



South valley University



Faculty of science-Qena

Mathematics Department

الكلية: التربية بالگردقة

المقرر: تطبيقية (4) (ديناميكا الجسم الجاسئ + ديناميكا الجسم)

الفرقة: الرابعة رياضيات - اساسى

الفصل الدراسي: الأول

المحاضر: أ. د. جمال عبدالله أحمد حشودي



كلية العلوم بقنا



جامعة جنوب الوادي

اولاً: محاضرات في ديناميكا الجسم الجاسئ

الفهرس

1- الفصل الأول:

1 كينامتيكا الجسم المتماسك

2- الفصل الثاني:

20 عزم القصور الذاتي

3- الفصل الثالث:

56 حاصل ضرب القصور الذاتي

4- الفصل الرابع:

77 كيناتيكا الجسم المتماسك

الفصل الأول

كينامتيكا الجسم المتناسك

Kinematics of Rigid Body

كينامتيكا الجسم الجاسئ

درست فيما سبق حركة الجسم المفرد دون اعتبارٍ لأبعاده بالنسبة للمسافة التي يقطعها. وقد دعي ذلك الجسم جسيماً لأن حركته لا تتأثر بأبعاده والتي يمكن إهمالها. وعلى النقيض من ذلك نسمي كل جسم تكون أبعاده ذات الدرجة نفسها والمسار الذي يرسمه جسماً جاسئاً. ويعرف الجسم الجاسئ في الميكانيكا بأنه الجسم الذي لا يتغير شكله الهندسي، وتظل المسافة بين عناصره (نقاطه) ثابتة. وإذا افترضنا أن الجسم الجاسئ مكون من عددٍ لا نهائي من الجسيمات، ويتحرك كل جسيم فيه بمسارٍ قد يكون مشابهاً لمسارات الجسيمات الأخرى أو مختلفاً عنها، فإن لكل جسيم من هذه الجسيمات، وفي كل لحظة زمنية الخصائص الكينماتيكية المميزة. وقد تكون بعض هذه الخصائص مشتركة لكل جسيمات الجسم الجاسئ.

يتحدد تموضع الجسم الجاسئ في الفراغ بالموضع المتوسط الذي تأخذه كل جسيماته المكونة له بالنسبة لإطار الإسناد المحدد. ولأن الجسم الجاسئ مكون من عددٍ هائلٍ من الجسيمات ، يأخذ تحديد الموضع المتوسط لجسيماته وبالتالي المعادلات التفاضلية لحركاتها أبعاداً كبيرة. ويستعاض عن هذه الطريقة بإيجاد موضع الجسيم المعين بالنسبة لجسيم آخر ذي تموضع معروف ، إذ تبقى المسافة بين الجسيمين ثابتة.

تقسم حركة الجسم الجاسئ الأساسية إلى الحركة الانتقالية والحركة الدورانية حول محور ثابت مضافاً إليهما الحركة المستوية كمجموع الحركتين السابقتين ، وهناك الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة، والحركة العامة وأخيراً الحركة المركبة. وسندرس هذه الحركات تباعاً بشيء من التفصيل

الهدف من الموضوع

يختص هذا الباب بدراسة كيناماتيكا الجسم المتماسك أي الحصول علي السرعات والعجلات للنقاط (الجسيمات) المختلفة التي تكون الجسم المتماسك

الجسم المتماسك (الجسم الجاسئ أو الجسم الجامد Rigid Body):

هو الجسم الذي يتكون من عدد كبير جداً من الجسيمات الصغيرة والذي لا يحدث له تشوه أثناء حركته .

أو هو الجسم الذي يتكون من عدد كبير جداً من الجسيمات الصغيرة والذي تظل فيه المسافات بين هذه الجسيمات أثناء حركته ثابتة لا تتغير .

أنواع الحركة للجسم المتماسك

أنواع الحركة للجسم المتماسك ثلاث وهي

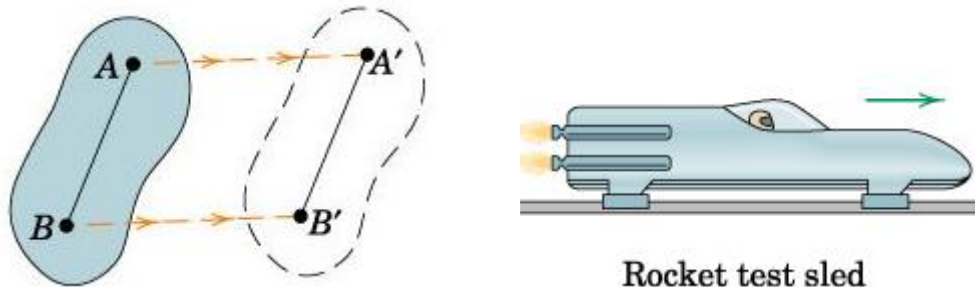
(1)- حركة انتقالية (2)- حركة دورانية (3)- حركة عامة

أولاً أنواع الحركة الانتقالية

وتنقسم الحركة الانتقالية الي: (1)- حركة انتقالية متوازية خطية (2)- حركة انتقالية متوازية منحنية

(1)- حركة انتقالية متوازية خطية (انتقال متوازي خطي)

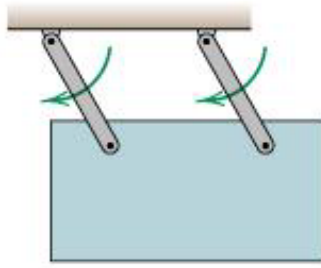
أو (الحركة الانتقالية المستقيمة Rectilinear Translation) ويحدث هذا النوع من الحركة عندما ينتقل الجسم بكامل أجزائه من مكان إلى آخر بحيث ترسم نقاط الجسم في مسارات خطية مستقيمة متوازية ومتطابقة مع بعضها وتقطع مسافات متساوية أثناء حدوثها, وقد تكون هذه المسارات متوازية مع بعضها بشكل أفقي كما في حركة الترحلق على الجليد



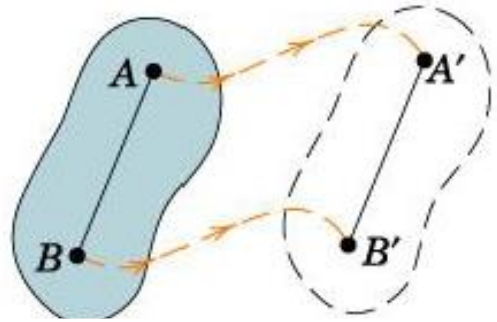
وفيه جميع نقاط الجسم ترسم أثناء الحركة مسارات عبارة عن خطوط مستقيمة

(2)- حركة انتقالية متوازية منحنية (انتقال متوازي منحنى Curvilinear Translation)

وفيه جميع نقاط الجسم ترسم أثناء الحركة مسارات عبارة عن منحنيات كما في الهبوط بالمظلات



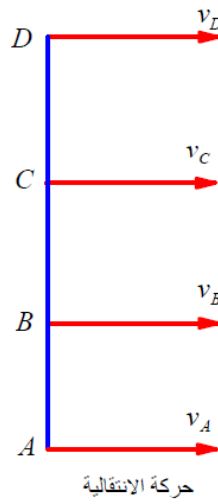
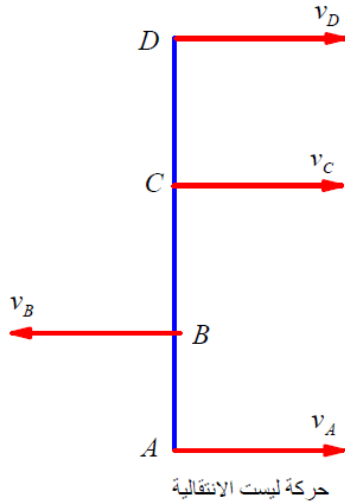
Parallel-link swinging plate



حساب السرعات والعجلات في الحركة الانتقالية

في الحركة الانتقالية تكون سرعة وعجلة جميع نقاط الجسم في أي لحظة متساوية مقداراً واتجاهاً. ففي الشكل المقابل والذي يمثل الحركة الانتقالية فإن

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}_C = \vec{V}_D = \vec{V}, \quad \vec{f}_A = \vec{f}_B = \vec{f}_C = \vec{f}_D = \vec{f}$$



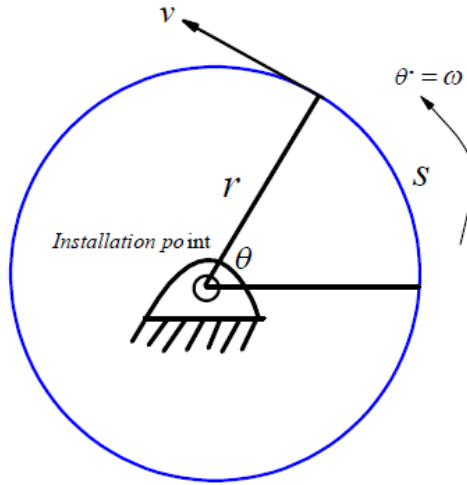
ثانياً الحركة الدورانية

الحركة الدورانية هي حركة التفاف الجسم حول مركزه. وهي تلك الحركة التي ترسم مساراتها خطوطاً منحنية أو دائرية أو على شكل دوائر أو على شكل قوس، وتحدث هذه الحركة في معظم الفعاليات الرياضية والتي يشترط لحدوثها محور للدوران سواء كانت حركة جزء من الجسم أو الجسم بأكمله، وتكون ومسارات حركة أجزاء الجسم عبارة عن دوائر تبعد بمقدار ثابت عن محور الدوران أثناء حركتها، وقد يكون المحور داخل الجسم كما في حركة الرفع وخفض الرجلين من الاستلقاء أو خارج الجسم كما في حركة الدوران حول العقلة. في الحركة الدورانية جميع نقاط

الجسم ترسم أثناء الحركة دوائر متحدة المركز بنقطة الدوران أو محور الدوران. وقد يكون المركز (مركز الدوران) داخل أو خارج الجسم.

السرعات في الحركة الدورانية

وفي دراستنا ومن الشكل المقابل وبفرض أنه لدينا جسم تحرك أزاحة دائرية مقدارها s صنعت هذه الإزاحة زاوية مقدارها θ عند مركز الحركة (دائرة نصف قطرها r) بذلك تعطي هذه الإزاحة بالصورة $s = r\theta$

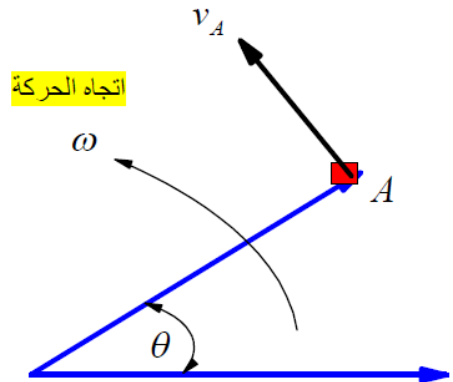


وكانت الحركة بسرعة زاوية مقدارها $(\theta^\circ = \omega)$. و يمكننا إيجاد السرعة الخطية المقابلة بالصورة

$$\frac{ds}{dt} = s^\circ = v = \frac{d(r\theta)}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = r\theta^\circ = r\omega$$

حيث $\frac{d\theta}{dt} = \theta^\circ = \omega$ والتي تسمى بالسرعة الزاوية وتكون السرعة الخطية دائماً عمودية علي

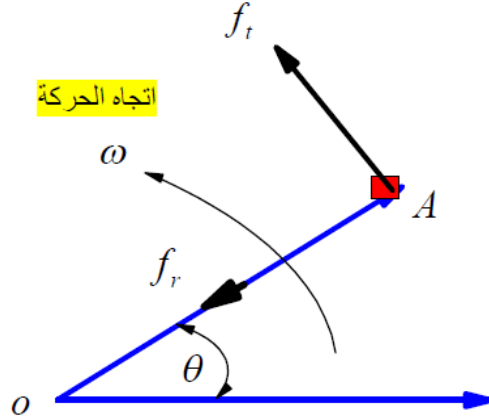
الخط الواصل بين نقطة التثبيت (مركز الحركة) ونقطة الدوران.



ويكون اتجاه السرعة الخطية (v) مع اتجاه السرعة الدورانية (ω) والعكس صحيح وإذا لم يكون اتجاه السرعة الزاوية معروف فإنه يمكن فرضه كما ان (ω) تمثل سرعة الجسم الدورانية كله وليست السرعة الدورانية لنقطة علي الجسم

العجلات في الحركة الدورانية

في الحركة الدورانية سوف يكون للعجلة مركبتان احدهما في متجهة نحو نقطة الثبيت والأخرى في الاتجاه العمودي علي الاتجاه الأول



وتعطي مركبات العجلة بالصورة Or $f_n = r\omega^2$ $f_t = r\dot{\omega}$, $f_r = r\omega^2$

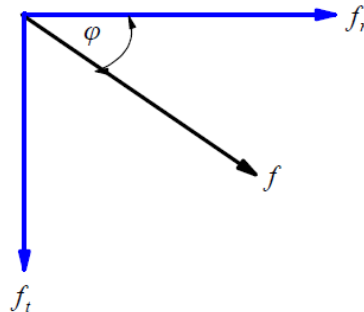
f_t هي العجلة في اتجاه المماس , $f_r = f_n$ العمودي علي المماس.

$$f = \sqrt{f_t^2 + f_r^2}$$

وتعطي قيمة العجلة (المحصلة) بالصورة

$$\tan \varphi = \frac{f_t}{f_r}$$

بينما يعطي اتجاه المحصلة بالعلاقة



لاحظ أن الحركة الدورانية تكون منتظمة إذا كانت سرعة الدوران ثابتة، وإلا يقال عن تلك الحركة الدورانية أنها غير منتظمة لتغير سرعة الدوران. وعزم القوة هو الذي يسبب الحركة الدورانية.

لاحظ كذلك ان الدورة الواحدة لدوران للجسم (One complete revolution) تساوي 360° وهي تساوي 2π زاوية نصف قطرية (radians)

حالات خاصة من الحركة الدورانية

(1)- في حالة الحركة الدورانية بسرعة دورانية ثابتة ($\omega = \text{Constant}$) عند ذلك يكون $\frac{d\omega}{dt} = 0$

اي ان السرعة لا تتغير مع الزمن

(2)- في حالة الحركة الدورانية بعجلة دورانية ثابتة ($\omega^\circ = \text{Constant}$) عند ذلك يكون $\frac{d\omega}{dt} = C$

اي ان $\omega = Ct$ وهذا يعني أن الجسم يتحرك بسرعة زاوية منتظمة ويكون كذلك ($v = r\theta^\circ$) منتظمة ايضاً حيث (r) ثابتة وعند ذلك يمكننا كتابة العلاقة بين قوانين الحركة في حالة الحركة الخطية ذات السرعة المنتظمة (العجلة الخطية الثابتة) والحركة الدورانية ذات العجلة الزاوية الثابتة علي النحو التالي

$$\begin{aligned} v &= v_o + a_c t, & \omega &= \omega_o + \omega^\circ t, \\ x &= v_o t + \frac{1}{2} a_c t^2, & \theta &= \omega_o t + \frac{1}{2} \omega^\circ t^2, \\ v^2 &= v_o^2 + 2 a_c x, & \omega^2 &= \omega_o^2 + 2 \omega^\circ \theta \end{aligned}$$

ثالثاً الحركة المركبة (العامة) Translation + Rotation.

وهي تلك الحركة التي يتحرك فيها الجسم حول محور مادي أو وهمي وفي نفس الوقت يتحرك المحور حركة انتقالية في خط مستقيم , وهي مزيج من الحركة الانتقالية والحركة الدائرية , فقد يدور الجسم بأكمله حركة دائرية حول نفسه وفي نفس الوقت ينتقل حركة انتقالية كما في حركة القفز للغطس بالماء, وقد تحدث الحركة عندما يتحرك جزء من الجسم حركة دائرية الأمر الذي يؤدي الى حركته حركة انتقالية كما في حركة الركض وركوب الدراجات .

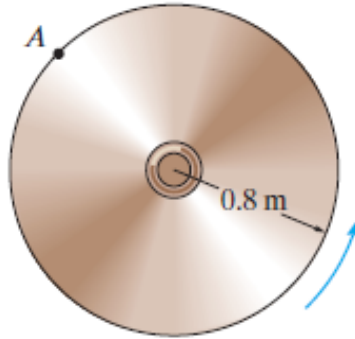
ولخطوات حل أي مسألة في هذا الجزء يمكن اتباع الخطوات التالية

- (1)- أولاً تحديد عدد الأجسام ونوع حركة كل جسم
 (2)- ثانياً البدء بدراسة السرعات . ونبدأ بدراسة حركة الجسم المعلوم له السرعة (خطية أو دورانية) ثم نحدد من ذلك السرعات للنقاط المشتركة
 (3)- ثالثاً دراسة العجلات . ونبدأ بدراسة حركة الجسم المعلوم له العجلة (خطية أو دورانية) ثم نحدد من ذلك العجلات للنقاط المشتركة

لا حظ أن عدد لفات اي ترس تعطي من خارج قسمة الإزاحة الزاوية علي 2π أي أن

$$N = \frac{\theta}{2\pi} \text{ Roll}$$

مثال (1): السرعة الزاوية لقرص كما بالشكل المقابل تُعرف بالصورة
 حيث $\omega = (5t^2 + 2) \text{ rad/sec}$ أوجد كل من السرعة والعجلة للنقطة
 A الواقعة علي محيط القرص وذلك عندما $t = 0.5 \text{ sec}$ ؟



الحل

$$\omega = (5t^2 + 2) \text{ rad/sec}$$

السرعة الزاوية للقرص تعطي بالصورة

$$\omega \cdot = \frac{d\omega}{dt} = (10t) \text{ rad/sec}^2$$

بينما سوف تعطي العجلة الزاوية للقرص بالصورة

وعند $t = 0.5 \text{ sec}$

$$\omega \cdot = (10(0.5)) = 5 \text{ rad/sec}^2, \quad \omega = (5(0.5)^2 + 2) = 3.25 \text{ rad/sec}$$

من العلاقة التي تربط بين السرعة الزاوية والخطية

$$v_A = (\omega)_{disk} (r)_{disk}$$

نجد أن

$$v_A = (3.25)(0.8) = 2.6 \text{ m/sec}$$

ومن العلاقات

$$f_r = \omega^2 r, \quad f_t = \omega r$$

$$f_{A_r} = (\omega^2)_{disk} (r)_{disk} = (3.25)^2 (0.8 \text{ m}) = (10.5625)(0.8) = 8.45 \text{ m/sec}^2$$

$$f_{A_t} = (\omega)_{disk} (r)_{disk} = (5)(0.8 \text{ m}) = 4 \text{ cm/sec}^2$$

وتعطي قيمة العجلة الزاوية للنقطة (A) من العلاقة

$$f_A = \sqrt{f_{A_t}^2 + f_{A_r}^2}$$

$$f_A = \sqrt{(8.45)^2 + (4)^2} = \sqrt{71.4025 + 16} =$$

$$\sqrt{87.4025} = 9.349 \text{ m/sec}^2 = 9.35 \text{ m/sec}^2$$

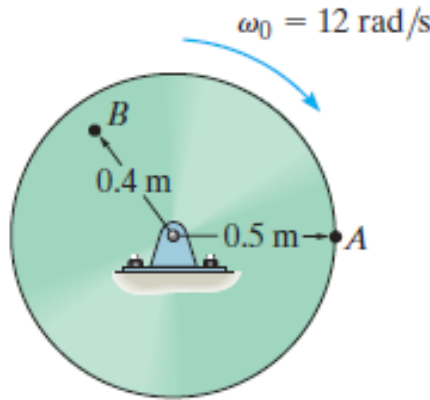
ويعطي اتجاه المحصلة بالعلاقة

$$\tan \phi = \frac{f_t}{f_r}$$

$$\tan \phi = \frac{f_{A_t}}{f_{A_r}} = \frac{4}{8.45} = 0.47337 \rightarrow$$

$$\phi = \tan^{-1}(0.47337) \rightarrow \phi = 25^{\circ}.33'$$

مثال (2): العجلة الزاوية للقرص المعطي بالشكل المقابل تُعرف بالصورة مقدارها $\omega_0 = 12 \text{ rad/sec}$. أوجد مقدار كل من السرعة والعجلة للنقطتين A, B الواقعتين علي القرص وذلك عندما $t = 2 \text{ sec}$ ؟



الحل

حيث أن العجلة تعطي بالصورة

$$\omega \cdot = \left(3t^2 + 12 \right) \text{ rad/sec}^2$$

لذلك يمكن إيجاد السرعة الزاوية بالصورة

$$\omega = \int \omega \cdot dt = \int \left(3t^2 + 12 \right) dt$$

$$\omega = \left(\frac{3}{3}t^3 + 12t \right) + c_1$$

ومن الشروط الابتدائية وعند نقطة البداية (i. e. $t = 0$) تعطي السرعة الزاوية بالصورة $\omega_0 = 12 \text{ rad/sec}$ وبذلك فإن

$$c_1 = 12$$

وبذلك تعطي السرعة الزاوية بالصورة

$$\omega = \left\{ t^3 + 12t + 12 \right\} \text{ rad/sec}$$

وعندما $t = 2 \text{ sec}$ فإن

$$\omega = \left\{ (2)^3 + 12(2) + 12 \right\} = 44 \text{ rad/sec}, \quad \omega^* = \left(3(2)^2 + 12 \right) = 24 \text{ rad/sec}^2$$

ومن المعلوم أن مركبات العجلة تعطي بالصورة

$$f_r = \omega^2 r, \quad f_t = \omega^* r$$

و عند النقطة A حيث $(r)_{disk} = 0.5 \text{ m}$ فإن

$$f_{A_r} = (\omega^2)_{disk} (r)_{disk} = (44)^2 (0.5 \text{ m}) = (1936)(0.5) = 968 \text{ m/sec}^2$$

$$f_{A_t} = (\omega^*)_{disk} (r)_{disk} = (24)(0.5 \text{ m}) = 12 \text{ m/sec}^2,$$

$$f_A = \sqrt{f_{A_t}^2 + f_{A_r}^2}$$

$$f_A = \sqrt{(12)^2 + (968)^2} = \sqrt{144 + 937024} =$$

$$\sqrt{937168} = 968.07 \text{ m/sec}^2 = 968 \text{ m/sec}^2$$

$$\tan \phi_A = \frac{f_t}{f_r}$$

ويعطي الاتجاه للعجلة عند النقطة A بالصورة

$$\tan \phi_A = \frac{f_{A_t}}{f_{A_r}} = \frac{12}{968} = 0.1239 \rightarrow$$

$$\phi_A = \tan^{-1}(0.1239) \rightarrow \phi_A = 0.71024'$$

و عند النقطة B وحيث أن $(r)_{disk} = 0.4 \text{ m}$ فإن

$$f_{A_r} = (\omega^2)_{disk} (r)_{disk} = (44)^2 (0.4 \text{ m}) = (1936)(0.4) = 774.4 \text{ m/sec}^2$$

$$f_{A_t} = (\omega^*)_{disk} (r)_{disk} = (24)(0.4m) = 9.6 m / sec^2 ,$$

$$f_B = \sqrt{f_{B_t}^2 + f_{B_r}^2}$$

ويعطي الاتجاه للعجلة عند النقطة B بالصورة

$$f_B = \sqrt{(9.6)^2 + (774.4)^2} = \sqrt{92.16 + 599695}$$

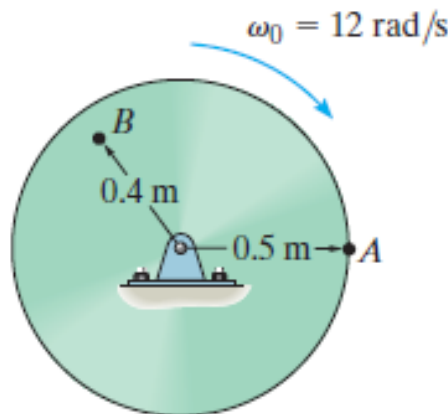
$$= \sqrt{599787} = 774.45 m / sec^2$$

$$\tan \phi_B = \frac{f_{B_t}}{f_{B_r}}$$

$$\tan \phi_B = \frac{f_{B_t}}{f_{B_r}} = \frac{9.6}{774.4} = 0.1239 \rightarrow$$

$$\phi_B = \tan^{-1}(0.1239) \rightarrow \phi_B = 0.71024'$$

مثال (3): إذا بدأ قرص الدوران بسرعة زاوية مقدارها $\omega_0 = 12 \text{ rad/sec}$ ووقع تحت تأثير عجلة زاوية ثابتة مقدارها $\omega = 20 \text{ rad/sec}^2$ حيث t تقاس بالثانية. أوجد مقدار كل من السرعة والعجلة للنقطة A, B الواقعتين علي القرص وذلك عندما $t = 2 \text{ sec}$ ؟



الحل

حيث ان القرص يقع تحت تأثير عجلة زاوية ثابتة مقدارها $\omega^* = 20 \text{ rad/sec}^2$. فإننا نستطيع القول بأن

$$\omega = \omega_o + \omega^* t, \quad \theta = \omega_o t + \frac{1}{2} \omega^* t^2, \quad \omega^2 = \omega_o^2 + 2 \omega^* \theta$$

وحيث أن $\omega_o = 12 \text{ rad/sec}$ وعند $t = 2 \text{ sec}$ فإننا نستطيع تحديد السرعة الزاوية بالصورة

, we have $\omega = (12) + (20)(2) \rightarrow \omega = 52 \text{ rad/sec}$ $\omega = \omega_o + \omega^* t$

وعند النقطة A وحيث $(r)_{\text{disk}} = 0.5 \text{ m}$ فإن

$$v_A = (\omega)_{\text{disk}} (r)_{\text{disk}} \rightarrow v_A = (52)_{\text{disk}} (0.5)_{\text{disk}} \rightarrow v_A = 26 \text{ m/sec}$$

$$f_{A_r} = (\omega^2)_{\text{disk}} (r)_{\text{disk}} = (52)^2 (0.5 \text{ m}) = (1936)(0.4) = 1352 \text{ m/sec}^2$$

$$f_{A_t} = (\omega^*)_{\text{disk}} (r)_{\text{disk}} = (20)(0.5 \text{ m}) = 10 \text{ m/sec}^2$$

وتعطي قيمة العجلة الزاوية للنقطة (A) من العلاقة

$$f_A = \sqrt{f_{A_t}^2 + f_{A_r}^2}$$

$$f_A = \sqrt{(10)^2 + (1352)^2} = 1352.04 \text{ m/sec}^2$$

$$\tan \phi_A = \frac{f_t}{f_r}$$

ويعطي الاتجاه للعجلة عند النقطة A بالصورة

$$\tan \phi_A = \frac{f_{A_t}}{f_{A_r}} = \frac{10}{1352.04} \rightarrow$$

$$\phi_A = \tan^{-1}(0.00739) \rightarrow \phi_A = 0.423778'$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\omega_0\theta \quad \text{من العلاقة}$$

يمكننا القول بأن

$$(52)^2 = (12)^2 + 2(20)\theta \rightarrow \theta = \frac{2704-144}{40} = \frac{2560}{40} = \frac{256}{4} \rightarrow \theta = 64$$

أي أنه بعد $t = 2 \text{ sec}$ يصنع القرص عند وضعة الابتدائي زاوية مقدارها $\theta = 64 \text{ rad}$

ويكون القرص قد دار عدد من الدورات تعطي من

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{64}{2\pi} = \frac{32}{\pi} \rightarrow N = 10.2 \text{ لفة}$$

أوجد مقدار كل من السرعة والعجلة للنقطة B ؟

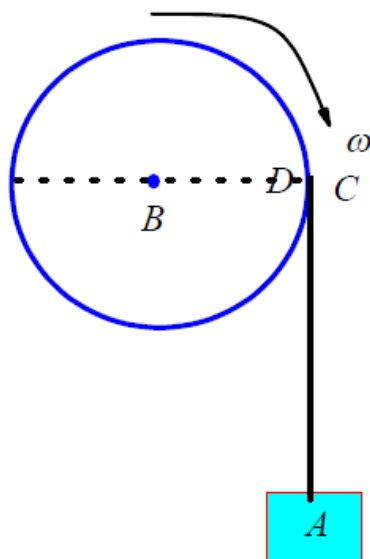
مثال (4): تدور بكرة ملفوف علي محيطها خيط غير مرن في نهايته جسيم (A).

بحيث تدور البكرة حول محور ثابت (B) كما بالشكل. فإذا كان نصف قطر البكرة

هو (0.6 m) وعجلة جسيم (A) هي $(f_A = 2 \text{ m/sec}^2)$ وسرعته الخطية هي $(v_A = 3 \text{ m/sec})$

أوجد السرعة الزاوية وكذلك العجلة الزاوية للبكرة وأوجد كذلك السرعة وكذلك العجلة

للنقطة (D) التي تقع علي محيط البكرة ؟



الحل

أولاً: عدد الأجسام وهو جسمين وهما الخيط والبكرة

حيث يتحرك الخيط حركة خطية ، بينما البكرة تتحرك حركة دورانية

ثانياً السرعات:

السرعة الخطية للخيط عند النقطة A هي $(v_A = 3m/sec)$ وهي تمثل سرعة أي نقطة من نقاط الخيط

أي أننا يمكن القول أن

$$(v_A = v_C = 3m/sec)$$

بدراسة حركة البكرة

وعند نقطة التماس (c) يمكننا القول أن

$$(v_C)_{Rope} = (v_C)_{Roller}$$

أي أن

$$(v_C)_{Rope} = (v_C)_{Roller} = 3m/sec$$

حيث $(v_C)_{Roller}$ تمثل سرعة النقطة (D) أي أن

و من العلاقة $v_D = \omega_B r$ يكون

$$v_D = 3m/sec$$

$$3m/sec = \omega_B (0.5m)$$

ومنها تكون السرعة الزاوية للبكرة بالصورة

$$\omega_B = 6 rad/sec$$

ثالثاً العجلات:

العجلة الخطية للخيط عند النقطة A هي $(f_A = 2m/sec^2)$ وهي تمثل عجلة أي نقطة من نقاط الخيط

أي أننا يمكن القول أن

$$(f_A = f_C = 2m/sec^2)$$

بدراسة حركة البكرة

و عند نقطة التماس (c) يمكننا القول أن

$$(f_C)_{Rope} = (f_C)_{Roller} = f_{D_t}$$

أي أن

$$(f_C)_{Rope} = (f_{C_t})_{Roller} = f_{D_t} = 2m/sec^2$$

$$(f_{C_t})_{Roller} = f_{D_t} = \omega_B r = 2m/sec^2 = \omega_B (0.5)$$

ومنها تكون العجلة الزاوية للبكرة بالصورة

$$\omega_B = 4 rad/sec^2$$

وتعطي المركبة القطرية للعجلة للنقطة (D) من العلاقة

$$f_{D_r} = \omega_B^2 r = (6)^2 (0.5) = 18m/sec^2$$

وتعطي قيمة العجلة الزاوية للنقطة (D) من العلاقة

$$f_D = \sqrt{f_{D_t}^2 + f_{D_r}^2}$$

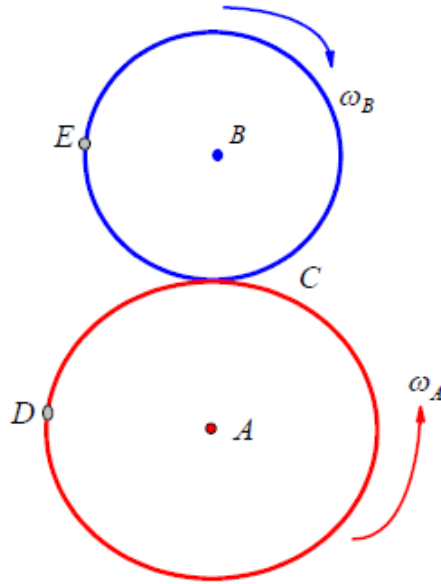
$$f_D = \sqrt{(18)^2 + (2)^2} = \sqrt{324 + 4} = \sqrt{328} = 18.11077 m/sec^2$$

ويعطي اتجاه المحصلة بالعلاقة

$$\tan \varphi = \frac{f_t}{f_r}$$

$$\tan \varphi = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{9}\right) \rightarrow \varphi = 6^{\circ}.34'$$

مثال (5): ترس (A) نصف قطره $(r_A = 6cm)$, اخر (B) نصف قطره $(r_B = 4cm)$ يدوران معاً كما بالشكل بحيث كانت في لحظة معينة السرعة الزاوية للترس (A) هي $(\omega_A = 2 rad/sec)$ وكانت العجلة الزاوية للترس (B) هي $\omega_B = 6 rad/sec^2$. عين كل من سرعة وعجلة النقطة (D) التي تقع علي محيط الترس (A) وكذلك سرعة وعجلة النقطة (E) والتي تقع علي محيط الترس (B) مقداراً واتجاهاً؟



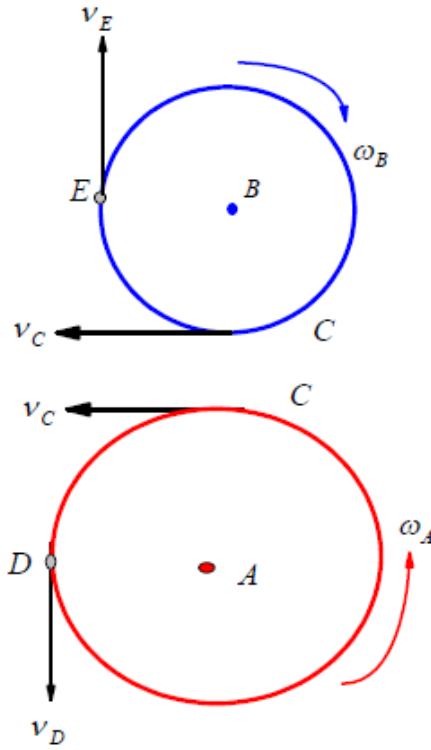
الحل

أولاً: عدد الأجسام وهو جسمين وهما الترس (A) , الترس (B) حيث يتحرك كل منهما حركة دورانية

ثانياً السرعات:

بدراسة الترس (A) السرعة الزاوية للترس (A) وهي ($\omega_A = 2 \text{ rad/sec}$) و نصف قطره ($r_A = 6 \text{ cm}$)

ومن العلاقة التي تربط بين السرعة الزاوية والخطية نجد أن $v_D = \omega_A r_A$



بذلك يكون لدينا

$$v_D = (2 \text{ rad / sec})(6 \text{ cm}) = 12 \text{ cm / sec} = 0.12 \text{ m / sec}$$

بدراسة نقطة التماس بين الترسين

وعند نقطة التماس (c) يمكننا القول أن

$$(v_C)_{\text{Gear(A)}} = (v_C)_{\text{Gear(B)}}$$

ومنها يكون

$$(\omega_A r_A)_{\text{Gear(A)}} = (\omega_B r_B)_{\text{Gear(B)}} \rightarrow (2)(6) = \omega_B (4)$$

$$\omega_B = 3 \text{ rad / sec}$$

اي أن

مرة أخرى ومن العلاقة التي تربط بين السرعة الزاوية والخطية نجد أن

$$v_E = \omega_B r_B$$

بذلك يكون لدينا

$$v_E = (3 \text{ rad / sec})(4 \text{ cm}) = 12 \text{ cm / sec} = 0.12 \text{ m / sec}$$

ثالثاً العجلات:

العجلة الزاوية للترس (B) هي $\omega_B = 6 \text{ rad/sec}$ و نصف قطره $(r_B = 4 \text{ cm})$

ومن العلاقات

$$f_r = \omega^2 r, \quad f_t = \omega r$$

للترس (B) يكون لدينا

$$f_{E_r} = \omega_B^2 r_B = (3)^2 (4 \text{ cm}) = 36 \text{ cm/sec}^2 = 0.36 \text{ m/sec}^2$$

$$f_{E_t} = \omega_B r_B = (6) (4 \text{ cm}) = 24 \text{ cm/sec}^2 = 0.24 \text{ m/sec}^2$$

وتعطي قيمة العجلة الزاوية للنقطة (D) من العلاقة

$$f_E = \sqrt{f_{E_t}^2 + f_{E_r}^2}$$

$$f_E = \sqrt{(36)^2 + (24)^2} = \sqrt{1296 + 576}$$

$$= \sqrt{1872} = 43.266 \text{ cm/sec}^2 = 0.43266 \text{ m/sec}^2$$

ويعطي اتجاه المحصلة بالعلاقة

$$\tan \varphi_E = \frac{f_{E_t}}{f_{E_r}}$$

$$\tan \varphi_E = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} = \varphi_E = \tan^{-1} \frac{2}{3} \rightarrow \varphi_E = 33^{\circ}.7'$$

بدراسة نقطة التماس بين الترسين مرة اخرى

وعند نقطة التماس (c) يمكننا القول أن

$$(f_{C_t})_{\text{Gear(A)}} = (f_{C_t})_{\text{Gear(B)}}$$

ومنها يكون

$$(\omega_A r_A)_{Gear(A)} = (\omega_B r_B)_{Gear(B)} \rightarrow (\omega_A)(6) = (6)(4)$$

$$\omega_A = 4 \text{ rad/sec}$$

اي أن

مرة أخرى ومن العلاقات

$$f_r = \omega^2 r, \quad f_t = \omega r$$

للترس (A) يكون لدينا

$$f_{D_r} = \omega_A^2 r_A = (2)^2 (6 \text{ cm}) = 24 \text{ cm/sec}^2 = 0.24 \text{ m/sec}^2$$

$$f_{D_t} = \omega_A r_A = (4)(6 \text{ cm}) = 24 \text{ cm/sec}^2 = 0.24 \text{ m/sec}^2$$

وتعطي قيمة العجلة الزاوية للنقطة (D) من العلاقة

$$f_D = \sqrt{f_{D_t}^2 + f_{D_r}^2}$$

$$f_D = \sqrt{(24)^2 + (24)^2} = 24\sqrt{2} = 33.94 \text{ cm/sec}^2 = 0.3394 \text{ m/sec}^2$$

ويعطي اتجاه المحصلة بالصورة

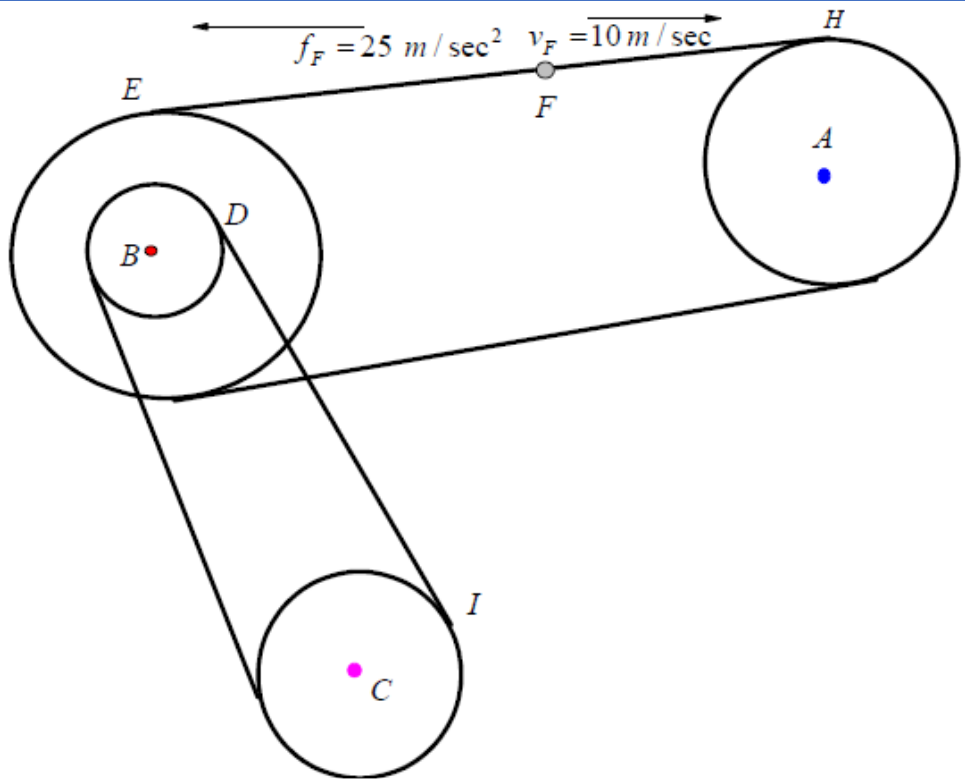
$$\tan \varphi_D = \frac{24}{24} = 1 = \varphi_D = \tan^{-1}(1) \rightarrow \varphi_D = 45^\circ$$

مثال (6): يمر سير علي بكرة A نصف قطرها 10 cm وبكرة اخري B نصف قطرها الخارجي $r_E = 20 \text{ cm}$ و نصف قطرها الداخلي $r_D = 8 \text{ cm}$ ويربط سير اخر بين الجزء

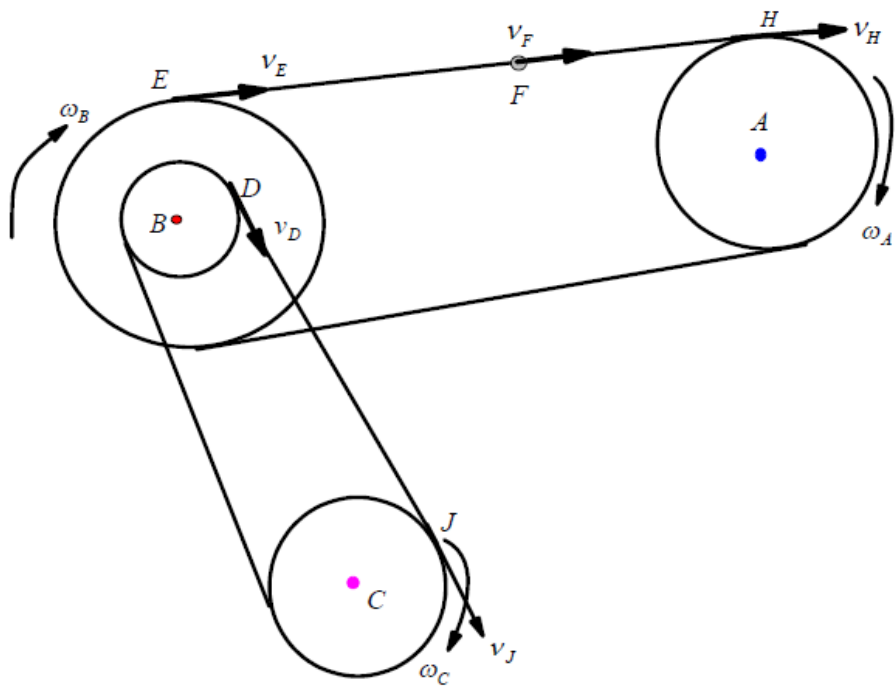
الداخلي للبكرة B مع بكرة C نصف قطرها $r_C = 15 \text{ cm}$. عند لحظة ما كانت سرعة

وعجلة النقطة F هي $f_F = 25 \text{ m/sec}^2$, $v_F = 10 \text{ m/sec}$, كما هو موضح بالشكل

عين السرعات الزاوية والعجلات الزاوية لكل من البكرات A, B, C ؟



الحل



أولاً: عدد الأجسام وهو خمس جسيمات وهم السيرين DJ , EFH , الثلاث تروس A, B, C

حيث نقاط السيرين EFH, DJ تتحرك حركة انتقالية بينما الثلاث تروس A, B, C تتحرك حركة دورانية

ثانياً السرعات:

بدراسة حركة السير EFH (حركة انتقالية)

من الشكل واضح أن السرعة الانتقالية لنقاط هذا السير تعطي بالصورة
بدراسة البكرة (A) (حركة دورانية): السرعة $v_E = v_F = v_H = 10 \text{ m/sec}$

الزاوية للبكرة (A) يمكن ايجادها من العلاقة التي تربط بين السرعة الزاوية والخطية
حيث $v_H = \omega_A r_A$

بذلك يكون لدينا

$$10 = \omega_A (10 \text{ m}) \rightarrow \omega_A = 1 \text{ rad/sec}$$

بدراسة البكرة (B) (حركة دورانية): السرعة الزاوية للبكرة (B) يمكن ايجادها من
العلاقة التي تربط بين السرعة الزاوية والخطية حيث $v_E = \omega_B r_E$

بذلك يكون لدينا

$$10 = \omega_B (20 \text{ m}) \rightarrow \omega_B = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ rad/sec}$$

وعند نقطة التماس (D) يمكننا القول أن

$$(v_D)_{\text{Roller (B)}} = \omega_B r_D$$

ومنها يكون

$$(v_D)_{\text{Roller (B)}} = 0.5(8) = 4 \text{ m/sec}$$

$$(v_D)_{\text{Roller (B)}} = (v_D)_{\text{Rope (DJ)}} = 4 \text{ m/sec}$$

اي أن

$$(v_D)_{\text{Rope (DJ)}} = (v_J)_{\text{Rope (DJ)}} = (v_J)_{\text{Roller (C)}} = 4 \text{ m/sec}$$

اي أن

بدراسة البكرة (C) (حركة دورانية): السرعة الزاوية للبكرة (C) يمكن ايجادها من العلاقة التي تربط بين السرعة الزاوية والخطية حيث

$$v_J = \omega_C r_J$$

بذلك يكون لدينا

$$4 = \omega_C (15\text{ m}) \rightarrow (v_D)_{\text{Rope (DJ)}} = \frac{15}{4} \text{ rad / sec}$$

ثالثاً العجلات:

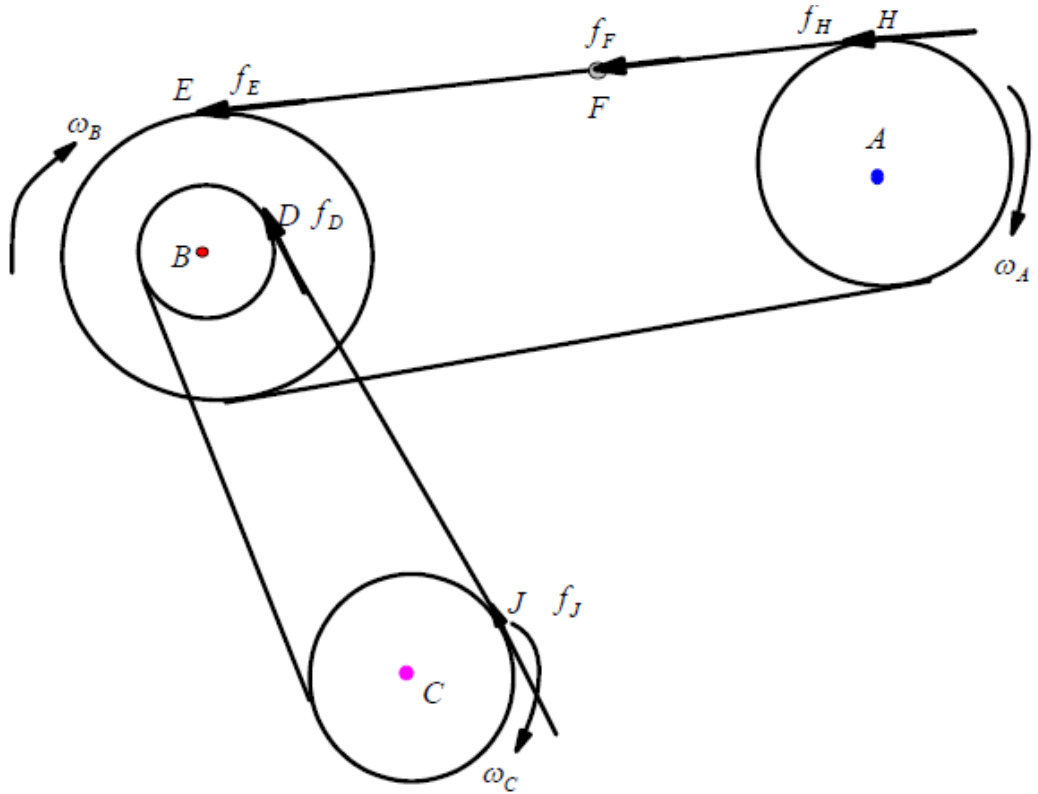
بدراسة حركة السير EFH (حركة انتقالية)

من الشكل واضح أن العجلة الانتقالية لنقاط هذا السير تعطي بالصورة

$$f_E = f_F = f_H = 25 \text{ m/sec}^2$$

لاحظ انه عند أي نقطة تعطي العجلة بالصورة

$$f_t = \dot{\omega} r, \quad f_n = f_r = \omega^2 r$$



عجلة البكرة (A) (حركة دورانية):

العجلة الزاوية للبكرة (A) يمكن ايجادها من العلاقة

$$f_H = f_{A_t} = \omega_A^* r_{AH}$$

وبذلك تكون السرعة الزاوية بالصورة

$$25 = \omega_A^* (10m) \rightarrow \omega_A^* = 2.5 m/sec^2$$

وتعطي المركب الأخرى للعجلة بالصورة

$$f_{A_r} = \omega_A^2 r_A = (1)^2 (10) = 10 m/sec^2$$

عجلة البكرة (B) (حركة دورانية):

العجلة الزاوية للبكرة (B) يمكن ايجادها من العلاقة

$$f_E = f_{B_t} = \omega_B^* r_{BE}$$

وتعطي المركب الأخرى للعجلة بالصورة $25 = \omega_B^* (20m) \rightarrow \omega_B^* = 1.25 m/sec^2$

$$\underline{\text{عجلة البكرة (C) (حركة دورانية):}} \quad f_{B_r} = \omega_B^2 r_B = (0.5)^2 (20) = 5 m/sec^2$$

العجلة الزاوية للبكرة (C) يمكن ايجادها من العلاقة

$$f_J = f_{C_t} = \omega_C^* r_{CJ}$$

$$25 = \omega_C^* (8m) \rightarrow \omega_C^* = 3.125 m/sec^2$$

وتعطي المركب الأخرى للعجلة بالصورة

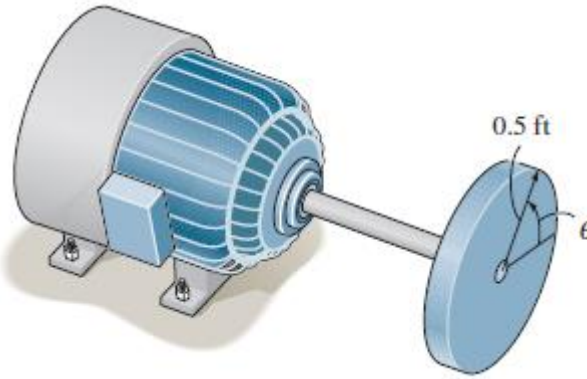
$$f_{C_r} = \omega_C^2 r_C = \left(\frac{15}{4}\right)^2 (15) = 210.9375 m/sec^2$$

تمارين

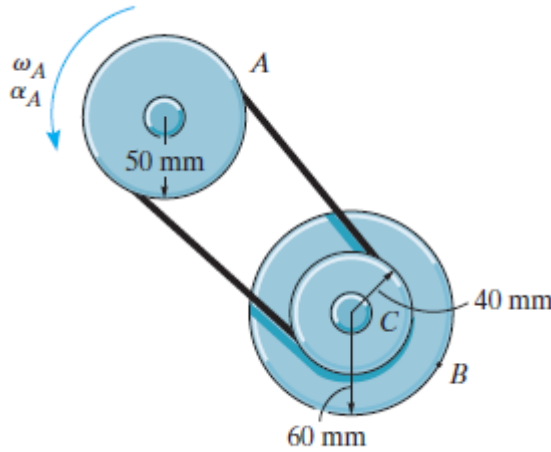
(1)- يتحرك قرص بواسطة موتور كما بالشكل اذا أعطيت الإزاحة الزاوية بالصورة

$$\theta = (20t + 4t^2) rad \quad \text{حيث } t \text{ هو الزمن حدد عدد اللفات والسرعة الزاوية والعجلة}$$

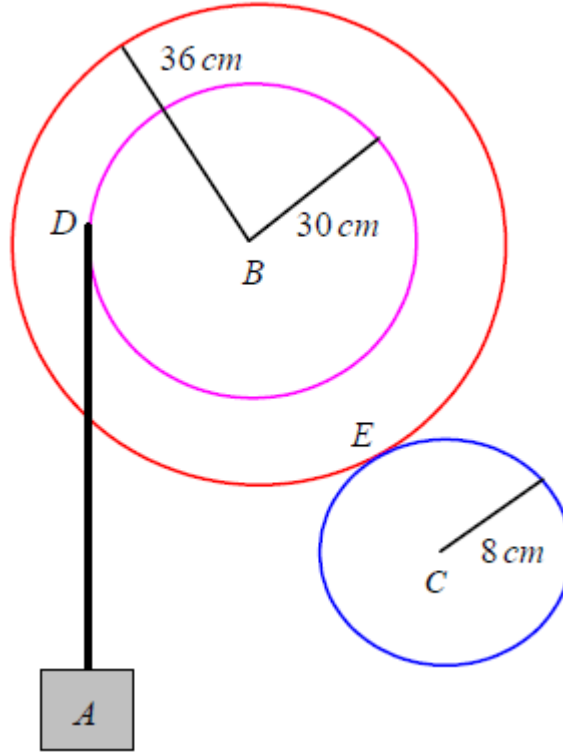
الزاوية للقرص عندما $t = 90s$.



(2)- عند لحظة معينة كانت السرعة الزاوية لبكرة هي $\omega_A = 5 \text{ rad/sec}$ و أعطيت العجلة بالصورة $\omega_A = 6 \text{ rad/sec}^2$ حدد قيم العجلة للنقطتين B, C وذلك اذا دارت النقطة A دورتين. حيث تحتوي البكرة C على محور داخلي ثابت على محورها الخارجي و ينعطف معها.



(3)- اذا علمت ان اجزاء المجموعة المبينة بالشكل المقابل تتحرك بعجلة منتظمة وانها بدأت الحركة من السكون و انه عندما كانت $t = 4 \text{ sec}$, كانت سرعة الجسم A هي 4.8 m/sec عين سرعة وعجلة كل من الترس (B) و الترس C مقداراً واتجاهاً وعدد دورات كل منهم عند $t = 4 \text{ sec}$ ؟



(4)- بكرة نصف قطرها $(0.3m)$ قابلة للدوران حول محورها (O) ملفوف علي محيطها خيط غير مرن في نهايته جسيم (A) . بحيث تدور البكرة حول محور ثابت (O) كما بالشكل. اذا تحرك الجسيم (A) بسرعة $(v_A = 0.9m/sec)$. وكانت عجلة النقطة (Q) تميل بزاوية (60°) مع الأفقي. أوجد السرعة الزاوية وكذلك العجلة الزاوية للبكرة وأوجد كذلك السرعة الزاوية وكذلك العجلة الزاوية للنقطة (Q) التي تقع علي البكرة ؟

الفصل الثاني

عزم القصور الذاتي (العزم الثاني للكتلة)

The Moment of Inertia

(The second moment of mass)

يعرف عزم القصور الذاتي لجسيم كتله m منسوباً لنقطة أو محور أو مستوى بأنه حاصل ضرب الكتلة في مربع بعدها عن النقطة أو المحور أو المستوى. ويعبر عزم القصور الذاتي عن قيمة المقاومة التي يبديها الجسم عند محاولة انحناءه أو دورانه حول محور ما وهي قيمة موجبة دائماً (وتقاس ب kgm^2).

ويعتمد عزم القصور الذاتي على

1- كتلة الجسم 2- شكل وابعاد الجسم 3- مكان أو محور الدوران

المعنى الفيزيائي لعزم القصور الذاتي

نلاحظ من قانون نيوتن الثاني في التحريك الانتقالي $F = ma$ ومن نظيره في التحريك الدوراني $\tau = I\alpha$ أن هناك تشابه واضح بينهما. ففي الحركة الانتقالية نحتاج لقوة (سبب التحريك) لتغيير الحالة التحركية للجسم وإكسابه تسارعاً (دليل التحريك) فيمانع الجسم هذا التغيير بحسب كتلته (ممانعة الحركة). أما في التحريك الدوراني فإن عزم القوة هو سبب التحريك والتسارع الزاوي دليلها بينما يمثل عزم القصور الذاتي ممانعتها. وسبب اهتمامنا بهذا التناظر هو أن نتوصل لفهم المعنى الفيزيائي لعزم القصور الذاتي. فإذا كانت الكتلة هي ممانعة الجسم لأي تغيير في حالته التحركية الانتقالية، فإن عزم القصور الذاتي هو ممانعة الجسم لأي تغيير في حالته التحركية الدورانية. إلا أن هناك فرق أساس بين الكميتين، ففي حين تبقى كتلة الجسم ثابتة كيفما تحرك، بمعنى أن ممانعته لا تتأثر بأي تغيير في حالته التحركية الانتقالية، إلا أن عزم القصور الذاتي يعتمد على طريقة دوران الجسم والمحور الذي يدور حوله. فيمكن لجسم أن يدور حول محور أول تحت تأثير عزم ما بسهولة، إلا أنه قد لا يدور بتاتا تحت تأثير نفس العزم حول محور آخر بسبب اختلاف عزم القصور الذاتي له بالنسبة لكل واحد منهما. ولذلك يجب تحديد عزم القصور الذاتي للجسم في كل مسألة بالنسبة للمحور الذي يدور حوله.

الجسم الكبير يحتاج قوة كبيرة لتحريكه وكذلك قوة كبيرة لإيقافه عن الحركة.

أولاً- عزم القصور الذاتي للكتل

1- لجسيم كتلته dm يقع علي بعد a من محور L كما في شكل (1) و منسوباً لهذا المحور

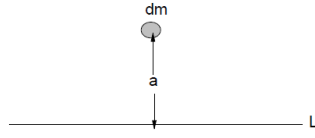


Fig. 1

يعرف عزم القصور الذاتي رياضياً (Moment of Inertia) بالصورة $I_{LL} = a^2 dm$ اي أن عزم القصور الذاتي لكتله ما يساوى كتلة هذا الجسم مضروبة في مربع بعدة عن المحور.

بينما لعد n من الجسيمات كما في شكل (2)

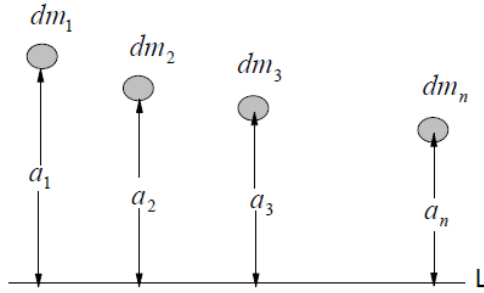


Fig. 2

يعرف عزم القصور الذاتي منسوباً لهذا المحور رياضياً بالصورة:

$$I_{LL} = a_1^2 dm_1 + a_2^2 dm_2 + a_3^2 dm_3 + \dots + a_n^2 dm_n = \sum_{i=1}^n a_i^2 dm_i$$

2- اذا كان الجسيم واقع في مستوى كما في شكل (3) يعطى عزم القصور الذاتي منسوباً الى المحاور المعطاة بالصورة:

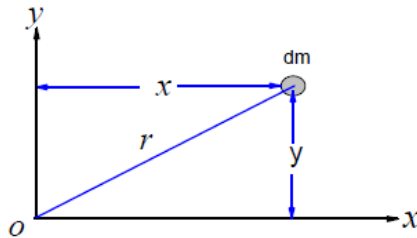


Fig. 3

$$I_{xx} = y^2 dm,$$

عزم القصور الذاتي منسوباً للمحور ox يعطى بالصورة

$$I_{yy} = x^2 dm,$$

وعزم القصور الذاتي منسوباً للمحور oy يعطى بالصورة

$$I_O = r^2 dm = (x^2 + y^2) dm = I_{xx} + I_{yy}$$

يعطى بالصورة O بينما عزم القصور الذاتي منسوباً للنقطة

يسمى I_o عزم القصور القطبي Polar moment inertial (وهو عزم القصور الذاتي منسوباً لمحور عمودي على المستوى xoy وعند نقطة تقاطع المحورين ox, oy)

- اذا كان هناك مجموعة من الجسيمات واقعة في مستوى كما في شكل (4) يعطى عزم القصور الذاتي منسوباً الى المحاور المعطاة بالصورة:

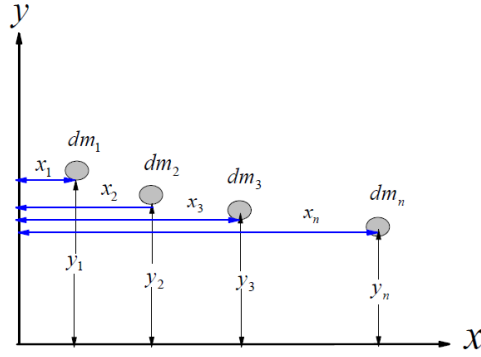


Fig. 4

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^n y_i^2 dm_i$$

عزم القصور الذاتي منسوباً للمحور ox يعطى بالصورة

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^n x_i^2 dm_i,$$

وعزم القصور الذاتي منسوباً للمحور oy يعطى بالصورة

نظرية المحاور المتوازية (Parallel axis theorem)

بفرض انه لدينا جسم ما كما في الشكل المقابل كتلته m ومركز ثقله هي النقطة (x_{cm}, y_{cm})

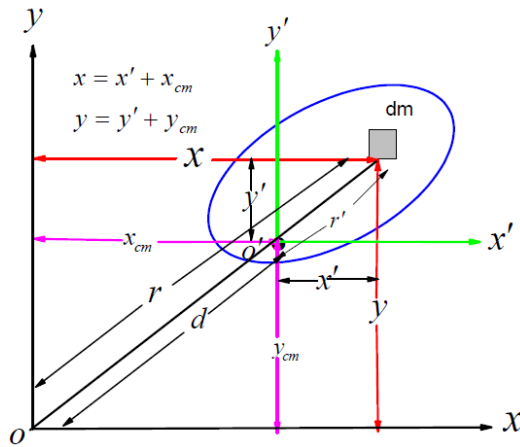


Fig. 7

بأخذ عنصر صغير كتلته dm أحداثي هذا العنصر بالنسبة للنقطة o هو (x, y) وبالنسبة لمركز الثقل cm هو (x', y') . بالنسبة للمحورين ox, oy والنقطة o يعطى عزم القصور الذاتي لكتلته dm على الترتيب بالصورة

$$dI_{xx} = y^2 dm, \quad \text{عزم القصور الذاتي منسوباً للمحور } ox \text{ يعطى بالصورة}$$

$$dI_{yy} = x^2 dm, \quad \text{عزم القصور الذاتي منسوباً للمحور } oy \text{ يعطى بالصورة}$$

بينما عزم القصور الذاتي منسوباً للنقطة o للمحور يعطى بالصورة

$$dI_o = r^2 dm = I_{xx} + I_{yy} = (x^2 + y^2) dm$$

ويعطى عزم القصور الذاتي للجسم كله (m) منسوباً للنقطة (o)

$$I_o = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm \quad (1)$$

ويعطى كذلك عزم القصور الذاتي للجسم كله (m) منسوباً لمركز ثقله بالصورة

$$I_{cm} = \int r'^2 dm = \int (x'^2 + y'^2) dm \quad (2)$$

لكن من الرسم واضح أن $x = x' + x_{cm}$, $y = y' + y_{cm}$ وبالتعويض في العلاقة (1) نحصل على

$$I_o = \int r^2 dm = \int \left\{ \left(x' + x_{cm} \right)^2 + \left(y' + y_{cm} \right)^2 \right\} dm$$

$$= \int \left\{ x'^2 + x_{cm}^2 + 2x' x_{cm} + y'^2 + y_{cm}^2 + 2y' y_{cm} \right\} dm$$

$$I_o = \underbrace{\int (x'^2 + y'^2) dm}_{I_{cm}} + \underbrace{\int (x_{cm}^2 + y_{cm}^2) dm}_{=d^2} + 2x_{cm} \int x' dm + 2y_{cm} \int y' dm$$

$$I_o = I_{cm} + \int d^2 dm + 2x_{cm} \int x' dm + 2y_{cm} \int y' dm$$

$$I_o = I_{cm} + d^2 \int dm + 2x_{cm} \int x' dm + 2y_{cm} \int y' dm$$

$$I_o = I_{cm} + d^2 m + 2x_{cm} \int x' dm + 2y_{cm} \int y' dm \quad (3)$$

لكن من المعلوم بأن

$$\bar{x} = \frac{\int x' dm}{\int dm} \rightarrow \int x' dm = \bar{x} \int dm, \quad \bar{y} = \frac{\int y' dm}{\int dm} \rightarrow \int y' dm = \bar{y} \int dm \quad (4)$$

وبالتعويض من (4) في (3)

$$I_o = I_{cm} + d^2 m + 2x_{cm} \left\{ \bar{x} \int dm \right\} + 2y_{cm} \left\{ \bar{y} \int dm \right\}$$

$$I_o = I_{cm} + d^2 m + 2x_{cm} \bar{x} m + 2y_{cm} \bar{y} m \quad (5)$$

لكن (\bar{x}, \bar{y}) هو أحداثي بعد مركز الثقل عن مركز الثقل وهو يساوي الصفر. وبالتعويض في (5) نحصل

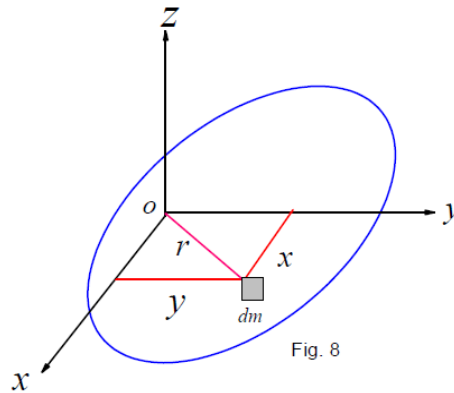
$$I_o = I_{cm} + m d^2 \quad (6)$$

حيث I_o هو عزم القصور الذاتي حول محور عمودي على المستوى xoy وعند نقطة تقاطع المحورين ox, oy . وكذلك I_{cm} (I_G) هو عزم القصور الذاتي حول محور عمودي على المستوى $x'o'y'$ وعند نقطة تقاطع المحورين $o'x', o'y'$.

وهكذا فإن عزم القصور الذاتي لجسم منسوب لمحور ما يساوي عزم القصور الذاتي لمحور يمر بمركز الكتلة مضافاً إليه الكتلة في مربع البعد بين المحورين.

نظرية الصفائح المستوية (Perpendicular axis theorem)

بفرض انه لدينا صفيحة مستوية ما كما في الشكل المقابل كتلتها m و بأخذ عنصر dm فيكون عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحورين ox, oy والنقطة o على الترتيب بالصورة



$$dI_{xx} = y^2 dm,$$

عزم القصور الذاتي منسوباً للمحور ox يعطى بالصورة

$$dI_{yy} = x^2 dm,$$

وعزم القصور الذاتي منسوباً للمحور oy يعطى بالصورة

$$dI_o = I_{xx} + I_{yy} = (x^2 + y^2) dm = r^2 dm$$

بينما عزم القصور الذاتي منسوباً للنقطة o يعطى بالصورة

ويعطى عزم القصور الذاتي للجسم كله (m) منسوباً للنقطة (o)

$$I_o = \int (x^2 + y^2) dm = \int r^2 dm = r^2 \int dm = r^2 m \quad (1)$$

حيث I_o يسمى عزم القصور الذاتي حول محور عمودي على المستوى xoy وعند نقطة

تقاطع المحورين ox, oy والذي يمكن التعبير عنه بالصورة I_{zz} أي أن

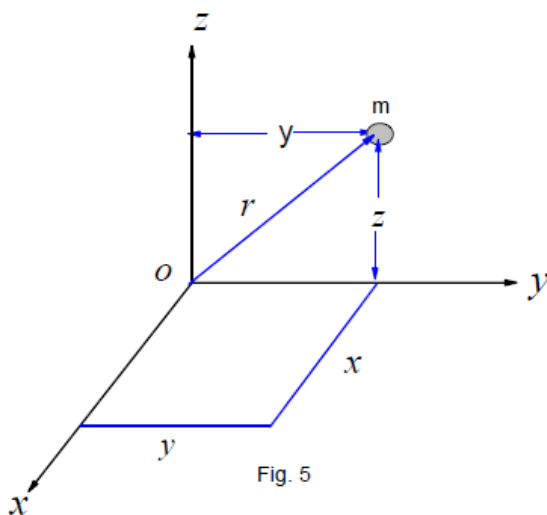
$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} \quad (2)$$

وهكذا فإن عزم القصور الذاتي لصفحة مستوية منسوب لمحورين يقعان في مستوى الصفحة بأنه يساوي عزم القصور الذاتي لمحور عمودي على مستوى الصفحة عند نقطة تلاقي المحورين الواقعين في مستوى الصفحة .

3- إذا كان الجسم واقع في الفراغ :

بفرض أنه لدينا جسم كتلته m واقع في الفراغ كما بالشكل

فان عزم القصور الذاتي له يعطى على النحو التالي



عزم القصور الذاتي منسوباً لنقطة o بالصورة

$$I_o = m r^2 = m(x^2 + y^2 + z^2) \quad (1)$$

عزم القصور الذاتي منسوباً للمحور ox بالصورة

$$I_{xx} = m(y^2 + z^2) \quad (2)$$

عزم القصور الذاتي منسوباً للمحور oy بالصورة

$$I_{yy} = m(x^2 + z^2) \quad (3)$$

عزم القصور الذاتي منسوباً للمحور oz بالصورة

$$I_{zz} = m(x^2 + y^2) \quad (4)$$

عزم القصور الذاتي منسوباً للمستوى xoy بالصورة

$$I_{xoy} = I_{z=0} = I_z = m z^2 \quad (5)$$

عزم القصور الذاتي منسوباً للمستوى xoz بالصورة

$$I_{xoz} = I_{y=0} = I_y = m y^2 \quad (6)$$

عزم القصور الذاتي منسوباً للمستوى yoz بالصورة

$$I_{yoz} = I_{x=0} = I_x = m x^2 \quad (7)$$

ملاحظات على العلاقات السابقة

(1) من العلاقات (1) , (5-7)

$$I_o = m r^2 = m(x^2 + y^2 + z^2) = I_{xoy} + I_{xoz} + I_{yoz} \quad (8)$$

أي أن عزم القصور الذاتي لجسم في الفراغ منسوباً لنقطة تلاقي المحاور الثلاثة المتعامدة (I_o) يساوي مجموع عزوم القصور الذاتي لهذا الجسم منسوباً للثلاثة المستويات المتعامدة والمتلاقية في النقطة o .

(2)- من العلاقات (1) , (2-4) واضح أن

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2m(x^2 + y^2 + z^2) = 2I_o \quad (9)$$

أي أن عزم القصور الذاتي لجسم في الفراغ منسوباً لنقطة تلاقي المحاور الثلاثة المتعامدة (I_o) يساوي نصف مجموع عزوم القصور الذاتي لهذا الجسم منسوباً للثلاثة المحاور المتعامدة والمكونة لهذا الفراغ.

(3)- من العلاقات (2-7) واضح أن

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= m(y^2 + z^2) = I_{xoy} + I_{xoz} \\
I_{yy} &= m(x^2 + z^2) = I_{xoy} + I_{yoz} \\
I_{zz} &= m(x^2 + y^2) = I_{xoz} + I_{yoz}
\end{aligned} \tag{10}$$

أي أن عزم القصور الذاتي لجسم في الفراغ منسوبا لمحور من الثلاث المحاور المتعامدة والمتلاقية في نقطة واحدة يساوي (يكافئ) مجموع عزوم القصور الذاتي لهذا الجسم منسوبا لمستويين متعامدين على هذا المحور.

(4)- من العلاقات (1-7) واضح أن عزوم القصور الذاتي قيمة موجبة دائماً وتتوقف على كتلة الجسم وكذلك على بعد النقطة أو المحور أو المستوى الذي يتم حساب العزم حولهم.

(5) فيما سبق تم تعريف عزم القصور الذاتي لجسم بالصورة $I = ma^2$ عند ذلك الكمية

$$a = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

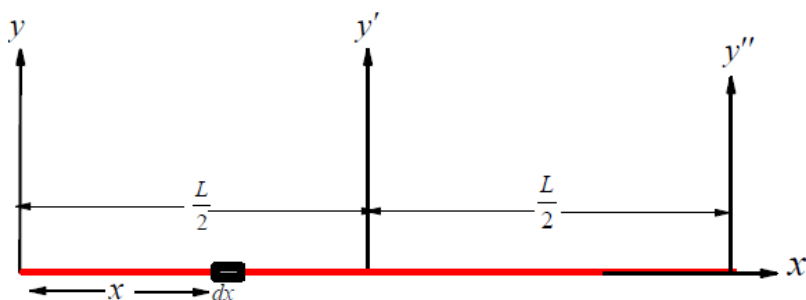
تعرف بنصف قطر القصور الذاتي.

مثال (1): أوجد عزم القصور الذاتي لعمود رفيع منتظم طوله L وكتلته m ؟

الحل

بوضع العمود الرفيع منطبقاً على محور x كما بالشكل وبأخذ عنصر صغير طوله dx و على بعد x من المحور y و المنطبق على الطرف الأيسر للعمود وبفرض ان كثافة المادة المصنوع منها العمود هي ρ . فتعطي كتلته هذا العمود بالصورة $m = L\rho$ وكذلك يمكن إيجاد الكتلة بالصورة

$$dm = \rho dx \rightarrow m = \int_0^L \rho dx = \rho \int_0^L dx = \rho x \Big|_0^L \rightarrow m = \rho L$$



بالنسبة للمحور y يعطى عزم القصور الذاتي

$$I_{yy} = \int x^2 dm = \int_0^L x^2 (\rho dx) = \frac{1}{3} \rho L^3 = \frac{1}{3} \rho L^3 \frac{m}{\rho L} = \frac{1}{3} mL^2 \quad \therefore I_{yy} = \frac{1}{3} mL^2$$

بينما بالنسبة للمحور y' والذي يمر بمركز ثقل العمود (منتصف العمود) يعطى عزم القصور الذاتي من نظرية المحاور المتوازية بالصورة

$$I_{yy} = I_{y'y'} + m\left(\frac{1}{2}L\right)^2 \rightarrow I_{y'y'} = \frac{1}{3}mL^2 - \frac{1}{4}mL^2 = \left(\frac{4-3}{12}\right)mL^2 = \frac{1}{12}mL^2$$

$$\therefore I_{y'y'} = \frac{1}{12}mL^2$$

وبالنسبة للمحور y'' والذي يمر بالطرف الأخر للعمود يعطى عزم القصور الذاتي من نظرية المحاور المتوازية بالصورة

$$I_{y''y''} = I_{y'y'} + m\left(\frac{1}{2}L\right)^2 \rightarrow I_{y''y''} = \frac{4}{12}mL^2 \therefore I_{y''y''} = \frac{1}{3}mL^2$$

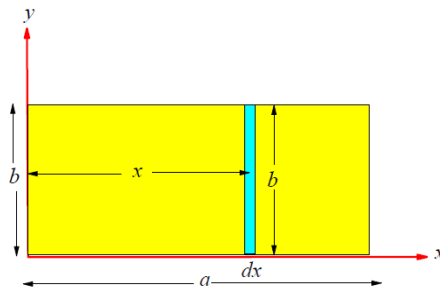
تمرين: أوجد عزم القصور الذاتي لعمود رفيع منتظم طوله L وكتلته m وذلك اذا كان مائلاً على محور الدوران؟

مثال- (2): أوجد عزم القصور الذاتي لصفحة على هيئة مستطيل منسوباً لمحور تمر بأركانها وكذلك محاور تمر بمركز ثقلها؟

الحل

بأخذ الصفحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير هيئة مستطيل صغير طوله b و عرضة dx وعلى بعد x من المحور oy وبفرض ان كثافة المادة المصنوعة منها الصفحة هي ρ . فتعطى كتلته بالصورة $m = ab\rho$ وكذلك يمكن

$$dm = \rho b dx \rightarrow m = \int_0^a \rho b dx \rightarrow m = \rho ab \quad \text{إيجاد الكتلة بالصور}$$



$$dI_{yy} = x^2 dm = x^2 (\rho b dx)$$

بالنسبة للمحور y يعطى عزم القصور الذاتي

$$I_{yy} = \rho b \int_0^a x^2 dx = \rho b \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{ba^3}{3} \rho = \frac{ba^3}{3} \rho \frac{m}{m} = \frac{ba^3}{3} \rho \frac{m}{\rho ab}$$

$$\therefore I_{yy} = \frac{1}{3} ma^2$$

بينما بالنسبة للمحور y' والذي يمر بمركز ثقل العمود (منتصف العمود) يعطى عزم القصور

الذاتي من نظرية المحاور المتوازية بالصورة

$$I_{yy} = I_{y'y'} + m \left(\frac{1}{2} a \right)^2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{3} mL^2 = I_{y'y'} + m \left(\frac{1}{2} a \right)^2 \rightarrow I_{y'y'} = \frac{1}{3} ma^2 - \frac{1}{4} ma^2 = \left(\frac{4-3}{12} \right) ma^2 = \frac{1}{12} ma^2$$

$$\therefore I_{y'y'} = \frac{1}{12} ma^2$$

وبالنسبة للمحورين x, x' يعطى عزم القصور الذاتي على الترتيب بالصورة

$$I_{xx} = \frac{1}{3} mb^2, \quad I_{x'x'} = \frac{1}{12} mb^2$$

ويكون عزم القصور الذاتي لمحور عمودي على مستوى الصفيحة عند نقطة تلاقي المحورين ox, oy الواقعين في مستوى الصفيحة بالصورة (من نظرية الصفائح المستوية)

$$I_o = I_{xx} + I_{yy} = \frac{1}{3} mb^2 + \frac{1}{3} ma^2 = \frac{1}{3} m(a^2 + b^2)$$

ويكون كذلك عزم القصور الذاتي لمحور عمودي على مستوى الصفيحة عند نقطة تلاقي المحورين ox', oy' الواقعين في مستوى الصفيحة بالصورة

$$I_{o'} = I_{x'x'} + I_{y'y'} = \frac{1}{12} mb^2 + \frac{1}{12} ma^2 = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

ويمكن وصف عزم القصور الذاتي للمستطيل بالجدول الآتي

عزم القصور حول محور يمر بالطرف الأخر المقابل	عزم القصور حول محور يمر بمركز الثقل	عزم القصور حول محور يمر بالطرف	الجسم : صفيحة على هيئة مستطيل أبعاده
--	-------------------------------------	--------------------------------	--------------------------------------

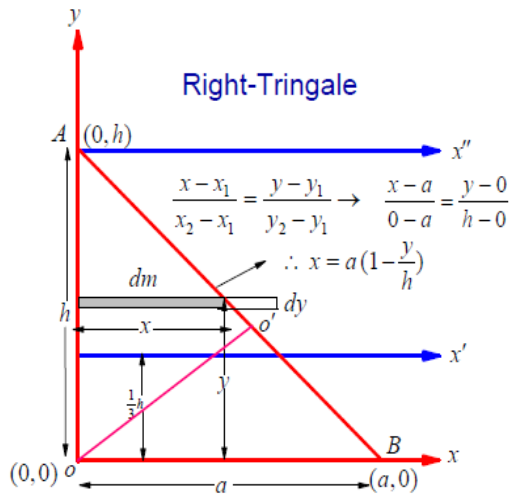
(a,b)			
منسوبا للمحور I_{xx}	$I_{xx} = \frac{1}{3}mb^2$	$I_{x'x'} = \frac{1}{12}mb^2$	$I_{x''x''} = \frac{1}{3}mb^2$
منسوبا للمحور I_{yy}	$I_{yy} = \frac{1}{3}ma^2$	$I_{y'y'} = \frac{1}{12}ma^2$	$I_{y''y''} = \frac{1}{3}ma^2$
منسوبا لمحور عمودي على المستوى xoy	$I_{zz} = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)$	$I_{z'z'} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$	$I_{z''z''} = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)$

مثال (3): أحسب عزم القصور الذاتي لصفحة على هيئة مثلث (قائم الزاوية) حول المحاور المختلفة ومركز الثقل؟

الحل

بأخذ الصفحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير هيئة مستطيل صغير طوله x وسمكة dy وعلى بعد x من المحور oy وبفرض ان كثافة المادة المصنوعة منها الصفحة هي ρ . فتعطي كتلته الصفحة بالصورة $m = \frac{1}{2}ah\rho$. وكذلك يمكن إيجاد الكتلة بالصورة

$$dm = \rho y dx \rightarrow m = \rho \int_0^a y dx = \rho \int_0^a h \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = h\rho \left[x - \frac{x^2}{2h} \right]_0^a \rightarrow m = \frac{1}{2}ah\rho$$



$$dI_{xx} = y^2 dm = y^2 (\rho x dy)$$

و يعطي عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحور x

$$I_{xx} = \rho \int_0^h x y^2 dy, \text{ where } \frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1 \rightarrow x = a(1 - \frac{y}{h})$$

$$I_{xx} = \rho \int_0^h a(1 - \frac{y}{h}) y^2 dy = \rho a \int_0^h (y^2 - \frac{y^3}{h}) dy = \rho a \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4h} \right]_0^h$$

$$I_{xx} = \rho a \left[\frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4h} \right] = \frac{1}{12} \rho a h^3 (4-3) = \frac{1}{12} \rho a h^3 \frac{m}{\frac{1}{2} a h \rho} = \frac{1}{6} m h^2$$

$$\therefore I_{xx} = \frac{1}{6} m h^2$$

$$\therefore I_{yy} = \frac{1}{6} m a^2$$

بالمثل يمكن اثبات أن

بينما بالنسبة للمحور x' والذي يمر بمركز ثقل الصفيحة المثلثية يعطى عزم القصور الذاتي من نظرية المحاور المتوازية بالصورة

$$I_{xx} = I_{x'x'} + m \left(\frac{1}{3} h \right)^2 \rightarrow I_{x'x'} = \frac{1}{6} m h^2 - \frac{1}{9} m h^2 = \frac{1}{18} m h^2 (3-2) = \frac{1}{18} m h^2$$

$$\therefore I_{x'x'} = \frac{1}{18} m h^2$$

وبالنسبة للمحور x'' والذي يمر بالنقطة $(0, h)$ الصفيحة المثلثية يعطى عزم القصور الذاتي من نظرية المحاور المتوازية بالصورة

$$I_{x''x''} = I_{x'x'} + m \left(\frac{2}{3} h \right)^2 = \frac{1}{18} m h^2 + \frac{4}{9} m h^2 = \frac{1}{18} m h^2 (1+8) = \frac{9}{18} m h^2$$

$$\therefore I_{x''x''} = \frac{1}{2} m h^2$$

$$I_{AB} = \frac{1}{6} m (oo')^2 \quad \text{بالنسبة للمحور } (AB) \text{ عزم القصور الذاتي يعطى بالصورة}$$

ومن المعلوم بأن مساحة المثلث المعطى يمكن حسابها بالصورة $\frac{1}{2} a h$ وكذلك تعطى بالصورة :

$$AB = \sqrt{(0-a)^2 + (h-0)^2} = \sqrt{a^2 + h^2} \quad \text{حيث} \quad \frac{1}{2} (oo') AB$$

ومن هذه العلاقات يمكننا القول بأن

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}(oo')AB = \frac{1}{2}(oo')\sqrt{a^2 + h^2} \rightarrow oo' = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

$$I_{AB} = \frac{1}{6}m(oo')^2 = \frac{a^2 h^2}{6(a^2 + h^2)}m$$

وبذلك يعطى عزم القصور الذاتي بالصورة

ويمكن وصف عزم القصور الذاتي للصفحة المثلثية منسوبا الى المحاور المختلفة في الجدول التالي

الجسم : صفحة على هيئة مثلث قاعدة a و ارتفاعه h	عزم القصور حول محور يمر بالطرف	عزم القصور حول محور يمر بمركز الثقل	عزم القصور حول محور يمر بالطرف الأخر المقابل
منسوبا للمحور I_{xx}	$I_{xx} = \frac{1}{6}mh^2$	$I_{x'x'} = \frac{1}{18}mh^2$	$I_{x''x''} = \frac{1}{2}mh^2$
منسوبا للمحور I_{yy}	$I_{yy} = \frac{1}{6}ma^2$	$I_{y'y'} = \frac{1}{18}ma^2$	$I_{y''y''} = \frac{1}{2}ma^2$
منسوبا لمحور عمودي على المستوى xoy	$I_{zz} = \frac{1}{6}m(a^2 + h^2)$	$I_{z'z'} = \frac{1}{18}m(a^2 + h^2)$	$I_{z''z''} = \frac{1}{6}m(3a^2 + h^2), I_{z''z''} = \frac{1}{6}m(a^2 + 3h^2)$

من الملاحظ ان عزم القصور الذاتي الكلي لصفحة على هيئة مثلث يتوقف على كل من كتلة الصفحة المثلثية و ارتفاعها لذلك فهو لن يتغير اذا كانت الصفحة قائمة أو حادة أو منفرجة الزاوية كما سوف نرى فيما يأتي:

(4)- أحسب عزم القصور الذاتي لصفحة على هيئة مثلث حاد الزاوية ؟

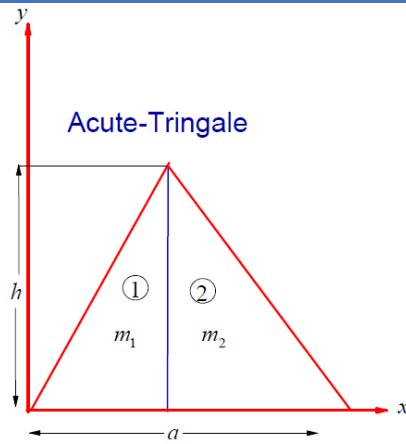
الحل

للمثلث الحاد الزاوية سوف نقسمه الى مثلثين قائمين الزاوية كما بالشكل ويعطى عزم القصور الذاتي حول المحور x للمثلثين (1, 2) على الترتيب بالصورة

$$(I_{xx})_1 = \frac{1}{6}m_1 h^2, \quad (I_{xx})_2 = \frac{1}{6}m_2 h^2,$$

ويعطى بذلك عزم القصور الذاتي حول المحور x للمثلث الحاد بالصورة

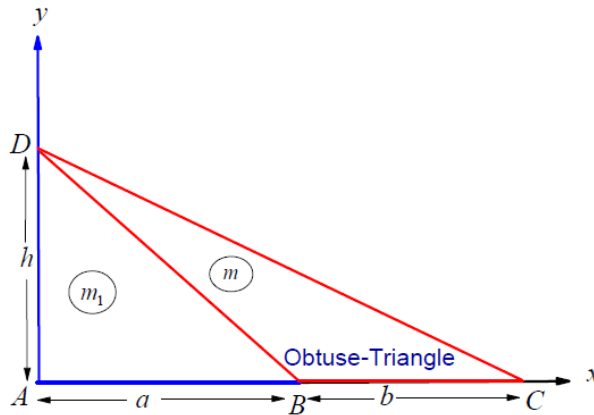
$$I_{xx} = (I_{xx})_1 + (I_{xx})_2 = \frac{1}{6}m_1 h^2 + \frac{1}{6}m_2 h^2 = \frac{1}{6}(m_1 + m_2)h^2 = \frac{1}{6}mh^2$$



مثال (5)- عزم القصور الذاتي لصفحة على هيئة مثلث منفرج الزاوية؟

للمثلث المنفرج الزاوية ABC سوف نضيف المثلث القائم CBD القائم الزاوية عند D ليصبح لدينا مثلثين قائمين الزاوية كما بالشكل

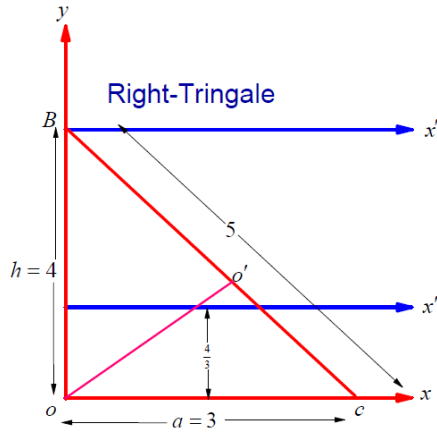
الحل



ويعطى عزم القصور الذاتي حول المحور x للمثلث ABC بالصورة

$$(I_{xx})_{BCD} = (I_{xx})_{ACD} - (I_{xx})_{ABD} = \frac{1}{6}(m_1 + m)h^2 - \frac{1}{6}m_1 h^2 = \frac{1}{6}m h^2$$

مثال (6)- لصفحة على هيئة مثلث معطى كما بالشكل أوجد عزم القصور الذاتي حول المحاور المختلفة؟



الحل

$$I_{xx} = \frac{1}{6} m h^2, \quad I_{yy} = \frac{1}{6} m a^2, \quad I_{BC} = \frac{a^2 h^2}{6(a^2 + h^2)} m$$

من المعلوم بأن

$$I_{xx} = \frac{1}{6} m h^2 = \frac{1}{6} m (4)^2 = \frac{16}{6} m = \frac{8}{3} m$$

لذلك فإن

$$I_{yy} = \frac{1}{6} m a^2 = \frac{1}{6} m (3)^2 = \frac{9}{6} m = \frac{3}{2} m$$

$$I_{BC} = \frac{a^2 h^2}{6(a^2 + h^2)} m = \frac{(3)^2 (4)^2}{6((3)^2 + (4)^2)} m = \frac{(9)(16)}{6(9+16)} m = \frac{(9)(16)}{6(25)} m = \frac{24}{25} m$$

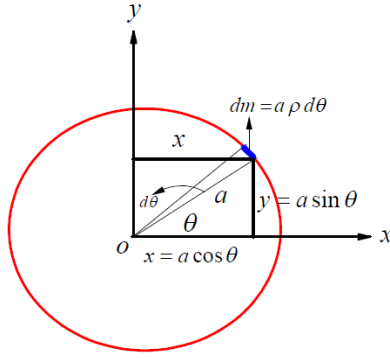
$$I_{xx} = \frac{8}{3} m > I_{yy} = \frac{3}{2} m > I_{BC} = \frac{24}{25} m \quad \text{وأن} \quad 3 < 4 < 5 \quad \text{من الملاحظ أن}$$

مثال(7): أحسب عزم القصور الذاتي لحلقة دائرية منتظمة (Circular Ring)!

الحل

بأخذ الحلقة الدائرية كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير كتلة dm ويبعد مسافة a من مركز الحلقة o حيث يقع كل من المحورين ox, oy في مستوى الحلقة عند o وعلى ذلك فإن عزم القصور الذاتي لهذه الكتلة الصغيرة عند o يعطى بالصورة $dI_o = a^2 dm$ وللحلقة كاملاً يعطى

$$I_o = \int a^2 dm = a^2 \int_0^m dm \rightarrow I_o = a^2 m = I_{zz} \quad \text{بالصورة}$$



و من نظرية الصفائح المستوية $I_o = I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$ وكذلك كل I_{xx}, I_{yy} من متماثلين أي
 أن $I_{xx} = I_{yy}$

$$I_{xx} + I_{yy} = ma^2 \rightarrow I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} ma^2$$

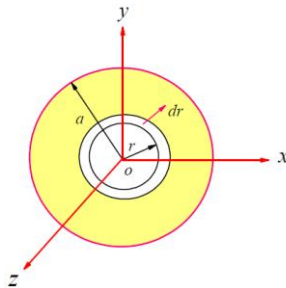
مثال (8): أحسب عزم القصور الذاتي لدائرة منتظمة (مساحة دائرية)؟

الحل

بأخذ الدائرة كما بالشكل المقابل ثم نقسمها الى عدد من الحلقات الدائرية الصغيرة وبأخذ واحد من هذه الحلقات ذات الكتلة dm ونصف القطر r والسمك dr وبفرض أن من مركز الدائرة هو o حيث يقع كل من المحورين ox, oy في مستوى الحلقة عند o والمحور oz هو والمحور العمودي على مستوى الصفيحة عند نقطة تلاقي المحورين ox, oy الواقعين في مستوى الصفيحة. ويكون عزم القصور الذاتي لهذه الحلقة الصغير عند o بالصورة $dI_o = r^2 dm$ والمساحة الدائرة كاملاً يعطى بالصورة $I_o = \int r^2 dm$ مع الأخذ في الاعتبار بأن كتلة الدائرة الكلية

تعطى من $m = \pi a^2 \rho$ (المساحة مضروبة في الكثافة المصنوع منها مادة الدائرة) أو

$$dm = 2\pi r \rho dr \rightarrow m = 2\pi \rho \int_0^a r dr \rightarrow m = 2\pi \rho \frac{r^2}{2} \Big|_0^a = \pi a^2 \rho$$



وعلى ذلك فإن عزم القصور الذاتي للدائرة كاملاً يعطى بالصورة

$$I_o = I_{zz} = \int r^2 dm = \int r^2 (2\pi r \rho dr) = 2\pi\rho \int_0^a r^3 dr =$$

$$\frac{2\pi\rho r^4}{4} \Big|_0^a = \frac{\pi\rho a^4}{2} = \frac{\pi\rho a^4}{2} \frac{m}{m} = \frac{\pi\rho a^4}{2} \frac{m}{\pi a^2 \rho} \rightarrow I_o = \frac{1}{2} ma^2$$

و من نظرية الصفائح المستوية $I_o = I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$ وكذلك كل I_{xx}, I_{yy} متماثلين أي أن $I_{xx} = I_{yy}$

$$I_{xx} + I_{yy} = \frac{1}{2} ma^2 \rightarrow I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} ma^2$$

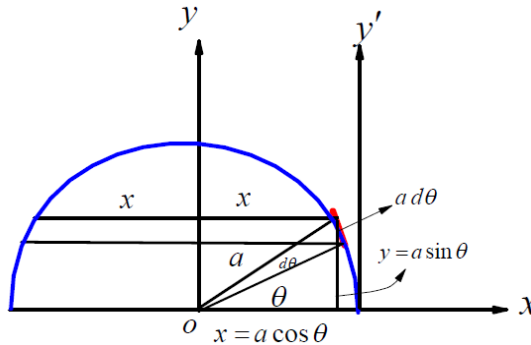
مثال (9): أحسب عزم القصور الذاتي لنصف دائرة منتظمة؟

الحل

بتقسيم نصف الدائرة الى شرائح صغيرة على شكل مستطيل وأخذ كتلة أحدهما والتي تعطى بالصورة $dm = 2x\rho dy$. يمكننا حساب عزم القصور الذاتي للدائرة كاملاً حول محور x يعطى بالصورة $dI_{xx} = y^2 dm$ وللدائرة كاملاً يعطى بالصورة

$$I_{xx} = \int y^2 dm = \int_0^a (a \sin \theta)^2 (2x\rho dy) = 2\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 \theta (a \cos \theta)(a \cos \theta d\theta)$$

$$= 2a^4 \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = 2a^4 \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$



$$= 2a^4 \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos^2 2\theta}{4} d\theta = \frac{2}{4} a^4 \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1 + \cos 4\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{2}{8} a^4 \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\theta) d\theta = \frac{1}{4} a^4 \rho \left(\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} a^4 \rho \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{8} a^4 \rho \pi$$

$$I_{xx} = \frac{1}{8} a^4 \rho \pi \frac{m}{m} = \frac{1}{8} a^4 \rho \pi \frac{m}{\frac{1}{2} \pi a^2 \rho} = \frac{1}{4} m a^2 \rightarrow I_{xx} = \frac{1}{4} m a^2 \quad (1)$$

بالمثل عزم القصور الذاتي للدائرة كاملاً حول محور y يعطى بالصورة

$$I_{yy} = \frac{1}{4} m a^2 \quad (2)$$

و من نظرية الصفائح المستوية $I_o = I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$

$$I_o = I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} = \frac{1}{2} m a^2 \rightarrow I_o = I_{zz} = \frac{1}{2} m a^2 \quad (3)$$

مثال (10): أحسب عزم القصور الذاتي لقرص دائري منتظم؟

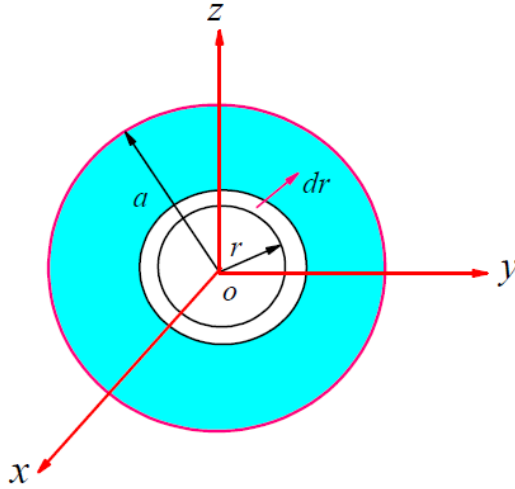
الحل

بأخذ القرص الدائري كما بالشكل المقابل ثم نقسم القرص الى عدد من الحلقات الدائرية الصغيرة وبأخذ واحدة من هذه الحلقات ذات الكتلة dm ونصف القطر r والسمك dr وبفرض أن من مركز القرص هو o حيث يقع كل من المحورين ox, oy في مستوى الحلقة عند o والمحور oz هو والمحور العمودي على مستوى القرص عند نقطة تلاقي المحورين ox, oy الواقعين في مستوى القرص. ويكون عزم القصور الذاتي لهذه الحلقة الصغير عند o بالصورة $dI_o = r^2 dm$ وللقرص

كاملاً يعطى بالصورة $I_o = \int r^2 dm$ مع الأخذ في الاعتبار بأن كتلة القرص الكلي تعطى من

$m = \pi a^2 \rho \Delta z$ (أو محيط الحلقة مضروبة في الكثافة المصنوع منها مادة القرص) أو

$$dm = 2\pi r \rho \Delta z dr \rightarrow m = 2\pi \rho \Delta z \int_0^a r dr \rightarrow m = 2\pi \rho \Delta z \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^a = \pi a^2 \rho \Delta z$$



وعلى ذلك فإن عزم القصور الذاتي للقرص كاملاً يعطى بالصورة

$$I_{zz} = \int r^2 dm = \int r^2 (2\pi r \rho \Delta z dr) = 2\pi\rho\Delta z \int_0^a r^3 dr = 2\pi\rho\Delta z \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^a = \pi\rho\Delta z \frac{a^4}{2}$$

$$I_{zz} = \frac{\pi\rho a^4}{2} \frac{m}{m} = \frac{\pi\rho\Delta z a^4}{2} \frac{m}{\pi a^2 \rho \Delta z} \rightarrow I_{zz} = \frac{1}{2} m a^2$$

و من نظرية المحاور المتوازية وبالنسبة للشكل المأخوذ لدينا $I_{z'z'} = I_{zz} + m a^2$ ومنها

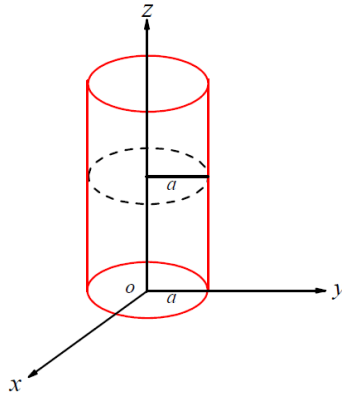
$$I_{z'z'} = \frac{1}{2} m a^2 + m a^2 \rightarrow I_{z'z'} = \frac{3}{2} m a^2$$

مثال (11)- أحسب عزم القصور الذاتي لأسطوانة مجوفة ؟

الحل

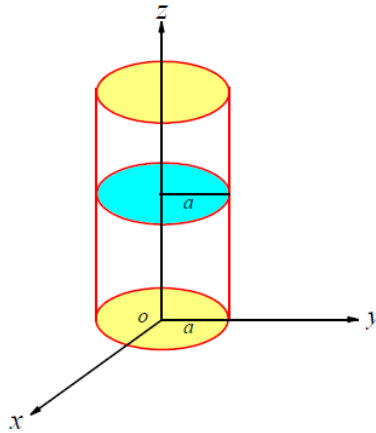
بأخذ الاسطوانة المجوفة كما بالشكل المقابل نقسمها الى عدد لانهائي من الحلقات الدائرية المنتظمة ونأخذ و احد من هذه الحلقات ذو الكتلة dm ونصف القطر a ويكون عزم القصور الذاتي لهذه الحلقة حول المحور oz بالصورة $dI_{zz} = a^2 dm$ ولأسطوانة المجوفة كاملاً يعطى عزم القصور

$$I_{zz} = \int_0^m a^2 dm = m a^2 \rightarrow I_{zz} = m a^2 \quad \text{الذاتي بالصورة}$$



مثال (12) - أحسب عزم القصور الذاتي لأسطوانة مصمتة ؟

الحل



بأخذ الاسطوانة المصمتة كما بالشكل المقابل ونقسمها الى عدد لانهايي من الأقراص الدائرية المنتظمة ونأخذ واحد من هذه الأقراص ذو الكتلة dm ونصف القطر a . ويكون عزم القصور الذاتي لهذه للقرص الصغير عند المحور oz بالصورة

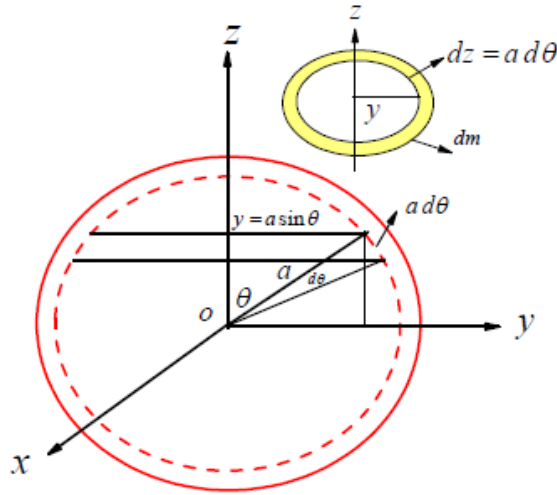
$$dI_{zz} = \frac{1}{2} a^2 dm$$

ولأسطوانة كاملاً يعطى عزم القصور الذاتي بالصورة

$$I_{zz} = \int_0^m \frac{1}{2} a^2 dm = \frac{1}{2} m a^2 \rightarrow I_{zz} = \frac{1}{2} m a^2$$

مثال (13): أحسب عزم القصور الذاتي لكرة مجوفة (Hollow Sphere) ؟

الحل



بأخذ الكرة كما بالشكل المقابل ثم نقسمها الى عدد من الحلقات الدائرية الصغيرة وبأخذ واحد من وبفرض سمك هذه الحلقة يصنع زاوية والسمك dr هذه الحلقات ذو الكتلة dm ونصف القطر y عند o . ويكون عزم القصور الذاتي لهذه الحلقة حول المحور oz بالصورة $dI_{zz} = y^2 dm$

وللكرة كاملاً يعطى العزم بالصورة $I_{zz} = \int y^2 dm$ مع الأخذ في الاعتبار بأن كتلة الكرة الكلية

تعطى من $m = 4\pi a^2 \rho$ (مساحة سطح الكرة مضروباً في الكثافة) أو

$$dm = 2\pi y \rho dr = 2\pi (a \sin \theta) \rho a d\theta \rightarrow m = 2\pi \rho a^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \rightarrow$$

$$m = -2\pi \rho a^2 \cos \theta \Big|_0^\pi = -2\pi \rho a^2 (\cos(\pi) - \cos(0)) = 2\pi \rho a^2 (1+1) = 4\pi \rho a^2$$

وعلى ذلك فإن عزم القصور الذاتي للكرة كاملاً تعطى بالصورة

$$I_{zz} = \int y^2 dm = 2\pi \rho a^4 \int_0^\pi (\sin \theta)^2 \sin \theta d\theta = 2\pi \rho a^4 \left[\int_0^\pi (1 - \cos \theta)^2 \sin \theta d\theta \right]$$

$$= 2\pi \rho a^4 \left[\int_0^\pi \sin \theta d\theta - \int_0^\pi (\cos \theta)^2 d(-\sin \theta) \right]$$

$$= 2\pi \rho a^4 \left[-\cos \theta + \frac{1}{3} (\cos \theta)^3 \right]_0^\pi = 2\pi \rho a^4 \left[-\cos(\pi) + \frac{1}{3} (\cos(\pi))^3 - \left\{ -\cos(0) + \frac{1}{3} (\cos(0))^3 \right\} \right]$$

$$= 2\pi \rho a^4 \left[1 + \frac{1}{3} - \left\{ -1 + \frac{1}{3} \right\} \right] = 2\pi \rho a^4 \left[1 + \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right] = 2\pi \rho a^4 \left[2 - \frac{2}{3} \right] = \frac{8}{3} \pi \rho a^4$$

$$I_{zz} = \frac{8}{3} \pi \rho a^4 \frac{m}{4\pi a^2 \rho} = \frac{2}{3} m a^2 \text{ Then } I_{zz} = \frac{2}{3} m a^2$$

لاحظ أنه للكرة المجوفة يكون $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3} m a^2$ وأيضا $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2I_o$

$$2I_o = \frac{2}{3} m a^2 + \frac{2}{3} m a^2 + \frac{2}{3} m a^2 = \frac{6}{3} m a^2 = 2m a^2 \quad \text{لذلك فإن}$$

أي ان عزم القصور الذاتي للكرة المجوفة حول مركزها يكون بالصورة $I_o = m a^2$

و من نظرية المحاور المتوازية وبالنسبة للشكل المأخوذ يكون لدينا $I_{z'z'} = I_{zz} + m a^2$ ومنها

$$I_{z'z'} = \frac{2}{3} m a^2 + m a^2 \rightarrow I_{z'z'} = \frac{5}{3} m a^2$$

مثال (14) أحسب عزم القصور الذاتي لكرة مصمتة (Solid Sphere)؟

الحل

بأخذ الكرة المصمتة كما بالشكل المقابل ثم نقسمها الى عدد من الكرات المجوفة وبأخذ واحدة من هذه الكرات ذات الكتلة dm ونصف القطر r والسمك dr . ويكون عزم القصور الذاتي لهذه الكرة

$$\text{حول المحور } oz \text{ بالصورة } dI_{zz} = \frac{2}{3} (dm) r^2$$

وللكرة كاملاً يعطى العزم بالصورة $I_{zz} = \int \frac{2}{3} (dm) r^2$ مع الأخذ في الاعتبار بأن كتلة الكرة الكلية

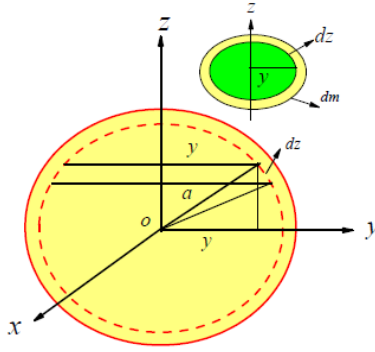
تعطى من $m = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$ (حجم الكرة مضروباً في الكثافة) أو بأخذ كتلة العنصر الصغير المختار

(كرة مجوفة) والتي تكون بالصورة

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr \rightarrow m = 4\pi \rho \int_0^a r^2 dr = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$$

وعلى ذلك فإن عزم القصور الذاتي للكرة المصمتة كاملاً تعطى بالصورة

$$I_{zz} = \int \frac{2}{3} (dm) r^2 = \int_0^a \frac{2}{3} (4\pi r^2 \rho dr) r^2 = \frac{8}{3} \pi \rho \int_0^a r^4 dr = \frac{8}{3} \pi \rho \left. \frac{r^5}{5} \right|_0^a = \frac{8}{15} \pi \rho a^5$$



$$I_{zz} = \frac{8}{15} \pi \rho a^5 \frac{m}{m} = \frac{8}{15} \pi \rho a^5 \frac{m}{\frac{4}{3} \rho a^3} = \frac{2}{5} m a^2 \quad \text{Then } I_{zz} = \frac{2}{5} m a^2$$

لاحظ أنه للكرة المصمتة يكون $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5} m a^2$ وأيضا $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2I_o$

لذلك فان

$$2I_o = \frac{2}{5} m a^2 + \frac{2}{5} m a^2 + \frac{2}{5} m a^2 = \frac{6}{5} m a^2 \rightarrow I_o = \frac{3}{5} m a^2$$

مثال (15): أحسب عزم القصور الذاتي لنصف كرة مجوفة (Hollow Hemisphere)؟

الحل

بأخذ نصف الكرة المجوفة كما بالشكل المقابل ثم نقسمها الى عدد من الحلقات الدائرية الصغيرة وبأخذ واحد من هذه الحلقات ذو الكتلة dm ونصف القطر y والسمك dr وبفرض سمك هذه الحلقة يصنع زاوية $d\theta$ عند o . ويكون عزم القصور الذاتي لهذه الحلقة حول

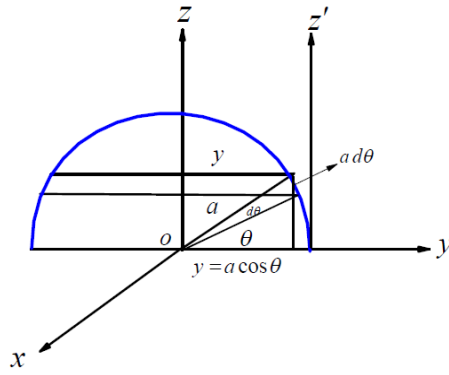
المحور oz بالصورة $dI_{zz} = y^2 dm$. وللكرة كاملاً يعطى العزم بالصورة $I_{zz} = \int y^2 dm$ مع الأخذ

في الاعتبار بأن كتلة نصف الكرة المجوفة الكلية تعطى من $m = \frac{1}{2} (4\pi a^2 \rho) = 2\pi a^2 \rho$ (نصف

مساحة سطح نصف الكرة مضروباً في الكثافة) والعنصر الصغير يعطى بالصورة

$$dm = 2\pi y \rho dr = 2\pi (a \cos\theta) \rho a d\theta$$

وعلى ذلك فإن عزم القصور الذاتي لنصف الكرة المجوفة كاملاً يعطى بالصورة



$$I_{zz} = \int y^2 dm = \int y^2 (2\pi y \rho dr) = \int (a \sin \theta)^2 2\pi (a \sin \theta) \rho a d\theta = 2\pi \rho a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^3 d\theta$$

$$I_{zz} = 2\pi \rho a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^2 \sin \theta d\theta = 2\pi \rho a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - (\cos \theta)^2) \sin \theta d\theta,$$

Now let $t = \cos \theta \rightarrow \frac{dt}{d\theta} = -\sin \theta \rightarrow -\sin \theta d\theta = dt$. Then

$$I_{zz} = 2\pi \rho a^4 \int_0^1 (1-t^2)(-dt) = -2\pi \rho a^4 \left(t - \frac{1}{3}t^3 \right) \Big|_{-1}^0 = -2\pi \rho a^4 \left\{ -1 + \frac{1}{3} \right\}$$

$$= -2\pi \rho a^4 \left\{ -\frac{2}{3} \right\} = \frac{4}{3} \pi \rho a^4 = \frac{4}{3} \pi \rho a^4 \frac{m}{2\pi a^2 \rho} = \frac{2}{3} m a^2$$

$$I_{zz} = \frac{2}{3} m a^2$$

أي أن

و من نظرية المحاور المتوازية وبالنسبة للشكل المأخوذ يكون لدينا $I_{z'z'} = I_{zz} + m a^2$ ومنها

$$I_{z'z'} = \frac{2}{3} m a^2 + m a^2 \rightarrow I_{z'z'} = \frac{5}{3} m a^2$$

مثال (16): أحسب عزم القصور الذاتي لنصف كرة مصمتة (Solid Hemisphere)

الحل

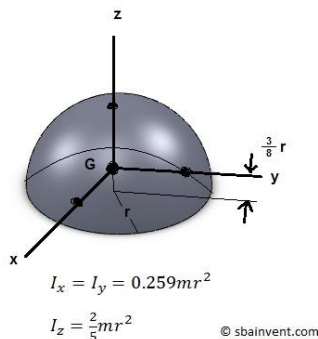
بنقسيم نصف الكرة المصمتة الى عدد من أنصاف الكرات المجوفة وبأخذ واحدة من هذه الكرات ذات الكتلة dm ونصف القطر r والسمك dr ويكون عزم القصور الذاتي لهذه الكرة حول المحور

oz بالصورة $dI_{zz} = \frac{2}{3} (dm) r^2$ ولنصف الكرة كاملاً يعطى العزم بالصورة

$$I_{zz} = \int \frac{2}{3} (dm) r^2$$

مع الأخذ في الاعتبار بأن كتلة نصف هذه الكرة الكلية تعطى من $m = \frac{2}{3} \pi a^3 \rho$ (حجم الكرة مضروباً في الكثافة) أو بأخذ كتلة العنصر الصغير المختار (كرة مجوفة) والتي تكون بالصورة

$$dm = \frac{1}{2} (4\pi r^2 \rho dr) = 2\pi r^2 \rho dr \rightarrow m = 2\pi \rho \int_0^a r^2 dr = \frac{2}{3} \pi a^3 \rho$$



وعلى ذلك فإن عزم القصور الذاتي لنصف الكرة المصمتة كاملاً يعطى بالصورة

$$I_{zz} = \int \frac{2}{3} (dm) r^2 = \int_0^a \frac{2}{3} (2\pi r^2 \rho dr) r^2 = \frac{4}{3} \pi \rho \int_0^a r^4 dr = \frac{4}{3} \pi \rho \frac{r^5}{5} \Big|_0^a = \frac{4}{15} \pi \rho a^5$$

$$I_{zz} = \frac{4}{15} \pi \rho a^5 \frac{m}{m} = \frac{4}{15} \pi \rho a^5 \frac{m}{\frac{2}{3} \rho a^3} = \frac{2}{5} m a^2$$

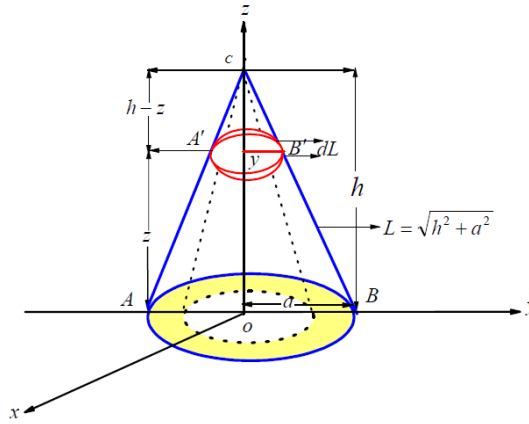
Then $I_{zz} = \frac{2}{5} m a^2$

مثال (17): أحسب عزم القصور الذاتي لمخروط دائري قائم منتظم أجوف منسوبا لمحور ينصف رأسه وعمودي على قاعدة؟

الحل

بأخذ نصف المخروط المجوف كما بالشكل المقابل ثم نقسمه الى عدد من الحلقات الدائرية الصغيرة وبأخذ واحد من هذه الحلقات ذو الكتلة dm ونصف القطر y والسك dL والذي

يقع على ارتفاع z من قاعدة المخروط ذات نصف القطر a .



لاحظ أنه من تشابه المثلثين $A'B'C$, ABC يكون لدينا

$$\frac{h-z}{h} = \frac{y}{a} \rightarrow y = \frac{a}{h}(h-z) \rightarrow z = \frac{h}{a}(a-y)$$

وعزم القصور الذاتي لهذه الحلقة حول المحور oz يعطى بالصورة $dI_{zz} = y^2 dm$ وللمخروط كاملاً يعطى العزم بالصورة $I_{zz} = \int y^2 dm$ مع الأخذ في الاعتبار بأن كتلة المخروط المجوف الكلية تعطى من العلاقة $m = \pi a L \rho$ (المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم مضروباً في الكثافة = نصف محيط قاعدته \times طول راسمه مضروباً في الكثافة) أو مأخوذة للعنصر المختار (حلقة ذو الكتلة dm ونصف القطر y والسمك dL)

$$dm = 2\pi y \rho dL \rightarrow m = 2\pi \rho \int_0^h y dL$$

لكن من المعلوم بأن طول القوس يعطى من العلاقة:

$$dL = \sqrt{(dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} dy = \sqrt{1 + \left(-\frac{h}{a}\right)^2} dy = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + h^2} dy = \frac{L}{a} dy$$

وعلى ذلك فإن الكتلة الكلية للمخروط تعطى من

$$dm = 2\pi \rho \int_0^a y dL = 2\pi \rho \int_0^a y \frac{L}{a} dy = 2\pi \rho \frac{L}{a} \frac{y^2}{2} \Big|_0^a = 2\pi \rho \frac{L}{a} \frac{a^2}{2} \rightarrow m = \pi a L \rho$$

وعلى ذلك فإن عزم القصور الذاتي للمخروط المجوف كاملاً يعطى بالصورة

$$I_{zz} = \int_0^a y^2 dm = \int_0^a y^2 (2\pi y \rho dL) = 2\pi \rho \int_0^a y^3 \frac{L}{a} dy = 2\pi \rho \frac{L}{a} \frac{y^4}{4} \Big|_0^a = 2\pi \rho \frac{L}{a} \frac{a^4}{4}$$

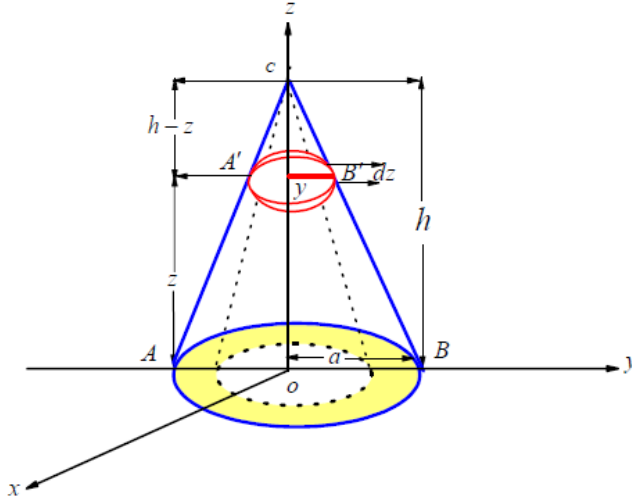
$$= \pi L \rho \frac{a^3}{2} = \pi L \rho \frac{a^3}{2} \frac{m}{m} = \pi L \rho \frac{a^3}{2} \frac{m}{\pi a L \rho} = \frac{1}{2} m a^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{2} m a^2$$

أي أن

مثال (18): أحسب عزم القصور الذاتي لمخروط دائري قائم منتظم مصمت؟

الحل



بأخذ نصف المخروط المصمت كما بالشكل المقابل ثم نقسمه الى عدد من الأقراص الدائرية الصغيرة وبأخذ واحد من هذه الأقراص ذو الكتلة dm ونصف القطر y والسمك dz و الذي يقع ارتفاع z من قاعدة المخروط ذات نصف القطر a . لاحظ أنه من تشابه المثلثين ABC , $A'B'C$ يكون لدينا

$$\frac{h-z}{h} = \frac{y}{a} \rightarrow y = \frac{a}{h}(h-z) \rightarrow z = \frac{h}{a}(a-y)$$

وعزم القصور الذاتي لهذا القرص حول المحور oz يعطى بالصورة $dI_{zz} = \frac{1}{2} y^2 dm$ وللمخروط

كاملاً يعطى العزم بالصورة $I_{zz} = \frac{1}{2} \int y^2 dm$ مع الأخذ في الاعتبار بأن كتلة المخروط المصمت

الكلية تعطى من العلاقة $m = \frac{1}{3} \pi a^2 h \rho$ (حجم للمخروط الدائري القائم مضروباً في الكثافة = مساحة

القاعدة في ثلث الارتفاع) أو مأخوذة للعنصر المختار (القرص ذو الكتلة dm ونصف القطر y والسماك dz) وعلى ذلك فإن الكتلة الكلية للمخروط تعطى من

$$dm = \pi y^2 \rho dz \rightarrow m = \pi \rho \int_0^h \left(\frac{a}{h} (h-z) \right)^2 dz = \pi \rho \frac{a^2}{h^2} \int_0^h (h^2 - 2hz + z^2) dz$$

$$= \pi \rho \frac{a^2}{h^2} \left(h^2 z - 2h \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^h = \pi \rho \frac{a^2}{h^2} \left(h^3 - h^3 + \frac{h^3}{3} \right) \rightarrow m = \frac{1}{3} \pi a^2 h \rho$$

وعلى ذلك فإن عزم القصور الذاتي للمخروط المصمت حول محور oz كاملاً يعطى بالصورة

$$I_{zz} = \frac{1}{2} \int_0^a y^2 dm = \frac{1}{2} \int_0^h y^2 (\pi y^2 \rho dz) = \frac{1}{2} \pi \rho \int_0^h y^4 dz = \frac{1}{2} \pi \rho \int_0^h \left(\frac{a}{h} (h-z) \right)^4 dz$$

$$= \frac{1}{2} \pi \rho \left(\frac{a}{h} \right)^4 \int_0^h (h-z)^4 dz = \frac{1}{2} \pi \rho \left(\frac{a}{h} \right)^4 \left(\frac{h-z)^5}{-5} \right) \Big|_0^h = \frac{1}{2} \pi \rho \frac{a^4}{h^4} \frac{h^5}{5} = \frac{1}{10} \pi \rho a^4 h I_{zz} = \frac{3}{10} m a^2$$

$$= \frac{1}{10} \pi \rho a^4 h \frac{m}{m} = \frac{1}{10} \pi \rho a^4 h \frac{m}{\frac{1}{3} \pi a^2 h \rho} = \frac{3}{10} m a^2$$

أي أن

لاحظ ان عزم القصور الذاتي للمخروط المصمت حول o

$$I_o = \int_0^h z^2 dm = \int_0^h z^2 (\pi y^2 \rho dz) = \pi \rho \int_0^h z^2 y^2 dz = \pi \rho \int_0^h z^2 \left(\frac{a}{h} (h-z) \right)^2 dz$$

$$= \pi \rho \left(\frac{a}{h} \right)^2 \int_0^h (h^2 z^2 - 2h z^3 + z^4) dz = \pi \rho \frac{a^2}{h^2} \left(h^2 \frac{z^3}{3} - h \frac{z^4}{2} + \frac{z^5}{5} \right) \Big|_0^h$$

$$= \pi \rho \frac{a^2}{h^2} h^5 \left(\frac{10-15+6}{30} \right) = \frac{1}{30} \pi \rho a^2 h^3 = \frac{1}{30} \pi \rho a^2 h^3 \frac{m}{\frac{1}{3} \pi a^2 h \rho} = \frac{1}{10} m h^2$$

$$I_o = \frac{1}{10} m h^2$$

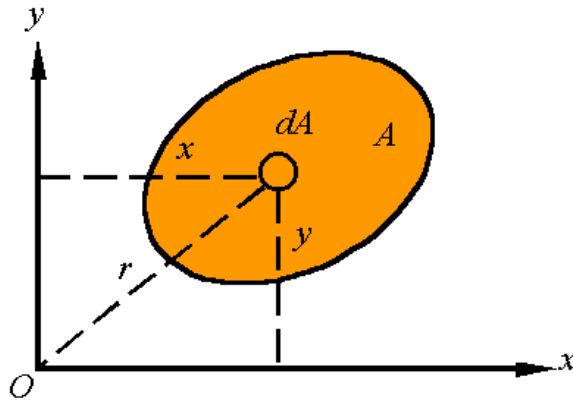
أي أن

العزم الثاني للمساحة

عزم القصور الذاتي للمساحة

Area Moment of Inertia (The Moment of Area)

للمساحة المعطاة بالشكل المبين يعطى العزم الثاني للمساحة بالصورة



$$I_{xx} = y^2 dA,$$

العزم الثاني للمساحة منسوباً للمحور ox يعطى بالصورة

$$I_{yy} = x^2 dA,$$

و العزم الثاني للمساحة منسوباً للمحور oy يعطى بالصورة

$$I_o = r^2 dA = (x^2 + y^2) dA = I_{xx} + I_{yy}$$

$$I_{xx} = I_{x'x'} + A\bar{y}^2, \quad I_{yy} = I_{y'y'} + A\bar{x}^2$$

وتطبق نظرية المحاور المتوازية بالصورة

ويكون للصفحة المستطيلة العزم الثاني بالصورة

الجسم : صفحة على هيئة مستطيل أبعاده (a, b)	عزم القصور حول محور يمر بالطرف	عزم القصور حول محور يمر بمركز الثقل	عزم القصور حول محور يمر بالطرف الأخر المقابل
منسوباً للمحور I_{xx}	$I_{xx} = \frac{1}{3} ab^3$	$I_{x'x'} = \frac{1}{12} ab^3$	$I_{x''x''} = \frac{1}{3} ab^3$
منسوباً للمحور I_{yy}	$I_{yy} = \frac{1}{3} ba^3$	$I_{y'y'} = \frac{1}{12} ba^3$	$I_{y''y''} = \frac{1}{3} ba^3$
منسوباً لمحور عمودي على المستوى xoy	$I_{zz} = \frac{1}{3} ab(a^2 + b^2)$	$I_{z'z'} = \frac{1}{12} ab(a^2 + b^2)$	$I_{z''z''} = \frac{1}{3} ab(a^2 + b^2)$

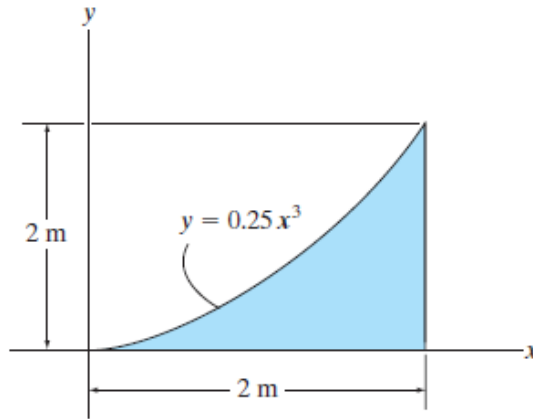
ويكون العزم الثاني للصفحة المثلثية بالصورة

الجسم : صفحة على هيئة مثلث قاعدة a و ارتفاعه h	عزم القصور حول محور يمر بالطرف	عزم القصور حول محور يمر بمركز الثقل	عزم القصور حول محور يمر بالطرف الأخر المقابل
منسوباً للمحور I_{xx}	$I_{xx} = \frac{1}{12} ah^3$	$I_{x'x'} = \frac{1}{36} ah^3$	$I_{x''x''} = \frac{1}{4} ah^3$

منسوبا للمحور I_{yy}	$I_{yy} = \frac{1}{12} ha^3$	$I_{y'y'} = \frac{1}{36} ha^3$	$I_{y''y''} = \frac{1}{4} ha^3$
منسوبا لمحور عمودي على المستوى xoy	$I_{zz} = \frac{ah}{12}(a^2 + h^2)$	$I_{z'z'} = \frac{ah}{36}(a^2 + h^2)$	$I_{z''z''} = \frac{ah}{12}(a^2 + 3h^2),$ $I_{z''z''} = \frac{ah}{12}(3a^2 + h^2)$

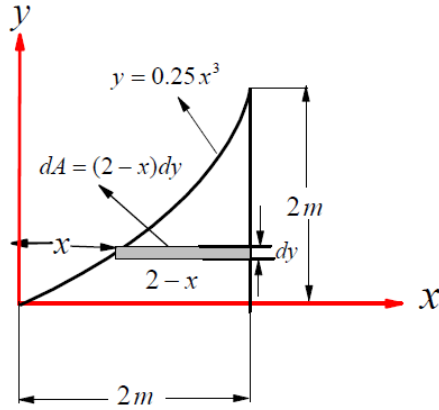
بالنسبة للعزم الثاني لمساحة دائرية يعطى بالصورة $I_{xx} = \frac{1}{4}(\pi a^2)a^2 = \frac{\pi a^4}{4}$

مثال (19): احسب العزم الثاني للمساحة المعطاة بالشكل المقابل منسوبا لكل من المحورين ox, oy ؟



الحل

عزم القصور الذاتي منسوبا لمحور x بأخذ المساحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير على هيئة مستطيل طوله $(2-x)$ و عرضة dy وعلى بعد y من المحور ox وعند ذلك تعطى مساحة العنصر بالصورة $dA = (2-x)dy$.

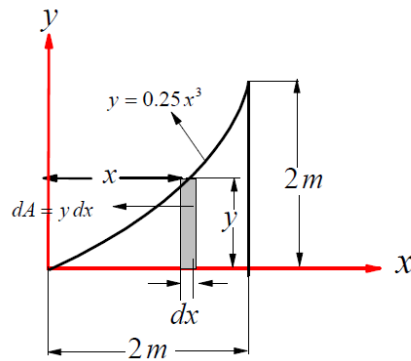


ويعطى العزم المساحي بالصورة

$$I_{xx} = \int y^2 dA = \int_0^2 y^2 (2-x) dy = \int_0^2 y^2 \left(2 - (4y)^{\frac{1}{3}} \right) dy = \int_0^2 \left(2y^2 - (4)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{7}{3}} \right) dy$$

$$I_{xx} = \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{3}{10} (4)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{10}{3}} \right)_0^2 = 0.533m^4$$

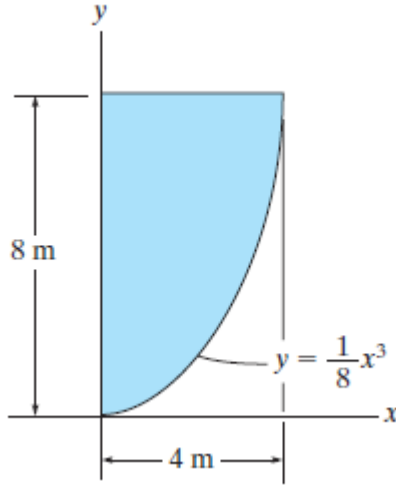
عزم القصور الذاتي منسوبا لمحور y بأخذ المساحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير على هيئة مستطيل طوله y و عرضه dx وعلى بعد x من المحور oy وعند ذلك تعطى مساحة العنصر بالصورة $dA = y dx$.



ويعطى بذلك العزم المساحي بالصورة

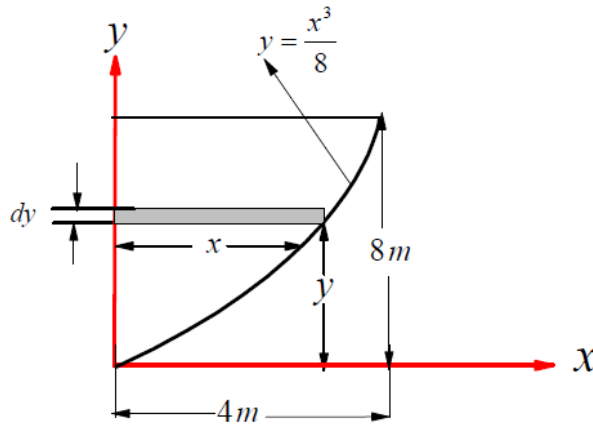
$$I_{yy} = \int x^2 dA = \int_0^2 x^2 y dx = \int_0^2 x^2 (0.25)x^3 dx = \int_0^2 (0.25)x^5 dx = \frac{(2)^6}{24} = \frac{64}{24} = \frac{8}{3} = 2.67m^4$$

مثال (20): احسب العزم الثاني للمساحة المعطاة بالشكل المقابل منسوبا لكل من



الحل

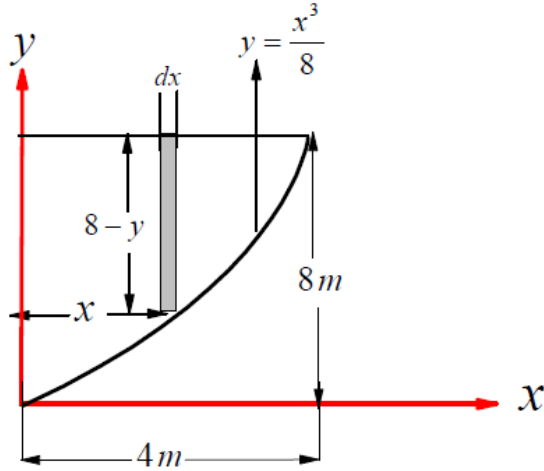
عزم القصور الذاتي منسوبا لمحور x بأخذ المساحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير على هيئة مستطيل طوله (x) و عرضة dy وعلى بعد y من المحور ox وعند ذلك تعطى مساحة العنصر بالصورة $dA = (x)dy$.



ويعطى بذلك العزم المساحي بالصورة

$$I_{xx} = \int y^2 dA = \int_0^8 y^2 x dy = \int_0^8 y^2 (2)y^{\frac{1}{3}} dy = 2 \int_0^8 y^{\frac{7}{3}} dy = 2 \frac{3(8)^{\frac{10}{3}}}{10} = \frac{3}{5}(1024) = 614.4 m^4$$

عزم القصور الذاتي منسوبا لمحور y بأخذ المساحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير على هيئة مستطيل طوله $(8 - y)$ و عرضة dx وعلى بعد x من المحور ox وعند ذلك تعطى مساحة العنصر بالصورة $dA = (8 - y)dx$.

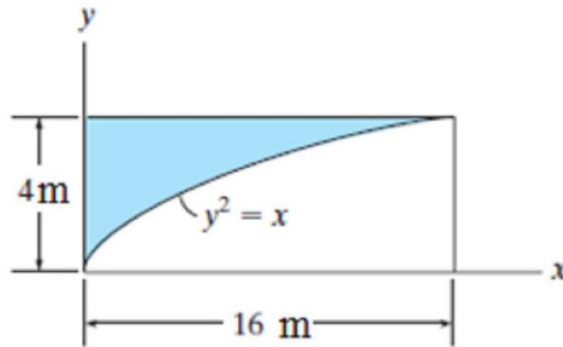


ويعطى العزم المساحي بالصورة

$$I_{yy} = \int x^2 dA = \int_0^4 x^2 (8 - y) dx = \int_0^4 x^2 \left(8 - \frac{x^3}{8} \right) dx = \int_0^4 \left(8x^2 - \frac{x^5}{8} \right) dx =$$

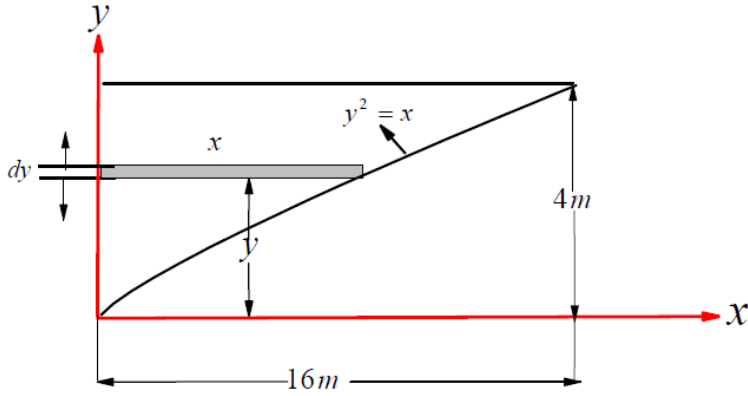
$$I_{yy} = \left(\frac{8}{3} x^3 - \frac{1}{48} y^6 \right)_0^4 = \frac{8}{3} (4)^3 - \frac{1}{48} (4)^6 = 170.666 - 85.333 = 85.4m^4$$

مثال (21): احسب العزم الثاني للمساحة المعطاة بالشكل المقابل منسوبا لكل من المحورين ox, oy ؟



الحل

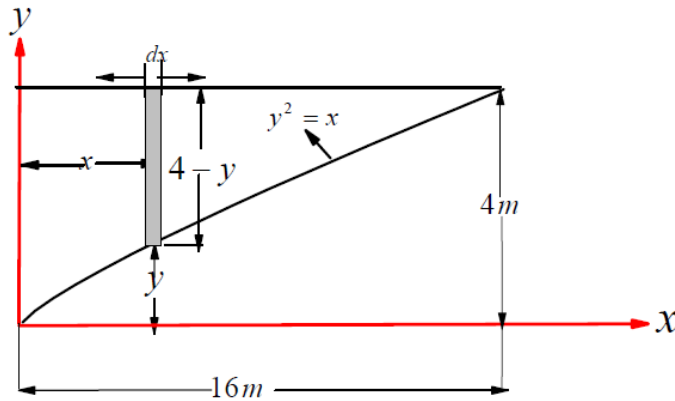
عزم القصور الذاتي منسوباً لمحور x بأخذ المساحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير على هيئة مستطيل طوله (x) و عرضة dy وعلى بعد y من المحور ox وعند ذلك تعطى مساحة العنصر بالصورة $dA = x dy$.



ويعطى بذلك العزم المساحي بالصورة

$$I_{xx} = \int y^2 dA = \int_0^4 y^2 x dy = \int_0^4 y^2 (y)^2 dy = \int_0^4 y^4 dy = \frac{(4)^5}{5} = \frac{1024}{5} = 204.8 m^4$$

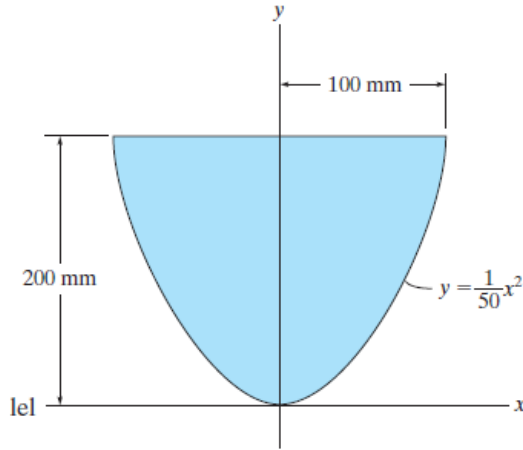
عزم القصور الذاتي منسوباً لمحور y بأخذ المساحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير على هيئة مستطيل طوله $(4 - y)$ و عرضة dx وعلى بعد x من المحور oy وعند ذلك تعطى مساحة العنصر بالصورة $dA = (4 - y) dx$.



$$I_{yy} = \int x^2 dA = \int_0^{16} x^2 (4 - y) dx = \int_0^{16} x^2 \left(4 - (x)^{\frac{1}{2}} \right) dx = \int_0^{16} \left(4x^2 - (x)^{\frac{5}{2}} \right) dx = \frac{4(16)^3}{3} - \frac{2(16)^{\frac{7}{2}}}{7}$$

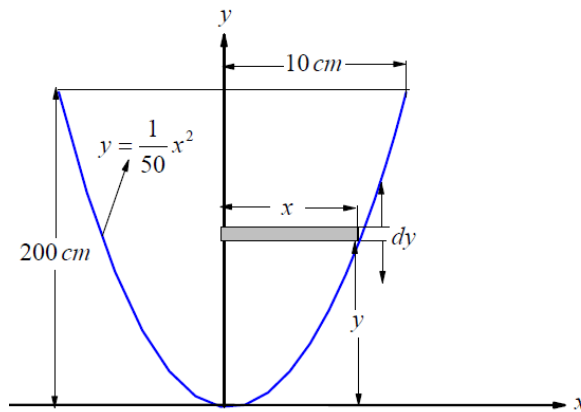
$$I_{yy} = 5461.333 - 4861.1428 = 780.2 m^4$$

مثال (22): احسب العزم الثاني للمساحة المعطاة بالشكل المقابل منسوبا لكل من المحورين ox, oy ؟



الحل

عزم القصور الذاتي منسوبا لمحور x بأخذ المساحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير على هيئة مستطيل طوله (x) و عرضه dy وعلى بعد y من المحور ox وعند ذلك تعطى مساحة العنصر بالصورة $dA = x dy$.



ويعطى بذلك العزم المساحي للكل بالصورة

$$I_{xx} = 2 \int y^2 dA = 2 \int_0^{200} y^2 x dy = 2 \int_0^{200} y^2 (50y)^{\frac{1}{2}} dy = 2(50)^{\frac{1}{2}} \int_0^{200} y^{\frac{5}{2}} dy = 2(50)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{7} y^{\frac{7}{2}} \right)_0^{200}$$

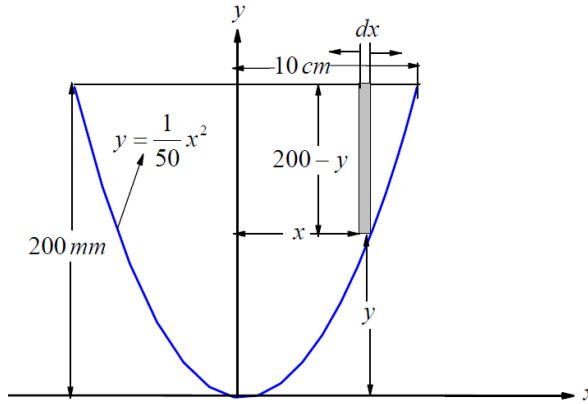
$$= 2(50)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{7} (200)^{\frac{7}{2}} \right) = 457 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

عزم القصور الذاتي منسوباً لمحور y

من الشكل المعطى واضح ان العنصر المأخوذ عبارة عن مستطيل أبعاده (x, dy) لذلك عزم القصور الذاتي له منسوباً لمحور y يعطى من $I_{yy} = \int \frac{1}{3} x^3 dy$ ويكون عزم القصور الذاتي للمساحة كاملاً منسوباً لمحور y بالصورة

$$\begin{aligned} I_{yy} &= 2 \int \frac{1}{3} x^3 dy = 2 \int_0^{200} \frac{1}{3} (50y)^{\frac{3}{2}} dy = \frac{2(50)^{\frac{3}{2}}}{3} \int_0^{200} (y)^{\frac{3}{2}} dy = \frac{2(50)^{\frac{3}{2}}}{3} \frac{2(200)^{\frac{5}{2}}}{5} \\ &= \frac{4}{15} (50)^{\frac{3}{2}} (200)^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{15} (50)^{\frac{2}{2}} (50)^{\frac{1}{2}} (200)^{\frac{4}{2}} (200)^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{15} (50)(200)^2 (50)^{\frac{1}{2}} (200)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{4}{15} (50)(40000)(10000)^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{15} (2000000)(100) = \frac{800}{15} (1000000) = 53.33 \times 10^{16} \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

بطريقة اخرى عزم القصور الذاتي منسوباً لمحور y بأخذ المساحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير على هيئة مستطيل طوله $(20 - y)$ و عرضة dy وعلى بعد x من المحور oy وعند ذلك تعطى مساحة العنصر بالصورة $dA = (20 - y) dx$



$$\begin{aligned} I_{yy} &= 2 \int x^2 dA = 2 \int_0^{100} x^2 (200 - y) dx = 2 \int_0^{100} x^2 \left(200 - \frac{1}{50} x^2 \right) dx = 2 \int_0^{100} \left(200x^2 - \frac{1}{50} x^4 \right) dx \\ &= 2 \left(\frac{200}{3} x^3 - \frac{1}{250} x^5 \right)_0^{100} = 2 \left(\frac{200}{3} 10^6 - \frac{1}{250} 10^{10} \right) = 2 \left(\frac{200}{3} - \frac{1000}{25} \right) 10^6 \\ &= 2 (66.6666 - 40) 10^6 = 53.33 \times 10^{16} \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

الفصل الثالث

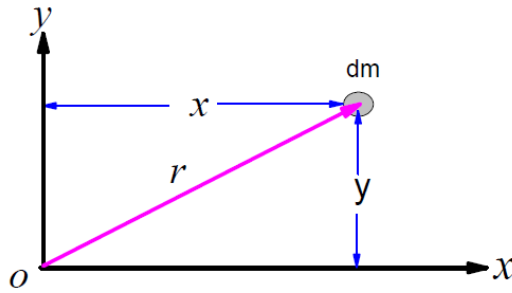
حاصل ضرب القصور الذاتي

The Product of Inertia

مقدمة:

حاصل ضرب القصور الذاتي للكتل

(1)- اذا كان الجسم واقع في مستوى كما في الشكل المقابل يعطى حاصل ضرب القصور الذاتي منسوبا الى المحورين ox,oy يعطى بالصورة:



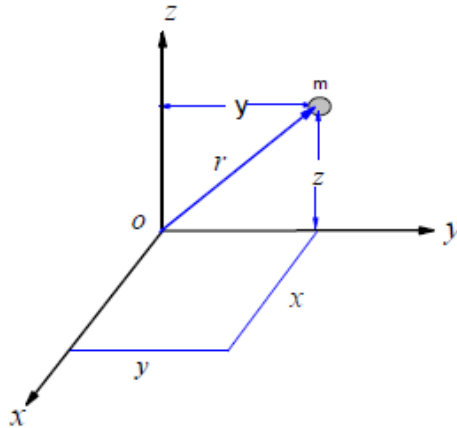
$$I_{xy} = x y dm$$

(1)

$$I_{xy} = x y dm = I_{yx} = y x dm$$

لاحظ ان

(2)- اذا كان الجسم واقع في الفراغ : بفرض أنه لدينا جسم كتلته m واقع في الفراغ كما بالشكل:



فان حاصل ضرب القصور الذاتي للمحاور المختلفة يعطى على النحو التالي

يعطى حاصل ضرب القصور الذاتي منسوبا الى المحورين ox,oy يعطى بالصورة:

$$I_{xy} = x y dm$$

(2)

ومنسوبا الى المحورين ox, oz يعطى بالصورة:

$$I_{xz} = xz dm \quad (3)$$

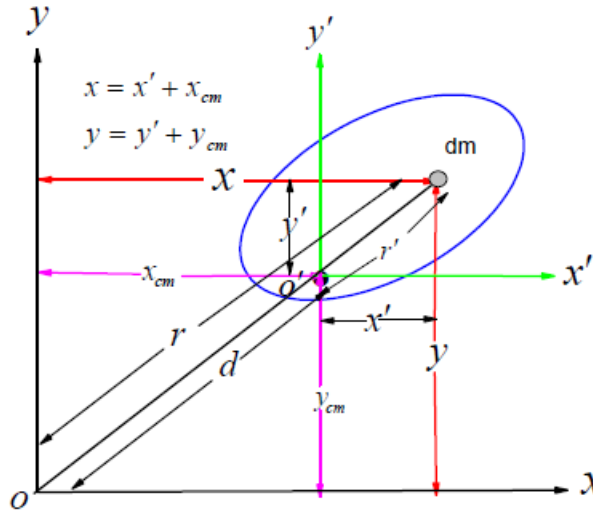
بينما منسوبا الى المحورين oy, oz يعطى بالصورة:

$$I_{yz} = yz dm \quad (4)$$

نظرية المحاور المتوازية لحاصل ضرب القصور الذاتي

parallel-axis theorem for products of inertia

بفرض انه لدينا جسم ما كما في الشكل المقابل كتلته m ومركز ثقله هي النقطة (x_{cm}, y_{cm})



بأخذ عنصر صغير كتلته dm أحداثي هذا العنصر بالنسبة للنقطة o هو (x, y) وبالنسبة لمركز الثقل cm هو (x', y') . بالنسبة للمحورين ox, oy يعطى حاصل ضرب القصور الذاتي لكتلته dm بالصورة

$$I_{xy} = x y dm \quad (1)$$

ويعطى حاصل ضرب القصور الذاتي للجسم كله (m)

$$I_{xy} = \int x y dm \quad (2)$$

لكن من الرسم واضح أن $x = x' + x_{cm}$, $y = y' + y_{cm}$ وبالتعويض في العلاقة (2) نحصل على

$$I_{xy} = \int x y dm = \int \left\{ (x' + x_{cm}) (y' + y_{cm}) \right\} dm = \int \left\{ x'y' + x'y_{cm} + x_{cm}y' + x_{cm}y_{cm} \right\} dm$$

$$I_{xy} = \int x'y' dm + y_{cm} \int x' dm + x_{cm} \int y' dm + x_{cm} y_{cm} \int dm \quad (3)$$

لكن من المعلوم بأن

$$\int x'y' dm = I_{x'y'}, \quad x_{cm} y_{cm} \int dm = x_{cm} y_{cm} m,$$

$$\bar{x} = \frac{\int x' dm}{\int dm} \rightarrow \int x' dm = \bar{x} \int dm, \quad \bar{y} = \frac{\int y' dm}{\int dm} \rightarrow \int y' dm = \bar{y} \int dm \quad (4)$$

وبالتعويض من (4) في (3) نحصل على

$$I_{xy} = I_{x'y'} + y_{cm} \bar{x} \int dm + x_{cm} \bar{y} \int dm + x_{cm} y_{cm} m$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + y_{cm} \bar{x} m + x_{cm} \bar{y} m + x_{cm} y_{cm} m \quad (5)$$

لكن (\bar{x}, \bar{y}) هو أحداثي بعد مركز الثقل عن مركز الثقل وهو يساوى الصفر. وبالتعويض في (5) نحصل

$$I_{xy} = I_{x'y'} + m x_{cm} y_{cm} \quad (6)$$

حيث I_{xy} هو حاصل ضرب القصور الذاتي منسوبا للمحورين ox, oy بينما $I_{x'y'}$ هو حاصل ضرب القصور الذاتي منسوبا للمحورين $o'y', o'x'$ ، x_{cm}, y_{cm} هما بعد مركز الثقل عن المحورين ox, oy على الترتيب.

ملاحظات على حاصل ضرب القصور الذاتي

(1)- حاصل ضرب القصور الذاتي عبارة عن حاصل ضرب إحداثيات مختلفة لذلك فهو يمكن ان يكون كمية موجبة أو سالبة

(2)- لحاصل ضرب القصور الذاتي يكون $I_{xy} = I_{yx}, I_{yz} = I_{zy}, I_{zx} = I_{xz}$

(3)- اذا تلاشى حاصل ضرب القصور الذاتي بالنسبة لأى مستويين من مستويات الإحداثيات قيل أن محور تقاطع هذين المحورين هو محور أساسي (رئيس)

(4)- اذا كان الجسم عبارة عن صفيحة مستوية ولتكن تقع مثلاً في المستوى xy وتلاشى حاصل ضرب القصور الذاتي (أي أن $I_{xy} = 0$) فيقال أن المحورين ox, oy هما محورين أساسيين

(5)- أي محور تماثل في صفيحة مستوية يكون مع أي محور عمودي عليه محورين أساسيين

(6)- ينعدم حاصل ضرب القصور الذاتي بالنسبة لمحورين متعامدين وكان أحدهما أو كلاهما محور تماثل.

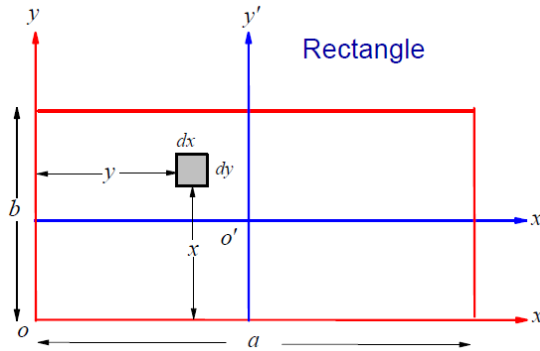
مثال(1): احسب حاصل ضرب القصور الذاتي لصفحة منتظمة على شكل مستطيل؟

الحل

بأخذ الصفحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير هيئة مستطيل صغير طوله dx و عرضه dy وعلى بعد y من المحور ox وعلى بعد x من المحور oy وبفرض ان كثافة المادة المصنوعة منها الصفحة هي ρ . فتعطي كتلته هذا العنصر (dm) بالصورة $dm = \rho x dy$ وتكون الكتلة الكلية للصفحة المثلثية بالصورة

$$dm = \rho dx dy \rightarrow m = \rho \int_0^b \int_0^a dx dy = \rho a \int_0^b dy = ab\rho \rightarrow m = ab\rho$$

ويمكن ايجاد الكتلة الكلية للصفحة المثلثية مباشراً بالصورة ($m = ab\rho$) أي مساحة الصفحة مضروبة في الكثافة.



بالنسبة لمحورين ox, oy يعطي حاصل ضرب القصور الذاتي للعنصر المختار بالصورة $dI_{xy} = (dm)xy$

وبالنسبة للصفحة المربعة ككل يعطي حاصل ضرب القصور الذاتي بالصورة

$$I_{xy} = \int \int xy (\rho dx dy) \rightarrow I_{xy} = \rho \int_0^b \int_0^a xy dx dy = \frac{a^2}{2} \frac{b^2}{2} \rho = \frac{a^2 b^2}{4} \rho \frac{m}{m}$$

$$= \frac{a^2 b^2}{4} \rho \frac{m}{ab\rho} = \frac{1}{4} mab \quad \rightarrow \quad I_{xy} = \frac{1}{4} mab$$

من نظرية المحاور المتوازية لحاصل ضرب القصور الذاتي يعطي حاصل ضرب القصور الذاتي للصفحة المربعة بالنسبة لمحورين ox', oy' من:

$$I_{xy} = I_{x'y'} + m x_{cm} y_{cm} \rightarrow \frac{1}{4} mab = I_{x'y'} + m \left(\frac{1}{2}a\right) \left(\frac{1}{2}b\right) \rightarrow I_{x'y'} = \frac{1}{4} mab - \frac{1}{4} mab = 0 \quad I_{x'y'} = 0$$

أي أن

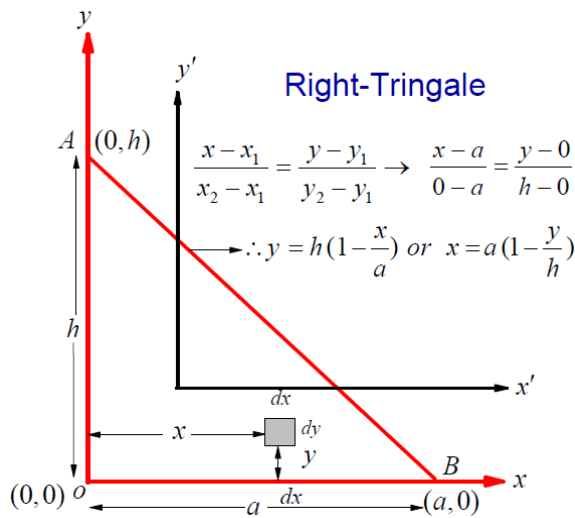
مع ملاحظة أن كل من المحورين ox' , oy' هما محورين تماثل بالنسبة للصفحة المربعة فيكون

$$I_{x'y'} = 0$$

مثال (2) : احسب حاصل ضرب القصور الذاتي لصفحة منتظمة على شكل المثلث؟

الحل

بأخذ الصفحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير هيئة مستطيل صغير طوله dx و عرضه dy وعلى بعد y من المحور ox وعلى بعد x من المحور oy وبفرض ان كثافة المادة المصنوعة منها الصفحة هي ρ . فتعطي كتلته هذا العنصر (dm) بالصورة $dm = \rho x dy$ وتكون الكتلة الكلية للصفحة المثلثية بالصورة



$$dm = \rho dx dy \rightarrow m = \rho \int_0^h \int_0^{a(1-\frac{y}{h})} dx dy = a\rho \left[h - \frac{h^2}{2h} \right] = \frac{1}{2} a h \rho$$

ويمكن ايجاد الكتلة الكلية للصفحة المثلثية مباشراً بالصورة ($m = \frac{1}{2} a h \rho$) أي مساحة الصفحة مضروبة في الكثافة. بالنسبة لمحورين ox , oy يعطى حاصل ضرب القصور الذاتي للعنصر المختار بالصورة $dI_{xy} = (dm)xy$ وبالنسبة للمثلث كاملاً يعطى حاصل ضرب القصور الذاتي

بالصورة

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int \int x y (\rho dx dy) \rightarrow I_{xy} = \rho \int_0^h \int_0^{a(1-\frac{y}{h})} x y dx dy = \frac{a^2}{2} \rho \int_0^h (1-\frac{y}{h})^2 y dy \\ &= \frac{a^2}{2h^2} \rho \int_0^h (h-y)^2 y dy = \frac{a^2}{2h^2} \rho \int_0^h (h^2 - 2yh + y^2) y dy = \frac{a^2}{2h^2} \rho \int_0^h (yh^2 - 2y^2h + y^3) dy \\ &= \frac{a^2}{2h^2} \rho \left[\frac{y^2h^2}{2} - \frac{2y^3}{3}h + \frac{y^4}{4} \right]_0^h = \frac{a^2}{2h^2} \rho \left[\frac{h^4}{2} - \frac{2h^4}{3} + \frac{h^4}{4} \right] = \frac{a^2h^4}{24h^2} \rho [6-8+3] = \frac{a^2h^4}{24h^2} \rho \\ &= \frac{a^2h^2}{24} \rho \frac{m}{m} = \frac{a^2h^2}{24} \rho \frac{1}{\frac{1}{2}\rho ah} = \frac{1}{12} mah \rightarrow I_{xy} = \frac{1}{12} mah \end{aligned}$$

لاحظ أن كل من المحورين ox' , oy' هما ليس محورين تماثل بالنسبة للصفحة المثلثية فيكون $I_{x'y'} \neq 0$

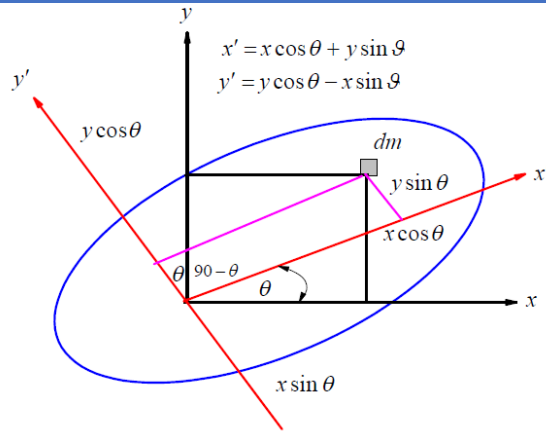
ومن نظرية المحاور المتوازية لحاصل ضرب القصور الذاتي يعطى حاصل ضرب القصور الذاتي بالنسبة للمحورين ox' , oy' بالصورة

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{x'y'} + m x_{cm} y_{cm} \rightarrow \frac{1}{12} mah = I_{x'y'} + m \left(\frac{1}{3}a\right) \left(\frac{1}{3}h\right) \\ &= I_{x'y'} = \frac{1}{12} mah - \frac{1}{9} mah = \frac{1}{72} (6-8) \rightarrow I_{x'y'} = -\frac{1}{36} mah \end{aligned}$$

كذلك

$$\begin{aligned} I_{x''y''} &= I_{x'y'} + m x_{cm} y_{cm} \rightarrow I_{x''y''} = -\frac{1}{36} mah + m \left(\frac{2}{3}a\right) \left(\frac{-1}{3}h\right) \\ &= I_{x'y'} = -\frac{1}{36} mah - \frac{2}{9} mah = \frac{1}{36} (-1-8) mah \rightarrow I_{x''y''} = \frac{-1}{4} mah \end{aligned}$$

نظرية المحاور المائلة لعزم القصور الذاتي (Moments of Inertia about inclined axis)



بأخذ عنصر صغير كتلته dm أحداثي هذا العنصر بالنسبة للمحورين ox, oy هو (x, y) و بالنسبة للمحورين ox', oy' هو (x', y') . بالنسبة للمحور oy' يعطى عزم القصور الذاتي لكتلته dm بالصورة

$$dI_{x'x'} = (dm) y'^2$$

ويعطى عزم القصور الذاتي للجسم كله (m) منسوباً للمحور oy'

$$I_{x'x'} = \int y'^2 dm \quad (1)$$

لكن من الرسم واضح أن $y' = y \cos \theta - x \sin \theta$ وبالتعويض في العلاقة (1) نحصل على

$$I_{x'x'} = \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dm = \int y^2 \cos^2 \theta dm + \int x^2 \sin^2 \theta dm - 2 \int xy \cos \theta \sin \theta dm$$

$$I_{x'x'} = \cos^2 \theta \int y^2 dm + \sin^2 \theta \int x^2 dm - 2 \cos \theta \sin \theta \int xy dm$$

$$I_{x'x'} = I_{xx} \cos^2 \theta + I_{yy} \sin^2 \theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (2)$$

ويعطى عزم القصور الذاتي للجسم كله (m) منسوباً للمحور ox'

$$I_{y'y'} = \int x'^2 dm \quad (3)$$

لكن من الرسم واضح أن $x' = x \cos \theta + y \sin \theta$ وبالتعويض في العلاقة (3) نحصل على

$$I_{y'y'} = \int (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 dm = \int x^2 \cos^2 \theta dm + \int y^2 \sin^2 \theta dm + 2 \int xy \cos \theta \sin \theta dm$$

$$I_{y'y'} = \cos^2 \theta \int x^2 dm + \sin^2 \theta \int y^2 dm + 2 \cos \theta \sin \theta \int xy dm$$

$$I_{y'y'} = I_{yy} \cos^2 \theta + I_{xx} \sin^2 \theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (4)$$

ويعطى حاصل ضرب القصور الذاتي للجسم كله (m) منسوباً للمحورين ox', oy'

$$I_{x'y'} = \int x'y' dm \quad (5)$$

لكن من الرسم واضح أن $x' = x \cos \theta + y \sin \theta$, $y' = y \cos \theta - x \sin \theta$ وبالتعويض في العلاقة (5) نحصل على

$$\begin{aligned}
 I_{x'y'} &= \int (x \cos \theta + y \sin \theta)(y \cos \theta - x \sin \theta) dm \\
 I_{x'y'} &= \int x y \cos^2 \theta dm - \int x^2 \sin \theta \cos \theta dm + \int y^2 \cos \theta \sin \theta dm - \int x y \sin^2 \theta dm \\
 I_{x'y'} &= \cos^2 \theta \int x y dm - \sin \theta \cos \theta \int x^2 dm + \sin \theta \cos \theta \int y^2 dm - \sin^2 \theta \int x y dm \\
 I_{x'y'} &= \cos^2 \theta I_{xy} - \cos \theta \sin \theta I_{xx} + \cos \theta \sin \theta I_{yy} - \sin^2 \theta I_{xy} \\
 I_{x'y'} &= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) I_{xy} + \sin \theta \cos \theta (I_{xx} - I_{yy}) \\
 I_{x'y'} &= \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (6)
 \end{aligned}$$

أكبر قيمة للزاوية يمكن الحصول عليها بوضع $I_{x'y'} = 0$ ومن المعادلة (6) يمكن القول بأن

$$\tan 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} \quad (7)$$

$$\text{Eq. (2)} \dots \dots \dots I_{x'x'} = I_{xx} \cos^2 \theta + I_{yy} \sin^2 \theta - \sin 2\theta I_{xy}$$

$$\begin{aligned}
 I_{x'x'} &= I_{xx} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + I_{yy} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} - \sin 2\theta I_{xy} \\
 I_{x'x'} &= \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\text{Eq. (4)} \dots \dots \dots I_{y'y'} = I_{yy} \cos^2 \theta + I_{xx} \sin^2 \theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

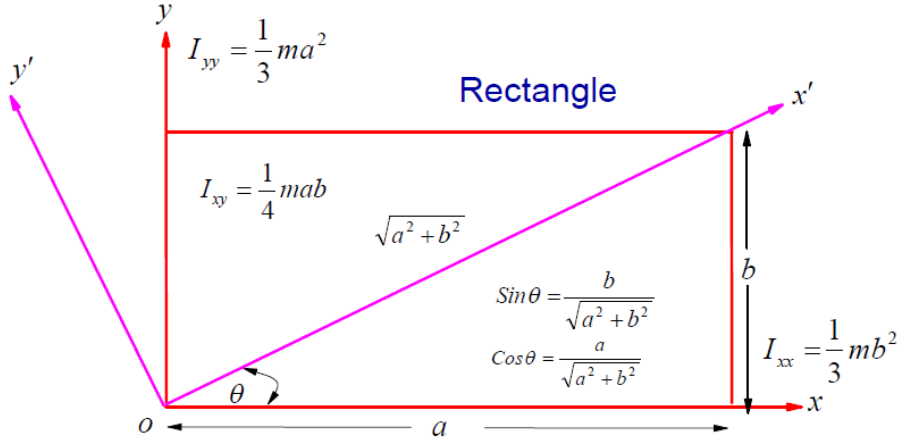
$$\begin{aligned}
 I_{y'y'} &= I_{yy} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + I_{xx} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + I_{xy} \sin 2\theta \\
 I_{y'y'} &= \frac{I_{yy} + I_{xx}}{2} + \frac{I_{yy} - I_{xx}}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (9)
 \end{aligned}$$

لاحظ أنه بجمع المعادلتين (2), (1) أو (9), (8) نحصل على

$$I_{x'x'} + I_{y'y'} = I_{xx} + I_{yy} \quad (10)$$

مثال (3)- أحسب عزم القصور الذاتي وكذلك حاصل ضرب القصور الذاتي لصفحة منتظمة على شكل مستطيل منسوباً لأحد أقطاره؟

الحل



عزم القصور الذاتي وكذلك حاصل ضرب القصور الذاتي للصفحة منسوباً للمحاور ox' , oy' على الترتيب يعطوا بالصورة

$$I_{x'x'} = I_{xx} \cos^2 \theta + I_{yy} \sin^2 \theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (1)$$

$$I_{y'y'} = I_{yy} \cos^2 \theta + I_{xx} \sin^2 \theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (2)$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (3)$$

وحيث أن

$$I_{xx} = \frac{1}{3} mb^2, \quad I_{yy} = \frac{1}{3} ma^2, \quad I_{xy} = \frac{1}{4} mab \quad (4)$$

ومن العلاقات (1-4) والرسم المعطى نحصل على

$$I_{x'x'} = I_{xx} \cos^2 \theta + I_{yy} \sin^2 \theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'x'} = \frac{1}{3} mb^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{3} ma^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{4} mab (2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$I_{x'x'} = \frac{1}{3} mb^2 \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \frac{1}{3} ma^2 \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 - \frac{2}{4} mab \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$I_{x'x'} = \frac{1}{3} m \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} + \frac{1}{3} m \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} - \frac{1}{2} m \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = m \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \frac{1}{6} (2 + 2 - 3) = \frac{1}{6} m \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

$$I_{x'x'} = \frac{1}{6} m \left(\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \right) \quad (5)$$

$$I_{y'y'} = I_{yy} \cos^2 \theta + I_{xx} \sin^2 \theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'y'} = \frac{1}{3} m a^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{3} m b^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{4} m a b (2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$I_{y'y'} = \frac{1}{3} m a^2 \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \frac{1}{3} m b^2 \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \frac{2}{4} m a b \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$I_{y'y'} = \frac{1}{3} m \frac{a^4}{a^2 + b^2} + \frac{1}{3} m \frac{b^4}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2} m \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{1}{3} m \frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2} m \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

$$I_{y'y'} = \frac{1}{6(a^2 + b^2)} m (2a^4 + 3a^2 b^2 + 2b^4) \quad (6)$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

$$I_{x'y'} = (I_{xx} - I_{yy}) \sin \theta \cos \theta + I_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$I_{x'y'} = \left(\frac{1}{3} m b^2 - \frac{1}{3} m a^2 \right) \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) + \frac{1}{4} m a b \left\{ \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 - \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 \right\}$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{3} m (b^2 - a^2) \left(\frac{ab}{a^2 + b^2} \right) + \frac{1}{4} m a b \left\{ \frac{a^2}{a^2 + b^2} - \frac{b^2}{a^2 + b^2} \right\} = \frac{1}{12} m (b^2 - a^2) \left(\frac{ab}{a^2 + b^2} \right) (4 - 3)$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{12} m (b^2 - a^2) \left(\frac{ab}{a^2 + b^2} \right) \quad (7)$$

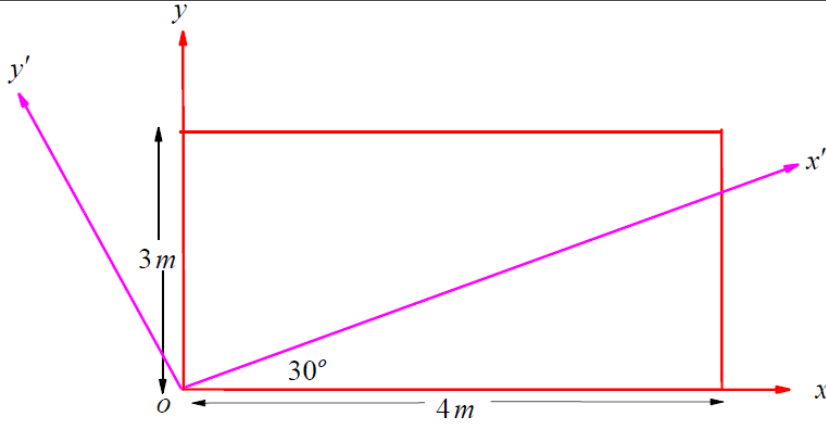
في حالة $\theta = 45^\circ$ يكون $a = 1, b = 1$ ويكون بذلك

$$I_{x'x'} = \frac{1}{6} m \left(\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \right) = \frac{1}{12} m,$$

$$I_{y'y'} = \frac{1}{6(a^2 + b^2)} m (2a^4 + 3a^2 b^2 + 2b^4) = \frac{1}{6(2)} (7)m = \frac{7}{12} m, \quad (8)$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{12} m (b^2 - a^2) \left(\frac{ab}{a^2 + b^2} \right) = 0$$

مثال: (4)- أحسب عزم القصور الذاتي وكذلك حاصل ضرب القصور الذاتي لصفحة منتظمة على شكل مستطيل منسوباً للمحاور ox', oy' كما بالشكل؟



بأخذ المحور ox' المراد حساب عزم القصور الذاتي منسوباً إلىه وبأخذ الزاوية $\theta = 30^\circ$ كما بالشكل ومن المعلوم بأن عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحورين ox, oy وكذلك حاصل ضرب القصور الذاتي على الترتيب يعطوا بالصورة

$$I_{xx} = \frac{1}{3} m b^2, \quad I_{yy} = \frac{1}{3} m a^2, \quad I_{xy} = \frac{1}{4} m a b \quad (1)$$

وواضح أن عزم القصور الذاتي بالنسبة للقطر ox' يعطى بالصورة

$$I_{x'x'} = I_{xx} \cos^2 \theta + I_{yy} \sin^2 \theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

ومن العلاقات (1) والرسم المعطى نحصل على

$$I_{x'x'} = \frac{1}{3} m b^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{3} m a^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{4} m a b \sin 2\theta$$

$$I_{x'x'} = \frac{1}{3} m (3)^2 (\cos 30^\circ)^2 + \frac{1}{3} m (4)^2 (\sin 30^\circ)^2 - \frac{1}{4} m (3)(4) \sin 60^\circ$$

$$I_{x'x'} = \frac{1}{3}m(3)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}m(4)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}m(3)(4)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$I_{x'x'} = \frac{1}{3}m(9)\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{3}m(16)\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}m(3)(4)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$I_{x'x'} = \frac{9}{4}m + \frac{4}{3}m - \frac{3\sqrt{3}}{2}m \rightarrow I_{x'x'} = \frac{1}{12}m(27+16-18\sqrt{3}) = \frac{43-18\sqrt{3}}{12}m$$

إذا كانت الزاوية $\theta = 40^\circ$

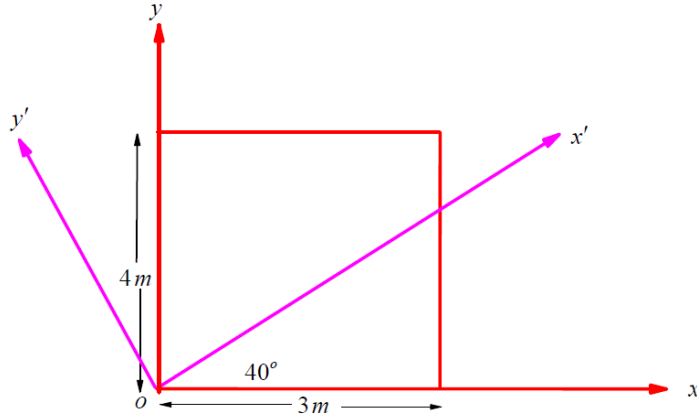
$$I_{x'x'} = \frac{1}{3}m(3)^2(\cos 40^\circ)^2 + \frac{1}{3}m(4)^2(\sin 40^\circ)^2 - \frac{1}{4}m(3)(4)\sin 80^\circ$$

$$I_{x'x'} = \frac{1}{3}m(9)(0.5868) + \frac{1}{3}m(12)(0.4131) - \frac{1}{4}m(3)(4)(0.6427)$$

$$I_{x'x'} = m(3)(0.5868) + m(4)(0.4131) - m(3)(0.6427)$$

$$I_{x'x'} = m[1.7604 + 1.6524 - 1.9281] = m[3.4128 - 1.9281] = 1.4847m$$

مثال: (5) - أحسب عزم القصور الذاتي وكذلك حاصل ضرب القصور الذاتي لصفحة منتظمة على شكل مستطيل منسوباً للمحاور ox' , oy' كما بالشكل؟



الحل

بالنسبة للمحاور ox' , oy' يعطى

$$I_{x'x'} = I_{xx} \cos^2 \theta + I_{yy} \sin^2 \theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (1)$$

$$I_{y'y'} = I_{yy} \cos^2 \theta + I_{xx} \sin^2 \theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (2)$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (3)$$

ومن المعلوم بأن عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحورين ox, oy وكذلك حاصل ضرب القصور الذاتي على الترتيب يعطوا بالصورة

$$I_{xx} = \frac{1}{3} mb^2 = \frac{16}{3} m, \quad I_{yy} = \frac{1}{3} ma^2 = \frac{9}{3} m = 3m, \quad I_{xy} = \frac{1}{4} mab = 3m \quad (4)$$

كذلك

$$\begin{aligned} (\sin 40)^\circ &= (0.643)^\circ = 0.4132, & (\cos 40)^\circ &= (0.766)^\circ = 0.5868, \\ \sin 2(40) &= 0.9848, & \cos 2(40) &= 0.1736. \end{aligned} \quad (5)$$

وبالتعويض في المعادلات (1-3) نحصل على

$$I_{x'x'} = \left[\frac{16}{3} (0.5868) + 3(0.4132) - 3(0.9848) \right] m = 1.4148m$$

$$I_{y'y'} = \left[3(0.5868) + \frac{16}{3} (0.4132) + 3(0.9848) \right] m = 6.9185m$$

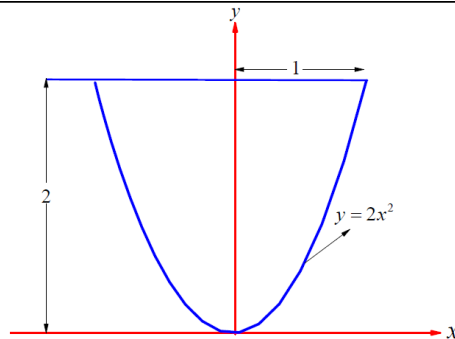
$$I_{x'y'} = \frac{16m - 3m}{2} (0.9848) + 3m(0.1736) = \frac{16m - 9m}{6} (0.9848) + 3m(0.1736)$$

$$= \left[\frac{7}{6} (0.9848) + 3(0.1736) \right] m = [(1.67)(0.9848) + 3(0.1736)] m = 1.6698m$$

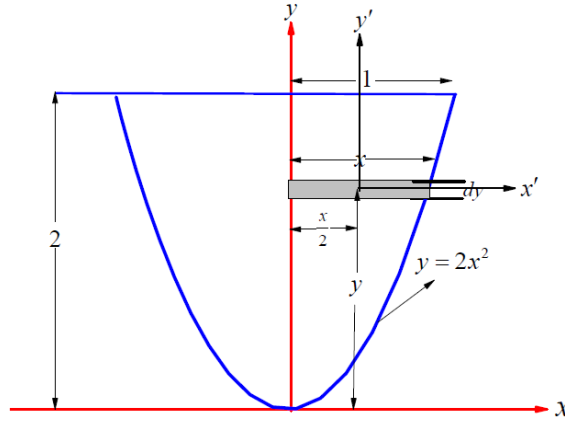
$$\text{Then } I_{x'x'} = 1.4148m, \quad I_{y'y'} = 6.9185m, \quad I_{x'y'} = 1.6698m \quad (6)$$

مثال: (6) - أحسب حاصل ضرب القصور الذاتي I_{xy} لصفحة على هيئة

نصف قطع مكافئ والمحدد بالصورة $x=0, y=2m$ ؟



الحل



بأخذ الصفيحة كما بالشكل المقابل وبأخذ عنصر صغير هيئة مستطيل صغير طوله x و عرضه dy وعلى بعد y من المحور ox وبفرض ان كثافة المادة المصنوعة منها الصفيحة هي ρ . فتعطي كتلته هذا العنصر (dm) بالصورة $dm = \rho x dy$ وتكون الكتلة الكلية للصفيحة المثلثية بالصورة

$$dm = \rho x dy \rightarrow m = \rho \int_0^2 \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{\rho}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} [y]^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 \rightarrow m = \frac{4}{3} \rho$$

بالنسبة لمحورين ox, oy يعطى حاصل ضرب القصور الذاتي للعنصر المختار بالصورة

$$dI_{xy} = dI_{x'y'} + dm x_{cm} y_{cm}$$

وحيث أن $o'x', o'y'$ محوري تماثل بالنسبة للعنصر المختار فإن $dI_{x'y'} = 0$ يعطى بذلك حاصل ضرب القصور الذاتي للعنصر المختار بالصورة $dI_{xy} = dm x_{cm} y_{cm}$. وبالنسبة للصفيحة ككل يكون

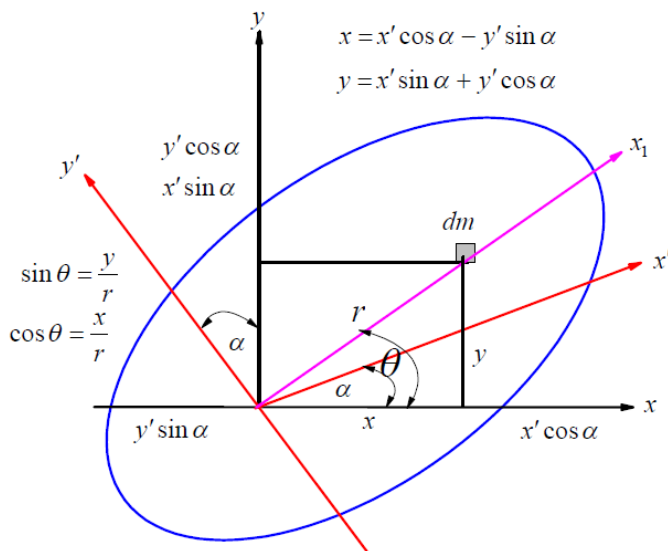
$$I_{xy} = \int dm x_{cm} y_{cm} = \int (\rho x dy) \left(\frac{1}{2}x\right) y = \frac{1}{2} \rho \int_0^2 x^2 y dy = \frac{1}{2} \rho \int_0^2 \frac{y}{2} y dy = \frac{1}{4} \rho \int_0^2 y^2 dy$$

$$= \frac{1}{4} \rho \frac{y^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{1}{4} \rho \frac{8}{3} = \frac{8}{12} \rho = \frac{2}{3} \rho = \frac{2}{3} \rho \frac{m}{m} = \frac{2}{3} \rho \frac{m}{\frac{4}{3} \rho} = \frac{1}{2} m \rightarrow I_{xy} = \frac{1}{2} m$$

قطع ناقص القصور الذاتي Ellipsoid of inertia

باعتبار جسم متماسك موضوع في المستوى واختيار المحاور المتعامدة كما بالشكل. بأخذ عنصر صغير كتلته dm أحداثي هذا العنصر بالنسبة للمحورين ox, oy هو (x, y) و بالنسبة للمحور ox_1 يعطى عزم القصور الذاتي لكتلته dm بالصورة

$$I_{x_1x_1} = I_{xx} \cos^2 \theta + I_{yy} \sin^2 \theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (1)$$



ومن الرسم واضح ان $\sin \theta = \frac{y}{r}$, $\cos \theta = \frac{x}{r}$ وبالتعويض في العلاقة (1) نحصل على

$$I_{x_1x_1} = I_{xx} \frac{x^2}{r^2} + I_{yy} \frac{y^2}{r^2} - 2I_{xy} \frac{xy}{r^2}$$

$$I_{x_1x_1} r^2 = x^2 I_{xx} + y^2 I_{yy} - 2xy I_{xy} \quad (2)$$

و بأخذ المحورين ox', oy' بحيث أن كل منهم يصنع الزاوية α مع المحورين ox, oy على الترتيب بذلك يكون لدينا

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

وبالتعويض في العلاقة (2) نحصل على

$$I_{x_1x_1} r^2 = (x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 I_{xx} + (x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 I_{yy} - 2(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) I_{xy}$$

$$I_{x_1x_1} r^2 = (x'^2 \cos^2 \alpha - 2x'y' \sin \alpha \cos \alpha + y'^2 \sin^2 \alpha) I_{xx} + (x'^2 \sin^2 \alpha + 2x'y' \sin \alpha \cos \alpha + y'^2 \cos^2 \alpha) I_{yy} - 2(x'^2 \cos \alpha \sin \alpha + x'y' \cos^2 \alpha - x'y' \sin^2 \alpha - y'^2 \cos \alpha \sin \alpha) I_{xy}$$

$$I_{x_1x_1}r^2 = x'^2 \left\{ \underbrace{I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \sin^2 \alpha - 2I_{xy} \cos \alpha \sin \alpha}_{I_{x'x'}} \right\} +$$

$$y'^2 \left\{ \underbrace{I_{yy} \cos^2 \alpha + I_{xx} \sin^2 \alpha + 2I_{xy} \cos \alpha \sin \alpha}_{I_{y'y'}} \right\} -$$

$$2x'y' \left\{ \left(I_{xx} - I_{yy} \right) \underbrace{\sin \alpha \cos \alpha}_{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} + \underbrace{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}_{\cos 2\alpha} I_{xy} \right\}$$

$$I_{x_1x_1}r^2 = x'^2 I_{x'x'} + y'^2 I_{y'y'} - 2x'y' \left\{ \underbrace{\left(I_{xx} - I_{yy} \right) \frac{1}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha}_{I_{x'y'}} \right\}$$

$$I_{x_1x_1}r^2 = x'^2 I_{x'x'} + y'^2 I_{y'y'} - 2x'y' I_{x'y'}$$

في حالة المحاور الرئيسية $I_{x'y'} = 0$

$$I_{x_1x_1}r^2 = x'^2 I_{x'x'} + y'^2 I_{y'y'} \rightarrow \frac{x'^2}{\frac{I_{x_1x_1}r^2}{I_{x'x'}}} + \frac{y'^2}{\frac{I_{x_1x_1}r^2}{I_{y'y'}}} = 1$$

بوضع $a^2 = \frac{I_{x_1x_1}r^2}{I_{x'x'}}$, $b^2 = \frac{I_{x_1x_1}r^2}{I_{y'y'}}$ حيث $I_{x_1x_1}$, $I_{x'x'}$, $I_{y_1y_1}$, $I_{y'y'}$, r^2 هي قيم ثابتة وبذلك

يكون لدينا $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ وهي معادلة قطع ناقص

الآن باختيار $I_{x_1x_1}r^2 = ma^2b^2 \rightarrow a^2 = \frac{ma^2b^2}{I_{x'x'}}$, $b^2 = \frac{ma^2b^2}{I_{y'y'}}$

ومنهم يكون $a^2 = \frac{I_{y'y'}}{m}$, $b^2 = \frac{I_{x'x'}}{m}$

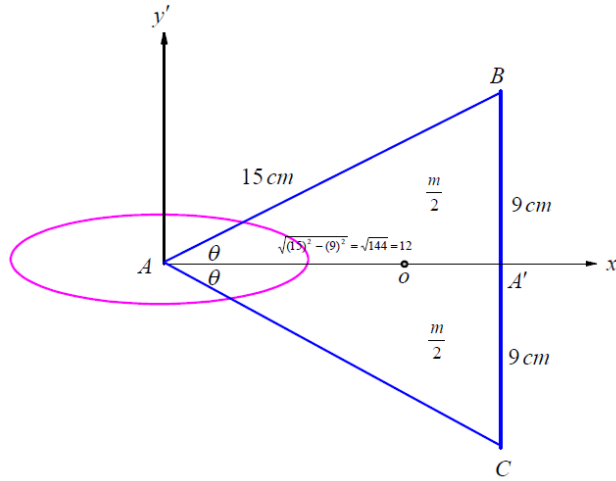
مثال: (8) صفيحة مثلثية ABC متساوية الساقين فيها $AB = AC = 15cm$, $Bc = 18cm$ اوجد معادلة قطع ناقص القصور الذاتي عند A تم استنتاج منه عزم القصور الذاتي

الحل

بأخذ الصفيحة المثلثية ABC كما بالشكل بحيث يكون ox', oy' محاور تماثل لذلك سوف نحسب لصفيحة كل من عزم القصور الذاتي حول ox' وحاصل ضرب القصور الذاتي منسوبا للمحورين ox', oy' ومع ملاحظة أن المحورين ox', oy' هما محورين تماثل فيكون $I_{x'y'} = 0$ (أو يمكننا حساب حاصل ضرب القصور الذاتي

للجزء العلوي من الصفيحة منسوبا للمحورين ox', oy' فيكون $I_{x'y'} = \frac{1}{12} \frac{m}{2} (12)(9)$ ويكون للجزء السفلي

بالصورة $I_{x'y'} = \frac{1}{12} \frac{m}{2} (12)(-9)$ ويكون المجموع لهم $I_{x'y'} = 0$ وتعطى بذلك معادلة قطع ناقص القصور الذاتي عند A بالصورة



$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

$$a^2 = \frac{I_{y'y'}}{m}, \quad b^2 = \frac{I_{x'x'}}{m} \quad (2)$$

حيث

$$I_{x'x'} = 2 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{m}{2} \right) (9)^2 \right] = (81) \frac{m}{6} = \frac{27}{2} m \quad (3)$$

$$I_{BC} = \frac{1}{6} m (12)^2 = 24m \quad (4)$$

$$I_o = I_{BC} - m\left(\frac{1}{3}AA'\right)^2 = 24m - \left(\frac{12}{3}\right)^2 m = 24m - 16m = 8m \quad (5)$$

$$(6) \quad I_{y'y'} = I_o + m\left(\frac{2}{3}AA'\right)^2 = 8m + \left(\frac{24}{3}\right)^2 m = 8m + 64m = 72m$$

من المعادلات السابقة (3-6) والمعادلة (2)

$$a^2 = \frac{I_{y'y'}}{m} = \frac{72m}{m} = 72, \quad b^2 = \frac{I_{x'x'}}{m} = \frac{(27/2)m}{m} = \frac{27}{2} \quad (7)$$

وفى المعادلة (1) تصبح معادلة قطع ناقص القصور بالصورة

$$\frac{x'^2}{72} + \frac{y'^2}{\frac{27}{2}} = 1 \quad (8)$$

ومن الشكل المعطى

$$\tan \theta = \frac{y'}{x'} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \rightarrow y' = \frac{3}{4}x' \quad (9)$$

$$\frac{x'^2}{72} + \frac{\left(\frac{3}{4}x'\right)^2}{\frac{27}{2}} = 1 \rightarrow \frac{x'^2}{72} + \frac{\frac{9}{16}x'^2}{\frac{27}{2}} = 1 \rightarrow \frac{x'^2}{72} + \frac{x'^2}{24} = 1 \quad (8) \text{ في } (9)$$

$$x'^2(1+3) = 72 \rightarrow x'^2 = 18 \quad (10)$$

وبالتعويض من (10) في (8) نحصل على

$$\frac{x'^2}{72} + \frac{y'^2}{\frac{27}{2}} = 1 \rightarrow \frac{18}{72} + \frac{y'^2}{\frac{27}{2}} = 1 \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{y'^2}{\frac{27}{2}} = 1 \rightarrow y'^2 = \frac{27}{2} \left\{1 - \frac{1}{4}\right\} = \frac{27}{8} \quad (3)$$

$$\rightarrow y'^2 = \frac{81}{8} \quad (11)$$

$$r^2 = x'^2 + y'^2 = 18 + \frac{81}{8} = \frac{144+81}{8} = \frac{225}{8} = \frac{(25)^2}{8} \quad (9) \quad (12)$$

من العلاقة $r^2 = ma^2b^2$ يمكننا ايجاد العزم حول المحور AC بالصورة

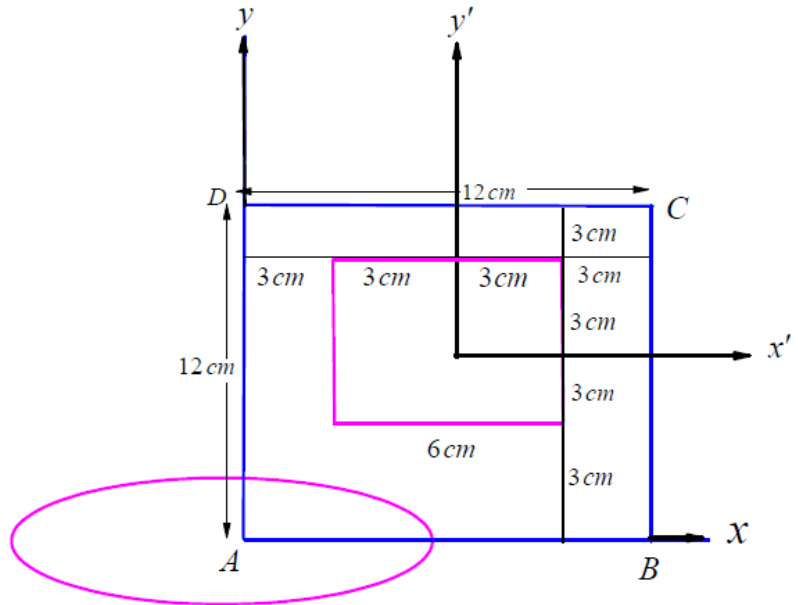
$$I_{AC} r^2 = m a^2 b^2 \rightarrow I_{AC} = \frac{m a^2 b^2}{r^2} = \frac{m(72)\left(\frac{27}{2}\right)}{\frac{225}{8}} = \frac{m(72)(27)(4)}{225} = \frac{7776}{225} m \quad I_{AC} = 34.56$$

(13)

مثال (9) : صفيحة مربعة $ABCD$ طول ضلعها 12cm أزيل منها جزء على هيئة مربع طول ضلعه 6cm وينطبق مركزه على مركز الصفيحة الأصلية و أضلاعه توازي أضلاع المربع الأصلي اوجد معادلة قطع ناقص القصور الذاتي الدائري عند A ثم استنتج منه عزم القصور الذاتي حول المحور AB ؟

الحل

بأخذ الصفيحة المربعة $ABCD$ كما بالشكل بحيث يكون محورين تماثل. لذلك سوف نحسب لصفحة كل من عزم القصور الذاتي حول ox وحاصل ضرب القصور الذاتي منسوبا للمحورين ox, oy وبالنسبة للصفحة المربعة كما هو معروف $I_{xy} = 0$ وتعطى معادلة قطع ناقص القصور الذاتي عند A بالصورة



$$(1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(2) a^2 = \frac{I_{yy}}{m}, \quad b^2 = \frac{I_{xx}}{m}$$

يفرض أن كثافة المادة المصنوع منها الصفيحة هي ρ . وبفرض أن كتلته الصفيحة الكلية هي m_1 والتي تعطى من $m_1 = (12)(12)\rho = 144\rho$ وأن كتلته الصفيحة المنزوعة هي m_2 وهي تعطى من $m_2 = 36\rho$. فتكون كتلته الجزء المراد دراسته هي

$$. m = m_1 - m_2 = 144\rho - 36\rho = 108\rho$$

لاحظ انه لا إيجاد عزم القصور حول المحو x للجزء المراد دراسته يجب علينا إيجاد عزم القصور الذاتي للكتلة الأساسية ثم طرح عزم القصور الذاتي للجزء المنزوع وذلك بعد إيجاد هذا العزم حول المحور ox . ولإيجاد عزم القصور الذاتي للجزء المنزوع نحسب عزم القصور الذاتي منسوبا لمحور يمر بالمركز والذي يعطى من

$$(3) I_{x'x'} = \frac{1}{12} m_2 (6)^2 = 3m_2$$

ويكون عزم القصور الذاتي للجزء المنزوع حول المحور x بالصورة

$$(4) (I_{xx})_{m_2} = I_{x'x'} + m_2 (6)^2 = 3m_2 + 36m_2 = 39 m_2$$

بينما يعطى عزم القصور الذاتي للكتلة الأساسية حول المحور x بالصورة

$$(5) (I_{xx})_{m_1} = \frac{1}{3} m_1 (12)^2 = 48m_1$$

ويعطى عزم القصور حول المحو x للجزء المراد دراسته بالصورة

$$(I_{xx})_m = (I_{xx})_{m_1} - (I_{xx})_{m_2} = 48m_1 - 39m_2 = 48(144\rho) - 39(36\rho) = \rho(6912 - 1404) = 5508\rho$$

$$(I_{xx})_m = 5508\rho \frac{m}{m} = 5508\rho \frac{m}{108\rho} = \frac{5508}{108} m = 51m \quad (6)$$

وبالمثل يمكن اثبات أن

$$(7) (I_{yy})_m = 51m$$

من المعادلات السابقة (3-6) والمعادلة (2)

$$(8) a^2 = \frac{I_{yy}}{m} = \frac{51m}{m} = 51, \quad b^2 = \frac{I_{xx}}{m} = \frac{51m}{m} = 51$$

وفى المعادلة (1) تصبح معادلة قطع ناقص القصور بالصورة

$$(9) \frac{x^2}{51} + \frac{y^2}{51} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 51$$

كما هو واضح من المعادلة (9) فهي تمثل معادلة دائرة وهي تسمى بذلك معادلة قطع ناقص القصور الدائري.

من العلاقة $I_{x_1x_1} r^2 = ma^2b^2$ يمكننا ايجاد العزم حول المحور AB بالصورة

$$(10) I_{AB} r^2 = ma^2b^2 \rightarrow I_{AB} = \frac{ma^2b^2}{r^2}$$

و واضح أن نقطة تقاطع AB مع القطع هي $(\sqrt{51}, 0)$ أي أن $r^2 = x^2 + y^2 = 51$

$$I_{AB} = \frac{m(51)(51)}{51} = 51m$$

ويكون بذلك العزم حول المحور AB بالصورة

و واضح أن I_{AB} يتساوى مع I_{yy} .

الفصل الرابع

كيناتيكا الجسم المتماسك

مقدمة:

الحركة الدورانية

كما سبق و أن عرفنا أن الحركة الدورانية حركه مهمه جدا في الفيزياء وفي حياتنا اليومية والحركة الدائرية هي حاله خاصه من الحركة الدورانية . ويمكن تعريف الحركة الدورانية بأنها حركة جسيم ذات ابعاد حول محور معين يمر داخل الجسيم مثل حركة عجله حول محور ثابت وحركة او دوران ملف المحرك الكهربائي ودوران الارض حول محورها . اما حركة عجلة السيارة فهي مزيج من الحركة الدورانية والحركة الانتقالية. وتكون الحركة دورانية منتظمة إذا كانت سرعة الدوران ثابتة وإلا فهي حركة دورانية غير منتظمة لتغير سرعة الدوران .

سنناقش في هذا الفصل سلوك الجسم الجاسئ عند الدوران والإنتقال . حيث تنقسم حركة الجسم الجاسئ العامة الي حركة انتقالية واخري دورانية. إن ما سنناقشه هنا لا يختلف عما تعلمته في دراستك السابقة، إذ تعرف الحركة الدورانية لجسم ما (بأنها حركة جسم ذي أبعاد حول محور معين

يمر داخل الجسم) أو الحركة التي تصطف فيها جميع جزيئاته أي مسارات دائرية تقع مراكزها على خط مستقيم ثابت يسمى محور الدوران، مثل حركة عجلة الدراجة حول محورها، ولكي تكون حركة الجسم دورانية منتظمة، يجب أن يكون كل من المعدل الزمني للحركة ومحور الدوران ثابتا، أما إذا تغير هذا المعدل أو حص تغير في اتجاه محور الدوران فتكون عندئذٍ الحركة الدورانية غير منتظمة.

دوران حول محور ثابت

الحركة الدورانية أو حركة الاستدارة هي حركة التفاف حول مركز الجسم نفسه، بخلاف الحركة الدائرية التي يحافظ فيها الجسم على مسافة ثابتة من مركز يقع خارجه. وتكون الحركة دورانية منتظمة إذا كانت سرعة الدوران ثابتة، وإلا يقال عن تلك الحركة الدورانية أنها غير منتظمة لتغير سرعة الدوران. وعزم القوة هو الذي يسبب الحركة الدورانية

قانون نيوتن الثاني وعزم القصور الذاتي للحركة الدورانية:

Torque and Newton's Second Law

إذا دار جسم كتله m حول محيط دائرة نصف قطرها r فتكون محصلة القوي المماسية لمحيط الدائرة هي

$$(1) \quad F_t = m a_t \quad \rightarrow \quad F_t r = m r a_t$$

حيث a_t هي العجلة المماسية للدائرة

لكن من المعروف بأن

$$(2) \quad a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r \omega) = r \frac{d\omega}{dt} = r \alpha$$

حيث ω هي السرعة الزاوية وأن $\frac{d\omega}{dt} = \alpha$ هي العجلة الزاوية . وبالتعويض من المعادلة (2) في

المعادلة (1) نحصل علي

$$(3) \quad F_t r = m r a_t = m r (r \alpha) = (m r^2) \alpha$$

حيث ان المقدار $(m r^2)$ هو عزم القصور الذاتي الدوراني للجسم ويرمز له بالرمز $I_o = m r^2$ وان

المقدار $F_t r$ هو عزم القوة حول مركز الدائرة التي يتحرك عليها الجسم ويرمز له بالرمز

$F_t r = M_o$ اي يمكننا صياغة المعادلة بالصورة

$$(4) \quad I_o \alpha = M_o \quad \rightarrow \quad \frac{d}{d}(I_o \omega) = M_o$$

وتعتبر المعادلة (4) بمثابة قانون نيوتن الثاني في الحركة الدورانية والذي ينص على إن عزم القوة المسلط على جسم حول محور الدوران يساوي عزم القصور الذاتي الدوراني للجسم حول نفس المحور مضروباً في العجلة الزاوية

مثال(1): عمود رفيع منتظم كتلته m وطوله L يمكنه الدوران في مستوي رأسي حول احد طرفيه اذا بدء العمود حركته من السكون عندما كان أفقياً أثبت ان رد الفعل الأفقي عند نقطة التثبيت يكون أكبر ما يمكن عندما يميل العمود على الراسي بزاوية $\frac{\pi}{4}$ وان رد الفعل الراسي عند ذلك يساوى $\frac{11}{8}mg$ ؟

الحل

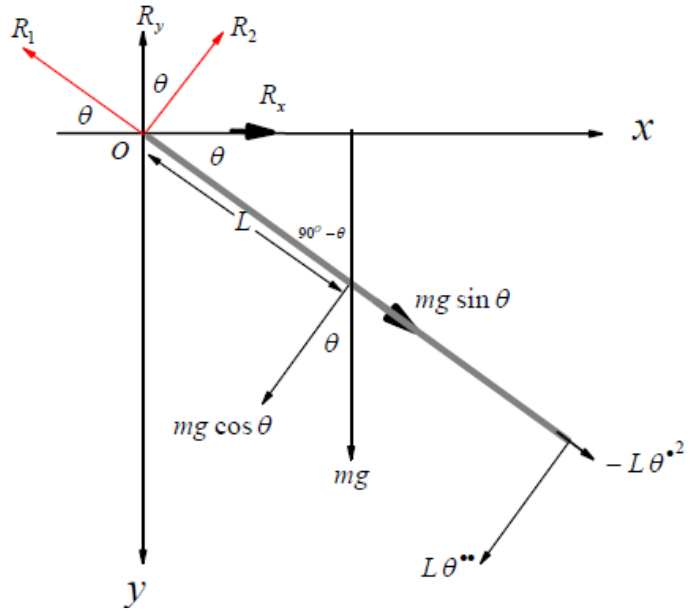
بأخذ العمود كما بالشكل المقابل حيث كتلته m وطوله $2L$ ويدور حول النقطة o في المستوى الرأسي ox,oy والقوى تؤثر عليه كما بالشكل حيث R_1, R_2 هما مركبتي رد الفعل عند نقطة التعليق احدهما في اتجاه العمود والاخرى في الاتجاه العمودي عليه. وبفرض ان العمود يدور بزاوية θ فتكون كل من سرعته وعجلته الدورانية بالصورة $\theta, \dot{\theta}$.

أولا معادلات الحركة الخطية

معادلات الحركة الخطية للعمود هي معادلات حركة مركز الكتلة في اتجاه الدوران والعمودي. وهذه المعادلات يمكن صياغتها بالصورة

$$(1) m(-L\dot{\theta}^2) = mg \sin \theta - R_1 \rightarrow mL\dot{\theta}^2 = R_1 - mg \sin \theta$$

$$(2) mL\ddot{\theta} = mg \cos \theta - R_2$$



ثانياً معادلة الحركة الدورانية

معادلة الحركة الدورانية حول مركز الدوران (o) يمكن ايجادها من معدل التغير في كمية الحركة الزاوية حول مركز دوران العمود والتي تساوي مجموع عزوم القوي الخارجية المؤثرة على العمود حول مركز دوران العمود والتي يمكن صياغتها بالصورة.

$$(3) \frac{d}{dt}(I_o \theta^{\bullet}) = M_o \rightarrow I_o \theta^{\bullet\bullet} = M_o$$

يمكن كتابة المعادلة (3) بالصورة

$$\theta^{\bullet\bullet} = \frac{3g}{4L} \cos \theta \quad (4) \frac{1}{3} m (2L)^2 \theta^{\bullet\bullet} = (mg \cos \theta) (L) \rightarrow$$

$$\theta^{\bullet} \frac{d\theta^{\bullet}}{d\theta} = \frac{3g}{4L} \cos \theta \rightarrow \int \theta^{\bullet} d\theta^{\bullet} = \frac{3g}{4L} \int \cos \theta d\theta \rightarrow \frac{\theta^{\bullet 2}}{2} = \frac{3g}{4L} \sin \theta + c_1$$

من الشروط الابتدائية - عندما $\theta^{\bullet} = 0$ فإن $\theta = 0$ وبذلك يكون $c_1 = 0$ وعند ذلك نحصل على

$$(5) \quad \theta^{\bullet 2} = \frac{3g}{2L} \sin \theta$$

بالتعويض من المعادلة (5) في المعادلة (1) نحصل على

$$mL \left(\frac{3g}{2L} \sin \theta \right) = R_1 - mg \sin \theta \rightarrow R_1 = mL \left(\frac{3g}{2L} \sin \theta \right) + mg \sin \theta$$

$$R_1 = \frac{5}{2} mg \sin \theta \quad (6)$$

بالتعويض من المعادلة (4) في المعادلة (2) نحصل على

$$mL \left(\frac{3g}{4L} \cos \theta \right) = mg \cos \theta - R_2 \rightarrow R_2 = mg \cos \theta - \frac{3}{4} mg \cos \theta$$

$$R_2 = \frac{1}{4} mg \cos \theta$$

(7)

ولإيجاد كل من رد الفعل الأفقي والرأسي من الشكل المُعطى نحصل على

$$(8) \quad R_x = R_2 \sin \theta - R_1 \cos \theta$$

$$R_y = R_1 \sin \theta + R_2 \cos \theta \quad (9)$$

وبالتعويض من (6), (7)

$$R_x = \left(\frac{1}{4} mg \cos \theta \right) \sin \theta - \left(\frac{5}{2} mg \sin \theta \right) \cos \theta \rightarrow R_x = -\frac{9}{4} mg \sin \theta \cos \theta$$

$$(10) \quad R_x = -\frac{9}{8} mg \sin 2\theta$$

$$R_y = \left(\frac{5}{2} mg \sin \theta \right) \sin \theta + \left(\frac{1}{4} mg \cos \theta \right) \cos \theta \rightarrow R_y = \frac{5}{2} mg \sin^2 \theta + \frac{1}{4} mg \cos^2 \theta$$

$$(11) \quad R_y = \left(\frac{5}{2} \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right) mg$$

يكون رد الفعل الأفقي أكبر كما يمكن عندما تكون $\sin 2\theta = 1$ أي أن $2\theta = \frac{\pi}{2}$ ومنها

$\theta = \frac{\pi}{4}$ وبالتعويض في المعادلة (11) نجد أن

$$R_y = \left(\frac{5}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) mg \rightarrow R_y = \frac{11}{8} mg$$

التدحرج والانزلاق

إذا تحرك جسم خشن على آخر خشن فهناك نوعان من الحركة
(1)- حركة تدرجيه انزلاقية : وفيها تكون قوة الاحتكاك نهائية وتساوي حاصل ضرب معامل الاحتكاك في رد الفعل العمودي وهي تكون غير كافية لمنع الانزلاق.

(2)- حركة تدرجيه بحتة : وفيها تكون قوة الاحتكاك غير نهائية وتكون أقل من حاصل ضرب معامل الاحتكاك في رد الفعل العمودي وتكون كافية لمنع الانزلاق.

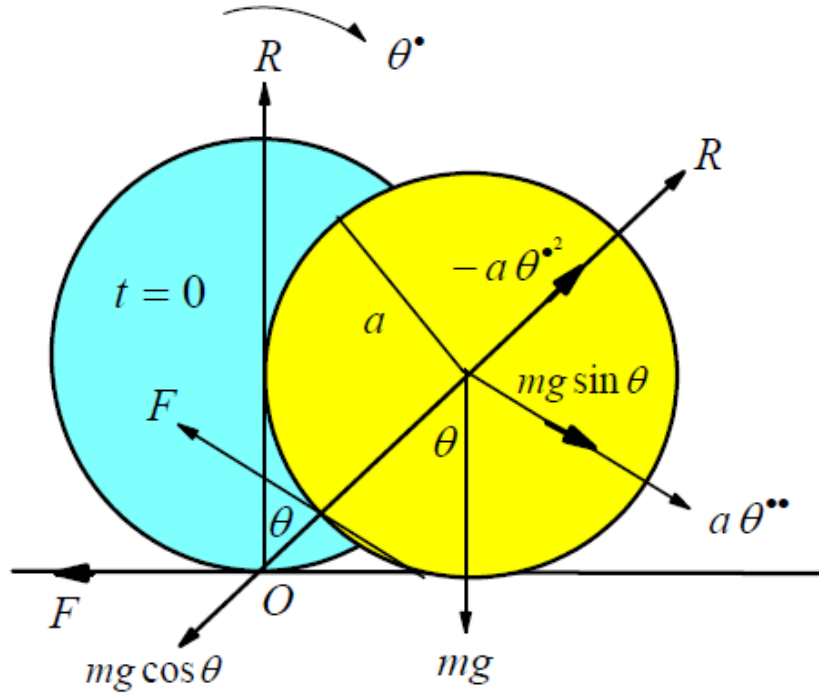
ولتعيين نوع الحركة نحسب سرعة نقطة التماس عند بداية الحركة . فإذا كانت سرعة نقطة التماس عند بداية الحركة تساوي صفر كان هناك احتمال أن تبدأ الحركة بدرججة بحتة وذلك إذا كانت قوة الاحتكاك كافية الي ذلك وتكون أقل من حاصل ضرب معامل الاحتكاك في رد الفعل العمودي. اما إذا كانت سرعة نقطة التماس عند بداية الحركة لا تساوي صفر فإن الحركة تبدأ بانزلاق وعند ذلك فإن قوة الاحتكاك تساوي حاصل ضرب معامل الاحتكاك في رد الفعل العمودي وفي الاتجاه المضاد لسرعة نقطة التماس.

مثال(2): قرص دائري كتلة (m) يدور حول محور أفقي مار بنقطة (O) على محيطه وعمودي على مستواه, اذا بدأ القرص حركته من السكون عندما كان القطر المار بالنقطة (O) راسياً الى أعلى. أثبت أن ردى الفعل في اتجاهي نصف القطر المار بالنقطة (O) والعمودي عليه يعطيان بالصورة

$$\frac{mg}{3} \sin \theta, \frac{mg}{3} (7 \cos \theta - 4) \text{ حيث } \theta \text{ هي الزاوية التي يدور بها القرص؟}$$

الحل

بأخذ القرص كما بالشكل المقابل حيث كتلة m ونصف قطره a ويدور حول النقطة o في المستوى الرأسي ox, oy والقوى تؤثر عليه كما بالشكل. حيث R, F هما مركبتي رد الفعل و الإحتكاك عند نقطة الدوران احدهما في الاتجاه نحو المركز والاخرى في الاتجاه العمودي عليه أي في اتجاه المماس للقرص. وبفرض ان القرص قدر دار بزاوية θ عند أي لحظة زمنية t أي ان قطرة قدر دار بزاوية θ حيث oA هو القطر عند بداية الحركة فتكون كل من سرعته وعجلته الدورانية بالصورة $\dot{\theta}, \ddot{\theta}$.



أولا معادلات الحركة الإنتقالية

معادلات الحركة الإنتقالية للقرص هي معادلات حركة مركز الكتلة في اتجاه المماس والعمودي عليه وهذه المعادلات يمكن صياغتها بالصورة

$$(1) -ma\theta^{\cdot\cdot} = R - mg \cos \theta$$

$$(2) ma\theta^{\cdot\cdot} = mg \sin \theta - F$$

ثانياً معادلة الحركة الدورانية : تكون معادلة الحركة الدورانية حول مركز دوران الدوران o والتي تنص على ان معدل التغير في كمية الحركة الزاوية حول مركز دوران القرص تساوي مجموع عزوم القوي الخارجية المؤثرة على القرص حول مركز دوران القرص والتي يمكن صياغتها بالصورة

$$(3) \frac{d}{dt}(I_o \theta^{\cdot}) = M_o \rightarrow I_o \theta^{\cdot\cdot} = M_o$$

$$\theta^{\cdot\cdot} = \frac{2}{3} \frac{g}{a} \sin \theta$$

$$(4) \frac{3}{2} m a^2 \theta^{\cdot\cdot} = (mg \sin \theta) (a) \rightarrow$$

ومنها

وهذه المعادلة يمكن كتابتها بالصورة

$$\theta \cdot \frac{d\theta}{d\theta} = \frac{2g}{3a} \sin\theta \rightarrow \int \theta \cdot d\theta = \frac{2g}{3a} \int \sin\theta d\theta \rightarrow \frac{\theta^2}{2} = -\frac{2g}{3a} \cos\theta + c_1$$

من الشروط الابتدائية - عندما $\theta = 0$ فإن $\theta = 0$ وبذلك يكون $c_1 = \frac{2g}{3a}$ وعند ذلك نحصل على

$$(5) \quad \theta^2 = \frac{4g}{3a} (1 - \cos\theta)$$

بالتعويض من المعادلة (4) في المعادلة (2) نحصل على

$$(6) \quad ma \left(\frac{2g}{3a} \sin\theta \right) = mg \sin\theta - F \rightarrow F = \frac{1}{3} mg \sin\theta$$

بالتعويض من المعادلة (5) في المعادلة (1) نحصل على

$$(7) \quad ma \left(\frac{4g}{3a} (1 - \cos\theta) \right) = mg \cos\theta - R \rightarrow R = \frac{mg}{3} (7 \cos\theta - 4)$$

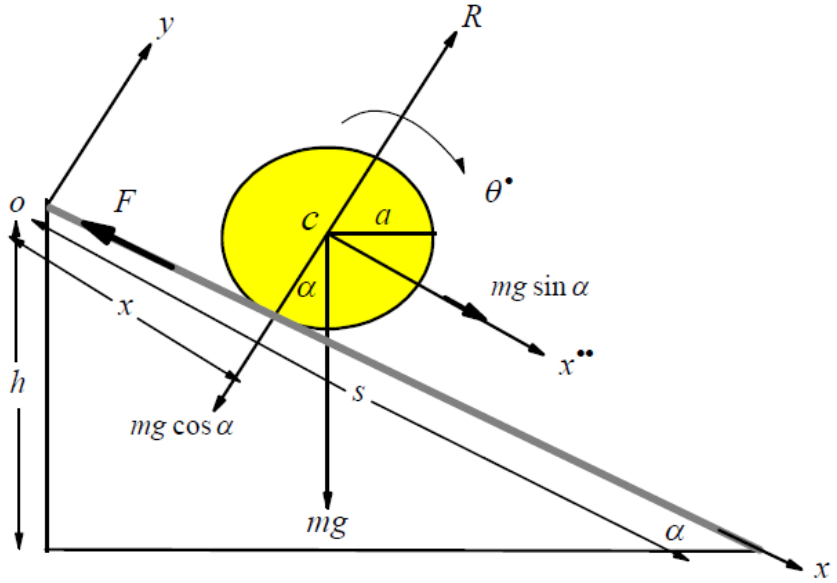
واضح أن كل من ردي الفعل تأخذ قيمة موجبة وعلى ذلك فإن الاتجاهات المختارة في بداية الحل هي اتجاهات صحيحة.

مثال (3): ادرس حركة جسيم كتلة (m) يتدحرج بدون انزلاق إلى أسفل مستوى خشن يميل على المستوى على الأفقي بزاوية (α). أوجد أقل قيمة لمعامل الاحتكاك بين الجسم والمستوي حتى لا يحدث انزلاق؟

الحل

بأخذ المحور ox في اتجاه المستوي إلى أسفل و المحور oy عمودي على المحور ox , وبفرض أن o هي نقطة الأصل كما بالشكل المقابل وبفرض أن كتلة الجسم هي m وأن الجسم على بعد x من نقطة الأصل و أن مركز كتلة الجسم له الإحداثي (x, a) وبفرض ان القوى المؤثرة على الجسم كما بالشكل حيث R هو رد الفعل وبفرض ان F هي قوة الاحتكاك وهي غير معلومة الاتجاه لان الحركة سوف تكون انزلاقية وتكون سرعة نقطة التماس مساوية للصفر وتكون قوة الاحتكاك لم تصل بعد الي قوة الاحتكاك النهائي وعلى ذلك تم اختيار قوة الاحتكاك كما بالشكل:

وبفرض ان سرعة وعجلة مركز ثقل الجسم تعطيان بالصورة $\vec{v} = (v_x, v_y)$, $\vec{a} = (a_x, a_y)$ حيث لهذا الجسم يكون $\vec{v} = (x^{\cdot}, 0)$, $\vec{a} = (x^{\cdot\cdot}, 0)$



أولاً معادلات الحركة الخطية

بكتابة معادلات الحركة الخطية للجسم والتي هي معادلات حركة مركز الكتلة في اتجاه المحورين فيكونوا بالصورة

$$(1) m x^{\cdot\cdot} = mg \sin \alpha - F$$

$$(2) m(0) = R - mg \cos \alpha$$

ثانياً معادلة الحركة الدورانية

بفرض ان الجسم قد تدرج بزاوية θ فتكون كل من سرعته وعجلته الدورانية بالصورة θ^{\cdot} , $\theta^{\cdot\cdot}$. وتكون معادلة الحركة الدورانية حول مركز الثقل c والتي تنص على ان معدل التغير في كمية الحركة الزاوية حول مركز ثقل الجسم تساوي مجموع عزوم القوى الخارجية المؤثرة على الجسم حول مركز ثقل الجسم والتي يمكن صياغتها بالصورة

$$(3) \frac{d}{dt}(I_c \theta^{\cdot}) = M_c \rightarrow I_c \theta^{\cdot\cdot} = M_c$$

حيث I_c هو عزم القصور الذاتي للجسم منسوباً لمحور عمودي على مستوى الحركة (عمودي على مستوى الجسم) ويمر بمركز الثقل ونلاحظ أن عزوم القوى موجبة لأنها في نفس اتجاه θ^{\cdot} وعلى ذلك يمكن كتابة معادلة الحركة الدورانية بالصورة

$$F = \frac{I_c}{a} \theta''$$

$$(4) I_c \theta'' = (F) (a) \rightarrow$$

وبالتعويض من (4) في (1) يكون لدينا

$$(5) m x'' = mg \sin \alpha - \frac{I_c}{a} \theta''$$

وشرط تدحرج الجسم بدون انزلاق (pure rolling) هو ان سرعة نقطة التماس كنقطة من الجسم تساوي سرعتها كنقطة من المستوى وحيث ان المستوي ساكن فتكون سرعة نقطه التماس له مساوية للصفر أي أن $x' = a\theta'$ وعليه يكون $x'' = a\theta''$ وبالتعويض في المعادلة (5) عن قيمة θ'' نحصل على

$$m x'' = mg \sin \alpha - \frac{I_c}{a^2} x'' \rightarrow x'' + \frac{I_c}{m a^2} x'' = g \sin \alpha$$

$$(6) x'' = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_c}{m a^2}} \rightarrow a\theta'' = x'' = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_c}{m a^2}}$$

وواضح من المعادلة (6) ان عجلة الجسم ثابتة لذلك يمكن ايجاد سرعته من العلاقة

$$v^2 = v_0^2 + 2x''x$$

وعند ونهاية المستوي المائل تعطي السرعة بالصورة

$$v^2 = 0 + 2 \left(\frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_c}{m a^2}} \right) s \rightarrow v^2 = 2 \left(\frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_c}{m a^2}} \right) \frac{h}{\sin \alpha} \rightarrow v^2 = \frac{2g h}{1 + \frac{I_c}{m a^2}}$$

$$(7) v = \sqrt{\frac{2g h}{1 + \frac{I_c}{m a^2}}}$$

وبالتعويض في المعادلة (4) نحصل على

$$(8) F = \frac{I_c}{a} \frac{1}{a} \left(\frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_c}{m a^2}} \right) \rightarrow F = \left(\frac{I_c}{m a^2 + I_c} \right) m g \sin \alpha \text{ or } F = \frac{1}{\frac{m a^2}{I_c} + 1} m g \sin \alpha$$

ولكي لا يحدث انزلاق للجسم فيجب ان لا تصل قوة الاحتكاك F الى قيمتها النهائية μR أي يجب أن يتحقق الشرط $F < \mu R$ وبالتعويض من المعادلتين (2, 8) نحصل على

$$F < \mu R \rightarrow \mu > \frac{F}{R} \rightarrow \mu > \frac{\left(\frac{I_c}{ma^2 + I_c}\right) mg \sin \alpha}{mg \cos \alpha}$$

$$(9) \mu > \left(\frac{I_c}{ma^2 + I_c}\right) \tan \alpha$$

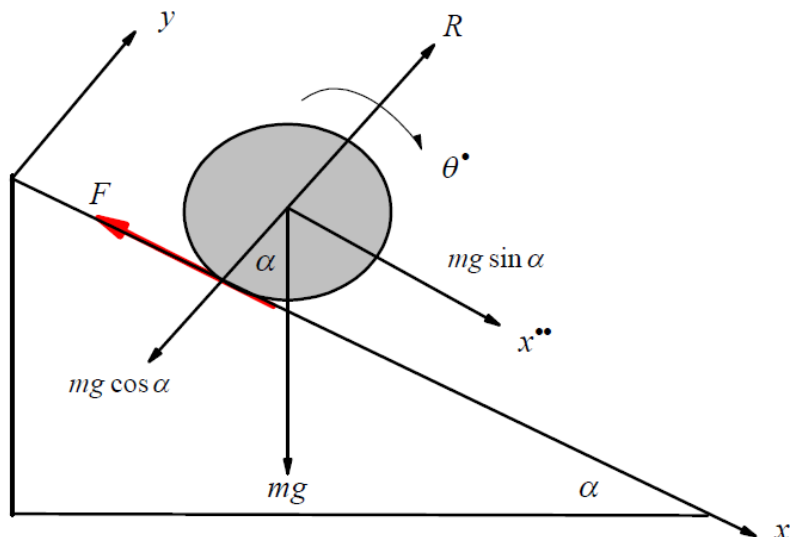
ولكي يحدث الانزلاق يجب ان تكون اقل قيمة لمعامل الاحتكاك على المستوى هي

$$\mu = \left(\frac{I_c}{ma^2 + I_c}\right) \tan \alpha$$

مثال (4): تتدحرج كرة مصممة كتلتها m ونصف قطرها a لأسفل مستوى خشن يميل على المستوى على الأفقي بزاوية (α) . أوجد أقل قيمة لمعامل الاحتكاك بين الكرة والمستوي حتى لا يحدث انزلاق؟

الحل

بأخذ الكرة كما بالشكل المقابل حيث كتلتها m ونصف قطرها a وتدور وتنتقل في المستوى ox, oy والقوى تؤثر عليه كما بالشكل



أولا معادلات الحركة الخطية

$$(1) m x'' = mg \sin \alpha - F$$

$$(2) m(0) = R - mg \cos \alpha$$

ثانياً معادلة الحركة الدورانية

$$(3) \frac{d}{dt}(I_c \theta') = M_c \rightarrow I_c \theta'' = M_c$$

والتي يمكن كتابتها بالصورة

$$F = \frac{2}{5} m a \theta''$$

$$(4) \frac{2}{5} m a^2 \theta'' = (F) (a) \rightarrow$$

وشرط تدرج الكرة بدون انزلاق هو ان يكون سرعة نقطة التماس تساوى الصفر وحيث أن $x = a\theta$ ومنها $x' = a\theta'$ وعليه يكون $x'' = a\theta''$ وبالتعويض في المعادلة (4) نحصل على

$$F = \frac{2}{5} m x'' \text{ وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على}$$

$$m x'' = mg \sin \alpha - \frac{2}{5} m x'' \rightarrow x'' + \frac{2}{5} x'' = g \sin \alpha \rightarrow \frac{7}{5} x'' = g \sin \alpha$$

$$(5) x'' = \frac{5}{7} g \sin \alpha$$

ويكون كذلك

$$(6) x'' = a\theta'' = \frac{5}{7} g \sin \alpha$$

وبالتعويض في المعادلة (4) نحصل على

$$(7) F = \frac{2}{5} m a \theta'' = \frac{2}{5} m \left(\frac{5}{7} g \sin \alpha \right) \rightarrow F = \frac{2}{7} m g \sin \alpha$$

ولكي لا يحدث انزلاق فيجب ان لا تصل قوة الاحتكاك F الى قيمتها النهائية μR أي يجب أن يتحقق الشرط $F < \mu R$ وبالتعويض من المعادلتين (2, 7) نحصل على

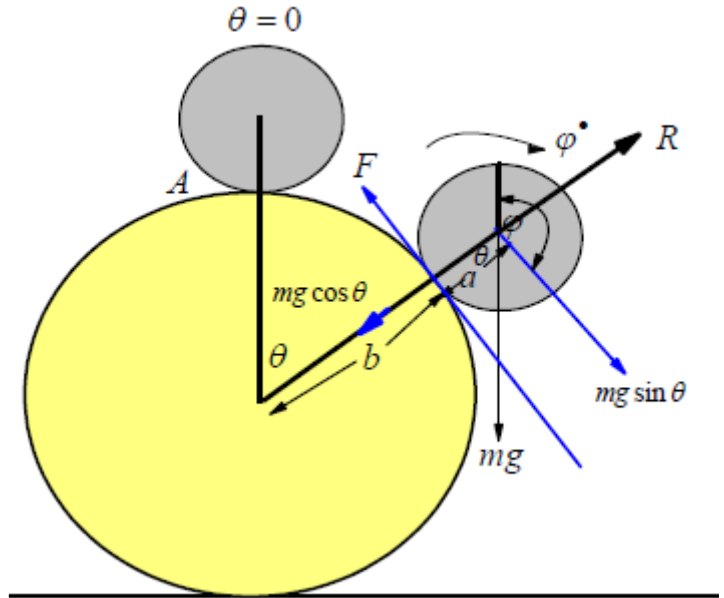
$$F < \mu R \rightarrow \mu > \frac{F}{R} \rightarrow \mu > \frac{\frac{2}{7} m g \sin \alpha}{m g \cos \alpha} \rightarrow \mu > \frac{2}{7} \tan \alpha$$

ولكي يحدث الانزلاق يجب ان تكون اقل قيمة لمعامل الاحتكاك على المستوى هي $\mu = \frac{2}{7} \tan \alpha$

مثال (5): تتدحرج كرة مصمته كتلتها (m) ونصف قطره (b) علي كرة مصمته قطرها (a) مثبتة محورها رأسي. إذا بدأت الكرة العليا حركتها من أعلى نقطة من الكرة العليا أوجد الزاوية التي تترك عندها الكرة العليا الكرة السفلي وسرعتها عند هذه اللحظة ؟

الحل

بأخذ موضع اختياري للكرة بالشكل المقابل حيث أن كتلة الكرة هي m ونصف قطرها a . وبفرض أن القوى المؤثرة على الكرة كما بالشكل حيث R هو رد الفعل وبفرض أن F هي قوة الاحتكاك وهي غير معلومة الاتجاه لان الحركة سوف تكون انزلاقية وتكون سرعة نقطة التماس مساوية للصفر وتكون قوة الاحتكاك لم تصل بعد الي قوة الاحتكاك النهائي وعلى ذلك تم وضع قوة الاحتكاك كما بالشكل .



لاحظ أن $\vec{a} = (a_r, a_\theta) = (r\ddot{\theta} - r\dot{\theta}^2, r\ddot{\theta} + 2r\dot{\theta}\dot{\theta})$ $\vec{v} = (v_r, v_\theta) = (r\dot{\theta}, r\dot{\theta})$

اولا معادلات الحركة الانتقالية

بكتابة معادلات الحركة الانتقالية للكرة العليا والتي هي معادلات حركة مركز الكتلة في اتجاه المحورين فيكونوا بالصورة

معادلة الحركة الانتقالية في اتجاه تزايد نصف القطر تكون بالصورة

$$(1) -m(a+b)\theta^{\bullet 2} = R - mg \cos\theta$$

معادلة الحركة الانتقالية في الاتجاه العمودي على تزايد θ تكون بالصورة

$$(2) m(a+b)\theta^{\bullet\bullet} = mg \sin\theta - F$$

ثانياً معادلة الحركة الدورانية

بفرض ان الكرة العليا قد تدرجت بزاوية φ فتكون كل من سرعته وعجلته الدورانية بالصورة φ^{\bullet} , $\varphi^{\bullet\bullet}$. وتكون معادلة الحركة الدورانية حول مركز الثقل c والتي تنص على ان معدل التغير في كمية الحركة الزاوية حول مركز ثقل الكرة العليا تساوي مجموع عزوم القوى الخارجية المؤثرة على الكرة العليا حول مركز الكرة العليا والتي يمكن صياغتها بالصورة

$$(3) \frac{d}{dt}(I_c \varphi^{\bullet}) = M_c \rightarrow I_c \varphi^{\bullet\bullet} = M_c$$

حيث I_c هو عزم القصور الذاتي الكرة العليا منسوباً لمحور عمودي على مستوى الحركة (عمودي على مستوى الكرة) ويمر بمركز الثقل ونلاحظ أن عزوم القوى موجبة لأنها في نفس اتجاه $\varphi^{\bullet\bullet}$ وعلى ذلك يمكن كتابة معادلة الحركة الدورانية بالصورة

$$F = \frac{2}{5} m a \varphi^{\bullet\bullet} \quad (4) \frac{2}{5} m a^2 \varphi^{\bullet\bullet} = (F) (a) \rightarrow$$

وشرط تدرج الكرة بدون انزلاق هو ان يكون $(a+b)\theta = a\varphi$ ومنها يكون $(a+b)\theta^{\bullet} = a\varphi^{\bullet}$ وعليه يكون

$$(5) (a+b)\theta^{\bullet\bullet} = a\varphi^{\bullet\bullet} \rightarrow \varphi^{\bullet\bullet} = \frac{a+b}{a}\theta^{\bullet\bullet}$$

وبالتعويض من المعادلة (5) في المعادلة (4) عن قيمة $\varphi^{\bullet\bullet}$ نحصل على

$$(6) F = \frac{2}{5} m(a+b)\theta^{\bullet\bullet}$$

وبالتعويض من المعادلتين (4),(5) في المعادلة (2) نحصل على

$$m(a+b)\theta^{\bullet\bullet} = mg \sin\theta - \frac{2}{5} m(a+b)\theta^{\bullet\bullet} \rightarrow \frac{7}{5} m(a+b)\theta^{\bullet\bullet} = mg \sin\theta$$

$$(7) \theta^{\bullet\bullet} = \frac{5}{7(a+b)} g \sin\theta$$

$$\theta \cdot \frac{d\theta}{d\theta} = \frac{5}{7(a+b)} g \sin \theta \rightarrow \int \theta \cdot d\theta = \frac{5}{7(a+b)} g \int \sin \theta d\theta$$

$$(8) \frac{\theta^2}{2} = -\frac{5}{7(a+b)} g \cos \theta + c_1$$

وعندما $\theta = 0$ فإن $\theta^* = 0$ ومن المعادلة (8) يكون $c_1 = \frac{5}{7(a+b)} g$ وبالتعويض في المعادلة (8)

مرة اخرى نحصل على

$$\frac{\theta^2}{2} = -\frac{5}{7(a+b)} g \cos \theta + \frac{5}{7(a+b)} g = \frac{5}{7(a+b)} g (1 - \cos \theta)$$

$$(9) \theta^2 = \frac{10g}{7(a+b)} (1 - \cos \theta) \rightarrow \theta^2 (a+b) = \frac{10g}{7} (1 - \cos \theta)$$

وبالتعويض من المعادلة (9) في المعادلة (1) نحصل على

$$-m \left(\frac{10}{7} g (1 - \cos \theta) \right) = R - mg \cos \theta$$

$$(10) R = mg \cos \theta - \frac{10}{7} mg (1 - \cos \theta) \rightarrow R = \frac{17}{7} mg \cos \theta - \frac{10}{7} mg$$

و عندما تترك الكرة العليا الكرة السفلى يتلاشى رد الفعل ويكون عند ذلك من المعادلة (10)

$$\frac{17}{7} mg \cos \theta - \frac{10}{7} mg = 0 \rightarrow \frac{17}{7} mg \cos \theta = \frac{10}{7} mg \rightarrow 17 \cos \theta = 10$$

$$(11) \cos \theta = \frac{10}{17} \rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{10}{17} \right) \rightarrow \theta = 53.968^\circ$$

وفي هذه الحالة تكون θ أكبر ما يمكن أي أن $\theta = \theta_{\max}$. وسرعة الكرة عند هذه النقطة تعطى من

$$v = r \theta^* = (a+b) \sqrt{\frac{10g}{7(a+b)} (1 - \cos \theta)} = \sqrt{\frac{10g}{7} (a+b) (1 - \cos \theta)} \quad \text{العلاقة}$$

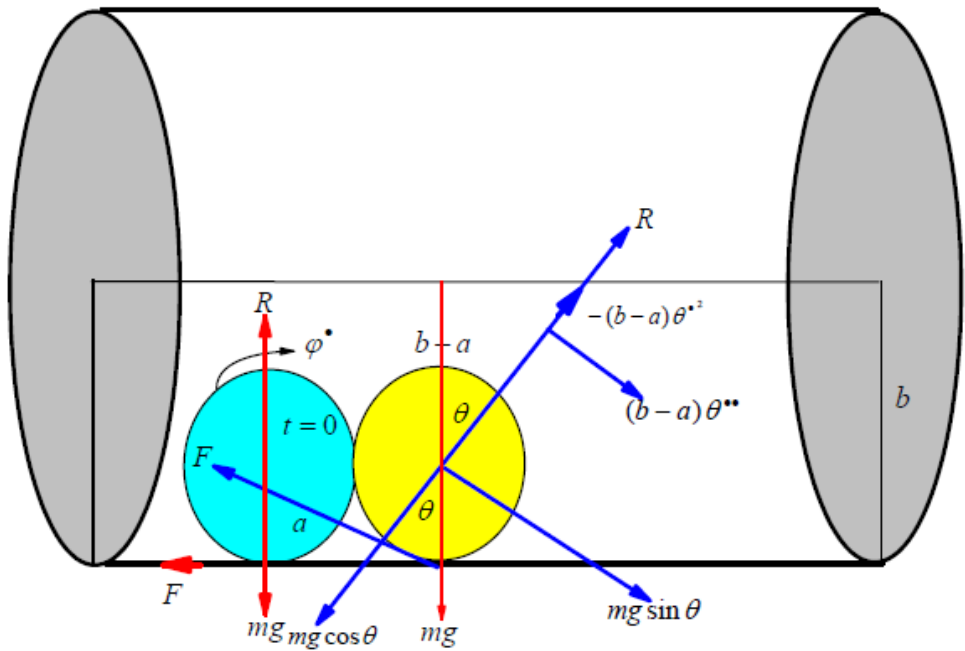
وتكون عند هذه النقطة $\theta = \theta_{\max}$ وبذلك تصبح قيمة السرعة

$$(12) \rightarrow v = \sqrt{\frac{10g}{17} (a+b)} \quad v = \sqrt{\frac{10g}{7} (a+b) \left(1 - \frac{10}{17}\right)} = \sqrt{\frac{10g}{7} (a+b) \left(\frac{17-10}{17}\right)}$$

مثال 6: كرة مصممة نصف قطرها a بدأت التدرج البحت على السطح الداخلي لإسطوانة جوفاء مثبتة نصف قطرها b ومحورها أفقي وكانت سرعة مركز الكرة عندما تكون في أسفل موضع هي

v_0 . فإذا كان الإحتكاك بين الكرة والإسطوانة كاف لمنع الإنزلاق فأثبت أن الشرط اللازم لكي تعمل الكرة دورات كاملة داخل الإسطوانة هو $v_0^2 > \frac{27}{7}(b-a)g$ ؟

الحل



أولاً معادلات الحركة الإنتقالية

معادلة الحركة الإنتقالية لمركز الكرة المتحركة (الكرة العليا) : معدل التغير في كمية الإنتقالية لمركز الكرة يساوي القوة المؤثرة علي الكرة في اتجاه عجلة الكرة

معادلة الحركة في اتجاه نصف القطر

$$(1) \quad -m(b-a)\theta'' = R - mg \cos \theta$$

معادلة الحركة في الاتجاه العمودي علي نصف القطر

$$(2) \quad m(b-a)\theta' = mg \sin \theta - F$$

ثانياً معادلة الحركة الدورانية

معادلة الحركة الدورانية لمركز الكرة المتحركة (الكرة العليا) : معدل التغير في كمية الحركة الزاوية (الدورانية) حول مركز الكرة يساوي عزوم القوة المؤثرة علي الكرة عند نفس النقطة

$$\frac{d}{dt}(I_C \phi^{\bullet}) = I_C \phi^{\bullet\bullet} = Fa$$

حيث I_C هو عزم القصور الذاتي للكرة عند مركزها وفي اتجاه عمودي علي مستوي الحركة, كما أن عزوم القوي موجبة لأنها في اتجاه الحركة الزاوية (اتجاه العجلة الزاوية $(\phi^{\bullet\bullet})$) والتي تصبح بالصورة

$$(3) \quad \frac{2}{5}ma^2\phi^{\bullet\bullet} = Fa \rightarrow \frac{2}{5}ma\phi^{\bullet\bullet} = F$$

والآن لدينا ثلاث معادلات في اربع متغيرات وهي (F, R, θ, ϕ) لذلك يلزمنا معادلة رابعة لحل هذه النظام وهذه المعادلة تأتي من سرعة التماس بين الكرة والأسطوانة.

ثالثاً سرعة نقطة التماس

وشرط التدرج البحت (التدرج بدون انزلاق) هو أن سرعة نقطة التماس (B) كجزء من الكرة

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{Bc} \quad \text{كجزء من الأسطوانة الساكنة:}$$

حيث سرعة نقطة التماس (B) كجزء من الكرة المتحركة يساوي = سرعة مركز الثقل الإنتقالية –

$$\text{سرعة نقطة التماس الإنتقالية بالنسبة لمركز الثقل أي أن } (b-a)\theta^{\bullet} - a\phi^{\bullet}$$

بينما سرعة نقطة التماس (B) كجزء من الأسطوانة الساكنة يساوي صفر . وبذلك فإن

$$(4) \quad (b-a)\theta^{\bullet} - a\phi^{\bullet} = 0 \rightarrow (b-a)\theta^{\bullet} = a\phi^{\bullet}$$

بالتعويض من (4) في (3) عن $(a\phi^{\bullet})$ نحصل

$$(5) \quad \frac{2}{5}m(b-a)\theta^{\bullet} = F \rightarrow F = \frac{2}{5}m(b-a)\theta^{\bullet}$$

بالتعويض من (5) في (2) عن (F) نحصل علي

$$m(b-a)\theta^{\bullet} = mg \sin \theta - \frac{2}{5} m(b-a)\theta^{\bullet}$$

$$(6) \frac{7}{5}(b-a)\theta^{\bullet} = g \sin \theta \quad \rightarrow \quad \frac{7}{5}(b-a)\theta^{\bullet} \frac{d\theta^{\bullet}}{d\theta} = g \sin \theta$$

بالتكامل المعادلة (6) نحصل علي

$$\frac{7}{10}(b-a)\theta^{\bullet 2} = -g \cos \theta + c \quad (7)$$

ومن الشروط الابتدائية حيث سرعة مركز الكرة بالنسبة لمركز الدوران (النقطة O) عندما تكون في

أسفل موضع هي v_0 أي أن $v_0 = (b-a)\theta^{\bullet}|_{t=0} \rightarrow \theta^{\bullet}|_{t=0} = \frac{v_0}{b-a}$ تكون $\theta = 0^\circ$ وبالتعويض

في

المعادلة (7) نحصل علي

$$\frac{7}{10}(b-a)\left(\frac{v_0}{b-a}\right)^2 = -g \underbrace{\cos(0)}_{=1} + c \rightarrow c = \frac{7}{10} \frac{v_0^2}{b-a} + g$$

وبالتعويض في المعادلة (7) عن قيمة (c) نحصل علي

$$\frac{7}{10}(b-a)\theta^{\bullet 2} = -g \cos \theta + \frac{7}{10} \frac{v_0^2}{b-a} + g$$

$$(b-a)\theta^{\bullet 2} = \frac{10}{7} g (1 - \cos \theta) + \frac{v_0^2}{b-a}$$

(8)

وبالتعويض في المعادلة (1) من المعادلة (8) عن قيمة $((b-a)\theta^{\bullet 2})$ نحصل علي

$$-m \left\{ \frac{10}{7} g (1 - \cos\theta) + \frac{v_0^2}{b-a} \right\} = R - mg \cos\theta$$

$$R = m \left\{ \frac{10}{7} g (\cos\theta - 1) + \frac{v_0^2}{b-a} \right\} + mg \cos\theta$$

$$R = m \left\{ \frac{17}{7} g \cos\theta - \frac{10}{7} g + \frac{v_0^2}{b-a} \right\}$$

(9)

ولكي يصنع الجسم دورات كاملة داخل الإسطوانة هو ان يجب يكون رد الفعل أكبر (أي أن $R > 0$) من الصفر وكذلك $\theta = \pi$ وبالتعويض في المعادلة (9) نحصل

$$m \left\{ \frac{17}{7} g \cos(\pi) - \frac{10}{7} g + \frac{v_0^2}{b-a} \right\} > 0 \rightarrow \left\{ -\frac{17}{7} g - \frac{10}{7} g + \frac{v_0^2}{b-a} \right\} > 0$$

و يكون بذلك الشرط اللازم لكي تعمل الكرة دورات كاملة داخل الإسطوانة هو

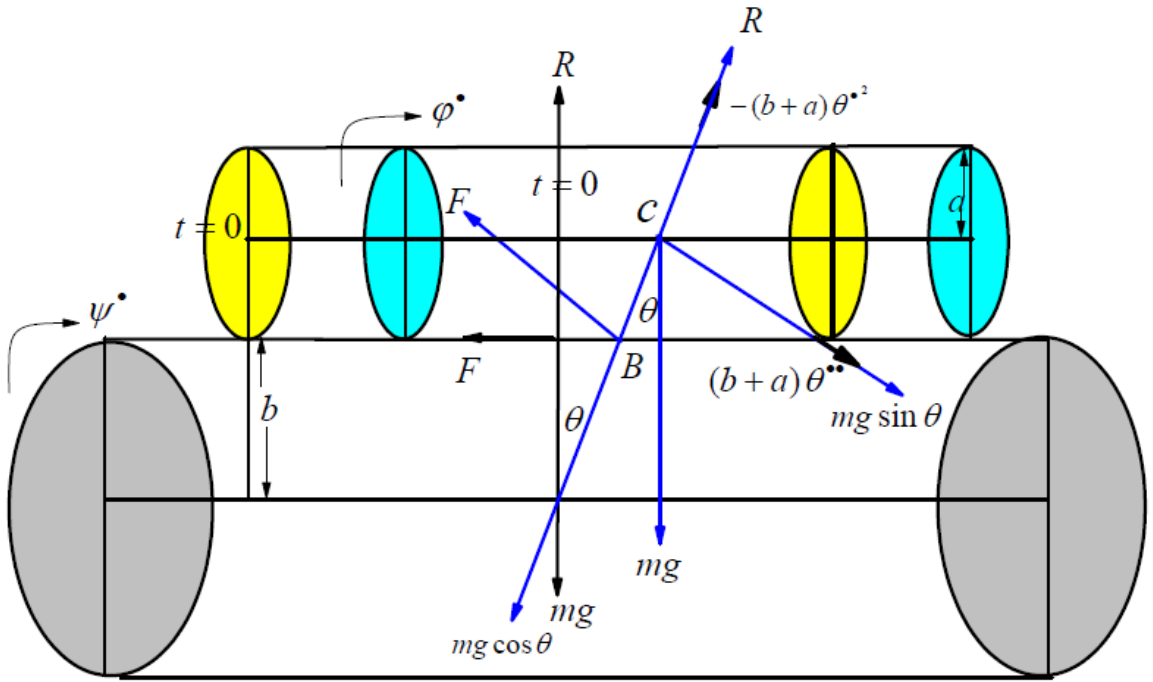
$$v_0^2 > \frac{27}{7} (b-a) g$$

مثال 7: وضعت إسطوانة مصممة تامة الخشونة نصف قطرها a وكتلتها m في وضع تماثل فوق إسطوانة اخري مصممة نصف قطرها b وكتلتها m' يمكنها الدوران حول محورها الثابت أفقياً . بدأت الإسطوانة العليا التدرج البحت فوق الإسطوانة السفلي وكانت θ هي الزاوية التي يصنعها المستوي المار بالمحورين مع المسنوي الرأسي عند أي لحظة زمنية t فأثبت أن

$$(3m' + 2m)(a+b)\theta^{\circ} = 2(m' + m)g \sin \theta$$

العليا الإسطوانة السفلي ؟

الحل



أولاً معادلات الحركة الإنتقالية

معادلة الحركة الإنتقالية لمركز الإسطوانة المتحركة (الإسطوانة العليا) : يمكن الحصول عليها من قانون نيوتن الثاني والذي ينص علي أن معدل التغير في كمية الإنتقالية لمركز الإسطوانة يساوي القوة المؤثرة علي الإسطوانة في اتجاه عجلة الإسطوانة

(i) معادلة الحركة في اتجاه نصف القطر

$$(1) \quad -m(b+a)\theta^2 = R - mg \cos \theta$$

(ii) معادلة الحركة في الاتجاه العمودي علي نصف القطر

$$(2) \quad m(b+a)\theta^{\cdot} = mg \sin \theta - F$$

ثانياً معادلة الحركة الدورانية

معادلة الحركة الدورانية لمركز الإسطوانة المتحركة (الإسطوانة العليا) يمكن الحصول عليها من قانون نيوتن الثاني في حالة الحركة الدورانية والذي ينص علي أن: معدل التغير في كمية

الحركة الزاوية (الدورانية) حول مركز الإسطوانة يساوي عزوم القوة المؤثرة علي الإسطوانة عند نفس النقطة

$$\frac{d}{dt}(I_C \dot{\phi}) = I_C \ddot{\phi} = Fa$$

حيث I_C هو عزم القصور الذاتي للإسطوانة عند مركزها وفي اتجاه عمودي علي مستوي الحركة, كما أن عزوم القوي موجبة لأنها في اتجاه الحركة الزاوية (اتجاه العجلة الزاوية $(\dot{\phi})$) والتي تصبح بالصورة

$$(3) \quad \frac{1}{2} m a^2 \ddot{\phi} = Fa \rightarrow \frac{1}{2} m a \ddot{\phi} = F$$

كذلك معادلة الحركة الدورانية لمركز الإسطوانة السفلي تعطي من: معدل التغير في كمية الحركة الزاوية (الدورانية) حول مركز الإسطوانة السفلي يساوي عزوم القوة المؤثرة علي الإسطوانة عند نفس النقطة

$$\frac{d}{dt}(I_{C'} \dot{\psi}) = I_{C'} \ddot{\psi} = Fa$$

حيث $I_{C'}$ هو عزم القصور الذاتي للإسطوانة عند مركزها وفي اتجاه عمودي علي مستوي الحركة, كما أن عزوم القوي موجبة لأنها في اتجاه الحركة الزاوية (اتجاه العجلة الزاوية $(\dot{\psi})$) والتي تصبح بالصورة

$$)4 \quad (\quad \frac{1}{2} m' a^2 \ddot{\psi} = Fa \rightarrow \frac{1}{2} m' a \ddot{\psi} = F$$

والأن لدينا اربع معادلات في خمسة مجاهيل وهي $(F, R, \theta, \phi, \psi)$ لذلك يلزمنا معادلة خامسة لحل هذا النظام والمعادلة الخامسة تأتي من سرعة التماس بين الإسطوانتين.

ثالثاً سرعة نقطة التماس

وشرط التدرج البحت (التدرج بدون انزلاق) هو أن سرعة نقطة التماس (B) كجزء من

الإسطوانة العليا يساوي سرعة نقطة التماس (B) كجزء من الإسطوانة السفلي: $\vec{v}_B = \vec{v}_c + \vec{v}_{Bc}$.

و حيث أن الإسطوانة العليا تتحرك انتقالية و دورانية و بذلك تعطي سرعة نقطة التماس (B) كجزء من الإسطوانة العليا بالصورة (سرعة مركز الثقل الإنتقالية – سرعة نقطة التماس الإنتقالية بالنسبة لمركز الثقل) أي أن $(b+a)\theta^{\bullet} - a\phi^{\bullet}$.

بينما سرعة نقطة التماس (B) كجزء من الأسطوانة السفلي الدورة يساوي $b\psi^{\bullet}$. وبذلك فإن

$$(5) \quad (b+a)\theta^{\bullet} - a\phi^{\bullet} = b\psi^{\bullet} \rightarrow (b+a)\theta^{\bullet} = a\phi^{\bullet} + b\psi^{\bullet}$$

بالتعويض من (3) , (4) في (5) عن $(a\phi^{\bullet}, a\psi^{\bullet})$ نحصل

$$(b+a)\theta^{\bullet} = a\phi^{\bullet} + b\psi^{\bullet} \rightarrow (b+a)\theta^{\bullet} = \frac{2}{m}F + \frac{2}{m'}F$$

$$(b+a)\theta^{\bullet} = 2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)F \rightarrow (b+a)\theta^{\bullet} = \frac{2}{mm'}(m+m')F$$

$$(6) \quad F = \frac{mm'}{2(m+m')} (b+a)\theta^{\bullet}$$

بالتعويض من (6) في (2) عن F نحصل علي

$$m(b+a)\theta^{\bullet} = mg \sin \theta - \frac{mm'}{2(m+m')} (b+a)\theta^{\bullet} \rightarrow \left(1 + \frac{m'}{2(m+m')}\right) (b+a)\theta^{\bullet} = g \sin \theta$$

$$\left(\frac{2(m+m') + m'}{2(m+m')}\right) (b+a)\theta^{\bullet} = g \sin \theta \rightarrow \left(\frac{2m+3m'}{2m+2m'}\right) (b+a)\theta^{\bullet} = g \sin \theta$$

$$(7) \quad (2m+3m')(b+a)\theta^{\bullet} = (2m+2m')g \sin \theta$$

وهو المطلوب الأول:

والمعادلة (7) يمكن كتابتها بالصورة

$$(b+a)\theta^{\bullet} = \left(\frac{2m+2m'}{2m+3m'}\right) g \sin \theta \rightarrow (b+a) \int \theta^{\bullet} \frac{d\theta^{\bullet}}{d\theta} = \left(\frac{2m+2m'}{2m+3m'}\right) \int g \sin \theta$$

$$\frac{(b+a)}{2} \theta^2 = - \left(\frac{2m+2m'}{2m+3m'} \right) g \cos\theta + c \quad (8)$$

ومن الشروط الابتدائية حيث بدأت الإسطوانة العليا الحركة من الصفر ومن وضع التماثل أي عندما $\theta = 0^\circ$ تكون $\theta = 0^\circ$ وبالتعويض في المعادلة (8) نحصل علي

$$(9) 0 = - \left(\frac{2m+2m'}{2m+3m'} \right) g \underbrace{\cos(0)}_{=1} + c \rightarrow c = \left(\frac{2m+2m'}{2m+3m'} \right) g$$

وبالتعويض في المعادلة (8) عن قيمة (c) نحصل علي

$$(10) (b+a) \theta^2 = 4g \left(\frac{m+m'}{2m+3m'} \right) (1 - \cos\theta)$$

وبالتعويض في المعادلة (1) من المعادلة (10) عن قيمة $(b+a)\theta^2$ نحصل علي

$$- 4mg \left(\frac{m+m'}{2m+3m'} \right) (1 - \cos\theta) = R - mg \cos\theta$$

$$R = mg \cos\theta - 4mg \left(\frac{m+m'}{2m+3m'} \right) (1 - \cos\theta)$$

$$R = \left(\frac{mg}{2m+3m'} \right) \left\{ (2m+3m') \cos\theta - 4(m+m')(1 - \cos\theta) \right\}$$

$$R = \left(\frac{mg}{2m+3m'} \right) \left\{ (2m+3m'+4m+4m') \cos\theta - 4(m+m') \right\}$$

$$R = \left(\frac{mg}{2m+3m'} \right) \left\{ (6m+7m') \cos\theta - 4(m+m') \right\} \quad (11)$$

وعندما تترك الإسطوانة العليا الإسطوانة السفلي يكون رد الفعل مساوياً للصفر (أي أن $R = 0$) نحصل 11 ومن المعادلة)

$$0 = \left(\frac{mg}{2m+3m'} \right) \left\{ (6m+7m') \cos\theta - 4(m+m') \right\}$$

و تعطي بذلك الزاوية التي تترك فيها الإسطوانة العليا الإسطوانة السفلي من $\cos\theta = \frac{4(m+m')}{6m+7m'}$