جامعة جنوب الوادى

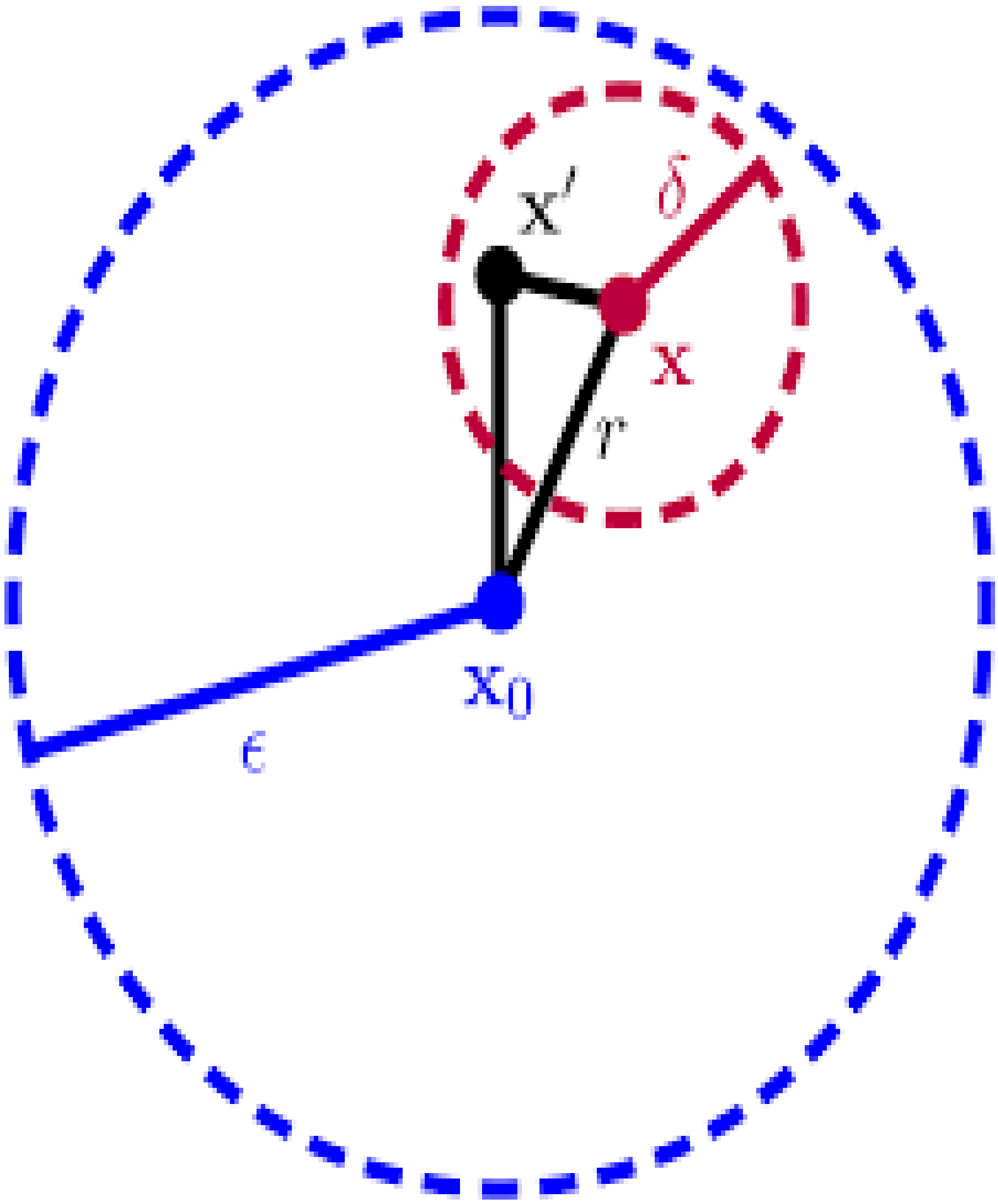
كلية التربية بالغردقة

الفرقة الرابعة عام رياضيات

المادة : (بحتة 13) (توبولوجى)

إستاذ المادة / د. محمد محمد عبد العزيز

الفصل الدراسى الأول 2023-2024



مقدمة في التوبولوجي

(١)

الفصل الأول

مقدمة في نظرية المجموعات

Introduction in Set Theory

مقدمة

يرجع الفضل في تقديم مفهوم نظرية المجموعات لعالم الرياضيات الألماني جورج كانتور (١٨٤٥-١٩١٨م)، فهو أول من عرض الموضوع بشكل علمي متطور. في عام ١٩٣٧م قام عالم الرياضيات هاوسدورف بوضع لغة هذه النظرية كما هي الآن في كتابه "نظرية المجموعات".

منذ ذلك الحين و نظرية المجموعات تستخدم في العديد من فروع المعرفة المختلفة مثل المنطق و علوم الحاسب. فقد نتج عن هذه التطبيقات أنواعاً جديدة من المجموعات مثل المجموعات المشوشة (Fuzzy Sets) التي عُرفت بواسطة عالم الرياضيات الأزري الأصل لطفي زادة (Lotfy Zadeh) وكذلك نظرية مجموعات الإستقراب (Rough Sets) وغيرها.

ونظراً لأهمية دور نظرية المجموعات في كافة مجالات الرياضيات بصفة عامة ومجال التوبولوجي بصفة خاصة، فسوف نتطرق لموضوع نظرية المجموعات و خواصها للتعرف على بعض المفاهيم التي قد نحتاج إليها في ثنايا فصول هذا الكتاب.

(١,١) المجموعات والعمليات عليها Sets and Set Operations

لتكن A مجموعة ما، يرمز للعنصر a الذي ينتمي للمجموعة A بالرمز $a \in A$، و يرمز للعنصر b الذي لا ينتمي للمجموعة A بالرمز $b \notin A$.

يقال للمجموعة A بأنها مجموعة جزئية من المجموعة B (و يعبر عن ذلك رياضيا $A \subseteq B$) إذا و إذا فقط كان كل عنصر في A هو عنصر في B أي أن :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall a \in A \Rightarrow a \in B)$$

تسمى المجموعة A مجموعة جزئية فعلية من المجموعة B إذا و فقط إذا كان $A \subseteq B$ و $A \neq B$ و يعبر عن ذلك رياضيا بالصيغة $A \subset B$. ونقول أن $A = B$ إذا و فقط إذا كان $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

من الواضح أن أي مجموعة A هي مجموعة جزئية من نفسها . أي أن $A \subseteq A$. ويمكن ايضاً القول أن $A \subseteq B$ إذا و إذا كان فقط كل عنصر لا ينتمي إلى B لا ينتمي إلى A . أي أن

$$. A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \notin B \Rightarrow x \notin A$$

المجموعة التي تحوي جميع عناصر عينة دراسية في أثناء دراسة معينه تسمى مجموعة كلية (شاملة) (Universal Set) و يرمز لها أحيانا بالرمز U أو X .

أما المجموعة التي لا تحوى أية عناصر تسمى المجموعة الخالية (Empty set) ويرمز لها بالرمز ϕ.

فإذا كانت A مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة X . مكملة المجموعة A بالنسبة للمجموعة الشاملة X و التي يرمز لها بالرمز A^c (أحيانا يرمز لها

بالرمز $X - A$ أو $X \setminus A$) هي مجموعة كل العناصر التي تنتمي إلى X ولا تنتمي إلى المجموعة A. أي أن:

$$A^C = \{x \in X \wedge x \notin A\}$$

إذا كانت A مجموعة غير خالية ،فإن المجموعة المكونة من جميع

المجموعات الجزئية من المجموعة A تسمى مجموعة قوى المجموعة A (power set) و يرمز لها بالرمز $P(A)$. أي أن :

$$P(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

فمثلاً إذا كانت $A = \{a,b,c\}$ فإن مجموعة القوى للمجموعة A هي:

$$P(A) = \{B : B \subseteq A\} = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, A\}$$

يلاحظ أنه لأي مجموعة منتهية تحتوي على عدد n من العناصر يكون عدد عناصر مجموعة المجموعات الجزئية هو 2^n ، فمثلاً إذا كانت $A = \{a,b,c\}$ فإن عدد عناصر المجموعة $P(A)$ هو $2^3 = 8$

بعد تعريف مجموعة المجموعات الجزئية. فإننا نلاحظ أن عناصر هذه

المجموعة هي مجموعات جزئية .لكى لا يحدث لبس بين مفهوم العنصر كعنصر ومفهوم المجموعة الجزئية كعنصر في مجموعة القوى، فسوف نستخدم تعبير تجمع أو عائلة من المجموعات الجزئية.

وهناك مفهوم آخر يسمى فضاء (Space) والذى سوف نستخدمه كثيراً في هذا الكتاب وهو عبارة عن مجموعة غير خالية تحقق أنواعاً مختلفة من التراكيب والخواص مثل الفضاء المتجه (Vector Space) والفضاء المتري

(Metric Space) والفضاء التوبولوجى (Topological Space) ... الخ. وفى هذه الحالة سوف نتعامل مع عناصر هذه الفضاءات كنقاط.

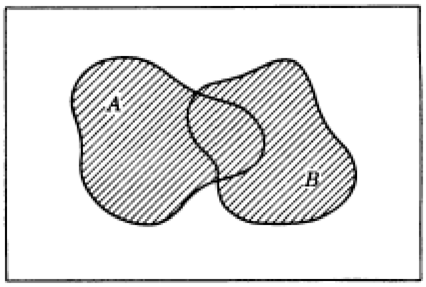
سوف نقدم الآن بعض العمليات الأساسية على المجموعات و التي من خلالها نستطيع إيجاد مجموعات أخرى جديدة من المجموعات المعلومة.

إذا كانت X مجموعة شاملة و $A, B \subseteq X$ فإن:-

١-اتحاد (Union) المجموعة A مع B هو المجموعة المكونة من كل عنصر $x \in X$ الذي ينتمي على الأقل إلى إحدى المجموعتين A أو B أو كليهما معاً، يرمز إلى اتحاد المجموعتين بالرمز $A \cup B$. أي أن

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$$

كما يعبر عن الاتحاد بأشكال فن كما في الشكل التالي



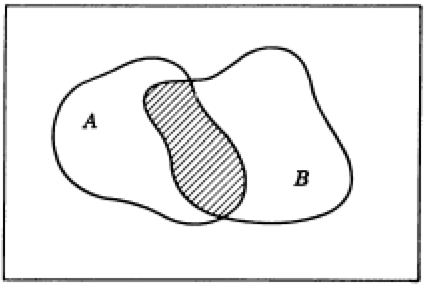
شكل(١,١)

٢- تقاطع (Intersection) المجموعة A مع B هو المجموعة المكونة من كل

عنصر $x \in X$ الذي ينتمي إلى كل من المجموعتين A و B، يرمز إلى تقاطع المجموعتين بالرمز $A \cap B$. أي أن

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$$

كما يعبر عن التقاطع بأشكال فن كما في الشكل التالي



شكل (١,٢)

لتكن A مجموعة غير خالية و لتكن I مجموعة ما بحيث إنه لكل عنصر i من I توجد مجموعة جزئية A_i من A.

عائلة المجموعات الجزئية A_i من A تسمى عائلة مجموعات جزئية مرقمة (Indexed family sets) و برمز لها بالرمز $\{A_i\}_{i\in I}$ و المجموعة I تسمى بمجموعة الدليل (Index set).

فإذا كانت $I = \{1,2,3,\ldots,n\}$ فإن الاتحاد و التقاطع لعائلة المجموعات المرقمة $\{A_i\}_{i\in I}$ يُعطى بالصيغة.

$$\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

$$\cap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots . \cap A_n$$

اما في حالة كون $\{A_i\}_{i\in I}$ عائلة اختيارية من المجموعات الجزئية المرقمة بمجموعة الدليل I فإن الاتحاد و التقاطع يعطي بالصيغة:

$$\underset{i\in I}{\cup} A_i = \{x : x\in A_i \;\; for \;\; at \;\; least \;\; one \;\; i\in I\}$$

$$\underset{i\in I}{\cap} A_i = \{x : x\in A_i \;\; for \;\; every \;\; i\in I\}$$

نظرية (١,١)

إذا كانت X مجموعة شاملة ، $A,B,C\subseteq X$، فإن :

(1) $A\cup B = B\cup A \;,\; A\cap B = B\cap A$ (الإبدال)

(2) $A\cup\phi = \phi\cup A = A \;,\; A\cap\phi = \phi\cap A = \phi$ (العنصر المحايد)

(3) $A\cup X = X\cup A = X \;,\; A\cap X = X\cap A = A$

(4) $A\subseteq A\cup B, \;\; B\subseteq A\cup B \;,\; A\cap B\subseteq A \;,\; A\cap B\subseteq B.$

(5) $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B = B \;,\; A\cap B = A$

(6) $A\cup(B\cap C) = A\cup B)\cap(A\cup C)$ (قانون التوزيع)
$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

(7) $A\cup A = A, \;\; A\cap A = A$ (اللانمو)

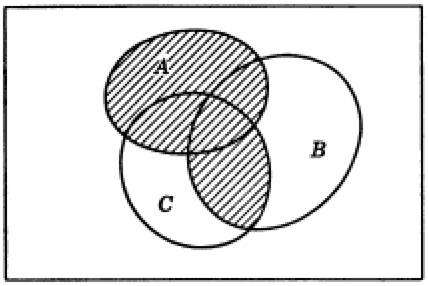
(8) $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$ (الدمج)

(9) $A\cap(B\cup A) = A$
$A\cup(B\cap A) = A$

البرهان

سوف نبرهن فقط الفقرة (6) و نترك الباقي لسهولته كتمرين.

$$A \cup (B \cap C) = \{x : x \in (A \cup (B \cap C))\}$$
$$= \{x : x \in A \vee x \in (B \cap C)\}$$
$$= \{x : x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\}$$
$$= \{x : (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\}$$
$$= \{x : x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)\}$$
$$= (A \cup B) \cap (A \cup C).$$



شكل (١،٣)

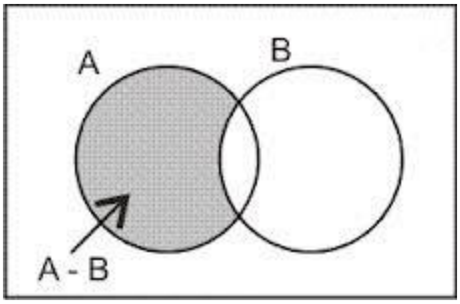
و بالمثل يمكن إثبات أن

$$\blacksquare.\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

٣-الفرق بين المجموعتين A, B هو المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A ولا تنتمي إلى المجموعة B و يرمز لها بالرمز $A - B$.

أي أن $A - B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$.

و يعبر عن الفرق بين مجموعتين بأشكال فن كما في الشكل:



شكل (١,٤)

نظرية (١,٢)

إذا كانت X مجموعة شاملة ، $A, B, C \subseteq X$ ، فإن :

(1) $A \neq B \Rightarrow A - B \neq B - A$

(2) $A - A = \phi$

(3) $A - \phi = A, \ \phi - A = \phi$

(4) $A - B \subseteq A$

(5) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(6) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) - C$

(7) $(B - C) \cap A = (A \cap B) \cap (B - C)$

(8) $(B \cup C) - A = (B - A) \cup (C - A)$

(9) $(B \cap C) - A = (B - A) \cap (C - A)$

البرهان

سوف نبرهن فقط الفقرتين (5)و (8) و نترك الباقي لسهولته.

إثبات رقم (5)

$$A-(B\cup C)=\{x: x\in A\wedge x\notin (B\cup C)\}$$

$$=\{x:(x\in A\wedge x\notin B)\wedge (x\in A\wedge x\notin C)\}$$

$$=\{x: x\in (A-B)\wedge x\in (A-C)\}$$

$$=(A-B)\cap (A-C).$$

و بالمثل يمكن إثبات أن

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup (A-C)$$

$$A-(B\cap C)=\{x: x\in A\wedge x\notin (B\cap C)\}$$

$$=\{x:(x\in A\wedge x\notin B)\vee (x\in A\wedge x\notin C)\}$$

$$=\{x: x\in (A-B)\vee x\in (A-C)\}$$

$$=(A-B)\cup (A-C)$$

إثبات رقم (8)

$$(B\cup C)-A=\{x: x\in (B\cup C)\wedge x\notin A\}$$

$$=\{x:(x\in B\vee x\in C)\wedge x\notin A\}$$

$$=\{x:(x\in B\wedge x\notin A)\vee (x\in C\wedge x\notin A)\}$$

$$=\{x: x\in (B-A)\vee x\in (C-A)\}$$

$$=\{x: x\in (B-A)\cup (C-A)\}$$

$$= (B - A) \cup (C - A)$$

وبالمثل يمكن إثبات أن $(B \cap C) - A = (B - A) \cap (C - A)$. ■

مثال (١,٢)

إذا كانت X مجموعة شاملة ، $A, B, C \subseteq X$، فإنه بصفة عامة:

(1) $\quad A \cup (B - C) \neq (A \cup B) - (A \cup C)$

(2) $\quad (B - C) \cup A \neq (B \cup A) - (C \cup A)$

(3) $\quad A - (B \cup C) \neq (A - B) \cup (A - C)$

لتوضيح عدم صحة العلاقة رقم (1) نضع المثال العكسي التالي:

$C = \{e\}$ $\qquad$ $, B = \{c, d\}$ $\qquad$ $, A = \{a, b\}$

$$A \cup (B - C) = \{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$$

$$A \cup B = \{a, b, c, d\}$$

$$A \cup C = \{a, b, e\}$$

$$(A \cup B) - (A \cup C) = \{c, d\}$$

لذا يتضح أن $A \cup (B - C) \neq (A \cup B) - (A \cup C)$.

البقية تترك للقارئ كتمرين.

نظرية (١,٣)

إذا كانت X مجموعة شاملة ، $A, B \subseteq X$ فإن:-

(1) $X^C = \phi, \quad \phi^C = X$

(2) $(A^C)^C = A$

(3) $A \cap A^C = \phi, \ A \cup A^C = X$

(4) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^C \subseteq A^C$

(5) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

(6) $A - B = A \cap B^C$

(7) $A - B = B^C - A^C$

البرهان

سوف نبرهن فقط الفقرات من (4) إلى (7) ونترك الباقي للقارئ لسهولته.

إثبات الفقرة رقم (4)

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \notin B \Rightarrow x \notin A)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in B^C \Rightarrow x \in A^C)$$

$$\Leftrightarrow B^C \subseteq A^C$$

إثبات الفقرة رقم (5)

$$(A\cup B)^C=\{x\in X : x\notin (A\cup B)\}$$

$$=\{x\in X : x\notin A\wedge x\notin B\}$$

$$=\{x\in X : x\in A^C\wedge x\in B^C\}$$

$$=\{x\in X : x\in (A^C\cap B^C)\}$$

$$=(A^C\cap B^C)$$

و بالمثل يمكن إثبات أن $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

إثبات الفقرة رقم (6)

$$A-B=\{x\in X : x\in A\wedge x\notin B)\}$$

$$=\{x\in X : x\in A\wedge x\in B^C\}$$

$$=\{x\in X : x\in (A\cap B^C)\}$$

$$=A\cap B^C$$

إثبات الفقرة رقم (7)

$$A-B=\{x\in X : x\in A\wedge x\notin B)\}$$

$$=\{x\in X : x\notin A^C\wedge x\notin B\}$$

$$=\{x\in X : x\notin A^C\wedge x\in B^C\}$$

$$=\{x\in X : x\in (B^C-A^C)\}$$

$$=B^C-A^C.\blacksquare$$

٤-الفرق التناظري بين المجموعتين A و B والذي يرمز له بالرمز $A\Delta B$ يعرف بالصيغة :

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A).$$

نظرية (١,٤)

إذا كانت X مجموعة شاملة ، $A,B,C\subseteq X$ ، فإن :

(1) $A\Delta\phi=A$

(2) $A\Delta A=\phi$

(3) $A\Delta B=B\Delta A$

(4) $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$

(5) $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

البرهان

(1) $A\Delta\phi=(A-\phi)\cup(\phi-A)=A$

(2) $A\Delta A=(A-A)\cup(A-A)=\phi\cup\phi=\phi$

(3) $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(B-A)\cup(A-B)=B\Delta A$

إثبات الفقرة رقم (4) تترك للقارئ كتمرين.

لإثبات الفقرة رقم (5) نتبع الخطوات التالية:

(5) $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

$$=(A\cap B^C)\cup(B\cap A^C)$$

$$=[(A\cap B^C)\cup B]\cap[(A\cap B^C)\cup A^C]$$

$$=[(A\cup B)\cap(B^C\cup B)]\cap[(A\cup A^C)\cap(B^C\cup A^C)]$$

$$=[(A\cup B)\cap X]\cap[X\cap(B^C\cup A^C)]$$

$$=(A\cup B)\cap(B^C\cup A^C)$$

$$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$$

$$=(A\cup B)-(A\cap B).\blacksquare$$

٥-**الضرب الديكارتي** للمجموعتين A,B و الذي يرمز له بالرمز $A\times B$ هو مجموعة كل الأزواج المرتبة (a,b)، حيث أن $a\in A$ و$b\in B$، يعرف رياضياً بالصيغة:

$$A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}$$

و يمكن تعريف الضرب الديكارتي على المجموعات $A_1,A_2,...,A_n$ بالصيغة:

$$\prod_{i=1}^{n}A_i=\{(a_1,a_2,...,a_n):a_i\in A_i\}$$

و ايضا

$$\prod_{i=1}^{\infty}A_i=\{(a_1,a_2,...,a_n,...):a_i\in A_i\}.$$

نظرية (١,٥)

إذا كانت X مجموعة شاملة ، $A,B,C\subseteq X$، فإن:

(1) $A\times\phi=\phi\times A=\phi$.

(2) $A\neq\phi\ ,\ B\neq\phi\Rightarrow A\times B=B\times A\Leftrightarrow A=B$

(3) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

(4) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

البرهان:

يترك للطالب. ■

(١,٢) العلاقات Relations

لتكن A و B مجموعتين. إذا كانت $R \subseteq A \times B$ فإن R تسمى علاقة ثنائية (Binary Relation) من A إلى B، و نكتب $(a,b) \in R$ أو aRb. لتعني أن العنصر a مرتبط بالعنصر b تحت تأثير العلاقة R. كما نكتب $(a,b) \notin R$ لتعني بذلك أن a غير مرتبط بالعنصر b وفق العلاقة R.

تعريف (١,١)
إذا كانت $R \subseteq A \times A$ علاقة ثنائية على المجموعة الغير خالية A فإن هذه العلاقة تسمى :-

(١) **علاقة عاكسة** (Reflexive) إذا كان $(a,a) \in R$ لكل $a \in A$.

(٢) **علاقة متماثلة** (Symmetric) إذا كان $(a,b) \in R$ فإن $(b,a) \in R$، لكل $(a,b) \in R$.

(٣) **علاقة متخالفة** (Anti-symmetric) إذا كان $(a,b) \in R$ و $(b,a) \in R$ فإن $a = b$ لكل $(a,b) \in R$.

(٤) **علاقة متعدية (ناقلة)** (Transitive) إذا كان $(a,b) \in R$ و $(b,c) \in R$ فإن $(a,c) \in R$ لكل $a,b,c \in A$.

(٥) **علاقة تكافؤ** (Equivalence relation) إذا كانت عاكسة و متماثلة وناقلة.

(٦) **علاقة ترتيب جزئي** (Partial order relation) على المجموعة A إذا

كانت عاكسة و متخالفة و متعدية. في هذه الحالة نكتب $a \le b$ بدلاً عن $(a,b) \in R$ أو aRb و نقول أن b أكبر من أو تساوي a أو أن العنصر b يلي العنصر a. في هذه الحالة يقال أن المجموعة A مجموعة مرتبة جزئياً و تكتب احياناً في الصورة $(A,\le)$.

مثال(١,٢)

لتكن $A = \{1,2,3,4,6,12\}$ ، و لتكن العلاقة "$\le$" معرفة بالصيغة:

$a \le b$ إذا و فقط إذا كان a يقسم b بدون باق

المجموعة $(A,\le)$ هي مجموعة مرتبة جزئياً.

مثال(١,٣)

إذا كانت A مجموعة تحتوي على الأقل عنصرين ،فإن مجموعة القوى $P(A)$ مرتبة جزئياً بالنسبة للعلاقة $\subseteq$.

تعريف (١,٢)

تسمى المجموعة المرتبة جزئياً $(A,\le)$ مجموعة مرتبة كلياً (Totally order) إذا كان لكل عنصرين $a,b \in A$ فإما $a \le b$ أو $b \le a$.

تعريف (١,٣)

لتكن $(A,\le)$ مجموعة مرتبة جزئياً . العنصر $a \in A$ يسمى :

(١) حداً علوياً للمجموعة الجزئية $B \subseteq A$ إذا كان $b \le a$ لكل $b \in B$.

(٢) حداً سفلياً للمجموعة الجزئية $B \subseteq A$ إذا كان $a \le b$ لكل $b \in B$.

المجموعة الجزئية $B \subseteq A$ تسمى محدودة من أعلى إذا كان لها حد علوي و تسمى محدودة من أسفل إذا كان لها حد سفلي. و يقال أنها محدودة متى كانت

محدودة من أعلى و من أسفل.

لكن قد يكون للمجموعة الجزئية $A \subseteq B$ عدد لا نهائي من الحدود العليا و أصغر هذه الحدود (إن وجد) يسمى أصغر حد علوي للمجموعة B . و بالمثل قد يكون للمجموعة عدد لا نهائي من الحدود السفلى و أكبر هذه الحدود يسمى أكبر حد سفلي للمجموعة B.

تعريف (١,٤)

لتكن $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً . العنصر $a_0 \in A$ يسمى أصغر حد علوي للمجموعة الجزئية $B \subseteq A$ إذا كان

(١) العنصر a_0 حداً علوياً للمجموعة B . أي أن $b \leq a_0$ لكل $b \in B$.

(٢) لا يوجد حد علوي آخر أصغر من a_0 للمجموعة الجزئية B . اي أنه إذا كان d حداً علوياً للمجموعة B فإن $a_0 \leq d$.

يرمز لأصغر حد علوي بالرمز $a_0 = \sup B$.

تعريف (١,٥)

لتكن $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً . العنصر $b_0 \in A$ يسمى أكبر حد سفلي للمجموعة الجزئية $B \subseteq A$ إذا كان

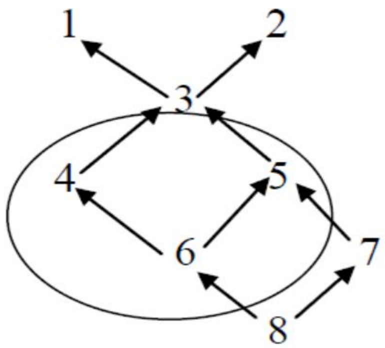
(١) العنصر b_0 حداً سفلياً للمجموعة B . أي أن $b_0 \leq b$ لكل $b \in B$.

(٢) لا يوجد حد سفلي آخر أكبر من b_0 للمجموعة الجزئية B . اي أنه إذا كان c حد سفلي للمجموعة B فإن $c \leq b_0$.

يرمز لأكبر حد سفلي للمجموعة B بالرمز $b_0 = \inf\ B$.

مثال (١,٤)

لتكن $A = \{1,2,...,7,8\}$ مجموعة مرتبة كما في الشكل التالي:



شكل (١,٥)

(١) اوجد مجموعة الحدود العليا للمجموعة الجزئية $B = \{4,5,6\}$.

(٢) اوجد مجموعة الحدود السفلى للمجموعة الجزئية $B = \{4,5,6\}$.

(٣) اوجد كل من $\sup B$ و $\inf\ B$.

الحل

(١) مجموعة الحدود العليا للمجموعة $B = \{4,5,6\}$ هي المجموعة $\{1,2,3\}$.

(٢) مجموعة الحدود السفلى للمجموعة $B = \{4,5,6\}$ هي المجموعة $\{6,8\}$.

(٣) $\sup\ B = 3$ و $\inf\ B = 6$.

فيما سبق كان كل من الحد العلوي و السفلي ليس من الضروري أن يكونا من ضمن عناصر المجموعة الجزئية $B \subseteq A$. ففي حالة كون أصغر حد علوي أو أكبر حد سفلى للمجموعة الجزئية B ينتمي لنفس المجموعة فهذا يقودنا لتعريف المفهومين التاليين:

تعريف (١,٦)

لتكن $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً و $A \subseteq B$.

(١) العنصر $B \ni M$ يسمى قيمة عظمى (max) للمجموعة الجزئية $A \subseteq B$ إذا كان M حداً علوياً للمجموعة B.

(٢) العنصر $B \ni m$ يسمى قيمة صغرى (min) للمجموعة الجزئية $A \subseteq B$ إذا كان m حداً سفلياً للمجموعة B.

نظرية (١,٦)

إذا وجدت القيمة العظمى (الصغرى) للمجموعة B فإن القيمة العظمى (الصغرى) هي أصغر حد علوي (أكبر حد سفلي) لهذه المجموعة.

البرهان

لتكن M هي القيمة العظمى للمجموعة B . فإن M هي حد علوي للمجموعة B (من التعريف).فإذا كان N حداً علوياً لهذه المجموعة فإن $M \leq N$ و ذلك لأن $B \ni M$ و بالتالي يكون M هو أصغر حد علوي للمجموعة B.
بالمثل يمكن إثبات أن القيمة الصغرى للمجموعة B هي أكبر حد سفلي لهذه المجموعة.■

تمهيدة زورن (١,١) (Zorn's Lemma)

بفرض أن $(A,\leq)$ مجموعة غير خالية و مرتبه جزئياً وبفرض أن كل مجموعة جزئية من A ومرتبه كليا محدودة من أعلى فإن المجموعة $(A,\leq)$ تحتوي على أصغر حد علوي.

تعريف (١,٧)

المجموعة المرتبة جزئيا $(A,\le)$ والتي يكون لأي عنصرين $a,b\in A$ يوجد $\inf\{a,b\}=a\wedge b$ و $\sup\{a,b\}=a\vee b$ تسمى شبكة (Lattice) ويرمز لها بالرمز $(A,\le,\wedge,\vee)$.

مثال (١,٥)

لتكن X مجموعة تحتوي على الأقل عنصرين. المجموعة المرتبة جزئياً $(P(X),\subseteq)$ تشكل شبكة تسمى شبكة المجموعات الجزئية حيث أنه لكل $A,B\in P(X)$، فإن $\sup\{A,B\}=A\cup B$ و $\inf\{A,B\}=A\cap B$.

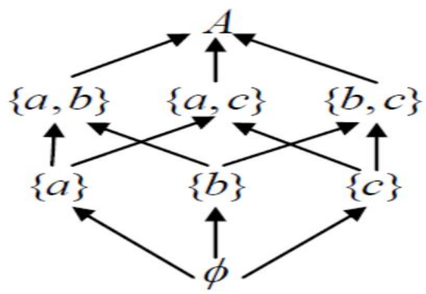
تعريف (١,٨)

الشبكة $(A,\le,\vee,\wedge)$ تسمى شبكة تامة (Complete lattice) إذا كان لأي مجموعة جزئية $B\subseteq A$ يوجد $\inf B$ و $\sup B$.

مثال (١,٦)

شبكة المجموعات الجزئية لمجموعة ما ولتكن $A\ne\phi$ هي شبكة تامة فيها العنصر الأصغر هو المجموعة الخالية ϕ و العنصر الأكبر هو المجموعة A.

فمثلاً لو كانت $A=\{a,b,c\}$ ، فإن الشبكة $(P(A),\subseteq)$ تمثيل بالشكل التالي:



شكل (١,٦)

تعريف (١,٩)

لتكن $(A,\leq,\vee,\wedge)$ شبكة. المجموعة الجزئية $B\subseteq A$ تسمى شبكة جزئية من $(A,\leq,\vee,\wedge)$ إذا كان لكل $x,y\in B$ فإن $x\wedge y\in B$ و $x\vee y\in B$.

(١,٣) الدوال Mappings

الدوال (أو الرواسم) من أهم المفاهيم الرياضية وأوسعها انتشارا وأكثرها أهمية . ففي كل فرع من فروع الرياضيات تجد أن للدوال دوراً هاماً مؤثراً ، فقد تجد الدوال في التحليل الرياضي والجبر والهندسة و التوبولوجي وغير ذلك.

تعريف (١,١٠)

لتكن كل من A و B مجموعة. العلاقة $f\subseteq A\times B$ تسمى دالة (راسم أو تطبيق) من A إلى B و يرمز له بالرمز $f:A\to B$ إذا و فقط إذا كان لكل عنصر $a\in A$ يوجد عنصر وحيد $b\in B$ بحيث يكون $(a,b)\in f$ و تكتب بالشكل $f(a)=b$.

مثال (١,٧)

إذا كانت $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{x,y,z,w\}$ فإن العلاقة المعرفة في الصورة

$$f=\{(a,y),(b,x),(c,y),(d,w)\}\subset A\times B$$

هي دالة (أو راسم) ومدى هذه الدالة هو المجموعة $f(A)=\{x,y,w\}$. أما العلاقة $g=f\cup\{(a,x)\}\subset A\times B$ ليست دالة (وضح لماذا؟) .

إذا كان $f:A\to B$ فإن $b=f(a)$ هي صورة العنصر $a\in A$ وإذا كانت $A_1\subset A$ فإن صورة المجموعة A_1 تعطى بالعلاقة التالية :

$$f(A_1)=\{b\in B: b=f(a)\wedge a\in A_1\}$$

هذا بالنسبة للدالة $f:A\to B$ ولكنه عندما نستخدم الرمز f^{-1} للدلالة على العلاقة العكسية للعلاقة f (أي أن $f^{-1}:B\to A$). ففى هذه الحالة نعرف ما يسمى بالصورة العكسية وذلك وفقا للتعريف التالي :

تعريف (١,١١)

إذا كان $f:A\to B$ راسماً وكانت $B_1\subseteq B$ فإن المجموعة $f^{-1}(B_1)$ تسمى الصورة العكسية للمجموعة B_1 ويعبر عنها كما يلي :

$$f^{-1}(B_1)=\{x\in A: f(x)\in B_1\}$$

فمثلاً إذا كانت $B_1=\{y\}$ أي مكونه من عنصر واحد فقط ، فإننا نكتب

$$f^{-1}(\{y\})=\{x\in A: y=f(x)\}$$

وتسمى الصورة العكسية للعنصر y.

مثال (١,٨)

إذا كانت $A=\{1,2,3,4,5\}$ وكان $f:A\to A$ راسما معرفاً بالصيغة

$$f=\{(1,4),(2,1),(3,4),(4,2),(5,4)\}$$

فإن:

- $f(\{1,3,5\}) = \{4\}$
- $f^{-1}(\{2,3,4\}) = \{1,3,4,5\}$
- $f^{-1}(\{3,5\}) = \phi$

.

نظرية (١,٧)

إذا كان $f : A \to B$ راسماً وكانت $A_1, A_2 \subseteq A$ و $B_1, B_2 \subseteq B$ فإن:

$(i)\quad A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2);$

$(ii)\quad f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2);$

$(iii)\quad f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2);$

$(iv)\quad f(A_1 - A_2) \supseteq f(A_1) - f(A_2);$

$(v)\quad f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2);$

$(vi)\quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2);$

$(vii)\quad f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2);$

$(viii)\quad B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2);$

البرهان

قبل الشروع في خطوات البرهان علينا أن نضع في حسابنا أن العلاقة العكسية f^{-1} ليس بالضرورة أن تكون راسماً من B إلى A.

أولا : لإثبات (i)

لنفرض أن $A_1 \subseteq A_2$

$$f(A_1) = \{b \in B : b = f(a) : a \in A_1\} \subseteq \{b \in B : b = f(a) : a \in A_2\} = f(A_2)$$

وهذا يعني أن : $f(A_1) \subseteq f(A_2)$

ثانيا : المطلوب إثبات أن

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

نفرض أن $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ فإن هذا يؤدى إلى أن

$$y \in f(A_1) \cup f(A_2) \Rightarrow y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2),$$

ومن ناحية أخرى نفرض أن $y \in f(A_1 \cup A_2)$; فإن

$$y \in f(A_1 \cup A_2) \Rightarrow \exists x \in (A_1 \cup A_2) : f(x) = y$$

$$\Rightarrow \exists x \in A_1 \vee x \in A_2 : f(x) = y$$

$$\Rightarrow \exists x \in (A_1 \cup A_2) : f(x) = y$$

$$\Rightarrow y = f(x) \in f(A_1 \cup A_2),$$

$$\Rightarrow y \in f(A_1 \cup A_2),$$

$$\Rightarrow f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2) \qquad (1)$$

ومن ناحية أخرى نفرض أن $y \in f(A_1 \cup A_2)$; فإن

$$y \in f(A_1 \cup A_2) \Rightarrow \exists x \in (A_1 \cup A_2): f(x) = y$$

$$\Rightarrow x \in A_1 \ or \ \ x \in A_2 : f(x) = y$$

$$\Rightarrow y = f(x) \in f(A_1) \ or \ \ y = f(x) \in f(A_2),$$

$$\Rightarrow y = f(x) \in f(A_1) \cup f(A_2),$$

$$\Rightarrow f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2) \qquad (2)$$

ومن (1) ,(2) نستنتج أن :

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2);$$

ثالثا : $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2);$

$$\forall y \in f(A_1 \cap A_2) : \exists x \in (A_1 \cap A_2): f(x) = y,$$

$$\Rightarrow x \in A_1 \wedge x \in A_2 : f(x) = y;$$

$$\Rightarrow f(x) \in f(A_1) \wedge f(x) \in f(A_2): f(x) = y;$$

$$\Rightarrow y = f(x) \in [f(A_1) \cap f(A_2)];$$

$$\Rightarrow f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2).$$

رابعاً : إثبات أن $f(A_1 - A_2) \supseteq f(A_1) - f(A_2)$

نفرض أن b عنصر ينتمي للطرف الأيمن أى أن :

$$b \in f(A_1) - f(A_2) \Rightarrow b \in f(A_1) \wedge b \notin f(A_2);$$

$$\Rightarrow \exists a \in A_1 \wedge a \notin A_2 : f(a) = b;$$

$$\Rightarrow a \in (A_1 - A_2): f(a) = b;$$

$$\Rightarrow b = f(a) \in f(A_1 - A_2);$$

$$\Rightarrow f(A_1) - f(A_2) \subseteq f(A_1 - A_2).$$

خامساً : إثبات أن $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$

نفرض أن $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ ، فإن هذا يقتضي أن $f(x) \in (B_1 \cup B_2);$

$$\Rightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2;$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2);$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2);$$

$$\Rightarrow f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subseteq f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2); \qquad (1)$$

مــن ناحيــة ثانيــة نفــرض أن $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ ، فــإن هــذا يقتضـــي أن $x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2)$ و من ثم:

$$\Rightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2;$$

$$\Rightarrow f(x) \in (B_1 \cup B_2);$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2);$$

$$\Rightarrow f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \subseteq f^{-1}(B_1 \cup B_2); \qquad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

سادساً : يترك كتمرين للقارئ.

سابعاً : $f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2).$

$$x \in f^{-1}(B_1 - B_2) \Rightarrow f(x) \in (B_1 - B_2);.$$

$$\Rightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \notin B_2;$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \notin f^{-1}(B_2);$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2);$$

$$\Rightarrow f^{-1}(B_1 - B_2) \subseteq f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2). \qquad (3)$$

$$x \in f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2) \Rightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \notin f^{-1}(B_2);$$
$$\Rightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \notin B_2;$$
$$\Rightarrow f(x) \in (B_1 - B_2);$$
$$\Rightarrow f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2) \subseteq f^{-1}(B_1 - B_2). \qquad (4)$$

من (3) و (4) نستنتج أن :

$$f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2).$$

ثامنا: يترك اثبات هذه الفقرة كتمرين للقارئ.■

فيما يلي سنضع مثلاً لتوضيح عدم صحة الفقرات التالية:

(1) $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2);$

(2) $f(A_1 - A_2) \neq f(A_1) - f(A_2);$.

مثال(١,٩)

نفرض أن $f : A \longrightarrow B$ دالة معرفة بالعلاقة

$f = \{(a,1),(b,2),(c,1),(d,2)\}$ ،

حيث أن $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{1,2,3,4\}$. بفرض أن $A_1 = \{a,b\}$ و $A_2 = \{c,d\}$. بما أن $A_1 \cap A_2 = \phi$ فإن $f(A_1 \cap A_2) = \phi$

و بما أن $f(A_2) = \{1,2\}$, $f(A_1) = \{1,2\}$ فإن $f(A_1) \cap f(A_2) = \{1,2\}$ و

من ثم يكون $f(A_1) \cap f(A_2) \neq f(A_1 \cap A_2)$.

بالنسبة للفقرة الثانية، نتبع الآتي:

$$f(A_1) - f(A_2) \neq f(A_1 - A_2)$$

$$A_1 - A_2 = \{a,b\} \Rightarrow f(A_1 - A_2) = \{1,2\}$$
$$f(A_1) - f(A_2) = \{1,2\} - \{1,2\} = \phi$$
$$\therefore\ f(A_1) - f(A_2) \neq f(A_1 - A_2)$$

تعريف (١,١٢)

بفرض أن $f: A \to B$ راسم من المجموعة الغير خالية A إلى المجموعة الغير خالية B . إذا كانت $D \subseteq A$ ، فإن الدالة $g: D \to B$ والمعرفة بالصيغة $g(x) = f(x)$ لكل $x \in D$ تسمى تقييد أو قصر (restriction) الدالة على D وعادة تعطي في الصيغة $f|_D$.

مثال (١,١٠)

بفرض أن R مجموعه الاعداد الحقيقية ، و أن $D = \{x \in R : x \geq 0\}$. نفرض الدالة $f: R \to R$ معرفة بالصيغة $f(x) = x^2$ و الدالة $g: D \to R$ معرفة بالصيغة $g(x) = x^2$. فإن $f|_D = g$.

تعريف (١,١٣)

بفرض أن A, B مجموعتين غير خاليتين ،فإن الراسم $f: A \to B$ يسمى:

(١) راسم متباين (Injective) إذا تحقق شرط من الشرطين المتكافئين

$$(i)\ \ \forall x_1, x_2 \in A,\ \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\ .$$

$$(ii)\ \ \forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

(٢) راسم (غامر - شامل) (Surjective) إذا كان $f(A) = B$.

(٣) راسم تقابل (Bijective) إذا كان متباينا وغامراً.

مثال (١,١١)

ليكن $f:R\to R$ راسماً معرفاً بالصيغة $f(x)=x^2$:

(أ) هل f راسم متباين ولماذا ؟.

(ب) هل f راسم غامر ولماذا ؟.

(ج) هل f راسم تقابل ولماذا ؟.

(د) أوجد مدى الراسم f .

الحل

(أ) الراسم f ليس راسما متبايناً لأن $f(1)=f(-1)$ في حين أن $1\neq -1$.

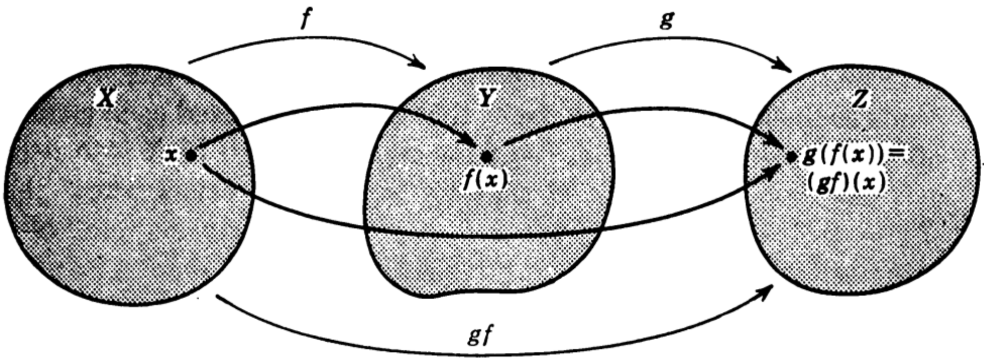
(ب) الراسم f ليس غامراً لأن $f(x)=x^2\geq 0$ ومن ثم فإن جميع العناصر السالبة فى النطاق المصاحب ليست صوراً لعناصر من النطاق. فمثلاً لا يوجد عنصر $x\in R$ بحيث أن $f(x)=-1$.

(ج) الراسم f ليس راسم تقابل وذلك لعدم تحقق شروط التباين و الغمر.

(د) بالنسبة لمدي الراسم فيمكن الحصول عليه كما يلي:

$$\begin{aligned} f(R) &= \{y\in R : y=f(x)=x^2,\ x\in R\} \\ &= \{y\in R : y\geq 0\}=R^{+}\cup\{0\}. \end{aligned}$$

كما رأينا من خلال دراستنا للعلاقات أن هناك تركيباً لعلاقتين أو أكثر ونظراً لكون الرواسم نوعاً من العلاقات فإننا نستطيع بسهوله تعريف التركيب (التحصيل) لراسمين أو أكثر. فمثلا إذا كان $f:X\to Y$ و $g:Y\to Z$ راسمين فإن الراسم $h:X\to Z$ هو تحصيل الراسمين f و g ويرمز له بالرمز $h=g\circ f:X\to Z$ حيث أن $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))\in Z$



شكل (١,٧)

مثال (١,١٢)

إذا كان $R \xrightarrow{g} R \xrightarrow{f} R$ راسمين حيث أن:

$g(x) = x-1$ و $f(x) = x^2+1$

فأوجد :

(أ) تعريفاً لكل من الراسمين $g \circ f$ و $f \circ g$

(ب) بين أن. $f \circ g \neq g \circ f$

(ج) أوجد f^2 و g^2 ومن ثم $f^2(-1)$ و $g^2(-1)$

الحل

(أ) وفق تعريف f

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = (x^2+1)-1 = x^2$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)^2+1 = x^2-2x+2$$

لذ فإن أن $f \circ g \neq g \circ f$ أي أن تركيب الرواسم ليس إبداليا فى الحالة العامة.

(ب) باستخدام تعريف $g \circ f$ نحصل على أن :

$$g \circ f(2) = g(4+1) = g(5) = 4$$

باستخدام تعريف $f \circ g$ نحصل على أن $f \circ g(2) = f(2-1) = f(1) = 2$

وهكذا نجد أن $f \circ g(2) \neq g \circ f(2)$

(ج) باستخدام تعريف $f^2 = f \circ f$ و $g^2 = g \circ g$ يمكن إكمال الحل .

تعريف (١,١٤)

إذا كان $f : A \to A$ راسماً حيث $f(x) = x$ فإن هذا الراسم يسمى المحايد أو الراسم المطابق (identity function) ويرمز له بالرمز $I_A : A \to A$ ، حيث أن $I_A \circ f = f \circ I_A = f$

مثال (١,١٣)

إذا كان $f : R \longrightarrow R$ راسم (تطبيق) معرفاً كما يلي:

$$f(x) = 3x + 6, \quad \forall x \in R$$

بين أن هذا الراسم تقابل؟.

الحل

نفرض أن $f(a) = f(b)$ ، فإن

$$f(a) = f(b) \Rightarrow 3a + 6 = 3b + 6 \Rightarrow a = b$$

إذاً الراسم أحادي (تباين)

$$f(a) = y = 3a + 6 \Rightarrow a = \frac{y-6}{3}$$

$$\therefore a = f^{-1}(y) = \frac{y-6}{3}$$

و حيث أن المقدار $\frac{y-6}{3}$ دائماً عدد حقيقي أي أن $\frac{y-6}{3} \in R$ لكل $y \in R$. إذاً الراسم غامر و على ذلك فإن f تقابل.

نظرية (١,٨)

إذا كان $f: A \to B$ تقابلا فإن f^{-1} هو الآخر تقابل من B إلى A كما أن :

(أ) $f^{-1} \circ f = I_A$

(ب) $f \circ f^{-1} = I_B$

(ج) إذا كانت $A = B$ فإن $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_A$

البرهان

نفرض أن $f: A \to B$ راسم تقابل فإن كل عنصر من عناصر B هو صورة لعنصر وحيد من عناصر A . (ويكون $f(A) = B$) وهذا يقتضي بالضرورة أن تكون الصورة العكسية لكل عنصر من عناصر B مكونة من عنصر وحيد من عناصر A أي أنه :

$$\forall b \in B : \exists\, a \in A : a = f^{-1}(b)$$

وهذا يعني أن $f^{-1}: B \to A$ راسم.

نفرض أن b_1 و b_2 صورتين للعنصرين a_1 , a_2 على الترتيب وفق الراسم f فإنه يكون :

$$\begin{aligned} f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2) &\Leftrightarrow a_1 = a_2 \\ &\Leftrightarrow f(a_1) = f(a_2) \\ &\Leftrightarrow b_1 = b_2 \end{aligned}$$

أى أن الراسم f^{-1} متباين .

ولما كان $f^{-1}(B) = A$ فإن الراسم f^{-1} يكون غامراً (فوقياً) ولذا نستطيع القول بأن الراسم f^{-1} تقابل من B إلى A :

لتكن $b=f(a)$ $f^{-1}(b)=a \Leftrightarrow$ فإن

(أ) $\forall a \in A: f^{-1}\circ f(a)=f^{-1}(f(a))=f^{-1}(b)=a=I_A(a)$

$\therefore f^{-1}\circ f=I_A$

(ب) $\forall b \in B: f\circ f^{-1}(b)=f(f^{-1}(b))=f(a)=b=I_B(b)$

$\therefore f\circ f^{-1}=I_B$

(ج) يترك للطالب لسهولته.■

نظرية (١,٩)

إذا كان $f:A\to B$ و $g:B\to C$ راسمين فإنه :

(أ) إذا كان كل من g و f راسم متباين فإن التركيب $g\circ f$ يكون راسم متباين (أحادى).

(ب) إذا كان كل من g و f راسم غامر (فوقي) فإن التركيب $g\circ f$ يكون راسم غامر (فوقي).

(ج) إذا كان كل من g و f راسم تقابل فإن التركيب $g\circ f$

(د) يكون تقابل وفى هذه الحالة يكون $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

البرهان

(أ) نفرض أن كل من الراسمين $f:A\to B$ و $g:B\to C$ متباين (أحادي)

ونفرض أن $(g\circ f)(x)=(g\circ f)(y)$ فيكون لدينا

$g(f(x))=g(f((y))$ ولما كان الراسم g متبايناً فإن $f(x)=f(y)$

ولكن الراسم f هو أيضاً متبايناً فإن ذلك يؤدى إلى أن $x=y$ ومن ثم فإن الراسم $g\circ f$ متباين (أحادي) .

(ب) نفرض أن كل من الراسمين $f : A \to B$ و $g : B \to C$ راسم فوقي فإن

ذلك يعني أن $g(B) = C$ و $f(A) = B$ ومن ثم نستنتج أن

$$g \circ f(A) = g(f(A)) = g(B) = C$$

أي ان الراسم المحصل $g \circ f$ غامر (فوقى) .

(ج) من (أ) و (ب) السابقين نستطيع إثبات أن $g \circ f$ يكون تقابل عندما يكـون

كل من الراسمين f و g تقابلا.

وبما أن :

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ I_B \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} = I_C\end{aligned}$$

وبالمثل فإن :

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = I_A$$

وهذا معناه أن معكوس الراسم $(g \circ f)$ هو $f^{-1} \circ g^{-1}$ أى أن :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \blacksquare$$

تمارين عامة على الفصل الأول

(١) إذا كانت X مجموعة شاملة ، $A,B,C\subseteq X$. ضع مثال توضح فيه أن :

$(i)\ A-(B\cup C)\neq(A-B)\cup(A-C)$

$(ii)\ (B-C)\cup A\neq(B\cup A)-(C\cup A)$

(٢) بفرض أن I مجموعة أدلة وأن $\{A_i\}_{i\in I}$ عائلة من المجموعات الجزئية من المجموعة الغير خالية. لأي مجموعة جزئية B من X برهن أنه:

- إذا كانت $A_i\subseteq B$ لكل $i\in I$ فإن $\bigcup\limits_{i\in I}A_i\subseteq B$.
- إذا كانت $B\subseteq A_i$ لكل $i\in I$ فإن $B\subseteq\bigcap\limits_{i\in I}A_i$.
- $\bigcup\limits_{i\in I}A_i=\phi$ إذا وفقط إذا كان $A_i=\phi$ لكل $i\in I$.

(٣) إذا كانت X مجموعة شاملة ، $A,B,C\subseteq X$، برهن أن :

$(i)\ A\times\phi=\phi\times A=\phi$

$(ii)\ A\neq\phi\ ,\ B\neq\phi,\ A\times B=B\times A\Leftrightarrow A=B$

$(iii)\ A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

$(iv)\ A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

$(v)\ A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$

(٤) بفرض المجموعتين $B=\{a,b,c,d,e\}$ و $A=\{1,2,3,4,5\}$.

بين أي من العلاقات الآتية تكون راسماً وحدد مجموعة تعريفها ومداها ، وأذكر سبباً واحداً على الأقل فى حالة كون العلاقة ليست راسماً.

(i) R = {(1, e), (2, d), (3, c), (4, b), (5, a)}

(ii) R = {(1, e), (2, e), (3, e), (4, b), (5, b)}

(iii) R = {(2, c), (3, d), (4, d), (5, e)}

(iv) R = {(1, d), (2, c), (3, e), (4, a), (2, b)}

(v) R = {(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3), (e, 3)}

(vi) R = (a, 1), (c, 3), (d, 4), (d, 5)}

(٥) بفرض أن $f:[0,1]\rightarrow[a,b]$ دالة معرفة بالصيغة

$$f(x)=(b-a)x+a$$

حيث أن a و b أعداد حقيقية و $a\neq b$. برهن أن الدالة f هي دالة تقابل. ثم اوجد صيغة الدالة العكسية f^{-1}.

(٦) بفرض أن $f:X\rightarrow Y$ دالة من المجموعة X إلى المجموعة Y.فإذا كانت $A\subset X$ و $B\subset Y$:

- فبرهن أن:

(i) $A\subseteq f^{-1}(f(A))$;

(ii) $f(f^{-1}(B))\subseteq B.$

- ضع مثال بحيث يكون فيه الاحتواء في $(i),(ii)$ احتواءً فعلياً.

(٧) بفرض أن $f:A\rightarrow B$ تقابل . فإذا كانت $A=B$ فبرهن أن :

$$f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=I_A$$

(٨) ليكن $R\xrightarrow{f}R\xrightarrow{g}R$ راسمان كل منهما معرف كالآتي

$f(x)=x^2-2$ و $g(x)=2x+1$ اوجد تعريف كل من $f\circ g$ و $g\circ f$ ثم بين أن عملية تحصيل الرواسم (التطبيقات) ليست إبدالية.

الفصل الثاني

الفضاءات المترية

Metric Spaces

مقدمة

يلعب مفهوم الدوال المتصلة continuous functions دوراً بارزاً في فروع الرياضيات المختلفة. ففي بداية دراستنا للتحليل الحقيقي تعرضنا لمفهوم الدالة المتصلة حيث عرفنا أن الدالة $f : A \to R$ حيث أن $A \subset R$ ، تكون متصلة عند النقطة $x_0 \in A$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أنه $\forall x \in A$ فإن:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

ويقال أن هذه الدالة تكون متصلة على A إذا كانت متصلة عند جميع النقاط $x \in A$.

ففي هذه الحالة فإن القيمة المطلقة $|x - x_0|$ ما هي إلا مسافة بين عددين حقيقيين أو مركبين ومن ثم فإن الاتصال يتحقق متى نقلت نقاط متقاربة في مجال الدالة، إلى نقاط متقاربة أخرى في المجال المقابل للدالة. ولتعميم مفهوم "ε-δ" الشهير لاتصال الدوال إلى تعريف آخر يصف سلوك الدالة بالنسبة إلى مجموعات جزئية كل منها تسمى جوار أو بالنسبة إلى مجموعات مفتوحة.

ونظراً لأهمية الفضاء المتري فقد حظي بإهتمام العديد من العلماء والباحثين منذ أن تم تعريفه حتى يومنا هذا ، ومن خلال بحوث العلماء على الفضاء المتري وتطبيقاته المختلفة ظهرت صور عديدة ومختلفة من الفضاءات المترية الجديدة

مثل : الفضاء شبه المتري (quasi-metric space) ، الفضاء المتري الجزئي (partial metric space) الذي تم تعريفه من قبل باحثي علوم الحاسب النظرية ،الفضاء المتري المخروطي (cone metric space) . ومع ظهور نظرية المجموعات المشوشة (الضبابية) تم تعريف الفضاء المتري المشوش (fuzzy metric space) ...و هناك العديد من أنواع الفضاءات المترية الأخرى التي تذخر بها الدوريات و المراجع العلمية الحديثة والتي لا يتسع المقام لذكرها.

في هذا الفصل، سوف نتعرض لتعريف و دراسة الفضاء المتري مع تعريف كل من المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة و الدوال المتصلة حتى يتمكن الدارس من فهم و استيعاب مفاهيم قد تكون جديدة عليه مثل مفهوم الكرة المفتوحة والمجموعة المفتوحة والمجموعة المغلقة وجوار النقطة والدوال المتصلة . هذه المفاهيم سوف ندرسها ضمن الفضاء المتري في ظل وجود دالة المسافة التي تلعب دوراً مهما في تعريف هذه المفاهيم ومن ثم تصبح هذه المفاهيم معروفة لنا عندما نتعرض لها في الفصول التالية من هذا الكتاب.

(٢,١) الفضاء المتري Metric Space

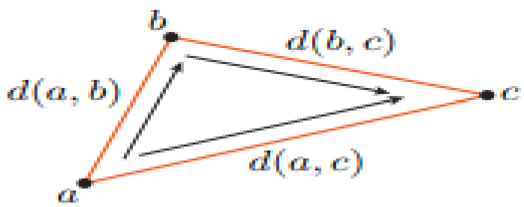
فيما يلي سوف نقدم تعريف دالة المسافة وشروطها والفضاء المتري بالإضافة لبعض من الأمثلة التوضيحية لعدد من الفضاءات المترية.

تعريف (٢,١)

بفرض أن X مجموعة غير خالية وأن $d:X\times X\to R$ دالة حقيقية من $X\times X$ الى مجموعة الأعداد الحقيقية R وتحقق لكل $x,y,z\in X$ الشروط التالية:

$$(M_1)\ d(x,y)\geq 0;$$
$$(M_2)\ d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y;$$
$$(M_3)\ d(x,y)=d(y,x);$$
$$(M_4)\ d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z).$$

الشرط (M_4) يسمى بمتباينة المثلث (كما في الشكل التالي).



شكل (٢,١)

الدالة d تسمى دالة مسافة (distance function) وتسمى $d(x,y)$ المسافة بين x و y . الثنائي المرتب (X,d) يسمى فضاءً مترياً.

مثال (٢,١)

الدالة $d:R\times R\to R$ و المعرفة بالصيغة $d(x,y)=|x-y|$، على مجموعة الأعداد الحقيقية، هي دالة مسافة، وذلك لأنه لكل $x,y,z\in R$ نجد أن:

$(M_1)\, d(x,y)\geq 0;$

$(M_2)\, d(x,y)=|x-y|=0 \Leftrightarrow x=y;$

$(M_3)\, d(x,y)=|x-y|=|-(y-x)|=|y-x|=d(y,x);$

$$(M_4)\, d(x,z)=|x-z|=|x-y+y-z|=|(x-y)+(y-z)|$$
$$\leq |x-y|+|y-x|=d(x,y)+d(y,z).$$

تسمى d في هذه الحالة دالة المسافة العادية أو الاقليدية.

مثال (٢,٢)

الدالة $d:R^2\times R^2\to R$ و المعرفة بالصيغة:

$$d(a,b)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

حيث أن $a=(x_1,y_1)\in R^2$ و $b=(x_2,y_2)\in R^2$، هي دالة مسافة وذلك لأنه لكل $a,b,c\in R^2$ نجد أن:

$$(M_1)\ d(a,b)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\geq 0\ .$$

$$(M_2)\ d(a,b)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=0$$
$$\Leftrightarrow x_1=x_2\ and\ y_1=y_2 \Leftrightarrow a=b.$$

$$(M_3)\quad d(a,b)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=d(b,a)$$

$$(M_4)\ d(a,c)\leq d(a,b)+d(b,c)$$

حيث نعلم أنه فى الهندسة المستوية يكون طول أي ضلع في مثلث أقل من أو يساوي مجموع طولي الضلعين الآخرين. في هذه الحالة تسمى d دالة المسافة الاقليدية في المستوى.

مثال (٢,٣)

يمكن تعميم دالة المسافة الاقليدية في المستوي إلى دالة مسافة في الفضاء الاقليدي ذي البعد النوني، وذلك بفرض أن الدالة $d : R^n \times R^n \to R$ معرفة بالصيغة:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

حيث أن

$$y = (y_1, y_2, ..., y_n) \ \ , \ \ x = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

من السهل إثبات أن الدالة $d : R^n \times R^n \to R$ هي دالة مسافة باعتبارها تعميماً لدالة المسافة في المستوى.

مثال (٢,٤)

الدالة الحقيقية $d : R^2 \times R^2 \to R$ والمعرفة بالصيغة:

$$d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

هي دالة مسافة والزوج المرتب (X, d) فضاء متري، حيث أن:

$$x = (x_1, x_2) \ , y = (y_1, y_2) \in R^2.$$

الحل

لكل $x = (x_1, x_2) \ , y = (y_1, y_2) \in R^2$ نجد أن:

اولاً: بما أن $|x_1 - y_1| \geq 0$ و $|x_2 - y_2| \geq 0$ فإن

$$d(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|\geq 0$$

إذاً يكون الشرط الأول متحقق، أي أن

$(M_1)\ \ d(x,y)\geq 0$.

ثانياً:

$$\begin{aligned} d(x,y)=0 &\Leftrightarrow |x_1-y_1|+|x_2-y_2|=0 \\ &\Leftrightarrow |x_1-y_1|=0=|x_2-y_2| \\ &\Leftrightarrow x_1=y_1, x_2=y_2 \\ &\Leftrightarrow x=(x_1,x_2)=y=(y_1,y_2) \end{aligned}$$

ومن ثم يكون

$(M_2)\ \ d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.

ثالثاً:

$(M_3)\ \ d(x,y)=d(y,x)$

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x_1-y_1|+|x_2-y_2| \\ &= |y_1-x_1|+|y_2-x_2|=d(y,x) \end{aligned}$$

رابعاً: بفرض أن $x=(x_1,x_2)\ ,y=(y_1,y_2),z=(z_1,z_2)\in R^2$

$$\begin{aligned} (M_4)\ d(x,y)+d(y,z) &= |x_1-y_1|+|x_2-y_2|+|y_1-z_1|+|y_2-z_2| \\ &\geq |x_1-z_1|+|x_2-z_2|=d(x,z) \end{aligned}$$

, بهذا يكتمل اثبات أن الدالة $d:R^2\times R^2\to R$ دالة مسافة.

مثال (٢,٥)

الدالة الحقيقية $d:R\times R\to R$ والمعرفة بالصيغة:

$$d(x,y)=\begin{cases} 1 & if \quad x\neq y \\ 0 & if \quad x=y \end{cases}$$

هي دالة مسافة تسمى المترية البديهية (trivial distance).

الحل

$(M_1)\ d(x,y)\geq 0;$

وذلك من تعريف الدالة المترية.

ثانيا :

$(M_2)\ d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y;$

هذا الشرط متحقق من التعريف

$d(y,x)=0 \Leftarrow x=y \Leftarrow d(x,y)=0$.

ثالثا: لكل $x,y\in Z$ نجد أنه:

(i) إذا كانت $d(y,x)=1 \Leftarrow x\neq y \Leftarrow d(x,y)=1$ ومن ثم يكون

$$d(x,y)=d(y,x)$$

(ii)إذا كانت $d(y,x)=0 \Leftarrow x=y \Leftarrow d(x,y)=0$ ومن ثم يكون

$$d(x,y)=d(y,x)$$

في كلا الاحتمالين نجد أن

$(M_3)\ d(x,y)=d(y,x) \quad \forall x,y\in X\ ;$

رابعاً: لكل $x,y,z\in Z$ نجد أن العلاقة:

$(M_4)\ d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

متحققة لجميع القيم الممكنة لكل من $d(x,z),\ d(x,y),\ d(y,z)$ عدا حالة واحدة أن يكون $d(x,z)=1,\ d(x,y)=0,\ d(y,z)=0$ والذي سوف يترتب عليه أن يكون $d(x,z)=1\not\leq 0+0=d(x,y)+d(y,z)$

لكن هذا الاحتمال لا وجود له وذلك لأن

$(1)\ \ d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$

$(2)\ \ d(y,z)=0 \Rightarrow y=z$

من (1) و (2) نجد أن $x=y=z$ ولكن $d(x,z)=1 \Rightarrow x\neq z$ وهذا تناقض

وبناءً على ذلك فإن هذا الاحتمال لا وجود له وبذلك تكون العلاقة صحيحة دائماً.

(٢,٢) المجموعات المفتوحة Open sets

قبل الشروع في دراسة مفهوم المجموعات المفتوحة يجب علينا دراسة بعض المفاهيم الخاصة بالفضاء المتري مثل كل من الكرة المفتوحة و الكرة المغلقة.

تعريف (٢,٢)

بفرض أن (X,d) فضاء متري و x_0 عنصر في X و $\varepsilon>0$.

(١) المجموعة الجزئية $B(x_0,\varepsilon)=\{x\in X : d(x,x_0)<\varepsilon\}$

تسمى كرة مفتوحة نصف قطرها ε ومركزها النقطة x_0.

(٢) المجموعة الجزئية $\overline{B}(x_0,\varepsilon)=\{x\in X : d(x_0,x)\leq\varepsilon\}$

تسمى كرة مغلقة نصف قطرها ε ومركزها النقطة x_0.

مثال (٢,٦)

في حالة الفضاء المتري الإقليدي (R,d)، حيث أن $d(x,y)=|x-y|$ لأي عددين حقيقيين $x,y\in R$ فإن المجموعة:

$$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)=\{x\in R : a-\varepsilon<x<a+\varepsilon, \varepsilon>0\}$$

تسمى فترة مفتوحة، بينما المجموعة:

$$[a-\varepsilon,a+\varepsilon]=\{x\in R : a-\varepsilon\leq x\leq a+\varepsilon, \varepsilon>0\}$$

تسمى فترة مغلقة بالنسبة للفضاء المترى (R,d) .

مثال (٢,٧)

في حالة الفضاء المتري (R^2,d)، حيث أن $d:R^2\times R^2\to R$. فإن المجموعة:

$$B_1(a,\varepsilon)=\{x\in R^2:d(a,x)<\varepsilon\}$$

تسمى قرص مفتوح (open disk)، بينما المجموعة:

$$\overline{B}_2(a,\varepsilon)=\{x\in R^2:d(a,x)\leq\varepsilon\}$$

تسمى قرص مغلق (closed disk).

مثال (٢,٨)

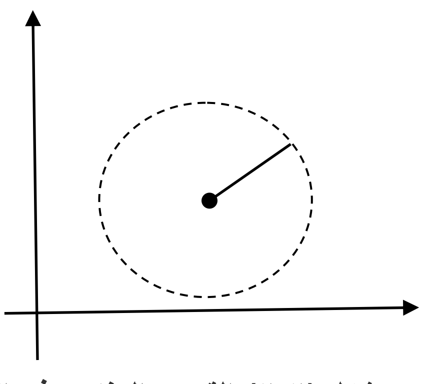
في حالة الفضاء المتري (R^2,d)، حيث أن الدالة $d:R^2\times R^2\to R$

معرفة بالصيغة:

$$d(a,b)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

حيث أن $a=(x_1,y_1)\in R^2$ و $b=(x_2,y_2)\in R^2$.

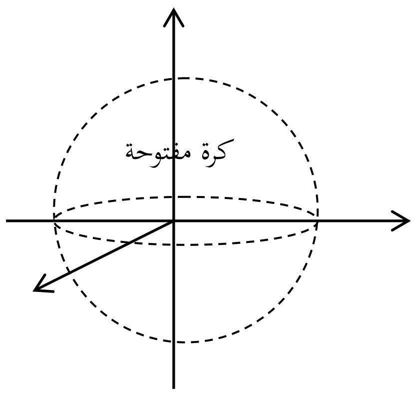
فالقرص المفتوح في هذا الفضاء يأخذ الشكل التالي



شكل (٢,٢):القرص المفتوح في المستوي

إذا تعاملنا مع الفضاء الثلاثي $R^3=R\times R\times R$ فإن المجموعة

$$B_d(a,\varepsilon)=\{x\in R^3 : d(x,a)<\varepsilon\}$$



شكل (٢,٣):الكرة المفتوحة

تسمى كرة مفتوحة (open ball) .

أما المجموعة $\overline{B}_d(a,\varepsilon)=\{x\in R^3 : d(x,a)\le\varepsilon\}$ فتسمى كرة مغلقة .

مثال (٢,٩)

بفرض أن $d: R\times R\to R$ دالة المسافة الاقليدية على مجموعة الأعداد الحقيقية R . فإن الكرة المفتوحة

$$B_d(0,1)=\{x\in R : d(0,x)<1\}=\{x\in R : |x|<1\}=(-1,1)$$

والتي مركزها 0 ونصف قطرها 1ما هي إلا الفترة المفتوحة $(-1,1)$.

مثال (٢,١٠)

بفرض أن $d: R^2\times R^2\to R$ دالة المسافة الاقليدية على المجموعة R^2 . فإن القرص المفتوح الذي مركزه النقطة $(0,0)$ ونصف قطره الوحدة يعطى في الصورة التالية:

$$B_d((0,0),1)=\{(x,y)\in R^2 : d((0,0),(x,y))<1\}$$
$$=\{(x,y)\in R^2 : \sqrt{x^2+y^2}<1\}$$

$$=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2<1\}$$

مثال (٢,١١)

بفرض أن $d: R^3\times R^3 \to R$ دالة المسافة المعرفة على المجموعة R^3. فإن المجموعة التالية:

$$B_d((0,0,0),1)=\{(x,y,z)\in R^3 : d((0,0,0),(x,y,z))<1\}$$

$$=\{(x,y,z)\in R^3 : \sqrt{x^2+y^2+z^2}<1\}$$

$$=\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2<1\}$$

وهي عبارة عن كرة مفتوحة مركزها $(0,0,0)$ ونصف قطرها 1.

فيما يلي سوف نقوم بتعريف مفهوم الجوار (Neighborhood) لنقطة ما في أي فضاء متري.

تعريف (٢,٣)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً. المجموعة الجزئية A من X تسمى جواراً للنقطة $a\in A$ إذا وجد $\varepsilon>0$ بحيث أن $B_d(a,\varepsilon)\subseteq A$.

نظرية (٢,١)

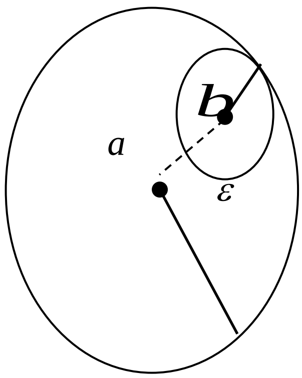
بفرض أن (X,d) فضاء متري، وأن $a\in X, \varepsilon>0$. الكرة المفتوحة $B_d(a,\varepsilon)$ تمثل جواراً لكل نقطة من نقاطها.

البرهان

اولاً نلاحظ أن الكرة المفتوحة $B_d(a,\varepsilon)$ ليست خالية لأن $a \in B_d(a,\varepsilon)$. نفرض أن $b \in B_d(a,\varepsilon)$ والمطلوب إثبات أن $B_d(a,\varepsilon)$ تكون جواراً لهذه النقطة. بما أن $b \in B_d(a,\varepsilon)$ فإن $d(b,a) < \varepsilon$. نفرض أن $\eta = \varepsilon - d(a,b) > 0$. سوف نحاول بإثبات أن $B_d(b,\eta) \subseteq B_d(a,\varepsilon)$ كما هو موضح في الشكل (٢,٤). نفرض أن $x \in B_d(b,\eta)$ نقطة إختيارية والمطلوب إثبات أن $x \in B_d(a,\varepsilon)$

$$x \in B_d(b,\eta) \Leftrightarrow d(x,b) < \eta$$

باستخدام الشرط $(M_4)\ d(a,x) \le d(a,b) + d(b,x)$



شكل (٢,٤)

لذا نحصل على $d(a,x) \le d(a,b) + d(b,x) < d(a,b) + \eta < \varepsilon$ وهذا يعني أن $x \in B_d(a,\varepsilon)$ ومن ثم فإن $B_d(b,\eta) \subseteq B_d(a,\varepsilon)$.

تعريف (٢,٤)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً. المجموعة $A\subseteq X$ تسمى مجموعة مفتوحة إذا كانت جواراً لكل نقطة من نقاطها.

نتيجة (٢,١)

في الفضاء المتري (X,d) كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة.

تعريف (٢,٥)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً و $A\subseteq X$. النقطة $a\in A$ تسمى نقطة داخلية للمجموعة A إذا كانت A جوراً لهذه النقطة ويرمز لمجموعة النقاط الداخلية للمجموعة بالرمز A^o ويعبر عنها في الصورة:

$$A^o=\{x\in A: B(x,\varepsilon)\subseteq A \ \ for\ some\ \varepsilon>0\}.$$

نظرية (٢,٢)

بفرض أن A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (X,d). فإن

(١) المجموعة A^o هي مجموعة مفتوحة جزئية من A تحوي جميع المجموعات الجزئية المفتوحة من A.

(٢) المجموعة A تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كان $A=A^o$.

البرهان

إثبات (١) نفرض أن $x\in A^o$ نقطة اختيارية. فإنه من تعريف مجموعة النقاط

الداخلية توجد كرة مفتوحة $B(x,\varepsilon)\subseteq A$ ولكن $B(x,\varepsilon)$ هي في حد ذاتها مجموعة مفتوحة (انظر نظرية (٢,١) ومثال (٢,١٢)) لذا فإن كل نقطة من نقاطها هي مركز لكرة مفتوحة محتواه في $B(x,\varepsilon)$ ومن ثم في A. هذا يعني أن كل نقطة في $B(x,\varepsilon)$ هي نقطة داخلية للمجموعة A، أي أن $B(x,\varepsilon)\subseteq A^o$. ونظراً لكون النقطة $x\in A^o$ إختيارية فإن كل نقطة $x\in A^o$ هي مركز لكرة محتواه في A^o وهذا يعني أن A^o مجموعة مفتوحة.

لإثبات أن A^o تحوي كل المجموعات المفتوحة الجزئية $G\subseteq A$. نفرض أن $x\in G$. بما أن G المجموعة مفتوحة، فإنه توجد كرة مفتوحة $B(x,\varepsilon)$ بحيث أن $B(x,\varepsilon)\subseteq G\subseteq A$. إذاً $x\in A^o$ أي أن $G\subseteq A^o$.

إثبات (٢) يأتي مباشرة من (١). ■

نظرية (٢,٣)

بفرض أن (X,d) فضاء متري وأن $A,B\subseteq X$. فإن

$(i)\ A\subseteq B\Rightarrow A^o\subseteq B^o;$

$(ii)\ (A\cap B)^o=A^o\cap B^o;$

$(iii)\ (A\cup B)^o\supseteq A^o\cup B^o.$

البرهان

الفقرة (i):

نفرض أن $x\in A^o$. فإنه يوجد $\varepsilon>0$ بحيث يكون $B(x,\varepsilon)\subseteq A$ بما أن $A\subseteq B$ فإن $B(x,\varepsilon)\subseteq B$ ، أي أن $x\in B^o$ وهذا يقتضي أن $A^o\subseteq B^o$.

الفقرة (ii):

بما أن $A\cap B\subseteq A$ و $A\cap B\subseteq B$ فإنه من (i) نجد أن $(A\cap B)^0\subseteq A^o$ و $(A\cap B)^0\subseteq B^o$ وهذا يقتضي أن

$$(A\cap B)^0\subseteq A^o\cap B^o \qquad (1)$$

من ناحية أخرى نفرض أن $x\in A^o\cap B^0$ فإن هذا يقتضي أن $x\in A^o$ و $x\in B^0$. لذا يوجد $\varepsilon_1>o$ و $\varepsilon_2>o$ بحيث يكون $B(x,\varepsilon_1)\subseteq A$ ، $B(x,\varepsilon_2)\subseteq B$. نفرض $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ فإنه يتضح أن $\varepsilon>0$ و $B(x,\varepsilon)\subseteq A\cap B$ ، أي أن $x\in(A\cap B)^o$ وهذا يقتضي أن :

$$A^o\cap B^o\subseteq(A\cap B)^0 \qquad (2)$$

من (1) و (2) نحصل على المطلوب.

الفقرة (iii):

حيث أن $A\subseteq A\cup B$ و $B\subseteq A\cup B$ بتطبيق (i) نحصل على المطلوب.■

فيما يلي مثال لتوضيح عدم تحقق التساوي في (iii):

مثال (٢,١٢)

بفرض أن $A=[0,1]$ و $B=[1,2]$ ، فإن $A\cup B=[0,2]$. بما أن $A^o=(0,1)$ ، $B^o=(1,2)$ ، $(A\cup B)^0=(0,2)$ فنجد أن $(A\cup B)^o\neq A^o\cup B^o$.

تمهيدة (٢,١)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً. تقاطع أي مجموعتين مفتوحتين في X يكون مجموعة مفتوحة.

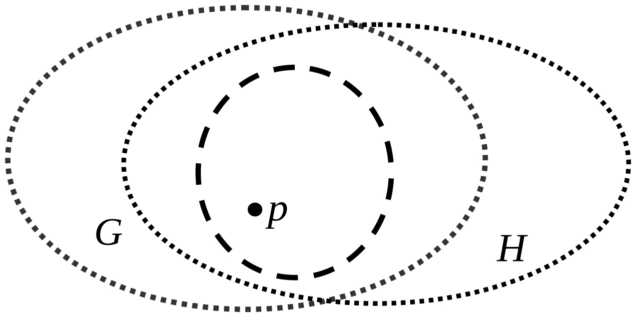
البرهان

نفرض أن G,H مجموعتان مفتوحتان في X وأن $p \in G \cap H$

$\because p \in G \cap H \Rightarrow p \in G \wedge p \in H$

بما أن G مجموعة مفتوحة وتحتوي على النقطة p ، فإنه توجد كره مفتوحة $B_1(\mathrm{p},\varepsilon)$ بحيث أن

$$p \in B_1(p,\varepsilon) \subseteq G \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$



شكل (٢,٥)

وبالمثل بالنسبة للمجموعة الثانية H ، فإنه توجد كره مفتوحة $B_2(\mathrm{p},\delta)$ بحيث أن

$$p \in B_2(p,\delta) \subseteq H \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

من (1) و (2) نحصل على:

$$\mathrm{p} \in \mathrm{B}_1(\mathrm{p},\varepsilon) \cap \mathrm{B}_2(\mathrm{p},\delta) \subseteq (\mathrm{G} \cap \mathrm{H})$$

ليكن $\eta = \min\{\varepsilon,\delta\}$ ، فإنه توجد كره مفتوحة $B_p(\mathrm{p},\eta)$ بحيث أن

$$\mathrm{p} \in \mathrm{B}_\mathrm{p}(\mathrm{p},\eta) = \mathrm{B}_1(\mathrm{p},\varepsilon) \cap \mathrm{B}_2(\mathrm{p},\delta) \subseteq (\mathrm{G} \cap \mathrm{H})$$

أى أن $p \in B_p(p,\eta) \subseteq (G \cap H)$ و هذا هو إثبات أن التقاطع $G \cap H$ مجموعة مفتوحة. ■

بعد أن رأينا في التمهيدية السابقة أن التقاطع لمجموعتين مفتوحتين يعطي مجموعة مفتوحة، سوف نحاول فيما يلي إجمال بعض من خواص المجموعات المفتوحة في النظرية التالية.

نظرية (٢,٤)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً، فإن :

(١) كل من المجموعتين X,ϕ مجموعة مفتوحة.

(٢) إذا كانت $G_1,G_2,...,G_n$ مجموعات مفتوحة فإن التقاطع $G_1 \cap G_2 \cap ... \cap G_n$ مجموعة مفتوحة.

(٣) اتحاد أى تجمع من المجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة.

البرهان

أولا :لإثبات أن المجموعة ϕ مجموعة مفتوحة فهذا يتطلب أن تكون كل نقطة من نقاط ϕ مركزاً لكرة مفتوحة محتواة في ϕ و حيث أن ϕ خالية من العناصر فإن هذا المطلب متحقق دوماً.

والآن المجموعة X مفتوحة لأنه إذا كان $x \in X$، فإنه على سبيل المثال تكون كرة الوحدة $B(x,1) \subset X$.

ثانيا : نفرض أن $G_1, G_2,..., G_n$ مجموعات مفتوحة وأن

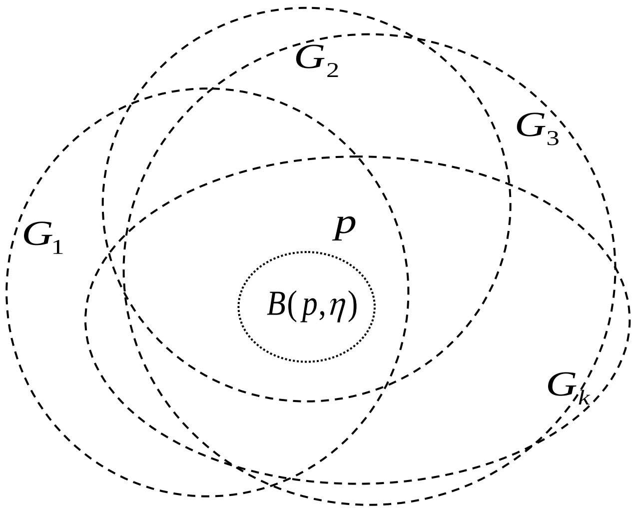
$$G = G_1 \cap G_2 \cap ... \cap G_n = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$$

إذا كانت G خالية فإنها مجموعة مفتوحة كما رأينا في (1). نفترض أن $G \neq \phi$ و $p \in G$. لذا نجد أن $p \in G_i$ لكل $i = 1,2,...,n$ ومن ثم يوجد $\varepsilon_i > 0$ بحيث تكون $B(p,\varepsilon_i) \subseteq G_i$ لكل $i = 1,2,...,n$.

نفرض أن $\eta = \inf\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\}$. فإن $\eta > o$ و $B(p,\eta) \subseteq B(p,\varepsilon_i)$ لكل $i = 1,2,...,n$. إذاً الكرة $B(p,\eta)$ التي مركزها p تحقق الشرط

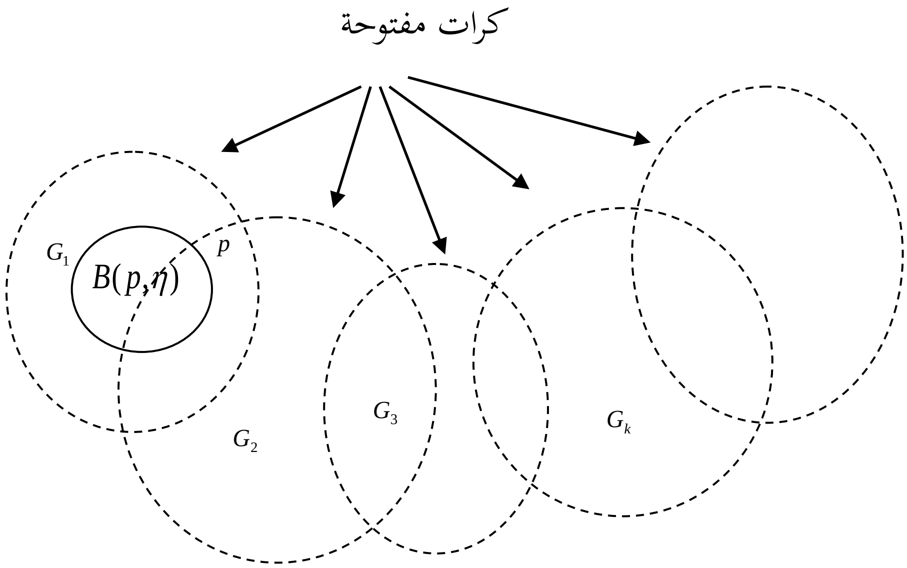
$$B(p,\eta) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} B(p,\varepsilon_i) \subseteq G$$

وهذا معناه أن التقاطع المنتهي $G_1 \cap G_2 \cap ... \cap G_n$ مجموعة مفتوحة.



شكل (٢،٦)

ثالثا : نفرض أن ξ هى عائلة من المجموعات المفتوحة وأن H هى اتحاد هذه العائلة والمطلوب إثبات أن H مجموعة مفتوحة.



شكل (٢،٧)

لإثبات ذلك نفرض أن $p \in H$ ، فإنه توجد مجموعة من مجموعات العائلة ع ولتكن G مجموعة مفتوحة بحيث أن $p \in G \subseteq H$. بما أن المجموعة Gمفتوحة ، فإنه توجد كره مفتوحة مركزها p بحيث أن $p \in B(p,\eta) \subseteq G$, هذا يقتضي أن $p \in B(p,\eta) \subseteq H$ وهذا يعني أن H مجموعة مفتوحة. ■

يلاحظ القارئ أننا استخدمنا التقاطع النهائي للمجموعات المفتوحة و لم نستخدم التقاطع الاختياري، في حين استخدمنا الاتحاد الاختياري للمجموعات المفتوحة الذي يتضمن ضمنياً الاتحاد النهائي .لذا نجد أنفسنا أمام السؤال التالي: هل التقاطع الاختياري للمجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة؟.

مثال (٢,١٣)

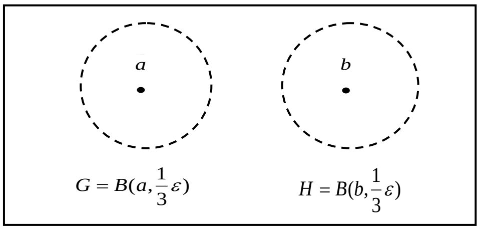
نفرض الفضاء المتري (R,d)، حيث أن $d(x,y)=|x-y|, \forall x,y \in R$. نفرض عائلة الفترات المفتوحة $\{B_d(0,\frac{1}{n})=(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}): n\in N\}$. ولكن نجد أن التقاطع اللانهائي لهذه العائلة لا يعطي مجموعة مفتوحة، حيث $\cap_n(\frac{-1}{n},\frac{1}{n})=\{0\}$.

> **نظرية (٢,٥) (خاصية هاوسدورف)**
>
> لأي عنصرين مختلفين $a \neq b$ في الفضاء المترى (X,d) توجد مجموعتان مفتوحتان G , H بحيث أن $a\in H, b\in G, G\cap H=\phi$

البرهان

نفرض أن $a,b\in X$ عنصران مختلفان (أى أن $a\neq b$) فإنه يوجد $\varepsilon>0$ بحيث أن $d(a,b)=\varepsilon$. فإذا اخترنا المجموعتين المفتوحتين كما يلى:

$$G=B_d(a,\tfrac{1}{3}\varepsilon)\ ,\quad H=B_d(b,\tfrac{1}{3}\varepsilon)$$



شكل (٢,٨)

فإن وجود المجموعتين المفتوحتين G , H قد تحقق. فالمطلوب الآن إثبات أن $G\cap H=\phi$ ولكى نثبت ذلك سوف نفترض العكس، أى إننا سنفترض أن

$G \cap H \neq \phi$ وذلك بفرض أن هناك نقطة p بحيث أن $p \in G \cap H \neq \phi$ وهذا الفرض يؤدى إلى أن :

(a) $p \in G = B_d(a, \frac{\varepsilon}{3}) \Rightarrow d(p,a) < \frac{\varepsilon}{3}.$

(b) $p \in H = B_d(b, \frac{\varepsilon}{3}) \Rightarrow d(p,b) < \frac{\varepsilon}{3}.$

باستخدام الشرط (M_4) من شروط الفضاء المترى (X,d) نحصل على :

$$d(a,b) \leq d(a,p) + d(p,b) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$$

أي أن $d(a,b) < \frac{2}{3}\varepsilon$ ولكن هذا يتعارض مع الفرض بأن $d(a,b) = \varepsilon$

إذاً $G \cap H = \phi$ وبهذا يكتمل البرهان.■

ملاحظة:

هذه الخاصية متحققة لكل فضاء متري ولكنا سوف نرى أنها لا تكون متحققة دائما في فضاءات أعم من الفضاء المتري مثل الفضاءات التوبولوجية.

(٢,٣) المجموعات المغلقة في الفضاء المتري

Closed Sets in Metric Space

تعريف(٢,٥)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً. المجموعة A في (X,d) تكون مغلقة إذا وفقط إذا كانت $A^c = X - A$ مجموعة مفتوحة.

فيما يلي سوف نقدم بعضاً من خواص المجموعات المغلقة .

نظرية (٢,٦)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً فإن :

(١) ϕ , X مجموعتان مغلقتان.

(٢)تقاطع أى تجمع من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة.

(٣) إذا كانت $F_1, F_2, \ldots, F_n$ مجموعات مغلقة فإن الإتحاد

$$F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n$$

يكون أيضا مجموعة مغلقة.

البرهان

أولا : المجموعتان ϕ , X مغلقتان لأنه $X = \phi^c$, $\phi = X^c$ والمجموعتان ϕ , X مفتوحتان كما رأينا فى النظرية (٢,٤).

ثانيا : نفرض أن W هى تجمع من المجموعات المغلقة وأن :

$$S = \cap\{F : F \in W\}$$

وبما أن :

$$S^c = (\cap F)^c = \cup\{F^c : F \in W\}$$

وأن F^c مفتوحة واتحاد المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة كما ورد فى النظرية (٢,٤) ومن ثم فإن S^c مجموعة مفتوحة وهذا يؤكد أن:

$$S = \cap\{F : F \in W\}$$

مجموعة مغلقة.

ثالثا : بفرض أن $F_1, F_2, ..., F_n$ مجموعات مغلقة و أن $H = F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n$ ومن ثم فإن

$$H^c = (F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n)^c = F_1^c \cap F_2^c \cap ... \cap F_n^c$$

حيث أن تقاطع المجموعات المفتوحة $F_1^c \cap F_2^c \cap ... \cap F_n^c$ هو مجموعة مفتوحة أي أن H^c مفتوحة ومن ثم فإن H مجموعة مغلقة. ■

نظرية (٢,٧)

بفرض أن (X, d) فضاء متري، فإنه لكل $x \in X$ تكون المجموعة وحيدة العنصر $\{x\}$ مغلقة.

البرهان

لإثبات أن المجموعة $\{x\}$ مغلقة يكفي أن نثبت أن المجموعة $\{x\}^c = X - \{x\}$ تكون مفتوحة. لإثبات ذلك نفرض أن $y \in X - \{x\}$ نقطة اختيارية. بما أن $x \neq y$ فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان $G, H \subseteq X$ بحيث أن $y \in H$, $x \in G$ و $G \cap H = \phi$ ومن ثم يكون

$$y \in H \subseteq X - G \subseteq X - \{x\}$$

و بما أن H مجموعة مفتوحة فإنه توجد كرة مفتوحة $B_d(y,\varepsilon)$ بحيث أن $y \in B_d(y,\varepsilon) \subset H \subseteq X-\{x\}$ وهذا يعني أن المجموعة $X-\{x\}$ مفتوحة ومن ثم تكون المجموعة $\{x\}$ مغلقة.■

نتيجة (٢,٢)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً فإن كل مجموعة منتهية في X هي مجموعة مغلقة.

البرهان

من النظرية السابقة نعلم أن المجموعة وحيدة العنصر مغلقة. بما أن كل مجموعة منتهية $A \subset X$ يمكن اعتبارها كاتحاد منتهٍ لمجموعات وحيدة العنصر اي أن $A = \bigcup_{a \in A}\{a\}$. لذا فإن المجموعة A تكون مغلقة.■

تمارين على الفصل الثاني

١) هل الدالة $d: R\times R\to R$ دالة مسافة على R.

- إذا كانت d معرفة بالصيغة: $d(a,b)=|2a-3b|,\ \forall a,b\in R$
- إذا كانت d معرفة بالصيغة: $d(a,b)=a^2-b^2,\ \forall a,b\in R$
- إذا كانت d معرفة بالصيغة: $d(a,b)=|a^2-b^2|,\ \forall a,b\in R$

٢) برهن أن الدالة الحقيقية $d: R^2\times R^2\to R$ والمعرفة بالصيغة:

- $d(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$

هي دالة مسافة

٣) برهن أن الدالة الحقيقية $d: R\times R\to R$ والمعرفة بالصيغة:

- $$d(x,y)=\begin{cases}1 & if \quad x\neq y\\ 0 & if \quad x=y\end{cases}$$

هي دالة مسافة .

٤) بفرض أن $d: X\times X\to R$ دالة مسافة معرفة على المجموعة الغير خالية X ، وبفرض أن $e: X\times X\to R$ دالة معرفة بالصيغة

$$e(x,y)=\frac{d(x,y)}{d(x,y)+1}$$

- برهن أن $e: X\times X\to R$ هي ايضا دالة مسافة على X .
- برهن أن المجموعة $A\subseteq X$ تكون مفتوحة في (X,e) إذا وفقط إذا كانت مفتوحة في (X,d) .

٥) هل الدالة $d: R\times R\to R$ دالة مسافة على R.

- إذا كانت d معرفة بالصيغة: $d(a,b)=\min\{a,b\},\ \forall a,b\in R$
- إذا كانت d معرفة بالصيغة: $d(a,b)=\max\{a,b\},\ \forall a,b\in R$

٦) إذا كانت $d: R^2 \times R^2 \to R$ دالة معرفة بالصيغة:

$$d(a,b) = \max\{|a_1 - a_2|, |b_1 - b_2|\}, \quad \forall a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in R^2$$

فهل d دالة مسافة على R^2.

٧) بفرض أن $f: X \to Y$ دالة تباين من المجموعة الغير خالية X إلى الفضاء المتري (Y, e). وبفرض أن $d: X \times X \to R$ دالة معرفة بالصيغة

$$d(x, y) = e[f(x), f(y)]$$

برهن أن $d: X \times X \to R$ دالة مسافة على X.

٨) ادرس ماإذا كانت الدالة $d: R \times R \to R$ هي دالة مسافة في الحالتين:

$$(1)\ d(a,b) = \begin{cases} a+b & if \ \ a \geq b \\ 1 & if \ \ a < b \end{cases}$$

$$(2)\ d(a,b) = \begin{cases} 4 & if \ \ a \neq b \\ 0 & if \ \ a = b \end{cases}$$

٩) بفرض أن (X, d) فضاء متري وأن $B(x, \varepsilon_1)$ و $B(y, \varepsilon_2)$ كرتان مفتوحان بحيث أن $B(x, \varepsilon_1) \cap B(y, \varepsilon_2) \neq \phi$. برهن أنه لأي نقطة

$$z \in B(x, \varepsilon_1) \cap B(y, \varepsilon_2)$$

يوجد $\varepsilon_3 > 0$ بحيث أن $B(z, \varepsilon_3) \subseteq B(x, \varepsilon_1) \cap B(y, \varepsilon_2)$.

١٠) برهن نظرية (٢،٨)؟.

الموضوع	Presentation tupe	Youtube
محاضرة الفضاء المتري ١	https://slideator.com/watch/?v=Kl1Xx8Bv5fk	https://www.youtube.com/watch?v=oloPPwxcWmc&t=914s
محاضرة الفضاء المتري ٢	https://slideator.com/watch/?v=qA8KowoDGaJ	https://www.youtube.com/watch?v=A03tF2gUI4U&t=890s

الفصل الثالث

الفضاءات التوبولوجية

Topological Spaces

مقدمة

بدأت دراسة مفهوم التوبولوجي على مجموعة الأعداد الحقيقية ومن ثم على المستوي الاقليدي. و نظراً لكون الفضاءات المترية أشمل وأعم من هاتين المجموعتين ، فدراسة التوبولوجي على الفضاءات المترية و الدوال المتصلة عليها تعتبر المرحلة الثانية من تطور علم التوبولوجيا، حيث أنه لم يتوقف عند الفضاءات المترية بل امتدت دراسته لتشمل مجموعات أخرى بغض النظر عن خواص هذه المجموعات.

هذا الفصل مخصص لدراسة مفهوم الفضاء التوبولوجي العام وخواصه. بالإضافة إلى دراسة بعض المفاهيم المتعلقة بالفضاءات التوبولوجية مثل نقاط النهاية ، النقاط الداخلية ، النقاط الخارجية ، النقاط الحدودية ، الانغلاق للمجموعات الخ. سندرس أيضاً مفهوم كل من الأساس والأساس الجزئي للتوبولوجي وكذلك التوبولوجي النسبي وتوبولوجي الجداء (الضرب). أخيراً نختتم هذا الفصل بدراسة مفهوم التقارب للمتتابعات في الفضاءات التوبولوجية.

(٣,١) الفضاءات التوبولوجية.

إن بناء الفضاء التوبولوجي يستند أساساً على فكرة المجموعات المفتوحة التي تطرقنا إليها في الفصل السابق ، و لقد عرفنا أن المجموعات المفتوحة في الفضاء المتري تحقق خواصاً معينة كما وردت في نظرية (٢,٤) والتي تنص على أنه في الفضاء المتري (X,d) يتحقق الآتي :

(i) كل من X , ϕ مجموعة مفتوحة.

(ii) إذا كانت $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n$ مجموعات مفتوحة فإن التقاطع

$$G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap \ldots \cap G_n$$

يعطي مجموعة مفتوحة.

(iii) اتحاد أي عدد من المجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة.

لهذا نعرف التوبولوجي ، على مجموعة غير خالية X ، بأنه عائلة من المجموعات الجزئية المفتوحة من X ولكي نضمن أن عناصر هذه العائلة هي مجموعات مفتوحة فيلزم أن تحقق هذه المجموعات خواص المجموعات المفتوحة الواردة في نظرية (٢,٤).

تعريف (٣,١)

لتكن X مجموعة غير خالية و τ عائلة مكونة من مجموعات جزئية من X بحيث تحقق الشروط التالية:

(i) المجموعتان X , ϕ تنتميان إلى τ.

(ii) لكل مجموعتين $A, B \in \tau$ فإن $A \cap B \in \tau$ (أي أن تقاطع عدد منته من عناصر τ يكون عنصراً في τ ايضا).

(iii) لتكن $A_i \in \tau$ فإن $\bigcup_i A_i \in \tau$.

العائلة τ تسمى توبولوجي على المجموعة X و أي مجموعة $G\in\tau$ تسمى مجموعة مفتوحة ($\tau-open$) ومكملتها تسمى مجموعة مغلقة ($\tau-closed$). ويسمى الثنائي المرتب (X,τ) فضاء توبولوجي (Topological space) .

مثال (٣,١)

بفرض أن $X=\{a,b,c\}$. فإنه يمكن تعريف التوبولوجيات التالية :

$\tau_1=\{X,\phi\}$

$\tau_2=\{X,\phi,\{a\}\}$

$\tau_3=\{X,\phi,\{b\}\}$

$\tau_4=\{X,\phi,\{c\}\}$

$\tau_5=\{X,\phi,\{a,b\}\}$

$\tau_6=\{X,\phi,\{a,c\}\}$

$\tau_7=\{X,\phi,\{b,c\}\}$

$\tau_8=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

$\tau_9=\{X,\phi,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$

$\tau_{10}=\{X,\phi,\{b\},\{c\},\{b,c\}\}$

$\tau_{11}=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\}\}$

$\tau_{12}=\{X,\phi,\{a\},\{a,c\}\}$

$\tau_{13}=\{X,\phi,\{b\},\{a,b\}\}$

$\tau_{14}=\{X,\phi,\{b\},\{b,c\}\}$

$\tau_{15}=\{X,\phi,\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$

$\tau_{16}=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$

$\tau_{17}=\{X,\phi,\{c\},\{a,c\},\{b,c\}\}$

ويمكن الحصول على توبولوجيات أخرى. علما بأن كل توبولوجي مما سبق يحقق الشروط الثلاث السابقة.

مثال (٣,٢)

إذا كانت $X=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعة. أي من التجمعات التالية تشكل توبولوجي على X :

(i) $\tau_1=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$

(ii) $\tau_2=\{X,\phi,\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,c,d\}\}$

(iii) $\tau_3=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$.

الحل

(i) τ_1 لا تمثل توبولوجي حيث أن $\{a,b\},\{a,c\}\in\tau_1$ و لكن نجد أن

$$\{a,b\}\cup\{a,c\}=\{a,b,c\}\notin\tau_1$$

و من ثم فإن τ_1 لا تحقق الشرط الثالث من شروط التوبولوجي.

(ii) τ_2 لا تمثل توبولوجي لأن $\{a,b,c\},\{a,b,d\}\in\tau_2$ ، بينما التقاطع

$$\{a,b,c\}\cap\{a,b,d\}=\{a,b\}\notin\tau_2$$

و من ثم فإن τ_2 لا تحقق الشرط الثاني من شروط التوبولوجي.

(iii) $\tau_3=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$ تمثل توبولوجي لأنها تحقق كل شروط التوبولوجي .

مثال (٣,٣)

نفرض أن X مجموعة ، فإن مجموعة القوة $P(X)$ (عائلة كل المجموعات الجزئية من X) تمثل توبولوجي على X وتسمى التوبولوجي المتقطعة (Discrete topology) أو التوبولوجي القوي. بينما التوبولوجي $\tau=\{X,\phi\}$ يسمى التوبولوجي الغير متقطع (Indiscrete topology) و يسمى أحيانا التوبولوجي الضعيف أو التوبولوجي التافه.

مثال (٣,٤)

بفرض أن X مجموعة غير خالية و أن

$$\tau = \{G \subseteq X : (X - G) \ \ finite\} \cup \{\phi\}$$

أي أن τ هي عائلة كل المجموعات الجزئية من X و التي مكملاتها تكون منتهية بالإضافة إلى المجموعة الخالية ϕ. العائلة τ تمثل توبولوجي على X يسمى توبولوجي المكملات المنتهية (Co-finite Topology) و ذلك يمكن ملاحظته من خلال دراسة مدى تحقق شروط التوبولوجي عليه:

الشرط الأول:

من التعريف نجد أن $\phi \in \tau$، و حيث أن $(X - X) = \phi$ و هي مجموعة منتهية فإن $X \in \tau$ و عليه نستنتج أن $X, \phi \in \tau$.

الشرط الثاني:

نفرض أن $G, H \in \tau$ و المطلوب إثبات أن $G \cap H \in \tau$ ؟

بما أن $G, H \in \tau$، فإن كل من $(X - H)$ و $(X - G)$ مجموعة منتهية و من ثم فإن إتحادهما $(X - G) \cup (X - H) = X - (G \cap H)$ يكون مجموعة منتهية و من ثم نجد أن $G \cap H \in \tau$.

الشرط الثالث:

نفرض أن $\{G_i\}$ عائلة من عناصر τ و المطلوب إثبات أن $\cup_i G_i \in \tau$ ؟

حيث أن $G_i \in \tau$ لكل i فإن كل مجموعة من المجموعات $(X - G_i)$ هي مجموعة منتهية و من ثم تقاطع المجموعات المنتهية $\cap_i (X - G_i)$ مجموعة منتهية. و لكن $\cap_i (X - G_i) = X - \cup_i G_i$ و بالتالي فإن $X - \cup_i G_i$ مجموعة منتهية و عليه فإن $\cup_i G_i \in \tau$.

إذاً يمكن القول بأن τ تمثل توبولوجي على X.

مثال (٣,٥)

بفرض أن X مجموعة غير خالية و $p \in X$. العائلة

$$P = \{\phi, G \subseteq X : p \in G\}$$

تشكل توبولوجي على X يسمى توبولوجي النقطة المختارة .

الحل

الشرط الأول:

من التعريف نجد أن $\phi \in P$، و حيث أن $p \in X$ فإن $X \in P$ و عليه نستنتج أن $X, \phi \in P$.

الشرط الثاني:

إذا كانت $G, H \in P$ فإن $p \in G \wedge p \in H$ و هذا يقتضي أن $p \in G \cap H$ و من ثم يكون $G \cap H \in P$.

الشرط الثالث:

نفرض أن $\{G_i\}$ عائلة من عناصر P ، فإن $p \in G_i$ و عليه فإن $p \in \cup_i G_i$ أي أن $\cup_i G_i \in P$.

إذاً $P = \{\phi, G \subseteq X : p \in G\}$ توبولوجي على X . هذ التوبولوجي يسمى توبولوجي النقطة المختارة (Particular point topology) والثنائي المرتب (X, P) يسمى فضاء النقطة المختارة .

مثال (٣,٦)

بفرض أن X مجموعة غير خالية و $p \in X$. العائلة

$$P = \{X, G \subseteq X : p \notin G\}$$

تشكل توبولوجي على X يسمى توبولوجي النقطة المستبعدة .

الحل

يترك كتمرين للقارئ.

مثال (٣,٧)

بفرض أن $X = R$ مجموعة الاعداد الحقيقية. عائلة المجموعات الجزئية من R التي على الصورة :

$$u = \{G \subseteq X : \forall x \in G,\ \exists\, \varepsilon > o : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq G\}$$

تشكل توبولوجي على X يسمى التوبولوجي العادي أو التوبولوجي الاقليدي.

الحل

الشرط الأول: واضح أ ن $R, \phi \in u$

الشرط الثاني:

بفرض أن $G_1, G_2 \in u$, وأن $x \in G_1 \cap G_2$ و من ذلك نحصل على أن $(x \in G_1) \wedge (x \in G_2)$. لذا توجد $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ بحيث يكون

$$(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \subseteq G_1 \ , \quad (x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subseteq G_2 .$$

باختيار $\delta = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ نجد أن

$$(x-\delta, x+\delta) \subseteq G_1 \ , \quad (x-\delta, x+\delta) \subseteq G_2 .$$

إذاً

$$(x-\delta, x+\delta) \subseteq G_1 \cap G_2 .$$

وعليه فإن $G_1 \cap G_2 \in u$.

الشرط الثالث:

نفرض أن $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من عناصر u ، و أن $x \in \cup_i G_i$ إذاً يوجد

$G_{i_0} \in u$ بحيث أن $x \in G_{i_0}$ و من ثم يوجد $\delta > 0$ بحيث أن $(x-\delta, x+\delta) \subseteq G_{i_0}$. بما أن $G_{i_0} \subseteq \cup_i G_i$ ، فإن $(x-\delta, x+\delta) \subseteq \cup_i G_i$

إذاً $\cup_i G_i \in u$.

مثال (٣,٨)

بفرض أن N هي مجموعة الأعداد الطبيعية . العائلة:

$$\tau = \{\phi, N, A_n = \{1,2,,...,n\} : n \in N\}$$

تمثل توبولوجي على N .

الحل

الشرط الأول: واضح أ ن $N, \phi \in \tau$

الشرط الثاني :

بفرض أن $A_i, A_j \in \tau$ ، حيث $i, j \in N$ و عليه نحصل على $A_i \cap A_j = A_k \in \tau$ حيث أن $k = \min\{i.j\}$.

الشرط الثالث :

نفرض أن $A_{n_i} \in \tau$ حيث $i \in I$ و بالتالي فإن $A_{n_i} = \{1,2,...,n_i\}$ و عليه يكون $\cup A_{n_i} = \{1,2,...,k\} \in \tau$ ، حيث $k = \sup\{n_i : i \in I\}$ إذا كان k منته. أما إذا كان $k = +\infty$ فإن $\cup A_{n_i} = N \in \tau$.

مثال (٣,٩)

بفرض أن $X = \{0,1\}$ ، العائلة $S = \{\phi, \{1\}, X\}$ توبولوجي على المجموعة X . الزوج المرتب (X, S) فضاء توبولوجي، يسمى فضاء سيربنسكي (Sierpiński space) .

نظرية (٣,١)

بفرض أن X مجموعة غير خالية وأن كل من τ_1 و τ_2 توبولوجي على X، فإن التقاطع $\tau_1 \cap \tau_2$ توبولوجي على X.

البرهان

الشرط الأول :

بما أن $X,\phi \in \tau_1$ ، $X,\phi \in \tau_2$ فإن $X,\phi \in \tau_1 \cap \tau_2$.

الشرط الثاني:

نفرض أن $A,B \in \tau_1 \cap \tau_2$ ، إذاً $A,B \in \tau_1$ و $A,B \in \tau_2$ وبما أن كل من τ_1 و τ_2 تمثل توبولوجي على X فإن $A \cap B \in \tau_1$ و $A \cap B \in \tau_2$ وهذا يقتضي أن $A \cap B \in \tau_1 \cap \tau_2$.

الشرط الثالث:

نفرض أن $A_i \in \tau_1 \cap \tau_2$ ، إذاً $A_i \in \tau_1$ و $A_i \in \tau_2$

وبما أن كل من τ_1 و τ_2 تمثل توبولوجي فإن :

$$\cup A_i \in \tau_1 , \Rightarrow \cup A_i \in \tau_1 \cap \tau_2 \cup A_i \in \tau_2$$

لذا يمكن القول بأن $\tau_1 \cap \tau_2$ تمثل توبولوجي على X.

والآن بعد أن تأكدنا من أن تقاطع أي توبولوجيين هو توبولوجي ، فماذا عن الاتحاد $\tau_1 \cup \tau_2$؟. المثال التالي يبين أنه ليس من الضروري أن يكون الاتحاد $\tau_1 \cup \tau_2$ توبولوجي على X.■

مثال(٣,١٠)

نلاحظ أن كل من $\tau_1=\{X,\phi,\{a\}\}$ ، $\tau_2=\{X,\phi,\{b\}\}$ توبولوجي على المجموعة الغير خالية $X=\{a,b,c\}$.

من الواضح أن $\tau_1\cup\tau_2=\{X,\phi,\{a\},\{b\}\}$ ليس توبولوجي على X وذلك لأن $\{a\},\{b\}\in\tau_1\cup\tau_2$ ، بينما $\{a\}\cup\{b\}=\{a,b\}\notin\tau_1\cup\tau_2$. أي أن $\tau_1\cup\tau_2$ لا تحقق الشرط الثالث من شروط التوبولوجي.

> تعريف (٣,٢)
>
> نفرض أن كل من τ_1 و τ_2 توبولوجي على المجموعة الغير خالية X . يقال أن التوبولوجي τ_1 أضعف (coarser or weaker) من التوبولوجي τ_2 أو أن τ_2 أقوى (finer or stronger) من τ_1 إذا كان $\tau_1\subseteq\tau_2$ ويرمز لذلك بالرمز $\tau_1\leq\tau_2$

نلاحظ من التعريف السابق أنه إذا كان $\tau_1\subseteq\tau_2$ فإنه لكل مجموعة $G\in\tau_1$ ، فإن $G\in\tau_2$. كما تجدر الاشارة إلى أن التوبولوجي المتقطع على مجموعة غير خالية X هو أقوى توبولوجي ، و التوبولوجي التافه هو أضعف توبولوجي على X .

كما يجدر بنا توضيح أنه إذا كانت T عائلة كل التوبولوجيات الممكنة على المجموعة X فإن $(T,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

ولفهم العلاقة بين التوبولوجي الأقوى والتوبولوجي الأضعف، دعنا نتخيل فضاءً توبولوجياً يمكن تمثيل عناصره كمثل حمولة شاحنة ممتلئة بقطع الصخور، الحصيات و اتحاداتها تمثل المجموعات المفتوحة. تخيل أننا قمنا بعملية تفتيت الحصى إلى قطع صغيرة فسنجد أن عائلة الحصيات تم تكبيرها ومن ثم ننظر لها كما لو كانت توبولوجي أقوى من توبولوجي الحالة الأولى .

مثال (٣,١١)

نفرض أن $X = \{a,b,c,d\}$. و نفرض أن

$$\tau_1 = \{X,\phi,\{a\}\}$$

$$\tau_2 = \{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$$

$$\tau_3 = \{X,\phi,\{a,b\}\}$$

نلاحظ أن $\tau_2 \le \tau_1$ و $\tau_2 \le \tau_3$ ولكن $\tau_1 \not\le \tau_2$.

تعريف (٣,٣)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي. المجموعة $A \subseteq X$ تسمى جواراً للنقطة $p \in X$ إذا وجدت مجموعة $G \in \tau$ بحيث يكون $p \in G \subseteq A$.

مثال (٣,١٢)

في الفضاء الاقليدي كل مجموعة من المجموعتين $A = (-1,1)$ و $B = [-1,1]$ تعتبر جوار للنقطة $0 \in R$. بينما المجموعة $C = \{0,1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\dots\}$ لا تكون جواراً لهذه النقطة.

مثال (٣,١٣)

المجموعة وحيدة النقطة $\{x\}$ تكون جواراً للنقطة $x \in X$ في الفضاء المتقطع.

نظرية (٣,٢)

المجموعة $A \subseteq X$ ، في الفضاء التوبولوجي (X,τ) ،تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت جواراً لكل نقطة من نقاطها.

البرهان

اولاً نفرض أن $G \in \tau$ و أن $x \in G$ إذاً $x \in G \subseteq G$ أي أن G جوار للنقطة x و هذا صحيح لكل نقطة $x \in G$.

ثانيا: نفرض أن G هي جوار لكل نقطة من نقاطها . أي أنه لكل $x \in G$ توجد مجموعة مفتوحة U_x بحيث أن $x \in U_x \subseteq G$ و بهذا نحصل على أن $G = \cup\{U_x : x \in G\}$ و هذا يعني أن G مجموعة مفتوحة.■

تمارين (٣,١)

(١). اكتب كل التوبولوجيات الممكنة على المجموعة $X=\{a,b,c\}$.

(٢). قارن بين جميع التوبولوجيات المعرفة على المجموعة $X=\{a,b,c\}$

(٣). بفرض أن $A,B\subseteq X$ مجموعتين غير خاليتين. أذكر الشروط التي يجب توفرها في المجموعتين A,B كي تكون العائلة $\tau=\{X,\phi,A,B\}$ توبولوجي على X.

(٤). بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي و أن $A\subseteq X$. برهن أن $A\in\tau$ إذا و فقط إذا كان لكل $x\in A$ ، فإنه توجد مجموعة $G\in\tau$ بحيث أن $x\in G\subseteq A$.

(٥). بفرض أن $\{\tau_i\}$ عائلة من التوبولوجيات المعرفة على مجموعة X. برهن أن $\cap_i\tau_i$ هو توبولوجي على X. بينما $\cup_i\tau_i$ فليس من الضروري أن يمثل توبولوجي على X.

(٦). هل العائلة $\tau=\{R,(a,\infty):a\in R\}\cup\{\phi\}$ تشكل توبولوجي على مجموعة الأعداد الحقيقية R؟. و ضح ذلك؟.

(٧). هل العائلة $\tau=\{\phi,N,E_n=\{n,n+1,n+2,...,\}:n\in N\}$ تشكل توبولوجي على مجموعة الأعداد الطبيعية N.

(٨). في الفضاء R^n بين أن دوال المسافة $d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$ و $d_2(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$ و $d_\infty(x,y)=\sup|x_i-y_i|$ تعرف نفس التوبولوجي على الفضاء R^n.

(٣,٢) المجموعات المغلقة و نقاط النهاية (التراكم)

Closed Sets and Accumulation Points

لقد استخدمنا المجموعات المفتوحة كنقطة البداية في تعريف التوبولوجي .سوف نستخدم المجموعات المفتوحة فيما يلي في تعريف و دراسة بعضاً من المفاهيم الأساسية مثل المجموعات المغلقة، إغلاق المجموعات و نقاط النهاية.

تعريف (٣,٤)

المجموعة الجزئية A من الفضاء التوبولوجي (X,τ) تسمى مجموعة مغلقة إذا كانت المجموعة $X-A=A^c$ مفتوحة.

مثال (٣,١٤)

(i) المجموعة الجزئية $R \supset [a,b]$ مغلقة لأن مكملتها

$$R-[a,b]=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$$

مجموعة مفتوحة في R

(ii) المجموعة الجزئية $R \supset [a,+\infty)$ مغلقة لأن مكملتها

$$R-[a,+\infty)=(-\infty,a)$$

مجموعة مفتوحة في R

مثال (٣,١٥)

لتكن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$ توبولوجي معرفة على المجموعة الغير خالية $X=\{a,b,c,d,e\}$. بما أن كل عناصر التوبولوجي τ

هي مجموعات جزئية مفتوحة ، فإنه بأخذ المكمل لكل عنصر من عناصر العائلة τ نحصل على عائلة المجموعات المغلقة وهي :

$$\tau^{C} = \{\phi, X, \{b,c,d,e\}, \{c,d,e\}, \{b,d,e\}, \{d,e\}\}$$

نظرية (٣,٣)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي. عائلة المجموعات المغلقة في الفضاء (X,τ) تحقق الخواص التالية :

(i) X, ϕ مجموعتان مغلقتان.

(ii) تقاطع أي عدد من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة.

(iii) اتحاد عدد محدود من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة.

البرهان

يترك للقارئ لسهولته . ■

تعريف (٣,٥)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي و τ^{c} عائلة المجموعات المغلقة بالنسبة للتوبولوجي τ . الانغلاق (closure) للمجموعة A في الفضاء التوبولوجي (X,τ) يعرف بأنه تقاطع كل المجموعات المغلقة في X والتي تحتوى المجموعة الجزئية A . أي أن :

$$\overline{A} = \cap\{F : A \subseteq F, F \in \tau^{c}\}.$$

وهناك تعريف آخر مكافئ لهذا التعريف وهو : الانغلاق للمجموعة الجزئية A عبارة عن أصغر مجموعة جزئية مغلقة تحتوى A ، وذلك بأنه إذا كانت F مجموعة مغلقة بحيث أن $A \subseteq F$ فإن $A \subseteq \overline{A} \subseteq F$.

مثال (٣،١٦)

بفرض أن $X = \{a,b,c,d,e\}$ مجموعة غير خالية وأن التوبولوجي

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$$

معرف عليها. عائلة المجموعات الجزئية المغلقة في X هي :

$$\tau^C = \{\phi, X, \{b,c,d,e\}, \{a,b,d,e\}, \{b,d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e\}, \{a\}\}$$

(i) تقاطع كل المجموعات المغلقة التي تحتوى $\{b\}$

$$\begin{aligned}\overline{\{b\}} &= X \cap \{a,b,e\} \cap \{b,c,d,e\} \cap \{a,b,d,e\} \cap \{b,d,e\} \cap \{b,e\} \\ &= \{b,e\}\end{aligned}$$

(ii) تقاطع كل المجموعات المغلقة التي تحتوى $\{a,c\}$ هي $\overline{\{a,c\}} = X$

(iii) تقاطع كل المجموعات المغلقة التي تحوى $\{b,d\}$

$$\overline{\{b,d\}} = X \cap \{b,c,d,e\} \cap \{a,b,d,e\} \cap \{b,d,e\} = \{b,d\}$$

تعريف (٣،٦)

المجموعة الجزئية A من الفضاء التوبولوجي (X,τ) تسمى مجموعة كثيفة (dense set) إذا كان $\overline{A} = X$.

مثال (٣،١٧)

في المثال السابق نجد أن المجموعة الجزئية $\{a,c\}$ كثيفة لأن $\overline{\{a,c\}} = X$، بينما المجموعة الجزئية $\{b,d\}$ ليست كثيفة.

مثال (٣,١٨)

فـي الفضــاء التوبولــوجي الضــعيف (الغيــر متقطــع) (X,I)، حيــث أن $I=\{X,\phi\}$، نعلم أن المجموعة الوحيدة المغلقة فـي هـذا التوبولـوجي والتـي تحتوي A هي X، إذاً $\overline{A}=X$ لكل مجموعة جزئية غير خالية $A\subseteq X$.

مثال (٣,١٩)

في الفضاء التوبولـوجي المتقطـع (X,D)، حيـث أن $D=P(X)$، فـإن كـل مجموعة جزئية فيه تكون مغلقة ومفتوحـة فـي آن واحـد، و مـن ثـم فـإن أصـغر مجموعة مغلقة تحتوي المجموعة A هي المجموعة A ذاتها. أي أن $\overline{A}=A$. يكون $R\subseteq\overline{Q}$ وعليه يكون $\overline{Q}=R$. أي أن Q كثيفة في R.

نظرية (٣,٤)

لأي فضاء توبولوجي (X,τ) ولأي مجموعتين $A,B\subseteq X$ ، فإن :

(i) $A\subseteq\overline{A}$ لكل $A\subseteq X$

(ii) $A=\overline{A}$ إذا و فقط إذا كانت A مجموعة مغلقة.

(iii) إذا كانت $A\subseteq B$ ، فإن $\overline{A}\subseteq\overline{B}$.

البرهان

(i) إثبات هذه الفقرة يأتي مباشرة من التعريف ، حيث أن أصغر مجموعة مغلقة تحتوي المجموعة A هي $\overline{A}$.

(ii) نفرض أن $A=\overline{A}$، و حيث أن $\overline{A}$ مجموعة مغلقة (من التعريف) ، إذاً A مجموعة مغلقة.

من ناحية ثانية نفرض أن A مجموعة مغلقة، إذاً $\overline{A}\subseteq A$ ولكن $A\subseteq\overline{A}$. إذاً $A=\overline{A}$.

(iii) نفرض أن $A\subseteq B$ ، من الفقرة (i) نجد أن $A\subseteq B\subseteq\overline{B}$ و من ثم يكون فإن $A\subseteq\overline{B}$ و هذا يقتضي أن $A\subseteq\overline{A}\subseteq\overline{B}$ لأن $\overline{B}$ مغلقة . أي أن $\overline{A}\subseteq\overline{B}$.■

نظرية (٣,٥)

لأي فضاء توبولوجي (X,τ) و لأي مجموعتين $A,B\subseteq X$ ، فإن :

(i) $\overline{\phi}=\phi$

(ii) $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$

(iii) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

(iv) $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$.

البرهان

(i) حيث أن ϕ مغلقة فإن $\overline{\phi}=\phi$

(ii) من كون $\overline{A}$ مغلقة (التعريف) فإن $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$

(iii) لإثبات $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ نتبع الآتي:

$$\because A\subseteq A\cup B\Rightarrow\overline{A}\subseteq\overline{A\cup B} \qquad (1)$$

$$\because B\subseteq A\cup B\Rightarrow\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B} \qquad (2)$$

من (1)و (2) نجد أن

$$\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B} \qquad (3)$$

ومن ناحية ثانية. بما أن $B\subseteq\overline{B}$, $A\subseteq\overline{A}$ ، فإن $A\cup B\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$ وبما أن

المجموعة $\bar{A}\cup\bar{B}$ مجموعة مغلقة تحتوى المجموعة $A\cup B$ ، بينما أصغر مجموعة مغلقة تحتوى $A\cup B$ هي انغلاقها . أي أن :

$$A\cup B\subseteq\overline{A\cup B}\subseteq\bar{A}\cup\bar{B} \qquad (4)$$

من (3) ، (4) نجد أن :

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

(iv) لإثبات $\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$ نتبع الآتي:

$$\because A\cap B\subseteq A\Rightarrow\overline{A\cap B}\subseteq\bar{A} \qquad (1)$$

$$\because A\cap B\subseteq B\Rightarrow\overline{A\cap B}\subseteq\bar{B} \qquad (2)$$

من (1)و (2) نجد أن $\overline{A\cap B}\subseteq\bar{A}\cap\bar{B}$. ■

ولإثبات عدم تحقق التساوي في الفقرة (iv) نضع المثال التالي:

مثال (٣,٢٠)

نفرض أن $X=\{a,b,c,d\}$ و أن $\tau=\{X,\phi,\{a,c,d\}\}$ توبولوجي معرفة على X ، و إذا كان $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{b,d\}$ ، فإنه من السهل إثبات أن

$$\bar{A}=\{a,b,c,d\}=\bar{B}=X$$

و من ثم فإن

$$\bar{A}\cap\bar{B}=X \qquad (1)$$

بينما

$$\overline{A\cap B}=\overline{\{b\}}=\{b\} \qquad (2)$$

من (1) و (2) نحصل على $\bar{A}\cap\bar{B}\not\subset\overline{A\cap B}$.

الآن ننتقل لشرح طريقة أخرى لوصف إغلاق المجموعات. هذه

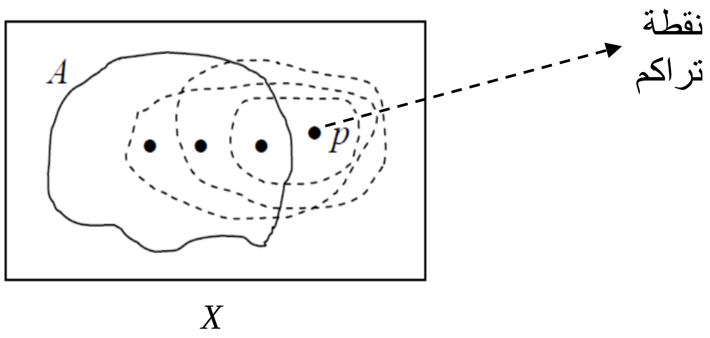
الطريقة تتم من خلال استخدام مفهوم نقاط النهاية (التراكم) للمجموعات .

تعريف (٣,٧)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي ، $p \in X$. يقال أن النقطة p هي نقطة تراكم أو نقطة نهاية (Limit Point) للمجموعة الجزئية $A \subseteq X$ إذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحتوى النقطة p تحتوى على نقطة واحدة على الأقل من A تختلف عن p, و يعبر عن ذلك رياضياً بالصيغة.

$$\forall G \in \tau, p \in G \Rightarrow (G - \{p\}) \cap A \neq \phi$$

مجموعة كل نقاط النهاية (التراكم) للمجموعة A تسمى مشتقة A ويرمز لها بالرمز $A^{`}$. أو $d(A)$.



شكل (٣,١)

مثال (٣,٢١)

بفرض أن $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$ توبولوجي على المجموعة $X = \{a,b,c,d,e\}$ ، فإذا كانت $A = \{a,b,c\} \subseteq X$ ، اوجد $A^{`}$.

الحل

(١). النقطة $a \in X$ ليست نقطة نهاية للمجموعة الجزئية A لأن المجموعة المفتوحة $\{a\} \in \tau$ والتي تحتوى النقطة a لا تحتوى على نقاط من A تختلف عن a. أي أن $a \notin A^{`}$.

(٢). النقطة $b \in X$ نقطة نهاية للمجموعة الجزئية A وذلك لأن المجموعات المفتوحة التي تحوى b هي $X, \{b,c,d,e\}$ و كل منها تحتوى على نقاط أخرى من A تختلف عن b. أي أن $b \in A^{`}$.

(٣). النقطة $c \in X$ ليست نقطة نهاية للمجموعة A، لأن المجموعة المفتوحة $\{c,d\} \in \tau$ والتي تحتوى على النقطة $c \in X$ لا تحتوى على نقاط من A تختلف عن c. أي أن $c \notin A^{`}$

(٤). بالمثل يمكن التأكد من كون كل من النقطتين $d, e \in X$ نقاط نهاية للمجموعة A. إذاً نقاط النهاية للمجموعة A هي مجموعة النقاط $A^{`} = \{b,d,e\}$.

مثال (٣,٢٢)

بفرض أن $X = \{a,b,c,d,e\}$ مجموعة غير خالية و أن التوبولوجي

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$$

معرف على المجموعة X، فإذا كانت $A = \{a,b,d\}$ ، اوجد $A^{`}$.

الحل

(١) العنصر $a \notin A^{`}$ لأن المجموعة المفتوحة $\{a\}$ تحوي العنصر a و لا تحوي أي عنصر من A يختلف عن a.

(٢) العنصر $b \in A'$ لأنه لا يوجد سوى مجموعتين مفتوحتين تحتويان النقطة b هما $\{b,c,d,e\}$, X و كل منهما تحوي نقاط من A مختلفة عن b . أي أن :

$$(\{b,c,d,e\}-\{b\}) \cap A \neq \phi \text{ و } (X-\{b\}) \cap A \neq \phi$$

(٣) العنصر $c \in A'$ لأن المجموعات المفتوحة التي تحوي العنصر c هي $X,\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}$ و جميعها تحتوي على نقاط من A.

(٤) العنصر $d \notin A'$ لأنه توجد مجحموعة مفتوحة $\{c,d\}$ تحوي العنصر d و لكنها لا تحوي أي عنصر من A يختلف عن d . أي أن $(\{c,d\}-\{d\}) \cap A = \phi$.

(٥) العنصر $e \in A'$ لأن المجموعات المفتوحة التي تحوي العنصر e هي $X,\{b,c,d,e\}$ و جميعهـا تحتـوي علـى نقـاط مـن A . إذاً $A' = \{b,c,e\}$.

مثال (٣,٢٣)

اوجد A' للمجموعة $A \subseteq X$ بالنسبة للفضاء المتقطع (X,D) .

الحل

نحن نعلم أنه في الفضاء المتقطع فإنه لكل نقطة $x \in X$ ، فـإن المجموعـة $\{x\}$ مفتوحة و من ثم يكون $(\{x\}-\{x\}) \cap A = \phi$ مما يعني أنه لكل $x \in X$ فإن $x \notin A'$. وعليه يكون $A' = \phi$.

مثال (٣,٢٤)

اوجد $A^{`}$ للمجموعة $A \subseteq X$ بالنسبة للفضاء الغير المتقطع (X,I) .

الحل

نحن نعلم أن $I=\{X,\phi\}$ أي أن X,ϕ هما المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان . فإذا كانت المجموعة A تحوي عنصر وحيد فقط أي أن $A=\{p\}$ فنجد أن المجموعة الوحيدة المفتوحة التي تحوي العنصر p هي المجموعة X و عليه نجد أن $(X-\{p\})\cap A=\phi$ إذاً $p \notin A'$ و أي نقطة أخرى $q \in X$ بحيث أن $q \neq p$ نجد أن $(X-\{q\})\cap A \neq \phi$ و من ثم يكون $q \in A'$ و حيث أن q نقطة اختيارية فإن $A'=X-\{p\}=\{p\}^C$.

أما إذا كانت المجموعة A تحوي أكثر من عنصر فإننا نجد أن $A'=X$.

وفي ضوء ذلك يمكن كتابة

$$A'=\begin{cases} X-\{p\} & if \quad A=\{p\} \\ X & otherwise \end{cases}$$

وكلمة (otherwise) تعني خلاف ذلك ، أي أن المجموعة A تحوي أكثر من عنصر.

نظرية (٣,٦)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي و أن $A,B \subseteq X$ ،فإن:

(i) إذا كانت $A \subseteq B$ فإن $A^{`} \subseteq B^{`}$

(ii)	$(A\cup B)^{`} = A^{`}\cup B^{`}$
(iii)	$(A\cap B)^{`} \subseteq A^{`}\cap B^{`}$

البرهان

(i) نفرض أن $p\in X$ نقطة نهاية للمجموعة A ، أي أن $p\in A^{`}$ وذلك يعنى أن كل مجموعة مفتوحة G تحتوى النقطة p تحتوى على نقطة واحدة على الأقل من A تختلف عن p . أي أن $(G\setminus\{p\})\cap A\neq\phi$

وبما أن $A\subseteq B$ فإن ذلك يؤدى إلى أن :

$$\phi\neq(G\setminus\{p\})\cap A\subseteq(G\setminus\{p\})\cap B$$

أي أن

$$(G\setminus\{p\})\cap B\neq\phi$$

وهذا معناه أن p نقطة نهاية للمجموعة الجزئية B ومن ثم فإن $p\in B^{`}$ وهذا يؤدى إلى أنه $A^{`}\subseteq B^{`}$.

(ii) من إثبات البند رقم (i) نستطيع الحصول على الآتي :

$$\because\ A\subseteq(A\cup B)\Rightarrow A^{`}\subseteq(A\cup B)^{`} \qquad (1)$$

$$\because\ B\subseteq(A\cup B)\Rightarrow B^{`}\subseteq(A\cup B)^{`} \qquad (2)$$

ومن (1) ,(2) نحصل على أن :

$$A^{`}\cup B^{`}\subseteq(A\cup B)^{`} \qquad (3)$$

لإثبات أن $(A\cup B)^{`} \subseteq A^{`}\cup B^{`}$ سوف نحاول إثبات أن أي عنصر غير موجود في $A^{`}\cup B^{`}$ هو غير موجود في $(A\cup B)^{`}$ و ذلك كما يلي:

نفرض أن $p\notin A^{`}\cup B^{`}$ فإن ذلك يؤدى إلى أن $p\notin A^{`}$ و $p\notin B^{`}$ ومن ثم فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان $G,H\in\tau$ بحيث يكون

$$p\in G,\ p\in H,\ (G-\{p\})\cap A=\phi\ ,\ (H-\{p\})\cap B=\phi$$

بما أن $p\in(G\cap H)\in\tau$ ، و في نفس الوقت

$$((G\cap H)-\{p\})\cap(A\cup B)=\phi$$

إذاً $p\notin(A\cup B)^{`}$ و عليه يكون

$$(A\cup B)^{`} \subseteq A^{`}\cup B^{`} \qquad (4)$$

ومن (3) و (4)نجد أن:-

$$(A\cup B)^{`} = A^{`}\cup B^{`}$$

(iii) من المعلوم أن $A\cap B\subseteq A.$ و $A\cap B\subseteq B$.

باستخدام العلاقة (i) نجد أن $(A\cap B)^{`}\subseteq A^{`}$ و $(A\cap B)^{`}\subseteq B^{`}$

ومن ثم يكون

$$\blacksquare\ (A\cap B)^{`}\subseteq A^{`}\cap B^{`}.$$

ولإثبات عدم صحة الاتجاه الآخر نضح المثال التالي:

مثال (٣,٢٥)

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a,b\},\{b\}\}$ توبولوجي على المجموعة $X=\{a,b,c\}$ ، فإذا كانت $B=\{b,c\}, A=\{a,c\}$ ، فإنه يتضح أن $A^{`}=\{c\}$ ، $B^{`}=\{a,c\}$ ، و هذا يؤدي إلى أن $A^{`}\cap B^{`}=\{c\}$

و بما أن $A\cap B=\{c\}$ ، فإن $(A\cap B)^{`}=\{c\}^{`}=\phi$

$$\therefore A^{`}\cap B^{`}=\{c\}\not\subset(A\cap B)^{`}=\phi .$$

نظرية (٣,٧)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي وأن $A\subseteq X$ فإن:

(i) المجموعة A تكون مغلقة إذا و فقط إذا كان $A^{`}\subseteq A$.

(ii) المجموعة $A^{`}\cup A$ مغلقة.

البرهان

نفرض أن A مجموعة مغلقة وأن $x\notin A$ ، فإن ذلك يؤدى إلى أن A^{c} مجموعة مفتوحة وأن $x\in A^{c}$ و هذا معناه أنه توجد مجموعة مفتوحة تحتوي على النقطة x و تحقق أن $A^{c}\cap A=\phi$ ، إذاً $x\notin A^{`}$ ، و بالتالي فإن أي نقطة خارج $A$ لا تصلح أن تكون نقطة نهاية. أي أن $A^{`}\subseteq A$.

من ناحية أخرى نفرض أن $A^{`}\subseteq A$ والمطلوب إثبات أن $A$ مجموعة مغلقة. ولكي نثبت ذلك سوف نفترض أن $x\in A^{c}$ و هذا يؤدي إلى أن $x\notin A^{`}$ وهذا معناه أنه توجد مجموعة مفتوحة G_{x} تحقق الآتي :

$$x \in G, (G_x - \{x\}) \cap A = \phi$$

ولكن $x \notin A$ ،إذاً $G_x \cap A = \phi$، و هذا يقتضي أن $G_x \subseteq A^c$.

(وذلك معناه : أنه لكل $x \in A^c$ توجد مجموعة مفتوحة G_x بحيث أن

$G_x \subseteq A^c$) أي أن A^c مجموعة مفتوحة نظراً لكونها اتحاد مجموعات

مفتوحة G_x ومن ثم A^c مفتوحة $\Leftrightarrow A$ مغلقة .

(ii) لإثبات أن $A \cup A^{`}$ مجموعة مغلقة، سوف نثبت أن $(A \cup A^{`})^c$ مجموعة مفتوحة و ذلك كما يلي:

نفرض أن $x \in (A \cup A^{`})^c$، إذاً $x \notin (A \cup A^{`})$ و هذا يعني أن $x \notin A^{`}$ و $x \notin A$. بما أن $x \notin A^{`}$ (أي أن x ليست نقطة نهاية للمجموعة A) ، فإنه توجد مجموعة مفتوحة G_x بحيث أن :

$$x \in G_x, (G_x - \{x\}) \cap A = \phi$$

ولكن $x \notin A$ ،إذاً $G_x \cap A = \phi$ و هذا يؤدي إلى أن $G_x \subseteq A^C$ ويفهم من هذا أن جميع نقاط المجموعة G_x لا يمكن أن تكون نقاط تراكم (نهاية) للمجموعة A و هذا يعني أن $G_x \cap A^{`} = \phi$ و من ثم $G_x \subseteq (A^{`})^C$.

إذاً لكل $x \notin (A \cup A^{`})$ نجد أن $G_x \subseteq A^c \cap (A^{`})^c = (A \cup A^{`})^c$. أي أن

$(A\cup A^{`})^{c}$ هي اتحاد مجموعات مفتوحة $G_x$ و من ثم فإنها مجموعة مفتوحة و هذا بدوره يقتضي أن مكملتها $A\cup A^{`}$ هي مجموعة مغلقة. ■

نظرية (٣،٨) بفرض أن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي (X,τ). فإن : $$\bar{A}=A\cup A^{`}$$

البرهان

أولاً : المجموعة $A\cup A^{`}$ مجموعة مغلقة (نظرية ٣،٨) و من ثم فإن :

$$A\subseteq \bar{A}\subseteq A\cup A^{`} \qquad (1)$$

حيث أن $\bar{A}$ هو اصغر مجموعة مغلقة تحتوى المجموعة A.

ثانيا : بما أن $A\subseteq \bar{A}$ ، $\bar{A}$ مجموعة مغلقة فإن $\bar{A}$ تحوى كل نقاط نهايتها من (نظرية ٣،٧). أي أن :

$$(\bar{A})^{`}\subseteq \bar{A} \qquad (3)$$

وبما أن $A\subseteq \bar{A}$ فمن نظرية (٣،٨)، نجد أن :

$$A^{`}\subseteq (\bar{A})^{`} \qquad (4)$$

من $(3), (4)$ نحصل على أن :

$$A^{`}\subseteq (\bar{A})^{`}\subseteq \bar{A} \qquad (5)$$

أي أن $A^{`}\subseteq \bar{A}$ وبما أن $A\subseteq \bar{A}$ فإن :

$$A\cup A^{`}\subseteq \bar{A} \qquad (6)$$

من $(1), (6)$ نحصل على أن $\bar{A}=A\cup A^{`}$. ■

تمارين (٣,٢)

(١). اثبت أن العائلة $\tau = \{R, \phi, (a,\infty) : a \in R\}$ تشكل توبولوجي على مجموعة الأعداد الحقيقية R، ثم :

- اوجد المجموعات المغلقة في R.
- اوجد $\{2,5,9,...\}'$ و $\{3,7\}'$
- اثبت أن :

$\overline{[3,7)} = (-\infty,7], \overline{\{5,33,56,85\}} = (-\infty,85], \overline{\{2,5,8,...\}} = R$.

(٢). اثبت أن العائلة $\tau = \{N, \phi, E_n = \{n, n+1, n+2, ...\} : n \in N\}$. تشكل توبولوجي على مجموعة الأعداد الطبيعية N، ثم اوجد المجموعات الكثيفة في N و اوجد $\overline{\{3,6,9,12,...\}}$, $\overline{\{7,24,47,85\}}$

(٣). بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي وأن $A, B \subseteq X$. اثبت أنه إذا كانت A مجموعة مفتوحة فإن $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$

(٤). بفرض أن (X,τ) فضاءً توبولوجياً و أن $A, B \subseteq X$ اثبت أن $\overline{A} - \overline{B} \subseteq \overline{A - B}$

(٥). بفرض أن (X,τ) فضاءً توبولوجياً و أن $A, B \subseteq X$.
ضع مثالا توضح فيه أن $\overline{A - B} \not\subset \overline{A} - \overline{B}$

(٦). برهن أن المجموعة A تكون كثيفة في X إذا و فقط إذا كانت $A^c \cap (A')^c = \phi$.

(٧). في الفضاء التوبولوجي (R,τ)) حيث $\tau = \{(a,\infty) : a \in R\} \cup \{R, \phi\}$
اثبت أن المجموعتين $A = \{2,4,6,...\}$, $B = \{1,3,5,...\}$ مجموعات كثيفة في R بينما $C = \{-2,-4,-6,...\}$ ليست كثيفة في R.

(٨). برهن أن كل مجموعة جزئية منتهية من مجموعة الأعداد الحقيقية تكون مغلقة بالنسبة للتوبولوجي المعتاد على R .

(٩). بين أنه إذا كانت A مجموعة جزئية منتهية من مجموعة الأعداد الحقيقية، فإن $A^{`}=\phi$ (بالنسبة للتوبولوجي المعتاد على R).

(١٠).نفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي و أن $\{A_i\}_{i\in I}$ عائلة من المجموعات الجزئية من X ، برهن أن:

$(i)\ \overline{(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i)} = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} \overline{A_i}$

$(ii)\ \overline{(\overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} A_i)} \subset \overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} \overline{A_i}$

$(iii)\ \overline{(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} A_i)} \supset \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} \overline{A_i}$.

(١١).بفرض أن $cl : P(X) \to P(X)$ دالة معرفة على مجموعة القوى $P(X)$ بحث تحقق الشروط التالية:

$(i)\ cl(\phi) = \phi;$

$(ii)\ A \subseteq cl(A),\ \forall A \subseteq X;$

$(iii)\ cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B),\ \forall A, B \subseteq X;$.

$(iv)\ cl(cl(A)) = cl(A),\ \forall A \subseteq X;$

هذه الدالة تسمى مؤثر الانغلاق.

برهن أن العائلة

$$\Im = \{G \subseteq X : cl(X - G) = X - G\}$$

هي توبولوجي على X وهذا التوبولوجي وحيد.

(٣,٣) النقاط الداخلية والخارجية ونقاط الحدود للمجموعات

Interior, Exterior and Boundary points of sets

بعد أن عرفنا فيما سبق مفهوم نقاط التراكم للمجموعات . فيما يلي سنقوم بتعريف أنواعاً أخرى من النقاط للمجموعات مثل النقاط الداخلية والنقاط الخارجية و نقاط الحدود.

تعريف (٣,٨)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً و A مجموعة جزئية من X.

(i) النقطة $p\in X$ ، تسمى نقطة داخلية للمجموعة A (interior point) إذا وجدت مجموعة جزئية مفتوحة G بحيث يكون $p\in G\subseteq A$.

مجموعة كل النقاط الداخلية للمجموعة A تسمى داخلية A ، يرمز لها بالرمز A° أو $\operatorname{int}(A)$.

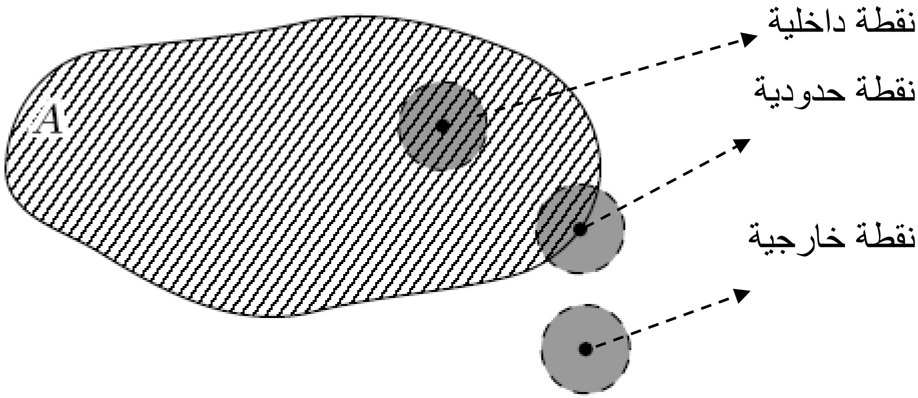
(ii) النقطة $q\in X$ ، تسمى نقطة خارجية (exterior point) للمجموعة A إذا وجدت مجموعة جزئية مفتوحة H بحيث يكون $q\in H\subseteq A^{c}=X-A$. أي أن $q\in(A^{c})^{\circ}$.

مجموعة النقاط الخارجية للمجموعة A يرمز لها بالرمز $ext(A)$.

(iii) النقطة $r\in X$ تسمى نقطة حدودية (boundary point) للمجموعة A إذا كانت r ليست نقطة داخلية و ليست نقطة خارجية. أي أن

$r\in X-(A^{\circ}\cup ext(A))$.

ويرمز لمجموعة النقاط الحدودية للمجموعة الجزئية A بالرمز $b(A)$ وتسمى مجموعة حدود A.



شكل (٣,٢)

مثال (٣,٢٦)

اعتبر التوبولوجي $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ المعرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$ ، و بفرض أن $A=\{b,c,d\}$ ، فمن السهل التأكد من أن :

(1) $A^{\circ}=\{c,d\}$

(2) $ext(A)=(A^{c})^{\circ}=\{a\}$

(3) $b(A)=\{b,e\}$.

مثال (٣,٢٧)

بفرض أن (X,D) الفضاء التوبولوجي المتقطع ، فإنه لأي مجموعة غير خالية $A\subseteq X$ نجد أن $A^{\circ}=A,\ ext(A)=A^{c}\ ,\ b(A)=\phi$.

مثال (٣,٢٨)

بفرض أن (X,I) الفضاء التوبولوجي الغير المتقطع ، فإنه لأي مجموعة

جزئية $A \subset X$ ($A \neq X$) نجد أن $b(A) = X$, $ext(A) = \phi$, $A^{\circ} = \phi$.

نظرية (٣,٩)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً و $A \subseteq X$ فإن :

(i) A° عبارة عن اتحاد كل المجموعات المفتوحة والجزئية من A .

(ii) A° مجموعة مفتوحة.

(iii) إذا كانت G مجموعة مفتوحة بحيث أن $G \subseteq A$ فإن $G \subseteq A^{\circ}$.

(iv) المجموعة A تكون مفتوحة إذا وإذا كان فقط $A = A^{\circ}$.

البرهان

نفرض أن $\{G_i\}$ عائلة كل المجموعات المفتوحة والجزئية من A

(i) ونفرض أن $p \in A^{\circ}$ فإنه توجد مجموعة مفتوحة $G_0 \subseteq A$ بحيث أن

$$p \in G_0 \subseteq A$$

بما أن $G_0 \in \{G_i\}$ فإن $p \in \cup_i G_i$ ومن ثم فإن هذا يؤدي إلى أن

$$A^{\circ} \subseteq \cup_i G_i \qquad (1)$$

من ناحية أخرى ، نفرض أن $q \in \cup_i G_i$ و هذا يؤدي إلى أنه توجد على الأقل مجموعة مفتوحة $G_0 \subseteq A$ و تحتوى النقطة q - أي أن $q \in G_0 \subseteq A$.

ومن ثم فإن q نقطة داخلية للمجموعة A ، أي أن $q \in A^{\circ}$ ، إذاً

$$\cup_i G_i \subseteq A^\circ \qquad (2)$$

من (1) ، (2) نجد أن :

$A^\circ = \cup_i G_i$.

(ii) بما أن $A^\circ = \cup_i G_i$ فإن A° مجموعة مفتوحة.

(iii) بما أن G مجموعة مفتوحة وجزئية من A فإن $G \in \{G_i\}$ ومن ثم فإن $G \subseteq \cup_i \{G_i\} = A^\circ \subseteq A$.

(iv) نفرض أن $A^\circ = A$ ، إذاً المجموعة A مفتوحة، و بفرض أن A مجموعة مفتوحة مع الأخذ في الاعتبار أن $A \subseteq A$ ، فإننا نحصل من على $A \subseteq A^\circ$ و لكن $A^\circ \subseteq A$ ، فإن $A^\circ = A$. ■

نظرية (٣,١٠)

ليكن (X, τ) فضاءً توبولوجياً و $A, B \subseteq X$ فإن :

(i) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(ii) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.

البرهان

(i) لإثبات $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ نتبع الآتي:

$$(A \cap B) \subseteq A \Rightarrow (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \qquad (1)$$

$$(A \cap B) \subseteq B \Rightarrow (A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ \qquad (2)$$

من (1) و (2) نحصل على

$$(A\cap B)^{\circ} \subseteq A^{\circ} \cap B^{\circ} \qquad (3)$$

بما أن $B^{\circ} \subseteq B$, $A^{\circ} \subseteq A$ ، فإن $A^{\circ} \cap B^{\circ} \subseteq (A\cap B)$. و لكن المجموعة $A^{\circ} \cap B^{\circ}$ مجموعة مفتوحة محتواه في $(A\cap B)$ ، فإن اكبر مجموعة مفتوحة في $(A\cap B)$ هي $(A\cap B)^{\circ}$.

إذاً $A^{\circ} \cap B^{\circ} \subseteq (A\cap B)^{\circ} \subseteq A\cap B$ ومن ثم فإن

$$A^{\circ} \cap B^{\circ} \subseteq (A\cap B)^{\circ} \qquad (4)$$

من (3) و (4) نحصل على $(A\cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$.

(ii) لإثبات $A^{\circ} \cup B^{\circ} \subseteq (A\cup B)^{\circ}$ نتبع الآتي:

$$A \subseteq (A\cup B) \Rightarrow A^{\circ} \subseteq (A\cup B)^{\circ}$$

$$B \subseteq (A\cup B) \Rightarrow B^{\circ} \subseteq (A\cup B)^{\circ}$$

$$A^{\circ} \cup B^{\circ} \subseteq (A\cup B)^{\circ} \blacksquare$$

المثال التالي يوضح أن التساوي ليس صحيحاً دائما.

مثال (٣,٢٩)

بفرض أن $X=\{a,b,c\}$ و أن $\tau=\{X,\phi,\{c\},\{a,b\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة X ، و بفرض أن $A=\{a,c\}$ و $B=\{b,c\}$. يتضح جلياً أن $A^{\circ}=\{c\}$, $B^{\circ}=\{c\}$, $A^{\circ} \cup B^{\circ}=\{c\}$ ولكن $A\cup B=X$ وعليه فإن $(A\cup B)^{\circ}=X$ أي أن $(A\cup B)^{\circ}=X \not\subset (A^{\circ}\cup B^{\circ})=\{c\}$.

لذا فإن $(A\cup B)^{\circ} \neq (A^{\circ}\cup B^{\circ})$.

مثال (٣,٣٠)

بفرض أن $A=[0,1]$ و $B=[1,2]$ فإن $A\cup B=[0,2]$ و من ثم نجد أن

$A^{\circ}=(0,1)$ و $B^{\circ}=(1,2)$. و كذلك $(A\cup B)^{\circ}=(0,2)$. بينما

$A^{\circ}\cup B^{\circ}=(0,1)\cup(1,2)$. إذاً $A^{\circ}\cup B^{\circ}\neq(A\cup B)^{\circ}$.

نظرية (٣,١١)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً وأن $A\subseteq X$ فإن :

$(i)\ (\overline{A})^{c}=(A^{c})^{o}$

$(ii)\ (A^{o})^{c}=\overline{(A^{c})}$

البرهان

١) إثبات الفقرة (i) نفرض أن $p\in X-\overline{A}$ فإن

$$p\in X-\overline{A}\Leftrightarrow x\notin\overline{A}\Leftrightarrow\exists G\in\tau, p\in G:G\cap A=\phi$$

$$\Leftrightarrow\exists G\in\tau, p\in G:p\in G\subseteq A^{c}$$

$$\Leftrightarrow p\in(A^{c})^{o}$$

اي أن $(A^{c})^{o}=(\overline{A})^{c}$

٢) إثبات الفقرة (ii) بوضع $B=A^{c}$ في (i) نحصل على المطلوب. ■

نظرية (٣,١٢)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً وأن $A \subseteq X$ فإن الخواص التالية متحققة:

$(i)\ b(A) = \overline{A} \cap \overline{(A^c)}$

$(ii)\ b(A) = b(A^c)$

$(iii)\ b(A) = \overline{A} - A^o$

البرهان

إثبات الفقرة (i)

$$b(A) = \{x \in X : x \notin A^o \wedge x \notin ext(A)\}$$

$$= \{x \in X : x \notin A^o \wedge x \notin (A^C)^o\}$$

$$= \{x \in X : x \notin \left(\overline{A^C}\right)^C \wedge x \notin (\overline{A})^C\}$$

$$= \{x \in X : x \in \overline{A^C} \wedge x \in \overline{A}\}$$

$$= \{x \in X : x \in \overline{A^C} \cap \overline{A}\} = \overline{A^C} \cap \overline{A}.$$

إثبات الفقرة (ii) يأتي من التعريف.

إثبات الفقرة (iii)

$$b(A) = \overline{A^C} \cap \overline{A} = \overline{A} \cap (A^O)^C = \overline{A} \cap (X - A^O)$$

$$= (\overline{A} \cap X) - (\overline{A} \cap A^O)$$

$$=\overline{A}-(\overline{A}\cap A^{o})$$

$$=\overline{A}-A^{o}.\blacksquare$$

نتيجة (٣,١)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً وأن $A\subseteq X$ فإن $b(A)$ مجموعة مغلقة.

البرهان

الإثبات يأتي من الفقرة (i) في النظرية السابقة حيث أن $b(A)=\overline{A}\cap\overline{A^{c}}.\blacksquare$

نتيجة (٣,٢)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً وأن $A\subseteq X$ فإن $\overline{A}=b(A)\cup A^{\circ}$

البرهان

بما أن $A^{\circ}\subseteq A\subseteq\overline{A}$ فإنه من الفقرة (iii) من النظرية السابقة نجد أن

$$A^{o}\cup b(A)=A^{o}\cup(\overline{A}-A^{o})=\overline{A}.\blacksquare$$

تمارين (٣,٣)

(١). إذا كانت $X=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعة ، و عُرف عليها التوبولوجي

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\}\}$$

فإذا كانت $A=\{c,d,e\}$ و $B=\{b\}$، فأوجد كل من :

$$ext(A)\,,\,b(A)\,,\,A^{\circ}\,,\;ext(B)\,,\,b(B)\,,\,B^{\circ}$$

(٢). اوجد $b(A)$ لأي مجموعة $A\subseteq X$ في الفضاء المتقطع $(X\;,D)$.

(٣). برهن أن $b(A)\subset A^{c}$ إذا و فقط إذا كانت A مجموعة مفتوحة.

(٤). برهن أن $b(A)\subset A$ إذا و فقط إذا كانت A مجموعة مغلقة.

(٥). برهن أن $b(A)=\phi$ إذا و فقط إذا كانت A مجموعة مفتوحة ومغلقة في آن واحد .

(٦). بفرض أن $(X\;,\tau)$ فضاء توبولوجي وأن $A,B\subseteq X$.

- برهن أن :

(1) $b(A\cup B)\subseteq b(A)\cup b(B).$

(2) $ext(A\cup B)=ext(A)\cap ext(B).$

- وضع بمثال أن $b(A\cup B)\neq b(A)\cup b(B).$.

(٧). بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{d\},\{a,d\},\{b,c,d\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$. حدد مجموعة جزئية $A\subseteq X$ بحيث يكون $A'=\{c\}$, $b(A)=\{b,c\}$, $A^{o}=\{a\},ext(A)=\{d\}$.

(٨). بين أن المجموعة A كثيفة في X إذا و فقط إذا كانت $A^{c}\cap(A')^{c}=\phi$.

(٣,٤) القواعد و القواعد الجزئيه Bases and Subbases

رأينا في بداية هذا الفصل أنه يمكن تعريف توبولوجي على مجموعة غير خالية X عن طريق تعريف المجموعات المفتوحة أو المجموعات المغلقة، ولكن هذه الطريقة قد تكون صعبة في بعض الأحيان. فهل توجد ثمة وسيلة أخرى للتعرف على التوبولوجي غير هذه الوسيلة ؟.

توجد طريقة أخرى للتعرف على التوبولوجي و ذلك عن طريق معرفة أصغر تجمع (جماعة) من المجموعات المفتوحة و هى ما يسمى بقاعدة أو أساس (Base) التوبولوجي.

تعريف (٣,٩)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً و لتكن β مجموعة جزئية من τ. تسمى β قاعدة (أو أساساً) للتوبولوجي τ إذا كان كل عنصر غير خالي من عناصر τ يمكن كتابته كاتحاد لعناصر من β . كل عنصر في β يطلق عليه اسم عنصر أساس.

تعريف (٣,١٠)

إذا كان β اساساً لتوبولوجي على مجموعة غير خالية X ، التوبولوجي τ المولد بالأساس β يمكن وصفه كالتالي: المجموعة الجزئية G من X تكون مفتوحة في X (أي ان $G\in\tau$) إذا كان لكل x في G يوجد عنصر اساس $B\in\beta$ بحيث أن $x\in B\subseteq X$

مثال (٣,٣١)

ليكن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$ توبولوجي على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$ فإن:

١) المجموعة $\beta_1=\{\{a\},\{b\},\{c,d\}\}$ تمثل قاعدة للتوبولوجي τ.

٢) المجموعة $\beta_2=\{\{a\},\{b\}\}$ لا تمثل قاعدة للتوبولوجي τ.

مثال (٣,٣٢)

في الفضاء التوبولوجي (X,τ)، تعتبر τ أساس (قاعدة) لنفسها.

مثال (٣,٣٣)

إذا كان (X,τ) الفضاء التوبولوجي المتقطع على المجموعة X، فإن المجموعة $\beta=\{\{x\}:x\in X\}$ تكون اساس (قاعدة) للتوبولوجي المتقطع.

مثال (٣,٣٤)

في فضاء التوبولوجي الإقليدي (R,τ) على الأعداد الحقيقية، مجموعة كل الفترات المفتوحة تشكل اساس (قاعدة) للتوبولوجي الإقليدي ، وذلك لأنه لأي مجموعة مفتوحة $H\in\tau$ و لأي نقطة $p\in H$ توجد فترة مفتوحة $I=(p-\varepsilon,p+\varepsilon)$، بحيث يكون $p\in I\subseteq H$.

نظرية (٣,١٤)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً و β عائلة من المجموعات الجزئية المفتوحة. فإن β تكون أساس للتوبولوجي τ إذا وفقط إذا كان لكل مجموعة جزئية مفتوحة H ولكل عنصر $x\in H$ يوجد عنصرأساس B من β بحيث أن $x\in B\subseteq H$

البرهان

لتكن β قاعدة للتوبولوجي τ و $x \in H \in \tau$. فإنه من التعريف نجد أن $H = \bigcup_{i \in I}\{B_i : B_i \in \beta\}$. ومنها يمكن إيجاد $i_0 \in I$ بحيث أن $x \in B_{i_0} \subseteq H$.

في المقابل نفرض أن $H \in \tau$ و أنه لكل $x \in H$ يوجد $B_x \in \beta$ بحيث أن $x \in B_x \in H$ و هذا يؤدى إلى أن $H = \cup\{B_x : x \in H\}$ ، أي أن كل عنصر من τ عبارة عن اتحاد عناصر من β و هذا هو إثبات أن β أساس للتوبولوجي τ.■

بعد كل هذه الأمثلة ، فرُب سائلٍ قد يسأل :ما هى الشروط اللازم توافرها في عائلة من المجموعات الجزئية في X لكي تكون أساس لتوبولوجي ما. ولشرح مدى أهمية هذا السؤال نورد المثال التالي:

مثال (٣,٣٥)

لتكن $X = \{a,b,c\}$ مجموعة و $\beta = \{\{a,b\},\{a,c\}\}$ عائلة من المجموعات الجزئية من X. و لو افترضنا أن β هذه هي أساس لتوبولوجي ما على X و ليكن τ ، يجب أن تكون كل من $\{a,b\},\{a,c\}$ عنصر في τ ونظراً لكونهما عنصران في التوبولوجي τ، فيجب أن يكون تقاطعهما أيضا عنصر في τ ، أي أن $\{a,b\} \cap \{a,c\} = \{a\} \in \tau$.

إلا أن هذا العنصر الجديد $\{a\}$ لا يمكن التعبير عنه كاتحاد عناصر من β. لهذا يجب علينا عند اختيار β يجب أن يتوفر فيه الشرط التالي:

$$B_1, B_2 \in \beta \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \cup\{B_i : B_i \in \beta\}$$

إذاً، فأي عائلة من المجموعات الجزئية لا تصلح أن تكون أساس لأي توبولوجي إلا إذا حققت الشرط السابق ، وهذا ما سوف نراه من خلال النظرية التالية:

نظرية (٣,١٥)

لتكن β عائلة من المجموعات الجزئية غير الخالية من X. فإن β تكون أساس لتوبولوجي τ على X إذا و فقط إذا كان :-

(i) $X = \cup\{B : B \in \beta\}$

(ii) لأي $B_1, B_2 \in \beta$، فإنه يمكن التعبير عن $B_1 \cap B_2$ كاتحاد لعناصر من β أو بمعنى مكافئ لكل $p \in B_1 \cap B_2$ توجد مجموعة جزئية B_p من β بحيث أن $p \in B_p \subseteq B_1 \cap B_2$.

البرهان

اولاً: نفرض أن β أساس للتوبولوجي τ على X. من تعريف الأساس نجد الآتي:

بما أن $X \in \tau$ فإنه يمكن التعبير عن X كاتحاد لعناصر من الاساس. أي أن $X = \cup\{B : B \in \beta\}$. وايضا إذا كانت $B_1, B_2 \in \beta$، فإن $B_1, B_2 \in \tau$ من ثم يكون $B_1 \cap B_2 \in \tau$ وهذا يقتضي أن $B_1 \cap B_2 = \cup\{B_i : B_i \in \beta\}$.

ثانيا: نفرض أن β عائلة كل المجموعات الجزئية غير الخالية من X التي تحقق الشرطين (i) و (ii) وأن عائلة كل المجموعات الجزئية غير الخالية من X التي يمكن التعبير عنها كاتحاد عناصر من β. أي أن

$$\tau = \{G \subseteq X : G = \cup B_i : B_i \in \beta\}$$

سوف نحاول الآن اثبات أن τ توبولوجي على X و بالتالي β تكون اساس لهذا التوبولوجي.

الشرط الأول من شروط التوبولوجي:

من (i) نجد أن $X \in \tau$ و بما أن $\phi = \cup \phi$ حيث أن $\phi \in \beta$. أي أن ϕ يمكن التعبير عنها كاتحاد لعناصر من β و عليه يكون $X, \phi \in \tau$.

الشرط الثاني من شروط التوبولوجي:

نفرض أن $G, H \in \tau$ ، فإن

$$H = \bigcup_{j \in J} \{B_j : B_j \in \beta\} \text{ و } G = \bigcup_{i \in I} \{B_i : B_i \in \beta\}$$

و من ثم نجد أنه لكل $i \in I$ و لكل $j \in J$

$$G \cap H = (\bigcup_{i \in I} B_i) \cap (\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (B_i \cap B_j)$$

و لكن $(B_i \cap B_j)$ عبارة عن اتحاد لعناصر من β ، فإن $G \cap H$ عبارة عن اتحاد عناصر من β و من ثم نجد أن $G \cap H \in \tau$.

الشرط الثالث من شروط التوبولوجي:

نفرض أن $G_i \in \tau$. إذاً لكل $i \in I$ $\quad G_i = \cup\{B : B \in \beta\}$ وعليه يكون $\bigcup_{i \in I} G_i$ عبارة عن اتحاد عناصر من β و من ثم فإن $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$.

أي أن τ توبولوجي X على اساسه β. ■

نظرية (٣,١٦)

بفرض أن X مجموعة غير خالية. لتكن β_1 اساس للتوبولوجي τ_1 على X و β_2 أساس للتوبولوجي τ_2 على X. فإن الشروط التالية متكافئة:

(i) التوبولوجي τ_1 تكون أقوى (finer) من التوبولوجي τ_2.

(ii) لكل $x \in X$ و لكل عنصرأساس $B_2 \in \beta_2$ يحوي x ، يوجد عنصر أساس $B_1 \in \beta_1$ بحيث أن $x \in B_1 \subseteq B_2$.

البرهان

$(i) \Leftarrow (ii)$ نفرض أن $x \in X$ و $B_2 \in \beta_2$ بحيث أن $x \in B_2$. بما أن $\beta_2 \subseteq \tau_2$ ، فمن التعريف و من كون $\tau_2 \subseteq \tau_1$ نجد أن $\beta_2 \subseteq \tau_1$. بما أن β_1 أساس للتوبولوجي τ_1 ، فإنه يوجد عنصر قاعدة $B_1 \in \beta_1$ بحيث أن $x \in B_1 \subseteq B_2$.

$(ii) \Leftarrow (i)$

نفرض أن $H \in \tau_2$ و نحاول إثبات أن $H \in \tau_1$. و لكي نصل إلى ذلك نفرض أن $x \in H$. بما أن β_2 اساس للتوبولوجي τ_2 ، فإنه يوجد عنصر $B_2 \in \beta_2$ بحيث أن $x \in B_2 \subseteq H$. من الشرط (ii) نجد أنه يوجد العنصر $B_1 \in \beta_1$ بحيث أن $x \in B_1 \subset B_2$ و من ثم يكون $x \in B_1 \subseteq H$ و هذا يؤدى إلى أن $H \in \tau_1$، أي أن τ_1 تكون أقوى (finer) من التوبولوجي τ_2.■

تعريف (3,11)

إذا كانت $d : X \times X \to R$ دالة مسافة على X . عائلة الكرات المفتوحة $\beta = \{B(x,\varepsilon) : x \in X , \varepsilon > 0\}$ تشكل أساس لتوبولوجي على X ، يسمي التوبولوجي المتري المولد بدالة المسافة d .

تعريف (3,12)

يقال للفضاء التوبولوجي (X,τ) أنه قابل للتمتر (Metrizable) إذا و فقط إذا كان τ مولداً بواسطة دالة مسافة على X.

مثال (3,36)

الفضاء التوبولوجي الاقليدي (R,u) هو فضاء قابل للتمتر، حيث أن دالة المسافة عليه هي دالة المسافة العادية التي تولد التوبولوجي المعتاد u.

مثال (3,37)

الفضاء التوبولوجي المتقطع (X,D) هو فضاء قابل للتمتر، حيث أن دالة المسافة البديهية هي التي تولد التوبولوجي المتقطع لأنه لكل $x \in X$، فإن

$$B_d(x,1) = \{y \in X : x \neq y\} = \{x\}$$

هي كرة مفتوحة ومن ثم فإن كل مجموعة أحادية العنصر هي مجموعة مفتوحة ومن ثم أي مجموعة جزئية من X هي مجموعة مفتوحة.

بعد أن عرفنا أن التوبولوجي المولد بالأساس β يمكن أن يوصف على أنه عائلة من الاتحادات الاختيارية لعناصر من القاعدة β. فرب سؤال قد يقع: ماذا لو بدأنا بجماعة من المجموعات الجزئية و أخذنا تقاطعات منتهية لها تماماً

مثل الاتحادات الاختيارية؟. هذا السؤال يقودنا نحو ، نوعية جديدة من الأساسات (القواعد) للتوبولوجي ، تسمى الأساسات (القواعد) الجزئية.

تعريف (3,13)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً ، العائلة $S\subseteq\tau$ تسمى قاعدة جزئية (أو أساساً جزئياً) للتوبولوجي τ إذا كانت العائلة الناتجة من تقاطعات منتهية لعناصر من S تشكل أساس β للتوبولوجي τ .

وهذا يعني أن كل عنصر أساس B من عناصر الأساس β عبارة عن تقاطع لعدد منتهٍ من عناصر S مع الأخذ في الاعتبار أن التقاطع الخالي يعطى المجموعة X.

مثال (3,38)

إذا كانت $X=\{a,b,c,d\}$ و $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ فإن العائلة $S=\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ تشكل قاعدة جزئية للتوبولوجي τ. بأخذ تقاطعات عناصر S لإيجاد القاعدة β كما يلي:

$$\{a\}\cap\{a\}=\{a\}\,,\,\{b\}\cap\{b\}=\{b\}\,,\,\{a\}\cap\{b\}=\phi$$

العائلة $\beta=\{X,\phi,\{a\},\{b\}\}$ أساس للتوبولوجي $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.

مثال (3,39)

هل العائلة $S=\{\{a\},\{c\},\{a,b\}\}$ تشكل اساس جزئي للتوبولوجي

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$$

على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$.

الحل

التقاطعات المنتهية لعناصر العائلة $S=\{\{a\},\{c\},\{a,b\}\}$ كالتالي:

$$\{a\}\cap\{a\}=\{a\}\ ,\ \{c\}\cap\{c\}=\{c\}\ ,\ \{a\}\cap\{c\}=\phi$$
$$\{a,b\}\cap\{a,b\}=\{a,b\}\ ,\ \{a,b\}\cap\{a\}=\{a\}\ ,\ \{a,b\}\cap\{c\}=\phi$$

واضح أن العائلة $\beta=\{X,\phi,\{a\},\{c\},\{a,b\}\}$ أساس للتوبولوجي τ . إذاً S هي أساس جزئي لهذا التوبولوجي.

مثال (3,40)

في الفضاء التوبولوجي المنفصل (X,D)، العائلة $S=\{\{a,b\}:a,b\in X\}$ اساس جزئي للتوبولوجي المتقطع (القوي) D على X . ولتوضيح ذلك نفرض أن $X=\{a,b,c\}$. التوبولوجي المتقطع يأخذ الصورة

$$D=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$$

فإن العائلة $S=\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$ تشكل اساس جزئي للتوبولوجي D. لأن التقاطعات المنتهية لعناصر S هي $\beta=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$ والتي تعتبر اساس للتوبولوجي D على X.

مثال (3,41)

العائلة $S=\{(-\infty,b),(a,\infty):a,b\in R\}$ تعتبر اساس جزئي للتوبولوجي u على مجموعة الاعداد الحقيقية R وذلك لأن التقاطعات المنتهية لعناصر S هي $\beta=\{(a,b)=(-\infty,b)\cap(a,\infty):a,b\in R,a<b\}$ و هي أساس للتوبولوجي u على R.

نختتم موضوع الاساس و الأساس الجزئي بتعريف نوع خاص من الفضاءات التوبولوجية يسمى بالفضاء ذو بعد صفري (zero-dimensional) و هذا الفضاء سيرد ذكره فيما بعد عند دراسة موضوع الفضاءات الغير مترابطة .

تعريف (3,14)

الفضاء التوبولوجي الذي عناصر أساسة أو أساسه الجزئي عبارة عن مجموعات مفتوحة و مغلقة في نفس الوقت يسمي فضاء بعده صفري أو فضاء ذو بعد صفري (zero-dimensional).

أمثلة

كل فضاء من الفضاءات التالية هو فضاء ذو بعد صفري:

(١) الفضاء المتقطع و الفضاء الغير متقطع.

(٢) كل فضاء توبولوجي (X,τ) بحيث أن $A \in \tau \Leftrightarrow A^c \in \tau$ هو فضاء بعده صفري.

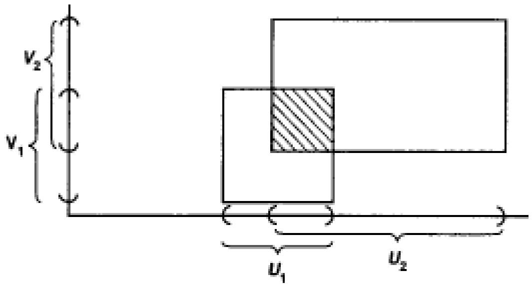
(٣,٥) توبولوجي الجداء (الضرب) Product topology

إذا كان كل من (X_1,τ_1) و (X_2,τ_2) فضاء توبولوجي . هل توجد طريقة لتعريف توبولوجي على مجموعة الضرب الديكارتي $X_1 \times X_2$ ؟. فيما يلي سوف ندرس كيفية تعريف مثل هذا التوبولوجي و ما هي خواصه.

تعريف (3,15)

بفرض أن كل من (X_1,τ_1) و (X_2,τ_2) فضاء توبولوجي. التوبولوجي الضربي (الجدائي) على $X_1 \times X_2$ هو التوبولوجي المولد بالأساس

$$\beta = \{U \times V : U \in \tau_1, V \in \tau_2\}.$$



شكل (٣,٣)

قبل الشروع في دراسة خواص هذا التوبولوجي دعنا نتأكد من أن هذا الأساس هو فعلاً أساس لتوبولوجي على $X_1 \times X_2$

الشرط الأول للأساس متحقق لأن $X_1 \times X_2 \in \beta$ و ذلك من تعريف β و من كون $X_1 \in \tau_1$, $X_2 \in \tau_2$.

الشرط الثاني للأساس متحقق لأنه إذا كانت $B_1, B_2 \in \beta$ حيث أن

$$B_1 = U_1 \times V_1, B_2 = U_2 \times V_2$$

فإن

$$B_1 \cap B_2 = (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$$
$$= (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$
$$= U \times V$$
$$= B_3 \in \beta$$

و ذلك لأن $(U_1 \cap U_2) = U \in \tau_1$ بموجب أن τ_1 توبولوجي على X_1 ، و أيضاً $(V_1 \cap V_2) = V \in \tau_2$ بموجب أن τ_2 توبولوجي على X_2 .

إذاً β أساس للتوبولوجي الضربي على $X_1 \times X_2$.

نظرية (٣,١٧)

بفرض أن β_1 أساس للتوبولوجي τ_1 على X_1 و β_2 أساس للتوبولوجي τ_2 على X_2 . العائلة:

$$\beta = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \beta_1, B_2 \in \beta_2\}$$

هي أساس لتوبولوجي على $X_1 \times X_2$.

البرهان

نفرض أن W مجموعة مفتوحة في $X_1 \times X_2$ و أن $q \in W$، حيث أن $q = (a,b)$. من تعريف التوبولوجي الضربي على $X_1 \times X_2$ ، فإنه يوجد عنصر أساس $U \times V$ بحيث أن

$$q = (a,b) \in U \times V \subseteq W$$

و بما أن β_1 أساس للتوبولوجي τ_1، فإنه توجد $B_1 \in \beta_1$ بحيث أن

$$a \in B_1 \subseteq U$$

و بما أن β_2 أساس للتوبولوجي τ_2، فإنه توجد $B_2 \in \beta_2$ بحيث أن

$$b \in B_2 \subseteq V$$

أي أنه يوجد $B_1 \in \beta_1$ و $B_2 \in \beta_2$ بحيث أن

$$q = (a,b) \in B_1 \times B_2 \subseteq U \times V \subseteq W$$

و هذا يعني أن $\beta = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \beta_1, B_2 \in \beta_2\}$ هي أساس للتوبولوجي الضربي على $X_1 \times X_2$. ■

مثال (٣,٤١)

نحن نعلم أن عائلة كل الفترات المفتوحة في R هي أساس للتوبولوجي المعتاد (الاقليدي) على R. بناءً على هذا يمكن اعتبار العائلة

$$\beta = \{(a,b) \times (c,d) : a < b, c < d, a,b,c,d \in R\}$$

تشكل أساساً لتوبولوجي على $R \times R$ يسمى التوبولوجي العادي على $R \times R$.

(٣,٦) الفضاءات الجزئية و التوبولوجي النسبي

Subspaces and Relative topology

نظرية (٣,١٨)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي و A مجموعة جزئية من X. العائلة

$$\tau_A=\{G\cap A: G\in\tau\}$$

تمثل توبولوجي على المجموعة الجزئية A.

البرهان

من السهل جداً اثبات أن العائلة $\tau_A=\{G\cap A: G\in\tau\}$ يحقق الشروط الثلاث للتوبولوجي وذلك لما يلي:

أولا الشرط (i)

$A,\phi\in\tau_A$ لأن

$$\phi=\phi\cap A \text{ و } A=X\cap A$$

حيث أن $X,\phi\in\tau$.

ثانياً الشرط (ii)

ليكن $V,W\in\tau_A$ أي أن توجد $G,H\in\tau$ بحيث أن

$$W=H\cap A, V=G\cap A$$

لذا نجد أن

$$\begin{aligned}V\cap W&=(G\cap A)\cap(H\cap A)\\&=(G\cap H)\cap A\end{aligned}$$

و بما أن $G,H\in\tau$ ، فإن $G\cap H\in\tau$ و من ثم يكون $V\cap W\in\tau_A$.

ثالثاً الشرط (iii)

نفرض أن $\{V_i\}_{i\in I}$ عائلة جزئية من τ_A، فإنه لكل $V_i\in\tau_A$ يوجد $G_i\in\tau$ بحيث يكون $V_i=A\cap G_i$. لكون $G_i\in\tau$ يقتضي أن $\cup_i G_i\in\tau$ و من ثم يكون $\cup_i V_i=\cup_i(A\cap G_i)=A\cap(\cup_i G_i)$ أي أن $\cup_i V_i\in\tau_A$.■

تعريف (3,16)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي و A مجموعة جزئية من X. التوبولوجي $\tau_A=\{G\cap A:G\in\tau\}$ يسمى التوبولوجي النسبي (relative topology) والفضاء التوبولوجي المولد (A,τ_A) يسمى فضاء جزئي (subspace) من الفضاء التوبولوجي (X,τ).

مثال (٣,٤٣)

بفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعة و أن التوبولوجي المعرف عليها هو

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$$

فإذا كانت $A=\{a,d,e\}\subseteq X$ مجموعة جزئية فإن :

$$\tau_A=\{G\cap A:G\in\tau\}=\{A,\phi,\{a\},\{d\},\{a,d\},\{d,e\}\}$$

مثال (٣,٤٤)

بفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعة غير خالية و ليكن

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,e\},\{a,b,c,e\},\{a,b,c,d\}\}$$

توبولوجي معرف عليها .فأوجد عناصر التوبولوجي النسبي τ_A على المجموعة الجزئية $A=\{a,c,e\}\subseteq X$.

الحل

التوبولوجي النسبي يعطى من العلاقة

$$\tau_A=\{G\cap A:G\in\tau\}=\{A,\phi,\{a\},\{a,c\},\{a,e\}\}.$$

مثال (٣,٤٥)

بفرض أن R مجموعة الأعداد الحقيقية ومعرف عليها التوبولوجي المعتاد (الاقليدي). التوبولوجي النسبي المعرف على مجموعة الأعداد الصحيحة هو التوبولوجي المتقطع على Z حيث أنه لكل عدد صحيح a نجد أن $\{a\}=Z\cap(a-\frac{1}{2},a+\frac{1}{2})$.

تمهيدة (٣,٢)

ليكن (A,τ_A) فضاءً جزئياً من الفضاء التوبولوجي (X,τ). فإذا كانت $A\in\tau$ و $B\in\tau_A$. فإن B مفتوحة بالنسبة للتوبولوجي τ.

البرهان

بما أن $B\in\tau_A$، فإنه توجد مجموعة $G\in\tau$ بحيث أن $B=A\cap G$. بما أن كل من $G,A\in\tau$ فإن $B=A\cap G\in\tau$. ■

مثال (٣,٤٦)

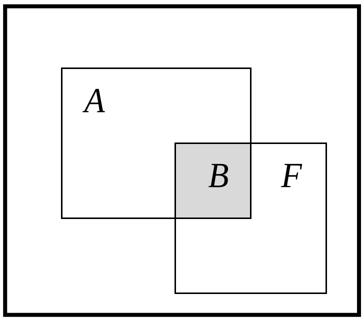
لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية و معرف عليها التوبولوجي T المولد بعائلة الفترات المفتوحة $(a,b)=\{x:a<x<b\}$ ولتكن $A=[0,1)\cup\{2\}$ مجموعة جزئية من R. المجموعة وحيدة العنصر $\{2\}$ مفتوحة بالنسبة للتوبولوجي النسبي T_A لأنها عبارة عن تقاطع الفترة المفتوحة $(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$ مع المجموعة A. أي أن $\{2\}=A\cap(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$.

نظرية (٣,١٩)

ليكن (A,τ_A) فضاءً جزئياً من الفضاء التوبولوجي (X,τ). المجموعة $B\subseteq A$ تكون مغلقة بالنسبة للتوبولوجي النسبي τ_A إذا و فقط إذا وجدت مجموعة جزئية F مغلقة بالنسبة للتوبولوجي τ بحيث أنه $B=F\cap A$.

البرهان

أولا : نفرض أن $B=F\cap A$ حيث أن F مجموعة مغلقة في X (انظر الشكل التالي).



شكل (٣،٤)

المكملة $F^c = X - F$ تكون مجموعة مفتوحة ، أي أن

$F^c = (X - F) \in \tau$ وهذا يؤدى إلى أنه

$(F^c) \cap A = (X - F) \cap A \in \tau_A$ (من تعريف الفضاء الجزئي)

وبما أن

$$A - B = A - (A \cap F) = A \cap (A \cap F)^c$$

$$= A \cap (A^c \cup F^c)$$

$$= (A \cap A^c) \cup (A \cap F^c)$$

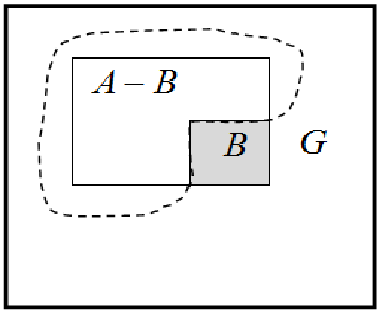
$$= A \cap F^c = A \cap H : H \in \tau .$$

فإن $(A - B) \in \tau_A$ ومن ثم فإن B مجموعة مغلقة بالنسبة للتوبولوجي τ_A.

ثانيا : نفرض أن B مجموعة مغلقة بالنسبة للتوبولوجي النسبي τ_A.

وهذا يؤدى إلى أن $(A - B) \in \tau_A$. نفرض أن $H = (A - B) \in \tau_A$

ولذا فإنها تكون عبارة عن تقاطع مجموعة مفتوحة في X ولتكن $G \in \tau$ مع A (انظر الشكل التالي).



شكل (٣,٥)

أي أن $H=(A-B)=A\cap G:G\in\tau$ و هذا يؤدى إلى أن:

$$B=A-H=A-(A\cap G)=A\cap G^c=A\cap(X-G)=A\cap F$$

حيث أن F مجموعة مغلقة بالنسبة للتوبولوجي τ.■

نظرية (3,20)

ليكن (A,τ_A) فضاءً جزئياً من الفضاء التوبولوجي (X,τ) و أن $B\subseteq A$. فإن $A\cap(\overline{B})_X=(\overline{B})_A$، حيث أن $(\overline{B})_A$ هو إغلاق المجموعة B بالنسبة للتوبولوجي τ_A و $(\overline{B})_X$ هو إغلاق المجموعة B بالنسبة للتوبولوجي τ.

البرهان

باستخدم تعريف إنغلاق المجموعة الجزئية B بالنسبة للتوبولوجي النسبي τ_A

$$\begin{aligned}
(\overline{B})_A &=\cap\{K:B\subseteq K,A-K\in\tau_A\}\\
&=\cap\{K=A\cap F:B\subseteq(A\cap F),\ F^c\in\tau\}\\
&=\cap\{A\cap F:B\subseteq F,\ F^c\in\tau\}\\
&=A\cap(\cap\{F:B\subseteq F,\ F^c\in\tau\})\\
&=A\cap(\overline{B})_X.■
\end{aligned}$$

(٣,٧) المتتاليات في الفضاءات التوبولوجية

Sequences in topological spaces

سوف نختم هذا الفصل بتعريف تقارب المتتاليات في الفضاءات التوبولوجية حتى نلاحظ الفرق بين تقارب المتتاليات في الفضاءات التوبولوجية و التقارب الذي درسناه سابقاً في مقررات التحليل.

تعريف (٣,١٧)

بفرض أن (X,τ) فضاء التوبولوجي و $(x_n)_n \in X$ متتالية (متتابعة) . يقال أن المتتالية $(x_n)_n$ تتقارب من النقطة $x_0 \in X$ إذا كان لكل مجموعة مفتوحة $G \subseteq X$ تحوي x_0 يوجد عدد طبيعي $n_0 \in N$ بحيث أن $x_n \in G$ لكل $n \geq n_0$.

مثال (٣,٤٧)

ليكن (X,τ) الفضاء التوبولوجي التافه (الغير متقطع). المتتالية $(x_n)_n$ في X تتقارب من كل نقطة $x \in X$ لأن المجموعة الوحيدة المفتوحة و الغير خالية هي X.

مثال (٣,٤٨)

ليكن (X,D) الفضاء التوبولوجي المتقطع. المتتالية $(x_n)_n$ في X تكون تقاربية إذا و فقط إذا وجد $n_0 \in N$ بحيث أن $x_n = x_{n_0}$ لكل $n \geq n_0$.

مثال (٣,٤٩)

ليكن (N,C) فضاء توبولوجيا المكملات المنتهية على مجموعة الأعداد الطبيعية. لتكن $(x_n)_n \in N$ متتالية بحيث أن $x_n \neq x_m$ لكل $n \neq m$. إذاً $(x_n)_n$ متقاربة و كل عدد طبيعي هو نهاية لهذه المتتالية في (N,C).

نظرية (٣,٢١)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي، و أن $A \subseteq X$. فإذا وجدت متتالية من نقاط المجموعة A تتقارب إلى النقطة x ، فإن $x \in \overline{A}$ و العكس يكون صحيحا إذا كان (X,τ) قابل للتمتر .

البرهان

نفرض أن $x_n \in A$ و أن $x_n \to x$. إذاً كل جوار G للنقطة x يحوي نقطة من A أي ان $G \cap A \neq \phi$ و هذا يعني أن $x \in \overline{A}$ (نظرية (٣,٤)).

من ناحية أخرى، نفترض أن الفضاء (X,τ) قابل للتمتر و أن $x \in \overline{A}$.

لإثبات أنه توجد متتالية $(x_n)_n$ بحيث أن $x_n \to x$ نفرض أن $d: X \times X \to R$ متري للتوبولوجي τ على X. لكل عدد صحيح موجب n نختار الكرة المفتوحة $B_d(x,\frac{1}{n})$ و التي مركزها x و نصف قطرها $\frac{1}{n}$. نختار المتتالية x_n كنقطة من تقاطع الكرة $B_d(x,\frac{1}{n})$ مع المجموعة A ، أي أن

$$x_n \in A \cap B_d(x,\tfrac{1}{n})$$

نلاحظ الآن أن أي مجموعة مفتوحة G تحوي x فإنها تحوي أيضاً كرة مفتوحة $B_d(x,\varepsilon)$ مركزها x و نصف قطرها ε. بإختيار العدد الصحيح $n_0 \in N$ بحيث يكون $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$، فإن المجموعة المفتوحة G تحوي الحدود x_i لجميع قيم $i \geq n_0$ و هذا يعني أن $x_n \to x$. ■

تمارين (٣,٤)

(١) إذا كانت $X=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعة ، و عُرف عليها التوبولوجي $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\}\}$ و بفرض أن $A=\{a,c,d\}\subseteq X$ ، فأوجد التوبولوجي النسبي τ_A.

(٢) إذا كان (X,τ) فضاء توبولوجي متقطع، $Y\subseteq X$. فبين أن الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) هو ايضا فضاء توبولوجي متقطع على Y.

(٣) إذا كان (X,I) الفضاء التوبولوجي الغير متقطع، $Y\subseteq X$. فبين أن الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) هو ايضا فضاء غير متقطع على Y.

(٤) بفرض أن $Y=(0,1]$ فضاء جزئي من مجموعة الأعداد الحقيقية R. اوجد انغلاق المجموعة $A=(0,\frac{1}{2})$ في كل من الفضاء الجزئي Y و R.

(٥) إذا كانت $X=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعة، و عُرف عليها التوبولوجي التالي: $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\}\}$

فإذا كانت $A=\{c,d,e\}$ و $B=\{b\}$ ، فأوجد

$$A',\ \overline{A},\ ext(A),\ b(A),\ A^{\circ},\ B',\ \overline{B},\ ext(B),\ b(B),\ B^{\circ}$$

(٦) ليكن (A,τ_A) فضاءً جزئياً من الفضاء التوبولوجي (X,τ) و أن $B\subseteq A$. فاثبت أن:

- $(B)'_A=(B)'_X\cap A$ ، حيث أن $(B)'_A$ هو مجموعة نقاط النهاية للمجموعة B بالنسبة للتوبولوجي τ_A و $(B)'_X$ مجموعة نقاط النهاية للمجموعة B بالنسبة للتوبولوجي τ.

- $A\cap (B)_X^o=(B)_A^o$ ، حيث أن $(B)_A^o$ هو مجموعة النقاط الداخلية للمجموعة B بالنسبة للتوبولوجي τ_A و $(B)_X^o$ مجموعة النقاط الداخلية للمجموعة B بالنسبة للتوبولوجي τ.

(٧) إذا كانت $X=\{a,b,c\}$. بين أن العائلة $S=\{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$ هي اساس جزئي للتوبولوجي $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$.

(٨) بفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$. اوجد التوبولوجي المولد بالعائلة $\{\{a\},\{a,b,c\},\{c,d\}\}$.

(٩) اعتبر كل من التوبولوجي $\tau_1=\{A: A\subseteq R\}$ والتوبولوجي $\tau_2=\{R,\phi\}$ على مجموعة الاعداد الحقيقية R. ادرس تقارب المتتالية التي حدها العام $a_n=\frac{1}{n}$ في الفضائين (R,τ_1) و (R,τ_2).

(١٠) بفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$. اوجد التوبولوجي المولد بالعائلة $\{\{a\},\{a,b,c\},\{c,d\}\}$.

(١١) برهن أن العائلة $S\subset P(X)$ تكون أساس جزئي لتوبولوجي وحيد على المجموعة الغير خالية X.

الموضوع	Presentation tupe	Youtube
الفضاءات التوبولوجية ١	https://slideator.com/watch/?v=jQKrj87LTOf	https://www.youtube.com/watch?v=gtOE8yjz3Nk&t=161s
النقاط الداخلية	https://slideator.com/watch/?v=nCbilCAbWKX	https://www.youtube.com/watch?v=jtH0ZAtHIfM&t=32s

الفصل الرابع

الدوال المتصلة والتكافؤ التوبولوجي

Continuous Functions and Topological Equivalence

مقدمة

درسنا في الفصل الثالث الفضاءات التوبولوجية و لاحظنا أن المجموعات المفتوحة تلعب دوراً رئيسياً في بناء هذه الفضاءات كما إنها تمثل عناصر التوبولوجي المعرف على مجموعة ما. و أيضا بعد دراستنا لمفهوم الدوال المتصلة بين الفضاءات المترية و الدور الذي تلعبه المجموعات المفتوحة في تحقيق مفهوم الاتصال لهذه الدوال سوف نحاول في هذا الفصل دراسة مفهوم اتصال الدوال في حالة غياب مفهوم الدالة المترية . في هذه الحالة سيتم تعريف الدوال المتصلة بين الفضاءات التوبولوجية، مع دراسة خواص الدوال المتصلة . أخيرا سنتعرض لمفهوم الدوال المفتوحة و الدوال المغلقة وكذلك التشاكل التوبولوجي.

(٤,١) الدوال المتصلة في الفضاء المتري

Continuous functions in Metric Space

قد تعاملنا فى دارستنا لمبادئ التحليل الرياضى (حساب التفاضل والتكامل) مع مفهوم الدوال المستمرة (المتصلة) حيث كان يقصد بأن الدالة :

$$f : R \to R$$

تكون متصلة عند النقطة $a \in R$ إذا تحقق الشرط:

لكل $x \in R$ يجب أن يكون " العدد الحقيقي $f(x)$ قريباً من العدد الحقيقى $f(a)$ بمقدار يتناسب مع قرب العدد الحقيقي x من العدد a في مجال الدالة".

أي أن اقتراب العدد الحقيقي x من العدد الحقيقي a يقتضي اقتراب العدد الحقيقي $f(x)$ من العددالحقيقي $f(a)$. ويمكن إعادة صياغة هذا المعنى بصورة أكثر وضوحاً بأن يقال أن الدالة $f : R \to R$ تكون متصلة عند النقطة $a \in R$ إذا تحقق الشرط :

كلما اقتربت x من a بدرجة (ولتكن $\delta > 0$) فإن $f(x)$ تقترب من $f(a)$ بدرجة مناظرة (ولتكن $\varepsilon > 0$).

لذلك نستطيع صياغة تعريف اتصال الدالة $f : R \to R$ في الصيغة الرياضية التالية:

تعريف (٤,١)

يقال أن الدالة $f : R \to R$ متصلة عند النقطة $a \in R$ إذا وفقط إذا كان لكل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$، يوجد عدد حقيقي مناظر $\delta > 0$ بحيث أنه إذا كان

$|x-a|<\delta$ فإن $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

يقال أن الدالة f متصلة متى كانت متصلة عند كل نقطة من نقاط مجالها.

مما تقدم نلاحظ أن الصيغة $|x-a|<\delta$ تعنى أن $a-\delta<x<a+\delta$ أو بمعنى آخر أن x تنتمي إلى الفترة المفتوحة (الجوار) $(a-\delta,a+\delta)$ وبالمثل فإن الصيغة $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ تعنى أن العدد الحقيقى $f(x)$ ينتمي إلى الفترة المفتوحة (الجوار) $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ ولذا نستطيع إعادة صياغة تعريف الاتصال للدالة $f:R\to R$ بأن نقول أنه إذا كان لأي $\varepsilon>0$ فإنه يوجد $\delta>0$ بحيث يتحقق $f(x)\in(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ كلما كان $x\in(a-\delta,a+\delta)$.

مثال(٤,٢)

لتكن $f:R\to R$ دالة معرفة على الاعداد الحقيقية بالصيغة

$$f(x)=ax+b,\ \ \forall(a,b)\in R, a\neq 0$$

. هذه الدالة متصلة لجميع نقاط المجموعة R.

الحل:

نفرض $y\in R$ و $\varepsilon>0$. لكي نحصل على $\delta>0$ مناسبة إلى ε نستخدم المتباينة $|(ax+b)-(by+c)|<\varepsilon$ وهذا يؤدي إلى إن $|x-y|<\frac{\varepsilon}{|a|}$ و بهذا لو وضعنا $\delta=\frac{\varepsilon}{|a|}$ فنجد أن الدالة $f:R\to R$ متصلة عند النقطة y وبما أن y نقطة اختيارية من R فإن الدالة متصلة على R.

فيما يلي سنحاول تعميم تعريف مفهوم الاتصال من اتصال الدوال على مجموعة الاعداد الحقيقية ليكون على أي فضاء متري.

تعريف(٤,٣)

ليكن كل من (X_1,d_1) و (X_2,d_2) فضاء متري. يقال أن الدالة

$$f : X_1 \to X_2$$

دالة متصلة عند النقطة $a \in X_1$ إذا كان لأي $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta > 0$ بحيث أنه

$$\forall x \in B_{d_1}(a,\delta) \Rightarrow f(\mathrm{x}) \in B_{d_2}(f(\mathrm{a}),\varepsilon)$$

وهذا يكافئ القول بأن:

$$f(B_{d_1}(\mathrm{a},\delta)) \subseteq B_{d_2}(f(\mathrm{a}),\varepsilon) .$$

نظرية (٤,٤)

ليكن كل من (X_1,d_1) و (X_2,d_2) فضاءاً مترياً. يقال أن الدالة

$$f : X_1 \to X_2$$

متصلة عند النقطة $a \in X_1$ إذا كان لأي $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون

$$B_{d_1}(\mathrm{a},\delta) \subseteq f^{-1}(B_{d_2}(f(\mathrm{a}),\varepsilon)) .$$

البرهان

يترك للقارئ كتمرين.■

فى كل ما قدمناه مازلنا نستخدم تعريف "$\varepsilon - \delta$" الشهير فى إثبات الاتصال للدوال ولكنه بعد أن عرفنا الآن ما هو المقصود بالجوار لنقطة ما، وأن الكرة المفتوحة هى جوار لكل نقطة بها نستطيع إعادة صياغة مفهوم

الاتصال وذلك بإعادة صياغة الشرطين المتكافئين الذين ورد ذكرهما فيما سبق و هما.

$$f(B_{d_1}(\mathrm{a},\delta)) \subseteq B_{d_2}(f(\mathrm{a}),\varepsilon)$$

أو

$$B_{d_1}(\mathrm{a},\delta) \subseteq f^{-1}(B_{d_2}(f(\mathrm{a}),\varepsilon))$$

وحيث أن $B_{d_2}(f(\mathrm{a}),\varepsilon)$ كره مفتوحة وجوار للنقطة $f(a)$ وأيضا $B_{d_1}(\mathrm{a},\delta)$ كره مفتوحة وجوار للنقطة a.

فإذا وضعنا $N = B_{d_1}(\mathrm{a},\delta)$ و $M = B_{d_2}(f(\mathrm{a}),\varepsilon)$ فإن الشرطين السابقين يمكن وضعهما فى الصيغة:

$$N \subseteq f^{-1}(M) \quad \text{أو} \quad f(N) \subseteq M$$

نظرية (٤,٥)

ليكن كل من (X,d) و (Y,d') فضاء متري. الدالة

$$f: X \to Y$$

تكون متصلة عند النقطة $x \in X$ إذا وفقط إذا كان لكل جوار V للنقطة $f(x)$ ، يوجد جوار مناظر U لنقطة x بحيث أن

$$U \subseteq f^{-1}(V) \quad \text{أو} \quad f(U) \subseteq V$$

البرهان.

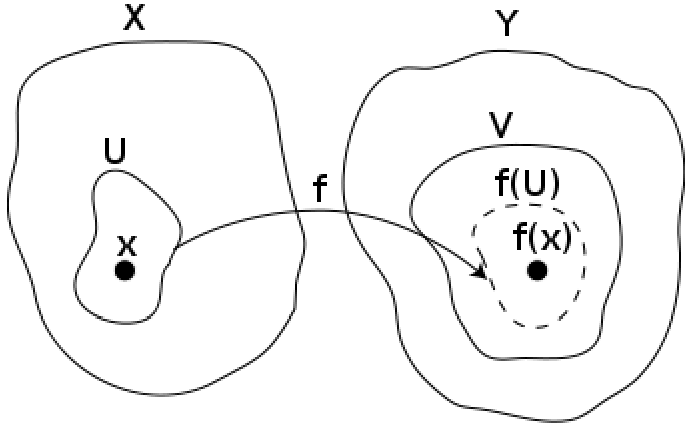
أولا : نفترض أن الدالة متصلة عند النقطة $x \in X$ و أن V جوار للنقطة $f(x)$ فإنه يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث $B(f(x),\varepsilon) \subseteq \mathrm{V}$

بما أن الدالة متصلة عند النقطة x فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$f[B(x,\delta)] \subseteq B(f(x),\varepsilon) \subseteq V \text{.........................} (1)$$

بما أن الكره المفتوحة $U = B(x,\delta)$ جوار للنقطة x فإن :

$$f(U) = f[B(x,\delta)] \subseteq B(f(x),\varepsilon) \subseteq V \text{...................} (2)$$



شكل (٢,٩)

ثانيا : إذا كانت الدالة $f: X \to Y$ تحقق الشرط : لكل جوار V للنقطة $f(x)$

فإنه يوجد جوار U للنقطة x بحيث أن $f(U) \subseteq V$. المطلوب إثبات أن

الدالة متصلة عند النقطة $x \in X$. ولكى نثبت ذلك ، فلا بد من اثبات أنه

لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث يتحقق

$$f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon) \qquad (٢)$$

نقوم باختيار $V = B(f(x),\varepsilon)$ جواراً للنقطة $f(x)$ وبما أن $f(U) \subseteq V$ فإن ذلك

يؤدى إلى أن $f(U) \subset V = B(f(x),\varepsilon)$ وبما أنه يوجد جوار U للنقطة x فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$B(x,\delta) \subseteq U \qquad (3)$$

من (2), (3) نحصل على :

$$f[B(x,\delta)] \subseteq f(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V} = B(f(\mathrm{x}),\varepsilon)$$

أى أن :

$$f[B(x,\delta)] \subseteq B(f(\mathrm{x}),\varepsilon)$$

أى أن الدالة متصلة عند النقطة $x \in X$ وبهذا يكتمل البرهان. ■

فى النظرية السابقة فإن الدالة $f : X \to X^{\backslash}$ يقال أنها متصلة إذا كانت متصلة عند كل نقاط المجموعة X وذلك بالقول بإنه لكل جوار M لمجموعة نقاط من $X^{\backslash}$ فإن $f^{-1}(\mathrm{M})$ تكون جواراً لمجموعة نقاط من X وهكذا لكل نقاط المجموعة X. ونظراً لعدم فاعلية هذا المفهوم (جوار مجموعة نقاط) فيمكننا استبداله بمفهوم أكثر سهولة فى التعامل معه وهو مفهوم المجموعة المفتوحة ، حيث أن كلمة مفتوحة تعنى أنها جوار لكل نقطة من نقاطها. فلذا بدلا من كلمة جوار لمجموعة نقاط ، سوف نستخدم كلمة مجموعة مفتوحة (تحوى هذه النقاط وفى ذات الوقت هى جوار لهذه النقاط). واستناداً لهذا المفهوم نستطيع تعميم مفهوم الاتصال بصورة أكثر عمومية مما سبق كما .

نظرية (٤,٦)

ليكن كل من (X,d) *و* $(X^{\backslash},d^{\backslash})$ *فضاءً مترياً. الدالة*

$$f : X \to X^{\backslash}$$

تكون متصلة إذا وإذا كان فقط لكل مجموعة مفتوحة $H \subseteq X^{\backslash}$ فإن الصورة

العكسية $f^{-1}(H)$ تكون مجموعة مفتوحة فى X.

البرهان.

اولاً: نفترض أن الدالة f متصلة وأن المجموعة الجزئية $H \subseteq X^{\backslash}$ مجموعة مفتوحة. والمطلوب إثبات أن الصورة العكسية $f^{-1}(H)$ تكون مجموعة مفتوحة أي أنها جوار لجميع نقاطها ولكى نصل لهذه النتيجة نفترض أن

$a \in f^{-1}(H)$

، فإن ذلك يؤدى إلى أن $f(a) \in H$ ، بما أن H مجموعة مفتوحة (جوار لكل نقطة من نقاطها) ومن ثم تكون جواراً للنقطة $f(a)$.

بما أن الدالة $f : X \to X^{\backslash}$ متصلة ، فإن ذلك يؤدي إلى أن $f^{-1}(H)$ تكون جوار للنقطة a. و حيث أن a نقطة اختيارية ، فإن $f^{-1}(H)$ تكون جواراً لجميع نقاطها من ثم فإن $f^{-1}(H)$ تكون مجموعة مفتوحة.

ثانيا: نفترض أنه لكل مجموعة مفتوحة $H \subseteq X^{\backslash}$ فإن $f^{-1}(H)$ تكون مفتوحة والمطلوب إثبات أن الدالة متصلة . لإثبات ذلك نفرض أن $a \in X$ و أن $a \in f^{-1}(H)$ ، إذاً $f(a) \in H$. بما أن H مجموعة مفتوحة فهي جوار للنقطة $f(a)$ وأيضا $f^{-1}(H)$ هي جوار للنقطة a. بوضع $M = f^{-1}(H)$ فمن النظرية السابقة نجد أن الدالة متصلة عند النقطة الاختيارية a ومن ثم تكون متصلة عند كل نقطة من نقاط X.■

مثال (٤,٧)

كل من الدالة $f : R \to R$ المعرفة بالصيغة $f(x) = 3x + 1$ والدالة العكسية

$f^{-1}: R \to R$ و المعطاة بالصيغة $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}(y-1)$ هي دالة متصلة كما هو معلوم من خلال دراستنا للتفاضل والتكامل وهذه الدالة هي تقابل.

(٤,٢) الدوال المتصلة Continuous functions

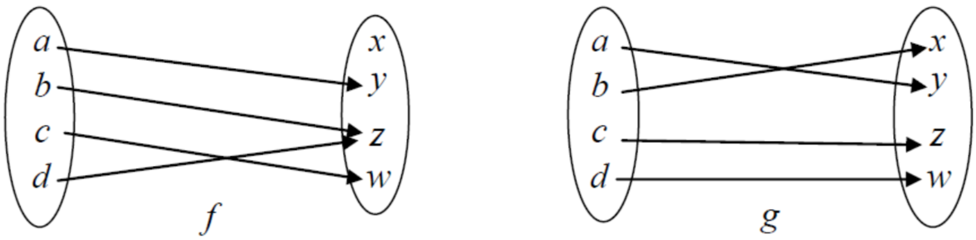
تعريف (٤,٨)

ليكن كل من (X,τ) و (Y,υ) فضاءً توبولوجياً. يقال أن الدالة $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ متصلة إذا كان لأي مجموعة مفتوحة H في Y فإن الصورة العكسية $f^{-1}(H)$ تكون مفتوحة في X . أي أن

$$\forall\ H \in \upsilon \Rightarrow f^{-1}(H) \in \tau$$

مثال (٤,٩)

اعتبر التوبولوجي $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$ معرف على المجموعة $X = \{a,b,c,d\}$ و التوبولوجي $\upsilon = \{Y, \phi, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}, \{y,z,w\}\}$ على المجموعة $Y = \{x,y,z,w\}$. فإذا كانت $f: X \to Y$ و $g: X \to Y$ دالتين معرفتين بالمخطط التالي



شكل (٤,١)

أولا : الدالة $f:X\to Y$ دالة متصلة لأن الصورة العكسية لكل عنصر من عناصر التوبولوجي υ هي عنصر من عناصر التوبولوجي τ أي أنه :

$$\forall\ H\in\upsilon\Rightarrow f^{-1}(H)\in\tau\,.$$

ثانيا : الدالة $g:X\to Y$ ليست متصلة لأن المجموعة الجزئية $\{y,z,w\}$ تنتمي إلى υ في حين أن صورتها العكسية $g^{-1}(\{y,z,w\})=\{a,c,d\}$ لا تنتمي إلى التوبولوجي τ .

ملاحظة:

بالرغم من كون الدالة f متصلة و لكنها لا تحافظ على صفة كون المجموعة مفتوحة أو مغلقة، فمثلا $\{a,b\}\in\tau$ و لكن $f(\{a,b\})=\{y,z\}\notin\upsilon$ و ايضا المجموعة $\{d\}$ مغلقة في X ولكن $f(\{d\})=\{z\}$ ليست مغلقة في Y.

نظرية (٤,١٠)
الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ) تكون متصلة إذا و فقط إذا كان لأي مجموعة مغلقة F في Y فإن الصورة العكسية $f^{-1}(F)$ تكون مغلقة في X.

البرهان
نفرض أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة وأن $F\subseteq Y$ مجموعة مغلقة. إذاً المجموعة F^{C} مفتوحة. وعلية فإن المجموعة $f^{-1}(F^{C})$ مفتوحة في X .

بما أن $(f^{-1}(F))^C \in \tau$ $f^{-1}(F^C)=(f^{-1}(F))^C\in\tau$. إذاً $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X.

من ناحية أخرى نفرض أنه لكل مجموعة مغلقة $F\subseteq Y$ يكون $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X ، و المطلوب إثبات أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة ،لذلك نفرض أن $G\subseteq Y$ مجموعة مفتوحة في Y، إذاً المجموعة G^C هي مجموعة مغلقة في Y، و عليه تكون $f^{-1}(G^C)$ مجموعة مغلقة في X، ولكن $f^{-1}(G^C)=(f^{-1}(G))^C$ ، إذاً $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة، ومن ثم فإن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة. ■

نظرية (٤,١١)

بفرض أن (X,τ)، (Y,υ)، (Z,δ) ثلاث فضاءات توبولوجية و أن كل من

$$f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon) \text{ و } g:(Y,\upsilon)\to(Z,\delta)$$

دالة متصلة، فإن دالة التحصيل $g\circ f:(X,\tau)\to(Z,\delta)$ تكون متصلة.

البرهان

يترك للقارئ كتمرين. ■

نظرية (٤,١٢)

الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة إذا و فقط إذا كان

$$f\left(\overline{A}\right)\subseteq\overline{f(A)}\ ,\quad \forall\ A\subseteq X$$

البرهان

نفرض أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة و أن $A\subseteq X$.

$$\because\ f(A)\subseteq\overline{f(A)}\Rightarrow A\subseteq f^{-1}(f(A))\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$$

لكن $\overline{f(A)}$ مجموعة مغلقة، إذاً $f^{-1}(\overline{f(A)})$ مجموعة مغلقة لأن الدالة متصلة ، ولكن $\overline{A}$ هي أصغر مجموعة مغلقة تحتوي على المجموعة A

$$\because\ A\subseteq\overline{A}\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})\Rightarrow f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$$

من ناحية أخرى نفرض أن

$$f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}\ ,\quad \forall\ A\subseteq X$$

و المطلوب إثبات أن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة متصلة ، لذلك نفرض أن

$F\subseteq Y$ مجموعة مغلقة و أن $A=f^{-1}(F)$ ، إذاً

$$f(\overline{A})=f\left(\overline{f^{-1}(F)}\right)\subseteq\overline{f(f^{-1}(F))}\subset\overline{F}=F$$

$$\therefore\ \overline{A}\subseteq f^{-1}(F)=A$$

$\therefore$ المجموعة A مغلقة، أي أن الصورة العكسية لأي مجموعة مغلقة هي أيضا مجموعة مغلقة، ومن ثم فإن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة. ■

نظرية (٤,١٣)

الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ) تكون متصلة إذا وإذا فقط كان :

$$f(b(A))\subseteq[f(A)\cup b(f(A))]$$

لكل $A\subseteq X$.

البرهان

أولاً نفرض أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة ، فإن $f\left(\overline{A}\right)\subseteq\overline{f(A)}$ لكل $A\subseteq X$. بما أن $b(A)\subseteq\overline{(A)}$ و كذلك $\overline{f(A)}=f(A)\cup b(f(A))$ فيكون لدينا

$$f(b(A))\subseteq[f(A)\cup b(f(A))]\ ,\ \forall\ A\subseteq X$$

ثانياً نفرض أن الدالة f تحقق الشرط:

$$f(b(A))\subseteq[f(A)\cup b(f(A))]\ ,\ \forall\ A\subseteq X$$

و المطلوب إثبات أن الدالة f دالة متصلة .

لتكن $A\subseteq X$ فإن $\overline{A}=A\cup b(A)$ و منه ينتج أن:

$$f(\overline{A})=f(A)\cup f(b(A))$$

و لكن من الفرض نحصل على

$$f(\overline{A})\subseteq f(A)\cup f(b(A))$$

و بما أن $\overline{f(A)}=f(A)\cup b(f(A))$ فإننا نحصل على أن

$f\left(\overline{A}\right)\subseteq\overline{f(A)}\ ,\ \forall\ \ A\subseteq X$.

أي أن الدالة f متصلة .■

نظرية (٤،١٤)

لتكن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة متصلة من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ). إذا كانت $x_n\in X$ متتالية تقاربية بحيث أن $\lim\ x_n=x$ ، فإن $f(x_n)\in Y$ متتالية تقاربية ونهايتها $f(x)$.

البرهان

نفرض أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة و أن $x_n \to x$ و نريد إثبات أن $f(x_n)\to f(x)$. نفرض أن H هي جوار للنقطة $f(x)$ ، فإن $f^{-1}(H)$ هي جوار النقطة x و حيث أن $x_n \to x$ ، فإنه يوجد عدد n_0 بحيث أن $x_n \in f^{-1}(H)$ لكل $n \ge n_0$ وهذا يقتضي أن $f(x_n)\in H$ لكل $n \ge n_0$. أي أن $f(x_n)\to f(x)$.■

على القارئ ملاحظة أن عكس هذة النظرية ليس صحيحاً دائماً. ولكنه يكون صحيحاً في حالة كون الفضاء يحقق شرطاً ما يسمى مسلمة العد الأولى و هو ما يتحقق عندما يكون الفضاء قابل للتمتر كما في النظرية التالية:

نظرية (٤,١٥)
لتكن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة متصلة من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ). فإذا كان (A,τ_A) فضاءً جزئياً من (X,τ) فإن دالة التقييد $f\|_A : A\to Y$ تكون متصلة على A.

البرهان

لتكن $f:X\to Y$ دالة متصلة. حيث أن $f|_A = f\cap(A\times Y)$ ، فإنه لأي دالة $g:A\to X$ بحيث أن $g(a)=a$ لكل $a\in A$ ، يمكن بسهولة ملاحظة أن الدالة $g:A\to X$ متصلة على A ومن ثم تكون دالة التحصيل $f|_A = f\circ g$ متصلة على A أيضا.■

في نهاية هذا الموضوع نستطيع القول ،بناءاً على الملاحظة على مثال (٤,١) ، أن الدالة المتصلة ليس من الضروري أن تضمن نقل المجموعات المفتوحة (المغلقة) من مجال الدالة إلى مجموعات مفتوحة (مغلقة) في مجالها

المقابل. الآن نقدم نوعاً من الدوال يضمن الحفاظ على صفة كون مجموعة مفتوحة أو مغلقة من المجال إلى المجال المقابل.

(٤,٣) الدوال المفتوحة و الدوال المغلقة Open and Closed Functions

تعريف (٤,١٦)

ليكن كل من (X,τ) و (Y,υ) فضاءً توبولوجياً. يقال أن الدالة

$$f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$$

(١) دالة مفتوحة إذا كانت صورة كل مجموعة مفتوحة في X هي مجموعة مفتوحة في Y.

(٢) دالة مغلقة إذا كانت صورة كل مجموعة مغلقة في X، هي مجموعة مغلقة في Y.

مثال (٤,١٧)

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b\}$ و $\upsilon=\{Y,\phi,\{x\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $Y=\{x,y\}$. بفرض الدالتين التاليتين:

$$f:X\to Y \qquad\qquad g:X\to Y$$

$$f(a)=f(b)=x \qquad\qquad g(a)=y\ ,\ g(b)=x$$

واضح أن الدالة $f:X\to Y$ مفتوحة و ليست مغلقة، لأن $\{b\}$ مجموعة مغلقة بينما صورتها $f(\{b\})=\{x\}$ ليست مغلقة.

كما يتضح أيضا أن الدالة $g:X\to Y$ ليست مفتوحة ولا مغلقة (يمكن التأكد من ذلك).

مثال (٤,١٧)

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c\}$ و أن $\upsilon=\{Y,\phi,\{x\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $Y=\{x,y\}$ و أن $f:X\to Y$ دالة معرفة كما يلي:

$$f(a)=f(b)=y \quad , \quad f(c)=x$$

واضح أن الدالة $f:X\to Y$ مغلقة و ليست مفتوحة.

يمكن للقارئ ملاحظة أن هناك دالة قد تكون مفتوحة و لكنها ليست مغلقة ، و العكس بالعكس .ولكن ما هو الشرط الضروري و الكافي لكي تحمل دالة ما الصفتين معا ، أي إنها تكون دالة مفتوحة و مغلقة في آن واحد.هذا الشرط يتحدد من خلال النظرية التالية:

نظرية (٤,١٩)

دالة التقابل $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ تكون مفتوحة إذا و فقط إذا كانت مغلقة.

البرهان

نفرض أن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة مفتوحة ، وأن $F\subseteq X$ مجموعة مغلقة،

$$F=(X-G):G\in\tau$$

و من ثم فإن

$$f(F)=f(X-G)=f(X)-f(G)=Y-f(G)$$

بما أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مفتوحة ، فإن $f(G)\in\upsilon$ و من ثم فإن $f(F)=Y-f(G)$ مجموعة مغلقة ، إذاً الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مغلقة.

و بالمثل يمكن إثبات الجزء الثاني من النظرية.■

نظرية (٤,٢٠)

لتكن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ). الدالة f تكون مفتوحة إذا وإذا فقط كان

$$f(A^{\circ})\subseteq(f(A))^{\circ}\ ,\ \forall\ A\subseteq X$$

البرهان

نفرض أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مفتوحة ، و المطلوب إثبات أن $f(A^{\circ})\subseteq(f(A))^{\circ}\ ,\ \forall\ A\subseteq X$ نفرض أن $A\subseteq X$ ، بما أن $A^{\circ}\subseteq A$ ، فإن $f(A^{\circ})\subseteq f(A)$ و علية فإن $f(A^{\circ})$ مجموعة مفتوحة (لأن f دالة مفتوحة) و من ثم فإن $f(A^{\circ})=(f(A^{\circ}))^{\circ}\subseteq(f(A))^{\circ}$. أي أن

$$f(A^{\circ})\subseteq(f(A))^{\circ}$$

ثانيا: نفرض أن الشرط : $f(A^{\circ})\subseteq(f(A))^{\circ}\ ,\ \forall\ A\subseteq X$ متحقق ، والمطلوب إثبات أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مفتوحة. لإثبات ذلك نختار $G\in\tau$ مجموعة مفتوحة في X . من الشرط نجد أن

$$f(G)=f(G^{\circ})\subseteq(f(G))^{\circ}$$

و لكن من المعلوم أن $(f(G))^{\circ}\subseteq f(G)$ ، إذاً $f(G)=(f(G))^{\circ}$ ، أي أن $f(G)$ مجموعة مفتوحة و من ثم ، فإن الدالة f مفتوحة.■

نظرية (٤,٢١)

الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ تكون مغلقة إذا و فقط إذا كان

$\overline{f(A)}\subseteq f\left(\overline{A}\right),\quad \forall\ A\subseteq X$.

البرهان

أولاً: نفرض أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مغلقة و أن $A\subseteq X$. بما أن $A\subseteq \overline{A}$ ، فإن $f(A)\subseteq f(\overline{A})$.

بما أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مغلقة، فإن $f\left(\overline{A}\right)$ مجموعة مغلقة تحتوي $f(A)$ و من ثم نجد أن $\overline{f(A)}\subseteq f(\overline{A})$.

ثانياً: نفرض أن الشرط $\overline{f(A)}\subseteq f\left(\overline{A}\right),\quad \forall\ A\subseteq X$ متحقق ، و بفرض أن $F\subseteq X$ مجموعة مغلقة. بوضع $A=F$ في الشرط نجد أن:

$$f(F)\subseteq\overline{f(F)}\subseteq f\left(\overline{F}\right)=f(F)$$
$$\therefore\ \overline{f(F)}=f(F)$$

أي أن $f(F)$ مجموعة مغلقة، وعلية فإن الدالة

$f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مغلقة.■

(٤,٤) التشاكل (التكافؤ) التوبولوجي Homeomorphisms

بعد أن تعرفنا على مفهوم كل من الدوال المتصلة و الدوال المفتوحة والدوال المغلقة و لاحظنا أن الدوال المتصلة ليس من الضروري أن تنقل المجموعات المفتوحة (المغلقة) من المجال إلى مجموعات مفتوحة (مغلقة) في المجال المقابل. لذا نقول أن الدوال المتصلة فقط لا تحافظ على هذه الخاصية . ورب قائل أنه لو أضفنا إلى الدالة المتصلة صفة كونها مفتوحة، فهذه الدالة تستطيع الحفاظ فقط على خواص المجموعات المفتوحة دون المغلقة. وللحصول على نوع من هذه الدوال و التي تحافظ على صفة المجموعة سواء كانت مفتوحة أو مغلقة عندما تنقلها من المجال إلى المجال المقابل يجب أن تكون هذه الدوال تقابل بالإضافة إلى كونها متصلة و مفتوحة.

أهمية هذا النوع من الدوال لا تقتصر على الحفاظ فقط على صفات المجموعات من حيث كونها مفتوحة أو مغلقة بل تتعدى ذلك للعديد من الخواص الأخرى التي تحفظ تحت تأثير مثل هذه الدوال وهذه تسمى الخواص التوبولوجية. ومن أجل ذلك سوف نطلق على هذا النوع من الدوال أسم الدوال التوبولوجية أو التشاكل التوبولوجي.

تعريف (٤,٢٢)

الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ من الفضاء (X,τ) إلى الفضاء (Y,υ) تسمى دالة توبولوجية (تشاكل توبولوجي) إذا و فقط إذا كانت تقابل و متصلة ومفتوحة. كما يقال للفضائيين (X,τ) و (Y,υ) أنهما متكافئين توبولوجياً أو متشاكلين إذا وفقط إذا وجد بينهما تشاكل و يعبر عن ذلك بالرمز $(X,\tau)\cong(Y,\upsilon)$ وأحيانا يكتب $X\cong Y$.

مثال (٤,٢٣)

بفرض أن $f : X \to Y$ دالة معرفة بالصيغة

$$f(x) = (b-a)x + a \ , \ x \in X \ a, b \in R$$

حيث أن $X = [0,1]$، $Y = [a,b]$ مع اعتبار التوبولوجي المعتاد على $[0,1], [a,b]$. هذه الدالة متباينة (وضح ذلك؟)

نفرض أن $y \in [a,b]$ و أن $f(x) = (b-a)x + a = y$ و منها نحصل على أن $x = \dfrac{y-a}{b-a} = f^{-1}(y) \in [0,1]$ و هذا يؤكد أن الدالة f شاملة وبالتالي فإن الدالة العكسية تكون موجودة. كما يمكن ملاحظة أن الدالة $f : X \to Y$ مفتوحة لأنه بفرض المجموعة المفتوحة $B = (x, y) \subseteq X$ حيث أن $0 \le x < y \le 1$. فإن صورة هذه المجموعة تعطى كما يلي:

$$\begin{aligned} f(B) &= f(x, y) = ((b-a)x + a, (b-a)y + a) \\ &= (c, d) \subseteq [a, b] \end{aligned}$$

لأن

$$\begin{aligned} c &= (b-a)x + a, \ 0 \le x \le 1 \\ &\le (b-a) + a = b \end{aligned}$$

كما أن $c \ge a$ لأنه إذا كانت $c < a$ فإن هذا يعني أن

$$\begin{aligned} &(b-a)x + a = c < a, \Rightarrow (b-a)x < 0 \\ &\therefore (b-a) < 0 \end{aligned}$$

وهذا تناقض. و عليه فإن $f(B)$ مجموعة مفتوحة في Y. لاحظ أن $f(X) = Y$ و $f(\phi) = \phi$.

أيضاً هذه الدالة متصلة لأنه بفرض أن $H=(\alpha,\beta)\subseteq[a,b]$ مجموعة جزئية مفتوحة في Yحيث أن $a\le\alpha<\beta\le b$. فإن

$$f^{-1}(H)=\left(\frac{\alpha-a}{b-a},\frac{\beta-a}{b-a}\right)\subseteq[0,1]=X$$

فهذا يعني أن المجموعة $f^{-1}(H)$ مفتوحة في X وأن $f^{-1}(Y)=X$ وكذلك $f^{-1}(\phi)=\phi$. إذاً هذه الدالة هي تقابل متصل و مفتوح و من ثم فهي دالة توبولوجية. إذاً $[a,b]\cong[0,1]$.

مثال (٤,٢٤)

في المثال السابق يتضح أن خاصية الطول ليست توبولوجية . فمثلاً بإختيار $b=7, a=0$. يتضح المطلوب.

مثال (٤,٢٥)

خاصية كون الفضاء المتقطع (Discrete) هي خاصية توبولوجية.؟

الحل

بفرض أن الدالة $f:(X,D)\to(Y,D)$ تقابل. حيث أن كل مجموعة وحيدة العنصر $\{x\}$ في الفضاء المنفصل مفتوحة فإن كل مجموعة $\{y\}=\{f(x)\}$ هي أيضا مفتوحة. إذاً f هوميومورفيزم و من ثم يكون $(X,D)\cong(Y,D)$.

نظرية (٤,٢٦)

بفرض أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ تقابل. العبارات التالية متكافئة:

(i) الدالة f توبولوجية .

(ii) الدالتان f و f^{-1} متصلتان.

(iii) الدالة f متصلة و مغلقة.

(iv) $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ لكل $A \subseteq X$.

البرهان

$(i) \Leftarrow (ii)$ نفرض أن f دالة توبولوجية، فإنها تكون متصلة و مفتوحة لإثبات أن الدالة $g = f^{-1} : (Y,\upsilon) \to (X,\tau)$ متصلة نفرض أن $A \subseteq X$ مجموعة مفتوحة. بما أن الدالة f مفتوحة فإن $g^{-1}(A) = f(A) \in \upsilon$ و هذا يعني أن الدالة f^{-1} متصلة.

$(ii) \Leftarrow (iii)$

نفرض أن كل من الدالة f و الدالة f^{-1} متصلة. و نفرض أن $F \subseteq X$.مجموعة مغلقة . بما أن الدالة f^{-1} متصلة فإن $f(F) = (f^{-1})^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة و عليه تكون الدالة f مغلقة . إذاً الدالة f متصلة و مغلقة.

$(iii) \Leftarrow (iv)$

نفرض أن الدالة f متصلة و مغلقة. بما أن الدالة f متصلة فإنه من نظرية (٤,٣) نحصل على:

$$\forall A \subseteq X \Rightarrow f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \text{.........................}(1)$$

بما أن الدالة f مغلقة فإنه من نظرية (٤,١٢) نحصل على:

$$\forall A \subseteq X \Rightarrow \overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A}) \text{.........................}(2)$$

من (1) و (2) نحصل على

$f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ لكل $A \subseteq X$.

$(i) \Leftarrow (iv)$

نفرض أن $B \subseteq Y$ مجموعـة مغلقـة ، إذاً $f^{-1}(B) \subseteq X$ و باسـتخدام البنـد (iv) نجد أن

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) = \overline{f(f^{-1}(B))} = \overline{B} = B$$

و عليه يكون $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(B)$. أي أن $f^{-1}(B)$ مجموعة مغلقة وهذا يعني أن الدالة f متصلة. لأثبات أن الدالة f مفتوحة نفرض $F \subseteq X$ مجموعة مغلقة فإنه من (iv) نجد أن $f(F) = f(\overline{F}) = \overline{f(F)}$ وهذا يعني أن $f(F)$ مجموعة مغلقة. إذاً الدالة f مغلقة و بما أنها تقابل فإن الدالة f مفتوحة و من ثم تكون دالة توبولوجية .■

تمـــارين (٤,١)

(١) برهن أن الدالة الثابتة من أي فضاء توبولوجي إلى فضاء توبولوجي آخر هي دالة متصلة .

(٢) بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي و أن (A,τ_A) فضاء جزئي من (X,τ) . برهن أن دالة الاحتواء $i: A \to X$ تكون متصلة .

(٣) إذا كانت $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ دالة من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ) فبرهن أن :

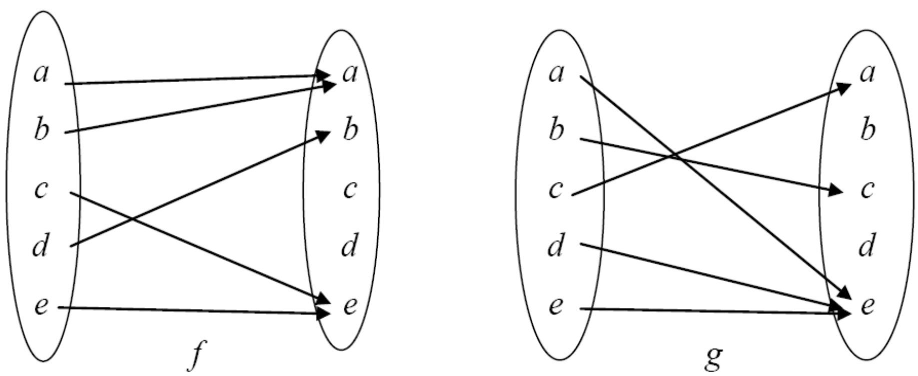
(i) f تكون متصلة إذا وفقط إذا كان

$$f^{-1}(A^o) \subseteq (f^{-1}(A))^o \quad \forall A \subseteq Y$$

(ii) f تكون متصلة إذا و فقط إذا كان

$f(B^\backprime) \subseteq f(B) \cup (f(B))^\backprime$ لكل $B \subseteq X$.

(٤) إذا كان $\tau = \{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$ توبولوجي معرفة على المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$. فإذا كانت $f,g:(X,\tau) \to (X,\tau)$ دالتن معرفتين كما يلي:



- أي من f, g دالة متصلة
- أي من f, g دالة مفتوحة
- أي من f, g دالة مغلقة
- أي من f, g دالة توبولوجية

(٥) بفرض أن كل من $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ و $g:(Y,\upsilon)\to(Z,\rho)$ دالة متصلة ، فبرهن أن $g\circ f$ تكون أيضا دالة متصلة .

(٦) بفرض أن كل من $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ و $g:(Y,\upsilon)\to(Z,\rho)$ دالة مفتوحة ، فبرهن أن $g\circ f$ تكون أيضا دالة مفتوحة.

(٧) بفرض أن كل من $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ و $g:(Y,\upsilon)\to(Z,\rho)$ دالة مغلقة ، فبرهن أن $g\circ f$ تكون أيضا دالة مغلقة.

(٨) بفرض أن كل من $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ و $g:(Y,\upsilon)\to(Z,\rho)$ دالة توبولوجية ، فبرهن أن $g\circ f$ تكون أيضا دالة توبولوجية.

(٩) إذا علم أن $\tau=\{X,\phi,\{b,c\},\{b,c,d\},\{a,b,c\}\}$ توبولوجي على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$ و $\upsilon=\{Y,\phi,\{x\},\{y,z\},\{x,y,z\}\}$ توبولوجي على المجموعة $Y=\{x,y,z,w\}$. عرف دالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ بحيث تكون:

- متصلة
- مفتوحة و غير مغلقة
- مغلقة وغير مفتوحة

(١٠) برهن أن $(-1,1)\cong(0,1)$. استخدم الدالة

$$f(x)=2x-1,\ \forall x\in(0,1)$$

(١١) مستخدما الدالة

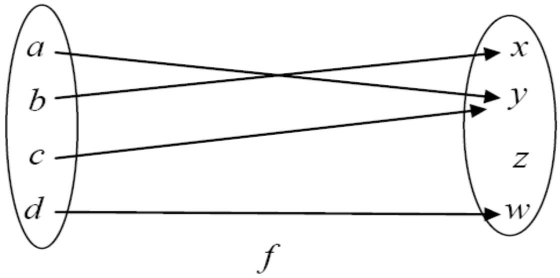
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x} & ,-1<x<0\\[2mm] \dfrac{x}{1-x} & ,0\le x<1\end{cases}$$

لإثبات أن $R\cong(-1,1)$

(١٢) إثبت أن $R\cong(0,1)$.

(١٣) هل يوجد هميومورفيزم بين R و $[0,1)$؟.

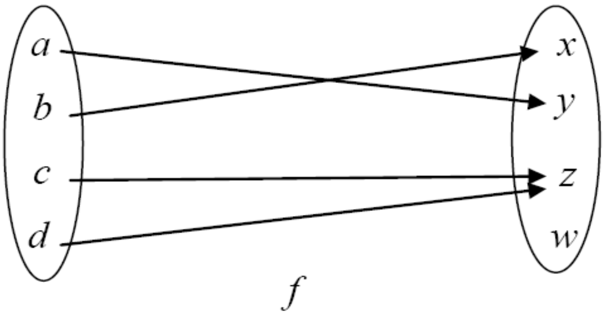
(١٤) بفرض أن $X=\{a,b,c,d\}$ $Y=\{x,y,z,w\}$ و أن $f:X\to Y$ معرفة بالمخطط الآتي:



وبفرض أن $\upsilon=\{Y,\phi,\{y,z\},\{x,y,z\},\{y,z,w\}\}$ توبولوجي على Y.

- عرف توبولوجي على X يجعل الدالة f متصلة و ليست مفتوحة و مغلقة..
- عرف توبولوجي على X (إن أمكن) يجعل الدالة f مفتوحة و غير مغلقة.
- عرف توبولوجي على X (إن أمكن) يجعل الدالة f مغلقة و غير مفتوحة.
- عرف توبولوجي على X (إن أمكن) يجعل الدالة f دالة توبولوجية.

(١٥) إذا كانت $\tau = \{X, \phi, \{a,b\}, \{c,d\}\}$ توبولوجي معرفة على المجموعة $X = \{a,b,c,d\}$ ، بفرض أن $Y = \{x, y, z, w\}$ و أن $f : X \to Y$ دالة معرفة بالمخطط الآتي:



- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f متصلة و ليست مفتوحة ولا مغلقة.
- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f متصلة ومغلقة و غير مفتوحة.
- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f متصلة ومفتوحة و غير مغلقة.
- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f مفتوحة و غير مغلقة.
- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f مغلقة و غير مفتوحة.

(١٦) ليكن (X,d) فضاءً مترياً . بين أن $(X,d) \cong (X, \frac{d}{1+d})$.

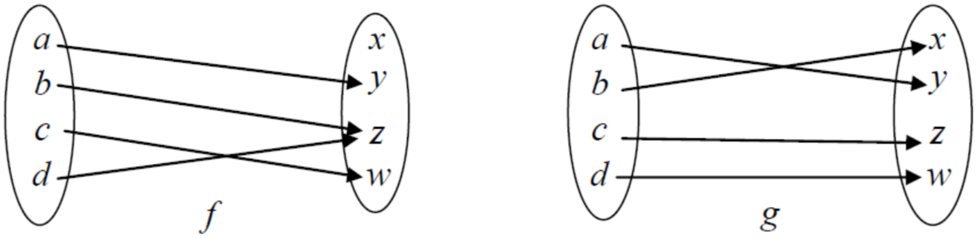
(١٧) هل يوجد تشاكل توبولوجي بين $[0,1]$ و $[a,b]$؟.

(١٨) هل يوجد تشاكل توبولوجي بين $(0,1)$ و $[a,b)$؟.

الموضوع	Presentation tupe	Youtube
الدوال المتصلة	https://slideator.com/watch/?v=wwpldXpcYHN	https://www.youtube.com/watch?v=eSLAj19zuSo&t=12s

تمارين عامة

١) اعتبر التوبولوجي $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$ معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$ و التوبولوجي $\upsilon=\{Y,\phi,\{x\},\{y\},\{x,y\},\{y,z,w\}\}$ على المجموعة $Y=\{x,y,z,w\}$. فإذا كانت $f:X\to Y$ و $g:X\to Y$ دالتين معرفتين بالمخطط التالي



ادرس اتصال كل من الدالتين $f:X\to Y$ و $g:X\to Y$

٢) برهن أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ) تكون متصلة إذا و فقط إذا كان لأي مجموعة مغلقة F في Y فإن الصورة العكسية $f^{-1}(F)$ تكون مغلقة في X.

٣) بفرض أن (X,τ)، (Y,υ)، (Z,δ) ثلاث فضاءات توبولوجية و أن كل من

$$f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon) \text{ و } g:(Y,\upsilon)\to(Z,\delta)$$

دالة متصلة، فإن دالة التحصيل $g\circ f:(X,\tau)\to(Z,\delta)$ تكون متصلة.

٤) برهن أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة إذا و فقط إذا كان

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)} \quad , \quad \forall\ A \subseteq X$$

٥) لتكن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة متصلة من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ). فإذا كان (A,τ_A) فضاءً جزئياً من (X,τ) فإن دالة التقيد $f|_A : A\to Y$ تكون متصلة على A.

٦) بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b\}$ و $\upsilon=\{Y,\phi,\{x\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $Y=\{x,y\}$. بفرض

الدالتين التاليتين:

$$f:X\to Y \qquad\qquad g:X\to Y$$

$$f(a)=f(b)=x \qquad\qquad g(a)=y\ ,\ g(b)=x$$

٧) ادرس الدالة $f:X\to Y$ من حيث كونها مفتوحة أو مغلقة .

٨) بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c\}$ و أن $\upsilon=\{Y,\phi,\{x\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $Y=\{x,y\}$ و أن $f:X\to Y$ دالة معرفة كما يلي:

$$f(a)=f(b)=y \quad , \quad f(c)=x$$

٩) ادرس الدالة $f:X\to Y$ من حيث كونها مفتوحة أو مغلقة .

١٠) برهن أن دالة التقابل $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ تكون مفتوحة إذا و فقط إذا كانت مغلقة.

١١) لتكن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء (Y,υ). برهن أن الدالة f تكون مفتوحة إذا وإذا فقط كان

$$f(A^{\circ})\subseteq(f(A))^{\circ}\ ,\ \ \forall\ A\subseteq X$$

١٢) برهن أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ تكون مغلقة إذا و فقط إذا كان

$$.\ \overline{f(A)}\subseteq f\left(\overline{A}\right),\quad \forall\ A\subseteq X\ .$$

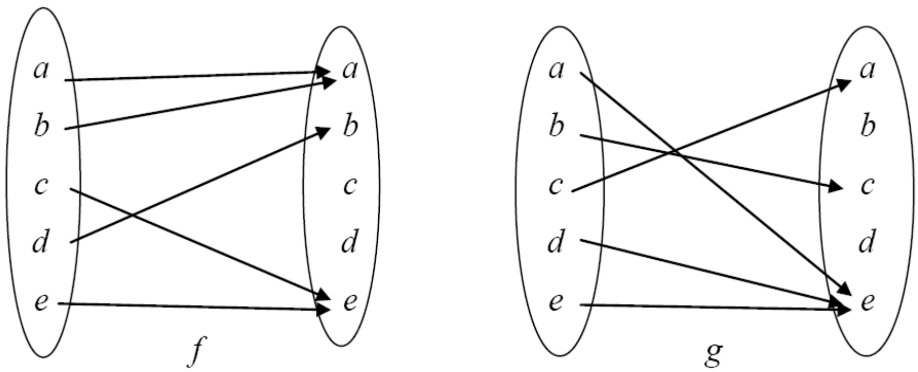
١٣) بفرض أن $f:X\to Y$ دالة معرفة بالصيغة

$$f(x)=(b-a)x+a\ ,\ x\in X\ a,b\in R$$

حيث أن $X=[0,1]$، $Y=[a,b]$ مع اعتبار التوبولوجي المعتاد على $[0,1],[a,b]$. ادرس تكافؤ الفضائين $[0,1],[a,b]$.

١٤) برهن أن الدالة الثابتة من أي فضاء توبولوجي إلى فضاء توبولوجي آخر هي دالة متصلة .

١٥) إذا كان $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$ توبولوجي معرفة على المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$. فإذا كانت $f,g:(X,\tau)\to(X,\tau)$ دالتن معرفتين كما يلي:



- أي من f,g دالة متصلة

- أي من f, g دالة مفتوحة
- أي من f, g دالة مغلقة
- أي من f, g دالة توبولوجية

١٦) بفرض أن كل من $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ و $g:(Y,\upsilon)\to(Z,\rho)$ دالة متصلة ، فبرهن أن $g\circ f$ تكون أيضا دالة متصلة .

١٧) بفرض أن كل من $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ و $g:(Y,\upsilon)\to(Z,\rho)$ دالة مفتوحة ، فبرهن أن $g\circ f$ تكون أيضا دالة مفتوحة.

١٨) بفرض أن كل من $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ و $g:(Y,\upsilon)\to(Z,\rho)$ دالة مغلقة ، فبرهن أن $g\circ f$ تكون أيضا دالة مغلقة.

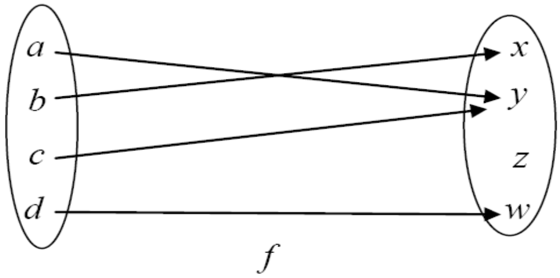
١٩) بفرض أن كل من $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ و $g:(Y,\upsilon)\to(Z,\rho)$ دالة توبولوجية ، فبرهن أن $g\circ f$ تكون أيضا دالة توبولوجية.

٢٠) إذا علم أن $\tau=\{X,\phi,\{b,c\},\{b,c,d\},\{a,b,c\}\}$ توبولوجي على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$ و $\upsilon=\{Y,\phi,\{x\},\{y,z\},\{x,y,z\}\}$ توبولوجي على المجموعة $Y=\{x,y,z,w\}$. عرف دالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ بحيث تكون:

- متصلة
- مفتوحة و غير مغلقة

- مغلقة وغير مفتوحة

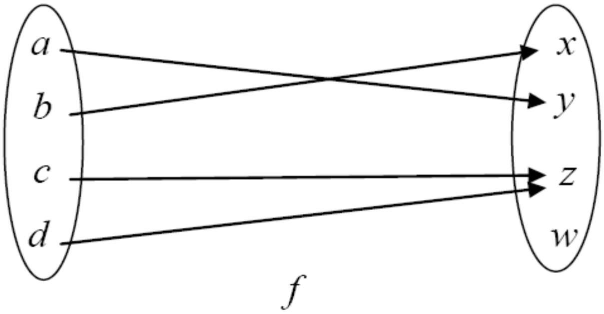
٢١) بفرض أن $X = \{a, b, c, d\}$ $Y = \{x, y, z, w\}$ و أن
$f : X \to Y$ معرفة بالمخطط الآتي:



وبفرض أن $\upsilon = \{Y, \phi, \{y, z\}, \{x, y, z\}, \{y, z, w\}\}$ توبولوجي على Y.

- عرف توبولوجي على X يجعل الدالة f متصلة و ليست مفتوحة و مغلقة..
- عرف توبولوجي على X (إن أمكن) يجعل الدالة f مفتوحة و غير مغلقة.
- عرف توبولوجي على X (إن أمكن) يجعل الدالة f مغلقة و غير مفتوحة.
- عرف توبولوجي على X (إن أمكن) يجعل الدالة f دالة توبولوجية.

٢٢) إذا كانت $\tau = \{X, \phi, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ توبولوجي معرفة على المجموعة $X = \{a, b, c, d\}$ ، بفرض أن $Y = \{x, y, z, w\}$ و أن $f : X \to Y$ دالة معرفة بالمخطط الآتي:



- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f متصلة و ليست مفتوحة ولا مغلقة.
- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f متصلة ومغلقة و غير مفتوحة.
- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f متصلة ومفتوحة و غير مغلقة.
- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f مفتوحة و غير مغلقة.
- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f مغلقة و غير مفتوحة.