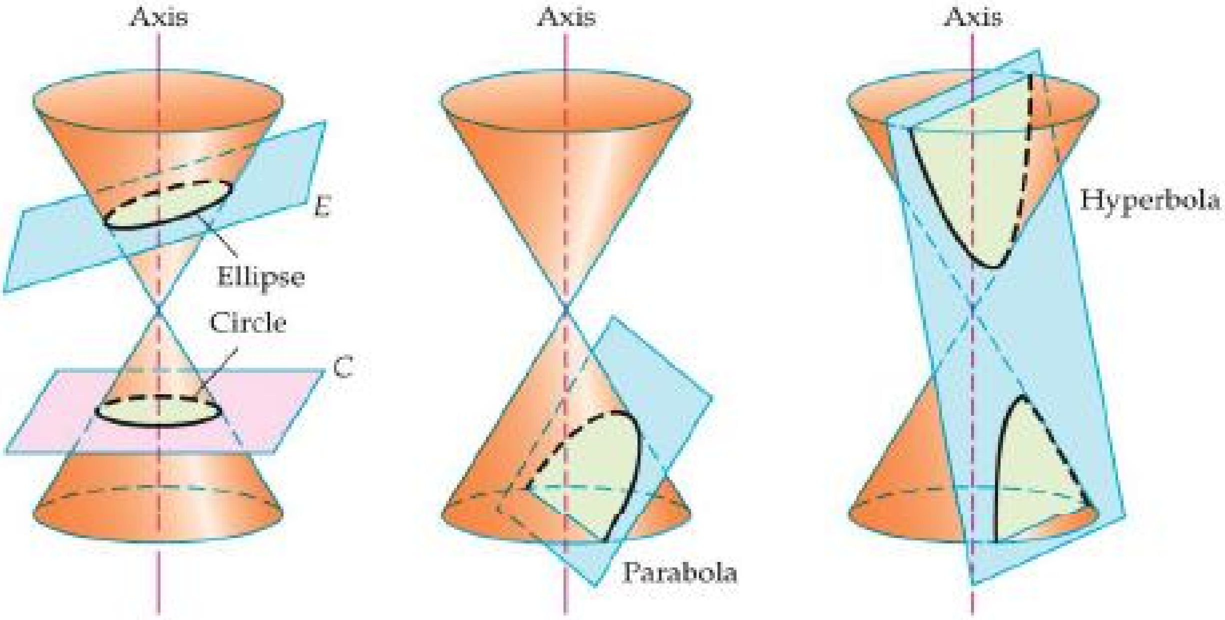
# محاضــــــــــــرات في

# بحتة ٣ "جبر وهندسة مستوية"




## لطلاب الفرقة الأولي بكلية التربية

## إعداد


## الدكتور / محمد السيد أحمد العاطون

مدرس الرياضيات البحتة بقسم الرياضيات - كلية العلوم بقنا


**العام الجامعي: ٢٠١٩-٢٠٢٠**

# محاضـــــــــــــــــرات في

## بحتة (٢) "جبر وهندسة المستوية"

المحتويات

# الباب الأول

## الكسور الجزئية

**مفهوم الكسور الجزئية:** في الأعوام السابقة تعرضنا بالدراسة لكيفية أجراء العمليات الجبرية علي الكسور، فمثلا: $\frac{5x-1}{(x-3)(2x+1)}=\frac{1}{2x+1}+\frac{2}{x-3}$ أي أنه يمكن القول بأن الكسر $\frac{5x-1}{(x-3)(2x+1)}$ يمكن التعبير عنه كمجموع كسرين أبسط منه وفي هذه الحالة يقال أن الكسر حلل إلى كسوره الجزئية وهي $\frac{1}{2x+1}$ ، $\frac{2}{x-3}$ وبوجه عام إذا كانت $P(x)$ ، $Q(x)$ كثيرتي حدود في $x$ على الصورة:

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n,\quad Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\dots+b_m$$

حيث أن $a_i\in Q$ (أي جميع المعاملات قياسية)، $m,n\geq 1$. إذا أمكن بطريقة ما التعبير عن الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ بدلالة المجموع الجبري لكسور أبسط منه، فإنه يقال أن هذا الكسر قد حلل إلى كسوره الجزئية. وعملية تحليل الكسر إلى كسور جزئية لها قواعد تتوقف على نوع الكسر المراد تحليله وفيما يلي سنوجز هذه القواعد.

**أنواع الكسور:** يقال أن الكسر الذي علي الصورة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث أن $P(x)$ ، $Q(x)$ كثيرتي حدود في $x$ انه كسر حقيقي إذا كانت درجه البسط اقل من درجه المقام وخلاف ذلك فيقال أن الكسر هو كسر غير حقيقي.

**قواعد تحليل كسر إلي كسوره الجزئية:** ليكن $\frac{P(x)}{Q(x)}$ كسر حيث أن $P(x)$ ، $Q(x)$ كثيرتي حدود في $x$ فأن عمليه تحليله إلي كسور جزئيه تعتمد علي العلاقة بين درجتي البسط والمقام وعلي هذا الأساس فإن عمليه تحليل الكسور إلي كسورها الجزئية تنقسم إلي حالتان:

### الحالة الأولي: درجة البسط أقل من درجة المقام

- كل عامل خطي (من الدرجة الأولي) $ax+b$ للدالة $Q(x)$ يقابله كسر جزئي على الصورة: $\frac{A}{ax+b}$ حيث $A$ ثابت.

❖ كل عامل خطي مكرر $(ax+b)^n$ للدالة $Q(x)$ يقابله $n$ كسر جزئي على الصورة:

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+\ldots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

حيث أن $A_1,\ldots\ldots,A_n$ ثوابت، $n$ عدد صحيح موجب بحيث $n\geq 2$.

❖ كل عامل من الدرجة الثانية وغير قابل للتحليل $ax^2+b$ أو $ax^2+bx+c$ للدالة $Q(x)$ يقابله كسر جزئي على الصورة $\frac{Ax+B}{ax^2+b}$ أو $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ حيث $A,B$ ثوابت.

❖ كل عامل مكرر من الدرجة الثانية وغير قابل للتحليل $(ax^2+b)^n$ أو $(ax^2+bx+c)^n$ للدالة $Q(x)$ يقابله $n$ كسر جزئي على الصورة:

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+b)}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+b)^2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+b)^n}$$

أو

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

حيث أن $A_1,\ldots,A_n$ ، $B_1,\ldots,B_n$ ثوابت حقيقية مطلوب إيجاد قيمه كلاً منها، $n$ عدد صحيح موجب بحيث $n\geq 2$.

## الحالة الثانية: درجة البسط أكبر من أو تساوي لدرجة المقام

❖ إذا كانت درجة $P(x)$ تساوي درجة $Q(x)$ فإننا نضيف ثابت وليكن $\lambda$ إلى الكسور الجزئية الموجودة في الحالة الأولى.

❖ إذا كانت درجة $P(x)$ أعلى بمقدار درجة واحدة من درجة $Q(x)$ فإننا نضيف المقدار $\lambda x+\lambda_1$ إلى الكسور الجزئية الموجودة في الحالة الأولى.

❖ إذا كانت درجة $P(x)$ أعلى بمقدار درجتين عن $Q(x)$ فإننا نضيف المقدار $\lambda x^2+\lambda_1 x+\lambda_2$ إلى الكسور الجزئية الموجودة في الحالة الأولى. وهكذا...

**طرق تعيين الثوابت:** نطابق الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ بمجموع الكسور الجزئية القابلة له كما سبق الحصول عليها ثم نضرب المتطابقة في $Q(x)$ وبذلك نحصل على متطابقة جديدة صحيحة لجميع قيم $x$ يمكن من خلالها تعيين قيم جميع الثوابت المطلوبة وذلك باستخدام الطرق الآتية:

- تعطى قيم مناسبة للمتغير $x$، ويفضل أن نستخدم أصفار المقام أولا ثم القيم الأخرى.
- تساوى المعاملات المتناظرة في الطرفين لقوى $x$ المختلفة، ويفضل أن نبدأ بمقارنة الحد المطلق ثم مقارنة معاملات اعلي قوي للمتغير $x$ في الطرفين ثم الذي يليه حتى نصل إلي مقارنة معاملات $x$ في الطرفين.

## أمثله محـــــــلوله

**مثال(١):** حلل الكسر $\frac{5x+1}{(x^2-1)(x+2)}$ إلي كسوره الجزئية.

## الحـــــــــل

نلاحظ أن درجه البسط أقل من درجه المقام أي أن الكسر حقيقي والمقام يمكن تحليله كالآتي:

$$(x^2-1)(x+2)=(x-1)(x+1)(x+2)$$

نلاحظ أن المقام عبارة عن حاصل ضرب ثلاث عوامل من الدرجة الأولي وبالتالي يمكن تحليل الكسر المعطي بالصورة:

$$\frac{5x+1}{(x^2-1)(x+2)}=\frac{5x+1}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2} \qquad (1)$$

ويمكن تعين قيمة كلاً من $A$ ، $B$ ، $C$ بأتباع الخطوات الآتية:

بضرب طرفي المعادلة (١) في $(x-1)(x+1)(x+2)$ نجد أن:

$$5x+1=A(x+1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x+1) \qquad (2)$$

- بوضع $x=1$ في المعادلة (٢) نحصل علي $6=6A \Rightarrow A=1$.
- بوضع $x=-1$ في المعادلة (٢) نحصل علي $-4=-2B \Rightarrow B=2$.
- بوضع $x=-2$ في المعادلة (٢) نحصل علي $-9=3B \Rightarrow B=-3$.

وبالتعويض عن قيمة كلاً من $A$ ، $B$ ، $C$ في المعادلة (١) نجد أن:

$$\frac{5x+1}{(x^2-1)(x+2)}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{-3}{x+2}.$$

**مثال(٢):** حلل الكسر $\frac{3x+1}{(x^2-1)(x-1)}$ إلي كسوره الجزئية.

## الحـــــــــل

نلاحظ أن درجه البسط أقل من درجه المقام أي أن الكسر حقيقي والمقام يمكن تحليله كالآتي:

$$(x^2-1)(x-1)=(x-1)(x+1)(x-1)=(x+1)(x-1)^2$$

نلاحظ أن المقام عبارة عن حاصل ضرب عامل من الدرجة الأولي مكرر في عامل أخر من الدرجة الأولي

وبالتالي يمكن تحليل الكسر المعطي بالصورة:

$$\frac{3x+1}{(x^2-1)(x-1)}=\frac{5x+1}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2} \qquad (1)$$

ويمكن تعين قيمة كلاً من $A$ ، $B$ ، $C$ بأتباع الخطوات الآتية:

بضرب طرفي المعادلة (١) في $(x+1)(x-1)^2$ نجد أن:

$$3x+1=A(x-1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x+1) \qquad (2)$$

- بوضع $x=-1$ في المعادلة (٢) نحصل علي: $-2=4A\Rightarrow A=-\frac{1}{2}$.
- بوضع $x=1$ في المعادلة (٢) نحصل علي: $4=2C\Rightarrow C=2$.
- بوضع $x=0$ (أو بمقارنة الحد المطلق) في طرفي المعادلة (٢) نحصل علي: $1=A-B+C\Rightarrow B=\frac{1}{2}$.

وبالتعويض عن قيمة كلاً من $A$ ، $B$ ، $C$ في العادلة (١) نجد أن:

$$\frac{3x+1}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}.$$

**مثال(٣):** حلل الكسر $\frac{x^2-x+4}{x^4-1}$ إلي كسوره الجزئية.

## الحـــــــــل

نلاحظ أن درجه البسط أقل من درجه المقام أي أن الكسر حقيقي والمقام يمكن تحليله كالآتي:

$$(x^4-1)=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

نلاحظ أن المقام عبارة عن حاصل ضرب عاملين من الدرجة الأولي في عامل أخر من الدرجة الثانية وبالتالي يمكن تحليل الكسر المعطي بالصورة:

$$\frac{x^2-x+4}{x^4-1}=\frac{x^2-x+4}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3x+A_4}{x^2+1} \qquad (1)$$

وبضرب طرفي المعادلة (١) في $(x-1)(x+1)(x^2+1)$ نحصل علي:

$$x^2-x+4=A_1(x+1)(x^2+1)+A_2(x-1)(x^2+1)+(A_3x+A_4)(x-1)(x+1) \qquad (2)$$

ولإيجاد قيمة كلاً من $A_1$ ، $A_2$ ، $A_3$ ، $A_4$ نتبع الخطوات الآتية:

- بوضع $x=1$ في طرفي المعادلة (١) نجد أن: $4=4A_1 \Rightarrow A_1=1$.
- بوضع $x=-1$ في طرفي المعادلة (١) نجد أن: $6=-4A_2 \Rightarrow A_2=-\frac{3}{2}$.
- بوضع $x=0$ (أو بمقارنه الحد المطلق) في طرفي المعادلة (٢) نجد أن

$$.\,4=A_1-A_2-A_4 \Rightarrow A_4=A_1-A_2-4 \Rightarrow A_4=\frac{1}{2}$$

- بمقارنه معاملات $x^3$ في طرفي المعادلة (٢) نجد أن:

$$.\,0=A_1+A_2+A_3 \Rightarrow A_3=-A_1+A_2 \Rightarrow A_3=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{x^2-x+4}{x^4-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{-\frac{3}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}}{x^2+1}$$

**مثال(٤):** حلل الكسر $\dfrac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}$ إلي كسوره الجزئية.

## الحـــــــــــــل

نلاحظ أن درجه البسط أقل من درجه المقام أي أن الكسر حقيقي ونلاحظ أن المقام عبارة عن حاصل ضرب عامل من الدرجة الأولي في عامل أخر من الدرجة الثانية مكرر وبالتالي يمكن تحليل الكسر المعطي بالصورة:

$$\frac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2x+A_3}{x^2+2}+\frac{A_4x+A_5}{(x^2+2)^2} \qquad (1)$$

وبضرب طرفي المعادلة (١) في $x(x^2+1)^2$ نحصل علي

$$2x^2+x+4=A_1(x^2+2)^2+(A_2x+A_3)x(x^2+2)+(A_4x+A_5)x \qquad (2)$$

ولإيجاد قيمة كلاً من $A_1$ ، $A_2$ ، $A_3$ ، $A_4$ نتبع الخطوات الآتية :

- بوضع $x=0$ (أو بمقارنة الحد المطلق) في طرفي المعادلة (٢) نجد أن: $4=4A_1 \Rightarrow A_1=1$ .
- بمقارنة معاملات $x^4$ في طرفي المعادلة (٢) نجد أن:

$$0=A_1+A_2 \Rightarrow A_2=-A_1 \Rightarrow A_2=-1.$$

- بمقارنة معاملات $x^3$ في طرفي المعادلة (٢) نجد أن: $0=A_3 \Rightarrow A_3=0$.
- بمقارنة معاملات $x^2$ في طرفي المعادلة (٢) نجد أن:

$$2=A_1+2A_2+A_4 \Rightarrow A_4=2-A_1-2A_2 \Rightarrow A_4=0.$$

- بمقارنة معاملات $x$ في طرفي المعادلة (٢) نجد أن

$$1=2A_3+A_5 \Rightarrow A_5=1-2A_3 \Rightarrow A_5=1.$$

$$\because \frac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}=\frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+2}+\frac{1}{(x^2+2)^2}$$

**مثال(٥):** حلل الكسر $\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$ إلى كسوره الجزئية.

**الحـــــــــل**

نلاحظ أن درجة البسط تساوي درجة المقام وبالتالي نضيف ثابت وليكن $\lambda$ إلى التحليل. وحيث أن المقام $x^2+2x+1$ يمكن تحليله إلى عامل خطى مكرر علي الصورة $(x+1)^2$ فإن الكسر المعطي يمكن تحليله إلي كسورة الجزئية علي الصورة:

$$\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}=\lambda+\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}. \qquad (1)$$

بضرب المعادلة (١) في $(x+1)^2$ نجد أن:

$$x^2+x+1=\lambda(x+1)^2+A(x+1)+B \qquad (2)$$

بوضع $x=-1$ في (٢) نجد أن: $1-1+1=B \Rightarrow B=1$

بمساواة معاملات $x^2$ في طرفي المعادلة (٢) نجد أن: $\lambda = 1$

بمساواة معاملات $x$ في طرفي المعادلة (٢) نجد أن: $1 = 2\lambda + A \Rightarrow A = 1 - 2\lambda = 1 - 2 = -1$

بالتعويض عن $\lambda$ ، $A$ ، $B$ في (١) نجد أن: $\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$.

**مثال(٦): أوجد قيمه كل من $c,b,a$ أذا كان** $\frac{x^3-1}{(x+1)(x+2)} = x + a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$.

**الحـــــــــل**

الكسر المعطي كسر غير حقيقي حيث أن درجه البسط اكبر من درجه المقام. وبإجراء القسمة المطولة نجد أن:

$$\frac{x^3-1}{(x+1)(x+2)} = x - 3 + \frac{7x+5}{(x+1)(x+2)}$$

ولكن الكسر الحقيقي $\frac{7x+5}{(x+1)(x+2)}$ يمكن كتابته علي الصورة:

$$\frac{7x+5}{(x+1)(x+2)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2}$$

وبضرب الطرفين في $(x+1)(x+2)$ نجد أن:

$$7x + 5 = A_1(x+2) + A_2(x+1)$$

بوضع $x = -1$ نجد أن: $-2 = A_1$.

بوضع $x = -2$ نجد أن: $-9 = -A_2 \Rightarrow A_2 = 9$ .

$$\therefore \frac{7x+5}{(x+1)(x+2)} = \frac{-2}{x+1} + \frac{9}{x+2}$$

وبالتالي نجد أن:

$$\frac{x^3-1}{(x+1)(x+2)} = x - 3 + \frac{-2}{x+1} + \frac{9}{x+2} = x + a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

وبالتالي نجد أن: $a = -3$ ، $b = -2$ ، $c = 9$.

**ملحوظة:** يمكن إتباع نفس خطوات مثال (٥) لحل المثال السابق.

# تمارين (١)

**حلل الكسور الآتية إلي كسورها الجزئية**

١) $\dfrac{3x-1}{(1-x^2)(1-x)}$.

٢) $\dfrac{4x}{(x-1)(x+2)^2}$.

٣) $\dfrac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}$.

٤) $\dfrac{x^2-x+4}{1-x^4}$.

٥) $\dfrac{5x+1}{(1-x^3)(2+x)}$.

٦) $\dfrac{3x+1}{(1-x^2)(1-x)}$.

٧) $\dfrac{1}{x^4-1}$.

٨) $\dfrac{5x-7}{(x+1)(x^2+3)}$.

٩) $\dfrac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)}$.

١٠) $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+x-4)}$.

١١) $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)}$.

١٢) $\dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)(x+2)}$.

١٣) $\dfrac{4}{x(x^2+2)^2}$.

# الباب الثاني

# مبدأ الاستنتاج الرياضي

**الاستنتاج الرياضي:** هي طريقة لإثبات صحة علاقة ما أو نظرية أو قانون تعتمد على الأعداد الطبيعية ونلجأ لهذه الطريقة لعدم استطاعتنا إثبات صحة هذه العلاقة أو القانون بطريقة مباشرة.

**طريقة الاستنتاج الرياضي:** لتكن $f(n)=h(n)$ علاقة رياضيه حيث أن $n$ عدد صحيح موجب، فإن طريقة الاستنتاج الرياضي لإثبات صحة هذه العلاقة لجميع قيم $n$ الصحيحة الموجبة تعتمد علي الخطوات التالية:

- تتحقق من صحة العلاقة عندما تكون $n=1$.
- نفترض صحة العلاقة عندما تكون $n=k$ (حيث $k$ عدد صحيح موجب).
- نثبت صحة العلاقة عندما $n=k+1$.

والخطوات الثلاثة في طريقة الاستنتاج الرياضي متلازمة ولا يمكن الاستغناء عن احدهما، ويمكن فهم واستيعاب طريقة الاستنتاج الرياضي من حلول الأمثلة الآتية:

## أمثله محـــــلوله

**مثال(١):** باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي برهن أن:

$$(i)\ \sum_{r=1}^{n} r=\frac{n(n+1)}{2},\qquad (ii)\ \sum_{r=1}^{n} r^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\qquad (iii)\ \sum_{r=1}^{n} r^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

**ملحوظة:** يجب علي الطالب أن يتذكر دائما القوانين الثلاثة السابقة وذلك للحاجة إليها في بعض مسائل جمع المتسلسلات فيما بعد.

## الحـــــــل

($i$) بفرض أن:

$$f(n)=\sum_{r=1}^{n} r,\qquad h(n)=\frac{n(n+1)}{2}$$

(١) إثبات صحة العلاقة عندما $n=1$: بوضع $n=1$ نجد أن:

$$f(1)=\sum_{r=1}^{1} r=1,\quad h(1)=\frac{1(1+1)}{2}=1\Bigg\}\Rightarrow f(1)=h(1)$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة عندما $n=1$.

(٢) بفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n=k$ أي أن: $f(k)=h(k)\Rightarrow \sum_{r=1}^{k} r=\frac{k(k+1)}{2}$

(٣) إثبات صحة العلاقة عندما $n=k+1$:

$$\because h(k+1)=\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\because f(k+1)=\sum_{r=1}^{k+1} r=\underbrace{\sum_{r=1}^{k} r}_{f(k)}+\sum_{r=k+1}^{k+1} r=\underbrace{\frac{k(k+1)}{2}}_{h(k)}+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2}{2}(k+1)$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=h(k+1)$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة عندما $n=k+1$، وبذلك تكون العلاقة صحيحة لجميع قيم $n$ الصحيحة الموجبة.

**( $ii$ ) يترك للطالب كتمرين.**

( $iii$ ) بفرض أن: $f(n)=\sum_{r=1}^{n} r^3,\ h(n)=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

(١) إثبات صحة العلاقة عندما $n=1$: بوضع $n=1$ نجد أن:

$$f(1)=\sum_{r=1}^{1} r^3=1^3=1,\quad h(1)=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2=1^2=1\Bigg\}\Rightarrow f(1)=h(1)$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة عندما $n=1$.

(٢)بفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n=k$ أي أن: $f(k)=h(k)\Rightarrow \sum_{r=1}^{k} r^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$

(٣)إثبات صحة العلاقة عندما $n=k+1$:

$$f(k+1)=\sum_{r=1}^{k+1} r^3=\underbrace{\sum_{r=1}^{k} r^3}_{f(k)}+\sum_{r=k+1}^{k+1} r^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+\frac{4}{4}(k+1)^3$$

$$=\frac{(k+1)^2\left(k^2+4(k+1)\right)}{4}=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$

$$\therefore f(k+1)=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2=h(k+1)$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة عندما $n=k+1$ ،وبذلك تكون العلاقة صحيحة لجميع قيم $n$ الصحيحة الموجبة.

**مثال(٢):** باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي برهن أن $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$.

**الحــــــــــــــل**

بفرض أن: $f(n)=(\cos\theta+i\sin\theta)^n,\quad h(n)=\cos n\theta+i\sin n\theta$

١) إثبات صحة العلاقة عندما $n=1$ : بوضع $n=1$ نجد أن:

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=(\cos\theta+i\sin\theta)^1=\cos\theta+i\sin\theta, \\ h(1)=\cos\theta+i\sin\theta \end{array}\right\}\Rightarrow f(1)=h(1)$$

وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n=1$.

٢) بفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n=k$ أي أن:

$$f(k)=h(k)\Rightarrow(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$$

٣) إثبات صحة العلاقة عندما $n=k+1$ :

$$\begin{aligned} f(k+1)=(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}&=(\cos\theta+i\sin\theta)^k(\cos\theta+i\sin\theta)\\ &=(\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)\\ &=(\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta+i(\sin k\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta)\\ &=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta=h(k+1)\end{aligned}$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة عندما $n=k+1$ ،وبذلك تكون العلاقة صحيحة لجميع قيم $n$ الصحيحة الموجبة.

**مثال(٣):** باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي برهن أن $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$.

**الحــــــــــــــل**

بفرض أن: $f(n)=\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a},\quad h(n)=na^{n-1}$

١) إثبات صحة العلاقة عندما $n=1$ : بوضع $n=1$ نجد أن:

$$\left.f(1)=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=1,\ \ h(1)=1.a^{1-1}=a^0=1\right\}\Rightarrow f(1)=h(1)$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

(٢) بفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n = k$ أي أن: $f(k) = h(k) \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^k - a^k}{x - a} = ka^{k-1}$

(٣) إثبات صحة العلاقة عندما $n = k+1$:

$$\because h(k+1) = (k+1)a^{(k+1)-1}$$

$$\because f(k+1) = \lim_{x \to a} \frac{x^{k+1} - a^{k+1}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x.x^k - a.a^k}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x.x^k - a.a^k + x.a^k - x.a^k}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x.x^k - x.a^k) + (x.a^k - a.a^k)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x(x^k - a^k) + a^k(x - a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{x(x^k - a^k) + a^k(x - a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x(x^k - a^k)}{x - a} + \lim_{x \to a} \frac{a^k(x - a)}{x - a}$$

$$= \left(\lim_{x \to a} x\right)\underbrace{\left(\lim_{x \to a} \frac{x^k - a^k}{x - a}\right)}_{f(k)} + \lim_{x \to a} a^k = a.\underbrace{\left(k.a^{k-1}\right)}_{f(k)} + a^k = ka^k + a^k$$

$$= (k+1)a^k = (k+1)a^{(k+1)-1} = h(k+1)$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n = k+1$، وبذلك تكون العلاقة صحيحة لجميع قيم $n$ الصحيحة الموجبة.

**مثال (٤):** باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي برهن أن $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.

**الحـــــــــــل**

بفرض أن: $f(n) = \dfrac{d}{dx}(x^n), \quad h(n) = n\,x^{n-1}$

(١) أثبات صحة العلاقة عندما $n = 1$: بوضع $n = 1$ نجد أن:

$$\left. f(1) = \frac{d}{dx}(x) = 1, \quad h(1) = 1\,x^{1-1} = 1 \right\} \Rightarrow f(1) = h(1)$$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

(٢) بفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n = k$ أي أن: $f(k) = h(k) \Rightarrow \dfrac{d}{dx}(x^k) = k\,x^{k-1}$

(٣) أثبات صحة العلاقة عندما $n = k+1$:

$$\because f(k+1)=\frac{d}{dx}(x^{k+1})=\frac{d}{dx}(x\,x^{k})=\frac{d}{dx}(x)\,x^{k}+x.\underbrace{\frac{d}{dx}(x^{k})}_{f(k)}=x^{k}+x.k\,x^{k-1}$$

$$\because f(k+1)=x^{k}+x\,k\,x^{k-1}=(k+1)x^{k}=(k+1)x^{(k+1)-1}=h(k+1)$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة عندما $n=k+1$ ، وبذلك تكون العلاقة صحيحة لجميع قيم $n$ الصحيحة الموجبة.

**مثال(٥):** باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي برهن أن: $\sum_{r=1}^{n}\frac{r2^{r}}{(r+2)!}=1-\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$.

## الحـــــــــــل

بفرض أن: $f(n)=\sum_{r=1}^{n}\frac{r2^{r}}{(r+2)!},\quad h(n)=1-\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$

(١) أثبات صحة العلاقة عندما $n=1$ : بوضع $n=1$ نجد أن:

$$\left.\begin{aligned}&f(1)=\sum_{r=1}^{1}\frac{r2^{r}}{(r+2)!}=\frac{2}{3!}=\frac{1}{3},\\&h(1)=1-\frac{2^{1+1}}{(1+2)!}=1-\frac{2^{2}}{(1+2)!}=1-\frac{4}{3!}=1-\frac{4}{6}=\frac{1}{3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(1)=h(1)$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة عندما $n=1$.

(٢) بفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n=k$ أي أن: $f(k)=h(k)\Rightarrow\sum_{r=1}^{k}\frac{r2^{r}}{(r+2)!}=1-\frac{2^{k+1}}{(k+2)!}$

(٣) أثبات صحة العلاقة عندما $n=k+1$ :

$$\because h(k+1)=1-\frac{2^{(k+1)+1}}{((k+1)+2)!}$$

$$\because f(k+1)=\sum_{r=1}^{k+1}\frac{r2^{r}}{(r+2)!}=\underbrace{\sum_{r=1}^{k}\frac{r2^{r}}{(r+2)!}}_{f(k)}+\sum_{r=k+1}^{k+1}\frac{r2^{r}}{(r+2)!}=\underbrace{1-\frac{2^{k+1}}{(k+2)!}}_{h(k)}+\frac{(k+1)2^{k+1}}{(k+3)!}$$

$$=1+\frac{(k+1)2^{k+1}}{(k+3)!}-\frac{2^{k+1}}{(k+2)!}=1+\frac{\left((k+1)-(k+3)\right)2^{k+1}}{(k+3)!}$$

$$=1-\frac{2.2^{k+1}}{(k+3)!}=1-\frac{2^{(k+1)+1}}{((k+1)+2)!}=h(k+1)$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة عندما $n=k+1$ ، وبذلك تكون العلاقة صحيحة لجميع قيم $n$ الصحيحة الموجبة.

**مثال(٦):** باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي برهن أن: $\sum_{r=1}^{n} r.r! = (n+1)!-1$ .

## الحـــــــــل

بفرض أن: $f(n)=\sum_{r=1}^{n} r.r!\ ,\quad h(n)=(n+1)!-1$

(١) إثبات صحة العلاقة عندما $n=1$ : بوضع $n=1$ نجد أن:

$$\left.f(1)=\sum_{r=1}^{1} r.r! = 1.1! = 1,\quad h(1)=(1+1)!-1=2!-1=2-1=1\right\}\Rightarrow f(1)=h(1)$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة عندما $n=1$.

(٢) بفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n=k$ أي أن: $\sum_{r=1}^{k} r.r! = (k+1)!-1 \Leftarrow f(k)=h(k)$

(٣) أثبات صحة العلاقة عندما $n=k+1$ :

$$\because f(k+1)=\sum_{r=1}^{k+1} r\,r! = \underbrace{\sum_{r=1}^{k} r\,r!}_{f(k)} + \sum_{r=k+1}^{k+1} r\,r! = \underbrace{(k+1)!-1}_{h(k)} + (k+1)(k+1)! = [1+k+1](k+1)!-1$$

$$=(k+2)(k+1)!-1=(k+2)!-1=h(k+1)$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة عندما $n=k+1$ ، وبذلك تكون العلاقة صحيحة لجميع قيم $n$ الصحيحة الموجبة.

**مثال(٧):** باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي برهن أن: $x\neq 0$ ، $\sum_{r=1}^{n} x^{r-1} = \dfrac{x^n-1}{x-1}$ .

## الحـــــــــل

بفرض أن: $f(n)=\sum_{r=1}^{n} x^{r-1},\quad h(n)=\dfrac{x^n-1}{x-1}$

(١) أثبات صحة العلاقة عندما $n=1$ : بوضع $n=1$ نجد أن:

$$\left.f(1)=\sum_{r=1}^{1} x^{r-1} = x^0 = 1,\quad h(1)=\frac{x^1-1}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}=1\right\}\Rightarrow f(1)=h(1)$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة عندما $n=1$.

(٢) بفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n=k$ أي أن: $f(k)=h(k)\Rightarrow\sum_{r=0}^{k}x^{r-1}=\frac{x^k-1}{x-1}$

(٣) أثبات صحة العلاقة عندما $n=k+1$ :

$$\because f(k+1)=\sum_{r=1}^{k+1}x^{r-1}=\sum_{r=1}^{k}x^{r-1}+\sum_{r=k+1}^{k+1}x^{r-1}=\underbrace{\frac{x^k-1}{x-1}}_{h(k+1)}+x^k=\frac{x^k-1}{x-1}+\frac{(x-1)x^k}{x-1}$$

$$\therefore\ f(k+1)=\frac{x^k(1+x-1)-1}{x-1}=\frac{x^{k+1}-1}{x-1}=h(k+1)$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة عندما $n=k+1$ ، وبذلك تكون العلاقة صحيحة لجميع قيم $n$ الصحيحة الموجبة.

**مثال (٨):** باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي برهن أن المقدار $5^n-2^n$ تقبل القسمة علي 3 بدون باقي لجميع قيم $n$ الصحيحة الموجبة.

## الحـــــــــــــل

بفرض أن: $f(n)=5^n-2^n$

(١) إثبات صحة العلاقة عندما $n=1$ : بوضع $n=1$ نجد أن: $f(1)=5-2=3$

واضح أن $f(1)$ تقبل القسمة علي 3 .

$\therefore$ العلاقة صحيحة عندما $n=1$.

(٢)بفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n=k$ أي أن $f(k)=5^k-2^k$ تقبل القسمة علي 3.

(٣)إثبات صحة العلاقة عندما $n=k+1$ :

$$f(k+1)=5^{(k+1)}-2^{(k+1)}=5.5^k-2.2^k$$
$$=5.5^k-2.2^k+(5.2^k-5.2^k)$$
$$=\left(5.5^k-5.2^k\right)+\left(5.2^k-2.2^k\right)$$
$$\therefore f(k+1)=5\left(5^k-2^k\right)+(5-2)2^k=5\left(5^k-2^k\right)+3.2^k$$

واضح أن الحد الأول من $f(k+1)$ يقبل القسمة علي 3 وذلك من الخطوة رقم (٢) وكذلك واضح أن الحد الثاني يقبل القسمة 3 أيضا.

$\therefore$العلاقة صحيحة عندما $n=k+1$ ،وبذلك تكون العلاقة صحيحة لجميع قيم $n$الصحيحة الموجبة.

# تمارين (٢)

باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي برهن أن:

١) $\sum_{r=1}^{n} r(r+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

٢) $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$.

٣) $\sum_{r=1}^{n} \frac{r}{(r+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

٤) $\sum_{r=1}^{n} (2r-1)^2 = \frac{n}{3}(4n^2-1)$.

٥) $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

٦) المقدار: $x^n - y^n$ يقبل القسمة علي $x-y$ لجميع قيم $n$ الصحيحة الموجبة حيث أن $x \neq y$.

٧) المقدار: $2^{4n}-1$ تقبل القسمة علي 15 بدون باقي لجميع قيم $n$ الصحيحة الموجبة.

٨) المقدار $2^{2n}+5$ تقبل القسمة علي 3 بدون باقي لجميع قيم $n$ الصحيحة الموجبة.

# الباب الثالث

## جمع المتسلسلات المحدودة

**مفهوم المتسلسلة:** المتسلسلة هي مجموع حدود متتابعة. فمثلا أذا كانت $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ متتابعة محدودة فإن المجموع: $\sum_{r=1}^{n} a_r = a_1 + a_2 + ... + a_n$ يمثل المتسلسلة المحدودة المناظرة لهذه المتتابعة.

أما إذا كانت لدينا المتتابعة اللانهائية $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ والتي حدها العام هو $a_r$ فإن المجموع:

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

يمثل المتسلسلة اللانهائية المناظرة لهذه المتتابعة.والهدف الآن هو دراسة طرق جمع المتسلسلات المحدودة.

**المتسلسلات العددية:** المتسلسلة العددية هي متسلسلة يمكن كتابتها علي الصورة:

$$a + (a+d) + (a+2d) + .... + (a + (n-1)d) = \sum_{r=1}^{n} (a + (r-1)d)$$

حيث أن $a$ تمثل الحد الأول، $a+d$ تمثل الحد الثاني، $d$ تسمي أساس المتسلسلة العددية وهو عبارة عن الفرق بين أي حد من حدود المتسلسلة والحد السابق له مباشرة والحد العام لهذا النوع من المتسلسلات هو $a_r = a + (r-1)d$ والحد الأخير $a_n = a + (n-1)d$ بينما مجموع $n$ حدا من حدود المتسلسلة العددية فيرمز له بالرمز $S_n$ ونحصل عليه من العلاقة: $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ أو من العلاقة : $S_n = \frac{n}{2}[a + a_n]$.

**المتسلسلات الهندسية:** المتسلسلة الهندسية هي متسلسلة يمكن كتابتها علي الصورة:

$$\sum_{r=1}^{n} ax^{r-1} = a + ax + ax^2 + .... + ax^{n-1}$$

حيث أن $a$ تمثل الحد الأول، $ax$ يمثل الحد الثاني، $x$ تسمي أساس المتسلسلة الهندسية وهو عبارة عن ناتج قسمه أي حد من حدود المتسلسلة والحد السابق له مباشرة والحد العام لهذا النوع من المتسلسلات

هو $a_r = ax^{r-1}$ أما مجموع $n$ حدا من حدود المتسلسلة الهندسية فيرمز له بالرمز $S_n$ ونحصل عليه

من العلاقة :
$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(x^n-1)}{x-1}, & x>1 \\ \dfrac{a(1-x^n)}{1-x}, & x<1 \\ an\ , & x=1 \end{cases}$$

وبصفة عامه ليس من اليسير الحصول علي مجموع أي متسلسلة ولكن توجد طرق جبريه تمكننا من الحصول علي مجموع بعض المتسلسلات سنقدم بعض من هذه الطرق في هذا الباب.

## طرق جمع المتسلسلات المحدودة

### أولا : طريقة الفروق لجمع المتسلسلات المحدودة

**نظريه الفروق(١):** في المتسلسلة $\sum_{r=1}^{n} a_r$ إذا وجدت داله $f$ بحيث أنه يمكن التعبير عن الحد العام $a_r$ في الصورة: $a_r = f(r+1) - f(r)$ فإن مجموع هذه المتسلسلة يكون علي الصورة:

$$.\ S_n = \sum_{r=1}^{n} a_r = f(n+1) - f(1)$$

**البرهان:** في المتسلسلة $\sum_{r=1}^{n} a_r$ بفرض انه وجدت داله $f$ بحيث أن $a_r = f(r+1) - f(r)$

بوضع $r=1$ نجد أن: $$a_1 = f(2) - f(1)$$

بوضع $r=2$ نجد أن: $$a_2 = f(3) - f(2)$$

بوضع $r=3$ نجد أن: $$a_2 = f(4) - f(3)$$

وهكذا... وبوضع $r=n-1$ نجد أن: $$a_{n-1} = f(n) - f(n-1)$$

بوضع $r=n$ نجد أن: $$a_n = f(n+1) - f(n)$$

وبالجمع نجد أن: $$S_n = \sum_{r=1}^{n} a_r = f(n+1) - f(1)$$

**نظريه الفروق(٢):** في المتسلسلة $\sum_{r=1}^{n} a_r$ إذا وجدت داله $f$ بحيث أنه يمكن التعبير عن الحد العام $a_r$ في الصورة: الصورة: $a_r = f(r) - f(r+1)$ فأن مجموع هذه المتسلسلة يكون علي الصورة:

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} a_r = f(1) - f(n+1).$$

**البرهان:** بطريقه مماثله لبرهان نظريه الفروق (١).

باستخدام طريقه الفروق يمكن إيجاد مجموع بعض التسلسلات كما سيتضح في الأمثلة التالية.

## أمثلة محـــــــــــلولة

**مثال (١):** أوجد مجموع المتسلسلة $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots$ إلي $n$ حدا

### الحـــــــــــل

واضح أن الحد العام للمتسلسلة المعطاة يمكن التعبير عنه بالصورة: $a_r = r(r+1)$

دراسة الفروق:

$$\because r(r+1)(r+2) - (r-1)(r)(r+1) = r(r+1)[(r+2) - (r-1)] = 3r(r+1) = 3a_r$$

$$\therefore a_r = \frac{1}{3}[r(r+1)(r+2) - (r-1)(r)(r+1)] = f(r+1) - f(r)$$

حيث أن: $f(r+1) = \frac{1}{3}r(r+1)(r+2),\ f(r) = \frac{1}{3}(r-1)(r)(r+1)$

وبالتالي فإن المجموع يكون بالصورة:

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = \sum_{r=1}^{n} r(r+1) = f(n+1) - f(1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - (1-1)(1)(1+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

**مثال (٢):** أوجد مجموع المتسلسلة $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots$ إلي $n$ حدا.

### الحـــــــــــل

واضح أن الحد العام للمتسلسلة المعطاة هو $a_r = r(r+1)(r+2)$

دراسة الفروق:

$$\because r(r+1)(r+2)(r+3) - (r-1)(r)(r+1)(r+2) = r(r+1)(r+2)[(r+3) - (r-1)]$$
$$= 4r(r+1)(r+2) = 4a_r$$

$$\therefore a_r = \frac{1}{4}[r(r+1)(r+2)(r+3)-(r-1)(r)(r+1)(r+2)] = f(r+1)-f(r)$$

حيث أن $f(r+1)=\frac{1}{4}r(r+1)(r+2)(r+3)$ ، $f(r)=\frac{1}{4}(r-1)(r)(r+1)(r+2),$

وبالتالي فإن المجموع يكون بالصورة:

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = \sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2) = f(n+1)-f(1)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - \frac{1}{4}(1-1)(1)(1+1)(1+2)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - 0 = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

**مثال (٣):** أوجد مجموع المتسلسلة $...+1.1!+2.2!+3.3!$ إلي $n$ حدا.

**الحـــــــــل**

واضح أن الحد العام للمتسلسلة المعطاة هو $a_r = r.r!$

دراسة الفروق: $\because (r+1)!-r! = (r+1)r!-r! = [(r+1)-1]r! = r.r! = a_r$

$$\therefore a_r = (r+1)!-r! = f(r+1)-f(r)$$

**حيث أن:** $f(r)=r!,\quad f(r+1)=(r+1)!$

**وبتطبيق نظريه الفروق نجد أن:** $\sum_{r=1}^{n} a_r = \sum_{r=1}^{n} r.r! = f(n+1)-f(1) = (n+1)!-1! = (n+1)!-1$

**مثال (٤):** أوجد مجموع المتسلسلة $...+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}$ إلي $n$ حدا.

**الحـــــــــل**

واضح أن الحد العام لهذه المتسلسلة هو $a_r = \frac{1}{r(r+1)}$

دراسة الفروق: باستخدام الكسور الجزئية يمكن كتابه الحد العام علي الصورة:

$$a_r = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1} = f(r) - f(r+1)$$

**حيث أن:** $f(r)=\frac{1}{r},\quad f(r+1)=\frac{1}{r+1}$

**وبتطبيق نظريه الفروق(٢) نجد أن:**

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = f(1) - f(n+1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

**مثال (٥):** أوجد مجموع المتسلسلة $\dots + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6}$ إلي $n$ حدا.

**الحــــــــــل**

واضح أن الحد العام لهذه المتسلسلة هو: $a_r = \frac{1}{(r+1)(r+2)(r+3)}$

دراسة الفروق:

$$\because \frac{1}{(r+1)(r+2)} - \frac{1}{(r+2)(r+3)} = \frac{(r+3)-(r+1)}{(r+1)(r+2)(r+3)} = \frac{2}{(r+1)(r+2)(r+3)} = 2a_r$$

وبالتالي فإن الحد العام يمكن كتابته علي الصورة:

$$a_r = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(r+1)(r+2)} - \frac{1}{(r+2)(r+3)}\right] = f(r) - f(r+1)$$

حيث أن: $f(r) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(r+1)(r+2)}\right], \quad f(r+1) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(r+2)(r+3)}\right]$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} a_r = f(1) - f(n+1) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2.3} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right]$$

**مثال (٦):** أوجد مجموع المتسلسلة $\dots + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!}$ إلي $n$ حدا.

**الحــــــــــل**

واضح أن الحد العام للمتسلسلة المعطاة هو $a_r = \frac{r}{(r+1)!}$

دراسة الفروق: $\because a_r = \frac{r}{(r+1)!} = \frac{(r+1)-1}{(r+1)!} = \frac{r+1}{(r+1)!} - \frac{1}{(r+1)!}$

وحيث أن $(r+1)! = (r+1)r!$ فإن الحد العام يمكن التعبير عنه بالصورة:

$$a_r = \frac{r+1}{(r+1)r!} - \frac{1}{(r+1)!} = \frac{1}{r!} - \frac{1}{(r+1)!} = f(r) - f(r+1)$$

حيث أن: $f(r) = \frac{1}{r!}, \quad f(r+1) = \frac{1}{(r+1)!}$

وبتطبيق نظريه الفروق نجد أن:

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = \sum_{r=1}^{n} \frac{r}{(r+1)!} = f(1) - f(n+1) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

**مثال (٧):** أوجد مجموع المتسلسلة $\frac{1.2}{3!} + \frac{2.2^2}{4!} + \frac{3.2^3}{5!} + ...$ إلي $n$ حداً.

**الحـــــــــل**

واضح أن الحد العام للمتسلسلة المعطاة هو: $a_r = \frac{r2^r}{(r+2)!}$ ، وبدراسة الفروق نجد أن:

$$\because \frac{2^r}{(r+1)!} - \frac{2^{r+1}}{(r+2)!} = \frac{(r+2)2^r - 2^{r+1}}{(r+2)!} = \frac{r2^r + 2^{r+1} - 2^{r+1}}{(r+2)!} = \frac{r2^r}{(r+2)!} = a_r$$

$$\therefore a_r = \frac{2^r}{(r+1)!} - \frac{2^{r+1}}{(r+2)!} = f(r) - f(r+1)$$

حيث أن $f(r) = \frac{2^r}{(r+1)!}, \qquad f(r+1) = \frac{2^{r+1}}{(r+2)!}$.

وبتطبيق نظرية الفروق نجد أن:

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = f(1) - f(n+1) = \frac{2}{(1+1)!} - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} = \frac{2}{2!} - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} = 1 - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$$

## ثانيا: طريقه التعويض لجمع المتسلسلات المحدودة

باستخدام طريقه الاستنتاج الرياضي تم التحقق من صحة القوانين الآتية:

$$(i) \sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(ii) \sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(iii) \sum_{r=1}^{n} r^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

وباستخدام هذه القوانين يمكن إيجاد مجموع بعض المتسلسلات كما يتضح من الأمثلة الآتية.

**مثال (٨):** أوجد مجموع المتسلسلة $1.2 + 2.3 + 3.4 + ...$ إلي $n$ حدا

**الحـــــــــل**

واضح أن الحد العام للمتسلسلة المعطاة يمكن التعبير عنه بالصورة: $a_r = r(r+1)$

$$\because a_r = r(r+1) = r^2 + r$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} a_r = \sum_{r=1}^{n} r(r+1) = \sum_{r=1}^{n} (r^2 + r) = \sum_{r=1}^{n} r^2 + \sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)[2n+1+3] = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

**مثال (٩):** أوجد مجموع المتسلسلة $1.3 + 2.4 + 3.5 + ...$ إلي $n$ حدا.

**الحـــــــل**

واضح أن الحد العام للمتسلسلة المعطاة يمكن التعبير عنه بالصورة: $a_r = r(r+2)$ وبالتالي نجد أن

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = \sum_{r=1}^{n} (r^2 + 2r) = \sum_{r=1}^{n} r^2 + 2\sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[2(2n+1) - 6] = \frac{n(n+1)}{12}[4n-4] = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

**مثال (١٠):** أوجد مجموع المتسلسلة $1^2 + 3^2 + 5^2 + ...$ إلي $n$ حدا.

**الحـــــــل**

الحد العام لهذه المتسلسلة يمكن كتابته في الصورة:

$$a_r = (1 + (3-1)(r-1))^2 = (2r-1)^2 = 4r^2 - 4r + 1$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} a_r = \sum_{r=1}^{n} (4r^2 - 4r + 1) = 4\sum_{r=1}^{n} r^2 - 4\sum_{r=1}^{n} r + \sum_{r=1}^{n} 1$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} a_r = 4\left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right] - 4\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right] + n$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} a_r = n\left[\frac{2}{3}(n+1)(2n+1) - 2(n+1) + 1\right] = n\left[\frac{2}{3}(n+1)(2n+1-3) + 1\right]$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} a_r = \frac{1}{3}n[2(n+1)(2n-2) + 3] \Rightarrow \sum_{r=1}^{n} a_r = \frac{1}{3}n\left[4n^2 - 4 + 3\right] = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$$

## رابعا: طريقة جمع المتسلسلات العددية الهندسية

المتسلسلة العددية الهندسية هي متسلسلة علي الصورة:

$$a + (a+d)x + (a+2d)x^2 + .... + [a + (n-1)d]x^{n-1}$$

ولإيجاد مجموع هذا النوع من المتسلسلات نتبع الآتي:

$$S_n = a+(a+d)x+(a+2d)x^2+....+[a+(n-1)d]x^{n-1}$$

وبضرب طرفي هذه المعادلة في $x$ نحصل علي:

$$xS_n = ax+(a+d)x^2+(a+2d)x^3+....+[a+(n-1)d]x^n$$

وبالطرح نحصل علي:

$$S_n - xS_n = a+d\,x+d\,x^2+....+d\,x^{n-1}-[a+(n-1)d]x^n$$

$$= a+d\,x\underbrace{(1+x+....+x^{n-2})}_{\frac{x^{n-1}-1}{x-1}=\frac{1-x^{n-1}}{1-x}}-[a+(n-1)d]x^n$$

$$\therefore (1-x)s_n = a+d\left(\frac{1-x^{n-1}}{1-x}\right)x-[a+(n-1)d]x^n$$

$$\therefore s_n = \frac{[a+(n-1)d]x^n-a}{x-1}-d\left(\frac{1-x^{n-1}}{(1-x)^2}\right)x$$

**مثال (١٠):** أوجد مجموع المتسلسلة $1+2x+3x^2+....$ إلي $n$ حدا.

**الحــــــــــل**

واضح أن الحد العام للمتسلسلة المعطاة يمكن التعبير عنه بالصورة: $a_r = r\,x^{r-1}$ وبالتالي نجد أن:

$$s_n = 1+2x+3x^2+4x^3+...+nx^{n-1}$$

$$\therefore xs_n = x+2x^2+3x^3+...++(n-1)x^{n-1}+nx^n$$

$$\therefore s_n - xs_n = 1+(2-1)x+(3-2)x^2+(4-3)x^3+........+(n-(n-1))x^{n-1}-(n)x^n$$

$$\therefore s_n - xs_n = \underbrace{1+x+x^2+x^3+...+x^{n-1}}_{\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{1-x^n}{1-x}}-nx^n$$

$$\therefore (1-x)s_n = \frac{1-x^n}{1-x}-nx^n \Rightarrow s_n = \frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}$$

**تمرين:** أوجد مجموع المتسلسلة $1+3x+5x^2+...$ إلي $n$ حدا.

# تمارين (٣)

١) باستخدام طريقة الفروق أوجد مجموع المتسلسلات الآتية إلي $n$ حداً :

- $2.3+3.4+4.5+...$
- $2.2!+3.3!+4.4!+...$
- $\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+...$
- $\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+...$
- $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...$
- $\frac{1}{2.5.8}+\frac{1}{5.8.11}+\frac{1}{8.11.14}+...$

٢) باستخدام طريقة الفروق لجمع المتسلسلات برهن صحة العلاقات الآتية ثم تحقق من صحة ذلك باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي :

- $\sum_{r=1}^{n} r(r+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ .
- $\sum_{r=1}^{n}\frac{r}{(r+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$ .
- $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(3r-2)(3r+1)}=\frac{n}{3n+1}$ .
- $\sum_{r=1}^{n}\frac{r2^{r}}{(r+2)!}=1-\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$ .

٣) باستخدام طريقة التعويض أوجد مجموع المتسلسلات الآتية إلي $n$ حداً.

- $5+9+13+...$
- $1.4+4.7+7.10+...$

٤) باستخدام طريقة التعويض لجمع المتسلسلات برهن أن $\sum_{n=1}^{n}(2r-1)^{2}=\frac{1}{3}n(4n^{2}-1)$ ثم تحقق من صحة ذلك باستخدام الاستنتاج الرياضي.

٥) أوجد مجموع المتسلسلة $1+5x+9x^{2}+...$ إلي $n$ حداً.

# الباب الرابع

## متسلسلة ذات الحدين

احدي التطبيقات الهامة لتسلسلات القوي هو متسلسلة ذات الحدين والتي تمكننا من إيجاد مفكوك المقادير المكونة من حدين ومرفوعة إلي أي أس والتي تعرف في علم الجبر باسم "نظريه ذات الحدين".

### أولاً: نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

نظريه ذات الحدين بأس صحيح موجب تنص علي أنة إذا كان $n$ عددا صحيحا موجبا فإن:

$$(a+x)^n = C_0^n a^n x^0 + C_1^n a^{n-1}x + C_2^n a^{n-2}x^2 + \dots + C_r^n a^{n-r}x^r + \dots + C_n^n a^0 x^n$$

$$= \binom{n}{0}a^n x^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + \dots + \binom{n}{r}a^{n-r}x^r + \dots + \binom{n}{n}a^{n-n}x^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}x^r$$

ويكون هذا المفكوك صحيح لجميع قيم $x$ الحقيقية. وهو عبارة عن متسلسلة ماكلورين للدالة $(a+x)^n$ ومن ناحية أخري يمكن استخدام طريقة الاستنتاج الرياضي لإثبات صحته. وفي هذا المفكوك يكون الحد الذي رتبته $r+1$ هو $\binom{n}{r}a^{n-r}x^r$، حيث أن معاملات ذات الحدين تكون بالصورة:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3).......(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!r!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3).......(n-r+1)}{r!}$$

ملحوظة : معاملات ذات الحدين تكون كالأتي:

$$C_0^n = \binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!} = 1, \quad C_1^n = \binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$C_2^n = \binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2!}$$

$$C_3^n = \binom{n}{3} = \frac{n!}{(n-3)!\,3!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

وهكذا يكون

$$C_{n-1}^n=\binom{n}{n-1}=\frac{n!}{(n-(n-1))!\,(n-1)!}=\frac{n!}{1!(n-1)!}=\frac{n(n-1)!}{(n-1)!}=n,\ C_n^n=\binom{n}{n}=\frac{n!}{(n-n)!n!}=\frac{n!}{n!}=1$$

وبالتالي نجد أن: $C_0^n=C_n^n,\ C_1^n=C_{n-1}^n,\ C_2^n=C_{n-2}^n$ وبوجه عام يكون:

$C_r^n=C_{n-r}^n,\ r=0,1,2,\dots,n$ .

## حالات خاصة من متسلسلة (مفكوك) ذات الحدين في قوي $x$ التصاعدية

١) إذا كانت $a=1$ فإن المفكوك يصبح بالصورة

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\dots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-r+1)}{r!}x^r+\dots+x^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r$$

٢) بوضع $-x$ بدلا من $x$ فإن المفكوك يكون بالصورة:

$$(1-x)^n=1+n(-x)+\frac{n(n-1)}{2!}(-x)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(-x)^3+\dots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-r+1)}{r!}\underbrace{(-x)^r}_{(-1x)^r}+\dots+x^n$$

$$\therefore (1-x)^n=1-nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\dots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-r+1)}{r!}(-1)^r x^r+\dots+x^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(-1)^r x^r$$

## ثانيًا: نظرية ذات الحدين بأس ليس صحيحا موجبا

باستخدام نظريه تيلور في التحليل الرياضي (انظر مقرر التفاضل) يمكن استنتاج أنة إذا كان $n$ عددا صحيحا سالبا أو كسريا موجبا أو سالبا فإن مفكوك ذات الحدين للمقدار $(1+x)^n$ يكون بالصورة:

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\dots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-r+1)}{r!}x^r+\dots$$

حيث أن المفكوك في هذه الحالة يكون ممتدا إلي ما لانهاية، كما أنه يكون صحيحًا فقط إذا كان $|x|<1$ . وفي هذه الحالة لا يكون معني للتوافيق، مع ملاحظة انه إذا كان $n$ عددا صحيحًا موجبًا

نحصل علي نفس المفكوك الذي حصلنا عليه من ذي قبل حيث أن الحدود ستنعدم اعتبارا من الحد الذي رتبته $n+2$ في هذا المفكوك.

وقياسا علي ما سبق يكون مفكوك المقدار $(a+x)^n$ في قوي $x$ التصاعدية علي الصورة:

$$(a+x)^n=\left[a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right]^n=a^n\left(1+n\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3+\dots\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots\dots(n-r+1)}{r!}\left(\frac{x}{a}\right)^r+\dots\right),\ \left|\frac{x}{a}\right|<1$$

بينما يكون مفكوكة في قوي $\frac{1}{x}$ علي الصورة:

$$(a+x)^n=\left[x\left(1+\frac{a}{x}\right)\right]^n=x^n\left(1+n\left(\frac{a}{x}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{a}{x}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{a}{x}\right)^3+\dots\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots\dots(n-r+1)}{r!}\left(\frac{a}{x}\right)^r+\dots\right),\ \left|\frac{a}{x}\right|<1$$

## بعض المفكوكات الهامة

(١) بالتعويض عن $n=-1$ نجد إن

$$(1+x)^{-1}=1+(-1)x+\frac{(-1)(-1-1)}{2!}x^2+\frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}x^3$$
$$+\frac{(-1)(-1-1)(-1-2)(-1-3)}{4!}x^4+\dots$$
$$\therefore(1+x)^{-1}=1-x+\frac{2}{2!}x^2+\frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3+\frac{(-1)(-2)(-3)(-4)}{4!}x^4+\dots$$
$$=1-x+x^2-x^3+x^4+\dots+(-1)^r x^r+\dots=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r x^r \qquad (1)$$

(٢) بوضع $-x$ بدلا من $x$ في (١) نجد أن:

$$\therefore(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+x^4+\dots+x^r+\dots=\sum_{r=0}^{\infty}x^r \qquad (2)$$

(٣) بالتعويض عن $n=-2$ نجد أن

$$(1+x)^{-2}=1+(-2)x+\frac{(-2)(-2-1)}{2!}x^2+\frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3!}x^3+\dots$$

$$\therefore (1+x)^{-2}=1+(-2)x+\frac{(-2)(-3)}{2!}x^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}x^3+....$$

$$=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4+...+(-1)^r(r+1)x^r+...=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r(r+1)\,x^r \qquad (3)$$

(٤) بوضع $-x$ بدلا من $x$ في (٣) نجد أن:

$$(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+...+(r+1)x^r+...=\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)\,x^r \qquad (4)$$

## أمثله محـــــــلوله

**مثال(١): أوجد المفكوكات الآتية في قوي $x$ التصاعدية:**

(١) $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ ، (٢) $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ ، (٣) $(1-4x)^{-\frac{2}{3}}$ ، (٤) $\sqrt[3]{1+2x}$ .

## الحـــــــل

$$\because (1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+...$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)...(n-r+1)}{r!}x^r+...+x^n$$

(١) بالتعويض عن $n=-\frac{1}{2}$ نجد أن

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)x+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3+...$$

$$\therefore (1+x)^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)x+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3+....$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!}\frac{(-1)(-3)}{2^2}x^2+\frac{1}{3!}\frac{(-1)(-3)(-5)}{2^3}x^3+......$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+...+(-1)^r\ \frac{1.3.5...(2r-1)}{2.4.6...2r}x^r+...$$

وبالمثل نجد أن:

$$\therefore (1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+...+\frac{1.3.5...(2r-1)}{2.4.6...2r}x^r+...$$

(٣) بالتعويض عن $n=-\frac{2}{3}$ ووضع $-4x$ بدلا من $x$ نجد أن:

$$(1-4x)^{-\frac{2}{3}}=1+\left(-\frac{2}{3}\right)(-4x)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}-1\right)(-4x)^2+\frac{1}{3!}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}-1\right)\left(-\frac{2}{3}-2\right)(-4x)^3+\ldots$$

$$\therefore (1-4x)^{-\frac{2}{3}}=1+\left(-\frac{2}{3}\right)(-4x)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)(-4x)^2+\frac{1}{3!}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)(-4x)^3+\ldots\ldots$$

$$\therefore (1-4x)^{-\frac{2}{3}}=1+(-4)\frac{(-2)}{3}x+\frac{(-4)^2}{2!}\frac{(-2)(-5)}{3^2}x^2+\frac{(-4)^3}{3!}\frac{(-2)(-5)(-8)}{3^3}x^3+\ldots\ldots$$

**(4)** $$\because \sqrt[3]{1+2x}=(1+2x)^{\frac{1}{3}}$$

وبالتعويض عن $n=\frac{1}{3}$ ووضع $2x$ بدلا من $x$ نجد إن :

$$(1+2x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}(2x)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)(2x)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)(2x)^3+\ldots$$

$$\therefore (1+2x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}(2x)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)(2x)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)(2x)^3+\ldots\ldots$$

$$\therefore (1+2x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{2}{3}x+\frac{2^2}{2!}\frac{(1)(-2)}{3^2}x^2+\frac{2^3}{3!}\frac{(1)(-2)(-5)}{3^3}x^3+\ldots$$

**مثال(٢):** برهن أن: $\left(3+x^2\right)^{-1}=\frac{1}{3}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{2r}$

**الحـــــــل**

$$\because \left(3+x^2\right)^{-1}=\left[3\left(1+\frac{x^2}{3}\right)\right]^{-1}=3^{-1}\left(1+\frac{x^2}{3}\right)^{-1}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{x^2}{3}\right)^{-1}$$

$$\because (1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots \qquad (1)$$

وبوضع $\frac{x^2}{3}$ بدلا من $x$ في المفكوك (١) نجد أن :

$$\left(1+\frac{x^2}{3}\right)^{-1}=1+(-1)\left(\frac{x^2}{3}\right)+\frac{(-1)(-1-1)}{2!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^2+\frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^3+\ldots$$

$$\therefore \left(1+\frac{x^2}{3}\right)^{-1}=1+(-1)\left(\frac{x^2}{3}\right)+\frac{(-1)(-2)}{2!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^2+\frac{(-1)(-2)(-2)}{3!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^3+\ldots\ldots$$

$$=1-\left(\frac{x^2}{3}\right)+\left(\frac{x^2}{3}\right)^2-\left(\frac{x^2}{3}\right)^3+\ldots+(-1)^r\left(\frac{x^2}{3}\right)^r+\ldots$$

$$\therefore \left(1+\frac{x^2}{3}\right)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left(\frac{x^2}{3}\right)^r = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{2r} \Rightarrow$$

$$\left(3+x^2\right)^{-1} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{3}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{2r}$$

**مثال(٣):** إذا كان: $(1+ax)^n = 1+\frac{1}{3}x+\frac{1.3}{3.6}x^2+\frac{1.3.5}{3.6.9}x^3+\dots,\ |x|<1$ فأوجد $a$ ، $n$ واستنتج مجموع التسلسلة إلي $\infty$ عندما $x=\frac{1}{3}$.

## الحـــــــــــل

$$\because (1+ax)^n = 1+nax+\frac{n(n-1)}{2!}a^2x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^3x^3+\dots$$

$$= 1+\frac{1}{3}x+\frac{1.3}{3.6}x^2+\frac{1.3.5}{3.6.9}x^3+\dots,\ |x|<1 \qquad (1)$$

وبمقارنة معاملات $x$ ، $x^2$ في الطرفين نجد أن:

$$na=\frac{1}{3} \qquad (2)$$

$$\frac{n(n-1)}{2!}a^2=\frac{1.3}{3.6} \qquad (3)$$

من المعادلة (٢) نجد أن:

$$a=\frac{1}{3n} \Rightarrow a^2=\frac{1}{9n^2} \qquad (4)$$

بالتعويض من (٤) في (٣) نجد أن:

$$\frac{1}{9n^2}\,\frac{n(n-1)}{2!}=\frac{1.3}{3.6} \Rightarrow \frac{n-1}{n}=3 \Rightarrow n=-\frac{1}{2} \qquad (5)$$

وبالتعويض من (٥) في (٢) نجد أن:

$$a=-\frac{2}{3} \qquad (6)$$

وللتأكيد علي صحة الحل نحسب معامل $x^3$ في الفكوك (١):

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^3=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}\left(-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{1.3.5}{3^3.3!}=\frac{1.3.5}{(3)(3^2)(2.3)}=\frac{1.3.5}{3.6.9}$$

وهو نفس العامل المعطي في الفكوك (١). وكذلك يكون مجموع المتسلسلة المعطاة إلي ∞ عندما $x=\frac{1}{3}$

هو: $\frac{3}{\sqrt{7}}=\left(\frac{7}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(1-\frac{2}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(1+\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{3}x+\frac{1.3}{3.6}x^2+\frac{1.3.5}{3.6.9}x^3+...$.

مثال(٤): برهن علي أن المتسلسلة $1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}+\frac{1.3.5}{4.8.12}+...$ هي متسلسلات ذات الحدين وأن مجموعها إلي ما لانهاية يساوي $\sqrt{2}$.

## الحـــــــــل

بفرض أن

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+...=1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}+\frac{1.3.5}{4.8.12}+... \qquad (1)$$

وبمقارنة الحدين الثاني والثالث في الطرفين نجد أن:

$$nx=\frac{1}{4} \qquad (2)$$

$$\frac{n(n-1)}{2!}x^2=\frac{1.3}{4.8} \qquad (3)$$

من المعادلة (٢) نجد أن:

$$x=\frac{1}{4n}\Rightarrow x^2=\frac{1}{4^2n^2} \qquad (4)$$

بالتعويض من (٤) في (٣) نجد أن:

$$\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{4^2n^2}=\frac{1.3}{4.8}\Rightarrow n=-\frac{1}{2} \qquad (5)$$

وبالتعويض من (٥) في (٢) نجد أن:

$$x=-\frac{1}{2} \qquad (6)$$

وبالتالي يكون مجموع المتسلسلة المعطاة

هو: $\sqrt{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}+\frac{1.3.5}{4.8.12}+...$.

**مثال(٥): برهن أن المتسلسلة** $1-\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}+...$ **هي متسلسلة ذات الحدين وأن مجموعها إلي ما لانهاية يساوي** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**الحـــــــــــــــل**

**بفرض أن**

$$(1-x)^n=1-nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+...=1-\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}+... \qquad (1)$$

**وبمقارنة الحدين الثاني والثالث في الطرفين نجد أن:**

$$nx=\frac{1}{2} \qquad (2)$$

$$\frac{n(n-1)}{2!}x^2=\frac{1.3}{2.4}\Rightarrow n(n-1)x^2=\frac{3}{4} \qquad (3)$$

**من المعادلة (٢) نجد أن:**

$$x=-\frac{1}{2n}\Rightarrow x^2=\frac{1}{2^2n^2} \qquad (4)$$

بالتعويض من (٤) في (٣) نجد أن:

$$n(n-1)\frac{1}{2^2n^2}=\frac{3}{4}\Rightarrow (n-1)=3n\Rightarrow n=-\frac{1}{2} \qquad (5)$$

وبالتعويض من (٥) في (٢) نجد أن:

$$x=-1 \qquad (6)$$

وبالتالي يكون مجموع المتسلسلة المعطاة هو: $(1+1)^{-\frac{1}{2}}=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

# تمارين (٤)

١) أوجد المفكوكات الآتية في قوي $x$ التصاعدية: $(4+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ، $(2+3x)^{-2}$ .

٢) باستخدام نظرية ذات الحدين برهن أن:

$$(i)\ (1+x)^{-2}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r(r+1)\,x^r$$

$$(ii)\ (3-x^2)^{-1}=\frac{1}{3}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{2r}$$

$$(iii)\ (2+x^2)^{-2}=\frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r(r+1)\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2r}$$

٣) برهن علي أن التسلسلات الآتية هي متسلسلات ذات الحدين وأوجد مجموعها إلي ما لانهاية:

❖ $1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots$ .

❖ $1-\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}-\frac{1.3.5}{4.8.12}+\ldots$ .

٤) إذا كان: $(1+ax)^n=1+\frac{3}{8}x+\frac{3.5}{8.16}x^2+\frac{3.5.7}{8.16.24}x^3+\ldots,\ |x|<1$ فأوجد $a$ ، $n$ واستنتج مجموع التسلسلة إلي $\infty$ عندما $x=\frac{5}{3}$ .

٥) إذا كانت $(1+x)^n=1+\frac{1}{3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\ldots$ فأوجد قيمة كلاً من $x$ ، $n$. وأوجد مجموع التسلسلة إلي ما لانهاية.

# الباب الخامس

## جمع المتسلسلات ألمثلثيه باستخدام الأعداد المركبة

**العدد المركب:** ظهرت فكرة الأعداد المركبة (التخيلية) عند حل المعادلة العامة من الدرجة الثانية :

$$ax^2+bx+c=0,\ \ a,b,c\in R$$

حيث أن جذور هذه المعادلة تعطى من العلاقة $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ، والتي ليس لها معنى إذا كان $b^2-4ac<0$ ، لأنه كان يشترط أن تكون الأعداد الحقيقية تحت علامة الجذر التربيعي موجبة. وقد كان أويلر (١٧٠٧-١٧٨٣) هو أول الرياضيين الدي ادخل مفهوم العدد التخيلي $i=\sqrt{-1}$ علي أنة أحد جذور المعادلة $x^2+1=0$ والتي لا نجد لها جذوراً بين الإعداد الحقيقية. ونلاحظ أن :

$$i^2=-1,\ \ i^3=-i,\ \ i^4=1,\ i^5=i,\ i^6=-i,\dots,i^{2n}=(-1)^n, i^{2n+1}=(-1)^n i$$

وفي سياق مفهوم العدد التخيلي $i$ نجد أن المعادلة التي علي الصورة $x^2+a^2=0$ تكون جذورها هي $x=\pm ia$ وجذور المعادلة $x^2+2x+5=0$ هي $-1\pm 2i$. ونلاحظ أن الجذرين الأخيرين يحتويان علي جزء حقيقي وهو $-1$ وجزء تخيلي $\pm 2$ ومن هذا المنطلق فإن العدد المركب يمكن كتابته علي الصورة: $z=x+iy$ حيث $x$ ، $y$ أعداد حقيقية. ويسمى $x$ بالجزء الحقيقي للعدد المركب $z$ ويرمز له بالرمز $x=\mathrm{Re}(z)$ ،ويسمى $y$ بالجزء التخيلي ويرمز له بالرمز $y=\mathrm{Im}(z)$. وتسمى هذه الصورة بالصورة القياسية (المعتادة) للعدد المركب.ويمكن أيضا أن نكتب العدد المركب علي صورة زوج مرتب من الإعداد الحقيقية علي الصورة $z=(x,y)$ أي أن: $z=(x,y)=x+iy$ .

**جبر الإعداد المركبة:** بفرض أن $z_1=x_1+iy_1$ ، $z_2=x_2+iy_2$ عددان مركبان فإن:

- **التساوي** $\quad z_1=z_2 \Leftrightarrow x_1=x_2,\ \ y_1=y_2$
- **الجمع** $\quad z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$
- **الطرح** $\quad z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$

❖ **الضرب** $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

**مرافق العدد المركب:** العدد المركب الذي علي الصورة $x - iy$ يسمي بمرافق العدد المركب الذي علي الصورة $z = x + iy$ يرمز له بالرمز $\bar{z}$ أي أن $\bar{z} = x - iy$.

**نظريه:** ليكن $z_1 = x_1 + iy_1$، $z_2 = x_2 + iy_2$ عددان مركبان فإن:

$$(i)\ \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2},\qquad (ii)\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},\qquad (iii)\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\quad z_2 \neq 0$$

$$(iv)\ z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2,\qquad (v)\ \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}),\qquad (vi)\ \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

**البرهان: يترك للطالب كتمرين**

ويستخدم مرافق العدد المركب في قسمة الأعداد المركبة كالتالي: إذا كان $z_1 = x_1 + iy_1$، $z_2 = x_2 + iy_2$ حيث أن $z_2 \neq 0$ فإن:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

**مقياس العدد المركب:** مقياس العدد المركب الذي علي الصورة $z = x + iy$ هو العدد الحقيقي $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

**نظريه:** ليكن $z_1 = x_1 + iy_1$، $z_2 = x_2 + iy_2$ عددان مركبان فإن:

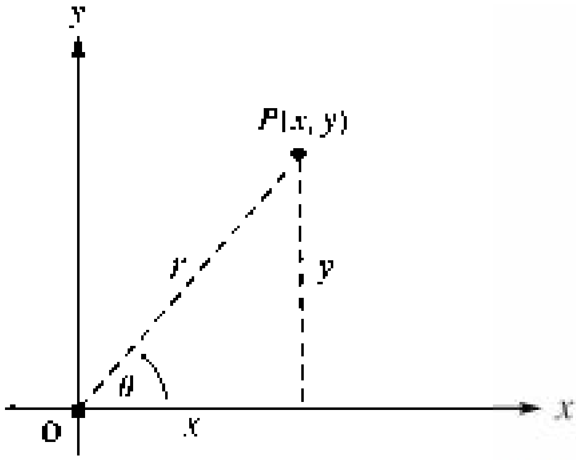
$$(i)\ |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| \pm |z_2|,\qquad (ii)\ |z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|,\qquad (iii)\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\quad z_2 \neq 0$$

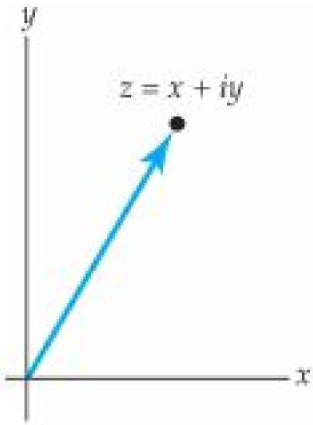
**البرهان: يترك للطالب كتمرين**

## الصورة المثلثية (القطبية) للعدد المركب

تعلمنا من الهندسة التحليلية أن أي زوج مرتب من الأعداد الحقيقية $(x,y)$ يمكن تمثيله في المستوى هندسياً وذلك أما عن طريق الإحداثيات الكارتيزية أو عن طريق الإحداثيات القطبية. فإذا مثلنا مجموعة الأعداد المركبة في المستوى واعتبرنا أن محور $ox$ يمثل الأجزاء الحقيقية للأعداد المركبة،

ومحور $oy$ يمثل معاملات الأجزاء التخيلية ، فإننا بذلك نحصل على مستوى الأعداد المركبة أو مستوي آرجند. وبفرض أن $z=x+iy$ عددا مركبا ، هذا العدد سيعين نقطة واحدة $p$ في المستوى. من الواضح أن هذه النقطة تتعين تماماً إذا علمنا بعد هذه النقطة $r$ عن نقطة الأصل وكذلك الزاوية التي يعينها $op$ مع محور $ox$ ، كما بالشكل المقابل،من الشكل المقابل:




واضح أن: $x=r\cos\theta$ , $y=r\sin\theta$ وبالتالي فإن العدد المركب $z=x+iy$ يمكن كتابته بالصورة: $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ وتسمى هذه

الصورة بالصورة ألمثلثيه (القطبية) للعدد المركب $z$. يسمى العدد $r$ بمقياس العدد المركب $z$ ويرمز له بالرمز $|z|$ $r=$ أي أن:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad 0\le r<\infty$$

وتسمى $\theta$ بسعة هذا العدد المركب ويرمز لها بالرمز $\arg z$ أي أن $\theta=\arg z$. وواضح أن السعه للعدد المركب تتعين من العلاقة: $\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right), -\infty<\theta<\infty$ وحيث أن النسب ألمثلثيه لأي زاوية لا تتغير بإضافة مضاعفات $2\pi$ لهذه الزاوية فإن سعه العدد المركب $\theta$ تأخذ عددها لانهائي من القيم الحقيقية والقيمة التي تحقق الشرط $-\pi\le\theta\le\pi$ تسمى بالقيمة الأساسية للسعة.

## صورة اويلر (الصورة الآسية) للعدد المركب

من مفكوك ماكلورين للداله $e^x$ (انظر مقرر التفاضل) نعلم أن: $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...$ ، وبوضع $x=i\theta$ نجد أن: $e^{i\theta}=1+\dfrac{i\theta}{1!}+\dfrac{(i\theta)^2}{2!}+\dfrac{(i\theta)^3}{3!}+\dfrac{(i\theta)^4}{4!}+\dfrac{(i\theta)^5}{5!}+\dfrac{(i\theta)^6}{6!}+\dfrac{(i\theta)^7}{7!}+...$ وبفصل

الجزء الحقيقي عن الجزء التخيلي نجد أن:

$$e^{i\theta}=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\ldots\right)+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\ldots\right)$$

ومن مفكوك ماكلورين للدوال $\cos\theta$ ، $\sin\theta$ (انظر مقرر التفاضل) نجد أن:

$$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\ldots,\qquad \sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\ldots$$

وبالتالي نجد أن: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ وبالتالي فإن أي عدد مركب $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ يمكن كتابته علي الصورة: $z=re^{i\theta}$ وهذه الصورة تسمي بصورة أويلر للعدد المركب.

وقياسا علي ما سبق نجد أن: $e^{-i\theta}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=\cos\theta-i\sin\theta$ وبالتالي نجد أن مرافق العدد المركب $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$ يمكن كتابته بالصورة $\bar{z}=re^{-i\theta}$. وبالتالي نستنتج أن:

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}),\ \sin\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$$

## إيجاد مقياس وسعة حاصل ضرب وخارج قسمة عددين مركبين

بفرض أن $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\ z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ عددان مركبان فإن:

$$(i)\, z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)],\quad (ii)\,\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

ويمكن التحقق من صحة ذلك باستخدام صورة اويلر للعدد المركب كما يأتي:

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_1e^{i\theta_1},\ \ z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_2e^{i\theta_2}$$

وبالتالي يكون:

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i\theta_1}.e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=r_1r_2e^{i\theta_1}.e^{-i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1-\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

وبالتالي نلاحظ أن:

- $|z_1z_2|=r_1r_2$ ، أي أن مقياس حاصل ضرب عددين مركبين هو حاصل ضرب مقياسي العددين المركبين.

❖ $Arg(z_1z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$ ، أي أن سعة حاصل ضرب عددين مركبين تساوي مجموع سعتي العددين.

❖ $\frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ ، أي أن مقياس خارج قسمة عددين مركبين يساوي خارج قسمة مقياسيهما.

❖ $Arg(z_1) - Arg(z_2) = Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ ، أي أن سعة خارج قسمة عددين مركبين يساوي الفرق بين سعتيهما.

ويمكن تعميم العلاقة الأولي لعدد $n$ من الأعداد المركبة كما يلي: بفرض أن

$$z_1 = e^{i\theta_1},\ z_2 = r_2e^{i\theta_2},\dots,\ z_n = r_ne^{i\theta_n}$$

عدد $n$ من الأعداد المركبة فإن:

$$z_1.z_2\dots z_n = r_1r_2\dots r_n\, e^{i(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_1)} = [\cos(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n)]$$

وإذا كانت $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ فإن العلاقة السابقة تصبح بالصورة:

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)] \Rightarrow r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$

$$\therefore (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \qquad (*)$$

والعلاقة (*) هي علاقة شهيرة تعرف باسم " نظريه دي موافر" نسبتا إلي العلامة الفرنسي دي موافر ومن الاستنتاج السابق يتضح أن هذه علاقة صحيحة عندما تكون $n$ عدد صحيح موجب وهي أيضا صحيحة عندما تكون $n$ عدد صحيح سالب أو عدد كسري. والمنطوق الكامل لنظرية دي موافر يكون كما يلي:

## نظرية دي موافر

- إذا كان $n$ عددًا صحيحًا موجبًا أو سالبًا فإن: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.
- إذا كان $n$ عددا صحيحا موجبا فإن:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{n}} = \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,\dots,n-1$$

**البرهان:**

**أولاً:** عندما تكون $n$ عدد صحيح موجب نستخدم طريقه الاستنتاج **(انظر باب الاستنتاج الرياضي).**

**ثانياً:** إذا كان عددًا صحيحًا سالبًا ، نضع $n=-m$ حيث أن $m$ عدد صحيح موجب فيكون:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-m}=\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{m}}=\frac{1}{\cos m\theta+i\sin m\theta}$$

$$=\frac{1}{\cos m\theta+i\sin m\theta}\cdot\frac{\cos m\theta-i\sin m\theta}{\cos m\theta-i\sin m\theta}$$

$$=\frac{\cos m\theta-i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta+\sin^2 m\theta}=\cos m\theta-i\sin m\theta$$

$$=\cos(-m)\theta+i\sin(-m)\theta=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

**ثالثا:** بفرض أن $(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{1}{n}}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ وبالتالي نجد أن:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{n}=(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$$

وبالتالي نحصل علي: $\cos\theta+i\sin\theta=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$ وبالتالي نجد أن:

$$\therefore \cos n\alpha=\cos\theta,\qquad \sin n\alpha=\sin\theta$$

ومن ذلك نستنتج أن: $n\alpha=\theta+2\pi k\Rightarrow\alpha=\frac{\theta+2\pi k}{n},\ k=0,1,2,\dots,n-1$ وبالتالي نجد أن:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{1}{n}}=\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,\dots,n-1$$

**ملحوظة:** قياسا علي ما سبق، ليكن $n$ عددًا صحيحًا موجبًا، $m$ عددًا صحيحا موجبًا أو سالبًا فإن:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{m}{n}}=\cos\left(\frac{m\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{m\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,\dots,n-1.$$

## تطبيقات الأعداد المركبة في جمع بعض المتسلسلات المثلثيه

باستخدام الإعداد المركبة يمكن إيجاد مجموع بعض المتسلسلات المثلثيه في جيوب وجيوب تمام الزاوية $\theta$ ، ويكن توضيح ذلك من خلال الأمثلة الآتية:

**مثال (١) : أوجد مجموع المتسلسلة :**

$$\cos\theta-\binom{n}{1}\cos 2\theta+\binom{n}{2}\cos 3\theta+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}\cos(n+1)\theta$$

## الحـــــــــل

بفرض أن

$$A=\cos\theta-\binom{n}{1}\cos 2\theta+\binom{n}{2}\cos 3\theta+\ldots\ldots\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}\cos(n+1)\theta$$

$$B=\sin\theta-\binom{n}{1}\sin 2\theta+\binom{n}{2}\sin 3\theta+\ldots\ldots\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}\sin(n+1)\theta$$

وبالتالي يكون

$$\therefore A+iB=(\cos\theta+i\sin\theta)-\binom{n}{1}(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)+\binom{n}{2}(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)+\ldots$$

$$+(-1)^n\binom{n}{n}(\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta)$$

$$\therefore A+iB=z-\binom{n}{1}z^2+\binom{n}{2}z^3+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}z^{n+1}=z\left[1-\binom{n}{1}z+\binom{n}{2}z^2+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}z^n\right]$$

$$=z(1-z)^n$$

$$\therefore A+iB=(\cos\theta+i\sin\theta)(\underbrace{1-\cos\theta}_{2\sin^2\frac{\theta}{2}}-i\sin\theta)^n$$

$$=(\cos\theta+i\sin\theta)\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}-2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^n$$

$$=(\cos\theta+i\sin\theta)\left(2^n\sin^n\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\right)^n$$

$$=(\cos\theta+i\sin\theta)\left(2^n\sin^n\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right]^n$$

$$=(\cos\theta+i\sin\theta)\left(2^n\sin^n\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\frac{n(\pi-\theta)}{2}-i\sin\frac{n(\pi-\theta)}{2}\right]$$

$$\therefore A+iB=\left(2^n\sin^n\frac{\theta}{2}\right)(\cos\theta+i\sin\theta)\left[\cos\frac{n(\pi-\theta)}{2}-i\sin\frac{n(\pi-\theta)}{2}\right]$$

$$=\left(2^n\sin^n\frac{\theta}{2}\right)\left[\begin{array}{l}\cos\theta\cos\frac{n(\pi-\theta)}{2}-i\cos\theta\sin\frac{n(\pi-\theta)}{2}\\+i\sin\theta\cos\frac{n(\pi-\theta)}{2}+i\sin\theta\left(-i\sin\frac{n(\pi-\theta)}{2}\right)\end{array}\right]$$

$$=\left(2^n\sin^n\frac{\theta}{2}\right)\left[\begin{array}{l}\cos\theta\cos\frac{n(\pi-\theta)}{2}+\sin\theta\sin\frac{n(\pi-\theta)}{2}\\+i\left(\sin\theta\cos\frac{n(\pi-\theta)}{2}-\cos\theta\sin\frac{n(\pi-\theta)}{2}\right)\end{array}\right]$$

وبالتالي نجد أن:

$$\therefore A=\left(2^n\sin^n\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\theta\cos\frac{n(\pi-\theta)}{2}+\sin\theta\sin\frac{n(\pi-\theta)}{2}\right]$$

$$=\left(2^n\sin^n\frac{\theta}{2}\right)\cos\left[\frac{2\theta}{2}-\frac{n(\pi-\theta)}{2}\right]=\left(2^n\sin^n\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+2)\theta-n\pi}{2}\right)$$

وبالمثل نجد أن

$$\therefore B=\left(2^n\sin^n\frac{\theta}{2}\right)\left[\sin\theta\cos\frac{n(\pi-\theta)}{2}-\cos\theta\sin\frac{n(\pi-\theta)}{2}\right]=\left(2^n\sin^n\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+2)\theta-n\pi}{2}\right)$$

**مثال (٢) : أوجد مجموع المتسلسلة** $\cos\theta+\binom{n}{1}\cos2\theta+\binom{n}{2}\cos3\theta+\ldots+\binom{n}{n}\cos(n+1)\theta$ .

## الحـــــــل

بفرض أن

$$A=\cos\theta+\binom{n}{1}\cos2\theta+\binom{n}{2}\cos3\theta+\ldots+\binom{n}{n}\cos(n+1)\theta$$

$$B=\sin\theta+\binom{n}{1}\sin2\theta+\binom{n}{2}\sin3\theta+\ldots+\binom{n}{n}\sin(n+1)\theta$$

وبالتالي يكون

$$\therefore A+iB=(\cos\theta+i\sin\theta)+\binom{n}{1}(\cos2\theta+i\sin2\theta)+\binom{n}{2}(\cos3\theta+i\sin3\theta)+\ldots$$

$$+\binom{n}{n}(\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta)$$

$$\therefore A+iB = z+\binom{n}{1}z^2+\binom{n}{2}z^3+\ldots+\binom{n}{n}z^{n+1} = z\left[1+\binom{n}{1}z+\binom{n}{2}z^2+\ldots+\binom{n}{n}z^n\right]$$

$$= z(1+z)^n$$

$$\therefore A+iB = (\cos\theta+i\sin\theta)(\underbrace{1+\cos\theta}_{2\cos^2\frac{\theta}{2}}+i\sin\theta)^n$$

$$= (\cos\theta+i\sin\theta)\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^n$$

$$= (\cos\theta+i\sin\theta)\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^n$$

$$= (\cos\theta+i\sin\theta)\left(2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)$$

$$\therefore A+iB = \left(2^n\sin^n\frac{\theta}{2}\right)(\cos\theta+i\sin\theta)\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)$$

وبالتالي نجد أن:

$$A = \left(2^n\sin^n\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\theta\cos\frac{n\theta}{2}-\sin\theta\sin\frac{n\theta}{2}\right) = 2^n\sin^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+2)\theta}{2}\right)$$

**مثال(٣):** أوجد مجموع التسلسلة $\binom{n}{1}\sin\theta+\binom{n}{2}\sin 2\theta+\binom{n}{3}\sin 3\theta+\ldots+\binom{n}{n}\sin n\theta$ .

**الحـــــــــل**

بفرض أن

$$B = \binom{n}{1}\sin\theta+\binom{n}{2}\sin 2\theta+\binom{n}{3}\sin 3\theta+\ldots+\binom{n}{n}\sin n\theta$$

$$A = \binom{n}{1}\cos\theta+\binom{n}{2}\cos 2\theta+\binom{n}{3}\cos 3\theta+\ldots+\binom{n}{n}\cos n\theta$$

وبالتالي نجد أن:

$$A+iB = \binom{n}{1}[\cos\theta+i\sin\theta]+\binom{n}{2}[\cos 2\theta+i\sin 2\theta]+\ldots+\binom{n}{n}[\cos n\theta+i\sin n\theta]$$

$$= \binom{n}{1}e^{i\theta}+\binom{n}{2}\left(e^{i\theta}\right)^2+\binom{n}{3}\left(e^{i\theta}\right)^3+\ldots+\binom{n}{n}\left(e^{i\theta}\right)^n$$

$$\therefore (1+A)+iB = 1+\binom{n}{1}e^{i\theta}+\binom{n}{2}\left(e^{i\theta}\right)^2+\binom{n}{3}\left(e^{i\theta}\right)^3+\dots+\binom{n}{n}\left(e^{i\theta}\right)^n$$

$$= \left(1+e^{i\theta}\right)^n = \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\left[e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right]\right)^n$$

$$= e^{i\frac{n}{2}\theta}\left[e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right]^n = e^{i\frac{n}{2}\theta}\left[e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right]^n$$

$$\therefore (1+A)+iB = e^{i\frac{n}{2}\theta}\left[2\cos\frac{\theta}{2}\right]^n = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)$$

وبالتالي نجد أن مجموع المتسلسلة المعطاة يكون علي الصورة:

$$B = 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

**مثال(٦):** أوجد مجموع المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos r\theta}{r!} = \cos\theta+\frac{\cos 2\theta}{2!}+\frac{\cos 3\theta}{3!}+\dots$

## الحـــــــــــــل

بفرض أن

$$A = \cos\theta+\frac{\cos 2\theta}{2!}+\frac{\cos 3\theta}{3!}+\dots,\ B = \sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{2!}+\frac{\sin 3\theta}{3!}+\dots$$

وبالتالي نجد أن

$$A+iB = \cos\theta+i\sin\theta+\frac{\cos 2\theta+i\sin 2\theta}{2!}+\frac{\cos 3\theta+i\sin 3\theta}{3!}+\dots$$

بوضع $z = \cos\theta+i\sin\theta$ نجد أن:

$$A+iB = z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots+\frac{z^n}{n!} = e^z-1$$

$$= e^{\cos\theta+i\sin\theta}-1$$

$$= e^{\cos\theta}e^{i\sin\theta}-1$$

$$= e^{\cos\theta}\left[\cos(\sin\theta)+i\sin(\sin\theta)\right]-1$$

$$\therefore A = e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)-1, \qquad B = e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)$$

**مثال(٧): أوجد مجموع التسلسلة**

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos^r\theta\cos r\theta}{r!}=\cos\theta.\cos\theta+\frac{\cos^2\theta\cos2\theta}{2!}+\frac{\cos^3\theta\cos3\theta}{3!}+\dots$$

**الحـــــــــــــل**

بفرض أن

$$A=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos^r\theta\cos r\theta}{r!}=\cos\theta.\cos\theta+\frac{\cos^2\theta\cos2\theta}{2!}+\frac{\cos^3\theta\cos3\theta}{3!}+\dots$$

$$B=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos^r\theta\sin r\theta}{r!}=\cos\theta.\sin\theta+\frac{\cos^2\theta\sin2\theta}{2!}+\frac{\cos^3\theta\sin3\theta}{3!}+\dots$$

وبالتالي نجد أن

$$A+iB=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos^r\theta\cos r\theta}{r!}+i\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos^r\theta\sin r\theta}{r!}=\sum_{r=1}^{\infty}\cos^r\theta\,\frac{[\cos r\theta+i\sin r\theta]}{r!}$$

$$=\cos\theta[\cos\theta+i\sin\theta]+\cos^2\theta\,\frac{[\cos2\theta+i\sin2\theta]}{2!}+\cos^3\theta\,\frac{[\cos3\theta+i\sin3\theta]}{3!}+\dots$$

بوضع $z=\cos\theta+i\sin\theta$ نجد أن:

$$A+iB=\cos\theta\,z+\cos^2\theta\,\frac{z^2}{2!}+\cos^3\theta\,\frac{z^3}{3!}+\dots=z\cos\theta+\frac{(z\cos\theta)^2}{2!}+\frac{(z\cos\theta)^3}{3!}+\dots$$

$$=e^{z\cos\theta}-1$$

$$\therefore A+iB=e^{z\cos\theta}-1=e^{(\cos\theta+i\sin\theta)\cos\theta}-1$$

$$=e^{\cos^2\theta}e^{i\sin\theta\cos\theta}-1$$

$$=e^{\cos^2\theta}[\cos(\sin\theta\cos\theta)+i\sin(\sin\theta\cos\theta)]-1$$

$$=e^{\cos^2\theta}\left[\cos\left(\frac{\sin2\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\sin2\theta}{2}\right)\right]-1$$

$$A=e^{\cos^2\theta}\cos\left(\frac{\sin2\theta}{2}\right)-1,\quad B=e^{\cos^3\theta}\sin\left(\frac{\sin2\theta}{2}\right)$$

## تمارين (٥)

١) أوجد مجموع المتسلسلات الآتية :

- $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\cos r\theta}{r!}$.
- $\sum_{r=1}^{n} \cos r\theta$.
- $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin r\theta}{r!}$.
- $\sum_{r=1}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \cos r\theta$.

# الباب السادس

# تقارب وتباعد المتسلسلات الغير محدودة

## المتسلسلات (الغير محدودة) اللانهائية

**تعريف:** المتسلسلة اللانهائية هي عبارة عن مجموع حدود متتابعة اللانهائية، فمثلا أذا كانت $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ متتابعة لانهائية فإن المجموع $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{r=1}^{\infty} a_r$ يمثل المتسلسلة اللانهائية الناظرة لهذه المتتابعة. وهذا النوع من المتسلسلات يحتوي علي عدد لانهائي من الحدود.

## المجاميع الجزئية للمتسلسلات اللانهائية

مجموع عدد $n$ من حدود المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ يسمي بالمجموع الجزئي للمتسلسلة ويرمز له عادة بالرمز $S_n$، وبالتالي يكون $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{r=1}^{n} a_r$ أي أن:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, ..., \quad S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{r=1}^{n} a_r$$

وبهذا يكون لدينا المتتابعة $(S_1, S_2, ..., S_n)$ من المجاميع الجزئية. ولاختبار المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ من حيث التقارب والتباعد يكون لدينا الآن أن ندرس الاحتمالات الأربعة الآتية:

## تقارب وتباعد المتسلسلات اللانهائية

**الاحتمال(١):** في المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ إذا كانت $\lim_{n\to\infty} S_n = l$، $l$ عددًا محدودًا فإنه يقال أن المتسلسلة تقاربيه وأن مجموعها يساوي $l$، أي أن المتسلسلة تكون تقاربيه إذا كان مجموعها عددًا محدودًا.

**الاحتمال(٢):** في المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ إذا كانت $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ أو $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ فإنه يقال أن المتسلسلة تباعديه.

**الاحتمال(٣):** في المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ إذا كانت $\lim_{n\to\infty} S_n$ تتذبذب بين عددين محدودين فإنه يقال أن

التسلسلة تتذبذب تذبذبًا محدودًا وفي هذه الحالة تكون التسلسلة تباعديه أيضا.

**الاحتمال(٤):** في التسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ إذا كانت $\lim_{n\to\infty} S_n$ تتذبذب بين $\infty$ ، $-\infty$ فإنه يقال أن التسلسلة تتذبذب تذبذبًا غير محدودًا وفي هذه الحالة تكون التسلسلة تباعديه أيضا.

**ملحوظة(١):** التسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ يقال أنها تباعديه إذا كانت $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ أو $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ أو $\lim_{n\to\infty} S_n$ تذبذبية.

**ملحوظة (٢):** تقارب أي التسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ يعتمد علي تقارب مجموعها الجزئي، أي أن النهاية $\lim_{n\to\infty} S_n$ تكون موجودة وتساوي عددًا محدودًا.

**مثال (١):** أدرس تقارب وتباعد التسلسلات الآتية :

(١) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ، (٢) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

**الحـــــــــــل**

(١) الحد العام للتسلسلة المعطاة هو $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ وبتطبيق نظريه الفروق نجد أن مجموع هذه التسلسلة يكون بالصورة $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)}$ وبالتالي تكون $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)}\right) = 1$ وبالتالي فإن التسلسلة المعطاة تكون تقاربيه ومجموعها يساوي الواحد الصحيح.

(٢) الحد العام للتسلسلة المعطاة هو $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ وبتطبيق نظريه الفروق نجد أن مجموع هذه التسلسلة يكون بالصورة $S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$ وبالتالي تكون

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

وبالتالي فإن التسلسلة المعطاة تكون تقاربيه ومجموعها يساوي $\frac{1}{4}$.

## المتسلسلة الهندسية اللانهائية

المتسلسلة التي تأخذ الصورة $\sum_{r=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$ تسمي بالمتسلسلة الهندسية اللانهائية حيث أن 1 هو الحد الأول ، $x$ هو الأساس.

## تقارب وتباعد المتسلسلة الهندسية اللانهائية

**مثال (٢):** برهن أن المتسلسلة الهندسية $\sum_{r=1}^{\infty} x^{r-1}$ تكون:

١) تقاربيه أذا كانت $|x| < 1$ أي أن $-1 < x < 1$.

٢) تباعديه أذا كانت $|x| > 1$.

٣) تذبذبيه (تباعديه أيضا) أذا كانت $x = -1$.

وهذا يعني أن المتسلسلة الهندسية تكون تقاربيه أذا كانت $-1 < x < 1$ وماعدا ذلك تكون تباعديه.

### الحـــــــــــل

مجموع هذه المتسلسلة يعطي من العلاقة :

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}, & x > 1 \\ \dfrac{1 - x^n}{1 - x}, & x < 1 \\ n, & x = 1 \end{cases}$$

والآن ندرس الحالات الآتية:

**الحالة الأولي:** أذا كانت $|x| < 1$ أي أن $-1 < x < 1$ فإن $x^n \to 0$ عندما $n \to \infty$ وبالتالي تكون:

$\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-x}$ وبالتالي فأن المتسلسلة تكون تقاربيه ومجموعها يساوي $\dfrac{1}{1-x}$.

**الحالة الثانية:** إذا كانت $x > 1$ فإن $x^n \to \infty$ عندما $n \to \infty$ وبالتالي تكون:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \infty$$

وبالتالي فإن المتسلسلة تكون تباعديه في هذه الحالة.

**الحالة الثالثة:** إذا كانت $x=-1$ فإن

$$S_n=\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}=\frac{1-(-1)^n}{2}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}S_n=\begin{cases}1, & n \text{ is odd}\\ 0, & n \text{ is even}\end{cases}$$

وبالتالي فإن المتسلسلة في هذه الحالة تكون تذبذبيه تذبذبا محدودا وبالتالي فهي تباعديه.

**الحالة الرابعة:** إذا كانت $x<-1$ فإنه بوضع $x=-\alpha$ نجد أن $\alpha>1$ ويكون

$$S_n=\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{(-\alpha)^n-1}{(-\alpha)-1}\Rightarrow\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\begin{cases}\infty, & n \text{ is odd}\\ -\infty, & n \text{ is even}\end{cases}$$

وبالتالي فإن المتسلسلة في هذه الحالة تكون تذبذبيه تذبذبا لانهائي وبالتالي فهي تباعديه.

## الشرط الضروري لتقارب متسلسلة

**نظرية:** الشرط الضروري لكي تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تقاربيه هو أن تكون $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

**نتيجة:** المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تكون تباعديه إذا كانت $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$.

**ملحوظة (٣):** هذا الشرط ضروري ولكن غير كافي بمعني أن المتسلسلة التقاربيه يجب أن تحقق هذا الشرط ولكن تحقق هذا الشرط لا يؤكد أن المتسلسلة تكون تقاربيه وفي هذه الحالة تكون بحاجه إلي وسيله إضافية لتأكيد التقارب من عدمه.

**مثال(٣):** ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية:

(١) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{4n+1}$ ، (٢) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3n^3+n+1}$

**الحـــــــل**

(١)

$$\because \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{4n+1}=\frac{3}{4}\neq 0$$

وبالتالي فإن المتسلسلة المعطاة تكون تباعديه.

(٢)

$$\because \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{3n^2+n+1}=\frac{1}{3}\neq 0$$

وبالتالي فإن المتسلسلة المعطاة تكون تباعديه.

## اختبارات التقارب والتباعد للمتسلسلات الغير محدودة

مما سبق نلاحظ أن تقارب أي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_r$ يعتمد علي تقارب مجموعها الجزئي، أي أن النهاية $\lim_{n\to\infty} S_n$ تكون موجودة وتساوي عددًا محدودًا. والهدف الآن هو دراسة بعض الطرق التي يمكننا من خلالها التعرف علي خواص متسلسلة ما من حيث كونها تقاربيه أم تباعديه وذلك دون التطرق إلي عملية إيجاد مجموع هذه المتسلسلة. وتعرف هذه الطرق باسم اختبارات التقارب والتباعد للمتسلسلات الغير محدودة.

### أولاً: اختبارات التقارب والتباعد للمتسلسلات ذات الحدود الموجبة

### الاختبار الأول :اختبار المقارنة (الصورة الأولي)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلتين ذات حدود موجبه فإنه أذا كانت:

١) $a_n \le b_n$ لجميع قيم $n$ وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تقاربيه فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون تقاربيه.

٢) $a_n \ge b_n$ لجميع قيم $n$ وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تباعديه فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون تباعديه.

**نظريه:** المتسلسلة التي علي الصورة: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ تكون:

١) تقاربيه إذا كانت $k > 1$.

٢) تباعديه إذا كانت $k \le 1$.

**البرهان:** يمكن التحقق بسهولة من صحة هذه النظرية وذلك باستخدام اختبار المقارنة من خلال دراسة الحالات الآتية :

**الحالة الأولي عندما $k = 1$:** أي دراسة تقارب وتباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ .

$$\because a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

وبالتالي يكون شرط التقارب متحقق علي الرغم من أن هذه المتسلسلة تباعديه كما يتضح من الخطوات

الآتية :

$$\because\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots \quad (1)$$

وبمقارنه كل حد من حدود هذه المتسلسلة بالحد المناظر له في المتسلسلة

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots \quad (2)$$

لاحظ أن كل حد في حدود المتسلسلة (١) اكبر من أو يساوي الحد المناظر له في المتسلسلة (٢) أي أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots\geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots=\infty$$

وحيث أن المتسلسلة (٢) تباعديه فإن المتسلسلة (١) تكون تباعديه.

**الحالة الثانية عندما $k>1$:** أي دراسة تقارب وتباعد المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}=1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\ldots,\ k>1.$$

$$\begin{aligned}\because\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}&=1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\frac{1}{5^k}+\frac{1}{6^k}+\frac{1}{7^k}+\frac{1}{8^k}+\ldots\\
&<1+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}\right)+\left(\frac{1}{4^k}+\frac{1}{4^k}+\frac{1}{4^k}+\frac{1}{4^k}\right)\\
&+\left(\frac{1}{8^k}+\frac{1}{8^k}+\frac{1}{8^k}+\frac{1}{8^k}+\frac{1}{8^k}+\frac{1}{8^k}+\frac{1}{8^k}+\frac{1}{8^k}\right)+\ldots\\
&=1+\left(\frac{2}{2^k}\right)+\left(\frac{4}{4^k}\right)+\left(\frac{8}{8^k}\right)+\ldots=1+\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)+\left(\frac{1}{4^{k-1}}\right)+\left(\frac{1}{8^{k-1}}\right)+\ldots\\
&=1+\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)+\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^3+\ldots=\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^{r-1}\end{aligned}$$

والمتسلسلة الأخيرة متسلسلة هندسية أساسها هو $\frac{1}{2^{k-1}},\ k>1$ وهو اقل من الواحد الصحيح وبالتالي

فهي متسلسلة تقاربيه ومن ثم فإن المتسلسلة المعطاة تكون تقاربيه.

**الحالة الثالثة عندما $k<1$:** أي دراسة تقارب وتباعد المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}=1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\ldots,\ k<1.$$

في هذه الحالة نلاحظ أن $\frac{1}{n^k} \geq \frac{1}{n} \Leftarrow n^k \leq n$ وحيث المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ تباعديه فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}, k<1$ تكون تباعديه باستخدام اختبار المقارنة.

**ملحوظة(٤):** المتسلسلة التي علي الصورة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+ \dots$ تسمي بالمتسلسلة التوافقية.

**مثال(٤):** ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية:

(١) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ ، (٢) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log n}$ ، (٣) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^n+n}$.

**الحـــــــــل**

(١) نلاحظ أن $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n} \Leftarrow n \geq \sqrt{n}$ ، وحيث أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ تباعديه فإن المتسلسلة المعطاة تكون تباعديه.

(٢) نلاحظ أن $\frac{1}{\log n} \leq \frac{1}{n} \Leftarrow n \geq \log n$ ، وحيث أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ تباعديه فإن المتسلسلة المعطاة تكون تباعديه.

(٣) نلاحظ أن $\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{3^n}{4^n} = \frac{3^n}{4^n} \leq \frac{3^n}{4^n+n} \Leftarrow \frac{1}{4^n} \leq \frac{1}{4^n+n} \Leftarrow 4^n+n \geq 4^n$ ، وحيث أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ هي متسلسلة هندسيه وأساسها اقل من الواحد الصحيح فهي تكون تقاربيه وبالتالي فإن المتسلسلة المعطاة تكون تقاربيه.

## الاختبار الثاني: اختبار المقارنة (الصورة الثانية)

بفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلتين ذات حدود موجبه فإنه إذا كانت: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$ حيث أن $l$ عدد محدود فإن المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ يتقاربان معا أو يتباعدان معا.

**مثال (٥):** ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية:

(١) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4-n}{n^3+1}$ ، (٢) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n^3+n+1}$

## الحـــــــــــل

(١) نقارن المتسلسلة المعطاة بالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ وحيث أن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-n^3}{n^3+1}=-1\neq 0$$

وبالتالي فإن المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ يتقاربان معًا أو يتباعدان معًا. وحيث أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ تقاربيه فإن المتسلسلة المعطاة تكون تقاربيه أيضا.

(٢) باستخدام اختبار المقارنة (الصورة الثانية)

$$a_n=\frac{n+1}{2n^2+n+3}, \qquad b_n=\frac{1}{n}$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n^2+n+13}\right)\left(\frac{n}{1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2+n+1}=\frac{1}{2}\neq 0$$

وحيث أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ تباعديه فإن المتسلسلة المعطاة تكون تباعديه.

**ملحوظة:** يستخدم اختبار المقارنة (الصورة الثانية) أذا كان الحد العام للمتسلسلة المعطاة عبارة عن كسر فيه درجه البسط لا تساوي درجه المقام ويكون اختيار المتسلسلة $b_n$ بحيث تكون بالصورة $b_n=\frac{1}{n^k}$ حيث أن $k$ تساوي الفرق بين درجتي المقام و البسط .

## الاختبار الثالث: اختبار الجذر (اختبار كوشي)

بفرض أن $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ متسلسلة ذات حدود موجبه فإنه إذا كانت $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$ فإن:

١) المتسلسلة تكون تقاربيه أذا كانت $l<1$.

٢) المتسلسلة تكون تباعديه أذا كانت $l>1$.

٣) يفشل الاختبار إذا كانت $l=1$.

**مثال (٦):** ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية :

(١) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n}$ ، (٢) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{1-n}$ .

الحـــــــــل

(١) حيث أن $a_n=\frac{1}{(\log n)^n}$ فإن: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\log n)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}=0<1$ وبالتالي

فإن هذه المتسلسلة تكون تقاربيه.

(٢) باستخدام اختبار كوشي (الجذر)

$$\because a_n=\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{1-n}\Rightarrow\sqrt[n]{a_n}=\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{\frac{1-n}{n}}=\left(\frac{1}{(3n-1)/n}\right)^{\frac{1-n}{n}}=\left(\frac{1}{3-(1/n)}\right)^{\frac{1}{n}-1}$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3-(1/n)}\right)^{\frac{1}{n}-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3>1$$

وبالتالي فان المتسلسلة المعطاة تكون تباعديه.

## الاختبار الرابع: اختبار النسبة (الصورة الأولي)

بفرض أن $\sum_{r=1}^{\infty}a_r$ متسلسلة ذات حدود موجبه فإنه إذا كانت $l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ فإن:

١) المتسلسلة تكون تقاربيه أذا كانت $l<1$.

٢) المتسلسلة تكون تباعديه أذا كانت $l>1$.

٣) يفشل الاختبار أذا كانت $l=1$.

**مثال (٧)**: ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية:

(١) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$ ، (٢) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$ ، (٣) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ ، (٤) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ .

الحـــــــــل

(١) باستخدام اختبار النسبة حيث أن : $a_n=\frac{n^3}{3^n}\Rightarrow a_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}$

$$\therefore\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}\frac{3^n}{n^3}=\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=\frac{1}{3}\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^3=\frac{1}{3}.1^3=\frac{1}{3}<1$$

وبالتالي فإن التسلسلة المعطاة تكون تقاربيه.

(٢) باستخدام اختبار النسبة حيث أن $a_n=\dfrac{2^n}{n}\Rightarrow a_{n+1}=\dfrac{2^{n+1}}{n+1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}}{n+1}.\frac{n}{2^n}=\frac{2.2^n}{n+1}.\frac{n}{2^n}=\frac{2n}{n+1}=\frac{2}{1+1/n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1+1/n}\right)=2>1$$

وبالتالي فإن التسلسلة المعطاة تكون تباعديه.

(٣) باستخدام اختبار النسبة حيث أن :

$$a_n=\frac{n!}{n^n}\Rightarrow a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\frac{(n+1)n!}{(n+1)(n+1)^n}=\frac{n!}{(n+1)^n}$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n!}{(n+1)^n}.\frac{n^n}{n!}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$$

وبالتالي فإن التسلسلة المعطاة تكون تقاربيه.

(٤) باستخدام اختبار النسبة حيث أن : $a_n=\dfrac{1}{n!}\Rightarrow a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)!}$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{(n+1)!}.n!=\frac{1}{(n+1).n!}.n!=\frac{n!}{(n+1)n!}=\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1+1/n}=0<1$$

وبالتالي فإن التسلسلة المعطاة تكون تقاربيه.

## ثانيا: تقارب وتباعد المتسلسلات التذبذبية

**المتسلسلات التذبذبية** : جميع اختبارات التقارب السابقة تتعامل فقط مع المتسلسلات ذات الحدود

الموجبة حيث تكون المجاميع الجزئية لهذا النوع من المتسلسلات متزايدة ولكن إذا اعتبارنا المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\dots$$

والتي لها حدود موجبة وحدود أخري سالبة فإن المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة لا تكون متزايدة.

**تعريف:** المتسلسلة التي علي الصورة: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=a_0-a_1+a_2-a_3+\dots,\ a_n>0$ حيث أن $a_n$ أعداد حقيقية (غير سالبه) تسمي بالمتسلسلة التذبذبية (التبادلية أو التعاقبية).

## الاختبار الخامس ( اختبار ليبنز للمتسلسلات التذبذبية)

**نظريه:** المتسلسلة التذبذبية $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n,\ a_n>0$ تكون تقاربيه أذا تحققت الشروط الآتية:

١) $a_1\ge a_2\ge a_3\ge \dots\dots\dots\dots \ge a_n\ge \dots\ge 0$ (أي أن حدود المتسلسلة تكون تناقصية).

٢) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

**مثال (٨):** اختبر تقارب وتباعد المتسلسلات التذبذبية الآتية:

(١) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ، (٢) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

### الحـــــــــل

(١) $$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

في المتسلسلة واضح المعطاة أن $1>\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}>\frac{1}{3},\frac{1}{3}>\frac{1}{4},\dots$ ، أي أن حدود المتسلسلة تنازليه.

$$\because \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

وبالتالي فإن المتسلسلة المعطاة تكون تقاربيه.

(٢) $$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

في المتسلسلة المعطاة واضح أن $1>\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}>\frac{1}{5},\frac{1}{5}>\frac{1}{7},\dots$ ، أي أن حدود المتسلسلة تنازليه ، وحيث أن

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$ فإن المتسلسلة المعطاة تكون تقاربيه.

## الاختبار السادس: الصورة العامة لاختبار النسبة (اختبار النسبة المطلق)

بفرض أن المتسلسلة $\sum\limits_{r=1}^{\infty} a_r$ حدودها غير صفرية وكانت $l = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ فإن:

١) المتسلسلة تكون مطلقة التقارب (تقاربيه) أذا كانت $l<1$.

٢) المتسلسلة تكون تباعديه أذا كان $l>1$.

٣) يفشل الاختبار إذا كان $l=1$

**مثال (٩)**: ادرس تقارب وتباعد التسلسلات الآتية:

(١) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n!}}$ ،    (٢) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^n}{n}$.

### الحـــــــــــــل

(١) باستخدام اختبار النسبة (الصورة العامة) حيث أن:

$$\because a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n!}} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{\sqrt{(n+1)!}}$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+2}}{\sqrt{(n+1)!}}\cdot\frac{\sqrt{n!}}{(-1)^{n+1}} = \frac{-(-1)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)n!}}\cdot\frac{\sqrt{n!}}{(-1)^{n+1}} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}} = -\sqrt{\frac{1}{n+1}} = -\sqrt{\frac{1/n}{1+1/n}}$$

$$\therefore \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \sqrt{\frac{1/n}{1+1/n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1/n}{1+1/n}}\right) = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1+1/n}} = \sqrt{0} = 0$$

وبالتالي فإن التسلسلة المعطاة تكون مطلقة التقارب (تقاربيه).

(٢) باستخدام اختبار النسبة (الصورة العامة):

$$\because a_n = \frac{(-1)^{n+1}e^n}{n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}e^{n+1}}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}e^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(-1)^{n+1}e^n}\right| = e\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = e\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = e > 1$$

وبالتالي فإن التسلسلة تكون تباعديه.

# تمارين (٦)

١) ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية :

❖ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)(n+5)}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{5n+1}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$ .

٢) باستخدام اختبار المقارنة ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية :

❖ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+n+1}{n^5+n+1}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n^2+2n+1}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+n}{n^4+1}$

٣) باستخدام اختبار الجذر ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية :

❖ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^{n}$ .

٤) باستخدام اختبار النسبة ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية :

❖ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}$ .

٥) باستخدام الصورة العامة لاختبار النسبة ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية :

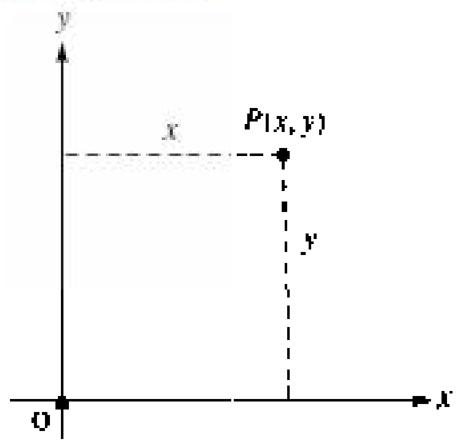
❖ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^n}{n!}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^n}{n^3}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^n}{n!}$ .

# الباب السابع

# نُظم الإحداثيات في المستوى

## أولاً: نظام الإحداثيات الكارتيزيه

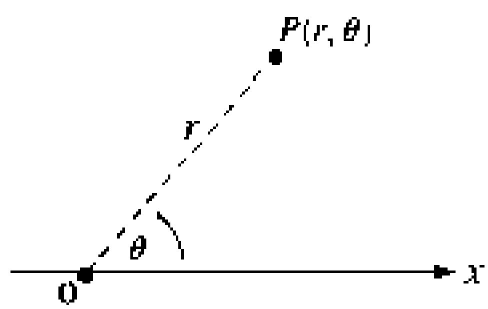
من نقطة ثابتة $o$ في المستوى تُسمي نقطة الأصل نرسم مستقيمين متعامدين $oy, ox$ يُسميان محاور الإحداثيات .فإذا كانت $P$ نقطة ما في المستوى فإن $P$ تتحدد تحديداً تاماً بواسطة كميتين عدديتين $(x,y)$ تُسميان إحداثيات النقطة في المستوى، حيث $x$ تمثل البعد العمودي للنقطة $P$ عن محور $oy$ ، وتمثل $y$ البعد العمودي للنقطة $P$ عن محور $ox$ ، كما بالشكل المقابل:




## ثانياً: نظام الإحداثيات القطبية

نظام الإحداثيات القطبية هو نظام أحداثي ثنائي الإبعاد يحدد إحداثيات أي نقطه $P$ في المستوي تحديدا تاما من خلال المسافة $r$ بين النقطة $P$ ونقطه ثابتة في المستوي $o$ والزاوية بين $r$ واتجاه ثابت في المستوي.

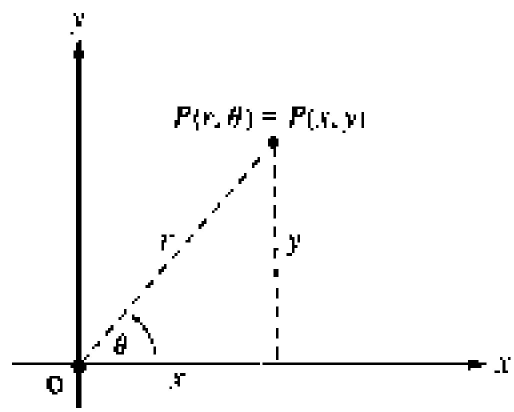
لتكن $o$ نقطة ثابتة في المستوي. من هذه النقطة الثابتة نرسم مستقيم ثابت أفقي ينطبق على المحور $ox$ ، كما بالشكل المقابل:



فإذا كانت $P$ نقطة ما في المستوى فإن $P$ تتعين تماماً إذا علمنا المسافة $oP$ (أي بُعد $P$ عن $o$) ، وإذا علمنا أيضاً الزاوية $\theta$ التي يصنعها المستقيم $oP$ مع المحور $ox$. تُسمى النقطة الثابتة $o$ القطب والمستقيم الثابت $ox$ الخط الابتدائي (القطبي).

العلاقة بين الإحداثيات القطبية و الكارتيزية

لتكن $P$ نقطة في المستوى إحداثياتها القطبية $(r,\theta)$ وإحداثياتها الكارتيزية $(x,y)$ ، كما بالشكل المقابل:




ومن الشكل المقابل يتضح أن:

$$x = r\cos\theta \qquad (1), \qquad y = r\sin\theta \qquad (2)$$

هاتين العلاقتين تعبران عن $x,y$ بدلالة $r,\theta$.

وبتربيع العلاقتين (١)، (٢) وجمعهما نحصل على:

$$r^2 = x^2 + y^2 \;\Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (3)$$

وبقسمة العلاقة (١) على العلاقة (٢) نحصل على:

$$\frac{y}{x} = \tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (4)$$

وهاتين العلاقتين (٣)، (٤) تعبران عن $r,\theta$ بدلالة $x,y$.

## أمثله محــــــــــــــلوله

مثال(١): حول المعادلة $x^2 + y^2 + 3x - 4y = 18$ إلى الصورة القطبية.

الحـــــــــــــل

بالتعويض عن $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ r^2 = x^2 + y^2$ في المعادلة المعطاة ينتج أن:

$$r^2 + 3r\cos\theta - -4r\sin\theta = 18$$

وهي تمثل معادله دائرة في الإحداثيات القطبية.

مثال(٢): حول المعادلة القطبية $r = 2a\cos\theta$ إلي الصورة الكارتيزيه.

الحـــــــــــــــــــل

بطرب طرفي المعادلة المعطاة في $r$ نجد أن: $r^2 = 2ar\cos\theta$ بالتعويض عن $x = r\cos\theta$ ، $r^2 = x^2 + y^2$ نحصل علي: $x^2 + y^2 = 2ax \Rightarrow x^2 + y^2 - -2ax = 0 \Rightarrow (x-a)^2 + y^2 = a^2$ وذلك هي الصورة الكارتيزيه للمعادلة المعطاة وهي تمثل دائرة مركزها $(a,0)$ النقطة ونصف قطرها $a$ .

مثال(٣): حول المعادلة القطبية $r = a\sec\theta$ إلي الصورة الكارتيزيه.

الحـــــــــــــــــــل

$$\because r = a\sec\theta \Rightarrow r = \frac{a}{\cos\theta} \Rightarrow r\cos\theta = a$$

وبالتعويض عن $x = r\cos\theta$ نجد أن الصورة الكارتيزيه المناظرة للمعادلة القطبية المعطاة تأخذ الصورة $x = a$ ، وهي معادله خط مستقيم يوازي محور $oy$ .

مثال(٤): حول المعادلة $r = \dfrac{2}{1+\cos\theta}$ إلى الصورة الكارتيزية.

الحـــــــــــــــــــل

$$r = \frac{2}{1+\cos\theta} \Rightarrow r(1+\cos\theta) = 2 \Rightarrow r + r\cos\theta = 2$$

وبالتعويض عن $x = r\cos\theta$ , $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ نجد أن:

$$r + r\cos\theta = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = (x-2)^2$$

$$\therefore y^2 = -4(x-1)$$

وهي معادله قطع مكافئ سوف يدرس بالتفصيل لاحقاً.

مثال(٥): حول المعادلة $r = \dfrac{6}{2-\sin\theta}$ إلى الصورة الكارتيزية.

## الحـــــــــــــــل

$$\because r=\frac{6}{2-\sin\theta}\Rightarrow r(2-\sin\theta)=6\Rightarrow 2r-r\sin\theta=6$$

وبالتعويض عن $y=r\sin\theta$ , $r=\sqrt{x^2+y^2}$ نجد أن:

$$2r-r\sin=6\Rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}-y=6\Rightarrow 4(x^2+y^2)=(6+y)^2$$

$$\therefore 4x^2+4y^2=y^2+12y+36\Rightarrow 4x^2+3y^2-12y-36=0$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها علي الصورة:

$$4x^2+3(y^2-4y)-36=0\Rightarrow 4x^2+3\left[(y-2)^2-4\right]-36$$

ومنها نحصل علي: $4x^2+3(y-2)^2=48$ وبالتالي نجد أن الصورة الكارتيزيه للمعادلة المعطاة تصبح بالصورة: $\frac{x^2}{12}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

وهي معادله قطع ناقص سوف يدرس بالتفصيل لاحقاً.

تمرين: حول المعادلات الآتية إلى الصورة الكارتيزية :

١) $r=\frac{6}{2-\cos\theta}$ ، ٢) $r=\frac{6}{2+\cos\theta}$ ، ٣) $r=\frac{6}{2+\sin\theta}$ .

## تمارين (٧)

١) حول المعادلات الآتية إلى الصورة القطبية:

$$(i)\ \ y^2=-4(x-1),\ \ (ii)\ \ x^2+y^2=a^2,\ \ (iii)\ \frac{x^2}{12}+\frac{(y-2)^2}{16}=1 .$$

٢) حول المعادلات الآتية إلى الصورة الكارتيزية:

$$(i)\ \ r^2=9,\qquad (ii)\ \ r=a\cos\theta,\qquad (iii)\, r=\frac{6}{2-\sin\theta},\quad (iv)\,\frac{5}{r}=1+\cos\theta .$$

# الباب الثامن

# التحويلات الهندسية واختزال معادلة الدرجة الثانية

## العادلة العامة من الدرجة الثانية في متغيرين

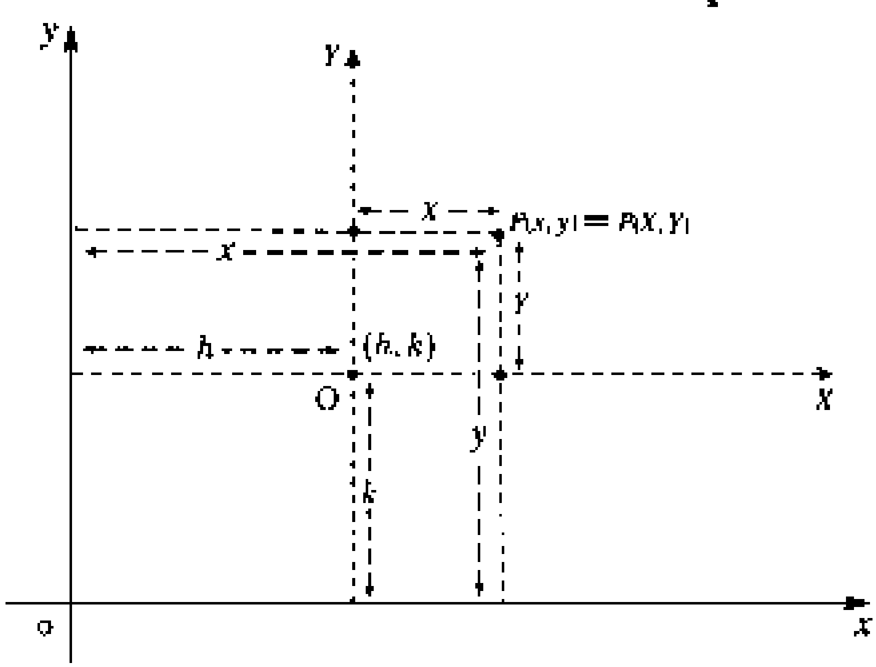
المعادلة التي علي الصورة: $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ تسمي بمعادلة الدرجة الثانية في متغيرين $x$ ، $y$. وهذه المعادلة تمثل معادلة منحني ناتج من حركة نقطة في المستوي.

## تغيير محاور الإحداثيات في المستوى

في بعض المواقف الهندسية يكون من المناسب السعي إلي تغير وضع محاور الإحداثيات. ويكون الغرض من ذلك هو وضع معادلات المنحنيات الممثلة بمعادلة الدرجة الثانية في أبسط صورة لها حتي نتمكن من دراسة خصائصها ومعرفة نوعها بسهوله مقارنتاً بصورتها الأصلية. وفيما يلي سندرس طريقتين لتغيير المحاور.

## أولاً : نقل نقطة الأصل (نقل محاور الإحداثيات موازية لنفسها)

اذا كانت $(x,y)$ هي إحداثيات أي نقطة $P$ في المستوى، ونُقلت نقطة الأصل $o(0,0)$ إلى نقطة أخرى ولتكن $O(h,k)$ مع الإبقاء على اتجاه المحاور موازيا للمحاور الأصلية، وكانت إحداثيات النقطة $P$ بالنسبة للمحاور الجديدة هي $(X,Y)$ ، فإنه من الشكل المقابل:



يتضح أن معادلات التحويل بين الإحداثيات الجديدة والإحداثيات الأصلية يمكن كتابتها بالصورة:

$$x = X + h,\ y = Y + k.$$

## حذف حدود الدرجة الأولي من معادلة الدرجة الثانية في متغيرين

**نظرية(١):** إحداثيات النقطة $(x_1, y_1)$ التي يجب نقل محاور الإحداثيات أليها لحذف حدود الدرجة الأولي من معادلة الدرجة الثانية $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ يمكن الحصول عليها من حل المعادلتين: $ax_1 + hy_1 + g = 0,\quad hx_1 + by_1 + f = 0$.

**البرهان:** عندما تُنقل نقطة الأصل $(0,0)$ إلى النقطة $(x_1, y_1)$ فإن معادلات بين الإحداثيات الأصلية $x, y$ والإحداثيات الجديدة $X, Y$ تكون بالصورة:

$$x = X + x_1, \quad y = Y + y_1 \qquad (1)$$

وبالتعويض من معادلات التحويل (١) في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$f(X,Y) = a(X + x_1)^2 + 2h(X + x_1)(Y + y_1) + b(Y + y_1)^2 + 2g(X + x_1) + 2f(Y + y_1) + c = 0$$

وبالفك نجد أن هذه المعادلة تصبح بالصورة:

$$f(X,Y) = aX^2 + 2hXY + bY^2 + 2(ax_1 + hy_1 + g)X + 2(hx_1 + by_1 + f)Y + C = 0 \qquad (2)$$

حيث أن $C$ يعطي من العلاقة:

$$C = ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

ومن هذه المعادلة نجد أن:

١) معامل $X$ هو $2(ax_1 + hy_1 + g)$

٢) معامل $Y$ هو $2(hx_1 + by_1 + f)$

ولكي تصبح هذه المعادلة خاليه من حدود الدرجة الأولي يجب إن يكون معاملات حدود الدرجة الأولي مساوية للصفر. وبوضع معامل $X = 0$ ، معامل $Y = 0$ نجد أن:

$$ax_1 + hy_1 + g = 0, \quad hx_1 + by_1 + f = 0$$

وهما معادلتان في مجهولين $y_1, x_1$ وبحلهما جبرياً معاً نحصل علي إحداثيات النقطة التي يجب نقل

محاور الإحداثيات إليها لكي تصبح المعادلة المعطاة خاليه من حدود الدرجة الأولي. وبنقل نقط الأصل في هذه الحالة إلي النقطة $(x_1, y_1)$ نجد أن معادلة الدرجة الثانية تصبح بالصورة:

$$aX^2 + 2hXY + bY^2 + C = 0$$

حيث أن:

$$C = ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c.$$

**ملحوظة (١):** من خلال برهان نظرية (١) يلاحظ أنة عند نقل نقطه الأصل فإن المعادلة الناتجة والمعادلة الأصلية يكون لهما نفس معاملات حدود الدرجة وبهذا يكون نقل محاور الإحداثيات إلي نقطه ما لا يغير من قيم معاملات حدود الدرجة الثانية في معادلة الدرجة الثانية ولكن فقط يغير معاملات حدود الدرجة الأولي والحد المطلق.

**مثال (١):** بنقل المحاور إلي نقطة مناسبة حول المعادلة $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 22x - 26y + 29 = 0$ إلي أخري خالية من حدود الدرجة الأولي.

**الحـــــــــــــــل**

بفرض أن $(x_1, y_1)$ هي النقطة التي يجب نقل محاور الإحداثيات إليها لكي تصبح المعادلة المعطاة خالية من حدود الدرجة الأولي وبالتالي فإن معادلات التحويل بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الحديدة تكون بالصورة:

$$x = X + x_1,\ y = Y + y_1.$$

وتصبح المعادلة الأصلية بعد التعويض عن قيم $y, x$ بالصورة:

$$5(X + x_1)^2 - 6(X + x_1)(Y + y_1) + 5(Y + y_1)^2 + 22(X + x_1) - 26(Y + y_1) + 29 = 0 \qquad (1)$$

وهذه المعادلة يمكن أعاده كتابتها علي الصورة

$$5X^2 - 6XY + 5Y^2 + 2(5x_1 - 6y_1 + 22)X + 2(-3x_1 + 5y_1 - 13)Y + C = 0 \qquad (2)$$

حيث أن:

$$C = 5x_1^2 - 6hx_1y_1 + 5y_1^2 + 22x_1 - 26y_1 + 29$$

من هذه المعادلة نجد أن:

- معامل $X$ هو $2(5x_1-6y_1+22)$
- معامل $Y$ هو $2(-3x_1+5y_1-13)$

ولكي تصبح المعادلة المعطاة خالية من حدود الدرجة الأولي يجب إن يكون معامل $X=0$ ، معامل $Y=0$. بوضع معامل $X=0$ ، معامل $Y=0$ نحصل علي المعادلتين :

$$5x_1-3y_1+11=0, \quad -3x_1+5y_1-13=0$$

وبحل المعادلتين جبرياً نجد أن $(x_1,y_1)=(-1,2)$ هي النقطة التي يجب نقل نقطة الأصل أليها لحذف حدود الدرجة الأولي من المعادلة المعطاة. وبنقل نقطه الأصل إلي النقطة $(x_1,y_1)=(-1,2)$ فإن معادلات التحويل بين الإحداثيات تصبح بالصورة: $x=X-1\,,\,y=Y+2$ وتصبح المعادلة الأصلية بعد التعويض عن قيم $x$ ، $y$ بالصورة:

$$5X^2-6XY+5Y^2-8=0 \tag{3}$$

ملحوظة (٢): إذا كانت المعادلة المعطاة خالية من الحد $xy$ فأنة يمكن تحويلها إلي معادلة أخري خالية من حدود الدرجة الأولي (أو في ابسط صورة ممكنة) بأتباع طريقة إكمال المربع .والأمثلة التالي توضح ذلك.

مثال (٢): باستخدام نقل المحاور حول المعادلة $x^2-4y^2+2x+8y-7=0$ إلي أخري خالية من حدود الدرجة الأولي .

الحـــــــــــــــل

نضع المعادلة المعطاة علي الصورة الآتية :

$$x^2-4y^2+2x+8y-7=0 \Rightarrow (x^2+2x)-4(y^2-2y)-7=0$$
$$\Rightarrow (x+1)^2-1-4(y-1)^2+4-7=0$$
$$\Rightarrow (x+1)^2-4(y-1)^2=4 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{1}=1.$$

وبنقل محاور الإحداثيات إلي النقطة $(-1,1)$ نجد أن: $x=X-1,\ Y=y+1$ أي أن:

$$X=x+1,\ \ Y=y-1$$

وبالتالي نجد أن المعادلة المعطاة تصبح بالصورة : $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{1}=1$.

**مثال (٣): باستخدام نقل محاور الإحداثيات ضع المعادلة $y = 2x^2 + 4x + 3$ في ابسط صورة ممكنة :**

**الحـــــــــــــــــــــــل**

**نضع المعادلة المعطاة على الصورة الآتية :**

$$y = 2x^2 + 4x + 3 \Rightarrow y - 3 = 2x^2 + 4x \Rightarrow y - 3 = 2(x+1)^2 - 2$$
$$\Rightarrow y - 1 = 2(x+1)^2 \Rightarrow (x+1)^2 = \frac{1}{2}(y-1).$$

**وبنقل محاور الإحداثيات إلي النقطة $(-1,1)$ فنجد أن: $x = X - 1,\ Y = y + 1$ أي أن:**

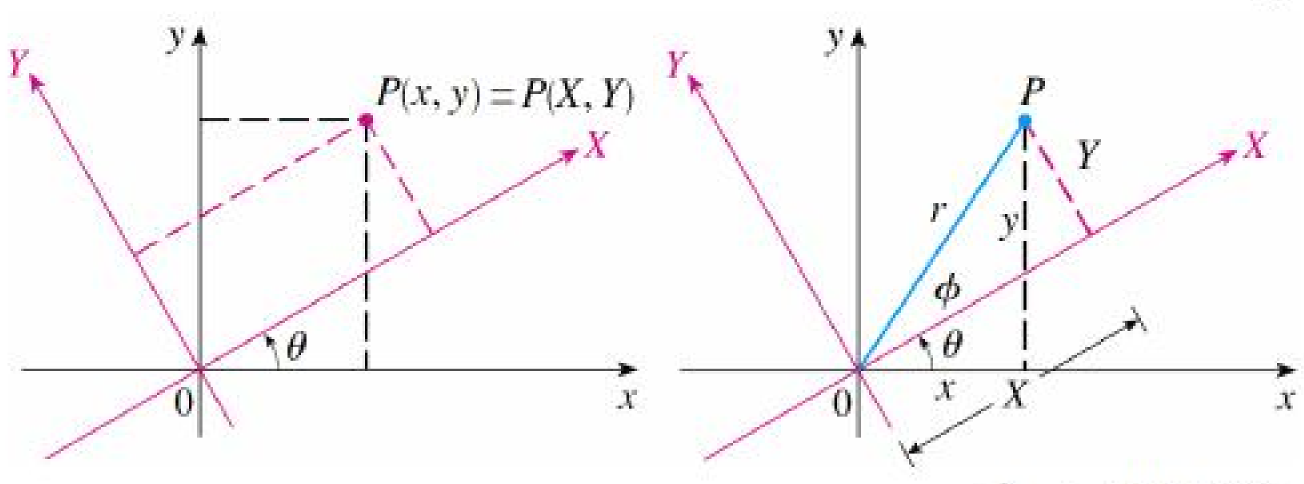
$$X = x + 1,\ Y = y - 1$$

**وبالتالي نجد أن المعادلة المعطاة تصبح بالصورة: $X^2 = \frac{1}{2}Y$ .**

## ثانياً : دوران محاور الإحداثيات

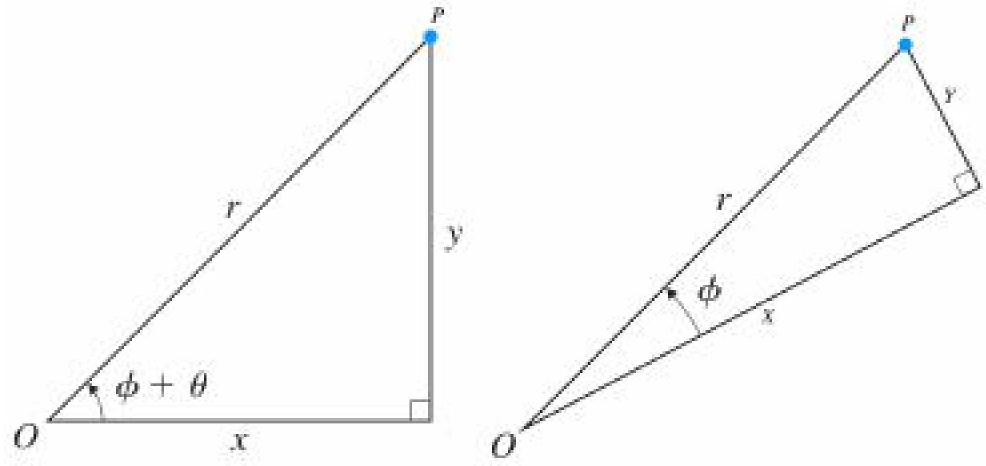
**نعتبر المحاور $ox, oy$ أديرت بزاوية $\theta$ في اتجاه موجب مع الإبقاء على موضع نقطة الأصل $o$ ،نفرض أن المحاور الجديدة هي $oX, oY$ على الترتيب، وإذا كانت $(x,y)$ ، $(X,Y)$ هي إحداثيات النقطة**

$P$ بالنسبة للمحاور الأصلية $ox, oy$ ،وبالنسبة للمحاور الجديدة $oX, oY$ علي الترتيب، كما بالشكل المقابل:




ومن الشكل المقابل نجد أن:

$$x = r\cos(\theta + \phi) = r(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) = (r\cos\phi)\cos\theta - (r\sin\phi)\sin\theta$$
$$= X\cos\theta - Y\sin\theta$$




وبالمثل نجد أن:

$$y = r\sin(\theta+\phi) = r(\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi) = (r\cos\phi)\sin\theta+(r\sin\phi)\cos\theta$$
$$= X\sin\theta + Y\cos\theta$$

أي أن معادلات التحويل التي علي الصورة:

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y &= X\sin\theta + Y\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

تعطي الإحداثيات الأصلية $(x,y)$ بدلاله الإحداثيات الجديدة $(X,Y)$. وبحل معادلات التحويل (١) بالنسبة إلي $X$ ، $Y$ نحصل علي معادلات التحويل الآتية:

$$\left.\begin{aligned} X &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ Y &= -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

**وهذه المعادلات هي التي تعين الإحداثيات الجديدة $X$ ، $Y$ بدلالة الإحداثيات الأصلية $x$ ، $y$ وذلك في حالة دوران محاور الإحداثيات بزاوية $\theta$ حول نقطه الأصل.**

**ملحوظة (٣): معادلات التحويل السابقة بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة في حالة دوران محاور الإحداثيات بزاوية $\theta$ حول نقطة الأصل يمكن تذكرها من خلال الجدول التالي:**

| | $X$ | $Y$ |
|---|---|---|
| $x$ | $\cos\theta$ | $-\sin\theta$ |
| $y$ | $\sin\theta$ | $\cos\theta$ |

## حذف الحد المشتمل علي $xy$ من معادلة الدرجة الثانية في متغيرين

**نظريه(٣)**: يمكن حذف الحد $xy$ من المعادلة $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ بدوران محاور الإحداثيات زاوية مناسبة $\theta$ لتعين قيمتها من العلاقة: $\tan 2\theta=\dfrac{2h}{a-b}$.

**البرهان**: إذا دارت محاور الإحداثيات بزاوية $\theta$ فإن معادلات التحويل بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة تكون بالصورة:

$$x=X\cos\theta-Y\sin\theta,\quad y=X\sin\theta+Y\cos\theta$$

وبالتعويض من معادلات التحويل السابقة في المعادلة الأصلية نجد أن:

$$a(X\cos\theta-Y\sin\theta)^2+2h(X\cos\theta-Y\sin\theta)(X\sin\theta+Y\cos\theta)$$
$$+b(X\sin\theta+Y\cos\theta)^2+2g(X\cos\theta-Y\sin\theta)+2f(X\sin\theta+Y\cos\theta)+c=0$$

ومعامل $XY$ في هذه المعادلة هو:

$$-a(2\sin\theta\cos\theta)+2h(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+b(2\sin\theta\cos\theta)\Rightarrow 2h\cos 2\theta+(b-a)\sin 2\theta$$

لكي تكون المعادلة المعطاة خاليه من الحد $XY$ يجب أن يكون

$$2h\cos 2\theta+(b-a)\sin 2\theta=0\Rightarrow 2h\cos 2\theta=(a-b)\sin 2\theta$$

ومنها نجد أن الزاوية $\theta$ تحقق العلاقة: $\tan 2\theta=\dfrac{2h}{a-b}$.

**ملحوظة (٤)**: واضح من برهان النظرية السابقة أن دوران محاور الإحداثيات يؤدي إلي تغيير جميع معاملات حدود معادلة الدرجة الثانية علي عكس نقل محاور الإحداثيات والذي يودي إلي تغيير معاملات حدود الدرجة الأولي والحد المطلق فقط

**ملحوظة (٥)**: إذا كانت $a=b$ في معادلة الدرجة الثانية فإن الزاوية المناسبة التي يجب أن تُدور بها محاور الإحداثيات لحذف الحد المشتمل علي الحد $xy$ من معادلة الدرجة الثانية هي الزاوية $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

**مثال (٤)**: بدوران محاور الإحداثيات زاوية مناسبة ضع المعادلة $8x^2+12xy+17y^2=20$ في ابسط صورة ممكنة.

**الحـــــــــــــــــل**

المعادلة المعطاة خالية من حدود الدرجة الأولي ولكي تصبح في ابسط صورة ممكنة لابد من تحويلها إلي معادلة أخري خالية من الحد المشتمل علي $xy$. ولكي تتحول المعادلة المعطاة إلي معادلة أخري خالية من الحد $xy$ فإنه يجب تدوير محاور الإحداثيات زاوية مناسبة $\theta$ تتعين من العلاقة (نظريه ٢):

$$\tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}$$

ومن المعادلة المعطاة نجد أن $2h = 12, a = 8, b = 17$. وبذلك تكون:

$$\tan 2\theta = \frac{12}{8-17} = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = -\frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$2\tan^2\theta - 3\tan\theta - 2 = 0 \Rightarrow (2\tan\theta + 1)(\tan\theta - 2) = 0$$

وبالتالي نجد أن: $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ ، $\tan\theta = 2$ والتي كلاً منها تحقق المعادلة (١). وباختيار $\tan\theta = 2$ (الزاوية الحادة) نجد أن: $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

وإذا دارت محاور الإحداثيات زاوية $\theta$ فإن معادلات التحويل بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة تكون بالصورة:

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta, \quad y = X\sin\theta + Y\cos\theta.$$

وبالتعويض عن قيمه كل من $\sin\theta, \cos\theta$ نجد أن معادلات التحويل تصبح بالصورة:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(X - 2Y), \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y).$$

وبالتعويض من معادلات التحويل السابقة في المعادلة الأصلية نجد أن:

$$\frac{8}{5}(X-2Y)^2 + \frac{12}{5}(X-2Y)(2X+Y) + \frac{17}{5}(2X+Y)^2 = 20 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{8}{5} + \frac{24}{5} + \frac{68}{5}\right]X^2 + \left[-\frac{32}{5} + \frac{12}{5} - \frac{48}{5} + \frac{68}{5}\right]XY + \left[\frac{32}{5} - \frac{24}{5} + \frac{17}{5}\right]Y^2 = 20 \Rightarrow$$

وبالاختصار نجد أن:

$$\frac{100}{5}X^2 + \frac{25}{5}Y^2 = 20 \Rightarrow 20X^2 + 5Y^2 = 20 \Rightarrow \frac{X^2}{1} + \frac{Y^2}{4} = 1$$

وهي معادله قطع ناقص في الصورة القياسية بالنسبة لمحاور الإحداثيات الجديدة.

**ملحوظة (٦):** عمليه نقل ودوران محاور الإحداثيات يمكن أن تم بالتتابع أي أنة يمكن أجراء عمليه نقل المحاور ثم أجراء عمليه دوران المحاور أو العكس ولكن من الملاحظ كما ورد في المثال السابق أن دوران محاور الإحداثيات يؤدي إلي تغيير جميع معاملات حدود معادلة الدرجة الثانية فيكون من الأفضل والأيسر أجراء عملية نقل المحاور أولا ثم نتبعها بإجراء عملية دوران محاور الإحداثيات والمثال التالي يوضح ذلك.

**مثال (٥):** بنقل نقطه الأصل إلي نقطة مناسبة ثم تدوير محاور الإحداثيات زاوية موجبه مناسبة ضع المعادلة $5x^2-6xy+5y^2+22x-26y+29=0$ في ابسط صوره ممكنه.

**الحـــــــــــــــــــــل**

لوضع المعادلة المعطاة في ابسط صوره ممكنه لابد من حذف كلاً من حدود الدرجة الأولي والحد المشتمل علي $xy$.

**أولاً: حذف حدود الدرجة الأولي عن طريق نقل نقطه الأصل (انظر مثال (١))**

في مثال (١) تم حذف حدود الدرجة الأولي من المعادلة المعطاة وذلك بنقل محاور الإحداثيات إلي النقطة $(-1,2)$ حيث أصبحت المعادلة المعطاة بعد نقل المحاور إلي هذه النقطة علي الصورة:

$$5X^2-6XY+5Y^2-8=0 \qquad (1)$$

**ثانياً: حذف الحد المشتمل علي $XY$ من خلال تدوير محاور الإحداثيات**

الحذف الحد المشتمل علي $XY$ ندير محاور الإحداثيات زاوية قدرها (نظريه٢):

$$\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2h}{a-b}\right)$$

ومن المعادلة المعطاة نجد أن $a=b=5, 2h=-6$ وبذلك نجد أن:

$$\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{-6}{0}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}\infty \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \sin\theta=\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

تدوير المحاور زاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$ يؤدي إلي التعبير عن كلاً من $X$ ، $Y$ بدلاله الإحداثيات الجديدة $X'$ ، $Y'$ كما في العلاقات الآتية:

$$X = X' \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - Y' \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{X' - Y'}{\sqrt{2}}, \quad Y = X' \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + Y' \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{X' + Y}{\sqrt{2}}$$

وبالتعويض في المعادلة (١) نجد إنها تصبح بالصورة:

$$5\left(\frac{X' - Y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 6\left(\frac{X' - Y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{X' + Y'}{\sqrt{2}}\right) + 5\left(\frac{X' + Y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2X'^2 + 8Y'^2 = 8$$

وهذه المعادلة يمكن وضعها في الصورة: $\frac{X'^2}{4}+\frac{Y'^2}{1}=1$ وهي تمثل معادله قطع ناقص في الصورة القياسية بالنسبة لنظام الإحداثيات الجديدة $X'Y'$ سيناقش بالتفصيل لاحقاً.

## تماريـــن (٨)

١) أوجد الإحداثيات الجديدة للنقطة $P(-3,4)$ عندما تُنقل نقطة الأصـــل إلى النقطة $(2,-5)$ .

٢) باستخدام نقل محاور الإحداثيات ضع المعادلات الآتية في ابسط صورة ممكنة:

- ❖ $x^2-4x+8y+12=0$ .
- ❖ $y^2+6y+2x+5=0$ .
- ❖ $x^2-4y^2+2x+8y-7=0$ .
- ❖ $x^2+4y^2-2x+8y+1=0$ .

٣) باستخدام دوران محاور الإحداثيات ضع كلاً من المعادلات الآتية في ابسط صورة ممكنة:

- ❖ $8x^2-12xy+17y^2=20$
- ❖ $17x^2+12xy+8y^2-20=0$
- ❖ $17x^2-12xy+8y^2-20=0$
- ❖ $5x^2-6xy+5y^2=8$ .
- ❖ $5x^2+6xy+5y^2=8$ .

٤) اذا نقلت نقطة الاصل الي النقطة $(-1,2)$، ثم دارت محاور الاحداثيات زاوية $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ فأوجد الصورة الجديده للمعادلة: $5x^2-6xy+5y^2+22x-26y+29=0$ .

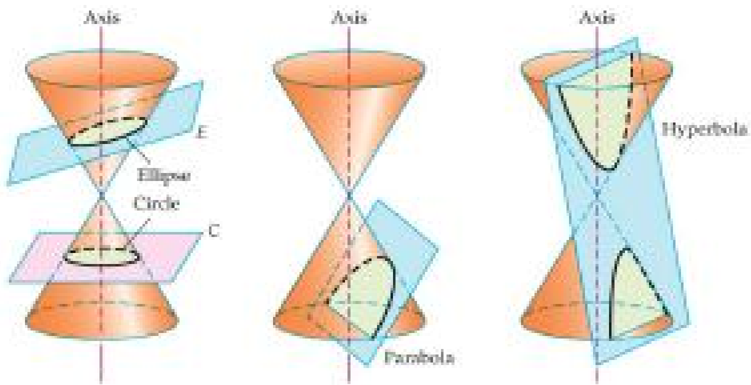
٥) منحني إذا دارت محاور الإحداثيات بزاوية $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ تصبح معادلته بالنسبة لمحاور الإحداثيات الجديدة علي الصورة: $\dfrac{X^2}{4}-\dfrac{Y^2}{4}=1$ . أوجد معادلته بالنسبة للمحاور الإحداثيات الأصلية.

٦) بدوران محاور الاحداثيات زاوية مناسة احذف الحد $xy$ من المعادلة $xy=2$ .

# الباب التاسع

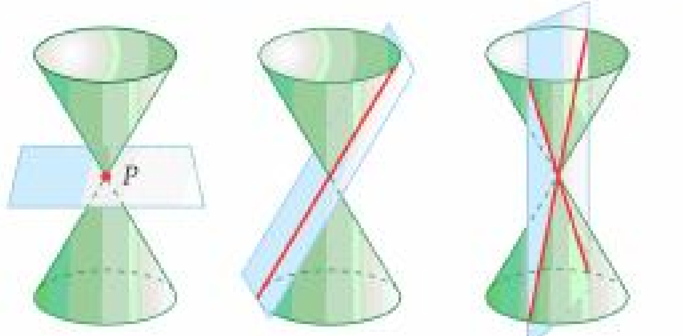
## القطاعات المخروطية

تنشأ القطاعات المخروطية من تقاطع مستوي مع مخروط دائري قائم بحيث لا يمر المستوي برأس المخروط.ومن منطلق هذه النشأة الهندسية هناك أربعة حالات لمنحني التقاطع (المنحني الناتج من تقاطع المستوي مع المخروط) كما بالشكل المقابل:




- ❖ منحني التقاطع دائرة: عندما يكون المستوي القاطع عمودي علي محور المخروط.
- ❖ منحني التقاطع قطع مكافئ: عندما يكون المستوي القاطع موازيا لأحد رواسم المخروط.
- ❖ منحني التقاطع قطع ناقص: عندما يكون المستوي القاطع مائل علي محور المخروط ولا يوازي أي راسم من رواسمه .
- ❖ منحني التقاطع قطع زائد: عندما يكون المستوي القاطع موازياً لراسمين من رواسم المخروط.

وعندما يقطع المستوي المخروط مارا براسة تنتج القطاعات المخروطية "المشوهه" وهي النقطة والخط المستقيم والخطين المستقيمين المتقاطعين، كما بالشكل المقابل:

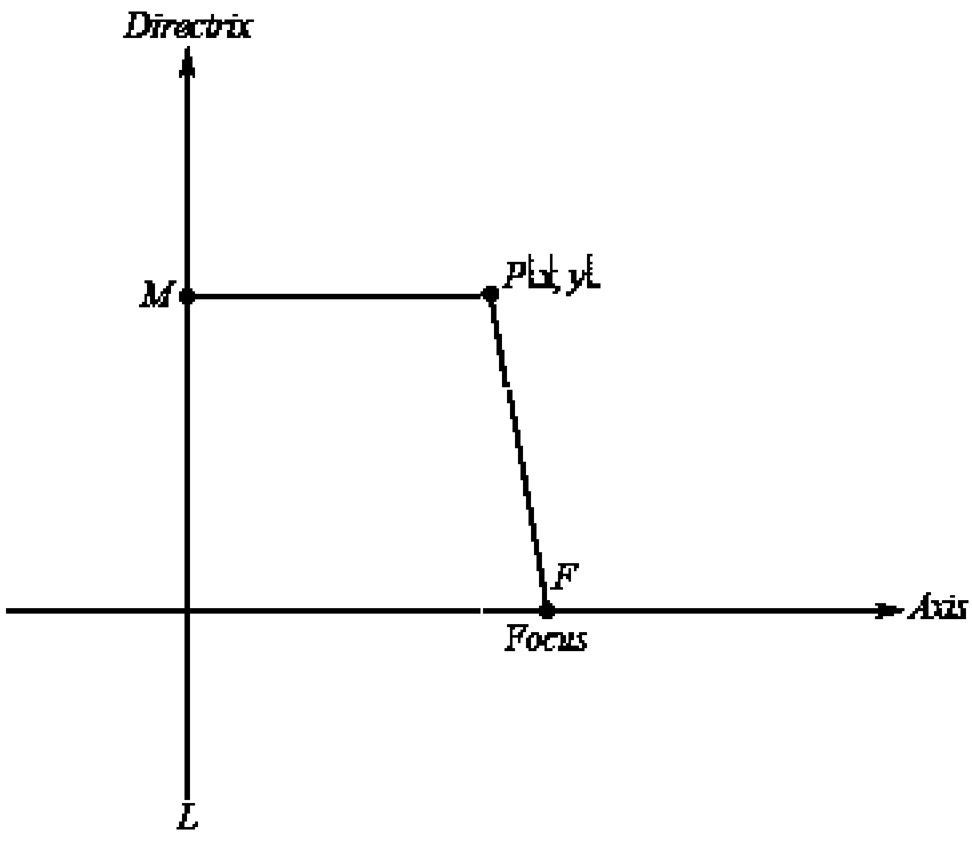



Point Line Two intersecting lines

## التعريف الهندسي للقطاعات المخروطية

من جهة أخري تعرف القطاعات المخروطية علي أنها المحل الهندسي لنقطه $P(x,y)$ تتحرك في المستوي بحيث يكون بعدها عن نقطه ثابتة $F$ إلي بعدها عن خط مستقيم ثابت $L$ ($F,L$ في نفس المستوي) مرتبطاً بالعلاقة :

$$\frac{FP}{PM} = e \qquad (1)$$




حيث أن $e$ مقدار حقيقي. يسمي $e$ بالاختلاف المركزي ، $L$ بدليل القطع، $F$ بالبؤرة .وبوجه عام فإن الخط المستقيم المار بالبؤرة عمودياً علي الدليل يسمي بمحور القطع . مع ملاحظه أنه في حاله القطاعين الناقص والزائد يكون لكلا منهما دليلين وبؤرتين.

وبصفة عامه يقال أن القطع المخروطي أفقي أذا كان محوره منطبقًا أو موازيًا لمحور $ox$ وكذلك يقال انه رأسي أذا كان محوره منطبقًا أو موازيًا لمحور $oy$. وعلي هذا النحو يقال أن القطع المخروطي مـائل أذا كان محوره يميل علي محور $ox$ بزاوية ما ولتكن $\theta$.

ويختلف شكل القطع المخروطي الناتج من حركة النقطة $P(x,y)$ في ظل العلاقة (١) تبعاً لقيمه الاختلاف المركزي $e$ كما يلي:

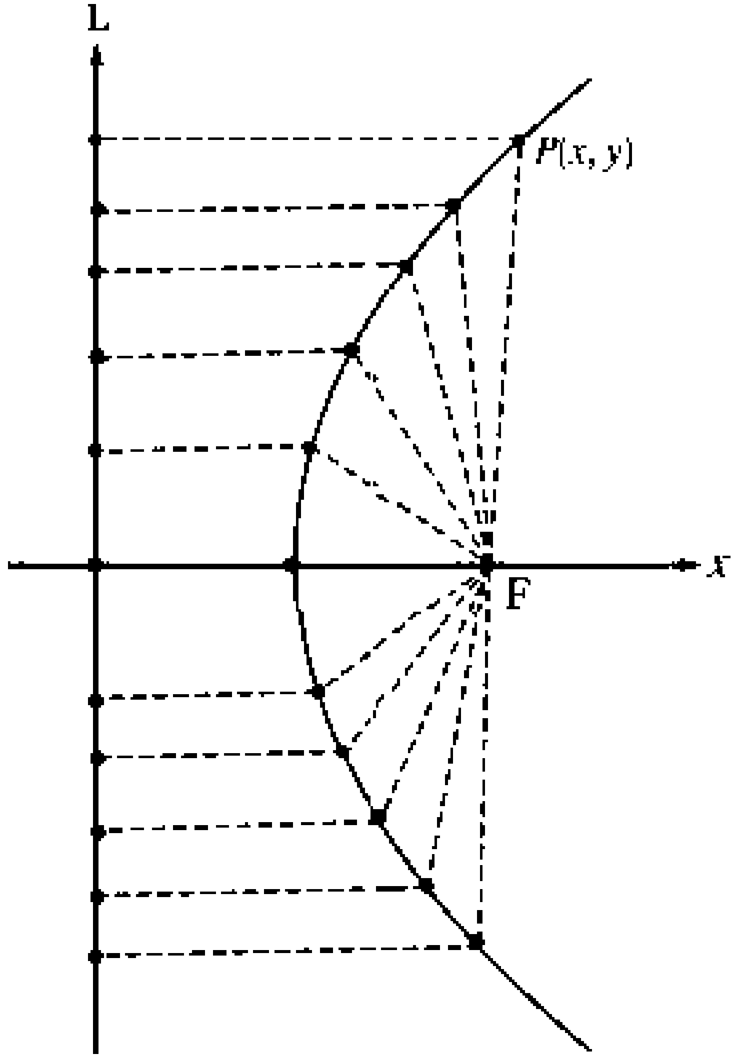
- ❖ عندما تكون $e=1$ فإن المنحني الناتج يكون قطع مكافئ.
- ❖ عندما تكون $e<1$ فإن المنحني الناتج يكون قطع ناقص.
- ❖ عندما تكون $e>1$ فإن المنحني الناتج يكون قطع زائد.
- ❖ عندما تكون $e=0$ فإن المنحني الناتج يكون دائرة.
- ❖ عندما تكون $e\to\infty$ فإن المنحني الناتج يكون خطين مستقيمين متقاطعين.

ويمكن الحصول علي الدائرة كحالة خاصة من القطع الناقص كما يمكن الحصول علي الخطين المستقيمين المتقاطعين كحالة خاصة من القطع الزائد.

وفيما يلي دراسة تفصلية للقطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد.

# أولاً: القطع المكافئ

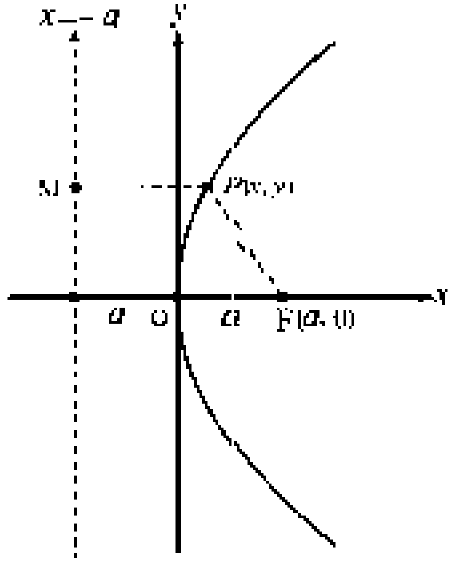
تعريف: القطع المكافئ هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوي بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة $F$ (تسمي البؤرة) مساوياً لبعدها عن خط مستقيم ثابت $L$ (يسمي الدليل).




يسمي الخط المستقيم المار بالبؤرة عموديا علي الدليل بمحور القطع المكافئ ، وتسمي نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محوره برأس القطع المكافئ (منتصف المسافة بين البؤرة والدليل) ، والقطع المكافئ يكون متماثل حول محوره. عندما تكون رأس القطع المكافئ عند نقطه أصل محاور الإحداثيات ومحوره ينطبق علي احدي محوري الإحداثيات فإن معادلة القطع تكون في ابسط صورة لها وتسمي في هذه الحالة "بالصورة القياسية". والمعادلة القياسية للقطع المكافئ لها أربع حالات مختلفة. وفيما يلي سوف نشتق المعادلات القياسية الخاصة بالقطع المكافئ لحالاته المختلفة.

## المعادلة القياسية للقطع المكافئ

نعتبر قطع مكافئ مفتوح في الاتجاه الموجب لمحور $ox$ ، كما بالشكل المقابل:




وطبقاً للتعريف العام للقطع المكافئ يكون: $\overline{PF}=\overline{PM}$ أي أن: $\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}=x+a.$ وبتربيع الطرفين نحصل علي: $(x-a)^2+y^2=(x+a)^2$ ومنها نجد أن: $y^2=(x+a)^2-(x-a)^2$ ومنها نحصل علي معادلة القطع في صورتها القياسية وهي:

$$y^2=4ax \qquad (1)$$

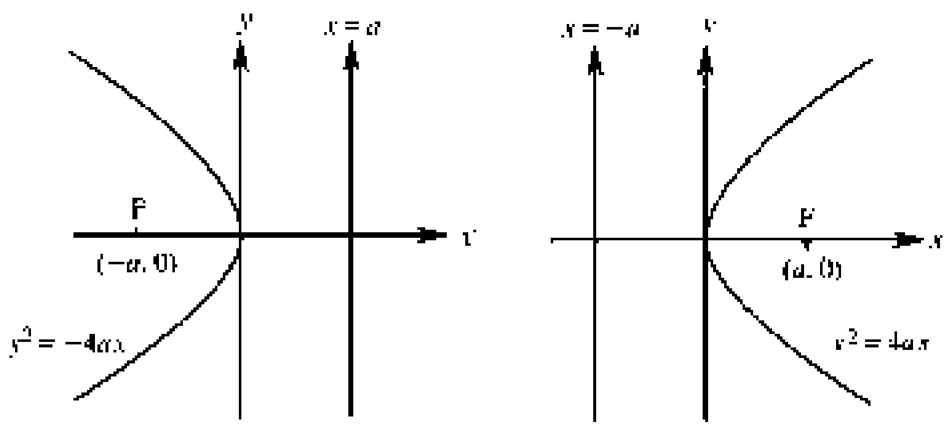
ويمكن أن تأخذ المعادلة القياسية الصور الآتية:

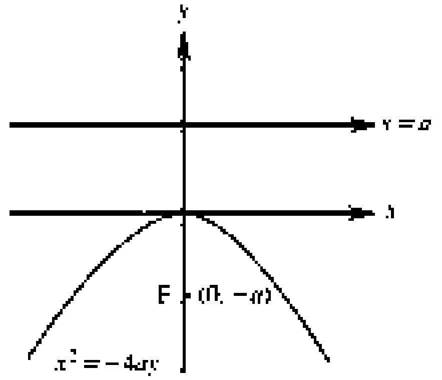
$$y^2=-4ax \qquad (2)$$

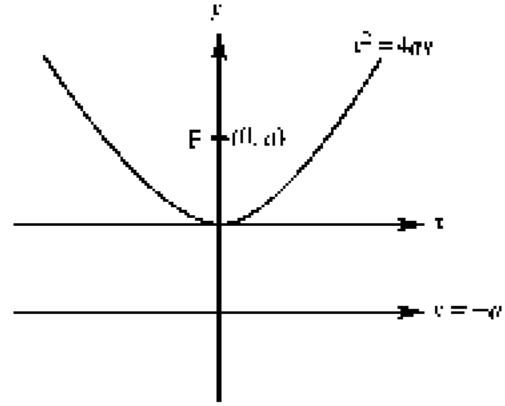
$$x^2=4ay \qquad (3)$$

$$x^2=-4ay \qquad (4)$$

ويمكن استنتاج هذه المعادلات بسهولة من التعريف السابق. وجميعها موضحة بالإشكال أسفلة:



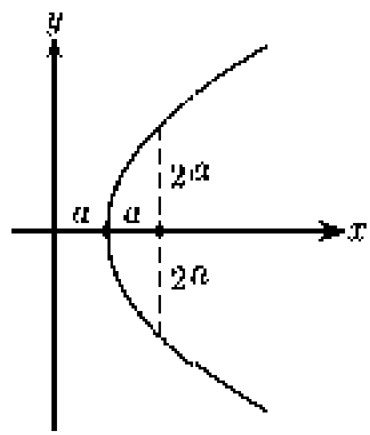



والصفات الهندسية للصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ موضحة بالجدول الآتي:

| المعادلة القياسية | $y^2=4ax$ | $y^2=-4ax$ | $x^2=4ay$ | $x^2=-4ay$ |
|---|---|---|---|---|
| إحداثيات البؤرة | $(a,0)$ | $(-a,0)$ | $(0,a)$ | $(0,-a)$ |
| معادلة الدليل | $x=-a$ | $x=a$ | $y=-a$ | $y=a$ |
| معادلة المحور | $y=0$ | $y=0$ | $x=0$ | $x=0$ |
| إحداثيات الرأس | $(0,0)$ | $(0,0)$ | $(0,0)$ | $(0,0)$ |
| معادلة المماس عند الرأس | $x=0$ | $x=0$ | $y=0$ | $y=0$ |

**الوتر البؤري العمودي لقطع مكافئ:** الوتر للقطع المكافئ هو المستقيم الذي يقطع القطع في نقطتين مختلفتين وإذا مر الوتر بالبؤرة يسمي وتر بؤري. وإذا مر الوتر بالبؤرة عموديًا علي محور القطع فيسمي في هذه الحالة بالوتر البؤري العمودي. وطول هذا الوتر هو الذي يحدد اتساع القطع المكافئ وطول الوتر البوري العمودي للقطع المكافئ يساوي $4a$ ، ويمكن أثبات ذلك كما يلي:



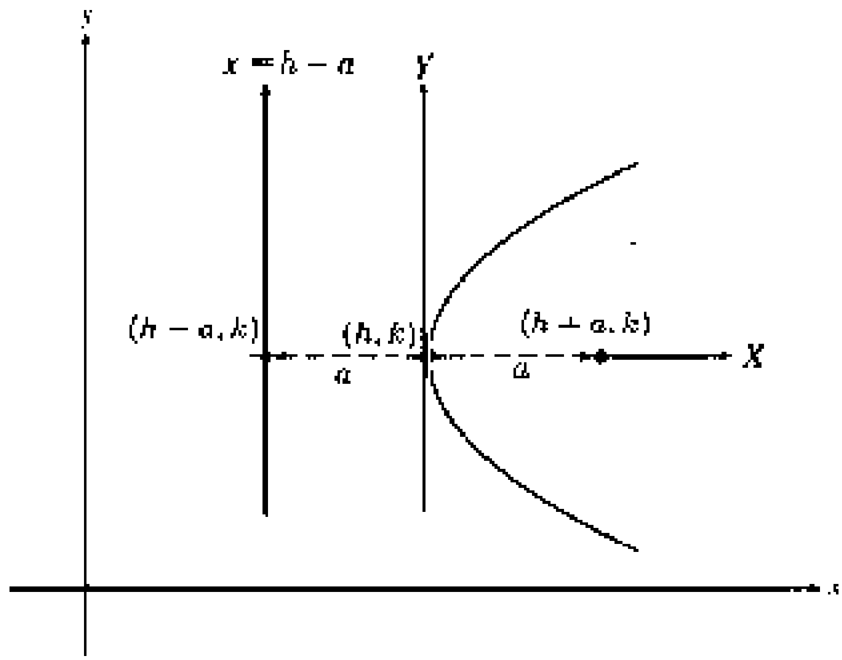
بفرض أن $P$ هي نقطة تقاطع الوتر البؤري العمودي مع الجزء العلوي من القطع وبالتعويض عن $x=a$ في معادلة القطع المكافئ التي علي الصورة: $y^2=4ax$ نجد أن: $y=2a$ وبالتالي يكون طول الوتر البؤري العمودي يساوي $4a$ أي يساوي ضعف بعد البؤرة عن الدليل.

ملحوظة: في الصور الأربع السابقة يمس القطع المكافئ محورا من محاور الإحداثيات عند نقطة الأصل والتي تسمي في هذه الحالة رأس القطع وبالطبع يمكن أن تكون رأس القطع أي نقطة أخري غير نقطة الأصل ولكن تتحول معادلة القطع في هذه الحالة إلي صورة أخري غير الصورة القياسية .ومن معرفتنا السابقة بتغير محاور الإحداثيات يمكن عن طريق تحويلات مناسبة للإحداثيات التعبير عن معادلة القطع الغير قياسية في صورة قياسية.

المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي محوره يوازي أحد محاور الإحداثيات

أولاً: إذا كان محور القطع يوازي محور $ox$ :

نعتبر قطع مكافئ رأسه النقطة $(h,k)$ ومحوره يوازي محور $ox$ والمماس عند الرأس يوازي محور $oy$ ، كما بالشكل المقابل:




وبنقل محاور الإحداثيات موازية لنفسها إلي النقطة $(h,k)$ حيث أن المحاور الجديدة هي $OXY$ ، فتكون معادلة القطع المكافئ منسوبة إلي المحاور الجديدة علي الصورة: $Y^2=4aX$ باستخدام

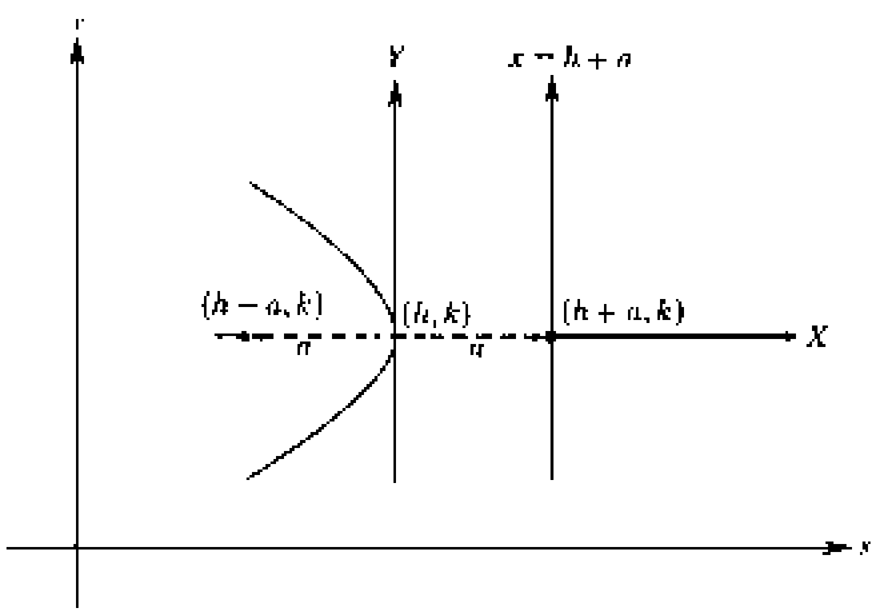
معادلات التحويل بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة والتي علي الصورة: $X = x - h$ ، $Y = y - k$ نحصل علي معادلة القطع منسوبة إلي الإحداثيات الأصلية في الصورة:

$$(y-k)^2 = 4a(x-h)$$

وهي المعادلة المطلوبة عندما يكون القطع مفتوح في الاتجاه الموجب لمحور $ox$ ، وتكون الصفات الهندسية للقطع في هذه الحالة كما هو موضحاً بالجدول التالي:

| | بالنسبة للمحاور $OXY$ | بالنسبة للمحاور $oxy$ |
|---|---|---|
| المعادلة القياسية | $Y^2 = 4aX$ | $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ |
| إحداثيات الرأس | $(0,0)$ | $(h,k)$ |
| معادلة المحور | $Y = 0$ | $y - k = 0$ |
| معادلة المماس عند الرأس | $X = 0$ | $x - h = 0$ |
| إحداثيات البؤرة | $(a,0)$ | $(h+a,k)$ |
| معادلة الدليل | $X = -a$ | $x - h = -a$ |

وعندما يكون القطع مفتوح في الاتجاه السالب لمحور $ox$ تكون معادلته منسوبة إلي الإحداثيات الأصلية علي الصورة: $(y-k)^2 = -4a(x-h)$ ، كما بالشكل المقابل:

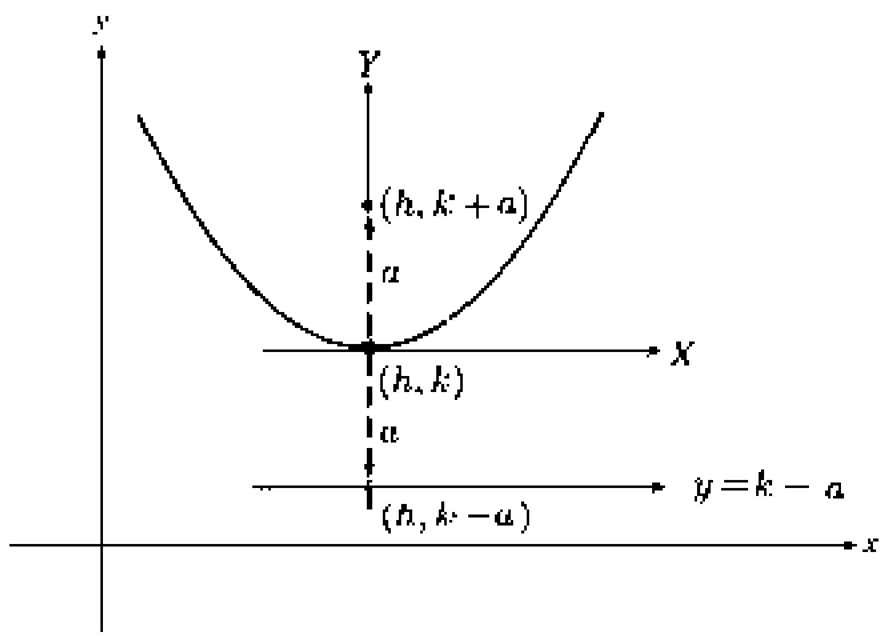


وتكون صفاته الهندسية كما هو موضحاً بالجدول التالي:

| | بالنسبة للمحاور $OXY$ | بالنسبة للمحاور $oxy$ |
|---|---|---|
| المعادلة القياسية | $Y^2=-4aX$ | $(y-k)^2=-4a(x-h)$ |
| إحداثيات الرأس | $(0,0)$ | $(h,k)$ |
| معادلة المحور | $Y=0$ | $y-k=0$ |
| معادلة المماس عند الرأس | $X=0$ | $x-h=0$ |
| إحداثيات البؤرة | $(-a,0)$ | $(h-a,k)$ |
| معادلة الدليل | $X=a$ | $x-h=a$ |

ثانياً: إذا كان محور القطع يوازي محور $oy$

نعتبر قطع مكافئ رأسه النقطة $(h,k)$ ومحوره يوازي محور $oy$ والمماس عند الرأس يوازي محور $ox$ ، كما بالشكل المقابل:




وبنقل المحاور موازية لنفسها إلي النقطة $(h,k)$ نحصل علي معادلة القطع المكافئ منسوبة للإحداثيات الجديدة في الصورة: $X^2=4aY$ وبتطبيق معادلات التحويل بين الإحداثيات والتي علي الصورة:

$$X=x-h,\quad Y=y-k$$

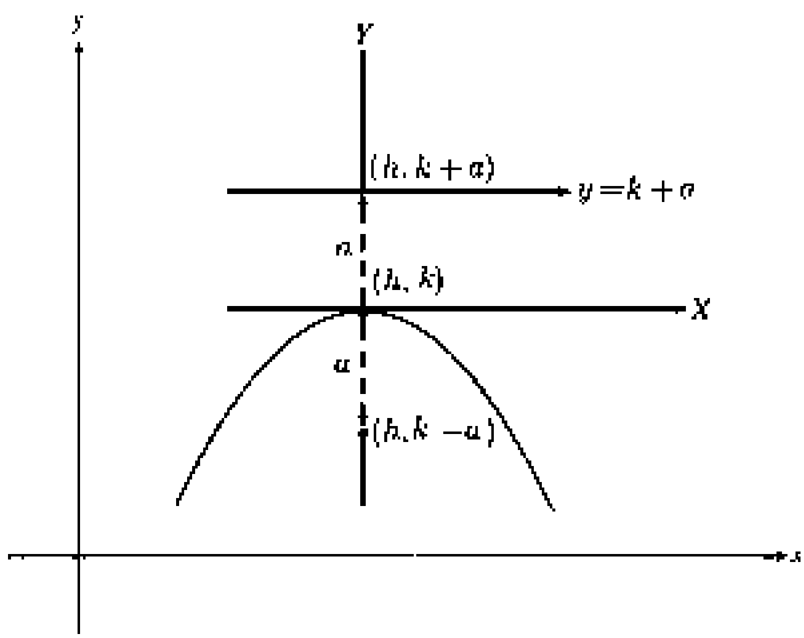
نحصل على معادلة القطع منسوبة للإحداثيات الأصلية في الصورة:

$$(x-h)^2 = 4a(y-k)$$

وذلك عندما يكون القطع مفتوح في الاتجاه الموجب لمحور $oy$ . والجدول التالي يعطي الصفات الهندسية لهذا القطع :

| | بالنسبة للمحاور $OXY$ | بالنسبة للمحاور $oxy$ |
|---|---|---|
| المعادلة القياسية | $X^2 = 4aY$ | $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ |
| إحداثيات الرأس | $(0,0)$ | $(h,k)$ |
| معادلة المحور | $X = 0$ | $x-h=0$ |
| معادلة المماس عند الرأس | $Y = 0$ | $y-k=0$ |
| إحداثيات البؤرة | $(0,a)$ | $(h,k+a)$ |
| معادلة الدليل | $Y = -a$ | $y-k=-a$ |

ولكن بالنسبة للحالة التي يكون فيها القطع مفتوح في الاتجاه السالب لمحور $oy$ فإن معادلته يمكن وصفها بالصورة: $(x-h)^2 = -4a(y-k)$ ، كما بالشكل المقابل:



والجدول التالي يوضح الصفات الهندسية للقطع في هذه الحالة :

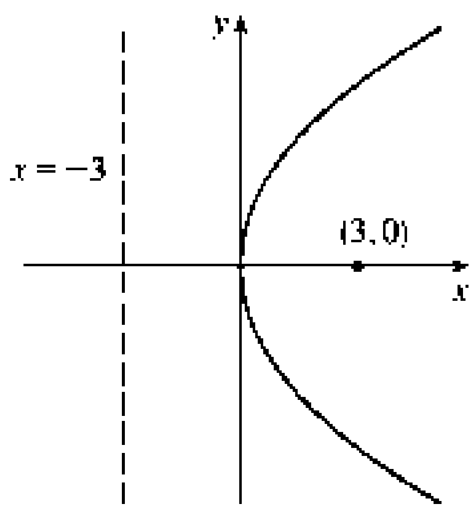
| | بالنسبة للمحاور $OXY$ | بالنسبة للمحاور $oxy$ |
|---|---|---|
| المعادلة القياسية | $X^2 = -4aY$ | $(x-h)^2 = -4a(y-k)$ |
| إحداثيات الرأس | $(0,0)$ | $(h,k)$ |
| معادلة المحور | $X = 0$ | $x-h=0$ |
| معادلة المماس عند الرأس | $Y = 0$ | $y-k=0$ |
| إحداثيات البؤرة | $(0,-a)$ | $(h,k-a)$ |
| معادلة الدليل | $Y = a$ | $y-k=a$ |

## أمثلة محلولة

مثال(١): أرسم القطع المكافئ $y^2 = 12x$ وعين البؤرة والدليل.

الحـــــــــل

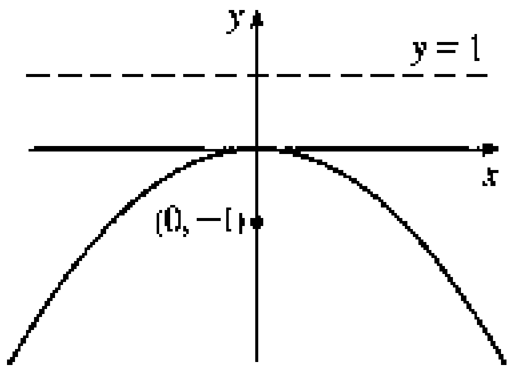
بمقارن المعادلة المعطاة بالمعادلة القياسية للقطع المكافئ والتي على الصورة: $y^2 = 4ax$ نجد أن $a=3 \Leftarrow 4a=12$ وبالتالي فإن بؤرة القطع هي النقطة $(3,0)$ ورأسه النقطة $(0,0)$ ومعادلة دليلة هي $x=-3$.




مثال (٢): أرسم القطع المكافئ $4y + x^2 = 0$ وعين البؤرة والدليل.

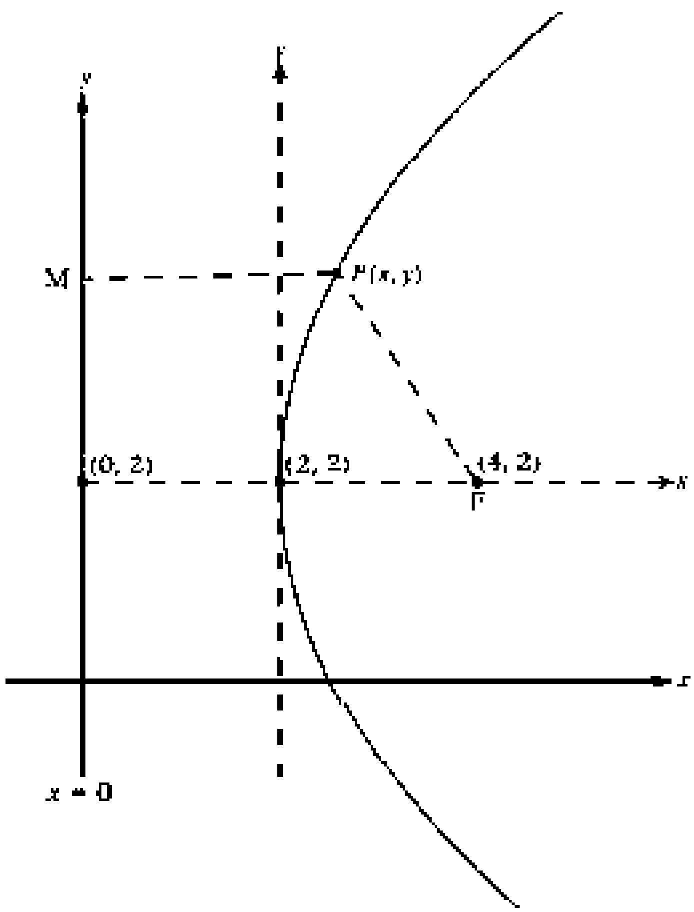
## الحـــــــــــــــل

المعادلة المعطاة يمكن كتابتها علي الصورة: $x^2=-4y$ وبمقارنة هذه المعادلة بمعادلة القطع المكافئ التي علي الصورة: $x^2=-4ay$ فنجد أن $a=1$ وبالتالي تكون رأس القطع هي نقطة الأصل وبؤرته هي النقطة $(0,-1)$ ودليلة هو الخط المستقيم $y=1$ ، كما بالشكل المقابل:




مثال (٣): أوجد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوي بحيث يكون بعدها عن النقطة $(4,2)$ مساويا لبعدها عن الخط المستقيم $x=0$.

## الحـــــــــــــــل



نفرض أن النقطة $P(x,y)$ هي أي نقطة علي القطع وأن $F$ هي بؤرة هذا القطع فيكون:

$$\overline{PF}^2=(x-4)^2+(y-2)^2$$

وإذا كان $PM$ هو العمودي من النقطة $P$ علي الدليل فإن: $\overline{PM}^2=x^2$ ، ومن التعريف العام للقطع المكافئ يكون : $\overline{PF}^2=\overline{PM}^2$ أي أن:

$$(x-4)^2+(y-2)^2=x^2$$

وبالفك ولاختصار نجد أن:

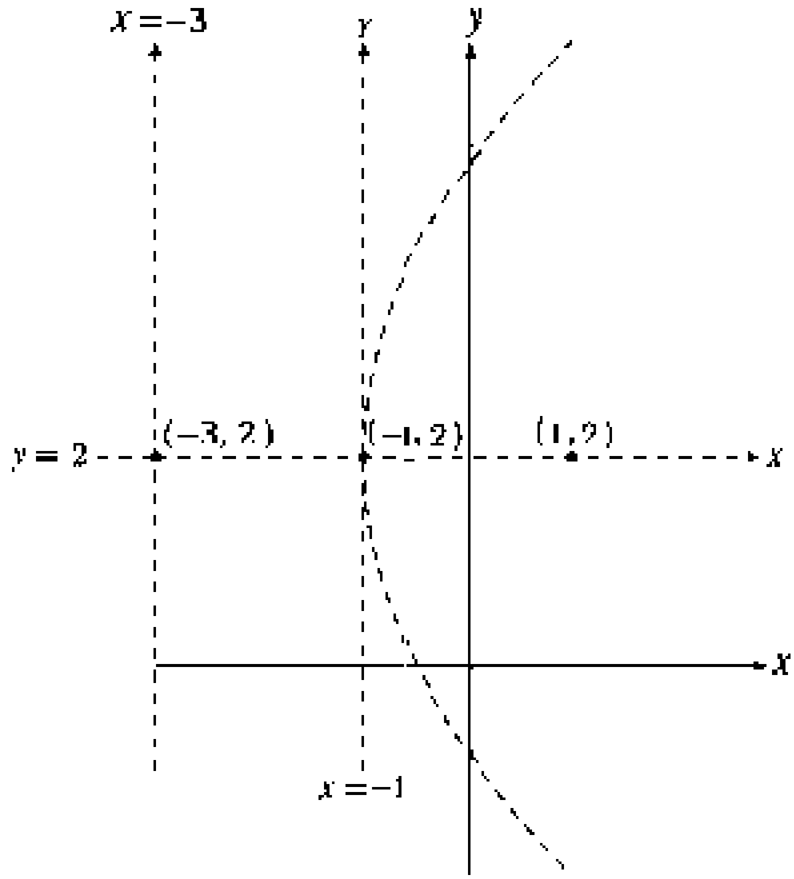
$$y^2-4y-8x+20=0$$

مثال (٤): بنقل محاور الإحداثيات إلي نقطة مناسبة أرسم القطع المكافئ الذي معادلته $y^2-4y-8x-4=0$ ثم استنتج صفاته الهندسية.

الحـــــــــــــــل

بإكمال المربع بالنسبة إلي حدود $y$ نجد أن المعادلة المعطاة تصبح بالصورة: $(y-2)^2=8(x+1)$ وبنقل نقطة الأصل إلي النقطة $(-1,2)$ نجد أن: $X=x+1,\ Y=y-2$ وبالتالي فإن المعادلة المعطاة تصبح بالصورة: $Y^2=8X$ وهي معادلة قطع مكافئ مفتوح في الاتجاه الموجب لمحور $ox$ ، كما بالشكل المقابل، والخواص الهندسية لهذا القطع كما بالجدول التالي:

| | بالنسبة للمحاور $OXY$ | بالنسبة للمحاور $oxy$ |
|---|---|---|
| المعادلة القياسية | $Y^2=8X$ | $(y-2)^2=8(x+1)$ |
| إحداثيات الرأس | $(0,0)$ | $(h,k)=(-1,2)$ |
| معادلة المحور | $Y=0$ | $y-2=0\Rightarrow y=2$ |
| معادلة المماس عند الرأس | $X=0$ | $x+1=0\Rightarrow x=-1$ |
| إحداثيات البؤرة | $(a,0)=(2,0)$ | $(h+a,k)=(1,2)$ |
| معادلة الدليل | $X=-2$ | $x+1=-2\Rightarrow x=-3$ |



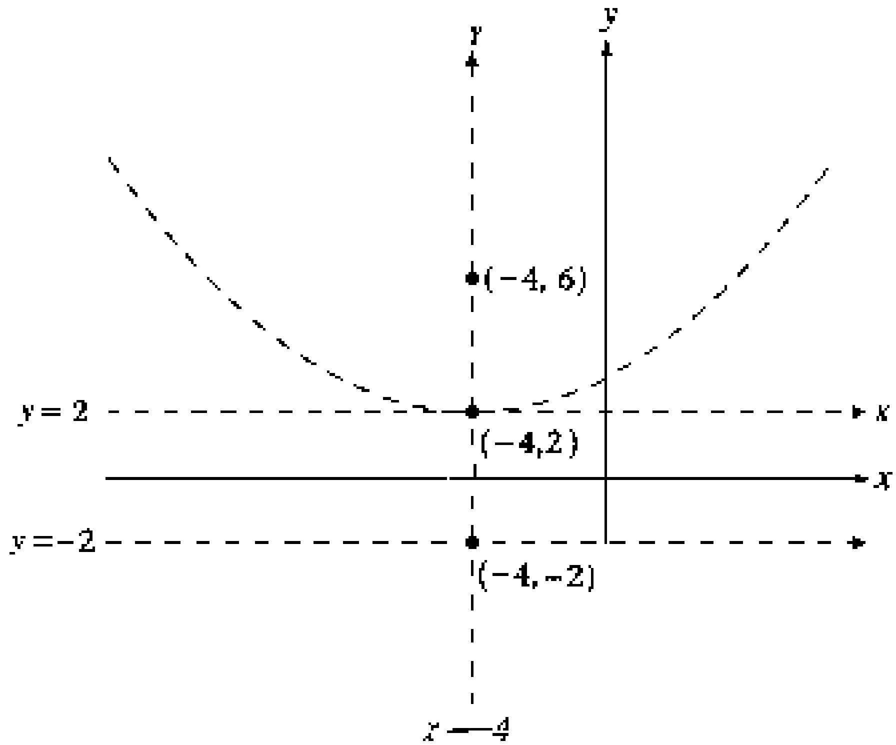

**مثال (٥): باستخدام تحويل هندسي مناسب أرسم القطع المكافئ الذي معادلته $(x+4)^2=16(y-2)$ ثم استنتج صفاته الهندسية.**

**الحـــــــــــــــــــل**

**بنقل محاور الإحداثيات إلي النقطة $(-4,2)$ نجد أن: $X=x+4,\ Y=y-2$ وبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن: $X^2=16Y$ وهي معادلة قطع مكافئ مفتوح في الاتجاه الموجب لمحور $oy$ ، كما بالشكل المقابل، والخواص الهندسية لهذا القطع كما بالجدول التالي:**

| | بالنسبة للمحاور $OXY$ | بالنسبة للمحاور $oxy$ |
|---|---|---|
| المعادلة القياسية | $X^2=16Y$ | $(x+4)^2=16(y-2)$ |
| إحداثيات الرأس | $(0,0)$ | $(h,k)=(-4,2)$ |
| معادلة المحور | $X=0$ | $x+4=0\Rightarrow x=-4$ |
| معادلة المماس عند الرأس | $Y=0$ | $y-2=0\Rightarrow y=2$ |

| | | |
|---|---|---|
| إحداثيات البؤرة | $(0,a)=(0,4)$ | $(h,k+a)=(-4,6)$ |
| معادلة الدليل | $Y=-a$ | $y-2=-4 \Rightarrow y=-2$ |




**مثال (٦): بالتحويل إلي الإحداثيات الكارتيزية ونقل محاور الإحداثيات إلي نقطة مناسبة استنتج الصفات الهندسية للقطع المكافئ الذي معادلته $r=\dfrac{6}{1-\cos\theta}$ .**

**الحـــــــــــــــــل**

$$r=\frac{6}{1-\cos\theta} \Rightarrow r(1-\cos\theta)=2 \Rightarrow r-r\cos\theta=6$$

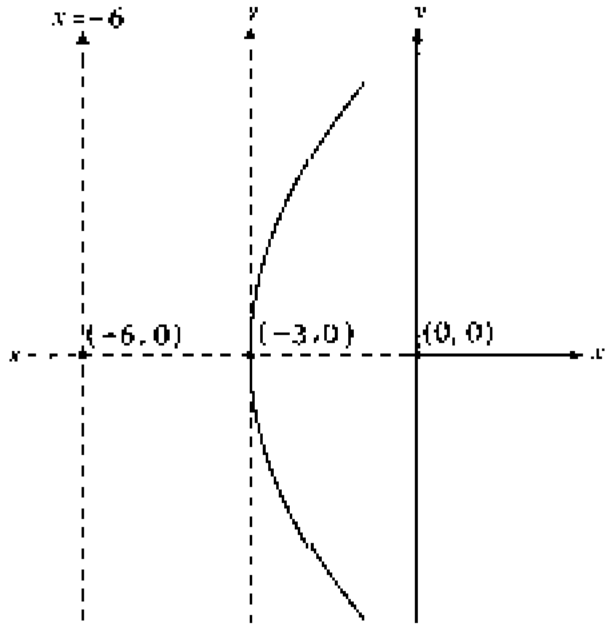
**وبالتعويض عن** $x=r\cos\theta$ , $r=\sqrt{x^2+y^2}$ **نجد أن:**

$$r-r\cos\theta=6 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}-x=6 \Rightarrow x^2+y^2=(x+6)^2$$

**وبالفك والاختصار نحصل علي:** $y^2=12(x+3)$ **وبنقل محاور الإحداثيات إلي النقطة** $(-3,0)$ **نجد أن:** $X=x+3, Y=y$ **وبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن:**

$$Y^2=12X$$

**وهي معادله قطع مكافئ مفتوح في الاتجاه الموجب لمحور** $ox$ **، كما بالشكل المقابل:**




والخواص الهندسية لهذا القطع كما بالجدول التالي :

| | بالنسبة للمحاور $OXY$ | بالنسبة للمحاور $oxy$ |
|---|---|---|
| المعادلة القياسية | $Y^2=12X$ | $y^2=12(x+3)$ |
| إحداثيات الرأس | $(0,0)$ | $(h,k)=(-3,0)$ |
| معادلة المحور | $Y=0$ | $y=0$ |
| معادلة المماس عند الرأس | $X=0$ | $x+3=0 \Rightarrow x=-3$ |
| إحداثيات البؤرة | $(a,0)=(3,0)$ | $(h+a,k)=(0,0)$ |
| معادلة الدليل | $X=-3$ | $x+3=-3 \Rightarrow x=-6$ |

## معادلتي المماس والعمودي للقطع المكافئ

معادلة المماس للقطع المكافئ $y^2=4ax$ عند النقطة $(x_1,y_1)$ الواقعة عليه تكون بالصورة $yy_1=2a(x+x_1)$ ومعادلة العمودي عند نفس النقطة تكون بالصورة $y-y_1=-\frac{y_1}{2a}(x-x_1)$ ويمكن استنتاج ذلك كما يأتي: لتكن معادلة القطع المكافئ هي $y^2=4ax$ ، ولتكن $(x_1,y_1)$ نقطة ما واقعة على القطع فهي تحقق معادلته ومن ثم يكون $y_1^2=4ax_1$ ، وميل المماس للقطع عند النقطة $(x_1,y_1)$ نحصل عليه كما يلي:

$$2y\frac{dy}{dx}=4a\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2a}{y}$$

وإذاً ميل المماس للقطع عند النقطة $(x_1,y_1)$ يكون هو $\frac{2a}{y_1}$. وبالتالي فإن معادلة المماس للقطع المكافئ

عند النقطة $(x_1,y_1)$ تكون بالصورة:

$$(y-y_1)=\frac{2a}{y_1}(x-x_1)\Rightarrow yy_1-y_1^{\,2}=2ax-2ax_1.$$

وبالتعويض عن $y_1^2=4ax_1$ نحصل على: $yy_1-4ax_1=2ax-2ax_1$ ومنها نحصل علي:

$$yy_1=2a(x+x_1) \qquad (1)$$

وهذه المعادلة هي معادلة المماس للقطع المكافئ $y^2=4ax$ عند النقطة $(x_1,y_1)$.

## المعادلات البارامترية للقطع المكافئ

المقصود بالصورة البارامترية للمنحني هو التعبير عن إحداثيات أي نقطه $(x,y)$ عليه بدلالة بارامتر وليكن $t$ (أي: $x=x(t),\ y=y(t)$) وهذه الإحداثيات تحقق معادلة المنحني في الصورة القياسية بدلالة $x$ ، $y$. بالنسبة للقطع المكافئ $y^2=4ax$ نجد أن $y=2\sqrt{ax}$ وبالتالي أننا وضعنا $x=at^2$ نجد أن $y=2at$. وبالتالي تكون المعادلات: $x=at^2,\quad y=2at$ هي المعادلات البارامترية للقطع المكافئ $y^2=4ax$. ومن الملاحظ أن المعادلات البارامترية لنفس المنحني يمكن أن تأخذ أشكالا متعددة. فمثلاً المعادلات: $x=t,\ y=2\sqrt{at},\ t\geq 0$ هي أيضاً صوره بارامترية للقطع المكافئ $y^2=4ax$. وبالنسبة للصور القياسية الأخرى للقطع المكافئ يمكن وضع معادلات بارامترية مشابهه.

## المعنى الهندسي لبارامتر القطع المكافئ

من حساب التفاضل نعلم أن $\frac{dy}{dx}$ تمثل ميل المماس عند أي نقطه من نقاط منحني ما وفي حاله القطع المكافئ بالمعادلات البارامتريه أعلاه يكون:

$$m=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{t}\Rightarrow t=\frac{1}{m}$$

أي أن البارامتر $t$ هنا هو مقلوب ميل المماس وهو يساوي "– ميل العمودي".

وتكون معادلة المماس عند أي نقطة $(at^2,2at)$علي القطع المكافئ هي:

$$\frac{y-2at}{x-at^2}=\frac{1}{t}$$

أي أن:

$$y=\frac{1}{t}x+at \;\; or \;\; ty-x-at^2=0 \qquad (2)$$

هي معادلة المماس للقطع المكافئ $y^2=4ax$ وهي معادلة من الدرجة الثانية في البارامتر $t$ أي أنة لأي نقطة $(x_1,y_1)$ توجد قيمتين للبارامتر $t$ تحقق المعادلة وهنا يعني أنة من أي نقطة لا تقع علي القطع يمكن رسم مماسان للقطع ومعادله العمودي عند أي نقطه علي القطع المكافئ تكون بالصورة :

$$\frac{y-2at}{x-at^2}=-t$$

أي:

$$y+tx-at^3-2at=0$$

## معادله وتر في القطع مكافئ

معادله وتر القطع مكافئ الذي يصل بين النقطتين $P(at_1^2,2at_1)$ ، $Q(at_2^2,2at_2)$ هي:

$$\frac{x-at_1^2}{y-2at_1}=\frac{at_2^2-at_1^2}{2at_2-2at_1}=\frac{t_1+t_2}{2}$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها علي الصورة

$$2x-(t_1+t_2)y+2at_1t_2=0 \qquad (3)$$

وبضرب طرفي المعادلة (١) في $a(t_1-t_2)$ نحصل علي:

$$2a(t_1-t_2)x-2a(t_1-t_2)(t_1+t_2)y+2a^2t_1t_2(t_1-t_2)=0$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها علي الصورة:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2at_1^2 & 2at_1 & 1 \\ 2at_2^2 & 2at_2 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad (4)$$

وهذه المعادلة هي صورة أخري لمعادلة الوتر لقطع مكافئ بدلالة البارامتر $t$. وكذلك يمكن استنتاج معادلة الوتر بدلالة الإحداثيات الكارتيزية.

معادله وتر القطع مكافئ الذي يصل بين النقطتين $P(x_1,y_1)$ ، $Q(x_2,y_2)$ هي :

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (5)$$

وحيث أن القطع يمر بالنقطتين $P(x_1,y_1)$ ، $Q(x_2,y_2)$ فيكون:

$$y_1^2=4ax_1 \qquad (7)$$

$$y_2^2=4ax_2, \qquad (6)$$

من المعادلتين (٦)، (٧) نحصل علي: $y_2^2-y_1^2=4a(x_2-x_1)$ وبالتعويض في المعادلة (٥) والاختصار نحصل علي معادلة الوتر في الصورة:

$$4ax-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0 \qquad (8)$$

ملحوظة: حيث أن لماس لنحني : هو الخط المستقيم الذي يقطع المنحني في نقطتين متطابقتين فإنة يمكن الحصول علي معادلة الماس من معادلة الوتر حيث أنة بوضع $t_1=t_2$ في المعادلة (٣) نحصل علي المعادلة (٢)، وكذلك بوضع $x_1=x_2$، $y_1=y_2$ في المعادلة (٧) نحصل علي المعادلة (١).

## شرط تماس خط مستقيم لقطع مكافئ

شرط تماس الخط المستقيم $y=mx+c$ للقطع المكافئ $y^2=4ax$ هو $c=\dfrac{a}{m}$ وإحداثيات نقطة التماس تكون $\left(\dfrac{a}{m^2},\dfrac{2a}{m}\right)$، ويمكن إثبات ذلك كما يأتي:

معالة الماس للقطع المكافئ $y^2=4ax$ هي $y=\dfrac{2a}{y_1}(x+x_1)$ حيث أن $(x_1,y_1)$ هي إحداثيات نقطة التماس. ولكي يكون الخط المستقيم $y=mx+c$ مماسا للقطع يجب أن يكون:

$$m=\frac{2a}{y_1},\ c=\frac{2ax_1}{y_1}$$

وبالتالي نجد أن:

$$y_1=\frac{2a}{m},\ x_1=\frac{cy_1}{2a}=\left(\frac{c}{2a}\right)\left(\frac{2a}{m}\right)=\frac{c}{m}$$

أي أن النقطة $\left(\frac{c}{m},\frac{2a}{m}\right)$ هي نقطة التماس .وحيث أن $(x_1,y_1)$ هي إحداثيات نقطة التماس (نقطة تقع علي القطع) فيكون:

$$y_1 = mx_1 + c \Rightarrow \frac{2a}{m} = m\left(\frac{c}{m}\right) + c \Rightarrow c = \frac{a}{m}$$

وبالتالي تكون المعادلة التي علي الصورة: $y = mx + \frac{a}{m}$ هي معادلة المماس للقطع المكافئ $y^2 = 4ax$ لجميع قيم $m$ الحقيقية وتكون النقطة $\left(\frac{a}{m^2},\frac{2a}{m}\right)$ هي نقطة التماس.

## تمارين (٩-١)

١) أوجد معادلة القطع المكافئ إذا كانت:

- البؤرة $(-1,2)$ والدليل $x=0$.
- البؤرة $(3,6)$ والدليل $y=2$.
- البؤرة $(-4,1)$ والدليل $y=-1$.
- البؤرة $(-3,-6)$ والدليل $y=0$.

٢) بالتحويل إلي الإحداثيات الكارتيزية ونقل محاور الإحداثيات إلي نقطة مناسبة استنتج الصفات الهندسية للقطاعات المكافئة الآتية:

- $r=\dfrac{6}{1+\cos\theta}$ ، $r=\dfrac{6}{1-\sin\theta}$ ، $r=\dfrac{6}{1+\sin\theta}$.

٣) بنقل نقطة الأصل إلي نقطة مناسبة استنتج الخواص الهندسية للقطاعات المكافئة الممثلة بالمعادلات الآتية:

- $y^2+2y+12x+25=0$.
- $y^2-4y-8x+20=0$.
- $x^2-8x+4y+12=0$.
- $x^2+8x-16y+48=0$.

٤) أوجد معادلتي المماسين المرسومين من النقطة $(-3,-2)$ للقطع المكافئ $y^2=4x$. وأوجد إحداثيات نقطتي التماس.ومن ثم أوجد معادلة الوتر الواصل بين نقطتي التماس.

٥) أوجد معادلتي المماسين المرسومين من النقطة $(2,-3)$ للقطع المكافئ $y^2=4x$ وأوجد إحداثيات نقطتي التماس.

٦) برهن أن المحل الهندسي لنقطة تقاطع مماسين متعامدين لقطع مكافئ هو الدليل.

٧) أوجد معادلة المماس للقطع المكافئ $y^2=12x$ والذي يصنع زاوية $\dfrac{\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور $ox$.

# ثانياً: القطع الناقص

من التعريف العام للقطاعات المخروطية يعرف القطع الناقص: علي أنة هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة $F$ (البؤرة) إلي بعدها عن خط مستقيم ثابت $L$ (الدليل) يساوي مقدار ثابت (الاختلاف المركزي) اقل من الواحد الصحيح .

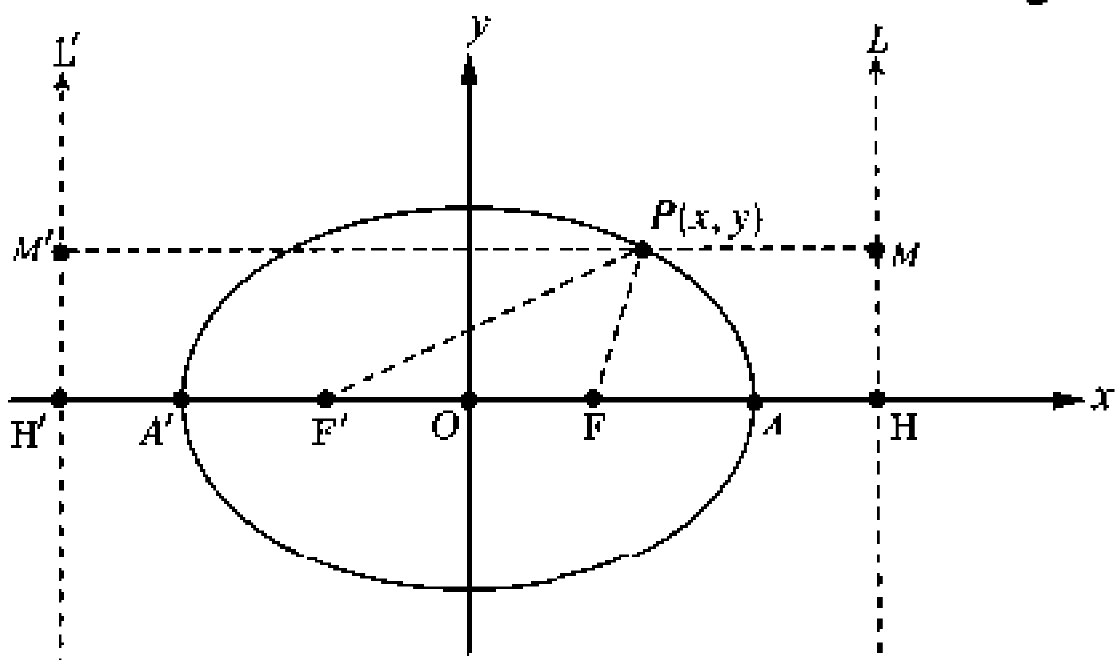
وهذا يعني أن القطع الناقص هو المنحني الناتج من حركة نقطة $P(x,y)$ بحيث يكون بعدها عن البؤرة $F$ إلي بعدها عن الدليل $L$ مرتبطاً بالعلاقة :

$$PF = ePM \,,\ e < 1 \qquad (1)$$

من هذا التعريف يمكن استنتاج المعادلة القياسية للقطع الناقص كما يلي:

لإيجاد المعادلة القياسية للقطع الناقص نفرض أن البؤرة $F$ تقع علي محور $ox$ وأن الدليل $L$ يكون عمودي علي محور $ox$ والنقطة $P(x,y)$ هي النقطة التي تتحرك في المستوي بحيث تحقق العلاقة (١).

وبالتالي فإن النقطة $P(x,y)$ خلال حركتها تقطع محور $ox$ في النقطتين $A$ ، $A'$ (نقطتي التقسيم من الداخل والخارج)، كما بالشكل المقابل:




ومن تعريف القطع الناقص نجد أن:

$$\frac{AF}{AH} = \frac{A'F'}{A'H'} = e,\ e < 1$$

وبفرض أن المسافة بين النقطتين $A$ ، $A'$ هي مقدار ثابت $2a$ بحيث أن نقطة الأصل تقع في منتصف المسافة بينهما أي أن $OA = OA'$ وبذلك تكون إحداثيات النقطتين $A$ ، $A'$ هما $A(a,0)$ ، $A'(-a,0)$ .

وبالتالي من الشكل نجد أن:

$$AF = eAH \Rightarrow OA - OF = e(OH - OA) \qquad (1)$$

$$A'F = eA'H \Rightarrow OA' + OF = e(OH + OA) \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين (١)، (٢) نجد أن:

$$AF + A'F = 2e\, OH \Rightarrow 2a = 2e\, OH \Rightarrow OH = \frac{a}{e}$$

أي أن الدليل يبعد عن المركز مسافة قدرها $\frac{a}{e}$. وتكون معادلة الدليل هي $x = \frac{a}{e}$.

وبطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢) نجد أن:

$$2OF = e(2OA) \Rightarrow OF = ae$$

أي أن البؤرة تبعد عن نقطة الأصل مسافة قدرها $ae$ وتكون إحداثيات البؤرة هي $F(ae,0)$ والبعد $PM$ هو $\frac{a}{e} - x$. وإذا كانت النقطة $P(x,y)$ تقع علي القطع الناقص فإن:

$$\overline{PF}^2 = e^2 \overline{PM}^2 \Rightarrow (x - ae)^2 + y^2 = e^2\left(\frac{a}{e} - x\right)^2$$

وبالفك والاختصار نجد أن: $x^2(1-e^2) + y^2 = a^2(1-e^2)$ وحيث أن $e<1$ فإن $1-e^2$ يكون مقدار موجب دائما ، وبوضع: $b^2 = a^2(1-e^2)$ نحصل علي:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

وذلك هي معادلة لقطع الناقص في صورتها القياسية عندما تقع بؤرته علي محور $ox$ ويكون دليلة موازيا لمحور $oy$. ومن العلاقة $b^2 = a^2(1-e^2)$ نلاحظ أن $a^2 > b^2$ .ومن معادلة القطع نجد أن:

$$x = \pm a\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)},\ y = \pm b\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$$

وهذا يعني أن القطع الناقص يكون متماثل حول محوري الإحداثيات وكذلك متماثل حول نقطة الأصل

ولكي نحصل علي قيم حقيقية للمتغير $x$ يجب أن يكون :

$$1-\frac{y^2}{b^2}\geq 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}-1\leq 0 \Rightarrow y^2\leq b^2 \Rightarrow |y|\leq b$$

وبالمثل لكي نحصل علي قيم حقيقية للمتغير $y$ يجب أن يكون:

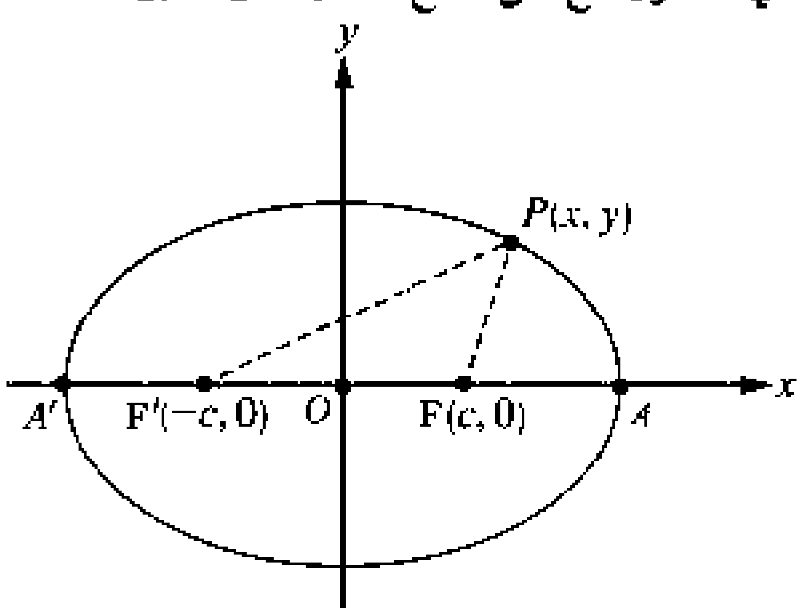
$$1-\frac{y^2}{b^2}\geq 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}-1\leq 0 \Rightarrow y^2\leq b^2 \Rightarrow |y|\leq b$$

من تماثل القطع الناقص نجد أنة توجد له بؤرة أخري هي $F'(-ae,0)$ ودليل أخر معادلته $x=-\frac{a}{e}$ وكذلك نجد أن القطع يقطع محور $oy$ في نقطتين ويكون منحني القطع مغلق.

ومن الشكل نعلم أن: $\overline{PF}=e\overline{PM},\quad \overline{PF'}=e\overline{PM'}$ ومنها نجد أن:

$$\overline{PF}+\overline{PF'}=e(\overline{PM}+\overline{PM'})=e\overline{HH'}=e\left(\frac{2a}{e}\right)=2a$$

ومن هنا نستنتج تعريفا اخر للقطع الناقص وهو أن: القطع الناقص هو الحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوي بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي مقدار ثابت (وهو طول المحور الأكبر). ومن هذا التعريف يمكن استنتاج معادلة القطع الناقص كما يأتي: لتكن بؤرتي القطع الناقص هما النقطتين $F'(c,0),F(-c,0)$ حيث $c$ يُعد كلاً من البؤرتين عن نقطة الاصل ولتكن $P(x,y)$ نقطة في المستوى تقع على القطع، كما بالشكل المقابل:



ومن التعريف السابق للقطع الناقص يكون:

$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a.$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow (x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$\Rightarrow -4cx=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \Rightarrow a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx.$$

وبتربيع الطرفين نجد أن:

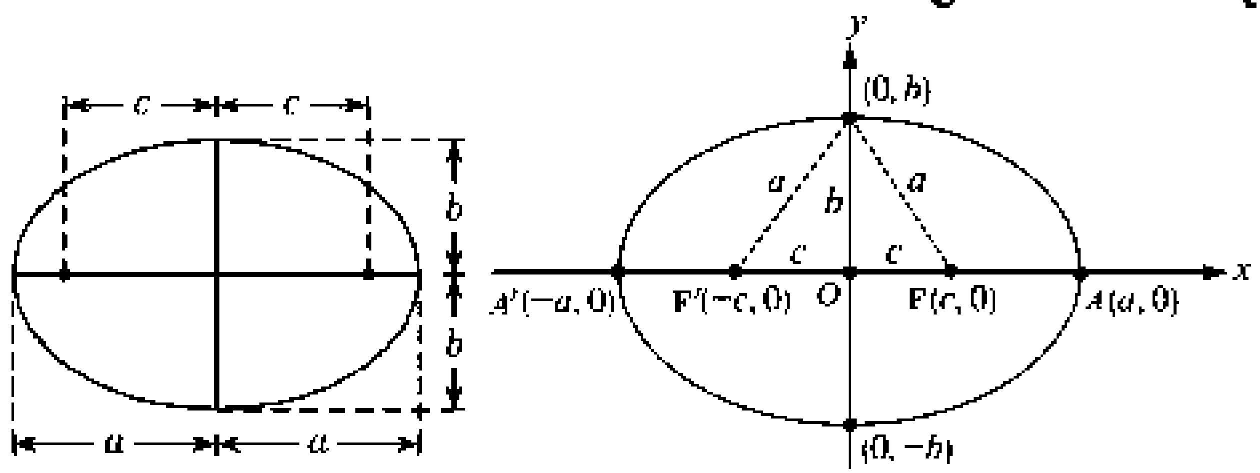
$$a^2[(x+c)^2+y^2]=(a^2+cx)^2 \Rightarrow a^2[x^2+2cx+c^2+y^2]=a^4+2a^2cx+c^2x^2 \Rightarrow$$

$$a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4+2a^2cx+c^2x^2 \Rightarrow x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

وبالقسمة علي $a^2(a^2-c^2)$ نحصل علي: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$ وحيث أن $a>c$ فإن المقدار $a^2-c^2$ يكون موجب دائما، وبوضع $b^2=a^2-c^2$ نحصل علي:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4)$$

وهي المعادلة القياسية للقطع الناقص، كما بالشكل المقابل:




ملاحظات:

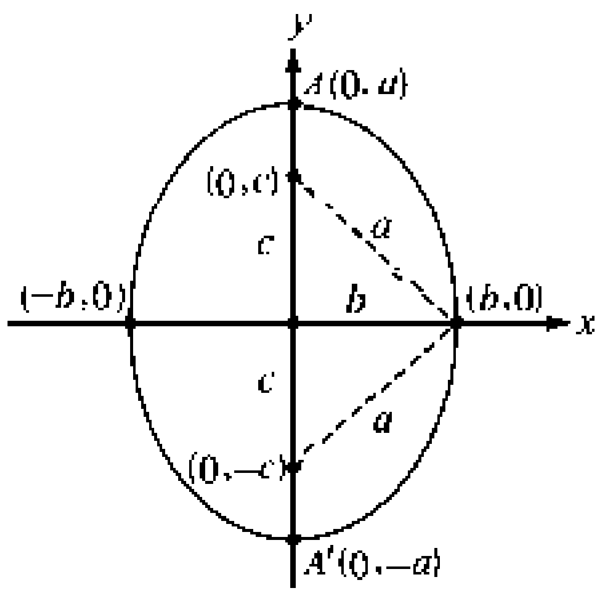
- ❖ النقطتين الثابتتين $F'(c,0)=(ae,0), F(-c,0)=(-ae,0)$ تسمي ببؤرتي القطع الناقص.
- ❖ الخط المستقيم المار بالبؤرتين يسمي بالمحور الأكبر وطوله $2a$.
- ❖ الخط المستقيم العمودي علي المحور الأكبر من منتصفه يسمي بالمحور الأصغر وطوله $2b$.
- ❖ نقطة تقاطع المحور الأكبر مع المحور الأصغر تسمي بمركز القطع الناقص.

❖ نقطتي تقاطع المحور الأكبر مع منحني القطع تسمي برأسي القطع الناقص.

وبالتالي نجد أن المعادلة (٤) تمثل قطع ناقص مركزه نقطة الأصل، ومحوره الأكبر منطبق على محور $ox$ ومحوره الأصغر منطبق على محور $oy$. وإحداثيات بؤرتيه $(\pm c,0)$ حيث $c=\sqrt{a^2-b^2}$ وطول محوره الأكبر يساوي $2a$ وطول محوره الأصغر يساوي $2b$ وطول وتره البؤري العمودي يساوي $\frac{2b^2}{a}$

والاختلاف المركزي له $1 > e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$. ومعادلتي دليليه هما $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$.

ملحوظة (١): وإذا كان المحور الأكبر للقطع الناقص منطبق على محور $oy$ ومحوره الأصغر منطبق على محور $ox$ كما بالشكل:




فإن معادلته تكون على الصورة:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \qquad (5)$$

وإحداثيات بؤرتيه $(0,\pm c)$ حيث أن $c=\sqrt{a^2-b^2}$. وبالتالي تكون المعادلة (٤) تمثل قطع ناقص أفقي والمعادلة (٥) تمثل قطع ناقص رأسي والصفات الهندسية لهما تكون كما بالجداول التالي:

| اتجاه القطع | أفقي | رأسي |
|---|---|---|
| المعادلة القياسية | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ | $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ |
| المركز | (0,0) | (0,0) |

| | | |
|---|---|---|
| إحداثيات الرأسين | $A(a,0),\ A'(-a,0),$ | $A(0,a),\ A'(0,-a),$ |
| معادلة المحور الأكبر | $y=0$ | $x=0$ |
| معادلة المحور الأصغر | $x=0$ | $y=0$ |
| إحداثيات البؤرتين | $F'(-c,0)=(-ae,0)$ <br> $F(c,0)=(ae,0)$ | $F'(0,-c)=(0,-ae)$ <br> $F(0,c)=(0,ae)$ |
| معادلة الدليلين | $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$ | $y=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$ |
| نهايتي المحور الأصغر | $(0,\pm b)$ | $(\pm a,0)$ |

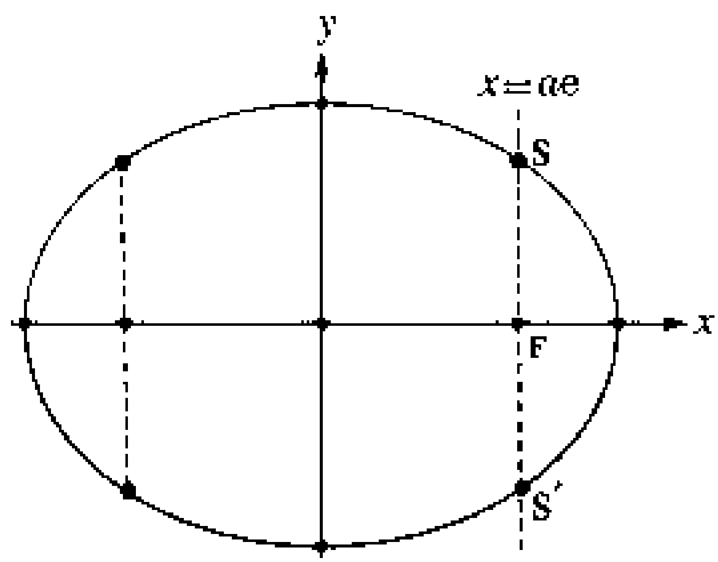
**ملحوظة (٢):**

❖ من المعادلتين (٣)، (٤) نجد أن: $c=ae \Rightarrow e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ وهو الاختلاف المركزي.

❖ إذا كانت $e=0 \Rightarrow \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=0 \Rightarrow a=b$ وبذلك تنطبق البؤرتين والمركز وتصبح المعادلة في الصورة: $x^2+y^2=a^2$ وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $a$. أي أن الدائرة هي حالة خاصة من القطع الناقص عندما $e=0$.

## الوتر البؤري العمودي للقطع الناقص

الوتر البؤري العمودي للقطع الناقص هو الوتر المار بالبؤرة عموديا علي المحور الاكبر ويمكن حساب طولة كالاتي: حيث أن الوتر البؤري العمودي يمر بالبؤرة موازيا للدليل (كما بالشكل المقابل)، فتكون



معادلة الوتر البؤري العمودي هي $x = ae$ وهذا الوتر يقطع القطع الناقص في النقطتين $S(ae, y)$ ، $S'(ae, -y)$ وبالتالي فإن النقطة $S(ae, y)$ تحقق معادلة القطع أي أن:

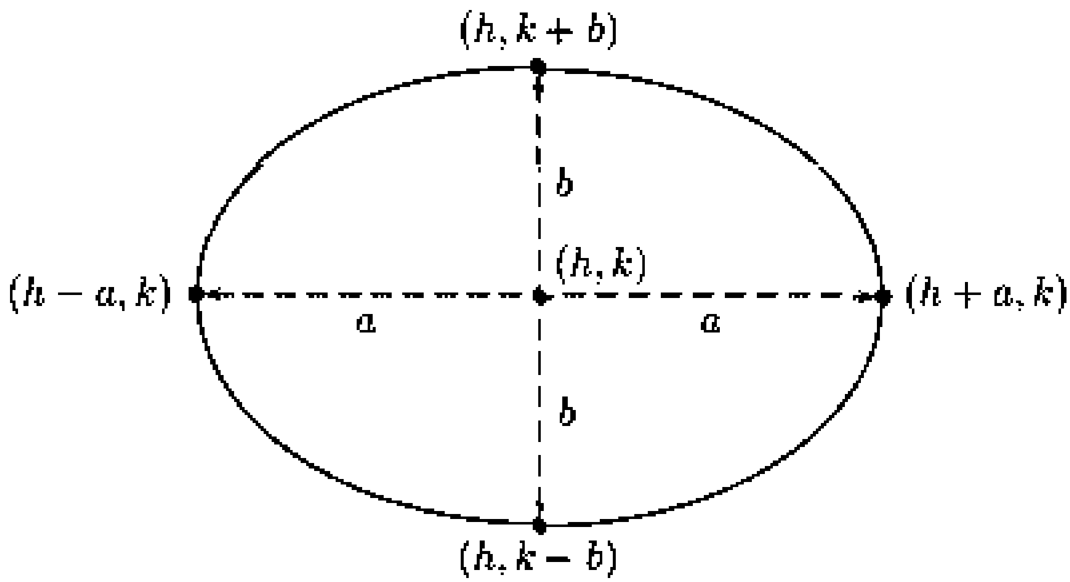
$$\frac{a^2e^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{e^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=(1-e^2)b^2=\frac{b^2}{a^2}b^2 \Rightarrow y^2=\frac{b^4}{a^2} \Rightarrow y=\pm\frac{b^2}{a}$$

وبالتالي يكون طول الوتر البؤري العمودي للقطع الناقص هو:

$$SS'=|2y|=\frac{2b^2}{a}.$$

## المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي محوريه يوازيان محوري الإحداثيات

**أولاً: إذا كان المحور الأكبر للقطع يوازي محور $ox$ :** نعتبر قطع ناقص مركزه النقطة $(h, k)$ ومحوره الاكبر يوازي محور $ox$ ومحورة الاصغر يوازي محور $oy$ ، كما بالشكل المقابل:




وبنقل محاور الإحداثيات موازية لنفسها إلي النقطة $(h, k)$ حيث أن المحاور الجديدة هي $OXY$ ، فتكون معادلة القطع الناقص منسوبة إلي المحاور الجديدة علي الصورة: $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ باستخدام معادلات التحويل بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة والتي علي الصورة:

$$X = x-h, \quad Y = y-k$$

نحصل علي معادلة القطع الناقص بالنسبة إلي الإحداثيات الأصلية في الصورة:

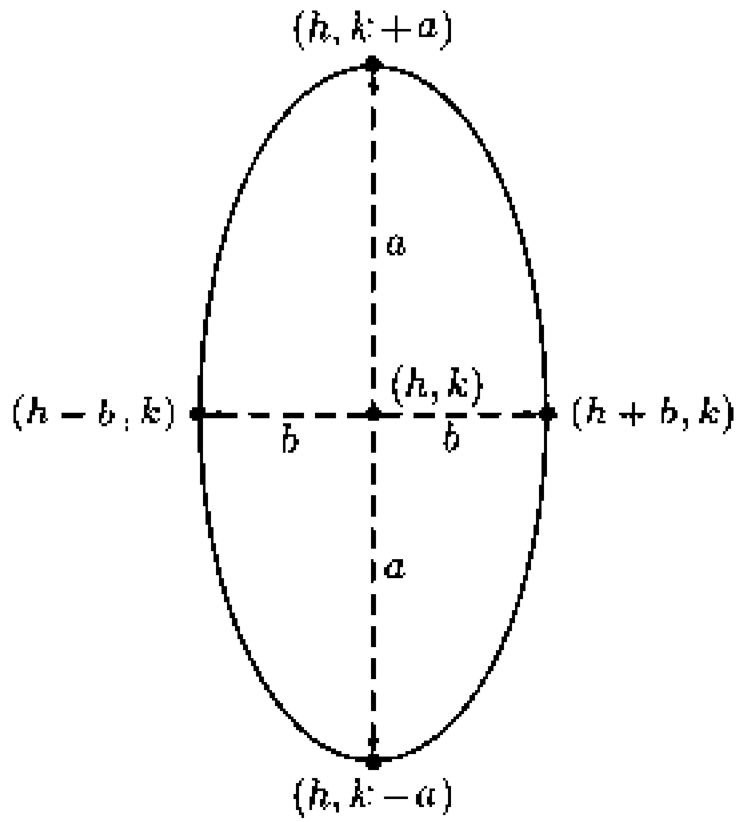
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

وصفاته الهندسية كما في الجدول التالي :

| | بالنسبة للمحاور $oxx$ | بالنسبة للمحاور $oxy$ |
|---|---|---|
| المعادلة القياسية | $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ | $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ |
| إحداثيات المركز | $(0,0)$ | $(h,k)$ |
| معادلة المحور الأكبر | $Y=0$ | $y-k=0$ |
| معادلة المحور الأصغر | $X=0$ | $x-h=0$ |
| إحداثيات البؤرتين | $(\pm c,0)$ | $(h\pm c,k)$ |
| إحداثيات الرأسين | $(\pm a,0)$ | $(h\pm a,k)$ |
| معادلة الدليلين | $X=\pm\frac{a}{e}$ | $x-h=\pm\frac{a}{e}$ |
| نهايتي المحور الأصغر | $(0,\pm b)$ | $(h,k\pm b)$ |

**ثانياً: إذا كان المحور الأكبر للقطع يوازي محور $oy$ : نعتبر قطع ناقص مركزة النقطة $(h,k)$**

**ومحوره الاكبر يوازي محور $oy$ ومحورة الاصغر يوازي محور $ox$ ، كما بالشكل المقابل:**



وبنقل محاور الإحداثيات موازية لنفسها إلي النقطة $(h,k)$ حيث أن المحاور الجديدة هي $OXY$ ، فتكون معادلة القطع الناقص منسوبة إلي المحاور الجديدة علي الصورة: $\frac{Y^2}{a^2}+\frac{X^2}{b^2}=1$ وباستخدام معادلات التحويل بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة والتي علي الصورة:

$$X = x-h, \quad Y = y-k$$

نحصل علي معادلة القطع الناقص بالنسبة إلي الإحداثيات الأصلية في الصورة:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

والصفات الهندسية لهذا القطع كما في الجدول التالي:

| | بالنسبة للمحاور $OXY$ | بالنسبة للمحاور $oxy$ |
|---|---|---|
| المعادلة القياسية | $\frac{X^2}{b^2}+\frac{Y^2}{a^2}=1$ | $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ |
| إحداثيات المركز | $(0,0)$ | $(h,k)$ |
| معادلة المحور الأكبر | $X=0$ | $x-h=0$ |
| معادلة المحور الأصغر | $Y=0$ | $y-k=0$ |
| إحداثيات البؤرتين | $(0,\pm c)$ | $(h,k\pm c)$ |
| إحداثيات الرأسين | $(\pm a,0)$ | $(h,k\pm a)$ |
| معادلة الدليلين | $Y=\pm\frac{a}{e}$ | $y-k=\pm\frac{a}{e}$ |
| نهايتي المحور الأصغر | $(\pm b,0)$ | $(h\pm b,k)$ |

## أمثله محـــــــــــــلولة

مثال (١): أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $(\pm 2,0)$ واختلافه المركزي يساوي $\frac{1}{2}$.

### الحـــــــــــــــــــــل

من المعطيات نلاحظ أن بؤرتي القطع تقع علي محور $ox$ وبالتالي فإن معادلة القطع المطلوبة يجب أن تكون علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ، ومن المعطيات نجد أن :

❖ إحداثيات البؤرتين هما: (1) $(\pm ae,0)=(\pm 2,0)\Rightarrow ae=2$

❖ الاختلاف المركزي : (2) $e=\dfrac{1}{2}$

من المعادلتين (١) ، (٢) نجد أن : (3) $a=4\Rightarrow a^2=16$

وكذلك

$$b^2=a^2(1-e^2)\Rightarrow b^2=16\left(1-\frac{1}{4}\right)=12 \qquad (4)$$

وبذلك تكون معادلة القطع المطلوبة هي: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

مثال (٢): أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $(0,\pm 2)$ ورأسية هما $(0,\pm 3)$.

الحـــــــــــــــل

من المعطيات نلاحظ أن بؤرتي القطع تقع علي محور $oy$ وبالتالي فإن معادلة القطع المطلوبة يجب أن تكون علي الصورة: $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ ومن المعطيات نجد أن :

❖ البؤرتين هما $(0,\pm 2)$ فيكون: $(0,\pm c)=(0,\pm 2)\Rightarrow c=2$

❖ الراسين هما $(0,\pm 3)$ فيكون: $(0,\pm a)=(0,\pm 3)\Rightarrow a=3$

وبالتالي يكون: $b^2=a^2-c^2=9-4=5$

ومن ثم فان معادلة القطع الناقص المطلوبة تكون هي: $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

مثال (٣): أرسم القطع الناقص $9x^2+16y^2=144$ ثم عين إحداثيات بؤرتيه ونهايتي كل من محورية الأكبر ولأصغر.

الحـــــــــــــــــــل

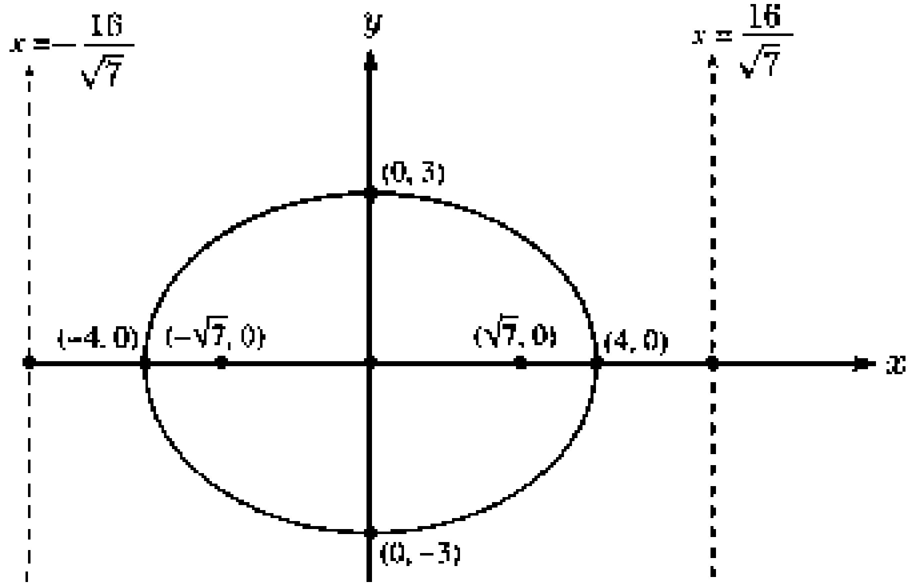
المعادلة المعطاة يمكن كتابتها علي الصورة: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ ، وبمقارنة هذه المعادلة بمعادلة القطع الناقص التي علي الصورة: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

نجد أن: $a^2=16\Rightarrow a=4,\quad b^2=9\Rightarrow b=3$

وبالتالي نجد أن: $c^2=a^2-b^2=16-9=7\Rightarrow c=\sqrt{7}$

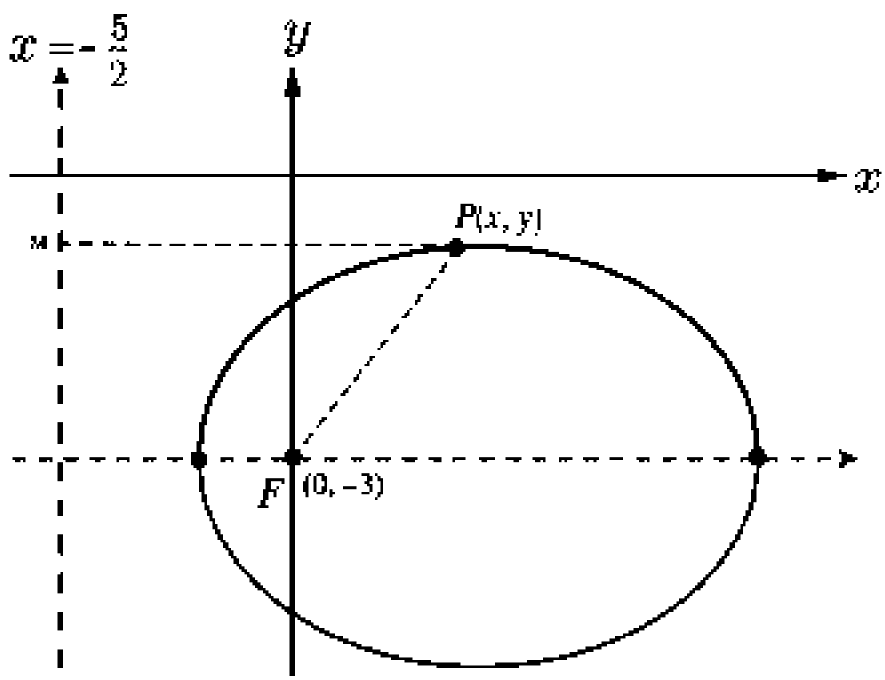
**وبالتالي تكون :**

- ❖ **إحداثيات البؤرتين هما** $(\pm c,0)=(\pm\sqrt{7},0)$ .
- ❖ **إحداثيات نهايتي محوره الأكبر هما** $(\pm a,0)=(\pm 4,0)$ .
- ❖ **إحداثيات نهايتي محوره الأصغر هما** $(0,\pm b)=(0,\pm 3)$ .




**مثال (٤): أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرته (0,−3) ودليلة الخط المستقيم** $x=-\dfrac{5}{2}$ **واختلافه المركزي** $e=\dfrac{2}{3}$ .

**الحـــــــــــــــــــل**



نفرض أن النقطة $P(x,y)$ هي أي نقطة علي القطع وأن $F$ هي بؤرة هذا القطع فيكون:

$$\overline{PF}^2 = x^2 + (y+3)^2$$

وإذا كان $PM$ هو العمودي من النقطة $P$ علي الدليل فإن:

$$\overline{PM}^2 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2$$

ومن التعريف العام للقطع الناقص يكون : $\overline{PF}^2 = e^2\overline{PM}^2$ أي أن:

$$x^2+(y+3)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow 9\left(x^2+(y+3)^2\right) = 4\left(x^2+5x+\frac{25}{4}\right)$$

وبالفك والاختصار نحصل علي : $5x^2-20x+9y^2+54y+56=0$ وبإكمال المربع بالنسبة للحدود $x$ ، $y$ نحصل علي:

$$5(x-2)^2+9(y+3)^2-20-81+56=0 \Rightarrow 5(x-2)^2+9(y+3)^2-20-81+56=0$$

وبالتالي نجد أن:

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{5}=1$$

بنقل نقطه الأصل إلي النقطة $(2,-3)$ نجد أن: $X=x-2,\ Y=y+3$ وبالتالي تصبح معادلة القطع في الصورة:

$\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{5}=1$ وهي معادلة قطع ناقص أفقي.

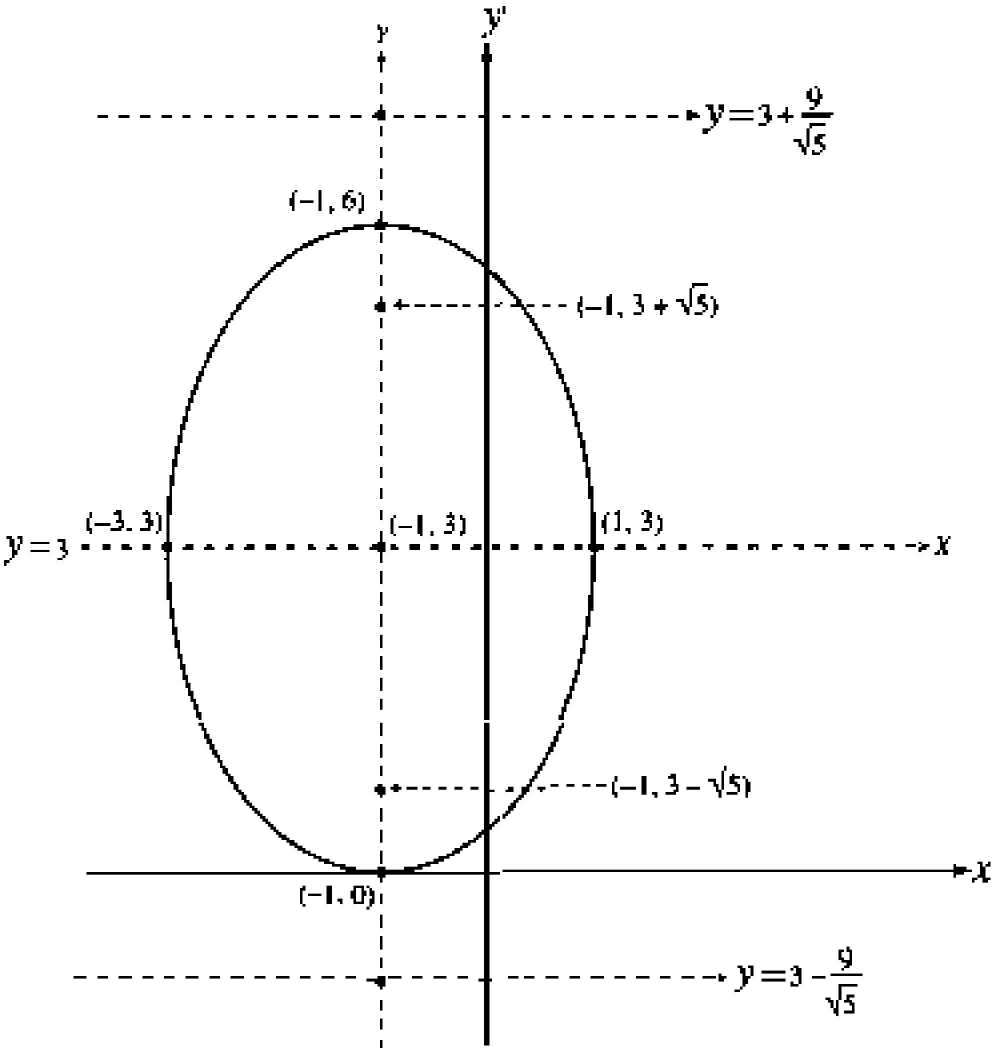
**مثال (٥): بنقل محاور الاحداثيات الي نقطة مناسبة استنتج الصفات الهندسية للقطع الناقص الذي معادلته : $9x^2+4y^2+18x-24y+9=0$.**

## الحـــــــــــــل

المعادلة المعطاة خالية من الحد $xy$ وبالتالي يمكن اجراء عملية اكمال المربع بالنسبة لحدود $x$ ، $y$ كما يلي:

$$\begin{aligned}9x^2+4y^2+18x-24y+9=0 &\Rightarrow 9x^2+18x+4y^2-24y+9=0\\ &\Rightarrow 9(x^2+2x)+4(y^2-6y)+9=0\\ &\Rightarrow 9\left[(x+1)^2-1\right]+4\left[(y-3)^2-9\right]+9=0\\ &\Rightarrow 9(x+1)^2+4(y-3)^2-9-36+9=0\\ &\Rightarrow 9(x+1)^2+4(y-3)^2=36 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1\end{aligned}$$

وبنقل محاور الاحداثيات الي النقطة $(-1,3)$ نجد أن: $X = x+1, \quad Y = y-3$ وبالتالي فإن المعادلة المعطاة يمكن كتابتها علي الصورة: $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{9}=1$ وهي معادلة قطع ناقص رأسي، كما بالشكل المقابل:




ويمكن استنتاج صفاتة الهندسية كما يلي:

من معادلة القطع نجد أن: $a^2=9 \Rightarrow a=3, \quad b^2=4 \Rightarrow b=2$

وبالتالي نجد أن: $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c^2=a^2-b^2=9-4=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}$

وبالتالي تكون الصفات الهندسية للقطع الناقص كما بالجدول التالي:

| | بالنسبة للمحاور $OXY$ | بالنسبة للمحاور $oxy$ |
|---|---|---|
| المعادلة القياسية | $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{9}=1$ | $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$ |
| إحداثيات المركز | $(0,0)$ | $(-1,3)$ |

| | | |
|---|---|---|
| معادلة المحور الأكبر | $X=0$ | $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ |
| معادلة المحور الأصغر | $Y=0$ | $y-3=0 \Rightarrow y=3$ |
| إحداثيات البؤرتين | $(0,\pm c)=(0\pm\sqrt{5})$ | $(h,k\pm c)=(-1,3\pm\sqrt{5})$ |
| إحداثيات الرأسين | $(0,\pm a)=(0,\pm 3)$ | $(h,k\pm a)=(-1,3\pm 3)$ |
| معادلة الدليلين | $Y=\pm\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}=\pm\frac{9}{\sqrt{5}}$ | $y-3=\pm\frac{9}{\sqrt{5}} \Rightarrow y=3\pm\frac{9}{\sqrt{5}}$ |
| نهايتي المحور الأصغر | $(\pm b,0)=(\pm 2,0)$ | $(h\pm b,k)=(-1\pm 2,3)$ |

## معادلة المماس والعمودي للقطع الناقص

نعتبر القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ،ويفرض أن النقطة $(x_1,y_1)$ نقطة علية وبالتالي فان ميل المماس لهذا القطع عند أي نقطه علية هو: $m=\frac{dy}{dx}=\frac{b^2}{a^2}.\frac{x}{y}$ وبالتالي فان ميل المماس للقطع الناقص عند النقطة $(x_1,y_1)$ الواقعة علية هو: $m_1=\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}.\frac{x_1}{y_1}$ وبالتالي تكون معادلة المماس للقطع الناقص عند النقطة $(x_1,y_1)$ الواقعة علية هي:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m_1=-\frac{b^2}{a^2}.\frac{x_1}{y_1}$$

ومنها نحصل علي: $\frac{y_1y-y_1^2}{b^2}=-\frac{x_1x-x_1^2}{a^2}$ وهذه المعادلة يمكن كتابتها علي الصورة:

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}$$

وحيث أن النقطة $(x_1,y_1)$ تقع علي القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ فهي تحقق معادلته أي أن:

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

وبالتالي فأن معادلة المماس للقطع الناقص الذي معادلته بالصورة:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

عند النقطة $(x_1,y_1)$ الواقعة علية تصبح بالصورة: $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ و معادلة العمودي لهذا القطع عند النقطة $(x_1,y_1)$ تكون بالصورة: $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{a^2}{b^2}\frac{y_1}{x_1}$ .

## المعادلات البارامترية للقطع الناقص

المعادلات البارامترية للقطع الناقص الذي معادلتة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ هي:

$$x=a\cos\theta,\qquad y=b\sin\theta$$

حيث أن $\theta$ تسمي زاوية الاختلاف المركزي. لانة بحذف البارامتر $\theta$ بين المعادلتين ينتج أن:

$$\cos\theta=\frac{x}{a},\quad \sin\theta=\frac{y}{b}$$

أي أن:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

ومعادلة المماس للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ عند النقطة $(a\cos\theta,b\sin\theta)$ الواقعة علية تكون بالصورة:

$$\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1$$

## شرط تماس خط مستقيم لقطع ناقص

الشرط اللازم لكي يكون الخط المستقيم $y=mx+c$ مماسا للقطع الناقص الذي معادلته علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ هو أن يكون $c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ ومعادلة المماس هي $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

وإحداثيات نقط التماس هي:

$$\left(\frac{-a^2m}{\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}},\frac{b^2}{\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$$

ويمكن استنتاج ذلك كالأتي:

معادلة المماس للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ يمكن إعادة كتابتها علي الصورة:

$$y=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}x+\frac{b^2}{y_1}$$

حيث أن $(x_1,y_1)$ هي نقطة التماس.وبالتالي لكي يكون الخط المستقيم $y=mx+c$ مماسا للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ يجب أن يكون:

$$m=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1},\quad c=\frac{b^2}{y_1}$$

وبالتالي نجد أن:

$$y_1=\frac{b^2}{c},\quad x_1=-\frac{ma^2}{b^2}y_1=\left(-\frac{a^2}{b^2}\right)\left(\frac{b^2}{c}\right)=-\frac{ma^2}{c}$$

وبالتالي فإن نقطة التماس للقطع هي $(x_1,y_1)=\left(-\frac{ma^2}{c},\frac{b^2}{c}\right)$.

وحيث أن النقطة $(x_1,y_1)=\left(-\frac{ma^2}{c},\frac{b^2}{c}\right)$ هي نقط التماس فهي تحقق معادلة المماس أي أن:

$$y_1=mx_1+c\Rightarrow\frac{b^2}{c}=m\left(-\frac{ma^2}{c}\right)+c\Rightarrow c=\frac{b^2}{c}+\frac{m^2a^2}{c}\Rightarrow c^2=m^2a^2+b^2$$

أي أن الشرط اللازم لكي يكون المستقيم $y=mx+c$ مماسا للقطع الناقص هو أن:

$$c=\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}$$

ويكون المستقيمان $y=mx+\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}$ دائما يمسان القطع الناقص لجميع قيم $m$ الحقيقية وتكون نقطتي التماس هما:

$$\left(\frac{-ma^2}{\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}},\frac{b^2}{\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}}\right).$$

## تمارين (٩-٢)

١) أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرته $F(3,0)$ ودليلة الخط المستقيم $L: y=\frac{5}{2}$ واختلافه المركزي $e=\frac{2}{3}$.

٢) بنقل نقطة الأصل إلي نقطة مناسبة استنتج الصفات الهندسية للقطاعات الناقصة الآتية :

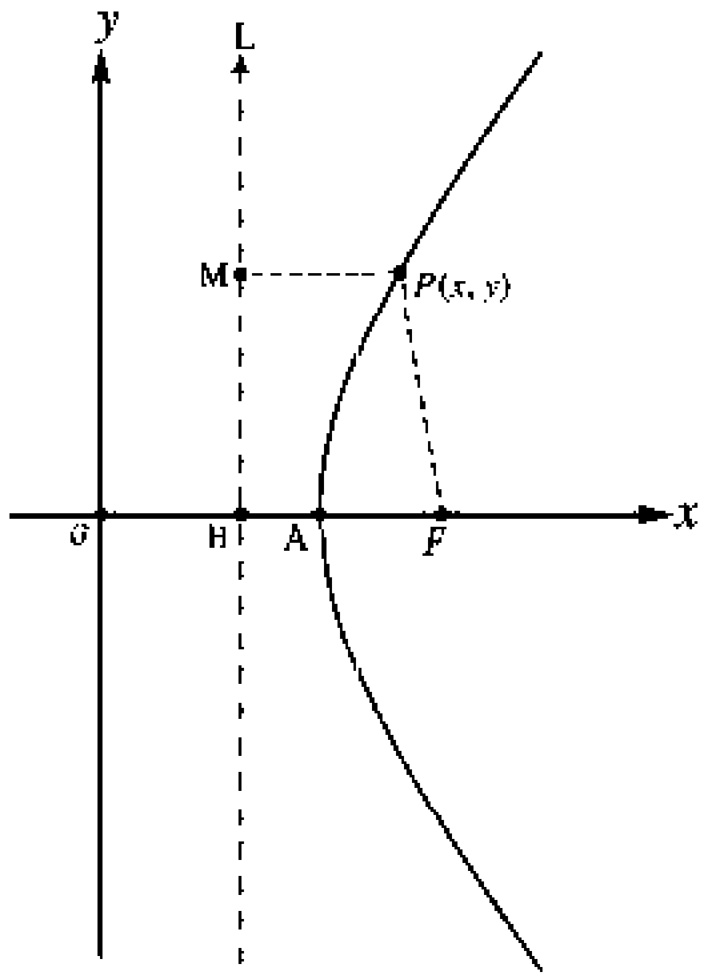
- ❖ $9x^2+16y^2-18x-96y+9=0$.
- ❖ $5x^2-20x+9y^2+54y+56=0$.

٣) بالتحويل إلي الإحداثيات الكارتيزية استنتج الصفات الهندسية للقطع الناقص الذي معادلته القطبية $r=\frac{6}{2-\sin\theta}$.

٤) أوجد الشرط اللازم لكي يكون المستقيم $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ مماسا للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

# ثالثاً: القطع الزائد

**تعريف:** القطع الزائد هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة $F$ (البؤرة) إلي بعدها عن خط مستقيم ثابت $L$ (الدليل) يساوي مقدار ثابت (الاختلاف المركزي) اكبر من الواحد الصحيح .



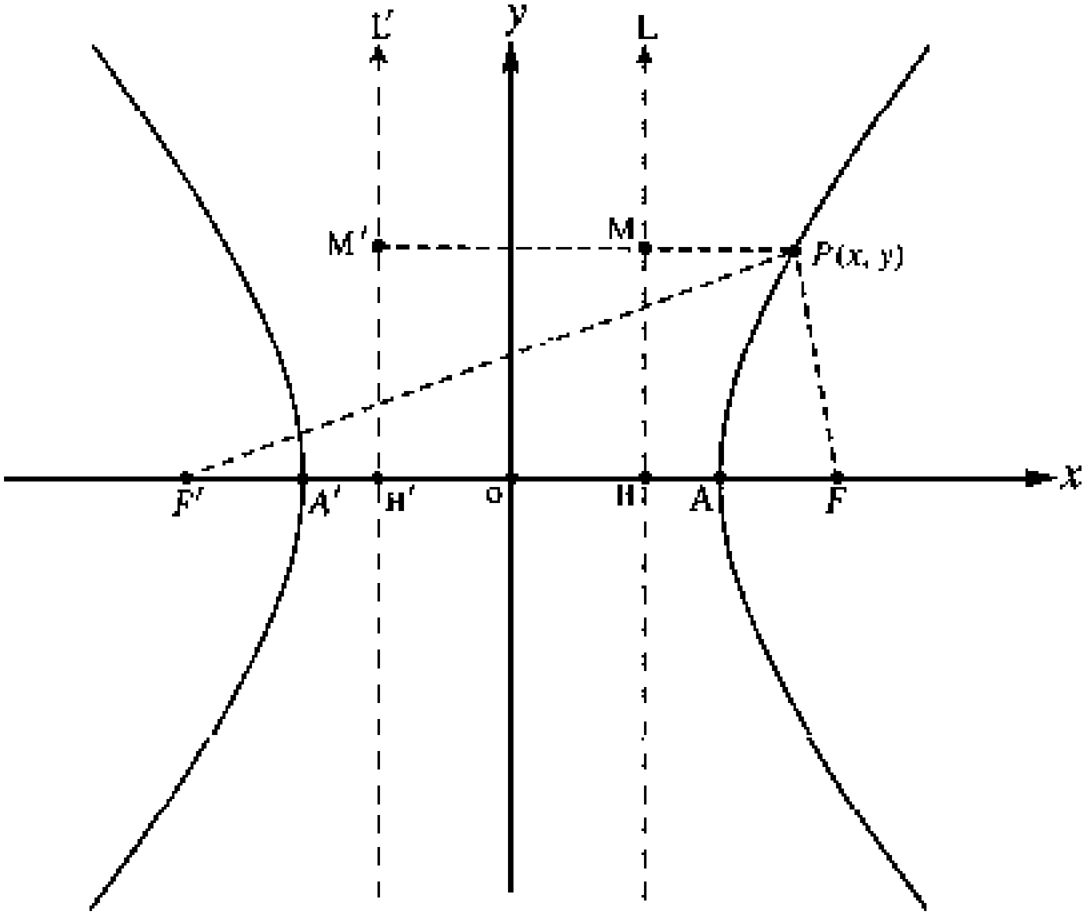

وهذا يعني أن القطع الزائد هو المنحني الناتج من حركة نقطة $P(x,y)$ بحيث يكون بعدها عن البؤرة $F$ إلي بعدها عن الدليل $L$ مرتبطاً بالعلاقة :

$$PF = ePM\,,\ e>1 \qquad (1)$$

من هذا التعريف يمكن استنتاج المعادلة القياسية للقطع الزائد كما يلي :

لإيجاد المعادلة القياسية للقطع الزائد نفرض أن البؤرة $F$ تقع علي محور $ox$ وأن الدليل $L$ يكون عمودي علي محور $ox$ والنقطة $P(x,y)$ هي النقطة التي تتحرك في المستوي بحيث تحقق العلاقة (١).

وبالتالي فإن النقطة $P(x,y)$ خلال حركتها تقطع محور $ox$ في النقطتين $A$ ، $A'$ (نقطتي التقسيم من الداخل والخارج)، كما بالشكل المقابل:




ومن تعريف القطع الزائد نجد أن: $\frac{AF}{AH}=\frac{A'F}{A'H}=e,\ e>1$ وبفرض أن المسافة بين النقطتين $A$ ، $A'$ هي مقدار ثابت $2a$ بحيث أن نقطة الأصل تقع في منتصف المسافة بينهما أي أن $OA'=OA$ وبذلك تكون إحداثيات النقطتين $A$ ، $A'$ هما $A(a,0)$ ، $A'(-a,0)$ . وبالتالي من الشكل نجد أن:

$$AF=eAH \Rightarrow OF-OA=e(OA-OH) \qquad (2)$$

$$A'F=eA'H \Rightarrow OF+OA'=e(OA'+OH) \qquad (3)$$

بجمع المعادلتين (٢)، (٣) نجد أن: $AF+A'F=(e\,OA+OA')\Rightarrow 2OF=2e\,OA \Rightarrow OF=ae$

أي أن البؤرة تبعد عن نقطة الأصل مسافة قدرها $ae$ أي أن البؤرة هي النقطة $F(ae,0)$ .

وبطرح المعادلة (٢) من المعادلة (٣) نجد أن: $2OA=e(2OH)\Rightarrow OH=\frac{a}{e}$ أي أن الدليل يبعد عن المركز مسافة قدرها $\frac{a}{e}$ ،ومعادلته تكون بالصورة $x=\frac{a}{e}$ . والبعد $PM$ هو $x-\frac{a}{e}$ .

وإذا كانت النقطة $P(x,y)$ تقع علي القطع الزائد فإن:

$$\overline{PF}=e\overline{PM}\Rightarrow\sqrt{(x-ae)^2+y^2}=e\left(x-\frac{a}{e}\right)^2$$

وبالفك والاختصار نجد أن: $x^2(e^2-1)-y^2=a^2(e^2-1)$ وحيث أن $e>1$ فإن $e^2-1$ يكون مقدار موجب دائما، وبوضع: $b^2=a^2(e^2-1)$ نحصل علي:

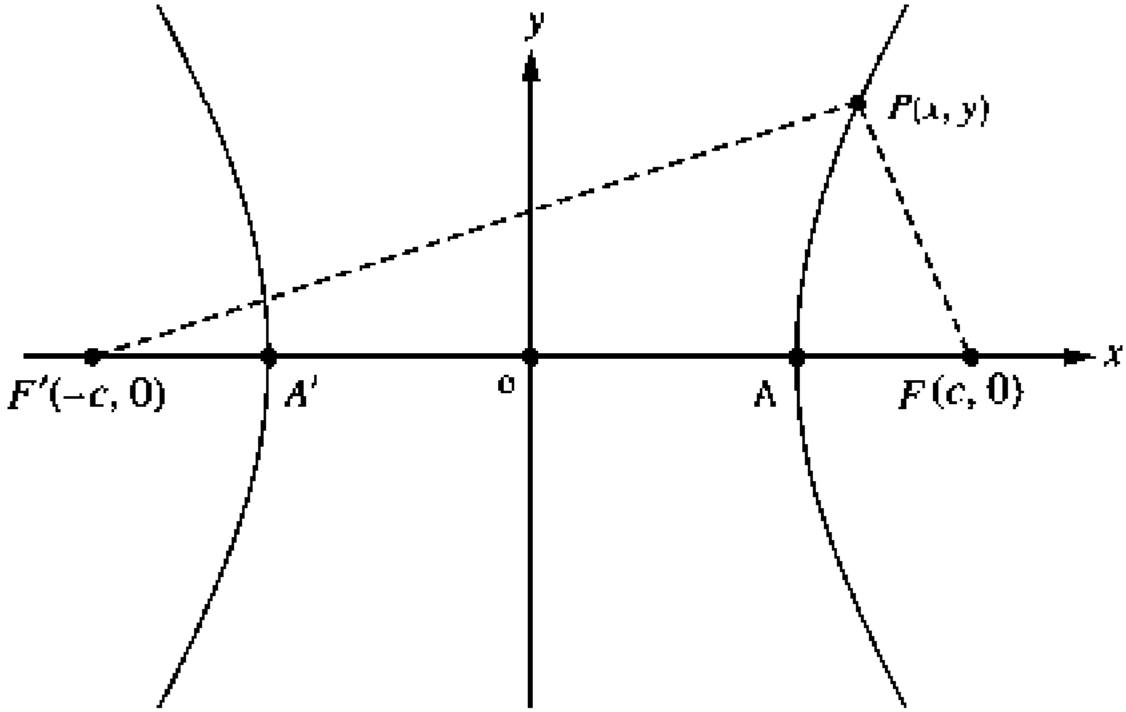
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3)$$

وذلك هي معادلة لقطع الزائد في صورتها القياسية عندما تقع بؤرته علي محور $ox$ ويكون دليلة موازيا لمحور $oy$. ومن معادلة القطع نجد أن: $x=\pm a\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}$ وهذا يعني أن القطع الناقص يكون متماثل حول محور $ox$ ويقطعه في نقطتين حقيقيتين هما $A(a,0)$ ، $A'(-a,0)$. وكذلك من معادلة القطع نجد أن: $y=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$ وهذا يعني أن القطع الزائد يكون متماثل حول محور $oy$ ولا يقطعه في أي نقطة حقيقية، وكذلك يكون القطع متماثل حول نقطة الأصل أيضاً والتي تمثل مركز القطع . ومن تماثل القطع الزائد حول محوري الإحداثيات وحول نقطة الأصل نجد أنة توجد له بؤرة أخري هي النقطة $F'(-ae,0)$ وكذلك يوجد للقطع دليل أخر هو المستقيم الذي معادلته $x=-\frac{a}{e}$.

ومن الشكل المقابل نجد أن: $\overline{PF}=e\overline{PM},\quad \overline{PF'}=e\overline{PM'}$ ومنها نجد أن:

$$\overline{PF'}-\overline{PF}=e(\overline{PM'}-\overline{PM})=e\overline{MM'}=e\overline{HH'}=e\left(\frac{2a}{e}\right)=2a$$

ومن هنا يمكن صياغة تعريف اخر للقطع الزائد كا لاتي: القطع الزائد هو الحل الهندسي لنقطة $P(x,y)$ تتحرك في المستوي بحيث يكون الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي مقدار ثابت (يساوي طول المحور التاطع للقطع الزائد).حيث أن المحور القاطع هو الخط المستقيم المار بالبؤرتين $F$ ، $F'$ وطوله يساوي $AA'=2a$. ومن هذا التعريف يمكن استنتاج معادلة القطع الزائد كما يأتي: بفرض أن النقطتين الثابتتين هما $F(c,0)$ ، $F'(-c,0)$ حيث أن $c$ هو بعد أي منهما عن نقطة الأصل. ولتكن $P(x,y)$ نقطة في المستوى تقع علي القطع الزائد ، كما بالشكل المقابل:




ومن التعريف السابق للقطع الزائد يكون: $c > a$ ، $\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a,$ ، أي أن:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

وبالاختصار كما فعلنا في استنتاج المعادلة القياسية القطع الناقص نحصل علي:

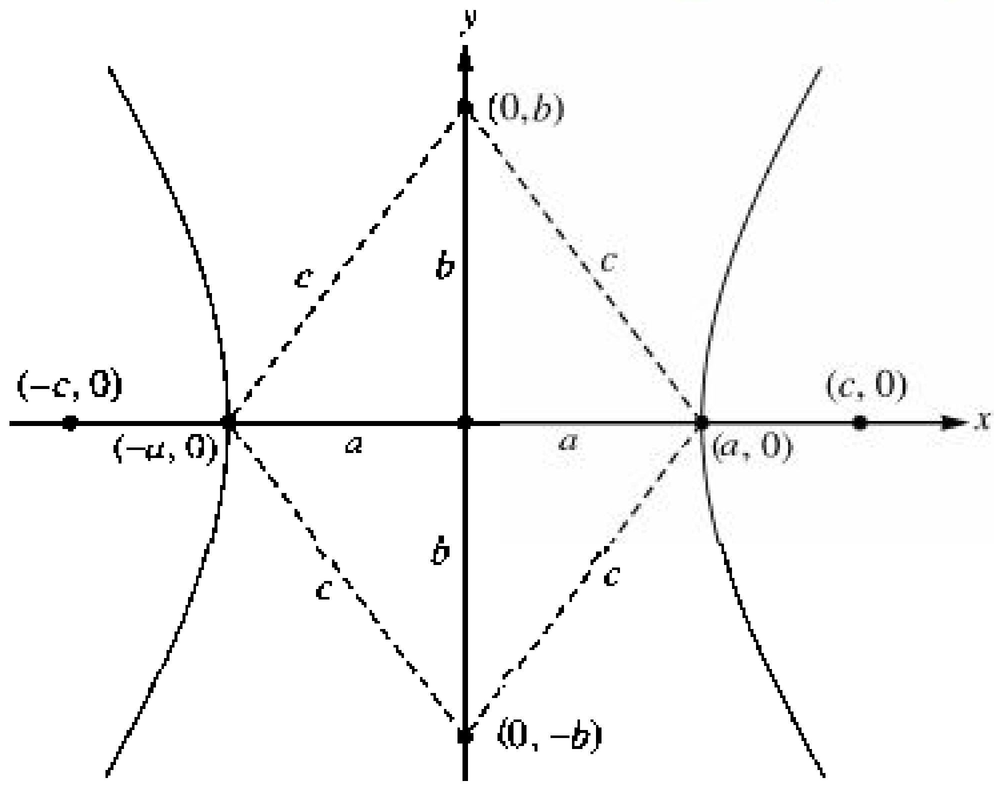
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

ونظراً لان $c > a$ فإن $c^2 - a^2 > 0$ وبوضع: $b^2 = c^2 - a^2$ (أي أن: $c^2 = a^2 + b^2$) نجد أن الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد تكون بالصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**ملاحظات:**

- النقطتين الثابتتين $F$ ، $F'$ تسمي بؤرتي القطع الزائد.
- الخط المستقيم المار ببؤرتي القطع الزائد $F$ ، $F'$ يسمي المحور القاطع القطع الزائد.
- الخط المستقيم العمودي علي المحور القاطع من منتصفة (النقطة $O$) يسمي المحور المرافق أو المحور التخيلي للقطع الزائد.
- نقطة تقاطع المحور القاطع مع المحور المرافق (النقطة $O$) تسمي مركز القطع الزائد.
- نقطتي تقاطع المحور القاطع مع منحني القطع ( النقطتين $A$ ، $A'$ ) تسمي برأسي القطع الزائد.

وبذلك تكون المعادلة التي علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هي المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، ومحوره القاطع هو محور $ox$ وطوله يساوي $2a$ ومحوره المرافق هو محور $oy$ وطوله يساوي $2b$ . وبؤرتيه هما النقطتين $(\pm c,0)=(\pm ae,0)$ حيث أن $c=\sqrt{a^2+b^2}$ ، ورأسيه هما النقطتين $(\pm a,0)$ ، كما بالشكل المقابل:

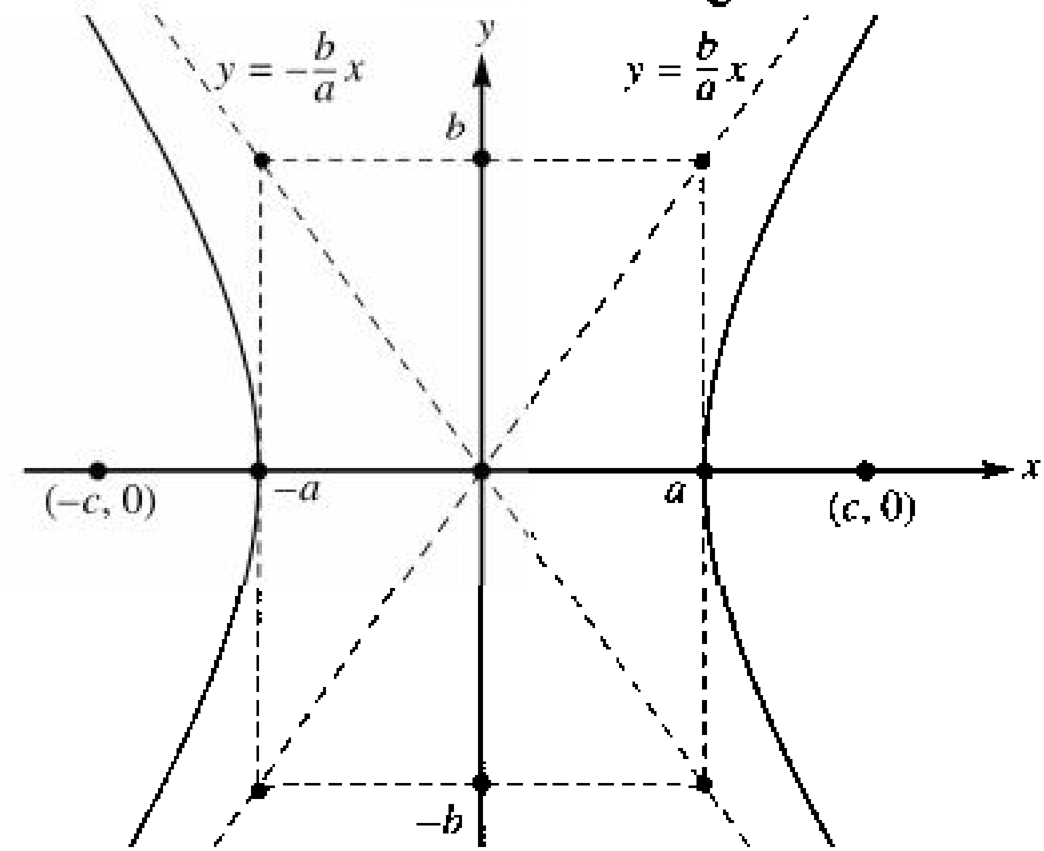



**الاختلاف المركزي للقطع الزائد:** مما سبق نلاحظ أن بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته القياسية علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هما النقطتين $(\pm c,0)=(\pm ae,0)$ حيث أن $c=\sqrt{a^2+b^2}$ ، وبالتالي فإن الاختلاف المركزي للقطع الزائد يتعين من العلاقة : $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}>1$ وبالتالي نجد أن معادلتي الدليلين لهذا القطع هما: $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$ .

**الخطان التقاربيان للقطع الزائد:** الخطان التقاربيان للقطع الزائد هما خطان مستقيمان يمسان القطع في نقطة عند اللانهاية، ويمكن الحصول معادلتيهما من المعادلة القياسية للقطع وذلك بأن نجعل قيمة $x$ تزيد إلي ما لانهاية. من المعادلة القياسية للقطع الزائد نستنتج أن:

$$y=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)}=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)}$$

وعندما $x\to\infty$ فإن المقدار $\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\to 1$ وتصبح معادلة الخطان التقاربيان بالصورة: $y=\pm\frac{b}{a}x$ وهما خطين مستقيمين يمران بمركز القطع، كما بالشكل المقابل:

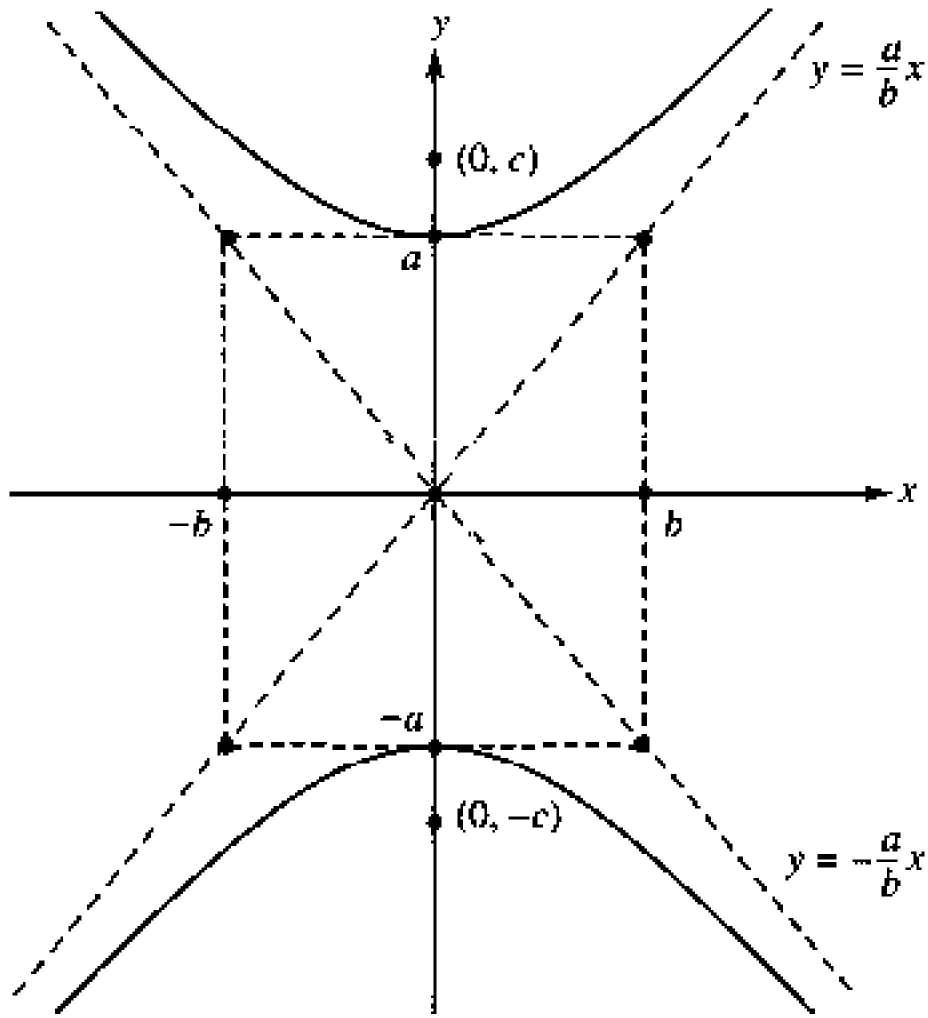



والمعادلة المشتركة للخطان التقاربيان هي:

$$\left(y-\frac{b}{a}x\right)\left(y+\frac{b}{a}x\right)=0\Rightarrow y^2-\frac{b^2}{a^2}x^2=0\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

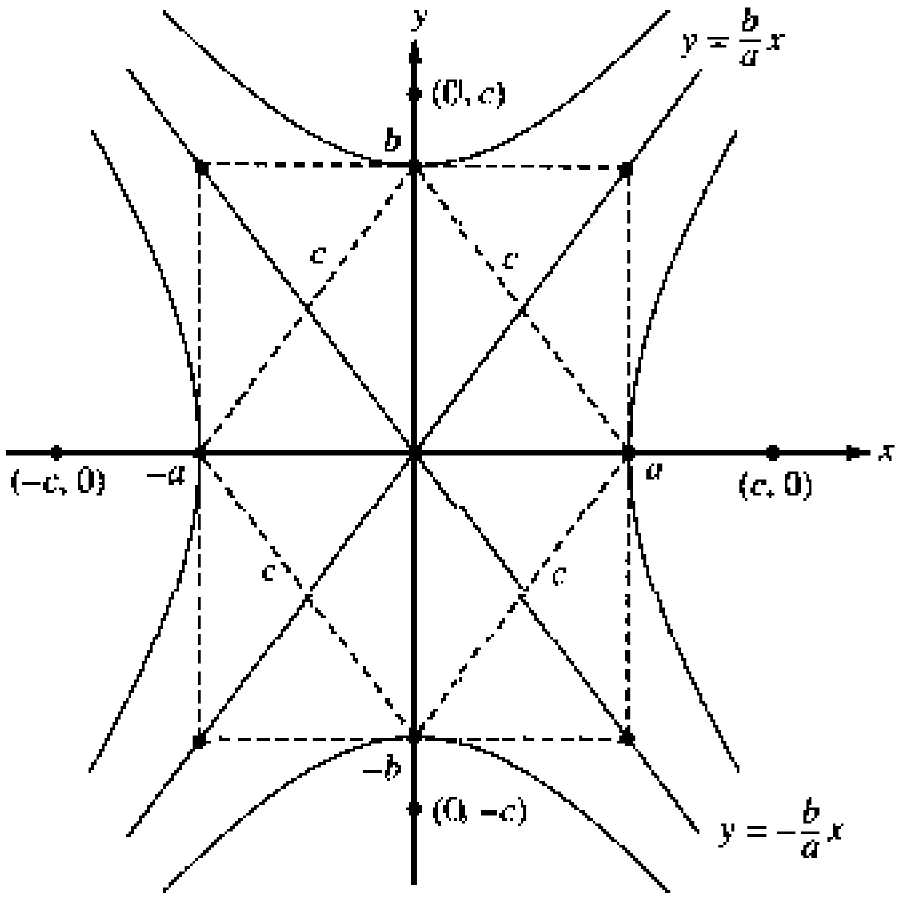
أي أن المعادلة التي علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ هي المعادلة المشتركة للخطان التقاربيان للقطع الزائد الذي معادلته علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ، وهي تختلف عن معادلة القطع في الحد المطلق فقط وهذا يعني أن معادلتي الخطين التقاربيان للقطع الزائد تنتجان مباشرة من المعادلة القياسية بجعل الحد المطلق مساوياً للصفر أي أن: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\Rightarrow\frac{x}{a}=\pm\frac{y}{b}\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x$ ويعتبر الخطان التقاربيان عناصر مساعدة لسرعة رسم القطع الزائد بدقة.

**القطع الزائد الذي محوره القاطع هو محور $oy$ :** إذا كانت بؤرتي القطع الزائد هما النقطتين $(0,c)$ ، $(0,-c)$ فإن المعادلة القياسية للقطع تأخذ الصورة: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ وفي هذه الحالة يكون المحور القاطع هو محور $oy$ ومحوره المرافق هو محور $ox$ وتكون رأسي القطع هما النقطتين $(0,a),(0,-a)$ ، والمعادلة المشتركة لخطاه التقاربيان تكون علي الصورة : $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=0$ ، أي أن خطاه التقاربيان هما: $y=\pm\frac{a}{b}x$ ، كما بالشكل المقابل:

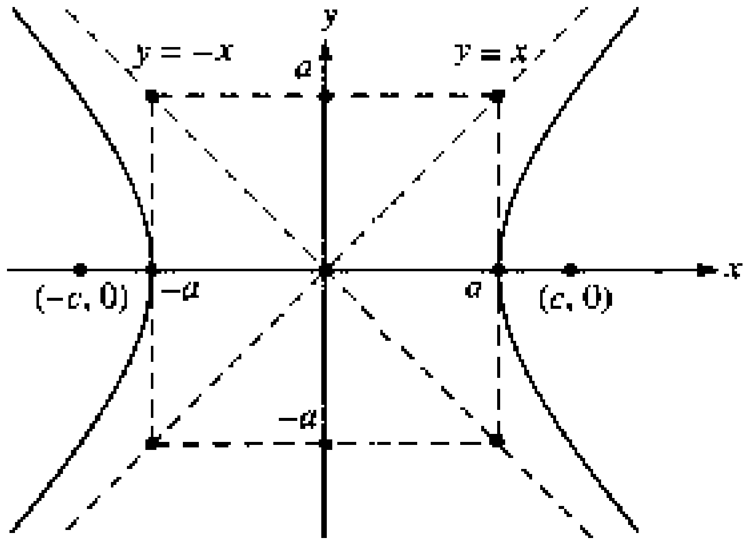



وهنا القطع يمكن إعادة كتابة معادلته علي الصورة: $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1$ وبذلك تكون الصورة العامة المعادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وتقع بؤرتاه علي احدي محوري الإحداثيات هي: $Ax^2-By^2=\pm1$ ونأخذ الإشارة الموجبة إذا وقعت البؤرتان علي محور $ox$ ونأخذ الإشارة السالبة إذا وقعت البؤرتان علي محور $oy$ .

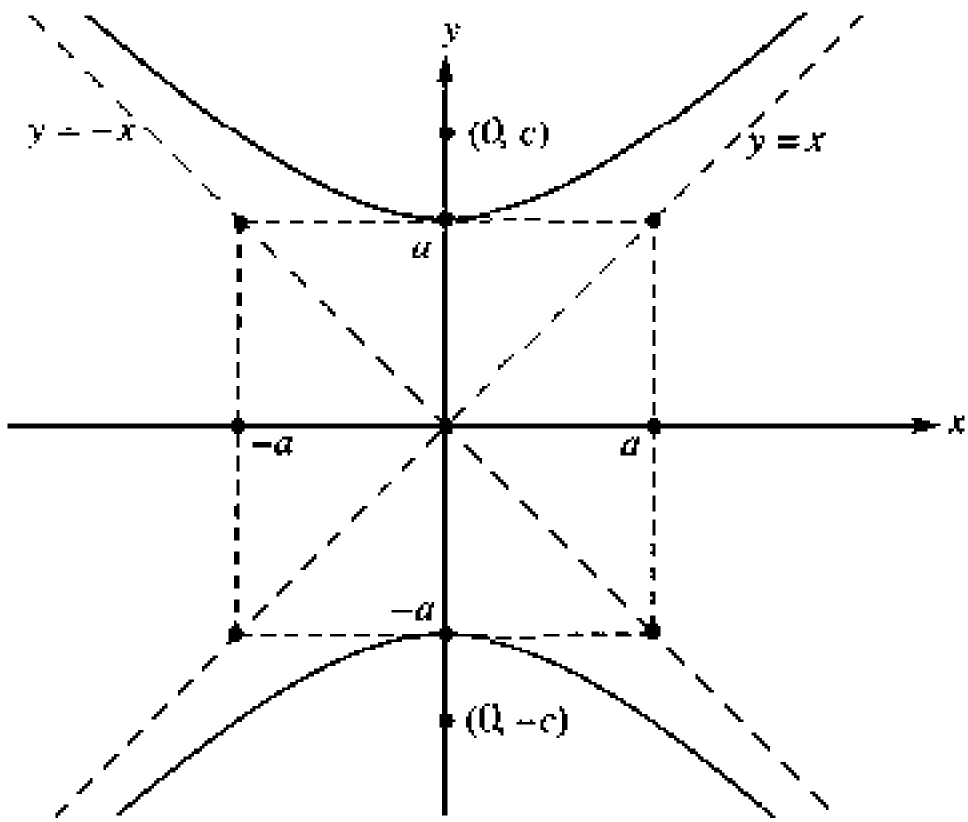
**القطع الزائد المرافق:** القطع الزائد المرافق للقطع $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هو القطع الزائد الذي له نفس المركز ومحوره القاطع هو المحور المرافق للقطع الأول وله نفس الخطان التقاربيان ومعادلته هي $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ ، كما بالشكل المقابل:




**القطع الزائد القائم:** عند تساوي طول المحور القاطع بطول المحور المرافق في حالة القطع الزائد الذي معادلته القياسية علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ نحصل علي: $x^2-y^2=a^2$ ويسمي القطع الزائد في هذه الحالة بالقطع الزائد القائم، والاختلاف المركزي للقطع الزائد القائم هو $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{a^2}{a^2}}=\sqrt{2}>1$. والخطان التقاربيان لهذا القطع هما $y=\pm x$ وهما خطان مستقيمان يتقاطعان علي التعامد عند مركز القطع أي عند نقطة الأصل ونلاحظ أن ميل المستقيم الأول هو 1 أي يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع محور $ox$ وبالتالي يصنع المستقيم الثاني زاوية $\frac{3\pi}{4}$ أو $-\frac{\pi}{4}$ مع محور $ox$ ، كما بالشكل المقابل:

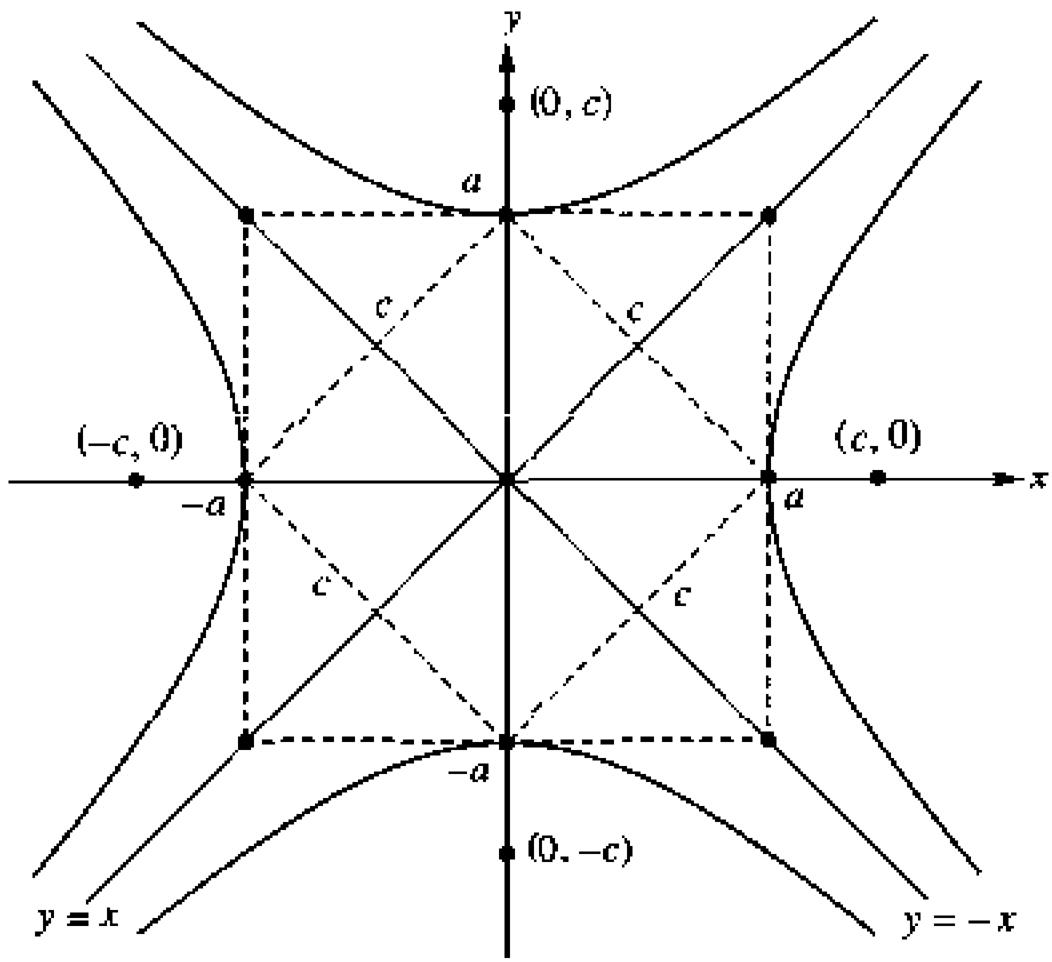



وبتدوير محاور الإحداثيات زاوية $\theta=\frac{\pi}{4}$ نحصل علي العلاقات الآتية : $x=\frac{X-Y}{\sqrt{2}}, y=\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ وبالتعويض من هاتين المعادلتين في المعادلة: $x^2-y^2=a^2$ نحصل علي: $XY=-a^2$ وهي صورة قياسية أخري لمعادلة القطع الزائد القائم ونلاحظ أن الخطوط لتقاربيه لهذا القطع هي محاور الإحداثيات الجديدة $X$ ، $Y$. والقطع الزائد الذي معادلته $y^2-x^2=a^2$ هو القطع الزائد المرافق للقطع الزائد القائم الذي معادلته $x^2-y^2=a^2$ ، وهو قطع زائد قائم أيضاً محوره القاطع هو محور $oy$ ، كما بالشكل المقابل:

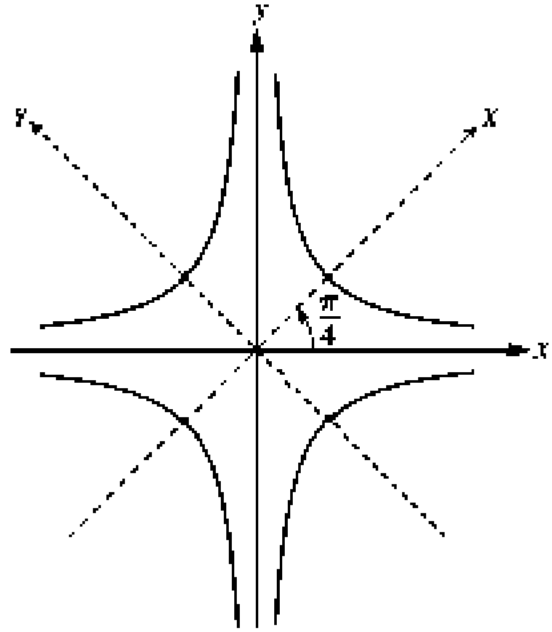


وبتدوير محاور الإحداثيات زاوية $\theta=\frac{\pi}{4}$ مع بقاء نقطة الأصل ثابتة نجد أن معادلة القطع الزائد القائم $y^2-x^2=a^2$ تتحول إلي الصورة $XY=a^2$ وهي صورة أخري للقطع الزائد القائم الذي محورة القاطع هو محور $oy$. ونلاحظ أن الخطوط لتقاربيه لهذا القطع هي محاور الإحداثيات الجديدة $X$ ، $Y$.

وبالتالي نجد أن القطع الزائد الذي معادلته (بالنسبه للمحاور الإحداثيات الجديدة $X$ ، $Y$) علي الصورة: $XY=a^2$ هو القطع الزائد المرافق للقطع الزائد الذي معادلته (بالنسبه للمحاور الإحداثيات الجديدة $X$ ، $Y$) علي الصورة: $XY=-a^2$ وكلاً منهما قطع زائد قائم، كما بالشكل المقابل:

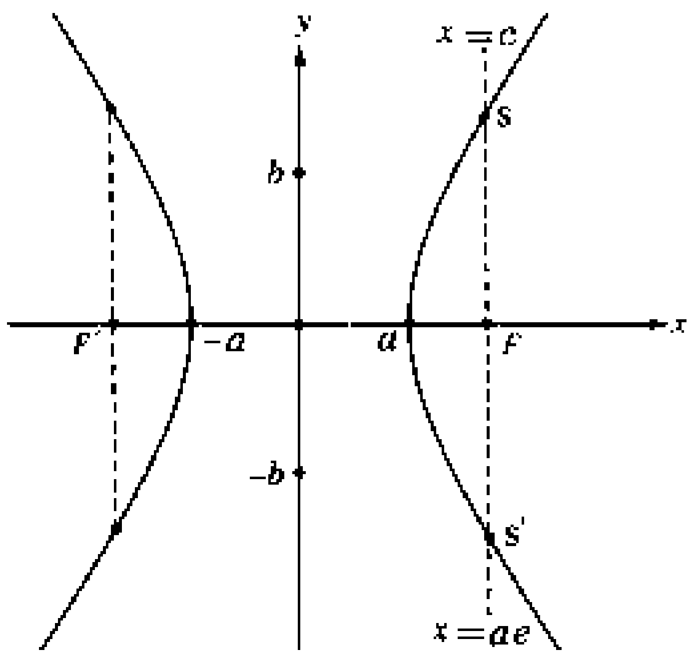



ملحوظة (١): قياسا علي ما سبق نستنتج أن المعادلة التي علي الصورة: $xy=\pm k^2$ حيث أن $k$ ثابت تمثل عائلة من القطاعات الزائدة القائمه التي خطوطها التقاربية هي محاور الإحداثيات الأصلية. ويقع أحد فرعي أي من هذه القطاعات في الربع الأول ويقع الفرع الثاني في الربع الثالث عندما نأخذ الإشارة الموجبة،ويقع أحد فرعي أي من هذه القطاعات في الربع الثاني والفرع الأخر يقع في الربع الرابع عندما نأخذ الإشارة السالبة،كما بالشكل المقابل:



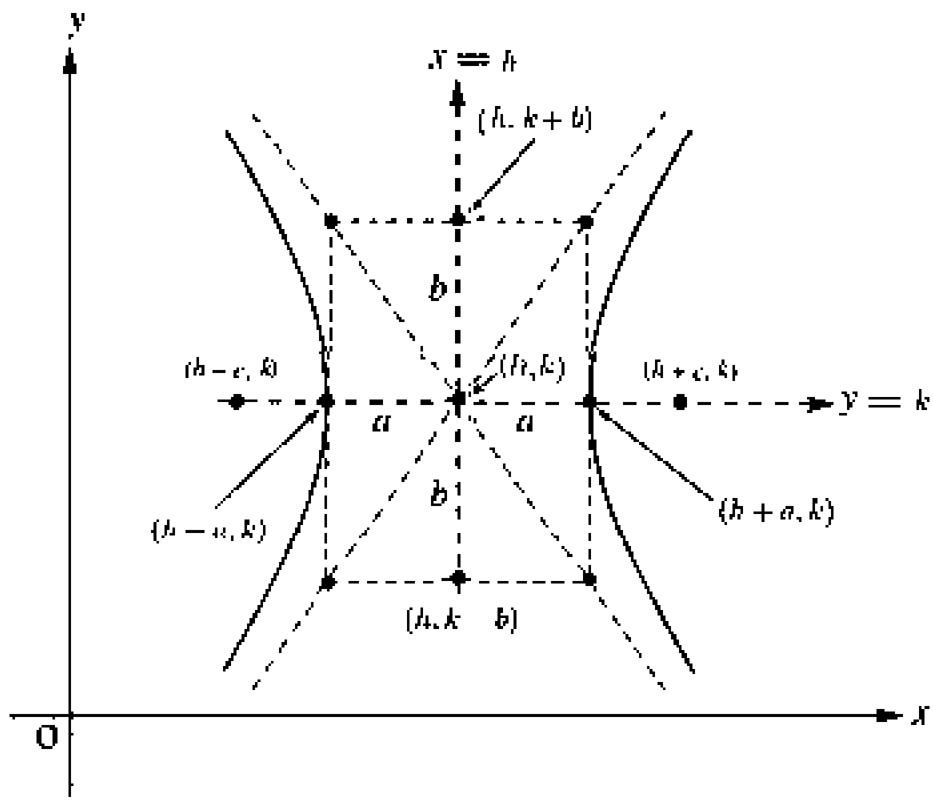

وبتدوير محاور الإحداثيات زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع بقاء نقطة الأصل ثابتة نجد أن معادلة عائلة القطاعات الزائدة القائم والتي علي الصورة $xy=\pm k^2$ تتحول إلي الصورة : $X^2-Y^2=\pm 2k^2$ وهي صورة أخري لمعادله عائلة القطاعات الزائدة القائم التي خطوطها التقاربيه هي محاور الإحداثيات الأصلية.

**الوتر البؤري العمودي للقطع الزائد:** بالتشابه مع حالة القطع الناقص يمكن إثبات بسهولة أن طول الوتر البؤري العمودي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هو $ss'=|2y|=\frac{2b^2}{a}$ ، كما بالشكل المقابل:

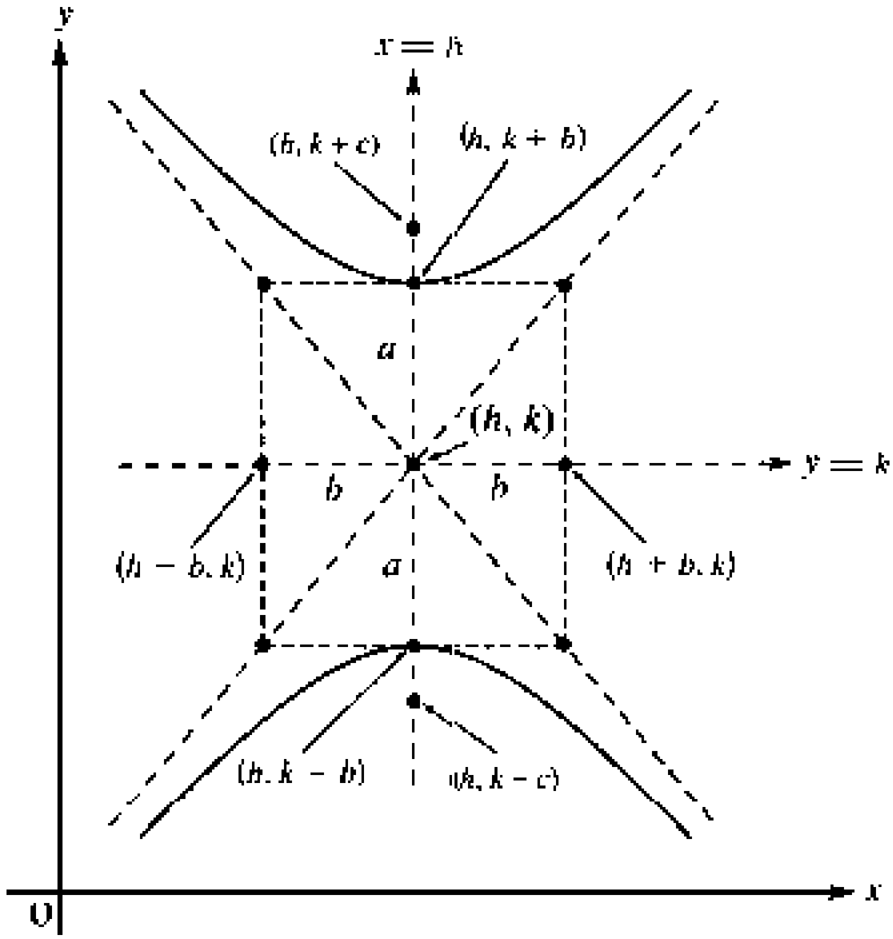


## معادلة القطع الزائد الذي محوره القاطع يوازي أحد محوري الإحداثيات

**ملحوظة (٣):** إذا كان مركز القطع هو النقطة $(h,k)$وكان محوره القاطع يوازي محور $ox$ فإن الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد تكون علي الصورة: $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ وتكون بؤرتي القطع في هذه الحالة هما النقطتين $(h+c,k)$ ، $(h-c,k)$ و رأسيه هما النقطتين $(h+a,k)$ ، $(h-a,k)$ وخطاه التقاربيان هما $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$ ، ومعادلة محوره القاطع هي $y=k$ ومعادلة محوره المرافق هي $x=k$ ، كما بالشكل المقابل:



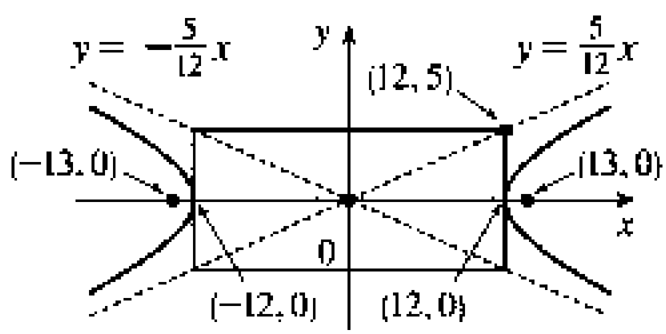

**ملحوظة (٤):** إذا كان مركز القطع هو النقطة $(h,k)$ وكان محوره القاطع يوازي محور $oy$ فإن الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد تكون علي الصورة: $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ وتكون بؤرتي القطع في هذه الحالة هما النقطتين $(h,k+c)$ ، $(h,k-c)$ ورأسيه هما النقطتين $(h,k+a)$ ، $(h,k-a)$ وخطاه التقاربيان هما $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$ ، ومعادلة محوره القاطع هي $x=h$ ومعادلة محوره المرافق هي $y=k$ ، كما بالشكل المقابل:




## أمثلة محــــــــــلولة

مثال (١): ارسم القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ ثم وأوجد إحداثيات كلاً من بؤرتيه ورأسية ومعادلتي خطاه التقاربيان.

## الحــــــــــــــل



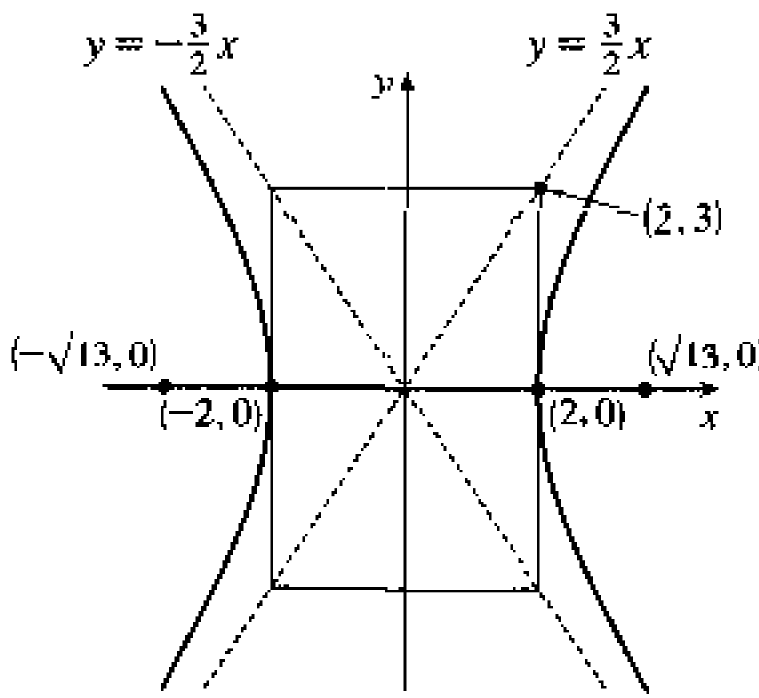

بمقارنة المعادلة المعطاة بمعادلة القطع الزائد التي علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ نحصل علي: $a=12$ ، $b=5$ ، وبالتالي نجد أن: $c=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow c=13$ وبالتالي يكون مركز القطع هو نقطة الأصل

ورأسية هما النقطتين $(\pm 12,0)$ وبؤرتيه هما النقطتين $(\pm 13,0)$ ومعادلتي الخطان التقاربيان هما : $y = \pm \frac{b}{a} = \pm \frac{5}{12} x$ ، كما بالشكل المقابل.

مثال (٢): ارسم القطع الزائد $9x^2 - 4y^2 = 36$ ثم استنتج صفاته الهندسية.

الحـــــــــــــــــــــل

معادلة القطع الزائد المعطاة يمكن إعادة كتابتها لتصبح بالصورة: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ وبالتالي تكون $b = 3, a = 2$ ومن ثم فإن: $c^2 = a^2 + b^2 = \sqrt{13}$ وبالتالي فإن مركز القطع هو نقطة الأصل وبؤرتيه هما النقطتين $(\pm\sqrt{13},0)$ ورأسيه هما النقطتين $(\pm 2,0)$ومعادلتي الخطان التقاربيان هما $y = \pm \frac{b}{a} = \pm \frac{3}{2} x$ ، كما بالشكل المقابل:

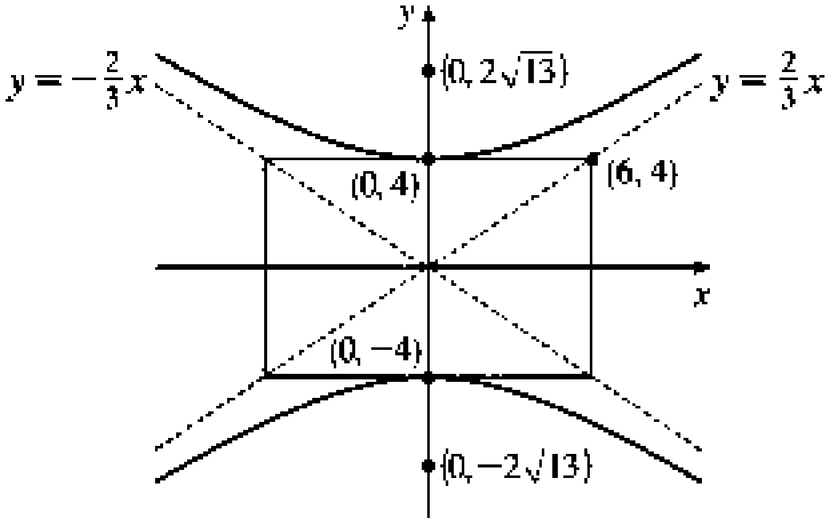



مثال (٣): ارسم القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{36} = 1$ ثم وأوجد إحداثيات كلاً من بؤرتيه ورأسية .

الحـــــــــــــــل

بمقارنة المعادلة المعطاة بمعادلة القطع الذائد التي علي الصورة: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ نحصل علي: $a = 4$ ، $b = 6$ وبالتالي نجد أن: $c = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow c = 2\sqrt{13}$ وبالتالي يكون مركز القطع هو نقطة الأصل

ورأسية هما النقطتين $(0,\pm 4)$ وبؤرتيه هما $(0,\pm 2\sqrt{13})$ ومعادلتي الخطان التقاربيان هما: $y=\pm\frac{a}{b}=\pm\frac{2}{3}x$ ، كما بالشكل المقابل:



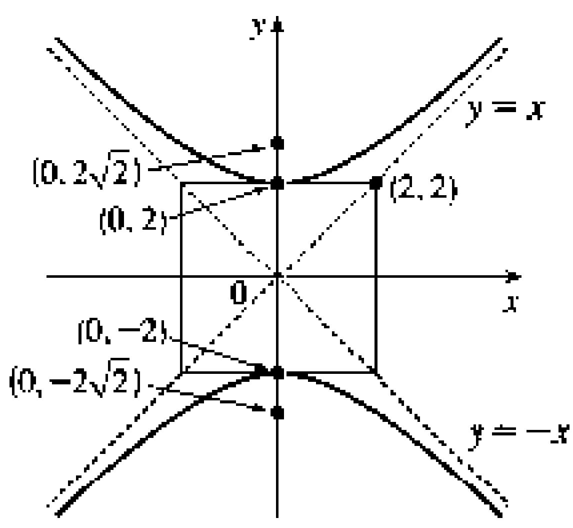

**مثال (٤): ارسم القطع الزائد $y^2-x^2=4$ ثم أوجد بؤرتيه ورأسية ومعادلتي خطاه التقاربيان.**

**الحـــــــــــــــــل**

من المعادلة المعطاة نجد أن:

$$y^2-x^2=4 \Rightarrow \frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1 \Rightarrow a=b=2$$

وبالتالي نجد أن: $c=\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow c=2\sqrt{2}$ وبالتالي فإن مركز القطع هو نقطة الأصل ورأسية هما النقطتين $(0,\pm 2)$ ، وبؤرتيه هما النقطتين $(0,\pm 2\sqrt{2})$ ومعادلتي الخطان التقاربيان هما $y=\pm x$ ، كما بالشكل المقابل:



**مثال (٥): أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتيه هما النقطتين $(\pm 5,0)$ ومركزه نقطة الأصل وطول محوره القاطع يساوي 8 وحدات.**

**الحـــــــــــــل**

من المعطيات واضح أن معادلة القطع الزائد المطلوبة يجب أن تكون علي الصورة : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ومن المعطيات نجد أن:

- ❖ طول المحور القاطع : $2a=8 \Rightarrow a=4$.
- ❖ بؤرتي القطع هما النقطتين: $(\pm c,0)=(\pm 5,0) \Rightarrow c=5$.

وبالتالي نجد أن: $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b^2=c^2-a^2 \Rightarrow b^2=25-16=9$ وبالتالي فإن معادلة القطع الزائد المطلوبة تصبح علي الصورة: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ .

**مثال (٦): أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأسيه هما $(\pm 2,0)$ وبؤرتيه هما $(\pm 3,0)$.**

**الحـــــــــــــل**

من المعطيات نلاحظ أن رأسي القطع تقع علي محور $ox$ وبالتالي فإن معادلة القطع الزائد المطلوبة يجب أن تكون علي الصورة :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

من المعطيات نجد أن:

- ❖ الرأسين هما النقطتين: $(\pm a,0)=(\pm 2,0) \Rightarrow a=2 \Rightarrow a^2=4 \qquad (2)$
- ❖ البؤرتين هما النقطتين: $(\pm c,0)=(\pm 3,0) \Rightarrow c=3$

وبالتالي نجد أن:

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2} \Rightarrow b=\sqrt{9-4}=\sqrt{5} \qquad (3)$$

وبالتعويض من (٢)، (٣) في (١) نجد أن معادلة القطع الزائد المطلوب تكون بالصورة: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

ملحوظة: في المثال السابق يمكن تعين قيمه $b$ بطريقه أخري كالأتي: حيث أن بؤرتي القطع هما النقطتين $(\pm ae,0)=(\pm 3,0) \Rightarrow ae=3$ وحيث أن $a=2 \Rightarrow 2e=3 \Rightarrow e=\frac{3}{2}$ وحيث أن الاختلاف المركزي للقطع الزائد يعين من العلاقة $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$ فإن:

$$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow \frac{3}{2}=\sqrt{1+\frac{b^2}{4}} \Rightarrow \frac{9}{4}=1+\frac{b^2}{4} \Rightarrow b^2=5$$

مثال (٧): أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأسيه $(0,\pm 3)$ وخطاه التقاربيان هما $y=\pm x$.

الحـــــــــــــــل

من المعطيات نلاحظ أن رأسي القطع تقع علي محور $oy$ وبالتالي فإن معادلة القطع الزائد المطلوبة يجب أن تكون علي الصورة:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

ومن المعطيات نجد أن:

- الرأسين هما النقطتين: $(0,\pm a)=(0,\pm 3) \Rightarrow a=3 \Rightarrow a^2=9$
- الخطان لتقاربيان هما: $y=\pm\frac{a}{b}x=\pm x \Rightarrow \frac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b=3$

وبالتالي فإن المعادلة المطلوبة تصبح بالصورة: $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{9}=1 \Rightarrow y^2-x^2=9$ وهي تمثل معادلة قطع زائد قائم محورة القاطع هو محور $oy$.

مثال (٨): أرسم القطع الزائد $16x^2+64x--9y^2-90y=305$ ثم أوجد إحداثيات كلاً من الرأسين والبؤرتين ومعادلتي الخطان التقاربيان.

الحـــــــــــــــل

المعادلة المعطاة يمكن كتابتها علي الصورة:

$$16x^2+64x-9y^2-90y=305 \Rightarrow$$

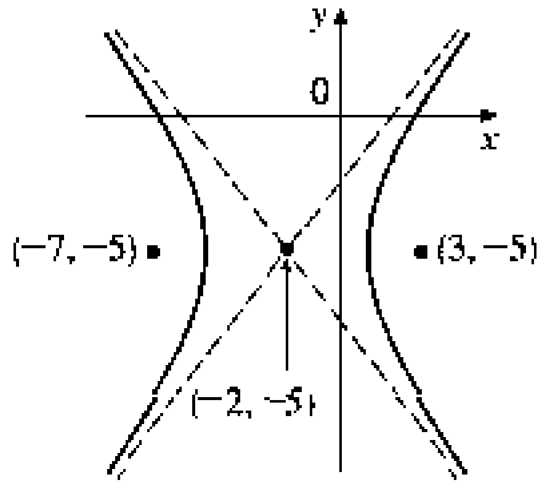
$$16(x^2+4x+4)-9(y^2+10y+25)=305+64-225 \Rightarrow$$

$$16(x+2)^2-9(y+5)^2=144 \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y+5)^2}{16}=1$$

وبنقل نقطة الأصل إلي النقطة $(-2,-5)$ نجد أن $X = x+2,\ Y = y+5$ وبالتالي فإن معادلة القطع تصبح بالصورة:

$$\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{16} = 1 .$$

وبالتالي نجد أن $c=5, b=4, a=3$ وبالتالي يكون مركز القطع هو النقطة $(-2,-5)$ ورأسي القطع هما النقطتين $(1,-5)$ ، $(-5,-5)$ ، وبؤرتي القطع هما النقطتين $(-7,-5)$ ، $(3,-5)$ ، ومعادلتي الخطان التقاربيان هما $y+5 = \pm\frac{4}{3}(x+2)$ ، كما بالشكل المقابل:




مثال (١٠): أرسم القطع الزائد $9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$ ثم أوجد إحداثيات كلاً من الرأسين والبؤرتين ومعادلتي الخطان التقاربيان.

## الحـــــــــــــــل

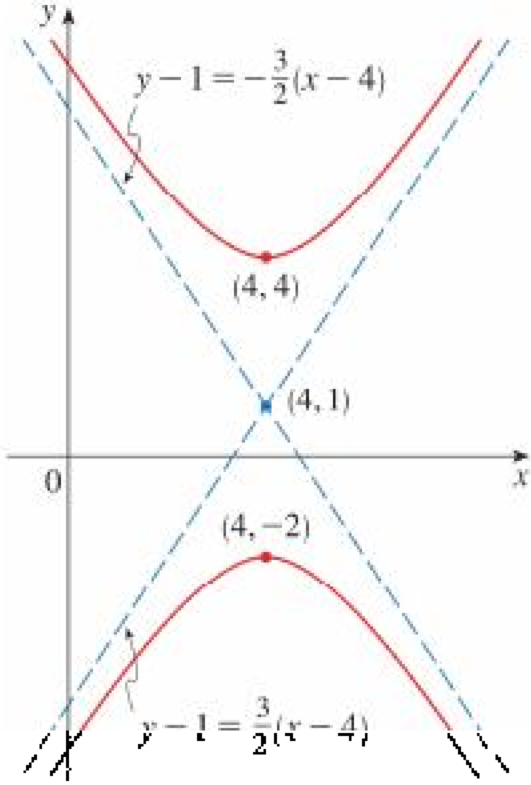
بإكمال المربع لحدود كل من $x$ ، $y$ ينتج أن: $4(y-1)^2 - 9(x-4)^2 = 36$ ومنها نجد أن معادلة القطع تصبح بالصورة :

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{4} = 1$$

وبنقل نقطة الأصل إلي النقطة $(4,1)$ نجد أن: $X = x-4,\ Y = y-1$ وبالتالي فإن معادلة القطع يمكن كتابتها علي الصورة :

$$\frac{Y^2}{9} - \frac{X^2}{4} = 1$$

وبالتالي فإن $a^2=9$ ، $b^2=4$ ، $c^2=13$ وبالتالي تكون بؤرتي القطع هما $(4,1\pm\sqrt{13})$ ،ورأسيه هما النقطتين $(4,4)$ ، $(4,-2)$ ومعادلتي الخطان التقاربيان هما : $y-1=\pm\frac{3}{2}(x-4)$ ، كما بالشكل المقابل:




## معادلة المماس والعمودي للقطع الزائد

كما في حالة القطع الناقص يمكن استنتاج أن معادلة المماس للقطع الزائد الذي معادلته علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ عند النقطة $(x_1,y_1)$ الواقعة علية تكون بالصورة:

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1 \text{ ،}$$

ومعادلة العمودي لهذا القطع عند النقطة $(x_1,y_1)$ الواقعة علية تكون بالصورة:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{a^2}{b^2}\frac{x_1}{y_1}$$

## المعادلات البارامترية للقطع الزائد

المعادلتان البارامتريتان للقطع الزائد الذي معادلته بالصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هما: $x=a\sec\varphi$ ، $y=b\tan\varphi$ ،لانة بحذف البارامتر $\varphi$ بين المعادلتين ينتج أن: $\sec\varphi=\frac{x}{a},\ \tan\varphi=\frac{y}{b}$ أي أن:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\sec^2\varphi-\tan^2\varphi=1$ . وكذلك يمكن تمثيل القطع الزائد بارا مترياً بالمعادلتين: $x=a\cosh\varphi,\quad y=b\sinh\varphi$ ، أما المعادلات البارامترية للقطع الزائد القائم $xy=c^2$ هي: $x=ct$ ، $y=\frac{c}{t}$ ومعادلة المماس للقطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^3}=1$ عند النقطة $(a\sec\varphi, b\tan\varphi)$ الواقعة علية تكون بالصورة:

$$\frac{x\sec\varphi}{a}-\frac{y\tan\varphi}{b}=1 .$$

## شرط تماس خط مستقيم لقطع زائد

بالتشابه مع حالة القطع الناقص نجد أن الشرط اللازم لكي يكون الخط المستقيم $y=mx+c$ مماسا للقطع الزائد الذي معادلته علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هو أن يكون $c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ ومعادلة المماس هي: $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ وإحداثيات نقط التماس هي:

$$\left(\frac{-a^2m}{\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}},\frac{-b^2}{\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right).$$

# تمارين (٩-٣)

١) أوجد معادلة القطع الذي بؤرته النقطة $(3,-5)$ ودليله الخط المستقيم الذي معادلته $x=-\frac{1}{5}$ واختلافه المركزي $e=\frac{5}{3}$. ثم استنتج صفاته الهندسية

٢) ارسم كلاً من القطاعات الزائده الاتية موضحا الصفات الهندسية :

❖ $\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{1}=1$.

❖ $\frac{(y-3)^2}{4}-\frac{(x+2)^2}{9}=1$.

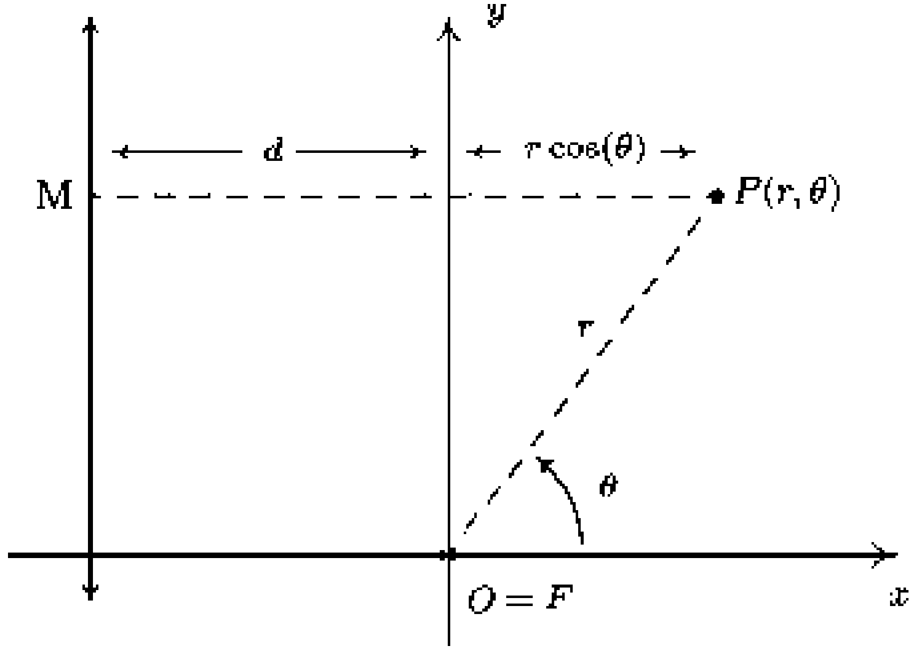
٣) بنقل محاور الإحداثيات إلي نقطة مناسبة استنتج ابسط صورة ممكنة للمعادلة المشتركة التي تمثل الخطان التقاربيان للقطع الزائد $x^2-4y^2-4x-8y-4=0$ .

٤) أوجد معادلة القطع الزائد الذي اختلافه المركزي $e=3$ ومركزه نقطة الأصل وبؤرتيه تقع علي محور $ox$ ويمر بالنقطة $(2,4)$ .

٥) أوجد معادلة المماس والعمودي عند نهايتي الوتر البؤري العمودي للقطع الزائد $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

# رابعاً: المعادلة القطبية للقطاعات المخروطية

الهدف الآن هو اشتقاق المعادلة القطبية للقطاعات المخروطية وذلك بدلالة البؤرة والدليل. وبفرض أن البؤرة عند قطب الإحداثيات القطبية والدليل عمودي علي الخط القطبي (أو موازيا للخط القطبي). إذا كان الدليل موازيا للخط القطبي فأن موقع الدليل قد يكون أسفل أو علي من القطب أما إذا كان الدليل عمودي علي الخط القطبي فإن موقع الدليل قد يكون علي يمين أو علي يسار القطب وبالتالي توجد أربعة حالات مختلفة يمكن أخذها في الاعتبار. وهنا سوف نشتق معادلة القطع المخروطي للحالة التي يكون فيها الدليل عموديا علي الخط القطبي ويقع علي يسار القطب، كما بالشكل المقابل:




إذا كانت $P(r,\theta)$ هي نقطة علي القطع المخروطي الذي اختلافه المركزي يساوي $e$ فأنه يكون:

$$PF = ePM \qquad (1)$$

ومن الشكل المقابل نجد أن:

$$PF = r,\ \ PM = d + r\cos\theta$$

وبالتالي فإن المعادلة (١) يمكن كتابتها بالصورة:

$$r = e(d + r\cos\theta)$$

ومنها نجد أن:

$$r=\frac{ed}{1-e\cos\theta}$$

وهذه المعادلة هي المعادلة العامة للقطاعات المخروطية في الإحداثيات القطبية ويختلف نوع القطع المخروطي الذي تمثله هذه المعادلة تبعاً لقيمه الاختلاف المركزي $e$ أي أن هذه المعادلة تمثل:

١) قطع مكافئ عندما يكون $e=1$.

٢) قطع ناقص عندما يكون $e<1$.

٣) قطع زائد عندما يكون $e>1$.

وذلك علي النقيض من حالة الإحداثيات الكارتيزية والتي يكون فيها لكل قطع مخروطي معادلة تختلف عن بقية القطاعات المخروطية الأخرى.والحالات الثلاثة الأخري للمعادلة القطبية للقطاعات المخروطية والتي تعتمد علي وضع الدليل بالنسبة القطب (البؤرة) والخط القطبي يمكن اشتقاقها بطريقة مشابهه. والمعادلات التي تمثل القطاعات المخروطية في هذه الحالات الأربعة تكون كما في النظرية التالية :

نظريه: في الإحداثيات القطبية القطع المخروطي الذي اختلافه المركزي $e$ وبؤرته تنطبق علي القطب ودليلة يبعد مسافة قدرها $d$ عن البؤرة بحيث يكون عموديا علي الخط القطبي (أو موازيا للخط القطبي) فإن معادلته تكون علي الصورة:

- $r=\dfrac{ed}{1+e\cos\theta}$ عندما يكون الدليل عمودي علي الخط القطبي و علي يمين القطب.
- $r=\dfrac{ed}{1-e\cos\theta}$ عندما يكون الدليل عمودي علي الخط القطبي و علي يسار القطب.
- $r=\dfrac{ed}{1+e\sin\theta}$ عندما يكون الدليل موازيا للخط القطبي و اعلي القطب.
- $r=\dfrac{ed}{1-e\sin\theta}$ عندما يكون الدليل موازيا للخط القطبي و أسفل القطب.

وهذا يعني أن المعادلتين $r=\dfrac{ed}{1\pm e\cos\theta}$ هي معادلات قطبية للقطاعات المخروطية عندما يكون الدليل عموديا علي الخط القطبي أي عندما يكون الدليل موازيا لمحور $oy$ (والخط القطبي ينطبق علي محور $ox$). وبالمثل تكون المعادلتين $r=\dfrac{ed}{1\pm e\sin\theta}$ هي معادلات قطبية للقطاعات المخروطية عندما يكون

الدليل موازيا للخط القطبي أي عندما يكون الدليل موازيا لمحور $ox$ (الخط القطبي ينطبق علي محور $ox$).

ملحوظة: في أي من القطاعات المخروطية ( المكافئ والناقص والزائد) يمكن إثبات بسهولة أن البعد بين البؤرة والدليل والاختلاف المركزي يرتبطان بالعلاقة $d=\frac{\lambda}{e}$ حيث أن $\lambda$ هي نصف طول الوتر البوري العمودي للقطع المخروطي، $d$ هي البعد بين البؤرة والدليل، $e$ هو الاختلاف المركزي، أي أن $\lambda=e\,d$ وبالتالي نلاحظ أن:

- ❖ للقطع المكافئ يكون $ed=2a$.
- ❖ للقطع الناقص والزائد يكون $ed=\frac{b^2}{a}$.

المعادلة القطبية للقطع المكافئ: في حالة القطع الكافئ نلاحظ أن الاختلاف المركزي $e=1$ وبعد البؤرة عن الدليل يساوي $d=2a$ وبالتالي فأن المعادلة القطبية للقطع المكافئ تكون:

- ❖ $r=\frac{2a}{1\pm\cos\theta}$ عندما يكون الدليل عمودي علي الخط القطبي.
- ❖ $r=\frac{2a}{1\pm\sin\theta}$ عندما يكون الدليل موازيا للخط القطبي.

المعادلة القطبية للقطع الناقص: في حالة القطع الناقص نلاحظ أن الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}<1$ ونصف طول الوتر البؤري العمودي يساوي $ed=\frac{b^2}{a}$ وبالتالي فأن المعادلة القطبية للقطع الناقص تكون بالصورة:

- ❖ $r=\frac{b^2}{a(1\pm e\cos\theta)}$ عندما يكون الدليل عمودي علي الخط القطبي.
- ❖ $r=\frac{b^2}{a(1\pm e\sin\theta)}$ عندما يكون الدليل موازيا للخط القطبي.

المعادلة القطبية للقطع الزائد : في حالة القطع الزائد نلاحظ أن الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}>1$ ونصف طول الوتر البؤري العمودي يساوي $ed=\frac{b^2}{a}$ وبالتالي فأن المعادلة القطبية للقطع الزائد تكون:

- ❖ $r=\frac{b^2}{a(1\pm e\cos\theta)}$ عندما يكون الدليل عمودي علي الخط القطبي.

❖ $r=\dfrac{b^2}{a(1\pm e\sin\theta)}$ عندما يكون الدليل موازيا للخط القطبي.

مع ملاحظة أنة في هذه الحالة تكون أي من المعادلتين السابقتين تمثل قطع زائد واحد وهذا يعني أنه عندما نأخذ المعادلة بالإشارة الموجبة نحصل علي فرع من فروع القطع الدائد وعندما نأخذ بالإشارة السالبة نحصل علي الفرع الأخر وذلك علي خلاف حالتي القطع المكافئ والناقص حيث أن الإشارة تعين قطع يختلف عن الآخر.

## أمثلة محـــــــــــلولة

مثال(١): بين نوع القطع الذي تمثله المعادلة $r=\dfrac{144}{13-5\sin\theta}$ ثم أوجد معادلته في الصورة القياسية.

الحـــــــــــــــل

المعادلة المعطاة يمكن كتابتها علي الصورة

$$r=\frac{\frac{144}{13}}{1-\frac{5}{13}\sin\theta}$$

وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة القطبية والتي علي الصورة:

$$r=\frac{b^2}{a(1-e\sin\theta)}=\frac{\frac{b^2}{a}}{1-e\sin\theta}$$

نحصل علي:

$$\frac{b^2}{a}=\frac{144}{13};\quad e=\frac{5}{13}$$

وحيث أن $e=\frac{5}{13}<1$ فأن المعادلة المعطاة تمثل قطع ناقص.

وبالتالي نجد أن:

$$b^2=\frac{144}{13}a=a^2(1-e^2)\Rightarrow a=13, b=12$$

وبالتالي تكون المعادلة القياسية لهذا القطع هي

$$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1.$$

مثال(٢): أوجد المعادلة القطبية للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ .

الحــــــــــــــل

المعادلة المعطاة تمثل قطع زائد محورة القاطع هو محور $ox$ وبالتالي يمكن اعتبار بؤرته اليسري قطب والاتجاه الموجب لمحور $ox$ هو الخط القطبي وبالتالي فأن المعادلة القطبية لهذا القطع يجب أن تكون علي الصورة :

$$r=\frac{b^2}{a(1\pm e\cos\theta)}$$

ومن المعادلة المعطاة نجد أن: $a^2=16\Rightarrow a=4,\ \ b^2=9\Rightarrow b=3,$ وبالتالي نجد أن

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=5,\ e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$$

وبالتالي تكون معادلة القطع في الصورة القطبية هي: $r=\frac{9}{4\pm5\cos\theta}$ وهذا يعني أن المعادلة القطبية للفرع الأيمن للقطع هي $r=\frac{9}{4-5\cos\theta}$ ومعادلة الفرع الأيسر للقطع هي $r=\frac{9}{4+5\cos\theta}$.

مثال(٣): بين نوع القطع الذي تمثله المعادلة $r=\frac{8}{4+5\sin\theta}$ ثم أوجد اختلافه المركزي ومعادلته دليلة .

الحــــــــــــــل

المعادلة المعطاة يمكن كتابتها علي الصورة:

$$r=\frac{2}{1+\frac{5}{4}\sin\theta}$$

وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة القطبية والتي علي الصورة:

$$r=\frac{b^2}{a(1+e\sin\theta)}=\frac{\frac{b^2}{a}}{1+e\sin\theta}=\frac{ed}{1+e\sin\theta}$$

نحصل علي: $ed=2,\ e=\frac{5}{4}$ وحيث أن $e=\frac{5}{4}>1$ فأن المعادلة المعطاة تمثل قطع زائد معادلة دليله هي $x=d=\frac{2}{e}=\frac{8}{5}$.

## تمرين (٩–٤)

١) بين نوع القطع المخروطي الذي تمثله كلا من المعادلات القطبية الآتية واوجد اختلافة المركزي وطول الوتر البوري العمودي ومعادلة دليلة وصورته القياسية

❖ $r=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$.

❖ $r=\dfrac{3}{2-\cos\theta}$.

❖ $r=\dfrac{4}{1+3\cos\theta}$.

❖ $r=\dfrac{3}{2+\sin\theta}$.

❖ $r=\dfrac{2}{1+\sin\theta}$.

❖ $r=\dfrac{2}{1-2\sin\theta}$.

٢) أوجد طول الوتر البؤري العمودي وإحداثيات الرأس للقطع المكافئ الذي معادلته

$r=\dfrac{12}{5-5\sin\theta}$.

٣) أوجد المعادلة القطبية للقطع الناقص الذي معادلته $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$.

# الباب العاشر

## المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين

### المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين

نفرض أن لدينا المستقيمين:

$$L_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \ldots\ldots(1), \quad L_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \ldots\ldots(2)$$

فإن حاصل ضرب المعادلتين(١) ،(٢):

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$$

يمثل المعادلة المشتركة للخطين $L_1$ ، $L_2$ وهي بوجه عام معادله من الدرجة الثانية في متغيرين $x$ ، $y$ والتي يمكن كتابتها في الحالة العامة علي الصورة:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \ldots\ldots(3)$$

وفي هذا الفصل سنبحث متي تمثل المعادلة (٣) المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين.

**مثال (١): أوجد المعادلة المشتركة التي تمثل الخطين المستقيمين الممثلين بالمعادلتين:**

$$L_1 : x - y + 1 = 0, \quad L_2 : 3x - y - 2 = 0$$

**الحـــــــــــــــــــــل**

المعادلة المشتركة للخطين المستقيمين $L_1$ ، $L_2$ تكون بالصورة:

$$L_1 \cdot L_2 = 0 \Rightarrow (x - y + 1)(3x - y - 2) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4xy + y^2 + x + y - 2 = 0$$

واضح أن المعادلة الناتجة هي معادلة من الدرجة الثانية في المتغيرين $x$ ، $y$ وهي تمثل المعادلة المشتركة للخطين المستقيمين $L_1$ ، $L_2$. والآن نبحث متي تمثل معادلة الدرجة الثانية في متغيرين المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين ؟

### معادله الدرجة الثانية المتجانسة التي تمثل خطين مستقيمين مارين بنقطه الأصل

معادلة الدرجة الثانية في متغيرين $x$ ، $y$ والتي علي الصورة: $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ تسمي بمعادلة الدرجة الثانية المتجانسة (المعادلة المتجانسة من الدرجة الثانية) وهي معادلة من الدرجة الثانية في

متغيرين $x$ ، $y$ وخالية من حدود الدرجة الأولي والحد المطلق. وهي دائما تمثل المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين مارين بنقطة الأصل وذلك بشرط أن يكون $h^2 - ab \geq 0$ . ويمكن الحصول علي معادلة الخطين الممثلين بالمعادلة المتجانسة من الدرجة الثانية كما يأتي: بقسمة طرفي المعادلة المتجانسة علي $y^2$ نجد أن: $a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2h\left(\frac{x}{y}\right) + b = 0$ ويكون جذرها هما:

$$\frac{x}{y} = \frac{\left(-2h \pm \sqrt{4h^2 - 4ab}\right)}{2a}$$

ومنها نجد أن الخطين المستقيمين هما:

$$ax + \left(-2h + \sqrt{h^2 - ab}\right)y = 0, \quad ax + \left(-2h - \sqrt{h^2 - ab}\right)y = 0$$

وكل منهما يمر بنقطه الأصل وذلك بشرط أن يكون $h^2 - ab \geq 0$ .

ملحوظة (١): المعادلة المشتركة لمعادلتي محوري الإحداثيات $ox$ ، $oy$ هي $xy = 0$ حيث أن معادلة محور $ox$ هي $y = 0$ ومعادلة محور $oy$ هي $x = 0$.

مثال (٢): أوجد معادلتي الخطين المستقيمين الممثلين بالمعادلة المتجانسة للمعادلة:

$2x^2 - 13xy - 7y^2 + x + 23y - 6 = 0$ .

الحـــــــــــــــــل

المعادلة المتجانسة لمعادله الخطين المستقيمين المعطاة هي: $2x^2 - 13xy - 7y^2 = 0$ وبتحليل هذه المعادلة نجد أن: $(2x+y)(x-7y) = 0$ أي أن معادلتي الخطين المستقيمين الممثلين بالمعادلة المتجانسة للمعادلة المعطاة هما: $L_1 : 2x + y = 0$ ، $L_1 : x - 7y = 0$ وكلاً منهما يمر بنقطه الأصل.

الزاوية المحصورة بين المستقيمين اللذين تمثلهما المعادلة المتجانسة

ليكن لدينا المعادلة المتجانسة التي علي الصورة: $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ وبقسمه طرفيها علي $b$ فإنه يمكن إعادة كتابتها علي الصورة:

$$\left(\frac{a}{b}\right)x^2 + \left(\frac{2h}{b}\right)xy + y^2 = 0$$

وبفرض انه أمكن فصل الخطين المستقيمين التي تمثلهما هذه المعادلة علي الصورة:

$$L_1 : y = m_1 x \;\;,\;\; L_2 : y = m_2 x.$$

وهما خطين مستقيمين يمران بنقطه الأصل أي أن:

$$\left(\frac{a}{b}\right)x^2 + \left(\frac{2h}{b}\right)xy + y^2 = (y - m_1 x)(y - m_2 x) = 0$$

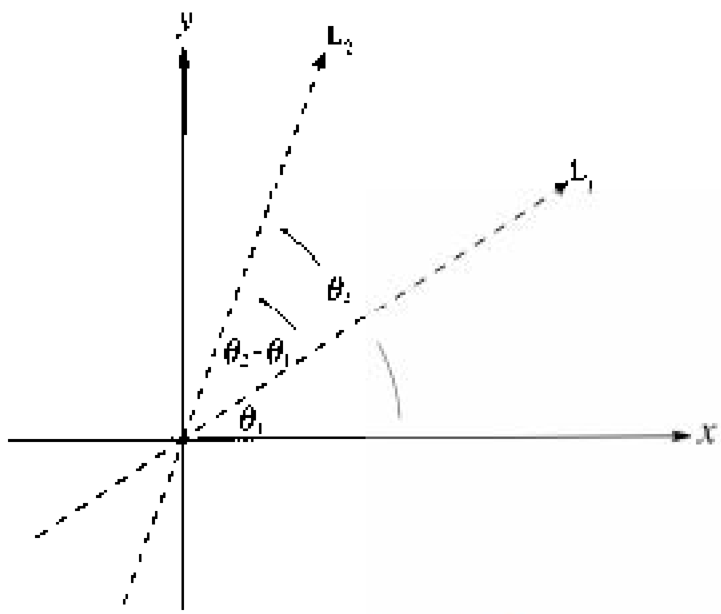
أي أن:

$$\left(\frac{a}{b}\right)x^2 + \left(\frac{2h}{b}\right)xy + y^2 = y^2 - (m_1 + m_2)xy + (m_1 m_2)x^2$$

وبمساواة معاملات $xy,\ x^2$ في الطرفين نحصل علي:

$$m_1 m_2 = \frac{a}{b}\;,\; -(m_1 + m_2) = \frac{2h}{b}.$$

وإذا كانت $\theta$ هي الزاوية بين الخطين المستقيمين (كما بالشكل المقابل) فإن:




$$\tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{\sqrt{(m_1 - m_2)^2}}{1 + m_1 m_2} = \frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2}}{1 + m_1 m_2}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\sqrt{\left(-\frac{2h}{b}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{b}\right)}}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}.$$

وبالتالي فإن الزاوية بين الخطين المستقيمين الممثلين بالمعادلة المتجانسة من الدرجة الثانية تتعين من العلاقة:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b}\right).$$

**ومن هذه العلاقة يمكننا أن نستنتج أن الخطين المستقيمين يكونا:**

- حقيقيين ومختلفين إذا كان: $h^2 > ab$ .
- تخيليين إذا كان: $h^2 < ab$ .
- متوازيين (أو منطبقين) إذا كان: $h^2 = ab$.
- متعامدين إذا كان: $a+b=0$ .

**شرط تمثيل المعادلة العامة من الدرجة الثانية في متغيرين لخطين مستقيمين**

**نظرية:** إذا كانت معادلة الدرجة الثانية $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ تمثل المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين فإن النقطة $(x_1, y_1)$التي يجب نقل محاور الإحداثيات إليها حتى تتحول معادلة الدرجة الثانية إلي معادلة أخري خالية من حدود الدرجة الأولي تمثل نقطة تقاطع الخطين المستقيمين الممثلين بمعادلة الدرجة الثانية وبنقل المحاور إلي هذه النقطة تتحول المعادلة إلي الصورة: $aX^2 + 2hXY + bY^2 = 0$ وهي تمثل المعادلة المتجانسة للمعادلة الأصلية ولكنها بدلالة الإحداثيات الجديدة، والأمثلة التالية توضح ذلك.

**مثال (٣):** بنقل محاور الإحداثيات إلي نقطة مناسبة بر هن أن المعادلة $y^2 + xy - 2x^2 - 5x - y - 2 = 0$ تمثل المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين وأوجدهما.

**الحـــــــــــــــل**

بفرض أن $(x_1, y_1)$ هي النقطة التي يجب نقل محاور الإحداثيات إليها لكي تصبح المعادلة المعطاة خالية من حدود الدرجة الأولي ومن ثم تكون معادلات التحويل بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة هي: $x = X + x_1,\ \ y = Y + y_1$ وتصبح المعادلة الأصلية بعد التعويض عن قيم $y, x$ بالصورة :

$$(Y + y_1)^2 + (X + x_1)(Y + y_1) - 2(X + x_1)^2 - 5(X + x_1) - (Y + y_1) - 2 = 0$$

ولكي تصبح المعادلة المعطاة خالية من حدود الدرجة الأولي يجب إن يكون معامل $X=0$، معامل $Y=0$. بوضع معامل $X=0$، معامل $Y=0$ نحصل علي المعادلتين:

$$y_1-4x_1-5=0, \quad 2y_1+x_1-1=0,$$

وهما معادلتين في مجهولين $x_1$، $y_1$ وبحلهما معاً نجد أن إحداثيات النقطة المطلوبة هي $(-1,1)$.

وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد أن:

$$(Y+1)^2+(X-1)(Y+1)-2(X-1)^2-5(X-1)-(Y+1)-2=0$$

وبالفك والاختصار نجد أن هذه المعادلة تصبح بالصورة: $Y^2+XY-2X^2=0$ وهي تمثل المعادلة المتجانسة للمعادلة الأصلية ولكنها بدلالة الإحداثيات الجديدة، وهي المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين مارين بالنقطة $(-1,1)$ والتي تمثل نقطة أصل محاور الإحداثيات الجديدة وبالتالي تكون المعادلة المعطاة تمثل المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين مارين بالنقطة $(-1,1)$(نقطة تقاطعهما) ويمكن الحصول علي معادلتي الخطين المستقيمين بدلالة الإحداثيات الأصلية كالآتي: بتحليل المعادلة المتجانسة بدلالة الإحداثيات الجديدة نحصل علي: $(Y+2X)(Y-X)=0$ ومنها نجد أن معادلتي الخطين المستقيمين بالنسبة للمحاور الجديدة هما:

$$Y+2X=0, \quad Y-X=0$$

وبتطبيق معادلات التحويل بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة والتي علي الصورة:

$$X=x+1, \qquad Y=y-1.$$

نحصل علي معادلتي الخطين المستقيمين الممثلين بالمعادلة المعطاة بالنسبة للإحداثيات الأصلية بالصورة:

$$y-1+2(x+1)=0 \Rightarrow y+2x+1=0, \quad y-1-(x+1)=0 \Rightarrow \ y-x-2=0$$

وبحل معادلتي الخطين المستقيمين معاً جبريًا نجد أن نقطة تقاطعهما هي النقطة $(-1,1)$ وهي نفس النقطة التي تم نقل محاور الإحداثيات إليها. والزاوية بين الخطين المستقيمين تتعين من العلاقة:

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{2\left(\sqrt{\frac{1}{4}+2}\right)}{(-2+1)}\right)=\tan^{-1}(-3).$$

**مثال (٤): بنقل محاور الإحداثيات إلي النقطة $(-1,-1)$ أعطي وصفًا هندسيًا للمعادلة $x^2-y^2+2x-2y=0$.**

**الحـــــــــــــــــــــل**

المعادلة المعطاة خالية من الحد $xy$ وبالتالي يمكن كتابتها مباشرة علي الصورة:

$$(x^2+2x)-(y^2+2y)=0\Rightarrow(x+1)^2-(y+1)^2=0$$

وبنقل محاور الإحداثيات إلي النقطة $(-1,-1)$ نجد أن: $X=x+1,\ \ Y=y+1$ حيث أن $xy$ هي الإحداثيات الأصلية، $XY$ هي الإحداثيات الجديدة. وبالتالي فإن المعادلة المعطاة تصبح بالصورة:

$$X^2-Y^2=0$$

وهذه المعادلة هي معادلة متجانسة من الدرجة الثانية تمثل المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين مارين بنقطة الأصل بالنسبة للمحاور الجديدة ومارين بالنقطة $(-1,-1)$ بالنسبة للمحاور الأصلية وتكون معادلتي الخطين بالنسبة للمحاور الجديدة علي الصورة :

$$X-Y=0,\ \ X+Y=0$$

ومعادلتي الخطين المستقيمين بالنسبة للمحاور الأصلية يمكن الحصول عليهما كالآتي:

$$X-Y=0\Rightarrow x+1-(y+1)=0\Rightarrow x-y=0,$$
$$X+Y=0\Rightarrow x+1+y+1=0\Rightarrow x+y+2=0$$

أي أن المعادلتين: $x-y=0,\ x+y+2=0$ هما معادلتي الخطين المستقيمين الممثلين بالمعادلة المعطاة ومارين بالنقطة $(-1,-1)$. وهذا يعني أن المعادلة المعطاة تمثل المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين ونقطة تقاطعهما هي النقطة $(-1,-1)$.

## تمارين (١٠)

١) بنقل نقطة الأصل إلي نقطة مناسبة برهن أن كلاً من المعادلات الآتية تمثل المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين وأوجدهما:

✓ $y^2+xy-2x^2-5x-y-2=0$ .

✓ $2x^2-xy-3y^2-7x+8y+3=0$ .

✓ $3x^2+2xy-y^2+x-3y-2=0$ .

✓ $2x^2-13xy-7y^2+x+23y-6=0$ .

✓ $x^2-y^2+x-y=0$ .

٢) بنقل محاور الإحداثيات إلي نقطة مناسبة استنتج معادلتي الخطين المستقيمين الممثلين بالمعادلة المشتركة $y^2+xy-2x^2-5x-y-2=0$، وأوجد الزاوية بينهما.