حامعة جنوب الوادى

كلية التربية بالغردقة

الفرقة الرابعة عام رياضيات (عربي)

المادة : (بحتة ١٣) جزء (بحوث عمليات)

إستاذ المادة / د. اسماعيل جاد امين

الفصل الدراسي الأول

مقدمة في بحوث العمليات

رقم المقرر ورمزه	اسم المقرر	توزيع ساعات الدراسة اسبوعياً			الاوراق الامتحانية		الدرجة
		ن	ع	ت	ن	ع	
4 ت ر	بحته13(توبولوجي1+بحوث عمليات) **جزء بحوث عمليات**	2	-	2	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{150}{2}$

الموضوعات:

المراجع:

[1] Hamdy Taha , Operations Research: An Introduction (Eight Edition) , Prentice Hall,2006.

[2] R. Bronson and G. Naadimuthu,Schaum's Outline of Theory and Problems of Operations Research, Second Edition, McGraw-Hill Companies, Inc. 1997

الفصل الأول:مقدمة

Chapter1:Intoduction

بحوث العمليات هو أحد فروع العلوم الرياضية التي تختص بتطبيق الطرق العلمية المناسبة للحصول على أفضل الحلول لمشكلة ما في أي مجال من مختلف المجالات في الحياة. ويُسمَّى الحل الناتج بالحل الأمثل ، ولذلك يطلق على جانب من هذا العلم إسم الأمثلية.

و يتطلب إيجاد الحل في هذا المجال ضرورة وضع خطوات أو مراحل رئيسية يجب أتباعها حتى نستطيع الحصول علي النتائج المرجوة وهذه المراحل هي

1- تعريف وتحديد المشكلة

2- بناء النموذج الرياضي الخاص بهذه المشكلة

3-عمل منهج للحل

4- التحقق بأن النموذج يتوافق مع منهج الحل

5- تنفيذ المنهج واستنباط النتائج النهائية

وحتى أوائل عام 1940 لم يكن هناك طرائق رياضية لحل مشاكل بحوث العمليات بالمعني الرياضي المعروف حاليا بل كل ما ظهر قبل ذلك هي نتائج بسيطة ناتجة عن مجهود فردي لبعض العلماء إلي إن تم عمل أول فريق عمل في هذا التخصص وتضمن مجموعة من العلماء المتخصصين في مختلف المجالات وبدأ في دراسة المشاكل الحربية وكان اهتمامهم هو تقديم العون العلمي للعسكريين خلال الحرب العالمية الثانية ولما كان لهذه الدراسات من نتائج طيبة حققها هذا الفريق في الجوانب العسكرية كان دافعا للبدء في دراسات مماثلة تمتد إلي العديد من المشاكل التي تواجه كافة الجوانب المدنية والتي حققت أيضا تقدم ملموس في حل معظم هذه المشاكل وبذلك ازدادت الرغبة للمزيد من هذه الدراسات في هذا الفرع العلمي الهام والضروري حتى أصبح اليوم من المقررات الدراسية الأساسية في جميع جامعات العالم ليس فقط هذا بل أصبح ضمن مراحل التعليم دون الجامعي لما له من دور بارز في تطوير وتنمية العملية الإنتاجية في المجتمعات.

لقد تفرع علم بحوث العمليات في السنوات الأخيرة إلى عدة فروع تطور ولا يزال يتطور كل منها في أساليبه النظرية والعملية ولكل منها تطبيقاته العملية ومجالاته المتخصصة .وقد أدى هذا إلى تخصص بعض الدارسين في فرع واحد من هذه الفروع لاتساع مجالاتها وكثرة ما يكتب فيها .ومن هذا الفروع البرمجة الرياضية سواء أكانت خطية أم غير خطية ,والبرمجة الديناميكية ,والبرمجة الصحيحة ,والبرمجة العشوائية ,ونظرية القرارات الإحصائية ,ونظرية المحاكاة. وتعتبر البرمجة الخطية والتي تعتبر موضوع دراستنا من أهم فروع بحوث العمليات

وأكثرها تطبيقا. وهذه جميعها تندرج تحت اسم واحد وهو "طرق البرمجة الرياضية " Methods of Mathematical Programming

الأمثلية: Optimization

الأمثلية هي الحصول على أفضل النتائج للمشكلة موضع الدراسة والبحث .وطبقا لما تقدم عند بناء النموذج الرياضي لمشكلة ما توضع كأي نموذج رياضي في كفتين أساسيتين وهما عبارة عن (المعطيات والمطلوب)

(أ) فالمعطيات هنا بمثابة الشروط المتوفرة لدي المشكلة ويطلق عليها اسم القيود(Constraints)

(ب)والمطلوب هو عبارة عن موضوع المشكلة أصلا والتي يرجى وضعه في نتيجة مثالية ويسمى دالة الهدف(Objective Function).

وحيث أن كافة المعلومات التي نتعامل معها في المشكلة بكل جوانبها تكون موجودة فعلا ,لذا يعبر عن كل منها بإحدى المتغيرات$x_1, x_2, \dots, x_n$ حيث n عددها ، بذلك لا يمكن أن يكون أي من هذه المتغيرات سالبا، أي أن

$$x_j \geq 0, j = 1,2, \dots, n$$

ويطلق علي هذا الشرط بعدم السالبية (non-negativity)

مثال : نتصور النموذج الرياضي التالي :

أوجد القيم الصغرى للدالة

minimize $\quad Z = x_1^2 + x_2$

مع تحقق الشروط

Subject to: $\quad x_1 - x_2 = 3$

$$x_2 \geq 0$$

هذه مسائلة برمجة رياضية أو امثلية optimization لدالة الهدف z, المتغيرات هنا هي x_2, x_1 وهما مقيدان بالشرطين المذكورين سابقا. المطلوب هو إيجاد قيم x_2, x_1 التي تخفض من قيمة دالة الهدف z وتحقق بمجموعة القيود المعطاه.

صياغة مسألة الأمثلية (البرمجة الرياضية)

أوجد قيمة
$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

والتي تحقق القيمة الصغرى للدالة $f(X)$

ويحقق الشروط

$$g_i(X) \leq 0 \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$p_i(X) = 0 \qquad i = 1,2,\dots,p$$

حيث X هو متجه يتكون من n عنصر يسمي متجه التصميم، $f(X)$ تسمي الدالة الهدف $g_i(X)$ تسمي شروط المتباينات و $p_i(X)$ تسمي شروط المعادلات

ليس شرطا أن تكون هناك علاقة بين $n\ ,\ m\ ,\ p$

هذه المسألة بالكامل تسمي أيضا مسألة أمثلية مقيدة والمقصود بالقيود هنا الشروط (المتباينات - المعادلات)

متجه التصميم

أي تصميم هندسي أو أي تطبيق علمي أو تجاري يتم تعريفه من خلال مجموعة من الكميات

بعض هذه الكميات تكون متغيرات ، والبعض الآخر تكون ثوابت وتسمي بارامترات النظام

مثال1:قيادة السيارة

سعة خزان الوقود:بارامتر ، استهلاك الوقود لكل كيلو متر متغير تبعا للسرعة: بارامتر

ولكن سرعة السيارة: متغير

مثال2 :الإقامة في شقة : الثوابت:عدد الغرف – المساحة ، المتغيرات: الإيجار

مثال3: وعاء به ماء: الثوابت: جم الوعاء (ثابت) ، المتغيرات: كمية الماء

شروط التصميم

هي الشروط التي ينبغي أن تحققها المتغيرات ولا تتجاوزها لنجاح النظام وتحقق القيمة الصغرى لدالة الهدف

مثال 1 : السرعة ≤ 60 كلم / ساعة داخل المدينة و ≤ 120 علي الطريقة السريعة

مثال 2 : الإيجار $\leq \frac{1}{3}$ الدخل الشهري

مثال 3 : كمية الماء $\leq \frac{9}{10}$ حجم الوعاء

الدالة الهدف

هي تلك الصيغة التي تعبر عن الدالة المطلوب إيجاد القيمة الصغرى لها. وتتم هذه الصياغة من خلال معرفة أساليب الرياضيات المختلفة في تحويل المسألة اللفظية إلي صيغة رياضية

تبويب مسألة الأمثلية

تصنف مسألة الأمثلية إلي مسألة أمثلية مقيدة ومسألة أمثلية غير مقيدة وذلك تبعا لوجود شروط في المسألة من عدمه

تصنف مسألة الأمثلية تبعا للطبيعة الفيزيائية للمسألة إلي مسألة تحكم أمثل ومسألة تحكم غير أمثل . ومسألة التحكم الأمثل هي مسألة برمجة رياضية تشمل مجموعة من المراحل حيث تعتمد كل مرحلة علي المراحل السابقة وتوصف مسألة التحكم الأمثل بنوعين من المتغيرات :

- متغيرات التحكم (متغيرات النظام)
- متغيرات الحالة

البرمجة الصحيحة " Integer Programming" :

هي مسألة برمجة خطية تكون فيها المتغيرات ذات قيم صحيحة , وعندئذ لن يكون من الضروري ان يكون المعاملات في تعبيرات الشروط والثوابت في تعبير الدالة الهدف أيضا أعداد صحيحة.

البرمجة التربيعية " Quadratic Programming " :

هي مسألة برمجة رياضية تكون فيها الدالة الهدف على الصورة

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} d_i x_i$$

وتكون الشروط خطية.

الأمثلية غير المقيدة

إذا لم تحتوي المسألة على شروط سواء متباينات $g_i(X) \le 0$ أو متساويات $p_i(X) = 0$ حيث $i = 1,2, \dots, m$ قيل أن المسألة هي مسألة أمثلية غير مقيدة.

الأمثلية المقيدة بمتباينات

في هذه المسألة تكون الدالة الهدف $f(X)$ المطلوب إيجاد القيمة الصغرى لها مشروطة بمتباينات مثل

$$g_k(X) \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0 \ , k = 1,2, \dots, m \quad , X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

وتنقسم هذه المسألة إلى نوعين

1. مسألة برمجة خطية
2. مسألة برمجة غير خطية

الفصل الثاني: صياغة مسألة البرمجة الخطية

إذا كانت الدالة الهدف والشروط في مسألة الأمثلية هي دوال خطية في المتغيرات فإن المسألة تسمي مسألة برمجة خطية وتكون الصورة القياسية لها كالتالي :

أوجد قيم المتغيرات $x_1, x_2, \ldots x_n$ التي تجعل قيمة الدالة (دالة الهدف) التالية أكبر أو أصغر ما يمكن :

Optimize (minimize or maximize) :

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

وذلك تحت مجموعة القيود أو الشروط التالية :

Subject to:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}\right\} \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \left\{\begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ b_m \end{array}\right.$$

$\forall \ x_j \geq 0, j = 1,2, \ldots, n$ (قيد عدم السالبية)

حيث أن قيم الثوابت $a_{ij}, b_i, c_j, (i = 1,2, \ldots, m, j = 1,2, \ldots, m)$ معروفة أما قيم المتغيرات $x_1, x_2, \ldots x_n$ فنحصل عليها بحل مسائلة البرمجة الخطية .

و يمكن كتابة مسألة البرمجة الخطية بالشكل المختصر التالي:

أوجد قيمة

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

التي تحقق القيمة الصغري للدالة

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i \ x_i$$

مع تحقق الشروط

$$g(X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ x_j \geq b_i \qquad\qquad j = 1\ ,2\ , \dots , m$$

$$x_{\mathrm{i}} \geq 0 \qquad\qquad i = 1,2, \dots , n$$

حيث c_i, a_{ij}, b_i جميعها ثوابت.

تكوين النموذج الرياضي Problem Formulation:

ندرس هنا كيفية تحويل مشكلة حياتية أو تطبيق علمي أو عملي إلى مسألة برمجة خطية . ويتم ذلك كالآتي :

خطوة 1 : نحدد الكمية المطلوب ايجاد القيم المثلى لها (القيم المثلى *Optimum* تعنى القيم العظمى والصغرى *Minimum and Maximum*) ونكتب الصيغة الرياضية للدالة الهدف , وفي هذه الأثناء يجب أن نحدد المتغيرات (المجاهيل المطلوب اجادها لتحقيق القيم المثلى للدالة الهدف).

خطوة 2 : نحدد الشروط التي يجب أن تحققها المتغيرات مع وجود القيم المثلى . ونكتب الصيغ الرياضية للشروط *constraints* .

خطوة 3 : نعبر عن الشروط المخفية " مثل هذه الشروط تعرف من الطبيعة الفيزيائية للمسألة وتشمل على سبيل المثال : شرط عدم السالبية أو أن تكون المتغيرات ذات قيم صحيحة " .

أما الآن فسوف نستعرض مجموعة من الأمثلة لمسائل يمكن وضع كل منها على شكل نموذج برمجة خطية .

أمثلة:

Example1: The Haty shop makes its sandwiches from a combination beef and goat meat. The beef contains 80% meat and 20% fat, and it costs 24 pounds per kilo. The goat meat contains 68% meat and 32% fat, and it costs 18 pounds per kilo. What is the amount of meat from each type must be used in each kilo of meat if it wants to minimize its costs and keep the ratio of fat so that no more than 25%

يقوم حاتي بعمل شطائر اللحم بتكوين من لحم بقري ولحم ماعز.يحتوي لحم البقر علي 80%لحم و20%دهون ويكلف 24جنيه لكل كيلو في حين أن لحم الماعز علي 68%لحم و32%دهون ويكلف 18جنيه لكل كيلو .ما هي كمية اللحم من كل نوع يجب أن يستخدمها المحل في كل كيلو من شطائر اللحم اذا علمت انه يجب تخفيض التكاليف والمحافظة علي نسبة الدهون .بحيث لا يزيد عن 25%

الحل:

المتغيرات:نفرض ان وزن لحم البقر المستخدم في الكيلو x_1 ووزن لحم الماعز المستخدم في الكيلو x_2

Solution 1 :let $x_1$weight of beef meat and $x_2$weight of goat meat

دالة الهدف objective function :

minimize $z = 24x_1+18x_2$

القيود :

The conditions (1) rate of fat

القيد الاول:يحتوي كل كيلو علي x_1 0.20 من الدهون من لحم البقر و $0.32x_2$ من الدهون من لحم الماعز ويجب الا تزيد الدهون فى الشطيرة عن 0.25

$$0.20x_1+0.32x_2 \leq 0.25$$

(2) per kilo

القيد الثاني:ويجب ان يكون وزن لحم البقر ولحم الماعز مجتمعين في كل كيلو من الشطائر هو كيلو واحد.

$$x_1+x_2=1$$

(1) non-negative condition

القيد الثالث:قيد عدم السالبية

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Final formula for linear programming problem

النموذج الرياضي:

$$\text{Minimize} \quad z=24x_1+18x_2$$

علما بان:

Subject to

$$0.20x_1+0.32x_2 \leq 0.25$$

$$x_1+x_2=1$$

$$x_1 \geq 0. x_2 \geq 0$$

Example2:A factory wants in the production of 2 models. The first one needs 3 units of wood; and 3 units of iron; 5 units of aluminum, models II needs a single unit of wood; 8 units of iron; 4 units of aluminum. If you know that the maximum available of wood is 53 units ,Steel 127 and 100 for aluminum. Form the mathematical model in the following cases
A - If the first model is given a profit of unit and the second 2 units. B – if the first model gives a profit of two units and the second gives a single unit.

يرغب صاحب مصنع في إنتاج سلعتين، فإذا كانت السلعة الأولى تحتاج لإنتاجها إلى 3 وحدات من الخشب ؛ و3 وحدات من الحديد ؛5 وحدات من الألمونيوم والسلعة الثانية تحتاج الى وحدة واحدة من الخشب ؛ 8 وحدات من الحديد ؛ 4 وحدات من الالمونيوم . فإذا عرفت ان الحد الاقصى المتاح للوحدات هي 53 للخشب ؛ 127 للحديد و100 للألمونيوم. كون النموذج الرياضي الأمثل في الحالات الآتية

أ- إذا علم ان السلعة الاولى تعطى ربحاً قدره الوحدة والثانية تعطي وحدتان

ب- إذا علم ان السلعة الأولى تعطي ربحا قدره وحدتان والثانية تعطي وحدة واحدة.

الحل:

حيث ان المطلوب الحصول على قيمة عظمى للربح (القيمة المثلى) نفرض أن المصنع ينتج x وحدة من السلعة الأولى ؛ y وحدة من السلعة الثانية .

وتكون القيود كالآتي:

قيد الخشب رياضيا كالآتي : $3x + y \leq 53$

قيد الحديد رياضيا كالآتي : $3x + 8y \leq 127$

قيد الالومنيوم رياضيا كالآتي : $5x + 4y \leq 100$

كذلك قيد عدم السالبية وهو : $x \geq 0 ,\ \ y \geq 0$

أما دالة الهدف فتكون كالآتي :

أ- في الحالة الأولى : $Max\ Z = x + 2y$

ب-في الحالة الثانية : $Max\ Z = 2x + y$

ويصبح النموذج الرياضي الأمثل هو: أوجد قيمة x و y التي تحقق القيمة العظمى للدالة Z على تحقق الشروط.

Example3: Wants farmers in rearing chickens, ducks and turkeys can not afford the place where Serbian where these birds only two hundred only he wants to no more than the number of turkeys for 25 and not more than the number of turkeys and ducks together 100; If the profit for each hen is pounds, and one and all ducktwo pounds each and turkey three pounds. fact mathematical model that demonstrates that he can prepare reared from each type so that achieves the largest possible profit

يرغب مزارع في تربية دجاج وبط وديوك رومي ولا يسع المكان الذي سيربي فيه هذه الطيور إلا لمائتين فقط وهو يريد أن لا يزيد عدد الديوك الرومي عن 25ولا يزيد عدد الديوك الرومي والبط معا عن 100؛فإذا كان ربحه عن كل دجاجة هو جنيها واحدا وعن كل بطة جنيهان وعن كل ديك رومي ثلاث جنيهات.كون النموذج الرياضى الذي يوضح الاعداد التي يمكنه تربيتها من كل نوع بحيث يحقق أكبر ربح ممكن .

الحل:

نفرض أن المزارع يستطيع تربية عدد x_1من الدجاج x_2; من البط ؛ x_3 من الديك الرومي

ولكي يحقق أكبر ربح تكون دالة الهدف هي: $\max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

ومجموعة_القيود هي

$x_1+x_2+x_3 \leq 200$

$x_3 \leq 25$

$x_2+x_3 \leq 100$

بالإضافة إلي قيد عدم السالبية وهو

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0 \qquad x_3 \geq 0$$

مثال5:

علي قطعة معينة من الارض نود أن نبنى عدة مساكن ،ونود أن تكون بعض هذه المبانى ذات أدوار خمسة والبعض الآخر ذات دورين. كون النموذج الرياضى المناسب لهذه المسألة .علما بأن المعطيات مبينة في الجدول الآتى:

عدد الادوار	تكلفة المبني الواحد	ساعات العمل الازمة لكل مبني	المساحة الازمة لكل مبني	عدد السكان في المبني الواحد	عدد المباني
5	600000	120	800	30	x_1
2	200000	60	600	12	x_2

ثم إن المبلغ المتوفر هو 18000000دولار ، وساعات العمل المتاحة 4500 ساعة ومساحة الارض الكلية تبلغ 42000 متر مربع

الحل:

النموذج الرياضي

$$Max: \qquad z = 30x_1 + 12x_2$$

وذلك تحت مجموعة القيود أو الشروط التالية:

$$800x_1 + 600x_2 \leq 42,000$$

$$120x_1 + 60x_2 \leq 4500$$

$$600,000x_1 + 200,000x_2 \leq 18,000,000$$

بالاضافة إلى قيد عدم السالبية وهو

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

مثال6:

تاجر فاكهة ثلاجته ممتلئة بإحد أنواع الفاكهة وعنده نوعين من الصناديق الفارغة الاول سعته $2m^3$ وملئه يحتاج إلي $\frac{4}{3}$ ساعة عمالة والنوع الثاني سعته $3m^3$ ويحتاج إلي 4ساعات عمالة لملئه فإذا كانت ساعات العمالة الكلية120 ساعة وسعة الثلاجة $150m^3$. كون النموذج الرياضي الذي يعطي أكبر ربح لهذا التاجر علما بأن ربحه من الصندوق الاول خمسة جنيهات والثاني سبعة

الحل :

نفرض أن : عدد الصناديق من النوع الأول x_1 وعدد الصناديق من النوع الثاني x_2

الدالة الهدف : نهدف زيادة الربح

$$F= 5x_1+7x_2$$

الشروط :

1- شرط السعة :

$$2x_1 + 3x_2 \leq 150$$

2- شرط عدد ساعات العمالة :

$$1.25x_1 + 4x_2 \leq 120$$

الشروط الخفية :

1- شرط عدم السالبية .

2- $x_2 \geq 0$, $x_1 \geq 0$

ونعلم أن x_1 , x_2 , x_3 يجب أن تكون أعداد صحيحة ولكن نظرا لطبيعة دراستنا فسوف نلجأ لتقريب القيم الناتجة لأقرب عدد صحيح .

عندئذ تصبح مسألة البرمجة الخطية لهذه المسألة كالآتي :

Maximize : $F = 5x_1 + 7x_2$

Subject to : $2x_1 + 3x_2 \leq 150$

$1.25x_1 + 4x_2 \leq 120$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

تمارين(1)

) State the general formulation of linear programming problem in two ways. Then write the algorithm by which we can form the mathematical model of the linear programming problem.

(1)يرغب صاحب مصنع في إنتاج سلعتين من منتجات مصنعة وكل سلعة تحتاج إلي مواد خام وعمال للانتاج ومعدات فإذا كانت السلعة الاولي تحتاج لوحدة واحدة من المواد الخام وأيضا لعامل واحد بينما تستهلك وحدتان تشغيل من معدات المصنع بينما السلعة الثانية تحتاج لإنتاجها أيضا وحدة واحدة من المواد الخام وإلي عاملين كذلك وحدة تشغيل واحدة. فإذا كان الحد الأقصى لعدد عمال المصنع هو عشرة عمال بينما المواد الخام هو ستة وحدات كذلك عدد وحدات تشغيل المعدات هو عشرة وحدات أيضا. كون النموذج الرياضي الذي يحقق ذلك في الحالات الآتية :

أ- إذا كان ربح السلعة الاولي وحدتان ربح بينما تعطي السلعة الثانية ثلاث وحدات

ب-عكس الحالة (أ)

(2)يشتري رجل وزوجته نوع من اللحم يحتوي علي90% من اللحم الغير دهني؛10% من الدهن بسعر الكيلو عشرة جنيهات ونوع آخر يحتوي علي 70% من اللحم الغير دهني؛ 30%دهن؛ بسعر الكيلو خمسة جنيهات.فإذا كانت إحتياجات الرجل الاسبوعية من اللحم الصافي ستة كيلو جرامات علي الاقل؛ إحتياجات زوجته هي علي الاقل كيلو جرامين من الدهن إسبوعيا. كون النموذج الرياضي الذي يحقق ذلك بحيث يوضح الكم الذي يجب شرائه من كل نوع بحيث تكون تكاليف الشراء أقل ما يمكن .

(3)صاحب مصنع أدوات خشبية يريد إنتاج اربعة أنواع من منتج معين فإذا كانت هذه الانواع تحتاج إلي (5،4،5.3) ساعات عمل علي الترتيب لتجميعها وكذلك إلى (2،1.5،3،3) ساعات عمل لزخرفتها فإذا كانت إمكانية المصنع هي 750 عامل تجميع يعملون 40 ساعة /اسبوعيا،500 عامل زخرفة يعملون 45ساعة إسبوعيا .كون النموذج الرياضى الذي يهدف إلي ألاعداد التي ينتجها المصنع من كل نوع حتي يحقق اعظمية ربح علما بأن ارباحها هي (7،7،6،9) جنيه علي الترتيب بالمنتج الواحد من كل نوع

(4) شركة بترول تريد إقامة معمل تكرير يمد بثلاث منابع لتكن a,B,C فإذا كان موقع B علي بعد 300كم شرقا ،400شمالا من A،c علي بعد 400شرقا،100جنوبا منB.كون النموذج الرياضى الذي يحدد موقع المعمل مع تقليل كم الانابيب.

(5)تنتج شركة نوعين من المواد الغذائية x،y حيث يحقق النوع الاول ربحا قدره (70) وحدة نقدية ،أما النوع الثاني فيحقق ربحا مقداره (50) وحدة نقدية .إن إنتاج وحدة من النوع الاول يتطلب وحدتين من المادة الاولية الاولي وأربع وحدات من المادة الاولية الثانية.أما إنتاج وحدة من النوع الثاني فيتطلب أربع وحدات من المادة الاولية الاولي وأربع وحدات من المادة الاولية الثانية.أما الكمية المتاحة من المادة الاولية الاولي فهى (40) وحدة ، ومن المادة الاولية الثانية (70) وحدة. والمطلوب بناء نموذج رياضي لهذه المسألة.

(6)قرر أحد الاطباء نظام غذائي معين لأحد المرضي يحقق له 400 سعر حراري و200 وحدة بروتين و30 وحدة فيتامين فإذا كان لدي المستشفي نوعان من الغذاء مما قرره الطبيب ،النوع الأول تحتوي الوحدة منه علي 500 سعر حراري و50 وحدة بروتين و5 وحدات فيتامين . النوع الثاني تحتوي الوحدة منه 800 سعر حراري و20 وحدة بروتين و4 وحدات فيتامين. فإذا كان سعر الوحدة من النوع الاول 2 جنيه وسعر الوحدة من النوع الثاني 3 جنيه. المطلوب : تحديد الكمية الواجب إعطاؤها للمريض من كل نوع والتي تحقق له القيمة الغذائية المطلوبة بأقل تكلفة ممكنة

(7) مصنع لأنتاج أدوات السفرة يستخدم نوعين من الآلات في إنتاج الملاعق والسكاكين فإذا علمت أن الدستة (12 قطعة) من الملاعق تحتاج إلى 6 ساعات تشغيل على الآلة من النوع الأول وساعتين على الآلة من النوع الثاني . والدستة من السكاكين تحتاج إلى 3 ساعات تشغيل على كل آلة من النوعين . فإذا كانت ساعات التشغيل القصوى على الآلات 10 ساعات يوميا ، ولدى المصنع 8 آلات من النوع الأول ، و12 آلة من النوع الثاني .وكان ربح المصنع من بيع الدستة من الملاعق 15 جنيه ومن السكاكين 10 جنيه . حدد الكمية الواجب إنتاجها من كل نوع يوميا لتحقيق اقصى ربح ممكن.

(8) مصنع للأثاث ينتج نوعين من غرف النوم "نفرتيتي" و "كيلوباترا" فإذا علمت ان عملية التصنيع تمر بثلاثة اقسام هي التقطيع والتجميع والدهان وتحتاج الغرفة من النوع الأول إلى عدد 2،5،4 ساعة عمل على الترتيب في الاقسام الثلاثة بينما تحتاج الغرفة من النوع الثاني إلى عدد 4،2،4 ساعة عمل على الترتيب في الاقسام الثلاثة . فإذا علمت ان ساعات العمل المتاحة في الاقسام الثلاثة يوميا هي 56،60،64 ساعة عمل على الترتيب

. وأن ربح المصنع من بيع الغرفة من النوع الاول 700 جنيه ومن النوع الثاني 500 جنيه . حدد الكمية الواجب انتاجها يوميا من كل نوع لتحقيق اقصى ربح ممكن

الفصل الثالث

جبر وهندسة البرمجة الخطية

مقدمة:

لحل البرنامج الخطي سوف نستخدم الطريقة الجبرية ،ولكن من المناسب الآن دراسة الخواص الهندسية للبرنامج الخطي.ولذلك سوف نعطي في البداية بعض الأساسيات الهندسية والتي تمكننا من معرفة الحل الأمثل للبرنامج الخطى بطريقة هندسية . سندرس في هذا الباب بعض أساسيات التحليل المحدب وطريقة حل البرنامج الخطى هندسيا .ومن ثم سنعطى فكرة عن الحل الهندسي وننتقل إلي الصيغة القياسية وبعض المسائل المتعلقة بها.

1- حل مجموعة من المتباينات الخطية

سنفرض دائما المتغيرات في هذا الجزء هما متغيران فقط وهما x,y وبذلك

فإن المتباينة $ax + by \le c$ حيث a,b,c ثوابت تمثل نصف مستوي ويمكن إيجاده بيانيا كالاتي:

نرسم المعادلة $ax + by = c$ ينتج خط مستقيم وبذلك يكون حل المتباينة هو أحد نصفي المستوي (أعلي أو أسفل) المستقيم الناتج ويكون النصف الثاني هو حل المتباينة $ax + by \ge c$

مثال1:حدد نصف المستوي الذي يحقق المتباينة $4x + 5y \le 20$

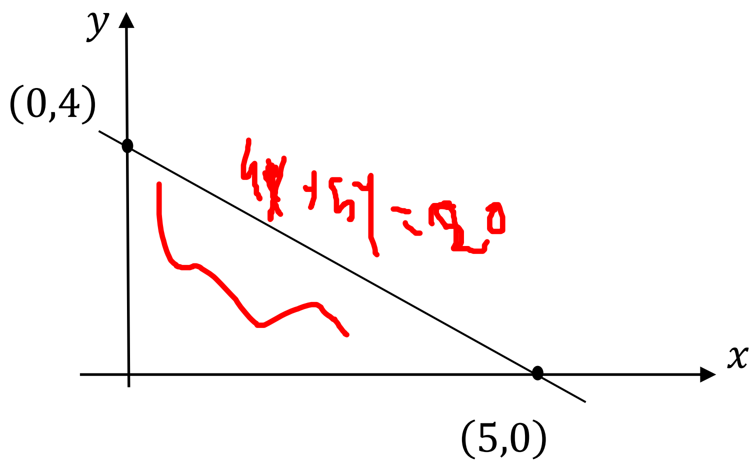
الحل:لرسم الخط المستقيم : $4x + 5y = 20$

نحل المستقيم $4X+5Y=20$ وذلك بإيجاد نقط تقاطعه مع محوري الإحداثيات وذلك بوضع $y=0$ مرة فينتج أن $x=5$ فتكون النقطة $A(5,0)$ هي نقطة تقاطعه مع محور السينات وبالمثل النقطة $B(0,4)$ هي نقطة تقاطعه مع محور الصادات

$$y = 0 \ \rightarrow 4x = 20 \ \rightarrow x = 5$$

$$x = 0 \ \rightarrow \ 5y = 20 \ \rightarrow \ y = 4$$

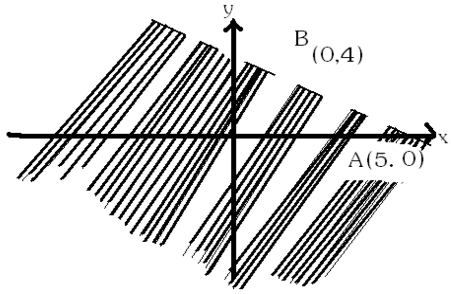
وبذلك يكون المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ قد قطع المستوي xoy إلي نصفين ثم نجد إختيار لنعرف أي النصفين يحقق المتباينة وذلك بنقطة الأصل 0 نجد أنها تحققها وبذلك يكون النصف الذي يحتوي نقطة الأصل هو المطلوب.



هذا الخط المستقيم يفصل المستوى الى نصفين اعلاه ويحقق المتباينة :

$$4x + 5y > 20$$

والنصف الاسفل من المستوى يحقق $4x + 5y \ < 20$



مثال2:

حدد مجموعة النقاط التي تحقق المتباينة $4x+5y\leq 20$ وأيضا $y\geq 0, x \geq o$.

الحل:

يلاحظ أن نصف المستوي أعلي محور السينات يحقق المتباينة $y \geq 0$
وكذلك نصف المستوي علي يمين محور الصادات يحقق المتباينة $x \geq 0$
وبذلك تكون مجموعة نقاط المثلث OAB هي المطلوبة (انظر الرسم السابق)

مثال3:

أوجد مجموعة النقاط التي تحقق المتباينات الاتية

Find the set of points that satisfy the following set of inequalities:

$$4x + 5y \leq 33$$

$$x + 4y \geq 11$$

$$2x - 3y \geq -11$$

الحل: برسم الثلاث مستقيمات التي تمثلها حالة التساوي للثلاث متباينات ونحدد نصف المستوي من علامة التباين فيكون الرسم كالتالي:

We consider the line

$$4x + 5y = 33$$

$$x = 0 \ \rightarrow 5y = 33 \ \rightarrow y = \frac{33}{5} = 6\frac{3}{5} = 6.6$$

$$y = 0 \ \rightarrow 4x = 33 \ \rightarrow x = \frac{33}{4} = 8\frac{1}{4} = 8.25$$

$$\left(0\,, \frac{33}{5}\right), \left(\frac{33}{4}, 0\right)$$

(0,0) statisfies $4x + 5y \leq 33$ then this inequality is satisfied by the set of point down the line (0,6.6) , (8.25,0)

....

the line

$$x + 4y = 11$$

$$x = 0 \ \rightarrow 4y = 11 \ \rightarrow y = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$$

$$y = 0 \ \rightarrow x = 11$$

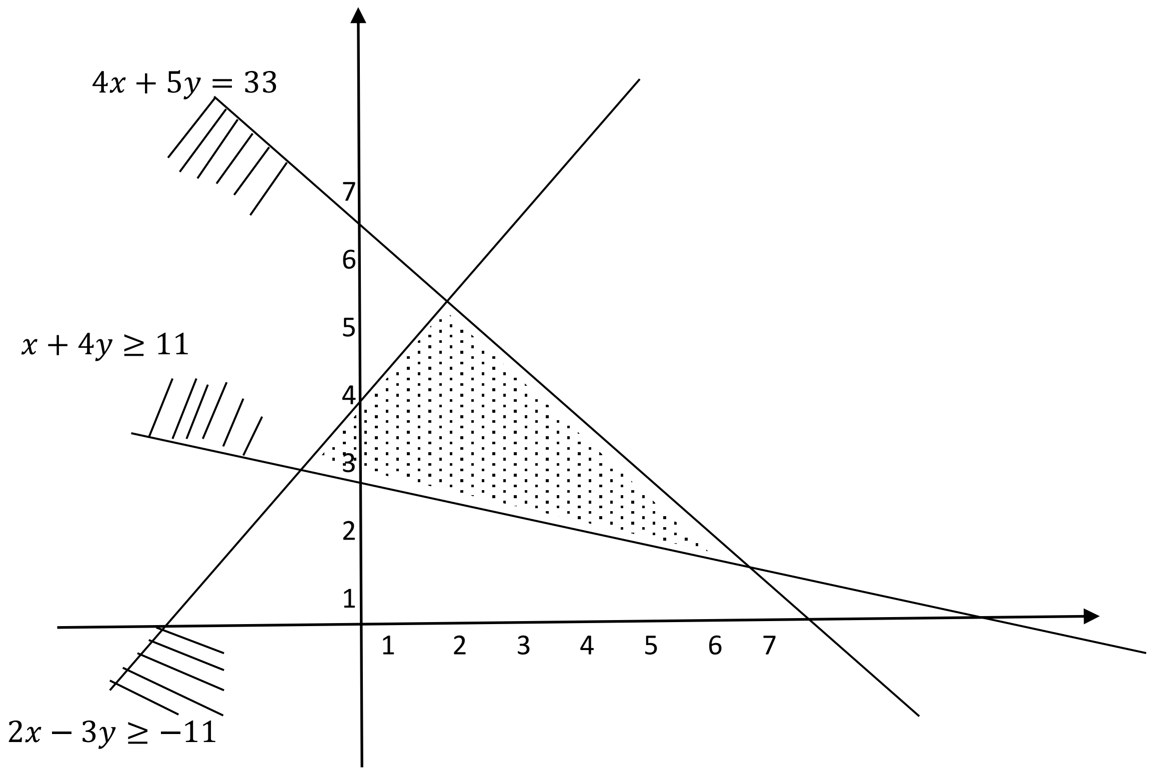
The point to that satisfies the inequality are over and on the line

the *line* $2x - 3y = -11$

$$x = 0 \ \rightarrow \ -3y = -11 \rightarrow y = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3} = 3.67$$

$$y = 0 \ \rightarrow 2x = -11 \ \rightarrow x = \frac{-11}{2} = -5\frac{1}{2} = -5.5$$

(0,0) satisfies $2x - 3y \geq -11$ then this inequality is satisfied by the set of point down the line



∴ النقاط التي تحقق المتباينات الثلاث هي تلك الموجودة داخل وعلى محيط المثلث المبين بالرسم

The set of points that satisfy the three inequalities are those inside and at the triangle described at the figure ABC.

لتحديد نقاط التقاطع نحل المعادلتين معًا $4x + 5y = 33 \,, x + 4y = 11$

فنحصل على $\mathrm{P}(7,1)$

كيف (واجب)

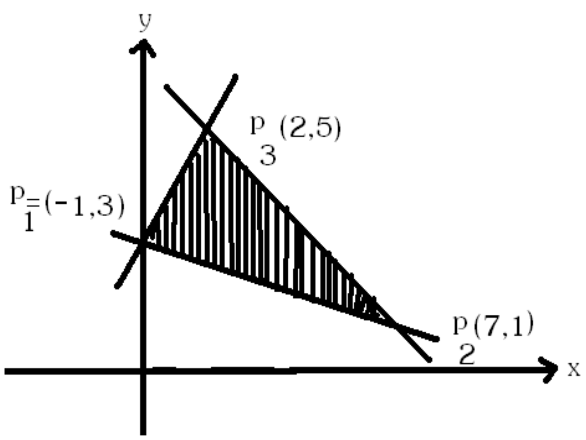
نقطة تقاطع $\mathrm{4x + 5y = 33 \,, 2x - 3y = -11}$ هي $\mathrm{Q}(2,5)$

نقطة تقاطع $\mathrm{x + 4y = 11 \,, 2x - 3y = -11}$ هي $\mathrm{R}(-1,3)$

حل آخر

لأيجاد مجموعة النقاط المطلوبة هناك طريقتان

أولهما:الطريقة المستخدمة في مثال(1) لكل متباينة علي حدة ثم نوجد نقاط تقاطعهما فتكون النقاط p_3,p_2,p_1 كما هو واضح بالشكل المرافق وتكون نقاط المثلث المظلل كما بالشكل



الثانية: نحل كل زوج من المعالات معا فمثلا المعادلتان $2x+3y=-11$ ، $x+4y=11$ تنتج النقطة $p_{1=(-1,3)}$ هي نقطة تقاطعهما وكذلك

النقطة $p_{2=(7,1)}$ للمعادلتان $4x+5y=33$ ، $x+4y=11$ بالمثل النقطة $p_1 = (-1,3)$ هي نقطة تقاطع الزوج من المعادلات $4x+5y=33$ ، $2x-3y=-11$ وبذلك تكون نقاط المثلث p_3, p_2, p_1 هي المطلوبة.

مثال4:

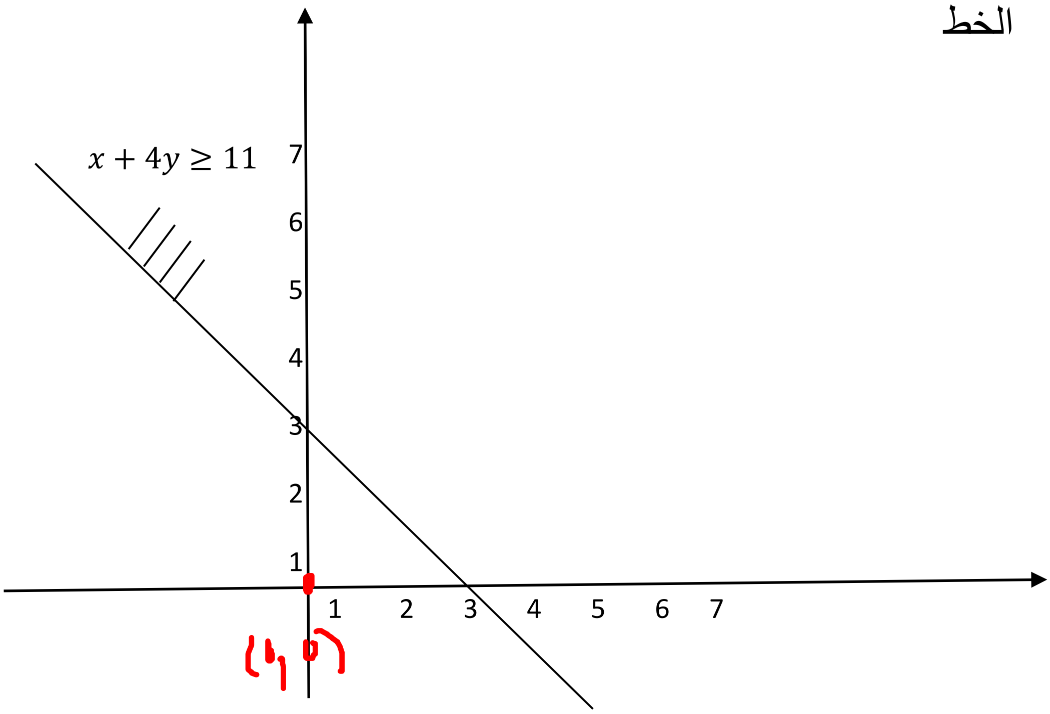
أوجد حل المتباينات الآتية: $y \geq 0, y \leq 3, x + y \geq 3$

الحل:

نرسم الخط المستقيم $x + y = 3$ والذي تحققه النقطتان:

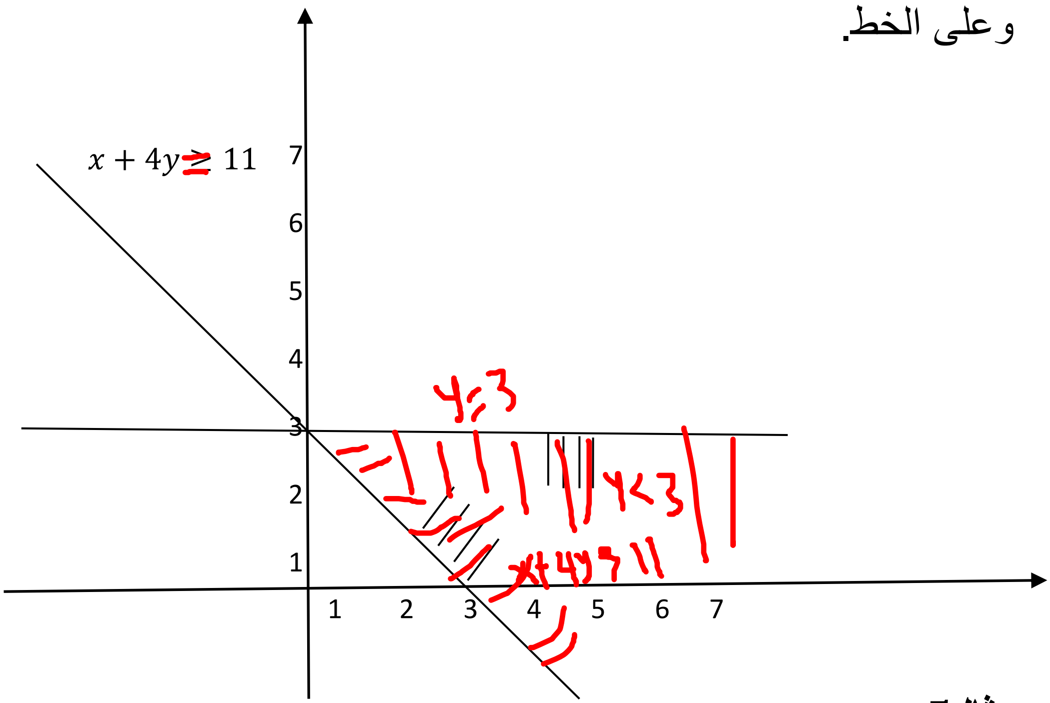
$$x = 0 \Rightarrow y = 3, \qquad y = 0 \Rightarrow x = 3$$

ولتحديد نصف المستوى الذي تحققه المتباينة $x + y \geq 3$ نجد أم النقطة $(0,0)$ لا تحققها وبالتالي يكون نصف المستوى المطلوب هو أعلى يمين الخط



نرسم الخط المستقيم $y = 3$ والذي يمثله الخط المستقيم الموازي لمحور x و يمر بالنقطة $(0,3)$

ولتحديد نصف المستوى الذي تحققه المتباينة $y \leq 3$ نجد أم النقطة $(0,0)$ تحققها وبالتالي يكون نصف المستوى المطلوب هو أسفل يمين وعلى الخط.

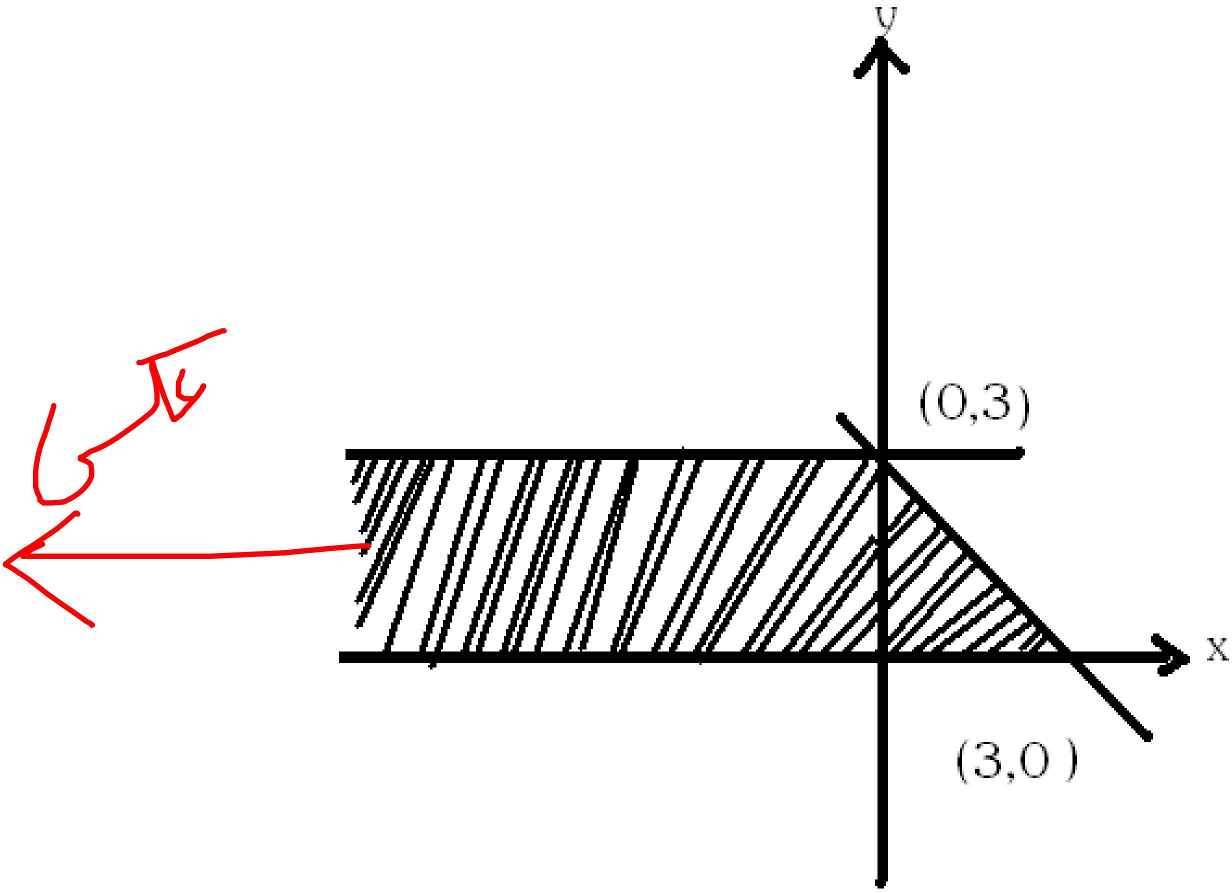


مثال5:

اوجد حل المتباينات الآتية: $y \geq 0, y \leq 3, x + y \leq 3$

الحل:

يلاحظ أن متباينات هذا المثال هي نفسها متباينات المثال السابق ما عدا علامة التباين في الأخيرة فهي عكس نظيرتها في مثال 4 لذا سيكون مضلع الحل في هذه الحالة ممتد من الجهة اليسري كما هو واضح بالشكل .



تعاريف ونظريات " *Definitions & Theorems* "

سنقدم في هذا الجزء أهم التعاريف والنظريات الأساسية في موضوع دراستنا الحالية .

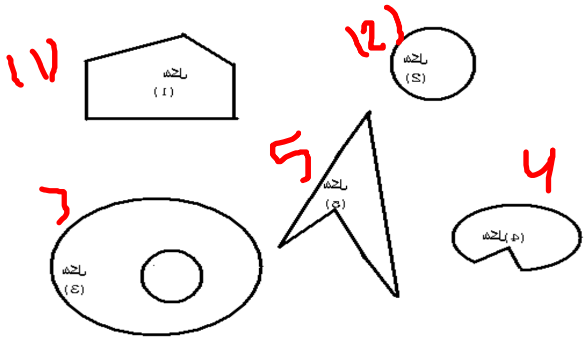
(1)المجموعة المحدبة (*Convex set*)

تسمي المجموعة الجزئية $C \in R^2$ مجموعة محدبة إذا تحقق ما يلي

$\lambda\in[0,1]$، $X_1,X_2\in C$ فإن $\lambda X_1+(1-\lambda)X_2\in C$ لاحظ أن

$\lambda X_1+(1-\lambda)X_2$ تمثل نقاط القطعة المستقيمة بين النقطتين X_1,X_2 أي أن تحدب المجموعة C يعني هندسيا بأنه لأى نقطتين X_1,X_2 في C فإن القطعة المستقيمة الواصلة بين هاتين النقطتين تنتمي إلي C

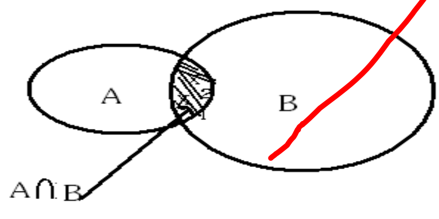
فمثلا: شكل(1)،(2) مجموعات محدبة بينهما الأشكال (3)،(4)،(5) غير محدبة



.

نظرية: تقاطع مجموعتين محدبتين أو أكثر يكون مجموعة محدبة

الإثبات: نفرض (A,B) مجموعتين محدبتين ونفرض $X_1\neq X_2$ نقطتان توجدان في $A\cap B$ هذا معناه أن النقطتان تقعان في كلاً من A,B ومن تحدب كلاهما يكون $\lambda X_1+(1-\lambda)X_2$ حيث $\lambda\in[0,1]$ موجود في كلاهما ومن خواص التقاطع يكون أيضا موجود في $A\cap B$. هذا معناه أن تقاطع المجموعتين A,B هوالآخر يكون مجموعة محدبة ويمكن تعميم ذلك لأكثر من مجموعتين



نتيجة هامة: إتحاد مجموعتين محدبتين فقط لا يكون دائما مجموعة محدبة .

(1) **منطقة السماح** **(*Admissible Region*)** هي مجموعة النقاط التي تحقق مجموعة القيود بالإضافة إلي قيد عدم السالبية؛ كل نقطة منها تسمي حلا ًمسموحاً به *feasible solution* .

Admissible Region is the set of points that satisfies all the constraints in addition to the non negative condition.

(2) **الركن** ***Corner*** هي أركان المضلع الذي يحقق مجموعة القيود أو بمعني تقاطع مثني مثني وتسمي أيضا نقاط متطرفة *Extreme points*

(3) **الحل الأمثل "*Optimal Solution*"** هي النقطة "قيم المتغيرات" التي تقع في منطقة السماح وتحقق القيمة المثلي للدالة الهدف في المسألة.

أيضا سنقدم النظرية التالية لما لها من أهمية قصوى عند حل مسائل البرمجة الخطية

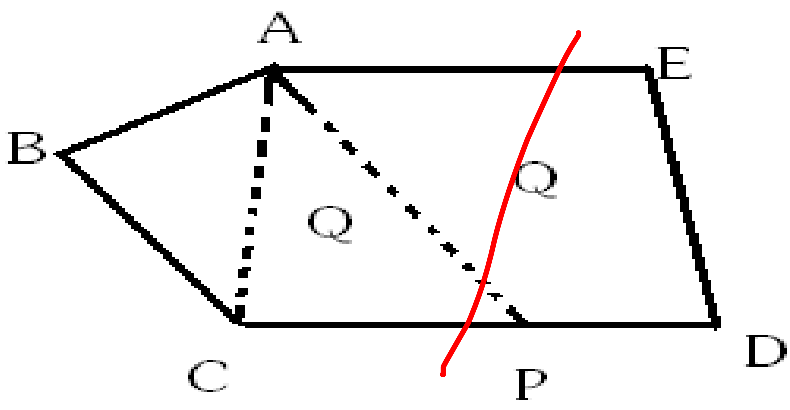
نظرية لكل مسائل برمجة خطية هامة

نظرية:

لأي دالة خطية $f(x,y) = ax + by + c$ محسوبة داخل (أو على) مضلع محدب تعيّنه مجموعة من المتباينات الخطية فإن نهاية الدالة الخطية العظمى أو الصغرى للدالة $f(x,y)$ تقع عند نقط أركان المضلع .

~~**الاثبات**~~: نفرض أن Q نقطة داخل المضلع المحدب وتقع بين أي رأسين ليكن A,C مثلا أو بين الرأس A و النقطة P التي تقع بين الرأسين C,D كما بالشكل.

طول العمود النازل من النقطة (x,y) علي المستقيم $ax+by+c=0$ يتناسب طرديا مع مقدار $(ax+by+c)$ ؛ بذلك يكون طول العمود النازل من النقطة Q علي المستقيم $ax+by+c=0$ يكون محصورا بين طولي العمودين النازلين من A,C علي نفس المستقيم



أي أن قيمة الدالة $(ax+by+c)$ عند النقطة Q تقع بين قيمتها عند النقطتين A,C (في الحالة الأولي للنقطة Q) وكذلك بين قيمتها عند النقطتين A,P (في الحالة الثانية للنقطة Q) ولكن قيمة الدالة عند P يقع بين قيمتها عند النقطتين C,D و هذا يوضح دائما أن قيمة الدالة الخطية $(ax+by+c)$ عند أي نقطة داخل المضلع المحدب أو علي حوافه (أضلاعه) تقع دائما بين قيمتها عند ركنين من أركان هذا المضلع و هذا يؤدي مباشرة إلي أن القيمة الأمثلية (النهاية الصغري أو العظمي) يكون دائما عند أركان المضلع المحدب

مثال6:

أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة الخطية

$$f(x,y) = 3x + y + 2$$

$3(-3) + (-3) + 2$

حول المضلع المحدب الذي تعيّنه المتباينات الآتية

$$2x + y + 9 \geq 0$$
$$3y - x + 6 \geq 0$$
$$x + 2y \leq 3$$
$$y \leq x + 3$$

الحل :

$$2x + y + 9 \geq 0$$
$$3y - x + 6 \geq 0$$
$$x + 2y \leq 3$$
$$y \leq x + 3$$

$2x + y + 9 \geq 0$

==============

$2x + y = -9 \rightarrow x = 0, y = -9$

$y = 0, x = -4.5$

(0,0) satisfies it, so the proposed area is up Wright the line

حيث أن نقطة الأصل (0,0) تحقق المتباينة فإن المنطقة المطلوبة تكون أعلى يمين الخط

$3y - x + 6 \geq 0$

==============

$3y - x = -6 \rightarrow x = 0, y = -2$

$y = 0, x = 6$

(0,0) satisfies it, so the proposed area is up Left the line

حيث أن نقطة الأصل (0,0) تحقق المتباينة فإن المنطقة المطلوبة تكون أعلى يسار الخط

The intersection of

تقاطع المستقيمين

$2x + y = -9, 3y - x = -6$

Is obtained by solving these two eqs. To obtain

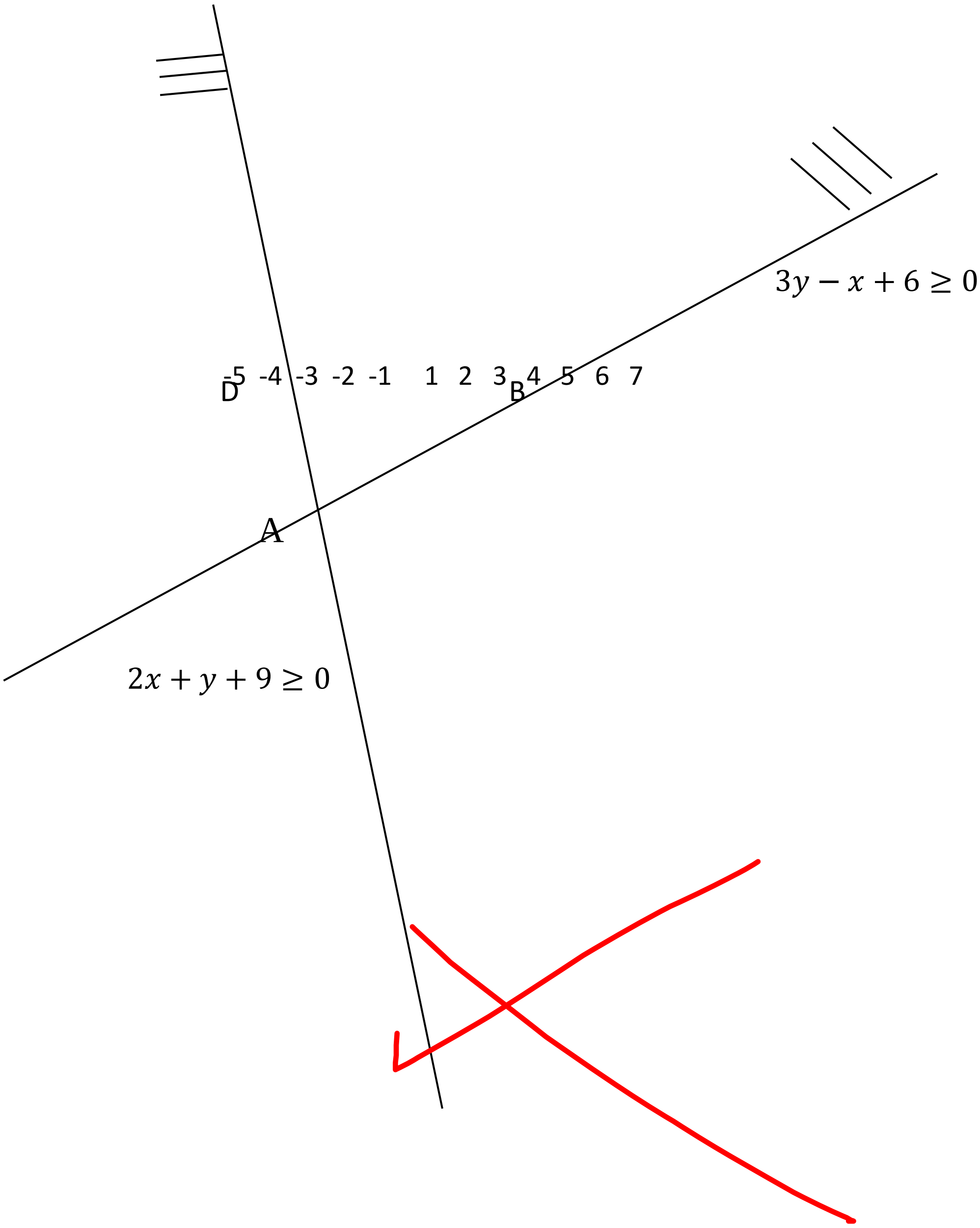
يمكن الحصول عليه بحل هاتين المعادلتين لنحصل على

$x = -3, y = -3$

A نقطة تمثل ركن من المنطقة

قيمة الدالة عند هذا الركن

$f(at\ A) = 3(-3) + (-3) + 2 = -10$



$x + 2y \leq 3$

=============

$x + 2y = 3 \rightarrow x = 0, y = 1.5$

$$y = 0, x = 3$$

(0,0) satisfies it, so the proposed area is Down Left the line

حيث أن نقطة الأصل تحقق المتباينة فإن المنطقة المطلوبة تكون أسفل يسار الخط

===

The intersection of

تقاطع المستقيمين

$3y - x = -6, x + 2y = 3$

Is obtained by solving these two eqs. To obtain

يمكن الحصول عليه بحل هاتين المعادلتين لنحصل على

$x = 4.5, y = -0.6$

قيمة الدالة عند هذا الركن

$f(at\ B) = 3(4.5) + (-0.6) + 2 = 14$

$y \leq x + 3$ $\Rightarrow y = x + 3 \rightarrow x = 0 \quad y = 3$

===========

$y = 0, \quad x = -3$

$y - x = 3 \rightarrow x = 0, y = 3$

$$y = 0, x = -3$$

(0,0) satisfies it, so the proposed area is Down Wright the line

حيث أن نقطة الأصل تحقق المتباينة فإن المنطقة المطلوبة تكون أسفل يمين الخط

===

The intersection of

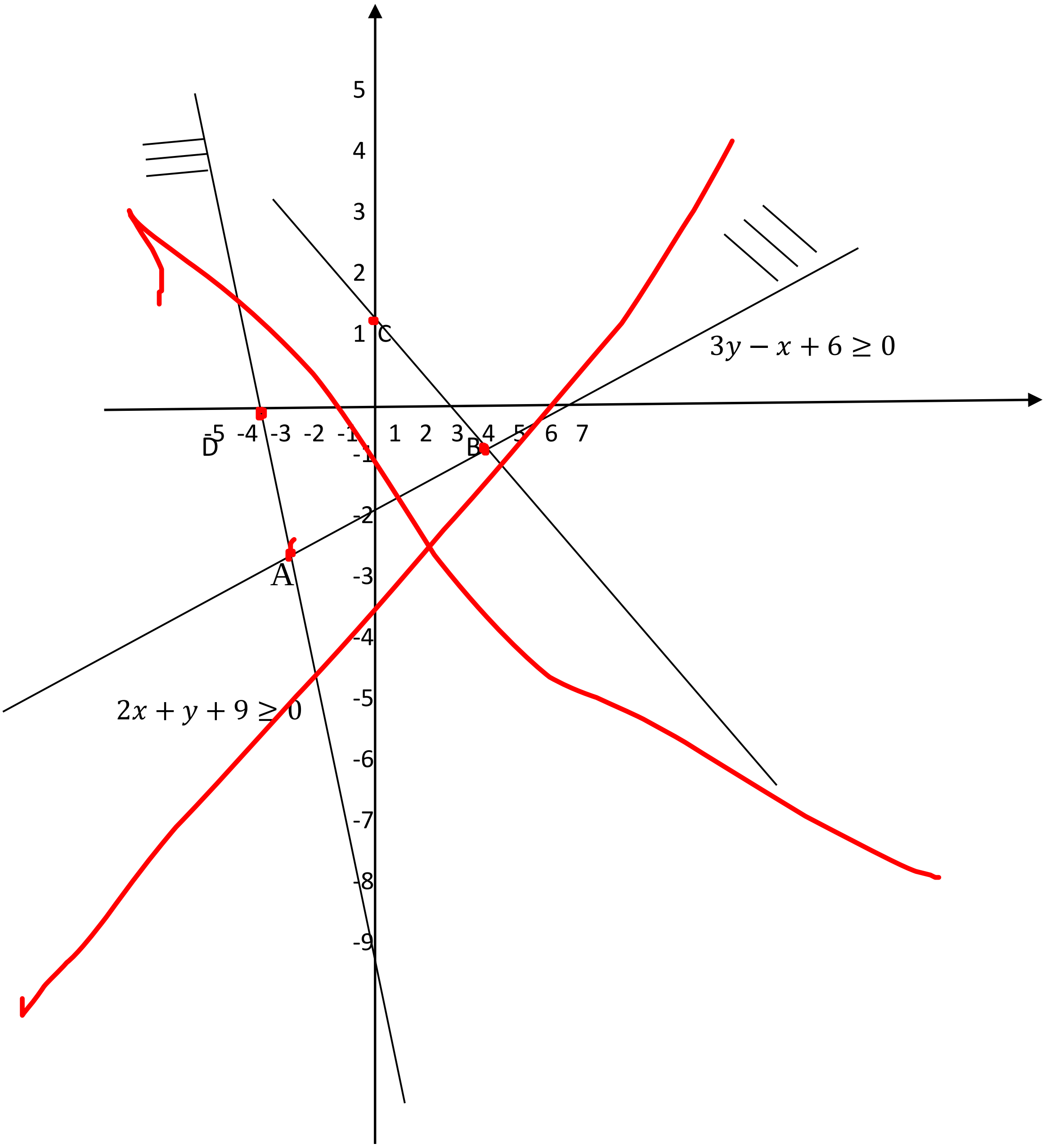
تقاطع المستقيمين

$y - x = 3, x + 2y = 3$

Is obtained by solving these two eqs. To obtain

يمكن الحصول عليه بحل هاتين المعادلتين لنحصل على

$$x = -1, y = 2$$



قيمة الدالة عند هذا الركن

$$f(at\ C) = 3(-1) + (2) + 2 = 1$$

The intersection of

تقاطع المستقيمين

$$y + x = 3,\ 2x + y = -9$$

Is obtained by solving these two eqs. To obtain

يمكن الحصول عليه بحل هاتين المعادلتين لنحصل على

$$x = -4, y = -12$$

$$f(at\ D) = 3(-41) + (-1) + 2 = -11$$ قيمة الدالة عند هذا الركن

Thus

$f_A = -10$ at $A(-3,-3)$

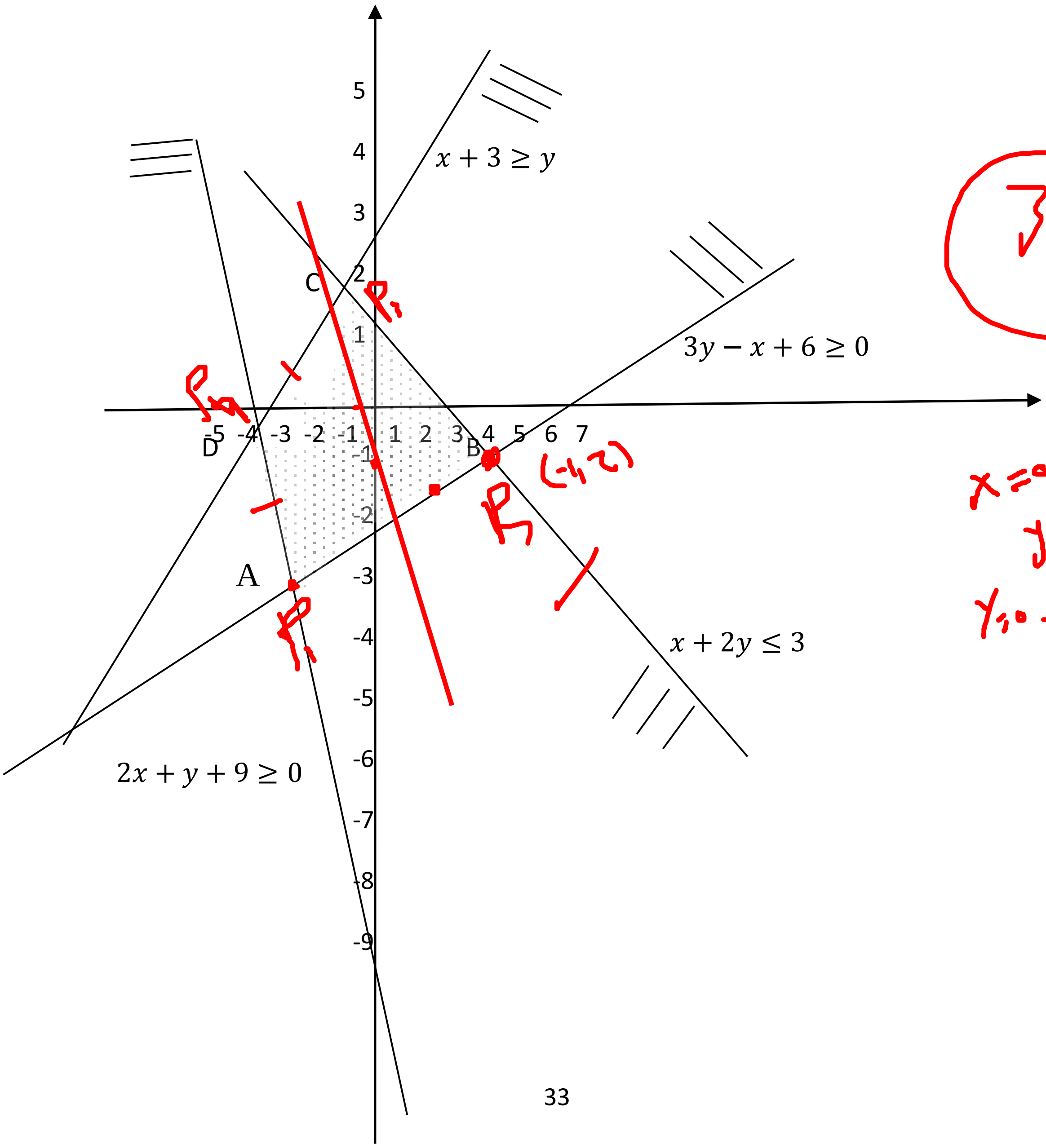
$f_C = 1$ at $C(-1,2)$

$f_B = 14$ at $B(4.2,-0.6)$

$f_D = -11$ at $D(-4,-1)$

Hence the Maximum value is $f_B = 14$ at $B(4.2,-0.6)$

And the Minimum value is $f_D = -11$ at $D(-4,-1)$



$3x+y+2 = 1$

$x=0$ $y=-1$

$y=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

توجد مجموعة النقاط التي تحقق المتباينات وهى نقاط المضلع ABCD كما بالشكل وهذا يحصل عليه بيانياً أو جبرياً بحل كل زوج من المعادلات معاً ينتج إحداثيات الأركان ولإيجاد النهايات العظمى والصغرى للدالة الخطية $3x + y + 2$

نضع أي قيمة لهذه الدالة ليكن $3x + y + 2 = -1$ ونرسم هذا المستقيم ثم نحركه موازياً لنفسه حتى يمس المضلع عند أسفل نقطة عندها النهاية الصغرى لهذه الدالة وكذلك عندما يمس المضلع عند أعلى نقطة يكون عندها النهاية العظمى للدالة المطلوبة ويتضح أنه عند النقطة P_4 هو P_2 موضع النهاية الصغرى للدالة وكذلك هو موضع النهاية العظمى لها ولإيجاد قيمتي النهايتين نعوض بإحداثيات النقاط مواضعها فى الدالة كالآتي :

قيمة النهاية الصغرى للدالة هو -11 ؛ قيمة النهاية العظمى لها هو 12

هناك حل جبري

ويمكن الحصول عليه بالتعويض بإحداثيات كل نقطة من نقاط أركان المضلع المحدب الناتج في الدالة المطلوب تعيين نهايتها العظمي والصغري ومن القيم الناتجة نستطيع تعيين مواضع وقيم النهايات المطلوبة .

ملاحظة هامة:

في بعض المسائل يكون المضلع الناتج مفتوح (ممتد) وهذا يؤدى إلي عدم تواجد أحد النهاتين مع تواجد الاخري .

مثال 7:

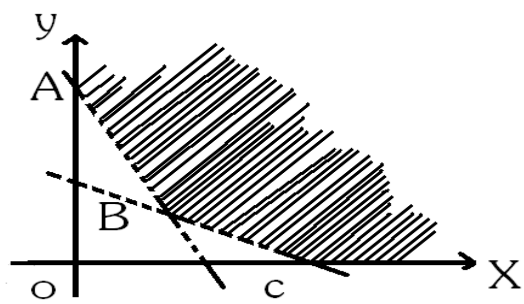
أوجد النهايات العظمي والصغري للدالة $3x+4y$ حول المضلع المحدب الذي تعينه المتباينات الآتية :

$$x \geq 0 \quad , \quad 2x + y \geq 4$$

$$y \geq 0 \quad , \quad x + 2y \geq 4$$

الحل:

يلاحظ أن المضلع الذي يحقق المتباينات غير محدد كما هو بالشكل



وبذلك يمكن جعل الدالة $3x+4y$ كبيرة كما يزيد ولهذا ليس للدالة نهاية عظمي لكن لها نهاية صغري عند الركن $B = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ وقيمة هذه النهاية الصغري هو $\frac{28}{3}$

مثال8:

أوجد النهايات العظمي والصغري للدالة $3x+4y$ حول المضلع المحدب الذي تعينه المتباينات الآتية :

$$2x + y \leq 4$$

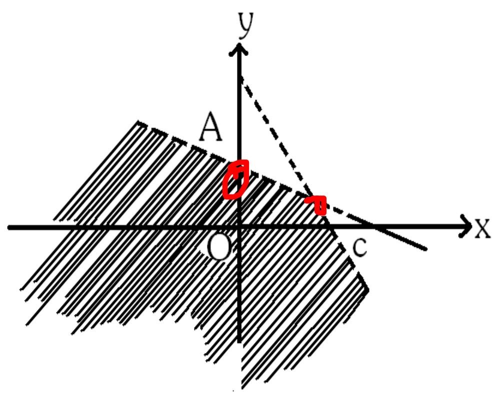
$$x + 2y \leq 4$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

الحل:

من الشكل المرافق يلاحظ أن المضلع الذي تعيينه المتباينات هو الأخير غير محدد مثل ذلك الناتج في المثال السابق عدا أنه غير محدد من الجهة الأخري لذا يلاحظ أن الدالة $3x+4y$ ليس لها نهاية صغري ؛ ويتضح أن نهايتها العظمي عند الركن B وقيمة النهاية العظمي هو $\frac{28}{3}$



مثال 10 :

بالطريقة البيانية حقق الآتي :

$$Min Z = 2x_1 + 3x_2$$

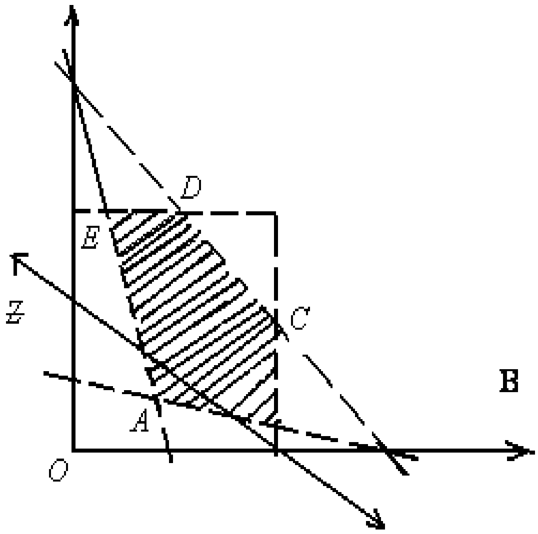
والتي تحقق القيود الآتية :

$$x_1 + x_2 \le 4 \quad ; \quad x_1 \le 3$$
$$3x_1 + x_2 \ge 4 \quad ; \quad x_2 \le 3$$
$$x_1 + 5x_2 \le 4 \quad .$$

مع قيد عدم السالبية وهو

$x_1 \ge 0 \;\; , \;\; x_2 \ge 0$

الحل :



نرسم مجموعة القيود ينتج المضلع المحدب $ABCDE$

نرسم المستقيم $2x_1 + 3x_2 = 6$ (مثلاً) فينتج المستقيم z ثم نحركه لأسفل للحصول على النهاية الصغرى لـ Z فيمس المضلع عند A التي عندها

والنهاية الصغرى المطلوبة هي $x_2 = \frac{4}{7} \;\; ; \;\; x_1 = \frac{8}{7}$

تمارين

(1) حدد نصف المستوي الذي تحدده كل متباينة من المتباينات الآتية :

(i) $7x + 8y \le 28$ ***(ii)*** $0.8x_1 + 0.3x_3 \le 60$ ***(iii)*** $2x + y \ge 6$

(2) حدد المنطقة التي تحقق مجموعة من المتباينات :

(i) $x + 2y \ge 3$ $4x + 5y \ge 6$ $7x + 8y = 15$	(ii) $6x_1 + x_2 \ge 6$ $4x_1 + 3x_2 \ge 12$ $x_1 + 2x_2 \ge 4$

(iv) $x_1 + x_2 \geq 1$ $7x_1 + 9x_2 \leq 6$ $x_1 \leq 6, \quad x_2 \leq 5$	(iii) $x + 2y \leq 10$ $x + y \geq 1$ $y \leq 4$

(3) أوجد مجموعة النقاط التي تحقق المتباينات الاتية

(ii) $9x + 10y \leq 330$ $21x - 4y \geq -36$ $x + 2y \geq 6$ $6x - y \leq 72$ $3x + y \leq 54$ $x \geq 0, \quad y \geq 0$	(i) $3x + 4y \leq 24$ $x - y \leq 3$ $x + 4y \leq 4$ $3x + y \geq 3$ $x \geq 0, \quad y \geq 0$
	(iii) $4x + 5y \leq 33$ $x + 4y \geq 11$ $2x - 3y \geq -11$

(4) أوجد النهايات الصغري والعظمي للدالة الخطية $z = 7x_1 + 5x_2 - 3$ حول كلاً من المضلعات المحدبة التي تعنيها المتباينات الآتية:

(1) $3x_1 + 2x_2 \leq 6$, $x_2 \geq 0$, $x_1 \geq 0$

(2) $2x_1 + 4x_2 \geq 5$, $x_2 \geq 0$, $x_1 \geq 0$

(3) $x_1 + 3x_2 \leq 3$, $x_2 - x_1 \leq 2$, $2x_1 + 3x_2 \leq 6$

(5) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة الخطية

$$f(x, y) = 50x + 100y$$

حول المضلع المحدب الذي تعيّنه المتباينات الآتية

$$10x + 5y \geq 2500$$
$$4x + 10y \geq 2000$$
$$x + 1.5y \geq 450$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

(6) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة الخطية

$$f(x, y) = -3x + 2y$$

حول المضلع المحدب الذي تعيّنه المتباينات الآتية

$$0 \leq x_1 \leq 4$$
$$1 \leq x_2 \leq 6$$
$$x_1 + x_2 \leq 5$$

(7) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة الخطية

$$f(x, y) = 3x + 2y$$

حول المضلع المحدب الذي تعيّنه المتباينات الآتية

$$8x_1 + x_2 \geq 8$$
$$2x_1 + x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 6x_2 \geq 8$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

طرق حل مسائل البرمجة الخطية

هناك عدة طرق لحل مسألة البرمجة الخطية سنقدم منها ما يلي :

أولاً:الطريقة البيانية: *Graphical Method*

من الواضح أن كلا من دالة الهدف والقيود في مسألة البرمجة الخطية ويكون المطلوب تحديد الأمثلية لدالة الهدف؛ لذا سوف نستخدم ما سبق إيضاحه بالطريقة البيانية كالآتي :

(1) نرسم القيود جميعها ومنها نحدد منطقة السماح (المضلع المحدب)
(2) نفترض أي قيمة لدالة الهدف وبذلك نستطيع رسم مستقيم من هذا الفرض .
(3) نحرك هذا المستقيم موازيا لنفسه حتي يمس مضلع منطقة السماح في نقطة واحدة تكون هي موضع " الحل الأمثل " المطلوب.

مثال (1): بالطريقة البيانية حقق الآتي:

أ- $Max\ Z = x + 2y$

ب- $Max\ Z = 2x + y$

والتي تحقق القيود الآتية : $3x + y \le 53$

$$3x + 8y \le 172$$

$$5x + 4y \le 100$$

مع قيد عدم السالبية وهو: $x \ge 0\ ,\ \ y \ge 0$

الحل:

نرسم القيود الثلاثة مع الحفاظ علي قيد عدم السالبية ينتج المضلع المحدب $OABCD$ كما بالشكل

ثم نرسم دالة الهدف في كلا الحالتين كالآتي :

(أ) $Max\ Z = x + 2y$ وذلك بوضع أي قيمة للدالة فمثلا $x+2y=10$ ونرسم ذلك المستقيم . فينتج المستقيم pZ وحيث أن المطلوب هو تعظيم Z لذا نحركه لأعلي حتي يمس المضلع OABCD في نقطة واحدة تكون هي الحل المطلوب ؛ يلاحظ أن ذلك يتحقق عند النقطة C ومنها يكون الحل الذي يعطي تعظيم هو أن ينتج صاحب المصنع 4 وحدات من السلعة الأولي و20 من السلعة الثانية وهذا يحقق ربح قدره (44) وكذلك بالمثل في الحالة (ب) من المثال.

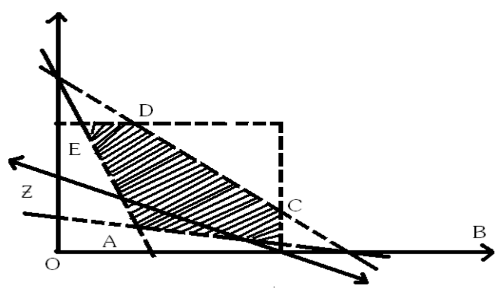
مثال (2): بالطريقة البيانية حقق الآتي : $Min\ Z = 2x_1 + 3x_2$
والتي تحقق القيود الآتية :

$$x_1 + x_2 \leq 4\ ;\quad x_1 \leq 3$$
$$3x_1 + x_2 \geq 4\ ;\quad x_2 \leq 3$$
$$x_1 + 5x_2 \leq 4$$

مع قيد عدم السالبية وهو $x_1 \geq 0\ ,x_2 \geq 0$

الحل:

نرسم مجموعة القيود ينتج المضلع المحدب OABCD نرسم المستقيم $2x_1 + 3x_2 = 6$ (مثلا) فينتج المستقيم z ثم نحركه لأسفل للحصول علي النهاية الصغري لـ z فيمس المضلع عند A التي عندها $x_1 = \frac{4}{7}; x_2 = \frac{8}{7}$ والنهاية الصغري هي 4



ملاحظة: بعض المسائل لا يكون لها حل وحيد ولكن يكون لها عدد لا نهائي وهذا يحدث بيانيا بأن ينطبق مستقيم دالة الهدف مع أحد أضلاع

المضلع المحدب ؛ يقال في هذه الحالة أن للمسألة بدائل مثلي (Alternative Optima) ويظهر ذلك من المثال التالي.

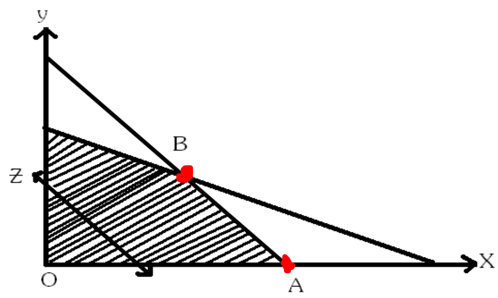
مثال(3): أوجد $Max\ Z = 10x + 4y$ والتي تحقق المتباينات الآتية:

$$3x + 5y \leq 15$$
$$5x + 2y \leq 10$$
$$x \geq 0\ , y \geq 0$$

الحل:

من القيود حصلنا علي المضلع المحدب $OABC$ ومن دالة الهدف حصلنا علي المستقيم Z من العلاقة $10x + 4y = 10$ (مثلا) بتحريكه لأعلي موازيا لنفسه نلاحظ أنه ينطبق مع الجانب AB هذا دليل علي وجود عدد لا نهائي من الحلول .

وهذا يتضح حليا من التناسب في معاملات دالة الهدف واحد القيود



نتيجة: في مثل هذا النوع من المسائل يكون من الضروري إضافة قيد أخر حتي يصبح للمسالة حل وحيد.

مثال(4): اوجد $Max\ Z = 20x + 15y$

والتي تحقق المتباينات الآتية:

$$2x + 4y \leq 16$$
$$2y + 3x \leq 12$$
$$x \geq 0\ , y \geq 0$$

الحل:

نحول المتباينات إلى معادلات:

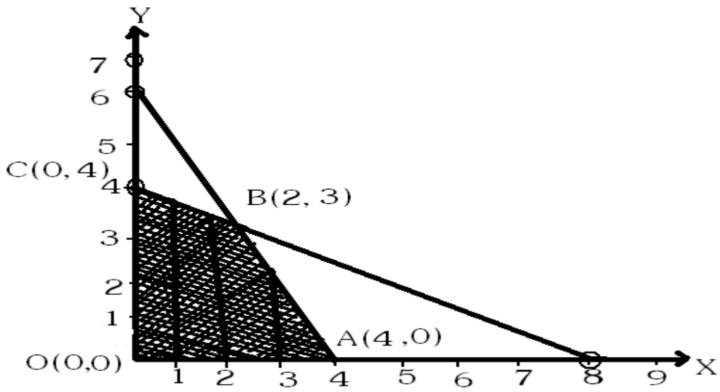
$$2x + 4y = 16$$

$y = 0$ x=6 ; $x = 0 \rightarrow y = 4$;

$$2y + 3x = 12$$

$x = 4 \rightarrow y = 0$; $x = 0 \rightarrow y = 6$;

نحدد منطقة الحلول : وفقا لإتجاه المتباينات فإن منطقة الحلول تتحدد في النقط *O,A,B,C* .



نعوض بالنقط في دالة الهدف : $z = 20x + 15y$

عند النقطة $A(4,0)$ $Z = 20(4) + 15(0) = 80$

عند النقطة $B(2,3)$ $Z = 20(2) + 15(3) = 85$

عند النقطة $C(0,4)$ $Z = 20(0) + 15(4) = 60$

عند النقطة $O(0,0)$ $Z = 20(0) + 15(0) = 0$

اختيار الحل الأمثل :لما كان الهدف هو أكبر قيمة للربح

∴ يتحقق أقصي ربح ممكن وقدره 85 جنيه عند النقطة $B(2,3)$.

مثال (5):أوجد $Min\ Z = 5x + 8y$ التي تحقق المتباينات الآتية:

$$10x + 5y \geq 300$$

$$10y + 5x \leq 250$$

$$3y + 4x \leq 150$$

$$x \geq 0\ , y \geq 0$$

الحل: نحول المتباينات إلي معادلات

$$10x + 5y = 300$$

$$x = 0 \to y = 60\ ; \qquad x = 30 \to y = 0$$

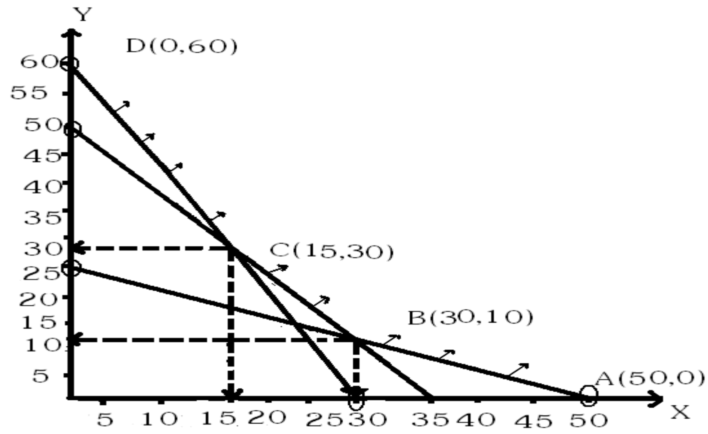
$$10y + 5x = 250$$

$$x = 0 \to y = 25\ \ ; \qquad x = 50 \to y = 0$$

$$3y + 4x = 150$$

$$x = 0 \to y = 50\ ; \qquad x = 37.5 \to y = 0$$

نحدد منطقة الحلول :وفقا لاتجاه المتباينات فإن منطقة الحلول تتحدد في النقطة A,B,C,D



نعوض بالنقط في دالة الهدف: $Z=5x+8y$

عند النقطة $A(50.0)$ $\quad z = 5(50) + 8(0) = 250$

عند النقطة $B(30.10)$ $\quad Z = 5(30) + 8(10) = 230$

عند النقطة $C(15.30)$ $\quad Z = 5(15) + 8(30) = 315$

عند النقطة $D(0.60)$ $\quad Z = 5(0) + 8(60) = 480$

اختيار الحل الامثل :تتحقق النهاية الصغري للدالة وقدرها 230 عند النقطة $B(30.10)$.

ثانيا :الطرق التحليلية:"*Analytic Methods*"

هناك عدة طرق تحليلية لحل مسألة البرمجة الخطية سندرس منها ما يلي:

(1) الطريقة الجبرية :

وهذه الطريقة تتلخص في تعيين أركان المضلع المحدب بحل المعادلات الناتجة من متباينات القيود مثني مثني وبالتعويض بكل ركن في دالة الهدف ينتج قيم لها عند كل الأركان بذلك نستطيع تعيين دالة الهدف من خلال النتائج التى حصلنا عليها؛ يراعى فى

النتائج التى نحصل عليها فى إحداثيات الأركان أن نطبق قيد عدم السالبية بمعني أنه يرفض القيم السالبة التي تنتج للمتغيرات .

مثال(6): حقق دالة الهدف الآتية بالطريقة الجبرية $Min\ Z = 2x + 3y$ التي تحقق القيود

$$4x + 5y \leq 33$$
$$x + 4y \geq 11$$
$$2x - 3y \geq -11$$

بالإضافة إلي قيد عدم السالبية $x \geq 0 \ , \ y \geq 0$

الحل:

نحول المتباينات إلي معادلات كالآتي :

$$4x + 5y = 33 \quad (1)$$
$$x + 4y = 11 \quad (2)$$
$$2x - 3y = -11 \quad (3)$$

ونحل المعادلات الثلاثة السابقة مثني مثني نحصل علي نقط التقاطع (الأركان) بحل (1)،(2) نحصل علي النقطة (7,1) وكذلك المعادلتان (1)،(3) نحصل علي النقطة (2,5) بينما المستقيمان (2)،(3) يتقاطعان في النقطة (-1,3) وحيث أن قيمة x سالبة فتكون هذه النقطة لاتحقق شرط عدم السالبية لذا تهمل ونستبدلها بنقط تقاطع هذين المستقيمين مع محور الصادات (لماذا)وذلك بوضع $x=0$ في كلا منهما فنحصل علي النقاط $\left(0,\frac{11}{3}\right),\left(0,\frac{11}{4}\right)$ وبذلك تكون أركان مضلع منطقة السماحية هي النقاط الآتية :

$$A=(7,1)\quad ,B=(2,5)\quad ,C=\left(0,\frac{11}{3}\right)\quad ,D=\left(0,\frac{11}{4}\right)$$

ثم نعوض بهذه الأركان الأربعة في Z القيمة الصغري تكون هي المطلوبة

$$\therefore Z_A = 17\ ;\ Z_B = 19\ ;\ Z_C = 11\ ;\ Z_D = \frac{33}{4}$$

مما تقدم نلاحظ أن دالة الهدف متحققة عند نقطة D أي عندما $x = 0, y = \frac{11}{4}$

وقيمة النهاية الصغري هو $\left(8\frac{1}{4}\right)$.

ملاحظة: في حالة المسائل ذات البدائل المثلي نلاحظ أن قيمة دالة الهدف عند نقطتين من أركان المضلع المحدب متساوية وبذلك تكون البدائل المثلي هي كل نقاط الضلع الواصل بين هاتين النقطتين ويوضح ذلك المثال التالي .

مثال(7):

أوجد بالطريقة الجبرية $Max\ Z = 10x + 4y$

والتي تحقق المتباينات الآتية:

$$3x + 5y \le 15$$
$$5x + 2y \le 10$$
$$x \ge 0; y \ge 0$$

الحل: بحل مجموعة المعادلات

$$3x + 5y = 15$$
$$5x + 2y = 10$$
$$x = 0; y = 0$$

مثني مثني نحصل علي الأركان الآتية للمضلع منطقة الحلول المسموح بها وهي: $0 = (0,0); A = (2,0); B = \left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)\ ; C = (0,3)$

وبالتعويض لإيجاد قيمة دالة الهدف عند هذه الأركان نحصل علي:

$$Z_0 = 0\ \ ;\ \ Z_A = 20\ \ ;\ \ Z_B = 20\ \ ;\ \ Z_C = 12$$

يلاحظ أن أكبر لدالة الهدف Z عند كلا النقطتين A,B وبذلك يكون هناك بدائل مثلي علي المضلع أكمله وكما ذكرنا من قبل للحصول علي قيمة مثلي واحدة لابد من إضافة قيد آخر إلي مجموعة القيود في المسألة.

(ii) طريقة الحذف:

هذه الطريقة هي طريقة آخري من الطرق التحليلية لحل مسألة البرمجة الخطية وتلخص كالأتي:

1- تحول كل قيد إلي معادلة (متساوية) وذلك بإضافة متغير جديد في الطرف الأيسر للقيد وبذلك يظهر لدينا عدد من المتغيرات الجديدة مساويا لعدد القيود وجميعها دائما تحقق قيد عدم السالبية.

2- نوجد المجاهيل الأصلية بدلالة المجاهيل المضافة وذلك بحل المعادلات التي حصلنا عليها في الخطوة السابقة.

3- نعوض بنتائج الخطوة (2) في دالة الهدف فتتحول دالة الهدف إلي علاقة في المتغيرات الجديدة بدلا من الأصلية وتكون دائما القيم الصفرية لهذه المتغيرات هي المناسبة في كل حالات دالة الهدف مهما كانت نهاية عظمي أو صغري .

مثال(8): حل مسألة البرمجة الخطية الآتية بطريقة الحذف:

أ- $\text{Max } Z=x+2y$

ب- $\text{Max } Z=2x+y$

والتي تحقق القيود الآتية:

$$3x+y\le 53$$
$$3x+8y\le 172$$
$$5x+4y\le 100$$

مع قيد عدم السالبية $x\ge 0 \quad , \quad y\ge 0$

الحل:

نحول القيود إلي معادلات كالآتي:

(1) $3x+y=53-u$

(2) $3x+8y=172-v$

(3) $5x+4y=100-w$

بحل المعادلتين (2)،(3) نحصل علي x,y بدلالة v,w كالآتي:

$$x=4-\left(\frac{2w-v}{7}\right) \quad ,$$

$$y=20-\left(\frac{5v-3w}{28}\right)$$

وبالتعويض بهذه النتائج في دالة الهدف في الحالة الأولي نحصل علي

$$z = x + 2y = 44 - \left(\frac{6v + 2w}{28}\right)$$

ولكي تكون Z نهاية عظمي لابد أن يكون الكمية السالبة أصغر ما يمكن

و هذا يتحقق عندما $v=w=o$ وبذلك يكون

$$Max\ Z = 44 \quad at \quad x = 4, y = 20$$ عوّل

وأيضا بحل المعادلتين (3)،(1) نحصل أيضا علي الآتي :

$$x = 16 - \left(\frac{4u - w}{7}\right) \quad ,$$

$$y = 5 - \left(\frac{3w - 5u}{7}\right)$$

وبالتعويض بهذه النتائج أيضا في دالة الهدف السابقة نحصل علي

$$z = x + 2y = 26 - \left(\frac{5w - 6u}{7}\right)$$

وبالتالي لكي قيمة Z نهاية عظمي لابد أن يكون $u=w=0$ وبذلك تكون $Max\ Z=26$ عندما $y=5\ ,\ x=16$

يلاحظ انه بحل المعادلتين (1)،(2) للحصول علي x,y بدلالة u,v فإن

$$x = 12 - \frac{8u}{21} + \frac{v}{21}$$

$$y = 17 - \frac{v}{7} + \frac{u}{7}$$

ومعني ذلك أن قيم المتغيرات ستكون $y=17 \quad , \quad x=12$

ويتضح أنه رغم أن هذه القيم ربحا أكبر لو عوضنا في دالة الهدف الأولي وتعطي مقدارا و هو (46) وبمقارنة هذه النتيجة بما حصلنا عليه في الطريقة البيانية لنفس المثال نجد أنه أكبر بينما هذه النتائج لا تحقق قيد الألمونيوم ذلك لأن احتياج السلعة الأولي إلي خمس وحدات من الألمونيوم و الثانية إلي أربعة فيكون إجمالي المحتاج إليه و هو $5 \times 12 +$ $4 \times 17 = 128$

وحدة ألمونيوم بينما أقصي كمية موجودة منه هي مائة وحدة فقط .
لذا يعتبر هذا الحل الناتج من حل المعادلتين (1)،(2) مرفوض.
بمقارنة النتائج الثلاثة نلاحظ أن النهاية العظمي للدالة الأولي متحققة عندما *x=4,y=20* وقيمتها حينئذ هو (44).
وبالمثل يمكن التعويض بنتائج *x,y* في دالة الهدف الثانية وتحقيقها .
يمكن تطبيق طريقة الحذف إذا إحتوت المسألة علي أكثر من مجهولين كما هو واضح في المثال التالي :

مثال(9) حل مسألة البرمجة الخطية الآتية بطريقة الحذف

$$Min\ Z = x_1 + x_2 + 2x_3$$

تحت القيود الآتية :

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 9$$
$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1$$
$$6x_2 - 3x_1 - x_3 = 0$$

عدم السالبية وهو $x_i \geq 0 , i = 1,2,3$

الحل:
بفرض أن هناك قيدين تساوي وقيد واحد متباينة نحولها إلي متساوية كالآتي :

$$x_1 + x_2 + x_3 + u = 9 \quad i.e.\ x_1 + x_2 + x_3 = 9 - u$$

بحل المعادلات الثلاثة للحصول علي قيم x_1, x_2, x_3

بدلالة لما نحصل علي :

$$x_1 = \frac{1}{2}(13 - 3u); x_2 = \frac{1}{4}(13 - u); x_3 = \frac{3}{4}(1 - 2)$$

وبالتعويض بهذه النتائج في دالة الهدف تصبح علي النحو التالي

$$z = \frac{1}{4}(33 - u)$$

وبتطبيق شرط عدم السالبية نجد أن $-1 \leq u \leq \frac{13}{3}$

وحيث أن المطلوب أن تكون دالة الهدف في نهايتها الصغري هذا لايتحقق إلا إذا أخذت u أكبر قيمة لها وهي $\frac{13}{3}$ بالتعويض في z يكون

$$Min\ Z = \frac{43}{6} \quad at\ x_1 = 0, x_2 = \frac{13}{6}\ , x_3 = \frac{5}{2}$$

مثال(10):

حل مسألة البرمجة الخطية الآتية بطريقة الحذف

$$Max\ Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

تحت القيود الآتية:

$$x_1 + \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 \leq 200$$

$$x_3 \leq 25$$

$$x_2 + x_3 \leq 100$$

بالأضافة إلي قيد عدم السالبية وهو $x_i \geq 0\ ,\ i \in \{1,2,3\}$

الحل:

كالعادة نحول متباينات القيود إلي متساويات (معادلات)كالآتي:

$$x_1 + \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 = 200 - \mathrm{u}$$

$$x_3 = 25 - \omega$$

$$x_2 + x_3 = 100 - v$$

بحل هذه المعادلات الثلاثة للحصول علي x_1, x_2, x_3 بدلالة u,v,ω نحصل علي

$$x_1 = 100 - u + v$$

$$x_2 = 75 - v + \omega$$

$$x_3 = 25 - \omega$$

بالتعويض بهذه النتائج في دالة الهدف نأخذ الشكل

$$Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 325 - (u + v + \omega)$$

ولكي تكون دالة الهدف (الربح) نهاية عظمي يجب أن نأخذ المجاهيل $u + v + \omega$ أصغر قيمة لها وهي الصفر لها (i.e. $u=v=\omega=0$) . وبذلك نحصل علي أن أكبر قيمة ربح ممكنة هي 325 عندما $x_1 = 100$ ؛ $x_2 = 75$; $x_3 = 25$ أو أنه إذا ربي المزارع مائة دجاجة وخمسة وسبعين بطة وخمسة وعشرون ديك رومي يحقق بذلك أكبر ربح وقدره 325 جنيها .

مثال(11): لدينا المنطقة المضلعة التالية

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

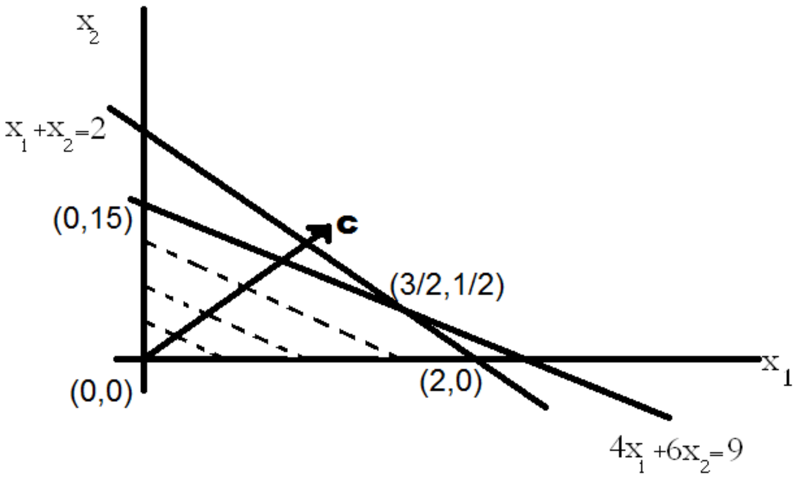
$$4x_1 + 6x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

أوجد النقاط الحدية .ثم أوجد الحل الأمثل بيانيا علما بأن دالة الهدف هي

$$Min\ Z = 2x_1 + 3x_2$$

هذا البرنامج الخطي يأخذ الشكل التالي :



إن المنطقة المضلعة هي المنطقة الواقعة بين المستقيمات الأربعة ، والمستقيم المتقطع يرمز إلي تزايد دالة الهدف ومن الواضح أنه مواز للمستقيم الممثل بالشرط $4x_1 + 6x_2 \leq 9$ وبالتالي فإن هناك عددا لا نهائيا من الحلول تقع علي القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $\left({}^{3}/_{2}, {}^{1}/_{2}\right)$ و $(0,1.5)$

لاحظ أن ميل المستقيم

لاحظ أن ميل المستقيم $4x_1 + 6x_2 = 9$ يساوي ميل دالة الهدف.

النظرية التالية من أهم النظريات في البرمجة الخطية :

نظرية (نظرية النقطة الحدية)

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي :

$$max(or\ min) \qquad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$s.t.$

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{array}\right\} \begin{array}{c}\le\\=\\\ge\end{array} \left\{\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array}\right. \qquad (3)$$

$$x_i \ge 0 \qquad\qquad i=1,\dots,n$$

إذا كانت المنطقة المسموح بها لهذا البرنامج الخطي محدودة ، عندئذ يكون الحل الأمثل موجودا عند نقطة حدية من هذه المنطقة .

إذا كانت المنطقة المسموح بها لهذا البرنامج الخطي غير محدودة ، عندئذ يكون الحل الأمثل (إن وجد) موجودا عند نقطة حدية من هذه المنطقة .

البرهان: (مقصور علي المنطقة المحدودة)

لنفترض أن $x_1, x_2, \dots, x_m$ هي النقاط الحدية للمنطقة المسموح K ، ولنفترض أن هذه النقاط قد رقمت بحيث إن :

$$f(x_1) \le f(x_i) \le f(x_m) \qquad i=1,\dots,m \qquad (4)$$

علما أن f هي دالة الهدف للبرنامج الخطي. لنفترض أن $x \in k$ نقطة إختيارية ،

عندئذ يمكن كتابتها كتركيب محدب علي النحو التالي :

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{ni}x_{ni} \qquad (5)$$

حيث a_i أعداد غير سالبة ، $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 1$.

إن:

$$f(x) = f(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m) \qquad (6)$$

$$= a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \cdots + a_m f(x_m)$$

وذلك لأن f دالة خطية، وبما أن $a_1 + \mathrm{a}_2 + \cdots + \mathrm{a}_\mathrm{m} = 1$ إذا:

$$f(x_1) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) f(x_1)$$

$$= a_1 f(x_1) + a_2 f(x_1) + \cdots + a_m f(x_1) \quad (7)$$

$$\leq a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \cdots + a_m f(x_m) = f(x)$$

كما أن:

$$f(x) = a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \cdots + a_m f(x_m)$$

$$\leq a_1 f(x_m) + a_2 f(x_m) + \cdots + a_m f(x_m) \qquad (8)$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) f(x_m)$$

$$= f(x_m)$$

وعلي هذا فإن :

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_m) \qquad (9)$$

لأية نقطة $x \in k$ ، مما يعني أن دالة الهدف f تأخذ قيمتها العظمي عند النقطة الحدية x_m وتأخذ قيمتها الصغرى عند النقطة الحدية x_1 و هذا يثبت النظرية.

لتطبيق هذه النظرية نأخذ المثال السابق .من الممكن الحصول علي الحل الأمثل بعد الحصول علي جميع النقاط الحدية في المنطقة المضلعة ، ومن ثم بتعويض هذه النقاط في دالة الهدف :

$$z_0 = -1 \times 0 - 3 \times 0 = 0$$

$$z_A = -1 \times 6 - 3 \times 0 = -6$$

$$z_B = -1 \times 4/3 - 3 \times 14/3 = -46/3$$

$$z_c = -1 \times 0 - 3 \times 4 = -12$$

من الواضح أن النقطة B تعطي أعلي قيمة لدالة الهدف .إن جميع الحلول المسموح بها تقع في منطقة محدبة ، في هذا المثال المنطقة محدودة ، وقد تكون في بعض الحالات غير محدودة وقد يكون الحل في هذه الحالة غير نهائي ، إن أي حل أمثلي لابد أن يكون عند إحدى النقاط الحدية.

في بعض الحالات قد يكون الحل الأمثل غير وحيد وذلك عندما يكون ميل دالة الهدف مساويا لميل أحد مستقيمات الشروط . أخيرا قد لا يوجد حل للبرنامج الخطي . وذلك عندما تكون منطقة الحلول المسموح بها خالية . كذلك من الممكن تطبيق النظرية علي المثال السابق ومن ثم حساب قيم النقاط الحدية ومن ثم بتعويضها في دالة الهدف .

الفصل الخامس: البرمجة غير الخطية

البرمجة غير الخطية بدون قيود في متغير واحد

إن الفكرة الأساسية في الطرق المستخدمة لإيجاد حل مسألة برمجة غير خطية بدون قيود في متغير واحد ، والتي تعتمد على التحليل العددي ، وهي أن نحسب تتابعات للقيمة المثلى المطلوبة (عظمى – صغرى) هذه التتابعات تتحسن متقاربةً نحو الحل الصحيح، ويستخدم في ذلك الخوارزمية التالية :

طريقة نيوتن لإيجاد جذر معادلة

$$f(x) = x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

حيث x_o معطاة

$$x_o = 1$$

$$x_1 = 1.5$$

$$x_2 = \cdots$$

.

.

.

.

الخوارزمية العامة لإيجاد القيمة المثلى لدالة

المسألة هي:

أوجد القيمة المثلى $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$ التي تحقق القيمة المثلى للدالة $f(X)$

1) نبدأ بقيمة(تخمين) للقيمة المثلى x_1 نضع $i = 1$.

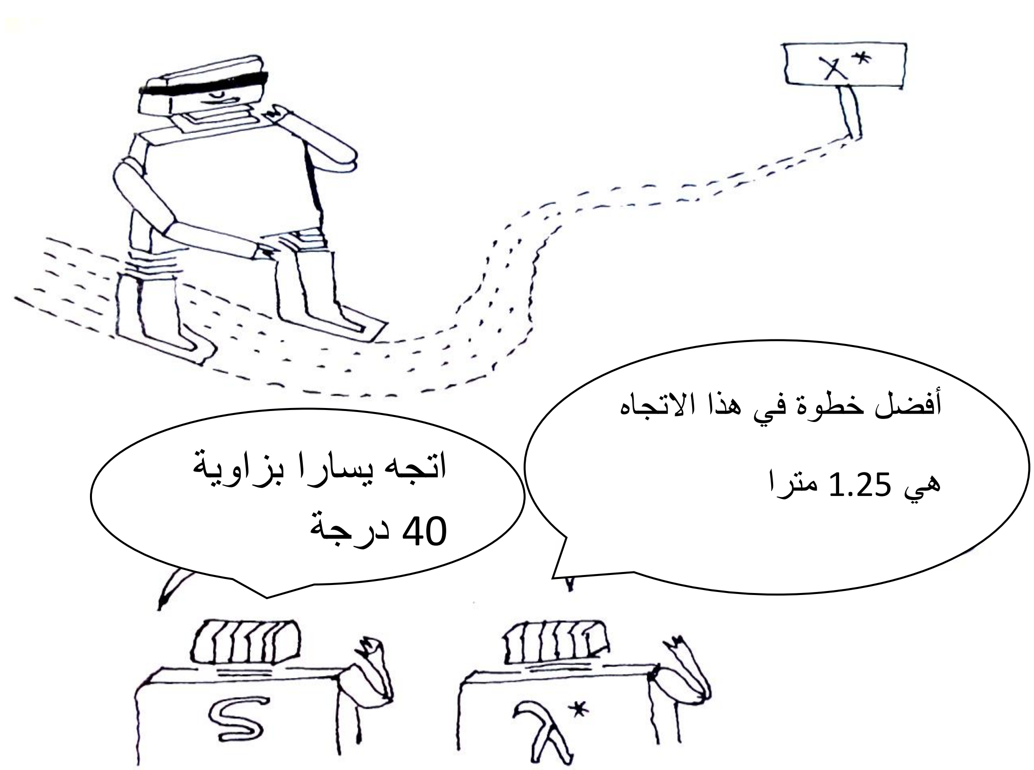
2) نوجد إيجاد مناسب نحو القيمة المثلىS_i .

3) نحدد الخطوة المناسبة ${\lambda^*}_i$ للتحرك بالاتجاه S_i نحو القيمة المثلى.

4) نوجد التقريب الجديد (التتابع) $x_{i+1} = x_i + {\lambda^*}_i S_i$.

5) نختبر ما إذا كانت x_{i+1} قيمة مُثلى, فإذا كان توقفنا .

6) نضع $i = i + 1$ ونكرر الخطوات 2-6 .



إن جزء (<u>البرمجة غير الخطية بدون قيود في متغير واحد</u>) يخدم الخطوة رقم (3) من الخوارزمية لإيجاد طول الخطوة التي يجب أن نتحركها من X_1 في الاتجاه S_1 لنصل إلى X_2 التي هي أقرب من سابقتها للنقطة المثلى

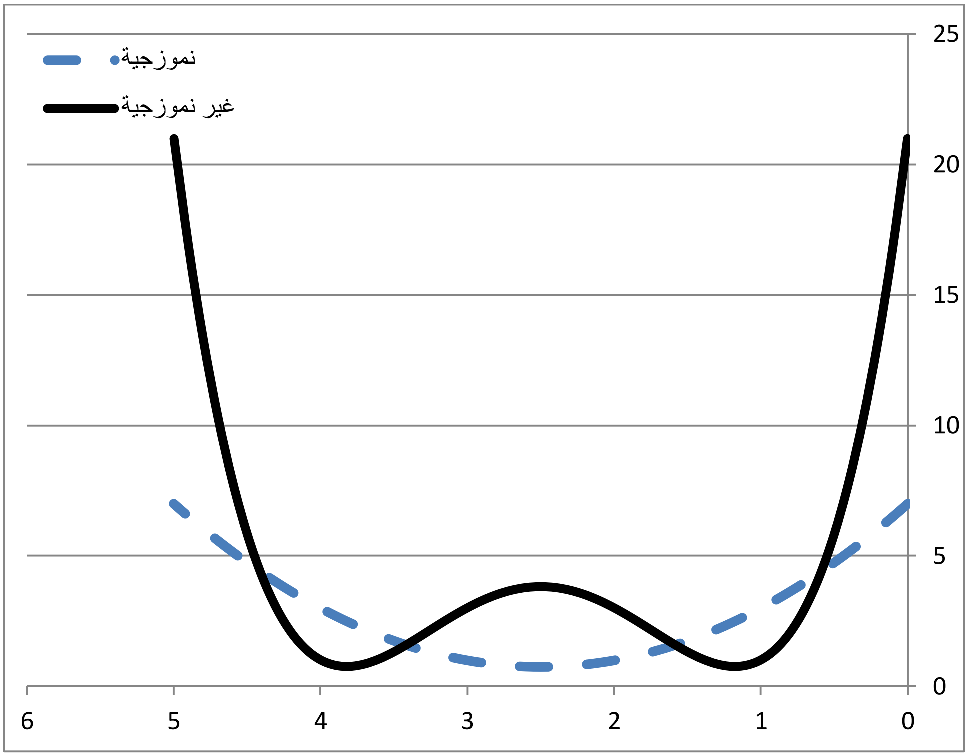
الطرق المستخدمة حل هذه المسألة تصنف كالآتي :

طرق الأمثلية في متغير واحد

- طرق الاستكمال
  - تحتاج الى مشتقات
    - -الطريقة التكعبية
    - -طريقة الجذر المباشر
  - لا تحتاج الى مشتقات
    - -الطريقة التربيعية
- طرق الحذف
  - (i)البحث غير المحدود
  - (ii) البحث الهادف
  - (iii) طريقة فيبونكسي
  - (iv) طريقة القسم الذهبي

<u>تعريف</u>: الدالة النموذجية _ unimodal

هي دالة لها نقطة مثلى وحيدة في نطاق معين.



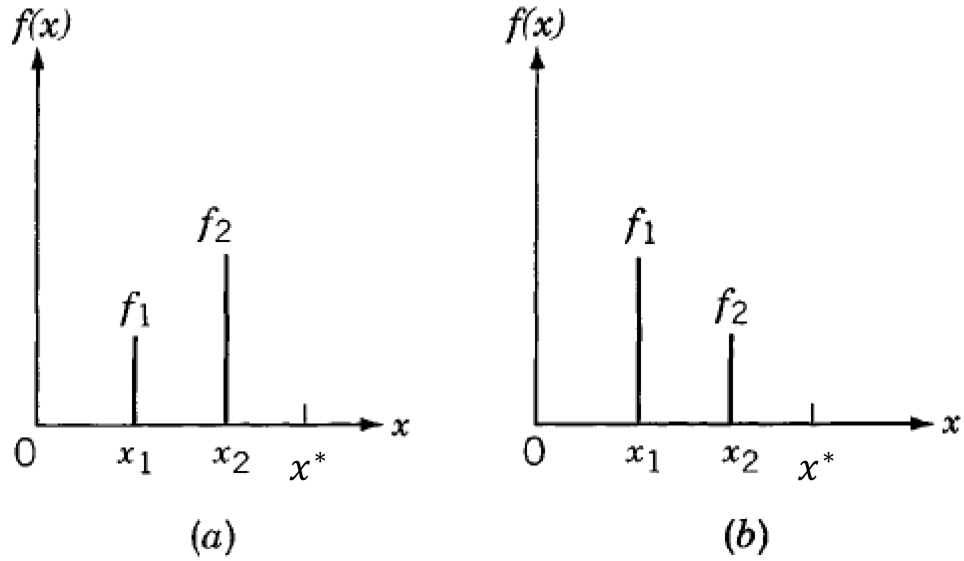
تكون الدالة نموذجية إذا تحقق :

$$a)\ x_2 < x^* \quad \rightarrow \quad f(x_2) < f(x_1)$$

أو

$$b)\ x_1 > x^* \quad \rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

حيث x^* هي القيمة المثلى و $x_1 < x_2$.



طرق الحذف

أولاً : طريقة البحث المباشر

سوف ندرس هنا هذه الطريقة مع استخدام خطوة ثابتة. في هذه الحالة تكون الخوارزمية كالاتي :

خوارزمية طريقة البحث المباشر

المسألة هي : إيجاد القيمة المثلى x^* لدالة نموذجية $f(x)$ في متغير واحد.

1) نبدأ بتخمين x_1 .

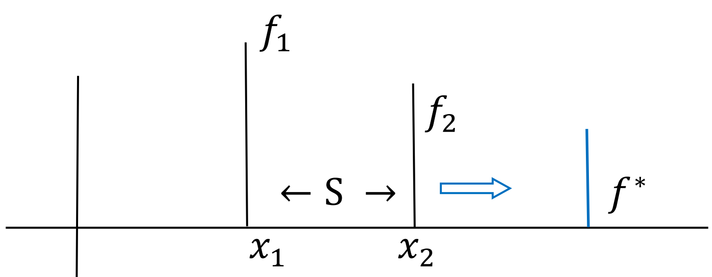
2) نحسب $f_1 = f(x_1)$.

3) نفرض قيمة للخطوة S ونحسب $x_2 = x_1 + S$.

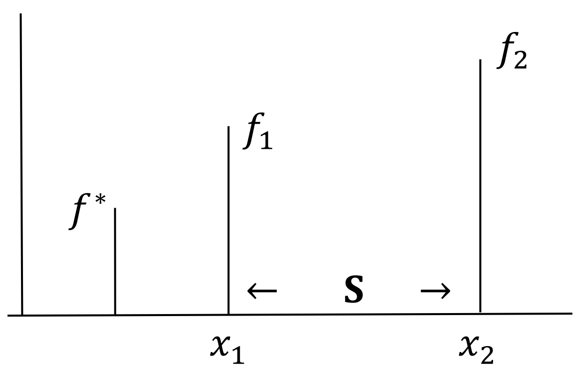
4) نوجد $f_2 = f(x_2)$.

5) نفرض أن المسألة القيمة المثلى فيها صغرى.

6) نفرض أن $f_2 < f_1$ .. فتكون f^* على اليمين و نحسب القيم التالية $x_{i+1} = x_i + S$



7) إذا كانت $f_2 > f_1$ .. فتكون f^* على اليسار نحسب القيم التالية $x_{i+1} = x_i - S$



مثال:

استخدم طريقة البحث المباشر لإيجاد القيمة العظمى للدالة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & x \leq 2 \\ 3 - x, & x > 2 \end{cases}$$

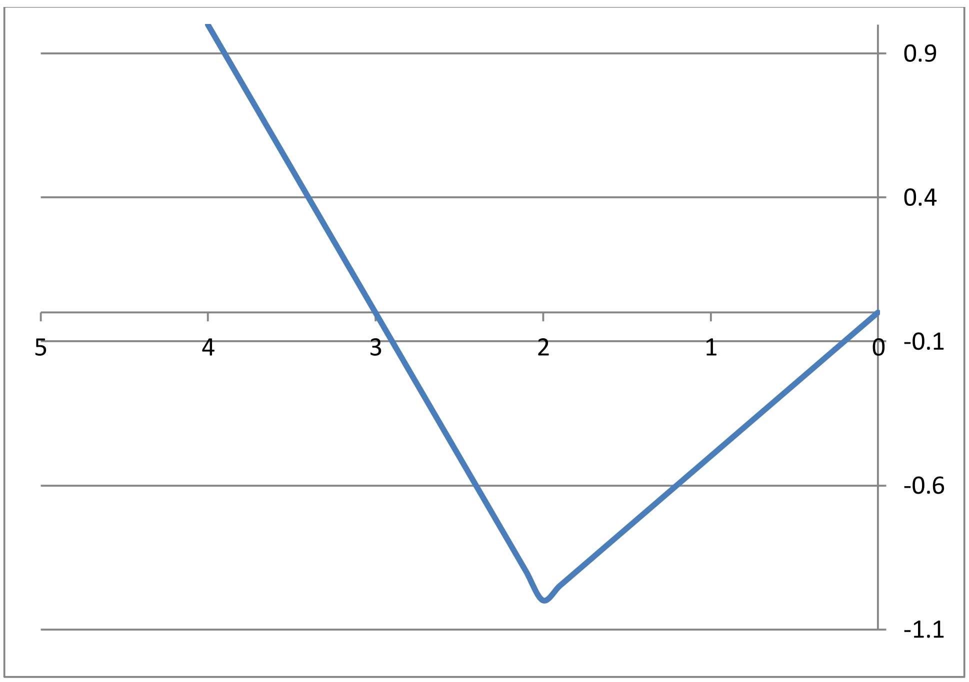
بدءا من $x_1 = 0$ و خطوة $s = 0.4$

الحل: هذه المسألة تكافئ:

أوجد النهاية الصغرى للدالة الخطية

$$f(x)=\begin{cases}-0.5x; & x\le 2\\ x-3; & x>2\end{cases}$$

باستخدام طريقة البحث المباشر بدءا من $x_1=0$ و خطوة $s=0.4$.

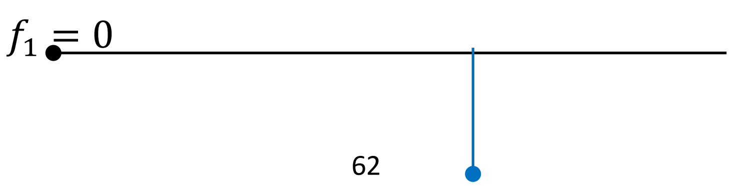


<u>الحل</u> $f(x_1)=f(0)=0$, $x_1=0$ نختار الخطوة بين كل نقطتين $S=0.4$

$$x_2=x_1+S=0.4$$

$$f(x_2)=f(0.4)=-\frac{1}{2}(0.4)=-0.2$$

من الرسم



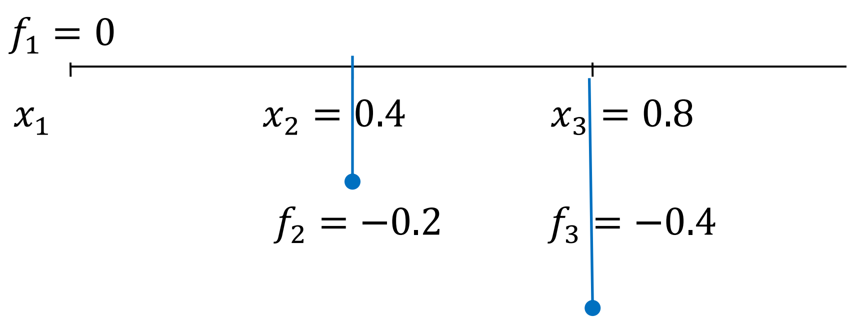
$x_1 = 0$ $\qquad$ $x_2 = 0.4$

$f_2 = -0.2$

يتضح أن اتجاه صفر الدالة ناحية اليمين أي نضيف خطوة على x_2 فنحصل على x_3

$$x_3 = x_2 + S = 0.4 + 0.4 = 0.8$$

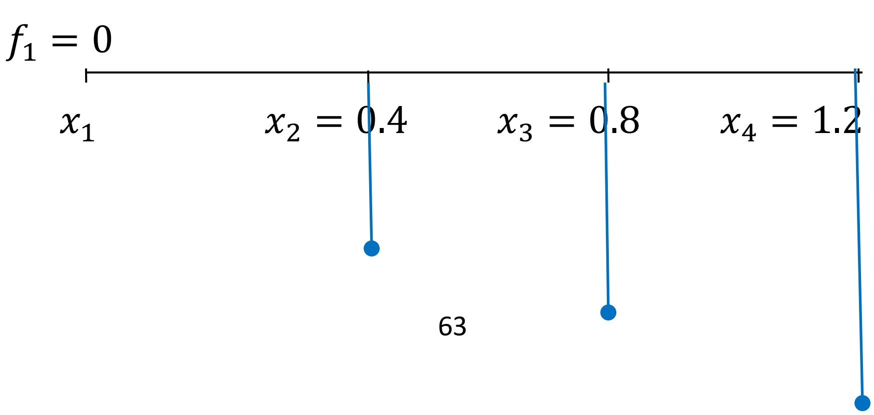
$$f(x_3) = f(0.8) = -\frac{1}{2}(0.8) = -0.4$$



اتجاه الصغرى هو ذات الاتجاه نضيف S

$$x_4 = x_3 + S = 0.8 + 0.4 = 1.2$$

$$f(x_4) = f(1.2) = -\frac{1}{2}(1.2) = 0.6$$



$$f_2 = -0.2 \qquad f_3 = -0.4 \qquad f_4 = -0.6$$

إتجاه الصفر يشير إلى قيمة زيادة S

$$x_5 = x_4 + S = 1.2 + 0.4 = 1.6$$

$$f(x_5) = f(1.6) = -\frac{1}{2}(1.6) = -0.8$$

اتجاه الصفر يشير الى استمرار زيادة S

$$x_6 = x_5 + S = 1.6 + 0.4 = 2.0$$

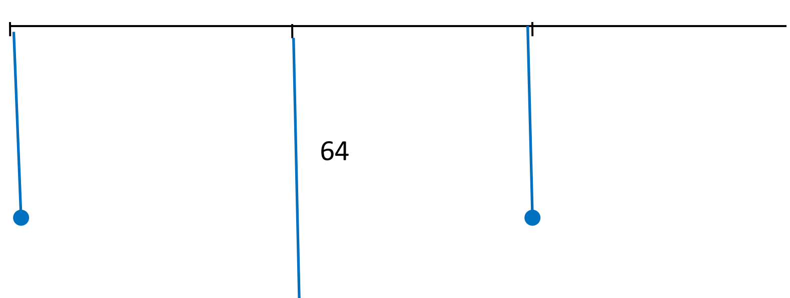
$$f(x_6) = f(2.0) = -\frac{1}{2}(2.0) = -1$$

نضيف S

$$x_7 = x_6 + S = 2.0 + 0.4 = 2.4$$

$$f(x_7) = f(2.4) = 2.4 - 3 = -0.6$$

انعكاس اتجاه تزايد الدالة



$x_5 = 1.6 \qquad x_6 = 2.0 \qquad x_7 = -0.6$

$f_5 = -0.8 \qquad f_6 = -1 \qquad f_7 = -0.6$

$\therefore$ $x_6 = 2.0$ هي القيمة الصغرى للدالة وقيمة الدالة عندها $f(2.0) = -1$

تمرين:

استخدم طريقة البحث المباشر لإيجاد القيمة الصغرى للدوال التالية آخذا في الاعتبار نقطة البدء والخطوة المعطى. قم بأجراء 4 خطوات في كل مسألة:

(a) $f(x) = x(1 - \frac{3}{2}), x_1 = 0 , s = 0.2$

(b) $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5 \; x_1 = 0.5 , s = 0.2$.

(c) $f(x) = 0.65 - \frac{0.75}{1+x^2} - 0.65x \, tan^{-1} \frac{1}{x} \, x_1 = 1 , s = 0.15$.

طريقة فيبونكسي *Fibonacci*:

أعداد فيبونكسي توصف المعادلة

$f_0 = f_1 = 1$ حيث $f_{\mathrm{n}} = f_{\mathrm{n}-1} + f_{\mathrm{n}-2}, n = 2,3,4, \dots$

وبالتالي تكون الأعداد الأولى من هذه المتوالية كالتالي 1,1,2,3,5,8,13,21

خوارزمية طريقة فيبونكسي

تتحدد خطوات طريقة فيبونكسي فيما يلي:

1) نفرض أن L_{o} هو النطاق الابتدائي لمنطقة الحل $L_o = [a, b]$

2) نحدد n عدد الخطوات

3) نعرف $L^* = \frac{f_{\mathrm{n}-2}}{f_{\mathrm{n}}} \mathrm{L_o}$

4) نضع نقاط الاختبار كالتالي $x_1 = a + L^*, x_2 = b - L^*$

5) نحذف جزءًا من النطاق إعتمادًا على خاصية نموذجية الدالة أي وجود نقطة صغرى واحدة داخل النطاق.

6) نحدد النطاق الجديد و ننقص n بمقدار 1ونكرر الخطوات 5-4 حتى $n=2$

مثال :

أوجد القيمة الصغرى للدالة $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & x \le 2 \\ x - 3, & x > 2 \end{cases}$

في النطاق [0,3] باستخدام طريقة فيبونكسي مستخدما $n=6$

الحل:

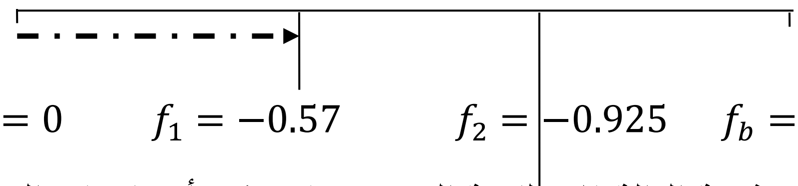
حيث أن أعداد فيبونكسي هي1,1,2,3,5,8,13,21 $f_0 = f_1 = 1,$ وأن $n = 6$ فإن

$$L^* = \frac{f_{n-2}}{f_n} L_o = \frac{f_4}{f_6}(3-0) = \frac{5}{13}(3) = 1.15$$

$$x_1 = a + L^* = 0 + 1.15 = 1.15\,,$$

$$x_2 = b - L^* = 3 - 1.15 = 1.85$$

$a = 0 \qquad x_1 = 1.15 \qquad x_2 = 1.85 \qquad b = 3$



$f_a = 0 \qquad f_1 = -0.57 \qquad f_2 = -0.925 \qquad f_b = 0$

بناءًا على نموذجية الدالة فإن القيمة الصغرى لا يمكن أن تقع في المنطقة $[a, x_1]$ ويحتمل وجودها في المنطقة $[x_1, b]$ $\therefore$ نحذف المنطقة $[a, x_1]$ فيصبح النطاق الجديد

$$[a = 1.15, b = 3]$$

الآن من جديد، أعداد فيبونكسي هي $1,1,2,3,5,8,13,21$ وأن $f_0 = f_1 = 1,$ فإن $n = 5$

$$L^* = \frac{f_{n-2}}{f_n} L_o = \frac{3}{8}(3 - 1.15) = \frac{3}{8}(1.85) = 0.694$$

$$x_1 = a + L^* = 1.15 + 0.694 = 1.84\,,$$

$$x_2 = b - L^* = 3 - 0.694 = 2.31$$

$a = 1.15$ $\quad x_1 = 1.84$ $\quad x_2 = 2.31$ $\quad b = 3$

$f_a = -058$ $\quad f_1 = -0.92$ $\quad f_2 = -0.69$ $\quad f_b = 0$

بناءًا على نموذجية الدالة فإن القيمة الصغرى لا يمكن أن تقع في المنطقة $[x_2, b]$ نحذف المنطقة $[x_2, b]$ فيصبح النطاق الجديد

$$[a = 1.15, b = x_2 = 2.31]$$

$$f_0 = f_1 = 1, \;\; 1,1,2,3,5,8,13,21$$

$n = 4$

$$L^* = \frac{f_{\mathrm{n}-2}}{f_{\mathrm{n}}} \mathrm{L_o} = \frac{2}{5}(2.31 - 1.15) = \frac{2}{5}(1.16) = 0.464$$

$$x_1 = a + L^* = 1.15 + 0.464 = 1.614\,,$$

$$x_2 = b - L^* = 2.31 - 0.464 = 1.846$$

$a = 1.15 \qquad x_1 = 1.614 \qquad x_2 = 1.846 \qquad b = 2.31$

$f_a = -0.57 \qquad f_1 = -0.807 \qquad f_2 = -0.923 \qquad f_b = -0.69$

بناءًا على نموذجية الدالة فإن القيمة الصغرى لا يمكن أن تقع في المنطقة $[a, x_1]$

$$[a = x_1 = 1.614, b = 2.31]$$

$n = 3$

$$L^* = \frac{f_{n-2}}{f_n} L_o = \frac{1}{3}(2.31 - 1.614) = \frac{1}{3}(0.696) = 0.232$$

$$x_1 = a + L^* = 1.614 + 0.232 = 1.846\,,$$

$$x_2 = b - L^* = 2.31 - 0.232 = 2.078$$

$a = 1.614 \qquad x_1 = 1.846 \qquad x_2 = 2.078 \qquad b = 2.31$

$f_a = -0.807 \qquad f_1 = -0.923 \qquad f_2 = -0.922 \qquad f_b = -0.69$

بناءًا على نموذجية الدالة فإن القيمة الصغرى لا يمكن أن تقع في المنطقة $[a, x_1]$
نحذف المنطقة $[a, x_1]$ فيصبح النطاق الجديد

$$[a = 1.846 \ , b = x_2 = 2.31]$$

$n = 2$

$$L^* = \frac{f_{n-2}}{f_n} L_o = \frac{1}{2}(2.31 - 1.846) = \frac{1}{2}(0.464) = 0.232$$

$x_1 = a + L^* = 1.846 + 0.232 = 2.078 \,,$

$x_2 = b - L^* = 2.31 - 0.232 = 2.078$

Then this is the minimum point

$x_2 = x_1 = 2.078$

تمرين:

استخدم طريقة فيبونكسي لإيجاد القيمة الصغرى للدوال التالية آخذا في الاعتبار النطاق وعدد الخطوات المعطى.

(d) $f(x) = x(1 - \frac{3}{2})$, [0,1],n=8.

(e) $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5$ [0,3],n=7.

(f) $f(x) = 0.65 - \frac{0.75}{1+x^2} - 0.65x \, tan^{-1}\frac{1}{x}$ [0,3],n=5.

طريقة القسم الذهبي

وتشبه هذه الطريقة طريقة فيبونكسي ويكمن الاختلاف بينهما في أن عدد الخطوات لابد أن يتم تحديده مسبقا والذي يعتمد عليه طول الجزء المتقتطع من

نطاق وجدود القيمة الصغرى في طريقة فيبونكسي بينما في طريقة القسم الذهبي لا نحتاج لتحديد عددالخطوات مسبقا و طول الجزء المتقتطع هو نسبة ثابته من طول الفترة في الناتج من الخطوة السابقة.

مثال:

استنتج أفضل قيمة للجزء المحذوف من النطاق في طريقة فيبونكسي إذا أخذنا في الاعتبار إجراء عدد كبير جدا من التتابعات.

الحل:

$f_0 = f_1 = 1, \quad 1,1,2,3,5,8,13,21$

$$L^* = \frac{f_{\mathrm{n}-2}}{f_{\mathrm{n}}} \mathrm{L_o} = \frac{f_4}{f_6}(3-0) = \frac{5}{13}(3) = 1.15$$

n	3	4	5	6	7
$\frac{f_{\mathrm{n}-2}}{f_{\mathrm{n}}}$	$\frac{f_1}{f_3} = \frac{1}{3} = 0.33$	$\frac{f_2}{f_4} = \frac{2}{5} = 0.4$	$\frac{3}{8} = 0.37$	$\frac{5}{13} = 0.38$	$\frac{8}{21} = 0.38$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{\mathrm{n}-2}}{f_{\mathrm{n}}} = 0.38$$

من المثال السابق يتضح أن اختيار الجزء المحذوف من النطاق في طريقة فيبونكسي ليكون 0.38 من النطاق الحالي هو أفضل اختيار وأنه بالإضافة إلى أنه سوف يوفر في الحسابات ، فإنه سوف يحسن النتائج ، ويسرع الحصول على القيمة المثلى.

ومن هنا جاءت فكرة طريقة القسم الذهبي

خوارزمية طريقة القسم الذهبي

تتشابه خطوات طريقة القسم الذهبي مع طريقة فيبونكسي والاختلاف الوحيد هو أن الجزء المحذوف من النطاق ثابت و تكونالخطوات كالتالي:

1) نفرض أن L_o هو النطاق الابتدائي لمنطقة الحل $L_o = [a, b]$

2) نحدد n عدد الخطوات

3) نعرف

$$L^* = 0.382\mathrm{L_o}$$

4) نضع نقاط الاختبار كالتالي $x_1 = a + L^*\ , x_2 = b - L^*$

5) نحذف جزءًا من النطاق إعتمادًا على خاصية نموذجية الدالة أي وجود نقطة صغرى واحدة داخل النطاق.

6) نحدد النطاق الجديد و ننقص n بمقدار 1ونكرر الخطوات 5-4 حتى n=2

مثال :

أوجد القيمة الصغرى للدالة $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & x \le 2 \\ x-3, & x > 2 \end{cases}$

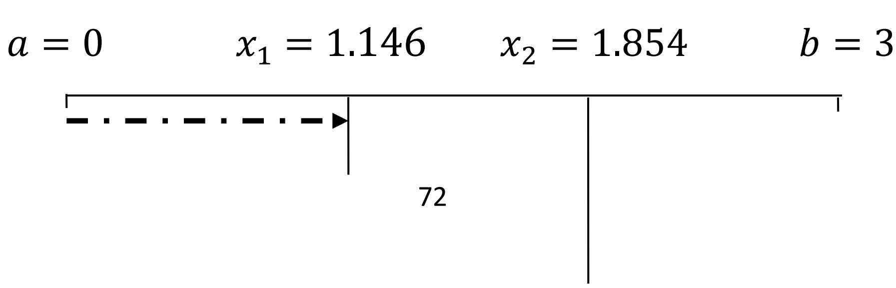
في النطاق [0,3] باستخدام طريقة القسم الذهبي حتى يصبح الجزء المتبقي من النطاق أقل من 0.1

الحل:

$$L^* = 0.382\mathrm{L_o} = 0.382(3) = 1.146$$

$$x_1 = a + L^* = 0 + 1.146 = 1.146\,,$$

$$x_2 = b - L^* = 3 - 1.146 = 1.854$$



$f_a = 0 \qquad f_1 = -0.573 \qquad f_2 = -0.9252 \quad f_b = 0$

بناءًا على نموذجية الدالة فإن القيمة الصغرى لا يمكن أن تقع في المنطقة $[a, x_1]$ ويحتمل وجودها في المنطقة$[x_1, b]$ ∴ نحذف المنطقة $[a, x_1]$ فيصبح النطاق الجديد

$$[a = 1.146 \ , b = 3]$$

$$L^* = 0.382\mathrm{L_o} = 0.382(3 - 1.146) = 0.382(1.854) = 0.708$$

$x_1 = a + L^* = 1.146 + 0.708 = 1.854\,,$

$x_2 = b - L^* = 3 - 0.708 = 2.292$

$a = 1.146 \qquad x_1 = 1.854 \quad x_2 = 2.292 \qquad\qquad b = 3$

$f_a = -058 \qquad f_1 = -0.927 \qquad f_2 = -0.708 \qquad f_b = 0$

بناءًا على نموذجية الدالة فإن القيمة الصغرى لا يمكن أن تقع في المنطقة $[x_2, b]$ ويحتمل وجودها في باقي النطاق إذن حذف المنطقة $[x_2, b]$ فيصبح النطاق الجديد

$$[a = 1.146\,, b = x_2 = 2.292]$$

$$L^* = 0.382\mathrm{L_o} = 0.382(2.292 - 1.146) = 0.382(1.146) = 0.437$$

$x_1 = a + L^* = 1.146 + 0.437 = 1.583\,,$

$x_2 = b - L^* = 2.292 - 0.437 = 1.855$

$a = 1.146 \qquad x_1 = 1.583 \quad x_2 = 1.855 \qquad b = 2.292$

$f_a = -0.573 \quad f_1 = -0.7915 \quad f_2 = -0.923 \quad f_b = -0.708$

بناءًا على نموذجية الدالة فإن القيمة الصغرى لا يمكن أن تقع في المنطقة $[a, x_1]$ وهي التي سوف نحذفها. ويكون النطاق الجديد:

$$[a = x_1 = 1.583, b = 2.292\,]$$

$$L^* = 0.382\mathrm{L_o} = 0.382(2.292 - 1.583) = 0.382(0.709)$$
$$= 0.271$$

$x_1 = a + L^* = 1.583 + 0.271 = 1.854\,,$

$x_2 = b - L^* = 2.292 - 0.271 = 2.021$

$a = 1.583 \qquad x_1 = 1.854 \quad x_2 = 2.021 \qquad b = 2.292$

$f_a = -0.7915 \quad f_1 = -0.927 \quad f_2 = -0.979 \quad f_b = -0.708$

بناءًا على نموذجية الدالة فإن القيمة الصغرى لا يمكن أن تقع في المنطقة $[a, x_1]$ وهي التي سوف نحذفها. ويكون النطاق الجديد:

$$[a = x_1 = 1.854, b = 2.292\,]$$

$$L^* = 0.382\mathrm{L_o} = 0.382(2.292 - 1.854) = 0.382(0.438)$$
$$= 0.167$$

$$x_1 = a + L^* = 1.854 + 0.167 = 2.021\,,$$

$$x_2 = b - L^* = 2.292 - 0.167 = 2.125$$

$a = 1.854$ $\quad x_1 = 2.021$ $\quad x_2 = 2.125$ $\quad b = 2.292$

$f_a = -0.927$ $\quad f_1 = -0.979$ $\quad f_2 = -0.875$ $\quad f_b = -0.708$

بناءًا على نموذجية الدالة فإن القيمة الصغرى لا يمكن أن تقع في المنطقة $[x_2, b]$ وهي التي سوف نحذفها. ويكون النطاق الجديد:

$$[a = x_1 = 1.854, b = 2.125\,]$$

$$L^* = 0.382\mathrm{L_o} = 0.382(2.292 - 2.125\,) = 0.382(0.176)$$
$$= 0.064$$

وحيث أن الجزء المقطوع من النطاق يقل عن 0.1

وطبقا لقيم الدالة عند

a, x_1, x_2, b

وهي على الترتيب

$f_a = -0.927$ $\quad f_1 = -0.979$ $\quad f_2 = -0.875$ $\quad f_b = -0.708$

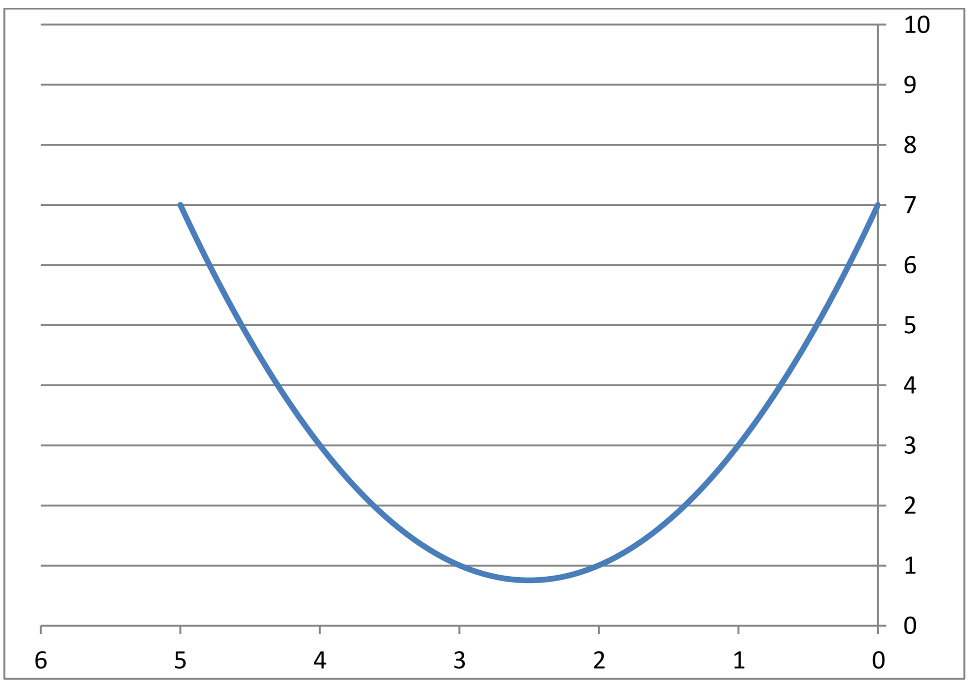
فإن القيمة الصغري هي $f_1 = -0.979$ عند $x_1 = 2.021$

تمرين:

اوجد القيمة الصغرى للدالة

$$f(x) = x^2 - 5x + 7$$

في النطاق $[0,5]$ باستخدام طريقة القسم الذهبي. قم بعمل خطوات حتى تصل لدقة رقم عشري واحد.



الحل:متروك للطالب.

تمرين:

استخدم طريقة القسم الذهبي لإيجاد القيمة الصغرى للدوال التالية آخذا في الاعتبار النطاق المعطى. قم بأجراء عدد الخطوات المبين في كل مسألة:

(a) $f(x) = x(1 - \frac{3}{2}), [0,1].$

(b) $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5\ [0,3].$

(c) $f(x) = 0.65 - \frac{0.75}{1+x^2} - 0.65x\ tan^{-1}\frac{1}{x}\ [0,3].$

طريقة نيوتن(الجذر المباشر)

الخوارزمية:

1- نحدد قيمة ابتدائية (تخمين) x_0.

2- نضع $k = 1$.

3- نحسب $f(x_k), f'(x_k)$.

4- نحسب

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

5- نختبر شرط التوقف

أ- الوصول إلى عدد N محدد سلفا من التتابعات

ب-الوصول إلى قيمة صغيرة مناسبة للدالة $f(x_k) \leq \varepsilon_1$

ت-الوصول إلى قيمة صغيرة مناسبة لمشتقة الدالة $f'(x_k) \leq \varepsilon_2$

6- عند عدم تحقق شرط التوقف نضع $k = k + 1$ ثم نذهب إلى الخطوة 4

مثال :

أوجد القيمة الصغرى للدالة $f(x) = x^2 - 6x + 9\ [0,3].$

بدءا من $x_0 = 2$ باستخدام طريقة طريقة نيوتن(الجذر المباشر)

حتى دقة رقمين عشريين

الحل

مشتقة الدالة

$$f'(x) = 2x - 6$$

$$x_0 = 2$$

$$f(x_0) = 2^2 - 6(2) + 9 = 1$$
$$f'(x_0) = 2(2) - 6 = -2$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \left(\frac{1}{-2}\right) = 2.5$$

- نختبر شرط التوقف

$$f(x_1) = 2.5^2 - 6(2.5) + 9 = 0.25$$
$$f'(x_1) = 2(2.5) - 6 = -1$$

وهوما يزال كبيرا.

نذهب إلى الخطوة 4

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.5 - \left(\frac{0.25}{-1}\right) = 2.75$$

- نختبر شرط التوقف

$$f(x_2) = 2.75^2 - 6(2.75) + 9 = 0.0625$$
$$f'(x_2) = 2(2.75) - 6 = -0.5$$

وقد وصلت الدالة لدقة رقم عشري واحد وهو غير كاف.

نذهب إلى الخطوة 4

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2.75 - \left(\frac{0.0625}{-0.5}\right) = 2.875$$

- نختبر شرط التوقف

$$f(x_3) = 2.875^2 - 6(2.875) + 9 = 0.0156$$
$$f'(x_3) = 2(2.875) - 6 = -0.25$$

واضح تصاغر الدالة رغم بقائها لدقة رقم عشري واحد وهو غير كاف.

نذهب إلى الخطوة 4

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 2.875 - \left(\frac{0.0165}{-0.25}\right) = 2.9$$

- نختبر شرط التوقف

$$f(x_4) = 2.9^2 - 6(2.9) + 9 = 0.01$$
$$f'(x_3) = 2(2.9) - 6 = -0.2$$

واضح هنا أن الخطوة التالية سوف تصل إلى الدقة المطلوبة
وهو ما نتركه للطالب.

الفصل السادس
البرمجة الغير خطية عديدة المتغيرات

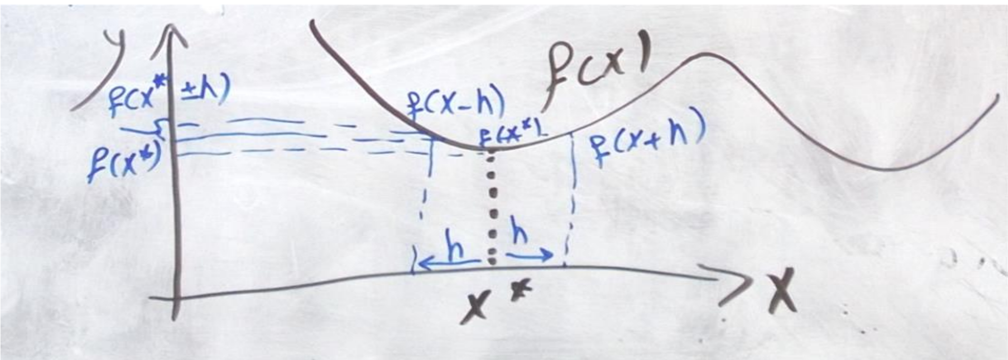
أساليب الأمثلة التقليدية

أولا: الأمثلية ذات المتغير الواحد

تعريف :

يقال لدالة ذات متغير واحد $f(x)$ أن لها نقطة صغري محلية عند $x = x^*$ إذا كان

$f(x^*) \leq f(x^* + h)$ لكل قيمة صغيرة h موجبة أو سالبة



تعريف :

يقال للدالة أن لها نقطة صغري عامة إذا كان $f(x^*) \leq f(x)$ لكل x .

تعريف :

مسألة الأمثلية ذات المتغير الواحد هي التي تلك نحاول فيها إيجاد القيمة $x = x^*$ لها داخل النطاق $[a, b]$ بحيث x^* تكون هي القيمة الصغرى للدالة $f(x)$.

نظرية (الشرط الضروري) :

يكون للدالة $f(x)$ المعرفة داخل النطاق $a \leq x \leq b$ قيمة صغري محلية عند $x = x^*$ إذا كانت $f(x)$ موجودة ومحدودة عند $x = x^*$ وإن $f'(x^*) = 0$

نظرية (الشرط الكافي) :

نفرض أن

$$f'(x^*) = 0 \ , f''(x^*) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x^*) = 0$$

ولكن

$$f^{(n)}(x^*) \neq 0$$

فإن $f(x^*)$ تكون

أ – قيمة صغري للدالة $f(x)$ إذا كان $f^{(n)}(x^*) > 0$ و n زوجية

ب – قيمة عظمي للدالة $f(x)$ إذا كان $f^{(n)}(x^*) < 0$ و n زوجية

ج – لا عظمي ولا صغري إذا كانت n فردية .

مثال :

أوجد القيم العظمي و الصغرى للدالة

$$f(x) = 12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 5$$

وذلك باستخدام الشرط الضروري و الكافي

الحل :

$$f'(x) = 60x^4 - 180x^3 + 120x^2$$
$$60[x^4 - 3x^3 + 2x^2]$$
$$60x^2[x^2 - 3x + 2]$$
$$60x^2(x-2)(x-1) = 0$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0 \ , \ 1 \ , 2$$

$$f''(x) = 60[4x^3 - 9x^2 + 4x]$$

عند $x^* = 0$ $\quad f''(x^*) = 0$

وبالتالي وطبقا للنظرية نحسب المشتقة التالية

$$f'''(x) = 60[12x^2 - 18x + 4]$$
$$f'''(x^*) = 60 \ (4) \neq 0$$

$\therefore \ x^* = 0$ هي نقطة لا عظمى ولا صغرى

عند $x^* = 1$ تكون $f''(x^*) = -60 < 0$ $\therefore$ هذه النقطة عظمي

عند $x^* = 2$ تكون $f''(x^*) = 240 > 0$ $\therefore$ هذه النقطة صغرى .

الأمثلية عديدة المتغيرات بدون شروط

سوف ندرس في هذا القسم الشرط الضروري والكافي لوجود قيمة صغري لدالة عديدة المتغيرات وذلك في حالة عدم وجود شروط

صياغة مسألة الأمثلية عديدة المتغيرات بدون شروط

أوجد قيمة

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

والتي تحقق القيمة الصغرى للدالة $f(X)$.

تعريف المشتقة الكائية

إذا كانت جميع المشتقات الجزئية للدالة f موجودة ومتصلة من الرتبة $k \geq 1$ عند النقطة x^* فإن كثيرة الحدود

$$d^k f(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \dots \sum_{l=1}^{n} \underset{k \text{ times}}{h_i h_j \dots h_l} \frac{\partial^k f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j \dots \partial x_l}$$

تسمى المشتقة الكائية ذات الرتبة k للدالة f عند x^* لاحظ أنه يوجد k تجميعا وواحدة h_i ملحقة بكل مجموع .

وعلي سبيل المثال فإنة إذا كانت $k = 2$ و $n = 3$

$$d^2 f(x^*) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} h_i h_j \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j}$$

i=1,j=1 i=2,j=2 i=3, j=3

$$= h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X^*) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(X^*) + h_3^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(X^*)$$

i=1, j=2 i=2, j=1 i=2, j=3 /i=3, j=2

$$+2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(X^*) + 2h_2 h_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(X^*)$$

i=1,j=3 / i=3, j=1

$$+2h_1h_3\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(X^*)$$

متسلسلة تيلور للدالة $f(X)$ بالقرب من النقطة X^* هي

$$f(X) = f(X^*) + df(X^*) + \frac{1}{2!}d^2f(X^*) + \frac{1}{3!}d^3f(X^*)$$
$$+ \cdots + \frac{1}{N!}d^Nf(X^*) + R_N(X^*,h)$$

حيث

$$R_N(X^*,h) = \frac{1}{(N+1)!}d^{N+1}f(X^* + \theta h)$$

Where $\quad 0 < \theta < 1 \quad and \quad h = X - X^*$

مثال :

أوجد متسلسلة تيلور من الرتبة الثانية للدالة

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_2^2x_3 + x_1e^{x_3}$$

وذلك بالقرب من

$$X^* = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

الحل : واجب ، و نعرض الحل باختصار

Solution The second-order Taylor's series approximation of function f about point X^* is given by

$$f(X) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + df\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}d^2f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Where

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = e^{-2}$$

$$df\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + h_3\frac{\partial f}{\partial x_3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= [h_1 e^{x3} + h_2(2x_2x_3) + h_3x_2^2 + h_3x_1e^{x3}]\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$= h_1e^{-2} + h_3e^{-2}$$

$$d^2f\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} h_ih_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_ix_j}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$= \left(h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + h_3^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} + 2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1x_2}\right.$$
$$\left. + 2h_2h_3\frac{\partial^2 f}{\partial x_2x_3} + 2h_1h_3\frac{\partial^2 f}{\partial x_1x_3}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$= [h_1^2(0) + h_2^2(2x_3) + h_3^2(x_1e^{x3}) + 2h_1h_2(0)$$
$$+ 2h_2h_3(2x_2) + 2h_1h_3(e^{x3})]\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$= -4h_2^2 + e^{-2}h_3^2 + 2h_1h_3e^{-2}$$

Thus the Taylor's series approximation is given by

$$f(X) = e^{-2} + e^{-2}(h_1 + h_3)$$
$$+ \frac{1}{2!}(-4h_2^2 + e^{-2}h_3^2 + 2h_1h_3\mathrm{e}^{-2})$$

Where $h_1 = x_1 - 1\,, h_2 = x_2\,, and\;\; h_3 = x_3 + 2$

نظرية الشرط الضروري :

إذا كان للدالة $f(X)$ نقطة حرجة عظمي أو صغري محتملة
عند $X = X^*$ وكانت المشتقات الجزئية الأولي للدالة $f(X)$ موجودة
عند $X = X^*$ فإن
المشتقات الجزئية الأولى للدالة عند $X = X^*$ تساوي الصفر، أي أن

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(X^*) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(X^*) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(X^*) = 0$$

البرهان:

نفرض ان احد المشتقات الجزئية الأولى وليكن رقم k معامل عن الصفرر متسلسلة تيلور للدالة $f(x)$ بالقرب من X^*

$$f(X^* + h) = f(X^*) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X^*) + R_1\,(x^*, h)$$

$$f(X^* + h) - f(X^*) = h_k \frac{\partial f(x_*^*)}{\partial x_k^*} + \frac{1}{2!} d^2 f(X^* + \theta h)\,,$$

$$0 \leq \theta \leq 1$$

وحيث ان d^2 من رتبة h_1^2 فإن الحد الأخير يضمحل عندما h تقترب من الصفر وبالتالي فإن $h_k \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_k}$ سوف يحدد اشارة $f(X^* + h) - f(X^*)$ او بعبارة اخرى سوف يحدد علامة التباين.

$$f(X^* + h) - f(X^*) \geq 0$$

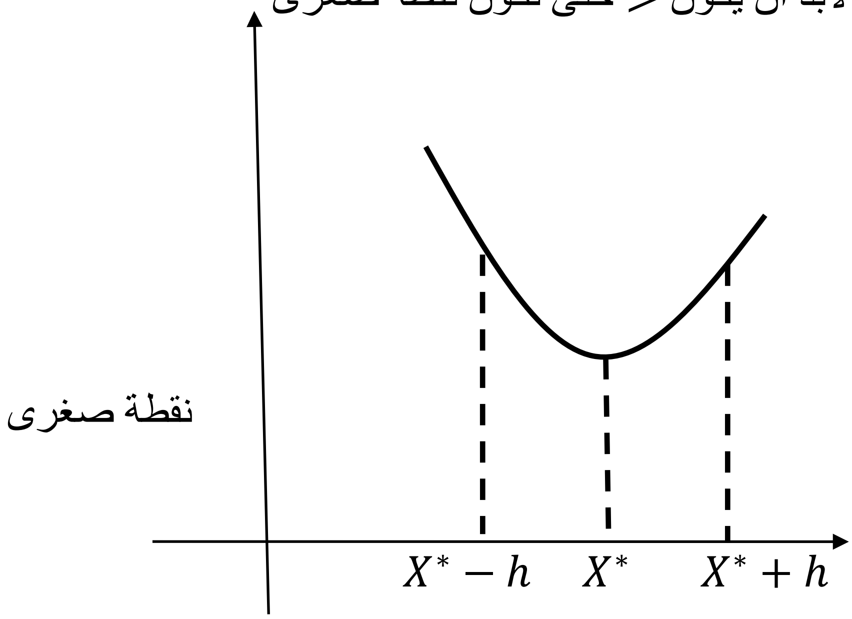
او $f(X^* + h) - f(X^*) \leq 0$

نفرض ان $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_k} > 0$ موجبة هذا معناه ان اشارة $f(X^* + h) - f(X^*)$ سوف تكون موجبة اذا كانت $h_k > 0$ وسالبة اذا كانت $h_k < 0$ و هنا تظهر حالتان:

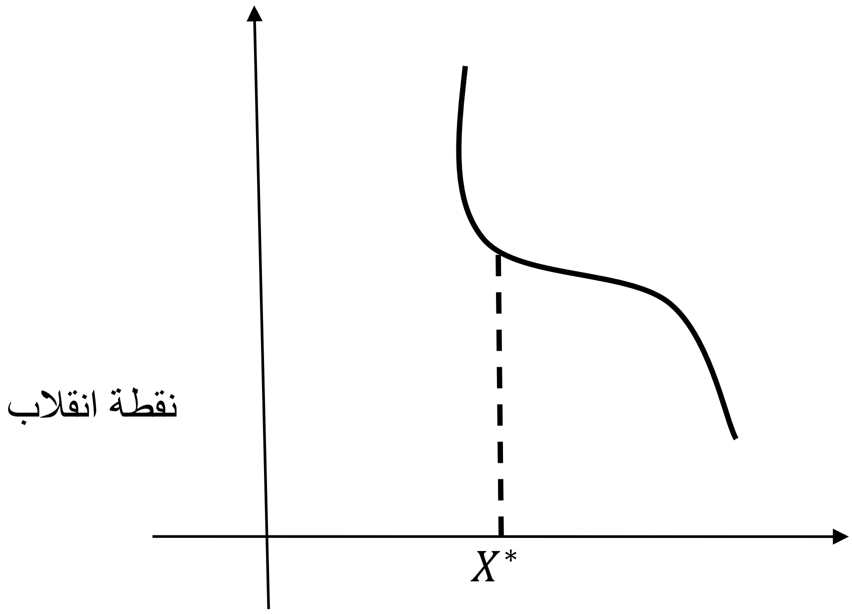
$$f(X^* + h) > f(X^*)$$

$$f(X^* - h) > f(X^*)$$

لابد ان يكون $>$ حتى تكون نقطة صغرى



$$f(X^* + h) > f(X^*)$$
$$f(X^* - h) < f(X^*)$$



و هذا معناه أن النقطة X^* لا يمكن أن تكون عظمي أو صغري

∴ الفرض غير صحيح

جميع المشتقات الجزئية الأولي لابد أن تساوي الصفر

نظرية الشرط الكافي :

الشرط الكافي لنقطة حرجة أن تكون قيمة عظمي أو صغري هو أن مصفوفة المشتقات الجزئية الثانية (مصفوفة هيس) للدالة $f(X)$ محسوبة عند X^* تكون

(أ) موجبة التعريف عندما X^* نقطة صغري محلية

(ب) سالبة التعريف عندما X^* نقطة عظمي محلية .

ومصفوفة هيس هي مصفوفة تحوي المشتقات الجزئية الثانية لدالة الهدف $f(x)$

$$J|_{X=X^*} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}\bigg|_{X=X^*}\right]$$

تعريف : تكون المصفوفة A موجبة التعريف اذا كان كل قيمها الذاتية موجبة.

القيم الذاتية لمصفوفة A هي القيم γ التي تحقق $|A - \gamma I| = 0$

تعريف:

وتكون المصفوفة A سالبة التعريف اذا كان كل قيمها الذاتية سالبة.

يوجد اختبار آخر يمكن من خلاله معرفة هل المصفوفة A موجبة ام سالبة التعريف.ويعتمد هذا الاختبار على حساب المحددات الجزئية من المصفوفة A

$$A_{nxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة A موجبة التعريف إذا كان وإذا كان فقط جميع المحيددات الجزئية من A : $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ موجبة . وسالبة التعريف إذا كان وإذا كانت فقط

$$A_j = (-1)^j \qquad ,j = 1,2, \dots., n$$

ملاحظة :-

إذا كانت بعض القيم الذاتية موجبة وبعضها سالب أو كانت قيم المحيددات الجزئية A_j ليست جميعها موجب أو ليست موافقة لترتيب الإشارات $(-1)^j$, $j = 1,2, \dots., n$ في هذه الحالة تكون المصفوفة A ليست موجبة التعريف ولا سالبة التعريف.

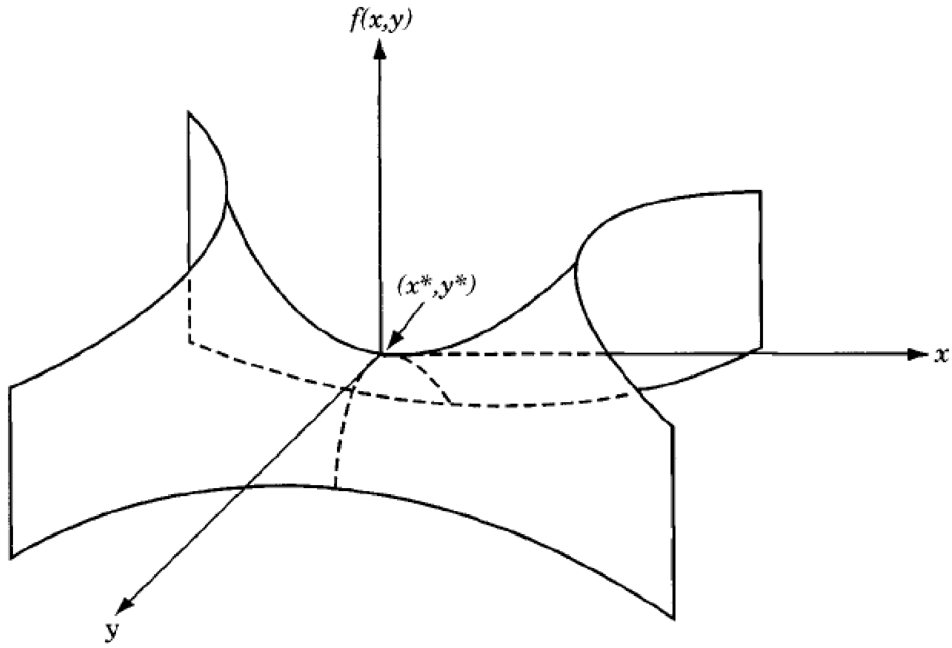
تعريف :-

إذا كانت بعض قيم A_j موجبة وباقي القيم أصفارا فإن المصفوفة A تكون شبه موجبة التعريف

تعريف (نقطة سرج) :-

تكون هذه النقطة عظمي بالنسبة لأحد المتغيرات وصغري بالنسبة للأخر وهي بذلك تشبه نقطة سرج الحصان. وفي الرسم ثلاثي الأبعاد التالي، توضيح لنقطة سرج حصان للدالة

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$



مثال :

أوجد النقاط العظمى والصغرى للدالة

$$f(x_1,x_2) = x_1^3 + x_2^3 + 2x_1^2 + 4x_2^2 + 6$$

الحل :-

الشرط الضروري لحدوث القيم العظمي والصغري هو

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 4x_1 = x_1(3x_1 + 4) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_2^2 + 8x_2 = x_2(3x_2 + 8) = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad or \qquad x_1 = \frac{-4}{3}$$

$$x_2 = 0 \qquad or \qquad x_2 = \frac{-8}{3}$$

النقاط المحتملة هي

$$(0,0)\,, \qquad \left(0\ ,\frac{-8}{3}\right)$$

$$\left(-\frac{4}{3},0\right), \qquad \left(-\frac{4}{3}\ ,\frac{-8}{3}\right)$$

لتحديد طبيعة هذه النقاط نستخدم الشرط الكافي ، والذي يحتاج لمصفوفة هي والذي تحتوي علي المشتقات الجزئية الثانية

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6x_1 + 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 6x_2 + 8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 6x_1 + 4 & 0 \\ 0 & 6x_2 + 8 \end{bmatrix}$$

ولتحديد ايجاب التعريف من سالبيته تحسب المحددات الجزئية من المصفوفة J وهو

$$J_1 = |6x_1 + 4| \text{ and } J_2 = \begin{bmatrix} 6x_1 + 4 & 0 \\ 0 & 6x_2 + 8 \end{bmatrix},$$

النقطة	قيمة J_1	قيمة J_2	طبيعة J	طبيعة النقطة	قيمة الدالة
$(0,0)$	$+4$	$+32$	موجبة التعريف	صغري	6
$(0,-\frac{8}{3})$	$+4$	-32	لا موجبة ولا سالبة التعريف	نقطة سرج	$\frac{418}{27}$
$(-\frac{4}{3},0)$	-4	-32	لا موجبة ولا سالبة التعريف	نقطة سرج	$\frac{194}{27}$
$(-\frac{4}{3},-\frac{8}{3})$	-4	$+32$	سالبة التعريف	عظمي	$\frac{50}{3}$

الأمثلية عديدة المتغيرات مع شروط متساويات

المسألة هي: أوجد قيمة

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

والتي تحقق القيمة الصغرى للدالة $f(X)$
ويحقق الشروط

$$g_i(X) = 0 \qquad i = 1,2,\dots,m$$

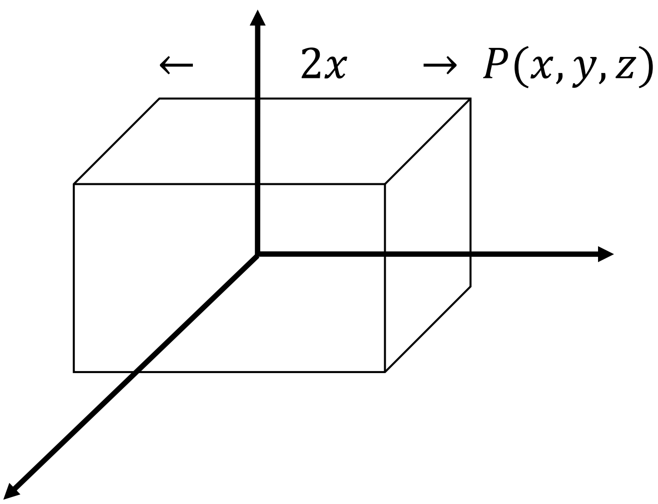
حيث $m \leq n$.
وإذا كانت $m > n$ فإن المسألة تصبح زائدة التعريف، الأمر الذي يجعلها غالبا بلا حل.

طريقة التعويض المباشر

حيث نقوم بالتعويض من معادلات الشروط $g_i(X) = 0$ في الدالة الهدف $f(X)$

مثال:

أوجد أبعاد صندوق بحيث يكون له أكبر حجم يمكن احتواؤه في كرة نصف قطرها الوحدة.



الحل :-

نفرض أن نقطة أصل المحاور x_1, x_2, x_3 عند مركز الكرة وبالتالي يكون أبعاد الصندوق هي $2x_1, 2x_2, 2x_3$ ويكون حجم الصندوق

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1(2x_2)(2x_3) = 8x_1x_2x_3$$

وحيث أن الحرف P يقع علي السطح فهو يحقق معادلة الكرة

$$g: \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

وبالتالي تصنف هذه المسألة علي أنها مسألة إيجاد قيمة $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ التي تحقق قيمة عظمي للدالة f مع تحقق الشرط g

$$f(x_1, x_2, x_3) = 8x_1\, x_2\, x_3 \qquad (1)$$
$$g = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \qquad (2)$$

من المعادلة (2)

$$x_1^2 = 1 - x_2^2 - x_3^2$$
$$x_1 = \sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}$$

بالتعويض في (1)

$$f(x_1, x_2, x_3) = 8\left(\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}\right)x_2x_3$$

فتصبح المسألة إيجاد القيمة الصغرى للدالة

$$f(x_2, x_3) = 8x_2x_3(1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (3)$$

وهذه مسألة أمثلية غير مقيدة ذات متغيرين أثنين .

لحل هذه المسألة نستخدم الشرط الضروري

أولا:- لإيجاد النقطة المحتملة :

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \qquad ,$$

$$f(x_2, x_3) = 8x_2 x_3 (1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{8}{2} x_2 x_3 (1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}-1}(-2x_2) + (1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}}[8x_3] = 0$$

$$-8x_2^2 x_3 (1 - x_2^2 - x_3^2)^{-\frac{1}{2}} + (8x_3)(1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$8x_3 \left[\frac{-x_2^2}{(1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}}} + (1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}}\right] = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{8}{2} x_2 x_3 (1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}-1}(-2x_3) + 8x_2(1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$8x_2 \left[\frac{-x_3^2}{(1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}}} + (1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}}\right] = 0 \qquad (5)$$

من المعادلة (4) :

$$8x_3 \left[\frac{-x_2^2}{(1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}}} + (1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}}\right] = 0 \qquad (4)'$$

إما $x_3 = 0$ أو القوس =0 .

الاحتمال $x_3 = 0$ مستبعد لأن معناه أن أحد أبعاد الصندوق صفر وهو غير مقبول .

$$\frac{-x_2^2}{(1-x_2^2-x_3^2)^{\frac{1}{2}}} + (1-x_2^2-x_3^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

بالضرب في $(1-x_2^2-x_3^2)^{\frac{1}{2}}$

$$-x_2^2 + (1-x_2^2-x_3^2) = 0$$

$$1-2x_2^2-x_3^2 = 0 \qquad (4b)$$

وبالمثل فإن المعادلة (5) تؤول إلى

$$1-2x_3^2-x_2^2 = 0 \qquad (5b)$$

$$1-2x_2^2-x_3^2 = 0 \quad (4b) \rightarrow 1-2x_2^2-x_3^2 = 0$$

$$1-x_2^2-2x_3^2 = 0 \quad (5b) \xrightarrow{*-2} -2+2x_2^2+4x_3^2 = 0$$

بالجمع

$$3x_3^2 = 1 \qquad \leftarrow \qquad -1+3x_3^2 = 0$$

$$x_3^2 = \frac{1}{3} \qquad \rightarrow x_3 = \mp\sqrt{\frac{1}{3}}$$

الإشارة السالبة تعني أن طول أحد أبعاد الصندوق بالسالب وهو غير مقبول

$$\therefore x_3 = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

بالتعويض في $(5b)$

$$x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

بالتعويض في (2)

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

قيمة الدالة (حجم الصندوق)

$$f = 8x_1x_2x_3 = \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

ونظرا لأن هذه هي القيم الوحيدة المقبولة فإن قيمة الدالة هذه متوقع أن تكون هي العظمي وقيم (x_1, x_2, x_3) هي النقطة العظمي .

الشرط الكافي (مصفوفة هيس تكون سالبة التعريف)

تمرين :-

احسب مصفوفة هيس (المشتقات الجزئية الثانية للدالة $f(x_2, x_3)$ من المعادلة (3)

عند النقطة $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ وتأكد من أنها سالبة التعريف .

الحل: نعرض ذلك باختصار

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -\frac{8x_1x_2}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}} - \frac{8x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}\left[\frac{x_1^3}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}} + 2x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}\right]$$

$$= -\frac{32}{\sqrt{3}} \text{ at } (x_1^*, x_2^*)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -\frac{8x_1x_2}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}} - \frac{8x_1}{1-x_1^2-x_2^2}\left[\frac{x_2^3}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}} + 2x_2(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}\right]$$

$$= -\frac{32}{\sqrt{3}} \text{ at } (x_1^*, x_2^*)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} = 8(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2} - \frac{8x_2^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}} - \frac{8x_1^2}{1-x_1^2-x_2^2} \cdot \left[(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2} + \frac{x_2^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}}\right]$$

$$= -\frac{16}{\sqrt{3}} \text{ at } (x_1^*, x_2^*)$$

وحيث أن

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} < 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 > 0$$

إذن مصفوفة هيس سالبة التعريف بالتالي النفقطة عظمى

تمارين

(1) وصل الدوال التالية بصفاتها المناظرة في علم بحوث العمليات

مجموعة الصفات	مجموعة الدوال
(أ) لها قيمة عظمى عند (1,2) (ب) لها نقطة سرج عند نقطة الأصل (ج) ليس لها قيمة عظمى أو صغرى (د) لها نقطة انقلاب عند نقطة الأصل (س) لها قيمة صغرى عند (1,2)	**(a)** $f = 4x_1 - 3x_2 + 2$ **(b)** $f = (2x_1 - 2)^2 + (x_1 - 2)^2$ **(c)** $f = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2$ **(d)** $f = x_1x_2$ **(e)** $f = x^3$

(2) أوجد النقاط العظمى والصغرى للدوال

$$f(x) = \frac{x^4}{(x-1)(x-3)^3}$$

$$f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 27x - 7$$

$$f(x) = 10x^6 - 48x^5 + 15x^4 + 200x^3 - 120x^2 - 480x + 100$$

(3) حدد أي المصفوفات التالية يكون موجب التعريف وأيها سالب التعريف. استخدم طريقة القيم الذاتية.

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} -14 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(4) حدد أي المصفوفات التالية يكون موجب التعريف وأيها سالب التعريف. استخدم طريقة المحيددات.

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(5) عبر عن الدالة

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 - x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_1 - 5x_3 + 2$$

بالصورة المصفوفية:

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\,\mathbf{X}^T\,[A]\,\mathbf{X} + \mathbf{B}^T\,\mathbf{X} + C$$

ثم حدد ما إذا كانت المصفوفة [A] موجبة التعريف أم غير ذلك.

(6) يمكن التعبير عن دالة الربح للقيراط الواحد من الأرض بالدالة

$$20x_1 + 26x_2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2$$

حيث x_1, x_2 هي على الترتيب تكلفة العمالة و تكلفة الأسمدة. أوجد قيمة x_1, x_2 التي تحقق أكبر مكسب.