مبادئ الميكانيكا

كلية التربية أساسى
الفرقة الأولي

جزء الاستاتيكا

تمهيد

أفضلُ ما أبدأ به هو حمدُ اللهِ بما هو أهله وأصلى وأسلم على من لانبى بعده سيدنا محمد عليه وعلى آله وصحبه ومن دعا بدعوته واهتدى بهديه.

نعلم أنه حينما تؤثر القوى على الاجسام المادية فإما أن تجعلها في سكون أو تكسبها عجلة ومن ثم تتحرك ، ويمكن القول أنه في الحالة الأولي (السكون) تتزن مجموعة القوى المؤثرة على الجسم فيصبح الجسم ساكناً ، أما في الحالة الثانية لا تتزن القوى فيصبح الجسم في حالة حركة.

وعلم الميكانيكا هو العلم الذي يختص بدراسة الحالتين. ومن ثم فعلم الميكانيكا ينقسم إلى شقين الاستاتيكا والديناميكا ، وفي هذا المنهج سنتناول بمشيئة الله دراسة الجزء الخاص بالاستاتيكا. فعلم الاستاتيكا يعني بدراسة عمليات تركيب وتحليل القوى وشروط توازن هذه القوى. ولما كانت هذه الدراسة هي البنية الاساسية لمشروعات الانشاء الهندسي اكتسب علم الاستاتيكا أهمية قصوى لدى المهندسين بشكل خاص.

وحيث أن القوى ما هي الا فصيل من فصائل المتجهات كما أن فهم علم الميكانيكا يحتاج إلى التعرف على نظام المتجهات فقد قمنا بدراسة المتجهات في الفصل الأول. كما يحتوي هذا الجزء على بعض المفاهيم والقوانين الاساسية واللازمة لدراسة حالة الاتزان والفعل ورد الفعل ، وما يسمى بالعزوم والازدواجات ، واختزال القوى ، اتصال الاجسام بمفصلات ملساء والتعرف على بعض طرق الارتكاز ، نتعرف كذلك على الاحتكاك وزاوية الاحتكاك ومخروط الاحتكاك ودراسة اتزان الاجسام في وجود قوى الاحتكاك ، تعيين مراكز ثقل الاجسام ، كذلك دراسة طريقة جديدة لدراسة اتزان الاجسام المادية حيث نفترض حدوث إزاحة للجسم ومن ثم حدوث شغل من قبل القوى المؤثرة عليه وحيث أن الجسم متزن فإن هذا الشغل يساوي صفر ، وكذلكً دراسة أنواع استقرار الاتزان.

وأخيراً

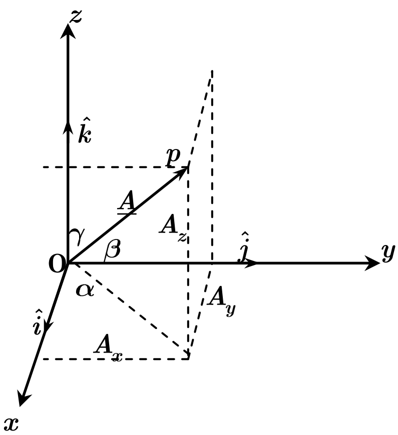
" فإن كان من توفيق فمن الله وإن كان من خطأ فمن نفسي ومن الشيطان"

المتجهــات

تنقسم الكميات التي تظهر في علوم الرياضيات أو الطبيعية إلى قسمين كميـــات متجهـــه و كميات قياسية

الكميات المتجهه والكميات القياسية

هناك كميات طبيعية ، مثل الطول والكتلة والزمن ودرجة الحرارة والحجم والكثافة....الخ ، يلزم لتعيينها معرفة مقدارها فقط مثـــل هـــذه الكميـــات تســـمى بالكميـــات القياســـية **Scalar Quantities** ، وهناك كميات طبيعية أخرى ، مثل الإزاحة والسرعة والعجلة ...الخ يلزم لتعيينها معرفة كل من الاتجاه والمقدار لهـــذه الكميـــة وتســـمى بالكميـــات المتجهـــه **Vector Quantities** وسنرمز للمتجه A بالصورة $\underline{A}$.



التعبير عن المتجه

يمكن كتابة المتجه $\underline{A}$ (كما بالشـــكل) في الاحـــداثيات الكارتيزيـــــــة $\underline{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ حيـــــــث (A_x, A_y, A_z) هي مركبات المتجـــه $\underline{A}$ ، $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ هـــي متجهات الوحدة الأساسية في اتجاه المحاور $\mathrm{O}x, \mathrm{O}y, \mathrm{O}z$ على الترتيب كذلك يمكن كتابة المتجة بدلالة النقطـــتين $\underline{\mathrm{O}p}$ حيث

$$\underline{A} = \underline{\mathrm{O}p} = \underline{p} - \underline{\mathrm{O}} = \quad A_x, A_y, A_z \quad - (0,0,0)$$

وبصفة عامة لأي متجه $\underline{A}$ يصل بين النقطتين $\mathrm{a, b}$ فإن $\underline{A} = \underline{\mathrm{ab}} = \underline{\mathrm{b}} - \underline{\mathrm{a}}$

كذلك إذا كانت α, β, γ هي الزوايا التي يصنعها المتجـــه $\underline{A}$ مـــع محـــاور الاحـــداثيات $\mathrm{O}x, \mathrm{O}y, \mathrm{O}z$ على الترتيب فإن

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

كما نستنتج من هذه العلاقة (بالتربيع)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

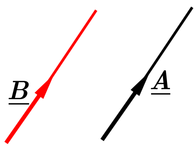
ومن ثم إذا أُعطيَ طول المتجه وليكن L والزوايا التي يصنعها مع المحاور ولتكن α, β, γ فإن مركبات المتجه تعيين من

$$L_x = L\cos\alpha, \quad L_y = L\cos\beta, \quad L_z = L\cos\gamma \qquad (1)$$

والمتجه الذي بدايته نقطة الاصل يسمى متجه الموضع.

تساوي متجهين

يُقال أن المتجهين $\underline{A}$, $\underline{B}$ متساويان إذا كان لهما نفس الطول ونفس الاتجاه ، وليس من الضروري أن يكون لهما نفس خط العمل ويُكتب $\underline{A} = \underline{B}$ أما المتجه $-\underline{A}$ هو متجه له نفس طول المتجه $\underline{A}$ وفي اتجاه معاكس له (يُقال معكوس المتجه $\underline{A}$).



طول المتجه

لأي متجه $\underline{A} = A_x, A_y, A_z$ يمكن تعيين مقياس (طول) هذا المتجه A من

$$A = |\underline{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

متجه الوحدة

متجه الوحدة لمتجه ما $\underline{A}$ هو متجه طوله (مقياسه) الواحد وله نفس اتجاه المتجه $\underline{A}$ و لأي متجة $\underline{A}$ يمكن تعين متجه الوحدة له $\hat{A}$ من العلاقة $\hat{A} = \dfrac{\underline{A}}{A}$ أي أن أي متجه يمكن أن يكتب في الصورة $\underline{A} = A\hat{A}$. ومن الجدير بالذكر أن $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ تسمى بمتجهات الوحدة الاساسية حيث $\hat{i}$ متجه وحدة في اتجاه المحور Ox ، $\hat{j}$ متجه وحدة في اتجاه المحور Oy، $\hat{k}$ متجه وحدة في اتجاه المحور Oz .

من العلاقة (1) السابقة

$$L_x = L\cos\alpha, \quad L_y = L\cos\beta, \quad L_z = L\cos\gamma$$

نستنتج أن

$$\underline{L} = L_x\hat{i} + L_y\hat{j} + L_z\hat{k} = L\cos\alpha\,\hat{i} + L\cos\beta\,\hat{j} + L\cos\gamma\,\hat{k}$$

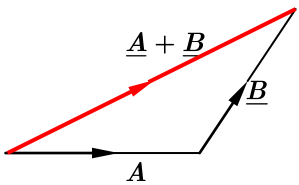
$$= L\left(\cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k}\right) = L\hat{L}$$

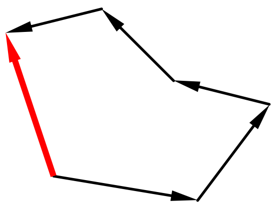
أي أن $\hat{L} = \cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k}$ يمثل متجه وحدة للمتجه $\underline{L}$ ، أي أن جيوب تمام الاتجاه لزوايا متجه ما هي مركبات متجه الوحدة لهذا المتجه.

جمع وطرح المتجهات

لأي مـــتجهين $\underline{A}\,,\,\underline{B}$ حيـــث $\underline{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ ، $\underline{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ يمكن تعيين حاصل جمعهما أو طرحهما من

$$\begin{aligned}\underline{A} \pm \underline{B} &= \; A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \;\; \pm \;\; B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k} \\ &= \; A_x \pm B_x \;\; \hat{i} + \;\; A_y \pm B_y \;\; \hat{j} + \;\; A_z \pm B_z \;\; \hat{k}\end{aligned}$$





كذلك يمكن تعيين حاصل جمع المـــتجهين $\underline{A}\,,\,\underline{B}$ كمـــا بالشكل وهو المتجه الذي يقفل المثلث وتعـــرف هـــذه القاعدة بقاعدة المثلث ، وهذه القاعدة تنطبق لأي شكل بحيث إذا وضعت المتجهات في اتجاه دوري واحد لتكون شكل ما كانت محصلة هذه المتجهات هو المتجه الـــذي يقفل الشكل وفي اتجاه معاكس (كما بالشكل).

الضرب القياسي

يمكن تعيين حاصل الضرب القياسي للمتجهين $\underline{A}\,,\,\underline{B}$ حيث $\underline{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ ، $\underline{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ والذي يُكتب على الصورة $\underline{A}.\underline{B}$ بإحدى طريقتين

$$\underline{A}.\underline{B} = \;\; A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \;\; . \;\; B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k} \;\; = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

أو

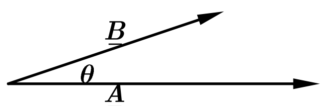
$$\underline{A}.\underline{B} = AB\cos\theta$$

حيث $A\,,\,B$ هما طولا المتجهين $\underline{A}\,,\,\underline{B}$ ، θ هي الزاوية بين المتجهين $\underline{A}\,,\,\underline{B}$ ، نلاحظ أن حاصل الضرب القياسي هو كمية قياسية ، كذلك هناك بعض القوانين الأساسية مثل

$$\underline{A}.\underline{A} = A^2, \qquad \underline{A}.\underline{B} = \underline{B}.\underline{A},$$

$$\underline{A}.(\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A}.\underline{B} + \underline{A}.\underline{C},$$

$$\lambda\underline{A} \;\; .\underline{B} = \underline{A}. \;\; \lambda\underline{B} \;\; = \lambda \;\; \underline{A}.\underline{B}$$

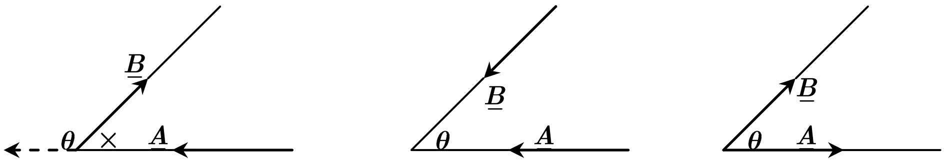


نلاحظ كذلك من تعريف حاصل الضرب القياسي أنه إذا كان $\underline{A}.\underline{B} = 0$ ولم تكن المتجهات $\underline{A}\ ,\ \underline{B}$ صفرية فإن المتجهين $\underline{A}\ ,\ \underline{B}$ متعامدان ، وإذا كـــان المتجهـــان متـــوازيين فإن $\underline{A}.\underline{B} = AB$.

يمكن أيضاً تعيين الزاوية بين المتجهين $\underline{A}\ ,\ \underline{B}$ من العلاقة $\cos\theta = \dfrac{\underline{A}.\underline{B}}{AB}$

كما يُعطينا حاصل الضرب القياسي الشغل المبذول بالقوة $\underline{F}$ لتحريك جســم ازاحــة $\underline{r}$ حيث $W = \underline{F}.\underline{r}$.

انتبه: الزاوية بين المتجهين إما أن يكون المتجهان داخلين عند النقطة أو خارجين منها



الضرب الاتجاهي

يُعـــرف حاصـــل الضـــرب الاتجـــاهي للمـــتجهين $\underline{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ ، $\underline{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ والذي يُكتب على الصورة $\underline{A} \wedge \underline{B}$ أو $\underline{A} \times \underline{B}$ بأحدى طريقتين

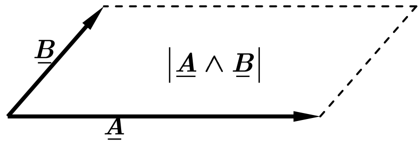
$$\underline{A} \wedge \underline{B} = AB\sin\theta\ \hat{n}$$

حيث $\hat{n}$ متجه وحده عمودي على مستوى المتجهين $\underline{A}\ ,\ \underline{B}$ أو بطريقة أخرى

$$\underline{A} \wedge \underline{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}$$

نلاحظ أنه إذا كان المتجهان متساويين أو متوازيين ينعدم حاصل الضرب الاتجــاهي لهمــا. واضح كذلك أن حاصل الضرب الاتجاهي هو كمية متجهه ، أيضاً هناك بعــض القــوانين الأساسية مثل

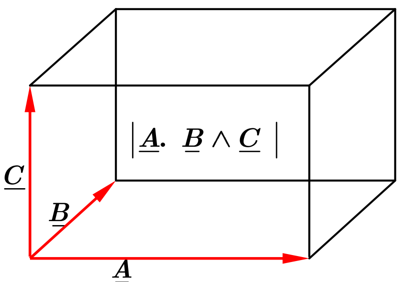


$$\underline{A}\wedge\underline{A} = \underline{0},$$
$$\underline{A}\wedge\underline{B} = -\underline{B}\wedge\underline{A},$$
$$\underline{A}\wedge(\underline{B}+\underline{C}) = \underline{A}\wedge\underline{B}+\underline{A}\wedge\underline{C},$$
$$\lambda\underline{A}\ \wedge\underline{B} = \underline{A}\wedge\ \lambda\underline{B}\ = \lambda\ \ \underline{A}\wedge\underline{B}$$

إذا كان $\underline{A}\wedge\underline{B} = \underline{0}$ ولم تكن المتجهات $\underline{A}\ ,\ \underline{B}$ صفرية فإن المتجهين $\underline{A}\ ,\ \underline{B}$ متوازيان.
أحد تطبيقات حاصل الضرب الاتجاهي هو حساب مساحة متوازي الاضلاع والذي له $\underline{A}\ ,\ \underline{B}$ ضلعين متجاورين حيث تتعين مساحة متوازي الاضلاع من $|\underline{A}\wedge\underline{B}|$.

الضرب الثلاثي القياسي

حاصل الضرب الثلاثي لثلاثة متجهات $\underline{A} = A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$ ، $\underline{B} = B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$ ، $\underline{C} = C_x\hat{i}+C_y\hat{j}+C_z\hat{k}$ والذي يُكتب على الصورة $\underline{A}.\ \ \underline{B}\wedge\underline{C}$ يُعرف على الصورة



$$\underline{A}.\ \ \underline{B}\wedge\underline{C}\ = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

ومن خواص المحددات يمكن استنتاج أن

$$\underline{A}.\ \ \underline{B}\wedge\underline{C}\ \ = \underline{C}.\ \ \underline{A}\wedge\underline{B}\ \ = \underline{B}.\ \ \underline{C}\wedge\underline{A}$$

والقيمة $|\underline{A}.\ \ \underline{B}\wedge\underline{C}\ |$ تعطينا حجم متوازي السطوح والذي فيه $\underline{A},\underline{B},\underline{C}$ ثلاثة متجهات متلاقية عند ركن من أركان متوازي السطوح. كذلك إذا تلاشى حاصل الضرب الثلاثي لثلاثة متجهات يُقال أن المتجهات تقع في مستوى واحد.

الضرب الثلاثي الاتجاهي

يرمز لحاصل الضرب الثلاثي الاتجاهي بالصورة $\underline{A}\wedge\ \ \underline{B}\wedge\underline{C}$ ويمكن حسابه من العلاقة

$$\underline{A}\wedge\ \ \underline{B}\wedge\underline{C}\ \ = \ \ \underline{A}.\underline{C}\ \ \underline{B} -\ \ \underline{A}.\underline{B}\ \ \underline{C}$$

كما يمكن استنتاج أن

$$\underline{A}\wedge\ \ \underline{B}\wedge\underline{C}\ \ \neq\ \ \underline{A}\wedge\underline{B}\ \ \wedge\underline{C}$$

﴿ مثـــ ١ ـــال ﴾

أوجد متجه وحـــدة يـــوازي محصـــلة المـــتجهين $\underline{A}\ ,\ \underline{B}$ حيـــث $\underline{A} = 2\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ ، $\underline{B} = -4\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} - \hat{k}$ ؟

﴿ الحـــــل ﴾

محصلة المتجهين هي

$$\underline{R} = \underline{A} + \underline{B} = \ 2\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + 3\hat{k}\ \ +\ \ -4\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} - \hat{k}\ \ = -2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$$

ومتجة الوحدة $\hat{R}$ للمحصلة يتعين من

$$\hat{R} = \frac{\underline{R}}{R} = \frac{-2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}}{3}$$

﴿ مثـــ ٢ ـــال ﴾

أوجـــــد قيمـــــة الثابـــــت λ لكـــــي يتعامـــــد المتجهـــــان $\underline{A} = 2\lambda\hat{\imath} + \lambda\hat{\jmath} + \hat{k}$ ، $\underline{B} = 4\hat{\imath} - 3\lambda\hat{\jmath} + \lambda\hat{k}$ ؟

﴿ الحـــــل ﴾

نعلم أن شرط تعامد المتجهين $\underline{A}\ ,\ \underline{B}$ هو تلاشي حاصل ضربهما القياسي أي أن $\underline{A}.\underline{B} = 0$

$$\therefore\ \underline{A}.\underline{B} = \ 2\lambda\hat{\imath} + \lambda\hat{\jmath} + \hat{k}\ \ .\ \ 4\hat{\imath} - 3\lambda\hat{\jmath} + \lambda\hat{k}\ \ = 8\lambda - 3\lambda^2 + \lambda = 0 \quad \therefore\ \lambda = 0,3$$

﴿ مثـــ ٣ ـــال ﴾

أوجـــد متجـــه وحـــدة عمـــودي علـــى مســـتوى المـــتجهين $\underline{a} = 2\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ ، $\underline{b} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$ ؟

﴿ الحـــــل ﴾

نعلم أن المتجه $\underline{a} \wedge \underline{b}$ هو متجه عمودي على مستوى المتجهين $\underline{a},\underline{b}$ ولذلك

$$\underline{a} \wedge \underline{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} + 30\hat{k}$$

ومن ثم فإن متجه الوحدة في اتجاه $\underline{a} \wedge \underline{b}$ أي في الاتجاه العمودي على مستوى المتجهين $\underline{a},\underline{b}$

$$\hat{n} = \frac{\underline{a} \wedge \underline{b}}{\left|\underline{a} \wedge \underline{b}\right|} = \cancel{5}\,\frac{3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}}{\cancel{5}\sqrt{49}} = \frac{1}{7}\left(3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}\right)$$

﴿ مثـــ ٤ ـــال ﴾

أوجد متجه وحدة للمتجه الذي يصل من النقطة $A(2,-1,3)$ إلى النقطة $B(3,1,5)$ ؟

﴿ الحـــــل ﴾

المتجه الذي يصل من النقطة A إلى النقطة B يتعين من

$$\underline{r} = \underline{AB} = \underline{B} - \underline{A} = (3,1,5) - (2,-1,3) = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

ومن ثم فإن متجه الوحدة لهذا المتجه هو

$$\hat{r} = \frac{\underline{AB}}{\left|\underline{AB}\right|} = \frac{\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3} = \frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$$

﴿ مثـــ ٥ ـــال ﴾

إذا كان $\underline{A} + \underline{B} = 5\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ، $\underline{A} \wedge \underline{B} = 8\hat{i} - 14\hat{j} + \hat{k}$ أوجد المتجهين $\underline{B}$, $\underline{A}$ ؟

﴿ الحـــــل ﴾

بفرض أن مركبات المتجه $\underline{A}$ هي A_x, A_y, A_z

$$\because \underline{A} + \underline{B} = 5\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k} \qquad \Rightarrow \underline{A} \wedge \left(\underline{A} + \underline{B}\right) = \overbrace{\cancel{\underline{A} \wedge \underline{A}}}^{0} + \underline{A} \wedge \underline{B} = \underline{A} \wedge \underline{B}$$

$$\because \underline{A} \wedge \left(\underline{A} + \underline{B}\right) = \underline{A} \wedge \underline{B}$$

$$\Rightarrow \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\right) \wedge \left(5\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}\right) = 8\hat{i} - 14\hat{j} + \hat{k}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \left(2A_y - 3A_z\right)\hat{i} - \left(2A_x - 5A_z\right)\hat{j} + \left(3A_x - 5A_y\right)\hat{k}$$

$$\because \left(2A_y - 3A_z\right)\hat{i} - \left(2A_x - 5A_z\right)\hat{j} + \left(3A_x - 5A_y\right)\hat{k} = 8\hat{i} - 14\hat{j} + \hat{k}$$

$$\therefore 2A_y - 3A_z = 8, \qquad 2A_x - 5A_z = 14, \qquad 3A_x - 5A_y = 1$$

وبحل الثلاث معادلات الأخيرة نحصل على

$$A_x = 2, \quad A_y = 1, \qquad A_z = -2 \qquad \therefore\ \underline{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

ومن المعطيات $\underline{A} + \underline{B} = 5\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ يكون المتجه $\underline{B} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$

نلاحظ أن هناك عدد لانهائي من المتجهات $\underline{A}\ ,\ \underline{B}$ يمكن أن يحققا المعادلات المعطاة منها

$$\underline{A} = 7\hat{i} + 4\hat{j} \qquad \text{and} \qquad \underline{B} = -2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

وهكذا........ اوجد متجهات أخرى تحقق نفس المعطيات؟

﴿ مثـــ ٦ ـــال ﴾

أوجد المتجه $\underline{x}$ الذي يحقق المعادلات الآتية $\underline{a} \wedge \underline{x} = \underline{b} + \underline{a}$, $\underline{a}.\underline{x} = b,$ ؟

﴿ الحـــــل ﴾

بضرب طرفي المعادلة $\underline{a} \wedge \underline{x} = \underline{b} + \underline{a}$ اتجاهياً في المتجه $\underline{a}$ واســـتخدام تعريـــف حاصـــل الضرب الثلاثي الاتجاهي نحصل على

$$\underline{a} \wedge \ \underline{a} \wedge \underline{x} \ = \underline{a} \wedge \ \underline{b} + \underline{a}$$

$$b \qquad a^2$$

$$\therefore\ \ \underline{a}.\underline{x}\ \ \underline{a} - \ \ \underline{a}.\underline{a}\ \ \underline{x} = \underline{a} \wedge \underline{b} + \cancel{\underline{a} \wedge \underline{a}}$$

$$\therefore\ b\underline{a} - a^2\underline{x} = \underline{a} \wedge \underline{b} \qquad \Rightarrow \underline{x} = \frac{b\underline{a} - \underline{a} \wedge \underline{b}}{a^2}$$

﴿ مثـــ ٧ ـــال ﴾

أوجد المتجه $\underline{x}$ الذي يحقق المعادلة الآتية $\underline{a} \wedge \underline{x} \ + \underline{x} + m\underline{a} = \underline{0}$ حيث m عدد قياسي ؟

﴿ الحـــــل ﴾

بضرب طرفي المعادلة $\underline{a} \wedge \underline{x} \ + \underline{x} + m\underline{a} = \underline{0}$ قياسياً في المتجه $\underline{a} \wedge \underline{x}$ نحصل على

$$\underline{a} \wedge \underline{x}\ \cdot\ \underline{a} \wedge \underline{x}\ + \underbrace{\underline{x}.\ \underline{a} \wedge \underline{x}}_{0}\ + m\underbrace{\underline{a}.\ \underline{a} \wedge \underline{x}}_{0}\ = \underline{0}$$

$$\therefore\ \left|\underline{a} \wedge \underline{x}\right|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{a} \wedge \underline{x} = \underline{0}$$

بالتعويض من النتيجة الأخيرة في المعادلة الأصلية يكون

$$\therefore\ \underline{x} + m\underline{a} = \underline{0} \qquad \Rightarrow \underline{x} = -m\underline{a}$$

﴿ مثـ ٨ ـال ﴾

أثبت صحة العلاقات التالية

$$(i)\underline{A}\wedge\ \ \underline{B}\wedge\underline{C}\ \ +\underline{B}\wedge\ \ \underline{C}\wedge\underline{A}\ \ +\underline{C}\wedge\ \ \underline{A}\wedge\underline{B}\ \ =\underline{0}$$

$$(ii)(\underline{A}+\underline{B})\wedge(\underline{B}-\underline{A})=2\underline{A}\wedge\underline{B}$$

$$(iii)\underline{A}.\ \ \underline{A}\wedge\underline{B}\ \ =0$$

﴿ الحــــــل ﴾

(i)من تعريف حاصل الضرب الثلاثي الاتجاهي يكون

$$\begin{aligned}
\underline{A}\wedge\ \ \underline{B}\wedge\underline{C}\ \ &=\ \ \underline{A}.\underline{C}\ \ \underline{B}-\ \ \underline{A}.\underline{B}\ \ \underline{C}\\
\underline{B}\wedge\ \ \underline{C}\wedge\underline{A}\ \ &=\ \ \underline{B}.\underline{A}\ \ \underline{C}-\ \ \underline{B}.\underline{C}\ \ \underline{A}\\
\underline{C}\wedge\ \ \underline{A}\wedge\underline{B}\ \ &=\ \ \underline{C}.\underline{B}\ \ \underline{A}-\ \ \underline{C}.\underline{A}\ \ \underline{B}
\end{aligned}$$

وبجمع المعادلات الثلاث مع ملاحظة أن خاصية التبديل متحققة مع الضرب القياسي ينتج أن

$$\underline{A}\wedge\ \ \underline{B}\wedge\underline{C}\ \ +\underline{B}\wedge\ \ \underline{C}\wedge\underline{A}\ \ +\underline{C}\wedge\ \ \underline{A}\wedge\underline{B}\ \ =\underline{0}$$

(ii) حيث أن

$$(\underline{A}+\underline{B})\wedge(\underline{B}-\underline{A})=\underline{A}\wedge\underline{B}-\overbrace{\cancel{\underline{A}\wedge\underline{A}}}^{0}+\overbrace{\cancel{\underline{B}\wedge\underline{B}}}^{0}-\underline{B}\wedge\underline{A}$$

$$=\underline{A}\wedge\underline{B}+\underline{A}\wedge\underline{B}=2\left(\underline{A}\wedge\underline{B}\right)$$

(من خواص حاصل الضرب الاتجاهي)

(iii) حيث أن
$$\underline{A}.\ \ \underline{A}\wedge\underline{B}\ \ =\underline{B}.\ \overbrace{\cancel{\underline{A}\wedge\underline{A}}}^{0}\ \ =0$$

أو بطريقة أخرى من خواص المحددات (نظراً لتساوي صفين)حيث أن

$$\underline{A}.\ \ \underline{A}\wedge\underline{B}\ \ =\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=0$$

﴿ مثـــ ٩ ـــال ﴾

لأي اربعة متجهات $\underline{A},\underline{B},\underline{C},\underline{D}$ اثبت أن

$$\underline{D}.\ \ \underline{A}\wedge\ \ \underline{B}\wedge\ \ \underline{C}\wedge\underline{D}\quad=\quad\underline{B}.\underline{D}\quad\underline{C}\wedge\underline{D}\ .\underline{A}$$

﴿ الحـــــــل ﴾

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S.} &= \underline{D}.\left\{\underline{A}\wedge\ \underbrace{\underline{B}\wedge\ \ \underline{C}\wedge\underline{D}}_{\downarrow}\right\}\\
&= \underline{D}.\left\{\underline{A}\wedge\ \overbrace{\underline{B}.\underline{D}\ \ \underline{C}-\ \ \underline{B}.\underline{C}\ \ \underline{D}}\right\}\\
&= \underline{D}.\quad \underline{A}\wedge\underline{C}\quad\underline{B}.\underline{D}\ -\ \underline{B}.\underline{C}\quad\underline{A}\wedge\underline{D}\\
&= \underline{B}.\underline{D}\quad\underline{D}.\ \ \underline{A}\wedge\underline{C}\ \ -\ \underline{B}.\underline{C}\ \ \cancel{\overbrace{\underline{D}.\ \ \underline{A}\wedge\underline{D}}^{0}}\\
&= \left(\underline{B}.\underline{D}\right)\left\{\underline{D}.\left(\underline{A}\wedge\underline{C}\right)\right\}\\
&= \left(\underline{B}.\underline{D}\right)\left\{\underline{A}.\left(\underline{C}\wedge\underline{D}\right)\right\}=\text{R.H.S.}
\end{aligned}$$

L.H.S. means Left hand side, R.H.S. means Right hand side

والآن يمكن استخدام المتجهات في اثبات بعض العلاقات الاتجاهية

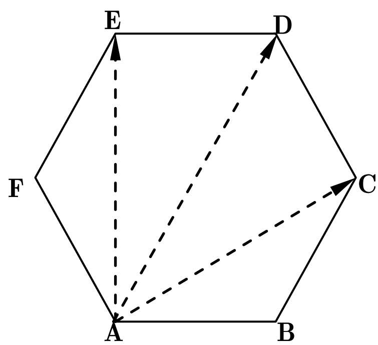
﴿ مثـــ ١٠ ـــال ﴾

ABCDEF شكل سداسي منتظم. أثبت أن $\underline{\mathbf{AB}}+\underline{\mathbf{AC}}+\underline{\mathbf{AE}}+\underline{\mathbf{AF}}=2\underline{\mathbf{AD}}$

﴿ الحـــــــل ﴾

$\because\ \underline{\mathbf{AD}}=\underline{\mathbf{AC}}+\underline{\mathbf{CD}},\qquad \text{and}\qquad \underline{\mathbf{AD}}=\underline{\mathbf{AE}}+\underline{\mathbf{ED}}$

$\therefore\ 2\underline{\mathbf{AD}}=\underline{\mathbf{AC}}+\underline{\mathbf{AE}}+\underset{\underline{\mathbf{AF}}}{\underline{\mathbf{CD}}}+\underset{\underline{\mathbf{AB}}}{\underline{\mathbf{ED}}}$



$\underline{\mathbf{AB}}=\underline{\mathbf{ED}},\quad \text{and}\quad \underline{\mathbf{AF}}=\underline{\mathbf{CD}}$ ولكن

وبالتالي يكون

$\underline{\mathbf{AB}}+\underline{\mathbf{AC}}+\underline{\mathbf{AE}}+\underline{\mathbf{AF}}=2\underline{\mathbf{AD}}$

﴿ مثـــ ١١ ـــال ﴾

إذا كانت المستقيمات $\mathbf{AB, AC, AD}$ في المثلث $\mathbf{ABC}$ حيث $\mathbf{D}$ نقطة تقسم $\mathbf{BC}$ بنســـبة $\lambda : \mu$ تمثل المتجهات $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}$ على الترتيب فاثبت $\lambda \underline{r}_1 + \mu \underline{r}_2 = (\lambda + \mu)\underline{r}$ ؟

﴿ الحـــــل ﴾

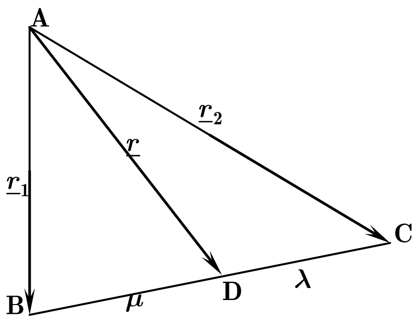
من الشكل نجد أن

$$\underline{r} = \underline{r}_1 + \underline{\mathbf{BD}}, \qquad \text{and} \qquad \underline{r} = \underline{r}_2 + \underline{\mathbf{CD}}$$

بضرب الجزء الأول في λ والجزء الثاني في μ والجمع

$$\therefore (\lambda + \mu)\underline{r} = \lambda \underline{r}_1 + \mu \underline{r}_2 + \underbrace{\lambda \underline{\mathbf{BD}} + \mu \underline{\mathbf{CD}}}_{0} \qquad \Rightarrow (\lambda + \mu)\underline{r} = \lambda \underline{r}_1 + \mu \underline{r}_2$$

حيث $\dfrac{\underline{\mathbf{BD}}}{\underline{\mathbf{DC}}} = \dfrac{\mu}{\lambda}$ أي أن $\mu \underline{\mathbf{DC}} = \lambda \underline{\mathbf{BD}} \quad \Leftarrow \quad \lambda \underline{\mathbf{BD}} + \mu \underline{\mathbf{CD}} = 0$



مع مراعاة الاتجاه في النسبة في العلاقة $\dfrac{\underline{\mathbf{BD}}}{\underline{\mathbf{DC}}} = \dfrac{\mu}{\lambda}$

هذا المثال سيستخدم كنظرية في اثبـــات بعـــض العلاقات ونلاحظ أنه عندما تكون $\mathbf{D}$ في منتصف المسافة $\mathbf{BC}$ فإن الاثبات السابق يأخذ الصـــورة $2\underline{r} = \underline{r}_1 + \underline{r}_2$ وذلك بوضـــع $\lambda = \mu = 1$ في العلاقة السابقة

﴿ مثـــ ١٢ ـــال ﴾

إذا كان $\mathbf{a', b', c'}$ هي منتصفات أضلاع المثلث $\mathbf{abc}$ فاثبت أن

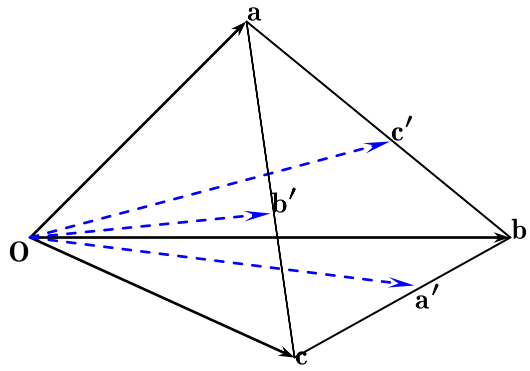
$$\underline{\mathbf{Oa'}} + \underline{\mathbf{Ob'}} + \underline{\mathbf{Oc'}} = \underline{\mathbf{Oa}} + \underline{\mathbf{Ob}} + \underline{\mathbf{Oc}}$$

حيث $\mathbf{O}$ هي نقطة اختيارية ؟

﴿ الحـــــل ﴾

من النظرية السابقة (مثـــ ١١ ـــال) حيث أن المنصفات تقسم الأضلاع بنسبة $1 : 1$ فإن

$$2\underline{Oa'} = \underline{Ob} + \underline{Oc}$$
$$2\underline{Ob'} = \underline{Oa} + \underline{Oc}$$
$$2\underline{Oc'} = \underline{Oa} + \underline{Ob}$$



بجمع المعادلات الثلاث ينتج أن

$$2\ \underline{Oa'} + \underline{Ob'} + \underline{Oc'} = \underline{Oa} + \underline{Ob} + \underline{Oa} + \underline{Oc} + \underline{Ob} + \underline{Oc} = 2\ \underline{Oa} + \underline{Ob} + \underline{Oc}$$

بالقسمة على 2

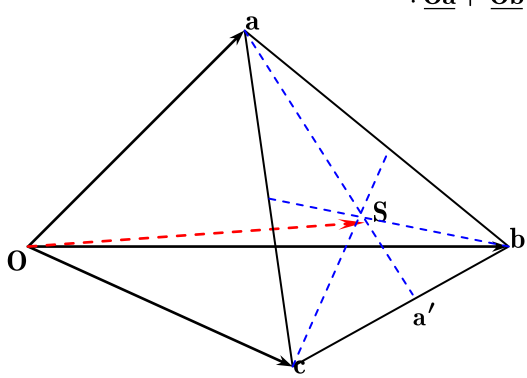
$$\therefore \underline{Oa'} + \underline{Ob'} + \underline{Oc'} = \underline{Oa} + \underline{Ob} + \underline{Oc}$$

﴿ مثـــ ١٣ ـــال ﴾

إذا كانت S هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث abc فاثبت أنه لأي نقطة اختيارية O فإن

$\underline{Oa} + \underline{Ob} + \underline{Oc} = 3\,\underline{OS}$ ؟

﴿ الحــــــل ﴾



من الشكل المجاور يكون

$$\underline{Oa} = \underline{OS} + \underline{Sa}$$
$$\underline{Ob} = \underline{OS} + \underline{Sb}$$
$$\underline{Oc} = \underline{OS} + \underline{Sc}$$

بجمع المعادلات الثلاث ينتج أن

$$\underline{Oa} + \underline{Ob} + \underline{Oc} = \underline{OS} + \underline{Sc} + \underline{OS} + \underline{Sb} + \underline{OS} + \underline{Sa}$$

$$= 3\underline{OS} + \underline{Sa} + \underbrace{\underline{Sb} + \underline{Sc}}_{2\underline{Sa'}} = 3\underline{OS} + \underbrace{\underline{Sa} + 2\underline{Sa'}}_{\underline{0}} = 3\underline{OS}$$

لاحظ أننا استخدمنا النظرية السابقة حيث أن النقطة a' تقسم cb بنسبة 1 : 1

كذلك نعلم أن نقطة متوسطات المثلث تقسمه بنسبة 3 : 2 أي أن $\underline{Sa} = -2\underline{Sa'}$

الخلاصــــــــــــة

- يـــــــتعين طـــــــــول متجـــــــــه $\underline{A} = A_x, A_y, A_z$ مـــــــــن $A = |\underline{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$.
- متجه الوحدة للمتجة $\underline{A} = A_x, A_y, A_z$ يتعين من $\hat{A} = \dfrac{\underline{A}}{A}$.
- حاصل الضرب القياسي يعرف بـــ $\underline{A}.\underline{B} = AB\cos\theta$ حيث θ هي الزاوية بين المـــتجهين أو بطريقـــة أخـــرى $\underline{A}.\underline{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ ويمكـــن باستخدام حاصل الضرب القياسي تعيين الزاوية بين متجهين وكـــذلك حســـاب الشغل المبذول بقوة لتحريك جسم إزاحة ما.
- حاصل الضرب الاتجاهي يعرف بـــ $\underline{A} \wedge \underline{B} = AB\sin\theta\,\hat{n}$ حيث $\hat{n}$ متجه وحدة عمودي على مستوى المتجهين $\underline{A}, \underline{B}$. أو بطريقة أخرى

$$\underline{A} \wedge \underline{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

ويمكن باستخدام حاصل الضرب الاتجاهي تعيين الزاوية بين مـــتجهين وكـــذلك تعيين مساحة متوازي الاضلاع $|\underline{A} \wedge \underline{B}|$.

- حاصل الضرب الثلاثي القياسي يعرف بـــ

$$\underline{A}.\ \underline{B} \wedge \underline{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

يمكن اثبات أن $\underline{A}.\ \underline{B} \wedge \underline{C} = \underline{C}.\ \underline{A} \wedge \underline{B} = \underline{B}.\ \underline{C} \wedge \underline{A}$ ويمكن باستخدام حاصل الضرب الثلاثي القياسي تعيين حجم متوازي السطوح $|\underline{A}.\ \underline{B} \wedge \underline{C}|$.

- حاصل الضرب الثلاثي الاتجاهي يعرف بـــ

$$\underline{A} \wedge\ \underline{B} \wedge \underline{C} = \underline{A}.\underline{C}\ \underline{B} - \underline{A}.\underline{B}\ \underline{C}$$

تمـــــــــــارين

(١) اوجد مركبات المتجه الذي طوله 18 ويعمل في اتجاه الخـــط الواصـــل مـــن النقطـــة $(2,3,-1)$ إلى النقطة $(-2,12,7)$ ؟

(٢) أوجد متجه وحدة في اتجاه المتجه $8\hat{i}+7\hat{j}-12\hat{k}$ ؟

(٣) أوجد قيمة الثابت m والتي تجعل المتجه $\underline{A}=m\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ عمودياً على المتجــه $\underline{B}=3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ ؟

(٤) أوجد الزاوية بين المتجهين $\underline{A}=2\hat{i}-5\hat{j}+6\hat{k}$ ، $\underline{B}=4\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$ ؟

(٥) اثبت أن $|\underline{A}\wedge\underline{B}|^2+\ \underline{A}.\underline{B}\ ^2=A^2B^2$ ؟

(٦) أوجد قيمة λ حـــتى تقـــع المتجهـــات $\underline{A}=2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ ، $\underline{B}=\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ ، $\underline{C}=\hat{i}+\lambda\hat{j}$ في مستوى واحد؟

(٧) أوجد المتجه $\underline{x}$ الذي يحقق المعادلات الآتية إذا كان $\underline{a}\wedge\underline{x}=\underline{a}\wedge\underline{b}$ $\underline{a}.\underline{b}=0,$ ؟

(٨) إذا كانت النقاط $(1,-2,1),(-1,2,2),(2,1,-1)$ هي نهايـــة متجهـــات الموضـــع $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ على الترتيب فأوجــد

حجم متوازي السطوح الذي فيه $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ ثلاثة أحرف متجاورة ؟

مساحة المثلث الذي أرؤسه هي هذه النقـــاط ؟

(٩) اثبت صحة المتطابقة $\ \underline{a}\wedge\underline{b}\ \wedge\underline{c}=\ \underline{a}\wedge\underline{b}\ .\hat{n}\ \ \hat{n}\wedge\underline{c}$ حيـــث $\hat{n}$ متجــه وحدة عمودي على مستوى المتجهين $\underline{a},\underline{b}$ ؟

(١٠) لأي ثلاثة متجهات $\underline{a},\ \underline{b},\ \underline{c}$ اثبت أن

$$(i)\ \ \underline{a}\wedge\underline{b}\ .\ \ \underline{b}\wedge\underline{c}\ \wedge\ \underline{c}\wedge\underline{a}\ \ =\ \ \underline{a}\wedge\underline{b}\ .\underline{c}\ ^2$$

$$(ii)\ \ \underline{a}\wedge\ \ \underline{b}\wedge\underline{c}\ \ \wedge\underline{c}=\ \underline{a}.\underline{c}\ \ \underline{b}\wedge\underline{c}$$

(١١) أوجد المتجه $\underline{x}$ الذي يحقــق المعادلــة $\underline{x} \wedge \underline{a} \; + \; \underline{x}.\underline{b} \;\; \underline{c} = \underline{d}$ حيـــث $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ متجهات معلومة ؟

(١٢) أوجد المتجه $\underline{x}$ الذي يحقق المعادلة $\underline{x} \wedge \underline{b} \; + 4\underline{b} - 2\underline{x} = \underline{0}$ بمعلومية $\underline{b}$ ؟

(١٣) حاول حل المعادلة $k\underline{x} + \underline{a} \wedge \underline{x} = \underline{b}$ حيث k عدد قياسي ؟

(١٤) ABCD شكل رباعي فيه P,M منتصفا AC,BD على الترتيب . أثبت أن

$$\underline{\mathbf{AB}} + \underline{\mathbf{CD}} + \underline{\mathbf{AD}} + \underline{\mathbf{CB}} = 4\underline{\mathbf{PM}}$$

(١٥) ABC مثلـــث فيـــه D,E منتصـــفات أضـــلاعه AB,AC علـــى الترتيـــب اثبت أن $\underline{\mathbf{BE}} + \underline{\mathbf{DC}} = \frac{3}{2}\underline{\mathbf{BC}}$

(١٦) أثبت باستخدام المتجهات أن $\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_2 \cos\theta_1$ ؟

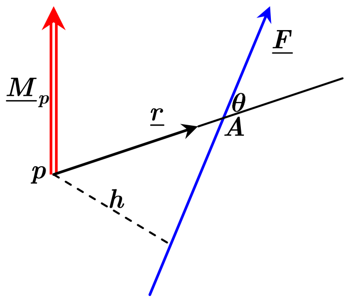
(١٧) استخدم المتجهات في اثبات أن ميلي m, m' متجهين متعامدين يحقق $mm' = -1$ ؟

العزوم والازدواجات

كما أوضحنا سالفاً أن القوى ما هي الا فصيلة من فصائل المتجهات ، ومن ثم فتُمثل القــوة بمتجه ينطبق عليه كل ما ذكرناه عن جبر المتجهات.

عزم قوة حول نقطة

يعرف عزم قوة حول نقطة بأنه المتجه العمودي عل المستوى الذي يضم كلاً من خط عمــل القوة والنقطة: بحيث يكّون المتجه الواصل من النقطة إلى خط عمل القوة مع متجــه القــوة نفسها والمتجه العمودي على المستوى مجموعة يمينية.



و مقدار عزم القوة $\underline{F}$ حول النقطة p يساوي حاصل ضرب مقدار القوة في البعد العمودي من النقطة p إلى خط عمل القوة أي أن

$$\left|\underline{M}_p\right| = \left|\underline{r} \wedge \underline{F}\right| = \left|Fh\,\hat{n}\right| = Fh = Fr\sin\theta$$

حيث $\hat{n}$ هو متجه وحدة عمودي على مستوى المتجهين $\underline{r}, \underline{F}$ ، كمـــا أن $\underline{r} = \underline{pA}$ هـــو المتجه الواصل من النقطة المأخوذ حولها العزم p إلى نقطة تأثير القوة A . ونلاحظ أنه لـــيس من الضروري أن يكون $\underline{r}$ متجه موضع نقطة معينة على خط عمل القوة ولكن يمكن اختيار أي نقطة تقع على خط عمل القوة لحساب المتجه $\underline{r}$. كما نلاحظ أنه إذا وقعت جميع القوى في مستوى واحد وليكن هـــذا المســـتوى هـــو المســـتوى Oxy نجـــد أن متجـــه العـــزم يكون في اتجاه المحور Oz .

وإذا كانت مركبات كل من $\underline{r}, \underline{F}$ هي $\underline{r} = (x, y, z)$, $\underline{F} = (F_x, F_y, F_z)$ فإن

$$\underline{M}_p = \underline{r} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\hat{i} - (xF_z - zF_x)\hat{j} + (xF_y - yF_x)\hat{k}$$

أيضاً يمكن الحصول على عزوم مجموعة من القوى المتلاقية في نقطة

لنفرض أنه لدينا مجموعة من القوى $\underline{F}_1, \underline{F}_2, ..., \underline{F}_n$ المتلاقية في نقطـــة ولـــتكن A وان $\underline{r} = \underline{OA}$ فإن مجموع عزوم هذه القوى حول النقطة O يتعين من

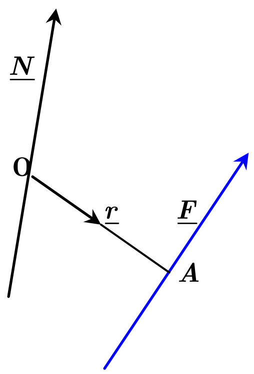
$$\underline{M}_o = \underline{r} \wedge \underline{F}_1 + \underline{r} \wedge \underline{F}_2 + ... + \underline{r} \wedge \underline{F}_n$$

$$= \underline{r} \wedge \ \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + ... + \underline{F}_n \quad = \underline{r} \wedge \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \underline{r} \wedge \underline{R}$$

أي أن عزم مجموعة من القوى المتلاقية في نقطة يساوي عزم المحصلة حول نفـــس النقطـــة.
والعزم كأي متجه أي إذا كان $\underline{M} = (M_x, M_y, M_z)$ فإن مقدار العزم هو

$$|\underline{M}| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

عزم قوة حول محور



يعرف عزم القوة $\underline{F}$ حول المحور $\underline{N}$ بأنه مسقط متجه العـــزم عند نقطة (تقع على المحور ولتكن O) على هذا المحور في اتجـــاه متجه الوحدة للمحور أي أن $\underline{M}_N = \ \underline{M}_o . \hat{n} \ \hat{n}$
حيث $\underline{M}_o$ هو عزم القوة $\underline{F}$ حول نقطة ما O تقع على المحور $\underline{N}$ ، كذلك $\hat{n}$ هو متجه وحدة في اتجاه المحور $\underline{N}$

وبطريقـــة أخـــرى إذا كانـــت مركبـــات كـــلُ مـــن $\hat{n}, \underline{F}$ هـــي $\hat{n} = (\ell, m, n)$ ، $\underline{F} = (F_x, F_y, F_z)$ وأن احداثيات النقطة O والتي تقع على المحور $\underline{N}$ هي $O(x_1, y_1, z_1)$ وأن احداثيات النقطة A مثلا والتي تقع على خط عمل القوة $\underline{F}$ هي $A(x_2, y_2, z_2)$ فإن:

$$M_N = |\underline{M}_N| = \begin{vmatrix} \ell & m & n \\ x_2 - x_z & y_2 - y_z & z_2 - z_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

حيث M_N هو مقدار عزم القوة حول المحور. نلاحظ أن عزم القوة حول محور يوازيها ينعدم.
ويمكن تلخيص القول أنه لحساب عزم قوة حول محور نتبع الآتي

١- إيجاد متجه الوحدة للمحور $\underline{N}$ وليكن $\hat{n}$

٢- حساب عزم القوة $\underline{F}$ حول نقطة تقع على المحور وليكن هذا العزم $\underline{M}_o$

٣- وأخيراً فإن عزم القوة حول المحور $\underline{N}$ يتعين من $\underline{M}_{\underline{N}} = \underline{M}_{\text{o}}.\hat{n}\ \hat{n}$

حالات خاصة

عزم القوة حول المحور $\text{O}x$ يتعين من $\underline{M}_{\underline{\text{O}x}} = \underline{M}_{\text{o}}.\hat{i}\ \hat{i}$

بالمثل عزم القوة حول المحورين $\text{O}y, \text{O}z$ هما

$$\underline{M}_{\underline{\text{O}y}} = \underline{M}_{\text{o}}.\hat{j}\ \hat{j} \quad \text{and} \quad \underline{M}_{\underline{\text{O}z}} = \underline{M}_{\text{o}}.\hat{k}\ \hat{k}$$

﴿ مثـــ ١ ـــال ﴾

أوجد عزم القوة $\underline{F} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ المارة بالنقطة $A(3,2,0)$ حول نقطة الأصل والنقطة $B(2,1,-1)$ ؟

﴿ الحـــــل ﴾

حيث أن $\underline{r} = \underline{\text{O}A} = \underline{A} - \underline{\text{O}} = (3,2,0) - (0,0,0) = 3\hat{i} + 2\hat{j}$

ومنها عزم القوة حول نقطة الأصل يتعين من

$$\therefore \underline{M}_{\text{o}} = \underline{r} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8\hat{i} - 12\hat{j} + 5\hat{k}$$

كذلك عزم القوة حول النقطة $B(2,1,-1)$

$$\therefore \underline{M}_B = \underline{r'} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3-2 & 2-1 & 0+1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

﴿ مثـــ ٢ ـــال ﴾

أوجد عزم القوة والتي مقدارها $10\sqrt{3}$ والتي تؤثر في الاتجاه الواصل من النقطة $A(5,3,-3)$ إلى النقطة $B(4,4,-4)$ حول نقطة الأصل؟

﴿ الحـــــل ﴾

أولا يجب كتابة القوة في صورة متجهه ومن ثم نوجد متجه وحده في اتجاه الخط الواصل من النقطة $A(5,3,-3)$ إلى النقطة $B(4,4,-4)$ ومتجه الوحده هذا $\hat{F}$ يتعين من

$$\because\ \underline{AB} = \underline{B} - \underline{A} = (4,4,-4) - (5,3,-3) = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

$$\therefore\ \hat{F} = \frac{\underline{AB}}{AB} = \frac{-\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{3}} \equiv \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

ونحصل على القوة في صورة متجهه في الشكل

$$\therefore\ \underline{F} = F\hat{F} = 10\sqrt{3}\left\{\frac{-\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{3}}\right\} \equiv -10\hat{i} + 10\hat{j} - 10\hat{k}$$

وباختيار أي من النقطتين A, B كنقطة تأثير للقوة وبالتالي فإن عزم القوة حول نقطة الأصل يتعين من (باختيار النقطة $A(5,3,-3)$ كنقطة تأثير للقوة)

$$\therefore\ \underline{r} = (5,3,-3) - (0,0,0) = (5,3,-3)$$

$$\therefore\ \underline{M}_o = \underline{r} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 3 & -3 \\ -10 & 10 & -10 \end{vmatrix} = 80\hat{j} + 80\hat{k}$$

وإذا اخترنا النقطة $B(4,4,-4)$ كنقطة تأثير للقوة فإن

$$\therefore\ \underline{M}_o = \underline{r'} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 4 & -4 \\ -10 & 10 & -10 \end{vmatrix} = 40\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 80\hat{j} + 80\hat{k}$$

وهي نفس النتيجة أي لا يتغير متجه العزم باختيار أي نقطة يمر بها خط عمل القوة.

تدريب: أوجد عزم القوة السابقة حول النقطة $A(3,5,-5)$ ؟

﴿ مثــ ٣ ــال ﴾

أوجد عزم القوة $\underline{F} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ والتي تمر بالنقطة $O(0,1,-1)$ حول مستقيم يمر بالنقطتين $A(-2,-1,4)$ ، $B(-1,1,2)$ ؟

﴿ الحـــل ﴾

أولا نوجد متجه وحده في اتجاه المستقيم الواصل بين النقطتين A, B ويتعين كالآتي

$$\because\ \underline{AB} = \underline{B} - \underline{A} = (-1,1,2) - (-2,-1,4) = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\therefore\ \hat{n} = \frac{\underline{\underline{AB}}}{AB} = \frac{\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{9}} \equiv \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

ثانيا نوجد عزم القوة حول نقطة تقع على المحور (لا ننسى أنه لدينا نقطتـــان تقعـــان علـــى المستقيم هما A, B ومن ثم يمكن إيجاد عزم القوة حول أيٍ من النقطتين ولتكن مثلاً A)

$$\because\ \underline{r} = (0,1,-1) - (-2,-1,4) = (2,2,-5)$$

$$\therefore\ \underline{M}_A = \underline{r} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 10\hat{i} + 4\hat{k}$$

أخيراً عزم القوة حول المستقيم يتعين من

$$\underline{M}_{\underline{AB}} = \ \underline{M}_A . \hat{n}\ \ \hat{n} = \left\{(10\hat{i} + 4\hat{k}).\left(\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k}\right)\right\}\left(\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k}\right)$$

$$\underline{M}_{\underline{AB}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k}\right) = \frac{2}{9}(\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}), \quad \text{and} \quad \left|\underline{M}_{\underline{AB}}\right| = \frac{2}{3}$$

﴿ مثـــ ٤ ـــال ﴾

أوجد محصلة عزوم مجموعة القوى $\underline{F} = 2\hat{i}$ وتؤثر عند نقطة الأصل والقوة $-\frac{1}{2}\underline{F}$ وتـــؤثر عند النقطة $\underline{r}_2 = 3\hat{j}$ والقوة $-\frac{1}{2}\underline{F}$ وتؤثر عند النقطة $\underline{r}_3 = 5\hat{k}$ حول نقطة الأصل؟

﴿ الحـــــل ﴾

من الواضح أن محصلة هذه المجموعة من القوى تتلاشى. بينما نجد أن العزم المحصل حول نقطة الأصل يتعين من

$$\therefore \underline{M}_o = \underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{F}_2 + \underline{r}_3 \wedge \underline{F}_3 = \cancel{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \underline{M}_o = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -5\hat{j} + 3\hat{k} \qquad \text{and} \qquad \left|\underline{M}_o\right| = \sqrt{34}$$

﴿ مثـــ ٥ ـــال ﴾

قوة مقدارها 10 توازي الاتجاه الموجب لمحور x وتمر بالنقطة $A(0,1,0)$ ، اوجد عزم هـــذه القوة حول محور يمر بنقطة الأصل ويوازي المتجه $2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ ؟

﴿ الحـــــل ﴾

أولا نوجد متجه الوحده في اتجاه المحور الموازي للمتجة $2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ وهو

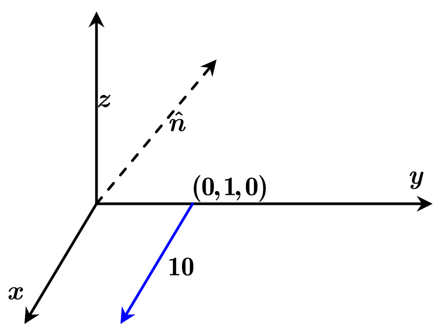
$$\hat{n} = \frac{1}{3}\ 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$$

ثانيا نوجد عزم القوة حول نقطة تقع على المحور (نقطة الأصل) لاحظ أن $\underline{F} = 10\hat{i}$

$$\underline{M}_o = \underline{r} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -10\hat{k}$$

أخيراً عزم القوة حول المستقيم يتعين من

$$\underline{M}_N = \ \underline{M}_o.\hat{n}\ \ \hat{n} = \frac{1}{3}\ \ (-10\hat{k}).\ 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k} \quad \hat{n} = \frac{10}{3}\hat{n} = \frac{10}{9}\ \ 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$$



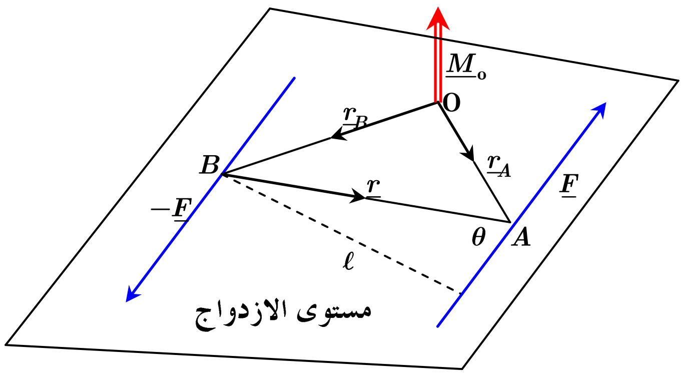
الازدواج The Couple

الازدواج هو ابسط مجموعات القوى وهو تركيب مكون من قوتين متساويتين مقداراً ومتضادتين اتجاهاً (محصلتهما صفر) وتعملان في خطي عمل متوازيين (أي أن خطي عملهما ليس على استقامة واحدة) نلاحظ أن الازدواج لا يكسب الجسم الذي يؤثر فيه أي حركة انتقالية ولكن يكسبه حركة دورانية (أي يعمل الازدواج على دوران الجسم) ومن الشكل ينتج أن مجموع عزمي القوتين $\underline{M}_o$ حول أي نقطة O يتعين من:

$$\underline{M}_o = \underline{r}_A \wedge \underline{F} + \underline{r}_B \wedge (-\underline{F})$$

$$\underline{M}_o = \underline{r}_A - \underline{r}_B \wedge \underline{F} = \underline{r} \wedge \underline{F}$$

هذا المتجه عمودي على مستوى الازدواج وفي اتجاه الحركة البريمية اليمينية كما أن مقدار هذا العزم يساوي ℓF حيث ℓ هي المسافة العمودية بين قوتي الازدواج.



والآن إذا اختزلت مجموعة القوى $\underline{F}_1, \underline{F}_2, ..., \underline{F}_i, ..., \underline{F}_n$ عند نقطة اختيارية O فإن المحصلة الناتجة هي $\underline{M}_o, \underline{F}$ (تسمى الداينام) حيث

$$\underline{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \wedge \underline{F}_i, \qquad \underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i$$

وإذا اختزلت نفس مجموعة القوى عند النقطة O' فإن الداينام يتكون من $\underline{M}_{o'}, \underline{F}$ حيث

$$\underline{M}_{o'} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i' \wedge \underline{F}_i, \qquad \underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i$$

أي أنه عند تغيير نقطة الاختزال من نقطة O إلى نقطة O' فإن المحصلة $\underline{F}$ لا تتغير وإنما عزم الازدواج هو الذي يتغير ويكون

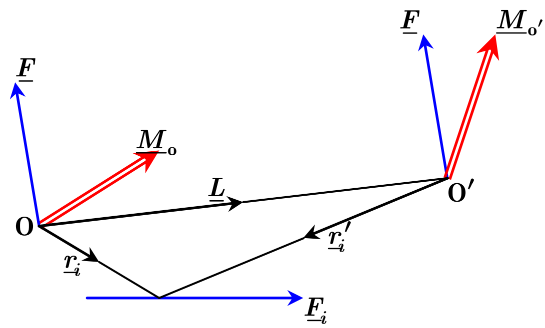
$$\therefore \underline{M}_{o'} = \sum_{i=1}^{n} (\underline{r}_i - \underline{L}) \wedge \underline{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \wedge \underline{F}_i - \sum_{i=1}^{n} \underline{L} \wedge \underline{F}_i$$
$$= \underline{M}_o - \sum_{i=1}^{n} \underline{L} \wedge \underline{F}_i = \underline{M}_o - \underline{L} \wedge \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i$$

$$\therefore \underline{M}_{o'} = \underline{M}_o - \underline{L} \wedge \underline{F}$$

نلاحظ كذلك أن

$$\therefore \underline{F}.\underline{M}_{o'} = \underline{F}.(\underline{M}_o - \underline{L} \wedge \underline{F}) = \underline{F}.\underline{M}_o - \overbrace{\cancel{\underline{F}.(\underline{L} \wedge \underline{F})}}^{0} = \underline{F}.\underline{M}_o = \text{const.}$$

وتسمى مثل هذه الكمية بالكمية اللاتغيرية.



مجموعة اللولبية The Wrench

<u>تعريف :</u> مجموعة القوى التي تُختزل إلى قوة وازدواج بحيث يكون اتجاه محور الازدواج منطبقاً على اتجاه القوة تسمى لولبية ، كما أن هذا المحور يسمى محور اللولبية أو المحور المركزي.

إذا كان الداينام لمجموعة من القوى الفراغية عند النقطة O يتكون من $\underline{M}_o, \underline{F}$ فعند تغيير نقطة الاختزال (كما رأينا) يتغير عزم الازدواج ، ومن الممكن إيجاد نقطة O' ينطبق عنـــدها كل من $\underline{M}_{o'}, \underline{F}$ وعند هذه النقطة يكون

$$\underline{M}_{o'} = \underline{M}_o - \underline{r} \wedge \underline{F} = \lambda \underline{F} \qquad \Rightarrow \underline{F}.\ \ \underline{M}_o - \underline{r} \wedge \underline{F}\ \ = \lambda F^2 \quad \therefore \lambda = \frac{\underline{F}.\underline{M}_o}{F^2}$$

حيث λ كمية قياسية تعرف بخطوة اللولبية.

وحيث أنه عند النقطة O' فإن $\underline{M}_{o'}, \underline{F}$ منطبقان وبالتالي $\underline{F} \wedge \underline{M}_{o'} = \underline{0}$

بضرب طرفي هذه المعادلة اتجاهياً في $\underline{F}$ نجد أن

$$\therefore \underline{F} \wedge \underbrace{\underline{M}_o - \underline{r} \wedge \underline{F}}_{\underline{M}_{o'}} = \underline{F} \wedge \underline{M}_o - \underline{F} \wedge\ \ \underline{r} \wedge \underline{F}\ \ = \underline{0}$$

و من خواص حاصل الضرب الثلاثي الاتجاهي

$$\underline{F} \wedge\ \ \underline{r} \wedge \underline{F}\ \ =\ \ \underline{F}.\underline{F}\ \ \underline{r} -\ \ \underline{F}.\underline{r}\ \ \underline{F} = F^2 \underline{r} -\ \ \underline{F}.\underline{r}\ \ \underline{F}$$

$$\therefore \underline{F} \wedge \underline{M}_o -\ \ F^2 \underline{r} -\ \ \underline{F}.\underline{r}\ \ \underline{F}\ \ = \underline{0}$$

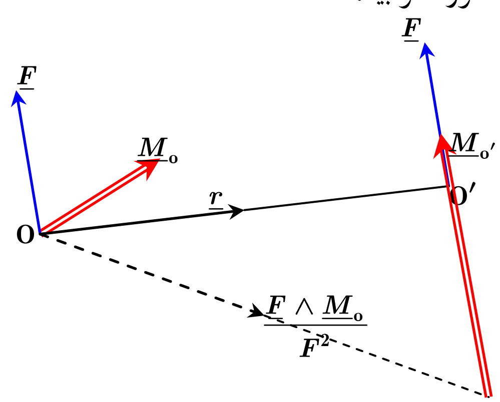
$$\therefore \underline{r} = \underbrace{\frac{\underline{F} \wedge \underline{M}_o}{F^2}}_{\underline{r}_1} + \underbrace{\frac{\underline{r}.\underline{F}}{F^2}}_{\mu} \underline{F} \qquad \text{Or} \quad \underline{r} = \underline{r}_1 + \mu \underline{F} \qquad \textbf{(1)}$$

المعادلة (1) هي معادلة محور اللولبية في صورة متجهه ويمكن وضعها في صورة معادلة خط مستقيم بدلالة الاحداثيات الكارتيزية كالاتي

إذا كان $\underline{F} = (F_x, F_y, F_z)$، $\underline{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$، $\underline{r} = (x, y, z)$ فإن المعادلة الاتجاهية لمحور اللولبية (1) تأخذ الصورة

$$\frac{x - x_1}{F_x} = \frac{y - y_1}{F_y} = \frac{z - z_1}{F_z}$$

و هذه هي المعادلة الكارتيزية لمحور اللولبية.



صور خاصة

لتعيين المحور الاساسي (محور اللولبية) لمجموعة ما من القوى وكذلك المحصلة اللولبية لها تختزل المجموعة أولاً عند أية نقطة اختيارية O إلى داينام $\underline{M}_o, \underline{F}$ وقد نجد الآتي

(i) $\underline{F}.\underline{M}_o = 0$ and $\underline{F} \neq 0,\ \underline{M}_o = 0$

أي أن المجموعة تؤول إلى قوة وحيدة تؤثر عند O وتعمل في الخط المستقيم $\underline{r} = \lambda \underline{F}$.

(ii) $\underline{F}.\underline{M}_o = 0$ and $\underline{F} = 0,\ \underline{M}_o \neq 0$

أي أن المجموعة تختزل عند أي نقطة إلى ازدواج عزمه $\underline{M}_o$.

(iii) $\underline{F}.\underline{M}_o = 0$ and $\underline{F} \neq 0,\ \underline{M}_o \neq 0$

في هذه الحالة يتعامد $\underline{M}_o$ على $\underline{F}$ ويمكن اختزال المجموعة إلى لولب يعمل في الخط المستقيم

$$\therefore\ \underline{r} = \frac{\underline{F} \wedge \underline{M}_o}{F^2} + \mu \underline{F}$$

(iv) $\underline{F} = 0$ and $\underline{M}_o = 0$

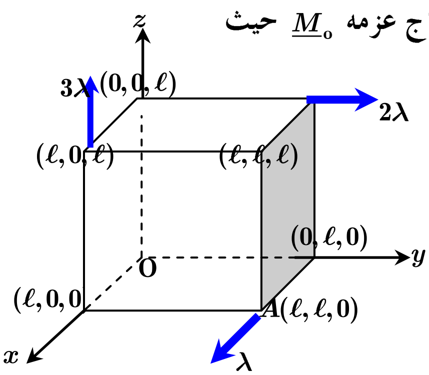
في هذه الحالة تصبح مجموعة القوى متزنة.

﴿ مثـــ ٦ ـــال ﴾

ثلاثة قوى $\lambda, 2\lambda, 3\lambda$ تؤثر في ثلاثة أحرف من حروف مكعب طول ضلعه ℓ كما بالشكل. اختزل المجموعة عند النقطة Oوعند النقطة A ؟

﴿ الحـــــل ﴾

المجموعة تُختزل عند النقطة O إلى قوة $\underline{F}$ وازدواج عزمه $\underline{M}_o$ حيث



$$\underline{F}_1 = \lambda \hat{i}, \qquad \underline{F}_2 = 2\lambda \hat{j}, \qquad \underline{F}_3 = 3\lambda \hat{k}$$

$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \lambda\ \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\underline{M}_o = \underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{F}_2 + \underline{r}_3 \wedge \underline{F}_3$$

$$\therefore \underline{M}_{o} = \lambda\ell\left\{\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}\right\} = -\lambda\ell\ \ 2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$$

كذلك تُختزل المجموعة عند A إلى قوة نفس القوة $\underline{F}$ (لا تتغير) وازدواج عزمه $\underline{M}_B$ حيث

$$\underline{M}_B = \underline{M}_{o} - \underline{L}\wedge\underline{F} \qquad \text{where} \qquad \underline{L} = \underline{OA} = (\ell,\ell,0)$$

$$\underline{M}_B = -\lambda\ell\ \ 2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}\ \ -\lambda\ell\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix} = -\lambda\ell\ \ 5\hat{i}+2\hat{k}$$

﴿ مثـــ ٧ ـــال ﴾

القوة $2\hat{i}-\hat{j}$ تؤثر في الخط المستقيم المار بالنقطة $(4,4,5)$ والقوة $3\hat{k}$ تمر بنقطة الأصـــل ، أوجد خطوة اللولبية ومعادلة محورها ؟

﴿ الحــــــل ﴾

القوتان تختزل عند نقطة الأصل إلى قوة $\underline{F}$ وازدواج عزمه $\underline{M}$ حيث

$$\underline{F} = \underline{F}_1+\underline{F}_2 = 2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}, \qquad \therefore F^2 = 14$$

$$\underline{M} = \underline{r}_1\wedge\underline{F}_1+\underline{r}_2\wedge\underline{F}_2 = \underline{0}+\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 4 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix} = 5\hat{i}+10\hat{j}-12\hat{k}$$

وتتعين خطوة اللولبية من العلاقة $\lambda = \dfrac{\underline{F}.\underline{M}}{F^2}$ ومن ثم

$$\lambda = \frac{\underline{F}.\underline{M}}{F^2} = \frac{2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}\ \ .\ \ 5\hat{i}+10\hat{j}-12\hat{k}}{14} = -\frac{36}{14} = -\frac{18}{7}$$

وكذلك معادلة محور اللولبية هي $\underline{r} = \underline{r}_1+\mu\underline{F}$ حيث

$$\underline{r}_1 = \frac{\underline{F}\wedge\underline{M}}{F^2} = \frac{1}{14}\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 5 & 10 & -12\end{vmatrix} = \frac{1}{14}\ \ -18\hat{i}+39\hat{j}+25\hat{k}$$

وتصبح المعادلة الاتجاهية لمحور اللولبية هو

$$\underline{r} = \frac{1}{14}\ \ -18\hat{i} + 39\hat{j} + 25\hat{k}\ \ + \mu(2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$$

والمعادلة الكارتيزية تتعين من

$$\frac{x + \frac{18}{14}}{2} = \frac{y - \frac{39}{14}}{-1} = \frac{z - \frac{25}{14}}{3} \qquad \text{Or} \quad \frac{14x + 18}{2} = \frac{14y - 39}{-1} = \frac{14z - 25}{3}$$

﴿ مثـــ ٨ ـــال ﴾

تؤثر القوتان $(0,0,1), (0,1,0)$ في النقطتين $(3,0,0), (0,0,0)$ على الترتيب ، أوجد خطـــوة اللولبية التي تؤول إليها المجموعة ومعادلة محورها؟

﴿ الحـــــــل ﴾

بفرض أن

$$\underline{F}_1 = (0,0,1) = \hat{k}, \quad \underline{F}_2 = (0,1,0) = \hat{j}$$

المجموعة تختزل إلى قوة $\underline{F}$ وازدواج عزمه $\underline{M}$ عند نقطة الأصل حيث

$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \hat{j} + \hat{k} \qquad \therefore F^2 = 2$$

$$\underline{M} = \underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{F}_2 = \underline{0} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\hat{k}$$

وتتعين خطوة اللولبية من العلاقة $\lambda = \frac{\underline{F}.\underline{M}}{F^2}$ ومن ثم

$$\lambda = \frac{\underline{F}.\underline{M}}{F^2} = \frac{\hat{j} + \hat{k}\ \ .\ \ 3\hat{k}}{2} = \frac{3}{2}$$

وكذلك معادلة محور اللولبية هي $\underline{r} = \underline{r}_1 + \mu\underline{F}$ حيث

$$\underline{r}_1 = \frac{\underline{F} \wedge \underline{M}}{F^2} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}\hat{i}$$

وتصبح المعادلة الاتجاهية لمحور اللولبية هو $\underline{r} = \frac{3}{2}\hat{i} + \mu(\hat{j} + \hat{k})$

والمعادلة الكارتيزية تتعين من $\frac{x-1.5}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1}$

﴿ مثـــ ٩ ـــال ﴾

قوتـــان متســـاويتان مقـــدار كـــل منـــهما P تـــؤثران في المســـتقيمين $\frac{x \mp a\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{y - b\sin\theta}{\mp b\cos\theta} = \frac{z}{c}$ بـــيّن أن محـــور اللولبيـــة يقـــع علـــى الســـطح $y\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) = b\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)$ ؟

﴿ الحـــل ﴾

نعلـــم مـــن المعـــادلتين $\frac{x - a\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{y - b\sin\theta}{-b\cos\theta} = \frac{z}{c}$ ، $\frac{x + a\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{y - b\sin\theta}{b\cos\theta} = \frac{z}{c}$ أن نســـب اتجـــاه المســـتقيم الأول هـــي $(a\sin\theta, -b\cos\theta, c)$ وأن النقطه $(a\cos\theta, b\sin\theta, 0)$ تقع عليه وبالنسبة للمستقيم الثـــاني نسب اتجاهه هي $(a\sin\theta, b\cos\theta, c)$ ويمر بالنقطة $(-a\cos\theta, b\sin\theta, 0)$

ولذلك يمكن حساب متجه وحدة في اتجاه المستقيم الأول وهو

$$\begin{aligned}\hat{n}_1 &= \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2}}(a\sin\theta, -b\cos\theta, c)\\ &= \frac{1}{\mu}\ \ a\sin\theta\hat{i} - b\cos\theta\hat{j} + c\hat{k}\end{aligned}$$

وكذلك يمكن حساب متجه وحدة في اتجاه المستقيم الثاني وهو

$$\hat{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2}}(a\sin\theta, b\cos\theta, c) = \frac{1}{\mu}\ \ a\sin\theta\hat{i} + b\cos\theta\hat{j} + c\hat{k}$$

حيث

$$\mu = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2}$$

وبالتالي متجه القوة الأولى يتعين من

$$\underline{F}_1 = P\hat{n}_1 = \frac{P}{\mu}\ a\sin\theta\hat{i} - b\cos\theta\hat{j} + c\hat{k}$$

وأيضاً متجه القوة الثانية يتعين من

$$\underline{F}_2 = P\hat{n}_2 = \frac{P}{\mu}\ a\sin\theta\hat{i} + b\cos\theta\hat{j} + c\hat{k}$$

و تؤول المجموعة عند نقطة الأصل إلى قوة $\underline{F}$ وازدواج عزمه $\underline{M}$ حيث

$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \frac{P}{\mu}\ a\sin\theta\hat{i} - b\cos\theta\hat{j} + c\hat{k}\ + \frac{P}{\mu}\ a\sin\theta\hat{i} + b\cos\theta\hat{j} + c\hat{k}$$

$$= \frac{2P}{\mu}\ a\sin\theta\hat{i} + c\hat{k} \qquad \text{and} \quad F^2 = \frac{4P^2}{\mu^2}\ a^2\sin^2\theta + c^2$$

$$\underline{M} = \underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{F}_2 = \frac{P}{\mu}\left\{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a\cos\theta & b\sin\theta & 0 \\ a\sin\theta & -b\cos\theta & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a\cos\theta & b\sin\theta & 0 \\ a\sin\theta & b\cos\theta & c \end{vmatrix}\right\}$$

$$\therefore\ \underline{M} = \frac{2P}{\mu}\ \ cb\sin\theta\hat{i} - ab\hat{k}$$

ومن ثم معادلة محور اللولبية هي $\qquad \underline{r} = \underline{r}_1 + \mu\underline{F}$ حيث

$$\underline{r}_1 = \frac{\underline{F} \wedge \underline{M}}{F^2} = \frac{1}{a^2\sin^2\theta + c^2}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a\sin\theta & 0 & c \\ cb\sin\theta & 0 & -ab \end{vmatrix} = \frac{c^2 + a^2\ \ b\sin\theta}{a^2\sin^2\theta + c^2}\hat{j}$$

وتصبح المعادلة الاتجاهية لمحور اللولبية هي

$$\underline{r} = \frac{(c^2 + a^2)b\sin\theta}{a^2\sin^2\theta + c^2}\hat{j} + \mu\ \ a\sin\theta\hat{i} + c\hat{k}$$

والمعادلة الكارتيزية تتعين من

$$\frac{x - 0}{a\sin\theta} = \frac{y - \dfrac{(c^2 + a^2)b\sin\theta}{a^2\sin^2\theta + c^2}}{0} = \frac{z - 0}{c}$$

ومن هذه المعادلة نستنتج المعادلتين الآتيتين

$$y = \frac{(c^2 + a^2)b\sin\theta}{a^2\sin^2\theta + c^2} \qquad \text{and} \qquad \frac{x}{z} = \frac{a\sin\theta}{c}$$

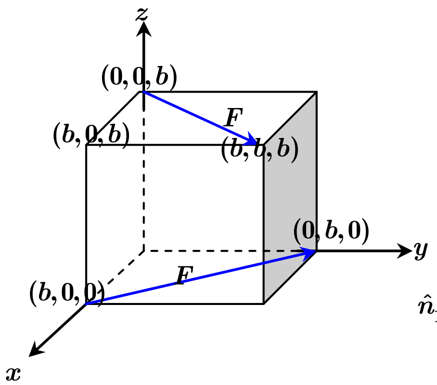
$$y\ \ a^2\sin^2\theta + c^2 \ = \ c^2 + a^2\ \ b\sin\theta \qquad \Rightarrow y^2\left(a^2\sin\theta + \frac{c^2}{\sin\theta}\right) = b\ \ c^2 + a^2$$

بالقسمة على ac وبالتعويض من الجزء الثاني من المعادلة في الجزء الأول نحصل على

$$y\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) = b\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)$$

﴿ مثـــ ١٠ ـــال ﴾

تؤثر قوتان مقدار كل منهما F في أقطار أوجه مكعب طول ضلعه b (كما بالشكل) أوجد محصلتهما البريمية (اللولبية) ؟



﴿ الحـــــــل ﴾

لقد أوضحنا على الرسم احداثيات اركان المكعب ، ومن ذلك نستنتج أن متجه وحدة للقوى الأولى هو

$$\hat{n}_1 = (b,b,b) - (0,0,b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j})$$

$$\therefore\ \underline{F}_1 = F\hat{n}_1 = \frac{F}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j})$$

كذلك متجه الوحدة في اتجاه القوة الثانية يتعين من

$$\hat{n}_2 = (0,b,0) - (b,0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{i} + \hat{j})$$

$$\therefore\ \underline{F}_2 = F\hat{n}_2 = \frac{F}{\sqrt{2}}(-\hat{i} + \hat{j})$$

المجموعة تختزل إلى قوة $\underline{R}$ وازدواج عزمه $\underline{M}$ عند نقطة الأصل حيث

$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \sqrt{2}F\hat{j} \qquad \therefore\ R^2 = 2F^2$$

$$\underline{M} = \underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{F}_2 = \frac{Fb}{\sqrt{2}}\left\{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right\} = \frac{Fb}{\sqrt{2}}\ \ \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$$

وذلك باختيار النقطة $(0,0,b)$ كنقطة تأثير للقوة الأولى والنقطة $(b,0,0)$ كنقطة تأثير للقوة الثانية. وتتعين خطوة اللولبية من العلاقة $\lambda = \dfrac{\underline{\underline{R}}.\underline{\underline{M}}}{R^2}$ ومن ثم

$$\lambda = \frac{\underline{\underline{R}}.\underline{\underline{M}}}{R^2} = \frac{\sqrt{2}F\hat{j}\ .\dfrac{Fb}{\sqrt{2}}\ \left(\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}\right)}{2F^2} = -\frac{b}{2}$$

وأيضاً معادلة محور اللولبية هي $\underline{r} = \underline{r}_1 + \mu\underline{F}$ حيث

$$\underline{r}_1 = \frac{\underline{\underline{R}} \wedge \underline{\underline{M}}}{R^2} = \frac{\cancel{F^2}\, b}{2\cancel{F^2}}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{b}{2}\left(\hat{i}+\hat{k}\right)$$

وتصبح المعادلة الاتجاهية لمحور اللولبية هو $\underline{r} = -\dfrac{b}{2}\left(\hat{i}+\hat{k}\right) + \mu\hat{j}$

والمعادلة الكارتيزية تتعين من

$$\frac{x+\dfrac{b}{2}}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z+\dfrac{b}{2}}{0} \qquad \text{Or} \qquad z = -\frac{b}{2} \ \text{ and } \ x = -\frac{b}{2}$$

﴿ مثـــال ١١ ﴾

إذا أُعطيت ثلاث قوى مقدار كل منهم μ الأولى منطبقة على المحور x وفي الاتجاه السالب له والثانية توازي محور x وتمر بالنقطة $(0,0,a)$ والثالثة تــوازي محــور z وتمــر بالنقطــة $(0,a,0)$. اختــزل المجموعــة عنــد نقطــة الأصــل وعــين المحــور الأساســي (محور اللولبية) للمجموعة ؟

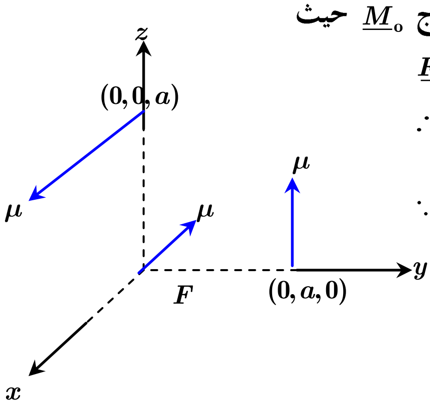
﴿ الحـــل ﴾

تُختزل المجموعة عند نقطة الأصل إلى قوة $\underline{F}$ وازدواج $\underline{M}_o$ حيث

$$\underline{F}_1 = \mu\hat{i}, \qquad \underline{F}_2 = -\mu\hat{i}, \qquad \underline{F}_3 = \mu\hat{k},$$

$$\therefore\ \underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \mu\hat{i} - \mu\hat{j} + \mu\hat{k} = \mu\hat{k}$$

$$\because\ \underline{M}_o = \underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{F}_2 + \underline{r}_3 \wedge \underline{F}_3$$



$$\therefore \underline{M}_{o} = \mu a \left\{ \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \underline{0} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \mu a(\hat{i} + \hat{j})$$

$$\lambda = \frac{\underline{F}.\underline{M}}{F^2} = \frac{\mu\hat{k} \ .\mu a \ \ \hat{i} + \hat{j}}{\mu^2} = 0$$

معادلة محور اللولبية هي تتعين من $\underline{r} = \underline{r}_1 + \mu'\underline{F}$ (جعلنا μ' بدلاً من μ حتى لا تتداخل مع μ قيمة القوة والتي في المسألة)حيث

$$\underline{r}_1 = \frac{\underline{F} \wedge \underline{M}}{F^2} = \frac{\cancel{\mu^2} a}{\cancel{\mu^2}} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a \left(-\hat{i} + \hat{j} \right)$$

وتصبح المعادلة الاتجاهية لمحور اللولبية هو $\underline{r} = a \ \ -\hat{i} + \hat{j} \ \ + \mu'\hat{k}$

والمعادلة الكارتيزية تتعين من

$$\frac{x + a}{0} = \frac{y - a}{0} = \frac{z}{1} \qquad \text{Or} \qquad y = a \ \text{ and } \ x = -a$$

لاحظ أن خطوة اللولبية صفراً.

الخلاصـــــــــــــــة

➤ يتعين عزم قوة حول نقطة ما من العلاقة

$$\underline{M}_p = \underline{r} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\hat{i} - (xF_z - zF_x)\hat{j} + (xF_y - yF_x)\hat{k}$$

➤ عزم قوة حول محور ما متجه الوحدة له $\hat{n}$ يتعين من. $\underline{M}_{\underline{N}} = \underline{M}_{\text{o}}.\hat{n}\ \hat{n}$

حيث $\underline{M}_{\text{o}}$ عزم القوة حول نقطة تقع على المحور.

➤ الازدواج وهو تركيب مكون من قوتين متساويتين مقداراً ومتضادتين اتجاهاً (محصلتهما صفر) وتعملان في خطي عمل متوازيين (أي أن خطي عملهما ليس على استقامة واحدة)

➤ مجموعة القوى التي تُختزل إلى قوة وازدواج بحيث يكون اتجاه محور الازدواج منطبقاً على اتجاه القوة تسمى لولبية ، كما أن هذا المحور يسمى محور اللولبية أو المحور المركزي.

➤ الكمية $\underline{F}.\underline{M}_{\text{o}} = \text{const}$ هي كمية لا تغيرية

تمـــــــــارين

(١) إذا أثرت القوة $\underline{F} = 3\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}$ في نقطة الأصل فما هو عزمهـــا حـــول النقطـــة $(4,4,6)$ ؟

(٢) قوة مقدارها 100 تؤثر في المستقيم الواصل من النقطـــة $(0,1,0)$ إلى النقطـــة $(1,0,0)$. أوجد عزم هذه القوة حول نقطة الأصل وكذلك حول محاور الاحداثيات ؟

(٣) أوجد متجه عزم القوة $-\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ والتي تؤثر في النقطة $(1,2,1)$ حول محـــور يمـــر بنقطة الأصل ويوازي المتجه $2\hat{i} - 3\hat{k}$ ؟

(٤) أوجد مقدار واتجاه عزم قوة مقدارها الوحدة وتصنع الزوايا $(45^o, 60^o, 60^o)$ مع محاور الاحداثيات وتمر بالنقطة $(1,-1,2)$ حول نقطة الأصل ؟

(٥) أوجد متجه عزم القوة $-\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ والتي تؤثر في النقطة $(1,2,1)$ حول محور يمـــر بنقطة الأصل ويوازي المتجه $2\hat{i} - 3\hat{k}$ ؟

(٦) القوى الثلاث $-\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\hat{j} - 2\hat{k}$, $2\hat{i} + 2\hat{j}$ تؤثر عند النقاط الـــثلاث $(0,0,1)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ على الترتيب . أوجد خطوة اللولبية ؟

(٧) قوتـــان متســـاويتان مقـــدار كـــل منـــهما $3F$ وتعمـــلان في الخطـــين المســـتقيمين $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{1}$ ، $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{2}$ أوجد ما تؤول إليه القوتان عند نقطة الأصل ؟

(٨) القوى $\underline{F}_1, \underline{F}_2, \underline{F}_3$ تعمل في ثلاثة احرف غير متقاطعة لمكعب. اوجد خط عمل اللولبيـــة المكافئة ؟

(٩) قوتان $\underline{F}_1, \underline{F}_2$ تؤثران في خطين غير متقاطعين L_1, L_2 بحيث كان العمود المشترك بينهما يقابل الخط L_1 في النقطة $\underline{r}_1$ ويقابل الخط L_2 في النقطة $\underline{r}_2$. أثبـــت أن خطـــوة اللولبيـــة تساوي $\underline{F}_1 . \underline{F}_2 \wedge \underline{r}_1 - \underline{r}_2 \quad \left|\underline{F}_1 + \underline{F}_2\right|^{-2}$ ؟

(١٠) قوتـــــان F_1 , F_2 تـــــؤثران في المســـــتقيمين $(z = \mathrm{c},\ y = x\tan\alpha)$ ، $(z = -\mathrm{c},\ y = -x\tan\alpha)$ على الترتيب أوجد معادلة محور اللولبية المكافئة ؟

(١١) تؤثر القوة $2\hat{i} - \hat{j}$ في الخط المستقيم المار بالنقطة $(4,4,5)$ والقوة $3\hat{k}$ تمـــر بنقطـــة الأصل أوجد خطوة اللولبية ومعادلة محورها ؟

(١٢) تؤثر القوى $3, 2, 4, 3, P$ في المستقيمات $\overleftrightarrow{\mathrm{ab}}, \overleftrightarrow{\mathrm{cb}}, \overleftrightarrow{\mathrm{cd}}, \overleftrightarrow{\mathrm{ad}}, \overleftrightarrow{\mathrm{db}}$ على الترتيب من المربـــع abcd . أوجد مقدار القوة P لكي تؤول المجموعة إلى ازدواج ؟

اتـزان القوى

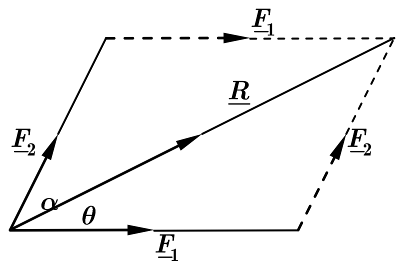
مـــن دراســـتنا الســـابقة نعلـــم أن مقـــدار محصـــلة أي قـــوتين $\underline{F}_1, \underline{F}_2$ يـــتعين مـــن

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha$$

حيث α هي الزاوية بين القوتين $\underline{F}_1, \underline{F}_2$ واتجاه المحصلة $\underline{R}$ يصنع مع القوة $\underline{F}_1$ زاوية ولتكن θ تتعين من

$$\tan\theta = \frac{F_2\sin\alpha}{F_1 + F_2\cos\alpha}$$

معادلة المحصلة يمكن استنتاجها باستخدام المتجهات حيث أنه من قاعدة المثلث (من الشكل)

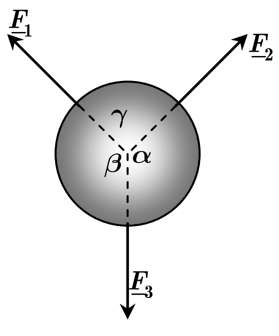


$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2$$

وبضرب هذه المعادلة قياسياً في نفسها يكون

$$\underline{R}.\underline{R} = (\underline{F}_1 + \underline{F}_2) \cdot (\underline{F}_1 + \underline{F}_2) \quad \Rightarrow R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2\underbrace{(\underline{F}_1.\underline{F}_2)}_{F_1F_2\cos\alpha}$$

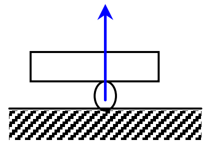
$$\therefore R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha$$



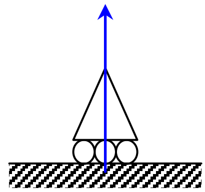
أيضاً تنص قاعدة لامي على أنه إذا اتزن جسم تحت تأثير ثـــلاث قـــوى كمـــا بالشـــكل فـــإن $\dfrac{F_1}{\sin\alpha} = \dfrac{F_2}{\sin\beta} = \dfrac{F_3}{\sin\gamma}$. كما نعلم أنه إذا اتـــزن حسم تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازيـــة وفي مســـتوى واحد فإن خطوط عمل هذه القوى الـــثلاث يجـــب أن تتلاقي في نقطة واحدة.

طرق الارتكاز و القوى المؤثرة

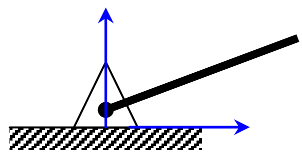
بعض أنواع الركائز وكيفية حدوث رد الفعل عندها



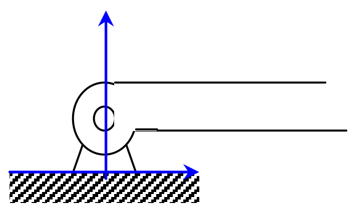
دعامة منزلقة



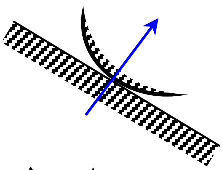
دعامة منزلقة



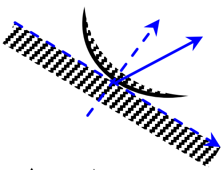
دعامة مفصلية



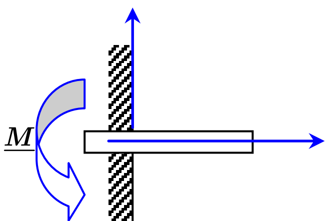
دعامة مفصلية



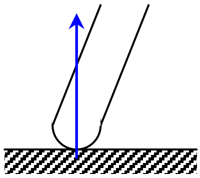
اتزان جسم على سطح أملس



اتزان جسم على سطح خشن



دعامة ثابتة



دعامة مفصلية

شروط الاتزان

نعلم أنه عندما يكون أي جسم واقع تحت تأثير قوة ما فإنه سيحاول التحرك في اتجاه تـــأثير القوة وبالتالي فإن الجسم يصبح في حالة عدم اتزان. كذلك فإن الجسم عندما يكون تحت تأثير مجموعة من القوى ومجموعة من العزوم فإن الجسم سوف يتحرك تحت تأثير القوى والعـــزوم. والحالة الوحيدة التي يكون فيها الجسم في حالة اتزان (ساكناً) هو عندما تكون محصلة القوى الخارجية وردود الافعال تساوي صفرا وكذلك محصلة العزوم تساوي صفر.

أي أن

$$\underline{\boldsymbol{R}} = \sum_{i=1}^{n} \underline{\boldsymbol{F}}_i = \underline{\boldsymbol{0}}, \qquad \underline{\boldsymbol{M}}_{\mathrm{o}} = \sum_{i=1}^{n} \underline{\boldsymbol{M}}_i = \underline{\boldsymbol{0}}$$

ويمكن أن تكتب بدلالة المركبات في الصورة

$$\sum_{i=1}^{n} F_x = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_y = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_z = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_x = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_x = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_x = 0$$

وتعرف المعادلات السابقة بمعادلات الاتزان أو قانون نيوتن للاتزان.

حالات خاصة من الاتزان

- القوى المؤثرة على نفس الخط

حينما تكون القوة مؤثرة في نفس الخط فإن معادلة الاتزان تؤول إلى الصـــورة $\sum_{i=1}^{n} F_x = 0$

فقط حيث لا يوجد دوران

- حالة القوى المتوازية

عندما تكون القوى متوازية فإن الجسم يمكن أن يكون في حالة اتزان عندما تتلاشى محصـــلة جميع القوى بحيث تتحقق المعادلتين

$$\sum_{i=1}^{n} F_x = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M = 0$$

وذلك على اعتبار أن القوى موازية لمحور x وبالتالي لا توجد قوى في الاتجاهات الاخرى.

☜ حالة القوى المستوية

عندما تكون القوى مستوية فإن الجسم يمكن أن يكون في حالة اتزان عندما تتلاشى محصلة جميع القوى بحيث تتحقق المعادلات (على اعتبار أن القوى تقع في المستوى xy)

$$\sum_{i=1}^{n} F_x = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_y = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M = 0$$

وبصفة عامة فإن محصلة مجموعة قوى مستوية متلاقية في نقطة تتعين من

$$R^2 = \sum F_x^{\ 2} + \sum F_y^{\ 2}, \qquad \tan\theta_x = \frac{\sum F_y}{\sum F_x}$$

حيث $\sum F_x, \sum F_y$ هو المجموع الجبري لمركبات القوى في الاتجاهين x, y على الترتيب ، والزاوية θ_x هي الزاوية التي تصنعها المحصلة مع المحور x .

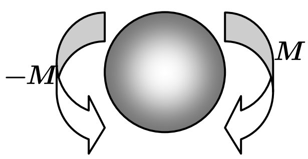
أما إذا كانت مجموعة القوى غير مستوية (فراغية) فإن مقدار محصلة هذه القوى هي

$$R^2 = \sum F_x^{\ 2} + \sum F_y^{\ 2} + \sum F_z^{\ 2},$$

حيث $\sum F_x, \sum F_y, \sum F_z$ هو المجموع الجبري لمركبات القوى في الاتجاهات x, y, z على الترتيب ، كما تصنع هذه المحصلة زوايا مع المحاور جيوب تمام اتجاهها يتعين من

$$\cos\theta_x = \frac{\sum F_x}{R}, \qquad \cos\theta_y = \frac{\sum F_y}{R}, \qquad \cos\theta_z = \frac{\sum F_z}{R}$$

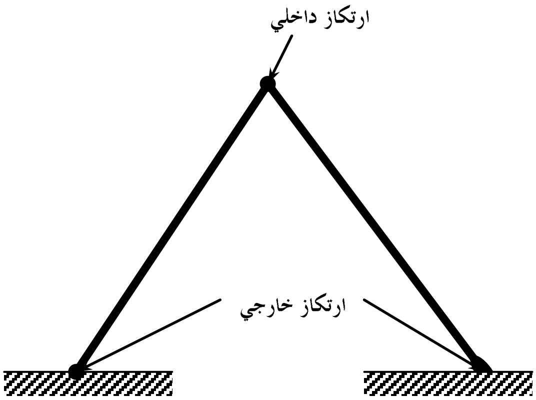
☜ حالة ازدواجين متعاكسين



عندما يكون الجسم واقع تحت تأثير ازدواجين متعاكسين متساويين في المقدار ومتضادين في الاتجاه فإن الجسم يكون في حالة اتزان كما بالشكل.

وجدير بالذكر أنه لإيجاد معادلات الاتزان لجسم ما فلابد من عزل الجسم عن المحيط الذي فيه واستبدال الارتكازات والدعامات بردود الافعال (يسمى بالجسم الحر). نلاحظ أنه قد يكون من غير الضروري استخدام كل المعادلات في المجموعة للحصول على الحل. كما أن الاختيار المناسب لمركز العزم يؤدي مثلاً إلى معادلة تحتوي على مجهول واحد.

وأخيراً إذا اتزنت مجموعة من الاجسام المتماسكة المرتبطة معاً عن طريق المفاصل أو الارتكاز على بعضها فيمكن اعتبار المجموعة كلها عبارة عن جسم واحد وتُكتب له المعادلات الخاصة باتزانه كما يمكن النظر إلى كل جسم على حده على أنه جسم واحد متزن وأيضاً تُكتب لـــه معادلات الاتزان ويجب التفريق هنا بين نوعين من الارتكازات. النوع الأول ، هو الارتكـــاز الخارجي وهو الارتكاز الذي يربط أي جسم في المجموعة بالخارج مثل الحائط أو الارض أو أي جسم آخر لا ندرس اتزانه. بينما النوع الثاني هو الارتكاز الداخلي وهو الارتكاز الذي يحدث بين أي جسمين أو أكثر من مجموعة الاجسام ولا يكون متصلاً بأي جسم خارجي ، والشكل التالي يوضح النوعين.



﴿ مثــ ١ ــال ﴾

أوجد الزاوية بين قوتين متساويتين قيمة كل منها F عندما تكون محصلتهما $\sqrt{3}F$ ؟

﴿ الحـــــل ﴾

نفرض أن الزاوية بين القوتين هي α وحيث أن الزاوية θ بين المحصلة والقوة F تتعين من

$$3F^2 = F^2 + F^2 + 2F^2 \cos\alpha \qquad \Rightarrow 1 = 2\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left\{\frac{1}{2}\right\} \qquad \text{Or} \qquad \alpha = 60^{o}$$

﴿ مثـــ ٢ ـــال ﴾

إذا كانت محصلة القوتين المتلاقيتين $F, 2F$ عمودية على القوة F . أوجد الزاوية بين القوتين؟

﴿ الحــــــل ﴾

نفرض أن الزاوية بين القوتين هي α وحيث أن الزاوية θ بين المحصلة والقوة F تتعين من

$$\tan\theta = \frac{2F\sin\alpha}{F + 2F\cos\alpha} \qquad \therefore \tan 90 = \frac{2\sin\alpha}{1 + 2\cos\alpha} \qquad \therefore 1 + 2\cos\alpha = 0$$

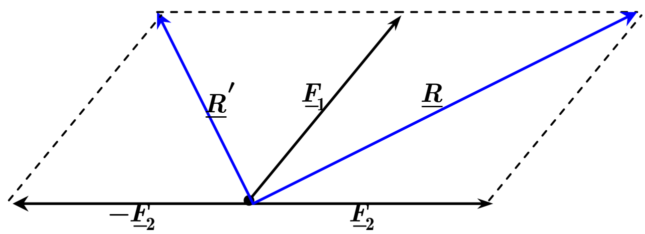
$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left\{-\frac{1}{2}\right\} \qquad \text{Or} \qquad \alpha = 120^{o}$$

﴿ مثـــ ٣ ـــال ﴾

قوتان متلاقيتان في نقطة ، إذا عُكس اتجاه احدهما فإن المحصلة تدور زاوية قائمة بالنسبة للحالة الأولى. بّين أن القوتين متساويتين في المقدار ؟

﴿ الحــــــل ﴾

يمكن حل هذه المسألة بأكثر من طريقة



حيث أنه من المتجهات نعلم

$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2, \qquad \underline{R}' = \underline{F}_1 - \underline{F}_2$$

ولكن $\underline{R}.\underline{R}' = 0$ لأن المحصلتين متعامدتين وبالتالي

$$\underline{R}.\underline{R}' = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 \cdot \underline{F}_1 - \underline{F}_2 = F_1^2 - F_2^2 = 0 \qquad \Rightarrow F_1 = F_2$$

طريقة ثانية بفرض أن الزاوية بين القوتين في الحالة الأولى هي α ومن ثم تصبح الزاوية بين القوتين في الحالة الثانية هي $\pi - \alpha$ ، وإذا افترضنا أن الزاوية بين المحصلة الأولى والقوة $\underline{F}_2$ هي θ فإن الزاوية بين المحصلة الجديدة والقوة $-\underline{F}_2$ هي $90 - \theta$ ومن قانون تعيين الزاوية بين المحصلة وإحدى القوتين يكون في الحالة الأولى

$$\tan\theta = \frac{F_1 \sin\alpha}{F_2 + F_1 \cos\alpha}$$

والزاوية بين المحصلة الجديدة والقوة $-\underline{F}_2$

$$\tan(90 - \theta) = \frac{F_1 \sin(180 - \alpha)}{F_2 + F_1 \cos(180 - \alpha)} \qquad \therefore \cot\theta = \frac{F_1 \sin\alpha}{F_2 - F_1 \cos\alpha}$$

$$\therefore \frac{F_2 - F_1 \cos\alpha}{F_1 \sin\alpha} = \frac{F_1 \sin\alpha}{F_2 + F_1 \cos\alpha} \qquad F_1^2 \sin^2\alpha = F_2^2 - F_1^2 \cos^2\alpha$$

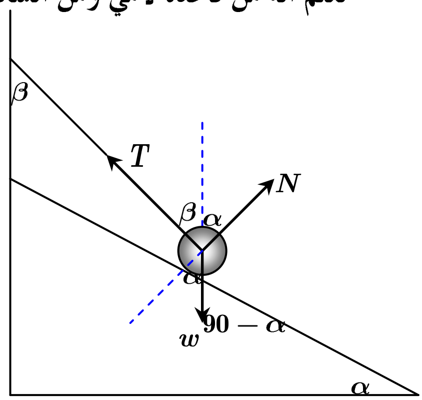
$$\therefore F_1^2 \sin^2\alpha + F_1^2 \cos^2\alpha = F_2^2 \qquad \Rightarrow F_1 = F_2$$

﴿ مثـــ ٤ ـــال ﴾

كرة وزنها w مستقرة على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية α ومربوطة بخيط طرفه الاخر مربوط في نقطة على مستوى رأسي بحيث يصنع الخيط مع الرأسي زاوية β . إذا وقع الخيط وخط أكبر ميل للمستوى في مستوى واحد. أوجد الشد ورد فعل المستوى؟

﴿ الحـــــل ﴾

نعلم أنه من قاعدة لامي ومن الشكل المجاور فإن



$$\frac{w}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{T}{\sin(180 - \alpha)} = \frac{N}{\sin(180 - \beta)}$$

$$\therefore T = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} w,$$

$$N = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} w$$

﴿ مثـــ ٥ ـــال ﴾

جسم وزنه w معلق بواسطة خيطين إذا كان اتجاه أحد الخيطين هو α مع الأفقي أوجد اتجاه الخيط الآخر حتى يكون الشد فيه أقل ما يمكن واوجد قيمته ؟

﴿ الحـــــل ﴾

نفرض أن الخيط الثاني يميل على الافقي بزاوية θ (كما بالشكل) وأن الشد في الخيط الأول هو T والشد في الخيط الثاني هو T' وحيث ان الوزن w متزن تحت تأثير ثلاث قوى ومن ثم يمكن تطبيق قاعدة لامي

$$\frac{w}{\sin(\pi-(\alpha+\theta))}=\frac{T}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=\frac{T'}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} \qquad \therefore T'=\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\alpha+\theta)}\right\}w$$

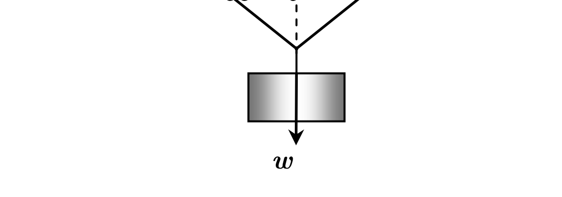
واضح أن التغير في T' يعتمد على الزاوية θ وبالتالي يكون T' أقل ما يمكن حينما يكـــون المقام أكبر ما يمكن وبالتالي يجب أن يكون

$$\sin(\alpha+\theta)=1 \text{ Or } \qquad \theta+\alpha=\frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

كما يمكن حساب الزاوية θ بطريقة أخرى ، حيث أن الشد T' أقل ما يمكن فإن

$$\frac{dT'}{d\theta}=0 \qquad \Rightarrow \frac{\cos(\alpha+\theta)}{\sin^2(\alpha+\theta)}=0 \qquad \therefore \cos(\alpha+\theta)=0 \qquad \Rightarrow \alpha+\theta=\frac{\pi}{2}$$

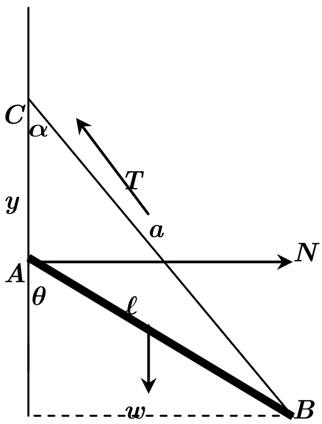
وتكون قيمة الشد عندئذ $\therefore T'=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)w$



﴿ مثـــ ٦ ـــال ﴾

قضيب منتظم وزنه w ، وطوله ℓ يستند بطرفه A على حائط رأسي أملس بينما الطـــرف الآخر مربوط بخيط طوله a والطرف الآخر للخيط مثبت في الحائط الرأسي أعلى النقطة A وعلى بعد معين منها اوجد هذا البعد في حالة الاتزان ؟

﴿ الحـــــل ﴾



من قاعدة لامي يكون

$$\frac{w}{\sin(90+\alpha)} = \frac{N}{\sin(180-\alpha)} = \frac{T}{\sin 90} \quad \text{Or}$$

$$\frac{w}{\cos\alpha} = \frac{N}{\sin\alpha} = T$$

من الشكل

$$\ell\sin\theta = a\sin\alpha, \quad \text{and} \quad \ell\cos\theta = \frac{1}{2}a\cos\alpha$$

$$\ell^2 = a^2\left\{\underbrace{\sin^2\alpha}_{1-\cos^2\alpha} + \frac{1}{4}\cos^2\alpha\right\} \qquad \Rightarrow \ell^2 = a^2\left\{1 - \frac{3}{4}\cos^2\alpha\right\}$$

$$\therefore \cos^2\alpha = 4\,\frac{a^2-\ell^2}{3a^2} \qquad \Rightarrow \cos\alpha = 2\sqrt{\frac{a^2-\ell^2}{3a^2}}$$

ولكن $y = \frac{a}{2}\cos\alpha$ ومن ثم يكون

$$y = \sqrt{\frac{a^2-\ell^2}{3}}$$

﴿ مثـــ ٧ ـــال ﴾

قضيب غير منتظم مركز ثقله يقسمه إلى جزئين أطوالهما a,b حيث $a > b$ وضع باكملـــه داخل قشرة كروية ملساء نصف قطرها ℓ أوجد الزاوية التي يميل بها القضيب على الأفقـــي وردود الافعال ؟

﴿ الحـــــل ﴾

نعلم أن ردود الافعال للأسطح الملساء تكون عمودية على الماس للسطح وحيث أن العمودي على المماس للكرة يمر بالمركز ومن ثم نجد أن ردي الفعل عند نهايتي القضيب N_1, N_2 يمران بمركز الكرة ، وحيث أن القضيب متزن فيجب أن يمر وزنه بنقطة تلاقي ردي الفعل عند المركز ومن قاعدة لامي يكون (بفرض أن الزاوية بين القضيب ورد الفعل هي α)

$$\frac{W}{\sin(180-2\alpha)} = \frac{N_2}{\sin(90+\alpha+\theta)} = \frac{N_1}{\sin(90-\theta+\alpha)} \quad \text{Or}$$

$$\frac{W}{\sin 2\alpha} = \frac{N_2}{\cos(\alpha+\theta)} = \frac{N_1}{\cos(\alpha-\theta)}$$

كذلك من الشكل $\cos\alpha = \dfrac{a+b}{2\ell}$ ، $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{4\ell^2-(a+b)^2}}{2\ell}$

$$\frac{a+b}{\underbrace{\sin 2\alpha}_{2\sin\alpha\cos\alpha}} = \frac{\ell}{\sin\alpha} \qquad \cos\alpha = \frac{a+b}{2\ell}, \qquad a\cos\theta = \ell\cos(\alpha-\theta),$$

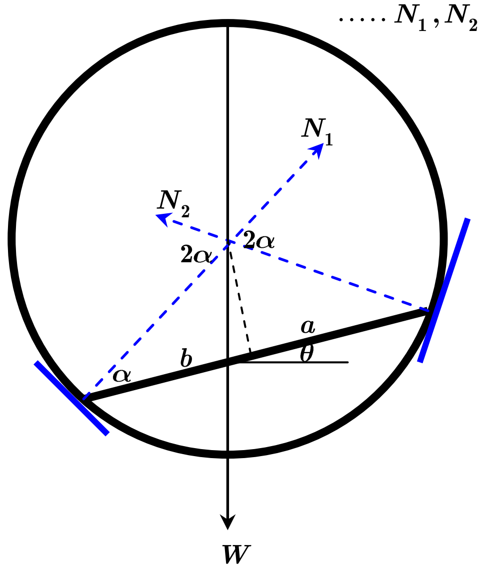
$$\because \cos(\alpha-\theta) = \cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta = \left\{\frac{a+b}{2\ell}\right\}\cos\theta + \sqrt{\frac{4\ell^2-(a+b)^2}{2\ell}}\sin\theta$$

$$\therefore a\cos\theta = \ell\left[\left\{\frac{a+b}{2\ell}\right\}\cos\theta + \sqrt{\frac{4\ell^2-(a+b)^2}{2\ell}}\sin\theta\right]$$

بالقسمة على $\cos\theta$ نحصل على

$$\therefore a = \left[\left\{\frac{a+b}{2}\right\} + \sqrt{\frac{4\ell^2-(a+b)^2}{2}}\tan\theta\right] \qquad \Rightarrow \tan\theta = \frac{a-b}{\sqrt{4\ell^2-(a+b)^2}}$$

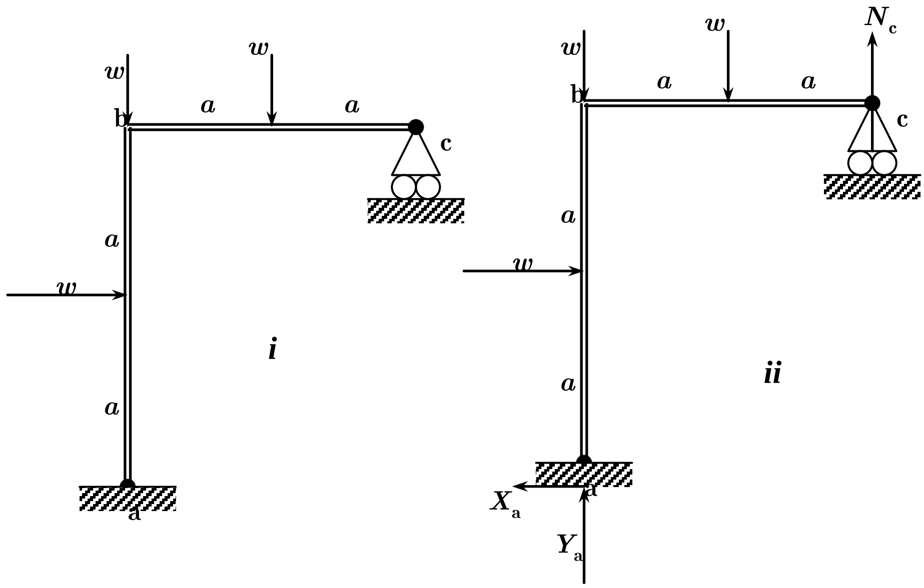
أكمل لإيجاد ردود الافعال N_1, N_2 .....



﴿ مثـــ ٨ ـــال ﴾

الجسم المتماسك abc والموضح بالشكل (i) يرتكز مفصلياً في a وارتكازاً حراً في c أوجد ردي الفعل عند a,c ؟

﴿ الحـــــل ﴾



الجزء (ii) يوضح شكل القوى المؤثرة على الجسم بالاضافة إلى قوى ردود الافعال عند نقاط الارتكاز ، عند النقطة c يكون رد الفعل عمودي حيث أن الركيزة متحركة وعند النقطة a نجهل اتجاه رد الفعل ومن ثم فيكتب بدلالة مركبتين X_a و Y_a ، وبكتابة معادلات الاتـــزان وأخذ العزوم حول النقطة a نحصل على

$$\sum x = 0 \qquad \Rightarrow w = X_a$$

$$\sum M_a = 0 \qquad \Rightarrow N_c(2a) = w(a) + w(a) \qquad \Rightarrow N_c = w$$

$$\sum Y = 0 \qquad \Rightarrow Y_a + N_c = w + w \qquad \Rightarrow Y_a = w$$

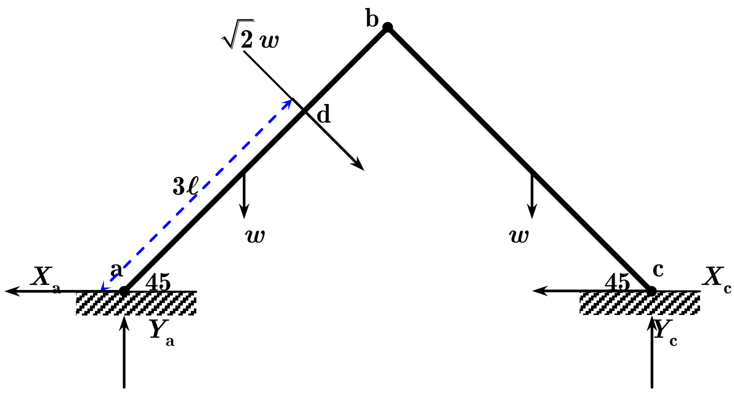
وبذلك نكون قد حصلنا على جميع القوى المجهولة في الهيكل.

﴿ مثـــ ٩ ـــال ﴾

قضيبان متشابهان منتظمان ab,bc وزن كل منهما w وطوله 4ℓ ، مرتبطان مفصلياً عند b ويربطهما إلى الأرض المفصلات a,c. يؤثر حمل $\sqrt{2}\,w$ عمودياً على ab عند نقطة d حيث $ad=3\ell$. عين ردود الافعال عند المفاصل إذا علم أن زاوية ميل كل قضيب على الأفقـــي هي 45^0 ؟

﴿ الحــــــل ﴾

عند المفصلين a,c فإن ردود الافعال لا تكون معلومة الاتجاه ومن ثم يستعاض عنها بمركبتين X_a,Y_a و X_c,Y_c أما رد الفعل عند b المفصل فلن يظهر الا حينما نفصل القضبان



وبكتابة معادلات الاتزان وأخذ العزوم حول النقطة a نحصل على

$$\sum x=0 \qquad \Rightarrow 0=-X_a-X_c+\sqrt{2}\,w\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \therefore X_a+X_c=w$$

$$\sum Y=0 \qquad \Rightarrow Y_a+Y_c-2w-\sqrt{2}w\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0 \ \Rightarrow Y_a+Y_c=3w$$

$$\sum M_a=0 \quad \Rightarrow -w(\sqrt{2}\ell)-\sqrt{2}w(3\ell)-w(3\sqrt{2}\ell)+Y_c(4\sqrt{2}\ell)=0 \quad \Rightarrow Y_c=\frac{7}{4}w$$

$$\therefore Y_a=\frac{5}{4}w$$

وبفصل القضيبان (كما بالشكل) فإن ردي الفعل على كل قضيب عند النقطة b يكونـــان متساويان في المقدار ومتضادان في الاتجاه ، وباعتبار اتزان كل قضيب على حده فمن اتــزان القضيب ab نجد أن

$$\sum M_b = 0 \quad \Rightarrow w(\sqrt{2}\ell) + w(\sqrt{2}\ell) - X_a\left(\frac{4\ell}{\sqrt{2}}\right) - Y_a(\frac{4\ell}{\sqrt{2}}) = 0$$

$$\Rightarrow X_a = -\frac{1}{4}w \qquad \text{and} \qquad X_c = \frac{5}{4}w$$

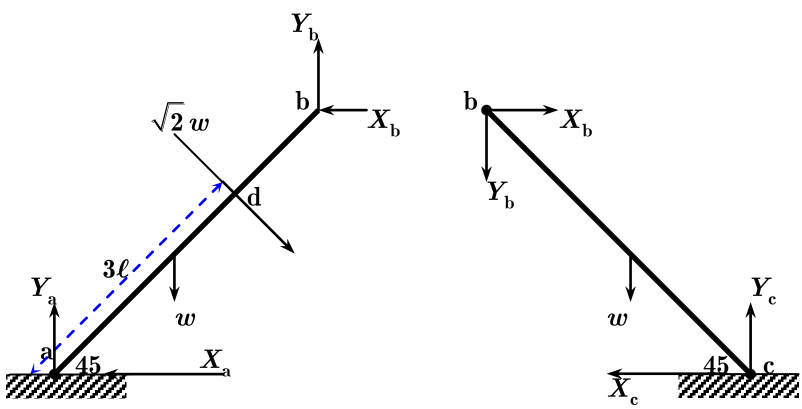
وباعتبار معادلة الاتزان لنفس القضيب في اتجاه Y نحصل على

$$\sum Y = 0 \qquad \Rightarrow Y_a + Y_b - w - \sqrt{2}w\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \ \Rightarrow Y_b = \frac{3}{4}w$$

أيضاً معادلة الاتزان في اتجاه X يكون

$$\sum X = 0 \qquad \Rightarrow -X_a - X_b + \sqrt{2}w\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \ \Rightarrow X_b = \frac{5}{4}w$$

وبذلك نكون قد حصلنا على جميع قوى ردود الافعال المجهولة في الهيكل.



﴿ مثـــ ١٠ ـــال ﴾

لوح منتظم abcd وزنه w ، مرتكز على المفصل b ويحفظ اتزانه بواسطة حبل رأسي ae .
إذا سار رجل وزنه $2w$ على اللوح أوجد أصغر مسافة x يستطيع الجل الوصول إليها حتى

لا يفقد اللوح اتزانه ، وإذا كان الحبل لا يتحمل شد أكثر من $5w$ أوجد اكبر مسافة يستطيع الرجل الوصول إليها حتى لا ينقطع الحبل (كما بالشكل)؟

﴿ الحــــــل ﴾

اولاً لحساب أقل مسافة

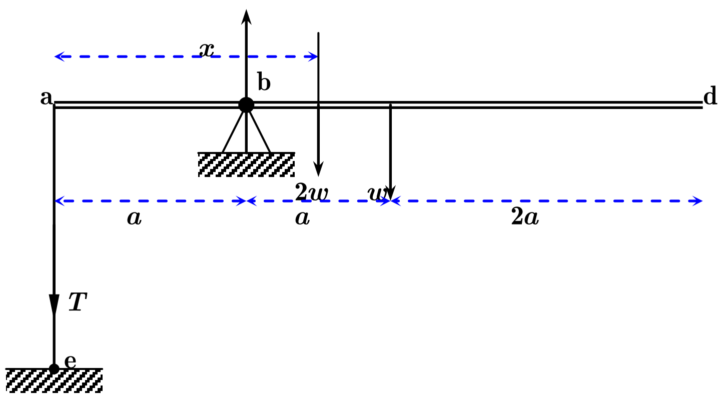
واضح أنه لابد ان تكون القوة في الحبل ae قوة شد ، القوى المؤثرة على اللوح هــي وزن الرجل ووزن اللوح وردود الافعال وهي رد فعل المفصل عند b والشد في الحبل ومن شروط الاتزان يكون

$$\sum M_b = 0 \quad \Rightarrow Ta - wa - 2w(x-a) = 0$$

$$\frac{T}{w} = 1 + 2\frac{x}{a} - 2 = 2\frac{x}{a} - 1 > 0 \qquad \Rightarrow x > \frac{a}{2}$$

ثانياً إذا سار الرجل في الاتجاه العكسي فإن الشد يزيد بزيادة x إلى أن يصل إلى $5w$ فينقطع الحبل:

$$\therefore 5w > T = w\left(2\frac{x}{a} - 1\right) \qquad \Rightarrow x < 3a$$



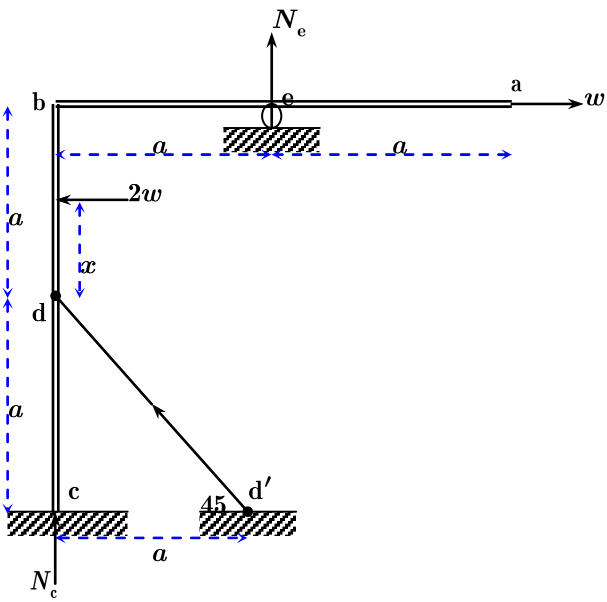
﴿ مثـــ ١١ ـــال ﴾

جسم متماسك على شكل زاوية قائمة abc يرتكز على أرض أفقية ملساء عند c وعلى وتد أملس عند e ويحفظ الاتزان عضو خفيف dd' ويؤثر على الجسم قوة أفقية w في اتجاه ba

، عيّن حدود تغير المسافة x والتي تحدد موضع تأثير قوة أفقية مقدارها $2w$ بحيث يبقى الاتزان بالارتكازات البسيطة e,c ؟

﴿ الحـــــل ﴾

لدراسة اتزان الجسم ، القوى المؤثرة عليه هي w ، $2w$ وردود الافعال عند e ويكون عمودي على سطح التلامس أي عمودي على ab $(N_e > 0)$ كذلك رد الفعل عند c وهو عمودي على مستوى التماس $(N_c > 0)$ والقوة في العضو dd′ وهي يمكن أن تكون شد أو ضغط



$$\sum M_d = 0 \quad \Rightarrow N_e a + 2wx - wa = 0 \qquad \therefore N_e = w - 2w\frac{x}{a} > 0 \quad \therefore x < \frac{a}{2}$$

وبأخذ العزوم حول d′ مع ملاحظة أن هذه النقطة تقع أسفل النقطة e مباشرة

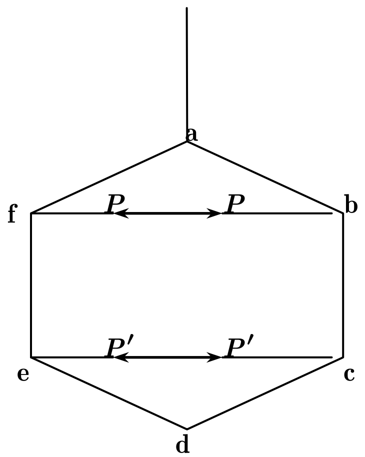
$$\sum M_{d'} = 0 \;\Rightarrow 2w(x+a) - N_c a - 2wa = 0 \quad \therefore N_c = 2wx - 2wa + 2wa > 0$$

$$\therefore x > 0 \qquad \Rightarrow \frac{a}{2} > x > 0$$

﴿ مثـــ ١٢ ـــال ﴾

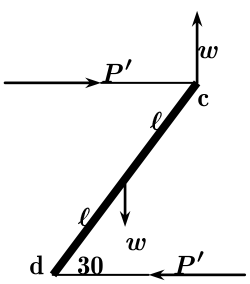
مسدس منتظم abcdef مكون من ستة قضبان متساوية وزن كل منها w ومتصلة اتصــالاً سهلاً عند نهايتها ، عُلق المسدس من نقطة a وحفظ في هذا الوضع المنتظم بواسطة قضـيبان خفيفان bf و ce . اثبت أن الضغط في القضـيب bf يســاوي خمســة امثــال الضــغط في القضيب ce ؟

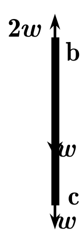
﴿ الحـــل ﴾

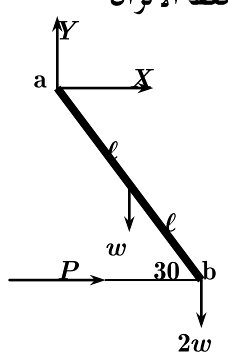


نفرض أن P,P' الضغط في القضيبين bf, ce على الترتيب ، من التماثل حول المســتقيم الرأسي ad يكفي دراسة اتزان القضبان الثلاثة ab, bc, cd

القضيب cd متزن تحت تأثير الضغط الأفقي P' عند c، ورد الفعل عند d يجب أن يكون أفقياً لذا يساوي P' وفي الاتجاه المبين بالشكل. يجب أن تؤثر عند c قوة رأسية w لأعلــى لحفظ الاتزان







حتى يتزان القضيب bc يجب ادخال قوة $2w$ رأسياً لأعلى عند b ، وبالنسبة للقضيب ab يجب ادخال قوة $2w$ رأسياً لأسفل عند b وقوتين X,Y عند a وبأخذ العزوم حـــول a نجد أن

$$\sum M_{\mathrm{a}} = 0 \quad \Rightarrow -w\ell \sin 60 - 2w(2\ell \sin 60) + P(2\ell \cos 60) = 0$$
$$\therefore\ P = 5w \sin 60 = \frac{5\sqrt{3}}{2} w$$

لإيجاد P' نعتبر اتزان القضيب cd ونأخذ العزوم حول c فنجد أن

$$\sum M_{\mathrm{c}} = 0 \quad \Rightarrow w\ell \cos 30 - P'(2\ell \sin 30) = 0$$
$$\therefore\ P' = 5w \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} w$$

ومن العلاقتين السابقتين يكون $P = 5P'$ أي أن الضغط في القضيب bf يســاوي خمســة امثال الضغط في القضيب ce ؟

الخلاصـــــــــة

➤ إذا أثرت ثلاث قوى غير متوازية وفي مستوى واحد على جسم في حالة اتزان فإن هذه القوى الثلاث يجب أن تلتقي في نقطة واحدة.

➤ مقدار محصلة أي قوتين $\underline{F}_1, \underline{F}_2$ يتعين من

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos\alpha$$

➤ محصلة مجموعة قوى مستوية متلاقية في نقطة تتعين من

$$R^2 = \sum F_x{}^2 + \sum F_y{}^2, \qquad \tan\theta_x = \frac{\sum F_y}{\sum F_x}$$

➤ شرط اتزان مجموعة من القوى هو

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \underline{0}, \qquad \underline{M}_{\mathrm{o}} = \sum_{i=1}^{n} \underline{M}_i = \underline{0}$$

➤ مراجعة طرق الارتكاز وردود الافعال

تمـــــــــارين

(١) أوجد الزاوية بين قوتين متساويتين قيمة كل منها F عندما تكون محصلتهما $\sqrt{3}F$ ؟

(٢) تنزلق خرزة على سلك دائري أملس في مستوى رأسي متصلة بخيط خفيف مثبتة في نقطة على المستقيم الرأسي الذي يمر بمركز الدائرة. اوجد في وضع الاتزان ضغط الســلك علــى الخرزة ؟

(٣) عُلق وزن w بخيط من نقطة ثابتة وأزيح الخيط خارجاً بواسطة قوة F . أوجد اتجــاه القوة حتى يكون ميل الخيط على الرأسي في حالة الاتزان أكبر ما يمكن ؟

(٤) جسمان وزنيهما $3w, 2w$ عند نهايتي خيط غير مرن يمر على وتدين أملسين في نفــس المستوى الأفقي وفي حالة اتزان ، وجسيم آخر w' مثبت عند نقطة في الخيط بين الوتــدين. إذا كانت الزاوية بين الجزئين المائلين من الخيط تساوي 120° فاثبت أن $w' = \sqrt{7}w$ ؟

(٥) تستقر كتلة وزنها w على مستوى مائل أملس يميل على الافقي بزاويــة α. أتصــلت الكتلة بخيط خفيف من أحد طرفيه ومر الطرف الآخر للخيط على بكرة ملساء وأتصــل في نهايته بكتلة وزنها w'. أوجد الزاوية التي يصنعها الخيط مع المستوى في حالة الاتزان؟

(٦) قضيب منتظم طوله $2a$ يستقر جزء منه داخل نصف كرة مجوفة ملساء نصف قطرها L ومثبته بحيث تكون فوهتها لاعلى. إذا ارتكز القضيب بإحدى نقاطه على حافة الكرة ، وكان ميله على الأفقي في حالة الاتزان هو α ، اثبت أن $2L\cos 2\alpha = a\cos\alpha$ ؟

(٧) قضيب ab منتظم طوله $2L$ ووزنه w، يرتكز بطرفه b على حائط رأســي أملــس ويستند كذلك على وتد ثابت أملس يبعد مسافه h عن الحائط. اثبت أن القضيب يميل على الأفقي في وضع الاتزان بزاوية $\cos^{-1}\left\{\sqrt[3]{\dfrac{h}{L}}\right\}$ ؟

(٨) قضيب منتظم طوله a يستند طرفه على حائط رأسي أملس بعد أن ربط طرفه الآخر في خيط طوله b عُلق في نقطة في الحائط إذا احتوى المستوى الرأسي القضيب والخيط. أوجــد زاوية ميل القضيب على الرأسي في حالة الاتزان ؟

(٩) يستقر قضيب داخل كرة ملساء في وضع يميل على الأفقي بزاوية θ فإذا كان مركز ثقل القضيب يقسمه إلى جزئين a,b وكان القضيب يحصر زاوية 2α عند مركز الكرة ، اثبت أن $\tan\theta = \dfrac{a-b}{a+b}\tan\alpha$ ؟

(١٠) كرة ثقيلة وزنها W ترتكز على مستويين أملسين احدهما رأسي والآخر يصنع زاوية α مع الراسي. أوجد رد فعل المستويين على الكرة ؟

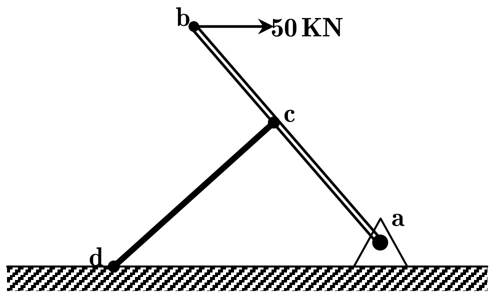
(١١) قضيب منتظم وزنه w ، وطوله ℓ يستند بطرفه A على حائط رأسي أملس بينما الطرف الآخر مربوط بخيط طوله a والطرف الآخر للخيط مثبت في الحائط الرأسي أعلى النقطة A وعلى بعد b منها اوجد الشد في الخيط ورد الفعل ؟

(١٢) يتكون المربع abcd من أربعة قضبان منتظمة ومتساوية وزن كل منها w ومتصلة مع بعضها البعض بمفاصل ملساء. علقت المجموعة من a ، وصل خيط بين a,c ليحفظ شكلها المربع. اوجد الشد في الخيط ومقادير واتجاهات ردود الافعال عند جميع المفاصل؟

(١٣) ac,ab قضيبان طول كل منهما 2L ووزن كل منهما w متصلان اتصالاً سهلاً عند a والنهايات b,c على أرض أفقية ملساء وحفظ القضيبان في المستوى الرأسي بواسطة خيطين يصلان b,c بمنتصفي القضيبين المقابلين. أوجد الشد في أيٍ من الخيطين ورد الفعل عند المفصل إذا علمت أن θ هي زاوية ميل كل قضيب مع الأفقي؟

(١٤) قضيبين منتظمين ac,ab متساويان في الطول وزنيهما w, w′ ، متصلين اتصالاً مفصلياً عند a علقا في مستوى رأسي في مفصلين c,b في نفس المستوى الأفقي. أثبت أن المركبة الأفقية لرد الفعل عند a تساوي $0.25(w+w')Lh^{-1}$ ، حيث 2L هي المسافة بين b,c ، h هو عمق a عن bc؟

(١٥) قضيب ab متصل بالأرض بمفصل عند a ومرتكز على دعامة cd وتؤثر عليه قوة أفقية مقدارها 50KN عند b كما هو مبين بالشكل. اوجد قوة الشد في الدعامة ورد الفعل عند a حيث الزاوية bcd قائمة وارتفاع النقطة b عن الارض 8m والنقطة c هو 4m وبعد مسقط النقطة b عن النقطة a هو 12mوبعد مسقط c عن aهو 6m؟



(١٦) قضيبان متساويان طول كل منهما 2ℓ ووزن كل منهما w متصلين اتصالاً سهلاً والنهايات الحرة متصلة بخيوط مثبتة في نقطة معينة ، إذا كان طول كل خيط 2ℓ والزاوية بين القضيبين 2θ ووضع قرص نصف قطره a بين القضيبين والمجموعة متزنة في المستوى الرأسي والقرص وزنه $3w$ فاثبت أن $a = 6\ell \sin^2\theta \tan\theta$ ؟

(١٧) قضيب ab منتظم متصل بمفصل عند a عند حائط رأسي أملس والنهاية b تتصل بقضيب bc بمفصل سهل عند b . إذا كانت النهاية c مرتكزة على الحائط وأن ab=2bc والقضيبين لهما نفس الكثافة وفي مستوى رأسي واحد عمودي على الحائط فاثبت أنه في وضع الاتزان يصنع القضيب ab مع الرأسي زاوية $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ وأن رد الفعل عند b يساوي $\frac{1}{\sqrt{2}}$ من وزن القضيب ab وأوجد رد الفعل عند a ؟

جزء الديناميكا

كينماتيكا الجســـــــــيم

Kinematics of a Particle

لدراسة الظواهر الطبيعية للحركة بطريقة علمية يتعين علينا أن نتخذ صوراً ذهنية عن الصفات الميكانيكية للاجسام المتحركة دون غيرها من الصفات قليلة الأهمية في دراستنا للحركة. وعلى ذلك بُنيت التعاريف الأساسية و نُورد أهمها فيما يلي:

الجسيم: هو جزء معين من المادة و تعرف فيما يلي أنواع الاجسام

■ الجسيم أو النقطة المادية Particle or Mass Point

هو جزء من المادة و يشغل حيزاً صغيراً في الفراغ و يسمى النقطة المادية و نعتبر الجسيم إذا كانت صفات الجسيم من حيث الشكل أو الحجم غير ذات موضوع في دراستنا.

■ الجسم المتماسك Rigid Body

و هو جزء معين من المادة يظل حجمه و شكله بدون تغيّر مهما كانت القوى المــؤثرة عليــه حيث تبقى المسافة بين أي نقطتين من نقاطه بدون تغيير أي أن الجسم المعنيّ بالدراسة يُعتـــبر متماسكاً إذا كان ما يعتريه من تغيرات في الشكل أو الحجم لا أهمية لا في الدراسة.

■ الجسم المرن Elastic Body

هو جسم قابل لتغيرات شكلية و حجمية بفعل القوى المؤثرة عليــه غــير أنــه يســترجع صورهاالأصلية بمجرد زوال هذه القوى.

■ الجسم اللدن Plastic Body

و هو جسم قابل لتغيرات شكلية و حجمية غير أنها –التغيرات– غير مسترجعة.

■ الاطار الانتسابى (الفراغ الأقليدي) Reference Frame

و هو فراغ ثلاثي الأبعاد – الطول و العرض و الارتفاع – ويفرض فيه ثبات المسافاتمن نقطة إلى أخرى و عدم تغيرها بوجود المادة أو حدوث حركة فيه. و تقاس المسافات بمقاييس معينة متفق عليها عالمياً ولتحديد الموضع (النسبي) في الفراغ يُختار هيكل أو اطار متماسك مــن

ثلاثة محاور متلاقية في نقطة معينة – تُسمى نقطة الأصل – و يسمى هيكل رصد الحركة ويتم تحديد موضع النقطة المادية بمعرفة أبعادها الثلاثة بالنسبة لهذا الهيكل و يفضل غالباً الاستعانة بهيكل رصد متعامد المحاور.

■ الزمن Time

و هو يعبر عن الفترة الزمنية بين حدثين و لقد افترضت الميكانيكا الكلاسيكية أو ميكانيكا نيوتن صفة مطلقة لكل من الزمن و الفراغ بمعنى أنهما لا يتغيران بتغير المشاهد ولا يتأثرا بحركة الراصد و هو ما نفاه ألبرت أينشتين في نظرية النسبية.

■ الكلتة Mass

و تُعرف على أنها تلك المادة الموجودة في جسم ما ويرمز لها عادةً بالرمز m .

كينماتيكا الجسيم فى بعد واحد Kinematics of a Particle in One Dimension

أو الحركة فى خط مستقيم Rectilinear Motion

■ السرعة و العجلة Velocity and Acceleration

نعلم أنه عندما يتحرك جسيم (نقطة مادية) في خط مستقيم فإن موضعه بالنسبة لنقطة ثابتة O – نقطة الأصل – يتغير من نقطة إلى أخرى. باعتبار أن الجسيم احتل الموضع عند النقطة A و على بعد x من نقطة الأصل O عند اللحظة الزمنية t ثم انتقل إلى الموضع عند النقطة B و التي تبعد $x+\delta x$ عن نقطة الأصل عند اللحظة الزمنية $t+\delta t$ ومن ثم فإن متوسط سرعة الجسيم في قطع المسافة AB هو $\dfrac{\delta x}{\delta t}$. و إذا أردنا تعيين سرعة الجسيم v عند النقطـــة A نحسب قيمة $\dfrac{\delta x}{\delta t}$ عندما تقترب δt من الصفر أي عندما تقترب النقطة A من النقطـــة B ويُعبر عن ذلك رياضياً كالتالي

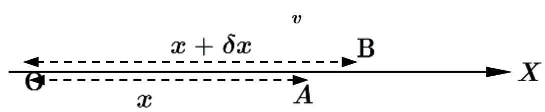
$$v=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta x}{\delta t}=\frac{dx}{dt}=\dot{x}$$

وتُعرف سرعة الجسيم v بأنها معدل التغير في الازاحة بالنسبة للزمن و تُكتب $v=\dfrac{dx}{dt}$ ، أما العجلة a فتعرف على أنها معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن والتي تكتب علـــى الصـــورة الرياضية

$$a=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta v}{\delta t}=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}$$

ومن قاعدة السلسة في حساب التفاضل يمكن كتابة العجلة على الصورة

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\times\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$



وهذه العلاقة من العلاقات الهامة في حل بعض المسائل، وحيث أن الازاحة والسرعة و العجلة هي كميات متجهة فيمكن تطبيق قوانين المتجهات عليها من جمع و طرح وتحليـــل اتجاهـــات و.....

■ تذكر أن

يمكن أن تُعطى عجلة الجسيم a في المسائل كدالة في الزمن t أو دالة في المسافة x أو دالة في السرعة v

١- إذا كانت العجلة معطاة كدالة في الزمن t مثلا $a=\varphi(t)$

$$
\begin{aligned}
a=\varphi(t) \qquad &\Rightarrow \frac{dv}{dt}=\varphi(t)\\
&\Rightarrow dv=\varphi(t)dt\\
&\Rightarrow v=\int \varphi(t)dt+c_1
\end{aligned}
$$

ومن ثم

$$
\begin{aligned}
\because \quad & v=\int \varphi(t)dt+c_1\\
\Rightarrow & \frac{dx}{dt}=\int \varphi(t)dt+c_1\\
\Rightarrow & dx=\left(\int \varphi(t)dt+c_1\right)dt\\
\therefore\ & x=\int\left(\int \varphi(t)dt+c_1\right)dt+c_2
\end{aligned}
$$

٢- إذا كانت العجلة معطاة كدالة في المسافة x مثلا $a=f(x)$

$$
\begin{aligned}
a=f(x) \qquad &\Rightarrow v\frac{dv}{dx}=f(x)\\
&\Rightarrow vdv=f(x)dx\\
&\Rightarrow v^2=2\int f(x)dx+c_3
\end{aligned}
$$

ايضاً

$$
\begin{aligned}
\because \quad & v^2=2\int f(x)dx+c_3\\
\Rightarrow & \frac{dx}{dt}=\mp\sqrt{2\int f(x)dx+c_3}\\
\Rightarrow & \mp\frac{dx}{\sqrt{2\int f(x)dx+c_3}}=dt\\
\Rightarrow & t+c_4=\mp\int\frac{dx}{\sqrt{2\int f(x)dx+c_3}}
\end{aligned}
$$

٣- أخيراً إذا كانت العجلة معطاة كدالة في السرعة v مثلا $a = \varphi(v)$ فإن

$$\begin{aligned} a = \varphi(v) \qquad & \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \varphi(v) \\ & \Rightarrow \frac{dv}{\varphi(v)} = dt \qquad \text{بالتكامل} \\ & \Rightarrow t = \int \frac{dv}{\varphi(v)} + c_5 \end{aligned}$$

أو باستخدام العلاقة

$$\begin{aligned} & \Rightarrow v\frac{dv}{dx} = \varphi(v) \\ & \Rightarrow \frac{vdv}{\varphi(v)} = dx \\ & \Rightarrow x = \int \frac{vdv}{\varphi(v)} + c_6 \end{aligned}$$

حيث $c_1 - c_6$ ثوابت التكامل و يمكن تعيينها من شروط الحركة المعطاة في المسألة.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

إذا كان موضع جسيم يتحرك عند أي لحظة يتعين من $x = t^3 + 2t^2$. أوجد مقدار كل من السرعة و العجلة بعد مضي ثانية واحدة.

الحـــــــل

يمكن تعيين السرعة والعجلة كالآتي

السرعة $\because v = \dfrac{dx}{dt} = 3t^2 + 4t$

العجلة $\because a = \dfrac{dv}{dt} = 6t + 4$

وبعد مضي ثانية واحدة يكون مقدار السرعة 7 ومقدار العجلة 10 من الوحدات.

مثـــ ٢ ـــال

إذا كان موضع جسيم يتحرك عند أي لحظة زمنية يتعين من $x = t^3 - 3t^2$. أوجد مقــدار كل من السرعة و العجلة عند أي لحظة ، متى تنعدم كل من السرعة والعجلة وما هو موضع الجسيم عندما تكون سرعته 24 .

الحـــــــل

السرعة والعجلة للجسيم عند أي لحظة تتعين من

السرعة $\because v = \dfrac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t = 3t(t-2)$

العجلة $\because a = \dfrac{dv}{dt} = 6t - 6 = 6(t-1)$

هاتان العلاقتان تعطيان السرعة والعجلة كدوال في الزمن ولتعيين زمن انعدام السرعة والعجلة نساويهما بالصفر أي أن

$0 = 3t^2 - 6t = 3t(t-2) \qquad \Rightarrow t = 0 \quad \text{Or} \quad t = 2$

$0 = 6t - 6 = 6(t-1) \qquad \Rightarrow t = 1$

أي أن سرعة الجسيم تساوي صفر عند بداية الحركة وبعد مضي ثانيتين وتنعدم العجلة بعد مضي ثانية واحدة. تكون سرعة الجسيم مساوية 24 عند زمن يتعين من

$$24 = 3t^2 - 6t \quad \Rightarrow 3t^2 - 6t - 24 = 0 \quad \text{Or} \quad t^2 - 2t - 8 = 0$$
$$\Rightarrow (t+2)(t-4) = 0 \qquad \therefore t = 4$$

وتكون سرعة الجسيم مساوية 24 بعد مرور أربع ثوان ويكون موضع الجسيم – بالتعويض في دالة الموضع – $x\big|_{t=4} = 4^3 - 3(4)^2 = 16$ ويهمل الزمن السالب.

مثـــ ٣ ـــال

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث كان موضعه عنـــد أي لحظـــة زمنيـــة يـــتعين مـــن $x = 2\ 1 - e^{-t}$ حيث t يمثل الزمن ، أوجد السرعة كدالة في المسافة والعجلة كدالة في السرعة.

الحـــــــل

لتعيين سرعة الجسيم نشتق دالة الموضع بالنسبة للزمن ومن ثم

$$x = 2\ 1 - e^{-t} \quad \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = 2e^{-t} \qquad \text{Note} \quad \frac{d}{dx}e^{f(x)} = f'(x)e^{f(x)}$$

$$\because x - 2 = -2e^{-t} \quad \Rightarrow v = 2 - x$$

وهذه العلاقة تعطي السرعة كدالة في المسافة ولايجاد العلاقة بين العجلة والسرعة

$$\because a = v\frac{dv}{dx} = v(-1) = -v \qquad \text{Note} \quad \frac{dv}{dx} = -1 \quad \therefore a = -v$$

مثـــ ٤ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم تبعاً للعلاقة $x = b - b\cos kt$ حيث b,k ثابتان ، أوجـــد السرعة و العجلة كدوال في الزمن والعجلة كدالة في المسافة ثم أوجد أقصى بعد للجسيم عن نقطة الأصل.

الحـــــــل

السرعة والعجلة يتعينان كالآتي

$$x = b - b\cos kt \quad \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = bk\sin kt \quad , \quad a = \frac{dv}{dt} = bk^2 \cos kt$$

ولايجاد العجلة كدالة في المسافة حيث أن

$$\because\ b\cos kt = b - x \qquad \Rightarrow a = k^2\ \ b - x$$

ولايجاد أقصى بعد أي أكبر ما يمكن يتحقق هذا حينما يكون المقدار $a\cos kt$ أقل ما يمكـــن ويحدث هذا حينما $\cos kt = -1$ أي أن $x_{\max} = b - b(-1) = 2b$ هناك طريقة أخرى.

مثـــ ٥ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم تبعاً للعلاقة $v = u + bx$ حيث u,b ثابتان ، أوجد السرعة والعجلة كدوال في الزمن والعجلة كدالة في المسافة وكدالة في السرعة.

الحـــــــــل

السرعة والعجلة يتعينان بتفاضل الموضع ثم السرعة بالنسبة للزمن

$$v = u + bx \quad \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = b\frac{dx}{dt} = bv = b(u + bx)$$

هذه العلاقة تُعطي العجلة كدالة في السرعة $a = bv$ وكدالة في المسافة $a = b(u + bx)$

وللحصول على السرعة والعجلة كدوال في الزمن حيث أن

$$\because\ v = u + bx \quad \Rightarrow \frac{dx}{dt} = b(u + bx) \qquad \Rightarrow \frac{dx}{u + bx} = bdt$$

وباجراء التكامل بعد ضرب طرفي المعادلة في b يكون

$$\int \frac{bdx}{u + bx} = \int b^2 dt \quad \Rightarrow \ln(u + bx) = b^2\, t + C$$

حيث C ثابت التكامل ، يمكن كتابة العلاقة الاخيرة في الصورة

$$\because\ \ln(u + bx) = b^2\, t + C \qquad \therefore\ \ln v = b^2\, t + C \quad \text{Or} \quad v = Ae^{b^2 t}, \quad A = e^C$$

وهي علاقة السرعة بالزمن و العجلة بالزمن ايضاً من العلاقة $a = bAe^{b^2 t}$

مثـــ ٦ ـــال

يتحرك جسيم على خط مستقيم بعجلة $6t+2 \quad \mathrm{ft\,sec^{-2}}$ حيث t يمثل الزمن ، فإذا بدأ الجسيم الحركة من نقطة الأصل وأصبحت سرعته 5 بعد مضي ثانية واحدة عين موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية.

الحـــــل

حيث أن العجلة تعطى بالعلاقة $a = 6t+2$ وللحصول على السرعة نستبدل a بـ $\dfrac{dv}{dt}$ ثم بفصل المتغيرات نحصل على

$$\frac{dv}{dt} = 6t+2 \qquad \Rightarrow dv = (6t+2)dt$$

$$\int dv = \int (6t+2)dt + c_1 \qquad\qquad \therefore\ v = 3t^2 + 2t + c_1$$

حيث c_1 ثابت التكامل ويعين من الشروط الابتدائية و هي $v=5$ عندما $t=1$ وبالتعويض في معادلة السرعة نجد أن $\therefore\ c_1 = 0 \quad 5 = 3(1)^2 + 2(1) + c_1$ أي أن صيغة السرعة تصبح على الصورة $\therefore\ v = 3t^2 + 2t$ وللحصول على دالة الموضع نضع $v = \dfrac{dx}{dt}$ أي أن

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 2t \qquad \Rightarrow dx = (3t^2+2t)dt \qquad \text{Or} \qquad x = t^3 + t^2 + c_2$$

ولتعيين الثابت c_2 نستخدم الشرط وهو أن الجسيم بدأ الحركة من نقطة الأصل أي أن عندما $t=0$ كانت $x=0$ ويؤدي هذا $\therefore\ c_2 = 0 \quad 0 = 0^3 + 0^2 + c_2$ و يصبح موضع الجسيم عند أي لحظة في الصورة $x = t^3 + t^2$ و بعد خمس ثواني يكون $x\big|_{t=5} = 150$.

مثـــ ٧ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم بعجلة تتعين من العلاقة $a = -2v^2$ حيث a تمثل العجلة ، v هي السرعة. أوجد موضع الجسيم عند أي لحظة علماً بأن الجسيم بدأ الحركة من نقطة الأصل بسرعة قدرها الوحدة.

الحـــــل

نلاحظ أن العجلة تقصيرية وحيث أن $a = \frac{dv}{dt}$ فإن

$$\because a = -2v^2 \qquad \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -2v^2$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$-\int \frac{dv}{v^2} = \int 2dt + c_1 \qquad \Rightarrow \frac{1}{v} = 2t + c_1$$

حيث ثابت التكامل يتعين من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = 1$ عندما $t = 0$ ومنها $1 = 2(0) + c_1 \quad \therefore c_1 = 1$ وتتعين سرعة الجسيم تبعاً لذلك من العلاقة

$$\frac{1}{v} = 2t + 1 \quad \text{but} \quad v = \frac{dx}{dt} \quad \therefore \frac{dt}{dx} = 2t + 1 \quad \text{Or} \quad \frac{dt}{2t+1} = dx$$

وباجراء التكامل نحصل على

$$\frac{2dt}{2t+1} = 2dx \quad \Rightarrow \ln(2t+1) = 2x + c_2$$

من اشرط الابتدائي للحركة وهو $x = 0$ عندما $t = 0$ أي $c_2 = 0$ وتصبح صيغة العلاقة بين المسافة والزمن $x = \frac{1}{2}\ln(2t+1)$ ومنها يمكن ايجاد المسافة المقطوعة بعد مضي أي زمن.

مثـــال ٨

يتحرك جسيم في خط مستقيم بعجلة تقصيرية تتعين من العلاقة $-4x^{-3}$ فإذا بدأ الجسيم في التحرك من السكون من موضع على بعد h من نقطة الأصل فاثبت أنه يصل إلى مســافة ℓ من نقطة الأصل في زمن قدره $\frac{h}{2}\sqrt{h^2 - \ell^2}$ ثم أوجد سرعته عند هذا الموضع.

الحــــــل

حيث أن $a = -16x^{-3}$ وايضاً $a = v\frac{dv}{dx}$ ومن ثم يكون

$$\therefore v\frac{dv}{dx} = -4x^{-3} \qquad \Rightarrow vdv = -4x^{-3}\ dx$$

باجراء التكامل

$$\therefore \int vdv = -\int 4x^{-3}\ dx + c_1 \qquad \text{Or} \qquad \frac{1}{2}v^2 = \frac{2}{x^2} + c_1 \quad \text{Or} \quad v^2 = \frac{4}{x^2} + c$$

ويتعين الثابت c من الشرط الابتدائي و هو $v=0$ عندما $x=h$ وبالتالي $0=\frac{4}{h^2}+c$

أي أن $c=-\frac{4}{h^2}$ وبالتالي

$$v^2=\frac{4}{x^2}-\frac{4}{h^2}=\frac{4(h^2-x^2)}{x^2h^2} \qquad \therefore v=\pm\frac{2}{h}\frac{\sqrt{h^2-x^2}}{x}$$

وسنعتبر الاشارة السالبة لأن حركة حركة الجسيم نحو نقطة الأصل – أي في اتجاه تناقص x –

وحيث أن $v=\frac{dx}{dt}$

$$\therefore \frac{dx}{dt}=-\frac{2}{h}\frac{\sqrt{h^2-x^2}}{x} \qquad \Rightarrow -\frac{xdx}{\sqrt{h^2-x^2}}=\frac{2}{h}dt \quad \text{Or}$$

$$\Rightarrow -\int\frac{xdx}{\sqrt{h^2-x^2}}=\int\frac{2}{h}dt+c_2$$

$$\Rightarrow \sqrt{h^2-x^2}=\frac{2}{h}t+c_2$$

ولتعيين الثابت c_2 حيث أن $x=h$ عندما $t=0$ وبالتالي $c_2=0$ أي أن

$$\therefore \sqrt{h^2-x^2}=\frac{2}{h}t \qquad \text{Or} \qquad t=\frac{h}{2}\sqrt{h^2-x^2}$$

والزمن الذي يستغرقة الجسيم حتي يصل إلى مسافة ℓ هي $t=\frac{h}{2}\sqrt{h^2-\ell^2}$

وللحصول على مقدار السرعة عند هذا الموضع نعوض عن $x=\ell$ في علاقة السرعة

$$v\Big|_{x=\ell}=\frac{2\sqrt{h^2-\ell^2}}{h\ell}$$

مثـــ ٩ ـــال

يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث كانت العلاقة بين السرعة والموضع والزمن يـــتعين مـــن $v=(1+x^2)t$ ، أوجد المسافة كدالة في الزمن إذا علمت أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل.

الحـــــــل

حيث أن $v=(1+x^2)t$ ومن ثم

$$\frac{dx}{dt}=(1+x^2)t \qquad \Rightarrow \frac{dx}{1+x^2}=tdt \qquad \therefore \int \frac{dx}{1+x^2}=\int tdt + c_1$$

$$\therefore \tan^{-1} x = \frac{1}{2}t^2 + c_1$$

ومن الشرط الابتدائي حيث بدأ الجسيم الحركة من نقطة الأصل فإن

$$\therefore \tan^{-1} 0 = \frac{1}{2}0^2 + c_1 \quad \Rightarrow 0 = 0 + c_1 \ \therefore c_1 = 0 \qquad \therefore x = \tan\left(\frac{1}{2}t^2\right)$$

Kinematics of a Particle in Two Dimensions كينماتيكا الجسيم في بعدين

Motion in a plane (x-y) الحركة في المستوي

من المعلوم أنه يوجد نوعان من الكميات الطبيعية، الأول يتحدد تماماً بالمقدار مثل الطــول و الحجم و الزمن و الكتلة و درجة الحرارة ....وتلك تسمى بالكميات القياسية. أمــا النــوع الثاني فلا يمكن تحديده بالمقدار فقط وإنما يلزم أن نعرف الاتجاه ايضاً إلى جانب المقدار مثــل الازاحة و السرعة و العجلة .... وتسمى بالكميات المتجهة.

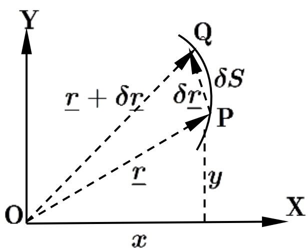
■ السرعة و العجلة في الاحداثيات الكارتيزية

عندما يتحرك جسيم في مستوى يلزم لتحديد موضعه احداثيان والذي يمكن كتابــة موضــع الجسيم في صورة متجهة كالتالي $\underline{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$ حيث – كما نعلم من دراستنا الســابقة – فإن $\hat{i}$ يمثل متجه وحدة في اتجاه المحور الأفقي X ، أما $\hat{j}$ فيمثل متجه وحدة في اتجاه المحــور الرأسي Y . وعندما يتحرك جسيم فإن موضعه يتغير من لحظة إلى أخرى و يقال أن متجــه الموضع دالة في الزمن أي أن $\underline{r} = \underline{r}(t)$ وبالتالي تكون الاحداثيات الكارتيزية للجسيم دوالاً في الزمن وتكتب في الصورة

$$\underline{r} = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} \qquad \text{Or} \qquad x = x(t), \;\; y = y(t)$$

يسمى جزئا المعادلة السابقة بالمعادلتين البارامتريتين للمسار ، حيث t يسمى البارامتر وبحذف البارامتر بين مركبات الموضع نحصل على علاقة بين x, y وتسمى هــذه العلاقــة بالمعادلــة الكارتيزية للمسار.

الآن نفرض أن جسيماً يتحرك في المستوى XY (هذه المحــاور ثابتة) ونفرض أن الجسيم عند اللحظة t كان عند النقطــة P حيث متجه موضعه هو $\underline{r}$ وبعد فترة زمنية δt أصبح الجســيم عند النقطة Q و متجه موضعه $\underline{r} + \delta\underline{r}$ حيث طــول القــوس PQ هو δS وحيث أن السرعة المتوسطة للجسيم خلال انتقاله من النقطة P إلى النقطة Q خلال الفترة الزمنية δt تتعين من



$$\underline{v} = \frac{\underline{r} + \delta\underline{r} - \underline{r}}{\delta t} = \frac{\delta\underline{r}}{\delta t}$$

وبأخذ نهاية المقدار السابق عندما $\delta t \to 0$ و من ثم تقترب النقطة Q من النقطة P و بالتالي يمكن الحصول على سرعة الجسيم عند النقطة P عند الزمن t وتتعين من

$$\underline{v} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \underline{r}}{\delta t} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}) = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x}\hat{i} + \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y}\hat{j} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$$

أي أن متجه السرعة $\underline{v}$ له مركبتان إحداهما v_x ومقدارها $\frac{dx}{dt}$ وتكون في الاتجاه الموجب للمحور الأفقي ، والثانية v_y وتساوي $\frac{dy}{dt}$ وتعمل في اتجاه تزايد المحور الرأسي y ويتعين مقدار متجه السرعة من العلاقة $v = |\underline{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ ويميل متجه السرعة على الأفقي بزاوية θ تتيعين من العلاقة $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$

أيضاً متجه العجلة هو المعدل الزمني لتغير متجه السرعة وعليه

$$\underline{a} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \underline{v}}{\delta t} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt}\,\hat{i} + \frac{dy}{dt}\,\hat{j}) = \underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}}_{a_x}\hat{i} + \underbrace{\frac{d^2y}{dt^2}}_{a_y}\hat{j} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j}$$

مرةً أخرى نجد أن متجه العجلة له مركبتان إحداهما a_x ومقدارها $\frac{d^2x}{dt^2}$ وتكون في الاتجاه الموجب للمحور الأفقي ، والثانية a_y وتساوي $\frac{d^2y}{dt^2}$ وتعمل في اتجاه تزايد المحور الرأسي y ويتعين مقدار متجه العجلة من العلاقة $a = |\underline{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$ ويميل متجه السرعة على الأفقي بزاوية φ تتيعين من العلاقة $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}\right)$

ونستنتج مما سبق أن الحركة المستوية هي محصلة حركتين في خطين مستقيمين هما محورا الاحداثيات.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

إذا تحركت نقطة مادية في المستوى XY بحيث يتعين احداثي موضعها عند أي لحظـــة مـــن العلاقتين

$$x = t^2, \qquad y = 3t^2 + 4$$

فأوجد السرعة والعجلة عند أي لحظة ومعادلة المسار.

الحـــــــــل

حيث أن متجه السرعة في الاحداثيات الكارتيزية يتعين من $\underline{v} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$ ومتجه العجلة $\underline{a} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j}$ ومن ثم

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 2$$

$$\frac{dy}{dt} = 6t, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 6$$

أي أن متجه السرعة والعجلة عند أي لحظة يُعطيان بالعلاقتين

$$\underline{v} = 2t\,\hat{i} + 6t\,\hat{j}, \qquad \underline{a} = 2\,\hat{i} + 6\,\hat{j}$$

ويتضح أن متجه العجلة مقدار ثابت $2\sqrt{10}$ (لا يعتمد على الزمن). ولتعيين معادلة المســـار وهي حذف البارامتر t بين x, y وواضح أن $y = 3x + 4$ وهي معادلة خط مستقيم ميله 3 ويمر بالنقطة $(0,4)$.

مثـــ ٢ ـــال

يتحرك جسيم فى المستوى الكارتيزي خاضعاً للعلاقة

$$x = 20t - 3t^2, \qquad y = 16t - 4t^2$$

فأوجد السرعة والعجلة عند أي لحظة وأقصى ارتفاع وسرعته عند هذا الموضع ومتى وايـــن يقع الجسم على المحور الأفقي X.

الحـــــــــل

كما ذكرنا آنفاً أن متجه السرعة في الاحداثيات الكارتيزية XY يتعين من $\underline{v} = \dot{x}\,\hat{\imath} + \dot{y}\,\hat{\jmath}$ ومتجه العجلة $\underline{a} = \ddot{x}\,\hat{\imath} + \ddot{y}\,\hat{\jmath}$ ومن ثم

$$\frac{dx}{dt} = 20 - 6t, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -6$$

$$\frac{dy}{dt} = 16 - 8t, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -8$$

أي أن متجه السرعة والعجلة عند أي لحظة يُعطيان بالعلاقتين

$$\underline{v} = (20 - 6t)\,\hat{\imath} + (16 - 8t)\,\hat{\jmath}\,, \qquad \underline{a} = -6\hat{\imath} - 8\,\hat{\jmath}$$

ويتضح أن متجه العجلة مقدار ثابت 10وحدة و لإيجاد اقصى ارتفاع ، نعلم أنه عند أقصى ارتفاع تنعدم مركبة السرعة الرأسية أي أن $\dot{y} = 0$ وعندها يكون $t = 2$

أي أن الجسيم يصل إلى أقصى ارتفاع بعد ثانيتين ويكون هذا الارتفاع مساوياً

$$y\big|_{t=2} = 16(2) - 4(2)^2 = 16$$

ولحساب السرعة عند هذا الموضع نعوض بالزمن $t = 2$ في متجة السرعة $\underline{v} = 8\,\hat{\imath}$

يقع الجسيم على المحور الأفقي عندما يكون الاحداثي الرأسي y مساوياً الصفر ومن ثم

$$0 = 16t - 4t^2 \quad \Rightarrow t(4 - t) = 0 \qquad \text{i.e. } t = 0,\, t = 4$$

أي أن الجسيم يقع على المحور الأفقي بعد أربع ثوان وموضعه x يتعين من

$$x\big|_{t=4} = 20(4) - 3(4)^2 = 32$$

مثـــ ٣ ـــال

يتحرك جسيم في مستوى كارتيزي بحيث أن مركبة السرعة الأفقية ثابتة وتساوي 3 ومركبة السرعة الرأسية تتناسب مع الاحداثي x وثابت التناسب يساوي 6 اثبت أن معادلة المسار قطع مكافئ إذا علمت أن النقطة $(2,4)$ تقع على المسار.

الحـــــــل

حيث أن مركبة السرعة الأفقية $\dot{x}$ ثابتة اي أن $\dot{x} = 3$ ومركبة السرعة الرأسية $\dot{y}$ تتناسب مع x أي أن $\dot{y} = 6x$ والآن

$$\frac{dx}{dt} = 3, \qquad \frac{dy}{dt} = 6x \qquad \Rightarrow \frac{dy\ /\ dt}{dx\ /\ dt} = \frac{6}{3}x = 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x \qquad \text{Or} \qquad dy = 2xdx$$

باجراء التكامل نحصل على $y = x^2 + c$

حيث c ثابت التكامل ويتعين من الشرط $y = 4$ As $x = 2$ وبالتعويض نجد أن $c = 0$

وتصبح معادلة المسار $y = x^2$ وهي معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل.

مثـــ ٤ ـــال

يتحرك جسيم في مستوى كارتيزي بحيث أن موضعه عند أي لحظة يتعين من

$$x = 3\cos 2t + 1, \qquad y = 4\sin 2t - 2$$

أوجد معادلة المسار.

الحـــــــــل

معادلة المسار هي علاقة بين x, y و حيث أن $y = 4\sin 2t - 2$ $\quad x = 3\cos 2t + 1,$

ومن ثم

$$\frac{x-1}{3} = \cos 2t, \qquad \frac{y+2}{4} = \sin 2t$$

بالتربيع والجمع ينتج أن

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

وهي معادلة قطع ناقص مركزه $(1,-2)$ و طول محوره الأكبر 4 والأصغر 3

(اجتهد في رسم المسار رسماً تخطيطياً)

مثـــ ٥ ـــال

تتحرك نقطة مادية على المسار $y = 2x^2$ حيث الاطوال بالقدم وكانت المركبة الأفقية لسرعتها ثابتة وتساوي 2 ft sec^{-1} . اوجد عجلة النقطة المادية مقداراً واتجاهاً ، ثم اوجد سرعتها مقداراً واتجاهاً عندما يكون الأحداثي الرأسي 8 .

الحــــل

حيث أن $\dot{x} = 2$ وبالتفاضل بالنسبة للزمن يكون $\ddot{x} = 0$ أي أن المركبة الأفقية للعجلة تنعدم و للحصول على المركبة الرأسية للعجلة حيث $y = 2x^2$ فإن

$$y = 2x^2 \quad \Rightarrow \dot{y} = 4x\underset{2}{\dot{x}} = 8x \quad \text{again} \quad \ddot{y} = 8\dot{x} = 16$$

أي أن العجلة تتعين بالمتجة $a = 16\,\hat{\jmath}$ ومقدارها 16 وتعمل في اتجاه المحور Y

ولتعيين السرعة حيث $\underline{v} = \dot{x}\,\hat{\imath} + \dot{y}\,\hat{\jmath}$ فإن $\underline{v} = 2\,\hat{\imath} + 8x\,\hat{\jmath}$ وعندما $y = 8$ فإن $x = \pm 2$

ومنها $\underline{v} = 2\,\hat{\imath} - 16\,\hat{\jmath}$ أو $\underline{v} = 2\,\hat{\imath} + 16\,\hat{\jmath}$ ومقدار السرعة في كلتا الحالتين $\sqrt{260}$

مثـــال ٦

بدأ جسيم حركته من السكون من النقطة (a,b) على مسار معادلته $y^2 = \dfrac{b^2}{a}x$ وكانت المركبة الرأسية لعجلته تتعين من $\ddot{y} = -k^2 y$. اوجد المركبة الأفقية للعجلة كدالة في x ثم أوجد x, y, v كدوال في الزمن.

الحــــل

للحصول على المركبة الأفقية للعجلة بتفاضل معادلة المسار بالنسبة للزمن نجد أن

$$y^2 = \frac{b^2}{a}x \quad \Rightarrow y\dot{y} = \frac{b^2}{2a}\dot{x}$$

$$\text{differentiating again} \quad \Rightarrow \dot{y}^2 + y\ddot{y} = \frac{b^2}{2a}\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \dot{y}^2 + \sqrt{\frac{b^2}{a}x}\left(-k^2\sqrt{\frac{b^2}{a}x}\right) = \frac{b^2}{2a}\ddot{x}$$

$$\therefore \ddot{x} = \frac{2a}{b^2}\left(\dot{y}^2 - k^2\frac{b^2}{a}x\right) = \frac{2a}{b^2}\dot{y}^2 - 2k^2 x \qquad (1)$$

والآن لحساب $\dot{y}$ من العلاقة $\ddot{y} = -k^2 y$ حيث $\ddot{y} = \dfrac{d\dot{y}}{dt} = \dot{y}\dfrac{d\dot{y}}{dy}$ ومنها

$$\dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy} = -k^2 y \qquad \Rightarrow \dot{y}d\dot{y} = -k^2 y dy \qquad \text{Or} \quad \dot{y}^2 = c - k^2 y^2$$

حيث c ثابت التكامل ويتعين من شرط أن الجسيم بـدأ الحركـة مـن السـكون أى أن $t = 0, \quad \dot{x} = \dot{y} = 0, \quad x = a, \quad y = b$ وتكون قيمة الثابت

$$0 = c - k^2 b^2 \qquad \therefore c = k^2 b^2$$

ومن ثم فإن المركبة الأفقية للعجلة تتعين من

$$\therefore \ddot{x} = \frac{2a}{b^2}(k^2 b^2 - k^2 \frac{b^2}{a} x) - 2k^2 x \qquad \Rightarrow \ddot{x} = 2ak^2 - 4k^2 x$$

وهذه العلاقة تعطى المركبة الأفقية للعجلة بدلالة x

$$\dot{y}^2 = k^2 b^2 - k^2 y^2 \qquad \Rightarrow \dot{y} = k\sqrt{b^2 - y^2} \quad \text{Or} \quad \frac{dy}{dt} = k\sqrt{b^2 - y^2}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\frac{dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} = kdt \qquad \Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = kt + \alpha \quad \text{Or} \quad y = b\sin(kt + \alpha)$$

حيث α ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشرط عند $t = 0$ فإن $y = b$ ويكون

$$b = b\sin(\alpha) \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

ومنها فإن $y = b\sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right)$ Or $y = b\cos kt$ y given as a function of t

أيضاً للحصول على المسافة x كدالة في الزمن

$$x = \frac{a}{b^2} y^2 = \frac{a}{b^2} b^2 \cos^2 kt = a\cos^2 kt$$

والسرعة $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ و من ثم

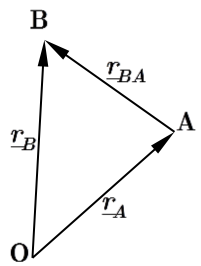
$$v = \sqrt{\frac{4a^2}{\cancel{b^4}} \cancel{b^2} \cos^2 kt(\cancel{b^2} k^2 \sin^2 kt) + k^2 b^2 - k^2 b^2 \cos^2 kt}$$
$$= \sqrt{4a^2 k^2 \cos^2 kt \sin^2 kt + k^2 b^2 \sin^2 kt} = k\sin kt\sqrt{4a^2 \cos^2 kt + b^2}$$

■ الحركة النسبية في مستوى Relative Motion in a Plane

علمنا مما سبق أن صور الحركة و وصفها لحركة جسيم تتغير تبعاً لـتغير مجموعـة الاسـناد (مجموعة المحاور المنسوبة إليها هذه الحركة سواء كارتيزية او قطبية أو ذاتية) وكذلك إذا ما كانت هذه المحاور ثابتة أو متغيرة وايضاً راصد الحركة (نقطة الأصل) فمثلا لو تصـورنا أن هناك راصد لحركة قطار و تحرك القطار أمام الراصد فسيرى الراصـد أن القطـار يتحـرك بسرعته التي يسير بها ، ولكن لو كان الراصد راكباً قطاراً آخر يسير بنفس سـرعة القطـار الأول و في نفس الاتجاه فبالنسبة لهذا الراصد سيكون القطار المرصود كما لو كان ساكناً.

نعتبر نقطة ثابتة O، نفرض أن نقطة ما A متجه الموضع لها هو $\underline{r}_A$ بالنسبة إلى O ونعتـبر نقطة أخرى B متجه الموضع لها هو $\underline{r}_B$ بالنسبة إلى O أيضاً. فإذا نسبنا متجه موضع النقطة A إلى النقطة B فسيكون هو المتجه $\underline{r}_{BA}$ ، أي أن متجه الموضع قد تغير بتغير الراصد و من الشكل المجاور يكون

$$\underline{r}_B = \underline{r}_A + \underline{r}_{B|A} \qquad \Rightarrow \underline{r}_{B|A} = \underline{r}_B - \underline{r}_A$$



حيث رمزنا لمتجه موضع النقطة A بالنسبة إلى B بالرمز $\underline{r}_{AB}$. يُسمى المتجه $\underline{r}_{AB}$ بمتجـه الموضـع النسبي للنقطة A بالنسبة للنقطة B و للحصـول على السرعة النسبية للنقطـة A بالنسـبة إلى B بتفاضل المعادلة السابقة نجد أن

$$\frac{d\underline{r}_{B|A}}{dt} = \frac{d\underline{r}_B}{dt} - \frac{d\underline{r}_A}{dt} = \underline{v}_B - \underline{v}_A \qquad \Rightarrow \underline{v}_{B|A} = \underline{v}_B - \underline{v}_A$$

حيث $\underline{v}_A, \underline{v}_B$ سرعة كل من النقطتين A, B على الترتيب ، $\underline{v}_{A|B}$ هي سرعة A بالنسبة إلى B نلاحظ أن العلاقتان السابقتان علاقات اتجاهية وليست قياسية والعجلة النسـبية عـي مشتقة السرعة النسبية بالنسبة للزمن أي أن

$$\frac{d\underline{v}_{B|A}}{dt} = \frac{d\underline{v}_B}{dt} - \frac{d\underline{v}_A}{dt} = \underline{a}_B - \underline{a}_A \qquad \Rightarrow \underline{a}_{B|A} = \underline{a}_B - \underline{a}_A$$

حيث $\underline{a}_A, \underline{a}_B$ عجلة كل من النقطتين A, B على الترتيب ، $\underline{a}_{A|B}$ هي عجلة A بالنسبة إلى B

مثـــ ١ ـــال

تتحـــرك نقطتـــان ماديتـــان A, B بحيـــث يـــتعين موضـــعهما مـــن $x_A = t^3 - 2t$ ، $x_B = 2t^3 + t^2 - 5$. اوجد كلاً من السرعة النسبية العجلة النسبية.

الحــــــــل

حيث أن الموضع النسبي للنقطة B بالنسبة للنقطة A هو $\underline{x}_{B|A}$ حيث

$$\underline{x}_{B|A} = \underline{x}_B - \underline{x}_A \qquad \Rightarrow \underline{x}_{B|A} = (2t^3 + t^2 - 5) - (t^3 - 2t) = t^3 + t^2 + 2t - 5$$

ومن ثم فإن السرعة النسبية للنقطة B بالنسبة للنقطة A تتعين من

$$\underline{v}_{B|A} = \frac{d\underline{x}_{B|A}}{dt} = 3t^2 + 2t + 2$$

وأيضاً العجلة النسبية للنقطة B بالنسبة للنقطة A تتعين من

$$\underline{a}_{B|A} = \frac{d\underline{v}_{B|A}}{dt} = 6t + 2$$

مثـــ ٢ ـــال

تتحرك باخرة A بسرعة ثابتة مقدارها 24 m.p.h في اتجاه الشرق ، بينما تتحرك باخرة B في اتجاه الجنوب بسرعة ثابتة مقدارها 18 m.p.h . أوجد سرعة الباخرة الأولى بالنسبة لراكب في الباخرة الثانية.

الحــــــــل

بفرض أن $\hat{i}$, $\hat{j}$ متجها وحدة في اتجاهي الشرق والجنوب فإنه يمكن كتابة سرعة البـــاخرتين A, B على الصورة

$$\underline{v}_A = 24\hat{i}, \quad \underline{v}_B = 18\hat{j}$$

و حيث أن السرعة النسبية تتعين من $\underline{v}_{B|A} = \underline{v}_A - \underline{v}_B$ فيكون $\underline{v}_{A|B} = 24\hat{i} - 18\hat{j}$
مقدار السرعة النسبية يتعين مـــن $v_{A|B} = \left|\underline{v}_{A|B}\right| = \sqrt{(24)^2 + (18)^2} = 30\,\text{m.p.h}$ و في اتجاه يصنع زاوية θ جنوب الشرق حيث $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{18}{24}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$.

■ Problems مسائل ■

الحركـــــة في وسط مقـــاوم

Motion in a Resisting Medium

تُعالج الكينماتيكا – كما رأينا – وصف الحركة المجردة دون التعرض لبعواعث تغيير هـــذه الحركة. والميكانيكا الكلاسيكية أو الميكانيكا النيوتونية مبنية على عدة قوانين وضعها العـــالم الانجليزي المعرف سير اسحق نيوتن في القرن السابع عشر وهي معروفة باسمه و أثبتت التجربة والمشاهدة معاً إلى يومنا هذا دقة هذه القوانين في وصفها لحركة الاجسام الا في حالات نادرة والتي تكون فيها سرعة الاجسام هائلة ، مما دعا ألبرت أينشتين رائد نظرية النسبية الأول إلى اعادة التفكير في الأسس التي أقام عليها العالم نيوتن نظريته االميكانيكية فخرج على العـــالم في بدايات القرن العشرين بنوع آخر من الميكانيكا يعتمد في جوهره على النسبية. تمتاز ميكانيكا نيوتن بسهولة في التفكير والتطبيق مع دقةٍ كافيةٍ لاغلب التطبيقات والأغراض الهندسية جعلتنا نستمر حتى يومنا هذا في استعمالها و تطبيقها مُرجئين الأخذ بأساليب النسبية إلى بضع حالات من الحركة السريعة جداً كحركة الالكترونات.

■ قوانين نيوتن للحركة Newton's Laws of Motion

القانون الأول

وينص على أن "كل جسيم بعيد عن المؤثرات يظل محتفظاً بحالة حركته من حيث السكون أو الحركة المنتظمة في خط مستقيم وفقاً لأحوال البداية"

فإذا ما لاحظنا تغيّراً في سرعة الجسيم سواء كان ذلك في المقدار أو الاتجاه أو التغير في كليهما معاً وهو ما عُرف بعجلة الجسيم فقد نسب نيوتن هذا التغير أو هذه العجلة إلى مؤثر أسمـــاه القوة. و على هذا يمكن تعريف القوة على أنها ذلك المؤثر الي يُحدث تغييراً في حالة الجسم أو بتعبير آخر هو المؤثر الذي يُحدث العجلة.

القانون الثاني

لقد أستخدم هذا القانون كأساس للديناميكا. وينص هذا القانون على "هناك تناسب مباشـــر بين القوة المؤثرة والعجلة الناتجة". و وجد أن ثابت التناسب هو كتلة الجسيم m. أو بعبارةٍ

أخرى "المعدل الزمني للتغير في كمية حركة الجسيم يتناسب مع محصلة القوى الخارجية المؤثرة عليه ويكون في اتجاهها".

تُعرف كمية حركة الجسيم بحاصل ضرب كتلته في سرعته أي أن $\underline{P} = m\underline{v}$ وهي تبعاً لذلك كمية متجهه وبالتالي يمكن صياغة قانون نيوتن الثاني على الصورة

$$\underline{F} = \frac{d}{dt}(m\underline{v}) = m\frac{d\underline{v}}{dt} + \underline{v}\frac{dm}{dt}$$

وفي دراستنا هنا سنعتبر كتلة الجسيم ثابتة ومن ثم $\frac{dm}{dt} = 0$ ويأخذ قانون نيوتن الصورة $F = m\frac{d\underline{v}}{dt} = m\underline{a}$ حيث $\underline{a}$ يمثل متجه عجلة الجسيم.

نلاحظ أنه في الاحداثيات الكارتيزية تُعطى مركبات القوة في الصورة (F_x, F_y) وبالتالي

$$F_x = ma_x = m\ddot{x}, \qquad F_y = ma_y = m\ddot{y}$$

و هذا القانون هو قانون لا يعتمد على برهان رياضي وإنما أثبتت التجارب صحته وتنبني عليه باقي قوانين الديناميكا بالاستنتاج الرياضي ولذا سُميّ بالقانون الأساسي للحركة.

القانون الثالث

ينص على أن "لكل فعل رد فعل مساوٍ له في المقدار ومضاد له في الاتجاه و على خط واحد"

قانون الجذب العام

كل جسيمان يتجاذبان بقوة تتناسب طردياً مع حاصل ضرب كتلتيهما وعكسياً مع مربع البعد بينهما و تؤثر في الخط الواصل بينهما وتأخذ الصورة الرياضية

$$\underline{F} = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{F}$$

حيث m_1, m_2 تمثل كتلة الجسمين ، γ ثابت الجذب العام و يمكن تحديد قيمته تجريبياً وتساوي ، r هو البعد بين الكتلتين ، $\hat{F}$ متجه وحدة في اتجاه القوة .

ولقد تطرقنا في ابوابٍ سابقة إلى حركة الاجسام الساقطة او المقذوفة رأسياً لأعلى مع اهمال مقاومة الهواء – حركة الجسيم بعجلة ثابتة – والآن نتعرض لحركة الاجسام مع الأخذ في

الاعتبار مقاومة الهواء سواء كانت الحركة رأسية أو أفقية. لاحظ أنه في حالــة الســرعات الصغيرة فإن المقاومة تتناسب مع السرعة أما إذا كانت حركة الجسم بسرعة كــبيرة فــإن المقاومة تتناسب مع مربع السرعة.

■ دراسة حركة جسيم ساقط مع وجود مقاومة تتناسب مع سرعته

نفرض جسيم كتلته m سقط من السكون من نقطة O و بأخذ هذه النقطة كنقطة أصل و الخط الرأسي لأسفل هو المحور Y و حيث أن مقاومة الهواء تتناسب مع السرعة أي أنه يؤثر على الجسيم اثناء حركته قوة الوزن mg رأسياً لأسفل و مقاومة الهواء R رأســياً لأعلــى وتساوي μmv حيث v سرعة الجسيم عند اللحظة t، μm ثابت التناسب

معادلة الحركة هي

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \mu mv \quad \Rightarrow \frac{dv}{g-\mu v} = dt \qquad \text{Or} \qquad \frac{-\mu dv}{g-\mu v} = -\mu dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g-\mu v) = c_1 - \mu t \qquad (1)$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = 0$ عنــدما $t = 0$ ومنها $c_1 = \ln g$ وتأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(g-\mu v) = \ln g - \mu t \qquad \text{Or} \quad v = \frac{g}{\mu}\ 1 - e^{-\mu t} \qquad (2)$$

ومن المعادلة (2) يمكن الحصول على موضع الجسيم y عند أي لحظة t كالتالي

$$\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v} = \frac{g}{\mu}\ 1 - e^{-\mu t} \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{g}{\mu}\ 1 - e^{-\mu t}\ dt$$

$$\Rightarrow \int dy = \int \frac{g}{\mu}\ 1 - e^{-\mu t}\ dt + c_2 \qquad \text{Or}$$

$$y = \frac{g}{\mu}\left(t + \frac{1}{\mu}e^{-\mu t}\right) + c_2 \qquad (3)$$

حيث c_2 ثابت التكامل وتتعين قيمته من شروط الحركة الابتدائية وهـــي $y = 0$ عنـــدما $t = 0$ ومنها $c_2 = -\dfrac{g}{\mu^2}$ وتأخذ المعادلة (3) الصورة

$$y = \frac{g}{\mu}\left(t + \frac{1}{\mu}e^{-\mu t}\right) - \frac{g}{\mu^2}$$

وهذه العلاقة تعطي موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية t

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

يتحرك جسيم كتلته m أفقياً في وسط مقاومته αmv حيث α ثابت ، v سرعة الجســـيم فإذا بدأ الجسيم الحركة من نقطة الأصل بسرعة u فأوجد المسافة التي يتحركها الجسيم بعد زمن .

الحـــــــل

معادلة الحركة الأفقية للجسيم (لاحظ أن قوة الوزن ليس لها تأثير) هي

$$m\frac{dv}{dt} = -\alpha mv \quad \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\alpha dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(v) = c_1 - \alpha t \qquad (1)$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = u$ عنـــدما $t = 0$ ومنها $c_1 = \ln u$ وتأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(v) = \ln u - \alpha t \qquad \text{Or} \qquad v = ue^{-\alpha t} \qquad (2)$$

ومن المعادلة (2) يمكن الحصول على موضع الجسيم x عند أي لحظة t كالتالي

$$\frac{dx}{dt} = ue^{-\alpha t} \quad \Rightarrow \quad dx = ue^{-\alpha t}dt$$

v

$$\Rightarrow \int dx = \int ue^{-\alpha t}dt + c_2 \qquad \text{Or}$$

$$x = -\frac{u}{\alpha}e^{-\alpha t} + c_2 \qquad (3)$$

حيث c_2 ثابت التكامل وتتعين قيمته من شروط الحركة الابتدائية وهـــي $x = 0$ عنـــدما $t = 0$ ومنها $c_2 = \frac{u}{\alpha}$ وتأخذ المعادلة (3) الصورة

$$x = \frac{u}{\alpha}\ 1 - e^{-\alpha t}$$

مثـــ ٢ ـــال

يتحرك جسيم كتلته الوحدة في وسط مقاومته تساوي $\lambda v + \mu v^2$ فإذا كانت المقاومة هـــي القوة الوحيدة المؤثرة على الجسيم فأوجد المسافة المقطوعة قبل أن يقف الجسيم إذا علمت أن سرعته الابتدائية u .

الحـــــــل

معادلة الحركة للكتلة هي– قوة المقاومة هي القوة الوحيدة المؤثرة –

$$v\frac{dv}{dx} = -(\lambda v + \mu v^2) \qquad \Rightarrow \frac{\mu dv}{\lambda + \mu v} = -\mu dx$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(\lambda + \mu v) = c_1 - \mu x \qquad (1)$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = u$ عنـــدما $x = 0$ ومنها $c_1 = \ln(\lambda + \mu u)$ وتأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(\lambda + \mu v) = \ln(\lambda + \mu u) - \mu x \qquad \text{Or} \qquad \ln\left(\frac{\lambda + \mu u}{\lambda + \mu v}\right) = \mu x \qquad (2)$$

ومن المعادلة (2) يمكن الحصول على موضع الجسيم x عندما تنعدم السرعة

$$x\Big|_{v=0} = \frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{\lambda + \mu u}{\lambda}\right) = \frac{1}{\mu}\ln\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}u\right)$$

مثـــ ٣ ـــال

قذف جسيمان كتلة كل منهما m رأسياً إلى اسفل من نفس النقطة و في نفـــس اللحظـــة بسرعتين u_1, u_2 في وسط مقاومته تتناسب مع السرعة و ثابت التناسب μm فإذا كانـــت u_1', u_2' هما سرعتي الجسيمان بعد مضي زمن T فاثبت ان $u_1' - u_2' = (u_1 - u_2)e^{-\mu T}$.

الحـــــــل

بالنسبة للكتلة الأولى نفرض أن سرعتها عند أي لحظة هي ومن ثم فإن معادلة الحركة لها

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \mu mv \quad \Rightarrow \frac{dv}{g-\mu v} = dt \quad \text{Or} \quad \frac{-\mu dv}{g-\mu v} = -\mu dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g-\mu v) = c - \mu t$$

حيث c ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = u_1$ عندما $t = 0$ ومنها $c = \ln(g-\mu u_1)$ وتأخذ المعادلة السابقة الصورة

$$\ln(g-\mu v) = \ln(g-\mu u_1) - \mu t \quad \text{Or} \quad g-\mu v = (g-\mu u_1)e^{-\mu t}$$

وبعد زمن T تصبح السرعة u_1' أي أن

$$g-\mu u_1' = (g-\mu u_1)e^{-\mu T} \tag{1}$$

بالنسبة للكتلة الثانية نفرض أن سرعتها عند أي لحظة t هي v' وباتالي معادلة حركتها

$$m\frac{dv'}{dt} = mg - \mu mv' \quad \Rightarrow \frac{dv'}{g-\mu v} = dt \quad \text{Or} \quad \frac{-\mu dv'}{g-\mu v'} = -\mu dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g-\mu v') = c' - \mu t$$

حيث c' ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v' = u_2$ عندما $t = 0$ ومنها $c' = \ln(g-\mu u_2)$ وتأخذ المعادلة السابقة الصورة

$$\ln(g-\mu v') = \ln(g-\mu u_2) - \mu t \quad \text{Or} \quad g-\mu v' = (g-\mu u_2)e^{-\mu t}$$

وبعد زمن T تصبح السرعة u_2' أي أن

$$g-\mu u_2' = (g-\mu u_2)e^{-\mu T} \tag{2}$$

وبطرح المعادلتين (2) , (1) نجد أن

$$\mu \;\; u_1' - u_2' \;\; = \mu(u_1 - u_2)e^{-\mu T} \quad \text{Or} \quad u_1' - u_2' = (u_1 - u_2)e^{-\mu T}$$

وهو المطلوب اثباته

مثـــال ٤

قذفت نقطة مادية كتلتها m رأسياً لأعلى بسرعة أبتدائية $\sqrt{g\mu^{-1}}$ في وسط مقاومته لوحدة الكتل تساوي μv^2 حيث v سرعة النقطة المادية ، μ ثابت التناسب . اثبـــت أن أقصـــى ارتفاع للنقطة المادية هو $\frac{1}{2\mu}\ln 2$ وتتصل إليه في زمن قدره $\frac{\pi}{4\sqrt{g\mu}}$.

الحـــــل

معادلة الحركة هي – باعتبار نقطة القذف هي نقطة الأصل –

$$mv\frac{dv}{dy} = -mg - \mu m v^2 \quad \Rightarrow \frac{vdv}{g+\mu v^2} = -dy \quad \text{Or} \quad \frac{2\mu v dv}{g+\mu v^2} = -2\mu dy$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g+\mu v^2) = c_1 - 2\mu y \tag{1}$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهـــي $v = \sqrt{g\mu^{-1}}$ عندما $y = 0$ ومنها $c_1 = \ln 2g$ وتأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(g+\mu v) = \ln 2g - 2\mu y \qquad \text{Or} \quad y = \frac{1}{2\mu}\ln\frac{2g}{g+\mu v} \tag{2}$$

ومن المعادلة (2) يمكن الحصول على موضع الجسيم y عند أي لحظة t وعند أقصى ارتفاع يكون $v = 0$ وبالتالي

$$y = \frac{1}{2\mu}\ln\frac{2g}{g} \qquad \Rightarrow Y = \frac{1}{2\mu}\ln 2$$

وهو أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم وللحصول على زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع حيث

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \mu m v^2 \quad \Rightarrow \frac{dv}{g+\mu v^2} = -dt \quad \text{Or} \quad \frac{\sqrt{\frac{\mu}{g}}dv}{1+\left(\sqrt{\frac{\mu}{g}}\,v\right)^2} = -\sqrt{g\mu}\,dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{\mu}{g}}\,v\right) = c_2 - \sqrt{g\mu}\,t \tag{3}$$

حيث c_2 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهـــي $v = \sqrt{g\mu^{-1}}$ عندما $t = 0$ ومنها $c_2 = \frac{\pi}{4}$ وتأخذ المعادلة (3) الصورة

$$\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{\mu}{g}}\,v\right) = \frac{\pi}{4} - \sqrt{g\mu}\,t \qquad \text{Or} \qquad v = \sqrt{\frac{g}{\mu}}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{g\mu}\,t\right)$$

وهذه المعادلة تعطي السرعة عند أي لحظة زمنية وعند $v = 0$ فإن t

$$0 = \sqrt{\frac{g}{\mu}}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{g\mu}\,t\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{g\mu}\,t\right) = 0 \qquad \text{Or} \quad t = \frac{\pi}{4\sqrt{g\mu}}$$

مثـــ ٥ ـــال

قذفت نقطة مادية كتلتها m رأسياً لأعلى في وسط مقاومته تتناسب مع السرعة حيث ثابت التناسب μm فإذا تلاشت سرعة النقطة المادية بعد زمن T من لحظة القذف وعلى ارتفاع ℓ من نقطة القذف فاثبت إن السرعة الابتدائية التي قذفت بها النقطة المادية هي $\mu\ell + gT$.

الحـــــــل

معادلة الحركة هي – باعتبار نقطة القذف هي نقطة الأصل –

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \mu mv \quad \Rightarrow \frac{\mu dv}{g + \mu v} = -\mu dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g + \mu v) = c_1 - \mu t \qquad (1)$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = u$ عنـــدما $t = 0$ – بفرض أن سرعة القذف u والمراد تعيينها – ومنها $c_1 = \ln(g + \mu u)$ وتأخـــذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(g + \mu v) = \ln(g + \mu u) - \mu t \qquad \text{Or} \quad g + \mu v = \ g + \mu u \ \ e^{-\mu t}$$

$$\text{at} \ \ t = T, \ v = 0 \quad \Rightarrow \ g = \ g + \mu u \ \ e^{-\mu T} \qquad (2)$$

وللحصول على ارتفاع النقطة حيث

$$\because \ g + \mu v = (g + \mu u)e^{-\mu t} \qquad \text{Or} \qquad v = \frac{1}{\mu}\ \ (g + \mu u)e^{-\mu t} \ - g$$

ولكن $v = \dfrac{dy}{dt}$ ومن ثم

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\mu}\ \ (g + \mu u)e^{-\mu t} \ - g \qquad \Rightarrow dy = \frac{1}{\mu}\ \ (g + \mu u)e^{-\mu t} \ - g \ \ dt$$

باجراء التكامل نجد أن

$$y = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{(g+\mu u)}{\mu}e^{-\mu t} + gt\right) + c_2 \qquad (3)$$

حيث c_2 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشرط الحركة وهي $y = 0$ عندما $t = 0$ ومنـــها $c_2 = \frac{(g+\mu u)}{\mu^2}$ وتأخذ المعادلة (3) الصورة

$$y = \frac{g+\mu u}{\mu^2} - \frac{1}{\mu}\left(\frac{(g+\mu u)}{\mu}e^{-\mu t} + gt\right)$$

والآن بالتعويض عن $y = \ell$ عندما $t = T$

$$\ell = \frac{g+\mu u}{\mu^2} - \frac{(g+\mu u)}{\mu^2}e^{-\mu T} - \frac{gT}{\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{(g+\mu u)}{\mu^2}e^{-\mu T} = \frac{g+\mu u}{\mu^2} - \frac{gT}{\mu} - \ell \quad \text{Or} \quad \frac{g}{\mu^2} = \frac{g+\mu u}{\mu^2} - \frac{gT}{\mu} - \ell$$

(استخدمنا المعادلة (2))

$$\frac{g}{\mu^2} = \frac{g+\mu u}{\mu^2} - \frac{gT}{\mu} - \ell \qquad \Rightarrow u = gT + \mu\ell$$

و هو المطلوب اثباته

مثـــ ٦ ـــال

قذف جسيم كتلته m رأسياً لأعلى بسرعة u في وسط مقاومته تساوي $m\gamma v^2$. أثبت أن الجسيم يعود إلى نقطة القذف بسرعة قدرها $\frac{uu'}{\sqrt{u^2 + u'^2}}$ حيث $u' = \sqrt{g\gamma^{-1}}$

الحـــــــل

لمعرفة السرعة التي يعود بها الجسيم إلى نقطة القذف نتبع حركته اثناء الصعود حتى يتوقف ثم يرجع مرة ثانية.

اثناء الصعود معادلة الحركة هي – اخترنا المحور Y رأسياً لأعلى ونقطة القذف هـــي نقطـــة الأصل–

$$mv\frac{dv}{dy} = -mg - \gamma mv^2 \quad \Rightarrow \frac{2\gamma v dv}{g + \gamma v^2} = -2\gamma dy$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g + \gamma v^2) = c_1 - 2\gamma y \qquad (1)$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = u$ عنـــدما $y = 0$ ومنها $c_1 = \ln(g + \gamma u^2)$ وتأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\ln(g + \gamma v^2) = \ln(g + \gamma u^2) - 2\gamma y \quad Or \quad y = \frac{1}{2\gamma}\ln\left(\frac{g + \gamma u^2}{g + \gamma v^2}\right)$$

ويقف الجسيم عند انعدام سرعته وبالتعويض عن $v = 0$ في المعادلة السابقة نجد أن

$$y\big|_{v=0} = Y = \frac{1}{2\gamma}\ln\left(\frac{g + \gamma u^2}{g}\right) = \frac{1}{2\gamma}\ln\left(1 + \frac{u^2}{u'^2}\right), \quad (u'^2 = \frac{g}{\gamma})$$

و الآن باعتبار الحركة أثناء الهبوط ، سنأخذ في هذه الحالة نقطة السقوط هي نقطة الأصـــل الجديدة والمحور Y لإسفل ويكون الشرط الابتدائي هو $v = 0$ عندما $y = 0$ حيـــث v سرعة الجسيم عند أي لحظة اثناء السقوط. والآن بكتابة معادلة الحركة اثناء السقوط

$$mv\frac{dv}{dy} = mg - \gamma mv^2 \quad \Rightarrow \frac{2\gamma v dv}{g - \gamma v^2} = -2\gamma dy$$

باجراء التكامل نجد أن

$$\ln(g - \gamma v^2) = c_2 - 2\gamma y \tag{2}$$

حيث c_1 ثابت التكامل وتتعين قيمته من الشروط الابتدائية للحركة وهي $v = 0$ عنـــدما $y = 0$ ومنها $c_2 = \ln g$ وتأخذ المعادلة (2) الصورة

$$\ln(g - \gamma v^2) = \ln g - 2\gamma y \quad \text{Or} \quad y = \frac{1}{2\gamma}\ln\left(\frac{g}{g - \gamma v^2}\right)$$

وتصبح سرعة الجسيم عند عودته إلى نقطة القذف أي عند ارتفاع Y هي

$$\frac{1}{2\gamma}\ln\left(1 + \frac{u^2}{u'^2}\right) = \frac{1}{2\gamma}\ln\left(\frac{g}{g - \gamma v^2}\right) \quad \text{Or} \quad 1 + \frac{u^2}{u'^2} = \frac{g}{g - \gamma v^2}$$

$$\therefore \frac{u'^2 + u^2}{u'^2} = \frac{g}{g - \gamma v^2} \quad \Rightarrow g - \gamma v^2 = \frac{gu'^2}{u'^2 + u^2} \quad \Rightarrow \gamma v^2 = g - \frac{gu'^2}{u'^2 + u^2}$$

$$v^2 = u'^2 - \frac{u'^4}{u'^2+u^2} = \frac{u'^2(u'^2+u^2)}{u'^2+u^2} - \frac{u'^4}{u'^2+u^2}$$
$$= \frac{u'^2u^2}{u'^2+u^2} \qquad \therefore\ v = \frac{uu'}{\sqrt{u^2+u'^2}} \quad (u'^2 = \frac{g}{\gamma})$$

■ الشغل والطاقة Work and Energy

إذا تحركت نقطة مادية تحت تأثير قوة يُقال أن القوة بذلت شغلاً ويُعرف الشغل المبذول بأنه حاصل ضرب القوة في المسافة التي تحركتها النقطة المادية في اتجاه تأثي القوة أي أن

$$W = \underline{F}.\underline{r} = F\,r\cos\theta$$

لاحظ أن المركبة العمودية على متجه الازاحة لا تبذل شغلاً. العلاقة السابقة التي تُعطي الشغل تستخدم حينما تكون القوة غير متغيرة أما إذا كانت القوة متغيرة فإن الشغل المبذول في ازاحة صغيرة $d\underline{r}$ هو

$$dW = \underline{F}.d\underline{r} = F\,dr\cos\theta$$

ويكون الشغل الكلي المبذول يُعطى بالعلاقة $W = \int \underline{F}.d\underline{r}$ و هو كمية قياسية وإذا كانت $d\underline{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$ ، $\underline{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k}$ فإن الشغل يكون

$$W = \int F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

وحدات الشغل و يقاس الشـــغل بوحـــدات الأرج أو الجـــول حيـــث Joule $=10^7$ erg ، erg $=$ dyne $\times$ cm

■ الطاقة وتعرف على أنها مقدرة الجسم على بذل شغل و وحداتها هي نفس وحدات الشغل وهناك نوعان

■ طاقة الحركة

تعرف طاقة الحركة لجسيم كتلته m و سرعته v بالعلاقة $T = \frac{1}{2}mv^2$ و هي كمية قياسية موجبة وتقاس بالشغل المبذول بواسطة قوة في تحريك الجسيم حتى يصل إلى حالة الســـكون وحيث أن

$$W_{1\to 2}=\int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}=\int_1^2 m\underline{\ddot{r}}.d\underline{r}=\int_1^2 m\underline{\ddot{r}}.\frac{d\underline{r}}{dt}\,dt$$

$$=m\int_1^2 \underline{\ddot{r}}.\underline{\dot{r}}\;\;dt=\frac{1}{2}m\int_1^2\frac{d}{dt}\;\;\underline{\dot{r}}^2\;\;dt=\frac{1}{2}mv^2\Big|_1^2$$

$$=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)=T_2-T_1$$

وتعرف هذه القاعدة بقاعدة الشغل والطاقة.

■ طاقة الوضع

في الديناميكا عادة تسمى طاقة الجهد U بطاقة الوضع لأن الجسيم يكتسب طاقة نتيجة لموضعه. تعرف طاقة الجهد او طاقة الوضع بأنها الشغل المبذول ضد القوة المؤثرة على الجسيم في تحريكه من نقطة إلى أخرى فإذا كان الشغل المبذول هو W طاقة الجهد بين الموضعين $1,2$ هي

$$U_2-U_1=-W_{1\to 2}=-\int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}$$

ويمكن أعتبار أن طاقة الوضع لجسيم كتلته m وعلى ارتفاع h من سطح الأرض تساوي الشغل المبذول اثناء هبوطه نفس المسافة حتى يعود غلى سطح الأرض أي أن

$$U=Fh=mgh$$

وطاقة الجهد هي دالة قياسية تعتمد على الموضع فقط ولا تعتمد على الزمن صراحةً. العلاقة السابقة

$$U_2-U_1=-\int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}$$

و التي تربط القوة مع طاقة الجهد هي علاقة خاصة – ليست صحيحة لجميع أنواع القوى – ولكنها صحيحة لبعض أنواع القوى وتسمى القوى المحافظة. لاحظ أن وحدات طاقة الجهد هي نفسها وحدات الشغل.

■ مبدأ ثبوت الطاقة

ينص هذا المبدأ على أن الطاقة لا تفنى ولا تستحدث من العدم بليمكن تحويلها من صورة إلى اخرى وفي حالة الطاقة الميكانيكية فإن مجموع طاقتى الحركة و الوضع لجسم ما مقدار ثابت.

من المعادلة $U_2 - U_1 = -\int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}$ والمعادلة $T_2 - T_1 = \int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}$ نجد أن

$$U_2 - U_1 = -(T_2 - T_1) \qquad \Rightarrow T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

ونستنتج أن مجموع طاقتي الحركة والجهد يساوي مقداراً ثابتاً ويرمز له بالرمز E والذي يمثل الطاقة الكلية للجسم و هذا هو مبدأ ثبوت الطاقة والذي يمكن كتابته في الصورة

$$T + U = E$$

■ القدرة

في الآلات فإننا نهتم بالشغل المبذول بواسطة الآلة في وقت محدد و هو ما يقيس قدرة الآلة. و تعرف القدرة بأنها المعدل الزمني للشغل المبذول ويرمز لها بالرمز P ، أي أن $P = \dfrac{dW}{dt}$ و حيث أن $dW = \underline{F}.d\underline{r}$ وبالتالي تكون القدرة $P = \dfrac{\underline{F}.d\underline{r}}{dt} = \underline{F}.\underline{v}$ حيث $\underline{v}$ هو متجه السرعة. وحدات القدرة منها الوات حيث $\text{Watt} = \text{Joule}\,\text{sec}^{-1}$ و أيضاً الكيلو وات حيث $\text{K.W.} = 10^3\ \text{Watt}$ و أيضاً الحصان حيث $\text{hp} = 745.7\,\text{Watt}$.

■ القوى والمجالات المحافظة

سبق أن ذكرنا أن القوى المحافظة هي التي تحقق العلاقة $U_2 - U_1 = -\int_1^2 \underline{F}.d\underline{r}$ و نلاحظ أن الشغل المبذول بمثل هذه القوة في ازاحة جسيم من الموضع 1 إلى الموضع 2 لا يعتمد على نوع المسار ولكن فقط على موضعي البداية والنهاية

فإذا أعتبرنا $d\underline{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$ ، $\underline{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k}$ فإن

$$dU = -\underline{F}.d\underline{r} = -\ F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

وحيث أن

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

وبمقانة العلاقتين الأخيرتين نجد أن

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

وعندما تحقق القوة $\underline{F}$ العلاقة الأخيرة فإنه يكون $\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \underline{0}$ حيث $\underline{\nabla} \wedge \underline{F}$ يسمى دوران القوة و يتعين من

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \underline{0}$$

و هذا هو الشرط الضروري والكافي لكي يكون مجال القوة محافظاً.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

اوجـــد الشـــغل الـــذي تبذلـــه القـــوة $\underline{F} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ لازاحـــة جســـيم الازاحـــة $\underline{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$.

الحـــــــل

الشغل المبذول W و الذي تبذله القوة $\underline{F}$ لازاحة جسيم الازاحة $\underline{r}$ يتعين من

$$W = \underline{F}.\underline{r} = \ 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}\ .\ 3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}\ = 6 - 2 + 5 = 9$$

مثـــ ٢ ـــال

اثبت أن مجال القـــوة $\underline{F} = (y^2z^3 - 6xz^2)\hat{i} + 2xyz^3\,\hat{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\hat{k}$ محـــافظ وأوجد دالة الجهد.

الحـــــــل

نعلم أن الشرط الضروري والكافي لكي يكون مجال القوة محافظاً هو $\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \underline{0}$ ومن ثم

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 - 6xz^2 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 - 6x^2z \end{vmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{aligned} = &\left\{\frac{\partial}{\partial y}\ 3xy^2z^2 - 6x^2z\ - \frac{\partial}{\partial z}\ 2xyz^3\ \right\}\hat{i} + \\ &\left\{\frac{\partial}{\partial z}\ y^2z^3 - 6xz^2\ - \frac{\partial}{\partial x}\ 3xy^2z^2 - 6x^2z\ \right\}\hat{j} + \\ &\left\{\frac{\partial}{\partial x}\ 2xyz^3\ - \frac{\partial}{\partial y}\ y^2z^3 - 6xz^2\ \right\}\hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \wedge \underline{F} = (6xyz^2 - 6xyz^2)\hat{i} + (3y^2z^2 - 12xz - 3y^2z^2 + 12xz)\hat{j} \\ + (2yz^3 - 2yz^3)\hat{k} = \underline{0} \end{aligned}$$

أي أن مجال القوة محافظ.لإيجاد دالة الجهد وحيث أن القوة محافظة ومن ثم تتحقق العلاقـــات التالية

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

أي أن

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -(y^2z^3 - 6xz^2),$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -2xyz^3,$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = -(3xy^2z^2 - 6x^2z)$$

بتكامل المعادلات الثلاث السابقة بالنسبة إلى x – مع بقاء y, z ثابتين – ، بالنسبة إلي y – مع بقاء x, z ثابتين – ، بالنسبة إلى z – مع بقاء x, y ثابتين – على الترتيب نجد أن

$$U = 3x^2z^2 - xy^2z^3 + f_1(y,z),$$
$$U = -xy^2z^3 + f_2(x,z),$$
$$U = 3x^2z^2 - xy^2z^3 + f_3(x,y)$$

حيث $f_1(y,z), f_2(x,z), f_3(x,y)$ ثوابت التكامل وبمقارنة المعادلات الثلاث نحصل على

$$f_1(y,z) = c, \quad f_2(x,z) = 3x^2z^2 + c, \quad f_3(x,y) = c$$

وبالتالي فإن طاقة الجهد تتعين من $U = 3x^2z^2 - xy^2z^3 + c$ و يمكن اختيار الثابت c يساوي الصفر فإن

$$U = 3x^2z^2 - xy^2z^3$$

(في هذا المثال أوجد الشغل المبذول لتحريك الجسيم من الموضع $A(-2,1,3)$ إلى الموضع $B(1,-2,-1)$)

$$W_{1\to 2} = U_1 - U_2 = U(-2,1,3) - U(1,-2,-1)$$
$$= 3(-2)^2(3)^2 - (-2)(1)^2(3)^3 - 3(1)^2(-1)^2 - (1)(-2)^2(-1)^3 = 155$$

مثال ٣

جسيم كتلته $2m^2$ يتحرك على المحور OX (في خط مستقيم) تحت تأثير قوة محافظة. إذا كان الجسيم عند الموضعين x_1, x_2 عند اللحظتين t_1, t_2 على الترتيب و أن $U(x)$ هي طاقة الجهد و أن E هي الطاقة الكلية فاثبت أن $t_2 - t_1 = m\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$.

الحـــــــل

نعلم أن الطاقة الكلية E هو مجموع طاقتي الحركة T والوضع $U(x)$ وهو مقدار ثابـــت ، أي أن

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$$

ولكن $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ ومنها

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) \quad \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\ E - U(x) \quad \text{Or}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U(x)}$$

بفصل المتغيرات

$$\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\,dt$$

باجراء التكامل بين الموضعين x_1, x_2 المناظرين للحظتين t_1, t_2 نحصل على

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \qquad \Rightarrow t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

وهو المطلوب اثباته.

مثـــ ٤ ـــال

في المثال السابق إذا كانت طاقة الجهد تعطى بالعلاقة $U(x) = \frac{1}{2}mk^2x^2$ وأن الجسيم بـــدأ الحركة من السكون من الموضع $x = a$ فاثبت أن $x = a\cos kt$.

الحـــــــل

حيث أن الجسيم بدأ الحركة من السكون من الموضع $x = a$ فإن الطاقة الكلية تعين من

$$E = T + U(x = a) = \frac{1}{2}m(0)^2 + \frac{1}{2}mk^2a^2 = \frac{1}{2}mk^2a^2$$

بتكامل المعادلة $dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$ بين الموضعين (موضع البداية a وموضع عـــام x المناظرين للزمنين $t = 0$ والزمن t على الترتيب)

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}=\int_0^t dt \quad \Rightarrow \sqrt{\frac{m}{2}}\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2}mk^2a^2-\frac{1}{2}mk^2x^2}}=\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k}\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=t\Big|_0^t=t$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)-\underbrace{\sin^{-1}\left(\frac{a}{a}\right)}_{\pi/2}=kt$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)=kt+\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \frac{x}{a}=\sin\left(kt+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x=a\cos\ kt$$

لاحظ أن $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

مثـــ ٥ ـــال

يتحرك جسيم كتلته m في المستوى XY بحيث أن متجه موضعه يتعين من $\underline{r}=a\cos\omega t\,\hat{i}+b\sin\omega t\,\hat{j}$ حيث a,b,ω ثوابت أثبت أن القوة المؤثرة على الجسيم محافظة و أوجد طاقة الجهد و طاقة الحركة عند أي موضع و تحقق من مبدأ ثبوت الطاقة.

الحـــــــل

$$\because\ \underline{r}=a\cos\omega t\,\hat{i}+b\sin\omega t\,\hat{j}\ =x\,\hat{i}+y\,\hat{j}$$

$$\Rightarrow \underline{v}=\frac{d\underline{r}}{dt}=-a\omega\sin\omega t\,\hat{i}+b\omega\cos\omega t\,\hat{j} \qquad \text{and}$$

$$\underline{a}=\frac{d\underline{v}}{dt}=-a\omega^2\cos\omega t\,\hat{i}-b\omega^2\sin\omega t\,\hat{j}=-\omega^2(x\,\hat{i}+y\,\hat{j})$$

وحيث أن القوة المؤثرة على الجسم تتعين من

$$\underline{F}=m\underline{a}=-m\omega^2\ \ x\,\hat{i}+y\,\hat{j}$$

يكون مجال القوة محافظاً إذا تحقق $\underline{0}=\underline{F}\wedge\underline{\nabla}$ ومن ثم

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{F} = -m\omega^2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \underline{0}$$

وبالتالي فإن مجال القوة محافظ. لإيجاد طاقة الجهد نستخدم العلاقة $\underline{F} = -\underline{\nabla} U$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = m\omega^2 x, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = m\omega^2 y, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

بتكامل العلاقات الثلاث السابقة بالنسبة إلى x – مع بقاء y, z ثابتين – ، بالنسبة إلى y – مع بقاء x, z ثابتين – ، بالنسبة إلى z – مع بقاء x, y ثابتين – على الترتيب نجد أن

$$U = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + f_1(y, z),$$
$$U = \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 + f_2(x, z),$$
$$U = f_3(x, y)$$

حيث $f_1(y,z), f_2(x,z), f_3(x,y)$ ثوابت التكامل وبمقارنة المعادلات الثلاث نحصل على

$$f_1(y, z) = \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 c,$$
$$f_2(x, z) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + c,$$
$$f_3(x, y) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 + c$$

وبالتالي فإن طاقة الجهد تتعين من $U = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 + c$ و يمكن اختيار الثابت c يساوي الصفر فإن

$$U = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 \quad x^2 + y^2$$

طاقة الحركة تتعين من – حيث $\underline{v} = -a\omega \sin \omega t\, \hat{i} + b\omega \cos \omega t\, \hat{j}$ –

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 \quad a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t$$

وللتحقق من مبدأ ثبوت الطاقة

$$
\begin{aligned}
E = T + U &= \frac{1}{2} m\omega^2 \;\; a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t \;\; + \frac{1}{2} m\omega^2 \;\; a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t \\
&= \frac{1}{2} m\omega^2 (a^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) + b^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)) \\
&= \frac{1}{2} m\omega^2 (a^2 + b^2) = \text{Constant}
\end{aligned}
$$

■ مســـــائل Problems ■

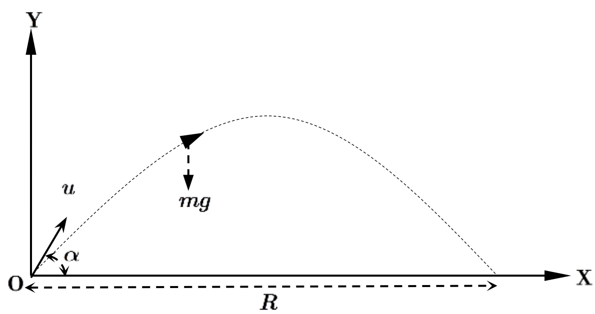
حركة المقذوفـــات

Projectiles Motion

تُعتبر حركة المقذوفات من اهم التطبيقات على الحركة المستوية للنقطة المادية (الجسيم). مـــن المعلوم أن المقذوفات تتعرض اثناء حركتها لجذب الأرض وكذلك مقاومـــة الهـــواء وبدايـــةً سنهمل مقاومة الهواء وسنعتبر أيضاً أن عجلة الجاذبية ثابتة في المقدار خلال حركة المقـــذوف وذلك للحصول على صورةٍ تقريبيةٍ لحركة المقذوف والتي بدورها تلقي ضوءاً لا بأس به على الحركة الحقيقية . وتُستخدم الاحداثيات الكارتيزية عادةً لدراسة هذا النوع مـــن الحركـــة– حيث نستخدم محورين متعامدين ثابتين هما غالباً OX, OY – على أن تُستكمل دراسة حركة المقذوفات مع الأخذ في الاعتبار مقاومة الهواء لاحقاً – إن شاء الله تعالى.

■ معادلات الحركة Equations of Motion

نعتبر الآن حركة مقذوف قُذف من نقطة O بسرعة مقدارها u وفي اتجاه يصنع زاوية α مع المحور الأفقي. كما ذكرنا آنفاً ستحرك الجسيم تحت تأثي قوة الوزن فقط (مقاومـــة الهـــواء أُهملت) وهي – كما نعلم – قوة رأسية إلى أسفل. من الواضح أم مسار المقذوف واقـــع في مستوى رأسي لذلك من المناسب استعمال الاحداثيات الكارتيزية – كما ذكرنـــا ســـالفاً – ولتكن نقطة الأصل هي نقطة القذف O . نفرض أن الجسيم يصل إلى سطح الأرض عنـــد النقطة A بعد زمن ما ومن ثم سنأخذ المحور OX في اتجاه OA والمحـــور OY هـــو المحـــور العمودي على OX في مستوى الحركة كما هو موضح بالشكل.



نفرض أن المقذوف بعد زمن t كان يشغل الموضع P والذي احداثياته (x, y)
ومن ثم بكتابة قانون نيوتن الأساسي في الاتجاهين الأفقي والرأسي يكون:

$$m\ddot{x} = 0 \qquad \text{and} \qquad m\ddot{y} = -mg \qquad (1)$$

بالقسمة على m وتكامل جزئي (1) المعادلة بالنسبة للزمن نحصل على

$$\dot{x} = c_1 \qquad \text{and} \qquad \dot{y} = c_2 - gt \qquad (2)$$

حيث c_1, c_2 ثابتا التكامل واللذان يمكن تعيينهما من الشروط الأبتدائيـــة للحركـــة. عنـــد $t = 0$ يكون $\dot{x} = u\cos\alpha,\ \dot{y} = u\sin\alpha$ ومن ثم يكون $c_1 = u\cos\alpha$ و $c_2 = u\sin\alpha$
وبالتالي تأخذ المعادلة (2) الصورة الرياضية

$$\dot{x} = u\cos\alpha \qquad \text{and} \qquad \dot{y} = u\sin\alpha - gt \qquad (3)$$

مرةً أخرى بأجراء التكامل بالنسبة للزمن لشقيّ المعادلة (3) ينتج أن

$$x = (u\cos\alpha)t + c_3 \qquad \text{and} \qquad y = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + c_4 \qquad (4)$$

ايضاً الثابتان يمكن تعيينهما من الشروط الأبتدائية للحركة حيث عند $t = 0$ يكون المقذوف عند نقطة الأصل أي أن $x = 0,\ y = 0$ ومنها نجد أن $c_3, c_4 = 0$ و المعادلة (4) تصبح

$$x = (u\cos\alpha)t \qquad \text{and} \qquad y = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (5)$$

وبذلك نكون قد أوجدنا مركبتا سرعة المقذوف عند أي لحظة زمنية من جزئي المعادلـــة (3) وأيضاً موضع المقذوف يتعين عند أي لحظة من جزئي المعادلة (5) ونلاحظ من الشق الأول من المعادلة (3) نجد أن المركبة الأفقية للسرعة $\dot{x}$ دائماً ثابتة و تساوي $u\cos\alpha$ أمـــا المركبـــة الرأسية $\dot{y}$ فتعتمد على الزمن . ويُسمى جزئا المعادلة (5) بالمعـــادلتين البـــارامتريتين لمســـار القذيفة.

أهم خصائص حركة المقذوفات

■ أقصى ارتفاع للمقذوف Maximum Height

كما علمنا أن المركبة الأفقية للسرعة تظل ثابتة بينما تتناقص المركبة الرأسية حتى تنعدم عند موضع ما والذي يُمثل أقصى ارتفاع يصل إليه المقذوف ، عند أقصـــى ارتفـــاع يكـــون $\dot{y}$ وبالتعويض عن هذه القيمة في الشق الثاني من المعادلة (3) نحصل على زمن الوصول إلى اقصى ارتفاع وليكن T وهو

$$T = \frac{u \sin \alpha}{g} \tag{6}$$

ونحصل على أقصى ارتفاع Y بأن نضع $t = T$ في الجزء الثاني من المعادلة (5) أي أن أقصى ارتفاع يتعين من

$$Y = (u \sin \alpha)T - \frac{1}{2} gT^2 = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \tag{7}$$

■ زمن الطيران (التحليق) Time of flight

يُعرف زمن الطيران بأنه الزمن المنقضي بين لحظة اطلاق القذيفة وحتى لحظة مرورها بالمستوى الأفقي المار بنقطة القذف (عند النقطة A) وسنرمز له بالرمز $T^{\star}$ وحيث أنه عند النقطة A يكون $y = 0$ وبالتعويض عن هذه القيمة في الجزء الثاني من المعادلة (5) يكون

$$0 = (u \sin \alpha)t - \frac{1}{2} gt^2 \tag{8}$$

المعادلة هي معادلة من الدرجة الثانية في الزمن t وجذراها هما

$$T^{\star} = 0, \qquad T^{\star} = \frac{2u \sin \alpha}{g} \tag{9}$$

الجذر الأول $T^{\star} = 0$ عند بداية قذف الجسيم عند نقطة الأصل والجذر الثاني يُمثـــل زمـــن التحليق ومن الملاحظ من المعادلتين (6) و (9) نجد أن $T^{\star} = 2T$ وهذا يعني أن الزمن الذي يأخذه المقذوف من لحظة اطلاقه حتى وصوله الى اقصى ارتفاع يساوي زمن وصول المقذوف من أقصى ارتفاع غلى المستوى الأفقي المار بنقطة القذف.

■ مدى القذيفة على المستوى الأفقي Range

ويُقصد به طول المستقيم الواصل من نقطة القذف وحتى النقطة A (في نفس مستوى نقطة القذف) ولحساب المدى R نضع $t = T^{*}$ في الجزء الأول من المعادلة (5) ، أي أنه للحصول على صيغة رياضية للمدى على المستوى الأفقي نعوض عن الزمن بقيمة زمن التحليق في الجزء الأول من المعادلة (5) ومنها

$$R = (u\cos\alpha)T \qquad \Rightarrow R = \frac{2u^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad (10)$$

و واضح أن المدى R يبلغ أقصى قيمة له – عند قيمة معينة للسرعة – عندما $\sin 2\alpha = 1$ أي عندما $\alpha = \pi / 4$ ويكون المدى حينئذ مساوياً

$$R_{\max} = \frac{u^2}{g} \qquad (11)$$

من المعادلة (10) نلاحظ أن المدى الأفقي يمكن الحصول عليه بقيمتين لزاوية القـــذف همـــا $(\alpha, \pi / 2 - \alpha)$ وذلك لأن $\sin 2\alpha = \sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

■ معادلة المسار لمقذوف Path Equation

بحذف البارامتر t بين جزئي المعادلة (5) نحصل على ما يُعرف بمعادلة المسار الكارتيزيـــة في الصورة الرياضية

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} \qquad (12)$$

و يتضح من المعادلة السابقة أنه لقيمة معينة للسرعة توجد زاويتان لإصابة الهدف.

ايضاً يمكن وضع المعادلة (12) في الصورة

$$y - \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{-g}{2u^2\cos^2\alpha}\left(x - \frac{u^2\sin 2\alpha}{2g}\right)^2$$

ومنها نلاحظ أن مسار القذيفة هو قطع مكافئ رأســه النقطــة $\left(\dfrac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}, \dfrac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}\right)$

ومحوره رأسي إلى أسفل وطول وتره البؤري العمودي يساوي $\dfrac{g}{2u^2 \cos^2 \alpha}$

■ مدى القذيفة على مستوى مائل **Inclined Range**

لإيجاد مدى القذيفة على مستوى مائل. نفرض أن الجسيم قُذف من نقطــة O بســرعة u وزاوية قذف α مع الأفقي أعلى مستوى مائل– يميل على الأفقي بزاوية φ – كما بالشكل وأن اتجاه القذف يقع في المستوى الرأسي المار بخط أكبر ميل للمستوى المائــل ، نفــرض أن الجسيم يصطدم بالمستوى المائل عند النقطة M ولتكن احداثياتها (x, y) . فإذا كان $R^\star$ هو المدى على المستوى المائل – المطلوب تعيينه – فإن

$$x = R^\star \cos\varphi, \qquad y = R^\star \sin\varphi$$

ونعلم أن هذين الاحداثيين يحققان معادلة المسار (12) وعلى ذلك وبالتعويض في معادلة المسار ينتج أن

$$R^\star \sin\varphi = R^\star \cos\varphi \tan\alpha - \frac{gR^{\star 2} \cos^2\varphi}{2u^2} \sec^2\alpha$$

ومن هذه المعادلة إما $R^\star = 0$ وهو مناظر لنقطة الأصل أو

$$R^\star = \frac{2u^2}{g} \ \cos\varphi \tan\alpha - \sin\varphi \ \cos^2\alpha \sec^2\varphi$$

$$= \frac{2u^2 \cos\alpha}{g \cos^2\varphi} \ \cos\varphi \sin\alpha - \sin\varphi \cos\alpha \ = \frac{2u^2 \cos\alpha}{g \cos^2\varphi} \sin(\alpha - \varphi) \qquad (13)$$

هذه المعادلة تُعطي المدى لقذيفة على مستوى مائل. كما يتضح من المعادلة أيضاً أن أقصــى مدى على المستوى المائل (بزاوية φ) يحدث عندما تكون $\cos\alpha \sin(\alpha - \varphi)$ أكبر ما يمكن وحيث أنه من المعلوم من حساب المثلثات

$$2\cos\alpha \sin(\alpha - \varphi) = \sin(2\alpha - \varphi) - \sin\varphi$$

وعلى هذا فإن اقصى مدي على المســتوى المائــل يمكــن الحصــول عليــه هــو عنــدما $\sin(2\alpha - \varphi) = 1$ أي عندما

$$2\alpha - \varphi = \frac{\pi}{2} \qquad \text{Or} \qquad \alpha - \varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\text{Or} \quad \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \qquad \text{Or} \qquad \alpha = \varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tag{14}$$

أي أننا نحصل على أقصى مدى على المستوى المائل عندما ينصف اتجاه القذف الزاويـــة بـــين الراسي والمستوى المائل ويكون اقصى مدى هو

$$R^{\star}_{\max} = \frac{u^2}{g\cos^2\varphi} \; 1 - \sin\varphi \; = \frac{u^2}{g(1+\sin\varphi)} \tag{15}$$

ونلاحظ أنه بوضع $\varphi = 0$ في المعادلتين (14) ، (15) نحصل على النتائج المنـــاظرة في حالـــة المستوى الأفقي. تنبيه للحصول على المدى لمستوى مائل لأسفل نضع $-\varphi$ بدلا من φ.

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثــ ١ ــال

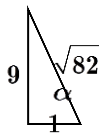
رصدت حركة مقذوف فوجد أن اقصى ارتفاع له فوق المستوى الأفقي المار بنقطة القذف هو 900 ft و أن مداه على المستوى الأفقي 400 ft عيّن سرعة القذف مقداراً واتجاهاً.

الحـــــــل

حيث أن اقصى ارتفاع والمدى يعينان من المعادلتين

$$Y = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \qquad R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$$

ومنها بالتعويض بالقيم المعطاة



$$900 = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \qquad 400 = \frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

بقسمة المعادلتين نحصل على

$$\frac{9}{4} = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \Big/ \frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{\tan \alpha}{4} \quad \therefore \tan \alpha = 9$$

وهي اتجاه سرعة القذف ومقدار السرعة يتعين بالتعويض في أي من المعادلتين ويكون

$$900 = \frac{u^2}{2g} \times \frac{81}{82} \Rightarrow u^2 = \frac{1800 \times 82 \times 32.2}{81} \quad \text{Or} \quad u \cong 242.23 \quad (g = 32.2 \text{ ft sec}^{-2})$$

حيث أن $\tan \alpha = 9$ فإن $\sin \alpha = \frac{9}{\sqrt{82}}$ كما بالشكل.

مثــ ٢ ــال

قذف جسيم من نقطة بسرعة ابتدائية مقدارها $3\sqrt{gh}$ لتصيب هدفاً عنــد النقطــة $(3h, h)$ بالنسبة إلى محورين متعامدين مارين بنقطة القــذف. أوجــد زاويــتي القــذف الممكنــتين لإصابةالهدف.

الحـــــل

حيث أن الهدف عند النقطة $(3h, h)$ ومن ثم فهذه النقطة تحقق معادلة المسار أي أن

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

$$\therefore h = 3h\tan\alpha - \frac{g(3h)^2}{2(9\,gh)\cos^2\alpha} \quad \text{Or} \quad 1 = 3\tan\alpha - \frac{1}{2\cos^2\alpha}$$

$$2 = 6\tan\alpha - \sec^2\alpha \Rightarrow 2 = 6\tan\alpha - (1+\tan^2\alpha) \quad \therefore \tan^2\alpha - 6\tan\alpha + 3 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في $\tan\alpha$ وجذراها هما

$$\tan\alpha = \frac{6 \pm \sqrt{36-12}}{2} = 3 \pm \sqrt{6} \quad \text{i.e.} \quad \tan\alpha_1 = 3+\sqrt{6}, \quad \tan\alpha_2 = 3-\sqrt{6}$$

وهما الزاويتان الممكنتان لإصابة الهدف.

مثـــ ٣ ـــال

إذا كان T هو زمن وصول قذيفة إلى نقطة P على مسارها وكان T' هو زمن وصولها من تلك النقطة إلى المستوى الأفقي المار بنقطة القذف أوجد ارتفاع النقطة P عن المستوى الأفقي للقذف.

الحـــــــــل

حيث أن زمن الطيران هو الزمن من لحظة انطلاق القذيفة وحتى وصولها الى المستوى الأفقي المار بنقطة القذف وكما رأينا فإن

$$\text{Time of Filght} = \frac{2u\sin\alpha}{g} = T + T' \qquad \therefore u\sin\alpha = \frac{1}{2}g \;\; T + T'$$

ولحساب ارتفاع النقطة P حيث $y = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$ ولذلك

$$y_{\mathrm{P}} = y\big|_{t=T} = (\underbrace{u\sin\alpha}_{\frac{1}{2}g(T+T')})T - \frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}g(T+T')T - \frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}gTT'$$

مثـــ ٤ ـــال

أطلقت قذيفة على هدف معين في مستوى أفقي يمر بنقطة القذف فسقطت قبل الهدف بمسافة ℓ عندما كانت زاوية القذف 15^0 وعندما قُذفت بنفس السرعة وضوعفت زاوية القـــذف سقطت بعد الهدف بمسافة ℓ . أوجد الزاوية الصحيحة لإصابة الهدف.

الحـــــــل

باعتبار أن سرعة القذف هي u وأن هو المدى الصحيح لإصابة الهدف هو R وبناءً عليه فإن المدي في الحالة الأولى هو $R-\ell$ والمدى في الحالة الثانية هو $R+\ell$ وحيث أن معادلة المدي هي

$$R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$$

في الحالة الأولى
$$R-\ell = \frac{u^2 \sin 30}{g} = \frac{u^2}{2g}$$

في الحالة الثانية
$$R+\ell = \frac{u^2 \sin 60}{g} = \frac{\sqrt{3}u^2}{2g}$$

من هاتين المعادلتين ينتج أن – بالجمع –

$$2R = \frac{u^2}{g}\frac{(1+\sqrt{3})}{2} \qquad \text{Or} \qquad R = \frac{u^2}{g}\frac{(1+\sqrt{3})}{4} \qquad (1)$$

وبفرض أن هي الزاوية الصحيحة لإصابة الهدف θ وبالتالي يكون (2) $R = \dfrac{u^2 \sin 2\theta}{g}$

وبمقارنة المعادلتين (1) و (2) نجد أن $\sin 2\theta = \dfrac{(1+\sqrt{3})}{4}$ أي أن

$$\theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$$

وهي الزاوية الصحيحة لإصابة الهدف

مثـــ ٥ ـــال

أطلقت قذيفة من نقطة الأصل فوجد أنها تمر بالموضعين $(12,0)$,$(8,2)$ على مسارها أوجـــد سرعة القذف مقداراً واتجاهاً واحسب الزمن الذي تأخذه القذيفة لتمر بالموضعين الســـابقين وسرعتها عند هذين الموضعين.

الحـــــــل

نعلم أن معادلة المسار للمقذوف هي $y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ وحيـــث أن النقطتـــان $(12,0)$,$(8,2)$ تقعان على مسار القذيفة وبالتالي فإنهما يحققان معادلة المسار أي أن

بالنسبة للنقطة $(8,2)$ فإن
$$2 = 8\tan\alpha - \frac{g(8)^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

بالنسبة للنقطة $(12,0)$ فإن
$$0 = 12\tan\alpha - \frac{g(12)^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

بضرب المعادلة الأولى في 9 والثانية في 4 والطرح نحصل على

$$18 = 24\tan\alpha \qquad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

وهي اتجاه سرعة القذف مع الأفقي و لتعيين مقدار السرعة بالتعويض في أي من المعادلتين

$$\Rightarrow 12\tan\alpha = \frac{g(12)^2}{2u^2\cos^2\alpha} \quad \therefore u^2 = \frac{g(12)^2}{24\tan\alpha\cos^2\alpha} = \frac{6g}{\frac{3}{4}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{25}{2}g$$

$$\therefore u = \sqrt{\frac{25}{2}g}$$

<u>على الدارس أن يكمل الحل</u>

مثـــ ٦ ـــال

قُذفت نقطة مادية لتمر بالموضعين $(a,b), (b,a)$ على مسارها حيث $a > b$. اثبت أن المدى على المستوى الأفقي يساوي $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ و أن زاوية القذف أكبر من $\tan^{-1}3$.

الحــــــــل

نعلم أن معادلة المسار للمقذوف هي $y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ وحيـــث أن النقطتـــان $(a,b), (b,a)$ تقعان على مسار القذيفة وبالتالي فإنهما يحققان معادلة المسار أي أن

بالنسبة للنقطة (b,a) فإن
$$a = b\tan\alpha - \frac{gb^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

بالنسبة للنقطة (a,b) فإن
$$b = a\tan\alpha - \frac{ga^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

بضرب المعادلة الأولى في a والثانية في b والطرح نحصل على

$$\underbrace{a^2-b^2}_{(a+b)\cancel{(a-b)}}=\frac{gab}{2u^2\cos^2\alpha}\cancel{(a-b)}$$

$$\text{Or}\quad a+b=\frac{gab}{2u^2\cos^2\alpha}\qquad \text{Or}\quad \frac{ab}{a+b}=\frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}$$

مرةً أخرى بضرب المعادلة الأولى في a^2 والثانية في b^2 و الطرح نحصل على

$$\underbrace{a^3-b^3}_{(a^2+ab+b^2)\cancel{(a-b)}}=ab\cancel{(a-b)}\tan\alpha\qquad\Rightarrow ab\tan\alpha=a^2+ab+b^2$$

ولكن معادلة المدي تُعطى من

$$R=\frac{u^2\sin2\alpha}{g}=\frac{2u^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}$$

$$=\underbrace{\frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}}_{ab/(a+b)}\tan\alpha=\frac{ab}{a+b}\tan\alpha=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

وهو المطلوب $\qquad \therefore R=\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$

وحيث أننا أثبتنا أن $\qquad \tan\alpha=\dfrac{a^2+ab+b^2}{ab}$

$$\therefore\tan\alpha=\frac{a^2+ab+b^2}{ab}\pm3=\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}+3=\frac{(a-b)^2}{ab}+3$$

و حيث أن المقدار $\dfrac{(a-b)^2}{ab}>0$ فإن $\tan\alpha>3$ أو $\alpha>\tan^{-1}3$

مثـــال ٧

أطلقت قذيفة بسرعة h من سطح الأرض بحيث تمر بنقطة أقصى بعد لها A في نفس المستوى الأفقي المار بنقطة القذف. اثبت أنه لكي يصيب المقذوف هدفاً على ارتفاع h فوق النقطة A بحيث أن زاوية القذف في الحالتين واحدة فإن سرهة القذف يجب أن تزيد إلى $\dfrac{u^2}{\sqrt{u^2-gh}}$.

الحـــل

واضح أن أقصى بعد حينما تكون الزاوية 45^0 ويكون المدى أي بعد النقطة A هو $R=\dfrac{u^2}{g}$

ولكي تصيب القذيفة الهدف B و الذي يقع على ارتفاع h فوق النقطة A نفترض أن السرعة أصبحت v ومن ثم يجب أن تكون النقطة $B = \left(\frac{u^2}{g}, h\right)$ تحقق معادلة المسار

$$h = \frac{u^2}{g}\tan 45 - \frac{g\ \ u^2 / g^{\ \ 2}}{2v^2\cos^2 45} \qquad \Rightarrow h = \frac{u^2}{g} - \frac{u^4}{gv^2} \quad \text{Or} \quad \frac{u^4}{gv^2} = \frac{u^2}{g} - h$$

$$\frac{u^4}{gv^2} = \frac{u^2 - gh}{g} \quad \text{Or} \quad v^2 = \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - gh}} > u$$

أي أن السرعة يجب أن تزيد إلى $\frac{u^2}{\sqrt{u^2 - gh}}$

مثـــ ٨ ـــال

قذف جسيم بسرعة $64\ \text{ft}\sec^{-1}$ وفي اتجاه يصنع زاوية 45^0 مع الأفقي أوجد المدى على مستوى يميل بزاوية 30^0 على الأفقي إذا قذف الجسيم أعلى المستوى أو أسفل المستوى.

الحـــــــل

حيث أن المدى على المستوى المائل يتعين من $- \ g = 32.2\ \text{ft}\sec^{-2}\ -$

$$R = \frac{2u^2\cos\alpha\sin(\alpha - \varphi)}{g\cos^2\varphi}$$

حيث $u = 64\ \text{ft}\sec^{-1}$ ، $\varphi = 30^0$ ، $\alpha = 45^0$ نجد أن المدى على المستوى المائل لأعلى

$$R = \frac{2(64)^2\cos 45\sin(45 - 30)}{32.2\cos^2 30} = \frac{2(64)^2}{3(32.2)}\ \ \sqrt{3} - 1\ \ \cong\ 62.08\ \text{ft}$$

ثم بالتعويض عن $\varphi = -30^0$ نحصل على المدى على المستوى المائل إلى أسفل

$$R = \frac{2(64)^2\cos 45\sin(45 + 30)}{32.2\cos^2(-30)} = \frac{2(64)^2}{3(32.2)}\ \ \sqrt{3} + 1\ \ \cong\ 231.7\ \text{ft}$$

مثـــ ٩ ـــال

إذا كانت النسبة بين مقداري سرعة جسيم مقذوف عند أقصى ارتفاع و عندما يكون على ارتفاع يساوي نصف اقصى ارتفاع هي $\sqrt{\frac{6}{7}}$ فاثبت أن زاوية القذف هي 30^0 .

الحـــــــــل

حيث أن الاحداثي الرأسي عند أي لحظة يتعين من $y = (u\sin\alpha)\, t - \frac{1}{2}gt^2$

وحيث أن أقصى ارتفاع وليكن عند النقطة A هو $Y_A = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

وعند ارتفاع يساوي نصف أقصى ارتفاع وليكن عند النقطة B هو $Y_A = \frac{u^2\sin^2\alpha}{4g}$

الزمن الذي يأخذه الجسيم من لحظة انطلاقه حتى يصل إلى النقطة B يتعين من

$$\frac{u^2\sin^2\alpha}{4g} = (u\sin\alpha)\, t - \frac{1}{2}gt^2$$

هذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$2(gt)^2 - 4(gt)u\sin\alpha + u^2\sin^2\alpha = 0 \qquad \Rightarrow gt = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)u\sin\alpha$$

مركبتا سرعة الجسيم عند النقطة B هما

$$\dot{x}_B = u\cos\alpha, \quad \dot{y}_B = u\sin\alpha - gt = u\sin\alpha - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)u\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}u\sin\alpha$$

ويكون مقدار السرعة عند B هو

$$v = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2} = \sqrt{(u\cos\alpha)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}u\sin\alpha\right)^2} = \frac{u}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos^2\alpha}$$

عند أقصى ارتفاع يكون $\dot{y}_A = 0$ ، $\dot{x}_A = u\cos\alpha$ أي أن

$$v = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2} = u\cos\alpha$$

وحيث أن $\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{6}{7}}$ وبالتالي

$$\frac{\sqrt{2}u\cos\alpha}{u\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{6}{7}} \qquad \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{3}{7}} \quad \text{Or} \quad \frac{\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha} = \frac{3}{7}$$

$$7\cos^2\alpha = 3 + 3\cos^2\alpha \qquad \Rightarrow 4\cos^2\alpha = 3 \qquad \therefore \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \alpha = 30^0$$

وهو المطلوب

مثـــــال ١٠

اطلقت كرة من نقطة على سطح الأرض تبعد مسافة a من قاعدة حائط رأسي ارتفاعـــه b إذا كانت زاوية القذف مع الافقي α والكرة مرت بحافة الحائط اثبت أن أقصـــى ارتفـــاع للكرة هو $\dfrac{a^2\tan^2\alpha}{4(a\tan\alpha-b)}$.

الحـــــــل

نفترض أن سرعة القذف هي u وحيث أن الكرة تمس الحائط ومن ثم فإن النقطة (a,b) تقع على مسار الكرة ومن ثم فهي تحقق معادلة المسار

$$b=a\tan\alpha-\frac{ga^2}{2u^2\cos^2\alpha}\qquad \text{Or}\qquad a\tan\alpha-b=\frac{ga^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

$$\therefore\ u^2=\frac{ga^2}{2(a\tan\alpha-b)\cos^2\alpha}$$

والآن أقصى ارتفاع للكرة

$$\begin{aligned}Y&=\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\\&=\frac{\sin^2\alpha}{2g}\frac{ga^2}{2(a\tan\alpha-b)\cos^2\alpha}\\&=\frac{a^2\tan^2\alpha}{4(a\tan\alpha-b)}\end{aligned}$$

■ حركة مقذوف مع اعتبار مقاومة الهواء

درسنا في الجزء السابق حركة المقذوف مع اهمال مقاومة الهواء وهي حالة مثالية حيث أنه في الواقع توجد مقاومة لحركة الجسيم المقذوف وهي مقاومة الهواء ، دعنا نفترض أن مقاومة الهواء تتناسب مع سرعة الجسيم وهي $\gamma m\underline{v}$ (حيث γm ثابت التناسب) والآن بكتابة قانون نيوتن الاساسي وبالتحليل في الاتجاهين الأفقي و الرأسي نحصل على

$$\cancel{m}\ddot{x} = -\gamma \cancel{m}\dot{x} \quad \text{and} \quad \cancel{m}\ddot{y} = -\cancel{m}g - \gamma \cancel{m}\dot{y} \qquad (1)$$

لاحظ أن $\underline{v} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$ و $\underline{a} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j}$ وبتكامل شقي المعادلة (1) بالنسبة للزمن نجد أن

$$\ln \dot{x} = c_1 - \gamma t \quad \text{and} \quad \ln\left(\dot{y} + \frac{g}{\gamma}\right) = c_2 - \gamma t \qquad (2)$$

حيث c_2, c_1 ثابتا التكامل و اللذان يمكن تعيينهما من الشروط الابتدائية للحركة وهي عند $t = 0 \dot{x} = u\cos\alpha$ يكون $\dot{y} = u\sin\alpha,\ \dot{x} = u\cos\alpha$ ومن ثم يكون $c_1 = \ln u\cos\alpha$ و $c_2 = \ln\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)$ بالتعويض عن قيمة الثابتين تأخذ المعادلة (2) الصورة

$$\dot{x} = u\cos\alpha\ e^{-\gamma t} \quad \text{and} \quad \dot{y} = \left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \qquad (3)$$

وجزئي هذه المعادلة يعينان مركبتي سرعة الجسيم عند أي لحظة زمنية. مرةً أخرى بإجراء التكامل بالنسبة للزمن لجزئي المعادلة (3) يكون

$$x = -\frac{u\cos\alpha}{\gamma}\ e^{-\gamma t} + c_3 \quad \text{and} \quad y = -\frac{1}{\gamma}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}t + c_4 \ (4)$$

ايضاً الثابتان c_4, c_3 يمكن تعيين قيمتهما من الشرط الابتدائي للحركة فعند $t = 0$ يكون المقذوف عند نقطة الأصل أي أن $x = y = 0$ ومنها نجد أن

$$c_3 = \frac{u\cos\alpha}{\gamma}, \qquad c_4 = \frac{1}{\gamma}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)$$

وتأخذ المعادلة السابقة (4) الصورة

$$x = \frac{u\cos\alpha}{\gamma}\ \ 1 - e^{-\gamma t} \quad \text{and} \quad y = \frac{1}{\gamma}\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\gamma}\right)\ 1 - e^{-\gamma t}\ \ - \frac{g}{\gamma}t \qquad (5)$$

وجزئا هذه المعادلة يعينان موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية.

و للحصول على زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع نضع $\dot{y} = 0$ في المعادلة (3) ومن ثم

$$T = \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{\gamma u \sin\alpha}{g} + 1\right) \tag{6}$$

ويتعين أقصى ارتفاع من المعادلة (5) أي أن

$$y = \frac{u\sin\alpha}{\gamma} - \frac{g}{\gamma^2}\ln\left(1 + \frac{\gamma u \sin\alpha}{g}\right)$$

زمن الطيران T' يتعين بوضع $y = 0$ في الشق الثاني من المعادلة (5)

$$T' = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\gamma u \sin\alpha}{g} + 1\right)\ 1 - e^{-\gamma T'}$$

أما معادلة المسار فتتعين بحذف البارامتر بين جزئي المعادلة وتأخذ الصورة

$$y = \frac{g}{\gamma u \cos\alpha}\left(\frac{\gamma u \sin\alpha}{g} + 1\right)x + \frac{g}{\gamma^2}\ln\left(1 - \frac{\gamma x}{u\cos\alpha}\right)$$

وأخيراً يجب أن نلاحظ أن الحركة التي سبق دراستها عند اهمال مقاومة الهواء هي حالة خاصة من هذه الحالة ويمكن الحصول على جميع النتائج والمعادلات التي سبق الحصول عليها (عند اهمال مقاومة الهواء) بجعل $\gamma \to 0$ فمثلاً للحصول على زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع نستخدم المفكوك اللوغاريتمي

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - .....$$

هذا المفكوك صحيح بشرط أن $|x| < 1$ والآن بجعل $\gamma \to 0$ في المعادلة (6) نجد أن

$$\begin{aligned} T &= \lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\gamma u \sin\alpha}{g} - \frac{\gamma^2 u^2 \sin^2\alpha}{2g^2} + \frac{\gamma^3 u^3 \sin^3\alpha}{3g} + ...\right) \\ &= \lim_{\gamma\to 0}\left(\frac{u\sin\alpha}{g} - \frac{\gamma u^2 \sin^2\alpha}{2g^2} + \frac{\gamma u^3 \sin^3\alpha}{3g} + ...\right) = \frac{u\sin\alpha}{g} \end{aligned}$$

وهو نفسه زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع والذي سبق الحصول عليه عند اهمال مقاومة الهواء (المعادلة (6)) ونترك للقارئ كتمرين الحصول على بقية النتائج في حالة اهمال مقاومة الهواء.

مثـ ١١ ـال

قذف جسيم كتلته m بسرعة u و في اتجاه يصنع زاوية α مع الأفقي في وسط مقاومته تتناسب مع السرعة حيث ثابت التناسب يساوي μm . اثبت أن اتجاه حركته يصنع زاوية مقدارها α مع الأفقي بعد مضي زمن $\frac{1}{\mu}\ln\left(1+\frac{\mu u}{g}(\sin\alpha+\cos\alpha)\right)$.

الحـــل

بكتابة معادلتي الحركة للجسيم في الاتجاهين OX,OY والتكامل واستخدام الشروط الابتدائية للحركة كما سبق أن اوضحنا بالتفصيل نحصل على مركبتي سرعة الجسيم عند أي لحظة في الصورة

$$\dot{x} = u\cos\alpha \;\; e^{-\mu t} \qquad \text{and} \qquad \dot{y} = \left(u\sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t} - \frac{g}{\mu}$$

حيث أن زاوية القذف هي α وأن الزاوية التي يصنعها اتجاه السرعة مع المحور الأفقي تتناقص حتى تنعدم عند أقصى ارتفاع ثم يعكس الجسيم اتجاه حركته لتصبح الزاوية α لأسفل. يصنع اتجاه الحركة زاوية α بعد زمن t يتعين من

$$\tan\; -\alpha \;= \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t} - \frac{g}{\mu}}{u\cos\alpha \;\; e^{-\mu t}} = -\tan\;\alpha$$

أي أن

$$\left(u\sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t} - \frac{g}{\mu} = -u\sin\alpha \;\; e^{-\mu t} \;\;\Rightarrow \left(2u\sin\alpha + \frac{g}{\mu}\right)e^{-\mu t} = \frac{g}{\mu}$$

$$\left(\frac{2\mu u\sin\alpha}{g} + 1\right) = e^{\mu t} \qquad\qquad \Rightarrow t = \frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{2\mu u\sin\alpha}{g} + 1\right)$$

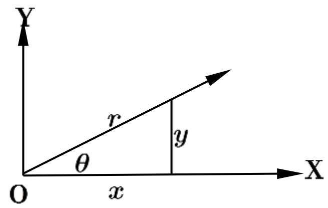
وهو المطلوب.

■ مســـــائل Problems ■

قُذف جسيم بسرعة $\underline{u} = a\,\hat{i} + b\,\hat{j}$ من نقطة A لتصطدم بسقف منزل ارتفاعــه ℓ عــن المستوى الأفقي المار بالنقطة A . فإذا كان أقصى ارتفاع للجسيم يساوي 2ℓ . فاثبــت أن سرعة الجسيم عند أصطدامه بسقف المنزل تتعين من $\underline{u}_A = a\,\hat{i} - \sqrt{b^2 - 2g\ell}\,\hat{j}$.

الحــــــركة في المستوي القطبي

Motion in Polar Co-ordinates



من المناسب في بعض المسائل استخدام احداثيات أخرى غير الاحداثيات الكارتيزية ومن هذه الاحداثيات هي الاحداثيات القطبية.العلاقة بين الاحداثيات القطبيـــة والكارتيزية كما بالهمدسة تتعبن من

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

■ السرعة الزاوية و العجلة الزاوية Angular Velocity and Acceleration

نعتبر جسيم يتحرك في مستوى ، وأن O نقطة ثابتة فيه (تسمى القطب) وكذلك مســـتقيم OX ثابت في المستوى. عند اللحظة الزمنية t يكون موضع الجسيم عند النقطة P حيـــث OP يصنع زاوية θ مع الخط الثابت OX. الزاوية θ تسمى الازاحة الزاوية للجسيم عند هذه اللحظة وبعد مرور زمن صغير δt نفرض أن الجسيم عند الموضع Q حيث OQ يصنع زاوية $\theta + \delta\theta$ مع الخط الثابت ، أي أن الجسيم أُزيح ازاحة زاوية $\delta\theta$ في زمن δt ومن ثم تكون السرعة الزاوية المتوسطة للجسيم حول O مساوية $\dfrac{\delta\theta}{\delta t}$ وعندما تؤول δt إلى الصفر فإننا نحصل على السرعة الزاوية $\dot{\theta}$ ونرمز لها (عادةً) بالرمز ω أي أن

$$\text{Angular Velocity} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

و تعرف السرعة الزاوية للجسيم حول O بأنها معدل تغير الازاحة الزاوية بالنســـبة للـــزمن وايضاً فإن العجلة الزاوية للجسيم حول O هي معدل تغـــير الســـرعة الزاويـــة بالنســـبة للزمن أي أن

$$\text{Angular acceleration} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\dot{\theta}}{\delta t} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$

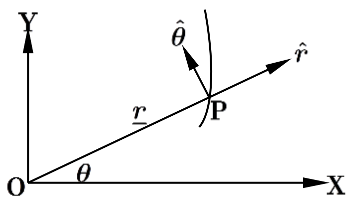
■ سرعة و عجلة الجسيم في الاحداثيات القطبية

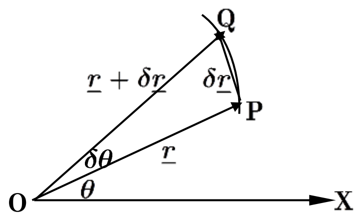
تستعمل هذه الاحداثيات في التحليل لدراسة حركة مستوية عندما تنشأ عجلة الجسيم من مركز أو قطب ثابت ويُختار هذا القطب ليكون هو النقطة الثابتة.

من الاحداثيات القطبية يتعين موضع الجسيم عند نقطة ما P بدلالة (r,θ) حيث r هو بعد الجسيم عن نقطة ثابتة O $\underline{r} = \text{OP}$ ، θ هي الزاوية التى يصنعها r مع مستقيم ثابت OX ويلاحظ أن اتجاهي التحليل في هذه الحالة ليسا ثابتين كما كان الحال في الاحداثيات الكارتيزية بل يدوران مع حركة الجسيم. والعلاقة بين الاحداثيات الكارتيزية (x,y) والاحداثيات القطبية (r,θ) من الهندسة هي

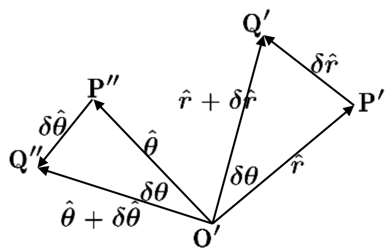
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

نفرض أن $\hat{r}$ هو متجه وحدة في اتجاه تزايد $\underline{r}$ ، وأن $\hat{\theta}$ هو متجه وحدة في الاتجاه العمودي على $\underline{r}$ – في اتجاه تزايد θ كما بالشكل





وبعد فترة زمنية صغيرة δt يصبح الجسيم عند النقطة Q حيث $\underline{\text{OQ}} = \underline{r} + \delta\underline{r}$ و يصنع زاوية $\theta + \delta\theta$ مع المحور الثابت OX و أن متجي الوحدة عند Q في اتجاهي تزايد r,θ هما على الترتيب $\underline{r} + \delta\underline{r},\ \theta + \delta\theta$ وحيث أن $\delta\theta$ زاوية صغيرة فإن



$$\text{P'Q'} = \left|\delta\hat{r}\right| = \text{O}'\text{P}' \cdot \delta\theta = \delta\theta$$
$$\text{P}''\text{Q}'' = \left|\delta\hat{\theta}\right| = \text{O}'\text{P}'' \cdot \delta\theta = \delta\theta$$

وذلك لأن $\mathbf{O'P'} = |\hat{r}| = 1,\ \mathbf{O'P''} = |\hat{\theta}| = 1$ وعندما $\delta\theta \to 0$ فإن $\delta\hat{r}$ يصبح في اتجاه $\hat{\theta}$ وكذلك $\delta\hat{\theta}$ يصبح في اتجاه $-\hat{r}$ أي أن

$$\lim_{\delta\theta\to 0}\frac{\delta\hat{r}}{\delta\theta} = \frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}, \qquad \lim_{\delta\theta\to 0}\frac{\delta\hat{\theta}}{\delta\theta} = \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r} \quad (\star)$$

وحيث أن متجه موضع الجسيم عند النقطة P هو $\underline{r} = r\,\hat{r}$ ولإيجاد سرعة الجسيم عند الموضع P بتفاضل العلاقة $\underline{r} = r\,\hat{r}$ بالنسبة للزمن فنحصل على

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{r}\,\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{r}\,\hat{r} + r\underbrace{\frac{d\hat{r}}{d\theta}}_{\hat{\theta}}\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\dot{\theta}} \qquad (1)$$

ولكن من المعادلة $(\star)$ حيث $\dfrac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}$ ، $\dfrac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta},$ وبالتعويض من تلك العلاقة في المعادلة (1) نجد أن

$$\underline{v} = \underbrace{\dot{r}\,\hat{r}}_{v_r} + \underbrace{r\dot{\theta}\,\hat{\theta}}_{v_\theta}$$

من هذه المعادلة يتضح أن متجه السرعة له مركبتين الأولى v_r في اتجاه تزايد r وتساوي $\dot{r}$ ، والمركبة الثانية v_θ عمودية على المركبة الأولى وفي اتجاه تزايد الزاوية θ وقيمتها $r\dot{\theta}$ كما بالشكل. كما أن مقدار السرعة عند أي لحظة يتعين من

$$v = |\underline{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2}$$

و اتجاه السرعة هو اتجاه المماس لمنحنى المسار عند P ويصنع زاوية φ مع $\underline{r}$ حيث ويصنع متجه السرعة زاوية ψ مع $\underline{r}$ حيث

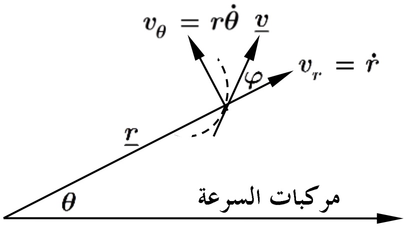
$$\tan\varphi = \frac{v_\theta}{v_r} = \frac{r\dot{\theta}}{\dot{r}}$$

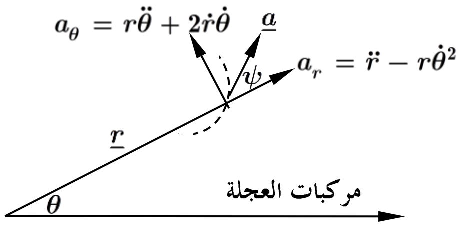
و الآن لايجاد متجه عجلة الجسيم في الاحداثيات القطبية عند أي لحظة نشتق المعادلة بالنسبة للزمن فنحصل على

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\,\frac{d\hat{r}}{dt} + r\ddot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\dot{\theta}\,\frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

$$= \underbrace{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)}_{a_r}\hat{r} + \underbrace{\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)}_{a_\theta}\hat{\theta}$$

وهذه المعادلة تُعطي عجلة الجسيم عند أي لحظة ويتضح أن متجه العجلة له مركبتـــان الأولى a_r في اتجاه تزايد r وتساوي $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ ، والثانية a_θ عمودية على المركبة الأولى وفي اتجاه تزايد الزاوية وقيمتها $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ كما بالشكل.





■ <u>انتبه</u> المركبة الثانية للعجلة a_θ يمكن كتابتها في الصورة $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)$ و ذلك لأن

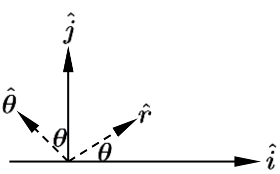
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}\right) = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

ومقدار العجلة يـــتعين مـــن $a = \left|\underline{a}\right| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)^2}$

ويصنع متجه العجلة زاوية ψ مع $\underline{r}$ حيث $\tan\psi = \frac{a_\theta}{a_r} = \frac{r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}}{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2}$

ويمكن اثبات أن $\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}$, $\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}$ بطريقة أخرى أبسط كالآتي

من الشكل المجاور وبتحليل متجهي الوحدة $\hat{r}, \hat{\theta}$ في الاتجاهين $\hat{i}, \hat{j}$ نجد أن



$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} \tag{2}$$

(انتبه إلى أن) وكما ذكرنا آنفاً فإن $\hat{i}, \hat{j}$ متجها وحدة ثابتان مقداراً واتجاهاً وبتفاضل شـــقي المعادلة (2) السابقة بالنسبة للمتغير θ نحصل على

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} = \hat{\theta}, \quad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\ \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}\ = -\hat{r}$$

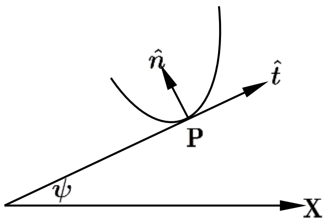
■ <u>حالة خاصة</u>: واضح أن الجسيم إذا تحرك على محيط دائرة نصف قطرها ℓ أي أن $r = \ell$ ويكون $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ ومن ثم تتعين سرعة الجسيم من العلاقة $\underline{v} = \ell\dot{\theta}\,\hat{\theta}$ أي يكـــون متجـــه السرعة في الاتجاه العمودي على المماس للدائرة عند الجسيم وأيضاً فإن عجلة الجسيم تـــتعين عند أي لحظة من $\underline{a} = -\ell\dot{\theta}^2\,\hat{r} + \ell\ddot{\theta}\,\hat{\theta}$.

الاحداثيات الذاتية (الطبيعية) Intrinsic Coordinates

إذا تحرك جسيم في مستوى حركة مقيدة بمسار معين كانزلاق حلقة على سلك منحنى ثابت الشكل والوضع كانت الاتجاهات الطبيعية للتحليل هي اتجاه المماس لمنحنى المسار والعمودي عليه ويعرفان بالاحداثيات الطبيعية

ناخذ نقطة ثابتة ولتكن O على المنحنى الطبيعي ومن ثم يتم تحديد موضع النقطة P (أية نقطة على المنحنى) بطول القوس $S = \mathrm{OP}$ بين النقطة الثابتة O والنقطة P وكذلك بمعرفة الزاوية ψ و التي يصنعها المماس للمنحنى عند النقطة P مع الاتجاه الافقي OX ومن ثم فإن احداثيات النقطة P هي (S,ψ) والتي تعرف بالاحداثيات الذاتية و عندما تتحرك النقطة P على المنحنى فإن S تتغير مع ψ و العلاقة التي تربط هذا التغير $S = S(\psi)$ هي و تُسمى هذه المعادلة بالمعادلة الذاتية للمسار . أيضاً $\rho = \dfrac{dS}{d\psi}$ حيث ρ يُسمى نصف قطر التقوس أو الانحناء عند النقطة P أما $\dfrac{d\psi}{dS}$ يُسمى الانحناء للمنحنى عند النقطة P .

■ سرعة وعجلة الجسيم في الاحداثيات الذاتية



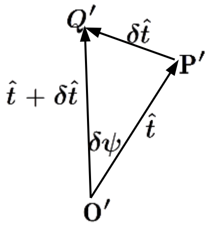
إذا كانت النقطة P نقطة متحركة على المنحنى حيث احداثياها (S,ψ) و بأخذ $\hat{t}$ متجه وحدة في اتجاه المماس للمنحنى عند النقطة P ، $\hat{n}$ متجه وحدة في اتجاه عمودي على المماس للمنحنى عند هذه النقطة – أي في اتجاه نصف قطر الانحناء –

واضح أنه حينما تتحرك النقطة P فإن متجهي الوحدة سيتغيران في الاتجاه من لحظة إلى اخرى – وهذا يعني أهما دوال في الزمن t (مع ثبوت أطوالهما الوحدة) –.

نفرض أن $\hat{n}, \hat{t}$ هما متجها وحدة في اتجاهي المماس لمنحنى المسار و العمودي عليه في اتجاه تزايد ψ. وبعد فترة زمنية صغيرة δt يصبح الجسيم عند الموضع Q حيث متجهي الوحدة في اتجاهي المماس والعمودي عليه يصبحان $\hat{n}+\delta\hat{n}, \hat{t}+\delta\hat{t}$ حيث المماسين عند Q, P يصنعان زاويتين $\psi+\delta\psi, \psi$ مع الخط الأفقي الثابت. نرسم $\hat{t}+\delta\hat{t}, \hat{t}$ المتجهين من نقطة

اصـــــل O' كمـــــا بالشـــــكل و حيــــث أن $\delta\psi$ زاويـــــة صـــــغيرة فـــــإن $P'Q' = \left|\delta\hat{t}\right| = O'P'\,\delta\psi = \delta\psi$ حيث $O'P' = \left|\hat{t}\right| = 1$ وعندما تؤول $\delta\psi$ إلى الصفر أي أن $\delta\psi \to 0$ فإن $\delta\hat{t}$ يصبح في اتجاه العمودي $\hat{n}$ أي أن

$$\lim_{\delta\psi \to 0} \frac{\delta\hat{t}}{\delta\psi} = \frac{d\hat{t}}{d\psi} = \hat{n}$$



وحيث أن سرعة الجسيم دائماً تكون في اتجاه المماس للمـــنحنى S وقيمتها $v = \left|\underline{v}\right| = \dot{S}$ و عليه فإن متجه الســـرعة في الاحـــداثيات الذاتية هو

$$\underline{v} = \dot{S}\,\hat{t}$$

وبتفاضل تلك العلاقة بالنسبة للزمن نحصل على متجة العجلة

$$\underline{a} = \frac{d^2S}{dt^2}\hat{t} + \frac{dS}{dt}\frac{d\hat{t}}{dt}, \qquad \because \frac{d\hat{t}}{dt} = \underbrace{\frac{d\hat{t}}{d\psi}}_{\hat{n}}\frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}\hat{n} \qquad \Rightarrow \underline{a} = \frac{d^2S}{dt^2}\hat{t} + \frac{dS}{dt}\frac{d\psi}{dt}\hat{n}$$

أو

$$\underline{a} = \ddot{S}\hat{t} + \dot{S}\dot{\psi}\hat{n} \quad \text{Or} \quad \underline{a} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n} \quad \text{Or} \quad \underline{a} = \underbrace{v\frac{dv}{dS}\hat{t}}_{a_t} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\hat{n}}_{a_n}$$

لاحظ أن

$$\frac{dS}{dt}\frac{d\psi}{dt} = \dot{S}\frac{d\psi}{dS}\underbrace{\frac{dS}{dt}}_{\dot{S}} = \dot{S}^2\frac{d\psi}{dS} = \frac{\dot{S}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}$$

أي أن متجة العجلة في الاحداثيات الذاتية لها مركبتان إحداهما a_t في اتجاه المماس ومقدارها $\frac{dv}{dt}$ ، والثانية a_n في الاتجاه العمودي على المماس – في اتجـــاه نصـــف قطـــر الانحنـــاء – ومقدارها $\frac{v^2}{\rho}$ ومقدار متجه العجلة يتعين من

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

يتحرك جسيم حركة مستوية بحيث كانت مركبتا سرعته في الاتجاهين ثابتتين. اثبت أن العجلة تتناسب عكسياً مع نصف قطر المتجه r.

الحـــــــل

حيث أن مركبتي السرعة ثابتتين فإن $\dot{r} = A$ و $r\dot{\theta} = B$ حيث A, B ثـــابتين وبالتفاضـــل بالنسبة للزمن نجد أن

$$\dot{r} = A \quad \Rightarrow \ddot{r} = 0 \qquad \text{و} \qquad r\dot{\theta} = B \quad \Rightarrow r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta} = 0$$

$$\because a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad \Rightarrow \qquad a_r = 0 - \frac{B^2}{r} = -\frac{B^2}{r}$$

وايضاً

$$\because a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad a_\theta = \underbrace{r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}}_{0} + \dot{r}\dot{\theta} = \frac{AB}{r}$$

وحيث أن مقدار العجلة يتعين من

$$\begin{aligned} |\underline{a}| &= \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{\frac{B^4}{r^2} + \frac{A^2B^2}{r^2}} \\ &= \sqrt{\frac{B^4 + A^2B^2}{r^2}} = \frac{C}{r}, \qquad C = \sqrt{B^4 + A^2B^2} \end{aligned}$$

وهذه العلاقة تعنى أن العجلة تتناسب عكسياً مع r أي أن $a \propto \dfrac{1}{r}$

مثـــ ٢ ـــال

يتحرك جسيم على منحنى معادلته القطبية $r = 2\cos\theta$ بحيث أن عجلته تتجه دائماً نحو قطب الاحداثيات. اثبت أن سرعته تتناسب عكسياً مع مربع بعده عن القطب.

الحـــــــل

حيث أن $r = 2\cos\theta$ وبالتفاضل بالنسبة للزمن يكون

$$r = 2\cos\theta \quad \Rightarrow \dot{r} = -2\sin\theta\ \dot{\theta}$$

وحيث أن العجلة تتجه دائماً نحو القطب فإن

$$a_r = 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\ r^2\dot{\theta}\ = 0 \quad \Rightarrow d\ r^2\dot{\theta}\ = 0 \quad \therefore r^2\dot{\theta} = h \text{ (const.)}$$

ومقدار السرعة يتعين من

$$\begin{aligned} |\underline{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} &= \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2} \\ &= \sqrt{(-2\sin\theta\,\dot{\theta})^2 + (r\dot{\theta})^2} \\ &= \sqrt{4\sin^2\theta + r^2}\ \dot{\theta} \\ &= \sqrt{4(1-\cos^2\theta) + r^2}\,\dot{\theta} \\ &= \sqrt{4 - 4\cos^2\theta + r^2}\,\dot{\theta} \\ &= \sqrt{4 - r^2 + r^2}\,\dot{\theta} = 2\ \underset{h/r^2}{\dot{\theta}} = \frac{2h}{r^2} \end{aligned}$$

أي أن السرعة تتناسب عكسياً مع مربع r

مثـــ ٣ ـــال

تتحرك نقطة مادية على منحنى بسرعة ثابتة فإذا كانت السرعة الزاوية لها حول نقطة ثابتة O تتناسب عكسياً مع بعدها عن هذه النقطة. اوجد معادلة المسار.

الحـــــــل

بفرض أن سرعة النقطة المادية V ثابت وكذلك فإن السرعة الزاوية للنقطة المادية تتناسب عكسياً مع r أي أن

$$\frac{d\theta}{dt} \propto \frac{1}{r} \qquad \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{r} \quad (k \text{ is constant})$$

$$\because v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2} = V \quad (V \text{ is constant})$$

$$\Rightarrow v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = V^2$$

$$\Rightarrow v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{k}{r}\right)^2 = V^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = V^2 - k^2$$
$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \sqrt{V^2 - k^2} = \mu$$
$$\Rightarrow \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \mu \qquad \Rightarrow \frac{dr}{d\theta}\frac{k}{r} = \mu \qquad \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{\mu}{k} d\theta$$

بالتكامل

$$\therefore \ln r = \frac{\mu}{k}\theta + \ln c \ \ (\ln c \text{ is integration constant})$$

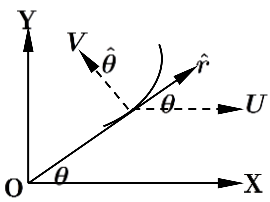
$$\therefore \ln\frac{r}{c} = \frac{\mu}{k}\theta \qquad \Rightarrow r = ce^{\mu/k\,\theta}$$

وهي تعطي معادلة المسار

مثـــ ٤ ـــال

تتحرك نقطة مادية على منحنى بحيث أن مركبتيه ثابتتان في المقدار احداهما U في اتجاه المحور X والثانية V متعامدة على متجه الموضع دائماً. اوجد المعادلة القطبية لمسار النقطة إذا علم أنها بدأت الحركة من الموضع $(a,0^0)$.

الحـــــــل



واضح أن السرعة V في اتجاه متجه الوحدة $\hat{\theta}$ و من الشكل المقابل

وبتحليل السرعة U في الاتجاهين $\hat{r},\hat{\theta}$ نجد أن

$$\frac{dr}{dt} = U\cos\theta \qquad \text{و} \qquad r\frac{d\theta}{dt} = V - U\sin\theta$$

بقسمة هاتين المعادلتين و فصل المتغيرات نجد أن

$$\frac{dr}{rd\theta} = \frac{U\cos\theta}{V - U\sin\theta} \qquad \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{U\cos\theta}{V - U\sin\theta}d\theta$$

بالتكامل نحصل على

$$\ln r = -\ln(V - U\sin\theta) + \ln c$$

حيث ثابت التكامل $\ln c$ و يتعين من الشرط أن النقطة بدأت الحركة من الموضع $(a,0^0)$

$$\ln a = -\ln(V - U\sin 0) + \ln c \qquad \Rightarrow \ln c = \ln a + \ln V = \ln aV$$

$$\therefore \ln r = \ln aV - \ln(V - U\sin\theta) \quad \Rightarrow \ln r = \ln\frac{aV}{V - U\sin\theta}$$

$$\therefore \quad r = \frac{aV}{V - U\sin\theta}$$

وهي معادلة مسار النقطة المادية

مثـــ ٥ ـــال

تتحرك نقطة مادية على منحنى الكتينة $S = c\tan\psi$ وكان اتجاه العجلة ينصف دائماً الزاوية بين المماس للمنحنى والعمودي عليه، فإذا كانت u هي مقدار السرعة عندما $\psi = 0$ أوجد مقداري السرعة والعجلة عند أي موضع .

الحـــــــل

نعلم أن متجه العجلة يتعين من $\underline{a} = v\dfrac{dv}{dS}\hat{t} + \dfrac{v^2}{\rho}\hat{n}$ وحيث أن اتجاه العجلة ينصف دائماً الزاوية بين المماس والعمودي عليه فإن مركبتي العجلة متساويتان اي أن

$$\because v\frac{dv}{dS} = \frac{v^2}{\rho}$$

$$v\frac{dv}{dS} = \frac{v^2}{\rho} \quad \Rightarrow \frac{dv}{dS}\rho = v \quad \text{Or}$$

$$\frac{dv}{dS}\frac{dS}{d\psi} = v \quad \Rightarrow \frac{dv}{d\psi} = v \quad \Rightarrow \frac{dv}{v} = d\psi$$

باجراء التكامل نحصل على $\ln v = \psi + c$ حيث c ثابت التكامل ويتعين من

$$(\text{at} \quad \psi = 0, \quad v = u, \qquad \therefore c = \ln u)$$

$$\therefore \ln v = \psi + \ln u \quad \Rightarrow \ln\frac{v}{u} = \psi \qquad \Rightarrow v = ue^{\psi}$$

وهذه العلاقة تُعطي السرعة عند أي موضع ψ ومن معطيات المسألة فإن المسار هو $S = c\tan\psi$ ومن ثم

$$\therefore \rho = \frac{ds}{d\psi} = c\sec^2\psi$$

ومن هذا فإن مقدار العجلة يتعين من

$$= \sqrt{\left(v\frac{dv}{dS}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{v^2}{\rho}\right) = \sqrt{2}\,u^2 e^{2\psi}\frac{1}{c\sec^2\psi} = \frac{\sqrt{2}}{c}u^2 e^{2\psi}\cos^2\psi$$

مثـــ ٦ ـــال

إذا كانت العلاقة بين سرعة جسيم v يتحرك على منحنى مستوٍ وبين عجلته المماسية a_t هي $a_t = \frac{1}{1+v}$ فأوجد العلاقة بين v,S و v,t بين إذا علمت أن الجسيم بدأ الحركة من السكون عندما كانت $S = 0$.

الحـــــل

للحصول على علاقة بين v,t حيث أن $a_t = \frac{dv}{dt}$ ومن ثم

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{1+v} \qquad \Rightarrow (1+v)dv = dt$$

وباجراء التكامل يكون $v + \frac{1}{2}v^2 = t + c_1$

و للحصول على ثابت التكامل c_1 نستخدم الشرط $v = 0$ عندما $t = 0$ ومنها $c_1 = 0$

وتصبح العلاقة بين v,t في الصورة $v + \frac{1}{2}v^2 = t$

مرةً أخرى حيث أن $a_t = v\frac{dv}{dS}$ وبناءً عليه يكون

$$v\frac{dv}{dS} = \frac{1}{1+v} \qquad \Rightarrow (v+v^2)dv = dS$$

وباجراء التكامل يكون $\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 = S + c_2$

و للحصول على ثابت التكامل c_2 نستخدم الشرط $v = 0$ عندما $S = 0$ ومنها $c_2 = 0$

وتصبح العلاقة بين v,S في الصورة $\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 = S$

مثـــ ٧ ـــال

تتحرك نقطة مادية على دائرة نصف قطرها $2\ \text{ft}$ بعجلة مماسية ثابتة مقدارها $4\,\text{ft}\sec^{-2}$ و مبتدئاً من سكون من نقطة A على الدائرة. أوجد سرعتها عند عودها للنقطة A والزمن اللازم لذلك. أوجد عجلة النقطة المادية مقداراً واتجاهاً عند عودها للنقطة A .

الحـــــــل

من المعطيات $a_t = 4$ ومن ثم

$$\frac{dv}{dt} = 4 \quad \Rightarrow dv = 4dt \qquad \Rightarrow v = 4t + c_1$$

و للحصول على ثابت التكامل c_1 نستخدم الشرط $v = 0$ عندما $t = 0$ ومنها $c_1 = 0$

وتصبح العلاقة بين v,t في الصورة $v = 4t$

مرةً أخرى حيث أن $v = \dfrac{dS}{dt}$ ومن ثم

$$\frac{dS}{dt} = 4t \quad \Rightarrow dS = 4tdt \quad \Rightarrow S = 2t^2 + c_2$$

و لتعيين قيمة ثابت التكامل c_2 نستخدم الشرط $S = 0$ عندما $t = 0$ على اعتبار أن النقطة A هي نقطة القياس ومنها $c_1 = 0$ وتصبح العلاقة بين S,t في الصورة $S = 2t^2$

ومن هذه العلاقة يتعين الزمن اللازم للعودة للنقطة A حيث تكون النقطة قد قطعت مسافة S مساوية محيط الدائرة وهو 4π ويكون الزمن $4\pi = 2t^2 \quad \therefore t = \sqrt{2\pi}$

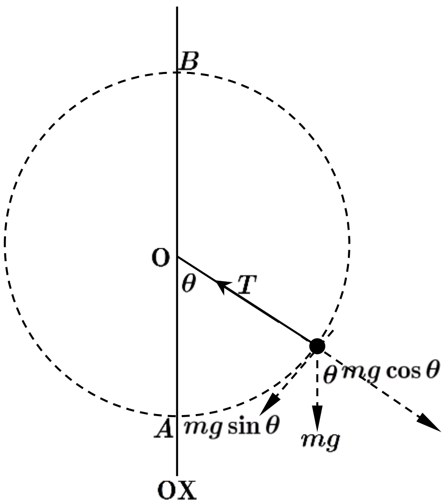
وسرعتها عندها بالتعويض في علاقة السرعة والزمن فيكون $v = 4\sqrt{2\pi}$

وتتعين العجلة بمركبتين احداهما ثابتة مقدارها $a_t = 4\,\text{ft}\sec^{-2}$ والعمودية a_n قيمتها

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{16(2\pi)}{2} = 16\pi\ \text{ft}\sec^{-2}$$

لاحظ أن $\rho = 2\ \text{ft}$

■ الحركة على دائرة رأسية



نعتبر حركة جسيم كتلته m مربوط في طرف خيط غير مرن طوله ℓ و طرفه الآخر مثبت في نقطة O. إذا قذف الجسيم من اسفل نقطة A بسرعة افقية u فيتحرك الجسيم على محيط دائرة رأسية نصف قطرها يساوي طول الخيط. يؤثر على الخيط قوتان هما وزنه mg رأسياً لأسفل والشد في الخيط T في اتجاه $\hat{r}$ نحو القطب كما بالشكل. نفرض موضع عام للجسيم بعد دوران للخيط زاوية θ باعتبار مركز الدائرة هو القطب O والرأسي المار بمركز الدائرة هو الخط الثابت OX و حيث أن مركبات العجلة في الاحداثيات القطبية هي

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

وحيث أن $r = \ell \ \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$ وتؤول مركبات العجلة إلى الصورة

$$a_r = -\ell\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = \ell\ddot{\theta}$$

معادلة الحركة في اتجاه متجه الموضع

$$-m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T$$

معادلة الحركة في اتجاه تزايد θ

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

وحيث أن $\ddot{\theta} = \dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = \dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ وبالتعويض في معادلة الحركة في اتجاه تزايد θ نجد

$$m\ell\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -mg\sin\theta \qquad \Rightarrow m\ell\dot{\theta}d\dot{\theta} = -mg\sin\theta \ d\theta$$

باجراء التكامل يكون

$$m\ell\dot{\theta}^2 = 2mg\cos\theta + c_1 \tag{1}$$

حيث ثابت التكامل ويتعين من الشرط الابتدائي للحركة وهو $v = u$ عندما $\theta = 0$ ولكن مركبات السرعة هي $(\dot{r}, r\dot{\theta})$ وهنـــا $r = \ell \ \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$ أي أن مـــركبتي الســـرعة $(0, \ell\dot{\theta})$ اي أن $v = u = \ell\dot{\theta}$ عند $\theta = 0$ ومن ثم بالتعويض في المعادلة (1) يكون

$$m\frac{u^2}{\ell} = 2mg + c_1 \qquad \Rightarrow c_1 = m\frac{u^2}{\ell} - 2mg$$

و تصبح المعادلة (1)

$$m\ell\dot{\theta}^2 = 2mg(\cos\theta - 1) + m\frac{u^2}{\ell} \qquad \Rightarrow \ell^2\dot{\theta}^2 = 2g\ell(\cos\theta - 1) + u^2$$

$$\therefore\ v = \ell\dot{\theta} = \sqrt{2g\ell(\cos\theta - 1) + u^2} \qquad (2)$$

وهذه العلاقة تعطي السرعة عند اي موضع θ ولتعيين الشد T في الخيط نعوض عن $\ell\dot{\theta}^2$ في معادلة الحركة في اتجاه متجه الموضع أي أن

$$m\ell\dot{\theta}^2 = T - mg\cos\theta \qquad \Rightarrow T = mg(3\cos\theta - 2) + m\frac{u^2}{\ell} \qquad (3)$$

وجدير بالذكر أننا هنا استخدمنا الاحداثيات القطبية ويمكن الحصول على نفس النتـــائج إذا استخدامنا الاحداثيات الذاتية

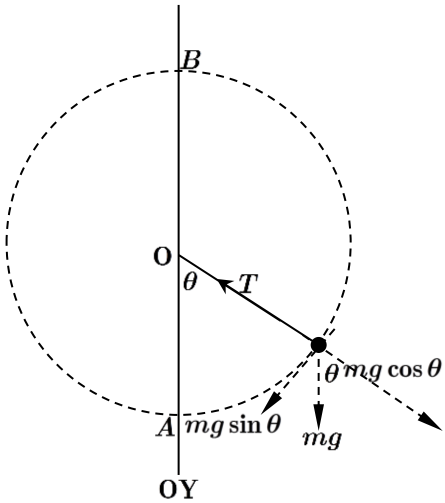
نلاحظ من المعادلة (2) أن اصغر قيمة للسرعة عند $\theta = \pi$ (أعلى نقطـــة في الـــدائرة B) وتساوي $v_B^2 = u^2 - 4g\ell$ ولكي يتم الجسيم دورة كاملة يجب أن تزيد سرعته v_B عـــن الصفر أي ان $u^2 - 4g\ell > 0$ ويكون الشرط اللازم لكي يعمل الجسيم دورات كاملة هو $u > 2\sqrt{g\ell}$ ، و إذا نقصت السرعة الابتدائية عن $2\sqrt{g\ell}$ فإن سرعة الجسيم تنعدم قبل أن يصل إلى أعلى نقطة و بذلك يعود الجسيم والخيط مرة اخرى. كما ينعدم الشد في الخيط عند نقطة معينة تتعين زاويتها θ من $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3} - \frac{u^2}{3g\ell}\right)$ (المعادلة (3))

■ أمثلة توضيحية Illustrative Examples ■

مثـــ ١ ـــال

جسيم كتلته m متصل بخيط خفيف غير مرن يرسم دائرة في مستوى رأسي فإذا كان الشد عند أعلى نقطة في المسار $4mg$ فأوجد الشد عند أي موضع واثبت أن الشد في الخيط عند أسفل نقطة للمسار هي $10mg$.

الحـــــــل



نعتبر أن طول الخيط ℓ والقوتان المؤثرتان على الجسيم اثناء حركته هما وزنه mg والشد في الخيط T، نعتبر مركز الدائرة هو القطب O (النقطة الثابتة) و نأخذ OY هو خطاً ابتدائياً إلى أسفل وبالتالي معادلة الحركة في اتجاه نصف القطر و في الاتجاه العمودي عليه (في اتجاه تزايد θ) هما (انتبه $r = \ell \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$)

$$m\ell\dot{\theta}^2 = T - mg\cos\theta \qquad (1)$$

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \quad \Rightarrow \ell\ddot{\theta} = -g\sin\theta \qquad (2)$$

وحيث أن $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ وبالتعويض في المعادلة (1) والتكامل

$$\ell\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -g\sin\theta \quad \Rightarrow \ell\dot{\theta}d\dot{\theta} = -g\sin\theta d\theta \quad \Rightarrow \ell\dot{\theta}^2 = 2g\cos\theta + c \qquad (3)$$

حيث c ثابت التكامل وبالتعويض من المعادلة (3) في المعادلة (1) نحصل على

$$T = m(2g\cos\theta + c) + mg\cos\theta = 3mg\cos\theta + C \qquad (4)$$

ومن معطيات المسألة الشد عند أعلى نقطة على المسار يســـاوي $4mg$ أي أن $T = 4mg$ عندما $\theta = \pi$ و منها يكون $C = 7mg$ و تصبح المعادلة (4) في الصورة

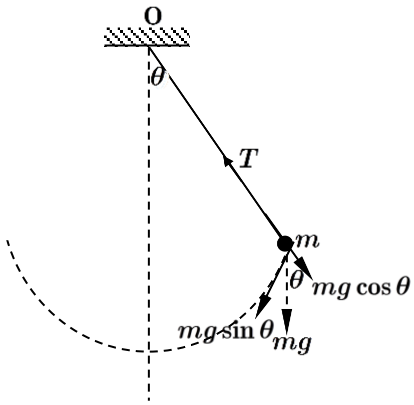
$$T = mg\ \ 3\cos\theta + 7$$

هذه العلاقة تعطي قيمة الشد عند أي موضع θ و قيمة الشد عند أسفل نقطـــة أي عنــــدما $\theta = 0$ يكون الشد $T = mg\ \ 3\cos 0 + 7\ \ = 10mg$

لاحظ أننا في حل المثال استخدمنا الاحداثيات القطبية ويمكن اعادة حل المثـــال باســـتخدام الاحداثيات الطبيعية.

اثبت أن حركة البندول البسيط هي حركة توافقية بسيطة واجد زمنها الدوري.

■ البندول البسيط Simple Pendulum



إذا عُلقّت كتلة صغيرة m في طرف خيط غير مـــرن (ساق خفيفة) مثبت طرفه الآخر يُعرف هذا الجهـــاز بالبندول البسيط – كما بالشكل – فإذا زُحزحت هذه الكتلة جانباً ثم تركت فإنها تأخذ في التذبـــذب بفعـــل الجاذبية في قوس من دائرة مركزها نقطة التعليق O و نصف قطرها هو طول الخيط وليكن b . حيـــث أن الكتلة أثناء حركتها تكون واقعة تحت تأثير قوتين همـــا قوة الوزن mg و قوة شد الخيط T ومـــن قـــانون نيوتن الثاني فإن معادلة الحركة للكتلة في اتجاه الممـــاس لقوس الدائرة هى

$$mb\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \qquad \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{b}\sin\theta$$

وعندما تكون الازاحة θ صغيرة فإننا نستخدم التقريب $\sin\theta \cong \theta$ ومن ثم تؤول المعادلـــة السابقة إلى الصورة

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{b}\theta \qquad \text{Or} \qquad \ddot{\theta} = -\omega^2\theta$$

حيث $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{b}}$. المعادلة الأخيرة تمثل معادلة جسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة زمنـــها الدوري يتعين من

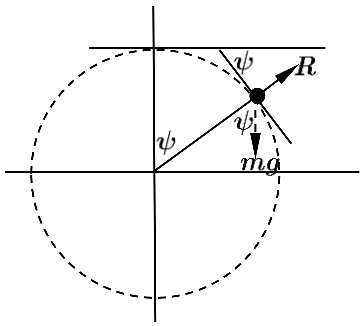
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{b}{g}}$$

و هذه العلاقة تُستخدم في علم الفيزياء لتعيين عجلة الجاذبية الأرضية g وذلك عن طريــق قياس زمن ذبذبة بندول ذى طول. معلوم كما أن البندول الذي تستغرق ذبذبته ثـــانيتين أي يستغرق ثانية واحدة فى المشوار الواحد يُعرف بـــ " بندول الثواني ".

مثـــ ٢ ـــال

يترلق جسيم كتلته m على دائرة نصف قطرها b ملساء من الخارج مبتدئاً من السكون من أعلى نقطة من الدائرة. اوجد سرعة الجسيم عند اي موضع و كذلك رد الفعل للدائرة على الجسيم ، ثم اوجد الموضع الذي يترك فيه الجسيم الدائرة.

الحـــــــل



حيث أن القوى المؤثرة على الجسيم اثناء الحركة همـــا وزنه mg و رد الفعل العمودي علـــى الممـــاس R سنعتبر المستوى الأفقي المار بمركز الدائرة كمســـتوى قياس. معادلة الحركة للجسيم في اتجاه المماس هي

$$mv\frac{dv}{dS} = mg\sin\psi \quad \text{Or} \quad v\frac{dv}{d\psi}\frac{d\psi}{dS} = g\sin\psi \ \left(\frac{dS}{d\psi} = b\right)$$

$$\Rightarrow vdv = bg\sin\psi \ d\psi$$

بالتكامل نحصل على $v^2 = C - 2bg\cos\psi$

وثابت التكامل C يتعين من الشرط الابتـــدائي و هـــو $v = 0$ عنـــدما $\psi = 0$ ومنـــها $C = 2bg$ وبالتالي تصبح العلاقة الأخيرة في الصورة

$$v^2 = 2bg(1 - \cos\psi)$$

معادلة الحركة في الاتجاه العمودي على المماس هي

$$m\frac{v^2}{b} = mg\cos\psi - R \quad \Rightarrow R = mg\cos\psi - m\frac{v^2}{b}$$

$$\Rightarrow \quad R = mg\cos\psi - 2mg(1-\cos\psi)$$
$$= mg(3\cos\psi - 2)$$

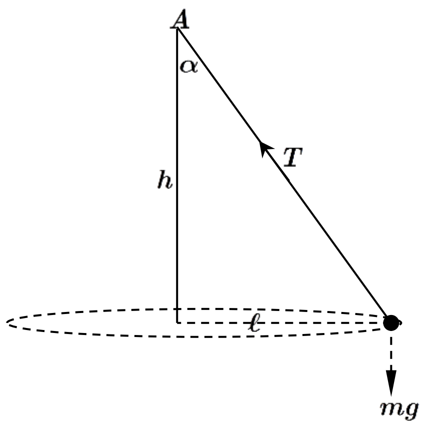
المعادلة الأخيرة تعين رد فعل الدائرة على الجسيم R عند أي موضع ψ ويترك الجسيم الدائرة عندما يتلاشى رد الفعل أي أن $R=0$ و من العلاقة الاخيرة نحصل على

$$mg(3\cos\psi - 2) = 0 \qquad \Rightarrow \cos\psi = \frac{2}{3}$$

أي أن الجسيم يترك الدائرة عندما يتزلق مسافة رأسية تساوي ثلث نصف قطر الدائرة

مرةً أخرى استخدمنا في حل هذا المثال الاحداثيات الطبيعية ويمكن الحل ايضاً باستخدام الاحداثيات القطبية – كما يمكن الحل باستخدام مبدأ الشغل والطاقة.

■ الحركة على دائرة أفقية (البندول المخروطي)



يتكون البندول المخروطي من نقطة مادية كتلتها معلقة في نهاية خيط طرفه الآخر مثبت ثم قذفت النقطة المادية بحيث تتحرك في دائرة أفقية بسرعة زاوية ثابتة كما بالشكل هذا ولدراسة حركة البندول المخروطي ، نفرض أن النقطة المادية تتحرك بسرعة زاوية ثابتة ω على محيط دائرة نصف قطرها ℓ وبالتالي فإن سرعة النقطة المادية و عجلتها هما على الترتيب

$$a_t = \frac{v^2}{\ell} = \omega^2\ell \qquad v = \omega\ell.$$

كذلك نجد أن القوى المؤثرة على حركة النقطة المادية هما قوتا الوزن mg و قوة الشد في الخيط T ، حيث أن النقطة المادية تتحرك في دائرة أفقية فإن مركبة الشد رأسياً لأعلى تساوي الوزن والمركبة الأفقية للشد هي التي تحفظ حركة النقطة المادية في الدائرة و تكون معادلة الحركة في الدائرة الأفقية هي

$$m\omega^2\ell = T\sin\alpha$$

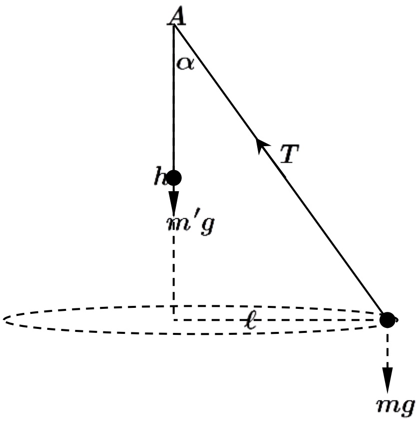
و معادلة الاتزان في الاتجاه الراسي هي $\omega mg = T\cos\alpha$

و من المعادلتين السابقتين نحصل على $\tan\alpha = \dfrac{\omega^2\ell}{g}$ ولكن من الشكل نجد أن $\tan\alpha = \dfrac{\ell}{h}$ – حيث h يمثل المسافة من نقطة تثبيت طرف الخيط A حتى مركز الدائرة الأفقية – و من ثم نحصل على $\sqrt{\dfrac{g}{h}} = \omega$ و الزمن الــدوري يعطــى بـــ $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}}$. العلاقــة $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{h}}$ تعطى العلاقة بين ω, h ومنها نتبين أن $h \propto \dfrac{1}{\omega^2}$ ، أي أن المسافة الرأسية للنقطة المادية أسفل A تتناسب عكسياً مع مربع السرعة الزاوية أي ω^2 .

مثــ ٣ ــال

كتلتان m, m' متصلتان بخيط خفيف طوله ℓ يمر من حلقة صغيرة ثابتــة. اوجــد عــدد الدورات التي تدورها الكتلة m في الثانية كبندول مخروطي لكي تظل الكتلة m' معلقة في حالة سكون على بعد h من الحلقة.

الحـــــل



الكتلة m' في حالة سكون (متزنة) تحت تــأثير وزنهـــا $m'g$ والشد في الخيط T

$$T = m'g$$

معادلة الحركة للكتلة m في اتجاه نصف قطر الــدائرة الأفقية هي

$$m(\ell - h)\sin\alpha(2\pi n)^2 = T\sin\alpha$$

و ذلك بفرض أن n هي عدد الدورات التي تدورها الكتلة m في الثانية ، α هي الزاويــة التي يصنعها الخيط مع الرأسي المار بالحلقة ، بالتعويض من المعادلة الأولى في المعادلة الثانية نجد أن

$$4\pi^2 n^2 m(\ell - h) = m'g$$

$$\Rightarrow n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m'g}{m(\ell - h)}}$$

■ Problems مســـــائل ■