محاضرات

في

# جبر متقدم

لطلاب الفرقة الأولى

إعداد

**قسم الرياضيات – كلية العلوم بقنا**

جامعة جنوب الوادي



✓ **رؤية كلية العلوم بقنا**

**كلية العلوم بقنا تقدم خدمات تعليمية وبحثية ومجتمعية متميزة.**

## ✓ رسالة كلية العلوم بقنا

**تلتزم كلية العلوم بقنا بإعداد خريجين متميزين طبقا للمعايير الأكاديمية القومية ، وتقديم بحوث علمية متميزة ، وتطوير مهارات وقدرات الكوادر البشرية بها ، وتوفير خدمات مجتمعية وبيئية تلبي طموحات مجتمع جنوب الوادي ، وذلك من خلال مشاركة مجتمعية فاعلة.**

## مقدمة:

الحمد لله الذي علم بالقلم،علم الإنسان ما لم يعلم ، والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين نبينا محمد ﷺ وعلى آله وصحبه أجمعين وبعد...

فلقد ارتبط علم الجبر منذ تأسيسه بعلماء المسلمين الأوائل وعلى رأسهم العلامة **الخوارزمي** (٧٨٠م-٨٥٠م) فقد أثبت أن للمعادلة الجبرية من الدرجة الثانية $ax^2+bx+c=0$ حلان هما $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ;b^2-4ac\geq 0$ وقسّم المعادلة من الدرجة الثالثة $ax^3+bx^2+cx+d=0$ إلى ثلاثة عشر نوعاً ، وقد شارك كلٌ من **الماهاني** المُتوَفى عام(٨٧٤م) **وأبو الجود بن الليث** المُتوَفى عام (١٠٠٨م) **وعمر الخَيام** (١٠٤٢-١١٢٣م) في حل معادلات الدرجة الثالثة بطرق هندسية ، وحل **ابن الهيثم** (٩٦٥-١٠٣٨م) و**عمر الخيام** معادلات الدرجة الرابعة.

ويُعتبر **الخوارزمي** مبتكر المحددات ،وطورها الياباني **سكي كاو** (١٦٤٢-١٧٠٨م) عام ١٦٨٢م ، والألماني **ليبتز** (١٦٤٦-١٧١٦م) عام ١٦٩٣م ، والفرنسي **لابلاس** (١٧٤٩-١٨٢٧م) ، واستخدم جاوس المحددات في نظريته عن الأشكال مما قاد الفرنسي **كوشي** (١٧٨٩-١٨٥٧م) إلى تطوير نظرية المحددات ووضعها بالشكل الذي نراه اليوم وذلك في عام ١٨١٢م.

أما مفهوم المصفوفة فكان معروفاً للبابلين وقدماء الصينين وعلماء المسلمين ، وقد عبر الألماني **جاوس** (١٧٧٧-١٨٥٥م) عن المصفوفة بمستطيل منتظم عند دراسته لبعض التحويلات الخطية وذلك في عام ١٨٢٩م ،كما عبر الألماني **فيردناند اينشتاين** (١٨٢٣-١٨٥٢م) عن المصفوفة بدلالة الرموز وبين أن ضرب المصفوفات ليس إبدالياً، وتعامل **كيلي** عام ١٨٥٨م مع المصفوفات المربعة من الدرجة الثانية والثالثة.

ونقدم كتابنا الملخص هذا والذي يشتمل على مجموعة المحاضرات في الجبر العـــام والتي قمت بتدريسها في الجامعات والمعاهد وهي مقسمة إلى أحد عشر بابا.

الباب الأول منها يتناول المحددات وخصـــائصها ، والباب الثاني يتناول المصـــفوفات وتكوينها وخصائصها .

وفي الباب الثالث مفهوم الكسور الجزئية ، وفي الباب الرابع تناولنا نظرية ذات الحدين وخصائصها ، وفي الباب الخامس تناولنا مبدأ الاستنتاج الرياضي ، وفي الباب السادس المتسلسلات وطرق جمعها وبحث تقارب أو تباعد المتســـلسلات ،

وفي الباب الســـابع جبر الأعداد المركبة ، وفي الباب الثامن تناولنا نظرية المعـــادلات الجبرية وطرق حل المعادلات الجبرية من الدرجة الثالثة والرابعة.

وفي الباب التاسع تناولنا الطرق التقريبية لإيجاد جذور المعادلات الجبرية وغير الجبرية.

وفي الباب العاشر تناولنا مفهوم توفيق المنحنيات.

وفي الباب الحادي عشر تناولنا مفهوم المنطق الرياضي وجبر المنطق والدوائر المنطقية.

ونسأل الله عز وجل أن ينفعنا بما علمنا وأن يعلمنا ما ينفعنا ، وأن يجعل أعمالنا خالصة لوجهه الكريم ، وأخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين.

**دكتور/ سعد شرقاوي**

1. **عضو هيئة التدريس بقسم الرياضيات**

كلية العلوم بقنا

جامعة جنوب الوادي

✉ s_sharqawy@hotmail.com

www.facebook.com/SaadSharqawy2012

**المحتوى:** **الصفحة**

## ▪ الأهداف العامة للمقرر:

١- إدراك أهمية المفهوم الرياضي والتفكير المنطقي السليم.

٢- اكتساب مهارة التخصيص والتعميم والقدرة على الاستنتاج.

٣- اكتساب مهارة المحاولات الذهنية التي تؤدي إلى حل صائب مناسب.

٤- تبيين الصفات الأساسية لكل من مفاهيم الجبر العام.

٥- استيعاب المفاهيم الأساسية في الجبر وتطبيقاتها.

## ▪ المراجع:

١- موسوعة علماء العرب على الإنترنت.

http://www.alnoor-world.com/scientists

٢- موقع الرياضيات على الإنترنت.

http://www.math.com

٣- موسوعة ويكيبيديا الحرة على الإنترنت.

http://en.wikipedia.org/wiki/mathematics

٤- د.معروف سمحان وأخرون "مبادئ الرياضيات المتقطعة"جامعة الملك سعود.

(1) S.Lipschutz : “Theory and problem of matrices” ,Schaum’s outline Series Sl(metric Edition McGraw-Hill Book Company (1974).

(2) R.Courant and H.Rebbins: "What is Mathematics" Oxford university press (1978).

(3) P.M.Cohn: "Algebra" vol.1,2 John Wiley and Sons (1978),New York (1978,1979).

(4) E.Mendelson: "Number Systems and Foundations of Analysis" Academic press London (1973).

(5) David.I.Steinberg: "Computational Matrix Algebra" McGraw-Hill Inc (1974).

# الباب الأول

## المحددات Determinates

### محددات الرتبة الثانية:

نعتبر المعادلتين الآتيتين في المجهولين $x_1, x_2$ :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

حيث $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ كلها مقادير معلومة.

لحل هاتين المعادلتين نستخدم طريقة حذف أحد المجاهيل ثم نعين الأخر والعكس كما يتضح فيما يلي:

لتعيين $x_1$ نضرب المعادلة الأولى في المقدار $(a_{22})$ والثانية في المقدار $(-a_{12})$ ثم نجمعهما معا فنحصل على $x_1$ ، وبضرب المعادلة الأولى في المقدار $(-a_{21})$ والثانية في المقدار $(a_{11})$ ثم نجمعهما معا فنحصل على $x_2$ ويكون:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \ , \qquad (2)$$
$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

وإذا كان $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ فإن المقدار $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ يُسمى مفكوك محدد الرتبة الثانية ، ويُرمز له بالرمز:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

وواضح أن هذا المحدد يتكون من معاملات المجاهيل $x_1, x_2$ في المعادلات(1) ولذلك يُسمى بمحدد المعاملات.

وبالمثل يمكن اعتبار المقادير $b_1a_{22}-b_2a_{12}\,,\,a_{11}b_2-b_1a_{21}$ وهي مفكوك المحددات:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{21}b_2\,,\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

على الترتيب.

ويُلاحظ أن $\Delta_1$ يمكن الحصول عليه من $\Delta$ باستبدال معاملات $x_1$ بالحـــدود المطلقـــة. كذلك $\Delta_2$ يمكن الحصول عليه من $\Delta$ باستبدال معاملات $x_2$ بالحدود المطلقة. وبالتالي يمكن كتابة العلاقة(2) على الصورة:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}\ ,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad (3)$$

وتكون العلاقة (3) هذه هي حل المعادلات(1) .

وإذا كانت $\Delta\neq 0$ فإن المعادلات(1) يكون لها حل وحيد(قيم وحيدة للمجاهيل) ، أما إذا كانت $\Delta=0$ وأحد المحددات $\Delta_1,\Delta_2$ على الأقل لا يساوي الصفر فـــإن مجموعـــة المعادلات(1) لا يكون لها حل على الإطلاق ، أما إذا كانت $\Delta_2=\Delta_1=\Delta=0$ فـــإن مجموعة المعادلات(1) يكون لها أكثر من حل.

## محددات الرتبة الثالثة:

نعتبر الثلاث معادلات الآتية في ثلاث مجاهيل $x_1,x_2,x_3$ :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2 \qquad (4)\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3 \end{aligned}$$

لحل مجمـــوعة المـــعادلات هذه نضـــرب المعادلة الأولى والثانية والثالثة في المقاديـــر $L,M,N$ على الترتيب،ونختار قيم $L,M,N$ التي تجعل معاملات $x_2,x_3$ صفرا في حاصل الجمع التالي للمعادلات:

$$\begin{aligned} (La_{11}+Ma_{21}+Na_{31})x_1+(La_{12}+Ma_{22}+Na_{32})x_2&\\ +(La_{13}+Ma_{23}+Na_{33})x_3&=Lb_1+Mb_2+Nb_3 \qquad (5) \end{aligned}$$

$$La_{12}+Ma_{22}+Na_{32}=0$$ (معامل $x_2$ يساوي الصفر)

$$La_{13}+Ma_{23}+Na_{33}=0$$ (معامل $x_3$ يساوي الصفر)

ولتعيين قيم $L, M, N$ نحل هاتين المعادلتين في النسب $\frac{L}{N}, \frac{M}{N}$ باعتبارهما مجهـــولين أي نحل المعادلتين:

$$a_{12}\frac{L}{N} + a_{22}\frac{M}{N} = -a_{32}$$
$$a_{13}\frac{L}{N} + a_{23}\frac{M}{N} = -a_{33}$$

وحلهما يكون:

$$\frac{L}{M} = \frac{\Delta_1}{\Delta_3}, \frac{M}{N} = \frac{\Delta_2}{\Delta_3} \qquad (6)$$

حيث:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} -a_{32} & a_{22} \\ -a_{33} & a_{23} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & -a_{32} \\ a_{13} & -a_{33} \end{vmatrix}$$

وعلى ذلك فإن (6) يمكن أن تأخذ الصورة:

$$\frac{L}{\Delta_1} = \frac{M}{\Delta_2} = \frac{N}{\Delta_3}$$

ويمكن اختيار قيم $L, M, N$ التي تجعل معاملات $x_2, x_3$ تساوي الصفر بحيث إن:

$$L = \Delta_1 \, , M = \Delta_2 \, , N = \Delta_3$$

وبالتعويض في المعادلة(5) نحصل على:

$$(a_{11}\Delta_1 + a_{21}\Delta_2 + a_{31}\Delta_3)x_1 = b_1\Delta_1 + b_2\Delta_2 + b_3\Delta_3$$

والمقدار:

$$(a_{11}\Delta_1 + a_{21}\Delta_2 + a_{31}\Delta_3) = a_{11}\begin{vmatrix} -a_{32} & a_{22} \\ -a_{33} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & -a_{32} \\ a_{13} & -a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

والمقادير $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ تُسمى معاملات $a_{11}, a_{21}, a_{31}$ على الترتيب.

يُسمى هذا المقدار بمفكوك محدد الرتبة الثالثة ويُرمز له:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

ويُلاحظ أن $\Delta$ يتكون من معاملات $x_1, x_2, x_3$ في المعادلات (4) .

وبالمثل يمكن استنتاج أن:

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_{x_3}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

وبالتالي عندما يكون $\Delta \neq 0$ فإن حل مجموعة المعادلات(4) يأخذ الصورة:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$$

ونلاحظ أن مفكوك محدد الرتبة الثالثة يتوقف على محددات أخرى من الرتبة الثانيـــة، وتُسمى هذه المحددات بالمحددات الصغرى للمحدد الأصلي.

## محددات الرتب العليا:

لقد عرفنا أن محدد الرتبة الثانية يتكون من عمودين وصفين، ومحدد الرتبة الثالثة يتكون من ثلاثة أعمدة وثلاث صفوف ، وبالمثل يمكن تعريف محدد الرتبة $n$ بأنه يتكون مـــن عدد $n$ من الأعمدة، وعدد $n$ من الصفوف على الصورة:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{r1} & a_{r2} & ..... & a_{r(n-1)} & a_{rn} \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

مفكوك هذا المحدد هو المجموع الجبري الخطي لمحددات من الرتبة$n-1$ وهي معاملات عناصر الصف الأول(العمود الأول) أي أن:

$$\Delta_n=a_{11}\Delta_{11}+a_{12}\Delta_{12}+...+a_{1n}\Delta_{1n}$$

حيث:

$$\Delta_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & ..... & a_{2n} \\ a_{32} & ..... & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & ..... & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & ..... & a_{2n} \\ a_{31} & ..... & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & ..... & a_{nn} \end{vmatrix}, ..., \Delta_{1n}=(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} a_{21} & ..... & a_{2(n-1)} \\ a_{31} & ..... & a_{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & ..... & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}$$

**مثال(١):** احسب قيمة المحدد

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&1&2&3\\2&0&2&5\\0&1&0&1\\3&2&1&2\end{vmatrix}.$$

الحل: بفك المحدد باستخدام عناصر العمود الأول كما يلي:

$$\Delta=0(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&2&5\\1&0&1\\2&1&2\end{vmatrix}+2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&2&3\\1&0&1\\2&1&2\end{vmatrix}$$

$$+0(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&5\\2&1&2\end{vmatrix}+3(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&5\\1&0&1\end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix}1&2&3\\1&0&1\\2&1&2\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&5\\1&0&1\end{vmatrix}$$

$$=-2[1\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}]-3[1\begin{vmatrix}2&5\\0&1\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2&3\\2&5\end{vmatrix}]$$

$$=-2[(0-1)-(4-3)+2(2-0)]-3[(2-0)-0(2-0)+(10-6)]$$

$$=-22$$

$$\therefore\Delta=\begin{vmatrix}0&1&2&3\\2&0&2&5\\0&1&0&1\\3&2&1&2\end{vmatrix}=-22.$$

**ملاحظة:** يُلاحظ أنه يمكن إيجاد مفكوك المحدد باستخدام عناصر أي صف أو عمود ، ويكون معامل كل عنصر هو المحدد الصغير المناظر لهذا العنصر.

## الخواص الأساسية للمحددات:

سنكتفي بذكر هذه الخواص للمحددات من الرتبة الثالثة ويمكن تعميمها على المحددات من الرتب العليا.

١- لا تتغير قيمة المحدد إذا بدلنا الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف أي أن:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(يمكن إثبات ذلك بفك محدد الطرف الأيسر باستخدام الصف الأول وبفك محدد الطرف الأيمن باستخدام العمود الأول فينتج المطلوب).

٢- تتغير إشارة المحدد إذا بدلنا صفين (أو عمودين) متجاورين أي أن:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

٣- تنعدم قيمة المحدد إذا تساوى فيه صفان أو عمودان (وذلك من الخاصية السابقة).

٤- إذا ضُربت عناصر أي صف (أو عمود) في مقدار ثابت $\alpha$ فإن قيمة المحدد تُضرب في نفس المقدار الثابت أي أن:

$$\alpha\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 & \alpha c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

٥- إذا كانت عناصر أي صف (أو عمود) عبارة عن مجموع $n$ من الحدود فإن المحدد يساوي مجموع $n$ من المحددات التي تحتوي كل منها على حد واحد فقط من هذه الحدود أي أن:

$$\begin{vmatrix} k_1+l_1-m_1 & b_1 & c_1 \\ k_2+l_2-m_2 & b_2 & c_2 \\ k_3+l_3-m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 & b_1 & c_1 \\ l_2 & b_2 & c_2 \\ l_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -m_1 & b_1 & c_1 \\ -m_2 & b_2 & c_2 \\ -m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

٦- لا تتغير قيمة المحدد إذا أضفنا إلى عناصر أي صف أو عمود مضاعفات العناصر المناظرة في الصفوف أو الأعمدة الأخرى أي أن:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+\alpha b_1-\beta c_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha b_2-\beta c_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha b_3-\beta c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

**مثال(٢)**: ضع المحدد الآتي في أبسط صورة ، ثم أوجد قيمته:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 87 & 42 & 3 \\ 45 & 18 & 7 \\ 50 & 17 & 3 \end{vmatrix}.$$

الحل: بوضع العمود الأول $(-2C_2-C_3)+C_1)$ ( أي نضرب عناصر العمود الثاني $C_2$ في (2-) ونضرب عناصر العمود الثالث $C_3$ في (1-) ثم نضيفهما إلى عناصر العمود الأول $C_1$ ) فيُصبح المحدد على الصورة الآتية:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 42 & 3 \\ 2 & 18 & 7 \\ 13 & 17 & 3 \end{vmatrix}$$

وبوضع العمود الثاني $(-14C_3+C_2)$ ( أي نضرب عناصر العمود الثالث $C_3$ في 14- ثم نضيفها إلى عناصر العمود الثاني $C_2$ ) فيُصبح المحدد على الصورة الآتية:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -80 & 7 \\ 13 & -25 & 3 \end{vmatrix} = 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -80 \\ 13 & -25 \end{vmatrix} = 3[(2)(-25)-(-80)(13)] = 2970.$$

وذلك بفك المحدد باستخدام عناصر الصف الأول.

**مثال(٣)**: باستخدام خواص المحددات احسب قيمة المحددات الآتية:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 11 & 4 \\ 13 & 15 & 10 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} \ , \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

الحل:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 11 & 4 \\ 13 & 15 & 10 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = (3)(2)\begin{vmatrix} 7 & 11 & 2 \\ 13 & 15 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 8 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (6)(1)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 6[0-40] = -240.$$

وذلك بوضع العمود الأول $(-C_3 + C_1)$ ، والعمود الثاني $(-3C_3 + C_2)$ ، وفك المحدد باستخدام عناصر الصف الثالث.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c^3-a^3) - (c-a)(b^3-a^3)$$

وذلك بوضع العمود الثاني $(-C_1 + C_2)$ ، والعمود الثالث $(-C_1 + C_3)$.

**مثال(٤)**: باستخدام المحددات أوجد حل المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 &= 14 \\ 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 32 \\ 4x_1 + 10x_2 + 8x_3 &= 18 \end{aligned}$$

الحل: نحسب أولاً محدد المعاملات:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 8 & 4 & 6 \\ 4 & 10 & 8 \end{vmatrix} = (2)(2)(2)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -5 & -10 & 3 \\ -10 & -11 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 8[(1)(-1)^{1+3}(55-100)] = -360.$$

ثم نحسب محددات المجاهيل كما يلي:

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}14&8&2\\32&4&6\\18&10&8\end{vmatrix}=(2)(2)(2)\begin{vmatrix}7&4&1\\16&2&3\\9&5&4\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}0&0&1\\-5&-10&3\\-19&-11&4\end{vmatrix}$$

$$=8[(1)(-1)^{1+3}(55-190)]=-1080.$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}6&14&2\\8&32&6\\4&18&8\end{vmatrix}=(2)(2)(2)\begin{vmatrix}3&7&1\\4&16&3\\2&9&4\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}0&0&1\\-5&-5&3\\-10&-19&4\end{vmatrix}$$

$$=8[(1)(-1)^{1+3}(95-50)]=360.$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}6&8&14\\8&4&32\\4&10&18\end{vmatrix}=(2)(4)(2)\begin{vmatrix}3&4&7\\2&1&8\\2&5&9\end{vmatrix}=16\begin{vmatrix}-5&0&-25\\2&1&8\\-8&0&-31\end{vmatrix}$$

$$=16[(1)(-1)^{2+2}(155-200)]=-720.$$

وعلى ذلك يكون حل المعادلات هو:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=\frac{-1080}{-360}=3,\ x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=\frac{360}{-360}=-1,\ x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}=\frac{-720}{-360}=2\ .$$

**مثال(٥)**: تحقق من أن $x=1$ تكون جذر للمعادلة:

$$\begin{vmatrix}x&x^2&x+1\\1&0&1\\2&1&3\end{vmatrix}=0$$

الحل: لكي تكون قيمة $x$ المعطاة جذر للمعادلة فلابد أن تكون نتيجة التعويض بهذه القيمة في المعادلة تحققها (أي الطرف الأيسر للمعادلة يساوي الطرف الأيمن).

وبوضع $x=1$ في الطرف الأيسر للمعادلة وهو المحدد فنحصل على:

$$\begin{vmatrix}1&1&2\\1&0&1\\2&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&0\\2&1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$$

وذلك بوضع العمود الثالث $(-C_1+C_3)$ وإذاً $x=1$ تكون جذر للمعادلة.

**مثال(٦)**: تحقق من أن $x=3$ تكون جذر للمعادلة:

$$\begin{vmatrix} x & 4-x & -x \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

الحل: لكي تكون قيمة $x$ المعطاة جذر للمعادلة فلابد أن تكون نتيجة التعويض بهذه القيمة في المعادلة تحققها (أي الطرف الأيسر للمعادلة يساوي الطرف الأيمن).

وبوضع $x=3$ في الطرف الأيسر للمعادلة وهو المحدد فنحصل على:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 11 & -3 & -10 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1(0) = 0.$$

وذلك بوضع العمود الأول $(-3C_2+C_1)$ والعمود الثالث $(3C_1+C_3)$

وإذاً $x=3$ تكون جذر للمعادلة.

**مثال(٧)**: تحقق من أن $x=-2$ تكون جذر للمعادلة:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 0$$

الحل: لكي تكون قيمة $x$ المعطاة جذر للمعادلة فلابد أن تكون نتيجة التعويض بهذه القيمة في المعادلة تحققها (أي الطرف الأيسر للمعادلة يساوي الطرف الأيمن).

وبوضع $x=-2$ في الطرف الأيسر للمعادلة وهو المحدد فنحصل على:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 0$$

حيث إن الصف الأول يساوي الصف الثالث.

وإذاً $x=-2$ تكون جذر للمعادلة.

## تمارين:

١- احسب قيمة المحددات الآتية:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} . .$$

٢- تحقق من أن القيم $x = 2,5,17$ تكون جذور للمعادلة:

$$\begin{vmatrix} 10-x & -6 & 2 \\ -6 & 9-x & -4 \\ 2 & -4 & 5-x \end{vmatrix} = 0 .$$

٣- باستخدام المحددات أوجد حل كل من مجموعة المعادلات الآتية:

$$(1)\quad \begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad (2)\quad \begin{aligned} \frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{1}{z} &= 7 \\ \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} &= 13 \\ \frac{3}{x} + \frac{7}{y} - \frac{2}{z} &= -4 \end{aligned}$$

٤- إذا كانت $a+b+c=0$ فأوجد جذور المعادلة:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & c \\ b & c-x & a \\ c & a & b-x \end{vmatrix} = 0$$

٥- أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \cos\beta & \sin\beta \\ 1 & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix} = 4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2} .$$

*******************************************************************************

# الباب الثاني

## المصفوفات Matrices

- **تعريف المصفوفة** Matrix :

المصـــفوفة هي ترتيـــب من الأعداد في تنظيم معين يتكون من عدد مـــن الصـــفوف وليكن $m$ وعدد من الأعمدة وليكن $n$ ، والأعداد التي تكون المصفوفة تُسمى عناصر المصفوفة ، وهي إما أعداد حقيقية ( عندئذ تكون المصفوفة حقيقيـــة ) أو أعـــــداد مركبة ( عندئذ تكون المصفوفة مركبة ). وسنهتم في دراستنا هذه بالمصفوفات الحقيقية ما لم يُذكر خلاف ذلك.

**ملاحظة:** المصفوفة ليست لها قيمة عددية ، ولكنها وسيلة مناسبة لعرض مجموعة مـــن البيانات. ويُرمز للمصفوفات بالحروف الكبيرة $A, B, C, ...$ ، ويُرمز لعناصر المصفوفة بالحروف الصغيرة $a, b, c, ...$ .

والصورة العامة للمصفوفة تُكتب كما يلي:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ..... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ..... & a_{3n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ..... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

هذه المصفوفة تتكون من عدد $m$ من الصفوف وعدد $n$ من الأعمدة أي بهـــا عـــدد $m \times n$ من العناصر $a_{11}, a_{12}, a_{13}, ..., a_{mn}$ ولذلك نقول أن المصفوفة $A$ من النظام $m \times n$ .

وإذا كان $n = m$ أي عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة نقول أن المصفوفة مربعة.

العنصر $a_{23}$ ( يُقرأ $a$ اثنين ثلاثة ) وهو عبارة عن العنصر الموجود في الصف الثـــاني والعمود الثالث أي دائما نذكر رقم الصف أولا ثم بعد ذلك نذكر رقم العمود.

وعلى وجه العموم العنصر الواقع في الصف $i$ والعمود $j$ في المصفوفة $A$ هو العنصر $a_{ij}$ وبالتالي يمكن التعبير باختصار عن المصفوفة $A$ بالصورة: $A=(a_{ij})_{m\times n}$ .

**مثال(١)**: كون المصفوفة $A=(a_{ij})_{2\times 3}$ إذا كان:

$$a_{ij}=\begin{cases} i+j & if \;\; i<j \\ i & if \;\; i=j \\ i-j & if \;\; i>j \end{cases}$$

<u>الحل</u>: الشكل العام للمصفوفة المطلوبة هو:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

حيث

$$a_{11}=1 \; , \; a_{12}=1+2=3 \; , \; a_{13}=1+3=4 \; ,$$
$$a_{21}=2-1=1 \; , \; a_{22}=2 \; , \; a_{23}=2+3=5$$

إذاً المصفوفة المطلوبة تكون

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} .$$

**مثال(٢)**: كون المصفوفة $B=(b_{ij})_{3\times 3}$ إذا كان:

$$b_{ij}=\begin{cases} i+j & if \;\; i<j \\ 0 & if \;\; i=j \\ i^2-j^2 & if \;\; i>j \end{cases}$$

<u>الحل</u>: الشكل العام للمصفوفة المطلوبة هو:

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

حيث

$$b_{11}=0 \; , \; b_{12}=1+2=3 \; , \; b_{13}=1+3=4 \; ,$$
$$b_{21}=2^2-1^2=3 \; , \; b_{22}=0 \; , \; b_{23}=2+3=5$$
$$b_{31}=3^2-1^2=8 \; , \; b_{32}=3^2-2^2=5 \; , \; b_{33}=0$$

$$\therefore B=\begin{pmatrix}0&3&4\\3&0&5\\8&5&0\end{pmatrix}.$$

- **أنواع المصفوفات** Type of Matrices:

١. **المصفوفة الصفرية** Zero Matrix :

هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفارا ويُرمز لها بالرمز $O$ . والمصفوفة الصفرية قد تكون مستطيلة أو مربعة ، وتلعب المصفوفة الصفرية دورا رئيسيا في دراسة المصفوفات كما سنرى فيما بعد.

٢. **المصفوفة المثلثية العليا** Upper Triangular Matrix :

وهي المصفوفة المربعة والتي فيها العناصر أسفل القطرالرئيسي $a_{11},a_{22},a_{33},...,a_{nn}$ كلها أصفارا أي أن:

$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{cases}a_{ij}=0 & if\ i>j\\ a_{ij}\neq 0 & if\ i\leq j\end{cases}$$

٣. **المصفوفة المثلثية السفلى** Lower Triangular Matrix :

وهي المصفوفة المربعة والتي فيها العناصر أعلى القطرالرئيسي $a_{11},a_{22},a_{33},...,a_{nn}$ كلها أصفارا أي أن:

$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{cases}a_{ij}\neq 0 & if\ i\geq j\\ a_{ij}=0 & if\ i<j\end{cases}$$

٤. **المصفوفة القطرية** Diagonal Matrix :

وهي المصفوفة المربعة والتي فيها جميع العناصر أصفارا ما عدا عناصر القطر الرئيسي أي أن:

$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{cases}a_{ij}\neq 0 & if\ i=j\\ a_{ij}=0 & if\ i\neq j\end{cases}$$

- **ملاحظات:**

(١) المصفوفة القطرية هي مصفوفة مثلثية عليا ومثلثية سفلى في نفس الوقت.

(٢) لا يمنع أن نجد في المصفوفة القطرية بعض عناصر القطر الرئيسي أصفارا.

(٣) عدد عناصر القطر الرئيسي غير الصفرية في المصفوفة القطريـــة يســـاوي مترلة المصفوفة.

(٤) إذا تساوت جميع عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة القطريـــة سُـــميت المصفوفة القطرية بالمصفوفة القياسية (مثال: مصفوفة الوحدة) .

- **جبر المصفوفات:**

**(١) تساوي مصفوفتان:**

يُقال للمصفوفتين $A, B$ أهما متساويتان ويُكتب $A = B$ إذا وإذا فقط كانتا من نفس النظام ، وكل عنصر في المصفوفة $A$ يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة $B$ .

أي أن إذا كانت $A = (a_{ij})_{m\times n}\ , B = (b_{ij})_{m\times n}$ فإن $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ .

**مثال(٣)**:ليكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ فإن $A \neq B$ حيث $a_{12} = 0$ بينما $b_{12} = 1$ .

**مثال(٤)**: المصفوفتان $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ غير متساويتان حيث إن المصفوفة $A$ على النظام $2\times 2$ بينما المصفوفة $B$ على النظام $2\times 3$ .

**مثال(٥)**: أوجد قيم $x, y$ حتى تتساوى المصفوفتان $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & x & 3 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

الحل: المصفوفتان من نفس النظام $2\times 3$ ، ولكي تتساوى المصفوفتان يجب أن تكون العناصر المتناظرة متساوية أي يجب أن يكون $x = 2, y = -7$ .

**مثال(٦)**: أوجد قيم $x, y, z$ حتى تتساوى المصفوفتان $\begin{pmatrix} x+y & 0 \\ x+2y & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

الحل: المصفوفتان من نفس النظام ، ولكي تتساوى المصفوفتان يجب أن تكون العناصر المتناظرة متساوية أي يجب أن يكون

$$x+y=1$$
$$x+2y=0$$
$$z=0$$

وبحل المعادلات الثلاثة نجد أن $x=2, y=-1, z=0$ .

**(٢) جمع المصفوفات:**

إذا كانت $A, B$ مصفوفتان من نفس النظام فإن حاصل جمعهما يُرمز له $A+B$ وهو المصفوفة $C$ على نفس النظام ، وكل عنصر من عناصر المصفوفة $C$ نحصل عليه بجمع العنصرين المتناظرين في المصفوفتين $A, B$ .

أي أن إذا كانت $A=(a_{ij})_{m\times n}\ , B=(b_{ij})_{m\times n}$ فإن $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ .

**مثال(٧)**: إذا كانت $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ فأوجد $A+B$ .

الحل:

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2 & 2-4 \\ -3+1 & 0-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

**مثال(٨)**: المصفوفتان $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, (3 \quad 4)$ لا يمكن جمعهما لأنهما ليس من نفس النظام ( المصفوفة الأولى من النظام $2\times 1$ أما الثانية من النظام $1\times 2$ ) .

## خصائص عملية الجمع على المصفوفات:

١- عملية جمع المصفوفات عملية إبدالية( للمصفوفات التي على نفس النظام).

أي أن إذا كانت $A=(a_{ij})_{m\times n}\ ,B=(b_{ij})_{m\times n}$ فإن $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ ، ومن خاصية إبدال الجمع للأعداد الحقيقية فإن $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$ وعلى ذلك فإن $A+B=B+A$ .

٢- عملية جمع المصفوفات عملية تجميعية (أو دامجة) للمصفوفات التي على نفس النظام.أي إذا كانت $A,B,C$ ثلاثة مصفوفات فإن $A+(B+C)=(A+B)+C$ .

٣- المصفوفة الصفرية $O$ والتي من نفس النظام للمصفوفة $A$ يُقال أنها عنصر محايد جمعي. حيث $A+O=O+A=A$ .

٤- للمصفوفة $A$ يوجد مصفوفة من نفس النظام تُسمى المعكوس الجمعي لها وتتكون من عناصر المصفوفة $A$ ولكن بإشارة مخالفة ويُرمز لها بالرمز $-A$ حيث $A+(-A)=(-A)+A=O$ .

٥-حاصل ضرب عدد ثابت $k$ في المصفوفة $A$ هو مصفوفة جديدة على نفس نظام المصـــفوفة $A$ فيها كل عنصر من عناصرها يســـاوي المناظر له في المصـــفوفة $A$ مضروب في هذا الثابت $k$ أي إذا كانت $A=(a_{ij})_{m\times n}$ فإن

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n}\ ;k\ \text{constant.}$$

## (٣) ضرب المصفوفات:

يُقال للمصفوفتين $A, B$ أنهما قابلتين للضرب على الصورة $AB$ إذا كان عدد أعمدة المصفوفة $A$ يساوي عدد صفوف المصفوفة $B$ ، وفي هذه الحالة نقول أن حاصل الضرب $AB$ معرفا (أو ممكنا).

كذلك يُقال للمصفوفتين $A, B$ أنهما غير قابلتين للضرب إذا كان عدد أعمدة المصفوفة $A$ لا يساوي عدد صفوف المصفوفة $B$ ، وفي هذه الحالة نقول أن حاصل الضرب $AB$ غير معرف (أو غير ممكن).أي إذا كانت $A=(a_{ij})_{m\times n}\ , B=(b_{ij})_{r\times s}$ فإن: $AB$ يكون معرف $\Leftrightarrow n=r$ ، $AB$ يكون غير معرف $\Leftrightarrow n\neq r$ .

- كيفية تعيين مصفوفة حاصل الضرب:

إذا كانت $A=(a_{ij})_{m\times n}\ , B=(b_{ij})_{n\times k}$ في هذه الحالة يكون $AB$ معرف ، ولإيجاد نظام $AB$ نكتب $A_{m\times n}\times B_{n\times k}=C_{m\times k}$ والشكل الآتي يُوضح عملية الضرب:

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & ..... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{i1} & a_{i2} & ..... & ..... & a_{in} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & ..... & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ..... & b_{1j} & ..... & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & ..... & b_{2j} & ..... & b_{2k} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ b_{n1} & b_{n2} & ..... & b_{nj} & ..... & b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ..... & ..... & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & ..... & ..... & c_{2k} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ & & & c_{ij} & \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ c_{m1} & c_{m2} & ..... & ..... & c_{mk} \end{pmatrix}.$$

حيث $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}$ .

**مثال(٩)**:أوجد $AB\,,BA$ إذا كانت $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

<u>الحل</u>:

$$A_{2\times3}\times B_{3\times2}=C_{2\times2}$$

إذاً حاصل الضرب $AB$ معرف ومن ثم يكون:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1)(1)+(-1)(2)+(2)(-1) & (1)(1)+(-1)(0)+(2)(1)\\ (-1)(1)+(1)(2)+(0)(-1) & (-1)(1)+(1)(0)+(0)(1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

كذلك يكون:

$$B_{3\times2}\times A_{2\times3}=C_{3\times3}$$

وإذاً حاصل الضرب $BA$ معرف ومن ثم يكون:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1 & -1+1 & 2+0\\ 2+0 & -2+0 & 4+0\\ -1-1 & 1+1 & -2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 4\\ -2 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

**مثال(١٠)**: إذا كانت

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

فأوجد $AB\,,BA$ .

<u>الحل</u>: $AB$ معرف حيث $A_{2\times2}\times B_{2\times3}=C_{2\times3}$ وإذاً:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 5 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

بينما $BA$ غير معرف حيث $B_{2\times3}\,,A_{2\times2}$ .

**مثال(١١)**: إذا كانت

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -4 & 7\end{pmatrix}$$

فأوجد $AB\,, BA$ .

الحل:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-8 & 8+14\\ 1-12 & -8+21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 22\\ -11 & 13\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-8 & -2+24\\ -4-7 & -8+21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 22\\ -11 & 13\end{pmatrix}$$

وإذاً $AB=BA$ .

**ملاحظات**: من الأمثلة السابقة نلاحظ أن:

- تُوجد بعض المصفوفات تحقق العلاقة $AB=BA$ .
- تُوجد بعض المصفوفات لا تحقق العلاقة $AB=BA$ .
- تُوجد بعض المصفوفات يكون لها $AB$ معرف بينما $BA$ غير معرف .
- تُوجد بعض المصفوفات يكون لها كل من $AB$ , $BA$ غير معرف .

- **خصائص ضرب المصفوفات:**

١- عملية الضرب على المصفوفات ليست إبدالية.

حيث لأي مصفوفتين $AB \neq BA$ في الحالة العامة (انظر مثال(٩)).

٢- عملية الضرب على المصفوفات دامجة.

أي أن لأي ثلاثة مصفوفات $A, B, C$ يتحقق: $A(BC) = (AB)C$

٣- عملية الضرب على المصفوفات تتوزع على عملية الجمع على المصفوفات من اليمين ومن اليسار.

أي أن لأي ثلاثة مصفوفات $A, B, C$ يتحقق:

$$(A+B)C = AC + BC,$$
$$A(B+C) = AB + AC$$

٤- مصفوفة الوحدة $I$ ( وهي مصفوفة قطرية فيها جميع عناصر القطر الرئيسي الواحد الصحيح )والتي من نفس النظام للمصفوفة $A$ يُقال أنها عنصر محايد ضربي. حيث $AI = IA = A$ .

٥- إذا ضُربت المصفوفة القياسية في مصفوفة أخرى فإن حاصل الضرب يساوي العدد القياسي مضروبا في المصفوفة نفسها (ومن هنا سُميت المصفوفة القياسية).

**مثال(١٢)**:إذا كانت $X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

واضح أن المصفوفة $K$ قياسية وأن:

$$KX = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1+0 & ka_2+0 & ka_3+0 \\ 0+kb_1 & 0+kb_2 & 0+kb_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

بالمثل نجد أن $YK = KY$ .

٦- حاصل ضرب مصفوفتين مثلثتين علويتين (سفليتين) هو مصفوفة مثلثية علوية(سفلية).

**مثال(١٣)**: إذا كانت $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix}$ فإن

$$AB=\begin{pmatrix} a_1x_1 & a_1x_2+a_2y_2 & a_1x_3+a_2y_3+a_3z_3 \\ 0 & b_2y_2 & b_2y_3+b_3z_3 \\ 0 & 0 & c_3z_3 \end{pmatrix}.$$

٧- إذا كانت $A$ مصفوفة مربعة فإن $A^0=I$، وبذلك يكون $A^n$ مُعرف حيث $n$ عدد طبيعي.

**مثال(١٤)**:إذا كانت $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ فأوجد $A^2, A^3$ .

الحل:

$$A^2=A\times A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}$$

**مثال(١٥)**: إذا كانت $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وكانت

$$f(x)=x^2-2x+1, g(x)=x^2-3x+5$$

فأوجد $f(A), g(A)$ .

الحل:

$$\begin{aligned} f(A)&=A^2-2A+I \\ &=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2-2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$g(A)=A^2-3A+5I$$
$$=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&6\\0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\0&3\end{pmatrix}.$$

### ٥. المصفوفة الدورية Periodic Matrix :

يُقال للمصفوفة المربعة $A$ أنها مصفوفة دورية إذا كان $A^n=A$ حيث $n$ عدد طبيعي أكبر من الواحد الصحيح ويُقال أن المصفوفة ذات دورة $n-1$ .

### ٦. مدور المصفوفة Transpose of a Matrix :

مدور المصفوفة $A$ يُرمز له بالرمز $A^t$ وهو المصفوفة التي نحصل عليها بجعل صفوف المصفوفة $A$ أعمدة وبنفس الترتيب. أي أن:

$$A=(a_{ij})_{m\times n}\Leftrightarrow A^t=(a_{ji})_{n\times m}$$

**مثال(١٦)**: إذا كانت $A=\begin{pmatrix}-2&3&5\\0&-1&4\\0&0&-6\end{pmatrix}$ فإن $A^t=\begin{pmatrix}-2&0&0\\3&-1&0\\5&4&-6\end{pmatrix}$ .

- **نتائج**: لأي مصفوفتين مربعتين $A,B$ من نفس النظام يتحقق:

$1-(A^t)^t=A.$

$2-(A+B)^t=A^t+B^t.$

$3-(AB)^t=B^tA^t.$

### ٧. المصفوفة المتماثلة Symmetric Matrix :

يُقال للمصفوفة $A$ أنها مصفوفة متماثلة إذا وفقط إذا كان $A=A^t$ .

### ٨. المصفوفة المتخالفة Skew Symmetric Matrix :

يُقال للمصفوفة $A$ أنها مصفوفة متخالفة إذا وفقط إذا كان $-A=A^t$ .

**مثال(١٧)**: إذا كانت $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ -3 & 2 & 4\\ 5 & 4 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}$

واضح أن المصفوفة $A$ متماثلة ، والمصفوفة $B$ متخالفة.

- **ملاحظات:**

(١) لكي تكون المصفوفة متماثلة (متخالفة) يجب أن تكون مربعة والعكس غير صحيح دائما.

(٢) في المصفوفة المتخالفة تكون عناصر القطر الرئيسي كلها أصفارا.

البرهان: لتكن $A=(a_{ij})_{m\times n}$ مصفوفة متخالفة فيكون $-a_{ij}=a_{ji}$ ، وعندما يكون $i=j$ نجد أن $-a_{ij}=a_{ij} \Rightarrow 2a_{ij}=0 \Rightarrow a_{ij}=0$ .

(٣) إذا كانت $A$ مصفوفة مربعة فإن $A+A^t$ تكون مصفوفة متماثلة ، بينما $A-A^t$ تكون مصفوفة متخالفة.

البرهان: نفرض أن $B=A+A^t$ وإذاً:

$$B^t=(A+A^t)^t=A^t+(A^t)^t=A^t+A=A+A^t=B.$$

(حيث عملية جمع المصفوفات إبدالية).

وبالمثل نفرض أن $C=A-A^t$ وإذاً:

$$C^t=(A-A^t)^t=A^t-(A^t)^t=A^t-A=-(A-A^t)=-C.$$

(٤) إذا كانت $A$ مصفوفة مربعة فإنه يُمكن كتابة $A=B+C$ حيث $B$ مصفوفة متماثلة ، $C$ مصفوفة متخالفة.

البرهان:

$$\begin{aligned}A=\frac{1}{2}[A+A^t+A-A^t]&=\frac{1}{2}[(A+A^t)+(A-A^t)]\\&=\frac{1}{2}(A+A^t)+\frac{1}{2}(A-A^t)\\&=B+C\end{aligned}$$

(حيث $B=\frac{1}{2}(A+A^t)$ مصفوفة متماثلة، $C=\frac{1}{2}(A-A^t)$ مصفوفة متخالفة).

- **المعكوس الضربي للمصفوفة:**

إذا كانت $A$ مصفوفة مربعة غير مفردة أي أن محددها لا يساوي الصفر ($|A| \neq 0$) فإنه يمكن تعريف مصفوفة مربعة على نفس نظام المصفوفة $A$ تُسمى المعكوس الضربي للمصفوفة $A$ ويُرمز لها بالرمز $A^{-1}$ بحيث يتحقق:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

حيث $I$ مصفوفة الوحدة من نفس النظام ، ويكون:

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{(\tilde{A})^t}{|A|}$$

حيث $adjA$ المصفوفة المجاورة للمصفوفة $adjoint\, A$ وهي مدور مصفوفة المتممات $(\Delta_{ij}) = co-factors(a_{ij})$ .

**مثال(١٨):** أوجد المعكوس الضربي للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل:

أولاً: نحسب قيمة $|A|$ كما يلي:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = -27 \neq 0$$

وإذا فالمصفوفة غير مفردة وبالتالي لها معكوس ضربي.

ثانياً: نحسب عناصر مصفوفة المتممات للمصفوفة $A$ وهي $\tilde{A} = (\Delta_{ij})$ كما يلي:

$$\Delta_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3,\quad \Delta_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-6,$$

$$\Delta_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-6,\quad \Delta_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-6,$$

$$\Delta_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3,\quad \Delta_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=6,$$

$$\Delta_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-6,\quad \Delta_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=6,$$

$$\Delta_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3.$$

$$\therefore \tilde{A}=(\Delta_{ij})=\begin{pmatrix}-3 & -6 & -6\\ -6 & -3 & 6\\ -6 & 6 & -3\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix},$$

$$\therefore adjA=(\tilde{A})^t=-3\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix},$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{adjA}{|A|}=\frac{-3}{-27}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

( تحقق من أن $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ ).

**تعريف**: يُقال للمصفوفة $A$ أنها مصفوفة عمودية Orthogonial Matrix إذا كان معكوسها الضربي يساوي مدورها أي إذا كان $A^{-1}=A^{t}$ .

(بمعنى أن المصفوفة $A$ تكون عمودية إذا كان $AA^{t}=A^{t}A=I$).

**مثال(١٩)**: مصفوفة الوحدة $I$ هي مصفوفة عمودية حيث $I^{t}I=I\,I^{t}=I$

**مثال(٢٠)**: المصفوفة $\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$ مصفوفة عمودية حيث:

$$\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}^{t}\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sin^{2}\theta+\cos^{2}\theta & 0 \\ 0 & \sin^{2}\theta+\cos^{2}\theta \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}^{t}=\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sin^{2}\theta+\cos^{2}\theta & 0 \\ 0 & \sin^{2}\theta+\cos^{2}\theta \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## ▪ تمارين:

١- كون المصفوفات الآتية:

$$\text{(i) } A=(a_{ij})_{2\times3} \quad ,a_{ij}=i+j$$
$$\text{(ii) } B=(b_{ij})_{3\times3} \quad ,b_{ij}=i^2-j^2$$
$$\text{(iii) } C=(c_{ij})_{2\times3} \quad ,c_{ij}=\begin{cases}2i+1 & if\ i=j\\ i+j+2 & if\ i\neq j\end{cases}$$
$$\text{(iv) } X=(x_{ij})_{4\times4} \quad ,x_{ij}=\begin{cases}1 & if\ i=j\\ 0 & if\ i\neq j\end{cases}.$$

٢- إذا كانت

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 7\\ -3 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},$$
$$X=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -4 & 0\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{pmatrix}, Z=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 4\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

فأوجد:

(i) $A+2B+3C$ .		(ii) $3Y+5Z-4X$ .

ثم أوجد المعكوس الجمعي للمصفوفات الناتجة في(i),(ii) .

٣- أوجد المصفوفة $A$ التي تحقق ما يلي:

$$\text{(i) } A+2\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ -1 & 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}$$
$$\text{(ii) } A-\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -6 & 8\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}4 & -8\\ 6 & -3\end{pmatrix}.$$

٤- إذا كانت

$$\begin{pmatrix}k & k+l\\ 2l+m & m+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 5 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 7\\ 8 & 9\end{pmatrix}$$

فأوجد قيمة $k,l,m,n$ .

٥- إذا كانت $A = X + Y$ حيث $X$ مصفوفة متماثلة ، $Y$ مصفوفة متخالفة.
فأوجد $X, Y$ علما بأن:

$$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 4 & 7 & -8 \\ 8 & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \; A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & -8 \\ 2 & 9 & -10 \end{pmatrix}.$$

٦- أوجد حاصل ضرب المصفوفات الآتية:

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(iii)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ثم أوجد المعكوس الضربي للمصفوفات الناتجة في(i),(iii) .

٧- أوجد $A^n$ إذا كانت

$$\text{(i)} \; A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)} \; A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{(iii)} \; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

٨- أوجد المصفوفة $B$ بحيث يتحقق $AB = BA$ علما بأن:

$$\text{(i)} \; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)} \; A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{(iii)} \; A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

٩- إذا كانت

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 0 & 2 & -2\\ 3 & -5 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ 0 & 1 & 2\\ -3 & 5 & 3\end{pmatrix}$$

فأوجد:

(i) $A^2+AB+3BA+3B^2$. (ii) $(A+B+I)(A+B-I)$.

١٠- إذا كانت $A$ مصفوفة مربعة متماثلة (متخالفة) على النظام $n\times n$ ،

وكانت $B$ مصفوفة على النظام $m\times n$ ، وكانت $X=BAB^t$ .

فأثبت أن $X$ تكون متماثلة (متخالفة) .

**********************************************************************

## الكسور الجزئية Partial Fractions

١. كثيرة الحدود في المتغير $x$ من درجة $n$ هي دالة على الصورة:
$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n .$

حيث $a_0, a_1, ..., a_n$ هي معاملات ثابتة ، $n$ عدد صحيح موجب.
ومن الناحية النظرية فإن كثيرة الحدود ذات المعاملات الحقيقية يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب عوامل خطية حقيقية على الصورة $(ax+b)$ وعوامل تربيعية حقيقية على الصورة $(ax^2+bx+c)$ ومن الناحية العملية قد يكون التحليل صعبا.

٢. تُسمى الدالة $\phi(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ كسر قياسي rational fraction

إذا كانت $f_1(x), f_2(x)$ كثيرتي حدود.
وإذا كانت درجة البسط $f_1(x)$ أصغر من درجة المقام $f_2(x)$ فإن الكسر $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ يُسمى كسر عادي proper fraction

وإذا كانت درجة البسط تساوي أو أكبر من درجة المقام فإن الكسر $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$

يُسمى كسر غير عادي improper fraction

٣. نعلم أن عملية جمع الكسرين $\dfrac{2}{x-3}, \dfrac{1}{2x+1}$ تساوي $\dfrac{5x-1}{(x-3)(2x+1)}$

وعلى ذلك يمكن التعبير عن الكسر $\dfrac{5x-1}{(x-3)(2x+1)}$ كمجموع كسرين جزئيين أبسط منه، وفي هذه الحالة يُقال أن الكسر جُزء لكسرين جزئيين $\dfrac{2}{x-3}, \dfrac{1}{2x+1}$

٤. أي كسر قياسي غير عادي يمكن التعبير عنه كحاصل جمع كثيرة حدود

وكسر قياسي عادي ، فمثلاً: $\dfrac{x^3}{x^2+2} = x - \dfrac{2x}{x^2+2}$ .

٥. كل كسر قياسي عادي يمكن التعبير عنه (على الأقل نظريا) كمجموع كسور جزئية بسيطة بحيث يكون المقام لكل كسر جزئي على الصورة:

$(ax+b)^n, (ax^2+bx+c)^n \; ; \; n \in Z^+.$

- **قواعد خاصة بالكسور الجزئية:**

**أولاً: إذا كان $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ كسر عادي (درجة البسط أقل من درجة المقام)**

- إذا أُريد وضع الكسر القياسي العادي $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ على صورة مجموع كسور جزئية

فهناك أربعة حالات تعتمد على طبيعة عوامل المقام $f_2(x)$ كما يلي:

**(١) عوامل المقام خطية مختلفة distinct linear factors:**

إذا كان المقام $f_2(x)$ يتضمن عوامل خطية مختلفة على الصورة $(ax+b)$

فإن هذا العامل يناظره كسر جزئي واحد على الصورة $\frac{\alpha}{ax+b}$ حيث $\alpha$ مقدار ثابت

أي أن:

$$\frac{f_1(x)}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)...} = \frac{\alpha_1}{a_1x+b_1} + \frac{\alpha_2}{a_2x+b_2} + .....$$

حيث $\alpha_1, \alpha_2, ....$ ثوابت.

**(٢) عوامل المقام خطية مكررة repeated linear factors:**

إذا كان المقام $f_2(x)$ يتضمن عوامل خطية مكررة على الصورة $(ax+b)^n$

فهذا العامل يناظره مجموع $n$ من الكسور الجزئية على الصورة:

$$\frac{f_1(x)}{(ax+b)^n...} = \frac{\alpha_1}{(ax+b)} + \frac{\alpha_2}{(ax+b)^2} + \frac{\alpha_3}{(ax+b)^3} + ... + \frac{\alpha_n}{(ax+b)^n}$$

حيث $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ثوابت.

**(٣) عوامل المقام تربيعية مختلفة distinct quadratic factors:**

إذا كان المقام $f_2(x)$ يتضمن عوامل تربيعية مختلفة على الصورة $(ax^2+bx+c)$

وغير قابلة للتحليل إلى عاملين خطيين ، فمثل هذا العامل يناظره كسر واحد جزئي

على الصورة $\frac{\alpha_1 x+\alpha_2}{ax^2+bx+c}$ حيث $\alpha_1,\alpha_2$ ثوابت ، أي أن:

$$\frac{f_1(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\ldots}=\frac{\alpha_1 x+\alpha_2}{(a_1x^2+b_1x+c_1)}+\frac{\alpha_3 x+\alpha_4}{(a_2x^2+b_2x+c_2)}+\ldots$$

حيث $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\ldots$ ثوابت.

**<u>(٤) عوامل المقام تربيعية مكررة repeated quadratic factors:</u>**

إذا كان المقام $f_2(x)$ يتضمن عوامل تربيعية مكررة على الصورة $(ax^2+bx+c)^n$ حيث $ax^2+bx+c$ غير قابل للتحليل ، $n$ عدد صحيح موجب ،

فمثل هذا العامل يناظره مجموع $n$ من الكسور الجزئية على الصورة:

$$\frac{f_1(x)}{(ax^2+bx+c)^n\ldots}=\frac{\alpha_1 x+\alpha_2}{(ax^2+bx+c)}+\frac{\alpha_3 x+\alpha_4}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{\alpha_n x+\alpha_{n+1}}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

حيث $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ ثوابت.

---

## أمثلة:

**مثال(١):** ضع الكسر $\frac{x+1}{x^3+x^2-6x}$ على صورة مجموع كسور جزئية.

الحل:

$$\because x^3+x^2-6x = x(x^2+x-6) = x(x-2)(x+3).$$

$$\therefore \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x-2}+\frac{\alpha_3}{x+3}$$

$$= \frac{\alpha_1(x-2)(x+3)+\alpha_2 x(x+3)+\alpha_3 x(x-2)}{x(x-2)(x+3)}$$

أوبالضرب في $x(x-2)(x+3)$ ينتج أن:

$$\boxed{x+1 = \alpha_1(x-2)(x+3)+\alpha_2 x(x+3)+\alpha_3 x(x-2)}$$

وهذه العلاقة هي متطابقة صحيحة لجميع قيم $x$ الحقيقية ،

ولتعيين قيم الثوابت $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$:

- نستخدم طريقة التعويض ( باختيار قيم مناسبة ل $x$ ونعوض بها في طرفي العلاقة

ثم نعين $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ )

- أو نستخدم طريقة المقارنة ( نقارن معاملات قوى $x$ في طرفي العلاقة ) ،
- وقد نستخدم الطريقتين (طريقة التعويض ، وطريقة المقارنة) معاً إذا لزم الأمر.

وفي هذا المثال نستخدام طريقة التعويض كما يلي:

$$x=0 \Rightarrow 1=-6\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{6} \ ,$$

$$x=2 \Rightarrow 3=10\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{3}{10} \ ,$$

$$x=-3 \Rightarrow -2=15\alpha_3 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{-2}{15} \ .$$

$$\therefore \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{-1}{6x}+\frac{3}{10(x-2)}+\frac{-2}{15(x+3)}.$$

**مثال(٢):** ضع الكسر $\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$ على صورة مجموع كسور جزئية.

الحل:

$$\because x^3-x^2-x+1 = x^2(x-1)-(x-1) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1).$$

$$\therefore \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{\alpha_1}{x+1} + \frac{\alpha_2}{x-1} + \frac{\alpha_3}{(x-1)^2}.$$

وبالضرب في $(x+1)(x-1)^2$ ينتج أن:

$$3x+5 = \alpha_1(x-1)^2 + \alpha_2(x+1)(x-1) + \alpha_3(x+1)$$

وباستخدام طريقة التعويض يكون:

$$x=-1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2},\ \ x=1 \Rightarrow \alpha_3 = 4,\ \ x=0 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{-1}{2}.$$

وبالتعويض عن قيم $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ينتج أن:

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{4}{(x-1)^2}.$$

**مثال(٣):** ضع الكسر $\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}$ على صورة مجموع كسور جزئية.

الحل:

$$\because x^4+3x^2+2=(x^2+1)(x^2+2).$$

$$\therefore \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}=\frac{\alpha_1 x+\alpha_2}{x^2+1}+\frac{\alpha_3 x+\alpha_4}{x^2+2}.$$

وبضرب طرفي المعادلة السابقة في $(x^2+1)(x^2+2)$ ينتج أن:

$$x^3+x^2+x+2=(\alpha_1 x+\alpha_2)(x^2+2)+(\alpha_3 x+\alpha_4)(x^2+1).$$

وبمقارنة معاملات $x, x^2, x^3$ والحد المطلق في الطرفين ينتج أن:

$$1=\alpha_1+\alpha_3,$$
$$1=\alpha_2+\alpha_4,$$
$$1=2\alpha_1+\alpha_3,$$
$$2=2\alpha_2+\alpha_4$$

وبحل هذه المعادلات ينتج أن:

$$\alpha_1=0,\ \alpha_3=1,\ \alpha_2=1,\ \alpha_4=0$$

$$\therefore \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}=\frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{x^2+2}.$$

**مثال(٤):** ضع الكسر $\dfrac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^2}$ على صورة مجموع كسور جزئية.

الحل:

$$\frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^2}=\frac{\alpha_1 x+\alpha_2}{(x^2+2x+3)}+\frac{\alpha_3 x+\alpha_4}{(x^2+2x+3)^2}.$$

$$\therefore x^2+x+2=(\alpha_1 x+\alpha_2)(x^2+2x+3)+(\alpha_3 x+\alpha_4)$$

وبمقارنة معاملات $x,x^2,x^3$ والحد المطلق في الطرفين نحصل على:

$$0=\alpha_1 \Rightarrow `\alpha_1=0,$$

$$1=2\alpha_1+\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2=1,$$

$$1=3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3 \Rightarrow \alpha_3=-1,$$

$$2=3\alpha_2+\alpha_4 \Rightarrow \alpha_4=-1$$

$$\therefore \frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^2}=\frac{1}{x^2+2x+3}-\frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}.$$

---

**<u>ثانياً</u>: إذا كان $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ كسر غير عادي**

**(أي درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام)**

- إذا أُريد وضع الكسر القياسي غير العادي على صورة مجموع كسور جزئية ،

فتوجد <u>طريقتان</u>:

**<u>الطريقة الأولى</u>:**

- نقسم البسط على المقام ، ثم نضع الكسر الباقي على صورة مجموع كسور جزئية كما في الحالات السابقة (في أولاً).

**<u>الطريقة الثانية</u>:**

- إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام. نضيف مقدار ثابت $\alpha_1$ إلى مجموعة الكسور الجزئية السالفة الذكر في أولاً.
- إذا كانت درجة البسط تزيد عن درجة المقام بدرجة واحدة. نضيف مقدار (عامل) من الدرجة الأولى $(\alpha_1 x+\alpha_2)$ إلى مجموعة الكسور الجزئية في أولاً.
- إذا كانت درجة البسط تزيد عن درجة المقام بدرجتين. نضيف مقدار من الدرجة الثانية $(\alpha_1 x^2+\alpha_2 x+\alpha_3)$ إلى مجموعة الكسور الجزئية في أولاً ، وهكذا ...

**مثال(٥):** ضع الكسر $\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$ على صورة مجموع كسور جزئية.

الحل: نستخدم الطريقة الأولى (نقسم البسط على المقام)

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x+1 & x^2+x+1 \\ \hline 1 & \underline{x^2+2x+1} \\ & \quad -x \end{array}$$

$$\therefore \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}=1-\frac{x}{x^2+2x+1} \quad ,$$

$$\frac{x}{x^2+2x+1}=\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{\alpha_1}{(x+1)}+\frac{\alpha_2}{(x+1)^2}=\frac{\alpha_1(x+1)+\alpha_2}{(x+1)^2} \quad ,$$

$$\therefore x=\alpha_1(x+1)+\alpha_2$$

وبالتعويض عن $x=-1$ في الطرفين نحصل على:

$$-1=\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2=-1$$

وبالتعويض عن $x=0$ في الطرفين نحصل على:

$$0=\alpha_1+\alpha_2 \Rightarrow 0=\alpha_1-1 \Rightarrow \alpha_1=1$$

$$\therefore \frac{x}{x^2+2x+1}=\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2} \quad ,$$

$$\therefore \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}=1-\frac{x}{x^2+2x+1}=1-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}.$$

**مثال(٦):** ضع الكسر $\frac{x^4+2x+4}{(2x^2+3)(x-2)}$ على صورة مجموع كسور جزئية.

الحل: (نستخدم الطريقة الثانية)

$$\frac{x^4+2x+4}{(2x^2+3)(x-2)}=(\alpha_1 x+\alpha_2)+\frac{\alpha_3}{x-2}+\frac{\alpha_4 x+\alpha_5}{2x^2+3}.$$

$$\therefore x^4+2x+4=(\alpha_1 x+\alpha_2)(2x^2+3)(x-2)+\alpha_3(2x^2+3)+(\alpha_4 x+\alpha_5)(x-2).$$

وبوضع $x=2$ ومقارنة معاملات $x^2,x^3,x^4$ والحد المطلق في الطرفين ينتج أن:

$$x=2\Rightarrow 16+4+4=11\alpha_3\Rightarrow \alpha_3=\frac{24}{11},$$

$$1=2\alpha_1\Rightarrow \alpha_1=\frac{1}{2},$$

$$0=-4\alpha_1+2\alpha_2\Rightarrow \alpha_2=1,$$

$$0=3\alpha_1-4\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4\Rightarrow \alpha_4=\frac{-41}{22},$$

$$4=-6\alpha_2+3\alpha_3-2\alpha_5\Rightarrow \alpha_5=\frac{-38}{22}$$

$$\therefore \frac{x^4+2x+4}{(2x^2+3)(x-2)}=(\frac{1}{2}x+1)+\frac{24}{11(x-2)}-\frac{41x+38}{22(2x^2+3)}.$$

---

## تمارين:

ضع كلا من الكسور الآتية على صورة مجموع كسور جزئية:

(1) $\dfrac{x+1}{x^2+7x+12}$ (2) $\dfrac{x^2+1}{(2x-1)(x+2)^2}$ (3) $\dfrac{1}{x^3-2x-1}$

(4) $\dfrac{x^2-2}{x^3+2x^2}$ (5) $\dfrac{x^5-1}{x^2(x^3+1)}$ (6) $\dfrac{1}{x^4-1}$

(7) $\dfrac{2x-1}{x^3-x^2-2x}$ (8) $\dfrac{x^3+5x^2+4x+6}{(x-1)(x^3-1)}$

(9) $\dfrac{x^3+2x^2-3}{(x^2-1)^2}$ (10) $\dfrac{3x^2-9x-20}{x^2-2x-3}$

(11) $\dfrac{2x^2+5x+1}{(x+1)^2}$ (12) $\dfrac{6x^3-7x^2-16x+27}{6x^2-7x-5}$.

==========================================

==========

# الباب الرابع

## نظرية ذات الحدين Binomial Theory

### ١. نظرية ذات الحدين بأس عدد صحيح موجب $n$:

من خلال دراستنا السابقة (وباستخدام الضرب العادي) نعلم أن:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

أي أن

$$(x+y)^2 = x^n + nxy + y^n \quad ; n=2.$$

وأن

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$
$$= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{(2)(1)}x^{n-2}y^2 + y^n \quad ; n=3.$$

وبالمثل يكون:

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$
$$= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{(2)(1)}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{(3)(2)(1)}x^{n-3}y^3 + y^n$$
$$; n=4.$$

وعلى ذلك يكون:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{(2)(1)}x^{n-2}y^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\ldots(3)(2)(1)}x^{n-r}y^r + \ldots + y^n.$$

ويسمى هذا المفكوك الأخير مفكوك ذات الحدين بأس عدد صحيح موجب $n \in Z^+$

**ملاحظات:**

نلاحظ في مفكوك ذات الحدين بأس عدد صحيح موجب $n\in Z^{+}$ أن:

١- عدد الحدود في المفكوك يساوي $n+1$ .

٢- مجموع قوى (أس) كلا من $x,y$ في أي حد من حدود المفكوك يساوي $n$ .

٣- معامل الحد الثاني في أول المفكوك يساوي معامل الحد الثاني في أخر المفكوك، ومعامل الحد الثالث في أول المفكوك يساوي معامل الحد الثالث في أخر المفكوك، وهكذا ...

٤- الحد $T_{r+1}=\dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)...(3)(2)(1)}x^{n-r}y^{r}$ يُسمى الحد العام ( رتبته $r+1$ ) في المفكوك.

٥- إذا كانت $n$ عدد زوجي فإن رتبة الحد الأوسط في مفكوك ذات الحدين تساوي $\dfrac{n+2}{2}$ . أما إذا كانت $n$ عدد فردي فإنه يوجد حدان أوسطان في مفكوك ذات الحدين رتبتهما تساوي $\dfrac{n+1}{2},\dfrac{n+3}{2}$ .

**مثال(١)**: أوجد الحدين الأوسطين في مفكوك $(1+\sqrt{2}x)^{9}$ .

**الحل**: حيث إن $n$ عدد فردي فإنه يوجد حدان أوسطان رتبتهما $\dfrac{9+1}{2}=5,\dfrac{9+3}{2}=6$ أي أن الحدين الأوسطين هما الحدان الخامس والسادس.

وبوضع $x=1,y=\sqrt{2}x,n=9,r=4$ في الحد العام $T_{r+1}$ لمفكوك ذات الحدين $(x+y)^{n}$ يكون:

$$T_{5}=\frac{(9)(8)(7)(6)}{(4)(3)(2)(1)}(\sqrt{2}x)^{4}=504x^{4}.$$

وبوضع $x=1,y=\sqrt{2}x,n=9,r=5$ في الحد العام $T_{r+1}$ لمفكوك ذات الحدين $(x+y)^{n}$ يكون:

$$T_{6}=\frac{(9)(8)(7)(6)(5)}{(5)(4)(3)(2)(1)}(\sqrt{2}x)^{5}=504\sqrt{2}x^{5}.$$

**مثال(٢)**: أوجد الحد الخالي من $x$ في مفكوك $(x+\frac{1}{2x^2})^9$ .

**الحل**: نضع $\frac{1}{2x^2}$ بدلا من $y$ في الحد العام $T_{r+1}$ لمفكوك ذات الحدين $(x+y)^n$ حيث $n=9$ فيكون:

$$T_{r+1}=\frac{9(9-1)(9-2)...(9-r+1)}{r(r-1)(r-2)...(3)(2)(1)}(x)^{9-r}(\frac{1}{2x^2})^r$$
$$=\frac{9(9-1)(9-2)...(9-r+1)}{r(r-1)(r-2)...(3)(2)(1)}(\frac{1}{2})^r(x)^{9-3r}.$$

ولكي يكون الحد خالي من $x$ يجب أن يكون:

$$9-3r=0\Rightarrow r=3.$$

وإذاً الحد الخالي من $x$ يكون هو الحد $T_{3+1}$ ( أي الحد الرابع ):

$$T_4=\frac{(9)(8)(7)}{(3)(2)(1)}(\frac{1}{2})^3=\frac{21}{2}.$$

## ▪ استخدام التوافيق في التعبير عن معاملات مفكوك ذات الحدين:

يمكننا التعبير عن معاملات قوى $x, y$ في مفكوك ذات الحدين:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{(2)(1)}x^{n-2}y^2 + \ldots + $$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\ldots(3)(2)(1)}x^{n-r}y^r + \ldots + y^n .$$

باستخدام التوافيق وفي هذه الحالة يكون الحد العام الذي رتبته $r+1$ في الصورة:

$$T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} y^r \ ; \ {}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\ldots(3)(2)(1)} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

وعلى ذلك يكون:

$$(x+y)^n = {}^nC_0 x^n y^0 + {}^nC_1 x^{n-1} y + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 + {}^nC_r x^{n-r} y^r + \ldots + {}^nC_n x^{n-n} y^n .$$
$$= \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^{n-r} y^r .$$

وباعتبار $y=1$ في مفكوك ذات الحدين يكون:

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r = \sum_{r=1}^{n+1} {}^nC_{r-1} x^{r-1} \qquad (1)$$

حيث معامل $x^r$ هو:

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{r!} \qquad (2)$$

▪ **دراسة خصائص معامل $x^r$ في العلاقة (1):**

**مثال(٣)**: تحقق من أن:

1. ${}^nC_0 = {}^nC_n = 1$
2. ${}^nC_{n-1} = {}^nC_1 = n$
3. ${}^nC_r = 0 \quad if \quad r \geq n+1$
4. ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

**الحل:**

1. ${}^nC_0 = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$, ${}^nC_n = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1.$

2. ${}^nC_1 = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = \dfrac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$ ,

$${}^nC_{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n.$$

3. $at\ r \geq n+1$ ; ${}^nC_r = \dfrac{n(n-1)...(n-n)}{r!} = 0.$

4. $${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-(r-1))!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r+1)!}[n-r+1+r]$$

$$\therefore {}^nC_r + {}^nC_{r-1} = \frac{n!(n+1)}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!((n+1)-r)!} = {}^{n+1}C_r.$$

( حيث $(n-r+1)! = (n-r+1)(n-r)!$ , $0! = 1! = 1$ ).

**٢. نظرية ذات الحدين بأي أس $n$ (عدد حقيقي):**

عندما يكون في ذات الحدين الأس $n$ عدد صحيح سالب أو كسـر فإن مفكوك ذات الحدين يصبح على صـورة متسلسلة لانهائية ( أي أن عدد حدود المفكوك يزداد إلى ما لانهاية ) ويكون على الصورة التالية:

$$(1+x)^n = 1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{r!}x^r+\ldots$$

وعندما يكون $|x|<1$ فإن مجموع حدود هذا المفكوك إلى ما لانهاية يكون كمية محدودة (وذلك من خصائص جمع المتسلسلات).

وعلى ذلك يكون:

$$(a+x)^n = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{r!}a^{n-r}x^r.$$

حيث إن

$$(a+x)^n = x^n(1+\frac{a}{x})^n \;,\; \left|\frac{a}{x}\right|<1 \quad i.e. \; |a|<|x|.$$

**وأيضا**

$$(a+x)^n = a^n(1+\frac{x}{a})^n \;,\; \left|\frac{x}{a}\right|<1 \quad i.e. \; |x|<|a|.$$

**مثال(٤):** إذا كان $|x|<1$ أوجد مفكوك كلا من:

$(1+x)^{-1}$ , $(1+x)^{-2}$

**الحل:**

$$(1+x)^{-1} = 1+\frac{(-1)}{1!}x+\frac{(-1)(-2)}{2!}x^2+\ldots+\frac{(-1)(-2)(-3)\ldots(-1-(r-1))}{r!}x^r+\ldots$$
$$=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^r x^r+\ldots\,.$$

وبالمثل يكون:

$$(1+x)^{-2} = 1-2x+3x^2-4x^3+\ldots+(-1)^r(r+1)x^r+\ldots\,.$$

**مثال(٥)**: إذا كان $4<|x|$ أوجد مجموع الحدود الأربع الأولى في مفكوك:

$$(4+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

**الحل**: $4<|x|\Rightarrow\left|\frac{4}{x}\right|<1\Rightarrow\left|\frac{4}{x^2}\right|<1$

$$(4+x^2)^{-\frac{1}{2}}=(x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+\frac{4}{x^2})^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{x}[1+\frac{(-\frac{1}{2})}{1!}(\frac{4}{x^2})+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}(\frac{4}{x^2})^2+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}(\frac{4}{x^2})^3+...]$$

$$=\frac{1}{x}[1-\frac{2}{x^2}+\frac{6}{x^4}-\frac{20}{x^6}+...]$$

وإذاً مجموع الأربع الحدود الأولى في المفكوك يكون $\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{6}{x^5}-\frac{20}{x^7}$.

**مثال(٦)**: إذا كان $|x|<\frac{1}{3}$ فأوجد مجموع الثلاثة حدود الأولى في مفكوك:

$$\frac{(1+2x)^{\frac{1}{5}}}{(1-3x)^{\frac{1}{4}}}.$$

**الحل**: المفكوك يكون صحيحا عندما يكون $|2x|<1,|-3x|<1$ $|x|<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}\Rightarrow$

$$\frac{(1+2x)^{\frac{1}{5}}}{(1-3x)^{\frac{1}{4}}}=(1+2x)^{\frac{1}{5}}(1-3x)^{-\frac{1}{4}}$$

$$=[1+(\frac{1}{5})(2x)+\frac{1}{2!}(\frac{1}{5})(\frac{-4}{5})(2x)^2+...]$$

$$.[1+(\frac{-1}{4})(-3x)+\frac{1}{2!}(\frac{-1}{4})(\frac{-5}{4})(-3x)^2+...]$$

$$=[1+\frac{2x}{5}-\frac{8x^2}{25}+...][1+\frac{3x}{4}+\frac{45x^2}{32}+...]$$

$$=1+\frac{23x}{20}+\frac{1109x^2}{800}+....$$

وإذاً مجموع الثلاثة حدود الأولى في المفكوك يكون $1+\frac{23x}{20}+\frac{1109x^2}{800}$

## ▪ تمارين محلولة:

(١) باستخدام مفكوك ذات الحدين أوجد مقربا لثلاثة أرقام عشرية قيمة كلا من:

$\sqrt{24}$ , $\sqrt[3]{28}$ , $\sqrt{1.01}$

**الحل:**

$$\begin{aligned}
\sqrt{24} = (25-1)^{\frac{1}{2}} &= 5(1-\frac{1}{25})^{\frac{1}{2}} \\
&= 5[1+(\frac{1}{2})(\frac{-1}{25})+\frac{1}{2!}(\frac{1}{2})(\frac{-1}{2})(\frac{-1}{25})^2+\dots] \\
&= 5[1-0.02-0.0002+\dots] \\
&\approx 4.899
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{28} = (27+1)^{\frac{1}{3}} &= 3(1+\frac{1}{27})^{\frac{1}{3}} \\
&= 3[1+(\frac{1}{3})(\frac{1}{27})+\frac{1}{2!}(\frac{1}{3})(\frac{-2}{3})(\frac{1}{27})^2+\dots] \\
&= 3+\frac{1}{27}-\frac{1}{(27)(81)}+\dots \\
&\approx 3.037-0.0004 \\
&\approx 3.037
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1.01} = (1+0.01)^{\frac{1}{2}} &= 1+(\frac{1}{2})(0.01)+\frac{1}{2!}(\frac{1}{2})(\frac{-1}{2})(0.01)^2+\dots \\
&\approx 1+0.005-0.0001 \\
&\approx 1.005.
\end{aligned}$$

(٢) إذا كان $|x|<1$ فأوجد معامل $x^r$ في مفكوك $\frac{2x}{1-x^2}$.

**الحل:**

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{1-x^2} &= \frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x} = (1-x)^{-1}-(1+x)^{-1} \\
&= [1+x+\frac{(-1)(-2)}{2!}x^2+\dots+\frac{(-1)(-2)(-3)\dots(-r)}{r!}x^r+\dots] \\
&\quad -[1-x+\frac{(-1)(-2)}{2!}x^2+\dots+\frac{(-1)(-2)(-3)\dots(-r)}{r!}x^r+\dots].
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{2x}{1-x^2}=[1+x+x^2+...+x^r+...]-[1-x+x^2+...+(-1)^r x^r+...].$$
$$=2x-2x^3+...+(1-(-1)^r)x^r+.....$$

وعلى ذلك يكون معامل $x^r$ هو $(-1-(-1)^r)$ حيث $r=0,1,2,...$ .

==============================================

■ **تمارين:**

١ - باستخدام ذات الحدين برهن أن:

$$(x+y)^5-(x-y)^5=2y(5x^4+10x^2y^2+y^4).$$

٢ - تحقق من أن الحد الأوسط في مفكوك $(x-\frac{1}{x})^{12}$ يكون خالي من $x$

وأوجد قيمته.

٣ - إذا كان $|x|<\frac{1}{4}$ فأوجد مفكوك كل من:

$$(1-4x)^{\frac{-2}{3}}, (2+3x)^{-2}, \sqrt[3]{1+2x}, \frac{1}{1+4x}.$$

==============================================

**حل١:**

$$(x+y)^5 = [x^5 + \frac{5x^4}{1} y + \frac{(5)(4)x^3}{(2)(1)} y^2 + \frac{(5)(4)(3)x^2}{(3)(2)(1)} y^3 + \frac{(5)(4)(3)(2)x}{(4)(3)(2)(1)} y^4 + y^5],$$

$$(x-y)^5 = [x^5 + \frac{5x^4}{1}(-y) + \frac{(5)(4)x^3}{(2)(1)}(-y)^2 + \frac{(5)(4)(3)x^2}{(3)(2)(1)}(-y)^3 + \frac{(5)(4)(3)(2)x}{(4)(3)(2)(1)}(-y)^4 + (-y)^5].$$

$$\therefore (x+y)^5 - (x-y)^5 = 10x^4y + 20x^2y^3 + 2y^5 = 2y(5x^4 + 10x^2y^2 + y^4).$$

**حل٢:** رتبة الحد الأوسط $7 = \frac{12+2}{2}$ (الحد السابع) وبالتعويض في الحد العام

$$T_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)...(3)(2)(1)} x^{n-r} y^r$$

لمفكوك ذات الحدين $(x+y)^n$ عن $y = (-\frac{1}{x})$ , $x = x$ , $n = 12$ , $r = 6$ يكون:

$$T_7 = \frac{(12)(11)(10)(9)(8)(7)}{(6)(5)(4)(3)(2)(1)} (x)^{12-6} (-\frac{1}{x})^6 = 924 \quad (\text{حد خالي من } x)$$

**حل٣:**

$$(1+(-4x))^{\frac{-2}{3}} ,\ 2^{-2}(1+\frac{3}{2}x)^{-2} ,\ (1+2x)^{\frac{1}{3}} ,\ (1+4x)^{-1}.$$

==========================================

# الباب الخامس

## الاستنتاج الرياضي Mathematical Induction

✓ الاستنتاج الرياضي هو طريقة رياضية لإثبات صحة بعض القوانين والعلاقات الرياضية التي يكون المتغير فيها عدداً صحيحاً موجباً.

✓ نستطيع أن نلخص مبدأ الاستنتاج الرياضي كما يلي:

ليكن $F(n)$ تقريراً صحيحاً عندما $n = 1$ فإذا كانت صحة التقرير عندما $n = k$ تؤدي إلى صحته عندما $n$ تساوي الحد التالي لـ $k$ فإن التقرير يكون صحيحاً لكل عدد صحيح موجب $n$ .

**مثال(١)**: بالاستنتاج الرياضي أثبت أن:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = (1/6)(n)(n+1)(2n+1)$$

الحل:

(١) نثبت صحة العلاقة عندما $n = 1$ :

$$L.H.S. = 1^2 = 1 \quad , R.H.S. = (1/6)(1)(2)(3) = 1$$

الطرفان متساويان فتكون العلاقة صحيحة عندما $n = 1$ .

(٢) نفرض صحة العلاقة عندما $n = k$ أي أن :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = (1/6)(k)(k+1)(2k+1).$$

(٣) نثبت صحة العلاقة عندما $n = k+1$ :

$$\begin{aligned} L.H.S. &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 \\ &= (1/6)(k)(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\ &= (1/6)(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)] \\ &= (1/6)(k+1)[2k^2+7k+6] \\ &= (1/6)(k+1)(k+2)(2k+3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R.H.S. &= (1/6)(k+1)(k+2)(2(k+1)+1) \\ &= (1/6)(k+1)(k+2)(2k+3). \end{aligned}$$

الطرفان متساويان فتكون العلاقة صحيحة عندما $n = k+1$ وذلك بفرض صحتها عندما $n = k$ وحيث إنها صحيحة عندما $n = 1$ فتكون صحيحة لكل قيم $n$ الصحيحة الموجبة.

**مثال(٢)**: أثبت بالاستنتاج الرياضي أن:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+.........+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}\ .$$

الحل:

(١) نثبت صحة العلاقة عندما n = 1 :

$$\text{L.H.S.}=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}\quad , \qquad \text{R.H.S.}=1-\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}.$$

الطرفان متساويان فتكون العلاقة صحيحة عندما n = 1 .

(٢) نفرض صحة العلاقة عندما n = k أي أن:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+.........+\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(k+1)!}.$$

(٣) نثبت صحة العلاقة عندما n = k+1 :

$$\begin{aligned}
L.H.S. &= \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+......+\frac{k}{(k+1)!}+\frac{(k+1)}{(k+2)!}\\
&= 1-\frac{1}{(k+1)!}+\frac{(k+1)}{(k+2)!}\\
&= 1-\frac{1}{(k+2)!}[k+2-k-1]\\
&= 1-\frac{1}{(k+2)!}.
\end{aligned}$$

$$R.H.S.=1-\frac{1}{(k+2)!}.$$

الطرفان متساويان فتكون العلاقة صحيحة عندما n = k+1 وذلك بفرض صحتها عندما n = k وحيث إنها صحيحة عندما n = 1 فتكون صحيحة لكل قيم n الصحيحة الموجبة.

**مثال(٣)**: أثبت أن المقدار $(3n^2 - n)$ يقبل القسمة على 2

(لكل n عدد صحيح موجب)

الحل: نفرض أن $P_n$ هي الخاصية: " $(3n^2 - n)$ يقبل القسمة على 2 " .

(١) نثبت صحة الخاصية عندما $n = 1$ :

$$3(1)^2 - 1 = 2$$

يقبل القسمة على 2 وإذاً الخاصية صحيحة عندما $n = 1$ .

(٢) نفرض صحة الخاصية عندما $n = k$ أي أن: " $(3k^2 - k)$ يقبل القسمة على 2 ".

(٣) نثبت صحة الخاصية عندما $n = k+1$ :

$$\begin{aligned} 3(k+1)^2 - (k+1) &= 3(k^2+2k+1) - k - 1 \\ &= 3k^2+6k+3-k-1 \\ &= (3k^2-k)+2(1+3k) \end{aligned}$$

وحيث إن المقدار $3k^2 - k$ يقبل القسمة على 2 من الفرض(٢) وأن المقدار $2(1+3k)$

يقبل القسمة على 2 فيكون المقدار $3(k+1)^2 - (k+1)$ يقبل القسمة على 2 .

وإذاً الخاصية $P_n$ تكون صحيحة عندما $n = k+1$ وذلك بفرض صحتها عندما $n = k$

وحيث إنها صحيحة عندما $n = 1$ فتكون صحيحة لكل قيم n الصحيحة الموجبة.

**مثال(٤)**: تحقق من أن كل الأعداد التي في الصورة $(7^n - 2^n)$ تقبل القسمة على 5

(لكل n عدد صحيح موجب).

الحل: نفرض أن $P_n$ هي الخاصية: " $(7^n - 2^n)$ تقبل القسمة على 5 " .

(١) نثبت صحة الخاصية عندما $n = 1$ :

$$7^1 - 2^1 = 5$$

تقبل القسمة على 5 وإذاً الخاصية صحيحة عندما $n = 1$ .

(٢) نفرض صحة الخاصية عندما $n = k$ أي أن: " $(7^k - 2^k)$ تقبل القسمة على 5 ".

(٣) نثبت صحة الخاصية عندما $n = k+1$ :

$$\begin{aligned} 7^{k+1} - 2^{k+1} &= (7)(7)^k - (7)(2)^k + (7)(2)^k - (2)(2)^k \\ &= 7[7^k - 2^k] + (5)(2)^k \end{aligned}$$

وحيث إن $(7^k - 2^k)$ تقبل القسمة على 5 من الفرض (٢) وأن $(5)(2)^k$ تقبل القسمة على 5 فتكون $(7^{k+1} - 2^{k+1})$ تقبل القسمة على 5 .

وإذاً الخاصية $P_n$ صحيحة عندما $n = k+1$ وذلك بفرض صحتها عندما $n = k$ وحيث إنها صحيحة عندما $n = 1$ فتكون صحيحة لكل قيم n الصحيحة الموجبة.

**مثال(٥)**: أثبت أن $|\sin nx| \le n|\sin x|$ لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n ولكل قيم x الحقيقية.

<u>الحل</u>: نفرض أن $P_n$ هي الخاصية:"$|\sin nx| \le n|\sin x|$".

(١) نثبت صحة الخاصية عندما $n = 1$ :

$$|\sin(1)x| \le (1)|\sin x|.$$

وإذاً الخاصية صحيحة عندما $n = 1$ .

(٢) نفرض صحة الخاصية عندما $n = k$ أي أن: " $|\sin kx| \le k|\sin x|$ ".

(٣) نثبت صحة الخاصية عندما $n = k+1$ :

$$|\sin(k+1)x| = |\sin(kx+x)| = |\sin kx \cos x + \cos kx \sin x|.$$

وبتطبيق متباينة المثلث وخواص القيمة القياسية (المطلقة) فإننا نحصل على:

$$|\sin(k+1)x| \le |\sin kx||\cos x| + |\cos kx||\sin x|.$$

وبما أن $|\cos x| \le 1$ لكل قيم $x$ الحقيقية فإنه ينتج أن :

$$|\sin(k+1)x| \le |\sin kx| + |\sin x| \le k|\sin x| + |\sin x| = (k+1)|\sin x|.$$

وإذاً الخاصية $P_n$ صحيحة عندما $n = k+1$ وذلك بفرض صحتها عندما $n = k$ وحيث إنها صحيحة عندما $n = 1$ فتكون صحيحة لكل قيم n الصحيحة الموجبة ولجميع قيم x الحقيقية.

■ تماريـــــــن:

١- لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n تحقق من صحة العلاقات الآتية:

(i) $2 + 6 + 12 + \ldots + n(n+1) = (1/3)(n)(n+1)(n+2)$.
(ii) $3 + 11 + 19 + \ldots + (8n - 5) = 4n^2 - n$.
(iii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$.
(iv) $1 + 1/2 + 1/4 + \ldots + 1/2^{n-1} = 2 - 1/2^{n-1}$.
(v) $(1)(2) + (2)(3) + (3)(4) + \ldots + (n)(n+1) = (1/3)(n)(n+1)(n+2)$.

٢- بالاستنتاج الرياضي أثبت أن المقدار $[(11)^n - (4)^n]$ يقبل القسمة على 7 لكل n عدد صحيح موجب

٣- بالاستنتاج الرياضي أثبت أن المقدار $(7^n - 6n - 1)$ يقبل القسمة على 36 لكل n عدد صحيح موجب

٤- بالاستنتاج الرياضي أثبت أن المقدار $(x^n - y^n)$ يقبل القسمة على $(x - y)$ لكل $n$ عدد صحيح موجب.

٥- بالاستنتاج الرياضي أثبت أن المقدار $(x^{2n} - y^{2n})$ يقبل القسمة على $(x \pm y)$ لكل $n$ عدد صحيح موجب.

*******************************************************************

▪ **<u>تعريف</u>**: أي متسلسلة (متوالية) هي مجموع حدود متتابعة، فمثلا إذا كانت

$\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ متتابعة منتهية (محدودة) ، فإن المجموع:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (1)$$

يمثل المتسلسلة المنتهية المناظرة لهذه المتتابعة ، وبالمثل المتسلسلة اللانهائية هي متسلسلة تحتوى على عدد لانهائي من الحدود ، ويُرمز لها عادة بالتعبير:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad (2)$$

الرمز $\sum_{k=m}^{n} a_k$ هو اختصار للمجموع $a_m + a_{m+1} + ... + a_n$

والمصطلح $\sum$ يدل على المجموع ، وأن $k = m, n$ تدل على أن المجموع يبدأ من $m$ ويتدرج حتى يصل إلى $n$ وأمثلة على ذلك:

(a) $\sum_{k=2}^{5} \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{3^2+3} + \frac{1}{4^2+4} + \frac{1}{5^2+5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}.$

(b) $\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n}.$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + ....$

يُسمى $a_n$ الحد النوني في المتسلسلة.

ويُسمى $a_k$ الحد العام للمتسلسلة (1) أو (2).

## <u>جمع المتسلسلات المنتهية Sum of Finite Series</u>

✓ طرق جمع أي متسلسلة تختلف باختلاف نوع المتسلسلة، ومن أنواع المتسلسلات ما يلي:

- المتسلسلة العددية.
- المتسلسلة الهندسية.
- المتسلسلة العددية الهندسية.
- متسلسلة مفكوك ذات الحدين.
- المتسلسلة الأسية.
- المتسلسلة اللوغاريتمية.

**أولاً: المتسلسلة العددية:**

الصورة العامة للمتسلسلة العددية تكون:

$$a + (a+d) + (a+2d) + ... + (a+(n-1)d)$$

حيث $a$ الحد الأول ، $d$ الأساس ، $n$ عدد الحدود ، ومجموع أول $n$ حد من حدود المتسلسلة العددية يكون:

$$S_n = (n/2)[2a + (n-1)d] .$$

**ثانياً: المتسلسلة الهندسية:**

الصورة العامة للمتسلسلة الهندسية تكون:

$$a + a\,r + a\,r^2 + ... + a\,r^{n-1}$$

حيث $a$ الحد الأول ، $r$ الأساس ، $n$ عدد الحدود ، ومجموع أول $n$ حد من حدود المتسلسلة الهندسية يكون:

$$S_n = a\,(1 - r^n)/(1 - r)\ ;\ r \neq 1.$$

**ثالثاً: المتسلسلة العددية الهندسية:**

الصورة العامة للمتسلسلة العددية الهندسية تكون:

$$a + (a+d)\,x + (a+2d)\,x^2 + (a+3d)\,x^3 + ... + (a+(n-1)d)\,x^{n-1}$$

حيث تكون معاملات قوى $x$ متسلسلة عددية ، بينما تكون قوى $x$ متسلسلة هندسية .

وطريقة جمع المتسلسلة العددية الهندسية تتم بنفس طريقة جمع المتسلسلة الهندسية ، وتكون كالتالي:

$$S_n = a+(a+d)x+(a+2d)x^2+...+(a+(n-2)d)x^{n-2}+(a+(n-1)d)x^{n-1} \qquad (1)$$

$$xS_n = ax+(a+d)x^2+(a+2d)x^3+...+(a+(n-2)d)x^{n-1}+(a+(n-1)d)x^n \qquad (2)$$

وبطرح (2) من (1) ينتج أن:

$$S_n(1-x) = a + d\,x + d\,x^2 + d\,x^3 + \dots + d\,x^{n-1} - (a+(n-1)d)\,x^n$$
$$= a - (a+(n-1)d)\,x^n + d\,x\,(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-2})$$
$$= a - (a+(n-1)d)\,x^n + d\,x\,(1 - x^{n-1}) / (1 - x)$$
$$\therefore\ S_n = [\,a - (a+(n-1)d)\,x^n\,] / (1 - x) + d\,x\,(1 - x^{n-1}) / (1 - x)^2 .$$

## رابعاً: متسلسلة مفكوك ذات الحدين:

مجموع أي متسلسلة يبدو كأنه مفكوك ذات الحدين ، فإذا افترضنا أن مجموع المتسلسلة المعطاه هو $(x_0+x)^n$ الذي مفكوكه هو :

$$x_0^n + \frac{n\,x_0^{n-1}}{(1)}x + \frac{n(n-1)x_0^{n-2}}{(2)(1)}x^2 + \dots$$

وبمقارنة هذه المتسلسلة حدا بحد مع المتسلسلة المعطاة (ويكفي مقارنة الثلاث حدود الأولى) يمكن إيجاد $x, x_0, n$ وبالتالي يمكن جمع المتسلسلة المعطاة.

## ١- طريقة الفروق لجمع المتسلسلات:

تتلخص هذه الطريقة في محاولة التعبير عن الحد العام (الحد الرائي) $a_r$ للمتسلسلة في صورة فرق بين كميتين من نفس الطابع ، ومن مرتبتين متتاليتين ، أو التعبير
عن $a_r$ في صورة فرق بين قيمتي دالة عند موضعين متتالين لمتغيرها.

- **نظرية**: إذا أمكن كتابة الحد العام (الحد الرائي) $a_r$ للمتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$
على الصورة:

$$a_r = \alpha(r+1) - \alpha(r) \qquad (1)$$

فإن مجموع أول n حد من حدود المتسلسلة يكون:

$$S_n = \alpha(n+1) - \alpha(1).$$

أو إذا أمكن كتابة الحد العام للمتسلسلة على الصورة:

$$a_r = \alpha(r) - \alpha(r+1) \qquad (2)$$

فإن:

$$S_n = \alpha(1) - \alpha(n+1).$$

<u>الإثبات</u>: بالتعويض في (1) عن قيمة $r = 1,2,3,\dots,n$ ينتج أن:

$$a_1 = \alpha(2) - \alpha(1)$$
$$a_2 = \alpha(3) - \alpha(2)$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1} = \alpha(n) - \alpha(n-1)$$
$$a_n = \alpha(n+1) - \alpha(n)$$

$$\therefore\ S_n = \sum_{r=1}^{n} a_r = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = \alpha(n+1) - \alpha(1).$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات الجزء الثاني من النظرية .

✓ **أمثلة:**

١- أوجد مجموع المتسلسلة (1)(2) + (2)(3) + (3)(4) + ... + n(n+1)

الحل: الحد العام للمتسلسلة يكون $a_r = r(r+1)$ وندرس الفرق:

$$r(r+1)(r+2)-(r-1)r(r+1)=3r(r+1)=3a_r.$$

$$\therefore\ a_r=\frac{1}{3}[r(r+1)(r+2)]-\frac{1}{3}[(r-1)r(r+1)]=\alpha(r+1)-\alpha(r).$$

حيث $\alpha(r)=\frac{1}{3}[(r-1)r(r+1)]$ وبتطبيق نظرية الفروق ينتج أن:

$$\begin{aligned}S_n&=\alpha(n+1)-\alpha(1)\\&=\frac{1}{3}[n(n+1)(n+2)]-\frac{1}{3}[(1-1)1(1+1)]\\&=\frac{1}{3}[n(n+1)(n+2)].\end{aligned}$$

٢- باستخدام طريقة الفروق تحقق من أن مجموع أول n حدا من متسلسلة مربعات الأعداد الطبيعية يساوي $\frac{1}{6}[n(n+1)(2n+1)]$

الإثبات:

$$1^2+2^2+...+n^2=\sum_{r=1}^{n}r^2$$

$$\therefore\ a_r=r^2=r(r+1)-r.$$

$$\therefore\sum_{r=1}^{n}a_r=\sum_{r=1}^{n}r^2=\sum_{r=1}^{n}r(r+1)-\sum_{r=1}^{n}r.$$

ومن المثال السابق تحققنا من أن $\sum_{r=1}^{n}r(r+1)=\frac{1}{3}[n(n+1)(n+2)]$

وحيث أن $\sum_{r=1}^{n}r$ هي متسلسلة عددية مجموعها يساوي $\frac{1}{2}[n(n+1)]$

فيكون:

$$\sum_{r=1}^{n}r^2=\frac{1}{3}[n(n+1)(n+2)]-\frac{1}{2}[n(n+1)]=\frac{1}{6}[n(n+1)(2n+1)].$$

٣- أوجد مجموع المتسلسلة $(1)(2)(3) + (2)(3)(4) + (3)(4)(5) + \dots$ إلى n حدا.

الحل: الحد العام للمتسلسلة هو $a_r = r(r+1)(r+2)$ وندرس الفرق:

$$r(r+1)(r+2)(r+3)-(r-1)r(r+1)(r+2) = 4r(r+1)(r+2) = 4a_r$$

$$\therefore a_r = \frac{1}{4}[r(r+1)(r+2)(r+3)] - \frac{1}{4}[(r-1)r(r+1)(r+2)] = \alpha(r+1)-\alpha(r)$$

حيث $\alpha(r) = \frac{1}{4}[(r-1)r(r+1)(r+2)]$ وبتطبيق نظرية الفروق ينتج أن:

$$S_n = \alpha(n+1)-\alpha(1)$$
$$= \frac{1}{4}[n(n+1)(n+2)(n+3)].$$

٤- اجمع المتسلسلة $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots$ إلى n حدا.

الحل: الحد العام للمتسلسلة هو $a_r = \frac{r}{(r+1)!}$ وندرس الفرق:

$$a_r = \frac{r}{(r+1)!} = \frac{r+1-1}{(r+1)!} = \frac{r+1}{(r+1)!} - \frac{1}{(r+1)!} = \frac{1}{r!} - \frac{1}{(r+1)!}$$
$$= \alpha(r) - \alpha(r+1).$$

وبتطبيق نظرية الفروق ينتج أن:

$$S_n = \alpha(1) - \alpha(n+1) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

٥- باستخدام طريقة الفروق تحقق من أن مجموع أول n حدا من متسلسلة مكعبات الأعداد الطبيعية يساوي $\frac{1}{4}[n(n+1)]^2$

الإثبات:

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = \sum_{r=1}^{n} r^3$$

$$\therefore\ a_r = r^3 = r(r+1)(r+2) - 3r^2 - 2r$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} r^3 = \sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2) - 3\sum_{r=1}^{n} r^2 - 2\sum_{r=1}^{n} r$$

وحيث إن:

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2) = \frac{1}{4}[n(n+1)(n+2)(n+3)] \quad ,$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}[n(n+1)(2n+1)] \quad , \quad \sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{2}[n(n+1)].$$

فيكون:

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n} r^3 &= \sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2) - 3\sum_{r=1}^{n} r^2 - 2\sum_{r=1}^{n} r \\ &= \frac{1}{4}[n(n+1)(n+2)(n+3)] - \frac{3}{6}[n(n+1)(2n+1)] - \frac{2}{2}[n(n+1)] \\ &= \frac{1}{4}[n(n+1)]^2.\end{aligned}$$

٦- أوجد مجموع أول n حد من حدود المتسلسلة:

$$\frac{1}{(1)(4)} + \frac{1}{(4)(7)} + \frac{1}{(7)(10)} + \ldots$$

<u>الحل</u>:

$$a_r = \frac{1}{(3r-2)(3r+1)} = \frac{A}{3r-2} + \frac{B}{3r+1}$$

$$\therefore 1 = A(3r+1) + B(3r-2)$$

$$put\ r = \frac{2}{3} \Rightarrow A = \frac{1}{3} \ ,$$

$$put\ r = \frac{-1}{3} \Rightarrow B = \frac{-1}{3} \ .$$

$$\therefore a_r = \frac{1}{(3r-2)(3r+1)} = (\frac{1}{3})(\frac{1}{3r-2} - \frac{1}{3r+1}) = \alpha(r) - \alpha(r+1)$$

حيث $\alpha(r) = (\frac{1}{3})(\frac{1}{3r-2}), \ \alpha(r+1) = (\frac{1}{3})(\frac{1}{3r+1})$

$$\therefore S_n = \alpha(1) - \alpha(n+1) = \frac{1}{3} - (\frac{1}{3})(\frac{1}{3n+1}) = \frac{1}{3}[1 - \frac{1}{3n+1}] = \frac{n}{3n+1}.$$

٧- أوجد مجموع أول n حد من حدود المتسلسلة:

$$\frac{1}{(1)(2)(3)}+\frac{1}{(2)(3)(4)}+\frac{1}{(3)(4)(5)}+\dots$$

<u>الحل:</u>

$$a_r=\frac{1}{r(r+1)(r+2)}\ ,$$

$$\frac{1}{r(r+1)}-\frac{1}{(r+1)(r+2)}=\frac{r+2-r}{r(r+1)(r+2)}=\frac{2}{r(r+1)(r+2)}=2a_r$$

$$\therefore a_r=\frac{1}{2}[\frac{1}{r(r+1)}-\frac{1}{(r+1)(r+2)}]=\alpha(r)-\alpha(r+1).$$

$$\therefore S_n=\alpha(1)-\alpha(n+1)=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

٨- أوجد مجموع أول n حد من حدود المتسلسلة:

$$\frac{5}{(1)(2)}(\frac{1}{3})+\frac{7}{(2)(3)}(\frac{1}{3})^2+\frac{9}{(3)(4)}(\frac{1}{3})^3+\dots$$

<u>الحل:</u>

$$a_r=\frac{5+2(r-1)}{r(r+1)}(\frac{1}{3})^r=\frac{2r+3}{r(r+1)}(\frac{1}{3})^r=\frac{3(r+1)-r}{r(r+1)}(\frac{1}{3})^r$$

$$=(\frac{3}{r}-\frac{1}{r+1})(\frac{1}{3})^r=\alpha(r)-\alpha(r+1).$$

حيث $\alpha(r)=(\frac{1}{r})(\frac{1}{3})^{r-1}\ ,\ \alpha(r+1)=(\frac{1}{r+1})(\frac{1}{3})^r$

$$\therefore S_n=\alpha(1)-\alpha(n+1)=1-(\frac{1}{n+1})(\frac{1}{3})^n=1-\frac{1}{(n+1)3^n}.$$

- تماريـــــــــن:

**(١)** بطريقة الفروق أوجد مجموع كلا من المتسلسلات الآتية إلى $n$ حدا:

1- $(1)(3)+(3)(5)+(5)(7)+\dots$

2- $(1)(4)+(4)(7)+(7)(10)+\dots$

3- $(1)(5)+(5)(9)+(9)(13)+\dots$

4- $(1)(4)(7)+(4)(7)(10)+(7)(10)(13)+\dots$

5- $(1)(1!)+(2)(2!)+(3)(3!)+\dots$

6- $\frac{1}{(1)(2)}+\frac{1}{(2)(3)}+\frac{1}{(3)(4)}+\dots$

7- $\frac{1}{(2)(3)}+\frac{1}{(3)(4)}+\frac{1}{(4)(5)}+\dots$

8- $\frac{1}{(3)(4)}+\frac{1}{(4)(5)}+\frac{1}{(5)(6)}+\dots$

9- $\frac{1}{(1)(3)}+\frac{1}{(3)(5)}+\frac{1}{(5)(7)}+\dots$

10- $\frac{1}{(5)(6)}+\frac{1}{(6)(7)}+\frac{1}{(7)(8)}+\dots$

11- $\frac{1}{(1)(3)(5)}+\frac{1}{(3)(5)(7)}+\frac{1}{(5)(7)(9)}+\dots$

12- $\frac{1}{(1)(4)(7)}+\frac{1}{(4)(7)(10)}+\frac{1}{(7)(10)(13)}+\dots$

**(٢)** بطريقة الفروق لجمع المتسلسلات أثبت أن

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(3r-2)(3r+1)}=\frac{n}{3n+1}$$

**(٣)** بطريقة الفروق لجمع المتسلسلات أثبت أن

$$\sum_{r=1}^{n}r^2=\frac{1}{6}[n(n+1)(2n+1)]$$

واستخدم ذلك لاثبات أن $\sum_{r=1}^{n}(2r-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$

**-** (تحقق من صحة النتائج في التمارين (٢) ، (٣) باستخدام الاستنتاج الرياضي).

*******************************************

*********************

## ٢- الجمع بطريقة المعاملات غير المعينة:

هذه الطريقة تتضح جيدا من الأمثلة التالية:

١- أوجد مجموع المتسلسلة $(1)(4) + (4)(7) + (7)(10) + ....$ إلى n حدا.

الحل: نكتب المتسلسلة على الصورة:

$$(1)(4)+(4)(7)+(7)(10)+...+(3n-2)(3n+1) \equiv a_0+a_1n+a_2n^2+a_3n^3+..... \quad (1)$$

وبوضع $(n+1)$ بدلا من n نحصل على:

$$(1)(4)+(4)(7)+(7)(10)+...+(3n+1)(3n+4) \equiv a_0+a_1(n+1)+a_2(n+1)^2 +a_3(n+1)^3 + .... \quad (2)$$

وبطرح (1) من (2) ينتج أن:

$$(3n+1)(3n+4) \equiv a_1 + a_2(2n+1) + a_3(3n^2+3n+1) + .... \quad (3)$$

وبمقارنة معاملات $n, n^2$ والحد المطلق في الطرفين للعلاقة (3) نحصل على:

$$3a_3 = 9 \Rightarrow a_3 = 3$$
$$3a_3 + 2a_2 = 10 \Rightarrow a_2 = 3$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = 4 \Rightarrow a_1 = -2$$
$$a_4 = a_5 = .... = 0$$
$$\therefore S_n \equiv a_0 - 2n + 3n^2$$

وبوضع $n = 1$ ينتج أن:

$$S_1 = 4 = a_0 - 2 + 3 + 3 \Rightarrow a_0 = 0$$
$$\therefore S_n = n(3n^2+3n-2) .$$

٢- اجمع المتسلسلة $(1)(11) +(2)(12) + (3)(13) + ....$ إلى n حدا.

الحل: نكتب المتسلسلة على الصورة:

$$(1)(11)+(2)(12)+(3)(13)+...+n(n+10) \equiv a_0+a_1n+a_2n^2+a_3n^3+...$$

وبوضع $n+1$ بدلا من n في هذه العلاقة نحصل على:

$$(1)(11)+(2)(12)+(3)(13)+...+(n+1)(n+11) \equiv a_0 + a_1(n+1) + a_2(n+1)^2 + a_3(n+1)^3 + ....$$

وبطرح العلاقة الأولى من هذه العلاقة ينتج أن:

$$(n+1)(n+11) \equiv a_1 + a_2(2n+1) + a_3(3n^2+3n+1) + ...$$

وبمقارنة معاملات $n, n^2$ والحد المطلق في الطرفين نحصل على:

$$3a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = 1/3$$
$$3a_3 + 2a_2 = 12 \Rightarrow a_2 = 11/2$$
$$a_1 + 2a_2 + a_3 = 11 \Rightarrow a_1 = 31/6$$
$$a_4 = a_5 = a_6 = ... = 0$$

$\therefore\ S_n \equiv a_0 + (31/6)\,n + (11/2)\,n^2 + (1/3)\,n^3.$

وبوضع $n = 1$ في هذه المتطابقة ينتج أن:

$S_1 = (1)(11) = 11 = a_0 + (31/6) + (11/2) + (1/3) \Rightarrow a_0 = 0$

$\therefore\ S_n = (1/6)\,(n)\,(2n^2+33n+31) = (1/6)\,(n)\,(n+1)\,(2n+31)\,.$

٣- إيجاد مجموع أول $n$ حد من متسلسلة مربعات الأعداد الطبيعية باستخدام طريقة المعاملات غير المعينة.

نكتب المتسلسلة على الصورة:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \equiv a_0 + a_1\,n + a_2\,n^2 + a_3\,n^3 + \ldots$

ونضع $n+1$ بدلا من $n$ في العلاقة السابقة:

$\therefore\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n+1)^2 \equiv a_0 + a_1\,(n+1) + a_2\,(n+1)^2 + a_3\,(n+1)^3 + \ldots$

وبطرح العلاقة الأولى من الثانية نحصل على:

$(n+1)^2 \equiv a_1 + a_2\,(2n+1) + a_3\,(3n^2+3n+1) + \ldots$

وفي هذه المتطابقة حيث أن أعلى قوى للعدد $n$ في الطرف الأيسر هي التربيع فإنه ينتج من ذلك أن $a_4, a_5$ ، وهكذا الحدود التالية لها لابد أن تكون جميعها أصفار ، وبمقارنة المعاملات في الطرفين للعلاقة الأخيرة نحصل على:

$1 = 3a_3 \Rightarrow a_3 = 1/3$

$2a_2 + 3a_3 = 2 \Rightarrow a_2 = ½$

$a_1 + a_2 + a_3 = 1 \Rightarrow a_1 = 1/6$

$\therefore\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \equiv a_0 + (1/6)\,n + (1/2)\,n^2 + (1/3)\,n^3$

وبوضع $n = 1$ في العلاقة السابقة نحصل على:

$1 = a_0 + (1/6) + (1/2) + (1/3) \Rightarrow a_0 = 0$

$$\begin{aligned}\therefore\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 &= (1/6)\,n + (1/2)\,n^2 + (1/3)\,n^3\\ &= (n/6)\,(1+3n+2n^2)\\ &= (n/6)\,(n+1)\,(2n+1)\,.\end{aligned}$$

٤- إيجاد مجموع أول $n$ حد من متسلسلة مكعبات الأعداد الطبيعية باستخدام طريقة المعاملات غير المعينة.

نكتب المتسلسلة على الصورة:

$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \equiv a_0 + a_1\,n + a_2\,n^2 + a_3\,n^3 + a_4\,n^4 + \ldots$

ونضع $n+1$ بدلا من $n$ في العلاقة السابقة:

$1^3 + 2^3 + \ldots + (n+1)^3 \equiv a_0+a_1\,(n+1)+a_2\,(n+1)^2+a_3\,(n+1)^3+a_4\,(n+1)^4+\ldots$

وبطرح العلاقة الأولى من الثانية نحصل على:

$(n+1)^3 \equiv a_1 + a_2(2n+1) + a_3(3n^2+3n+1) + a_4(4n^3+6n^2+4n+1) + \ldots$

وفي هذه المتطابقة حيث أن أعلى قوى للعدد $n$ في الطرف الأيسر هي التكعيب فإنه ينتج من ذلك أن $a_5 = a_6 = a_7 = \ldots = 0$

وبمقارنة المعاملات في الطرفين للعلاقة الأخيرة نحصل على:

$1 = 4a_4 \Rightarrow a_4 = ¼$

$3 = 3a_3 + 6a_4 \Rightarrow a_3 = ½$

$3 = 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 \Rightarrow a_2 = ¼$

$1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \Rightarrow a_1 = 0$

$\therefore 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 \equiv a_0 + (1/4)\, n^2 + (1/2)\, n^3 + (1/4)\, n^4$

وبوضع $n = 1$ في هذه المتطابقة ينتج أن:

$1 = a_0 + (1/4) + (1/2) + (1/4) \Rightarrow a_0 = 0$

$$\therefore 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1/4)\, n^2 + (1/2)\, n^3 + (1/4)\, n^4$$
$$= [\,(n)\,(n+1)/2\,]^2.$$

## تمارين:

بطريقة المعاملات غير المعينة اجمع كلا من المتسلسلات الآتية إلى n حدا

$(i)\quad (1)(3)+(2)(4)+(3)(5)+\dots$

$(ii)\quad (2)(5)+(3)(6)+(4)(7)+\dots$

$(iii)\quad (1)(5)+(5)(9)+(9)(13)+\dots$

$(iv)\quad 1^3+3^3+5^3+\dots$

$(v)\quad (1)(2^2)+(2)(3^2)+(3)(4^2)+\dots$

$(vi)\quad 2^2+4^2+6^2+\dots$

*****************************************
*********************

## ٣- طرق أصعب للجمع:

في بعض الأنواع من المسائل قد لا توجد قاعدة معينة يمكن استخدامها في عملية جمع المتسلسلة ، وعادة يعتمد الجمع على خواص المتسلسلات العددية والهندسية والأسية واللوغاريتمية ،وهكذا.

وعادة يمكننا أن نرى على أي من هذه المتسلسلات تعتمد المتسلسلة المعطاة في تكوينها ، فإذا أمكن تحليل الحد الرائي $a_r$ للمتسلسلة إلى جزئين أو أكثر ، فإن المجموع يمكن تعيينه غالبا بوضع قيم $r = 1, 2, 3,...$ .

▪ **أمثلة:**

١ – أوجد المجموع إلى ما لا نهاية للمتسلسلة $1^3 + 2^3 + 3^3/2! + 4^3/3! + ...$

الحل: نكتب الحد العام $a_r = r^3/(r-1)!$ على الصورة:

$$r^3/(r-1)! \equiv [\, a_1(r-1)(r-2)(r-3) + a_2(r-1)(r-2) + a_3(r-1) + a_4 \,]/(r-1)!$$

$$\therefore r^3 \equiv a_1(r-1)(r-2)(r-3) + a_2(r-1)(r-2) + a_3(r-1) + a_4$$

$$r = 1 \Rightarrow a_4 = 1$$

$$r = 2 \Rightarrow 8 = a_3+a_4 \Rightarrow a_3 = 7$$

$$r = 3 \Rightarrow 27 = 2a_2+2a_3+a_4 \Rightarrow a_2 = 6$$

وبمساواة معامل $r^3$ في الطرفين ينتج أن $a_1 = 1$

$$\therefore r^3/(r-1)! = (1/(r-4)!) + (6/(r-3)!) + (7/(r-2)!) + (1/(r-1)!) \;\; ; r \geq 4$$

$(r = 1) \Rightarrow 1 =$ الحد الأول

$(r = 2) \Rightarrow 7 + (1/1!) =$ الحد الثاني

$(r = 3) \Rightarrow 6 + (7/1!) + (1/2!) =$ الحد الثالث

$(r = 4) \Rightarrow 1 + (6/1!) + (7/2!) + (1/3!) =$ الحد الرابع

$(r = 5) \Rightarrow (1/1!) + (6/2!) + (7/3!) + (1/4!) =$ الحد الخامس

وهكذا ...

$$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} (r^3/(r-1)! = (1+6+7+1)(1 + (1/1!) + (1/2!) + (1/3!) + ...)$$

$$= 15\sum_{r=1}^{\infty} (1/r!) = 15\, e\,.$$

٢- أوجد المجموع إلى ما لا نهاية للمتسلسلة التي حدها النوني هو:

$$(-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$$

الحل: نضع المقدار $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ في صورة كسور جزئية فيكون:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{2}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)x^n$$

$$n=1\Rightarrow\frac{1}{2}\left[x-2\frac{x}{2}+\frac{1}{3}x\right]=\text{الحد الأول}$$

$$n=2\Rightarrow\frac{1}{2}\left[-\frac{x^2}{2}+2\frac{x^2}{3}-\frac{x^2}{4}\right]=\text{الحد الثاني}$$

$$n=3\Rightarrow\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-2\frac{x^3}{4}+\frac{x^3}{5}\right]=\text{الحد الثالث}$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}\Big[\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\right)+\frac{2}{x}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\right)$$
$$+\left(\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{5}-\frac{x^4}{6}+\ldots\right)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\right)+\frac{2}{x}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\right)$$
$$+\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\ldots\right).$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}\left\{[\log(1+x)+\frac{2}{x}[\log(1+x)-x]+\frac{1}{x^2}[\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\log(1+x)[1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}]-2-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{(x+1)^2}{2x^2}\log(1+x)-\frac{3x+2}{4x}.$$

*******************************************
**********************

## تقارب وتباعد المتسلسلات اللانهائية

# Convergence & divergence of Infinite Series

- **تعريف**: يُقال أن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ :

١- تقاربية أو متقاربة convergent إذا كان المجموع الجزئي $S_n$ يتقارب إلى عدد محدود (معين) وليكن $s$ عندما $n \to \infty$

أي أن $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} a_k) = s$.

٢- تباعدية أو متباعدة divergent إذا كان $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty \vee -\infty$.

٣- تذبذبية تذبذبا محدودا إذا كانت $\lim_{n\to\infty} S_n$ تتذبذب بين عددين محدودين.

٤- تذبذبية تذبذبا غير محدود إذا كانت $\lim_{n\to\infty} S_n$ تتذبذب بين $+\infty, -\infty$

٥- مطلقة التقارب إذا كانت المتسلسة اللانهائية $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ تقاربية.

٦- مشروطة التقارب إذا كانت المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ تقاربية بينما المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ تكون تباعدية.

- **ملاحظات ونتائج:**

(١) المتسلسلات التذبذبية تكون تباعدية.

(٢) المتسلسلات مطلقة التقارب تكون تقاربية.

(٣) إذا كانت المتسلسلة $\sum a_n$ تقاربية فإن $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ والعكس ليس بالضرورة أن يكون صحيحا ( مثال على ذلك: للمتسلسلة $\sum \frac{1}{n}$ يتحقق $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

بينما $\sum \frac{1}{n}$ متسلسلة تباعدية ).

(٤) إذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ فإن المتسلسلة $\sum a_n$ تكون تباعدية.

(٥) المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ حيث $a_n$ أعداد حقيقية غير سالبة

تُسمى متسلسلة تبادلية الإشارة alternating series حيث إشارات حدودها تتبادل

بين الموجب والسالب + ، −

ومن أمثلة المتسلسلات تبادلية الإشارة المتسلسلتين:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\frac{1}{n}) \ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ .$$

والمتسلسلة تبادلية الإشارة تكون تقاربية إذا وإذا فقط تحقق الشرطان:

(1) $|a_1| \geq |a_2| \geq \ldots \geq |a_n| \geq \ldots \geq 0$

(2) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ .

(٦) المتسلسلة الهندسية اللانهائية $\sum_{n=0}^{\infty} a r^n = a + a r + a r^2 + \ldots + a r^{n-1} + \ldots$

تكون:

- تقاربية عندما يكون $|r| < 1$ (أي قيمة الأساس أقل من الواحد الصحيح).
- تباعدية عندما يكون $|r| \geq 1$
- تذبذبية (تباعدية أيضا) عندما يكون $r = -1$

✓ **أمثلة:**

١- اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\frac{1}{(1)(2)}+\frac{1}{(2)(3)}+\frac{1}{(3)(4)}+...$

الحل:

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n$$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+...+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

$$=1-\frac{1}{n+1}.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1.$$

$\therefore$ المتسلسلة تقاربية.

✓ ملاحظة: يمكن استخدام طريقة الفروق لحساب المجموع $S_n$ في المثال السابق.

٢- اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(e+n)(e+n+1)}$

الحل: $e\approx 2.718$ (Euler number)

$$a_n=\frac{1}{(e+n)(e+n+1)}=\frac{1}{e+n}-\frac{1}{e+n+1}$$

$$\therefore S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n$$

$$=(\frac{1}{e+1}-\frac{1}{e+2})+(\frac{1}{e+2}-\frac{1}{e+3})+...+(\frac{1}{e+n}-\frac{1}{e+n+1})$$

$$=\frac{1}{e+1}-\frac{1}{e+n+1}.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{e+1}-\frac{1}{e+n+1})=\frac{1}{e+1}.$$

$\therefore$ المتسلسلة تقاربية.

٣- ابحث تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+\frac{1}{n})$

الحل:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$
$$= \log(1+1) + \log(1+\frac{1}{2}) + \log(1+\frac{1}{3}) + \ldots + \log(1+\frac{1}{n})$$
$$= \log 2 + \log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} + \ldots + \log(\frac{n+1}{n})$$
$$= \log 2 + \log 3 - \log 2 + \log 4 - \log 3 + \ldots + \log(n+1) - \log n$$
$$= \log(n+1).$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (\log(n+1) = \log \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

$\therefore$ المتسلسلة تباعدية.

٤- اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$

الحل:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}$$
$$= 1-1+1-1+1-1+\ldots = \begin{cases} 0 & if \ \ n \ even \\ 1 & if \ \ n \ odd \end{cases}.$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} 0 & if \ \ n \ even \\ 1 & if \ \ n \ odd \end{cases}.$$

$\therefore$ المتسلسلة تذبذبية تذبذبا محدودا وبالتالي فهي تباعدية.

٥- اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\ldots$

الحل:

$$a_n=\frac{n}{2n-1}.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

∴ المتسلسلة تباعدية.

٦- اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\frac{1}{2}+\frac{8}{9}+\frac{27}{28}+\frac{64}{65}+\ldots$

الحل:

$$a_n=\frac{n^3}{1+n^3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{1+n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^3}}=1\neq 0.$$

∴ المتسلسلة تباعدية.

٧- اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\frac{1}{(1)(2)}+\frac{4}{(2)(3)}+\frac{9}{(3)(4)}+\ldots$

الحل: يترك للطالب كتمرين.

٨- ابحث تقارب أو تباعد كلا من المتسلسلات الآتية:

$$\text{(i)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \text{(ii)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{e^n}$$

الحل:

$$\text{(i)}\ a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

واضح أن هذه المتسلسلة تبادلية الإشارة.

وأن $|a_1|\ge|a_2|\ge\dots\ge|a_n|\ge\dots\ge 0$ ويكون $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

∴ المتسلسلة تقاربية.

$$\text{(ii)}\ a_n=(-1)^{n+1}\frac{n}{e^n}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{e}-\frac{2}{e^2}+\frac{3}{e^3}-\frac{4}{e^4}+\dots$$

واضح أن هذه المتسلسلة تبادلية الإشارة.

وأن $|a_1|\ge|a_2|\ge\dots\ge|a_n|\ge\dots\ge 0$ ويكون:

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{dn}{dn}/\frac{de^n}{dn}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^n}=0.$$

∴ **المتسلسلة تقاربية.**

✓ **اختبارات التقارب والتباعد للمتسلسلات ذات الحدود الموجبة:**

**١- اختبار المقارنة (الصورة الأولى):**

لتكن $\sum a_n$ متسلسلة حدودها موجبة ( أي $a_n \ge 0\ \forall n$ ):

- فإذا كان $a_n \le b_n\ \forall n$ وكانت المتسلسلة $\sum b_n$ تقاربية

فإن المتسلسلة $\sum a_n$ تكون أيضا تقاربية.

- وإذا كان $a_n \ge b_n\ \forall n$ وكانت المتسلسلة $\sum b_n$ تباعدية

فإن المتسلسلة $\sum a_n$ تكون أيضا تباعدية.

✓ **أمثلة:**

١- تحقق من أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ تكون تباعدية.

الحل:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\dots \\
&= 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16})+\dots \\
&\ge 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{16})+\dots \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots
\end{aligned}$$

نلاحظ أن كل حد في المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ يكون أكبر أو يساوي نظيره في المتسلسلة

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots$ وهذه المتسلسلة تباعدية

فتكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ أيضا تباعدية.

٢- اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\dots$

الحل:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \quad \forall n$$

أي أن كل حد في المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ يكون أكبر من أو يساوي نظيره في المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ وحيث أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ تباعدية فتكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ أيضا تباعدية.

٣- اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots$

الحل:

$$n! = (1)(2)(3)(4)\dots(n-1)(n) \geq 2^{n-1} \qquad ; n = 1,2,3,\dots$$

$$\therefore \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \forall n$$

والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ هي متسلسلة هندسية لانهائية أساسها $\frac{1}{2} < 1$ فهي تقاربية ، وعلى ذلك فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ تكون تقاربية.

٤- ابحث تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$

الحل:

$$\frac{1}{3^n+1} \leq \frac{1}{3^n} = (\frac{1}{3})^n \quad \forall n$$

أي أن كل حد في المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$ أصغر من أو يساوي نظيره في المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^n$ وهذه المتسلسلة هندسية لانهائية أساسها أقل من الواحد الصحيح فهي تقاربية ، وبالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$ تكون تقاربية.

٥- اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin(\frac{x}{3^n})$

الحل:

$$2^n \sin(\frac{x}{3^n}) \le 2^n (\frac{x}{3^n}) = (\frac{2}{3})^n x$$

لجميع قيم n الكبيرة.

والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n x$ متسلسلة هندسية لانهائية أساسها أقل من الواحد الصحيح فهي تقاربية ، وبالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin(\frac{x}{3^n})$ تكون تقاربية.

**٢– اختبار المقارنة (الصورة الثانية):**

لتكن $\sum b_n , \sum a_n$ متسلسلتين ذوي حدود موجبة ، فإذا كانت:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ (حيث $k$ عدد محدود غير صفري موجب أو سالب).

فإن:

- المتسلسلة $\sum a_n$ تكون تقاربية إذا كانت المتسلسلة $\sum b_n$ تقاربية.
- المتسلسلة $\sum a_n$ تكون تباعدية إذا كانت المتسلسلة $\sum b_n$ تباعدية.

✓ **أمثلة:**

١- اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

الحل: نقارن هذه المتسلسلة بالمتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ فيكون:

$$a_n = \frac{1}{n} \ , \ b_n = \ln(1+\frac{1}{n}) \ ,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{\ln e} = 1$$

والمتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ تباعدية ، وبالتالي تكون المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ تباعدية.

٢- اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

الحل: نقارن هذه المتسلسلة بالمتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ فيكون:

$$a_n = \frac{1}{n^2} \ , \ b_n = \frac{1}{n(n+1)} \ ,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1$$

والمتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ تقاربية ، وبالتالي تكون المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ تقاربية.

٣- اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5+4n}}$

<u>الحل</u>: نقارن هذه المتسلسلة بالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ فيكون:

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5+4n}}\ ,\ b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\ ,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{5+4n}}=\frac{1}{2}$$

والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ تباعدية ، وبالتالي تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5+4n}}$ تباعدية.

٤- اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4-n}{n^3+1}$

<u>الحل</u>: نقارن هذه المتسلسلة بالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ فيكون:

$$a_n=\frac{4-n}{n^3+1}\ ,\ b_n=\frac{1}{n^2}\ ,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{4-n}{n^3+1})n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(\frac{4}{n}-1)}{n^3(1+\frac{1}{n^3})}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{4}{n}-1)}{(1+\frac{1}{n^3})}=-1$$

والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ تقاربية ، وبالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4-n}{n^3+1}$ تكون تقاربية.

٥- اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{x}{n})$ حيث $x\neq 0$

<u>الحل</u>: نقارن هذه المتسلسلة بالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ فيكون:

$$a_n=\sin(\frac{x}{n})\ ,\ b_n=\frac{1}{n}\ ,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}x.(\frac{\sin(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}})=x.\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}=x\neq 0$$

والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ تباعدية ، وبالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{x}{n})$ تكون تباعدية.

٦- اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{x}{n})$ حيث $x \neq 0$

الحل:

نقارن هذه المتسلسلة بالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ فيكون:

$$a_n = \ln(1+\frac{x}{n}) \quad , \quad b_n = \frac{1}{n} \quad ,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{x}{n})^n$$

$$= \ln \lim_{n\to\infty} (1+\frac{x}{n})^n$$

$$= \ln \lim_{n\to\infty} [(1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}}]^x$$

$$= \ln e^x = x \neq 0$$

والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ تباعدية ، وبالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{x}{n})$ تباعدية.

**٣- اختبار الجذر**: لتكن $\sum a_n$ متسلسلة لانهائية. فإن المتسلسلة $\sum a_n$ تكون:

- تقاربية إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$
- تباعدية إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}} > 1$
- يفشل الإختبار إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$

✓ **أمثلة**: ابحث تقارب أو تباعد كلا من المتسلسلات الآتية:

$$(1)\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$$

$$(2)\ \ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)(\frac{2n}{n+1})^n$$

الحل:

$$(1)\ \ |a_n| = \frac{1}{(\log n)^n}\ ,\ \lim_{n\to\infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{\log n} = 0 < 1.$$

وبالتالي تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$ تقاربية.

$$(2)\ \ |a_n| = (\frac{2n}{n+1})^n\ ,\ \lim_{n\to\infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sup (\frac{2n}{n+1}) = 2 > 1.$$

وبالتالي تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)(\frac{2n}{n+1})^n$ تباعدية.

## ▪ التقارب المطلق والتقارب المشروط:

**Absolute & Conditional Convergence**:

(١) إذا كانت $\sum a_n$ متسلسلة بعض حدودها موجبة وبعضها الآخر سالبة وكانت المتسلسلة $\sum |a_n|$ تقاربية ، فإن المتسلسلة الأصلية $\sum a_n$ تُسمى متسلسلة مطلقة التقارب.

(٢) إذا كانت $\sum a_n$ متسلسلة بعض حدودها موجبة وبعضها الآخر سالبة وكانت تقاربية ، بينما المتسلسلة $\sum |a_n|$ تباعدية ، فإن المتسلسلة الأصلية $\sum a_n$ تُسمى متسلسلة مشروطة التقارب.

( مثال: المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ تقاربية ، بينما المتسلسلة $\sum \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$ تباعدية ، وبالتالي فإن المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ تكون مشروطة التقارب ).

✓**أمثلة:** اختبر التقارب المطلق والتقارب المشروط للمتسلسلات الآتية:

$$(i)\ \frac{1}{2} - \frac{2}{2^3+1} + \frac{3}{3^3+1} - \frac{4}{4^3+1} + \ldots \qquad (ii)\ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad (iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

الحل:

$$(i)\ |a_n| = \frac{n}{n^3+1} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{n^3}{n^3+1}\right) < \frac{1}{n^2}.$$

أي أن كل حد في المتسلسلة $\sum |a_n|$ (ما عدا الحد الأول) أصغر من نظيره في المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$ التقاربية ، وبالتالي فإن المتسلسلة $\sum |a_n|$ تكون تقاربية (باختبار المقارنة) ، وإذاً المتسلسلة الأصلية تكون مطلقة التقارب.

$(ii)\ |a_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ .

وحيث إن المتسلسلة $\sum |a_n|$ تباعدية والمتسلسلة الأصلية تقاربية (حيث إنها تبادلية الإشارة والقيمة المطلقة لكل حد فيها أقل منها للحد السابق له ، وأن

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 )$$

وبالتالي فإن المتسلسلة الأصلية تكون مشروطة التقارب.

$(iii)\ |a_n| = \dfrac{1}{n^2}$ .

وحيث أن المتسلسلة $\sum \dfrac{1}{n^2}$ تقاربية . إذاً المتسلسلة الأصلية مطلقة التقارب ، وبالتالي فهي تقاربية.

$(iv)\ |a_n| = \dfrac{|\sin nx|}{n^2}$

$$\because |\sin nx| \le 1 \quad \forall n, x$$

$$\therefore |a_n| \le \frac{1}{n^2}.$$

أي أن المتسلسلة $\sum |a_n|$ تقاربية ، إذاً المتسلسلة الأصلية تكون مطلقة التقارب ، وبالتالي فهي تقاربية.

## ٤- اختبار النسبة (الصورة الأولى):

لتكن $\sum a_n$ متسلسلة حدودها موجبة ، فإذا كان:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ فإن المتسلسلة تكون تقاربية.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ فإن المتسلسلة تكون تباعدية.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ فإن الاختبار يفشل.

✓ **أمثلة:**

١- باستخدام اختبار النسبة ابحث تقارب أو تباعد كلا من المتسلسلات الآتية:

$$(i)\ \frac{1}{e}+\frac{2^4}{e^4}+\frac{3^4}{e^9}+\ldots \qquad (ii)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n} \qquad (iii)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$$

الحل:

$$(i)\ a_n=\frac{n^4}{e^{n^2}} \quad , \quad a_{n+1}=\frac{(n+1)^4}{e^{(n+1)^2}} \quad ,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^4}{e^{(n+1)^2}}\right)\left(\frac{e^{n^2}}{n^4}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4\left(\frac{1}{e^{2n+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{2n+1}}\right)=(1)(0)=0<1.$$

$\therefore$ المتسلسلة تقاربية.

$$(ii)\ a_n=\frac{n!}{3^n} \quad , \quad a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{3^{(n+1)}} \quad ,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{3^{(n+1)}}\right)\left(\frac{3^n}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3}=\infty>1.$$

$\therefore$ المتسلسلة تباعدية.

$$(iii)\ a_n = \frac{n}{3^n} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)}{3^{(n+1)}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)}{3^{(n+1)}}\right)\left(\frac{3^n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} < 1.$$

$\therefore$ المتسلسلة تقاربية.

٢- أوجد قيمة $x$ التي تجعل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \ ; x > 0$ تقاربية (تباعدية).

الحل:

نستخدم اختبار النسبة:

$$a_n = n^2 x^n \quad , \quad a_{n+1} = (n+1)^2 x^{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 x^{n+1}}{n^2 x^n} = x \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = x.$$

فإذا كانت $x < 1$ فإن المتسلسلة تكون تقاربية، وإذا كانت $x > 1$ فإن المتسلسلة تكون تباعدية ، وإذا كانت $x = 1$ فإن المتسلسلة تصبح $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ وهذه المتسلسلة تباعدية.

## ٥- اختبار النسبة (الصورة الثانية):

لتكن $\sum a_n$ متسلسلة لانهائية حدودها غير صفرية ، وليكن $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

فإن:

- المتسلسلة $\sum a_n$ تكون مطلقة التقارب (ومن ثم تقاربية) إذا كان $R<1$ .
- المتسلسلة $\sum a_n$ تكون تباعدية إذا كان $R>1$ .
- **ملاحظات:**

(١) اختبار الجذر يكون أفضل من اختبار النسبة ، بالمفهوم الآتي:

عندما لا يعطي اختبار الجذر نتيجة ( أي عندما يكون $\lim\limits_{n\to\infty}\sup|a_n|^{\frac{1}{n}}=1$ )

فإن اختبار النسبة سوف لا يعطي نتيجة أيضا.

(٢) إذا كانت الحدود $a_n$ غير صفرية ، وكان $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$

وإذاً يكون $\lim\limits_{n\to\infty}\sup|a_n|^{\frac{1}{n}}=1$ ومن ذلك ينتج أن اختباري النسبة والجذر لا يعطينا نتيجة بخصوص تقارب المتسلسلة $\sum a_n$ .

(٣) لقد درسنا حتى الآن ثلاث اختبارات لتقارب وتباعد المتسلسلات اللانهائية وهي المقارنة والجذر والنسبة ، وإننا نلاحظ أنه عند استخدام هذه الاختبارات يُستحسن أن نبدأ بتطبيق اختبار النسبة أولا وبعد ذلك اختبار الجذر ثم المقارنة ، فإذا كان $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ (أي أن اختبار النسبة لا يعطي نتيجة) ، فإننا لانطبق بعد ذلك اختبار الجذر لأنه طبقا للملاحظة الأولى السابقة لا يعطي أيضا نتيجة، ولكن نطبق اختبار المقارنة بمتسلسلات معروفة التقارب أو التباعد لدينا.

- **أمثلة:**

١- اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\frac{1}{243}+\dots$

الحل:

المتسلسلة المعطاة يمكن كتابتها في الصورة: $\sum_{n=2}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n = (\frac{1}{9})\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n$

وهي متسلسلة هندسية في الصورة $\sum_{n=0}^{\infty} a\,r^n$ حيث $a=\frac{1}{9}, r=-\frac{1}{3}$

ويكون مجموعها $\frac{1}{12}=\frac{\frac{1}{9}}{1-(-\frac{1}{3})}$ وبالتالي فهي تقاربية.

ويمكن إثبات أنها تقاربية باستخدام اختبار المقارنة ، وباستخدام اختبار النسبة أو اختبار الجذر حيث أن المتسلسلة $\sum|a_n|=\sum\frac{1}{3^n}$ تقاربية ، وأن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sup|a_n|^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}<1.$$

وإذاً المتسلسلة تقاربية.

٢- اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+3}$

الحل:

$$a_n=\frac{n}{n^2+3} \quad , \quad a_{n+1}=\frac{n+1}{(n+1)^2+3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+1)^2+3}.\frac{n^2+3}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2+3n+3}{n^3+2n^2+4n}=1.$$

وبالتالي فإن اختبار النسبة لا يعطي نتيجة ، ومن ثم اختبار الجذر لا يعطي أيضا نتيجة في هذه الحالة.

وسنستخدم اختبار المقارنة ، وطبعا قبل تطبيق اختبار المقارنة لابد من اختيار المتسلسلة التي سنقارن بها ، والتي تعتمد تقريبا على $a_n$ لأننا سوف نبحث المتسلسلة التقريبية لها عندما تكون $n$ كبيرة.

والآن يكون: $a_n = \dfrac{n}{n^2+3} \geq \dfrac{n}{n^2+3n^2} = \dfrac{n}{4n^2} = \dfrac{1}{4n}$

فإننا نقارن المتسلسلة الأصلية بالمتسلسلة $\sum \dfrac{1}{n}$ وحيث هذه المتسلسلة تباعدية ، فإن المتسلسلة $\sum \dfrac{1}{4n}$ تكون أيضا تباعدية . وبالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+3}$ تكون تباعدية.

٣- ابحث تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$

الحل:

إذا جربنا اختباري النسبة والجذر فإنهما لا يعطيان نتيجة لأن $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ ، وعلى ذلك سنستخدم اختبار المقارنة:

بما أن $a_n = \dfrac{1}{n^2+1} \leq \dfrac{1}{n^2}$ لذلك سنقارن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$ بالمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ وحيث أن هذه المتسلسلة تقاربية فإن المتسلسلة الأصلية تكون تقاربية .

٤- اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^n}$

الحل:

$$a_n = \frac{n}{3^n} \, , \, a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \, , \; \therefore \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1.$$

ومن ثم فإن المتسلسلة تكون تقاربية باستخدام اختبار النسبة .

ويمكن إثبات أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^n}$ تقاربية بتطبيق اختبار الجذر كما يلي:

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n)^{\frac{1}{n}}}{(3^n)^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}(n)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}<1.$$

أيضا يمكن إثبات أن المتسلسلة تقاربية باستخدام اختبار المقارنة ، وذلك باختيار متسلسلة هندسية مناسبة نقارنها بها.

٥- ابحث تقارب أو تباعد المتسلسلة $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+...$

الحل: $a_{2n-1}=\frac{1}{2^{n+1}}$ , $a_{2n}=\frac{1}{2^n}$ فإذا طبقنا اختبار الجذر على كلا من الحدود الزوجية والحدود الفردية نحصل على:

$$\lim_{n\to\infty}|a_{2n}|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^n}\right|^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1,$$

$$\lim_{n\to\infty}|a_{2n-1}|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^{n+1}}\right|^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1.$$

ومن ثم فإن المتسلسلة الأصلية تكون تقاربية.

٦- ابحث تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum[\frac{2}{(-1)^n-3}]^n$

الحل: $a_n=[\frac{2}{(-1)^n-3}]^n$ وباستخدام اختبار الجذر نجد أن:

$$|a_n|^{\frac{1}{n}}=\begin{cases}1 & if\ n\ even\\ \frac{1}{2} & if\ n\ odd\end{cases}$$

وبالتالي فإن $\lim_{n\to\infty}\sup|a_n|^{\frac{1}{n}}=1$ وإذاً اختبار الجذر لا يعطي نتيجة ، وكذلك اختبار النسبة لا يعطي نتيجة ، ومن جهة أخرى يكون $a_n=1$ إذا كانت $n$ زوجية ، ويكون $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ عندما تكون $n$ زوجية ، وبناءا على ذلك فإن المتسلسلة تكون تباعدية .

٧- اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k x^k}{2^{k+1}}$ حيث $x$ ثابت اختياري.

<u>الحل:</u>

بتطبيق اختبار النسبة يكون:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{3^{k+1}x^{k+1}}{2^{k+2}}\cdot\frac{2^{k+1}}{3^k x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{3x}{2}\right|.$$

$\therefore$ المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k x^k}{2^{k+1}}$ تكون تقاربية عندما $1 > \left|\frac{3x}{2}\right|$ أي عندما $|x| < \frac{2}{3}$

وتكون تباعدية عندما $|x| > \frac{2}{3}$ .

==============================================

✓ **الخلاصة**: لبحث تقارب أو تباعد أي متسلسلة نتبع الخطوات التالية:

**أولاً**: نوجد نهاية الحد العام $a_n$ للمتسلسلة عندما $n \to \infty$ فإذا كانت لا تساوي الصفر فإن المتسلسلة تكون تباعدية ، وإذا كانت النهاية تساوي الصفر فهذا لا يعني بالضرورة أن تكون المتسلسلة تقاربية ، فنتبع ما يلي في ثانياً.

**ثانياً**: نوجد المجموع الجزئي $S_n$ (بحساب مجموع حدود المتسلسلة إلى $n$ حد ، أو بطريقة الفروق إن أمكن ذلك) ثم نوجد نهاية $S_n$ عندما $n \to \infty$ فإذا كانت النهاية تساوي عدد محدود فإن المتسلسلة تكون تقاربية،وإذا كانت النهاية تساوي مالانهاية فإن المتسلسلة تكون تباعدية.

**ثالثاً**: إذا لم تنجح الخطوات التي في أولاً أو ثانياً نجرب اختبارات التقارب.

==========================================

## تمارين

١- ابحث تقارب أو تباعد كلا من المتسلسلات الآتية:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}.\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

$$(4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}.\quad (5)\ \frac{1}{11}+\frac{2}{21}+\frac{3}{31}+\ldots.\quad (6)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{e^n}$$

$$(7)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{2^n}.\qquad (8)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}.$$

$$(9)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}\ .\qquad (10)\ \sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}\quad ;x>0.$$

٢- باختبار الجذر ابحث تقارب أو تباعد كلا من المتسلسلات الآتية:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}.\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^n.$$

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+1}\right)^{2n-1}.\qquad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log^n(n+1)}.$$

٣- اختبر التقارب المطلق أو التقارب المشروط لكل من المتسلسلات الآتية:

$$(1)\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots.\qquad (2)\ 1-\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}-\frac{4}{3^3}+\ldots.$$

$$(3)\ \frac{2}{3}-\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\ldots.$$

٤- ابحث تقارب أو تباعد كلا من المتسلسلات الآتية:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^2}.\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}.\qquad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}.$$

## جبر الأعداد المركبة Algebra of Complex Numbers

**تعريف:** أي ثنائي مرتب $(x,y)$ يُسمى عدد مركب ، حيث $x,y \in R$ العدد الحقيقي $x$ يُسمى المركبة الحقيقية، والعدد الحقيقي $y$ يُسمى المركبة التخيلية للعدد المركب $(x,y)$ .

وللعدد المركب ثلاث صور:

- الصورة المعتادة وتُسمى أيضا الصورة القياسية للعدد المركب.
- الصورة القطبية للعدد المركب.
- الصورة الأسية وتُسمى أيضا صورة أويلر للعدد المركب.

✓ أولاً: الصورة المعتادة للعدد المركب:

إذا كان $z=(x,y)$ عدد مركب فإن الصورة:

$$z = x + iy.$$

حيث $i=\sqrt{-1}$ تُسمى الصورة المعتادة أو الصورة القياسية للعدد المركب $z$ .

ويُسمى $x$ الجزء الحقيقي للعدد المركب $z$ ويُسمى $y$ الجزء التخيلي للعدد المركب $z$ ويُكتب:

$$\mathrm{Re}(z) = x \ , \ \mathrm{Im}(z) = y.$$

ولكل عدد مركب $z = x + iy$ عدد مركب مرافق $\bar{z} = x - iy$ حيث:

$$\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z) \ , \ \mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z).$$

ولكل عدد مركب $z = x + iy$ معكوس جمعي $-z = -x - iy$

ومعكوس ضربي للعدد $z \neq 0$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \ .$$

- **أمثلة:** أوجد $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), \bar{z}, -z, z^{-1}$ لكل من الأعداد المركبة $z$ الآتية:

$$1-2i \ , \ 2+i \ , \ i \ , \ 2i \ , \ \frac{1}{1+i} \ , -1$$

الحل: تمرين فصلي.

**ملاحظات:**

الأعداد الحقيقية يمكن اعتبارها حالات خاصة من الأعداد المركبة، وذلك باعتبار أن العدد الحقيقي هو عدد مركب جزءه التخيلي صفر.

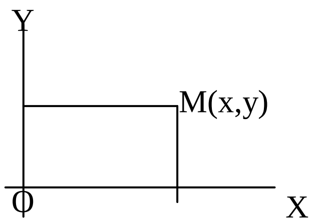
١- العدد المركب الذي جزءه الحقيقي صفر يُسمى عدد تخيلي خالص.

٢- إذا كان $z_1 = x_1 + iy_1 \ , \ z_2 = x_2 + iy_2$ عددين مركبين فإن:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \ , \ y_1 = y_2$$

**المستوى المركب:**

نفرض مستوى محدد فيه مجموعة إحداثيات كارتيزية $XOY$ ونأخذ أي عدد مركب $z = x + iy$ ثم نعين في المستوى النقطة $M(x, y)$ واضح أن العدد المركب $z$ يحدد النقطة المناظرة له $M(x, y)$ تحديدا تاما، وبالعكس بفرض نقطة ما $M(x, y)$ في المستوى، فإنه يمكن تحديد العدد $z = x + iy$ حيث $x, y$ هما الإحداثيان السيني والصادي للنقطة $M$ أي أن النقطة $M$ تعين العدد المركب $z$ انظر الشكل:




بهذه الطريقة يمكن القول بأنه توجد علاقة وحيدة متبادلة بين الأعداد المركبة ونقط المستوى ، بمعنى أن كل عدد مركب يحدد نقطة واحدة في المستوى، وكل نقطة في المستوى تقابل عددا مركبا واحدا، وذلك بتثبيت مجموعة إحداثيات معينة $XOY$ ولذلك فإن العدد المركب $z = x + iy$ يمكن كتابته بالصورة $z = (x, y)$

كعلاقة ثنائية مرتبة من العددين الحقيقيين $x, y$ كما سبق شرحه.

يُسمى المستوى المشار إليه بالمستوى المركب.

✓ **ثانياً: الصورة القطبية للعدد المركب The Polar Form:**

لتكن النقطة $M(x,y)$ في المستوى المركب تمثل العدد المركب $z = x + iy$

ونفرض أن الإحداثيات القطبية للنقطة $M$ هي $(r,\theta)$ إذاً:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \qquad (1)$$

$$\therefore z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (2)$$

تُسمى العلاقة(2) بالصورة القطبية للعدد المركب $z = x + iy$

ويُلاحظ من العلاقة(1) أن $r,\theta$ تتحددان من العلاقتين:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ , \qquad (3)$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad (4)$$

العلاقة(3) تحدد $r$ تحديدا تاما ، وتُسمى $r$ مقياس العدد المركب $z$ ويُرمز عادة للمقياس بالرمز $|z|$ وعلى ذلك يكون:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

وكل زاوية $\theta$ تحقق العلاقة(4) تُسمى <u>سعة العدد المركب</u> argument of $z$ وتُكتب $\arg(z) = \theta$.

والفرق بين أي سعتين للعدد المركب $z$ يكون مضاعفا للزاوية $2\pi$ .

والزاوية $\theta$ التي تحقق العلاقة (4) وتحقق أيضا الشرط $-\pi \le \theta \le \pi$ تُسمى **القيمة الأساسية لسعة العدد المركب** $z$ والزاوية $\theta$ قد تكون موجبة ، وقد تكون سالبة ، ولابد أن نلاحظ أن العلاقة $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ غير كافية لتعيين الزاوية $\theta$ تعيينا تاما ، ولذلك <u>لتعيين القيمة الأساسية لسعة العدد المركب</u>

يجب أن نحدد أولا الربع الذي تقع فيه الزاوية $\theta$ كما يلي:

- ✓ فإذا كانت $\theta$ تقع في الربع الأول (من 0 إلى $\frac{\pi}{2}$ ) وذلك عندما تكون نسبها المثلثية ( $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ ) كلها موجبة فإن $\theta$ تكون مباشرة هي القيمة الأساسية لسعة العدد المركب .
- ✓ أما إذا كانت $\theta$ تقع في الربع الثاني ( من $\frac{\pi}{2}$ إلى $\pi$ ) وذلك عندما تكون النسب المثلثية( $\cos\theta, \tan\theta$ ) سالبة والنسبة المثلثية ( $\sin\theta$ ) موجبة فإن $\theta = \pi - \theta_0$ حيث $\theta_0$ هي الزاوية معلومة النسب المثلثية ( $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ ) بغض النظر عن الإشارة ، والتي تكون غالبا هي أحد الزوايا المعروفة مثل $2\pi, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, 0, ...$ .
- ✓ أما إذا كانت $\theta$ تقع في الربع الثالث ( من $\pi$ إلى $\frac{3\pi}{2}$ ) وذلك عندما تكون النسب المثلثية ( $\sin\theta, \cos\theta$ ) سالبة والنسبة المثلثية ( $\tan\theta$ ) موجبة فإن $\theta = -(\pi - \theta_0)$ حيث $\theta_0$ هي الزاوية معلومة النسب المثلثية ( $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ ) بغض النظر عن الإشارة.
- ✓ أما إذا كانت $\theta$ تقع في الربع الرابع ( من $\frac{3\pi}{2}$ إلى $2\pi$ ) وذلك عندما تكون النسب المثلثية ( $\sin\theta, \tan\theta$ ) سالبة والنسبة المثلثية ( $\cos\theta$ ) موجبة فإن $\theta = -\theta_0$ حيث $\theta_0$ هي الزاوية معلومة النسب المثلثية( $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ ) بغض النظر عن الإشارة.

**أمثلة:**

أوجد المقياس والقيمة الأساسية للسعة لكل من الأعداد المركبة $z$ الآتية:

$$1+i \ , -\sqrt{3}+i \ , -1-i\sqrt{3} \ , \ 1-i$$

ثم ضع كلا منها في الصورة القطبية.

الحل:

(1) $z=1+i$

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{1}{1}=1.$$

وإذاً $\theta$ تقع في الربع الأول ، ومن ثم يكون:

$$\theta=\frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore 1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}).$$

(2) $z=-\sqrt{3}+i$

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3+1}=2,$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2},$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{1}{-\sqrt{3}}.$$

وإذاً $\theta$ تقع في الربع الثاني ، ومن ثم يكون:

$$\theta=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}.$$

$$\therefore -\sqrt{3}+i=2[\cos(\frac{5\pi}{6})+i\sin(\frac{5\pi}{6})].$$

(3) $z=-1-i\sqrt{3}$

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+3}=2,$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2},$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}.$$

وإذاً $\theta$ تقع في الربع الثالث ، ومن ثم يكون:

$$\theta=-(\pi-\frac{\pi}{3})=-\frac{2\pi}{3}.$$

$$\therefore -1-i\sqrt{3}=2[\cos(-\frac{2\pi}{3})+i\sin(-\frac{2\pi}{3})].$$

(4) $z=1-i$

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-1}{1}=-1.$$

وإذاً $\theta$ تقع في الربع الرابع ، ومن ثم يكون:

$$\theta=-\frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore 1-i=\sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})].$$

## الأعداد المركبة المترافقة وخواصها:

ذكرنا سابقا أن العدد المركب $\bar{z} = x - iy$ يُسمى بالعدد المرافق للعدد المركب

$z = x + iy$ وإذا كان $z_1 = x_1 + iy_1 \, , \, z_2 = x_2 + iy_2$ عددين مركبين فيمكن التأكد من صحة العلاقات الآتية:

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \, \bar{z}_2 \, ,$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad ,$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

وبالنسبة للعددين $z \, , \bar{z}$ نلاحظ أن:

$$\begin{aligned} |\bar{z}| &= \sqrt{x^2 + (-y)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= |z| \; , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z\,\bar{z} &= (x + iy)(x - iy) \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2 \, , \end{aligned}$$

$$\therefore |\bar{z}| = |z| = \sqrt{z\,\bar{z}} \, .$$

والقيمة الأساسية لسعة $\bar{z}$ تكون:

$$\tan^{-1}\left(\frac{-y}{x}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right).$$

أي أنها تساوي القيمة الأساسية لسعة $z$ بإشارة مخالفة.

## خواص مقياس وسعة الأعداد المركبة:

بفرض أن $z_1, z_2$ عددين مركبين.

الخاصية الأولى: إذا كانت $z_1 = z_2$ فإن $|z_1| = |z_2|$ والعكس ليس صحيحا عموماً.

الإثبات: ليكن

$$z_1 = x_1 + iy_1 \,, z_2 = x_2 + iy_2$$

$$\therefore z_1 = z_2 \Rightarrow x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \,, y_1 = y_2$$

$$\therefore |z_1| = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2} = \sqrt{(x_2)^2 + (y_2)^2} = |z_2|.$$

والعكس نفرض أن $|z_1| = |z_2|$

$$\therefore \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2} = \sqrt{(x_2)^2 + (y_2)^2}$$

$$\therefore \; (x_1)^2 + (y_1)^2 = (x_2)^2 + (y_2)^2$$

وهذا لا يتطلب أن يكون $x_1 = x_2 \,, y_1 = y_2$ أي لا يتطلب أن يكون $z_1 = z_2$

فمثلا القيم $x_1 = y_1 = \dfrac{1}{2}, x_2 = 0, y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ تعطينا $|z_1| = |z_2|$ بينما $z_1 \neq z_2$ .

الخاصية الثانية:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \quad , \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} .$$

الإثبات: نفرض أن $z_1, z_2$ في الصورة القطبية:

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)$$

$$\therefore z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \qquad (*)$$

وهذه هي الصورة القطبية لحاصل الضرب $z_1 z_2$ ولأن $r_1 r_2 > 0$

$$\therefore |z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2| \; .$$

وبنفس الطريقة يكون:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\,\frac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\cos\theta_2\sin\theta_1-\cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

$$\therefore\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)] \qquad (**)$$

وهذه هي الصورة القطبية لخارج القسمة $\frac{z_1}{z_2}$ ولأن $\frac{r_1}{r_2}>0$

$$\therefore\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

ونلاحظ مما سبق أنه باستخدام الاستنتاج الرياضي يمكن إثبات أن:

$$|z_1z_2\ldots z_n|=|z_1||z_2|\ldots|z_n|$$

حيث $n$ أي عدد صحيح موجب.

<u>الخاصية الثالثة</u>:

$$\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2),$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2).$$

وهذه الخاصية تتضح مباشرة من العلاقتين ( ** ), ( * ) .

وباستخدام الاستنتاج الرياضي يمكن إثبات أن:

$$\arg(z_1z_2\ldots z_n)=\arg(z_1)+\arg(z_2)+\ldots+\arg(z_n)\quad ;n\in Z^+$$

**ملاحظة:**

إذا كانت $\theta_1,\theta_2$ هما القيمتان الأساسيتان لسعتي $z_1,z_2$ فإن القيمة الأساسية لسعة $z_1z_2$ تكون هي $\theta_1+\theta_2$ وذلك باعتبار $-\pi\le\theta_1+\theta_2\le\pi$ وإذا لم يتحقق هذا الشرط فإن القيم الأساسية لسعة $z_1z_2$ تكون مساوية للمقدار $\theta_1+\theta_2\pm 2\pi$ .

وبالمثل تكون القيمة الأساسية لسعة $\frac{z_1}{z_2}$ تكون مساوية لـ $\theta_1-\theta_2\pm 2\pi$ .

**أمثلة:**

١ - إذا كانت $z_1=-1-i, z_2=i, z_3=-1+\sqrt{3}i$

فأوجد القيم الأساسية لسعة $z_2z_3,\frac{z_1}{z_3}$ .

الحل:

لتكن $\theta,\phi,\psi$ هي القيم الأساسية لسعات $z_1,z_2,z_3$ على الترتيب ، وحيث إن:

$$\theta=\tan^{-1}(\frac{-1}{-1})=\tan^{-1}1=-(\pi-\frac{\pi}{4})=-\frac{3\pi}{4},$$

$$\phi=\tan^{-1}(\frac{1}{0})=\tan^{-1}\infty=\frac{\pi}{2},$$

$$\psi=\tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{-1})=\tan^{-1}(-\sqrt{3})=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}.$$

$$\therefore \phi+\psi=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi}{6},$$

$$\theta-\psi=-\frac{3\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}=-\frac{17\pi}{12}.$$

وباستخدام الملاحظة الأخيرة نستنتج أن القيمة الأساسية لسعة $z_2z_3$ تكون:

$$\frac{7\pi}{6}-2\pi=\frac{-5\pi}{6}$$

والقيمة الأساسية لسعة $\frac{z_1}{z_3}$ تكون:

$$\frac{-17\pi}{12}+2\pi=\frac{7\pi}{12}$$

ويمكن استخدام الخاصية الثالثة لمقياس وسعة العدد المركب ، بإيجاد
$z_2 z_3 \, , \dfrac{z_1}{z_3}$
ثم حساب القيم الأساسية لسعة كل منهما كما يلي:

$$z_2 z_3 = i(-1+\sqrt{3}i) = -\sqrt{3} - i,$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{-1-i}{-1+\sqrt{3}i} = \frac{-1-i}{-1+\sqrt{3}i} . \frac{-1-\sqrt{3}i}{-1-\sqrt{3}i} = \frac{1}{4}[1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i]$$

إذاً القيمة الأساسية لسعة $z_2 z_3$ تكون:

$$\tan^{-1}\frac{-1}{-\sqrt{3}} = -(\pi - \frac{\pi}{6}) = \frac{-5\pi}{6}$$

والقيم الأساسية لسعة $\dfrac{z_1}{z_3}$ تكون:

$$\tan^{-1}\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}+1}{-(\sqrt{3}-1)} = \pi - (\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}) = \frac{7\pi}{12}.$$

**٢**- لأي عددين مركبين $z_1, z_2$ تحقق من أن $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

<u>الإثبات</u>: ليكن

$$z_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta), z_2 = s(\cos\phi + i\sin\phi)$$

$$\therefore z_1 + z_2 = m(\cos\psi + i\sin\psi)$$

$$\therefore m(\cos\psi + i\sin\psi) = r(\cos\theta + i\sin\theta) + s(\cos\phi + i\sin\phi)$$

$$\therefore m\cos\psi = r\cos\theta + s\cos\phi,$$

$$m\sin\psi = r\sin\theta + s\sin\phi$$

وفي العلاقتين الأخيرتين بضرب العلاقة الأولى في $\cos\psi$ والثانية في $\sin\psi$

والجمع نحصل على:

$$m = r(\cos\theta\cos\psi + \sin\theta\sin\psi) + s(\cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\psi)$$

$$= r\cos(\psi-\theta) + s\cos(\psi-\phi)$$

$$\therefore m \le r+s \qquad ;\cos(\psi-\theta)\le 1, \cos(\psi-\phi)\le 1$$

$$\therefore |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|.$$

ويُلاحظ أنه يمكن تعميم هذه النتيجة باستخدام الاستنتاج الرياضي فيكون:

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$$

لأي عدد صحيح موجب $n$ .

**٣**- لأي عددين مركبين $z_1, z_2$ تحقق من أن $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

<u>الإثبات</u>: نكتب $z_1$ في الصورة:

$$z_1 = (z_1 + z_2) + (-z_2)$$

وبتطبيق نتيجة المثال السابق يكون:

$$\begin{aligned} |z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| &= |(z_1 + (-z_2) + z_2| \\ &\le |z_1 + (-z_2)| + |z_2| \\ &\le |z_1 - z_2| + |z_2| \end{aligned}$$

$$\therefore |z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|.$$

## ✓ ثالثاً: الصورة الأسية للعدد المركب:

ليكن $z$ عدد مركب في الصورة القطبية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

وفي ضوء دراستنا لمفكوكات الدوال نعلم أن:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$\therefore e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(-1)\theta^2}{2!} + \frac{(-i)\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots$$

$$= (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots) + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots)$$

وأن:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots \ ,$$

$$\sin\theta = \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots$$

$$\therefore e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \mapsto (1)$$

إذاً أي عدد مركب $z$ يمكن كتابته في الصورة:

$$z = r e^{i\theta} \qquad \mapsto (2)$$

هذه الصورة(2) تُسمى <u>الصورة الأسية أو صورة أويلر للعدد المركب</u> $z$

ومن(1) نستنتج أن:

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \qquad \mapsto (3)$$

ومن(1),(3) بالجمع والطرح على الترتيب نحصل على:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \ , \ \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

وحيث إن $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}.e^{2ik\pi}$ حيث $k$ عدد صحيح موجب ، ومن ثم فإن:

$$e^{2ik\pi} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1$$

$$\therefore e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta.}$$

وبأخذ لوغاريتم طرفي المعادلة(2) نحصل على:

$$\log z = \log(re^{i\theta}) = \log r + \log e^{i\theta}.$$

$$\therefore \log z = \log r + i\theta \quad \mapsto (4)$$

وهذه الصورة(4) تُسمى **لوغاريتم العدد المركب** $z$ .

وحيث إن للعدد المركب $z$ عدد لا نهائي من السعات فيكون للمقدار $\log z$ أيضاً عدد لانهائي من القيم . فإذا كانت $\theta$ هي القيمة الأساسية لسعة $z$ فيكون:

$$\log z = \log|z| + i(\theta + 2k\pi) \;\; ; \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \mapsto (5)$$

**__مثال__**: أوجد قيم كل من $\log(1+\sqrt{3}i)$ , $\log(-1)$

__الحل__:

$$(1) \;\; z = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\therefore |z| = \sqrt{1+3} = 2 \;\; , \;\; \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned}\therefore \log z &= \log(1+\sqrt{3}i) \\ &= \log|z| + i(\theta + 2k\pi) \\ &= \log 2 + i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) \\ &= \log 2 + \frac{1}{3}(6k+1)\pi i \quad ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.\end{aligned}$$

$$(2) \;\; z = -1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$$

$$\therefore \log(-1) = i(\pi + 2k\pi) = (2k+1)\pi i \quad ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

✓ **<u>نظرية دي موافر للأعداد المركبة:</u>**

العدد $(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ هو قيمة أو إحدى قيم المقدار $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ لجميع قيم $n$ القياسية.

<u>الإثبات</u>: يوجد ثلاث حالات ممكنة هي:

**(١) عندما تكون $n$ عدد صحيح موجب:**

سوف نستخدم الاستنتاج الرياضي لإثبات العلاقة:

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)...(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$$
$$=\cos(\theta_1+\theta_2+...+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+...+\theta_n) \qquad \mapsto (5)$$

$$\because (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)$$
$$= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \qquad \mapsto (*)$$

أي أن العلاقة (5) صحيحة في حالة $n=2$ ولاستكمال باقي خطوات الاستنتاج الرياضي نفرض أن العلاقة (5) صحيحة في حالة $n=k$ حيث $k \geq 2$ أي أن

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)...(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$$
$$= \cos(\theta_1+\theta_2+...+\theta_k) + i\sin(\theta_1+\theta_2+...+\theta_k) \qquad \mapsto (**)$$

وسنثبت صحة العلاقة في حالة $n=k+1$ باستخدام (**) .

وإذاً يكون:

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)....(\cos\theta_{k+1} + i\sin\theta_{k+1})$$
$$=[(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)...(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)](\cos\theta_{k+1} + i\sin\theta_{k+1})$$
$$=[\cos(\theta_1+...+\theta_k) + i\sin(\theta_1+...+\theta_k)](\cos\theta_{k+1} + i\sin\theta_{k+1})$$
$$= \cos(\theta_1+...+\theta_{k+1}) + i\sin(\theta_1+...+\theta_{k+1})$$

أي أن العلاقة (5) صحيحة في حالة $n=k+1$ بفرض صحتها في حالة $n=k$ ، لكنها صحيحة في حالة $n=2$ لذلك فهي صحيحة في حالة $n=3$ وبالتالي تكون صحيحة في حالة $n=4$ وهكذا.. أي أنها صحيحة لجميع قيم $n$ الصحيحة الموجبة.

وبوضع $\theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_n = \theta$ في العلاقة (5) نحصل على:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

وبذلك نكون قد أثبتنا صحة نظرية دي موافر في حالة $n$ عدد صحيح موجب ، ويكون في هذه الحالة العدد $\cos n\theta + i\sin n\theta$ هو القيمة الوحيدة للمقدار:

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ .

**(٢) عندما تكون $n$ عدد صحيح سالب:**

نفرض أن $n=-m$ حيث $m$ عدد صحيح موجب. إذاً:

$$\begin{aligned}\cos n\theta + i\sin n\theta &= \cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta) = \cos m\theta - i\sin m\theta \\ &= \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta} = \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m} \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m} \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n.\end{aligned}$$

وبذلك نكون قد أثبتنا نظرية دي موافر في حالة $n$ عدد صحيح سالب ، ويكون أيضا في هذه الحالة العدد $\cos n\theta + i\sin n\theta$ هو القيمة الوحيدة للمقدار:

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ .

**(٣) عندما تكون $n$ عدد كسري:**

نفرض أن $n=\dfrac{m}{k}$ حيث $m,k$ عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك سوى الواحد الصحيح

$$\begin{aligned}\therefore (\cos n\theta + i\sin n\theta)^k &= \cos kn\theta + i\sin kn\theta \\ &= \cos m\theta + i\sin m\theta \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)^m\end{aligned}$$

أي أن $\cos n\theta + i\sin n\theta$ هي إحدى قيم $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{m}{k}}$ وإذاً:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{m}{k}} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

وبذلك نكون قد أثبتنا نظرية دي موافر في حالة $n$ عدد كسري ، ويكون في هذه الحالة العدد $\cos n\theta + i\sin n\theta$ هي إحدى قيم المقدار $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ .

وبذلك ينتهي إثبات نظرية دي موافر.

✓ **القيم المختلفة للمقدار** $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ **عندما تكون** $n$ **عدد كسري:**

من نظرية دي موافر يتضح أنه إذا كانت $n$ كسرية فإن العدد $\cos n\theta+i\sin n\theta$ ليس سوى إحدى قيم المقدار $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ ولإيجاد القيم الأخرى لهذا المقدار نفرض أن $n=\frac{m}{k}$ حيث $m,k$ عددان صحيحان ، ليس بينهما عامل مشترك سوى الواحد الصحيح.

وبفرض أن $(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ إحدى قيم المقدار $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$

$$\therefore (\cos\alpha+i\sin\alpha)=(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{m}{k}}$$

$$\therefore (\cos\alpha+i\sin\alpha)^k=(\cos\theta+i\sin\theta)^m$$

$$\therefore \cos k\alpha+i\sin k\alpha=\cos m\theta+i\sin m\theta$$

$$\therefore \cos k\alpha=\cos m\theta,\sin k\alpha=\sin m\theta$$

$$\therefore k\alpha=m\theta+2s\pi\Rightarrow\alpha=\frac{m\theta+2s\pi}{k}\quad ;s=0,1,2,\ldots$$

وبالتالي فإن القيم المختلفة للمقدار $(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{m}{k}}$ تُعطى بالعلاقة:

$$z_s=\cos\frac{m\theta+2s\pi}{k}+i\sin\frac{m\theta+2s\pi}{k}.$$

وهذا يعني أنه يوجد عدد لا نهائي من القيم للمقدار $(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{m}{k}}$.

وسنوضح أن هذه القيم ليست جميعها مختلفة ، وإنما يوجد منها فقط عدد $k$ من القيم المختلفة وهي:

$$z_0,z_1,z_2,\ldots,z_{k-1}$$

لذلك نوجد $z_{s_1},z_{s_2}$ حيث $0\le k-1\le s_2<s_1$

$$\therefore \frac{m\theta+2s_2\pi}{k}\ne\frac{m\theta+2s_1\pi}{k}$$

وبذلك تكون القيم $z_0,z_1,z_2,\ldots,z_{k-1}$ جميعها مختلفة.

نُوجد $z_{s'}$ حيث $s'\ge k$ وبفرض أن $\frac{s'}{k}=a+\frac{b}{k}$ وإذاً $s'=ak+b$ حيث $a\ge 1$ ، $0\le b\le k-1$ .

وإذاً:

$$
\begin{aligned}
z_{s'} &= \cos\frac{m\theta+2(ak+b)\pi}{k} + i\sin\frac{m\theta+2(ak+b)\pi}{k} \\
&= \cos\frac{m\theta+2b\pi}{k} + i\sin\frac{m\theta+2b\pi}{k} \\
&= z_b.
\end{aligned}
$$

أي أن $z_{s'}$ تنطبق مع إحدى القيم $z_0, z_1, z_2, ..., z_{k-1}$ .

ومن ثم فإن القيم المختلفة للمقدار $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{m}{k}}$ تُعطى بالصورة:

$$
z_s = \cos\frac{m\theta+2s\pi}{k} + i\sin\frac{m\theta+2s\pi}{k}.
$$

حيث $s = 0, 1, 2, ..., k-1$ .

وبما أن $z_s = z_{a_{k+s}}$ إذاً بكتابة جميع القيم للعلاقة السابقة على شكل متتابعة لا نهائية

في الصورة $z_0, z_1, z_2, ...$

ونجد أن الحدود $z_0, z_1, z_2, ..., z_{k-1}$ مختلفة ، ثم تتكرر هذه الحدود بعد ذلك بنفس ترتيبها.

**أمثلة:**

**١ - أوجد قيمة** $(1+i)^8$ .

الحل:

نضع العدد $1+i$ في الصورة القطبية:

$$
|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \theta = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}
$$

$$
\therefore 1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})
$$

وبتطبيق نظرية دي موافر نحصل على:

$$
\begin{aligned}
(1+i)^8 &= (\sqrt{2})^8(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^8 \\
&= 16(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 16.
\end{aligned}
$$

**٢- اختصر المقدار** $\dfrac{(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)^5(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^7}{(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^{11}(\cos 5\theta - i\sin 5\theta)^9}$

ثم احسب قيمته عندما $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ .

الحل:

$$z = \frac{[\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)]^5[\cos 3\theta + i\sin 3\theta]^7}{[\cos 4\theta + i\sin 4\theta]^{11}[\cos(-5\theta) + i\sin(-5\theta)]^9}$$

$$= \frac{[\cos\theta + i\sin\theta]^{-10}[\cos\theta + i\sin\theta]^{21}}{[\cos\theta + i\sin\theta]^{44}[\cos\theta + i\sin\theta)]^{-45}}$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^{12}$$

$$= \cos(12\theta) + i\sin(12\theta).$$

وعندما $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ يكون:

$$z = \cos(12)(\frac{\pi}{6}) + i\sin(12)(\frac{\pi}{6}) = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

**٣-** اختصر المقدار $\dfrac{(1+i\tan\theta)^5}{(1-i\tan\theta)^7}$ ثم احسب قيمته عندما $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ .

الحل:

$$z = \frac{(1+i\tan\theta)^5}{(1-i\tan\theta)^7} = \frac{(\cos\theta)^7\,(1+i\tan\theta)^5}{(\cos\theta)^7(1-i\tan\theta)^7}$$

$$= \frac{(\cos\theta)^2(\cos\theta + i\sin\theta)^5}{(\cos\theta - i\sin\theta)^7}$$

$$= \frac{(\cos^2\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)^5}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{-7}}$$

$$= (\cos^2\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)^{12}$$

$$= (\cos^2\theta)[\cos(12\theta) + i\sin(12\theta)].$$

وعندما $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ يكون:

$$z = \cos^2(\frac{\pi}{6})[\cos(12)(\frac{\pi}{6}) + i\sin(12)(\frac{\pi}{6})] = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2[\cos 2\pi + i\sin 2\pi] = \frac{3}{4}$$

٤- أوجد القيم المختلفة للمقدار $\sqrt[4]{i}$ .

<u>الحل</u>:

نضع العدد $i$ في الصورة القطبية:

$$|i| = \sqrt{0+1} = 1,$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{0} = \tan^{-1}\infty = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \sqrt[4]{i} = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{4}}$$

وبذلك تكون القيم المختلفة للمقدار $\sqrt[4]{i}$ تُعطى من العلاقة:

$$z_s = \cos\frac{m\theta + 2s\pi}{k} + i\sin\frac{m\theta + 2s\pi}{k}.$$

حيث $s = 0,1,2,...,k-1$ ( $\frac{m}{k} = \frac{1}{4}$ ) وإذاً:

$$z_s = \cos\frac{1(\frac{\pi}{2}) + 2s\pi}{4} + i\sin\frac{1(\frac{\pi}{2}) + 2s\pi}{4}$$

$$= \cos\frac{(4s+1)\pi}{8} + i\sin\frac{(4s+1)\pi}{8} \quad ; s = 0,1,2,3.$$

$$\therefore z_0 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8},$$

$$z_1 = \cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8} = -\sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8},$$

$$z_2 = \cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8} = -\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8},$$

$$z_3 = \cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}.$$

أي أن القيم المختلفة للمقدار $\sqrt[4]{i}$ تكون:

$$\pm(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}), \pm(\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}).$$

**٥-** أوجد قيم المقدار $(1+i)^{\frac{2}{3}}$ .

الحل:

نضع العدد $1+i$ في الصورة القطبية:

$$|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\ ,\ \theta = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore 1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

$$\therefore (1+i)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^{\frac{2}{3}}$$

وإذاً القيم المختلفة للمقدار $(1+i)^{\frac{2}{3}}$ تُعطى من العلاقة:

$$z_s = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{2(\frac{\pi}{4}) + 2s\pi}{3} + i\sin\frac{2(\frac{\pi}{4}) + 2s\pi}{3})$$

$$= \sqrt[3]{2}(\cos\frac{(4s+1)\pi}{6} + i\sin\frac{(4s+1)\pi}{6}) \qquad ; s = 0,1,2.$$

$$\therefore z_0 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt[3]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}) = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt[3]{4}},$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = \frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt[3]{4}},$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}) = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = \sqrt[3]{2}\,i.$$

## تمارين:

١ ـ لكل من الأعداد المركبة $z$ الآتية:

$4+3i\ ,\ 1-i\ ,\ 2i$

أوجد $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z), -z, \bar{z}, z^{-1}$ .

٢− برهن أن:

(i) $|z|=|-z|=|\bar{z}|$

(ii) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

(iii) $z\bar{z}=|z|^2$

(iv) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$

٣− اكتب الأعداد المركبة الآتية:

$$\frac{3}{1-2i}\ ,\ \frac{1}{2+i}\ ,\ \frac{2+i}{1-i}$$

على الصورة $x+iy$ .

٤− أوجد قيم $x, y$ الحقيقية من المعادلات الآتية:

(i) $(2-3i)x+(3+4i)y=2-i$

(ii) $(4-i)x-(3+2i)y-(1+i)=0$

٥ـ ضع الأعداد المركبة الآتية في الصورة القطبية:

$1+i\ ,\ 1-i\ ,\ \sqrt{3}-i\ ,\ -i\ ,\ 1-\sqrt{3}i\ ,\ 3+4i\ ,\ -9-4i\ ,$

$\cos\alpha+i\sin\alpha\ ,\ \sin\alpha+i(1+\cos\alpha)\ ,\ -\sin\alpha-i(1+\cos\alpha).$

٦ـ أوجد $|z|, \arg(z)$ لكل من الأعداد المركبة $z$ الآتية:

$1-\sqrt{3}\,i\ ,\ -2-3i\ ,\ i\ ,\ -2i\ ,\ 4$

٧ـ أثبت أن $\bar{z}\neq 1$; $\left|\dfrac{1-z}{\bar{z}-1}\right|=1$

٨ـ أوجد حل المعادلات الآتية:

(1) $|z|-z=1+2i$

(2) $|z|+z=2+i$

**٩- أوجد قيمة:**

$$\log(-\sqrt{3}+i)\ ,\ \log(-3)$$

**١٠- إذا كانت $n$ عدد صحيح فأثبت أن:**

(1) $$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4})$$

(2) $$(\sqrt{3}+i)^n = 2^n(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6})$$

(3) $$(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta})^n = \frac{1+i\tan n\theta}{1-i\tan n\theta}$$

**١١- أثبت أن:**

$$\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta} = \sin\theta+i\cos\theta$$

ومن ثم استنتج أن:

$$(1+\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5})^5+i(1+\sin\frac{\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5})^5 = 0.$$

=====================================

==========