جامعة جنوب الوادي

مقرر

استخدام الحاسب الآلي فى الفيزياء

الفرقة .....الثالثة

شعبة... طبيعة

أستاذ المقرر

د/ سحر النوبي ابراهيم

قسم الفيزياء – كلية العلوم بقنا

العام الجامعي

2022م / 2023

بيـــانــات أساسية

الكلية: التربية

الفرقة: الثالثة

التخصص: طبيعة

عدد الصفحات: 117

القسم التابع له المقرر : قسم الفيزياء

محتوي الكتـــاب

المحتوى .... Error! Bookmark not defined.

مقدمة عن الكمبيوتر 6

الباب الاول 9

مقدمة عن الفروق 9

المقصود بالفروق الامامية 9

تفاضل الدالة المتصلة بدلالة الفروق.............................11

التفاضل الاول بدلالة الفرق الامامى:...........................11

التفاضل الاول بدلالة الفرق الخلفى:...........................13

الحصول علي التفاضل الاول بدلالة الفرق الأمامي الاول باستخدام متسلسلة تايلور 17
الحصول علي التفاضل الاول بدلالة الفرق الخلفى الاول باستخدام متسلسلة تايلور 18
الحصول علي التفاضل الاول بدلالة الفرق المركزى باستخدام متسلسلة تايلور...19
الباب الثانى..22
الفـروق الأماميــة 23
الباب الثالث..35
الفـروق الخلفيـة 36
الباب الرابع 42
الفروق المركزية 42
الفروق المركزية (الاختلافات المركزية المتوسطة) 43
استنتاج صيغ الفروق المركزية 44
القيمـة المتوسطـة للدالــة.....................................48
الباب الخامس...50
الاستكمال Interpolation..................................50
ما المقصود بـ الاستنتاج أو الاستكمال Interpolation. 50
كيفية عمل polynomial Interpolation...................51
أولا : الطريقة المباشرة لعمل كثيرة الحدود : 51

ثانيا: طريقة نيوتن لعمل كثيرة حدود بواسطة الفرق المقسوم 57

أولاً : استنتاج معادلة خطية (من الدرجة الأولي) : 57

ثانياً : المعادلة التربيعية (quadrahc interpolation)....60

ثالثا: Lagrangian interpolation.........................71

الباب السادس توفيق المنحنيات 79

1-6مقدمة:..79

6–2 الطريقة البيانية Graphical method..................81

6–2–1 – الخط المستقيم Straight line..................81

6–2–2 معادلة الدرجة الثانية Quadratic Equation ..82

6–2–3 الدالة الأسية Exponential Function..........84

6–2–4 دالة القوى Power Function..................86

6–2–5 دالة بواسون Boissen...........................88

6–2–6 دالـة "Gauss"................................91

6–3 طريقة النقط المتوسطة Method of Average Points 92

6–3–1 طريقة النقطة المتوسطة لمعادلة الخط المستقيم 92

6–3–2 طريقة النقط المتوسطة لصورة القطع المكافئ 94

6–4 طريقة المربعات الصغرى Method of Least squares96

6–4–1 تعريف الإنحرافات Definition of Residuals..96

6–4–2 طريقة أقل التربيعات لصورة الخط المستقيم 97

6–4–3 طريقة المربعات الصغرى لصورة كثيرة الحدود......99

الباب السابع 101
قيـاس الأخطـاء Measuring errors 101
مصـادر الأخطــاء : Sources of Errors 102
Quantifying the error تقدير الخطأ..................... 108
الأخطاء التجريبية ومعالجتها: Treatment of Experimental Errors: 108
1-الاخطاء المنظومة:Systematic Errors 108
2- الاخطاء العشوائية:.................................. 108
الخطأ المطلق للقياس : Absolute Error (e_{ab}) 109
الخطأ النسبي :Relative Error (e_r) 109
النسبة المئوية للخطأ:Percentage error ($e_{\%}$) 109
دقة القياس :Accuracy 109
الدقة النسبية : Relative Accuracy (Ar) ... 110
النسبة المئوية لدقة القياس:Percentage Accuracy(a%) . 110
4- انتشار الخطأ Propagation of error 112

مقدمة عن الكمبيوتر

تم عمل الكمبيوتر لحل العديد من المشكلات. فقد حل فى البداية المسائل الرياضية والهندسية. ثم تعامل مع البيانات لأغراض تجارية. ويعمل هذه الأيام كأداة تحكم فى الغواصات والطائرات وخطوط إنتاج الآلات فى المصانع. يقوم الكمبيوتر بعمله فى كل هذه المجالات عن طريق استقبال البيانات ثم معالجتها ثم إخراج المخرجات.

مكونات الكمبيوتر:

يتكون الكمبيوتر من جزئين أساسيين هما:

1- Hardware الأجزاء الصلبة

2- Software مجموعة البرامج التي تتحكم فى عمل الأجزاء الصلبة.

يتميز الكمبيوتر بأنه آلة للاستخدامات المتعددة, بخلاف الآلات الأخرى التي تصمم للقيام بعمل واحد فقط. يرجع ذلك إلى قابلية الكمبيوتر للبرمجة ببرامج متعددة ومختلفة للقيام بمهام متعددة. وكذلك لاتصاله بالعديد من الأجهزة و المعدات الأخرى.

المكونات الصلبة للكمبيوتر:

يوجد أربعة أنواع من المكونات الصلبة للكمبيوتر وهى:

1- وحدات الإدخال

2- وحدات الإخراج

3- الذاكرة الرئيسية

4- وحدة العلاج والمنطق

وحدات الإدخال ووحدات الإخراج:

تعمل أجهزة الإدخال على إدخال البيانات من الخارج إلى ذاكرة الكمبيوتر. يوجد العديد من أجهزة الإدخال, منها, لوحة المفاتيح, محرك الأقراص, محرك الأقراص المغناطيسية, الماسح الضوئي, الفأرة.

أما أجهزة الإخراج فتشمل: محرك الأقراص, محرك الأقراص المغناطيسي, الشاشة, الطابعة.

من مميزات الكمبيوتر:

1- قدرته على الأداء بطريقة أوتوماتيكية Automation.

2- قابليته للبرمجة Programmable.

ينقسم الكمبيوتر حسب احجامة الى:

1- حجم صغير microcomputer

2- حجم وسط minicomputer

3- حجم كبير mainframe computer

توجد العديد من المشكلات فى الهندسة والعلوم يمكن أن يعبر عنها فى صورة معادلات تفاضلية مثل مسائل الحركة الاهتزازية ومسائل التيارات والجهود فى دوائر التيارات المترددة...وهكذا.لكن, قد يكون الحل الدقيق لمثل هذه المعادلات باستخدام قوانين التفاضل صعب أو غير موجود في بعض الحالات. لذلك نلجأ إلى حل تلك المعادلات بطرق تقريبية, وذلك بحلها بطرق عدديةNumerically, وهى طرق طويلة وتستهلك الكثير من الوقت. لذلك نستخدم برامج الكمبيوتر. سوف نتناول هنا بعض الطرق الرياضية

المستخدمة في برامج حل تلك المعادلات عدديا. وكذلك بعض طرق الاستكمال Interpolation, أي تكملة ما نقص من بيانات. و التوفيق Fitting, وهو استنتاج افضل خط أو منحنى يمر بمجموعة من البيانات.

الباب الاول

مقدمة عن الفروق

يوجد فرع من الرياضيات مهتم بالفروق بين الأرقام المتتالية في متسلسلة. تستخدم نتائج هذه الفروق في كثير من التطبيقات منها حساب قيم تفاضلات قد يصعب حسابها بالطرق التحليلية. يوجد ثلاثة انواع من الفروق: الفروق الامامية، والفروق الخلفية، والفروق المتوسطة.

المقصود بالفروق الامامية

بفرض أن لدينا المعادلة $Y_n = 3n - 1$

صالحة للقيم $n = 1 , 2 , 3 , \ldots$, بالتعويض عن هذه القيم في المعادلة نحصل علي

القيم التالية للمتغير Y $2 , 5 , 8 , 11 , 14 , ..$

والفروق الأمامية بين الأرقام المتتالية في النتائج هي :

$5 - 2 = 3 \quad , \quad 8 - 5 = 3 \quad , \quad 11-8 = 3 \quad , \quad 14-11 = 3 , ..$

يتم كتابة سلسله الأرقام وسلسله الفروق عادة كالتالي :

نتائج	19	11	8	5	2
فرق أمامي أول		3	3	3	3

كذلك بفرض أن لدينا المعادلة : $Y_n = n^2 - 3n - 2$

فإنه للقيم $n = 1, 2, 3, ..$ تكون النتائج والفروق الأمامية في الصورة التالية:

-4	-4	-2	2	8	16	نتائج
0	2	4	6	8		فرق أمامي أول
2	2	2	2			فرق أمامي ثاني

تكون الأرقام في الصف الثاني هي فروق الأرقام في الصف الأول، وأرقام الصف الثالث هي فروق الأرقام في الصف الثاني . تسمى أرقام الصف الثاني بالفرق الأول للصف الأول، وأرقام الصف الثالث بالفروق الثانية له .

بصورة عامة ، إذا فرضنا أن $y_1, y_2, y_3, .. y_n$

هي أية أرقام متتالية ، فإن الفروق الأولي لها تعطي من العلاقة

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$$

وفروقها الثانية تعطي ومن :

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

وفروقها الثالثة يعطي ومن :

$$\Delta^3 y_n = \Delta^2 y_{n+1} - \Delta^2 y_n$$

وهكذا ، يعطي جدول الأرقام وفروقها الأول و الثاني والثالث فى الصورة

$$\begin{array}{ccccc}
y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
\Delta y_1 & \Delta y_2 & \Delta y_3 & \Delta y_4 & \Delta y_5 \\
\Delta^2 y_1 & \Delta^2 y_2 & \Delta^2 y_3 & \Delta^2 y_4 & \Delta^2 y_5 \\
\Delta^3 y_1 & \Delta^3 y_2 & \Delta^3 y_3 & \Delta^3 y_4 & \Delta^3 y_5
\end{array}$$

Etc

تفاضل الدالة المتصلة بدلالة الفروق

لحساب تفاضل دالـة $F(x)$ عنـد قيمـة معلومـة ل $(\times)$, يوجد ثلاث طرق لعمل ذلك بطريقة تقريبيـةً, وذلك بـالتعبير عن التفاضـل بدلالـة الفـروق بـين قيم هذه الدالـة. تسمى هذه العمليـة بحساب تفاضل الدالة عددياً. هذه الطرق هي :

1. حساب التفاضل بدلالة الفرق الأمامي.
2. حساب التفاضل بدلالة الفرق الخلفي.
3. حساب التفاضل بدلالة الفروق المركزية.

ما هو التفاضل ؟

يعرف تفاضل دالة $F(x)$ في الصورة التالية :

$$F^{1}(x) = \lim_{\Delta\times\to o} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \rightarrow \qquad (1)$$

لكي يتم إيجاد هذا التفاضل عدديا عند قيمة معينة x,ً لابد من جعل Δx صغيرة جداً لكنها لا تساوي الصفر . ويتم حساب التفاضل باحدى الطرق الثلاث السابقة.

التفاضل الاول بدلالة الفرق الامامى:

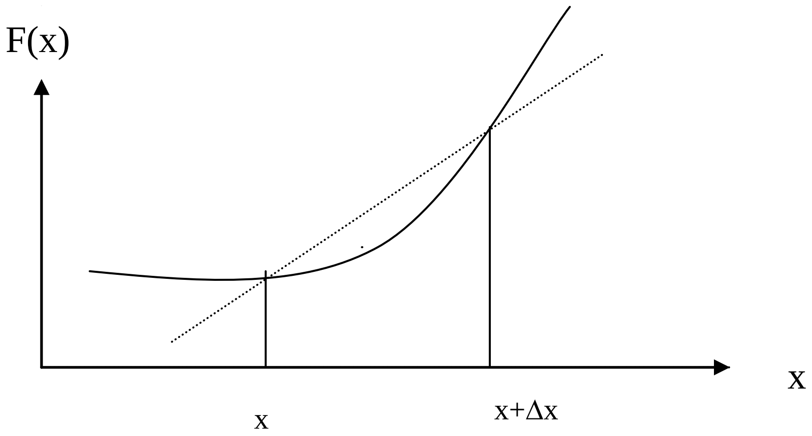
1- Forward difference approximation of the first derivative:

نعلم أن تفاضل الدالة $F'(x)$ يكون في الصورة الآتية :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x+\Delta x) - (f(x)}{\Delta x}$$

وبجعل Δx صغيرة جداً يكون :

$$f^1(x) \cong \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



رسم توضيحى لحساب التفاضل الاول بدلالة الفرق الامامى

لذلك إذا أردنا إيجاد قيمة $f'(x)$ عند $x = x_i$، نختار نقطة أخرى تبعد بمقدار Δx للأمام وعندها $x = x_{i+1}$ وبالتالي يكون :

$$f^1(x) \cong \frac{f(xi+\Delta x) - f(xi)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x_{i+1}) - f(xi)}{x_{i+1} - x_i} \qquad \rightarrow \qquad (2)$$

حيث $\Delta x = x_{i+1} - x_i$

التفاضل الاول بدلالة الفرق الخلفى:

2- Backward difference approaimation of the first derirahive

نعلم مما سبق ان

$$f^1(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

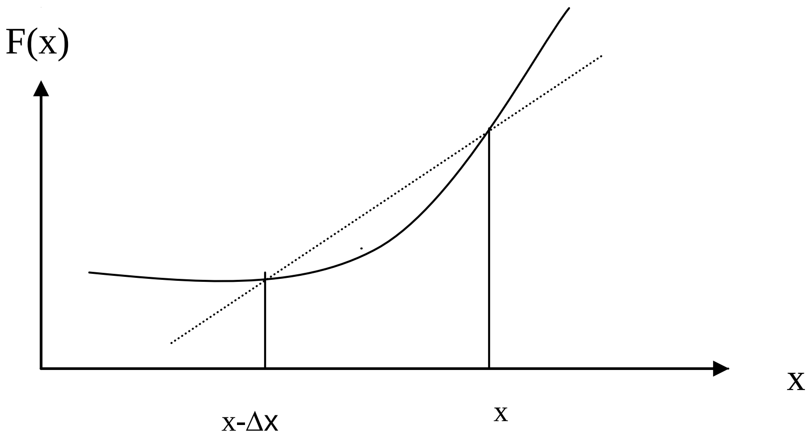
وباعتبارقيمة Δx صغيرة جداً يكون :

$$f^1(x) \cong \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

فإذا تم اختيار Δx كقيمة سالبة (أي فرق خلفي), فان

$$f^1(x) \cong \frac{f(x-\Delta x) - f(x)}{-\Delta x}$$

$$= \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$



رسم توضيحى لحساب التفاضل الاول بدلالة الفرق الخلفى

فإذا أردنا إيجاد F'(x) عند $x = x_i$ يمكننا أن نختار نقطة ترجع عنها بمقدار Δx

وهي $x = x_{i-1}$ وبالتالي :

$$f^1(x) \cong \frac{f(xi) - f(x_{i-1})}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(xi) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \qquad \rightarrow \qquad (3)$$

حيث $\Delta x = x_i - x_{i-1}$

مثال1

اذا كانت سرعة صاروخ تعطى من العلاقة التالية:

$$v(t) = 2000 \ln\left[\frac{14X10^4}{14X10^4 - 2100t}\right] - 9.8t \ , \qquad 0 \le t \le 30$$

استخدم حساب التفاضل بواسطة الفرق الامامى لتعيين العجلة عند t=16s, استخدم فرق

مقداره $\Delta t = 2s$.

الحل:

من المعادلة (2)

$$a(t) \cong \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{\Delta t}$$

$$\because t_i = 16,$$
$$\Delta t = 2$$

$$\therefore t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

$$= 16 + 2 = 18$$

$$\therefore a(16) = \frac{v(18) - v(16)}{2}$$

بالتعويض لحساب V(16) , V(18)

$$V(18) = 2000In\left[\frac{14\times10^4}{14\times10^4 - 2100(18)}\right] - 9.8(18)$$

$$= 453.02 \text{ m/s}$$

$$V(16) = 2000In\left[\frac{14\times10^4}{14\times10^4 - 2000(16)}\right] - 9.8(16)$$

$$= 392.07 \text{ m/s}$$

وبالتالي :

$$a(16) = \frac{v(18) - v(16)}{2} = \frac{453.02 - 392.07}{2} = 30.475 \text{ m/s}^2$$

وهذا هو الحل التقريبي بدلالة فرق السرعات

لإيجاد القيمة الحقيقية للعجلة عند .16s, a(16) فإننا نفاضل المعادلة :

$$V(t) = 2000In\left[\frac{14\times10^4}{14\times10^4 - 2100t}\right] - 9.8t$$

وذلك كالتالي :

$$a(t) = \frac{d}{dt}\left[V(t)\right]$$

من المعلوم أن :

$$\frac{d}{dt}[In(t)] = \frac{1}{t} \qquad , \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2}$$

$$\therefore a(t) = 2000\left[\frac{14\times10^4 - 2100t}{14\times10^4}\right]\frac{d}{dt}\left[\frac{14\times10^4}{14\times10^4 - 2100t}\right] - 9..8$$

$$= a(t) = 2000\left[\frac{14\times10^4 - 2100t}{14\times104}\right](-1)\left[\frac{14\times10^4}{(14\times104 - 2100t)^2}\right](-2100) - 9.8$$

$$= \frac{4040 - 29.4t}{-200 + 3t}$$

$$a(16) = \frac{-4040 - 29.4(16)}{-200 + 3(16)}$$

$$= 29.674 \text{ m/s}^2$$

من مقارنة القيمة التقريبية بالقيمة الحقيقية يمكن معرفة مقدار الخطأ بسبب التقريب .

مثال 2 : إذا كانت سرعة صاروخ تعطي من العلاقة

$$V(t) = 2000In\left[\frac{14\times10^4}{14\times10^4 - 2100t}\right] - 9.8 \qquad o \le t \le 30$$

أحسب باستخدام تقريب الفرق الخلفي للتفاضل الأول العجلة عند t = 16s. ، استخدام فرق مقداره Δt = 2s.

الحـــــل :

من العلاقة (3)

$$a(t) = \frac{v(t_i) - V(t_{i-1})}{\Delta t}$$

$$\because t_i = 16$$
$$\Delta t = 2$$
$$\therefore t_{i-1} = 16 - 2 = 14$$
$$\therefore a(16) = \frac{V(16) - V(14)}{2}$$

$$\because V(16) = 2000In\left[\frac{14\times10^4}{14\times10^4 - 2100(16)}\right] - 9.8(16)$$
$$= 392.07m/s$$

$$\because V(14)2000In\left[\frac{14\times10^4}{14\times10^4 - 2100(14)}\right] - 9.8(14)$$
$$= 334.24m/s$$

$$\therefore a(16) = \frac{v(16) - v(14)}{2} = \frac{392.07 - 334.24}{2} = 28.915m/s^2$$

وبمعرفة القيمة الحقيقية للتفاضل يمكن حساب الخطأ .

الحصول علي التفاضل الاول بدلالة الفرق الأمامي الاول باستخدام متسلسلة تايلور

Derivative of the forward difference approximation

From Taylor series

تنص نظرية تايلور علي أنه في حالة معرفة قيمة دالة F (x) عند نقطة x_i وكل مشتقاتها عند تلك النقطة ، بشرط أن تكون المشتقات متصلة ما بين x_i و x_{i+1} فإن قيمة الدالة عند x_{i+1} يعطي من العلاقة التالية:

$$F(x_{i+1}) = f(x_i) + f^1(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f^{11}(xi)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + ...$$

للتسهيل نعوض عن $\Delta x = x_{i+1} - x_i$

$$\therefore f(x_{i+1}) = f(x_i) + f^1(x_i)\Delta x + \frac{f^{11}(x_i)}{2!}(\Delta x)^2 + ...$$

$$\therefore f^1(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} - \frac{f^{11}(x_i)}{21}(\Delta x) - ....$$

$$\therefore f^1(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} - o(\Delta x)$$

حيث $o(\Delta x)$ تبين أن الخطأ في التقريب يكون دالة فــي (Δx) .

يلاحظ أننا استخدمنا هنا علامة = بدلاً من ≅ السـابقة كمـا يلاحظ أن الحل النـاتج عن الفرق الأمامي يكون أكبر من القيمة الحقيقية بمقدار يتناسب مع (Δx) كما أتضح من المثال (1).

الحصول علي التفاضل الاول بدلالة الفرق الخلفى الاول باستخدام متسلسلة تايلور.

Derivative of the backward difference approximation

From Taylor series

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)\Delta x + \frac{f''(xi)}{2!}(\Delta x)^2 - \frac{f'''(x_i)}{3!}(\Delta x)^3 + ...$$

$$\therefore f^1(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} + o(\Delta x)$$

واضح ان درجة الدقة تكون دالة فى Δx لذلك فان الدقة تزداد بنقص Δx.

الحصول علي التفاضل الاول بدلالة الفرق المركزى باستخدام متسلسلة تايلور.

Central difference approximation of the first derivative.

نستخدم الفرق المركزى بدلا من الفرق الامامى او الفرق الخلفى وذلك للوصول الى دقة اكبر فى تعيين التفاضل عدديا.

من مفكوك تايلور نعلم انه فى حالة الفروق الامامية:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(\Delta x) + \frac{f''(xi)}{2!}(\Delta x)^2 + .\frac{f'''(xi)}{3!}(\Delta x)^3 + ... \qquad 1$$

كذلك, فى حالة الفروق الخلفية:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)\Delta x + \frac{f''(xi)}{2!}(\Delta x)^2 - \frac{f'''(x_i)}{3!}(\Delta x)^3 + ... \qquad 2$$

بطرح المعادلة 2 من المعادلة 1

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = f^1(x_i)(2\Delta x) + .\frac{2f'''(xi)}{3!}(\Delta x)^3 + ...$$

$$\therefore\ f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} + o(\Delta x)^2 ....$$

تعتبر هذه المعادلة اكثر دقة فى حساب التفاضل الاول لان الخطأ دالة فى مربع المسافة الصغيرة Δx.

مثال

إذا كانت سرعة صاروخ تعطي من العلاقة

$$V(t) = 2000In\left[\frac{14\times10^4}{14\times10^4 - 2100t}\right] - 9.8 \qquad o \le t \le 30$$

أحسب التفاضل الأول باستخدام الفروق المركزية عند .t = 16s ، مستخدما فرق مقداره Δt

.= 2s.

الحل:

$$\because\ f^{'}(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x}$$

$$\because t_i = 16$$
$$\because \Delta t = 2$$
$$\therefore t_{i+1} = 18$$
$$\therefore t_{i-1} = 14$$

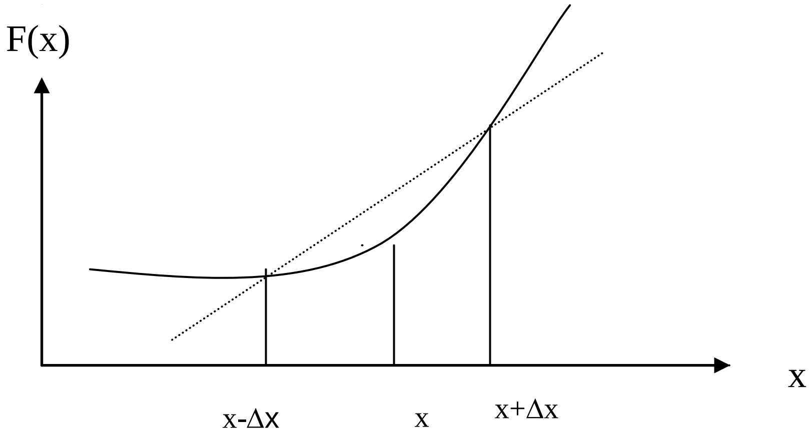
$$\therefore a(t) = \frac{v(18) - v(14)}{2*2}$$

$$v(18) = 2000\ln\left[\frac{14x10^4}{14x10^4 - 2100(18)}\right] - 9.8(18) = 453.02m/s$$

$$v(14) = 2000\ln\left[\frac{14x10^4}{14x10^4 - 2100(14)}\right] - 9.8(14) = 334.24m/s$$

$$\therefore a(16) = \left[\frac{453.02 - 334.24}{4}\right] = 29.659m/s^2$$

قيمة أدق من تلك التي تم الحصول عليها باستخدام الفرق الامامى أو الفرق الخلفي.



رسم توضيحى لحساب التفاضل الاول بدلالة الفرق المركزى

الباب الثانى

الفروق الأمامية

الفـــروق الأماميـــــة

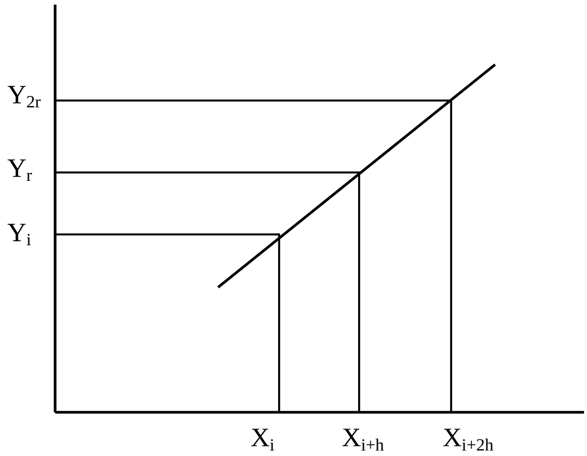
تستخدم الفروق الامامية عندما نتعامل مع بدايات متسلسلة البيانات. بفرض وجود قيم معلومة عند نقاط محددة للمتغير المستقل x_i [تسمى قيم x_i بالأدلة] ، كل قيمة يقابلها y_i كمتغير تابع . وبفرض أن الأدلة x_i علي أبعاد متساوية بحيث $x_{i+h} - x_i = h$ فإن فروق القيم الناتجة للمتغير التابع y_i تعطي من العلاقة :

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \qquad \rightarrow (1)$$

بوضع الصيغ التالية للتسهيل ،

$$y_{i+1} = y_r \,,\, y_{i+2} = y_{2r} \,,\, y_{i+3} = y_{3r} \ldots$$

فإنه يمكن رسم العلاقة بين yi , xi في الصورة **التالية** :



لذلك تأخذ المعادلة (1) الصورة **التالية** :

$$\Delta y_i = y_r - y_i \qquad \rightarrow (1)$$

وتسمي معادلة الفروق الأمامية الأولي .

نلاحظ أننا حسبنا الفروق الأمامية الأولي Δy_i بدلالـة قيم المتغير التـابع (y_i),(i) في هذه الحالة تعبر عن ترتيب الرقم في متسلسلة البيانات المعبرة عن النتائج .

فروق الفروق الأمامية الأولي تسمي بالفروق الأمامية الثانية وتحسب كالتالى :

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$

$$= \Delta y_r - \Delta y_i$$

$$= (y_{2r} - y_r) - (y_r - y_i)$$

$$= y_{2r} - y_r - y_r + y_i$$

$$= y_{2r} - 2y_r + y_i \qquad \rightarrow (3)$$

كذلك يمكن حساب الفرق الأمامي الثالث :

$$\Delta^3 y_i = \Delta(\Delta^2 y_i)$$

$$= \Delta(y_{2r} - 2y_r + y_i)$$

$$= \Delta y_{2r} - 2\Delta y_r + \Delta y_i$$

$$= (y_{3r} - y_{2r}) - 2 (y_{2r} - y_r) + (y_r - y_i)$$

$$= y_{3r} - y_{2r} - 2y_{2r} + 2y_r + y_r - y_i$$

$$\Delta^3 y_i = y_{3r} - 3y_{2r} + 3y_r - y_i \qquad \rightarrow (4)$$

لا تنسى بأن $r = i + 1$ أو $i = r - 1$

وبالمثل، يمكن حساب الفرق الأمامي الرابع :

$$\Delta^4 y_i = \Delta (\Delta^3 y_i)$$

$$= \Delta(y_{3r} - 3y_{2r} + 3y_r - y_i)$$

$$= \Delta y_{3r} - 3\Delta y_{2r} + 3\Delta y_r - \Delta y_i$$

$$= (y_{4r} - y_{3r}) - 3(y_{3r} - y_{2r}) + 3(y_{2r} - y_r) - (y_r - y_i)$$

$$= y_{4r} - y_{3r} - 3y_{3r} + 3y_{2r} + 3y_{2r} - 3y_r - y_r + y_i$$

$$\Delta^4 y_i = y_{4r} - 4y_{3r} + 6y_{2r} - 4y_r + y_i \qquad \rightarrow (5)$$

مما سبق يمكن وضع قانون عام لحساب الفرق النونى الأمامي عند أية نقطة (i) في المتسلسلة وذلك علي الصورة التالية:

$$\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$$

فمثلاً يمكن إيجاد $\Delta^3 y_i$ وهو الفرق الثالث الأمامي عند النقطة i كالتالي :

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i \qquad \rightarrow (1)$$

*بتطبيف القانون على الحد الاول من الطرف الايمن نجد

$$\Delta^2 y_{i+1} = \Delta y_{i+2} - \Delta y_{i+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots * $$

** بتطبيف القانون على الحد الثانى من الطرف الايمن نجد

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ** $$

من المعادلة(*) نحصل علي :

$$\Delta^2 y_{i+1} = (y_{i+3} - y_{i+2}) - (y_{i+2} - y_{i+1})$$

$$= y_{i+3} - y_{i+2} - y_{i+2} + y_{i+1}$$

$$= y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}$$

من المعادلة (**) نحصل علي :

$$\Delta^2 y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i)$$

$$= y_{i+2} - y_{i+1} - y_{i+1} + y_i$$

$$= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

بالتعويض في معادلة (1) عن $\Delta^2 y_{i+1}$, $\Delta^2 y_i$ فإن :

$$\Delta^3 y_i = (y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}) - (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i)$$

$$= y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1} - y_{i+2} + 2y_{i+1} - y_i$$

$$= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$$

فإذا أردنا حساب الفرق الثالث عند النقطة $i = o$ مثلاً وهي أول نقطة في متسلسلة النتائج

فإن :

$$\Delta^3 y_o = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_o$$

وذلك بالتعويض عن $i = o$ في $\Delta^3 y_i$ السابقة.

كذلك فإن الفرق الثالث عند النقطة الرابعة مثلاً $i = 3$ فإن

$$\Delta^3 y_3 = y_6 - 3y_5 + 3y_4 - y_3$$

كذلك فإن $\Delta^3 y_8$ عند النقطة التاسعة تكون

$$\Delta^3 y_8 = y_{11} - 3y_{10} + 3y_9 - y_8$$

وهكذا ....

<u>مثـــــال</u> :

أثبت أن

$$\Delta^4 y_o = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_o$$

<u>الحـــــــل</u> :

من التعريف

$$\Delta^4 y_o = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 \qquad \rightarrow (1)$$

وحيث أن $\Delta^3 y_o$ تم الحصول عليها وهي تساوي :

$$\Delta^3 y_o = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_o$$

فإن $\Delta^3 y_1$ نكون لها نفس الصيغة بزيادة الأدلة السفلية (بتقدمها) بمقدار 1

$$\Delta^3 y_1 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$$

بالتعويض في (1)

$$\Delta^4 y_o = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1 - y_3 - 3y_2 - 3y_1 + y_o$$

$$= y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_o$$ وهو المطلوب ,,,,

مثال : لحساب الفروق الأمامية

بفرض أن لدينا المعادلة $y_n = n^2 - 3n - 2$ صالحة لقيم $n = 1 , 2 , 3 , 4 , \ldots$ أوجد الفرق الأمامي الأول والفرق الأمامي الثاني عند $n = 3$

الحـــل :

لقيم $n = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , \ldots$ تكون y_n لها النتائج التالية

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
-4	-4	-2	2	8

معادلة الفرق الأمامي الأول هي

$\Delta y_i \quad = y_r - y_i$

$\Delta y_3 \quad = y_4 - y_3$

$= 2 - (-2) = 4$

معادلة الفرق الأمامي الثانـي

$\Delta^2 y_i \quad = y_{2r} - 2y_r + y_i$

$\Delta^2 y_3 \quad = y_5 - 2y_4 + y_3$

$= 8 - 2\,(2) + (-2) = 8 - 4 - 2 = 2$

للتأكد مـن ذلـك الحـل نكتـب متسلسـلة النتـائج ومتسلسـلتين الفـرق الأمـامي الأول الثـانى علـي الترتيب كالتالي :

y_1		y_2		y_3		y_4		y_5	
-4		-4		-2		2		8	الـ نـ تائـ ج
	0		2		4		6		فرق امامى اول
		2		2		2			فرق امامى ثانى

منها يتضح أن الفرق الأمامي الأول عند y_3 هو

$2 - (-2) = 4$

وأن الفرق الأمامي الثاني عند y_3 هو $\quad 6 - 4 = 2$

يمكن حساب الفروق الامامية الاول و الثانى والثالث و .... بواسطة القانوت العام التالى:

$$\Delta^k y_i = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} y_{k-1}$$

يعطى هذا القانون الحد رقم i فى الفرق رقم k

أى ان k هى رتبة الفرق (الاول. الثانى, الثالث, ...) و i هى رتبة الحد داخله.

الحد $\begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix}$ عبارة عن $\frac{k^{(i)}}{i!}$ ويعطى كما فى الجدول التالى لقيم k من 1 الى 5, و قيم I من 0 الى 5.

i / k	0	1	2	3	4	5
k	1	1				
2 i	1	2	1			
k	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

مثلا

$$\frac{4^{(3)}}{3!} = \frac{4*3*2}{3*2*1} = 4,.....\frac{3^{(1)}}{1!} = \frac{3}{1} = 3,........\frac{3^{(2)}}{2!} = \frac{3*2}{2*1} = 3$$

مثال: باستخدام القانون $\Delta^k y_i = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} y_{k-1}$ احسب الفرق الامامى الاول Δy_i

نضع فى القانون k=1 , i تتغير من 0 الى 1.

أولا: بوضع k=1 , i=0

$$\therefore \Delta y_0 = (-1)^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} y_{1-0} = y_1$$

ثم بوضع k=1 , i=1

$$\therefore \Delta y_1 = (-1)^1 \binom{1}{1} y_0 = -y_0$$

بجمع المعادلتين السابقتين,

$$\therefore \Delta y_i = y_1 - y_0$$

وهو الفرق الامامى الاول.

ألفرق الامامى الثانى

لحساب الفرق الامامى الثانى, يأخذ القانون العام الصورة التالية:

$$\Delta^2 y_i = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \binom{2}{i} y_{2-i}$$

بوضع i=0 يكون

$$\Delta^2 y_0 = (-1)^0 \binom{2}{0} y_{2-0} = y_2$$

بوضع i=1 يكون

$$\Delta^2 y_1 = (-1)^1 \binom{2}{1} y_{2-1} = -2y_1$$

بوضع i=2 يكون

$$\Delta^2 y_2 = (-1)^2 \binom{2}{2} y_{2-2} = y_0$$

بجمع الثلاث معادلات السابقة نحصل على

$$\Delta^2 y_i = y_2 - 2y_1 + y_0$$

بنفس الكيفبة يمكن حساب الفرق الامامى الثالث

حيث يأخذ القانون العام الصورة التالية:

$$\Delta^3 y_i = \sum_{i=0}^{3} (-1)^i \binom{3}{i} y_{3-i}$$

بوضع i=0 نحصل على

$$\Delta^3 y_0 = (-1)^0 \binom{3}{0} y_{3-0} = y_3$$

بوضع i=1 نحصل على

$$\Delta^3 y_1 = (-1)^1 \binom{3}{1} y_{3-1} = -3y_2$$

بوضع i=2 نحصل على

$$\Delta^3 y_2 = (-1)^2 \binom{3}{2} y_{3-2} = 3y_1$$

بوضع i=3 نحصل على

$$\Delta^3 y_3 = (-1)^3 \binom{3}{3} y_{3-3} = -y_0$$

بجمع الاربع معادلات السابقة

$$\therefore \Delta^3 y_i = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

كذلك يمكن حساب الفرق الرابع الأمامي,

حيث يأخذ القانون العام الصورة التالية:

$$\Delta^4 y_i = \sum_{i=0}^{4} (-1)^i \binom{4}{i} y_{4-i}$$

بوضع i=0 نحصل على

$$\Delta^4 y_0 = (-1)^0 \binom{4}{0} y_{4-0} = y_4$$

بوضع i=1 نحصل على

$$\Delta^4 y_1 = (-1)^1 \binom{4}{1} y_{4-1} = -4y_3$$

بوضع i=2 نحصل على

$$\Delta^4 y_2 = (-1)^2 \binom{4}{2} y_{4-2} = 6y_2$$

بوضع i=3 نحصل على

$$\Delta^4 y_3 = (-1)^3 \binom{4}{3} y_{4-3} = -\frac{24}{6} y_1 = -4y_1$$

بوضع i=4 نحصل على

$$\Delta^4 y_4 = (-1)^4 \binom{4}{4} y_{4-4} = y_0$$

بجمع المعادلات الخمس السابقة, نحصل على

$$\Delta^4 y_i = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$$

يمكن ان يأخذ القانون السابق الشكل التالى لحساب الفرق الامامى

$$\Delta^k y_i = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} y_{i+k-m}$$

حيث i تعبر عن رقم الحد فى متسلسلة البيانات الاصلية المراد حساب الفرق الامامى عنده ويمكن ان تأخذ القيم 0، 1، 2 ....للحد الاول ، الثانى ، الثالث .....على الترتيب.

K تعبر عن رتبة الفرق الامامى وتأخذ القيم 1، 2، 3، .... للفرق الامامى الاول ، الثانى ، الثالث، ... وهكذا.

m رقم الحد فى معادلة الفرق الناتجة وتأخذ القيم من 0 الى k+1 .

وبالتالى فإنه للفرق الامامى الاول يكون لدينا

k=1

m=0, 1

فيكون الحد الاول من قانون الفرق الاول نحصل عليه بوضع m=0 و k=1

$$\Delta y_i = (-1)^0 \binom{1}{0} y_{i+1-0}$$

$$= \Delta y_i = 1 * 1 * y_{i+1} = y_{i+1}$$

ويكون الحد الثانى من قانون الفرق الاول نحصل عليه بوضع m=1 و k=1

$$\Delta y_i = (-1)^1 \binom{1}{1} y_{i+1-1}$$

$$\Delta y_i = -1 * 1 * y_i = -y_i$$

فيكون قانون الفرق الامامى الاول هو مجموع الحدين السابقين

$$\Delta y_i = y_{i+1} - yi$$

قانون الفرق الامامى الثانى

فى هذه الحالة يتم وضع k=2 وبالتالى تكون m=0, 1, 2

نحصل على الحد الاول بوضع m=0 فى القانون

$$\Delta^2 y_i = \sum_{m}^{2} (-1)^m \binom{2}{m} y_{i+2-m}$$

نحصل على الحد الاول بوضع m=0 فى القانون فيأخذ الصورة التالية

$$\Delta^2 y_i = (-1)^0 \binom{2}{0} y_{i+2-0} = 1*1*y_{i+2} = y_{i+2}$$

بوضع m=1 نحصل على الحد الثانى

$$\Delta^2 y_i = (-1)^1 \binom{2}{1} y_{i+2-1} = -1*2*y_{i+1} = -2y_{i+1}$$

بوضع m=2 نحصل على الحد الثالث

$$\Delta^2 y_i = (-1)^2 \binom{2}{2} y_{i+2-2} = 1*1*y_{i+2-2} = y_i$$

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

$$\Delta^2 y_i = y_{2r} - 2y_r + y_i$$

الباب الثالث

الفروق الخلفية

الفـــروق الخلفيـــة

~~~~~~~~~~

نحتاج للتعامل مع الفروق الخلفية عندما نتعامل مع نهاية متسلسلة البيانات. فإذا فرضنا أنه لكل قيمة x_i توجد قيمة y_i للمتغير التابع, وبفرض ان الادلة x_i تكون علي ابعاد متساوية بحيث $x_i - x_{i-1} = h$ فإن الفروق للقيم الناتجة للمتغير التابع y_i تعطي من :

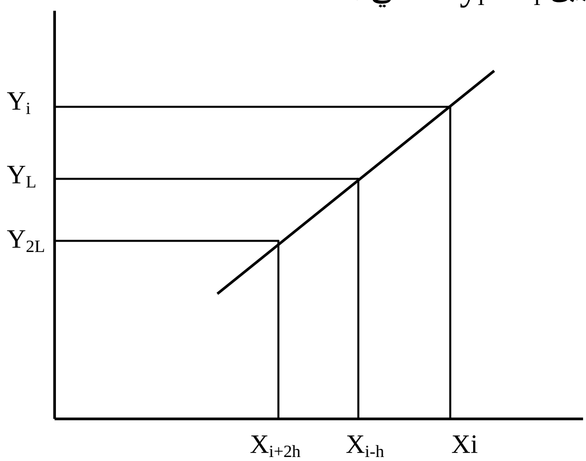
$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1} \qquad \rightarrow (1)$$

ويسمى هذا بالفرق الخلفي الأول

بوضع الصبغ التالية للتسهيل

$$Y_{i-1} = y_L \,,\, y_{i-2} = y_{2L} \,,\, y_{i-3} = y_{3L} \,,\, \ldots$$

فإنه يمكن رسم العلاقة بين x_i ، y_i كالتالي :



لذلك نأخذ المعادلة (1) الصورة التالية :

$$\nabla y_i = y_i - y_L \qquad \rightarrow (2)$$
~~~~~~~~~~

وتسمى معادلة الفرق الخلفي الأولي. i، كما في الفروق الأمامية السابق الحديث عنها، تعبر عن ترتيب الرقم في متسلسلة النتائج .

فروق الفروق الخلفية الأولى تسمى بالفروق الخلفية الثانية :

$$\nabla^2 y_i = \nabla\ (\nabla y_i)$$

$$= \nabla\ (y_i - y_L)$$

$$= \nabla y_i - \nabla y_L$$

$$= (y_i - y_L) - (y_L - y_{2L})$$

$$= y_i - y_L - y_L + y_{2L}$$

$$= y_i - 2y_L + y_{2L} \qquad \rightarrow (3)$$

يلاحظ أن : $L = i - 1\ ,\ 2L = i - 2\ ,\ 3L = i - 3\ ,\ \ldots..$

كذلك يمكن حساب الفرق الخلفي الثالث

$$\nabla^3 y_i = \nabla\ (\nabla^2 y_i)$$

$$= \nabla\ (y_i - 2y_L + y_{2L})$$

$$= \nabla y_i - 2\nabla y_L + \nabla y_{2L}$$

$$= (y_i - y_L) - 2(y_L - y_{2L}) + (y_{2L} - y_{3L})$$

$$= y_i - y_L - 2y_L + 2y_{2L} + y_{2L} - y_{3L}$$

$$= y_i - 3y_L + 3y_{2L} - y_{3L} \qquad \rightarrow (4)$$

كذلك يمكن حساب الفرق الخلفي الرابع :

$$\nabla^4 y_i = \nabla\ (\nabla^3 y_i)$$

$$= \nabla \ (y_i - 3y_L + 3y_{2L} - y_{3L})$$

$$= \nabla y_i - 3\nabla y_L + 3\nabla y_{2L} - \nabla y_{3L}$$

$$= (y_i - y_L) -3 (y_L - y_{2L}) +3 (y_{2L} - y_{3L}) - (y_{3L} - y_{4L})$$

$$= y_i - y_L - 3y_L + 3y_{2L} + 3y_{2L} - 3y_{3L} - y_{3L} - y_{4L}$$

$$= y_i - 4y_L + 6y_{2L} - 4y_{3L} + y_{4L} \qquad \rightarrow (5)$$

أمثلة علي حساب الفروق الخلفية :

بفرض أن لدينا المعادلة $y_n = n^2 - 3n - 2$

صالحة لقيم $n = 1 , 2 , 3 , 4 , \dots$ ، أوجد الفرق الخلفي الأول والفرق الخلفي الثاني عند

$n = 3$

الحـــــــل :

للقيم $n = 1 , 2 , 3 , 4 , 5$ تكون النتائج y_n لها المتسلسلة التالية :

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
-4	-4	-2	2	8

معادلة الفرق الخلفي الأول هي

$$\nabla y_i = y_i - y_L$$

$$= y_3 - y_2$$

$$= -2 - (-4)$$

$$= 2$$

معادلة الفرق الخلفي الثاني هي

$$\nabla^2 y_i = y_i - 2y_L + y_{2L}$$

$$= y_3 - 2y_2 + y_1$$ حيث, $i=3, L = i-1 = 2, 2L = i -2 = 1$

$$= -2 -2 (-4) + (-4)$$

$$= -2 + 8 - 4$$

$$= 2$$

للتأكد من ذلك الحل نكتب متسلسلة النتائج ومتسلسلة الفروق الخلفية الأولي ثم متسلسلة الفروق الخلفية الثانية كالتالي

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
-4	-4	-2	2	8	الناتج
	0	2	4	6	فروق خلفية أولى
		2	2	2	فروق خلفية ثانية

منها يتضح أن الفرق الخلفي الأول عند y_3 هو

$$- 2 -(-4) = - 2 + 4 = 2$$

وأن الفرق الخلفي الثاني عند y_3 هو

$$2 - 0 = 2$$

استنتاج صيغ الفروق الخلفية من القانون:

$$\nabla^k y_i = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} y_{i-m}$$

حيث i تعبر عن رقم الحد فى متسلسلة البيانات الاصلية المراد حساب الفرق الخلفى عنده ويمكن ان تأخذ القيم 0، 1، 2 ....للحد الاول ، الثانى ، الثالث .....على الترتيب.

K تعبر عن رتبة الفرق الخلفى وتأخذ القيم 1، 2، 3، .... للفرق الخلفى الاول ، الثانى ، الثالث، ... وهكذا.

m رقم الحد فى معادلة (صيغة) الفرق الناتجة وتأخذ القيم من 0 الى k+1 .

مثال1 : استنتج صيغة الفرق الخلفى الاول من العلاقة $\nabla^k y_i = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} y_{i-m}$

الحل:

حيث ان المطلوب هو استنتاج صيغة الفرق الخلفى الاول، فإن k=1 وبالتالى فإن m تأخذ القيم 0، 1.

بالتعويض عن k=1 و m=0 فى العلاقة $\nabla^k y_i = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} y_{i-m}$

فإن

$$\nabla \ y_i = (-1)^0 \binom{1}{0} y_{i-0} = 1 * 1 * y_i = y_i$$

بالتعويض عن k=1 و m=1 نحصل على

$$\nabla \ y_i = (-1)^1 \binom{1}{1} y_{i-1} = -1 * 1 * y_{i-1} = -y_{i-1}$$

وبالتالى تكون الصيغة النهائية للفرق الخلفى الاول كالتالى:

$$\nabla\ y_i = y_i - y_{i-1}$$

ويمكن ان تكتب فى الصورة:

$$\nabla\ y_i = y_i - y_L$$

مثال 2

استنتج صيغة الفرق الخلفى الثانى من العلاقة $\nabla^k y_i = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} y_{i-m}$

الـحل:

حيث ان المطلوب هو استنتاج صيغة الفرق الخلفى الثانى، فإن k=2 وبالتالى فإن m تأخذ القي 0، 1، 2.

بالتعويض عن k=2 و m=0 فى العلاقة $\nabla^k y_i = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} y_{i-m}$ نحصل على:

$$\nabla^2 y_i = (-1)^0 \binom{2}{0} y_{i-0} = y_i$$

بالتعويض عن k=2 و m=1

$$\nabla^2 y_i = (-1)^1 \binom{2}{1} y_{i-1} = -2 y_{i-1}$$

بالتعويض عن k=2 و m=2

$$\nabla^2 y_i = (-1)^2 \binom{2}{2} y_{i-2} = y_{i-2}$$

$$\therefore \nabla^2 y_i = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$$

والتى يمكن ان تكتب فى الصورة

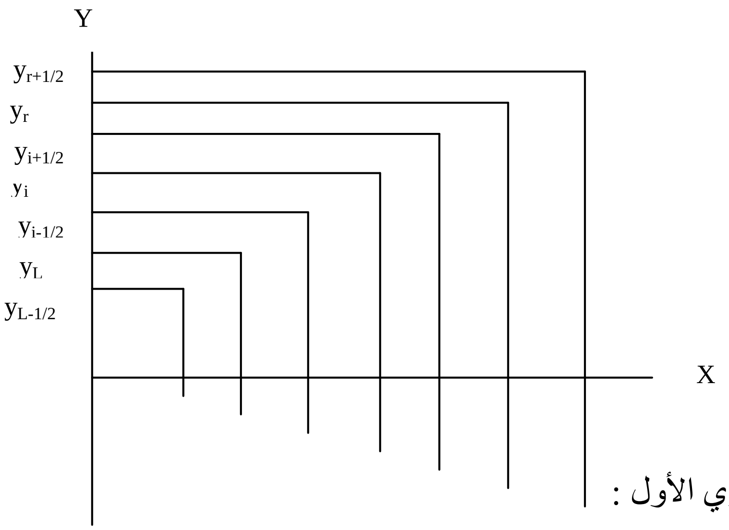
$$\nabla^2 y_i = y_i - 2y_L + y_{2L}$$

الباب الرابع

الفروق المركزية

~~~~~~~~~~
~~~~~~~~~~

الفروق المركزية (الاختلافات المركزية المتوسطة)



الفرق المركزي الأول :

$$\delta yi = y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}} \qquad \rightarrow ❻$$

الفرق المركزي الثاني :

$$\delta^2 yi = \delta(\delta yi)$$

$$= \delta(y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}})$$

$$= \delta y_{i+\frac{1}{2}} - \delta y_{i-\frac{1}{2}} \qquad \rightarrow ❼$$

$$= y_r - y_i - (y_i - y_L)$$

$$= y_r - 2y_i + y_L$$

الفرق الثالث :

$$\delta^3 y_i = \delta(\delta^2 y_i)$$
$$= \delta\left(y_r - 2y_i + y_L\right)$$
$$= \delta y_r - 2\delta y_i + s y_L$$
$$= \left(y_{r+\frac{1}{2}} - y_{i+\frac{1}{2}}\right) - 2\left(y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}\right) + \left(y_{i-\frac{1}{2}} - y_{L-\frac{1}{2}}\right) \quad \rightarrow ❽$$
$$= y_{r+\frac{1}{2}} - y_{i+\frac{1}{2}} - 2y_{i+\frac{1}{2}} + 2y_{i-\frac{1}{2}} + y_{i-\frac{1}{2}} - y_{L-\frac{1}{2}}$$
$$= y_{r+\frac{1}{2}} - 3y_{i+\frac{1}{2}} + 3y_{i-\frac{1}{2}} - y_{L-\frac{1}{2}}$$

بالمثل يمكن حساب الفرق المركزي الرابع ، الخامس ، ....

استنتاج صيغ الفروق المركزية

يمكن استنتاج صيغ الفروق المركزية من العلاقات التالية:

اولاً: صيغ الفروق المركزية ذات الرتب الزوجية (الفرق الثانى، الفرق الرابع، الفرق السادس، ....)

تستنتج صيغ الفروق المركزية ذات الرتب الزوجية من العلاقة التالية:

$$\delta^{2k} y_i = \sum_{m}^{2k} (-1)^m \binom{2k}{m} y_{i+k-m}$$

حيث i تعبر عن رقم الحد فى متسلسلة البيانات الاصلية المراد حساب الفرق المركزى عنده ويمكن ان تأخذ القيم 0، 1، 2 ....للحد الاول ، الثانى ، الثالث .....على الترتيب.

K تعبر عن رتبة الفرق المركزى وتأخذ القيم 1، 2، 3، .... للفرق المركزى الاول ، الثانى ، الثالث، ... وهكذا.

m رقم الحد فى معادلة (صيغة) الفرق الناتجة وتأخذ القيم من 0 الى 2k .

مثال1:

استنتج صيغة الفرق المركزى الثانى من العلاقة $\delta^{2k} y_i = \sum_{m}^{2k} (-1)^m \binom{2k}{m} y_{i+k-m}$

الحل:لحساب الفرق المركزى الثانى يتم وضع k=1 وبالتالى m تأخذ القيم 0، 1، 2 .

نحصل على العلاقات التالية:

بوضع k=1 و m=0

$$\delta^2 y_i = (-1)^0 \binom{2}{0} y_{i+1-0} = y_{i+1}$$

بوضع k=1 و m=1

$$\delta^2 y_i = (-1)^1 \binom{2}{1} y_{i+1-1} = -2 y_i$$

بوضع k=1 و m=2

$$\delta^2 y_i = (-1)^2 \binom{2}{2} y_{i+1-2} = y_{i-1}$$

$$\therefore \delta^2 y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$$

$$\delta^2 y_i = y_r - 2y_i + y_L$$

وبنفس الطريقة يمكن استنتاج صيغة الفرق المركزى الرابع والسادس و...

ثانيا: صيغ الفروق المركزية ذات الرتب الفردية (الفرق الاول، الفرق الثالث، الفرق الخامس، ....)

تستنتج صيغ الفروق المركزية ذات الرتب الفردية من العلاقة التالية:

$$\delta^{2k+1} y_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{m}^{2k+1} (-1)^m \binom{2k+1}{m} y_{i+k+1-m}$$

مثال:

استنتج صيغة الفرق المركزى الاول من العلاقة $\delta^{2k+1} y_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{m}^{2k+1} (-1)^m \binom{2k+1}{m} y_{i+k+1-m}$

الحل: لحساب الفرق المركزى الاول يتم وضع k=0 وبالتالى m تأخذ القيم 0، 1.

نحصل على العلاقات التالية:

بوضع k=0 و m=0 .

$$\delta y_{i+\frac{1}{2}} = (-1)^0 \binom{1}{0} y_{i+0+1-0} = y_{i+1}$$

بوضع k=0 و m=1 .

$$\delta y_{i+\frac{1}{2}} = (-1)1 \binom{1}{1} y_{i+0+1-1} = -y_i$$

بجمع الحدين السابقين

$$\therefore \delta y_{i+\frac{1}{2}} = y_{i+1} - y_i$$

بطرح ½ من الادلة

$$\therefore \delta y_i = y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}$$

مثال:

استنتج صيغة الفرق المركزى الثالث من العلاقة $\delta^{2k+1} y_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{m}^{2k+1} (-1)^m \begin{pmatrix} 2k+1 \\ m \end{pmatrix} y_{i+k+1-m}$

الحل: لحساب الفرق المركزى الثالث يتم وضع k=1 وبالتالى m تأخذ القيم 3،2،1،0

نحصل على العلاقات التالية:

بوضع k=1 و m=0 .

$$\delta^3 y_{i+\frac{1}{2}} = (-1)^0 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} y_{i+1+1-0} = y_{i+2}$$

بوضع k=1 و m=1 .

$$\delta^3 y_{i+\frac{1}{2}} = (-1)^1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} y_{i+1+1-1} = -3y_{i+1}$$

بوضع k=1 و m=2 .

$$\delta^3 y_{i+\frac{1}{2}} = (-1)^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} y_{i+1+1-2} = 3y_i$$

بوضع k=1 و m=3 .

$$\delta^3 y_{i+\frac{1}{2}} = (-1)^3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} y_{i+1+1-3} = -y_{i-1}$$

بجمع الحدود السابقة

$$\delta^3 y_{i+\frac{1}{2}} = y_{i+2} - 3y_{i+1} + 3y_i - y_{i-1}$$

$$\therefore \delta^3 y_{i+\frac{1}{2}} = y_{2r} - 3y_r + 3y_i - y_L$$

بطرح ½ من الادلة نحصل على

$$\delta^3 y_i = y_{r+\frac{1}{2}} - 3y_{i+\frac{1}{2}} + 3y_{i-\frac{1}{2}} - y_{L-\frac{1}{2}}$$

القيمــة المتوسطــة للدالــــــة

من الرسم السابق نجد أن $y_{i+\frac{1}{2}}$ هي متوسط $y_r + y_i$ أي أن :

$$y_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(y_r + y_i\right)$$

كذلك نجد أن :

$$y_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_i + y_L)$$

فإذا أخذنا μ (مؤثر المنتصف) أو مؤثر أخذ المتوسط فإن :

$$\mu y_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_r + y_i) \qquad \rightarrow ❻$$

كذلك

$$\mu y_i = \frac{1}{2}(y_{i+\frac{1}{2}} + y_{i-\frac{1}{2}})$$

فإذا أدخلنا هذا المؤثرعلى معادلة الفرق الأول :

$$\delta y_i = y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \mu\delta y_i = \mu y_{i+\frac{1}{2}} - \mu y_{i-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}[(y_r + y_i) - (y_i + y_L)] \qquad \rightarrow ❼$$

$$= \frac{1}{2}y_r + \frac{1}{2}y_i - \frac{1}{2}y_i - \frac{1}{2}y_L$$

$$\therefore \mu\delta yi = \frac{1}{2}(y_r - y_L)$$

بإدخال هذا المؤثر علي معادلة الفرق المتوسط الثاني :

$$\mu\delta^2 y_i = \mu\ \delta\ (\delta\ y_i)$$

$$= \mu\ (\ y_r - 2y_i + y_L\ )$$

$$= \mu y_r - 2\mu y_i + \mu y_L\ )$$

$$= ½\ (\ y_{r\ +½} + y_{i\ +½}\ ) - 2 * ½\ (\ y_{i+½} + y_{i\ -½}\ ) + ½\ (\ y_{i\ -½} + y_{L\ -½}\ )$$

$$= ½\ y_{r\ +½} + ½\ y_{i\ +½} - y_{i\ +½} - y_{i\ -½} + ½\ y_{i\ -½} + 1/2\ y_{L-1/2}$$

$$= ½\ y_{r\ +½} - ½\ y_{i+½} - ½\ y_{i\ -½} + ½\ y_{L\ -½}$$

$$\mu\delta^2 y_i = ½\ (\ y_{r\ +½} - y_{i\ +½} - y_{i\ -½} + y_{L\ -½}\ ) \qquad \rightarrow 3$$

بإدخال هذا المؤثر علي معادلة الفرق المتوسط الثالث :

$$\therefore\ \mu\delta^3 y_i = \mu y_{r+½} - 3\mu y_{i\ +½} + 3\mu y_{l\ -½} - \mu y_{L-1/2}$$

$$= ½\ (y_{2r}+y_r) - 3/2(y_r+y_i) + 3/2(y_i+y_L) - ½\ (\ y_L+y_{2L})$$

$$= ½\ \{\ y_{2r} + y_r - 3y_r - 3y_i + 3y_i + 3y_L - y_L - y_{2L}\}$$

$$= ½\ \{\ y_{2r} - 2\ y_r + 2y_L - y_{2L}\}$$

الباب الخامس

الاستكمال Interpolation

ما المقصود بـ الاستنتاج أو الاستكمال .Interpolation

1- تعريف الاستكمال

الاستكمال هو عملية إيجاد قيمة y عند قيمة معلومة x ليست موجودة في جدول النقاط المعطاة وتسمي هذه العملية قضية الاستكمال ويجب التفرقة بين نوعين من القضايا:

القضية الأولي:

أن النقطة المطلوبة داخل نقاط الجدول وبالتالي تسمي العملية في هذه الحالة إستكمال داخلي (**Interior Interpolation**).

القضية الثانية:

أن تكون النقطة المطلوبة خارج نقاط الجدول وبالتالي تسمي العملية في هذه الحالة إستكمال خارجي (**Exterior Extrapolation**)

بفرض وجود دالة $y= f(x)$ معرفة فقط عند نقاط محددة (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2), $\ldots(x_n,y_n)$, كيف يمكن أن نوجد قيمة الدالة عند أية قيمة أخرى x غير تلك القيم ؟

يمكن عمل ذلك باستخدام دالة متصلة $f(x)$ تمثيل تلك البيانات بحيث أن الدالة $f(x)$ تمر بنقاط عددها $n+1$ ، حيث n درجة الدالة المستخدمة. وبذلك يمكن حساب قيمة الدالة عند أية

نقطة وهذا ما يسمي بـ Interpolation { استكمال }. بالطبع إذا كانت x تقع خارج مدى الدالة $f(x)$ فإن تعيين قيمة الدالة عند x في هذه الحالة يسمي Extrapolation { استنتاج } .

نأتي بعد ذلك لاختيار نوع الدالة التي يجب استخدامها لتمثيل البيانات .

من الشائع استخدام الدوال كثيرة الحدود polynomial وذلك للصفات التالية وهي :

(1)سهولة حسابها .

(2)سهولة تفاضلها .

(3)سهولة تكاملها .

وذلك بمقارنتها بدوال sin أو الدوال الأسيه .

كيفية عمل polynomial Interpolation

يمكن عمل كثيرة الحدود لتمثيل الدالة بعدة طرق منها

1. الطريقة المباشرة Direct method of Interpolation .
2. طريقة نيوتن للفروق المقسمة ewton's divided difference method .
3. طريقة لاجرانج Lagrange interpolation method .
4. طريقة شتيرلنج للاستدلال Sterling method

أولا : الطريقة المباشرة لعمل كثيرة الحدود :

تعتمد الطريقة المباشرة علي أنه بفرض أن لدينا (n+1) نقاط فإنه يمكن أن يتم عمل كثيرة حدود من الدرجة (n) كما يلي :

$Y= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 +\ldots.\ a_n x^n \rightarrow$ ❻

عبر البيانات بحيث $a_0, a_1, \ldots, a_n$ عبارة عن n+1 ثوابت حقيقية. وحيث أننا لدينا n +1 قيم لـ y يقابلها n+1 قيم لـ x ، فإننا يمكننا عمل n+1 معادلات . ثم بعد ذلك يتم حساب n+1 ثوابت وهي $a_0 , a_1, a_2 .. an$. وبمعرفة تلك الثوابت يتم معرفة الدالة المعبرة عن البيانات رقم ❻ .وبالتعويض عن قيمة x فيها يتم معرفة قيمة y المطلوب حسابها .

لكن ما درجة كثيرة الحدود التي سوف نستخدمها ؟ هل يمكن استخدام كثيرة حدود من الدرجة الأول (والتي تسمي معادلة خطية) ، أم من الدرجة الثانية (معادلة تربيعية) ، أم من الدرجة الثالثة (تكعيبية) ، وما الفرق في دقة النتيجة ؟ يمكن إيضاح ذلك بمثال .

مثـــال 1 : تعطي السرعة الرأسية لصاروخ كما في الجدول التالي كدالة في الزمن

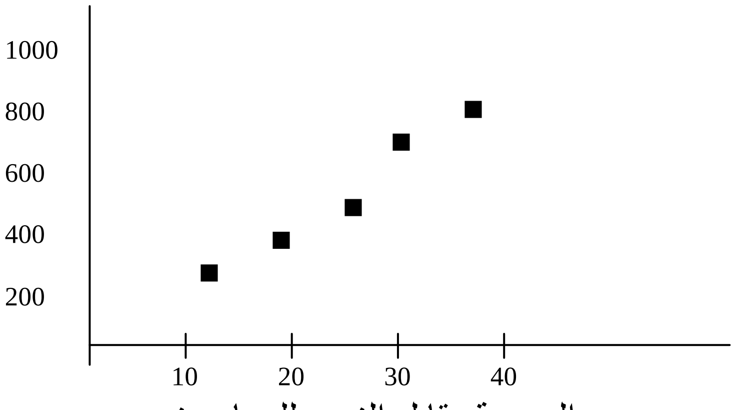
ts	0	10	15	20	22.5	30
$V_{m/s}$	0	227.04	362.78	517.35	602.97	901.67

عين سرعة الصاروخ عند t=l6s باستخدام الطريقة المباشرة وكثيرة حدود من الدرجة الأولي

الحل : حيث أننا مطلوب منا استخدام معادلة من الدرجة الأولي (معادلة خطية) ، تكون معادلة السرعة في الصورة التالية

$$V(t) = a_0 + a_1 t$$

ويكون رسمها البياني كما يلي

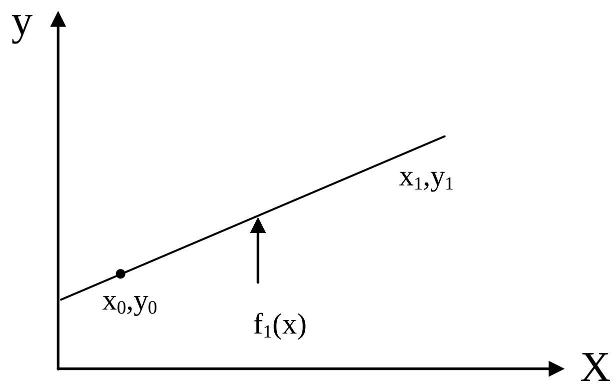


السرعة مقابل الزمن للصاروخ

حيث أننا مطلوب منا استخدام معادلة من الدرجة الأولى (معادلة خطية) . تكون معادلة السرعة في الصورة التالية :

$v(t) = a_0+a_1t$

ويكون رسمها البياني كما يلي :



رسم خط مستقيم لتمثيل البيانات الخاصة بالصاروخ

وحيث أن المعادلة من الدرجة الأولي $n = 1$ فإننا نختار $n + 1$ نقاط أي نقطتين . هاتين النقطتين يجب أن يحيطا بالنقطة المطلوبة وذلك لكي تكون تلك النقطة واقعه في مدى تطبيق المعادلة المستنتجة .

وحيث أن النقطة المطلوبة Δl $t = 16s$ فإن النقطتين يجب أن يكونا

$t_1 =20 , t_0 = 15$

وحيث أننا لدينا

$t_0 = 15, v(t_0) = 362.78$

$t_1= 20, v(t_1) = 517.35$

يكون لدينا معادلتين

$V(15) = a_0 + a_1(15) = 362.78$

$V(20) = a_0 + a_1(20) = 517.35$

يمكن كتابة المعادلتين في صورة مصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 1 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 362.78 \\ 517.35 \end{bmatrix}$$

بحل المعادلتين السابقتين تحصل علي :

$a_0 = -100.91$

$a_1 = 30.913$

وبالتالي تكون المعادلة المقترحة هي :

$v(t) = -100.91 + 30.913 \qquad 15 \le t \le 20$

لحساب السرعة عند $t = 16_s$ نعوض في هذه المعادلة عن قيمة t

$\therefore V(16) = 393.7$ m/ s

مثـــال2 :
تعطي سرعة صاروخ رأسيا كما بالجدول التالي :

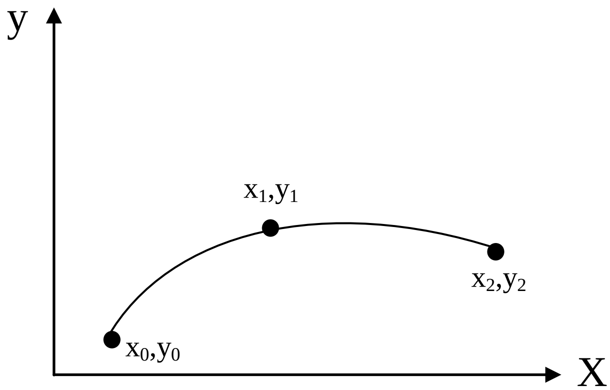
t= s	0	10	15	20	22.5	30
v(t) m/s	0	227.04	362.78	517.35	602.97	901.67

عين سرعة الصاروخ عن t = 16 s باستخدام الطريقة المباشرة وكثيرة حدود من الدرجة الثانية .

<u>الحــل :</u> لعمل معادلة من الدرجة الثانية (معادلة تربيعية) تكون علي الشكل التـالي :

$$v(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$$

وترسم بيانياً كالتالي :



وحيث أننا نريد أن نستنتج سرعة الصاروخ عند $t = 16$ s فإننا نختار ثلاث نقاط

(n+1) بحيث يشملان القيمة (16s) هذه النقاط هي :

$T_0=10$, $t_1 = 15$, $t_2 = 20$

وتعطي المعادلات التالية لكل نقطة :

$$v(10) = a_0 + a_1(10) + a_2(10)^2 = 227.04$$

$$v(15) = a_0 + a_1(15) + a_2(15)^2 = 362.78$$

$$v(20) = a_0 + a_1(20) + a_2(20)^2 = 517.35$$

نضع تلك المعادلات في صورة مصفوفة كالتالي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 1 & 15 & 225 \\ 1 & 20 & 400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 227.04 \\ 362.78 \\ 517.35 \end{bmatrix}$$

يمكن حل هذه المصفوفة بطريقة جاوس للحذف الأمامي والتعويض الخلفي أو بطريقة

LU . نحصل بعد ها علي :

$a_0 = 12.001$, $a_1 = 17.740$, $a_2 = 0.37637$

وتكون المعادلة المطلوبة هي :

$$v(t) = 12.001 + 17.790t + 0.37637\, t^2 \quad 10 \le t \le 20$$

بالتعويض عن قيمة t= 16s في هذه المعادلة نحصل على v(16) :

$$v(16) = 12.001 + 17.790\,(16) + 0.37637\,(16)^2$$

$$= 392.19 \quad m/s$$

من المثالين السابقين يمكن حساب الخطأ التقريبي النسبي المطلق : $|\in_c|$ absolute relative approximate error الناشئ عن التحول من معادلة درجة أولي إلي معادلة درجة ثانية :

$$|\in_c| = \left|\frac{392.19 - 393.70}{392.19}\right| \times 100$$

$$= 0.38502\%$$

Newton's Divided Difference Interpolating Polynomral Method

ثانيا: طريقة نيوتن لعمل كثيرة حدود بواسطة الفرق المقسوم

لشرح هذه الطريقة سوف يتم أولاً عمل كثيرة حدود من الدرجة الأولي (معادلة خطية) ومن الدرجة الثانية (معادلة تربيعية) ثم يتم عمل الطريقة العامة وفيها يتم عمل معادلة من الدرجة الثالثة .

أولاً : استنتاج معادلة خطية (من الدرجة الأولي) :

بفرض أن لدينا نقطتين (x_0 ,y_0) ، (x_1 , y_1) , استنتج معادلة من الدرجة الاولى عبر البيانات.
بفرض ان $y_1 = f_1(x)$ الرقم (1) اسفل f, y يشير إلي درجة المعادلة .

لذلك يكون لدينا

$$y_0 = f (x_o) \ , \ y_1 = f (x_1)$$

بفرض أن المعادلة الخطية تكون علي الصورة

$$f_1(x) = b_0 + b_1 (x - x_0)$$

نريد حساب الثوابت b_1 ,b_0 نعوض عن $x = x_0$

$$\therefore f_1(x_0) = f(x_0) = b_0+b_1 (x_0 - x_0) = b_0$$

$$\therefore b_0=f(x_0) \qquad \rightarrow 1$$

ثم نعوض عن $x =x_1$

$$\therefore f_1(x_1) = f(x_1) = b_0 + b_1\,(x_1 - x_0)$$

$$\therefore b1 = \frac{f(x_1) - b_0}{x_1 - x_0}$$

$$\therefore b1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad \rightarrow \qquad 2$$

وبالتالي تكون قيمة الثوابت هي :

$$\boxed{\begin{aligned} b_0 &= f(x_0) \\ b_1 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \end{aligned}}$$

وتكون المعادلة النهائية بالصورة :

$$f_{(1)}(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

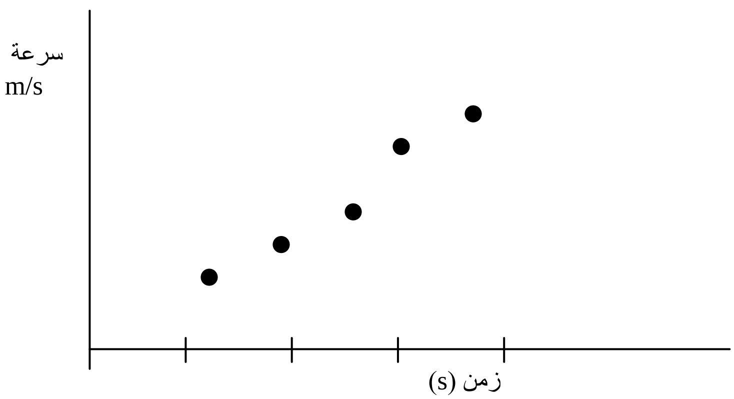
مثال

تعطي سرعة الصاروخ الرأسية كدالة في الزمن كما في الجدول التالي :

T= s	0	10	15	20	22.5	3-
s	0	227.04	362.78	517.35	602.97	901.67

عين قيمة السرعة عند t = 16s باستخدام معادلة من الدرجة الأولي مستخدماً طريقة الفروق المقسمة لنيوتن .

الحل :



السرعة لأزمنة مختلفة كما فى المثال

باستخدام المعادلـة الخطيـة التـى مـن الدرجـة الاولـى بطريقـة الفـروق المقسـمة لنيـوتن تعطـي السرعة من العلاقة :

$$V(t) = b_0 + b_1(t - t_0)$$

وحيث أننا نريد السرعة عند $t=16s$ فإننا نحتاج نقطتين قبل وبعد تلك النقطة وهما

$t_0 = 15$, $t_1 = 20$

at $t_0 = 15$, $v(t_0) = 362.78$

at $t_1 = 20$, $v(t_1) = 517.35$

ومنها يتم حساب الثوابت

$$b_0 = v(t_0) = 362.78$$

$$b1 = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}$$
$$= \frac{517.35 - 362.78}{20 - 15}$$
$$= 30.914$$

وبالتالي تكون المعادلة :

$$v(t) = b_0 + b_1(t - t_0) = 362.78 + 30.914\,(t - 15) \quad 15 \le t \le 20$$

لحساب السرعة عند $t = 16$ تعوض :

$$v(t) = 362.78 + 30.914\,(t - 15)$$

نحصل علي

$$v(t) = -100.93 + 30.914\,t$$

وهي نفس المعادلة التي تم الحصول عليها بالطريقة المباشرة

ثانياً : المعادلة التربيعية (quadrahc interpolation)

يفرض أن لدينا النقاط التالية (x_2 , y_2) , (x_1 ,y_1) , (x_0 ,y_0)

ارسم كثيرة حدود عبر البيانات في الجدول الذي في المثال السابق .

الحـــــل :

بملاحظة $y = f(x) , y_o = f(x_0) , y_1 = f(x_1) , y_2 = f (X_2)$

نفترض أن المعادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية تعطى من العلاقة

$$f_2 (x) = b_0 + b_1 (x - x_0) + b_2 (x-x_0) (x- x_1)$$

عند $y = x_0$ يكون لدينا

$$f (x_0) = f_2 (x_0) = b_0 + b_1 (x_0 - x_0) + b_2 (x_0-x_0)(x_0-x_1)$$

$$= b_0$$

$$b_0 = f(x_0)$$

عند $x= x_1$ يكون لدينا

$$f(x_1) = f_2 (x_1) = b_0 + b_1 (x_1 - x_0) + b_2 (x_1- x_0)(x_1- x_1)$$

$$f(x_1) = f(x_0) + b_1 (x_1 - x_0)$$

$$\therefore b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

عند $x = x_2$

$$F(x_2) = f_2(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_2)$$

عوض عن b_0 , b_1

$$\therefore f(x_2) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

نحصل على :

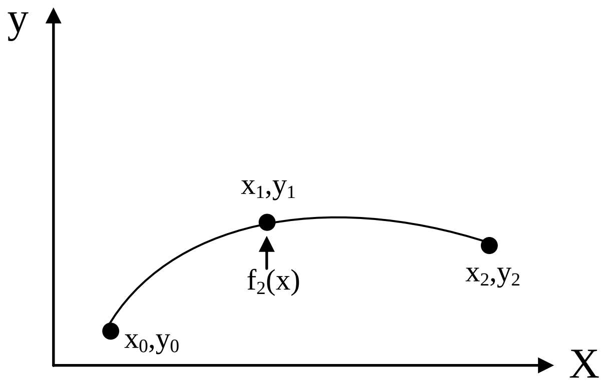
$$b2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

وبالتالي فإن المعادلة التي من الدرجة الثانية :

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

تصبح بعد التعويض عن الثوابت :

$$f_2(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}(x - x_0)(x - x_1)$$



الاستكمال التربيعي

مثـــال 2 :

تعطي سرعة صاروخ رأسياً كما في الجدول السابق

عين سرعة الصاروخ عند $t = 16$ s مستخدماً معادلة من الدرجة الثانية باستخدام طريقة نيوتن للفرق المقسوم .

الحل المعادلة التربيعية تكون في الصورة

$v(t) = b_0 + b_1 (t – t_0) + b_2 (t- t_0)(t- t_1)$

وحيث أن هذه المعادلة تربيعية أن $n = 2$ فإننا في حاجة ألي ثلاث نقاط تكون قريبة من t =16 وتكون حولها (أي قبل وبعد $t=16$) ، هذه النقاط هي

$t_0 = 10$, $v(t_0) = 227.04$

$t_1 = 15$, $v(t_1) = 362.78$

$t_2 = 20$, $v(t_2) = 517.35$

وبالتالي يكون :

$b_0 = v(to)$

$= 227.04$

$$b1 = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{362.78 - 227.04}{15 - 10} = 27.148$$

$$b2 = \frac{\frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{517.35 - 362.78}{20 - 15} - \frac{362.78 - 227.04}{15 - 10}}{20 - 10}$$

$$= \frac{30.914 - 27.148}{10} = 0.37660$$

بالتعويض عن هذه القيم للثوابت في المعادلة تحصل علي :

$v(t) = b_0 + b_1 (t – t_0) + b_2 (t- t_0)(t- t_1)$

$= 227.04 + 27.148 (t -10) + 0.37660 (t- 15)$ $10 \leq t$

≤ 20

at $t = 16$

$v(16) = 227.04 + 27.148 (16 -10) + 0.37660 (16 – 10) (16-15)$

$= 392.19$ m/s

وبفك الأقواس نحصل على :

$$V(16) = 12.05 + 17.733\ t + 0.37660\ t^2 \quad 10 \le t \le 20$$

وهي المعادلة التي حصلنا عليها سابقاً بالطريقة المباشرة .

استنتاج طريقة عامة لاستنتاج المعادلة كثيرة الحدود بواسطة طريقة نيوتن للفروق المقسمة .

من المعادلة التربيعية بطريقة نيوتن وجد أن الحل يكون من الصورة .

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

حيث تم حساب الثوابت كالأتي :

$$b_0 = f(x_0)$$
$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$
$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

نلاحظ أن هذه الثوابت ما هي إلا فروق منتهية مقسومة ومن هنا جاء تسمية الطريق بطريقة نيوتن للفروق المقسومة . حيث b_0 , b_1 , b_2 هي الفرق الأول المقسوم ، الفرق الثاني المقسوم ، الفرق الثالث المقسوم علي التوالي .

سوف ترمز للفرق الأول المقسوم كالآتي :

$$f[x_0] = f(x_0)$$

وترمز للفرق الثاني المقسوم كالآتي :

$$f[x_1,x_0]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

والفرق الثالث المقسوم كالآتي :

$$f[x_2,x_1,x_0]=\frac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0}=\frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

حيث تسمي الدوال $f[x_0]$, $f[x_1, x_0]$, $F[x_2,x_1,x_0]$ بالدوال المقوسة لمتغيراتها المحصورة داخل الأقواس .

وبكتابة الصورة العامة لمعادلة نيوتن للدرجة الثانية بالدوال المقوسة

$$F_2(x) = f[x_0] + f[x_1,x_0](x - x_0) + f[x_2,x_1,x_0](x - x_0)(x - x_1)$$

وبالتالي تكون الصورة العامة لطريقة نيوتن لعدد (n+ 1) من البيانات

$(x_0, y_0), (x_1,y_1), \ldots (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$

لها الصورة التالية

$$F_n(x)=b_0+b_1(x-x_0)+\ldots b_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

حيث تكون الثوابت كالتالى:

$b_0=f[x_0]$

$b_1=f[x_1-x_0]$

$b_2=f[x_2,x_1,x_0]$

$b_{n-1}=f[x_{n-1},x_{n-2},..x_0]$

$b_n=f[x_n,x_{(n-1)},\ldots x_0]$

بحيث أن الصورة العامة لهذه الثوابت التي يطلق عليها m^{th} divided differences هي

$$\left[b_m = f\left[x_m,......,x_0\right]\right]$$
$$= \frac{f\left[x_m,......,x_1\right] - f\left[x_{m-1},.....,x_0\right]}{x_m - x_0}$$

من التعريف السابق نجد أن الفروق المقسومة ثم حسابها recursively (بالعودة للوراء) .

مثـــــــال :

كمثال لعمل كثيرة حدود من الدرجه الثالثة ، نفرض أن لدينا البيانات التالية :

$(x_0,y_0),(x_1,y_1)(x_2,y_2)$ and (x_3,y_3)

فإن كثيرة الحدود تكون في الصورة العامة

$F_3(x)=f[x_0]+f[x_1,x_0](x-x_0)+f[x_2,x_1,x_0](x-x_0)(x-x_1)+f[x_3,x_2,x_1,x_0](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$.

يمكن عمل رسم تخطيطي لقيم الثوابت b_3,b_2,b_1,b_0 في حالة كثيرات الحدود من درجات مختلفة تتراوح ما بين كثيرة حدود من درجة (0) صفر x_0 إلى كثيرة حدود من الدرجة الثالثة x_3 كما يلى :

درجة كثيرة الحدود	قيمة الثابت الأول	قيمة الثابت الثاني	قيمة الثابت الثالث	قيمة الثابت الرابع
x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_1,x_0]$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_2,x_1,x_0]$	
		$f[x_2,x_1]$		$f[x_3,x_2,x_1,x_0]$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_3,x_2,x_1]$	
		$f[x_3,x_2]$		
x_3	$f(x_3)$			

مثـــال 3 :

تعطي السرعة الرأسية لصاروخ كما في الجدول السابق في المثال السـابق .عين قيمـة السرعة عند $t=16s$ مستخدما كثيرة حدود من الدرجة الثالثة باستخدام طريقة نيـوتن للفروق المقسومة .

الحـــــــــل : **تعطي معادلة السرعة من الدرجة الثالثة في الصورة التالية :**

$$v(t) = b_0 + b_1 (t - t_0) + b_2 (t- t_0)(t- t_1) + b_3 (t- t_0)(t- t_1) (t -t_2)$$

وحيث أننا نريد حساب السرعة عند $t = 16$ فإننا تختار أربع نقاط للبيانات قريبة من $t = 16$ وتحيط بها . هذه الأربع نقاط هي :

$t_0 = 10 \quad , \quad v(t_0) = 227.04$

$t_1 = 15 \quad , \quad v(t_1) = 362.78$

$t_2 = 20 \quad , \quad v(t_2) = 517.35$

$t_3 = 22.5 \quad , \quad v(t_3) = 602.97$

ثم نأتي لحساب b_0 , b_1 , b_2 , b_3 بدلالة قيم السرعة عند تلك الأزمنة المختلفة .

$b_0 = v[t_0]$

$= v(t_0)$

$= 227.04$

$b_1 = v[t_1 , t_0]$

$$= \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}$$

$$= \frac{362.78 - 227.04}{15 - 10}$$

$$= 27.148$$

$b_2 = v[t_2, t_1, t_0]$

$$=\frac{v[t_2,t_1]-v[t_1,t_0]}{t_2-t_0}$$

$$v[t_2,t_1]=\frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}$$

$$=30.914$$

$$v[t_1,t_0]=27.148$$

$$\therefore b_2=0.37660$$

$$b3=\frac{v[t_3,t_2,t_1]-v[t_2,t_1,t_0]}{t_3-t_0}$$

$$v[t_3,t_2,t_1]=\frac{v[t_3,t_2]-v[t_2,t_1]}{t_3-t_1}$$

$$v[t_3,t_2]=\frac{v(t_3)-v(t_2)}{t_3-t_2}=34.248$$

$$v[t_2,t_1]=\frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}=30.914$$

$$v[t_3,t_2,t_1]=\frac{v[t_3,t_2]-v[t_2,t_1]}{t_3-t_1}$$

$$=\frac{34.246-30.414}{22.5-15}=0.44453$$

$$v[t_2,t_1,t_0]=0.37660$$

$$b_3=v[t_3,t_2,t_1,t_0]=\frac{v[t_3,t_2,t_1]-v[t_2,t_1,t_0]}{t_3-t_0}$$

$$=\frac{0.44453-o.37660}{22.5-10}=5.4347*10^{-3}$$

وبالتالي تكون

$$V(t)=b_0+b_1(t-t_0)+b_2(t-t_0)(t-t_1)+b_3(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)$$

$$=227.04+27.148(t-10)+0.37660(t-10)(t-15)+5.437*10^{-3}(t-10)(t-15)(t-20)$$

بالتعويض عن $t=16$

$\therefore v(16) = 392.06$ m/s

يمكن كتابة المعاملات في صيغة نيوتن لكثيرات الحدود [هذه المعاملات هي الفروق المقسومة] في صورة جدول كما سبق.

مثال : لداله F سوف يتم استكمالها interpolated علي التقاط $x_0, x_1, \ldots x_n$ يمكن عمل الجدول التالى:

$$
\begin{array}{llll}
x_0 & f(x_0) & & \\
 & & \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} & \\
x_1 & f(x_1) & & \dfrac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0} \\
 & & \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} & \\
x_2 & f(x_2) & &
\end{array}
$$

ثم يتم عمل الحدود باستعمال مدخلات القطر الأعلى في الجدول كمعاملات .

مثال :

افترض عمل كثيرة حدود للدالة $f(x) = \tan x$ باستعمال الفروق المقسومة عند النقاط التالية

$X_0 = -1.5 \quad x_1 = -0.75 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0.75 \quad x_4 = 1.5$

$F(x_0) = -14.1014$, $f(x_1) = -0.931596$, $f(x_2) = 0$, $f(x_3) = 0.931596$, $f(x_4) = 14.1014$

يمكن عمل الجدول التالي باستعمال ستة أرقام دقة :

X	F(x)			
- 1.5	-14.1014			
		13.1698		
-0.75	-0.931596		-12.2382	
0	0	0.931596		12.23821
0.75	0.931596	0.931596	0	
				12.23821
			12.23821	
1.5	14.01014	13.1698		

وبالتالي فإن المعادلة تأخذ الصورة

$$\mathrm{Tan}(x) = -14.1014 + 13.1698\,(x+1.5) - 12.2382\,(x+1.5)(x+0.75) + 12.23821\,(x+1.5)(x+0.75)(x)$$

= ……………………………………………..

ثالثا: Lagrangian interpolation

طريقة لاجرانج هي واحدة من الطرق المستخدمة لعمل كثيرة حدود من الدرجة n تمر بعدد من النقاط $(n + 1)$.

تعطي كثيرة الحدود باستخدام طريقة لاجرانج كما يأتي :

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, f(x_i)$$

حيث n فى $f_n(x)$, تمثل درجة كثيرة الحدود التي تقرب الدالة $y = f(x)$ لعدد من النقاط $(n + 1)$ فى صورة

$$(x_0 , y_0) , (x_1 , y_1) , \ldots\ldots (x_n , y_n)$$

$L_i(x)$ تعطي في الصورة :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ J \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

الرمز $\prod$ يمثل حاصل ضرب عدد من الحدود مقداره (n) لا يدخل فيها الحدود التي يتساوي بها j , i .

سوف يتضح هذا من المثال التالي :

تعطي السرعة الرأسية لصاروخ كدالة في الزمن كما في الجدول :

T= s	0	10	15	20	22.5	30
V(t) m/s	0	227.04	362.78	517.35	602.97	901.67

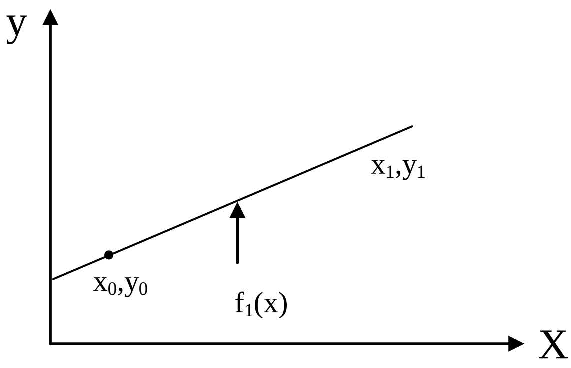
عين قيمة السرعة عند $t = 16\ s$ باستخدام كثيرة حدود من الدرجة الأولي بطريقة لاجرانج :

الحـــــــل : لعمل كثيرة حدود من الدرجة الأولي (معادلة خطية) تعطى السرعة من المعادلة التالية بطريقة لاجرانج :

$$v_1(t) = \sum_{i=0}^{1} L_i(t)v(t_i)$$

بالتعويض عن $i=0$, $i=1$

$$= L_0(t)v(t_0)+L_1(t)v(t_1)$$



التمثيل الخطي

وحيث أننا نريد حساب v عند $t = 16s$ نختار نقطتين حول $t = 16$ وتحيطان بها وهما :

$t_0 = 15$, $v(t_0) = 362.78$

$t_1 = 20$, $v(t_1) = 517.35$

في حالة $i = 0$ تحزف الحد الذي به $j = 0$ وبالتالي تكون قيمة j في هذا المدي من 0 الى 1 هي 1 فقط ومنها يكون

$$\therefore L_0(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq 0}}^{1} \frac{t - t_j}{t_0 - t_j}$$

$$L_0(t) = \frac{t - t_1}{t_0 - t_1}$$

وبالمثل يكون

$$L_1(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq 1}}^{1} \frac{t - t_j}{t_1 - t_j}$$

في هذه الحالة $i = 1$ وبالتالي يحذف الحد الذي به $j = 1$ وبالتالي تكون قيمة j في هذا المدى من 0 الى 1 هي 0 فقط ومنها يكون :

$$L_1(t) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$$

بالتعويض عن $L_1(t)$, $L_0(t)$ في المعادلة نحصل علي :

$$v(t) = \frac{t - t_1}{t_0 - t_1} v(t_0) + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} v(t_1)$$

$$= \frac{t - 20}{15 - 20}(362.78) + \frac{t - 15}{20 - 15}(517.35)$$

بالتعويض عن $t = 16$ تحصل علي :

V(16) = 393.7 m/ s

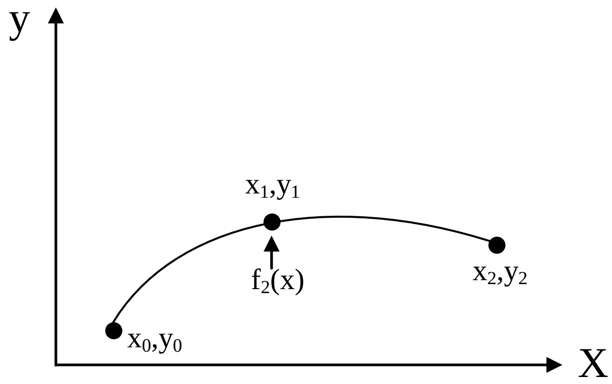
مثال 2 :

لنفس البيانات في المثال السابق استنتج معادلة تربيعية بطريقة لاجرانج ومنها احسب السرعة عند $t = 16$ s

الحل :

في هذه الحالة تعطي السرعة من العلاقة :

$$v_2(t) = \sum_{i=0}^{2} L_i(t) v(t_i)$$
$$= L_0(t)v(t_0) + L_1(t)v(t_1) + L_2(t)v(t_2)$$



أننا نريد السرعة عند $t = 16$ s فإننا نختار ثلاث نقط حول $t = 16$ وهي

$t_0 = 10$, $v(t_0) = 227.04$

$t_1 = 15$, $v(t_1) = 362.78$

$t_2 = 20$, $v(t_2) = 517.35$

وتحسب $L_0(t)$, $L_1(t)$, $L_2(t)$ كالتالي :

$$L_0(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq 0}}^{2} \frac{t - t_j}{t_0 - t_j} = \left[\frac{t - t_1}{t_0 - t_1}\right]\left[\frac{t - t_2}{t_0 - t_2}\right]$$

كذلك :

$$L_1(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{2} \frac{t - t_j}{t_1 - t_j}$$
$$= \left[\frac{t - t_0}{t_1 - t_0}\right]\left[\frac{t - t_2}{t_1 - t_2}\right]$$

كذلك :

$$L_2(t)=\prod_{\substack{i=0\\ j\neq 2}}^{2}\frac{t-t_j}{t_2-t_j}=\left[\frac{t-t_0}{t_2-t_0}\right]\left[\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right]$$

بالتعويض عن $L_0(t)$, $L_1(t)$, $L_2(t)$ تحصل علي :

$$v(t)=\left[\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\right]\left[\frac{t-t_2}{t_0-t_2}\right]v(t_0)+\left[\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right]\left[\frac{t-t_2}{t_1-t_2}\right]v(t_1)+\left[\frac{t-t_0}{t_2-t_0}\right]\left[\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right]v(t_2)$$

$$\therefore v(16)=\frac{(16-15)(16-20)}{(10-15)(10-20)}(227.04)+\frac{(16-10)(16-20}{(15-10)(15-20)}(362.78)+\frac{(16-10)(16-15)}{(20-10)(20-15)}(517.35)$$

$$=(-0.08)(227.04)+(0.96)(362.78)+(0.12)(517.35)$$

$= 392.19$ m/s

مثـــــال 3 :

تقس بيانـات الجدول السـابق منهـا عين معادلـة من الدرجـة الثالثـة (cubic) ومنهـا أحسب السرعة عند $t = 16$ s بطريقة لاجرانج :

الحـــــــل :

تعطي معادلة لاجرانج للسرعة من الدرجة الثالثة في الصورة التالية :

$$v(t)=\sum_{i=0}^{3}Li(t)v(t_i)$$
$$=L_0(t)v(t_0)+L_1(t)v(t_1)+L_2(t)v(t_2)+L_3(t)v(t_3)$$

وبالتاليا ربع أربع نقاط تحيط بالنقطة $t = 16$ وهي :

$t_0 = 10$, $v(t_0) = 227.04$

$t_1 = 15$, $v(t_1) = 362.78$

$t_2 = 20$, $v(t_2) = 517.35$

$t_3 = 22.5$, $v(t_3) = 602.97$

بعد الحصول علي $v(t_0)$, $v(t_1)$, $v(t_2)$, $v(t_3)$ نريد حساب $L_3(t)$, $L_2(t)$, $L_1(t)$,

$L_0(t)$ وذلك كالتالي :

$$L_0(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq 0}}^{3} \frac{t-t_j}{t_0-t_j} = \left[\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\right]\left[\frac{t-t_2}{t_0-t_2}\right]\left[\frac{t-t_3}{t_0-t_3}\right]$$

$$L_1(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq 1}}^{3} \frac{t-t_j}{t_1-t_j} = \left[\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right]\left[\frac{t-t_2}{t_1-t_2}\right]\left[\frac{t-t_3}{t_1-t_3}\right]$$

$$L_2(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq 2}}^{3} \frac{t-t_j}{t_2-t_j} = \left[\frac{t-t_0}{t_2-t_0}\right]\left[\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right]\left[\frac{t-t_3}{t_2-t_3}\right]$$

$$L_3(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq 3}}^{3} \frac{t-tj}{t3-tj} = \left[\frac{t-t_0}{t_3-t_0}\right]\left[\frac{t-t_1}{t_3-t_1}\right]\left[\frac{t-t_2}{t_3-t_2}\right]$$

بالتعويض عن هذه القيم في المعادلة الأصل نحصل علي :

V (16) = 392.06 m/s

طريقة شتيرلنج للاستدلال

يمكن كتابة متسلسلة تايلور على الصورة التالية:

$$y(x+\alpha h) = y(x)\left[1+\alpha hD+\frac{(\alpha h)^2}{2!}D^2+\frac{(\alpha h)^3}{3!}D^3+......\right]\ldots\ldots\ldots 1$$

$$= y(x)e^{\alpha hD}$$

من الفروق المركزية وجد ان

$$hD = \mu(\delta - \frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{30} \text{..} 2$$

$$(hD)^2 = \delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} \text{..} 3$$

بالتعويض عن قيمة $(hD)^2$ و (hD) فى المعادلة الاولى:

$$\therefore y(x+\alpha h) = y(x)\left[1 + \alpha\mu(\delta - \frac{\delta^3}{6} + ...) + \frac{\alpha^2}{2!}(\delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + ...)\right]$$

$$= y(x)\left[1 + \alpha\mu\delta + \frac{\alpha^2\delta^2}{2!} + ...\right]$$

وذلك بأخذ الحد الاول بعد الضرب فى القوسين

$$= y(x) + \alpha\mu\delta y(x) + \frac{\alpha^2\delta^2}{2!}y(x)$$

بالتعويض عن $y_i = y(x)$

$$= y_i + \alpha\mu\delta y_i + \frac{\alpha^2\delta^2}{2!}y_i$$

$$= y_i + \alpha(\mu\delta y_i) + \frac{\alpha^2}{2}(\delta^2 y_i)$$

وهذه هي صيغة شتيرلنج للاستكمال, ويمكن استعمال الحدين الأوليين من الطرف الأيمن أو باستعمال الثلاثة حدود.

فإذا استعملنا الحدين الأوليين فقط, تؤول العلاقة إلى الصورة التالية:

$$y(x+\alpha h) = y_i + \alpha(\mu\delta y_i)$$

$$= y_i + \frac{\alpha}{2}(y_r - y_L)$$

وذلك لان $\mu\delta y_i = \frac{1}{2}(y_r - y_L)$

أما اذا استعملنا الثلاثة حدود فان العلاقة تأخذ الصورة التالية

$$y(x+\alpha h) = y_i + \alpha(\mu\delta y_i) + \frac{\alpha^2}{2}(\delta^2 y_i)$$

$$= y_i + \frac{\alpha}{2}(y_r - y_i) + \frac{\alpha^2}{2}(y_r - 2y_i + y_L)$$

$$= y_i + \frac{\alpha}{2}[y_r - y_L + \alpha(y_r - 2y_i + y_L)]$$

$$= y_i + \frac{\alpha}{2}[y_r - y_L + \alpha y_r - 2\alpha y_i + \alpha y_L]$$

$$= y_i + \frac{\alpha}{2}[y_r(1+\alpha) + y_L(\alpha-1) - 2\alpha y_i]$$

$$= y_i + \frac{\alpha}{2}y_r(1+\alpha) + \frac{\alpha}{2}y_L(\alpha-1) - \alpha^2 y_i]$$

$$. = \frac{\alpha}{2}(\alpha-1)y_L + y_i(1-\alpha^2) + \frac{\alpha}{2}(1+\alpha)y_r$$

مثال

أوجد قيمة $\tan 16^0$ باستخدام البيانات فى الجدول التالى, مستعملا طريقة شتيرلنج للاستكمال.

x	10^o	15^o	20^o	25^o
Tan x	0.1763	0.2679	0.3640	0.4603

الحل

$\because \tan 16 = y(x + \alpha h)$

αh=1 h=20-15=5, x=15,

$\therefore \alpha = \frac{1}{5} = 0.2$

حيث h هى مقدار الخطوة التى تزداد بها البيانات, αh هى القيمة التى تزداد بها القيمة المطلوبة عن اقرب قيمة معلومة وهى فى هذا المثال 15^o.

باستعمال الطريقة الاولى لشتيرلنج وهى استعمال حدين فقط:

$$\tan 16 = y_i + \frac{\alpha}{2}(y_r - y_L)$$

حيث y_i هى قيمة tan عند 15^o.

y_r هى قيمة tan عند 20^o

y_L هى قيمة tan عند 10^o

$$\tan 16 = 0.2679 + \frac{0.2}{2}(0.3640 - 0.1763) = 0.2866$$

باستعمال الطريقة الثانية لشتيرلنج وهى استعمال الثلاثة حدود.

$$\tan 16^o = \frac{\alpha}{2}(\alpha-1)y_L + y_i(1-\alpha^2) + \frac{\alpha}{2}(1+\alpha)y_r$$

$$= \frac{0.2}{2}(0.2-1)(0.1763) + (1-(0.2)^2)(0.2679) + \frac{0.2}{2}(0.2+1)(0.364) = 0.28679$$

والطريقة الثانية اكثر دقة. وهكذا كلما استعملنا عدد اكثر من الحدود كلما اقتربنا من القيمة الحقيقية.

الباب السادس

توفيق المنحنيات CURVE FITTING

1-6مقدمة:

في مختلف التجارب والمشاهدات البحثية كثيراً ما نحصل على مجموعة من القراءات المتناظرة لمتغيرين أو أكثر...وقد يكون من المفيد بعد ذلك إيجاد العلاقة بين المتغيرات التي توافق هذه القيم المتناظرة في صورة دالة تربط التغير الحادث كنتيجة لتغيرات أخرى مسببة، ويترجم هذا رياضيا بالعلاقة الدالية التالية: $y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots)$ حيث أن $(x_1, x_2, x_3, \ldots.)$ هي متغيرات مستقلة بينما 'y' هي المتغير الناتج من كل هذه المتغيرات و 'f' هي الدالة التي تربط بين المتغيرات. وأبسط شكل للعلاقة السابقة يكون المتغير المستقل واحدا أي تكون العلاقة بين متغيرين أثنين فقط تكون الدالة على الصورة: $y = f(x)$

في التجارب العملية نحصل على جدول لمجموعة من القيم المتناظرة للمتغير المستقل 'x' والمتغير التابع 'y' فإن كل من هذه القيم المتناظرة تمثل بنقطة واقعة على منحنى أو بالقرب منه ويكون المهم بعد ذلك هو الحصول على معادلة ذلك المنحنى الذي يمر بكل أو معظم هذه النقط أو قريباً منها بحيث تدل هذه المعادلة على الصورة العامة للعلاقة بين المتغيرين موضوع الدراسة.

والمعادلة التي نحصل عليها بهذه الطريقة تسمى معادلة تجريبية Emperial Equation للمنحنى وتسمى هذه الطريقة المتبعة: (توفيق المنحنى Curve Fitting).

وقد نجد أن هناك أكثر من صورة توافق مجموعة النقط كأن يمكن رسم خط مستقيم ومنحنى أو أكثر وكل منها يوافق مجموعة النقط بدرجة مناسبة... لذلك فإنه من البداية يجب اختيار شكل المنحنى الذي تتوقع الحصول عليه وذلك بناءً على الدراسة والمعرفة بالاعتبارات النظرية للعلاقة بين المتغيرين ومعناها الطبيعي.

وعموماً إذا لم تكن الدالة معروفة فإنه يمكن توفيق أكثر من معادلة لنفس النتائج التجريبية وتفضل معادلة عن الأخرى عن طريق دقة تمثيلها للنتائج (معامل الارتباط)، أو بساطة استخدامها.

ومن أهم وأفيد المعادلات الصور الآتية:

1- معادلة الخط المستقيم Linear Equation

$$\boxed{Y = a_0 + a_1 X}$$

2- معادلة الدرجة الثانية Parabolic Equation

$$\boxed{Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2}$$

3- الدالة الأسية Exponential Function

$$\boxed{Y = a_0 . e^{a_1 X}}$$

4- دالة القوى Power Function

$$\boxed{Y = a_0 . X^{a_1}}$$

5- دالة بواسون Boissen Function

$$\boxed{Y = a_0 . X . e^{-a_1 X}}$$

6- دالة جاوس Gauss Function

$$\boxed{Y = a_0 . X . e^{-a_1 X^2}}$$

والخطوات التي تتلى اختيار دالة المنحنى هي إيجاد قيم الثوابت بإحدى الطرق الآتية:

1- الطريقة البيانية Graphical method

2- طريقة النقط المتوسطة Average Points method

3- طريقة أقل التربيعات (المربعات الصغرى) Least Square method

والطريقة البيانية تعتمد على الحكم الشخصي في رسم منحنى تقريبي لتوفيق مجموعة من البيانات وهو ما يسمى بطريقة التمهيد باليد في توفيق المنحنى، بينما طريقة النقط المتوسطة تمتاز بالبساطة وسهولة التطبيق. أما طريقة المربعات الصغرى (أقل التربيعات) فهي تعطى نتيجة تعبر عن القراءات بأكثر دقة من الطريقتين السابقتين.

2-6 الطريقة البيانية Graphical method

6-2-1- الخط المستقيم Straight line

لدالة الخط المستقيم أهميه خاصة حيث يمكن تحويل كثير من الدوال غير الخطية إليها . ترسم النقط التجريبية على ورقة مربعات وإذا لوحظ إمكان تمثيلها بخط مستقيم فيمكن إيجاد الثوابت بطريقة بيانية. وتتلخص في استخدام مسطرة شفافة للمرور بين النقط ، فتكون النقط فوقها مساويه للتي تحتها وتكون متناوبة بحيث لا تتراكم النقط فوق الخط في ناحية منه بينما تتراكم النقط تحت الخط في الناحية الأخرى منه وعند رسم الخط المستقيم فإن ميله يكون "a_1" وتقاطعه مع محور الصادات يكون "a_0" كما هو في المعادلة (1) عالية .

مثال (6-1):

أ- ارسم خطاً مستقيماً

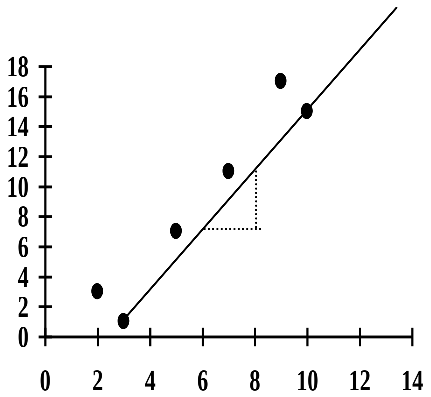
يوافق البيانات بالجدول

x	2	3	5	7	9	11
y	3	1	7	11	17	15

ب- إوجد معادلة هذا الخط

الحـــل

أ- ضع النقط في نظام للإحداثيات المتعامدة كما هو موضح بالشكل. من الواضح أن جميع النقط تقع على خط مستقيم أو حوله أي أن الخط المستقيم يوفق هذه البيانات بدرجة كبيرة.



ب- لتحديد معادلـة الخـط المسـتقيم المعـرف بمـا يلـي: $Y = a_0 + a_1 X$ فإنـه يكفـى تحديـد نقطتين واقعتين على المنحنى.

بمعرفة أي نقطتين وليكن (7,11) , (5,7) على سبيل المثال، فإن الثوابت a_1 , a_0 يمكن تحديدها.

$$a_1 = m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{(11-7)}{(7-5)} = 2$$

حيث: M تسمى ميل الخط ويمثل مقدار التغير في Y مقسوماً على مقدار التغير في X الثابت a_0 وهو قيمة Y عند X = 0 يسمى بالجزء المقطوع من المحور Y. ويلاحظ أنه عند مد المنحنى يدوياً فإنه يلاقى المحور Y عند النقطة 3– . وعلى ذلك يمكن تمثيل البيانات السابقة بالمعادلة الآتية: $Y = -3 + 2X$

2-2-6 معادلة الدرجة الثانية Quadratic Equation

$$\boxed{Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2}$$

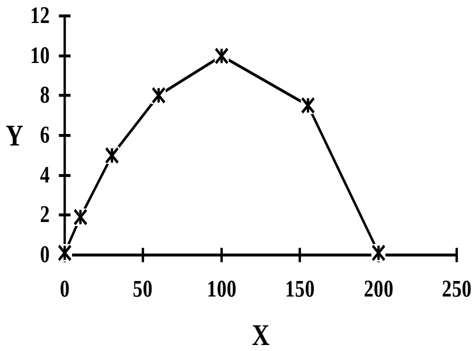
تستخدم هذه المعادلة بكثرة وخصوصا في وصف استجابة النبات لعناصر النمو ويمكن تحويل هذه المعادلة إلى الصورة الخطية كالآتي:

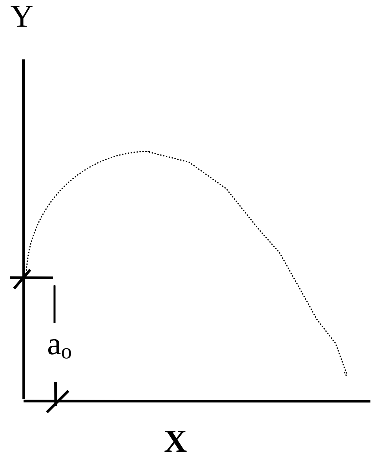
$$\frac{(Y - a_0)}{X} = a_1 + a_2 X$$

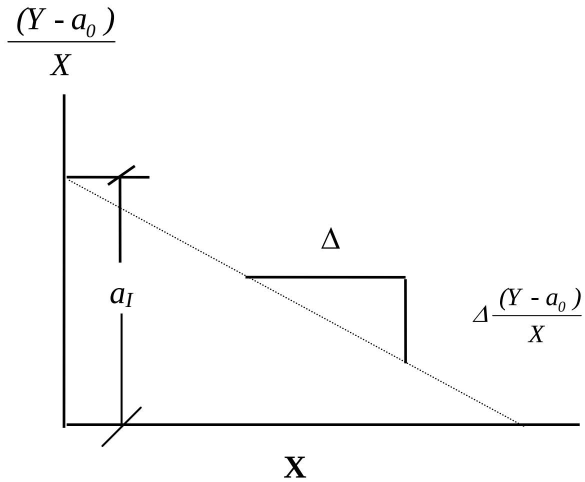
لإيجاد الثوابت الثلاثة (a_0 , a_1 , a_2) يتبع الآتي :

1- ترسم بيانـات (X ,Y) علـى ورقـة مربعـات وتسـتخرج قيمـة (a_0) من تقـاطع المنحنـى التقريبي مع المحور الصادي.

2- تحسب القيم $\frac{(Y - a_0)}{X}$ وترسم ضد (X) فإن أعطت خطا مستقيما أمكن تحديد a_1 , a_2 كما سبق بيانيا وإلا فإن معادلة الدرجة الثانية لا تمثل البيانات.



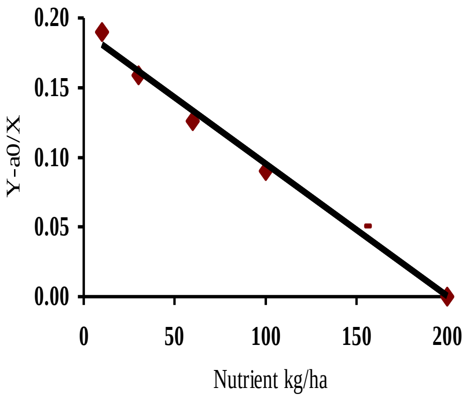




مثـال (6-2): النتـائج التاليـة تمثـل الإنتـاج بـالطن للهكتـار كدالـه لعنصـر غـذائي "X" بـالكيلوجرام للهكتـار ويعتقـد إمكـان تمثيـل البيانـات بتعـدد حـدود مـن الدرجـة الثانيـة.

X 0 10 30 60 100 155 200

Y	0.1	1.91	5.0	8.0	10.0	7.5	0.10



من الرسم والنتائج نجد أن:

(a$_0$= 0.10 t/ha)

فـــــي المعادلـــــــة التاليــــــة:

$$Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$$

وتأخذ القيم التالية على الترتيب :

$\dfrac{(Y - a_0)}{X}$: 0.190 , 0.160 , 0.126 , 0.099 , 0.050 ; 0.00

من الرسم والمعادلة:

$$\frac{Y - a_0}{x} = a_1 + a_2 x$$

$$a_2 = \frac{-0.08}{70} = -0.0009$$

$$a_1 = 0.19$$

$$\boxed{Y = 0.1 + 0.19X - 0.0009X^2}$$

3-2-6 الدالة الأسية Exponential Function

$$\boxed{Y = a_0 . e^{a_1 X}}$$

يمكن تقويم هذه المعادلة (تحويلها إلى معادلة خط مستقيم) وذلك بأخذ لوغاريتمات الطرفين . والمعروف أن الدالة الأسيه هي عكس الدالة اللوغاريتمية.

$$\ln Y = \ln . a_0 + a_1 . X$$

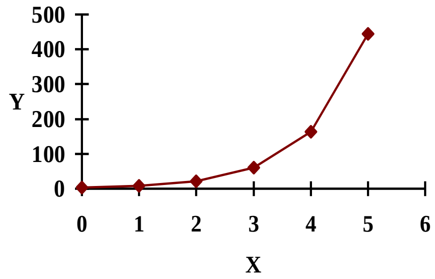
وهذه هي معادلة خط تقاطعه مع المحور الرأسي Ln a_0 وميل الخط a_1. ويمكن في العادة تحديد a_0 , a_1 من رسم الخط المستقيم.

مثال (6-3): النقط التالية تمثل داله يحتمل أن تكون أسيه :

X	0	1	2	3	4	5
Y	3	8	22	60	164	445

<u>الحـــل</u>

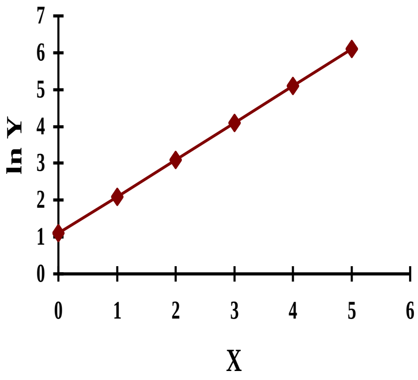
ارسم الدالة على ورقة مربعات لتتعرف علـى الشـكل المميـز للدالـة وبأخـذ لوغاريتم "Y". تأكد من تقويم الدالة برسـمها علـى ورق مربعـات واسـتنتج ثابتا المعادلة .



X	0	1	2	3	4	5
Y	3	8	22	60	164	445
Ln Y	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1	6.1

يتضح من الخط المستقيم أن الدالـة أسية من تقـاطع الخط مع المحـور الرأسـي يمكن الحصـول علـى الثابـت "a_1" مـن ميل الخـط وعلـى هـذا فـإن معادلـة الـنقط بـدلا مـن حسـاب لوغاريتمات "Y" فيمكن رسم الدالة على ورق نصف لوغاريتمي (Semi - Logarithmic) وفيه يمثل الطول على المحور الرأسي للوغاريتم بدون حساب .

من الرسم المرفق للمثال السابق يتضح أن :



$$\ln a_0 = 1.1$$

$$a_0 = e^{1.1}$$

$$a_0 = 3.0$$

$$a_1 = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a_1 = \frac{\ln 445 - \ln 3}{5}$$

$$= \frac{6.1 - 1.1}{5} = 1$$

$$\therefore Y = 3.e^{X}$$

4-2-6 دالة القـــوى Power Function

$$\boxed{Y = a_0 . X^{a_1}}$$

يفيد في هذه الحالة أيضا أخذ لوغاريتم الطرفين ينتج:

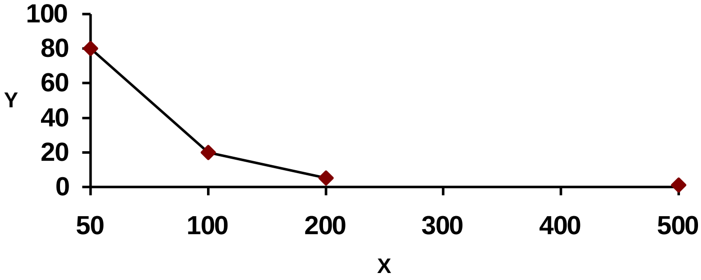
$$\ln Y = \ln a_0 + a_1 \ln X$$

وبهذا الشكل تقومت الدالة ، ويمكن أن يتبين ذلك من رسم "*Ln Y*" مقابل "*Ln X*" وبدلا من حساب اللوغاريتمات فيمكن رسم الدالة على ورق لوغاريتمي في كل من الاتجاهين الرأسي والأفقي. ويمكن قراءة "a_0" من تقاطع الدالة مع محور الصادات و "a_1" كميل الخط أو يمكن حساب الثابتين كما في المثال التالي.

مثال (4-6): النتائج التالية تبين معدل تدهور مبيد أعشاب "Y" كنسبه مئوية في اليوم مع القطر المتوسط لقطرات الرش "X" بالميكرون. المطلوب التأكد من إمكان تمثيل النتائج بدالة

القوه. إوجد أيضا ثابتي الدالة وقدر القطر المتوسط الذى يعطى معدل تدهور مقداره 30% فى اليوم .

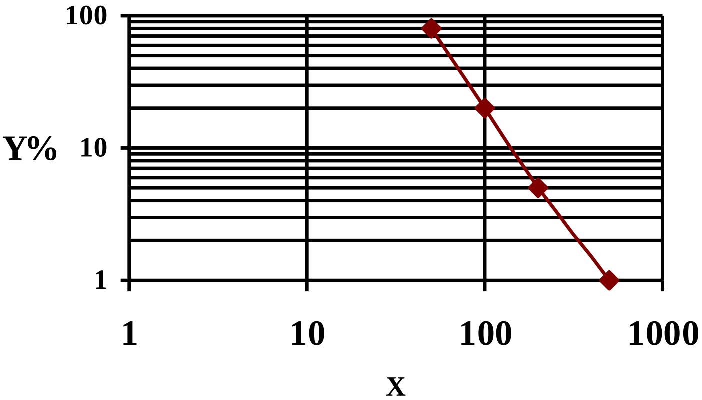
X (μ)	50	100	200	500
Y (% / day)	80	20	5	1



الحـــل

حيث أن العلاقة خط مستقيم على ورق (Log - Log) فإنها دالة قوى.

من الصعب تقدير "a_0" من على الرسم حيث لا توجد عليه $X = 1$ ومع ذلك فيمكن أخذ نقطتين على الخط والتعويض بهما فى المعادلة للحصول على الثابتين .



$$Y_1 = a_0 . X_1^{a_1} \qquad \therefore 80 = a_0 (50)^{a_1} \qquad (1)$$

$$Y_2 = a_0 . X_2^{a_1} \qquad \therefore 1 = a_0 (500)^{a_1} \qquad (2)$$

بقسمة المعادلة (2) على (1):

$$\frac{1}{80} = \frac{500^{a1}}{50^{a1}} \qquad , \left(\frac{1}{80}\right) = \left(\frac{500}{50}\right)^{a_1}$$

$$\therefore \frac{1}{80} = (10)^{a_1} \quad \therefore Log \frac{1}{80} = a_1 \; Log\, 10$$

$$\therefore a_1 = -1.9 \quad or \quad a_1 = {ln\left(1/_{80}\right)}/{ln(10)} = -1.90$$

للحصول على "a_0" يمكن التعويض فى إحدى المعادلتين ولتكن (1):

$$a_0 = 80/(50)^{a_1} = 80/(50)^{-1.90} = 135000$$

$$\therefore Y = 135000 . X^{-1.90}$$

$$X = \left(\frac{135000}{Y}\right)^{1/1.9} \qquad , when \;\; Y = 30\%$$

$$\therefore X = \left(\frac{135000}{30}\right)^{1/1.9} = 83\mu$$

5-2-6 دالة بواسون Boissen

$$\boxed{Y = a_0 . x . e^{-a_1 X \alpha}}$$

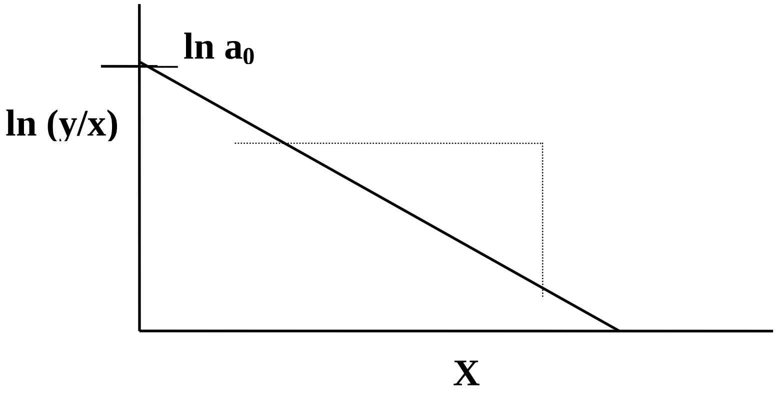
تبدأ هذه الحالة بالصفر ثم تصل إلى حد أقصى ثم تقل مقاربة محور السينات عند اللانهاية. ويقابل هذا الشكل في تطبيقات كثيرة منها استجابة النبات للمياه وعناصر النمو الأخرى مثل النيتروجين ، حيث يزيد المحصول بزيادة العنصر ثم يقل عندما تصل الزيادة

إلى حد الضرر. وقد استخدمت في هذه الحالة أيضا معادلة الدرجة الثانية. لتقويم هذه الدالة أيضا يؤخذ لوغاريتم الطرفين بعد قسمتهما على "X" فتصبح العلاقة على هيئة خط متصل على الصورة:

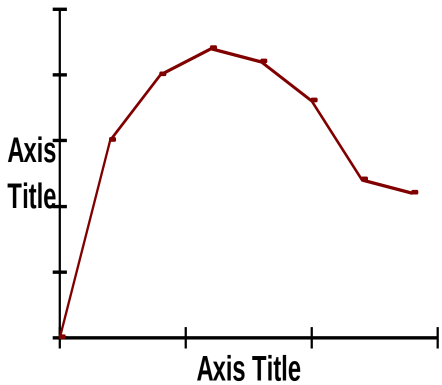
$$ln\ (Y/x) = ln\ a_0 - a_1 x$$

ويمكن تلخيص طرق تحديد الثابتين "a_0 , a_1" في التالي:

1- رسم "Ln y/x" ضد "X" بعد حساب اللوغاريتمات على ورقة مربعات عاديه



، فيكون التقاطع هو "Ln a_0" ويكون الميل السالب هو "a_1".



2 - رسم "" y / x ضد ""xعلى ورقة نصف لوغاريتمية وتحديد قيمة "a_0" من تقاطع الخط مع محور الصادات عندما تكون " a = 1" فتحسب على أنها:

$$-a_1 = \frac{ln\left(\frac{y}{x}\right)_2 - ln\left(\frac{y}{x}\right)_1}{x_2 - x_1}$$

وذلك في معادلة الخط المستقيم على الصورة:

$$ln\ (y/x) = ln\ a_0 - a_1x$$

3- تكوين معادلتين من أخذ نقطتين على الخط بعد رسمه والتأكد من استقامته وحلهما كما في المثال السابق.

مثال (5-6):البيانات التالية تمثل وزن المادة الجافة في نبات " y " لمعاملات رطوبة مختلفة " w"

w (av.water)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y (g/pot)	0	1.5	2.0	2.2	2.1	1.8

ارسم شكل الدالة لتتحقق منها ، وجرب إمكان توفيق معادلة "بواسون" لتمثيلها وأوجد قيمة الثابتين . وحدد قيمة " y " المتوقعة عندما تكون " w = 1.2"

الحـــل

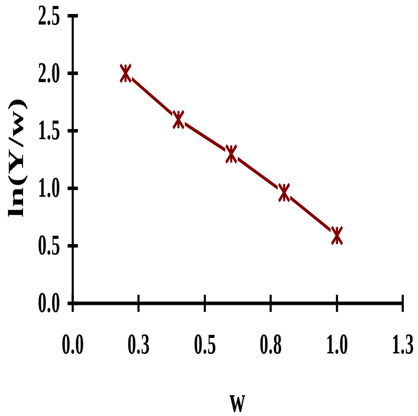
w	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y	0	1.5	2.0	2.2	2.1	1.8
y/w	-	7.5	5.0	3.7	2.6	1.8
ln (y/w)	-	2.0	1.6	1.3	0.96	0.59

استقامة " ln (y/w) " ضد "w" تؤكد إمكان استخدام دالة " بواسون ". معادلة الخط المستقيم من الرسم:

$$ln\, y/w = 2.3 - 1.7w$$

$$\therefore y/w = e^{2.3} \times e^{-1.7w}$$

$$\therefore y \quad = 9.974w \times e^{-1.7w}$$



عندما تكون "w=1.2" ويمكن إيجاد قيمة "y" من الرسم أو كالآتي:

$$y = 10 \times 1.2 \times e^{-1.7 \times 1.2} = 1.56$$

6-2-6 دالـــة "Gauss"

$$\boxed{Y = a_0 . x . e^{-a_1 X^2}}$$

تماثل هذه الدالة "بواسون" لولا أنها تؤول إلى الصفر أسرع لوجود التربيع في الأس.

لتقييم هذه الدالة وتحديد الثابتين " a_0 , a_1 " يؤخذ لوغاريتميا الطرفين، بعد القسمة على " x " كما سبق.

$$\ln \frac{y}{x} = \ln a_0 - a_1 X^2$$

إذا فالدالة " y/x " خطية مع " x^2 " ورسمها يعطى خطا مستقيما.

مثـال (6-6): جرب إمكـان توفيـق معادلـة جـاوس لتمثيـل بيانـات المثـال السـابق، وأوجـد ثـابتى المعادلـة ، واحسب قيمة " Y " المتوقعة عندما " w = 1.2 " وقارنها بنتيجة المثال السابق.

w	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y	0	1.50	2.00	2.20	2.10	1.80
Y/w	-	7.50	5.00	3.70	2.60	1.80
ln (y/w)	-	2.00	1.60	1.30	0.96	0.59
W^2	0	0.04	0.16	0.36	0.64	1.00

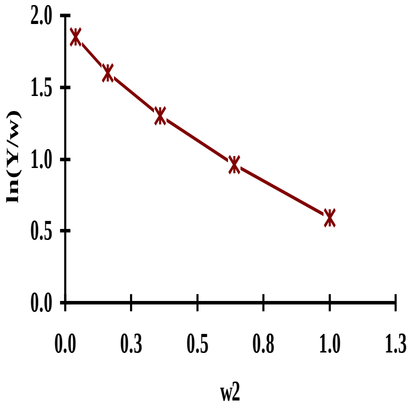
استقامة " ln y/w " ضد " W2 " تبين إمكان استخدام دالة جاوس ولو أن الانحرافات عن المستقيم أكبر منها مع دالة بواسون. معادلة الخط المستقيم من الرسم :

$$\ln \frac{y}{w} = 1.9 - 1.4 w^2$$

$$\frac{y}{w} = e^{1.9} \; e^{-1.4 \; w^2}$$

$$y = 6.686 w \; e^{-1.4 \; w^2}$$

عندما تكون " w= 1.2 " يمكن إيجاد قيمة " y " من الرسم أو بالحساب كالأتى:



$$y = 6.7 \times 1.2 \ e^{-1.4 \times 1.2^2}$$
$$= 1.1 \ \ g / pot$$

واضح أن هذه القيمة تقل عن " 1.56 g/pot " التي سبق حسابها من معادلة بواسون نظرا لسرعة اقتراب دالة جاوس من الصفر في مرحلتها الأخيرة كم سبق ذكره.

3-6 طريقة النقط المتوسطة Method of Average Points

تعريف النقطة المتوسطة Definition of average point

إذا كان لدينا النقط (x_I, y_i) , (I=1 , 2 , 3 , 4......n) فإن إحداثيات النقطة المتوسطة (x_a, y_a) تعطى من العلاقات:

$$x_a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad , \qquad y_a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

1-3-6 طريقة النقطة المتوسطة لمعادلة الخط المستقيم

Average point method for linear equation

تنحصر هذه الطريقة فى تقسيم القراءات المعلومة إلى فئتين n_2 , n_1 قراءاتهما متساوية تقريباً. ثم نوجد إحداثيات النقطة المتوسطة لكل فئة حيث تكون:

$$\left(\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_i \qquad , \qquad \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} y_i\right)$$

and

$$\left(\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} x_i \qquad , \qquad \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} y_i\right)$$

ثم تعيين معادلة الخط المستقيم الذي يمر بهاتين النقطتين. فإذا كانت معادلة الخط المستقيم $Y=a_0+a_1 X$ فإنه بالتعويض بإحداثيات النقط المتوسطة تحصل على:

$$\sum_{i=1}^{n_1} y_i = n_1\, a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n_1} x_i \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n_2} y_i = n_2\, a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n_1} x_i \qquad (2)$$

وتسمى المعادلات 2،1 بالمعادلات الاعتيادية Normal Equation وبحلها نحصل على قيمة كل من الثابتين a_1 , a_0. وقد تعتمد قيمة a_0 , a_1 على طريقة تقسيم القراءات، والمعتاد أن يكون تقسيم القراءات إلى فئتين من النقط إحداهما تظهر على يمين الشكل (الخط المستقيم) والأخرى عن يساره.

مثال (6-7): إوجد معادلة الخط المستقيم الذي يناسب النقط المبينة إحداثياتها في الجدول التالي:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1.48	1.76	2.78	3.32	3.86	4.15	4.75	5.66	6.18	6.86

نأخذ الخمسة قيم الأولى كفئة أولى وتكون إحداثيات النقطة المتوسطة لها هي:

$$\overline{x_1} = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3$$

$$\overline{y_1} = \frac{1}{5}(1.48+1.76+2.78+3.32+3.86) = 2.64$$

ثم نأخذ الخمسة قيم الثانية كفئة ثانية وتكون إحداثيات النقطة المتوسطة لها هي:

$$\overline{x_2} = \frac{1}{5}(6+7+8+9+10) = 8$$

$$\overline{y_2} = \frac{1}{5}(4.15+4.75+5.66+6.18+6.86) = 5.52$$

$$\therefore a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5.52 - 2.64}{8 - 3} = 0.576$$

$$\therefore y - 2.64 = 0.576(x - 3)$$

$$\therefore y = 0.912 + 0.576 \ \ x$$

ولتبسيط العمل الحسابي يمكن كتابة جدول القراءات المعطاة في صورة فئتين من القراءات ثم إيجاد Σx , Σy لكل فئة هكذا:

x	y	X	y
1	1.48	6	4.15
2	1.76	7	4.75
3	1.78	8	5.86
4	3.32	9	6.18
5	3.86	10	6.86
Σx=15	Σy=13.20	Σx=40	Σy=27.60

بالتعويض فى المعادلتين 2 , 1 حيث $n_1 = n_2 = 5$ نحصل على:

$$13.20 = 5\,a_0 + 15\,a_1$$

$$27.60 = 5\,a_0 + 40\,a_1$$

بحل هاتين المعدلتين نحصل على a_0 , a_1 وتأخذ معادلة الخط المستقيم الصورة:

$$y = 0.912 + 0.576\ x$$

2-3-6 طريقة النقط المتوسطة لصورة القطع المكافئ

Method of average point for parabolic type.

طريقة النقط المتوسطة يمكن أن يستخدم أيضاً لإيجاد معادلة القطع المكافئ على الصورة:

$$y = a_0 + a_1\ x + a_2\ x^2$$

لتناسب القراءات المعطاة، وفى هذه الحالة لتعيين الثوابت الثلاثة a_0 , a_1 , a_2 يلزم تقسيم النقط المعطاة إلى ثلاث فئات ثم إيجاد إحداثيات النقط المتوسطة لكل فئة ثم تعيين القطع المكافئ الذي يمر بالثلاث نقط المتوسطة.

مثال (6-8): إوجد معادلة القطع المكافئ التي تناسب القراءات الآتية:

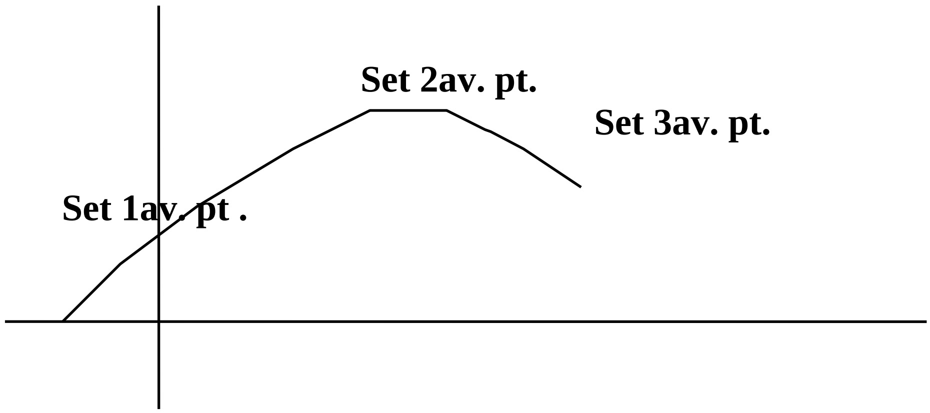
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

y	-3.5	0.4	2.5	4.2	5.8	6.6	7.8	8.0	8.6	7.6	6.2

نأخذ الثلاث نقط الأولى كفئة أولى والأربعة نقط التالية كفئة ثانية والأربعة نقط الأخيرة كفئة ثالثة ثم نوجد إحداثيات النقط المتوسطة المناظرة فتكون هي:

الفئة الأولى	**(-0.2 , -1)**	**متوسط الثلاث نقط الأولى**
الفئة الثانية	**(2.5 , 6.1)**	**متوسط الأربع نقط التالية**
الفئة الثالثة	**(6.5 , 7.6)**	**متوسط الأربع نقط الأخيرة**

لإيجاد القطع المكافئ الذي يمر بهذه الثلاث نقط، نعوض عن x , y فى المعادلة (1) من إحداثيات هذة النقط الثلاث فنحصل على:



$$-0.2 = a_0 - a_1 + a_2$$

$$6.1 = a_0 + 2.5\, a_1 + 6.25\, a_2$$

$$7.6 = a_0 + 6.5\, a_1 + 42.25\, a_2$$

$$\frac{a_0}{\begin{vmatrix} -0.2 & -1 & 1 \\ 6.1 & 2.5 & 6.25 \\ 7.6 & 6.5 & 42.25 \end{vmatrix}} = \frac{a_1}{\begin{vmatrix} 1 & -0.2 & 1 \\ 1 & 6.1 & 6.25 \\ 1 & 7.6 & 42.25 \end{vmatrix}} = \frac{a_2}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -0.2 \\ 1 & 2.5 & 6.1 \\ 1 & 6.5 & 7.6 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 6.25 \\ 1 & 6.5 & 42.25 \end{vmatrix}}$$

بحل الثلاث معادلات الأخيرة نجد أن:

$a_0 = 2.075$, $a_1 = 2.085$, $a_2 = -0.190$

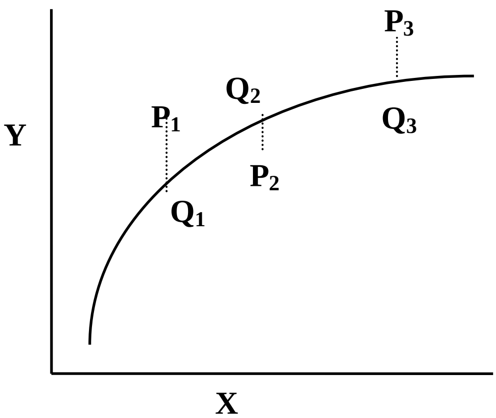
و تكون المعادلة المطلوبة هي:

$$y = 2.075 + 2.085\,x - 0.190\,x^2$$

4-6 طريقة المربعات الصغرى Method of Least squares

1-4-6 تعريف الإنحرافات Definition of Residuals

نفرض أنه فى الشكل، المنحنى $y = f(x)$ مناسباً للنقط $P_1(x_1 , y_1)$, $P_2(x_2 , y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ وهكذا. يعرف الإنحراف residual لأى نقطة من النقط المبينة بالشكل عن المنحنى المناسب بأنه المسافة الرأسية بين هذه النقطة والمنحنى. لذلك فإن الإنحراف للثلاث نقط P_1 , P_2 , P_3 يكون على الترتيب هو:



$$Q_1\,P_1 = y_1 - f\left(x_1\right)$$
$$Q_2\,P_2 = y_2 - f\left(x_2\right)$$
$$Q_3\,P_3 = y_3 - f\left(x_3\right)$$

ويكون الانحراف موجباً إذا كانت النقطة أعلى المنحنى ويكون سالباً إذا كانت النقطة أسفل المنحنى. ومن هذا التعريف نرى أن أفضل توفيق للمنحنى هو الذي فيه القيم المطلقة للانحرافات يكون صغيراً.

ويمكن أن نرى أن الخط المستقيم الذي يوافق القراءات المعطاة بطريقة النقط المتوسطة مهما كانت تقسيم القراءات إلى فئتين هو الخط المستقيم الذي فيه المجموع الجبري للانحرافات يكون مساوياً للصفر. وهذا لا يعنى أننا بطريقة النقط المتوسطة من الضروري أن نحصل على أحسن توفيق، فقد تكون القيم المطلقة للانحرافات كبيرة مع أن الانحرافات الموجبة توازن الانحرافات السالبة. وعلى ذلك فإن المجموع الجبري للانحرافات لا يمكن أن يستخدم كمبدأ لأحسن توفيق.

وحيث أن مربعات الانحرافات مهما كانت، دائماً تكون موجبة، إذن مجموع مربعات الانحرافات لا يساوى صفراً (إلا إذا كان المنحنى يمر بجميع النقط). وبذلك يكون من الواضح أن أفضل توفيق هو عندما يكون هذا المجموع (مجموع مربعات الانحرافات) صغيراً. وعليه فإن توفيق المنحنى في صورة معينة لفئة من النقط يكون عن طريق تعيين الثوابت بحيث تكون مجموع مربعات الانحرافات صغيراً كلما أمكن ذلك.

تعريف : أحسن توفيق لمنحنى معلوم صورته هو الذي فيه تعيين الثوابت بحيث تكون مجموع مربعات الانحرافات أقل ما يمكن.

ويرجع هذا التعريف إلى نظرية الاحتمالات وليس هناك مجال في هذا الحيز لمناقشتها.

2-4-6 طريقة أقل التربيعات لصورة الخط المستقيم

Method of Least Squares for Linear Type

نفرض أن صورة الخط المستقيم هي:

$$y = a_0 + a_1 \, x$$

فإذا كانت القراءات المعطاة هي:

$$(x_i \, , y_i) \quad (I=1 \, , 2 \, , 3 \, , 4 \, , \ldots \, , n)$$

فإنه حسب تعريف الانحرافات يكون مجموع مربعات الانحرافات مساوياً:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 \, x_i \right)$$

وواضح أن E دالة في a_0 , a_1 ولكي تكون E أقل ما يمكن (نهاية صغرى) فإن عاملاتها التفاضلية الجزئية بالنسبة إلى كل من a_0 , a_1 يكون مساوياً للصفر، أي أن:

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0 \quad , \quad \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0$$

$$or \sum_{i=1}^{n} (yi - a_0 - a_1 \; x_i) \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} x_i (yi - a_0 - a_1 \; x_i)$$

ويمكن كتابة المعادلتين الأخيرتين على الصورة:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a_0 \, n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i$$

حيث n عدد القراءات المعطاة. وهذه المعادلات تسمى المعادلات القياسية Normal equations، وبحل هذه المعادلات نحصل على كـــل من الثابتين a_0 , a_1.

مثال (6-9): باستخدام طريقة المربعات الصغرى إوجد انسب معادلة خط مستقيم للقراءات الآتية:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1.48	1.76	2.78	3.32	3.86	4.15	4.75	5.66	6.18	6.86

المعادلات القياسية لتعيين الثوابت a_0 , a_1 هي:

$$\sum y = a_0 \, n + a_1 \sum x$$

$$\sum x \, y = a_0 \sum x + a_1 \sum x^2$$

حيث n = 10 (عدد القراءات). ثم نكون الجدول الآتى:

x	y	x^2	Xy
1	1.48	1	1.480
2	1.76	4	3.540
3	2.78	9	8.340
4	3.32	16	13.28
5	3.86	25	19.30

6	**4.15**	**36**	**24.90**
7	**4.75**	**49**	**33.25**
8	**5.66**	**64**	**45.28**
9	**6.18**	**81**	**55.62**
10	**6.86**	**100**	**58.60**
$\Sigma x=55$	**$\Sigma y=40.80$**	**$\Sigma x^2=385$**	**$\Sigma xy=273.57$**

بالتعويض فى المعادلات القياسية من هذا الجدول وعن $n = 10$ نحصل على:

$$40.80 = 10\ a_0 + 55\ a_1 \qquad , \qquad 273.57 = 55\ a_0 + 385\ a_1$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن:

$$a_0 = 0.596 \qquad , \qquad a_1 = 0.596$$

وتكون أنسب معادلة خط مستقيم للقراءات المعطاة هي:

$$y = 0.802 + 0.596\ x$$

3-4-6 طريقة المربعات الصغرى لصورة كثيرة الحدود.

إذا كان لدينا القراءات: $(x_i , y_i)\ ,\ (I = 1 , 2 , 3 , ... , n)$

والمطلوب توفيق منحنى هذه القراءات لكثيرة الحدود من الدرجة m حيث $m < (n-1)$ أى كثيرة حدود على الصورة:

$$y = a_0 + a_1\ x + a_2\ x^2 + \cdots + a_m\ x^m$$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_k\ x^k$$

في هذه الحالة يكون مجموع مربعات الانحرافات مساوياً:

$$\boldsymbol{E = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \sum_{k=0}^{m} a_k\ x_i^{\ k}\right)^2}$$

وواضح أن E دالة في a_k حيث $k = 0 , 1 , 2 , ... , m$ ولكي E أقل ما يمكن فإن:

$$\frac{\partial E}{\partial a_k} = 0 \qquad (k = 0,1,2,\cdots,m)$$

وهذه تعطينا (m+1) من المعادلات وبحلها تتعين الثوابت:
.a_k (k = 0 , 1 , 2 , ... , m)

مثال (7-10): باستخدام طريقة المربعات الصغرى إوجد كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة التي توافق القراءات الآتية:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	2.105	2.808	3.614	4.604	5.857	7.451	9.467	11.985

بوضع كثيرة الحدود على الصورة:

$$y = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3$$

نجد أنها تحتوى على أربعة ثوابت فتكون المعادلات القياسية لتعيينها هي:

$$\sum y = n\, a_0 + a_1 \sum x + a_2 \sum x^2 + a_3 \sum x^3$$

$$\sum xy = a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum x^3 + a_3 \sum x^4$$

$$\sum x^2 y = a_0 \sum x^2 + a_1 \sum x^3 + a_2 \sum x^4 + a_3 \sum x^5$$

$$\sum x^3 y = a_0 \sum x^3 + a_1 \sum x^4 + a_2 \sum x^5 + a_3 \sum x^6$$

حيث n هي عدد القراءات. وبذلك يلزم تكوين الجدول الآتي:

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	y	xy	x^2y	x^3y
1	1	1	1	1	1	2.105	2.105	2.105	2.105
2	4	8	16	32	64	2.808	5.616	11.232	22.464
3	9	27	81	243	729	3.614	10.841	32.526	97.578
4	16	64	256	1024	4096	4.604	18.406	73.664	294.656

5	25	125	625	3125	15625	5.857	24.285	149.425	735.125
6	36	216	1296	7776	46656	7.451	44.706	268.236	1609.416
7	49	343	2401	16807	117649	9.467	66.269	463.883	3247.181
8	64	512	4096	32768	262144	11.985	95.880	767.040	6136.320
Σ= 36	Σ= 204	Σ= 1296	Σ= 8772	Σ= 61776	Σ= 446954	Σ= 47.691	Σ= 273.119	Σ= 1765.111	Σ= 12141.845

بالتعويض في المعادلات الأربع السابقة من الجدول السابق و عن $n = 8$ ثم حل المعادلات الناتجة نحصل على:

$$a_0 = 1.426 \quad , \quad a_1 = 0.693 \quad , \quad a_2 = -0.028 \quad , \quad a_3 = 0.013$$

فتكون كثيرة الحدود التي توافق القراءات المعطاة هي:

$$y = 1.426 + 0.693\ x - 0.028\ x^2 + 0.013\ x^3$$

الباب السابع

قيـــاس الأخطـــاء **Measuring errors**

تحدث الأخطاء في أي تحليل عددي أثناء الحسابات وسوف نناقش تلك الأخطاء من حيث :

1- مصادرها

2- تقديرها وقياسها

3- تقليلها للحد المطلوب

4- انتشارها خلال الحسابات .

مصـــادر الأخطـــــــاء : Sources of Errors

يمكن أن تنتج الأخطاء أثناء حل المشاكل الفيزيائية أو الهندسية من مصادر عدة .

أولا : يمكن أن ينتج الخطأ عن نظام أو طريقة البرمجة .

ثانياً: يمكن أن ينتج عن اعتماد الموديل الرياضي على اقتراحات غير واقعية .

فمثلا : يمكن أن يفترض مبرمج الكمبيوتر أن قوة الشد للعربة تتناسب مع سرعتها ، لكن في الواقع هي تتناسب مع مربع سرعتها. يمكن أن يتسبب ذلك الخطأ في حدوث خطأ كبير في تعيين كفاءة العربة بغض النظر عن دقة المعادلات والطرق العددية المستخدمة فى الحل.

ثالثاً: يمكن أن ينتج خطأ أيضا بسبب وجود أخطاء في البرمجة نفسها

أو في قياس الكميات الفيزيائية . لكن عمليا ، عند استخدامنا الطرق العددية لحل المعادلات نريد أن تركز على نوعين من الأخطاء .

1- Round – off error.

1- الخطاء الناتج عن وقف تكرار الأرقام بعد العلامة العشرية .

2- Truncation error.

2- الخطاء الناتج عن الاختصار للحدود الثلاثية .

ما هو الخطاء الناتج عن وقف التكرار

What is round off error ?

يستطيع الكمبيوتر أن يعبر عن الرقم بطريقة تقريبية فقط فمثلا الرقم 1/3 يمكن أن يعبر عنه الكمبيـوتر بـــ 0.333333 وبالتـالي يكـون الخطــأ التكـراري فـي هـذه الحالـة هـو

$$= \frac{1}{3} - 0.333333 = 0.00000033 + 3.3 \times 10^{-7}$$

كذلك يوجد أرقام أخري لا يمكن التعبير عنها بشكل صحيح وهي $\pi, \sqrt{2}$

ما هو خطأ الاختصار ؟

What is truncation error ?

يعرف خطأ الاختصار بأنه الخطأ الناتج عن اختصار التعبير الرياضي .

علـــى ســـبيل المثـــل ، مفكـــوك مـــاكلورين للدالـــة e^x يعطـــي فـــي الصـــورة

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2i} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots .$$

ولهذه المتسلسلة عدد لانهائى من الحدود ، لكن عند استخدام هذه المتسلسلة لحساب $\overset{x}{e}$ فإننا نستخدم عدد محدود من تلك الحدود . فإذا استخدمنا ثلاث حدود فقط فإن

$$\overset{x}{e} = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

ويكون خطأ الاختصار فى هذه الحالة هو

$$\text{truncation error } = \overset{x}{\mathrm{e}} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots.$$

<u>لكن كيف يمكن التحكم في truncation error في هذ1 المثال ؟</u>

للـتحكم فـى الخطـأ النـاتج عـن الاختصـار يمكننـا أن نسـتخدم (relative approximation error) وذلك لمعرفة كم حد مطلوب استخدامه .

فإذا فرضنا أننا نريد حساب $e^{1.2}$ باستخدام مفكوك مالكورين maclaurin series فإن

$$e^{1.2} = 1 + 1.2 + \frac{1.2^2}{2!} + \frac{1.2^3}{3!} + ...$$

بفرض أننا نريد أن يكون الخطأ في الحسابات أقل من 1% بحساب الأخطـاء نجد أن

استخدام 6 حدود يجعل relative approximation terror اقل من 1% .

أمثلة أخرى على Truncation error

يمكن لـ Truncation error أن يحدث في تعبيرات رياضية أخرى غير المتسلسلات ، فمثلا

:

لإيجاد تفاضل دالة ، يمكن حسابه من :

$$f1(x) \cong \lim \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta X}, \Delta x \to 0$$

لكن نحت لا نستطيع استخدام ΔX=0 لذلك تختار ΔX صغيرة جدا بحيث يكون :

$$f1(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

لذلك يحدث Truncation error هنا بسبب استخدام قيمة محددة لـ ΔX بدلا من ΔX=0 .

مثـــــال :

لإيجاد $f^1(3)$ للدالة $f(x)=x^2$

يمكننا حساب القيمة الحقيقية وذلك بإجراء التفاضل :

$F(x)=x^2$

$\therefore F^1(x)=2x$

$= 2\times 3$

$= 6$

فإذا اخترنا $\Delta X = 0.2$ وعوضنا في معادلة الفروق :

$$f^{1}(3) = \frac{f(3+0.2) - f(3)}{0.2}$$
$$= \frac{f(3.2) - f(3)}{0.2}$$
$$= \frac{10.24 - 9}{0.2}$$
$$= \frac{1.24}{0.2}$$
$$= 6.2$$

ويكون خطأ الاختصار هو :

Truncation error = 6-6.2=0.2

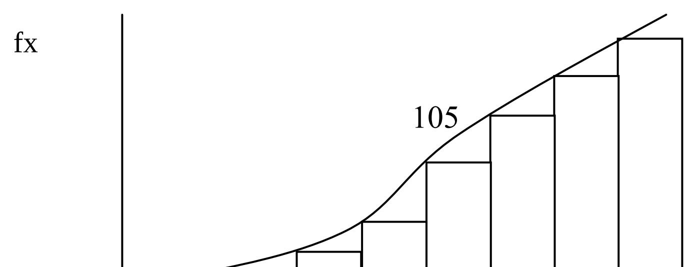
هل يمكن أن تقلل الخطأ باختيار قيمة أقل لـ ΔX؟

قد يحدث خطأ اختصار أيضا في التكامل العددي

مثال :

$$I = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

الحل المضبوط هو عبارة عن حساب المساحة تحت المنحني، لكن لعمل ذلك، مطلوب حساب مساحة عدد لانهائى من المستطيلات الصغيرة، وذلك لا يحدث كما في المثال ويسبب أننا لا يمكننا عمل ذلك فإننا نحصل على Truncation error مثال :



بطريقة دقيقة وبطريقة ترتيبية :

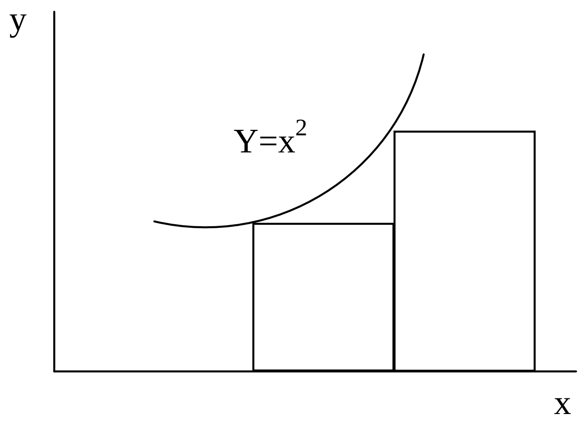
الطريقة الدقيقة :

$$\int_{3}^{4} x^2 dx$$

$$\int_{3}^{9} x^2 dx = \left[\frac{x3}{3}\right]_3^9$$

$$= \left[\frac{9^3 - 3^3}{3}\right] = 234$$

الطريقة التقريبية ، إذا رسمنا مستطيلين لتقريب المساحة كما بالشكل ، مستطيلين متساويين في العرض .



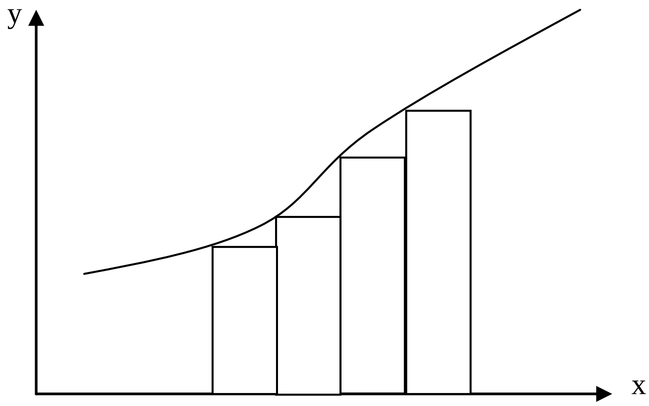
رسم يوضح قيمة تقريبية للمساحة تحت المنحني y=x2 x=3 حتى x=9

فإن القيمة التقريبية للمساحة تكون :

$$\int_3^9 x^2 dx = x^2\Big|_{x=3}(6-3) + x^2\Big|_{x=6}(9-6)$$
$$= (3)^2 3 + (6^2)3$$
$$= 27 + 108$$
$$= 135$$

وبالتالي يكون Truncation error هو 234-135=99

هل يمكنك تقليل Truncation error باختيار عدد أكبر من المستطيلات كما هو موضح بالشكل التالى ما هو الخطاء الناتج



رسم للعلاقة y=x2 يبين المساحة التقريبية تحت المنحني

من X =3 حتى X =9 باستخدام أربع مستطيلات .

الحـــــــــل :

$$\int_3^9 x^2 dx = (x^2)\Big|_{x=3}(4.5-3)+(x^2)\Big|_{4.5}(6-4.5)+(x^2)\Big|_{6}\big(7.5-6)+(x^2)\Big|_{7.5}(9-7.5)\big)$$
$$= (3)^2 1.5+(4.5)^2 1.5+(6)^2 1.5+(7.5)^2 1.5$$
$$= 9x1.5+(20.25)x1.5+36x1.5+(56.25)x1.5$$
$$= 182.25$$

ويكون الخطأ الناتج عن التقريب 234-182.25=51.75 وهو أقل مما سبق :

تقدير الخطأ Quantifying the error

الأخطاء التجريبية ومعالجتها: Treatment of Experimental Errors:

تقسم الأخطاء التجريبية إلى نوعين هما :

1-الاخطاء المنظومة: Systematic Errors

الخطأ الذي يتكرر في جميع مرات القياس بنفس المقدار ونفس الإشارة يقال له خطأ منظوم وهذا في اغلب الاحيان يعتمد على اجهزة القياس مع ملاحظة ان تكرار القياس لا يمكن ان يكشف ولا يقلل من الاخطاء المنظومة . وهذه الاخطاء لا تخضع للمعاملات الإحصائية .وتكون عادة ثابته ولها صله بظروف عملية القياس كالخطأ الصفري كأن يكون الخطأ في المقياس نفسه أي يكون (1 cm) في مسطرة ما.

ويمكن تجنب هذه الاخطاء بمعرفتنا لأجهزة القياس بصورة صحيحه واختيار المناسب منها بعد معرفة الظروف الملائمة لاستخدامها ومعرفة مقدار الخطأ الذي يسببه كل مقياس وحسابه ومن ثم اضافة مقدار الخطأ وطرحه من النتيجة النهائية حسب الوضع العام. وهذه الاخطاء تكون دائما باتجاه واحد اما موجبه او سالبه .

2- الاخطاء العشوائية:

هي الاخطاء التي تتغير في المقدار والاتجاه بتكرار القياس واحتمال كونها موجبه يساوي احتمال لا كونها سالبه وهذه تكون موجوده في جميع القياسات العملية ويتم اكتشافها

بتكرار القيا س كما يمكن تقليلها الى ادنى حد ممكن بتكرار القياس مرات كثيره واخذ المتوسط الحسابي الذي يكون اكثر قربا من القيمة الحقيقية كما يمكن تناولها بطرق إحصائية ايضا.

الخطأ المطلق للقياس : Absolute Error (e_{ab})

هو الفرق بين القيمة المتوقعة والقيمة المقاسة فعليا:

ويمكن تمثيل العلاقة رياضياً كما يلي :

$$e_{ab} = Y_n - X_n \qquad (1)$$

حيث ان :

e_{ab} : الخطأ المطلق

Y_n: القيمة المتوقعة للقياس

X_n: القيمة المقاسة فعلياً

الخطأ النسبي : Relative Error (e_r)

النسبة بين الخطأ المطلق للقياس والقيمة المتوقعة للقياس

$$e_r = \frac{e_{ab}}{Y_n} = \left| \frac{Y_n - X_n}{Y_n} \right| \qquad (2)$$

النسبة المئوية للخطأ: Percentage error ($e_{\%}$)

هي النسبة بين الخطأ المطلق للقياس والقيمة المتوقعة للقياس كنسبة مئوية وكما في المعادلة التالية:

$$e_{\%} = \frac{e_{ab}}{Y_n} \times 100\% = \left| \frac{Y_n - X_n}{Y_n} \right| \times 100\% \qquad (3)$$

دقة القياس : Accuracy

هي مدى تطابق القيمة المقاسة بالقيمة المتوقعة.

الدقة النسبية : Relative Accuracy (Ar)

هي النسبة بين القيمة المقاسة والقيمة المتوقعة للقياس

$$A_r = \frac{X_n}{Y_n} = 1 - \left|\frac{Y_n - X_n}{Y_n}\right| = 1 - e_r \qquad (4)$$

النسبة المئوية لدقة القياس: Percentage Accuracy(a%)

هي النسبة بين القيمة المقاسة والقيمة المتوقعة للقياس كنسبة مئوية:

$$a_{\%} = \frac{X_n}{Y_n}\% = 100\% - \left|\frac{Y_n - X_n}{Y_n}\right| \times 100\% \qquad (5)$$

$$a_{\%} = 100\% - percentageError = 100\% - e_{\%}$$

(6)

مثال (1) : قام متدرب بقياس جهد على طرفي مقاومة فكانت القيمة المقاسة تساوي 49V, اذا كانت القيمة المتوقعة للجهد حسب الحسابات النظرية تساوي 50V ،احسب:

- الخطأ المطلق
- الخطأ النسبي
- النسبة المئوية للخطأ
- الدقة النسبية
- النسبة المئوية للدقة

مثال (2) :قام عشرة متدربين بقياس جهد كهربائي باستخدام فولتميتر تماثلي وكانت النتائج كما يلي:

رقم القراءة	قيمة القراءة V_i(volts)
1	98
2	102
3	101
4	97
5	100
6	103
7	98
8	106
9	107
10	99

احسب النسبة المئوية لدقة القياس (Precision) للقراءة رقم (4) : (P_4%)

بتطبيق القانون التالي :

$$P_i\,\% = 100\% - \left|\frac{V_i - \overline{V_n}}{\overline{V_n}}\right| \times 100\%$$

حيث ان :

V_i قيمة القراءة رقم i

$\overline{V_n}$ المتوسط الحسابي لمجموعة من القراءات عددها (n) .

القيمة المتوسطة او الوسط الحسابي : Average value

هو مجموع القراءات مقسوماً على عددها وكما يلي :

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \dots\dots\dots + X_n}{n}$$

اما الانحراف فيعرف على انه الفارق بين القراءة X_i والقيمة المتوسطة لمجموعة القراءات $\overline{X}$ وعليه فان

$$d_i = X_i - \overline{X_i}$$

الانحراف قد يكون سالبا كما يمكن ان يكون موجباً

4- انتشار الخطأ Propagation of error

إذا أجريت الحسابات على أرقام ليست مضبوطة (بها أخطاء) فإن النتيجة الأخيرة سوف يكون بها خطأ . سوف نناقش هنا كيفية انتشار الخطأ في كل رقم وحيد عبر الحسابات ولنأخذ لذلك بعض الأمثلة .

مثال : أوجد حدود الخطأ عند جمع رقمين X و Y حيث:

X= 1.5±0.05

y= 3.4 ±0.04

بالنظر إلى الرقمين المطلوب جمعهما نجد أن أكبر قيمة ممكنه لهما هي

X= 1.55

Y= 3.44

وبالتالي فإن أكبر قيمة محتملة لمجموعهما هي :

X+ y =1.55+3.44=4.99

وكذلك تكون أقل قيمة محتملة للرقمين هما

$X=1.45,\ Y=3.36$

وتكون أقل قيمة لمجموعهما هي

$X+Y=1.45+3.36$

$=4.81$

وبالتالي يكون حد الخطاء لمجموعها هو

$4.81\leq X+Y\leq 4.99$

يمكن ايجاد حد الخطأ للعمليات الحسابية الاخرى X-Y, X/Y, X*Y بنفس الطريقة

كيفية انتشار الخطاء في الدوال :

يفرض أن f دالة في عدة متغيرات x_1,x_2,x_3)..x_n فإن أقصي خطأ محتمل في الدالة f يحسب

من العلاقة :

$$\Delta f\approx\left|\frac{\partial f}{\partial x1}\Delta x\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial x2}\Delta x_2\right|+.....+\left|\frac{\partial f}{\partial xn}\Delta x_n\right|$$

مثال: الشد على عنصر طولي لمساحة المقطع تعطي من العلاقة : $\epsilon=F/h^2E$

حيث :

F = القوة المؤثرة على عنصر الطول بالنوتين N

H = طول أو عرض مساحة المقطع بالمتر M

E= معامل ينج modulus بالباسكال Pa

فإذا كانت

$F\qquad=72\pm0.9\ N$

H = 4±0.1 mm

E = 70± 1.5 GPa

فأوجد أقصي خطأ محتمل في الشد المقاس .

الحل :

يتم أولا حساب القيمة الصحيحة للشد أولا وذلك بالتعويض في القانون بالجزء الصحيح للمتغيرات :

$$\therefore \in = \frac{72}{(4x10^{-3})^2(70x10^9)}$$
$$= 64.286x10^{-6} \qquad Nm^{-2}Pa^{-1}$$
$$= 64.286\mu$$

ثم يتم حساب أقصي خطأ من العلاقة :

$$\Delta \in = \left|\frac{\partial \in}{\partial f}\Delta f\right| + \left|\frac{\Delta \in}{\partial h}\Delta h\right| + \left|\frac{\partial \in}{\partial E}\Delta E\right|$$
$$\because \frac{\partial \in}{\partial f} = \frac{1}{h^2 E}$$
$$,\frac{\partial \in}{\partial h} = -\frac{2f}{h^3 E}$$
$$,\frac{\partial \in}{\partial E} = -\frac{F}{h^2 E^2}$$

$$\therefore \Delta \in \left|\frac{1}{h^2E}\Delta f\right| + \left|\frac{2F}{h^3E}\Delta h\right| + \left|\frac{F}{h^2E^2}\Delta E\right|$$

$$= \left|\frac{1}{(4\times10^{-3})^2(70\times10^9)} x0.9\right| +$$

$$\left|\frac{2\times72}{(4\times10^{-3})^3(70\times10^9)}\times0.0001\right| +$$

$$\left|\frac{72}{(4\times10^{-3})^2(70\times10^9)^2} x1.5x10^9\right|$$

$$= 5.3955\times10^{-6}$$

$$= 5.3955\mu$$

وبالتالي تكون $(\epsilon=64.286\mu\pm5.3955\mu)$

مما يدل على أن الشد الطولي تكون حدوده ما بين $(58.8905\mu, 69.6815\mu)$

الخطأ الناتج من طرح قيم شبة متساوية قد يكون كبيرا جدا ، يمكن أثبات ذلك بنظرية انتشار الخطاء .

مثال :بفرض

$$Z = x - y$$

$$\therefore |\Delta Z| = \left|\frac{\partial Z}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\Delta Z}{\partial y}\Delta Y\right|$$

$$= |(1)\Delta x| + |(-1)\Delta y|$$

وبأخذ القيم المطلقة

$$= |\Delta x| + |\Delta y|$$

وبالتالي فإن التغير النسبي المطلق يكون :

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = \frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{|x-y|} \qquad \rightarrow *$$

فإذا كانت x ، y قريبة من بعضها البعض فإن المقام يصبح صغير جدا بالنسبة للبسط وبالتالي يتفاقم الخطأ .

مثال :

X=2±0.001

Y=2.003±0.001

$$\therefore \left|\frac{\Delta z}{z}\right| = \frac{|0.001| + |0.001|}{2-2.003}$$
$$= 0.6667$$
$$= 66.67\%$$

والحمد لله رب العالمين ،،،