جامعة جنوب الوادى

كلية التربية بالغردقة

الفرقة الثانية عام رياضيات

المادة : تطبيقية (3)

إستاذ المادة / د. محمد محمد عبد العزيز

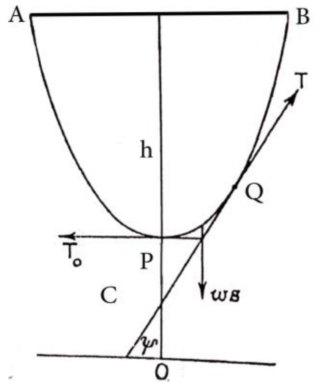
الفصل الدراسى الأول 2023-2024

الفصل الأول

الكتينة

تعريف (الكتينة العادية):

الكتينة هى المنحى الذى يعبرعن حالة خيط أو سلسلة منتظمة معلقة بحرية من نقطتين



$A\&B$كما هوموضح بالشكل .

دعنا نعين الشد عند أسفل نقطة ب T_0 ,

والذى سوف يكون أفقيا .طول أى جزء منالسلسلة

مقاسا من النقطة p إلىأى نقطة Q.

الشد عندهذة النقطة يعين ب T وهذايمبل على الأفقى

بزاوية ψ . الوزن لوحدة الأطوال من السلسلة يعين ب ω .

الجزئ PQ من السلسلة يكون فى حالة إتزان تحت تأثير ثلاث قوى هى الوزن ωs

T_0, و T الشدود عند $P\&Q$.

المعادلة الذاتية للكتينة:

بتحليل قوى الأتزانرأسيا وأفقيا نحصل على

$$T \sin \psi = \omega s \qquad , \qquad T \cos \psi = T_0$$

إنه من المناسب أن ندخل ثابت آخر cبحيث يكون $T_0 = c\,\omega$

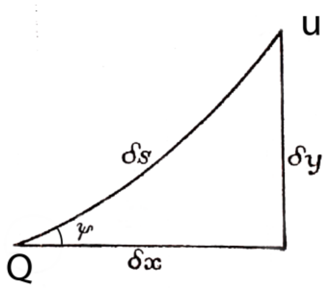
$$T \sin\psi = \omega s \qquad , \qquad T \cos\psi = \omega c$$

بالقسمة نحصل على

$$s = c \tan\psi \qquad (i)$$

هذه هى المعادلة الذاتية لمنحنى الكتينة (c يسمى باراميتر الكتينة) .

المعادلة الكارتيزية للكتينة:



لأيجاد المعادلة الكرتيزية لمنحنى الكتينة نتبع :

حيث أن $\tan\psi = \frac{dy}{dx}$ فإنه من (i) $\frac{dy}{dx} = \frac{s}{c}$

حيث أن $\tan\psi = \frac{dy}{dx}$ فإنه من (i) $\frac{dy}{dx} = \frac{s}{c}$

نعتبر العنصر الصغير δs من المنحنى والذى يربط النقطتين $Q \& U$ واللذين لهم الأحداثيات $(x,y) \& (x+\delta x, y+\delta y)$ على الترتيب و, إذن

$$(\delta s)^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2$$

بالقسمة على $(\delta x)^2 \& (\delta y)^2$ على التوالى نحصل على

$$\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right)^2 \cong 1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2$$

$$\left(\frac{\delta s}{\delta y}\right)^2 \cong 1 + \left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^2$$

وعندما يكون

$\delta s, \delta x, \delta y \to 0$

فإن المعادلات السابقة تؤول إلى

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \qquad (ii)$$

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \qquad (iii)$$

من (ii) نحصل على :

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{s}{c}\right)^2$$

$$\therefore \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{c^2 + s^2}}{c}$$

$$\therefore dx = \frac{c}{\sqrt{c^2 + s^2}}\, ds$$

$$\therefore x = c \sinh^{-1} \frac{s}{c} \qquad (iv)$$

$$s = c \sinh \frac{x}{c} \qquad (v)$$ أو

حيث $x = 0$ عندما $s = 0$

من (iii) نحصل على :

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1+\left(\frac{c}{s}\right)^2$$

$$\therefore \frac{ds}{dy} = \frac{\sqrt{c^2+s^2}}{s}$$

$$\therefore dy = \frac{s}{\sqrt{c^2+s^2}}\, ds$$

$$\therefore y = \sqrt{c^2+s^2}$$

أو $\quad y^2 = s^2 + c^2 \qquad (vi)$

حيث $y = c$ عندما $s = 0 \;\&\; x = 0$

بالتعويض من (v) فى (vi) نحصل على :

$$y^2 = c^2\left(1+\sinh^2 \frac{x}{c}\right)$$

$$y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right) \qquad (vii)$$

وهذه هى المعادلة الكاتيزية لمنحى الكتينة .

المعادلات البارامترية للكتينة:

تلاحظ مما سبق أن $\quad y = \sqrt{c^2+s^2} \qquad x = c\sinh^{-1}\frac{s}{c}$

أى امكن التعبير عن الأحداثيات الكارتيزية $x \,\&\, y$ بدلالة المتغير s (براميتر)

أى أن المعادلتين السابقتين تمثلان المعادلات البارامترية لمنحنى الكتينة .

الشد عند أى نقطةعلى الكتينة:

حيث أن :

$$T \sin \psi = \omega \; s \qquad , \qquad T \cos \psi = \omega \; c$$

فإن :

$$T^2 = \omega^2 \left(s^2 + c^2 \right)$$

بالتعويض من (vi) نحصل غلى :

$$T^2 = \omega^2 \; y^2$$

$$\therefore \; T = \omega \; y$$

هكذا نجد أن الشد أى نقطة غلى الكتينة يكون متناسب مع إرتفاع النقطة فوق محور $o\,x$ والذى يسمى غادة بدليل الكتينة أى يعتمد على الأحداثى y .

أسالاك البرق والتليفون:

عندما تكون c كبيرة فإنه من (vii) نحصل على :

$$y = c \cosh \left(\frac{x}{c} \right) = \frac{c}{2} \left(e^{x/2} + e^{-x/2} \right)$$

$$=\frac{c}{2}\left\{\left(1+\frac{x}{c}+\frac{x^2}{2c^2}+........\right)+\left(1-\frac{x}{c}+\frac{x^2}{2c^2}-........\right)\right\}$$

$$=c+\frac{x^2}{2c^2}+.......$$

$$\therefore y-c\cong\frac{x^2}{2c^2}\qquad(x)$$

ذلك مع الوضع فى الأعتبار أن c كبيرة ونتيجة لهذه النتيجةفإن المنحى يكون تقريبا قطع مكافئ ذات وتر بؤرى طوله هو $2c$

تعريف (بحرالكتينة):

بحر الكتينة هو المسافة AB أى المسافة بين نقطتى التعليق .

إذا كان نصف بحر الكتينة هو $k=\frac{1}{2}AB$ فإن نصف طول السلسة $s=s_A=s_B$ يعطى من v على الصورة :

$$s=\frac{c}{2}\sinh\frac{x}{c}=\frac{c}{2}\left\{\left(1+\frac{k}{c}+\frac{k^2}{2c^2}+\frac{k^3}{6c^3}+.......\right)-\left(1-\frac{k}{c}+\frac{k^2}{2c^2}-\frac{k^3}{6c^3}+.......\right)\right\}$$

$$=\frac{c}{2}\left\{\frac{2k}{c}+\frac{k^3}{3c^3}+........\right\}$$

وبفرض أن c كبيرة فإن

:

$$s=k+\frac{k^3}{6c^2}$$

$$\therefore\ s-k=\frac{k^3}{6c^2}\qquad(xi)$$

تعريف (سهم الكتينة):

سهم الكتينة هو المسافة العمودية من أسفل نقطة P إلى بحر الكتينة AB .

العلاقة بين بحر وسهم الكتينة:

إذا كان h هو سهم الكتينة , فإنه عندما $x=0 \ , y=c \ \ \& \ \ x=k \ \ , y \cong c+\dfrac{k^2}{2\,c}$

وهذا يأتى من (x) هنا يمكن الحصول على :

$$h=\frac{k^2}{2\,c} \qquad (*)$$

وهذا يؤدى إلى $\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{4h^2}{k^4} \qquad (*)$

عندئذ من (xi) نحصل على :

$$s-k=\frac{k^3}{6\,c^2}=\left(\frac{k^3}{6}\right).\left(\frac{1}{c^2}\right)=\left(\frac{k^3}{6}\right).\left(\frac{4h^2}{k^4}\right)=\frac{4\,h^2}{6k}$$

$$\therefore 2\,(s-k)=\left(\frac{8}{3}\right).\left(\frac{h^2}{2k}\right)$$

هذا يعنى أن الفرق بين طول السلسلة $2\,s$ وبحر الكتينة $2\,k$ يكون مساويا للنتيجة :

$$\therefore 2\,(s-k)=\left(\frac{8}{3}\right).\left(\frac{\left((sag)^2\right)}{span}\right) \qquad (*\,*)$$

العلاقتين $(*)$ & $(**)$ توضحان العلاقة بين بحر وسهم الكتينة .

ملاحظة:

عندما c . تكون كبيرة كما ذكر اعلاه فإن السلسلة أو السلك تعبر عن أسلاك البرق والتليفون . فى هذه الحالة يكون طول السلك $2s$ يكون أكبر قليلا عن بحر الكتينة AB . وبالتالى يكون السهم صغيرا .

أمثلة

كثير من المسائل التى تشمل الكتينة يمكن أن تحل بإستعمال الصيغ الآتية :

$$s = c \sinh \frac{x}{c} \qquad (i) \qquad s = c \tan \psi \qquad (ii)$$

$$y = \sqrt{s^2 + c^2} \qquad (iv) \qquad x = c \sinh^{-1} \frac{s}{c} \qquad (iii)$$

$$y = c \cosh \left(\frac{x}{c}\right) \qquad (vi) \qquad y^2 = s^2 + c^2 \qquad (vii)$$

$$T = \omega y \qquad (x) \qquad T_0 = c\,\omega \qquad (viii)$$

كل البارامترات المذكورة فى المعادلات السابقة تم تعريفها مسبقا .

==

مثال(1):

سلك كهرباء طوله $140\ m$ وكتلة وجدة الاطوال منه هى $3\ kg/m$ ومعلق بين برجين يبعدان عن بعضهما مسافة $120\ m$ ويقعان على نفس الأرتفاع . عين سهم الكتينة وقيمة أقصى شد فى السلك .

الحل

السهم h يمكن إيجاده من المعادلة (vii) على أساس أنه يمكن تعيين c يبين كما يلى

$$y_B^2 - s_B^2 = c^2 \qquad (vii)$$

$$(h+c)^2 - (70)^2 = c^2 \qquad (1)$$ أو

المسافة c يمكن تعينها من المعادلة (i) :

$$s_B = c \sinh \frac{x_B}{c} \qquad (i)$$

أو

$$70\ m = c \sinh \frac{60}{c} \qquad (2)$$

هذه المعادلة يجب أن تحل عدديا لأيجاد c أو بإستخدام آلة حاسبة حديثة لتكون :

$$c = 61.45\ m$$

حل آخر محتمل هو $c = -61.45\ m$ ولكن هذا الحل ليس له معننا طبيعيا .

الآن بالتعويض بهذه القيمة فى المعادلة (1) نحصل على:

$$(h + 61.45\ m)^2 - (70\ m)^2 = (61,45m)^2$$

حل هذه المعادلة يعطى :

$$h = 31.70\ m$$

القيمة الأخرى السالبة تهمل لأن ليس اها معنى .

أقصى قيمة للشد $T_{\max}$ تحدث عند النقط $B\ or\ A$ وهذا يمكن حسابه من المعادلة (x)

$$T_{\max} = \omega\, y_B \qquad (x)$$

$$T_{\max} = \left[\,(3kg/m)(98.1\ m/s^2)\right]\ [31.70m + 61.45m]$$
$$= 2740\ \ N = 2.74\ K$$

مثال(2):

سلسلة معلقة بين نقطتين على نفس الأرتفاع ويبعدان عن بعضهما مسافة قدرها $400\ \ ft$ فإذا كان سهم الكتينة هو $40\ \ ft$ ووزن وحدة الأطوال من السلسلة هو $4Ib/ft$. عين طول الكتينة وقيمة الشد عند أسفل نقطة .

الحل

طول السلسلة s_B يمن أسفل نقطة إلى النقطة B يمكن إيجاده من المعادلة (i) على أساس أنه يمكن تعيين c يين كما يلى :

$$s = c\ \sinh\ \frac{x}{c} \qquad (i)$$
$$= c\sinh\ \ 200\ /c \qquad (1)$$

المسافة c يمكن تعينها من المعادلة (vi)

$$y_B = c\cosh\left(\frac{x_B}{c}\right) \qquad (vi)$$

أو

$$c + 40\ ft = c\cosh 200\ ft\ /c \qquad (2)$$

هذه المعادلة يجب أن تحل عدديا لأيجاد c أو بإستخدام آلة حاسبة حديثة لتكون :

$$c = 506.53\ ft$$

الآن بالتعويض بهذه القيمة فى المعادلة (1) المعادلة نحصل على:

$$\begin{aligned} s_B &= c\ \sinh\ \frac{x_B}{c} \\ &= (506.53)\sinh\ 200\ ft\ /506.53\, ft \\ &= 205.237\ ft \end{aligned}$$

الشد عند أسفل نقطة يكون أفقيا , ويمكن إيجاده من المعادلة $(viii)$

$$\begin{aligned} T_0 &= (4\, Ib/ft)\ (506.53)\,. \\ &= 2.025\ IB. \end{aligned}$$

مثال(3):

سلسلة معلقة بين نقطتين على نفس الأرتفاع ويبعدان عن بعضهما مسافة قدرها $20\ m$ فإذا كان سهم الكتينة هو $6\ m$. فإذا كانت الكتلة الكلية للسلسلة هى $45\ kg$ فعين المسافة بين نقطتى التعليق وكذلك أقصى قيمة للشد .

الحل

المسافة بين نقطتى التعليق $2x_B$ حيث x_B يمكن تعينها من المعادلة (i) على أساس أنه يمكن تعيين c كما يلى :

$$s_B = c \sinh \frac{x_B}{c} \qquad (i)$$

وبالتعويض عن

$s_B = 10\,m$ نحصل

على :

$$10\ m = c \sinh \frac{x_B}{c} \qquad (1)$$

المسافة c يمكن إيجادها من المعادلة (vii)

$$y_B^2 - s_B^2 = c^2 \qquad (vii)$$

أو

$$(h+c)^2 - (70)^2 = c^2$$

$$(6\,m + c)^2 - (10)^2 = c^2$$

هذه المعادلة تأخذ الصورة :

$$36 + 12\,c + c^2 - 100 = c^2$$

الحدود c^2 تلغى بعضها البعض وتتحول المعادلة إلى معادلة خطية حلها هو :

$$c = 5.333\ m$$

وبالتعويض فى المعادلة (1) لتكون :

$$10 = 5.333 \ \sinh \frac{x_B}{5.333}$$

وبحلها عدديا نحصل على :

$$x_B = 7.393 \ m$$

وعلى ذلك تكون المسافة بين نقطتى التعليق هى : $2 \ x_B = 14.786 \ m$

أقصى شد يحدث عند النقطة B عند النقطة والذى يمكن تعيينه من المعادلة (x)

$$T_{\max} = \omega \ y_B \qquad (x)$$

$$T_{\max} = \left(\frac{Total \ \ weight \ \ of \ the \ \ chain}{Total \ \ length \ \ of \ the \ chain} \right) y_B$$

$$= \left(\frac{(45 .kg) \ (98.1 \, m/s^2)}{20 \, m} \right) \ (6 \, m + 5.333 \, m \ ) = 250 \ N.$$

مثال(4):

سلسلة معلقة بين نقطتين على نفس الأرتفاع .طولها $50 \ m$. فإذا كانت الكتلة الكلية للسلسلة هى $50 \ kg$وكان أقصى شد فى السلسلة لا يزيدعن $500 \ N$.فعين أقصى بحر للسلسلة وكذلك سهم الكتينة .

الحل

أقصى شدتم تحديده فى رأس المسألةليكون $T_{max} = 500 \ N$ والذى سوف يكونعند النقطة B وبالتعويض فى المعادلة

$$T_{max} = \omega \, y_B \qquad (x)$$

نحصل على :

$$y_B = \frac{T_{max}}{\omega} = \frac{T_{max}}{\left(\dfrac{Total \ \ weight \ \ of \ \ the \ \ chain}{Total \ \ length \ of \ \ the \ \ chain}\right)}$$

$$= \frac{500 \ N}{\left(\dfrac{(50 \, kg) \ (98.1 \, m/s^2)}{50 \ m}\right)} = 50 \ .97 \, m$$

المسافة بين نقطتى التعليق هي $2x_B$ وسوف نحتاج لأستعمال قيمة y_B السابقة لتعيين x_B وذلك بالتعويض فى المعادلة (vi)

$$50.97 m = c \cosh\left(\frac{x_B}{c}\right) \qquad (1)$$

المسافة c يمكن تعينها الأن من المعادلة :

$$y_B^2 - s_B^2 = c^2 \qquad (vii)$$

أى

$$(50.97 \ m)^2 - (25 \ m)^2 = c^2$$

وحلها هو

$$c = \pm \, 44.42 \, m$$

الأشارة السالبة ليس لها معننا فيزيائيا وبالتعويض بالقيمة الموجبة فى المعادلة (1)نحصل على:

$$50.97m = 44.42 \cosh\left(\frac{x_B}{44.42}\right) \qquad (2)$$

بحل المعادلة (1) عدديا نحصل على :

$$x_B = 23.836\ m$$

وبذلك تكون المسافة بين نقطتى التعليق هي :

$$2x_B = 47.7\ m$$

وحيث أن كلا من $c\ \&\ x_B$ معروفة فإن سهم الكتية

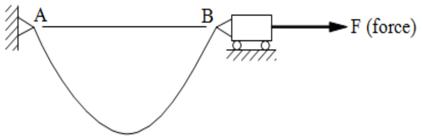
$$h = y_B - c = (50.97\ m)\ (44.42\ m) = 6.55\ m\ .$$

يتعين بالشكل :

مثال(5):

سلسلة معلقة بين نقطتين $A\ \&\ B$ حيث النقطة A ثابتة و النقطة B متحركة, فإذا كانطولها $80\ ft$ ووزن وحدة الأطوال هو $0.3\ Ib/ft$,وكان بحر الكتينة هو $50\ ft$, فعين القوة F والتى تثبت النقطة المتحركة B وأيضا عين سهم الكتينة .

الحل



القوة F المؤثرة عند النقطة المتحركة B تساوى المركبة الأفقية للشد T_0 عند أسفل نقطة للكتينة أى $F = T_0$ حيث يمكن تعينها من المعادلة $T_0 = \omega \ c$ وبالتالى نحصل على :

$$F = (0.3\ Ib/ft)\,c \qquad (1)$$

المسافة c يمكن إيجادها من المعادلة (i)

$$s_B = c\ \sinh\ \frac{x_B}{c} \qquad (i)$$

أو

$$40\ ft = c\ \sinh\ 25\ ft\ /c \qquad (2)$$

هذه المعادلة يجب أن تحل عدديا لأيجاد c فتكون النتيجة هى :

$$c = \pm 14.229\ ft$$

القيمة السالبة ليس لها معنى وبإستعمال القيمة الموجبة فإن القوة الأفقية المطلوبة فى المعادلة (1) تأخذ القيمة :

$$F = (0.3\ Ib/ft)\ (14.299\ ft\ ) = 4.27\ Ib$$

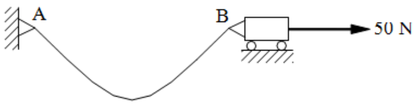
ولأيجاد سهم الكتينة h نعوض فى المعادلة :

$$\begin{aligned} h &= y_B - c = c\cosh\ (x_B/c) - c \\ &= (14.299\ ft)\cosh\ (25.\ ft/14.299\ ft) - 14.299\ ft \\ &= 28.2\ ft. \end{aligned}$$

مثال(6):

سلسلة معلقة بين نقطتين $A \& B$ حيث النقطة A ثابتةو النقطة B متحركة, فإذا كانطولها $40\ m$ وكتلة وحدة الأطوال هو $0.4\ kg/m$, وكانت القوة F والتى تثبت النقطة المتحركة B هى $50\ N$ فى الأتجاه الأفقى , فعين بحر وسهم الكتينة .

الحل



المسافة بين نقطتى التعليق $2x_B$ حيث x_B يمكن تعينها من المعادلة (i) على أساس أنه يمكن تعيين c كما يلى :

$$s_B = c \sinh \frac{x_B}{c} \qquad (1)$$

القوة F المؤثرة عند النقطة المتحركة B تساوى المركبة الأفقية للشد T_0 عند أسفل نقطة للكتينة أى $F = T_0$ حيث يمكن تعين c من المعادلة $T_0 = \omega c$ وبالتالى نحصل على :

$$50 = \left[(0.4\ kg/m)\left(9.81\ m/s^2\right)\right] c$$

والتى تعطى :

$$c = 12.742\ m$$

وبالتعويض بهذه القيمة وقيمة $s_B = 20\ m$ فى المعادلة (1) نحصل على :

$$20\,m=(12.742\ m)\sinh\frac{x_B}{12.742\ m}$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على :

$$x_B=15.708\ m$$

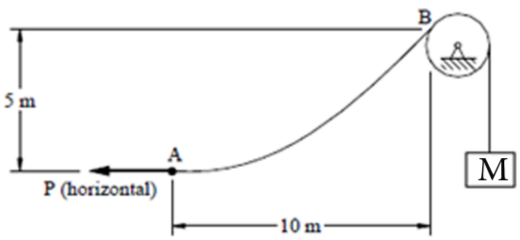
وبالتالى فإن بحر الكتينة هو :

$$2x_B=2\,(15.708\ m)=31.4\,m$$

ولأيجاد سهم الكتينة h نعوض فى المعادلة :

$$\begin{aligned}h&=y_B-c=c\cosh(x_B/c)-c\\&=(12.742\ m)\cosh(15.708\ m/12.742\ m)-12.742\ m\\&=28.2\ m\end{aligned}$$

مثال(7):



سلسلة تمرعلى بكرة ملساء مثبتة عند النقطة B بحيث

يتدلى جزء من السلسلة يحمل فى نهايته كتلة M.

.الطرف الأخر من السلسلة مسحوب بواسطة قوة

أفقية P عند النقطة A. فإذا كانت كتلة وحدة

الأطوال من السلسلة هى $0.3\,kg/m$,

فعين كلا من $P \& M$ والتى تحافظ على السلسلة فى الوضع المبين فى لشكل المقابل .

الحل

القوة P المؤثرة عند النقطة A تساوى المركبة الأفقية للشد T_0 عند أسفل نقطة للكتينة أى $P = T_0 = \omega\ c$ وبالتالى نحصل على :

$$P = (0.3\ kg/m)(9.81\ m/s^2)\ c = (2.943\ N/m)\ c \qquad (1)$$

المسافة c يمكن إيجادها من المعادلة (vi)

$$y_B = c \cosh\left(\frac{xB}{c}\right) \qquad (vi)$$

أو

$$5\,m + c = c\ \cosh\ 10m/c$$

هذه المعادلة يجب أن تحل عدديا لأيجاد c فتكون النتيجة هى :

$$c = 10.743\ m$$

وبالتعويض بهذه القيمة فى المعادلة (1) نحصل على :

$$P = (0.3\ kg/m)(9.81\ m/s^2)\ (c = 10.743\ m) = 31.617\ N$$

ولتعيين الكتلة M نعلم أن الشد عند النقطة P يجب أن يساوى الوزن Mg أى :

$$T_B = Mg$$

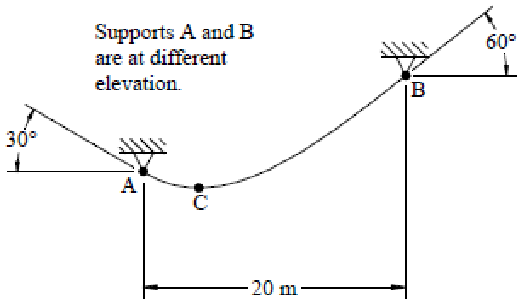
وبالتالى فإن الكتلة تكون :

$$M = T_B / g \qquad (2)$$

وحيث أن $T_B = \omega\, y_B$ فإن المعادلة (2) تعطى :

$$M = [(2.943\ N/m)\ (5\,m + 10.743\ m)]/(9.81\,m/s^2) = 4.72\ Kg$$

مثال(8):



سلسلة تصنع الزوايا 60° , 30° عند نقط التعليق

كما هو موضح بالشكل المقابل . عين موضع النقطة

c بالنسبة للنقطة A .عين أيضا الشد عند نفس النقطة

إذا كانت الكتلة لوحدة الطول من السلسلة هى

$0.6\,kg/m$.

الحل

البيانات الهندسية موضحة بالشكل . لتعيين موضع النقطة c بالنسبة للنقطة A نحتاج لتعيين الأحداثيات x_A , y_B . يمكن الحصول على هذه الأحداثيات بإستعمال حقيقة أن الميل عند النقطة A معروف وذلك من المعادلة :

$$-\tan 30^\circ = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{at\ A} = \left[\frac{d\left(c\cosh(x/c)\right)}{dx}\right]_{at\ A} = \sinh(x_A/c)$$

ومنهايمكن إيجاد :

$$x_A = c \sinh^{-1}(-\tan 30^\circ) \qquad (1)$$

وبالمثل عند النقطة B نحصل على :

$$x_B = c \sinh^{-1}(\tan 60^\circ) \qquad (2)$$

الأحداثيات x_A & x_B البعد بينهما $20-m$ يرتبطان ببعضهما بالمعادلة :

$$x_A - x_B = 20 - m$$

وبالتعويض من المعادلتين (2) & (1) نحصل على :

$$c \sinh^{-1}(-\tan 30^\circ) - c \sinh^{-1}(\tan 60^\circ) = 20$$

وبما أن هذه المعادلة خطية فى c, فمن السهولة أن تحل لتعطى $c = 10.717\ m$

الآن المعادلة (1) تعطى :

$$x_A = 10.717\ m \sinh^{-1}(-\tan 30^\circ) = -5.887\ m$$

الأحداثى y للنقطة A يمكن الآن حسابه من المعادلة (vi) أى :

$$y_A = c \cosh\left(\frac{x_A}{c}\right) = (10.717\ m) \cosh\left(\frac{-5.887\ m}{10.717\ m}\right) = 12.375\ m$$

المسافة الرأسية بين نقطة التعليق A وأسفل نقطة c تعطى من :

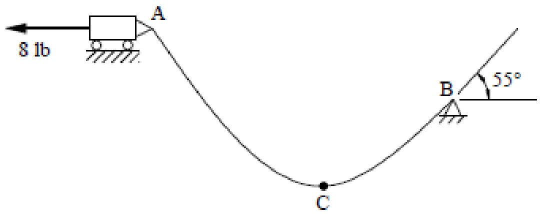
$$d = y_A - c = 12.375\ m - (10.717\ m) = 1.658\ m$$

الشد عند النقطة A يعطى من المعادلة (x)

$$T = \omega\, y_A = \left[(0.6\ Kg/m)\ (9.81\, m/s^2)\right](12\ .\ 375\ \ m)\ = 72.8\ N$$

مثال(9):

سلك يزن $0.2\ lb/ft$ معلق بنقطة متحركة A



ويصنع زاوية 55° عند نقطة ثابتة B. نقاط

التعليق $A\ \&\ B$ليست على نفس الأرتفاع كما

هو موضح بالشكل المقابل . عين موضع النقطة

c بالنسبة للنقطة B .عين أيضا الشد عند النقطة c

الحل

البيانات الهندسية موضحة بالشكل . لتعيين موضع النقطة c بالنسبة للنقطة Bنحتاج لتعيين الأحداثيات $x_B,\ y_B$. يمكن الحصول على هذه الأحداثيات بإستعمال حقيقة أن الميل عند النقطة Bمعروف وذلك من المعادلة :

$$\tan\ 55^\circ = \left[\frac{d\,y}{d\,x}\right]_{at\ B} = \left[\frac{d\ \left(c\cosh\ \ (x/c)\right)}{d\,x}\right]_{at\ B} = \sinh\ \ (x_B/c)$$

ومنهايمكن إيجاد :

$$x_B\ = c\sinh^{-1}(\tan\ \ 55^\circ)$$

وبالمثل عند النقطة B نحصل على :

$$x_B = c\sinh^{-1}(\tan 60^\circ) \qquad (1)$$

قيمة c يمكن تعينها من ملاحظة أن القوة عند النقطة A تساوي المركبة الأفقية للشد T_0 ملاحظةعند النقطة A. المعادلة $(viii)$ فى الصورة:

$$T_0 = c\,\omega$$

وبالتعويض فى هذهالمعادلة من البيانات المعطاة نحصل على :

$$8\,lb = (0.2\,lb/ft)\,c$$

ومنها نحصل على :

$$c = 40\ ft \qquad (2)$$

وبالتعويض فى المعادلة (1) نحصل على :

$$x_B = (40\ ft)\sinh^{-1}(\tan 60^\circ) = 46.169\ ft$$

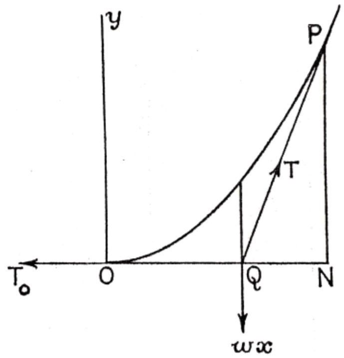
المسافة الرأسية بين النقطة B وأسفل نقطة c تعطى من :

$$d = y_B - c = c\cosh(x_B/c) - c$$
$$= (40\ ft)\cosh(46.169\ ft/40\ ft)) - 40\ ft = 29.7\ ft$$

الشد عند النقطة B يعطى من المعادلة $T_0 = 8\,lb$ (x) :

أمثلة عملية

مثال (1) (الكوبرى المعلق):



إذا كانت سلسلة معلقة تحمل حملا متصل موزع بإنتظام افقيا بحيث تأخذ شكل قطع مكافئ

إذا كانت O هى أسفل نقطة من السلسلة ,

وكانت P هى اى نقطة من السلسلة والتى إحداثياتها (x, y) فى النظام الكارتيزى, وكان الحمل بواسطة الجزء OP يتناسب مع المسافة ألفقية ON والذى يؤثر عند النقطة Q والتى هى منتصف المسافة $x = ON$, فإن الحمل سوف يكون ωx حيث ω هى وزن وحدة الأطوال من السلسلة. القوى الأخرى والتى تؤثر على الجزء OP هى الشد الأفقى عند أسفل نقطة T_0 والشد T عند النقطة P, هذه القوى الثلاث تتقاطع عند النقطة Q ويكون المثلث PNQ هو مثلث القوى فيكون :

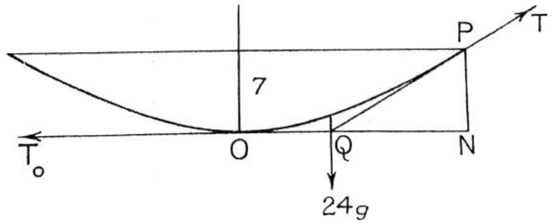
$$\frac{\omega x}{PN} = \frac{T_0}{NQ} \qquad \therefore \quad T_0 y = \frac{1}{2}\omega x^2$$

عندئذ إذا إعتبرنا أن $T_0 = \omega c$ فإننا نحصل على $y = \frac{x^2}{2\,c}$

وهذا يعنى أن منحنى السلسلة يأخذ شكل القطع المكافئ .

فإذا أعتبرنا أن بحر الكتينة للكوبرى المعلق هو $96\ m$ وأن سهم الكتينة هو $7\ m$, وكان فرعى السلسلة يحملان حمل قدره $1000\ kg$ لكل متر أفقى .فأوجد الشد عند أسفل نقطة وعند أقصى نقطة .

الحل



الحمل بواسطة الجزء OP يكون $48gkN$ ويكون المثلث PNQ هو مثلث القوى حيث :

$$QN = 48\,m \quad , \quad PN = 7\,m \qquad \therefore Qp = 25\,m$$

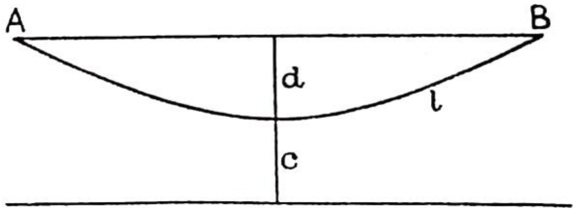
$$\frac{T_0}{24} = \frac{T}{25} = \frac{48g}{7}$$

$$\therefore T = 1680\,kN \quad , \quad T_0 \cong 1612.8\ \ kN$$

مثال (2) :

سلسلة منتظمة طولها $2l$ ووزن وحدة الأطوال منها هو ω وكانت السلسلة معلقة بين نقطتين فى مستوى أفقى واحد , وكان أقصى عمق للسلسلة هو d . أثبت أن الشد عند أسفل نقطة لها هو $\omega\,(l^2 - d^2)/2d$.وإذا كان $l = 50\,m \ \ \& \ \ d = 20\,m$ فأوجد المسافة بين نقطتى التعليق .

الحل



لمنحى الكتينة يكون : $y^2 = c^2 + s^2$

عند النقطة B يكون $s = l$, $By = c + d$

$$\therefore \quad (c+d)^2 = c^2 + l^2$$

ومنها يكون

$$2cd = l^2 - d^2$$

$$\therefore \quad c = l^2 - d^2/2d$$

وبالتالى يكون الشد عند أسفل نقطة هو:

$$T_0 = \omega c = \omega\,(l^2 - d^2)/2d$$

الآن إذا كان $l = 50\,m$ & $d = 20\,m$ فإن :

$$c = 2500 - 400/40 = 105/2$$

ولكن

$$s = c \sinh x/c$$

أو

$$x = c \sinh^{-1} s/c$$

$$\therefore \qquad x = (105/2)\sinh^{-1}(20/21)$$

$$= (105/2)lin\left[(20/21) + \sqrt{\{1 + (20/21)^2\}}\right]$$

$$= (105/2)lin(49/21)$$

عندئذ يكون

$$AB = 2x = AB = 105 \times 2.303\ log_{10}(49/21) \cong 89\ m$$

==

EXERCISES:

(1)A rope has an effective length of $20\ m$and mass$5\ kg$ per miter. One end of the rope is $4\ m$ higher than the other. Find the maximum tension in the rope when the tangent at the lower end is horizontal.

(2)A uniform chain of length $2l$ has its ends fixed at two points at the same level. The sag at the middle is h .prove that the span is $[(l^2 - h)/h]lin[(l + h)/(l - h)]$.

(3)A uniform wire hangs freely from tow points at the same level $200\ m$apart. The sag is $15\ m$. Show the greatest tension is approximately $348\ \omega$ and the length of wire is approximately $203\ m$

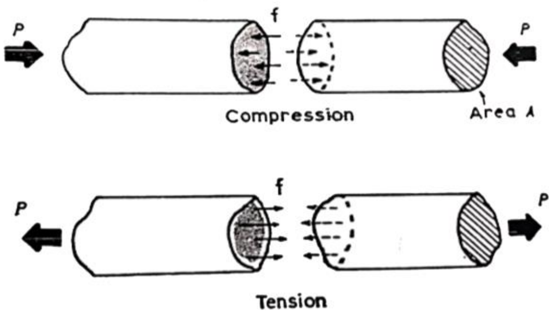
الفصل الثانى

الأجهاد والأنفعال

تعريف (الأجهاد):

الأجهاد هو النسبة بين الحمل (الثقل) P ومساحة المقطع من الجسم A أو هو القوة لوحدة المساحات أى :

$$f = \frac{P}{A}$$



ووحدة القياس هنا هى lb/in^2 فى النظامالأنجليزى أو N/m^2 فى النظام الفرنسى.
الوحدة الفرنسية N/m^2 تسمى بسكال إختصارا Pa وهى وحدة صغيرة ولذا توجد وحدات أخرى أكبر وهى :

$$1\,KPa = 10^3\ Pa = 10^3\ N/m^2 \quad (KPa = Kilo\ \ Pascal)$$

$$1\,MPa = 10^6\ Pa = 10^6\ N/m^2 = 1\ N/mm^2 \quad (MPa = Mega\ \ Pascal)$$

$$1\,GPa = 10^9\ Pa = 10^9\ N/m^2 \quad (GPa = Gega\ \ Pascal)$$

تعريف (الأنفعال):

الأنفعال هو النسبة بين الزيادة (النقصان)فى الطول (التغير فى الطول) x والطول الأصلى lأو هو الزيادة(النقصان)فى الطول لوحدة الأطوال وذلك طبقا هل الحمل هو شد أو ضغط :

$$e = \frac{x}{l}$$

العلاقة بين الأحهاد والأنفعال:

قانون هوك يعنى أن

$$E = \frac{f}{e}$$

E يسمى معمل ينج ووحداته هى وحدات الأجهاد .

والتى يمكن كتابتها فى الصور الآتية :

$$e = \frac{f}{E} \quad \& \quad f = e\,E$$

==

أمثلة

مثال(1):

قطعة من المطاط تحمل ماكينة حملها $1000\ lb$ لتنضغط بمقدار $0.2\ in$.إذا كان الأنفعال لا يزيد عن $40\ lb/in^2$.عين قطر وسمك قطعة المطاط ذات المقطع الدائرى . إعتبر $E = 150\ lb/in^2$.

الحل

$$f = \frac{P}{A} = \frac{1000}{\pi (d/2)^2}$$

أى :

$$40 = \frac{1000}{\pi d^2/4}$$

حيث d هو قطر القطعة الدائرية. ومنها نحصل على :

$$d^2 = 31.83\ in^2$$

وعلى ذلك فإن :

$$d = 5.64\ in$$

أيضا الأنفعال يتعين من :

$$e = \frac{x}{l}$$

ولكن

$$e = \frac{f}{E}$$

إذن:

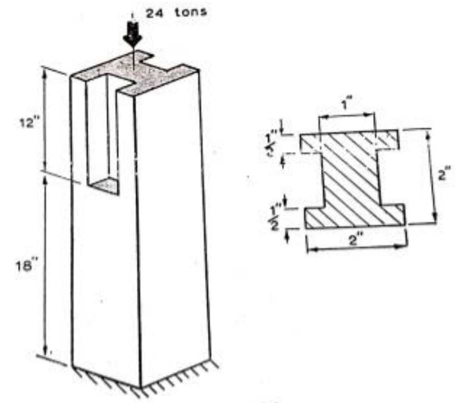
$$e = \frac{40}{150} = \frac{0.2}{l}$$

وعلى ذلك فإن سمك قطعة المطاط هى :

$$l = 0.75 \ in$$

مثال(2):

الشكل يوضح قطعة من الحديد على شكل منشور رباعى ذو قاعدة مربعة طول ضلعها $2\ in$ وإرتفاعه $30\ in$ فإذا تم عمل تجويفينمتكافئين متواجهين كما هو موضح .فإذا كان المنشور يحمل ثقلا قدره $24\ tons$ وكان $E = 1250 \ ton/in^2$ فأوجد مقدار النقص فى الطول .



الحل

أولا : فى الجزء الصلب ذو الطول $18\ in$

$$x_1 = e_1\, l_1 = 18\ e_1$$

وكذلك $f_1 = \dfrac{P}{A_1} = \dfrac{24}{2\times 2} = 6\ ton\ /in^2$

إذن $e_1 = \dfrac{f_1}{E} = \dfrac{6}{E}$

ثانيا : فى الجزء الأجوف ذو الطول $12\ in$

$$x_2 = e_2\, l_2 = 12\ e_2$$

وكذلك $f_2 = \dfrac{P}{A_2} = \dfrac{24}{(2\times 2) - 2\,(1\times(1/2))} = \dfrac{24}{(2\times 2) - 1} = \dfrac{24}{3} = 8\ ton\ /in^2$

إذن $e_2 = \dfrac{f_2}{E} = \dfrac{8}{E}$

وبالتالى فإن مقدار النقص الحادث فى الطول هو :

$$x = x_1 + x_2 = 18\times \frac{6}{E_1} + 12\times \frac{8}{E} = \frac{204}{E} = \frac{204}{1250} = 0.0163\ \ in$$

==

مثال(3):

قضيب ذات مقطع $10\ mm \times 10\ mm$ يتحمل شد محورى مقداره $10\ KN$.إحسب الأحهاد الواقع عليه .

الحل

$$f = \frac{P}{A} = \frac{10\ KN}{10\ mm \times 10\ mm} = \frac{10 \times 10^{3}\ N}{10^{2}(mm)^{2}} = \frac{10 \times 10^{3} N}{10^{2}(m/1000)^{2}}$$

$$= \frac{10 \times 10^{3} \times 10^{6}}{10^{2}} \times \frac{N}{m^{2}} = 100 \times 10^{6} \frac{N}{m^{2}} = 100\, MPa$$

==

مثال(4):

قضيب طوله $10\ mm$ يتحمل شد محورى مقداره $10\ KN$.فإذا كان الطول بعد تأثير الشد هو $100.1\ mm$.فإحسب الأنفعال الناتج .

الحل

$$e = \frac{x}{l} = \frac{(100.1 - 100)\ mm}{100\ mm} = \frac{0.1\ mm}{100\ mm} = 0.001$$

==

مثال(5):

قضيب طوله $10\ mm$ يتحمل ضغط محورى مقداره $10\ KN$. فإذا كان الطول بعد تأثير الضغط هو $99\ mm$.فإحسب الأنفعال الناتج .

الحل

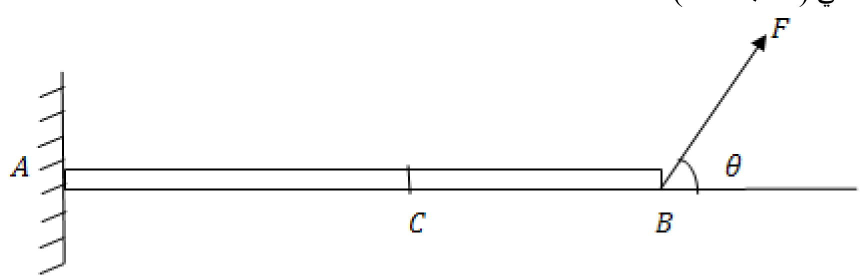
$$e = \frac{x}{l} = \frac{(99 - 100)\ mm}{100\ mm} = \frac{-1\ mm}{100\ mm} = -0.01$$

الباب الثالث

اتزان القضبان الرفيعة تحت تأثير قوي غير محورية

أولا:القوي القاصة وعزم الانحناء

درسنا فيما سبق اتزان القضبان الرفيعة تحت تأثير قوي محورية ، أي أن القوي تؤثر في اتجاه محور القضيب وعرفنا إنه يكون في القضبان قوي أو إجهادات داخلية .
وسوف ندرس في هذا الباب دراسة اتزان القضبان الرفيعة عندما تؤثر عليها قوي غير محوريه . في هذه الحالة تنشأ إجهادات داخلية في القضبان وتظهر عند المقاطع قوي قاصة عمودية علي محاور القضبان وعزوم انحناء.
في بعض المجالات مثل المباني والإنشاءات الهندسية يكون من المهم حساب هذه القوي القاصة وعزوم الانحناء . ويجب الإشارة هنا إلي أن هذا الموضوع من الموضوعات التي تهم المهندسين ويدرسه طلاب كلية الهندسة وذلك لأهمية دراسة التأثيرات الناتجة من قوي التحميل المختلفة وعلاقتها بالإجهادات الداخلية من شد أو ضغط وقوي قاصة وكذلك عزوم الانحناء وذلك في الإنشاءات الهندسية المختلفة.
ولكي نلمس وجود هذه القوي الداخلية من شد أو ضغط وقوي قاصة وعزوم انحناء نعتبر اتزان قضيب أفقي خفيف AB مثبت أحد طرفية A في حائط رأسي ويؤثر في الطرف الحر B للقضيب قوة مقدارها F في اتجاه يصنع زاوية θ مع الأفقي (كما بالشكل)



نعتبر مقطع للقضيب عند C . لكي يتزن الجزء CB من القضيب فإنه يجب أن تظهر عند المقطع C قوتان إحداهما T في اتجاه محور القضيب وتساوي مركبة القوه F في اتجاه محور القضيب

أي أن

$$T = F \cos \theta \tag{3.1.1}$$

والثانية N في اتجاه العمودي علي القضيب وتساوى مركبة القوة F في اتجاه العمودي علي محور القضيب أي أن

$$N = F \sin \theta \tag{3.1.2}$$

وكذلك يظهر عند المقطع C الازدواج M كما هو مبين بالشكل أي في اتجاه دوران عقارب الساعة ويساوي الازدواج المكون من القوتين المتساويتين $N, F \sin \theta$ في المقدار وعكسه في الاتجاه أي أن

$$M = CB . F \sin \theta \tag{3.1.3}$$

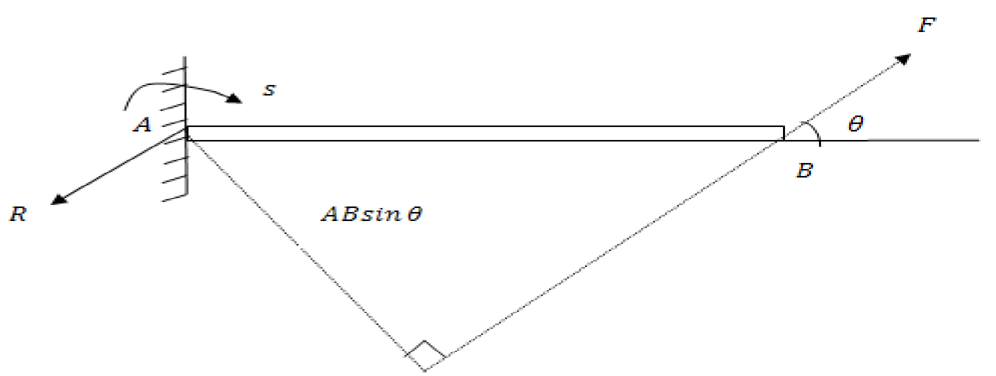
ويجب ملاحظة أن الجزء الأيسر من القضيب AC يؤثر علي الجزء الأيمن CB بالقوتين T في اتجاه محور القضيب والقوي القاصة N وعزم الانحناء M وكذلك فإن الجزء الأيمن CB يؤثر علي الجزء الأيسر AC بنفس القوتين السابقتين وعزم الانحناء ولكن في الاتجاهات المضادة

نلاحظ انه باعتبار اتزان القضيب كله AB فإنه عند موضع التثبيت A يؤثر رد الفعل R يوازي ويساوي في المقدار القوه F عند الطرف B ولكن في اتجاه مخالف .

أي أن $R = F$ كذلك يؤثر عند الطرف المثبت A ازدواج S يساوي في المقدار الازدواج المكون من القوتين R, F وعكسه في الاتجاه أي أن

$$S = AB . F \sin \theta$$

وفيما يلي نعطي بعض الأمثلة لتوضيح كيفية تعيين القوي القاصة وعزوم الانحناء عند مقاطع القضيب المختلفة وسوف نقوم برسم المنحنيات التي تمثل القوي القاصة ، عزوم الانحناء

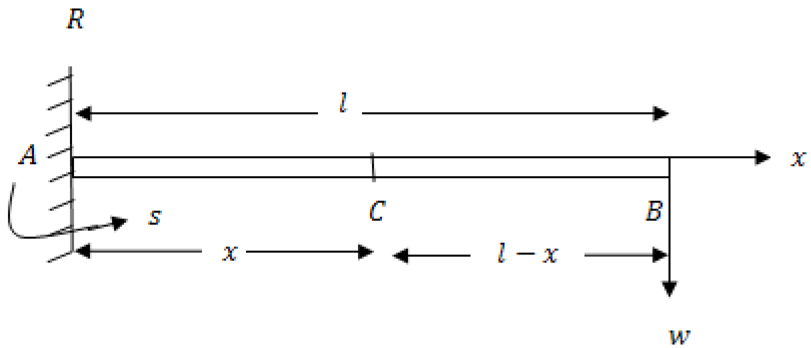


أمثلة محلولة

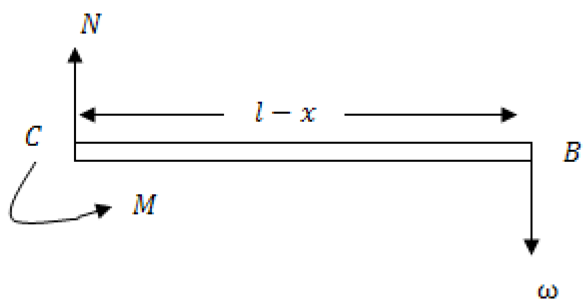
مثال1:

أوجد القوي القاصة وعزوم الانحناء عند أي مقطع لقضيب خفيف أفقي طوله l مثبت من أحد الطرفين في حائط رأسي إذا وضع ثقل ω عند الطرف الحر للقضيب.

الحل



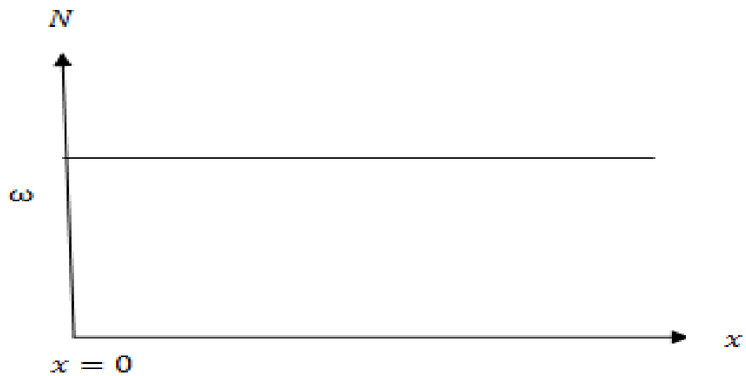
نفرض أن القضيب هو AB وإنه مثبت عند الطرف A ونأخذ مقطع للقضيب عند C حيث $AC = x$.
لإيجاد القوه القاصة N وعزوم الانحناء M عند المقطع C.
ندرس اتزان أحد الجزئيين AC أو CB .



نلاحظ أن دراسة اتزان الجزء الأيمن من القضيب CB أسهل من دراسة اتزان الجزء الأيسر AC وذلك لوجود رد فعل R وازدواج S.
باعتبار اتزان الجزء الأيمن من القضيب CB نلاحظ إنه لكي يتزن هذا الجزء يجب أن يكون عند C قوة قاصة N راسيا لأعلي وازدواج موجب (أي في اتجاه مضاد لدوران عقارب الساعة) وليكن M كما بالشكل حيث

$$N = \omega \qquad (1)$$
$$M = \omega(l - x) \qquad (2)$$

المعادلة (1) توضح لنا أن القوة القاصة ثابتة عند جميع مقاطع القضيب وباعتبار محور القضيب AB هو المحور الأفقي x فإن منحني القوة القاصة N يكون خطا مستقيما أفقيا يبعد عن المحور x مسافة تساوى ω كما بالشكل .

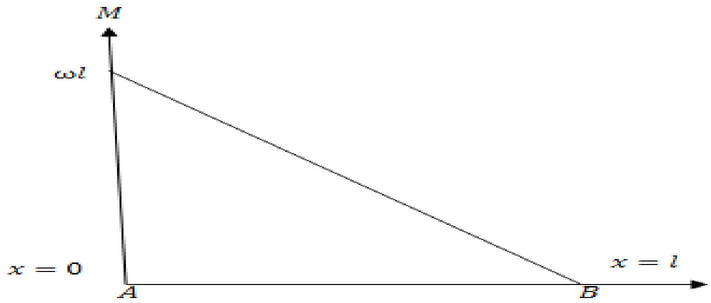


أما المعادلة (2) تعطينا عزوم الانحناء M عند المقطع C وواضح أن عزوم الانحناء يعتمد علي x . أي يتغير من مقطع لآخر .
وبرسم المنحني الذي يمثل عزوم الانحناء عند المقاطع المختلفة للقضيب نجد أنه يمثل خطا مستقيما يمر بالنقطتين $(l, o), (o, \omega l)$
نلاحظ أن عزوم الانحناء أكبر ما يمكن عندما $x = 0$ (أي عند الطرف المثبت A) ويساوي ωl بينما ينعدم عزوم الانحناء عند $x = l$ (أي عند الطرف الحر B) .

<u>ملحوظة</u>: نلاحظ انه بدراسة اتزان القضيب كله AB فإننا نعين رد الفعل R والازدواج S .

من الاتزان نجد أن

$$R = \omega, S = \omega l$$



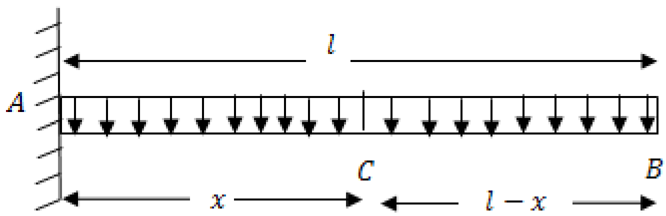
واتجاهيها كما بالشكل الموضح

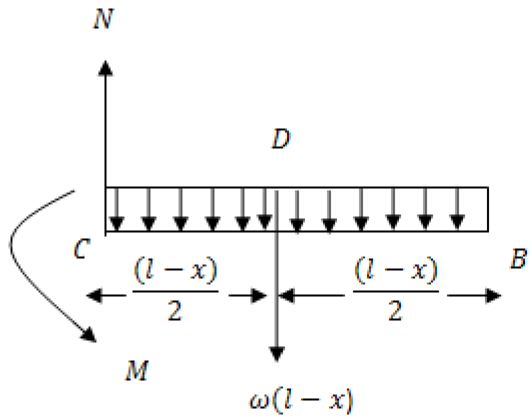
مثال2:

أوجد القوي القاصة وعزوم الانحناء لقضيب أفقي AB طوله l مثبت من طرفة A ومحمل تحميلا منتظما قدرة ω لوحده الأطوال .

الحل

نفرض مقطع عند C يبعد مسافة x عن الطرف المثبت A .





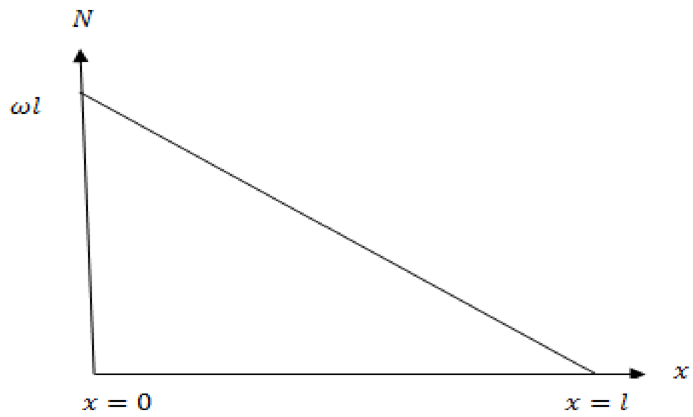
لإيجاد القوي القاصة وعزوم الانحناء عند المقطع c فإننا ندرس اتزان Bc .
نلاحظ أن التحميل الواقع علي الجزء CB يساوي $\omega(l-x)$ ويؤثر عند منتصفة عند نقطة D $(CB = DB)$
وبالتالي فإنه من اتزان هذا الجزء نجد أن

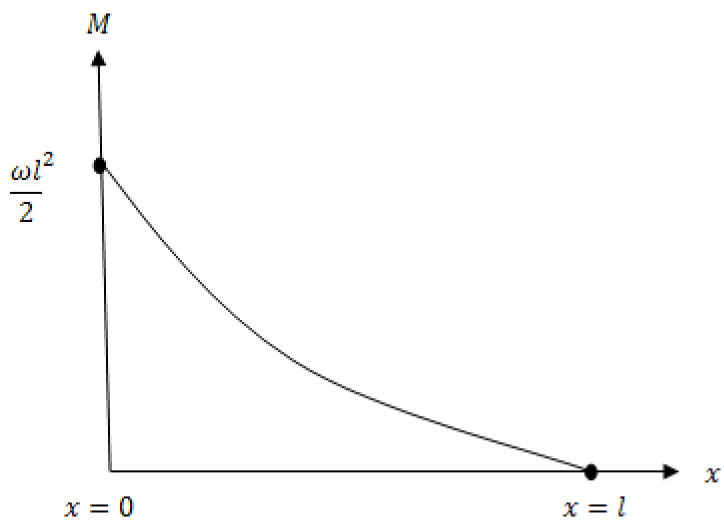
$$N = \omega(l-x) \qquad (1)$$

$$M = \omega(l-x)\frac{1}{2}(l-x)$$

$$M = \frac{\omega}{2}(l-x)^2 \qquad (2)$$

المعادلة (1) تعين القوي القاصة عند أي مقطع للقضيب ونلاحظ أنها تتغير من مقطع لآخر ويمثلها خط مستقيم مار بالنقطتين $(l,o),(o,\omega l)$ كما بالشكل.
نلاحظ أيضا أن أكبر قوة قاصة تكون عند الطرف المثبت للقضيب $(x=0)$ وتساوي ωl وأن القوة القاصة تتلاشي عند الطرف الحر للقضيب $x = l$.





المعادلة(2) تعين عزوم الانحناء عند مقاطع القضيب المختلفة ونجد إنها تتغير من مقطع لآخر . وبتمثيل منحني عزوم الانحناء نجد أنة قطع مكافئ رأسه النقطة (l,o) مفتوح لأعلي وطول وتره البؤري العمودي يساوي $\frac{2}{\omega}$.

وأكبر عزوم انحناء يكون عند الطرف المثبت للقضيب ويساوي $\frac{\omega l^2}{2}$ ويكون مساويا الصفر عند الطرف الحر للقضيب $(x = l)$.

مثال3:

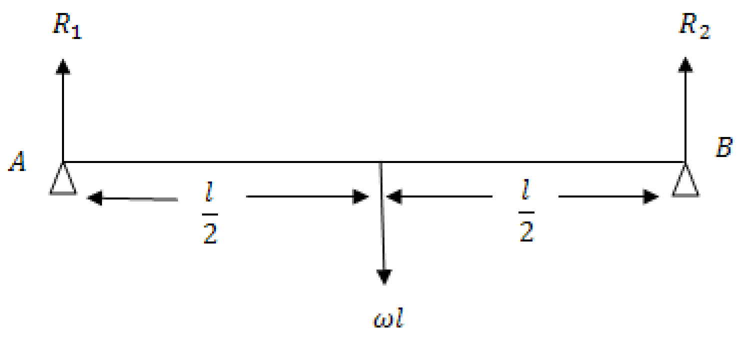
أوجد القوي القاصة وعزوم الانحناء لقضيب ثقيل منتظم AB طوله l ووزن وحده الأطوال منة ω ويرتكز بطرفيه على وتدين في مستوي أفقي.

الحل

باعتبار اتزان القضيب كله AB

$$R_1 + R_2 = \omega l$$

ومن التماثل في الشكل



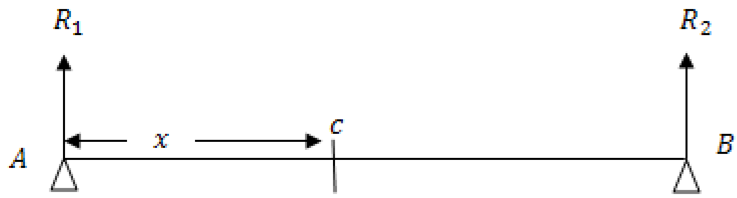
نجد أن

$$R_1 + R_2 = \frac{1}{2}\omega l$$

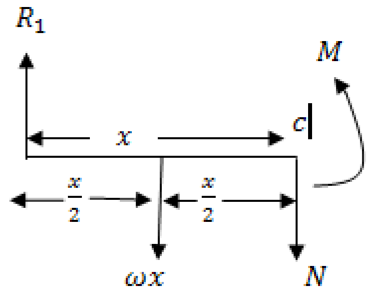
نعتبر مقطع للقضيب عند c حيث $Ac = x$ وباعتبار اتزان الجزء Ac فإنه في الاتجاه الرأسي يكون

$$R_1 = \omega x + N$$

$$\frac{1}{2}\omega l = \omega x + N$$



$$N = \omega\left(\tfrac{l}{2} - x\right) \tag{1}$$

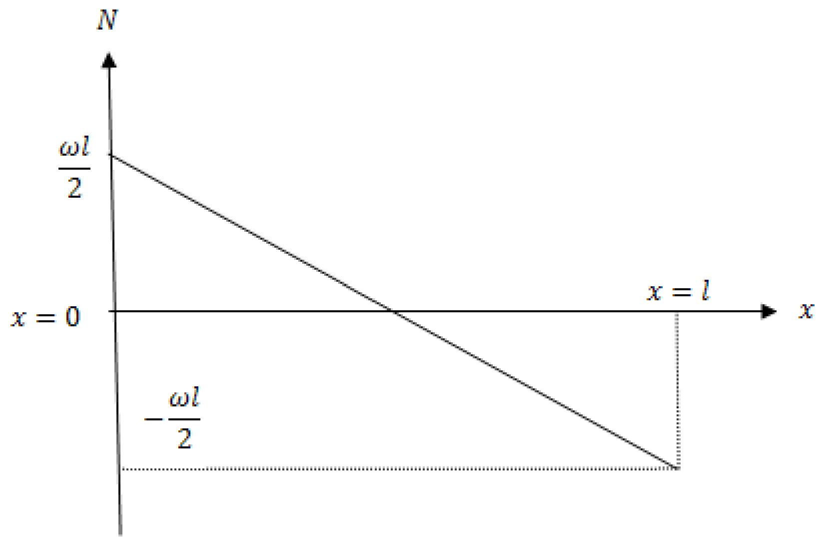


بأخذ العزوم حول c نحصل علي

$$M + \omega x\left(\frac{x}{2}\right) = R_1 x$$

$$M = \frac{1}{2}\omega l x - \frac{\omega x^2}{2} = -\frac{\omega}{2}(x^2 - lx) \tag{2}$$

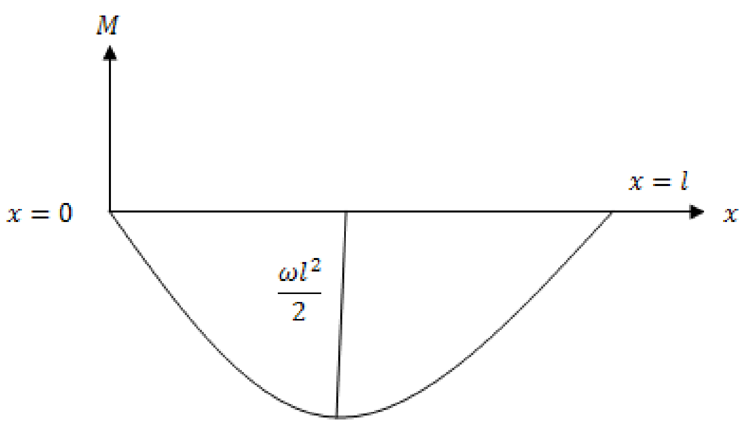
المعادلة (1) هي خط مستقيم كما بالشكل



وواضح إن أكبر قوة قاصة عند طرف القضيب A $(x = 0)$ وتساوي $\frac{1}{2}\omega l$ وبتزايد x تتناقص القوة القاصة إلي أن تنعدم عند منتصف القضيب عندما $x = l/2$ ثم تعكس اتجاهها في النصف الأيمن من القضيب AB .

المعادلة (2) تمثل معادلة قطع مكافئ

وواضح أن عزم الانحناء ينعدم عند طرفي القضيب أي عندما $x = l, x = 0$ ويأخذ أكبر قيمة عندما $x = l/2$ عند منتصف القضيب



تمرين

(1) قضيب خفيف أفقي طوله l يرتكز عند طرفية D, A علي حاملين وضح ثقلين متساويين كل منهما ω عند النقطتين C, B حيث $AB = CD = a(a < 1/2)$. أوجد القوة القاصة وعزوم الانحناء عند أي مقطع للقضيب.

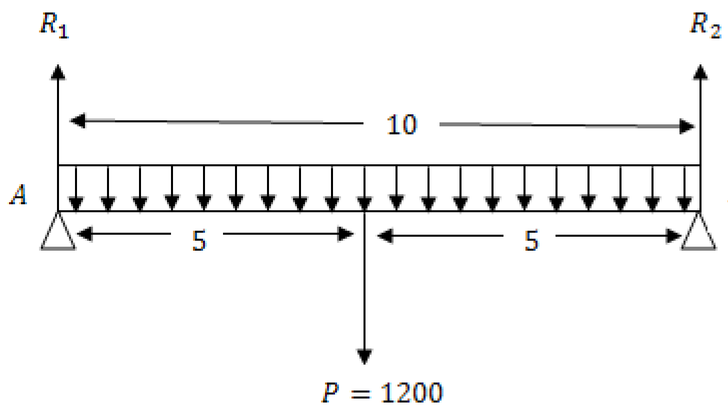
مثال4:

قضيب خفيف AB مرتكز عند طرفية A, B طوله $10\ ft$. محمل بتحميل منتظم حيث وزن وحده الأطوال تساوي $120\ Ib$. عين القوة القاصة وكذلك عزوم الانحناء والتمثيل الهندسي لها علي بعد x من الطرف A .

الحل

الحمل الكلي الذي يؤثر علي القضيب يكون مساويا

$$P = 120 \times 10 = 1200\ \ Ib$$



ومن التماثل في الشكل نجد أن

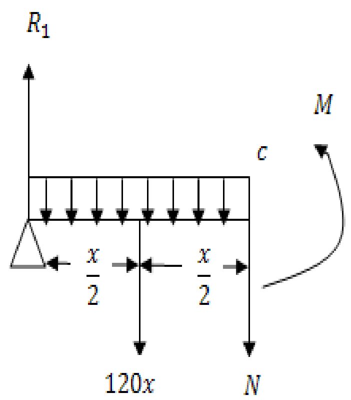
$$R_1 = R_2 = 600\ Ib$$

تعتبر المحور x في اتجاه محور القضيب ويأخذ نقطة A نقطة أصل وباعتبار مقطع من القضيب علي بعد x من النقطة A ودراسة اتزان نجد أن
القوة القاصة عند c يكون مساويا

$$N = R_1 - 120\ x$$

$N = 600 - 120x$ (1)

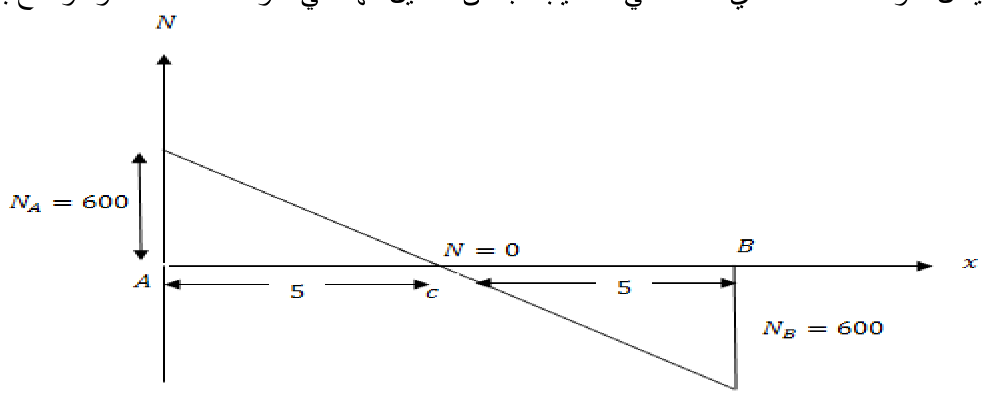
وحيث إنه لا توجد تحميل آخر علي القضيب غير الحمل الموزع توزيع منتظم فإن N تمثل هنا القوة القاصة عند أي نقطة علي القضيب



وعزم الانحناء عند c يكون مساويا

$$M = R_1 x - 120x.\frac{x}{2}$$
$$= 600x - 60x^2 \quad (2)$$

نلاحظ أن N هي دالة خطية في x وتنعدم عند منتصف القضيب وبأخذ القضيب هو المحور السيني والعمودي علية يمثل القوة القاصة عند أي نقطة علي القضيب نجد أن التمثيل الهندسي للقوة القاصة كما هو موضح بالرسم .



عزوم الانحناء عند A يكون مساويا

$M_A = 0$

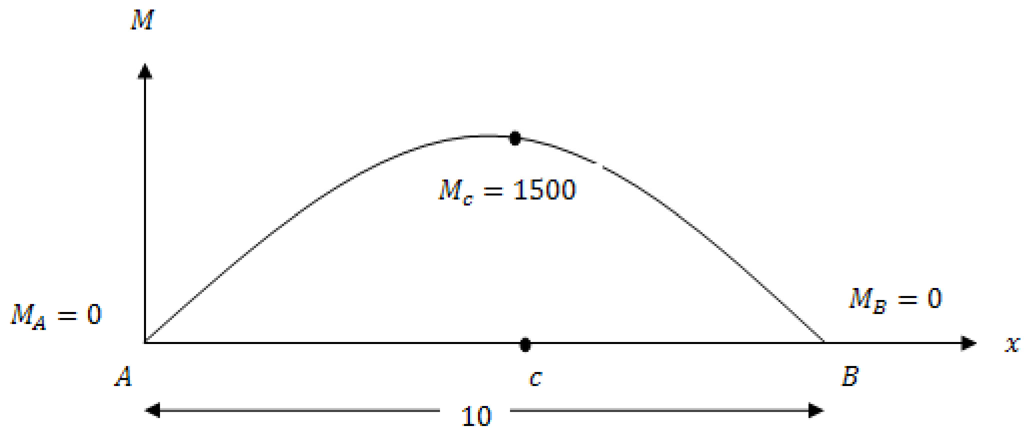
عزوم الانحناء عند B يكون مساويا

$M_B = 0$

عزوم الانحناء عند c يكون مساويا

$$M_c = 600 \times 5 - 60 \times 25$$
$$= 3000 - 1500 = 1500 \ Ib.ft.$$

ونلاحظ أن المعادلة (2) تمثل معادلة قطع مكافئ



مثال5:

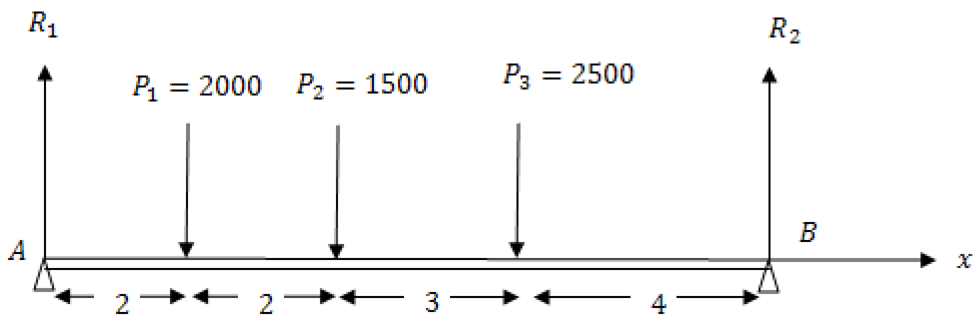
قضيب خفيف AB مرتكز عند طرفية A, B طوله $11\ ft$ تؤثر علية ثلاثة أحمال خارجية هي علي التوالي $2500,\ 1500,\ 2000\ Ib$ عند النقط التي تبعد $2,4,7\ ft$ من الطرف A أوجد القوي القاصة وعزوم الانحناء وكذلك التمثيل الهندسي لكل منها .

الحل

بدراسة اتزان القضيب AB نجد أن

$$R_1 + R_2 = 6000 \qquad (1)$$

وبأخذ العزوم حول B نحصل علي



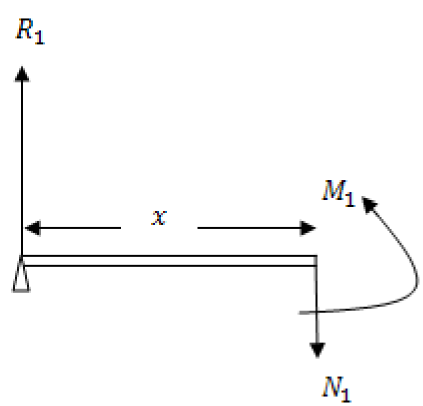
$$11\,R_1 = 2000 \times 9 + 1500 \times 7 + 2500 \times 4$$
$$= 18000 + 10500 + 10000$$
$$11\,R_1 = 38500$$
$$R_1 = 3500 \ Ib. \qquad (2)$$

بالتعويض من (2) في (1) نجد أن

$$R_2 = 2500 \qquad Ib$$

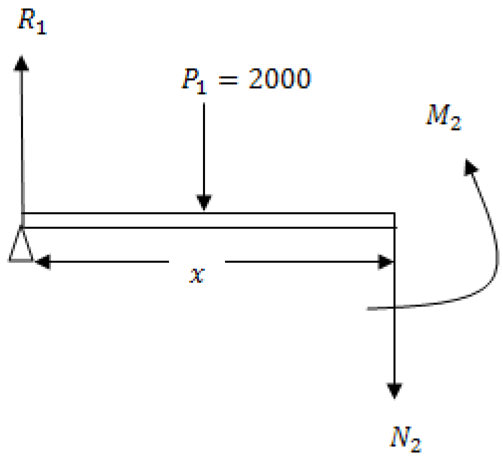
نعتبر المحور السيني في اتجاه القضيب .
لتعين القوة القاصة وعزوم الانحناء عند أي نقطة تعتبر اتزان المقاطع التي تبدأ من الطرف الأيسر

أولا: عندما تكون $0 < x < 2$



$$N_1 = R_1 = 3500 \ Ib$$
$$M_1 = R_1 x = 35001 \ x \quad Ib.ft$$

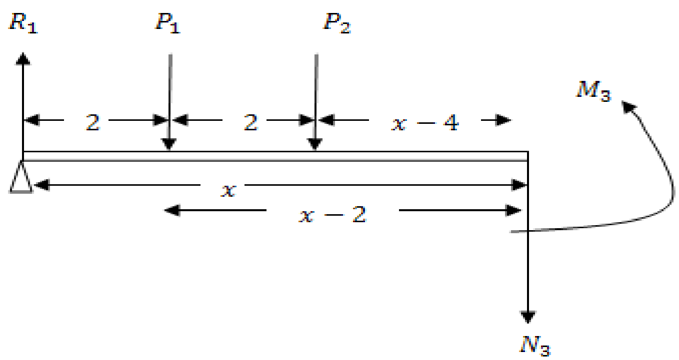
ثانيا: عندما تكون $2 < x < 4$



$$N_2 = R_1 - p_1 = 3500 - 2000 = 1500$$

$$M_2 = 3500\, x - 2000\,(x - 2)$$

ثالثا : عندما تكون $4 < x < 7$



$$N_3 = R_1 - p_1 - p_2$$

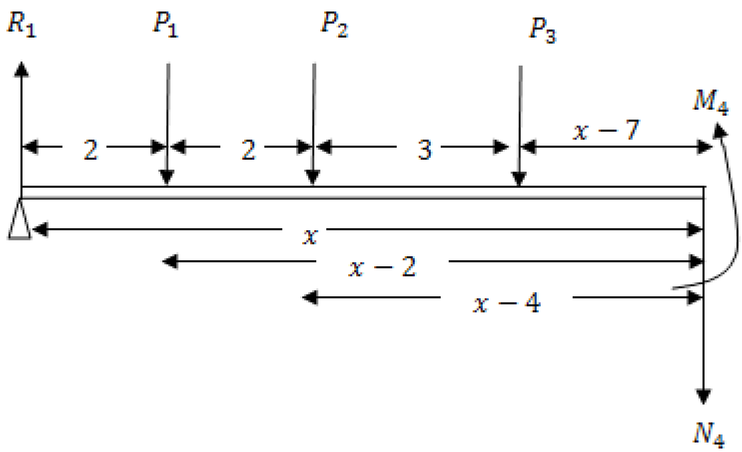
$$= 3500 - 2000 - 1500$$

$$N_3 = 0$$

$$M_3 = R_1 x - 2000\,(x - 2)$$

$$- 1500\,(x - 4)$$

رابعا : عندما تكون $7 < x < 11$



$$N_4 = R_1 - p_1 - p_2 - p_3$$

$$N_4 = 3500 - 2000 - 1500 - 2500$$

$$N_4 = -2500$$

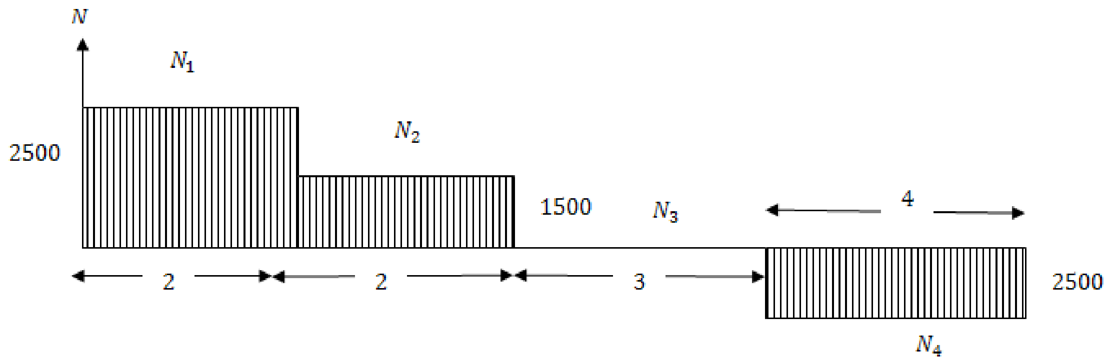
$$m_4 = 3500\ x - 2000\ (x-2) - 1500\ (x-4) - 2500\ (x-7)$$

$$M_3 = 3500\ x - 2000\ (x-2)$$
$$-1500\ (x-4)$$

التمثيل الهندسي للقوة القاصة .

نأخذ اتجاه القضيب لمحور سيني نقطه A هي نقطه الأصل أعلي القضيب يمثل القيم الموجبة للقوه القاصة وأسفل القضيب يمثل القيم السالبة للقوة القاصة .

وبالتالي بالنسبة إلي $N_1 = 3500$ عبارة عن مستقيم يوازي المحور ox وكل نقطة علية علي بعد 3500 لأعلي .
وبالمثل N_2 ونلاحظ أن $N_3 = 0$ أي المحور ox نفسه هو الممثل للقوة القاصة N_3 أما بالنسبة إلي N_4 فهي سالبة وبذلك نرسم مستقيم يوازي ox وينخفض مسافة مقدارها 2500 وبذالك تكون قد رسمنا التمثيل الهندسي للقوة القاصة كما هو مبين بالرسم التالي



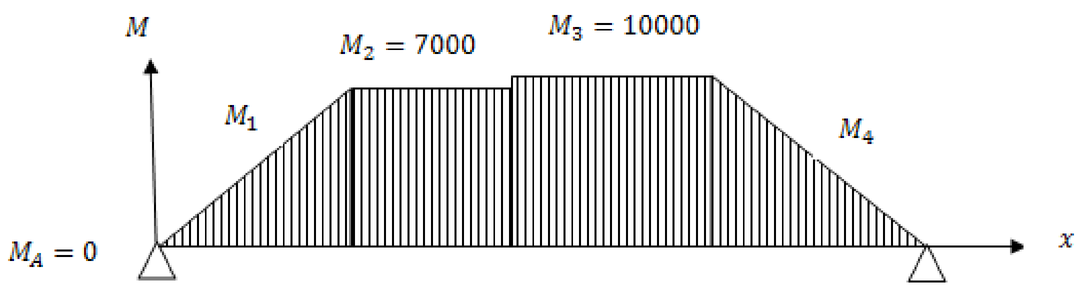
التمثيل الهندسي لعزوم الانحناء :

لكي يمكن تمثيل كل من M_1, M_2, M_3, M_4 هندسيا يجب معرفة عزوم الانحناء عند نقط تأثير p_1, p_2, p_3 عزوم الانحناء عند p_1 يعطي

$$(M_1)_{x=2} = 3500 \times 2 = 7000 \ Ib.ft$$

$$(M_2)_{x=4} = 10000 \ Ib.ft, (M_3)_{x=7} = 10000 \ Ib.ft$$

حيث أن القضيب مرتكز عن A, B فإن عزوم الانحناء عند نقط الارتكاز واضح من المعادلات التي تعطي عزوم الانحناء أنها فقط دالة خطية في x أي يمكن تمثلها بخط مستقيم .

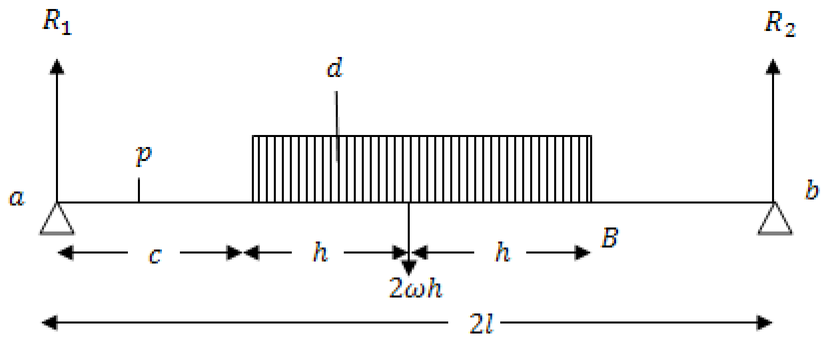


مثال6:

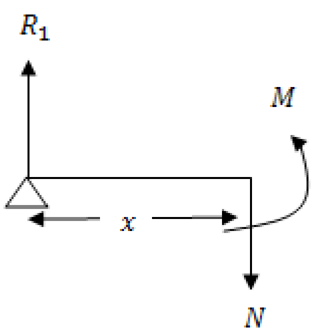
قضيب خفيف أفقي ab طوله $2l$ مرتكز عند نهايتيه ويحمل ثقل متحرك AB طولـه $2h\ (h<l)$ ووزن وحدة الطول منه ω . أوجد أكبر عزم انحناء عند نقطة ما علي القضيب وأثبت أنه في هذه الحالـة تقسم هذه النقطـة المستقيم AB بنفس النسبة التي تقسم بها المستقيم ab

---

الحل



بأخذ وضعا للقضيب ab (كما بالشكل) بحيث يكون $aA = c$ نوجد قيمة c بحيث يكون عزوم الانحناء عند d أكبر ما يمكن لذلك باعتبار اتزان القضيب ab كله نجد أن



$$R_1 + R_2 = 2\omega h$$

وبأخذ العزوم حول النقطة b نجد أن

$$R_1 \times 2l = 2\omega l(2l - c - h)$$

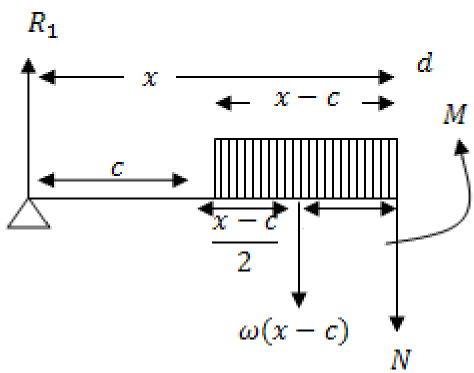
$$\therefore\ R_1 = \frac{\omega h}{l}(2l - c - h) \qquad (2)$$

وبأخذ مقطع للقضيب عند p حيث $ap = x$ وبشرط أن $x < c$ في حالة $x < c$

$$N = R_1 = \frac{\omega h}{l}(2l - c - h) \tag{3}$$

$$M = R_1 x = \frac{\omega h}{l}(2l - c - h)x \tag{4}$$

وأخذ مقطع عند النقطة d علي بعد x من النقطة a بحيث تكون $ad = x$ أي أن $x > c$.
القوة القاصة وعزوم الانحناء في هذه الحالة تكون



$$N = R_1 - \omega(x - c)$$

$$N = \frac{\omega h}{l}(2l - c - h) - \omega(x - c) \tag{5}$$

$$M = \frac{\omega h}{l}(2l - c - h)x - \frac{1}{2}\omega(x - c)^2 \tag{6}$$

واضح أن عزوم الانحناء M يتغير بتغير c .

M نهاية عظمي عندما تحقق c الشرط الآتي

$$\frac{dM}{dc} = 0 \tag{7}$$

$$-\frac{x\omega h}{l} + \omega(x - c) = 0$$

ومنها

$$c = (1 - \frac{h}{l})x \qquad (8)$$

وبالتعويض بهذه القيمة c فإننا نحصل علي أكبر عزوم انحناء بالصورة

$$\begin{aligned} M_{max} &= (M)_{c=x(1-h/l)} \\ &= \frac{\omega h}{l}[2l - h - x(1-h/l)]x \\ &- \frac{1}{2}\omega[x - x(1-h/l)]^2 x \end{aligned} \qquad (9)$$

وفي هذه الحالة فإن النسبة $\frac{Ad}{dB}$ نأخذ الصورة

$$\frac{Ad}{dB} = \frac{x-c}{2h-(x-c)} \qquad (10)$$

بالتعويض عن قيمة c من المعادلة (8) ينتج أن

$$\frac{Ad}{dB} = \frac{\frac{h}{l}}{2h - \frac{h}{l}x} = \frac{h/l\,(x)}{\frac{h}{l}(2l-x)} = \frac{x}{2l-x} = \frac{ad}{db}$$

أي أن النقطة d التي عندها عزوم الانحناء أكبر ما يمكن تقسم الثقل المتحرك AB بنفس النسبة التي تقسم بها القضيب ab.

مثال7:

قضيب أفقي AB طوله l مثبت طرفه B في حائط رأسي ومحمل بثقل W موزع خطيا علي طول القضيب بازدياد منتظم يبدأ من الصفر عند الطرف الحر A. أوجد القوة القاصة وعزوم الانحناء عند أي مقطع للقضيب.

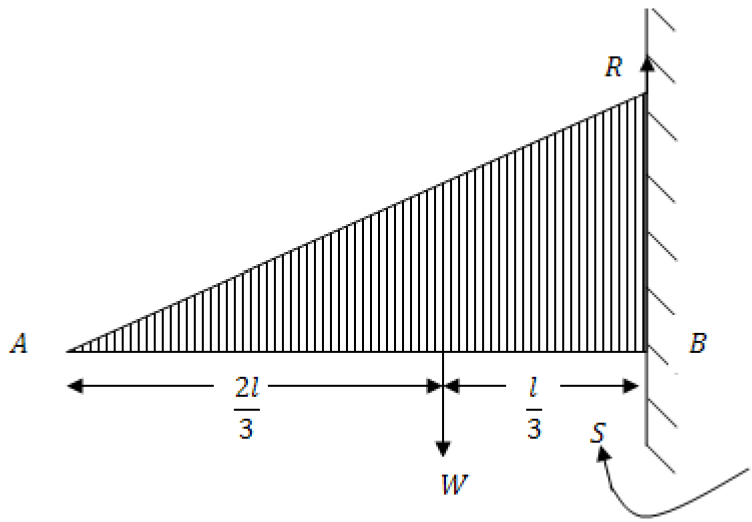
الحل

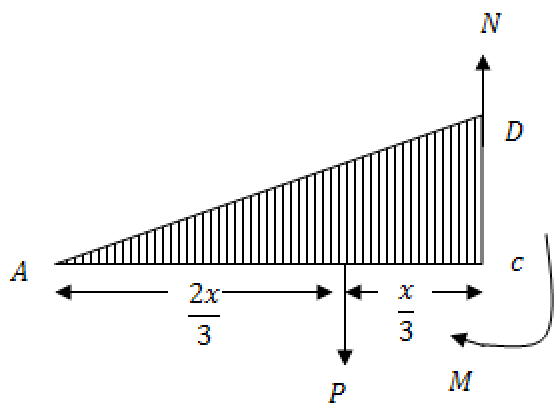
حيث أن كثافة التحميل $\omega(x)$ عند المقطع c علي بعد x من الطرف الحر A موزعا توزيعا خطيا علي طول القضيب فإن هذا الخط المستقيم يجب أن يمر بنقطة الأصل لذا فإن العلاقة بين $x, \omega(x)$ هي

$$\omega(x) = \lambda x \qquad (1)$$

حيث λ هي ميل الخط المستقيم.

كثافة تحميل $\omega(x)$ عند المقطع c تعبر عن الارتفاع DC ويكون الثقل الواقع علي عنصر صغير طوله dx من القضيب يساوي $\omega(x)dx$ وعلي ذلك يكون التحميل الكلي الواقع علي القضيب AB يتعين من





$$W = \int_0^l \omega(x)dx$$

$$W = \int_0^l \lambda x dx$$

$$W = \frac{\lambda l^2}{2} \qquad (2)$$

ومنها نعين قيمة λ وتساوي

$$\lambda = \frac{2W}{l^2} \tag{3}$$

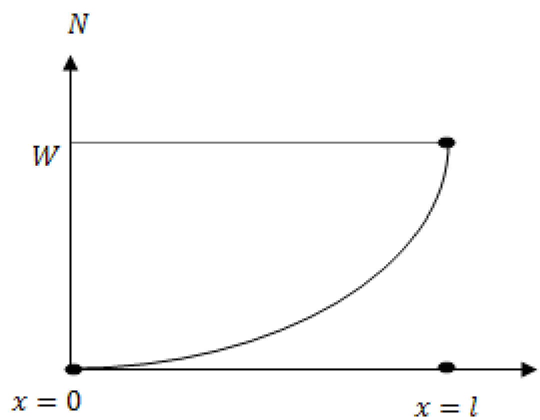
أي أن كثافة التحميل $\omega(x)$ تكون في الصورة

$$\omega(x) = \frac{2W}{l^2}x \tag{4}$$

باعتبار اتزان الجزء Ac من القضيب نجد أن القوة القاصة N تساوي الثقل p الواقع علي الجزء Ac, أي أن

$$N = p = \int_0^x \omega(x)dx = \int_0^x \frac{2W}{l^2}x\,dx$$

$$N = \frac{Wx^2}{l^2} \tag{5}$$



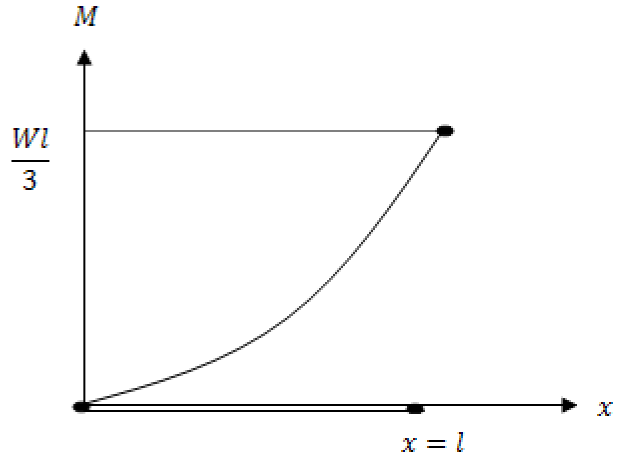
حيث يقسم الثقل p المسافة Ac بنسبة $1:2$, أي أن

$$AE = 2Ec = \frac{2x}{2}$$

واضح أن العلاقة (5) تعين القوة القاصة عند أي مقطع للقضيب وواضح أيضا أنها تمثل قطع مكافئ رأسه عند نقطة الأصل (كما بالشكل) وأن القوة القاصة تساوي صفر عندما $x = 0$ (أي عند الطرف الحر A) وأن أكبر قيمة للقوة القاصة عندما $x = l$ أي عند الطرف المثبت في الحائط B وتساوي W

وبأخذ العزوم حول المقطع c نجد أن

$$M = p\frac{x}{3} = \frac{Wx^2}{l^2}\frac{x}{3} = \frac{Wx^3}{3l^2} \qquad (6)$$



المعادلة (6) تعطي عزوم الانحناء عند أي مقطع وهي علاقه من الدرجة الثالثة في x ونلاحظ أن $M = 0$ عندما $x = 0$ (أي عند الطرف الحر A يتلاشى عزوم الانحناء) .

أيضا عزوم الانحناء يكون أكبر ما يمكن عندما $x = l$ (أي عند الطرف المثبت B) ويساوي $\frac{1}{2}Wl$ وفي الاتجاه الموجب أي في اتجاه عكس دوران عقارب الساعة .

ملحوظة:

يمكن إيجاد رد الفعل R والازدواج S عند الطرف المثبت B وذلك باعتبار الاتزان القضيب كله AB فنجد أن

$$R = W$$

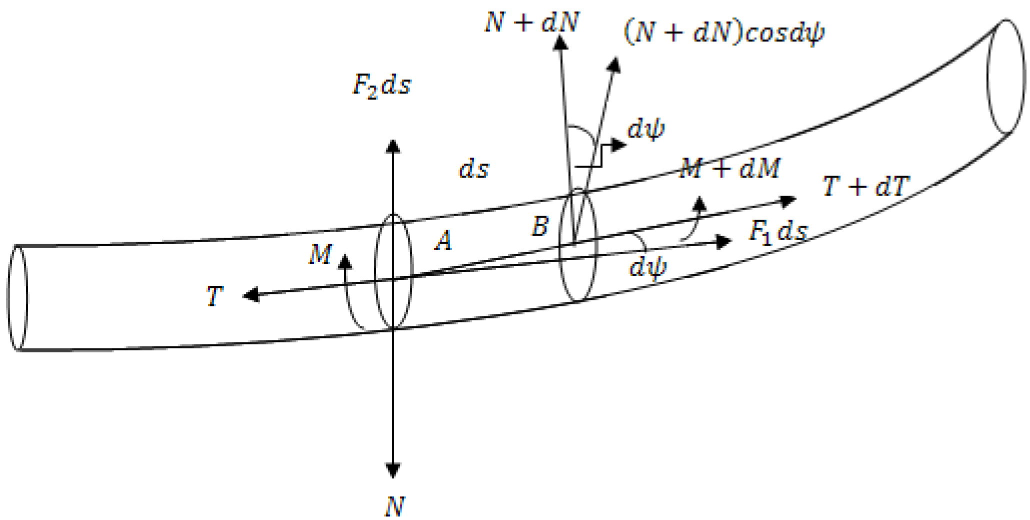
$$S = \frac{1}{3}Wl$$

وذلك لأن الثقل W يؤثر في نقطة تقسم القضيب AB بنسبة 2:1 أي أن

$$AF = 2FB = \frac{2}{3}l$$

ثانيا:- معادلات الاتزان لقضيب رفيع منحني :

بفرض اتزان عنصر طوله dS من قضيب رفيع منحني ونفرض أن T القوة في اتجاه محور القضيب (المماس عند A)، N القوة القاصة العمودية علي محور القضيب , M عزوم الانحناء علي المقطع الأيسر .
ونفرض أن $T + dT$ القوة في اتجاه محور القضيب (المماس عندB) و $N + dN$ هي القوة القاصة العمودية علي محور القضيب عند B , $\mathrm{M} + d\mathrm{M}$ هي عزوم الانحناء علي المقطع الأيمن .
ونفرض أن مركبتي القوة الخارجية المؤثرة علي العنصر في اتجاهي محور القضيب (المماس عند A) والعمودي علية هما $F_1 dS$, $F_2 dS$ كما بالشكل .



بكتابة معادلات الاتزان في اتجاهي محور القضيب (المماس عند A) والعمودي علية وأخذ العزوم حول A فإن

$$(T + dT)\cos d\psi + F_1 dS - T - (N + dN)\sin d\psi = 0 \qquad (3.2.1)$$

$$(T + dT)\sin d\psi + (N + dN)\cos d\psi + F_2 dS - N = 0 \qquad (3.2.2)$$

$$(\mathrm{M} + d\mathrm{M}) - \mathrm{M} + (N + dN)dS = 0 \qquad (3.2.3)$$

وحيث أن $d\psi$ زاوية صغيره جدا فإن

$$\sin d\psi = d\psi , \cos d\psi = 1$$

وبإهمال الكميات الصغيرة من الدرجة الثانية فإن المعادلات السابقة تأخذ الصورة

$$dT + F_1 dS - N d\psi = 0 \tag{3.2.4}$$

$$dN + T d\psi + F_2 dS = 0 \tag{3.2.5}$$

$$dM + N dS = 0 \tag{3.2.6}$$

وبالقسمة على dS تصبح المعادلات (3.2.4-3.2.6) فى الصورة

$$\frac{dT}{dS} - N\frac{d\psi}{dS} + F_1 = 0 \tag{3.2.7}$$

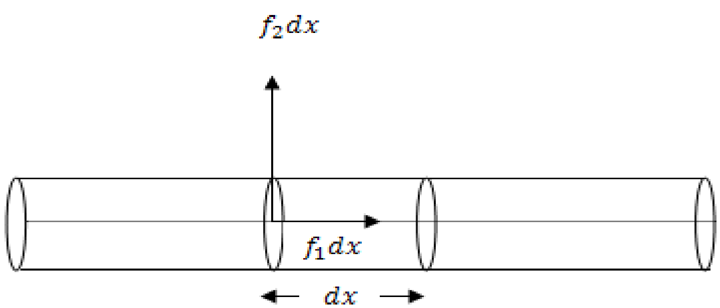
$$\frac{dN}{dS} + T\frac{d\psi}{dS} + F_2 = 0 \tag{3.2.8}$$

$$\frac{dM}{dS} + N = 0 \tag{3.2.9}$$

حيث $\rho = \frac{dS}{d\psi}$ هو نصف قطر الانحناء قطر الانحناء (النقوس) لمحور القضيب المعادلات (3.2.7 – 3.2.9) هي معادلات الاتزان لقضيب رفيع منحنى.

حالة خاصة:

عندما يكون القضيب مستقيما فان نصف قطر الانحناء يكون مالانهايه $\rho = \infty$ ونأخذ معادلات الاتزان لقضيب مستقيم الصورة



$$\frac{dT}{dx} + F_1 = 0 \tag{3.2.10}$$

$$\frac{dN}{dx} + F_2 = 0 \qquad (3.2.11)$$

$$\frac{dM}{dx} + N = 0 \qquad (3.2.12)$$

ملحوظة :

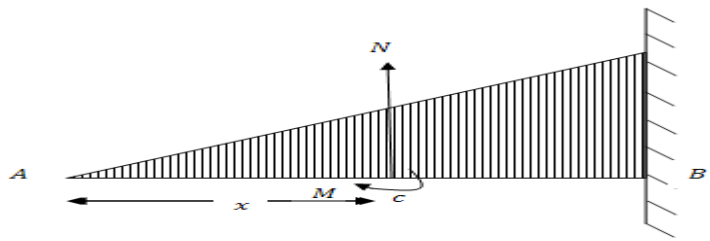
يمكن حذف القوة الفاصلة N بين المعادلتين (3.2.11),(3.2.12) وذلك بتفاضل المعادلة (3.2.12) بالنسبة إلى x وطرح (3.2.11) من الناتج نحصل على معادلة تفاضلية تربط عزم الانحناء M بمركبة القوى الخارجية F_2 في الصورة

$$\frac{d^2M}{dx^2} = F_2 \qquad (3.2.13)$$

مثال (1)

حل مثال (7) السابقة مستخدما معادلات الاتزان لقضيب رفيع مستقيم.

الحل



فى هذه الحالة كثافة التحميل $\omega(x)$ تساوى $\frac{2W}{l^2}x$ ويكون

$$F_2 = -\omega(x) = -\frac{2W}{l^2}x$$

وباستخدام العلاقة (11) فان القوة القاصة N عند اى مقطع تكون

$$N = -\int F_2 dx = +\int_o^x \frac{2W}{l^2} x dx$$

$$N = \frac{Wx^2}{2l^2}$$

وباستخدام المعادلة (12) نحصل على عزم الانحناء M في الصورة

$$M = -\int N dx = -\frac{W}{l^2}\int_o^x x^2 dx \qquad = -\frac{Wx^3}{3l^2}$$

وهى نفس النتائج التى حصلنا عليها فى الحل السابق لمثال (7) .

تمارين على الباب الثالث

(1) قضيب AB يمكنه الدوران حول طرفه A ويرتكز بطرفة الآخر B على حائط رأسي أملس. اثبت ان عزم الانحناء عند نقطة c على القضيب يتناسب مع $CA\,.CB$.

(2) ثلاث قضبان متساوية متصلة عند نهايتها العليا ومرتكزة عند نهايتها السفلى على مستوى افقى وتحمل عند أعلى نقطة ثقل F . اذا كان طول اى قضيب يساوى $2l$ ويصنع زاوية α مع الرأسي وان ω وزن وحدة الطول لكل منها . فاوجد عزم الانحناء عند اى نقطة من القضيب واثبت انه لا يعتمد على الثقل F .

(3) وضع طوق الدائري على مستوى افقى بحيث كان مستواه راسيا . اثبت أن عزم الانحناء الناشئ عن الطوق يكون اكبر ما يمكن عند نقطة بعدها الزاوي θ عن أعلى نقطة من الطوق يتعين من

$$\theta + \tan\,\theta = 0$$

(4) قضيب طوله $3l$ ووزن وحدة الأطوال منه ω . وزع توزيعا متصلا على الثلث الأوسط منه بكثافة وزنها p لوحدة الأطوال. ادرس القوى القاصة وعزوم الانحناء عند مقاطع القضيب المختلفة عندما يرتكز القضيب عند نهايتية على وتدين أملسين.

(5) ثقل مستمر ω طن لكل قدم يتحرك ببطىء على كوبري طوله l قدم إذا أهمل وزن الكوبري فاثبت أن اكبر قوة قاصة عند نقطة p على بعد λ من الطرف الأقرب تساوى تساوى $\dfrac{\omega}{2l}\left(l-\lambda\right)^2$.

(6) رجل وزنه ω يمكنه أن يعبر قضيب مرتكز عند نهايتيه وزنه $\omega\eta$ وطوله l بدون أن ينكسر . إذا ثبت القضيب من احد نهايتيه بحيث كان المماس عندها افقيا فاثبت أن أقصى مساحة يمكن الرجل أن يتحركها على القضيب تساوى $\dfrac{1}{4}l\left(1-\dfrac{3}{2}\eta\right)$.

(7) قضيب AB طوله $12\ ft$ يرتكز عند نهايتيه على حاملين في مستوى افقى ويحمل ثقلا يزيد بانتظام من الصفر عند الطرف الأيسر A حتى اكبر قيمة $600\ Ib/ft$ عند الطرف B . اوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند اى مقطع .

(8) قضيب خفيف AB طوله l مثبت عند نهايتيه اليمنى B ومحمل نصفه الأيمن تحميلا منتظما كثافته ω_0 لوحدة الأطوال . فإذا وضع ثقل ω عند الطرف الحر A فاوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند اى نقطة من القضيب .

(9) قضيب راسي طوله $3\ ft$ مثبت على ارض أفقية. اوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند الطرف المثبت وعند نقطتي تثليث القضيب إذا أثرت علي الطرف العلوي للقضيب قوة أفقية مقدارها $200\ Ib$.

(10) قضيب oAB مثبت أفقيا عند طرفة o بحيث يكون $oA = 2AB = 2\ ft$ وضع ثقلين $300\ Ib, 200\ Ib$ عند B, A على الترتيب. اوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند النقطتين اللتين تنصفان AB, oA .

(11) قضيب منتظم طوله $2l$ يرتكز في وضع متماثل على حاملين في نفس المستوى الافقى المسافة بينهما $2h$. إذا كان $l < 2h$ فاثبت إن عزم الانحناء يكون نهاية عظمى عند الحامل أو في المنتصف حسبما يكون $2l \gtrless (2+\sqrt{2})h$ وإذا كان $l > 2h$ فاثبت إن عزم الانحناء عند الحامل يكون نهاية عظمى عند الحامل واوجد قيمته.

(12) قضيب خفيف أفقي طوله l مرتكز عند نهايتيه ومحمل بحيث يتناسب عزم الانحناء عند اى نقطة مع وزن وحدة الطول عند نفس النقطة . اثبت ان الوزن عند اى نقطة يتناسب مع $\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ حيث x بعد النقطة عن احد طرفي القضيب .

(13) قضيب ثقيل وزنه W وطوله $3l$ يرتكز على حاملين املسيين احدهما عند طرفة والأخر على بعد l من الطرف الأخر . وزع ثقلا مقداره $2lp$ توزيعا منتظما علي المسافة المحصورة بين الوتدين من القضيب . ادرس منحنيات القوى القاصة وعزوم الانحناء.

(14) قضيب يرتكز عند نهايتيه على حاملين ومحمل تحميلا كثافته لوحدة الأطول عند اى نقطة تعطى من العلاقة $\omega(x) = \omega_0(a+bx)$ حيث b, a ثابتين .اوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند اى نقطة واستنتج الحالات الخاصة التي فيها $b = 0$ ثم $a = 0$.

(15) حل التمرين السابق (14) إذا كان القضيب مثبت عند الطرفين .

(16) قضيب افقى AB طوله $8\ ft$ مثبت طرفة الأيمن B في حائط راسي وحمل النصف الأيسر من القضيب بانتظام بكثافة $100\ Ib\ /\ ft$. اوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند اى مقطع من مقاطع القضيب المختلفة.

الباب الرابع

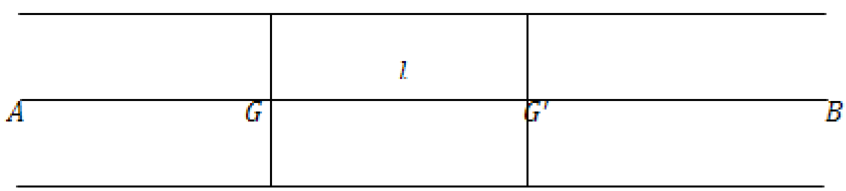
القضبان قليلة القابلية للانحناء

فيما سبق كنا نفترض دائما وجود اجسام صلبة ذات شكل ثابت لا يتغير مهما كانت القوة المؤثرة علية . او نفترض وجود خيوط طولها ثابت لا يزيد تحت تاثير ايه شد . ولكن المواد فى طبيعتها تختلف عن ذلك فجميع الاجسام تتغير تحت تأثير القوى المؤثرة تغييرا يتوقف من حيث المقدار والنوع تبعا لمادة الجسم وشكلة ومقدار هذة القوة. وسوف نقتصر فى هذا الباب على دراسة هذة التغيرات فىالقضبان الرفيعة وفى ابسط الحالات فى تلك التى يمكن حساب الشد فيها تبعا لقانون هوك.

اولا: انحناء القضبان:

اذا حمل قضيب بطريقة ما فانه ينحنى نتييجة لهذا الحمل . ويبدو ان هناك علاقة ما بين شكل القضيب وعزم الانحناء وعن طريقة التجربة توصل برنوللى Bernoulli، ايلر Euler ***ان عزم الانحناء عند اية نقطة على قضيب رفيع يتناسب تناسبا عكسيا مع نصف قطر الانحناء عند هذة النقطة*** . وفيما يلى برهانا لهذة العلاقة فى حالات خاصة وباستخدام فروض ليست صحيحة تماما.

نعتبر قضيبا مستقيما اثرت علية مجموعة من القوى الخارجية يضمها مستوى واحد بقسم القضيب الى قسمين متماثلين.



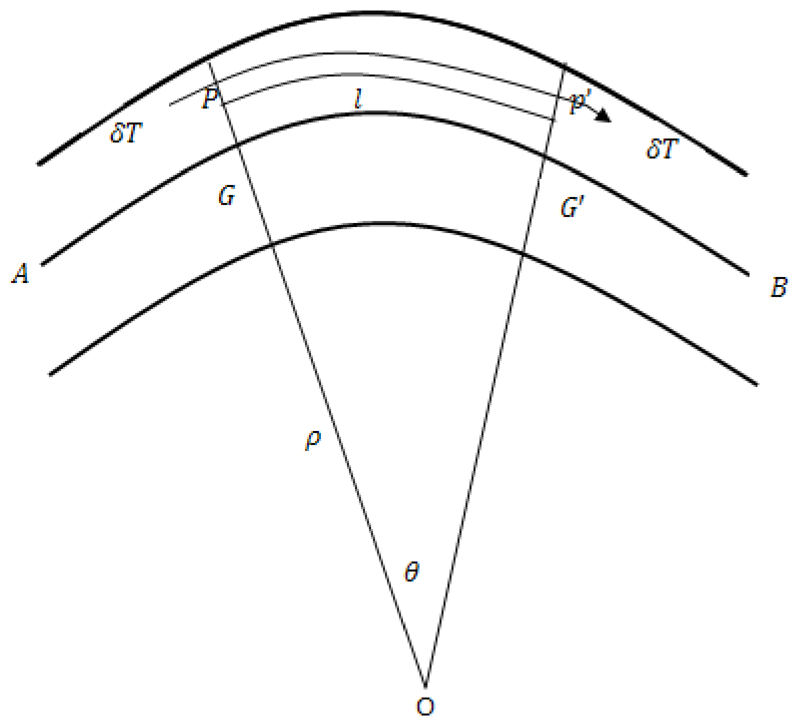
شكل (أ)

فى الشكل (أ) AB هو مقطع القضيب بواسطة مستوى القوى وفى الشكل (ب) نفس المقطع بعد انحناء القضيب تحت تاثير هذة القوى نتيجة لهذا الانحناء فان الالياف التى يتكون منها القضيب يزاد طولها اذا كانت اقرب الى السطح العلوى وبذلك تكون فى حالة شد ويقل طولها اذا كانت اقرب الى السطح السفلى وبذلك تكون فى حالة ضغط اما الالياف التى تفصل بين هذه وتلك فلن بتغير طولها بالانحناء وتعرف باسم خطوط التعادل Neutral Lines فى الشكل GG' هو خط التعادل فى مقطع القضيب بواسطة مستوى القوى ويعرف بمحور القضيب . اما ابعاد القضيب العرضية فإنها سوف تتغير هى الاخرى نتيجة لانحناء القضيب الإننا سوف نهمل هذا التغير نظرا لصغره . كذلك سوف نفترض ان اية مقطع عرضى للقضيب وهو مستقيما يظل مقطعا عرضيا لة وهو منحنى ومحتويا على نفس الجزيئات . نعتبر مقطعين عرضيين عند G, G' بينهما مسافة صغيرة L ونفترض انهما عند الانحناء تقابلا فى O .

فاذا كانت ρ هى نصف قطر إنحناء محور القضيب ، θ الزاوية التى يحصرها GG' عند 0 فان

$$l = \rho\theta \tag{4.1.1}$$

كذلك نعتبر الالياف pp' عند اية نقطة P على المقطع عند G وتبعد مسافة y عنها فإذا اصبح طول هذة الالياف بعد إنحناء القضيب $l + h$ فإن



شكل (ب)

$$l + h = (\rho + y)\theta$$

$$\therefore\ h = y\theta \tag{4.1.2}$$

ومن العلاقة (4.1.1) ، (4.1.2) ينتج ان

$$\frac{h}{y} = \frac{l}{\rho} \qquad (4.1.3)$$

وبستخدام قانون هوك فان الشد في pp'

$$E\,\delta A\,\frac{h}{l} = E\,\delta A\,\frac{y}{\rho} \qquad (4.1.4)$$

حيث δA هي مساحة مقطع الالياف pp' و E معامل ينج لمادة القضب .

$\therefore$محصلة الشد التى تؤثر على المقطع عند G يعطى من العلاقة

$$T = \int \frac{E}{\rho}\, y\, dA \qquad (4.1.5)$$

ويحسب هذا التكامل على هذا المقطع

$$T = \frac{E}{\rho}\,\bar{y}\,A \qquad (4.1.6)$$

وفيها A هى مساحة المقطع $\bar{y}$ بعد مركز ثقلة عن G هذة العلاقة تحدد وضع محور القضيب بالنسبة لمراكز ثقل مقاطعة . وفى تلك الحالات التى ينحنى فيها القضيب نتيجة لقوى عمودية عليه فإن T تساوى صفر عند ايه مقطع ومنها $\bar{y}$ يساوى صفر اى ان محور القضيب فى هذة الحالات يمر بمراكز ثقل مقاطع القضيب العرضية .

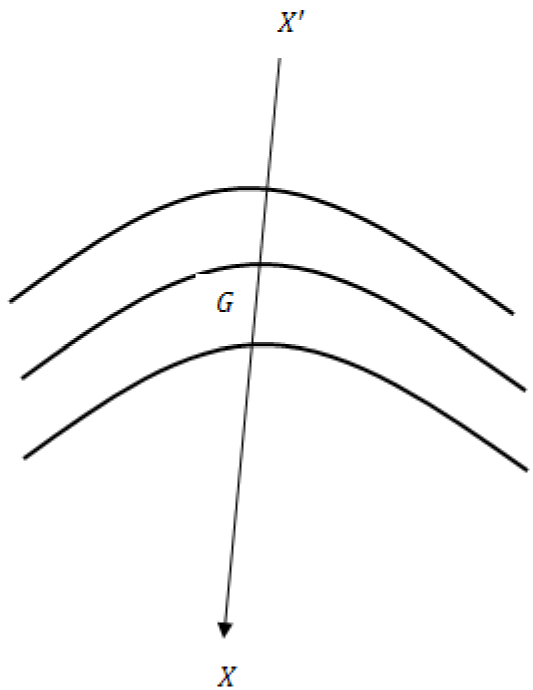
كذلك يمكن حساب عزم الانحناء M عند المقطع عند G وذلك باخذ عزوم الشد فى الالياف حول المحور XGX العمودى على مستوى القوى الخارجية

$$\therefore\ M = \int \frac{E}{\rho}\, y^2\, dA \qquad (4.1.7)$$

حيث

$$\because\ I = \int y^2\, dA \qquad (4.1.8)$$

هى عزوم القصور الذاتى لمساحة مقطع القضيب حول XGX' .



$$\therefore M = \frac{EI}{\rho} \tag{4.1.9}$$

المقدار EI يعرف بمعامل المرونة الحجمى Rigidity Flexural ويرمز له عادة بالرمز K

$$\therefore M = \frac{K}{\rho} \tag{4.1.10}$$

تدل العلاقة السابقة اذا كانت M ثابتة لجميع نقط قضيب منتظم فان ρ ايضا ثابتة . اى انه اذا اثرفي طرفى قضيب خفيف منتظم ازدواجين متضادين، ومقدار عزمها متساويان وفى مستوى واحد يضم القضيب سوف ينحنى متخذا شكل دائرة .

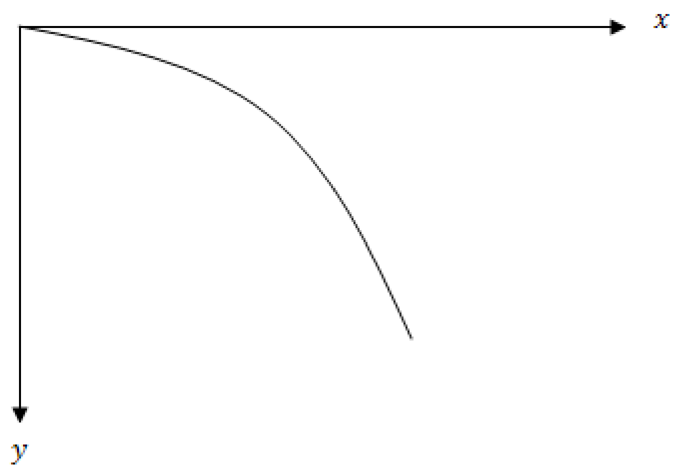
باخذ محور القضيب وهو مستقيما كمحور x فان

$$M = \frac{K}{\rho} = \frac{\pm K \dfrac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{4.1.11}$$

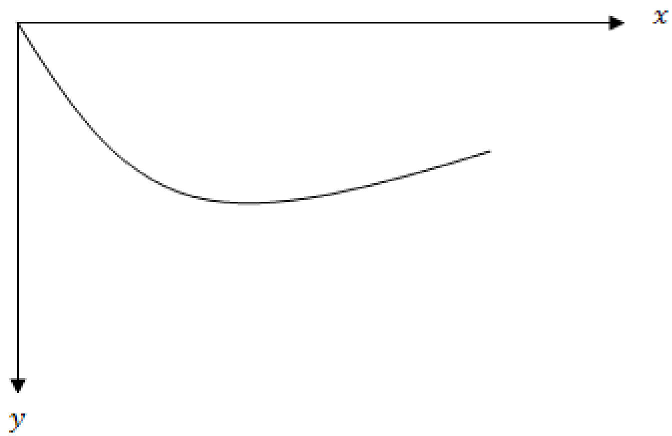
حيث y تمثل ازاحة النقطة x من محور القضيب عن موضعها عندما كان القضيب مستقيما . وعندما يكون القضيب قليل المرونة فان K كبيرة . اما $\frac{dy}{dx}$ ،y فكميات صغيرة يمكن اهمال مربعاتها وبذلك يمكن تقريب المعادلة (4.1.11) الى

$$M = \pm K \frac{d^2 y}{dx^2} \tag{4.12}$$

وتؤخذ الاشارة المناسبة التى تجعل طرفى العلاقة (4.1.12.) لها نفس الاشارة . فاذا كانت القوى المؤثرة فى مستوى راسى مثلا واتخذنا الراسى الى اسفل هو الاتجاه الموجب لمحور y فانه باتباع القاعدة المتفق عليها فى تحديد اشارة عزم الانحناء نرى ان الاشارة الموجبة هى الواجب استعمالها . ذلك لانه فى الاجزاء التى تكون فيها M موجبة فان القضيب سوف بنحنى الى اعلى كما فى الشكل (أ) وفية تزيد $\frac{dy}{dx}$ بزيادة x اى ان $\frac{d^2 y}{dx^2}$ موجبة ولذا تاخذ الاشارة الموجبة فى تلك الاجزاء التى تكون فيها M سالبة فإن القضيب سوف ينحنى الى اسفل كما بالشكل (ب) وفيه



شكل (أ)



شكل (ب)

$\frac{dy}{dx}$ تتناقص بزيادة x اى ان $\frac{d^2y}{dx^2}$ تكون سالبة على ذلك تستخدم الاشارة الموجبة حتى يكون طرفا العلاقة السابقة سالبتين .

<u>شروط تتحقق عند نقط خاصة فى القضبان المثبتة :</u>

(أ) عند الاطراف الحرة للقضبان يتلاشى كلا من عزم الانحناء وقوه القص أي ان $y''' = 0, y'' = 0$ عند هذه الاطراف

(ب) اذا ارتكز القضيب ارتكازا بسيطا مفصليا فان عزم الانحناء يساوي صفر أي ان $y'' = 0$ عند نقطة الارتكاز هذه اما y فتكون معلومة عندها .

(ج) القضبان المثبتة تثبيتا كاملا فان $y, \frac{dy}{dx}$ معلومتان عند الطرف المثبت.

لايجاد شكل القضيب انحنى نتيجة لحمل معين نحل المعادلة التفاضلية

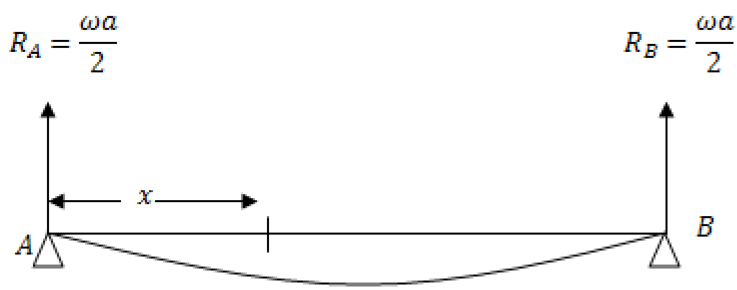
$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

مع استخدام الشرط المناسب تبعا لنوع التثبيت كما فى الامثلة التالية :

مثال(1):

ارتكز قضيب منتظم عند نهايتيه على وتدين في نفس المستوى الافقى . أثبت ان الانخفاض عند مسافة x من إحدى نهايتيه يساوى $\frac{\omega x}{24\, EI}(a-x)(a^2+ax-x^2)$ حيث a طول القضيب ، و $\omega\, a$ وزنة .

الحل



عزم الانحناء عند ايه نقطة تبعد مسافة x عن الطرف A يساوى

$$M = -\frac{\omega\, a}{2}x + \frac{\omega\, x^2}{2} \qquad (1)$$

حيث ان

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M \qquad (2)$$

$$\therefore\ EIy'' = -\frac{\omega\, ax}{2} + \frac{\omega\, x^2}{2} \qquad (3)$$

بالتكامل

$$EIy' = \frac{\omega\, ax^2}{4} + \frac{\omega\, x^3}{6} + c \qquad (4)$$

$$EIy = -\frac{\omega\, ax^3}{12} + \frac{\omega\, x^4}{24} + c\,x + c^1 \qquad (5)$$

الايجاد الثوابت c, c^1 تتطبق الشروط الابتدائية فى المسألة

عند الطرف A :

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad \therefore c^{1} = 0$$

عند الطرف B :

$$x = a, \qquad y = 0, \qquad \therefore c = \frac{\omega a^{3}}{24}$$

بالتعويض عن c, c^{1} فى المعادلة السابقة (5)

$$\therefore EIy = \frac{\omega x}{24}\left(a^{3} + x^{3} - 2ax^{2}\right)$$

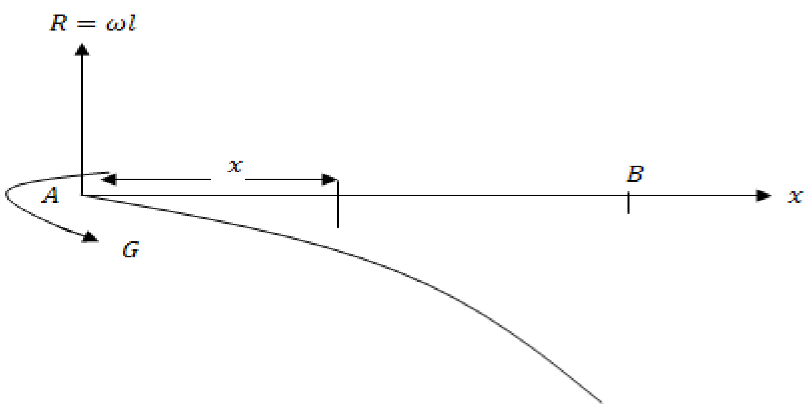
$$\therefore y = \frac{\omega x}{24\,EI}(a - x)\left(a^{2} + ax - x^{2}\right)$$

مثال(2):

ثبت قضيب منتظم تثبيتا افقيا عندإحدى نهايتيه فانحنى تحت تأثير وزنه . إثبت ان الانخفاض عند نهايته يساوى $\frac{3}{8}$ الانخفاض الذى يحدث اذا اعتبر القضيب خفيفا وعلق من نهايته ثقلا مساوى لوزنه .

الحل

نفرض ان طول القضيب l ,ω وزن وحدة الاطوال .



الحالة الاولى :

القضيب ثقيل .عزم الانحناء عند اى نقطة من القضيب تبعد مسافة $l-x$ عن الطرف الحر يساوى

$$M=\frac{\omega}{2}(l-x)^2 \qquad (1)$$

$$Ky''=\frac{\omega}{2}\left(l^2-2lx+x^2\right) \qquad (2)$$

بالتكامل

$$Ky'=\frac{\omega}{2}\left[l^2x-lx^2+\frac{x^3}{3}\right]+c$$

لايجاد c تطبق الشرط الابتدائى عند نقطه التثبيت A

$$x=0 \qquad y^1=0 \qquad \therefore c=0$$

$$\therefore Ky'=\frac{\omega}{2}\left[l^2x-lx^2+\frac{x^3}{3}\right] \qquad (3)$$

بالتكامل مره اخرى

$$Ky=\frac{\omega}{2}\left[\frac{1}{2}l^2x^2-\frac{lx^3}{3}+\frac{x^4}{12}\right]+c_1 \qquad (4)$$

لايجاد c_1

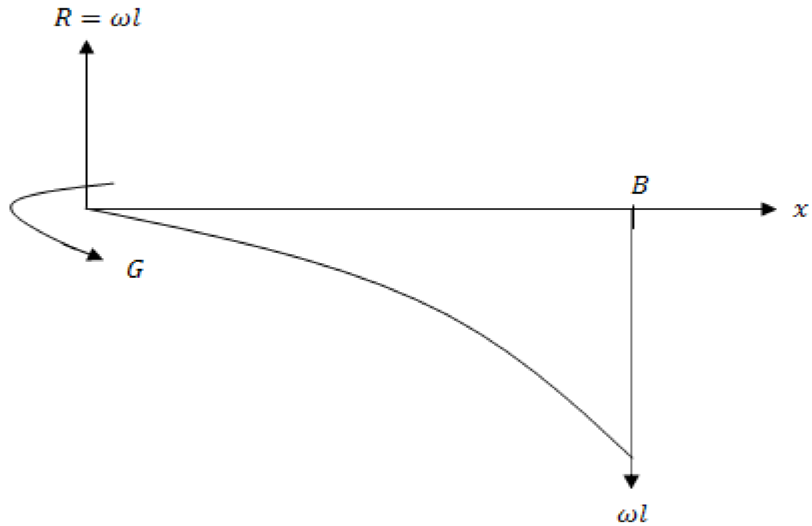
$$y=0 \qquad x=0 \qquad c_1=0$$

لايجاد الانخفاض عند الطرق الحر نضع $x=l$ في المعادلة (4) تجد ان

$$y_1=\frac{\omega l^4}{8k} \qquad (5)$$

الحالة الثانية:

القضيب خفيف ومعلق ثقلا $\omega\, l$ عند طرفه الحر . عزم الانحناء عند أي نقطه تبعد مسافه $l-x$ عن الطرف الحر يساوي



$$M = \omega l(l - x) \qquad (1)$$

$$Ky'' = \omega l(l - x) \qquad (2)$$

بالتكامل

$$Ky' = \omega l\left(l.x - \frac{x^2}{2}\right) + c \qquad (3)$$

ثابت التكامل يساوي صفر لان $x = 0$ at $y^1 = 0$ وبالتعويض عن الثابت والتكامل مرة اخرى

$$Ky = \omega l\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + c_1 \qquad (4)$$

ثابت التكامل يساوي صفر لان عند

$x = 0 \qquad y = 0$

$$\therefore\ Ky = \omega l\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \qquad (5)$$

وعند : $x = l$ ، $y = y_2$,

$$y_2 = \frac{\omega l^4}{3K} \qquad (6)$$

النسبه بين الانخفاضين

$$\frac{Ky_1}{Ky_2} = \frac{3}{8}$$

$$\therefore\ y_1 = \frac{3}{8} y_2 . \qquad (7)$$

ملاحظة:

اذا اثر الوزن والثقل معا فإن نتيجة لحل المعادلة التفاضلية والشروط الحدية المستخدمة فى حلها يكون إنخفاض الطرف الحر

$$y = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3}\right)\frac{\omega l^4}{K} = \frac{11}{24}\frac{\omega l^4}{K} .$$

مثال(3):

كابولى من مادة متجانسة على شكل قطع مكافئ دورانى طوله l ونصف قطر طرفة المثبت a . اذا كانت ω هى وزن وحدة الحجوم من الكابولى وكان محوره عند الطرف المثبت افقيا . أوجد انخفاض الطرف الحر .

الحل

الشكل المقابل هو مقطع الكابولى بواسطة المستوى الرأسى المار بمحوره . نفرض ان معادلة المقطع بالنسبة للمحاور المبينة

$$y2 = Ax + B \qquad (1)$$

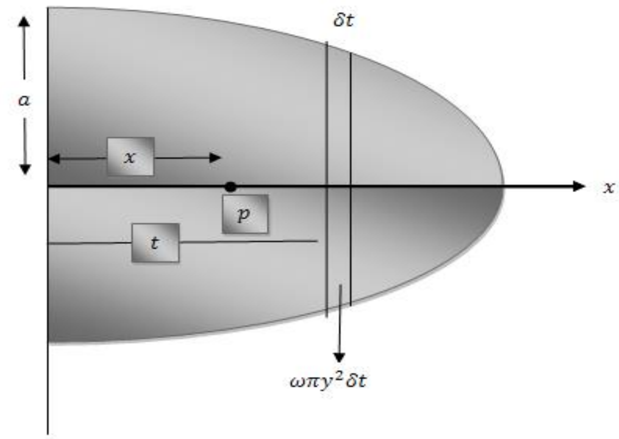
عند $x = 0$ وكانت $y = a$ ومنها $B = a^2$ وكذلك عند $x = l$ كانت $y = 0$ ومنها $A = -a^2/l$

$\therefore$ معادلة المقطع هى

$$y^2 = a^z\left(1 - \frac{x}{l}\right) \qquad (2)$$

$$= \int_x^l \omega\, \pi\, y^2 (t - x) dt .$$

عزم الانحناء عند اية p على بعد x من 0



$$\therefore\ M = \frac{w\,\pi a^2}{l}\int_x^l (l-t)(t-x)\,dt$$

$$= \frac{w\,\pi a^2}{6\,l}(l-x)^3 \qquad (3)$$

عزم القصور الذاتى لمقطع الكابولى عند p حول محور افقى (مقطع الكابولى العرضى للمساحة)يساوى

$$I = \pi\, y^2 \bullet \frac{y^2}{4}$$

$$= \frac{\pi\, a^2}{4l^2}(l-x)^2 \qquad (4)$$

$$\therefore\ \frac{\pi\, a^2}{4l^2} E\, y''(l-x)^2 = \frac{\omega\pi\, a^2}{6l}(l-x)^3$$

$$\therefore\ y'' = \frac{2}{3}\frac{\omega\, l}{Ea^2}(l-x) \qquad (5)$$

$$y' = \frac{2\omega\, l}{3a^2E}\left[lx - \frac{x^2}{2}\right] + c$$

وبالتعويض عن الثابت $x = 0\,,\ y' = 0\ \therefore\ c = 0$

$$y' = \frac{2\omega l}{3a^2 E}\left[lx - \frac{x^2}{2}\right] \tag{6}$$

بالتكامل مرة اخرى

$$y = \frac{2\omega l}{3a^2 E}\left[\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right] + c_1 \tag{7}$$

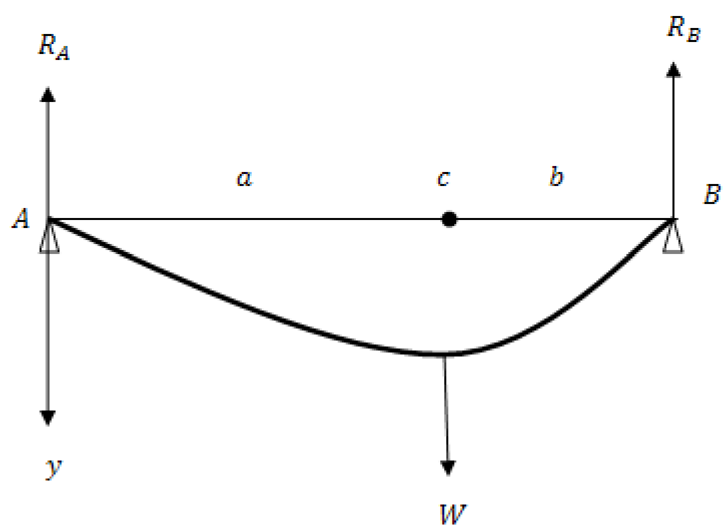
$x = 0\ at \quad y = 0 \quad \therefore c_1 = 0$

بوضع $x = l$ والتعويض عن $c_1 = 0$ فى معادلة (7) ينتج انخفاض الطرف الحر يساوى $-\frac{2}{9}\frac{\omega l^4}{Ea^2}$

مثال (4):

قضيب خفيف AB طولة $(a+b)$ يرتكز بطرفيه على وتدين رأسيين فى مستوى افقى واحد ويحمل ثقلا W عند نقطة تبعد مسافة a عن الطرف الحر . أوجد شكل القضيب وعين اقصى انخفاض له.

الحل



ردا الفعل عند B, A على الترتيب

$$R_A = \frac{Wb}{a+b}$$
$$R_B = \frac{Wa}{a+b}$$

شكل القضيب يتعين من المعادلتين

$$0 \le x \le a \qquad\qquad a \le x \le b + a$$

$$Ky'' = -\frac{wb}{a+b}x \quad , \; Ky'' = \frac{-wb}{a+b}x + w(x+a)$$

$$Ky' = \frac{-wb}{a+b}\frac{x^2}{2} + c \; , \; Ky' = \frac{-wb}{a+b}\frac{x^2}{2} + \frac{w}{2}(x-a)^2 + c'$$

وحيث ان y' متصلة عند $x = a$ فإن $c = c'$

$$\therefore Ky = \frac{-wb}{a+b}\frac{x^3}{6} + cx + D \, ; Ky = \frac{-wbx^3}{6(a+b)} + \frac{w}{6}(x-a)^3 + c'x + D^1$$

وحيث ان y متصلة عند $x = a$ فان $D = D^1$ عند الطرف A :

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad \therefore D = 0$$

عند الطرف B :

$$x = a + b \quad , \quad y = 0$$
$$\therefore C = \frac{wba}{6}\frac{a+2b}{a+b}$$

اى ان شكل القضيب هو المنحنى فى حالة $a \le x \le a$

$$Ky = \frac{-wb}{a+b}\cdot\frac{x^3}{6} + \frac{wba}{6}\frac{a+2b}{a+b}x \qquad (1)$$

$$Ky = \frac{-wb}{a+b}\cdot\frac{x^3}{6} + \frac{wba}{6}\frac{a+2b}{a+b}x + \frac{w}{6}(x-a) \; in \; a \le x \le a+b \qquad (2)$$

وقد تساوت ثوابت التكامل فى جزأى القضيب لاتصال $y , \frac{dy}{dx}$ عند $x = a$ ولإن الحدود الزيادة فى الجزء $a \le x \le a + b$ كتبت وكوملت بدلالة $(x - a)$ حتى تتلاشى عند $x = a$ وفى هذة الحالة لا داعى لتكرار الحدود المتشابهة ونكتفى فقط بإضافة الحدود الازمة للجزء الثانى من القضيب . وتعرف طريقة التكامل هذة بطريقة ماكولى (Macaullay,s Method).

لايجاد اقصى إنخفاض نبحث عن الاوضاع التى تتلاشى عندها ميل القضيب من المعادلات السابقة .

$a \le x \le a$ $\qquad\qquad$ $a \le x \le a + b$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{wb}{a+b}\frac{x^2}{2} + \frac{wba}{6}\frac{a+2b}{a+b} + \frac{w}{2}(x-a)^2$$

وهذان يتلاشى عند

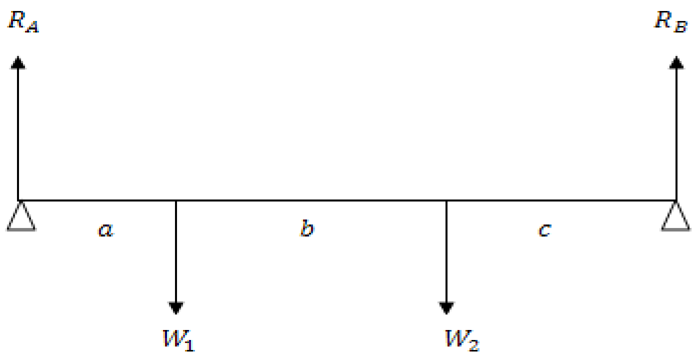
$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}a(a+2b)} \ , x_2 = a + b \pm \sqrt{\frac{1}{3}b(b+2a)}$$

وتهمل الاشارة السالبة فى x_1 والموجبة فى x_2 اذ انها تعطيان نقطا خارج القضيب واذا كانت $a > b$ فان كلا من x_1 , x_2 اقل من a وعلى ذلك فان $\frac{dy}{dx}$ تساوى الصفرعند نقطة على القضيب تبعد مسافة $\sqrt{\frac{1}{3}b(b+2a)}$ من الطرف الحر. وبالتعويض في (1) للجزء $0 \le x \le a$ يمكن الحصول علي أقصي انخفاض . وبالمثل اذا كانت $b > a$ فان $\frac{dy}{dx} = 0$ عند نقطة علي القضيب تبعد مسافة $\sqrt{\frac{1}{3}b(b+2a)}$ من B اى مسافة $(a+b) - \sqrt{\frac{1}{3}b(b+2a)}$ من A .

مثال (5):

قضيب خفيف AB طولة $a+b+c$ يرتكز فى وضع افقى على وتدين رأسيين عند طرفية ويحمل ثقلين w_1 , w_2 عند نقطتين تبعدان مسافة $a , a+b$ من الطرف A على الترتيب أوجد شكل القضيب .

الحل



باخذ العزوم حول A ثم حول B ينتج ان

$$R_A = \frac{W_1(b+c)+W_2 c}{a+b+c},$$

$$R_B = \frac{W_1 a + W_2(a+b)}{a+b+c}.$$

شكل القضيب يتعين من :

$$a \le x \le a \qquad a \le x \le a+b \quad a+b \le x \le a+b+c$$

$$Ky'' = -R_A x + W_1(x-a) + W_2(x-a-b)$$

$$Ky' = -R_A \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}W_1(x-a)^2 + \frac{1}{2}W_2(x-a-b)^2$$

وقد تساوت ثوابت التكامل في النطاق الثلاث لان y, y' دالتان متصلتان.

$$Ky = -R_A \frac{x^3}{6} + \frac{1}{6}W_1(x-a)^3 + \frac{1}{6}W_2(x-a-b)^3 \qquad (1)$$

الحالات غير المحددة إستاتيكيا:

هناك بعض حالات القضبان المرتكزة او المثبتة لاتكفى فيها معادلات الاتزان العادية لحساب ردود الافعال فيها . ويطلق على مثل هذه الحالات إنها غير محددة استاتيكيا ، اما اذا اتخذنا مرونه هذه القضبان فى الحسبان فانه باستخدام القانون $Ky'' = M$ **.**

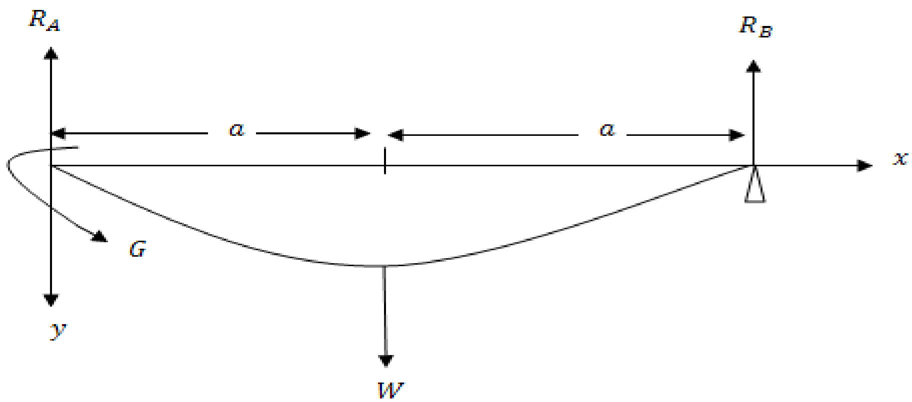
يمكن حساب ردود الافعال هذه. وهذا يتضح فى الامثلة التالية:

مثال (1):

قضيب خفيف AB طولة $2a$ طرفة A مثبت أفقيا وطرفة B يرتكز على وتد رأسى بحيث كان الطرفان فى مستوى افقى واحد . فاذا علق من منتصف القضيب ثقلا W أوجد انخفاض الثقل W عن الطرفين B, A وارسم منحنى عزم الانحناء.

الحل

نفرض ان ردى الفعل عند B, A هما R_A, R_B وان عزم التثبيت A هو G.



$$R_A + R_B = W \tag{1}$$

$$2aR_A = G + Wa \tag{2}$$

وباتخاذ الافقى AB محور x والراسى الى الى اسفل عند A هو محور y فان

$0 \le x \le a \qquad\qquad a \le x \le 2a$

$$M = EIy'' = G - R_A x \qquad + W(x-a) \tag{3}$$

$$\therefore\ EIy' = Gx - R_A \frac{x^2}{2} \qquad + \frac{W}{2}(x-a)^2 \tag{4}$$

$$EIy = \frac{1}{2}Gx^2 - R_A \frac{x^3}{6} + \frac{W}{6}(x-a)^3 \tag{5}$$

وقد تلاشى ثابتا التكامل فى (4) و(5) لتلاشى y, y' عند $x = 0$.

وحيث ان $y = 0$ عند $x = 2a$

$$\therefore\ 2G - \frac{4}{3}aR_A + \frac{Wa}{6} = 0 \tag{6}$$

بحل المعادلات (1) و(2) و (6) ينتج ان

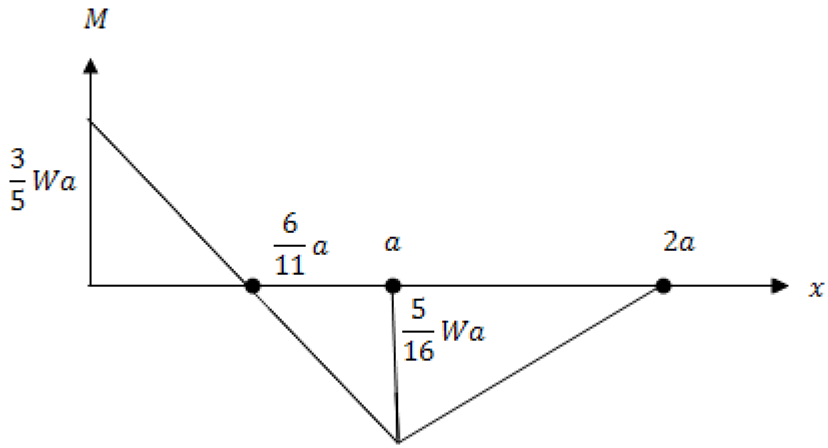
$$R_A = \frac{11}{16}W,\ R_B = \frac{5}{16}W,\ G = \frac{3}{8}Wa.$$

وعلى ذلك فإن القضيب ياخذ شكل المنحنى

$$EIy = \frac{Wx^2}{96}(18a - 11x) \qquad 0 \le x \le a.$$

$$EIy = \frac{Wx^2}{96}(18a - 11x) + \frac{W}{6}(x-a)^3 \quad a \le x \le 2a$$

بوضع $x = a$ ينتج ان إنخفاض الثقل W عن الطرفين B, A يساوى $\frac{7}{96}\frac{Wa^3}{EI}$.



شكل (أ)

وكذلك فان عزم الانحناء تعطية المعادلتان

$$M = \frac{W}{16}(6a - 11x) \qquad 0 \le x \le a$$

$$M = \frac{5W}{16}(x - 2a) \qquad a \le x \le 2a$$

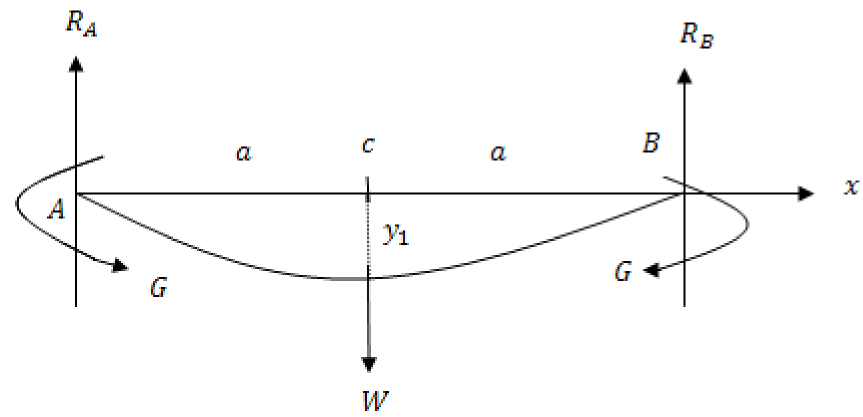
والشكل (أ) يبين هذا المنحنى .

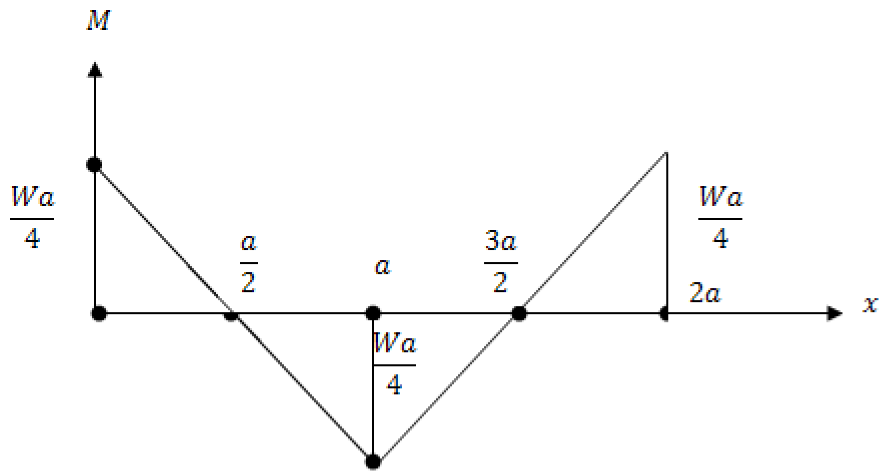
مثال (2):

قضيب خفيف AB طولة $2a$ مثبت من طرفية B, A بحيث كان الطرفان فى مستوى افقى واحد. فإذا علق من منتصف القضيب ثقلا W اوجد انخفاض الثقل W عند الطرفين B, A وارسم عزم الانحناء.

الحل

فى هذه الحالة يصبح القضيب متماثلا حول الثقل المعلق وينتج عن ذلك ان :





شكل (ب)

$$R_A = R_B = \frac{W}{2} \tag{1}$$

وان مقدار العزم (التثبيت) واحد عند الطرفين G. نتيجة للتماثل فى الشكل يكفى اعتبار نصف القضيب الايسر مثلا. شكل هذا النصف يتحدد من العلاقة .

$$EIy'' = G - \frac{W}{2}x \qquad 0 \le x \le a \qquad (2)$$

$$EIy' = Gx - \frac{Wx^2}{4} \qquad 0 \le x \le a \qquad (3)$$

$$EIy = \frac{1}{2}Gx^2 - \frac{Wx^3}{12} \qquad 0 \le x \le a \qquad (4)$$

وقد تلاشى ثابتا التكامل لتلاشى y, y' عند $x = 0$ من التماثل $y' = 0$ عند $x = a$ ومنها ينتج ان

$$G = \frac{Wa}{4} \qquad (5)$$

∴ معادلة النصف الايسر للقضيب هى

$$EIy = \frac{Wx^2}{24}(3a - 2x) \qquad (6)$$

بوضع $x = a$ ينتج ان انخفاض الثقل w عن الطرفين يساوى

$$y_1 = \frac{Wa^3}{24\,EI} \qquad (7)$$

عزم الانحناء عند اية نقطة على القضيب تعطية المعادلتان

$$M = \frac{W}{4}(a - 2x) \qquad 0 \le x \le a \qquad (8)$$

and

$$M = \frac{W}{4}(2x - 3a) \qquad a \le x \le 2a \qquad (9)$$

والشكل (ب) يبين منحنى عزم الانحناء .

مثال (3):

قضيب AB طولة l ووزنه ω لكل وحدة طول. ثبت طرفة A أفقيا وارتكز الطرف B على وتد رأسي بحيث كان الطرفان B, A فى مستوى افقى واحد. عين رد الفعل والازدواج التثبت عند A.

إثبت ان الانخفاض منتصف القضيب عن الطرفين $\frac{\omega l^4}{192\,EI}$ وارسم منحنى عزم الإنحناء.

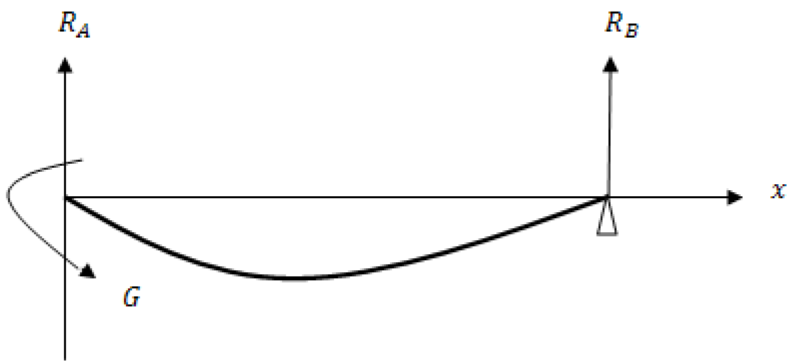
الحل

نفرض ان رد الفعل عند B, A هما R_B, R_A وان عزم التثبيت عند A هو G.

$$\therefore\ R_A + R_B = \omega l \tag{1}$$

$$R_A l = G + \frac{\omega l^2}{2} \tag{2}$$

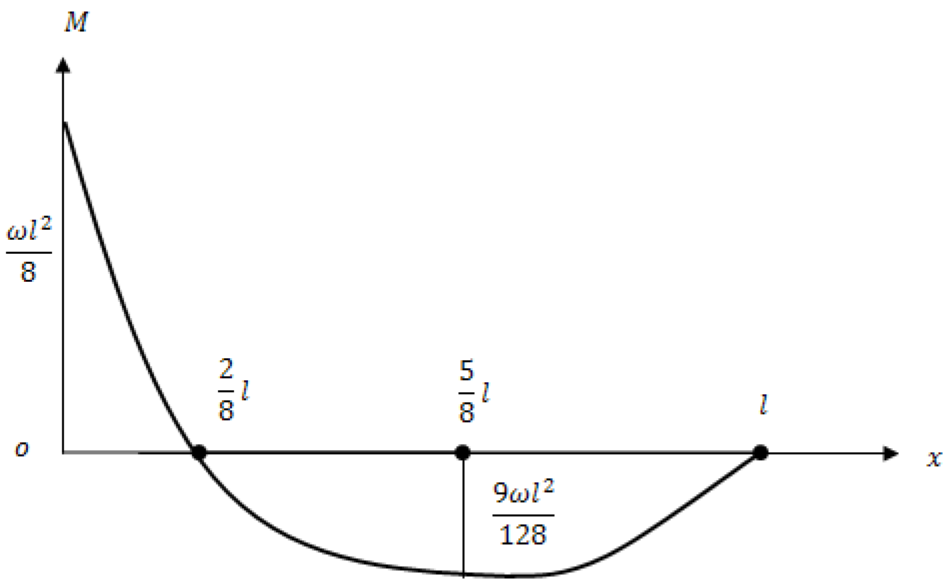
بإتخاذ محورين إحداهما أفقى والأخر رأسى عند A.



$$EIy'' = G - R_A x + \frac{\omega x^2}{2} \tag{3}$$

$$EIy' = Gx - \frac{1}{2} R_A x^2 + \frac{\omega x^3}{6} + c_1 \tag{4}$$

$$EIy = \frac{1}{2} G x^2 - \frac{1}{6} R_A x^3 + \frac{\omega x^4}{24} + c_1 x + c_2 \tag{5}$$



شكل (ج)

$$x = 0 \qquad y' = 0 \qquad c_1 = 0$$

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad c_2 = 0$$

$$\therefore\ EIy = \frac{1}{2}Gx^2 - \frac{1}{6}R_A x^3 + \frac{\omega x^4}{24} \tag{6}$$

وحيث ان $y = 0$ عند $x = l$

$$\therefore\ \frac{1}{2}G - \frac{l}{6}R_A + \frac{\omega l^2}{24} = 0 \tag{7}$$

بحل المعادلات (1)و(2)و(7) ينتج ان

$$R_A = \frac{5}{8}\omega l \qquad ; R_B = \frac{3}{8}\omega l\ ; G = \frac{1}{8}\omega l^2$$

∴شكل القضيب يتحدد بالمعادلة

$$EIy = \frac{11}{16} l^2 x^2 - \frac{5\omega}{48} lx^3 + \frac{\omega}{24} x^4$$

i.e

$$EIy = \frac{\omega x^2}{48}(2x - 3l)(x - l)$$

وبوضع $x = l/2$ ينتج ان إنخفاض منتصف القضيب عن طرفيه يساوى $\frac{\omega l^2}{192\, EI}$

عزم الانحناء عند اى نقطة على القضيب تعطية المعادلة .

$$M = \frac{1}{8}\omega l^2 - \frac{5}{8}\omega lx + \frac{1}{2}\omega x^2$$

$$= \frac{\omega}{2}\left[(x - \frac{5}{8}l)^2 - \frac{9}{64} l^2 \right]$$

والشكل (ج) يبين منحنى عزم الانحناء.

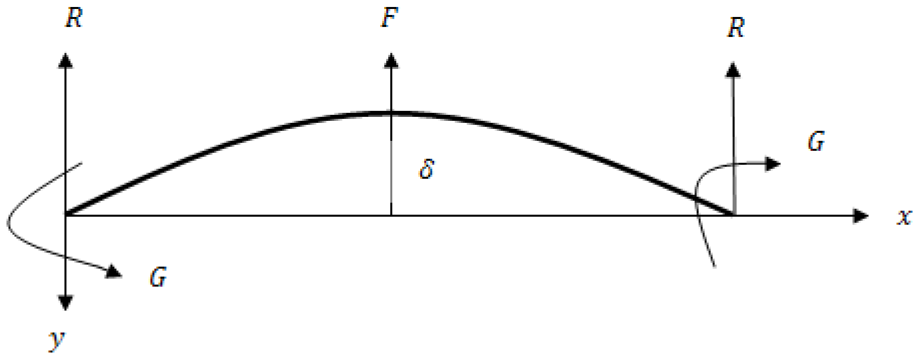
<u>مثال (4):</u>

قضيب منتظم مثبت افقيا عند كل من نهايتية. اذا رفع القضيب من منتصفه الى اعلى بقوة مسافة مقدارها δ فوق النهايتين . إثبت ان القوة تساوى $\frac{W}{2} + \frac{24K\delta}{a^3}$ وان العزم عند النهايتين يساوى $\frac{Wa}{24} + \frac{6K\delta}{a^2} -$ حيث $2a$ طول القضيب و W وزنة و $K = EI$.

<u>الحل</u>

من التماثل رد الفعل R واحد عند الطرفين وكذلك عزم الانحناء G نفرض ان القوة المؤثرة عند منتصف القضيب هى F .

معادلة الاتزان تعطى من :



$$F + 2R = W \tag{1}$$

باتخاذ الافقى AB محور x والرأسى الى اسفل عند A محور y فإن شكل النصف الايسر من القضيب $0 \le x \le a$ يتحدد من المعادلة

$$M = EIy'' = G - Rx + \frac{W}{2a}\frac{x^2}{2} \tag{2}$$

$$\therefore\ EIy' = Gx - \frac{1}{2}Rx^2 + \frac{W}{2a}\frac{x^3}{6} \tag{3}$$

$$EIy = \frac{Gx^2}{2} - \frac{1}{6}Rx^3 + \frac{W}{2a}\frac{x^4}{24} \tag{4}$$

وقد تلاشى ثابت التكامل فى (3) و(4) لتلاشى y, y' عند $x = 0$.

وحيث ان $y = -\delta$ عند $x = a$ وبالتعويض فى (4)

$$\therefore\ -\frac{2EI\delta}{a^2} = G - \frac{Ra}{3} + \frac{Wa}{24} \tag{5}$$

وحيث ان $y' = 0$ عند $x = a$

$$0 = G - \frac{1}{2}Ra + \frac{Wa}{12} \tag{6}$$

بحل المعادلتين (6)و(5) والمعادلة (1) نحصل على

$$R = \frac{W}{4} - \frac{12K\delta}{a^3},\ F = \frac{24K\delta}{a^3} + \frac{W}{2},$$

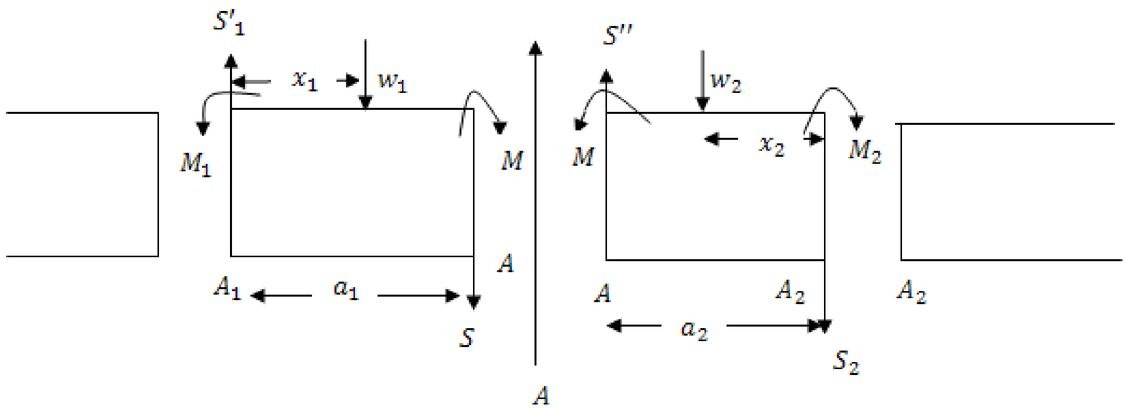
$$G = -\frac{6K\delta}{a^2} + \frac{Wa}{24}.$$

ثانيا: معادلة كلابيرون Clapeyron,s للعزوم الثلاثة:

اولا-معادلة كلابيرون للعزوم الثلاثة لأحمال المركزة :

تعتبر جزئين AA_2, A_1A من قضيب خفيف منتظم طولها a_2, a_1 لنفرض أن القضيب اتزن والجزءان AA_2, A_1A محملان بثقلين w_2, w_1 عند نقطتين منها تبعدان مسافتين x_2, x_1 عن A_2, A_1 على الترتيب فإذا كانت M_2, M, M_1 هى عزوم الأنحناء عند A_2, A, A_1 وكانت δ_2, δ_1 هى مقدار إنخفاض A عن الأفقى عن A_2, A_1 فإن

$$a_1M_1 + 2(a_1 + a_2)M + a_2M_2 = \frac{w_1x_1(a_1^2 - x_1^2)}{a_1} + \frac{w_2x_2(a_2^2 - x_2^2)}{a_2} - 6EI\left(\frac{\delta_1}{a_1} + \frac{\delta_2}{a_2}\right).$$



لإثبات ذلك:

نفرض أن قوى القص عند A_2, A, A_1 كما هى مبينة بالشكل وإذا كانت إحدى النقط الثلاث فقط نقط إرتكاز للقضيب – وفى الشكل إتخذت A نقطة ارتكاز – فإن قوه القص تكون غير متصلة بمقدار $(S^1 - S)$ يساوى رد الفعل عندها بإعتبار إتزان AA_2, A_1A كل على حده واخذ العزوم حول A_2, A على الترتيب نحصل على .

$$-a_1S_1^1 + w_1(a_1 - x_1) + M_1 - M = 0 \tag{4.2.1}$$

$$-a_2S^1 + w_2x_2 + M - M_2 = 0 \tag{4.2.2}$$

إذا أخذنا محورى الاحدثيات عند A_1 فإن شكل A_1A يتعين من العلاقات الاتية

$$\ldots\ldots\ldots.\ 0 \le x \le x_1 \qquad\qquad x_1 \le x \le a_1$$

$$EIy'' = M_1 - S_1^1 x \qquad + w_1(x - x_1)$$

$$EIy' = c_1 + M_1 x - \frac{1}{2} S_1^1 x^2 \qquad + \frac{w_1}{2}(x - x_1)^2$$

$$EIy = D_1 + c_1 x + \frac{1}{2} M_1 x^2 - \frac{1}{6} S_1^2 x^3 \qquad + \frac{w_1}{6}(x - x_1)^3$$

لكن $y = 0$ عند $x = 0$ ، $y = \delta_1$ عند $x = a_1$

$$\therefore\ D_1 = 0$$

$$and \quad c_1 + \frac{1}{2} M_1 a_1 - \frac{1}{6} S_1^1 a_1^2 + \frac{1}{6}\frac{w_1}{a_1}\left(a_1 - x_1\right)^3 = EI\ \frac{\delta_1}{a_1} \tag{4.2.3}$$

للجزء AA_2 للقضيب نأخذ محوري الاحداثيات عند A

$$0 \le x \le a_2 - x_2 \qquad\qquad a_2 - x_2 \le x \le a_2$$

$$EIy'' = M - S^1 x \qquad + w_2(x - a_2 + x_2)$$

$$EIy' = c_2 + Mx - 1/2\, S^1 x^2 \qquad + \frac{w_2}{2}(x - a_2 + x_2)^2$$

$$EIy = D_2 + c_2 x + \frac{1}{2} Mx^2 + \frac{1}{6} S^1 x^3 \qquad + \frac{w_2}{6}(x - a_2 + x_2)^3$$

وحيث ان $y = 0$ عند $x = 0$ ، $y = \delta_2$ عند $x = a_2$

$$\therefore\ D_2 = 0$$

$$c_2 + \frac{1}{2} Ma_2 - \frac{1}{6} S^1 a_2^2 + \frac{1}{6}\frac{w_2}{a_2} x_2^3 = -EI\ \frac{\delta_2}{a_2} \tag{4.2.4}$$

كذلك ميل $A_1 A_2$ عند A هو نفسة ميل AA_2 عند النقطة A

$$c_1 + M_1 a_1 - \frac{1}{2} S_1^1 a_1^2 + \frac{1}{2} w_1(a_1 - x_1) + c_2 \tag{4.2.5}$$

بحذف c, c_1 من المعادلات (4.2.3)و(2.4.4)و(4.2.5) نحصل على:

$$\frac{1}{2}M_1a_1+\frac{1}{2}Ma_2-\frac{1}{3}S_1^1a_1^2-\frac{1}{6}S^1a_2^2+\frac{w_1}{6a_1}(a_1-x_1)^2$$

$$x(2a_1+x_1)+\frac{w_2}{6a_2}x_2^2=-EI\left(\frac{\delta_1}{a_1}+\frac{\delta_2}{a_2}\right)$$

بالتعويض فى هذة العلاقة عن S', S_1' من (1) و(2) ينتج ان

$$M_1a_1+2M(a_1+a_2)+M_2a_2=\frac{w_1x_1(a_1^2-x_1^2)}{a_1}+\frac{w_2x_2(a_2^2-x_2^2)}{a_2}-6EI\left(\frac{\delta_1}{a_1}+\frac{\delta_2}{a_2}\right) \qquad (4.2.6)$$

والحد الاخير يعطى تأثير انخفاض A عن A_2, A_1 على عزوم الانحناء عند هذه المواضع .

هذه العلاقة يمكن تعميمها لاكثر من ثقل على الجزئين AA_2, A_1A وتكون النتيجة على الصورة :

$$M_1a_1+2M(a_1+a_2)+M_2a_2=\frac{\sum w_ix_i(a_1^2-x_i^2)}{a_1}+\frac{\sum w_jx_j(a_2^2-x_j^2)}{a_2}-6EI\left(\frac{\delta_1}{a_1}+\frac{\delta_2}{a_2}\right) \qquad (4.2.7)$$

وفيها x_i هى ابعاد w_i عن A_1 ،

x_j هى ابعاد w_j عن A_2 .

ثانيا: معادلة العزوم الثلاثة لقضيب محمل بإنتظام:

نفرض أنة بدلا من الأحمال المركزة فى البند السابق هناك حملا w_1 لكل وحدة طول عند اية نقطة من جزء القضيب A_1A ، ω_2 لكل وحدة طول عند ايه نقطة من AA_2 بالتعويض عن w_i, w_j بالكميتين $\omega_1\delta x_1, \omega_2\delta x_2$ على الترتيب واستبدال عملية الجمع بعملية تكامل ينتج ان

$$M_1a_1+2M(a_1+a_2)+M_2a_2=\int_0^{a_1}\frac{w_1x_1}{a_1}(a_1^2-x_1^2)dx_1+\int_0^{a_2}\frac{\omega_2x_2}{a_2}(a_2^2-x_2^2)dx-6EI\left(\frac{\delta_1}{a_1}+\frac{\delta_2}{a_2}\right)$$

و هده الاحمال المنتظمة تعطى

$$M_1a_1+2M(a_1+a_2)+M_2a_2=\frac{w_1a_1^3}{4}+\frac{w_2a_2^3}{4}-6EI\left(\frac{\delta_1}{a_1}+\frac{\delta_2}{a_2}\right) \qquad (4.2.8)$$

ثالثا: المعادلة العامة للعزوم الثلاثة:

اذا كان الجزءان A_1A و AA_2 من القضيب محملين أحمالا موزعة توزيعا منتظما واخرى مركزة بينما النقط A_1, A, A_2 ليست فى مستوى افقى واحد فإن:

$$M_1 a_1 + 2M(a_1 + a_2) + M_2 a_2 = \frac{w_1 a_1^3}{4} + \frac{w_2 a_2^3}{4} + \frac{\sum w_i x_i (a_1^2 - x_i^2)}{a_1} + \frac{\sum w_j x_j (a_1^2 - x_j^2)}{a_2} - 6EI\left(\frac{\delta_1}{a_1} + \frac{\delta_2}{a_2}\right) \quad (4.2.9)$$

والرموز فى هذه العلاقة تحمل نفس المعنى الذى استخدمت فيه من قبل. تعرف هذه العلاقة بمعادلة كلابيرون والصور السابقة حالات خاصه منها.

أمثلة:

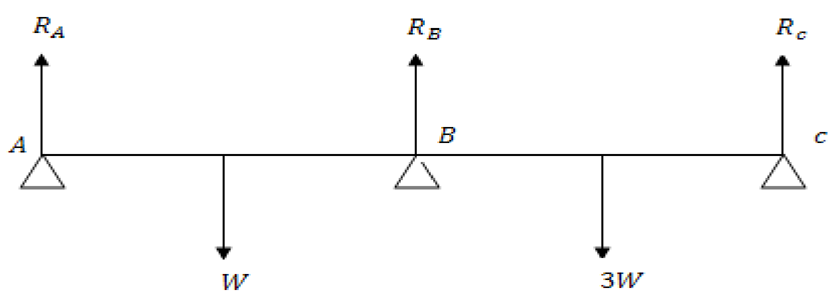
مثال(1):

قضيب خفيف AC يرتكز عند طرفيه A, C وعند منتصفه B على ثلاث أوتاد فى مستوى أفقى واحد . وحمل عند منتصف AB , BC بحملين W, $3W$ على الترتيب . احسب ردود الافعال على الاوتاد . واثبت أن القضيب أفقى عند طرفة A .

الحل

عزم الانحناء عند الطرفين C, A يساوى صفرا. نفرض ان عزم الانحناء عند B هو M.

بتطبيق معادلة كلابيرون للعزوم الثلاثة للاوزان المركزة على نقط الارتكاز C, B, A نحصل على :



$$8aM = W\left(\frac{a-3a^2}{2a}\right) + 3W\left(\frac{a-a^2}{2a}\right)$$

$$i.e. \quad M = \frac{3}{4}Wa \qquad (1)$$

حيث $4a$ طول القضيب

بفرض أن ردود الافعال عند C, B, A هى $R_c . R_B , R_A$ على الترتيب . اذن عزم الانحناء عند B .

$$M = \frac{3aW}{4} = -2aR_A + Wa \qquad (2)$$

$$= -(2aR_c - 3aW)$$

$$\therefore R_A = \frac{1}{8}W \ , R_c = \frac{9}{8}W \qquad (3)$$

ولكن إتزان القضيب

$$R_A + R_B + R_c = 4W \qquad (4)$$

$$\therefore R_B = \frac{11}{4}W \qquad (5)$$

شكل الجزء AB يتعين من العلاقات

$0 \le x \le a$ $\qquad\qquad$ $a \le x \le 2a$

$$EIy'' = -\frac{1}{8}Wx \qquad + W(x-a)$$

$$EIy' = c - \frac{1}{16}Wx^2 \qquad + \frac{W}{2}(x-a)^2$$

$$EIy = D + cx - \frac{1}{32}Wx^3 + \frac{W}{6}(x-a)^3$$

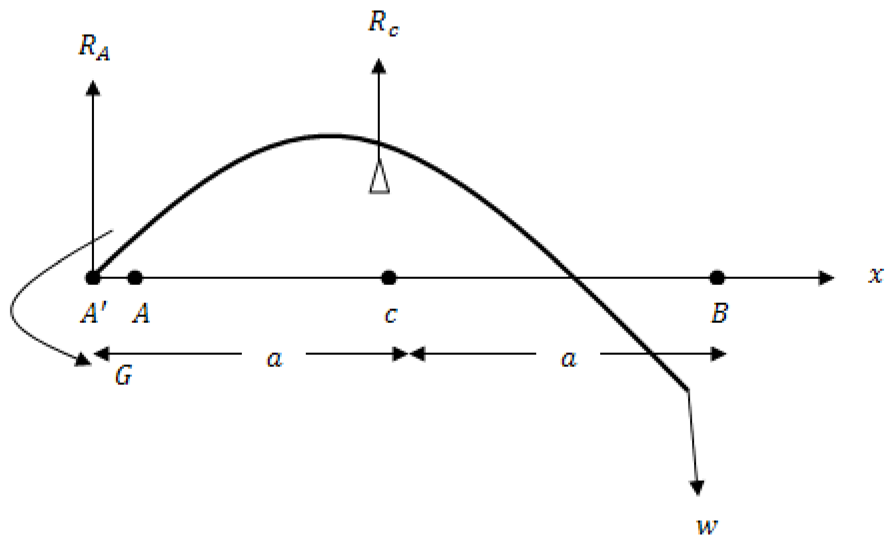
ولكن $y = 0$ عند $x = 2a, x = 0$ ينتج ان $D = 0$.

وايضا $c = 0$ وهذا يعنى ان ميل القضيب عند A يساوى صفرا. **أى ان القضيب افقى فى هذا الطرف**.

مثال (2):-

قضيب خفيف AB طولة $2a$ ثبت طرفة A أفقيا، وارتكز منتصفة c على وتد يرتفع مسافة $\frac{1}{6}\frac{wa^2}{EI}$ فاذا علق ثقلا w من الطرف الحر B. أحسب انخفاض الطرف B عن A. كذلك أوجد ردود الافعال عند c, A.

الحل



نفرض ان ردى الفعل عند c, A هما R_c, R_A وان عزم الانحناء عند A هو G أما عزم الانحناء عند c هو wa. التثبت عند A يمكن اعتباره تركيزا عند نقطتين إحداهما A والاخرى A' قريبه جدا من A بحيث يمكن إعتبار AA' =صفر $\delta_1 = 0$ كذلك فان النسبة $\frac{\delta_1}{a_1}$ تؤول الى الصفر حيث انها تعطى ميل الجزء AA' على الافقى وهذا يساوى صفرا لان هذا الطرف للقضيب مثبت أفقيا بتطبيق معادلة كلابيرون للعزوم الثلاثة لاحمال المركزة عند c, A, A^1 ينتج ان

$$2G.a + wa.a = -6EI\frac{wa^2}{6EI}$$

$$i.e\ G = -wa$$

وبتطبيق معادلة كلابيرون عند النقط B, c, A

$$G.a + 4a - wa = -6EI\left(-\frac{wa^3}{6EIa} + \frac{\delta}{a}\right)$$

$$i.e \quad \delta = -\frac{1}{3}\frac{wa^3}{EI}$$

اى ان c تعلو B مسافة $\frac{wa^3}{3EI}$ وتعلو A مسافة $\frac{1}{6}\frac{wa^3}{EI}$. اذن B اسفل A مسافة $\frac{wa^3}{6EI}$.

لحساب ردود الافعال نعتبر إتزان AB. باخذ العزوم حول A

$$R_c = 3w$$

ومنها

$$R_A = -2w$$

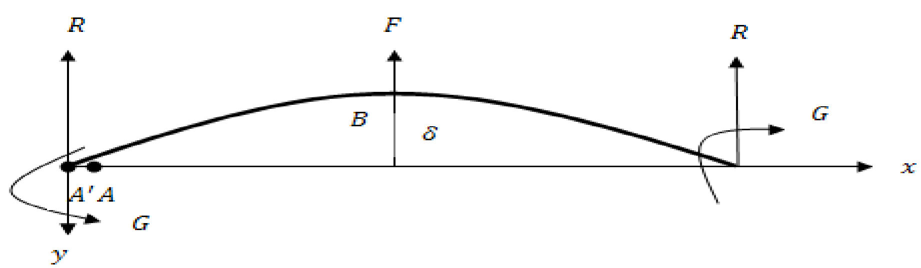
مثال (3):

باستخدام معادلة كلابيرون حل هذه المسالة.

قضيب منتظم مثبت افقيا عند كلامن نهايتة. اذا رفع القضيب من منتصفة الى اعلى بقوة مسافة مقدارها δ فوق النهايتين. اثبت ان القوة تساوى $\frac{w}{2} + \frac{24K\delta}{a^2}$ وان العزم عند النهايتين يساوى $\frac{w}{24} + \frac{6K\delta}{a^2} -$ حيث $2a$ طول القضيب w وزنه ، $K = EI$.

الحل

باعتبار نقط التثبيت عند A تركيزا عند نقطتين متقاربتين جدا احدهما A والأخرى A^1 بحيث يمكن اعتبار



$$AA^{1} = 0$$

$$\delta_{1} = 0$$

$$\frac{\delta_{1}}{A^{1}A} \approx 0$$

(كما اوضحنا فى المثال السابق)

بتطبيق معادلة كلابيرون للعزوم الثلاثة عند النقط A^{1}, A, B مع ملاحظة ان

$$a_{1} = 0 \quad , a_{2} = a$$

$$M_{1} = G \quad , M = G \quad , M_{2} = M_{B}$$

نحصل على

$$2aG + aM_{B} = \frac{w}{2a}\left(\frac{a^{3}}{4}\right) - 6K\frac{\delta}{a} \qquad (1)$$

بتطبيق معادلة كلابيرون للعزوم الثلاثة عند النقط A, B, c مع ملاحظة ان

$$a_{1} = a \quad , a_{2} = a$$

$$M_{1} = G \quad , M = M_{B} \quad , M_{2} = G$$

نحصل على

$$aG + 4aM_{B} + aG = \frac{w}{2a}\left(\frac{a^{3}}{4} + \frac{a^{3}}{4}\right) - 6K\left(-\frac{\delta}{a} - \frac{\delta}{a}\right)$$

$$i.e\ 2G + 4M_{B} = \frac{wa}{4} + \frac{12K\delta}{a^{2}} \qquad (2)$$

بحل المعادلتين (1)و(2) نجد ان

$$M_{B} = \frac{wa}{24} + \frac{6K\delta}{a^{2}}, G = \frac{wa}{24} - \frac{6k\delta}{a^{2}},$$

باعتبار الجزء AB فان عزوم الانحناء عند B .

$$M_{B} = G - Ra + \frac{wa}{4}$$

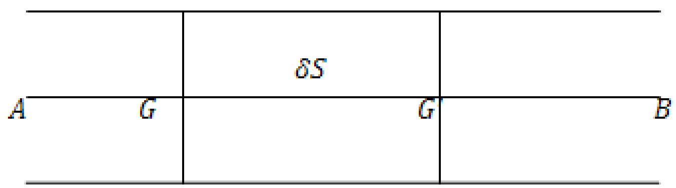
$$\therefore\ R = \frac{w}{4} - \frac{12\,KG}{a^3}$$

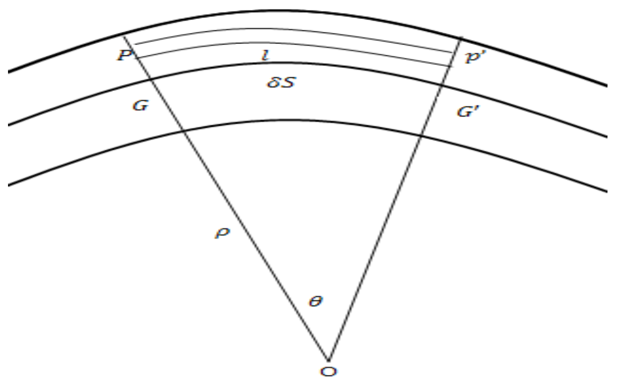
من اتزان القضيب كله

$$F = W - 2R$$
$$= \frac{W}{2} + \frac{24\,K\delta}{a^3}\cdot$$

ثالثا:- طاقة جهد قضيب نتيجه لانحنائه:

نفرض ان AB هو مقطع القضيب بواسطة المستوى الذى يضم القوى المؤثرة علية وان GG^1 جزء صغير من محور القضيب طوله δS . ونعتبر جزء القضيب المحصور بين المقطعين العرضيين له G, G^1.





نفرض انه عند إنحناء القضيب تقاطع هذان المقطعان فى o الالياف عند ايه نقط p على المقطع عند G وعلى بعد y منها تتغير طولها بالانحناء.

نفرض انه اصبح $\delta S + h$ فاذا كانت ρ هى نصف قطر انحناء محور القضيب عند G فإن

$$\frac{h}{y} = \frac{\delta S}{\rho} \tag{4.3.1}$$

اذا كانت δA هى مسافة مقطع الالياف عند p . فان طاقة جهد هذه الالياف نتيجة لاستطالتها تساوى

$$\frac{1}{2}\frac{E\,\delta A}{\delta S}h^2 \tag{4.3.2}$$

$$=\frac{1}{2}E\frac{y^2}{\rho^2}\delta A\,\delta S$$

$\therefore$ طاقة جهد جزء طولة δS من القضيب

$$=\frac{1}{2}\frac{E\,\delta S}{\rho^2}\int y^2\,dA \tag{4.3.3}$$

ويحسب التكامل على مقطع القضيب عند p وهذا يساوى عزم القصور الذاتى I لمقطع القضيب عند G حول محور عندها عمودى على مستوى القوى.

اذا كانت V هى طاقة جهد القضيب نتيجة لانحنائة فان

$$U=\frac{1}{2}\int\frac{EI}{\rho^2}\,ds \tag{4.3.4}$$

وهذا التكامل محسوبا على محور القضيب.

عندما يكون القضيب فى حالته الطبيعية على شكل منحنى ثم تغير هذا الانحناء فان يمكن اثبات ان طاقة الجهد U المخزونة نتيجة لهذا الانحناء تعطيها العلاقة

$$U=\frac{1}{2}\int EI\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)^2 ds \tag{4.3.5}$$

محسوبا على محور القضيب ρ,ρ_0 هما نصفا قطر الانحناء لمحور القضيب عند اية نقطة فيه قبل وبعد التغير فى انحنائة .

$$\because\ M=\frac{EI}{\rho} \tag{4.3.6}$$

يمكن كتابة طاقة جهد القضيب بدلالة عزم الانحناء M وذلك بالتعويض من (4.3.6) فى (4.3.4) ينتج ان

$$U=\frac{1}{2}\int\frac{M^2}{EI}\,ds \tag{4.3.7}$$

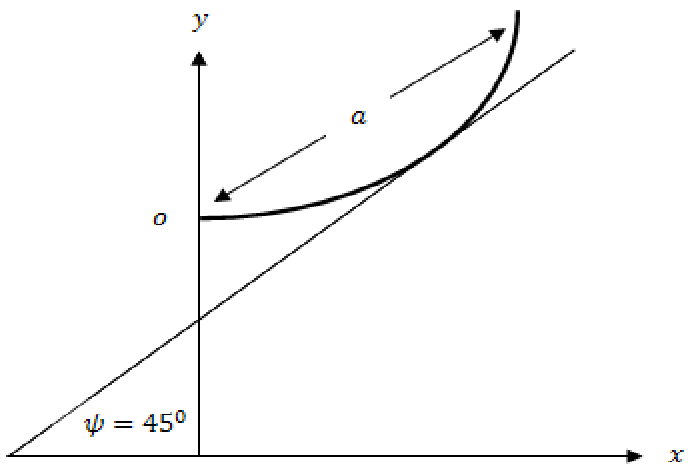
وهذا التكامل محسوبا على محور القضيب

أمثلة:

مثال(1):-

قضيب طولة a شكلة الطبيعى كتينة ذات بارامتر a احد طرفية عند راسها انحنى القضيب بعد ذلك لياخذ شكل دائرة نصف قطرها a : أثبت ان الطاقة المخزونة فيه تساوى $\frac{EI}{16\,a}(10-3\pi)$

الحل



المعادلة الذاتية لمنحنى الكتينة هى

$$S = a\tan\psi \qquad (1)$$

حيث S مقاسة من راس الكتينة ، ψ زاوية ميل المماس عند اى نقطة على منحنى الكتبنة على الافقى .

$\therefore$ نصف قطر انحناء القضيب عند اية نقطة فية قبل انحنائة

$$\rho_0 = \frac{dS}{d\psi} = a\sec^2\psi \qquad (2)$$

نصف قطر انحناء القضيب بعد انحنائة

$$\rho = a \qquad (3)$$

∴الطاقة المخزونة فى القضيب نتيجة إنحنائة

$$U = \frac{1}{2}\int_o^a EI\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)^2 ds$$

$$= \frac{EI}{2}\int_0^{\pi/4}\left[\frac{1}{a}-\frac{\cos^2\psi}{a}\right]^2 a\sec^2\psi\, d\psi$$

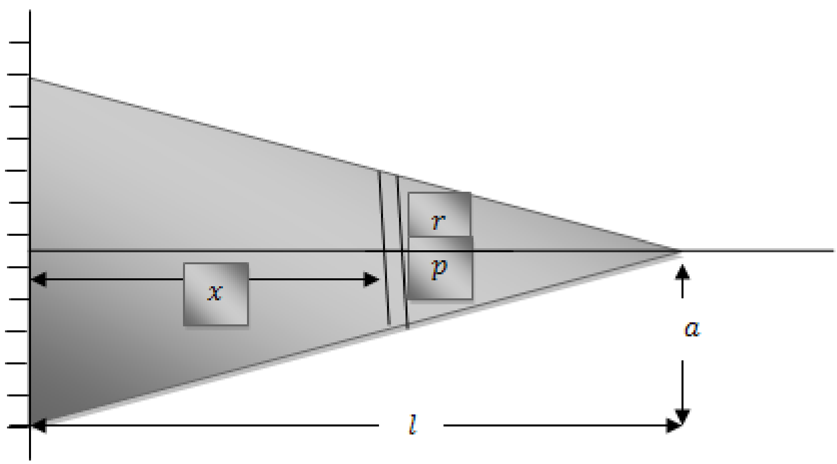
$$= \frac{EI}{2a}\int_0^{\pi/4}\left(\sec^4\psi - 2 + \cos^2\psi\right)d\psi$$

$$= \frac{EI}{16a}\left(10 - 3\pi\right) \qquad (4)$$

مثال(2):-

كابولى على شكل مخروط ، ارتفاعة a ونصف قطر قاعدتة المثبتة a ووزنه σ لكل وحدة حجوم .
إحسب الطاقة المخزونة فية نتيجه لإنحنانه تحت تأثير ثقله.

الحل



باخذ مركز القاعدة المثبتة كنقطة اصل للاحداثيات o ومحور الكابولى قبل انحنائة محور x فاذا كانت r هى نصف قطر المقطع عند اية نقطة على بعد x من o فان

$$\frac{r}{l-x}=\frac{a}{l} \qquad (1)$$

ويكون وزن وحدة الطول عند p

$$\omega=\sigma\,\pi\,r^{2}$$

$$=\frac{\sigma\,\pi\,a^{2}}{l^{2}}(l-x)^{2} \qquad (2)$$

$\therefore$ قوة القص تعطى من العلاقة

$$\frac{dS}{dx}=-\omega \qquad (3)$$

$$\therefore =\frac{\sigma\,\pi\,a^{2}}{l^{2}}(l-x)^{2}$$

بالتكامل

$$S=\frac{\sigma\,\pi\,a^{2}}{3l^{2}}(l-x)^{2}\div c$$

ولكن $S=0$ عند الطرف الحر $x=l$

اذن $c=0$

$$\therefore\ S=\frac{\sigma\,\pi\,a^{2}}{3l^{2}}(l-x)^{3} \qquad (3)$$

كذلك فان عزم الانحناء M تعطى من العلاقة

$$\frac{dM}{dx}=-S \qquad (4)$$

$$\frac{dM}{dx}=-\frac{\sigma\,\pi a^{2}}{3l^{2}}(l-x)^{3} \qquad (5)$$

$$M=-\frac{\sigma\,\pi a^{2}}{12\,l^{2}}(l-x)^{4} \qquad (6)$$

ويتلاشى ثابت التكامل لتلاشى M عند الطرف الحر $x=l$.

$\therefore$ عزم القصور الذاتى لمقطع الكابولى عند p .

$$I=\frac{1}{4}\pi\,r^{4}=\frac{\pi}{4}\frac{a^{4}}{l^{4}}(l-x)^{4} \qquad (7)$$

∴ الطاقة المخزونة فى الكابولى نتيجة لانحنائة

$$U = \frac{1}{2}\int_{o}^{l}\frac{M^{2}}{EI}dx$$

$$= \frac{\sigma^{2}\pi}{18E}\int_{o}^{l}(l-x)^{4}dx$$

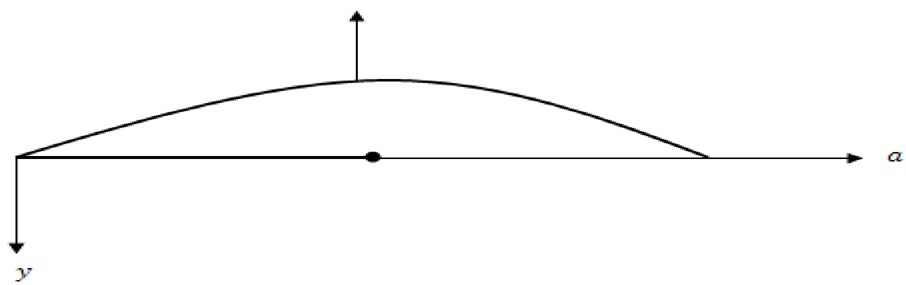
$$\therefore U = \frac{\sigma^{2}\pi}{90E}l^{5} \qquad (8)$$

مثال (3):

قضيب منتظم طوله $2a$ وزنه W يرتكز على مستوى افقى. اثرت على منتصفة قوة راسية رفعتة الى ان ترك طرفاه المستوى. أثبت ان الشغل المبذول $\frac{W^{2}}{20}\frac{a^{3}}{EI}$.

الحل

لايجاد شكل القضيب فى وضعه النهائى ناخذ محورين احداهما افقى والاخر راسى الى أسفل عند احد طرفى القضيب وليكن الطرف الايسر o .



شكل النصف الايمن من القضيب تحددة العلاقة

$$EIy'' = \frac{W}{4a}x^{2} \qquad (1)$$

$$EIy' = \frac{Wx^{3}}{12a} + c \qquad (2)$$

وحيث ان القضيب متماثل حول الرأسى عند منتصف القضيب .

فان $y' = 0$ عند $x = a$ ومنها .

$$c = -\frac{Wa^3}{12a} = -\frac{Wa^2}{12}$$

$$\therefore EIy' = \frac{Wx^3}{12a} - \frac{Wa^2}{12} = \frac{W}{12a}\left[x^3 - a^3\right] \qquad (3)$$

$$\therefore EIy = \frac{W}{12a}\left[\frac{x^4}{4} - a^3 x\right] + c$$

ويتلاشى ثابت التكامل لان $x = 0, y = 0$

$$\therefore EIy = \frac{W}{12a}\left[\frac{x^4}{4} - a^3 x\right] \qquad (4)$$

باتخاذ المستوى الافقى موضع قياسى فان طاقة جهد القضيب نتيجة لوضعة

$$= 2\int_o^a - y\frac{W}{2a}dx$$

$$= \frac{W^2}{12a^2EI}\int_0^a\left[a^3x - \frac{x^4}{4}\right]dx = \frac{3W^2a^3}{80EI} \qquad (5)$$

طاقة جهد القضيب نتيجة لانحنائة

$$= 2.\frac{1}{2}\int_o^a \frac{M^2}{EI}dx$$

$$= \frac{W^2}{16a^2EI}\int_o^a x^4 dx = \frac{W^2a^3}{80EI} \qquad (6)$$

$\therefore$ الشغل المبذول بواسطة القوة الرأسية يساوى مجموع طاقتى الجهد اللتين اكتسبها نتيجة لموضعة ونتيجة لانحنائة اى تساوى

$$= \frac{Wa^3}{20EI}. \qquad (7)$$

تمارين على الباب الرابع

1. قضيب منتظم طولة l ووزن وحدة الاطوال منه ω مرتكز فى وضع افقى عند نهايته . أوجد هبوط اى نقطة من نقاط القضيب .

2. قضيب منتظم وزن وحدة الاطوال منه تساوى ω ومرتكز فى وضع افقى عند نهاية . وقف رجل ثقله W عند نقطة على بعد a من طرف $b,$ من الطرف الاخر . أثبت ان انخفاض النقطة التى يقف عليها الرجل عن مستوى الحاملين يساوى

$$\frac{ab}{24\,EI}\left[\omega(a^2+3ab+b^2)+\frac{8\,ab}{a+b}W\right]$$

3. قضيب منتظم مرتكز عند نقطتى ثلثيه A, B افقيا. أثبت ان النسبة بين ارتفاع منتصف القضيب عن AB الى انخفاض نهاية القضيب عن AB تساوى $128 : 19$.

4. قضيب منتظم طولة $4l$ وضع ثقل W عند منتصفه ومرتكز افقيا عند نقطتين على بعدين متساويين l من منتصفة (مركزه). اذا كان القضيب عند كل من نقطتى الارتكاز . فاثبت ان W تساوى $\frac{1}{6}$وزن القضيب.

5. قضيب منتظم طولة $4l$ مرتكز عند خمس نقاط على نفس الخط الافقى ولى ابعاد متساوية l من بعضهما . إثبت ان ردود الافعال عند نقاط الارتكاز تتناسب مع $11 : 26 : 32$ اثبت ايضا ان عزم الانحناء عند منتصف القضيب وعند كل من نقطتى الرتكاز المجاوره له هو $\frac{wl}{56}, \frac{3wl}{112}$ حيث w وزن القضيب.

6. قضيب منتظم وزن وحدة الاطوال منه ω وطوله $3l$ مثبت عند طرفيه بحيث كان المماس للقضيب عند كل منهما أفقيا . ارتكز أيضا عند نقطة منه تبعد مسافة l عن احد الطرفين . فاذا كان طرفا القضيب ونقطة الارتكازعلى خط افقى واحد . فأوجد ردود الافعال وعزوم الانحناء عند الطرفين ونقطة الارتكاز.

7. قضيب منتظم $ABCD$ وزن وحدة الاطوال منه ω وطوله $3l$ يرتكز عند النقط A, B, C, D حيث $AB = BC = CD$ بحيث كان الخط الواصل بين النقاط الاربع أفقيا . اوجد عزوم الانحناء عند كل من B, C ورد الفعل عند كل من النقاط الاربع.

8. قضيب منتظم طولة $2l$ يرتكز فى وضع متماثل على حاملين على نفس الخط الافقى المسافة بينهما $2a$. اذا كانت $l < 2a$ ، فأثبت ان عزم الانحناء يكون نهايه عظمى عند الحامل او عند المنتصف حسبما $2l \geq (2+\sqrt{2})a$ اذا كانت $l > 2a$ فان عزم الانحناء يكون نهاية عظمى عند الحامل .

9. قضيب مرن منتظم مثبت من احد طرفيه بحيث كان افقيا عندها . فاذا علق عند منتصف القضيب ثقلا مساو لوزنه . فأوجد انخفاض النهاية الحرة للقضيب.

10. قضيب منتظم طوله $5l$ ومرتكز فى وضع متماثل على حاملين على نفس الخط الافقى كل منهما يبعد مسافة $2l$ عن الطرف . أوجد النسبة بين ارتفاع منتصف القضيب عن مستوى الحاملين الى انخفاض النهايه الحرة عنها.

11. -قضيب مهمل الوزن AB ، صلابته EI وطوله $2l$ طرفية مثبتان فى حائطين راسيين بحيث كان المماس للقضيب عند كل من الطرفين افقيا. علق ثقل مقداره $4\omega l$ من منتصف القضيب c ، كما حمل الجزء AC تحميلا منتظما كثافتة الطولية ω ، وحمل الجزء CB تحميلا منتظما كثافتة الطولية 2ω ، اوجد ردود الافعال وعزم الانحناء عند كل من A, B . اوجد ايضا الهبوط عند المنتصف C .

12. اثبت انه اذا ارتكز قضيب رفيع منتظم AB طولة l على حاملين ، احدهما عند الطرف A والاخر عند الطرف C تبعد مسافة $(2l/3)$ عن A فان المماس للقضيب عند C يكون افقيا.

13. قضيب ثقيل منتظم يرتكز على أربعة اوتاد فى نفس المستوى بحيث كانت المسافة بين كل وتدين متتاليين $100\ ft$ وكانت كتلته وحدة الاطوال من القضيب $2\tan s/ft$ احسب ردود الافعال عند الاوتاد وارسم منحنى عزم الانحناء للقضيب كلة .

14. قضيب منتظم مرتكز على اربعة اوتاد فى خط افقى واحد اذا كانت المسافة الوسطى تساوى $15\ ft$ والمسافتان الاخريتان كل من منهما تساوى $10\ ft$ وكان القضيب يحمل ثقلا قدرة $200\ Ib/ft$ موزع توزيعا منتظما على القضيب. ارسم عزم الانحناء عند اية نقطة من القضيب . واوجد الانخفاض عند اية نقط منه .

15. بين ان الشغل المبذول فى انحناء سلك مستقيم طولة $2\pi a$ ليكون شكل دائرة نصف قطرها a هو $\dfrac{\pi EI}{a}$.

الفصل الأول

ضغط المائع

1.1ضغط المائع :

الضغط للسائل على مساحة معطاة من سطح يمكن أن يكون منتظم أو متغير .الضغط المتوسط على هذه المساحة يقاس بقسمة الضغط الكلى على مقدار تلك المساحة .

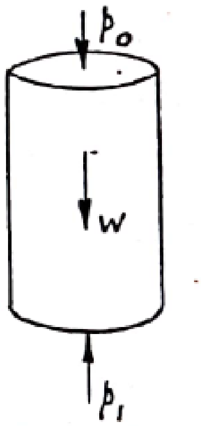
يجب أن نلاحظ أن ضغط المائع فى حالة الأتزان يكون دائما فى إتجاه عمودى على أى سطح داخله .

1.2الضغط عند أى نقطة :

أ- الضغط عند نقطة من سائل يكون متساو فى جميع الأتجاهات عند هذه النقطة .

ب- الضغط عند نقطة فى سائل فى حالة إتزان يكون متساوى عند جميع النقاط التى تقع فى نفس المستوى الأفقى المار بتلك النقطة .

ج- الضغط عند نقطة فى سائل فى حالة إتزان يزداد بالتناسب مع عمق هذه النقطة .



$$P_1 a = P_0 a + ah\omega$$

أو

$$P_1 = P_0 + h\omega$$

حيث a هى مساحة أى مقطع على شكل قاعدة إسطوانة و h هى إرتفاع الأسطوانة و ω هى كثافة السائل . $P_0 \& P_1$ هما الضغط لوحدة المساحات والفرق بينهما

$$P_1 - P_0 = h\omega$$

يمثل وزن عمود من السائل مقطعه ذو وحدة المساحات وإرتفاعه h

مثال (1) :

أوجد الزيادة فى الضغط عند الهبوط لعمق $20 \ ft$ فى ماء حيث كثافة الماء تقدر بما يعادل $62.5 \ lb/ft^3$.

الحل :

دع $\mathbf{P_0} \& \mathbf{P_1}$ ليكونا الضغط العلوى والسفلى مقاسا بوحدة $lb \, wt./ft^2$.

وزن عمود من الماء ذو مقطع مساحته $1 \ ft^2$ وإرتفاعه $20 \ ft$ هو

$$(1)^2(20)(62.5) = 1250 \quad lb \, wt./ft^2$$

$$= 1250/144 \quad lb \, wt./in^2 \qquad = 8.68 \quad lb \, wt./in^2$$

1-3الضغط الجوى :

الضغط على سطح سائل يعود لضغط الهواء والذى يتغير طبقا لشروط الطقس ولكن بصفة عامة

تكون قيمته : $14.5 \quad lb \, wt./in^2$

الضغط الجوى عادة يعطى على أنه إرتفاع الباروميتر الزئبقى أى وزن عمود من الزئبق ذات مقطع مساحته الوحدة وإرتفاعه هو إرتفاع الباراوميتر.

متوسط إرتفاع الباروميتر الزئبقى يكون حوالى $30\ in$ بينما **إرتفاع الباروميترالمائى يكون حوالى**

$33\ ft$

عندئذ يكون الضغط على عمق x **فى ماء يكون راجعا لعمود من الماء إرتفاعه** $\mathbf{x+33\ \ ft}$

1-4انتقال ضغط المائع:

كما ذكر فى ج $\mathbf{2-1}$ فإنه ينتج أنه إذا إضيف ضغط إضافى عند أى نقطة من سائل ساكن فى وعاءمقفل فإن هذا الضغط سوف ينتقل إلى كل نقطة من السائل .

1-5الكثافة والكثافة النوعية(Sp.gr.) للمائع:

الكثافة لأى مادة هى كتلة وحدة الحجوم من المادة.كثافة الماء تأخذ عادة على أنها $62.5\ \ lb/ft^3$ **فى النظام الأنجلبزى أو $\mathbf{1\ \ g/c^3}$ وذلك فى النظام الفرنسى .**

الكثافة النوعية $Sp.gr$ لمادة هى النسبة بين كثافة المادة $\mathbf{D}$ إلى كثافة الماء وهى قيمة عددية ليس لها وحدات قياس . فإذا كان $Sp.gr$ لمادة تساوى 4 **فإن كثافتها هى :**

$4\times 62.5=250\ \ lb/\mathrm{ft}^3$ أو $4\times 1=4\ \ g/\mathrm{c}^3$.

مثال (2) :

5 **لترات من سائل كثافته النوعية** 1.3 تم خلطها مع 7 لترات من سائل آخر كثافتة النوعية 0.78 . فإذا إنكمش حجم الخليط بنسبة $\%\ 1$, فأوجد الكثافة النوعية للخليط.

الحل :

دع ω لتكون كتلة واحد لتر من الماء(كثافتها) وبذلك تكون كتلة الخليط :

$$5\times 1.3\ \omega+7\times 0.78\omega\ \ grammes \qquad (1)$$

وحجم الخليط يكون هو

$$(5+7)\ 0.99 = 12 \times 0.99 \ \ litres \qquad (2)$$

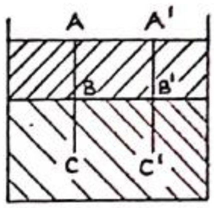
وبالتالى فإن كتلة واحد لتر من الخليط تنتج بقسمة (1) على (2) لتكون :

$$1.007\ \omega$$

ومنها تكون الكثافة النوعية للخليط هى :

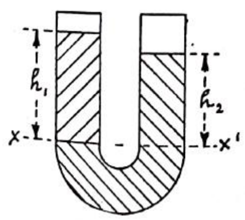
$$1.007$$

1-6السطح المشترك للسوائل:



السطح المشترك لسائلين مختلفى الكثافة ولا يختلطا يكون مستوى افقى كما هو موضح بالشكل المقابل .

1-7قياس الكثافة النسبية:



الكثافة النسبية للسوائل التى لايتم اختلاطها يمكن أن تقاس بإستخدام أنبوبة على شكل حرف U .

السائل الثقيل يملأ باطن الأنبوبة حيث يكون XX' هو مستوى السطح المشترك للسوائل كما هوموضح بالشكل .

$\rho_1 < \rho_2$ هما كثافتى السائلين المراد حساب الكثافة النسبية لهما والذان إرتفاعهما h_1 & h_2 فوق المستوى XX' .

بما أن الضغط عند المستوى XX' يجب أن يكون متساوى فى كلا الفرعين للأنبوبة فإننا نحصل على :

$$\rho_1 \times h_1 = \rho_2 \times h_2$$

عندئذ بقياس كلا من $h_1 \& h_2$ يمكن إيجاد الكثافة النسبية من العلاقة :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}$$

أو

$$\rho_1 = \frac{h_2}{h_1}\, \rho_2$$

مثال (3) :

كمية من الزئبق كثافته النوعية 13.6 صبت فى أنبوبة على شكل حرف U وفى إحدى الأذرع صب كحول ذو كثافة نوعية 0.8 بحيث يشغل إرتفاع قدره $6.8\ in$, ما هو الفرق بين مستويى الأسطح الحرة للسوائل .فإذا صب فى الذراع الأخر كمية من الكللوروفورم ذو كثافة نوعية 1.5 حتى تكون الأسطح الحرة للسائلين على نفس المستوى الأفقى ,فأوجد الأرتفاع الذى يشغله الكللوفورم .

الحل :

الحالة الأولى

دع $h\ cm$ لتكون هى إرتفاع عمود الزئبق أعلى مستوى السطح المشترك بين الزئبق والكحول .

إذن بناءا على ذلك نحصل على :

$$(6.8 \times 0.8)\omega = (h \times 13.6)\omega$$

حيث ω هى كتلة من الماء التى تملأ $1\ cm$ إرتفاع من الأنبوبة :

$$h = \frac{6.8 \times 0.8}{13.6} = 0.4\ cm$$

ويكون الفرق فى المستوى المطلوب هو :

$$6.8 - 0.4 = 6.4\ \ cm$$

الحالة الثانية

عندما يضاف الكرلووفورم فى الذراع الثانى دع $h_1\ cm$

لتكون هى الأرتفاع الذى يشغله من الأنبوبة .

بما أن السطح الحر على نفس المستوى ,فإن الضغط عندعمق

$h_1\ cm$ فى كلا الذراعين يكون له نفس القيمة , هذا يعنى أن:

$$(h_1 \times 1.5)\omega = \ (6.8 \times 0.8)\omega + (h_1 - 6.8) \times 13.6\ \omega$$

إذن بناءا على ذلك نحصل على :

$$\mathrm{h_1 = 7.2\ cm}$$

1-8 الضغط على مساحة مستوية:

إذا غمرت مساحة مستوية فى سائل فإن الضغط عند أى نقطة سيكون عموديا على تلك المساحة

ويكون الضغط الكلى هو مجموع هذه الضغوط على المساحة

<u>أولا المساحة أفقية :</u>

إذا كانت المساحة أفقية فإن الضغط عند أى نقطة سيكون

ρh, حيث h هى إرتفاع السطح الحر فوق المساحة ,

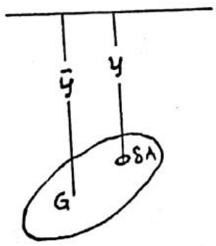
كما هو موضح بالشكل , ρ هى كثافة السائل .عندئذ فإنه

إذا كانت A هى المساحة الكلية فإن الضغط عليها سيكون

$$\rho\, A\, h$$

ثانيا المساحة مائلة :

إذا كانت المساحة ليست أفقية فإذا كان $\bar{y}$ هو عمق نقطة مركز الثقل G أسفل السطح الحر وبإعتبار عنصر من المساحة δA على عمق y أسفل السطح الحر كما هوموضح بالشكل المقابل .فإن الضغط على هذا العنصر سيكون



$$\rho\, y\, \delta A$$

وبتجميع هذه الكميات على كل المساحة فإننا نحصل على الضغط الكلى ليكون

$$\sum \rho\, y\, \delta A$$

ولكن عمق مركز الثقل للمساحة يعطى من

$$A\,\bar{y} = \sum y\, \delta A$$

ولهذا إذا كانت كثافة السائل منتظمة فإن الضغط الكلى هو :

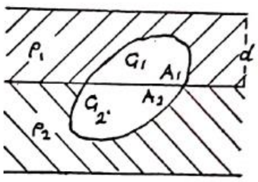
$$\rho A\,\bar{y}$$

نتيجة (1): عندئذ فإن الضغط الكلى على المساحة المستوية والمغمورة فى سائل تعتمد فقط على المساحة A وعلى عمق مركز ثقلها $\bar{y}$.

أى أن المساحة حيث تظل مغمورة وتدور حول محور مار بمركز ثقلها فإن الضغط الكلى على المساحة لا يتغير.

<u>نتيجة (2):</u>إننا سوف نجد أن مقدار الضغط الكلى على المساحة المستوية يعتمد على عمق مركز ثقلها ولكن النقطة التى يؤثر عندها الضغط ليست مركز الثقل ولكن نقطة أخرى تسمى مركز الضغط والتى سوف ندرسها لاحقا إلا إذا كانت المساحة افقية فإن النقطتين ينطبقا .

1-9 الضغط على سوائل مختلفة الكثافة:



نفرض أنه لدينا مساحة مستوية مغمورة فى طبقتين منالسوائل لهما الكثافات $\rho_1 < \rho_2$ ولنفرض

أن السطح المشترك للسائلين يقسم المساحة إلى جزئين مساحتهما $A_1 \& A_2$. وعمق مركزى الثقل

لكل منهما أسفل السطح الحر هما $\bar{x}_1 \& \bar{x}_2$.

تفرض الآن أن d هى عمق الطبقة العليا كماهو

موضح بالشكل .عندئذ يكون الضغط على المساحة A_1

هو $A_1 \bar{x}_1 \rho_1$

وهى تساوى حاصل ضرب المساحة A_1 مع قيمة الضغط عند مركز ثقلها .

عند كل نقطة من المساحة A_2 يوجد ضغط $\rho_1 d$ نتيجة لوجود الطبقة العليا من السائل

مكافئة للضغط $A_2 \rho_1 \mathrm{d}$ مركز ثقلها . بالأضافة إلى كثافة السائل ρ_2 , يوجد ضغط

$A_2 \rho_2(\bar{\mathrm{x}}_2 - \mathrm{d})$ على المساحة A_2 . عندئذ فإن الضغط الكلى على المساحة A_2 هو:

$$A_2 \{\rho_1 d + \rho_2(\bar{\mathrm{x}}_2 - \mathrm{d})\}$$

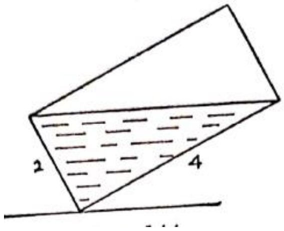
وهذا يساوى حاصل الضرب للمساحة A_2 مع الضغط عند مركز ثقلها .

<u>ملحوظة (1):</u> يجب أن نلاحظ أن الضغط على المساحة_المغمورة فى سائل يمكن أن يكون أكبر من الوزن الكلى للسائل .

كمثال إذا كانت فازة على شكل هرم مفتوح عند الرأس وله قاعدة ذات مساحة A وإرتفاعه h ملأ بسائل كثافته ρ خلال فتحة عند رأسه , فإن الضغط عند أى نقطة لى القاعدة هو ρh

ويكون الضغط الكلى على القاعدة هو ρAh , وزن السائل هو $\frac{1}{3}\rho Ah$. الفرق بين الضغط على القاعدة ووزن السائل ينتج من الضغط السفلى من جوانب الهرم عل السائل . عندئذ فإن الضغط العلوى للسائل على الجوانب للهرم ستكون $\frac{2}{3}\rho Ah$.

مثال (4) :



تانك أبعاد قاعدته $3\ ft\ \&4\ ft$ **وإرتفاعه** $2\ ft$

ملأ لنصفه بالماء . إدير حول الحافة القصيرة `` 3 ft ` `

من قاعدته حتى يكون الماء على وشك الأنسياب .

أوجد الضغط على أحد اوجهه الرأسية $(2,4)$ **مثلا وعلى قاعدته** $(3,4)$ **فى الوضع المبين بالشكل .**

الحل :

المساحة المغمورة للوحه الرأسى الظلل فى الشكل هى

$$=\frac{1}{2}(4)\ (2)=4\ ft^2$$

طول القطر AC **يساوى**

$$\sqrt{(2)^2+(4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\ \ ft$$

أقصى عمق للماء هو القطر

$$EB=h=\frac{4}{\sqrt{5}}=0.8\sqrt{5}\ \ ft$$

عمق مركز ثقل للمساحة المغمورة يساوى

$$EK=\frac{1}{3}h=\frac{1}{3}\left(0.8\sqrt{5}\right)ft$$

الضعط على الوحه الرأسى يساوى

$$(4)\left(\frac{1}{3}\right)\left(0.8\sqrt{5}\right)(62.5) = 149.1\ lb\ wt.$$

عمق مركز ثقل القاعدة هو

$$\frac{1}{2}h = \frac{1}{2}\left(0.8\sqrt{5}\right) = 0.4\sqrt{5}\ ft$$

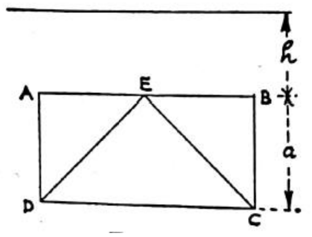
مساحة القاعدة هى

$$3 \times 4 = 12\ ft^2$$

الضغط على القاعدة يساوى:

$$(12)\left(0.4\sqrt{5}\right)(62.5) = 670.8\ lb\ wt.$$

مثال (5) :



مساحة مستطيلة رأسية $ABCD$ **حيث** AB **أفقى ويقع أعلى**DC **وطول الوجه** $BC = a$ **,هذه المساحة تخضع لضغط سائل متجانس ساكن تحت تأثير الجاذبية الأرضية . E** هى **نقطة منتصف** AB **. وضح أن النسبة بين الضغوط على المثلثات** CED & $\boldsymbol{DEA}$ **تقع بين** $2:1$ & $4:1$ **طبقا للعمق** h **للوجه** $\boldsymbol{AB}$ **أسفل السطح الحر للسائل .أوجد كذلك العمق** h **عندما تكون هذه النسبة مساوية** $5:2$ **حيث** $AD = 4\ ft$ **فى هذه الحالة .**

الحل :

مساحة المثلث $\boldsymbol{CED}$ **تساوى** $\frac{1}{2}\,a \times AB$ **وكذلك مساحة المثلث** $\boldsymbol{DEA}$ **تساوى** $\frac{1}{4}\,a \times AB$

عمق مركز ثقل المثلث CED يساوى $h+\frac{2}{3}a$ وكذلك عمق المثلث DEA يساوى $h+\frac{1}{3}a$

الضغط على المثلث CED يساوى $\rho\left(h+\frac{2}{3}a\right)(AB)\times(a)\ \frac{1}{2}$

وكذلك الضغط على المثلث DEA يساوى $\rho\left(h+\frac{1}{3}a\right)(AB)\times(a)\ \frac{1}{4}$

وتكون نسبة الضغوط هى $\frac{2(3h+2a)}{3h+a}$

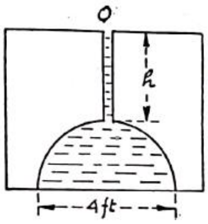
أولا : عندما تكون $h=0$ **فإن النسبة تصبح** $4:1$

ثانيا : عندما تكون h **كبيرة جدا بالنسبة إلى** a **فإن النسبة تصبح** $2:1$

ثالثا : عندما **تصبح النسبة** $5:2$ **وتكون** $a=4ft$ **فإن** $\frac{2(3h+8)}{3h+5}=\frac{2(3h+2a)}{3h+a}=\frac{5}{2}$

ومنها تكون $h=4\ ft$.

مثال (6)



الشكل يعبر عن قالب لصب نصف كرة معدنية قطرها $4\ ft$

مادة مذابة ستصب فى هذا القالب خلال فتحة صغيرة عند O .

المادة تزن $480\ lb/ft^3$.

أولا أوجدالضغط للمادة المصبوبة على القالب عندما $h=1$.

ثانيا إذا كان القالب يزن $8\ ton$ أوجد قيمة h عندما يكون القالب عند نقطة أنه قابل للرفع .

الحل :

أولا : عندما تكون $h=1$

مساحة القاعدة الدائرية تساوى $(a)^2\,\pi=4\,\pi\,ft^2$

العمق أسفل السطح الحر يساوى $h+2=3$

الضغط على القاعدة يساوى

$$(4\pi)(h++2)(480)=12\pi\times 480=5760\,\pi\ lb.wt.$$

ثانيا : وزن المادة المصبوبة يساوى $h\left[\left(\frac{4\,\pi\,a^3}{3}\right)/2\right]\rho=\frac{2}{3}\,\pi\,(2)^3\,(480)$

$$=2560\ \ lb.wt.$$

الآن الفرق بين الضغط والوزن يساوى

$$5760\,\pi-2560\pi=3200\,\pi\ lb.wt.=4.49\ tons\ wt.$$

هذا الفرق هو الضغط إلى أعلى للمادة على القالب فإذا كان هذا الضغط يساوى $8\ ton$ فإننا نحصل على :

$$(4\pi)(h+2)(480)-2560\,\pi=8\times 2240\ lb.wt.$$

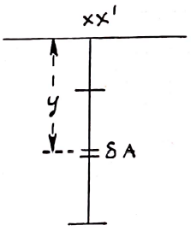
ومنها يكون : $h=2.3\ ft$

1-10 مركزالضغط:

مركز الضعط لمساحة مستوية مغمورة فى سائل هو النقطة التى عندها يؤثرالضغط الكلى للسائل على هذه المساحة .

عادة نكون متعلقين بالمسافة التى يبعدها مركز الضغط عن خط تقاطع مستوى المساحة مع السطح الحر للسائل واننا سوف نثبت أنه لمائع منتظم هذه المسافة تساوى العزم الثانى للمساحة حول هذا الخط مقسوما على العزم الأول للمساحة حول نفس الخط .

أولا : مركز الضغط لمساحة رأسية :



نعتبر مساحة راسية مغمورة بالكامل فى سائل منتظم كثافته ρ , ودع المستوى الذى تقع فيه المساحة يقابل السطح الحر للسائل فى الخط XX' وإعتبر عنصر مساحة صغير δA على عمق y أسفل السطح الحر للسائل .

إذن الضغط على عنصر المساحة هو $\rho\ \mathrm{y}\ \delta\mathrm{A}$ والضغط الكلى على المساحة هو $\sum \rho\ \mathrm{y}\ \delta\mathrm{A}$ حيث أن المجموع مأخوذ على كل المساحة A .

عزم الضغط على عنصر المساحة δA حول الخط XX' يساوى $(\rho\, y\delta A\ )y = \rho\, y^2\delta A$

والمجموع للعزوم للضغط على كل العناصر من المساحة هو $\sum \rho\, y^2\delta A$.

عندئذ بما أن العزم للضغط الكلى حول XX' يجب أن يساوى هذه الكمية فإننا نجد أن المسافة P لمركز الضغط مقاسة من الخط XX' يعطى من :

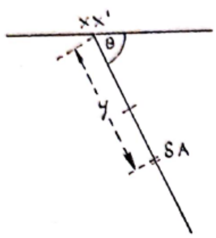
$$P = \frac{\sum \rho\, y^2\delta A}{\sum \rho \mathrm{y}\ \delta\mathrm{A}} = \frac{\sum\ y^2\delta A}{\sum\ \mathrm{y}\ \delta\mathrm{A}}$$

(العزم الأول للمساحة حول XX') / (العزم الثانى للمساحة حول XX') =

إذا كانت h **هى المسافة من مركز ثقل المساحة إلى XX' وكانت k هى نصف قطر القصور حول XX' فإننا نحصل على**

$$P = \frac{\mathrm{A}\ k^{\ 2}}{\mathrm{A}\, h} = \frac{k^{\ 2}}{h}$$

ثانيا : مركز الضغط لمساحة مائلة :



نفرض أن المساحة المغمورة تميل بزاوية θ على الأفقى كما هو موضح بالشكل وكما سبق دع مستوى المساحة يقابل السطح الحر للسائل فى الخط XX'

وإعتبر عنصر مساحة صغير δA على عمق y

أسفل السطح الحر للسائل .

إذن الضغط على عنصر المساحة δA هو $\rho(y\ \sin\theta)\ \delta\mathrm{A}$ ويكون الضغط الكلى على

المساحة A هو $\sum \rho\ \ \mathrm{y}\sin\theta\ \delta\mathrm{A} = \rho \sin\theta \sum \mathrm{y}\ \delta\mathrm{A}$

حيث أن المجموع مأخوذ على كل المساحة A .

عزم الضغط على عنصر المساحة δA حول الخط XX' يساوى

$$(\rho\ y\ sin\ \theta\ \delta A\ \ )y = \rho\ y^2\ sin\ \theta\ \delta A$$

ويكون العزم الكلى للضغط هو $\rho\ sin\ \theta\ \sum\ y^2 \delta A$.

وكما سبق فإن المسافة P التى يبعدها مركز الضغط عن الخط XX' يعطى من :

$$P = \frac{\rho\ sin\ \theta \sum\ y^2 \delta A}{\rho\ sin\ \theta\ \sum\ \mathrm{y}\ \delta\mathrm{A}} = \frac{\sum\ y^2 \delta A}{\sum\ \mathrm{y}\ \delta\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{k}^2}{\mathbf{h}}$$

عندئذ نجد أن مركز الضغط للمساحة لا يتغير بدوران المساحة حول الخط الذى فيه مستوى المساحة

يقابل السطح الحر للسائل .

1-11 المسافة بين مركز الثقل ومركزالضغط:

وإعتبر $A\ k_1^2$ ليكون هوالعزم الثانى للمساحة حول محور يوازى XX' ومارا بمركز الثقل .

إذن بإستخدام نظرية المحاور المتوازية يكون :

$$A\ k^2 = A\left(k_1^2 + h^2\right)$$

وعلى ذلك فإن

$$P == \frac{k_1^2 + h^2}{h}\ \ = \ \frac{k_1^2}{h} + h$$

عندئذ فإن المسافة المقاسة من مركز الضغط إلى الخط XX' دائما أكبر من المسافة المقاسة

من مركز الثقل إلى الخط XX' , أى أن مركز الضغط دائما يقع أسفل مركز الثقل مقاسا عند زاوية قائمة من XX' تساوى $\frac{k_1^2}{h}$.

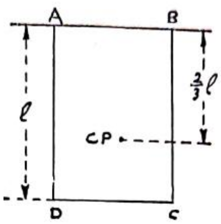
عندما يكون بعد مركز الضغط من الخط XX' معروف فإن موضعه فى حالات كثيرة يكون واضح .

عندما يكون للمساحة محور تماثل عمودى على XX' فإن مركزالضغط يقع على هذا الخط بوضوح .

إذا كانت صفيحة مثلثة قاعدتها موازية لخط تقاطع مستواها مع السطح الحر فإن الضغط على أى شريحة من هذه المساحة توازى قاعدتها يمكن أن يأخذ على أنه يؤثر عند نقطة منتصفها وعندئذ فإن مركز الضغط للمثلث يجب أن يقع على المستقيم المتوسط من منتصف قاعدتها .

1-12 حالات قياسية:

(1) مركز الضغط لمستطيل :



نعتبر مستطيل $ABCD$ مغمور فى سائل منتظم

حيث AB يقع على السطح الحر للسائل (انظر الشكل)

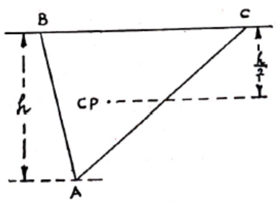
وإعتبر $AB = a \ \& \ BC = h$.

العزم الثانى للمستطيل حول AB يساوى $\frac{a\,h^3}{3}$

, العزم الأول للمستطيل حول AB يساوى $ah \times \frac{h}{3}$.

عندئذ فإن مركز الضغط هو : $P = (ah^3/3)/(ah^2/3) = \frac{2}{3}\,h$.

(2) مركز الضغط لمثلث :



<u>أولا</u> نعتبر مثلث ABC إرتفاعه h وقاعدته BC

تقع على السطح الحر للسائل كما هو موضح بالشكل .

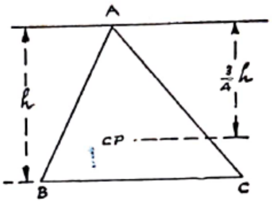
العزم الثانى للمثلث حول BC يساوى $\frac{1}{2}h \times BC \times \frac{h^2}{6}$

, العزم الأول للمثلث حول BC يساوى $\frac{1}{2}h \times BC \times \frac{h}{3}$.

عندئذ فإن مركز الضغط هو : $P = h/2$.

<u>ثانيا</u> نعتبر مثلث ABC إرتفاعه h وقاعدته BC

حيث رأسه A تقع على السطح الحر للسائل كما هو موضح بالشكل .



العزم الثانى للمثلث حول A يساوى $\frac{1}{2}h \times BC \times \frac{h^2}{2}$

, العزم الأول للمثلث حول A يساوى $\frac{1}{2}h \times BC \times \frac{2h}{3}$.

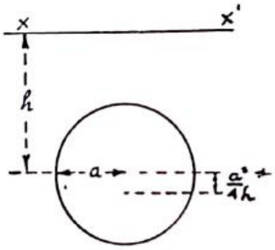
عندئذ فإن مركز الضغط هو : $P = 3\,h/4$.

(3) مركز الضغط لمساحة دائرية :

<u>ثالثا</u> نعتبر ممساحة دائرية نصف قطرها a

ومركزها يقع على مسافة h من الخط XX'

الذى هو خط تقاطع مستوى هذه المساحة مع السطح الحر للسائل كما هوموضح بالشكل .



العزم الثانى للمثلث حول القطر A يساوى $\pi a^2 \times a^2/4$

وبالتالى حول XX' هو $\pi a^2 \times \left((a^2/4) + h^2\right)$

, العزم الأول للمساحة حول XX' يساوى $\pi a^2 \times h$.

عندئذ فإن مركز الضغط هو : $P = \frac{h^2+(a^2/4)}{h} = h + a^2/4h$.

أى أن مركز الضغط يقع على مسافة $a^2/4h$ منمركز لدائرة .

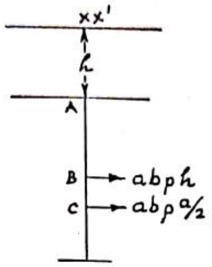
1-13 الزيادة فى العمق:

عندما يتم تعيين مركز الضغط لمساحة ما ثم حدثت زيادة فى العمق لهذه المساحة , فإن هذه الزيادة تسبب زيادة متناسبة مع هذه الزيادة فى الضغط عندكل نقطة من المساحة .وبإيجاد موضع هذه الزيادة الناتجة عند مركزثقل هذه المساحة وكذلك الضغط الأصلى عند مركز الضغط فإن مركز الضغط الجديد يمكن إيجاده .

مثال (7)

مستطيل أبعاده $a \,\&\, b$ حيث الجانب ذو الطول a رأسى والحافة العليا له على بعد h أسفل السطح الحر للسائل ذو الكثافة ρ . أوجد المسافة التى يبعدها مركز الضغط عن مركز الثقل .

الحل :



إعتبر A **هو الحافة العليا للمستطيل وأن** B

هو موضع مركز ثقله كما هو موضح بالشكل .

إذا كان سطح السائل يقع عند الجانب العلوى للمستطيل

فإن الضغط هو $(ab)(a/2)\rho = a^2 b\rho/2$

ومركز الضغط C **هو** $\frac{2}{3}a$ **أسفل** A **كما سيق تحديده .**

هبوط المستطيل مسافة h **يسبب ضغط عند مركز المستطيل** B **.**

الضغط الكلى هو $(ab)\big(h + (a/2)\big)\rho$

عند نقطة تبعد مسافة x **أسفل** B **حيث :**

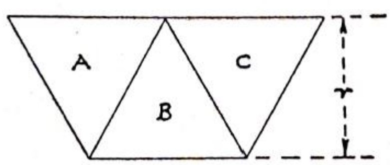
$$(abh\rho)x = (a^2 b\rho/2)\big((a/6) - x\big)$$

ولهذا فإن $x = a^2/6(2h + a)$

مثال (8)

صفيحة على شكل سداسى منتظم مغمور لنصفها فى سائل . قطر الشكل واضح أنه يقع على السطح الحر للسائل . أثبت أن مركز الضغط لنصف المسدس المغمور يقع على عمق $5r/8$ من السطح الحرللسائل حيث r انصف قطر الدائرة الراسمة للمسدس من الداخل .

الحل :



المسألة لن تتغير بأخذ الجزء المغمور من المسدس ليكون راسيا . لدينا الآن ثلاث مثلثات متطابقة هم A , B &C لهم المساحة وإرتفاع r . المثلثات A &C لهما الضغط $\frac{r^2}{\sqrt{3}} \times \frac{r}{3} \times \rho$ والذى يؤثر على عمق $\frac{r}{2}$ أسفل السطح الحر للسائل .

و المثلث B له الضغط $\frac{r^2}{\sqrt{3}} \times \frac{2r}{3} \times \rho$ والذى يؤثر على عمق $\frac{3r}{4}$ أسفل السطح الحر للسائل .

عندئذ نجد أن الضغط على المثلث B هو مجموع الضغوط على كلا من المثلثين A &C

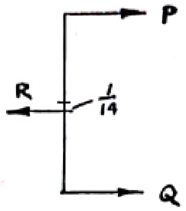
ولذلك فإن الضغط الكلى يقع على عمق منتصف المسافة بين مركزى الضغط للمثلثين A & B

أى على عمق $\frac{1}{2}\left(\frac{r}{2} + \frac{3r}{4}\right) = \frac{5r}{8}$.

مثال (9)

فتحة دائرية ذات قطر $2\ ft$ تقع على جانب رأسى لتانك مياه مركزها يقع على عمق $3.5\ ft$ أسفل السطح الحر للماء . تم تغطية الفتحة بواسطة لوحة دائرية ثبتت فى نفس الوضع بواسطة تربايسين عندنهايتى قطر رأسى . أوجد الشد عند التربايسين .

الحل :



الضغط على اللوحة هو

$$R = \pi\,(1)^2 \times 3.5 \times 62.5\ lb.wt.$$

والذى يؤثر على بعد

$$\frac{1}{4\times 3.5} = \frac{1}{14}\ ft.$$

القوى $P\ \&\ Q$ **عند نهايتى القطر الرأسى يجب أن تتزن مع الضغط** R **وبالتالى نحصل على :**

$$P + Q = \pi \times 3.5 \times 62.5 \qquad (1)$$

وبأخذ العزوم حول نقطة مركز الضغط نجد أن :

$$P\left(1 + \frac{1}{14}\right) = Q\left(1 - \frac{1}{14}\right) \qquad (2)$$

وبحل المعدلتين $(1)\ \&\ (2)$ **نحصل على :**

$$P = 319\ lb.wt. \quad \& \quad Q = 368\ lb.wt.$$

مثال (10)

أعماق مياه على جانبى بوابة إغلاق مستطيلة إتساعها $12\ ft$, هما $10\ \&4\ ft$.

أوجد الضغط الناتج على البوابة وعزم الدوران حول قاع البوابة .

الحل :

الضغط الناتج على الجانب الأعمق هو :

$$12 \times 10 \times 5 \times 62.5 = 37500\ lb.wt$$

ويؤثر على إرتفاع : $10/3\ ft$ أعلى القاع .

الضغط الناتج على الجانب الأخر هو :

$$12 \times 4 \times 2 \times 62.5 = 6000\ lb.wt$$

ويؤثر على إرتفاع : $4/3\ ft$ أعلى القاع .

عندئذ فإن الضغط الناتج هو :

عندئذالضغط الناتج على هو :

$$37500 - 6000 = 31500\ lb.wt$$

أما عزم الدوران حول القاع هو :

$$37500 \times (10/3) - 6000 \times (4/3) = 117000\ \ ft.lb.wt$$