محاضـــــــرات

فى

الإقتصاد الرياضى

إعداد

دكتـــــور

موافى رمضان موافى

قسم الاقتصاد – كلية التجارة
جامعة جنوب الوادى

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

الْحَمْدُ لِلَّهِ الَّذِي أَنْزَلَ عَلَىٰ عَبْدِهِ الْكِتَابَ وَلَمْ يَجْعَلْ لَهُ عِوَجًا ۜ

صدق الله العظيم

(سورة الكهف : الآية ١)

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة :

لقد أصبحت الرياضيات واحدة من أهم أدوات التحليل في مجالي الاقتصاد والتمويل . والاقتصاد الرياضي هو أسلوب ومنهج في صياغة التحليل الاقتصادي , يستخدم بعض جوانب النظرية الرياضية كأداة في تحليل بعض القضايا الاقتصادية . وخاصة تلك القضايا القابلة للقياس الكمي والمقارنة عبر العلاقات الرياضية. ويشكل الاقتصاد الرياضي التقاطع بين علم الرياضيات وعلم الاقتصاد. حيث يعد علم الاقتصاد الرياضي من العلوم الحديثة بالمقارنة مع علم الرياضيات و علم الاقتصاد .

وهو يسعى إلى نمذجة المسائل الاقتصادية ولا يعتبر فرعاً من فروع علم الاقتصاد وإنما هو عبارة عن أسلوب ومنهج رياضي في التحليل الاقتصادي والتخطيط الاقتصادي , وهو علم متنامي مع دخول عصر الحوسبة واستخدام المقاييس الكمية.

ولهذا يهدف هذا المقرر إلي التعرف على مبادئ استخدام الرياضيات بالتطبيق في مجالي الاقتصاد والتمويل .

و بعد , فإننى أرجو من الله أن أكون قد وفقت فى إعداد هذه المذكرات آملاً أن ينتفع بها أبناءنا الطلاب , وأن يستزيدوا بها علماً ومعرفةً .

د / موافى رمضان

فهرس الموضوعات

الفصل الأول

الدوال وتطبيقاتها الاقتصادية

الهدف من دراسة الفصل

بنهاية الدراسة لهذا الفصل يكون الدارس قادر على الالمام بالمفاهيم التالية:

١-مفهوم الدالة

٢-ميل الدالة

٣-أنواع الدوال

٤-أهم التطبيقات على دالة الخط المستقيم

الفصل الأول

الدوال وتطبيقاتها الاقتصادية

الدالة الخطية وميل الخط المستقيم

$$ص = ى + م\ س$$

ص متغير تابع   س متغير مستقل

احدى الطرق البسيطة لرسم دالة الخط المستقيم تتمثل فى ايجاد نقطتى تقاطع لهذا الخط المستقيم الذى لا يمر بنقطة الأصل (أى أن ى $\neq$ صفر) مع المحور الصادى (أى عندما س = صفر) ومع المحور السينى (أى عندما ص = صفر)

و لإيجاد النقطة الأولى فإننا نعوض فى المعادلة بقيمة س = صفر

و منها نجد أن   ص = ى

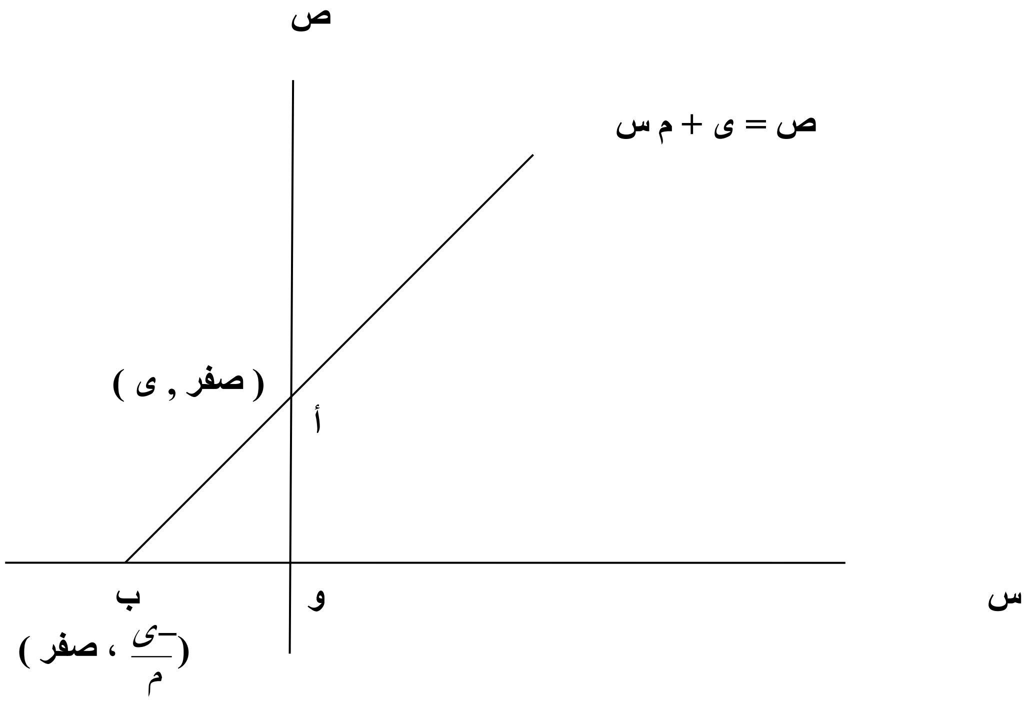
أى أن النقطة الأولى هى (صفر ، ى)

و لإيجاد النقطة الثانية فإننا نعوض فى المعادلة بقيمة ص = صفر

و منها نجد أن   صفر = ى + م س

$$\therefore\ -ى = م\ س \qquad \therefore\ س = \frac{-ى}{م}$$

أى أن النقطة الثانية هى ($\frac{-ى}{م}$ ، صفر)



<u>**ميل الخط المستقيم**</u>

مفهوم الميل مهم و كثير الاستعمال ، ويمكن تعريف ميل الخط المستقيم بأنه كمية التغير فى ص مقسوماً على كمية التغير فى س بين نقطتين تقعان على هذا الخط

فلإيجاد ميل الخط المستقيم بين النقطتين أ ، ب نجد أن الميل هو :

$$الميل = \frac{ى - صفر}{صفر - \left(\frac{-ى}{م}\right)} = \frac{ى}{\frac{ى}{م}} = ى \times \frac{م}{ى} = م$$

و يتضح من ذلك أن ميل الخط المستقيم ص = ى + م س يكون مساوياً لمعامل المتغير المستقل ، أى يساوى قيمة الثابت م

معنى هذا أنه إذا كان لدينا ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$) ، و هما نقطتين على الخط المستقيم ص = ى + م س

فإن $الميل = م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$

<u>بعض الاستخدامات المفيدة للميل</u>

إذا كان لدينا : $ص = ى_{١} + م_{١}\ س$

$ص = ى_{٢} + م_{٢}\ س$

فإنه يكون :

١ – المستقيمان متعامدان إذا كان $م_{١} \times م_{٢} = -١$

٢ – المستقيمان متطابقان إذا كان $م_{١} = م_{٢}$ ، $ى_{١} = ى_{٢}$

٣ – المستقيمان متوازيان إذا كان $م_{١} = م_{٢}$ **فقط**

مثال

إذا كان $٢\ س + ٦\ ص - ٤ = $ **صفـر**

فما هى طبيعة العلاقة بين الخط المستقيم السابق و كل من :

١ – $٤\ س + ١٢\ ص - ٨ = $ **صفـر**

٢ – $-٣\ س + ص - ٤ = $ **صفـر**

٣ – $س + ٣\ ص - ٩ = $ **صفـر**

الحـــل

١ – لاحظ أن الخط المستقيم الأصلى يمكن تحويله إلى :

$٦\ ص = ٤ - ٢\ س$

$\therefore\ ص = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\ س$

و على ذلك يكون الخط المستقيم الأول هو :

$٤\ س + ١٢\ ص - ٨ = $ **صفـر**

$\therefore\ ١٢\ ص = ٨ - ٤\ س$

$\therefore$ ص = $\frac{2}{3}$ - $\frac{1}{3}$ س

و طالما أن م ١ = م ٢ = - $\frac{1}{3}$ ، ى ١ = ى ٢ = $\frac{2}{3}$

أى أن هناك تطابق

٢ – الخط المستقيم الثانى هو :

- ٣ س + ص - ٤ = صفر

$\therefore$ **ص = ٤ + ٣ س**

و يلاحظ من ذلك أن م ١ × م ٢ = - $\frac{1}{3}$ × ٣ = - ١

أى أن هناك تعامد

٣ – الخط المستقيم الثالث هو :

س + ٣ ص - ٩ = صفر

$\therefore$ **٣ ص = ٩ - س**

$\therefore$ **ص = ٣ - $\frac{1}{3}$ س**

و يلاحظ من ذلك أن م ١ = م ٢ = - $\frac{1}{3}$ ، **بينما** ى ١ $\neq$ ى ٢

أى أن هناك توازى

أهم المراجع

لمتابعة بشكل أكثر تفصيل يمكن متابعة الشرح على الموقع التالى :

https://www.youtube.com/watch?v=ZaLos5d9J-k

دوال الطلب و العرض الخطية

الصيغة العامة $\quad \text{ط} = \text{ى} - \text{م}\ \text{ع}$

$\therefore \quad \text{م}\ \text{ع} = \text{ى} - \text{ط}$

$\therefore \quad \text{ع} = \frac{\text{ى}}{\text{م}} - \frac{1}{\text{م}}\ \text{ط}$

و بالتالى فإن قيمة الميل للمنحنى تعادل $-\frac{1}{\text{م}}$

مثال

بيعت ١٠ أجهزة تلفزيون عندما كان السعر ١٨٠٠ جنيه ، و عندما انخفض السعر إلى ١٦٠٠ جنيه بيع ٢٠ جهاز . أوجد دالة الطلب ؟

الحل

صيغة النقطتين $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} (\text{س} - \text{س}_1)$$

$$\therefore \quad \text{ع} - \text{ع}_1 = \frac{\text{ع}_2 - \text{ع}_1}{\text{ط}_2 - \text{ط}_1} (\text{ط} - \text{ط}_1)$$

$$\therefore \quad \text{ع} - 1800 = \frac{1600 - 1800}{20 - 10} (\text{ط} - 10)$$

$$\therefore \quad \text{ع} - 1800 = \frac{-200}{10} (\text{ط} - 10)$$

$$\therefore \quad \text{ع} - 1800 = -20\ \text{ط} + 200$$

$\therefore \quad \text{ع} = 2000 - 20\ \text{ط}$ **(لاحظ أن معامل ط = - ٢٠ ، و هو ميل دالة ع)**

∴ 20 ط = 2000 - ع

∴ ط = 100 - $\frac{1}{20}$ ع (لاحظ ميل هذه الدالة يساوى مقلوب معامله فى الدالة السابقة)

و للتحقق من دالة الطلب يتم التعويض فى المعادلة

فإذا كانت ط = ١٠ لابد و أن تكون ع = ١٨٠٠

∴ 10 = 100 - $\frac{1}{20}$ ع و منها نجد أن

ع = 2000 - 20 ط

∴ ع = 2000 - 20 × 10

∴ ع = 2000 - 200 = 1800

و عندما تكون ط = ٢٠ نجد أن ع = ١٦٠٠ حيث يكون

ع = 2000 - 20 ط

∴ ع = 2000 - 20 × 20

∴ ع = 2000 - 400 = 1600

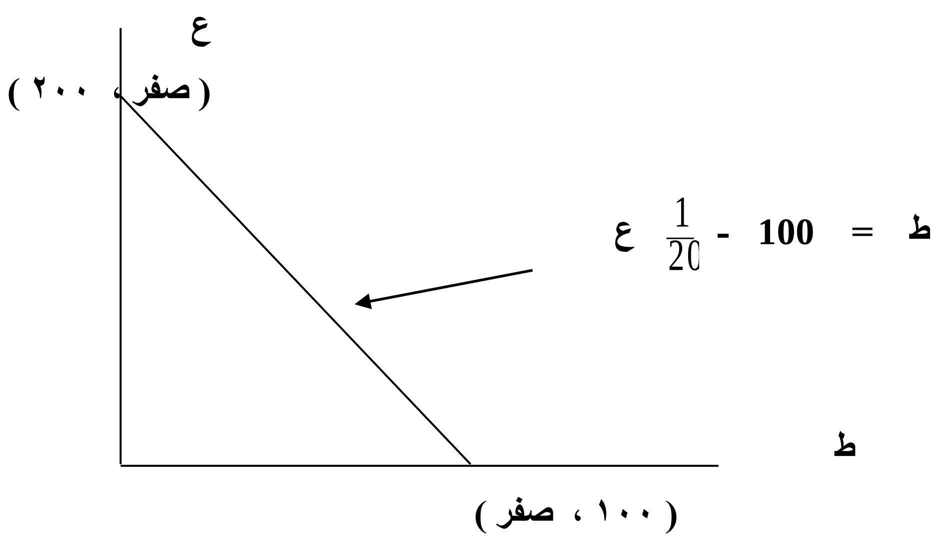
و لرسم الدالة السابقة نضع ع = صفر للحصول على نقطة التقاطع مع محور السينات فيكون

ط = 100 - $\frac{1}{20}$ × صفر = 100

و نضع ط = صفر للحصول على نقطة التقاطع مع محور الصادات فيكون

ع = 2000 - 20 × صفر = 200

و بالتالى يكون شكل دالة الطلب بيانياً هو :

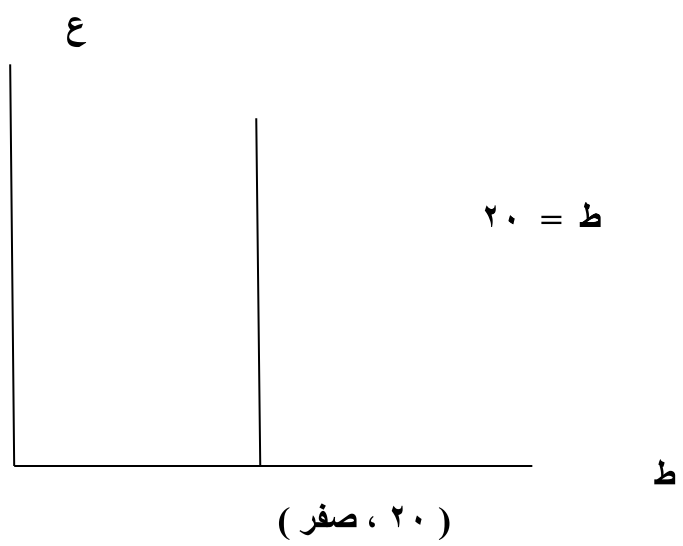


مثال

أحد المصانع قرر شراء ٢٠ آلة سنوياً بغض النظر عن الثمن , فما هى معادلة الطلب ؟

الحل

ط = ٢٠



دالة العرض

لا تختلف دالة العرض عن دالة الطلب إلا فى إشارة ميل الدالة حيث يكون الميل موجب و ليس سالباً كما هو الحال فى دالة الطلب

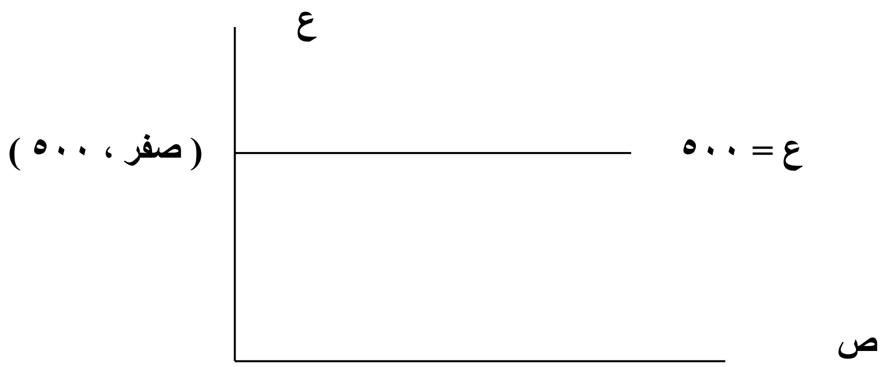
حيث يكون

ص = ى + م ع

مثال

إذا كان لدينا ثمن الوحدو من سلعة ما هو ٥٠٠ جنيه بغض النظر عن الكمية المعروضة فإن دالة العرض تكون هى

ع = ٥٠٠



توازن الطلب و العرض (توازن السوق)

مثال

أوجد نقطة التوازن إذا كان

$$\text{ط} = 5 - \frac{1}{2}\,\text{ع}$$

$$\text{ص} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\,\text{ع}$$

الحل

عند التوازن يكون $\text{ط} = \text{ص}$

$$\therefore\quad 5 - \frac{1}{2}\,\text{ع} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\,\text{ع}$$

$$30 - 3\,\text{ع} = -4 + 4\,\text{ع}$$

$$34 = 7\,\text{ع}$$

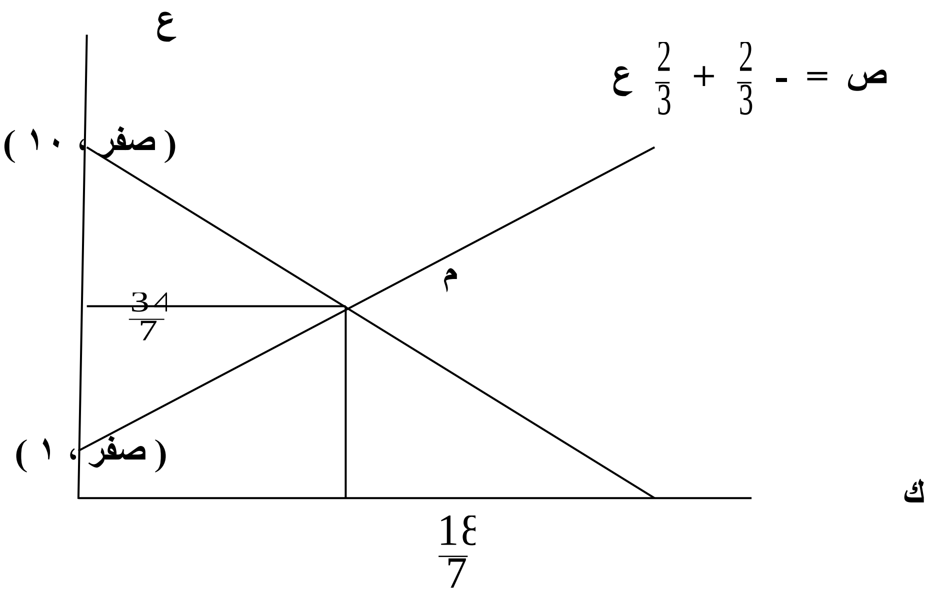
$$\therefore\quad \text{ع} = \frac{34}{7}$$

$$\text{ط} = \text{ص} = 5 - \frac{1}{2} \times \frac{34}{7}$$

$$= 5 - \frac{34}{14} = \frac{36}{14} = \frac{18}{7}$$

و لرسم وضع التوازن نحدد احداثيات دالة الطلب بوضع قيمة ط = صفر فى دالة الطلب مرة فيكون : ع = ١٠ ، وبوضع ع = صفر فى دالة الطلب أيضاً يكون : ط = ٥

أما دالة العرض فنحدد تقاطعها مع محور الصادات فقط بوضع الكمية فى دالة العرض تساوى الصفر فيكون ع = ١ . و على ذلك يمكن رسم وضع التوازن كما يلى :


ص = - 2/3 + 2/3 ع
ع
(صفر ، ١٠)
م
3٤/7
(صفر ، ١)
ك
1٤/7

<u>تمارين</u>

إذا كانت لديك دوال الطلب و العرض التالية

(أ) ك = 10 - 2 ع ، ك = $\frac{2}{3}$ ع + ١

(ب) ك = 6 ، ع = 3 ك + 3

(ج) ك = 16 – 2 ع ، 4 ك = 4 ع + ع^{2}

فى كل مما سبق أوجد ما يلى :

١ – حدد ايهما معادلة طلب و أيهما معادلة عرض

٢ – حل جبرياً و حدد بيانياً نقطة التوازن

٣ – أوجد المطلوب عندما تكون السلعة حرة (لاحظ هنا أن ع = صفر، و ذلك فى دالة الطلب)

٤ – أوجد أعلى سعر يقبله المستهلك لكى يشترى سلعة بكمية موجبة (هنا أ ك = صفر، فى دالة الطلب)

٥ - أوجد أقل سعر يقبله المنتج لكى يبيع السلعة بكمية موجبة (هنا أ ك = صفر، فى دالة العرض)

الفصل الثانى

تطبيقات على توازن السوق

الهدف من دراسة الفصل

بنهاية الدراسة لهذا الفصل يكون الدارس قادر على الالمام بالمفاهيم التالية:

١-أثر فرض ضريبة ثابتة معلومة على توازن السوق

٢-أثر فرض ضريبة ثابتة غير معلومة على توازن السوق

٣-أثر فرض ضريبة نسبية على توازن السوق

الفصل الثانى

تطبيقات على توازن السوق

فرض ضريبة غير مباشرة

أولاً إذا كانت الضريبة معلومة

مثال

إذا كانت لديك دوال الطلب و العرض التالية

ك = ١٢٠ ـ ٢ ع ، ك = ٤٠ + ٣ ع

و قد تم فرض ضريبة بمقدار ١٠ جنيه على كل وحدة من الإنتاج

المطلوب:

١ – حدد السعر التوازنى و الكمية التوازنية قبل فرض الضريبة

٢ ـ حدد السعر التوازنى و الكمية التوازنية بعد فرض الضريبة

٣ – حدد مقدار ما يتحمله المنتج و المستهلك من الضريبة المفروضة

٤ – احسب مرونة الطلب على السلعة و حدد نوع السلعة

٥ – احسب فائض المنتج و فائض المستهلك قبل و بعد الضريبة

٦ – احسب ايرادات الحكومة من الضريبة

الحل

١ ـ قبل فرض الضريبة

بمساواة الطلب مع العرض يكون

١٢٠ – ٢ ع = ٤٠ + ٣ ع

∴ ٨٠ = ٥ ع

∴ ع = ١٦ سعر توازنى

∴ ك = ١٢٠ - ٢ × ١٦ = ١٢٠ - ٣٢ = ٨٨ كمية توازنية

<u>٢ -</u> عند فرض الضريبة يتأثر منحنى العرض بالانتقال بيانيا إلى جهة اليسار مع بقاء منحنى الطلب كما هو ، و بالتالى يكون لدينا منحنى طلب قديم و منحنى عرض قديم و جديد ، و المنحنى الجديد يلتقى مع منحنى الطاب القديم فينشئ وضع توازنى جديد على يسار الوضع التوازنى الأصلى .

المعالجة

ع ض = ٤٠ + ٣ (ع - ١٠)

= ٤٠ + ٣ ع - ٣٠

= ١٠ + ٣ ع

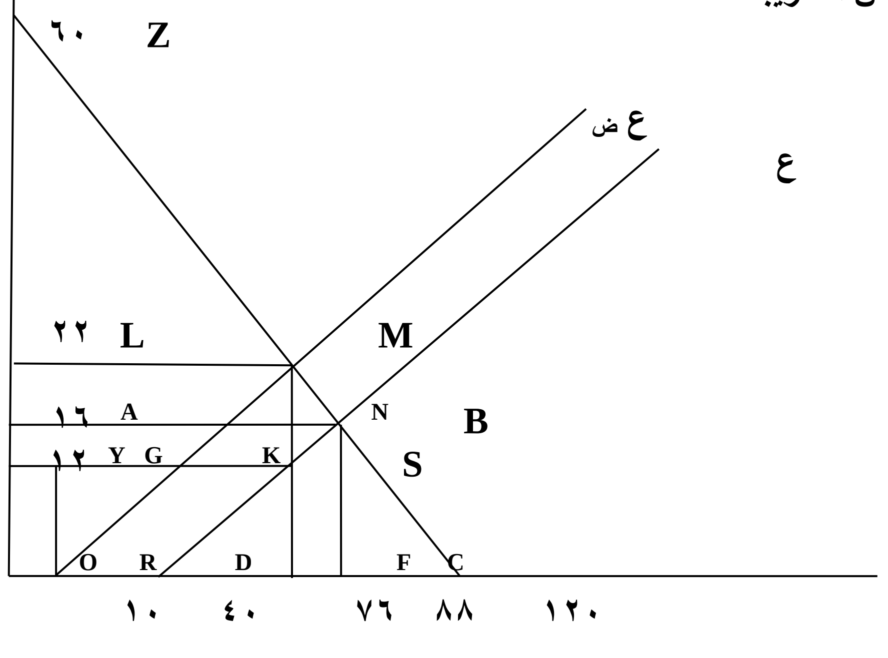
التوازن بعد فرض الضريبة *

١٢٠ - ٢ ع = ١٠ + ٣ ع

١١٠ = ٥ ع

و بالتالى يكون السعر بعد فرض الضريبة هو ع = ٢٢

الكمية بعد فرض الضريبة = ١٢٠ - ٢ × ٢٢ = ٧٦



<u>٣ –</u> اذا كانت الضريبة مقدارها عشرة جنيهات على الوحدة و ارتفع السعر بعد فرض الضريبة بمقدار ستة جنيهات (من ١٦ إلى ٢٢) ، معنى هذا تحمل المستهلك بستة جنيهات , و بالتالى يتحمل المنتج بأربع جنيهات من الضريبة

<u>٤ – المرونة</u>

$$م = \frac{\Delta ك}{\Delta ث} \times \frac{ث}{ك}$$

$$= -\frac{12}{6} \times \frac{16}{88} = -\frac{192}{528} = ٠,٣٦٣$$ **بعد إهمال الإشارة**

أى أن م < ١ و بالتالى فإن الطلب قليل المرونة و السلعة ضرورية .

<u>٥ –</u> فائض المنتج قبل فرض الضريبة هو كل ما تحت سعر التوازن و فوق منحنى العرض وللحصول على مساحة هذا الشكل نحسب مساحة المستطيل OABC كاملة

المساحة = ١٦ × ٨٨ = ١٤٠٨

ثم نحسب مساحة المثلث CDB = ٠,٥ × ٤٨ × ١٦ = ٣٨٤

فائض المنتج = ١٤٠٨ - ٣٨٤ = ١٠٢٤

<u>فائض المستهلك قبل فرض الضريبة</u>

= مساحة المثلث ABZ = ٠,٥ × ٨٨ × ٤٤ = ١٩٦٣

<u>فائض المستهلك بعد فرض الضريبة</u>

= مساحة المثلث ZLM = ٠,٥ × ٧٦ × ٣٨ = ١٤٤٤

<u>فائض المنتج بعد فرض الضريبة</u>

نحسب فائض المنتج من خلال حساب مساحة المستطيل OYGR

= ١٠ × ١٢ = ١٢٠

ثم نضيف لها مساحة المثلث RKG

ولحساب طول المسافة KG هناك طريقتين يتم اتباع أى منـها

<u>الطريقة الأولى :</u>

بما أن المسافة YS = ٧٦

وبما أن المسافة KS = المسافة RD = ٣٠ لآنـهما ضلعان متقابلان فى متوازى المسطيلات RDSK

وبما أن المسافة YG = ١٠

إذن المسافة KG = ٧٦ - (٣٠ + ١٠) = ٣٦

<u>الطريقة الثانية :</u>

النقطة K تقع على منحنى العرض الجديد بعد فرض الضريبة و تقابل سعر يساوى ١٢ جنيه

إذن بالتعويض فى دالة العرض بعد الضريبة بالسعر = ١٢ نحصل على الكمية المقابلة للنقطة K

و بما أن ع ض = ١٠ + ٣ ع

إذن ك = ١٠ + ٣ (١٢) = ١٠ + ٣٦ = ٤٦ و هو طول المسافة YK

إذن المسافة KG = YK - YG = ٤٦ - ١٠ = ٣٦

إذن مساحة المثلث RKG = ٠,٥ × ١٢ × ٣٦ = ٢١٦

وعلى ذلك فإن فائض المنتج = ١٢٠ + ٢١٦ = ٣٣٦

٦ – ايرادات الحكومة من الضريبة = ٧٦ × ١٠ = ٧٦٠

الضريبة غير المعلومة

قد تفرض الحكومة أحياناً ضريبة على سلعة معينة إما بغرض تحقيق إيراد من هذه الضريبة وإما للحد من استهلاك السلعة . و قد يتم فرض هذه الضريبة على كل وحدة من السلعة المنتجة قبل بيعها ، مما يؤدى إلى زيادة متوسط (معدل) التكلفة بمقدار الضريبة .

و يكون المطلوب أو الهدف فى هذه الحالة تحديد مقدار الضريبة التى يجب فرضها على كل وحدة منتجة بحيث يحقق المنتج أقصى ربح ممكن و تحقق الدولة أقصى إيراد ممكن من هذه الضريبة .

مثال

إذا كانت دالة الطلب لسلعة ما هى ع = ٦٩ - ٢ ك

حيث ع السعر ، ك الكمية

فإذا كان متوسط تكلفة إنتاج هذه السلعة هو م ت = ٥

المطلوب : عن طريق التحقق دائماً بايجاد اشارة المشتقة الثانية أوجد كلاً مما يلى :

١ - أوجد قيمة الايراد الكلى و حجم الانتاج الذى يحقق أقصى ربح للمنتج

٢ - إذا فرضت ضريبة مقدارها (ض) على على كل وحدة منتجة ، حدد الايراد الكلى والتكلفة الكلية وحجم الانتاج الذى يحقق أقصى ربح للمنتج و أقصى إيراد للحكومة

الحل

أولا :

الايراد الكلى عبارة عن السعر (ع) مضروبا فى الكمية (ك)

أ ك = (٦٩ - ٢ ك) × ك = ٦٩ ك - ٢ ك^{٢}

ثم نحصل على التكلفة الكلية وصولا لتحقيق الربح

ت ك = م ت × ك = ٥ ك

∴ دالة الربح (ر) = (٦٩ ك - ٢ ك^{٢}) - ٥ ك

= ٦٤ ك - ٢ ك^{٢}

وللحصول على أقصى ربح لابد أولا أن نحصل على الكمية المنتجة التى تحقق ذلك , ويتم هذا الأمر بمفاضلة دالة الربح و مساوتها بالصفر

$\frac{\delta ر}{\delta ك}$ = ٦٤ - ٤ ك = صفر

∴ ٤ ك = ٦٤

∴ ك = ١٦

المشتقة الثانية لدالة الربح

$\frac{\delta^{2} ر}{\delta ك^{2}}$ = - ٤ < صفر

و هذا يعنى أن الربح يصل إلى قيمته العظمى عند إنتاج ستة عشر وحدة

و بالتعويض فى دالة الطلب نوجد قيمة السعر ع = ٦٩ - ٢ × ١٦ = ٦٩ - ٣٢ = ٣٧

∴ **أقصى ربح** = ع × ك - م ت × ك

= ٣٧ × ١٦ - ٥ × ١٦ = ٥٩٢ - ٨٠ = ٥١٢

أو بالتعويض فى دالة الربح = ٣٦ ك - ٣ ك^{٢}

= (٦٤ × ١٦) - (٢ × ١٦ × ١٦)

= ١٠٢٤ - ٥١٢ = ٥١٢

<u>ثانيا</u> عند فرض ضريبة مقدارها (ض) على كل وحدة منتجة

فى هذه الحالة لن يتأثر منحنى الطلب أو الإيراد الكلى , و بالتالى فإن الإيراد الكلى يظل كما هو

أ ك = ٦٩ ك - ٢ ك^{٢}

أما التكلفة الكلية (أو منحنى العرض) فهو الذى تتأثر فيه كل وحدة منتجة بمقدار الضريبة على النحو التالى :

ت ك = ٥ ك + ض ك

∴ الربح (ر) = (٦٩ ك - ٢ ك ٢) - (٥ ك + ض ك)

= ٦٤ ك - ض ك - ٢ ك ٢

= (٦٤ - ض) ك - ٢ ك ٢

و يتحقق أقصى ربح عند انتاج الكمية التالية

المشتقة الأولى لدالة الربح

$\frac{\delta ر}{\delta ك}$ = ٣٦ - ض - ٦ ك = صفر

∴ ٦ ك = ٣٦ - ض

∴ ك = $\frac{36 - ض}{6}$

المشتقة الثانية لدالة الربح

$\frac{\delta^2 ر}{\delta ك^2}$ = - ٦ < صفر و هذا يعنى أن الربح يصل إلى قيمته العظمى و ذلك عند إنتاج ك = $\frac{36 - ض}{6}$

و بالتعويض فى دالة الربح للحصول على أقصى ربح نجد أن :

أقصى ربح = (٣٦ - ض) ($\frac{36 - ض}{6}$) - ٣ ($\frac{36 - ض}{6}$) ٢

∴ ر = $\frac{(36 - ض)^2}{6}$ - $\frac{(36 - ض)^2}{12}$

∴ ر = $\frac{(36 - ض)^2}{12}$

و للحصول على إيرادات الدولة من الضريبة (أ ض) = ض × ك

$$\therefore \text{أ ض} = \text{ض} \times \left(\frac{36 - \text{ض}}{6} \right) = \frac{36\text{ض} - \text{ض}^2}{6}$$

و للحصول على أقصى إيراد للحكومة من فرض الضريبة (أ ض) فلابد من مفاضلة إيراد الضريبة هذا بالنسبة للضريبة المفروضة على النحو التالى

المشتقة الأولى لدالة الضريبة

$$\frac{\delta(\text{أض})}{\delta \text{ض}} = \frac{36 - 2\text{ض}}{6} = \text{صفر}$$

$$\therefore 6 - \frac{2}{6}\text{ض} = \text{صفر}$$

$$\therefore \frac{1}{3}\text{ض} = 6$$

$$\therefore \text{ض} = 18$$

و للتأكد من أن (أ ض) فى أقصاه نأخذ المشتقة الثانية

المشتقة الثانية لدالة الربح

$\frac{\delta^2(\text{أض})}{\delta \text{ض}^2} = -\frac{2}{6} < \text{صفر}$ و هذا يعنى أن الايراد قيمة عظمى و ذلك عند ض = ١٨

و عند ض = ١٨ فإن

ك التى تحقق أقصى ربح $= \frac{36 - \text{ض}}{6} = \frac{36 - 18}{6} = 3$

أقصى ربح $= \frac{(36 - \text{ض})^2}{12} = \frac{(36 - 18)^2}{12} = \frac{324}{12} = 27$

و يكون أقصى إيراد للحكومة من فرض الضريبة $= \text{ض} \times \left(\frac{36 - \text{ض}}{6} \right)$

$$= 18 \times \frac{36 - 18}{6}$$

$$= \frac{18 \times 18}{6} = \frac{324}{6} = \mathbf{54}$$

أو نقول مباشرةً أن أ ض = ض × ك = **18** × **3** = **54**

مثال

إذا كانت دالة الطلب لسلعة ما هى ع = ٣٨ ـ ٣ ك

حيث ع السعر ، ك الكمية

فإذا كان متوسط تكلفة إنتاج هذه السلعة هو م ت = ٢

المطلوب

أولا : تحديد الايراد الكلى و حجم الانتاج الذى يحقق أقصى ربح للمنتج

ثانيا : إذا فرضت ضريبة مقدارها (ض) على على كل وحدة منتجة ، حدد الايراد الكلى والتكلفة الكلية و حجم الانتاج الذى يحقق أقصى ربح للمنتج و أقصى إيراد للحكومة

ثالثا :قارن النتائج قبل و بعد الضريبة

الحل

أولا :

الايراد الكلى عبارة عن السعر (ع) مضروبا فى الكمية (ك)

أ ك = (٣٨ ـ ٣ ك) × ك = ٣٨ ك ـ ٣ ك ^{٢}

ثم نحصل على التكلفة الكلية وصولا لتحقيق الربح

ت ك = م ت × ك = ٢ ك

∴ دالة الربح (ر) = (٣٨ ك ـ ٣ ك ^{٢}) ـ ٢ ك

= ٣٦ ك ـ ٣ ك ^{٢}

و إذا أردنا الحصول على أقصى ربح لابد أولا أن نحصل على الكمية المنتجةالتى تحقق ذلك , ويتم هذا الأمر بمفاضلة دالة الربح و مساوتها بالصفر حتى نحصل على قيمة ك ثم بعد ذلك نتأكد من أن الربح الذى تحققه هذه الكمية قيمة عظمى و ذلك بإيجاد المشتقة الثانية للدالة , فإذا كانت سالبة فإن ذلك دليل على أنها نهاية عظمى .

المشتقة الأولى لدالة الربح

$$\frac{\delta ر}{\delta ك} = ٣٦ - ٦ ك = صفر$$

$$\therefore \quad ٦ \ ك = ٣٦ \qquad \therefore \quad ك = ٦$$

المشتقة الثانية لدالة الربح

$$\frac{\delta^2 ر}{\delta ك^2} = -٦ < صفر$$

و هذا يعنى أن الربح يصل إلى قيمته العظمى عند إنتاج ستة وحدات

و بالتعويض فى دالة الطلب نوجد قيمة السعر ع = ٣٨ - ٣ × ٦ = ٣٨ - ١٨ = ٢٠

$\therefore$ **أقصى ربح = ٢٠ × ٦ - ٢ × ٦ = ١٢٠ - ١٢ = ١٠٨**

أو بالتعويض فى دالة الربح = ٣٦ ك - ٣ ك ٢

= (٣٦ × ٦) - (٣ × ٦ × ٦)

= ٢١٦ - ١٠٨ = ١٠٨

<u>ثانيا</u> عند فرض ضريبة مقدارها (ض) على كل وحدة منتجة

فى هذه الحالة لن يتأثر منحنى الطلب أو الإيراد الكلى , و بالتالى فإن الإيراد الكلى يظل كما هو

أ ك = ٣٨ ك - ٣ ك ٢

أما التكلفة الكلية (أو منحنى العرض) فهو الذى تتأثر فيه كل وحدة منتجة بمقدار الضريبة على النحو التالى :

ت ك = ٢ ك + ض ك

∴ الربح (ر) = (٣٨ ك - ٣ ك ٢) - (٢ ك + ض ك)

= ٣٦ ك - ض ك - ٣ ك ٢

= (٣٦ - ض) ك - ٣ ك ٢

و يتحقق أقصى ربح عند انتاج الكمية التالية

المشتقة الأولى لدالة الربح

$$\frac{\delta ر}{\delta ك}$$ **= ٣٦ - ض - ٦ ك = صفر**

∴ ٦ ك = ٣٦ - ض

∴ ك = $$\frac{36 - ض}{6}$$

المشتقة الثانية لدالة الربح

$$\frac{\delta^2 ر}{\delta ك^2}$$ **= - ٦ < صفر و هذا يعنى أن الربح يصل إلى قيمته العظمى و**

ذلك عند إنتاج ك = $$\frac{36 - ض}{6}$$

و بالتعويض فى دالة الربح للحصول على أقصى ربح نجد أن :

أقصى ربح = (٣٦ - ض) ($\frac{36 - ض}{6}$ **) - ٣ (** $\frac{36 - ض}{6}$ **) ٢**

$$\therefore ر = \frac{(36 - ض)^2}{6} - \frac{(36 - ض)^2}{12}$$

$\therefore$ ر $= \frac{(36 - ض)^2}{12}$

و للحصول على إيرادات الدولة من الضريبة (أ ض) = ض × ك

$\therefore$ أ ض = ض × ($\frac{36 - ض}{6}$) = $\frac{36ض - ض^2}{6}$

و للحصول على أقصى إيراد للحكومة من فرض الضريبة (أ ض) فلابد من مفاضلة إيراد الضريبة هذا بالنسبة للضريبة المفروضة على النحو التالى

المشتقة الأولى لدالة الضريبة

$\frac{\delta (أض)}{\delta ض} = \frac{36 - 2ض}{6} =$ صفر

$\therefore$ = 6 - $\frac{2}{6}$ ض = صفر

$\therefore$ $\frac{1}{3}$ ض = 6 $\therefore$ ض = 18

و للتأكد من أن (أ ض) فى أقصاه نأخذ المشتقة الثانية

المشتقة الثانية لدالة الربح

$\frac{\delta^2 (أض)}{\delta ض^2} = -\frac{2}{6} <$ صفر و هذا يعنى أن الايراد قيمة عظمى و ذلك عند ض = ١٨

و عند ض = ١٨ فإن

ك التى تحقق أقصى ربح = $\frac{36 - ض}{6} = \frac{36 - 18}{6} = 3$

أقصى ربح = $\frac{(36 - ض)^2}{12} = \frac{(36 - 18)^2}{12} = \frac{324}{12} = 27$

و يكون أقصى إيراد للحكومة من فرض الضريبة = ض × ($\frac{36 - ض}{6}$)

$$\frac{36-18}{6} \times \mathbf{18} =$$

$$\mathbf{54} = \frac{324}{6} = \frac{18 \times 18}{6} =$$

أو نقول مباشرةً أن أ ض = ض × ك = 18 × 3 = 54

<u>ثالثا : مقارنة النتائج</u>

- **بلغت الكمية قبل الضريبة ٦ وحدات ، و بلغت بعد فرض الضريبة $\frac{36-ض}{6}$ أى = ٦ ـ ٣ = ٣ وحدات بما يعنى حدوث انخفاض فى الانتاج نتيجة فرض الضريبة**
- **الربح قبل فرض الضريبة بلغ ١٠٨ و بعد فرض الضريبة بلغ ٢٧ أى أنه انخفض إلى الربع فقط حيث أن ١٠٨ ÷ ٢٧ = ٤**
- **السعر قبل فرض الضريبة بلغ ٢٠ و بعد فرض الضريبة ع = ٣٨ - (٣ × ٣) = ٣٨ - ٩ = ٢٩ أى أن السعر قد ارتفع من ٢٠ إلى ٢٩**
- **الزيادة فى السعر تعادل نصف الضريبة بما يعنى أن المنتج قد تحمل فقط نصف الضريبة و قام بتحويل النصف الأخر على المستهلك مما يعنى أن الطلب على هذه السلعة هو طلب متكافئ المرونة بمعنى أن مرونة الطلب = واحد صحيح ، و بالتالى تكون السلعة عادي**

فرض ضريبة بنسبة معينة من السعر

فى هذه الحالة نضيف الضريبة الى السعر فى دالة الطلب

ملحوظة هامة : أو نطرحه من السعر فى دالة العرض

فمثلاً عند فرض ضريبة ض = $\frac{1}{5}$ ع أى ٢٠ % من السعر

فإن دالة الطلب ع = ٣٨ - ٣ ك تصبح ع + $\frac{1}{5}$ ع = ٣٨ - ٣ ك

∴ $\frac{6}{5}$ ع = ٣٨ - ٣ ك

∴ ع = $\frac{5}{6}$ (٣٨ - ٣ ك)

وهو السعر الذى يحصل عليه المنتج بعد استقطاع الضريبة

∴ أ ك = $\frac{5}{6}$ (٣٨ - ٣ ك) ك = $\frac{190}{6}$ ك - $\frac{15}{6}$ ك^2

التكلفة الكلية = ٢ ك

دالة الربح = $\frac{190}{6}$ ك - $\frac{15}{6}$ ك^2 - ٢ ك

= $\frac{190}{6}$ ك - $\frac{15}{6}$ ك^2 - $\frac{12}{6}$ ك

= $\frac{178}{6}$ ك - $\frac{15}{6}$ ك^2

و لإيجاد ك التى تحقق أقصى ربح

المشتقة الأولى لدالة الربح

$\frac{\delta ر}{\delta ك}$ = $\frac{178}{6}$ - $\frac{30}{6}$ ك = صفر

∴ ٥ ك = $\frac{178}{6}$

∴ ك = $\frac{178}{30}$

المشتقة الثانية لدالة الربح

$$\frac{\delta^2 ر}{\delta ك^2} = -\frac{30}{6} < \text{صفر}$$

وهذا يعنى أن الربح يصل إلى قيمته العظمى و ذلك عند إنتاج ك $= \frac{178}{30}$

و بالتعويض فى دالة الربح للحصول على أقصى ربح نجد أن :

أقصى ربح $= \frac{178}{6}$ **ك** $- \frac{15}{6}$ **ك** ^{2}

$$\therefore ر = \frac{178}{6} \times \frac{178}{30} - \frac{15}{6} \times \left(\frac{178}{30}\right)^2$$

$$\therefore ر = \frac{178}{6} \times \frac{178}{30} - \frac{15}{6} \times \left(\frac{31684}{900}\right)$$

$$\therefore ر = \frac{31684}{180} - \frac{475260}{5400}$$

$$= \frac{950520}{5400} - \frac{475260}{5400}$$

$$= \frac{475260}{5400}$$

$$= \mathbf{88.01}$$

$$ع = \frac{5}{6}\left(\text{٣٨} - \text{٣ ك}\right)$$

$$= \frac{5}{6}\left(38 - 3 \times \frac{178}{30}\right) = \frac{5}{6}\left(38 - \frac{534}{30}\right)$$

$$= \frac{190}{6} - \frac{2670}{180}$$

$$= \frac{5700}{180} - \frac{2670}{180}$$

$$= \frac{3030}{180} = \mathbf{16.83}$$

أقصى إيراد للحكومة من فرض الضريبة (أ ض)

أ ض = $\frac{1}{5}$ × **أ ك**

أ ك = **ع** × **ك** = $\frac{303}{180} \times \frac{178}{30}$

= $\frac{53934}{5400}$

∴ **أ ض** = $\frac{1}{5} \times \frac{53934}{5400}$

= $\frac{53934}{2700}$ = ١٩,٩٧٥

أو يمكن القول بأن :

أ ك = **ع** × **ك**

= $\mathbf{16.83} \times \frac{178}{30}$

= $\mathbf{5.93 \times 16.83}$

= $\mathbf{99.8}$

∴ **أ ض** = $\frac{1}{5} \times \mathbf{99.8} = \mathbf{19.9}$

الفصل الثالث

توازن المستهلك

الهدف من دراسة الفصل

بنهاية الدراسة لهذا الفصل يكون الدارس قادر على الالمام بالمفاهيم التالية:

١ - المنفعة الحدية المنفصلة

٢-المنافع الحدية المتصلة

٣-كيفية تكوين دال الطلب اعتماداً على استهلاك الافراد.

٤-توازن المستهلك باستخدام الأسلوب الرياضى

الفصل الثالث

توازن المستهلك

أولاً : توازن المستهلك باستخدام المنفعة العددية

من المعروف أن المستهلك يكون فى حالة توازن عندما تتساوى تضحياته مع كمية الاشباع المكتسبة من عملية الشراء ، فبفرض أن منفعة الجنيه الواحد تعادل خمس وحدات منفعة ، و أن ثمن الوحدة من السلعة المراد شراءها هو 2 جنيه ، معنى ذلك أنه لابد أن يحصل على الأقل على ١٠ وحدات منفعة من كل وحدة يشتريها ، و الجدول التالى يعطى مثال على ذلك .

وحدات السلعة س	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
المنفعة الحدية	٤٨	٣٦	٣٠	٢٨	١٦	١٢	١٠	٨	٦	٢

ومن الواضح أن المستهلك سوف يستقر عند شراء ٧ وحدات لأنه يدفع فى الوحدة السابعة ٢ جنيه كما أن الجنيه يعادل ٥ وحدات منفعة ، و بالتالى سوف يحقق التوازن فى هذه الحالة .

مما سبق يتضح أنحالة التوازن التى ينشدها المستهلك تتحقق عندما تتجسد هذه الحالة فى المعادلة الآتية :

م ح المكتسبة = م ح المضحى بها .... (١)

أى أن المستهلك حصل على ١٠ وحدات منفعة عند شراء الوحدة السابعة و ضحى بـ ٢ جنيه قيمتهم ١٠ وحدات منفعة أيضاً

و المستهلك عند وضع التوازن يحصل من الوحدة السابعة على ١٠ وحدات منفعة و يضحى بـ ٢ جنيه قيمة كل منها ٥ وحدات منفعة ، إذاً يمكن كتابة المعادلة (١) السابقة بالشكل التالى :

$$م\,ح_{س} = ن \times ث_{س} \qquad \ldots\ldots\ (٢)$$

$$١٠ = ٢ \times ٥$$

حيث م ح س هى المنفعة الحدية للسلعة س ، ن هى المنفعة الحدية للنقود ، ث س هى ثمن الوحدة من السلعة س .

و يمكن أن نكرر ذلك إذا كانت السلعة ص مثلاً ، و لذلك يمكن القول بأن

$$م\,ح_{ص} = ن \times ث_{ص} \qquad \ldots\ldots\ (٣)$$

و من المعادلة (٢) ، (٣) يمكن أن نستنتج أن :

$$\frac{م\,ح_{س}}{م\,ح_{ص}} = \frac{ث\,س}{س\,ص} \qquad \ldots\ldots\ (٤)$$

و من المعادلة (٤) السابقة يمكن أن نستنتج أنه إذا كان ثمن السلعة س ضعف ثمن السلعة ص فإن المنفعة الحدية للسلعة س تكون ضعف المنفعة الحدية للسلعة ص .

و يمكن الوصول إلى نتيجة عامة فى هذا الصدد و هى أن :

$$\frac{م\,ح_{س}}{ث_{س}} = \frac{م\,ح_{ص}}{ث_{ص}} = ن$$ **حيث ن هى المنفعة الحدية للنقود ..(٥)**

<u>مثال</u>

إذا علمت أن دالة المنفعة الكلية لمستهلك ما هى :

م ك = ١٢٨ س - ٨ س ٢

حيث س تمثل وحدات السلعة

أوجد :

١ - المنفعة الحدية للسلعة على أساس اتصال التغير فى مشتريات المستهلك

٢ - المنفعة الحدية على أساس عدم اتصال التغير فى مشتريات المستهلك

الحل

١ - المنفعة الحدية المتصلة هى المعامل التفاضلى الأول لدالة المنفعة الكلية ، حيث يقيس المعامل ميل الدالة عند كل نقطة على المنحنى الذى يمثلها .

م ح = ١٢٨ - ١٦ س

و بالتعويض عن س نحصل على المنفعة المتصلة .

٢ – المنفعة الحدية غير المتصلة هى الزيادة فى المنفعة الكلية نتيجة زيادة المستهلك لمشترياته وحدة واحدة , على النحو التالى :

وحدات السلعة	م ك	م ح متصلة	م ح منفصلة
١	١٢٠	١١٢	١٢٠
٢	٢٢٤	٩٦	١٠٤
٣	٣١٢	٨٠	٨٨
٤	٣٨٤	٦٤	٧٢
٥	٤٤٠	٤٨	٥٦
٦	٤٨٠	٣٢	٤٠
٧	٥٠٤	١٦	٢٤
٨	٥١٢	صفر	٨
٩	٥٠٤	- ١٦	- ٨
١٠	٤٨٠	- ٣٢	- ٢٤

يلاحظ من الجدول السابق أن المنفعة المتصلة تمثل زيادة المنفعة الكلية نتيجة زيادة طفيفة جداً فى المشتريات ، أما المنفعة المنفصلة فهى تمثل الزيادة نتيجة زيادة الوحدات المستهلكة بوحدة واحدة .

<u>مثال</u>

بفرض أن دالة المنفعة الكلية لسلعة س بالنسبة لمستهلك معين هى :

م ك = ١٢٨ س - ٨ س^{٢} حيث س هى عدد وحدات السلعة س

و كانت دالة المنفعة الكلية للسلعة ص هى :

م ك = ٣٦ - ٢ ص ٢ حيث ص هى عدد وحدات السلعة ص

فإذا كان ثمن الوحدة من السلعة س هو ٨ جنيه ، و ثمن الوحدة من السلعة ص هو ٤ جنيه ، و بلغ دخل المستهلك مبلغ ٦٨ جنيه .

حدد توازن المستهلك

الحل

م ح س = ١٢٨ ـ ١٦ س

م ح ص = ٣٦ ـ ٤ ص

من خلال الدوال السابقة يمكن استنتاج الجدول التالى

وحدات السلعة	م ح س	م ح ص	م ح س / ث س	م ح ص / ث ص
١	١١٢	٣٢	١٤	٨
٢	٩٦	٢٨	١٢	٧
٣	٨٠	٢٤	١٠	٦
٤	٦٤	٢٠	٨	٥
٥	٤٨	١٦	٦	٤
٦	٣٢	١٢	٤	٣
٧	١٦	٨	٢	٢
٨	صفر	٤	صفر	١
٩	١٦	صفر	ـ ٢	صفر
١٠	٣٢	ـ ٤	ـ ٤	ـ ١

من الجدول السابق يتضح أن المستهلك الذى ندرس حالته يتوازن عند شراء ست وحدات من السلعة س ، و خمس وحدات من السلعة ص ، حيث عند هذه الكميات يكون :

$$\frac{م\,ح\,س}{ث\,س} = \frac{م\,ح\,ص}{ث\,ص} = م\,ح\,ن$$

$$\frac{32}{8} = \frac{16}{4} = \mathbf{4}$$

كما أن : ث س × س + ث ص × ص = ميزانية المستهلك

حيث : ٨ × ٦ + ٤ × ٥ = ٤٨ + ٢٠ = ٦٨ جنيه

<u>مثال</u>

افترض أن سعر السلعة ص قد انخفض إلى ٢ جنيه للوحدة ، بدلاً من ٤ جنيه ، مع بقاء كافة البيانات كما هى .

المطلوب : استنتاج توازن المستهلك .

الحل

من الواضح أن المستهلك سوف يزيد من استهلاك السلعة ص من خمس وحدات إلى سبع وحدات ، مع بقاء الكمية المشتراه من السلعة س كما هى ، حيث عند هذا الوضع الجديد يتحقق التوازن على النحو التالى :

$$\frac{م\,ح\,س}{ث\,س} = \frac{م\,ح\,ص}{ث\,ص} = م\,ح\,ن$$

$$\frac{32}{8} = \frac{8}{2} = \mathbf{4}$$

كما أن : ٦ × ٨ + ٧ × ٢ = ٤٨ + ١٤ = ٦٢

و لكن دخل المستهلك هو ٦٨ جنيه ، و بالتالى لابد من تعديل الكميات التى يشتريها من كلا السلعتين ، و بما أن المنفعة الحدية للسلعة س هى م ح $_{\text{س}}$ = ١٢٨ - ١٦ س

و المنفعة الحدية للسلعة ص هى م ح $_{\text{ص}}$ = ٣٦ - ٤ ص

فإنه يمكن القول بأن :

$$\frac{128-16\text{س}}{8} = \frac{36-4\text{ص}}{2}$$

16 - 2 س = 18 - 2 ص

2 ص - 2 س = 2 .... (١)

∵ 2 ص + 8 س = 68 .... (٢)

بطرح (١) من (٢)

١٠ س = ٦٦

س = ٦,٦ وحدة تقريباً ،

و بالتعويض فى المعادلة الأولى

٢ = ٢ ص - ٢ (٦,٦)

٢ = ٢ ص - ١٣,٢

٢ ص = ١٥,٢

ص = ٧,٦

و بتطبيق شرطى التوازن نجد أن :

$$\frac{128-16(6.6)}{8} = \frac{36-4(7.6)}{2}$$

2.8 = 2.8

و من ناحية أخرى بتطبيق الشرط الثانى :

٦٨ = ٨ × ٦,٦ + ٢ × ٧,٦

٦٨ = ٥٢,٨ + ١٥,٢

مثال

على أساس المثال السابق استنتج دالة الطلب على السلعة ص باعتبار أن طلب المستهلك على السلعة ص خط مستقيم

الحل

توصلنا فيما سبق إلى كميتين للسلعة ص مقابل سعرين

الأثمان	الكميات
٤	٥
٢	٧,٦

و بالتالى يمكن استخدام العلاقة التالية لايجاد دالة الطلب:

صيغة النقطتين $= \frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

$$\frac{7.6 - 5}{2 - 4} = \frac{ص - 5}{س - 4}$$

$$\frac{2.6}{-2} = \frac{ص - 5}{س - 4}$$

٢,٦ س - ١٠,٤ = - ٢ ص + ١٠

٢ ص - ١٠ = ١٠,٤ - ٢,٦ س

٢ ص = ٢٠,٤ - ٢,٦ س

دالة الطلب هى :

ص = ١٠,٢ - ١,٣ س

ثانياً : توازن المستهلك باستخدام الأسلوب الرياضى

معلومات أساسية

١ - شروط توازن المستهلك بالأسلوب الرياضى لا تختلف عن تلك الشروط السابق ذكرها فى أسلوب المنفعة , فالأسلوب الرياضى ما هو إلا تعبير رياضى باستخدام الدوال الرياضية عن قيم كل من الميزانية , و المنفعة الكلية و المنفعة الحدية .

٢ - دالة المنفعة الكلية للمستهلك : هى عبارة عن دالة رياضية تأتى من خلال حاصل ضرب أو خارج قسمة , أو مجموع , أو الفرق بين , أو خليط من هذه المعاملات الحسابية التى تتم بين كميات السلع المختلفة التى يقوم المستهلك باستهلاكها .فلو رمزنا لدالة المنفعة الكلية بالرمز (ل) , و كان المستهلك يقوم باستهلاك نوعين من السلع فقط هما : (أ) , (ب) . فإن دالة المنفعة الكلية للمستهلك قد تأخذ أحد الأشكال الرياضية التالية على سبيل المثال لا الحصر :

ل = أ ب أو ل = أ^{٢} ب أو ل = أ ب^{٢}

ل = ٢ أ ب أو ل = ٣ أ + أ ب٢ و هكذا . . . .

٣ - دالة المنفعة الحدية للسلعة (أ) : هى تفاضل الدالة (ل) بالنسبة لـ أ

دالة المنفعة الحدية للسلعة (ب) : هى تفاضل الدالة (ل) بالنسبة لـ ب

شكل التمرين

يأتى التمرين على شكل دالة للمنفعة الكليـة مثـل ل = أ ب ، ثـم يعطـى بيانـات عن كل من ثمن السلعة أ = ث أ جنيه و ثمن السلعة ب = ث ب جنيه وميزانية المستهلك هى : م جنيه ثم يطلب إيجاد قيم كل من

١ – ميزانية المستهلك (كمية أ , كمية ب)

٢ – المنفعة الحدية للسلعة أ

٣ – المنفعة الحدية للسلعة ب

٤ – المنفعة الحدية لوحدة النقود

٥ – المنفعة الكلية

طريقة حل التمرين

١ - نقوم بوضع الشكل العام لدالة الميزانية يكون

ث أ × أ + ث ب × ب = م .... (١)

و منها يكون ث أ × أ = م - ث ب × ب

ونقسم هذه الدالة على ثمن أ فنحصل على قيمة أ بدلالة ب على شكل

أ = رقم - رقم × ب .. (٢)

و بالتعويض عن قيمة أ فى دالة المنفعة الكلية يكون

ل = (رقم - رقم × ب) ب

= رقم ب - رقم ب٢

و لتعظيم دالة المنفعة الكلية , نوجد المشتقة الأولى لها و نساويها بالصفر ومنها نحصل على قيمة ب

و بالتعويض عن قيمة ب فى المعادلة رقم (٢) نحصل على قيمة أ

و بالتالى بالتعويض عن قيمة ب ، أ في المعادلة رقم (١) نحصل على قيمة الميزانية

٢ ـ المنفعة الحدية للسلعة أ هى تفاضل دالة المنفعة الكلية بالنسبة لـ أ

م . ح . أ = ب

٣ ـ المنفعة الحدية للسلعة ب هى تفاضل دالة المنفعة الكلية بالنسبة لـ ب

م . ح . ب = أ

٤ ـ المنفعة الحدية لوحدة النقود

$$\text{م ح ن} = \frac{\text{م ح أ}}{\text{ث أ}} = \frac{\text{م ح ب}}{\text{ث ب}}$$

٥ ـ المنفعة الكلية = ل = أ ب

<u>مثال</u>

إذا كانت دالة المنفعة الكلية لمستهلك ما هى : ل = أ ب

و كان ثمن السلعة أ = ٤ جنيه و كان ثمن السلعة ب = ٦ جنيه

فإذا كانت ميزانية المستهلك للإنفاق على السلعتين هى : ى = ٢٤٠ جنيه

أوجد ما يلى : ١ – ميزانية المستهلك (كمية أ , كمية ب)

٢ – المنفعة الحدية للسلعة أ

٣ – المنفعة الحدية للسلعة ب

٤ – المنفعة الحدية لوحدة النقود

٥ – المنفعة الكلية

الحل

١ - من خلال الشكل العام لدالة الميزانية يكون

٤ أ + ٦ ب = ٢٤٠ .... (١)

و منها يكون ٤ أ = ٢٤٠ - ٦ ب

أى أن أ = ٦٠ - ١,٥ ب ..... (٢)

و بالتعويض عن قيمة أ فى دالة المنفعة الكلية يكون

ل = (٦٠ - ١,٥ ب) ب

= ٦٠ ب - ١,٥ ب٢

و لتعظيم دالة المنفعة الكلية , نوجد المشتقة الأولى لها و نساويها بالصفر فيكون

لَ = ٦٠ - ٣ ب = صفر

و منها نجد أن ٦٠ = ٣ ب

أى أن ب = ٢٠ .... (٣)

و بالتعويض عن قيمة ب فى المعادلة رقم (٢) يكون

أ = ٦٠ - ١,٥ × ٢٠

= ٦٠ - ٣٠

أى أن أ = ٣٠

و بالتالى فإن ميزانية المستهلك هى شراء ٣٠ وحدة من السلعة أ , و شراء ٢٠ وحدة من السلعة ب

٢ - المنفعة الحدية للسلعة أ هى تفاضل دالة المنفعة الكلية بالنسبة لـ أ

م . ح . أ = ب = ٢٠

٣ - المنفعة الحدية للسلعة ب هى تفاضل دالة المنفعة الكلية بالنسبة لـ ب

م . ح . ب = أ = ٣٠

٤ - المنفعة الحدية لوحدة النقود

$$\text{م ح ن} = \frac{\text{م ح أ}}{\text{ث أ}} = \frac{\text{م ح ب}}{\text{ث ب}}$$

$$\text{م ح ن} = \frac{\text{م ح أ}}{\text{ث أ}} = \frac{٢٠}{٤} = ٥$$

$$\text{م ح ن} = \frac{\text{م ح ب}}{\text{ث ب}} = \frac{٣٠}{٦} = ٥$$

٥ - المنفعة الكلية = ل = أ ب

= ٣٠ × ٢٠

= ٦٠٠

أهم المراجع

لمتابعة بشكل أكثر تفصيل يمكن متابعة الشرح على الموقع التالى :

https://www.youtube.com/watch?v=FMc-fpxFxM0

الفصل الرابع

دوال الإنتاج فى الأجل القصير

الهدف من دراسة الفصل

بنهاية الدراسة لهذا الفصل يكون الدارس قادر على الالمام بالمفاهيم التالية:

١- ماهية قانون تناقص الغلة

٢-التعرف على مراحل الإنتاج رياضياً .

٣-التعرف على مراحل الإنتاج بيانياً .

الفصل الرابع
دوال الإنتاج فى الأجل القصير

قانون تناقص الغلة

دالة الإنتاج: هى تعبير رياضى عن الناتج الكلى

الناتج الكلى: هو اجمالى عدد وحدات الإنتاج

الناتج المتوسط: التغير الحادث فى الناتج الكلى عند تغيرعنصر الإنتاج المتغير بمقدار الوحدة.

الناتج المتوسط : هو خارج قسمة الناتج الكلى على عدد وحدات العنصر المتغير

ملحوظة : هناك نوعان من عناصر الإنتاج (المدخلات) مدخلات ثابتة و مدخلات متغيرة

وعند حساب النواتج ل نأخذ فى الحسبان إلا العناصر (المدخلات) المتغيرة فقط

أولاً : شكل الجدول

العنصر الثابت	العنصر المتغير	الناتج الكلى	الناتج المتوسط	الناتج الحدى	المراحل
١٠ ١٠ ١٠ ١٠	١ ٢ ٣ ٤			* أكبر قيمة	مرحلة تزايد الغلة
١٠ ١٠ ١٠ ١٠	٥ ٦ ٧ ٨	* أكبر قيمة للكلى * نفس القيمة السابقة		* صفر	مرحلة ثبات الغلة
١٠ ١٠	٩ ١٠			ــ قيم ــ سالبة	مرحلة تناقص الغلة

<u>ثانياً كيفية تكوين الجدول</u>

١ ـ إذا كان المعطى فى الجدول هو الناتج الكلى فقط

أ ـ المتوسط = الكلى المقابل له ÷ عدد وحدات العنصر المتغير المقابلة له
ب ـ الحدى = الكلى المقابل له ـ الكلى السابق له

٢ ـ إذا كان المعطى فى الجدول هو الناتج المتوسط فقط

أ ـ الكلى = المتوسط المقابل له × عدد وحدات العنصر المتغير المقابلة له

ب ـ نوجد الحدى بعد ذلك من الكلى حيث يكون
الحدى = الكلى المقابل له ـ الكلى السابق له

٣ ـ إذا كان المعطى فى الجدول هو الناتج الحدى فقط

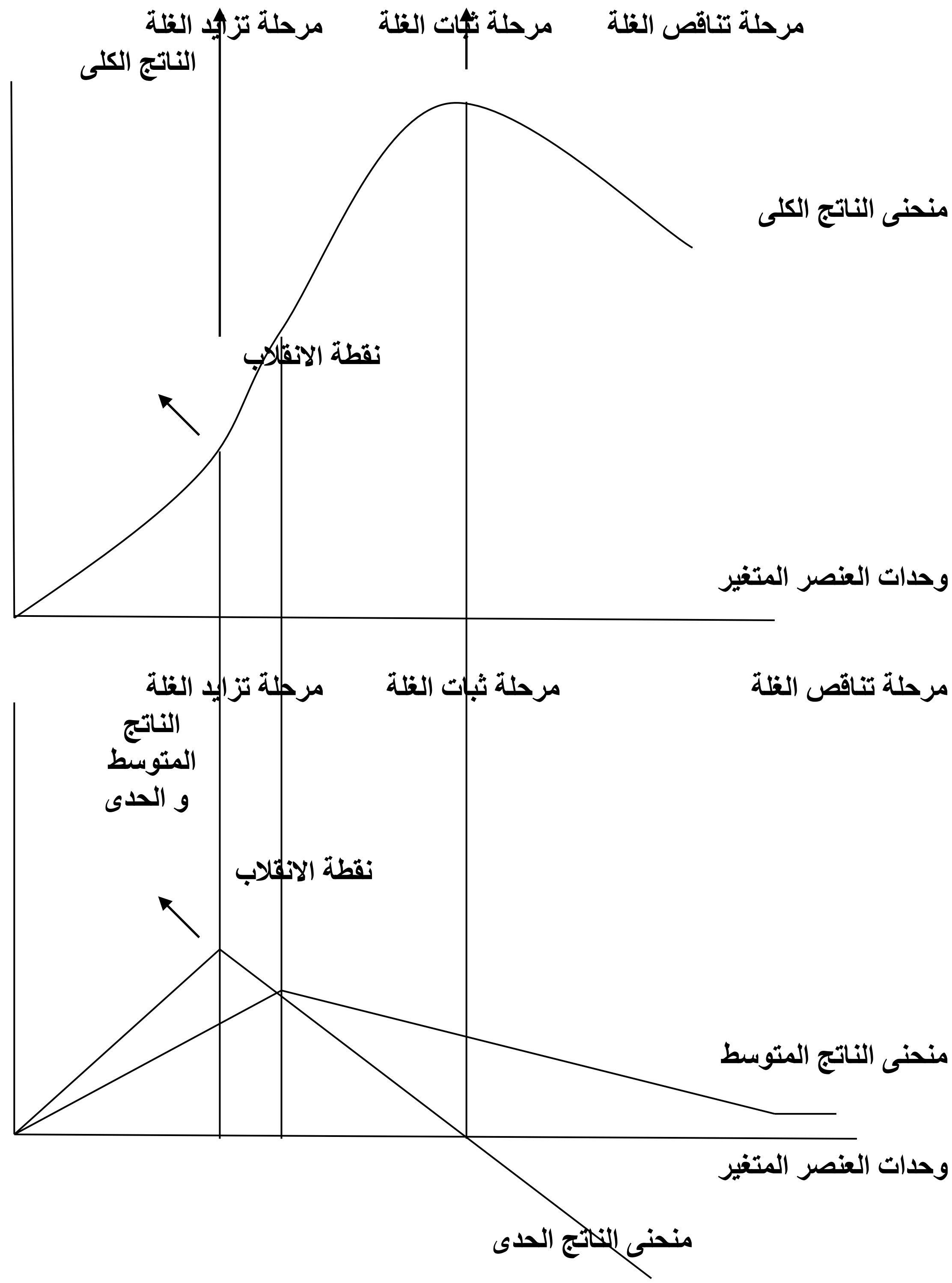
أ ـ الكلى = الحدى المقابل له + الكلى السابق له
ب ـ نوجد المتوسط بعد ذلك من الكلى حيث يكون
المتوسط = الكلى المقابل له / عدد وحدات العنصر المتغير المقابلة له

٤ ـ المرحلة الأولى تنتهى بعد أكبر قيمة للناتج الحدى

٥ ـ المرحلة الثانية تنتهى عند آ خر قيمة موجبة للناتج الحدى أو عندما يكون الحدى = صفر

٦ ـ المرحلة الثالثة هى التى تكون فيها قيم الناتج الحدى سالبة

ثانياً : الرسم البيانى لمنحنيات الناتج الكلى والمتوسط والحدى



العلاقات

علاقة الحدى و المتوسط

١ ـ المتوسط يزداد طالما أن الحدى أعلى منه
٢ ـ المتوسط يتناقص طالما أن الحدى أقل منه
٣ ـ المتوسط يصل إلى أقصى قيمة له عندما يتقاطع مع الحدى

علاقة الحدى و الكلى

١ ـ الكلى فى تزايد طالما أن الحدى موجب
٢ ـ الكلى يزداد بمعدل متزايد طالما أن الحدى يزداد
٣ ـ الكلى يزداد بمعدل متناقص طالما أن الحدى يتناقص ولكنه مازال موجباً
٤ ـ الكلى يتناقص طالما أن الحدى يأخذ قيم سالبة
٥ ـ الكلى يصل إلى أقصى قيمة له عندما يصل الحدى إلى الصفر

تمرين هام جداً

إذا كانت لديك البيانات التالية

العنصر الثابت	العنصر المتغير	الناتج الكلى	الناتج المتوسط	الناتج الحدى	المراحل
٥	١			٦	
٥	٢			٨	
٥	٣			١	
٥	٤			٨	
٥	٥			٥	
٥	٦			١	
٥	٧			صفر	
٥	٨			ـ ١	
٥	٩			ـ ٢	
٥	١٠			ـ ٣	

المطلوب : ١ ـ أكمل الجدول الناقص , ثم وضح بيانيا المراحل الثلاثة للإنتاج .

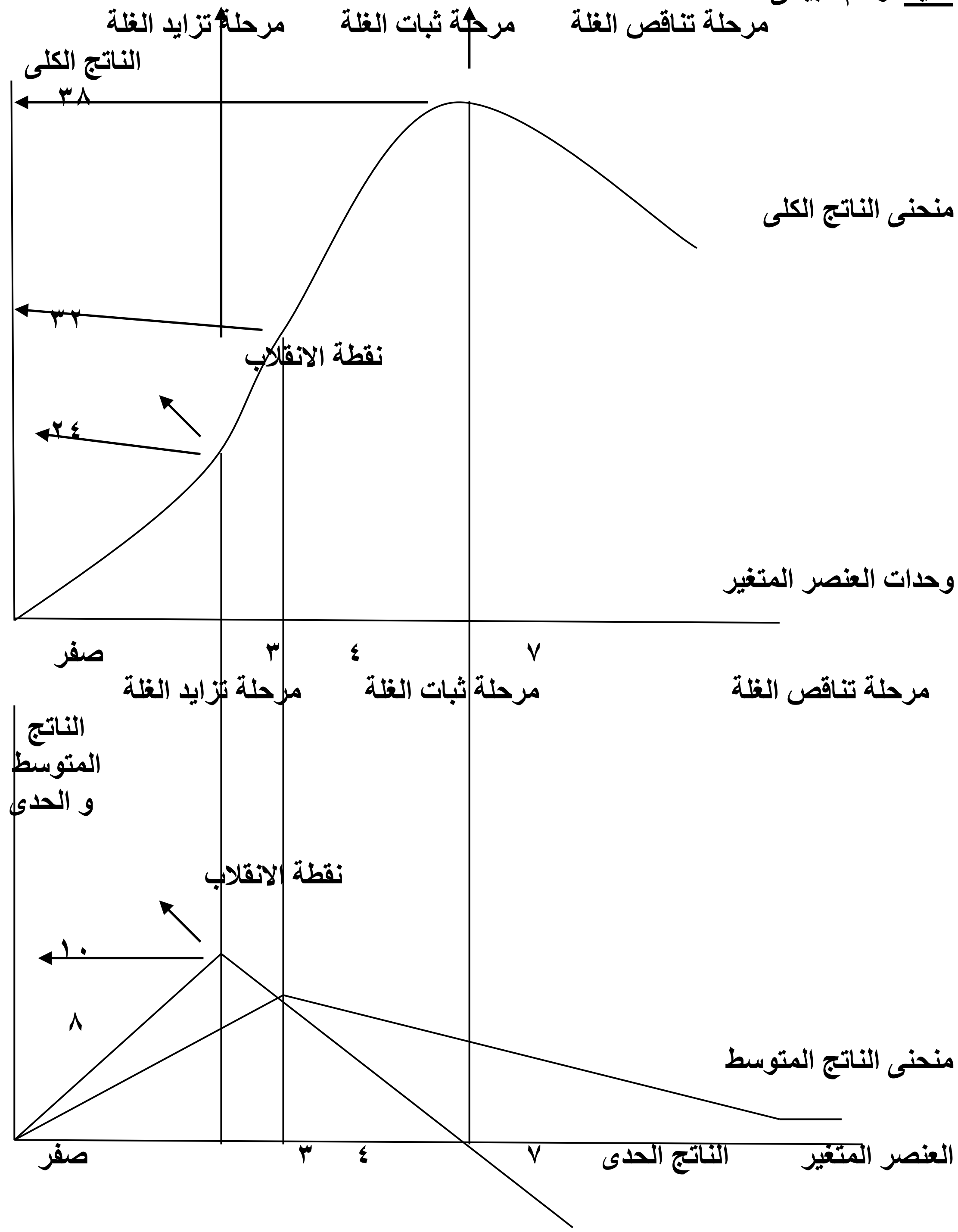
الحل

١ ـ <u>أولاً الجدول</u>

يتم أولاً إيجاد قيم الناتج الكلى من الناتج الحدى , ثم إيجاد المتوسط من الكلى من خلال العلاقات التالية: الكلى = الحدى المقابل له + الكلى السابق له
المتوسط = الكلى المقابل له / عدد وحدات العنصر المتغير المقابلة له
فمثلا
عند العنصر الأول الكلى = ٦ + ٠ = ٦ فكان المتوسط = ٦ / ١ = ٦
عند العنصر الثانى الكلى = ٨ + ٦ = ١٤ فكان المتوسط = ١٤ / ٢ = ٧
عند العنصر الثالث الكلى = ١٠ + ١٤ = ٢٤ فكان المتوسط = ٢٤ / ٣ = ٨
و هكذا و بالتالى يكون الجدول على الشكل التالى

العنصر الثابت	العنصر المتغير	الناتج الكلى	الناتج المتوسط	الناتج الحدى	المراحل
٥	١	٦	٦	٦	مرحلة تزايد الغلة
٥	٢	١٤	٧	٨	
٥	٣	٢٤	٨	١٠	
٥	٤	٣٢	٨	٨	مرحلة ثبات الغلة
٥	٥	٣٧	٧,٤	٥	
٥	٦	٣٨	٦,٤	١	
٥	٧	٣٨	٥,٤	صفر	
٥	٨	٣٧	٤,٦	ـ ١	مرحلة تناقص الغلة
٥	٩	٣٥	٣,٩	ـ ٢	
٥	١٠	٣٢	٣,٢	ـ ٣	

ثانيا الرسم البيانى



لاحظ أن

الرسم يكون بشكل تقريبى وليس من الضرورى تمثيل كل البيانات عليه و لكن هناك ثلاثة نقاط أساسية هى التى يجب توضيحها وهى كالتالى

١ ـ نهاية المرحلة الأولى : وكان عندها الناتج الكلى = ٢٤ , و الحدى = ١٠

٢ ـ نقطة تقاطع الحدى مع المتوسط : عند العنصر ٤ و عندها الحدى = المتوسط = ٨ والكلى عندها =٣٢

٣ ـ نهاية المرحلة الثانية : و كان عندها الناتج الكلى = ٣٨ , الحدى = صفر

<u>ثانياً : قانون تناقص الغلة رياضياً</u>

من الممكن أن نتوصل إلى نفس النتائج السابقة من خلال الدوال الرياضية .

فعندما تكون هناك دالة للإنتاج على النحو التالى

ك = أ س + ب س٢ - جـ س٣

حيث ك هى الناتج الكلى , س وحدات العنصر المتغير (العمل)

, (أ ، ب ، جـ) أرقام ثابتة فى الدالة , تتغير من دالة إلى أخرى

و فى هذه الحالة فإن الناتج الحدى (ن ح) لعنصر الإنتاج المتغير (العمل) هنا عبارة عن المشتقة الأولى لدالة الناتج الكلى:

ن ح = $\frac{\partial ك}{\partial س}$ = أ + ٢ ب س - ٣ جـ س٢

أما الناتج المتوسط (ن م) فهو عبارة عن خارج قسمة دالة الإنتاج على عدد وحدات العنصر المتغير

ن م = $\frac{ك}{س}$ = أ + ب س - جـ س٢

و تتحدد بداية المرحلة الثانية عندما يكون : ن ح = ن م

و تتحدد نهاية المرحلة الثانية عندما يكون : ن ح = صفر

تمرين

إذا كانت لديك دالة انتاج على النحو التالى :

ك = ٢٧ س + ١٢ س٢ - س٣

حيث ك هى الناتج الكلى , س وحدات العنصر المتغير

المطلوب إيجاد قيمة س التى تقسم الدالة إلى مراحلها الثلاثة

الحل

نوجدأولاً دالة كل من الناتج التوسط و الناتج الحدى حيث يكون

$$ن ح = \frac{\partial ك}{\partial س} = ٢٧ + ٢٤ س - ٣ س^٢$$

$$ن م = \frac{ك}{س} = ٢٧ + ١٢ س - س^٢$$

وعند بداية المرحلة الثانية يكون

ن ح = ن م

أى أن ٢٧ + ٢٤ س - ٣ س٢ = ٢٧ + ١٢ س - س٢

و منها نجد أن ١٢ س - ٢ س٢ = صفر

بالقسمة على ٢ س يكون :

٦ - س = صفر

إذن س = ٦

و فى نهاية المرحلة الثانية يكون :

ن ح = صفر

أى أن ٢٧ + ٢٤ س - ٣ س٢ = صفر

بالقسمة على ٣ و الضرب فى (- ١) يكون :

س٢ - ٨ س - ٩ = صفر

و بتحليل المقدار الثلاثى السابق يكون

(س - ٩) (س + ١) = صفر

و منها يكون :

إما س - ٩ = صفر إذن س = ٩

و إما س + ١ = صفر إذن س = - ١ مرفوض

و بالتالى فإن :

المرحلة الأولى تبدأ من س = ١ حتى س = ٥

المرحلة الثانية تبدأ من س = ٦ حتى س = ٨

المرحلة الثالثة تبدأ من س = ٩

ملحوظة هامة :

عند صعوبة تحليل المقدار الثلاثى نلجأ إلى استخدام طريقة المميز بالطريقة التالية :

حيث أ : هى الرقم المضروب فى س٢

ب : هى الرقم المضروب فى س

جـ : هى الرقم الخالى من س

و بالتطبيق على المقدارالسابق س٢ - ٨ س - ٩ = صفر نجد أن

تمرين

إذا كانت لديك دالة انتاج على النحو التالى :

١ - ك = ١٠ س٢ - س٣

٢ - ك = - ١٦ + ٢٠ س - س٢

حيث ك هى الناتج الكلى , س وحدات العنصر المتغير

المطلوب إيجاد قيمة س التى تقسم الدالة إلى مراحلها الثلاثة

الحل

١ - ك = ١٠ س٢ - س٣

نوجدأولاً دالة كل من الناتج التوسط و الناتج الحدى حيث يكون

$$\text{ن ح} = \frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}} = \text{٢٠ س} - \text{٣ س}^{٢}$$

$$\text{ن م} = \frac{\text{ك}}{\text{س}} = \text{١٠ س} - \text{س}^{٢}$$

وعند بداية المرحلة الثانية يكون

ن ح = ن م

أى أن ٢٠ س - ٣ س٢ = ١٠ س - س٢

و منها نجد أن ١٠ س - ٢ س٢ = صفر

بالقسمة على ٢ س يكون :

٥ - س = صفر

إذن س = ٥

و فى نهاية المرحلة الثانية يكون :

ن ح = صفر

أى أن ٢٠ س - ٣ س٢ = صفر

بالقسمة على س يكون :

٢٠ - ٣ س = صفر

٢٠ = ٣ س

إذن : س = ٢٠ ÷ ٣ = ٦,٦ بمعنى أن المرحلة التالية تبدأ من س = ٧

و بالتالى فإن :

المرحلة الأولى تبدأ من س = ١ حتى س = ٤
المرحلة الثانية تبدأ من س = ٥ حتى س = ٦
المرحلة الثالثة تبدأ من س = ٧

٢ - ك = - ١٦ + ٢٠ س - س٢

نوجدأولاً دالة كل من الناتج التوسط و الناتج الحدى حيث يكون

$$\text{ن ح} = \frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}} = ٢٠ - ٢\ \text{س}$$

$$\text{ن م} = \frac{\text{ك}}{\text{س}} = \frac{16-}{\text{س}} + ٢٠ - \text{س}$$

وعند بداية المرحلة الثانية يكون

ن ح = ن م

أى أن $٢٠ - ٢\ \text{س} = \frac{16-}{\text{س}} + ٢٠ - \text{س}$

و منها نجد أن $٢\ \text{س} = \frac{16}{\text{س}} + \text{س}$

و منها نجد أن $\text{س} = \frac{16}{\text{س}}$

إذن س٢ = ١٦

إذن س = ٤

و فى نهاية المرحلة الثانية يكون :

ن ح = صفر

أى أن ٢٠ - ٢ س = صفر

بالقسمة على س يكون :

٢٠ = ٢ س

إذن : س = ١٠

و بالتالى فإن :

المرحلة الأولى تبدأ من س = ١ حتى س = ٣

المرحلة الثانية تبدأ من س = ٤ حتى س = ١٠

المرحلة الثالثة تبدأ من س = ١١

الفصل الخامس

توازن المنتج

الهدف من دراسة الفصل

بنهاية الدراسة لهذا الفصل يكون الدارس قادر على الالمام بالمفاهيم التالية:

١- منحنى الناتج المتكافئ .

٢-ميزانية المنتج .

٣-معدل الاحلال الحدى الفنى .

٤-التوليفة المثلى من عناصر الانتاج

الفصل الخامس

توازن المنتج

يتحقق توازن المنتج عندما يمس خط الميزانية أعلى منحنى ناتج متكافئ فيما يعرف باسم الكفاءة الاقتصادية .

فالكفاءة الاقتصادية هى حاصل ضرب الكفاءة الفنية فى الكفاءة التخصصية .

أى أن:

كفاءة اقتصادية = كفاءة فنية × كفاءة تخصصية

و يجب ملاحظة أن :

١ ـ تكلفة أية توليفة = (كمية العمل عندها × ثمن وحدة العمل)

+ (كمية رأس المال عندها × ثمن وحدة رأس المال)

٢ ـ تكلفة التوليفة المثلى = ميزانية المنتج

و على ذلك نجد أن : الكفاءة اقتصادية

= الكفاءة فنية × الكفاءة تخصصية

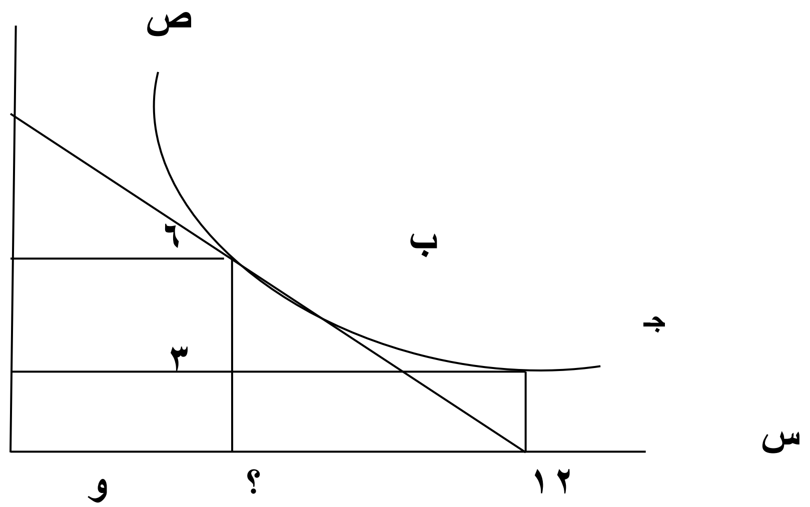
٣ ـ ميل خط الناتج المتساوى

= ثمن العنصرعلى الأفقى ÷ ثمن العنصرعلى الرأسى

٤ ـ إذا كان الميل = ٠,٥ أو ٢ فهذا يعنى أن سعر أحد العاملين هو ضعف سعر الآخر , و الكمية القصوى لأحد العاملين هى ضعف الكمية القصوى للعاملالآخر , و فى هذه الحالة غالباً ما يكون التوازن فى نقطة الوسط مالم ينص التمرين على غير ذلك, و فى نقطة الوسط هذه يكون أيضاً كمية أحد العاملين ضعف كمية الآخر .

تمرين هام

فى الشكل التالى : إذا كان المنتج يستطيع استخدام أى توليفة على منحنى الناتج المتكافئ لإنتاج ٥٠ وحدة من المنتج ، و كانت مكونات التوليفة (جـ) هى ١٢ وحدة من (س) مع ٣ وحدات من (ص) ، و كانت ميزانية المنتج هى ٧٢ جنيه , فى حين كانت تكلفة التوليفة (ج) هى ٨١ جنيه , علماً بأن المنتج يستطيع استخدام ٦ وحدات من (ص) عند التوليفة (ب) , و ذلك كما هو موضح من خلال الشكل التالى :



المطلوب :

١ – أوجد سعر الوحدة من (س) و سعر الوحدة من (ص)

٢ – كم يتحمل المنتج من تكاليف عند استخدام التوليفة (ب) , و كم وحدة يستخدمها عند هذه التوليفة من العنصر الإنتاجى (س)

٣ – علل استخدام المنتج للتوليفة (ب) و عدم استخدام التوليفة (جـ)

٤ – احسب معدل الإحلال الحدى لمنحنى الناتج المتكافئ عند التوليفة (جـ)

الحل

١ – طالما أن ميزانية المنتج هى ٧٢ جنيه

وطالما أن أقصى كمية يستطيع المنتج استخدامها من(س) هى ١٢ وحدة كما هو موضح عند التوليفة (جـ)

و طالما أن : أقصى كمية من (س) = الميزانية ÷ ثمن (س)

إذن ١٢ = ٧٢ ÷ ث س

إذن ث س = ٧٢ ÷ ١٢ = ٦ جنيه

و طالما أن تكلفة التوليفة (جـ) = ٨١

إذن ٨١ = كمية س × ثمنها + كمية ص × ثمنها

٨١ = (١٢ × ٦) + (٣ × ث ص)

٨١ = ٧٢ + (٣ × ث ص)

٩ = (٣ × ث ص)

و منها ث ص = ٣

٢ – التوليفة (ب) هى التوليفة المثلى للمنتج و عندها يتحمل المنتج تكاليف تساوى ميزانية الإنتاج ، أى أن المنتج يتحمل تكاليف قدرها ٧٢ جنيه عند التوليفة (ب)

و بالتالى يكون : ٧٢ = كمية س × ثمنها + كمية ص × ثمنها

إذن ٧٢ = (كمية س × ٦) + (٦ × ٣)

٧٢ = (كمية س × ٦) + ١٨

٥٤ = كمية س × ٦

إذن كمية س عند (ب) = ٩ وحدات

٣ ـ كلاً من التوليفة (ب) ،(جـ) تعطى للمنتج ٥٠ وحدة إنتاج ، إلا أن ذلك يكون بتكلفة قدرها ٧٢ جنيه فقط عند النقطة (ب) , و بتكلفة قدرها ٨١ عند (جـ) لذلك فإنه لتحقيق الكفاءة التخصصية فى الإنتاج و التى تقضى بتحقيق أدنى تكلفة ممكنة فإن المنتج يختار التوليفة (ب) بدلاً عن التوليفة (جـ) .

٤ – عند الانتقال إلى النقطة (جـ) بدلاً من النقطة (ب) فإن المنتج يخفض استخدامه من العنصر ص من ٦ وحدات إلى ٣ وحدات أى أن : Δ ص = ٣

و ذلك فى مقابل زيادة استخدامه للعنصر س من ٩ وحدات إلى ١٢ وحدة

أى أن Δ س = ٣

و طالما أن معدل الإحلال الحدى لـ س محل ص $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{3}{3} = ١$

<u>تمرين</u>

الجدول التالى يوضح التوليفات المختلفة من عنصرى الإنتاج س , ص لإنتاج ٥٠ وحدة إنتاج :

	س	ص
أ	٦	١٦
ب	٨	١٢
جـ	١٢	٨
د	٢٤	٤

فإذا كانت ميزانية المنتج هى ٢٤ جنيه , و ثمن الوحدة من س واحد جنيهه , و ثمن الوحدة من ص واحد و نصف جنيه .

حدد الكميات التى يجب على المنتج استخدامها من س , ص مع توضيح الإجابة بيانياً .

الحل

نوجد تكلفة كل توليفة كما يلى :

كمية س × ثمنها + كمية ص × ثمنها = تكلفة التوليفة

تكلفة التوليفة أ = ٦ × ١ + ١٦ × ١,٥ = ٣٠

تكلفة التوليفة ب = ٨ × ١ + ١٢ × ١,٥ = ٢٦

تكلفة التوليفة جـ = ١٢ × ١ + ٨ × ١,٥ = ٢٤

تكلفة التوليفة د = ٢٤ × ١ + ٤ × ١,٥ = ٣٠

يتضح مما سبق أن تكلفة التوليفة جـ = ٢٤ جنيه = ميزانية المنتج

إذن يستخدم المنتج ١٢ وحدة من س مع ٨ وحدات من ص و يمكن تضيح ذلك بيانياً كما يلى : نرسم خط الميزاية بتحديد

أقصى كمية ممكنة من س = الميزانية ÷ ثمن س = ٢٤ ÷ ١ = ٢٤

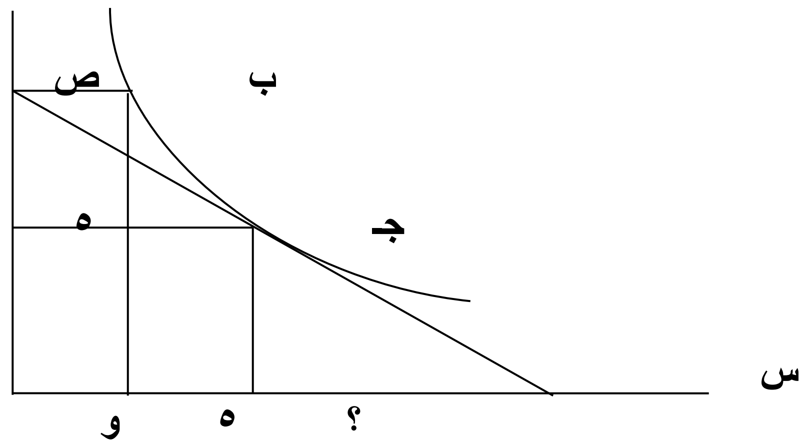
و أقصى كمية ممكنة من ص = الميزانية ÷ ثمن ص = ٢٤ ÷ ١,٥ = ١٦

ثم نرسم منحنى الناتج المتساوى من خلال الوليفات المعطاة فى التمرين كما يلى

و من الشكل نجد أن توازن المنتج يحدث عندما يمس خط الميزانية منحنى الناتج المتساوى فى النقطة جـ عند ١٢ وحدة من س و ٨ وحدات من ص

تمرين

-



فـى الشـكل السـابق إذا كانـت ميزانيـة المنـتج = ١٠٠ جنيـه , و كـان ميـل خـط الميزانية و منحنى الناتج المتساوى عند جـ يساوى ٠,٥ ,أوجد :

- **سعر الوحدة من س ، ص**
- **كم عدد الوحدات التى يستخدمها المنتج من س عند التوليفة جـ**
- **إذا اقتضـت التكنولوجيـا المتاحـة الإنتـاج عنـد ب , فكـم تبلـغ الميزانيـة اللازمة للإنتاج فى هذه الحالة .**

الحل

النقطة جـ هى ضع التوازن لأن خط الميزانية يمس محنى الناتج المتساوى عندها

∵ ميل خط الميزانية عند نقطة التوازن = $\frac{ثمن س}{ثمن ص} = \frac{1}{2}$

∴ ث ص = ٢ ث س .... (١)

و بالتالى فإنه عند هذه النقطة يكون كمية س = ٢ كمية ص

∵ ص عند التوازن (أى عند النقطة جـ) = ٥

∴ <u>قيمة س عند النقطة جـ = ٢ × ٥ = ١٠</u>

كما يلاحظ أن تكلفة جـ = الميزانية لآنها نقطة التوازن

∴ س × ث س + ص × ث ص = ١٠٠

١٠ ث س + ٥ ث ص = ١٠٠

و بالتعويض عن ث ص = ٢ ث س يكون

١٠ ث س + ٥ × ٢ ث س = ١٠٠

ومنها ٢٠ ث س = ١٠٠ ∴ ث س = ٥

∴ ث ص = ٢ × ٥ = ١٠

كمية ص عند ب هى أقصى كمية من ص يمكن انتاجها

$$= \frac{\text{الميزانية}}{\text{ثمن ص}} = \frac{100}{10} = ١٠$$

تكلفة ب = س × ث س + ص × ث ص

= ٥ × ٥ + ١٠ × ١٠ = ١٢٥

فـإذا اقتضـت التكنولوجيـا المتاحـة الإنتـاج عنـد ب , فتكـون الميزانيـة اللازمـة للإنتاج فى هذه الحالة هى ١٢٥ جنيه.

الفصل السادس

دوال التكاليف والانتاج

الهدف من دراسة الفصل

بنهاية الدراسة لهذا الفصل يكون الدارس قادر على الالمام بالمفاهيم التالية:

١- أنواع التكاليف .

٢-أنواع الايرادات .

٣-مرونة الناتج .

٤-مرونة التكاليف

الفصل السادس

دوال التكاليف و الانتاج

THE COST & PRODUCTION FUNCT8IONS

طبيعة التكاليف

تشتمل التكاليف الاقتصادية على التكاليف المباشرة (الصريحة) وغير المباشرة (الضمنية) .

والتكاليف المباشرة هى النفقات التى تتحملها الشركة لشراء أو استئجار عناصر الإنتاج . أما التكاليف غير المباشرة فهى تشير إلى قيمة عناصر الإنتاج التى تمتلكها وتستخدمها الشركة فى أنشطتها الإنتاجية . هذا ويتم حساب أو تقدير قيمة عناصر الإنتاج بمقدار الربح الذى يمكن أن تجلبه إلى الشركة إذا تم استغلالها بأفضل بديل ممكن .

وينبغى التمييز بين التكاليف الاقتصادية أو تكليف النفقة البديلة من ناحية والتكاليف المحاسبية من ناحية أخرى ، حيث تشير التكاليف المحاسبية إلى النفقات الفعلية للشركة (أو التكاليف الصريحة) لشراء أو استئجار عناصر الإنتاج . وتعد التكاليف المحاسبية أو التاريخية على قدر كبير من الأهمية للأغراض الضرائبية ورفع التقارير المالية الخاصة بالشركة أما التكاليف الاقتصادية أو تكاليف الفرصة البديلة فهى بمثابة المفاهيم الواجب اتباعها لأغراض اتخاذ القرارات الإدارية . كذلك ينبغى علينا التمييز بين التكاليف الحدية والتكاليف الزائدة .

فالتكاليف الحدية تشير إلى التغير فى إجمالى التكلفة لوحدة واحدة من التغير فى الإنتاج أما التكلفة الزائدة فإنها تتسع لأكثر من ذلك حيث تشير إلى التغير فى إجمالى التكاليف نتيجة للقيام بتنفيذ قرار إدارى معين ، مثل افتتاح خط إنتاج جديد . والتكاليف التى لا تتأثر بمثل هذه القرارات ليس لها علاقة بالتكاليف الزائدة ، وتعرف بالتكاليف غير المتكررة .

دوال التكلفة فى المدى القصير

عند الحديث عن المدى القصير نجد أن بعض عناصر الإنتاج الخاصة بالشركة ثابتة وبعضها متغير . وهو الأمر الذى ينتج عنه تحمل الشركة لتكاليف ثابتة وأخرى متغيرة . فإجمالى التكاليف الثابتة (TFC) هى كافة التزامات الشركة إزاء جميع عناصر الإنتاج الثابتة لكل فترة زمنية معينة .

أما إجمالى التكاليف المتغيرة (TVC) فهى كافة التزامات الشركة إزاء جميع عناصر الإنتاج المتغيرة . وبالتالى تكون إجمالى التكاليف (TC) هي إجمالي التكاليف الثابتة زائد إجمالى التكاليف المتغيرة . أى أن :

$$TC = TFC + TVC \qquad (١)$$

هذا ويمكن للشركة إجراء ما تراه من تغيرات فى حجم إنتاجها فى المدى القصير من خلال التغير فى كميتى عناصر الإنتاج المتغيرة التى تقوم باستخدامها وذلك فى حدود الإمكانيات التى تملكها. ونتيجة لهذ (التغيير) تنشا دوال أو جداول التكاليف TFC و TVC و TC . وهى التي توضح الحد الأدنى فى التكاليف المباشرة وغير المباشرة اللازمة لتحقيق مستويات مختلفة من الإنتاج .

ويمكننا اشتقاق منحنيات التكلفة لكل وحدة من خلال منحنيات إجمالى التكلفة . أما متوسط التكلفة الثابتة (AFC) فهى تساوى إجمالى التكاليف الثابتة مقسوما على مستوى الإنتاج (Q) , كما أن متوسط التكلفة المتغيرة فهى تساوى إجمالى التكاليف المتغيرة مقسوما على الإنتاج . كما أن متوسط إجمالى التكلفة يساوى إجمالى التكلفة مقسوما على الإنتاج . وأيضاً ATC يساوى AFC زائد AVC . فى حين أن التكلفة الحدية (MC) هى التغير الحادث فى أىٍ من TC أو TVC لكل وحدة تغير فى الإنتاج . أى أن :

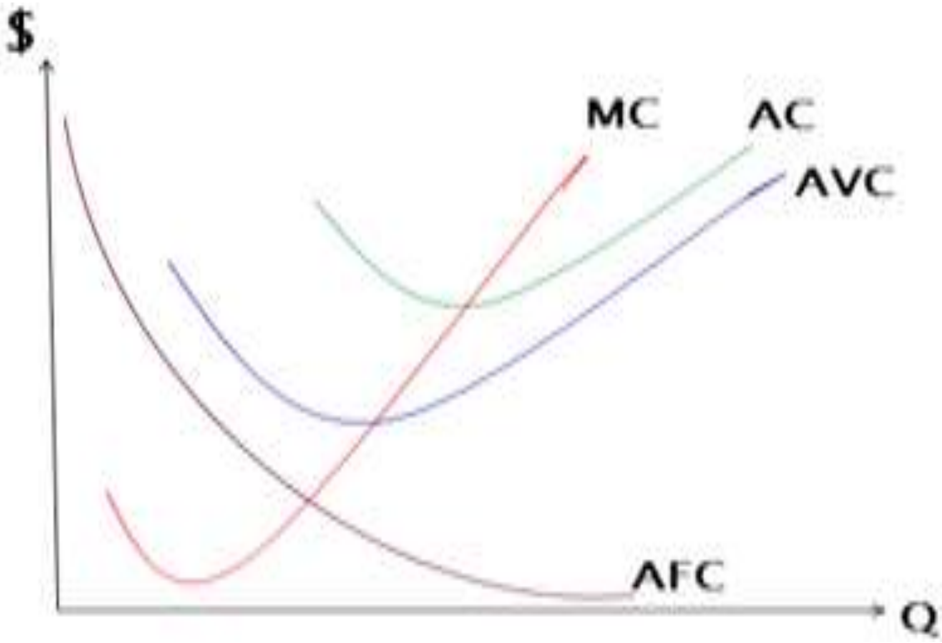
$$AFC = \frac{TFC}{Q} \qquad (٢)$$

$$AVC = \frac{TVC}{Q} \qquad (٣)$$

$$ATC = \frac{TC}{Q} = AFC + AVC \qquad (٤)$$

$$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q} = \frac{\Delta TVC}{\Delta Q} \qquad (٥)$$

وبيانياً تأخذ دوال التكاليف في الأجل القصير الشكل التالى :



وتحسب التكاليف الحدية (MC) كحاصل طرح التكـاليف الكليـة لكميـة معينـة من الإنتاج من التكاليف الكلية بعد زيادة الإنتاج بوحدة واحـدة. ولأن الزيـادة فـي التكلفة الكلية تنتج من جانب التكاليف المتغيرة (فقط) فإن التكاليف الحدية يمكـن حسابها من التكاليف المتغيرة أيضا.

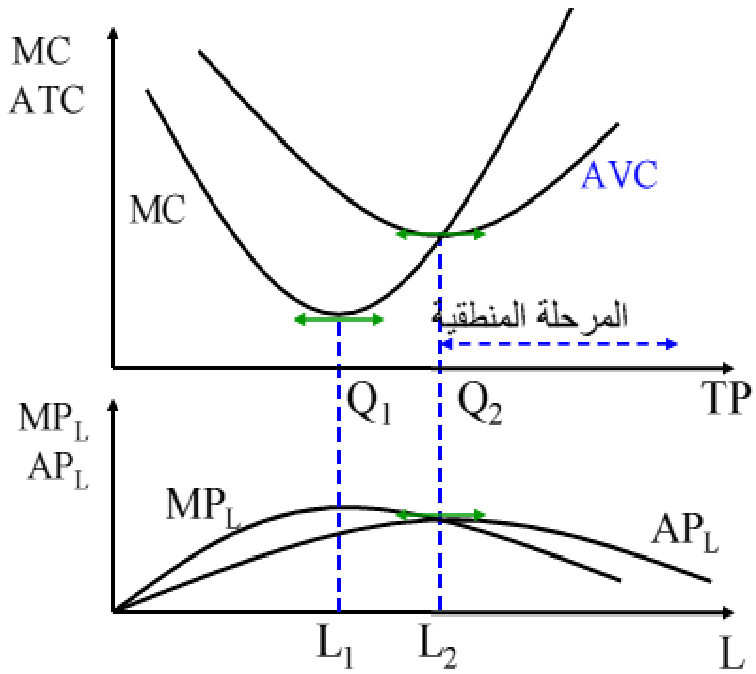
و عندما يكون العمل L هو عنصر الانتاج المتغير , و يكون الأجر W هو التكلفة الحدية للعمالة فإن التكاليف الحدية في المدى القريب تحسب على النحو التالى :

- $TC = FC + w_* L$

$$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q} = w * \frac{\Delta L}{\Delta Q} = w * \frac{1}{\left(\frac{\Delta Q}{\Delta L}\right)} = w * \frac{1}{MQ_L}$$

الانتاج الحدى و التكلفة الحدية :

وباعتبـار أن أجـر العمـل w محـدد فـي سـوق العمـل نلاحـظ مـن المعادلـة أن التكاليف الحدية MC تتغير عكسيا مع التغير فـي الانتـاج الحـدي للعامـل MQ_L فعندما يكون الانتاج الحدي للعمل متزايداَ تأخذ التكلفة الحدية في التناقص وحـين يصل الانتاج الحدي للعامل الى نـهايتـه القصـوى تكـون التكلفـة الحديـة قد بلغت نـهايتها الصغرى وعندما يبدأ تناقص الانتاجية الحدية للعمال تبدأ التكلفـة الحديـة في التزايد كما يتضح من الرسم البياني التالي :



عنـدما يصـل الانتـاج الحـدي الـى نـهايتـه العظمـى تكـون التكلفـة الحديـة عنـد نـهايتها الدنيا وعندما يصل الانتـاج المتوسـط الـى نـهايتـه العظمـى تكـون التكلفـة المتوسطة المتغيرة عند نـهايتها الدنيا.

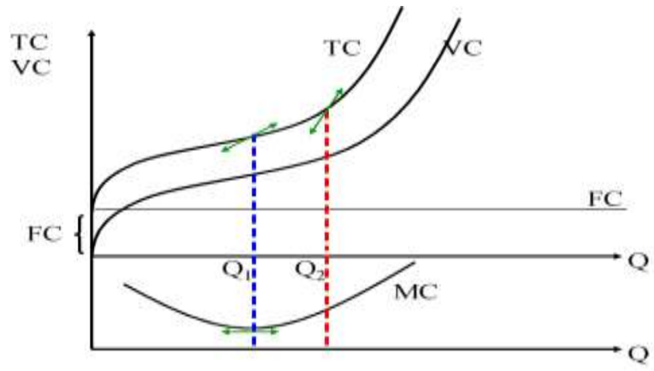
الانتاج المتوسط ومتوسط التكلفة المتغيرة في المدى القريب:

يمكن التعبير عن متوسط التكلفة المتغيرة AVC على النحو التالي:

$$AVC = \frac{TVC}{Q} = w * \frac{L}{Q} = w * \frac{1}{AQ_L} \quad \text{لأن} \quad AQ_L = \frac{Q}{L}$$

$$min(AVC) = w * \frac{1}{max(AQ_L)}$$

كذلك مع زيادة الانتاج تزيد التكاليف الكلية بداية بمعدل يتناقص بتناقص التكلفة الحدية حتى تصل الى نهايتها الصغرى ثم تستمر التكاليف الكلية في التزايد ولكن بمعدل متزايد مع استمرار تزايد التكلفة الحدية كما يتبين من الرسم البياني الآتي:



تزيد التكاليف الكلية بمعدل متناقص عندما تكون التكلفة الحدية متناقصة ثم تأخذ التكاليف الكلية في التزايد بمعدل متزايد عندما تبدأ التكلفة الحدية في التزايد أي بعد النقطة Q1 وبنسبة أكبر عندما تبدأ التكلفة المتوسطة في التزايد أي بعد النقطة Q2.

العلاقة بين منحنيات التكلفة المتوسطة والتكلفة الحدية:

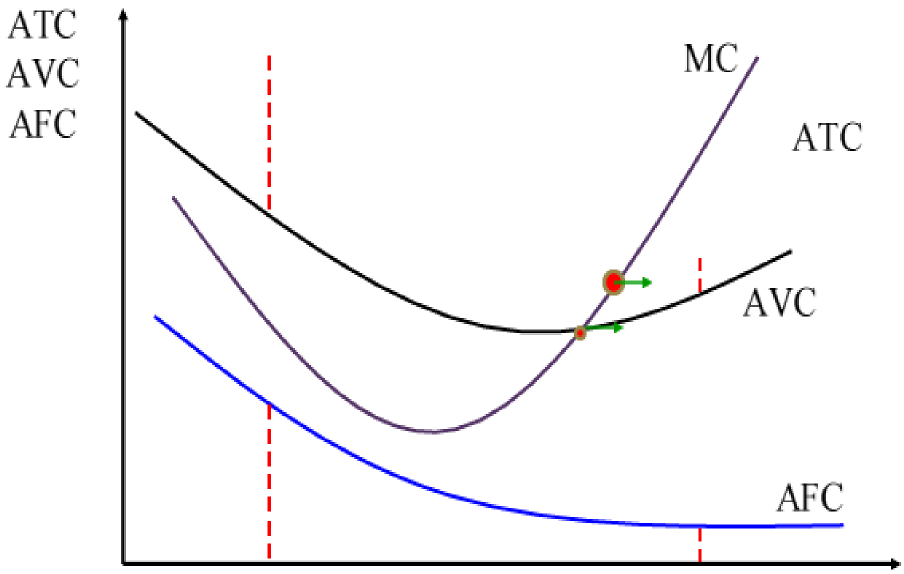
تتكون التكاليف الكليـة مـن التكـاليف الثابتـة والتكـاليف المتغيـرة ونلاحـظ أن المسافة العموديـة بـين منحنـى التكـاليف الكليـة والتكـاليف المتغيـرة فـي الشـكل السابق تقيس التكاليف الثابتة .

وبقسمة طرفي معادلة التكاليف الكلية على الانتاج الكلي نحصـل علـى معادلـة متوسط التكاليف الكلية ATC على النحو التالي:

$$TC/Q = FC/Q + VC/Q$$

$$ATC = AFC + AVC$$

ويوضح الرسم البياني التالي منحنيات التكلفة المتوسطة والتكلفة الحديـة فـي المدى القريب عندما تكون بعض عناصر الانتاج ثابتـة وبالتـالي بعـض التكـاليف ثابتة.



ويقطع منحنى MC كل من ATC و AVC عند نقطة النهاية الصغرى لكل منهما وتتقاطع التكلفة الحدية MC مع AVC وATCعند ادنى مستوى لهما.

ومع تزايد الانتاج في المرحلة الاولى تؤدي زيادة الانتاج المتوسط الى تناقص متوسط التكلفة الثابتة , كذلك عندما يبدأ الانتاج الحدي في الانخفاض تبعا لقانون تناقص الغلة فإن التكلفة الحدية تبدأ في التزايد مما يؤدي بعد فترة الى زيادة متوسط التكلفة المتغيرة والكلية. وتبدأ متوسط التكلفة المتغيرة في التزايد فقط عندما تصبح التكلفة الحدية أعلى منها .

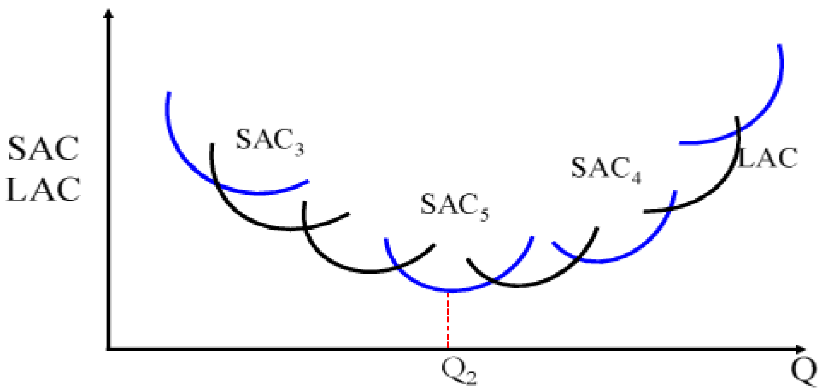
تكاليف الانتاج في المدى البعيد:

في المدى البعيد تستطيع المنشأة تغيير جميع عناصر الانتاج لذلك فإن تكاليف الانتاج في المدى البعيد تعتبر جميعها متغيرة ولا وجود للتكاليف الثابتة.

ويعرض الرسم البياني التالي منحنيات متوسط التكاليف الكلية في المدى القريب لخمسة احجام مختلفة من المنشآت العاملة في احدى الصناعات **SAC1:** الى **SAC5** ونفترض انه كلما زاد حجم المنشأة كلما زاد حجم الانتاج والذي يصل عنده متوسط التكاليف الى ادنى مستوياته وبالتالي يكون ترتيب التكاليف المتوسطة على المدى القريب من الادنى الى الاعلى هو كما يلي:

SAC_1 SAC_2 SAC_3 SAC_4 SAC_5

في الأجل الطويل تستطيع المنشأة اختيار أي حجم ترجحه للمشروع وذلك لتغييب التكاليف المتوسطة الثابتة وستكون التكلفة المتوسطة على المدى الطويل هي **LAC** ويعتبر الأجل الطويل كسلسلة من حالات الأجل القصير المتاحة للمنشأة الانتاجية وتتحدد التكلفة المتوسطة على المدى القصير بالكمية **SAC**.



نلاحظ ان متوسط التكلفة على المدى الطويل تأخذ شكل حرف **U**.

مثال :

أوجد العلاقة بين التكلفة المتوسطة والتكلفة الحدية إذا كانت دالة التكاليف الكلية على النحو التالى :

$$T\,C = 0.1\,Q^3 - 2\,Q^2 + 15\,Q$$

حيث : Q هى حجم الانتاج

الحل

$$A\,C = \frac{T\,C}{Q} = \frac{0.1\,Q^3 - 2\,Q^2 + 15\,Q}{Q}$$

$$A\,C = 0.1\,Q^2 - 2\,Q + 15$$

ومن المعروف أن النهاية العظمى أو الصغرى لأى دالة تتحقق عندما يكون ميل الدالة مساوياً للصفر . أى أننا نوجد المشتقة الأولى و نساويها بالصفر , ثم نوجد قيمة المشتقة الثانية وننظر :

- **إذا كانت المشتقة الثانية قيمة موجبة فهى تعنى نهاية صغرى .**
- **إذا كانت المشتقة الثانية قيمة سالبة فهى تعنى نهاية كبرى .**

$$\therefore \quad \frac{\partial\ A\,C}{\partial\ Q} = 0.2\,Q - 2 = 0$$

و منها نجد أن :

$$0.2\ Q = 2$$

$$Q = 10$$

وبإيجاد المشتقة الثانية للدالة السابقة نجد أن :

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 \ A\,C}{\partial \ Q^2} = 0.2$$

أى أنـها قيمة موجبة , بما يعنى أنـها نـهاية صغرى . وبعبارة أخرى فإنـه يمكن القول بأن دالة التكاليف المتوسطة السابقة تصل إلى أدنى قيمة لـها عند انتاج ١٠ وحدات .

قيمة التكاليف المتوسطة عند انتاج ١٠ وحدات .

$$A\,C = 0.1\,Q^2 - 2\,Q + 15$$

$$= \ 0.1\,(\,10\,)^2 - 2\,(\,10\,) + 15$$

$$= 10 - 20 + 15 = 5$$

أما مقدار التكلفة الحدية عند هذ الحجم من الانتاج فيكون :

$$T\,C \ = \ 0.1\,Q^3 - 2\,Q^2 + 15\,Q$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \ T\,C}{\partial \ Q} = 0.3\,Q^2 - 4\,Q + 15$$

$$= 0.3\ (\,10\,)^2 - 4\,(\,10\,) + 15$$

$$= 30 - 40 + 15 = 5$$

معنى هذا أن التكلفة الحدية تتساوى مع التكلفة المتوسطة عندما تكون الأخيرة عند أدنى مستوى لـها .

مرونة الناتج ومرونة التكاليف وقانون تناقص الغلة:

مرونة الناتج : التغير النسبى فى الناتج الكلى إلى التغير النسبى فىعدد وحدات العنصر المتغير.

$$= \frac{\text{التغير النسبى فى الناتج الكلى}}{\text{التغير النسبى فى عدد وحدات العنصر المتغير}} = \frac{\Delta \text{ن ك}}{\text{ن ك}} \div \frac{\Delta \text{س}}{\text{س}}$$

$$= \frac{\Delta \text{ن ك}}{\Delta \text{س}} \div \frac{\text{ن ك}}{\text{س}}$$

حيث :

ن ك : هى حجم الناتج الكلى

س : هى عدد وحدات العنصر المتغير

$$= \frac{\text{ن ح}}{\text{ن م}}$$

أى أن : مرونة الناتج هى عبارة عن خارج قسمة الناتج الحدى على الناتج المتوسط .

****

<u>مرونة التكاليف :</u> التغير النسبى فى التكاليف الكلية إلى التغير النسبى فى حجم الناتج

$$= \frac{\text{التغير النسبى فى التكاليف الكلية}}{\text{التغير النسبى فى حجم الناتج}} = \frac{\Delta\ \text{ت ك}}{\text{ت ك}} \div \frac{\Delta\ \text{ن ك}}{\text{ن ك}}$$

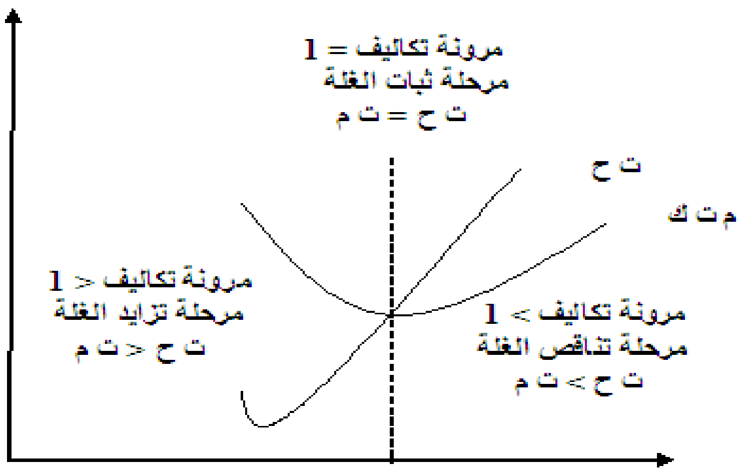
$$= \frac{\Delta\ \text{ت ك}}{\Delta\ \text{ن ك}} \div \frac{\text{ت ك}}{\text{ن ك}}$$

$$= \frac{\text{ت ح}}{\text{ت م}}$$

أى أن : مرونة التكاليف هى عبارة عن خارج قسمة التكاليف الحدية على التكاليف المتوسطة .

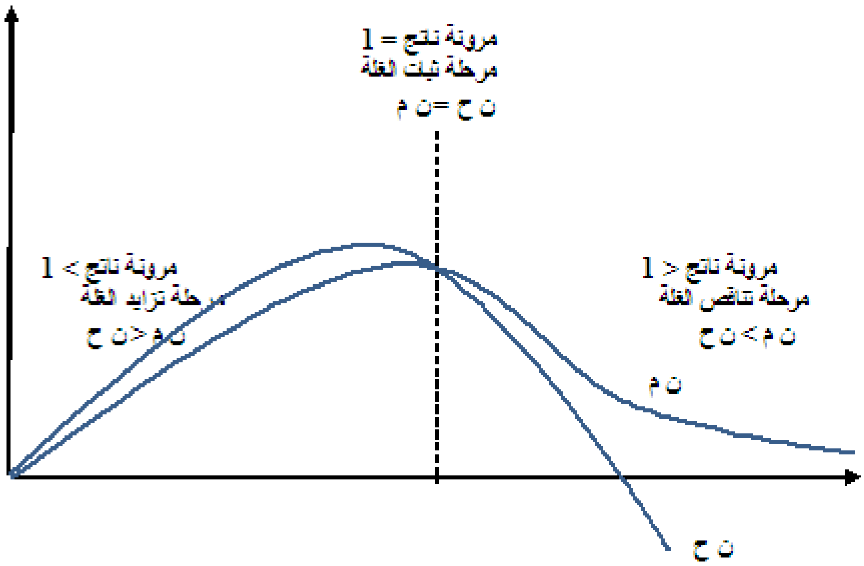
هذا وتدل أىٍ من مرونة التكاليف أو مرونة الناتج على المرحلة التى تمر بها الغلة بالنسبة للناتج .

فإذا كانت قيمة مرونة التكاليف أقل من الواحد الصحيح فإن ذلك يشير إلى أن الانتاج يمر بمرحلة تزايد الغلة . حيث تكون التكلفة الحدية أقل من التكلفة المتوسطة . وفى هذه المرحلة يمكن لنا زيادة الانتاج بنسبة معينة عن طريق زيادة التكاليف بنسبة أقل .



أما إذا كانت المرونة أكبر من الواحد الصحيح فمعنى ذلك أن الانتاج يمر بمرحلة تناقص الغلة حيث تكون التكاليف المتوسطة أقل فى قيمتها من التكلفة الحدية , و معنى ذلك أن ثبات الغلة بالنسبة للحجم يتحقق عندما تكون مرونة التكاليف مساوية للواحد الصحيح . و بمعنى آخر : عندما تتساوى قيمة كل من التكلفة الحدية مع التكلفة المتوسطة .

وإذا كان ما سبق يصدق على مرونة التكاليف بالنسبة للناتج , فإن العكس تماماً هو ما يصدق فى حالة مرونة الناتج للتكلفة .



أى أن مرونة الناتج الأقل من الواحد الصحيح تدل على مرحلة تناقص الغلة بالنسبة للحجم .

تمرين :

تطلب مؤسسة عنصرين من عناصر الانتاج هما العمل L و و المواد الخام M وذلك لإنتاج حجم معين من الانتاج Q . حيث كانت دوال الطلب على هذين العنصرين على النحو التالى :

$$\mathbf{L} = 2\,Q^{3} - 3\,Q^{2} + 10\,Q$$

$$\mathbf{M} = 5\,Q^{3} - Q^{2} + 6\,Q$$

فإذا كان أجر العامل هو ثلاثة جنيهات , و كان ثمن الوحدة من المواد الخام هو خمسة جنيهات .كما بلغت قيمة التكاليف الثابتة ١٥٠ جنيهاً .

المطلوب :

١ – أوجد دالة التكاليف الكلية لهذه المؤسسة .

٢ – أوجد دالة التكاليف المتوسطة ودالة التكاليف الحدية لهذه المؤسسة .

الاجابة

أولاً : نوجد تكلفة العمالة على النحو التالى :

تكلفة العمالة = أجر العامل × دالة الطلب على العمالة

$$C_L = 3\,(2\,Q^{3} - 3\,Q^{2} + 10\,Q)$$

$$\underline{C_L = 6\,Q^{3} - 9\,Q^{2} + 30\,Q}$$

ثانياً : نوجد تكلفة المواد الخام على النحو التالى :

تكلفة المواد الخام = ثمن الوحدة × دالة الطلب على المواد الخام

$$C_M = 5\,(5\,Q^{3} - Q^{2} + 6\,Q)$$

$$\underline{C_M = 25\,Q^{3} - 5\,Q^{2} + 30\,Q}$$

وعلى ذلك فإن اجمالى التكاليف المتغيرة هو :

$$VC = C_L + C_M$$

$$\therefore \quad VC = 31\,Q^3 - 14\,Q^2 + 60\,Q$$

وبالتالى يمكن ايجاد شكل دالة التكاليف الكلية للمؤسسة حيث يكون :

$$TC = VC + FC$$

$$\therefore \quad TC = 31\,Q^3 - 14\,Q^2 + 60\,Q + 150$$

كما يمكن ايجاد شكل دالة التكاليف المتوسطة لهذه المؤسسة حيث يكون :

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

$$\therefore AC = \frac{31\,Q^3 - 14\,Q^2 + 60\,Q + 150}{Q}$$

$$\therefore AC = 31\,Q^2 - 14\,Q + 60 + \frac{150}{Q}$$

كما يمكن ايجاد شكل دالة التكاليف الحدية لهذه المؤسسة حيث يكون :

$$MC = \frac{\partial\, TC}{\partial\, Q}$$

$$\therefore \quad MC = 93\,Q^2 - 28\,Q + 60$$

تمرين :

إذا كانت دالة التكاليف الكلية لشركة ما على النحو التالى :

$$TC = 0.04\,Q^3 - 0.8\,Q^2 + 10\,Q$$

المطلوب :

١ – أوجد مرونة التكاليف عند أحجام الانتاج ٧ , ١٠ , ١٢ على الترتيب .

٢ – استنتج مراحل الغلة لهذه المؤسسة عند أحجام الانتاج السابقة .

الاجابة

يمكن ايجاد شكل دالة التكاليف المتوسطة لهذه المؤسسة حيث يكون :

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

$$\therefore AC = \frac{0.04\,Q^3 - 0.8\,Q^2 + 10\,Q}{Q}$$

$$\therefore AC = 0.04\,Q^2 - 0.8\,Q + 10$$

كما يمكن ايجاد شكل دالة التكاليف الحدية لهذه المؤسسة حيث يكون :

$$MC = \frac{\partial\,TC}{\partial\,Q}$$

$$\therefore \quad MC = 0.12\,Q^2 - 1.6\,Q + 10$$

<u>عند حجم انتاج ٧ وحدات يكون :</u>

$$\therefore AC = 0.04\,(7)^2 - 0.8\,(7) + 10 = 6.36$$

$$\therefore \quad MC = 0.12\,(7)^2 - 1.6\,(7) + 10 = 4.68$$

ولما كانت مرونة التكاليف $= \frac{\text{ت ح}}{\text{ت م}} = \frac{4.68}{6.36} = 0.73$

أى أنه كانت مرونة التكاليف > الواحد الصحيح

وهو ما يعنى أن الناتج عند هذا الحجم يمر بمرحلة تزايد الغلة .

<u>عند حجم انتاج ١٠ وحدات يكون :</u>

$$\therefore AC = 0.04\,(10)^2 - 0.8\,(10) + 10 = 6$$

$$\therefore MC = 0.12\,(10)^2 - 1.6\,(10) + 10 = 6$$

ولما كانت مرونة التكاليف $= \frac{\text{ت ح}}{\text{ت م}} = \frac{6}{6} = 1$

وهو ما يعنى أن الناتج عند هذا الحجم يمر بمرحلة ثبات الغلة .

<u>عند حجم انتاج ١٢ وحدات يكون :</u>

$$\therefore AC = 0.04\,(12)^2 - 0.8\,(12) + 10 = 6.16$$

$$\therefore MC = 0.12\,(12)^2 - 1.6\,(12) + 10 = 8.08$$

ولما كانت مرونة التكاليف $= \frac{\text{ت ح}}{\text{ت م}} = \frac{8.08}{6.16} = 1.3$

أى أن كانت مرونة التكاليف > الواحد الصحيح

وهو ما يعنى أن الناتج عند هذا الحجم يمر بمرحلة تناقص الغلة .

المشتقات ومراحل الانتاج

بفرض أن لدينا دالة انتاج عبارة عن : ك = د (س , ص)

حيث : س , ص هما عوامل الانتاج . وأن أحدهما متغير (وهو العنصر س) كما أن العنصر الانتاجى الثانى ثابت (وهو العنصر ص) .

من المعروف أن الحد الفاصل بين نهاية المرحلة الأولى وبداية المرحلة الثانية للانتاج هو تنساوى الناتج الحدى مع الناتج المتوسط . كما أن الحد الفاصل بين نهاية المرحلة الثانية وبداية المرحلة الثالثة للانتاج هوهو وصول الناتج الكلى إلى أقصى قيمة له , وذلك عندما يتساوى الناتج الحدى مع الصفر.

إلا أنه يمكن الوصول والتعرف على هذه الحدود – وبمعنى أدق – معرفة المرحلة التى يمر بها الناتج من خلال المشتقات الأولى والثانية لدالة الانتاج وذلك عند اشتقاقها بالنسبة للعنصر المتغير .

فإذا كانت كل من المشتقة الأولى والمشتقة الثانية موجبتين كانت الدالة فى مرحلة تزايد الغلة .أما إذا كانت المشتقة الأولى موجبة والمشتقة الثانية سالبة . فإن الدالة تكون فى مرحلة ثبات الغلة .وإذا كانت كل من المشتقة الأولى والمشتقة الثانية سالبتين كانت الدالة فى مرحلة تناقص الغلة .

تمرين :

إذاكانت لدينا دالة انتاج Cobb Douglas على النحو التالى :

$$Q = A\ L^{\frac{1}{3}}\ K^{\frac{1}{3}}$$

فإذا كان L هو العنصر المتغير , K هو العنصر الثابت . حدد المرحلة التى يمر بها الإنتاج

الاجابة

$$\frac{\partial\ Q}{\partial\ L} = \frac{1}{3} A \quad L^{-\frac{2}{3}}\ K^{\frac{1}{3}} > 0$$

كما أن :

$$\therefore \quad \frac{\partial^2\ Q}{\partial\ L^2} = -\frac{2}{9} A \quad L^{-\frac{5}{3}}\ K^{\frac{1}{3}} < 0$$

∴ هذه الدالة فى مرحلة ثبات الغل

تطبيقات رياضية

على

الاقتصاد

التوازن في حالة السوق الذي يحتوي على سلعتين:

تتناول هذه الفقرة كيفية إيجاد التوازن في سوق تحتوي على سلعتين (أو أكثر) وفي هذه الحالة سيزداد عدد المعادلات المطلوبة حلها للحصول على الأسعار والكميات التوازنية بحيث تكون لدينا دالة طلب وعرض لكل سلعة.
ولتوضيح كيفية إيجاد التوازن في سوق ذو سلعتين نأخذ المثال التالي :

<u>مثال:</u> إذا كانت دوال الطلب والعرض الخطية لسلعتين متكاملتين على النحو التالي:

<u>أولاً- سوق السلعة الأولى(الشاي):</u>

وتشمل هذه السوق على ثلاث معادلات هي:

١. دالة الطلب على الشاي وهي على النحو التالي:

$$ط_1 = ٤١٠ - ٥س_1 - ٢س_2$$

حيث $س_1$ سعر الشاي , $س_2$ سعر السكر.

٢. دالة العرض على الشاي وهي على النحو التالي:

$$ع_1 = -٦٠ + ٣س_1$$

حيث $س_1$ سعر الشاي.

٣. الدالة التي تحقق شرط التوازن في هذه السوق وهي كالتالي:

الكمية المطلوبة من الشاي= الكمية المعروضة من الشاي

$$ط_1 = ع_1$$

<u>ثانياً- سوق السلعة الثانية (السكر):</u>

وتشمل أيضاً ثلاث معادلات كالتالي:

١. دالة الطلب على السكر وهي كالتالي:

$$ط_2 = ٢٩٥ - س_1 - ٣س_2$$

حيث $س_1$ سعر الشاي , $س_2$ السكر.

٢. دالة العرض على السكر: وهي توضح أن الكمية المعروضة من السكر ($ع_2$) تتغير طردياً مع تغير سعر السكر ($س_2$) , ونفترض أن هذه الدالة كالتالي:

$$ع_2 = -١٢٠ + ٢س_2$$

٣. أما المعادلة الثالثة فهي التي تحقق شرط التوازن في هذه السوق وهي كالتالي:

الكمية المطلوبة من السكر= الكمية المعروضة من السكر

$$ط_2 = ع_2$$

<u>والمطلوب</u> في هذا المثال إيجاد سعر وكمية التوازن للسلعتين؟

<u>الحل:</u>

١. شرط التوازن في سوق الشاي وهو $ط_1 = ع_1$

٤١٠ -٥س$_1$- ٢س$_2$ = -٦٠ + ٣س$_1$

٤١٠ +٦٠ -٣س$_1$-٥س$_1$- ٢س$_2$ =٠

٤٧٠ -٨س$_1$- ٢س$_2$ =٠

٢. شرط التوازن في سوق السكر هو ط$_2$ = ع$_2$

٢٩٥- س$_1$- ٣س$_2$ = -١٢٠ +٢س$_2$

٢٩٥+١٢٠ - س$_1$- ٣س$_2$ - ٢س$_2$ =٠

٤١٥ - س$_1$ - ٥س$_2$ =٠

وهكذا نحصل على المعادلتين (٧ , ٨) كالتالي:

٤٧٠ -٨س$_1$- ٢س$_2$ =٠ ٧

٤١٥ - س$_1$ - ٥س$_2$ =٠ ٨ بالضرب ×-٨

ولحل هاتين المعادلتين نضرب المعادلة رقم ٨ في ٨ , ثم نطرح

٣٣٢٠ - ٨س$_1$ -٤٠س$_2$ =٠

٤٧٠ - ٨س$_1$ - ٢س$_2$ =٠

٢٨٥٠ - ٣٨ س$_2$ =٠

٣٨ س$_2$ =٢٨٥٠

س$_2$ = **!Error** = ٧٥

وبالتعويض في المعادلة رقم ٧ عن قيمة س$_2$ نحصل على قيمة س$_1$

٤٧٠ - ٨ س$_1$ – ٢ (٧٥) =٠

٤٧٠ - ٨س$_1$ – ١٥٠ = ٠

٣٢٠ = ٨س$_1$

س$_1$ = **!Error** = ٤٠

وهكذا فإن السعر التوازني لسلعة الشاي هو (٤٠)

السعر التوازني لسلعة السكر هو (٧٠)

ولإيجاد الكمية التوازنية لسلعة الشاي نعوض قيمة س$_1$, س$_2$ في دالة الطلب أو العرض كالتالي:

ط$_1$ = ٤١٠ -٥س$_1$- ٢س$_2$

= ٤١٠ -٥(٤٠)- ٢(٧٥)

= ٤١٠ -٢٠٠- ١٥٠

= ٤١٠ -٣٥٠ =٦٠

ع١= -٦٠ + ٣س١

= -٦٠ + ٣(٤٠) = -٦٠ + ١٢٠= ٦٠

وللحصول على الكمية التوازنية لسلعة السكر نعوض عن قيمة س١ , س٢ في دالة الطلب أو العرض كالتالي:

ط٢= ٢٩٥- س١- ٣س٢

= ٢٩٥- ٤٠- ٣(٧٥)

= ٢٩٥- ٤٠- ٢٢٥ = ٢٩٥- ٢٦٥ = ٣٠

ع٢ = -١٢٠ +٢س٢

= -١٢٠ +٢(٧٥)= -١٢٠ +١٥٠ = ٣٠

مثال (٢) إذا كانت دوال الطلب والعرض الخطية لسلعتين متكاملتين على النحو التالي:

ط١ = ١٠-٢س١- س٢

ع١ = -٢ +٣س١

ط٢ = ١٥ - س١ - س٢

ع٢ = -٥ + ٢س٢

المطلوب إيجاد الأسعار والكميات التوازنية.

الحل:

١. شرط التوازن في سوق السلعة الأولى وهو ط١ = ع١

١٠ -٢س١- س٢ = -٢ + ٣س١

١٠ -٢س١- س٢+٢ -٣س١= ٠

١٢ -٥س١- س٢ =٠ ١

٢. شرط التوازن في سوق السلعة الثانية هو ط٢ = ع٢

١٥ - س١- س٢ = -٥ + ٢س٢

١٥ - س١- س٢+ ٥ - ٢س٢ =٠

٢٠ - س١ - ٣س٢ =٠ ٢

وبالتالي نحصل على المعادلتين (١ , ٢) كالتالي:

١٢ -٥س١- س٢ =٠ × -٣

٢٠ - س١ - ٣س٢ =٠

وبضرب المعادلة الأولى في -٣,وجمع المعادلتين نحصل على التالي:

-٣٦ + ١٥س١ + ٣س٢ =٠

٢٠ - س١ - ٣س٢ =٠

-١٦ + ١٤س١ =٠

١٤س١ =١٦

س١ = **Error!** = ١,١٤

وبالتعويض عن قيمة س١ في المعادلة رقم (٢) نحصل على قيمة س٢

٢٠ ـ١,١٤- ٣س٢ =٠

١٨,٨٦- ٣س٢ =٠

٣س٢ =١٨,٨٦

$$س٢ = \frac{٨١}{٣;٦٨} = ٦,٣$$

وللحصول على الكمية التوازنية لسلعة الأولى نعوض عن س١ , س٢ في دالة الطلب والعرض للسلعة الأولى :

ط١ = ١٠ـ ٢(١,١٤) ـ ٦,٣

= ١٠ -٢,٢٨- ٦,٣ =١٠ ـ ٨,٥٨ = ١,٤٢

ع١= -٢ + ٣(١,١٤) = -٢ + ٣,٤٢= ١,٤٢

وللحصول على الكمية التوازنية للسلعة الثانية نعوض عن قيمة س١ , س٢ في دالة الطلب والعرض للسلعة الثانية

ط٢= ١٥- س١- س٢

= ١٥- ١,١٤- ٦,٣

= ١٥- ٧,٤٤ =٧,٥٦ = ٧,٦

ع٢ = -٥ +٢س٢ = -٥ +٢(٦,٣)

= -٥ +١٢,٦ =٧,٦

ـ استخدام المصفوفات والمحددات في حل المعادلات الآتية:

يمكن حل المعادلات الآتية باستخدام المصفوفات والمحددات بعدة طرق من أهمها :

طريقة كرامر:

وهي إحدى الطرق لحل المعادلات الآتية باستخدام المصفوفات والمحددات للحصول على قيم المجاهيل.

خطوات الحل:

العوامل المجاهيل المقدار الثابت

١. نحول المعادلات الى صيغة مصفوفة أس=جـ ← [أ] [س] =[جـ]

٢. نوجد قيمة المحدد |أ| (ونتأكد أنه لايساوي صفراً)

٣. نوجد قيمة المحدد |أ١| (عن طريق استبدال العمود الأول من أ بعمود المصفوفة جـ)

٤. نوجد قيمة المحدد |أ٢| (عن طريق استبدال العمود الثاني من أ بعمود المصفوفة جـ)

٥. نوجد قيم س١ كالتالي :س١= $\frac{|أ_1|}{|أ|}$

٦. نوجد قيم س٢ كالتالي: س٢= $\frac{|أ_2|}{|أ|}$

مثال:حل المعادلات باستخدام طريقة كرامر:

٦س١+٥س٢=٤٩

٣س١+٤س٢=٣٢

<u>الحل:</u>

١) أ س= جـ

$$\begin{bmatrix}49\\32\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}س_1\\س_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\4 & 3\end{bmatrix}$$

٢) $|أ| = \begin{vmatrix}5 & 6\\4 & 3\end{vmatrix} =$ ٦×٤ ـ٣×٥ = ٢٤ ـ١٥= ٩

٣) $|أ_1| = \begin{vmatrix}5 & 49\\4 & 32\end{vmatrix} =$ ٤٩×٤ ـ ٣٢×٥ = ١٩٦ـ١٦٠= ٣٦

٤) $|أ_2| = \begin{vmatrix} 49 & 6 \\ 32 & 3 \end{vmatrix}$ = ٦×٣٢ - ٣×٤٩ = ١٩٢-١٤٧= ٤٥

٥) س$_1$ = $\frac{|أ_1|}{|أ|} = \frac{36}{9}$ =٤

٦) س$_2$ = $\frac{|أ_2|}{|أ|} = \frac{45}{9}$ =٥

نتحقق من صحة الحل بالتعويض في قيم س$_1$, س$_2$

٦س$_1$ + ٥س$_2$ = ٤٩
٦(٤) +٥(٥) = ٤٩
٢٤ + ٢٥ =٤٩
∴ ٤٩ = ٤٩

٣س$_1$ + ٤س$_2$ = ٣٢
٣(٤) + ٤(٥) = ٣٢
١٢ + ٢٠ = ٣٢
∴ ٣٢ = ٣٢

مثال: استخدم طريقة كرامر لحل المعادلات التالية : (أوجد قيم س,ع,ص)

٤س+ص-٥ع =٨
-٢س+٣ص+ع =١٢
٣س- ص+٤ع =٥

الحل:

١. <u>نضع المعادلات على صيغة مصفوفة:</u>

$$\begin{bmatrix} 5- & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2- \\ 4 & 1- & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ع \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

٢. <u>نوجد محدد المصفوفة [أ]</u>

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} 5- & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2- \\ 4 & 1- & 3 \end{vmatrix}$$

|أ| =٤(٣×٤- (-١×١)) -١(-٢×٤-٣×١) + (-٥) (-٢×-١-(٣×٣))

|أ| =٤(١٢+١) -١(-١١) -٥(-٧) =٥٢ + ١١ +٣٥ = ٩٨

٣. <u>نوجد قيمة المحدد أ$_1$ ثم نستبدال العمود الاول في المصفوفة[أ] بقيم عمود المصفوفة[جـ]</u>

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 5- & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 12 \\ 4 & 1- & 5 \end{vmatrix} = |1أ|$$

|أ1| = ٨(٣×٤- (-١×١)) -١(١٢×٤-٥×١) + (-٥) (١٢×-١-(٣×٥))

|أ1| = ١٠٤-٤٣+١٣٥= ١٩٦

٤. <u>نوجد قيمة المحدد أ٢ كالتالي:</u>

$$\begin{vmatrix} 5- & 8 & 4 \\ 1 & 12 & 2- \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = |2أ|$$

|أ2| = ٤(١٢×٤-٥×١) - ٨(-٢×٤- ٣×١) + (-٥) (-٢×٥-٣×١٢)

|أ2| = ٤(٤٣) - ٨(-١١) -٥(٤٦) =١٧٢ + ٨٨+٢٣٠ =٤٩٠

٥. <u>نوجد قيمة المحدد أ٣ كالتالي:</u>

$$\begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 12 & 3 & 2- \\ 5 & 1- & 3 \end{vmatrix} = |3أ|$$

|أ3| = ٤(٣×٥- ١٢×-١) -١(-٢×٥-٣×١٢) +٨ (-٢×-١-٣×٣)

|أ3| = ٤(٢٧) -١(-٤٦) +٨ (-٧) = ١٠٨ + ٤٦ -٥٦ =٩٨

٦. <u>نوجد قيم س,ع,ص كالتالي:</u>

س = $\frac{|1أ|}{|أ|}$ = $\frac{196}{98}$ = ٢

ص = $\frac{490}{98}$ =٥

ع = $\frac{98}{98}$ =١

نتأكد من الحل كالتالي:

٤س+ص-٥ع=٨

٤(٢) +٥ - ٥(١) =٨

٨+ ٥-٥ = ٨