حامعة جنوب الوادى

كلية التربية بالغردقة

الفرقة الثالثة عام رياضيات (عربي)

المادة : (بحتة ٩) جزء (تحليل عددى)

إستاذ المادة / د. اسماعيل جاد امين

الفصل الدراسي الأول

مقدمة

عرفنا في دراستنا السابقة للرياضيات التقليدية وهي التي تعتمد على مجموعة من القواعد والقوانين القياسية ان مثل هذا النوع من الرياضيات قد تفشل غالبا في ايجاد الحلول لكثير من المشاكل التي تظهر في المجالات العملية التطبيقية.

في مثل هذه الحالات نلجأ الى نوع اخر من الرياضيات يسمى التحليل العددي والتحليل التحليل العددي هو علم يهدف الى اشتقاق و وصف وتحليل طرق للحصول على حلول العددية لمسائل رياضيه يصعب عادة حلها باستخدام الطرق التحليلية العادية ورفي الغالب هناك اربعة اسباب تقودنا الى استخدام التحليل العددي و هي:

١. عندما تكون المشكلة غير ممكن حلها بالطرق التقليدية مثل المعادلات الجبرية من الدرجة الخامسة فما فوق او المعادلات الغير خطيه التي تحتوي على بعض الدوال المسترسلة مثل

$$xe^{x} - \cos x + 1 = 0$$

٢. تكاملات محدودة لا تصلح معها اي طريقه من طرق التكامل وهكذا في جميع المجالات مثل

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx$$

ايجاد قيمه نتيجه لقيمه غير معطاه في الجدول

٣. عندما تكون المشتقة معطاه على صوره جدول رياضي ناتج من تجربة معينة لا يكون عندنا في هذه الحالة الا مجرد ارقام

٤. عندما تكون المشكلة من الممكن حلها بالطرق التحليلية ولكن ناتج الحل معقد بحيث يمثل مشكلة عند حساب قيمته عدديا.

٥. بعد الطرق التحليلية تبدو كأنها قابله للتطبيق دائما وهذا لا يكون حقيقيا في الواقع ومن امثلة هذا النوع مسألة حل نظام معادلات جبرية خطيه باستخدام طريقه المحددات او طريقه ايجاد المعكوس وهي طرق تحليلية معروفه فان مثل هذه الطرق تضعف دقه حلولها بشكل كبير اذا كبر حجم النظام (عدد متغيراته - عدد معادلاته).

والطرق العددية تعتمد على التقريب والتقريب يعني وجود خطا ولهذا فمن الضروري في البداية ان ندرس الاخطاء.

الفصل الاول

الاخطاء

الحصول على القيم العددية لحل اي مسألة رياضيه يمثل فقط جزء من المشكلة و عادة نطلب معرفة درجة دقة النتائج العددية و هذا تعتبر جزء هام جدا وغالبا ما يكون اصعب من استخراج النتائج نفسها في الحسابات يوجد اربعة انواع من الاخطاء التي تؤثر على دقه النتائج و هي

١. الخطأ الدائري
٢. الاخطاء الناتجة عن عدم دقه البيانات المعطاة
٣. الاخطاء الوضعية
٤. الاخطاء الناتجة عن الطريقة المستخدمة

وسنتكلم الان عن كل خطأ من هذه الاخطاء

اولا: الخطأ الدائري

عند اجراء الحسابات العددية يوجد نهاية طبيعية لعدد الارقام العشرية التي نريد الاحتفاظ بها في العدد اي اننا نقرب الاعداد الى عدد محدود من الارقام العشرية والخطأ الناتج من عمل ذلك هو ما يسمى بالخطأ الدائري Round-off error على سبيل المثال

$$\frac{4}{3}=1.3333$$

وفى بعض البرامج المستخدمه لتنفيذ طرق عدديه انت من تحدد عدد الارقام العشريه التى تظهر لك فى النتيجه

وعندما نقربها لأربعة ارقام محسوسة تصبح

$$\frac{4}{3}=1.333$$

في هذه الحالة الخطأ الدائري يكون

$$\text{Round-off error}=1.3333-1.333=0.000333$$

ايضا

$$\frac{5}{3}=1.6665$$

وعندما نقربها لأربعة ارقام مضبوطة تصبح

$$\frac{5}{3}=1.667$$

$$\text{Round-off error}=1.6666-1.667=-0.000333$$

الجدول الاتي يوضح نتائج تقريب مجموعه من الاعداد المضبوطة الى n من الارقام المحسوسة

Number	N	Round number	Round-of error
23.764462	5	23.764	0.000462
0.0092746	3	0.00927	0.0000046
1.650045	5	1.6500	0.000045
0.0003786	3	0.000379	–0.0000004

الجدول الاتي يوضح نتيجة تقريب مجموعه من الاعداد المضبوطة الى n من الارقام العشرية

Number	N	Round number	Round-of error
23.764462	5	23.76446	0.000002
75634.3195	3	75634.320	–0.0005
0.0003786	3	0.000	0.0003786

ملحوظة

عندما نقرب عدد الى k من الارقام العشرية فان الخطأ الدائري يقع بين النهايتين $\pm\frac{1}{2}\times10^{-k}$ على سبيل المثال عندما نقرب الى ثلاثة ارقام عشريه فإن الخطأ يقع بين

$\pm\frac{1}{2}\times10^{-3}$

$$-\frac{1}{2}\times10^{-3}\ ,\quad \frac{1}{2}\times10^{-3}$$ اي يقع بين $-0.0005\ ,\ 0.0005$

Error

ثانيا: عدم دقة البيانات المعطاة Data

اذا كانت البيانات قد حصلنا عليها عمليا فهي بالطبع تكون فقط معروفة خلال حدود الخطأ التجريبي الذي عادة يمكن تقديره و هذا يحدد دقة النتائج لأي حسابات تالية و هذه حقيقه واضحة و هي ان دقة النتائج محدودة بدقة البيانات الابتدائية و هذا كثيرا ما يهمله المبتدئون.

ثالثا: الاخطاء الوضعية Mistakes Error

هي الاخطاء التي تصنع بواسطه الشخص الذي يقوم بعمل الحسابات. الخطأ الشائع هو عكس ترتيب رقمين عشريين في عدد ما. فمثلا من السهل جدا استخدام العدد 62381 بدلا من 63281 و عند اجراء الحسابات يجب بقدر الامكان عمل اختبارات على الطريقة نفسها لإظهار اي اخطاء بسرعة.

مجرد اعاده الحسابات نفسها ليس اختبار جيدا لأنه محتمل الى حد بعيد اعاده نفس الخطأ.

رابعا: اخطاء الطريقة Truncation Error

تنشا من استبدال عمليه مضبوطة بأخرى تقريبية فمثلا ينتج قطع اذا استخدمنا فقط عدد نهائي في الحدود من مفكوك متسلسلة لا نهائية هذا الخطأ يسمى خطا القطع.

الخطأ الناتج من قطع المتسلسلة في جزء منها كمثال لذلك الدالة $\sin x$ يمكن وضعها في صورة المتسلسلة اللانهائية الاتية

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

وعندما تكون x صغيرة فان مجموع الحدود الثلاثة الاولى اي $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ تعطي احسن تقريب للدالة $\sin x$.

خطأ القطع هو مجموع الحدود الباقية في المتسلسلة اللانهائية اي هو

$$-\frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

الخطأ المطلق و الخطأ النسبي

اذا كانت x هي القيمة المقربة للمقدار X وكان e هو الخطأ في هذا التقريب فان

$$X = x + e$$

القيمة العددية للخطأ e تسمى الخطأ المطلق وتكتب في الصورة $|e|$ اما القيمة $\frac{e}{x}$ فتسمى بالخطأ النسبي

على سبيل المثال العدد 27 يمكن ان يكون القيمة المقربة للعدد المضبوط 26.76 في هذه الحالة

$$X = 26.76, x = 27$$

والخطأ في هذه الحالة يكون $e = -0.24$ و الخطأ المطلق هو 0.24 و الخطأ النسبي هو $\frac{-0.24}{26.76} = -0.009$ و هو صحيح لثلاث ارقام عشرية او رقم محسوس واحد.

الخطأ في حساب الدالة

اذا كانت e هو الخطأ في التقريب x للعدد X لذلك.

$$X = x + e$$

فاذا كان e_f يمثل الخطأ في قيمه الدالة f عندما نحسب x عند بدلا من X فإننا نحصل على

$$f(X) = f(x) + e_f$$

لذلك

$$\begin{aligned} e_f &= f(X) - f(x) \\ &= f(x+e) - f(x) \\ &= \cancel{f(x)} + ef'(x) + \frac{e^2}{2!}f''(x) + \cdots - \cancel{f(x)} \end{aligned}$$

وذلك بتطبيق مفكوك تايلور للدالة $f(x+e)$

$$e_f = ef'(x) + \frac{1}{2}e^2 f''(x) + \cdots$$

اذا كانت e صغيرة والمشتقات الثانية والعليا للدالة f عند x ليست كبيره فإننا نحصل على

$$e_f \simeq ef'(x)$$

$$|e_f| \approx |e||f'(x)|$$

اذا كان العدد x مقربا الى k من الارقام العشرية فان القانون يصبح

$$|e_f| \le \frac{1}{2} \times 10^{-k} |f'(x)|$$

الفصل الثاني

The Operators المؤثرات

فكرة المؤثر تستخدم بتوسع في التحليل العددي، غالبا لتبسيط دراسة الصيغ المعقدة و الافكار الخاصة بالمؤثرات التي سنستخدمها هي كما يأتي:

نفرض ان مجموعة من النقاط مرتبة بحيث ان المسافة بين اي نقطتين متتاليتين ثابتة و تساوي h اي ان

Step-size

$$x_1 = x_0 + h$$

$$x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

عدد صحيح موجب

$$x_i = x_0 + ih \ , \ i = 0,1,2,\cdots,n$$

Delta

١. المؤثر Δ : مؤثر الفروق الامامي Forward difference operator

يعرف مؤثر الفروق الامامي Δ و الذي يؤثر على الدالة $y(x)$ بالعلاقة التالية:

$$\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$$

و ينظر الي Δ مؤثر عندما نقدم له $y(x)$ كعدد مدخل ينتج لنا $y(x+h) - y(x)$ كعدد خارج فاذا استخدمنا الرمز y_i ليدل على الدالة $y(x_i)$ فيمكننا ان نكتب العلاقات التالية

$y(x_i) = y_i$

$$\Delta y_0 = y(x_0 + h) - y(x_0) = y_1 - y_0$$

$$\Delta y_1 = y(x_1 + h) - y(x_1) = y_2 - y_1$$

أي ان

$$\boxed{\Delta y_i = y_{i+1} - y_i}$$

وسنكتب الفروق الامامية الثانية (Second differences) في الصورة $\Delta^2 y(x)$ و تعرف بالعلاقة

$y_{i+2} - y_{i+1}$

$\Delta y_{i+1} - \Delta y_i$

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_i &= \Delta\left(\Delta y_i\right) = \Delta\left(y_{i+1} - y_i\right) \\ &= \left(y_{i+2} - y_{i+1}\right) - \left(y_{i+1} - y_i\right) \\ &= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i\end{aligned}$$

و بنفس الطريقة يمكن تعريف الفروق الاعلى Higher differences فمثلا

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_i &= \Delta\left(\Delta^2 y_i\right) = \Delta\left(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i\right) \\ &= \left(y_{i+3} - y_{i+2}\right) - 2\left(y_{i+2} - y_{i+1}\right) + \left(y_{i+1} - y_i\right) \\ &= \boxed{y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i}\end{aligned}$$

و عموما

$$\Delta^{n+1} y(x) = \Delta\left(\Delta^n y(x)\right), \quad n = 1, 2, \cdots$$

الصوره العامه لمؤثر
الفروق الاماميه

حيث

$$\Delta^0 y(x) = y(x)$$

اذا اعطينا مجموعة من النقاط $\left(x_i, y_i\right), \; i = 0, 1, 2, \cdots, n$

يمكننا حساب الفروق المختلفة $\Delta^k, \; k = 1, 2, \cdots$

(حيث $\Delta^1 \equiv \Delta$) للدالة $y(x)$ عند النقاط المختلفة و وضع تلك القيم في جدول يسمى جدول الفروق او مخطط الفروق كما يبين الجدول التالي - حتى الفروق Δ^5 - لقيم y المعطاة.

جدول مؤثر الفروق الامامية Forward difference Table

x_n	y_n	Δy_n	$\Delta^2 y_n$	$\Delta^3 y_n$	$\Delta^4 y_n$	$\Delta^5 y_n$
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$			
		Δy_4				
x_5	y_5					

Nabla symbol

٢. المؤثر ∇ مؤثر الفروق الخلفية Backward difference operator

يعرف مؤثر الفروق **الخلفية** ∇ و الذي يؤثر على الدالة $y(x)$ بالعلاقة التالية

$$\nabla y(x) = y(x) - y(x-h)$$

أي انه عندما نقدم له $y(x)$ كعدد مدخل ينتج لنا $y(x) - y(x-h)$ كعدد خارج و يمكننا ان نكتب العلاقات التالية

مافيش نبلا واى نود لانه لا يوجد قيمه قبلها

$$\nabla y_1 = y_1 - y_0$$
$$\nabla y_2 = y_2 - y_1$$

أي ان بصورة عامة

$$\boxed{\nabla y_i = y_i - y_{i-1}}$$

و بنفس الطريقة يمكن تعريف الفروق من الرتبة الثانية (Second differences) فمثلا

$$\nabla^2 y_i = \nabla(\nabla y_i) = \nabla(y_i - y_{i-1})$$
$$= (y_i - y_{i-1}) - (y_{i-1} - y_{i-2})$$
$$= y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$$

و بنفس الطريقة يمكن تعريف الفروق الاعلى Higher differences فمثلا

$$\nabla^3 y_i = \nabla(\nabla^2 y_i) = \nabla(y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2})$$
$$= (y_i - y_{i-1}) - 2(y_{i-1} - y_{i-2}) + (y_{i-2} - y_{i-3})$$
$$= y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3}$$

و عموما

$$\nabla^{n+1} y(x) = \nabla(\nabla^n y(x)),\ n = 1, 2, \cdots$$

ويلاحظ انه اذا كونًا جدول الفروق الخلفية لمجموعة من النقاط المعطاة فتكون عناصر هذا الجدول هي نفسها من حيث القيمة العددية عناصر جدول الفروق الامامية لنفس المجموعة من النقاط الا ان رموز العناصر او اسماءها تكون مختلفة فمثلا العنصر ∇y_1 هو نفس العنصر Δy_0 اي لهم نفس القيمة والشكل التالي يعطي جدولي الفروق الامامية و الفروق الخلفية لمجموعة معطاة من اربع نقاط. و من الشكل نتبين ان العناصر المتقابلة متساوية.

n=4

Forward differnce Table

x_n	y_n	Δy_n	$\Delta^2 y_n$	$\Delta^3 y_n$
x_0	y_0	y_1-y_0		
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		
x_3	y_3			

Back ward difference Table

x_n	y_n	∇y_n	$\nabla^2 y_n$	$\nabla^3 y_n$
x_0	y_0	y_1-y_0		
		∇y_1		
x_1	y_1		$\nabla^2 y_2$	
		∇y_2		$\nabla^3 y_3$
x_2	y_2		$\nabla^2 y_3$	
		∇y_3		
x_3	y_3			

جدول الفروق الخلفية

x_n	y_n	∇y_n	$\nabla^2 y_n$	$\nabla^3 y_n$	$\nabla^4 y_n$	$\nabla^5 y_n$
x_0	y_0					
		∇y_1				
x_1	y_1		$\nabla^2 y_2$			
		∇y_2		$\nabla^3 y_3$		
x_2	y_2		$\nabla^2 y_3$		$\nabla^4 y_4$	
		∇y_3		$\nabla^3 y_4$		$\nabla^5 y_5$
x_3	y_3		$\nabla^2 y_4$		$\nabla^4 y_5$	
		∇y_4		$\nabla^3 y_5$		
x_4	y_4		$\nabla^2 y_5$			
		∇y_5				
x_5	y_5					

٣. مؤثر الفروق المركزية δ **Central difference operator**

للتعبير عن الفروق بصورة مماثلة يوجد مؤثر ثالث يسمي مؤثر الفروق المركزية و يعرف بالعلاقة

$$\delta y(x) = y(x + \frac{h}{2}) - y(x - \frac{h}{2})$$

او علي الصورة

$$\delta y_i = y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}$$

ومنها نحصل على

$$\begin{aligned}\delta^2 y_i &= \delta(\delta y_i) = \delta\left(y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}\right)\\ &= (y_{i+1} - y_i) - (y_i - y_{i-1})\\ &= y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}\end{aligned}$$

جدول مؤثر الفروق المركزية

x_n	y_n	δy_n	$\delta^2 y_n$	$\delta^3 y_n$	$\delta^4 y_n$	$\delta^5 y_n$
x_0	y_0					
		$\delta y_{1/2}$				
x_1	y_1		$\delta^2 y_1$			
		$\delta y_{3/2}$		$\delta^3 y_{3/2}$		
x_2	y_2		$\delta^2 y_2$		$\delta^4 y_2$	
		$\delta y_{5/2}$		$\delta^3 y_{5/2}$		$\delta^5 y_{5/2}$
x_3	y_3		$\delta^2 y_3$		$\delta^4 y_3$	
		$\delta y_{7/2}$		$\delta^3 y_{7/2}$		
x_4	y_4		$\delta^2 y_4$			
		$\delta y_{9/2}$				
x_5	y_5					

ملاحظة

من خلال الجداول الثلاثة السابقة للفروق الامامية و الفروق الخلفية و الفروق المركزية نجد ان عناصر هذه الجداول هي نفسها من حيث القيمة العددية ام مسميات هذه العناصر تختلف من جدول الى اخر فمثلا القيمة العددية للفروق الامامية يرمز لها بالرمز Δy_0 و في الفروق الخلفية يرمز لها بالرمز ∇y_1 اما في الفروق المركزية يرمز لها بالرمز $\delta y_{1/2}$.

كما نلاحظ انه في جدول الفروق الامامية تكون الادلة ثابتة على خط منحدر من اعلى الى اسفل و في جدول الفروق الخلفية تكون الادلة ثابتة على خط مائل صاعدا من اسفل الى اعلى. و في جدول الفروق المركزية تكون الادلة ثابتة على خط افقي.

٤. مؤثر الازاحة Shifting operator E

مؤثر الازاحة يعرف بالعلاقة

$$Ey(x) = y(x+h)$$

$$E^{-1}y(x) = y(x-h)$$

$$Ey_i = E\cancel{y(x_i)} = y(\cancel{x}_{i+1}) = y_{i+1}$$

و يمكننا استنتاج صورة عامة كالتالي

$$E^2 y_i = E(Ey_i) = E(y_{i+1}) = y_{i+2}$$

و بصورة عامة لاي قيمة لـ p يكون

$$E^p y_i = y_{i+p}$$

كلا من Δ, E له الخاصية الخطية اي ان

$$\Delta\left(c_1 y_k + c_2 z_k\right) = c_1 \Delta y_k + c_2 \Delta z_k$$

$$E\left(c_1 y_k + c_2 z_k\right) = c_1 E y_k + c_2 E z_k$$

حيث c_1, c_2 مقداران ثابتان.

٥. مؤثر المتوسط μ Mean operator

مؤثر المتوسط يعرف بانه

$$\mu = \frac{E^{1/2} + E^{-1/2}}{2}$$

و هو الاداة الاساسية التي يمكن بها حذف الادلة الكسرية من عمليات الفروق الوسطي.

٦. مؤثر التفاضل D Differential operator

موثر التفاضل يعرف بانه

$$Dy(x) = \frac{d}{dx} y(x) = y'(x)$$

$$D^n y(x) = \frac{d^n}{dx^n} y(x) = y^{(n)}(x)$$

٢.٢ خواص المؤثرات

❖ **حاصل جمع مضاعفات المؤثرات**

نعتبر مؤثرين L_1, L_2 يؤثران على العدد y_k فان الناتج يكون $L_1 y_k$, $L_2 y_k$ و يكون حاصل جمع هذين المؤثرين

$$\left(L_1 + L_2\right) y_k = L_1 y_k + L_2 y_k$$

و بصفة عامة اذا كان c_1, c_2 ثابتين (لا يعتمدان على k) فان المؤثر $c_1 L_1 \pm c_2 L_2$ ينتج العدد $c_1 L_1 y_k \pm c_2 L_2 y_k$ اي ان

$$\left(c_1 L_1 \pm c_2 L_2\right) y_k = c_1 L_1 y_k \pm c_2 L_2 y_k$$

❖ حاصل ضرب مؤثرين

يعرض حاصل ضرب مؤثرين L_1, L_2 بانه المؤثر الذي يخرج $L_1 L_2 y_k$ اي ان

$$(L_1 L_2) y_k = L_1 L_2 y_k$$

❖ تساوي المؤثرات

المؤثرين L_1, L_2 يسمان مؤثران متساويان اذا كان $L_1 y_k = L_2 y_k$

اي ان $L_1 = L_2$ اذا كان $L_1 y_k = L_2 y_k$

لجميع الادلة k تحت الاعتبار. بهذا التعريف لأي ثلاثة مؤثرات L_1, L_2, L_3 يكون

1. $L_1 + L_2 = L_2 + L_1$
2. $L_1 + (L_1 + L_3) = (L_1 + L_2) + L_3$
3. $L_1 (L_2 L_3) = (L_1 L_2) L_3$

$$L_1 (L_2 + L_3) = L_1 L_2 + L_1 L_3$$

لكن قانون الابدال للضرب ليس صحيحا دائما اي ان $L_1 L_2 \neq L_2 L_1$ اما اذا كان احد المؤثرين عددا c فان التساوي يكون $cL_1 = L_1 c$

٣.٢ المؤثرات العكسية

المؤثران L_1, L_2 يسميان مؤثرين عكسيين اذا كان

$$L_1 L_2 = L_2 L_1 = I$$

في مثل هذه الحالة نستخدم الرموز

$$L_1 = L_2^{-1} = \frac{1}{L_2}, L_2 = L_1^{-1} = \frac{1}{L_1}$$

المؤثر I يعرف بالمؤثر المحايد.

٤.٢ العلاقة بين المؤثرات

$Dx^2 = 2x$

معادلات بسيطة تربط بين المؤثرات $\Delta, \nabla, E, \delta, E^{-1}$

من الممكن اثبات ان

$$(1) \quad E = 1 + \Delta$$

حيث ان

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

وباستخدام مؤثر الازاحة

$$E y_k = y_{k+1}$$

وبالتعويض

$$\Delta y_k = E y_k - y_k = (E - 1) y_k$$

وبالتالي يكون

$$\Delta = E - 1 \quad \Rightarrow \quad E = 1 + \Delta$$

$$(2) \quad E^{-1} = 1 - \nabla$$

حيث ان

$$E y_{k-1} = y_k \quad \Rightarrow y_{k-1} = E^{-1} y_k$$

و لكن

$$\nabla y_k = y_k - y_{k-1} = (1 - E^{-1}) y_k$$

اذن

$$\nabla = 1 - E^{-1} \quad \Rightarrow E^{-1} = 1 - \nabla$$

$$(3) \quad \Delta^2 = E^2 - 2E + 1$$

$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$

$\Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y_k)$

بما ان

$$\Delta^2 y_k = y_{k+2} - 2 y_{k+1} + y_k$$

$\Delta^2 y_k =$

وحيث ان

$$E^p y_k = y_{k+p}$$

فيكون

$$\Delta^2 y_k = E^2 y_k - 2E y_k + y_k$$

$$\Delta^2 y_k = (E^2 - 2E + 1)y_k$$

اذن

$$\Delta^2 = E^2 - 2E + 1$$

(4) $E\Delta = \Delta E$

$$E\Delta y_k = E(y_{k+1} - y_k)$$
$$= Ey_{k+1} - Ey_k = y_{k+2} - y_{k+1}$$
$$\Delta E y_k = \Delta y_{k+1} = y_{k+2} - y_{k+1}$$

اذن

$$E\Delta = \Delta E$$

(5) $\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$

$$\delta y_k = y_{k+1/2} - y_{k-1/2}$$
$$= E^{1/2} y_k - E^{-1/2} y_k$$
$$= \left(E^{1/2} - E^{-1/2}\right) y_k$$
$$\therefore \delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$$

(6) $E = \dfrac{\Delta^2}{\delta^2}$

من (٢)

$$E^{-1} = (1 - \nabla)$$
$$E = (1 - \nabla)^{-1}$$

و من (١)

$$E = 1 + \Delta$$

اي ان

$$E = 1 + \Delta = (1 - \nabla)^{-1}$$

و من (٥)

$$\delta E^{1/2} = E - 1 = \Delta$$

بالتربيع

$$\delta^2 E = \Delta^2$$

$$E = \frac{\Delta^2}{\delta^2}$$

اي ان

$$E = 1 + \Delta = (1-\nabla)^{-1} = \frac{\Delta^2}{\delta^2}$$

(7) $E = e^{hD}$

باستخدام مفكوك تايلور للدالة $y(x+h)$ نحصل على

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1!} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \cdots$$

$$Ey(x) = y(x) + \frac{h}{1!} Dy(x) + \frac{h^2}{2!} D^2 y(x) + \frac{h^3}{3!} D^3 y(x) + \cdots$$

$$Ey(x) = \left[1 + \frac{hD}{1!} + \frac{(hD)^2}{2!} + \frac{(hD)^3}{3!} + \cdots\right] y(x)$$

$$E = 1 + \frac{hD}{1!} + \frac{(hD)^2}{2!} + \frac{(hD)^3}{3!} + \cdots$$

$$E = e^{hD}$$

(8) $\delta = 2\sinh\left(\frac{hD}{2}\right)$

و من العلاقات (٥) ، (٧) نحصل على

$$\delta = e^{\frac{hD}{2}} - e^{-\frac{hD}{2}}$$

$$\delta = 2\sinh\left(\frac{hD}{2}\right)$$

$$(9)\quad \mu = \cosh\left(\frac{hD}{2}\right)$$

من تعريف مؤثر المتوسط و العلاقة (٥) نحصل علي

$$\mu = \frac{e^{\frac{hD}{2}} + e^{-\frac{hD}{2}}}{2}$$

$$\mu = \cosh\left(\frac{hD}{2}\right)$$

مثال (١)

كون جدول الفروق للدالة

$$y = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

من القيمة الابتدائية $x_0 = 0$ معتبرا الخطوة $h = 1$

الحل

بوضع $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ نعين القيم المناظرة للدالة

$$y_0 = -1,\ y_1 = 2, y_2 = 13, y_3 = 44$$

ومن هنا نحصل على

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	-1				
		3			
1	2		8		
		11		12	
2	13		20		0
		31		12	
3	44		32		
		63			
4	107				

مثال (٢)

احسب كثيرة الحدود $y=\frac{5}{3}x^3-\frac{23}{2}x^2+\frac{5}{6}x-1$ عند قيم x الصحيحة بين $x=1, x=4$ و استنتج جدول الفروق.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	-1				
		-11			
1	-10		-10		
		-21		6	
2	-31		-4		0
		-25		6	
3	-56		2		
		-23			
4	-79				

لاحظ ان الفروق الثالثة كلها تأخذ القيمة 6 و لهذا كل الفروق الرابعة تأخذ القيمة صفر.

٥.٢ الفروق المقسمة

عند تكوين جدول الفروق افترضنا حتى الان ان قيم متغير الدالة متساوية البعد اي لها خطوة ثابتة غير اننا نقابل احيانا في التطبيق العملي جداول بقيم للمتغير المستقل غير متساوية البعد أي جداول بخطوة متغيرة فعلى سبيل المثال يكون للمعطيات التجريبية في كثير من الاحيان مثل هذا الطابع والجداول ذات الخطوة المتغيرة تعمم مفهوم الفروق المحددة وبالتحديد يستعان بما يسمى بالفروق المقسمة.

نفرض ان الدالة $y = f(x)$ معطاة جدوليا و ان $x_0, x_1, x_2, \cdots$ هي قيم المتغير المستقل وان $y_0, y_1, y_2, \cdots$ هي قيم الدالة المناظرة. حيث الفروق

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \neq 0 , \quad i = 0,1,2,\cdots$$

ليست متساوية في ما بينها.

و العلاقات

$$[x_i , x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (i = 0,1,2,\cdots)$$

تسمى بالفروق المقسمة من الرتبة الاولى فعلى سبيل المثال

$$[x_0 , x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad , \quad [x_1 , x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

و هكذا وبالمثل تعيين الفروق من الرتبة الثانية

$$[x_i , x_{i+1} , x_{i+2}] = \frac{[x_{i+1} , x_{i+2}] - [x_i , x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \quad , \quad (\mathrm{i} = 0,1,2,\cdots)$$

فعلى سبيل المثال

$$[x_0 , x_1 , x_2] = \frac{[x_1 , x_2] - [x_0 , x_1]}{x_2 - x_0}$$

وبوجه عام فان الفروق المقسمة من رتبة n تنتج من الفروق المقسمة من الرتبة $n-1$ بواسطة العلاقة السابقة

$$[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+n}] = \frac{[x_{i+1}, \cdots, x_{i+n}] - [x_i, \cdots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$$

$$(n = 1, 2, \cdots), \quad (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

ونشير الى ان الفروق المقسمة لا تتغير عند تبديل اوضاع المتغيرات اي تكون عبارة عن دوال متماثلة في متغيراتها، فعلى سبيل المثال

$$[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = [x_1, x_0]$$

والفروق المقسمة توضع عادة في جدول على النمط التالي

x	y	First order	Second order	Third order	Fourth order
x_0	y_0				
		$[x_0, x_1]$			
x_1	y_1		$[x_0, x_1, x_2]$		
		$[x_1, x_2]$		$[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	y_2		$[x_1, x_2, x_3]$		$[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
		$[x_2, x_3]$		$[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	y_3		$[x_2, x_3, x_4]$		
		$[x_3, x_4]$			
x_4	y_4				

مثال (٣)

كون الفروق المقسمة للدالة بالجدول التالي

x	0	0.2	0.3	0.4	0.7	0.9
y	132.651	148.877	157.964	166.375	195.112	216.000

الحل

بتطبيق العلاقة (١) على التوالي نحصل على

$$[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{148.877 - 132.651}{0.2 - 0} = 81.13$$

$$[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{157.464 - 148.877}{0.3 - 0.2} = 85.87$$

$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_1, x_2] - [x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{85.8 - 81.13}{0.3 - 0} = 15.8$$

وهكذا يمكن وضع النتائج في الجدول التالي:

x	y	First order	Second order	Third order	Fourth order
0	132.651				
		81.13			
0.2	148.877		15.8		
		85.87		1	
0.3	157.964		16.2		0
		89.79		1	
0.4	166.375		16.7		0
		95.79		1	
0.7	195.112		17.3		
		104.44			
0.9	216.000				

الفصل الثالث

الاستكمال (Interpolation)

الاستكمال هو طريقة تستخدم في التحليل العددي لتقريب الدوال وهدف هذه الطريقة استبدال الدالة المعطاة (المعلوم قيمها عند نقاط معينة) باخري ابسط منها.

للاستكمال تطبيقات عديدة منها تقريب قيمة الدالة عند نقطة بمعلومية قيمتها عند نقاط محددة و ايضا تقريب تكامل ومشتقات الدوال و الحصول علي الحلول العددية للمعادلات التكاملية والتفاضلية. كذلك كثيرا في حالة العمل التجريبي خاصة يكون لدينا معلومات عن الدالة في صورة جدول للقيم العددية لهذه الدالة $f(x)$ المناظرة لقيم معينة للمتغير x (ذات الابعاد المتساوية) وغالبا ما نحتاج قيم الدالة $f(x)$ المعطاة بهذه الصورة عند قيمة للمتغير x بين قيمتين من القيم المعطاة في الجدول وهذه مشكلة الاستكمال المباشر.

ومن اكثر الدوال البسيطة استخداما في الاستكمال هي (كثيرات الحدود ، المثلثية ، الاسية والكسرية).

(١.٣) صياغة مسالة الاستكمال

نفرض ان لدينا الفترة $[a,b]$ و تم تقسيم هذه الفترة الي n من الفترات عند النقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ التي تسمى بعقد الاستكمال و قيم دالة ما $f(x)$ عند هذه النقاط هي

$$f(x_0)=y_0,\ \ f(x_1)=y_1, \cdots f(x_n)=y_n \qquad (1)$$

والمطلوب تكوين $F(x)$ (دالة الاستكمال) التي تأخذ نفس قيم $f(x)$ عند النقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ اي ان

$$F(x_0)=y_0,\ \ F(x_1)=y_1, \cdots F(x_n)=y_n \qquad (2)$$

المسالة بهذه الصياغة العامة يمكن ان يكون لها مجموعة لانهائية من الحلول او لايكون لها اي حل علي الاطلاق. غير ان هذه المسالة تصبح احادية القيمة اذا ما بحثنا بدلا من اي دالة اختيارية $F(x)$ عن كثيرة حدود $P_n(x)$ من درجة لا تتعدي n و تحقق الشرط في المعادلة (٢) اي ان

$$P_n(x_0)=y_0,\ \ P_n(x_1)=y_1, \cdots P_n(x_n)=y_n$$

و العلاقة الاستكمالية الناتجة يستعان بها عادة في الحساب التقريبي لقيم الدالة $f(x)$ عند قيم المتغير x و المختلفة عند عقد الاستكمال.

(٢.٣) قانون نيوتن الاول للاستكمال الامامي

نفرض ان للدالة $y = f(x)$ اعطيت القيم $y_i = f(x_i)$ في قيم المتغير المستقل متساوية البعد $x_i = x_0 + i\,h,\ i = 0,1,2,\cdots,n$ حيث h خطوة الاستكمال والمطلوب تكوين كثيرة حدود $P_n(x)$ من درجة لا تتعدي n والتي تحقق الشروط التالية

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,2,\cdots,n$$

وباستخدام الفروق الامامية وكذلك مؤثر الازاحة

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \ , \quad i = 0,1,2,\cdots$$
$$E y_i = y_{i+1}$$
$$\Delta y_i = E y_i - y_i$$
$$\Delta y_i = (E - 1) y_i$$
$$\Delta \equiv E - 1 \Rightarrow E = 1 + \Delta$$

نفرض ان $x_q = x_0 + qh$ حيث

$$x_0 < qh < x_1 \ , \quad 0 < q < 1$$

بالتالي يكون لدينا

$$y(x_q) = y(x_0 + qh) = E^q y_0$$
$$y(x_q) = (1 + \Delta)^q y_0$$

باستخدام مفكوك نظرية ذات الحدين

$$y(x_q) = \left[1 + q\Delta + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^2 + \cdots\right] y_0$$

و من المعادلة (١)

$$P_n(x_q) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^2 y_0 + \cdots$$

وهذا هو قانون نيوتن للاستكمال الامامي

مثال (١)

كون كثيرة الحدود للبيانات المعطاة بالجدول

x	1	1.5	2.0	2.5
$y(x)$	4.0	18.25	44.0	84.25

ثم احسب قيمة $y(x)$ عند $x = 1.25$.

الحل

نكون جدول الفروق الامامية وكذلك نحسب قيمة q

$$h = x_1 - x_0 \;\Rightarrow\; h = 1.5 - 1.0 = 0.5$$

$$x_0 = 1.0\,,\;\; x_q = 1.25$$

$$x_q = x_0 + qh \;\;\Rightarrow\;\; q = \frac{x_q - x_0}{h} = \frac{1.25 - 1.0}{0.5} = 0.5$$

x	$y(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1.0	4.0			
		14.25		
1.5	18.25		11.5	
		25.75		3.0
2.0	44.0		14.5	
		40.25		
2.5	84.25			

$$y_0 = 4.0\,,\;\; \Delta y_0 = 14.25\;\;,\; \Delta^2 y_0 = 11.5\,,\;\; \Delta^3 y_0 = 3.0$$

$$y(x_q) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^2 y_0 + \cdots$$

$$y(1.25) = 4.0 + (0.5)(14.25) + \frac{(0.5)(-0.5)}{2!}(11.5) + \frac{(0.5)(-0.5)(-1.5)}{3!}(3) = 9.875$$

مثال (٢)

الجدول التالي الذي يعطي قيمة الدالة $y(x) = \sin x$ عند بعض النقاط

x	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\sin x$	0.56464	0.644218	0.717356	0.78332	0.841470

استخدم صيغة الفروق الامامية لتقدير قيمة $\sin x$ عند $x = 0.63$

الحل

x	$y = \sin x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0.6	0.56464				
		0.079576			
0.7	0.644218		−0.006438		
		0.073338		−0.000792	
0.8	0.717356		−0.007167		−0.001452
		0.065971		−0.00066	
0.9	0.783327		−0.007827		
		0.058144			
1	0.841471				

$$x_0 = 0.6\ , \quad h = 0.1, \quad x_q = x_0 + qh\ , \quad x_q = 0.63$$

$$q = \frac{x_q - x_0}{h} = \frac{0.63 - 0.6}{0.1} = 0.3$$

$$y(x_q) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^2 y_0 + \cdots$$

$$y(0.63) = 0.564642 + (0.3)(0.079576) + \frac{(0.3)(-0.7)}{2!}(0.006438)$$
$$+ \frac{(0.3)(-0.7)(-1.7)}{3!}(-0.000729)$$
$$+ \frac{(0.3)(-0.7)(-1.7)(-2.7)}{4!}(0.00006) = 0.584145$$

مثال (٣)

كون كثيرة الحدود للبيانات المعطاة بالجدول تدريب

x	0	1	2	3	4	5
$y(x)$	5.2	8.0	10.4	12.4	14.0	15.2

الحل

بتكوين جدول الفروق

x	$y(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	5.2				
		2.8			
1	8.0		0.4		
		2.4			
2	10.4		–0.4		
		2.0		0	
3	12.4		–0.4		0
		1.6		0	
4	14.0		–0.4		
		1.2			
5	15.2				

واضح ان $x_0 = 0 \ , \ h = 1$

بالاستعانة بعلاقة نيوتن الاستكمالية الاولى نحصل على

$$y = 5.2 + +(2.8)\frac{0.4}{2}x(x-1)$$

او

$$y = 5.2 + 3x - 0.2x^2$$

و هي كثيرة الحدود المطلوبة.

(٣.٣) قانون نيوتن الثاني للاستكمال الخلفي

قانون نيوتن الاول للاستكمال غير مناسب عمليا لاستكمال الدوال قرب نهاية الجدول. في هذه الحالة نستخدم عادة قانون نيوتن الثاني للاستكمال الخلفي و سنقوم باستنتاج هذا القانون

$$\nabla = 1 - E^{-1}$$

$$E = (1-\nabla)^{-1}$$

$$y_q = y(x_q) = y(x_0 + qh)$$

نضع

$$y_q = E^q y_0 = (1-\nabla)^{-q} y_0$$

و باستخدام نظرية ذات الحدين نحصل علي

$$y_q = \left[1 + \frac{q}{1!}\nabla + \frac{q(q+1)}{2!}\nabla^2 + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\nabla^3 + \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{3!}\nabla^4 + \cdots\right] y_0$$

$$y_q = y_0 + q\nabla y_0 + \frac{q(q+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\nabla^3 y_0 + \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{3!}\nabla^4 y_0 + \cdots$$

هذه العلاقة تسمى صيغة نيوتن للاستكمال الخلفي.

مثال (١)

احسب قيمة $y\,(1.457)$ باستخدام البيانات التالية

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$y(x)$	1	1.331	1.728	2.147	2.744	3.375

الحل

$$x_0 = 1.4 \quad x_q = 1.457 \quad h = 0.1$$

$$q = \frac{1.457 - 1.4}{0.1} = 0.57$$

الان نكون جدول الفروق

x	$y(x)$	∇	∇^2	∇^3	∇^4	∇^5
1	1.000					
		0.331				
1.1	1.331		0.066			
		0.397		−0.044		
1.2	1.728		0.022		0.200	
		0.419		0.156		−0.500
1.3	2.147		0.178		−0.300	
		0.597		−0.144		
1.4	2.744		0.034			
		0.631				
1.5	3.375					

$$y_0 = 2.744, \ \nabla y_0 = 0.597, \ \nabla^2 y_0 = 0.178$$

$$\nabla^3 y_0 = 0.156, \ \nabla^4 y_0 = 0.200$$

بالتعويض في صيغة نيوتن للاستكمال نحصل على

$$y(1.457)=2.744+0.57(0.597)+\frac{0.57(1.57)}{2}(0.178)$$
$$+\frac{0.57(1.57)(2.57)}{6}(0.156)+\frac{0.57(1.57)(2.57)(3.57)}{24}(0.2)$$

(٤.٣) الخطأ في صيغتي نيوتن للاستكمال

ان قانون نيوتن الاول (الامامي) للاستكمال والذي يستخدم لاستكمال الدالة $y=f(x)$ في جوار القيمة الابتدائية x_0 هو

$$P_n(x)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\cdots$$
$$+\frac{q(q-1)(q-2)\cdots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

اما قانون نيوتن الثاني (الخلفي) للاستكمال و الذي يستخدم لاستكمال الدوال قرب نهاية الجدول فهو

$$P_n(x)=y_0+q\nabla y_0+\frac{q(q+1)}{2!}\nabla^2 y_0+\cdots$$
$$+\frac{q(q+1)(q+2)\cdots(q+n-1)}{n!}\nabla^n y_0$$

النظرية التالية تحدد الخطأ التقديري (المتوقع) في هاتين الطريقتين، وهي تأخذ في الاعتبار ان حيث $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ حيث $R_n(x)$ هو الجزء الباقي او الخطأ التقديري.

نظرية (١)

الحد الباقي لكثيرة حدود نيوتن الاستكمالية الاولى يتعين من

$$R_n(x)=h^{n+1}\frac{q(q-1)(q-n)}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\zeta)$$

حيث ζ عدد ما وسطي بين القيم $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n,x$ و $q=\dfrac{x-x_0}{h}$.

الحد الباقي لكثيرة حدود نيوتن الاستكمالية الثانية يتعين من

$$R_n(x)=h^{n+1}\frac{q(q+1)(q+n)}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\zeta)$$

حيث ζ عدد ما وسطي بين القيم $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n,x$ و $q=\dfrac{x-x_n}{h}$.

(٥.٣) صيغة ~~بسل~~ للاستكمال المركزي

نعلم مما سبق ان جدول الفروق المركزية يكتب في الصورة

x_m	f_m	δf_m	$\delta^2 f_m$	$\delta^3 f_m$	$\delta^4 f_m$	$\delta^5 f_m$
x_{-2}	f_{-2}					
		$\delta f_{-3/2}$				
x_{-1}	f_{-1}		$\delta^2 f_{-1}$			
		$\delta f_{-1/2}$		$\delta^3 f_{-1/2}$		
x_0	f_0		$\delta^2 f_0$		$\delta^4 f_0$	
		$\delta f_{1/2}$		$\delta^3 f_{1/2}$		$\delta^5 f_{1/2}$
x_1	f_1		$\delta^2 f_1$		$\delta^4 f_1$	
		$\delta f_{3/2}$		$\delta^3 f_{3/2}$		
x_2	f_2		$\delta^2 f_2$			
		$\delta f_{5/2}$				
x_3	f_3					

صيغة بسل للاستكمال المركزي تأخذ الشكل

$$f_s=f_0+B_1\delta f_{1/2}+B_2\left(\delta^2 f_0+\delta^2 f_1\right)+B_3\delta^3 f_{1/2}$$
$$+B_4\left(\delta^4 f_0+\delta^4 f_1\right)+\cdots \qquad (1)$$

حيث تسمى $B_1,B_2,\cdots$ معاملات بسل للاستكمال.

لإيجاد قيم هذه المعاملات نستخدم العلاقات الاتية

$$\delta=E^{1/2}-E^{-1/2}$$

بالضرب في $E^{1/2}$

$$E^{1/2}\delta = E - 1$$
$$E^{1/2}\delta = \Delta$$
$$E\delta^2 = \Delta^2$$
$$\delta^2 = \frac{\Delta^2}{E} = \frac{\Delta^2}{1+\Delta} \quad (\text{Since } E = 1+\Delta)$$

باستخدام مؤثر الازاحة δ العلاقة (١) يمكن كتابتها في الصورة

$$f_s = f_0 + B_1\left(\delta E^{1/2} f_0\right) + B_2\left(\delta^2 + \delta^2 E\right) f_0 + B_3 \delta^3 E^{1/2} f_0$$
$$+ B_4\left(\delta^4 + \delta^4 E\right) f_0 + \cdots$$

و لكن

$$f_s = E^s f_0$$
$$E^s f_0 = \left[1 + B_1 \delta E^{1/2} + B_2\left(\delta^2 + \delta^2 E\right) + B_3 \delta^3 E^{1/2}\right.$$
$$\left. + B_4\left(\delta^4 + \delta^4 E\right) + \cdots\right] f_0$$

بمساواة المؤثرات في الطرفين نحصل على

$$E^s = 1 + B_1 \delta E^{1/2} + B_2\left(\delta^2 + \delta^2 E\right) + B_3 \delta^3 E^{1/2} + B_4\left(\delta^4 + \delta^4 E\right) + \cdots$$
$$(1+\Delta)^s = 1 + B_1 \Delta + B_2\left[\frac{\Delta^2}{1+\Delta} + \Delta^2\right] + B_3 \frac{\Delta^2}{1+\Delta}\Delta$$
$$+ B_4\left[\frac{\Delta^4}{(1+\Delta)^2} + \frac{\Delta^4}{1+\Delta}\right] + \cdots$$
$$1 + \frac{s}{1!}\Delta + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!}\Delta^4 + \cdots$$
$$= 1 + B_1 \Delta + B_2\left\{\Delta^2 + \Delta^2 (1+\Delta)^{-1}\right\} + B_3 \Delta^3 (1+\Delta)^{-1}$$
$$+ B_4\left\{\Delta^4\left[(1+\Delta)^{-2} + (1+\Delta)^{-1}\right]\right\} + \cdots$$

$$=1+B_1\Delta+B_2\Delta^2\left\{1+1-\Delta+\Delta^2-\Delta^3+\cdots\right\}$$
$$+B_3\Delta^3\left\{1-\Delta+\Delta^2-\Delta^3+\cdots\right\}$$
$$+B_4\Delta^4\left\{1-2\Delta+3\Delta^2-4\Delta^3+\cdots+1-\Delta+\Delta^2-\Delta^3+\cdots\right\}+\cdots$$

بمقارنة المعاملات في الطرفين

معامل Δ

$$B_1=s$$

معامل Δ^2

$$2B_2=\frac{s(s-1)}{2}\ \Rightarrow\ B_2=\frac{s(s-1)}{4}$$

معامل Δ^3

$$-B_2+B_3=\frac{s(s-1)(s-1/2)}{6}\ \Rightarrow\ B_3=\frac{s(s-1)(2s-1)}{2(3!)}$$

معامل Δ^4

$$B_2-B_3+2B_4=\frac{s(s-1)(s-1/2)(s-3)}{4!}\ \Rightarrow\ B_4=\frac{(s+1)(s-1)(s-2)}{2(4!)}$$

و هكذا

بالتعويض بقيم هذه المعاملات في الصيغة (١) نحصل علي

$$f_s=f_0+s\delta f_{1/2}+\frac{s(s-1)}{2(2!)}\left(\delta^2 f_0+\delta^2 f_1\right)+\frac{s(s-1)(s-1/2)}{2(3!)}\delta^3 f_{1/2}$$
$$+\frac{(s+1)(s)(s-1)}{2(4!)}\left(\delta^4 f_0+\delta^4 f_1\right)+\cdots$$

و هذه العلاقة تسمي صيغة بسل للاستكمال المركزي

مثال (١)

باستخدام صيغة بسل للاستكمال المركزي احسب قيمة $f(x)$ عند $x=0.36$ من البيانات الاتية.

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(x)$	1.172	1.008	0.878	0.828	0.720	0.692

الحل

$x_0 = 0.3, \; x_s = 0.36, \; h = 0.1$

$$s = \frac{0.36-0.3}{0.1} = 0.6$$

x	$f(x)$	$\delta f_{1/2}$	$\delta^2 f_0$	$\delta^3 f_{-1/2}$	$\delta^4 f_1$
0.1	1.172				
		-0.164			
0.2	1.008		0.034		
		-0.13		0.046	
0.3	0.878		0.08		-0.184
		-0.05		-0.138	
0.4	0.828		-0.058		0.276
		-0.108		0.138	
0.5	0.720		0.08		
		-0.028			
0.6	0.692				

$f_0 = 0.878, \quad \delta f_{1/2} = -0.05, \quad \delta^2 f_0 = 0.08,$

$\delta^2 f_1 = -0.05, \quad \delta^3 f_{1/2} = -0.138$

بالتعويض

$$f(0.36) = 0.878 + 0.6(-0.05) + \frac{(0.6)(-0.4)}{4}(0.08-0.058) + \frac{(0.6)(-0.4)(0.1)}{6}(-0.138) = 0.847232$$

مثال (٣)

كون كثيرة الحدود للبيانات المعطاة بالجدول

تدريب

x	0	1	2	3	4	5
$y(x)$	5.2	8.0	10.4	12.4	14.0	15.2

(٦.٣) صيغة لاجرانج الاستكمالية

غالبية القوانين او الصيغ المستخدمة في الاستكمال تكون مناسبة فقط عندما تكون المسافات بين النقاط $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ متساوية البعد $(x_{i+1} - x_i = h)$ والصيغة الاكثر شمولا والتي تعرف بصيغة لاجرانج الاستكمالية تستخدم لأي مجموعة من النقاط ولا يشترط فيها ان تكون المسافات بين النقاط متساوية.

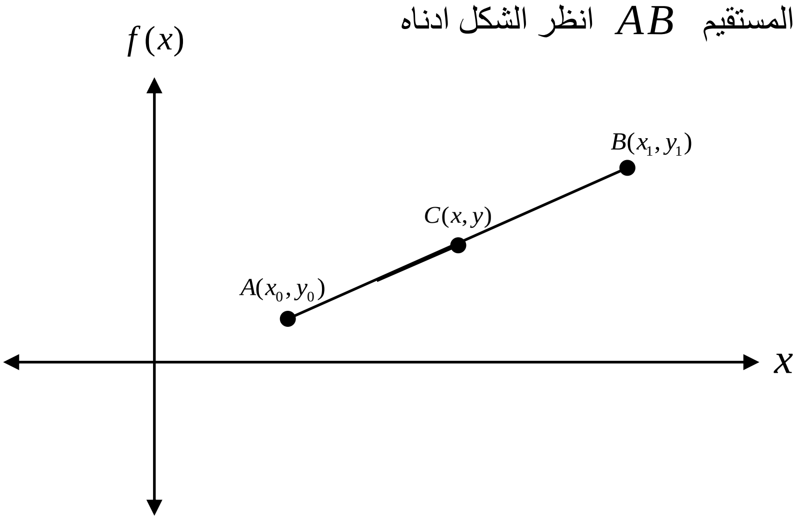
سوف نبدأ بدراسة كثيرة حدود يمر الرسم البياني الخاص بها خلال زوجين من النقاط $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ انظر شكل (١). ان الخط الذي يملا بهاتين النقطتين تمثله كثيرة حدود خطية.

(١.٦.٣) اثبات قانون الاستكمال الخطى

لو كان لدينا الدالة $y = f(x)$ والمعروفة قيمتها عند x_0, x_1 اي ان

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1)$$

فان المنحنى من الدرجة الادنى والذي يمر بالنقطتين $A(x_0, y_0)$ و $B(x_1, y_1)$ هو الخط المستقيم AB انظر الشكل ادناه



شكل (١)

ونستطيع تقدير قيمة الدالة $f(x)$ عند اي نقطة بين هاتين النقطتين (مثل النقطة C) من معرفة معادلة الخط المستقيم AB .

وبما ان النقاط الثلاثة A و B و C تقع على نفس الخط المستقيم فان ميل القطعة AC يساوي ميل القطعة AB اي ان

$$\boxed{\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}$$

ومنها

$$y-y_0=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}(y_1-y_0)$$

اي ان

$$y=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}(y_1-y_0)+y_0$$

$$y=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1+\left(1-\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)y_0$$

توحيد مقام

$$y=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1+\frac{x_1-x}{x_1-x_0}y_0$$

وبالتالي فان

$$y=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

اي ان معادلة الخط المستقيم الذي يصف هذه الدالة هي

$$P(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

لاحظ هنا ان

$$P(x_0)=y_0\ ,\ P(x_1)=y_1$$

ويمكن كتابة المعادلة (١) بالشكل

$$\begin{aligned}P(x)&=L_0(x)y_0+L_1(x)y_1\\&=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)\end{aligned}$$

حيث المعاملات

$$L_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\ ,\ L_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

تسمى معاملات لاجرانج و يرمز لها بصيغتها العامة بالرمز $L_{n,k}(x)$ حيث n يشير الى درجة كثيرة الحدود و k يشير الى رقم المعامل

من الواضح ان

$$L_0(x_0)=1,\ L_0(x_1)=0$$
$$L_1(x_0)=0,\ L_1(x_1)=1$$

مثال (١)

اوجد الدالة الاستكمالية الخطية التي تتوافق مع الدالة $f(x)$ عند النقطتين $(4,2),(1,1)$ ثم اوجد قيمة الدالة عند $x=3$

الحل

بفرض ان $(x_0,y_0)=(4,2),(x_1,y_1)=(1,1)$ فان

$$L_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=\frac{x-1}{4-1}=\frac{1}{3}(x-1)$$
$$L_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{x-4}{1-4}=-\frac{1}{3}(x-4)$$

وحيث ان

$$f(x_0)=y_0=2, f(x_1)=y_1=1$$

فتكون الدالة الاستكمالية الخطية المطلوبة

$$P(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)$$
$$=\frac{1}{3}(x-1)(2)-\frac{1}{3}(x-4)(1)$$
$$=\frac{2}{3}(x-1)-\frac{1}{3}(x-4)$$
$$=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$

وقيمة الدالة عند $x=3$ تتعين من

$$P(3)=\frac{1}{3}(3)+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

(٢.٦.٣) صيغة لاجرانج للاستكمال التربيعي

لنفرض الان الدالة $f(x)$ معرفة عند ثلاث نقاط مختلفة هي

$$(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$$

فان دالة الاستكمال التربيعية يمكن ان تعرف كالتالي

$$\boxed{P(x)=L_0(x)y_0+L_1(x)y_1+L_2(x)y_2} \qquad (1)$$

حيث

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

تسمى (١) صيغة لاجرانج للاستكمال التربيعي.

والدوال

$$L_0(x),L_1(x),L_2(x)$$

تسمى دوال لاجرانج وهي تحقق

$$\underbrace{L_i(x_i)}_{=}=1,\ L_i(x_j)=0, i\neq j,\quad i,j=0,1,2$$

مثال (٢)

كون كثيرة حدود لاجرانج الاستكمالية التربيعية المتوافقة مع الدالة $y=f(x)$ عند النقاط $(0,-1),(1,-1),(2,7)$ ثم اوجد $f(3)$.

الحل

نفرض ان النقاط المعطاة تم جدولتها كالتالي

i	0	1	2
	x_0	x_1	x_2
x_i	0	1	2
	y_0	y_1	y_2
y_i	0	-1	7

$$L_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}=\frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}=-x(x-2)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}=\frac{x}{2}(x-1)$$

فتصبح كثيرة حدود لاجرانج التربيعية كالتالي

$$P_2(x)=L_0(x)y_0+L_1(x)y_1+L_2(x)y_2$$
$$=-\frac{1}{2}(x-1)(x-2)+x(x-2)+\frac{7}{2}x(x-1)$$

$$f(3)=-\frac{1}{2}(3-1)(3-2)+3(3-2)+\frac{7}{2}3(3-1)=23$$

مثال (٣)

اوجد صيغة لاجرانج للاستكمال من الدرجة الثانية من البيانات الاتية

	x_0	x_1	x_2
x	-2	0	1
y	10.75	-1.65	1.45

ثم اوجد $f(0.5)$.

الحل

صيغة لاجرانج للاستكمال من الدرجة الثانية تكون في الصورة

$$f(x)=L_0(x)f_0+L_1(x)f_1+L_2(x)f_2$$
$$=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f_1$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f_2$$
$$=\frac{(x-0)(x-1)}{(-2-0)(-2-1)}(10.75)+\frac{(x+2)(x-1)}{(0+2)(0-1)}(-1.65)$$
$$+\frac{(x+2)(x-0)}{(1+2)(1-0)}(1.45)$$
$$=\frac{1}{6}(x-1)(10.75)+\frac{1}{2}(x+2)(x-1)(1.65)$$
$$+\frac{1}{3}x(x+2)(1.45)$$

$$f(0.5)=\frac{1}{6}(0.5-1)(10.75)+\frac{1}{2}(0.5+2)(0.5-1)(1.65)$$
$$+\frac{1}{3}(0.5)(0.5+2)(1.45)=0.8755$$

(٣.٦.٣) صيغة لاجرانج العامة للاستكمال

قبل البدء في استنتاج صيغة لاجرانج العامة نذكر النظرية التالية

نظرية (٢)

اذا كانت $n\geq 0$, $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$ هي $n+1$ من القيم المختلفة و القيم $y_0,y_1,y_2,\cdots,y_n$ هي $n+1$ من القيم المناظرة لها و لا يشترط ان تكون مختلفة عندئذ فان من بين كل كثيرات الحدود التي تكون درجتها اقل من او تساوي n يوجد كثيرة حدود واحدة $P_n(x)$ تحقق ان

$$P_n(x_i)=y_i\,,i=0,1,2,\cdots,n$$

$f(x_i)$, $f(x_i)$ → الر يعطيه

➢ **الصيغة العامة**

في صيغة لاجرانج العامة نفرض انه في الفترة المغلقة $[a,b]$ لدينا $n+1$ من النقاط $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ ومعلوم لدينا قيم الدالة $y_i = f(x_i)$ عند هذه النقاط والمطلوب تكوين كثيرة الحدود $P_n(x)$ من درجة لا تتعدى n وتحقق الشرط

$$P_n(x_i) = y_i$$

ونحاول اولا ايجاد كثيرة الحدود $L_n(x_i)$ التي تحقق الشرط

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

وتعرف كالتالي

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

ويمكننا الان تعيين كثيرة الحدود $P_n(x)$ التي تحقق الشرط

$$L_i(x_i) = y_i$$

على الصورة

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) y_i = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

وهذه هي علاقة لاجرانج الاستكمالية.

مثال (٣)

استخدم جدول البيانات التالي لإنشاء كثيرة حدود استكمال مناسبة ثم احسب قيمتها عند $x = 5$

i	0	1	2	3	4
x_i	1	2	3	4	6
y_i	1	8	27	64	216

الحل

لدينا $n = 4$ وبالتالي

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}$$

$$=-\frac{1}{30}(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}$$

$$=-\frac{1}{8}(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}$$

$$=-\frac{1}{8}(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}$$

$$=\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-4)(x-6)$$

$$L_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}$$

$$=-\frac{1}{12}(x-1)(x-2)(x-3)(x-6)$$

$$L_4(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

$$=\frac{1}{120}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$P_4(x)=L_0(x)y_0+L_1(x)y_1+L_2(x)y_2+L_3(x)y_3+L_4(x)y_4$$
$$=-\frac{1}{30}(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)(1)$$
$$-\frac{1}{8}(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)(8)$$
$$+\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-4)(x-6)(27)$$
$$-\frac{1}{12}(x-1)(x-2)(x-3)(x-6)(64)$$
$$+\frac{1}{120}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(216)$$

و لإيجاد قيمة كثيرة حدود الاستكمال عند $x=5$ معوض عنها في $P_4(x)$ لتصبح

$$P_4(5)=-\frac{1}{30}(5-2)(5-3)(5-4)(5-6)$$
$$-(5-1)(5-3)(5-4)(5-6)$$
$$+\frac{27}{6}(5-1)(5-2)(5-4)(5-6)$$
$$-\frac{64}{12}(5-1)(5-2)(5-3)(5-6)$$
$$+\frac{216}{120}(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)=125$$

(٤.٦.٣) الخطأ في صيغة لاجرانج

سبق ان درسنا ان قانون لاجرانج الذي يستخدم لاستكمال الدالة $y=f(x)$ عند اي قيمة x يتعين من

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}L_i(x_i)y_i$$

حيث

$$L_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$
$$=\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}$$

النظرية التالية تحدد الخطأ التقديري (المتوقع) في هذه الطريقة

نظرية (٣)

الحد الباقي لكثيرة حدود لاجرانج الاستكمالية يتعين من

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\quad(*)$$

حيث ξ عدد ما وسطى بين القيم $x_0,x_1,\cdots,x_n$ اي ان $x_0\le\xi\le x_n$.

لاحظ انه عند اي نقطة من النقاط $x_0,x_1,\cdots,x_n$ فإن $R_n(x_i)=0$.

مثال (٤)

- احسب الخطأ المتوقع عند استكمال الدالة $f(x)=\sin(\pi x)$ عند النقطة $x=\frac{1}{3}$ باستخدام كثيرة حدود لاجرانج باختيار النقاط $x_0=0,x_1=\frac{1}{6},x_2=\frac{1}{2}$.
- احسب خطأ الاستكمال وذلك عند استكمال الدالة $f(x)=\sin(\pi x)$ عند النقطة $x=\frac{1}{3}$ باستخدام كثيرة لاجرانج باختيار النقاط $x_0=0,x_1=\frac{\pi}{6},x_2=\frac{\pi}{2}$.

الحل

- بالتعويض في (*)

$$R_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(2+1)!}f^{(2+1)}(\xi)$$
$$=\frac{(x-0)(x-1/2)(x-1/6)}{3!}f^{(3)}(\xi)$$

وحيث ان

$$f'(x)=\pi\cos(\pi x),f''(x)=-\pi^2\sin(\pi x),f'''(x)=-\pi^3\cos(\pi x)$$

فان

$$R_2(x)=-\frac{x(x-1/2)(x-1/6)}{6}\pi^3\cos(\pi\xi)$$

ولكن $\left|\cos(\pi\xi)\right|\le 1$ و ان $x=1/3$ وبذلك يكون

$$\left|R_2\left(\frac{1}{3}\right)\right|\le\left|-\frac{(1/3)(1/3-1/2)(1/3-1/6)}{6}\right|\pi^3=0.04791$$

- باستخدام (١) ، (*) نجد ان

$$y_0=\sin 0=0,\ y_1=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ y_2=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$P_2(x)=L_0(x)y_0+L_1(x)y_1+L_2(x)y_2$$

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-1/6)(x-1/2)}{(-1/6)(-1/2)}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{x(x-1/2)}{(1/6)(1/6-1/2)}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{x(x-1/6)}{(1/2)(1/2-1/6)}$$

$$P_2(x)=L_0(x)y_0+L_1(x)y_1+L_2(x)y_2$$
$$=\frac{(x-1/6)(x-1/2)}{(-1/6)(-1/2)}(0)$$

$$+\frac{x(x-1/2)}{(1/6)(1/6-1/2)}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$+\frac{x(x-1/6)}{(1/2)(1/2-1/6)}(1)$$

$$P_2(x)=-9x(x-1/2)+6x(x-1/6)$$

$$|f(1/3)-P_2(1/3)|=\left|\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-P_2(1/3)\right|$$

$$=0.866234-0.83333=0.032903$$

مثال (٥)

اوجد كثيرة حدود لاجرانج والذى يمر منحناها بالنقاط التالية

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	5	7	9

الحل

الصيغة العامة ل كثيرة حدود لاجرانج هي

$$P_3(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)+L_3(x)f(x_3)$$

(لاحظ ان كثيرة حدود لاجرانج من الدرجة الثالثة لان عدد النقاط المعطاة هو اربعة).

حيث

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}$$

$$=-\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}$$

$$=\frac{1}{2}x(x-2)(x-3)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}$$

$$=-\frac{1}{2}x(x-1)(x-3)$$

$$L_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$$

$$=\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$$

وبالتالي فان

$$P_3(x)=-\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)(1)+\frac{1}{2}x(x-2)(x-3)(5)$$
$$-\frac{1}{2}x(x-1)(x-3)(7)+\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)(9)$$

$$P_3(x)=-\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)+\frac{5}{2}x(x-2)(x-3)$$
$$-\frac{7}{2}x(x-1)(x-3)+\frac{9}{6}x(x-1)(x-2)$$

لاحظ ان

$$P_3(0)=-\frac{1}{6}(0-1)(0-2)(0-3)=1=f(0)$$

$$P_3(1)=\frac{5}{2}(1)(1-2)(1-3)=5=f(1)$$

$$P_3(2) = -\frac{7}{2}(2)(2-1)(2-3) = 7 = f(2)$$

$$P_3(3) = \frac{9}{6}(3)(3-1)(3-2) = 9 = f(3)$$

ونستطيع استخدام صيغة كثيرة الحدود اعلاه لتقدير قيمة الدالة عند اي قيمة من قيم المتغير x في الفترة $[0,3]$ فمثلا

$$\begin{aligned}P_3(2.3) = &-\frac{1}{6}(2.3-1)(2.3-2)(2.3-3)\\ &+\frac{5}{2}(2.3)(2.3-2)(2.3-3)\\ &-\frac{7}{2}(2.3)(2.3-1)(2.3-3)\\ &+\frac{9}{6}(2.3)(2.3-1)(2.3-2) = 7.509\end{aligned}$$

مثال (٦)

اوجد كثيرة حدود لاجرانج لتقدير قيمة الدالة $f(x) = \sqrt{x+1}$ في الفترة $[0,3]$ ، استخدم النقاط $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$.

الحل

الصيغة العامة الكثيرة حدود لاجرانج هي

$$P_3(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3)$$

حيث

$$\begin{aligned}L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}\\ &= -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)\end{aligned}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}$$
$$=\frac{1}{2}x(x-2)(x-3)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}$$
$$=-\frac{1}{2}x(x-1)(x-3)$$

$$L_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$$
$$=\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$$

و بالتالي فان

$$P_3(x)=-\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)f(0)+\frac{1}{2}x(x-2)(x-3)f(1)$$
$$-\frac{1}{2}x(x-1)(x-3)f(2)+\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)f(3)$$

$$P_3(x)=-\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)+0.7071x(x-2)(x-3)$$
$$-0.8660x(x-1)(x-3)+\frac{1}{3}x(x-1)(x-2)$$

وتستطيع استخدام كثيرة الحدود هذه لتقدير قيم الدالة $f(x)=\sqrt{1+x}$ في الفترة $[0,3]$ فمثلا القيمة التقريبية ل $\sqrt{2.5}$ هي

$$\sqrt{2.5} \approx P_3(1.5) = -\frac{1}{6}(1.5-1)(1.5-2)(1.5-3)$$
$$+0.7071(1.5)(1.5-2)(1.5-3)$$
$$-0.8660(1.5)(1.5-1)(1.5-3)$$
$$+\frac{1}{3}(1.5)(1.5-1)(1.5-2) = 1.5822$$

مثال (٧)

الجدول التالي لقيم الدالة $y = f(x)$ احسب $f(323.5)$

x	321.0	322.8	324.2	325.0
y	2.50651	2.50893	2.51081	2.5118

الحل

نفرض ان $x = 323.5$ ، $n = 3$ فنحصل من العلاقة (٤) علي

$$P_3(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$
$$= \frac{(323.5-322.8)(323.5-324.2)(323.5-325.0)}{(321-322.8)(321-324.2)(321-325.0)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$
$$= \frac{(323.5-321.0)(323.5-322.8)(323.5-325.0)}{(322.8-321)(322.8-324.2)(322.8-325.0)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$
$$= \frac{(323.5-321.0)(323.5-322.8)(323.5-325.0)}{(324.2-321)(324.2-322.8)(324.2-325.0)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$= \frac{(323.5 - 321.0)(323.5 - 322.8)(323.5 - 324.2)}{(325.0 - 321)(325.0 - 322.8)(325.0 - 324.2)}$$

بالتعويض عن $L_0, L_1, L_2, L_3, y_0, y_1, y_2, y_3$ نحصل علي

$$f(323.5) = -0.07996 + 1.8794 + 1.83897 - 0.43708 = 2.50987$$

الفصل الرابع

التفاضل العدي

عند حل المسائل العملية كثيرا ما يلزم تعيين المشتقات من رتب معينة للدالة $y=f(x)$ المعطاة جدولياً ومن المحتمل ايضا ان تكون عملية تفاضل الدالة $f(x)$ مباشرة عملية معقدة بسبب تعقيد الصيغة التحليلية لها وفي هذه الحالات نلجأ عادة الى التفاضل العددي.

و سوف ندرس مجموعتين من طرق التفاضل تعتمد الاولى منهما على الفروق المحدودة ام الثانية فتعتمد على صيغ الاستكمال بطرق الفروق المحدودة

نفرض ان النقاط $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ متساوية البعد اي ان

$$x_{i+1}-x_i=h,\quad i=0,1,2,\cdots,n-1$$

ونفرض ان الدالة $y=y(x)$ تأخذ القيم التالية

جدولية

$$y_i=y(x_i),\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

(٤-١) تقريب المشتقة الاولي لدالة تعتمد على نقطتين فقط

نأخذ في الاعتبار صيغة تايلور لإيجاد متسلسلة الدالة $f(x)$ عند النقطة $x=a$ وهي بالصورة التالية

f' $\quad f''$

$$f(x)=f(a)+(x-a)f^{(1)}(a)+\frac{1}{2!}(x-a)^2 f^{(2)}(a)$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)$$

و بأخذ $x_i=a$ ، $x=x_i+h$ فتصبح $x-a=x_i+h-x_i=h$ وبالتالي تصبح المتسلسلة (١) كتالي

$$f(x_i+h)=f(x_i)+hf^{(1)}(x_i)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_i)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i)$$

$$+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_i)+\cdots$$

ومنها

$$f(x_i+h)-f(x_i)=hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_i)+\cdots$$

و بالاكتفاء بالحدود حتى الدرجة الثانية من المتسلسلة

$$f(x_i+h)-f(x_i)=hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(\xi),\quad x_i\le\xi\le x_i+h$$

وبالقسمة على h

$$f'(x_i)=\frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h}-\frac{h}{2}f''(\xi),\quad x_i\le\xi\le x_i+h$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$f'(x_i)=F+E_F,$$

$$F=\frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h},E_F=-\frac{h}{2}f''(\xi),\quad x_i\le\xi\le x_i+h$$

تسمى (٣) صيغة الفروق الامامية لحساب المشتقة الاولى عدديا.

و بالعودة لمتسلسلة تايلور للدالة $f(x)$ حول النقطة $x=a$ الممثلة بالمعادلة

و بأخذ $x_i=a$ ، $x=x_i-h$ فتصبح $x-a=x_i-h-x_i=-h$

وبالتالي تصبح المتسلسلة

$$f(x_i-h)=f(x_i)-hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i)-\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_i)+\cdots$$

و بالاكتفاء بالحدود حتى الدرجة الثانية

$$f(x_i-h)-f(x_i)=-hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(\xi),\quad x_i-h\le\xi\le x_i$$

وبالقسمة على $-h$

$$f'(x_i)=\frac{f(x_i)-f(x_i-h)}{h}+\frac{h}{2}f''(\xi),\quad x_i-h\le\xi\le x_i$$

تسمى (٥) صيغة الفروق الخلفية لحساب المشتقة الاولى عدديا و التي يمكن كتابتها على الصورة

$$f'(x_i) = B + E_B,$$
$$B = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}, E_F = -\frac{h}{2} f''(\xi), \quad x_i - h \le \xi \le x_i$$

و تعتبر الصيغتان الامامية و الخلفية من صيغ الفروق ذات النقطتين حيث انها تستخدم النقطة x_i ونقطة تالية او نقطة سابقة.

مثال

اوجد قيمة تقريبية للمشتقة الاولى للدالة $f(x) = \cos(\pi x)$ عند النقطة $x = \pi/4$ باستخدام صيغة الفروق الامامية ثم احسب الخطأ المطلق، و وضح مدى توافقهما (خذ $h = 0.01$).

الحل

صيغة الفروق الامامية تتعين من

$$f'(x_i) = F + E_F$$

σ_F

حيث

$$F = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}, E_F = -\frac{h}{2} f''(\xi), \quad x_i \le \xi \le x_i + h$$

و بالحساب $\cos(\pi/4)$ نجد $\cos(\pi/4 + 0.01)$ ان

$$F = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = \frac{0.700000476 - 0.707106781}{0.01} = 0.71063051$$

حد الخطأ هو

$$|E_F| = \frac{h}{2} f''(\xi) = \frac{0.01}{2} |\cos \xi|$$

الخطأ المطلق

$|\cos \xi| \le 1$

$-1 \le \cos \xi \le 1$

وحيث ان $|\cos \xi| \le 1$ إذن $|E_F| \le 0.005$

كما يمكن تقدير الخطأ بشكل أدق اذا اخذنا في الاعتبار $\frac{\pi}{4} \le \xi \le \frac{\pi}{4} + h$ و خلالها يكون

$$|\cos \xi| \le (0.005)(0.707107)$$

اي ان

$$\left|\cos\xi\right| \le 0.0035355$$

الخطأ العددي هو

$$\left|E\right| = \left|f'(\xi) - \mathrm{F}\right| = \left|-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 0.71063051\right| = 0.003523729$$

ومن الواضح توافق الخطأ العددي و الخطأ المتوقع حتى ٤ ارقام عشرية.

مثال

اوجد قيمة تقريبية للمشتقة الاولي للدالة المعرفة كتالي عند $x = 0.2$ باستخدام صيغتي الفروق الامامية والخلفية احسب الخطأ العدد المطلق و كذا الخطأ المتوقع و وضح مدي توافقهما علما بان $f(x) = x^4$.

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625

الحل

باستخدام صيغة الفروق الامامية نجد ان

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = \frac{0.0081 - 0.0016}{0.1} = 0.065$$

$$f'(0.2) = 0.032 \quad \left|Error\right| = \left|0.065 - 0.032\right| = 0.033$$

كان هذا للصيغة الامامية اما الصيغة الخلفية فتتعين من

$$f'(x_i) = \frac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{h} = \frac{0.0016 - 0.0001}{0.1} = 0.015$$

$$\left|Error\right| = \left|0.032 - 0.015\right| = 0.017$$

تقدير الخطأ في صيغة الفروق الامامية و الخلفية يتعين من

$$\left|\mathrm{Error}\right| = \frac{h}{2}\left|f''(\xi)\right| = \frac{0.1}{2}\left(12\xi^2\right) = 0.6\xi^2$$

وباختيار $\xi = x = 0.2$

$$\left|\mathrm{Error}\right| = 0.6(0.2)^2 = 0.6(0.04) = 0.024$$

(٢-٤) تقريب المشتقة الاولي للدالة تعتمد على ثلاث نقاط

باستخدام متسلسلة تايلور للدالة $f(x)$ حول النقطة $x=a$

$$f(x)=f(a)+(x-a)f^{(1)}(a)+\frac{1}{2!}(x-a)^2 f^{(2)}(a)$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)$$

و بأخذ $x_1=a$ ، $x=x_1+h$ فتصبح $x-a=x_1+h-x_1=h$ وبالتالي تصبح المتسلسلة (١) كالتالي

$$f(x_i+h)=f(x_i)+hf^{(1)}(x_i)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_i)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi_1)\cdots$$

اهمل

و بأخذ $x_1=a$ ، $x=x_1-h$ فتصبح $x-a=x_1-h-x_1=-h$ وبالتالي تصبح المتسلسلة (١) كالتالي

$$f(x_i-h)=f(x_i)-hf^{(1)}(x_i)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_i)-\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi_2)\cdots$$

و لاشتقاق صيغة ذات ثلاث نقاط نستخدم نقطة سابقة ل x_i و نقطة تالية لها و نطرح المعادلة (٢) من (٣) ينتج ان

$$f(x_i+h)-f(x_i-h)=\left[\cancel{f(x_i)}+hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}\cancel{f''(x_i)}+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi_1)\right]$$
$$-\left[\cancel{f(x_i)}-hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}\cancel{f''(x_i)}-\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi_2)\right]$$

اذن

$$f(x_i+h)-f(x_i-h)=2hf'(x_i)+\frac{h^3}{6}\left[\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi_1)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi_2)\right]$$
$$f'(x_i)=\frac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h}-\frac{h^2}{12}\left[\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi_1)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi_2)\right]$$

واذا اخذنا (باستخدام نظرية القيمة المتوسطة)

$$f'''(\xi)=\frac{1}{2}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]$$

فان الصيغة المطلوبة تصبح

$$f'(x_i)=\boxed{\frac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h}}-\frac{h^2}{6}f'''(\xi)$$

تسمي الصيغة (٤) صيغة الفروق المركزية للمشتقة الاولى ويمكن كتابتها علي الصورة

$$f'(x_i)=C+E_C$$

حيث

$$C=\frac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h}\ ,\ E_C=-\frac{h^2}{6}f'''(\xi)$$

مثال

اوجد قيمة تقريبية للمشتقة الاولي للدالة المجدولة كالتالي عند $x=0.2$ باستخدام صيغة الفروق المركزية. احسب الخطأ العددي المطلق وكذا الخطأ المتوقع و وضح مدى توافقهما علما بان $f(x)=x^4$

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625

الحل

$$x_1=0.2, f(x_1+h)=0.0081, f(x_1-h)=0.0081, h=0.1$$

$$f'(x_i)=\frac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h}=\frac{0.0081-0.01}{2(0.1)}=\frac{0.008}{0.2}=0.04$$

$$f(x)=x^4 \Rightarrow f'(x)=4x^3, f_e'(0.2)=4(0.2)^3=0.032$$

اذن خطأ التقريب

$$|\text{Error}|=|f_e'(x_1)-f_a'(x_1)|=|0.04-0.032|=0.08$$

و يكون الخطأ المتوقع في حساب المشتقة الاولى

$$f''(x)=12x^2\,,\ f'''(x)=24x$$

$$|R|=\frac{h^2}{6}|f'''(\xi)|=\frac{(0.1)^2}{6}(24\xi)=(0.01)(4\xi)\le(0.04)(0.1)=0.004$$

المشتقة الثانية لدالة تعتمد على ثلاث نقاط

لحساب تقريب للمشتقة الثانية نجمع المعادلتين (٢) ، (٤) نحصل على

$$\begin{aligned}&f(x_i+h)+f(x_i-h)\\&=\left[f(x_i)+hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_i)+\cdots\right]\\&+\left[f(x_i)-hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i)-\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_i)+\cdots\right]\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}f(x_i+h)+f(x_i-h)&=2f(x_i)+h^2f''(x_i)\\&+\frac{2h^4}{4!}f^{(4)}(x_i)+\frac{2h^6}{6!}f^{(4)}(x_i)+\cdots\end{aligned}$$

و بالاكتفاء بالحدود حتى الدرجة الرابعة من المتسلسلة

$$f(x_i+h)+f(x_i-h)=2f(x_i)+h^2f''(x_i)+\frac{2h^4}{4!}f^{(4)}(\xi)$$

$$x_i-h\le\xi\le x_i+h$$

و بالقسمة علي h^2

$$f''(x_i)=\frac{f(x_i+h)-2f(x_i)+f(x_i-h)}{h^2}-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$$

$$x_i-h\le\xi\le x_i+h$$

و هي تقريب للمشتقة الثانية باستخدام صيغ الفروق

مثال

اوجد قيمة تقريبية للمشتقة الثانية للدالة المجدولة كالتالي عند $x = 0.2$. باستخدام صيغة فروق مناسبة احسب الخطأ العددي المطلق وكذا الخطأ المتوقع و وضح مدى توافقهما علما بان

$$f(x) = x^4$$

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625

الحل

صيغة الفروق للمشتقة الثانية تتعين من

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

$$x_i - h \le \xi \le x_i + h$$

$$f''(0.2) = \frac{0.0081 - 2(0.0016) + 0.0001}{(0.1)^2} = 0.5$$

$$f''(x) = 12x^2, \; f_e''(0.2) = 12(0.2) = 0.48$$

اذن خطأ التقريب

$$|\text{Error}| = |f_e''(x_1) - f_a''(x)| = |0.48 - 0.5| = 0.02$$

و يكون الخطأ المتوقع في حساب المشتقة الثانية

$$|R| = \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi) = \frac{(0.1)^2}{12}(24) = 0.02$$

تقريب المشتقات كدالة باشتقاق صيغ الاستكمال

نفرض ان لدينا الدالة $y = f(x)$ المعطاة في النقاط متساوية البعد $x_i, \; i = 0, 1, 2, \cdots n$ في الفترة المغلقة $[a, b]$ بواسطة القيم $y_i = f(x_i)$

لتعيين المشتقات $y' = f'(x)$ ، $y'' = f''(x)$ الى اخره في الفترة $[a, b]$ نستبدل الدالة $y = f(x)$ بالتقريب بكثيرة الحدود الإستكمالية المكونة لمجموعة النقاط $x_0, x_1, \cdots, x_k \; (k \le n)$ و يمكن استخدام اي من صيغ الإستكمالية التي درست في الفصل الخامس و سوف ندرس احدى هذه الصيغ كنموذج

طريقة نيوتن

لدينا

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots$$

$$q = \frac{x - x_0}{h},\ h = x_{i+1} - x_i,\ i = 0,1,2,\cdots$$

و بإجراء عملية ضرب الاقواس المحتوية علي q نحصل على

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24}\Delta^4 y_0 + \cdots$$

وحيث ان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dy}{dq}$$

فان

$$\boxed{y'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{4q^3 - 9q^2 + 11q - 3}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots\right]}$$

وبالمثل و حيث ان

$$y''(x) = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dy'}{dq}$$

$$y''(x)=\frac{1}{h^2}\Big[\Delta^2 y_0+(q-1)\Delta^3 y_0$$
$$+\frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0+\cdots\Big]$$

و بالطريقة نفسها يمكن اذا لزم الامر حساب مشتقات الدالة $y(x)$ من اي رتبة و نشير الى انه عند تعيين المشتقات $y'(x),y''(x),\cdots$ في نقطة مثبتة x يجب ان نأخذ x_0 بأقرب قيمة جدولية من قيم المتغير المستقل للدالة $y(x)$

ويطلب احيانا تعيين مشتقات الدالة $y(x)$ في النقاط الاساسية الجدولية x_i و في هذه الحالة تكون علاقات التفاضل العددي اكثر بساطة وحيث ان كل قيمة جدولية يمكن اعتبارها بمثابة القيم الابتدائية نضع $x=x_0,q=0$ عندئذ نحصل على

$$y'(x)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0-\frac{1}{4}\Delta^4 y_0+\frac{1}{5}\Delta^5 y+\cdots\right]$$

$$y''(x)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0-\frac{5}{6}\Delta^5 y_0+\cdots\right]$$

مثال

اوجد قيمة تقريبية للمشتقة الاولي للدالة المجدولة كالتالي عند $x=0.5$ باستخدام صيغة نيوتن

x	0.1	0.2	0.3	0.4
y	0.01	0.04	0.09	0.16

الحل

نكون جدول الفروق كالتالي

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0.1	0.01			
		0.03		
0.2	0.04		0.02	
		0.05		0
0.3	0.09		0.02	
		0.07		
0.4	0.16			

حيث ان النقطة المطلوب حساب التفاضل العددي عندها هي $x = x_0 = 0.1$. اذن علاقة نيوتن الاولي سوف تكون مناسبة وبالتالي فان

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y}{5} + \cdots\right]$$

وبالتعويض من الجدول نجد ان

$$f'(x) = \frac{1}{0.1}\left(0.03 - \frac{0.02}{2} + \frac{0}{3}\right) = 10(0.02) = 0.2$$

مثال

اوجد قيمة تقريبية للمشتقة الاولى $f'(0.15)$ و الثانية $f''(0.22)$ للدالة في المثال السابق باستخدام صيغة نيوتن

الحل

نستخدم جدول الفروق السابق ونظرا لان قيم المتغير المستقل المطلوب حساب المشتقات عندها ليست ضمن نقاط الاستكمال في سوف نستخدم الصيغ الاساسية (٢) ، (٣) فتكون المشتقة الاولي كالتالي

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \cdots\right]$$

حيث

$$q=\frac{x-x_0}{h}=\frac{0.15-0.1}{0.1}=0.5$$

عندئذ يكون

$$f'(0.15)=\frac{1}{0.1}\left[0.03+\frac{2(0.5)-1}{2}(0.02)+0\right]=\frac{0.03}{0.1}=0.3$$

اما المشتقة الثانية فتكون كالتالي

$$f''(x)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0+(q-1)\Delta^3 y_0+\cdots\right]$$

$$q=\frac{x-x_0}{h}=\frac{0.22-0.1}{0.1}=\frac{0.12}{0.1}=1.2$$

$$f''(0.22)=\frac{1}{(0.1)^2}\left[(0.02)+(1.2-1)(0)\right]$$

$$=\frac{1}{(0.1)^2}(0.02)=2$$

مثال

اوجد القيمة التقريبية للتفاضل الاول و الثاني و الثالث للدالة $f(x)$ عند النقطة $x=3$ اذا اعطيت البيانات الاتية

x	3	3.2	3.4	3.6	3.8	4
$f(x)$	-14	-10.032	-5.296	0.256	6.672	14

الحل

نكون جدول الفروق الامامية التالي

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
3	-14					
		3.968				
3.2	-10.032		0.768			
		4.736		0.048		
3.4	-5.296		0.816		0	
		5.552		0.048		0
3.6	0.256		0.814		0	
		6.416		0.048		
3.8	6.672		0.912			
		7.328				
4	14					

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \cdots\right]$$

$$f'(3) = \frac{1}{0.2}\left(3.986 - \frac{0.768}{2} + \frac{0.048}{3} + 0 + 0\right) = 18$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \cdots\right]$$

$$f''(3) = \frac{1}{(0.2)^2}\left[(0.768) - 0.048 + 0 + 0\right] = 18$$

$$f'''(x_0) = \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \cdots\right]$$

$$f'''(x_0) = \frac{1}{(0.2)^3}\left[0.048 - 0 + 0\right] = 6$$

مثال

استخدام البيانات في الجدول الاتي لحساب قيمة المشتقة الاولى عند $x = 1.7$ مستخدما صيغة نيوتن

x	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3	2.5
$f(x)$	4.482	5.474	6.686	8.166	8.974	12.182

الحل

نكون جدول الفروق

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
1.5	4.482					
		0.992				
1.7	5.474		0.220			
		1.212		0.048		
1.9	6.686		0.268		0.012	
		1.48		0.06		0
2.1	8.165		0328		0.012	
		1.808		0.072		
2.3	8.974		0.4			
		2.208				
2.5	12.182					

$x_1 = 1.7 \,,\, h = 0.2$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \cdots\right]$$

$$f'(1.7) = \frac{1}{0.2}\left(1.212 - \frac{0.268}{2} + \frac{0.06}{3} - \frac{0.012}{4}\right) = 6.845$$

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \cdots\right]$$

$$f''(1.7)=\frac{1}{(0.2)^2}\left[(0.268)-0.06+\frac{11}{12}(0.012)\right]$$
$$=8.475$$

و اذا كانت $P_k(x)$ هي كثيرة حدود نيوتن الإستكمالية المحتوية على الفروق

$$\Delta y_0,\ \Delta^2 y_0,\cdots,\ \Delta^k y_0$$

وكان

$$R_k(x)=y(x)-P_k(x)$$

هو الخطأ المناظر فان الخطأ في تعيين المشتقة هو

$$R_k'(x)=y'(x)-P_k'(x)$$

نعلم ان الحد الباقي ل كثيرة حدود نيوتن الاستكمالية

$$R_k(x)=h^{k+1}\frac{q(q-1)(q-2)\cdots(q-k)}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi)$$

$$\therefore R_k'(x)=\frac{dR_k(x)}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}$$
$$=\frac{h^k}{(k+1)!}\left\{y^{(k+1)}(\xi)\frac{d}{dq}\left[q(q-1)(q-2)\cdots(q-k)\right]\right.$$
$$\left.+\left[q(q-1)(q-2)\cdots(q-k)\right]\frac{d}{dq}\left[y^{(k+1)}(\xi)\right]\right\}$$

مثال

x	4	6	8	10
$f(x)$	1	3	8	20

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
4	1			
		2		
6	3		3	
		5		4
8	8		7	
		12		
10	20			

حيث النقطة $x = 4$ نقطة من نقاط الجدول بأخذ

$$x_0 = 4 , q = 0 , h = 2$$

$$y'(x_q) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \cdots\right]$$

$$y'(4) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{11}{12}$$

$$y''(4) = \frac{1}{4}(3-4) = -\frac{1}{4}$$

$$y'''(4) = \frac{1}{8}(4) = \frac{1}{2}$$

النقطة $x = 4.5$ ليست من نقاط الجدول ولكن اقرب نقطة لها بالجدول هي $x = 4$

$$q = \frac{x_q - x_0}{h} = \frac{4.5-4}{2} = \frac{1}{4}$$

$$y'(x_q) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \cdots\right]$$

$$y'(4.5)=\frac{1}{2}\left[2+\frac{2\left(1/4\right)-1}{2}\left(3\right)+\frac{3\left(1/4\right)^{2}-6\left(1/4\right)+2}{6}\left(4\right)\right]=\frac{41}{48}$$

وكذلك $y''(4.5)=0, y'''(4.5)=\frac{1}{8}\left(4\right)=\frac{1}{2}$

الفصل الخامس

التكامل العددي

التكامل العددي يستخدم لحساب التكاملات التي يصعب حسابها بالطرق العادية مثل التكاملات

$$\int_0^1 xe^{x^3}dx \, , \int_0^1 xe^{x^4}dx \, , \int_0^1 xe^{x^5}dx$$

التي لا يمكن ايجادها بالطرق العادية للتكامل ولحساب التكامل

$$\int_a^b ydx$$

حيث الدالة تحت علامة التكامل هي $y = f(x)$ معطاة في صورة جدول بالقيم

$$[x_i, y_i], i = 1, 2, \cdots, n, \quad a = x_0, b = x_n$$

و في طرق التكامل العددي نقرب الدالة $f(x)$ على صورة كثيرة حدود بإحدى الطرق التقريب ثم نجري عملية التكامل على كثيرة الحدود بين الحدين a, b.

سوف نستنتج معادلة تربيعية لتقريب التكامل.

(٥ ـ ١) المعادلة التربيعية العامة

في هذا الفصل سوف نستنتج معادلة تربيعية عامة عند مجموعة من النقاط متساوية البعد

نفرض ان $I = \int_a^b ydx$ حيث $y = f(x)$ الدالة تحت علامة التكامل تأخذ القيم $y_0, y_1, \cdots, y_n$ و التي تناظر القيم $x_0, x_1, \cdots, x_n$ على الترتيب. نفرض اننا قسمنا الفترة $[a,b]$ الي n من الفترات الصغيرة التي طول كل منها h

لذلك فان

$$a = x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + 2h, \cdots, x_n = x_0 + nh = b$$

$$I = \int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx$$

و باعتبار ان $P=\dfrac{x-x_0}{h}$ فإن $x=x_0+Ph$

و بالتعويض في التكامل السابق وتحويل التكامل بدلالة P بدلا من x

$$I=h\int_0^n f\left(x_0+Ph\right)dP=h\int_0^n y_P\,dP$$

ثم التعويض عن y_P بكثيرة حدود نيوتن الاستكمالية الاولى نحصل على

$$I=h\int_0^n\left[y_0+P\Delta y_0+\frac{P\left(P-1\right)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{P\left(P-1\right)\left(P-2\right)}{3!}\Delta^3 y_0\right.$$
$$\left.+\frac{P\left(P-1\right)\left(P-2\right)\left(P-3\right)}{4!}\Delta^4 y_0+\cdots\right]dP$$

ثم بمكاملة حد بحد نحصل على

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f\left(x\right)dx=h\left[ny_0+\frac{n^2}{2}\Delta y_0+\frac{1}{2}\left\{\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}\right\}\Delta^2 y_0\right.$$
$$+\frac{1}{6}\left\{\frac{n^4}{4}-n^3+n^2\right\}\Delta^3 y_0$$
$$\left.+\frac{1}{24}\left\{\frac{n^5}{5}-\frac{3n^4}{2}+\frac{11n^3}{3}-\frac{3n^2}{1}\right\}\Delta^4 y_0\right]$$

المعادلة (١) هي معادلة نيوتن ـ كوتس التربيعية

(٢ . ٥) طريقة شبه المنحرف

بوضع $n=1$ في المعادلة (١) مع اهمال الحدود التي تحتوي علي فروق الرتبة الثانية و الثالثة و هكذا نحصل على

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f\left(x\right)dx=h\left[y_0+\frac{1}{2}\Delta y_0\right]=h\left[y_0+\frac{1}{2}\left(y_1-y_0\right)\right]$$
$$=\frac{h}{2}\left[y_0+y_1\right]$$

بالمثل

$$\int_{x_0+h}^{x_0+2h} f(x)dx = \frac{h}{2}[y_1 + y_2]$$

$$\int_{x_0+2h}^{x_0+3h} f(x)dx = \frac{h}{2}[y_2 + y_3]$$

وهكذا

....

$$\int_{x_0+(n-1)h}^{x_0+nh} f(x)dx = \frac{h}{2}[y_{n-1} + y_n]$$

ثم بجمع ال n التكامل السابقة نحصل على

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx + \int_{x_0+h}^{x_0+2h} f(x)dx + \cdots + \int_{x_0+(n-1)h}^{x_0+nh} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{2}\left[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})\right]$$

هذه القاعدة تسمى قاعده شبه المنحرف.

مثال

استخدم طريقة شبه المنحرف في ايجاد قيمة التكامل المحدود

$$\int_4^{5.2} \ln x \, , \quad h = 0.2$$

الحل

نقسم مدي التكامل الى 6 اقسام متساوية طول كلا منها 0.2 ثم نحسب قيم الدالة $y = \ln x$ عند النقاط

$$x_0 = 4 \, , \, x_1 = 4.2 \, , \, x_2 = 4.4, \cdots, x_6 = 5.2$$

فنحصل على الجدول التالي

x	$\ln x$
4	1.386294
4.2	1.435085
4.4	1.481604
4.6	1.526056
4.8	1.568620
5	1.609435
5.2	1.648659

و يصبح التكامل على الصورة

$$\int_4^{5.2} \ln x dx = \frac{0.2}{2}\Big[\big(1.386294+1.648659\big)+2\big(1.435085+1.481604$$
$$+1.526056+1.568620+1.609438\big)\Big]$$
$$=\big(0.1\big)\Big[3.034953+2\big(7.620803\big)\Big]=1.8276559$$

علما بان القيمة المضبوطة لهذا التكامل تساوي $\int_4^{5.2} \ln x \, dx = 1.827847$

(٥ ـ ٣) علاقة الثلث لسيمبسون

بوضع $n = 2$ في المعادلة (١) مع اهمال الحدود التي تشتمل علي فروق الرتبة الثالثة و التي اعلى منها نحصل على

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx = h\left[2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-2\right)\Delta^2 y_0\right]$$
$$= h\left[2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right]$$
$$= \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]$$

بالمثل

$$\int_{x_0+2h}^{x_0+4h} f(x)dx = \frac{h}{3}[y_2 + 4y_3 + y_4]$$

$$\int_{x_0+2h}^{x_0+4h} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[y_4 + 4y_5 + y_6\right]$$

وهكذا

……………………………

$$\int_{x_0+(n-2)h}^{x_0+nh} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right]$$

حيث n عدد زوجي

ثم بجمع كل التكاملات السابقة نحصل على

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx + \int_{x_0+2h}^{x_0+4h} f(x)dx + \cdots + \int_{x_0+(n-2)h}^{x_0+nh} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{3}\Big[\left(y_0 + y_n\right) + 4\left(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}\right)$$

$$+ 2\left(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}\right)\Big]$$

تسمى هذه العلاقة علاقة الثلث ل سمبسون

مثال

بواسطة العلاقة الثلث لسمبسون احسب قيمة التكامل

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}, \quad n = 10$$

الحل

$$n = 2m = 10, f(x) = \frac{1}{1+x}, h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$$

n	x_n	f_{2m-1}	f_{2m}
0	0		
1	0.1	$f_1 = 0.90909$	
2	0.2		$f_2 = 0.83333$
3	0.3	$f_3 = 0.76923$	
4	0.4		$f_4 = 0.71429$
5	0.5	$f_5 = 0.66667$	
6	0.6		$f_6 = 0.62500$
7	0.7	$f_7 = 0.58824$	
8	0.8		$f_8 = 0.55556$
9	0.9	$f_9 = 0.52632$	
10	1.0		
$\sum$		$\sigma_1 = 3.45955$	$\sigma_2 = 2.72818$

$$\sigma_0 = f_0 + f_{10} = 1.00000 + 0.00005 = 1.50000$$

$$I = \frac{h}{3}\left(\sigma_0 + 4\sigma_1 + 2\sigma_2\right)$$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{0.1}{3}\left[1.50000 + 4\left(3.45955\right) + 2\left(2.7218\right)\right] = 0.69317$$

(٥ ـ ٤) علاقة الثلاث اثمان ل سيمبسون

بوضع $n = 3$ في المعادلة (١) مع اهمال الحدود التي تحتوي على الفروق من الرتبة الرابعة والاعلى منها نحصل على

$$\int_{x_0}^{x_0+3h} f(x)dx = h\left[3y_0 + \frac{9}{2}\Delta y_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2}\right)\Delta^2 y_0 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6}\left(\frac{81}{4} - 27 + 9\right)\Delta^3 y_0\right]$$

$$= h\left[3y_0 + \frac{9}{2}(y_1 - y_0) + \frac{9}{4}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right.$$
$$\left. + \frac{3}{8}(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)\right]$$
$$= \frac{3h}{8}[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3]$$

بالمثل

$$\int_{x_0+3h}^{x_0+6h} f(x)dx = \frac{3h}{8}[y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6]$$

....

$$\int_{x_0+(n-3)h}^{x_0+nh} f(x)dx = \frac{3h}{8}[y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n]$$

حيث n يقبل القسمة علي 3

ثم بجمع التكاملات السابقة نحصل على

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx = \frac{3h}{8}\left[(y_0 + y_n)\right.$$
$$+ 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + y_7 + y_8 + \cdots + y_{n-1})$$
$$\left. + 2(y_3 + y_6 + y_9 + \cdots + y_{n-3})\right]$$

مثال

احسب قيمة التكامل باستخدام علاقة الثلاث اثمان ل سيمبسون

$$(1)\int_1^2 (x^3 + 1)dx \qquad\qquad (2)\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\, dx$$

الحل

باختيار $n = 3$ فيكون

$$\int_1^2 (x^3 + 1)dx = \frac{3h}{8}[f(a) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(b)]$$

$$h=\frac{b-a}{3}=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3},$$
$$x_0=a=1,$$
$$x_1=a+h=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3},$$
$$x_2=a+2h=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3},$$
$$x_3=b=2$$

بالتالي

$$\int_1^2\left(x^3+1\right)dx=\frac{3h}{8}\left[f(1)+3f(\frac{4}{3})+3f(\frac{5}{3})+f(2)\right]=4.75$$

باختيار $n=3$ فيكون

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin x}\,dx=\frac{3h}{8}\left[f(a)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(b)\right]$$

$$h=\frac{b-a}{3}=\frac{\pi/2-0}{3}=\frac{\pi}{6},$$
$$x_0=a=0,$$
$$x_1=a+h=0+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6},$$
$$x_2=a+2h=0+\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3},$$
$$x_3=b=\frac{\pi}{2}$$

بالتالي

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin x}\,dx=\frac{\pi}{16}\left[f(0)+3f(\frac{\pi}{6})+3f(\frac{\pi}{3})+f(\frac{\pi}{2})\right]$$
$$=\frac{\pi}{16}\left[0+2.121312+2.79181+1\right]=1.16104$$

(٥ - ٥) الخطأ في علاقة شبه المنحرف

بفك الدالة $y = f(x)$ بجوار النقطة $x = x_0$ باستخدام مفكوك تايلور نحصل على

$$y = y_0 + (x - x_0)y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y_0'' + \cdots$$

حيث

$$y_0'[y'(x)]\Big|_{x=x_0} \ , \ y_0'' = [y''(x)]\Big|_{x=x_0}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} y\,dx = \int_{x_0}^{x_0+h}\left[y_0 + (x - x_0)y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y_0'' + \cdots\right]dx$$

$$= hy_0 + \frac{h^2}{2!}y_0' + \frac{h^3}{3!}y_0'' + \cdots$$

و الان بتطبيق قاعدة شبه المنحرف في الفترة $[x_0, x_1]$ نحصل على

$$A_1 = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

بوضع $y = y_1$ ، $x - x_0 = h$ في المعادلة (١) نحصل علي

$$y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \cdots$$

من المعادلتين (٣) ، (٤) نحصل على

$$A_1 = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \cdots\right]$$

$$= hy_0 + \frac{h}{2}y_0' + \frac{h^2}{2(2!)}y_0'' + \cdots$$

بالتعويض من(٢)في (٥) نحصل على الخطأ في الفترة $[x_0, x_1]$ كالتالي

$$\int_{x_0}^{x_1} ydx - A_1 = \left[\frac{1}{3!} - \frac{1}{2(2!)}\right] h^3 y_0'' + \cdots = -\frac{h^3}{12} y_0''$$

وذلك بسبب اهمال باقي الحدود.

بالمثل الخطأ في الفترة $\left[x_1, x_2\right]$ يكون $-\frac{h^2}{12} y_1''$ وهكذا و الخطأ في الفترة $\left[x_{n-1}, x_n\right]$ يكون $-\frac{h^2}{12} y_{n-1}''$ ولذلك فان الخطأ الكلي يكون عبارة عن مجموع الاخطاء على الفترات الجزئية

$$E = -\frac{h^3}{12}\left[y_0'' + y_1'' + \cdots + y_{n-1}''\right]$$

و بفرض ان $y''(\xi)$ ، $a < \xi < b$ هي اكبر ما في القيم

$$|y_0''|, |y_1''|, \cdots, |y_{n-1}''|$$

فإن

$$E < -\frac{nh^3}{12} y''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} y''(\xi)$$

الخطأ في طريقة شبه المنحرف هو من الرتبة h^2 .

(٥ ـ ٦) الخطأ في طريقة الثلث ل سمبسون

بفك الدالة $y = f(x)$ حول النقطة $x = x_0$ باستخدام مفكوك تايلور نحصل على

$$y = y_0 + (x - x_0) y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y_0'' + \cdots$$

$$\int_{x_0}^{x_2} ydx = \int_{x_0}^{x_0+2h} \left[y_0 + (x - x_0) y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y_0'' + \cdots \right] dx$$

$$= 2hy_0 + 2h^2 y_0' + \frac{8h^3}{3!} y_0'' + \frac{16h^4}{4!} y_0''' + \frac{32h^4}{5!} y_0^{(iv)} + \cdots$$

و الان بتطبيق قاعدة الثلث ل سمبسون في الفترة $\left[x_0, x_2\right]$ نحصل على

$$A_1 = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

بوضع $y = y_1$ ، $x - x_0 = h$ في المعادلة (١) نحصل علي

$$y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \frac{h^3}{3!}y_0''' + \cdots$$

من المعادلتين (٣) ، (٤) نحصل على

$$A_1 = \frac{h}{3}\left[2hy_0 + 2h^2 y_0' + \frac{4h^3}{3}y_0'' + \frac{2h^4}{3}y_0''' + \frac{5h^5}{18}y_0^{iv} + \cdots\right]$$

بالتعويض من(٢)في (٥) نحصل على الخطأ في الفترة $\left[x_0, x_2\right]$ كالتالي

$$\int_{x_0}^{x_2} y\,dx - A_1 = \left[\frac{4}{15} - \frac{5}{18}\right]h^5 y_0^{iv} + \cdots$$

و بالتالي يمكن القول ان الخطأ على الفترة $\left[x_0, x_2\right]$ يساوي $-\frac{h^5}{90}y_0^{iv}$

بالمثل الخطأ على الفترة $\left[x_2, x_4\right]$ يساوي $-\frac{h^5}{90}y_2^{iv}$ وهكذا وبالتالي يكون الخطأ الكلي هو مجموع الاخطاء على الفترات الصغيرة يعني

$$E = -\frac{h^5}{90}\left[y_0^{iv} + y_2^{iv} + y_4^{iv} + \cdots + y_{n-2}^{iv}\right]$$

بفرض ان $y^{iv}\left(\xi\right)$ هي اكبر قيمة من بين القيم $\left|y_0^{iv}\right|, \left|y_2^{iv}\right|, \left|y_4^{iv}\right|, \cdots, \left|y_{n-2}^{iv}\right|$ فان

$$E < -\frac{h^5}{90}y^{iv}\left(\xi\right) = -\frac{(b-a)h^4}{180}y^{iv}\left(\xi\right)$$

وبالتالي يمكن القول بان علاقة الثلث ل سمبسون تحتوي على خطأ من رتبة h^4

(٥ ـ ٧) الخطأ في علاقة الثلاث اثمان ل سيمبسون

بعمل الحسابات اللازمة كما في علاقة الثلث لـ سمبسون يمكن الوصول الى ان الخطأ في علاقة الثلاث اثمان ل سمبسون يساوي $-\frac{3h^5}{80}y_0^{iv}$ في الفترة $[x_0, x_3]$

مثال

احسب قيمة التكامل $\int_0^{10}\frac{dx}{1+x^2}$ باستخدام

1. علاقة شبه المنحرف
2. علاقة الثلث ل سيمبسون
3. علاقة الثلاث اثمان ل سمبسون

الحل

بأخذ $h = 1$ يكون $n = 10$ ثم بحساب قيمة الدالة $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ عند كل نقطة من نقاط التقسيم نحصل على الجدول التالي

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	1	0.5	0.2	0.1	0.0588	0.0384	0.027	0.02

x	8	9	10
y	0.0153	0.0121	0.009

باستخدام علاقة شبه المنحرف نحصل على

$$\int_0^{10}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{h}{2}\left[\left(y_0 + y_{10}\right) + 2\left(y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 + 9.9009990\times 10^{-3}\right) + 2\left(0.5 + 0.2 + 0.1 + 0.0588235\right.\right.$$

$$\left.\left. + 0.0384615 + 0.027027 + 0.02 + 0.0153846 + 0.0121951\right)\right]$$

$$= 1.4768422$$

بواسطة علاقة الثلث ل سيمبسون

$$\int_0^{10} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{h}{3}\Big[\left(y_0 + y_{10}\right) + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9\right)$$

$$+ 2\left(y_2 + y_4 + y_6 + y_8\right)\Big]$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\left(1 + 9.9009990\times 10^{-3}\right) + 4\left(0.5 + 0.1 + 0.0384615 + 0.02 + 0.0121951\right)$$

$$+ 2\left(0.2 + 0.0588235 + 0.027027 + 0.0153846\right)\Big]$$

$$= 1.4316659$$

بواسطة علاقة الثلاث اثمان ل سيمبسون نحصل على

$$\int_0^{10} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{8h}{3}\Big[\left(y_0 + y_{10}\right) + 3\left(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + y_7 + y_8\right)$$

$$+ 2\left(y_3 + y_6 + y_9\right)\Big]$$

$$= \frac{8}{3}\Big[\left(1 + 9.9009990\times 10^{-3}\right) + 3\left(0.5 + 0.2 + 0.0588235\right.$$

$$\left. + 0.0384615 + 0.02 + 0.0153846\right) + 2\left(0.1 + 0.027027 + 0.0121951\right)\Big]$$

$$= 1.4198828$$

ملاحظات

١. في علاقة شبه المنحرف الدالة $f(x)$ تكون دالة خطية في الصورة $f(x) = ax + b$ وهي ابسط علاقة و اقلها دقة

٢. علاقة الثلث ل سيمبسون $f(x)$ تكون كثيرة حدود من الدرجة الثانية يعني

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

و في هذه الطريقة عدد التقسيمات n لابد ان يكون عدد زوجي.

٣. في علاقة الثلاث اثمان ل سمبسون تكون $f(x)$ هي كثيرة حدود من الدرجة الثالثة في x يعني

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

و عند تطبيق هذه الصيغة لابد ان يكون عدد التقسيمات n يقبل القسمة على 3.