

أ- $١ + \frac{س}{١!} + \frac{س^{٢}}{٢!} + \frac{س^{٣}}{٣!} + ...$

ب- $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{ن}{(٢ن)!} س^{ن}$ جـ- $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{٢^{ن}}{٣^{ن} + ٥}$

د- $١ + \frac{٢س}{٤!} + \frac{(٢س)^{٢}}{٦!} + \frac{(٢س)^{٣}}{٨!} + ...$

هـ- $١ - \frac{س^{٢}}{٢!} + \frac{س^{٤}}{٤!} - \frac{س^{٦}}{٦!} + ...$

١٥- أوجد فترة التقارب للمتسلسلات التالية:

أ- $\frac{٢س}{٢} + \frac{٢^{٢}س^{٢}}{٥} + \frac{٢^{٣}س^{٣}}{١٠} + ... + \frac{٢^{ن}س^{ن}}{ن^{٢} + ١} + ...$

ب- $١ + \frac{س}{٢ \times ١} + \frac{س^{٢}}{٢^{٢} \times ٢} + \frac{س^{٣}}{٢^{٣} \times ٣} + ...$

جـ- $\frac{٢س^{٢}}{٣} + \frac{٤س^{٣}}{٨} + \frac{٨س^{٤}}{١٥} + \frac{١٦س^{٥}}{٢٤} + ...$

الفصل الثالث

الكسور الجزئية

مقدمـــــة:

إذا كان لدينا الكســـر $\frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ حيث $د_1(س)$ كثيرة حدود من درجة معينـة في س، $د_2(س)$ كثيرة حدود من درجة أخرى في (س)، فإنه من الممكن التعبير عن هذا الكســـر في صورة كسريْن أو أكثر وذلك عند تحليل الكسر الأصلي إلى كسور جزئية.

وتيسيراً على القارئ دعنا نبدأ في عرض هذا الموضوع بالمثال التالي:

إذا كان لدينا: $\frac{٢}{س - ١} + \frac{٣}{٢س + ٣}$ $\Leftarrow$ (١)

فإنه من الممكن تحويل مجموع هذين الكســريْن إلى كســر واحد بعد اســتخراج المضـــاعف المشترك الأعظم وذلك على النحو التالي:

$$\frac{٢}{س - ١} + \frac{٣}{٢س + ٣} = \frac{٢(٢س + ٣) + ٣(س - ١)}{(س - ١)(٢س + ٣)}$$

$$= \frac{٤س + ٦ + ٣س - ٣}{(س - ١)(٢س + ٣)}$$

$$= \frac{٧س + ٣}{(س - ١)(٢س + ٣)} \Leftarrow \quad (٢)$$

والذي يهمنا الآن هو تحليل الكسـر في الصـورة (٢) إلى الصـورة (١)، أي أننا نصـبح أمام السؤال التالي:

حلِّل الكسر $\frac{٧س + ٣}{(س - ١)(٢س + ٣)}$ إلى كسور جزئية.

وفي هذا الشـــأن تجدر الإشـــارة إلى أن هناك كســوراً عديدة تنشـأ من عملية الجمع لكســور هي أبســط منها، كما أن هناك مجموعة من الكســور الأصــلية التي لا يمكن تجزئتها (تحويلها) إلى كسور أبسط.

وفيما يلي نورد بعض الصور للكسور غير القابلة للتجزئة أو التحويل إلى كسور أبسط، وهذه الكسور تأخذ الصور التالية:

١- كسور ذات مقام من الدرجة الأولى:

$$\frac{1}{أس + ب}$$

٢- كسور ذات مقام من الدرجة الأولى المكررة:

$$\frac{1}{(أس + ب)^{ن}} \text{ ، } ن \geq 2$$

٣- كســـــور ذات مقام من الدرجة الثانية، ويُفترض أن كميات الدرجة الثانية بها غير قابلة للتحليل في صورة عوامل حقيقية:

$$\frac{1}{أس^2 + بس + جـ}$$

٤- كسور ذات مقام من الدرجة الثانية المكررة:

$$\frac{1}{(أس^2 + بس + جـ)^{ن}} \text{ ، } ن \geq 2$$

٥- كسور بسطها من الدرجة الأولى ومقامها من الدرجة الثانية غير قابل للتحليل إلى عوامل حقيقية من الدرجة الأولى:

$$\frac{أس^2 + 1}{أس^2 + بس + جـ} + \frac{أس^2 + 1}{(أس^2 + بس + جـ)^{ن}} \text{ ، } ن \geq 2$$

هذا وموضـوع الكسـور الجزئية يتناول تحويل أي كسـر في الصـورة $\frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ وذلك عندما يكون البسط والمقام ممثلَيْن لكثيرات حدود بحيـــــث أن درجة البسط $د_1(س)$ أقل من درجة المقام $د_2(س)$، وبحيث يتم تحويل الكســــر إلى مجموعة من الكســـور المبسَّـــطة الســـابق الإشارة إليها.

وفيما يلي سـوف نورد بعض القواعد الأسـاسيـــــة لتحليل الكسـور إلى كسـور جزئية وذلك بصورة متدرجة لأنواع الكسور المختلفة.

الحالة الأولى: كسور يمكن تحليل مقاماتها إلى عوامل غير مكرَّرة من الدرجة الأولى

في هذه الحالة نجد أن مقام الكسر المراد تحليله يتكون من حاصل ضرب عوامل مختلفة من الدرجة الأولى مثل: ($أ_١$س + $ب_١$)، ($أ_٢$س + $ب_٢$)، ($أ_٣$س + $ب_٣$)..... وهكذا.

وفي مثل تلك الحالات فإنه من الممكن تحليل المقام في الكسر الأصلي إلى عوامل مختلفة من الدرجة الأولى، حيث أن كل عامل من هذه العوامل يقابله كسر جزئي مقامه هو ذلك العامل وبسطه مقدار ثابت يلزم تحديده مثل:

$$\frac{أ}{أ_١س + ب_١} + \frac{ب}{أ_٢س + ب_٢} + \frac{ج}{أ_٣س + ب_٣} \quad \text{وهكذا}$$

ولعل الأمثلة التالية تلقي مزيداً من الضوء على هذا الأمر مستهلِّين أمثلتنا بهذا الكسر المشار إليه في بداية تناولنا لموضوع الكسور الجزئية.

مثال (١):

حلِّل الكسر التالي إلى كسور جزئية: $\frac{٧س + ٣}{٢س^٢ + س - ٣}$

الحـل:

لعله من الملائم أن نعرض إجابتنا عن هذا في صورة خطوات على النحو التالي:

١- يلاحَظ أن المقام يمكن تحليله إلى عامليْن من الدرجة الأولى كما يلي:

$$\left(٢س^٢ + س - ٣\right) = \left(٢س + ٣\right)\left(س - ١\right)$$

ويتضح بذلك أن الكسر السابق ينشأ من عملية جمع لكسريْن في الصورة:

$$\frac{أ}{٢س + ٣} \text{ ، } \frac{ب}{س - ١}$$

٢- يمكن وضع التطابق التالي:

$$\frac{٧س + ٣}{٢س^٢ + س - ٣} = \frac{٧س + ٣}{(٢س + ٣)(س - ١)}$$

$$= \frac{أ}{٢س + ٣} + \frac{ب}{س - ١}$$

٣- تُحدَّد قيمة كل من الثابتيْن أ، ب وذلك على النحو التالي:

$$\frac{٧س + ٣}{٢س^{٢} + س - ٣} = \frac{أ}{٢س + ٣} + \frac{ب}{س - ١}$$

$$= \frac{أ\left(س - ١\right) + ب\left(٢س + ٣\right)}{(٢س + ٣)(س - ١)} = \frac{أس - أ + ٢بس + ٣ب}{(٢س + ٣)(س - ١)} = \frac{أس - أ + ٢بس + ٣ب}{(٢س + ٣)(س - ١)}$$

$$= \frac{\left(أ + ٢ب\right)س + \left(^{-}أ + ٣ب\right)}{\left(٢س + ٣\right)\left(س - ١\right)}$$

٣- حيث أن المقام واحد في الطرفيْن فإنه لابد وأن يتطابق البسطان فيهما. أي أن:

$$٧س + ٣ = \left(أ + ٢ب\right)س + \left(^{-}أ + ٣ب\right)$$

وبمســـــاواة معـاملات س والحـدود المطلقـة (الخـاليـة من س) في طرفي المتطـابقـة نحصل على:

$$أ + ٣ب = ٧ \quad ، \quad ^{-}أ + ٣ب = ٣$$

وبحل هاتيْن المعادلتيْن نجد أن: $أ = ٣$ ، $ب = ٢$

٥- في النهاية نصل إلى أن:

$$\frac{٧س + ٣}{٢س^{٢} + س - ٣} = \frac{٣}{٢س + ٣} + \frac{٢}{س - ١}$$

وهما نفس الكسريْن المشار إليهما من قبل.

مثال (٢):

حلِّل إلى كسور جزئية: $\frac{١٠س + ٢٦}{س^{٢} + ٢س - ١٥}$

الحـل:

١- المقام يمكن تحليله إلى عامليْن من الدرجة الأولى كما يلي:

$$س^{٢} + ٢س - ١٥ = (س - ٣)(س + ٥)$$

٢- $\frac{١٠س + ٢٦}{س^{٢} + ٢س - ١٥} = \frac{١٠س + ٢٦}{(س - ٣)(س + ٥)} = \frac{أ}{س - ٣} + \frac{ب}{س + ٥}$

٣- $\frac{١٠س + ٢٦}{س^٢ + ٢س - ١٥} = \frac{أ}{س - ٣} + \frac{ب}{س + ٥} = \frac{أ(س + ٥) + ب(س - ٣)}{(س - ٣)(س + ٥)}$

$$= \frac{(أ + ب)س + (٥أ - ٣ب)}{(س - ٣)(س + ٥)}$$

٤- حيث أن: $١٠س + ٢٦ = (أ + ب)س + (٥أ - ٣ب)$

$\therefore$ $أ + ب = ١٠$ ، $٥أ - ٣ب = ٢٦$

وبحل هاتيْن المعادلتيْن نحصل على:

$أ = ٧$ ، $ب = ٣$

وهنا تجدر الملاحظة إلى أنه من السـهل تحديد قيمة كل من أ، ب دون اللجوء إلى حل معادلتيْن وذلك على النحو التالي:

حيث أن:

$$١٠س + ٢٦ = أ(س + ٥) + ب(س - ٣)$$

فإنه بوضع س = -٥ في الطرفيْن نحصل على:

$-٢٤ = -٨ب$ ، أي أن: $ب = ٣$

وبوضع س = ٣ في الطرفيْن نحصل على:

$٥٦ = ٨أ$ ، $أ = ٧$

وهي نفس النتائج التي حصلنا عليها من قبل.

٥- نستنتج مما سبق أن:

$$\frac{١٠س + ٢٦}{س^٢ + ٢س - ١٥} = \frac{٤}{س - ٣} + \frac{٣}{س + ٥}$$

الحالة الثانية: كسور يمكن تحليل مقاماتها إلى عوامل مكرَّرة من الدرجة الأولى

في هذه الحالة نجد أن مقام الكسر المراد تجزئته يتكون من حاصل ضرب عوامل من الدرجة الأولى، وبحيث يكون أحد هذه العوامل مكرَّراً مرتيْن أو أكثر. فعلى سبيل المثال، نجد أن العامل المكرر يأخذ الصورة: $(أس + ب)^ن$ حيث $ن \geq ٢$. وفي هذه الحالة إذا كانت $ن = ٢$ مثلاً فإن ذلك يعنى وجود العامل $(أس + ب)^٢$ في المقام.

وهنا نجد أن كل عامل مكرر مرتيْن في مقام الكسر الأصلي يقابله كسريْن جزئييْن يأخذان الصورة التالية:

$$\frac{أ_1}{أس + ب} \quad ، \quad \frac{أ_2}{(أس + ب)^2}$$

وأما إذا كانت $ \nu = 3 $ فإن ذلك يعنى وجود عامل من الدرجة الأولى ثلاث مرات ويأخذ الصورة $(أس + ب)^3$. وفي تلك الحالة فإن هناك ثلاث كسور جزئية تقابل هذا العامل وتأخذ الصور التالية:

$$\frac{أ_1}{أس + ب} \quad ، \quad \frac{أ_2}{(أس + ب)^2} \quad ، \quad \frac{أ_3}{(أس + ب)^3}$$

حيث $أ_1$ ، $أ_2$ ، $أ_3$ ثوابت يلزم تحديد قيمة كل منها.

وهكذا بالنسبة لبقية قيم ν.

مثال (٣):

حلِّل الكسر التالي إلى كسور جزئية: $\frac{7س + 4}{(س + 1)^2(3س + 2)}$

ثم تحقَّق من صحة النتيجة التي تصل إليها.

الحـل:

في هذا المثال نجد في المقام عاملا من الدرجة الأولى هو $(3س + 2)$.

وهذا العامل يقابله كسراً جزئياً على الصورة $\frac{أ}{3س + 2}$ ، كما نجد في المقام عاملاً آخر من الدرجة الأولى مكرَّراً مرتيْن وهو $(س + 1)^2$، وهذا العامل يقابله كسريْن جزئييْن على النحو التالي:

$$\frac{ب}{س + 1} \quad ، \quad \frac{جـ}{(س + 1)^2}$$

أي أن:

$$\frac{7س + 4}{(س + 1)^2(3س + 2)} = \frac{أ}{3س + 2} + \frac{ب}{س + 1} + \frac{جـ}{(س + 1)^2}$$

$$= \frac{أ(س + 1)^2 + ب(3س + 2)(س + 1) + جـ(3س + 2)}{(س + 1)^2(3س + 2)}$$

وحيث أن المقام واحد في الطرفيْن، فإننا نجد أن:

$$٧س + ٤ = أ(س + ١)^{٢} + ب(٣س + ٢)(س + ١) + جـ(٣س + ٢)$$

وبوضع س = -١ في الطرفيْن نحصل على:

$$-جـ = -٣ \quad ، \quad \text{أي أن: } جـ = ٣$$

ويوضع س = $-\frac{٢}{٣}$ في الطرفيْن:

$$\therefore ٧ \times \frac{-٢}{٣} + ٤ = أ(\frac{-٢}{٣} + ١)^{٢}$$

أي أن: $\frac{١}{٩}أ = -\frac{٢}{٣}$

$$\therefore أ = -\frac{٢}{٣} \times ٩ = -٦$$

وبمساواة الحدود المطلقة (الخالية من س) في الطرفيْن نجد أن:

$$أ + ٢ب + ٢جـ = ٤$$

وبالتعويض عن قيم كل من أ، جـ نحصل على:

$$-٦ + ٢ب + ٢ \times ٣ = ٤$$

أي أن: ب = ٢

$$\therefore \frac{٧س + ٤}{(س + ١)^{٢}(٣س + ٢)} = \frac{-٦}{٣س + ٢} + \frac{٢}{س + ١} + \frac{٣}{(س + ١)^{٢}}$$

ويمكننا التحقق من صحة هذه النتيجة على النحو التالي:

$$\frac{-٦}{٣س + ٢} + \frac{٢}{س + ١} + \frac{٣}{(س + ١)^{٢}}$$

$$= \frac{-٦(س + ١)^{٢} + ٢(٣س + ٢)(س + ١) + ٣(٣س + ٢)}{(س + ١)^{٢}(٣س + ٢)}$$

$$= \frac{-٦(س^{٢} + ٢س + ١) + ٢(٣س^{٢} + ٥س + ٢) + ٣(٣س + ٢)}{(س + ١)^{٢}(٣س + ٢)}$$

$$= \frac{-٦س^{٢} - ١٢س - ٦ + ٦س^{٢} + ١٠س + ٤ + ٩س + ٦}{(س + ١)^{٢}(٣س + ٢)}$$

$$= \frac{\text{٧س} + ٤}{(\text{س} + ١)^{٢}(\text{٣س} + ٢)}$$

وهو نفس الكسـر الأصـلي المطلوب تحليله إلى كسـور جزئية. أي أن النتيجة المتوصَّل إليها صحيحة.

مثال (٤):

حلل إلى كسور جزئية: $\frac{\text{٢٠س}^{٣} + \text{٤س}^{٢} + \text{٤س} + ١٦}{(\text{س} + ٣)(\text{٢س} + ١)^{٣}}$

الحـل:

العامل (س + ٣) في مقام الكسر الأصلي يقابله كسر جزئي علـى الصورة $\frac{\text{أ}}{\text{س} + ٣}$ ،

وأما العامل $(\text{٢س} + ١)^{٣}$ فيقابله ثلاثة كسور جزئيـة تأخذ الصور التالية:

$$\frac{\text{ب}}{\text{٢س} + ١} \text{ ، } \frac{\text{جـ}}{(\text{٢س} + ١)^{٢}} \text{ ، } \frac{\text{د}}{(\text{٢س} + ١)^{٣}}$$

وعلى هذا نجد أن:

$$\frac{\text{٢٠س}^{٣} + \text{٤س}^{٢} + \text{٤س} + ١٦}{(\text{س} + ٣)(\text{٢س} + ١)^{٣}} = \frac{\text{أ}}{\text{س} + ٣} + \frac{\text{ب}}{\text{٢س} + ١} + \frac{\text{جـ}}{(\text{٢س} + ١)^{٢}} + \frac{\text{د}}{(\text{٢س} + ١)^{٣}}$$

$$= \frac{\text{أ}(\text{٢س} + ١)^{٣} + \text{ب}(\text{س} + ٣)(\text{٢س} + ١)^{٢} + \text{جـ}(\text{س} + ٣)(\text{٢س} + ١) + \text{د}(\text{س} + ٣)}{(\text{س} + ٣)(\text{٢س} + ١)^{٣}}$$

أي أن:

$$\text{٢٠س}^{٣} + \text{٤س}^{٢} + \text{٤س} + ١٦ = \text{أ}(\text{٢س} + ١)^{٣} + \text{ب}(\text{س} + ٣)(\text{٢س} + ١)^{٢}$$
$$+ \text{جـ}(\text{س} + ٣)(\text{٢س} + ١) + \text{د}(\text{س} + ٣)$$

وبوضع $\text{س} = -\frac{١}{٢}$ في الطرفيْن ينتج أن:

$$٢٠\left(-\frac{١}{٢}\right)^{٣} + ٤\left(-\frac{١}{٢}\right)^{٢} + ٤\left(-\frac{١}{٢}\right) + ١٦ = \text{د}\left(-\frac{١}{٢} + ٣\right)$$

ومنها نحصل على:

$$\frac{٥}{٢}\text{د} = \frac{٢٥}{٢} \text{ ، أي أن: } \text{د} = ٥$$

وبوضع $س = -٣$ في الطرفيْن نحصل على:

$$٢٠(-٣)^٣ + ٤(-٣)^٢ + ٤(-٣) + ١٦ = أ(-٦+١)^٣$$

ومنها نحصل على: $-١٢٥أ = -٥٠٠$ ، أي أن: $أ = ٤$

وبمساواة الحدود المطلقة (الخالية من س) في الطرفيْن نجد أن:

$$١٦ = أ + ٣ب + ٣جـ + ٣د$$

وبالتعويض عن قيمتي أ، د نحصل على:

$$١٦ = ٤ + ٣ب + ٣جـ + ٣ \times ٥$$

أي أن: $٣ب + ٣جـ = -٣$ ، ومنها نحصل على:

$$ب + جـ = -١ \qquad \Leftarrow \qquad (٣)$$

وبمساواة معامل س في الطرفيْن نجد أن:

$$٤ = ٦أ + ١٣ب + ٧جـ + د \qquad \Leftarrow \qquad (٤)$$

وبالتعويض عن قيمتي أ، د في (٤) نحصل على:

$$٤ = ٦\times٤ + ١٣ب + ٧جـ + ٥$$

أي أن: $١٣ب + ٧جـ = -٢٥ \qquad \Leftarrow \qquad (٥)$

بضرب طرفي المعادلة (٣) في ١٣ والطرح من (٥) نحصل على:

$$-٦جـ = -١٢ \quad ، \quad جـ = ٢$$

وبالتعويض عن قيمة جـ في (٣) ينتج أن: $ب = -٣$

وبهذا نجد أن:

$$\frac{٢٠س^٣ + ٤س^٢ + ٤س + ١٦}{(س+٣)(٢س+١)^٣} = \frac{٤}{س+٣} + \frac{٣}{٢س+١} + \frac{٢}{(٢س+١)^٢} + \frac{٥}{(٢س+١)^٣}$$

الحالة الثالثة: كســـور يمكن تحليل مقاماتها إلى عوامل غير مكرَّرة من الدرجة الأولى وعوامل غير مكرَّرة من الدرجة الثانية

كما سبق أن أشرنا فإن وجود عامل غير مكرَّر من الدرجـــة الأولى في مقام الكسر الأصلي يقابله كسر جزئي على الصــورة $\frac{أ_١}{أ_١س + ب_١}$ ، حيث $(أ_١س + ب_١)$ هو ذلك العامل

غير المكرَّر في مقام الكسر الأصلي، وأما وجود عامل من الدرجة الثانية في المقام فيقابله كسر جزئي بسطه من الدرجة الأولى في س ويأخذ الصورة التالية:

$\frac{أس + ب}{أ_١ س^٢ + ب_١ س + جـ_١}$ حيث $(أ_١ س^٢ + ب_١ س + جـ_١)$ هو ذلك العامل من الدرجة الثانية والموجود في مقام الكسر الأصلي.

وبصفة عامة، فإن كل عامل في مقام الكسر الأصلي من الدرجة ن في س يقابله كسر جزئي بسطه عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة $(ن - ١)$ في س، وذلك كما توضحه الأمثلة التالية:

مثال (٥):

حلل إلى كسور جزئية: $\frac{س + ١}{(٢س^٢ - س - ١)(س + ٣)}$

الحـل:

في المثال نجد في المقام عاملاً من الدرجة الثانية في س هو $(٢س^٢ - س - ١)$ ويقابله كسر جزئي على الصورة $\frac{أس + ب}{٢س^٢ - س - ١}$ كما يوجد عامل من الدرجة الأولى في س وهو $(س + ٣)$ ويقابله كسر جزئي على الصورة $\frac{جـ}{(س + ٣)}$

أي أن:

$$\frac{س + ١}{(٢س^٢ - س - ١)(س + ٣)} = \frac{أس + ب}{٢س^٢ - س - ١} + \frac{جـ}{(س + ٣)}$$

$$= \frac{(أس + ب)(س + ٣) + جـ(٢س^٢ - س - ١)}{(٢س^٢ - س - ١)(س + ٣)}$$

وهذا يعنى أن:

$$س + ١ = (أس + ب)(س + ٣) + جـ(٢س^٢ - س - ١)$$

وبوضع س = -٣ في الطرفيْن ينتج أن:

$$-٢ = ٢٠ \times جـ \quad ، \quad جـ = -\frac{١}{١٠}$$

وبمساواة الحدود المطلقة في الطرفيْن نحصل على:

$$\text{١} = \text{٣ب} - \text{جـ} \quad ، \quad \text{١} = \text{٣ب} + \frac{\text{١}}{\text{١٠}}$$

$$\therefore \; \text{ب} = \frac{\text{٣}}{\text{١٠}}$$

وبوضع س = ١ في الطرفيْن نجد أن:

$$\text{٢} = \text{٤}\left(\text{أ} + \text{ب}\right) + \text{جـ} \times \text{صفر}$$

أي أن: $\text{أ} + \text{ب} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

$$\therefore \; \text{أ} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} - \text{ب} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} - \frac{\text{٣}}{\text{١٠}} = \frac{\text{٢}}{\text{١٠}}$$

$$\therefore \; \frac{\text{س} + \text{١}}{(\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{س} - \text{١})(\text{س} + \text{٣})} = \frac{\frac{\text{٢}}{\text{١٠}}\text{س} + \frac{\text{٣}}{\text{١٠}}}{\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{س} - \text{١}} + \frac{-\frac{\text{١}}{\text{١٠}}}{\text{س} + \text{٣}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{١٠}}\left(\frac{\text{٢س} + \text{٣}}{\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{س} - \text{١}}\right) - \frac{\text{١}}{\text{١٠}}\left(\frac{\text{١}}{\text{س} + \text{٣}}\right)$$

مثال (٦):

حلل إلى كسور جزئية: $\frac{\text{٤س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{١}}{\text{س}^{\text{٣}} + \text{س}^{\text{٢}} + \text{س} + \text{١}}$

الحـل:

يمكن تحليل المقام إلى عوامل مختلفة من الدرجة الأولى والثانية وذلك على النحو التالي:

$$\text{س}^{\text{٣}} + \text{س}^{\text{٢}} + \text{س} + \text{١} = \text{س}^{\text{٢}}\left(\text{س} + \text{١}\right) + \left(\text{س} + \text{١}\right)$$

$$= \left(\text{س} + \text{١}\right)\left(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}\right)$$

أي أن الكسر الأصلي يمكن وضعه على الصورة التالية:

$$\frac{\text{٤س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{١}}{\left(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}\right)\left(\text{س} + \text{١}\right)}$$

حيث نجد في المقام عاملاً من الدرجة الثانية في س هـــــو $\left(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}\right)$ والذي يقابله كسر جزئي على الصورة $\frac{\text{أس} + \text{ب}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}}$ كما نجد عاملاً من الدرجة الأولى في س وهو $\left(\text{س} + \text{١}\right)$ والذي يقابله كسر جزئي على الصورة $\frac{\text{جـ}}{\text{س} + \text{١}}$.

أي أن: $\frac{٤س^{٢} + س - ١}{(س^{٢}+١)(س+١)} = \frac{أس + ب}{س^{٢}+١} + \frac{جـ}{س+١}$

$$= \frac{(أس + ب)(س+١) + جـ(س^{٢}+١)}{(س^{٢}+١)(س+١)}$$

وهذا يعنى أن:

$$٤س^{٢} + س - ١ = (أس + ب)(س+١) + جـ(س^{٢}+١)$$

ويوضع س = -١ في الطرفيْن ينتج أن:

$$٤(-١)^{٢} + (-١) - ١ = جـ(٢)$$

أي أن: جـ = ١

وبمساواة الحد المطلق (الخالي من س) في الطرفيْن نحصل على:

$$-١ = ب + جـ$$

وحيث أن: جـ = ١ ، فإن ب = -٢

وبمساواة معامل $س^{٢}$ في الطرفيْن ينتج أن:

$$٤ = أ + جـ$$

وحيث أن جـ = ١ ، فإن أ = ٣

وبالتالي نصل إلى النتيجة التالية:

$$\frac{٤س^{٢} + س - ١}{(س^{٢}+١)(س+١)} = \frac{٣س - ٢}{س^{٢}+١} + \frac{١}{س+١}$$

الحالة الرابعة: كسور يمكن تحليل مقاماتها إلى عوامل مكرَّرة من الدرجة الثانية

في هذه الحالة نجد أن مقام الكسر المراد تجزئته يتكون من حاصل ضرب عوامل من الدرجة الثانية، وبحيث يكون أحد هذه العوامل مكرَّراً مرتيْن أو أكثر. فعلى سبيل المثال، نجد أن العامل المكرَّر يأخذ الصورة $(أس^{٢} + بس + جـ)^{ن}$ حيث ن $\leq$ ٢. وفي هذه الحالة، إذا كانت ن = ٢ مثلاً، فإن ذلك يعنى وجود العامل $(أس^{٢} + بس + جـ)^{٢}$ في المقام. وهنا نجد أن كل عامل مكرَّر مرتين في مقام الكسر الأصلي يقابله كسريْن جزئييْن يأخذان الصورة التالية:

$$\frac{أ_١ س + ب_١}{أ س^٢ + ب س + جـ} ، \frac{أ_٢ س + ب_٢}{\left(أ س^٢ + ب س + جـ\right)^٢}$$

وأما إذا كانت $ن = ٣$ ، فإن ذلك يعنى وجود عامل من الدرجة الثانية مكرَّر ثلاث مرات، أي يأخذ الصورة $(أ س + ب)^٣$. وفي تلك الحالة فإن هناك ثلاث كسور جزئية تقابل هذا العامل، وهي كالتالي:

$$\frac{أ_١ س + ب_١}{أ س^٢ + ب س + جـ} ، \frac{أ_٢ س + ب_٢}{\left(أ س^٢ + ب س + جـ\right)^٢} ، \frac{أ_٣ س + ب_٣}{\left(أ س^٢ + ب س + جـ\right)^٣}$$

وهكذا بالنسبة لبقية قيم $ن$.

مثال (٧):

حلل الكسر التالي إلى كسور جزئية: $\frac{س^٢ + س + ١}{\left(س^٢ + ١\right)^٢}$

الحـل:

نجد في مقام هذا الكسر عاملاً من الدرجة الثانية في س مكرراً مرتين وهو $\left(س^٢ + ١\right)^٢$

ويقابله كسران جزئيان على الصورة:

$$\frac{أ_١ س + ب_١}{س^٢ + ١} ، \frac{أ_٢ س + ب_٢}{\left(س^٢ + ١\right)^٢}$$

أي أن: $$\frac{س^٢ + س + ١}{\left(س^٢ + ١\right)^٢} = \frac{أ_١ س + ب_١}{س^٢ + ١} + \frac{أ_٢ س + ب_٢}{\left(س^٢ + ١\right)^٢}$$

$$= \frac{\left(أ_١ س + ب_١\right)\left(س^٢ + ١\right) + أ_٢ س + ب_٢}{\left(س^٢ + ١\right)^٢}$$

وهذا يعنى ما يلي:

$$س^٢ + س + ١ = \left(أ_١ س + ب_١\right)\left(س^٢ + ١\right) + أ_٢ س + ب_٢$$

$$= أ_١ س^٣ + أ_١ س + ب_١ س^٢ + أ_٢ س + ب_٢$$

$$= أ_1 س^3 + ب_1 س^2 + (أ_1 + أ_2) س + (ب_1 + ب_2)$$

وبمساواة معاملات قوى س في الطرفيْن ينتج أن:

$$أ_1 = \text{صفر} \quad ، \quad ب_1 = 1$$

$$أ_1 + أ_2 = 1 \quad ، \quad ب_1 + ب_2 = 1$$

ومن ذلك نحصل على:

$$أ_2 = 1 \quad ، \quad ب_2 = \text{صفر}$$

أي أن: $\dfrac{س^2 + س + 1}{(س^2 + 1)^2} = \dfrac{1}{س^2 + 1} + \dfrac{س}{(س^2 + 1)^2}$

الحالة الخامسة: كسور درجة البسط فيها تساوى أو تزيد على درجة المقام

إذا كانت درجة البسط في الكسر المطلوب تحليله تساوى أو تزيد على درجة المقام، فإنه يمكن قسمة البسط على المقام حتى نضع الكسر الأصلي في صورة: خارج قسمة **+** كسر بسطه أقل درجة من مقامه، وذلك كما يوضحه المثال التالي:

مثال (٨):

حلِّل إلى كسور جزئية: $\dfrac{س^3 - 3س - 6}{س^2 - 2س - 3}$

الحـل:

حيث أن البسط من الدرجة الثالثة في س والمقام من الدرجة الثانية في س، فإنه يلزم أن نقوم بعملية القسمة التالية:

$$\frac{س^3 - 3س - 6}{س^2 - 2س - 3} = (س + 2) + \frac{4س}{س^2 - 2س - 3}$$

ثم نقوم بعد ذلك بتحليل الكسر $\dfrac{4س}{س^2 - 2س - 3}$ إلى كسور جزئية

$$\frac{4س}{س^2 - 2س - 3} = \frac{4س}{(س - 3)(س + 1)}$$

$$= \frac{أ}{س - 3} + \frac{ب}{س + 1}$$

$$= \frac{أ(س + ١) + ب(س - ٣)}{(س - ٣)(س + ١)}$$

أي أن: $٤س = أ(س + ١) + ب(س - ٣)$

وبوضع س = -١ في الطرفيْن نحصل على:

$$-٤ = -٤ب \quad ، \quad ب = ١$$

وبوضع س = ٣ في الطرفيْن ينتج أن:

$$١٢أ = ٤أ \quad ، \quad أ = ٣$$

أي أن:

$$\frac{٤س}{(س - ٣)(س + ١)} = \frac{٣}{س - ٣} + \frac{١}{س + ١}$$

وبذلك نصل إلى النتيجة التالية:

$$\frac{س^٣ - ٣س - ٦}{س^٢ - ٢س - ٣} = (س + ٢) + \frac{٣}{س - ٣} + \frac{١}{س + ١}$$

مثال (٩):

حلِّل إلى كسور جزئية: $\frac{س^٤ + ٢س^٢ + ٢}{س^٣ + س^٢ + س + ١}$

الحــل:

حيث أن درجة البسـط أكبر من درجة المقام فإنه يجب إجراء عملية القسـمة التالية وذلك قبل تحليل الكسر إلى كسور جزئية:

$$\frac{س^٤ + ٢س^٢ + ٢}{س^٣ + س^٢ + س + ١} = (س - ١) + \frac{٢س^٢ + س + ٣}{س^٣ + س^٢ + س + ١}$$

ثم نقوم بعد ذلك بتحليل الكسر $\frac{٢س^٢ + س + ٣}{س^٣ + س^٢ + س + ١}$ إلى كسور جزئية

$$\frac{٢س^٢ + س + ٣}{س^٣ + س^٢ + س + ١} = \frac{٢س^٢ + س + ٣}{س^٢(س + ١) + (س + ١)}$$

$$= \frac{٢س^٢ + س + ٣}{(س + ١)(س^٢ + ١)} = \frac{أ}{س + ١} + \frac{بس + جـ}{س^٢ + ١}$$

أي أن: $٢س^٢ + س + ٣ = أ(س^٢ + ١) + (ب س + جـ)(س + ١)$

بوضع س = ١ في الطرفيْن نحصل على:

$$٦ = ٢أ + ٢(ب + جـ)$$

$$\therefore\ أ + ب + جـ = ٣ \qquad \Leftarrow \qquad (٦)$$

وبمساواة معاملات $س^٢$ في الطرفيْن ينتج أن:

$$٢ = أ + ب \qquad \Leftarrow \qquad (٧)$$

ومن (٦)، (٧) نحصل على: $جـ = ١$

وبمساواة معاملات س في الطرفيْن نجد أن:

$$١ = ب + جـ \qquad \Leftarrow \qquad (٨)$$

ومن (٦)، (٨) ينتج أن: $أ = ٢$

وبالتعويض عن قيم أ، جـ في (٦) نحصل على: ب = صفر

أي أننا نصل إلى النتيجة التالية:

$$\frac{س^٤ + ٢س^٢ + ٢}{س^٣ + س^٢ + س + ١} = (س - ١) + \frac{٢}{س + ١} + \frac{١}{س^٢ + ١}$$

أمثلة متنوعة:

مثال (١٠):

حلِّل إلى كسور جزئية:

$$\frac{١٠س^٣ + ٢٢س^٢ + ٢٨س + ٢٤}{(س + ٢)(٢س^٣ + ٣س^٢ + ٥س + ٦)}$$

الحـل:

لنفترض أن:

$$\frac{١٠س^٣ + ٢٢س^٢ + ٢٨س + ٢٤}{(س + ٢)(٢س^٣ + ٣س^٢ + ٥س + ٦)} = \frac{أ}{س + ٢} + \frac{د(س)}{٢س^٣ + ٣س^٢ + ٥س + ٦}$$

$$= \frac{أ(٢س^٣ + ٣س^٢ + ٥س + ٦) + د(س)(س + ٢)}{(س + ٢)(٢س^٣ + ٣س^٢ + ٥س + ٦)}$$

أي أن:

$$10\text{س}^3 + 22\text{س}^2 + 28\text{س} + 24 = \text{أ}\left(2\text{س}^3 + 3\text{س}^2 + 5\text{س} + 6\right) + \text{د}\left(\text{س}\right)\left(\text{س} + 2\right)$$

وبوضع $\text{س} = -2$ في الطرفيْن ينتج أن:

$$10(-2)^3 + 22(-2)^2 + 28(-2) + 24 = \text{أ}\{2(-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6\}$$

أي أن:

$$-24 = -8\text{أ} \quad ، \quad \text{أ} = 3$$

$$\therefore \quad 10\text{س}^3 + 22\text{س}^2 + 28\text{س} + 24 = 3\left(2\text{س}^3 + 3\text{س}^2 + 5\text{س} + 6\right) + \text{د}\left(\text{س}\right)\left(\text{س} + 2\right)$$

$$= 6\text{س}^3 + 9\text{س}^2 + 15\text{س} + 18 + \text{د}\left(\text{س}\right)\left(\text{س} + 2\right)$$

$$\therefore \quad \text{د}\left(\text{س}\right)\left(\text{س} + 2\right) = 4\text{س}^3 + 13\text{س}^2 + 13\text{س} + 6$$

$$\therefore \quad \text{د}\left(\text{س}\right) = \frac{4\text{س}^3 + 13\text{س}^2 + 13\text{س} + 6}{\text{س} + 2}$$

$$= 4\text{س}^2 + 5\text{س} + 3$$

وبذلك نصــل إلى أن أبســط الكســر الجزئي الثاني هو عبارة عن كثيرات حدود من الدرجة الثانية في س. أي أن:

$$\frac{10\text{س}^3 + 22\text{س}^2 + 28\text{س} + 24}{\left(\text{س} + 2\right)\left(2\text{س}^3 + 3\text{س}^2 + 5\text{س} + 6\right)} = \frac{3}{\text{س} + 2} + \frac{4\text{س}^2 + 5\text{س} + 3}{2\text{س}^3 + 3\text{س}^2 + 5\text{س} + 6}$$

مثال (١١):

حلِّل إلى كسور جزئية: $\dfrac{2\text{س}^2 + 1}{\text{س}^2 - 3\text{س} - 4}$

الحـل:

حيث أن درجة البسـط تسـاوي درجة المقام وكلاهما من الدرجة الثانية، فإننا نجري أولا عملية قسمة:

$$\frac{2\text{س}^2 + 1}{\text{س}^2 - 3\text{س} - 4} = 2 + \frac{6\text{س} + 9}{\text{س}^2 - 3\text{س} - 4}$$

بعد ذلك نقوم بتحليل الكسر $\dfrac{6\text{س} + 9}{\text{س}^2 - 3\text{س} - 4}$ إلى كسور جزئية

$$\frac{٦س + ٩}{س^{٢} - ٣س - ٤} = \frac{٦س + ٩}{(س - ٤)(س + ١)} = \frac{أ}{س - ٤} + \frac{ب}{س + ١}$$

$$= \frac{أ(س + ١) + ب(س - ٤)}{(س - ٤)(س + ١)}$$

أي أن: $٦س + ٩ = أ(س + ١) + ب(س - ٤)$

بوضع س = -١ في الطرفيْن ينتج أن:

$$٣ = -٥ب \quad ، \quad ب = \frac{-٣}{٥}$$

وبوضع س = ٤ في الطرفيْن نحصل على:

$$٣٣ = ٥أ \quad ، \quad أ = \frac{٣٣}{٥}$$

وبذلك نصل إلى النتيجة التالية:

$$\frac{٢س^{٢} + ١}{س^{٢} - ٣س - ٤} = ٢ + \frac{٣٣}{٥(س - ٤)} + \frac{٣}{٥(س + ١)}$$

مثال (١٢):

إذا كان:

$$\frac{٥س^{٢} - ٣س - ٣}{(س^{٢} + ٢)(س - ٣)} = \frac{أس + ٣}{س^{٢} + ٢} + \frac{٣}{س - ٣}$$

احسب قيمة أ.

الحـل:

$$\frac{أس + ٣}{س^{٢} + ٢} + \frac{٣}{س - ٣} = \frac{(أس + ٣)(س - ٣) + ٣(س^{٢} + ٢)}{(س^{٢} + ٢)(س - ٣)}$$

$$\therefore ٥س^{٢} - ٣س - ٣ = (أس + ٣)(س - ٣) + ٣(س^{٢} + ٢)$$

وبالتعويض عن س بأية قيمة ولتكن س = ١ فإننا نحصل على:

$$٥ - ٣ - ٣ = (أ + ٣)(-٢) + ٣(٣)$$

∴ -١ = -٢أ – ٦ + ٩

= -٢أ + ٣

أي أن: ٢أ = ٤ ، أ = ٢

وسوف نتوقف هنا في تناولنا للكسور الجزئية وذلك على النحو الذي يفيدنا في استخدامها في موضوعات أخرى يشملها هذا الكتاب.

تمارين

الفصل الثالث

حلِّل الكسور التالية إلى كسور جزئية:

١- $\frac{٤س + ٣}{س^{٢} - ٣س + ٢}$

٢- $\frac{١٠س + ١٣}{س^{٢} - س - ٢٠}$

٣- $\frac{٢ + س}{س - س^{٢}}$

٤- $\frac{٤س + ١}{(س^{٢} + ١)(س^{٢} + ٢)}$

٥- $\frac{٥س + ٥}{س^{٢} + ٣س - ٤}$

٦- $\frac{٣س^{٢} + ٤س - ٢}{(٢س - ٣)^{٣}}$

٧- $\frac{٧س - ٨}{(س + ١)(٤س - ١)}$

٨- $\frac{٢٦س^{٣} + ٨س^{٢} + ٢٠س + ٣٨}{(س + ١)(٥س^{٣} + س^{٢} + ٣س + ٧)}$

٩- $\frac{١}{س^{٣} + ١}$

١٠- $\frac{٦س^{٢}}{(س^{٢} - ١)(س - ٢)}$

١١- $\frac{٥س^{٣} + ٢س^{٢} + ٥س}{س^{٤} - ١}$

١٢- $\frac{٤س^{٢}}{(س - ١)^{٣}(س^{٢} + ١)}$

١٣- $\frac{٣س + ٣}{(س - ١)(س^{٢} + س + ١)}$

١٤- $\frac{س^{٢}}{(س + ١)^{٣}}$

١٥- $\frac{٢س^{٢} + ٣س - ١}{(س^{٢} + ١)(س^{٢} + ٤)}$

١٦- $\frac{س^{٢} - ٢س}{(س^{٢} + ١)(س + ٥)}$

الفصل الرابع

المحددات

تُعتبر المحددات من الأساليب الرياضية الهامة والشائعة الاستخدام في الكثير من التطبيقات العملية لعلم الرياضيات. ولم تكن المحددات معروفة حتى منتصف القرن الماضي، وبمجرد ظهورها تم استخدامها على نطاق واسع في مختلف فروع الرياضيات، كما تطورت النظريات المتعلقة بها تطوراً كبيراً.

هذا وتستخدم المحددات كأداة لتبسيط العمليات الرياضية التي تبدو على جانب كبير من التعقيد. وفيما يلي سوف نوضح مفهوم المحددات، كما نبين أهم خصائصها واستخداماتها، مدعمين ذلك بالأمثلة التي تيسر على القارئ فهم واستيعاب هذا الموضوع.

أولاً: تعريف المحدد

١- المحدد من الرتبة الثانية:

إذا كان لدينا المعادلتيْن:

$$\text{أ}_{١}\text{س} + \text{ب}_{١}\text{ص} = \text{جـ}_{١}$$

$$\text{أ}_{٢}\text{س} + \text{ب}_{٢}\text{ص} = \text{جـ}_{٢}$$

فإنه بحل هاتيْن المعادلتيْن نحصل على:

$$\text{س} = \frac{\text{ب}_{٢}\text{جـ}_{١} - \text{ب}_{١}\text{جـ}_{٢}}{\text{أ}_{١}\text{ب}_{٢} - \text{أ}_{٢}\text{ب}_{١}} \quad ⇦ \quad (١)$$

$$\text{ص} = \frac{\text{أ}_{١}\text{جـ}_{٢} - \text{أ}_{٢}\text{جـ}_{١}}{\text{أ}_{١}\text{ب}_{٢} - \text{أ}_{٢}\text{ب}_{١}} \quad ⇦ \quad (٢)$$

ويتضح لنا أن المقام في كل من (١)، (٢) هو:

$$\text{أ}_{١}\text{ب}_{٢} - \text{أ}_{٢}\text{ب}_{١}$$

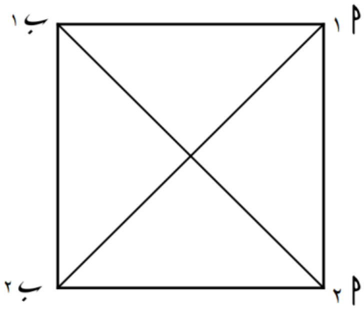
حيث يمكننا التعبير عن هذا المقدار في شكل محدد على النحو التالي:

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{١} & \text{ب}_{١} \\ \text{أ}_{٢} & \text{ب}_{٢} \end{vmatrix} \quad ⇦ \quad (٣)$$

أي أن المحدد هو عبارة عن مجموعة من الأرقام مرتبة في شكل صفوف وأعمدة بين خطيْن عموديين.

وهنـا يُلاحَظ أن $أ_{١}ب_{٢}$ مـا هـي إلا حاصـل ضـرب العنصـر الأول فـي العمــود الرأســي الأول ($أ_{١}$) فــي العنصـــر الثـــاني مــن العمــود الرأســي الثــاني ($ب_{٢}$). وكــذلك $أ_{٢}ب_{١}$ هــي عبــارة عــن حاصــل ضــرب العنصــر الثــاني مــن العمــود الأول ($أ_{٢}$) فــي العنصــر الأول من العمود الثاني ($ب_{١}$).

وإذا تصورنا المربع التالي:



فإن $أ_{١}ب_{٢}$ هي عبارة عن حاصل ضرب العنصريْن الواقعيْن على القطر الرئيسي للمربع، بينما $أ_{٢}ب_{١}$ هي عبارة عن حاصل ضرب العنصريْن الواقعيْن على القطر الآخر للمربع. هذا والصورة (٣) والتي تأخذ فيها العناصر $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، $ب_{١}$ ، $ب_{٢}$ ترتيباً معيناً تسمى محدداً من الدرجة الثانية وذلك لأنه يتكون من صفيْن وعموديْن. وتتمثل عناصر العمود الأول في العنصريْن ($أ_{١}$ ، $أ_{٢}$)، كما تتمثل عناصر العمود الثاني في العنصريْن ($ب_{١}$ ، $ب_{٢}$). ويمكن التعبير عن قيمة المحدد من الرتبة الثانية على النحو التالي:

قيمة المحدد = حاصل ضرب العنصريْن الواقعيْن على القطر الرئيسي – حاصل ضرب العنصريْن الواقعيْن على القطر الآخر

أي أن:

$$\begin{vmatrix} أ_{١} & ب_{١} \\ أ_{٢} & ب_{٢} \end{vmatrix} = أ_{١}ب_{٢} - أ_{٢}ب_{١}$$

هذا ويمكن التعبير – بصفة عامة – عن قيمة المحدد من الرتبة الثانية على الصورة التالية:

$$\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{vmatrix} = أ_{١١}أ_{٢٢} - أ_{٢١}أ_{١٢}$$

حيث:

$أ_{١١}$ هو العنصر الذي يقع في الصف الأول والعمود الأول.

$أ_{٢١}$ هو العنصر الذي يقع في الصف الأول والعمود الثاني.

$أ_{١٢}$ هو العنصر الذي يقع في الصف الثاني والعمود الأول.

$أ_{٢٢}$ هو العنصر الذي يقع في الصف الثاني والعمود الثاني.

وبصفة عامة فإن العنصر $أ_{س ص}$ هو العنصر الذي يقع في الصف رقم س والعمود رقم ص، حيث:

س= ١، ٢، ٣،...، م ، ص= ١، ٢، ٣،...، ن ،

م = عدد الصفوف ، ن = عدد الأعمدة.

مثال (١):

أوجد قيمة كل من المحددات التالية:

أ- $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$ ب- $\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ ج- $\begin{vmatrix} أ & جـ \\ ب & ء \end{vmatrix}$

الحــل:

أ- $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٣ \times ١ - ٢ \times ٥ = ٣ - ١٠ = -٧$

ب- $\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = ٢ \times ٤ - ٣ \, (-١) = ٨ + ٣ = ١١$

ج- $\begin{vmatrix} أ & جـ \\ ب & ء \end{vmatrix} = أ \times ء - ب \times جـ = أء - ب جـ$

٢- المحدد من الرتبة الثالثة:

يتكون المحدد من الرتبة الثالثة من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة وذلك على النحو التالي:

$$\begin{vmatrix} أ_{١} & ب_{١} & جـ_{١} \\ أ_{٢} & ب_{٢} & جـ_{٢} \\ أ_{٣} & ب_{٣} & جـ_{٣} \end{vmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$$

ويمكن إيجاد قيمة هذا المحدد بإيجاد مفكوكه كما يلي:

$$\begin{vmatrix} أ_{١} & ب_{١} & جـ_{١} \\ أ_{٢} & ب_{٢} & جـ_{٢} \\ أ_{٣} & ب_{٣} & جـ_{٣} \end{vmatrix} = أ_{١} \begin{vmatrix} ب_{٢} & جـ_{٢} \\ ب_{٣} & جـ_{٣} \end{vmatrix} - أ_{٢} \begin{vmatrix} ب_{١} & جـ_{١} \\ ب_{٣} & جـ_{٣} \end{vmatrix} + أ_{٣} \begin{vmatrix} ب_{١} & جـ_{١} \\ ب_{٢} & جـ_{٢} \end{vmatrix}$$

أو: $$\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} = أ_{١١} \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} - أ_{١٢} \begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} + أ_{١٣} \begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \end{vmatrix}$$

وهذا يعنى أننا نحصل على مفكوك المحدد من الرتبة الثالثة بدلالة محددات من الرتبة الثانية وذلك على النحو الموضَّح فيما يلي:

نأخذ العنصر الأول في العمود الأول (وهو $أ_{١}$ أو $أ_{١١}$) وضربناه في محدد من الرتبة الثانية، والذي نحصل عليه بحذف الصف والعمود اللذيْن يقع بهما العنصر المشار إليه. ثم طرحنا حاصل ضرب العنصر الثاني في العمود الأول (وهو $أ_{٢}$ أو $أ_{١٢}$) في المحدد من الرتبة الثانية والناشئ بعد حذف الصف والعمود اللذيْن يقع بهما العنصر ($أ_{٢}$ أو $أ_{١٢}$). بعد ذلك جمعنا حاصل ضرب العنصر الثالث في العمود الأول (وهو $أ_{٣}$ أو $أ_{١٣}$) في المحدد من الرتبة الثانية والناشئ بعد حذف الصف والعمود اللذيْن يقع بهما العنصر ($أ_{٣}$ أو $أ_{١٣}$).

وتسمى المحددات من الرتبة الثانية والناشئة بعد حذف الصفوف والأعمدة بـ " المحيددات " Minors، وعلى سبيل المثال، المحددات:

$$\begin{vmatrix} ب_{٢} & جـ_{٢} \\ ب_{٣} & جـ_{٣} \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} ب_{١} & جـ_{١} \\ ب_{٣} & جـ_{٣} \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} ب_{١} & جـ_{١} \\ ب_{٢} & جـ_{٢} \end{vmatrix}$$

هي محيددات العناصر $أ_{١}$، $أ_{٢}$، $أ_{٣}$ على الترتيب.

وأما مرافقات العناصر Cofactors فهي محيدداتها مضروبة في $(-١)^{س+ص}$ حيث س، ص هما – على الترتيب - رقم الصف ورقم العمود اللذيْن يقع بهما العنصر.

وعلى سبيل المثال:

$$(-١)^{١+١} \begin{vmatrix} ب_{٢} & جـ_{٢} \\ ب_{٣} & جـ_{٣} \end{vmatrix} ، (-١)^{١+٢} \begin{vmatrix} ب_{١} & جـ_{١} \\ ب_{٣} & جـ_{٣} \end{vmatrix} ، (-١)^{١+٣} \begin{vmatrix} ب_{١} & جـ_{١} \\ ب_{٢} & جـ_{٢} \end{vmatrix}$$

هي مرافقات العناصر $أ_{١}$، $أ_{٢}$، $أ_{٣}$ على الترتيب.

وبصفة عامة، يمكن إيجاد قيمة المحدد بدلالة عناصر أي صف أو أي عمود وذلك بإيجاد حاصل جمع (كل عنصر من عناصر الصف أو العمود مضروباً في مرافقه). فلو رمزنا لمحيدد العنصر $\text{أ}_{\text{سص}}$ بالرمز $\text{ع}_{\text{سص}}$ ولمرافقه بالرمز $\text{م}_{\text{سص}}$ فإننا نجد أن:

$$\text{م}_{\text{سص}} = (-١)^{\text{س}+\text{ص}} \times \text{ع}_{\text{سص}} ،$$

قيمة المحدد باعتبار عناصر العمود الأول:

$$\text{قيمة المحدد} = \text{أ}_{١١}\text{م}_{١١} + \text{أ}_{١٢}\text{م}_{١٢} + \text{أ}_{١٣}\text{م}_{١٣}$$

قيمة المحدد باعتبار عناصر الصف الأول:

$$\text{قيمة المحدد} = \text{أ}_{١١}\text{م}_{١١} + \text{أ}_{٢١}\text{م}_{٢١} + \text{أ}_{٣١}\text{م}_{٣١}$$

وهكذا يمكن إيجاد قيمة المحدد باستخدام عناصر أي صف أو أي عمود. وهنا تجدر الإشارة إلى أنه عند حساب قيمة أي محدد فإنه من الأنسب استخدام الصف أو العمود الذي يحتوي على أكبر عدد من الأصفار (إن وُجدت)، وذلك لأننا لن نكون حينئذ في حاجة لحساب قيم مرافقات العناصر التي تساوي الصفر مما ييسر من إجراء العمليات الحسابية.

هذا ومن السهل إيجاد عوامل الإشارات $(-١)^{\text{س}+\text{ص}}$ في حدود مفكوك أي محدد، حيث أن الإشارات تتغير من الموجب إلى السالب ثم الموجب وهكذا وذلك في الاتجاه الأفقي أو الرأسي كما هو موضح فيما يلي:

$$\begin{vmatrix} - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

وهكذا حسب رتبة المحدد الأصلي.

مثال (٢):

احسب قيمة المحدد التالي:
$$\begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ٤ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$$

الحـل:

يمكن إيجاد قيمة هذا المحدد باستخدام عناصر أي صف أو أي عمود. ولكن يلاحظ في هذا المحدد أن الصف الثالث والعمود الثاني يكون الصفر هو أحد عناصرها. لذلك فإنه من

الأيسر إيجاد قيمة هذا المحدد باستخدام عناصر الصف الثالث أو عناصر العمود الثاني وذلك على النحو التالي:

باستخدام الصف الثالث:

قيمة المحدد = ١× $\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ − صفر + ٤× $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix}$

= (١× ٢ – ٣ × ٣) + ٤ (٢ × ٣ – ٥ × ١)

= (٢ – ٩) + ٤ × ١ = -٧ + ٤ = -٣

باستخدام العمود الثاني:

قيمة المحدد = -١× $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}$ + ٣× $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}$ − صفر

= - (٢٠ – ٢) + ٣ (٨ – ٣) = - ١٨ + ١٥ = -٣

وهي نفس النتيجة السابقة.

هذا ولكي نتحقق من أن قيمة المحدد لا تختلف باختلاف الصف أو العمود المستخدم، سوف نوجد قيمة هذا المحدد باستخدام أي صف آخر أو عمود آخر (وليكن الصف الأول).

قيمة المحدد = ٢× $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{vmatrix}$ + (-١)× $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}$ + ٣× $\begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix}$

= ٢(١٢ – صفر) – (٢٠ – ٢) + ٣(صفر – ٣)

= ٢٤ – ١٨ – ٩ = - ٣

وهي القيمة التي حصلنا عليها من قبل.

طريقة أخرى لإيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثالثة: Sarrus Diagram

تتلخص هذه الطريقة في كتابة عناصر الأعمدة الثلاث ثم اعادة كتابة العموديْن الأول والثاني بنفس ترتيبهما على النحو التالي:

$$\begin{array}{ccccc} \text{أ}_١ & \text{ب}_١ & \text{ج}_١ & \text{أ}_١ & \text{ب}_١ \\ \text{أ}_٢ & \text{ب}_٢ & \text{ج}_٢ & \text{أ}_٢ & \text{ب}_٢ \\ \text{أ}_٣ & \text{ب}_٣ & \text{ج}_٣ & \text{أ}_٣ & \text{ب}_٣ \end{array}$$

ثم نأخذ في الاعتبار أن الأقطار الثلاثة المتجهة إلى أسفل تعطى الحدود الموجبة في مفكوك المحدد، وأن الأقطار الثلاثة المتجهة إلى أعلى تعطى الحدود السالبة في مفكوك المحدد.

أي أن الحدود الموجبة هي: أ$_{١}$ب$_{٢}$جـ$_{٣}$ ، ب$_{١}$جـ$_{٢}$أ$_{٣}$ ، جـ$_{١}$أ$_{٢}$ب$_{٣}$

والحدود السالبة هي: أ$_{٣}$ب$_{٢}$جـ$_{١}$ ، ب$_{٣}$جـ$_{٢}$أ$_{١}$ ، جـ$_{٣}$أ$_{٢}$ب$_{١}$

∴ قيمة المحدد = أ$_{١}$ب$_{٢}$جـ$_{٣}$ + ب$_{١}$جـ$_{٢}$أ$_{٣}$ + جـ$_{١}$أ$_{٢}$ب$_{٣}$ − (أ$_{٣}$ب$_{٢}$جـ$_{١}$ + ب$_{٣}$جـ$_{٢}$أ$_{١}$ + جـ$_{٣}$أ$_{٢}$ب$_{١}$)

وبتطبيق ذلك على المحدد المُعطى في مثال (٢) ينتج أن:

١	٢	٣	١	٢
٣	٥	٢	٣	٥
٠	١	٤	٠	١

قيمة المحدد = ٢ × ٣ × ٤ + ١ × ٢ × ١ + ٣ × ٥ × صفر

- (١ × ٣ × ٣ + صفر × ٢ × ٢ + ٤ × ٥ × ١)

= ٢٤ + ٢ + صفر – (٩ + صفر + ٢٠) = ٢٦ – ٢٩ = - ٣

وهي نفس النتيجة التي تم الحصول عليها من قبل.

مثال (٣):

أوجد قيمة المحدد التالي: $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

الحـل:

بإيجاد قيمة المحدد باستخدام عناصر الصف الأول ينتج أن:

قيمة المحدد = ٢ × $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}$ − ٣ × $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$ − ١ × $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

= ٢(١٢ + ٨) – ٣(٣٠ – ١٢) – (-١٠ – ٦)

= ٤٠ – ٥٤ + ١٦ = ٢

طريقة أخرى لإيجاد قيمة المحدد:

بكتابة عناصر الأعمدة الثلاث ثم إعادة كتابة عناصر العمودين الأول والثاني بنفس ترتيبهما نحصل على ما يلي:

٣	٢	١-	٣	٢
٢	٥	٤	٢	٥
٢-	٣	٦	٢-	٣

∴ قيمة المحدد = ٢ × ٢ × ٦ + ٣ × ٤ × ٣ + (-١) × ٥ × (-٢)
- [٣ × ٢ × (-١) + (-٢) × ٤ × ٢ + ٦ × ٥ × ٣]
= ٢٤ + ٣٦ + ١٠ – (-٦ –١٦ + ٩٠)
= ٧٠ – ٦٨ = ٢ وهي نفس النتيجة السابقة.

٣- المحدد من الرتبة الرابعة فأكثر:

المحدد من الرتبة الرابعة يتكون من أربعة صفوف وأربعة أعمدة ويأخذ الصورة التالية:

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{٤١}} & \text{أ}_{\text{٣١}} & \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{أ}_{\text{١١}} \\ \text{أ}_{\text{٤٢}} & \text{أ}_{\text{٣٢}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{أ}_{\text{١٢}} \\ \text{أ}_{\text{٤٣}} & \text{أ}_{\text{٣٣}} & \text{أ}_{\text{٢٣}} & \text{أ}_{\text{١٣}} \\ \text{أ}_{\text{٤٤}} & \text{أ}_{\text{٣٤}} & \text{أ}_{\text{٢٤}} & \text{أ}_{\text{١٤}} \end{vmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{vmatrix} \text{ى}_{\text{١}} & \text{جـ}_{\text{١}} & \text{ب}_{\text{١}} & \text{أ}_{\text{١}} \\ \text{ى}_{\text{٢}} & \text{جـ}_{\text{٢}} & \text{ب}_{\text{٢}} & \text{أ}_{\text{٢}} \\ \text{ى}_{\text{٣}} & \text{جـ}_{\text{٣}} & \text{ب}_{\text{٣}} & \text{أ}_{\text{٣}} \\ \text{ى}_{\text{٤}} & \text{جـ}_{\text{٤}} & \text{ب}_{\text{٤}} & \text{أ}_{\text{٤}} \end{vmatrix}$$

ويمكن هنا أيضا إيجاد قيمة المحدد بحاصل جمع (كل عنصر في أي صف أو أي عمود مضروباً في مرافق هذا العنصر). أي أن:

$$\text{قيمة المحـــدد} = \text{أ}_{\text{١}} \begin{vmatrix} \text{ى}_{\text{٢}} & \text{جـ}_{\text{٢}} & \text{ب}_{\text{٢}} \\ \text{ى}_{\text{٣}} & \text{جـ}_{\text{٣}} & \text{ب}_{\text{٣}} \\ \text{ى}_{\text{٤}} & \text{جـ}_{\text{٤}} & \text{ب}_{\text{٤}} \end{vmatrix} - \text{أ}_{\text{٢}} \begin{vmatrix} \text{ى}_{\text{١}} & \text{جـ}_{\text{١}} & \text{ب}_{\text{١}} \\ \text{ى}_{\text{٣}} & \text{جـ}_{\text{٣}} & \text{ب}_{\text{٣}} \\ \text{ى}_{\text{٤}} & \text{جـ}_{\text{٤}} & \text{ب}_{\text{٤}} \end{vmatrix}$$

$$+ \text{أ}_{\text{٣}} \begin{vmatrix} \text{ى}_{\text{١}} & \text{جـ}_{\text{١}} & \text{ب}_{\text{١}} \\ \text{ى}_{\text{٢}} & \text{جـ}_{\text{٢}} & \text{ب}_{\text{٢}} \\ \text{ى}_{\text{٤}} & \text{جـ}_{\text{٤}} & \text{ب}_{\text{٤}} \end{vmatrix} - \text{أ}_{\text{٤}} \begin{vmatrix} \text{ى}_{\text{١}} & \text{جـ}_{\text{١}} & \text{ب}_{\text{١}} \\ \text{ى}_{\text{٢}} & \text{جـ}_{\text{٢}} & \text{ب}_{\text{٢}} \\ \text{ى}_{\text{٣}} & \text{جـ}_{\text{٣}} & \text{ب}_{\text{٣}} \end{vmatrix}$$

ويمكن الحصول على قيمة كل محيدد (من الرتبة الثالثة) وذلك باتباع الطرق المشار إليها من قبل عند تناولنا للمحدد من الرتبة الثالثة.

أما فيما يتعلق بالمحددات من الرتبة الخامسة فإننا نكون في حاجة لإيجاد قيـم المحيددات من الدرجة الرابعة، وهكذا بالنسبة لبقية المحددات ذات الرتبة الأعلى.

مثال (٤):

احسب قيمة المحدد:

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٣ & ٥ \\ ٣ & ٥ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٦ & ٥ & ٢ \\ ٤ & ٢ & ١ & ٣ \end{vmatrix}$$

الحـل:

قيمة المحدد بدلالة عناصر الصف الأول:

$$\text{قيمة المحدد} = 5\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+ 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

بعد ذلك يمكن إيجاد قيمة كل محيدد من الدرجة الثالثة على النحو التالي وذلك باستخدام عناصر الصف الأول لكل منهم.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(24 - 10) - 5(20 - 5) + 3(10 - 6)$$

$$= 28 - 75 + 12 = -35$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (24 - 10) - 5(8 - 15) + 3(4 - 18)$$

$$= 14 + 35 - 42 = 7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (20 - 5) - 2(8 - 15) + 3(2 - 15)$$

$$= 15 + 14 - 39 = -10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

= (١٠ – ٦) – ٢(٤ – ١٨) + ٥(٢ – ١٥)

= ٤ + ٢٨ – ٦٥ = - ٣٣

∴ قيمة المحـدد = ٥(-٣٥) – ٣(٧) + ٤(-١٠) – ٢(-٣٣)

= - ١٧٥ – ٢١ – ٤٠ + ٦٦ = - ١٧٠

ثانياً: خصائص المحددات

رأينا فيما سبق كيف أن حساب قيمة محدد من الرتبة الرابعة يتطلب عمليات حسابية كثيرة نكون معها عرضةً للوقوع في أخطاء حسابية. ولا شك أن الأمر سوف يصبح أكثر تعقيداً لو أن الأمر كان متعلقاً بمحددات ذات رتبة أكبر من الرتبة الرابعة. وفي الواقع فإن دراستنا لخصائص المحددات سوف تيسر علينا هذا الأمر عند إجراء العمليات الحسابية في إيجاد قيمة المحدد. وفيما يلي بعض خصائص المحددات:

الخاصية الأولى:

إذا غيرنا وضع المحدد بحيث جعلنا أعمدته صفوفاً أو صفوفه أعمدة فإن قيمة المحدد لا تتغير.

لو رمزنا إلى المحدد بالرمز $\Delta_{١}$ وللمحدد الجديد بعد وضع الصفوف مكان الأعمدة أو الأعمدة مكان الصفوف بالرمز $\Delta_{٢}$. أي أن:

$$\Delta_{١} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١} & \text{ب}_{١} & \text{جـ}_{١} \\ \text{أ}_{٢} & \text{ب}_{٢} & \text{جـ}_{٢} \\ \text{أ}_{٣} & \text{ب}_{٣} & \text{جـ}_{٣} \end{vmatrix} \quad ، \quad \Delta_{٢} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١} & \text{أ}_{٢} & \text{أ}_{٣} \\ \text{ب}_{١} & \text{ب}_{٢} & \text{ب}_{٣} \\ \text{جـ}_{١} & \text{جـ}_{٢} & \text{جـ}_{٣} \end{vmatrix}$$

فإنه وفقا لهذه الخاصية نجد أن: $\Delta_{١} = \Delta_{٢}$

والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (٥):

أثبت أن:

$$\Delta_{١} = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ١- \\ ٥ & ٢ & ٤ \\ ٣ & ٢- & ٦ \end{vmatrix} = \Delta_{٢} = \begin{vmatrix} ٢ & ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ & ٢- \\ ١- & ٤ & ٦ \end{vmatrix}$$

الحـل:

بفك $\Delta_{١}$ باستخدام عناصر الصف الأول ينتج أن:

$$\Delta_{١} = ٢\begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ -٢ & ٦ \end{vmatrix} - ٣\begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix}$$

$$= ٢(١٢ + ٨) - ٣(٣٠ - ١٢) - (-١٠ - ٦)$$

$$= ٤٠ - ٥٤ + ١٦ = ٢$$

بفك $\Delta_{٢}$ باستخدام عناصر الصف الأول ينتج أن:

$$\Delta_{٢} = ٢\begin{vmatrix} ٢ & -٢ \\ ٤ & ٦ \end{vmatrix} - ٥\begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ٦ \end{vmatrix} + ٣\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$= ٢(١٢ + ٨) - ٥(١٨ - ٢) + ٣(١٢ + ٢)$$

$$= ٤٠ - ٨٠ + ٤٢ = ٢$$

أي أن: $\Delta_{١} = \Delta_{٢} = ٢$

الخاصية الثانية:

إذا أبدلنا صفيْن أو عموديْن متجاوريْن كلٌّ مكان الآخر فإن قيمة المحدد لا تتغير وإنما تتغير إشارته. أي أن:

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{١} & \text{ب}_{١} & \text{جـ}_{١} \\ \text{أ}_{٢} & \text{ب}_{٢} & \text{جـ}_{٢} \\ \text{أ}_{٣} & \text{ب}_{٣} & \text{جـ}_{٣} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢} & \text{ب}_{٢} & \text{جـ}_{٢} \\ \text{أ}_{١} & \text{ب}_{١} & \text{جـ}_{١} \\ \text{أ}_{٣} & \text{ب}_{٣} & \text{جـ}_{٣} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{ب}_{١} & \text{أ}_{١} & \text{جـ}_{١} \\ \text{ب}_{٢} & \text{أ}_{٢} & \text{جـ}_{٢} \\ \text{ب}_{٣} & \text{أ}_{٣} & \text{جـ}_{٣} \end{vmatrix}$$

مثال (٦):

أوجد قيمة المحدد: $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$

ثم أوجد قيمته بعد إبدال الصف الأول ولصف الثاني كلٌّ مكان الأخر.

الحـل:

$$\Delta_{١} = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} = ٤ + ١٢ = ١٦ \text{ ،}$$

$$\Delta_{٢} = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣- & ٢ \end{vmatrix}$$

= -١٢ – ٤ = - ١٦

أي أن: $\Delta_{١} = - \Delta_{٢}$.

الخاصية الثالثة:

إذا أزاح (تخطى) صف (أو عمود) عدداً من الصفوف (أو الأعمدة) مقداره م، فإن القيمة العددية للمحدد لا تتغير إذا كانت م عدداً زوجياً، بينما تتغير إشارة قيمته فقط إذا كانت م عدداً فردياً.

فإذا كان لدينا المحدد:

$$\begin{vmatrix} \text{ى}_{١} & \text{جـ}_{١} & \text{ب}_{١} & \text{أ}_{١} \\ \text{ى}_{٢} & \text{جـ}_{٢} & \text{ب}_{٢} & \text{أ}_{٢} \\ \text{ى}_{٣} & \text{جـ}_{٣} & \text{ب}_{٣} & \text{أ}_{٣} \\ \text{ى}_{٤} & \text{جـ}_{٤} & \text{ب}_{٤} & \text{أ}_{٤} \end{vmatrix}$$

فإن:

$$\begin{vmatrix} \text{ى}_{١} & \text{جـ}_{١} & \text{ب}_{١} & \text{أ}_{١} \\ \text{ى}_{٢} & \text{جـ}_{٢} & \text{ب}_{٢} & \text{أ}_{٢} \\ \text{ى}_{٣} & \text{جـ}_{٣} & \text{ب}_{٣} & \text{أ}_{٣} \\ \text{ى}_{٤} & \text{جـ}_{٤} & \text{ب}_{٤} & \text{أ}_{٤} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ى}_{١} & \text{أ}_{١} & \text{جـ}_{١} & \text{ب}_{١} \\ \text{ى}_{٢} & \text{أ}_{٢} & \text{جـ}_{٢} & \text{ب}_{٢} \\ \text{ى}_{٣} & \text{أ}_{٣} & \text{جـ}_{٣} & \text{ب}_{٣} \\ \text{ى}_{٤} & \text{أ}_{٤} & \text{جـ}_{٤} & \text{ب}_{٤} \end{vmatrix}$$

وذلك لأن العمود الأول أزاح العمودين الأول والثاني، أي أن م = ٢.

في حين نجد أن:

$$\begin{vmatrix} \text{ى}_{١} & \text{جـ}_{١} & \text{ب}_{١} & \text{أ}_{١} \\ \text{ى}_{٢} & \text{جـ}_{٢} & \text{ب}_{٢} & \text{أ}_{٢} \\ \text{ى}_{٣} & \text{جـ}_{٣} & \text{ب}_{٣} & \text{أ}_{٣} \\ \text{ى}_{٤} & \text{جـ}_{٤} & \text{ب}_{٤} & \text{أ}_{٤} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{أ}_{١} & \text{ى}_{١} & \text{جـ}_{١} & \text{ب}_{١} \\ \text{أ}_{٢} & \text{ى}_{٢} & \text{جـ}_{٢} & \text{ب}_{٢} \\ \text{أ}_{٣} & \text{ى}_{٣} & \text{جـ}_{٣} & \text{ب}_{٣} \\ \text{أ}_{٤} & \text{ى}_{٤} & \text{جـ}_{٤} & \text{ب}_{٤} \end{vmatrix}$$

وذلك لأن العمود الأول أزاح الأعمدة الأول والثاني والثالث، أي أن م = ٣

مثال (٧):

أثبت أن: $\Delta_{١} = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ -٣ & ١ & ٥ \\ ٠ & ٢ & ٦ \end{vmatrix}$ و $\Delta_{٢} = \begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ & -٣ \\ ٢ & ٦ & ٠ \end{vmatrix}$ متساويان في القيمة.

الحـل:

يُلاحَظ في هذا المثال أن العمود الأول في المحدد أزاح (تخطى) العمودين الثاني والثالث، أي أن م = ٢. وبالتالي فإن قيمة المحدد لا تتغير. ويمكننا التحقق كما يلي:

بفك $\Delta_{١}$ باستخدام عناصر العمود الأول ينتج أن:

$$\Delta_{١} = ٢ \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix} + ٣ \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix} + \text{صفر}$$

$$= ٢(٦ - ١٠) + ٣(٢٤ - ٦) = -٨ + ٥٤ = ٤٦$$

وبفك $\Delta_{٢}$ باستخدام عناصر الصف الثالث نحصل على:

$$\Delta_{٢} = ٢ \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & -٣ \end{vmatrix} + ٣ \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ١ & -٣ \end{vmatrix} + \text{صفر}$$

$$= ٢(-٩ - ١٠) - ٦(-١٢ - ٢)$$

$$= -٣٨ + ٨٤ = ٤٦$$

أي أن: $\Delta_{١} = \Delta_{٢}$

الخاصية الرابعة:

إذا تشابه صفان أو عمودان تماما في المحدد، أي تساوت قيمة كل عنصر مع العنصر المناظر له، فإن قيمة المحدد تساوي الصفر. وكذلك إذا كانـت عناصر أحد الصفوف أو الأعمدة متناسبة مع العناصر المناظرة لها في صف أو عمود آخر فإن قيمة المحدد تساوي الصفر أيضاً.

وعلى سبيل المثال:

$$\begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٣ \\ ٤ & -٣ & ٤ \\ ٢ & ٥ & ٢ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

وذلك نظراً لتطابق العمودَيْن الأول والثالث.

وكذلك:

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٦ \\ ٦ & ٥ & -٢ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

وذلك لأن: الصف الأول = ٢ × الصف الثالث.

الخاصية الخامسة:

إذا وجدنا في صف من صفوف المحدد أو في عمود من أعمدته عاملاً مشتركاً لكل عناصره وليكن م، وقسمنا كل عنصر من عناصر الصف أو العمود على هذا العامل المشترك فإن المحدد الأصلي = م مضروبة في المحدد الجديد. وبعبارة أخرى، إذا ضربنا صفا من صفوف أي محدد أو عموداً من أعمدته في مقدار ثابت (م) فإن:

قيمة المحدد الجديد = م × قيمة المحدد الأصلي

أي أن:

$$\begin{vmatrix} \text{جـ}_١ & \text{ب}_١ & \text{م.أ}_١ \\ \text{جـ}_٢ & \text{ب}_٢ & \text{م.أ}_٢ \\ \text{جـ}_٣ & \text{ب}_٣ & \text{م.أ}_٣ \end{vmatrix} = \text{م} \begin{vmatrix} \text{جـ}_١ & \text{ب}_١ & \text{أ}_١ \\ \text{جـ}_٢ & \text{ب}_٢ & \text{أ}_٢ \\ \text{جـ}_٣ & \text{ب}_٣ & \text{أ}_٣ \end{vmatrix}$$

وكأمثلة عددية نجد أن:

$$٣ \begin{vmatrix} ٦ & ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ & -١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٦ & ٣ & ٦ \\ ١ & ٥ & ١٢ \\ ٣ & ٢ & -٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٦ & ٩ & ٢ \\ ١ & ١٥ & ٤ \\ ٣ & ٦ & -١ \end{vmatrix}$$

كما أن:

$$٣ \begin{vmatrix} ٦ & ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ & -١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١٨ & ٩ & ٦ \\ ١ & ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ & -١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٦ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ١٥ & ١٢ \\ ٣ & ٢ & -١ \end{vmatrix}$$

ويمكننا التحقق من ذلك باعتبار حالة واحدة فقط ولتكن:

$$٣ \begin{vmatrix} ٦ & ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ & -١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٦ & ٣ & ٦ \\ ١ & ٥ & ١٢ \\ ٣ & ٢ & -٣ \end{vmatrix}$$

$$\text{الطرف الأيمن} = ٣\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٦ \\ ٤ & ٥ & ١ \\ -١ & ٢ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= ٣\left[٢\begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} - ٣\begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ -١ & ٣ \end{vmatrix} + ٦\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix} \right]$$

$$= ٣[٢(١٥ - ٢) - ٣(١٢ + ١) + ٦(٨ + ٥)]$$

$$= ٣(٢ \times ١٣ - ٣ \times ١٣ + ٦ \times ١٣)$$

$$= ٣ \times ٦٥ = ١٩٥$$

$$\text{الطرف الأيسر} = \begin{vmatrix} ٦ & ٣ & ٦ \\ ١٢ & ٥ & ١ \\ -٣ & ٢ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= ٦\begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} - ٣\begin{vmatrix} ١٢ & ١ \\ -٣ & ٣ \end{vmatrix} + ٦\begin{vmatrix} ١٢ & ٥ \\ -٣ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= ٦(١٥ - ٢) - ٣(٣٦ + ٣) + ٦(٢٤ + ١٥)$$

$$= ٦ \times ١٣ - ٣ \times ٣٩ + ٦ \times ٣٩ = ١٩٥$$

أي أن الطرفيْن متساويان.

الخاصية السادسة:

إذا كـان كل عنصر من عناصر أي صف أو عمود من محدد عبارة عن مجموع م حداً، فإنه يمكن التعبير عن هذا المحدد بمجموع محددات عددها م أيضاً.

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_١ & \text{ب}_١ + \text{ل} & \text{جـ}_١ \\ \text{أ}_٢ & \text{ب}_٢ + \text{م} & \text{جـ}_٢ \\ \text{أ}_٣ & \text{ب}_٣ + \text{ن} & \text{جـ}_٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ}_١ & \text{ب}_١ & \text{جـ}_١ \\ \text{أ}_٢ & \text{ب}_٢ & \text{جـ}_٢ \\ \text{أ}_٣ & \text{ب}_٣ & \text{جـ}_٣ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ}_١ & \text{ل} & \text{جـ}_١ \\ \text{أ}_٢ & \text{م} & \text{جـ}_٢ \\ \text{أ}_٣ & \text{ن} & \text{جـ}_٣ \end{vmatrix}$$

مثال (٨):

أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} + \text{س}^٢ & \text{س}^٢ \\ \text{ص} & \text{ص} + \text{ص}^٢ & \text{ص}^٢ \\ \text{ع} & \text{ع} + \text{ع}^٢ & \text{ع}^٢ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحـل:

وفقا للخاصية السادسة نجد أن:

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} + \text{س}^2 & \text{س}^2 \\ \text{ص} & \text{ص} + \text{ص}^2 & \text{ص}^2 \\ \text{ع} & \text{ع} + \text{ع}^2 & \text{ع}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{س}^2 \\ \text{ص} & \text{ص} & \text{ص}^2 \\ \text{ع} & \text{ع} & \text{ع}^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^2 & \text{س}^2 \\ \text{ص} & \text{ص}^2 & \text{ص}^2 \\ \text{ع} & \text{ع}^2 & \text{ع}^2 \end{vmatrix}$$

= صفر + صفر = صفر

وذلك نظراً لأن العموديْن الأول والثاني في المحدد الأول في الطرف الأيسر متشابهان، كما أن العموديْن الثاني والثالث في المحدد الثاني في الطرف الأيسر متشابهان أيضا. لذلك فإن القيمة العددية لكل منهما تساوي الصفر وفقا للخاصية الرابعة.

الخاصية السابعة:

مجموع حواصل ضرب عناصر أي صف (عمود) لمحدد ما في مرافقات العناصر المناظرة لصف (عمود) آخر يساوي الصفر، وعلى سبيل المثال:

إذا اعتبرنا المحدد: $\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{جـ}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{جـ}_3 \end{vmatrix}$

فـإذا رمزنـا لمرافقات عناصر العمـود الأول أ_1 ، أ_2 ، أ_3 بالرموز م_1 ، م_2 ، م_3 على التوالي فإننا نحصل على:

$$\text{ب}_1\text{م}_1 + \text{ب}_2\text{م}_2 + \text{ب}_3\text{م}_3 = \text{صفر}$$

وكذلـك:

$$\text{جـ}_1\text{م}_1 + \text{جـ}_2\text{م}_2 + \text{جـ}_3\text{م}_3 = \text{صفر}$$

وهكذا الأمر لو أخذنا في الاعتبار عناصر أي صف أو أي عمود آخر.

الخاصية الثامنة:

إذا أضيف إلى عناصر أي صـف (أو عمود) مضاعفات العناصر المناظرة في صف (أو عمود) آخر فإن قيمة المحدد لا تتغير.

وعلى سبيل المثال، إذا كان لدينا المحدد:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{جـ}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{جـ}_3 \end{vmatrix}$$

فإنه إذا ضربنا كل عنصر من عناصر الصف الأول في مقدار ثابت، وليكن ل، ثم أضفنا الناتج إلى العناصر المناظرة في الصف الثاني لحصلنا على:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_2 + \text{أ}_1\text{ل} & \text{ب}_2 + \text{ب}_1\text{ل} & \text{جـ}_2 + \text{جـ}_1\text{ل} \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{جـ}_3 \end{vmatrix}$$

ووفقاً لهذه الخاصية نجد أن: $\Delta_1 = \Delta_2$

ويمكن إثبات هذه الخاصية على النحو التالي:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_2 + \text{أ}_1\text{ل} & \text{ب}_2 + \text{ب}_1\text{ل} & \text{جـ}_2 + \text{جـ}_1\text{ل} \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{جـ}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{جـ}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{جـ}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_1\text{ل} & \text{ب}_1\text{ل} & \text{جـ}_1\text{ل} \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{جـ}_3 \end{vmatrix}$$

وذلك تطبيقا للخاصية السادسة.

$$\therefore \Delta_2 = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{جـ}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{جـ}_3 \end{vmatrix} + \text{ل} \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{جـ}_3 \end{vmatrix}$$

وذلك بأخذ ل كعامل مشترك لعناصر الصف الثاني (تطبيقا للخاصية الخامسة).

وحيث أن: $\text{ل} \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{جـ}_3 \end{vmatrix} = \text{ل} \times \text{صفر} = \text{صفر}$ (الخاصية الرابعة)

فإننا نجد أن:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{جـ}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{جـ}_3 \end{vmatrix} + \text{صفر} = \Delta_1$$

وكحالات خاصة، إذا كانت ل = ١، فإن ذلك يعني جمع عناصر صف (عمود) على عناصر صف (عمود) آخر. وأما إذا كانت ل = -١ فإن ذلك يعنى طرح عناصر صف (عمود) من عناصر صف (عمود) آخر، وفي كلتا الحالتيْن لا تتغير قيمة المحدد.

وتعتبر هذه الخاصية من أهم خواص المحددات إذا أنها تمكِّننا بسهولة من أن نجعل كثيراً من عناصر المحدد مساوية للصفر، وبالتالي فإنها تيسر عمليات إيجاد القيم العددية للمحددات. ولعل المثاليْن (٩)، (١٠) يوضحان ذلك. هذا ويمكن استخدام هذه الخاصية في اثبات الخاصية الرابعة المشار إليها سابقاً.

مثال (٩):

أوجد قيمة المحدد: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ مستخدماً في ذلك خواص المحددات.

الحــل:

بضرب عناصر الصف الأول في ٢ والجمع على عناصر الصـف الثالث نحصل على:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & 12 \end{vmatrix} \quad 2\text{ص}_1 + \text{ص}_3 \rightarrow \text{ص}_3$$

ثم بضرب عناصر الصف الأول في –٣ والجمع على عناصر الصف الثاني نحصل على:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 8 & 12 \end{vmatrix} \quad -3\text{ص}_1 + \text{ص}_2 \rightarrow \text{ص}_2$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = -5 \times 12 - 8(-4) = -60 + 32 = -28$$

مثال (١٠):

باستخدام خواص المحددات، أوجد قيمة المحدد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

الحـل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

وبجمع عناصر الصف الأول على عناصر الصف الثاني ($\text{ص}_1 + \text{ص}_2 \leftarrow \text{ص}_2$) ثم نضرب عناصر الصف الأول في -٣ والجمع على عناصر الصف الثالث ($-3\text{ص}_1 + \text{ص}_3 \leftarrow \text{ص}_3$) ينتج أن:

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ -5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(-49 + 30) = 2 \times -19 = -38$$

وفي استخدامنا لتلك الخاصية في إيجاد القيمة العددية للمحدد سوف نفترض أن ص_r، ع_r ترمزان على الترتيب إلى الصف رقم r والعمود رقم r وذلك تسهيلاً لتوضيح العمليات الحسابية التي نجريها في هذا الشأن.

ثالثاً: بعض أنواع المحددات

فيما يلي بعض أنواع المحددات:

١- المحدد القطري:

المحدد القطري هو المحدد الذي جميع عناصره أصفاراً ما عدا عناصر القطر. وإذا كانت العناصر (غير الصفرية) واقعة على القطر الرئيسي فإن قيمة المحدد تساوي حاصل ضرب

عناصر القطر. وأما إذا كانت العناصر (غير الصفرية) واقعة على القطر غير الرئيسي فإن قيمة المحدد تساوي حاصل ضرب عناصر القطر ولكن بإشارة مخالفة. ويمكن التعبير عن ذلك على النحو التالي:

إذا كان: $\Delta = \begin{vmatrix} \text{٠} & \text{٠} & \text{أ} \\ \text{٠} & \text{ب} & \text{٠} \\ \text{جـ} & \text{٠} & \text{٠} \end{vmatrix}$ فإن Δ = **أبجـ**

وأما إذا كان: $\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{٠} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{ب} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{جـ} \end{vmatrix}$ فإن Δ = **-أبجـ**

٢- المحدد المثلثي:

هناك نوعان من المحددات المثلثية وهما:

- **المحدد المثلثي العلوي:** وهو المحدد الذي فيه جميع العناصر أسفل القطر الرئيسي أصفار.
- **المحدد المثلثي السفلي:** وهو المحدد الذي فيه جميع العناصر أعلى القطر الرئيسي أصفار.

وقيمة كل من هذين المحدديْن تساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي.

وعلى سبيل المثال:

$\Delta = \begin{vmatrix} \text{٣} & \text{١} & \text{٢} \\ \text{٤} & \text{٥} & \text{٠} \\ \text{١} & \text{٠} & \text{٠} \end{vmatrix}$

= ٢ × ٥ × ١ = ١٠

حيث أنه محدد مثلثي علوي.

كما أن: $\Delta = \begin{vmatrix} \text{٠} & \text{٠} & \text{٣} \\ \text{٠} & \text{٢} & \text{٤} \\ \text{٣} & \text{١} & \text{٥} \end{vmatrix}$

= ٣ × ٢ × ٣ = ١٢

حيث أنه محدد مثلثي سفلي.

هذا ويمكن استخدام خواص المحددات لتحويلها إلى محددات مثلثية أو قطرية يسهل معها إيجاد قيمة المحدد مهما بلغت رتبته. حينئذ يمكن إيجاد قيمة المحدد أيا كانت رتبته بدون فكه وذلك كما يوضحه المثالان التاليان.

مثال (١١):

بدون فك المحدد، أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} ١+\text{أ}^{٢}-\text{ب}^{٢} & ٢\text{أب} & -٢\text{ب} \\ ٢\text{أب} & ١-\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢} & ٢\text{أ} \\ ٢\text{ب} & -٢\text{أ} & ١-\text{أ}^{٢}-\text{ب}^{٢} \end{vmatrix} = \left(١+\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}\right)^{٣}$$

الحـل:

بضرب العمود الثالث في $-\text{ب}$ والجمع على العمود الأول $(-\text{ب}\text{ع}_{٣}+\text{ع}_{١}\rightarrow \text{غ}_{١})$، ثم بضرب العمود الثالث في أ والجمع على العمود الثاني $(-\text{أ}\text{ع}_{٣}+\text{ع}_{٢}\rightarrow \text{غ}_{٢})$، نحصل على:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١+\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢} & ٠ & -٢\text{ب} \\ ٠ & ١+\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢} & ٢\text{أ} \\ \text{ب}\left(١+\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}\right) & -\text{أ}\left(١+\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}\right) & ١-\text{أ}^{٢}-\text{ب}^{٢} \end{vmatrix}$$

$$= \left(١+\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}\right)^{٢} \begin{vmatrix} ١ & ٠ & -٢\text{ب} \\ ٠ & ١ & ٢\text{أ} \\ \text{ب} & -\text{أ} & ١-\text{أ}^{٢}-\text{ب}^{٢} \end{vmatrix}$$

وذلك بأخذ المقدار $\left(١+\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}\right)$ كعامل مشترك من كل من العمودين الأول والثاني.

وبإجراء العملية التالية: $-٢\text{أ}\text{ع}_{٢}+٢\text{ب}\text{ع}_{١}+\text{ع}_{٣}\rightarrow \text{غ}_{٣}$ نحصل على:

$$\Delta = \left(١+\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}\right)^{٢} \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ \text{ب} & -\text{أ} & ١+\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢} \end{vmatrix}$$

$$= \left(١+\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}\right)^{٢}\left(١+\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}\right)$$

$$= \left(١+\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}\right)^{٣}$$

وذلك لأن المحدد يمثل محدد مثلثي سفلي قيمته تساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي.

مثال (١٢):

بدون فك، أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\begin{vmatrix} ١ & ٣- & ٢ \\ ٦ & ٥ & ٤ \\ ١- & ٤ & ٣ \end{vmatrix}$$

الحـل:

بإجراء العمليات التالية:

$$٣ع_{٣} + ع_{١} \leftarrow غ_{١} \quad ، \quad ٤ع_{٣} + ع_{٢} \leftarrow غ_{٢}$$
، نحصل على:

$$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ٥ \\ ٦ & ٢٩ & ٢٢ \\ ١- & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = \Delta$$

وبإجراء العملية التالية:

$$-\frac{٢٢}{٥}ص_{١} + ص_{٢} \leftarrow ص_{٢}$$
نحصل على:

$$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ٥ \\ \frac{٨}{٥} & \frac{١٢٣}{٥} & ٠ \\ ١- & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = \Delta$$

وهو محدد مثلثي علوي قيمته تساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي.

أي أن: $\Delta = ٥ \times \frac{١٢٣}{٥}\left(١-\right) = -١٢٣$

مثال (١٣):

إذا كان لديك المحدد التالي:

$$\begin{vmatrix} ٢أ & ٢أ & أ-ب-جـ \\ ٢ب & ب-جـ-أ & ٢ب \\ جـ-أ-ب & ٢جـ & ٢جـ \end{vmatrix}$$

أثبت أن قيمة المحدد تمثل مكعباً كاملاً.

الحـل:

بجمـع عناصر الصف الثـالث علـى عنـاصر الصـف الثاني ($\text{ص}_{٣} + \text{ص}_{٢} \leftarrow \text{ص}_{٢}$) ينتج أن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} - \text{ب} - \text{جـ} & \text{٢أ} & \text{٢أ} \\ \text{٢ب} + \text{٢جـ} & \text{ب} + \text{جـ} - \text{أ} & \text{جـ} - \text{أ} + \text{ب} \\ \text{٢جـ} & \text{٢جـ} & \text{جـ} - \text{أ} - \text{ب} \end{vmatrix}$$

بجمع عناصر الصف الثاني على عناصر الصف الأول ($\text{ص}_{٢} + \text{ص}_{١} \leftarrow \text{ص}_{١}$) ينتج أن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} & \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} & \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} \\ \text{٢ب} + \text{٢جـ} & \text{ب} + \text{جـ} - \text{أ} & \text{جـ} - \text{أ} + \text{ب} \\ \text{٢جـ} & \text{٢جـ} & \text{جـ} - \text{أ} - \text{ب} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}) \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ \text{٢ب} + \text{٢جـ} & \text{ب} + \text{جـ} - \text{أ} & \text{جـ} - \text{أ} + \text{ب} \\ \text{٢جـ} & \text{٢جـ} & \text{جـ} - \text{أ} - \text{ب} \end{vmatrix}$$

بطرح عناصر العمود الثاني من عناصر العمود الأول ($- \text{ع}_{٢} + \text{ع}_{١} \leftarrow \text{غ}_{١}$) نحصل على:

$$\Delta = (\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}) \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} & \text{ب} + \text{جـ} + \text{أ} & \text{جـ} - \text{أ} + \text{ب} \\ ٠ & \text{٢جـ} & \text{جـ} - \text{أ} - \text{ب} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ})\left[-(\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ})\right] \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ \text{٢جـ} & \text{جـ} - \text{أ} - \text{ب} \end{vmatrix}$$

$$= -(\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ})^{٢}(\text{جـ} - \text{أ} - \text{ب} - \text{٢جـ}) = -(\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ})^{٢}\left[-(\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ})\right]$$

$$= (\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ})^{٣} = \text{مكعب كامل}$$

مثال (١٤):

باستخدام خواص المحددات، أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{س} + \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} & \text{ء} \\ \text{أ} & \text{س} + \text{ب} & \text{جـ} & \text{ء} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{س} + \text{جـ} & \text{ء} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} & \text{س} + \text{ء} \end{vmatrix} = \text{س}^{٣}(\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} + \text{ء} + \text{س})$$

الحـل:

بطرح عناصر الصف الثاني من عناصر الصف الأول ($-\text{ص}_{٢} + \text{ص}_{١} \leftarrow \text{ص}_{١}$) ينتج أن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{س} & -\text{س} & ٠ & ٠ \\ \text{أ} & \text{س} + \text{ب} & \text{جـ} & \text{د} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{س} + \text{جـ} & \text{د} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} & \text{س} + \text{د} \end{vmatrix}$$

بجمع عناصر العمود الأول على عناصر العمود الثاني ($\text{ع}_{١} + \text{ع}_{٢} \leftarrow \text{غ}_{٢}$) نحصل على:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{س} & ٠ & ٠ & ٠ \\ \text{أ} & \text{أ} + \text{س} + \text{ب} & \text{جـ} & \text{د} \\ \text{أ} & \text{أ} + \text{ب} & \text{س} + \text{جـ} & \text{د} \\ \text{أ} & \text{أ} + \text{ب} & \text{جـ} & \text{س} + \text{د} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \text{س} \begin{vmatrix} \text{أ} + \text{ب} + \text{س} & \text{جـ} & \text{د} \\ \text{أ} + \text{ب} & \text{س} + \text{جـ} & \text{د} \\ \text{أ} + \text{ب} & \text{جـ} & \text{س} + \text{د} \end{vmatrix}$$

بطرح عناصر الصف الثاني من عناصر الصف الأول ($-\text{ص}_{٢} + \text{ص}_{١} \leftarrow \text{ص}_{١}$) ينتج أن:

$$\Delta = \text{س} \begin{vmatrix} \text{س} & -\text{س} & ٠ \\ \text{أ} + \text{ب} & \text{س} + \text{جـ} & \text{د} \\ \text{أ} + \text{ب} & \text{جـ} & \text{س} + \text{د} \end{vmatrix} = \text{س}^{٢} \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٠ \\ \text{أ} + \text{ب} & \text{س} + \text{جـ} & \text{د} \\ \text{أ} + \text{ب} & \text{جـ} & \text{س} + \text{د} \end{vmatrix}$$

وبجمع عناصر العمود الأول على عناصر العمود الثاني ($\text{ع}_{١} + \text{ع}_{٢} \leftarrow \text{غ}_{٢}$) نحصل على:

$$\Delta = \text{س}^{٢} \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ \text{أ} + \text{ب} & \text{س} + \text{جـ} + \text{أ} + \text{ب} & \text{د} \\ \text{أ} + \text{ب} & \text{جـ} + \text{أ} + \text{ب} & \text{س} + \text{د} \end{vmatrix}$$

$$= \text{س}^{٢} \begin{vmatrix} \text{س} + \text{جـ} + \text{أ} + \text{ب} & \text{د} \\ \text{جـ} + \text{أ} + \text{ب} & \text{س} + \text{د} \end{vmatrix}$$

بطرح عناصر الصف الثاني من عناصر الصف الأول ($-\text{ص}_{٢} + \text{ص}_{١} \leftarrow \text{ص}_{١}$) نحصل على:

$$\Delta = \text{س}^{2} \begin{vmatrix} \text{س} & -\text{س} \\ \text{جـ} + \text{ا} + \text{ب} & \text{س} + \text{د} \end{vmatrix}$$

$$= \text{س}^{3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \text{جـ} + \text{ا} + \text{ب} & \text{س} + \text{د} \end{vmatrix}$$

بجمع عناصر ع_1 على عناصر ع_2 $(\text{ع}_1 + \text{ع}_2 \leftarrow \text{غ}_2)$ ينتج أن:

$$= \text{س}^{3}\left(\text{ا} + \text{ب} + \text{جـ} + \text{د} + \text{س}\right)$$

وهنا تجدر الإشارة إلى أن هذا ليس هو الحل الوحيد لإثبات المطلوب، وإنما يمكن استخدام خواص المحددات لجعل أكبر عدد ممكن من عناصر أي صف أو أي عمود مساوية للصفر حتى يسهل فك المحدد. فعلى سبيل التنوع نقدم حلاً آخر لهذا المثال وذلك على النحو التالي:

حل آخر:

حيث أن:
$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{س} + \text{ا} & \text{ب} & \text{جـ} & \text{د} \\ \text{ا} & \text{س} + \text{ب} & \text{جـ} & \text{د} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{س} + \text{جـ} & \text{د} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{جـ} & \text{س} + \text{د} \end{vmatrix}$$

بجمع عناصر الأعمدة الثاني والثالث والرابع على عناصر العمود الأول $(\text{ع}_4 + \text{ع}_3 + \text{ع}_2 + \text{ع}_1 \leftarrow \text{غ}_1)$ فإننا نحصل على:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{ا} + \text{ب} + \text{جـ} + \text{د} + \text{س} & \text{ب} & \text{جـ} & \text{د} \\ \text{ا} + \text{ب} + \text{جـ} + \text{د} + \text{س} & \text{س} + \text{ب} & \text{جـ} & \text{د} \\ \text{ا} + \text{ب} + \text{جـ} + \text{د} + \text{س} & \text{ب} & \text{س} + \text{جـ} & \text{د} \\ \text{ا} + \text{ب} + \text{جـ} + \text{د} + \text{س} & \text{ب} & \text{جـ} & \text{س} + \text{د} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\text{ا} + \text{ب} + \text{جـ} + \text{د} + \text{س}\right) \begin{vmatrix} 1 & \text{ب} & \text{جـ} & \text{د} \\ 1 & \text{س} + \text{ب} & \text{جـ} & \text{د} \\ 1 & \text{ب} & \text{س} + \text{جـ} & \text{د} \\ 1 & \text{ب} & \text{جـ} & \text{س} + \text{د} \end{vmatrix}$$

وبطرح عناصر الصف الأول من عناصر كل من الصف الثاني والصف الثالث والصف الرابع $(-\text{ص}_1 + \text{ص}_2 \leftarrow \text{صـ}_2$، $-\text{ص}_1 + \text{ص}_3 \leftarrow \text{صـ}_3$، $-\text{ص}_1 + \text{ص}_4 \leftarrow \text{صـ}_4)$ ينتج أن:

$$\Delta = (\text{ا} + \text{ب} + \text{جـ} + \text{ء} + \text{س}) \begin{vmatrix} \text{ء} & \text{جـ} & \text{ب} & ١ \\ ٠ & ٠ & \text{س} & ٠ \\ ٠ & \text{س} & ٠ & ٠ \\ \text{س} & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

وحيث أن المحدد الذي حصلنا عليه هو محدد سفلي علوي قيمته العددية تساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي، فإن قيمة المحدد الأصلي هي:

$$\Delta = \text{س}^{٣} (\text{ا} + \text{ب} + \text{جـ} + \text{ء} + \text{س})$$

ومما لا شك فيه أن الحل في هذه المرة أسهل بكثير من الحل الأول والذي تطلَّب عمليات جبرية كثيرة.

مثال (١٥):

أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٤ & ٢ & -١ & ٣ \\ ٥ & ١ & ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ & ٥ & -٢ \\ -٢ & -٣ & ١ & ١ \end{vmatrix}$

الحـل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ & -١ & ٣ \\ ٥ & ١ & ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ & ٥ & -٢ \\ -٢ & -٣ & ١ & ١ \end{vmatrix}$$

بإجراء العمليات التالية:

$٣\text{ع}_{٢} + \text{ع}_{١} \rightarrow \text{غ}_{١}$ ، $٢\text{ع}_{٢} + \text{ع}_{٣} \rightarrow \text{غ}_{٣}$ ، $٤\text{ع}_{٢} + \text{ع}_{٤} \rightarrow \text{غ}_{٤}$ نحصل على:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & -١ & ٠ \\ ١٣ & ٥ & ٢ & ١٠ \\ ٢١ & ١٣ & ٥ & ١٣ \\ ٢ & -١ & ١ & ٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١٣ & ٥ & ١٠ \\ ٢١ & ١٣ & ١٣ \\ ٢ & -١ & ٤ \end{vmatrix}$$

ثم بإجراء العمليات التالية:

$٤\text{ع}_{٢} + \text{ع}_{١} \rightarrow \text{غ}_{١}$ ، $٢\text{ع}_{٢} + \text{ع}_{٣} \rightarrow \text{غ}_{٣}$ نحصل على:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣٠ & ٥ & ٢٣ \\ ٦٥ & ١٣ & ٤٧ \\ ٠ & -١ & ٠ \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ٣٠ & ٢٣ \\ ٦٥ & ٤٧ \end{vmatrix}$$

$$= -(٣٠ \times ٤٧ - ٢٣ \times ٦٥) = -(-٨٥) = ٨٥$$

رابعاً: استخدام المحددات في حل المعادلات الخطية (قاعدة كرامر) Cramer's Rule

يمكن حل المعادلات باستخدام قاعدة كرامر على النحو التالي:

إذا كان لدينا المعادلات:

$$أ_١ س + ب_١ ص + جـ_١ ع = ك_١$$

$$أ_٢ س + ب_٢ ص + جـ_٢ ع = ك_٢$$

$$أ_٣ س + ب_٣ ص + جـ_٣ ع = ك_٣$$

فإنه يمكن إيجاد قيمة كل من س، ص، ع باتباع الخطوات التالية:

أ- نوجد محدد معاملات المتغيرات المجهولة (س، ص، ع)، ولنرمز له بالرمز Δ.

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ \end{vmatrix}$$

ب- نوجد المحدد $\Delta_{س}$، وهو المحدد الذي تحل فيه الحدود المطلقة ($ك_١$، $ك_٢$، $ك_٣$) محل معاملات س. أي أن:

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ك_١ & ب_١ & جـ_١ \\ ك_٢ & ب_٢ & جـ_٢ \\ ك_٣ & ب_٣ & جـ_٣ \end{vmatrix}$$

وبالمثل نوجد المحدد:

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} أ_١ & ك_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & ك_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & ك_٣ & جـ_٣ \end{vmatrix}$$

وهو المحدد الذي تحل فيه الحدود المطلقة محل معاملات ص. وكذلك المحدد:

$$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} أ_1 & ب_1 & ك_1 \\ أ_2 & ب_2 & ك_2 \\ أ_3 & ب_3 & ك_3 \end{vmatrix}$$

وهو المحدد الذي تحل فيه الحدود المطلقة محل معاملات ع.

ج- بعد إيجاد قيمة كل من المحددات السابقة، يمكن تحديد قيمة كل من س، ص، ع كما يلي:

$$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} \quad ، \quad ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} \quad ، \quad ع = \frac{\Delta_{ع}}{\Delta}$$

ويُلاحَظ أنه لاستخدام قاعدة كرامر في حل المعادلات الخطية يجب أن تختلف قيمة Δ عن الصفر. أي أن: $\Delta \neq$ صفر.

وفي هذا الشأن، تجدر الإشارة إلى ما يلي:

- إذا كانت $\Delta \neq$ صفر فإن هناك حلاً وحيداً للمعادلات.
- إذا كانت Δ = صفر، وكانت قيمة كل من $\Delta_{س}$، $\Delta_{ص}$، $\Delta_{ع}$ تختلف عن الصفر فإنه لا يوجد حل لتلك المعادلات.
- إذا كانت قيمة كل من Δ ، $\Delta_{س}$، $\Delta_{ص}$، $\Delta_{ع}$ تساوي الصفر، يكون هناك عدد لا نهائي من الحلول للمعادلات. وهذه الحالة تتمثل في وجود عدد من المعادلات المستقلة يقل عن عدد المجاهيل. ولعل المجموعة التالية من المعادلات تعبر عن هذه الحالة:

$$س - ٢ص + ع = ١$$
$$٣س - ص - ٢ع = ٨$$
$$٢س + ص - ٣ع = ٧$$

يمكن للقارئ التحقق من أن:

$$\Delta = \Delta_{س} = \Delta_{ص} = \Delta_{ع} = \text{صفر}$$

ويرجع ذلك إلى أن الصف الثاني في كل محدد من تلك المحددات ما هو إلا عبارة عن مجموع الصفيْن الأول والثالث. وهذا بدوره يعنى أن عدد المعادلات المستقلة هو ٢ فقط، في حين أن هناك ثلاثة مجاهيل.

مثال (١٦):

باستخدام قاعدة كرامر، حِل المعادلات الخطية التالية:

$$٢س - ص + ٢ع = ٦$$
$$س - ص + ٣ع = ٨$$
$$س + ص + ع = ٦$$

الحـل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١- & ٢ \\ ١ & ١- & ٣ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٣ \\ ٢ & ٠ & ٤ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{ص}_٣ + \text{ص}_١ \rightarrow \textbf{ص}_١ \\ \text{ص}_٣ + \text{ص}_٢ \rightarrow \textbf{ص}_٢ \end{array}$$

$$= - \begin{vmatrix} ٣ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = -(١٢ - ٦) = -٦$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٦ & ١- & ٢ \\ ٨ & ١- & ٣ \\ ٦ & ١ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١٢ & ٠ & ٣ \\ ١٤ & ٠ & ٤ \\ ٦ & ١ & ١ \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{ص}_٣ + \text{ص}_١ \rightarrow \textbf{ص}_١ \\ \text{ص}_٣ + \text{ص}_٢ \rightarrow \textbf{ص}_٢ \end{array}$$

$$= - \begin{vmatrix} ١٢ & ٣ \\ ١٤ & ٤ \end{vmatrix} = -(٤٨ - ٤٢) = -٦$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٢ & ٦ & ٢ \\ ١ & ٨ & ٣ \\ ١ & ٦ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٠ & ٦- & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٢ \\ ١ & ٦ & ١ \end{vmatrix} \begin{array}{l} -٢\text{ص}_٣ + \text{ص}_١ \rightarrow \textbf{ص}_١ \\ -\text{ص}_١ + \text{ص}_٢ \rightarrow \textbf{ص}_٢ \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} ٦- & ٠ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = -١٢$$

$$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} ٢ & ١- & ٦ \\ ١ & ١- & ٨ \\ ١ & ١ & ٦ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ١٢ \\ ٢ & ٠ & ١٤ \\ ١ & ١ & ٦ \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{ص}_٣ + \text{ص}_١ \rightarrow \textbf{ص}_١ \\ \text{ص}_٣ + \text{ص}_٢ \rightarrow \textbf{ص}_٢ \end{array}$$

$$= - \begin{vmatrix} ٣ & ١٢ \\ ٢ & ١٤ \end{vmatrix} = -(٤٢ - ٢٤) = -١٨$$

$$\therefore \ \text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-٦}{-٦} = ١ \ ، \ \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-١٢}{-٦} = ٢ \ ، \ \text{ع} = \frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta} = \frac{-١٨}{-٦} = ٣$$

ويمكن التحقق من هذه النتيجة بالتعويض عن قيم س، ص، ع في أية معادلة من المعادلات الثلاث (ولتكن المعادلة الثالثة) حيث نجد أن:

$$\text{س} + \text{ص} + \text{ع} = ١ + ٢ + ٣ = ٦$$

أي أن النتائج المتوصَّل إليها هي نتائج صحيحة.

مثال (١٧):

حِل المعادلات التالية باستخدام المحددات (قاعدة كرامر):

٢س + ٢ص − ع = ٢

س + ٣ع = ٧

س − ص + ٥ع = ١٠

الحـل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٢ & ١- \\ ١ & ٠ & ٣ \\ ١ & ١- & ٥ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٤ & ٠ & ٩ \\ ١ & ٠ & ٣ \\ ١ & ١- & ٥ \end{vmatrix} \quad ٢ص_{٣} + ص_{١} \leftarrow ص_{١}$$

$$= \begin{vmatrix} ٤ & ٩ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = ١٢ - ٩ = ٣$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٢ & ٢ & ١- \\ ٧ & ٠ & ٣ \\ ١٠ & ١- & ٥ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢٢ & ٠ & ٩ \\ ٧ & ٠ & ٣ \\ ١٠ & ١- & ٥ \end{vmatrix} \quad ٢ص_{٣} + ص_{١} \leftarrow ص_{١}$$

$$= \begin{vmatrix} ٢٢ & ٩ \\ ٧ & ٣ \end{vmatrix} = ٦٦ - ٦٣ = ٣$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ٢ & ١- \\ ١ & ٧ & ٣ \\ ١ & ١٠ & ٥ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١- \\ ٧ & ١٣ & ٣ \\ ١١ & ٢٠ & ٥ \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} ٢ع_{٣} + ع_{١} \leftarrow غ_{١} \\ ٢ع_{٣} + ع_{٢} \leftarrow غ_{٢} \end{matrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} ٧ & ١٣ \\ ١١ & ٢٠ \end{vmatrix} = -(١٤٠ - ١٤٣) = ٣$$

$$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ٢ & ٢ & ٢ \\ ١ & ٠ & ٧ \\ ١ & ١- & ١٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٤ & ٠ & ٢٢ \\ ١ & ٠ & ٧ \\ ١ & ١- & ١٠ \end{vmatrix} \quad ٢ص_{٣} + ص_{١} \leftarrow ص_{١}$$

$$= \begin{vmatrix} ٤ & ٢٢ \\ ١ & ٧ \end{vmatrix} = ٢٨ - ٢٢ = ٦$$

$$\therefore\ س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{٣}{٣} = ١ \text{ ، } ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{٣}{٣} = ١ \text{ ، } ع = \frac{\Delta_{ع}}{\Delta} = \frac{٦}{٣} = ٢$$

خامساً: تطبيقات اقتصادية

١- توازن السوق: Market Equilibrium

تناولنا موضوع توازن السوق عند دراستنا للدوال في الفصل الأول من هذا الكتاب. وفيما يلي نتعرض لدراسة جوانب أخرى من توازن السوق، مستخدمين في ذلك المحددات في تحديد نقطة التوازن.

مثال (١٨):

حدِّد سعر السلعة وكمية الطلب عليها والذي يتحقق عندهما توازن السوق وذلك إذا علمت أن دالتي الطلب والعرض هما:

دالة الطلب: ٣س + ٥ك = ٢٢ و **دالة العرض:** ٢س – ٣ك = ٢

حيث س هي سعر الوحدة الواحدة من السلعة،

ك كمية الطلب على السلعة أو كمية المعروض منها بالوحدات.

الحـل:

سعر توازن السوق هو السعر الذي يتساوى عنده كمية الطلب على السلعة مع كمية المعروض منها، والذي يمكن الحصول عليه بإيجاد قيمـة كلٍّ من س و ك اللتان تحققان معادلتي الطلب والعرض. ويتأتى ذلك بحل معادلتي الطلب والعرض إما باستخدام المحددات وهو ما سنراه هنا، أو باستخدام المصفوفات وهو ما سوف نتناوله في موضع لاحق في هذا الكتاب، أو بأية طريقة أخرى (الحذف والتعويض مثلاً).

والآن نوضح كيفية حل معادلتي الطلب والعرض باستخدام طريقة المحددات على النحو الموضح فيما يلي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{vmatrix} = -٩ - ١٠ = -١٩$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٢٢ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{vmatrix} = -٦٦ - ١٠ = -٧٦$$

$$\Delta_{ك} = \begin{vmatrix} ٣ & ٢٢ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٦ - ٤٤ = -٣٨$$

أي أن: $س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{-٧٦}{-١٩} = ٤$ ، $ك = \frac{\Delta_{ك}}{\Delta} = \frac{-٣٨}{-١٩} = ٢$

وهذا يعنى أن توازن السوق يتحقق عندما يصل سعر السلعة إلى ٤ للوحدة الواحدة. وعند هذا السعر تصل كمية الطلب على هذه السلعة وكذلك كمية المعروض منها إلى وحدتيْن فقط.

مثال (١٩):

أوجد سعر وكمية التوازن لدالتي الطلب والعرض التاليتين:

دالة الطلب: س – ك = ٥

دالة العرض: ٣س + ٤ك = ١٢

حيث: س سعر الوحدة الواحدة من السلعة، ك كمية الطلب أو كمية العرض للسلعة بالوحدات. ثم فسر ما تحصل عليه منه نتائج.

الحـل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١- \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = ٤ + ٣ = ٧$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٥ & ١- \\ ١٢ & ٤ \end{vmatrix} = ٢٠ + ١٢ = ٣٢ \text{ ، } \Delta_{ك} = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ١٢ \end{vmatrix} = ١٢ - ١٥ = -٣$$

$$\therefore س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{٣٢}{٧} = ٤,٦ \text{ ، } ك = \frac{\Delta_{ك}}{\Delta} = \frac{-٣}{٧}$$

وحيث أن قيمة ك لا يجب أن تكون سالبة، فإن توازن السوق يحدث عند ك = صفر. وهذا يعنى أنه ليس هناك كمية منتَجة أساساً لكي تباع وذلك لعدم كفاية الطلب على المنتَج بالشكل الذي يحث على بدء عملية الإنتاج. ويُطلق على مثل هذه الحالة Insufficient Demand.

٢- الضرائب الإضافية والدعم الحكومي وتوازن السوق:

Additive Tax & Subsidy and Market Equilibrium

في بعض الأحيان تتدخل الدولة إما لفرض ضرائب على سلعـة معينة، أو منح دعم حكومي لبعض السلع بهدف توفيرها للمواطنين بسعر ملائم. والمثال التالي هو مثال شامل يغطى كافة جوانب هذا الأمر.

مثال (٢٠):

إذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة تأخذ الشكل:

$$٥س + ٢ك = ٢٠٠$$

بينما تأخذ دالة العرض لهذه السلعة الصورة:

$$س - \frac{٤}{٥}ك = ١٠$$

حيث: $س$ سعر الوحدة الواحدة من السلعة،

$ك$ كمية الطلب على السلعة أو كمية المعروض منها.

المطلوب:

أولاً: إيجاد السعر والكمية عند توازن السوق.

ثانياً: تحديد سعر وكمية التوازن بعد فرض ضريبة مقدارها ٦ على كل وحدة من السلعة. ثم احسب عندئذ مقدار الزيادة في السعر والنقصان في الكمية المطلوبة من السلعة.

ثالثاً: ما هو مقدار الدعم الحكومي الذي يسبب زيادة مقدارها وحدتان في الكمية المطلوبة؟

رابعاً: ما هي قيمة الضريبة الإضافية لكل وحدة والتي يجب أن تُفرض على هذه السلعة وذلك حتى يرتفع سعر الوحدة بمقدار ٤؟

خامساً: قارن بين نتائجك في (أولاً) و (ثانياً) و (رابعاً) مُبدياً ما تراه مناسباً من تعليق.

سادساً: ما هو مقدار الزيادة في الكمية المطلوبة إذا تم منح دعم حكومي مقداره ٣ لكل وحدة؟

سابعاً: قارن بين نتائجك في (أولاً) و (ثالثاً) و (سابعاً)، مع إبداء التعليق الملائم.

ثامناً: أثبت – جبرياً – أن الضريبة الإضافية والدعم الحكومي، بافتراض تساويهما، لهما نفس التأثير وفي اتجاهين متضاديْن على كل من:

- سعر التوازن
- كمية التوازن

تاسعاً: هل تتفق نتائجك في (ثامناً) مع ما توصلت إليه من نتائج في (خامساً) و (سابعاً)؟ وضِّح.

الحـل:

أولاً: حيث أن:

$$٥س + ٢ك = ٢٠٠ \quad \Leftarrow \quad (١)$$

$$س - \frac{٤}{٥}ك = ١٠ \quad \Leftarrow \quad (٢)$$

وبهدف التبسيط، بضرب طرفي المعادلة (٢) في ٥ نحصل على:

$$٥س - ٤ك = ٥٠ \quad \Leftarrow \quad (٣)$$

وباستخدام المحددات في حل المعادلتيْن (١)، (٣) نحصل على:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٥ & ٤- \end{vmatrix} = ٢٠- - ١٠ = ٣٠-$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٢٠٠ & ٢ \\ ٥٠ & -٤ \end{vmatrix} = -٨٠٠ - ١٠٠ = -٩٠٠$$

$$\Delta_{ك} = \begin{vmatrix} ٥ & ٢٠٠ \\ ٥ & ٥٠ \end{vmatrix} = ٢٥٠ - ١٠٠٠ = -٧٥٠$$

$$\therefore س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{-٩٠٠}{-٣٠} = ٣٠ \text{ ،}$$

$$ك = \frac{\Delta_{ك}}{\Delta} = \frac{-٧٥٠}{-٣٠} = ٢٥$$

أي يتحقق توازن السوق عندما يكون سعر السلعة ٣٠ للوحدة الواحدة وعنده تبلغ كمية الطلب وكذلك كمية العرض ٢٥ وحدة.

ثانياً: عند فرض ضريبة مقدارها ٦ لكل وحدة، فإن سعر السوق سوف يتغير ليصبح $س_١$ مثلاً. وهنا سوف يدفع المستهلك $س_١$ في الوحدة الواحدة من السلعة يذهب منها ٦ إلى الحكومة، بينما يحصل المنتِج (البائع) على $س_١ - ٦$. هذا ولا يزال السعر الذي يحصل عليه المنتِج (البائع) يتم تحديده وفقا لدالة العرض (المعادلة رقم ٢). لذلك نجد أن دالة العرض تتغير لتصبح:

$$س_١ - ٦ - \frac{٤}{٥} ك = ١٠$$

أي أن: $س_١ - \frac{٤}{٥} ك_١ = ١٦$ ⇦ (٤)

حيث $ك_١$ تمثل الكمية المعروضة من السلعة عند التوازن الجديد للسوق. وحيث أن دالة الطلب لا تزال كما هي بدون تغيير فإننا نعيد صياغتها على الصورة:

$٥س_١ + ٢ك_١ = ٢٠٠$ ⇦ (٥)

ملحوظة:

بعد فرض ضريبة تبقى دالة الطلب كما هي، أما دالة العرض فيتغير فيها السعر وذلك لأن البائع هو الذي يدفع الضريبة، ولا يعنى ذلك انه يتحملها.

هذا وحل المعادلتيْن (٤)، (٥) يعطى سعر وكمية التوازن بعد فرض الضريبة.
وبهدف التبسيط أيضاً دعنا نضرب طرفي المعادلة (٤) في ٥ حيث نحصل على:

$٥س_١ - ٤ك_١ = ٨٠$ ⇦ (٦)

وبحل المعادلتيْن (٥)، (٦) باستخدام المحددات نجد أن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{vmatrix} = -٢٠ - ١٠ = -٣٠$$

$$\Delta_{\text{س}_١} = \begin{vmatrix} ٢٠٠ & ٢ \\ ٨٠ & -٤ \end{vmatrix} = -٨٠٠ - ١٦٠ = -٩٦٠$$

$$\Delta_{\text{ك}_١} = \begin{vmatrix} ٥ & ٢٠٠ \\ ٥ & ٨٠ \end{vmatrix} = ٤٠٠ - ١٠٠٠ = -٦٠٠$$

$$\therefore \text{س}_١ = \frac{\Delta_{\text{س}_١}}{\Delta} = \frac{-٩٦٠}{-٣٠} = ٣٢ \quad ، \quad \text{ك}_١ = \frac{\Delta_{\text{ك}_١}}{\Delta} = \frac{-٦٠٠}{-٣٠} = ٢٠$$

أي أنه بعد فرض ضريبة مقدارها ٦ على كل وحدة من السلعة سوف يصبح سعر التوازن ٣٢، وعند هذا السعر سوف تكون الكمية المطلوبة = الكمية المعروضة = ٢٠ وحدة.

∴ مقدار الزيادة في السعر $= \text{س}_١ - \text{س}$،

$= ٣٢ - ٣٠ = ٢$ ،

مقدار النقصان في الكمية $= \text{ك}_١ - \text{ك}$

$= ٢٥ - ٢٠ = ٥$

ويلاحَظ هنا أن فرض ضريبة على السلعة أدى إلى زيادة سعر التوازن ونقص الكمية المعروضة والمطلوبة. وهذا امر منطقي من وجهة النظر الاقتصادية.

ثالثاً: دعنا نفترض بأن مقدار الإعانة المالية اللازم لزيادة الكمية المطلوبة بمقدار وحدتيْن هو م لكل وحدة. وهنا سوف تصبح كمية الطلب $\text{ك}_٢$ مثلاً حيث: $\text{ك}_٢ = ٢٥ + ٢ = ٢٧$.

وهكذا فإن دالة العرض بعد منح إعانة مالية قدرها م لكل وحدة سوف تأخذ الصورة:

$$\text{س}_٢ + \text{م} - \frac{٤}{٥}\text{ك}_٢ = ١٠ \qquad \Leftarrow \qquad (٧)$$

وذلك لأن $\text{س} = \text{س}_٢ + \text{م}$ حيث $\text{س}_٢$ سعر لسوق، س السعر الذي يحصل عليه المُنتِج.

ملحوظة:

في حالة منح دعم حكومي نجد أن السعر الذي يحصل عليه المنتِج (البائع) يزيد عن سعر السوق بمقدار هذا الدعم الحكومي. في حين أنه في حالة فرض ضرائب فإن السعر الذي يحصل عليه المنتِج (البائع) يقل عن سعر السوق بمقدار الضريبة المفروض على الوحدة.

هذا وسوف تظل دالة الطلب كما هي بدون تغيير. ومن الملائم أن نعيد صياغتها على النحو التالي:

$$٥س_٢ + ٢ك_٢ = ٢٠٠ \qquad \Leftarrow \qquad (٨)$$

ولتحديد سعر وكمية التوازن بعد منح دعم حكومي فإنه يلزم حل المعادلتيْن (٧)، (٨). ولأغراض التبسيط في الحسابات سوف نضرب طرفي المعادلة (٧) في ٥ لتصبح على الصورة:

$$٥س_٢ + ٥م - ٤ك_٢ = ٥٠ \qquad \Leftarrow \qquad (٩)$$

ويصبح المطلوب الآن هو حل المعادلتيْن (٨)، (٩) وذلك على النحو التالي:
حيث أن: $ك_٢$ = ٢٧ (سبق إيضاح ذلك)، فإنـه بالتعويض عن $ك_٢$ في المعادلة (٨) نحصل على:

$$٥س_٢ + ٢ \times ٢٧ = ٢٠٠$$

أي أن: $٥س_٢ = ٢٠٠ - ٥٤ = ١٤٦ \qquad \therefore \; س_٢ = \frac{١٤٦}{٥} = ٢٩,٢$

وبالتعويض عن $س_٢$، $ك_٢$ في المعادلة (٩) نحصل على:

$$٥ \times ٢٩,٢ + ٥م - ٤ \times ٢٧ = ٥٠$$

أي أن: $٥م = ٥٠ - ١٤٦ + ١٠٨ = ١٢$

$$\therefore \; م = \frac{١٢}{٥} = ٢,٤$$

لذلك فإن منح دعم حكومي مقدارها ٢,٤ لكل وحدة سوف يؤدى إلى زيادة الكمية المطلوبة من السلعة بمقدار ٢ وذلك عند سعر توازن ٢٩,٢ للوحدة، وهو ما يبدو منطقيا من وجهة النظر الاقتصادية.
وهنا لا تنسى أن فرض ضريبة على السلعة قد أدى إلى زيادة السعر ونقص الكمية المطلوبة (راجع: ثانياً في هذا المثال) وهو عكس ما يكون عليه الحال في حالة منح دعم حكومي.

رابعاً: حيث أن:
دالة الطلب: $٥س + ٢ك = ٢٠٠$،

دالة العرض: $س - \frac{٤}{٥}ك = ١٠$

وإذا افترضنا أن مقدار الضريبة المفروضة على الوحدة الواحدة من السلعة هي ض والتي تحقق زيادة في سعر التوازن مقداره ٤. فإن دالة العرض سوف تأخذ حينئذ الصورة التالية:

$$س - ص - \frac{٤}{٥} ك = ١٠$$

وحيث أن سعر التوازن الجديد $س_{١}$ = ٣٠ + ٤ = ٣٤.

فإنه يمكن إعادة صياغة دالة العرض كما يلي:

$$س_{١} - ص - \frac{٤}{٥} ك_{١} = ١٠ \quad \text{حيث } س_{١} = ٣٤$$

أي أن: $$٣٤ - ص - \frac{٤}{٥} ك_{١} = ١٠$$

$$\therefore \; ص + \frac{٤}{٥} ك_{١} = ٢٤ \qquad \Leftarrow \qquad (١٠)$$

وحيث أن دالة الطلب لم تتغير فإنه يمكن إعادة صياغتها على النحو التالي:

$$٥س_{١} + ٢ك_{١} = ٢٠٠ \qquad \Leftarrow \qquad (١١)$$

وبالتعويض عن $س_{١}$ في المعادلة (١١) نحصل على:

$$٥ \times ٣٤ + ٢ك_{١} = ٢٠٠$$

$$٢ك_{١} = ٣٠ \;،\; ك_{١} = ١٥$$

وبالتعويض عن $ك_{١}$ في المعادلة (١٠) نجد أن:

$$ص + \frac{٤}{٥} \times ١٥ = ٢٤ \quad \therefore ص = ٢٤ - ١٢ = ١٢$$

وهذا يعنى أنه لكي يزيد سعر التوازن بمقدار ٤، يجب أن تُفرض ضريبة مقدارها ١٢ على كل وحدة من هذه السلعة. وحينئذ سوف تكون كمية التوازن ١٥ وحدة.

خامساً: للمقارنـة بين النتائج التي حصلنا عليها في (أولاً) و (ثانياً) و (رابعاً) دعنا نلخص أولاً تلك النتائج كما يلي:

بيــان	مقدار الضريبة المفروضة على الوحدة (ص)	سعر التوازن (س)	كمية التوازن (ك)
أولاً	صفر	٣٠	٢٥
ثانيــاً	٦	٣٢	٢٠
رابعاً	١٢	٣٤	١٥

وبمقارنة تلك النتائج، يمكننا القول بأنه كلما زادت الضريبة المفروضة على السلعة كلما أدى ذلك إلى زيادة في سعر التوازن وانخفاض في كمية التوازن.

سادساً: في حالة منح دعم حكومي مقداره ٣ لكل وحدة تأخذ دالة العرض الصورة التالية:

$$س_١ + ٣ - \frac{٤}{٥} ك_١ = ١٠$$

أي أن: $س_١ - \frac{٤}{٥} ك_١ = ٧$

وبضرب طرفي المعادلة في ٥ نجد أن:

$$٥س_١ - ٤ك_١ = ٣٥ \quad \Leftarrow \quad (١٢)$$

وأما دالة الطلب فتظل كما هي حيث تأخذ الصورة:

$$٥س_١ + ٢ك_١ = ٢٠٠ \quad \Leftarrow \quad (١٣)$$

وبحل المعادلة (١٢)، (١٣) باستخدام المحددات نحصل على:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & -٤ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = ١٠ + ٢٠ = ٣٠ \text{ ،}$$

$$\Delta_{س_١} = \begin{vmatrix} ٣٥ & -٤ \\ ٢٠٠ & ٢ \end{vmatrix} = ٧٠ + ٨٠٠ = ٨٧٠ \text{،}$$

$$\Delta_{ك_١} = \begin{vmatrix} ٥ & ٣٥ \\ ٥ & ٢٠٠ \end{vmatrix} = ١٠٠٠ - ١٧٨ = ٨٢٥$$

$$\therefore س_١ = \frac{\Delta_{س_١}}{\Delta} = \frac{٨٧٠}{٣٠} = ٢٩ \text{ ، } ك_١ = \frac{\Delta_{ك_١}}{\Delta} = \frac{٨٢٥}{٣٠} = ٢٧,٥$$

أي أن منح دعم حكومي مقداره ٣ لكل وحدة سوف يؤدى إلى انخفاض سعر التوازن بمقدار (٣٠ ــ ٢٩ = ١)، كما يؤدي إلى زيادة كمية التوازن بمقدار (٣٠ ــ ٢٧,٥ = ٢,٥).

سابعاً: بعرض النتائج التي حصلنا عليها في (أولاً) و (ثالثاً) و (سادساً) نجد أن:

بيــان	مقدار الدعم الحكومي للوحدة (م)	سعر التوازن (س)	كمية التوازن (ك)
أولاً	صفر	٣٠	٢٥
ثالثــاً	٢,٤	٢٩,٢	٢٧
سادساً	٣,٠	٢٩,٠	٢٧,٥

ويتضح من تلك النتائج أنه كلما زاد مقدار الدعم الحكومي للسلعة كلما أدى ذلك إلى انخفاض سعر التوازن وبالتالي حدوث زيادة في كمية التوازن.

ثامناً: حيث أن دالة الطلب تأخذ الصورة:

$$٥س + ٢ك = ٢٠٠ \qquad \Leftarrow \qquad (١٤)$$

وهي دالة لا تتغير في حالة تقديم دعم حكومي أو فرض ضرائب على السلعة
وأما دالة العرض فتأخذ الصورة:

$$س - \frac{٤}{٥}ك = ١٠$$

وهي دالة تتغير صورتها عند تقديم دعم حكومي أو فرض ضرائب على السلعة. ففي حالة فرض ضريبة إضافية مقدارها ض على الوحدة الواحدة فإن دالة العرض تأخذ الشكل:

$$س - ض - \frac{٤}{٥}ك = ١٠ \qquad \Leftarrow \qquad (١٥)$$

وأما في حالة تقديم دعم حكومي مقداره م للوحدة الواحدة فإن دالة العرض تتغير لتأخذ الصورة:

$$س + م - \frac{٤}{٥}ك = ١٠ \qquad \Leftarrow \qquad (١٦)$$

وسوف نترك للقارئ مهمة استخدام المعادلات (١٤)، (١٥)، (١٦) في اشتقاق المعادلات التالية والتي توضح العلاقة ما بين الضريبة المفروضة وكل من سعر وكمية التوازن، وكذلك العلاقة ما بين الدعم الحكومي وكل من سعر وكمية التوازن. وسوف نجد أن هذه المعادلات تأخذ الصورة التالية:

سعر التوازن والضريبة: $٣س - ض = ٩٠$
كمية التوازن والضريبة: $١,٢ك + ض = ٣٠$
سعر التوازن والدعـم: $٣س + م = ٩٠$
كمية التوازن والدعـم: $١,٢ك - م = ٣٠$

وبإيجاد الميل Slope لكل من هذه المعادلات سوف نجد أن:

سعر التوازن والضريبة: الميل = $\frac{١}{٣}$

وهذا يعنى أنه كلما **زادت** الضريبة المفروضة بمقدار وحدة واحدة فـإن سعر التوازن **يزيد** بمقدار $\frac{١}{٣}$ وحدة (في المتوسط).

كمية التوازن والضريبة: الميل = $-\frac{٥}{٦}$

مما يدل على أنه كلما **زادت** الضريبة المفروضة بمقدار وحدة واحدة فإن كمية التوازن **تقل** بمقدار $\frac{٥}{٦}$ وحدة (في المتوسط).

سعر التوازن والدعم: الميل = $-\frac{١}{٣}$

وهذا مؤداه أنه كلما **زاد** الدعم بمقدار وحدة واحدة فإن سعر التوازن **يقل** بمقدار $\frac{١}{٣}$ وحدة (في المتوسط).

كمية التوازن والدعم: الميل = $\frac{٥}{٦}$

أي أنه كلما **زاد** الدعم بمقدار وحدة واحدة فإن كمية التوازن **تزيد** بمقدار $\frac{٥}{٦}$ وحدة (في المتوسط).

ويمكننا أن نخرج من هذا بنتيجة مؤداها أن الضريبة المفروضة والدعم الحكومي (بافتراض تساويهما) لهما نفس التأثير وفي اتجاهيْن متضاديْن على سعر التوازن (يلاحَظ أن الميل هو: $\frac{١}{٣}$ و $-\frac{١}{٣}$). ونفس النتيجة يمكن الوصول إليها في حالة كمية التوازن (الميل هو: $-\frac{٥}{٦}$ و $\frac{٥}{٦}$).

ولو أردنا أن نضيف إلى ذلك بيان طبيعة ومقدار تأثير سعر التوازن على كمية التوازن. فإنه بالأخذ في الاعتبار دالة الطلب (١٣) – والتي لا تتأثر بفرض ضرائب أو تقديم دعم حكومي – يمكننا أن نستنتج أن الميل يساوي - ٢,٥. وهذا يعنى أنه كلما زاد سعر التوازن بمقدار وحدة واحدة كلما انخفضت كمية التوازن بمقدار وحدتيْن ونصف الوحدة (في المتوسط).

تاسعاً: النتائج التي توصلنا إليها في (خامساً) و (سابعاً) تتفق تماماً مع النتائج في (ثامناً). وعلى سبيل التوضيح، دعنا نبحث تأثير التغير في مقدار الضريبة المفروضة على كمية التوازن مستخدمين في ذلك النتائج المعروضة في خامساً (العمودان الأول والثالث في الجدول). وهنا سوف نجد أن زيادة الضريبة من صفر إلى ٦ أدى إلى نقصان كمية التوازن من ٢٥ إلى ٢٠. ومرة أخرى، أدت الزيادة في الضريبة من ٦ إلى ١٢ إلى نقصان كمية التوازن من ٢٠ إلى ١٥. وفي الحالتيْن نجد أن ذلك يعني أنه مقابل كل وحدة زيادة في مقدار الضريبة هناك نقصان بمقدار ٦/٥ وحدة (في المتوسط) في كمية التوازن. وهذه النتيجة تتفق تماماً مع ما توصلنا إليه في (ثامناً) في هذا الشأن (يلاحَظ أن الميل يساوي -٦/٥).

٣- الإنتاج المختلط: Production Mix

في كثير من الحالات يكون المنتِج في حاجة إلى تحديد كميات الإنتاج للمُنتَجات المختلفة، وذلك في ظل الإمكانات والطاقة الإنتاجية المتاحة لديه والتي لا يجب عليه تجاوزها.

والمثال التالي يوضح كيفية تحديد كميات الإنتاج لثلاثة مُنتَجات مع استغلال الإمكانات المتاحة استغلالاً كاملاً.

مثال (٢١):

تنتج شركة ثلاثة مُنتَجات أ، ب، جـ والتي تُعالَج أثناء صنعها في ثلاثة أقسام. والجدول التالي يوضح عدد الساعات المطلوبة لإنتاج وحدة واحدة من كل منتَج في كل قسم، وكذلك الطاقة الأسبوعية القصوى للإنتاج في كل قسم مُعبَّراً عنها بعدد ساعات العمل المتاحة.

القسم	المنتَج			عدد ساعات العمل الأسبوعية المتاحة
	أ	ب	جـ	
الأول	٢	١	٣	١٣٠٠
الثاني	٤	٣	٢	١٩٠٠
الثالث	١	٤	٢	١١٠٠

المطلوب:

أولاً: صياغة المشكلة في شكل معادلات.

ثانياً: باستخدام المحددات، حدد مستويات الإنتاج من كل منتَج من المُنتَجات الثلاثة والتي ينبغي على المصنع إنتاجها حتى يستغل الطاقة الإنتاجية بالكامل.

الحـل:

أولاً: لنفترض أن $س_١$، $س_٢$، $س_٣$ هي عدد الوحدات التي يجب إنتاجها أسبوعياً من المُنتَجات أ، ب، جـ على الترتيب. حينئذ يمكن صياغة الأمر في شكل معادلات على النحو الموضَّح فيما يلي:

$$٢س_١ + س_٢ + ٣س_٣ = ١٣٠٠$$ القسم الأول

$$٤س_١ + ٣س_٢ + ٢س_٣ = ١٩٠٠$$ القسم الثاني

$$س_١ + ٤س_٢ + ٢س_٣ = ١١٠٠$$ القسم الثالث

ثانياً: يمكن تحديد مستويات الإنتاج $س_١$، $س_٢$، $س_٣$ باستخدام المحددات في حل المعادلات الثلاث التي تم تكوينها في أولا وذلك كما يلي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ٤ & ٣ & ٢ \\ ١ & ٤ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ -٢ & ٣ & -٧ \\ -٧ & ٤ & -١٠ \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} -٢ع_٢ + ع_١ \rightarrow غ_١ \\ -٣ع_٢ + ع_٣ \rightarrow غ_٣ \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -٢ & -٧ \\ -٧ & -١٠ \end{vmatrix} = -(٢٠ - ٤٩) = ٢٩$$

$$\Delta_١ = \begin{vmatrix} ١٣٠٠ & ١ & ٣ \\ ١٩٠٠ & ٣ & ٢ \\ ١١٠٠ & ٤ & ٢ \end{vmatrix} = ١٠٠ \begin{vmatrix} ١٣ & ١ & ٣ \\ ١٩ & ٣ & ٢ \\ ١١ & ٤ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= ١٠٠ \begin{vmatrix} ١٣ & ١ & ٣ \\ -٢٠ & ٠ & -٧ \\ -٤١ & ٠ & -١٠ \end{vmatrix} \begin{matrix} -٣ص_١ + ص_٢ \to \mathbf{ص_٢} \\ -٤ص_١ + ص_٣ \to \mathbf{ص_٣} \end{matrix}$$

$$= ١٠٠ \begin{vmatrix} -٢٠ & -٧ \\ -٤١ & -١٠ \end{vmatrix} = -١٠٠(٢٠٠ - ٢٨٧) = ٨٧٠٠$$

$$\Delta_٢ = \begin{vmatrix} ٢ & ١٣٠٠ & ٣ \\ ٤ & ١٩٠٠ & ٢ \\ ١ & ١١٠٠ & ٢ \end{vmatrix} = ١٠٠ \begin{vmatrix} ٢ & ١٣ & ٣ \\ ٤ & ١٩ & ٢ \\ ١ & ١١ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= ١٠٠ \begin{vmatrix} ٠ & -٩ & -١ \\ ٠ & -٢٥ & -٦ \\ ١ & ١١ & ٢ \end{vmatrix} \begin{matrix} -٢ص_٣ + ص_١ \to \mathbf{ص_١} \\ -٤ص_٣ + ص_٢ \to \mathbf{ص_٢} \end{matrix}$$

$$= ١٠٠ \begin{vmatrix} -٩ & -١ \\ -٢٥ & -٦ \end{vmatrix} = ١٠٠(٥٤ - ٢٥) = ٢٩٠٠$$

$$\Delta_٣ = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١٣٠٠ \\ ٤ & ٣ & ١٩٠٠ \\ ١ & ٤ & ١١٠٠ \end{vmatrix} = ١٠٠ \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١٣ \\ ٤ & ٣ & ١٩ \\ ١ & ٤ & ١١ \end{vmatrix}$$

$$= ١٠٠ \begin{vmatrix} ٠ & -٧ & -٩ \\ ٠ & -١٣ & -٢٥ \\ ١ & ٤ & ١١ \end{vmatrix} \begin{matrix} -٢ص_٣ + ص_١ \to \mathbf{ص_١} \\ -٤ص_٣ + ص_٢ \to \mathbf{ص_٢} \end{matrix}$$

$$= ١٠٠ \begin{vmatrix} -٧ & -٩ \\ -١٣ & -٢٥ \end{vmatrix} = ١٠٠(١٧٥ - ١١٧) = ٥٨٠٠$$

$$\therefore \text{س}_{١} = \frac{\Delta_{١}}{\Delta} = \frac{٨٧٠٠}{٢٩} = ٣٠٠،$$

$$\text{س}_{٢} = \frac{\Delta_{٢}}{\Delta} = \frac{٢٩٠٠}{٢٩} = ١٠٠،$$

$$\text{س}_{٣} = \frac{\Delta_{٣}}{\Delta} = \frac{٥٨٠٠}{٢٩} = ٢٠٠$$

أي أنه يمكن للشركة أن تستغل كامل طاقتها الإنتاجية بإنتاج الكميات ٣٠٠ ، ١٠٠ ، ٢٠٠ وحدة من المُنتَجات أ ، ب ، **جـ** على الترتيب.

ملحوظة:

نجد أحياناً عند حل المعادلات أن بعض قيم **س** تساوي قيمة سالبة. وحيث أنه ليست هناك قيم سالبة للإنتاج، فإن ذلك يعنى عدم إمكانية وجود توليفة معينة من مستويات الإنتاج تمكِّن الشركة من استغلال طاقتها الإنتاجية بالكامل.

تمارين

الفصل الرابع

١- أوجد قيم المحددات التالية:

أ- $\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \\ ٦ & ٢ & -١ \end{vmatrix}$

ب- $\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٤ \\ ٢ & ٤ & ٥ \\ ١ & ٠ & ٣ \end{vmatrix}$

٢- باستخدام خواص المحددات، أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\begin{vmatrix} -١ & ٤ & ٥ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ٦ & ٣ \\ ٠ & ٣ & ١ & -١ \\ -٤ & ١ & ٣ & ٤ \end{vmatrix}$$

٣- بدون فك المحددات، احسب قيمة كل من المحددين التاليين:

أ- $\begin{vmatrix} ٩ & -١ & ٣ \\ ٦ & ٢ & ٤ \\ ٣ & ٣ & ٦ \end{vmatrix}$

ب- $\begin{vmatrix} ١ & ٤ & -٢ \\ -٢ & ١ & ٠ \\ ٤ & ٣ & ٥ \end{vmatrix}$

٤- بدون الحصول على قيمة كل من المحددين، أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} ٧ & ٤ & ٣ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٧ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٦ & ٢ & ٤ \\ ٤ & ٣ & ٩ \end{vmatrix}$$

٥- بدون إيجاد قيم المحددات، أثبت أن قيم كل من المحددين التاليين تساوي الصفر:

أ- $\begin{vmatrix} ٣ & ٤ & ٢ \\ ١ & ٣ & -١ \\ -٢ & -٩ & ٥ \end{vmatrix}$

ب- $\begin{vmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ ٥ & -١ & ١ \\ ٤ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$

٦- أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & \text{ب + جـ} \\ \text{أ + جـ} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{أ + ب} & \text{جـ} \end{vmatrix} = \text{٤ أبجـ}$$

٧- أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{أ} & \text{بجـ} \\ \text{١} & \text{ب} & \text{جـأ} \\ \text{١} & \text{جـ} & \text{أب} \end{vmatrix} = \left(\text{أ} - \text{ب}\right)\left(\text{ب} - \text{جـ}\right)\left(\text{جـ} - \text{أ}\right)$$

٨- أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٢} & \text{أب} & \text{أجـ} \\ \text{أب} & \text{جـ}^{٢} + \text{أ}^{٢} & \text{بجـ} \\ \text{جـأ} & \text{جـب} & \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} \end{vmatrix} = \text{٤ أ}^{٢}\text{ب}^{٢}\text{جـ}^{٢}$$

٩- أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{س + أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أ} & \text{س + ب} & \text{جـ} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{س + جـ} \end{vmatrix} = \text{س}^{٢}\left(\text{س + أ + ب + جـ}\right)$$

١٠- أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{١ + س} & \text{٢} & \text{٣} & \text{٤} \\ \text{١} & \text{٢ + س} & \text{٣} & \text{٤} \\ \text{١} & \text{٢} & \text{٣ + س} & \text{٤} \\ \text{١} & \text{٢} & \text{٣} & \text{٤ + س} \end{vmatrix} = \text{س}^{٣}\left(\text{س + ١٠}\right)$$

١١- أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{أ} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{أ} & \text{س} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{أ} & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix} = \left(\text{س + ٣أ}\right)\left(\text{س} - \text{أ}\right)^{٣}$$

١٢- أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{ب} + \text{جـ} & \text{جـ} + \text{أ} & \text{أ} + \text{ب} \\ \text{ل} + \text{م} & \text{م} + \text{ن} & \text{ن} + \text{ل} \\ \text{ص} + \text{س} & \text{س} + \text{ع} & \text{ع} + \text{ص} \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ن} & \text{ل} & \text{م} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{ل} \end{vmatrix}$$

١٣- أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{أ} & \text{س} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{أ} & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix} = \text{أ}(\text{س} - \text{أ})^{٣}$$

١٤- حِل المعادلات التالية باستخدام المحددات:

(أ) س + ص + ٢ع = ٦
٢س − ٣ص + ع = ١
٤س + ٢ص = ٦

(ب) ٢س − ص + ٤ع = ٥
س + ص + ع = ٣
٣س − ٢ص + ٥ع = ٦

(ج) ٣س − ص − ع = ٥
٤س + ٢ص + ٣ع = ١١
س − ص + ع = ٣

١٥- احسب قيمة ك التي تجعل المجموعة التالية من المعادلات لها حل:

س + ص + ع = ١
س + ٢ص + ٤ع = ك
س + ٤ص + ١٠ع = $\text{ك}^{٢}$

١٦- احسب قيمة ك التي تجعل للمعادلات:

س + ص + ٤ع = ٦
كس + ص + ع = ٦
س + ٢ص − ٢ع = ٦

أ- حل وحيد **ب-** ليس لها حل

١٧- حدِّد قيمة ك التي تجعل للمعادلات:

س + ص + ع = ٦

س + ٢ص + كع = ١٠

س + ٢ص + ٣ع = ١٠

أ- حل وحيد **ب-** عدد لا نهائي من الحلول

١٨- حدِّد سعر وكمية التوازن لدوال الطلب والعرض التالية:

أ- دالة الطلب: ٣س + ٥ك = ٢٠٠

دالة العرض: ٧س – ٣ك = ٥٦

ب- دالة الطلب: ٥س + ٨ك = ٨٠

دالة العرض: ٣س – ٢ك = -١

ج- دالة الطلب: ٤س + ك = ٥٠

دالة العرض: ٦س – ٥ك = ١٠

حيث س سعر الوحدة من السلعة ، ك كمية الطلب أو العرض.

١٩- فيما يلي دالة الطلب ودالة العرض لإحدى السلع:

دالة العرض: ٢س – ٣ك = ٨

دالة الطلب: ٣س + ٦ك = ٩

حِل المعادلتيْن، مفسِّراً ما تحصل عليه من نتائج.

٢٠- يستطيع تاجر أن يبيع ٢٠٠ وحدة في اليوم من سلعة معينة بسعر ٣٠ جنيه للوحدة الواحدة، وأن يبيع ٢٥٠ وحدة يومياً بسعر ٢٧ جنيه للوحدة الواحدة. فإذا كانت دالة العرض لنفس السلعة هي:

٦س = ك + ٤٨

حيث: س سعر الوحدة ، ك كمية العرض.

المطلوب:

أولاً: إيجاد دالة الطلب لهذه السلعة بافتراض أنها دالة خطية.

ثانيـاً: حدد سعر وكمية التوازن.

ثالثـاً: إيجاد سعر وكمية التوازن إذا ما فُرضت ضريبة مقدارها ٣,٤ جنيه على الوحدة الواحدة. ثم احسب مقدار الزيادة في سعر التوازن والنقصان في كمية التوازن بعد فرض هذه الضريبة.

رابعاً: ما هو مقدار الدعم الحكومي للوحدة الواحدة والذي يؤدى إلى زيادة في الطلب مقدارها ٢٤ وحدة؟

خامساً: ما هو مقدار الضريبة الذي يجب أن يُفرض على الوحدة الواحدة من السلعة وذلك حتى يرتفع سعر التوازن بمقدار ١,٠٨ جنيه.

سادساً: قارن بين نتائجك في (ثانياً) و(ثالثاً) و(خامساً) مع إبداء التعليق المناسب.

سابعاً: أوجد سعر وكمية التوازن إذا قدمت الحكومة دعماً مقداره أربعة جنيهات للوحدة الواحدة.

ثامناً: قارن بين نتائجك في (ثانياً) و (رابعاً) و (سابعاً) مُبدياً ما تراه مناسباً من تعليق.

تاسعاً: أثبت – جبريا – أن الضريبة الإضافية والدعم الحكومي، في حالة تساويهما، لهما نفس التأثير في اتجاهيْن متضاديْن على كل من:

- سعر التوازن - كمية التوازن

عاشراً: حدد – جبرياً – مقدار واتجاه تأثير سعر التوازن على كمية التوازن، وهل يتفق ذلك مع ما توصلت إليه من نتائج في (ثامناً) و (سادساً)؟

الفصل الخامس

المصفوفات

أولاً: تعريف المصفوفة

المصفوفة هي مجموعة من الأرقام مرتبة في شكل صفوف وأعمدة داخل قوسيْن يأخذان إحدى الصورتيْن [ ] أو ( ) كما تشير المراجع إلى ذلك. وقد تمثل هذه الأرقام معاملات المتغيرات المختلفة في عدة معادلات خطية، حيث تكون بيانات كل صف هي معاملات المتغيرات المختلفة في كل معادلة على حدة، بينما تمثل بيانات كل عمود معاملات كل متغير على حدة في المعادلات المختلفة. وإذا كانت المصفوفة كذلك فإنها تُستخدم في حل المعادلات الخطية مثلها في ذلك مثل المحددات. وهنا يجب أن نشير بأن المصفوفة تختلف عن المحدد في أن المحدد له قيمة عددية في حين أن المصفوفة ليس لها قيمة عددية. أضف إلى ذلك أن إبدال صف مكان آخر أو عمود مكان آخر في المحدد لا يؤدى إلى تغيير في قيمة المحدد المطلقة، بينما إبدال صف مكان آخر أو عمود مكان آخر في المصفوفة يؤدى إلى تغيير المصفوفة والمعنى الدالة عليه.

هذا والمصفوفة هي أداة رياضية تسمح باستخدام الحاسب الآلي في إجراء العمليات الحسابية بسرعة. بالإضافة إلى أنها تساعد على عرض البيانات في صورة مبسطة، كما تُستخدم في ترتيب المعلومات. والمصفوفات هي الأداة الرئيسية في الأساليب الرياضية للبرمجة الخطية وبحوث العمليات.

ويمكن أن نرمز للمصفوفة بالرمز [$أ_{س ص}$]، حيث تشير س (س = ١، ٢،...، م) إلى رقم الصف، بينما تشير ص (ص = ١، ٢،...، ن) إلى رقم العمود. أي أن:

م = عدد الصفوف، ن = عدد الأعمدة.

وتأخذ المصفوفة الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} أ_{ن١} & \cdots & أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{ن٢} & \cdots & أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{ن٣} & \cdots & أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \\ . & & . & . & . \\ . & & . & . & . \\ . & & . & . & . \\ أ_{نم} & & أ_{٣م} & أ_{٢م} & أ_{١م} \end{bmatrix} = أ$$

ويُقال إن المصفوفة في هذه الحالة هي من الدرجة م × ن، ويُعبَّر عن المصفوفة في هذه الحالة بالرمز $أ_{م × ن}$.

هذا والعنصر Element $أ_{٣٢}$ – على سبيل المثال – هو العنصر الذي يقع في الصف الثالث والعمود الثاني. أما العنصر $أ_{٢١}$ فهو العنصر الذي يقع في الصف الثاني والعمود الأول، وهكذا.

وعلى سبيل المثال أيضاً:

المصفوفة: $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٣ \\ ٥ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$

هي مصفوفة من الدرجة ٣ × ٣ وعناصرها كالتالي:

$أ_{١١} = ١$ ، $أ_{١٢} = ٤$ ، $أ_{١٣} = ١$

$أ_{٢١} = ٢$ ، $أ_{٢٢} = ٣$ ، $أ_{٢٣} = ٣$

$أ_{٣١} = ٥$ ، $أ_{٣٢} = ٢$ ، $أ_{٣٣} = ١$

ثانياً: أنواع المصفوفات

هناك أنواع مختلفة من المصفوفات نعرض أهمها فيما يلي:

١- متجه الصف: Row Vector

هو مصفوفة مكونة من صف واحد وأكثر من عمود، مثل:

$[٢ \quad ١ \quad ٣]$

حيث المصفوفة في هذه الحالة من الدرجة ١ × ٣.

٢- متجه العمود: Column Vector

هو مصفوفة مكونة من عدة صفوف وعمود واحد، مثل:

$\begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \\ ١ \\ ٤ \end{bmatrix}$ ودرجة هذه المصفوفة هي: ٤ × ١

٣- المصفوفة المربعة: Square Matrix

هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الأعمدة، مثل:

$$\text{أ}_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ١ \\ ١- & ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ & ١- \end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة مربعة من الرتبة ٣ × ٣، أي أن عدد الصفوف = عدد الأعمدة = ٣.

٤- المصفوفة القطرية: Diagonal Matrix

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ما عدا العناصر الواقعة على القطر الرئيسي Principal Diagonal. أي أن:

$\text{أ}_{\text{س ص}}$ = صفر لجميع قيم س ≠ ص،

$\text{أ}_{\text{س ص}}$ ≠ صفر لقيمة واحدة على الأقل عندما س = ص.

ومثال ذلك:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٥ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{bmatrix}$$

٥- مصفوفة الوحدة: Identity Matrix - Unit Matrix

هي مصفوفة قطرية مربعة جميع عناصرها أصفار ما عدا العناصر الواقعة على القطر الرئيسي، حيث أن كلًّا منها يساوي الواحد الصحيح، ويرمز لها بالرمز I. ومثال ذلك:

$$I_{٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} \qquad I_{٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

حيث $I_{٣}$ هي مصفوفة الوحدة من الدرجة الثالثة، بينما $I_{٢}$ هي مصفوفة الوحدة من الدرجة الثانية. ويُلاحَظ هنا أننا اكتفينا بكتابة $I_{٣}$ وليس $I_{٣\times٣}$، وهكذا بالنسبة للمصفوفة $I_{٢}$، وذلك لأن مصفوفة الوحدة دائماً مربعة.

٦- المصفوفة الصفرية: Null Matrix

هي مصفوفة كل عنصر من عناصرها يساوي الصفر. مثل:

$$\begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة من الرتبة ٢ × ٣. والمصفوفة الصفرية قد تكون مربعة أو غير مربعة.

٧- المصفوفة المُبدَلة أو المعكوسة: Transpose Matrix

إذا أبدلنا صفوف إحدى المصفوفات بأعمدتها أو العكس، فإن المصفوفة الناشئة تسمى بالمصفوفة المُبدَلة أو المعكوسة، ويُرمز لها بالرمز أ َ. فإذا كانت المصفوفة أ من الرتبة م × ن فإن المصفوفة المبدلة أ َ تكون من الرتبة ن × م. ومثال ذلك.

إذا كانت $أ_{٢\times٣} = \begin{bmatrix} ٣ & ١- & ٤ \\ ٢- & ٦ & ١ \end{bmatrix}$

فإن المصفوفة المُبدَلة أ َ تأخذ الصورة التالية:

$$أ َ_{٣\times٢} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ١- & ٦ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$$

هذا ويطلق أحياناً على هذه المصفوفة العديد من المسميات مثل المصفوفة المحوَّرة أو المدوَّرة أو المحوَّلة أو التبادلية.

٨- المصفوفة المتماثلة: Symmetric Matrix

المصفوفة أ تكون متماثلة إذا كان:

$$أ = أ َ$$

أي أن: $أ_{س ص} = أ َ_{ص س}$ لجميع قيم س، ص ، ومثال ذلك:

$$المصفوفة\ أ = \begin{bmatrix} ١ & ٤- & ٢ \\ ٤- & ٧ & ٥ \\ ٢ & ٥ & ١ \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة متماثلة حيث أن:

$$أ َ = \begin{bmatrix} ١ & ٤- & ٢ \\ ٤- & ٧ & ٥ \\ ٢ & ٥ & ١ \end{bmatrix} = أ$$

٩- المصفوفة المتعامدة: Orthogonal Matrix

المصفوفة المتعامدة هي مصفوفة مربعة يتوافر فيها أحد الشروط التالية:

$أأ َ = I$ أو $أ َأ = I$ أو $أ َ = أ^{-١}$

حيث: $أ^{-١}$ هو مقلوب المصفوفة والذي سنتناوله فيما بعد ، I مصفوفة الوحدة.

جبر المصفوفات: Matrix Algebra

يمكن التعامل جبرياً مع المصفوفات مثلها في ذلك مثل الأرقام الحسابية. ولكن التعامل الجبري مع المصفوفات يتطلب أحياناً بعض الخصائص والشروط التي يجب توافرها ومراعاتها مختلفةً في ذلك عن التعامل الجبري مع الأرقام الحسابية.

وسوف نتناول الآن عمليات جمع وطرح وضرب المصفوفات تاركين عملية القسمة – إن صح التعبير - مؤقتا لما تتطلبه من معالجة خاصة تختلف في تفصيلاتها عن تلك المعالجة المتبعة في حالة الأرقام الحسابية.

هذا وقبل تناولنا لهذه النقطة دعنا نورد بعض القوانين والأسس المتبعة في حالة جمع وطرح وضرب الأرقام الحسابية وذلك بهدف الوقوف على إمكانية تطبيق تلك القوانين والأسس على المصفوفات.

أسس العمليات الجبرية مع الأرقام الحسابية:

لنفترض أن لدينا ثلاثة أرقام: أ، ب، جـ، فإن التعامل الجبري مع تلك الأرقام (جمع، طرح، ضرب) تحكمه القوانين التالية:

١- قانون التبادل: Commutative Law

$$أ + ب = ب + أ \quad ، \quad أ \times ب = ب \times أ$$

٢- قانون التوزيع: Distributive Law

$$أ(ب + جـ) = أب + أجـ$$

٣- قانون الترتيب: Associative Law

$$(أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) \quad ، \quad (أ \times ب) \times جـ = أ \times (ب \times جـ)$$

٤- خاصية الصفر والوحدة: Zero and Unit Property

$$أ + صفر = أ \quad ، \quad أ \times ١ = أ$$

٥- العلاقة بين الرقم وسالبه:

$$أ + (-أ) = صفر \quad ، \quad أ - ب = أ + (-ب)$$

٦- العلاقة بين الرقم ومقلوبه:

$$أ(أ)^{-١} = ١ \quad ، \quad أ \neq صفر \quad ، \quad أ \div ب = أ(ب)^{-١}$$

ثالثاً: جمع المصفوفات Matrix Addition

إذا كانت المصفوفتان أ، ب لهما نفس الدرجة $(م \times ن)$ فإن مجموع المصفوفتيْن $(أ + ب)$هو مصفوفة لها نفس الدرجة ونحصل عليها بجمع العناصر المتناظرة في المصفوفتيْن أ، ب. وطبقاً لهذا التعريف، لا يمكن جمع مصفوفتيْن ذات درجتيْن مختلفتيْن.

مثال (١):

إذا كانت

$$أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ٢ \\ ٤ & ٢ & ٥ \\ -١ & ١ & ٦ \end{bmatrix} ، \quad ب = \begin{bmatrix} -١ & ٣ & ٤ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ٥ & ٠ & -٣ \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة جـ، المصفوفة د حيث

$$جـ = أ + ب \quad ، \quad د = ب + أ$$

الحـل:

$$جـ = أ + ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ٢ \\ ٤ & ٢ & ٥ \\ -١ & ١ & ٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ٣ & ٤ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ٥ & ٠ & -٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٦ \\ ٦ & ١ & ٦ \\ ٤ & ١ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$د = ب + أ = \begin{bmatrix} -١ & ٣ & ٤ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ٥ & ٠ & -٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ٢ \\ ٤ & ٢ & ٥ \\ -١ & ١ & ٦ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٦ \\ ٦ & ١ & ٦ \\ ٤ & ١ & ٣ \end{bmatrix}$$

وهنا يتضح أن: $أ + ب = ب + أ$

مثال (٢):

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & ١- \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٠ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، **جـ** = $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢- & ٢ \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$

أوجد المصفوفتيْن ى ، **هـ** حيث: ى = أ + (ب + **جـ**) ، **هـ** = (أ + ب) + **جـ**

الحـل:

$$\text{أ} + (\text{ب} + \text{جـ}) = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & ١- \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٠ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢- & ٢ \\ ١- & ١ \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & ١- \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٧ & ٣ \\ ٢- & ٥ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٨ \\ ٤ & ٤ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$$

$$(\text{أ} + \text{ب}) + \text{جـ} = \left\{ \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & ١- \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٠ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢- & ٢ \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٧ & ٣ \\ ٦ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢- & ٢ \\ ١- & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٨ \\ ٤ & ٤ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$$

أي أن: أ + (ب + **جـ**) = (أ + ب) + **جـ**

رابعاً: طرح المصفوفات Matrix Subtraction

إذا كانت المصفوفتان أ، ب لها نفس الدرجة، فإن حاصل طرح المصفوفتيْن هو مصفوفة لها أيضاً نفس الدرجة، ونحصل عليها بطرح كل عنصر من إحدى المصفوفتيْن من العنصر المناظر له في المصفوفة الأخرى. لذلك فإنه لا يمكن طرح المصفوفات ذات الدرجات المختلفة.

مثال (٣):

إذا كانت:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ & -١ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & -٢ & ١ \\ -٣ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

أوجد: (١) $\text{جـ} = \text{أ} - \text{ب}$ (٢) $\text{ى} = \text{أ} + (-\text{ب})$

الحل:

(١) $\text{جـ} = (\text{أ} - \text{ب})$

$$= \begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ & -١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & -٢ & ١ \\ -٣ & ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ١ \\ ٨ & ٣ & -١ \end{bmatrix}$$

(٢) $-\text{ب} = (-١) \begin{bmatrix} ٤ & -٢ & ١ \\ -٣ & ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & ٢ & -١ \\ ٣ & -١ & ٠ \end{bmatrix}$

سوف نوضح هذه النقطة بالتفصيل في البند "خامساً" الذي يلي هذا المثال مباشرةً.

$$\therefore \text{ى} = \text{أ} + (-\text{ب}) = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٤ & ٢ & -١ \\ ٣ & -١ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ١ \\ ٨ & ٣ & -١ \end{bmatrix}$$

أي أن: $\text{أ} - \text{ب} = \text{أ} + (-\text{ب})$

خامساً: ضرب المصفوفات Matrix Multiplication

هناك نوعان من ضرب المصفوفات، ضرب مصفوفة في مقدار ثابت وضرب مصفوفة في مصفوفة، وسوف نوضح ذلك على النحو التالي:

١- ضرب مصفوفة في مقدار ثابت: Scalar Multiplication

إذا كانت **ك** عبارة عن مقدار ثابت وكان لدينا المصفوفة أ، فإن المصفوفة **ك**أ يمكن تعريفها بأنها المصفوفة التي يتكون كل عنصر من عناصرها من حاصل ضرب **ك** في كل عنصر من عناصر المصفوفة أ. وهذا يعنى، على سبيل المثال، أن إضافة المصفوفة أ إلى نفسها يكافئ ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة أ في مقدار ثابت يساوي ٢.

مثال (٤):

إذا كانت:

$$\text{٣أ} = \text{د} \quad \text{،} \quad \text{٢أ} = \text{جـ} \quad \text{:أوجد} \begin{bmatrix} ٠ & ١- & ٣ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ٢- & ٥ & ١ \end{bmatrix} = \text{أ}$$

الحـل:

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٢- & ٦ \\ ٦ & ٤ & ٨ \\ ٤- & ١٠ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١- & ٣ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ٢- & ٥ & ١ \end{bmatrix} ٢ = \text{٢أ} = \text{جـ}$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٣- & ٩ \\ ٩ & ٦ & ١٢ \\ ٦- & ١٥ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١- & ٣ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ٢- & ٥ & ١ \end{bmatrix} ٣ = \text{٣أ} = \text{د}$$

وهنا تجدر الإشارة إلى أن هناك فارقاً أساسياً بين المحددات والمصفوفات، وهو أن ضرب محدد في مقدار ثابت يعنى ضرب هذا المقدار الثابت في كلٍّ من عناصر صف واحد أو عمود واحد. وأما في حالة المصفوفات، فإن ضرب مقدار ثابت في مصفوفة يعنى ضرب هذا المقدار الثابت في جميع عناصر المصفوفة.

مثال (٥):

إذا كانت:

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} = \text{ب} \quad \text{،} \quad \begin{bmatrix} ٣- & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} = \text{أ}$$

$$\text{٢ب} + \text{٢أ} = \text{د} \quad \text{،} \quad (\text{ب} + \text{أ})٢ = \text{جـ} \quad \text{:أوجد}$$

الحـل:

$$\left\{ \begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣- & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} \right\} ٢ = (\text{ب} + \text{أ})٢ = \text{جـ}$$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٢- \\ ١٠ & ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٥ & ٥ \end{bmatrix} ٢ =$$

$$د = ٢أ + ٢ب = ٢ \begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} + ٢ \begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & -٦ \\ ٤ & ٨ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٤ & ٨ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ١٠ & ١٠ \end{bmatrix}$$

أي أن: $٢(أ + ب) = ٢أ + ٢ب$

٢- ضرب مصفوفة في مصفوفة:

يمكن ضرب المصفوفة أ في المصفوفة ب إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة أ يساوي عدد الصفوف في المصفوفة ب. فإذا كانت المصفوفة أ من الدرجة $م \times ن$ وكانت المصفوفة ب من الدرجة $ن \times$ **ل**، فإن مصفوفة حاصل الضرب (**جـ**) سوف تكون من الدرجة $م \times$ **ل** . وسوف نوضح فيما يلي كيفية إجراء عملية الضرب.

إذا كانت $أ_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{bmatrix}$ ، $ب_{٣\times٢} = \begin{bmatrix} ب_{١١} & ب_{٢١} \\ ب_{١٢} & ب_{٢٢} \\ ب_{١٣} & ب_{٢٣} \end{bmatrix}$

في هذه الحالة نجد أن المصفوفة (**جـ**) والتي تنتُج من عملية الضرب من الدرجة **٣ × ٢**

أي أن : $أ_{٣\times٣} \times ب_{٣\times٢} = جـ_{٣\times٢}$

وللحصول على مصفوفة حاصل الضرب (**جـ**) نوضح ما يلي:

عناصر العمود الأول في مصفوفة حاصل الضرب:

العنصر الأول ($جـ_{١١}$): وينشأ من مجموع حواصل ضرب كل عنصر من عناصر الصف الأول للمصفوفة أ في نظيره من عناصر العمود الأول للمصفوفة ب. أي أن:

$$جـ_{١١} = أ_{١١}ب_{١١} + أ_{٢١}ب_{١٢} + أ_{٣١}ب_{١٣}$$

العنصر الثاني ($جـ_{١٢}$): وينشأ من مجموع حواصل ضرب كل عنصر من عناصر الصف الثاني للمصفوفة أ في نظيره عناصر العمود الأول للمصفوفة ب. أي أن:

$$جـ_{١٢} = أ_{١٢}ب_{١١} + أ_{٢٢}ب_{١٢} + أ_{٣٢}ب_{١٣}$$

العنصر الثالث ($جـ_{١٣}$): وينشأ من مجموع حواصل ضرب كل عنصر من عناصر الصف الثالث للمصفوفة أ في نظيره من عناصر العمود الأول للمصفوفة ب. أي أن:

$$جـ_{١٣} = أ_{١٣}ب_{١١} + أ_{٢٣}ب_{١٢} + أ_{٣٣}ب_{١٣}$$

وهكذا فيما يتعلق بعناصر العمود الثاني من مصفوفة حاصل الضرب، حيث تقوم بضرب عناصر كل من الصفوف الأولى والثانية والثالثة للمصفوفة أ في عناصر العمود الثاني للمصفوفة ب. أي أن:

$$\text{جـ}_{٢١} = \text{أ}_{١١}\text{ب}_{٢١} + \text{أ}_{٢١}\text{ب}_{٢٢} + \text{أ}_{٣١}\text{ب}_{٢٣}$$

$$\text{جـ}_{٢٢} = \text{أ}_{١٢}\text{ب}_{٢١} + \text{أ}_{٢٢}\text{ب}_{٢٢} + \text{أ}_{٣٢}\text{ب}_{٢٣}$$

$$\text{جـ}_{٢٣} = \text{أ}_{١٣}\text{ب}_{٢١} + \text{أ}_{٢٣}\text{ب}_{٢٢} + \text{أ}_{٣٣}\text{ب}_{٢٣}$$

وهكذا نجد أن: **جـ = أب**

$$= \begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ب}_{١١} & \text{ب}_{٢١} \\ \text{ب}_{١٢} & \text{ب}_{٢٢} \\ \text{ب}_{١٣} & \text{ب}_{٢٣} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{أ}_{١١}\text{ب}_{١١} + \text{أ}_{٢١}\text{ب}_{١٢} + \text{أ}_{٣١}\text{ب}_{١٣} & \text{أ}_{١١}\text{ب}_{٢١} + \text{أ}_{٢١}\text{ب}_{٢٢} + \text{أ}_{٣١}\text{ب}_{٢٣} \\ \text{أ}_{١٢}\text{ب}_{١١} + \text{أ}_{٢٢}\text{ب}_{١٢} + \text{أ}_{٣٢}\text{ب}_{١٣} & \text{أ}_{١٢}\text{ب}_{٢١} + \text{أ}_{٢٢}\text{ب}_{٢٢} + \text{أ}_{٣٢}\text{ب}_{٢٣} \\ \text{أ}_{١٣}\text{ب}_{١١} + \text{أ}_{٢٣}\text{ب}_{١٢} + \text{أ}_{٣٣}\text{ب}_{١٣} & \text{أ}_{١٣}\text{ب}_{٢١} + \text{أ}_{٢٣}\text{ب}_{٢٢} + \text{أ}_{٣٣}\text{ب}_{٢٣} \end{bmatrix}$$

كما يمكن إيجاد حاصل ضرب مصفوفتيْن بإيجاد عناصر الصفوف بدلاً من الأعمدة في مصفوفة حاصل الضرب وهو ما يؤدي إلى نفس النتيجة.

ملحوظة: مجموع حواصل ضرب عناصر الصف رقم *س* في المصفوف الأولى في عناصر العمود رقم *ص* في المصفوفة الثانية يعطي عنصر مصفوفة حاصل الضرب الموجود في الصف رقم *س* والعمود رقم *ص*.

لذلك فإنه عند ضرب مصفوفة في مصفوفة أخرى فإن مصفوفة حاصل الضرب يكون لها عدد صفوف المصفوفة الأولى وعدد أعمدة المصفوفة الثانية.

هذا وسبق أن أوضحنا أنه يمكن ضرب أ × ب إذا كان عدد أعمدة أ يساوي عدد صفوف المصفوفة ب، فهل يمكن أن نضرب ب × أ؟ في واقع الأمر لا يمكننا ذلك إلا إذا كان عدد أعمدة المصفوفة ب يساوي عدد صفوف المصفوفة أ. وفي مثالنا الحالي لا يمكن ذلك حيث أن ب من الدرجة ٣ × ٢ في حين أن أ من الدرجة ٣ × ٣، حيث لا يتحقق الشرط المشار إليه. فعدد أعمدة المصفوفة ب يساوي ٢ في حين أن عدد صفوف المصفوفة

أ يساوي ٣. وهنا يتضح لنا أنه من الممكن الحصول على أب في حين لا يمكننا الحصول على بأ. وحتى لو وُجدت أب ، بأ فإنه ليس من الضروري أن يكونا متساويين.

مثال (٦):

إذا كانت:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ -٥ & ٣ \end{bmatrix} \quad ، \quad \textbf{جـ} = \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -٥ & ٣ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{د} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

أولاً: أوجد: $\text{س} = \text{أب} \quad ، \quad \text{ص} = \text{أجـ} \quad ، \quad \text{ع} = \text{أد}$

علِّق على ما تحصل عليه من نتائج.

ثانياً: أثبت أن: $\text{ب}I = I\text{ب} = \text{ب}$

الحــل:

أولاً:

$$\text{أب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ -٥ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{صفر}\times ٤ + ٢\times -٥ & \text{صفر}\times -١ + ٢\times ٣ \\ \text{صفر}\times ٤ + ٣\times -٥ & \text{صفر}\times -١ + ٣\times ٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -١٠ & ٦ \\ -١٥ & ٩ \end{bmatrix}$$

$$\text{أجـ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -٥ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{صفر}\times ٥ + ٢\times -٥ & \text{صفر}\times -٢ + ٢\times ٣ \\ \text{صفر}\times ٥ + ٣\times -٥ & \text{صفر}\times -٢ + ٣\times ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٠ & ٦ \\ -١٥ & ٩ \end{bmatrix}$$

أي أن: أب = أجـ مع أن ب $\neq$ جـ

$$\text{أد} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{صفر}\times ٣ + ٢\times \text{صفر} & \text{صفر}\times ٢ + ٢\times \text{صفر} \\ \text{صفر}\times ٣ + ٣\times \text{صفر} & \text{صفر}\times ٢ + ٣\times \text{صفر} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

وهنا يجب أيضاً أن نشير إلى أنه بالرغم من أن أد = مصفوفة صفرية فإن:

أ $\neq$ صفر ، د $\neq$ صفر

ثانياً:

$$\text{ب}I = \begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ -٥ & ٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١\times ٠ + ٤\times ١ & -١\times ١ + ٤\times ٠ \\ ٣\times ٠ - ٥\times ١ & ٣\times ١ - ٥\times ٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \text{ب}$$

$$I\text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times -1 + 0\times 3 & 1\times 4 + 0\times -5 \\ 0\times -1 + 1\times 3 & 0\times 4 + 1\times -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \text{ب}$$

أي أن: $\text{ب}I = I\text{ب} = \text{ب}$

وهذا يعنى أنه بضرب أية مصفوفة في مصفوفة الوحدة فإن الناتج هو نفس المصفوفة.

مثال (٧):

إذا كانت:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} ،\quad \text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} ،\quad \text{جـ} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} ،$$

$$\text{د} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

أثبت أن:

١- $\text{أب} \neq \text{بأ}$ **٢-** $\text{أ}(\text{ب} + \text{جـ}) = \text{أب} + \text{أجـ}$

٣- $(\text{ب} + \text{جـ})\text{أ} = \text{بأ} + \text{جـأ}$ **٤-** $\text{أ}(\text{ب د}) = (\text{أب})\text{د}$

الحـل:

١- $\text{أب} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2\times 1 + 1\times 2 + 0\times 3 & -2\times -2 + 1\times 5 + 0\times 0 \\ 3\times 1 - 1\times 2 + 4\times 3 & 3\times -2 - 1\times 5 + 4\times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 13 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\text{بأ} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٤\times٢-٠\times١ & ١^-\times٢-١\times١ & ٣\times٢-٢^-\times١ \\ ٤\times٥+٠\times٢ & ١^-\times٥+١\times٢ & ٣\times٥+٢^-\times٢ \\ ٤\times٠+٠\times٣ & ١^-\times٠+١\times٣ & ٣\times٠+٢^-\times٣ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٨^- & ٣ & ٨^- \\ ٢٠ & ٣^- & ١١ \\ ٠ & ٣ & ٦^- \end{bmatrix} =$$

ومن الواضح أن المصفوفة أب من الدرجة ٢ × ٢، في حين أن المصفوفة بأ من الدرجة ٣ × ٣. أي أن: أب ≠ بأ

وهذا وتجدر الإشارة إلى أن أب و بأ قد يكونان من نفس الرتبة ولكنهما لا يتساويان.

٢- أ(ب + جـ) =

$$\left\{\begin{bmatrix} ٤ & ١^- \\ ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ٢^- & ١ \\ ٥ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢^- \\ ٤ & ١^- & ٣ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٨ & ٢٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٦ & ٢ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢^- \\ ٤ & ١^- & ٣ \end{bmatrix} =$$

أب =

$$\begin{bmatrix} ٩ & ٠ \\ ١١^- & ١٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢^- & ١ \\ ٥ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢^- \\ ٤ & ١^- & ٣ \end{bmatrix}$$

أجـ =

$$\begin{bmatrix} ٧^- & ٢ \\ ١٩ & ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ١^- \\ ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢^- \\ ٤ & ١^- & ٣ \end{bmatrix}$$

∴ أب + أجـ =

$$\text{أ(ب + جـ)} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٨ & ٢٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧^- & ٢ \\ ١٩ & ٩ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٩ & ٠ \\ ١١^- & ١٣ \end{bmatrix}$$

أي أن: **أ(ب + جـ) = أب + أجـ**

٣- (ب + جـ)أ =

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢^- \\ ٤ & ١^- & ٣ \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} ٤ & ١^- \\ ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ٢^- & ١ \\ ٥ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} ٨ & ٢- & ٦ \\ ٢٤ & ٤- & ١٤ \\ ٨ & ٤ & ٦- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢- \\ ٤ & ١- & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٦ & ٢ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٨- & ٣ & ٨- \\ ٢٠ & ٣- & ١١ \\ ٠ & ٣ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢- \\ ٤ & ١- & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٥ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} = \text{بأ}$$

$$\begin{bmatrix} ١٦ & ٥- & ١٤ \\ ٤ & ١- & ٣ \\ ٨ & ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢- \\ ٤ & ١- & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \text{جـأ}$$

$$\begin{bmatrix} ١٦ & ٥- & ١٤ \\ ٤ & ١- & ٣ \\ ٨ & ١ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨- & ٣ & ٨- \\ ٢٠ & ٣- & ١١ \\ ٠ & ٣ & ٦ \end{bmatrix} = \text{جـأ} + \text{بأ} \;\; \therefore$$

$$\text{أ}\left(\text{جـ} + \text{ب}\right) = \begin{bmatrix} ٨ & ٢- & ٦ \\ ٢٤ & ٤- & ١٤ \\ ٨ & ٤ & ٦ \end{bmatrix} =$$

أي أن: $\left(\text{ب} + \text{جـ}\right)\text{أ} = \text{بأ} + \text{جـأ}$

$$\left\{ \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ١- & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٥ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢- \\ ٤ & ١- & ٣ \end{bmatrix} = \left(\text{ب د}\right)\text{أ} \;\; \text{-٤}$$

$$\begin{bmatrix} ٣٦ & ٩- & ٠ \\ ٥- & ٣٧ & ١٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥- & ٤ & ١ \\ ٢٦ & ١- & ٢ \\ ٩ & ٦ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢- \\ ٤ & ١- & ٣ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ١- & ٠ \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٥ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢- \\ ٤ & ١- & ٣ \end{bmatrix} \right\} = \text{د}\left(\text{أب}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 13 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 36 \\ 13 & 37 & -5 \end{bmatrix} =$$ أ(ب ى)

أي أن: أ(ب ى) = (أب) ى

هذا ويمكن تلخيص نتائج الأمثلة (١) ، (٢) ، (٣) ، (٦) ، (٧) على النحو التالي:

- أ+ ب = ب+ أ — **مثال (١)**
- أ+(ب+ جـ) = (أ+ ب)+ جـ — **مثال (٢)**
- أ− ب = أ+(−ب) — **مثال (٣)**
- أنه إذا كان: أب = أجـ

  فإنه من الممكن أن يكون: ب ≠ جـ — **مثال (٦)**
- أنه إذا كان: أى = صفر

  فإنه من الممكن أن: أ ≠ صفر، ى ≠ صفر **مثال (٦)**
- أنه أمكن إيجاد المصفوفتيْن أب، ب أ

  ولكن: أب ≠ ب أ — **مثال (٧)**
- أ(ب+ جـ) = أب + أجـ — **مثال (٧)**
- (ب+ جـ)أ = ب أ+ جـ أ — **مثال (٧)**
- أ(ب ى) = (أب) ى — **مثال (٧)**

وبمقارنة تلك النتائج بالقوانين والأسس التي تحكم العمليات الجبرية للأرقام الحسابية يمكننا أن نصل إلى ما يلي:

١- أن قانون التبادل – فيما يتعلق بعملية الجمع - ينطبق أيضاً على المصفوفات (مثال ١).

٢- أن قانون التبادل – فيما يتعلق بعملية الضـــرب - ليس من الضـــروري أن ينطبق على المصفوفات. هذا إذا كان من الممكن – أساساً – إيجاد حاصل ضرب المصفوفتيْن أب و ب أ (مثال ٧).

وهنا تلزم الإشارة إلى أن ضرب المصفوفة أ في المصفوفة ب على الشكل أب يسمى ضرب قَبْلي Pre-multiplication (أي من جهة اليمين) في حين أن ضرب المصفوفة أ في المصفوفة ب على الشكل ب أ يسمى ضرب بَعْدى Post-multiplication (أي من جهة اليسار). وقد لاحظنا أنه ليس من الضروري أن تكون كل من أب، ب أ موجودتان،

وإن وُجدتا فإنهما ليستا دائما متساويتان. وأما في حالـة الأرقـام الحسابية فإن القيمتيْن أب ، ب أ دائما موجودتان ومتساويتان.

٣- أن قانون التوزيع ينطبق على المصفوفات (مثال ٧) شأنه في ذلك شأن الأرقام الحسابية.

٤- أن قانون الترتيب ينطبق على المصفوفات مثله تماما مثل الأرقام الحسابية (مثال ٢ ومثال ٧).

٥- أن العلاقة بين الرقم وسالبه تنطبق أيضاً على المصفوفات (مثال ٣).

٦- أن خاصية الوحدة تنطبق على المصفوفات. كما أن خاصية الصفر تنطبق أيضاً على المصفوفات، وسوف نترك للقارئ التحقق من ذلك من خلال إثبات صحة العلاقة التالية:

أ + المصفوفة الصفرية = أ

٧- أنه إذا كانت المصفوفة أب= مصفوفة صفرية، فهذا لا يعنى بالضرورة أن أيا من المصفوفة أ أو المصفوفة ب هي مصفوفة صفرية وذلك على خلاف قواعد الأرقام الحسابية.

٨- أنه إذا كانت المصفوفتان أب، أجـ متساويتان فإن ذلك لا يضمن بالضرورة أن تكون المصفوفتان ب، جـ متساويتيْن.

سادساً: مقلوب المصفوفة Matrix Inverse

في الواقع لا توجد قسمة في المصفوفات بالمعنى المفهوم في حالة الأعداد، ولكن توجد طريقة تعطينا في الظاهر نفس وظيفة القسمة وهي الضرب في مقلوب المصفوفة. فإذا كان لدينا المصفوفة أ، فإن مقلوب المصفوفة يمكن التعبير عنه بالمصفوفة $أ^{-١}$. حينئذ فإن الضرب في مقلوب المصفوفة يعنى قسمة المصفوفات، تماماً كما يعنى الضرب في مقلوب العدد القسمة عليه.

هذا ولكي يمكن إيجاد مقلوب المصفوفة، فإنه يجب أن تتوافر الشروط التالية:

- أن تكون أ مصفوفة مربعة.
- قيمة محدد المصفوفة أ لا تساوي الصفر.

ومن المعروف أن: $أ\,أ^{-١}$ = I مصفوفة الوحدة.

أي أن مقلوب المصفوفة أ هو تلك المصفوفة التي لو ضُرِبت في المصفوفة أ فإن ناتج عملية الضرب يعطى مصفوفة الوحدة.

هذا ويكون للمصفوفة مقلوب إذا كانت مربعة وقيمة محددها لا تساوي الصفر، حينئذ يطلق عليها Invertible أو Nonsingular. وأما إذا كان محدد المصفوفة يساوي الصفر، فإنه لا

يوجد مقلوب للمصفوفة وتسمى حينئذ Singular. ويمكن إيجاد مقلوب المصفوفة باستخدام طريقتيْن مختلفتيْن، أولاهما هي طريقـة التحويل لجاوس وأما ثانيهما فهي طريقة المرافقـات. وفيما يلي نتعرض لكل من الطريقتيْن بشيء من التفصيل.

١- طريقة التحويل لـ "جاوس": Gaussian Reduction Procedure

تعتمد هذه الطريقة على الفكرة: أ أ$^{-1}$ = أ$^{-1}$ أ = مصفوفة الوحدة (I). ووفقا لطريقة جاوس، فإنه لإيجاد مقلوب المصفوفة أ من الدرجة م × م نتبع الخطوات التالية:

أ- وضع المصفوفة أ على الصورة: (أ | I)

حيث I هي مصفوفة الوحدة من الدرجة م.

ب- إجراء تحويلات على صفوف المصفوفة أ بحيث تتحول في النهاية إلى مصفوفة الوحدة.

مع الأخذ في الاعتبار أن إجراء أي تحويل على صفوف المصفوفة أ يجب أن يُجرى أيضا على الصفوف المناظرة في مصفوفة الوحدة. وبعد أن تتحول المصفوفة أ إلى مصفوفة الوحدة I، سوف نجد حينئذ أن المصفوفة I قد أخذت شكلا آخر هو في الواقع مقلوب المصفوفة أ.

وهذا يعنى أنه بعد إجراء التحويلات اللازمة على صفوف المصفوفة أ لتحويلها إلى مصفوفة الوحدة سوف نجد أن الصورة (أ | I) قد تحولت إلى (I | أ$^{-1}$).

ملحوظـة:

يمكن تلخيص التحويلات التي يمكن إجراؤها على صفوف المصفوفة أ ما يلي:

- إبدال صفيْن كلٌّ مكان الآخر.
- ضرب كل عنصر من عناصر صف ما في مقدار ثابت (كسرى أو صحيح).
- جمع مضاعفات عناصر صف ما على عناصر صف آخر.

وهنا نؤكد مرة أخرى أنه عند إجراء أية عملية تحويل على صف من صفوف المصفوفة أ فإنه يجب إجراء نفس العملية على الصف المناظر في المصفوفة I (وبأسلوب أدق المصفوفة على يسار الخط العمودي) وذلك لأن مصفوفة الوحدة I سوف تأخذ في التغير بعد إجراء أول عملية تحويل.

والمثال التالي يوضح كيفية إيجاد مقلوب مصفوفة باستخدام طريقة جاوس.

مثال (٨):

باستخدام طريقة جاوس، أوجد مقلوب المصفوفة:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

ثم تحقق من النتيجة التي تصل إليها.

الحـل:

لإيجاد مقلوب المصفوفة باستخدام طريقة التحويل لجاوس، سوف نتبع الخطوات التالية:

١- نضع المصفوفة أ على الصورة أ|I، أي:

$$\text{أ}|I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

٢- تُجرى التحويلات اللازمة على صفوف المصفوفة أ لتحويلها إلى مصفوفة الوحدة. وتتمثل هذه التحويلات في ما يلي:

$$\text{أ}|I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

حيث نجد أن:

$$\xrightarrow{\text{ص}_1 - \text{ص}_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 5 & -7 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\text{ص}_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 7 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{ص}_3 - 3\text{ص}_1]{\text{ص}_2 - 5\text{ص}_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 7 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 27 & -31 & 5 & 1 & -5 \\ 0 & 13 & -15 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{ص}_2 - 2\text{ص}_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 7 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 13 & -15 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{ص}_3 - 13\text{ص}_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 7 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 16 & -13 & 11 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{ص}_1 + 5\text{ص}_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -6 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 16 & -13 & 11 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{ص}_2 - \frac{1}{2}\text{ص}_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -6 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & \frac{15}{2} & \frac{-13}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 16 & -13 & 11 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{ص}_1 + \text{ص}_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & \frac{15}{2} & \frac{-13}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 16 & -13 & 11 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}\text{ص}_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & \frac{15}{2} & \frac{-13}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -8 & \frac{13}{2} & \frac{-11}{2} \end{array}\right]$$

أي أن مقلوب المصفوفة أ هو:

$$\text{أ}^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 7 \\ -9 & \frac{15}{2} & \frac{-13}{2} \\ -8 & \frac{13}{2} & \frac{-11}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 20 & -16 & 14 \\ -18 & 15 & -13 \\ -16 & 13 & -11 \end{bmatrix}$$

وللتحقق من صحة النتيجة:

$$أأ^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 & -16 & 14 \\ -18 & 15 & -13 \\ -16 & 13 & -11 \end{bmatrix}$$

ويمكن للقارئ التأكد من أن:

$$أأ^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أي أن النتيجة صحيحة.

ولعل التساؤل الذي يُثار هنا، كيف نعرف عند استخدام طريقة جاوس أن المصفوفة ليس لها مقلوب؟ وتبرز أهمية هذا التساؤل من أنه وفقا لطريقة جاوس فإننا لا نحسب قيمة محدد المصفوفة وهو المعيار الذي يمكن أن نحكم من خلاله على أن للمصفوفة مقلوب أم لا. وفي واقع الأمر فإنه يمكن الاستدلال على أنه ليس للمصفوفة مقلوب في حالة طريقة جاوس وذلك إذا ما حصلنا على صف في المصفوفة التي على يمين الخط العمودي جميع عناصره أصفار. في هذه الحالة، يمكن القول بأنه ليس للمصفوفة مقلوب. هذا والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (٩):

باستخدام طريقة جاوس، أوجد مقلوب المصفوفة:

$$أ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$[أ|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{ص}_3 - 3\text{ص}_1]{\text{ص}_2 - 2\text{ص}_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{ص}_٣ - \text{ص}_٢} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ٠ & ٠ & ١ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & ١ & -٢ & ١ & ١ & ٠ \\ ١ & -١ & -١ & ٠ & ٠ & ٠ \end{array}\right]$$

وحيث أن الصف الثالث في المصفوفة التي على يمين الخط العمودي كله أصفار، فإن عملية تحويل المصفوفة التي على يمين الخط العمودي إلـى مصفوفة الوحدة أمر غير ممكن. وبالتالي فإن المصفوفة أ ليس لها مقلوب. ويمكن التأكد من ذلك بإثبات أن محدد المصفوفة أ يساوي الصفر. ويمكن إثبات ذلك بسهولة حيث أن العمود الثالث في محدد المصفوفة أ ما هو إلا عبارة عن مجموع العموديْن الأول والثاني. وعليه فإن قيمة المحدد تساوي الصفر (يلاحَظ أنه بطرح العمود الأول من الثالث نحصل في المحدد على عموديْن متشابهيْن تماماً).

٢- طريقة المرافقات: Cofactors Method

يمكن إيجاد مقلوب المصفوفة باستخدام طريقة المرافقات وذلك باتباع الخطوات التالية:

١- نحسب قيمة محدد المصفوفة.

٢- نوجد مصفوفة المرافقات Cofactors Matrix، وهي المصفوفة التي تحل فيها مرافقات العناصر محل عناصر المصفوفة، وسنرمز لها بالرمز $م_{وم}$.

٣- نوجد معكوس مصفوفة المرافقات $م'_{وم}$، ويطلق عليها Adjoint Matrix، أي المصفوفة المرتبطة، إن صح هذا التعبير.

٤- نحصل على مقلوب المصفوفة Inverse بقسمة معكوس مصفوفة المرافقات على قيمة محدد المصفوفة.

ولعل المثال التالي يوضح - عملياً - هذه الخطوات.

مثال (١٠):

باستخـدام طريقـة المرافقات، أوجد مقلوب المصفوف المعطاة في مثال (٨).

الحـل:

لإيجاد مقلوب المصفوفة باستخدام طريقة المرافقات، سوف نتبع الخطوات التالية:

١- حساب قيمة محدد المصفوفة:

$$\begin{matrix} \text{٢ع}_٣ + \text{ع}_١ \leftarrow \text{غ}_١ \\ \text{٣ع}_٣ + \text{ع}_٢ \leftarrow \text{غ}_٢ \end{matrix} \begin{vmatrix} -١ & ٠ & ٠ \\ ٤ & ١٤ & ١٣ \\ ٦ & ١٦ & ١٥ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -١ & ٣ & ٢ \\ ٤ & ٢ & ٥ \\ ٦ & -٢ & ٣ \end{vmatrix} = \Delta$$

$$= -\begin{bmatrix} ١٣ & ١٤ \\ ١٥ & ١٦ \end{bmatrix} = -(٢٠٨ - ٢١٠) = ٢$$

٢- إيجاد مصفوفة المرافقات $م_و$:

يمكن الحصول على مصفوفة المرافقات بإحلال مرافق كل عنصر مكان قيمة العنصر نفسه.

مصفوفة المرافقات $(م_و)$ =
$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ -٢ & ٦ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ٣ & -١ \\ -٢ & ٦ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$(م_و) = \begin{bmatrix} ٢٠ & -١٨ & -١٦ \\ -١٦ & ١٥ & ١٣ \\ ١٤ & -١٣ & -١١ \end{bmatrix}$$

٣- معكوس مصفوفة المرافقات $(م'_و)$:

$$م'_و = \begin{bmatrix} ٢٠ & -١٦ & ١٤ \\ -١٨ & ١٥ & -١٣ \\ -١٦ & ١٣ & -١١ \end{bmatrix}$$

٥- بقسمة معكوس مصفوفة المرافقات على قيمة محدد المصفوفة نحصل على **مقلوب المصفوفة: أي أن:**

$$أ^{-١} = \frac{م'_و}{\text{قيمة محدد المصفوفة}} = \frac{م'_و}{|م|} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٢٠ & -١٦ & ١٤ \\ -١٨ & ١٥ & -١٣ \\ -١٦ & ١٣ & -١١ \end{bmatrix}$$

مثال (١١):

باستخدام طريقة المرافقات، أوجد مقلوب المصفوفة:

$$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ & ٥ \end{bmatrix}$$ ثم تحقق من صحة النتيجة التي تصل إليها.

الحـل:

١- إيجاد قيمة محدد المصفوفة:

$$\begin{array}{l} -٢ع_٣ + ع_١ \leftarrow غ_١ \\ -٣ع_٣ + ع_٣ \leftarrow غ_٣ \end{array} \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ -٥ & ٢ & -٣ \\ -٤ & ٣ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ & ٤ \end{bmatrix} =$$

$$-٢ = (١٠ - ١٢) - = \begin{bmatrix} -٥ & -٣ \\ -٤ & -٢ \end{bmatrix} - =$$

٢- مصفوفة المرافقات ($م_و$):

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix} - \\ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} \end{bmatrix} = م_و$$

$$\begin{bmatrix} -٥ & -١ & ٧ \\ -٢ & -٢ & ٤ \\ ٣ & ١ & -٥ \end{bmatrix} =$$

٣- معكوس مصفوفة المرافقات ($م'_و$):

$$\begin{bmatrix} -٥ & ٤ & ٧ \\ ١ & -٢ & -١ \\ ٣ & -٢ & -٥ \end{bmatrix} = م'_و$$

٤- مقلوب المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} ٥ & -٤ & -٧ \\ -١ & ٢ & ١ \\ -٣ & ٢ & ٥ \end{bmatrix} \frac{١}{٢} = أ^{-١}$$

سابعاً: بعض خصائص المصفوفات

فيما يلي بعض خصائص المصفوفات:

١- $(\text{أ}')' = \text{أ}$ **٢-** $(\text{أ} + \text{ب})' = \text{أ}' + \text{ب}'$

٣- $(\text{أب})' = \text{ب}'\text{أ}'$ **٤-** $(\text{أب})^{-1} = \text{ب}^{-1}\text{أ}^{-1}$

٥- $\text{أ}\text{أ}^{-1} = \text{أ}^{-1}\text{أ} = I$ **٦-** $\text{أ}I = I\text{أ} = \text{أ}$

٧- إذا كانت أ مصفوفة متماثلة، ب مصفوفة متماثلة، وكانت أ و ب من نفس الدرجة فإن:
أ + ب هي مصفوفة متماثلة أيضاً بينما أب مصفوفة ليس من الضروري أن تكون متماثلة.

مثال (١٢):

إذا كانت: $\text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$

أثبت أن:

١- $(\text{أ} + \text{ب})' = \text{أ}' + \text{ب}'$ **٢-** $(\text{أب})' = \text{ب}'\text{أ}'$

٣- $(\text{أب})^{-1} = \text{ب}^{-1}\text{أ}^{-1}$ **٤-** $(\text{أ} + \text{ب})$ مصفوفة متماثلة

٥- أب مصفوفة غير متماثلة

الحـل:

١- $(\text{أ} + \text{ب}) = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$

$\therefore (\text{أ} + \text{ب})' = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$

$\text{أ}' + \text{ب}' = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$

أي أن: $(\text{أ} + \text{ب})' = \text{أ}' + \text{ب}'$

٢- $\text{أب} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٥ \\ ١٣ & ٩ \end{bmatrix}$

∴ $(أب)' = \begin{bmatrix} ١٣ & ٨ \\ ٩ & ٥ \end{bmatrix}$

$ب'أ' = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٣ & ٨ \\ ٩ & ٥ \end{bmatrix}$

أي أن: $(أب)' = ب'أ'$

٣- حيث أن: $أب = \begin{bmatrix} ٥ & ٨ \\ ٩ & ١٣ \end{bmatrix}$

ولإيجاد مقلوب هذه المصفوفة نتبع الخطوات التالية:

- قيمة محدد المصفوفة = ٨ × ٩ ــ ٥ × ١٣
  = ٧٢ ــ ٦٥ = ٧
- مصفوفة المرافقات = $\begin{bmatrix} -١٣ & ٩ \\ ٨ & -٥ \end{bmatrix}$
- معكوس مصفوفة المرافقات $(م'_{ق})$ = $\begin{bmatrix} -٥ & ٩ \\ ٨ & -١٣ \end{bmatrix}$

∴ مقلوب المصفوفة = $(أب)^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{-٥}{٧} & \frac{٩}{٧} \\ \frac{٨}{٧} & \frac{-١٣}{٧} \end{bmatrix}$

إيجاد مقلوب المصفوفة ب:

- قيمة محدد ب = $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٢ ــ ٩ = -٧

- مصفوفة المرافقات = $\begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ - معكوس مصفوفة المرافقات = $\begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$

∴ $ب^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٧} & \frac{-١}{٧} \\ \frac{-٢}{٧} & \frac{٣}{٧} \end{bmatrix}$

إيجاد مقلوب المصفوفة أ:

- قيمة محدد أ = $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٣ – ٤ = -١

- مصفوفة المرافقات = $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ - معكوس مصفوفة المرافقات = $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$

$$\therefore \text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{ب}^{-١}\,\text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{-١}{٧} & \frac{٣}{٧} \\ \frac{٣}{٧} & \frac{-٢}{٧} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٩}{٧} & \frac{-٥}{٧} \\ \frac{-١٣}{٧} & \frac{٨}{٧} \end{bmatrix}$$

أي أن: $(\text{أب})^{-١} = \text{ب}^{-١}\,\text{أ}^{-١}$

٤- في المطلوب (١)، تم إثبات أن:

$$\text{أ} + \text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} \quad \text{،} \quad (\text{أ} + \text{ب})' = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$$

وحيث أن أ + ب = $(\text{أ} + \text{ب})'$ فإن المصفوفة (أ + ب) هي مصفوفة متماثلة.

وفي واقع الأمر، فإن ذلك يأتي نتيجة للقاعدة المعروفة والقائلة بأنه إذا كان لدينا مصفوفتان كل منهما متماثلة فإن حاصل جمعهما – إن وجد – يكون مصفوفة متماثلة أيضاً.

٥- حصلنا على المصفوفة أب من قبل وكانت كالتالي:

$$\text{أب} = \begin{bmatrix} ٨ & ٥ \\ ١٣ & ٩ \end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة غير متماثلة مما يعني أن حاصل ضرب مصفوفتيْن متماثلتيْن لا يعطي بالضرورة مصفوفة متماثلة.

ثامناً: حل المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات

تناولنا من قبل في هذا الفصل كيفية حل المعادلات الخطية باستخدام المحددات (قاعدة كرامر). والآن نوضح كيف يمكن حل مجموعة من المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات.

المعادلات الخطية:

$$\text{أ}_{١١}\text{س} + \text{أ}_{٢١}\text{ص} + \text{أ}_{٣١}\text{ع} = \text{ب}_{١}$$
$$\text{أ}_{١٢}\text{س} + \text{أ}_{٢٢}\text{ص} + \text{أ}_{٣٢}\text{ع} = \text{ب}_{٢}$$
$$\text{أ}_{١٣}\text{س} + \text{أ}_{٢٣}\text{ص} + \text{أ}_{٣٣}\text{ع} = \text{ب}_{٣}$$

يمكن كتابتها في صورة مصفوفات على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ب}_{١} \\ \text{ب}_{٢} \\ \text{ب}_{٣} \end{bmatrix}$$

أي أن: $\text{أس} = \text{ب}$ ، حيث: $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{bmatrix}$ هي مصفوفة المعاملات،

$\text{س} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix}$ عمود المجاهيل ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} \text{ب}_{١} \\ \text{ب}_{٢} \\ \text{ب}_{٣} \end{bmatrix}$ عمود الحدود المطلقة.

وحيث أن: $\text{أس} = \text{ب}$، فإنه بضرب الطرفيْن في $\text{أ}^{-١}$ (ضرب قبلي) ينتج أن:

$$\text{أ}^{-١}\,\text{أس} = \text{أ}^{-١}\,\text{ب} \quad \therefore\ \text{س} = \text{أ}^{-١}\,\text{ب}$$

أي أنه يمكن الحصول على قيم المتغيرات س ، ص ، ع بضرب مقلوب مصفوفة المعاملات في مصفوفة الحدود المطلقة.

مثال (١٣):

باستخدام المصفوفات، حِل المعادلات التالية:

$$\text{س} - ٣\text{ص} + \text{ع} = -١$$
$$٣\text{س} + \text{ص} - ٤\text{ع} = -١$$
$$٦\text{س} - ٧\text{ص} + ٨\text{ع} = ٧$$

الحـل:

حيث أن:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & -٣ & ١ \\ ٢ & ١ & -٤ \\ ٦ & -٧ & ٨ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} -١ \\ -١ \\ ٧ \end{bmatrix}$$

فإنه لإيجاد المصفوفة أ سوف نتبع الخطوات التالية:

- قيمة محدد المصفوفة أ:

$$أ = \begin{vmatrix} ١ & -٣ & ١ \\ ٢ & ١ & -٤ \\ ٦ & -٧ & ٨ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٧ & -٦ \\ ٦ & ١١ & ٢ \end{vmatrix} \begin{matrix} ٣ع_{١} + ع_{٢} \leftarrow غ_{٢} \\ -ع_{١} + ع_{٣} \leftarrow غ_{٣} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ٧ & -٦ \\ ١١ & ٢ \end{vmatrix} = ١٤ + ٦٦ = ٨٠$$

- مصفوفة المرافقات $م_{و}$:

$$\text{مصفوفة المرافقات } (م_{و}) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ١ & -٤ \\ -٧ & ٨ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٢ & -٤ \\ ٦ & ٨ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٦ & -٧ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -٣ & ١ \\ -٧ & ٨ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٦ & ٨ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ١ & -٣ \\ ٦ & -٧ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -٣ & ١ \\ ١ & -٤ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & -٤ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ١ & -٣ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -٢٠ & -٤٠ & -٢٠ \\ ١٧ & ٢ & -١١ \\ ١١ & ٦ & ٧ \end{bmatrix}$$

- معكوس مصفوفة المرافقات $= \begin{bmatrix} -٢٠ & ١٧ & ١١ \\ -٤٠ & ٢ & ٦ \\ -٢٠ & -١١ & ٧ \end{bmatrix}$

- مقلوب المصفوفة $أ^{-١}$:

$$أ^{-١} = \frac{١}{٨٠} \begin{bmatrix} -٢٠ & ١٧ & ١١ \\ -٤٠ & ٢ & ٦ \\ -٢٠ & -١١ & ٧ \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \frac{1}{80} \begin{bmatrix} -20 & 17 & 11 \\ -40 & 2 & 6 \\ -20 & -11 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

أي أن: س = ١ ، ص = ١ ، ع = ١

تاسعاً: تطبيقات اقتصادية

سوف نتناول الآن بعض التطبيقات الاقتصادية والتي تُستخدم فيها المصفوفات. ولعل أهم هذه التطبيقات والتي سنتناولها هنا هي تحليل المدخلات والمخرجات، بالإضافة إلى تلك التطبيقات التي تم تناولها في دراستنا للمحددات. هذا وسوف تشمل التطبيقات الموضوعات التالية:

١- تحليل المدخلات والمخرجات ٢- تخطيط الإنتاج.
٣- توازن السوق **٤-** الضريبة والدعم الحكومي وتأثيرهما على توازن السوق.
٥- الإنتاج المختلط.

وسوف نتناول كلاً من هذه الموضوعات على النحو التالي:

١- تحليل المدخلات والمخرجات: Input-Output Analysis

كان ليونتيف Leontief أول من قدم نموذجاً للمدخلات والمخرجات وذلك في نهاية الأربعينيات. وقد نال جائزة نوبل في عام ١٩٧٣م عن دراسة أجراها على الاقتصاد الأمريكي. وتتلخص أهداف هذا النموذج في تجسيد العلاقة التفاعلية ما بين الصناعات أو القطاعات المختلفة داخل الاقتصاد الواحد، بالشكل الذي يمكِّن الاقتصادي من التنبؤ بمستويات الإنتاج المستقبلية لكل صناعة أو قطاع وذلك لمواجهة كميات الطلب المتوقَّع على مختلف المنتَجات. ولا يبدو هذا أمراً هيّناً نظراً للعلاقات المتداخلة والمتشابكة ما بين القطاعات والصناعات المختلفة داخل الاقتصاد الواحد، إذ أن التغير في الطلب على منتَج معين في صناعة معينة قد يؤدى إلى تغير في الطلب على منتَج آخر في صناعة أخرى. وعلى سبيل المثال، فإن الزيادة على طلب السيارات قد لا تؤدى فقط إلى زيادة على طلب قطع غيار السيارات، وإنما تؤدى أيضا إلى زيادة على منتجات صناعات أخرى مثل الصلب، الكاوتشوك إلى غير ذلك من الصناعات. وقد قسم ليونتيف نموذجه - في دراسته للاقتصاد الأمريكي - إلى ٥٠٠ صناعة متفاعلة فيما بينها.

هذا ولكون الموضوع ذي طابع اقتصادي سوف نتوخى التبسيط في عرضه وذلك بالصورة التي توضح لنا كيفية استخدام المصفوفات في تناول وتحليل المدخلات والمخرجات، مستعينين في ذلك بحالة تطبيقية ربما تكون أكثر عوناً للقارئ في فهم واستيعاب ما نريد قوله.

حالة تطبيقية:

لنفترض أن هناك قطاعيْن في اقتصاد بلد ما، وهذان القطاعان هما الزراعة والصناعة. وبهدف توضيح ما نصبو إليه في هذا الأمر، دعنا نفترض بأن العلاقة التفاعلية Interaction ما بين القطاعيْن هي كما يوضحه الجدول التالي:

جدول المدخلات – المخرجات بين قطاعي الزراعة والصناعة في أحد البلدان

المدخلات / المخرجات	القطـــاع			الناتج الإجمالي
	الزراعة	الصناعة	الطلب النهائي	
الزراعـــة	٦٠	٦٤	٧٦	٢٠٠
الصناعـــة	١٠٠	٤٨	١٢	١٦٠
العمـــل	٤٠	٤٨		

هذا ويمكننا تفسير محتويات هذا الجدول على النحو التالي:

العمودان الأول والثاني في هذا الجدول يعطيان مدخلات قطاعي الزراعة والصناعة مقاسة بوحدات ملائمة (مليون جنيه مثلاً). وفي العمود الأول نرى أن قطاع الزراعة قد استخدم ٦٠ وحدة من نفس منتَجه، بينما استخدم ١٠٠ وحدة من منتَج قطاع الصناعة. كما أن قطاع الصناعة قد استخدم ٦٤ وحدة من منتَج قطاع الزراعة و٤٨ وحدة من منتَجه ذاته. وبالإضافة إلى ذلك، فإن الصف الأخير يفيد بأن قطاع الزراعة قد استخدم ٤٠ وحدة عمل، بينما استخدم قطاع الصناعة ٤٨ وحدة عمل. وعادة ما يمثل الصف الأخير المدخلات الأولية Primary Inputs والتي تمثل العمل، الأرض، المواد الخام.... إلخ. وأما مجموع العموديْن الأول والثاني فيمثلان إجمالي المدخلات Inputs في كل من قطاعي الزراعة والصناعة وهو ٢٠٠ وحدة و١٦٠ وحدة على الترتيب. وقد بنى ليونتيف نموذجه على افتراض أنه مهما كانت الكمية المنتَجة فإنها تُستهلك بالكامل، وبعبارة أخرى، فإن إجمالي المدخلات يجب أن يساوي إجمالي المخرجات Outputs في أية صناعة أو أي قطاع يشمله اقتصاد البلد موضع الاعتبار. وهكذا فإن إجمالي المخرجات (الناتج الإجمالي) يجب أن يساوي ٢٠٠ وحدة و١٦٠ وحدة في كل من قطاعي الزراعة والصناعة على الترتيب.

والآن دعنا نناقش محتويات الصفيْن الأول والثاني في جدول المدخلات- المخرجات. وهذان الصفان يعطيان مخرجات كل من القطاعيْن. ففي الصف الأول، نجد أنه من بين ٢٠٠ وحدة كناتج إجمالي لقطاع الزراعة قد استخدم هذا القطاع ٦٠ وحدة من نفس منتَجه. بينما استخدم قطاع الصناعة ٦٤ وحدة من هذا المُنتَج. وأما الـ ٧٦ وحدة المتبقية من منتَج قطاع الزراعة فهي تمثل عدد الوحدات المتاحة من هذا المُنتَج لمواجهة الطلب النهائي للمستهلكين. وبعبارة أخرى، فإن الـ ٧٦ وحدة من منتَج قطاع الزراعة إنما تمثل ذلك الجزء من الإنتاج

الذي لم يدخل مرة أخرى ضمن نطاق التعاملات التبادلية بين القطاعات المختلفة. وبالمثل، فإنه من بين ١٦٠ وحـدة تمثل الناتج الإجمالي لقطاع الصناعة، قد استخدم قطاع الزراعة ١٠٠وحدة منه، بينما استخدم قطاع الصناعة نفسه ٤٨ وحدة من منتَجه هو. وأما كميـة الإنتاج المتبقية والتي تمثل ١٢ وحدة فهي الكمية المتاحة للطلب النهائي للمستهلكين.

هذا وتسمى مدخلات أي قطاع من القطاعات الأخرى ومن القطاع نفسه بـ " الطلب بين الصناعات " Interindustry Demand. وهو يمثل في حالتنا هذه ٦٠ + ١٠٠= ١٦٠ وحـدة في قطاع الزراعة و٦٤ + ٤٨= ١١٢ وحدة في قطاع الصناعة. وأما مدخلات القطاع من المدخلات الأولية والتي يمثلها الصف الأخير، وهي ٤٠ وحدة لقطاع الزراعة و٤٨ لقطاع الصناعة فيطلق عليها الطلب غير الصناعي Nonindustrial Demand.

هذا ولو افترضنا بأن الدراسات الاقتصادية قد أفادت بأنه في نهاية ثلاث سنوات سوف ينخفض الطلب على منتَج قطاع الزراعة ليصل إلى ٧٠ وحـدة (بدلاً من ٧٦ وحدة)، بينما في قطاع الصناعة فإنه من المتوقع أن يزداد الطلب على المنتَج زيادة كبيرة ليصل إلى ٦٠ وحدة بنهاية السنوات الثلاث. وهنا لعله من الملائم أن نثير تساؤلاً مهمّاً وهو: ما هو حجم الإنتاج المطلوب تحقيقه حتى يمكن مواجهـة الطلب الجديد على المُنتَج في كل من القطاعيْن؟

وكما أشرنا من قبل فإن كل قطاع لا يعمل بمفرده، وإنما هناك نوع من العلاقة بينهما قد تجعل الإنتاج الإجمالي في قطاع الزراعة يعتمد على الطلب النهائي على قطاع الصناعة، والعكس صحيح. وهكذا فإن هناك علاقة ما تربط بين القطاعيْن.

والآن دعنا نفترض أنه لكي يتمكن القطاعان من مواجهة الطلب على منتَجيهما بنهاية السنوات الثلاث، فإنه يجب أن ينتج قطاع الزراعة $س_١$ وحدة وأن ينتج قطاع الصناعة $س_٢$ وحدة.

ومن الجدول السابق، رأينا أنه لكي ينتج قطاع الزراعة ٢٠٠ وحدة فإنه استخدم ٦٠ وحدة من منتَجه و١٠٠ وحدة من مُنتَج قطاع الصناعة. وهكذا فإنه لإنتـاج $س_١$ وحـدة في قطـاع الزراعة فإن هذا القطاع يجـب أن يستخدم $\frac{٦٠}{٢٠٠}$ $س_١$ من إنتاجه الذاتي و $\frac{١٠٠}{٢٠٠}$ $س_١$ وحدة من منتج قطــاع الصناعة. وبالمثل، فإنه لإنتـاج $س_٢$ وحدة في قطاع الصنـاعة يجـب أن يستخدم هذا القطاع $\frac{٦٤}{١٦٠}$ $س_٢$ وحدة من منتج قطاع الزراعة و $\frac{٤٨}{١٦٠}$ $س_٢$ وحدة من منتَج القطاع الصناعي ذاته. هذا وإذا علمنا أن:

الإنتاج الإجمالي لقطاع الزراعة = الطلب بين الصناعات + الطلب غير الصناعي

= (عدد الوحدات المستهلَكة بواسطة قطاع الزراعة)

+ (عدد الوحدات المستهلَكة بواسطة قطاع الصناعة)

+ الطلب النهائي

فإننا نجد أن: $س_١ = \left(\frac{٦٠}{٢٠٠} س_١ + \frac{٦٤}{١٦٠} س_٢ \right) + ٧٠$

حيث أن الطلب النهائي الجديد على منتَج قطاع الزراعة هو ٧٠ وحدة.

وبالمثل:

الإنتاج الإجمالي لقطاع الصناعة = الطلب بين الصناعات + الطلب غير الصناعي

= عدد الوحدات المستهلَكة بواسطة قطاع الزراعة

+ عدد الوحدات المستهلَكة بواسطة قطاع الصناعة

+ الطلب النهائي

أي أن: $س_١ = \left(\frac{١٠٠}{٢٠٠} س_١ + \frac{٤٨}{١٦٠} س_٢ \right) + ٦٠$

حيث ٦٠ هي الطلب النهائي الجديد على منتج قطاع الصناعة.

وهكذا يمكن كتابة معادلتي الإنتاج الإجمالي لقطاعي الزراعة والصناعة في شكل مصفوفات على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} س_١ \\ س_٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٦٠}{٢٠٠} & \frac{٦٤}{١٦٠} \\ \frac{١٠٠}{٢٠٠} & \frac{٤٨}{١٦٠} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س_١ \\ س_٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٧٠ \\ ٦٠ \end{bmatrix}$$

أي أن: $س = أ س + ط$

حيث: $س = \begin{bmatrix} س_١ \\ س_٢ \end{bmatrix}$ وتسمى بمصفوفة المخرجات Output Matrix،

$أ = \begin{bmatrix} \frac{٦٠}{٢٠٠} & \frac{٦٤}{١٦٠} \\ \frac{١٠٠}{٢٠٠} & \frac{٤٨}{١٦٠} \end{bmatrix}$ وتسمى بمصفوفة المدخلات – المخرجات Input – Output Matrix

$$ط = \begin{bmatrix} ٧٠ \\ ٦٠ \end{bmatrix}$$ وتسمى بمصفوفة الطلب Demand Matrix.

هذا ويُطلق على عناصر مصفوفة المدخلات - المخرجات المعاملات الفنية Technical Coefficients. لذلك يسميها البعض أحياناً بمصفوفة المعاملات الفنية.

ولعله من الملائم الآن أن نفسر عناصر مصفوفة المدخلات - المخرجات. فإذا رمزنا للعنصر داخل المصفوفة أ بالرمز $أ_{ءهـ}$ بشكل عام. فإنه وكما وضحنا من قبل، نجد أنه من بين الـ ٢٠٠ وحدة والتي تمثل إجمالي مدخلات قطاع الزراعة هناك ٦٠ وحدة من منتَج القطاع نفسه و١٠٠ وحدة من منتَج قطاع الصناعة. وهكذا فإن العنصريْن $\frac{٦٠}{٢٠٠}$، $\frac{١٠٠}{٢٠٠}$ في العمود الأول لمصفوفة المدخلات – المخرجات إنما يمثلان نسب مدخلات قطاع الزراعة والتي تأتى من قطاع الزراعة نفسه وقطاع الصناعة على الترتيب. وبصفة عامة، فإن العنصر $أ_{ءهـ}$ يمثل نسبة ذلك الجزء من مدخلات القطاع (أو الصناعة) **هـ** والذي يأتي من إنتاج القطاع (أو الصناعة) ء.

وكما نلاحظ فإن عناصر مصفوفة المدخلات – المخرجات تتراوح في قيمتها ما بين صفر و١، وأن مجموع عناصر أي عمود لا يمكن أن تزيد عن الواحد الصحيح بأي حال من الأحوال. وعادة ما يقل مجموع عناصر العمود الواحد في مصفوفة المدخلات – المخرجات عن الواحد الصحيح طالما أن هناك مدخلات أولية (عمل، أرض، مواد أولية،.... إلخ).

وتأخذ مصفوفة المدخلات - المخرجات في حالتنا هذه الشكل:

$$أ = \begin{bmatrix} \frac{٦٠}{٢٠٠} & \frac{٦٤}{١٦٠} \\ \frac{١٠٠}{٢٠٠} & \frac{٤٨}{١٦٠} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠,٣ & ٠,٤ \\ ٠,٥ & ٠,٣ \end{bmatrix}$$

هذا ويمكن الحصول على المعاملات الفنية في مصفوفة المدخلات - المخرجات (أ) على النحو التالي:

العمود الأول:

لإيجاد عناصر العمود الأول الممثل لمدخلات قطاع الزراعة، نقوم بقسمة كل عدد من الأعداد الواقعة في هذا العمود والممثلة للطلب بين الصناعات (أي ٦٠، ١٠٠) على إجمالي مخرجات هذا القطاع وهو ٢٠٠ والموجود في العمود الأخير

الممثـل للنـاتج الإجمـالي (أي إجمـالي المخرجـات). وهكـذا نحصـل علـى المعـاملات الفنية في العمود الأول وهي: $\frac{٦٠}{٢٠٠}$، $\frac{١٠٠}{٢٠٠}$.

العمود الثاني:

وهو يمثل مدخلات القطاع الصناعي، حيث نقوم أيضاً بقسمة الأعداد الموجودة في هذا العمود والممثلة للطلب بين الصناعات (أي ٦٤، ٤٨) على إجمالي مخرجات القطاع الصناعي وهو ١٦٠، وبذلك نحصل علـى المعاملات الفنية في العمود الثاني وهي: $\frac{٦٤}{١٦٠}$، $\frac{٤٨}{١٦٠}$. وهكذا الأمـر بالنسبة للحالات التي يكون فيها أكثر من قطاعين. وتلزم الإشارة إلى أنه من السهل علينا أن ندرك أن مصفوفة المدخلات – المخرجات تكون دائماً مربعة.

هذا والمعادلة:

$$س = أ س + ط$$

تسمى بـ "معادلة المدخلات – المخرجات" Input – Output Equation.

ولكي نحصل على مصفوفة المخرجات س فإنه يجب استخدام جبر المصفوفات في هذا الشأن وذلك على النحو التالي:

حيث أن: $س = أ س + ط \quad \therefore \quad س - أ س = ط$

وهكذا يمكن كتابة ذلك على الصورة:

$I س - أ س = ط$ من المعروف أن $I س = س$

أي أن: $(I - أ) س = ط$

وبافتراض أن مقلوب المصفوفة $(I - أ)$ موجود، فإنه بضرب الطرفيْن في $(I - أ)^{-١}$ من جهة اليمين Pre-multiplication، فإننا نحصل على:

$$(I - أ)^{-١} (I - أ) س = (I - أ)^{-١} ط$$

$$\therefore \quad س = (I - أ)^{-١} ط$$

وهكذا فإنه يمكن تحديد مصفوفة المخرجات س بمجرد معرفة مقلوب المصفوفة $(I - أ)$.

وفي حالتنا هذه:

$$I - أ = \begin{bmatrix} ١ & صفر \\ صفر & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠,٣ & ٠,٤ \\ ٠,٥ & ٠,٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠,٧ & -٠,٤ \\ -٠,٥ & ٠,٧ \end{bmatrix}$$

ولإيجاد مقلوب المصفوفة I − أ، نتبع الخطوات التي سبق الإشارة إليها من قبل في هذا الفصل، حيث نجد أن:

محدد المصفوفة $(I - \text{أ}) = I - \text{أ} = \begin{vmatrix} -٠,٤ & ٠,٧ \\ ٠,٧ & -٠,٥ \end{vmatrix} = ٠,٤٩ - ٠,٢٠ = ٠,٢٩$

مصفوفة المرافقات $= \begin{bmatrix} ٠,٥ & ٠,٧ \\ ٠,٧ & ٠,٤ \end{bmatrix}$

معكوس مصفوفة المرافقات $= \begin{bmatrix} ٠,٤ & ٠,٧ \\ ٠,٧ & ٠,٥ \end{bmatrix}$

$\therefore (I - \text{أ})^{-1} = \frac{١}{٠,٢٩} \begin{bmatrix} ٠,٤ & ٠,٧ \\ ٠,٧ & ٠,٥ \end{bmatrix} = \frac{١}{٢٩} \begin{bmatrix} ٤٠ & ٧٠ \\ ٧٠ & ٥٠ \end{bmatrix}$

وبذلك يمكننا الحصول على مصفوفة المخرجات **س** كما يلي:

$$\text{س} = (I - \text{أ})^{-1}\ \text{ط}$$

أي أن: $\begin{bmatrix} \text{س}_١ \\ \text{س}_٢ \end{bmatrix} = \frac{١}{٢٩} \begin{bmatrix} ٤٠ & ٧٠ \\ ٧٠ & ٥٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٧٠ \\ ٦٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥١,٧ \\ ٢٦٥,٥ \end{bmatrix}$

وهكذا فإن قطاع الزراعة يجب أن ينتج ٢٥١,٧ وحدة، كما يجب أن ينتج قطاع الصناعة ٢٦٥,٥ وحدة، وذلك حتى يتم التمكن من مواجهة الطلب النهائي المخطط له.

بعد ذلك يمكننا تقدير حجم العمل اللازم تدبيره لإنتاج الكمية المطلوبة اللازمة لمواجهة الطلب النهائي المخطط له وذلك كما يلي:

في قطاع الزراعة: حيث أنه كانت هناك حاجة لـ ٤٠ وحدة عمل لإنتاج ٢٠٠ وحدة كناتج إجمالي (إجمالي المخرجات)، فإننا نستطيع القول بـأن العمل يمثل $\frac{٤٠}{٢٠٠} = ٠,٢$ من إجمالي المخرجات. لذلك فإنه لإنتاج ٢٥١,٧ وحدة فإن حجم العمل المطلوب هو: ٢٥١,٧ × ٠,٢ ، أي ٥٠,٣٤ وحدة.

في قطاع الصناعة: حجم العمل المطلوب = $\frac{٤٨}{١٦٠} \times ٢٦٥,٥ = ٧٩,٦٥$ وحدة.

ولعل المثال التالي يلقى المزيد من الضوء على تحليل المدخلات – المخرجات وذلك إذا ما اعتبرنا ثلاث صناعات بدلاً من اثنتيْن.

مثال (١٤):

الجدول التالي يوضح التفاعل Interaction ما بين ثلاث صناعـات P، Q، R داخل اقتصاد ما:

المدخلات / المخرجات	الصناعـة P	Q	R	الطلب النهائي	إجمالي المخرجات
الصناعة P	٢٢	٨٠	٧٦	٤٢	٢٢٠
الصناعة Q	٨٨	٤٠	٣٨	٣٤	٢٠٠
الصناعة R	٦٦	٦٠	٥٧	٧	١٩٠
العمــــل	٤٤	٢٠	١٩		

المطلوب:

أولاً: إيجاد مصفوفة المدخلات – المخرجات.

ثانياً: تحديد مصفوفة المخرجات إذا علمت أن الطلب النهائي الجديد هو ٦٨، ٥١، ١٧ للصناعات P، Q، R، على الترتيب.

ثالثاً: ما هو حجم العمل حينئذ لكل من الصناعات الثلاثة؟

الحـل:

أولاً: مصفوفة المدخلات – المخرجات (أ) يمكن تكوينها كما يلي

$$أ = \begin{bmatrix} \frac{٢٢}{٢٢٠} & \frac{٨٠}{٢٠٠} & \frac{٧٦}{١٩٠} \\ \frac{٨٨}{٢٢٠} & \frac{٤٠}{٢٠٠} & \frac{٣٨}{١٩٠} \\ \frac{٦٦}{٢٢٠} & \frac{٦٠}{٢٠٠} & \frac{٥٧}{١٩٠} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠,١ & ٠,٤ & ٠,٤ \\ ٠,٤ & ٠,٢ & ٠,٢ \\ ٠,٣ & ٠,٣ & ٠,٣ \end{bmatrix}$$

ثانياً: مصفوفة الطلب ط تأخذ الصورة : $ط = \begin{bmatrix} ٦٨ \\ ٥١ \\ ١٧ \end{bmatrix}$

وحيث أن س = $(I - \text{أ})^{-١}$ ط ، س هي مصفوفة المخرجات، فإنه يلزم إيجاد مقلوب المصفوفة (I − أ) وذلك على النحو التالي:

$$I - \text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠,١ & ٠,٤ & ٠,٤ \\ ٠,٤ & ٠,٢ & ٠,٢ \\ ٠,٣ & ٠,٣ & ٠,٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٠,٩ & ٠,٤ & -٠,٤ \\ -٠,٤ & ٠,٨ & -٠,٢ \\ -٠,٣ & -٠,٣ & ٠,٧ \end{bmatrix}$$

$$\text{محدد المصفوفة } I - \text{أ} = \begin{vmatrix} ٠,٩ & ٠,٤ & -٠,٤ \\ -٠,٤ & ٠,٨ & -٠,٢ \\ -٠,٣ & -٠,٣ & ٠,٧ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ٠,٩ & ٠,٤ & -٠,٤ \\ -٠,٤ & ٠,٨ & -٠,٢ \\ -٠,٣ & -٠,٣ & ٠,٧ \end{vmatrix} \begin{array}{l} -٢\text{ع}_٣ + \text{ع}_١ \rightarrow \text{غ}_١ \\ ٤\text{ع}_٣ + \text{ع}_١ \rightarrow \text{غ}_٢ \end{array}$$

$$= ٠,٢ \begin{bmatrix} ١,٧ & -٢,٠ \\ -١,٧ & ٢,٥ \end{bmatrix}$$

$$= ٠,٢ \; [١,٧ \times ٢,٥ - (-٢,٠ \times -١,٧)]$$

$$= ٠,٢ \times ٠,٨٥ = ٠,١٧$$

مصفوفة المرافقات للمصفوفة I − أ هي:

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ٠,٨ & -٠,٢ \\ -٠,٣ & ٠,٧ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -٠,٤ & -٠,٢ \\ -٠,٣ & ٠,٧ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -٠,٤ & ٠,٨ \\ -٠,٣ & -٠,٣ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -٠,٤ & -٠,٤ \\ -٠,٣ & ٠,٧ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٠,٩ & -٠,٤ \\ -٠,٣ & ٠,٧ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٠,٩ & -٠,٤ \\ -٠,٣ & -٠,٣ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -٠,٤ & -٠,٤ \\ ٠,٨ & -٠,٢ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٠,٩ & -٠,٤ \\ -٠,٤ & -٠,٢ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٠,٩ & -٠,٤ \\ -٠,٤ & ٠,٨ \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۰,۳٦ & ۰,۳٤ & ۰,٥۰ \\ ۰,۳۹ & ۰,٥۱ & ۰,٤۰ \\ ۰,٥٦ & ۰,۳٤ & ۰,٤۰ \end{bmatrix}$$

معكوس مصفوفة المرافقات = $\begin{bmatrix} ۰,٤۰ & ۰,٤۰ & ۰,٥۰ \\ ۰,۳٤ & ۰,٥۱ & ۰,۳٤ \\ ۰,٥٦ & ۰,۳۹ & ۰,۳٦ \end{bmatrix}$

$$\therefore (I - أ)^{-۱} = \frac{۱}{۰,۱۷} \begin{bmatrix} ۰,٤۰ & ۰,٤۰ & ۰,٥۰ \\ ۰,۳٤ & ۰,٥۱ & ۰,۳٤ \\ ۰,٥٦ & ۰,۳۹ & ۰,۳٦ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۷} \begin{bmatrix} ٤۰ & ٤۰ & ٥۰ \\ ۳٤ & ٥۱ & ۳٤ \\ ٥٦ & ۳۹ & ۳٦ \end{bmatrix}$$

وبذلك يمكننا الحصول على مصفوفة المخرجات (س) حيث:

$$س = (I - أ)^{-۱} \; ط$$

$$= \frac{۱}{۱۷} \begin{bmatrix} ٤۰ & ٤۰ & ٥۰ \\ ۳٤ & ٥۱ & ۳٤ \\ ٥٦ & ۳۹ & ۳٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٦۸ \\ ٥۱ \\ ۱۷ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۷} \begin{bmatrix} ٦۱۲۰ \\ ٥٤۹۱ \\ ٥۳۸۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳٦۰ \\ ۳۲۳ \\ ۳۱۷ \end{bmatrix}$$

وهذا يعنى أن كمية الإنتاج المطلوبة من الصناعات الثلاثة P و Q و R والتي تمكِّن من مواجهة الطلب النهائي المخطط له يجب أن تكون ٣٦٠، ٣٢٣، ٣١٧ وحدة على الترتيب.

ثالثاً: تقدير حجم العمل المطلوب في كل صناعة

حجم العمل المطلوب في الصناعة P = $\frac{٤٤}{٢٢٠} \times ٣٦٠ = ٧٢$ وحدة.

حجم العمل المطلوب في الصناعة Q = $\frac{٢٠}{٢٠٠} \times ٣٢٣ = ٣٢,٣$ وحدة.

حجم العمل المطلوب في الصناعة R = $\frac{١٩}{١٩٠} \times ٣١٧ = ٣١,٧$ وحدة.

٢- تخطيط الإنتاج: Production Planning

يمكن استخدام المصفوفات في تخطيط الإنتاج وذلك كما يوضحه المثالان (١٥) و (١٦).

مثال (١٥):

تقوم شركة بإنتاج خمسة منتَجات. وقد قسمت الشركة مناطق بيع منتَجاتها إلى ثلاثة مناطق. وتوضح المصفوفة م المبيعات المتوقَّعة لكل منتَج من المنتَجات الخمس في كل منطقة من مناطق البيع الثلاث وذلك خلال شهر قادم.

المنطقة

$$\text{المنتَج}\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} ٣ & ٢ & ١ \end{array} \\ \begin{array}{c} ١ \\ ٢ \\ ٣ \\ ٤ \\ ٥ \end{array} & \begin{bmatrix} ٣٥٠ & ٢٠٠ & ٥٠٠ \\ ١٠٠ & ٣٠٠ & ٤٠٠ \\ ٥٠ & ٤٢٥ & ٢٥٠ \\ ٣٥٠ & ١٥٠ & ١٠٠ \\ ٢٢٥ & ١٧٥ & ٢٠٠ \end{bmatrix} \end{array} = \text{م}$$

ويتم تصنيع كل منتَج باستخدام توليفة من أربعة مكوّنات Components قياسية. وتوضح المصفوفة **ص** عدد الوحدات لكل مكوِّن استُخدم في تصنيع كل منتَج.

المكـوِّن

$$\text{المنتَج}\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} ٤ & ٣ & ٢ & ١ \end{array} \\ \begin{array}{c} ١ \\ ٢ \\ ٣ \\ ٤ \\ ٥ \end{array} & \begin{bmatrix} ٠ & ٢ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ & ١ \\ ٣ & ٠ & ١ & ٢ \\ ١ & ١ & ٢ & ٠ \\ ١ & ٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix} \end{array} = \text{ص}$$

هذا ويتطلب تصنيع كل مكوِّن استهلاك أنواع معينة من المصادر. وتشير المصفوفة **ك** إلى الكميات المستخدمة من تلك المصادر في إنتاج وحدة واحدة من كل مكوِّن، علماً بأن هذه المصادر تتمثل في ثلاثة أجزاء قياسية وعدد ساعات عمل الإنتاج وعدد ساعات التجميع.

المصدر

$$\text{المكوِّن}\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \text{عمل (تجميع)} & \text{عمل (إنتاج)} & \text{الجزء (٣)} & \text{الجزء (٢)} & \text{الجزء (١)} \end{array} \\ \begin{array}{c} ١ \\ ٢ \\ ٣ \\ ٤ \end{array} & \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ & ٠ & ٢ \\ ١ & ٥ & ٢ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ & ١ & ٢ & ٠ \\ ٦ & ١ & ١ & ٤ & ٠ \end{bmatrix} \end{array} = \text{ك}$$

كما تمثل المصفوفة ف تكلفة كل من المصادر الخمسة. حيث تبلغ تكلفة الجزء (١) ٢٥ جنيها، والجزء (٢) ١٥ جنيهاً، والجزء (٣) ٣٠ جنيهاً، وكل ساعة عمل في قسم الإنتاج تكلف ١٠ جنيهات، وأخيراً كل ساعة عمل في قسمة التجميع تكلف ٨ جنيهات.

أي أن:

ف = (٢٥ ١٥ ٣٠ ١٠ ٨)

المطلوب:

باستخدام المصفوفات، أوجد ما يلي:

أولاً: الطلب الإجمالي المتوقَّع على كل منتَج من المنتَجات الخمسة.

ثانياً: الكمية المطلوبة لكل مكوِّن من المكونات الأربعة.

ثالثاً: الكمية اللازمة من كل مصدر لإنتاج المكوِّنات الأربعة.

رابعاً: التكلفة الإجمالية لإنتاج المنتَجات المختلفة.

الحـل:

أولاً: مع أنه يمكن تحديد الطلب الإجمالي المتوقَّع على كل منتَج من المنتَجات بجمع عناصر كل صف من المصفوفة م، إلا أن الهدف هنا هو توضيح كيفية استخدام المصفوفات في هذا الأمر، لذلك سوف نضرب المصفوفة م في متجه عمود من الدرجة ٣ × ١ كل عنصر من عناصره يساوي الواحد الصحيح. وسوف يكون الناتج الطلب الإجمالي المتوقع على كل منتَج. دعنا نرمز لمصفوفة حاصل الضرب بالرمز **هـ** أي أن:

$$\text{هـ} = \text{م}\begin{bmatrix}\text{١}\\ \text{١}\\ \text{١}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{٥٠٠} & \text{٢٠٠} & \text{٣٥٠}\\ \text{٤٠٠} & \text{٣٠٠} & \text{١٠٠}\\ \text{٢٥٠} & \text{٤٢٥} & \text{٥٠}\\ \text{١٠٠} & \text{١٥٠} & \text{٣٥٠}\\ \text{٢٠٠} & \text{١٧٥} & \text{٢٢٥}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{١}\\ \text{١}\\ \text{١}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{l} \begin{bmatrix}\text{١٠٥٠}\\ \text{٨٠٠}\\ \text{٧٢٥}\\ \text{٦٠٠}\\ \text{٦٠٠}\end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l}\text{إجمالي الطلب على المنتج (١)}\\ \text{إجمالي الطلب على المنتج (٢)}\\ \text{إجمالي الطلب على المنتج (٣)}\\ \text{إجمالي الطلب على المنتج (٤)}\\ \text{إجمالي الطلب على المنتج (٥)}\end{array}$$

ثانياً: حيث أن هناك أربعة مكوِّنات مستخدمة في العملية الإنتاجية فإننا نحتاج إلى الوصول إلى أربعة أعداد يمثل كل منها الكمية المطلوبة من كل مكوِّن. وهذا يتأتَّى بضرب معكوس المصفوفة **هـ**، أي **هـ**َ، في المصفوفة **ص**. وإذا رمزنا إلى مصفوفة حاصل الضرب بالرمز **ء** فإننا نحصل على:

$$\text{ء} = \text{هـ}'\text{ص} = \begin{bmatrix} ٦٠٠ & ٦٠٠ & ٧٢٥ & ٨٠٠ & ١٠٥٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٢ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ & ١ \\ ٣ & ٠ & ١ & ٢ \\ ١ & ١ & ٢ & ٠ \\ ١ & ٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣٣٧٥ & ٥٣٠٠ & ٣٩٢٥ & ٣٩٠٠ \end{bmatrix}$$

وهذا يشير إلى أن الكميات المطلوب من المكوِّنات الأربعة هي على الترتيب ٣٩٠٠ ، ٣٩٢٥، ٥٣٠٠ ، ٣٣٧٥ وحدة.

ثالثاً: الكمية اللازمة من كل مصدر من المصادر الخمسة لإنتاج المكونات الأربعة يمكن الحصول عليها بضرب مصفوفة الكميات المطلوبة من المكوِّنات الأربعة (ء) في المصفوفة **ك**. ودعنا نرمز لمصفوفة حاصل الضرب بالمصفوفة **ل**، أي أن:

$$\text{ل} = \text{ءك} = \begin{bmatrix} ٣٣٧٥ & ٥٣٠٠ & ٣٩٢٥ & ٣٩٠٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ & ٠ & ٢ \\ ١ & ٥ & ٢ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ & ١ & ٢ & ٠ \\ ٦ & ١ & ١ & ٤ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٤٦٤٧٥ & ٥٢٠٠٠ & ٢٠٤٢٥ & ٣٥٨٧٥ & ١١٧٢٥ \end{bmatrix}$$

وهذا يعنى أن عدد الوحدات المطلوبة من كل من الجزء (١)، الجزء (٢)، الجزء (٣)، ساعات عمل الإنتاج، ساعات عمل التجميع هي ١١٧٢٥، ٣٥٨٧٥ ، ٢٠٤٢٥ ، ٥٢٠٠٠ ، ٤٦٤٧٥ وحدة على الترتيب.

رابعاً: يمكن إيجاد تكلفة الإنتاج الإجمالية عن طريق ضرب المصفوفة **ل** في معكوس المصفوفة ف. فإذا رمزنا لمصفوفة حاصل الضرب بالرمز **ت** فإن:

$$\text{ت} = \text{لف} = \begin{bmatrix} ٤٦٤٧٥ & ٥٢٠٠٠ & ٢٠٤٢٥ & ٣٥٨٧٥ & ١١٧٢٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢٥ \\ ١٥ \\ ٣٠ \\ ١٠ \\ ٨ \end{bmatrix}$$

= ٢٥٣٥٨٠٠ جنيها.

أي أن إجمالي تكلفة الإنتاج هو ٢٥٣٥٨٠٠ جنيها.

مثال (١٦):

يقوم مصنع بإنتاج ثلاثة منتَجات أ، ب، **جـ**، ويتطلب إنتاج كل منها كميات معينة من ثلاثة أنواع من المواد الخام بالإضافة إلى العمل. والمصفوفة **س** تعطى متطلبات كل منتَج من المواد الخام والعمل:

$$\text{س} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} ١ & ٢ & ٣ & \text{العمل} \end{array} \\ \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٢ & ٦ \\ ٣ & ٢ & ٨ & ٨ \\ ٤ & ٢ & ٥ & ٤ \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{المنتَج أ} \\ \text{المنتَج ب} \\ \text{المنتَج جـ} \end{array} \end{array}$$

(المواد الخام: ١، ٢، ٣)

هذا علماً بأن المواد الخام مُعبَّراً عنها بالجنيهات لكل وحدة، في حين يُقاس العمل بعدد الساعات لكل وحدة.

فإذا علمت أن تكلفة المواد الخام هي ٢ جنيه، ٨ جنيهات، ٢,٥ جنيه لكل كيلو جرام على الترتيب، كما تبلغ تكلفة العمل ٨ جنيه لكل ساعة. وكان المصنـع يرغـب في إنتاج ٨٠٠، ٢٠٠٠، ٦٠٠ وحدة من المنتَجـات أ، ب، **جـ** على الترتيب.

المطلوب:

باستخدام المصفوفات، أوجد ما يلي:

أولاً: الكميات الإجمالية من المواد الخام والعمل اللازمة لإنتاج الكميات المطلوبة من المنتَجات المختلفة.

ثانياً: مستخدماً نتائجك في " **أولاً** "، احسب التكلفة الإجمالية للإنتاج.

الحـل:

أولاً: دعنا نرمز أولاً للمتجه الذي يمثل الكميات المطلوب إنتاجها من المنتَجات الثلاث بالرمز ك، حيث:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{المنتَج (أ)} & \text{المنتَج (ب)} & \text{المنتَج (جـ)} \end{array} \\ \text{ك} = & \begin{bmatrix} ٨٠٠ & ٢٠٠٠ & ٦٠٠ \end{bmatrix} \end{array}$$

وهنا يمكن تحديد الكميات الإجمالية من المواد الخام والعمل اللازمة لإنتاج الكميات المطلوبة والمعبَّر عنها في المتجه **ك**، وذلك بضرب المتجه ك في المصفوفة **س**. فإذا رمزنا لمصفوفة حاصل الضرب بالمصفوفـة م، فإن:

$$
م = \begin{array}{ccc} \text{المنتَج (أ)} & \text{المنتَج (ب)} & \text{المنتَج (جـ)} \\ \end{array}
\begin{bmatrix} ٨٠٠ & ٢٠٠٠ & ٦٠٠ \end{bmatrix}
\quad
\begin{array}{c} \text{المواد الخام} \\ \begin{array}{cccc} ١ & ٢ & ٣ & \text{العمل} \end{array} \\ \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٢ & ٦ \\ ٣ & ٢ & ٨ & ٨ \\ ٤ & ٢ & ٥ & ٤ \end{bmatrix} \end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \text{المنتَج أ} \\ \text{المنتَج ب} \\ \text{المنتَج جـ} \end{array}
$$

$$
= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{المواد الخام (كجم)} & \text{ساعات العمل} \end{array} \\ \begin{bmatrix} ١٠٠٠٠ & ٧٦٠٠ & ٢٠٦٠٠ & ٢٣٢٠٠ \end{bmatrix} \end{array}
$$

أي أن الكميات المطلوبة من المواد الخام (١، ٢، ٣) والعمل هي ١٠٠٠٠، ٧٦٠٠، ٢٠٦٠٠ كجم، ٢٣٢٠٠ ساعة على الترتيب.

ثانياً: يمكن إيجاد التكلفة الإجمالية للإنتاج بضرب المصفوفة م في المصفوفة س. أي أن:

$$
\text{التكلفة الإجمالية} = \begin{bmatrix} ١٠٠٠٠ & ٧٦٠٠ & ٢٠٦٠٠ & ٢٣٢٠٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ \\ ٨ \\ ٢,٥ \\ ٨ \end{bmatrix}
$$

= ١٠٠٠٠(٢) + ٧٦٠٠ (٨) + ٢٠٦٠٠ (٢,٥) + ٢٣٢٠٠ (٨)

= ٣١٧٩٠٠ جنيه

٣- توازن السوق: Market Equilibrium

لا نود أن نزيد أكثر مما كُتِب عن توازن السوق عند تناولنا لهذا الموضوع في الفصل الأول وكذلك عند تناولنا تطبيقات المحددات في الفصل الرابع. ولكن الجديد هنا هو استخدام المصفوفات – بدلاً من المحددات – في تحديد سعر وكمية التوازن. أي استخدام المصفوفات في حل دالتي العرض والطلب، وذلك كما يتضح في المثال التالي:

مثال (١٧):

باستخدام دالتي العرض والطلب الواردتيْن في مثال (١٨) في الفصل السابق، حدِّد سعر وكمية التوازن مستخدماً في ذلك المصفوفات.

الحــل:

حيث أن الدالتيْن هما:

٣س + ٥ك = ٢٢ **دالة الطلب**

٢س – ٣ك = ٢ **دالة العرض**

فإنه يمكن وضع المعادلتيْن في شكل مصفوفات على الصورة: أس = ب

حيث: $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ ، $س = \begin{bmatrix} س \\ ك \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢٢ \\ ٢ \end{bmatrix}$

وحيث أن: $س = أ^{-١} ب$

فإن المطلوب هو إيجاد مقلوب المصفوفة أ وذلك على النحو التالي:

$$\text{المحدد } أ = |أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{vmatrix} = -٩ - ١٠ = -١٩$$

$$\text{مصفوفة المرافقات} = \begin{bmatrix} -٣ & -٢ \\ -٥ & ٣ \end{bmatrix} \text{ ، معكوس مصفوفة المرافقات} = \begin{bmatrix} -٣ & -٥ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$\therefore أ^{-١} = \frac{-١}{١٩} \begin{bmatrix} -٣ & -٥ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix} = \frac{١}{١٩} \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} س \\ ك \end{bmatrix} = \frac{١}{١٩} \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢٢ \\ ٢ \end{bmatrix} = \frac{١}{١٩} \begin{bmatrix} ٧٦ \\ ٣٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

أي أن: سعر التوازن = ٤ ، كمية التوازن = ٢

وهي نفس النتيجة التي توصلنا إليها باستخدام المحددات.

٤- الضرائب الإضافية والدعم الحكومي وتوازن السوق:
Additive Tax & Subsidy and Market Equilibrium

وهنا أيضا يمكن استخدام المصفوفات - بدلاً من المحددات - في تحديد سعر وكمية التوازن بعد فرض ضرائب أو تقديم دعم حكومي للسلع. وسوف نترك للقارئ إعادة حل مثال (٢٠) في الفصل السابق مستخدماً في ذلك المصفوفات بدلاً من المحددات، حيث سيصل إلى نفس النتائج.

٥- الإنتاج المختلط: Production Mix

لقد تناولنا في الفصل السابق من هذا الكتاب موضوع الإنتاج المختلط، ورأينا كيف يمكن تحديد كميات الإنتاج للمنتجات المختلفة في ظل الإمكانات والطاقات الإنتاجية المُتاحة. وهنا سوف نتناول نفس الموضوع ولكن باستخدام المصفوفات بدلاً من المحددات في هذا الشأن. ويتضح ذلك من المثال التالي:

مثال (١٨):

المطلوب إعادة حل مثال (٢١) في الفصل السابق باستخدام المصفوفات بدلاً من المحددات.

الحـل:

لقد توصلنا في مثال (٢١) السابق الإشارة إليه إلى أن مجموعة المعادلات التي تحكم كميات الإنتاجية بالطاقة الإنتاجية هي:

$$٢س_{١} + س_{٢} + ٣س_{٣} = ١٣٠٠$$

$$٤س_{١} + ٣س_{٢} + ٢س_{٣} = ١٩٠٠$$

$$س_{١} + ٤س_{٢} + ٢س_{٣} = ١١٠٠$$

وهذه المعادلات يمكن وضعها في شكل مصفوفات على النحو التالي:

حيث: $أس = ب$

$$أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٦ & ٢ & ٤ \\ ٤ & ٣ & ٩ \end{bmatrix} \quad ، \quad س = \begin{bmatrix} س_{١} \\ س_{٢} \\ س_{٣} \end{bmatrix} \quad ، \quad ب = \begin{bmatrix} ١٣٠٠ \\ ١٩٠٠ \\ ١١٠٠ \end{bmatrix}$$

وحيث أن: $س = أ^{-١}ب$

فإنه يلزم إيجاد مقلوب المصفوفة أ كما يلي:

$|أ| = ٢٩$ سبق إيجادها في مثال (٢١) في الفصل السابق.

$$\text{مصفوفة المرافقات} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} - \\ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٣ & ٦- & ٢- \\ ٧- & ١ & ١٠ \\ ٢ & ٨ & ٧- \end{bmatrix}$$

معكوس مصفوفة المرافقات = $\begin{bmatrix} -2 & 10 & -7 \\ -6 & 1 & 8 \\ 13 & -7 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ \text{أ}^{-1} = \frac{1}{29}\begin{bmatrix} -2 & 10 & -7 \\ -6 & 1 & 8 \\ 13 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

أي أن:

$$\begin{bmatrix} \text{س}_1 \\ \text{س}_2 \\ \text{س}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{29}\begin{bmatrix} -2 & 10 & -7 \\ -6 & 1 & 8 \\ 13 & -7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1300 \\ 1900 \\ 1100 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{29}\begin{bmatrix} 8700 \\ 2900 \\ 5800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix}$$

أي أنه يمكن للشركة أن تستغل كامل طاقتها الإنتاجية وذلك بإنتـاج ٣٠٠، ١٠٠، ٢٠٠ وحدة من المنتَجات أ، ب، **جـ** على الترتيب.

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها باستخدام المحددات.

تمارين

الفصل الخامس

١- إذا كانت:

أ = $\begin{bmatrix} ٠ & -١ & ٣ \\ ٣ & ٤ & ١ \\ ٢ & ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٦ & ٠ & ٢ \\ ٠ & -١ & ١ \\ -١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

أولاً: أثبت أن:

١- اب ≠ اب **٢-** (اب)´ = ب´ا´

٣- (اب)$^{-١}$ = ب$^{-١}$ ا$^{-١}$

ثانياً: أوجد المصفوفات التالية:

١- ٣ا − ٢ب ٢- ٢ا + ب

٢- أوجد مقلوب المصفوفات التالية:

أ = $\begin{bmatrix} -١ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ١ & ٣ \\ ٣ & -٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٢ \\ ١ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}$

مستخدماً في ذلك:

- طريقة المرافقات **-** طريقة جاوس

٣- إذا كانت:

أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ & -١ \\ ٦ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٦ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ١ & ١ & ١ \\ ٣ & ٥ & ٠ \end{bmatrix}$ ،

جـ = $\begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ١ \\ -١ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

أولاً: أثبت أن:

١- $\text{أ}(\text{ب} + \text{جـ}) = \text{أب} + \text{أجـ}$ **٢-** $(\text{ب} + \text{جـ})\text{أ} = \text{ب أ} + \text{جـ أ}$

٣- $\text{أ}(\text{ب جـ}) = (\text{أب})\,\text{جـ}$

ثانياً: **١-** أوجد المصفوفة ى، إذا كانت: $\text{أى} = \text{جـ}$

٢- أوجد المصفوفة هـ، إذا كانت: $\text{هـ ب} = \text{أ}$

٤- أثبت أن المصفوفات التالية:

$$\begin{bmatrix} \frac{٢}{٣} & \frac{١}{٣} & \frac{٢}{٣} \\ \frac{١}{٣} & \frac{٢}{٣} & \frac{١}{٣} \\ \frac{١}{٣} & \frac{٢}{٣} & \frac{٢}{٣} \end{bmatrix} \text{،} \quad \begin{bmatrix} ٢ & ٢ & ١- \\ ٢ & ١- & ٢ \\ ١- & ٢ & ٢ \end{bmatrix}$$

هي مصفوفات متعامدة.

٥- أثبت أن:

محدد المصفوفة [هـ أ] = $\text{هـ}^{\text{ن}}$ { محدد [أ] }.

حيث: هـ مقدار ثابت،

أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن × ن

٦- إذا كانت:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣- & ٣ \\ ٤ & ٣- & ٢ \\ ١ & ١- & ٠ \end{bmatrix}$$

أثبت أن: $\text{أ}^{٣} = \text{أ}^{١-}$

٧- أوجد قيمة س التي تجعل من غير الممكن إيجاد مقلوب للمصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٢ & ٣ - \text{س} \\ ١ & ٤ - \text{س} & ١ \\ ١- - \text{س} & ٤- & ٢- \end{bmatrix}$$

٨- حِل المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات:

أ- س + ٢ص + ٣ع = ١٤
٢س – ص + ٥ع = ١٥
٣س – ٢ص – ٤ع = -١٣

ب- ٢س + ٣ص + ع = ٩
س + ٢ص + ٣ع = ٦
٣س + ص + ٢ع = ٨

ج- س + ص + ع = ٨
س – ٢ص + ٢ع = ٦
٣س + ٥ص – ٧ع = ١٤

٩- أثبت أن كلا من المصفوفتيْن التاليتيْن ليس لها مقلوب مستخدماً في ذلك:
أ - طريقة المحددات   ب - طريقة جاوس

$$ج = \begin{bmatrix} -٣ & ٥ & ٤ \\ ١ & -١ & -١ \\ ٢ & ١٢ & ٥ \end{bmatrix} ، \quad د = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ & ٢ \\ ١ & -٢ & ٣ \\ ٣ & -٤ & ١ \end{bmatrix}$$

١٠- وضِّح ما إذا كانت أي من العبارات التالية صحيحة أم خاطئة، ثم صحِّح العبارة الخطأ:

أ. إذا كانت كل من المصفوفتيْن أ، ب من نفس الدرجة، فإن المصفوفتيْن أب و بأ موجودتان.

ب. إذا كانت أ، ب مصفوفتان، وكانت المصفوفتان أب، بأ موجودتان فإن أب، بأ لا يمكن أن تكونا متساويتين.

ج. لو أن المصفوفة أ من أي درجة فإن:
أI = Iأ = أ

د. إذا كانت: أ = أ + ب فإن المصفوفة ب هي مصفوفة صفرية.

هـ. إذا كانت: أب = صفر
فإن إحدى المصفوفتيْن عبارة عن مصفوفة صفرية.

١١- الجدول التالي يوضح التفاعل ما بين قطاعي الزراعة والتصنيع في اقتصاد ما:

(بيانات افتراضية)

المدخلات / المخرجات	الزراعة	التصنيع	الطلب النهائي	إجمالي المخرجات
الزراعـــة	٢٤٠	٢٧٠	٩٠	٦٠٠
التصنيـــع	٣٠٠	٩٠	٦٠	٤٥٠
العمـــل	٦٠	٩٠		

المطلوب:

أولاً: إيجاد مصفوفة المدخلات – المخرجات.

ثانياً: لنفترض أنه بعد ثلاث سنوات سوف ينقص الطلب على الزراعة ليصل إلى ٦٣ وحدة فقط، بينما يزيد الطلب على التصنيع ليصل إلى ١٠٥ وحدة. ما هي الكمية الواجب إنتاجها في كل قطاع حتى تتم مواجهة الطلب في المستقبل.

ثالثاً: ما هو حجم العمل الجديد في كل قطاع؟

١٢- فيما يلي تدفق السلع والخدمات ما بين قطاعات الزراعة، الصناعة والخدمات في اقتصاد إحدى الدول:

(بيانات افتراضية)

المدخلات / المخرجات	الزراعة	الصناعة	الخدمات	الطلب النهائي	إجمالي المخرجات
الزراعة	٢٠	صفر	٤٠	٤٠	١٠٠
الصناعة	٤٠	٤٠	١٠٠	٢٠	٢٠٠
الخدمات	صفر	٨٠	٤٠	٨٠	٢٠٠
المدخلات الأساسية Primary Input	٤٠	٨٠	٢٠		

المطلوب:

أولاً: تكوين مصفوفة المدخلات - المخرجات.

ثانياً: ما هي كمية الإنتاج الجديدة في كل من القطاعات الثلاثة إذا تغير الطلب النهائي في المستقبل ليصبح ٧٠، ٥٠، ١٢٠ وحدة على الترتيب.

ثالثاً: ما هو حجم المدخلات الأساسية عند تحقيق كميات الإنتاج الجديدة في القطاعات الثلاثة؟

١٣- يقوم مكتب لتأجير السيارات بتأجير ثلاثة أنواع من السيارات صغيرة ومتوسطة وكبيرة. ويقوم هذا المكتب بتأجير سياراته في أربعة مناطق مختلفة أ، ب، **جـ**، **د**. ويرغب المكتب في تقدير احتياجاته من قطع غيار السيارات المختلفة وتكلفة هذه القطع. هذا وتمثل المصفوفة أ عدد السيارات من كل نوع والمتاحة للإيجار في المناطق المختلفة:

أ =

	كبيرة	**متوسط**	**صغيرة**
المنطقة (أ)	١٦٠٠٠	٤٠٠٠٠	٥٠٠٠٠
المنطقة (ب)	١٥٠٠٠	٣٠٠٠٠	٢٠٠٠٠
المنطقة (جـ)	١٠٠٠٠	١٠٠٠٠	١٥٠٠٠
المنطقة (د)	١٢٠٠٠	٤٠٠٠٠	٣٠٠٠٠

هذا ويهتم مكتب تأجير السيارات بتوفير أربعة أنواع من قطع الغيار وذلك لحاجة المكتب المتكررة إليها وهي: سير المروحة، البوجيهات، البطاريات والإطارات. وبناءً على دراسات أُجريت على صيانة السيارات، تم التوصل إلى عدد قطع الغيار اللازمة لكل سيارة في المتوسط خلال سنة وذلك كما توضحه المصفوفة ب:

ب =

	كبيرة	**متوسط**	**صغيرة**
سير المروحة	١,٧	١,٦	١,٥
بوجيهات	١٢,٥	٨	٥,٠
بطاريات	٠,٩	٠,٧٥	٠,٥
إطارات	٤,٠	٦,٥	٦,٠

المطلوب:

باستخدام المصفوفات، أوجد ما يلي:

أولاً: حجم الطلب الكلى لكل نوع من أنواع السيارات.

ثانياً: إجمالي عدد قطع الغيار لكل نوع.

ثالثاً: إذا كانت المصفوفة **ل** تمثل تكلفة الوحدة لكل نوع من أنواع قطع الغيار الأربعة حيث:

ل = [١,٢٥   ٠,٨   ٣٠,٠   ٣٥,٠]

احسب التكلفة الإجمالية لجميع قطع الغيار.

رابعاً: مستخدماً نتائجك في (ثانياً)، احسب التكلفة الإجمالية لكل نوع من قطع الغيار.

١٤- يقوم مصنع بإنتاج ثلاثة منتَجات أ ، ب ، **جـ** يتطلب إنتاج كل منها كميات معينة من ثلاثة أنواع من المواد الخام بالإضافة إلى العمل. وتعطى المصفوفة م متطلبات كل منتج من المواد الخام والعمل.

$$\begin{array}{rc} & \textbf{المواد الخام} \\ & \begin{array}{cccc} \textbf{العمل} & ٣ & ٢ & ١ \end{array} \\ \begin{array}{r} \textbf{المنتَج أ} \\ \textbf{المنتَج ب} \\ \textbf{المنتَج جـ} \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} ٦ & ٢ & ٣ & ٢ \\ ٨ & ٨ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٢ & ٤ \end{array}\right] = م \end{array}$$

علماً بأن المواد الخام مقاسةً بـ جنيه / وحدة، بينما العمل ممثل بعدد الساعات لكل وحدة.

فإذا علمت أن تكلفة المواد الخام هي ٣ جنيه، ٦ جنيهات، ٤ جنيهات لكل كيلو جرام على الترتيب، كما تبلغ تكلفة العمل ٥ جنيهات لكل ساعة. وكان المصنع يرغب في إنتاج ٦٠٠، ١٥٠٠، ٨٠٠ وحدة من المنتَجات أ، ب، **جـ** على الترتيب.

المطلوب:

باستخدام المصفوفات، أوجد:

أولاً: الكميات الإجمالية من المواد الخام والعمل اللازمة لإنتاج الكميات المخطط لها من المنتَجات المختلفة.

ثانياً: مستخدماً نتائجك في "أولاً" احسب التكلفة الإجمالية للإنتاج.

١٥- باستخدام المصفوفات، حدد سعر وكمية التوازن لدوال الطلب والعرض الواردة في التمرين رقم (١٨) في الفصل السابق من هذا الكتاب.

١٦- حدد سعر وكمية التوازن لدالتي الطلب والعرض الواردتيْن في التمرين رقم (١٩) في الفصل السابق.

١٧- أعِدْ حل التمرين رقم (٢٠) في الفصل السابق مستخدماً في ذلك المصفوفات بدلاً من المحددات.

رياضيات الأعمال

تطبيقات في المجالات التجارية

الجزء الثاني

إعداد:
دكتور/ أبوبكر عبد الرحمن عبد المتعال

كلية التجارة
جامعة جنوب الوادي
قسم الأساليب الكمية

رياضيات الأعمال

تطبيقات في المجالات التجارية

إعداد:

دكتور/ أبوبكر عبد الرحمن عبد المتعال
كلية التجارة – جامعة جنوب الوادي
قسم الأساليب الكمية

الجزء الثاني

العام الجامعي

٢٠٢٢ / ٢٠٢٣

الفصل السادس

التفاضل

كثيراً ما نحتاج في حياتنا العملية إلى قياس التغيرات التي تحدث في قيمة الدالة (المتغير التابع) نتيجة لحدوث تغير طفيف في قيمة المتغير أو المتغيرات المستقلة، وهو ما يهتم به علم التفاضل. وها هي بعض الأمثلة التي توضح استخدامات ذلك في بعض التطبيقات الاقتصادية:

- التغير في التكلفة الكلية لإنتاج منتَج معين نتيجة لكل وحدة إضافية في كمية الإنتاج.
- التغير في كمية الطلب على سلعة ما نتيجة لكل جنيه زيادة في سعر هذه السلعة.
- التغير في كمية المعروض من سلعة معينة نتيجة لكل جنيه زيادة في سعر السلعة.
- التغير في كمية الوقود المستهلك بواسطة سيارة معينة نتيجة لكل كيلو متر زيادة في سرعة هذه السيارة.
- التغير في قيمة الآلة أو الأصل الثابت بمرور الزمن سنة بعد أخرى.

إلى غير ذلك من الأمثلة التي توضح أهمية قياس التغيرات التي تحدث في المتغير التابع نتيجة لحدوث تغير محدد في المتغير المستقل.

وفي دراستنا للتفاضل سوف نتناول العديد من النقاط التي تغطى هذا الموضوع والتي سنوردها فيما يلي:

أولاً: معدل التغير المتوسط والميل

Average Rate of Change and Slope

إذا كان لدينا الدالة:

$$ص = د(س)$$

حيث: ص هي المتغير التابـع، س هي المتغير المستقل.

فإنه لو كانت ص دالة مستمرة (متصلة) في س في فترة معينة، بمعنى أن كل قيمة للمتغير س في هذه الفترة تناظرها قيمة محددة للمتغير ص. فإن أي تغير طفيف في س داخل هذه الفترة سوف يناظره تغير طفيف أيضا في ص. ولو رمزنا للتغير في س بالرمز Δس (وتُقرأ دلتا س)، وأما التغير المناظر في ص فسوف نرمز له بالرمز Δص. وبشكل عام، فإن Δ ترمز إلى التغير في أي متغير.

وهنا نجد أن:

$\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ هي نسبة التغير في ص إلى التغير في س.

وهذه النسبة تشير إلى معدل التغير المتوسط في ص بالنسبة إلى س.
هذا مع ملاحظة أن Δ س لا يعنى حاصل ضرب Δ في س، وإنما هي رمز لا يتجزأ ويشير إلى التغير في س. وهكذا الأمر بالنسبة إلى Δ ص.

وعلى سبيل المثال، لو كان لدينا الدالة: ص = د(س)، فإن ص تمثل المتغير التابع، بينما تمثل س المتغير المستقل. وعندما يأخذ المتغير س القيمة س$_١$ فإن ص تأخذ القيمة ص$_١$ ، أي أن: ص$_١$= د(س$_١$). وبالمثل، فإنه عندما تأخذ س القيمة س$_٢$ تأخذ ص القيمة ص$_٢$ ، أي أن: ص$_٢$= د(س$_٢$).

وهنا فإن التغير في ص يتمثل في:

Δص= ص$_٢$ – ص$_١$

أي أن: Δص= د(س$_٢$) – د(س$_١$) $\Leftarrow$ (١)

وأما المقدار Δس= س$_٢$ – س$_١$ فيسمى الزيادة Increment في س. مع ملاحظة أن القيمة السالبة لـ Δس تعنى نقصاناً في قيمة س. أي أن Δس تشير إلى التغير في قيمة س زيادةً أو نقصاناً. وهكذا الأمر بالنسبة إلــى Δص.

مثال (١):

إذا كانت كمية المبيعات ك من إحدى السلع تعتمد على سعر الوحدة س من هذه السلعة. وكانت العلاقة ما بين كمية المبيعات وسعر السلعة تمثلها الدالة التالية:

ك = د(س) = ٢٠٠(٤٠ – س)

احسب مقدار التغير في كمية المبيعات إذا زاد سعر السلعة من ١٠ جنيهات إلى ١٥ جنيهاً للوحدة الواحدة.

الحـل:

في هذا المثال، تمثل ك المتغير التابع بينما تمثل س المتغير المستقل، أي أن ك دالة في المتغير س.

Δس= س$_٢$ – س$_١$

= ١٥ – ١٠ = ٥

ويمكن حساب قيم ك المناظرة كما يلي:

ك$_١$ = ٢٠٠(٤٠ – ١٠) = ٦٠٠٠

ك$_٢$= ٢٠٠(٤٠ – ١٥) = ٥٠٠٠

$\therefore\ \Delta$ك = ك$_{٢}$ – ك$_{١}$

= ٥٠٠٠ – ٦٠٠٠ = - ١٠٠٠

والقيمة السالبة لـ Δك تعنى نقصاناً في كمية المبيعات. أي أن كمية المبيعات انخفضت بمقدار ١٠٠٠ جنيه نتيجة لزيادة سعر الوحدة من ١٠ جنيهات إلى ١٥ جنيها، أي نتيجة لزيادة سعر الوحدة بمقدار خمسة جنيهات.

هذا ويمكننا تحديد معدل التغير المتوسط في ص بالنسبة إلى التغير في س على النحو التالي:

من المعادلة: Δس = س$_{٢}$ – س$_{١}$ يمكننا الحصول على:

س$_{٢}$ = س$_{١}$ + Δس ⇦ **(٢)**

ومن المعادلتيْن (١)، (٢) نجد أن:

Δص = د(س$_{٢}$) – د(س$_{١}$)

= د(س$_{١}$ + Δس) – د(س$_{١}$)

وحيث أن س$_{١}$ تمثل أي قيمة اختيارية للمتغير س، فإنه يمكننا التعبير عن تلك المعادلة بإسقاط الرمز السفلى Subscript للمتغير س وذلك كما يلي:

Δص = د(س + Δس) – د(س) ⇦ **(٣)**

وبما أن: د(س) = ص

فإنه يمكن إعادة صياغة المعادلة (٣) على النحو التالي:

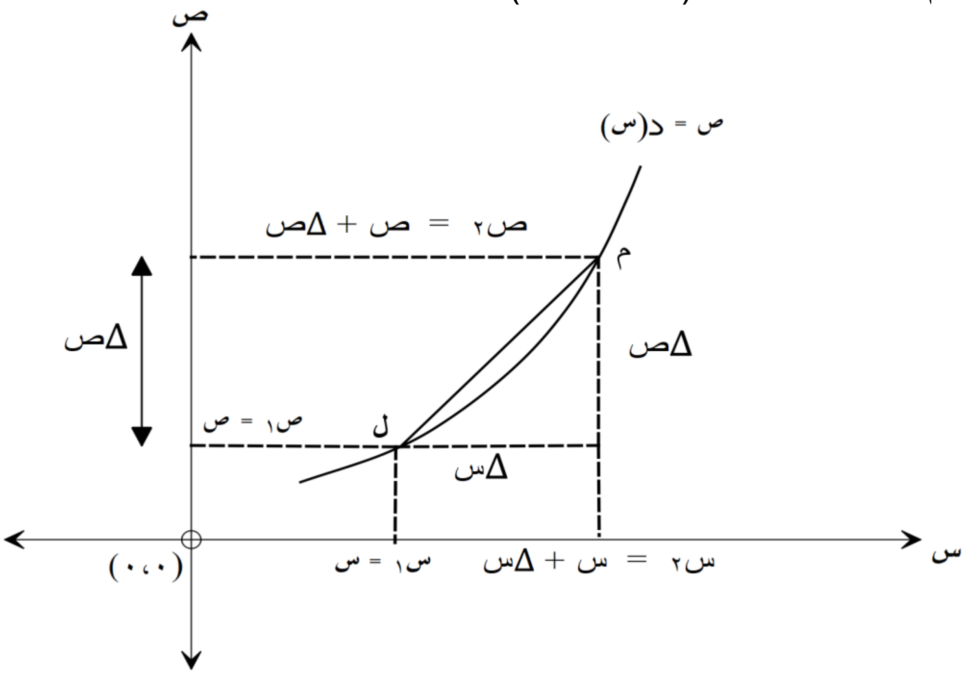
ص + Δص = د(س + Δس) ⇦ **(٤)**

ومن المعادلة (٣):

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س + \Delta س) - د(س)}{\Delta س}$$ ⇦ **(٥)**

ويُطلق على $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ المعدل المتوسط للتغير في الدالة د(س) في الفترة: س إلى س + Δس. وهكذا فإن معدل التغير المتوسط في ص بالنسبة إلى التغير في س يتمثل في الصيغة الموضحة في المعادلة رقم (٥).

وإذا ما تناولنا هذا المعدل من وجهة النظرة البيانية Graphically، فإنه لو كانت ل هي النقطة (س$_1$، د(س$_1$)) و م هي النقطة (س+Δس، د(س+Δس))، وهاتان النقطتان تقعان على الخط (المنحنى) البياني الممثل للدالة: ص = د (س) فإن $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ تمثل ميل الخط المستقيم بين النقطتيْن ل، م (الشكل ٦ – ١).



الشكل (٦ – ١)
الرسم البياني للدالة: ص = د(س)

وهكذا فإن معدل التغير المتوسط في ص بالنسبة إلى التغير في س يساوى ميل الخط المستقيم ل م على الرسم البياني للدالة: ص = د(س).
وهنا يلاحظ أن:

$$\text{الميل (م)} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

وهي الصورة التي أشرنا إليها من قبل عند تناولنا للمعادلات الخطية في الفصل الأول.

مثال (٢):
باستخدام بيانات مثال (١)، احسب معدل التغير المتوسط في كمية الانتاج ك بالنسبة إلى التغير في سعر السلعة س. ثم علِّق على ما تحصل عليه من نتائج.

الحـل:

حيث أن: ك = د(س) = ٢٠٠(٤٠ – س)

فإن: د(س + Δس) = ٢٠٠{٤٠ – (س + Δس)}

∴ د(س + Δس) – د(س) = ٢٠٠{٤٠– (س + Δس)} – ٢٠٠ (٤٠ - س)

= ٢٠٠ {٤٠ – (Δس + س) – (٤٠ -س)}

= ٢٠٠(٤٠ – س – Δس – ٤٠ + س)

= - ٢٠٠Δس

وحيث أن $\frac{\Delta ك}{\Delta س} = \frac{د(س + \Delta س) - د(س)}{\Delta س}$ فإن:

معدل التغير المتوسط في ك بالنسبة إلى س = $\frac{\Delta ك}{\Delta س}$

$= \frac{-٢٠٠\Delta س}{\Delta س} = -٢٠٠$

وهذا يعنى أن هذا المعدل ثابت ولا يتوقف على انتقال السعر من قيمة معينة إلى قيمة أخرى (مثلاً: من ١٠ جنيهات إلى ١٥ جنيها أو أي سعريْن آخريْن مثل ١٢ جنيها، ٢٠ جنيهاً). ويمكن للقارئ التحقق من ثبات هذا المعدل بإعادة حل مثال (١) مستخدماً في ذلك السعريْن ١٢ جنيهاً و٢٠ جنيهاً – على سبيل المثال – وذلك بدلا من عشرة جنيهات و١٥ جنيهاً على الترتيب.

وهنا يلزم التنويه إلى أنه بالنسبة للدالة من الدرجة الأولى (الخط المستقيم) يكون معدل التغير المتوسط في ص بالنسبة إلى التغير في س ثابتاً في كل جزء من أجزاء الخط المستقيم. أي أن ميل الخط المستقيم الممثل لهذه الدالة لا يتغير بتغير موضع النقطة على هذا الخط. وأما في حالة الدوال غير الخطية، أي من الدرجة الثانية فأكثر، فإن معدل التغير المتوسط في الدالة لا يتغير فقط بين كل نقطتيْن متتاليتيْن، بل يتغير أيضا عند كل نقطة من النقاط الواقعة على المنحنى الممثل لهذه الدالة. وبعبارة أخرى، فإن ظل الزاوية التي يصنعها المماس Tangent لمنحنى الدالة من الدرجة الثانية فأكثر مع المحور السيني يختلف من نقطة لأخرى على هذا المنحنى (يلاحظ أن المقدار $\frac{\Delta س}{\Delta ص}$ يكون مقدارا ثابتاً دائماً في حالة الدالة من الدرجة الأولى، بينما يكون دالة في المتغير س (أي يعتمد على قيمة س) في حالة الدوال من الدرجة الثانية فأكثر). والمثال التالي يوضح تلك النقطة.

مثال (٣):

إذا كان الإيراد الكلى الأسبوعي ر (بالجنيه) والمتحصَّل عليه من إنتاج وتسويق ك وحدة من سلعة معينة تمثله الدالة:

$$\text{ر} = \text{د}(\text{ك}) = ٥٠٠\,\text{ك} - ٢\,\text{ك}^{٢}$$

حدِّد التغير المتوسط في الإيراد لكل وحدة زيادة من السلعة وذلك إذا ما زاد عدد الوحدات المنتَجة والمباعة من ١٠٠ وحدة إلى ١٢٠ وحدة.

الحـل:

حيث أن: $$\frac{\Delta \text{ر}}{\Delta \text{ك}} = \frac{\text{د}(\text{ك} + \Delta\text{ك}) - \text{د}(\text{ك})}{\Delta \text{ك}}$$

$$\text{د}(\text{ك} + \Delta\text{ك}) = ٥٠٠(\text{ك} + \Delta\text{ك}) - ٢(\text{ك} + \Delta\text{ك})^{٢}$$

$$\therefore \text{د}(\text{ك} + \Delta\text{ك}) - \text{د}(\text{ك}) = ٥٠٠(\text{ك} + \Delta\text{ك}) - ٢(\text{ك} + \Delta\text{ك})^{٢}$$
$$- (٥٠٠\,\text{ك} - ٢\,\text{ك}^{٢})$$
$$= ٥٠٠(\text{ك} + \Delta\text{ك}) - ٢(\text{ك} + \Delta\text{ك})^{٢} - ٥٠٠\,\text{ك} + ٢\,\text{ك}^{٢}$$
$$= ٥٠٠(\text{ك} + \Delta\text{ك} - \text{ك}) - ٢[(\text{ك} + \Delta\text{ك})^{٢} - \text{ك}^{٢}]$$
$$= ٥٠٠\,\Delta\text{ك} - ٢[٢\,\text{ك}\,\Delta\text{ك} + (\Delta\text{ك})^{٢}]$$
$$= ٥٠٠\,\Delta\text{ك} - ٤\,\text{ك}\,\Delta\text{ك} - ٢(\Delta\text{ك})^{٢}$$
$$\frac{\Delta \text{ر}}{\Delta \text{ك}} = \frac{٥٠٠\,\Delta\text{ك} - ٤\,\text{ك}\,\Delta\text{ك} - ٢(\Delta\text{ك})^{٢}}{\Delta \text{ك}}$$
$$= ٥٠٠ - ٤\,\text{ك} - ٢(\Delta\text{ك})$$

وحيث أن:

$$\text{ك} = ١٠٠ \quad ، \quad \Delta\text{ك} = ١٢٠ - ١٠٠ = ٢٠$$

$$\therefore \frac{\Delta \text{ر}}{\Delta \text{ك}} = ٥٠٠ - ٤(١٠٠) - ٢(٢٠) = ٦٠$$

أي أن معدل التغير المتوسط في الإيراد بالنسبة إلى التغير في كمية الإنتاج هو ٦٠ جنيه زيادة في الإيراد لكل وحدة زيادة في كمية الإنتاج.

ويمكن حل هذا المثال بطريقة أبسط من تلك التي استخدمناها وذلك بالتعويض عن قيمة كل من ك و $\Delta\text{ك}$ منذ البداية عند إيجاد $\text{د}(\text{ك} + \Delta\text{ك})$، $\text{د}(\text{ك})$ وذلك كما يلي:

$$\frac{\Delta \text{ر}}{\Delta \text{ك}} = \frac{\text{د}(\text{ك} + \Delta\text{ك}) - \text{د}(\text{ك})}{\Delta \text{ك}}$$

$$= \frac{د(١٢٠) - د(١٠٠)}{٢٠}$$

$$د(١٢٠) = ٥٠٠(١٢٠) - ٢(١٢٠)^٢$$

$$= ٣١٢٠٠$$

$$د(١٠٠) = ٥٠٠(١٠٠) - ٢(١٠٠)^٢$$

$$= ٣٠٠٠٠$$

$$\therefore \frac{\Delta ر}{\Delta ك} = \frac{٣١٢٠٠ - ٣٠٠٠٠}{٢٠} = \frac{١٢٠٠}{٢٠} = ٦٠$$

وهي نفس النتيجة السابقة.

وقد تم حل المثال بالطريقة الأولى وذلك لدواعي استعمال النتائج التي حصلنا عليها فيما بعد.

مثال (٤):

إذا كانت المسافة المقطوعة م (بالكيلومتر) يمكن تقديرها كدالة للوقت (بالساعات) وذلك كما يلي:

$$م = د(ت) = ٥ت^٢ + ١٢ت \quad ، \quad صفر \leq ت \leq ٤$$

المطلوب:

(١) ما هو متوسط السرعة خلال:

(أ) الساعة الأولى (ب) الساعة الثانية

(٢) ما هو متوسط السرعة خلال ساعات السفر الأربعة؟

الحـل:

(١) (أ) بعد ساعة واحدة تكون المسافة المقطوعة مساوية لـ:

$$د(١) = ٥(١)^٢ + ١٢(١) = ١٧ \text{ كيلو متر}$$

وحيث أن: $\text{متوسط السرعة} = \frac{\text{المسافة المقطوعة}}{\text{زمن الزمن}}$

$$\therefore \text{متوسط السرعة خلال الساعة الأولى} = \frac{د(١) - د(صفر)}{١ - صفر} = \frac{١٧ - صفر}{١ - صفر}$$

$$= ١٧ \text{ كم / ساعة}$$

(ب) بالمثل: $\text{متوسط السرعة خلال الساعة الثانية} = \frac{د(٢) - د(١)}{٢ - ١}$

وحيث أن: $د(٢) = ٥(٢)^٢ + ١٢(٢) = ٤٤$

د (١) = ١٧ سبق إيجادها

∴ متوسط السرعة خلال الساعة الثانية = $\frac{٤٤-١٧}{٢-١} = \frac{٢٧}{١}$ = ٢٧ كم/ ساعة

(٢) متوسط السرعة خلال زمن المرحلة كله (أربع ساعات) هو:

$= \frac{د(٤) - د(صفر)}{٤ - صفر}$ = د (٤) = ٥ $(٤)^٢$ + ١٢(٤) = ١٢٨

∴ المتوسط المطلوب = $\frac{١٢٨ - صفر}{٤ - صفر} = \frac{١٢٨}{٤}$ = ٣٢ كم/ ساعة

ثانياً: المشتقة ومعدل التغير اللحظي

The Derivative and instantaneous Rate of Change

كثيراً ما يكون الباحث في حاجة إلى قياس معدل التغير في الدالة (المتغير التابع) عند قيمة معينة للمتغير المستقل وليس بين قيمتيْن لهذا المتغير. أي قياس معدل المتغير في الدالة (المتغير التابع) عند نقطة معينة على الخط (المنحنى) البياني الممثل لهذه الدالة وليس بين نقطتيْن على هذا الخط (المنحنى). وعلى سبيل المثال، قد يهتم الاقتصادي بمعرفة معدل التغير في كمية الطلب على سلعة ما إذا ما زاد سعر الوحدة من هذه السلعة عن حد معين بمقدار ضئيل جداً (يكاد يكون صفراً أو الوحدة). وبشكل عام، يفيد مثل هذا المعدل في كثير من التطبيقات الاقتصادية مثل معرفة التكلفة الحدية والإيراد الحدي، إلى غير ذلك من المقاييس الاقتصادية. ويسمى المعدل الذي يقيس معدل التغير في الدالة (المتغير التابع) عند نقطة معينة بالمعدل اللحظي Instantaneous Rate ويرمز له بالرمز $\frac{دص}{دس}$. ويمكن اشتقاق هذا المعدل من معدل المتغير المتوسط $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ على النحو التالي:

حيث أن:

$\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ هو معدل التغير المتوسط في ص بالنسبة إلى التغير في س ما بين النقطتيْن س و س + Δس وأن $\frac{دص}{دس}$ هو معدل التغير في ص بالنسبة إلى س عند النقطة س . كما أن النقطتيْن س ، س + Δس تتحولان إلى نقطة واحدة س إذا ما تضاءلت قيمة Δس (التغير في س) كثيراً بحيث تكاد أن تكون صفراً. فإن العلاقة بين $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ و $\frac{دص}{دس}$ تتحدد كما يلي:

$$\frac{د ص}{د س} = \lim_{\Delta س \leftarrow 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س} \quad \Leftarrow \quad (٦)$$

وذلك بافتراض تواجد هذه النهاية.

أي أن المعدل اللحظي كما هو معرَّف في العلاقة (٦) يشير إلى التغير الذي يطرأ على المتغير التابع (ص) إذا ما حدث تغير بسيط جداً في المتغير المستقل (س).

هذا وتُعرف $\frac{د ص}{د س}$ كما هي معرَّفة في (٦) بالمشتقة التفاضلية الأولى First Derivative للدالة، وهو ما سنتناوله بالتفصيل فيما بعد.

مثال (٥):

باستخدام بيانات المثال (١)، أوجد معدل التغير اللحظي في كمية المبيعات بالنسبة لسعر بيع الوحدة من السلعة. ثم علِّق على ما تحصل عليه من نتائج.

الحـل:

أثبتنا من قبل في مثال (٢) أن $\frac{\Delta ك}{\Delta س}$ = - ٢٠٠ وهو مقدار خال من **س**.

وهذا يعنى أن معدل المتغير اللحظي يساوى أيضا – ٢٠٠. أي أنه في حالة الدالة من الدرجة الأولى (الخط المستقيم) يكون معدل التغير واحداً سواءً يتم إيجاده بين قيمتيْن أو عند قيمة معينة للمتغير المستقل. وهكذا فإنه في تلك الحالة نجد أن معدل التغير المتوسط بين قيمتيْن يساوي معدل التغير عند قيمة معينة، وكلاهما يساوى ميل الخط المستقيم الذي يمثل الدالة. أي أنه كلما زاد سعر السلعة بمقدار جنيه واحد كلما نقصت كمية المبيعات بمقدار ٢٠٠ وحدة.

مثال (٦):

باستخدام بيانات المثال (٣)، المطلوب:

(١) إيجاد معدل التغير اللحظي (المشتقة الأولى) للإيراد بالنسبة لكمية الإنتاج.

(٢) حساب قيمة هذا المعدل عندما:

أ- كمية الإنتاج = ١٠٠ وحدة   ب- كمية الإنتاج = ١٢٠ وحدة

(٣) التعليق على نتائجك التي حصلت عليها في (٢).

الحـل:

(١) وجدنا في مثال (٣) أن:

$$\frac{\Delta ر}{\Delta ك} = ٥٠٠ - ٤ ك - ٢(\Delta ك)$$

وحيث أن: $\frac{د ر}{د ك} = \underset{\Delta ك \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{\Delta ر}{\Delta ك}$

$= \underset{\Delta ك \leftarrow ٠}{نهـا} \left[٥٠٠ - ٤ك - ٢(\Delta ك) \right]$

أي أن: $\frac{د ر}{د ك} = ٥٠٠ - ٤ك$

وهذا يعنى أن معدل التغير اللحظي هو دالة في كمية الإنتاج **ك** ، بمعنى أنه يتغير بتغير كمية الإنتاج.

(٢) (أ) معدل التغير اللحظي للإيراد بالنسبة لكمية الإنتاج عندما **ك** = ١٠٠ هو:

$ر'(١٠٠) = ٥٠٠ - ٤(١٠٠) = ١٠٠$

(ب) معدل التغير اللحظي للإيراد عندما **ك** = ١٢٠ هو:

$ر'(١٢٠) = ٥٠٠ - ٤(١٢٠) = ٢٠$

(٣) من النتائج التي حصلنا عليها في (٢) يتضح أنه بالنسبة للدالة من الدرجة الثانية يختلف معدل التغير اللحظي للدالة من قيمة لأخرى للمتغير المستقل، وهو على عكس النتائج التي حصلنا عليها من قبل فيما يتعلق بالدالة من الدرجة الأولى والتي لا يختلف فيها هذا المعدل باختلاف القيمة المستخدمة في إيجاده.

وأما من الناحية الاقتصادية فإنه عند مستوى الإنتاج ١٠٠ وحدة، فإن زيادة الإنتاج بمقدار وحدة واحدة يترتب عليه زيادة في الإيراد مقدارها ١٠٠ جنيه. وأما عند مستوى الإنتاج ١٢٠ وحدة فإن وحدة واحدة زيادة في الإنتاج يترتب عليها زيادة في الإيراد تساوى ٢٠ جنيها.

ملحوظـة:

عبّرنا عن الزيادة في الإنتاج بمقدار وحدة واحدة، ولكن في حقيقة الأمر يعبِّر هذا المعدل عن زيادة طفيفة جداً وليست وحدة واحدة. ولكننا، بهدف التبسيط، اعتبرنا أن هذه الزيادة هي - تجاوزاً - وحدة واحدة.

مثال (٧):

باستخدام الدالة: ص = د(**س**) = **٣ س**^{٢} – **س** + ٥

(١) ما هو معدل التغير المتوسط للدالة ما بين **س** = ٢، **س** = ٥.

(٢) احسب معدل التغير اللحظي (المشتقة الأولى) للدالة عندما:

(أ) **س** = ٢ (ب) **س** = ٥

(٣) قارن بين نتائجك في (١)، (٢) مُبدياً ما تراه مناسباً من تعليق.

الحـل:

(١) عندما $س = ٢$ ، $ص = ٣(٤) - (٢) + ٥ = ١٥$

عندما $س = ٥$ ، $ص = ٣(٢٥) - ٥ + ٥ = ٧٥$

معدل المتغير المتوسط للدالة ما بين $س = ٢$، $س = ٥$ هو:

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{٧٥ - ١٥}{٥ - ٢} = \frac{٦٠}{٣} = ٢٠$$

ويمكن إيجاد هذا المعدل بطريقة أخرى كما يلي:

حيث أن: $د(س) = ٣س^٢ - س + ٥$

$\therefore$ $د(س + \Delta س) = ٣(س + \Delta س)^٢ - (س + \Delta س) + ٥$

$= ٣س^٢ + ٦س\Delta س + ٣(\Delta س)^٢ - س - \Delta س + ٥$

$د(س + \Delta س) - د(س) = ٣س^٢ + ٦س\Delta س + ٣(\Delta س)^٢ - س$

$- \Delta س + ٥ - (٣س^٢ - س + ٥)$

$= ٦س\Delta س + ٣(\Delta س)^٢ - \Delta س$

$$\therefore \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س + \Delta س) - د(س)}{\Delta س}$$

$$= \frac{٦س\Delta س + ٣(\Delta س)^٢ - \Delta س}{\Delta س} = ٦س + ٣(\Delta س) - ١$$

وحيث أن: $س = ٢$ ، $\Delta س = ٥ - ٢ = ٣$

فـإن: $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = ٦(٢) + ٣(٣) - ١ = ٢٠$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من قبل.

(٢) معدل التغير اللحظي = $\frac{دص}{دس} = \lim_{\Delta س \to ٠} \left[٦س + ٣(\Delta س) - ١\right]$

أي أن: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{د}'(\text{س}) = \text{٦س} - ١$

(أ) عندما س = ٢: معدل التغير اللحظي = ٦(٢) – ١ = ١١

(ب) عندما س = ٥: معدل التغير اللحظي = ٦(٥) – ١ = ٢٩

(٣) من النتائج في (١)، (٢) نجد أن معدل التغير المتوسط بين قيمتيْن للدالة من الدرجة الثانية يختلف عن معدل التغير اللحظي عند كل من هاتيْن القيمتيْن.

ومن نتائج المثاليْن (٣)، (٦)، بالإضافة إلى نتائج هذا المثال، يمكننا استنتاج أن معدل التغير المتوسط للدالة بين قيمتيْن يساوى متوسط قيمتي معدل التغير اللحظي عند كل من هاتيْن القيمتيْن.

مثال (٨):

باستخدام المبادئ الأولية (النهايات)، أوجد المشتقة التفاضلية الأولى لكل من:

(١) $\text{ص} = \text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} + ٥$

(٢) $\text{ص} = \text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{٦س}$

الحـل:

(١) حيث أن: $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} + ٥$

$\therefore \text{د}(\text{س} + \Delta\text{س}) = (\text{س} + \Delta\text{س})^{٢} - ٣(\text{س} + \Delta\text{س}) + ٥$

$= \text{س}^{٢} + ٢\text{س}\Delta\text{س} + (\Delta\text{س})^{٢} - ٣\text{س} - ٣\Delta\text{س} + ٥$

$\text{د}(\text{س} + \Delta\text{س}) - \text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٢\text{س}\Delta\text{س} + (\Delta\text{س})^{٢} - ٣\text{س} - ٣\Delta\text{س}$

$+ ٥ - (\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٥)$

$= ٢\text{س}\Delta\text{س} + (\Delta\text{س})^{٢} - ٣\Delta\text{س}$

$\therefore \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{٢\text{س}\Delta\text{س} + (\Delta\text{س})^{٢} - ٣\Delta\text{س}}{\Delta\text{س}} = ٢\text{س} + \Delta\text{س} - ٣$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \lim_{\Delta\text{س} \to ٠} \left[٢\text{س} - \Delta\text{س} - ٣\right] = ٢\text{س} - ٣$

(٢) حيث أن:

$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{٦س}$

$$\therefore \text{د}(\text{س} + \Delta\text{س}) = \frac{(\text{س} + \Delta\text{س})^{٢}}{٢} + ٦\,(\text{س} + \Delta\text{س})$$

$$= \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{س}\,\Delta\text{س} + \frac{(\Delta\text{س})^{٢}}{٢} + ٦\text{س} + ٦\Delta\text{س}$$

$$\text{د}(\text{س} + \Delta\text{س}) - \text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{س}\,\Delta\text{س} + \frac{(\Delta\text{س})^{٢}}{٢} + ٦\text{س} + ٦\Delta\text{س}$$

$$- \left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٦\text{س}\right)$$

$$= \text{س}\,\Delta\text{س} + \frac{(\Delta\text{س})^{٢}}{٢} + ٦\Delta\text{س}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \lim_{\Delta\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}\Delta\text{س} + \frac{(\Delta\text{س})^{٢}}{٢} + ٦\Delta\text{س}}{\Delta\text{س}}$$

$$= \lim_{\Delta\text{س} \to ٠} \text{س} + \frac{\Delta\text{س}}{٢} + ٦ = \text{س} + ٦$$

ثالثاً: المعنى الهندسي للمشتقة الأولى

Geometric Interpretation of the First Derivative

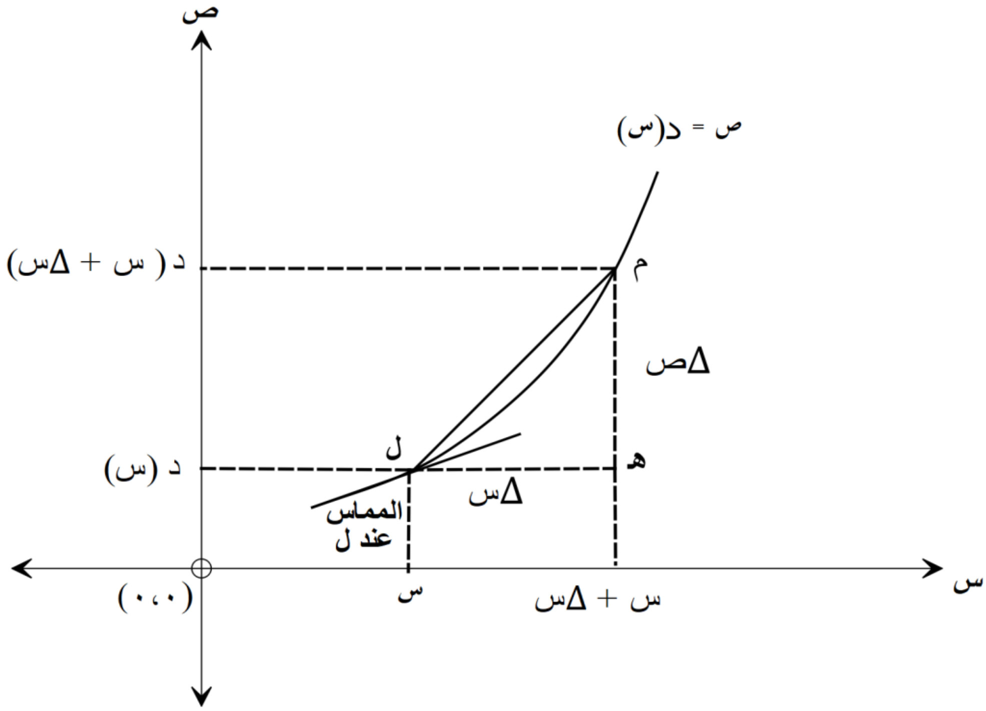
لقد أشرنا من قبل إلى أنه في حالة ما إذا كان هناك متغير تابع **ص** دالة في المتغير المستقل **س**، أي أن: ص = د(س)، فإن المشتقة $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ تشير إلى معدل التغير اللحظي للمتغير **ص**. فعلى سبيل المثال، لو كانت لدينا الدالة: م = د(**ت**)، حيث م هي المسافة المقطوعة بواسطة سيارة، **ت** تمثل الوقت، فإن $\frac{\text{دم}}{\text{دت}}$ تمثل سرعة هذه السيارة عند اللحظة **ت**. وبعيدا عن التطبيقات المختلفة للمشتقة الأولى للدالة، نجد أن لها مدلولاً هندسياً مهماً نوضحه فيما يلي:

إذا كان لدينا الدالة: ص = د (س)

وكانت النقطة ل تمثل نقطة واقعة على منحنى الدالة وإحداثياها هما (**س**، **ص**). كما أن هناك نقطة أخرى م تقع أيضا على منحنى الدالة بالقرب من النقطة ل وإحداثياها هما (س + Δس، ص + Δص). وكما سبق أن أشرنا فإن:

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د\left(س + \Delta س\right) - د\left(س\right)}{\Delta س}$$

تمثل ميل الخط المستقيم المار بالنقطتيْن ل، م.



الشكل (٦ – ٢)
المعنى الهندسي للمشتقة الأولى

أي أن: $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{م هـ}{هـ ل}$ = ظا م لَ هـ = ميل الوتر ل م

وعندما تصغر Δس تدريجياً حتى تؤول إلى الصفر فإن النقطة م تقترب أكثر فأكثر من النقطة ل، ويقترب الوتر ل م أكثر فأكثر من المماس. وعندما تؤول Δس إلى الصفر (Δس ← صفر) فإن ميل الوتر ل م يقترب من ميل المماس عند النقطة ل. وهكذا نجد أن:

$$\lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د ص}{د س}$$

تمثل ميل خط المماس للدالة: ص = د (س) عند النقطة (س، د(س))، أنظر الشكل (٦ – ٢). وطالما أن المنحنى: ص = د (س) يكون ممهداً Smooth عند النقطة ل، فإن

ذلك يعنى أنه طالما يمكننا رسم مماس غير عمودي (أي غير موازي للمحور الصادي) عند النقطة ل فإن $\lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ تكون موجودة، ومن ثم يمكن إيجاد ميل المماس عند هذه النقطة. وبصفة عامة، فإن المشتقة الأولى للدالة: ص = د (س) عندما تكون س = أ وهي د َ(أ) تساوي ميل المماس لمنحنى تلك الدالة عند النقطة (أ، د(أ)).

هذا ويمكن الاستفادة من تلك النتيجة في إيجاد معادلة المماس لمنحنى الدالة: ص = د(س) عند أي نقطة (أ، د(أ)) على منحنى الدالة ص وذلك على النحو التالي:

سبق وأن أشرنا في الفصل الأول من هذا الكتاب إلى كيفية إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل (م) ونقطة تقع عليه ($س_1$، $ص_1$) حيث تأخذ معادلته الصورة التالية:

$$م = \frac{ص - ص_1}{س - س_1}$$

وحيث أن ميل المماس لمنحنى الدالة: ص = د(س) عند النقطة (أ، د(أ)) هو د َ(أ)، أي قيمة المشتقة التفاضلية الأولى للدالة د(س) عند النقطة أ، فإن معادلة ذلك المماس هي:

$$\frac{ص - د(أ)}{س - أ} = د َ(أ)$$

أي أن معادلة المماس هي:

$$ص - د(أ) = د َ(أ) [س - أ]$$

ولعل المثال التالي يلقى المزيد من الضوء على تلك النقطة.

مثال (٩):

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة الواردة في مثال (٧) عند النقطة التي يكون عندها س = ٢ على منحنى تلك الدالة.

ثم علق على نتائجك في هذا المثال مستعينا بما حصلت عليه من نتائج في المطلوب (٢ – أ) في مثال (٧).

الحـل:

الدالة هي ص= د (س) = ٣ $س^2$ – س + ٥

وجدنا في مثال (٧) أن المشتقة الأولى لهذه الدالة، $\frac{دص}{دس}$، هي:

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{د}'(\text{س}) = ٦\text{س} - ١،$$

$$\text{د}'(٢) = ٦(٢) - ١ = ١١$$

وحيث أن : ص– د (أ) = د́(أ) (س – أ)

نجد أن أ هنا تساوى ٢، وأن:

د(أ) = د(٢) = ٣(٤) – (٢) + ٥ = ١٥

∴ ص – ١٥ = ١١(س – ٢)

ص – ١٥ = ١١س – ٢٢

١١س – ص = ٧

وهي تمثل معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = ٣ س^{٢} – س + ٥ عند النقطة التي يكون عندها س = ٢.

وهنا نجد أن ميل هذا المماس هو $\frac{\text{– معامل س}}{\text{– معامل ص}} = \frac{-١١}{-١}$ = ١١، وهو يساوى تماما معدل التغير اللحظي (الميل) للدالة عندما س = ٢ والذي حصلنا عليه في المطلوب (٢) – أ في مثال (٧)، مما يؤكد صحة النتائج.

وهنا لا يفوتنا أن نشير إلى أنه يمكن إيجاد ميل المماس باستخدام $\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$ بالطريقة السابق شرحها في هذا الفصل.

وقبل أن ننهي هذا الجزء لعله من المفيد للقارئ أن نؤكد على بعض النقاط كما يلي:

١- أن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ ليست نسبة وليست خارج قسمة كمية على كمية أخرى، وأن د ص ليست لها معنى مستقلا عن د س وأنها تعنى المشتقة التفاضلية الأولى للدالة: ص= د(س).

٢- أن المعادلة رقم (٦) هي الصورة العامة للمشتقة التفاضلية الأولى: ص= د(س).

٣- أن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ تشير أيضاً إلى معدل التغير اللحظي في ص بالنسبة إلى س عند قيمة معينة للمتغير س. وهي تختلف في ذلك عن $\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$ والتي تساوى معدل التغير المتوسط في ص بالنسبة إلى التغير في س بين قيمتيْن محددتيْن للمتغير س.

٤- أن المشتقة التفاضلية الأولى هي تعبير عام عن ميل الخط (المنحنى) البياني للدالة **ص** عند أي نقطة تقع على هذا الخط (المنحنى).

٥- أنه في حالة عدم وجود نهاية للمقدار المعرَّف في المعادلة (٦) فإنه لا توجد مشتقة تفاضلية أولى للدالة.

٦- تسمى المشتقة التفاضلية $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ أيضا بالمعامل التفاضلي Differential Coefficient. في حين أن عملية إيجاد المشتقة تسمى "تفاضل" Differentiation. هذا وإذا كانت المشتقة التفاضلية للدالة موجودة عند نقطة معينة فإنه يقال إن الدالة "قابلة للتفاضل" Differentiable عند هذه النقطة.

٧- المشتقة التفاضلية للدالة: $\text{ص} = \text{د}(\text{س})$ بالنسبة إلى **س** يُرمز إليها أيضا بالرموز:

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{ص})\text{، } \frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{ د })\text{، } \text{ص}'\text{، } \text{د}'(\text{س})$$

وكل من هذه الرموز يعنى تماما ما تعنيه $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$.

ويلاحَظ أنه بالنسبة للرمز: $\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{ د })$، يجب التمييز بين د التي بيـن القوسيْن والتي تشير بشكل مختصر إلى الدالة $\text{د}(\text{س})$ وبين د الأخرى والتي تشير إلى عملية التفاضل.

٨- أنه لإيجاد المشتقة التفاضلية الأولى للدالة: $\text{ص} = \text{د}(\text{س})$ باستخدام المبادئ الأولية (النهايات) يجب اتباع الخطوتيْن التاليتيْن:

أ- التعبير عن $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ كما هو موضح في المعادلة (٥).

ب- إيجاد نهاية $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ كما تشير إلى ذلك المعادلة (٦).

٩- المشتقة التفاضلية الأولى للدالة من الدرجة الأولى تمثل ميل الخط المستقيم الممثل لهذه الدالة. ويكون هذا الميل ثابتا لا يتغير عند أي نقطة تقع على هذا الخط.

١٠- المشتقة الأولى للدالة من الدرجة الثانية فأكثر تمثل ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقاط المختلفة، حيث تكون هذه المشتقة دالة في المتغير المستقل. وبذلك فإن ميل الدالة يختلف باختلاف قيمة المتغير المستقل.

١١- يتوقف الميل – من حيث كونه موجباً أو سالباً أو مساوٍ للصفـر – على إشارة $\frac{دص}{دس}$ على النحو التالي:

أ- إذا كانت $\frac{دص}{دس}$ > صفر، أي قيمة موجبة، فإن ذلك يعنـى أن المماس (في حالة الدالة من الدرجة الثانية فأكثر) أو الخط المستقيم (في حالة الدالة من الدرجة الأولى) يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب للمحور السيني (يلاحَظ أن ظل الزاوية الحادة دائما موجب). وفي هذه الحالة، يكون المنحنى (أو الخط المستقيم) صاعدا نحو اليمين أي تكون الدالة متزايدة Increasing Function وتكون العلاقة طردية بين المتغيريْن.

ب- إذا كانت $\frac{دص}{دس}$ < صفر، أي قيمة سالبة، فإن المماس (في حالة الدالة من الدرجة الثانية فأكثر) أو الخط المستقيم (في حالة الدالة من الدرجة الأولى) يصنع مع الاتجاه الموجب للمحور السيني زاوية ظلها سالب، أي زاوية منفرجة. وفي هذه الحالة يكون المنحنى (الخط المستقيم) نازلا، أي تكون الدالة متناقصة Decreasing Function وتكون العلاقة بين المتغيريْن عكسية.

ج- إذا كانت $\frac{دص}{دس}$ = صفر فإن ميل المماس (في حالة الدالـة من الدرجة الثانية فأكثر) أو الخط المستقيم (في حالة الدالة من الدرجة الأولى) يساوى الصفر. أي يكون المماس (الخط المستقيم) موازياً للمحور السيني. (لاحظ أن: ظا ١٨٠° = صفر). وفي هذه الحالة يكون المنحنى (الخط المستقيم) أفقياً، وعندئذ تتوقف قيمة الدالة.

هذا وإيجاد المشتقة التفاضلية الأولى للدالة باستخدام المبادئ الأولية (النهايات) هو أمر تكتنفه بعض الصعوبة في إجراء العمليات الجبرية، خاصة في الدوال ذات الدرجات الكبيرة (الثالثة فأكثر). لذلك وضع المهتمون بعلم الرياضيات قواعد معينة يمكن من خلالها إيجاد المشتقات المختلفة للدوال مهما بلغت درجتها. وفيما يلي نتناول بشيء من التفصيل بعضاً من هذه القواعد.

رابعاً: قواعد التفاضل Rules of Differentiation

سبق أن أشرنا بأن التفاضل هو عملية إيجاد المشتقات التفاضلية للدوال المختلفة. ولحسن الحظ فإن إجراء عملية التفاضل ليست بالعمل المجهد كما يبدو ذلك من خلال استخدام النهايات الذي تناولناه في بداية هذا الفصل. حيث أن هناك عدداً من قواعد التفاضل التي يمكن استخدامها في إيجاد المشتقات التفاضلية لكثير من الدوال الشائعة الاستخدام. ومع ذلك، هناك

دوال كثيرة لا توجد لها مشتقات تفاضلية. ولكن اهتمامنا هنا سوف ينصب على تلك الدوال القابلة للتفاضل.

هذا وقواعد التفاضل التي نحن بصددها في هذا الجزء تم الوصول إليها باستخدام اسلوب النهايات المشار إليه سابقاً (المعادلة (٦)). ولأن المعالجة الرياضية لإثبات تلك القواعد على قدر كبير من التعقيد، فإننا سوف نكتفي هنا بعرض تلك القواعد دون إثبات. وعند تناولنا لتلك القواعد، على القارئ أن يضع نُصب عينيه دائماً أن أياً من الدوال التي نتعامل معها يمكن تمثيلها بيانيـاً، وأن المشتقة التفاضلية الأولى لأي من تلك الدوال إنما تمثل ميل الدالة. وأنه عند إجراء عمليات التفاضل المختلفة سوف نستخدم أحيانـاً الرمز $\frac{دص}{دس}$، وأحياناً أخرى الرمز د َ(س)، وكلها رموز تعني المشتقة الأولى للدالة. أي أن:

$$\frac{دص}{دس} = د(س)$$

وهو ما سوف نستخدمه في عرض القواعد المختلفة للتفاضل.

وفي عرضنا لقواعد التفاضل المختلفة سوف نفترض أن جميع الدوال التي تتضمنها تلك القواعد هي دوال قابلة للتفاضل، أي يمكن إيجاد مشتقاتها التفاضلية. كما نعنى بالمشتقة التفاضلية المعامل التفاضلي الأول، أي المشتقة التفاضلية الأولى.

القاعدة (١): الدالة الثابتة Constant Function

إذا كانت: د(س) = أ ، حيث أ أي مقدار ثابت، فإن:

د َ(س) = صفر

وتفيد هذه القاعدة بأن مشتقة الكمية الثابتة في الدالة تساوى الصفر. وهو أمر منطقي، إذ أن المشتقة التفاضلية للدالة تعنى إيجاد معدل التغير في الدالة. وحيث أن المقدار الثابت لا يتغير، فإنه من الطبيعي أن تكون مشتقته تساوى الصفـر. ومثال ذلك، التكاليف الثابتة في أي مؤسسة إنتاجية لا تتغير بتغير الإنتاج، ومن ثم لا تؤثر على التكلفة الكلية للإنتاج.

مثال (١٠):

أوجد المشتقة التفاضلية للدالة: د(س) = ١٠

الحـل:

بتطبيق القاعدة (١): د َ(س) = صفر

وإذا ما فسرنا ذلك بيانيا، نجد أن هذه النتيجة منطقية. إذ أن الدالة: د(س) = ١٠ تمثل خطا أفقيا موازيا للمحور السيني ويقطع المحور الرأسي عند النقطة (٠، ١٠).
وبالتالي فإن ميل هذا الخط عن أي نقطة عليه يمثله ظل الزاوية ١٨٠° والذي يساوي الصفر.

القاعدة (٢): قاعدة القوة Power Rule

إذا كانت: د(س) = س^{ن}، حيث ن أي عدد حقيقي، فإن:

$$د'(س) = ن\ س^{ن-1}$$

مثال (١١):

أوجد المشتقة التفاضلية لكل من الدوال التالية:

(١) د(س) = س (٢) د(س) = س^{٤}

(٣) د(س) = س$^{-٣}$ (٤) د(س) = $\frac{١}{س^{٥}}$

(٥) د(س) = $\sqrt{س}$ (٦) د(س) = $\sqrt{س^{٣}}$

الحـل:

(١) حيث أن: د(س) = س = س^{١}

$$د'(س) = (١)\ (س)^{١-١} = س^{صفر} = ١$$

لاحظ أن ميل هذه الدالة يساوى واحد دائماً. ولن يجد القارئ صعوبة في أن يدرك أن الدالة د(س) = س هي دالة خطية ميلها يساوى الواحد الصحيح.

(٢) د(س) = س^{٤}

$$د'(س) = ٤\ س^{٤-١} = ٤\ س^{٤-١}$$

(٣) د(س) = س$^{-٣}$

$$د'(س) = (-٣)\ س^{-٣-١} = -٣\ س^{-٤} = \frac{-٣}{س^{٤}}$$

(٤) د(س) = $\frac{١}{س^{٥}}$ = (١) س$^{-٥}$ = س$^{-٥}$

$$د\acute{}(س) = (-٥)\,س^{-٥-١} = -٥\,س^{-٦} = \frac{-٥}{س^{٦}}$$

(٥) $د(س) = \sqrt{س} = س^{\frac{١}{٢}}$

$$د\acute{}(س) = (\frac{١}{٢})\,س^{\frac{١}{٢}-١} = \frac{١}{٢}\,س^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢\,س^{٠,٥}} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$$

(٦) $د(س) = \sqrt{س^{٣}}$

وهنا يُلاحَظ أن: $\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{\frac{م}{ن}}$

$\therefore$ $د(س) = \sqrt{س^{٣}} = س^{\frac{٣}{٢}}$

$$د\acute{}(س) = (\frac{٣}{٢})\,س^{\frac{٣}{٢}-١} = \frac{٣}{٢}\,س^{\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٢}\sqrt{س}$$

مثال (١٢):

باستخدام القاعدة (٢)، أوجد المشتقة التفاضلية للدالة:

$د(س) = ١$

الحـل:

يمكن التعامل مع القاعدة (٢) كحالة خاصة من القاعدة (١). وهي الحالة التي تكون فيها $ن$ تساوي صفر.

وحيث أن: $د(س) = ١$، فإنـه يمكـن كتابـة $د(س)$ على الصورة:

$$د(س) = (١)\,س^{صفر} = س^{صفر}$$

بتطبيق القاعدة (٢): $د\acute{}(س) = صفر\,(س)^{صفر-١} = صفر\,(س)^{-١} = \frac{صفر}{س} = صفر$

وهي نفس النتيجة التي تحصل عليها فيما لو استخدمنا القاعدة (١).

القاعدة (٣): الدالة مضروبة في مقدار ثابت **Constant Times A Function**

إذا كانت: $د(س) = أ.ع(س)$، أ **مقدار ثابت، فإن:**

$$د\acute{}(س) = أ.ع\acute{}(س)$$

مثال (١٣):

أوجد المشتقة التفاضلية للدالة: $د(س) = ٣\,س^{٤}$

الحــل:

ع(س) = س^٤ ، أ = ٣

بتطبيق القاعدة (٣): ع(س) = س^٤ ، ع َ(س) = ٤ س^٣

د َ(س) = ٣ (٤ س^٣) = ١٢ س^٣

القاعدة (٤): جمع أو طرح الدوال **Sum or Difference of Functions**
إذا كانت: د(س) **=** ع(س) ± ف(س)، **فإن:**
د َ(س) **=** ع َ(س) ± ف َ(س)

وتفيد هذه القاعدة بأن المشتقة التفاضلية لمجموع (أو طرح) دالتيْن أو أكثر هو مجموع (أو طرح) المشتقات التفاضلية لتلك الدوال.

مثال (١٤):

أوجد المشتقة التفاضلية للدالة: د(س) = ٢ س^٣ – ٥ س^٢ + ٣ س – ١٢

الحــل:

بتطبيق القاعدة (٤): د َ(س) = ٢(٣ س^٢) – ٥(٢ س) + ٣(١) – صفر

= ٦ س^٢ – ١٠ س + ٣

القاعدة (٥): قاعدة الضرب: **Product Rule**
إذا كانت: د(س) **=** ع(س). ف(س)، **فإن:**
د َ(س) **=** ع(س).ف َ(س) **+** ع َ(س).ف(س)

وهذه القاعدة تفيد بأن تفاضل حاصل ضرب دالتيْن يساوى الدالة الأولى مضروبة في تفاضل الدالة الثانية مضافاً إليه تفاضل الدالة الأولى مضروباً في الدالة الثانية.

مثال (١٥):

أوجد المشتقة التفاضلية للدالة: د(س) = (س^٢ – ٣)(٢ س^٣ – س^٢ + ٤)

الحــل:

ع(س) = (س^٢ – ٣) ، ف(س) = ٢ س^٣ – س^٢ + ٤

وبتطبيق القاعدة (٥):

$$\text{د}'(\text{س}) = \text{ع}(\text{س}) . \text{ف}'(\text{س}) + \text{ع}'(\text{س}) . \text{ف}(\text{س})$$

$$= (\text{س}^{٢} - ٣)(٦\text{س}^{٢} - ٢\text{س}) + (٢\text{س})(٢\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ٤)$$

$$= ٦\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٣} - ١٨\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٤\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٣} + ٨\text{س}$$

$$= ١٠\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٣} - ١٨\text{س}^{٢} + ١٤\text{س}$$

حل آخر:

يمكن حل هذا المثال بطريقة أخرى تتمثل في إيجاد حاصل ضرب المقداريْن قبل إجراء عملية التفاضل وذلك على النحو التالي:

$$\text{د}(\text{س}) = (\text{س}^{٢} - ٣)(٢\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ٤)$$

$$= ٢\text{س}^{٥} - \text{س}^{٤} + ٤\text{س}^{٢} - ٦\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} - ١٢$$

$$= ٢\text{س}^{٥} - \text{س}^{٤} - ٦\text{س}^{٣} + ٧\text{س}^{٢} - ١٢$$

$$\text{د}'(\text{س}) = ١٠\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٣} - ١٨\text{س}^{٢} + ١٤\text{س}$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من قبل.

القاعدة (٦): قاعدة القسمة **Quotient Rule**

إذا كانت: $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{ع}(\text{س})}{\text{ف}(\text{س})}$ ، $\text{ف}(\text{س}) \neq$ **صفر، فإن:**

$$\text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{ف}'(\text{س}) . \text{ع}(\text{س}) - \text{ع}'(\text{س}) . \text{ف}(\text{س})}{[\text{ف}(\text{س})]^{٢}}$$

وتفيد هذه القاعدة بأن تفاضل خارج قسمة دالتيْن هو المقام مضروباً في تفاضل البسط مطروحاً منه البسط مضروباً في تفاضل المقام، وكل ذلك مقسوم على مربع المقام.

مثال (١٦):

أوجد المشتقة المتقابلة للدالة: $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{٢\text{س}^{٣} - ٧}{٤\text{س}^{٢} + ٥}$

الحـل:

هنا نجد أن:

$$\text{ع}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٣} - ٧ \quad ، \quad \text{ف}(\text{س}) = ٤\text{س}^{٢} + ٥$$

وبتطبيق القاعدة (٦):

$$\text{د}'(\text{س}) = \frac{(٤\text{س}^{٢}+٥)(٦\text{س}^{٢})-(٢\text{س}^{٣}-٧)(٨\text{س})}{(٤\text{س}^{٢}+٥)^{٢}}$$

$$= \frac{٢٤\text{س}^{٤}+٣٠\text{س}^{٢}-١٦\text{س}^{٤}+٥٦\text{س}}{(٤\text{س}^{٢}+٥)^{٢}}$$

$$= \frac{٨\text{س}^{٤}+٣٠\text{س}^{٢}+٥٦\text{س}}{(٤\text{س}^{٢}+٥)^{٢}}$$

القاعدة (٧): قوة الدالة **Power of Function**

إذا كانت: $\text{د}(\text{س}) = [\text{ف}(\text{س})]^{\text{ن}}$ ، ن **عدد حقيقي، فإن:**

$$\text{د}'(\text{س}) = \text{ن}[\text{ف}(\text{س})]^{\text{ن}-١}.\text{ف}'(\text{س})$$

وهذه القاعدة تشبه قاعدة القوة (القاعدة ٢). وفي واقع الأمر فإن القاعدة (٢) هي حالة خاصة من تلك القاعدة والتي تكون فيها: $\text{ف}(\text{س}) = \text{س}$. حيث نجد حينئذ أن:

$\text{ف}'(\text{س}) = ١$. وبتطبيق القاعدة (٧) ينتج أن:

$$\text{د}'(\text{س}) = \text{ن}(\text{س})^{\text{ن}-١}(١) = \text{ن}(\text{س})^{\text{ن}-١}$$

مثال (١٧):

أوجد المشتقة التفاضلية للدوال التالية:

(١) $\text{د}(\text{س}) = (٢\text{س}^{٣}+٥\text{س}^{٢}-٦)^{٤}$ (٢) $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{٣\text{س}^{٢}+٨\text{س}}$

(٣) $\text{د}(\text{س}) = \left(\frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}\right)^{٣}$

الحـل:

(١) حيث أن: $\text{ف}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٣}+٥\text{س}^{٢}-٦$ ، $\text{ن} = ٤$

وبتطبيق القاعدة (٧):

$$\text{د}'(\text{س}) = \text{ن}\left[\text{ف}(\text{س})\right]^{\text{ن}-1} . \text{ف}'(\text{س})$$

$$= ٤\left(٢\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} - ٦\right)^{٤-١}\left(٦\text{س}^{٢} + ١٠\text{س}\right)$$

$$= ٤\left(٢\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} - ٦\right)^{٣}\left(٦\text{س}^{٢} + ١٠\text{س}\right)$$

(٢) $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{٣\text{س}^{٢} + ٨\text{س}} = \left(٣\text{س}^{٢} + ٨\text{س}\right)^{\frac{١}{٢}}$

أي أن: $\text{ف}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} + ٨\text{س}$، $\text{ن} = \frac{١}{٢}$

وبتطبيق القاعدة (٧):

$$\text{د}'(\text{س}) = \text{ن}\left[\text{ف}(\text{س})\right]^{\text{ن}-1} . \text{ف}'(\text{س})$$

$$= \frac{١}{٢}\left(٣\text{س}^{٢} + ٨\text{س}\right)^{\frac{١}{٢}-١}\left(٦\text{س} + ٨\right)$$

$$= \frac{٦\text{س} + ٨}{٢\left(٣\text{س}^{٢} + ٨\text{س}\right)^{\frac{١}{٢}}} = \frac{٣\text{س} + ٤}{\sqrt{٣\text{س}^{٢} + ٨\text{س}}}$$

(٣) حيث أن: $\text{ف}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١}$، $\text{ن} = ٣$

$$\therefore \text{د}'(\text{س}) = ٣\left(\frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}\right)^{٢}\left[\frac{\left(\text{س}^{٢}+١\right)(٢) - (٢\text{س})(٢\text{س})}{\left(\text{س}^{٢}+١\right)^{٢}}\right]$$

$$= ٣\left(\frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}\right)^{٢}\left[\frac{٢\text{س}^{٢}+٢-٤\text{س}^{٢}}{\left(\text{س}^{٢}+١\right)^{٢}}\right] = ١٢\left(\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}\right)^{٢}\left[\frac{-٢\text{س}^{٢}+٢}{\left(\text{س}^{٢}+١\right)^{٢}}\right]$$

$$= ٢٤\left(\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}\right)^{٢}\left[\frac{-\text{س}^{٢}+١}{\left(\text{س}^{٢}+١\right)^{٢}}\right] = \frac{٢٤\text{س}^{٢}\left(-\text{س}^{٢}+١\right)}{\left(\text{س}^{٢}+١\right)^{٣}}$$

القاعدة (٨): الدوال الأسية للأساس الطبيعي هـ Base-e Exponential Functions

إذا كانت: $د(س) = هـ^{ف(س)}$، **فإن:**

$$د'(س) = ف'(س)\ هـ^{ف(س)}$$

وهنا يجب أن نشير إلى أن القيمة التقريبية لـ هـ هي ٢,٧١٨٢٨.

مثال (١٨):

أوجد المشتقة التفاضلية للدوال التالية:

(١) $د(س) = هـ^{س}$ (٢) $د(س) = هـ^{٥س^٢+س}$

الحـل:

(١) حيث أن: $د(س) = هـ^{س}$ فــإن: $ف(س) = س$

وبتطبيق القاعدة (٨):

$$د'(س) = ف'(س)\ هـ^{ف(س)} = (١)\ هـ^{س} = هـ^{س}$$

وهنا يلزم التنويه إلى أن الدالة $هـ^{س}$ هي الدالة الوحيدة التي تكون مشتقتها التفاضلية هي نفس الدالة. أي أن:

$$د(س) = د'(س) = هـ^{س}$$

ومن وجهة النظر البيانية، نجد أن ميل مماس المنحنى الممثل لهذه الدالة عند أي نقطة على المنحنى يساوى تماماً قيمة هذه الدالة عند تلك النقطة.

(٢) حيث أن: $د(س) = هـ^{٥س^٢+س}$ فــإن: $ف(س) = ٥س^٢ + س$

$$\therefore د'(س) = ف'(س)\ هـ^{ف(س)} = (١٠س + ١)\ هـ^{٥س^٢+س}$$

القاعدة (٩): الدوال اللوغاريتمية الطبيعية Natural Logarithm Functions

إذا كانت: $د(س) = لـو_{هـ} ف(س)$، **فإن:**

$$د'(س) = \frac{ف'(س)}{ف(س)}$$

مثال (١٩):

أوجد المشتقة التفاضلية للدوال التالية:

(١) $د(س) = لـو_{هـ} س$ (٢) $د(س) = لـو_{هـ} (٤ س^{٢} - ٣ س + ١)$

الحـل:

(١) حيث أن: $د(س) = لـو_{هـ} س$ فـإن: $ف(س) = س$

$$\therefore د^{\prime}(س) = \frac{ف^{\prime}(س)}{ف(س)} = \frac{١}{س}$$

(٢) $د(س) = لـو_{هـ} (٤ س^{٢} - ٣ س + ١)$ ، $ف(س) = ٤ س^{٢} - ٣ س + ١$

وبتطبيق القاعدة (٩): $\therefore د^{\prime}(س) = \frac{٨ س - ٣}{٤ س^{٢} - ٣ س + ١}$

القاعدة (١٠): قانون السلسلة Chain Rule

إذا كانت: $ص = د(ع)$ و $ع = ف(س)$، **فإن:**

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$$

وفي واقع الأمر فإن القاعدة (٧)، قوة الدالة، تمثل حالة خاصة من هذه القاعدة.

مثال (٢٠):

إذا كانت: $ص = د(ع) = ٢ ع^{٢} - ع + ١$ ، $ع = ف(س) = س^{٣} + ٢ س^{٢}$

أوجد المشتقة التفاضلية: $\frac{د ص}{د س}$.

الحـل:

في هذا المثال نجد أن:

$ص = ٢ ع^{٢} - ع + ١$ ، $ع = س^{٣} + ٢ س^{٢}$

وبتطبيق القاعدة (١٠):

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

$$= (\text{٤ع} - ١)(\text{س}^{٣} + ٢\,\text{س}^{٢})$$

ويمكن التعبير عن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ بدلالة **س** وذلك بالتعويض عن ع = **س**^{٣} + **٢ س**^{٢}

حيث ينتج أن:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \left[٤(\text{س}^{٣} + ٢\,\text{س}^{٢}) - ١\right](٣\,\text{س}^{٢} + ٤\,\text{س})$$

$$= (٤\,\text{س}^{٣} + ٨\,\text{س}^{٢} - ١)(٣\,\text{س}^{٢} + ٤\,\text{س})$$

$$= ١٢\,\text{س}^{٥} + ١٦\,\text{س}^{٤} + ٢٤\,\text{س}^{٤} + ٣٢\,\text{س}^{٣} - ٣\,\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س}$$

$$= ١٢\,\text{س}^{٥} + ٤٠\,\text{س}^{٤} + ٣٢\,\text{س}^{٣} - ٣\,\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س}$$

حل آخر:

يمكن إيجاد المشتقة $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ بطريقة اخرى وذلك بالتعويض عن ع منذ البداية في الدالة ***ص*** ثم إيجاد قيمة المشتقة. ونوضح ذلك فيما يلي:

$$\text{ص} = ٢\,\text{ع}^{٢} - \text{ع} + ١$$

$$= ٢(\text{س}^{٣} + ٢\,\text{س}^{٢})^{٢} - (\text{س}^{٣} + ٢\,\text{س}^{٢}) + ١$$

$$= ٢(\text{س}^{٦} + ٤\,\text{س}^{٥} + ٤\,\text{س}^{٤}) - \text{س}^{٣} - ٢\,\text{س}^{٢} + ١$$

$$= ٢\,\text{س}^{٦} + ٨\,\text{س}^{٥} + ٨\,\text{س}^{٤} - \text{س}^{٣} - ٢\,\text{س}^{٢} + ١$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١٢\,\text{س}^{٥} + ٤٠\,\text{س}^{٤} + ٣٢\,\text{س}^{٣} - ٣\,\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س}$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من قبل.

خامساً: تفسير معدل التغير اللحظي

Instantaneous – Rate – of – Change Interpretation

أشرنا في موضع سابق من هذا الفصل إلى أن المشتقة التفاضلية الأولى تُستخدم في إيجاد معدل التغير اللحظي. وقد تناولنا العديد من الأمثلة التي توضح كيفية إيجاده. والآن نفسر مدلول هذا المعدل مستعينين في ذلك ببعض الأمثلة.

مثال (٢١):

السرعة اللحظية: Instantaneous Velocity

باستخدام بيانات المثال (٤)، حدد سرعة السيارة عند لحظة مرور:

أ- ساعتان   ب- ثلاث ساعات

الحــل:

السرعة اللحظية للسيارة عند أي نقطة زمنية يمكن تحديدها بإيجاد قيمة المشتقة التفاضلية للدالة عند قيمة **ت** التي تمثل هذه النقطة.

حيث أن: $د(ت) = ٥ت^{٢} + ١٢ت$ ∴ $د'(ت) = ١٠ت + ١٢$

(أ) سرعة السيارة لحظة مرور ساعتيْن هي:

$د'(٢) = ١٠(٢) + ١٢ = ٣٢$ كم / ساعة

(ب) سرعة السيارة لحظة مرور ثلاث ساعات هي:

$د'(٣) = ١٠(٣) + ١٢ = ٤٢$ كم / ساعة

مثال (٢٢):

إهلاك الأصول: Asset Depreciation

إذا كانت قيمة أصل ثابت في إحدى الشركات يمكن تقديرها باستخدام الدالة:

$$ق = ٢٤٠٠٠٠ هـ^{-٠,٠٤ت}$$

حيــث: **ق** قيمة الأصل الثابت بالجنيه،

ت عمر الأصل الثابت بالسنوات.

المطلوب:

(١) ما هي قيمة الآلة المتوقَّعة عندما يبلغ عمرها ٤ سنوات؟

(٢) حدد الصيغة العامة لمعدل التغير اللحظي في قيمة الأصل الثابت.

(٣) ما هو معدل التغير المتوقَّع عندما يبلغ عمر الآلة ١٠ سنوات؟

الحــل:

(١) قيمة الآلة عند عمر ٤ سنوات = $٢٤٠٠٠٠ هـ^{-٠,٠٤(٤)}$

= ٢٠٤٥١٥ جنيه

(٢) حيث أن: $ق = ٢٤٠٠٠٠ هـ^{-٠,٠٤ت}$

∴ معدل التغير اللحظي = $\frac{د ق}{د ت}$

$= ٢٤٠٠٠٠ هـ^{-٠,٠٤ت} (-٠,٠٤) = - ٩٦٠٠ هـ^{-٠,٠٤ت}$

أي أن: $\frac{د ق}{د ت} = - ٩٦٠٠ هـ^{-٠,٠٤ت}$

(٣) معدل التغير المتوقَّع عندما يبلغ عمر الآلة ١٠ سنوات هو:

$ق'(١٠) = - ٩٦٠٠ هـ^{-٠,٠٤(١٠)} = - ٩٦٠٠ هـ^{-٠,٤}$

= - ٦٤٣٥ جنيه

وهذا يعنى أنه عندما يكون عمر الآلة ١٠ سنوات فإنه من المتوقَّع أن تقل قيمتها بمقدار ٦٤٣٥ جنيه بنهاية عام قادم.

سادساً: المشتقات العليا Higher – Order Derivatives

يُقصد بالمشتقات العليا المشتقات ذات الدرجة الثانية فأكثر. وقد سبق أن تناولنا بالتفصيل المشتقة التفاضلية الأولى والتي جردناها أحياناً من صفة "الأولى". حيث أنه من المعروف أن المشتقة التفاضلية يُقصد بها المشتقة التفاضلية الأولى. وأننا عندما نصف المشتقة التفاضلية بصفة "الأولى" فإننا نقصد بذلك تمييزها عن غيرها من المشتقات ذات الدرجات الأعلى.

١- المشتقة التفاضلية الثانية: The Second Derivative

المشتقة التفاضلية الثانية د″ لدالة هي المشتقة التفاضلية للمشتقة التفاضلية الأولى. أي أنه إذا كان لدينا الدالة: ص = د (س)، فإننا نحصل على المشتقة التفاضلية الثانية بإجراء عملية التفاضل للمشتقة التفاضلية الأولى، أي بتفاضل الدالة مرتيْن بالنسبة لـ س. وعادة ما يُرمز إلى المشتقة التفاضلية الثانية بأحد الرمزيْن $\frac{د^٢ص}{د س^٢}$ أو د″(س). هذا ويمكن إيجاد المشتقة التفاضلية الثانية باستخدام نفس قواعد التفاضل التي تناولنا من قبل في إيجاد المشتقة التفاضلية الأولى.

وفيا يلي توضيح لكيفية إيجاد المشتقة التفاضلية الثانية مستعينين في ذلك ببعض الأمثلة:

د(س)	د′(س)	د″(س)
٣ $س^{٢}$ – ٥ س + ٤	٦ س – ٥	٦
$س^{٤}$ + ٢ س	٤ $س^{٣}$ + ٢	١٢ $س^{٢}$
$هـ^{س}$	$هـ^{س}$	$هـ^{س}$
لـو$_{هـ}$ س	$\frac{١}{س}$	$\frac{-١}{س^{٢}}$
٤ س + ١	٤	صفر

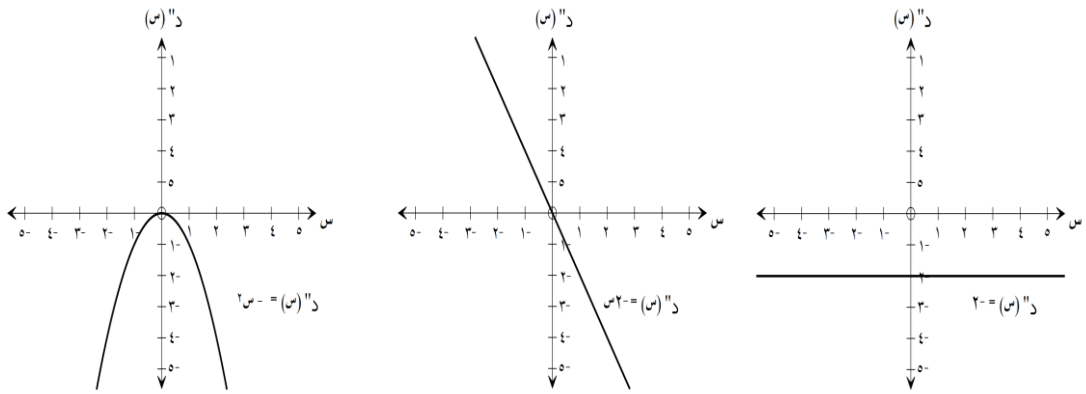
هذا وكما تقيس المشتقة الأولى معدل التغير اللحظي في **ص** بالنسبة إلى **س**، فإن المشتقة الثانية تقيس أيضا معدل التغير اللحظي في قيمة المشتقة الأولى بالنسبة إلى التغير في **س**. وبعبارة أخرى، فإن المشتقة الثانية تقيس معدل التغير اللحظي في الميل بالنسبة إلى التغير في **س**.

ولإلقاء المزيد من الضوء على المشتقة التفاضلية الثانية، دعنا نأخذ الدالة:

د(س) = - $س^{٢}$

حيث نجد: د′(س) = -٢ س ، د″(س) = -٢

والشكل (٦ – ٣) يوضح الرسم البياني لكل من د(س)، د′(س)، د″(س).



الشكل (٦ – ٣)
التمثيل البياني لـ د (س) ، د′ (س) ، د″ (س)
للدالة: د (س) = - $س^{٢}$

ومن الشكل نجد أن الدالة الأصلية: د(س) يمثلها قِطع مكافئ مقعر إلى أسفل وتقع قمته Vertex عند نقطة الأصل (صفر، صفر). وميل المماس يكون موجبا على يسار القمة، ولكن

قيمة الميل الموجبة تقل تدريجيا كلما اقتربت قيمة س من الصفر. وأما على يمين قمة القطع المكافئ، نجد أن الميل يكون سالبا وأن قيمة هذا الميل تتناقص بزيادة قيمة س. وأما فيما يتعلق بالرسم البياني للمشتقة الأولى: د′(س)، نجد أن قيم د′(س) موجبة ولكنها تقل كلما اقتربت قيمة س من الصفر من جهة اليسار. ثم تصبح قيم د′(س) سالبة أكثر فأكثر كلما زادت القيم الموجبة لـ س.

وكما سبق أن أشرنا فإن المشتقة الثانية تقيس معدل التغير اللحظي في المشتقة الأولى أو في الميل. وحيث أن: د″(س) = -٢، فإن معدل التغير في المشتقة الأولى ثابت دائماً. وبأسلوب أكثر تحديداً، فإن الميل يتناقص بمعدل مقداره ٢ لكل زيادة في س مقدارها وحدة واحدة. وهنا تجدر ملاحظة أن د′(س) يمثلها دالة خطية ميلها يساوى –٢.

٢- المشتقة التفاضلية من الدرجة الثالثة فأكثر:

Third and Higher – Order Derivatives

أصبح من اليسير علينا الآن أن ندرك كيفية إيجاد المشتقة التفاضلية من الدرجة الثالثة أو أكثر لدالة من الدوال. حيث يمكن إيجاد المشتقة التفاضلية الثالثة بإجراء عملية تفاضل للمشتقة الثانية، وهكذا بالنسبة لبقية المشتقات التفاضلية.

وبصفة عامة، فإن المشتقة النونية n^{th} – Order Derivative نحصل عليها بإجراء عملية التفاضل على الدالة بالنسبة إلى س عدد ن من المرات.

ويُرمز لها بالرمز $\frac{\text{د}^{(\text{ن})}\text{ص}}{\text{د س}^{(\text{ن})}}$ أو $\text{د}^{(\text{ن})}(\text{س})$. أي أن:

$$\text{د}^{(\text{ن})}(\text{س}) = \frac{\text{د}}{\text{د س}}[\text{د}^{(\text{ن}-1)}(\text{س})]$$

وهنا تجدر الإشارة إلى أن الدوال متعددة الحدود من الدرجة ن تكون مشتقتها التفاضلية الأولى من الدرجة ن –١. وأن كل مشتقة تالية تقل درجتها بمقدار واحد أقل من درجة سابقتها، وهكذا حتى نصل إلى مشتقة درجتها صفر.

مثال (٢٣):

إذا كان لدينا الدالة: $\text{ص} = \text{د}(\text{س}) = \text{س}^{5} - 6\,\text{س}^{4} - 2\,\text{س}^{3} + 7\,\text{س} + 12$

أوجد المشتقات التفاضلية التالية:

أ- د′(س) ب- د″(س) ج- $\text{د}^{(3)}(\text{س})$

الحـل:

حيث أن: $\text{ص} = \text{د}(\text{س}) = \text{س}^{5} - 6\,\text{س}^{4} - 2\,\text{س}^{3} + 7\,\text{س} + 12$

(أ) $د'(س) = \frac{دص}{دس} = ٥س^٤ - ٢٤س^٣ - ٦س^٢ + ٧$

(ب) $د''(س) = \frac{د^٢ص}{دس^٢} = ٢٠س^٣ - ٧٢س^٢ - ١٢س$

(جـ) $د^{(٣)}(س) = \frac{د^{(٣)}ص}{دس^{(٣)}} = ٦٠س^٢ - ١٤٤س - ١٢$

مثال (٢٤):

أوجد جميع المشتقات التفاضلية الممكنة للدالة:

$$ص = د(س) = س^٣ - ٦س^٢ + ٩س + ١٦$$

الحـل:

$د'(س) = \frac{دص}{دس} = ٣س^٢ - ١٢س + ٩$ ، $د''(س) = \frac{د^٢ص}{دس^٢} = ٦س - ١٢$

$د^{(٣)}(س) = \frac{د^{(٣)}ص}{دس^{(٣)}} = ٦$ ، $د^{(٤)}(س) = \frac{د^{(٤)}ص}{دس^{(٤)}} =$ صفر

وهنا سوف نجد أن أي مشتقة من الدرجة أكبر من ٤ سوف تكون مساوية للصفر.

والآن وبعد أن انتهينا من هذا الجزء في تناولنا لموضوع التفاضل، ربما يكون مفيداً للقارئ أن نلخص أهم الصيغ والقوانين التي تعرضنا لها في هذا الفصل وذلك على النحو التالي:

صيغ مهمة:

- $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س + \Delta س) - د(س)}{\Delta س}$ معدل التغير المتوسط
- $\frac{دص}{دس} = \underset{\Delta س \to ٠}{نهـا} \frac{د(س + \Delta س) - د(س)}{\Delta س}$

وهي تمثل المشتقة التفاضلية الأولى (معدل التغير اللحظي)

ولعله من الملائم هنا أن نوجز قواعد التفاضل المشار إليها من قبل وذلك قبل تناولنا لموضوع تطبيق التفاضل في مجال علم الاقتصاد.

قواعد التفاضل:

القاعدة (١): **إذا كانت:** $د(س) = أ$، (الدالة الثابتة)

$د'(س) = صفر$

القاعدة (٢): **إذا كانت:** $د(س) = س^{ن}$ (دالة القوة)

$د'(س) = ن\, س^{ن-١}$

القاعدة (٣): **إذا كانت:** $د(س) = أ.ع(س)$، (الدالة مضروبة في مقدار ثابت)

$د'(س) = أ.ع'(س)$

القاعدة (٤): **إذا كانت:** $د(س) = ع(س) \pm ف(س)$ (جمع وطرح الدوال)

$د'(س) = ع'(س) \pm ف'(س)$

القاعدة (٥): **إذا كانت:** $د(س) = ع(س).ف(س)$ (قاعدة الضرب)

$د'(س) = ع(س).ف'(س) + ع'(س).ف(س)$

القاعدة (٦): **إذا كانت:** $د(س) = \frac{ع(س)}{ف(س)}$ (قاعدة القسمة)

$$د'(س) = \frac{ف'(س).ع(س) - ع'(س).ف(س)}{[ف(س)]^{٢}}$$

القاعدة (٧): **إذا كانت:** $د(س) = [ف(س)]^{ن}$ (الدالـة ذات القوة)

$د'(س) = ن[ف(س)]^{ن-١}.ف'(س)$

القاعدة (٨): **إذا كانت:** $د(س) = هـ^{ف(س)}$ (الدالة الأسية للأساس الطبيعي)

$د'(س) = ف'(س)\, هـ^{ف(س)}$

القاعدة (٩): **إذا كانت:** $د(س) = لو_{هـ} ف(س)$ (الدوال اللوغاريتمية الطبيعية)

$$د'(س) = \frac{ف'(س)}{ف(س)}$$

القاعدة (١٠): **إذا كانت:** $ص = د(ع)$ **و** $ع = ف(س)$ (قاعدة السلسلة)

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$$

سابعاً: تطبيقات اقتصادية

في دراستنا للتطبيقات الاقتصادية للموضوعات التي تم تناولها في هذا الفصل سوف نغطي الكثير من النقاط التي تساعد الاقتصادي على اتخاذ القرار في كثير من المجالات الاقتصادية.

وسوف تشمل دراستنا الموضوعات التالية:

١- التكلفة والإيراد والأرباح	**٢-** نمو الناتج القومي الإجمالي
٣- التكلفة الحدية	**٤-** الإيراد الحدي
٥- الربح الحدي	**٦-** السعر الحدي والطلب الحدي
٧- الإنتاجية	**٨-** معدل الأجر الحقيقي
٩- الإعلان والمبيعات	**١٠-** معدل التكلفة الحدية
١١- معدل الإيراد الحدي ومعدل الربح الحدي	
١٢- مرونة الطلب	**١٣-** تغير السعر ومرونة الطلب

وسوف نستعين في ذلك بالأمثلة المختلفة التي تيسر على القارئ فهم واستيعاب ما نود عرضه في هذا الشأن.

١- التكلفة والإيراد والأرباح: Cost, Revenue and Profits

مثال (٢٥):

إذا كانت تكلفة إنتاج ك وحدة من منتَج معين أسبوعياً هي:

$ت(ك) = ٢٠٠٠٠ + ٤٠ك$ جنيه

وكان الإيراد المتحصَّل عليه من بيع ك وحدة كل أسبوع يتحدد بالدالة:

$ر(ك) = ١٠٠ك - ٠,٠١ك^٢$

فإذا كان مستوى الإنتاج الحالي هو ٣١٠٠ وحدة أسبوعياً، وأنه يُراد زيادة الإنتاج إلى ٣٢٠٠ وحدة أسبوعياً.

المطلوب:

(١) احسب الزيادة في كل من:

أ- التكلفة ب- الدخل ج- الأرباح

(٢) احسب معدل التغير المتوسط في كل من:

أ- التكلفة ب- الدخل ج- الأرباح

وذلك لكل وحدة زيادة في الإنتاج، ثم فسر النتائج التي تحصل عليها من وجهة النظر الاقتصادية.

الحـل:

(١) قيمة ك الأولى هي ٣١٠٠ ، ك + Δ ك = ٣٢٠٠

Δت = ت(ك + Δ ك) – ت(ك)

= ت(٣٢٠٠) – ت(٣١٠٠)

= [٢٠٠٠٠ + ٤٠(٣٢٠٠)] – [٢٠٠٠٠ + ٤٠(٣١٠٠)]

= ١٤٨٠٠٠ – ١٤٤٠٠٠ = ٤٠٠٠

Δ ر = ر(ك + Δ ك) – ر(ك)

= ر(٣٢٠٠) - ر(٣١٠٠)

= [١٠٠(٣٢٠٠) – ٠,٠١(٣٢٠٠)^{٢}] – [١٠٠(٣١٠٠) - ٠,٠١(٣١٠٠)^{٢}]

= ٢١٧٦٠٠ – ٢١٣٩٠٠ = ٣٧٠٠

وهكذا فإنه بزيادة الإنتاج من ٣١٠٠ وحدة إلى ٣٢٠٠ وحدة، تزداد التكلفة بمقدار ٤٠٠٠ جنيه، بينما تزداد الإيراد بمقدار ٣٧٠٠ جنيه. أي أن الأرباح سوف تقل بمقدار ٣٠٠ جنيه.

ويمكن توضيح ذلك بالتفصيل بإيجاد دالة الربح ع(س) من بيع ك وحدة كما يلي:

ع(ك) = ر(ك) – ت(ك)

= ١٠٠ ك – ٠,٠١ ك^{٢} – (٢٠٠٠٠ + ٤٠ ك)

= ٦٠ ك – ٠,٠١ ك^{٢} - ٢٠٠٠٠

مقدار التغير في الأرباح نتيجة زيادة الإنتاج من ٣١٠٠ وحدة إلى ٣٢٠٠ وحدة يتحدد كما يلي:

Δ ع = ع(٣٢٠٠) – ع(٣١٠٠)

= [٦٠(٣٢٠٠) – ٠,٠١(٣٢٠٠)^{٢} – ٢٠٠٠٠]

– [٦٠(٣١٠٠) – ٠,٠١(٣١٠٠)^{٢} – ٢٠٠٠٠]

= ٦٩٦٠٠ – ٦٩٩٠٠ = - ٣٠٠

أي أن الأرباح تنخفض بمقدار ٣٠٠ جنيه إذا زاد عدد الوحدات المنتَجة من ٣١٠٠ وحدة إلى ٣٢٠٠ وحدة.

(٢) معدل التغير المتوسط للتكلفة = $\frac{\Delta ت}{\Delta ك}$

= $\frac{ت(٣٢٠٠) - ت(٣١٠٠)}{٣٢٠٠ - ٣١٠٠}$ = $\frac{٤٠٠٠}{١٠٠}$ = ٤٠

أي أن التكلفة تزداد بمقدار ٤٠ جنيه في المتوسط لكل وحدة زيادة في الإنتاج.

معدل التغير المتوسط للإيـراد = $\frac{\Delta ر}{\Delta ك}$

$$= \frac{ر(٣٢٠٠) - ر(٣١٠٠)}{٣٢٠٠ - ٣١٠٠} = \frac{٣٧٠٠}{١٠٠} = ٣٧$$

وهكذا فإن الإيراد يزداد بمقدار ٣٧ جنيه في المتوسط لكل زيادة في الإنتاج مقدارها وحدة واحدة.

معدل التغير المتوسط للأربـاح = $\frac{\Delta ع}{\Delta ك}$

$$= \frac{ع(٣٢٠٠) - ع(٣١٠٠)}{٣٢٠٠ - ٣١٠٠} = \frac{-٣٠٠}{١٠٠} = -٣$$

وهذا يعنى أنه لكل وحدة زيادة في الإنتاج تنخفض الأرباح بمقدار ٣جنيهات

٢- نمو الإنتاج القومي الإجمالي: Growth of GNP

مثال (٢٦):

خلال الفترة ١٩٨٥ إلى ١٩٩٥، يتحدد الإنتاج القومي الإجمالي لإحدى الدول وفقا للصيغة:

$م = ٥ + ٠,١ س + ٠,٠١ س^٢$ بليون جنيه ، حيث س تمثل السنوات.

احسب معدل النمو المتوسط في السنة للإنتاج القومي الإجمالي ما بين سنة ١٩٨٥ (س = صفر) وسنة ١٩٩٥ (س = ١٠).

الحـل:

$$م = د(س) = ٥ + ٠,١ س + ٠,٠١ س^٢$$

$$\frac{\Delta م}{\Delta س} = \frac{د(١٠) - د(صفر)}{١٠ - صفر}$$

$$د(١٠) = ٥ + ٠,١(١٠) + ٠,٠١(١٠)^٢ = ٧$$

$$د(صفر) = ٥ + ٠,١(صفر) + ٠,٠١(صفر)^٢ = ٥$$

$$\therefore \frac{\Delta م}{\Delta س} = \frac{(٧) - (٥)}{١٠ - صفر} = ٠,٢$$

أي أن الناتج القومي الإجمالي يزيد في كل سنة بنسبة ٢٠٪ في المتوسط عن السنة السابقة لها وذلك خلال الفترة ١٩٨٥ ــ ١٩٩٥م.

التحليل الحدِّي: Marginal Analysis

تُستخدم المشتقة التفاضلية الأولى في الكثير من التطبيقات الاقتصادية خاصة في إيجاد ما يسمى بالمعدلات الحدية. هذا وبافتراض أن المؤسسة التجارية تقوم بإنتاج عدد معين من الوحدات كل سنة، فإن التحليل الحدي يقدم لنا تأثير كل وحدة إضافية تنتَج وتباع على كل من التكلفة والإيراد والأرباح. وفيما يلي نتناول هذا الأمر بشيء من التفصيل.

٣- التكلفة الحدية: Marginal Cost

التكلفة الحدية هي مؤشر مهم في التحليل الحدي. وهي تشير إلى التكلفة الإضافية نتيجة لإنتاج وحدة زيادة من المنتَج. وتفترض دالة التكلفة الخطية ثبات التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة. وفي مثل تلك الدوال فإن التكلفة الحدية تكون واحدة عند جميع مستويات الإنتاج. والدالة التالية توضح ذلك:

ت(ك) = ٦٠٠٠ + ١,٥ك

حيث تكون التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة ثابتة عند ١,٥ جنيه. والتكلفة الحدية لهذه الدالة هي دائماً ١,٥ جنيه.

وأما في دوال التكلفة غير الخطية فإنها تتصف بتغير التكلفة الحدية من مستوى لآخر من مستويات الإنتاج. ولو اعتبرنا دالة التكلفة:

ت(ك) = ٢٠٠٠٠ + ١٠ك + ٠,٠٠٣ك^{٢}

هذا والجدول في الصفحة التالية يوضح حساب التكلفة الحدية لمستويات مختلفة من الإنتاج.

ويتضح من العمود الثالث أن التكلفة الحدية تختلف باختلاف مستوى الإنتاج. حيث نجد أن التكلفة الحدية لإنتاج الوحدة ٢٠١ تساوى ١١,٢٠٣ جنيه، وهي تختلف عن التكلفة الحدية لإنتاج أي وحدة من الوحدات التالية.

إيجاد التكلفة الحدية للدالة: ت(ك) = ٢٠٠٠٠ + ١٠ك + ٠,٠٠٣ك^{٢}

مستوى الإنتاج (ك)	التكلفة الكلية ت (ك)	التكلفة الحدية Δت = ت (ك) – ت (ك – ١)
٢٠٠	٢٢١٢٠,٠٠٠ جنيه	
٢٠١	٢٢١٣١,٢٠٣ جنيه	١١,٢٠٣ جنيه
٢٠٢	٢٢١٤٢,٤١٢ جنيه	١١,٢٠٩ جنيه
٢٠٣	٢٢١٥٣,٦٢٧ جنيه	١١,٢١٥ جنيه
٢٠٤	٢٢١٦٤,٨٤٨ جنيه	١١,٢٢١ جنيه

هذا وتمثل المشتقة التفاضلية الأولـى ت′(ك) لدالة التكلفة ت(ك) معدل التغير اللحظي في التكلفة الكلية نتيجة لتغير عدد الوحدات المنتَجة. كما أن هذه المشتقة تعبر بشكل عام عن ميل الشكل البياني لدالة التكلفة الكلية. ولأغراض التحليل الحدي فإن هذه المشتقة يتم استخدامها كمؤشر للتكلفة الحدية.

والتكلفة الحدية ت′ تعطى تقديراً تقريبياً للتكلفة الحدية لإنتاج وحدة تالية من المنتَج. وبإيجاد ت′(ك) للدالــة المشار إليها سابقاً، نجد أن:

ت′(ك) = ١٠ + ٠,٠٠٦ ك

وللحصول على هذا التقدير للتكلفة الحدية نتيجة إنتاج الوحدة ٢٠١ نتبع ما يلي:

ت′(٢٠٠) = ١٠ + ٠,٠٠٦(٢٠٠) = ١١,٢ جنيه

وهو تقدير للتكلفة الحدية لإنتاج الوحدة ٢٠١، وهو يقترب كثيرا من القيمة الحقيقية لتلك التكلفة الواردة في الجدول وهي ١١,٢٠٣ جنيه. وهنا تلزم الإشارة إلى أن التكلفة الحدية في العمود الثالث تزداد في كل مرة بمقدار ٠,٠٠٦ جنيه نتيجة إنتاج وحدة إضافية من المنتَج. وأن هذا المقدار يمثل ميل دالة التكلفة الحدية (لاحظ أن: ت″(ك) = ٠,٠٠٦).

مثال (٢٧):

إذا كانت التكلفة الكلية بالجنيهات لإنتاج ك وحدة من أحد المنتَجات تتحدد وفقاً للدالة:

ت(ك) = ٣٥٠٠٠٠ + ٧٠٠٠ ك + ٠,٢٥ ك^{٢}

المطلوب:

(١) حدد التكلفة الحدية كدالة في عدد الوحدات المنتَجة.

(٢) أوجد التكلفة الحدية عند مستويات الإنتاج التالية:

أ- ك = ١٠٠ ب- ك = ٢٠٠

مفسَّراً نتائجك – اقتصادياً – في كل حالة من الحالات.

الحـل:

(١) التكلفة الحدية = ت′(ك) = $\frac{\text{دت}}{\text{دك}}$

= $\frac{\text{د}}{\text{دك}}$ (٣٥٠٠٠٠ + ٧٠٠٠ ك + ٠,٢٥ ك^{٢})

أي أن: ت′(ك) = ٧٠٠٠ + ٠,٥ ك

هذه الدالة تعطى متوسط التكلفة لكل وحدة إذا ما زاد الإنتاج بمقدار طفيف، هذا بافتراض أنه سبق إنتاج ك وحدة.

(٢) (أ) عندما ك = ١٠٠:

$$ت'(١٠٠) = ت'(١٠٠)$$

$$= ٧٠٠٠ + ٠,٥(١٠٠) = ٧٠٥٠$$

أي أنه عند مستوى الإنتاج ك= ١٠٠ وحدة، فإن أي زيادة طفيفة في الإنتاج يترتب عليها تكلفة مقدارها ٧٠٥٠ في المتوسط للوحدة الواحدة. وبعبارة أخرى، نستطيع القول أن إنتاج الوحدة رقم ١٠١ سوف يكلف ٧٠٥٠ جنيه.

(ب) عندما ك = ٢٠٠:

$$ت'(٢٠٠) = ٧٠٠٠ + ٠,٥(٢٠٠) = ٧١٠٠$$

وهذا يشير إلى أنه إذا زاد الإنتاج زيادة طفيفة عن الكمية ٢٠٠ وحدة فإن تكلفة إنتاج الوحدة الزيادة تبلغ في المتوسط ٧١٠٠ جنيه للوحدة الواحدة. أي أن إنتاج الوحدة رقم ٢٠١ سوف يكلف ٧١٠٠ جنيه. وهنا لابد وأن نشير أن مثل هذا التعبير – كسابقه في حالة ك= ١٠٠ – ليس دقيقاً تماماً وذلك لأن المشتقة التفاضلية الأولى تفترض زيادة طفيفة جداً في الإنتاج، وليس زيادة مقدارها وحدة واحدة. حيث أنه من الناحية العملية، تتمثل الزيادة في الإنتاج وما شابهه في وحدات صحيحة وليس في جزء من الوحدة. وهنا نؤكد على هذا المعنى فيما يتعلق بهذا المفهوم والمفاهيم المماثلة للمعدلات الحدية التي نتناولها فيما بعد دون الحاجة إلى تكرار ذكر ذلك مرة أخرى.

٤- الإيراد الحدي: Marginal Revenue

الإيراد الحدي هو واحد من أهم المفاهيم التي تستخدم في هذا الشأن. والإيراد الحدي يمثل الإيراد الإضافي نتيجة بيع وحدة منتَجة إضافية. ولو كان السعر ثابتاً في هذه الحالة، فإن الإيراد الحدي يساوى دائماً سعر الوحدة من المنتَج وذلك إذا كانت دالة الإيراد خطية في سعر السلعة. فعلى سبيل المثال، دالة الإيراد: **ر = ٢٥ ك** تشير إلى الحالة التي يكون فيها سعر الوحدة من السلعة هو ٢٥ وأن الإيراد الحدي من بيع وحدة إضافية هو ٢٥ أيضاً عند أي مستوى من مستوى الإنتاج.

وأما في حالة دالة الإيراد غير الخطية:

$$ر(ك) = ٢٠ ك - ٠,٠٠٢ ك^{٢}$$

فإن الإيراد الحدي وفقا لهذه الدالة ليس ثابتاً إذ أنه يتغير بتغير مستوى الإنتاج. ويوضح ذلك ما يلي:

إيجاد الإيراد الحدي للدالة: ر (ك) = ٢٠ ك – ٠,٠٠٢ ك^{٢}

مستوى الإنتاج (ك)	الإيراد الكلى ر (ك)	الإيراد الحدي Δ ر = ر (ك) – ر (ك – ١)
٢٠٠	٢٩٢٠,٠٠٠ جنيه	
٢٠١	٣٩٣٩,١٩٨ جنيه	١٩,١٩٨ جنيه
٢٠٢	٣٩٥٨,٣٩٢ جنيه	١٩,١٩٤ جنيه
٢٠٣	٣٩٧٧,٥٨٢ جنيه	١٩,١٩٠ جنيه
٢٠٤	٣٩٩٦,٧٦٨ جنيه	١٩,١٨٦ جنيه

ويوضح العمود الثالث من الجدول مقدار الإيراد الحدي عند مستويات مختلفة من الإنتاج. ويُلاحَظ أنه بالرغم من أن الفوارق بين مستويات الإنتاج تكون صغيرة (وحدة واحدة في كل مرة) إلا أن الإيراد يتغير من مستوى لآخر من مستويات الإنتاج.

ومن دالة الإيراد الكلي ر(ك) يمكننا إيجاد المشتقة التفاضلية الأولـى ر′(ك) والتي تمثل معدل التغير اللحظي في الإيراد الكلى بالنسبة إلى التغير في عدد الوحدات المُباعة. كما تمثل ر′(ك) التعبير العام عن ميل الشكـل البياني لدالة الإيراد الكلى. ولأغراض التحليل الحدي، فإن هذه المشتقة تُستخدم في تحديد الإيراد الحدي حيث:

الإيراد الحدي = ر′(ك)

ويمكن استخدام المشتقة في إيجاد الإيراد الحدي التقريبي من بيع الوحدة التالية من المنتَج. ولو أوجدنا ر′(ك) لدالـة الإيـراد المشار إليها ِ قبل:

ر(ك) = ٢٠ ك – ٠,٠٠٢ ك^{٢} فإننا نحصل على:

ر′(ك) = ٢٠ – ٠,٠٠٤ ك

وللحصول على قيمة تقريبية للإيراد الحدي من بيع الوحدة رقم ٢٠١، فإننا نوجد قيمة رَ(ك) عند ك = ٢٠٠. أي أن : رَ (٢٠٠) = ٢٠ – ٠,٠٠٤(٢٠٠) = ١٩,٢ جنيه
وهذا تقدير للإيراد الحدي من بيع الوحدة ٢٠١، وهو يقترب جداً من القيمة الحقيقية له الواردة في الجدول وهي ١٩,١٩٨ جنيه.

ولعله من المفيد بالنسبة للقارئ أن نشير هنا إلى أن الإيراد الحدي في العمود الثالث يتناقص في كل مرة بمقدار ٠,٠٠٤ جنيه نتيجة بيع وحدة إضافية من المنتَج. ويمثل مقدار النقصان هذا ميل دالة الإيراد الحدي (يلاحظ أن: ر″(ك) = -٠,٠٠٤).

مثال (٢٨):

إذا كانت دالة الطلب على إحدى السلع هي: **ك** = ١٠٠٠ – ٢٠ **س**

حيث: **ك** كمية الطلب (المبيعات) ، **س** سعر الوحدة بالجنيهات.

وإذا كانت دالة التكلفة هي: ت(**ك**) = ١٠٠٠ + ١٠ **ك**

حدد الإيراد الحدي كدالة في كمية الإنتاج. ثم احسب مقدار الإيراد الحدي عند مستويات الإنتاج.

أ- **ك** = ١٠٠ ب- **ك** = ١٥٠

الحـل:

حيث أن: الإيراد = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

= **ك** × **س** = **ك س**

وحيث أن: **ك** = ١٠٠٠ – ٢٠ **س**

٢٠ **س** = ١٠٠٠ – **ك**

ومن المعادلة: **س** = ٥٠ – ٠,٠٥ **ك**

الإيراد = ر(**ك**) = **ك** (٥٠ – ٠,٠٥ **ك**)

وبالتالي نجد أن الإيراد الحدي يأخذ الصورة:

ر َ(**ك**) = ٥٠ – ٠,١ **ك**

أ- الإيراد الحدي عند **ك** = ١٠٠:

ر َ(١٠٠) = ٥٠ – ٠,١(١٠٠) = ٤٠

أي أن الإيراد يزداد بمقدار ٤٠ جنيها نتيجة لزيادة المبيعات بمقدار وحدة واحدة، أي نتيجة لبيع الوحدة رقم ١٠١.

ب- الإيراد الحدي عند **ك** = ١٥٠:

ر َ(١٥٠) = ٥٠ – ٠,١(١٥٠) = ٣٥

وهذا يدل على أن الإيراد يزداد بمقدار ٣٥ جنيها عند بيع الوحدة رقم ١٥١.

٥- الربح الحدي: Marginal Profit

يمثل الربح الحدي مقدار التغير في الربح نتيجة لإنتاج وبيع وحدة واحدة إضافية من المنتَج. والربح الحدي – مثله في ذلك مثل الإيراد الحدي والتكلفة الحدية – يكون ثابتا لجميع

مستويات الإنتاج في حالة كون دالة الربح الكلى خطية. وأما في حالة الدالة غير الخطية فإن الربح الحدي يختلف باختلاف مستوى الإنتاج.

ولو أردنا إيجاد دالة الربح الكلى مستخدمين في ذلك الدالة الخطية للتكلفة الكية:

ت(ك) = ٦٠٠٠ + ١,٥ك والدالة غير الخطية للإيراد الكلى: ر(ك) =٢٠ك – ٠,٠٠٢ك ^{٢} واللتان سبق الإشارة إليهما عند تناولنا للتكلفة الكلية والإيراد الكلي فإننا نجد أن دالة الربح الكلى تتحدد كما يلي:

ع (ك) = ر (ك) – ت(ك)

= ٢٠ك – ٠,٠٠٢ك ^{٢} – (٦٠٠٠ + ١,٥ك)

أي أن دالة الربح الكلى هي:

ع (ك) = ١٨,٥ك – ٠,٠٠٢ك ^{٢} - ٦٠٠٠

وبحساب الربح الحدي عند مستويات الإنتاج المختلفة يتضح لنا ما يلي:

ونلاحظ من العمود الثالث أن الربح الحدي يختلف باختلاف مستوى الإنتاج. وبإيجاد دالة الربح الحدي والذي يمثلها المشتقة التفاضلية الأولى لدالة الربح الكلى نحصل على:

ع´(ك) = ١٨,٥ – ٠,٠٠٤ك أنظر الجدول التالي

إيجاد الربح الحدي للدالة : ع (ك) = ١٨,٥ك – ٠,٠٠٢ك ^{٢} - ٦٠٠٠

مستوى الإنتاج (ك)	الربح الكلى (*) ع(ك)	الربح الحدي Δع = ع(ك) – ع(ك – ١)
٢٠٠	- ٢٣٨٠,٠٠٠ جنيه	
٢٠١	- ٢٣٦٢,٣٠٢ جنيه	١٧,٦٩٨ جنيه
٢٠٢	- ٢٣٤٤,٦٠٨ جنيه	١٧,٦٩٤ جنيه
٢٠٣	- ٢٣٢٦,٩١٨ جنيه	١٧,٦٩٠ جنيه
٢٠٤	- ٢٣٠٩,٢٣٢ جنيه	١٧,٦٨٦ جنيه

(*) المقدار السالب للربح يعنى تحقيق خسارة.

ولتقدير الربح الحدي من إنتاج وبيع الوحدة رقم ٢٠١ نحصل على:

ع´(٢٠٠) = ١٨,٥ – ٠,٠٠٤(٢٠٠) = ١٧,٧ جنيه

وهو يقترب كثيراً من القيمة الحقيقية في الجدول وهي ١٧,٦٩٨ جنيه. وهنا لابد من الإشارة أيضاً إلى أنه يمكننا استنتاج أن الربح الحدي يتناقص بمقدار ٠,٠٠٤ جنيه في كل مرة يزداد فيها الإنتاج بمقدار وحدة واحدة، وأن مقدار الزيادة هذا يمثل ميل دالة الربح الحدي (يلاحظ أن: ع´´(ك)= -٠,٠٠٤).

مثال (٢٩):

باستخدام البيانات الواردة في مثال (٢٨)، أوجد الربح الحدي كدالة في كمية المبيعات. ثم احسب الربح الحدي عندما تصل كمية المبيعات إلى ٢٠٠ وحدة.

الحـل:

حيث أن: الربح = الإيراد – التكلفة

$$= ٥٠ك - ٠,٠٥ك^{٢} - (١٠٠٠ + ١٠ك)$$

$$= ٤٠ك - ٠,٠٥ك^{٢} - ١٠٠٠$$

أي أن دالة الربح هي:

$$ع(ك) = ٤٠ك - ٠,٠٥ك^{٢} - ١٠٠٠$$

$$\text{الربح الحدي} = \frac{دع}{دك} = ٤٠ - ٠,١ك$$

أي أن دالة الربح الحدي $ع'(ك)$ تتمثل في: $ع'(ك) = ٤٠ - ٠,١ك$

وبالتالي نجد أن الربح الحدي عند مستوى المبيعات $ك = ٢٠٠$ هو:

$$ع'(٢٠٠) = ٤٠ - ٠,١(٢٠٠)$$

$$= ٤٠ - ٢٠ = ٢٠$$

مما يعنى بأن الربح يزداد بمقدار ٢٠ جنيها نتيجة لزيادة المبيعات بمقدار وحدة واحدة. أي أن بيع الوحدة رقم ٢٠١ يدر ربحاً مقدار ٢٠ جنيها.

٦- السعر الحدي والطلب الحدي:

Marginal Price and Marginal Demand

إذا كانت دالة الطلب تأخذ الصورة:

$$س = د(ك)$$

حيـث: $س$ سعر الوحدة ، $ك$ كمية الطلب.

فـإن: $\frac{دس}{دك}$ يطلق عليها "السعر الحدي". وهو يشير إلى مقدار التغير في سعر السلعة نتيجة لحدوث زيادة طفيفة في كمية الطلب على السلعة.

وأما إذا أخذت دالة الطلب الصورة: $ك = د(س)$

فـإن: $\frac{دك}{دس}$ يطلق عليها "الطلب الحدي"، والذي يعنى مقدار التغير في كمية الطلب نتيجة لحدوث زيادة طفيفة في سعر السلعة.

مثال (٣٠):

إذا كانت دالة الطلب على أحد المنتَجات هي:

س = ٢٠٢٤ – ٢ك – ك ^٢^

حيث: **س** سعر الوحدة بالجنيه ، **ك** كمية الطلب.

المطلوب:

(١) حدد السعر الحدي كدالة في كمية الطلب.

(٢) إيجاد السعر الحدي عند مستوى الطلب ٣٠ وحدة.

ثم فسِّر نتائجك من وجهة النظر الاقتصادية.

الحـل:

(١) حيث أن: **س = ٢٠٢٤ – ٢ك – ك ^٢^**

فإن السعر الحدي يتمثل في:

السعر الحدي = $\frac{\text{دس}}{\text{دك}}$ = -٢ – ٢ك

(٢) السعر الحدي عند **ك** = ٣٠ يساوى:

السعر الحدي = - ٢ – ٢(٣٠) = - ٦٢

وهذا معناه أنه بزيادة كمية الطلب بمقدار وحدة واحدة عند مستوى الطلب ٣٠ وحدة، فإن سعر السلعة سوف ينخفض بمقدار ٦٢ جنيه. أي أن بيع الوحدة رقم ٣١ يؤدى إلى انخفاض السعر بمقدار ٦٢ جنيه.

مثال (٣١):

إذا كانت كمية الطلب على سلعة ما تتحدد وفقا لسعر الوحدة من هذه السلعة وذلك وفقاً للعلاقة التالية: **س ^٢^ + ك = ٢٠٠**

حيث: **س** سعر الوحدة بالجنيه ، **ك** كمية الطلب.

أوجد الطلب الحدي عندما يبلغ سعر السلعة جنيهان.

الحـل:

حيث أن: **س ^٢^ + ك = ٢٠٠** فــإن: **ك = ٢٠٠ – س ^٢^**

الطلب الحدي = $\frac{\text{دك}}{\text{دس}}$ = -٢ س

وعندمـا يكـون سعر الوحدة جنيهان فإن الطلب الحدي يمكـن تحديـده كما يلي:

الطلب الحدي = - ٢(٢) = - ٤

أي أن الطلب على السلعة ينخفض بمقدار ٤ وحدات إذا ما زاد سعر الوحدة من السلعة بمقدار جنيه واحد. وبعبارة أخرى، إذا تم عرض السلعة بسعر ٣ جنيهات للوحدة فإن الطلب على السلعة ينخفض بمقدار ٤ وحدات.

٧- الإنتاجيـة: Productivity

مثال (٣٢):

إذا كانت إنتاجية الوحدة (ج) من العمل (أي إنتاجيه ساعة العمل) تتحدد وفقاً لرأس المال المستثمَر في المصنع (م) وفي الآلات وذلك تبعا للدالة: $\text{ج} = ٠,٥\,\text{م}^{٢} + \text{م} - ٥$

حيث: م مقاسة بملايين الجنيهات، ج مقاسة بالجنيه لكل ساعة عمل.

فإذا افترضنا أن رأس المال المستثمَر هو ١٠ ملايين جنيه، وأنه يزداد سنوياً بمعدل ٢ مليون جنيه، احسب معدل زيادة إنتاجية ساعة العمل عبر السنوات.

الحـل:

إذا رمز للزمن بالرمز ن فإن المطلوب هنا هو إيجاد: $\frac{\text{د ج}}{\text{د ن}}$

ولكون رأس المال م يتزايد سنة بعد أخرى بمعدل ٢ مليون جنيه، فإننا نجد أن:

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٢$$

وحيث أن: $\frac{\text{د ج}}{\text{د ن}} = \frac{\text{د ج}}{\text{د م}} \times \frac{\text{د م}}{\text{د ن}}$

$$\therefore \frac{\text{د ج}}{\text{د ن}} = (\text{م} + ١)\,(٢) = ٢\text{م} + ٢$$

وبما أن رأس المال المستثمر م يساوى ١٠ ملايين جنيه، فإن معدل تزايد إنتاجية ساعة العمل عبر السنوات يمكن تحديده كما يلي:

$$\frac{\text{د ج}}{\text{د ن}} = ٢\text{م} + ٢ = ٢(١٠) + ٢ = ٢٢$$

أي أن إنتاجية ساعة العمل تزداد سنة بعد أخرى بمقدار ٢٢ مليون جنيه.

٨- معدل الأجر الحقيقي: Real Wage Rate

من المعروف اقتصادياً أنه في حالة حدوث زيادة في الأسعار سنة بعد أخرى، فإنه للوقوف على المستويات الحقيقية للأجور والمرتبات لابد أن يؤخذ في الحسبان الرقم القياسي لسعر المستهلك وذلك لما للتضخم من تأثير في هذا الشأن.

والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (٣٣):

يزداد معدل الأجر في السنة لمجموعة من العمال وفقا للصيغة:

$$\text{ج}(\text{ن}) = ٣ + ٠,٥\,\text{ن}$$

وذلك خلال السنوات ١٩٨٨ – ١٩٩٨، حيث:

ج ترمز لأجر العامل، **ن** ترمز إلى الزمن بالسنوات، حيث: **ن** = صفر لسنة ١٩٨٨.

وخلال تلك الفترة كان الرقم القياسي لسعر المستهلك هو:

$$\text{ر}(\text{ن}) = ١٠٠ + ٣\,\text{ن} + ٠,٥\,\text{ن}^{٢}$$

احسب معدل التغير في الأجور الحقيقية (أي بعد أخذ أثر التضخم في الاعتبار) وذلك في السنوات: ١٩٨٨، ١٩٩٣، ١٩٩٨.

ملحوظـة:

$$\text{الأجر الحقيقي} = ١٠٠\left(\frac{\text{الأجر}}{\text{الرقم القياسي لسعر المستهلك}}\right) = ١٠٠\left[\frac{\text{ج}(\text{ن})}{\text{ر}(\text{ن})}\right]$$

الحـل:

$$\text{الأجر الحقيقي}\ (\text{و}) = ١٠٠\left[\frac{\text{ج}(\text{ن})}{\text{ر}(\text{ن})}\right] = ١٠٠\left[\frac{٣ + ٠,٥\,\text{ن}}{١٠٠ + ٣\,\text{ن} + ٠,٥\,\text{ن}^{٢}}\right]$$

وبذلك يمكن إيجاد معدل المتغير في الأجر الحقيقي بالنسبة للسنوات كما يلي:

$$\frac{\text{د و}}{\text{د ن}} = \text{و}'(\text{ن}) = ١٠٠\left[\frac{(٣+\text{ن})(٣+٠,٥\,\text{ن}) - (١٠٠+٣\,\text{ن}+٠,٥\,\text{ن}^{٢})(٠,٥)}{(١٠٠+٣\,\text{ن}+٠,٥\,\text{ن}^{٢})^{٢}}\right]$$

$$= ١٠٠\left[\frac{٤١ - ٣\,\text{ن} - ٠,٢٥\,\text{ن}^{٢}}{(١٠٠+٣\,\text{ن}+٠,٥\,\text{ن}^{٢})^{٢}}\right]$$

معدل تغير الأجر الحقيقي:

في سنة ١٩٨٨: $\text{و}'(\text{صفر}) = ١٠٠\left(\frac{٤١}{١٠٠}\right) = ٠,٤١$

في سنة ١٩٩٣: $\text{ف}'(\text{٥}) = \text{١٠٠} \left[\dfrac{\text{٤١} - \text{٣}(\text{٥}) - \text{٠,٢٥}(\text{٥})^{\text{٢}}}{\left(\text{١٠٠} + \text{٣}(\text{٥}) + \text{٠,٥}(\text{٥})^{\text{٢}}\right)^{\text{٢}}} \right]$

$$= \text{١٠٠} \left[\dfrac{\text{١٩,٧٥}}{(\text{١٢٧,٥})^{\text{٢}}} \right] \text{١} = \text{٠,١٢١}$$

في سنة ١٩٩٨: $\text{ف}'(\text{١٠}) = \text{١٠٠} \left[\dfrac{\text{٤١} - \text{٣}(\text{١٠}) - \text{٠,٢٥}(\text{١٠})^{\text{٢}}}{\left(\text{١٠٠} + \text{٣}(\text{١٠}) + \text{٠,٥}(\text{١٠})^{\text{٢}}\right)^{\text{٢}}} \right]$

$$= \text{١٠٠} \left[\dfrac{-\text{١٤}}{(\text{١٨٠})^{\text{٢}}} \right] = -\text{٠,٠٤٣}$$

٩- الإعلان والمبيعات: Advertising and Sales

مثال (٣٤):

تنفق شركة مبلغاً مقداره ع جنيه على الدعاية لمبيعات ك وحدة من أحد منتَجاتها، حيث:

$$\text{ع} = \text{٢٠٠}\ \text{لـو}_{\text{هـ}} \left(\dfrac{\text{٤٠٠}}{\text{٥٠٠} - \text{ك}} \right)$$

وتبيع الشركة الوحدة الواحدة من هذا المنتَج بسعر ٥ جنيهات. أوجد معدل التغير في الإيراد الصافي (ر) بالنسبة للمنصرف على الإعلان.

الحـل:

المطلوب إيجاده هنا هو: $\dfrac{\text{د ر}}{\text{د ع}}$

لذلك فإنه لإيجاد معدل التغير في الإيراد بالنسبة للمنصرف على الإعلان فإنه يلزم أولا التعبير عن الإيراد ر كدالة للمنصرف على الإعلان. وهذا يتطلب ما يلي:

حيث أن: $\text{ع} = \text{٢٠٠}\ \text{لـو}_{\text{هـ}} \left(\dfrac{\text{٤٠٠}}{\text{٥٠٠} - \text{ك}} \right)$

$$\therefore \dfrac{\text{٤٠٠}}{\text{٥٠٠} - \text{ك}} = \text{هـ}^{\frac{\text{ع}}{\text{٢٠٠}}} \qquad \text{أي أن:} \quad \dfrac{\text{٥٠٠} - \text{ك}}{\text{٤٠٠}} = \text{هـ}^{\frac{-\text{ع}}{\text{٢٠٠}}}$$

ومن تلك العلاقة يمكننا أن نجد أن:

$$ك = ٥٠٠ - ٤٠٠هـ^{\frac{-ع}{٢٠٠}}$$

وحيث أن:

الإيراد الصافي = الإيراد – المنصرف على الإعلان

$$= ٥ك - ع$$

$$= ٥(٥٠٠ - ٤٠٠هـ^{\frac{-ع}{٢٠٠}}) - ع = ٢٥٠٠ - ٢٠٠٠هـ^{\frac{-ع}{٢٠٠}} - ع$$

وبذلك يمكننا إيجاد المعدل المطلوب كما يلي:

$$\frac{در}{دع} = -٢٠٠٠هـ^{\frac{-ع}{٢٠٠}}\left(\frac{-١}{٢٠٠}\right) - ١$$

أي أن: $ر'(ع) = ١٠هـ^{\frac{-ع}{٢٠٠}} - ١$

١٠- معدل التكلفة الحدية: Marginal Cost Rate

لقد سبق الإشارة إلى أن التكلفة الحدية يُعبِّر عنها المشتقة التفاضلية الأولى للتكلفة كدالة لكمية الإنتاج. ومن البديهي هنا أن معدل التكلفة الحدية ما هو إلا عبارة عن المشتقة الأولى للمشتقة التفاضلية الأولى لدالة التكلفة. وبعبارة أخرى، فإن معدل التكلفة الحدية إنما تمثله المشتقة التفاضلية الثانية لدالة التكلفة. وبمنطق مماثل، يمكننا تعريف كل من معدل الإيراد الحدي ومعدل الربح الحدي.

مثال (٣٥):

باستخدام بيانات المثال (٢٧)، أوجد معدل التكلفة الحدية، أي معدل التغير في التكلفة الحدية بالنسبة لكمية الإنتاج.

الحـل:

حيث أن: $ت(ك) = ٣٥٠٠٠٠ + ٧٠٠٠ك + ٠,٢٥ك^{٢}$

وجدنا أن التكلفة الحدية يمثلها الدالة:

$$ت'(ك) = ٧٠٠٠ + ٠,٥ك$$

وحيث أن معدل التكلفة الحدية هو المشتقة الثانية لدالة التكلفة فإن:

معدل التكلفة الحدية = $ت''(ك) = ٠,٥$

أي أن معدل التكلفة الحدية ثابت ولا يعتمد على عدد الوحدات المنتَجة.

١١- معدل الإيراد الحدي ومعدل الربح الحدي:
Marginal Revenue Rate and Marginal Profit Rate

مثال (٣٦):

باستخدام بيانات المثال (٢٨)، أوجد:

- معدل التكلفة الحدية - معدل الإيراد الحدي - معدل الربح الحدي

ثم علِّق على نتائجك.

الحـل:

من مثال (٢٨) نجد أن التكلفة الحدية هي:

$$ت'(ك) = ١٠$$

∴ معدل التكلفة الحدية = ت''(ك) = صفر

أي أن التكلفة الحدية تظل ثابتة ولا تتغير بتغير كمية الإنتاج.

دالة الإيراد هي: $ر(ك) = ٥٠ك - ٠,٠٥ك^٢$

وجدنا أن دالة الإيراد الحدي تأخذ الصورة:

$$ر'(ك) = ٥٠ - ٠,١ك$$

وبالتالي ينتج أن معدل الإيراد الحدي يتمثل في: ر''(ك) = - ٠,١

وهو لا يعتمد على قيمة عدد الوحدات المنتَجة.

وفي مثال (٢٨) كانت دالة الربح الحدي كما يلي:

$$ع'(ك) = ٤٠ - ٠,١ك$$

وبذلك نجد أن معدل الربح الحدي هو:

$$ع''(ك) = - ٠,١$$

وهو أيضا لا يعتمد على عدد الوحدات المنتَجة.

وهنا يجب على القارئ أن يلاحظ ما يلي:

معدل الربح الحدي = معدل الإيراد الحدي – معدل التكلفة الحدية

١٢- مرونة الطلب: Elasticity of Demand

إن مرونة الطلب هي من أهم المفاهيم المستخدمة بشكل واسع في الاقتصاد. فلو كان لدينا دالة الطلب على متنجَ معين ك = د(س)، حيث ك تمثل كمية الطلب، بينما تمثل س سعر الوحدة. فإن مرونة الطلب هي :

$$\text{مرونة الطلب (م)} = \frac{\text{النسبة المئوية للتغير في الطلب}}{\text{النسبة المئوية للتغير في السعر}}$$

وتقيس هذه النسبة استجابة الطلب النسبية للتغيرات في السعر. ويمكن التعبير عن تلك النسبة بالرموز كما يلي:

$$\frac{\text{النسبة المئوية للتغير في الطلب}}{\text{النسبة المئوية للتغير في السعر}} = \frac{100\left(\frac{\Delta ك}{ك}\right)}{100\left(\frac{\Delta س}{س}\right)} = \frac{س}{ك}\left(\frac{\Delta ك}{\Delta س}\right)$$

والمرونة بصورتها الحالية إنما تقيس معدل التغير المتوسط في الطلب بالنسبة إلى التغير في السعر من قيمة إلى أخرى. لذلك فإن القيمة العددية لمرونة الطلب عادة ما تكون سالبة وذلك نظراً للعلاقة العكسية ما بين السعر وكمية الطلب.

هذا وعادة ما نحتاج إلى قياس مرونة الطلب عند سعر معين. وهنا نكون بصدد قياس معدل التغير اللحظي في الطلب بالنسبة إلى التغير في السعر. وبعبارة أخرى، قياس التغير في الطلب عندما يحدث تغير طفيف في السعر يقترب بدرجة كافية من الصفر دون أن يصل إليه. لذلك فإنه من المنطقي أن نجد أن مرونة النقطة للطلب يمكن تحديدها بإيجاد نهاية المقدار $\frac{س}{ك}\left(\frac{\Delta ك}{\Delta س}\right)$ عندما تؤول $\Delta س$ إلى الصفر. أي أن:

مرونة النقطة للطلب (م) عند النقطة (س، ك) هي:

$$م = \lim_{\Delta س \to 0} \frac{س}{ك}\left(\frac{\Delta ك}{\Delta س}\right)$$

$$= \frac{س}{ك} \lim_{\Delta س \to 0} \left(\frac{\Delta ك}{\Delta س}\right) = \left(\frac{س}{ك}\right)\frac{دك}{دس}$$ ، أي أن:

$$\text{مرونة النقطة (م)} = \frac{س}{ك}\left(\frac{دك}{دس}\right) = \frac{س}{ك}\, ك'(س)$$

وهذا يعني أن: **مرونة النقطة** $= \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية}} \times$ **تفاضل الكمية بالنسبة للسعـــر**

هذا وفي حالة حدوث تغير طفيف في السعر فإن النسبة $\frac{\Delta ك}{\Delta س}$ تساوى تقريبـاً المشتقة التفاضلية $\frac{دك}{دس}$. لذلك عندما تكون $\Delta س$ صغيرة فإن:

$$\frac{\text{س}}{\text{ك}}\left(\frac{\Delta\text{ك}}{\Delta\text{س}}\right) \approx \frac{\text{س}}{\text{ك}}\left(\frac{\text{دك}}{\text{دس}}\right) = \text{م}$$

وهكذا نستطيع القول بأنه لو كان التغير في السعر طفيفا فإن:

النسبة المئوية للتغير في الطلب ≈ م(النسبة المئوية للتغير في السعر)

وعلى سبيل المثال، لو أن زيادة السعر بنسبة ٤٪ أدت إلى انخفاض الطلب بنسبة ٥٪. فإن مرونة الطلب تساوى $\frac{-٥}{٤}$ = – ٠١,٢٥ هذا ولو كانت مرونة الطلب – ٠,٨ فإن زيادة السعر بنسبة ٦٪ تؤدى إلى انخفاض الطلب بنسبة (– ٠,٨) (٦٪) = – ٤,٨٪.

مثال (٣٧):

إذا كانت دالة الطلب على أحد المنتَجات هي:

$$\text{ك} = ٢٥٠ - ٣٠\text{س} + \text{س}^{٢}$$

حيث: ك كمية الطلب بالوحدات، س سعر الوحدة بالجنيه.

المطلوب:

(أ) أوجد مرونة الطلب عند مستوى السعر س = ١٢. علِّق على النتيجة التي تحصل عليها.

(ب) إذا زاد السعر بنسبة ٨,٥٪، ما هي النسبة التقريبية لانخفاض الطلب؟

الحـل:

(أ) مرونة الطلب = $\frac{\text{س}}{\text{ك}}\left(\frac{\text{دك}}{\text{دس}}\right)$

وحيث أن: $\text{ك} = ٢٥٠ - ٣٠\text{س} + \text{س}^{٢}$

$$\frac{\text{دك}}{\text{دس}} = -٣٠ + ٢\text{س}$$

∴ مرونة الطلب (م) = $\frac{\text{س}}{\text{ك}}$ $(-٣٠ + ٢\text{س})$

عندما س = ١٢:

$$\text{ك} = ٢٥٠ - ٣٠(١٢) + (١٢)^{٢} = ٣٤$$

وهكذا نجد أن مرونة الطلب عند السعر ١٢ والكمية ٣٤ تتحدد كما يلي:

مرونة الطلب (م) = $\frac{١٢}{٣٤}$ [(- ٣٠ + ٢(١٢)]

$$= \frac{١٢}{٣٤} (-٦) = -٢,١٢$$

ويمكننا تفسير أن مرونة الطلب (م) = - ٢,١٢ كما يلي:
عند سعر الوحدة ١٢، فإن الزيادة في السعر بمقدار ١٪ تؤدى إلى نقص في الطلب بنسبة ٢,١٢٪. وهكذا نجد أن النسبة المئوية للتغير في الطلب من المتوقَّع أن تبلغ أكثر بقليل من ضعف النسبة المئوية للتغير في السعر.

(ب) حيث أن:

النسبة المئوية للتغير في الطلب ≈ م(النسبة المئوية للتغير في السعر)

فإننا نجد أن:

النسبة المئوية للتغير في الطلب ≈ - ٢,١٢(٨,٥٪) ≈ - ١٨٪

أي أن زيادة السعر بنسبة ٨,٥٪ أدت إلى انخفاض الطلب بنسبة ١٨٪. ومرة ثانية، وكما سبق الإشارة في المطلوب (أ)، فإن النسبة المئوية لانخفاض الطلب تبلغ أكثر من ضعف النسبة المئوية للزيادة في السعر.

هذا وقد قسم الاقتصاديون القيم التي تأخذها مرونة النقطة إلى ثلاثة أقسام كما يلي:

- **الحالة (١): (|م| > ١)، أي: م < - ١**

وفي هذه الحالة، تكون النسبة المئوية للتغير في الطلب أكبر من النسبة المئوية للتغير في السعر (على سبيل: ١٪ تغير في السعر يؤدى إلى تغير في الطلب بأكثر من ١٪). ويُقال عندئذ أن الطلب يكون مرناً Elastic. وفي تلك الحالة، فإن الزيادة في السعر تؤدى إلى انخفاض في الطلب بنسبة أكبر مما يؤدى بدوره إلى انخفاض الإيراد الكلى.

- **الحالة (٢): (|م| < ١)، أي: - ١ < م < صفر**

وفي هذه الحالة، تكون النسبة المئوية للتغير في الطلب أقل من النسبة المئوية للتغير في السعر. وهنا يكون الطلب غير مرن Inelastic. وفي تلك الحالة، فإن الزيادة في السعر تؤدى إلى انخفاض في الطلب بنسبة أقل، وهذا يؤدى بدوره إلى زيادة الإيراد الكلى.

- **الحالة (٣): (|م| = ١)، أي: م = - ١**

وفي هذه الحالة، تكون النسبة المئوية للتغير في الطلب مساوية للنسبة المئوية للتغير في السعر. ويُقال عندئذ أن الطلب له مرونة الوحدة Unit Elastic، وأن المرونة تكون متكافئة. وعندها يظل الإيراد الكلى ثابتاً رغم تغير السعر، أي أن حاصل ضرب: **ك × س** يبقى ثابتاً. وفي واقع الأمر، فإنه في هذه الحالة تكون م = - ١ فقط وليس ١، وذلك لأن مرونة الطلب عادة ما تكون سالبة.

مثال (٣٨):

إذا كانت دالة الطلب على إحدى السلع هي:

ك = ١٠٠٠ – ٥٠ س

حيث: **ك** كمية الطلب بالوحدات ، **س** سعر الوحدة بالجنيه.

المطلوب:

(١) إيجاد مرونة الطلب عند الأسعار التالية للسلعة:

(أ) **س** = ٥ (ب) **س** = ١٢

ثم فسِّر ما تحصل عليه من نتائج.

(٢) حدد مستوى الطلب الذي لا يتأثر عنده الإيراد بارتفاع أو انخفاض السعر.

الحـل:

(١) مرونة الطلب = $\frac{\text{س}}{\text{ك}}\left(\frac{\text{دك}}{\text{دس}}\right)$

وحيث أن: **ك** = ١٠٠٠ – ٥٠ **س** فإن $\frac{\text{دك}}{\text{دس}}$ = - ٥٠

(أ) عندما **س** = ٥:

ك = ١٠٠٠ – ٥٠(٥) = ٧٥٠

مرونة الطلب = $\left(\frac{\text{٥}}{\text{٧٥٠}}\right)$(-٥٠) = - $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$

وتفسير ذلك أنه عند السعر ٥ جنيهات للوحدة فإن الزيادة في السعر بنسبة ١٪ يترتب عليها نقص في كمية الطلب بنسبة ٠,٣٣٪. أي أن النسبة المئوية للتغير في الطلب من المتوقع أن تكون ثلث النسبة المئوية للتغير في السعر. ويرجع ذلك إلى أن الطلب غير مرن حيث أن (|م| = $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$ < ١).

وكنتيجة لذلك، فإن الزيادة في السعر يترتب عليها زيادة في الإيراد الكلى.

(ب) عندما **س** = ١٢:

ك = ١٠٠٠ – ٥٠(١٢) = ٤٠٠

مرونة الطلب = $\left(\frac{\text{١٢}}{\text{٤٠٠}}\right)$(-٥٠) = - ١,٥

وحيث أن: |م| = ١,٥ > ١

فإن الطلب عند هذا السعر (**س** = ١٢) يكون مرنا. وهذا يعنى أن النسبة المئوية للزيادة في السعر تؤدى إلى انخفاض في الطلب بنسبة مئوية أكبر. وهذا يؤدى بدوره إلى انخفاض الإيراد

الكلى بزيادة السعر. وفي واقع الأمر، فإن الزيادة في السعر بنسبة ١٪ تؤدى إلى انخفاض الطلب بنسبة ١,٥٪.

(٢) لكي لا يتأثر الإيراد الكلى بارتفاع أو انخفاض السعر عند مستوى طلب معين، فإن مرونة الطلب عند هذا المستوى يجب أن تساوى -١، أي أن: |م| = ١.

$$\text{مرونة الطلب} = \frac{س}{ك}\left(\frac{دك}{دس}\right)$$

وبالتعويض عن **س** بدلالة **ك** في مرونة الطلب، نجد أن:

حيث أن: **ك = ١٠٠٠ – ٥٠ س**

$$\therefore\ س = \frac{١٠٠٠ - ك}{٥٠}$$

وهكذا نوجد مرونة الطلب كما يلي:

حيث أن: $\left(\frac{دك}{دس}\right) = -٥٠$

$$\therefore\ \text{مرونة الطلب} = \left(\frac{\frac{١٠٠٠ - ك}{٥٠}}{ك}\right)(-٥٠) = \frac{ك - ١٠٠٠}{ك}$$

وبمساواة مرونة الطلب بالقيمة -١ (يلاحظ أن مرونة الطلب عادة ما تكون سالبة)، ينتج أن:

$$\frac{ك - ١٠٠٠}{ك} = -١ \quad ،\quad ٢ك = ١٠٠٠ \quad ،\quad ك = ٥٠٠$$

أي أنه عند مستوى الطلب: **ك** = ٥٠٠ وحدة، فإن الإيراد الكلى لا يتأثر بارتفاع أو انخفاض السعر، حيث يكون للطلب مرونة الوحدة.

١٣- تغير السعر ومرونة الطلب: Price Change and Elasticity

مثال (٣٩):

إذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة هي:

$$ك = \sqrt{٤١٠٠ - س^{٢}}$$

حيث: **ك** كمية الطلب ، **س** سعر الوحدة بالجنيه.

ما هو تأثير ارتفاع السعر على الإيراد الكلى (من حيث الزيادة أو النقصان) وذلك عند مستويات الطلب التالية:

(١) **ك** = ٤٠ وحدة (٢) **ك** = ٥٠ وحدة

الحـل:

(١) حيث أن: $ك = \sqrt{٤١٠٠ - س^{٢}}$

عندما ك = ٤٠ ، $٤٠ = \sqrt{٤١٠٠ - س^{٢}}$

$١٦٠٠ = ٤١٠٠ - س^{٢}$ ، $س^{٢} = ٢٥٠٠$

س = ٥٠ مع إهمال الإشارة السالبة للجذر.

$$\text{مرونة الطلب (م)} = \left(\frac{س}{ك}\right)\left(\frac{دك}{دس}\right)$$

$$= \left(\frac{٥٠}{٤٠}\right)\left[\frac{١}{٢}\left(٤١٠٠ - س^{٢}\right)^{-٠,٥}\left(-٢س\right)\right]$$

$$= \left(\frac{٥٠}{٤٠}\right)\left[\frac{-س}{\sqrt{٤١٠٠ - س^{٢}}}\right] = \left(\frac{٥٠}{٤٠}\right)\left[\frac{-٥٠}{\sqrt{٤١٠٠ - ٢٥٠٠}}\right]$$

$$= \left(\frac{٥٠}{٤٠}\right)\left(\frac{-٥٠}{٤٠}\right) = -١,٦$$

وحيث أن: |م| > ١، فإنه عند مستوى الكمية ك = ٤٠ يكون الطلب مرناً. أي أن الزيادة في السعر تؤدى إلى انخفاض في الطلب بنسبة أكبر، وهذا يؤدى بدوره إلى انخفاض الإيراد الكلى.

(٢) عندما ك = ٥٠ ، $٥٠ = \sqrt{٤١٠٠ - س^{٢}}$

ومنها نجد أن: **س** = ٤٠ مع إهمال الإشارة السالبة للجذر.

$$\text{مرونة الطلب (م)} = \left(\frac{٤٠}{٥٠}\right)\left[\frac{-س}{\sqrt{٤١٠٠ - س^{٢}}}\right]$$

$$= \left(\frac{٤٠}{٥٠}\right)\left[\frac{-٤٠}{\sqrt{٤١٠٠ - ١٦٠٠}}\right] = \left(\frac{٤٠}{٥٠}\right)\left(\frac{-٤٠}{٥٠}\right) = -٠,٦٤$$

وحيث أن: |م| < ١ فإنه عند مستوى الكمية ك = ٤٠ يكون الطلب غير مرن. أي أن الزيادة في السعر تؤدى إلى انخفاض في الطلب بنسبة أقل وبالتالي يزداد الإيراد الكلى.

مثال (٤٠):

باستخدام بيانات المثال (٣٩)، حدِّد مستوى الطلب الذي لا يتأثر عنده الإيراد بارتفاع أو انخفاض السعر.

الحــل:

لكي لا يتأثر الإيراد بارتفاع أو انخفاض السعر عند مستوى طلـــب معين، فإن مرونة الطلب عند هذا المستوى يجب أن تساوى -١.

وسوف نترك للقارئ إثبات أن:

$$\text{المرونة (م)} = \frac{\text{ك}^{٢} - ٤١٠٠}{\text{ك}^{٢}}$$

$$\frac{\text{ك}^{٢} - ٤١٠٠}{\text{ك}^{٢}} = -١ \quad \text{يؤدى إلى:} \quad \text{ك} = ٤٥,٣$$

أي أن مستوى الطلب الذي لا يتأثر عنده الإيراد بارتفاع أو انخفاض السعر هو **ك** = ٤٥.

ويمكن حل هذا المثال بطريقة أخرى، وذلك بإيجاد السعر الذي لا يتأثر عنده الإيراد بالزيادة أو النقصان في السعر ثم التعويض عن قيمة السعر في دالة الطلب لإيجاد مستوى الطلب المطلوب.

وفي تناولنا للتطبيقات الاقتصادية للمشتقات التفاضلية لم يكن تركيزنا على المشتقة التفاضلية الثانية بالقدر الكافي. وذلك نظرا لأننا سوف نتناول تطبيقات تلك المشتقة بشكل تفصيلي في الفصل السابع من هذا الكتاب.

تمارين

الفصل السادس

١- أوجد معدل التغير المتوسط لكل من الدوال التالية:

أ- د(س) = ٣ س^{٢} − ٥ س + ١ ، س = ٣، Δس = ٠,٢

ب- د(س) = $\frac{\text{٣ س}^{٢}+\text{١}}{\text{س}}$ ، س = ٥ ، Δس = ٠,٣

جـ- د(س) = ٣ − ٧ س ، س = ٢ ، Δس = ٠,٥

د- د(س) = $\frac{\text{س}^{٢}-\text{٩}}{\text{س}-\text{٣}}$ ، س = ٢ ، Δس = ٠,٥

٢- أوجد معدل التغير المتوسط لكل من الدوال التالية إذا تغيرت **س** من القيمة **س** = -١ إلى القيمة **س** = ٢

أ- د(س)= ٢ س^{٢} + ٦ س + ٣ **ب-** د(س)= $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}+\text{٤}}$

جـ - د(س)= ٥ س^{٣} **د-** د(س)= س^{٤} + ١٠

٣- باستخدام المبادئ الأولية، أوجد المشتقة التفاضلية الأولى لكل من الدوال التالية:

أ- د(س) = س^{٢} − ٣ س + ٥ **ب-** د(س) = ٣ س^{٢} − ٥ س

جـ - د(س)= $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{٢}}$ + ٦ س **د-** د(س)= -٦ س^{٢} + ٣ س − ٥

٤- أوجد ميل المماس للشكل البياني لكل من الدوال التالية عند النقط المعطاة، ثم حدد معادلة خط المماس في كل حالة:

أ- د(س)= ٣ س^{٢} − ٤ عند س = ٢ **ب-** د(س)= س^{٢} + س + ٢ عند س = -٢

جـ- د(س)= $\frac{\text{س}+\text{١}}{\text{س}}$ عند س = ١

٥- إذا كان نمو المبيعات لإحدى السلع يأخذ الصورة:

$$م(ن) = ١٠٠٠٠ + ٢٠٠٠ن - ٢٠٠ن^{٢}$$

حيث: ن هي الزمن بالأسابيع ، م عدد الوحدات المباعة أسبوعياً.
أوجد معدل نمو المبيعات عند النقط الزمنية التالية:

أ- ن = صفر **ب-** ن = ٤ **جـ-** ن = ٨

٦- أوجد المشتقة التفاضلية الأولى، $د'(س)$، لكل من الدوال التالية:

أ- $د(س) = \frac{س^{٤}}{٢} - ٣س^{٢} + ١٠$

ب- $د(س) = (١٠ - س)(س^{٢} + ٢)$

جـ- $د(س) = \frac{٢س + ٣}{٣س^{٢} - ٢س}$

د- $د(س) = \left(س + \frac{٣}{س}\right)(س^{٢} - ٥)$

هـ- $د(س) = \sqrt{س^{٢} + ١}$

و- $د(س) = لـو_{هـ}(س^{٢} - ٢س + ٥)$

ز- $د(س) = هـ^{٣س^{٢} - س}$

ح- $د(س) = \frac{س^{٤}}{٤} - \frac{س^{٣}}{٣}$

ط- $د(س) = (هـ^{س} لـو_{هـ} س)^{٤}$

٧- أوجد $\frac{دص}{دس}$ إذا كان:

أ- $ص = ع^{٢} + ٢ع - ١$ ، $ع = س^{٢} + س$

ب- $ص = ع^{٣} - ٤$ ، $ع = س^{٣} + ٣$

جـ- $ص = (٢ع + ٣)^{٢}$ ، $ع = س^{٢} - ٣س$

٨- أوجد جميع المشتقات التفاضلية الممكنة لكل من الدوال التالية:

أ- $د(س) = \frac{٥س^{٤}}{٤} - \frac{٣س^{٣}}{٣} + ٦س^{٢} + ١٠س$

ب- $د(س) = ٢س^{٣} - ٨س^{٢} + ٥س - ١$ **جـ-** $د(س) = ٣س^{٢} + ٧س + ١٠$

د- $د(س) = ٢س^{٤} - ٣س$

٩- إذا كان من الممكن تقدير سكان إحدى المدن وفقا للدالة:

$$س = د(ن) = ١,٢هـ^{٠,٠٤٥ن}$$

حيث: س عدد السكان بالملايين ، ن الزمن مقاسا بالسنوات منذ عام ١٩٨٨.

المطلوب:

(أ) ما هو عدد السكان المتوقَّع عام ٢٠٠٠؟

(ب) عبِّر عن معدل التغير اللحظي في عدد السكان.

(جـ) ما هو المعدل الذي يُتوقَّع أن يتغير عدد السكان وفقاً له في عام ٢٠٠٠؟

١٠- إذا تم رمى كرة من فوق سطح أحد المنازل الذي يرتفع بمقدار ٩٠٠ قدم عن سطح الأرض. وتكون الكرة على ارتفاع ف قدم بعد ~ ثانية كما تصف ذلك الدالة التالية:

ف = د(~) = - ١٦ت^{٢} + ٨٠ت + ٩٠٠

لمطلوب:

(أ) ما هو ارتفاع الكرة بعد ٤ ثوان؟

(ب) متى تعود الكرة إلى الأرض؟

(جـ) ما هي سرعة الكرة لحظة ملامستها للأرض؟

١١- إذا وجد صاحب مصنع أن تكلفة إنتاج ك وحدة من منتَج معين تحددها الدالة:

ت = ٠,٠٠١ك ^{٣} + ٠,٣ك ^{٢} + ٤٠ك+ ١٠٠٠

المطلوب:

(أ) ما هي الزيادة في التكلفة إذا زاد الإنتاج من ٥٠ وحدة إلى ٦٠ وحدة؟

(ب) احسب التكلفة المتوسطة لكل وحدة إنتاج إضافية عند زيادة الإنتاج من ٥٠ إلى ٦٠ وحدة.

١٢- إذا كانت دالة التكلفة ت تأخذ الصورة التالية:

ت(ك) = ٣٠٠٠ + ١٠ك + ٠,١ك ^{٢}

حيث: ك عدد الوحدات المنتجَة.

لمطلوب:

(أ) أوجد الزيادة في التكلفة إذا زاد الإنتاج من ١٠٠ وحدة إلى ٢٠٠ وحدة.

(ب) احسب التكلفة المتوسطة لكل وحدة إضافية من الإنتاج عند الزيادة المُشار إليها في (أ).

(جـ) حدد التكلفة الحدية كدالة في عدد الوحدات المنتَجة.

(د) أوجد التكلفة الحدية عند مستويات الإنتاج:

ك = ٣٠٠ ، ك = ٤٠٠

ثم فسِّر نتائجك من الناحية الاقتصادية.

١٣- إذا كانت دالة الطلب على إحدى السلع هي:

ك ^{٢} + ٤٠٠ س = ١٠٠٠٠

حيث: س سعر الوحدة بالجنيه، ك كمية الطلب.

المطلوب:

(أ) أوجد الإيراد الحدي كدالة في كمية الإنتاج. ثم احسب مقدار الإيراد الحدي عند مستوى الإنتاج ك = ٢٠ وحدة.

(ب) إذا علمت أن دالة التكلفة تأخذ الصورة:

ت(ك) = ١٠٠٠ + ١٠ك

حدد الربح الحدي كدالة في كمية المبيعات. ثم احسب مقدار الربح الحدي عند مستوى الإنتاج ك = ٥٠ وحدة.

١٤- إذا كانت دالة الطلب على أحد المنتَجات تأخذ الصورة:

٢ك + ٣ لـو$_{هـ}$ (س + ١) = ٦٠

حيث: ك كمية الطلب ، س سعر الوحدة بالجنيه.

المطلوب:

(أ) حدد الطلب الحدي كدالة في سعر السلعة.

(ب) إيجاد الطلب الحدي عند مستوى السعر س = ٢.

١٥- تأخذ دالة الطلب على إحدى السلع الصيغة:

س = $\dfrac{٣٠٠}{ك^{٢}+١}$

حيث: ك كمية الطلب ، س سعر الوحدة

المطلوب:

(أ) أوجد السعر الحدي كدالة في كمية الطلب على السلعة.

(ب) احسب السعر الحدي عند مستوى الطلب: ك = ٣ وحدات.

١٦- يتم تصنيع وبيع أحد المنتَجات بربح مقداره ١٠ جنيهات للوحدة الواحدة. وإذا أنفق صاحب المصنع س جنيه على الإعلان عن منتَجه فإن عدد الوحدات التي يستطيع بيعها يساوى ١٠٠٠(١- هـ $^{-أس}$)، حيث أ = ٠,٠٠١ فإذا كانت ع ترمز إلى الربح الصافي من عملية البيع.

المطلوب:

(أ) أوجد $\frac{د ح}{د س}$ ثم فسِّر معنى تلك المشتقة من الناحية الاقتصادية.

(ب) احسب قيمة $\frac{د ح}{د س}$ عندما:

$س = ١٠٠٠$ ، $س = ٣٠٠٠$

ثم علِّق على ما تحصل عليه من نتائج.

١٧- باستخدام بيانات التمرين (١١)، احسب معدل التكلفة الحدية عند مستوى الإنتاج:
$ك = ١٠٠$ وحدة.

١٨- باستخدام بيانات التمرين (١٣)، أوجد معدل الإيراد الحدي ومعدل الربح الحدي.

١٩- باستخدام دالة الطلب المعطاة في المثال (٢٨)، ما هو مستوى الإنتاج الذي لا يتأثر عنده الإيراد بارتفاع أو انخفاض السعر؟

٢٠- باستخدام دالة الطلب المعطاة في المثال (٣١)، حدِّد مستوى الإنتاج الذي:

- يزداد عنده الإيراد بزيادة السعر.
- ينخفض عنده الإيراد بزيادة السعر.
- لا يتأثر عنده الإيراد بارتفاع أو انخفاض السعر.

الفصل السابع
وصف الدوال

في هذا الفصل سوف نعمِّق فهمنا للمشتقتيْن التفاضليتيْن الأولى والثانية. حيث سنرى كيف نصف سلوك الدوال المختلفة باستخدام تلك المشتقات. ومهماً تعددت الموضوعات التي سنتناولها هنا، إلا أن الهدف الرئيسي من هذا الفصل هو كيفية تحديد النهايات العظمى والصغرى للدوال والاستفادة منها في كثير من التطبيقات الاقتصادية.

والآن سوف نقدم أبعاداً جديدة لاستخدامات المشتقتيْن الأولى والثانية في وصف الدوال وصفاً دقيقاً يمكِّننا من توظيف تلك المشتقات في عمليات التحليل الاقتصادي.

أولاً: الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة
Increasing and Decreasing Functions

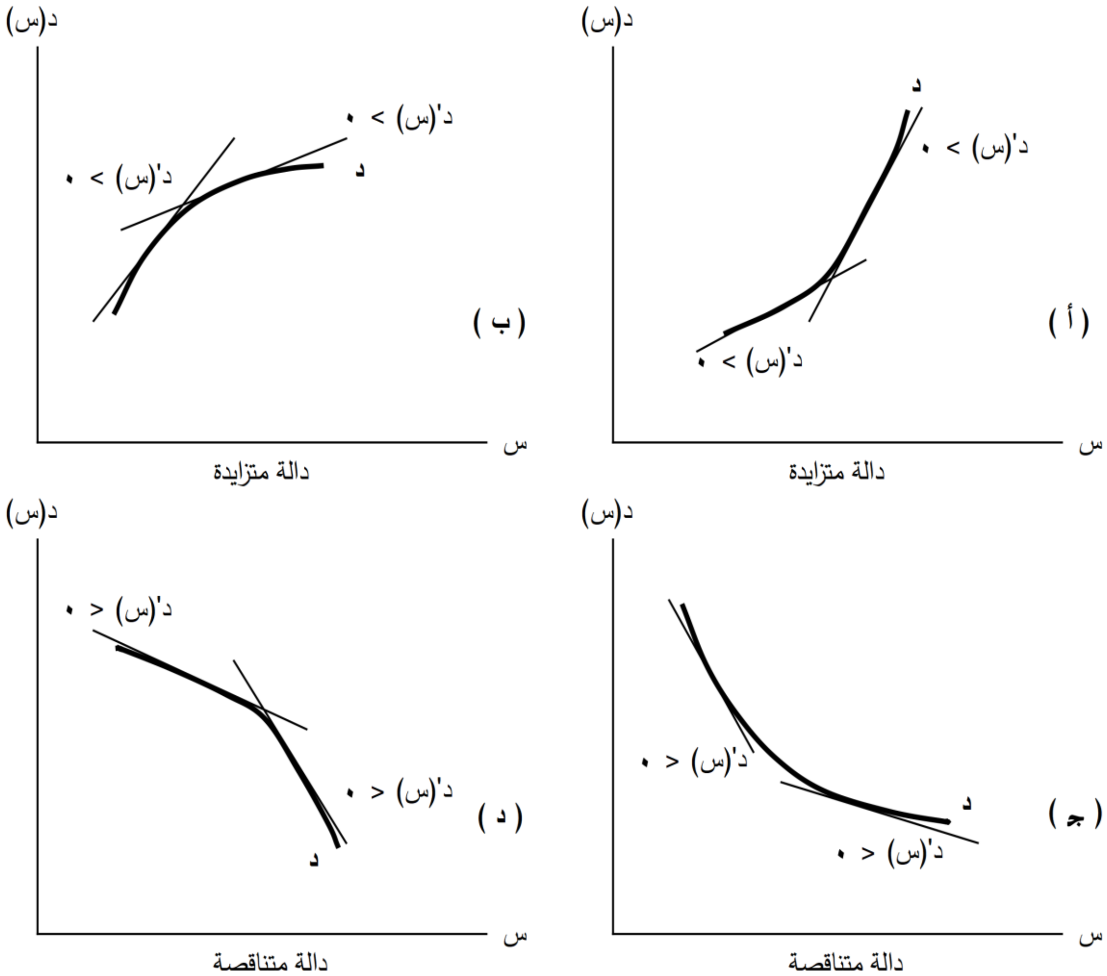
أشرنا بشكل عابر من قبل إلى الدالة المتزايدة والدالة المتناقصة. وهنا نلقى المزيد من الضوء على هذيْن المفهوميْن.

١- الدالة المتزايدة: Increasing Function

يُقال أن الدالة د(س) متزايدة خلال الفترة ف إذا كان:

د(س$_{١}$) < د(س$_{٢}$) وذلك بالنسبة لأي نقطتيْن س$_{١}$، س$_{٢}$ (س$_{١}$< س$_{٢}$) تقعان داخل هذه الفترة.

هذا ويمكن الحكم على الدالة من حيث كونها متزايدة أم لا من خلال الميل (المشتقة التفاضلية الأولى). حيث أنه لو كانت المشتقة الأولى موجبة خلال فترة معينة، فإن الميل يكون موجباً أيضاً خلال هذه الفترة وتكون الدالة بدورها متزايدة. وهذا يعنى أنه عند أي نقطة في هذه الفترة، فإن أية زيادة في قيمة س خلال تلك الفترة يترتب عليها زيادة أيضاً في قيمة الدالة د(س). ويمكن ملاحظة ذلك من الشكل (٧ - ١) حيث نجد أن المنحنييْن في الشكل (٧ - ١، أ)، (٧ - ١، ب) يمثلان دوال متزايدة في س وذلك لأن ميل المماس يكون موجباً عند أي نقطة.



الشكل (٧ - ١)

العلاقة بين د´(س) والدوال المتزايدة والمتناقصة

وبذلك نرى أن الدالة تكون متزايدة في س إذا كان: د´(س) > صفر

٢- الدالة المتناقصة: Decreasing Function

على عكس الدالة المتزايدة، فإن الدالة د(س)تكون متناقصة خلال الفترة ف إذا كـان:

د(س$_{١}$) > د(س$_{٢}$) وذلـك بالنسبـة لأي نقطتيْن س$_{١}$، س$_{٢}$ (س$_{١}$< س$_{٢}$) تقعان داخل هذه الفترة.

وأما الحكم على تناقص الدالة من خلال المشتقة الأولى فيتمثل في أنه لو كانت هذه المشتقة سالبة (أي أقل من الصفر) فإن ذلك يعنى أن الميل يكون سالباً أيضا، وبالتالي تكون الدالة متناقصة. وهذا يشير إلى أنه خلال الفترة التي تكون الدالة فيها متناقصة فإن أي زيادة في

قيمة س يترتب عليها نقصانا في قيمة الدالة د(س). ويمثل تلك الحالة الشكل (٧ – ١، جـ)، (٧ – ١، د)، حيث نجد أن الدالة في كل منهما متناقصة في س وذلك لأن ميل المماس يكون سالباً عند أي نقطة.

يتضح من ذلك إلى أن الدالة تكون متناقصة في س إذا كان: د َ(س) < صفر

ويمكننا تلخيص ذلك فيما يلي:

- أنه إذا كانت الدالة متزايدة (متناقصة) في فترة معينة، فإن الدالة تكون متزايدة (متناقصة) عند أي نقطة في هذه الفترة.
- أنه يمكن بسهولة الحكم على تزايد (تناقص) الدالة من خلال المشتقة التفاضلية الأولى (الميل) وذلك كما يلي:

د َ(س)
- **د َ(س) > صفر تكون الدالة متزايدة**
- **د َ(س) < صفر تكون الدالة متناقصة**
- **د َ(س) = صفر ليست متزايدة أو متناقصة (تتعلق بصفة أخرى)**

مثال (١):

إذا كان لدينا الدالة: د(س) = ٤ س^{٢} – ٣ س + ٢٠

المطلوب:

(١) حدد ما إذا كانت الدالة متزايدةً أو متناقصةً عند س = ١.

(٢) أوجد قيم س التي تجعل هذه الدالة:

ا- متزايدة ب- متناقصة جـ- ليست متزايدة أو متناقصة

الحـل:

(١) حيث أن: د(س) = ٤ س^{٢} – ٣ س + ٢٠ ∴ د َ(س) = ٢ س – ٣

د َ(١) = ٢(١) -٣ = -١

وحيث أن: د َ(١) < صفر

فإننا نستطيع القول إن هذه الدالة متناقصة عند س = ١.

(٢) (أ) تكون الدالة متزايدة إذا كانت: د َ(س) > صفر

أي أن: ٢ س – ٣ > صفر ، ٢ س > ٣ ، س > ١,٥

لذلك تكون الدالة متزايدة عند جميع قيم س التي تزيد عن ١,٥، أي في الفترة: س > ١,٥

(ب) تكون الدالة متناقصة إذا كانت: د´(س) < صفر

أي أن: ٢ س – ٣ < صفر

٢ س < ٣ ، س < ١,٥

وهذا يعنى أن الدالة تكون متناقصة عند جميع قيم س التي تقل عن ١,٥، أي في الفترة: س < ١,٥.

(جـ) إذا كانت: د´(س) = صفر،

فإن الدالة عندئذ لا تكون متزايدة أو متناقصة.

د´(س) = ٢ س – ٣ = صفر ، أي أن: ٢ س= ٣ ، س = ١,٥

وهذا يشير إلى أنه عند س = ١,٥ فان الدالة لا تكون متزايدة، أو متناقصة. وإنما تتصف الدالة بصفة أخرى عند هذه النقطة، وهو ما سوف نتناوله في موضع لاحق في هذا الفصل.

مثال (٢):

إذا كان لدينا الدالة: د(س) = س^{٣}– ٣ س

المطلوب:

(١) حدد حالة الدالة من حيث كونها متزايدةً أو متناقصةً عند س = ٢.

(٢) أوجد قيم س التي تجعل الدالة: أ- متزايدة ب- متناقصة

الحـل:

(١) د´(س) = ٣ س^{٢}– ٣ ، د´(٢) = ٣(٤) - ٣ = ٩

أي أن الدالة تكون متزايدة عند س= ٢، وذلك لأن: د´(٢) > صفر.

(٢) (أ) لكي تكون الدالة متزايدة فان:

د´(س) > صفر أي أن: ٣ س^{٢}– ٣ > صفر

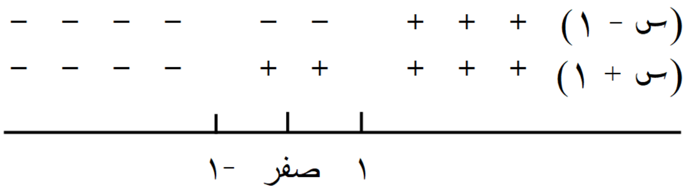
٣(س^{٢}– ١) > صفر ، (س^{٢}– ١) > صفر

(س – ١)(س + ١) > صفر

قد تعرضنا لمثل تلك المتباينات في الفصل الأول. حيث يلزم علينا أن نحدد إشارات العاملَيْن (س – ١) و (س + ١) وذلك كما يلي:

س – ١ تكون موجبة عندما س > ١ وسالبة عندما س < ١

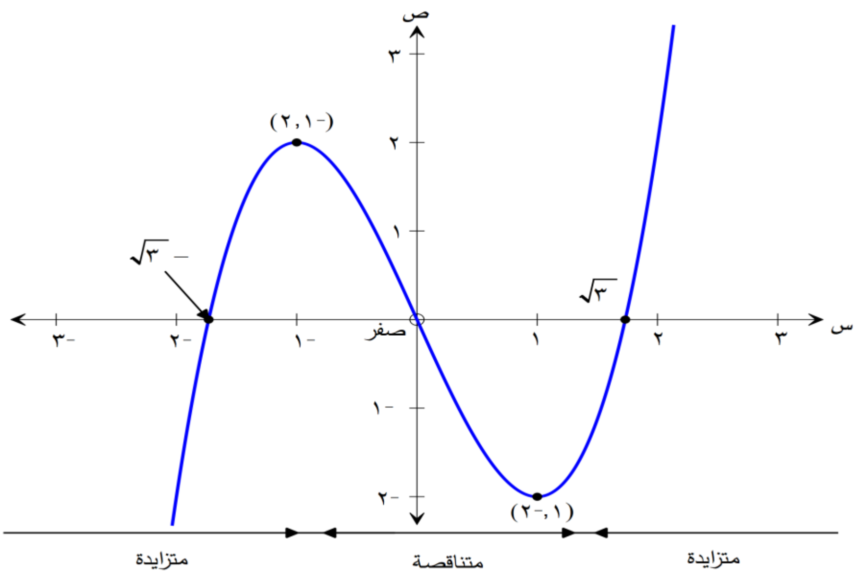
س + ١ تكون موجبة عندما س > -١ وسالبة عندما س < -١



وبذلك يتضح أنهم عندما س > ١ فإن كلا العامليْن يكون موجبا وبالتالي يكون حاصل ضربهما موجباً أيضا. وأن كلًّا من العامليْن يكون سالباً عندما س < -١، وهنا أيضا يكون حاصل ضربهما موجبا.

وهكذا فإن، د َ(س) > صفر عندما س < -١ وعندما س > ١، وفي كل من هاتيْن الفترتيْن تكون الدالة متزايدة.

وأما في الفترة -١ < س < ١، فإن الدالة تكون متناقصة لأن حاصل الضرب (س − ١)(س + ١) يكون سالباً وذلك لاختلاف إشارات العامليْن، ومن ثم تكون الدالة متناقصة. ويوضح ذلك الشكل (٧ - ٢).



الشكل (٧ - ٢)

تناقص وتزايد الدالة: د(س) = س^{٣} – ٣ س

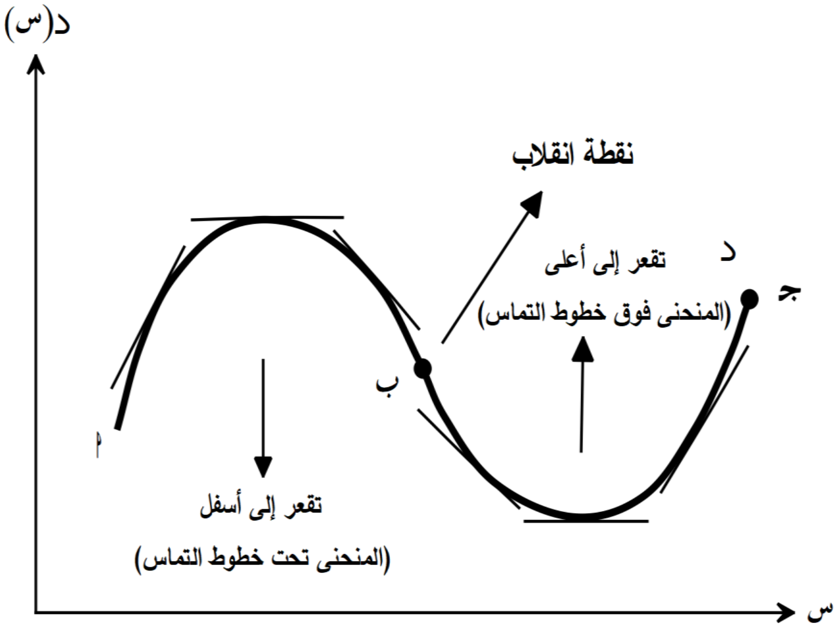
ثانياً: التقعُّر ونقط الانقلاب Concavity and Inflection Points

١- التقعُّر: Concavity

إذا كان الشكل البياني Graph للدالة مفتوحاً إلى أعلى فإن هذا الشكل يكون مقعراً لأعلى Concave Up. وأما إذا كان مفتوحاً إلى أسفل فإنه يكون مقعراً لأسفل Concave Down .

هذا ويكون الشكل البياني للدالة د(س) مقعراً لأعلى في فتـرة محددة إذا كانت المشتقة الأولى للدالة (الميل)، د َ(س)، تتزايد خلال تلك الفترة. وفي هذه الحالة، فإنه عند أي نقطة في الفترة يكون المنحنــى الممثل للدالة فوق المماس المرسوم عند هذه النقطة. وأما إذا كانت د َ(س) تتناقص خلال فترة محددة فإن ذلك يعنى أن الشكل البياني للدالة يكون مقعراً لأسفل. وأنه عند أي نقطة في تلك الفترة يكون المنحنى الممثل للدالة تحت المماس المرسوم عند هذه النقطة.

في الشكل (٧ - ٣) فإن الشكل البياني للدالـة يكون مقعراً لأسفل ما بين النقطتيْن أ، ب حيث يقع المنحنى تحت خطوط التماس. كما أن الشكل البياني يكون مقعراً لأعلى ما بين النقطتيْن ب، جـ، ويكون المنحنى فوق خطوط التماس. والنقطة ب هي النقطة التي تحوَّل عندها التقعر من تقعر لأسفل إلى تقعر لأعلى. هذا والنقطة التي تتغير عندها حالة التقعر يُطلق عليها نقطة الانقلاب Inflection Point. وهكذا فإن النقطة ب هي نقطة انقلاب.



الشكل (٧ – ٣)
بيان حالات التقعر المختلفة

هذا وقد أشرنا من قبل بأن المشتقة التفاضلية الثانية هي التي تحدد تزايد أو تناقص الميل (المشتقة التفاضلية الأولى) والذي يتوقف عليه نوع التقعر. لذلك نرى أن هناك علاقة ما بين المشتقة التفاضلية الثانية وبين نوع التقعر وهو ما سنوضحه الآن.

٢- العلاقة بين المشتقة التفاضلية الثانيـــة وبين التقعر:

حيث أن الشكل البياني للدالة يكون مقعراً لأعلى في الفترة التي تتزايد فيها المشتقة التفاضلية الأولى للدالة (الميل)، أي عندما تكون المشتقة الأولى دالة متزايدة. وبما أن المشتقة الثانية هي في حكم المشتقة التفاضلية للمشتقة التفاضلية الأولى، فإن المشتقة الأولى د´(س) تكون دالة متزايدة إذا كانت د´´(س)> صفر. وهذا - بدوره - يعنى أن الشكل البياني للدالة يكون مقعراً لأعلى إذا كانت: د´´(س)> صفر. وعلى عكس ذلك فإنه – وبنفس المنطق – يمكن استنتاج أن الشكل البياني للدالة يكون مقعراً لأسفل إذا كانت: د´´(س) < صفر. وهكذا يمكن تلخيص العلاقة ما بين المشتقة التفاضلية الثانية والتقعر على النحو التالي:

العلاقة (١):

إذا كانت: د´´(س) > صفر في الفترة أ ≤ **س** ≤ ب، فإن الشكل البياني للدالة د(س) يكون مقعراً لأعلى في تلك الفترة. وأنه بالنسبة لأي نقطة **س** = **جـ** خلال تلك الفترة يكون شكل الدالة د(س) مقعراً لأعلى عند النقطة (**جـ**، د(**جـ**)).

العلاقة (٢):

إذا كانت: د´´(س)< صفر في الفترة أ ≤ **س** ≤ ب، فإن الشكل البياني للدالة د(س) يكون مقعراً لأسفل في تلك الفترة. وأنه بالنسبة لأي نقطة **س** = **جـ** خلال الفترة، يكون شكل الدالة د(س) مقعراً لأسفل عند النقطة (**جـ**، د(**جـ**)).

العلاقة (٣):

إذا كانت د´´(س) = صفر عند أي نقطة **س** = **جـ**، فإنه لا يمكن الحكم على حالة التقعر.

وهنا تجدر الإشارة إلى أنه يجب أن نكون حذرين من أن نعكس منطق تلك العلاقات. حيث لا يمكننا الحكم على إشارة المشتقة الثانية للدالة بمعرفة نوع تقعر الدالة. بمعنى أنه إذا كان الشكل البياني للدالة مقعراً لأعلى عند **س** = أ، فإننا لا نستطيع القول بأن د´´(أ) > صفر، وهذا بسبب العلاقة (٣). وبعبارة أخرى، فإنه من الممكن أن تواجهنا حالة نجد فيها الشكل البياني للدالة مقعراً لأعلى ومع ذلك نجد أن د´´(س) = صفر وليست أكبر من الصفر (المثال (٤) يوضح تلك النقطة).

مثال (٣):

حدِّد طبيعة التقعر لكل من الدالتيْن التاليتيْن عند:

$س = -٢ \quad ، \quad س = ١$

١- $د(س) = ٥س^٣ - ٤س^٢ + ١٠س$ ٢- $د(س) = س^٢ - ٤س + ٩$

الحـل:

(١) حيث أن: $د(س) = ٥س^٣ - ٤س^٢ + ١٠س$

$د'(س) = ١٥س^٢ - ٨س + ١٠$

$د''(س) = ٣٠س - ٨$

عندما $س = -٢$: $د''(-٢) = ٣٠(-٢) - ٨ = -٦٨$

أي أن: $د''(-٢) < صفر$

وهذا يعنى أن الشكل البياني للدالة يكون مقعراً لأسفل عند $س = -٢$.

عندما $س = 1$: $د''(1) = ٣٠(١) - ٨ = ٢٢$

أي أن: $د''(١) > صفر$

مما يعنى أن الشكل البياني للدالة يكون مقعراً لأعلى عند $س = ١$.

(٢) حيث أن: $د(س) = س^٢ - ٤س + ٩$ ، $د'(س) = ٢س - ٤$ ، $د''(س) = ٢$

أي أن: $د''(س) > صفر$ بغض النظر عن قيمة $س$

أي أن الشكل البياني للدالة يكون مقعراً لأعلى لجميع قيم $س$.

لاحظ أن: $د''(-٢) = د''(١) = ٢ > صفر$

مثال (٤):

حدد طبيعة تقعر الشكل البياني للدالة: $د(س) = س^٤$

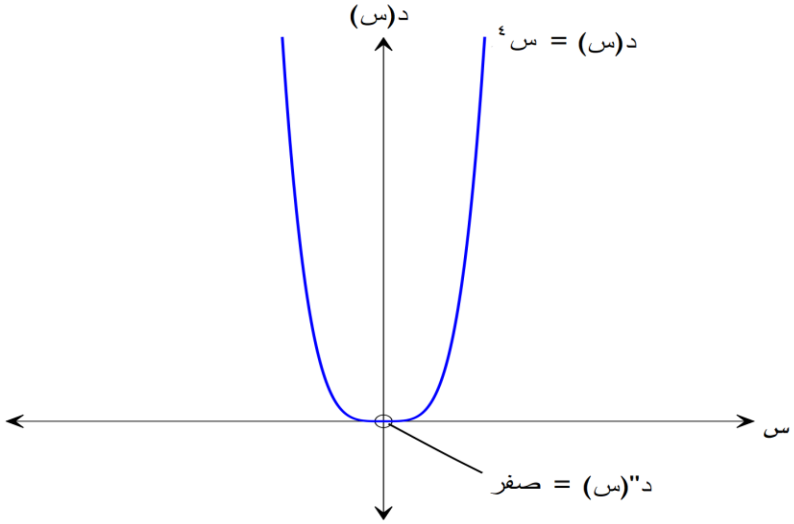
وذلك عند $س = صفر$.

الحـل:

حيث أن: $د(س) = س^٤$ ، $د'(س) = ٤س^٣$ ، $د''(س) = ١٢س^٢$

$د''(صفر) = ١٢(صفر)^٢ = صفر$

ووفقاً للعلاقة (٣)، فإننا لا نستطيع الحكم على حالة التقعر عند س = صفر. ومع ذلك فإنه بالتعويض عن س في الدالة الأصلية بعدد كاف من القيم ورسم هذه الدالة (الشكل (٧ - ٤)). نرى بوضوح أن الشكل البياني لهذه الدالة مقعراً لأعلى عند النقطة س = صفر.



الشكل (٧ – ٤)

عدم الاستدلال عن نوع التقعر

مثال (٥):

أوجد قيم س التي تجعل الشكل البياني لكل من الدالتيْن التاليتيْن:

- مقعراً لأعلى - مقعراً لأسفل

(١) د(س) = ٥ س^٦ – ٦ س^٥ + ١ (٢) د(س) = س^٢ – ٦ س + ٧

الحـل:

(١) د(س) = ٥ س^٦ – ٦ س^٥ + ١ ، د´(س) = ٣٠ س^٥ – ٣٠ س^٤

د´´(س) = ١٥٠ س^٤ – ١٢٠ س^٣

التقعر لأعلى:

لكي يكون التقعر لأعلى: يجب أن: د´´(س) > صفر

أي أن: ١٥٠ س^٤ – ١٢٠ س^٣ > صفر ، ٥ س^٤ – ٤ س^٣ > صفر

س^٣(٥ س – ٤) > صفر

وحل هذه المتباينة يتمثل في:

إما أن: $س^{٣}$ > صفر ، أي أن: س > صفر

أو: (٥س – ٤) > صفر ، أي أن: س > $\frac{٤}{٥}$

وقيمة س التي تحقق هاتيْن الحالتيْن هي: س > $\frac{٤}{٥}$

أو أن : $س^{٣}$ < صفر ∴ س < صفر

و (٥س – ٤) < صفر ∴ س < $\frac{٤}{٥}$

وقيم س التي تحقق الحالتيْن هي: س < صفر

أي أن حل المتباينة يتمثل في: س < صفر و س > $\frac{٤}{٥}$

وهكذا نجد أن هناك تقعر لأعلى عند س < صفر أو س > $\frac{٤}{٥}$

التقعر لأسفل:

لكي يكون هناك تقعر لأسفل فإنه يجب أن تكون د˝(س) < صفر

أي أن: ١٥٠ $س^{٤}$ – ١٢٠ $س^{٣}$ < صفر ، ٥ $س^{٤}$ – ٤ $س^{٣}$ < صفر ، $س^{٣}$(٥س – ٤) < صفر

وحل تلك المتباينة هو:

إما أن: $س^{٣}$ < صفر ، أي أن: س < صفر

أو: (٥س – ٤) > صفر ، أي أن: س > $\frac{٤}{٥}$

ولا توجد قيمة لـ س تحقق ذلك.

أو أن: $س^{٣}$ > صفر ، س > صفر

و (٥س – ٤) < صفر ، س < $\frac{٤}{٥}$

وقيم س التي تحقق ذلك تتمثل في: صفر < س < $\frac{٤}{٥}$

وهذا يشير إلى أن هناك تقعر لأسفل عندما: صفر < س < $\frac{٤}{٥}$

(٢) د(س) = $س^{٢}$ – ٦س + ٧ ، د́(س) = ٢س – ٦

د˝(س) = ٢ > صفر

أي أن هناك تقعر لأعلى عند جميع قيم س ولا يكون هناك تقعر لأسفل.

ثالثاً: تحديد نقط الانقلاب Locating Inflection Points

ذكرنا من قبل أن نقطة الانقلاب هي النقطة التي تتغير عندها حالة التقعر (الشكل: ٧ - ٣). ويمكن تحديد نقط الانقلاب كما يلي:

١- إيجاد جميع النقط أ حيث د´´(أ) = صفر.

٢- يمكن التحقق من أن النقطة أ تمثل نقطة انقلاب، حيث أنه إذا غيرت المشتقة التفاضلية الثانية، د´´(س) إشارتها عند مرورها بالنقطة س = أ يكون هناك نقطة انقلاب عند س = أ.

ويُفهم من هذا أنه لكي تكون هناك نقطة انقلاب عند س = ١، فإنـه يُشترط أن تكون د´´(أ) مساوية للصفر. ومع ذلك، ومع كون هذا الشرط ضرورياً لوجود نقطة انقلاب، إلا أنه ليس كافياً للجزم بوجودها. بمعنى أن كون د´´(أ) = صفر لا يضمن وجود نقطة انقلاب عند س = أ، اللهم إلا إذا تحقق ذلك من خلال الخطوة (٢).

هذا ويمكن التحقق من وجود نقطة انقلاب عند س = أ وذلك باختيار نقطتيْن إحداهما تقل مباشرة عن القيمة أ (سم) والثانية تزيد مباشرة عن القيمة أ (سب). وبعبارة أخرى، يمكن اختيار نقطتيْن تقعان مباشـرة علـى يمين وعلى يسار س = أ. فلو كانت إشارة د´´(س) موجبة على يمين س = أ وسالبــة على يسارها أو العكس، فإن ذلك يشير إلى تغير في حالة التقعر عند المرور على النقطة س = أ. وهكذا توجد نقطة انقلاب عند هذه النقطة.
وفي حالة استخدام اختبار المشتقة التفاضلية الأولى يكون هناك نقطة انقلاب إذا كانت د´(سم) و د´(سب) لهما نفس الإشارة.

مثال (٦):

حدد نقط الانقلاب، إن وجدت، لكل من الدالتيْن التاليتيْن:

(١) د(س) = س٣ + ٦ س٢ − ١٨ (٢) د(س) = -١٠ س٤ + ١٠٠

الحـل:

باستخدام المشتقة التفاضلية الثانية:

(١) حيث أن: د(س) = س٣ + ٦ س٢ − ١٨ ، د´(س) = ٣ س٢ + ١٢ س

د´´(س) = ٦ س + ١٢

وبمساواة د´´(س) بالصفر، نجد أن: ٦ س + ١٢ = صفر

أي أن س = -٢ وهي نقطة انقلاب محتملة

وللتحقق من أن س = -٢ هي نقطة انقلاب، نوجد قيمة د$''$(س)عند النقطتيْن س$_{م}$ = -٣ وهي نقطة تقع قبل س = -٢، وعند النقطة س$_{ب}$ = -١ وهي نقطة تقع بعد س = -٢ حيث نحصل على:

د$''$(س$_{م}$)= د$''$(-٣) = ٦(-٣) + ١٢ = -٦ (تقعر لأسفل)

د$''$(س$_{ب}$)=د$''$(-١) = ٦(-١) + ١٢ = ٦ (تقعر لأعلى)

وحيث أن حالة التقعر قد تغيرت، فإن ذلك يدل على وجود نقطة انقلاب عند س = -٢.

	س = -١	س = -٢	س = -٣
التحقق	د$''$(-١) = ٦ > صفر		د$''$(-٣) = -٦ < صفر
	تقعر لأعلى		تقعر لأسفل

ولإيجاد الإحداثي الآخر لنقطة الانقلاب نعوض عن قيمة س بـ -٢ في الدالة الأصلية. أي أن:

د(-٢) = (-٢)^{٣} + ٦ (-٢)^{٢} - ١٨ = -٨ + ٢٤ – ١٨ = -٢

وهذا يعني أن نقطة الانقلاب هي (-٢، -٢).

باستخدام المشتقة التفاضلية الأولى:

حيث أن: س$_{م}$ = -٣ و س$_{ب}$ = -١ فإن:

د$'$(س$_{م}$) = ٣(-٣)^{٢} + ١٢(-٣) = -٩ مقدار سالب

د$'$(س$_{ب}$) = ٣(-١)^{٢} + ١٢(-١) = -٩ مقدار سالب

وحيث أنهما لهما نفس الإشارة فإنه توجد نقطة انقلاب عند س = -٢، أي عند النقطة (-٢، -٢).

ومما لا شك فيه أن استخدام المشاقة التفاضلية الثانية أيسر حسابياً من استخدام المشاقة الأولى. وعن كيفية اختيار قيمتي س$_{م}$ و س$_{ب}$ فإننا سوف نوضح ذلك عند تناولنا للنهايات العظمى والصغرى للدوال.

(٢) حيث أن: د(س) = -١٠س^{٤}+١٠٠

د$'$(س) = -٤٠س^{٣} ، د$''$(س) = -١٢٠س^{٢}

وبمساواة د´´(س) بالصفر ينتج أن:

$$-١٢٠س^{٢} = صفر \quad ، \quad س = صفر$$

أي أن: س = صفر هي نقطة انقلاب محتملة.

وللتحقق من أنها نقطة انقلاب نوجد قيمة د´´(س) عند النقطة (س = -١) وهي نقطة تقل عن س = صفر وكذلك عند للنقطة (س = ١) وهي نقطة تزيد عن س = صفر حيث نجد أن:

د´´(-١) = -١٢٠(-١)^٢ = -١٢٠ (تقعر لأسفل)

د´´(١) = -١٢٠(١)^٢ = -١٢٠ (تقعر لأسفل)

أي أن حالة التقعر لم تتغير. وبالتالي فإن النقطة س = صفر لا تمثل نقطة انقلاب. أي أن لأنه لا يوجد نقط انقلاب للدالة د(س).

رابعاً: النهايات العظمى والصغرى للدوال Minima and Maxima

إن كثيراً من التطبيقات المهمة للمشتقات التفاضلية تتطلب إيجاد النهايات العظمى والصغرى للدوال، أي أكبر قيمة وأصغر قيمة يمكن أن تأخذها دالة معينة. وعلى سبيل المثال:

- الأرباح التي يحققها صاحب مصنع تعتمد على السعر الذي يبيع به منتَجه. ولا شك أن صاحب المصنع يهتم بتحديد السعر الذي يحقق له أقصى أرباح ممكنة. هذا ويمكن تحديد أفضل سعر Optimum Price بإجراء عملية تعظيم Maximization or Optimization لدالة الربح.
- تهتم هيئة السكك الحديدية بتحديد السرعة المتوسطة التي تُسيِّر بها قطاراتها وذلك بهدف تخفيض تكلفة السير لكل ميل إلى حدها الأدنى.
- يرغب الاقتصادي في معرفة مستوى الضرائب الذي يؤدى إلى رفع معدل النمو الاقتصادي إلى حده الأعلى.
- يهتم تاجر التجزئة بتحديد مستوى الطلب على سلعته والذي يحقق له أقل تكلفة ممكنة.

وقبل أن نتطرق لمثل تلك التطبيقات سوف نتناول أولاً وبشيء من التفصيل تحديد مفهوم وكيفية إيجاد النهايات العظمى والصغرى للدوال.

١- النهايات العظمى والصغرى النسبية (الموضعية): Relative (Local) Extrema

وهنا سوف نُعرِّف النهاية العظمى النسبية (الموضعية) والنهاية الصغرى النسبية (الموضعية) للدالة.

النهاية العظمى النسبية (الموضعية): Relative (Local) Maximum

إذا كان لدينا الدالة د(س) فإن هذه الدالة تصل إلى نهايتها العظمى النسبية (الموضعية) عند س = جـ إذا كان:

د(جـ) > د(س) لجميع قيم س القريبة بدرجة كافية من جـ.

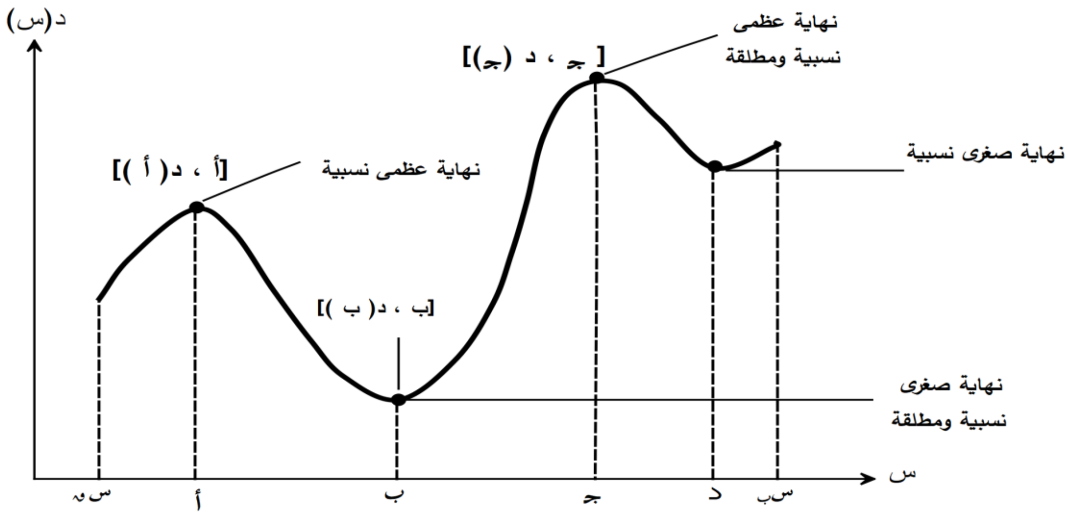
النهاية الصغرى النسبية (الموضعية): Relative (Local) Minimum

إذا كان لدينا الدالة د(س) فإن هذه الدالة تصل إلى نهايتها الصغرى النسبة (الموضعية) عند س = جـ إذا كان:

د(جـ) < د(س) لجميع قيم س القريبة بدرجة كافية من جـ

هذا وكل من التعريفيْن السابقيْن يركِّزان على قيمة الدالة د(س) داخل فترة معينة. والنهاية العظمى النسبية تشير إلى نقطة تكون عندها قيمة الدالة د(س) أكبر من قيمتها عند أي نقطة أخرى قريبة من تلك النقطة. كما تشير النهاية الصغرى النسبية إلى نقطة تكون عندها قيمة الدالة د(س) أصغر من قيمتها عند أي نقطة أخرى قريبة من تلك النقطة. كما أنه قد يكون للدالة الواحدة أكثر من نهاية عظمى نسبية وأكثر من نهاية صغرى نسبية. ولو طبقنا ذلك على الشكل (٧ - ٥) لوجدنا ما يلي:

- أن الدالة د(س) لها نهاية عظمى نسبية عند س = أ ، س = جـ.
- أن الدالة د(ب) لها نهاية صغرى نسبية عند س = ب ، س = ء



الشكل (٧ - ٥)

النهايات العظمى والصغرى النسبية

وفي تناولنا للنهايات العظمى والصغرى النسبية (الموضعية)، سوف نكتفي – بهدف التبسيط – بذكر صفة " النسبية " فقط دون الموضعية.

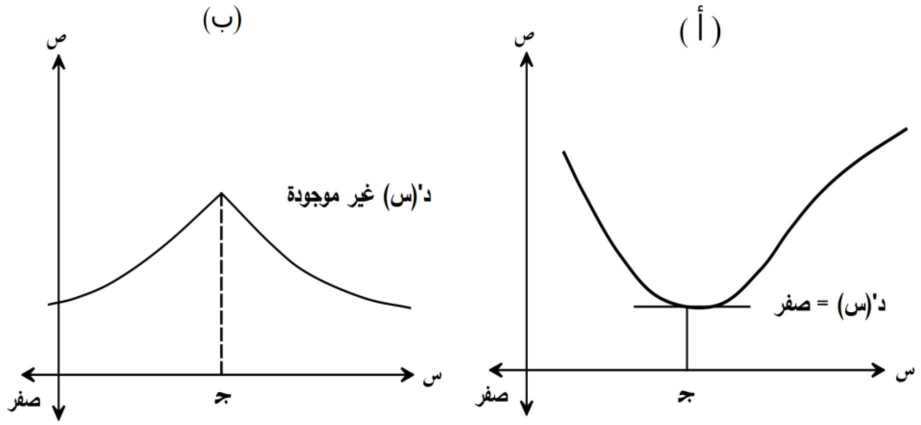
٢- النقط الحرجة: Critical Points

النقطة س = جـ تسمى بـ "النقطة الحرجة " للدالة المتصلة (المستمرة) د(س) إذا كان:

١- د َ(جـ) = صفر أو ٢- د َ(جـ) غير محددة (معرَّفة)

هذا وقيم س التي تحقق أياً من هذيْن الشرطيْن تمثل النقط المحتمل أن يكون عندها النهايات العظمى أو الصغرى النسبية. وهذه القيم هي ما يطلق عليها القيم الحرجة Critical Values. وهذه القيم الحرجة يُرمز إليها أحيانا بالرمز س* وذلك تمييزا لها عن قيم س الأخرى. وبمعرفة القيمة الحرجة فإن النقطة الحرجة المناظرة لها تتمثل في [س*، د(س*)].

والنقط التي تحقق الشرط الأول هي تلك النقط التي تقع على الشكل البياني للدالة د(س) والتي يكون الميل عندها مساويا للصفر. أي أنه لتحديد النقط الحرجة يجب مساواة المشتقة التفاضلية الأولى بالصفر. وأما النقط التي تحقق الشرط الثاني فهي تلك النقط التي لا تكون عندها الدالة متصلة، أي النقط التي لا يمكن تقدير د َ(س) عندها. وبعبارة أخرى، هي النقط التي يصنع الشكل البياني للدالة عندها زاوية أو حافة (أنظر الشكل: ٧ - ٦).



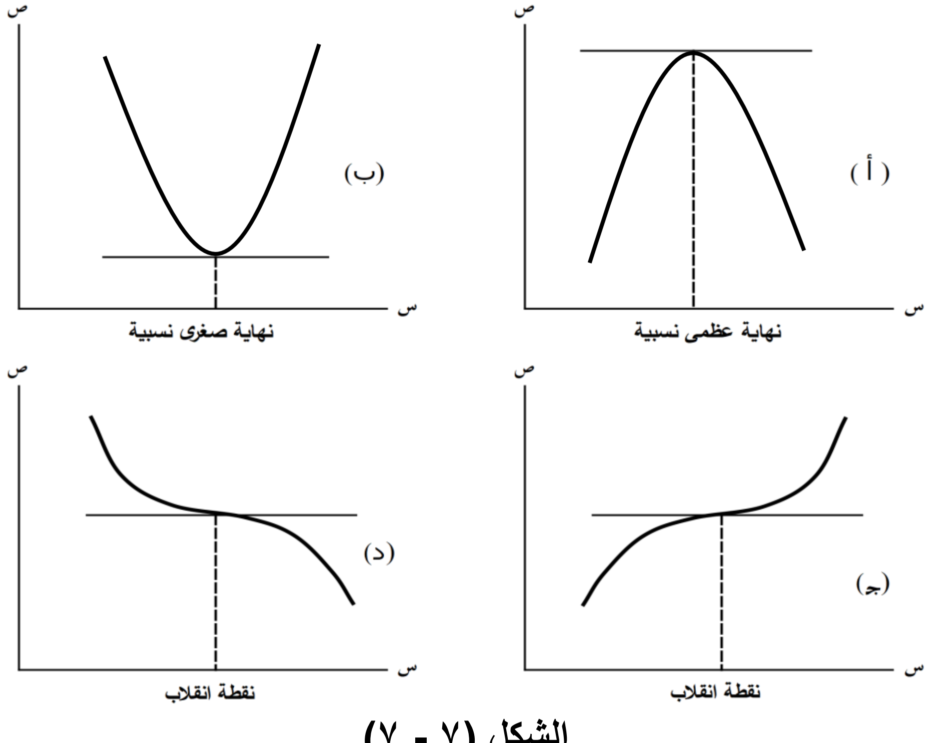
الشكل (٧ - ٦)
الحالات المختلفة لـ د َ(س)

ومن الشكل (٧ - ٦) يمكننا ملاحظة أنه في الحالة التي تكون فيها د َ(جـ) = صفر، فإن المماس يكون أفقيا عند النقطة جـ (الشكل (٧ - ٦)، أ).

وأما الحالة الثانية والتي تكون فيها د َ(جـ) غير موجودة فهي الحالة التي يصنـع الشكل البياني للدالة زاوية أو حافة عند س = جـ (الشكل (٧ - ٦): ب).

وهنا نؤكد أنه لكي تكون جـ نقطة حرجة فإن د(جـ) يجب أن تكون معرَّفة (محددَّة) تحديـداً كاملاً. وعلى سبيل المثال لو كان لدينا الدالــة د(س) = س$^{١-}$ فإن د َ(س) = س$^{٢-}$. ومن الواضح هنا أن د َ(س) تصبح غير محددة عندما س ← صفر. ومع ذلك، س = صفر ليست قيمة حرجة لهذه الدالة حيث أن د(صفر) ليست موجودة.

ويتضح لنا من الشكل (٧ - ٥) أن النهايات العظمى والصغرى للدالة تحدث فقط عند النقط الحرجة. ولكن ليس معنى هذا أن كل نقطة حرجة لدالة يناظرها نهاية عظمى أو نهاية صغرى. ويوضح الشكل (٧ - ٧). الصور المختلفة التي تكون عليها النقط الحرجة حيث د َ(س) تساوي الصفر.



الشكل (٧ - ٧)
النقط الحرجة حيث: د َ(س) = صفر

ويوضح الشكل [(٧ - ٧): أ، ب] نقط النهايات العظمى والنهاية الصغرى، بينما يوضح الشكل [(٧ - ٧): جـ، د] نوعيْن مختلفيْن من نقط الانقلاب. ففي الشكل [(٧ – ٧): جـ] نجد أن الميل يساوى الصفر عند النقطة أ، وقد تغير عندها حالة التقعر من تقعر لأسفل إلى تقعر لأعلى.

وأخيرا، فإن الشكل [(٧ - ٧)، د] يشير إلى أن الميل يساوى الصفر أيضاً وقد تحول الشكل البياني من مقعر لأعلى إلى مقعر لأسفل.

هذا وأي نقطة حرجة حيث د´(س) = صفر إنما تمثل نهاية عظمى أو نهاية صغرى. وأما د´´(س) = صفر فإنها تمثل نقط انقلاب محتملة، وكلها نقط حرجة.

مثال (٧):

حدد النقط الحرجة لكل من الدوال التالية:

(١) د(س) = ٢ س^{٢} + ٨ س + ١   (٢) د(س) = س^{٣} – ٩ س^{٢} + ٢٤ س + ٢

(٣) د(س) = س^{٢} لو$_{هـ}$ س

الحـل:

(١) د(س) = ٢ س^{٢} + ٨ س + ١ ، د´(س) = ٤ س + ٨

بمساواة د´(س) بالصفر ينتج أن:

٤ س + ٨ = صفر ، س = -٢

د(-٢) = ٢(-٢)^{٤} + ٨(-٢) + ١ = ٣٢ - ١٦ + ١ = ١٧

أي أن النقطة الحرجة هي (-٢، ١٧).

(٢) د(س) = س^{٣} – ٩ س^{٢} + ٢٤ س + ٢

د´(س) = ٣ س^{٢} – ١٨ س + ٢٤

وبمساواة د´(س) بالصفر نحصل على:

٣ س^{٢} – ١٨ س + ٢٤ = صفر

س^{٢} – ٦ س + ٨ = صفر   بقسمة الطرفين على ٣

(س - ٢)(س - ٤) = صفر

أي أن: س = ٢ و س = ٤

د(٢) = (٢)^{٣} - ٩(٢)^{٢} + ٢٤(٢) + ٢

= ٨ – ٣٦ + ٤٨ + ٢ = ٢٢

د(٤) = (٤)^{٣} - ٩(٤)^{٢} + ٢٤(٤) + ٢

= ٦٤ - ١٤٤ + ٩٦ + ٢ = ١٨

أي أن النقط الحرجة هي: (٢، ٢٢) ، (٤، ١٨)

(٣) $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ، $\text{د}'(\text{س}) = \text{س}^{٢}\left(\frac{١}{\text{س}}\right) + \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\,(٢\text{س})$

$$= \text{س} + ٢\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} = \text{س}(١ + ٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س})$$

$\text{د}'(\text{س})$= صفر تعطى: $\text{س}(١ + ٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س})$ = صفر

أي أن: س = صفر أو: $١ + ٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ = صفر

$٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} = -١$ ، $\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} = \frac{-١}{٢}$ ، أي أن: $\text{س} = \text{هـ}^{\frac{-١}{٢}}$

$\text{د}(\text{صفر}) = (\text{صفر})^{٢}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{صفر})$

لاحظ أنه لا يوجد لوغاريتم للصفر.

أي أن: د(صفر) غير معرَّفة عند س = صفر

لذلك فإن س = صفر لا تمثل نقطة حرجة (راجع الشرط الثاني لوجود نقطة حرجة).

$\text{د}(\text{هـ}^{\frac{-١}{٢}}) = (\text{هـ})^{\frac{-١}{٢}}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\frac{-١}{٢}}$ لاحظ أن: هـ = ٢,٧١٨٢٨

$$= \text{هـ}^{-١}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\frac{-١}{٢}} = \text{هـ}^{-١}\left(\frac{-١}{٢}\right) = \frac{-١}{٢\text{هـ}}$$

أي أن النقطة الحرجة هي: $\left(\text{هـ}^{\frac{-١}{٢}} ، \frac{-١}{٢\text{هـ}}\right)$.

٣- اختبارات النهايات العظمى والصغرى النسبية:

Tests for Relative Extrema

لقد رأينا أن النهايات العظمى والصغرى النسبية لدالة تكون موجودة عند إحدى النقط الحرجة. وسوف نقدم الآن اختباريْن يُستخدمان في تحديد ما إذا كانت النقطة الحرجة تمثل نهاية عظمى أو صغرى نسبية للدالة.

ولنعتبر أولاً الحالة التي تحدث فيها النهاية العظمى أو الصغرى النسبية عند النقطة الحرجة المعطاة بـ $\text{د}'(\text{س})$ = صفر، أي عندما يكون خط المماس أفقياً عند نقطة على الشكل البياني للدالة ويكون عندها نهاية عظمى أو صغرى نسبية. لذلك فإنه لو كانت النقطة نهاية عظمى نسبية سوف يكون الشكل البياني مقعراً لأسفل. ولو كانت نهاية صغرى نسبية فإن الشكل البياني للدالـة يكـون حينئذ مقعراً لأعلى. ولكننا نعرف أنه كلما كانت $\text{د}''(\text{س}) <$ صفر، فإن الشكل

البياني للدالة د(س) يكون مقعراً لأسفل، كما أنه متى كانت د´´(س) > صفر فإن الشكل البياني للدالة يكون مقعراً لأعلى. وهذا يؤدى بنا إلى النظرية التالية:

نظرية (١): اختبار المشتقة التفاضلية الثانية

Theorem 1: (Second - Derivative Test)

إذا كانت الدالة د(س) يمكن تفاضلها مرتيْن عند النقطـة الحرجـة س = جـ فإن:

(أ) س = **جـ** هي نهاية عظمى نسبية للدالة د(س) متى كانت:

د´(جـ) = صفر و د´´(جـ) < صفر

(ب) س = **جـ** هي نهاية صغرى نسبية للدالة د(س) متى كانت:

د´(جـ) = صفر و د´´(جـ) > صفر

ويمكن تلخيص خطوات إجراءات اختبار المشتقة التفاضلية الثانية كما يلي:

الخطوة (١): أوجد د´(س) ثم حِل المعادلة: د´(س) = صفر في س.

الخطوة (٢): أوجد د´´(س) ثم عوض عن س بكل قيمة حرجة حصلت عليها في الخطوة (١). ولنفترض أن القيمة **جـ** هي إحدى تلك القيم. فإذا كانت:

- د´´(جـ) < صفر، يكون للدالة نهاية عظمى نسبية قيمتها د(جـ) عند النقطة (جـ، د(جـ)).
- د´´(جـ) > صفر، يكون للدالة نهاية صغرى نسبية قيمتها د(جـ) عند النقطة (جـ، د(جـ)).
- د´´(جـ)= صفر أو د´´(جـ) غير موجودة، فإن هذا الاختبار يفشل في هذا الأمر. ويمكننا أن نلجأ عندئذ إلى اختبار المشتقة التفاضلية الأولى والذي نتناوله فيما بعد.

مثال (٨):

حدد النهايات العظمى والصغرى النسبية للدالة:

د(س) = ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} − ١٢ س − ١٥

مستخدماً في ذلك اختبار المشتقة التفاضلية الثانية.

الحـل:

د(س) = ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} − ١٢ س − ١٥

د´(س) = ٦ س^{٢} + ٦ س − ١٢ ، د´´(س) = ١٢ س + ٦

ولإيجاد القيم الحرجة:

د´(س) = صفر   يعطى: ٦ س^{٢} + ٦ س − ١٢ = صفر

س^{٢} + س − ٢ = صفر   بقسمة الطرفين على ٦

(س + ٢)(س − ١) = صفر

س = -٢   و   س = ١

أي أنه توجد نقط حرجة عند س = -٢ و س = ١

ويمكن تحديد طبيعة النقط الحرجة باستخدام المشتقة التفاضلية الثانية على النحو التالي:

حيث أن: د´´(س) = ١٢ س + ٦

عندما س = -٢:   د´´(-٢) = ١٢(-٢) + ٦ = -١٨ > صفر

وحيث أن: د´´(-٢) < صفر

فإن هذا يعنى أن هناك نهاية عظمى نسبية عند س = -٢. ويمكن تحديد قيمة هذه النهاية بالتعويض عن س = -٢ في الدالة الأصلية. أي:

د(-٢) = ٢(-٢)^{٣} + ٣(-٢)^{٢} - ١٢(-٢) - ١٥

= -١٦ + ١٢ + ٢٤ – ١٥ = ٥

أي أن النقطة (-٢، ٥) تمثل نقطة نهاية عظمى نسبية للدالة، وعند هذه النقطة يكون الشكل البياني للدالة مقعراً لأسفل.

عندما س =١:   د´´(١) = ١٢(١) + ٦ = ١٨ > صفر

وحيث أن: د´´(١) > صفر، فإنه عند س = ١ توجد نهاية صغرى نسبية للدالـة. ويمكن تحديد قيمتها كما يلي:

د(١) = ٢(١)^{٣} + ٣(١)^{٢} - ١٢(١) - ١٥

= ٢ + ٣ – ١٢ - ١٥ = -٢٢

وحيث أن: د´´(١) > صفر ، فإنه توجد نهايـة صغـرى نسبية مقدارهـا –٢٢ عند س = ١. وبالتالي نجد أن النقطة (١، -٢٢) تمثل نقطة النهاية الصغرى النسبية والتي يكون الشكل البياني للدالة عندها مقعراً لأعلى.

مثال (٩):

إذا كان لدينا الدالة: د(س) = $\frac{\text{س}^{٣}}{٣}$ − ٢,٥ س^{٢} + ٤ س

حدد النقط الحرجة للدالة وبيّن طبيعة كل منها، مستخدماً في ذلك اختبار المشتقة التفاضلية الثانية.

الحـل:

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٢{,}٥\,\text{س}^{٢} + ٤\,\text{س} \quad ، \quad \text{د}'(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٥\,\text{س} + ٤$$

$$\text{د}''(\text{س}) = ٢\,\text{س} - ٥$$

ولإيجاد النقط الحرجة: $\text{د}'(\text{س}) = \text{صفر}$ يعطى: $\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س} + ٤ = \text{صفر}$

$$(\text{س} - ١)(\text{س} - ٤) = \text{صفر} \quad \text{يعطي:} \quad \text{س} = ١ \quad \text{و} \quad \text{س} = ٤$$

$$\text{د}(١) = \frac{(١)^{٣}}{٣} - ٢{,}٥(١)^{٢} + ٤(١) = ١{,}٨٣$$

$$\text{د}(٤) = \frac{(٤)^{٣}}{٣} - ٢{,}٥(٤)^{٢} + ٤(٤) = -\,٢{,}٦٧$$

أي أن النقط الحرجة هي: (١، ١,٨٣) و (٤، - ٢,٦٧)

لتحديد طبيعة كل من هاتيْن النقطتيْن:

$$\text{د}''(١) = ٢(١) - ٥ = -٣ < \text{صفر}$$

وحيث أن: $\text{د}''(١) < \text{صفر}$، فإن النقطة (١، ١,٨٣) تمثل نقطة نهاية عظمى نسبية وقيمة النهاية العظمى هي ١,٨٣. ويكون الشكل البياني عند هذه النقطة مقعراً لأسفل.

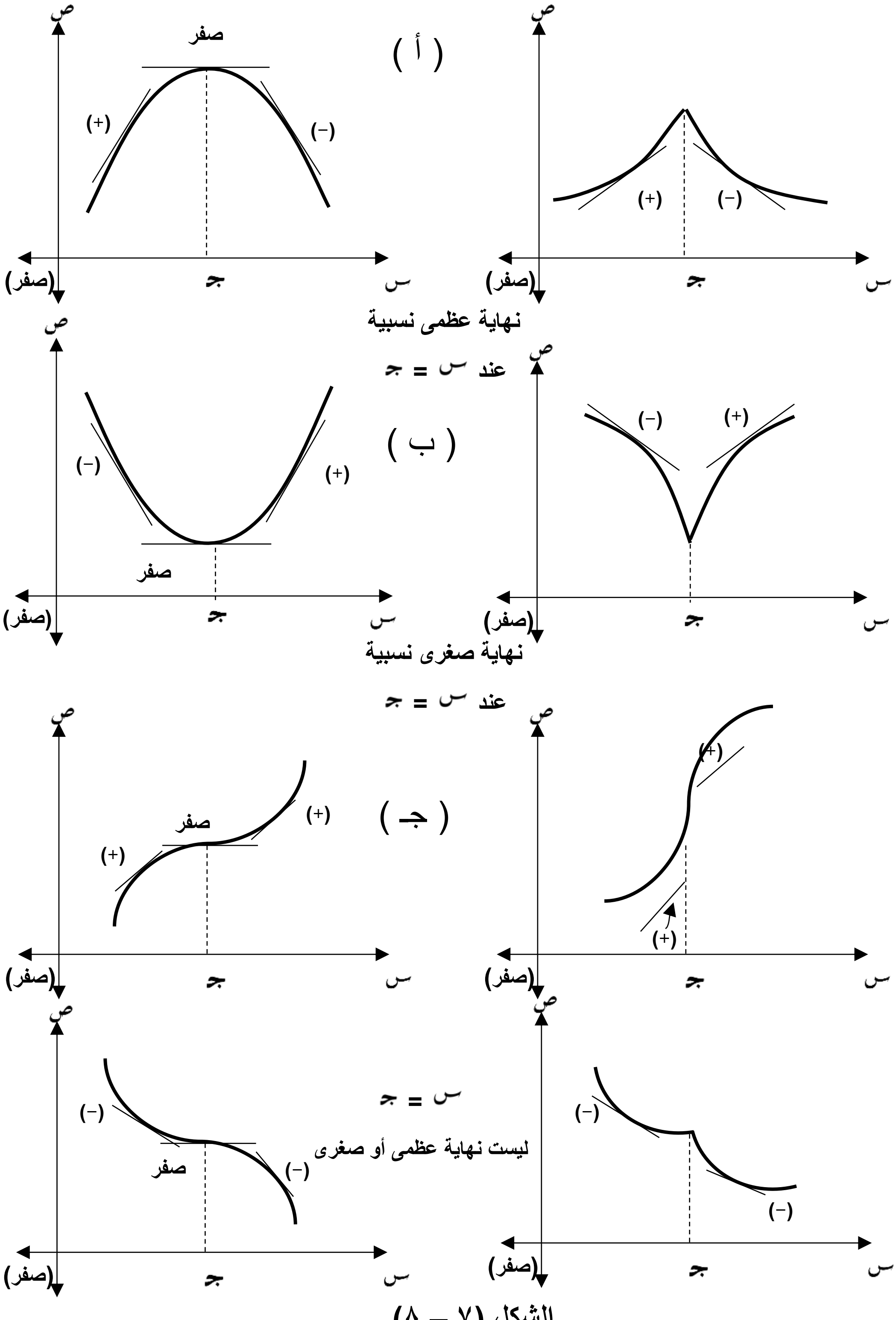
$$\text{د}''(٤) = ٢(٤) - ٥ = ٣ > \text{صفر}$$

وحيث أن: $\text{د}''(٤) > \text{صفر}$، فإنه توجد نهاية صغرى نسبية مقدارهـا - ٢,٦٧ عند النقطة (٤، - ٢,٦٧) ويكون الشكل البياني للدالة مقعراً لأعلى عند هذه النقطة.

وجدير بالملاحظة أن اختبار المشتقة الثانية يمكن استخدامه في ايجاد النهايات العظمى والصغرى النسبية للدوال وذلك في الحالات التي يكون فيها: $\text{د}'(\text{جـ}) = \text{صفر}$ و $\text{د}''(\text{جـ}) \neq \text{صفر}$. وعندما $\text{د}''(\text{س}) = \text{صفر}$ عند قيمة حرجة $\text{س} = \text{جـ}$ أو عندما لا تكون المشتقة التفاضلية الثانية موجودة، فإنه لا يمكننا استخدام اختبار المشتقة التفاضلية الثانية لتحديد ما إذا كانت $\text{س} = \text{جـ}$ تمثل نقطة نهاية عظمى أو نهاية صغرى نسبية. وفي مثل تلك الحالات، يجب علينا أن نستخدم اختبارا آخر يتمثل في اختبار المشتقة التفاضلية الأولى.

نظرية (٢): اختبار المشتقة التفاضلية الأولى
Theorem 2: (First - Derivative Test)

إذا كانت $\text{س} = \text{جـ}$ نقطة حرجة للدالة $\text{د}(\text{س})$، أي أن: $\text{د}'(\text{س}) = \text{صفر}$ فإن:



الشكل (٧ – ٨)
اختبارات المشتقة التفاضلية الأولى والنهايات العظمى والصغرى النسبية

(١) س = **جـ** تمثل نهاية عظمى نسبية للدالة د(س) إذا غيرت د َ(س) إشارتها من موجب إلى سالب نتيجة لتغير قيمة س من قيمة تقع قبل **جـ** مباشرة (أي أصغر مباشرة من **جـ** وتقع على يسارها)، ولنرمز لها بالرمز $س_م$، إلى قيمة تقع بعد **جـ** مباشرة (أي أكبر مباشرة من **جـ** وتقع على يمينها)، ولنرمز لها بالرمز $س_ب$. وبصورة أخرى يكون للدالة نهاية عظمى نسبية عند س = **جـ** إذا كان: د َ($س_م$) > صفر و د َ($س_ب$) < صفر، حيث: ($س_م$ < **جـ** < $س_ب$) أنظر الشكل [(٧ – ٨)، أ].

هذا مع ملاحظة أن الإشارات (+)، (-)، (صفر) في هذا الشكل تشير إلى إشارة ميل الشكل البياني للدالة عند النقط المعطاة.

(٢) ص = س تمثل نهاية صغرى نسبية للدالة د(س) إذا غيرت د َ(س) اشارتها من سالب إلى موجب نتيجة لتغير قيمة ص من $س_م$ إلى $س_ب$ ($س_م$ < س < $س_ب$). أي يكون هناك نهاية صغرى نسبية للدالة د(س) عند ص = س إذا كان: د َ($س_م$) < صفر و د َ($س_ب$) > صفر، أنظر الشكل [(٧ - ٨)، ب].

(٣) ص = س لا تمثل نهاية عظمى أو نهاية صغرى نسبية إذا لم تغير د َ(س) إشارتها بتغير قيمة س من قيمة أصغر مباشرة من س إلى قيمة أكبر مباشرة من س. وفي مثل تلك الحالات، فإن النقطة ص = س سوف تمثل إما نقطة انقلاب أو حافة (زاوية) على الشكل البياني للدالة [أنظر الشكل: (٧ - ٨)، **جـ**].

هذا ويمكن تلخيص الخطوات المتَّبعَة في تحديد النهايات العظمى والصغرى النسبية باستخدام اختبار المشتقة التفاضلية الأولى على النحو التالي:

الخطوة (١): أوجد د َ(س) ثم حِل المعادلة: د َ(س) = صفر في ص.

الخطوة (٢): اختبر قيم ص الحرجة التي حصلت عليها في الخطوة (١) فيما يتعلق بالنهايات العظمى والصغرى النسبية وكذلك كما يلي:

- إذا غيرت د َ(س) إشارتها من موجب إلى سالب عند ص = س، بمعنى د َ(س) > صفر عندما س < **جـ** و د َ(س) < صفر عندما ص > س، فإن الدالة د(س) يكون لها نهاية عظمى نسبية قيمتها د(**جـ**) عند النقطة (س، د(**جـ**)).
- إذا غيرت د َ(س) إشارتها من سالب إلى موجب عند ص = س، فإن د(س) لها نهاية صغرى نسبية قيمتها د(**جـ**) عند النقطة (س، د(**جـ**)).
- إذا لم تغير د َ(س) إشارتها عند ص = س، فإن الدالة د(س) يكون لها نقطة انقلاب عند النقطة (س، د(**جـ**)).

مثال (١٠):

أوجد النهايات العظمى والصغرى النسبية للدالة الواردة في مثال (٨)، مستخدماً في ذلك اختبار المشتقة التفاضلية الأولى.

الحـل:

حيث أن: د(س) = ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} - ١٢ س - ١٥

فإن: د َ(س) = ٦ س^{٢} + ٦ س - ١٢

وبمساواة د َ(س) بالصفر وجدنا في مثال (٨) أن القيم الحرجة هي:

ص = -٢ و ص = ١

ولتحديد طبيعة النهايات العظمى والصغرى النسبية عند هذه النقط فإننا نتبع الآتي:

عندما ص = -٢:

سوف نختار قيمتيْن لـ ص، قيمة قبلها ولتكن س$_{م}$ = -٣، وقيمة بعدها ولتكن س$_{ب}$ = -١ ثم نوجد قيمة د َ(س) عند كل منهما.

د َ(-٣) = ٦(-٣)^{٢} + ٦(-٣) – ١٢ = ٥٤ – ١٨ – ١٢ = ٢٤ موجب

د َ(-١) = ٦(-١)^{٢} + ٦(-١) – ١٢ = ٦ – ٦ – ١٢ = -١٢ سالب

وحيث أن د َ(س) غيرت إشارتها من موجب إلى سالب عند ص = -٢، فإن الدالة د(س) يكون لها نهاية عظمى نسبية عند ص = -٢. وقد تم إيجاد قيمة هذه النهاية في مثال (٨) حيث وجدنا أنها تساوى ٥.

عندما ص = ١:

سوف نختار قيمتيْن لـ ص، قيمة قبلها ولتكن س$_{م}$ = صفر وقيمة بعدها ولتكن س$_{ب}$ = ٢ ثم نوجد قيمة د َ(س) عند كل منهما.

د َ(صفر) = ٦(صفر)^{٢} + ٦(صفر) – ١٢ = - ١٢ سالب

د َ(٢) = ٦(٢)^{٢} + ٦(٢) - ١٢

= ٢٤ + ١٢ – ١٢ = ٢٤ موجب

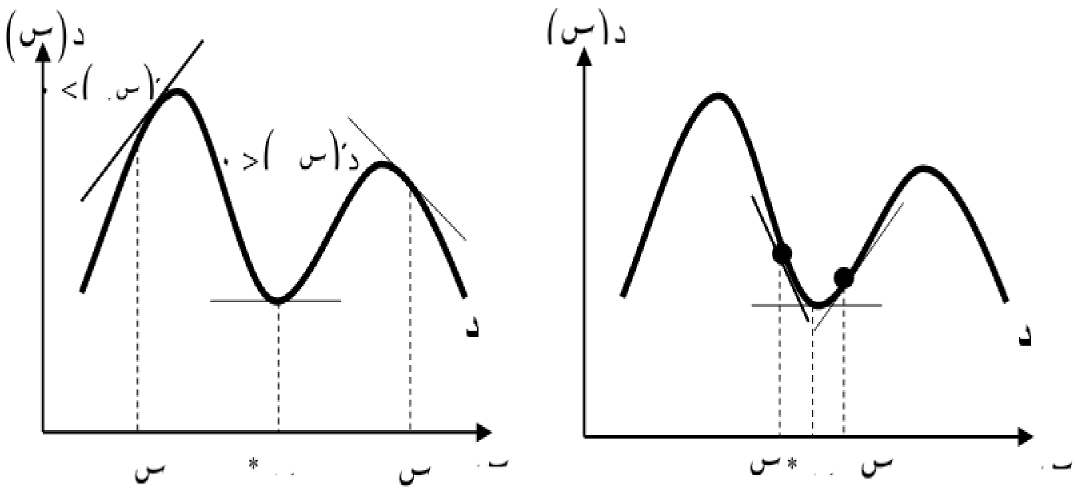
وحيث أن د َ(س) غيرت إشارتها من سالب إلى موجب عند س = ١، فإن الدالة د(س) لها نهاية صغرى نسبية عند س = ١. وقد تم إيجاد قيمة النهاية الصغرى النسبية في مثال (٨) حيث وجدنا أنها تساوى –٢٢.

وبذلك نرى أن اختبار المشتقة التفاضلية الأولى قد أدى إلى نفس النتائج التي حصلنا عليها باستخدام اختبار المشتقة التفاضلية الثانية في مثال (٨).

ملحوظة هامة:

عند استخدامنا لاختبار المشتقة الأولى في تحديد النهايات العظمى والصغرى النسبية للدالة فإننا نختار قيمتيْن الأولى قبل القيمة الحرجة ($س_{م}$) مباشرةً والثانية ($س_{ب}$) بعدها مباشرةً (لاحظ أن: $س_{م} < س_{ب}$)، وذلك بهدف إيجاد قيمة المشتقة الأولى عند كلٍّ من هاتيْن القيمتيْن.

وهنا يجب أن نحذر من أنه يجب ألا نبتعد بعيداً عن القيمة الحرجة في اختيارنا لـ $س_{م}$، $س_{ب}$، وأن نظل قريبيْن بدرجة كافية من القيمة الحرجة، وإلا فإن ذلك سوف يؤدى بنا إلى نتائج خاطئة. وكما في الشكل (٧ – ٩)، فإن النهاية الصغرى النسبية يمكن الحكم عليها بطريقة خاطئة على أنها نهاية عظمى نسبية. ومع أن هناك قدراً من الحرية في تحديد النقطتيْن $س_{م}$، $س_{ب}$ إلا أنه يجب أن نراعي أنه إذا كان لدينا أكثر من نقطة حرجة، فإن $س_{م}$، $س_{ب}$ يجب اختيارهما بحيث تقع كل منهما ما بين قيمة النقطة الحرجة موضع الاعتبار وبين أي قيمة حرجة مجاورة.



نتيجة مضللة: نهاية عظمى نسبية عند س*

نتيجة صحيحة: نهاية صغرى نسبية عند س*

الشكل (٧ – ٩)

اختيار $س_{م}$، $س_{ب}$ لاختبار المشتقة الأولى

مثال (١١):

باستخدام اختبار المشتقة التفاضلية الأولى، أوجد النهايات العظمى والصغرى النسبية للدالة الواردة في مثال (٩).

الحــل:

حيث أن: $د(س) = \frac{س^٣}{٣} - ٢,٥ س^٢ + ٤ س$ فــإن: $د'(س) = س^٢ - ٥ س + ٤$

وقد حصلنا في مثال (٩) على القيم الحرجة لـ س وهي:

$س = ١$ و $س = ٤$

ولاستكشاف ما إذا كانت هناك نهايات عظمى أو صغرى نسبية للدالة عند أي من هاتيْن النقطتيْن نتبع ما يلي:

عندما س = ١:

سوف نختـار القيمتيْن صفر، ٢ قبـل وبعد س = ١ على الترتيب (أي أن: $س_{م}$ = صفر، $س_{ب} = ٢$)، ثم نوجد قيمة $د'(س)$ عند كل من هاتيْن القيمتيْن.

$د'(صفر) = (صفر)^٢ - ٥(صفر) + ٤ = ٤$ موجب

$د'(٢) = (٢)^٢ - ٥(٢) + ٤ = -٢$ سالب

أي أن $د'(س)$ قد غيرت إشارتها من موجب إلى سالب عبر مرورها على النقطـة س = ١.

وهـذا يدل على أن هناك نهاية عظمى نسبية للدالة عند س = ١. وقد وجدنا في مثال (٩) أن قيمة هذه النهاية هي ١,٨٣.

عندما س = ٤:

سوف نختار القيمتيْن ٣، ٥ قبل وبعد س = ٤ على الترتيب، ثم نوجد قيمة $د'(س)$ عند كل منهما.

$د'(٣) = (٣)^٢ - ٥(٣) + ٤ = -٢$ سالب

$د'(٥) = (٥)^٢ - ٥(٥) + ٤ = ٤$ موجب

وهذا يشير إلى أن $د'(س)$ قد غيرت إشارتها من سالب إلى موجـب عنـد س = ٤. مما يدل على أن هناك نهاية صغرى نسبية للدالة عند س = ٤. وفي مثال (٩)، وجدنا أن هذه الدالة تساوى – ٢,٦٧.

وهنا تلزم الإشارة إلى أننا أخترنا القيمة $س_ب$ = ٢ والتي تكبُر القيمة الحرجة س=١. ويُلاحَظ أن $س_ب$ = ٢ تقع ما بين القيمتيْن الحرجتيْن س = ١، س = ٤. ووفقا للملحوظة الهامة المشار إليها، لا يصح اختيار هذه القيمة لتكون س = ٥ مثلاً. وبنفس المنطق، تم اختيار القيمة التي تصغُر القيمة الحرجة س = ٤ لتكون س = ٣، حيث لا يصح اختيارها لتكون س = صفر مثلاً.

وهنا أيضا نجد أن اختبار المشتقة التفاضلية الأولى قد أعطى نتائج مماثلة تماما لتلك التي حصلنا عليها باستخدام اختبار المشتقة التفاضلية الثانية في مثال (٩).

ولعله من المفيد للقارئ أن نلخص كيفية استخدام كل من اختبار المشتقة التفاضلية الأولى واختبار المشتقة التفاضلية الثانية في استكشاف الجوانب المختلفة التي تحدد وصف الدالة وصفا تفصيليا دقيقا وذلك على النحو الموضح فيما يلي:

الخاصية	اختبار المشتقة التفاضلية الأولى	اختبار المشتقة التفاضلية الثانية
تزايد وتناقص الدالة	د´(س) > صفر دالة متزايدة د´(س) < صفر دالة متناقصة	لا يستخـــدم
التقعـــر	لا يستخـــدم	د´´(س) > صفر تقعر لأعلى د´´(س) < صفر تقعر لأسفل د´´(س) = صفر لا يمكن اتخاذ قرار
نقط الانقلاب	يكون هناك نقطة انقلاب عند س = أ: إذا لم تغير د´(س) إشارتها قبل وبعد س = أ مباشرة.	يكون هناك نقطة انقلاب عند س = أ: إذا تغيرت إشارة د´´(س) قبل وبعد س = أ مباشرة.
النهايات العظمى والصغرى النسبية	• يكون هناك نهاية عظمى نسبية عند س = **جـ** إذا كان: د´(س) > صفر عندما س < **جـ** د´(س) < صفر عندما س > **جـ** • يكون هناك نهاية صغرى نسبية عند س = **جـ** إذا كان: د´(س) < صفر عندما س < **جـ** د´(س) > صفر عندما س > **جـ**	• يكون هناك نهاية عظمى نسبية عند س = **جـ** إذا كان: د´(جـ) = صفر ، د´´(جـ) < صفر • يكون هناك نهاية صغرى نسبية عند س = **جـ** إذا كان: د´(جـ) = صفر ، د´´(جـ) > صفر

خامساً: الرسم التخطيطي للدوال Curve Sketching

قدمنا في هذا الفصل الكثير من الجوانب المتعلقة بالدوال مثل: تزايد وتناقص الدالة، الميل، التقعر بنوعيه، نقط الانقلاب، القيم الحرجة والنهايات العظمى والصغرى النسبية للدوال.
هذا ومن المعروف أنه بالنسبة للرسم البياني لأية دالة يمكننا تحديد الجزء المقطوع من المحور السيني (الأفقي) والجزء المقطوع من المحور الصادي (الرأسي) وذلك كما يلي:

- التعويض عن س بالصفر يعطي الجزء المقطوع من المحور الصادي (الرأسي).
- التعويض عن ص بالصفر يعطي الجزء المقطوع من المحور السيني (الأفقي).

ومما لا شك فيه أن هذه الجوانب مجتمعةً تولِّد لدينا إحساسا سريعاً وانطباعاً لا ينقصه الصدق حول سلوك الأشكال البيانية للدوال وكيفية رسمها، دون حاجة إلى تحديد كثير من النقط التي تستخدم عادة في أي رسم بياني. وفي هذا الجزء سوف نناقش بعض المحددات الأساسية للشكل البياني للدالة والتي توضح كيفية عمل رسم تخطيطي للمنحنيات الممثلة للدوال.

ولتحديد الصورة العامة للشكل البياني للدالة، فإنه من المهم جداً أن نحدد ما يلي:

- النهايات العظمى والصغرى النسبية
Relative Maximum and Minimum Extrema
- نقط الانقلاب Inflection Point
- الجزء المقطوع من المحور الصادي Y- Intercept
- الاتجاه النهائي Ultimate Direction

ولعله من الأيسر على القارئ أن نوضح هذا الأمر مستعينين في ذلك بمثال.

مثال (١٢):

ارسم الشكل البياني للدالة:

$$د(س) = س^٣ - ٣ س + ٤$$

الحـل:

(١) النهايات العظمى والصغرى للدالة:

$$د'(س) = ٣ س^٢ - ٣$$

$$د'(س) = \text{صفر} \quad \text{تعطى:} \quad ٣ س^٢ - ٣ = \text{صفر}$$

$$٣(س^٢ - ١) = \text{صفر} \;،\; ٣(س - ١)(س + ١) = \text{صفر}$$

$$\therefore \; س = ١ \; \text{و} \; س = -١$$

$$د(١) = (١)^٣ - ٣(١) + ٤ = ٢ \;،\; د(-١) = (-١)^٣ - ٣(١) + ٤ = ٦$$

أي أن النقط الحرجة هي: (١، ٢) و (-١، ٦).

ولتحديد طبيعة النقط الحرجة:

د´´(س) = ٦ س ، د´´(١) = ٦(١) = ٦ موجب

أي أن للدالة نهاية صغرى نسبية مقدارها ٢ عند النقطة (١، ٢).

د´´(-١) = ٦(-١) = -٦ سالب

أي أن الدالة لها نهاية عظمى نسبية مقدارها ٦ عند النقطة (-١، ٦).

(٢) نقط الانقلاب:

د´´(س) = ٦ س، وبمساواة د´´(س) بالصفر نجد أن:

س = صفر ، د(صفر) = (صفر)^{٣} – ٣(صفر) + ٤ = ٤

أي أن: النقطة (صفر، ٤) هي نقطة انقلاب محتملة.

بعد ذلك نختار نقطتيْن الأولى على يسار الصفر مباشرة، ولتكن -٠,٥، والثانية على يمين الصفر مباشرة ولتكن ٠,٥. ثم نوجد قيمة د´´(س) عند كل من النقطتيْن.

د´´(-٠,٥) = ٦(-٠,٥) = -٣ تقعر لأسفل

د´´(٠,٥) = ٦(٠,٥) = ٣ تقعر لأعلى

وحيث أن حالة التقعر قد تغيرت فإن ذلك يدل على وجود نقطة انقلاب عند النقطة (صفر، ٤).

ملحوظة:

إذا كانت قيمة س التي تحقق د´´(س) = صفر تقع في منتصف البعد بين قيمة س التي يكون عندها نهاية عظمى نسبية وقيمة س التي يكون عندها نهاية صغرى نسبية، فإن هذه القيمة يكون عندها نقطة انقلاب.

وهذا هو حال مثالنا الحالي (لاحظ أن: صفر = $\frac{١ + (-١)}{٢}$)

(٣) الجزء المقطوع من المحور الصادي يتحدد كما يلي:

د(صفر) = ٤ سبق إيجاده

(٤) الاتجاه النهائي:

لتحديد سلوك الدالة عندما تؤول قيمة س إلى ∞ أو -∞ فإننا نحتاج إلى معرفة سلوك الحد ذي أكبر قوة أو أس (س^{٣}) وذلك كما يلي:

س $\longrightarrow +\infty$ س^{٣} $\longrightarrow +\infty$

لذلك: س $\longrightarrow +\infty$ د(س) $\longrightarrow +\infty$

وبالمثل: س $\longrightarrow -\infty$ س^{٣} $\longrightarrow -\infty$

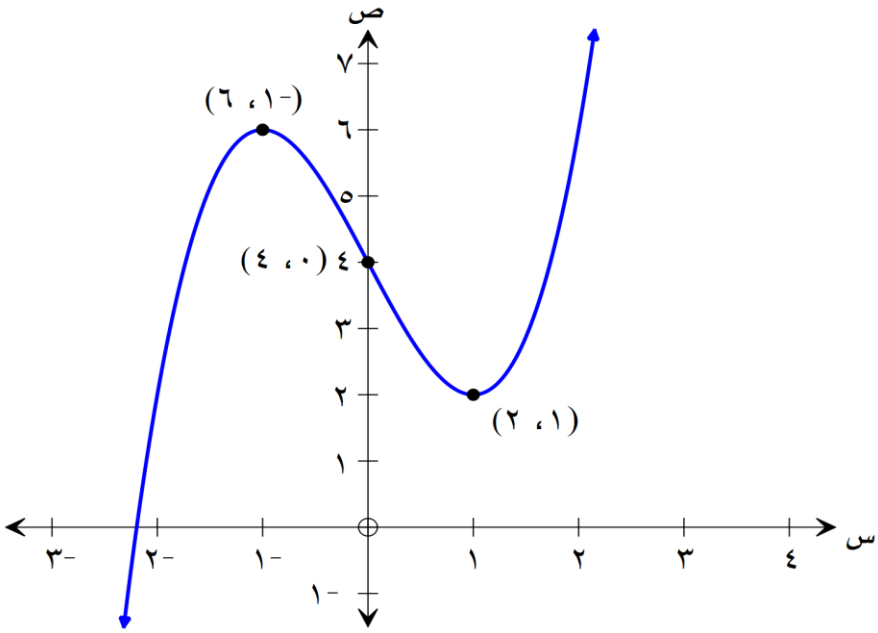
س $\longrightarrow -\infty$ د(س) $\longrightarrow -\infty$

أي أن:

عندما س $\longrightarrow +\infty$ د(س) $\longrightarrow +\infty$

عندما س $\longrightarrow -\infty$ د(س) $\longrightarrow -\infty$

وعلى ضوء ما سبق، فإن الشكل البياني في الدالة يأخذ الصورة الموضحة في الشكل (٧ – ١٠).



الشكل (٧ - ١٠)

الرسم التخطيطي للدالة: د(س) = س^{٣} – ٣ س + ٤

هذا ويمكن تلخيص النقط الأساسية التي تحدد شكل الدالة كما يلي:

أ- النهاية العظمى النسبية عند النقطة (-١، ٦).

ب- النهاية الصغرى النسبية عند النقطة (١، ٢)   جـ- نقطة الانقلاب (صفر، ٤).

د- الجزء المقطوع من المحور الصادي = ٤.

سادساً: النهايات العظمى والصغرى المطلقة
Absolute Maxima and Minima

في كثير من المشكلات التي تواجهنا نجد أن قيم المتغير المستقل س محصورةً في فئة معينة من القيم، أ ≤ س ≤ ب على سبيل المثال، ونحتاج إلى إيجاد النهايات العظمى والصغرى للدالة د(س) في هذه الفترة لقيم س. ولو افترضنا أن س تمثل مستوى الإنتاج في مؤسسة صناعية، فإن س في هذه الحالة تكون مقصورة على الفترة س ≤ صفر، حيث أنه من غير المنطقي أن تأخذ كمية الإنتاج قيمة سالبة.

وهنا فإن اهتمامنا يكون منصبَّاً على إيجاد النهاية العظمى لدالة الربح في هذه الفترة. وهذا القيد على قيم س لا يؤثر هنا على النتائج التي نحصل عليها في هذا الشأن، ولكن هناك حالات أخرى تؤثر فيها قيود كتلك على النتائج المتعلقة بإيجاد النهايات العظمى والصغرى للدوال.

النهاية العظمى المطلقة: Absolute Maximum

النهاية العظمى المطلقة للدالة د(س) في الفترة: أ ≤ س ≤ ب هي أكبر قيمة للدالة د(س) عندما تأخذ س جميع القيم من أ إلى ب.

النهاية الصغرى المطلقة: Absolute Minimum

النهاية الصغرى المطلقة للدالة د(س) في الفترة: أ ≤ س ≤ ب هي أصغر قيمة للدالة د(س) عندما تأخذ س جميع القيم من أ إلى ب.

ومن البديهي أن الدالة د(س) تكون متصلة في الفترة أ ≤ س ≤ ب، وأن النقطة التي تصل عندها الدالة إلى نهايتها العظمى المطلقة إما أن نهاية عظمى نسبية للدالة د(س) أو نهاية عظمى عند أحد طرفيْها أ أو ب. وهكذا فإنه لإيجاد النهاية العظمى المطلقة والنهاية الصغرى المطلقة للدالة د(س) في الفترة أ ≤ س ≤ ب، فإننا نختار أكبر قيمة للدالة وأصغر قيمة للدالة وذلك من بين قيم د(س) عند النقط الحرجة الموجودة داخل الفترة أ ≤ س ≤ ب وكذلك قيم د(س) عند نقطتي النهاية أ، ب. والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (١٣):

أوجد النهايات العظمى والصغرى المطلقة للدالة:

$$د(س) = \frac{٢ س^{٣}}{٣} + ٣ س^{٢} + ٤ س - ١ \quad \text{حيث:} \quad -٣ \leq س \leq ٥$$

الحـل:

د$'$(س) = ٢ س^{٢}+ ٦ س + ٤ ، وبمساواة د$'$(س) بالصفر، ينتُج أن:

٢ س^{٢}+ ٦ س + ٤ = صفر

س^{٢}+ ٣ س + ٢= صفر بقسمة الطرفين على ٢

∴ (س + ١)(س + ٢) = صفر

وهكذا نجد أن: س = -١   و   س = -٢

وهنا يُلاحَظ أن هاتيْن القيمتيْن تقعان ضمن الفئة المعرَّفة -٣ ≤ س ≤ ٥.

ملحوظة:

إذا كانت إحدى القيمة الحرجة لا تدخل ضمن نطاق الفئة المعرَّفة عليها الدالة فإن هذه القيمة تُستثنى من الحل.

ولتحديد طبيعة النقط الحرجة:

د$''$(س) = ٤ س + ٦

د$''$(-١) = ٤(-١) + ٦ = ٢   موجب

أي توجد نهاية صغرى نسبية للدالة عند س = -١. وقيمة هذه النهاية تتحدد كالتالي:

د(-١) = $\frac{٢(-١)^{٣}}{٣}$ + ٣(-١)^{٢} + ٤(-١) – ١ = – $\frac{٢}{٣}$ ٢

د$''$(-٢) = ٤(-٢) + ٦ = -٢   سالـب

أي أن الدالة لها نهاية عظمى نسبية عند س = -٢. وقيمة هذه الدالة هي:

د(-٢) = $\frac{٢(-٢)^{٣}}{٣}$ + ٣(-٢)^{٢} + ٤(-٢) – ١ = – $\frac{١}{٣}$ ٢

بعد ذلك نوجد قيمة الدالة عند طرفي الفترة أي عند س = -٣ وعند س = ٥

د(-٣) = $\frac{٢(-٣)^{٣}}{٣}$ + ٣(-٣)^{٢} + ٤(-٣) -١

= -١٨ + ٢٧ – ١٢ – ١ = - ٤

د(-٥) = $\frac{٢(-٥)^{٣}}{٣}$ + ٣(-٥)^{٢} + ٤(٥) – ١ = $\frac{٢}{٣}$ ١٠

ونستنتج من ذلك ما يلي:

- أن الدالة لها نهاية عظمى مطلقة قيمتها $\frac{٢}{٣}$ ١٠ عند س = ٥.
- أن الدالة لها نهاية صغرى مطلقة قيمتها -٤ عند س = -٣.

مثال (١٤):

أوجد النهايات العظمى والنهايات الصغرى المطلقة للدالة:

د(س) = ٣ س^{٢} – ٤٨ س + ٣٠ صفر ≤ س ≤ ١٠

الحـل:

د َ(س) = ٦ س – ٤٨ ، وبمساواة د َ(س) بالصفر، نحصل على:

٦ س – ٤٨ = صفر ، س = ٨

د(٨) = ٣(٨)^{٢} – ٤٨(٨) + ٣٠ = - ١٦٢

أي أن النقطة الحرجة هي: (٨، - ١٦٢)

ولتحديد طبيعة تلك النقطة:

د ً َ(س) = ٦ موجب

أي توجد نهاية صغرى نسبية للدالة مقدارها – ١٦٢ عند س = ٨.

بعد ذلك نوجد قيمة الدالة عند طرفي الفئة:

د(صفر) = ٣(صفر)^{٢} – ٤٨(صفر) + ٣٠ = ٣٠

د(١٠) = ٣(١٠)^{٢} – ٤٨(١٠) + ٣٠ = - ١٥٠

ونستنتج من ذلك ما يلي:

- يوجد للدالة نهاية عظمى مطلقة مقدارها ٣٠ عند س = صفر.
- يوجد للدالة نهاية صغرى مطلقة مقدارها - ١٦٢ عند س = ٨.

سابعاً: تطبيقات في مجالات الأعمال
(الاقتصاد، الإنتاج، الإدارة، التسويق، المحاسبة)

سوف نتناول في هذا الجزء تطبيقات الأساليب الرياضية التي شملها هذا الفصل في كثير من المجالات مثل: الاقتصاد، الإنتاج، الإدارة، التسويق، المحاسبة. وسوف تشمل التطبيقات ما يلي:

١- تحليل دوال التكلفة والإيراد والربح ٢- تحليل التكلفة الحدية
٣- تحليل التكلفة المتوسطة ٤- تحليل الإيراد الحدي
٥- الحد الأدنى للتكلفة ٦- التكلفة ورضا العميل
٧- الحد الأدنى للتكلفة المتوسطة ٨- الحد الأدنى للتكلفة الحدية
٩- الحد الأعلى للعائد الحكومي من ضريبة المبيعات
١٠- الحد الأقصى للإيراد ١١- الحد الأعلى للأرباح
١٢- الإعلان والأرباح ١٣- الحد الأقصى للأرباح والإيراد الضريبي
١٤- المدخل الحدي لتعظيم الربح ١٥- التخصيص الأمثل للإنتاج
١٦- إحلال المعدات ١٧- الوقت الأمثل للبيع

وسوف نستعين في كل حالة من حالات التطبيق بمثال عملي وذلك على النحو الموضح فيما يلي:

١- تحليل دوال التكلفة والإيراد والربح:
Analysis of Cost, Revenue and Profit Functions

مثال (١٥):

إذا كانت دالة التكلفة **ت** لإنتاج ك وحدة من منتَج معين هي:

$$ت(ك) = ٢٠٠٠ + ١٠ك$$

وكانت دالة الطلب على هذا المنتَج تأخذ الصورة: $س = ١٠٠ - ٠,٥ ك$

حيث: ك كمية الطلب، س سعر الوحدة بالجنيه.

حدِّد مستويات الإنتاج التي تجعل كلا من:

(أ) دالة التكلفة (ب) دالة الإيراد (جـ) دالة الربح
متزايدة أو متناقصة.

الحل:

حيث أن: $ت(ك) = ٢٠٠٠ + ١٠ك$ فإن : $ت\acute{}(ك) = ١٠ > صفر$

أي أن دالة التكلفة دائما متزايدة. بمعنى أن التكلفة تزداد بزيادة الكمية المنتَجة.

حيث أن: الإيراد = كمية المبيعات × سعر بيع الوحدة

$$= ك \times س = ك(١٠٠ - ٠,٥ك) = ١٠٠ك - ٠,٥ك^٢$$

أي أن دالة الإيراد هي: $ر(ك) = ١٠٠ك - ٠,٥ك^٢$

$$ر\acute{}(ك) = ١٠٠ - ك$$

لذلك نجد أن: ر´(ك) > صفر عندما: ١٠٠ – ك > صفر ، ك < ١٠٠

كما نجد أن: ر´(ك) < صفر عندما: ١٠٠ – ك < صفر ، ك > ١٠٠

وهكذا نستنتج أن دالة الإيراد تكون متزايدة إذا قلت كمية الإنتاج عن ١٠٠ وحدة وتكون متناقصة إذا زادت كمية الإنتاج عن ١٠٠ وحدة. وأما دالة الربح ع فيمكن تحديدها كما يلي:

ع(ك) = ر(ك) – ت(ك) = ١٠٠ك – ٠,٥ك^٢ – (٢٠٠٠ + ١٠ك)

= ٩٠ك – ٠,٥ك^٢ – ٢٠٠٠

أي أن دالة الربح هي:

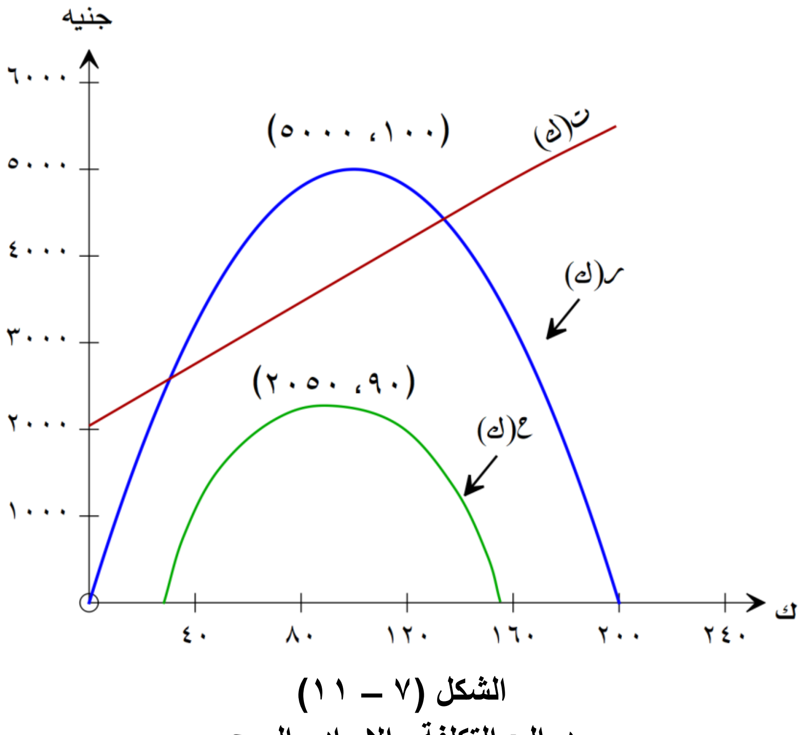
ع(ك) = ٩٠ك – ٠,٥ك^٢ – ٢٠٠٠ كما أن: ع´(ك) = ٩٠ – ك

ع´(ك) تكون أكبر من الصفر إذا كان: ٩٠ – ك > صفر ، ك < ٩٠

ع´(ك) تكون أقل من الصفر إذا كان: ٩٠ – ك < صفر ، ك > ٩٠

وهكذا نجد أن دالة الربح تكون متزايدة إذا قلت كمية الإنتاج عن ٩٠ وحدة، بينما تكون متناقصة إذا زادت كمية الإنتاج عن ٩٠ وحدة.

ويوضح الشكل (٧ – ١١) الشكل البياني لكلٍّ من الدوال الثلاثة.



الشكل (٧ – ١١)

دوال: التكلفة والإيراد والربح

هنا نجد أن نمط سلوك الدوال الثلاثة يتمشى مع ما هو مألوف من الناحية الاقتصادية. حيث أن دالة التكلفة عادة ما تكون دالة متزايدة في عدد الوحدات المنتَجة (عادة ما نتحمل تكلفة أكثر لننتج أكثر، ومع ذلك تحدث استثناءات في ظل سياسات تسعير معينة للمواد الخام).
وبالمثل، فإن دالة الإيراد تكون – بوجه عام – دالة متزايدة عند كميات المبيعات الصغيرة، وعادة ما تصبح تناقصية عند كميات المبيعات الكبيرة.
وأما دالة الأرباح فإن نمط سلوكها يشابه ذلك النمط الموجود في دالة الإيراد، حيث تكون متزايدة عند كميات المبيعات الصغيرة ومتناقصة عند كميات المبيعات الكبيرة.

٢- تحليل التكلفة الحدية: **Marginal Cost Analysis**

التكلفة الحدية هي التكلفة الإضافية نتيجة إنتاج وبيع وحدة واحدة زيادة.

مثال (١٦):

إذا كانت تكلفة إنتاج ك (بآلاف الوحدات) من منتَج معين تتحدد بالصيغة:

$$ت(ك) = ٢٥٠٠ + ٩ك - ٣ك^{٢} + ٢ك^{٣}$$

حدِّد مستويات الإنتاج التي تكون عندها التكلفة الحدية: (أ) متزايدة (ب) متناقصة

الحــل:

التكلفة الحدية: $ت'(ك) = ٩ - ٦ك + ٦ك^{٢}$

ولكي تكون التكلفة الحدية متزايدة فإنه يجب أن تكون $ت''(ك) > صفر$
أي: $-٦ + ١٢ك > صفر$ والذي يعطي $ك > ٠,٥$

ولكي تكون متناقصة، فإنه يجب أن تكون $ت''ك < صفر$
وهذا يعني أن: $-٦ + ١٢ك < صفر$ ، $ك < ٠,٥$

وهكذا نجد أن التكلفة الحدية تكون متزايدة عند أي مستوى للإنتاج يزيد عن نصف وحدة، كما أنها تكون متناقصة عند أي مستوى للإنتاج يقل عن نصف وحدة. وهنا يجب ألا ننسى بأن كمية الإنتاج ك معبَّر عنها بالآلاف (بمعنى أن نصف وحدة تعادل ٥٠٠).

٣- تحليل التكلفة المتوسطة: **Average Cost Analysis**

مثال (١٧):

إذا كانت تكلفة إنتاج ك وحدة من منتَج معين تتحدد وفقا للدالة:

$$ت(ك) = ٦ + \frac{٢ك(ك+٤)}{ك+١}$$

أثبت أن التكلفة المتوسطة تكون دائما متناقصة عند أي كمية من الإنتاج.

الحــل:

$$\text{التكلفة المتوسطة} = (\text{ت}) = \frac{\text{التكلفة الكلية}}{\text{عدد وحدات الإنتاج}} = \frac{\text{ت}}{\text{ك}} = \frac{٦}{\text{ك}} + \frac{٢(\text{ك}+٤)}{\text{ك}+١}$$

أي أن دالة التكلفة المتوسطة هي:

$$\text{ت}(\text{ك}) = \frac{٦}{\text{ك}} + \frac{٢(\text{ك}+٤)}{\text{ك}+١}$$

ولإثبات أن التكلفة المتوسطة متناقصة دائماً عندما يكون هناك إنتاج فإننا يجب أن نوجد المشتقة التفاضلية الأولى لدالة التكلفة المتوسطة.

$$\text{ت}'(\text{ك}) = \frac{-٦}{\text{ك}^{٢}} + \frac{(\text{ك}+١)(٢) - ٢(\text{ك}+٤)(١)}{(\text{ك}+١)^{٢}}$$

وبإجراء بعض العمليات الجبرية يمكننا أن نصل إلى:

$$\text{ت}'(\text{ك}) = -٦ \left[\frac{٢\text{ك}^{٢}+٢\text{ك}+١}{\text{ك}^{٢}(\text{ك}^{٢}+١)}\right]$$

وهذا المقدار يكون سالباً دائماً لأي قيمة لـ ك < صفر.

وهكذا نجد أن التكلفة المتوسطة تكون دائما متناقصة عندما يكون هناك إنتاج (ك > صفر) مهما كان مستوى هذا الإنتاج.

٤- تحليل الإيراد الحدي: Marginal Revenue Analysis

الإيراد الحدي هو الإيراد الإضافي نتيجة بيع وحدة واحدة إضافية.

مثال (١٨):

إذا كانت دالة الطلب على إحدى السلع تأخذ الصيغة التالية: $\text{س} = ٦٠٠ - \text{ك}^{٢}$

حيث: ك كمية الطلب بالوحدات ، س سعر الوحدة من السلعة.

حدِّد مستويات الإنتاج التي يكون عندها الإيراد الحدي:

(أ) متزايداً (ب) متناقصاً

الحــل:

حيث أن: الإيراد = كمية الطلب (المبيعات) × سعر بيع الواحدة

$$= \text{ك} \times \text{س} = \text{ك س}$$

$$= \text{ك}(٦٠٠ - \text{ك}^{٢}) = ٦٠٠\text{ك} - \text{ك}^{٣}$$

وبذلك نجد أن دالة الإيراد هي:

$$ر(ك) = ٦٠٠ ك - ك^{٣}$$

دالة الإيراد الحدي هي: $ر^{\prime}(ك) = ٦٠٠ - ٣ ك^{٢}$

ولكي نحكم على تزايد وتناقص الإيراد الحدي عند مستويات الإنتاج المختلفة يجب أن نوجد أولاً المشتقة التفاضلية الأولى لدالة الإيراد الحدي، والتي تمثل في نفس الوقت المشتقة التفاضلية الثانية لدالة الإيراد الكلى الأصلية.

$$ر^{\prime\prime}(ك) = -٦ك < \text{صفر لجميع قيم } ك > \text{صفر}.$$

وحيث أن كمية الإنتاج تكون أكبر من الصفر، فإننا نستطيع القول بأن الإيراد الحدي يكون دائماً متناقصاً طالما أن هناك مبيعات ولا يكون متزايدا أبداً.

تطبيقات التكلفة: Cost Applications

لا شك في أن أي مؤسسة تجارية تهدف إلى تخفيض نفقات إنتاجها إلى حدها الأدنى وذلك بُغية تحقيق أكبر قدر ممكن من الأرباح. وهنا سوف نتناول كيفية تطبيق المشتقات التفاضلية في هذا الشأن.

٥- الحد الأدنى للتكلفة: Minimum Cost

مثال (١٩):

وجد صاحب مصنع أن التكلفة السنوية لإنتاج ك وحدة من منتَجه تتمثل في الدالة:

$$ت(ك) = \frac{٢٠٠٠٠}{ك} + ٠,٥ك + ٨٠٠٠ \text{ جنيه}$$

المطلوب:

(١) ما هو حجم الإنتاج الذي يحقق الحد الأدنى للتكلفة السنوية؟

(٢) ما هي قيمة الحد الأدنى للتكلفة السنوية؟

الحـل:

(١) $ت^{\prime}(ك) = \frac{-٢٠٠٠٠}{ك^{٢}} + ٠,٥$ وبمساواة $ت^{\prime}(ك)$ بالصفر ينتج أن:

$$\frac{-٢٠٠٠٠}{ك^{٢}} + ٠,٥ = \text{صفر}$$

أي أن: $٠,٥ ك^{٢} = ٢٠٠٠٠$ ، $ك^{٢} = ٤٠٠٠٠$ ، $ك = ٢٠٠$

أي أن هناك نقطة حرجة عند $ك = ٢٠٠$. ولتحديد طبيعة هذه النقطة تستخدم $ت^{\prime\prime}(ك)$ كما يلي:

$$ت''(ك) = \frac{٤٠٠٠٠}{ك^٣} > صفر \quad لجميع\ قيم\ ك > صفر$$

أي أن هناك نهاية صغرى لدالة التكلفة.

وهذا يعنى أن الشكل البياني لدالة التكلفة مقعراً لأعلى. وهكذا فإن التكلفة تصل إلى حدها الأدنى عندما ك = ٢٠٠، أي أن حجم الإنتاج الذي يصل بالتكلفة السنوية إلى حدها الأدنى هو ٢٠٠ وحدة.

(٢) قيمة الحد الأدنى للتكلفة السنوية هو:

$$ت\ (٢٠٠) = \frac{٢٠٠٠٠}{٢٠٠} + ٠,٥(٢٠٠) + ٨٠٠٠$$

$$= ٨٢٠٠\ جنيه$$

٦- التكلفة ورضا العميل: Cost and Customer Satisfaction

إذا أقبل بنك على تخفيض عدد أمناء الصندوق (موظفي الخزائن) لديه فإن ذلك من شأنه أن يؤدى إلى تخفيض تكلفة الأجور. ولكن، وعلى الجانب الآخر، قد يسبب ذلك خسارة من نوع آخر، وهي أن العملاء قد يضطرون إلى الانتظار وقتاً أطول حتى تتم خدمتهم. وبالتالي يصبحون أقل رضاً عن مستوى الخدمة التي يقدمها البنك لهم. مما يؤدى بالتالي إلى اتجاه بعضهم للتعامل مع بنوك أخرى. وهنا فإن على إدارة البنك أن تتخذ القرار الصائب في هذا الشأن حتى تقلل ما أمكن من مقدار الخسائر المترتبة على أي قرار تتخذه. ولعل المثال التالي يوضح تلك القضية.

مثال (٢٠):

بشأن القضية المشار إليها أعلاه، لنفترض أن معدل الأجر لكل أمين صندوق هو ٨٠ جنيه يومياً. وأن الخسارة في الأرباح المترتبة على وجود $ى$ فقط من أمناء الصندوق تحددها الدالة:

$$غ(ى) = \frac{٥٠٠٠}{ى+١}\ جنيه\ يوميا$$

ما هو عدد أمناء الصندوق الذين يجب أن يكونوا لدى البنك حتى تصبح هذه الخسائر (المعرفة في غ) مضافاً إليها تكلفة الأجور أقل ما يمكن.

الحـل:

$$التكلفة\ الكلية:\ ت(ى) = \frac{٥٠٠٠}{ى+١} + ٨٠\ ى$$

ولإيجاد الحد الأدنى لتلك التكلفة:

$$ت'(ن) = -٥٠٠٠ (ن + ١)^{-٢}(١) + ٨٠ = \frac{-٥٠٠٠}{(ن+١)^٢} + ٨٠$$

$$ت'(ن) = \text{صفر} \quad \text{يؤدى إلى:} \quad \frac{٥٠٠٠}{(ن+١)^٢} = ٨٠$$

$$(ن+١)^٢ = \frac{٥٠٠٠}{٨٠} = ٦٢,٥ \quad \therefore \quad (ن + ١) = \sqrt{٦٢,٥} = ٧,٩$$

أي أن: $ن = ٦,٩$

$$ت''(ن) = \frac{١٠٠٠٠}{(ن+١)^٣} > \text{صفر} \quad \text{لجميع قيم } ن > \text{صفر}$$

وهكذا نجد أن دالة التكلفة الكلية لها نهاية صغرى عند $ن = ٧,٩$. وحيث أن عدد أمناء الصندوق يجب أن يكون عدداً صحيحاً، فإن $ن = ٨$ تعطى تكلفة أقل من $ن = ٦$ حيث:

$$ت(٦) = \frac{٥٠٠٠}{٦+١} + ٨٠ (٦) = ١١٩٤,٣ \quad \text{جنيه}$$

$$ت(٧) = ١١٨٥ \quad \text{جنيه}$$

وهكذا فإن وجود ٧ أمناء صندوق لدى البنك يقلل تكلفة البنك إلى أدنى حد ممكن وهو ١١٨٥ جنيه.

٧- الحد الأدنى للتكلفة المتوسطة: Minimum Average Cost

التكلفة المتوسطة $\overline{ت}$ هي تكلفة الوحدة الواحدة من الإنتاج في المتوسط. ويمكن الحصول عليها بقسمة التكلفة الكلية على عدد الوحدات المنتجَة.

مثال (٢١):

إذا كانت تكلفة إنتاج ك وحدة من منتَج معين هي:

$$ت(ك) = ٤٠٠٠ + ٣ ك + \frac{ك^٢}{١٠٠٠} \quad \text{جنيه}$$

المطلوب:

(١) حدِّد التكلفة المتوسطة كدالة في عدد الوحدات المنتَجة ك.

(٢) ما هو عدد الوحدات المنتَجة الذي يجعل التكلفة المتوسطة للإنتاج أقل ما يمكن؟

(٣) مستخدماً نتائجك في (٢)، ما هو الحد الأدنى للتكلفة المتوسطة للإنتاج.

الحـل:

(١) حيث أن: التكلفة المتوسطة = $(\overline{ت})$ = $\frac{\text{التكلفة الكلية}}{\text{عدد وحدات الإنتاج}} = \frac{ت}{ك}$

$$\overline{ت}(ك) = \frac{٤٠٠٠}{ك} + ٣ + \frac{ك}{١٠٠٠} \text{ جنيه}$$

وهي دالة التكلفة المتوسطة.

ولكي تصل التكلفة المتوسطة إلى حدها الأدنى:

$$\overline{ت}'(ك) = \frac{-٤٠٠٠}{ك^{٢}} + \frac{١}{١٠٠٠}$$

وبمساواة المشتقة التفاضلية الأولى لدالة التكلفة المتوسطة بالصفر، نحصل على:

$$\frac{٤٠٠٠}{ك^{٢}} = \frac{١}{١٠٠٠} \quad \text{ومنها نجد أن: } ك = ٢٠٠٠$$

أي أن هناك نقطة حرجة عند ك = ٢٠٠٠. ولتحديد طبيعة هذه النقطة:

$$\overline{ت}''(ك) = \frac{٨٠٠٠}{ك^{٣}} > \text{صفر لجميع قيم } ك > \text{صفر}$$

أي أن دالة التكلفة المتوسطة تصل إلى حدها الأدنى عندما يكون عدد الوحدات المنتجَة ٢٠٠٠ وحدة. وقيمة هذا الحد الأدنى هي:

$$\overline{ت}(٢٠٠٠) = \frac{٤٠٠٠}{٢٠٠٠} + ٣ + \frac{٤٠٠٠}{١٠٠٠} = ٩$$

وهكذا فإن مستوى الإنتاج الذي يجعل التكلفة المتوسطة أقل ما يمكن هو ٢٠٠٠ وحدة. وتكون التكلفة المتوسطة ٩ جنيهات للوحدة الواحدة عند هذا المستوى للإنتاج، وهي أقل تكلفة متوسطة يمكن تحقيقها.

مثال (٢٢):

تأخذ دالة التكلفة لمنتَج معين الصورة:

$ت(ك) = ١٠٠٠ + ٥ك + ٠,١ ك^{٢}$ جنيه حيث: ك= عدد الوحدات المنتَجة يوميا.

فإذا كان الحد الأقصى لعدد الوحدات المنتَجة يوميا هو ٨٠ وحدة. أوجد عدد الوحدات المنتَجة الذي يجعل التكلفة المتوسطة أقل ما يمكن.

الحـل:

حيث أن الحد الأقصى لعدد الوحدات المنتَجة يومياً هو ٨٠ وحدة، فإن هذا يعنى: س ≤ ٨٠. كما أن إيجاد التكلفة المتوسطة يفيد بأن هناك وحدة واحدة منتَجة على الأقل، أي أن: س ≥ ١ وهكذا نجد أن: ١ ≤ س ≤ ٨٠.

التكلفة المتوسطة ($\bar{ت}$) = $\frac{١٠٠٠}{ك} + ٥ + ٠,١ ك$ جنيه

ولإيجاد الحد الأدنى للتكلفة المتوسطة:

$$\bar{ت}'(ك) = \frac{-١٠٠٠}{ك^{٢}} + ٠,١$$

وبمساواة المشتقة الأولى لدالة التكلفة المتوسطة بالصفر، تحصل على:

$$\frac{١٠٠٠}{ك^{٢}} = ٠,١ \quad ، \quad ك = ١٠٠$$

وحيث أن القيمة ك = ١٠٠ تقع خارج نطاق قيم س المعرفة في الفئة $١ \leq س \leq ٨٠$ فإننا نرفض هذه القيمة.

وقد استنتجنا من قبل أن: $١ \leq س \leq ٨٠$، بمعنى أن دالة التكلفة معرَّفة في فترة لقيم س. ولاستكشاف ما إذا كان هناك نهاية صغرى مطلقة لدالة التكلفة المتوسطة فإننا نوجد قيمة دالة التكلفة عند نهايتي الفئة، أي إيجاد: $\bar{ت}(١)$ و $\bar{ت}(٨٠)$، حيث نجد أن:

$$\bar{ت}(١) = \frac{١٠٠٠}{١} + ٥ + ٠,١(١) = ١٠٠٥,١ \text{ جنيه}$$

$$\bar{ت}(٨٠) = \frac{١٠٠٠}{٨٠} + ٥ + ٠,١(٨٠) = ٢٥,٥ \text{ جنيه}$$

وبذلك يمكننا استنتاج أن هناك نهاية صغرى مقدارها ٢٥,٥ جنيه لدالة التكلفة المتوسطة وذلك عند كمية الإنتاج ك = ٨٠ وحدة يومياً. أي أن التكلفة المتوسطة تبلغ أدنى حد لها وهو ٢٥,٥ جنيه للوحدة وذلك عند مستوى الإنتاج ك = ٨٠ وحدة يومياً.

٨- الحد الأدنى للتكلفة الحدية: Minimum Marginal Cost

مثال (٢٣):

تنتج مؤسسة صناعية ك طن من منتَج معين كل شهر بتكلفة كلية ت، حيث:

$$ت(ك) = ١٠ + ٧٥ك - ٥ك^{٢} + \frac{ك^{٣}}{٣} \text{ جنيه}$$

حدِّد مستوى الإنتاج ك الذي يصل بالتكلفة الحدية إلى أدنى حد لها. ثم أوجد قيمة الحد الأدنى للتكلفة الحدية.

الحـل:

التكلفة الحدية هي المشتقة التفاضلية الأولى لدالة التكلفة. أي أن:

التكلفة الحدية: $ت'(ك) = ٧٥ - ١٠ك + ك^{٢}$

ولإيجاد الحد الأدنى للتكلفة الحدية، نوجد المشتقة التفاضلية لها (وهي نفسها المشتقة الثانية لدالة التكلفة) ثم نساوى تلك المشتقة بالصفر لتحديد القيم الحرجة.

$$ت''(ك) = -١٠ + ٢ك$$

$$-١٠ + ٢ك = صفر \quad يعطي \quad ك = ٥$$

أي أن هناك نقطة حرجة عند ك = ٥. ولتحديد طبيعة هذه النقطة نعوض عن تلك القيمة في المشتقة التفاضلية الثانية لدالة التكلفة الحدية (أي المشتقة التفاضلية الثالثة لدالة التكلفة الأصلية).

$$ت^{(٣)}(ك) = ٢ > صفر \quad لجميع\ قيم\ ك$$

أي أن هناك نهاية صغرى للتكلفة الحدية عند ك = ٥. وقيمة تلك النهاية هي:

$$ت'(٥) = ٧٥ - ١٠(٥) + (٥)^{٢} = ٥٠ \text{ جنيه}$$

أي أن التكلفة الحدية تبلغ حدها الأدنى وهو ٥٠ جنيها عندما يكون عدد الوحدات المنتَجة ٥ وحدات شهرياً.

تطبيقات الإيراد: Revenue Applications

إن أي مؤسسة تجارية تهدف إلى تحقيق أكبر إيراد ممكن تماماً مثلما تهدف إلى الوصول بتكلفة إنتاجها إلى أدنى حد ممكن. حيث أن ذلك يمكِّن المؤسسة التجارية من تحقيق أكبر قدر من الأرباح نتيجة بيعها لمنتَجاتها.

٩- الحد الأقصى للإيراد: Maximum Revenue

مثال (٢٤):

إذا كانت دالة الطلب لاحدي السلع تأخذ الصيغة:

$$س = ١٥ هـ^{\frac{-ك}{٣}} \qquad صفر \le ك \le ٨$$

حيث: ك كمية الطلب بالوحدات، س سعر الوحدة من السلعة.

المطلوب:

حدِّد سعر السلعة س وكمية الإنتاج ك اللذيْن يحققان أكبر قدر ممكن من الإيراد.

الحـل:

حيث أن: الإيراد = كمية الطلب × سعر بيع الوحدة

$$= ك \times س = ك س = ١٥ ك هـ^{\frac{-ك}{٣}}$$

وهكذا نجد أن دالة الإيراد هي:

$$ر(ك) = ١٥ك هـ^{\frac{-ك}{٣}}$$

ولإيجاد الحد الأقصى للإيراد نجدد أولاً النقط الحرجة كما يلي:

$$ر'(ك) = ١٥ك هـ^{\frac{-ك}{٣}} \left(\frac{-١}{٣}\right) + ١٥هـ^{\frac{-ك}{٣}} (١) = هـ^{\frac{-ك}{٣}} (١٥ - ٥ك)$$

وبمساواة المشتقة الأولى بالصفر، ينتج أن:

$$هـ^{\frac{-ك}{٣}} (١٥ - ٥ك) = \text{صفر}$$

$$١٥ - ٥ك = \text{صفر} \quad \text{تعطي: } ك = ٣$$

$$هـ^{\frac{-ك}{٣}} = \text{صفر} \quad \text{تعطي : } ك = \infty$$

وحيث أن: $ك = \infty$ تقع خارج حدود المدى $\text{صفر} \leq ك \leq ٨$ فإننا نهمل هذه القيمة. وبذلك نجد أن هناك نقطة حرجة عند $ك = ٣$. ولتحديد طبيعة تلك النقطة.

$$ر''(ك) = هـ^{\frac{-ك}{٣}} (-٥) + (١٥ - ٥ك)\ هـ^{\frac{-ك}{٣}} \left(\frac{-١}{٣}\right)$$

$$= -٥هـ^{\frac{-ك}{٣}} - ٥هـ^{\frac{-ك}{٣}} + \frac{٥}{٣}ك هـ^{\frac{-ك}{٣}} = \frac{٥}{٣}ك هـ^{\frac{-ك}{٣}} - ١٠هـ^{\frac{-ك}{٣}}$$

$$= هـ^{\frac{-ك}{٣}} \left(\frac{٥}{٣}ك - ١٠\right)$$

ثم نوجد قيمة $ر''(ك)$ عند $ك = ٣$ كما يلي:

$$ر''(٣) = هـ^{\frac{-٣}{٣}} \left(\frac{٥}{٣}(٣) - ١٠\right) = -٥هـ^{-١} < \text{صفر} \qquad \text{نهاية عظمى}$$

وهكذا نصل إلى أن هناك نهاية عظمى لدالة الإيراد عند مستوى الإنتاج $ك = ٣$. أي أن الإيراد تكون أكبر ما يمكن عند مستوى الإنتاج $ك = ٣$، أي عندما يكون سعر الوحدة:

$$س = ١٥هـ^{\frac{-٣}{٣}} = ١٥هـ^{-١}$$

$$= ٥{,}٥٢ \qquad \text{لاحظ أن: } هـ = ٢{,}٧١٨٢٨$$

ولتحديد أقصى إيراد ممكن عند مستوى الإنتاج والسعر المشار إليهما نعوض عن قيمة ك في دالة الإيراد كما يلي:

$ر(٣) = ١٥(٣) هـ^{\frac{-٣}{٣}} = ٤٥ هـ^{-١} = ١٦,٥٥$

وتكون النتيجة النهائية هي: يتحقق أقصى إيراد ممكن ومقداره ١٦,٥٥ عند: سعر الوحدة = ٥,٥٢ وكمية الإنتاج = ٣ وحدات.

مثال (٢٥):

إذا باع صاحب مكتبة للأدوات المدرسية نوعاً معيناً من الأقلام بسعر ٥ جنيهات للقلم الواحد فإنه يستطيع بيع ٢٠٠ قلم في اليوم الواحد. وأما إذا باع القلم الواحد بسعر ٧ جنيهات فإن مبيعاته تنخفض إلى ١٠٠ قلم في اليوم الواحد.

المطلوب:

(١) التعبير عن كمية الطلب (المبيعات) كدالة في سعر القلم الواحد، أي إيجاد دالة الطلب، بافتراض أنها خطية.

(٢) حدد السعر الذي يجب أن يبيع به صاحب المكتبة القلم الواحد حتى يحقق أقصى إيراد ممكن. ثم أوجد قيمة هذا الإيراد.

(٣) ما هي قيمة إيراد صاحب المكتبة إذا باع ٢٠٠ قلم في أحد الأيام.

الحـل:

(١) دالة الطلب الخطية تمر بالنقطتيْن (٥ ، ٢٠٠) و (٧ ، ١٠٠) حيث يرمز الإحداثي السيني للنقطة إلى سعر القلم الواحد س بينما يرمز الإحداثي الصادي لها إلى كمية المبيعات (الطلب) ك.

وبإيجاد دالة الطلب باستخدام ميل الدالة ونقطة عليها نجد أن:

$$\text{الميل} = \frac{ك_٢ - ك_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١٠٠ - ٢٠٠}{٧ - ٥} = -٥٠$$

هذا ودالة الطلب الخطية يمكن تحديدها باستخدام الميل والنقطة الأولى على الصورة:

$$م = \frac{٢٠٠ - ك}{٥ - س}$$

$$-٥٠ = \frac{٢٠٠ - ك}{٥ - س} \quad ، \quad ٢٠٠ - ك = -٢٥٠ + ٥٠ س$$

أي أن دالة الطلب الخطية هي:

$$ك(س) = ٤٥٠ - ٥٠ س$$

حيث: ك كمية الطلب (المبيعات) ، س سعر القلم الواحد بالجنيه.

حيث أن: الإيراد = سعر القلم الواحد × عدد الأقلام المُباعة

$= س \times ك = س ك = س (٤٥٠ - ٥٠ س)$
$= ٤٥٠ س - ٥٠ س^{٢}$

وهكذا نجد أن دالة الإيراد هي:

$ر(س) = ٤٥٠ س - ٥٠ س^{٢}$

ولإيجاد الحد الأقصى لإيراد صاحب المكتبة:

$ر'(س) = ٤٥٠ - ١٠٠ س$

$ر'(س) =$ صفر تعطى: $٤٥٠ - ١٠٠ س =$ صفر ، $س = ٤,٥$

وهذا يعنى أن هناك نقطة حرجة لدالة الإيراد عند $س = ٤,٥$، ولكي نحدد طبيعة هذه النقطة:

$ر''(س) = -١٠٠ <$ صفر نهاية عظمى

حيث يشير ذلك إلى أن هناك نهاية عظمى لدالة الإيراد عند $س = ٤,٥$. وبعبارة أخرى، فإن إيراد صاحب المكتبة تصل إلى أقصى حد لها إذا باع القلم الواحد بسعر ٤,٥ جنيه.

وعندئذ يبلغ إيراد صاحب المكتبة إلى:

$ر(٤,٥) = ٤٥٠(٤,٥) - ٥٠(٤,٥) = ١٠١٢,٥٠$ جنيه

(٣) إذا بـاع صاحـب المكتبة ٢٠٠ قلم، أي: $ك = ٢٠٠$، في أحد الأيام، فإن ذلك يعنى أنه باع القلم الواحد بسعر يتحدد كما يلي:

$ك(س) = ٤٥٠ - ٥٠ س = ٢٠٠$

أي أن: $٤٥٠ - ٥٠ س = ٢٠٠$

$٥٠ س = ٢٥٠$ ، $س = ٥$

وهكذا نجد أن صاحب المكتبة إذا باع ٢٠٠ قلم في أحد الأيام فإن ذلك يعنى أنه باع القلم الواحد بسعر ٥ جنيهات. وعندئذ تكون إيراده كما يلي:

$ر(٥) = ٤٥٠(٥) - ٥٠(٥)^{٢} = ١٠٠٠$ جنيه

مثال (٢٦):

يستطيع صاحب مصنع أن يبيع منتَجه بسعر ١٠ جنيهات للوحدة الواحدة وذلك إذا قلَّ حجم طلب الشراء عن ٢٠٠ وحدة. ويمنح صاحب المصنع تخفيضاً في السعر مقداره قرشان لكل وحدة لكي يزيد حجم طلب الشراء عن ٢٠٠ وحدة.

احسب حجم طلب الشراء الذي يحقق لصاحب المصنع أكبر إيراد ممكن، ثم أوجد مقدار هذا الإيراد.

الحـل:

دعنا نفترض بأن حجم طلب الشراء هو: $ك = ٢٠٠ + ن$، حيث تمثل $ن$ عدد الوحدات الزيادة عن ٢٠٠ وحدة. وهنا تكون تكلفة كل وحدة هي: $(١٠ - ٠,٠٢ ن)$.

وهكذا نجد أن إيراد صاحب المصنع يتمثل في:

$$ر(ن) = (٢٠٠ + ن)(١٠ - ٠,٠٢ ن)$$

$$= ٢٠٠٠ + ٦ ن - ٠,٠٢ ن^{٢}$$

أي أن دالة الإيراد لصاحب المصنع (كدالة في حجم طلب الشراء) هي:

$$ر(ن) = ٢٠٠٠ + ٦ ن - ٠,٠٢ ن^{٢}$$

ولتحديد حجم طلب الشراء الذي يحقق أقصى إيراد ممكن لصاحب المصنع نجد أن:

$$ر'(ن) = ٦ - ٠,٠٤ ن$$

$ر'(ن)$ = صفر تعطي:

$٠,٠٤ ن = ٦$ ، أي أن: $ن = ١٥٠$

وبذلك نجد أن هناك نقطة حرجة لدالة الإيراد عند $ن = ١٥٠$.

ولتحديد طبيعة النقطة الحرجة:

$ر''(ن) = -٠,٠٤ < $ صفر نهاية عظمى

وحيث أن: حجم طلب الشراء $= ٢٠٠ + ن$

فإن هذا يعنى أن إيراد صاحب المصنع يكون أكبر ما يمكن عندما يكون حجم طلب الشراء مساويا ($٢٠٠ + ١٥٠ = ٣٥٠$) وحدة، وعند هذا المستوى لطلب الشراء فإن الإيراد هو:

$$ر(٣٥٠) = ٢٠٠٠ + ٦(٣٥٠) - ٠,٠٢(٣٥٠)^{٢}$$

$= ١٦٥٠$ جنيهاً

وهو أكبر إيراد يمكن أن يحققه صاحب المصنع في ظل الظروف المشار إليها.

١٠- الحد الأعلى للعائد الحكومي من ضريبة المبيعات:

Maximum Yield from Sales Tax

مثال (٢٧):

إذا كانت كمية المبيعات الشهرية ك من منتَج معين عندما يكون سعر الوحدة س يمكن تحديدها وفقا للدالة:

$ك = ١٠٠(٥ - س)$ دالة الطلب

وكانت الكمية التي يمكن للمورِّد أن يجعلها متاحةً عند السعر $س_{١}$ تمثلها العلاقة:

$ك = ٢٠٠(س_{١} - ١)$ دالة العرض

فإذا افترضنا أن هناك ضريبة مقدارها ض على كل وحدة.

المطلوب:

(١) حدد الكمية المباعة شهرياً إذا كان السوق في حالة توازن.

(٢) ما هو مقدار الضريبة الذي يجعل العائد الحكومي من فرض ضريبة المبيعات أكبر ما يمكن؟

الحـل:

(١) حيث أن السعر $س_١$ الذي يعرضه المورِّد هو عبارة عن السعر العادي للسلعة قبل فرض ضريبة المبيعات، فإننا نجد أن:

$$س_١ = س - ض$$

ويمكن إعادة صياغة دالة العرض كما يلي:

$$ك = ٢٠٠(س_١ - ١)$$

أي أن: $ك = ٢٠٠(س - ض - ١)$ دالة العرض

وحيث أن دالة الطلب هي:

$$ك = ١٠٠(٥ - س)$$

وبحل معادلتي الطلب والعرض في ك نحصل على:

من معادلة الطلب: $س = \frac{٥٠٠ - ك}{١٠٠}$

وفي حالة توازن السوق (كمية الطلب = كمية العرض) فإننا نعوض عن قيمة $س$ (بدلالة ك) في معادلة العرض، حيث نجد أن:

$$ك = ٢٠٠[\frac{٥٠٠ - ك}{١٠٠} - ض - ١] = ١٠٠٠ - ٢ك - ٢٠٠ض - ٢٠٠$$

$$٣ك = ٨٠٠ - ٢٠٠ض$$

$$ك = \frac{٨٠٠ - ٢٠٠ض}{٣} \quad \text{أي أن:} \quad ك = \frac{٢٠٠}{٣}(٤ - ض)$$

وهي تمثل كمية المبيعات الشهرية في حالة توازن السوق.

(٢) حيث أن:

العائد الحكومي من الضريبة = مقدار الضريبة على الوحدة × عدد الوحدات المُباعة

$$= ض × ك = ض ك$$

$$= ض [\frac{٢٠٠}{٣}(٤ - ض)] = \frac{٢٠٠}{٣}(٤ض - ض^٢)$$

وهكذا نجد أن دالة العائد الحكومي ع من ضريبة المبيعات هي:

$$ع(ض) = \frac{٢٠٠}{٣} (٤ض - ض^{٢})$$

ولإيجاد النهاية العظمى لهذه الدالة:

$$عَ(ض) = \frac{٨٠٠}{٣} - \frac{٤٠٠}{٣} ض$$

$$عَ(ض) = صفر \quad يعطي:$$

$$\frac{٤٠٠}{٣} ض = \frac{٨٠٠}{٣} \quad ، \quad ض = ٢$$

أي أن: ض = ٢ تمثل نقطة حرجة لدالة العائد الحكومي.

ولتحديد طبيعة هذه النقطة:

$$عً(ض) = \frac{-٤٠٠}{٣} < صفر \quad نهاية عظمى$$

وهكذا فإن العائد الحكومي من وراء فرض ضريبة على المبيعات يكون أكبر ما يمكن عند فرض ضريبة مقدارها ٢ على كل وحدة مُباعة. وعندئذ تكون قيمة هذا العائد كما يلي:

$$ع(٢) = \frac{٢٠٠}{٣} [٤(٢) - (٢)^{٢}] = \frac{٢٠٠}{٣} (٤) = ٢٦٦,٧$$

تطبيقات الربح: Profit Applications

أشرنا من قبل إلى أن الهدف الرئيسي لأي مؤسسة تجارية هو تحقيق أكبر قدر ممكن من الأرباح. ولا شك أن ذلك يتأتى من خلال الوصول بالإيراد إلى أقصى حد لها، أو تخفيض تكلفة الإنتاج إلى أدنى حد يمكن الوصول إليه أو بكليهما معا. وفيما يلي سوف نتناول عدداً من الحالات، التي تختلف في طبيعتها فيما بينها، والتي نرى في كل منها كيف يتحقق أقصى ربح ممكن.

١١- الحد الأعلى للأرباح: Maximum Profits

مثال (٢٨):

تستطيع مؤسسة صناعية أن تبيع أحد منتَجاتها بسعر ٢ جنيه للوحدة الواحدة. فإذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج ك وحدة من هذا المنتَج يتم تحديدها بالدالة:

$$ت = ١٠٠٠ + \frac{١}{٢}\left(\frac{ك}{٥٠}\right)^{٢} \text{ جنيه}$$

المطلوب:

(١) إيجاد دالة الربح الكلية إذا تم إنتاج وبيع ك وحدة.

(٢) ما هو عدد الوحدات التي يجب إنتاجها حتى تحقق المؤسسة أقصى ربح ممكن؟ وما هي قيمة هذا الربح؟

(٣) حدد مقدار الربح الذي تحصل عليه المؤسسة عند قيامها بإنتاج وبيع ٦٠٠٠ وحدة.

الحـل:

(١) الإيراد = سعر بيع الوحدة × عدد الوحدات المباعة

$$ر(ك) = ٢ \times ك = ٢ك$$

وحيث أن: الربح = الإيراد – التكلفة

فإننا نجد أن: $ع(ك) = ر(ك) - ت(ك)$

$$= ٢ك - \left[١٠٠٠ + \frac{١}{٢}\left(\frac{ك}{٥٠}\right)^{٢} \right]$$

أي أن دالة الربح تأخذ الصورة:

$$ع(ك) = ٢ك - ١٠٠٠ - \frac{ك^{٢}}{٥٠٠٠}$$

(٢) حيث أن: $ع'(ك) = ٢ - \frac{ك}{٢٥٠٠}$

$ع'(ك) =$ صفر تعطى: $\frac{ك}{٢٥٠٠} = ٢$ ، $ك = ٥٠٠٠$

أي أن هناك نقطة حرجة عند $ك = ٥٠٠٠$

$ع''(ك) = \frac{-١}{٢٥٠٠} <$ صفر نهاية عظمى

وهذا يشير إلى أن دالة الربح تبلغ نهايتها العظمى عند ك = ٥٠٠٠. أي أن الشركة تحقق أقصى ربح ممكن عندما يصل مستوى الإنتاج إلى ٥٠٠٠ وحدة. وقيمة هذا الربح تتحدد كما يلي:

$$ع(٥٠٠٠) = ٢(٥٠٠٠) - ١٠٠٠ - \frac{(٥٠٠٠)^{٢}}{٥٠٠٠}$$

$$= ٤٠٠٠ \text{ جنيه}$$

(٣) مقدار الربح الذي تحصل عليه المؤسسة عند قيامها بإنتاج وبيع ٦٠٠٠ وحدة هو:

$$ع(٦٠٠٠) = ٢(٦٠٠٠) - ١٠٠٠ - \frac{(٦٠٠٠)^{٢}}{٥٠٠٠}$$

$$= ٣٨٠٠ \text{ جنيه}$$

لاحظ أن قيمة الربح في هذه الحالة يقل عن الحد الأقصى للربح في (٢) بمقدار ٢٠٠ جنيه.

مثال (٢٩):

إذا كانت دالة الطلب على منتَج معين هي: س = ٥ – ٠,٠٠١ ك

حيث: ك كمية الطلب ، س سعر الوحدة.

وكانت دالة التكلفة لإنتاج ك وحدة تتمثل في: ت(ك) = ٢٨٠٠ + ك

ما هو مستوى الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح؟ وما مقدار هذا الربح؟

الحـل:

الإيراد = الكمية المُباعة × سعر بيع الوحدة

= ك × س = ك س = ك(٥ – ٠,٠٠١ ك)

أي أن دالة الإيراد هي:

ر(ك) = ٥ك – ٠,٠٠١ ك ٢

وحيث أن: الربح = الإيراد – التكلفة

فـــإن: ع(ك) = ر(ك) – ت(ك)

= ٥ك – ٠,٠٠١ ك ٢ – (٢٨٠٠ + ك)

أي أن: ع(ك) = ٤ك – ٠,٠٠١ ك ٢ – ٢٨٠٠

ولإيجاد النهاية العظمى لهذه الدالة نتبع ما يلي:

ع´(ك) = ٤ – ٠,٠٠٢ ك

ع´(ك) = صفر تعطى: ٠,٠٠٢ك = ٤ ، ك = ٢٠٠٠

وهذه تمثل نقطة حرجة، ولبيان طبيعتها:

ع´´(ك) = - ٠,٠٠٢ < صفر نهاية عظمى

أي أن الأرباح تكون أكبر ما يمكن عندما يصل مستوى الإنتاج إلى ٢٠٠٠ وحدة. وعند هذا المستوى، تتحدد الأرباح كما يلي:

ع(٢٠٠٠) = ٤(٢٠٠٠) – ٠,٠٠١(٢٠٠٠)٢ – ٢٨٠٠ = ١٢٠٠ جنيه

وهكذا فإن الأرباح تصل لأعلى حد لها وهو ١٢٠٠ جنيه وذلك عندما يكون مستوى الإنتاج ٢٠٠٠ وحدة.

١٢- الإعلان والأرباح: Advertising and Profits

مثال (٣٠):

تحقق إحدى الشركات أرباحاً من بيع منتَجها بواقع ٥ جنيهات للوحدة الواحدة. ولو أنفقت تلك الشركة أ دولار أسبوعياً على الإعلان عن منتَجها فإن عدد الوحدات التي يمكن أن تبيعها حينئذ يُحدَّد بالدالة: ك = ٥٠٠٠ (١ – هـ^(-٠,٠٠٢أ))

احسب مقدار المُنفق أسبوعياً على الإعلان والذي يصل بالأرباح الصافية التي تحققه الشركة إلى أقصى حد ممكن. ثم احسب مقدار تلك الأرباح.

الحـل:

الأرباح الإجمالية التي تحققها الشركة من وراء بيع ك وحدة هو:

ع = ربح الوحدة × عدد الوحدات المُباعة

= ٥×ك = ٥ك = ٥ × ٥٠٠٠ (١− هـ$^{-٠,٠٠٢أ}$)

أي أن دالة الربح الاجمالي تصبح دالة في أ حيث:

ع(أ) = ٢٥٠٠٠(١− هـ$^{-٠,٠٠٢أ}$)

وحيث أن: صافي الربح (ع$_{ص}$) = الأرباح الإجمالية − تكلفة الإعلان ،

فإن دالة صافي الربح ع$_{ص}$ تأخذ الصورة:

ع$_{ص}$(أ) = ع(أ) − تكلفة الإعلان

أي أن دالة صافي الربح هي:

ع$_{ص}$(أ) = ٢٥٠٠٠(١− هـ$^{-٠,٠٠٢أ}$) − أ

ولإيجاد النهاية العظمى لدالة الربح الصافي نتبع ما يلي:

ع$'_{ص}$(أ) = −٥٠ هـ$^{-٠,٠٠٢أ}$ − ١ ، وبمساواة ع$'_{ص}$(أ) بالصفر نحصل على:

٥٠ هـ$^{-٠,٠٠٢أ}$ = ١ ، هـ$^{-٠,٠٠٢أ}$ = ٠,٠٢

وبأخذ لوغاريتم الطرفيْن للأساس هـ تحصل على:

-٠,٠٠٢ أ = -٣,٩١٢ أي أن: أ = ١٩٥٦

وهذا يشير إلى أن دالة صافي الربح لها نقطة حرجة عند أ = ١٩٥٦ ولتحديد طبيعة تلك النقطة:

ع$''_{ص}$(أ) = ٥٠ هـ$^{-٠,٠٠٢أ}$ (− ٠,٠٠٢)

= -٠,١ هـ$^{-٠,٠٠٢أ}$ < صفر لجميع قيم أ > صفر

وبذلك نجد أن دالة صافي الربح تصل إلى نهايتها العظمى عند أ = ١٩٥٦ ويمكن تحديد مقدار النهاية العظمى كما يلي:

ع$_{ص}$(١٩٥٦) = ٢٥٠٠٠(١ - هـ$^{-٠,٠٠٢(١٩٥٦)}$) − ١٩٥٦

= ٢٥٠٠٠(١ − ٠,٠٢) − ١٩٥٦ = ٢٢٥٤٤ جنيهاً

وهكذا فإن الشركة تحقق أكبر قدر من صافي الربح وهو ٢٢٥٤٤ عندما يبلغ المُنفَق على الإعلان ١٩٥٦ جنيه أسبوعياً.

١٣- الحد الأقصى للأرباح والدخل الضريبي:
Maximum Profits and Tax Revenue

مثال (٣١):

إذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة في إحدى الشركات هي: س = ١٢ – ٤ك

حيث: ك كمية الطلب ، س سعر الوحدة.

وكانت دالة التكلفة لإنتاج ك وحدة هي: ت(ك) = ٨ك + ك ^{٢}

المطلوب:

(١) حدد مستوى الإنتاج الذي يحقق للشركة أقصى ربح ممكن. ثم أوجد مقدار هذا الربح.

(٢) إذا تم فرض ضريبة من قِبل الحكومة مقدارها ض على كل وحدة، حيث تضيف الشركة مقدار هذه الضريبة على تكلفة الوحدة.

ما هو مستوى الإنتاج الذي تحقق الشركة عنده أقصى أرباح ممكنة؟

(٣) مستخدماً نتائجك في (٢)، أوجد الحد الأقصى للأرباح في حالة:

أ- فرض ضريبة مقدارها ٢ على كل وحدة.

ب- منح إعانة حكومية مقدارها ٢ على كل وحدة.

(٤) حدد مقدار الضريبة ض والذي يجب فرضه على كل وحدة حتى يتحقق أكبر دخل ضريبي ممكن للحكومة. ثم احسب مقدار هذا الدخل.

الحـل:

(١) حيث أن: الإيراد = الكمية × السعر = ك×س

= ك(١٢- ٤ك) = ١٢ك – ٤ك ^{٢}

أي أن دالة الإيراد هي:

ر(ك) = ١٢ك – ٤ك ^{٢}

وحيث أن: الربح = الإيراد – التكلفة

فإن دالة الربح هي: ع(ك) = ر(ك) – ت(ك)

= ١٢ك – ٤ك ^{٢} – (٨ك + ك ^{٢})

أي أن: ع(ك) = ٤ك – ٥ك ^{٢}

ولتحقيق أقصى ربح ممكن:

ع´(ك) = ٤ – ١٠ك وبمساواة ع´(ك) بالصفر نخصل على:

١٠ك = ٤ ، ك = ٠,٤

ع´´(ك) = -١٠ < صفر نهاية عظمى

أي أن الشركة تحقق أكبر ربح ممكن عندما يصل مستوى الإنتاج إلى ك = ٠,٤ وعندها يكون الحد الأقصى للأرباح هو:

$$ع(٠,٤) = ١٢(٠,٤) - ٤(٠,٤)^{٢} = ٤,١٦$$

ويجب أن يلاحَظ في هذا المثال أن الوحدات المقاسة بها كمية الإنتاج والإيراد والأرباح قد تكون بالمئات أو بآلاف الجنيهات أو بأكثر من ذلك (مئات الألوف، الملايين... إلخ).

(٢) بعد فرض ضريبة مقدارها ض على كل وحدة فإن دالة التكلفة الجديدة $ت_{ج}$ تصبح:

$$ت_{ج} = ٨ك + ك^{٢} + ضك$$

وحينئذ فإن دالة الربح تصبح:

$$ع(ك) = ر - ت_{ج} = ١٢ك - ٤ك^{٢} - (٨ك + ك^{٢} + ضك)$$

$$= ٤ك + ٥ك^{٢} - ضك$$

$$ع(ك) = (٤ - ض) ك - ٥ك^{٢}$$

ولإيجاد الحد الأقصى للأرباح:

$$ع'(ك) = ٤ - ض - ١٠ك$$

$$ع'(ك) = \text{صفر} \quad \text{تعطي} \quad ٤ - ض - ١٠ك = \text{صفر} \quad ، \quad ك = \frac{٤ - ض}{١٠}$$

$$ع''(ك) = -١٠ < \text{صفر} \quad \text{نهاية عظمى}$$

وهكذا نجد أن الأرباح تصل إلى حدها الأقصى عند $ك = \frac{٤ - ض}{١٠}$ وتبلغ الأرباح حينئذ:

$$ع\left(\frac{٤ - ض}{١٠}\right) = (٤ - ض)\left(\frac{٤ - ض}{١٠}\right) - ٥\left(\frac{٤ - ض}{١٠}\right)^{٢}$$

$$= \frac{(٤ - ض)^{٢}}{١٠} - ٥\left(\frac{٤ - ض}{١٠}\right)^{٢} = \frac{(٤ - ض)^{٢}}{١٠} [١ - ٥ (\frac{١}{١٠})]$$

أي أن: $\text{أقصى ربح} = \frac{(٤ - ض)^{٢}}{٢٠}$

وهنا يُلاحَظ أن أي قيمة موجبة للضريبة ض من شأنه أن يقلل من قيمة الأرباح، وأن أي قيمة سالبة لـ ض، أي منح إعانة حكومية، يؤدى إلى زيادة الأرباح.

(٣) (أ) في حالة فرض ضريبة مقدارها ٢ على كل وحدة:

$$\text{الحد الأقصى للربح} = \frac{(٤ - ض)^{٢}}{٢٠} = \frac{(٤ - ٢)^{٢}}{٢٠} = ٠,٢$$

(ب) منح الإعانة الحكومية تعنى حسابيا ضريبة سالبة، أي أن منح إعانة مقدارها ٢ تعنى أن: ض = -٢، لذلك:

$$\text{الحد الأقصى للربح} = \frac{\left[٤ - (-٢)\right]^{٢}}{٢٠} = \frac{٣٦}{٢٠} = ١,٨$$

(جـ) إذا رمزنا إلى الإيراد الضريبية بالرمز $ر_{ض}$ ، فإننا نجد أن:

$$ر_{ض} = ض\ ك = ض \left(\frac{٤ - ض}{١٠}\right)$$

أي أن دالة الإيراد الضريبية هي:

$$ر_{ض} = ٠,٤ض - ٠,١ض^{٢}$$

$$ر'_{ض} = \text{صفر} \quad \text{تعطى:} \quad ٠,٢ض = ٠,٤ \quad ، \quad ض = ٢$$

$$ر''_{ض} = -٠,٢ < \text{صفر} \quad \text{نهاية عظمى}$$

$$ر_{ض}(٢) = ٠,٤(٢) - ٠,١(٢)^{٢} = ٠,٤$$

أي أن أقصى إيراد ضريبية يمكن تحقيقها هو ٠,٤ ويكون ذلك عندما يبلغ المستوى الضريبي ٢ على كل وحدة.

١٤- المدخل الحدي لتعظيم الربح:

Marginal Approach to Profit Maximization

تناولنا من قبل شرح كيفية تحديد الحد الأقصى للربح وذلك باستخدام المشتقة التفاضلية الثانية لدالة الربح الكلى. وهنا سوف نقدم أسلوباً آخر يعتمد على التحليل الحدي لكل من التكلفة والإيراد.

وحيث أنه بافتراض أن المؤسسة التجارية تقوم بإنتاج عدد معين من الوحدات كل سنة، فإن التحليل الحدي يقدم لنا تأثير كل وحدة إضافية منتَجة على الأرباح.

هذا وطالما أن الإيراد الإضافي نتيجة إنتاج وبيع وحدة إضافية من المنتَج يزيد عن التكلفة الإضافية لهذه الوحدة، فإن ذلك يعنى أن هناك ربحا صافيا من إنتاج وبيع تلك الوحدة، وبالتالي تزداد الأرباح الكلية. وإذا كان الإيراد الإضافي من بيع الوحدة التالية يقل عن تكلفة إنتاج وبيع

هذه الوحدة سوف يكون هناك خسارة صافية من إنتاج وبيع تلك الوحدة، مما ينعكس بدوره على انخفاض الأرباح الكلية.
وحيث أن تعظيم الربح يمثل هدفاً مهماً لأي مؤسسة، فإنه يمكن اتباع ما يلي بشأن اتخاذ قرار بإنتاج المزيد من الوحدات:

القاعدة (١):

إذا كان:

(أ) الربح الحدي > التكلفة الحدية يتـم إنتاج وحدة إضافية

(ب) الربح الحدي < التكلفة الحدية لا يتم إنتاج وحدة إضافية

وفي حالات كثيرة للإنتاج، نجد أن الإيراد الحدي يزيد عن التكلفة الحدية عند مستويات الإنتاج المنخفضة. وبزيادة الكمية المنتَجة عند تلك المستويات فإن المقدار الذي يزداد به الإيراد الحدي على التكلفة الحدية يصبح أصغر فأصغر. وفي النهاية، يصل مستوى الإنتاج إلى الحالة التي يكون فيها الإيراد الحدي مساوياً للتكلفة الحدية. وبعد ذلك نجد أن: الإيراد الحدي أقل من التكلفة الحدية، وأن الأرباح الكلية تبدأ في التناقص بزيادة مستوى الإنتاج. وهكذا، فإنه إذا أمكن تحديد النقطة التي يكون عندها الإيراد الحدي يساوي التكلفة الحدية عند آخر وحدة تم إنتاجها وبيعها، يتحقق عندئذ الحد الأقصى للأرباح وذلك وفقا للقاعدة التالية:

القاعدة (٢):

مستوى الإنتاج الذي يتحقق عنده: الإيراد الحدي = التكلفة الحدية

أي أن: **رَ(ك) = تَ(ك) تصل عنده الأرباح الكلية إلى حدها الأقصى.**

وباستخدام المشتقات التفاضلية يمكننا القول إن مستوى الإنتاج ك الذي تتساوى عنده المشتقة التفاضلية الأولى لدالة الإيراد الكلى مع المشتقة التفاضلية الأولى لدالة التكلفة الكلية يحقق الحد الأقصى للأرباح الكلية. ويمكن توضيح ذلك بيانيا كما في الشكل (٧ - ١٢).
ومن باب ترسيخ الفكرة في ذهن القارئ، دعنا نتناول الأمثلة التالية:

مثال (٣٢):

باستخدام التحليل الحدي، أجب على المطلوب (٢) في مثال (٢٨).

الحــل:

من المثال (٢٨): حيث أن: ر(ك) = ٢ ك ، ت(ك) = ١٠٠٠ + $\frac{١}{٢}\left(\frac{ك}{٥٠}\right)^{٢}$

وبإيجاد المشتقة التفاضلية الأولى لكل من هاتيْن الدالتيْن، ينتج أن:

$$\text{ر}'(\text{ك}) = ٢ \quad ، \quad \text{ت}'(\text{ك}) = \frac{\text{ك}}{٢٥٠٠}$$

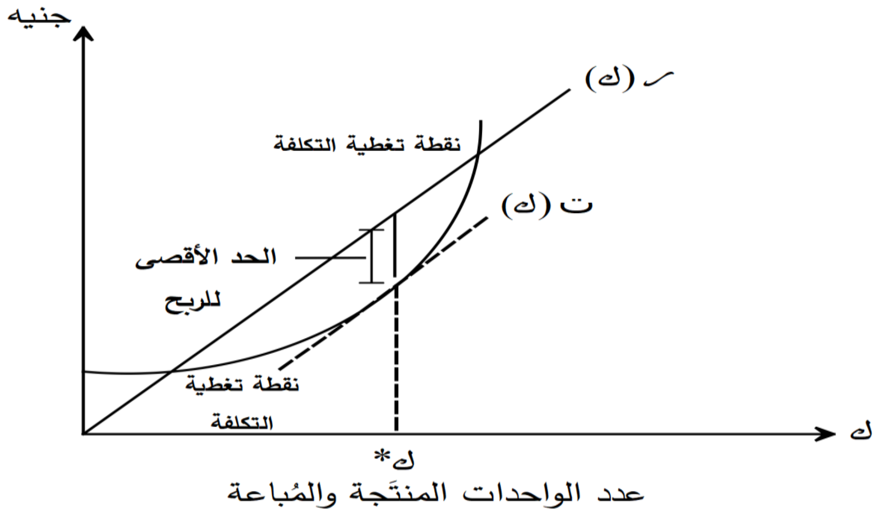
ولتحقيق الحد الأقصى للأرباح، يجب أن: $\text{ر}'(\text{ك}) = \text{ت}'(\text{ك})$

أي أن: $\frac{\text{ك}}{٢٥٠٠} = ٢$ ومنها نحصل على: $\text{ك} = ٥٠٠٠$ وحدة.

وفي مثال (٢٨) وجدنا أن: $\text{ع}(\text{ك}) = \text{ع}(٥٠٠٠) = ٤٠٠٠$ جنيه

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها باستخدام المشتقة التفاضلية الثانية في مثال (٢٨).

ومما لا شك فيه أن أسلوب التحليل الحدي أسهل في تطبيقه من طريقة المشتقة الثانية.



الشكل (٧ – ١٢)
التحليل الحدي لتعظيم الربح

مثال (٣٣):

باستخدام بيانات المثال (٢٩)، حدد مستوى الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح، مستخدماً في ذلك أسلوب التحليل الحدي.

الحـل:

في المثال (٢٩)، توصلنا إلى:

$$\text{ر}(\text{ك}) = ٥\text{ك} - ٠{,}٠٠١\text{ك}^{٢} \quad ، \quad \text{ت}(\text{ك}) = ٢٨٠٠ + \text{ك}$$

وحيث أن:

$$\text{ر}'(\text{ك}) = ٥ - ٠{,}٠٠٢\text{ك} \quad ، \quad \text{ت}'(\text{ك}) = ١$$

فإنه لتحقيق أقصى ربح ممكن، يجب أن: $\text{ر}'(\text{ك}) = \text{ت}'(\text{ك})$

أي أن: ٥ – ٠,٠٠٢ك = ١

ومن هذه المعادلة نحصل على: ك = ٢٠٠٠ وحدة

أي أن كمية الإنتاج التي تحقق أقصى ربح ممكن هي ٢٠٠٠ وحدة. وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها في مثال (٢٩).

تطبيقات متنوعة: Miscellaneous Applications

١٥- التخصيص الأمثل للإنتاج: Optimal Allocation of Production

مثال (٣٤):

يستطيع صاحب مصنع للأحذية أن ينتج أحذية للرجال وأحذية للنساء. فإذا قام صاحب المصنع بصناعة س ألف و ص ألف من أحذية الرجال وأحذية النساء على الترتيب أسبوعياً، فإن س ، ص تربطهما العلاقة الإنتاجية التالية: $٢س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$

فإذا كان ربح صاحب المصنع هو ١٠ جنيهات لكل زوج حذاء رجالي و٨ جنيهات لكل زوج حذاء نسائي، حدد عدد الأزواج التي ينتجها من كل من نوعي الأحذية حتى يحقق أقصى ربح أسبوعي ممكن.

الحـل:

$$\text{الأرباح} = ١٠س + ٨ص$$

وحيث أن: $٢س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ فإن: $ص = \sqrt{٢٥ - ٢س^{٢}}$

وهكذا يمكن التعبير عن الأرباح كدالة في عدد أزواج الأحذية كما يلي:

$$\text{الأرباح} = ١٠س + ٨\sqrt{٢٥ - ٢س^{٢}}$$

أي أن دالة الربح هي:

$$ع(ك) = ١٠س + ٨\sqrt{٢٥ - ٢س^{٢}}$$

حيث س عدد أزواج الأحذية.

ولإيجاد الحد الأقصى لهذه الدالة:

$$ع'(ك) = ١٠ + ٨\left(\frac{١}{٢}\right)\left(٢٥ - ٢س^{٢}\right)^{-٠,٥}(-٤س)$$

$$= ١٠ - ١٦س\left(٢٥ - ٢س^{٢}\right)^{-٠,٥} = ١٠ - \frac{١٦س}{\sqrt{٢٥ - ٢س^{٢}}}$$

$$ع'(س) = \text{صفر} \quad \text{يؤدى إلى:} \quad \frac{١٦س}{\sqrt{٢٥ - ٢س^{٢}}} = ١٠$$

بقسمة طرف المعادلة على ٢ نحصل على:

$$\frac{٨س}{\sqrt{٢٥ - ٢س^{٢}}} = ٥$$

وبتربيع الطرفيْن ينتج أن: $\frac{٦٤س^{٢}}{٢٥ - ٢س^{٢}} = ٢٥$

$$٦٢٥ - ٥٠س^{٢} = ٦٤س^{٢}$$

$$١١٤س^{٢} = ٦٢٥ \quad ، \quad س^{٢} = ٥,٤٨$$

أي أن: $س = ٢,٣٤١$

وبالتعويض عن قيمة س في المعادلة $٢س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ نحصل على:

$$٢(٢,٣٤)^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$$

ومنها ينتج أن:

$$ص^{٢} = ١٤,٠٤٩ \quad ، \quad ص = ٣,٧٤٨$$

وهكذا نجد أنه على صاحب مصنع الأحذية أن ينتج ٢,٣٤١ ألف (أي ٢٣٤١) زوجاً من أحذية الرجال و٣,٧٤٨ ألف (أي ٣٧٤٨) من أحذية النساء حتى يحقق أقصى ربح أسبوعي ممكن.

١٦- إحلال المعدات: Equipment Replacement

كثيرا ما تواجه المؤسسات التجارية عملية اتخاذ قرار بشأن الوقت الأمثل لإحلال إحدى المعدات التي لديها بمعدات أخرى. وهناك نوعان من التكلفة لهذه المعدات، النوع الأول هو تكلفة رأس المال Capital Cost وتكلفة التشغيل Operating Cost. وأما تكلفة رأس المال فهي تكلفة الشراء مطروحاً منها القيمة المستردَّة من بيع المعدة – كخردة – في نهاية عمرها الإنتاجي Salvage Value. بمعنى أنه لو كانت لدينا آلة تكلفت في شرائها ١٠٠٠٠ جنيه وتم بيعها فيما بعد بمبلغ ٦٠٠٠ جنيه، فإن تكلفة رأس المال هي ٤٠٠٠ جنيه. وفيما يتعلق بتكلفة التشغيل، فهي تشمل تكاليف الملكية والصيانة. وعلى سبيل المثال، في حالة سيارة، نجد أن الوقود والتأمين والإصلاح المتعلقة بملكية وتشغيل السيارة تدخل ضمن تكلفة التشغيل.

وتأخذ كثير من المؤسسات في الاعتبار التكلفة المتوسطة للتشغيل وتكلفة رأس المال المتوسطة عند اتخاذ قرار بشأن إحلال المعدات. وهذان النوعان من التكلفة تربطهما علاقة عكسية، بمعنى أن زيادة إحداهما تؤدى إلى نقصان الأخرى، والعكس صحيح. وتكلفة رأس

المال المتوسطة تتجه للانخفاض عبر مرور السنوات. فمثلا، بالنسبة لسيارة جديدة، إذا انخفض سعرها من ٥٠٠٠٠ إلى ٤٥٠٠٠ جنيه خلال السنة الأولى. فإن ذلك معناه أن تكلفة رأس المال المتوسطة لهذه السنة هو ٥٠٠٠ جنيه. ولو انخفض سعر هذه السيارة إلى ٣٥٠٠٠ بعد خمس سنوات، تجد أن تكلفة رأس المال المتوسطة هي:

$$\frac{٥٠٠٠٠-٣٥٠٠٠}{٥} = \frac{١٥٠٠٠}{٥} = ٣٠٠٠ \text{ جنيه لكل سنة}$$

وتتجه تكلفة التشغيل المتوسطة إلى الزيادة عبر الزمن وذلك لكون المعدة أقل كفاءةً وأكثر حاجةً إلى إجراء عمليات الصيانة والإصلاح. وعلى سبيل المثال، تتجه تكلفة التشغيل المتوسطة سنوياً لسيارة إلى الزيادة كلما زاد عمر السيارة.

مثال (٣٥):

تريد شركة لتأجير السيارات إلى تحديد المدة التي يجب أن تحتفظ فيها الشركة بسياراتها. فإذا تكلفت كل سيارة ٦٠٠٠٠ جنيه حتى تم تجهيزها تماما للعمل. وقد قدرت الشركة تكلفة رأس المال المتوسطة وتكلفة التشغيل المتوسطة كدالة في عدد الكيلومترات (س) التي تقطعها السيارة. فإذا كانت القيمة المستردَّة للسيارة بالجنيه تعبر عنها الدالة:

$$م(س) = ٥٧٠٠٠ - ٠,٣٥ س \quad \text{جنيه}$$

وهذا يعنى أن السيارة تقل في قيمتها بمقدار ٣٠٠٠ جنيه بمجرد البدء في استعمالها $\left(٦٠٠٠٠ - م(٠) = ٦٠٠٠٠ - ٥٧٠٠٠\right)$، وأن قيمتها تتناقص بمعدل ٠,٣٥ جنيه لكل كيلومتر تقطعه.

وأما تكلفة التشغيل المتوسطة معَّبراً عنها بالجنيه لكل كيلومتر فيمثلها الدالة:

$$ش(س) = ٠,٠٠٠٠٠٣ س + ٠,١٥ \quad \text{جنيه}$$

المطلوب:

(١) حدد عدد الكيلومترات التي يجب أن تقطعها السيارة قبل أن تُستبدل بأخرى، وذلك إذا كان هدف الشركة هو تحقيق حد أدنى لمجموع تكلفة رأس المال المتوسطة وتكلفة التشغيل المتوسطة.

(٢) احسب تكاليف رأس المال والتشغيل.

الحـل:

(١) تكلفة رأس المال المتوسطة لكل كيلومتر تساوى تكلفة الشراء مطروحاً منها القيمة المستردَّة، كل ذلك مقسوم على عدد الكيلومترات التي قطعتها السيارة. أي أن:

$$\text{ت}(\text{س}) = \frac{٦٠٠٠٠ - (٥٧٠٠٠ - ٠,٣٥\text{س})}{\text{س}}$$

$$= \frac{٣٠٠٠ + ٠,٣٥\text{س}}{\text{س}} = \frac{٣٠٠٠}{\text{س}} + ٠,٣٥$$

مجموع تكلفة رأس المال المتوسطة وتكلفة التشغيل المتوسطة لكل كيلومتر هي:

$$\text{د}(\text{س}) = \text{ت}(\text{س}) + \text{ش}(\text{س})$$

$$= \frac{٣٠٠٠}{\text{س}} + ٠,٣٥ + ٠,٠٠٠٠٠٠٣\text{س} + ٠,١٥$$

$$= ٠,٠٠٠٠٠٠٣\text{س} + \frac{٣٠٠٠}{\text{س}} + ٠,٥$$

ولتحديد قيمة س التي تجعل $\text{د}(\text{س})$ نهاية صغرى:

$\text{د}'(\text{س}) = ٠,٠٠٠٠٠٠٣ - \frac{٣٠٠٠}{\text{س}^{٢}}$ وبالتساوي مع الصفر تحصل على:

$$\frac{٣٠٠٠}{\text{س}^{٢}} = ٠,٠٠٠٠٠٠٣$$

ومنها ينتج أن: $\text{س} = \pm ١٠٠٠٠٠$

وحيث أن القيمة السالبة للمسافة س التي سارتها السيارة لا معنى لها، فإننا نأخذ في الاعتبار فقط القيمة الموجبة لـ س. أي أن:

$$\text{س} = ١٠٠٠٠٠$$

$\text{د}''(\text{س}) = \frac{٦٠٠٠}{\text{س}^{٣}} >$ صفر   لجميع قيم س > صفر

أي أن للدالة $\text{د}(\text{س})$ نهاية صغرى عند $\text{س} = ١٠٠٠٠٠$. ولتحديد قيمة هذه النهاية:

$$\text{د}(١٠٠٠٠٠) = ٠,٠٠٠٠٠٠٣(١٠٠٠٠٠) + \frac{٣٠٠٠}{١٠٠٠٠٠} + ٠,٥ = ٠,٥٦$$

وهذا يعنى أن تكلفة رأس المال والتشغيل المتوسطة تبلغ حدها الأدنى وهو ٠,٥٦ جنيه لكل كيلومتر عندما تكون السيارة قد سارت ١٠٠٠٠٠ كيلومتر. وبعبارة أخرى فإن الوقت الأمثل لإحلال السيارة بأخرى هو مجرد إتمامها قطع مسافة ١٠٠٠٠٠ كيلومتر، وعند ذلك سوف تبلغ تكلفة رأس المال والتشغيل ٠,٥٦ جنيه لكل كيلومتر قطعته السيارة.

(٢) تكلفة رأس المال والتشغيل الكلية عند هذه النقطة الزمنية تساوى:

٠,٥٦(١٠٠٠٠٠) = ٥٦٠٠٠ جنيه.

١٧- الوقت الأمثل للبيع: Optimal Selling Time

مثال (٣٦):

لو قامت شركة ببيع منتَجاتها بعد ن شهر فإنها تحصل علــى أرباح مقدارها $\text{ع}(\text{ن}) = ٠,٢\ \text{هـ}^{٠,٠٦\sqrt{\text{ن}}}$ جنيه لكل وحدة مُباعة من هـذا المنتَج.

فإذا كانت القيمة الحالية لتلك الأرباح على أساس معدل خصم ١٪ في الشهر هي $\text{ع}(\text{ن})\ \text{هـ}^{-٠,٠١\,\text{ن}}$.

بعد كم شهر يجب أن تبيع الشركة منتَجها حتى تحقق أقصى قيمة حالية لربح الوحدة الواحدة.

الحــل:

القيمة الحالية للأرباح $(\text{ع}) = \text{ع}(\text{ن})\ \text{هـ}^{-٠,٠١\,\text{ن}}$

$$= ٠,٢\ \text{هـ}^{٠,٠٦\sqrt{\text{ن}}} .\ \text{هـ}^{-٠,٠١\,\text{ن}}$$

أي أن: $\text{ع}(\text{ن}) = ٠,٢\ \text{هـ}^{٠,٠٦\sqrt{\text{ن}}-٠,٠١\,\text{ن}}$

ولجعل القيمة الحالية للأرباح أكبر ما يمكن:

$$\text{ع}'(\text{ن}) = ٠,٢\ \text{هـ}^{٠,٠٦\sqrt{\text{ن}}-٠,٠١\,\text{ن}} .\left(\frac{٠,٠٣}{\sqrt{\text{ن}}} - ٠,٠١\right)$$

$\text{ع}'(\text{ن})$ = صفر يؤدى إلى:

$$٠,٢\ \text{هـ}^{٠,٠٦\sqrt{\text{ن}}-٠,٠١\,\text{ن}} .\left(\frac{٠,٠٣}{\sqrt{\text{ن}}} - ٠,٠١\right) = \text{صفر}$$

$$٠,٢\ \text{هـ}^{٠,٠٦\sqrt{\text{ن}}-٠,٠١\,\text{ن}} = \text{صفر}$$

وهذا يعنى أن $\text{ن} = \infty$ وهو أمر مرفوض.

أو: $\frac{٠,٠٣}{\sqrt{\text{ن}}} = ٠,٠١$ ، $\sqrt{\text{ن}} = ٣$ ، $\text{ن} = ٩$

هذا ويمكن إثبات أن:

$$\text{ع}''(\text{ن}) = ٠,٢\ \text{هـ}^{٠,٠٦\sqrt{\text{ن}}-٠,٠١\,\text{ن}} \left[\frac{-٠,٠١٥}{\sqrt{\text{ن}}} + \left(\frac{٠,٠٣}{\sqrt{\text{ن}}} - ٠,٠١\right)^{٢}\right]$$

$$\text{ع}''(٩) = ٠,٢\,\text{هـ}^{٠,٠٦(٣)-٠,٠١(٩)}\left[\frac{-٠,٠١٥}{٣} + \left(\frac{٠,٠٣}{٣} - ٠,٠١\right)^{٢}\right]$$

يلاحَظ هنا أننا أخذنا في الاعتبار الجذر التربيعي الموجب فقط لـ ٩ نظرا لأن المدة لا تكون سالبة.

$$\text{ع}''(٩) = ٠,٢\,\text{هـ}^{٠,٠٩}\,(-\,٠,٠٠٥) = -٠,٠٠١\,\text{هـ}^{٠,٠٩}$$

أي أن: $\text{ع}''(٩) < \text{صفر}$ نهاية عظمى

وهذا يدل على أن الشركة يجب أن تبيع منتَجها بعد مرور ٩ شهور وذلك حتى تحقق أكبر قيمة حالية لربح الوحدة الواحدة والتي تتحدد قيمتها كما يلي:

$$\text{ع}(٩) = ٠,٢\,\text{هـ}^{٠,٠٦(٣) - ٠,٠١(٣)}$$

$$= ٠,٢\,\text{هـ}^{٠,٠٩} = ٠,٢٢ \text{ جنيه} \quad \text{لاحظ أن هـ} = ٢,٧١٨٢٨$$

وفي نهاية هذا الفصل نأمل أن نكون قد استعرضنا عدداً كافياً من تطبيقات موضوعاته في مجالات: الاقتصاد والإدارة والمحاسبة والتسويق والإنتاج، حتى يعود ذلك بالنفع على القارئ حين يكون في حاجة لتطبيق الأساليب الرياضية في حياته العملية.

تمارين

الفصل السابع

١- حدد قيم س التي تجعل كلا من الدوال التالية:

- متزايدة   - متناقصة   - ليست متزايدة أو متناقصة

أ- $د(س) = س^{٢} - ٣س + ٤$ **ب-** $د(س) = س + \frac{١}{س}$

جـ- $د(س) = ٢س^{٣} - ٩س^{٢} - ٢٤س + ١٠$

د- $د(س) = \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٢} - ٦$ **هـ-** $د(س) = \frac{س + ١}{س - ١}$

و- $د(س) = هـ^{-٢س}$

٢- استخدام $د''(س)$ لكل من الدوال التالية وذلك لتحديد طبيعة التقعر عند $س = -٢$، $س = ١$

أ- $د(س) = س^{٣} + ١٢س + ١$ **ب-** $د(س) = ٣س^{٢} + ٢س - ٣$

جـ- $د(س) = \frac{٥س^{٣}}{٣} + \frac{٣س^{٢}}{٢} - ٥س + ٢٥$

د- $د(س) = -لوس$ **هـ-** $د(س) = \frac{س^{٢}}{١ + س}$

٣- حدد نقط الانقلاب لكل من الدوال التالية:

أ- $د(س) = س^{٣} - ٩س^{٢}$ **ب-** $د(س) = - لو_{هـ} س$

جـ- $د(س) = هـ^{-س}$ **د-** $د(س) = لو س$

و- $د(س) = \frac{س^{٤}}{١٢} + \frac{٧س^{٣}}{٣} - ٥س^{٢}$

ز- $د(س) = س^{٣} + ٦س^{٢} - ١٨$

٤- ارسم مخطط الشكل البياني لكل من الدوال التالية:

أ- $د(س) = ٢س^{٣} - ٩س^{٢} - ٢٤س + ٢٠$

ب- $د(س) = س^{٣} - ١٢س + ١٠$

جـ- $د(س) = \frac{س^{٣}}{٣} - ٥س^{٢} + ١٦س - ١٠٠$ **د-** $د(س) = س^{٢} - ٥س + ٦$

هـ- $د(س) = (١٦س - ١٢)^{٣}$ **و-** $د(س) = لو_{هـ}(س^{٢} + ٢٠)$

٥- حدد النقط الحرجة لكل من الدوال التالية، ثم وضح طبيعة كل منها، مستخدماً في ذلك:

- اختبار المشتقة التفاضلية الأولى - اختبار المشتقة التفاضلية الثانية

أ- $د(س) = \frac{س^{٣}}{٣} + ٣س^{٢} - ٤٨س + ١٠٠$ **ب-** $د(س) = لو_{هـ}س - ٠,٠٥س$

جـ- $د(س) = \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٢} - ٢٠س$ **د-** $د(س) = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} - ٣٦س + ١$

هـ- $د(س) = \frac{س}{لو_{هـ}س}$ **و-** $د(س) = ٣س + \frac{١}{٣س}$

ز- $د(س) = \frac{لو_{هـ}س}{س}$ **ح-** $د(س) = س\,هـ^{-س}$

ط- $د(س) = ٢س^{٣} - ٩س^{٢} + ١٢س + ٦$

ي- $د(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٧$

٦- أثبت أن الدالة:

$د(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س + ٧$

ليس لها نهاية عظمى نسبية أو نهاية صغرى نسبية عند $س = ١$.

٧- أثبت أن الدالة:

$د(س) = س + \frac{١}{س}$

لها نهاية عظمى نسبية ونهاية صغرى نسبية ولكن نهايتها العظمى أقل من الصغرى.

٨- أوجد النهايات العظمى المطلقة والنهايات الصغرى المطلقة لكل من الدوال التالية:

أ- $د(س) = س^{٢} - ٦س + ٧$ $١ \le س \le ٦$

ب- $د(س) = س^{٣} - ١٨س^{٢} + ٦٠س$ $-١ \le س \le ٥$

جـ- $د(س) = \dfrac{(س+١)(س-٦)}{س^{٢}}$ $\qquad$ $٠,٥ \le س \le ٢$

د- $د(س) = س^{٣} - ١٢س^{٢}$ $\qquad$ $٢ \le س \le ١٠$

هـ- $د(س) = -٤س^{٢} + ٦س - ١٠$ $\qquad$ $صفر \le س \le ١٠$

و- $د(س) = لو_{هـ}(س^{٢}+١٠)$ $\qquad$ $-١ \le س \le ٤$

ز- $د(س) = س - لو_{هـ}س$ $\qquad$ $هـ^{-١} \le س \le هـ$

ح- $د(س) = \dfrac{س^{٣}}{٣} - \dfrac{س^{٢}}{٢} + ٢س - ١٠$ $\qquad$ $-٢ \le س \le ٣٠$

٩- باستخدام دالة التكلفة ودالة الطلب في كل من الحالتيْن التاليتيْن، حدد مستويات الإنتاج ك التي تكون عندها كل من:

- دالة التكلفة - دالة الإيراد - دالة الربح متزايدة أو متناقصة.

أ- $ت(ك) = ٢٠٠٠ + ١٠ك$ ، $س = ١٠٠ - ٠,٥ك$

ب- $ت(ك) = \sqrt{١٠٠ + ك^{٢}}$

$س = أ - \left(\dfrac{ب}{ك}\right) \sqrt{١٠٠+ك^{٢}}$ ، $(ب > أ > صفر)$

١٠- إذا كانت دالة التكلفة لإنتاج ك وحده من منتَج معين هي:

$ت(ك) = ١٥٠٠ + ٢٥ك - ٠,١ك^{٢} + ٠,٠٠٤ك^{٣}$

حدد مستوى الإنتاج الذي تكون عنده التكلفة الكلية أقل ما يمكن.

١١- إذا كانت تكلفة إنتاج ك وحدة من أحد المنتَجات تُعطَى بالدالة:

$ت(ك) = ١٦٠٠٠ + ٣ك + ١٠^{-٦}ك^{٣}$ جنيه

حدد مستوى الإنتاج الذي يصل بالتكلفة المتوسطة إلى أدنى حد لها، ثم أوجد الحد الأدنى للتكلفة المتوسطة.

١٢- إذا كانت دالة التكلفة لمؤسسة صناعية تأخذ الصورة:

$ت(ك) = ٣٠٠ك - ١٠ك^{٢} + \dfrac{ك^{٣}}{٣}$ جنيه

حيث: ك كمية الإنتاج بالوحدات.

حدد مستوى الإنتاج ك الذي يحقق ما يلي:

أ - التكلفة الحدية أقل ما يمكن $\qquad$ **ب-** التكلفة المتوسطة أقل ما يمكن

١٣- إذا كانت دالة الطلب على إحدى السلع هي:

$ك = ١٠ هـ^{\frac{-س}{٣٢}}$ صفر $\le$ س $\le$ ٦

حيث: س سعر الوحدة من السلعة، ك كمية الطلب بالوحدات

أوجد السعر س والكمية ك التي يتحقق عندها أقصى إيراد ممكن.

١٤- توصلت إحدى الشركات إلى أن الإيراد الكلى يمكن تحديده بالدالة:

$ر(ك) = ٤٠٠٠٠٠٠ - (ك - ٢٠٠٠)^{٢}$

حيث: ر(ك) دالة الإيراد الكلي ، ك عدد الوحدات المُباعة

المطلوب:

أ- عدد الوحدات المُباعة الذي يحقق أكبر إيراد كلى ممكن.

ب - ما هو مقدار الحد الأقصى للإيراد الكلى؟

جـ - حدد قيمة الإيراد الكلى إذا كان عدد الوحدات المُباعة ٢٥٠٠ وحدة

١٥- إذا كانت دالة الطلب على إحدى السلع هي:

س = ٢٠ - ٠,٠١ ك حيث: س سعر الوحدة ، ك كمية الطلب.

وأما دالة التكلفة الكلية لإنتاج ك وحدة فتأخذ الصورة:

$ت(ك) = ٥٠٠ + ٢ك - ٠,٠٠٥ك^{٢}$

فإذا تم فرض ضريبة مقدارها ض على كل وحدة.

المطلوب:

أ- إيجاد عدد الوحدات المنتَجة والمباعة ك والتي تحقق أقصى ربح ممكن، استخدم في ذلك:

- اختبار المشتقة الثانية - التحليل الحدي لتنظيم الربح

ب- حساب قيمة الحد الأقصى للربح.

جـ- تحديد مقدار الضريبة ض على كل وحدة والذي يحقق الحد الأقصى للدخل الضريبي للحكومة.

١٦- إذا كانت كمية المبيعات الشهرية ك من منتَج معين عندما يكون سعر الوحدة س يمكن تحديدها وفقا للدالة:

ك = ٤٠٠(٥ - س) دالة الطلب

وكانت الكمية التي يمكن للمورد أن يجعلها متاحة عند السعر $س_{١}$ تمثلها العلاقة:

ك = ٤٠٠($٢س_{١}$ - ٣) دالة العرض

فإذا افترضنا أن هناك ضريبة مقدارها ض تم فرضها على كل وحدة، ما هو مقدار الضريبة ض الذي يجعل الدخل الحكومي من ضريبة المبيعات أكبر ما يمكن؟

١٧- إذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج ك وحدة من منتَج معين هي:

$$ت(ك) = ٥٠ + ٢ك + ٠,٥ك^{٢}$$

وكانت دالة الإيراد الكلى لمبيعات ك وحدة من هذا المنتج هي:

$$ر(ك) = ٢٠ك - ك^{٢}$$

أ- حدد مستوى الإنتاج الذي يحقق عنده الحد الأقصى للربح، مستخدما في ذلك:

- اختبار المشتقة التفاضلية الثانية - التحليل الحدي لتغطية الربح

ب- مستخدماً نتائجك في (أ)، ما هو مقدار الحد الأقصى للربح.

١٨- توصلت إحدى الشركات إلى أن دالتي التكلفة والإيراد لأحد منتَجاتها هما:

$$ت(ك) = ١٠٠ + ٠,٠١٥ك^{٢} \quad \text{دالة التكلفة الكلية}$$

$$ر(ك) = ٣ك \quad \text{دالة الإيراد الكلى}$$

حيث: ك عدد الوحدات المنتَجة.

المطلوب:

أ- حدد مستوى الإنتاج ك الذي يحقق أقصى ربح ممكن، مستخدما في ذلك:

- اختبار المشتقة التفاضلية الثانية - التحليل الحدي لتغطية الربح

ب- أوجد مقدار الحد الأقصى للربح.

جـ - حدد مقدار الربح عند مستوى الإنتاج: ك = ١٢٠، ثم قارن نتائجك بما حصلت عليه في (ب).

١٩- إذا أنفقت شركة معينة المبلغ أ (بآلاف الجنيهات) على الإعلان عن سلعة معينة كل أسبوع، فإن الشركة يمكنها بيع كمية من السلع أسبوعياً تتحدد كما يلي:

$$ك = ٢٠٠٠(١ - هـ^{-٠,٠٠١أ})$$

فإذا كانت الشركة تحقق ربحا مقداره ٥ جنيهات من بيع كل وحدة. ما هو مقدار المُنفَق على الإعلان الذي يحقق أقصى أرباح صافية ممكنة للشركة؟

الفصل الثامن

مبادئ التكامل

مقدَّمـــة:

التكامل هو العملية العكسـية للتفاضـل. تماماً مثل القسـمة كعملية عكسـية للضـرب، أو الجمع كعملية عكسية للطرح، واستخراج الجذور كعملية عكسية للرفع إلى قوى. وهكذا هو حال كثير من العمليات الرياضـــية، حيث نجد أن هناك عملية رياضـــية تلغى تأثير عملية رياضية أخرى.

وقد وجدنا أن عملية التفاضـــل تهتم بإيجاد المشـــتقات للدوال والتي تُســـتخدم في حياتنا العملية كمؤشرات لمعدلات التغير وميل تلك الدوال. وفي كثير من التطبيقات، نجد أنفسنا في حاجة إلى معرفة الدالة الأصـــلية إذا كان متاحا لدينا ميل أو المشـــتقة التفاضـــلية لتلك الدالة. وعلى سبيل المثال، لو كان معلوما لدينا دالة التكلفة الحدية لإنتاج سلعة من السلع (علماً بأن التكلفة الحدية هي المشـــتقة التفاضـــلية الأولى لدالة التكلفة الكلية) فإننا نكون في حاجة إلى معرفة دالة التكلفة الكلية لتلك السلعة. وقس على ذلك بالنسبة للإيراد الحدي والربح الحدي.

وفي مثل تلك الحالات، فإن العملية التي تمكِّننا من ذلك هي العملية العكسـية للتفاضـل والتي تســـمى "التكامل" Integration. فلو كان لدينا الدالة د(س)، رأينا كيف نوجد المشـــتقة التفاضليـــــــة الأولى د´(س) لتلك الدالة. وكما أشرنا فإننا قد نواجَه بحالة يكون متاحاً فيها د´(س) ونريد تحديد الدالة الأصـــلية د(س). وحيث أن عملية إيجاد الدالة الأصـــلية هي عكس عملية التفاضـل فإن د(س) تسـمى بــــ "المشـتقة العكسـية" أو "عكس المشـتقة" Antiderivative لـ د´(س).

أي أن عملية التكامل – بافتراض معرفة د´(س)– هي إيجاد الدالة التي مشـــتقتها التفاضـــلية الأولى هي د´(س).

والآن دعنا نأخذ الدالة:

د´(س) = ٥ ⇦ (١)

فإنه باستخدام طريقة التجربة والخطأ، ليس من الصعب علينا أن نستنتج أن الدالة:

د(س) = ٥س ⇦ (٢)

هي الدالة الأصلية والتي تكون مشتقتها على الصورة الموضَّحة في المعادلة (١). وفي حقيقة الأمر، فإن أي دالة على الصورة:

$$د(س) = ٥س + ث \qquad \Leftarrow \qquad (٣)$$

حيث ث أي مقدار ثابت، يكون لها نفس المشتقة الموضَّحة في (١). وهكذا فإنه إذا كان لدينا المشتقة في (١) فإن الدالة الأصلية هي واحدة من مجموعة دوال تأخذ أي منها الصيغة (٣). ومجموعة الدوال هذه يعبر كل منها عن دالة خطية ميلها +٥، بينما يختلف الجزء المقطوع من المحور الصادي من دالة لأخرى حسب قيمة المقدار الثابت ث. حيث أنه مهما كانت قيمة المقدار الثابت ث فإن تفاضله يساوى الصفر دائماً.

أولاً: قواعد التكامل Rules of Integration

هناك عدة قواعد يمكن بها إيجاد المشتقات العكسية، أي إجراء عملية التكامل، وذلك دون الحاجة لاتباع قاعدة التجربة والخطأ والتي عادة ما يصعب الوصول معها إلى نتائج. وقواعد التكامل هذه تيسر هذا الأمر كثيراً، خاصةً عندما تأخذ الدوال صيغاً معينة ينطبق عليها استخدام تلك القواعد. هذا وعلامة التكامل:

$$\int د(س)\, ءس \qquad \Leftarrow \qquad (٤)$$

تستخدم عادة للإشارة إلى التكامل غير المحدود Indefinite Integral للدالة د(س). وتسمى الدالة د(س) بالدالة المطلوب تكاملها Integrand. وأما ءس فتشير إلى المتغير الذي نجري عملية التكامل بالنسبة له.

وتسمى عملية التكامل المشار إليها في (٤) بإجراء عملية التكامل للدالة د(س) بالنسبة إلى المتغير س، أو إجراء عملية التكامل غير المحدود للدالة د(س) بالنسبة إلى س. هذا وتمثل عملية التكامل غير المحدود إيجاد عكس المشتقة.

ويمكن التعبير عن عملية التكامل بشكل عام كما يلي:

$$\int د'(س)\, ءس = د(س) + ث$$

حيث: $\frac{د}{دس}$ د(س) = د'(س) ،

ث هي ثابت التكامل Constant of Integration.

وفيما يلي نتناول عدداً من قواعد التكامل.

القاعدة (١): الدالة الثابتة Constant Function

$\int أ \, ءس = أس + ث$ **حيث أ أي مقدار ثابت.**

مثال (١):

$\int ٥ \, ءس = ٥س + ث$ ، $\int -٢ \, ءس = -٢س + ث$

$\int صفر \, ءس = صفر \, (س) + ث = ث$

القاعدة (٢): قاعدة القوة Power Function

$\int س^{ن} \, ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$ ، $ن \neq -١$

وهذه القاعدة هي المناظرة لقاعدة القوة في حالة التفاضـــل. وهي لا تكون صـــحيحة في حالة $ن = -١$. وتعنى هذه القاعدة أنه إذا أريد تكامل س مرفوعة لأي قوة فإننا نضيف واحد إلى قوة س ثم نقسم على القوة (الأس) الجديدة، وبعد ذلك نضيف مقدارا ثابتا.

مثال (٢):

$\int س \, ءس = \frac{س^{٢}}{٢} + ث$ ، $\int س^{٤} \, ءس = \frac{س^{٥}}{٥} + ث$

$\int \sqrt{س} \, ءس = \int س^{\frac{١}{٢}} \, ءس = \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ث = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$\int \frac{١}{س^{٣}} \, ءس = \int س^{-٣} \, ءس = \frac{س^{-٢}}{-٢} + ث = \frac{-١}{٢س^{٢}} + ث$

القاعدة (٣): الدالة مضروبة في مقدار ثابت

Constant Times A Function

$\int أ.د(س) \, ءس = أ \int د(س) \, ءس$ **حيث أ أي مقدار ثابت.**

وتعنى هذه القاعدة أن تكامل أي دالة مضـــروبة في مقدار ثابت هو حاصـــل ضـــرب المقدار الثابت في تكامل الدالة. وهذا يعنى بدوره أنه إذا كان هناك عامل مشترك في الكمية المطلوب تكاملها فإنه يمكن وضع هذا العامل المشترك قبل علامة التكامل.

مثال (٣):

$$\text{(أ)}\quad \int ٨\,س\,ءس = ٨\int س\,ءس = ٨\left(\frac{س^{٢}}{٢} + ث_{١}\right)$$

$$= ٤س^{٢} + ٨\,ث_{١} = ٤س^{٢} + ث$$

$$\text{(ب)}\quad \int \frac{٢\,س^{٣}}{٥}\,ءس = \frac{٢}{٥}\int س^{٣}\,ءس = \frac{٢}{٥}\left(\frac{س^{٤}}{٤} + ث_{١}\right)$$

$$= \frac{١}{١٠}س^{٤} + \frac{٢}{٥}ث_{١} = \frac{١}{١٠}س^{٤} + ث$$

ويمكن التحقق من صحة النتائج كما يلي:

إذا كانت $د(س) = ٤س^{٢} + ث$ ، $د'(س) = ٨\,س$ وهذا صحيح

إذا كانت $د(س) = \frac{١}{١٠}س^{٤} + ث$ ، $د'(س) = \frac{٤}{١٠}س^{٣} = \frac{٢\,س^{٣}}{٥}$ وهذا صحيح

ملحوظة:

في حالة التكامل غير المحدود نضيف المقدار الثابت دائما. وعند استعمال القاعدة (٣)، فإن المقدار الثابت قبل علاقة التكامل سوف يتم ضربه في مقدار ثابت التكامل، على سبيل المثال ٨ $ث_{١}$ في (أ) في هذا المثال. وعملية الضرب هذه هي غير ضرورية في الواقع، إذا أن ما نحتاجه ببساطة شديدة هو إضافة ثابت التكامل للدالة على أنه تكامل غير محدود. وهكذا فإننا نضيف ثابت التكامل في الخطوة الأخيرة على أنه ث بدلا من ٨ $ث_{١}$ وذلك بهدف التبسيط.

القاعدة (٤): جمع أوطرح الدوال

Sum or Difference of Functions

إذا كان: $\int د(س)\,ءس$ و $\int ف(س)\,ءس$ **موجوديْن، فإن:**

$$\int [د(س) \pm ف(س)]\,ءس = \int د(س)\,ءس \pm \int ف(س)\,ءس$$

أي أن التكامل غير المحدود لحاصل جمع (طرح) دالتيْن هو عبارة عن حاصل جمع (طرح) التكامل غير المحدود للدالتيْن.

مثال (٤):

(أ) $\int (\text{٥س} - \text{٤})\,\text{ءس} = \int \text{٥س}\,\text{ءس} - \int \text{٤}\,\text{ءس}$

$$= \frac{\text{٥س}^{٢}}{\text{٢}} + \text{ث}_{١} - (\text{٤س} + \text{ث}_{٢}) = \frac{\text{٥س}^{٢}}{\text{٢}} - \text{٤س} + (\text{ث}_{١} - \text{ث}_{٢})$$

$$= \frac{\text{٥س}^{٢}}{\text{٢}} - \text{٤س} + \text{ث}$$

ونلاحظ هنا أيضا أننا استعضنا عن الثابتيْن $\text{ث}_{١} - \text{ث}_{٢}$ بمقدار ثابت واحد **ث**.

ويمكننا التحقق من صحة النتيجة التي وصلنا إليها كما يلي:

إذا كانت: $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{٥س}^{٢}}{\text{٢}} - \text{٤س} + \text{ث}$ فإن: $\text{د}'(\text{س}) = \text{٥س} - \text{٤}$ وهو صحيح.

(ب) $\int (\text{س}^{٢} + \text{٣س})\,\text{ءس} = \int \text{س}^{٢}\,\text{ءس} + \text{٣}\int \text{س}\,\text{ءس}$

$$= \frac{\text{س}^{٣}}{\text{٣}} + \text{ث}_{١} + \text{٣}\left(\frac{\text{س}^{٢}}{\text{٢}} + \text{ث}_{٢}\right) = \frac{\text{س}^{٣}}{\text{٣}} + \text{ث}_{١} + \text{٣}\left(\frac{\text{س}^{٢}}{\text{٢}}\right) + \text{٣}\,(\text{ث}_{٢})$$

$$= \frac{\text{س}^{٣}}{\text{٣}} + \frac{\text{٣س}^{٢}}{\text{٢}} + \text{ث}$$

ويمكن التحقق من ذلك كما يلي:

إذا كانت: $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣}}{\text{٣}} + \frac{\text{٣س}^{٢}}{\text{٢}} + \text{ث}$

$$\text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{٣س}^{٢}}{\text{٣}} + \frac{\text{٦س}}{\text{٢}}$$

$= \text{س}^{٢} + \text{٣س}$ وهذا صحيح.

القاعدة (٥): استثناء قاعدة القوة Power Rule Exception

$$\int \text{س}^{-١}\,\text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \text{ث}$$

وهذه القاعدة تمثل استثناءً للقاعدة رقم (٢) والتي تكون فيها $\text{ن} = -\text{١}$ بالنسبة لـ $\text{س}^{\text{ن}}$. ولعله من الملائم هنا أن نتذكر قاعدة التفاضل:

إذا كانت: $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ فإن: $\text{د}'(\text{س}) = \text{س}^{-١}$

القاعدة (٦):

$$\int هـ^{س} \, ءس = هـ^{س} + ث$$

القاعدة (٧):

$$\int \left[د(س)\right]^{ن} . \, د'(س) \, ءس = \frac{\left[د(س)\right]^{ن+١}}{ن+١} + ث \text{ ، } ن \neq -١$$

وهذه القاعدة مشابهة لقاعدة القوة (القاعدة ٢)، حيث أن قاعدة القوة هي حالة خاصة من تلك القاعدة، وهي الحالة التي تكون فيها $د(س) = س$.

وتفيد هذه القاعدة بأن تكامل حاصل ضرب دالة مرفوعة إلى قوة في المشتقة التفاضلية لتلك الدالة هو زيادة قوة الدالة بمقدار واحد ثم القسمة على القوة الجديدة.

مثال (٥):

أوجد التكاملات التالية:

أ- $\int (س^{٢} - ٣س)^{٤} (٢س - ٣) \, ءس$ ب- $\int (٣س^{٢} - ٢س)(٣س - ١) \, ءس$

جـ- $\int (٢س^{٣} - ٣س)^{٣} (١٢س - ٦) \, ءس$

الحـل:

(أ) في هذا التكامل نجد أن:

$$د(س) = س^{٢} - ٣س \text{ ، } د'(س) = ٢س - ٣$$

$$\therefore \int (س^{٢} - ٣س)^{٤} (٢س - ٣) \, ءس = \frac{(س^{٢} - ٣س)^{٥}}{٥} + ث$$

(ب) $\int (٣س^{٢} - ٢س)(٣س - ١) \, ءس$

$$= \frac{١}{٢} \int \overbrace{(٣س^{٢} - ٢س)}^{د(س)} \overbrace{(٦س - ٢)}^{د'(س)} \, ءس$$

$$= \frac{١}{٢} \; \frac{\left(٣س^{٢} - ٢س\right)^{٢}}{٢} + ث = \frac{\left(٣س^{٢} - ٢س\right)^{٢}}{٤} + ث$$

وهنا فإننا حاولنا أن نجعل المقدار الثاني من كمية التكامل تأخذ صورة المشتقة التفاضلية الأولى للمقدار الأول حتى تستطيع تطبيق القاعدة (٧).

(جـ) $\int \left(٢س^{٣} - ٣س\right)^{٣}\left(١٢س - ٦\right) ءس$

$$= ٢ \int \underbrace{\left(٢س^{٣} - ٣س\right)}_{د(س)}{}^{٣} \underbrace{\left(٦س - ٢\right)}_{دَ(س)} ءس$$

$$= ٢ \times \frac{\left(٢س^{٣} - ٣س\right)^{٤}}{٤} + ث = \frac{\left(٢س^{٣} - ٢س\right)^{٤}}{٢} + ث$$

وعلى سبيل المثال، يمكن التحقق من صحة النتيجة في (جـ) كما يلي:

إذا كانت: $د(س) = \frac{\left(٢س^{٣} - ٢س\right)^{٤}}{٢} + ث$

$$دَ(س) = \frac{٤\left(٢س^{٣} - ٣س\right)^{٣}\left(٦س - ٣\right)}{٢} = \left(٢س^{٣} - ٣س\right)^{٣}\left(١٢س - ٦\right)$$

وهذا صحيح.

القاعدة (٨):

$$\int دَ(س) \; هـ^{د(س)} ءس = هـ^{د(س)} + ث$$

وتُعتبر القاعدة (٦) حالة خاصة من تلك القاعدة والتي فيها $د(س) = س$

مثال (٦):

أوجد التكاملات التالية:

أ- $\int ٣س^{٢} هـ^{س^{٣}} ءس$ ب- $\int س \, هـ^{٢س^{٢}} ءس$ جـ- $\int \frac{٣س^{٢}}{\left(س^{٣} + ٤\right)^{٣}} ءس$

د- $\int ١٢س^{٢} هـ^{٢س^{٣}} ءس$ هـ- $\int \left(س - ١\right) هـ^{س^{٢} - ٢س} ءس$

الحـل:

أ- $\int \text{٣ س}^{٢} \text{هـ}^{\text{س}^{٣}} \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}^{٣}} + \text{ث}$

وهنا يُلاحَظ أن: $\text{د(س)} = \text{س}^{٣}$ ، $\text{دَ(س)} = \text{٣ س}^{٢}$

ب- $\int \text{س هـ}^{\text{٢س}^{٢}} \text{ءس} = \frac{١}{٤} \int \text{٤س هـ}^{\text{٢س}^{٢}} \text{ءس} = \frac{١}{٤} \text{هـ}^{\text{٢س}^{٢}} + \text{ث}$

جـ- $\int \frac{\text{٣ س}^{٢}}{(\text{س}^{٣}+٤)^{٣}} \text{ءس} = \int (\text{س}^{٣}+٤)^{-٣} (\text{٣ س}^{٢}) \text{ءس}$

$$= \frac{(\text{س}^{٣}+٤)^{-٢}}{-٢} + \text{ث} = \frac{-١}{٢(\text{س}^{٣}+٤)^{٢}} + \text{ث}$$

د- $\int \text{١٢ س}^{٢} \text{هـ}^{\text{٢س}^{٣}} \text{ءس} = ٢ \int \text{٦ س}^{٢} \text{هـ}^{\text{٢س}^{٣}} \text{ءس}$

$$= \text{٢ هـ}^{\text{٢س}^{٣}} + \text{ث}$$

هـ- $\int (\text{س}-١) \text{هـ}^{\text{س}^{٢}-\text{٢س}} \text{ءس} = \frac{١}{٢} \int (\text{٢س}-٢) \text{هـ}^{\text{س}^{٢}-\text{٢س}} \text{ءس}$

$$= \frac{١}{٢} \text{هـ}^{\text{س}^{٢}-\text{٢س}} + \text{ث}$$

وللتحقق من صحة هذه النتيجة:

إذا كانت: $\text{د(س)} = \frac{-١}{٢(\text{س}^{٣}+٤)^{٢}} + \text{ث} = -\frac{١}{٢} (\text{س}^{٣}+٤)^{-٢} + \text{ث}$

$\text{دَ(س)} = (\text{س}^{٣}+٤)^{-٣} (\text{٣ س}^{٢}) = \frac{\text{٣ س}^{٢}}{(\text{س}^{٣}+٤)^{٣}}$ وهذا صحيح

القاعدة (٩):

$$\int \frac{\text{دَ(س)}}{\text{د(س)}} \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{د(س)} + \text{ث}$$

مثال (٧):

أوجد التكاملات التالية:

أ- $\int \frac{٤س - ١}{٢س^٢ - س} \, ءس$ ب- $\int \frac{س^٢ - س}{٢س^٣ - ٣س^٢} \, ءس$

جـ- $\int \frac{٤س - ٢}{س^٢ - س + ١} \, ءس$ د- $\int \frac{-س}{س^٢ + ٥} \, ءس$

الحــل:

أ- $\int \frac{٤س - ١}{٢س^٢ - س} \, ءس = لـو_{هـ}\left(٢س^٢ - س\right) + ث$

لاحظ أن: $د(س) = ٢س^٢ - س$ ، $د'(س) = ٤س - ١$

ب- $\int \frac{س^٢ - س}{٢س^٣ - ٣س^٢} \, ءس = \frac{١}{٦} \int \frac{٦س^٢ - ٦س}{٢س^٣ - ٣س^٢} \, ءس$

$= \frac{١}{٦} لـو_{هـ}\left(٢س^٣ - ٣س^٢\right) + ث$

جـ- $\int \frac{٤س - ٢}{س^٢ - س + ١} \, ءس = ٢ \int \frac{٢س - ١}{س^٢ - س + ١} \, ءس$

$= ٢ \, لـو_{هـ}\left(س^٢ - س + ١\right) + ث$

د- $\int \frac{-س}{س^٢ + ٥} \, ءس = -\frac{١}{٢} \int \frac{٢س}{س^٢ + ٥} \, ءس$

$= -\frac{١}{٢} لـو_{هـ}\left(س^٢ + ٥\right) + ث$

ولعله من المفيد للقارئ أن نلخص قواعد التكامل التي أشرنا إليها كما يلي:

القاعدة (١): $\int أ . ءس = أس + ث$ ، أ ثابت

القاعدة (٢): $\int س^{ن} ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن + ١} + ث$ ، $ن \neq -١$

القاعدة (٣): $\int أ . د(س) \, ءس = أ \int د(س) \, ءس$ ، أ مقدار ثابت

القاعدة (٤): $\int [د(س) \pm ف(س)]\, ءس = \int د(س)\, ءس \pm \int ف(س)\, ءس$

القاعدة (٥): $\int س^{-١}\, ءس = لـو_{هـ} س + ث$

القاعدة (٦): $\int هـ^{س}\, ءس = هـ^{س} + ث$

القاعدة (٧): $\int \left[\left(د(س)\right)\right]^{ن} . د'(س)\, ءس = \frac{\left[\left(د(س)\right)\right]^{ن+١}}{ن+١} + ث \quad ، \quad ن \neq -١$

القاعدة (٨): $\int د'(س)\, هـ^{د(س)}\, ءس = هـ^{د(س)} + ث$

القاعدة (٩): $\int \frac{د'(س)}{د(س)}\, ءس = لـو_{هـ} د(س) + ث$

والآن، قد يُثار تســـاؤل مهم، ألا وهو: ماذا يحدث لو كان لدينا كمية يُراد تكاملها ولا تنطبق عليها أي من القواعد التسع التي تناولنا من قبــل.

وعلى سبيل المثال، التكاملان:

$$\int س هـ^{-س}\, ءس \quad و \quad \int \frac{٥ - س}{س^{٢} + ٥س + ٦}\, ءس$$

لا ينطبق على كل منهما أي من القواعد التســع المشــار إليها. وهنا نقدم أسـلوبيْن من أســاليب التكامل التي يمكن تطبيقها في مثل تلك الحالات. هذا بالإضـــافة إلى أننا ســـوف نعرض تكاملات بعض الدوال التي تأخذ صورة اللوغاريتم الطبيعي أو الصورة الأسية.

ثانياً: أساليب أخرى للتكامل

في هذا الشــأن، ســوف ندرس أســلوبيْن فقط هما التكامل بالتجزيء والتكامل بالكســور الجزئية، بالإضافة إلى تكاملات بعض الدوال.

١- التكامل بالتجزيء: Integration by Parts

أشرنا من قبل إلى قاعدة الضرب في التفاضل، وكانت كما يلي:

إذا كانت: $د(س) = ع(س) . ف(س)$

فــإن: $د'(س) = ف(س) . ع'(س) + ع(س) . ف'(س)$

ويمكننا أن نكتب هذه القاعدة بشكل مختلف كالتالي:

$$\frac{د}{د\,س}\left[ع(س).ف(س)\right] = ف(س).ع'(س) + ع(س).ف'(س)$$

وبإجراء تكامل للطرفيْن نحصل على:

$$ع(س).ف(س) = \int ف(س).ع'(س)\,ءس + \int ع(س).ف'(س)\,ءس$$

وبإعادة ترتيب هذه المعادلة نحصل على ما يسمى "صيغة التكامل بالتجزيء".

صيغة التكامل بالتجزيء: Integration – By – Parts Formula

$$\int ع(س).ف'(س)\,ءس = ع(س).ف(س) - \int ف(س).ع'(س)\,ءس$$

وأسلـــوب التكامـــل بالتجزيء يعتمد على التجربة والخطأ في تحديد $ع(س)$ و $ف'(س)$، وقد لا يؤدى إلى نتيجة في بعض الحالات. هذا ولو كان المقدار المراد تفاضله عبارة عن حاصـل ضـرب دالتيْن، ولا ينطبق عليه أي من قواعد التكامل التسـع المشـار إليها فإننا نتبع ما يلي:

التجربة والخطأ في إجراء التكامل بالتجزيء:

- عرِّف الدالتيْن $ع(س)$، $ف(س)$ ثم حدد ما إذا كان المقدار المراد تكامله يأخذ الصـــورة $ع(س).ف'(س)$.
- إذا تم إيجاد الدالتيْن بحيث $ع(س).ف'(س)$ تساوى المقدار المراد تكامله، حاول أن توجد التكامل للطرف الأيسـر في صـيغة التكامل بالتجزيء. وهذه تمثل نقطة البداية في إيجاد $\int ع(س).ف'(س)\,ءس$.

ملحوظة:

قبل محاولة إجراء التكامل بالتجزيء يجب التأكد من أن إحدى الدالتيْن لا تمثل المشـــتقة التفاضلية الأولى للدالة الثانية، حيث انه في تلك الحالة يجب تطبيق القاعدة (٧).

مثال (٨):

أوجد التكاملات التالية:

أ- $\int س\,هـ^{س}\,ءس$ ب- $\int س^{٣}\,لو_{هـ}س\,ءس$ ، $س > صفر$

جـ- $\int لو_{هـ}س\,ءس$

الحـل:

(أ) $\int \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ء}\text{س}$

نحدد أولاً: $\text{ف}' = \text{س}$ و $\text{ع} = \text{هـ}^{\text{س}}$

بحيث يأخذ التكامل المطلوب الصورة: $\int \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ء}\text{س}$

وبذلك يمكننا الحصول على ف بتكامل ف´ وعلى ع´ بتفاضل ع وذلك كما يلي:

$$\text{ف}'(\text{س}) = \text{س} \quad \text{تعطى:}\ \text{ف}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$$

$$\text{ع}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}} \quad \text{تعطى:}\ \text{ع}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$$

وحيث أن:

$$\int \text{ع}(\text{س}).\text{ف}'(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = \text{ع}(\text{س}).\text{ف}(\text{س}) - \int \text{ف}(\text{س}).\text{ع}'(\text{س})\,\text{ء}\text{س}$$

$$\int \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ء}\text{س} = \text{هـ}^{\text{س}}\left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢}\right) - \int \frac{\text{س}^{٢}}{٢}(\text{هـ}^{\text{س}})\,\text{ء}\text{س}$$

هذا والتكامل $\int \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ء}\text{س}$ يدعونا إلى الاعتقاد بأن إجراءه هو على نفس الدرجة من الصعوبة التي يكون عليها إجراء التكامل الأصلي.

لذلك دعنا نتبع منهجاً معاكساً ونبدأ من جديد باختيار:

$$\text{ف}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}} \quad \text{و} \quad \text{ع}(\text{س}) = \text{س}$$

$$\text{ف}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}} \quad \text{تعطى:}\ \text{ف}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$$

$$\text{ع}(\text{س}) = \text{س} \quad \text{تعطى:}\ \text{ع}'(\text{س}) = ١$$

$$\int \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ء}\text{س} = \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\,(١)\,\text{ء}\text{س}$$

$$= \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ء}\text{س} = \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$$

وللتحقق من صحة النتيجة التي حصلنا عليها:

$$\frac{\text{د}}{\text{د}\,\text{س}}\left(\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}\right) = \text{س}(\text{هـ}^{\text{س}}) + (\text{هـ}^{\text{س}})\,(١) - \text{هـ}^{\text{س}}$$

$= \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}$ وهذا صحيح.

(ب) $\int$ س^{3} لـو$_{هـ}$ س ءس ، س > صفر

سوف نختار: ع(س) = لـو$_{هـ}$ س و ف$'$(س) = س^{3}

$$ع'(س) = \frac{1}{س} \quad و \quad ف(س) = \frac{س^{4}}{4}$$

$$\int س^{3}\ لـو_{هـ}\ س\ ءس = (لـو_{هـ}\ س)\left(\frac{س^{4}}{4}\right) - \int \frac{س^{4}}{4}\left(\frac{1}{س}\right) ءس$$

$$= \frac{س^{4}}{4} لـو_{هـ}\ س - \frac{1}{4}\int س^{3}\ ءس$$

$$= \frac{س^{4}}{4} لـو_{هـ}\ س - \frac{س^{4}}{16} + ث$$

ويمكن التحقق من صحة النتيجة كما يلي:

$$\frac{د}{د\ س}\left(\frac{س^{4}}{4} لـو_{هـ}\ س - \frac{س^{4}}{16} + ث\right) = \frac{س^{4}}{4}\left(\frac{1}{س}\right) + س^{3} لـو_{هـ}\ س - \frac{س^{3}}{4}$$

$$= \frac{س^{3}}{4} + س^{3} لـو_{هـ}\ س - \frac{س^{3}}{4}$$

$= س^{3}$ لـو$_{هـ}$ س وهذا صحيح

(جـ) $\int$ لـو$_{هـ}$ س ءس = $\int$ (لـو$_{هـ}$ س)(1) ءس

سوف نختار: ع(س) = لـو$_{هـ}$ س و ف$'$(س) = (1)

$$ع'(س) = \frac{1}{س} \quad و \quad ف(س) = س$$

$$\int لـو_{هـ}\ س\ ءس = (لـو_{هـ}\ س)(س) - \int س\left(\frac{1}{س}\right) ءس$$

$$= س\ لـو_{هـ}\ س - س + ث$$

ونتحقق من صحة النتيجة التي توصلنا إليها كما يلي:

$$\frac{د}{د\ س}(س\ لـو_{هـ}\ س - س + ث) = س\left(\frac{1}{س}\right) + لـو_{هـ}\ س\ (1) - 1$$

$= $ لـو$_{هـ}$ س وهذا صحيح

هذا والتكامل بالتجزيء يستهلك كثيراً من الوقت، ويرجع ذلك إلى استخدام التجربة والخطأ في إجرائه. ومرة ثانية، يجب التأكد قبل استخدام التكامل بالتجزئة إلى أن المقدار المراد تكامله لا ينطبق عليه أي قاعدة من قواعد التكامل التسعة التي أشرنا إليها.

٢- التكامل بالكسور الجزئية: Integration by Partial Fractions

تناولنا في الفصل الثالث من هذا الكتاب الكسور الجزئية. وهنا نحاول استخدام هذا الأسلوب في إجراء بعض التكاملات التي لا ينطبق عليها القاعدة (٩) المشار إليها سابقاً. وعلى سبيل المثال فإن الدالة:

$$د(س) = \frac{٥ - س}{س^٢ + ٥س + ٦}$$

لا يمكن تكاملها باستخدام القاعدة (٩). ولكن إذا عرفنا كيف نحول هذه الدالة إلى كسور جزئية متبعين في ذلك الأسلوب المشار إليه في الفصل الثالث لوجدنا أن:

$$\frac{٥ - س}{س^٢ + ٥س + ٦} = \frac{٧}{س + ٢} - \frac{٨}{س + ٣}$$

وبذلك نستطيع إيجاد تكامل الدالة د(س) وذلك كما يلي:

$$\int \frac{٥ - س}{س^٢ + ٥س + ٦} ءس = \int \frac{٧}{س + ٢} ءس - \int \frac{٨}{س + ٣} ءس$$

$$= ٧ لو_{هـ} (س + ٢) - ٨ لو_{هـ} (س + ٣) + ث$$

وهنا يجب أن نشير في البداية إلى أن الكسر المُراد إيجاد تكامله يجب أن يكون كسراً حقيقياً Proper Fraction، بمعنى أن درجة المقدار في البسط تكون أقل من درجة المقدار في المقام، وفي الحالة التي يكون فيها الكسر غير حقيقي Improper Fraction، فإنه يجب تحويله أولاً إلى كسر حقيقي وذلك بقسمة البسط على المقام.

وفيما يلي شكل الكسور الجزئية لبعض صيغ العوامل الموجودة في المقام والتي تحتاج إلى تحليل:

العامل	الكسور
١- عامل مكرر من الدرجة الأولى: $أس + ب$	$\frac{د}{أس + ب}$ ، د ثابت
٢- عامل مكرر من الدرجة الأولى: $(أس + ب)^ن$	$\frac{د_١}{أس + ب} + \frac{د_٢}{(أس + ب)^٢} + ...$
٣- عامل مكرر من الدرجة الثانية: $أس^٢ + بس + جـ$	$\frac{دس + هـ}{أس^٢ + بس + جـ}$ ، أ ، ب ثوابت

مثال (٩):

باستخدام الكسور الجزئية، أوجد كلا من التكاملات التالية:

أ- $\int \frac{\text{٣س} + \text{٥}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢س} + \text{١٥}} \, \text{ءس}$ ب- $\int \frac{\text{١٠س} + \text{٢٥}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٦س} + \text{٩}} \, \text{ءس}$

جـ- $\int \frac{\text{س} - \text{٣}}{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٢س}^{\text{٢}}} \, \text{ءس}$

الحـل:

(أ) $\frac{\text{٣س} + \text{٥}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢س} + \text{١٥}} = \frac{\text{٣س} + \text{٥}}{(\text{س} + \text{٥})(\text{س} - \text{٣})} = \frac{\text{أ}}{(\text{س} + \text{٥})} + \frac{\text{ب}}{(\text{س} - \text{٣})}$

$\text{أ}(\text{س} - \text{٣}) + \text{ب}(\text{س} + \text{٥}) = \text{٣س} - \text{٥}$

بوضع $\text{س} = \text{٣}$ في طرفي المعادلة: $\text{٨ب} = \text{٤}$ ، $\text{ب} = \text{٠,٥}$

بوضع $\text{س} = \text{-٥}$ في طرفي المعادلة: $\text{-٨أ} = \text{-٢٠}$ ، $\text{أ} = \text{٢,٥}$

$\therefore \frac{\text{٣س} + \text{٥}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢س} + \text{١٥}} = \frac{\text{٥}}{\text{٢}(\text{س} + \text{٥})} + \frac{\text{١}}{\text{٢}(\text{س} - \text{٣})}$

$\therefore \int \frac{\text{٣س} + \text{٥}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢س} + \text{١٥}} \, \text{ءس} = \int \frac{\text{٥}}{\text{٢}(\text{س} + \text{٥})} \, \text{ءس} + \int \frac{\text{١}}{\text{٢}(\text{س} - \text{٣})} \, \text{ءس}$

$= \text{٢,٥} \, \text{لـو}_{\text{هـ}} (\text{س} + \text{٥}) + \text{٠,٥} \, \text{لـو}_{\text{هـ}} (\text{س} - \text{٣}) + \text{ث}$

(ب) $\frac{\text{١٠س} + \text{٢٥}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٦س} + \text{٩}} = \frac{\text{١٠س} + \text{٢٥}}{(\text{س} + \text{٣})^{\text{٢}}} = \frac{\text{أ}}{\text{س} + \text{٣}} + \frac{\text{ب}}{(\text{س} + \text{٣})^{\text{٢}}}$

$= \frac{\text{أ}(\text{س} + \text{٣}) + \text{ب}}{(\text{س} + \text{٣})^{\text{٢}}}$

$\text{أ}(\text{س} + \text{٣}) + \text{ب} = \text{١٠س} + \text{٢٥}$ أي أن: $\text{أس} + (\text{٣أ} + \text{ب}) = \text{١٠س} + \text{٢٥}$

وبمقارنة معامل س والحد المطلق في الطرفيْن نجد أن: $\text{أ} = \text{١٠}$

$\text{٣أ} + \text{ب} = \text{٢٥}$ ، $\text{ب} = \text{-٥}$

$$\therefore \frac{\text{١٠س} + ٢٥}{\text{س}^{٢} + \text{٦س} + ٩} = \frac{١٠}{\text{س} + ٣} - \frac{٥}{(\text{س} + ٣)^{٢}}$$

وهكذا نجد أن:

$$\int \frac{\text{١٠س} + ٢٥}{\text{س}^{٢} + \text{٦س} + ٩}\,\text{ءس} = \int \frac{١٠}{\text{س} + ٣}\,\text{ءس} - \int \frac{٥}{(\text{س} + ٣)^{٢}}\,\text{ءس}$$

$$= \text{١٠ لـوهـ}(\text{س} + ٣) - ٥ \int (\text{س} + ٣)^{-٢}(١)\,\text{ءس}$$

$$= \text{١٠ لـوهـ}(\text{س} + ٣) - ٥ \left(\frac{(\text{س} + ٣)^{-١}}{-١} \right) + \text{ث}$$

$$= \text{١٠ لـوهـ}(\text{س} + ٣) + \frac{٥}{\text{س} + ٣} + \text{ث}$$

ويمكن التحقق من صحة تلك النتيجة كما يلي:

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}} \left[\text{١٠ لـوهـ}(\text{س} + ٣) + \frac{٥}{\text{س} + ٣} + \text{ث} \right]$$

$$= \frac{١٠}{\text{س} + ٣} - \frac{٥}{(\text{س} + ٣)^{٢}} = \frac{\text{١٠س} + ٢٥}{(\text{س} + ٣)^{٢}} \quad \text{وهذا صحيح}$$

(جـ) $$\frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٣} + \text{٢س}^{٢}} = \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢}(\text{س} + ١)} = \frac{\text{أس} + \text{ب}}{\text{س}^{٢}} + \frac{\text{جـ}}{\text{س} + ١}$$

$$= \frac{(\text{أس} + \text{ب})(\text{س} + ١) + \text{جـ س}^{٢}}{\text{س}^{٢}(\text{س} + ١)}$$

$$= \frac{\text{أس}^{٢} + \text{أس} + \text{بس} + \text{ب} + \text{جـ س}^{٢}}{\text{س}^{٢}(\text{س} + ١)}$$

$$= \frac{(\text{أ} + \text{جـ})\text{س}^{٢} + (\text{أ} + \text{ب})\text{س} + \text{ب}}{\text{س}^{٢}(\text{س} + ١)}$$

$$= (\text{أ} + \text{جـ})\text{س}^{٢} + (\text{أ} + \text{ب})\text{س} + \text{ب} = \text{س} - ٣$$

وبمقارنة معاملي $\text{س}^{٢}$ ، س والحد المطلق في الطرفيْن، نجد أن:

$\text{أ} + \text{جـ} = \text{صفر}$ ، $\text{أ} + \text{ب} = 1$ ، $\text{ب} = -٣$

وبحل هذه المعادلات بطريقة التعويض نحصل على:

$$أ = ٤ \quad ، \quad ب = -٣ \quad ، \quad جـ = -٤$$

$$\therefore \quad \frac{س - ٣}{س^٣ + ٢س^٢} = \frac{٤س - ٣}{س^٢} - \frac{٤}{س + ١}$$

وهكذا نجد أن:

$$\int \frac{س - ٣}{س^٣ + ٢س^٢} ءس = \int \frac{٤س - ٣}{س^٢} ءس - \int \frac{٤}{س+١} ءس$$

$$= ٤\int \frac{١}{س} ءس - \int \frac{٣}{س^٢} ءس - ٤\int \frac{١}{س+١} ءس$$

$$= ٤ لــو_هـ س - \frac{٦}{س^٣} - ٤ لــو_هـ (س + ١) + ث$$

٣- جداول التكاملات: Tables of Integrals

هناك حالات لا تنطبق عليها أي من قواعد التكامل التسعة أو أسلوبي التكامل بالتجزئة والتكامل بالكسور الجزئية والتي تناولناها من قبل. وفي مثل تلك الحالات نقدم فيما يلي قائمة بتكاملات العديد من الدوال اللوغاريتمية الطبيعة والدوال الأسية. وعلى القارئ أن يقارن الدالة التي لديه والمراد تكاملها بتلك الدوال الواردة في القائمة التالية ثم تطبق قاعدة التكامل الملائمة.

صيغ تكاملات بعض الدوال اللوغاريتمية والأسية الطبيعية:

(١) $\int س^ن لــو_هـ أس ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} لــو_هـ أس - \frac{س^{ن+١}}{(ن+١)^٢} + ث \quad ، \quad ن \neq -١$

(٢) $\int (لــو_هـ س)^ن ءس = س(لــو_هـ س)^ن - ن \int (لــو_هـ س)^{ن-١} ءس + ث ، \quad ن \neq -١$

(٣) $\int \frac{(لــو_هـ س)^ن}{س} ءس = \frac{١}{ن+١} (لــو_هـ س)^{ن+١} + ث \quad ، \quad ن \neq -١$

(٤) $\int هـ^{أس} ءس = \frac{١}{أ} هـ^{س} + ث$

(٥) $\int س هـ^{أس} ءس = \frac{هـ^{أس}}{أ^٢} (أس - ١) + ث$

$$(٦)\quad \int \frac{١}{١+\text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{ءس} = \text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}\left(١+\text{هـ}^{\text{س}}\right) = \text{لو}\,\frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{١+\text{هـ}^{\text{س}}} + \text{ث}$$

$$(٧)\quad \int \frac{١}{\text{أ}+\text{ب هـ}^{\text{جـس}}}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}}{\text{أ}} - \frac{١}{\text{أجـ}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{أ}+\text{ب هـ}^{\text{جـس}}\right) + \text{ث}$$

مثال (١٠):

أوجد التكامل: $\int \text{س}^{٢}\,\text{لو}\,٥\text{س}\,\text{ءس}$

الحـل:

بتطبيق الصيغة (١)، نجد أن: $\text{ن} = ٢$ ، $\text{أ} = ٥$

وحيث أن: $\int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{أس}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{أس} - \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{(\text{ن}+١)^{٢}} + \text{ث}$

فإننا نجد أن:

$$\int \text{س}^{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,٥\text{س}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{٢+١}}{٢+١}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,٥\text{س} - \frac{\text{س}^{٢+١}}{(٢+١)^{٢}} + \text{ث}$$

$$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,٥\text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٩} + \text{ث}$$

مثال (١١):

أوجد التكامل: $\int \frac{١}{٢+٣\text{هـ}^{٦\text{س}}}\,\text{ءس}$

الحـل:

بتطبيق الصيغة (٧)، نجد أن:

$\text{أ} = ٢$ ، $\text{ب} = ٣$ ، $\text{جـ} = ٦$

وحيث أن:

$$\int \frac{١}{\text{أ}+\text{ب هـ}^{\text{جـس}}}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}}{\text{أ}} - \frac{١}{\text{أجـ}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{أ}+\text{ب هـ}^{\text{جـس}}\right) + \text{ث}$$

$$\therefore \int \frac{١}{٢+٣\text{هـ}^{٦\text{س}}}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}}{٢} - \frac{١}{(٢)(٦)}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left(١+٢\text{هـ}^{\text{جـس}}\right) + \text{ث}$$

$$= \frac{\text{س}}{٢} - \frac{١}{١٢}\,\text{لو}\left(١+٢\text{هـ}^{٦\text{س}}\right) + \text{ث}$$

مثال (١٢):

أوجد التكامل: $\int \frac{(\text{لـوهـ} س)^{٣}}{س} ء س$

الحـل:

بتطبيق الصيغة (٣)، نجد أن: $ن = ٣$

وحيث أن: $\int \frac{(\text{لـوهـ} س)^{ن}}{س} ء س = \frac{١}{ن+١}(\text{لـوهـ} س)^{ن+١} + ث$

$$\therefore \int \frac{(\text{لـوهـ} س)^{٣}}{س} ء س = \frac{١}{٣+١}(\text{لـوهـ} س)^{٣+١} + ث$$

$$= \frac{١}{٤}(\text{لـوهـ} س)^{٤} + ث$$

ثالثاً: التكامل المحدود Definite Integral

١- تعريف التكامل المحدود:

إن مفهوم التكامل المحدود يمكن تفسيره كمساحة وكنهاية. وما يهمنا هنا أن نتعامل مع التكامل المحدود كمساحة. حيث أنه من أهم التطبيقات العملية لعلم التفاضل والتكامل هو استخدام التكامل المحدود في إيجاد المساحات التي يحدد حدودها المنحنيات التي تمثل الدوال المختلفة والمحوريْن الأفقي والرأسي.

هذا والتكامل المحدود يمكن الإشارة إليه بالرمز:

$$\int_{أ}^{ب} د'(س) ء س$$

وتمثل أ الحد الأدنى للتكامل، بينما تمثل ب الحد الأعلى للتكامل. ويمكن إيجاد قيمة هذا التكامل على النحو التالي:

$$\int_{أ}^{ب} د'(س) ء س = \left[د(س) + ث\right]_{أ}^{ب}$$

$$= \{د(ب) + ث\} - \{د(أ) + ث\}$$

$$= د(ب) - د(أ)$$

وتشـــير العلامة $\Big]_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ إلى أننا نعوض في ناتج التكامل عن س بالقيمة ب، ثم نعوض عن س بالقيمة أ في نفس ناتج التكامل، وبعد ذلك نطرح ناتج التعويض الثاني من ناتج التعويض الأول فيكون باقي الطرح هو قيمة التكامل المحدود. ويتضح من ذلك أنه لحساب التكامل المحدود للدالة $\text{د}'(\text{س})$ من القيمة أ إلى القيمة ب فإنه يمكن إهمال ثابت التكامل ث لأنه ليس له تأثير على حساب قيمة التكامل.

وبشكل عام، نجد أن:

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}'(\text{س})\,\text{ءس} = \text{د}(\text{ب}) - \text{د}(\text{أ})$$

مثال (١٣):

أوجد قيمة كل من التكاملات التالية:

أ- $\int_{١}^{٣} (٣\text{س} + ٢)\,\text{ءس}$ **ب-** $\int_{١}^{٤} (٢\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١)\,\text{ءس}$

جـ - $\int_{-١}^{٢} (٢ + \text{س} - \text{س}^{٢})\,\text{ءس}$ **د-** $\int_{١}^{٣} \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٤}\,\text{ءس}$

الحـل:

(أ) $$\int_{١}^{٣} (٣\text{س} + ٢)\,\text{ءس} = \left[\frac{٣\text{س}^{٢}}{٢} + ٢\text{س}\right]_{١}^{٣}$$

$$= \left\{\frac{٣(٣)^{٢}}{٢} + ٢(٣)\right\} - \left\{\frac{٣(١)^{٢}}{٢} + ٢(١)\right\}$$

$$= ١٩,٥ - ٣,٥ = ١٦$$

(ب) $$\int_{١}^{٤} (٢\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١)\,\text{ءس} = \left[\frac{٢\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٣\text{س}^{٢}}{٢} - \text{س}\right]_{١}^{٤}$$

$$= \left\{\frac{٢(٤)^{٣}}{٣} + \frac{٣(٤)^{٢}}{٢} - ٤\right\} - \left\{\frac{٢(١)^{٣}}{٣} + \frac{٣(١)^{٢}}{٢} - ١\right\}$$

$$= \frac{٢}{٣}٦٢ - \frac{١}{٦}١ = ٦١,٥$$

(جـ) $$\int_{-١}^{٢} \left(٢ + س - س^{٢}\right) ءس = \left[٢س + \frac{س^{٢}}{٢} - \frac{س^{٣}}{٣}\right]_{-١}^{٢}$$

$$= \left\{٢(٢) + \frac{(٢)^{٢}}{٢} - \frac{(٢)^{٣}}{٣}\right\} - \left\{٢(-١) + \frac{(-١)^{٢}}{٢} - \frac{(-١)^{٣}}{٣}\right\}$$

$$= \frac{١}{٣}٣ - \left(-\frac{١}{٦}١\right) = \frac{١}{٣}٣ + \frac{١}{٦}١ = ٤,٥$$

(د) $$\int_{١}^{٣} \frac{٢س}{س^{٢}+٤} ءس = \left[لـو_{هـ}\left(س^{٢}+٤\right)\right]_{١}^{٣}$$

$$= لـو_{هـ}(٩+٤) - لـو_{هـ}(١+٤)$$

$$= لـو_{هـ}١٣ - لـو_{هـ}٥ = ٢,٥٦ - ١,٦١ = ٠,٩٥$$

٢- خصائص التكامل المحدود: Properties of Definite Integrals

سـوف نتناول باختصار بعض خصائص التكامل المحدود والتي تفيدنا في تطبيقاته العملية:

الخاصية (١): $$\int_{أ}^{ب} د(س) ءس = - \int_{ب}^{أ} د(س) ءس$$

الخاصية (٢): $$\int_{أ}^{أ} د(س) ءس = صفر$$

الخاصية (٣): $$\int_{أ}^{ب} د(س) ءس + \int_{ب}^{جـ} د(س) ءس = \int_{أ}^{جـ} د(س) ءس$$

الخاصية (٤): $$\int_{أ}^{ب} جـ . د(س) ءس = جـ \int_{أ}^{ب} د(س) ءس$$

الخاصية (٥): $$\int_{أ}^{ب} \left[ع(س) \pm ف(س)\right] ءس = \int_{أ}^{ب} ع(س) ءس \pm \int_{أ}^{ب} ف(س) ءس$$

٣- التكامل المحدود والمساحات: Definite Integral and Areas

أ- المساحة بين الدالة والمحور السيني

Area Between a Function and the X Axis

يمكن اســـتخدام التكامل المحدود في إيجاد المســـاحة ما بين المنحنى الذي يمثل الدالة والمحور الســيني والإحداثييْن الرأســييْن عند نقطتيْن محددتيْن على المحور الســيني. والأمثلة التالية توضح ذلك.

مثال (١٤):

أوجد المســاحة المحصــورة بين منحنى الدالة: $\text{د}(\text{س}) = -٢\text{س} + ٨$ والمحور الســيني والخطيْن $\text{س} = ١$، $\text{س} = ٤$.

الحــل:

$$\text{المساحة} = \int_{١}^{٤} (-٢\text{س} + ٨)\, \text{ء}\text{س} = \left[\frac{-٢\text{س}^{٢}}{٢} + ٨\text{س}\right]_{١}^{٤}$$

$$= \left[-\text{س}^{٢} + ٨\text{س}\right]_{١}^{٤} = \left\{-(٤)^{٢} + ٨(٤)\right\} - \left\{-(١)^{٢} + ٨(١)\right\}$$

$$= ١٦ - ٧ = ٩$$

ملحوظة:

الإشـارة الموجبة للمساحة تعنى إما أن منحنى الدالة يقع فوق المحور السيني أو أن جزءًا من المنحنى يقع فوق المحور الســيني وجزءًا أخر يقع تحته. وفي الحالة الثانية، فإن المســاحة المحســوبة تمثل المســاحة الصــافية، أي مقدار المســاحة فوق المحور الســيني مطروحاً منها مقدار المساحة تحته. (راجع مثال (١٦)).

مثال (١٥):

أوجد المساحة المحصورة بين المحور السيني ومنحنى الدالة:

$$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٣\text{س}$$

الحــل:

يلزم أولاً تحديد نقطتي تقاطع منحنى الدالة مع المحور الســـيني. وتتحدد هاتان النقطتان عند $\text{س} = \text{صفر}$.

أي أن: $\text{س}^{٢} + ٣\text{س} = \text{صفر}$

$\text{س}(\text{س} + ٣) = \text{صفر}$ وهذا يعطي: $\text{س} = \text{صفر}$ و $\text{س} = -٣$

وهـذا يعنى أن منحنى الـدالــة: $د(س) = س^{٢} + ٣س$ يقطع المحور الســـيني عنـد $س = $ صفر و $س = -٣$

وهكذا فإن المساحة المطلوبة تتحدد كما يلي:

$$\text{المساحة} = \int_{-٣}^{\text{صفر}} \left(س^{٢}+٣س\right) ءس = \left[\frac{س^{٣}}{٣} + \frac{٣س^{٢}}{٢}\right]_{-٣}^{\text{صفر}}$$

$$= \left\{\frac{(\text{صفر})^{٣}}{٣} + \frac{٣(\text{صفر})^{٢}}{٢}\right\} - \left\{\frac{(-٣)^{٣}}{٣} + \frac{٣(-٣)^{٢}}{٢}\right\}$$

$$= \text{صفر} - \left(\frac{-٢٧}{٣} + \frac{٢٧}{٢}\right) = ٩ - ١٣,٥ = -٤,٥$$

ويُلاحَظ هنا أن المساحة سالبة، مما يعنى أن المساحة تقع تحت المحور السيني.

مثال (١٦):

أوجد المســـاحة المحصـــورة بين منحنى الدالة: $ص = د(س) = س - ٥$ والمحور السيني والخطيْن: $س = $ صفر ، $س = ١٥$.

الحـل:

حيث أن الدالة هي: $د(س) = س - ٥$

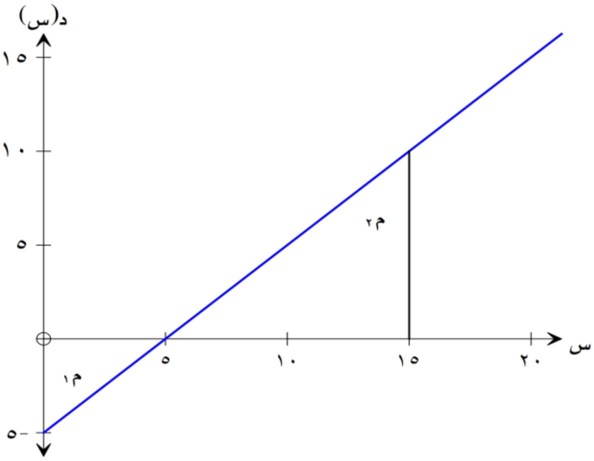
فإنه يمكننا اســـتنتاج أن الخط المســـتقيم لهذه الدالة (يُلاحَظ أن الدالة خطية) يقطع المحور السيني عندما $س - ٥ = $ صفر، أي عند النقطة $س = ٥$، بينما يقطـــع المحـــور الصادي عنــــــد النقطة $ص = -٥$ (أي قيمة $ص$ عندما $س = $ صـــفر). ويمكن ملاحظة ذلك في الشكل (٨ – ١).

ومن الشكل يمكننا أن نستنتج أن جزءًا من المساحة المطلوبة يقع فوق المحور السيني والجزء الآخر يقع تحت المحور السيني.

المساحة تحت المحور السيني $= م_{١} = \frac{١}{٢}(٥)(٥) = ١٢,٥$ مساحة مثلث.

وهذه المساحة يجب أن تكون سالبة لوقوعها تحت المحور السيني، أي أن: $م_{١} = -١٢,٥$

المساحة فوق المحور السيني $= م_{٢} = \frac{١}{٢}(١٠)(١٠) = ٥٠$ مساحة مثلـــث. وهي موجبة لوقوعها فوق المحور السيني، أي أن: $م_{٢} = ٥٠$



الشكل (٨ – ١)

المساحة المحصورة بين منحنى الدالة: د(س) = س – ٥

والمحور السيني والخطيْن: س = صفر ، س = ١٥

المساحة الصافية (م) = $\text{م}_{١} + \text{م}_{٢}$

$= -١٢,٥ + ٥٠ = ٣٧,٥$

ويمكن حل هذا المثال باستخدام التكامل المحدود كما يلي:

$$\text{المساحة (م)} = \int_{\text{صفر}}^{١٥} (\text{س} - ٥)\, \text{ءس} = \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٥\text{س}\right]_{\text{صفر}}^{١٥}$$

$$= \left\{\frac{(١٥)^{٢}}{٢} - ٥(١٥)\right\} - \left\{\frac{(\text{صفر})^{٢}}{٢} - ٥(\text{صفر})\right\}$$

$$= ٣٧,٥ - \text{صفر} = ٣٧,٥$$

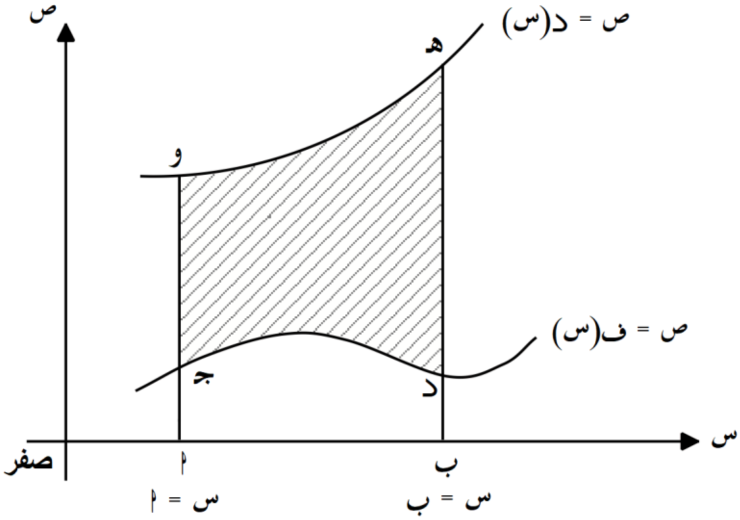
وهذا يؤكد ما أشرنا إليه من قبل بأن قيمة التكامل المحدود تعطى المساحة الصافية في حالة وقوع جزء من المساحة فوق المحور السيني ووقوع جزء آخر فوقه.

ب- المساحة بين المنحنيات: Areas Between Curves

إذا اعتبرنا المساحة المحصورة بين منحنى الدالة د(س) ومنحنى الدالة ف(س) والخطيْن س = أ، س = ب. وإذا افترضنا مبدئياً أن د(س) > ف(س) > صفر في الفترة أ ≤ س ≤ ب، فإن ذلك يعنى أن كلا المنحنيْن يقع فوق المحور السيني، وأن منحنى

الدالة د(س) يقع فوق منحنى الدالة ف(س). هذا والمساحة المطلوبة هي المساحة المظللة في الشكل (٨ – ٢). ومن الواضح أن هذه المساحة تمثل الفرق بين المساحة المحددة بمنحنى الدالة د(س) والمحور السيني وبين المساحة المحددة بمنحنى الدالة د(س) والمحور السيني. وهكذا فإن المساحة بين المنحنييْن يمثلها:

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس - \int_{أ}^{ب} ف(س)\, ءس = \int_{أ}^{ب} \left[د(س) - ف(س)\right] ءس$$



الشكل (٨ – ٢)
المساحة بين منحنييْن

ومن الشكل (٨ – ٢) يمكننا أن نستنتج أن المساحة بين المنحنييْن هي عبارة عن مساحة الشكل أ ب هـ و مطروحاً منها مساحة الشكل أ ب د جـ.

مثال (١٧):

أوجد المساحة المحصورة ما بين منحنى الدالة: د(س) = $س^{٢}$ + ٥ ومنحنى الدالة: ف(س) = $س^{٣}$ والخطيْن س = ١، س = ٢.

الحـل:

الشكل البياني للدالة د(س) = $س^{٢}$ + ٥ يقع فوق الشكل البياني للدالة ف(س)= $س^{٣}$ في الفترة ١ ≤ س ≤ ٢ {لاحظ أن د(١) > ف(١)، د(٢) > ف(٢)}.

وهكذا يمكن إيجاد المساحة المطلوبة كما يلي:

$$\int_{1}^{2}\left[\left(س^{2}+٥\right)-س^{3}\right]ءس=\left[\frac{س^{3}}{٣}+٥س-\frac{س^{4}}{٤}\right]_{1}^{2}$$

$$=\left\{\frac{(٢)^{3}}{٣}+٥(٢)-\frac{(٢)^{4}}{٤}\right\}-\left\{\frac{(١)^{3}}{٣}+٥(١)-\frac{(١)^{4}}{٤}\right\}$$

$$= ٨,٧ - ٥,١ = ٣,٦$$

مثال (١٨):

احسب مساحة المنطقة المحصورة ما بين منحنى الدالة $د(س) = -س^{2}$ ومنحنى الدالة $ف(س) = س^{2} - ٨$.

الحـل:

يلزم أولاً تحديد نقطتي تقاطع المنحنييْن وذلك على النحو التالي:

$$-س^{2} = س^{2} - ٨$$

$$٢س^{2} = ٨ \quad ، \quad س^{2} = ٤$$

$$س = -٢ \quad ، \quad س = ٢$$

وهكذا نجد أن المساحة المطلوبة تتحدد كما يلي:

$$\int_{-2}^{2}\left[-س^{2}-\left(س^{2}-٨\right)\right]ءس=\int_{-2}^{2}\left(-٢س^{2}+٨\right)ءس$$

$$=\left[\frac{-٢س^{3}}{٣}+٨س\right]_{-2}^{2}$$

$$=\left\{\frac{-٢(٢)^{3}}{٣}+٨(٢)\right\}-\left\{\frac{-٢(-٢)^{3}}{٣}+٨(-٢)\right\}$$

$$= ١٠,٧ - (-١٠,٧) = ١٠,٧ + ١٠,٧ = ٢١,٤$$

رابعاً: تطبيقات في مجالات الاقتصاد

والآن نوضح بعض التطبيقات المختلفة للتكامل في مجال الاقتصاد ومجالات أخرى، آخذين في الاعتبار الموضوعات التالية:

١- التكلفة الحدية

٢- التكلفة المتوسطة الحدية

٣- التكلفة الإضافية للإنتاج

٤- الإيراد الحدي

٥- الإيراد الحدي والطلب

٦- الربح الحدي

٧- دالة الاستهلاك

٨- فائض المستهلِك وفائض المنتِج

٩- إنتاج واستهلاك البترول

١٠-استراتيجية تنمية الموارد

وسـوف نتناول كلاًّ من هذه الموضـوعات بشــيء من التفصـيل مسـتعينين في ذلك بأمثلة عملية على النحو التالي:

١- التكلفة الحدية: Marginal Cost

مثال (١٩):

إذا كانت الدالة التي تصف التكلفة الحدية (بالجنيهات) لإنتاج منتَج معين هي:

$$\text{ت}'(\text{ك}) = \text{٨ك} + \text{٨٠٠}$$

حيث: ك عدد الوحدات المنتَجة.

فإذا كان معروفاً أن التكلفة الكلية لإنتاج ٤٠ وحدة هي ٨٠٠٠٠ جنيه، حدِّد دالة التكلفة الكلية.

الحـل:

لكي نحدد دالــة التكلفــة الكلية يجب أن نوجد عكس مشتقة التكلفة الحدية، أي تكامل دالة التكلفة الحدية.

$$\text{ت}(\text{ك}) = \int \text{ت}'(\text{ك})\, \text{دك}$$

$$= \int \left(\text{٨ك} + \text{٨٠٠}\right) \text{دك} = \frac{\text{٨ك}^{\text{٢}}}{\text{٢}} + \text{٨٠٠ك} + \text{ث}$$

أي أن دالة التكلفة الكلية هي:

$$\text{ت}(\text{ك}) = \text{٤ك}^{\text{٢}} + \text{٨٠٠ك} + \text{ث}$$

وحيث أن: $\text{ت}(\text{٤٠}) = \text{٨٠٠٠٠}$

$$\therefore \text{ت}(\text{٤٠}) = \text{٤}(\text{٤٠})^{\text{٢}} + \text{٨٠٠}(\text{٤٠}) + \text{ث} = \text{٨٠٠٠٠}$$

$$\text{ث} = \text{٨٠٠٠٠} - \text{٣٨٤٠٠} = \text{٤١٦٠٠}$$

وهي تمثل التكاليف الثابتة للإنتاج.

وهكذا نجد أن دالة التكلفة الكلية هي:

$$\text{ت}(\text{ك}) = \text{٤ك}^{\text{٢}} + \text{٨٠٠ك} + \text{٤١٦٠٠}$$

٢- التكلفة المتوسطة الحدية: Marginal Average Cost

مثال (٢٠):

إذا كانت التكلفة المتوسطة الحدية لإنتاج ك وحدة من منتَج ما تعطَى بالدالة:

$$\bar{ت}'(ك) = ٠,٠١ - \frac{٥٠٠}{ك^{٢}}$$

وأن إنتاج ٢٠٠ وحدة يكلف ٢٣٠٠ جنيه. أوجد دالة التكلفة الكلية.

الحـل:

دالة التكلفة المتوسطة = $\int$ دالة التكلفة المتوسطة الحدية

التكلفة المتوسطة $(\bar{ت}) = \int \left(٠,٠١ - \frac{٥٠٠}{ك^{٢}}\right) ءك$

أي أن: $\bar{ت}(ك) = ٠,٠١ك + \frac{٥٠٠}{ك} + ث$

التكلفة الكلية = عدد وحدات الإنتاج × التكلفة المتوسطة

$$= ك\left(٠,٠١ك + \frac{٥٠٠}{ك} + ث\right)$$

أي أن: $ت(ك) = ٠,٠١ك^{٢} + ٥٠٠ + كث$

وحيث أن: $ت(٢٠٠) = ٢٣٠٠$

$$٠,٠١(٢٠٠)^{٢} + ٥٠٠ + ٢٠٠ث = ٢٣٠٠$$

$$٢٠٠ث = ٢٣٠٠ - ٩٠٠ = ١٤٠٠ \quad ، \quad ث = ٧$$

أي أن دالة التكلفة الكلية هي:

$$ت(ك) = ٠,٠١ك^{٢} + ٧ك + ٥٠٠$$

٣- التكلفة الإضافية للإنتاج: Extra Cost of Production

مثال (٢١):

تنتج شـركة حاليا ١٥٠ وحدة أسـبوعياً من أحد منتَجاتها. ومن الخبرة السـابقة للشـركة، تتحدد تكلفة إنتاج الوحدة التالية رقم ك (أي التكلفة الحدية) وفقا للدالة:

$$ت'(ك) = ٢٥ - ٠,٠٢ك$$

احســب الزيادة الأســبوعية في التكلفة نتيجة لزيادة عدد الوحدات المنتَجة من ١٥٠ وحدة إلى ٢٠٠ وحدة.

الحــل:

دالة التكلفة الكلية = $\int$ دالة التكلفة الحدية

$$ت(ك) = \int (٢٥ - ٠,٠٢ك)\, ءك$$

$$= ٢٥ك - ٠,٠١ك^{٢} + ث$$

هذا وبالرغم من أنه ليس لدينا معلومات كافية لتحديد ثابت التكامل **ث**، إلا أن ذلك لا يعنينا هنا وذلك لأن:

$$ت(١٥٠) = ٢٥(١٥٠) - ٠,٠١(١٥٠)^{٢} + ث$$

$$ت(٢٠٠) = ٢٥(٢٠٠) - ٠,٠١(٢٠٠)^{٢} + ث$$

أي أن التكلفة الزيادة تتمثل في:

$$ت(٢٠٠) - ت(١٥٠) = ٢٥(٢٠٠ - ١٥٠) - ٠,٠١ [(٢٠٠)^{٢} - (١٥٠)^{٢}] + (ث - ث)$$

$$= ٢٥(٥٠) - ٠,٠١(١٧٥٠٠) = ١٠٧٥$$

٤- الإيراد الحدي: Marginal Revenue

مثال (٢٢):

إذا كانت دالة الإيراد الحدي لمنتَج إحدى الشركات هي:

$$ر^{\prime}(ك) = ٢٢٠٠٠٠ - ١٨ك$$

المطلوب:

(أ) حدد دالة الإيراد الكلى. (ب) ما هو مقدار الإيراد الكلى عند إنتاج وبيع ١٠٠ وحدة؟

الحــل:

(أ) دالة الإيراد الكلي = $\int$ دالة الإيراد الحدي

$$ر(ك) = \int (٢٢٠٠٠٠ - ١٨ك)\, ءك$$

أي أن: $ر(ك) = ٢٢٠٠٠٠ك - ٩ك^{٢} + ث$

وحيث أنه لا يكون هناك إيراد في حالة عدم بيع أي وحدات (ما لم ينُص على غير ذلك) فإن: د (صفر) = صفر، وهنا نجد أن: **ث** = صفر.

وهذا يعنى أن دالة الإيراد الكلى هي:

$$ر(ك) = ٢٢٠٠٠٠٠ك - ٩ك^{٢}$$

(ب) مقدار الإيراد عند بيع ١٠٠ وحدة هو:

$$ر(١٠٠) = ٢٢٠٠٠٠٠(١٠٠) - ٩(١٠٠)^{٢}$$

$$= ٢١٩١٠٠٠٠٠ \text{ جنيه}$$

ويمكن إيجاد ذلك بطريقة أخرى كما هو موضح في المثال التالي.

مثال (٢٣):

إذا كانت دالة الإيراد الحدي من منتَج إحدى الشركات هي:

$$ر'(ك) = -٠,٠٤ك + ١٠$$

حيث: ك عدد الوحدات المباعة.

المطلوب:

(أ) احسب الإيراد الكلى من بيع ٢٠٠ وحدة من هذا المنتَج.

(ب) ما هو مقدار الإيراد الإضافي نتيجة زيادة المبيعات من ١٠٠ وحدة إلى ٢٠٠ وحدة؟

الحـل:

(أ) الإيراد الكلى من بيع ٢٠٠ وحدة يمكن حســـــابه بطريقة مختلفة عن تلك المتبعة في مثال (٢٢) كما يلي:

$$\text{الإيراد الكلى المطلوب} = \int_{٠}^{٢٠٠} \left(-٠,٠٤ك + ١٠\right) دك$$

$$= \left[-٠,٠٢ك^{٢} + ١٠ك\right]_{٠}^{٢٠٠}$$

$$= -٠,٠٢\left(٢٠٠\right)^{٢} + ١٠\left(٢٠٠\right) - \text{صفر} = ١٢٠٠ \text{ جنيه}$$

(ب) $$\text{الإيراد الإضافي} = \int_{١٠٠}^{٢٠٠} \left(-٠,٠٤ك + ١٠\right) دك$$

$$= \left[-٠,٠٢ك^{٢} + ١٠ك\right]_{١٠٠}^{٢٠٠}$$

$$= \left\{-٠,٠٢(٢٠٠)^{٢} + ١٠(٢٠٠)\right\} - \left\{-٠,٠٢(١٠٠)^{٢} + ١٠(١٠٠)\right\}$$

$$= ١٢٠٠ - ٨٠٠ = ٤٠٠ \text{ جنيه}$$

ويمكن التعبير عن الإيراد الإضافي المطلوب كما يلي:

$$\int_{\text{١٠٠}}^{\text{٢٠٠}} \text{ر}'(\text{ك})\,\text{دك} = \int_{\text{٠}}^{\text{٢٠٠}} \text{ر}'(\text{ك})\,\text{دك} - \int_{\text{٠}}^{\text{١٠٠}} \text{ر}'(\text{ك})\,\text{دك}$$

$$= \text{ر}(\text{٢٠٠}) - \text{ر}(\text{١٠٠})$$

وهو ما يؤدى إلى نفس النتيجة.

٥- الإيراد الحدي والطلب: Marginal Revenue and Demand

مثال (٢٤):

يتحدد الإيراد الحدي لمؤسسة تجارية وفقا للدالة:

$$\text{ر}'(\text{ك}) = \text{٢٠} - \text{٠,٠٢ك} + \text{٠,٠٠٣ك}^{\text{٢}} \quad \text{جنيه}$$

حيث: ك عدد الوحدات المُباعة.

المطلوب:

(أ) أوجد دالة الإيراد الكلى.

(ب) ما هو مقدار الإيراد نتيجة بيع ١٠٠ وحدة من منتَج هذه الشركة؟

(جـ) حدد دالة الطلب على هذا المنتَج.

الحـل:

(أ) دالة الإيراد الكلي = $\int$ دالة الإيراد الحدي

$$\text{ر}(\text{ك}) = \int \text{ر}'(\text{ك})\,\text{دك}$$

$$= \int \left(\text{٢٠} - \text{٠,٠٢ك} + \text{٠,٠٠٣ك}^{\text{٢}}\right)\text{دك}$$

$$= \text{٢٠ك} - \text{٠,٠١ك}^{\text{٢}} + \text{٠,٠٠١ك}^{\text{٣}} + \textbf{ث}$$

وحيث أنه لا يكون هناك إيراد في حالة عدم بيع أي وحدات، أي أن:

ر(صفر) = صفر فإن ذلك يعنى أن: **ث** = صفر

وهكذا نجد أن دالة الإيراد الكلى هي:

$$\text{ر}(\text{ك}) = \text{٢٠ك} - \text{٠,٠١ك}^{\text{٢}} + \text{٠,٠٠١ك}^{\text{٣}}$$

(ب) عند بيع ١٠٠ وحدة نجد أن الإيراد الكلى يساوى:

$$\text{ر}(\text{١٠٠}) = \text{٢٠}(\text{١٠٠}) - \text{٠,٠١}(\text{١٠٠})^{\text{٢}} - \text{٠,٠٠١}(\text{١٠٠})^{\text{٣}}$$

$$= \text{٢٠٠٠} - \text{١٠٠} - \text{١٠٠٠} = \text{٩٠٠} \quad \text{جنيه}$$

(جـ) حيث أن: الإيراد الكلى = سعر بيع الوحدة × الكمية المطلوبة والمباعة

$$\text{سعر بيع الوحدة (س)} = \frac{\text{الإيراد الكلي}}{\text{الكمية المطلوبة و المباعة}} = \frac{\text{ر(ك)}}{\text{ك}}$$

أي أن: $$\text{س} = \frac{\text{٢٠ك} - \text{٠,٠١ك}^{٢} + \text{٠,٠٠١ك}^{٣}}{\text{ك}}$$

$$= \text{٢٠} - \text{٠,٠١ك} + \text{٠,٠٠١ك}^{٢}$$

وهذا يعنى أن دالة الطلب تتمثل في:

$$\text{س} = \text{٢٠} - \text{٠,٠١ك} + \text{٠,٠٠١ك}^{٢}$$

حيث: س سعر الوحدة من السلعة ، ك كمية الطلب.

٦- الربح الحدي: Marginal Profit

مثال (٢٥):

إذا كانت دالة الربح الحدي لمؤسسة ما هي:

ع´(ك) = ٥ − ٠,٠٢ك جنيه

وأن الأرباح الكلية المحقَّقة من بيع ١٠٠ وحدة هي ٣١٠ جنيه، ما هي دالة الربح الكلية؟ ثم حدد مقدار الربح الكلى عند بيع ٢٠٠ وحدة.

الحـل:

$$\text{ع(ك)} = \int \text{ع´(ك)دك} = \int (\text{٥} - \text{٠,٠٢ك})\text{دك}$$

$$= \text{٥ك} - \text{٠,٠١ك}^{٢} + \text{ث}$$

وحيث أن: ع(١٠٠) = ٣١٠

∴ ع(١٠٠) = ٥(١٠٠) – ٠,٠٠١(١٠٠)^{٢} + ث = ٣١٠

ث = ٣١٠ – ٤٩٠ = -١٨٠

أي أن دالة الربح الكلى هي:

$$\text{ع(ك)} = \text{٥ك} - \text{٠,٠١ك}^{٢} - \text{١٨٠}$$

مقدار الربح الكلى عند بيع ٢٠٠ وحدة هو:

ع(٢٠٠) = ٥(٢٠٠) – ٠,٠٠١(٢٠٠)^{٢} – ١٨٠ = ٧٨٠ جنيه

٧- دالة الاستهلاك: Consumption Function

إذا كانت غ ترمز إلى الدخل الكلى (الناتج القومي الإجمالي) لدولة من الدول. فإن كل فرد من السكان يتلقى جزءًا من هذا الدخل حيث يقرر أن ينفق جزءًا من دخله على شراء السلع والخدمات ثم يدخر المتبقي من دخله بعد ذلك. فإذا رمزنا إلى إجمالي المنفَق من قبل سكان هذه الدولة على السلع والخدمات (أي إجمالي الاستهلاك) بالرمز س، وإلى إجمالي المدخرات بالرمز م. وهكذا نجد أن: س + م = غ، أي أن:

الاستهلاك + المدخرات = الدخل الكلى

وبصفة عامة، تُحدَّد كمية المدخرات بواسطة الدخل القومي (أي أن المدخرات دالة للدخل القومي). ويمكننا أن نعبِّر عن المدخرات بالدالة: م = د(غ). وحينئذ تتحدد كمية الاستهلاك بالدالة: س = غ − د(غ).

وإذا زاد الدخل القومي بمقدار Δ غ، فإن المدخرات والاستهلاك يحدث فيهما زيادة أيضا مقدارها Δم، Δس على الترتيب، حيث:

$$\Delta م + \Delta س = \Delta غ \quad ، \quad \Delta م = د(غ + \Delta غ) - د(غ)$$

هذا وتمثل النسبة $\frac{\Delta م}{\Delta غ}$ نسبة الزيادة في المدخرات إلى مقدار الزيادة في الدخل، كما تمثل النسبة $\frac{\Delta س}{\Delta غ}$ نسبة الزيادة في الاستهلاك إلى مقدار الزيادة في الدخل حيث:

$$\frac{\Delta م}{\Delta غ} + \frac{\Delta س}{\Delta غ} = \frac{\Delta س + \Delta م}{\Delta غ} = \frac{\Delta غ}{\Delta غ} = ١$$

وعندما تؤول Δ غ ← صفر، فإننا نحصل على المشتقات التفاضلية التالية:

$\frac{د م}{د غ}$ وتمثل الميل الحدي للادخار، أي نسبة الزيادة في الادخار نتيجة حدوث زيادة طفيفة في الدخل الكلي،

$\frac{د س}{د غ}$ وتمثل الميل الحدي للاستهلاك، أي نسبة الزيادة في الاستهلاك نتيجة حدوث زيادة طفيفة في الدخل الكلى.

وهنا نجد أن: $\frac{د م}{د غ} + \frac{د س}{د غ} = ١$

مثال (٢٦):

إذا كان الميل الحدي للاستهلاك في إحدى الدول النامية يتحدد وفقا للصيغة التالية:

$$\frac{\text{د}\text{س}}{\text{د}\text{خ}} = ٠,٢٥ + \frac{٠,٣}{\sqrt[٣]{\text{خ}}} \quad \text{بليون جنيه}$$

حيث: س كمية الاستهلاك ، خ الدخل الكلى.

فإذا كان الاستهلاك يعادل الدخل القومي عندما يبلغ الدخل القومي ٨ بليون جنيه.

أوجد دالة الاستهلاك س(خ). ثم حدد نسبة الاستهلاك إلى الدخل القومي عندما يبلغ الدخل القومي ١٠ بليون جنيه.

الحـل:

حيث أن: $\frac{\text{د}\text{س}}{\text{د}\text{خ}} = \text{س}'(\text{خ})$

دالة الاستهلاك $\text{س}(\text{خ}) = \int \text{س}'(\text{خ})\, \text{ء}\text{خ} = \int \left(٠,٢٥ + \frac{٠,٣}{\sqrt[٣]{\text{خ}}}\right) \text{ء}\text{خ}$

$$= \int \left(٠,٢٥ + ٠,٣\,\text{خ}^{\frac{-١}{٣}}\right) \text{ء}\text{خ} = ٠,٢٥\,\text{خ} + ٠,٤٥\,\text{خ}^{\frac{-٢}{٣}} + \text{ث}$$

وحيث أن الاستهلاك يساوى الدخل القومي عندما يبلغ الدخـل القومي ٨ بليون جنيه، أي أن:

$$\text{س}(٨) = ٠,٢٥(٨) + ٠,٤٥(٨)^{\frac{٢}{٣}} + \text{ث} = ٨$$

$$٠,٢٥(٨) + ٠,٤٥ \times \sqrt[٣]{(٨)^{٢}} + \text{ث} = ٢ + ١,٨ + \text{ث} = ٨$$

$$\text{ث} = ٨ - ٣,٨ = ٤,٢$$

أي أن دالة الاستهلاك هي:

$$\text{س}(\text{خ}) = ٠,٢٥\,\text{خ} + ٠,٤٥\,\text{خ}^{\frac{٢}{٣}} + ٤,٢ \quad \text{بليون جنيه}$$

مقدار الاستهلاك عندما يبلغ الدخل ١٠ بليون جنيه هو:

$$\text{س}(١٠) = ٠,٢٥(١٠) + ٠,٤٥(١٠)^{\frac{٢}{٣}} + ٤,٢$$

$$= ٢,٥ + ٢,١ + ٤,٢ = ٨,٨ \quad \text{بليون جنيه}$$

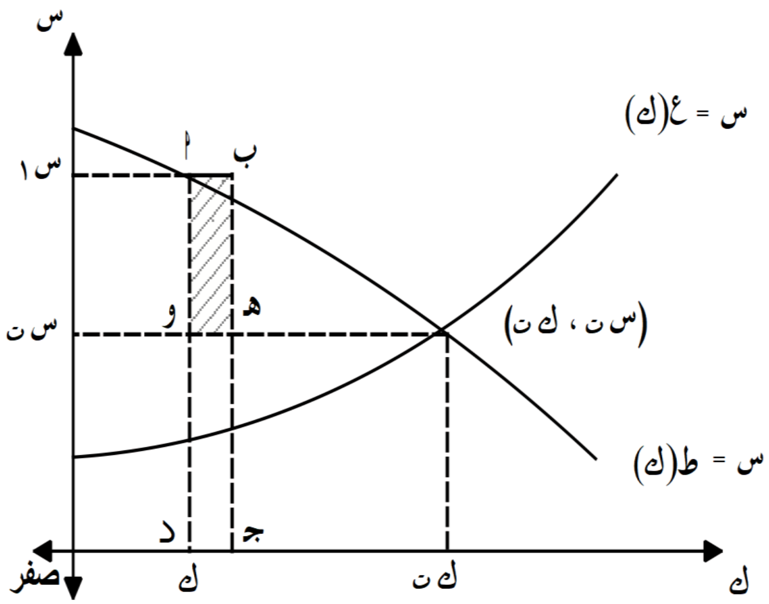
أي أن الاستهلاك يبلغ ٨,٨ بليون جنيه عندما يكون الدخل القومي مساوياً لـ ١٠ بليون جنيه.

وهكذا نجد أن نسبة الاستهلاك إلى الدخل القومي هي $\frac{٨,٨}{١٠}$ = ٠,٨٨ من إجمالي الدخل القومي. وهذا يعنى أن نسبة المدخرات تبلغ ٠,١٢.

٨- فائض المستهلِك وفائض المنتِج:

Consumer's and Producer's Surplus

إذا كان منحنى الطلب على سلعة معينة هو: س = ط(ك)، ومنحنى العرض للسلعة هو: س = ع(ك)، حيث ك تشير الى كمية السلعة التي يمكن أن تُباع أو تعُرض عند السعر س لكل لوحدة. وبصفة عامة، فإن دالة الطلب ط(ك) تكون متناقصة، وهذا التناقص يشير إلى أن المستهلكين سوف تقل مشترياتهم لو زاد سعر السلعة. وعلى الجانب الآخر، فإن دالة العرض ع(ك) تكون متزايدة بشكل عام، ذلك لأن المنتِجين على استعداد لأن يزيدوا كمية عرضهم لو أنهم حصلوا على سعر أكبر. هذا وتوازن السوق ($ك_ت$، $س_ت$) هو نقطة تقاطع منحنى الطلب مع منحنى العرض. وهذا يعنى أنه عند السعر $س_ت$ لكل وحدة، فإن المستهلكين يكونون على استعداد لشراء $ك_ت$ وحدة من السلعة. ويكون المنتِجون على استعداد أيضا لبيع نفس العدد من الوحدات $ك_ت$، أنظر الشكل (٨ - ٣).



الشكل (٨ - ٣)

فائض المستهلِك وفائض المنتِج

ومن الشكل البياني لمنحنى الطلب يتضح لنا أن كمية الطلب تزداد كلما انخفض سعر السلعة. وهذا يدل ضمنياً على أن هناك بعض المستهلكين الذين هم على استعداد لأن يشتروا السلعة بسعر يزيد عن سعر السوق ($\text{س}_{\text{ن}}$) والذي ليس أمامهم أي خيار سوى تحمله (أي سعر السوق). لذلك فإن هؤلاء المستهلكين يحققون في الواقع مدخرات كنتيجة لآلية السوق الحر.

والآن لنفترض أن الكمية Δك من الوحدات تقع ما بين $\text{ك}_{١}$ و $\text{ك}_{١} + \Delta\text{ك}$ وهنا يمكن تفسير المساحة $\text{س}_{١}(\Delta\text{ك})$ للمستطيل أ ب د جـ في الشكل (٨ - ٣) على أنها كمية النقود الإجمالية التي يدفعها المستهلكون في Δك من الوحدات إذا كان السعر هو $\text{س}_{١} = \text{د}(\text{ك}_{١})$.

وعند سعر التوازن $\text{س}_{\text{ن}}$، فإن كمية النقود المُنفَقة بالفعل بواسطة المستهلكين في شراء Δك من الوحدات هو $\text{س}_{\text{ن}}(\Delta\text{ك})$. وبعبارة أخرى، فإن المستهلكين يوفرون حينئذ ما مقداره:

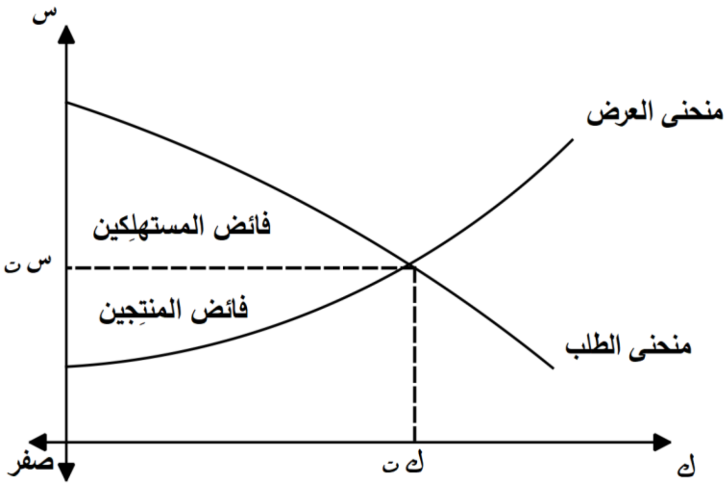
$$\text{س}_{١}(\Delta\text{ك}) - \text{س}_{\text{ن}}(\Delta\text{ك}) = [\text{د}(\text{ك}_{١}) - \text{س}_{\text{ن}}]\,\Delta\text{ك}$$

وهذا الوفر يساوى مساحة المستطيل أ ب هـ و المظللة في الشكل (٨ - ٣). ولو قمنا بقسمة المدى من ك = صفر الى $\text{ك} = \text{ك}_{\text{ن}}$ على عدد كبير من الفترات طول كل منها Δك فإننا سوف نحصل على نتيجة مماثلة لكل فترة. حيث تساوى الوفورات التي يحققها المستهلكون مساحة مستطيل، مثل أ ب هـ و، والذي يقع ما بين منحنى الطلب والخط الأفقي $\text{س} = \text{س}_{\text{ن}}$. وبتجميع مثل هذه الوفورات من ك = صفر حتى $\text{ك} = \text{ك}_{\text{ن}}$، فإننا نحصل على الوفورات الكلية للمستهلكين وهي ما تسمى بـــ "فائض المستهلكين". ويمثل هذا الفائض المساحة المحصورة بين منحنى الطلب $\text{س} = \text{ط}(\text{ك})$ والخط الأفقي $\text{س} = \text{س}_{\text{ن}}$، أنظر الشكل (٨ - ٤).

وهكذا فإن فائض المستهلكين يحدَّد بالتكامل المحدود:

$$\textbf{فائض المستهلكين} = \int_{٠}^{\text{ك}_{\text{ن}}} [\text{ط}(\text{ك}) - \text{س}_{\text{ن}}]\,\text{دك}$$

$$\textbf{فائض المستهلكين} = \int_{٠}^{\text{ك}_{\text{ن}}} \text{ط}(\text{ك})\,\text{دك} - \text{س}_{\text{ن}}\,\text{ك}_{\text{ن}} \quad \Leftarrow \quad (٥)$$



الشكل (٨ - ٤)

فائض المستهلِك وفائض المنتِج

حيث: $ط(ك)$ دالة الطلب ،

$س_{ت}$ سعر التوازن ، $ك_{ت}$ كمية التوازن.

وبالمثل فإنه في السوق الحر نجد أن هناك منتِجين على استعداد لأن يبيعوا السلعة بسعر يقل عن سعر التوازن $س_{ت}$ والذي يقوم المستهلكون بتحمله بالفعل. وفي حالة كتلك، يحقق المنتِجون منفعةً من وراء ذلك، وهي (أي منفعة المنتِجين) ما تسمى بـ "فائض المنتِجين".

بمنطق مماثل لما سبق، يمكن تحديد فائض المنتِجين كما يلي:

$$\textbf{فائض المنتِجين} = \int_{0}^{ك_{ت}} [س_{ت} - ع(ك)]\, دك$$

$$\textbf{فائض المنتِجين} = س_{ت}\, ك_{ت} - \int_{0}^{ك_{ت}} ع(ك)\, دك \qquad \Leftarrow \qquad (٦)$$

حيث: $ف(ك)$ دالة العرض ، $س_{ت}$ سعر التوازن ، $ك_{ت}$ كمية التوازن.

ويمثل فائض المنتِج – هندسياً - المساحة ما بين منحنى العرض والخط الأفقي $س = س_{ت}$، أنظر الشكل (٨ - ٤).

مثال (٢٧):

أوجد فائض المستهلكين وفائض المنتِجين لمنتَج معين دالة الطلب ودالة العرض له هما:

دالة الطلب: $س = ١٥ - ٢ك$ ، **دالة العرض:** $س = ٣ + ك$

وذلك بافتراض توازن السوق.

الحـل:

لإيجاد سعر وكمية التوازن:

$$\text{١٥} - \text{٢ك} = \text{٣} + \text{ك}$$

$$\therefore\ \text{٣ك} = \text{١٢}\ \text{،}\ \ \text{ك} = \text{٤}$$

وبالتعويض عن قيمة ك في دالة الطلب:

$$\text{س} = \text{١٥} - \text{٢}(\text{٤}) = \text{١٥} - \text{٨} = \text{٧}$$

أي أنه يكون هناك توازن في السوق عندما ما يبلغ سعر السلعة ٧، وحينئذ تكون كمية الطلب = كمية العرض = ٤ وحدات.

أي أن: $\text{س}_{\text{ت}} = \text{٧}$ ، $\text{ك}_{\text{ت}} = \text{٤}$

$$\text{فائض المستهلك} = \int_{\text{٠}}^{\text{ك}_{\text{ت}}} \text{ط}(\text{ك})\,\text{ءك} - \text{س}_{\text{ت}}\,\text{ك}_{\text{ت}}\ \text{،}$$

$$\text{ط}(\text{ك}) = \text{١٥} - \text{٢ك} \qquad \text{دالة الطلب}$$

$$\therefore\ \text{فائض المستهلك} = \int_{\text{٠}}^{\text{٤}} (\text{١٥} - \text{٢ك})\,\text{ءك} - \text{٧}(\text{٤}) = \left[\text{١٥ك} - \text{ك}^{\text{٢}}\right]_{\text{صفر}}^{\text{٤}} - \text{٢٨}$$

$$= \{\text{١٥}(\text{٤}) - (\text{٤})^{\text{٢}}\} - \text{صفر} - \text{٢٨}$$

$$= \text{٦٠} - \text{١٦} - \text{٢٨}$$

$$= \text{٦٠} - \text{٤٤} = \text{١٦}$$

$$\text{فائض المنتِج} = \text{س}_{\text{ت}}\,\text{ك}_{\text{ت}} - \int_{\text{٠}}^{\text{ك}_{\text{ت}}} \text{ع}(\text{ك})\,\text{ءك}$$

$$\text{ع}(\text{ك}) = \text{٣} + \text{ك} \qquad \text{دالة العرض}$$

$$\therefore\ \text{فائض المنتِج} = \text{٧}(\text{٤}) - \int_{\text{٠}}^{\text{٤}} (\text{٣} + \text{ك})\,\text{ءك} = \text{٢٨} - \left[\text{٣ك} + \frac{\text{ك}^{\text{٢}}}{\text{٢}}\right]_{\text{٠}}^{\text{٤}}$$

$$= \text{٢٨} - \{\text{٣}(\text{٤}) + \frac{(\text{٤})^{\text{٢}}}{\text{٢}} - \text{صفر}\}$$

$$= \text{٢٨} - \text{٢٠} = \text{٨}$$

٩- إنتاج واستهلاك البترول: Oil Production and Oil Consumption

إنتاج البترول: Oil Production

مثال (٢٨):

إذا كان معدل الإنتاج اليومي (بالبراميل) لبئر بترول يتفاوت في كميته وفقا للصيغة:

$$ج'(ن) = \frac{١٢٠٠٠٠٠}{(ن+١٦٠٠)^{١,٥}}$$

حيث: ن هي الزمن (بالأيام) منذ البداية الأولى للإنتاج.

المطلوب:

(أ) احسب الإنتاج الكلى من البترول حتى اللحظة الزمنية ن.

(ب) ما هي كمية الإنتاج الكلى المحتمل الحصول عليها من البئر؟

الحـل:

(أ) يمكن إيجاد دالة الإنتاج اليومي للبترول ج(ن) كما يلي:

$$ج(ن) = \int \frac{١٢٠٠٠٠٠}{(ن+١٦٠٠)^{١,٥}} \, ءن$$

$$= \int ١٢٠٠٠٠٠(ن+١٦٠٠)^{-١,٥} \, ءن$$

$$= ١٢٠٠٠٠٠\left[\frac{(ن+١٦٠٠)^{-٠,٥}}{-٠,٥}\right] + ث$$

أي أن: $ج(ن) = -٢٤٠٠٠٠٠(ن+١٦٠٠)^{-٠,٥} + ث$

وحيث أن ن تمثل الزمن منذ البداية الأولى للإنتاج، فإن ج (صفر) = صفر.

وهكذا نجد أن: $-٢٤٠٠٠٠٠(\text{صفر}+١٦٠٠)^{-٠,٥} + ث = \text{صفر}$

$$ث = \frac{٢٤٠٠٠٠٠}{\sqrt{١٦٠٠}} = \frac{٢٤٠٠٠٠٠}{٤٠} = ٦٠٠٠٠$$

أي أن دالة الإنتاج اليومي للبترول هي:

$$ج(ن) = ٢٤٠٠٠٠٠(ن+١٦٠٠)^{-٠,٥} + ٦٠٠٠٠$$

$$= ٢,٤(١٠)^{٦}[٠,٠٢٥ - (ن + ١٦٠٠)^{-٠,٥}]$$

(ب) كمية الإنتاج الكلي المحتملة تتمثل في:

$$\lim_{ن\to\infty} ع(ن) = \lim_{ن\to\infty} [٢,٤(١٠)(٠,٠٢٥)^{٦} - (\frac{١}{\sqrt{ن+١٦٠٠}})]$$

$$= ٢,٤[(١٠)(٠,٠٢٥)^{٦} - صفر]$$

$$= ٢,٤(١٠)(٠,٠٢٥)^{٦} = ٦٠٠٠٠$$

∴ كمية الإنتاج المحتملة للبئر = ٦٠٠٠٠ برميل.

استهلاك البترول: Oil Consumption

مثال (٢٩):

كانت الكمية المستهلكة في منطقة معينة في أحد البلدان ٥ بليون برميل وذلك خلال عام ١٩٩١. فإذا كان الطلب على البترول يتنامى بمعدل أسى مقداره ١٠٪ كل سنة، أي أن معدل الاستهلاك السنوي س(ن) في السنة ن تحدده الدالة:

$$س(ن) = ٥ هـ^{٠,١ ن}$$

حيث ن مقاسة بالسنوات، ن = صفر في أول يناير ١٩٩١، س(ن) مقاسة ببلايين البراميل كل سنة.

إذا استمر تزايد الطلب على البترول بنفس المعدل المشار إليه، ما هي كمية البترول المتوقع استهلاكها خلال ٢٠ سنة: من أول يناير ١٩٩١م وحتى أول يناير سنة ٢٠١١م.

الحـل:

$$\text{كمية الاستهلاك المطلوبة} = \int_{٠}^{٢٠} ٥ هـ^{٠,١ ن} \, ءن = ٥ \int_{٠}^{٢٠} هـ^{٠,١ ن} \, ءن$$

$$= ٥\left[\frac{هـ^{٠,١ ن}}{٠,١}\right]_{٠}^{٢٠} = ٥\left[١٠ هـ^{٠,١ ن}\right]_{٠}^{٢٠}$$

$$= ٥[١٠ هـ^{٠,١(٢٠)} - ١٠ هـ^{٠,١(صفر)}]$$

$$= ٥[١٠ هـ^{٢} - ١٠ هـ^{صفر}] = ٥(٦٣,٩)$$

$$= ٣١٩,٥ \text{ بليون برميل}$$

أي أن كمية البترول المتوقَّع استهلاكها خلال الفترة (١٩٩١/١/١ - ٢٠١١/١/١) = ٣١٩,٥ بليون برميل.

١٠- إستراتيجية تنمية الموارد: Resource Development Strategy

مثال (٣٠):

يمكن لشركة تعدين أن تختار بين إستراتيجيتيْن (أ، ب) وذلك من أجل استغلال مواردها.
وتتطلب الإستراتيجية (أ) تكلفة مبدئية مقدارهـــا ٢٥ مليون جنيه، وسوف تدر ربحاً صافياً مقداره ١٠ مليون جنيه كل سنة ولمدة ٢٠ سنة قادمة. وأما الإستراتيجية (ب) فتتطلب تكلفة مبدئية مقدارها ٦٠ مليون جنيه، وسوف تدر ربحاً صافياً سنوياً مقداره ٢٠ مليون جنيه ولمدة ١٠ سنوات قادمة.
احسب القيمة الحالية لأرباح كل من الإستراتيجيتيْن مفترضاً أن معدل الخصم الرسمي ١٠٪.
ثم حدد أي منهما هي الأفضل.

ملحوظة:

إذا كان معدل الخصم ص، معدل الأرباح الصافية السنوية ع، المدة ن سنة. فإن القيمة الحالية للأرباح تتحدد كما يلي:

$$\text{القيمة الحالية للأرباح} = \int_{0}^{ن} ع\, هـ^{-صن}\, ءن$$

حيث: ص معدل الخصم.

الحـل:

الإستراتيجية (أ):

معدل الأرباح: ع (ن) = ١٠، معدل الخصم (ص) = ٠,١ ، ن = ٢٠.

∴ القيمة الحالية للأرباح الصافية = القيمة الحالية للأرباح – التكلفة

$$= \int_{0}^{٢٠} ١٠هـ^{-٠,١ن}\, ءن - ٢٥$$

$$= ١٠\left[\frac{هـ^{-٠,١ن}}{-٠,١}\right]_{0}^{٢٠} - ٢٥ = ١٠٠\left[-هـ^{-٠,١ن}\right]_{0}^{٢٠} - ٢٥$$

$$= ١٠٠(-هـ^{-٢} + هـ^{صفر}) - ٢٥ = ١٠٠(١ - هـ^{-٢}) - ٢٥$$

$$= ٨٦,٤٧ - ٢٥ = ٦١,٤٧ \text{ مليون جنيه}$$

∴ القيمة الحالية للأرباح الصافية للإستراتيجية (أ) = ٦١,٤٧ مليون جنيه

الإستراتيجية (ب):

معدل الأرباح ع(ن) = ٢٠ ، معدل الخصم = ٠,١ ، ن = ١٠

وبالمثل:

$$\text{القيمة الحالية للأرباح الصافية} = \int_{٠}^{١٠} ٢٠\,هـ^{-٠,١ن}\,ءن - ٦٠$$

$$= \left[-٢٠٠\,هـ^{-٠,١ن}\right]_{٠}^{١٠} - ٦٠ = -٢٠٠\left(هـ^{-١} - هـ^{صفر}\right) - ٦٠$$

$$= ٢٠٠\left(١ - هـ^{-١}\right) - ٦٠ = ١٢٦,٤٢ - ٦٠ = ٦٦,٤٢ \text{ مليون جنيه.}$$

أي أن القيمة الحالية للأرباح الصافية للاستراتيجية (ب) = ٦٦,٤٢ مليون جنيه.

وحيث أن القيمة الحالية للأرباح الصافية في الإستراتيجية (ب) هي الأكبر (٦٦,٤٢ أكبر من ٦١,٤٧) فإنها تفضَّل على الإستراتيجية (أ).

وسوف نكتفي بهذا القدر في تناولنا لتطبيقات التكامل في مجال الاقتصاد ومجالات أخرى، آملين أن يكون في ذلك كل نفع للقارئ في حياته العملية.

تمارين

الفصل الثامن

١- أوجد التكامل لكل من:

أ- $\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٦\text{س}$ **ب-** $٢٠\text{س}^{٤} + ٨\text{س}^{٣} - ٤\text{س}$

جـ- $\sqrt{\text{س}^{٣} + ٨\text{س} + ١٠}$ **د-** $\text{س}^{٣}$

هـ- $-١٨\text{س}^{٥} + ٩\text{س}^{٢} - ١٠\text{س}$ **و-** $(\text{س} + ٢)^{٢}$

٢- أوجد التكاملات التالية:

أ- $\int \frac{٤\text{س}}{١٠٠ + \text{س}^{٢}} \, \text{ءس}$ **ب-** $\int \frac{١٨}{٦\text{س} + ٥} \, \text{ءس}$

جـ- $\int \frac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س}^{٤} - ٤\text{س}} \, \text{ءس}$ **د-** $\int \sqrt{٩\text{س} - ٣\text{س}^{٢}} \, (٣ - ٢\text{س}) \, \text{ءس}$

٣- أوجد التكاملات التالية:

أ- $\int (\text{س} + ٤) \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \, \text{ءس}$ **ب-** $\int ٥\text{س} \, \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{ءس}$

جـ- $\int \text{س}^{٢} \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \, \text{ءس}$ **د-** $\int \text{س} (\text{س} + ٢)^{٤} \, \text{ءس}$

٤- باستخدام الكسور الجزئية أوجد التكاملات التالية:

أ- $\int \frac{١٠ - ٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} - ٤} \, \text{ءس}$ **ب-** $\int \frac{٧ - ٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١} \, \text{ءس}$

جـ- $\int \frac{٤\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٦}{\text{س}^{٣} - \text{س}} \, \text{ءس}$ **د-** $\int \frac{٥\text{س} - ٧}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ١٥} \, \text{ءس}$

هـ- $\int \frac{\text{س} - ٥}{\text{س}^{٣} - ٩\text{س}} \, \text{ءس}$ **و-** $\int \frac{٣\text{س}^{٢} - \text{س} + ٥}{\text{س}^{٣} - ٤\text{س}} \, \text{ءس}$

٥- أوجد التكاملات التالية:

أ- $\int_{٢}^{٣} (\text{س} + ٢)\ \text{ءس}$ ب- $\int_{٠}^{٤} (٤\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢})\ \text{ءس}$

جـ- $\int_{٠}^{٢} (\text{س} + ٢)^{٢}\ \text{ءس}$ د- $\int_{١-}^{٢} ١٢\,\text{هـ}^{٦\text{س}}\ \text{ءس}$

هـ- $\int_{٢}^{٤} \frac{-١٢\text{س}^{٢}}{٢\text{س}^{٣} + ٣}\ \text{ءس}$ و- $\int_{٤}^{٦} \frac{٦\text{س}}{٣\text{س}^{٢} - ٥}\ \text{ءس}$

٦- أوجد المساحة المحصورة بين الدالة د(س) والمحور السيني والخطيْن المُشار إليهما في كل حالة:

أولاً: د(س) = ١٦ – ٢س، بين س = ٢ ، س = ٦.

ثانياً: د(س) = ١٠ – س^{٢} ، بين س = -١ ، س = ١.

ثالثاً: د(س) = ١٠س – س^{٢}، بين س = -٥ ، س = ٥.

رابعاً: د(س) = -س^{٢}+ ١، بين س = صفر ، س = ٣.

٧- أوجد المساحة المحصورة بين د(س)، ف(س) حسب ما هو موضح في كل حالة من الحالات التالية:

أولاً: د(س) = س + ٢ ، ف(س) = ١ – ٢س

خلال الفترة: ٠ ≤ س ≤ ٥

ثانياً: د(س) = س^{٢}- ٢س ، ف(س) = س - ٤

خلال الفترة: -١ ≤ س ≤ ٣

ثالثاً: د(س) = س^{٢}+٢، ف(س) = - هـ$^{\text{س}}$

خلال الفترة: -١ ≤ س ≤ ٤

٨- إذا كانت التكلفة الحدية لإنتاج ك وحدة من منتَج معين في أحد المؤسسات الصناعية تمثلها الدالة:

ت´(ك) = ٢٤ - ٠,٠٣ك + ٠,٠٠٦ك^{٢}

وكانت تكلفة إنتاج ٢٠٠ وحدة هي ٢٢٧٠٠ جنيه.

المطلوب:

أولاً: إيجاد دالة التكلفة الكلية المتغيرة.

ثانياً: تحديد التكاليف الثابتة، ومن ثم دالة التكلفة الكلية للمؤسسة.

ثالثاً: إيجاد تكلفة إنتاج ٥٠٠ وحدة.

رابعاً: إذا كانت الوحدة الواحدة من المنتَج تباع بسعر ٩٠ جنيها، حدد مستوى الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح ممكن.

٩- إذا كانت دالة الإيراد الحدي لأحد منتَجات مؤسسة ما هي:

ر َ(ك) = ٤ - ٠,٠١ ك

حيث: ك عدد الوحدات المباعة.

المطلوب:

أولاً: أوجد مقدار الإيراد المتوقَّع الحصول عليه من بيع ك وحدة من هذا المنتَج.

ثانياً: ما هي دالة الطلب على هذا المنتَج؟

١٠- إذا كان الربح الحدي لمنتَج معين في إحدى الشركات تمثله الدالة:

ر َ(ك) = ١٢ - ٠,٢ ك - ٠,٠٣ ك^{٢} جنيه

حيث: ك عدد الوحدات المُبَاعة.

المطلوب:

أولاً: إيجاد دالة الإيراد الكلى.

ثانياً: ما هو مقدار الإيراد المتوقَّع من بيع ٢٠ وحدة؟

ثالثاً: ما هي دالة الطلب على هذا المنتَج؟

رابعاً: ما هو عدد الوحدات التي تكون المؤسســـــة قادرة على بيعه لو أنها تقاضـــت ٣ جنيهات عن كل وحدة مباعة؟

١١- إذا كانت الدالة التي تصـف الربح الحدي من إنتاج وبيع ك وحدة من أحد المنتَجات هي

ع َ(ك) = -٦ ك + ٤٥٠ جنيه

فإذا كانت الأرباح الكلية تساوى ٥٠٠٠ جنيه إذا تم بيع ١٠٠ وحدة من هذا المنتَج.

أوجد دالة الربح الكلي. ثم حدد قيمة الربح عند بيع ١٠٠٠ وحدة.

١٢- إذا كان الميل الحدي للادخار (م) في إحدى الدول النامية يتحدد وفقا للصيغة التالية:

حيث: م تمثل الادخار بينما غ تمثل الدخل.

وتبلغ قيمة الاستهلاك (س) ٧ بليون جنيه عندما يكون الدخل ٩ مليون جنيه.

أوجد دالة الاستهلاك س (غ).

١٣- إذا كان الطلب على سلعة معينة والمعروض منها يمثلهما الدالتان:

س = ١٠٠ - ك^{٢} **دالة الطلب**

س = ٥٢ + ٢ ك **دالة العرض**

بافتراض توازن السوق، احسب فائض المستهلكين وفائض المنتِجين.

١٤- أعد حل التمرين (١٣) في حالة:

دالة الطلب: س = ١٧ - ٠,٥ ك

دالة العرض: س = ٥ + ٠,٣ ك

١٥- شركة للتعدين يجب أن تقرر الاختيار ما بين إستراتيجيتيْن (أ ، ب) وذلك من أجل استغلال مواردها. وتتمثل الإستراتيجية (أ) في استثمار ١٠ مليون جنيه في نوع معين من الآلات، وحينئذ تكون الشركة قادرة على تحقيق أرباح صافية مقدارها ٣مليون جنيه في كل سنة ولمدة ١٠ سنوات. وأما الإستراتيجية (ب) فتستطيع الشركة وفقا لها أن تستثمر ١٥ مليون جنيه في نوع أفضل من الآلات، وحينئذ تستطيع تحقيق أرباح صافية مقدارها ٥ مليون جنيه سنويا ولمدة ٧ سنوات. وبافتراض معدل خصم إسمي مقداره ١٠٪، أي من الإستراتيجيتيْن يجب أن تأخذ بها الشركة؟

المراجع

1. Arya, J. C. and Lardner, R.W. (1989). Mathematical Analysis for Business, Economics, and the Social Sciences (3rd edition). Prentice – Hall.

2. Budnick, F.S. (1993). Applied Mathematics for Business, and The Social Sciences (4th edition). McGraw-Hill, New York.

3. Haeussler, E. F., Paul, R. S., and Wood, R. J. (2008). Introductory Mathematical Analysis for Business, Economics, and the Life and Social Sciences (12th edition) Prentice – Hall.

4. Jacques, I (2006). Mathematics for Economics and Business (5th edition). Prentice-Hall.