الفهرس

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة عامة

الميكانيكا هي دراسات التأثيرات التي تحدثها القوى على الأجسام ويعتبر علم الميكانيكا علم نظري تطبيقي ، الهدف منه شرح الظواهر الطبيعية المختلفة والتنبؤ بها والتي من خلالها يتم وضع أساسيات للتطبيقات الهندسية المختلفة وبدقة أكثر هو ذلك العلم الذي يصف و يتنبأ بظروف السكون والحركة للأجسام تحت تأثير القوى وينقسم هذا العلم إلى ثلاثة أقسام هي : ميكانيكا الأجسام المتماسكة (الأجسام الجاسئة) وميكانيكا الأجسام القابلة للتشكل (نظرية المرونة) وميكانيكا الموائع.

كما أن القسم الأول الذي نهتم بدراسته في هذا الكتاب ينقسم إلى قسمين :-

الاستاتيكا:- حيث تكون الأجسام ساكنة أو تتحرك بسرعة ثابتة وتستخدم في جميع حلول المشاكل الهندسية المتعلقة بدراسة الأجسام الهندسية والتأثير المتبادل الناشئ عنها.

إن علم الاستاتيكا يهتم بدراسة عمليات تركيب وتحليل القوى وشروط توازنها واستقرارها مما اكسب علم السكون أهمية قصوى بشكل خاص.

وخلال تطور التقنية الحديثة يصادف المهندسون مشكلات عديدة ومتنوعة في تحليل المنشآت المختلفة كالمباني والجسور والسدود والترع الزراعية وتصميم وإنتاج الآلات والمحركات وعلى الرغم من تعدد واختلاف هذه المشاكل إلا فان جزء من حلها يعتمد على المبادئ العامة التي يكون لها قاعدة علمية وان دراسة علم الاستاتيكا الذي يهتم بدراسة تحليل القوى وشروط توازنها يشغل مكانا كبيرا في تفسير وحلول المشاكل المذكورة مما اكسب علم السكون أهمية قصوى وبشكل خاص للمهندسين.

والفهم الكامل للمبادئ الأساسية لعلم الاستاتيكا هو مطلب ضروري وهام لدراسة متقدمة في مقاومة أو ميكانيكا المواد والهندسة الإنشائية وتحليل الاجهادات والتصميم والتحليل الميكانيكي.

الديناميكا:- حيث تتحرك الأجسام بسرعة متغيرة بحيث تصبح العجلة جزءا ضروريا عند وصف مسائل الديناميكا وكمفهوم عام ، العجلة هي كمية متجهه وهى معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن.

والفهم الشامل للأسس والمبادئ الأساسية لعلم الديناميكا هو مطلب أساسي وضروري لدراسة التحليل الميكانيكي والتصميم والذبذبات ومجموعات التحكم وديناميكا الموائع (السوائل والغازات).

إن المشاكل المطروحة الآن أمام العلم من تطوير وتحسين الإنتاج بشكل سريع ودعمه بأحدث الوسائل الفنية والعلمية ورفع نوعية مستوى الكوادر الهندسية وتوسيع القاعدة النظرية لمعلوماتهم ودراسة علم الديناميكا هو احد البنيات الأساسية العلمية الحديثة في انجاز هذه المهام.

ولهذه الأسباب كان مقرر الميكانيكا هو إحدى المقررات التي تدرس في السنوات الأولى في مجالات هندسة الطيران والهندسة المدنية وهندسة الميكانيكا والتكنولوجيا.

تاريخ علم الميكانيكا :-

علم الميكانيكا احد أقدم العلوم الطبيعية حيث أن أرشميدس Archimedes كان قد تطرق في كتاباته في عام 212-287 قبل الميلاد إلى أسس ومبادئ علم السكون وطفو الأجسام.

وفى الفترة من 1548-1620 شرح استيفنس Stevinus مبدأ المستوى المال واستخدام متوازي أضلاع القوى.

ثم اهتم جاليليو Galileo في عام 1564-1642 بمبادئ الحركة وخاصة بتجاربه المتعلقة بالأجسام الساقطة.

وقام اسحق نيوتن Isaac Newton بوضع قوانين الحركة والجاذبية الأرضية والمعروفة باسمه.

أما بالنسبة للعلماء العرب فقد برز منهم ثابت بن قرة (901م) حيث بحث في نظرية " الدافع " بالطريقة السكونية الهندسية البحتة. ثم وضع نظرية حركية أساسها القوة واستعمل مفهوم القوة لإثباتها.

ودرس بن الهيثم (1031م) حركة تصادم الأجسام وتمكن من التوصل إلى القواعد الأساسية التي تسيطر على الحركة. وكذلك برز عبد الرحمن الخازني (1155م) بآرائه العلمية الخاصة بجذب الأجسام الساقطة وتحديد السرعة المتصاعدة له

(التسارع الأرضي).

والسؤال الذي يطرح من كثير من الطلاب لماذا ندرس الميكانيكا **والجواب يمكن تلخيصه في الأساسيات التالية :**

1- يلعب علم الميكانيكا دورا أساسيا في علم الفيزياء والفلك وغيرها من العلوم مساهما بذلك في معرفتنا عن كيفية عمل الطبيعة وأسرار الكون الآلهية.
2- يهتم العاملون بالعلوم الرياضية بعلم الميكانيكا من حيث بنائها والطرق المستعملة وعليه تكون جزء كبير من الرياضيات نتيجة لمحاولة حل المسائل الميكانيكية المختلفة والمستمرة.
3- نعيش الآن في عصر التكنولوجيا الحديثة والآلات الصناعية المختلفة والتي لا يمكن أن تصمم دون معرفتنا الجيدة بعلم الميكانيكا وما نشهده اليوم من تقدم تكنولوجي كبير في شتى المجالات ما هو إلا نتائج وثمار البحث العلمي المكثف والمنظم في الظواهر الطبيعية المختلفة والفهم الجيد لها.

وهكذا نرى الأهمية الكبرى والخاصة بدراسة علم الميكانيكا

والله الموفق،،،،،

د/ رمضان عبد الله محمد

الباب الاول
عزم القصور الذاتـى
Moment of Inertia

مقدمة :

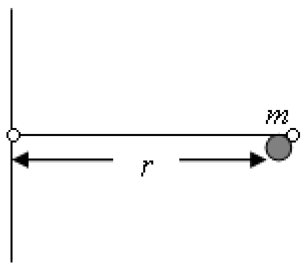
سوف ندرس في هذا الباب موضوع عزم القصور الذاتي للمساحات والكتل ، أو ما يسمى أحيانا بالعزم الثاني للمساحة (Second Moment of Area) أو العزم الثاني للكتلة (Second Moment of Mass) . يستخدم عزم القصور الذاتي للمساحات في التصميمات الإنشائية لذلك فهو يفيد بصورة خاصة المهندسين المدنيين في حين نجد أن عزم القصور الذاتي للكتلة يفيد بصورة خاصة المهندسين الميكانيكيين والكهربائيين العاملين في مجال تصميم الآلات وغيرها ، بالإضافة إلى أن هناك عدد كبير من القوانين والمعادلات الهندسية الهامة التي لها علاقة بعلم مقاومة المواد والتي تحتاج إلى قيم تكامل العزم الثاني للمساحات أو الكتل حول محور ما.

ولعزم قصور الكتلة تفسير طبيعي ملموس، فعزم قصور الكتلة بالنسبة إلى أي محور هو مقياس لمقاومة الجسم للعجلة الزاوية حول هذا المحور وسوف ندرس هذا التأثير في الفصول التالية عند تقديم الصيغة الدورانية لقانون نيوتن الثاني.

تعريف :

يعرف عزم القصور الذاتي لجسم كتلته m حول نقطة أو محور أو مستوى بحاصل ضرب الكتلة في مربع بعدها عن النقطة أو المحور أو المستوى.

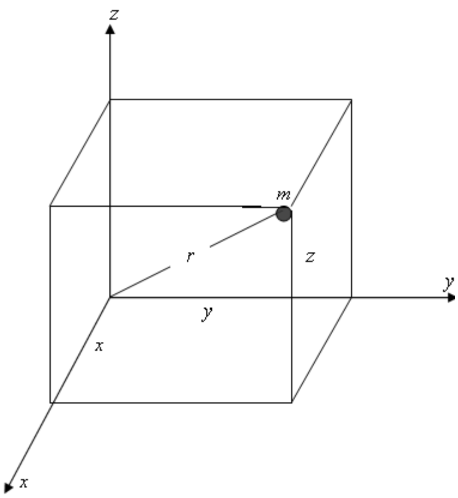
1- بفرض أن كتلة الجسيم هي m وبعدها عن المحور هو r
فعزم القصور الذاتي حول المحور :



$$I = mr^2, \qquad \ldots\ldots(1)$$

وعزم القصور الذاتي حول النقطة o هي

$$I_o = mr^2 = m(x^2 + y^2 + z^2) \qquad \ldots\ldots(2)$$



عزم القصور الذاتي حول المحور x يكون مساويا لحاصل ضرب الكتلة في مربع بعدها عن محور x أي أن:

$$I_x = m(y^2 + z^2),\dots\dots\dots\dots\dots(3)$$

وعزم القصور الذاتي حول محور y يكون مساويا :

$$I_y = m(x^2 + z^2),\dots\dots\dots\dots\dots(4)$$

وعزم القصور الذاتي حول المحور z يكون مساويا :

$$I_z = m(x^2 + y^2),\dots\dots\dots\dots\dots(5)$$

عزم القصور الذاتي حول المستوى $x = 0$ يكون مساويا حاصل ضرب الكتلة m في مربع بعدها عن المستوى وهو x^2 أي أن :

$$I_{x=0} = mx^2,\dots\dots\dots.(6)$$

وعزم القصور الذاتي حول المستوى $y = 0$ يكون مساويا:

$$I_{y=0} = my^2,\dots\dots\dots..(7)$$

وعزم القصور الذاتي حول المستوى $z = 0$ يكون مساويا:

$$I_{z=0} = mz^2,\dots\dots\dots...(8)$$

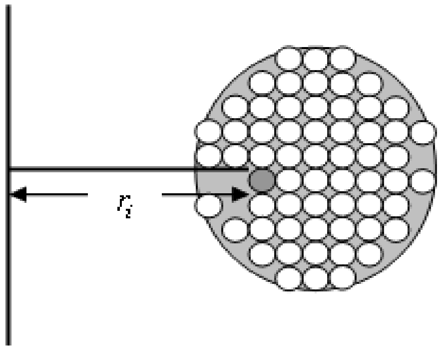
عزم القصور الذاتي بالنسبة للجسم المتماسك بالنسبة إلى نقطة أو محور أو مستوى:-

لإيجاد عزم القصور الذاتي الصلب (المتماسك) نقسم الجسم إلى عناصر صغيرة كتلة كل عنصر δm_i ونوجد عزم القصور الذاتي لكل عنصر على حدة ثم نجرى عملية تجميع على جميع عناصر الجسم أي يكون:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \delta m_i$$

وكلما صغرت كتلة العنصر كلما زادت الدقة في عملية التجميع حتى تؤول كتلة العنصر إلى الصفر وبذلك تؤول عملية التجميع (المجموع) إلى عملية تكامل :

$$I = \lim_{\delta m \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} r_i^2 \delta m_i = \int r^2 dm \,,\ldots\ldots\ldots \ldots(1)$$



عزم القصور الذاتي حول المحاور الكرتيزية المتعامدة :

$$I_x = \int_v (y^2 + z^2) dm \,,\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots(2)$$

$$I_y = \int_v (x^2 + z^2) dm \,,\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots.(3)$$

$$I_z = \int_v (x^2 + y^2) dm \,,\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots(4)$$

وعزم القصور الذاتي حول المستويات المتعامدة :

$$I_{x=0} = \int x^2 dm \,,\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$I_{y=0} = \int y^2 dm \,,\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots(6)$$

$$I_{z=0} = \int z^2 dm \,,\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots (7)$$

نصف قطر القصور الذاتي :

إذا كان كتلة الجسم كله M وأمكن وضع عزم القصور الذاتي للجسم حول نقطة أو محور أو مستوى في صورة حاصل ضرب الكتلة في مربع مسافة ما فان مربع المسافة تسمى مربع نصف قطر القصور الذاتي للجسم حول نقطة أو محور أو مستوى ونرمز له بالرمز K^2 أي أن

$$I = MK^2 \,,\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots(1) \qquad \& \qquad K = \sqrt{\frac{I}{M}} \,,\ldots\ldots\ldots \ldots.(2)$$

K يسمى نصف قطر القصور الذاتي .

نظريات عامة :-

(1) عزم القصور الذاتي لجسم حول ثلاث محاور متعامدة يساوى عزم القصور الذاتي حول نقط تلاقيها أي أن :

$$I_x + I_y + I_z = 2I_o ,\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots(1)$$

(2) عزم القصور الذاتي لجسم حول مستويين متعامدين يساوى عزم القصور الذاتي حول محور تقاطعهما أي أن :

$$I_{x=0} + I_{y=0} = I_z ,\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots(2)$$

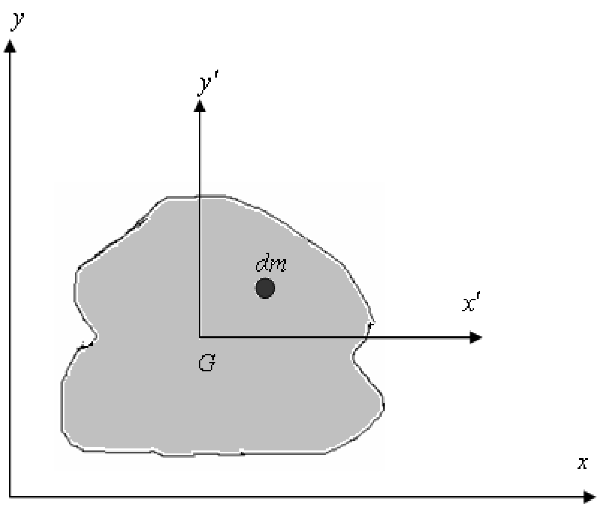
(3) عزم القصور الذاتي لثلاث مستويات متعامدة يساوى عزم القصور الذاتي حول نقطة تقاطعهما أي أن :

$$I_{x=0} + I_{y=0} + I_{z=0} = I_o ,\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots(3)$$

(4) نظرية المحاور المتوازية Parallel-Axes Theory :-

في أحيان كثيرة في المجالات الهندسية يلزم نقل عزم القصور الذاتي من محور إلى محور آخر يوازيه وذلك كما هو معروف يتطلب إجراء تكامل آخر. وهناك أسلوب وصيغة لنقل عزوم القصور الذاتي دون الحاجة لإجراء تكامل آخر وذلك باستخدام ما يعرف ب " نظرية المحاور المتوازية " والتي تنص على أن :

" عزم القصور الذاتي لجسم ما حول محور ما يساوى عزم القصور الذاتي لمحور موازى الأول ويمر بمركز ثقله مضافا إليه الكتلة في مربع المسافة بين المحورين " وتسمى هذه النظرية بنظرية المحاور المتوازية (صيغة النقل لعزم القصور الذاتي).



للسهولة سوف نثبت هذه النظرية بالنسبة إلى صفيحة منتظمة مسطحة أي في بعدين . بفرض أن G مركز ثقل الصفيحة ، نأخذ محاور متعامدة في

المستوى ox, oy ، ونأخذ محورين Gx', Gy' يوازيان هذه المحاور ويمران بمركز الثقل كنقطة أصل.

من تعريف عزم القصور الذاتي للجسم حول أي محور يساوى مجموع (أو تكامل) حاصل ضرب كتلة المجموعة (هنا عنصر الجسم) في مربع بعده عن المحور أي انه مثلا بالنسبة إلى محور x أو محور y :

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \int y^2\,dm, \\ I_y &= \int x^2\,dm \end{aligned}\right\}, \ldots\ldots\ldots \; \ldots\ldots(1)$$

حيث هنا البعد الثالث $z = 0$ حيث (x, y) إحداثيات dm بالنسبة إلى المحاور (ox, oy). بفرض أن إحداثيات مركز الثقل $(\bar{x}, \bar{y})$ بالنسبة إلى المحاور الأصلية وكذلك إحداثيات عنصر الكتلة dm هي (x', y') بالنسبة إلى المحاور الجديدة (Gx', Gy') المارة بمركز ثقل الصفيحة فان :

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x} + x' \\ y &= \bar{y} + y' \end{aligned}\right\}, \ldots\ldots\ldots \; \ldots\ldots(2)$$

بالتعويض من (2) في (1) ينتج أن :

$$I_x = \int (y' + \bar{y})^2\,dm = \int (y'^2 + 2\bar{y}y' + \bar{y}^2)\,dm$$

$$\therefore\; I_x = \int y'^2\,dm + 2\bar{y}\int y'\,dm + \overline{y}^2 \int dm$$

$$\therefore\; I_x = I_{x'} + M\,\bar{y}^2, \ldots\ldots\ldots \; \ldots\ldots\ldots. \; \ldots.(3)$$

حيث أن الحد الأول هو عزم القصور الذاتي للصفيحة حول المحور Gx' أما الحد الثاني سوف يتلاشى وذلك من تعريف مركز الثقل أما $\int dm = M$ هي الكتلة الكلية (أخرجنا $\bar{x}, \bar{y}$ خارج علامة التكامل إذ أنهم مقادير ثابتة) وبالمثل يمكن إثبات أن :

$$I_y = I_{y'} + M\,\bar{x}^2, \ldots\ldots\ldots \; \ldots\ldots(4)$$

وهذا يثبت النظرية.

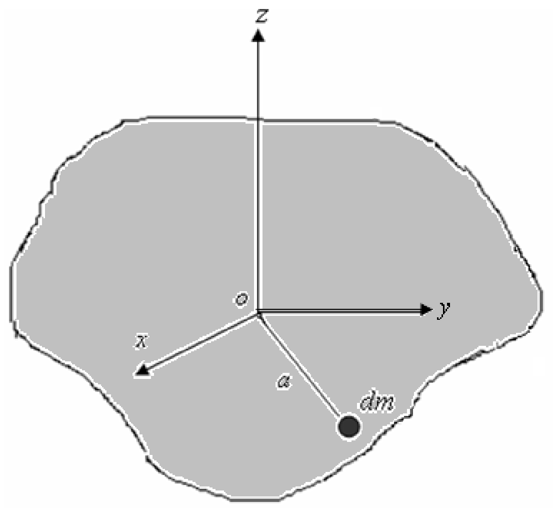
ويمكن إثبات النظرية السابقة في الفراغ الثلاثي بإتباع نفس الخطوات السابقة.

وهنا يجب ملاحظة نقطتين مهمتين :-

1- يجب أن يمر احد المحاور خلال مركز ثقل الجسم.

2- المحاور التي يحدث بينها نقل يجب أن تكون متوازية وباستخدام نظرية المحاور المتوازية يمكننا إيجاد عزم القصور الذاتي للمساحات و الأشكال الهندسية المركبة حول أي محور.

المساحات المركبة تتكون وتتألف من مجموعة أشكال هندسية معروفة وشائعة مثل الدوائر والمربعات والمستطيلات والمثلثات أو أي أشكال أخرى يمكن الحصول على عزم القصور الذاتي لها بسهولة.



(5) نظرية خاصة بالصفائح المستوية :-

عزم القصور الذاتي لأي صفيحة مستوية بالنسبة لمحور عمودي عليها يساوي مجموع عزمي القصور الذاتي لأي محورين متعامدين في مستوى الصفيحة ويمران بنقطة تقاطع المحور مع مستوى الصفيحة.

البرهان:

نفرض o نقطة تقاطع المحور مع مستوى الصفيحة ونفرض أن oz هو المحور العمودي على مستوى الصفيحة نأخذ من o مستقيمين متعامدين في مستوى الصفيحة ox , oy بعد العنصر عن المحور oz هو

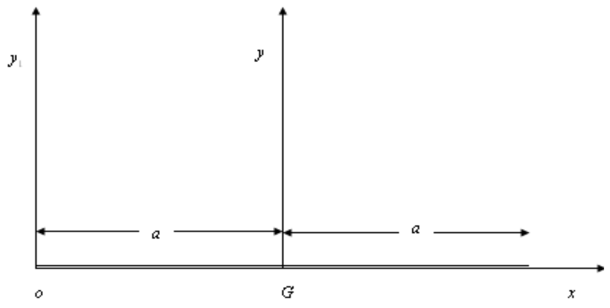
$$a^2 = x^2 + y^2 ,\ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots(1)$$

$$I_z = \int a^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm$$

$$I_z = I_x + I_y ,\ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots(2)$$

عزم القصور الذاتي لبعض الأشكال الهندسية :-

1- قضيب رفيع منتظم:



إذا كانت كتلة القضيب m وطوله $2a$ وكانت ρ كتلة وحدة الأطوال من القضيب. لإيجاد عزم القصور الذاتي للقضيب حول محور عمودي عليه ويمر بمركز ثقله G نقسم القضيب إلى عناصر صغيرة كل منها طوله dx.

$$dm = \rho dx ,$$

$$I_y = \int x^2 dm = \rho \int_{-a}^{a} x^2 dx = \frac{2\rho a^3}{3},$$

$$m = \rho \int_{-a}^{a} dx = 2\rho a,$$

$$\therefore I_y = \frac{2\rho a^3}{3} \frac{m}{2\rho a}$$

$$\therefore I_y = \frac{1}{3} m a^2 ,..................(1)$$

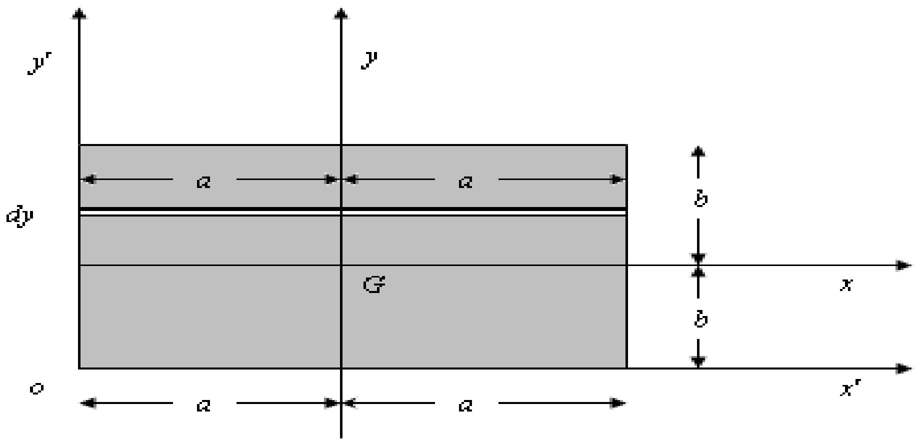
وإذا كان oy_1 محور يوازى Gy ويمر بطرف القضيب فمن نظرية المحاور المتوازية عزم القصور الذاتي حول المحور oy_1 هو

$$I_{y_1} = ma^2 + I_y = ma^2 + \frac{1}{3} ma^2$$

$$\therefore I_{y_1} = \frac{4}{3} ma^2 ,......... ......(2)$$

2- عزم القصور الذاتى لصفيحة رقيقة منتظمة على شكل مستطيل :

بفرض أن طول المستطيل $2a$ وعرضه $2b$. نأخذ محاور Gxy. تمر بمركز ثقل المستطيل كما بالرسم ونقسم الصفيحة إلى عناصر كل عنصر عبارة عن قضيب رفيع مرة موازية للمحور x ومرة أخرى موازية للمحور y.



عزم القصور الذاتي حول المحور x :

$$I_x = \int y^2 dm ,$$
$$\because\ dm = 2a\rho dy ,$$
$$I_x = 2a\rho \int_{-b}^{b} y^2 dy = \frac{4a\rho b^3}{3},$$
$$m = 2a\rho \int_{-b}^{b} dy = 4ab\rho ,$$
$$\therefore\ I_x = \frac{4a\rho b^3}{3}\frac{m}{4ab\rho},$$
$$I_x = \frac{1}{3}mb^2 ,\dots\dots\dots\dots(3)$$

وبالمثل عزم القصور الذاتي حول المحور y :

$$I_y = \frac{1}{3}ma^2 ,\dots\dots\dots\dots(4)$$

وعزم القصور الذاتي حول المحور y' :

$$I_{y'} = I_y + ma^2 = \frac{4}{3}ma^2 ,\dots\dots\dots(5)$$

وذلك باستخدام نظرية المحاور المتوازية وكذلك :

$$I_{x'} = I_x + mb^2 = \frac{4}{3}mb^2 ,\dots\dots\dots(6)$$

عزم القصور الذاتي حول محور يمر بالنقطة G وعمودي على الصفيحة :

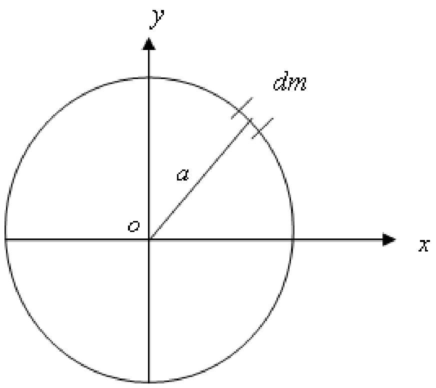
$$I_g = I_x + I_{y,} = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2), \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

وذلك باستخدام النظرية الخاصة بالصفائح المستوية وكذلك عزم القصور الذاتي حول محور يمر بالركن o وعمودي على مستوى الصفيحة يكون مساويا:

$$I_o = I_{x'} + I_{y'},$$

$$I_o = \frac{4}{3}m(a^2 + b^2), \ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots(8)$$

3- عزم القصور الذاتي لطوق رفيع (حلقة رفيعة) :



لإيجاد عزم القصور الذاتي لهذا الطوق نلاحظ أن جميع عناصر الطوق متساوية البعد عن المركز o . وبناء عليه فان عزم القصور الذاتي للطوق حول محور عمودي على مستوى الطوق ويمر بمركز ثقله o.

$$I_o = \int a^2 dm = ma^2, \ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots(9)$$

حيث a هي نصف قطر الطوق.

وباستخدام النظرية الخاصة بالصفائح المستوية فان:

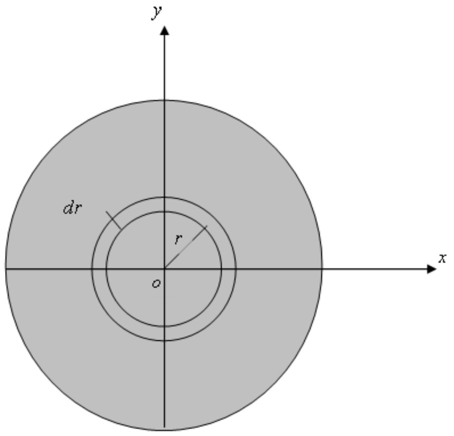
$$I_o = I_x + I_y$$

ومن التماثل نجد أن :

$$I_x = I_y$$

$$\therefore I_x = I_y = \frac{1}{2}ma^2, \ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots(10)$$

4- عزم القصور الذاتي لقرص مستدير :



بفرض أن كتلـة القرص m ونصف قطره a ، نقسم القرص إلـى مجموعة من الحلقات المتحدة المركز عزم القصور الذاتي لأحد هذه الحلقات التي نصف قطرها r وسمكها dr حول محور يمر بـالمركز وعمودي على مستوى القرص المستدير.

$$I_o = \int r^2 dm \quad , \quad dm = 2\pi r \rho dr$$

حيث ρ هي الكثافة السطحية ، dr هي سمك الحلقة

$$I_o = \int_0^a 2r^2 \pi r \rho dr = 2\pi\rho \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi\rho a^4}{2},$$

$$m = 2\pi\rho \int_0^a r dr = \pi\rho a^2,$$

$$\therefore I_o = \frac{\pi\rho a^4}{2} \frac{m}{\pi\rho a^2} = \frac{1}{2} m a^2, \ldots\ldots\ldots (11)$$

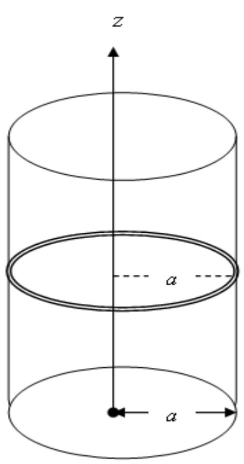
من نظرية الصفائح المستوية نجد أن :

$$I_o = I_x + I_y = \frac{1}{2} m a^2,$$

ومن التماثل يكون عزم القصور الذاتي حول المحورين x, y هما :

$$I_x = I_y = \frac{1}{4} m a^2, \ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots (12)$$

5- عزم القصور الذاتي لاسطوانة دائرية مجوفة :



نقسم الاسطوانة المجوفة إلى حلقات ولتكن dm كتلـة إحدى هذه الحلقات. عزم القصور الذاتي للاسطوانة المجوفة الدائرية حول محورها oz يتعين من :

$$I_{oz} = \int a^2 dm,$$

$$I_{oz} = m a^2, \ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots (13)$$

حيث m هي كتلة الاسطوانة المجوفة ، a نصف قطرها

6- عزم القصور الذاتى لاسطوانة دائرية مصمتة :

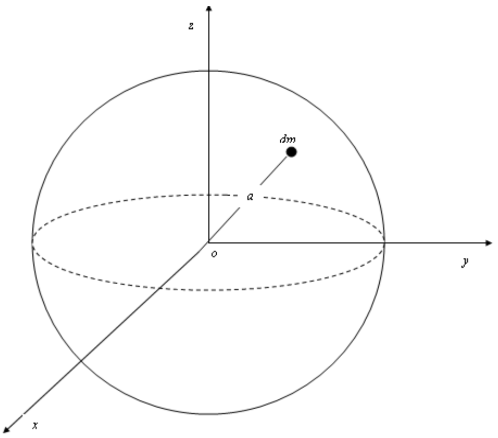
نقسم الاسطوانة إلى مجموعة من الأقراص الدائرية ونجد أن عزم القصور الذاتي لها حول محورها oz يعطى من :

$$I_{oz} = \int \frac{1}{2} a^2 dm ,$$

$$I_{oz} = \frac{1}{2} ma^2 ,.........\ ......(14)$$

حيث m هي كتلة الاسطوانة المصمتة ، a نصف قطرها.

7- عزم القصور الذاتى لقشرة كروية رقيقة منتظمة (كرة مجوفة):-



نقسم القشرة الكروية إلى عناصر كل عنصر كتلته dm فان أبعاد كل عنصر فيها يكون متساوي البعد عن مركزها ويكون مساويا لنصف قطرها ولإيجاد عزم القصور الذاتي حول مركزها o يكون مساويا

$$I_o = \int a^2 dm = ma^2 ,.........\ ......(15)$$

حيث m كتلة القشرة الكروية ، a نصف قطرها ونظرا للتماثل نجد أن :

$$I_x = I_y = I_z = I$$

ومن نظرية (1) نجد أن :

$$I_x + I_y + I_z = 2I_o$$

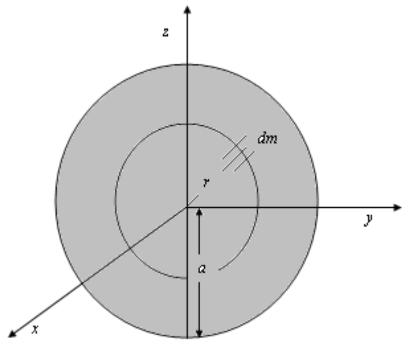
$$\therefore 3I = 2I_o = 2ma^2$$

$$\therefore I = \frac{2}{3} ma^2$$

عزم القصور الذاتي للقشرة الكروية حول المحاور الكرتيزية :

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} ma^2, ...(16)$$

8- عزم القصور الذاتي لكرة مصمتة :



نقسم الكرة إلى عناصر كل عنصر عبارة عن قشرة كروية لها نفس المركز (مركز الكرة المصمتة) ونصف قطرها r وسمكها dr . فعزم القصور الذاتي للعنصر حول أي محور فيها هو $\frac{2}{3} r^2 dm$. ولكن كتلة العنصر هي $dm = 4\pi r^2 \rho dr$ حيث ρ هي الكثافة الحجمية.

$$\therefore I = \frac{8}{3}\pi\rho \int_0^a r^4 dr = \frac{8}{3}\pi\rho \frac{a^5}{5},$$

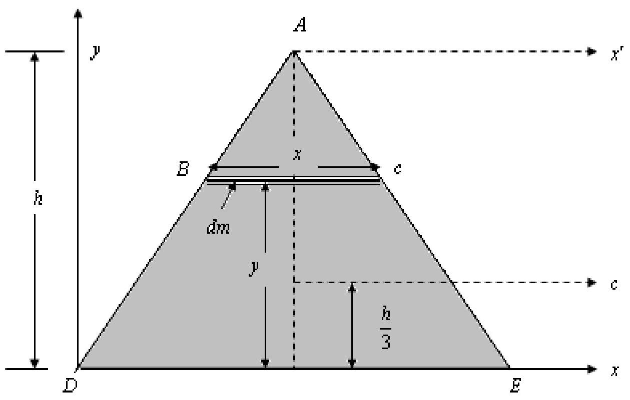
$$m = \int_0^a 4\pi r^2 \rho dr = \frac{4\pi\rho a^3}{3},$$

$$\therefore I = \frac{8}{15}\pi\rho a^5 \frac{3m}{4\pi\rho a^3} = \frac{2}{5} ma^2,$$

ونظرا لوجود تماثل في الشكل :

$$\therefore I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} ma^2, ...(17)$$

9- عزم القصور الذاتي لصفيحة رقيقة على شكل مثلث :



نقسم المثلث إلى مجموعة من القضبان الرفيعة الموازية للقاعدة DE طول احدهم x وارتفاعه y وسمكه dy .

نفرض أن كتلة العنصر dm تساوي :

$$dm = \rho x dy$$

عزم القصور الذاتي حول المحور x يمر بقاعدة المثلث

$$I_x = \int y^2 dm = \int y^2 \rho x dy ,\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots(i)$$

حيث ρ كتلة وحدة الأطوال من القضيب.

ومن تشابه المثلثين ADE , ABC ينتج أن :

$$\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h},$$

$$\therefore\ x = \frac{a}{h}(h-y),\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots (ii)$$

بالتعويض من (ii) في (i) ينتج أن :

$$I_x = \frac{\rho a}{h}\int_0^h (h-y)y^2 dy = \frac{\rho a h^3}{12},\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots(iii)$$

كتلة الصفيحة تعطى من العلاقة التالية :

$$m = \int dm = \rho \int_0^h x dy = \frac{\rho a}{h}\int_0^h (h-y)dy,$$

$$m = \frac{a\rho h}{2},\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots(iv)$$

$$\therefore\ I_x = \frac{\rho a h^3}{12}\frac{2m}{a\rho h} = \frac{1}{6}mh^2,\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots(18)$$

حيث m كتلة الصفيحة ، h ارتفاع المثلث وباستخدام نظري المحاور المتوازية وبفرض محور يوازى القاعدة ويمر بمركز ثقل المثلث فيكون عزم القصور الذاتي بالنسبة لهذا المحور يعطى من :

$$I_c = I_x - m\frac{h^2}{9} = \frac{mh^2}{6} - \frac{mh^2}{9},$$

$$\therefore\ I_c = \frac{1}{18}mh^2,\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots (19)$$

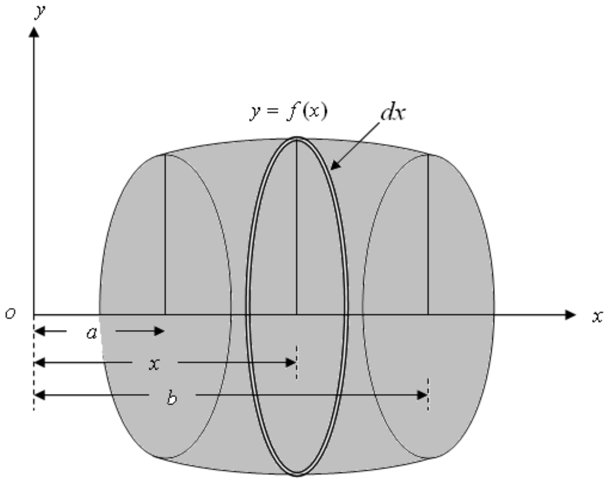
حيث أن مركز ثقل المثلث c يقع في نقطة تقاطع مستقيماته المتوسطة . ومن المعروف أن هذه النقطة تقسم هذه المستقيمات بنسبة 1:2 من جهة القاعدة.

ولإيجاد عزم القصور الذاتي للصفيحة حول محور يوازى احد الأضلاع ويمر بالرأس المقابل نستخدم نظرية المحاور المتوازية :

$$I_{x'} = I_c + m(\frac{2}{3}h)^2 ,$$

$$I_{x'} = \frac{1}{18}mh^2 + \frac{4}{9}mh^2 = \frac{1}{2}mh^2 ,\dots\dots\dots \dots (20)$$

10- عزم القصور الذاتي لجسم دوراني :



نفرض منحنى $y = f(x)$ يحصر بينه وبين المحور ox مساحة محصورة بين المستقيمين :

$$x = a \quad , \quad x = b$$

والمطلوب إيجاد عزم القصور الذاتي للجسم الدوراني الناتج عن دوران هذه المساحة حول المحور ox وإيجاد عزم القصور الذاتي بالنسبة إلى المحورين ox , oy. بأخذ عنصر dm عبارة عن قرص دائري نصف قطره y وسمكه dx فيكون

$$dm = \rho \pi y^2 dx ,\dots\dots\dots \dots\dots (i)$$

حيث ρ الكثافة الحجمية (إذ انه سوف يتكون حجم نتيجة الدوران) وعلى ذلك باعتبار العنصر كقرص فيمكن إيجاد عزم قصوره الذاتي حول محور ox الذي بالنسبة له محور عمودي عليه يمر بمركز ثقل العنصر والتكامل على الجسم كله يمكن إيجاد عزم القصور الذاتي للجسم الدوراني حول محور x أي أن :

$$I_x = \int \frac{1}{2} y^2 dm ,\dots\dots\dots \dots\dots (ii)$$

$$I = \frac{1}{2}\pi\rho \int_{x=a}^{x=b} y^4 dx ,\dots\dots\dots \dots\dots (21)$$

وعليه يمكن التعويض عن قيمة y من معادلة المنحنى وكذلك يمكن إيجاد عزم القصور الذاتي بالنسبة إلى المحور oy أي أن :

$$I_y = \int (\frac{1}{4} y^2 dm + x^2 dm),$$

$$I_y = \int (\frac{1}{4} y^2 + x^2) dm = \int (\frac{1}{4} y^2 + x^2) \rho \pi y^2 dx,$$

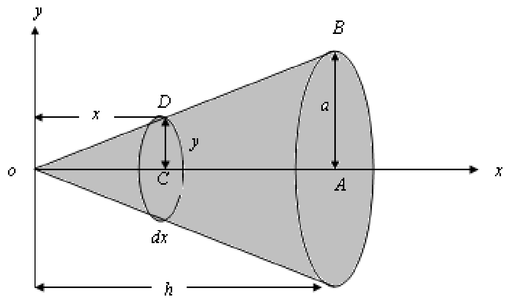
$$I_y = \rho \pi \int (\frac{1}{4} y^4 + x^2 y^2) dx, ...\ ......(22)$$

وكذلك من معادلة المنحنى يمكن التعويض عن قيمة y بدلالة x والعلاقة (22) الأخيرة قد حصلنا عليها بتطبيق نظرية المحاور المتوازية على العنصر ثم عملنا عملية التكامل بالنسبة للجسم كله.

تطبيق:

اوجد عزم القصور الذاتي للمخروط المصمت المبين بالشكل حول المحاور المعطاه ؟؟

الحل :



نقسم المخروط إلى مجموعة من الأقراص الدائرية ونفرض أن نصف قطر احد هذه الأقراص هو y ويبعد عن رأس المخروط مسافة x وسمكه dx.

من تشابه المثلثين OCD, OAB ينتج أن :

$$\frac{y}{a} = \frac{x}{h}, ...\ ....\ ......(i)$$

حيث a نصف قطر قاعدة المخروط ، h ارتفاع المخروط.

$$\therefore\ y = \frac{a}{h} x, ...\ ....\ .(ii)$$

عزم القصور الذاتي حول محور x :

$$I_x = \frac{1}{2} \int y^2 dm, ...\ .....(iii)$$

$$dm = \rho \pi y^2 dx, ...\ ......(iv)$$

$$\therefore\ I_x = \frac{1}{2} \pi \int y^4 dx, ...\ (v)$$

بالتعويض من (iii) في (v) ينتج أن :

$$I_x = \frac{1}{2}\pi\rho\int_0^h \frac{x^4 a^4}{h^4}dx\,,$$

$$I_x = \frac{a^4\pi\rho}{2h^4}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^h = \frac{1}{10}\rho\pi a^4 h,$$

ولكن كتلة المخروط المصمت تعطى من العلاقة :

$$m = \rho\pi\int_0^h y^2 dx = \frac{\rho\pi a^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \frac{1}{3}\rho\pi a^2 h$$

عزم القصور الذاتي للكتلة حول محور عمودي على المخروط المصمت يعطى من :

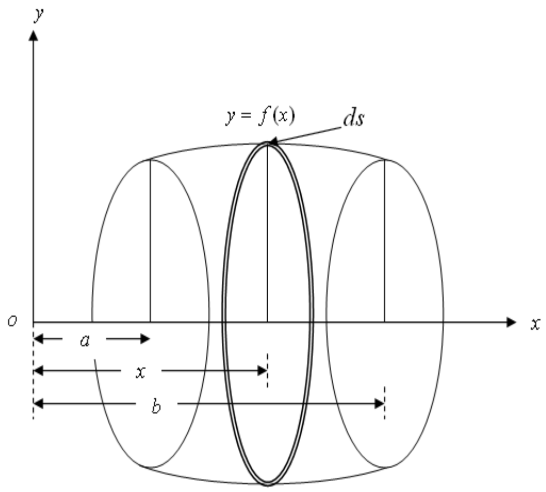
$$I_x = \frac{\rho\pi a^4 h}{10}\,\frac{3m}{\rho\pi a^2 h}$$

$$\therefore\ I_x = \frac{3}{10}ma^2\,,\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots.(23)$$

حيث a نصف قطر قاعدة المخروط المصمت ، m كتلة المخروط المصمت.

عزم القصور الذاتي حول المحور y (متروك للطالب) .

11- عزم القصور الذاتي لسطح دوراني :



السطح الدوراني يتكون من دوران المنحنى $y = f(x)$ حول محور ox . نأخذ العنصر عبارة عن حلقة دائرية نصف قطرها y وسمكها ds فيكون عزم القصور الذاتي حول محور عمودي عليها ويمر بمركز ثقلها هو

$$dI_x = y^2 dm\,,\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots(i)$$

وعنصر الكتلة هو

$$dm = 2\pi y\sigma ds\,,\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots.(ii)$$

حيث $2\pi y ds$ هو مساحة السطح الجانبي لمخروط ناقص.

عزم القصور الذاتي لهذا العنصر حول المحور ox (عمودي على الحلقة ويمر بمركز ثقلها) هو

$$\therefore \ dI_x = y^2 (2\pi y \sigma ds), \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots (iii)$$

وبالتالي فان عزم القصور الذاتي للسطح الدوراني حول المحور ox يكون :

$$I_x = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi\sigma y^3 ds = 2\pi\sigma \int_{x=a}^{x=b} y^3 ds, \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots (24)$$

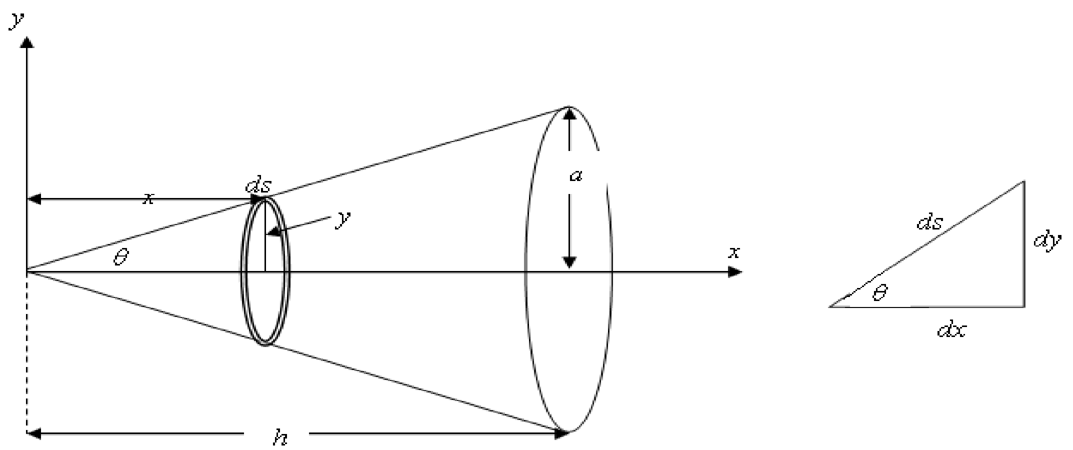
وعزم القصور الذاتي للسطح حول المحور oy هو

$$I_y = 2\pi\sigma \int_{x=a}^{x=b} (\frac{y^2}{2} + x^2) ds, \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots (25)$$

وذلك بتطبيق نظرية المحاور المتوازية على العنصر والتكامل لإيجاد عزم القصور للجسم كله.

تطبيق :

اوجد عزم القصور الذاتي للمخروط المفرغ المبين بالشكل حول المحاور المعطاه ؟؟



نقسم سطح المخروط إلى مجموعة من الحلقات الدائرية وبفرض أن نصف قطر إحدى هذه الحلقات هو y ويبعد عن رأس المخروط مسافة x :

$$I_x = \int y^2 dm \,,\dots\dots\dots \;\dots\dots\dots(i)$$
$$dm = 2\pi y \sigma ds \,,\dots\dots\dots \;\dots\dots(ii)$$

عزم القصور الذاتي حول محور عمودي على المخروط المفرغ يعطى من :

$$I_x = 2\pi\sigma \int y^3 ds \,,\dots\dots\dots \;\dots\dots(iii)$$
$$\because \frac{ds}{dx} = \sec\theta$$
$$\therefore ds = \sec\theta dx \,,\dots\dots\dots \;\dots\dots\dots(iv)$$

ومن تشابه المثلثان نجد أن :

$$\frac{x}{h} = \frac{y}{a},$$
$$\therefore y = \frac{a}{h}x \,,\dots\dots\dots \;\dots\dots\dots\dots(v)$$

بالتعويض من العلاقتين $(v),(iv)$ **في** (iii) **ينتج أن :**

$$I_x = \frac{2\pi\sigma a^3}{h^3}\int x^3 \sec\theta dx = \frac{2\pi\sigma a^3}{h^3}\int x^3 \frac{\sqrt{h^2+a^2}}{h} dx$$
$$\therefore I_x = \frac{2\pi\sigma a^3}{h^4}\sqrt{h^2+a^2}\int_0^h x^3 dx = \frac{2\pi\sigma a^3}{h^4}\sqrt{h^2+a^2}\,\frac{h^4}{4} = \frac{1}{2}\pi\sigma a^3\sqrt{h^2+a^2},$$

كتلة المخروط المفرغ تعطى من :

$$m = \int dm = 2\pi\sigma\int_0^h \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{h} y dx = \frac{2\pi\sigma a\sqrt{a^2+h^2}}{h^2}\int_0^h x dx = \pi\sigma a\sqrt{a^2+h^2}$$

$\therefore$ **عزم قصور الكتلة حول المحور** x **يعطى من :**

$$I_x = \frac{1}{2}ma^2 \,,\dots\dots\dots \;\dots\dots(26)$$

5

عزم القصور الذاتي حول المحور y ***(متروك للطالب) .***

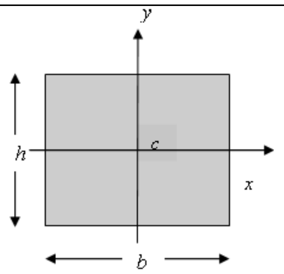
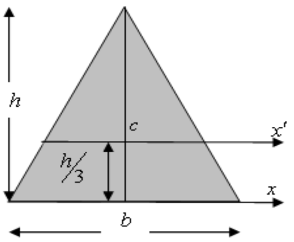
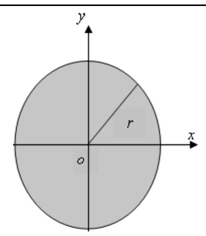
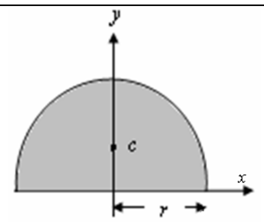
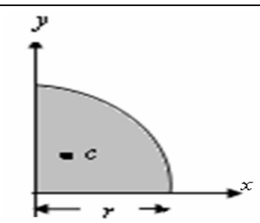
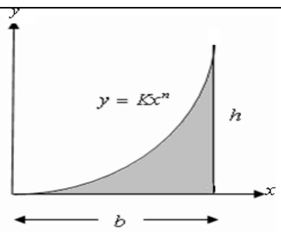
12- عزم القصور الذاتى للمساحات المركبة :

المساحات المركبة كما اشرنا إليها سابقا كثيرا ما تقابلنا في المجالات الهندسية المختلفة ، حيث إنها تتكون وتتألف من مجموعة أشكال هندسية معروفة وشائعة مثل الدوائر والمربعات و المثلثات والمستطيلات أو أية أشكال آخري يمكن الحصول على عزم القصور الذاتي لها بسهولة. إذ يمكن تقسيم أي مساحة مركبة مثل A إلى أجزاء هندسية منتظمة (مستطيلات ، دوائر ، ...... وغيرها) يكون عزم القصور الذاتي لهذه الأجزاء معلوم ، وبعد ذلك يمكن إيجاد عزم القصور الذاتي للمساحة المركبة يكون مساويا لمجموع القصور الذاتي لكل جزء من هذه الأجزاء على حدة. حيث يتم إيجاد عزم القصور الذاتي لكل جزء من الأجزاء بالنسبة لنفس المحور قبل جمعها.

عندما تكون المساحة أو المقطع متكونا من عدد كبير من الأجزاء المعروفة فمن الأفضل عادة أن تجدول النتائج بدلالة المساحة A وعزم القصور الذاتي حول محور يمر بالمركز.

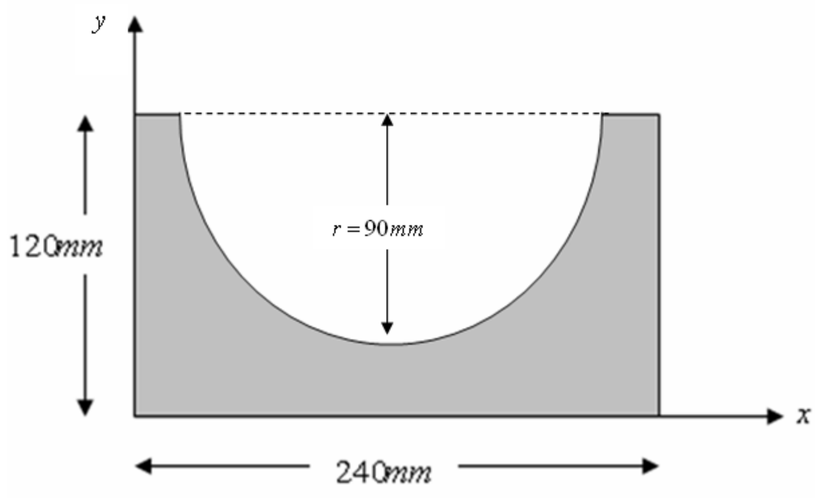
الجداول الآتية تبين عزم القصور الذاتي والمراكز للأشكال الهندسية الشائعة والمعروفة والتي تساعد الطالب في حل المسائل المتعلقة بإيجاد عزم القصور الذاتي للمساحات والأشكال المركبة المختلفة.

جدول عزم القصور الذاتى والمراكز للاشكال الهندسية المعروفة

عزم القصور الذاتي I	المساحة A	المخطط الهندسي	الشكل
$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{hb^3}{12}$	hb		المستطيل **Rectangle**
$I_{x'} = \frac{bh^3}{36}$ $I_x = \frac{bh^3}{12}$	$\frac{1}{2}bh$		المثلث **Triangle**
$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$	πr^2		الدائرة **Circle**
$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$	$\frac{\pi r^2}{2}$		نصف الدائرة **Semicircle**
$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16}$	$\frac{\pi r^2}{4}$		ربع دائرة **Quarter Circle**
$I_x = \frac{bh^3}{3(3n+1)}$ $I_y = \frac{hb^3}{n+3}$	$\frac{bh}{n+1}$		قطع مكافئ **General Spandrel**

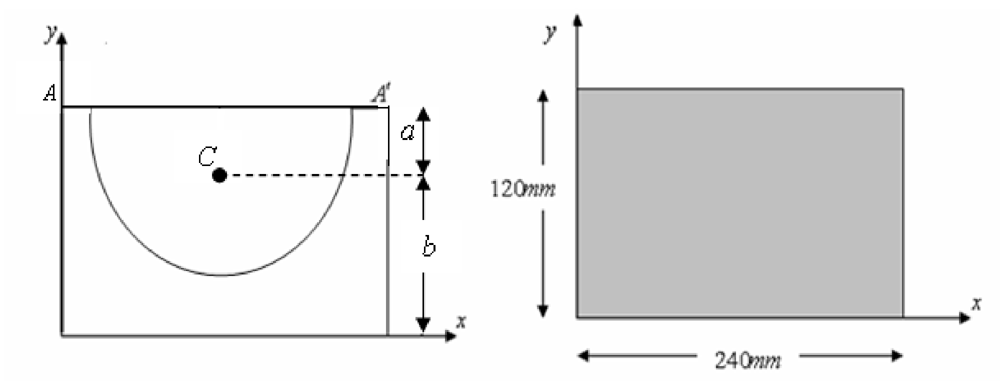
مثال (1):

اوجد عزم القصور الذاتي للمساحة المظللة والمبينة في الشكل التالي حول المحور x .



الحل:

يمكن اعتبار المساحة المظللة إنها تساوى مستطيل (240×120) مطروحا منها نصف دائرة نصف قطرها $r = 90\ mm$ كما هو موضح في الشكل التالي



بالرجوع إلى الجدول السابق نجد أن عزم القصور الذاتي I_{x_o} للمستطيل هو $I_{x_o} = \frac{bh^3}{12}$.

أما عزم القصور الذاتي لهذا المستطيل فهو :

$$I_x = \frac{1}{3}bh^3 = \frac{1}{3}(240)(120)^3 = 138.2 \times 10^6\ mm^4$$

بالنسبة لنصف الدائرة فان عزم القصور الذاتي حول المحور x يمكن إيجاده كما يلي :

مركز نصف الدائرة c بالنسبة للمحور AA' :

$$a = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \times 90}{3\pi} = 38.2\,mm$$

والمسافة b بين مركز نصف الدائرة c والمحور المراد إيجاد العزم حول x هي :

$$b = 120 - a = 120 - 38.2 = 81.8\,mm$$

عزم القصور الذاتي حول المحور AA' هو :

$$I_{AA'} = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{1}{8}\pi(90)^4 = 25.76 \times 10^6\,mm^4$$

الآن وباستخدام نظرية المحاور المتوازية نستطيع الحصول على I_{x_o} بالنسبة للمحور AA' :

$$I_{AA'} = I_{xo} + Aa^2$$
$$25.76 \times 10^6 = I_{x_o} + (12.72 \times 10^3)(38.2)^2$$
$$I_{x_o} = 7.20 \times 10^6\,mm^4$$

والآن وباستخدام هذه النظرية نحصل على قيمة I_x المراد إيجادها :

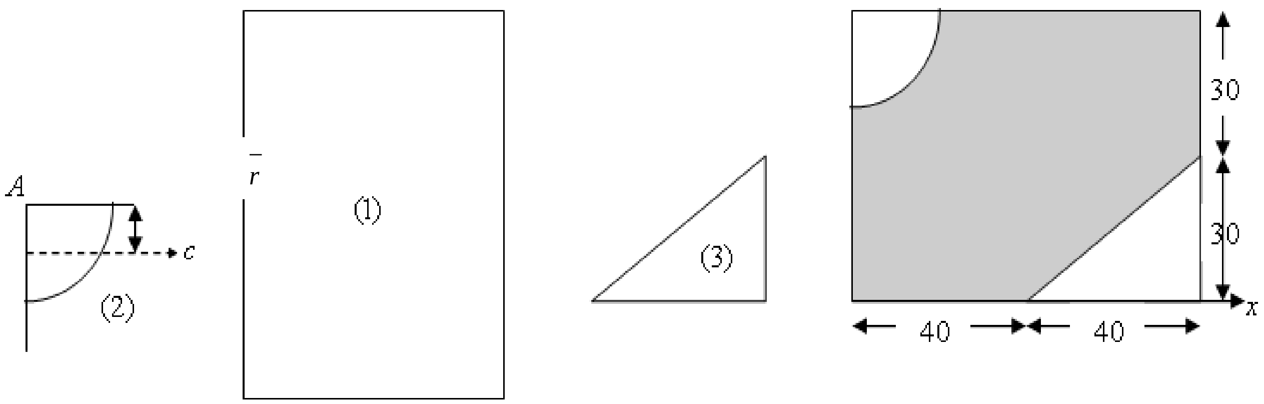
$$I_x = I_{x_o} + Ab^2 = 7.2 \times 10^6 + (12.72 \times 10^3)(81.8)^2 = 92 \times 10^6\,mm^4$$

والآن نستطيع الحصول على عزم القصور الذاتي للمساحة الكلية المظللة وذلك بطرح عزم القصور الذاتي لنصف الدائرة من عزم القصور الذاتي للمستطيل :

$$(I_x)_{Total} = (I_x)_{Rectangle} - (I_x)_{Circle}$$
$$(I_x)_{Total} = 138.2 \times 10^6 - 92.3 \times 10^6 = 45.9 \times 10^6\,mm^4$$

مثال (2):

احسب عزم القصور الذاتي حول المحور x للمساحة المظللة والمبينة في الشكل التالي :



الحل :

نلاحظ من الشكل أن المساحة المركبة تتكون من مساحة المستطيل (1) الموجبة مطروحا منها المساحات السالبة وهى مساحة ربع الدائرة (2) ومساحة المثلث (3).

بالنسبة للمستطيل (1) يكون عزم القصور الذاتي حول المحور x هو:

$$I_x = \frac{1}{3}bh^3 = \frac{1}{3}(80)(60)^3 = 5.76 \times 10^6\, mm^4$$

عزم القصور الذاتي لمساحة المثلث (3) حول قاعدته أي حول محور x يكون :

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3 = -\frac{1}{12}(40)(30)^3 = 0.09 \times 10^6\, mm^4$$

أما بالنسبة لعزم القصور الذاتي لربع الدائرة حول محور القاعدة x فيتم الحصول عليه باستخدام تسلسل الخطوات التالية :

أولا:

$$I_{AA'} = -\frac{\pi r^4}{16} = -\frac{\pi}{16}(30)^4 = -0.1590 \times 10^6\, mm^4$$

<u>ثانيا:</u> نقوم بنقل هذه النتيجة عبر المساحة :

$$\bar{r} = \frac{4r}{3\pi} = 12.73\,mm$$

وبواسطة نظرية نقل المحاور نحصل على عزم القصور الذاتي للجزء (2) **حول المحور الذي يمر خلال المركز هو :**

$$I_{x_o} = I - Ad^2 = -0.1590\times 10^6 - \left[-\frac{\pi(30)^2}{4}(12.73)^2\right] = -0.0445\times 10^6\,mm^4,$$

أي أن عزم القصور الذاتي لربع الدائرة حول المحور x **يصبح الآن كالآتي :**

$$I_x = I_{x_o} + Ad^2 = -0.0445\times 10^6 + \left(-\frac{\pi(30)^2}{4}\right)(60-12.75)^2 = -1.624\times 10^6\,mm^4,$$

الآن أصبح من الممكن إيجاد عزم القصور الذاتي حول المحور x **المطلوب إيجاده حيث:**

$$(I_x)_{Total} = (I\ )_{\text{Re}\,c\tan gle} - (I_x)_{Circle} - (I_x)_{Triangle} = 5.7\times 10^6 - 1.624\times 10^6 - 0.09\times 10^6 = 4.046\times 10^6\,mm^4,$$

يجب ملاحظة أن المحور x_o **يشار إليه في جميع الأمثلة السابقة على انه المحور الذي يمر في مركز المساحة. والمساحة الصافية في الشكل في المثال السابق هي :**

$$A = A_{\text{Re}\,c\tan gle} - A_{Circle} - A_{Triangle} = 60\times 80 - \frac{1}{4}\pi(30)^2 - \frac{1}{2}(40)(30) = 3493\ mm^2.$$

<u>العزم القطبي للقصور الذاتي (Polar Moment of Inertia) :</u>

ويكون هذا العزم حول محور ما عمودي على مستوى المساحة ويرمز له بالرمز (I_p) **والحرف** p **للدلالة على انه عزم قطبي (Polar) وتكون قيمة هذا العزم** $I_p = \int r^2 dA$**. حيث** r **هي بعد المساحة المتناهية الصغر** dA **عن المحور العمودي أي بعدها عن نقطة تقاطع هذا المحور مع مستوى المساحة ووحدة هذا العزم هي (** m^4 **أو** Cm^4 **) وقيمته دائما موجبة.**

العزم القطبي كحاصل جمع عزمي قصور:

حيث أن :

$$r^2 = x^2 + y^2$$

وعلى ذلك يكون :

$$I_p = \int \left(x^2 + y^2\right) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA = I_x + I_y$$

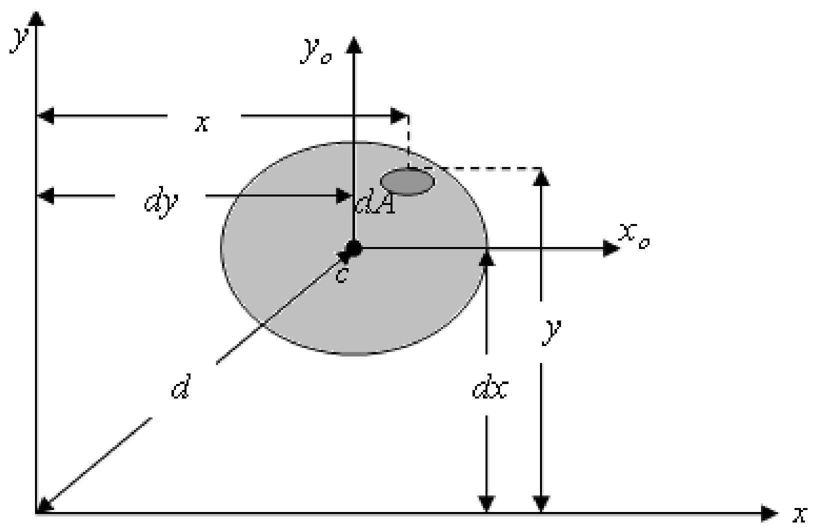
و يجدر الإشارة إلى أن عزم القصور الذاتي يمكن إيجاده بالنسبة لمحاور مائلة وخصوصا عندما يتعلق الأمر بمقاومة المواد (Strength of Material) حيث يكون من اللازم تحديد عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحاور المائلة عن المحاور العادية.

ويمكن الحصول على ذلك بواسطة التكامل أو بواسطة طرق أسهل تطبيقا وهى طريقة المعادلات أو طريقة دائرة موهر(Mohr's Circle) والتي يحتاج الطالب إلى دراستها مستقبلا.

صيغة نظرية النقل لعزم القصور القطبي هي :

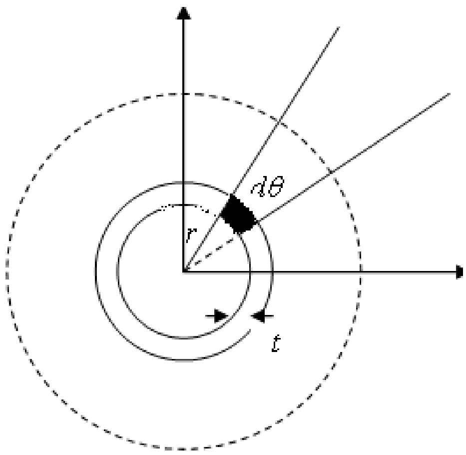
$$I_p = I_{p_c} + Ad^2$$

حيث d هي المسافة بين المحور المار بمركز الثقل والمحور المراد إيجاد عزم القصور القطبي له كما هو مبين بالشكل.



مثال:

مركز المساحة الدائرية المبينة بالشكل عند نقطة الأصل لمجموعة الإحداثيات. اوجد عزم القصور القطبي لهذه المساحة بالنسبة إلى نقطة الأصل. بين كيف يمكن استخدام هذه النتيجة لإيجاد I_x , I_y.



الحل:

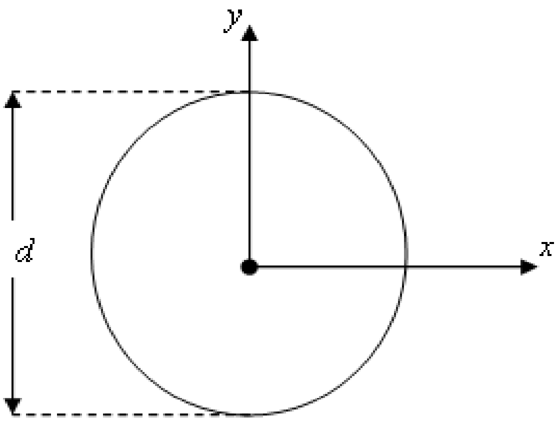
في البداية نوجد عزم القصور الذاتي القطبي I_{p_1} للمساحة الحلقية الرقيقة المبينة في الشكل السابق.

عنصر المساحة dA_1 المبين كمساحة مظللة في الشكل هو :

$$dA_1 = (rd\,\theta)t$$

$$\therefore\ I_{p_1} = \int_A r^2 dA_1 = \int_A r^2 (rd\,\theta)t = r^3 t \int_0^{2\pi} d\,\theta = 2\pi r^3 t$$

يجب ملاحظة انه في المعادلة السابقة عندما تستخدم زاوية كمتغير في التكامل فانه يجب التعبير عنها بالتقدير الدائري. عزم القصور الذاتي القطبي I_p للمساحة الدائرية في الشكل المقابل هو مجموع قيم I_p لجميع المساحات الحلقية .



في الشكل المقابل عندما :

$$t = dr$$

تصبح النتيجة النهائية :

$$I_p = \int_0^{d/2} 2\pi r^3 dr ,$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} ,$$

وحيث أن $I_p = I_x + I_y$ **ومن التماثل في الشكل**

نجد أن :

$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

حاصل ضرب القصور الذاتي (Product of Inertia) :

تعريف:

إذا كانت m **كتلة نقط مادية عند النقطة** (x, y) **فيقال للكمية** mxy **بأنها حاصل ضرب للقصور الذاتي للجسم المتماسك حول المحورين** (x, y)**.**

وعامة هناك ثلاثة حواصل ضرب للقصور الذاتي للجسم المتماسك حول المحاور الكرتيزية المعتادة نعرفها بالتكاملات الآتية :

$$I_{xy} = \int xydm ,......... ......(1)$$

$$I_{xz} = \int xzdm ,......... ......(2)$$

$$I_{yz} = \int yzdm ,......... ......(3)$$

هذه الكميات من الممكن أن تكون موجبة أو سالبة أو صفر حيث إنها حواصل ضرب إحداثيات مختلفة. وللصفيحة الرقيقة الواقعة في المستوى (x, y) **مثلا ينعدم حاصل ضرب القصور الذاتي حول المحورين** (x, z) **وكذلك ينعدم حاصل ضرب القصور الذاتي حول المحورين** (y, z)

أي أن :

$$I_{xz} = I_{yz} = 0,......... ......(4)$$

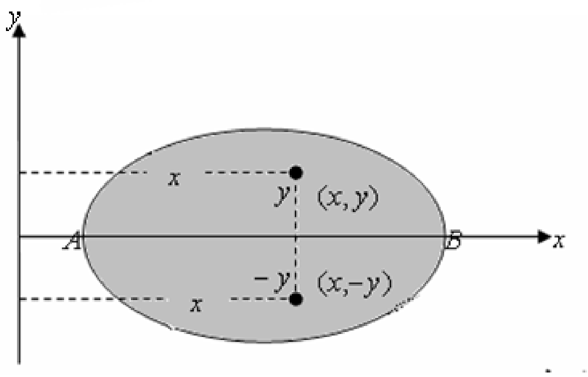
المحاور الأساسية:

إذا تلاشى حاصل ضرب القصور الذاتي للجسم حول أي محورين متعامدين فانه يقال أن هذين المحورين يكونان ما يسمى بالمحاور الأساسية فمثلا إذا كان $I_{xy} = 0$ بالنسبة إلى المحورين (ox , oy) فان هذين المحورين يكونان ما يسمى بالمحاور الأساسية ويسمى عزم القصور الذاتي بالنسبة إلى هذه المحاور بعزم القصور الذاتي الأساسية للجسم.

خواص المحاور الأساسية:

أولا : أي محور تماثل في الجسم يكون مع أي محور عمودي عليه محورين أساسين.

فإذا كان المحور AB محور تماثل في الجسم نأخذه كمحور x . ونأخذ أي نقطة o عليه ومنها نأخذ المحور oy.



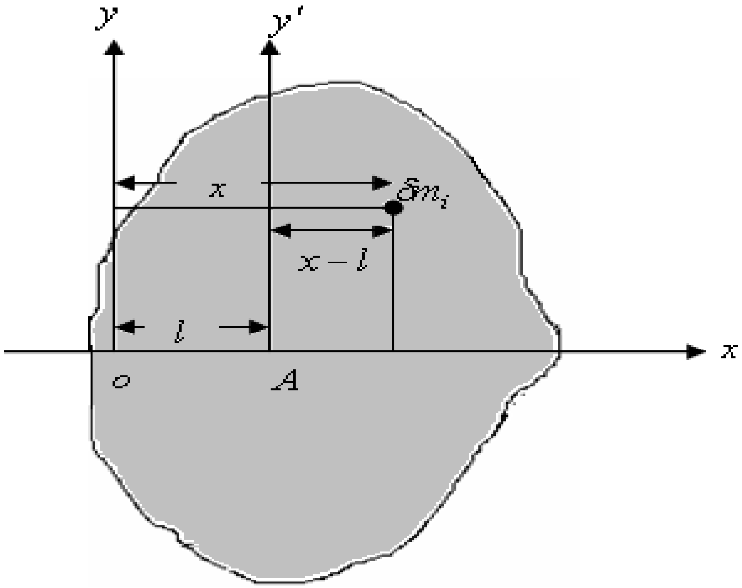
من الواضح أن كل نقطة (x, y) في الجزء العلوي يقابلها نقطة مماثلة $(x,-y)$ في الجزء السفلى أي أن المجموع الكلى لحواصل الضرب :

$$\lim_{\substack{\delta m_i \to 0 \\ K \to \infty}} \sum_{i=1}^{K} x_i y_i \delta m_i = \int xydm = 0$$

أي أن حاصل ضرب القصور الذاتي حول محور تماثل ومحور عمودي عليه يتلاشى (أي يكونان محاور أساسية).

ثانيا : بالنسبة لجسم على هيئة صفيحة مستوية رقيقة فان كل مستقيم في مستواه يكون محور أساسي .

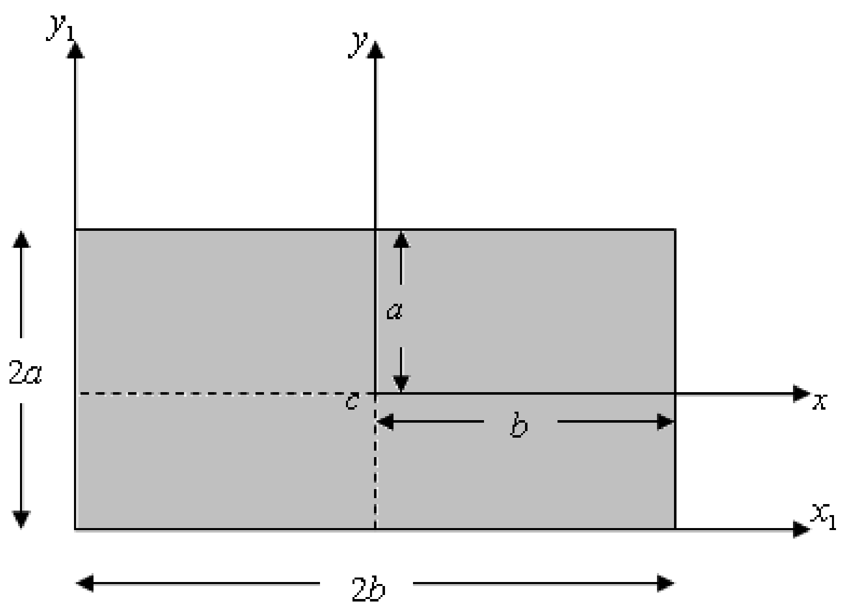
نأخذ محور ما وليكن ox في مستوى الصفيحة ونفرض نقطة عليه A ومنها نأخذ محور عمودي عليه وليكن هو المحور Ay' فيكون حاصل ضرب القصور الذاتي بالنسبة للمحورين Ax , Ay' هو $I_{xy'} = \sum xy'\delta m_i$ فإذا كان المحور oy يبعد بمقدار l عن Ay فيكون :



$$I_{xy'} = \sum (x-l)\, y\, \delta m_i = \sum xy\, \delta m_i - l \sum y\, \delta m_i$$
$$\therefore\ I_{xy'} = I_{xy} - lM\, \bar{y},$$

حيث M كتلة الجسم ، $\bar{y}$ الاحداثي y لمركز الثقل الجسم وعلى ذلك يمكننا التحكم في قيمة l بحيث يتلاشى $I_{xy'}$. أي يكون هذين المحورين Ax, Ay' محاور أساسية.

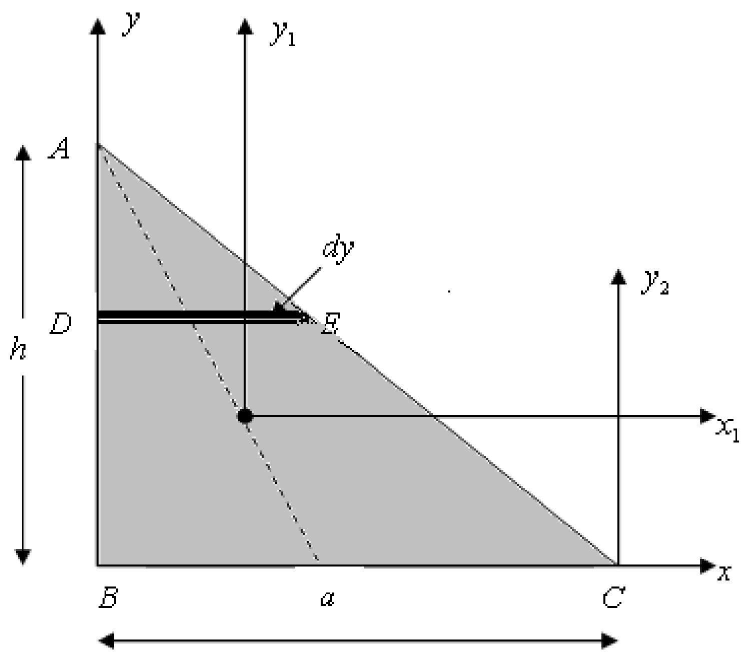
حاصل ضرب القصور لصفيحة على شكل مستطيل:



واضح أن حاصل ضرب القصور الذاتي حول محورين متعامدين ويمران بمركز ثقل المستطيل ويوازيان ضلعين متعامدين يتلاشى.

$$I_{x_1y_1} = I_{xy} + mab\,,$$
$$\because\ I_{xy} = 0,$$
$$\therefore\ I_{x_1y_1} = mab\,.$$

حاصل ضرب القصور الذاتى لصفيحة رقيقة على شكل مثلث قائم الزاوية حول ضلعى القائمة :



نقسم المثلث إلى شرائح عبارة عن قضيب رفيع موازى للقاعدة وسمكه dy وطوله x فيكون:

$$dm = \rho x dy\,,$$
$$\int dI_{xy} = \int \frac{x}{2} y dm\,,$$
$$\therefore\ I_{xy} = \rho \int_0^h \frac{x^2}{2} y dy\,,$$

ومن تشابه المثلثين $ABC\,, ADE$ ينتج أن :

$$\frac{x}{a}=\frac{h-y}{h},$$

$$\therefore\ I_{xy}=\frac{a^2\rho}{2}\int_0^h\left(\frac{h-y}{h}\right)^2 ydy,$$

$$I_{xy}=\frac{\rho a^2}{2h^2}\int_0^h\left(h^2-2hy+y^2\right)ydy=\frac{\rho a^2h^2}{24}.$$

$$m=\rho\int_0^h\left(\frac{h-y}{h}\right)ady=\frac{\rho ah}{2}.$$

$$I_{xy}=\frac{\rho a^2h^2}{24}\frac{2m}{\rho ah}=\frac{1}{12}mah.$$

كذلك يمكن إيجاد حاصل ضرب القصور الذاتي حول المحورين (x_1,y_1) كما هو مبين بالشكل.

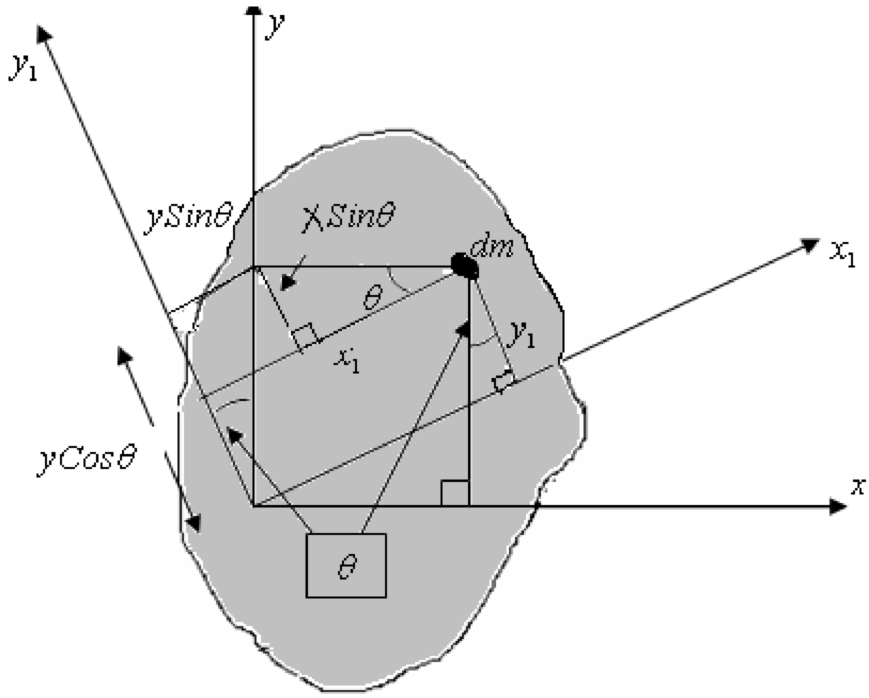
$$I_{x_1y_1}=\frac{1}{12}mah-m\left(\frac{a}{3}\right)\left(\frac{h}{3}\right)=-\frac{1}{36}mah.$$

وأيضا يمكن إيجاد حاصل ضرب القصور الذاتي حول المحورين (x_2,y_2) كما هو مبين بالرسم.

$$I_{x_2y_2}=-\frac{1}{36}mah+m\left(\frac{-2a}{3}\right)\left(\frac{h}{3}\right)=-\frac{1}{4}mah.$$

نظرية المحاور المائلة :

إذا علم عزم القصور الذاتي للجسم بالنسبة إلى أي محورين متعامدين I_x, I_y وكذلك حاصل ضرب القصور الذاتي بالنسبة إلى هذين المحورين I_{xy} فانه يمكن إيجاد عزم القصور الذاتي بالنسبة إلى أي محور ox_1 يمر بالنقطة o (نقطة الأصل) ويميل على المحاور الأصلية بزاوية θ وتسمى هذه النظرية بنظرية المحاور المائلة.



لإيجاد ذلك نأخذ محور ثان مساعد يتعامد مع المحور ox_1 **وليكن** oy_1 **وعلى ذلك فهو يميل بزاوية** $90+\theta$ **على المحاور الأصلية. نأخذ عنصر كتلة متناهية في الصغر** dm **من الجسم إحداثياتها بالنسبة للمحورين** ox, oy **هو** (x, y)**.**

نفرض أن (x_1, y_1) **هي إحداثيات العنصر بالنسبة إلى المحورين** ox_1, oy_1 **فيكون عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحورين المائلين هما :**

$$I_{x_1} = \int y_1^2\, dm, \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots(1)$$

$$I_{y_1} = \int x_1^2\, dm, \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots(2)$$

ويمكن إيجاد قيم x_1, y_1 **بدلالة** x, y**.**

$$x_1 = xCos\,\theta + ySin\,\theta, \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots(3)$$

$$y_1 = yCos\,\theta - xSin\,\theta, \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots(4)$$

وبالتعويض من (3) ، (4) **في** (1) ، (2) **ينتج أن :**

$$I_{x_1} = \int (yCos\,\theta - xSin\,\theta)^2\, dm,$$

$$I_{y_1} = \int (xCos\,\theta + ySin\,\theta)^2\, dm,$$

أي أن :

$$I_{x_1} = Cos^2\theta\int y^2 dm - 2Sin\,\theta Cos\,\theta\int xydm + Sin^2\theta\int x^2 dm\,,$$

$$I_{x_1} = Cos^2\theta I_x - 2I_{xy}Sin\,\theta Cos\,\theta + I_y Sin^2\theta, \qquad \text{.........} \quad \text{.......}(5)$$

وبالمثل

$$I_{y_1} = Sin^2\theta I_x + 2I_{xy}Sin\,\theta Cos\,\theta + Cos^2\theta I_y, \qquad \text{.........} \quad \text{......}(6)$$

ويمكن استنتاج (6) **من** (5) **وذلك بوضع** $\theta + 90$ **بدلا من** θ **حيث المحور** oy_1 **يميل بزاوية** $\theta + 90$ **على المحاور الأصلية (لاحظ أن** θ **زاوية ثابتة).**

وكذلك يمكن إيجاد حاصل ضرب القصور الذاتي حول المحورين ox_1, oy_1 **كما يلي :**

$$I_{x_1y_1} = -\int x_1 y_1 dm, \qquad \text{.........} \quad \text{..........} \quad \text{..........} \quad ..(7)$$

$$I_{x_1y_1} = \int(xCos\,\theta + ySin\,\theta)(yCos\,\theta - xSin\,\theta)dm = I_{xy}\left(Cos^2\theta - Sin^2\theta\right) + I_x Sin\,\theta Cos\,\theta - I_y Sin\,\theta Cos\,\theta.$$

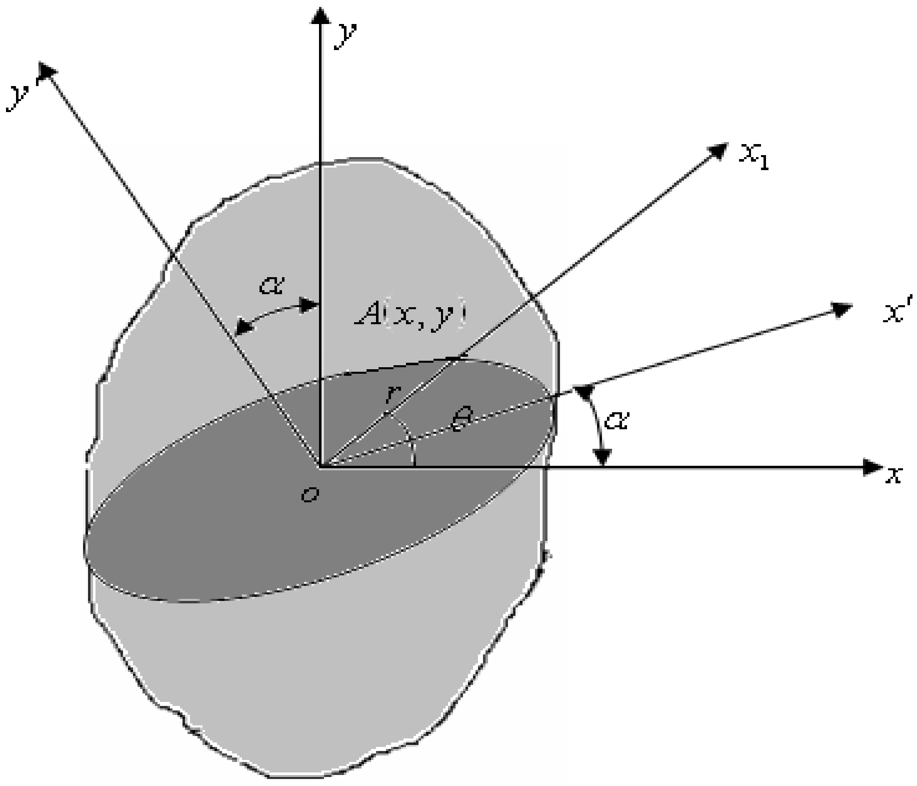
$$\therefore\ I_{x_1y_1} = \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)Sin\,2\theta + I_{xy}Cos\,2\theta, \qquad \text{.........} \quad \text{......}(8)$$

وبذلك أمكن إيجاد حاصل ضرب القصور الذاتي لأي جسم حول محورين متعامدين آخرين يمران بالنقطة o **ويميلان على المحاور الأصلية بزاوية** θ **بدلالة عزم القصور الذاتي وحاصل ضرب القصور الذاتي بالنسبة إلى محورين متعامدين أي معرفة** I_x, I_y, I_{xy} **فإذا تلاشى** $I_{x_1y_1}$ **فان المحورين الجديدين سوف يكونان محاور أساسية. وبوضع الطرف الأيسر مساويا للصفر في العلاقة السابقة** (8) **نجد أن :**

$$I_{xy}Cos\,2\theta + \frac{1}{2}\sin\,2\theta\left(I_x - I_y\right) = 0$$

$$\therefore\ \tan\,2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}, \qquad \text{.........} \quad \text{..........} \quad \text{.........}(9)$$

قطع ناقص القصور الذاتي :



نفرض خط مستقيم ox_1 يميل على محور x بزاوية θ فيكون :

$$I_{x_1} = Cos^2\theta I_x - 2Cos\,\theta Sin\,\theta I_{xy} + Sin^2\theta I_y ,.........\ ......(1)$$

وذلك باستخدام نظرية المحاور المائلة . فإذا فرضنا أن A نقطة على الخط ox_1 لها الإحداثيات (x, y) بالنسبة إلى المحاور oxy فيكون :

$$\left.\begin{array}{l} x = rCos\,\theta, \\ y = rSin\,\theta. \end{array}\right\},.........\ ....\ ....\ ....\ ....\ ....\ ...(2)$$

بالتعويض من (2) في (1) نجد أن المعادلة (1) تكون في الصورة التالية:

$$r^2 I_{x_1} = x^2 I_x - 2xyI_{xy} + y^2 I_y = C ,.........\ ......(3)$$

المعادلة (3) **تمثل المحل الهندسي للنقطة** A **، وأيضا تمثل هذه المعادلة قطعا مخروطيا مركزه** o **وحيث أن عزم القصور الذاتي حول أي محور دائما مقدار محدود لا يساوى** ∞ **فنجد أن** r **لا يمكن أن تساوى ما لانهاية ومن ثم هذه المعادلة لابد أن تمثل معادلة قطع ناقص. الثابت** C **اختياري ويمثل مقياسا لرسم هذا القطع.**

لكتابة هذه المعادلة في ابسط صورة ندير المحاور بزاوية α **حيث :**

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}, \qquad \ldots\ldots\ldots(4)$$

أي نكتبها بالنسبة إلى محاور القطع الأساسية كمحورين متعامدين (المطلوب حذف معامل xy **من المعادلة) .**

$\because$ **النقطة** A **إحداثياتها** (x, y) **بالنسبة إلى المحاور الأصلية والنقطة** A **إحداثياتها** (x', y') **بالنسبة إلى المحاور الجديدة من الرسم نجد أن :**

$$\left.\begin{aligned} x &= x'Cos\,\alpha - y'Sin\,\alpha, \\ y &= y'Cos\,\alpha + x'Sin\,\alpha \end{aligned}\right\}, \qquad \ldots\ldots\ldots(5)$$

والتعويض من المعادلة (5) **في معادلة** (3) **نجد أن :**

$$(x'Cos\alpha - y'Sin\alpha)^2 I_x - 2(x'Cos\alpha - y'Sin\alpha)(y'Cos\alpha + x'Sin\alpha)I_{xy} + (y'Cos\alpha + x'Sin\alpha)I_y = C$$

$$x'^2\left[Cos^2\alpha I_x - 2Sin\,\alpha Cos\,\alpha I_{xy} + Sin^2\alpha I_y\right] + y'^2\left[Sin^2\alpha I_x + 2Sin\,\alpha Cos\,\alpha I_{xy} + Cos^2\alpha I_y\right]$$
$$-2x'y'\left[Sin\,\alpha Cos\,\alpha I_x + I_{xy}Cos^2\alpha - I_{xy}Sin^2\alpha + I_y Sin\,\alpha Cos\,\alpha\right] = C, \qquad \ldots\ldots(6)$$

$$\because\ I_{x'} = Cos^2\alpha I_x - 2Sin\,\alpha Cos\,\alpha I_{xy} + Sin^2\alpha I_y,$$

وأيضا

$$I_{y'} = Sin^2\alpha I_x + 2Sin\,\alpha Cos\,\alpha I_{xy} + Cos^2\alpha I_y,$$

$$I_{x'y'} = I_{xy}Cos\,2\alpha + \frac{1}{2}Sin\,2\alpha\left(I_x - I_y\right).$$

$\because$ **هذين المحورين يكونان ما يسمى بالمحاور الأساسية**

$$\therefore\ I_{xy} = 0$$

وبذلك يمكن كتابة المعادلة (6) **في الصورة :**

$$x'^2 I_{x'} + y'^2 I_{y'} - 2x'y' I_{x'y'} = C$$
$$\because I_{x'y'} = 0$$

وبذلك نجد أن معادلة قطع ناقص القصور سوف تتحول إلى المعادلة:

$$I_{x'} x'^2 + y'^2 I_{y'} = C,$$
$$or$$
$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots(7)$$

حيث أن :

$$\left. \begin{aligned} C &= r^2 I_{x_1}, \\ a^2 &= \frac{C}{I_{x'}}, \\ b^2 &= \frac{C}{I_{y'}}, \end{aligned} \right\}, \ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (8)$$

وباختيار الثابت $C = ma^2 b^2$**.**

$$\therefore a^2 = \frac{I_{y'}}{m}, \quad b^2 = \frac{I_{x'}}{m}, \ldots\ldots\ldots \ .(9)$$

المعادلة (7) **هي معادلة قطع ناقص القصور الذاتي منسوبة إلى محاوره الأساسية كمحور إحداثيات ومن هنا نرى أن معامل** $x'y'$ **يتلاشى ولكن هذا المعامل هو حاصل ضرب القصور الذاتي بالنسبة إلى هذه المحاور . أي أن المحاور الأساسية لقطع ناقص القصور الذاتي عند أي نقطة هي المحاور الأساسية عند هذه النقطة.**

ولإيجاد معادلة قطع ناقص القصور الذاتي عند أي نقطة o ***:***

1- نختار محاور ox, oy بحيث يمكن حساب I_x, I_y, I_{xy}.
2- نوجد المحاور الأساسية عند o من العلاقة :

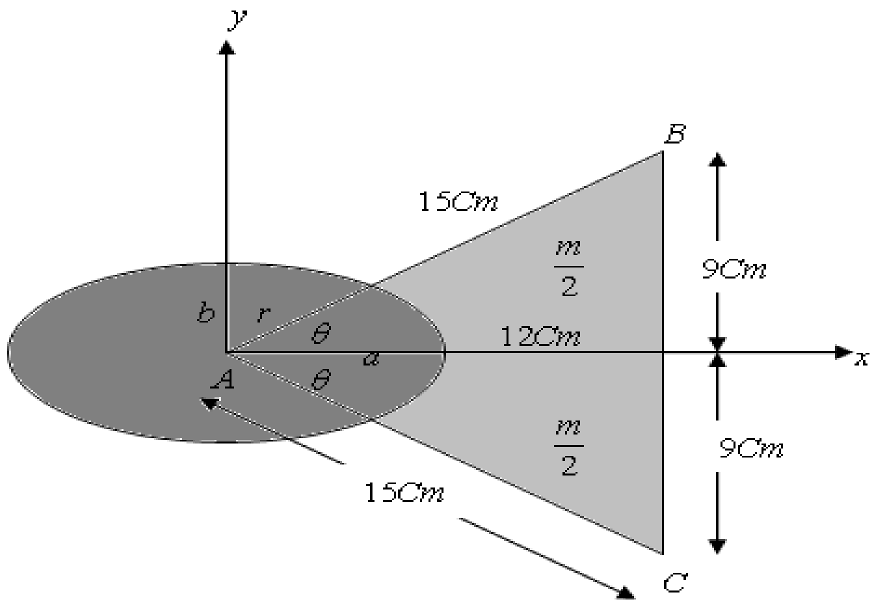
$$\tan 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x},$$

3- نوجد a^2, b^2 من العلاقات السابقة.

مثال:

صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوي الساقين ABC فيه $AB = AC = 15\,Cm$ ، $BC = 18\,Cm$. اوجد معادلة قطع ناقص القصور الذاتي عند A ثم استنتج منه عزم القصور الذاتي حول المحور AC .

الحل:



نأخذ المحاور ox, oy تمر بالنقطة A وبفرض أن كتلة المثلث m

$$I_x = 2\left[\frac{1}{6}\left(\frac{m}{2}\right)(9)^2\right] = \frac{27}{2}m, \qquad (1)$$

$$I_y = \frac{1}{2}m(12)^2 = 72\,m, \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \because b^2 &= \frac{I_x}{m} = \frac{27}{2}, \\ a^2 &= \frac{I_y}{m} = 72. \end{aligned}\right\}, \qquad (3)$$

$\therefore$ معادلة قطع ناقص القصور الذاتي عند A هي :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\frac{x^2}{72}+\frac{2y^2}{27}=1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

معادلة الخط المستقيم AC هي :

$$y = x\tan\theta$$
$$y=\frac{3}{4}x, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

بحل معادلة المستقيم AC مع معادلة القطع الناقص لإيجاد نقطة التقاطع D

$$\frac{x^2}{72}+\frac{x^2}{24}=1$$

ومنها

$$x^2=18, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

وحيث أن

$$r^2=x^2+y^2=x^2+\frac{9x^2}{16},$$
$$r^2=\frac{25x^2}{16}=\frac{25\times 18}{16}=\frac{25\times 9}{16}, \ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

وحيث أن r^2 تتناسب تناسبا عكسيا مع عزم القصور الذاتي حول المحور AC

$$r^2=\frac{C}{I_{AC}}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

وبأخذ $C=ma^2b^2$

$$\therefore I_{AC}=\frac{ma^2b^2}{r^2}=\frac{12\times 72}{25}m,$$
$$I_{AC}=34.56\,m, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

الأجسام متكافئة عزم القصور :-

يقال أن جسمين متكافئين في عزم القصور الذاتي إذا كان :

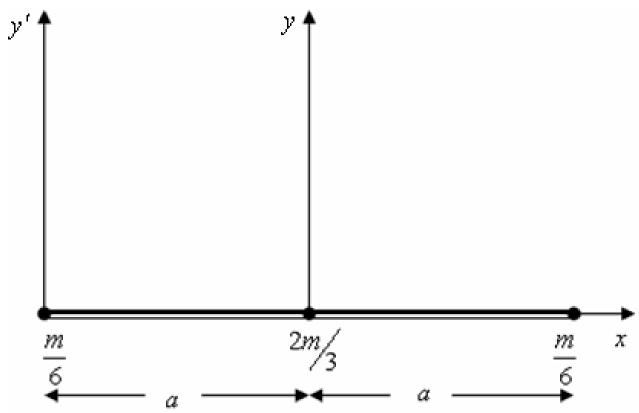
عزم القصور الذاتي لإحداهما حول أي محور يكون مساويا عزم القصور الذاتي للآخر حول نفس المحور وهذا يحدث إذا كان :

1- للجسمين نفس الكتلة.
2- للجسمين نفس مركز الثقل.
3- للجسمين نفس المحاور الأساسية عند مركز الثقل.
4- عزم القصور الذاتي حول المحاور الأساسية عند مركز الثقل متساويان.

مثال (1):

قضيب منتظم كتلته m وطوله $2a$ اثبت انه متساوي العزم مع الكتلتين $\frac{m}{6}$ عند كل من طرفيه ، $\frac{2m}{3}$ عند منتصفه.

الحل :



عزم القصور الذاتي حول محور عمودي ويمر بمركز ثقل القضيب :-

$$I_y = \frac{m}{6}(a)^2 + \frac{m}{6}(a)^2 = \frac{1}{3}ma^2.$$

هو نفسه عزم القصور الذاتي حول محور يمر بمركز ثقل القضيب كما وجدناه من قبل.

كذلك عزم القصور الذاتي حول محور يوازى المحور y (مار بمركز ثقل القضيب) ويمر بطرفه.

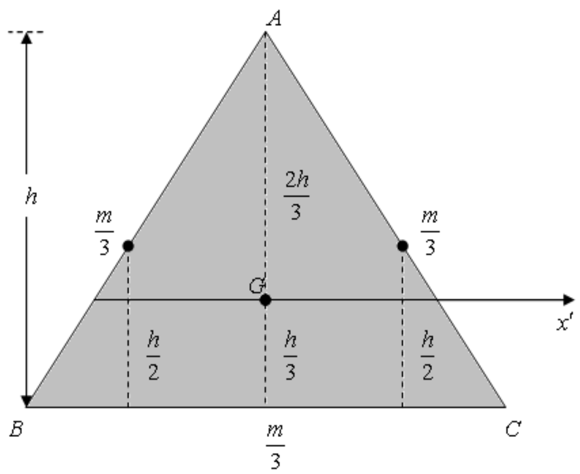
$$I_y = \frac{1}{6}m(2a)^2 + \frac{2m}{3}(a^2) = \frac{4}{3}ma^2.$$

$\therefore$ القضيب متكافئ عزم القصور الذاتي مع ثلاثة كتل $\frac{m}{6}$ عند كل من طرفيه ، $\frac{2m}{3}$ عند منتصفه حيث m كتلة القضيب.

مثال (2):

اثبت أن عزم القصور الذاتي لصفيحة رقيقة على شكل مثلث حول أي محور متساوي مع عزم القصور الذاتي لثلاثة كتل مقدار كل منها $\frac{1}{3}$ كتلة المثلث وموضوعة في منتصف أضلاع المثلث.

الحل:



عزم القصور الذاتي حول قاعدة المثلث ABC :-

$$I_{BC} = \frac{m}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{m}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2,$$

$$\therefore\ I_{BC} = \frac{1}{6} mh^2 ,.........\ ......(1)$$

وهى نفس عزم القصور الذاتي للمثلث حول قاعدة المثلث ، عزم القصور الذاتي حول محور يمر بمركز ثقل المثلث x'.

$$I_{x'} = \frac{2m}{3}\left(\frac{h}{2} - \frac{h}{3}\right)^2 + \frac{m}{3}\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{2m}{3}\left(\frac{h}{6}\right)^2 + \frac{mh^2}{27},$$

$$I_{x'} = \frac{1}{18} mh^2 ,.........\ ......(2)$$

$\therefore$ المثلث متكافئ عزم القصور الذاتي مع ثلاثة جسيمات متساوية الكتل وواقعة في منتصف أضلاعه وتساوى كتلة كل منهما $\frac{1}{3}$ كتلة المثلث.

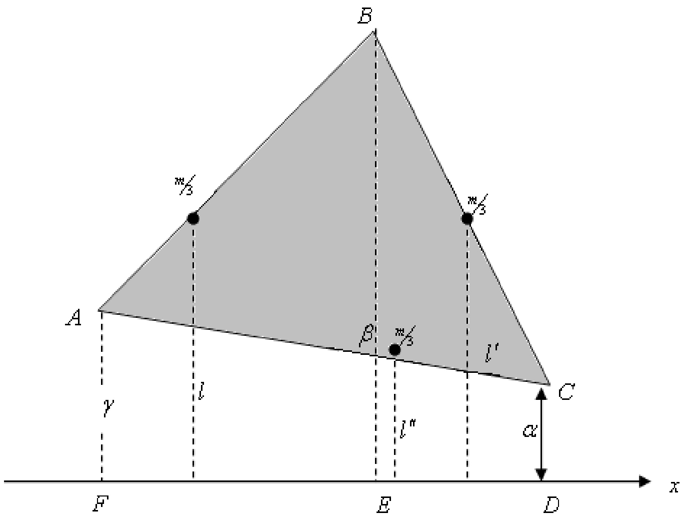
مثال (3):

اثبت انه إذا كانت α, β, γ هي أبعاد رؤوس صفيحة على شكل مثلث كتلته m عن مستقيم ما في مستواه فان القصور الذاتي للصفيحة حول هذا المستقيم هو

$$\frac{m}{6}\left[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma\right].$$

الحل :

$\because$ المثلث يكافئ في عزم قصوره الذاتي ثلاثة كتل متساوية $\frac{m}{3}$ عند منتصفات أضلاعه فيكون عزم القصور الذاتي للصفيحة على شكل مثلث كما بالرسم هي :



$$I_x=\frac{m}{3}l^2+\frac{m}{3}l'^2+\frac{m}{3}l''^2,\dots\dots\dots\ \dots\dots(1)$$

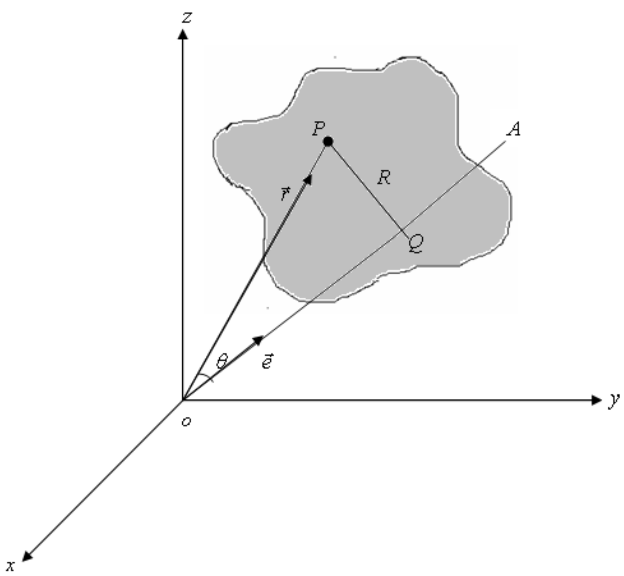
ومن هندسة الشكل:

$$\left.\begin{aligned} l&=\frac{\gamma+\beta}{2},\\ l'&=\frac{\alpha+\beta}{2},\\ l''&=\frac{\alpha+\gamma}{2},\end{aligned}\right\},\dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ ..(2)$$

بالتعويض من (2) في (1) ينتج أن :

$$\frac{m}{6}\left[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma\right]$$

عزم القصور الذاتي لجسم متماسك حول محور معلوم يمر بنقطة معلومة :



نفرض أن النقطة المعلومة هي o وان المحور المعلوم هو oA وليكن $\vec{e}$ متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{oA}$. نأخذ o نقطة أصل لمجموعة محاور oz, oy, ox. حيث أن المحور oA معلوم فان متجه الوحدة $\vec{e}$ يكون معلوما وليكن :

$$\vec{e} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}, \qquad \text{.........} (1)$$

أي أن جيوب تمام الزوايا التي يصنعها oA مع محاور الإحداثيات oz, oy, ox هي على الترتيب n, m, l.

اخذ عنصر من الجسم المتماسك كتلته dM عند نقطة P التي إحداثياتها (x, y, z) ومتجه موضع العنصر هو $\vec{r}$ ، أي أن $\overrightarrow{oP} = \vec{r}$. نسقط العمود PQ على المستقيم oA ونفرض أن طول هذا العمود يساوي R وان الزاوية بين $\vec{e}, \vec{r}$ هي θ. عزم القصور الذاتي I للجسم المتماسك حول المحور oA يتعين من :

$$I = \int R^2 dM \qquad \text{.........} (2)$$

من دراستنا للمتجهات نعلم أن :

$$\left|\vec{r} \wedge \vec{e}\right| = r \operatorname{Sin} \theta = R$$

ومن جهة آخري فان :

$$\vec{r} \wedge \vec{e} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ l & n & m \end{vmatrix} = (ny - mz)\vec{i} + (lz - nx)\vec{j} + (mx - ly)\vec{k}$$

أي أن :

$$R^2 = \left|\vec{r} \wedge \vec{e}\right|^2 = (ny - mz)^2 + (lz - nx)^2 + (mx - ly)^2$$
$$\therefore\ R^2 = l^2\left(y^2 + z^2\right) + m^2\left(z^2 + x^2\right) + n^2\left(x^2 + y^2\right) - 2nmyz - 2nlxz - 2mlxy$$

بالتعويض عن R^2 في نجد أن :

$$I = l^2\int\left(y^2 + z^2\right)dM + m^2\int\left(z^2 + x^2\right)dM + n^2\int\left(x^2 + y^2\right)dM - 2nm\int yzdM - 2nl\int xzdM - 2ml\int xydM$$

$\therefore$ عزم القصور الذاتي للجسم المتماسك حول المحور oA يأخذ الصورة :

$$I = l^2 I_x + m^2 I_y + n^2 I_z - 2nmI_{yz} - 2nlI_{zx} - 2mlI_{xy} ,.........\ .(3)$$

العلاقة الأخيرة تعطينا عزم القصور الذاتي حول محور معلوم جيوب تمام اتجاهه n, m, l ويمر بنقطة معلومة o بدلالة عزوم و حواصل ضرب القصور الذاتي حول المحاور والمستويات الكرتيزية المارة بهذه النقطة المعلومة o.

مصفوفة القصور الذاتي :

نضع $I_{11} = I_x$ ، $I_{22} = I_y$ ، $I_{33} = I_z$ ، $I_{12} = -I_{xy}$ ، $I_{23} = -I_{yz}$ ، $I_{13} = -I_{xz}$ وتكون مصفوفة القصور الذاتي $\vec{I}$ في الصورة :

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{pmatrix}$$

السطح الناقص للقصور :

المعادلة (3) التي سبق الحصول عليها تعطينا عزم القصور الذاتي لجسم متماسك I حول المحور oA. نختار نقطة P على المستقيم oA بحيث $oP = \frac{1}{\sqrt{I}}$. إذا كانت إحداثيات النقطة P هي (x, y, z) فان :

$$x = \frac{l}{\sqrt{I}}, y = \frac{m}{\sqrt{I}}, z = \frac{n}{\sqrt{I}}$$

أي أن :

$$l = x\sqrt{I}, m = y\sqrt{I}, n = z\sqrt{I}, \dots\dots\dots \quad (4)$$

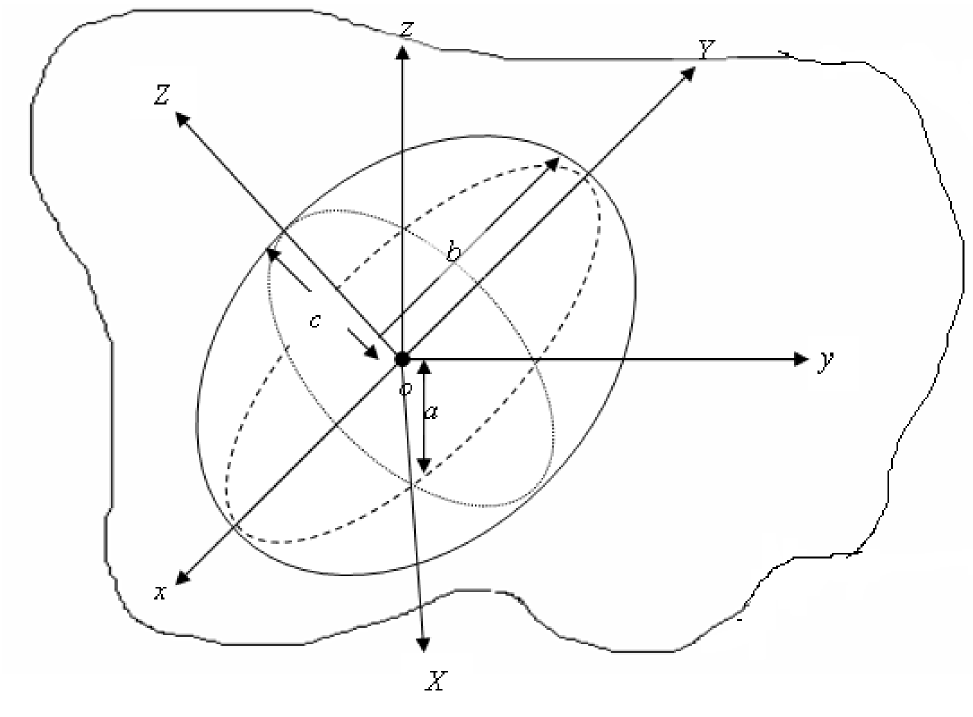
وبالتعويض من (4) **في** (3) **نجد أن :**

$$I = x^2 II_x + y^2 II_y + z^2 II_z - 2yzII_{yz} - 2zxII_{zx} - 2xyII_{xy}$$

أو هي :

$$x^2 I_{11} + y^2 I_{22} + z^2 I_{33} + 2yzI_{23} + 2zxI_{31} + 2xyI_{12} = 1, \dots\dots\dots \quad (5)$$

المعادلة (5) **تمثل سطح ثنائي . حيث أن المعاملات** I_{11}, I_{22}, I_{33} **هي عزوم القصور الذاتي وبالتالي فهي كميات موجبة وكذلك البعد** oP $\left(oP = \frac{1}{\sqrt{I}}\right)$ **دائما محدود. لذلك يكون السطح** (5) **هو سطح ناقص. أي أن المحل الهندسي للنقطة** $P(x, y, z)$ **بحيث** $oP = \frac{1}{\sqrt{I}}$ **هو السطح** (5) **ويسمي السطح الناقص للقصور الذاتي حول النقطة** o**.**



المحاور الرئيسية للقصور الذاتي :

المحاور الرئيسية للقصور الذاتي عند نقطة o هي المحاور التي تكون لها حواصل ضرب القصور الذاتي مساوية الصفر. إذا كانت oZ , oY , oX محاور رئيسية للقصور فان :

$$I_{XY} = I_{YZ} = I_{ZX} = 0$$

وفي هذه الحالة فان معادلة السطح الناقص للقصور (5) تأخذ الصورة البسيطة :

$$I_1 X^2 + I_2 Y^2 + I_3 Z^2 = 1, \qquad (6)$$

حيث I_3 , I_2 , I_1 هي عزوم القصور الذاتي حول المحاور الرئيسية oZ , oY , oX علي الترتيب وتسمي عزوم القصور الذاتي الرئيسية عند o.

يمكن كتابة معادلة القصور الذاتي للقصور (6) في الصورة القياسية :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1, \qquad (7)$$

حيث :

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_1}}, b = \frac{1}{\sqrt{I_2}}, c = \frac{1}{\sqrt{I_3}}$$

المحاور الرئيسية للقصور الذاتي oZ , oY , oX وكذلك القيم c, b, a موضحة بالشكل السابق.

كذلك بالنسبة إلى المحاور الرئيسية oZ , oY , oX فان العلاقة (3) تأخذ الصورة البسيطة :

$$I = l^2 I_X + m^2 I_Y + n^2 I_Z, \qquad (8)$$

أو هي :

$$I = l^2 I_1 + m^2 I_2 + n^2 I_3, \qquad (9)$$

وسنأخذ المحاور الرئيسية عند نقطة مثل o كمحاور ثابتة في الجسم وتدور معه وذلك لتبسيط دراسة حركة الجسم المتماسك في ثلاث أبعاد. ونظرا لأهمية المحاور الرئيسية عند نقطة فإننا سنوضح فيما يلي طريقة إيجاد هذه المحاور.

طريقة تعيين المحاور الرئيسية وعزوم القصور الذاتى الرئيسية :

يتضح مما سبق أن المحاور الرئيسية تقطع علي التعامد السطح النـاقص للقصـور. إذا كانـت P نقطة تقاطع محور رئيسي مع السطح الناقص للقصور الذي معادلته :

$$F(x,y,z) = I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 + 2I_{23}yz + 2I_{31}zx + 2I_{12}xy - 1 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

فان كلا من المتجهين (x,y,z) ، $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ يمثل نسب $\vec{oP}$ ، أي أن :

$$\frac{F_x}{x} = \frac{F_y}{y} = \frac{F_z}{z}, \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

حيث :

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial F}{\partial x} = 2I_{11}x + 2I_{31}z + 2I_{12}y, \\ F_y &= \frac{\partial F}{\partial y} = 2I_{22}y + 2I_{23}z + 2I_{12}x, \\ F_z &= \frac{\partial F}{\partial z} = 2I_{33}z + 2I_{23}y + 2I_{31}x, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

نلاحظ أن :

$$xF_x + yF_y + zF_z = 2\left(I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 + 2I_{23}yz + 2I_{31}zx + 2I_{12}xy\right) = 2$$

وذلك باستخدام المعادلة (10).

بضرب حدي النسبة الأولي من التناسب في المعادلة (11) في x وحدي النسبة الثانية في y وحدي النسبة الثالثة في z وجمع مقدمات وتوالي النسب الناتجة نجد أن :

$$\frac{xF_x + yF_y + zF_z}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2}{(oP)^2} = 2I,$$

حيث I عزم القصور الذاتي الرئيسي حول المحور الرئيسي op ، أي أن :

$$\frac{F_x}{x} = \frac{F_y}{y} = \frac{F_z}{z} = 2I,$$

$$\therefore\ F_x = 2Ix, F_y = 2Iy, F_z = 2Iz, ...(13)$$

بالتعويض عن F_x, F_y, F_z من (12) في (13) نحصل علي مجموعة المعادلات :

$$\begin{aligned} I_{11}x + I_{12}y + I_{31}z &= Ix, \\ I_{12}x + I_{22}y + I_{23}z + &= Iy, \\ I_{31}x + I_{23}y + I_{33}z &= Iz, \end{aligned}$$

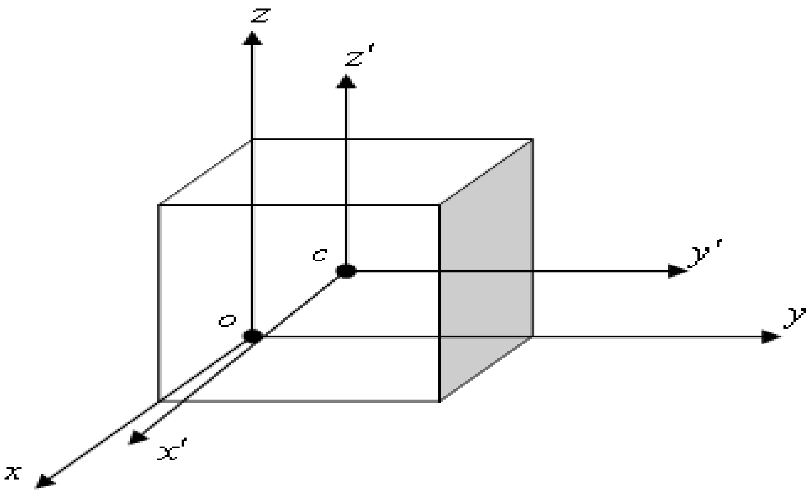
بملاحظة أن $I_{ij} = I_{ji}$ ، $i, j = 1,2,3$ فان مجموعة المعادلات الأخيرة تأخذ الصورة :

$$\left.\begin{aligned} (I_{11} - I)x + I_{12}y + I_{13}z = 0, \\ I_{21}x + (I_{22} - I)y + I_{23}z = 0, \\ I_{31}x + I_{32}y + (I_{33} - I)z = 0, \end{aligned}\right\}, ...(14)$$

المعادلات (14) هي ثلاث معادلات في ثلاث مجاهيل z, y, x التي تحدد نقطة تقاطع محور رئيسي مع السطح الناقص للقصور (10) وهي كذلك تحدد نسب اتجاه المحور الرئيسي. ومن المعروف جبريا أن المعادلات (14) يكون لها حل بخلاف الحل التافه $x = y = z = 0$ إذا تلاشي محدد معاملاتها ، أي إذا تحقق الشرط :

$$\begin{vmatrix} I_{11} - I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - I \end{vmatrix} = 0$$

جذور هذه المعادلة (من الدرجة الثالثة) تعطي عزوم القصور الذاتي الرئيسية للجسم المتماسك عند o ولتكن I_3, I_2, I_1. بالتعويض عن كل من هذه القيم الثلاثة في مجموعة المعادلات الثلاثة في z, y, x نحصل علي اتجاهات المحاور الرئيسية.



مثال (1):

اوجد معادلة السطح الناقص للقصور وكذلك عزوم القصور الرئيسية والمحاور الرئيسية عند احد أركان المكعب.

الحل :

نفرض أن o **احد أركان المكعب ونأخذ مجموعة المحاور** $oxyz$ **منطبقة علي الأحرف الثلاثة المتعامدة للمكعب المتلاقية عند** o **كما بالشكل . نفرض أن كتلة المكعب** M **وطول حرفه** $2l$ **ونفرض أن** c **هي مركز كتلة المكعب. واضح أن إحداثيات** c **بالنسبة إلي المحاور** $oxyz$ **هي** $(l,l,l,)$**. عزوم القصور الذاتي للمكعب حول محاور الإحداثيات** $oz\,,oy\,,ox$ **وكذلك حواصل ضرب القصور الذاتي حول مستويات الإحداثيات نوجدها باستخدام نظرية المحاور المتوازية في عزم وحاصل ضرب القصور الذاتي. نفرض أن** $cx'y'z'$ **مجموعة محاور موازية للأولي** $oxyz$ **عند** c **فان :**

$$I_{x'}=I_{y'}=I_{z'}=\frac{2}{3}Ml^{2}.$$

ومن التماثل فان :

$$I_{x'y'}=I_{y'z'}=I_{z'x'}=0$$

ومن نظرية المحاور المتوازية فان :

$$I_x=I_{x'}+M\left(\sqrt{2}l\right)^2=\frac{2}{3}Ml^2+2Ml^2$$

$$\therefore\ I_x=I_{11}=\frac{8}{3}Ml^2$$

كذلك فان :

$$I_y = I_z = I_x = \frac{8}{3}Ml^2 = I_{22} = I_{33}$$

بالنسبة لحواصل ضرب القصور فان :

$$I_{xy} = I_{x'y'} + M \cdot l \cdot l = 0 + Ml^2 = -I_{21}$$

كذلك فان :

$$I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = Ml^2 = -I_{23} = I_{21}$$

وبالتالي فا ن معادلة السطح الناقص للقصور حول o هي :

$$I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 + 2I_{21}yz + 2I_{31}zx + 2I_{12}yz = 1$$

أو هي :

$$\frac{8}{3}Ml^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 2Ml^2\left(yz + zx + xy\right) = 1$$

لإيجاد عزوم القصور الذاتي الرئيسية نوجد المعادلة التي تحقق :

$$\begin{vmatrix} I_{11} - I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - I \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{8}{3}Ml^2 - I & -Ml^2 & -Ml^2 \\ -Ml^2 & \frac{8}{3}Ml^2 - I & -Ml^2 \\ -Ml^2 & -Ml^2 & \frac{8}{3}Ml^2 - I \end{vmatrix} = 0$$

بوضع $\lambda = \frac{8}{3}Ml^2 - I$ ، $a = -Ml^2$ **فان :**

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & a \\ a & \lambda & a \\ a & a & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

بفك المحدد نجد أن λ تحقق المعادلة :

$$\lambda^3 - 3a^2\lambda + 2a^3 = 0$$

نلاحظ بسهولة أن $\lambda = a$ تحقق المعادلة (أي جذور المعادلة) وبالتالي فان :

$$\lambda^3 - 3a^2\lambda + 2a^3 = (\lambda - a)(\lambda^2 + a\lambda - 2a^2) = 0$$

$\therefore$ **الجذران الآخران يحققان المعادلة**

$$\lambda^2 + a\lambda - 2a^2 = 0 \Rightarrow (\lambda - a)(\lambda + 2a) = 0$$
$$\therefore \lambda = a, -2a$$

$\therefore$ **الجذور الثلاثة هي** $-2a, a, a$

$\therefore$ **عزوم القصور الذاتي تتعين من :**

$$I = \frac{8}{3}Ml^2 - \lambda$$
$$I_1 = I_2 = \frac{8}{3}Ml^2 - a = \frac{8}{3}Ml^2 + Ml^2 = \frac{11}{3}Ml^2,$$
$$I_3 = \frac{8}{3}Ml^2 + 2a = \frac{8}{3}Ml^2 - 2Ml^2 = \frac{2}{3}Ml^2.$$

وهذه هي عزوم القصور الذاتي الرئيسية عند o . لإيجاد نسب اتجاه المحاور الرئيسية فهي تتعين من مجموعة المعادلات :

$$\lambda x + ay + az = 0,$$
$$ax + \lambda y + az = 0,$$
$$ax + ay + \lambda z = 0,$$

بالنسبة إلي عزم القصور الذاتي الرئيسي $I_3 = \frac{2}{3}Ml^2$ نضع $\lambda = -2a$ في مجموعة المعادلات وبعد قسمة كل منها علي a تأخذ الصورة :

$$-2x + y + z = 0,$$
$$x - 2y + z = 0,$$
$$x + y + -2z = 0,$$

بحذف z بين المعادلتين الأولي والثانية وذلك بالطرح نجد أن :

$$-3x + 3y = 0 \Rightarrow x = y$$

بالتعويض في احدي المعادلات نجد أن $y = z$ ، أي أن $x = y = z$ أو $x : y : z = 1 : 1 : 1$ وهذه هي نسب اتجاه قطر المكعب المار بالركن o ، أي أن المحور الرئيسي هذا هو قطر المكعب المار بالركن o . حيث أن $I_1 = I_2$ فان المحورين الرئيسين الباقيين يكونان اختياريين ، بمعني إنهما أي محورين متعامدين يقعان في المستوي العمودي علي المحور الرئيسي المنطبق علي قطر المكعب المار بالركن o.

مثال(2):

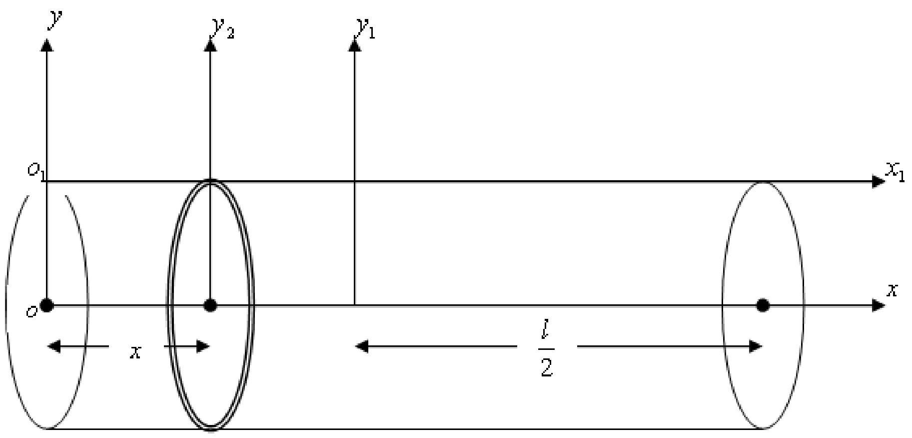
اسطوانة دائرية مجوفة بدون قاعدتين نصف قطر قاعدتها a وارتفاعها l اوجد عزم القصور الذاتي لها :

أولا : حول محور ينطبق علي احد وراسم الاسطوانة.

ثانيا : حول قطر في قاعدة الاسطوانة.

ثالثا : حول مستقيم عمودي علي محور الاسطوانة ويمر بمنتصف المحور.

الحل :



عزم القصور الذاتي حول محور الاسطوانة يتعين من :

$$I_x = ma^2$$

حيث m هو كتلة الاسطوانة .

أولا : يتعين عزم القصور الذاتي حول احد رواسم الاسطوانة o_1x_1 باستخدام نظرية المحاور المتوازية :

$$I_{x_1} = I_x + ma^2 = ma^2 + ma^2 = 2ma^2 .$$

ثانيا : لإيجاد عزم القصور الذاتي حول قطر في قاعدة الاسطوانة (مثل oy) نقسم الاسطوانة إلي عناصر (حلقات نصف قطرها a وسمكها dx) فيكون :

$$dI_{y_2} = \frac{1}{2}a^2 dm \quad ، \quad dm = 2\pi a\rho dx$$

$$\therefore\ dI_{y_2} = \pi\rho a^3 dx$$

حيث ρ هي الكثافة السطحية (أي كتلة وحدة المساحات) .

وباستخدام نظرية المحاور المتوازية فان :

$$dI_y = dI_{y_2} + x^2 dm = \pi\rho a\left(a^2 + 2x^2\right)dx$$

$$\therefore\ I_y = \pi\rho a\int_0^l \left(a^2 + 2x^2\right)dx = \pi\rho a\left(a^2 l + \frac{2l^3}{3}\right) = \frac{m}{2}\left(a^2 + \frac{2l^2}{3}\right)$$

حيث أن :

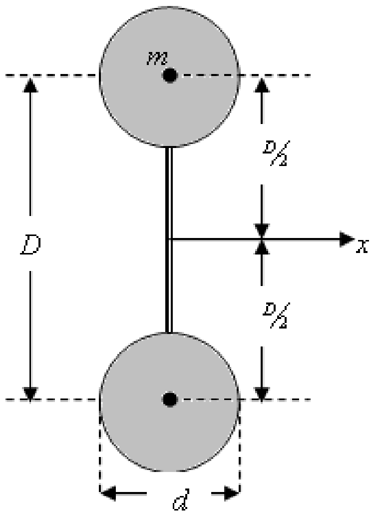
$$m = 2\pi al\rho$$

ثالثا : عزم القصور الذاتي للاسطوانة حول محور عمودي علي محور الاسطوانة ويمر بمنتصف المحور يتعين من :

$$I_{y_1} = I_y - m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m}{2}\left(a^2 + \frac{2l^2}{3}\right) - m\frac{l^2}{4} = \frac{m}{2}\left(a^2 + \frac{l^2}{6}\right).$$

تمــارين

1- تتصل كتلتان كرويتان بقضيب رفيع يمكن إهمال كتلته وتكون الثقل الحديدي المبين بالشكل



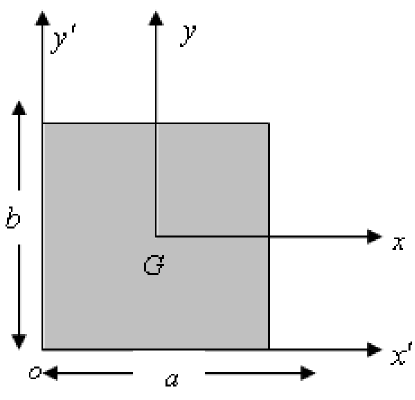
أ- اوجد عزم القصور الذاتي للكتلة للمجموعة حول محور x **.**

ب- إذا كان قطر الكتلتين الكرويتين d **صغيرتين بالنسبة إلى البعد** D **فانه يمكن الفرض بان الكتلتين نقطتان ماديتان أو كتلتان مركزتان في الموقع** $y = \pm D$ **بالاستناد إلى هذا الفرض اوجد القيمة التقريبية لعزم القصور الذاتي.**

ج- اوجد النهاية العظمى المسموح بها للبعد d **بالنسبة إلى** D **إذا كانت نسبة الخطأ في الإجابة التقريبية في الجزء (ب) يجب ألا تتجاوز** 5%**.**

د- افعل كما في الجزء (ج) إذا كانت النهاية العظمى لنسبة الخطأ هي $10\ \%$**.**

2- كتلة اللوح المسطح المبين بالشكل هي m **وسمكه** t



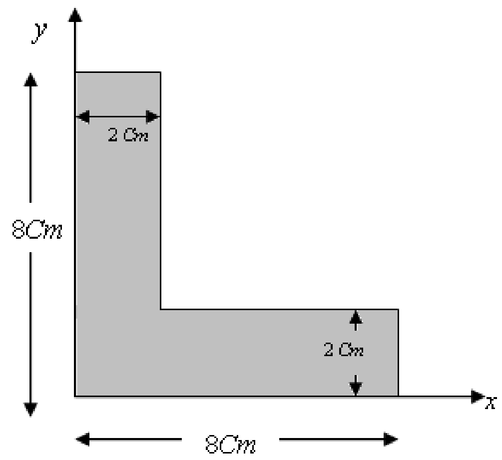
أ- اوجد عزم القصور الذاتي للكتلة ونصف قطر القصور الذاتي بالنسبة إلى المحورين (x, y)**.**

ب- اوجد عزم القصور حول محور يمر بالنقطة G **وعمودي على مستوى اللوح.**

ج- اوجد عزم القصور الذاتي بالنسبة إلى المحورين x', y' **.**

د- اوجد عزم القصور الذاتي حول محور يمر بالركن o **وعمودي على مستوى اللوح.**

3- اوجد عزم القصور الذاتي للكتلة للشكل المبين بالنسبة إلى المحاور المعطاه .



4- صفيحة رقيقة دائرية نصف قطرها $2.5Cm$ أزيل منها جزء على شكل دائرة نصف قطرها $0.5Cm$ ومركزها يبعد عن مركز الصفيحة بمقدار $1.5Cm$ اوجد عزم القصور الذاتي (الكتلة) للصفيحة حول:

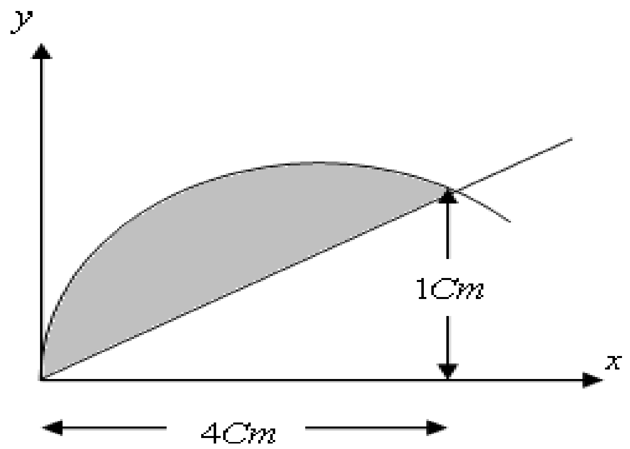
أ- قطر في الصفيحة يمر بمركز الثقل.

ب- حول قطر عمودي عليه.

5- صفيحة منتظمة كتلتها m على شكل مثلثين متساويا الساقين ارتفاعهما a,b وفى جهتين مختلفتين من قاعدة مشتركة طولها $2C$. اثبت أن عزم القصور الذاتي حول محور ما يمر بمنتصف القاعدة المشتركة وعمودي على مستوى الصفيحة يساوى

$$\frac{m}{6}\left[a^2 + b^2 + c^2 + ab\right]$$

6- المساحة المبينة في الشكل محدودة بالمنحنيين $y = \frac{x}{4}$, $x = 4y^2$ اوجد عزم القصور الذاتي للمساحة حول محوري x, y حيث x, y لهما نفس وحدات الطول الغير معينة.



7- اثبت أن عزم القصور الذاتي لصفيحة كتلتها m على شكل دائرة قطرها $2l$ حول المماس الموازى لقطر الصفيحة المحدد لها يساوى $ml^2\left(\frac{5}{4}-\frac{8}{3\pi}\right)$.

8- اسطوانة دائرية قائمة مصمتة نصف قطر قاعدتها a وارتفاعها l اوجد عزم القصور الذاتي لها:

أ- حول محور ينطبق على احد رواسم الاسطوانة.

ب- حول قطر في قاعدة الاسطوانة.

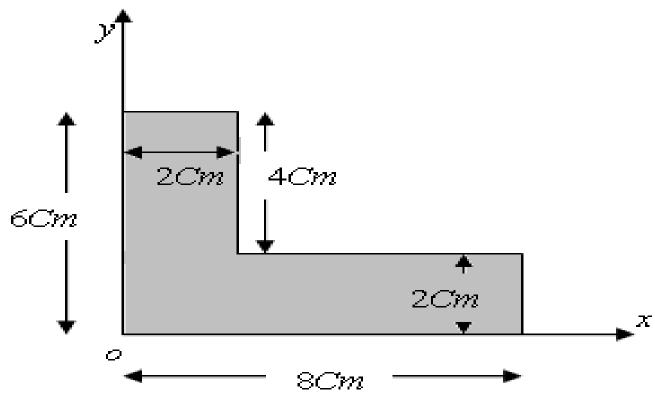
ج- حول مستقيم عمودي على محور الاسطوانة ويمر بمنتصف المحور.

9- صفيحة على شكل قطع مكافئ محدودة بالوتر البؤري العمودي الذي يبعد l عن الرأس. اثبت أن $K^2=\frac{3l^2}{7}$ حيث K نصف قطر القصور الذاتي للصفيحة حول المماس عند الرأس.

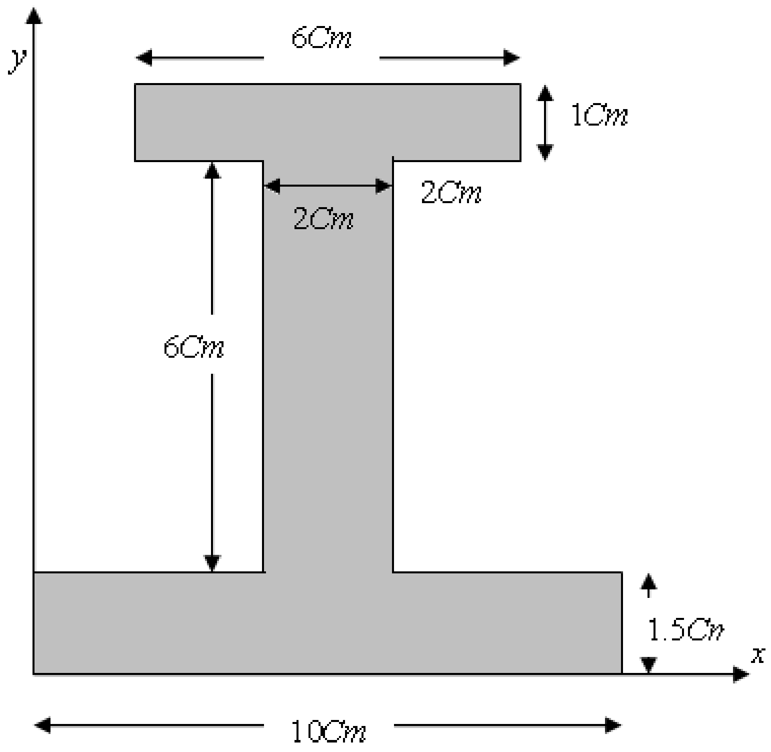
10- اوجد حاصل ضرب القصور الذاتي لصفيحة نصف دائرية نصف قطرها r بالنسبة إلى محورين متعامدين إحداهما القطر المحدد لها AB والآخر يمر بالنقطة A. عين المحورين الرئيسين عند A.

11- اوجد عزم القصور الذاتي لسلك رفيع منتظم على شكل قوس من دائرة حول محور التماثل وحول المحور العمودي عليه.

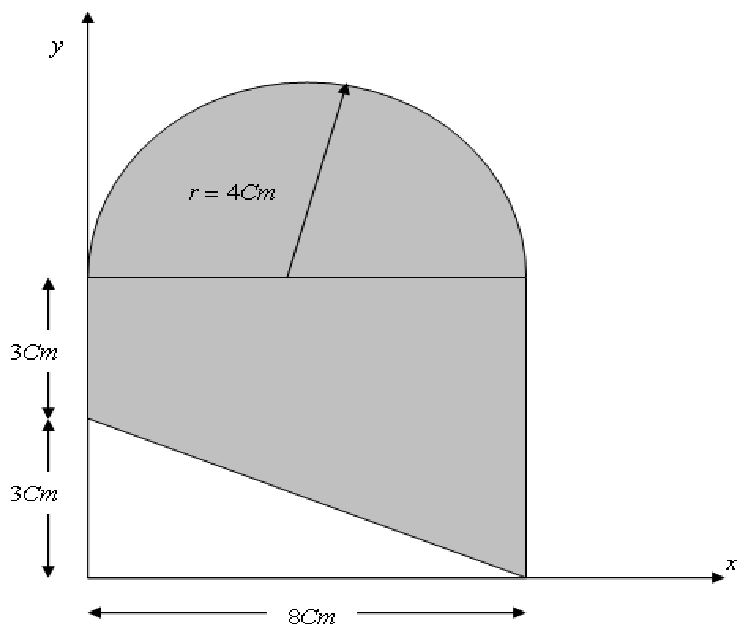
12- اوجد عزم القصور الذاتي للشكل المبين بالنسبة إلى المحاور المعطاه ثم عين المحاور الأساسية عند نقطة الأصل o.



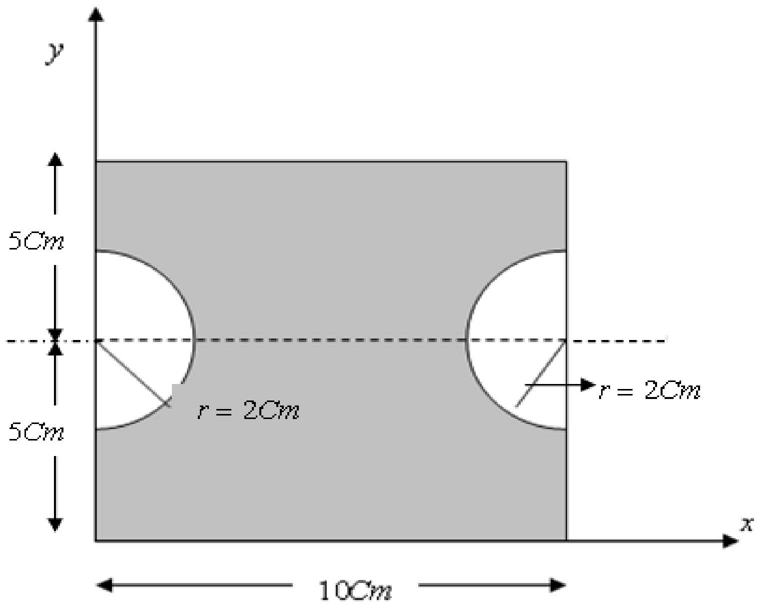
13- اوجد عزم القصور الذاتي للشكل المبين بالشكل بالنسبة إلى المحاور المعطاه ثم عين المحاور الأساسية عند نقطة o.



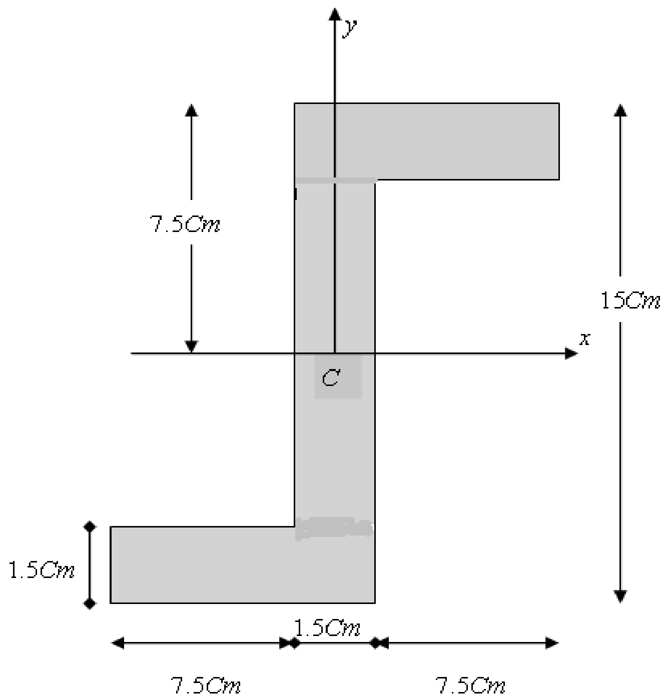
14- احسب عزم القصور الذاتي للمساحة المظللة بالشكل بالنسبة لمحور x.



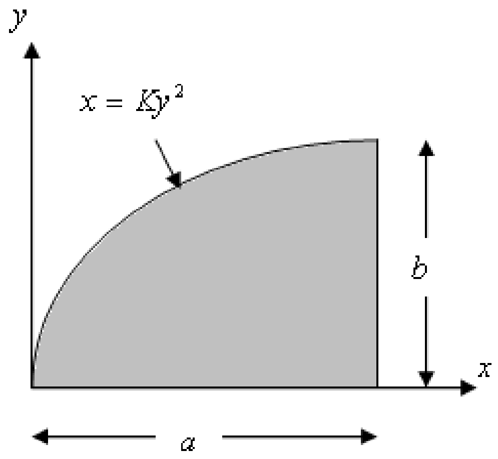
15- احسب عزم القصور الذاتي للمساحة المظللة في الشكل حول المحور y .

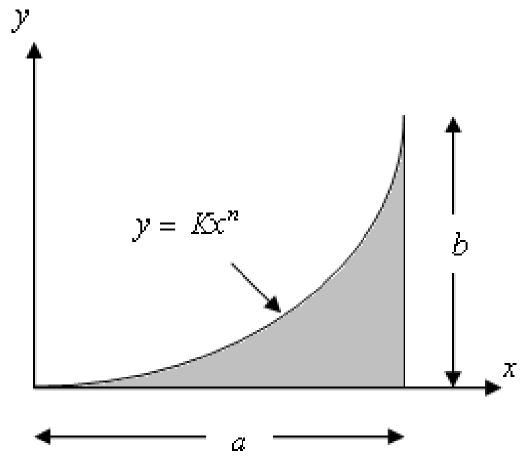


16- احسب عزم القصور الذاتي للمساحة المظللة والمبينة بالشكل بالنسبة لمحور x .



17- احسب عزم القصور الذاتي بواسطة التكامل للمساحات المظللة والمبينة في الإشكال التالية حول المحور y.



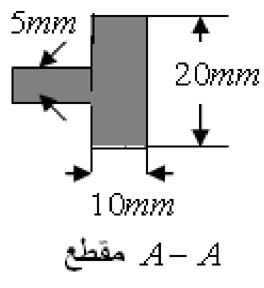


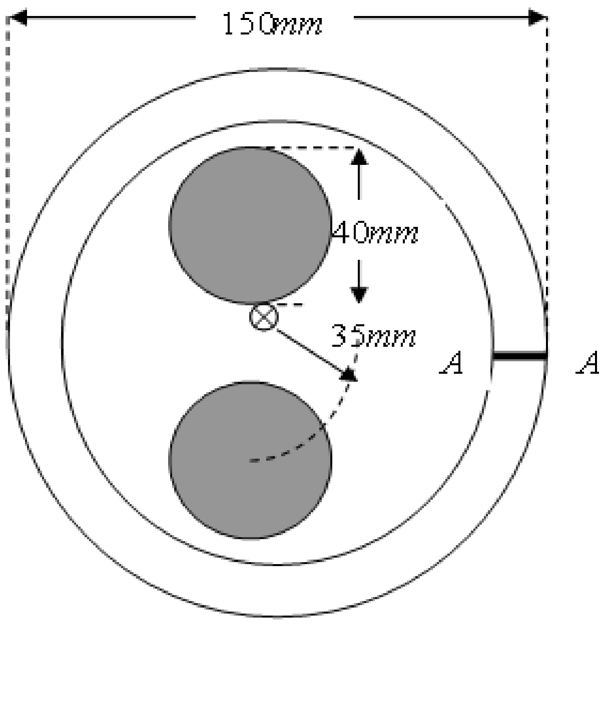
18- يبين الشكل حدافة *Flywheel* **مصنوعة من زنك صب في قالب كثافته هي** $7050\ Kg / m^3$.

أ- اوجد كتلة وعزم قصور الكتلة القطبي ونصف قطر القصور القطبي للحدافة.

ب- في تعديل مقترح لهذا التصميم سوف يكون في المقطع المركزي ثقبان كما هو مبين في الدوائر المظللة بالرسم التالي. اوجد النسبة المئوية للتخفيض في الكتلة ، وفى عزم قصور الكتلة القطبي عند إضافة الثقبين إلى التصميم الاصلى.

ج- ما هو التغيير الذي يحدث في نتائج الجزء (أ) إذا صنعت الحدافة من ألمونيوم كثافته هو $2700\ Kg / m^3$ **مع إهمال تأثير الثقب المركزي وذلك لصغر حجمه.**





19- اوجد السطح الناقص للقصور الذاتي عند مركز مكعب .

20- ثلاث قضبان منتظمة $oC\,,oB\,,oA$ **طول كل منهم الوحدة وكتلة كل منهم الوحدة .** oB **عمودي علي المستوي** CoA ، $C\hat{o}A = 20^\circ$**. اوجد عزوم القصور الرئيسية والمحاور الرئيسية عند** o **.**

21- اوجد عزم القصور الذاتي لقشرة كروية سميكة حول قطر فيه .

الباب الثاني
كينيماتيكا الجسم المتماسك فى المستوى
Kinematics of Rigid Body In Plane

الكيناماتيكا (Kinematics):-

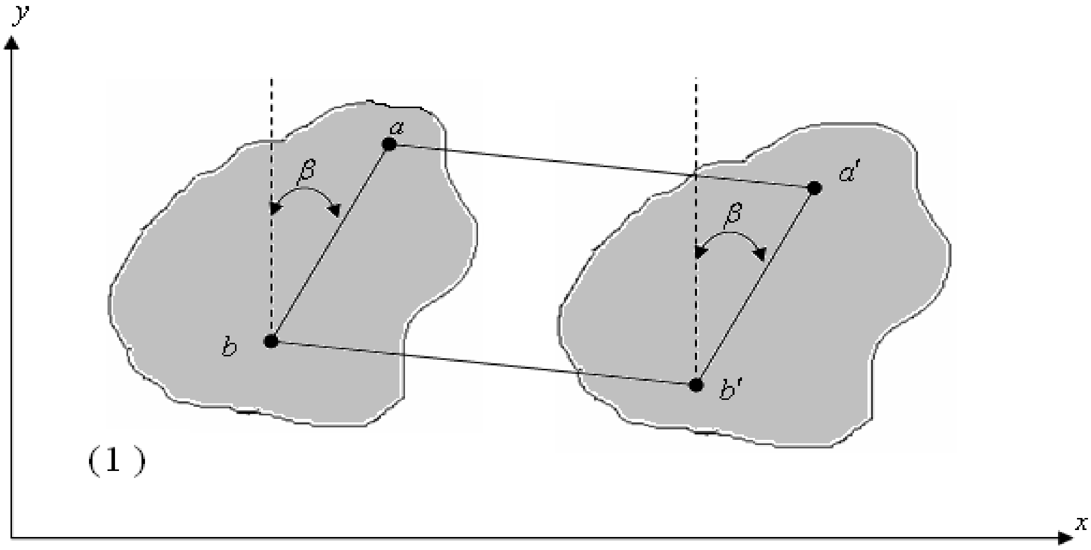
وهى تهتم بوصف حركة الأجسام المادية وصفا هندسيا مجردا ، دون التعرض للقوى المسببة لهذه الحركة.

الجسم المتماسك (Rigid Body):-

ويعرف بأنه الجسم الذي لا تتغير المسافة بين اى نقطتين تحت تأثير المؤثرات الخارجية (القوى الخارجية) ويتكون الجسم المتماسك (الجاسئ) من مجموعة من النقط المادية أو الجسيمات.
بمعنى آخر الجسم المتماسك هو الجسم الذي لا يتغير شكله تحت تأثير القوى الخارجية.
وبما أن أبعاد الجسم المتماسك الطولية لا تساوى صفرا فانه يمكن أن يصادف دورانا.
وغياب أية تأثيرات دورا نية هو الذي يميز مسائل كينماتيكا الجسيم عن مثيلتها في كينماتيكا الجسم المتماسك.

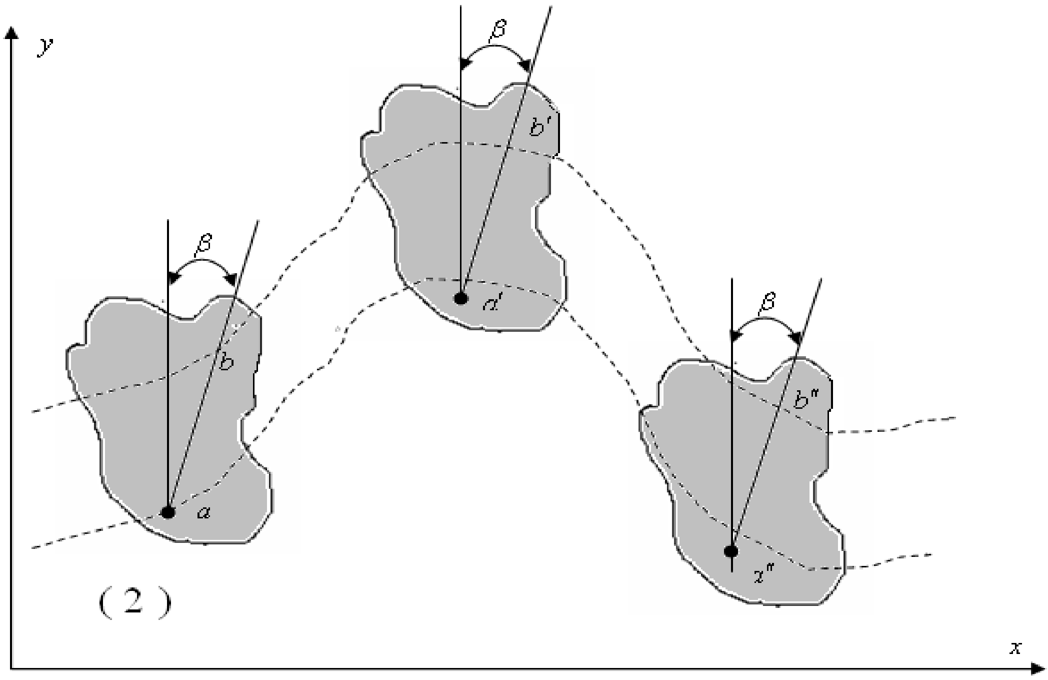
1- حركة الجسم المتماسك الانتقالية المستقيمة والانتقالية الانحنائية الخطية المستوية:-

يبين الشكل جسم متماسك في مستوى xy . إذا تحرك الجسم بحيث أن جميع النقط تتحرك في خطوط مستقيمة متوازية فان الحركة توصف بأنها حركة انتقالية مستقيمة.



(1)

ويتعين اتجاه الخط ab في الشكل السابق بالقيمة الثابتة للزاوية β المحصورة بين الخط والمحور الرأسي. يبين الشكل (2) حركة جسم متماسك يتحرك حركة انتقالية انحنائية خطية وفى هذه الحالة نرسم النقطتان الاختياريتان في الجسم a,b مسارين انحنائيين متوازيين ومستويين.

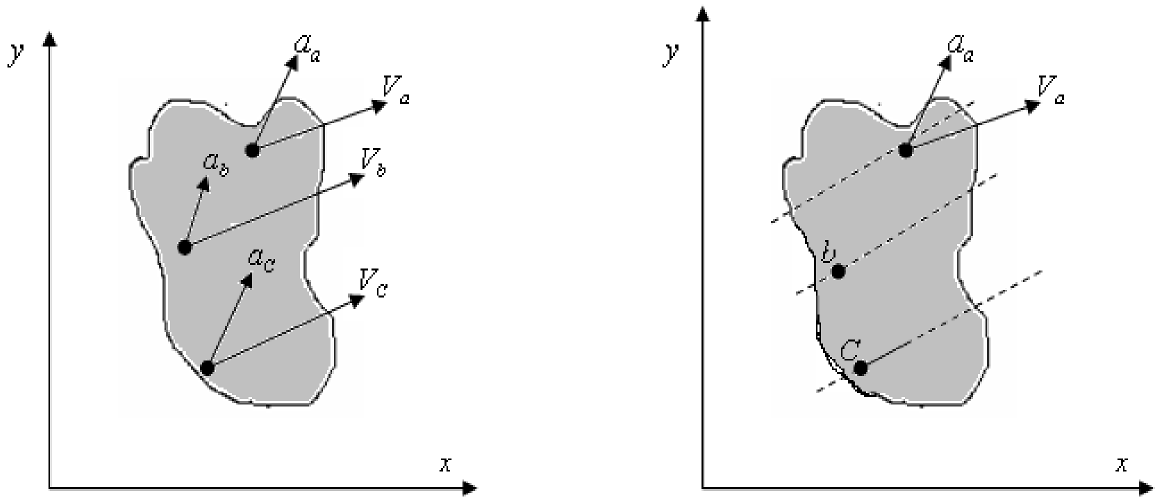


(2)

وكذلك أي خط اختياري على الجسم يكون دائما موازيا لموضعه الاصلى وبذلك يمكن أن نرى من الشكل أن الخطين $a'b', a''b''$ يوازيان دائما الموضع الاصلى ab.

وعندما يتحرك جسم حركة انتقالية سواء كانت مستقيمة أو انحنائية خطية فان سرعة وعجلة جميع نقط الجسم يكون لها نفس المقدار والاتجاه.

يبين الشكل (3) حركة جسم يتحرك حركة انتقالية انحنائية خطية مستوية بالمقدارين المعلومين v_a , a_a للنقطة a.



(ب) (أ)

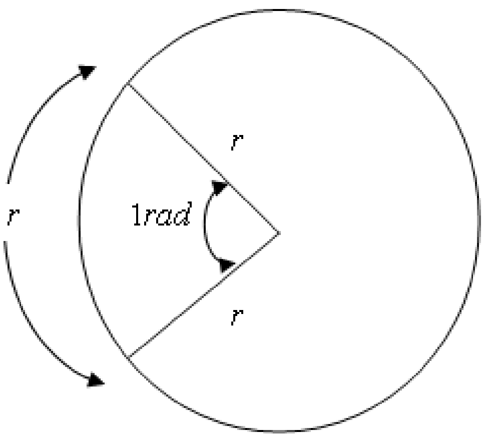
(3)

وعلى هذا تكون كل من السرعة والعجلة عند النقطتين الاختياريتين b, c كما هو مبين في شكل 3(ب) :

$$v_a = v_b = v_c \quad , \quad a_a = a_b = a_c .$$

وبذلك نستنتج أن الحركة الانتقالية المستقيمة هي حالة خاصة من الحركة الانتقالية الانحنائية الخطية المستوية.

تعريف:



الزاوية نصف قطرية rad هي الزاوية المقابلة لقوس من دائرة مساو لنصف قطر الدائرة.

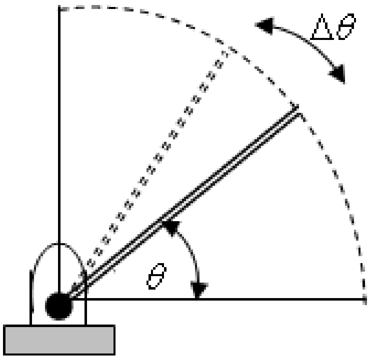
(دورة واحدة) $1r = 360^\circ =$ (زاوية نصف قطرية 2π)

$$\because \; 2\pi \;\; rad \; = 360^\circ$$

$$rad = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$rad = \frac{180^\circ}{22} \times 7 = 57.3^\circ$$

دوران جسم متماسك حول محور ثابت:-



يبين الشكل وصلة متماسكة متصلة بمفصلة ملساء. الحركة الوحيدة الممكنة للوصلة هي الدوران حول المفصلة. محور الدوران هو المحور العمودي على مستوى الشكل ويمر بمركز المسمار ويشار إلى هذا المحور على انه مركز الدوران أو مركز اللف. الإزاحة θ التي تعملها الوصلة في زمن t تعرف بالإزاحة الزاوية وهى كمية متجهه ويعبر عنها بالتقدير الدائري . ويكون الاتجاه الموجب لها إذا كانت في اتجاه عكس عقارب الساعة والاتجاه السالب لها إذا كانت في اتجاه دوران عقارب الساعة.

بفرض انه بعد فترة زمنية $t + \Delta t$ تكون الوصلة قد دارت إلى الموضع الجديد المبين بالخط المحيطي ذي الشرط .

تعرف سرعة الوصلة الزاوية ω بأنها معدل تغير الإزاحة الزاوية بالنسبة للزمن

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

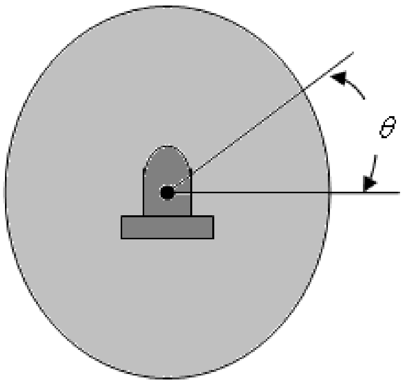
وحدات السرعة الزاوية الأساسية هي تقدير دائري في الثانية وتكتب $rad / \sec$. وتعرف العجلة الزاوية α بأنها معدل تغير السرعة الزاوية بالنسبة إلى الزمن وعلى ذلك فان :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$

وحدات العجلة الزاوية الأساسية هي تقدير دائري على مربع ثانية $rad / \sec^2$. ستتبع السرعة والعجلة الزاوية نفس اتجاه الإزاحة الزاوية.

مثال:

تعطى الإزاحة الزاوية للقرص المبين بالشكل من العلاقة $\theta = 8t - 10t^3$ حيث t بالثواني ، θ بالتقدير الدائري.



أ- اوجد القيم الابتدائية للإزاحة والسرعة والعجلة الزاوية.

ب- اوجد الزمن عندما يصل القرص إلى النهاية العظمى لإزاحته الزاوية في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة ومقدار هذه الإزاحة العظمى .

ج- متى يمر القرص بالموضع الابتدائي .

د- اوجد السرعة الزاوية والعجلة الزاوية المناظرتين في (ج) .

الحل:

أ- الإزاحة الزاوية تعطى من :

$$\theta = 8t - 10t^3, \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots(1)$$

السرعة والعجلة الزاوية هما :

$$\omega = 8 - 30t^2 \ rad/\sec, \dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots\dots(2)$$

$$\alpha = -60t \ rad/\sec^2, \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots(3)$$

عندما $t = 0$ **تكون السرعة الزاوية الابتدائية** ω_o **هي :**

$$\omega_o = 8 - 30(0) = 8 rad/\sec, \dots\dots\ \dots\dots(4)$$

$$\therefore \theta_o = 0, \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ ..(5)$$

$$\therefore \alpha_o = 0, \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ .(6)$$

ب- من المعادلة (2) **يمكن أن نرى السرعة الزاوية الابتدائية موجبة وإنها تصبح سالبة في أزمنة لاحقة. وعلى ذلك فانه عندما تكون السرعة الزاوية مساوية للصفر يصل القرص إلى موضع أقصى إزاحة.**

$$0 = 8 - 30t^2$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{4}{15}} = 2\sqrt{\frac{1}{15}} = 0.516 \text{ sec},\ldots\ldots \quad ..(7)$$

الإزاحة الزاوية المناظرة هي :

$$\theta = 8(0.516) - 10(0.516)^3 = 4.128 - 1.373,$$
$$\theta = 2.754\, rad = \frac{2.754 \times 180 \times 7}{22}$$
$$\therefore \theta = 157.7^\circ,\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots ..(8)$$

والعجلة الزاوية عند هذا الموضع هي :

$$\alpha = -60(0.516) = -30.96\, rad/\sec^2,\ldots\ldots(9)$$

ج- عندما يمر القرص بالموضع الابتدائي ثانيا تكون $\theta = 0$ وباستخدام المعادلة (1) نحصل على

$$0 = 8t - 10t^3 \Rightarrow 0 = 2t(4 - 5t^2)$$
$$t = 0 \quad or \quad t = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.894 \text{ sec},\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots ....(10)$$

الزمن $t = 0$ هو الزمن الابتدائي في المسألة ، عندما $t = 0.894 \text{ sec}$ يمر القرص بالموضع الابتدائي ثانيا.

د- عندما يعود القرص إلى الموضع الابتدائي تكون السرعة والعجلة هما :

$$\omega = 8 - 30(0.894) = -18.82\, rad/\sec,\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots (11)$$
$$\alpha = -60(0.894) = -53.64\, rad/\sec^2,\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots..(12)$$

دوران جسم متماسك حول محور ثابت بعجلة ثابتة :

سوف يقابلنا كثيرا في مسائل الديناميكا حالة جسم متماسك يدور بعجلة ثابتة وسوف نبين في الفصل التالي أن هذه الحالة تحدث عندما تكون قيمة العزم المحصل الذي يؤثر على الجسم ثابتة.

يعطى مقدار العجلة الزاوية من :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = Cons\tan t, \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots (1)$$

$$d\omega = \alpha dt$$

ثم بالتكامل نحصل على :

$$\omega = \alpha t + \omega_o, \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots (2)$$

حيث ω_o **السرعة الزاوية عندما** $t = 0$ **، والمعادلة** (2) **علاقة تربط بين السرعة الزاوية والزمن.**

ولإيجاد العلاقة بين الإزاحة الزاوية والسرعة الزاوية :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad d\theta = \omega dt, \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots (3)$$

الصورة التكاملية للمعادلة (3) **هي :**

$$\int_0^\theta d\theta = \int_0^t \omega dt = \int_0^t (\omega_o + \alpha t)$$

$$\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2, \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots .(4)$$

بحذف t **بين المعادلتين** $(2), (4)$ **نحصل على :**

$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\theta, \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots ..(5)$$

المعادلات $(2), (4), (5)$ **هي المعادلات الثلاث الأساسية التي تصف دوران جسم متماسك حول محور ثابت بعجلة ثابتة.**

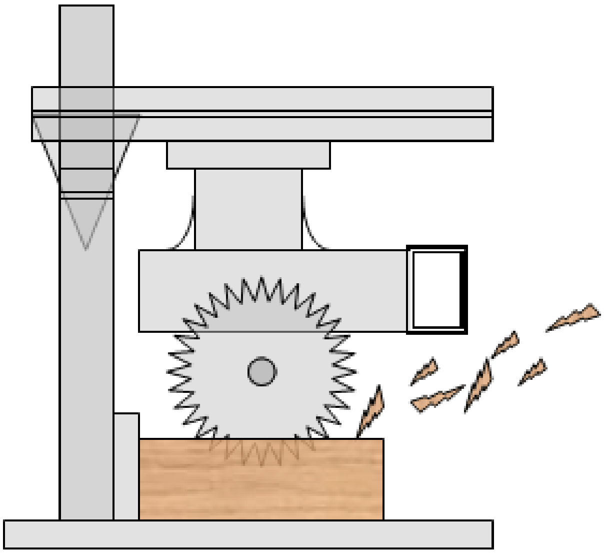
مثال:

منشار خشب بذراع نصف قطرية ومقدار سرعة تشغيله هو $1500 \ r/\min$ **عند وقف تشغيل المنشار تعيد فرملة مغناطيسية الريشة إلى السكون في دقيقة واحدة.**

أ- بفرض أن العجلة التقصيرية الناتجة عن الفرملة ثابتة فما هو عدد دورات الريشة حتى تصل إلى السكون.

ب- في تشغيل ما تعلقت حركة الريشة في قطعة من المواد فوصلت إلى السكون بعد $\frac{3}{4}r$. اوجد القيمة المتوسطة للعجلة التقصيرية والزمن المناظر الذي تحتاجه الريشة حتى تصل إلى السكون.

<u>الحل:</u>



سرعة الريشة الابتدائية هي :

$$\omega_o = \frac{1500 \times 2 \times 22}{7 \times 60} = 157 \ rad / \sec$$

أ- تصل ريشة المنشار إلى السكون بعد $60 \sec$

بحيث أن $\omega = 0$

$$\because \omega = \omega_o + \alpha t \Rightarrow 0 = 157 + 60\alpha$$
$$\therefore \alpha = -\frac{157}{60} = -2.6 rad / \sec^2$$

ويتعين عدد دورات ريشة المنشار الكلى من :

$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\theta \Rightarrow 0 = (157)^2 - 2 \times 2.6\theta$$
$$\therefore \theta = 4704 \ rad = 749 \ r$$

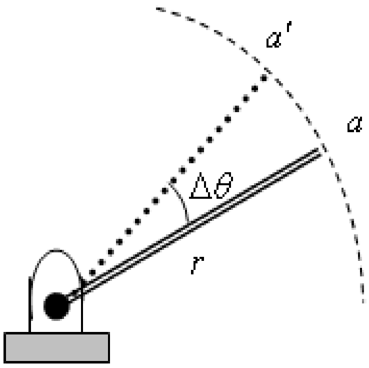
ب- في الحالة التي تعلقت فيها حركة ريشة المنشار يصل هذا العنصر إلى السكون بعد :

$$\theta = \frac{3}{4}r = \frac{3 \times 2 \times 22}{4 \times 7} = 4.71 rad$$

وتتعين قيمة العجلة المتوسطة من :

$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\theta \Rightarrow 0 = (157)^2 + 2\alpha(4.71)$$
$$\therefore \alpha = -2620 \ rad / \sec^2$$
$$\because \omega = \omega_o + \alpha t \Rightarrow 0 = 157 - 2620 \ t$$
$$\therefore t = \frac{157}{2620} = 0.0599 \ \sec$$

العلاقة بين الحركتين الانتقالية والدورانية :



الشكل المبين هو عبارة عن وصلة طولها r تدور حول محور ثابت . بفرض أن النقطة a عند طرف الوصلة على إنها جسيم يتحرك حركة انتقالية انحنائية خطية على طول مسار دائرى.

سرعة النقطة يجب أن تكون في اتجاه المماس لمسار الحركة وعلى ذلك تكون اتجاه سرعة النقطة a عموديا على الوصلة ومقدار هذه السرعة يتعين من العلاقة :

$$V = \frac{dS}{dt}, \qquad (1)$$

حيث dS هي طول المنحنى الذي ترسمه النقطة a . وبفرض أن النقطة a تحركت إلى الموضع a' في زمن قدره Δt بينما تحركت الوصلة خلال الزاوية $\Delta\theta$ في الزمن Δt. طول القوس من a إلى a' هو :

$$\Delta S = r\Delta\theta, \qquad (2)$$

بقسمة طرفي المعادلة (2) على Δt وأخذنا النهاية عندما $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = r\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \qquad (3)$$

$$\frac{dS}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow V = r\dot{\theta} = r\omega, \qquad (4)$$

أي أن السرعة الخطية = السرعة الزاوية × نصف قطر الدائرة.

المركبة العمودية لعجلة النقطة a يمكن كتابتها على الصورة :

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}, \qquad (5)$$

حيث ρ نصف قطر الانحناء وفى هذه الحالة :

$$\rho = r$$

$$a_n = \frac{V^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r}, \dots\dots\dots \; \dots\dots\dots \; \dots\dots\dots \; \dots (6)$$

$$a_n = r^2\omega, \dots\dots\dots \; \dots\dots\dots \; \dots\dots\dots \; \dots\dots\dots \; \dots\dots (7)$$

اتجاه هذا الحد هو على طول محور الوصلة وناحية الاتجاه من a في اتجاه مركز الدوران . اتجاه مركبة عجلة النقطة a المماسية a_t في اتجاه المماس على طول مسار الحركة ومقدارها يساوى المشتقة الأولى لمقدار سرعة الجسيم إلى الزمن.

$$a_t = \frac{dV}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

$$a_t = r\alpha, \dots\dots\dots \; \dots\dots\dots \; \dots\dots\dots \; \dots\dots\dots \; \dots\dots\dots (8)$$

حيث α العجلة الزاوية .

مثال:

في المثال السابق إذا كان طول قطر ريشة المنشار هو $10\ inch$ وموضع النقطة a على طرف الريشة . اوجد مقدار سرعة وعجلة النقطة a في الحالات التالية :

أ- عندما تدور الريشة بمعدل $1500\ r/\min$.

ب- في لحظة بدء تشغيل الفرملة المغناطيسية.

ج- في لحظة تعليق حركة ريشة كما وصفت في (ب) في المثال السابق.

الحل:

أ- عندما تدور الريشة بحرية $1500\ r/\min$ فان :

$$v = r\omega = 5(157) = 785\ in/\sec = 65.4\ ft/\sec$$

$$a_n = r\omega^2 = 5(157)^2 = 1.03\times 10^4\ ft/\sec$$

$$a_t = 0$$

ب- عند لحظة بدء تشغيل الفرملة المغناطيسية يكون :

$$a_t = r\alpha = 5(-2.62) = -13.1 \ in/\sec^2 = -1.09 \ ft/\sec^2$$

والسرعة V, a_n لهما نفس المقدار السابق كما في (أ) ويمكن أن نلاحظ أن $a_t \langle\langle a_n$.

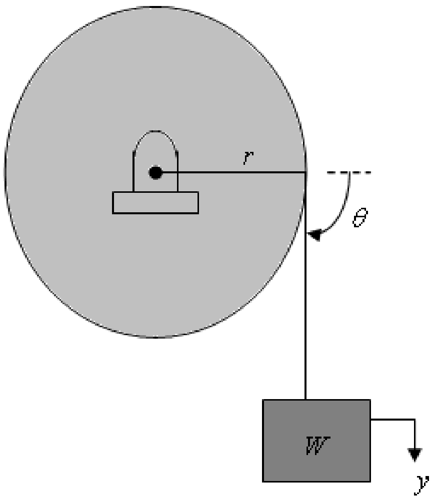
ج- عند تعليق حركة ريشة المنشار :

$$a_t = r\alpha = 5(-2620) = -13100 \ in/\sec^2 = 1090 \ ft/\sec^2$$

والسرعة والعجلة a_n, V لهما نفس القيم كما في الجزء (أ) ، مقدار العجلة الكلية هو :

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{(1.03\times 10^4) + (1090)^2} = 1.04\times 10^4 \ ft/\sec^2 .$$
$$\therefore a = 323 \ g/\sec^2 .$$

العلاقة بين الحركتين الانتقالية والدورانية للأجسام المتصلة :



يبين الشكل التالي بكرة متصلة مفصليا بالأرض ، يلتف خيط لا يقبل الاستطالة حول البكرة ويتصل بوزن. سوف نبين الآن انه توجد علاقة وحيدة تربط بين حركتي البكرة والوزن .
كما يبين الشكل ناحيتي الاتجاه الموجبتين لاحداث ازاحة الجسمين. ازاحة البكرة الزاوية هي θ وإزاحة الوزن الخطية هي y . نتصور أن البكرة دارت خلال الزاوية θ. بفك خيط طوله $r\theta$ أثناء الدوران. الخيط لا يقبل الاستطالة وبفرض أن القوة في الخيط هي قوة شد دائما وعلى ذلك تكون إزاحة الوزن y المناظرة لدوران البكرة هي :

$$y = r\theta, \dots\dots\dots \ \dots\dots(1)$$

بمفاضلة هذه المعادلة مرتين بالنسبة للزمن ينتج أن :

$$\frac{dy}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$V = r\omega, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$a = r\alpha, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

هاتان المعادلتان هما علاقتان مفيدتان جدا وتربطان بين إزاحة وسرعة وعجلة الأجسام المتصلة.

مثال(1):

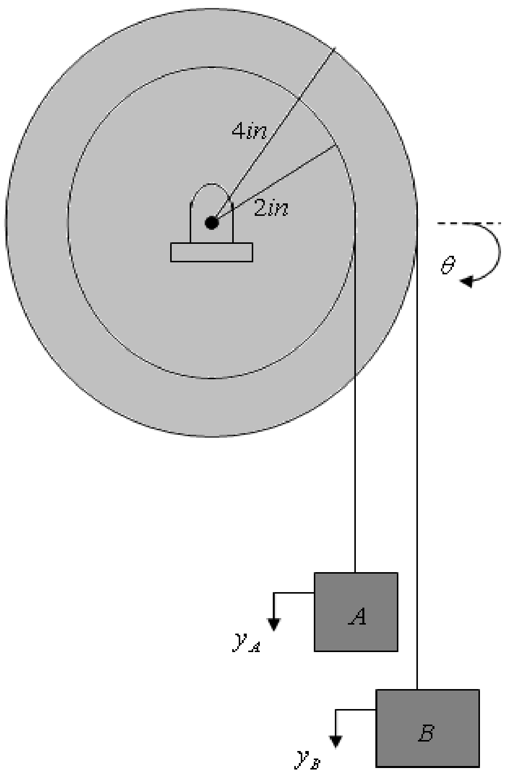
في الشكل التالي وفى لحظة ما تمتلك بكرة سرعة زاوية مقدارها $300\ r/\min$ في عكس عقارب الساعة وتتحرك بعجلة تقصيرية بمعدل $8600\ r/\min^2$.

أ- اوجد السرعة والعجلة المناظرتين للوزنين B, A.

ب- اوجد سرعة وعجلة الوزن A بالنسبة إلى الوزن B.

عبر عن الإجابتين بالأقدام والثواني.

الحل:



$\because$ اتجاه الإزاحة الزاوية في اتجاه عكس دوران عقارب الساعة وبذلك تكون سرعة البكرة الزاوية هي :

$$\omega = -300\ r/\min = \frac{300 \times 22 \times 2}{7 \times 60} = -31.4\, rad/\sec$$

وبما أن البكرة تتحرك بعجلة تقصيرية فان اتجاه العجلة الزاوية يجب أن يكون في اتجاه عقارب الساعة (في اتجاه مضاد لاتجاه السرعة الزاوية) بحيث أن :

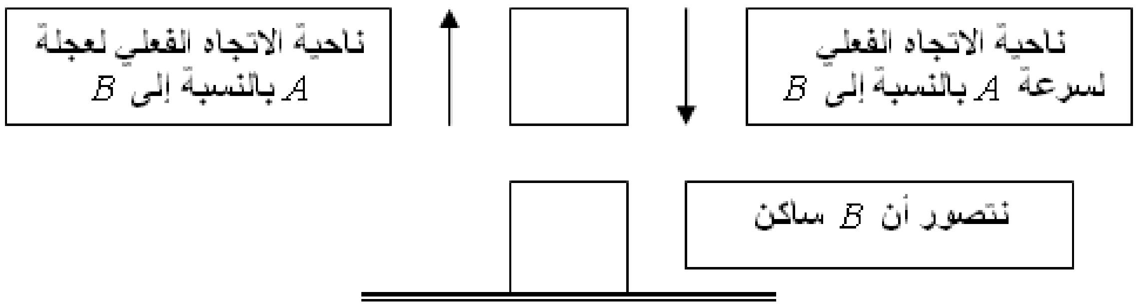
$$\alpha = \frac{8600 \times 2 \times 22}{7 \times 60 \times 60} = 15.02\, rad / \sec^2$$

يتحرك الوزنان كجسمين في حركة انتقالية مستقيمة والسرعتان والعجلتان هما :

<u>القالب (A)</u>

$$V_A = r_A \omega = \frac{2 \times -31.4}{12} = -5.23\ ft / \sec .$$

$$a_A = r_A \alpha = \frac{2 \times 15.02}{12} = 2.5\ ft / \sec^2 .$$



<u>القالب (B)</u>

$$V_B = r_B \omega = \frac{4}{12}(-31.4) = -10.5\ ft / \sec .$$

$$a_B = r_B \alpha = \frac{4}{12}(15.02) = 5\ ft / \sec^2 .$$

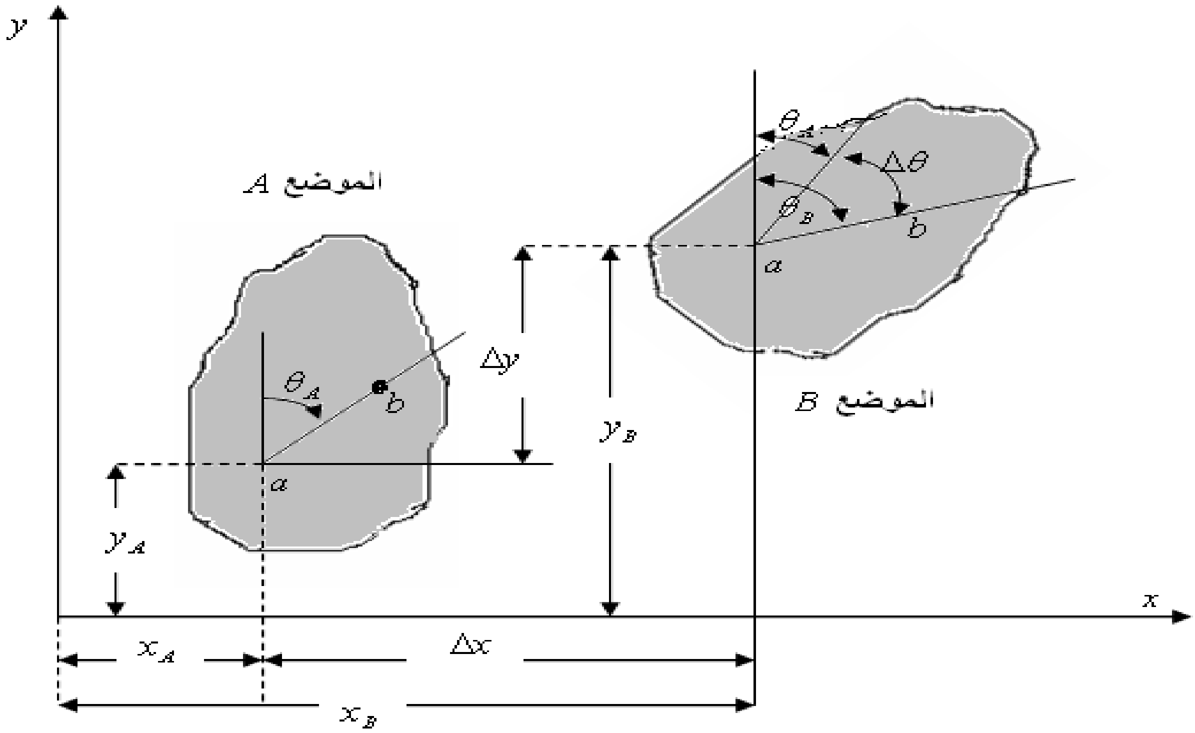
السرعة والعجلة النسبية a_{AB}, V_{AB} للوزن A بالنسبة إلى B يتعينان من :

$$V_{AB} = V_A - V_B = -5.23 - (-10.5) = 5.27\ ft / \sec .$$

$$a_{AB} = a_A - a_B = 2.5 - 5 = -2.5\ ft / \sec^2 .$$

الحركة المستوية العامة للجسم المتماسك :

وفيه يتحرك الجسم المتماسك حركة انتقالية ودورانيـة فـي نفس الوقت. بفرض أن الجسم فـي البداية يكون في الموضع A كما هو مبين بالشكل.



يمكن وصف هذا الموضع بتعيين الاحداثيين x_A, y_A لنقطة اختيارية على الجسم ولـتكن النقطـة a بالإضافة إلى الإزاحة الزاوية للجسم بالنسبة إلى خط إسناد اختياري وهى θ_A. ونفرض بعد زمن لاحق يكون الجسم في الموضع B. يمكن تصور حركة الجسم الكلية التي نحتاج إليها لكي يتحرك الجسم من الموضع الابتدائي A إلـى الموضـع النـهـائي B علـى إنـها مجمـوع الحـركتين المتميزتين التاليتين:

1- حركة انتقالية للجسم حتى تصل نقطة a إلى الموضع المعرف بالاحداثيين $x = x_B, y = y_B$.

2- حركة دورانية للجسم حول موضع a النهائي حتى نحصل على الزاوية θ_B.

الوصف الابتدائي لموضع الجسم يعين من x_A, y_A, θ_A والموضع النهائي يتعين من x_B, y_B, θ_B ويمكن إيجاد التغير في الموضع من المعادلة العامة التي تعرف التغير وهى تعطى من التغير في الحالة وتساوى :

(الحالة النهائية) – (الحالة الابتدائية)

ومن الشكل السابق يكون التغير في موضع الجسم هو :

$$\Delta x = x_B - x_A ,......... ....(1)$$

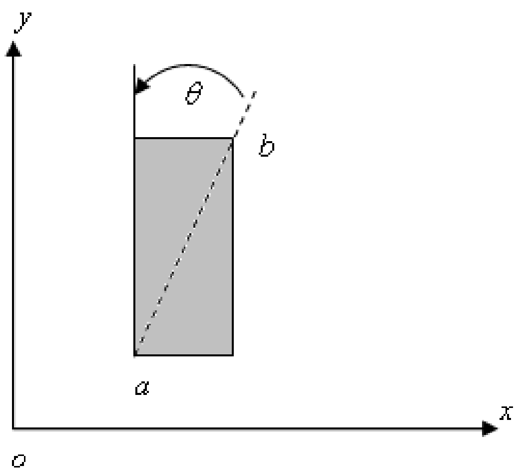
$$\Delta y = y_B - y_A ,......... ......(2)$$

$$\Delta \theta = \theta_B - \theta_A ,......... ......(3)$$

هذه النتائج هي للتغير في إزاحة أو موضع الجسم في الحركة المستوية العامة . ويمكن تعميم هذه النتائج بسهولة لحالتي سرعة وعجلة الجسم. مفهوم الحركة المستوية العامة للجسم المتماسك كتركيب للحركتين الانتقالية والدورانية له تطبيقات مفيدة عند حل مسائل ديناميكا الجسم المتماسك وسوف ندرس هذا الموضوع بالتفصيل في الأبواب التالية.

<u>مثال:</u>

يبين الشكل موضع لوح مسطح ومتماسك عند $t = 0$ إزاحة النقطة a تعطى من :



$$x = 3.94 + 4.82\,t.$$

$$y = 2.26 - 9.64\,t + 5t^2.$$

حيث t بالثواني ، x, y بالبوصات ويعبر عن الموضع الزاوي للخط ab بالآتي:

$$\theta = 1.98\,t^3 + 0.38$$

حيث t بالثواني ، θ بالتقدير الدائري.

أ- ارسم رسما تخطيطيا لموضع اللوح عند $t = 1$.

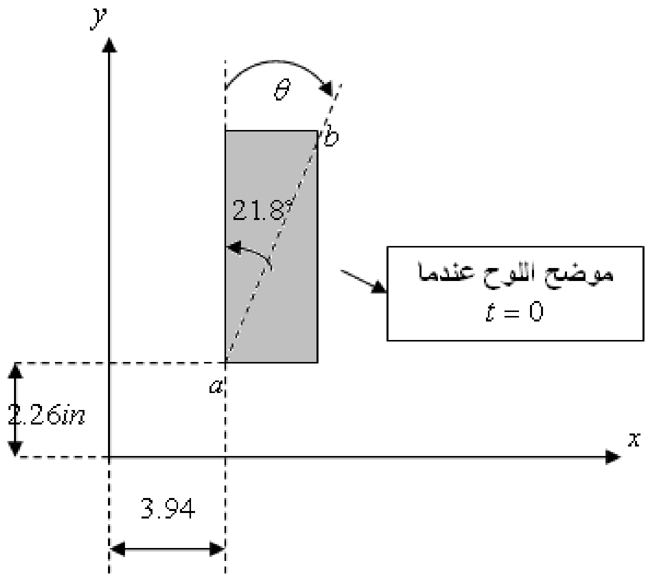
- صف التغير في موضع اللوح خلال الفترة الزمنية من 0 إلى $1\sec$.

ج- اوجد مقدار واتجاه سرعة النقطة a عندما $t = 1\sec$.

د- صف التغير في سرعة النقطة a خلال الفترة الزمنية من $t = 0$ إلى $t = 1$.

ه- اوجد التغير في السرعة الزاوية خلال الفترة الزمنية من 0 إلى $1\sec$.

الحل:



أ- موضع اللوح الابتدائي يعرف من :

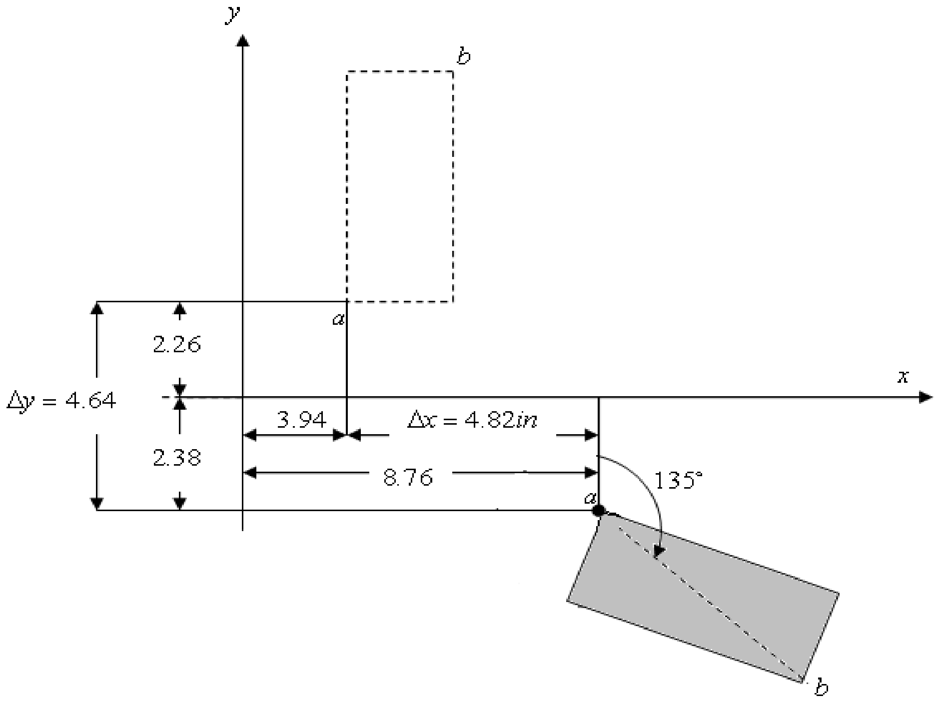
$$x = 3.94\, inch\ .$$
$$y = 2.26\, inch\ .$$
$$\theta = 0.38\, rad = 21.8^\circ .$$

عند نهاية واحد ثانية يتعين موضع اللوح من :

$$x = 3.94 + 4.82 = 8.76\, inch\ .$$
$$y = 2.26 - 9.64 + 5 = -2.38\, inch\ .$$
$$\theta = 1.98 + 0.38 = 2.36\, rad = 135^\circ .$$

ب- يبين التغير في موضع اللوح خلال الفترة الزمنية من $t = 0$ إلى $t = 1$.

$$\Delta x = x\big|_{t=1} - x\big|_{t=0} = 8.76 - 3.94 = 4.82\, inch\ .$$
$$\Delta y = y\big|_{t=1} - y\big|_{t=0} = -2.38 - 2.26 = -4.64\, inch\ .$$
$$\Delta \theta = \theta\big|_{t=1} - \theta\big|_{t=0} = 135^\circ - 21.8^\circ \approx 113^\circ .$$



ج- مركبتا سرعة نقطة a هما :

$$V_x = \dot{x} = \frac{d}{dt}(3.94 + 4.82\,t) = 4.82\,inch\ /\sec .$$

$$V_y = \frac{d}{dt}(2.26 - 9.64\,t + 5t^2) = (-9.64 + 10\,t)inch\ /\sec .$$

عند $t = 0$:

$$\dot{x}_o = 4.82\,inch\ /\sec,$$
$$\dot{y}_o = -9.64\,inch\ /\sec .$$

عند $t = 1$:

$$\dot{x}_1 = 4.82\,inch\ /\sec,$$
$$\dot{y}_1 = -9.64 + 10 = 0.36\,inch\ /\sec .$$

مقدار سرعة a هي :

$$V_a = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2} = \sqrt{(4.82)^2 + (0.36)^2} = 4.83\,inch\ /\sec .$$

والاتجاه هو :

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{0.36}{4.82}\right) = 4.27^{\circ}.$$

د- يتعين التغير في سرعة نقطة a من :

$$\Delta\dot{x} = \dot{x}_1 - \dot{x}_o = 4.81 - 4.82 = 0$$
$$\Delta\dot{y} = \dot{y}_1 - \dot{y}_o = 0.36 - (-9.64) = 10\, inch\ /\sec$$

ه- سرعة الخط ab الزاوية هي :

$$\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(1.98t^3 + 0.38\right) = 3\left(1.98t^2\right) = 5.94t^2 rad\ /\sec .$$

التغير في السرعة الزاوية هي :

$$\Delta\dot{\theta} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_o = 5.94(1)^2 - 0 = 5.94\, rad\ /\sec .$$

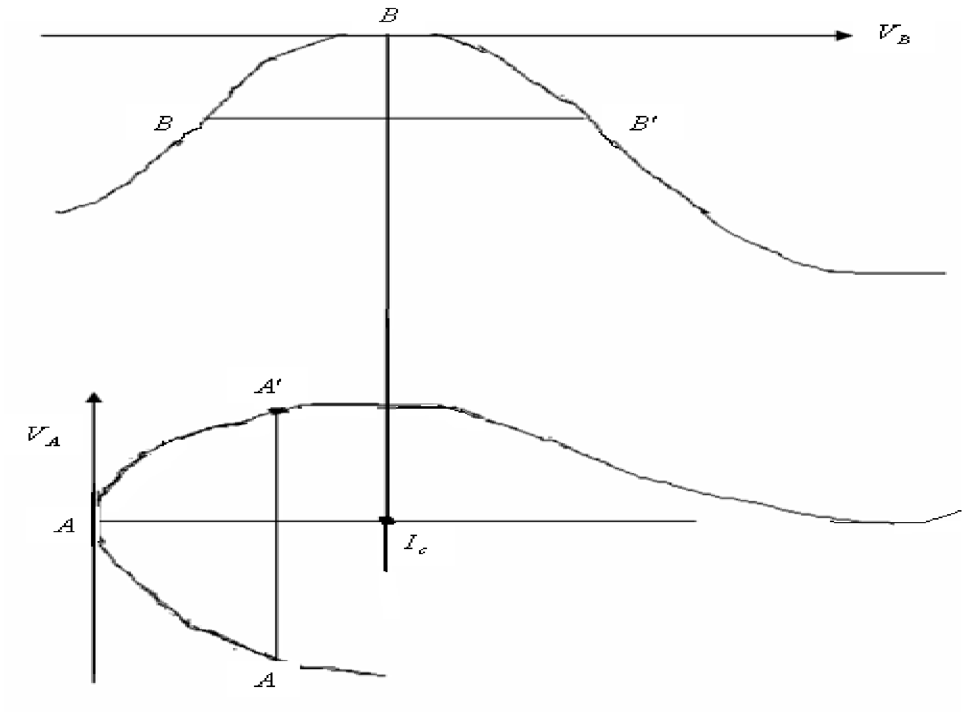
مركز الدوران اللحظى (Instant Center of Rotation):

استخدام مفهوم مركز الدوران اللحظى :

يستخدم مركز الدوران اللحظي بكثرة عند تحليل الوصلات الميكانيكية حيث يمكن الحصول على سرعات نقط الوصلات المختلفة.

تعيين مركز الدوران اللحظى :

نعتبر حركة جسم متماسك في المستوى بسرعة زاوية ω وبأخذ أي نقطتين A, B من نقط الجسم فلكل نقطة من النقطتين A, B من نقاط الجسم مسار معين في الجسم.
بفرض أن بعد فترة زمنية Δt تحركت A إلى A' ، B إلى B'. أي أن AA', BB' هما وترين في المنحنيين الذي ترسمهما النقطتان A, B.



لإيجاد مركز الدوران اللحظي ننصف AA', BB' ونقيم أعمدة تتلاقى في I_c. وعندما تؤول AA' إلى المماس للمنحنى الأول وتؤول BB' إلى المماس للمنحنى الثاني اتجاه السرعة لأن السرعة تكون في اتجاه المماس. وذلك عندما تقترب Δt من الصفر من ذلك فلإيجاد مركز الدوران اللحظي نرسم أعمدة على اتجاه السرعة لأي نقطتين من نقاط الجسم فيتلاقى العمودان في نقطة تسمى مركز الدوران اللحظي وبذلك تكون سرعة النقطة B مثلا من الجسم في هذه اللحظة عموديا على BI_c كما أن السرعة الزاوية في هذه اللحظة هي :

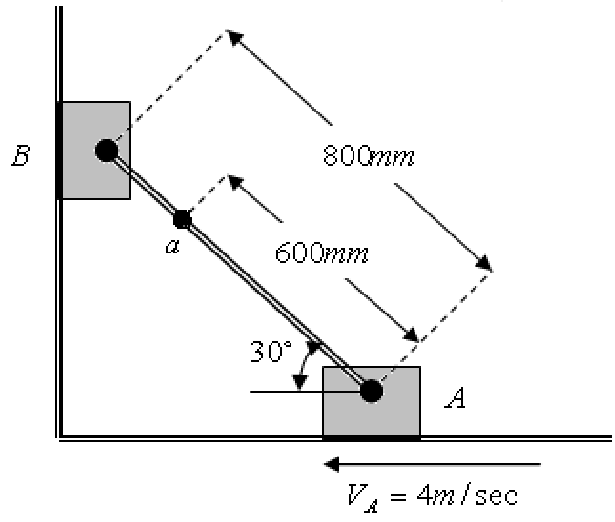
$$\omega = \frac{V_A}{I_c A} = \frac{V_B}{I_c B}$$

المنحنيان القطبيان :-

مركز الدوران اللحظي I_c يتغير من لحظة إلى آخري أثناء الحركة والمنحنى الذي يرسمه I_c بالنسبة للجسم يسمى بالمرتكز الجسمي (المسار الجسمي) والمنحنى الذي ترسمه I_c بالنسبة للفراغ يسمى بالمرتكز الفراغي (المسار الفراغي). المرتكزان الجسمي والفراغي يسميان بالمنحنيين القطبيين.

أمثلـــة:

مثال (1):-



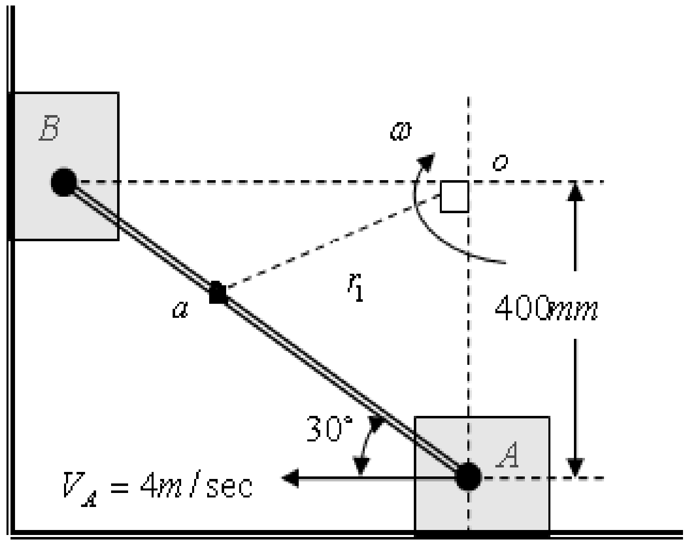
يبين الشكل آلـة مستوية فـي حركـة انـزلاق . القالب المنزلق A يتحرك إلى اليسار بسرعة ثابتة مقدارها $4m/\sec$. موضع الوصلـة كما هو مبين بالشكل :

أ- اوجد سرعة الوصلة الزاوية .

ب- اوجد سرعة القالب المنزلق B .

ج- اوجد سرعة النقطة a مقدارا واتجاها.

الحل :



يفترض أن القالبين المنزلقين جسيمان في حركة مستقيمة وان الوصلة تتحرك حركة مستوية عامـة. أعيد رسم المجموعـة كما هو مبين بالشكل.

يعين مركز الدوران اللحظي للوصلة برسم خطين عمودين علـى هذين المسـارين كما هو مبين بالشكل. هذه احد الأمثلة التي فيها لا يقـع مركز الـدوران اللحظي طبيعيا على الجسم المتماسك. في الموضع المبين تـدور الوصلة AB والخطان oA, oB جميعها لحظيا حول المركز اللحظي بنفس السرعة الزاوية ω

أ- تعين سرعة الخط oA الزاوية من :

$$V_A = r\omega = oA\,\omega ,.........\ ....\ ....\ ......(1)$$

$$oA = ABSin\ 30 = \frac{800}{2} = 400\ mm ,.........\ .(2)$$

$$\therefore\ 4 = \frac{400}{1000}\omega \Rightarrow \omega = 10\ rad\ /\sec ,......\ ....(3)$$

ب- بما أن جميع الخطوط التي تقع على الوصلة تدور بنفس السرعة الزاوية حول المركز اللحظي . فان سرعة القالب المنزلق B تتعين من :

$$V_B = oB\,\omega \Rightarrow V_B = \frac{400\sqrt{3}}{1000}\times 10 = 4\sqrt{3}m\ /\sec ,......\ ....(4)$$

ج- r_1 يرمز لطول الخط oa . من المثلث BoA وباستخدام قانون جيب التمام يكون :

$$r_1^{\ 2} = (oB)^2 + (Ba)^2 - 2\,oB \times BaCos\ 30$$

$$r_1^{\ 2} = \left(400\sqrt{3}\right)^2 + (200)^2 - 2\times 400\sqrt{3}\times 200 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 280000$$

$$\therefore\ r_1 = 200\sqrt{7} = 529.15\,mm ,.........\ ....\ ....\ ....(5)$$

وباستخدام قانون الجيب نعين الزاوية β :

$$\frac{200}{Sin\ \beta} = \frac{200\sqrt{7}}{Sin\ 30} \Rightarrow Sin\ \beta = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

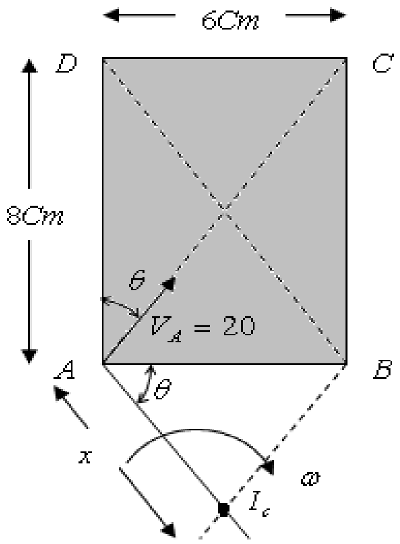
$$\therefore\ \beta = Sin^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{7}}\right) = 10.9^\circ ,.........\ ....\ ....\ .(6)$$

وعلى ذلك يكون مقدار السرعة V_a هو :

$$V_a = r_1\omega = \frac{10\times 200\sqrt{7}}{1000} = 2\sqrt{7}m\ /\sec ,......\ ....(7)$$

مثال (2):-

$ABCD$ صفيحة على شكل مستطيل حيث $AB = 6Cm , BC = 8Cm$ تتحرك الصفيحة في مستواه وفى لحظة ما كانت سرعة A تساوى $20\ Cm / \sec$ في اتجاه القطر AC وكان مقدار سرعة B تساوى $4\sqrt{13}Cm / \sec$. اوجد السرعة الزاوية للصفيحة وسرعة النقطة D بالنسبة إلى B .



<u>الحل:</u>

يتحدد مركز الدوران اللحظي بإقامة أعمدة على اتجاه السرعات وبإقامة عمود على اتجاه سرعة A وبفرض أن مركز الدوران اللحظي I_c يقع على بعد x من A (نظرا لعدم معلومية اتجاه سرعة B).

$$\because\ V_B = 4\sqrt{13}\,,$$

$$\therefore\ \left(\overline{I_c B}\right)^2 = x^2 + (6)^2 - 2(x)(6)Cos\ \theta = x^2 + 36 - 12x\left(\frac{8}{10}\right)$$

$$\left(\overline{I_c B}\right)^2 = x^2 + 36 - \frac{48}{5}x, \ldots\ldots\ldots\ .(1)$$

ولكن :

$$V_A = 20 = \omega x, \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ ..(2)$$

$$V_B = 4\sqrt{13} = \omega I_c B, \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ ....(3)$$

بقسمة المعادلة (2) على المعادلة (3) نجد أن :

$$\frac{20}{4\sqrt{13}} = \frac{x}{I_c B}, \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ ...(4)$$

وبتربيع المعادلة (4) نجد أن :

$$\frac{(20)^2}{\left(4\sqrt{13}\right)} = \frac{x^2}{5x^2 - 48x + 180}$$

$$\therefore\ x^2 - 20x + 75 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-15) = 0$$

$$\therefore\ x = 5 \quad or \quad x = 15$$

$\therefore$ المسالة لها حــلان :

$$\omega_1 = \frac{20}{x} = \frac{20}{5} = 4 rad\ /\sec^2 ,.........\ .(5)$$

$$\omega_2 = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} rad\ /\sec^2 ,.........\ ....(6)$$

وبذلك تكون لسرعة النقطة D حــلان :

$$(I_c D)^2 = x^2 + (8)^2 + 2(x)(8)Cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = x^2 + 64 + 16x\left(\frac{6}{10}\right) = x^2 + 64 + \frac{48}{5}x.$$

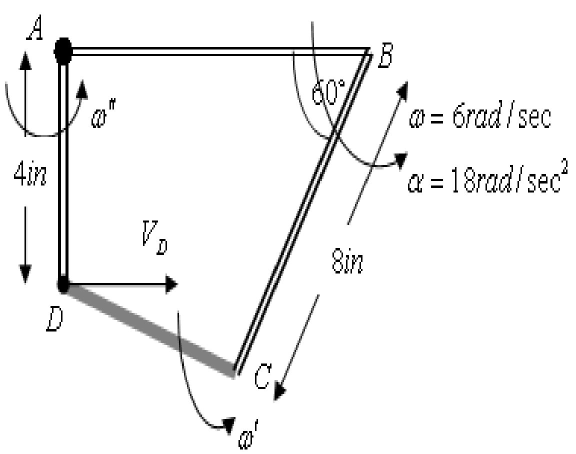
<u>الحل الأول:</u>

$$V_D = \omega_1 I_c D_1 = 4\sqrt{x^2 + 64 + \frac{48}{5}x} = 4\sqrt{\left[25 + 64 + \frac{48}{5}\times 5\right]} = 4\sqrt{137} = 46.82\,Cm\ /\sec .$$

<u>الحل الثاني:</u>

$$V_D = \omega_2 I_c D_2 = 4\sqrt{x^2 + 64 + \frac{48}{5}x} = 4\sqrt{\left[25 + 64 + \frac{48}{5}\times 15\right]} = 272\ Cm\ /\sec .$$

<u>مثال (3):-</u>



في المجموعة المفصلية المبينـة بالشكل يـدور الـذراع BC بالسرعة والعجلة الزاويتين الموضـحتين . عين العجلــة الخطيــة للمفصــل D وكـذلك ســرعته وذلـك باستخدام الطرق البيانية.

<u>الحل:</u>

دراسة السرعة للمجموعة المفصلية

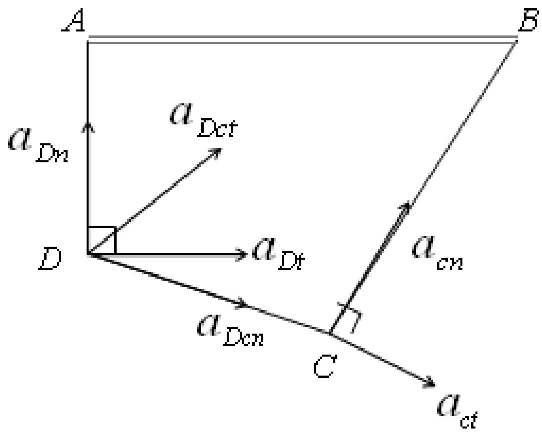
$$V_C = 6 \times 8 = 48\,inch\ /\sec$$

V_C تتعامد على BC كما تتعامد V_D على AD . يتقابل العمودان (العمودي على V_C والعمودي على V_D) في نقطة I_C وهى مركز الدوران اللحظي للقضيب.

$$\omega' = \frac{V_C}{I_C C} = \frac{48}{12} = 4\,rad\ /\sec .$$

$$V_D = \omega' I_C D = 53.6\,Cm\ /\sec .$$

$$\omega'' = \frac{V_D}{AD} = 13.4\,rad\ /\sec .$$



دراسة العجلة للمجموعة المفصلية :

نقطة C عجلتان لدورانها حول B وهما :

$$a_{cn} = 8\omega^2 = 288\ inch\ /\sec^2$$

$$a_{ct} = 8\alpha = 144\ inch\ /\sec^2$$

ولنقطة D عجلتان هما :

$$a_{Dn} = 4\omega''^2 = 718\ inch\ /\sec^2$$

$$a_{Dt} = 4\alpha'' = ??$$

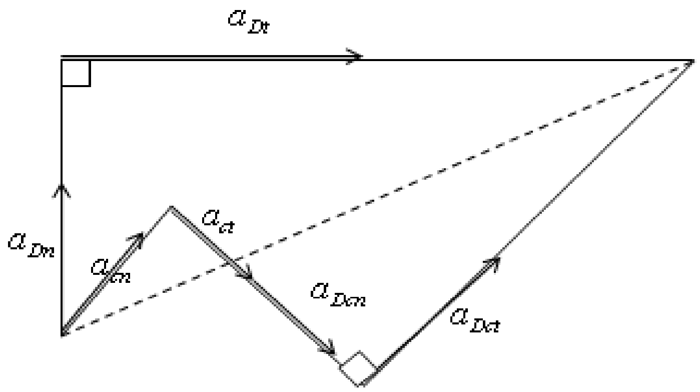
باتخاذ نقطة C نقطة أساس لحركة القضيب DC نجد أن لنقطة D عجلتان نتيجة لدورانها حول C هما (a_{Dct}, a_{Dcn}) :

$$a_{Dcn} = 6.7\omega'^2 = 107.2\,inch\ /\sec^2$$

$$a_{Dct} = 6.7\alpha' = ??$$

هذا بالإضافة إلى عجلتي نقطة الأساس a_{cn}, a_{ct} ثم باعتبار A نقطة أساس نجد أن ل D عجلتان a_{Dn}, a_{Dt} . برسم ال **diagram** المقابل لعجلات D متخذين C نقطة أساس ثم

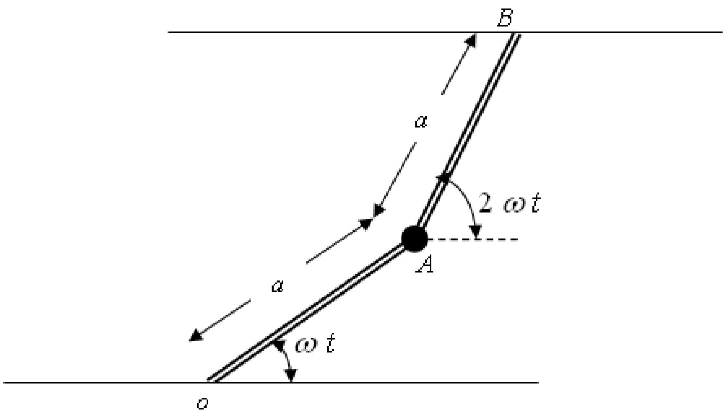
متخذين A نقطة أساس نحصل على الشكل المقفل المبين وفيه محصلة D ممثلة بالخط المنقط



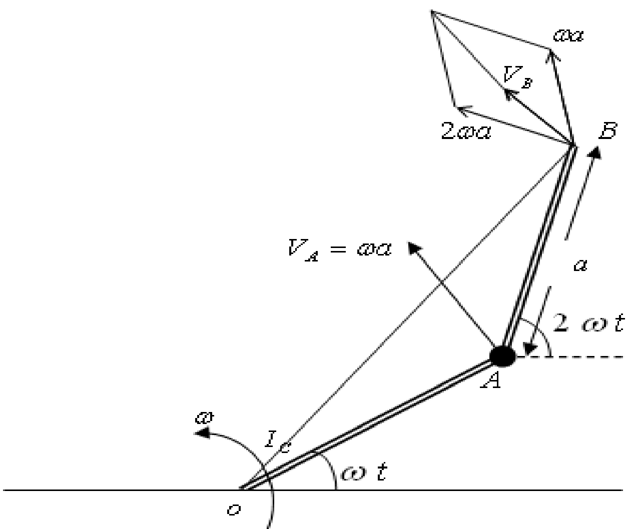
$$a_D = 950\ inch\ / \sec^2$$

مثال (4):-

في المجموعة المفصلية OAB تتحرك في مستوى فيدور OA حول مفصل بسرعة زاوية ثابتة ω ويدور الذراع AB حول المفصل المتحرك A بسرعة زاوية ثابتة 2ω. اوجد مركز الدوران اللحظي لدوران AB والعجلة اللحظية لنقطة A.



الحل:



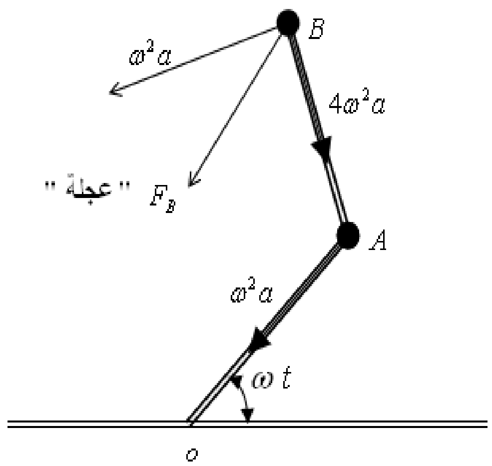
تعيين سرعة المجموعة المفصلية :

سرعة A الناتجة من دوران القضيب oA مقدارها ωa واتجاهها عمودي على oA كما

بالشكل. باتخاذ A نقطة أساس لحركة القضيب AB ، تتعين سرعة طرف B ومركبتاها $\omega a , 2\omega a$ كما بالشكل بتركيب هاتين المركبتين بمتوازي إضلاع تتعين محصلة سرعة B العمودان على كل من V_A , V_B يتقاطعان في مركز الدوران اللحظي I_C لحركة القضيب AB.

تعيين عجلة المجموعة المفصلية :

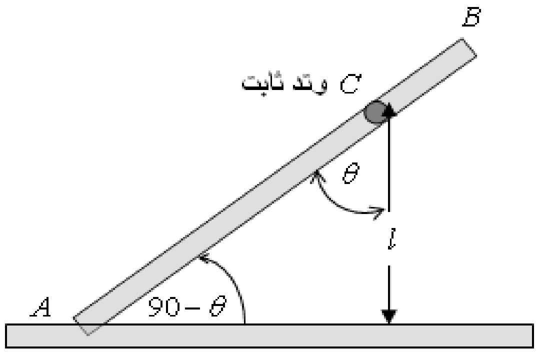
عجلة النقطة A تساوى $\omega^2 a$ متجهه إلى مركز الدوران o . وباتخاذ A نقطة أساس لحركة القضيب AB تتعين عجلة النقطة B وتتكون من مركبتين $\omega^2 a$ مساوية وموازية لعجلة نقطة أساس ، $4\omega^2 a$ هي عجلة الدوران حول A ويمكن تركيبها بمتوازي الأضلاع كما هو موضح بالشكل.



الشكل يوضح عجلة المجموعة المفصلية

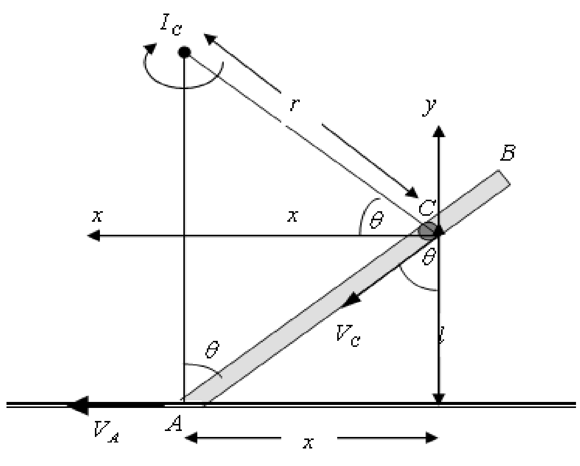
مثال(5):-

اوجد المرتكز الفراغي والمرتكز الجسمي لمركز الدوران I_C لحركة قضيب. إذا علم أن القضيب ينزلق على وتد ثابت وارض أفقية كما هو مبين بالشكل.



الحل:

يتعين مركز الدوران اللحظي بإقامة أعمدة على اتجاه السرعات والمرتكز الفراغي لمركز الدوران اللحظي هو المحل الهندسي لإحداثيات مركز الدوران اللحظي بالنسبة للفراغ.



بأخذ C نقطة أصل للإحداثيات نجد أن :

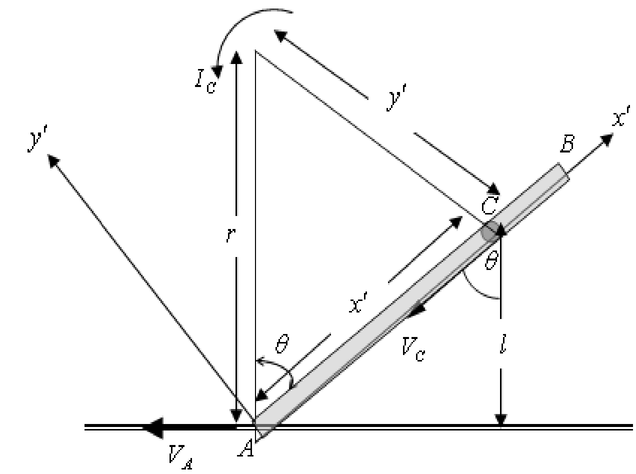
$$I_C C = r$$ (متجه موضع)

$$\because \tan\theta = \frac{x}{l} \Rightarrow x = l\tan\theta$$

$$\because Cos\,\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow r = xSec\,\theta$$

l

$$\therefore I_C = r = l\tan\theta Sec\,\theta$$



المسار الجسمي (المرتكز الجسمي) :

نأخذ محورين بالنسبة للقضيب. إحداهما والآخر عمودي عليه وليكن A (نقطة أصل).

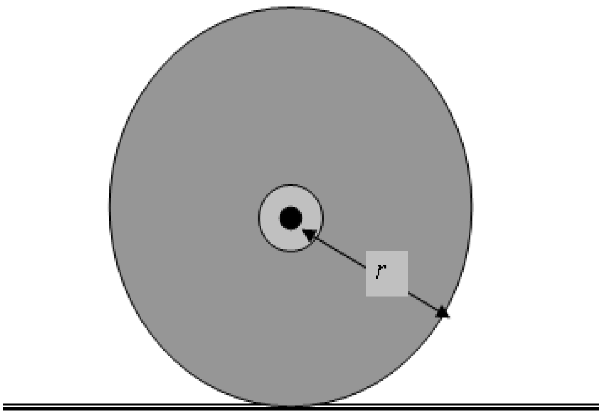
$$r = I_C A$$ (متجه موضع)

$$Cos\,\theta = \frac{l}{x'} \Rightarrow x' = lSec\,\theta$$

$$Cos\,\theta = \frac{x'}{r} = \frac{lSec\,\theta}{r}$$

$$\therefore r = lSec^2\theta$$

التدحرج البحت للأجسام المتماسكة:-



يبين الشكل التالي عجلة في مستوى راسي تلامس طريقا. بدلالة حركة العجلة بالنسبة إلى الطريق يمكن حدوث أربع حالات للحركة :

1- تبقى العجلة ساكنة.

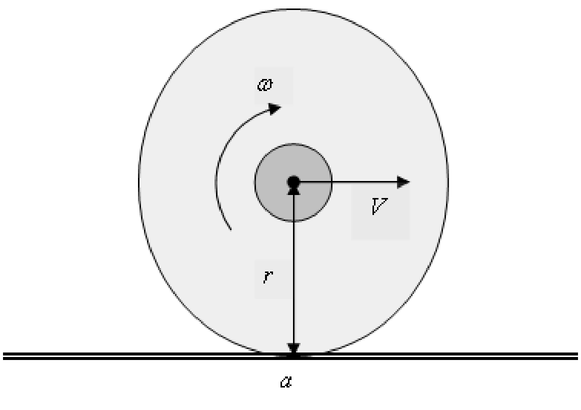
2- لا تدور العجلة وتنزلق حافة العجلة على طول الطريق.

3- تتدحرج العجلة على الطريق بدون انزلاق.

4- تتحرك العجلة على طول الطريق في حركة تجمع بين التدحرج والانزلاق.

الحالة الأولى : هي مسألة في الاستاتيكا.
الحالة الثانية : بما أن العجلة لا تدور فانه يمكن تحليل هذا العنصر على انه جسيم في حركة انتقالية.
الحالة الرابعة : هي مسالة غير محدودة إلا إذا أعطيت معلومات إضافية تصف العلاقة بين حركتي التدحرج والانزلاق.
الحالة الثالثة : عندما تتدحرج العجلة بدون انزلاق يشار إلى هذا النوع من الحركة على إنها تدحرج بحت.
التحرج البحت لعنصر اسطواني أو كروي هو عادة شرط التشغيل المطلوب لوسيلة معدة. من الأمثلة على التدحرج البحت تشمل عجلة في سيارة أو دحراج يستخدم لدهان الحوائط.
نعتبر حركة عجلة تتدحرج بدون انزلاق على إنها إحدى حالات الحركة المستوية حيث يتحرك مركز العجلة حركة انتقالية على طول مسار يوازى الطريق بينما أن العجلة تدور حول مركز ثقل العجلة.

العلاقة بين حركة العجلة الزاوية وحركة مركز ثقل العجلة الانتقالية :



يبين الشكل اتجاه حركة. بفرض أن اتجاه السرعة الزاوية ω الموجبة في اتجاه دوران عقارب الساعة بحيث أن مركز العجلة يتحرك إلى اليمين بسرعة مقدارها V واتجاه سرعة مركز العجلة يوازى الطريق. تسمى نقطة التلامس بين العجلة والطريق النقطة a بمركز الدوران اللحظي للعجلة.جميع الخطوط التي تقع على العجلة بما فيها الخط يكون لها نفس السرعة الزاوية ω وبما أن العجلة تدور لحظيا حول نقطة التلامس a يمكن أن نستنتج أن :

$$V = r\omega, \qquad \text{.........} \quad .(1)$$

$$\omega = \frac{V}{r}, \qquad \text{.........} \quad .(2)$$

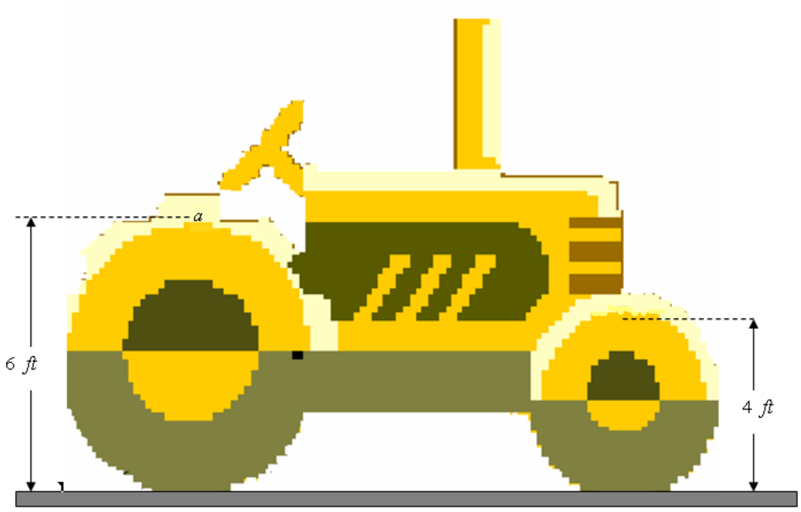
مثال (1):-

يتحرك جرار المزرعة المبين بالشكل بسرعة مقدارها $10\ mil\ /\ h$.

أ- اوجد سرعة العجلتين الأماميتين والخلفيتين الزاوية بالدورات في الدقيقة.

ب- اوجد سرعة النقطة a التي تقع على قمة العجلة الخلفية.

ج- اوجد سرعة النقطة a بالنسبة إلى محور العجلة الخلفية.



الحل:-

أ- السرعة الخطية لكل من مركزي العجلتين هي :

$$V = \frac{10 \times 1760 \times 3}{60} = 880\ ft\ /\ \min .$$

للعجلتين الخلفيتين :

$$\omega = \frac{V}{r} = \frac{880}{3} = 293.3 rad\ /\ \min = \frac{293.3}{2\pi} = \frac{293.3 \times 7}{2 \times 22} = 46.6 r\ /\ \min$$

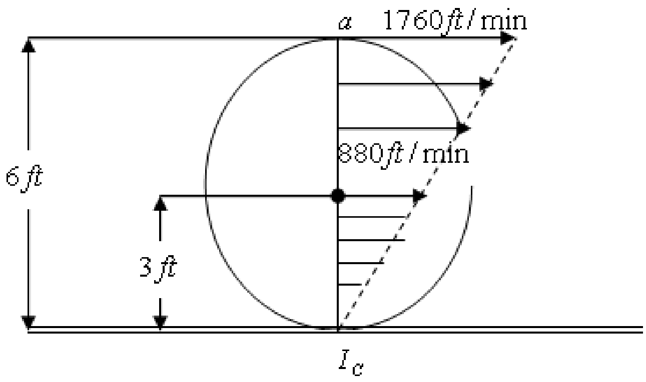
للعجلتين الأماميتين:

$$\omega = \frac{V}{r} = \frac{880}{2} = 440\ rad\ /\ \min = \frac{440}{2\pi} = 70\ r\ /\ \min .$$

ب- تدور العجلة الخلفية بسرعة زاوية تساوى $293\ rad/\min$ حول نقطة التلامس مع الأرض وهى مركز الدوران اللحظي. وعلى ذلك تكون السرعة الخطية لنقطة a التي تقع على الحافة العليا للعجلة هي :

$$V = r\omega = 6 \times 293.3 = 1760\ ft/\min$$

والشكل التالي يوضح توزيع السرعة الخطية التي تقع على القطر الرأسي على العجلة الخلفية.



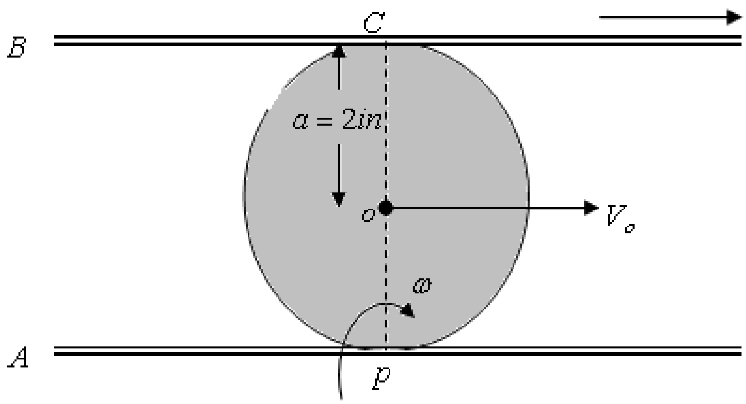
ج- سرعة النقطة a بالنسبة إلى مركز العجلة هي :

$${}_{ao} = V_a - V_o = 1760 - 880 = 880\ ft/\min\ .$$

وتكون هذه الكمية موجبة في الاتجاه الموجب للسرعة V_a.

مثال (2):-

ترس (Gear) نصف قطره $4\,inch$ يتحرك بين لوحين مستقيمين A, B . اللوح A ثابت واللوح B يتحرك أفقيا بسرعة $2\ ft/\sec$ وعجلته $1.5\ ft/\sec^2$. عين سرعة وعجلة مركز الترس o ونقطة التماس C .



الحل :

بفرض أن نقطة التعشيق P هي مركز الدوران اللحظي للترس.

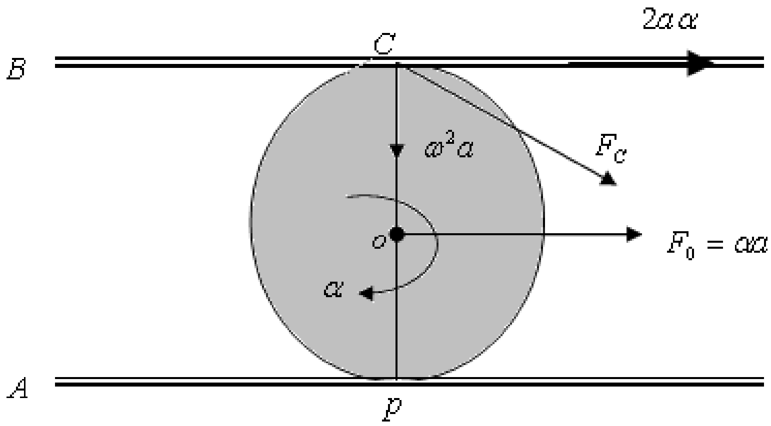
$$V_C = 2\omega a \Rightarrow 2 = \frac{4\times 2}{12}\omega$$

$$\therefore \omega = 3 rad / \sec .$$

$$V_0 = \omega a = \frac{3\times 4}{12} = 1\, ft / \sec .$$

$$\because \vec{V}_C = \vec{V}_0 + \vec{V}_{C0}$$

بفرض أن o نقطة أصل للحركة وان عجلة o هي αa أفقيا.



عجلة C عبارة عن ثلاث عجلات عجلة مساوية وموازية لعجلة نقطة الأصل وعجلتان من الدوران حولها هما $\omega^2 a$ متجهه من C إلي o و αa أفقية وعلى هذا فان محصلة عجلة C هي :

$$F_C = \sqrt{\left(\omega^2 a\right)^2 + \left(2\alpha a\right)^2}$$

العجلة الأفقية للوح العلوي تساوى المركبة الأفقية لعجلة C.

$$\therefore\ 2\alpha a = 1.5 \Rightarrow \alpha = \frac{1.5}{2a} = \frac{1.5\times 12}{2\times 4}$$

$$\therefore\ \alpha = 2.25\, rad\ / \sec$$

$$\therefore\ F_0 = \alpha a = \frac{2.25\times 4}{12} \Rightarrow F_0 = 0.75\ ft / \sec$$

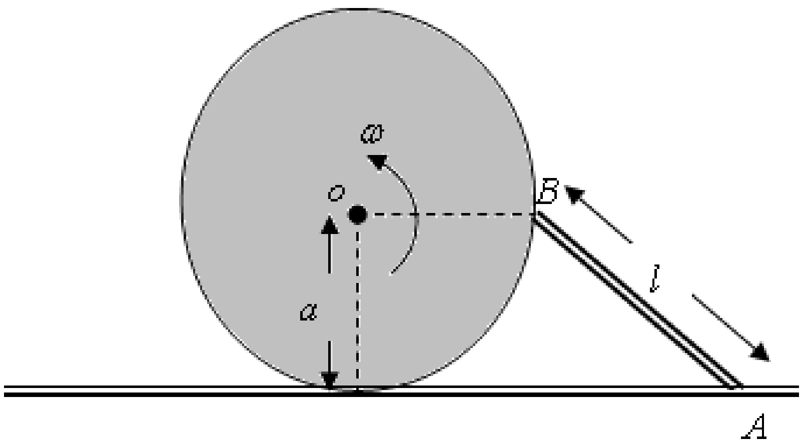
$$\because\ \vec{F}_C = 2\vec{F}_0 + \vec{F}_{C0}$$

$$F_C = \sqrt{(2F_0)^2 + (F_{C0})^2} = \sqrt{(1.5)^2 + \left(9\times\frac{4}{3}\right)^2}$$

$$\therefore\ F_C = 3.35\ ft / \sec^2 .$$

مثال (3):-

عجلـة Wheel تـدور حـول المركـز الثابـت بسـرعة زاويـة منتظمـة ω ، AB قضـيب طولـه l يتصـل مفصليا بالعجلـة فـي B وينزلـق طرفـه A علـى مسـتوى أفقـي يمـس العجلـة كمـا بالشـكل. اوجـد سـرعة طرفي القضيب ووسطه واقل سرعة فيه.



الحل:

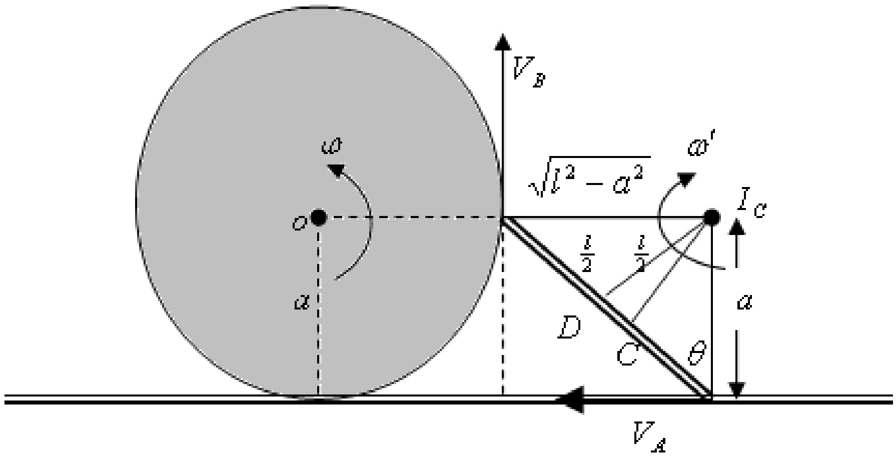
يتعين مركز الدوران اللحظي بإقامة أعمدة على اتجاه سرعة أي نقطتين في الجسم.

سرعة النقطة B كنقطة من العجلة :

$$V_B = \omega a, \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots(1)$$

سرعة النقطة B كنقطة من القضيب :

$$V_B = \sqrt{l^2 - a^2}\,\omega', \dots\dots\dots (2)$$



من (1) ، (2) **ينتج أن :**

$$\sqrt{l^2 - a^2}\,\omega' = \omega a$$

$$\therefore\ \omega' = \frac{\omega a}{\sqrt{l^2 - a^2}}, \dots\dots\dots \dots\dots (3)$$

$$V_A = a\omega' = \frac{\omega a^2}{\sqrt{l^2 - a^2}}, \dots\dots\dots (4)$$

<u>سرعة منتصف القضيب :</u>

$\because$ **الخط الواصل من الرأس القائمة إلى منتصف الوتر يساوى نصف الوتر.**

$$V_D = \frac{1}{2} l\omega' = \frac{l\omega a}{2\sqrt{l^2 - a^2}}, \dots\dots\dots (5)$$

اقل سرعة تكون عند اقصر بعد ، واقصر بعد هو العمودي :

$$V_{min} = V_C = I_C C \cdot \omega', \dots\dots\dots \dots\dots\dots (6)$$

$$I_C = a \sin\theta = \frac{a\sqrt{l^2 - a^2}}{l}, \dots\dots\dots (7)$$

بالتعويض من (7)، (3) **في** (6)**:**

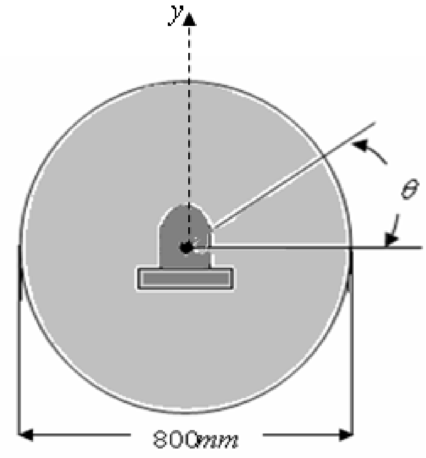
$$\therefore V_{\min} = \frac{a\sqrt{l^2 - a^2}}{l} \cdot \frac{a\omega}{\sqrt{l^2 - a^2}}$$

$$\therefore V_{\min} = \frac{a^2\omega}{l}, \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots(8)$$

تمـــارين

1- يتحرك قضيب AB **طوله** $66\ Cm$ **حركة عامة مستوية وفى لحظة معينـة وجد أن مقدار عجلـة** B **تســاوى** $910\ Cm\ /\sec$ **واتجاههـا يصـنع زاويـة** $\tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$ **مـع اتجـاه** AB **. ومقـدار عجلـة** A **تساوى** $850\ Cm\ /\sec^2$ **واتجاهها يصنع زاوية** $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ **مع اتجاه** AB **.**

اوجد السرعة الزاوية والعجلة الزاوية للقضيب AB عند هذه اللحظة. ثم عين موضع مركز العجلات J ومقدار واتجاه عجلة منتصف القضيب AB عند هذه اللحظة.



2- يبين الشكل قرصا يدور حول نقطة ثابتة. إزاحة القرص الزاوية تتعين من :

$$\theta = 1.9(t+1)$$

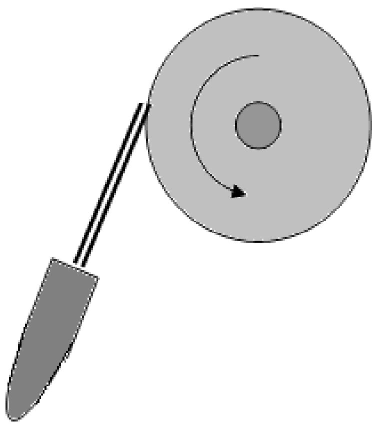
حيث θ بالتقدير الدائري ، t بالثواني.

أ- اوجد القيم الابتدائية للإزاحة والسرعة الزاوية عندما $t = 0$.

ب- اوجد الإزاحة والسرعة والعجلة الزاوية عندما $t = 1\sec$ ، $t = 2\sec$. ارسم رسما تخطيطيا لموضع القرص في هذين الزمنين.

ج- اوجد الزمن عندما يكمل القرص لفة كاملة من موضعه الابتدائي.

3- يسن عامل مكينات أجنة **Chisel** على عجلة تجليخ **Grinding Wheel** كما هو مبين بالشكل. يحتفظ بالأجنة ملاصقة للعجلة لمدة $5\sec$ أثناء هذا الزمن تتغير سرعة العجلة من $3600\ r/\min$ إلى $3450\ r/\min$.



أ- اوجد قيمة العجلة التقصيرية لعجلة التجليخ على فرض أن هذه الكمية ثابتة.

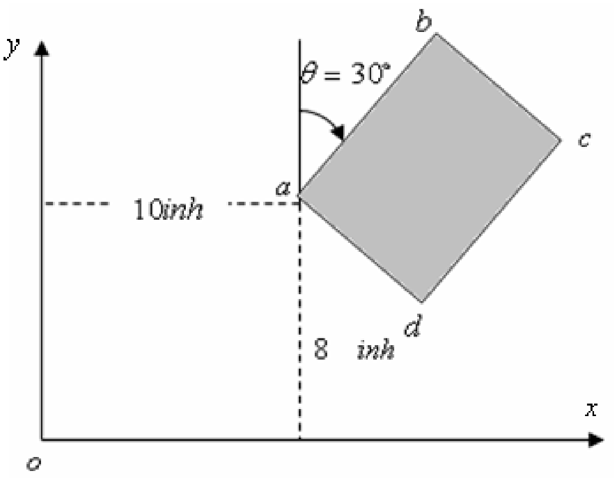
ب- اوجد الإزاحة الزاوية لعجلة التجليخ خلال هذه الفترة.

ج- عند أبعاد الأجنة يعطى المحرك عجلة التجليخ عجلة مقدارها $65\, rad/\sec^2$. ما هو الزمن الذي تحتاج إليه العجلة لكي تعود إلى سرعتها الزاوية الابتدائية.

4- عند تصنيع المحركات الكهربية ذات العجلة الزاوية الثابتة لاستخدام خاص يكون احد المتطلبات هو ألا تنحرف العجلة الزاوية بأكثر من 1 في المائة عن قيمة التصميم الاسمية وهى $\alpha = 80\, rad/\sec^2$. كل محرك يصل من خط التجميع يختبر منفردا لاستيفاء هذا المطلب.

أ- إذا بدأت كل وحدة في الحركة من السكون وتحركت لمدة $5\sec$ اوجد المدى المقبول للسرعة الزاوية التي يجب على المحركات الوصول إليها عند نهاية هذه الفترة الزمنية بالدورات في الدقيقة.

ب- اوجد المدى المناظر للإزاحة الزاوية الكلية خلال هذه الفترة الزمنية.



5- يبين الشكل الموضع الابتدائي عندما $t = 0$ للوح مسطح يتحرك حركة مستوية عامة. إزاحة النقطة a والإزاحة الزاوية للخط ab أعطيتا في الصورة :

$$x = 10 \text{ ، } y = -4t + 8 \text{ ، } \theta = 5t^2 + 65t + 30$$

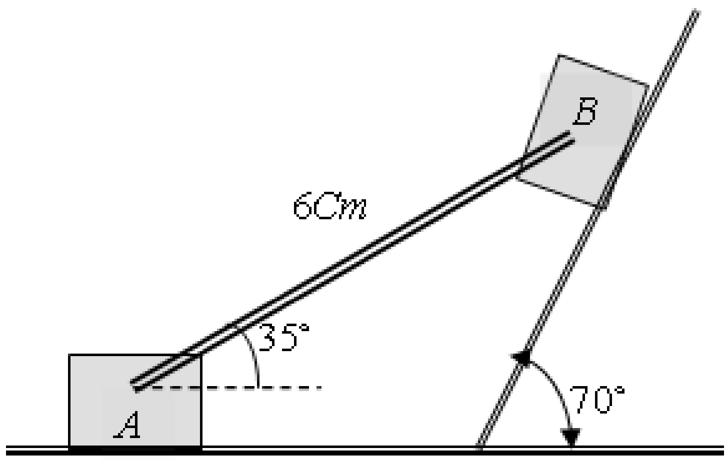
حيث x, y بالبوصات ، θ بالدرجات ، t بالثواني.

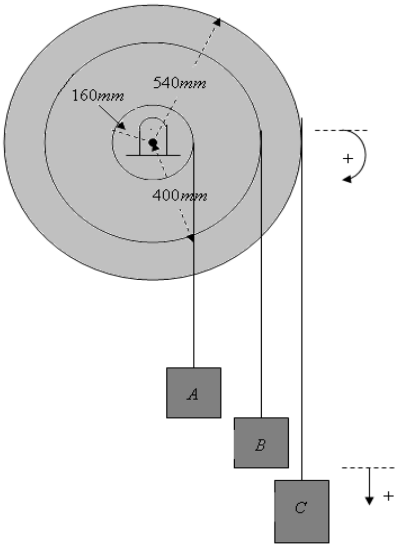
أ- اوجد موضع اللوح عندما $t = 2\sec$.

ب- اوجد مقدار واتجاه سرعة النقطة a عندما $t = 2\sec$.

ج- اوجد سرعة اللوح الزاوية عندما $t = 2\sec$.

6- موضع المبين في الشكل تكون السرعة الزاوية للوصلة التي تصل بين القالبين هي $22\ rad/\sec$ في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة.





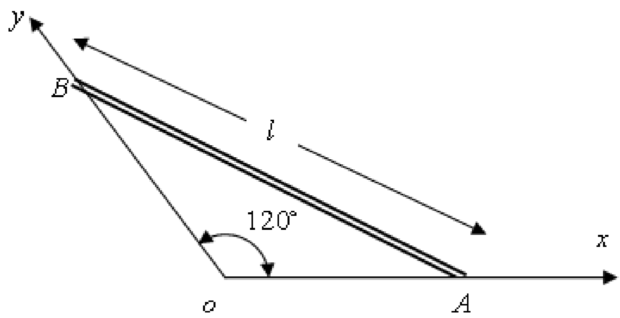
7- عند اللحظة المبينة بالشكل تدور البكرة المتدرجة بسرعة زاوية مقدارها $25\ rad\ /\sec$ وعجلة زاوية مقدارها $6\,rad\ /\sec^2$ في اتجاه دوران عقارب الساعة.

أ- اوجد سرعة وعجلة الأوزان A, B, C .

ب- اوجد كلا من السرعة النسبية والعجلة النسبية للوزن A بالنسبة إلى الوزن B والوزن B بالنسبة إلى الوزن C والوزن A بالنسبة إلى الوزن C.

ج- إذا تغيرت اتجاه العجلة الزاوية إلى $6\,rad\ /\sec$. فاوجد أ ، ب في هذه الحالة.

8- قضيب AB طوله l ينزلق طرفاه A ، B على المستقيمين الثابتين ox ، oy حيث الزاوية xoy تساوى 120° اوجد المرتكز الجسمي والمرتكز الفراغي كما هو مبين بالشكل.



9- ثنى سلك مستقيم ACB عند C بحيث كانت الزاوية ACB قائمة. تحرك هذا السلك في مستواه بحيث ينزلق فرعاه AC ، CB على محيطي دائرتين ثابتتين في مستواه. أثبت أن المرتكز الفراغي دائرة والمرتكز الجسمي دائرة آخري نصف قطرها يساوى قطر المرتكز الفراغي.

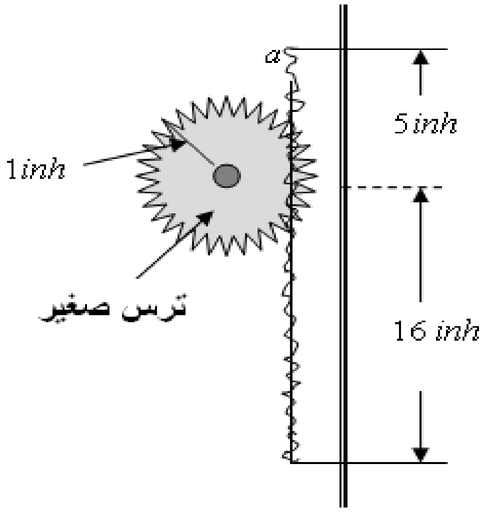
10- قضيب منتظم طوله l يرتكز احد طرفاه على حائط راسي أملس ويستند الطرف الآخر على مستوى أفقي أملس . اوجد المنحنيين القطبيين.

11- يتدحرج قرص دائري على خط مستقيم. اثبت أن مركز الدوران اللحظي هو نقطة التماس واوجد المحل الهندسي لمراكز الدوران اللحظية في الفراغ وفى الجسم.

12- A نقطة على محيط دائرة مركزها C تتدحرج بسرعة زاوية ω على دائرة ثابتة مركزها o ونصف قطرها a. اثبت أن السرعة الزاوية للنقطة A حول o هي :

$$\omega - \frac{a\,\omega Cos\,(C\hat{o}A)}{oA}.$$

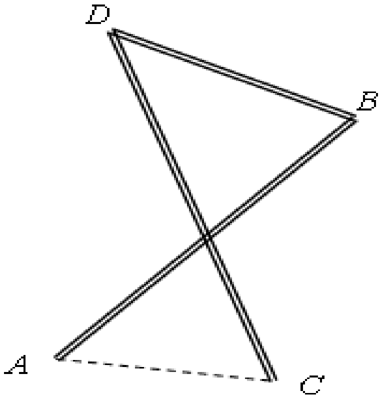
13- يبين الشكل مجموعة مسننات جريدة وترس صغير .تتحرك الجريدة المسننة **Rack** إلى أسفل بعجلة ثابتة مقدارها $15\ ft/\sec^2$. عندما $t = 0$ تكون الجريدة ساكنة وفى الموضع المبين بالشكل.



أ- اوجد الزمن والسرعة المناظرة عندما يفقد الطرف a في الجريدة المسننة تلامسه مع الترس الصغير.

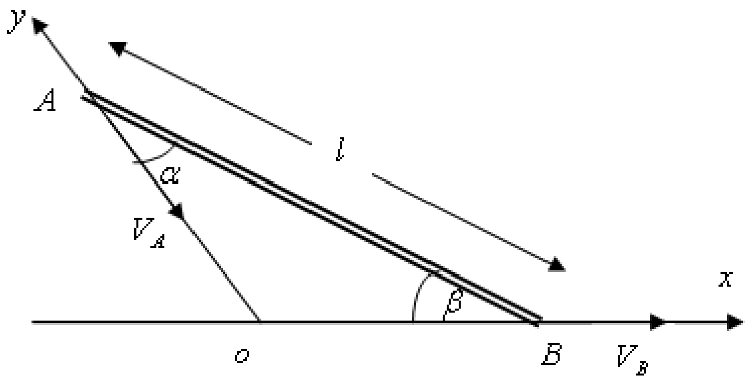
ب- اوجد السرعة الزاوية والعجلة الزاوية للترس الصغير عند الزمن الذي وجد في (أ).

ج- اوجد مقدار واتجاه السرعة والعجلة لنقطة على الطرف الأيسر لقطر افقى في الترس الصغير عند الزمن الذي وجد في (أ).



14- يبين الشكل قضبان متساويان في الطول $CD\,,AB$ يمكنهما الدوران حول مفصلين ثابتين $C\,,A$ ويربطهما مفصليا قضيب ثالث BD طوله يساوى المسافة AC بين المفصلين. عين مركز الدوران اللحظي للقضيب BD واثبت أن كل من المنحنيين القطبيين هـــو قطـــع نـــاقص.

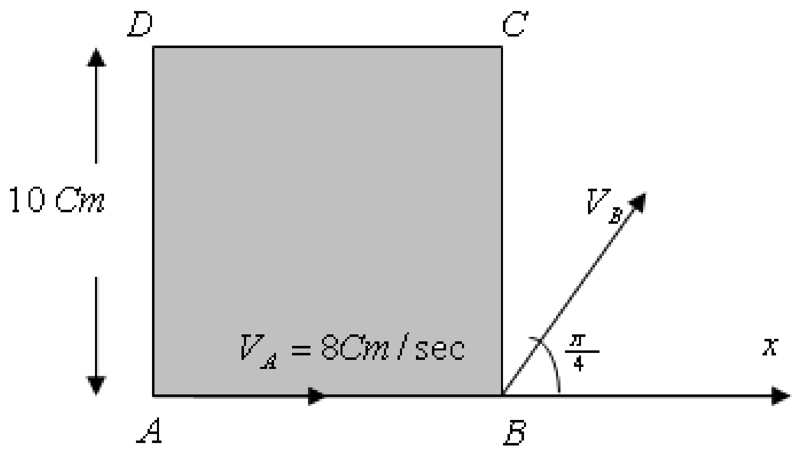
15- ينزلق طرفا قضيب AB في اتجاهين يصنعان زاويتين β , α مع AB كما هو مبين بالشكل. اوجد السرعة الزاوية للقضيب بدلالة سرعة الطرف A.



16- تتحرك صفيحة رقيقة على شكل مثلث ABC حركة عامة في مستواها بحيث يمر الضلع AB دائما بنقطة ثابتة D ويمر AB بنقطة ثابتة أخرى E. اوجد المنحنيين القطبيين.

17- يدور قرص دائري بسرعة زاوية منتظمة ω أثناء سقوط بعجلة الجاذبية الأرضية. اوجد المسارين الفراغي و الجسمي لمركز الدوران اللحظي .

18- تتحرك صفيحة مربعة $ABCD$ في مستوى طول ضلعها $10\ Cm$. عند لحظة ما كان AB أفقيا والنقطة A متحركة بسرعة $8Cm\ /\sec$ في الاتجاه الموجب لمحور ABx وكانت B متحركة في اتجاه يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع المحور Bx. عين سرعة B ، C.



19- يتحرك قضيب AB في مستوى رأسي بحيث كان طرفه A يقع دائما على مستوى افقى بحيث يلامس القضيب دائما وتد ثابت C على ارتفاع h من المستوى الأفقي السابق. اوجد معادلات المرتكزين الجسمي والفراغي .

20- يتحرك قضيب AB بحيث كانت A دائما ملامسة مستقيم رأسي بينما يمر القضيب دائما خلال حلقة ثابتة C على بعد A من المستقيم الرأسي السابق. اوجد معادلات المرتكزين الجسمي والفراغي .

الباب الثالث
كينتيكا الجسم المتماسك فى المستوى
Kinetics of Rigid Body In Plane

مقدمة :

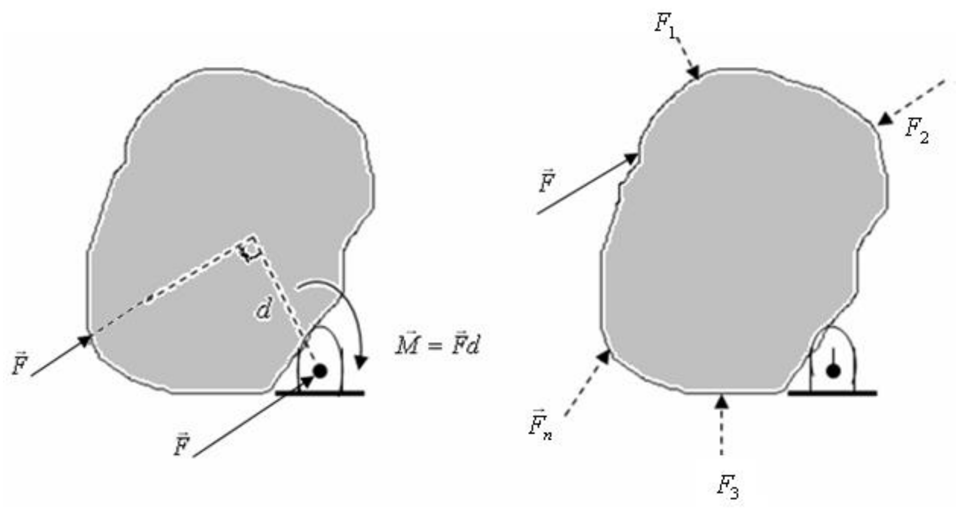
سوف ندرس في هذا الباب مسائل ذات معنى هندسي وهى الحركة المستوية لجسم متماسك. وان اغلب مسائل الديناميكا تكون موجودة في هذا الباب. وعندما يتحرك جسم متماسك حركة مستوية فان جميع نقط الجسم تحتفظ بنفس المسافة النسبية من مستوى إسناد ثابت خلال الحركة بأكملها. ليس من الضروري أن توجد جميع القوى التي تؤثر على الجسم المتماسك في مستوي حركته. إذا كان لإحدى هذه القوى مركبة عمودية على مستوى الحركة فان المركبة يجب أن تتزن مع مركبة قوة رد فعل الأرض على الجسم التي تكون عمودية علة مستوى الحركة. لا تساهم في حركة الجسم المتماسك في المستوى إلا مركبات القوى التي تقع في هذا المستوى فقط.
توجد ثلاثة أنواع من مسائل الحركة للجسم المتماسك في المستوى.

النوع الأول من المسائل:

في هذا النوع من المسائل تكون إحدى نقط الجسم نقطة ثابتة متصلة بالأرض ويمكن وصف حركة الجسم كاملا إذا عرفنا حركة الجسم الزاوية أو الدورانية حول النقطة الثابتة. وكمثال على ذلك جسم يتدحرج على جسم آخر. يمكن اعتبار أن نقطة تلامس الجسمين هي نقطة ثابتة أو مركز لحظي يدور حوله جسم بالنسبة لجسم آخر في نفس اللحظة.

الحركة الديناميكية لجسم متماسك حول نقطة ثابتة :-

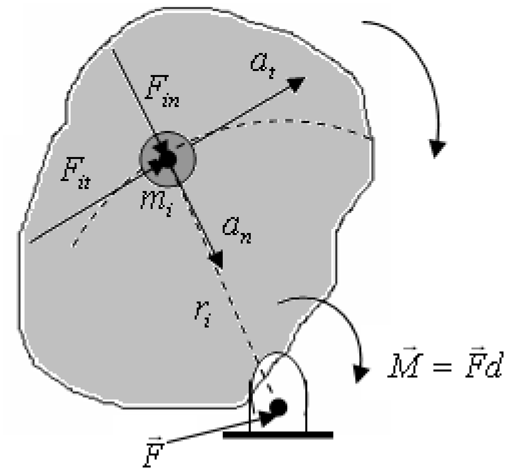
بفرض أن $F_1, F_2, \ldots\ldots, F_n$ مجموعة من القوي الخارجية تؤثر على الجسم المتماسك. يمكن إيجاد محصلة هذه المجموعة (مقدارا واتجاها ونقطة تأثيرها) وذلك باستخدام أسلوب التحليل الاستاتيكي . ونرمز لمحصلة هذه القوى بالرمز F.



ويمكن أن تختزل أي قوة تؤثر على الجسم المتماسك بقوة مساوية لها وتوازيها تؤثر في موقع آخر مضافا إليها ازدواج عزمه يكون مساويا $\vec{M} = \vec{F}d$ ويسمى بالازدواج الخارجي المحصل أو العزم الذي يؤثر على الجسم. أثناء دوران الجسم المتماسك حول النقطة الثابتة تتحرك جميع نقط الجسم في مسارات دائرية متحدة المركز ومركزها هي النقطة الثابتة.

بفرض عنصر كتلة نمطي m_i من الجسم يبعد مسافة r_i عن النقطة الثابتة ويتحرك هذا العنصر حركة دائرية مستوية ومركبتا عجلته العمودية و المماسية هما a_n, a_t.

القوتان F_{in}, F_{it} هما المركبتان المتعامدتان للقوة الكلية F_i التي تؤثر على الكتلة m_i.



ويمكن اعتبار القوة F_i هي قوة رد فعل تؤثر بها عناصر الكتل المجاورة على العنصر أو هي عبارة عن قوة خارجية تؤثر مباشرة على الجسم المتماسك. من قانون نيوتن الثاني لجسم يتحرك حركة انتقالية انحنائية خطية (Plane curvilinear translation motion):

$$\left.\begin{aligned} F_{in} &= m_i a_n, \\ F_{it} &= m_i a_t. \end{aligned}\right\} ,\ldots\ldots\ldots \quad .(1)$$

ويتحرك الجسم m_i على مسار دائري نصف قطره r_i بحيث أن :

$$\left.\begin{aligned} a_n &= r_i \omega^2 \\ a_t &= r_i \alpha \end{aligned}\right\} ,\ldots\ldots\ldots \quad \ldots.(2)$$

بالتعويض من (2) في (1) نجد أن :

$$\left.\begin{aligned} F_{in} &= m_i r_i \omega^2 \\ F_{it} &= m_i r_i \alpha \end{aligned}\right\} ,\ldots\ldots\ldots \quad .(3)$$

حيث ω, α هما السرعة والعجلة الزاويتان للجسم حول النقطة الثابتة على الترتيب.

$\because$ خط عمل القوة F_{in} يمر خلال النقطة الثابتة فان هذه القوة لا تساهم في العزم.

للحصول على القوة F_{it} نحتاج إلى عزم القوة حول النقطة الثابتة ومقداره :

$$M_i = F_{it} r_i , \ldots\ldots\ldots \ \ldots.(4)$$

$$M_i = m_i r_i^2 \alpha , \ldots\ldots\ldots \ .(5)$$

وعلى ذلك يكون مقدار العزم الكلى الذي نحتاج إليه لكي يكتسب جميع عناصر كتلة الجسم عجلة هو M حيث تساوى :

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i = \alpha \sum_{i=1} m_i r_i^2 , \ldots\ldots\ldots \ .(6)$$

$$M = \alpha \int_V r^2 dm , \ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots(7)$$

$$M = \alpha I , \ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots(8)$$

حيث I عزم القصور الذاتي للجسم المتماسك حول محور عمودي على مستوى الحركة ويمر بالنقطة الثابتة. المعادلة (8) تبين قانون نيوتن الثاني في الحركة الدورانية لجسم متماسك حول نقطة ثابتة في الأرض.

M : هو الازدواج الخارجي المحصل أو العزم أو عزم اللي الذي يؤثر على الجسم المتماسك بالنسبة للنقطة الثابتة.

α : هي العجلة الزاوية للجسم المتماسك.

وفى كثير من مسائل ديناميكا الجسم المتماسك يكون عزم قصور الكتلة للجسم حول المحور الذي يمر بمركز المتوسط (الثقل) معلوم وليكن I_0 وباستخدام نظرية المحاور المتوازية (نظرية النقل) يمكن إيجاد عزم القصور الذاتي حول النقطة الثابتة I :

$$I = I_0 + md^2 , \ldots\ldots\ldots \ .(9)$$

حيث m كتلة الجسم ، d هي المسافة بين المحورين مقاسة في مستوى الحركة.

إذا كان M مقدارا ثابتا فان العجلة الزاوية α يجب أن تكون ثابتة أيضا وفى هذه الحالة تطبق جميع القوانين في حالة حركة جسم متماسك يتحرك حركة دورا نية بعجلة ثابتة وهي :

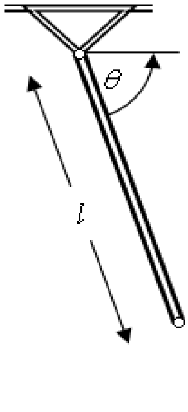
$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

حيث ω_0 السرعة الزاوية الابتدائية .

مثال (1):-



يبين الشكل قضيبا رفيعا كتلته m وطوله l . ترك القضيب ليتحرك من السكون من الموضع $\theta = 0^\circ$.

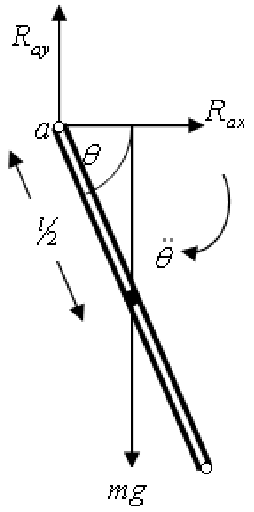
أ- اوجد النهاية العظمي لقيمة العجلة الزاوية للقضيب والعجلة المماسية المناظرة a_t عند طرف القضيب .

ب- اوجد النتائج العددية في الجزء (أ) عندما :

$$m = 2.4 Kg \quad , \quad l = 1200 \quad mm \ .$$

<u>الحل:-</u>

الصيغة الدورانية لقانون نيوتن الثاني للقضيب هي :



$$M_a = I_a \alpha ,.........\ ....\ .(1)$$

والعزم حول النقطة a هو :

$$M_a = mg\frac{l}{2}Cos\ \theta ,.........\ .(2)$$

عزم القصور الذاتي لقضيب رفيع حول احد طرفيه هو :

$$I_a = \frac{1}{3}ml^2 ,.........\ ....(3)$$

حيث l طول القضيب.

$$\therefore mg\frac{l}{2}Cos\ \theta = \frac{1}{3}ml^2\alpha$$

$$\therefore \alpha = \frac{3g}{2l}Cos\ \theta ,.........\ ....(4)$$

العجلة الزاوية هي دالة في θ. القيمة العظمي للعجلة الزاوية عندما $\theta = 0$:

$$\alpha_{max} = \frac{3g}{2l} ,.........\ ....\ ..(5)$$

قيمة العجلة المماسية المناظرة :

$$a_{t,max} = l\alpha_{max} = \frac{3g}{2} ,.........\ .(6)$$

العجلة تساوي صفر عندما $\theta = 90^\circ$. أي أن القضيب في الموضع الرأسي.

ب- عندما $l = 1200\ mm$:

$$\alpha_{max} = \frac{3\times 9.81}{2\times 1.2} = 12.3 rad / \sec^2 .$$

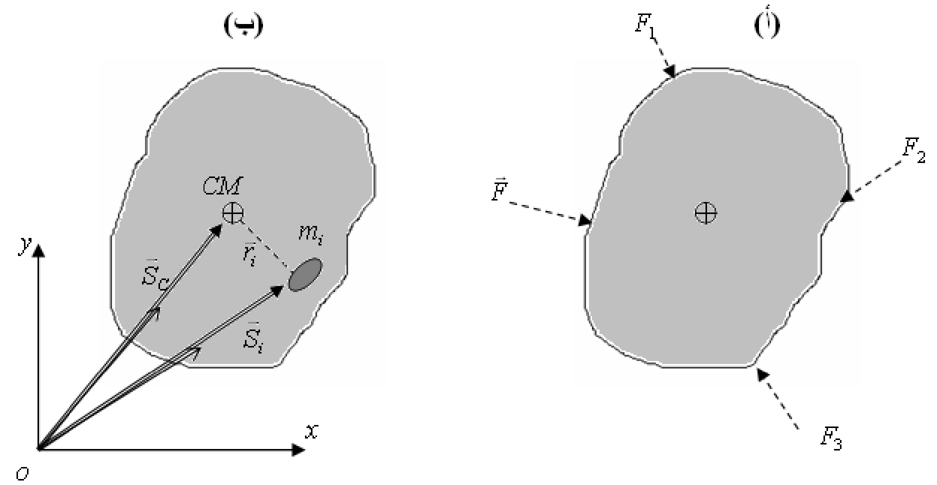
$$a_{t,max} = \frac{3\times 9.81}{2} = 14.7 m / \sec^2 .$$

<u>2- الحركة الديناميكية التي توصف بأنها حركة انتقالية لمركز الثقل وحركة دورانية حول هذه النقطة:</u>

<u>النوع الثاني من المسائل :</u>

في هذا النوع من المسائل توصف الحركة المستوية الكلية للجسم بالحركة الانتقالية لمركز الثقل وحركة دورانية حول هذه النقطة. وفى هذه الحالة من الممكن أن يتحرك مركز الثقل في مسار مستقيم أو في مسار منحني .

أما النوع الثالث من المسائل تكون الحركة المستوية للجسم مشابهه للنوع الثاني من المسائل ولكن الفرق الجوهري بين هاتين الحالتين هو أن نقطة الإسناد في الحالة الأخيرة ليست مركز ثقل الجسم. هذه النوعية من المسائل ذات طابع أكثر تقدما عن النوعين السابقين. وسوف ندرس هذا النوع من المسائل في السنوات القادمة. والآن سوف ندرس النوع الثاني.



الجسم المتماسك المستوي المبين بالشكل (أ) لم يعد متصلا بالأرض ولكن من الممكن أن يكون له أي نمط عام من الحركة المستوية . سوف نطور الآن المعادلات التي تحكم حركة الجسم.

يبين الشكل (ب) الجسم موضوعا بالنسبة إلي مجموعة إحداثيات مرتبطة بالأرض حيث $\vec{S}_C$ متجه موضع مركز الثقل (مركز الكتلة) بالنسبة إلي الأرض ، $\vec{r}_i$ متجه موضع عنصر الكتلة الاختياري m_i بالنسبة إلي مركز الأرض ، $\vec{S}_i$ متجه الإزاحة المطلقة لعنصر الكتلة m_i بالنسبة إلى الأرض . من الشكل نجد أن :

$$\vec{S}_i = \vec{S}_C + \vec{r}_i ,......... ....(1)$$

بفرض أن كل عنصر يتحرك حركة انتقالية انحنائية خطية. وعلى ذلك بتطبيق قانون نيوتن الثاني لكل من هذه العناصر نجد أن :

$$\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{S}}_i = m_i \frac{d^2 \vec{S}_i}{dt^2} ,......... .(2)$$

حيث $\ddot{\vec{S}}_i$ هي العجلة المطلقة لعنصر الكتلة ، $\vec{F}_i$ تمثل القوة التي تؤثر بها عناصر الكتلة المجاورة على العنصر الاختياري أو تمثل قوة خارجية تؤثر مباشرة علي العنصر.

القوة المحصلة التي تؤثر علي الجسم كله هي $\vec{F}$ حيث :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i ,......... ....(3)$$

الجمع في الطرف الأيمن من المعادلة (3) هو لجميع القوي التي تؤثر علي جميع عناصر الجسم المتماسك وأثناء عملية الجمع تتلاشي جميع القوي الداخلية في الجسم (قانون نيوتن الثالث). وعلي ذلك فان القوي الخارجية التي تؤثر علي الجسم هي التي تساهم بمفردها في القوة المحصلة.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{S}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\ddot{\vec{S}}_C + \ddot{\vec{r}}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{S}}_C + \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

$\ddot{S}_C$ **هي العجلة المطلقة لمركز الكتلة ويمكن كتابتها في الصورة :**

$$\ddot{\vec{S}}_C = \vec{a}_C$$

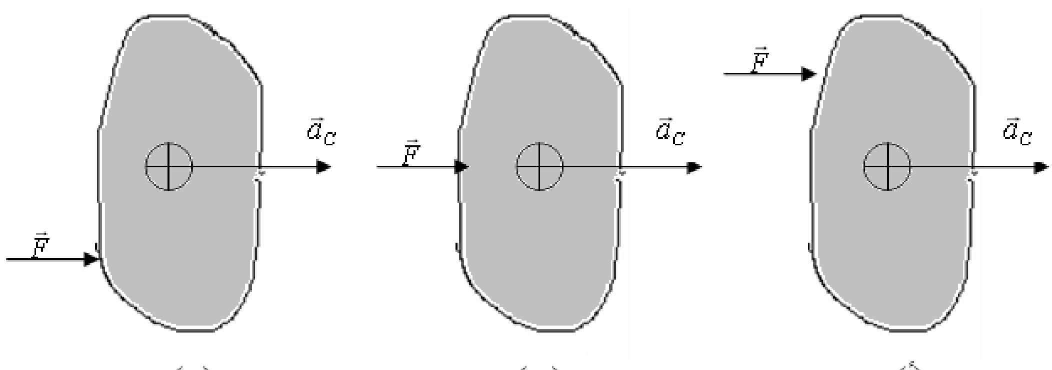
$$\therefore \vec{F} = \vec{a}_C \sum_{i=1}^{n} m_i + \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i ,\text{.........} \quad .(4)$$

من تعريف مركز الثقل $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = 0$ **حيث** r_i **مقاس من المركز. وبذلك يمكن كتابة المعادلة** (4) **في الصورة :**

$$\vec{F} = m \vec{a}_C ,\text{......... ....}(5)$$

المعادلة (5) **هي علاقة أساسية هامة في الميكانيكا.** $\vec{F}$ **هي القوة المحصلة التي تؤثر علي الجسم المتماسك ويمكن إيجاد هذه الكمية باستخدام أساليب التحليل الاستاتيكي.**

$\vec{a}_C$ **عجلة مركز الثقل المطلقة الانتقالية . فإذا تخيلنا أن كل كتلة الجسم المتماسك مركزة في مركز الثقل فان هذه الكتلة سوف تتحرك كجسيم تؤثر عليه القوة** $\vec{F}$ **ويتحرك حركة انتقالية.**
نلاحظ أن المعادلة (5) **لا تعطي أي معلومات عن الحركة الدورانية للجسم. فمثلا إذا أثرت علي الجسم المتماسك نفس محصلة القوي عند ثلاث مواقع مختلفة في الجسم كما بالشكل.**



(ج) (ب) (أ)

ففي الحالات الثلاثة قد تكتب معادلة الحركة الانتقالية في الصورة :

$$\vec{F} = m \vec{a}_C$$

ومن الشكل السابق نلاحظ أن الحالات الثلاثة المبينة بالشكل هي في الأساس مسائل مختلفة ففي الشكل (أ) سوف يمارس الجسم عجلة زاوية في اتجاه دوران عقارب الساعة ، وفي الشكل (ب) لا يمارس الجسم أي عجلة زاوية ، وفي الشكل (ج) سوف يمارس الجسم عجلة زاوية عكس اتجاه دوران عقارب الساعة وبذلك تكون الحركة الانتقالية لمركز الكتلة مستقلة عن حركة الجسم الدورانية وهي دالة فقط في مقدار واتجاه القوة المحصلة التي تؤثر علي الجسم والمعادلات التي تصف الحركة الدورانية حول مركز الكتلة تأخذ الصورة :

$$M_0 = I_0 \alpha ,\text{......... ....}(6)$$

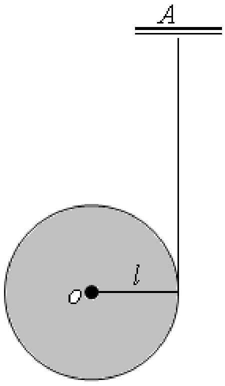
حيث I_0 هو عزم قصور الكتلة حول محور يمر بمركز الكتلة ، M_0 هو عزم الازدواج المحصل (عزم اللي حول مركز الكتلة) ، α هي العجلة الزاوية للجسم.
الوصف الكامل للحركة المستوية العامة للجسم المتماسك يعطي بالمعادلتين :

$$\vec{F} = m\,\vec{a}_C ,......... .(7)$$

$$M_0 = I_0 \alpha ,......... .(8)$$

المعادلة (7) تصف الحركة الانتقالية لمركز الكتلة بينما المعادلة (8) تصف الحركة الدورانية حول مركز الكتلة.

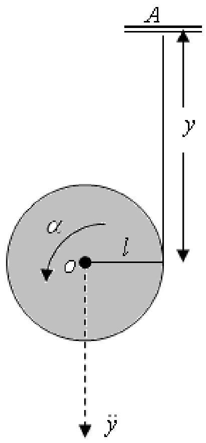
مثال:-



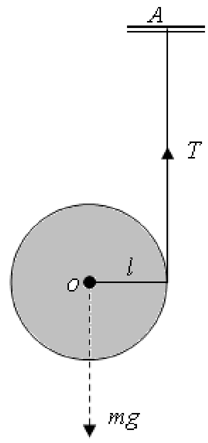
ثبت احد طرفي خيط خفيف في نقطة ثابتة A ولف الخيط حول محيط قرص دائري منتظم نصف قطره l وكتلته M كما هو مبين بالشكل. ترك القرص ليتحرك مبتدئا من السكون في مستوي راسي من الوضع الذي كان فيه جزء الخيط المستقيم رأسيا. اوجد مقدار العجلة الرأسية التي يتحرك بها مركز ثقل القرص والشد في الخيط.

الحل:

بفرض أن بعد مضي زمن قدره t من بدء الحركة يهبط مركز ثقل القرص مسافة رأسية y ويدور إزاحة زاوية θ.



رسم يوضح العجلات



الشكل يوضح القوي الخارجية المؤثرة

$$\because\ y = l\theta \quad , \quad \dot{y} = l\dot{\theta} \quad , \quad \ddot{y} = l\ddot{\theta} ,......... .(1)$$

معادلة حركة مركز الثقل o هي :

$$M\ddot{y} = Mg - T ,......... ....(2)$$

معادلة الحركة الدورانية حول مركز الثقل o هي :

$$M_0 = I_0\alpha = I_0\ddot{\theta} ,......... ....(3)$$

عزم القصور الذاتي للقرص حول محور يمر بمركز الثقل هو :

$$I_0 = \frac{1}{2} Ml^2 ,\dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ ..(4)$$

حيث l **نصف قطر القرص . وبأخذ العزوم حول مركز الثقل** o **:**

$$M_0 = Tl ,\dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ (5)$$

من المعادلتين (3) ، (5) **نجد أن :**

$$I_0 \alpha = Tl ,\dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ .(6)$$

بالتعويض من (4) **في** (6) **نجد أن :**

$$\frac{1}{2} Ml^2 \alpha = Tl \Rightarrow \frac{1}{2} Ml\alpha = T ,\dots\dots\dots\ .(7)$$

بالتعويض من (1) **في** (7) **عن قيمة** α **:**

$$\frac{1}{2} M\ddot{y} = T ,\dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ (8)$$

بجمع المعادلتين (2) ، (8) **نجد أن :**

$$\frac{3}{2} M\ddot{y} = Mg \Rightarrow \ddot{y} = \frac{2}{3} g ,\dots\dots\dots\ ..(9)$$

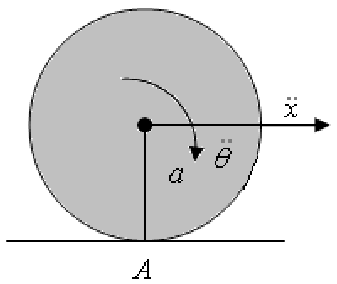
بالتعويض من (9) **في** (2) **نجد أن :**

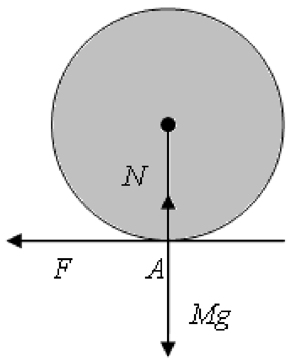
$$T = \frac{1}{3} mg ,\dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ .(10)$$

التدحرج والانزلاق (Rolling) :-

إذا تدحرج جسم علي سطح خشن تدحرجا غير مصحوب بانزلاق فان نقطة تلامس الجسم مع السطح الخشن هي مركز الدوران اللحظي للجسم وتنعدم سرعتها وهذا هو شرط التدحرج وفي هذه الحالة تكفي قوة الاحتكاك F **بين الجسم المتماسك والسطح الخشن لمنع الانزلاق.**
يعطي شرط التدحرج علاقة بين السرعة الخطية والسرعة الزاوية :

$$x = a\theta$$
$$\dot{x} = a\dot{\theta}$$
$$\ddot{x} = a\ddot{\theta}$$





إذا حدث انزلاق بين الجسم والسطح فان سرعة نقطة التماس A لا تتلاشى وتكون قوة الاحتكاك في هذه الحالة :

$$F = \mu_s N \qquad (\text{احتكاك نهائي})$$

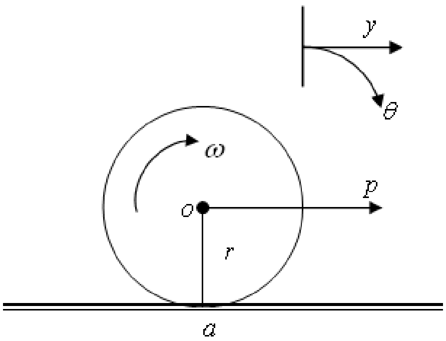
ولتعيين نوع الحركة في سرعة نقطة التماس A عند بدء الحركة فإذا كانت V_A لا تساوي الصفر فان الحركة تبدأ في الانزلاق وتكون قوة الاحتكاك نهائية . أي أن $F = \mu_s N$ وفي اتجاه مضاد لسرعة نقطة التماس وتستمر الحركة انزلاقية حتي تنعدم سرعة نقطة التماس بعد ذلك إما أن تتحول الحركة إلي حركة تدحرجية بحتة أي حركة انزلاقية في عكس الاتجاه السابق.
لمعرفة ما إذا كانت الحركة تدحرجية أو انزلاقية نكتب معادلات الحركة التي تحتوي علي قوة الاحتكاك F ورد الفعل العمودي N.
نفرض أن الحركة تدحرجية ونكتب شرط انعدام سرعة نقطة التماس ثم نحل معادلات الحركة فإذا كانت $\frac{F}{N} \langle \mu_s$ كان الفرض صحيحا بان الحركة تدحرجية وإذا وجد أن $\frac{F}{N} \rangle \mu_s$ كان الفرض غير صحيح وكانت الحركة انزلاقية في عكس الاتجاه السابق.

التدحرج البحت :

إذا تحرك جسم متماسك علي سطح خشن مثبتا فانه يقال أن حركة الجسم المتماسك حركة تدحرجية بحتة إذا انعدمت سرعة نقطة التماس عند كل لحظة.
إذا كان الجسمان متحركين فان حركة إحداهما علي الآخر تكون تدحرجا بحتا إذا كانت مركبة سرعتها النسبية في اتجاه المماس عند نقطة التماس تساوي الصفر.

التدحرج بدون انزلاق لجسم اسطواني :-

نفرض أن جسما اسطوانيا تؤثر عليه قوة أفقية p ويتدحرج علي طريق أفقي مستقيم.
الشرط الضروري التي تجعل الاسطوانة تتدحرج بدون انزلاق أن النقطة a تكون مركز دوران لحظي.



معادلة حركة الاسطوانة حول هذه النقطة هي :

$$M_a = I_a \alpha$$

$$\Pr = I_a \alpha ,\ldots\ldots\ldots \;\ldots\ldots\ldots\; \ldots(1)$$

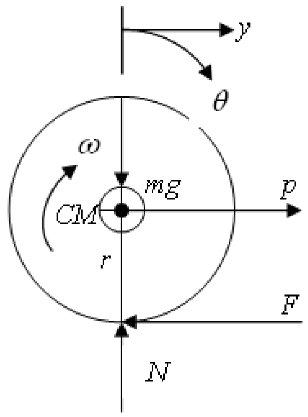
حيث I_a هو عزم القصور الذاتي للكتلة حول النقطة a

$$\therefore I_a = I_0 + mr^2 ,\ldots\ldots\ldots \;.(2)$$

وذلك باستخدام نظرية المحاور المتوازية حيث I_a هو عزم قصور الكتلة حول المحور الذي يمر بمركز الثقل.

$$\therefore \Pr = \left(I_0 + mr^2\right)\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\Pr}{I_0 + mr^2} ,\ldots\ldots\ldots \;\ldots\ldots\ldots\; \ldots\ldots\ldots \;..(3)$$

المعادلة (3) تعطي العلاقة بين العجلة الزاوية α والقوة المسلطة p علي أساس الفرض بعدم حدوث انزلاق .



بياني الجسم الحر للاسطوانة مبين في الشكل التالي :
القوة F هي قوة الاحتكاك التي يؤثر بها الطريق علي الاسطوانة .
معادلة حركة الاسطوانة الدورانية حول نركز ثقلها :

$$M_0 = I_0\alpha$$
$$Fr = I_0\alpha ,......... ......(4)$$

بحذف α بين المعادلتين (3) ، (4) ينتج أن :

$$F = \frac{P}{1+\frac{mr^2}{I_0}} ,......... ..(5)$$

القوة P تتناسب طرديا مع قوة الاحتكاك فإذا تزايدت القوة P فان قوة الاحتكاك تتزايد حتي تصل إلي نهايتها العظمي وهذه هي القيمة النهائية :

$$F_{max} = \mu_s N ,......... .... (6)$$

حيث μ_s معامل الاحتكاك الاستاتيكي ، N هي القوة العمودية .
من الشكل نجد أن :

$$N = mg ,......... ....(7)$$

بالتعويض من (7) في (6) نحصل علي :

$$F_{max} = \mu_s mg ,......... .... (8)$$

وأقصي قيمة للقوة المسلطة P_{max} لكي لا يحدث انزلاق هي :

$$P_{max} = \mu_s mg\left(1+\frac{mr^2}{I_0}\right) ,......... ....(9)$$

وهذه المعادلة تكون مساوية فقط عندما تكون الاسطوانة علي وشك الانزلاق علي اللوح .
إذا كان الجسم هو اسطوانة دائرية قائمة متجانسة فان :

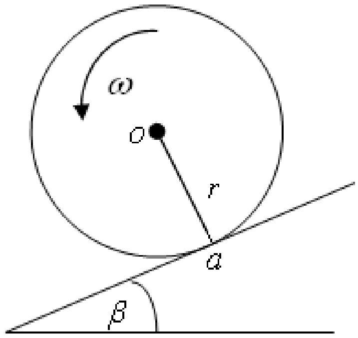
$$I_0 = \frac{1}{2}mr^2 ,......... ....(10)$$

وأقصي قوة يمكن التأثير بها بدون حدوث انزلاق هي :

$$P_{max} = \mu_s mg\left(1+\frac{mr^2}{\frac{1}{2}mr^2}\right) \Rightarrow P_{max} = 3\mu_s mg ,......... ....(11)$$

مقدار القوة المسلطة P يمكن أن تساوي ثلاثة أمثال قوة الاحتكاك قبل حدوث انزلاق للاسطوانة.

مثال(1):-

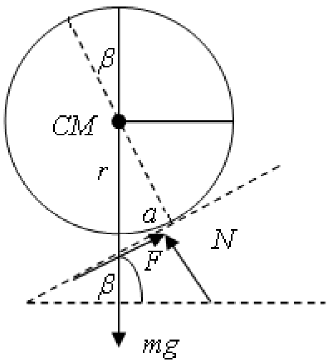


الجسم الاسطواني المبين في الشكل يتدحرج بدون انزلاق أسفل المستوي الذي يميل بزاوية β .

أ- اوجد تعبيرا لأقل قيمة مطلوبة لمعامل الاحتكاك الاستاتيكي μ_s لكي لا يحدث انزلاق.

ب- اوجد قيمة μ_s العددية إذا كانت الاسطوانة متجانسة و كتلتها $2\,Kg$ ، وقطرها $150\ mm$ ، $\beta = 30^\circ$

الحل:-



النقطة a هي مركز دوران لحظي لكي لا تنزلق الاسطوانة :

$$M_a = I_a \alpha ,......... ....(1)$$

$$mgSin\ \beta r = I_a \alpha = \left(I_0 + mr^2\right)\alpha ,......... .(2)$$

$$\therefore\ \alpha = \frac{mgrSin\ \beta}{I_0 + mr^2},......... ....(3)$$

نلاحظ أن العجلة الزاوية سوف تتزايد إذا تزايد ميل المستوي قوة الاحتكاك التي يؤثر بها المستوي علي الاسطوانة هي F .

معادلة الحركة الدورانية حول مركز الكتلة هي :

$$M_0 = I_0 \alpha ,......... ....(4)$$

$$Fr = I_0 \alpha ,......... ....(5)$$

إذا كانت α كما تعطيها المعادلة (3) تتزايد مع تزايد β فان المعادلة (5) تبين قوة الاحتكاك المطلوبة يجب أن تتزايد أيضا . القيمة النهائية لقوة الاحتكاك عندما تكون الاسطوانة علي وشك الانزلاق.

$$F_{max} = \mu_s N ,......... ....(6)$$

حيث أن :

$$N = mgCos\ \beta$$

$$\therefore\ F_{max} = \mu_s mgCos\ \beta ,......... .(7)$$

من المعادلة (5) بعد التعويض عن قيمة α

$$Fr = \frac{I_0 mgrSin\ \beta}{\left(I_0 + mr^2\right)}$$

$$F_{max} = \frac{mgSin\ \beta}{1 + \frac{mr^2}{I_0}} = \mu_s mgCos\ \theta$$

$$\therefore\ \mu_s = \frac{\tan\ \beta}{1 + \frac{mr^2}{I_0}},......... ....(8)$$

المعادلة (8) **تعطي اقل قيمة مطلوبة للمعامل** μ_s **إذا كانت الاسطوانة تتدحرج بدون انزلاق أسفل المستوي الذي يميل بزاوية** β **. عزم القصور الذاتي للكتلة للاسطوانة المتجانسة حول** o **يكون :**

$$I_0 = \frac{1}{2} mr^2 ,\dots\dots\dots \;\dots.(9)$$

$$\mu_s = \frac{1}{3} \tan \beta ,\dots\dots\dots .(10)$$

هذه الكمية حالة في زاوية ميل المستوي فقط . ولا تعتمد علي الكتلة أو أبعاد الاسطوانة .

ب- عندما $\beta = 30^\circ$ **تكون اقل قيمة مطلوبة لمعامل** μ_s **حتى لا يحدث انزلاق :-**

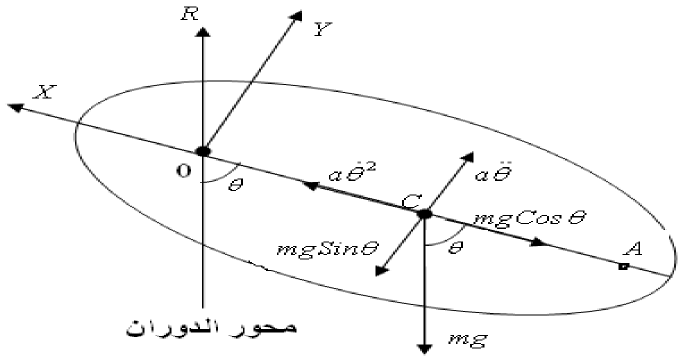
$$\mu_s = \frac{1}{3} \tan 30^\circ = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = 0.192 \approx 0.2$$

تطبيق:-

* **عرف البندول المركب وادرس حركته واوجد الضغط علي محور الدوران ؟؟**

الحل:

البندول المركب هو جسم متماسك معلق من نقطة ثابتة فيه o **ويمكنه الدوران حولها في مستوي راسي . نفرض أن** m **كتلة الجسم ،** a **هي المسافة بين نقطة التعليق** o **ومركز الثقل** C **. نعتبر الجسم في موضع عام ونفرض أن** Co **العمودي على محور الدوران يصنع زاوية** θ **مع الرأسي المار بالنقطة** o **عند آي لحظة زمنية** t **.**



القوي المؤثرة علي الجسم هي :

1- وزنه mg **إلي أسفل.**

2- رد الفعل عند نقطة التعليق (محور الدوران) الذي يمكن تحليله إلي مركبتين مركبة X **في اتجاه** Co **ومركبة** Y **في اتجاه العمودي ونفرضهم في أي اتجاه وتتعين الاتجاهات بعد حل المسألة . بما أن** C **سوف يرسم دائرة مركزها** o **ونصف قطرها** a **فيكون له عجلتان** $a\ddot{\theta}$ **في اتجاه زيادة** θ **،** $a\dot{\theta}^2$**.**

بكتابة معادلة الحركة للجسم المتماسك (معادلات خطية ومعادلات دورانية) :-

- معادلة الحركة في اتجاه عمودي علي Co **:**

$$ma\ddot{\theta} = Y - mgSin\,\theta ,\dots\dots\dots .(1)$$

ـ معادلة الحركة في اتجاه Co :

$$ma\dot{\theta}^2 = X - mgCos\ \theta ,.........\ .(2)$$

ـ معادلة الحركة الزاوية وذلك بأخذ العزوم حول o :

$$I_0\ddot{\theta} = -mgaSin\ \ \theta ,.........\ .(3)$$

حيث I_0 عزم القصور الذاتي حول محور عمودي علي مستوي الحركة ويمر بالنقطة o .

$$I_0 = I_C + ma^2 = mK_C^2 + ma^2$$

من المعادلة (3) نجد أن :

$$\ddot{\theta} = -\frac{mga}{I_0}Sin\ \theta ,.........\ ...(4)$$

وإذا تذبذب الجسم ذبذبات صغيرة حول نقطة التعليق o بحيث كانت θ صغيرة بحيث يمكن إجراء التقريب $Sin\ \theta \approx \theta$ فان المعادلة (4) تصبح في الصورة :

$$\ddot{\theta} = -\frac{mga}{I_0}\theta = -\omega^2\theta ,.........\ ...(5)$$

حيث أن $\omega = \sqrt{\dfrac{mga}{I_0}}$

المعادلة (5) هي معادلة حركة توافقية بسيطة وتتعين θ من :

$$\theta = \alpha Cos\ (\omega t + \varphi)$$

حيث α, φ ثوابت وزمنها الدوري هو :

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{K_0^2}{ga}}$$

$$\therefore\ \tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} ,.........\ ....\ ...(6)$$

حيث أن $l = \dfrac{K_0^2}{a} ,.........\ .(7)$

حيث l تسمي طول البندول المكافئ لان هذا الزمن الدوري هو نفس الزمن الدوري لبندول بسيط طوله l .

$$\because\ l = \frac{K_0^2}{a} = \frac{K_C^2 + a^2}{a} \Rightarrow l = \frac{K_C^2}{a} + a ,.........\ .(8)$$

إذا أخذنا A علي امتداد oC بحيث أن $oA = l$ فالنقطة A تسمي بمركز الذبذبة ونجد أن :

$$\therefore\ a + CA = l = \frac{K_C^2}{a} + a \Rightarrow CA = \frac{K_C^2}{a}$$

ومن ذلك نجد أن :

$$oC \cdot CA = a \cdot \frac{K_C^2}{a}$$

$$\therefore\ oC \cdot CA = K_C^2 = Cons\tan t, \ldots\ldots\ldots (9)$$

من هذه المعادلة نستنتج أن مركز الذبذبة ومركز التعليق يمكن أن يتبادلان موضعيهما. أي إذا علقنا البندول المركب من A يصبح طول البندول البسيط المكافئ هو :

$$l_1 = \frac{K_C^2}{CA} + CA = \frac{K_C^2}{\frac{K_C^2}{a}} + \frac{K_C^2}{a}$$

$$\therefore\ l_1 = a + \frac{K_C^2}{a}, \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots..(10)$$

أي أن طول البندول البسيط المكافئ في هذه الحالة هو نفسه عندما علق من o وكذلك يمكن استنتاج أن زمن الذبذبة الواحدة :

$$\ddot{\theta} = -\frac{mga}{I_0} Sin\,\theta, \ldots\ldots\ldots\ .\otimes$$

$$\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -\frac{mga}{I_0} Sin\,\theta,$$

$$\int \dot{\theta} = -\frac{mga}{I_0}\int Sin\,\theta d\theta,$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{mga}{I_0} Cos\,\theta + C,$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2mga}{I_0} Cos\,\theta + C_1,$$

حيث C_1 يتعين من الشروط الابتدائية في المسألة بالتعويض في المعادلة (2) :

$$X = mgCos\,\theta + ma\left[\frac{2mga}{I_0} Cos\,\theta + C_1\right] = mgCos\,\theta + maC_1 + \frac{2m^2a^2g}{I_0} Cos\,\theta$$

$$\therefore\ X = mgCos\,\theta\left[1 + \frac{2ma^2}{I_0}\right] + maC_1, \ldots\ldots\ldots\ \ldots..\otimes\otimes$$

بالتعويض من $\otimes$ في المعادلة (1) :

$$Y = mgSin\,\theta + ma\ddot{\theta} = mgSin\,\theta + ma\left[-\frac{mga}{I_0} Sin\,\theta\right]$$

$$\therefore\ Y = mgSin\,\theta\left[1 - \frac{ma^2}{I_0}\right], \ldots\ldots\ldots\ .\otimes\otimes\otimes$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} =$$

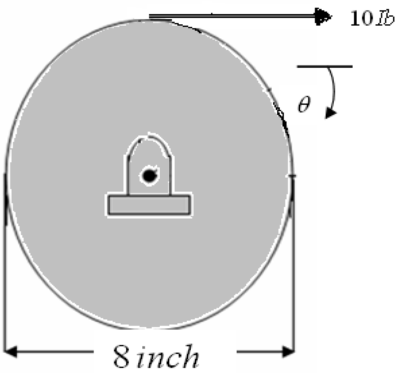
لإيجاد الضغط علي محور الدوران نكامل المعادلة (3) :

$$\frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 = mgaCos\ \theta + C_1, ...(11)$$

بالتعويض من (11) في $(1), (2)$ يمكن إيجاد رد الفعل عنده.

تمــارين

1- يبين الشكل قرصا وزنه $20\ Ib$ يتصل بمفصلة ملساء عند مركزه يلتف خيط رفيع لا يقبل الاستطالة حول القرص من الخارج. عند البداية يكون ساكنا وعندما $t = 0$ تسلط قوة ثابتة مقدارها $10\ Ib$ على الخيط .

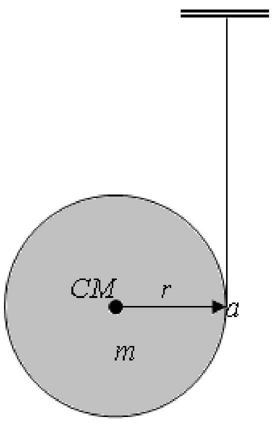


ا- اوجد العجلة الزاوية عندما تسلط القوة علي الخيط .

ب- اوجد زمن وسرعة القرص الزاوية بالدورات في الدقيقة عندما يكون الخيط طوله $42\ inch$ قد انفك من علي القرص.

ج- إذا أزيلت القوة التي تؤثر علي الخيط في لحظة تحقيق شروط الجزء (ب) فما هي القوة المماسية الثابتة التي ينبغي أن تؤثر علي حافة القرص لكي يصل هذا العنصر إلي حالة السكون بعد $2\ sec$.

2- يبين الشكل التالي قرص متجانس كتلته m يتصل بخيط لا يقبل الاستطالة.



أ- اوجد العجلتين الانتقالية والدورانية للقرص بكتابة معادلتي الحركة الانتقالية والدورانية للقرص.

ب- اوجد العجلتين الانتقالية والدورانية باستخدام النقطة a كنقطة ثابتة يدور القرص لحظيا حولها.

ج- إذا ترك القرص يتحرك من سكون . اوجد السرعتين الانتقالية والدورانية بعدما يكون المركز قد تحرك مسافة تساوي $30\ inch$ ، علما بان نصف قطر القرص $r = 1.3 inch$.

د- إذا قطع الخيط في أية لحظة . ادرس حركة القرص.

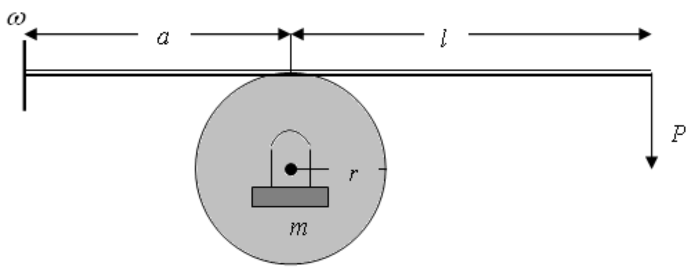
3- حدافة كتلتها $20\ Ib$ علقت كتلة مقدارها $2\ Ib$ في خيط ملفوف حول محورها الذي نصف قطره $2 inch$. إذا هبطت الكتلة مسافة $5\ ft$ من سكون في $8\ sec$ اوجد العجلة الزاوية للحدافة إذا علم أن بعد أن هبطت الكتلة المعلقة $5\ ft$ ترك الخيط محور الحدافة ولفت الحدافة 10 لفات قبل أن تقف . احسب العجلة الزاوية للحدافة وكذلك نصف قطر القصور الذاتي للحدافة وعزم الازدواج الناشئ عن الاحتكاك.

4- حافة لها محور أفقي نصف قطره a وعزم القصور الذاتي للمجموعة حول محور الدوران I يلتف خيط رفيع حول المحور ويحمل في نهايته كتلة m تتدلي راسيا . اوجد العجلة الزاوية للحدافة إذا كانت حركتها تقاوم بازدواج ثابت l نتيجة للاحتكاك . إذا ترك الخيط المحور بعد أن تكون الحدافة قد دارت بعد ذلك زاوية β قبل أن تقف نتيجة للازدواج . اثبت أن

$$l = \frac{\operatorname{Im} ga\,\alpha}{I(\alpha+\beta)+ma^2\beta}$$

5- قضيب منتظم كتلته m وطوله $2l$ يمكنه الدوران في مستوي رأسي حول طرفه الثابت. سقط القضيب من السكون عندما كان راسيا إلي اعلي. اوجد رد الفعل عند نقطة التعليق عندما يكون القضيب أفقيا وكذلك عندما يكون القضيب رأسيا إلي أسفل.

6- قرصان متساويا الكتلة والقطر يلفهما خيط خفيف احد القرصين يدور حول محور أفقي ثابت مار مركزه o. اوجد عجلة هبوط القرص الآخر راسيا وكذلك الشد في الخيط في أي لحظة.



7- اسطوانة مصمتة كتلتها m ونصف قطرها r تدور حول محورها الهندسي الأفقي o ويستعمل لفرملتها الجهاز المبين بالشكل عن طريق الضغط بقوة راسية P تؤثر في نقطة B فإذا كان معامل الاحتكاك بين القضيب AB والاسطوانة هو μ وكانت الاسطوانة تدور بسرعة زاوية ω.
فاوجد عدد الدورات التي تدورها الاسطوانة قبل أن تقف ثم اوجد الحل في الحالة العددية :

$$\mu = \frac{1}{2}, P = 150\ Ib.\omega, M = 386\ Ib, \omega = 60\,\pi r/\sec,$$
$$r = 10\ Iinch\ , a = 15\,inch\ , l = 36\,inch\ .$$

8- يتدحرج طوق دائري كتلته m ونصف قطره l علي مستوي خشن يميل علي الأفقي بزاوية α. اوجد اقل قيمة لمعامل الاحتكاك حتي لا يحدث انزلاق.

9- تتدحرج كرة مصمتة كتلتها m ونصف قطرها a على السطح الخارجي الخشن (معامل الاحتكاك μ) لكرة ثابتة نصف قطرها b. بدأت الكرة في التدحرج من السكون عندما كان الخط الواصل بين المركزين يميل علي الرأسي بزاوية α. اثبت أن التدحرج يتوقف ويبدأ الانزلاق عندما يميل الخط الواصل بين المركزين علي الرأسي بزاوية β تتعين من :

$$2\,Sin\,\beta = \mu(17\,Cos\,\beta - 10\,Cos\,\alpha).$$

10- قذفت كرة مصمتة علي مستوي أفقي خشن بحيث كانت السرعة الابتدائية لمركزها V_o والسرعة الزاوية الابتدائية حول محور الكرة ω_o بحيث $a\omega_o \langle V_o$ حيث a نصف قطر الكرة.

أ- اثبت انه سيحدث انزلاق لفترة مقدارها $\dfrac{2(V_o - a\omega_o)}{7\mu g}$ حيث μ معامل الاحتكاك.

ب- اثبت كذلك عند نهاية هذه الفترة ستتدحرج الكرة بدون انزلاق وان السرعة الزاوية التي تبدأ بها الكرة التدحرج البحت هي $\frac{2}{7}\omega_o + \frac{5V_o}{7a}$.

11- يدور قرص دائري حول محور عمودي عليه يمر بنقطة علي المحيط بدأ حركته عندما كان مركزه رأسيا فوق نقطة الدوران. اثبت انه عندما يدور القرص بزاوية θ فان مركبتا رد الفعل عند محور الدوران في اتجاه المركز والاتجاه العمودي عليه تكونا علي الترتيب :

$$\frac{mg}{3}(7Cos\ \theta - 4), \frac{mg}{3} Sin\ \theta$$

12- مستوي مائل كتلته M يميل علي الأفقي بزاوية α وقابل للحركة علي مستوي أفقي أملس. وضعت كرة تامة الخشونة فوق المستوي المائل وبدأت تتدحرج تحت تأثير وزنها إذا كانت z هي المسافة الأفقية التي يقطعها المستوي ، x هي المسافة التي تتدحرجها الكرة علي المستوي في زمن t اثبت أن :

أولا
$$(M + m)\ddot{z} = m\ddot{x}Cos\ \alpha,$$

ثانيا
$$x = \frac{5(M + m)gSin\ \alpha}{14(M + m) - 10\,mCos^2\alpha} t^2,$$

13- بندول مركب مكون من قضيب منتظم طوله $2l$ وكتلته $3m$ مثبت عند كل من طرفيه كتلته مقدارها $2m$. اوجد طول البندول البسيط المكافئ إذا تذبذب هذا الجسم حول محور أفقي عمودي علي القضيب وعلي بعد h من منتصفه. اوجد كذلك البعد h الذي يجعل التردد اكبر ما يمكن.