جامعة جنوب الوادى

كلية التربية بالغردقة

الفرقة الثالثة عام رياضيات

المادة : تطبيقية (5) (الطرق الرياضية)

إستاذ المادة / د. محمد محمد عبد العزيز

الفصل الدراسى الأول 2023-2024

الفصل الأول

مسائل القيم الحدية

Boundary Value Problems

بيانات عن المعادلات التفاضلية الجزئية:

المعادلة التفاضلية الجزئية معادلة تحتوي علي دالة مجهولة ذات متغيرين أو أكثر وتحتوي المعادلة كذلك علي المشتقات الجزئية للدالة بالنسبة للمتغيرات.

رتبة المعادلة:

هي رتبة أعلي مشتقة بالمعادلة.

مثال ذلك المعادلة : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y$ وهي من الرتبة الثانية.

حل المعادلة:

هو أي دالة تحقق المعادلة. والحل العام يحتوي علي عدد من الدوال الإختيارية مساو لرتبة المعادلة. أما الحل الخاص فهو حل يمكن للحصول عليه من الحل العام بعد تحديد الدوال الإختيارية.

مثال:

$$u = x^2 y - \tfrac{1}{2}\, x y^2 + F(x) + G(y)$$

حيث G , F دوال اختيارية ـــ هذه الدالة حل عام للمعادلة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y$$

لأنه تحتوي علي دالتين اختياريتين $F(x)$, $G(y)$ فإذا اعتبرنا

$$F(x) = 2\sin x \quad , \quad G(y) = 3y^4 - 5$$

مثلاً فإننا نحصل علي الحل الخاص:

$$u = x^2 y - (\tfrac{1}{2})\, x y^2 + 2\sin x + 3y^4 - 5$$

:

مسألة القيم الحدية:

هي حل لمعادلة تفاضلية جزئية بشرط أن يحقق الحل شروطاً معينة تسمي الشروط الحدية .. Boundary Conditions.

المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية .Linear P.D.E:

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية في متغيرين هي:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F\, u = G$$

حيث G , ... , A , B هي علي وجه العموم دوال في x , y ولكنها لا تتضمن u . فالمعادلة التي لا تنطبق عليها هذه الصيغة تسمي غيرخطية وإذا كانت $G = 0$ تسمي المعادلة متجانسة Homogeneous وإلا سميت غير متجانسة Non-Homogeneous.

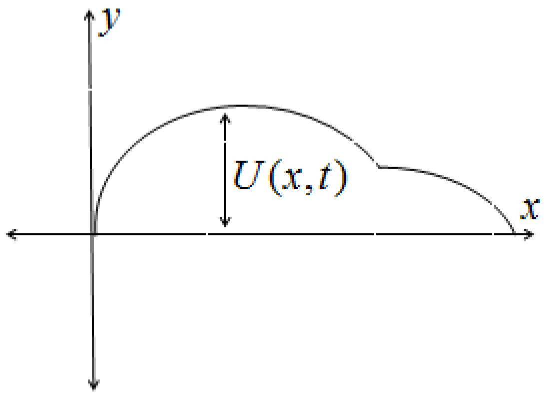
وتصنفالمعادلةبأنها تناقصية (Elliptic) أو زائدية (Hyperbolic) أو مكافئة (Parabolic) علي حسب كون المقدار $B^2 - 4AC$ أقل من أو أكبر من أو يساوي الصفر.

بعض المعادلات الشهيرة:

1) الوتر المهتز ..... Vibrating String:

إذا كان الوتر في حالة الإتزان منطبقا علي محور x

وكانت حركته تمم دائما في مستوى واحد هو المستوى xy . وإذاافترضنا أن $u(x,t)$ هي إزاحة جميع نقط الوتر عن موضع الإتزان في أي زمن t فإن المعادلة الجزئية التي تخضع لها هذه الدالة هي:



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

حيث a^2 ثابت طبيعي يتوقف علي الشد في الوتر والكثافة الطولية لمادة الوتر.

أما الغشاء المهتز (Membrane) معادلته:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

حيث $u(x,y,t)$ هي إزاحة أي نقطة فيه في أي زمن t.

والذبذبات التي تحدث في جسم مرن تخضع للمعادلة الأتية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

حيث $u(x,y,z,t)$ هي إزاحة أي نقطة في الجسم عن موضع اتزانها

2) معادلة التوصيل الحرارى ...... Heat Conduction:

المعادلة هي $\frac{\partial u}{\partial t}=K\ \nabla^2 u$ حيث $u(x,y,z,t)$ هي درجة الحرارة لأي نقطة في أي زمن وحيث K

ثابت طبيعي يتوقف علي معامل التوصيل والحرارة النوعية ، حيث $\nabla^2 u$ هو لابلاسيان u الذي تكون صيغته

في الإحداثيات الديكارتية هي:

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

3) معادلة لابلاس ...... Laplace Equation:

المعادلة هي $\nabla^2 u=0$ وهي معادلة التوصيل الحراري في الحالة المستقرة (Steady State) وذلك بعد

مرور زمن كافي لأن يصبح $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ كذلك تعبر هذه المعادلة عن الجهد الكهربائي في المجال الإستاتيكي في النقط

التيلا يوجد بها شحنات كهربائية.

وإذا كان المطلوب حل هذه المعادلة في منطقة Q وكانت قيمة u معطاه

علي حدود هذه المنطقة فإن المسألة تسمي مسألة ديرشلت (Dirichelt).

اللابلاسيان فى الإحداثيات المختلفة:

في الإحداثيات الإسطوانية :

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

حيث $\rho\ge 0\quad,\quad 0\le\phi<2\pi\quad,\quad -\infty<z<\infty$

وفي الإحداثيات القطبية الكروية:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

حيث $r \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \theta < \pi \quad , \quad 0 \leq \phi < 2\pi$

<u>نظريات في حل المعادلات التفاضلية الجزئية:</u>

<u>نظرية (1):</u> وتسمي مبدأ الإضافة ..... (Superposition Principle)

تقرر هذه النظرية أنه إذا كانت الدوال $u_1 , u_2 ,........, u_n$ حلول مختلفة لمعادلة تفاضلية جزئية خطية وكان $c_1 , c_2 ,........ , c_n$ ثوابت فإن الدالة $u = c_1\, u_1 + c_2\, u_2 + ... + c_n\, u_n$ تكون حلا لنفس المعادلة.

<u>نظرية (2):</u>

الحل العام لمعادلة خطية غير متجانسة نحصل عليه من إضافة حل خاص للمعادلة الخطية الغير متجانسة إلي الحل العام للمعادلة الخطية المتجانسة.

<u>فصل المتغيرات:</u>

طريقة فصل المتغيرات تعتمد علي افتراض وجود حل للمعادلة يكون علي هيئة حاصل ضرب دوال كل منها خاصة بمتغير واحد. وبعد الحصول علي الحلول الخاصة يطبق مبدأ الإضافة لأيجاد الحل المطلوب.

<u>أمـــثـــلـــة</u>

(1) اكتب الشروط الحدية لوتر طوله علماً بأن:

أ ــ الأطراف $x = L \;\; , \;\; x = 0$ مثبتة.

ب ــ الشكل الإبتدائي للوتر معطي بالدالة $f(x)$.

ج ــ التوزيع الابتدائي للسرعات معطي بالدالة $g(x)$.

د ــ الإزاحة لأي نقطة في أي زمن تكون محدودة.

<u>الحـــــــــــل</u>

$a)\quad y(0,t)=0 \quad , \quad y(L,t)=0$

$b)\quad y(x,0)=f(x) \quad , \quad 0<x<L$

$c)\quad y_t(x,0)=g(x)$

$d)\quad |y(x,t)|<M$

تمـــــاريـــن

1) اكتب الشروط الحدية لوتر طوله L علماً بأن:

أ- الطرف $x=0$ يتحرك بحيث تعطي حركته بالدالة $G(t)$.

ب- الطرف $x=L$ غير مقيد وحر الحركة.

****

2) ساق معدنية رقيقة موضوعة علي محور x وطرفاها هما $x=0\ ,\ x=L$ جوانبها معزولة حرارياً.

اكتب الشرط الحدية في الحالات الأتية:

أ- الطرفان مثبتان علي درجة الصفر.

ب- الطرف الأول علي درجة الصفر والثاني معزول علماً بأن $f(x)$ هي دالة التوزيع الحراري الابتدائي.

3***

طريقة فصل المتغيرات

مثال (1) أوجد حل المسألة الحدية :

$$\frac{\partial U}{\partial t}=2\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad , \quad 0<x<3$$

بالشروط **:**

$$U(0,t)=U(3,t)=0 \quad , \quad |U(x,t)|<M.$$

$$U(x,0)=5\sin 4\pi x-3\sin 8\pi x+2\sin 10\pi x.$$

ثم اقترح المعني الطبيعي لذلك.

الحـــــــــــل

نفرض أن

$$U(x,t) = X(x) . T(t)$$

بالتعويض في المعادلة ينتج أن :

$$\therefore \; X \; T' = 2 \; X'' \; T$$

بالقسمة علي $2 \; X \; T$ ينتج أن :

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{2T}$$

الطرف الأيمن لهذه العلاقة عبارة عن دالة في المتغير t ، ومع ذلك فهي تساوي الطرف الأيسر الذي لا يتوقف علي t . فنحن إذن أمام دالة في المتغير t ولا تتوقف علي t ولذا فلابد أن تكون هذه الدالة مساوية لمقدار ثابت .

ونفس القول ينطبق علي الطرف الأيسر الذي هو دالة في x ويساوي الطرف الأيمن الذي لا يتوقف علي x ، ولذلك فالطرف الأيسر يساوي نفس الثابت الذي يساويه الطرف الأيمن .

وبالتالي ينتج أن :

$$\frac{X''}{X} = \mu \quad , \quad \frac{T'}{2T} = \mu$$

حيث μ ثابت غير معلوم وسنتعرف بعد ذلك كيف نحدد قيمته .

في مسألتنا التي نتناولها الأن سنضع الثابت $\mu = -\lambda^2$ أي أن :

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad , \quad T' + 2\lambda^2 T = 0$$

وسبب وضعنا $\mu = -\lambda^2$ سوف نفهمه بعد قليل . أما الان فنستطيع أن نقول أننا أمام معادلتين تفاضليتين عاديتين .

وكأن حل معادلة تفاضلية جزئية واحدة اختزل بطريقة فصل المتغيرات إلي حل معادلتين تفاضليتين عاديتين وهذا بطبيعة الحال أسهل بكثير من حل المعادلة الجزئية.

أما سبب وضعنا $\mu = -\lambda^2$ فهو كالأتي :

العام أننا عند حل معادلة جزئية نكون أمام حل عام نريد منه الوصول إلي حل خاص يحقق الشروط المطلوبة . والحل حل شامل يناسب كل الظروف ، ولذلك فالمفروض أن نحذف من الحل العام كل ما من شأنه ألا يتفق مع شروطنا في المسألة . ولذا فإن الثابت μ من وجهة نظر الحل العام ليس عليه قيود في اختياره ، ويمكن تبعاً لذلك أن يكون سالباً أو موجباً . ولذلك لو كنا كتبنا المعادلة الثانية في T بأنها $T' - 2\mu T = 0$ لكان الحل $T = e^{2\mu t}$.

وهنا نجد أنفسنا أمام موقفين :

الأول: إذا كانت μ سالبة فإن الدالة T تكون دالة متناقصة أي تقل قيمتها كلما زادت قيمة t .

الثاني: إذا كانت μ موجبة نحصل علي دالة تتزايد بتزايد الزمن ونصل إلي قيمة لا نهائية .

ولكن من شروطنا في المسألة أن : $|U(x,t)| < M$

أي يجب أن تكون U محدودة مهما بلغت قيمة الزمن .

ولذا فإن الحل الذي يكون فيه μ موجبة لا يناسب هذه المسألة بالذات . ولذا يجب أن نحذف من الحل العام ما من شأنه أن يؤدي لمثل هذا الحل ، لذا يجب ان يكون الثابت سالب .

أما لماذا وضعنا $\mu = -\lambda^2$ فهو لكي نضمن أن يكون الثابت سالب فقد وضعنا إشارة سالبة أمام مقدار مربع هو λ^2 حتي نضمن أن يكون λ^2 مقدار موجب دائماً يسبقه إشارة سالبة وبالتالي نضمن أن يكون الثابت دائماً سالب .

ولذا فإن حل المعادلتين بعد هذا الإجراء هو :

$$X = A_1 \cos\lambda x + B_1 \sin\lambda x \quad , \quad T = C_1 e^{-2\lambda^2 t}$$

ومن ثم فإن :

$$U(x,t) = C_1 e^{-2\lambda^2 t} (A_1 \cos\lambda x + B_1 \sin\lambda x)$$

أي أن :

$$U(x,t) = e^{-2\lambda^2 t} (A \cos\lambda x + B \sin\lambda x)$$

ويبقي الأن تحديد قيم الثوابت A , B , λ من تطبيق باقي الشروط .

ولكن : $U(0,t) = 0 = A e^{-2\lambda^2 t}$

ينتج عن هذا أن $A = 0$ وأن :

$$U(x,t) = B e^{-2\lambda^2 t} \sin\lambda x$$

بتطبيق الشرط الأخر :

$$U(3,t) = 0 = B e^{-2\lambda^2 t} \sin 3\lambda$$

وهنا لا نستطيع أن نقول $B = 0$ وإلا كان الحل هو $U(x,t) = 0$.

وهو ما يسمي بالحل التافه الذي يحقق المعادلة وشروطها دون أن يكون له أي معني طبيعي .

لذا فالاحتمال الوحيد أن يكون $\sin 3\lambda = 0$ وينتج عنه :

$$3\lambda = \pi \quad , \quad \lambda = \frac{m\pi}{3}$$

حيث :

$$m = 1, 2, 3, ...$$

بهذا لا نكون قد حددنا λ تماماً ولكننا علمنا أنه لا يمكن أن يأخذ أي قيمة إلا واحدة من مجموعة القيم $\frac{m\pi}{3}$.

$$\therefore U(x,t) = B\, e^{\frac{-2m^2\pi^2 t}{9}} \sin\frac{m\pi x}{3}$$

واضح أن كل قيمة للعدد m تعطينا حل للمعادلة والحل العام نحصل عليه من مبدا الإضافة .

وحيث أن قيم m عددها لانهائي فعدد الحلول الخاصة لانهائي ولذا فمن المفروض نقول أن :

$$U(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m\, e^{\frac{-2m^2\pi^2 t}{9}} \sin\frac{m\pi x}{3}$$

ولكن الشرط الأخير في المسألة يتضمن ثلاث حدود فقط كل منها دالة جيب ، لذا يكفي أن نقول :

$$U(x,t) = B_1\, e^{\frac{-2m_1^2\pi^2 t}{9}} \sin\frac{m_1\pi x}{3} + B_2\, e^{\frac{-2m_2^2\pi^2 t}{9}} \sin\frac{m_2\pi x}{3} + B_3\, e^{\frac{-2m_3^2\pi^2 t}{9}} \sin\frac{m_3\pi x}{3}$$

وبتطبيق الشرط الأخير فإن :

$$\begin{aligned} U(x,0) &= 5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x + 2\sin 10\pi x \\ &= B_1 \sin\frac{m_1\pi x}{3} + B_2 \sin\frac{m_2\pi x}{3} + B_3 \sin\frac{m_3\pi x}{3} \end{aligned}$$

أي أن :

$$B_1 = 5 \quad , \quad B_2 = -3 \ , \quad B_3 = 2$$

$$m_1 = 12 \ , \ m_2 = 24 \quad , \quad m_3 = 30$$

وبذلك يكون الحل هـــو :

$$U(x,t) = 5\, e^{-32\pi^2 t} \sin 4\pi x - 3\, e^{-128\pi^2 t} \sin 8\pi x + 2\, e^{-200\pi^2 t} \sin 10\pi x$$

المعنى الطبيعي للمسألة:

تعبر هذه المسألة عن التوصيل الحراري في ساق رفيعة طولها ثلاث وحدات أطرافها علي درجة الصفر والتوزيع الحراري الابتدائي هـــو:

$$U(x,0) = 5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x + 2\sin 10\pi x$$

والحل الذي حصلنا عليه يعطي التوزيع الحراري في أي لحظة .

****

<u>مثال (2)</u>حل المسألة الحدية

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad , \quad 0 < x < 3$$

$$U(0,t) = U(3,t) = 0 \quad , \quad U(x,0) = f(x) \quad , \quad |U(x,t)| < M.$$

<u>الحل</u>

هذه المسألة هي نفس المسألة السابقة فيما عدا أن دالة التوزيع الابتدائي في المسألة السابقة تتكون من ثلاث حدود من دوال الجيب ، أما في هذه المسألة فالتوزيع الابتدائي معطي بالدالة $f(x)$ التي قد تكون متضمنة لعدد غير محدود من دوال الجيب كما قد لا تكون هي نفسها لها علاقة مباشرة بدوال الجيب ولحلها نسير في الخطوات السابقة إلي أن نصل إلي أن :

$$U(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \; e^{\frac{-2m^2\pi^2 t}{9}} \sin\frac{m\pi x}{3}$$

وبتطبيق الشرط الأخير نجد أن:

$$U(x,0) = f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\frac{m\pi x}{3}$$

وهذا يعين(يتحتم) علينا البحث عن طريقة تمكننا من إيجاد قيم B_m بمعلومية $f(x)$.

وهنا نحتاج إلى ما يسمى بتحليل فوريير, ولذا فإن الهدف من هذا المثال هو أن يوضح لنا السبب فى إستخدام هذخ الطريقة التى سنناقشها فى الفصل التالى.

<u>تمـــــاريـــن</u>

1)حل المسألة الحدية الأتية **:**

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad , \qquad U(0,y) = 8\,e^{-3y}$$

****

2) حل التمرين السابق بشرط أن يكون

$$U(0,y) = 8\,e^{-3y} + 4\,e^{-5y}$$

****

3)أوجد حل المسألة الحدية الأتية واشرح المعني الطبيعي لها :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 16\,\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad , \qquad 0 < x < 2$$

$$Y(0,t) = 0 \quad , \quad Y(2,t) = 0 \quad , \quad Y(x,0) = 6\sin \pi x - 3\sin 4\pi x,$$

$$Y_t(x,0) = 0 \qquad , \qquad \left| Y(x,t) \right| < M .$$

****

الفصل الثانى

<u>متسلسلة فورير ..... Fourier Series</u>

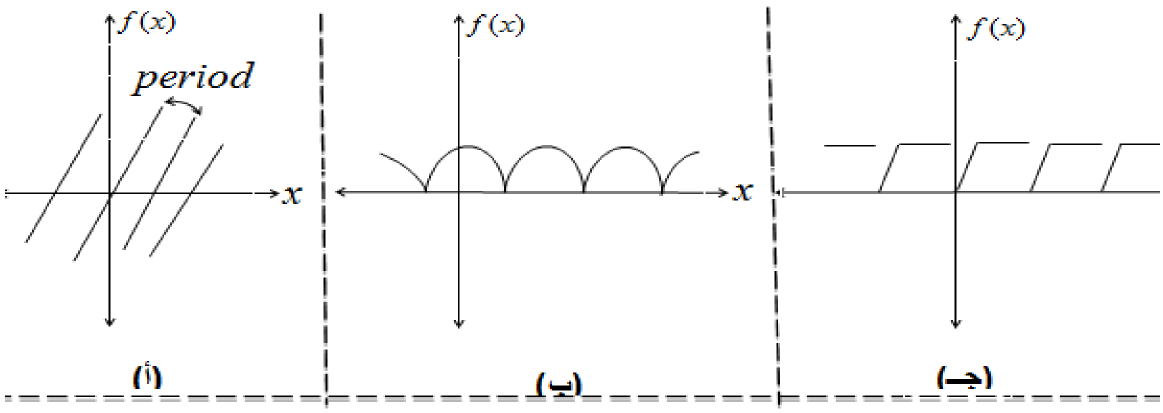
رأينا في المثال الأخير ضرورة التعرف علي طريقة للتعبير عن أي دالة $f(x)$ كمجموع عدة من دوال الجيوب وجيوب التمام ، ولما كانت هذة الأخيرة دوال دورية وجب أيضاً أن تكون الدالة $f(x)$ دورية (Periodic.....) حتي يمكن التعبير عنها بدوال دورية .

<u>تعريــــف</u>:(الدالة)

تسمي $f(x)$ دالة دورية إذا كان $f(x+p)=f(x)$ حيث p ثابت موجب وأقل قيمة للثابت p تحقق العلاقة السابقة تسمي الدورة (..... Period) .

$f(x)$ فمثلاً $\sin x$ دورتها 2π ، $\tan x$ دورتها π ، $\cos nx$ دورتها $\frac{2\pi}{n}$.

وفي الأشكال الأتية أمثلة لدوال دورية



<u>الدوال المتعامـــــدة ..... Orthogonal Functions</u>

في حالة المتجهات نقول ان A, B متعامدين (orthogonal)

اذا كان: $\underline{A}\bullet\underline{B}=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3=0$

وقياسا على ذلك يقال في حالة الدوال ان الدالتين $A(x), B(x)$ متعامدتين في الفترة (a,b)

اذا كان : $\int_a^b A(y)B(x)dx=0$

كذلك يقال ان A متجه وحدة اذا كان : $\underline{A}\bullet\underline{A}=A^2=1$

وفي الدوال يقال ان [$A(x)$ دالة موحده (Normal, Normalized)

اذا كان :
$$\int_a^b A^2(x)dx = 1$$

وكأمثلة لدوال متعامدةيتضح من المثال الآتى:

مثال برهن علي ما يأتي :

$$(a)\quad \int_{-L}^{L} \sin\frac{k\pi x}{L}\,dx = \int_{-L}^{L} \cos\frac{k\pi x}{L}\,dx = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, 3, ...$$

$$(b)\quad \int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \quad = \int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\ \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \begin{cases} 0 & : \quad m \neq n \\ L & : \quad m = n \end{cases}$$

$$(c)\quad \int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\ \cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = 0$$

الحـــــــــــل

$$(a)\quad \int_{-L}^{L} \sin\frac{k\pi x}{L}\,dx = -\frac{L}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{L}\Bigg]_{-L}^{L}$$

$$= -\frac{L}{k\pi}\left(\ \cos k\pi - \cos(-k\pi)\ \right) = 0$$

وبنفس الطريقة يمكن اثبات أن :

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{k\pi x}{L}\,dx = 0$$

$$(b)\quad \int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \quad = \int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\ \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \begin{cases} 0 & : \quad m \neq n \\ L & : \quad m = n \end{cases}$$

(b) إذا كانت $\underline{m \neq n}$ فإن :

$$(b) \int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \tfrac{1}{2}\left[\int_{-L}^{L} \cos\frac{(m-n)\pi x}{L}\, dx \right.$$

$$\left. + \int_{-L}^{L} \cos\frac{(m+n)\pi x}{L}\, dx \right] = 0$$

وبنفس الطريقة يمكن اثبات أن :

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx = 0$$

أما إذا كانت $\underline{m = n}$ فإن :

$$\int_{-L}^{L} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \tfrac{1}{2}\int_{-L}^{L} \left(1 + \cos\frac{2n\pi x}{L}\right) dx = L$$

كذلك

$$\int_{-L}^{L} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \tfrac{1}{2}\int_{-L}^{L} \left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{L}\right) dx = L$$

هذا يعنى أن

$$(b) \int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \quad = \int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

$$= \begin{cases} 0 & : \quad m \neq n \\ L & : \quad m = n \end{cases}$$

$$(c)\quad \int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \tfrac{1}{2}\left[\int_{-L}^{L}\sin\frac{(m-n)\pi x}{L}\,dx + \int_{-L}^{L}\sin\frac{(m+n)\pi x}{L}\,dx\right] = 0$$

وعلى وجه العموم اذا كانت هناك مجموعة من الدوال $\phi_k(x)$ حيث $k=1,2,.....$
وكانت هذة المجموعة تتمتع باخاصيتين الاتيتين :

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0 \qquad for\ \ m\neq n$$

$$\int_a^b \{\phi_n(x)\}^2 dx = 1 \qquad for\ \ m=n$$

فإنه يقال ان هذة المجموعة متعامده موحده
(orthogonal….) ويمكن كتابـــة الخاصيتين معا في تعبير واحد كالاتــــي :

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = \delta_{mn}$$

حيث :

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & : m\neq n \\ 1 & : m=n \end{cases}$$

حيث δ_{mn} هو رمز كرونكر (Kronecker Symbol……..)

كمثال للدوال المتعامدة الموحده نجد المجموعة :

$$\phi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.\sin m\pi x$$

في الفترة $(0,\pi)$ ويمكنك التحقق من ذلك.

<u>التعامد بالنسبة لدالة وزن</u>

اذا كان $\int_a^b \psi_m(x)\psi_n(x)w(x)dx = \delta_{mn}$ **حيث** $w(x) > 0$ دالة معلومة فإنه

يقال ان المجموعة $\{\psi_n(x)\}$ متعامدة موحده بالنسبة لدالة الوزن $w(x)$ weight function

وفي هذه الحالة يمكن اعتبار المجموعة $\phi_m(x)=\sqrt{w(x)}\psi_m(x)$ مجموعة متعامدة موحدة بدون دالة وزن.

المفكوك بدلالة الدوال المتعامدة :

كما في حالة المتجه A الذي يكتب مفكوكة بدلالة متجهات الوحدة المتعامدة $\underline{i},\underline{j},\underline{k}$ بالصيغة $\underline{A}=c_1\underline{i}+c_2\underline{j}+c_3\underline{k}$ فاننا نكتب مفكوك الدالة $f(x)$ بدلالة مجموعة الدوال المتعامدة كالأتي :

$$f(x)=\sum_{n-1}^{\infty}c_n\phi_n(x)$$

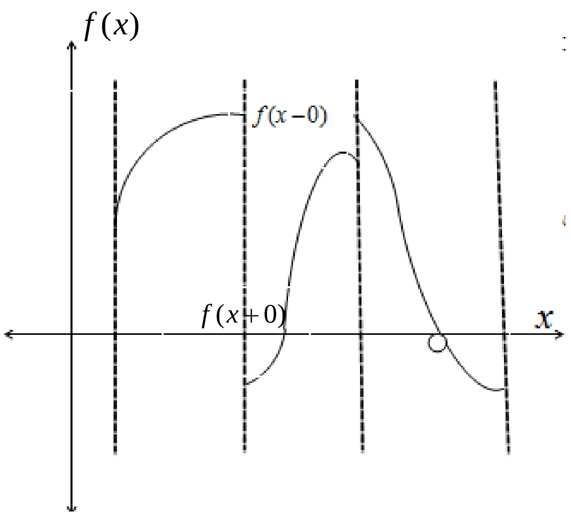
ويعتبر هذا تعميم لنظرية فوريركما سنرى لاحقا حيث أن نظرية فورير تعتبر حالة خاصة

حيث المعاملات c_m سوف تكون كالاتي :

$$c_m=\int_a^b f(x)\phi_m(x)dx$$

الدوال المتصلة جزئياً .... Piecewise Continuous Functions:

تسمي الدالة متصلة جزئياً في فترة ما إذا كان :



أ - الفترة يمكن تقسيمها إلي عدد محدود م الفترات تكون الدالة متصلة علي كل منها .

ب- نهايات الدالة عند نقط عدم الإتصال تكون قيمتها محدودة وبتعبير مختصر تكون الدالة متصلةجزئياً علي فترة معينة إذا كان للدالة علي هذه الفترة عدد محدود من الفترات المحدودة .

متسلسلة فورير:

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة علي الفترة $(-L,L)$ وكانت دورة الدالة $2L$ فإن متسلسلة فورير لها هي :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right) \text{..............................} \quad (1)$$

حيث يتم حساب المعاملات a_n , b_n من الصيغ الأتية :

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx \text{.......} \quad (2)$$

<u>الأثبات:</u>

هنا سيتم الأستفادة من تعامد الدوال المثلثية المذكوة فى متسلسلة فوربير هذه كما تم برهانها فى المثال السابق عند التعرض لمفهوم الدوال المتعامدة .

(أ)باجراءالتكامل علي الطرفين من $-L$ إلي L ينتج أن :

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx + b_n \int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx \right]$$

$$= \frac{a_0}{2} . 2L + 0 = a_0 L$$

$$Thus \qquad a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

بضرب الطرفين في $\cos\frac{m\pi x}{L}$ والتكامل ينتج أن:

$$\int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{m\pi x}{L}\, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\, dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\, dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\, dx$$

$$= 0 + a_m L + 0$$

$$Thus\ a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\ \cos \frac{m\pi x}{L}\ dx \qquad ; m = 1 , 2 , 3 , ...$$

(ب) بالضرب في $\sin \frac{m\pi x}{L}$ والتكامل نجد أن :

$$\int_{-L}^{L} f(x)\ \sin \frac{m\pi x}{L}\ dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L}\ dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L}\ dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^{L} \sin \frac{n\pi x}{L}\ \sin \frac{m\pi x}{L}\ dx = 0 + 0 + b_m\ L$$

$$Thus \qquad b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\ \sin \frac{m\pi x}{L}\ dx$$

مع ملاحظة أنه يمكن أخذ بداية التكامل عند أي نقطة علي محور x ونهايته عند نقطة تبعد عن نقطة البداية بمسافة تساوي دورة كاملة أي أن :

<u>شروط ديرشلت لتقارب متسلسلة فوريير</u>

ومع ذلك فنحن لا نعلم متي تكون هذه المتسلسلة تقاربية وحتي إذا كانت تقاربية لا نعلم إن كانت تقترب من $f(x)$ أم لا وهناك شروط تسمي **<u>شروط ديرشلت</u>** توضح هذ الموقف وهي :

أ-إذا كانت $f(x)$ معروفة ووحيدة القيمة في الفترة $(-L, L)$ باستثناء عدد محدود من النقط ، وهذ الشرط ليس كافياً.

ب- $f(x)$ دورية ودورتها $2L$. **جـ-** $f(x)\ ,\ f'(x)$ متصلة جزئياً .

إذا توفرت هذه الشروط فإن المتسلسلة (1) بالمعاملات (3) , (2) تقترب من $f(x)$ إذا كانت x نقطة اتصال للدالة

ولكن عند نقط عدم الإتصال فإن المتسلسلة تقترب من

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

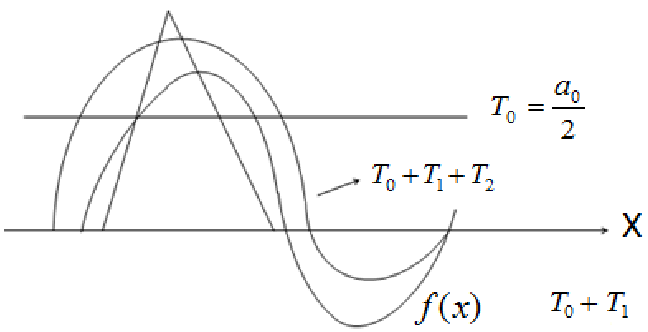
في هذه الحالة نستطيع أن نكتب :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right)$$

كذلك يمكننا ملاحظة اقتراب المتسلسلة من الدالة من الشكل الأتي :

نفرض أن $f(x) = T_0 + T_1 + T_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

حيث :



$$T_0 = \frac{a_0}{2} \quad , \quad T_1 = a_1 \cos\frac{\pi x}{L} \quad , \quad T_2 = a_2 \cos\frac{2\pi x}{L} \quad , \quad \ldots$$

الدوال الزوجية والدوال الفردية .... Odd & Even Functions:

تسمي $f(x)$ فردية إذا كان $f(-x) = -f(x)$

مثال ذلك الدوال $x^3 \;,\; x^5 - 3x^3 + 2x \;,\; \sin x \;,\; \tan 3x$

وتسمي الدالة زوجية إذا كان

$$f(-x) = f(x)$$

مثال ذلك الدوال

$$x^4 \;,\; 2x^2 + 5 \;,\; \cos x \;,\; e^x + e^{-x}$$

متسلسلة نصف المدى .... Half –Range Series :

إذا كانت الدالة فردية فإن حدود جيوب التمام تتقدم في متسلسلاتها .

وإذا كانت زوجية تتقدم في المتسلسلة حدود الجيب وتأخذ المعاملات الصيغ الآتية :

فردية $\qquad a_n = 0 \quad , \quad b_n = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi x}{L} \, dx$

زوجية $\qquad b_n = 0 \quad , \quad a_n = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L f(x) \cos\frac{n\pi x}{L} \, dx$

فائدة متسلسلة نصف المدي:

هناك بعض الدوال ليست دورية علي الإطلاق بل قد تكون معرفة علي فترة ما وغير معرفة خارج هذه الفترة ومع ذلك يمكن أن نوجد لها متسلسلة فورير (نصف المدي) .

مثال ذلك نفرض أن قضيب طوله L طرفاه

$x = 0 \quad , \quad x = L$ وأن $f(x)$

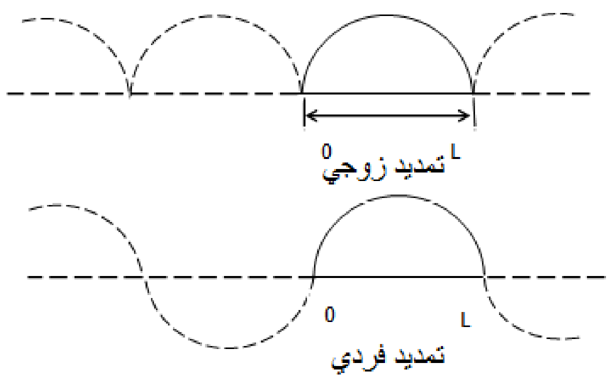
هي دالة توزيع الحمل علي هذا العتب.

أي أن $f(x)$ معرفة في الفترة $(0, L)$

وغير معرفة خارج هذه الفترة.

في هذه الحالة يمكننا عمل تمديد فرضي

للدالةعلي الفترة $(-L, 0)$ ويكون التمديد



زوجي أو فردي حسب رغبتنا كما في الشكل ..

ثم نعتبر أيضاً أن الدالة تتكرر دوريا قبل وبعد الفترة $(-L, L)$ ثم يمكننا إيجاد متسلسلة نصف المدي للدالة الممدة الدورية التي أنشأناها ولنفرض أن هذه الدالةهي $F(x)$.

واضح أن قيم $F(x)$ الممدة الدورية تتفق مع قيم الدالة $f(x)$ الغير دورية وذلك في الفترة $(0, L)$ ولذا يمكن أخذ $F(x)$ كممثلة للدالة $f(x)$ في الفترة $(0, L)$ مع عدم الاهتمام بقيم الدالة $F(x)$ خارج هذه الفترة.

متسلسلة فورير المركبة .... Complex Fourier Series:

بسبب المتطابقة $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ متسلسلة فورير تأخذ الصور :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\frac{n\pi x}{L}} \qquad ; \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) \, e^{-i\frac{n\pi x}{L}} \, dx$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\frac{n\pi x}{L}} \qquad ; \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) \, e^{-i\frac{n\pi x}{L}} \, dx$$

متسلسلة فورير المزدوجة .... Double Fourier Series:

الفكرة في استخدام متسلسلة فورير لدالة ذات متغير واحديمكن تعميمها للحصول علي متسلسلة فورير لدوال ذات متغيرين.

في هذه الحالة تكون متسلسلة فورير الجيبية المزدوجة :

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L_1} \sin \frac{n\pi y}{L_2}$$

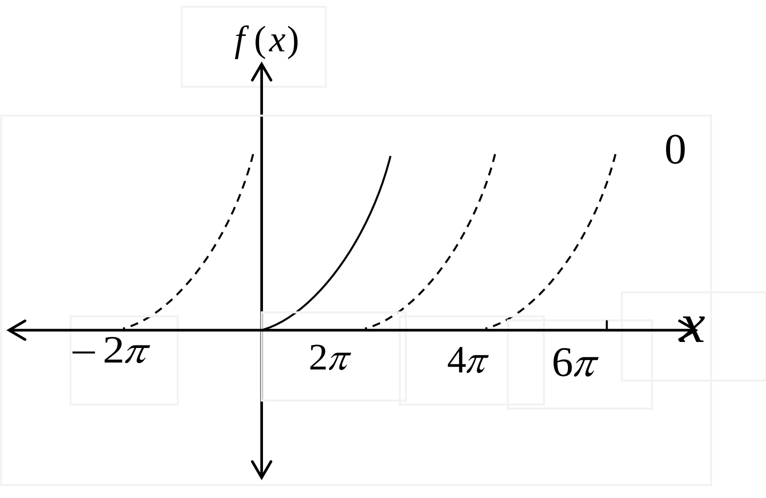
وهناك صيغ شبيهه لمتسلسلة جيب التمام المزدوجة أو المتسلسلة المختلطة . كما أنه يمكن التعميم للدوال ذات ثلاث متغيرات أو أكثر .

مثال (1) : أوجد متسلسلة فورير للدالة الدورية المعرفة علي دورة كالآتي :

$$f(x) = x^2 \qquad ; \quad 0 < x < 2\pi$$

الحـــــــــل

الدالة مبينة بالشكل المقابل



لايجاد متسلسلة فورير لهذه الدالة نوجد المعاملات a_0 , a_n , b_n كالآتي :

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2\,dx = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2\cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x^2\frac{\sin nx}{n} - 2x\left(\frac{-\cos nx}{n^2}\right) + 2\left(\frac{-\sin nx}{n^3}\right)\right]\Bigg|_{0}^{2\pi} = \frac{4}{n^2} \quad ; \quad n \neq 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2\sin\frac{n\pi x}{\pi}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x^2\left(\frac{-\cos nx}{n}\right) - 2x\left(\frac{-\sin nx}{n^2}\right) + 2\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)\right]\Bigg|_{0}^{2\pi} = \frac{-4\pi}{n}$$

ومن ثم فإن متسلسلة فورير للدالة الدورية $f(x) = x^2$ تأخذ الصورة :

$$f(x) = x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$$

$$= \frac{4\pi^2}{3} + 4\cos x + \cos 2x + \frac{4}{9}\cos 3x + ...$$

$$- 4\pi\sin x - 2\pi\sin 2x - \frac{4\pi}{3}\sin 3x - ....$$

مثال (2) : أ- بين أن الدالة الزوجيةلا تحتوي متسلسلتها علي دوال الجيب .

ب- بين أن معاملات الدالة الزوجية هي :

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

الحـــــــــل

(أ) $$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

والآن نتناول التكامل الأول ونرمز له بالرمز I_1 ونعتبر التحويل $x = -u$.

$$I_1 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(-u)\,\sin(\frac{-n\pi u}{L})\,d(-u) = \frac{-1}{L}\int_{0}^{L} f(u)\,\sin\frac{n\pi u}{L}\,du$$

$$= \frac{-1}{L}\int_{0}^{L} f(-x)\,\sin(\frac{-n\pi x}{L})\,d(-x) = \frac{-1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

واضح أن قيمة هذا التكامل تساوي وتضاد في الإشارة لقيمة التكامل الثاني .

وينتج عن هذا أن $b_n = 0$

وهذا يعني أن الدالة الزوجية لا تحتوي متسلسلتها علي دوال الجيب .

(ب) $$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

بعمل التحويل $x = -u$ في التكامل الأول نجد أن قيمته تساوي تماماً قيمة التكامل الثاني أي أن :

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

مثال (3) : أوجد متسلسلة فورير للدالة الدورية المعرفة علي دورة كالآتي :

$$f(x) = \frac{5}{\pi}x \qquad , -\pi < x < \pi$$

<u>الحـــــــــل</u>

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{5}{\pi}x\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{5}{\pi}x\cos nx\,dx$$

وبإجراء التكامل بالتجزئ نحصل على :

$$a_n = \frac{5}{\pi^2}\left\{\left[x\ \frac{\sin x}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin \mathrm{nx}\, dx\right\}$$

$$= \frac{5}{\pi^2}\left\{\left[x\ \frac{\sin x}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\times 0\right\}$$

$$= \frac{5}{\pi^2}\{0-0\} = 0$$

مما سيق نجد أن كلا من $a_0 = 0 \,\&\, a_n = 0$

وهذا يجب أن نستنتجه من خاصية نصف المدى وبدون إجراء التكاملات حيث أن الدالة المعرفة هى دالة فردية.

وهنا نحسب فقط المعاملات b_n كالتالى

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{5}{\pi}x\sin nx dx$$

وبإجراء التكامل بالتجزئ نحصل على :

$$b_n = \frac{5}{\pi^2}\left\{\left[x\left(\frac{-\cos x}{n}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos \mathrm{nx}\, dx\right\}$$

$$= \frac{5}{\pi^2}\left\{\frac{-\pi\cos n\pi}{n}\frac{-\pi\cos n\pi}{n} + 0\right\}$$

$$= \frac{-10}{\pi}\frac{\cos n\pi}{n}$$

وبالتالى يمكن كتابة المعاملات b_n بالشكل :

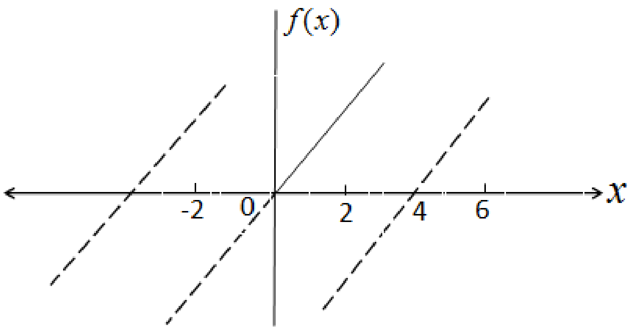
$$b_n = \begin{cases} \dfrac{-10}{n\pi} & , n\, even \\ \dfrac{10}{n\pi} & , n\, odd \end{cases}$$

مثال (4) : أوجد متسلسلة نصف المدي (أ) الجيبية (ب) جيبية التمام للدالة

$$f(x) = x \qquad ; \quad 0 < x < 2$$

الحــــــــــل

أ- الشكل يبين الدالة الأصلية والدالة بعد تمديدها تمديداً فردياً :



لايجاد متسلسلة فورير لهذه الدالة نوجد المعاملات
a_0 , a_n , b_n كالآتي :

$$a_n = 0 \quad \Rightarrow a_0 = 0$$

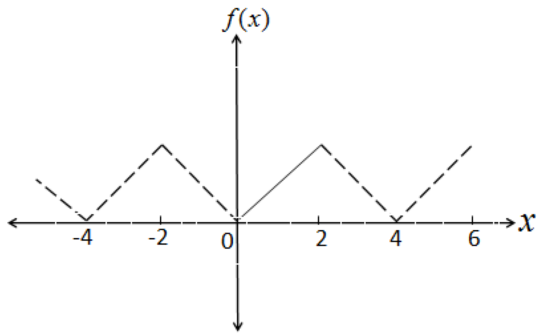
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x\,\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{4}{n\pi}\cos n\pi$$

ومن ثم فإن متسلسلة فورير لهذه الدالة تصبح علي الصورة :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4\,\cos n\pi}{n}\quad\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\,(\,\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}\ ....\,)$$

ب- الشكل يبين الدالة الأصلية والدالة بعد تمديدها تمديداً زوجياً :



$$b_n = 0 \quad , \quad a_0 = \int_0^2 x \; dx = 2$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \; dx = \frac{2}{2} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} \; dx = \frac{-4 \; (\cos n\pi \; -1)}{n^2 \pi^2} \quad , \; n \neq 0$$

ومن ثم فإن متسلسلة فورير لهذه الدالة تصبح علي الصورة :

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \; (\cos n\pi \; -1)}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2}$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi x}{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right)$$

لاحظ أن المتسلسلة الثانية تتقارب بطريقة أسرع كثيراً من المتسلسلة الأولي .

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4 \; \cos n\pi}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right)$$

مثال (5) : في حالة متسلسلة فورير المزدوجة :

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L_1} \sin \frac{n\pi y}{L_2}$$

أوجد الصيغة التي تحسب منها المعاملات B_{mn}.

<u>الحــــــــــل</u>

إذا اعتبرنا y بارامتر فإنه يمكن كتابة المتسلسلة كالآتي :

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin \frac{m\pi x}{L_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

حيث (2)
$$C_m = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{n\pi y}{L_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

في هذه الحالة تكون C_m دالة في y .

وبالنظر إلي المتسلسلة (2) باعتبارها مفكوك فورير للدالة C_m فإن :

$$B_{mn} = \frac{2}{L_2} \int_0^{L_2} C_m \sin \frac{n\pi y}{L_2} \, dy$$

كذلك من (1) نجد أن :

$$C_m = \frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} f(x,y) \sin \frac{m\pi x}{L_1} \, dx$$

أي أن :

$$B_{mn} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x,y) \sin \frac{m\pi x}{L_1} \sin \frac{n\pi x}{L_2} \, dx dy$$

تمارين

1) أ- أوجد معاملات فورير للدالة الدورية :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad -5 < x < 0 \\ 3 & : \quad 0 < x < 5 \end{cases}$$

ب- ارسم شكلاً للدالة وأوجد متسلسلة فورير لها .

جـ - كيف يمكن تعريف الدالة عند النقط $x = 5$, $x = 0$, $x = -5$ حتي تكون المتسلسلة تقاربية

للدالة في الفترة $-5 \le x \le 5$

---

2) أ- أوجد متسلسلة نصف المدي جيبية التمام للدالة الآتية وارسم شكلاً لها :

$$f(x) = \sin x \qquad ; \quad 0 < x < \pi$$

تطبيقات علي تحليل فورير:

مثال (1) : قرص معدني رقيق نصف قطره الوحدة معزول الوجهين نصف حافته محفوظ علي درجة حرارة ثابتة u_1 والنصف الأخر علي درجة حرارة ثابتة u_2 .

أوجد التوزيع الحراري في الحالة المستقرة .

الحـــــــــــل

نستخدم هنا الإحداثيات القطبية المستوية

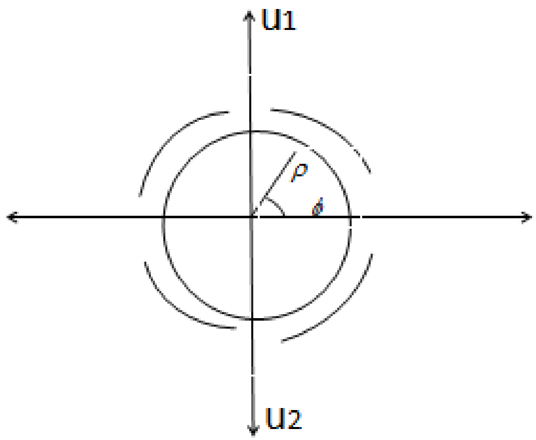
(والتي هي حالة خاصة من الإحداثيات الاسطوانية

حيث $Z = 0$) .

معادلة الحالة المستقرة للتوصيل الحراري

هي معادلة لابلاس $\nabla^2 u = 0$.

أي أن



$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

الشروط الحدية هي :

$$u(1, \phi) = \begin{cases} u_1 & : \quad 0 < \phi < \pi \\ u_2 & : \quad \pi < \phi < 2\pi \end{cases}$$

$$, \quad |u(\rho, \phi)| < M$$

لفصل المتغيرات نفرض أن :

$$u(\rho, \phi) = P(\rho)\ \Phi(\phi)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية والقسمة علي $P\ \Phi$ ينتج أن :

$$\frac{\rho^2 P'' + \rho P'}{P} = \frac{-\Phi''}{\Phi} = \lambda^2$$

ومن ذلك ينتج أن :

$$\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0 \qquad , \qquad \rho^2 P'' + \rho P' - \lambda^2 P = 0$$

ملحوظـــــة:اختيرت إشارة الثابت بحيث يكون كل طرف بعد فصل المتغيرات مساوياً المقدار λ^2 وليس $-\lambda^2$ كما
حدث في مثال سابق . وليس السبب هنا أن يتحقق الشرط $|u(\rho\, ,\ \phi)| < M$ كما حدث في مثال
سابق . ولكن السبب هنا أن تكون معادلة Φ هي $\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0$.

حتي يكون الحل متضمناً لدوال الجيب وجيب التمام وذلك لأن الدالة $\Phi\ (\phi)$ دورية ويجب أن ترجع قيمتها إلي نفس القيمة . وهذا يتحقق بالاختيار الذي أشرنا إليه . أما إذا كنا قد اخترنا الثابت بإشارة عكسية لكان حل معادلة الدالة $\Phi\ (\phi)$ متضمناً لدوال أسية وهي دوال ليست دورية وبالتالي لا تكون مناسبة لحالة المسألة .

نعود الآن لحل المعادلتين العاديتين اللتان نتجتا عن فصل المتغيرات الأولي منهما حلها

$$\Phi(\phi) = A_1 \cos\lambda\phi + B_1 \sin\lambda\phi$$

والثانية من نوع معادلات أويلر وحلولها الخاصة $\rho^{\lambda}\ ,\ \rho^{-\lambda}$ وحلها العام :

$$P(\rho) = A_2\ \rho^{\lambda} + B_2\ \rho^{-\lambda}$$

وهنا يجيء دور شرط أن تكون الدالة محدودة . واضح أن كلاً من الحدين $\rho^{\lambda}\ ,\ \rho^{-\lambda}$ لا يصل إلي قيمة لا نهائية عندما تصل ρ إلي أقصي قيمتها عند محيط الدائرة حيث نصفي القطر قيمة محدودة . ولكن المشكلة تظهر عند مركز القرص حيث $\rho = 0$ ، حيث الحد الثاني $\rho^{-\lambda} = \dfrac{1}{\rho^{\lambda}}$ يصل إلي قيمة لا نهائية .

لذا يجب أن يكون $B_2 = 0$ وهذا نتيجة تطبيق شرط أن تكون الدالة محدودة في كل مكان . كذلك – كما أشرنا – يجب أن يكون الحل في ϕدوري ، ويجب أيضاً أن تكون دورته 2π بالتحديد . لذا فإن λ يجب أن تكون بالصيغة $\lambda = m \quad , \quad m = 0, 1\ , 2\ , 3\ , \ldots\ldots$.

والخلا صــة:

$$u(\rho, \phi) = \rho^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi)$$

وبتطبيق مبدأ الإضافة :

$$u(\rho, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi)$$

وبتطبيق الشرط الحدي ينتج أن :

$$u(1, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi)$$

وحسب نظرية فورير نحصل علي المعاملات A_m , B_m كالآتي :

$$A_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(1, \phi) \cos m\phi \, d\phi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_1 \cos m\phi \, d\phi + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} u_2 \cos m\phi \, d\phi$$

والنتيجة هي :

$$A_m = \begin{cases} 0 & : \quad m > 0 \\ u_1 + u_2 & : \quad m = 0 \end{cases}$$

أي أن كل المعاملات A_m تتقدم فيما عدا $A_0 = u_1 + u_2$.

والمجموعة الأخري من المعاملات B_m نحصل عليها من :

$$B_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_1 \sin m\phi \, d\phi + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} u_2 \sin m\phi \, d\phi$$

$$= \frac{(u_1 - u_2)(1 - \cos m\pi)}{m\pi}$$

ومن ثم فإن التوزيع الحراري في الحالة المستقرة يصبح علي الصورة :

$$u(\rho,\phi) = \frac{u_1+u_2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(u_1-u_2)(1-\cos m\pi)\,\rho^m}{m\pi} \sin m\phi$$

$$= \frac{u_1+u_2}{2} + \frac{2(u_1-u_2)}{\pi}\left(\rho\sin\phi + \frac{1}{3}\rho^3\sin 3\phi + ...\right)$$

.

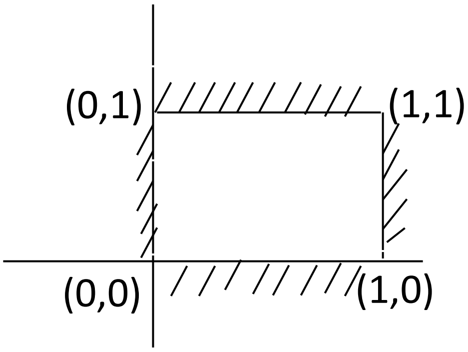
مثال (2) صفيحة رقيقة علي هيئة مربع طول ضلعه الوحدة معزول الوجهين وأحرفه كلها محفوظة في درجة

الصفر ... فإذا كان التوزيع الحراري الابتدائي معلوم فأوجد التوزيع العام .

الحـــــــــــل

المعادلة التفاضلية هـــــــي :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$



والشروط هـــــي :

$$|u(x,y)| < M,$$

$$u(0,y,t) = u(1,y,t) = u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0$$

$$u(x,y,0) = f(x,y)$$

حيث $f(x,y)$ هي دالة التوزيع الحراري الابتدائي المعلومة

لفصل المتغيرات افترض أن : $u = X(x)\,Y(y)\,T(t)$

بعد التعويض في المعادلة والقسمة علي $K\ X\ Y\ T$

نجدأن :

$$\frac{T'}{KT} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$

أي أن :

$$T' + K\lambda^2 T = 0 \quad , \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$

ونكون بذلك طبقنا الشرط الأول للدالة المحدودة . والمعادلة الثانية يجري عليها أيضاً فصل المتغيرات فنحصل علي :

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda^2 = -\mu^2$$

حيث $-\mu^2$ هو ثابت آخر اختياري . وقد تم اختياره بحيث يكون سالباً . أما لو اخترناه موجباً ثم طبقنا الشروط الباقية لكنا قد حصلنا علي الحل التافه . ويمكن للطالب التحقق من ذلك .

أي أن $X'' + \mu^2 X = 0 \quad , \quad Y'' + (\lambda^2 - \mu^2)\, Y = 0$

وحلول هذه المعادلات هـــــي:

$$X = a_1 \cos \mu x + b_1 \sin \mu x \ ,$$

$$Y = a_2 \cos \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\ y + b_2 \sin \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\ y \ ,$$

$$T = a_3 e^{-K\lambda^2 t}$$

$$u(x, y, t) = e^{-K\lambda^2 t}\,(a_1 \cos \mu x + a_2 \sin \mu x)$$
$$(a_2 \cos \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\ y + b_2 \sin \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\ y)$$

حيث قد ادمجنا a_3 في باقي الثوابت .

بتطبيق الشرط $u(0, y, t) = 0$ نحصل علي $a_1 = 0$.

بتطبيق الشرط $u(x, 0, t) = 0$ نحصل علي $a_2 = 0$.

أي أن :

$$u(x, y, t) = B\, e^{-K\lambda^2 t} \sin \mu x \ \sin \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\ y)$$

بتطبيق الشرط $u(1, y, t) = 0$ نحصل علي $\mu = m\pi$.

بتطبيق الشرط $u(x, 1, t) = 0$ نحصل علي $\sqrt{\lambda^2 - \mu^2} = n\pi$.

أي أن : $\lambda = \sqrt{m^2 + n^2}$

وبتطبيق مبدأ الإضافة نحصل علي الحل العام وهو :

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\ e^{-K(m^2+n^2)\pi^2 t} \sin m\pi x \ \sin n\pi y$$

وبتطبيق الشرط $u(x, y, 0) = f(x, y)$ نحصل علي :

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin m\pi x \sin n\pi y$$

وهي متسلسلة فورير المزدوجة معاملاتها هي :

$$B_{mn} = 4 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \sin m\pi x \sin n\pi y \; dx\, dy$$

وإذا كانت $f(x,y)$ دالة معروفة لأمكننا حساب هذا التكامل والحصول علي القيم الرقيمة للمعاملات B_{mn} ثم التعويض عنها في الصيغة النهائية للدالة $u(x,y,t)$.

تـــمـــاريـــن

1)أوجد حل مسألة التوصيل الحراري لساق رفيعة حيث :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad , \qquad 0 < x < 3$$

علماً بأن $u(0,t) = u(3,t) = 0$.

وعلماً بأن درجة الحرارة الابتدائية $25\,^{\circ}C$ لكل نقط الساق .

2) ساق رفيعة معزولة الجوانب ومعزولة الطرفين $x = L$, $x = 0$ فإذا كان التوزيع الحراري الابتدائي

يعطي بالدالة $f(x)$ ..... فأوجد التوزيع العام .

3) حل معادلة لابلاس في بعدين : صفيحة رقيقة مربعة طول ضلعها الوحدة ثلاث أضلاع منها محفوظة علي

درجة الصفر والضلع الرابع علي درجة μ . أوجد التوزيع الحراري في الحالة المستقرة

شئ

الفصل الثالث

تكامـــــــــل وتحويل فوريـــــــــر ..... Fourier Integral&Transform

الحاجة الى تكامل فورير:

فيما سبق تناولنا دوال دورية دورتها محدودة اما اذا كانت $L \to \infty$ واذا كانت الفتره المعرفة عليها الدالة غير محدودة فاننا سنجد ان متسلسلة فورير يؤول تكامل فورير .

تحويل فورريير يستعمل بطريقة واسعة لحل مشاكل رياضية تحتوى على فترات شبه غير منتهية أو غير منتهية كليا لمتغيرات أو مناطق غير محددة .

وللتعامل مع مثل هذه الحالات فإنه من الضرورى تعميم متسلسلات فورريير لتشمل فترات غير منتهية ولأدخال مفهوم تكامل فورريير ثم الأنتقال إلى ما يسمى تحويل فورييرمع دراسة بعض النطبيقات العملية كما سنرى الآن.

تكامـــــــــل فوريـــــــــر:

رأينا سابقا أن الدالة $f(x)$ الدورية ذات الدورة $2L$ والتى تحقق شروط ديرشلت فى الفترة $(-L,L)$ يمكن التعبير عنها فى صورة متسلسلة فورريير بالشكل :

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L} \qquad (1)$$

حيث : (2)

$$\left.\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\ b_n&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \end{aligned}\right\}$$

والتى يمكن امتدادها لبعض الدوال الغير دورية أيضا كما وضحنا فى الباب السابق بحيث يتحقق الشرط :

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<M \qquad (M \text{ عدد محدود})$$

بالتعويض من (2) فى (1) نحصل على :

$$f(x)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(u)du+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{L}\left[\int_{-L}^{L}f(u)\left\{\cos\frac{n\pi u}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}+\sin\frac{n\pi u}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\right\}du\right]\right]$$

والتى يمكن إختصارها بعد تبديل عمليتى التكامل والمجموع فى الصورة:

$$f(x)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(u)du+\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(u)\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi(u-x)}{L}du \quad (3)$$

فإذا فرضنا أن الدالة $f(x)$ قابلة للتكامل وفرضنا $L\to\infty$ أى أن $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$ فإننا نحصل على:

فى الجزء الباقى من المعادلة (3) إذا وضعنا $\Delta s=\pi/L$ فإن هذه المعادلة تؤول إلى :

$$f(x)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/\Delta s}^{\pi/\Delta s}f(u)\sum_{n=1}^{\infty}\cos\{n\Delta s(u-x)\}\Delta s du \quad (5)$$

النهايات $L\to\infty\ \&\ \Delta s\to 0$ تتطلب أن Δs يحب أن تكون عدد صغيرموجب وان النقطة $n\Delta s$ أيضا صغيرةعلى طول المحور s وعلى ذلك فإن المتسلسلة (5) تحت التكامل تتقرب إلى :

$$\int_{0}^{\infty}\cos\{s(u-x)\}ds=0 \quad as\ \ \Delta s\to 0$$

وبالتالى المعادلة (5) يعاد كتابتها بالصورة :

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\int_{0}^{\infty}\cos\{s(u-x)\}ds\,du \qquad (6)$$

أو فى الصورة:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\{s(u-x)\}ds\,du \qquad (7)$$

المعادلة (7) بنوع من المعالجة يمكن أن تتحول إالى ألصورة :

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\{cos\,\alpha u\cos\alpha x+\sin\alpha u\sin\alpha x\}du\,d\alpha$$

فإذا وضعنا :

$$\left.\begin{aligned} A(\alpha)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)cos\,\alpha u\,du \\ B(\alpha)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\alpha u\,du \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

فإن المعادلة (7) تأخذ الصورة:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x\right]du\,d\alpha \qquad (9)$$

المعادلة (9) بالمعادلات (8) تسمى تكامل فوريير.

تكامل فوريير يقترب من قيم الدالة $f(x)$ عند نقط الأتصال ومن متوسط قيم الدالة عند نقط عدم الأتصال كما هو الحال فى متسلسلة فوريير.

صيغ مكافئة لتكامل فوريـــــــــر:

بالتعويض من المعادلة (8) فى المعادلة (9) فإن تكامل فوريير يأخذ الصورة :

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(x-u)\,du\,d\alpha \qquad (10)$$

والتى يمكن إعادة كتابتها فى الصورة :

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{i\alpha(x-u)}du\,d\alpha \qquad (11)$$

وبإعادة توزيع المقدار $e^{i\alpha(x-u)}=e^{i\alpha x}e^{-i\alpha u}$ فإن المعادلة (11) تصبح :

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{-i\alpha u}du \qquad (12)$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{-i\alpha u}du \qquad (12)$$

فى حالة كون الدالة $f(x)$ فردية فإن المعادلة (12) تأخذ الصورة :

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin\alpha x\,d\alpha\int_{0}^{\infty} f(u)\sin\alpha u\,du \qquad (13)$$

أما فى حالة كون الدالة $f(x)$ زوجية فإن المعادلة (12) تأخذ الصورة

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\alpha x\,d\alpha\int_{0}^{\infty} f(u)\cos\alpha u\,du \qquad (14)$$

<u>تحوى فوريـــر:</u>

المعادلة (12) يمكن إعادة صياغتها بالشكل :

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,e^{i\alpha x}d\alpha \qquad (15)$$

حيث

$$F(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{-i\alpha u}du \qquad (16)$$

الدالة $F(\alpha)$تسمى تحويل فورييرللدالة $f(x)$ وتكتب فى الصورة :

$$F(\alpha)=\Im\{f(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{-i\alpha u}du \qquad (17)$$

بينما الدالة $f(x)$ تسمى تحويل فورييرالعكسى للدالة $F(\alpha)$ وتكتب فى الصورة :

$$f(x)=\Im^{-1}\{F(\alpha)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,e^{i\alpha x}d\alpha \qquad (18)$$

كل من الدوال $e^{-i\alpha u}$ & $e^{i\alpha x}$ تسمى نواة التحويل

فى بعض الأحيان المقدار $\frac{1}{2\pi}$ فى المعادلة (18)يمكن إعادة توزيعه بالتساوىعلى ا لمعادلتين (18) & (17) باشكل $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ أو وضعها بالكامل فى المعادلة (17)بدلا من المعادلة (18).

المعادلتين (18) & (17) تسميان زوج تحويل فورييرر.

$$F(\alpha)=\Im\{f(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{-i\alpha u}du \qquad (17)$$

<u>تحويـــــل فوريـــــــــرالجيبى والجيبى التمام:</u>

فى حالة كون الدالة $f(x)$ فردية فإن زوج تحويل فوريير (18) & (17)يصبح :

$$\left.\begin{aligned} F_s(\alpha) &= \Im\{f(x)\} = 2\int_0^{\infty} f(u)\sin\alpha u\,du \\ f_s(x) &= \Im^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} F(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

أما فى حالة كون الدالة $f(x)$ زوجية زوج تحويل فوريير (18) & (17)يصبح:

$$\left.\begin{aligned} F_c(\alpha) &= \Im\{f(x)\} = 2\int_0^{\infty} f(u)\cos\alpha u\,du \\ f_c(x) &= \Im^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} F(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

خواص تحويـــــل فوريـــــــر:

(1)-خاصـــية الخطيـــــــــة.......... Linearity Property :

إذا كان $F_1(\alpha)\,\&\,F_2(\alpha)$ هما تحويلات فوريير للدالتين $f_1(x)\,\&\,f_2(x)$ على الترتيبل فإن:

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \Im\{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\} = c_1\Im\{f_1(x)\} + c_2\Im\{f_2(x)\} \\ &= c_1 F_1(\alpha) + c_2 F_2(\alpha) \end{aligned}$$

حيث $c_1\,\&\,c_2$ ثوابت

البرهان:

$$\Im\{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha u}\left(c_1 f_1(u) + c_2 f_2(u)\right)du$$

$$= c_1\int_{-\infty}^{\infty} f_1(u)e^{-i\alpha u}du + c_2\int_{-\infty}^{\infty} f_2(u)e^{-i\alpha u}du = c_1 F_1(\alpha) + c_2 F_2(\alpha)$$

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \Im\{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\} = c_1\Im\{f_1(x)\} + c_2\Im\{f_2(x)\} \\ &= c_1 F_1(\alpha) + c_2 F_2(\alpha) \end{aligned}$$

(2)خاصية الازاحة .... Shifting Property :

إذا كان $F(\alpha)$ هو تحويل فورييير للدالة $f(x)$ فإن تحويل فورييير للدالة $f(x-a), a=const.$

هو $e^{i\alpha a}F(\alpha)$ أى أن $\Im\{f(x-a)\}=e^{-i\alpha a}F(\alpha)$.

البرهان:

من تغرف تحويل فورييير المعادلة (17)

$$F(\alpha)=\Im\{f(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{-i\alpha u}du \qquad (17)$$

وبالتالى نجد أن :

$$F(\alpha)=\Im\{f(x-a)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(u-a)\,e^{-i\alpha u}du$$

وبوضع $u-a=v \Rightarrow du=dv$ نحصل على :

$$\Im\{f(x-a)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,e^{-i\alpha(v+a)}dv$$

$$=e^{-i\alpha a}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-i\alpha v}\,dv=e^{-i\alpha a}F(\alpha)$$

(3)-خاصية تغيير المقياس .... Change of scale :

إذا كان $F(\alpha)$ هو تحويل فورييير للدالة $f(x)$ فإن تحويل فورييير للدالة $f(ax), a=const.$

هو $\frac{1}{a}F\left(\frac{\alpha}{a}\right)$ أى أن $\Im\{f(ax)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{\alpha}{a}\right)$.

البرهان:

من تغرف تحويل فورييير المعادلة (17)

$$F(\alpha)=\Im\{f(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{-i\alpha u}du \qquad (17)$$

وبالتالى نجد أن :

$$\Im\{f(ax)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(au)\, e^{-i\alpha u}du$$

وبوضع $au=v \Rightarrow du=dv/a$ نحصل على :

$$\Im\{f(ax)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\, e^{-i\frac{\alpha}{a}v}dv$$

$$=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-i\frac{\alpha}{a}v}\,dv=\frac{1}{a}F\left(\frac{\alpha}{a}\right)$$

(4)-خاصية التعديل .... Modulation:

إذا كان $F(\alpha)$ هو تحويل فورييه للدالة $f(x)$ فإن تحويل فورييه للدالة $f(x)\cos ax\,, a=const.$ هو $\frac{1}{2}\left[F(\alpha-a)+F(\alpha+a)\right]$

أى أن $\Im\{f(x)\cos ax\}=\frac{1}{2}\left[F(\alpha-a)+F(\alpha+a)\right]$.

البرهان:

من تغرف تحويل فورييه المعادلة (17)

$$F(\alpha)=\Im\{f(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\alpha u}du \qquad (17)$$

وبالتالى نجد أن :

$$\Im\{f(x)\cos ax\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos au\; e^{-i\alpha u}du$$

وحيث أن $\cos ax=\frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}$ نحصل على :

$$\Im\{f(x)\cos ax\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u}\left(\frac{e^{iau}+e^{-iau}}{2}\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i(\alpha+a)u}\,du + \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i(\alpha-a)u}\,du\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[F(\alpha+a)+F(\alpha-a)\right]$$

$$\Im\{f(ax)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(au)\,e^{-i\alpha u}du$$

(5)-خاصية المشتقات .... Differentiation:

إذا كان $F(\alpha)$ هو تحويل فوريير للدالة $f(x)$ وكانت المشتقات الأولى $(r-1)$ لها متصلةومشتقتها $r\underline{th}$ متصلة جزئيا فإن تحويل فوريير للدالة $f^{(r)}(x)$ هو $(-i\alpha)^r F(\alpha)$

أى أن $\Im\{f^{(r)}(x)\}=(-i\alpha)^r F(\alpha)\quad, r=0,1,2,......$.

البرهان:

من تغرف تحويل فوريير المعادلة (17)

$$F(\alpha)=\Im\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{-i\alpha u}du \qquad (17)$$

وبالتالى نجد أن :

$$\Im\{f^{(r)}(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(u)\,e^{-i\alpha u}du = F^{(r)}(\alpha)$$

وبالتكامل بالتجزيئ نحصل على:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(u)\,e^{-i\alpha u}du = \left. f^{(r-1)}(x)(i\alpha)e^{-i\alpha u}\right|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f^{(r-1)}(x)(-i\alpha)e^{-i\alpha u}du$$

فإذا فرضنا أن $f^{(r-1)}(x)\to 0 \text{ as } x\to\pm\infty$ فإنه يمكن أن نكتب النتيجة السابقة فى الصورة:

$$F^{(r)}(\alpha)=-(i\alpha)F^{(r-1)}(\alpha)=-(i\alpha)^2 F^{(r-2)}(\alpha)=...=-(i\alpha)^r F(\alpha)$$

عندئذ يكون :

$$F^{(r)}(\alpha) = -(i\alpha)^r F(\alpha)$$

وبالتالى يكون:

$$\Im\left\{f^{(r)}(x)\right\} = -(i\alpha)^r F(\alpha)$$

نظرية الاندمــــــــــاج ....Convolution Theorem :

اندمــــــــــــاج الدالة $g(x)$, $f(x)$ يعرف بانه :-

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u) du$$

ونظرية الاندماج تقرر ان تحويل فورير لاندماج g , f اي الدالة $f * g$ يساوي حاصل ضرب تحويل فورير للدالتين g , f بمعنى ان :

$$\Im\{f * g\} = \Im\{f\}\Im\{g\}$$

إندماج الدالتين $f(x) \;\&\; g(x)$ يعرف بالصورة :

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u) du$$

ونظرية الندماج تقررإذا كان $F(\alpha) \;\&\; G(\alpha)$ هما نحويل فورببر للدالتين $f(x) \;\&\; g(x)$

فإن تحويل فوربيرلإندماج $f(x) \;\&\; g(x)$ يساوى حاصل ضرب التحوبلات للدالتين أى أن:

$$\Im\{f(x) * g(x)\} = \Im\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u) du\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u) du\right] dx$$

والتى يعاد كتابتها فى الصورة:

$$\Im\{f(x) * g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\alpha x} g(x-u) du\, dx$$

وحيث أن كلا من الدالتين $f(x)\ \&\ g(x)$ قابلين للتكامل كليا فإنه يمكن تبديل ترتيب التكامل على الشكل :

$$\Im\{f(x)*g(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\left[\int_{-\infty}^{\infty}g(x-u)e^{-i\alpha x}dx\right]du$$

وبالضرب فى المقدار $e^{i\alpha u}$ والقسمة عليه فى المعادلة الأخيرة فإنها تصبح:

$$\Im\{f(x)*g(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\left[\int_{-\infty}^{\infty}g(x-u)e^{-i\alpha(x-u)}e^{-i\alpha u}dx\right]du$$

وبوضع $x-u=y\ \Rightarrow dx=dy$ نحصل على:

$$\Im\{f(x)*g(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\left[\int_{-\infty}^{\infty}g(y)e^{-i\alpha y}\,e^{-i\alpha x}dy\right]du$$

والتى يعاد تنسيقها على الصورة :

$$\Im\{f(x)*g(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-i\alpha u}du\int_{-\infty}^{\infty}g(y)e^{-i\alpha y}\,dx=F(\alpha)G(\alpha)$$

وهو المطلوب إثباته.

كما انه يمكن إثبات أن الاندماج يحقق قوانين التبادل والدمج والتوزيع أى أن :

$$f(x)*g(x)=g(x)*f(x)$$
$$f(x)*[g(x)*h(x)]=[f(x)*g(x)]*h(x)$$
$$f(x)*[g(x)+h(x)]=[f(x)*g(x)]+f(x)*h(x)$$

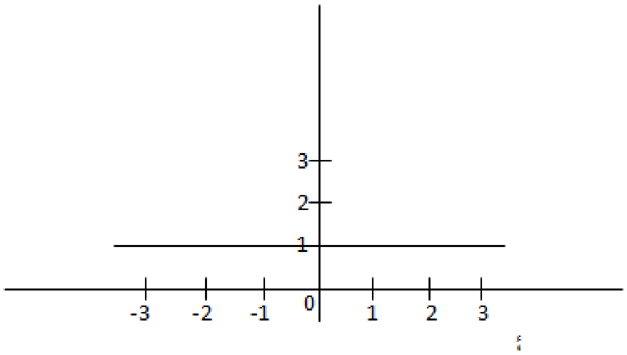
أمثـــــــــــــــلة

مثال (1) اوجد تحويل فورير للدالة : $f(x)=\begin{cases}1 & :|x|<a\\ 0 & :|x|>a\end{cases}$ ثم إستخدم المعطيات والنتائج لحساب التكاملات الآتية:

$$(i)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\alpha a \cos\alpha x}{\alpha} d\alpha \quad , \quad (ii)\ \int_{0}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$$

الحل

منحنى الدالة $f(x)$ يأخذ الشكل



تحويل فورييه هو

$$F(\alpha) = \Im\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\alpha u} du$$

وبالتعويض عن الدالة المعطاه نحصل على:

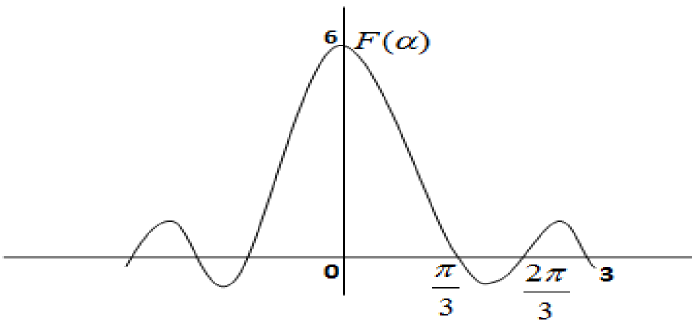
$$F(\alpha) = \Im\{f(x)\} = \int_{-a}^{a} e^{-i\alpha u} du = \left| \frac{e^{-i\alpha u}}{-i\alpha} \right|_{-a}^{a} = \left(\frac{e^{i\alpha a} - e^{-i\alpha a}}{i\alpha} \right)$$

$$= \frac{2\sin\alpha a}{\alpha}$$

مع ملاحظة أن $F(0) \to 2a \ \ as \ \ \alpha \to 0$

ومنحنى دالة التحويل يأخذ الشكل المقابل عند

$a = 3$



الآن

$$f(x) = \Im^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\alpha a}{\alpha} e^{i\alpha x} d\alpha$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin\alpha a}{\alpha}(\cos\alpha x+i\sin\alpha x)d\alpha$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha a}{\alpha}\cos\alpha x d\alpha+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha a}{\alpha}\sin\alpha x\ d\alpha\right]$$

وحيث أن كلا من $\sin\alpha a\ \&\ \alpha$ دوال فردية فإن الدالة تحت التكامل الثانى تكون فردية وتذا ينعدم هذا التكامل وتصبح النتيجة السابقة هى :

$$\therefore f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha a}{\alpha}\cos\alpha x d\alpha$$

$$\therefore\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha a\cos\alpha x}{\alpha}d\alpha=\pi\begin{cases}1 & :|x|<a\\ 0 & :|x|>a\end{cases}=\begin{cases}\pi & :|x|<a\\ \frac{\pi}{2} & :|x|=a\\ 0 & :|x|>a\end{cases}$$

وهذا هو نتيجة التكامل الأول فى (i)

وللحصول غلى نتيجة التكامل الثانى فى (ii) نضع $x=0\ \&a=1$ فى التكامل الأخير واضح هنا أن $x<1$ ولذا نختار القيمة العليا أى أن :

$$(ii)\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\pi\ \Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{2}$$

وهذ هو المطلوب.

مثال (2) اوجد تحويل فورير للدالة $f(x)=e^{-x^2/2}$

الحل

من تعريف تحويل فورريير نحصل على:

$$F(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2/2}e^{-i\alpha u}du$$

وبالضرب فى المقدار $e^{-\alpha^2/2}$ والقسمة عليه داخل التكامل السابق فإن النتيجة تصبح:

$$F(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}e^{-i\alpha u}\, e^{\alpha^2/2}e^{-\alpha^2/2}du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(u^2+2i\alpha u-\alpha^2\right)}\, e^{-\alpha^2/2}\, du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(u^2+2i\alpha u+(i\alpha)^2\right)}\, e^{\alpha^2/2}\, du=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u+i\alpha)^2}\, e^{-\alpha^2/2}\, du$$

وبوضع $\dfrac{u+i\alpha}{\sqrt{2}}=t \ \Rightarrow du=\sqrt{2}dt$ فإن التحويل يصبح فى الصورة:

$$F(\alpha)=\sqrt{2}e^{-\alpha^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt=\sqrt{2}\, e^{-\alpha^2/2}\,\sqrt{\pi}=\sqrt{2\pi}\, e^{-\alpha^2/2}$$

مثال (3) اوجد تحويل فورير للدالة $f(x)=e^{a|x|}$

<u>الحل</u>

من تعريف تحويل فورريير نحصل على:

$$F(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{a|x|}e^{-i\alpha u}du$$

وحيث أن $|x|=\begin{cases}-x & : x<0\\ x & : x\geq 0\end{cases}$ فإن النتيجة السابقة تصبح :

$$F(\alpha)=\int_{-\infty}^{0} e^{-au}\,e^{-i\alpha u}du\;+\int_{0}^{\infty} e^{au}\,e^{-i\alpha u}du$$

$$=\int_{-\infty}^{0} e^{-(a+i\alpha)u}\,du\;+\int_{0}^{\infty} e^{(a-i\alpha)u}du=\left(\frac{1}{-(a+i\alpha)}+\frac{1}{a-i\alpha}\right)$$

$$=\frac{-2\alpha}{a^2+\alpha^2}$$

مثال (4) اوجد تحويل فوريرالجيبى التمام والجيبى للدالة $f(x)=e^{-bx}$

ثم إستخدم المعطيات والنتائج لحساب التكاملات الآتية:

$$(i)\ \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\alpha^2+b^2}d\alpha \quad,\ (ii)\ \int_0^\infty \frac{\alpha\sin\alpha x}{\alpha^2+b^2}du$$

<u>الحل</u>

من تحويل فوريير فوريرالجيبى التمام والجيبى للدالة المعطاة نحصل على:

$$F_c(\alpha)=\Im\{f(x)\}=2\int_0^\infty f(u)\cos\alpha u\,du=2\int_0^\infty e^{-bu}\cos\alpha u\,du$$

$$F_s(\alpha)=\Im\{f(x)\}=2\int_0^\infty f(u)\sin\alpha u du=2\int_0^\infty e^{-bu}\sin\alpha u du$$

بوضع

$$I_1=\int_0^\infty e^{-bu}\cos\alpha u\,du \qquad \&\quad I_2=\int_0^\infty e^{-bu}\sin\alpha u\,du$$

وبإجراء التكلملات بالتجزئ نحصل على:

$$I_1 = \left(-\frac{1}{b} e^{-bu} \cos \alpha u \right)_0^\infty - \frac{\alpha}{b} \int_0^\infty e^{-bu} \sin \alpha u \, du = \frac{1}{b} - \frac{\alpha}{b} I_2 \qquad (1)$$

$$I_2 = \left(-\frac{1}{b} e^{-bu} \sin \alpha u \right)_0^\infty - \frac{\alpha}{b} \int_0^\infty e^{-bu} \cos \alpha u \, du = \frac{\alpha}{b} I_1 \qquad (2)$$

وبحل المعادلتين $(2) \quad \& \quad (1)$ نحصل على :

$$I_1 = = \frac{b}{\alpha^2 + b^2} \qquad \& \quad I_2 = \frac{\alpha}{\alpha^2 + b^2}$$

عندئذ يكون :

$$F_c(\alpha) = 2\left(\frac{b}{\alpha^2 + b^2} \right) \qquad \& \quad F_s(\alpha) = 2\left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + b^2} \right)$$

وبإجراء التحويل العكسى لفوريير نحصل على :

$$f(x) = \Im^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_c(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{b}{\alpha^2 + b^2} \cos \alpha x \, d\alpha$$

$$\therefore \quad \int_0^\infty \frac{b}{\alpha^2 + b^2} \cos \alpha x \, d\alpha = \frac{\pi}{2} f(x)$$

ومن ذلك نحصل على :

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2 + b^2} \, d\alpha = \frac{\pi}{2b} f(x) = \frac{\pi}{2b} e^{-bx}$$

وهذا يكون هو التكامل الأول المطلوب .

وبالمثل يمكن أن نوضح أن التكامل الثانى هو :

$$\int_0^\infty \frac{\alpha \sin \alpha x}{\alpha^2 + b^2} du = \frac{\pi}{2} e^{-bx}$$

مثال (5) اوجد تحويل فوريرالجيبى للدالة
$$f(x)=\begin{cases}0 & : 0<x<a\\ x & : a\le x\le b\\ 0 & : \quad x>b\end{cases}$$

الحل

من تحويل فوريير فوريرالجيبى للدالة المعطاة نحصل على:

$$F_s(\alpha)=\Im\{f(x)\}=2\int_0^{\infty}f(u)\sin\alpha u\,du=2\int_a^b x\sin\alpha u\,du$$
$$=2\left[\left(-\frac{u\cos\alpha u}{\alpha}\right)_a^b+\frac{1}{\alpha}\int_a^b\cos\alpha u\,du\right]$$
$$=2\left(\frac{a\cos\alpha a-b\cos\alpha a}{\alpha}+\frac{a\sin\alpha b-\sin\alpha a}{\alpha^2}\right)$$

مثال (6)إذا كان تحويل فوريرالجيبى للدالة $f(x)$ هو $F_s(\alpha)=\dfrac{\alpha}{1+\alpha^2}$ فأوجد $f(x)$

الحل

من تحويل فوريير فوريرالجيبى للدالة المعطاة نحصل على:

$$f(x)=\Im^{-1}\{F(\alpha)\}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}F_s(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\sin\alpha x\,d\alpha$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(\alpha^2+1)-1}{\alpha(1+\alpha^2)}\sin\alpha x\,d\alpha=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\,d\alpha-\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{\alpha(1+\alpha^2)}\,d\alpha\right]$$

ولكن $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{\alpha}d\alpha=\frac{\pi}{2}$ عندئذ يكون:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-2\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{\alpha(1+\alpha^2)}\,d\alpha\right]\qquad(1)$$

وبالتفاضل بالنسبة إالى x نحصل على :

$$\frac{df}{dx}=\frac{2}{\pi}\left[-\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\left(1+\alpha^2\right)}\,d\alpha\right] \qquad (2)$$

وبالتفاضل بالنسبة إالى x مرة أخرى نحصل على :

$$\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha\sin\alpha x}{\left(1+\alpha^2\right)}\,d\alpha \qquad (3)$$

وبطرح المعادلة (1) من المعادلة (3) يتضح أن :

$$\frac{d^2f}{dx^2}-f=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{\alpha}\,d\alpha-\frac{\pi}{2}\right]=0$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة حلها يكون على الصورة:

$$f=c_1e^x+c_2e^{-x} \qquad (4)$$

عندئذ يكون:

$$\frac{df}{dx}=c_1e^x-c_2e^{-x}$$

وحيث أن عند $x=0\Rightarrow f(0)=1$ وهذا من المعادلة (1) ومن المعادلة (2)يكون:

$$\frac{df}{dx}=\frac{2}{\pi}\left[-\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+\alpha^2\right)}\,d\alpha\right]=-\frac{2}{\pi}\left[\tan^{-1}\alpha\right]_0^\infty=-\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\right]=-1$$

أيضا من المعادلة (4)وبإستعمال هذه النتائج نحصل على :

$$c_1+c_2=1 \quad \& \quad c_1-c_2=-1$$

وبحل هاتين المعادلتين نصل على : $c_1=0 \quad \& \quad c_2=1$

وعلى ذلك يكون :

$$f\ (x\ ) = e^{-x}$$

مثال (7) : وهو تطبيق على نظرية الاندماج .

حل المعادلة التكاملية :

$$y(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} y(u)r(x-u)du$$

حيث $r(x)$, $g(x)$ دوال معطاه .

<u>الحــــــــــل</u>

بأخذ تحويل فورير للطرفين وتطبيق نظرية الاندماج فـــإن:

$$y(\alpha) = G(\alpha) + Y(\alpha)R(\alpha)$$

حيث $R(\alpha)$, $G(\alpha)$ دوال معلومة لانها تحويل فورير لدوال معلومـــة .

ومن هذا ينتج ان:

$$y(\alpha) = \frac{G(\alpha)}{1-R(\alpha)}$$

اي ان $Y(\alpha)$ ولو ان تحويل لدالة مجهولة اننا استطعنا ايجاده بدلاة تحويلات معلومة لدوال معلومة .

وللحصول على نفس الدالة $y(x)$ نجري التحويـــــــــــل العكســـــــــي .

اي ان :-

$$y(x) = \Im^{-1}\left\{\frac{G(\alpha)}{1-R(\alpha)}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\alpha)}{1-R(\alpha)} e^{i\alpha x} d\alpha$$

حيث كل الدوال التى تلي علامة التكامل دوال معلـــــومة.

مثال (8) :

اوجد حل المعادلة التكامليـــــــة

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(u)\,du}{(x-u)^2+a^2} = \frac{1}{x^2+b^2}$$

<u>الحــــــــــــل:</u>

نحسب أولا تحويل فورير للطرف الأيمن :

$$\Im\left\{\frac{1}{x^2+b^2}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{x^2+b^2}dx$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{x^2+b^2}dx$$

هذا التكامل معطى فى المثال رقم (4) ونتيجه هي

$$\Im\left\{\frac{1}{x^2+b^2}\right\} = \frac{\pi}{b}e^{-b\alpha} \qquad (1)$$

ومن ذلك ينتج ايضا ان (2)

$$\Im\left\{\frac{1}{x^2+b^2}\right\} = \frac{\pi}{a}e^{-a\alpha}$$

بإجراء التحويل على طرفي المعادلة ينتج ان :

$$\Im\{y\}\ \Im\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\} = \Im\left\{\frac{1}{x^2+b^2}\right\} \qquad (3)$$

وبالتعويض عن (2) , (1) في (3) ينتج ان :

$$Y(\alpha)\frac{\pi}{a}e^{-a\alpha} = \frac{\pi}{b}e^{-b\alpha}$$

اي ان

$$Y(\alpha)=\frac{a}{b}e^{-(b-a)}\alpha$$

ويكون $$y(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}Y(\alpha)d\alpha$$

$$=\frac{a}{b\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-(b-a)\alpha}\cos\alpha x d\alpha$$

$$=\frac{a(b-a)}{b\pi\left[x^2+(b-a)^2\right]}$$

حيث استخدمنا العلاقة .... $e^{i\alpha x}=\cos\alpha x+i\sin\alpha x$ وحذفنــــــا الحد الثاني باعتباره دالة فردية ينعدم تكاملة وضاعفنا قيمة التكامل بعد تغير الحدود من صفر الى ∞ بدلا من $-\infty$ الى ∞

مثال (9) :

بإستعمال تحويل فوريير الجيبى التمام للدالتين $f(x)=e^{-ax}$ & $g(x)=e^{-bx}$ وضح أن:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{d\alpha}{\left(a^2+\alpha^2\right)\left(b^2+\alpha^2\right)}=\frac{2}{\pi ab(a+b)}\quad a\,\&\,b>0$$

الحل

تحويل فوريير الجيبى التمام يأخذ الصورة:

$$F_c(\alpha)=\Im\{f(x)\}=2\int_{0}^{\infty}f(u)\cos\alpha u du=2\int_{0}^{\infty}e^{-au}\cos\alpha u du$$

$$=2\left(\frac{a}{a^2+\alpha^2}\right)$$

هذه النتيجة تم الحصول عليها سابقا فى المثال رقم (4)

وبالمثل التحويل للدالة الأخرى هو:

$$G_c(\alpha)=\Im\{G(x)\}=\int_0^{\infty}G(u)\cos\alpha u du=\int_0^{\infty}e^{-bu}\cos\alpha u du$$
$$=\left(\frac{b}{b^2+\alpha^2}\right)$$

عندئذ يكون :

$$\int_0^{\infty}F_c(\alpha)G(\alpha)d\alpha=\int_0^{\infty}F_c(\alpha)d\alpha\int_0^{\infty}g(u)\cos\alpha u du$$
$$=4\int_0^{\infty}g(u)du\int_0^{\infty}F_c(\alpha)d\alpha\cos\alpha u d\alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(u)g(u)du$$

أى أن :

$$\int_0^{\infty}F_c(\alpha)G(\alpha)d\alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(u)g(u)du$$

وبالتعويض عن الدالتين $f(x)=e^{-ax}\ \&\ g(x)=e^{-bx}$ ينتج أن:

$$\int_0^{\infty}F_c(\alpha)G(\alpha)d\alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(u)g(u)du=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-au}e^{-bu}du=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-(a+b)u}du=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{a+b}\right)$$

وعلى ذلك يكون:

$$\int_0^{\infty}\frac{abd\alpha}{\left(a^2+\alpha^2\right)\left(b^2+\alpha^2\right)}=\frac{2}{\pi(a+b)}\quad a\ \&\ b>0$$

أى

$$\int_0^{\infty}\frac{d\alpha}{\left(a^2+\alpha^2\right)\left(b^2+\alpha^2\right)}=\frac{2}{\pi ab(a+b)}\quad a\ \&\ b>0$$

تمـــــــــــــــاريـــــن:

1) – بين ان المعادلتين (4) , (3) في نظرية تكامل فورير متكافئتان .

2) إذا كان تحويل فورير الجيبيالتمام للدالة $f\left(x\right)$ هو $F_c\left(\alpha\right)=\alpha^n e^{-a\alpha}$ فأوجد $f\left(x\right)$

3) – أوجد حل المعادلة التكاملية :

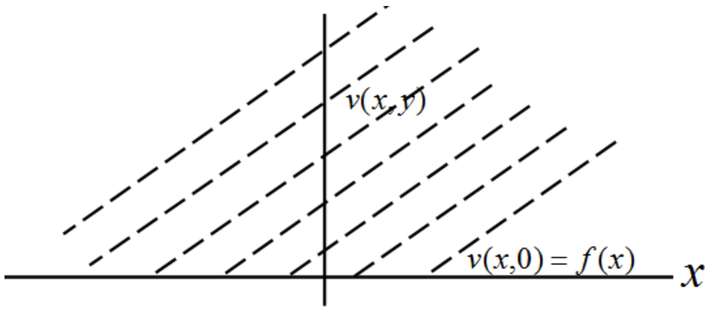
$$\int_0^\infty f(x)\sin\alpha x dx=\begin{cases}1-\alpha : 0\le\alpha\le 1\\ 0:\alpha>1\end{cases}$$

تطبيقات على تكامل فورير :-

مثال (1) اوجد الحل المحدود لمعادلة لابلاس $\nabla^2 v=0$ لنصف المستوى $y>0$ اذا علم انه على محور x تكون v معطاه بالدالــــة $f\left(x\right)$

الحــــــــــل:

المسألة الحدية هـــــــــى:



$$v(x,0)=f(x),\quad |v(x,y)|<M$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

لفصل المتغيرات ضع $v=XY$

$$\text{Then}\quad \text{T}\quad \frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda^2$$

$$X''+\lambda^2 X=0\ ,\quad Y''-\lambda^2 Y=0$$

$$v(x,y)=(a_1\cos\lambda x+b_1\sin\lambda x)(a_2e^{\lambda y}+b_2e^{-\lambda y})$$

وبسبب ان $v(x,y)$ يجب ان تكون محدودة فإن $a_2 = 0$

$$,v(x,y) = e^{-\lambda y}(A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)$$

وبسبب عدم وجود شروط على البارامتر λ فإنه بتطبيق مبدأ الأضافة ينتج أن :

$$v(x,y) = \int_0^\infty e^{-\lambda y}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda$$

وبسبب الشرط $v(x,0) = f(x)$ فـــإن :

$$f(x) = \int_0^\infty \left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda$$

ومن نظرية تكامل فوريـر نجـــد أن :

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda u\,du$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\lambda u\,du$$

والنتيجة أن :

$$v(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda=0}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y} f(u)\cos\lambda(x-u)\,du\,d\lambda$$

مثال (2) :بين ان نتيجة المثال السابق يمكن ان تختزل الى :

$$v(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(u)}{y^2 + (u-x)^2}\,du$$

الحـــــــــــل:

$$v(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left[\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda y}\cos\lambda(x-u)d\lambda\right]du$$

وبإجراء التكامل الداخلي نجـــــد أن :

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda y}\cos\lambda(x-u)d\lambda=\frac{y}{y^2+(u-x)^2}$$

$$\therefore v(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(u)}{y^2+(u-x)^2}du$$

مثال (3) : أ – استخدم تحويل فوريــر لحل المسألة الحدية الاتيـــــــــــه :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial u}{\partial x^2}\ ,u(x,0)=f(x)\ \ ,|u(x,t)<u|\ \ ,-\infty<x<\infty$$

ب –استنتج المعنى الطبيعي للمسألة:

الحـــــــــــل:

أ – بأخذ تحويــل فورير المعادلة ينتج أن :

$$\frac{d}{dt}\Im\{u\}=-k\alpha^2\Im\{u\}$$

هنا تم إستخدام خاصية الأشتقاق رقم (5)

وهذة مسألة تفاضلية عادية للدالة $\Im\{u\}$ وحلها هـــــو:

$$\Im\{u\}=c(\alpha)e^{-k\alpha^2t}$$

ويوضع $t=0$ نحصل على :

$$\Im\{u(x,0)\}=\Im\{f(x)\}=c(\alpha)$$

اي ان :

$$\Im\{u\}=\Im\{f\}.e^{-k\alpha^2 t} \qquad (1)$$

وحتى يصبح في الامكان تطبيق نظرية الاندماج فإنه يجب ان يكتب العامل التاني في الطرف الايمن على هيئة تكامل . وهناك تكامل معروف هـــــــو :

$$\int_0^\infty e^{-Mx^2}\cos\beta x dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{M}}e^{\frac{-\beta^2}{4M}}$$

ومن ذلك نجـــــد ان :

$$e^{-k\alpha^2 t}=2\sqrt{\frac{1}{4k\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4kt}}\cos\alpha x dx$$

اي ان :

$$=2\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{4k\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}\cos\alpha x dx$$

$$e^{-k\alpha^2 t}=\Gamma\left\{\sqrt{\frac{1}{4k\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right\} \qquad (2)$$

من (1) , (2) نجـــــد ان :

$$\Im\{u\}=\Im\{f\}.\Im\left\{\sqrt{\frac{1}{4k\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right\}$$

وبتطبيق نظرية الأندماج فـــإن :

$$u(x,t)=f(x)*\sqrt{\frac{1}{4k\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(w)\sqrt{\frac{1}{4k\pi t}}e^{-\frac{(x-w)^2}{4kt}}dw$$

هذا ويمكن تبسيط النتيجة اذا اجرينا التحويل الاتـــــــى :

$$\frac{(w-x)^2}{4kt} = z^2 \qquad \text{Or} \qquad z = \frac{x-w}{2\sqrt{kt}}$$

والنتيجة هـــــــى:

$$\therefore u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} f(x - 2z\sqrt{kt})dz$$

ب – المعنى الطبيعي توصيل حراري في ساق رفيعه لا نهائيه الطول .

مثال (4) : لانهائي الطول ليعطي الازاحة الابتدائية $y(x,0) = f(x)$ ثم يترك ليهتز .اثبت ان الازاحة العامة تعطي من :

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+at) + f(x-at)\right]$$

ثم وضح معنى هذة النتيجة :

الحـــــــــــــل:

المسألة الحدية الخاصة بهذا المثال هـــــــى:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \;,\; y(x,0) = f(x) \;,\; y_t(x,0) = 0 \;,\; |y(x,t)| < M \;, -\infty < x < \infty$$

بعد تطبيق مبدأ الاضافة (بالتكامل)فالحل العام هـــو :

$$y(x,t) = \int_0^{\infty} \left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]\cos\lambda at d\lambda$$

بوضع $t = 0$ وتطبيق الشرط الأول فـــإن :

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda$$

حيـث :

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda u du,$$

$$B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\lambda u du,$$

وبالتعويض في صيغة الدالة $y(x,t)$ ينتج أن :

$$y(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty} f(u)[\cos\lambda x\cos\lambda u+\sin\lambda x\sin\lambda u]\cos\lambda at du d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)[\cos(\lambda x-\lambda u)]\cos\lambda at du d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)[\cos(x+at-u)+\cos\lambda(x-at-u)]du d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda(x+at-u)du d\lambda \qquad (1)$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda(x-at-u)du d\lambda$$

ولكن احدى صيغ نظرية فورير:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\lambda(x-u)du d\lambda \qquad (2)$$

وبمقارنة (2) و(1) نجــــد أن :

$$y(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]$$

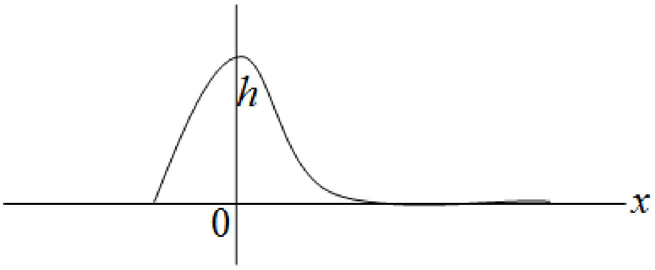
التفسير الطبيعي لهذة النتيجة لا يتم الا بعد تحليل دقيق لها كالأتي :-

نفرض أن $$y(x,t)=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$$

حيــث $$y_2=f(x-at) \quad , y_1=f(x+at)$$

وعلينا الان نتبع تغيرات الدالة $y_2=f(x-at)$ في أزمنة مختلفة.

عند $t=0$ يكون $y_2(x,0)=f(x)$ حيث $f(x)$ هو التوزيع الابتدائي للإزاحات او بمعنى اخر ان $y_2=f(x)$ هى الدالة التي تعطى شكل الوتر في الحالة الابتدائيه ونفرض الشكل الاتي يمثل الدالة $y_2(x,0)=f(x)$



ولنفرض ان قيمة الدالة عند $x=0$ هي العدد h اي ان ارتفاع الوتر عند نقطة الاصل عند بداية الحركة هو العدد h.

نركز النظر على هذة القيمة h عندما ندع الزمن والمسافة تتغيران معا كما يحدث عندما يركز الأنسان نظره على قمة موجة تنتشر في البحر فيجد ان هذة القمة تتحرك .

وحيث أنه لأي زمن واي مسافة يكون $y_2=f(x-at)$ وحيث اننا نريد ان يكون دائــما $(x-at)=h$........... وحيث انه $f(0)=h$.

لذا فان الشرط يتحقق عندما $x-at=0$.

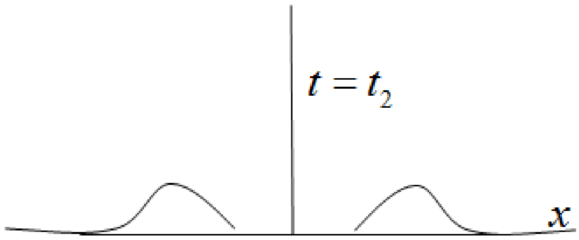
بمعنى اخر لان $x-at$ حيث x هنا تعبر عن النقطة التى ازاحتها L ومعنى هذا ان هذة النقطة التى لها هذة الازاحة تتحرك الى اليمين بسرعة قدرها a .

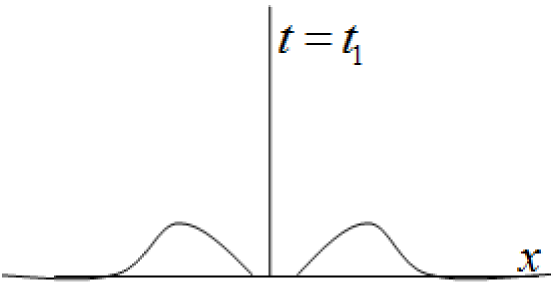
ونفس الطريقة لو تأملنا الدالة فاننا نجد ان هناك نقطة اخرى لها نفس الازاحة ولكنها تتحرك يسارا بسرعة α.

وبتطبيق هذا الاستنتاج ايضا على اي نقطة اخرى لها ازاحة وتختلف عن L ولذا نستطيع ان نقول ان الشكل الابتدائي للوتر يتحرك كله (الشكل وليس الوتر) الى اليمين والي اليسار بسرعة a .

والشكل الاتي يوضح الامر .

اما الازاحة العامة فهـــــى :





$t = t_2$

$$y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

وهى من حيث القيمة العددية مساويه لقيمة $f(x)$.

<u>**تمـــــــــاريــــــــن**</u>

1) – ساق نصف لانهائية $(x \geq 0)$ معزولة الجوانب والتوزيع الحراري الابتدائي لهـــــــا معطى بالدالة $f(x)$.حيث الطرف الايسر على درجه الصفر والمطلوب .

أ – كتابة المسألة الحديـــــــــــة .

ب – أثبت :

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(v)e^{-k^2\lambda t}\sin\lambda v \sin\lambda x \, dv \, d\lambda$$

الفصل الرابع

تحاويــــــــل لابــــــــلاس ..... Laplace Transform

التحويـــــل التكامــــل ....Integral Transform

في تحويل لابلاس يؤخذ المتغير s حقيقي ولو أنه في بعض الأحيان يؤخذ المتغير s بإعتباره متغير مركــــب .

كما أن التحويل $f(s)$ للدالة $F(t)$ يكتب كالاتــــــي :

$$\ell\{F(t)\} = f(s) = \int_0^\infty F(t) e^{-st} dt$$

ويقال ان التحويل $f(s)$ يوجد اذا كان التكامل متقارب ويحدث هذا اذا توافرت شروط معينة في الدالة $F(t)$ سنناقشــــها فيما بعد .

تعريف: لتكن $F(t)$ دالة متصلة ووحيدة فى المتغير الحقبقى t فى الفترة $0 < t < \infty$, والذى من رتبة أسية , فإن تحويل لابلاس لهذه الدالة $F(t)$ يعرف على أنه الدالة $f(s)$ والمعطاة فبالصورة التكاملية

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty F(t) e^{-st} dt = f(s) \qquad (1)$$

وذلك على الفترة المعرف عليها المتغير s والتى يكون غليها التكامل السابق معرف. هنا s عبارة عن بارامتر حقيقى أو مركب . واضح أن $L\{F(t)\}$ عبارة عن دالة فى المتغير s

وهكذا فأن

$$L\{F(t)\} = f(s) \qquad \& \quad L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$$

حيث أن L هو مؤثر تكاملى يحول الدالة $F(t)$ إلى الدالة $f(s)$ والذى يسمى مؤثر تحويل لابلاس بينما L^{-1} هو المؤثر العكسى له والذى يسمى تحويل لابلاس العكسى .

تحويل لابلاس ينتمى إلى عائلة من التحويلات التكاملية , حيث التحويل التكاملى $f(s)$ للدالة $F(t)$ يعرف بالتكامل الذى على الصورة

$$\int_a^b K(s,t)F(t)dt = f(s)$$

حيث $K(s,t)$ هى دالة فى متغيرين $s \ \& \ t$ تسمى نواة التحيويل التكاملى . هنا نواة تحويل لابلاس هى e^{-st} وقد تم توضيح نواة التحويل فى تحويلات فوريير كما سبق.

وفيما يلي جدول تحويلات لبعض الدوال البسيطة .وهذة التحويلات سوف نبرهن على صحتها من خلال الامثلة والتماريــــــن :

$F(t)$	$F(t) = f(s)$
1	$\frac{1}{s} \quad , s>0$
t	$\frac{1}{s^2} \quad , s>0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad , s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a} \quad , s>a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2} \quad , s>0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2} \quad , s>0$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2} \quad , s>\lvert a\rvert$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2} \quad , s>\lvert a\rvert$

مثال (1) أوجد تحويل لاليلاس للدوال $F(t)$ الآتية :

$1-0 \ \ ,2-1,3-t\ ,4-t^2,4-t^2,5-t^n,6-e^{at},7-e^{-at}$

الحل:

$$1-\ : L\left\{0\right\}=\int_0^\infty 0\, e^{-st}\, dt = 0$$

$$2-\ : L\left\{1\right\}=\int_0^\infty (1) e^{-st}\, dt = \left|\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty = \frac{1}{s} \qquad ,s>0$$

$$3-\ : L\left\{t\right\}=\int_0^\infty (t) e^{-st}\, dt = \int_0^\infty t d\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right) = t\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s} dt = = \frac{1}{s^2} \quad ,s>0$$

$$4-\ : L\left\{t^2\right\}=\int_0^\infty \left(t^2\right) e^{-st}\, dt = \int_0^\infty t^2 d\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right) = ... = \frac{2!}{s^3} \quad ,s>0$$

$$5-\ : L\left\{t^n\right\}=\int_0^\infty t^n d\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right) = ... = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad ,s>0$$

فى الحالتين 5 & 4 كانت بالمثل فى الحالة 1 مع التكرار n من المرات (الختزال) .

$$6-\ : L\left\{e^{at}\right\}=\int_0^\infty e^{at} e^{-st} d\,t = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, d\,t = \left|\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right|_0^\infty = \frac{1}{s-a} \quad ,s>a$$

$$7-\ : L\left\{e^{-at}\right\}=\int_0^\infty e^{-at} e^{-st} d\,t = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\, d\,t = \left|\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right|_0^\infty = \frac{1}{s+a} \quad ,s>a$$

مثال (2) أوجد تحويل لاليلاس للدوال $F(t)$ الآتية :

$1-\cos at \qquad , \qquad 2-\sin st$

الحل:

$$1-\ : L\left\{\cos t\right\}=\int_0^\infty \cos t\ e^{-st}\, dt = \operatorname{Re}\int_0^\infty e^{iat}\ e^{-st}\, dt = \operatorname{Re} L\left\{e^{iat}\right\}$$

$$= \operatorname{Re}\frac{1}{s-ia} = \operatorname{Re}\frac{s+ia}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2}\ , s>0$$

$$2- \ : L\{\sin t\} = \int_0^\infty \sin t \ e^{-st}\,dt = \operatorname{Im}\int_0^\infty e^{iat}\ e^{-st}\,dt = \operatorname{Im} L\left\{e^{iat}\right\}$$

$$= \operatorname{Im}\frac{1}{s-ia} = \operatorname{Im}\frac{s+ia}{s^2+a^2} = \frac{a}{s^2+a^2}\ , s>0$$

مثال (3) أوجد تحويل لاليلاس للدوال $F(t)$ الآتية :

$1-\cosh at \quad , \quad 2-\sinh st$

الحل:

بإستعمال نتائج المثال السابق نحصل على :

$$1- \ : L\{\cosh t\} = L\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left[L\left\{e^{at}\right\} + L\left\{e^{-at}\right\}\right] = \frac{s}{s^2-a^2}\ , s>|a|$$

$$2-: L\ \{\sinh t\} = L\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left[L\left\{e^{at}\right\} - L\left\{e^{-at}\right\}\right] = \frac{a}{s^2-a^2}\ , s>|a|$$

نظريات عن تحويل لابلاس :

(1) خاصـــية الخطيـــــــة.......... : Linearity Property

اذا كانت c_1, c_2 ثوابت وكانت $F_1(t), F_2(t)$ دوال وكانت $f_1(s), f_2(s)$ هي تحويلات لابلاس لهـذة الدوال على الترتيب فـــإن :

$$\ell\{c_1F_1(t)+c_2F_2(t)\} = c_1\ell\{F_1(t)\} + c_2\ell\{F_2(t)\}$$

$$= c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)$$

البرهان:

$$L\left\{c_1F_1(t)+c_2F_2(t)\right\}=\int_0^\infty e^{-st}\left(c_1F_1(t)+c_2F_2(t)\right)dt$$

$$=c_1\int_0^\infty F_1(t)e^{-st}dt+c_2\int_0^\infty F_2(t)e^{-st}dt=c_1f_1(s)+c_2f_2(s)$$

مثال ذلك :

$$\ell\{4t^2-3\cos 2t+5e^{-t}\}=4\ell\{t^2\}-3\ell\{\cos 2t\}+5\ell\{c^{-t}\}$$

$$=4(\frac{2}{s^3})-3(\frac{s}{s^2+4})+5(\frac{1}{s+1})$$

$$=\frac{8}{s^3}-\frac{3s}{s^2+4}+\frac{5}{s+1}$$

(2) <u>خاصية الازاحة الاولى .... First Chifting Property :</u>

اذا كان $\ell\{F(t)\}=f(s)$ فإن $\ell\{e^{at}F(t)\}=f(s-a)$

<u>البرهان:</u>

$$\ell\{F(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt=f(s)$$

$$\ell\{e^{at}F(t)\}=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}F(t)dt=f(s-a)$$

مثال ذلك : $\ell\{e^{-t}\cos 2t\}=\dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}=\dfrac{s+1}{s^2+2s+5}$

(3) <u>خاصية الأزاحة الثانيـــــــة :</u>

اذا كان $\ell\{F(t)\}=f(s)$ فإن $e^{-as}f(s)=\ell\{G(t)\}$

حيث

$$G(t)=\begin{cases}F(t-a) & :t>a\\ 0 & :t<a\end{cases}$$

<u>البرهان:</u>)

$$\ell\{G(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}G(t)dt=\int_0^{a}e^{-st}G(t)dt+\int_a^{\infty}e^{-st}G(t)dt$$

$$=0+\int_{t=a}^{\infty}e^{-st}F(t-a)dt$$

باستخدام التحويـل $u=t-a$ نجـد أن :

$$\ell\{G(t)\}=\int_{u=0}^{\infty}e^{-s(u+a)}F(u)du=e^{-as}\int_0^{\infty}e^{-su}F(u)du=e^{-as}f(s)$$

مثال ذلك :

حيث أن $\ell\{t^3\}=\frac{3!}{s^4}=\frac{6}{s^4}$ فإن $\frac{6e^{-2s}}{s^4}$

يكون تحويل لابلاس للدالة $G(t)$ حيث

$$G(t)=\begin{cases}(t-2)^3 & :t>2\\ 0 & :t<2\end{cases}$$

(4) <u>خاصية تغير المقاس .... Change of scale Property:</u>

اذا كان $\ell\{F(t)\}=f(s)$ فــإن $\ell\{F(at)\}=\frac{1}{a}f(\frac{s}{a})$

<u>**البرهان**</u>

$$L\{F(at)\}=\int_0^{\infty}F(at)e^{-st}dt=\int_0^{\infty}F(u)e^{-su/a}du/a$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{\infty}F(u)e^{-\left(\frac{s}{a}\right)u}du=\frac{1}{a}f\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\ell\{F(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}F(t)dt=f(s)$$

$$\ell\{e^{at}F(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-(s-a)t}F(t)dt=f(s-a)$$

مثال ذلك $\ell\{\sin t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$ لذا فــإن :

$$\ell\{\sin 3t\} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(\frac{s}{3})^2+1} = \frac{3}{s^2+9}$$

(5) تحويل لابلاس للمشتقات :

أ – إذا كان

$\ell\{F(t)\} = f(s)....$ فــأن

$$L\left\{F^{(n)}(t)\right\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F^1(0)....-sF^{n-2}(0) - F^{n-1}(0)$$

البرهان

من تعريف تحويل لابلاس ونجد أن:

$$L\left\{F^1(t)\right\} = \int_0^\infty F^1(t)e^{-st}dt = \left|e^{-st}F(t)\right|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$$
$$= -F(0) + sf(s) = sf(s) - F(0)$$

بالمثل بمكن أن نوضح أن :

$$L\left\{F^2(t)\right\} = \int_0^\infty F^2(t)e^{-st}dt = s\,L\left\{F^1(t)\right\} - F^1(0) = s\left[sf(s) - F(0)\right] - F^1(0)$$
$$= s^2 f(s) - sF(0) - F^1(0)$$

وهكذا على وجه العموم نجد أن :

$$L\left\{F^{(n)}(t)\right\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F^1(0)....-sF^{n-2}(0) - F^{n-1}(0)$$

مثال ذلك

$$\ell\{\cos 3t\} = \frac{s}{s^2+9}$$

لذا فــإن :

$$\ell\{-3\sin 3t\} = s(\frac{s}{s^2+9}) - 1 = \frac{-9}{s^2+9}$$

ب- كذلك

$$\ell\{F^{n}(t)\}=s^{2}f(s)-sF(0)-F'(0)$$

او على وجه العموم .

$$\ell\{F^{(n)}(t)\}=s^{n}f(s)-s^{n-1}F(0)-s^{n-2}F'(0)-.....-sF^{(n-2)}(0)-F^{(n-1)}(0)$$

(6) <u>تحويل لابلاس للتكاملات :</u>

اذا كان $\ell\{F(t)\}=f(s)$ فـــإن $\ell\left\{\int_0^t F(u)du\right\}=\dfrac{f(s)}{s}$

<u>البرهان</u>

4) نفرض ان $G(u)=\int_0^t F(u)du$ ومن ذلك ينتج أن :

$$G'(t)=F(t),G(0)=0$$

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين ينتج أن :

$$\ell\{F(t)\}=\ell\{G'(t)\}=s\ell\{G\}-G(0)=s\ell\{G(t)\}$$

$$\therefore\ \ell\left\{\int_0^t F(u)du\right\}=\ell\{G\}=\frac{f(s)}{s}$$

مثال ذلك : $\ell\{\sin 2t\}=\dfrac{2}{s^{2}+4}$ لذا فـــإن :

$$\ell\left\{\int_0^t \sin 2u du\right\}=\frac{2}{s(s^{2}+4)}$$

والتحقيق من ذلك فـــإن :

$$F(t)=\int_0^t \sin 2u du=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)$$

$$\therefore \ell\{F(t)\} = \frac{1}{2}\left[\ell\{1\} - \ell\{\cos 2t\}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right] = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

(7) الضرب في العامل t^n :

اذا كان $\ell\{F(t)\} = f(s)$ فــإن :

$$\ell\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s)$$

البرهان

من التعريف

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt$$

تجد أن :

$$\frac{df(s)}{ds} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left\{e^{-st}F(t)dt\right\} = -\int_0^\infty e^{-st} tF(t)dt = -L\{tF(t)\}$$

هنا تم تبديل عمليات التفاضل والتكامل والتى لها فرضنا أن الشروط الضرورية قد تحققت وحيث أن يوجد متغيرين هما $s \,\&\, t$ استعملنا عمية التفاض ل الجزئى بدلا من التفاضل الكلى ولذلك فإن :

ولذلك فإن :

$$L\{tF(t)\} = -\frac{df(s)}{ds}$$

وبتكرار هذه الغملية على النتيجة الأخيرة نحصل على

$$\ell\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s) \quad \text{حبث} \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots..$$

مثال ذلك $\ell\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$ لذا فـــإن :

$$\ell\{te^{2t}\} = -\frac{d}{ds}(\frac{1}{s-2}) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

وكذلك

$$\ell\{t^2e^{2t}\} = \frac{d^2}{ds^2}(\frac{1}{s-2}) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

(8) <u>القسمة على t :</u>

إذا كان $\ell\{F(t)\} = f(s)$ فــإن $\ell\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)du$

<u>البرهان</u>

من التعريف

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$$

وبتكامل هذة العلاقة نجد أن:

$$\int_s^\infty f(s)ds = \int_s^\infty\left[\int_0^\infty F(t)e^{-st}dt\right]ds = \int_0^\infty F(t)\left\{\int_s^\infty e^{-st}ds\right\}dt$$

هنا تم تبديل ترتيب التكاملات

$$\therefore \int_s^\infty f(s)ds = \int_0^\infty F(t)\left\{\left|\frac{e^{-st}}{-t}\right|_s^\infty\right\}dt = \int_0^\infty \frac{F(t)}{t}e^{-st}dt = L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\}$$

$$\therefore L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(s)ds$$

<u>ملاحظة</u>: لتطبيق هذه الخاصية يجب ان يكون منتبهين . حيث أن المقدار $\frac{F(t)}{t}$ يمكن أن يكون له عدم اتصال غير منتهى عند $t=0$ وبالتالى يكون غير قابل للتكامل وفى هذه الحالة فإت تحويل لابلاس له غير موجود, وكمثال على ذلك نجد أن $\frac{\sin t}{t}$ عند $t=0$ لا يكون له عدم اتصال غير منتهى بينما المقدار $\frac{\cos t}{t}$ يكون له عدم اتصال غير منتهى عند $t=0$

مثال ذلك :   حيث أن $\ell\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$ وحيث أن $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} == 1$

فـــإن
$$\ell\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{du}{u^2 \oplus 1} = \tan^{-1}(\frac{1}{s})$$

(9) اذا كانت $F(t)$ دالة دورتها T فإن:

$$\ell\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-st}}$$

البرهان

من تعريف تحويل لابلاس نجد أن :

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt = \int_0^T e^{-st}F(t)dt + \int_T^\infty e^{-st}F(t)dt$$

وبأخذ التعويض $t = u + T$ فى التكامل الثانى حيث يكون $dt = du$ نحصل على :

$$f(s) = L\{F(t)\} = \int_0^T e^{-st}F(t)dt + \int_0^\infty e^{-s(u+T)}F(u+T)du$$

$$= \int_0^T e^{-st}F(t)dt + e^{-sT}\int_T^\infty e^{-su}F(u)du$$

$$= \int_0^T e^{-st}F(t)dt + e^{-sT}f(s)$$

وبإيعادة الترتيب يكون $\left(1-e^{-sT}\right) f(s) = \int_0^T F(T)e^{-st}dt$ ومنها نحصل على المطلوب أى :

$$f(s)=\int_0^T F(T)e^{-st}\,dt \Big/ \left(1-e^{-sT}\right)$$

مثال:أوجد تحويل لابلاس للدالة الدورية $F(T)=\dfrac{t}{T}$ والمعرفةعلى الدورة $0<t<T$

<u>الحل</u>

$$f(s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T \frac{t}{T}e^{-st}\,dt=\frac{1}{T\left(1-e^{-sT}\right)}\int_0^T te^{-st}\,dt$$

$$=\frac{1}{T\left(1-e^{-sT}\right)}\int_0^T te^{-st}\,dt=\frac{1}{T\left(1-e^{-sT}\right)}\int_0^T t\,d\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)$$

$$=\frac{1}{T\left(1-e^{-sT}\right)}\int_0^T te^{-st}\,dt=\frac{1}{T\left(1-e^{-sT}\right)}\int_0^T t\,d\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)$$

$$=\frac{1}{T\left(1-e^{-sT}\right)}\left[\left(\frac{te^{-st}}{-s}\right)_0^T+\frac{1}{s}\int_0^T e^{-st}\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{T\left(1-e^{-sT}\right)}\left[\frac{Te^{-st}}{-s}-\frac{1}{s^2}\left(e^{-sT}-1\right)\right]=\frac{1}{s^2T}-\frac{e^{-st}}{s\left(1-e^{-sT}\right)}$$

$$\therefore f(s)=\frac{1}{s^2T}-\frac{e^{-st}}{s\left(1-e^{-sT}\right)}$$

(10) <u>دالة التحويل عند النقطة اللانهاية :</u>

اذا كان $\ell\{F(t)\}=f(s)$ فـإن $\lim\limits_{s\to\infty} f(s)=0$

(11) <u>نظريه القيمة الابتدائية .... Initial –value Theorem :</u>

تنص هذة النظرية على أن $\lim\limits_{t\to 0}F(t)=\lim\limits_{s\to\infty} sf(s)$

وذلك بفرض تواجد النهايات المذكوره .

هذا يعنى أن سلوك الدالة $F(t)$ فى الجوار $t \to 0$ يتطابق مع سلوك الدالة $sf(s)$ فى الجوار $t \to \infty$.

البرهان

$$\ell\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F'(t)dt = sf(s) - F(0)$$

وبأخذ النهاية لكلا الطرفين عندما $S \to \infty$ فإن :

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty F^{/}(t)e^{-st}\,dt = \lim_{s\to\infty} sf(s) - \lim_{s\to\infty} f(0)$$

وبما أن $s\,\&\,t$ متغيرات مستقلة فإنه يمكن تبديل عمليتى التكامل والنهاية فى الطرف الأيسر فيكون:

$$\int_0^\infty\left[\lim_{s\to\infty} F^{/}(t)e^{-st}\right]dt = 0$$

أى أن :

$$\lim_{s\to\infty} sf(s) - \lim_{s\to\infty} F(0) = 0$$

$$\therefore\ \lim_{s\to\infty} sf(s) = \lim_{s\to\infty} F(0) = F(0) = \lim_{t\to 0} F(t)$$

مثال :تحقق من نظرية القيمة الأبتدائية للدالة $F(T) = 1 + e^{-t}(\sin t + \cos t)$

الحل

بإجراء التحويل لهذه الدالة نحصل على:

$$f(s) = L\{1 + e^{-t}(\sin t + \cos t)\} = L\{1\} + L\{e^{-t}(\sin t + \cos t)\}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{(s+1)^2+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

هنا تم استخدام الجدول وخاصية الأزاحة الأولى

$$\therefore sf(s) = 1 + \frac{s}{(s+1)^2+1} + \frac{s^2+s}{(s+1)^2+1} = 1 + \frac{s^2+2s}{s^2+2s+2}$$

$$\therefore \lim_{s\to\infty} sf(s) = \lim_{s\to\infty} 1 + \lim_{s\to\infty} \frac{s^2+2s}{s^2+2s+2} = 1 + \lim_{s\to\infty} \frac{1+2/s}{1+2/s+2/s^2} = 1+1=2$$

ولكن

$$\lim_{t\to 0} F(t) = F(0) = 1+1=2$$

$$\lim_{s\to\infty} sf(s) = \lim_{t\to 0} F(t)$$

(12) نظريه القيمة النهائية .... Final –value Theorem :

تنص هذة النظريه على أن $\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} sf(s)$

وذلك بفرض تواجد النهايات المذكورة .

هذا يعنى أن سلوك الدالة $F(t)$ فى الجوار $t \to \infty$ يتطابق مع سلوك الدالة $sf(s)$ فى الجوار $t \to 0$.

البرهان

من خاصية الأشتقاق نجد أن :

$$L\{F'(t)\} = \int_0^\infty F^1(t)e^{-st}dt = sf(s) - F(0)$$

وبأخذ النهاية لكلا الطرفين عندما $S \to 0$ فإن :

$$\lim_{s\to 0} \int_0^\infty F'(t)e^{-st}\,dt = \lim_{0\to\infty} sf(s) - \lim_{0\to\infty} F(0) = \lim_{0\to\infty} sf(s) - F(0)$$

وبما أن $s \,\&\, t$ متغيرات مستقلة فإنه يمكن تبديل عمليتى التكامل والنهاية فى الطرف الأيسر فيكون:

$$\therefore \int_0^\infty \lim_{s\to 0} F'(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty F'(t)dt = \left|F(t)\right|_0^\infty = \lim_{t\to\infty} F(t) - F(0)$$

وبالتعويض فى العلاقة العليا نجد أن :

$$\lim_{t\to\infty} F(t) - F(0) = \lim_{0\to\infty} sf(s) - F(0)$$

أى أن :

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{0\to\infty} sf(s)$$

يمكن تطبيق المثال فى الخاصية السابقة على هذة الخاصية.

(13) <u>تعميم نظرية القيمة الابتدائيه :</u>

اذا كان $\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)} = 1$ فإن قيم الدالـــــــه $F(t)$ تكون قريبة من قيم الدالة $G(t)$ عندما تكون t صغيرة ويعبر عن ذلك كالاتي :

$$F(t) \approx G(t) \qquad \text{as} \qquad t \to 0$$

بالمثل اذا كان $\lim_{s\to\infty}\frac{f(s)}{g(s)} = 1$ فإنه للقيم الكبيرة للمتغير s تكون قيم $f(s)$ قريبه من قيم $g(s)$ ويعبر عن ذلك كالاتي :

$$f(s) \approx g(s) \qquad \text{as} \qquad s \to \infty$$

لهذا يمكن اعادة صياغه نظرية القيمة الابتدائية كالاتي :

اذا كان $F(t) \approx G(t) \quad \text{as} \quad t \to 0$

فـــإن $f(s) \approx g(s) \quad \text{as} \quad s \to \infty$

حيث $f(s) = \ell\{F(t)\} \quad , \quad g(s) = \ell\{g(t)\}$

(14) **<u>تعميم نظرية القيمة النهائيـــــــة :</u>**

اذا كان $F(t) \approx G(t) \quad \text{as} \quad t \to \infty$ فـــإن $f(s) \approx g(s) \quad \text{as} \quad s \to 0$

حيث $f(s) = \ell\{F(t)\} \quad , \quad g(s) = \ell\{g(t)\}$

<u>طرق لإيجــاد تحويلات لابلاس :</u>

1) الطريقة المباشرة $$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$$

2) طريقة المتسلسلات اذا كانت $F(t)$ يمكن كتابتها كمتسلسله قوى – اي اذا كان :

$$F(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+..........=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$$

فان تحويل لابلاس لها يمكن ايجاده كمجموع تحويلات لابلاس لحدود المتسلسه اي ان :

$$\ell\{F(t)\}=\frac{a_0}{s}+\frac{a_1t}{s^2}+\frac{a_2t^2}{s^3}+..........=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!a_n}{s^{n+1}}$$

على شرط ان تكون المتسلسه الاخيرة تقاربيـــــــه :

3) الاشتقاق بالنسبه لبارامتر(استخدام الخواص السابقة) وهذا ماسيتضح من الامثلة.

4) استخدام جداول التحويـــــــــــــل .

<u>أمثلة و تمـاريــــــــــن</u>

1) اوجد $\ell\{F(t)\}$ حيث $F(t)=\begin{cases}5: \ 0<t<3\\ 0: \ t>3\end{cases}$

<u>**الحل**</u>

$$F(t)=\begin{cases}5 & :0<t<3\\ 0 & :t>3\end{cases}$$

$$\ell\{F(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt=\int_0^3 5e^{-st}dt+\int_3^\infty 0.e^{-st}dt$$

$$\ell\{F(t)\}=5\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^3=\frac{5(1-e^{-3s})}{s}$$

2) اوجد $\ell\{4e^{5t}+6t^3-3\sin 4t+2\cos 2t\}$

3)اوجد كلا مما يأتي :

$$\ell\{t^2e^{3t}\}\ ,\ell\{e^{-2t}\sin 4t\}\ \ ,\ \ell\{e^{3t}\cosh 5t\}\ \ ,\ \ \ell\{e^{-2t}(3\cos 6t-5\sin 6t)\}$$

<u>الحل</u>

(3

$$\ell\{t^2\}=\frac{2}{s^3},\ \ then\ \ell\{t^2e^{3t}\}=\frac{2}{(s-a)^3}\ \ \ ,then\ \ \ell\{\sin 4t\}=\frac{4}{s^2+16}\ \ \ \ ,$$

$$\ell\{e^{-2t}\sin 4t\}=\frac{4}{(s+2)^2+16}\ \ \ ,then\ \ell\{\cosh 5t\}=\frac{s}{s^2-25}\ \ \ \ ,$$

$$\ell\{e^{4t}\cosh 5t\}=\frac{s-4}{(s-4)^2-25},$$

حل اخــــر:

$$\ell\{\cosh 5t\}=\frac{s}{s^2-25},$$

$$\ell\{e^{4t}\cosh 5t\}=\ell\left\{e^{4t}\left(\frac{e^{5t}+e^{-5t}}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\ell\{e^{9t}\}+\frac{1}{2}\ell\{e^{-t}\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-9}+\frac{1}{s+1}\right)$$

$$=\frac{s-4}{s^2-8s-9}=\frac{s-4}{(s-4)^2-25}$$

$$\ell\{3\cos 6t-5\sin 6t\}=3\left(\frac{s}{s^2+36}\right)-5\left(\frac{6}{s^2+36}\right)=\frac{3s-30}{s^2+36}$$

$$\therefore\ \ell\{e^{-2t}(3\cos 6t-5\sin 6t)\}=\frac{3(s+2)-30}{(s+2)^2+36}$$

4) إذا كان

$$F(t)=\begin{cases}\cos(t-\frac{2\pi}{3}) : t>\frac{2\pi}{3}\\ 0 \qquad\qquad : t<\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

فأوجد $\ell\{F(t)\}$

الحل

$$F(t)=\begin{cases}\cos(t-\frac{2\pi}{3}) & : t>\frac{2\pi}{3}\\ 0 & : t<\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

$$\ell\{F(t)\}=\int_0^{2\pi/3}0.e^{-st}dt+\int_{2\pi/3}^{\infty}e^{-st}\cos(t-\frac{2\pi}{3})dt$$

$$=\int_{u+0}^{\infty}e^{-s(u+\frac{2\pi}{3})}\cos u du=e^{\frac{-2\pi s}{3}}\int_{u+0}^{\infty}e^{-su}\cos u du=\frac{se^{-\frac{2\pi s}{3}}}{s^2+1}$$

كان هذا هو الحل المباشر اما الحل بتطبيق نظرية الأزاحة الثانيه فهو :

$$\ell\{\cos t\}=\frac{s}{s^2+1}\ \therefore\ \ell\{F(t)\}=\frac{se^{-\frac{2\pi s}{3}}}{s^2+1}$$

5) اذا كان $\ell\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\tan^{-1}(\frac{1}{s})$ فــأوجد $\ell\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}$

6) اوجد $\ell\left\{\int_0^t\frac{\sin u}{u}du\right\}$

7) أ- اوجد $\ell\{t\sin at\}$ ب- أوجد $\ell\{t^2\cos at\}$

ب- أثبت ان $8\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$

8) أ- ارسم منحنى الدالة $F(t) = \begin{cases} \sin(t) : t < \pi \\ 0 \quad : \pi < t < 2\pi \end{cases}$ علما بإن الدالة

دورية و دورتها 2π

ب- اوجد $\ell\{F(t)\}$

9) حقق نظريات القيمة الابتدائية والنهائية للدالة .... $F(t) = 3se^{-2t}$

الفصل الخامس

تحويـــلات لابلاس العكسي

<u>The Inverse Laplace Transform</u>

اذا كان $f(s)=\ell\{F(t)\}$ فان الدالة $F(t)$ تسمى تحويل لابلاس العكسي للدالة $f(s)$

ويكتب $F(t)=\ell^{-1}\{f(s)\}$ مثال ذلك

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}=e^{-3t}$$

وبطبيعة الحال اذا وجد جدول لتحويلات لابلاس فإنه يمكن عمل جدول أخر لتحويل لابلاس العكسي كما انه من الخاصة بتحويل لابلاس يمكن اشتقاق النظريات والقواعد المقابلة للتحويل العكسي وهـــــــى :-

1- نظرية الخطية:

$$\ell^{-1}\{c_1 f_1(s)+c_2 f_2(s)\}=c_1\ell^{-1}\{f(s)\}+c_2\ell^{-1}\{f(s)\}$$

$$=c_1F_1(t)+c_2F_2(t)$$

مثال ذلك

:

$$\left\{\frac{4}{s-2}-\frac{3s}{s^2+16}+\frac{5}{s^2+4}\right\}=4\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}-3\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\}+5\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

$$=4e^{2t}-3\cos 4t+\frac{5}{2}\sin 2t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{4}{s-2}-\frac{3s}{s^2+16}+\frac{5}{s^2+4}\right\} \quad =4L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}-3L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\}+$$
$$5L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

$$= 4e^{2t} - 3\cos 4t + 5\sin 2t$$

$L^{-1}\{f(s)\} \quad = F(t)$ then $\quad L^{-1}\{f(s+a)\} \quad = e^{at}F(t)$

2-خاصية الازاحة الأولى :

إذا كان $L^{-1}\{f\ (s)\} = F\,(t)$ فإن $L^{-1}\{f\ (s+a)\} = e^{-at}F\,(t)$

<u>البرهان</u>

من تعريف تحويل لابلاس $L\,\{F\,(t)\} = f\ (s)$ نحصل على $L^{-1}\{f\ (s)\} = F\,(t)$

وبإستدعاء خاصية الأزاحة الأولى نجد أن $L\,\{e^{-at}F\,(t)\} = f\ (s+a)$ أى أن :

$$L^{-1}\{f\ (s+a)\} = e^{-at}F\,(t)$$

مثال ذلك :حيث ان $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2t$ فإن :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\} = \ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\right\} = \frac{1}{2}e^{t}\sin 2t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\right\} = \frac{1}{2}e^{t}\sin 2t$$

3-خاضية الازاحة الثانية: $L^{-1}\{f\ (s)\} = F\,(t)$ فإن :

$$L^{-1}\{e^{-as}f\ (s)\} = \begin{cases} F\,(t-a) & ,t > a \\ 0 & ,t < a \end{cases}$$

مثال ذلك حيث أن : $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$ فإن :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi s}{3}}}{s^2+1}\right\}=\begin{cases}\sin(t-\frac{\pi}{3}) & :t>\frac{\pi}{3}\\ 0 & :t<\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$ then

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/3}}{s^2+1}\right\}=\begin{cases} sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right) & t>\frac{\pi}{3}\\ 0 & t<\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

4-خاصية تغيير المقياس :

إذا كان $L^{-1}\{f(s)\}=F(t)$ فإن $L^{-1}\{f(as)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{t}{a}\right)$

<u>البرهان</u>

من تعريف تحويل لابلاس $f(s)=\int_0^\infty F(t)e^{-st}dt$ وبالتالى فإن **:**

$$f(as)=\int_0^\infty F(t)e^{-ast}dt$$

وبوضع $at=x \rightarrow dt=dx/a$ نحصل على **:**

$$f(as)=\frac{1}{a}\int_0^\infty F\left(\frac{x}{a}\right)e^{-xs}dx=\frac{1}{a}L\left\{F\left(\frac{x}{a}\right)\right\}=\frac{1}{a}L\left\{F\left(\frac{t}{a}\right)\right\}$$

وعلى ذلك فإن :

$$L^{-1}\{f(as)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{t}{a}\right)$$

مثال ذلك : $\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\}=\cos 4t$ وينتج عن ذلك ان :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{2s}{(2s)^2+16}\right\}=\frac{1}{2}\cos\frac{4t}{2}=\frac{1}{2}\cos 2t$$

هنا $a=2$ وتم وضع $4t$ بدلا من t .

5) **خاصية الضرب فى عامل:**

إذا كان $L^{-1}\{f(s)\}=F(t)$ فإن : $L^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n}f(s)\right\}=(-1)^n t^n F(t)$

<u>البرهان</u>

من خاصية الضرب فى عامل

$L\{F(t)\}=f(s)\Rightarrow L\{t^nF(t)\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}f(s)$ فإننا نحصل على :

$$L^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n}f(s)\right\}=(-1)^n t^n F(t)$$

مثال ذلك: $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$ وينتج عن ذلك ان :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right\}=-t\sin t$$

6) **خاصية القسمة على عامل:**

إذا كان $L^{-1}\{f(s)\}=F(t)$ فإن : $L^{-1}\left\{\int_0^\infty f(u)du\right\}=\dfrac{F(t)}{t}$

البرهان

من الخاصية إذا $L\{F(t)\}=f(s)$ فإن $L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\}=\int_o^\infty f(u)\,du$

ينتج أن $L^{-1}\{\int_o^\infty f(u)\,du\}=\frac{F(t)}{t}$

مثال على ذلك حيث أن $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right\}=1-e^{-t}$

فإن $L^{-1}\left\{\int_0^\infty\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du\right\}=L^{-1}\left\{lin^{\left(1+\frac{1}{s}\right)}\right\}=\frac{1-e^{-t}}{t}$

-6 خاصية التكامل :

إذا كان $L^{-1}\{f(s)\}=F(t)$ فإن : $L^{-1}\left\{\dfrac{f(s)}{s}\right\}=\int_0^t F(t)dt$

البرهان

ونلاحظ مما سبق ان الضرب في s والقسمة على s تأثيره على $F(t)$ هو الاشتقاق والتكامل على الترتيب .

ضع $G(t)=\int_0^t F(u)du \quad \therefore G(0)=0 \ \& G^{/}(t)=F(t)$

أيضا $L\{G^{/}(t)\}=s\,L\{G(t)\}-G(0)=s\,L\{G(t)\}$

أى أن : $L\{G(t)\}=\dfrac{f(s)}{s}$ عندئذ يكون : $L^{-1}\left\{\dfrac{f(s)}{s}\right\}=G(t)=\int_0^t F(u)du$

هذه النتيجة يمكن تعميمها لتوضح أن :

$$L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^n}\right\}=G(t)=\int_0^t F(u)du=\int_0^t\int_0^t\int_0^t........\int_0^t F(u)du$$

مثال ذلك : حيث ان $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{2}\sin 2t$ فإن :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}=\int_0^t \frac{1}{2}\sin 2u du=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)$$

8- خاصية الأشتقاق :

إذا كان $\ell^{-1}\{f(s)\}=F(t)$ وكان $F(0)=0$

فإن $\ell^{-1}\{sf(s)\}=F'(t)$ وإذا كان $F(0)\neq 0$ فإن

$$\ell^{-1}\{sf(s)-F(0)\}=F'(t)$$

مثال ذلك حيث أن $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$ وحيث أن $\sin 0=0$

فإن

$$\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}=\frac{d}{dt}\sin t=\cos t$$

9- نظرية الادماج................. Convolution Theorem :

تنص على انه اذا كان $\ell^{-1}\{g(s)\}=G(t)$, $\ell^{-1}\{f(s)\}=F(t)$

فإن

$$\ell^{-1}\{f(s).g(s)\}=\int_0^t F(u)G(t-u)du=F*G$$

البرهان

من تعريف تحويل لابلاس نحصل على:

$$f(s)g(s)=\left[\int_0^\infty F(v)e^{-sv}dv\right]\left[\int_0^\infty G(u)e^{-su}du\right]=\int_0^\infty\int_0^\infty F(v)G(u)e^{-s(v+u)}dvdu$$

$$=\int_0^\infty G(u)\left[\int_0^\infty F(v)e^{-s(v+u)}dv\right]du$$

وبوضع $u+v=t \Rightarrow dt=dv$ فى التكامل الداخلى نحصل على:

$$f(s)g(s)=\int_0^\infty G(u)\left[\int_u^\infty F(t-u)e^{-st}dt\right]du$$

وبتغير ترتيب التكامل نحصل على :

$$=\int_0^\infty\left[\int_0^t F(t-u)G(u)du\right]dt$$

$$=L\left[\int_0^t F(t-u)G(u)du\right]$$

$$\therefore f(s)g(s)=L\left[\int_0^t F(t-u)G(u)du\right]$$

ومنها نحصل على:

$$L^{-1}\left\{\int_0^t F(t-u)G(u)du\right\}=L^{-1}\{F(t)*G(u)\}=f(s)g(s)$$

مثال ذلك حيث أن $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}=e^{2t}$, $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}=e^{t}$ فإن

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\}=\int_0^t e^u e^{2(t-u)}du=\int_0^t e^{2t}e^{-u}du$$

$$=e^{2t}\int_0^t e^{-u}du=e^{2t}-e^{t}$$

10- مفكوك هيفيسيد .... Heaviside Expansion Formula .

وتنص على انه اذا كان كل من $Q(s)$, $P(s)$ كثيرات الحدود وكانت درجة $P(s)$ أقل من درجة $Q(s)$ وكان للدالة $Q(s)$ عدد قدره n من الجزور المختلفة هى

$$\alpha_k, k = 1,2,....., n$$

فــإن :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{Q(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$$

البرهان

بما أن $Q(s)$ عبارة عن كثيرة حدود لها n من الجزور المختلفة وكذلك $P(s)$ كثيرة حدود بدرجة أقل من $Q(s)$ وبإستخدام الكسور الجزئية فإننا نحصل على :

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{\prod_{k=1}^{n}(s-\alpha_k)} = \frac{A_1}{(s-\alpha_1)} + \frac{A_2}{(s-\alpha_2)} + ... + \frac{A_n}{(s-\alpha_n)}$$

بضرب طرفى هذه المعادلة $(s-\alpha_k)$ وأخذ النهاية $s \to \alpha_k$ فإننا نحصل على:

$$A_k = \lim_{s\to\alpha_k} \frac{F(s)(s-\alpha_k)}{G(s)} = F(\alpha_k) \lim_{s\to\alpha_k} \frac{(s-\alpha_k)}{G(s)}$$

وحيث أن هذه النهاية تعطى كمية غير معينة من النوع $\frac{0}{0}$ فإنه بتطبيق نظرية لوبيتال نحصل على :

$$A_k = F(\alpha_k) \lim_{s\to\alpha_k} \frac{1}{G^{/}(s)} = \frac{F(\alpha_k)}{G^{/}(\alpha_k)}$$

عنئذ يكون :

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{F(\alpha_1)}{G^{/}(\alpha_1)}\frac{1}{(s-\alpha_1)} + \frac{F(\alpha_2)}{G^{/}(\alpha_2)}\frac{1}{(s-\alpha_2)} + ... + \frac{F(\alpha_n)}{G^{/}(\alpha_n)}\frac{1}{(s-\alpha_n)}$$

وهكذا يكون:

$$L^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\}=\frac{F(\alpha_1)}{G^{/}(\alpha_1)}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-\alpha_1)}\right\}+\ldots+\frac{F(\alpha_n)}{G^{/}(\alpha_n)}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-\alpha_n)}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\}=\frac{F(\alpha_1)}{G^{/}(\alpha_1)}e^{\alpha_1 t}+\ldots+\frac{F(\alpha_n)}{G^{/}(\alpha_n)}e^{\alpha_n t}=\sum_{k=1}^{n}\frac{F(\alpha_k)}{G^{/}(\alpha_k)}e^{\alpha_k t}$$

مثال: أوجد تحويل لابلاس العكسى للدالة $\frac{s^2+1}{s^3+3s^2+2s}$ بإستخدام مفكوك هفيسيد

<u>الحل</u>

بأخذ $p(s)=s^2+1 \quad \& Q(s)=s^3+3s^2+2s=s(s+1)(s+2)$

واضح أن $Q(s)$ لها ثلاث جزور مختلفة هم $0,-1,-2$ وكذلك $P(s)$ درجتها أقل من درجة $Q(s)$ وبتطبيق نظرية هفيسيد نحصل على :

$$L^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{s^3+3s^2+2s}\right\}=\frac{F(0)}{G^{/}(0)}e^{0t}+\frac{F(-1)}{G^{/}(-1)}e^{-t}+\frac{F(-2)}{G^{/}(-2)}e^{-2t}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{s^3+3s^2+2s}\right\}=\frac{1}{2}-2e^{-t}+\frac{5}{2}e^{-2t}$$

<u>بعض الطرق للحصول على تحويل لابلاس العكســــــــى :</u>

<u>1- استخدام الجدول .</u>

<u>2- طريقة الأشتقاق (بإستخدام الخواص) وهو مايتضح من الأمثلة .</u>

<u>3- طريقة المتسلسلات :</u>

اذا كان

$$f(s)=\frac{a_0}{s}+\frac{a_1}{s^2}+\frac{a_2}{s^3}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

فإن

$$\ell^{-1}\{f(s)\}=F(t)=a_0+\frac{a_1}{t}+\frac{a_2t^2}{2!}+\frac{a_3t^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4 **<u>- مفكوك هيفيسيد ....Heaviside Expansion Formula .</u>**

5- الكسور الجزيئية : اذا كان كل من $P(s), Q(s)$..... كثيرات حدود وكانت درجة $P(s)$ اقل من درجه $Q(s)$.

فإن الكسر $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ يمكن كتابته كمجموع عدة كسور جزيئية بالصيغه:

$$\frac{A}{(as+b)^r} \quad , \quad \frac{AS+B}{(as^2+bs+c)^r}$$

وبعد إيجاد تحويل لابلاس العكسي لكل كسر والجمع نحصل على التحويل العكسي للكسر $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$

مثال ذلك :

$$\frac{2S-5}{(3s-4)(2s+1)^3} = \frac{A}{3s-4} + \frac{B}{(2s+1)^3} + \frac{C}{(2s+1)^2} + \frac{D}{2s+1}$$

وكذلك:

$$\frac{3s^2-4s+2}{(s^2+2s+4)^2(s-5)} = \frac{As+B}{(s^2+2s+4)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+4} + \frac{E}{s-5}$$

وكمثال على ذلك لوطبقنا هذة الطريقة على المثال المذكور فى نظرية هفيسيد نجد أن :

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{s^3+3s^2+2s}\right\} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+2} = \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{5}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$\therefore L^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{s^3+3s^2+2s}\right\} = \frac{1}{2} - 2e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t}$$

<u>ملحوظة(1):</u> نلاحظ أن النتيجة واحدة بإستخدام طريقة هفيسيد والكسور الجزيئية.

<u>ملحوظة(2):</u> إذا أمكن حل مثألة بإستخدام طريقة هفيسيد فإنه يمكن حلها بإستخدام طريقة الكسور الجزيئية بينما العكس غير صحيح كما سنرى لاحقا فى أى مسألة لا تحقق شروط هفيسيد.

6- صيغة التحويل العكسي للمركب .

.

أمثلة

مقدمــــــــة : العدد $n!$ دالة للعدد n وهذه الدالة تعتبر حالة خاصة من الدالة المسماه دالة جاما $\Gamma(x)$. وفى الوقت الذى يكون فيه $n!$ معرفة فقط للاعداد الصحيحة الموجبه فإن $\Gamma(x)$ معرفة للأعداد الصحيحة والكسرية والسالبة والموجبة . وفى حالة x صحيح موجب

فإن $\Gamma(x+1)=n!$ وفى حالة $x=\frac{1}{2}$ فإن $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

وفى حالة n صحيح موجب فإن $n!=n(n-1)(n-2)$ 2.1

وفى الحالة العامة للدالة $\Gamma(x)$ نوجد صيغة مشابهة يوضحها المثال الأتى :

$$\Gamma(\frac{9}{2})=\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{105}{16}\sqrt{\pi}$$

1) أ- أوجد $\ell^{-1}\left\{\frac{5s+4}{s^3}-\frac{2s-18}{s^2+9}+\frac{24-30\sqrt{s}}{s^4}\right\}$

الحل

$$\ell^{-1}\{.......\}=\ell^{-1}\left\{\frac{5}{s^2}+\frac{4}{s^3}-\frac{2s}{s^2+9}+\frac{18}{s^2+9}+\frac{24}{s^4}-\frac{30}{s^{7/2}}\right\}$$

$$=5t+4(\frac{t^2}{2!})-2\cos 3t+18(\frac{1}{3}\sin 3t)+24\frac{t^3}{3!}-30(\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{7}{2})})$$

$$=5t+2t^2-2\cos 3t+6\sin 3t+4t^3-\frac{16}{\sqrt{\pi}}t^{5/2}$$

ب-أوجد $\ell^{-1}\left\{\frac{6}{2s-3}-\frac{3+4s}{9s^2-16}+\frac{8-6s}{16s^2+9}\right\}$

الحل

$$\ell^{-1}\{.......\}=\ell^{-1}\left\{\frac{3}{s-3/2}-\frac{1}{3}\,(\frac{1}{s^2-16/9})-\frac{4}{9}(\frac{s}{s^2-16/9})+\frac{1}{2}(\frac{1}{s^2+9/16})-\frac{3}{8}(\frac{s}{s^2+9/16})\right\}$$

$$=3e^{3t/2}-\frac{1}{4}\sinh\,\frac{4}{3}t-\frac{4}{9}\,\cosh\frac{4}{3}t+\frac{2}{3}\,\sin\frac{3}{4}t-\frac{3}{8}\cos\frac{3}{4}t$$

2) بتطبيق نظرية الأندماج أوجد كلا مما يأتى :

أ- $\ell^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$

الحل

- $$\ell^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{1}{s^2+a^2}\right\}$$

ولكن $\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}=\cos at\quad,\quad \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\}=\frac{\sin at}{a}$

$$\therefore\ \ell^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}=\frac{1}{a}\int_0^t\cos au\,\sin a(t-u)\,du$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^t\cos au(\sin at\cos au-\cos at\sin au)\,du$$

$$=\frac{1}{a}\,\sin at\int_0^t\cos^2 au\,du-\frac{1}{a}\,\cos at\int_0^t\sin au\cos au\,du$$

$$=\frac{1}{a}\,\sin at\int_0^t\frac{1+\cos 2au}{2}\,du-\frac{1}{a}\,\cos at\int_0^t\frac{\sin 2au}{2}\,du$$

$$=\frac{1}{a}\sin at\ (\frac{t}{2}+\frac{\sin 2at}{4a})-\frac{1}{a}\cos at(\frac{1-\cos 2at}{4a})$$

$$=\frac{1}{a}\sin at\ (\frac{t}{2}+\frac{\sin at\cos at}{2a})-\frac{1}{a}\cos at(\frac{\sin^2 at}{2a})$$

$$=\frac{t\ \sin\ at}{2a}$$

ب- $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\}$

الحل

- $$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t \quad ,\ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}=t\ \ e^{-t}$$

$$\therefore\quad \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2\ (s+1)^2}\right\}=\int_0^t u\ e^{-u}\ (t-u)\ du\ =\int_0^t e^{-u}\ (ut-u^2)\ du$$

وبعد إجراء التكامل بالتجزئ نحصل على :

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2\ (s+1)^2}\right\}=t\ e^{-t}+2\ e^{-t}+t-2$$

3) بتطبيق مفكوك هفيسيد أوجد : $\ell^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$

الحل

$$p(s)=3s+1\quad ,Q(s)=s^3-s^2+s-1\quad ,Q^{'}(s)=3s^2-2s+1$$

$$\alpha_1=1\quad ,\quad \alpha_2=i\quad ,\quad \alpha_3=-i$$

$$\ell^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\} = \frac{P(1)}{Q^{'}(1)}\ e^{t} \ + \frac{P(i)}{Q^{'}(i)}\ e^{it} \ + \frac{P(-i)}{Q^{'}(-i)}\ e^{-it}$$

$$= \frac{4}{2}\ e^{t} + \frac{3i+1}{-2-2i}\ e^{it} + \frac{-3i+1}{-2+2i}\ e^{-it}$$

تمـــــــاريـــــن

1) أوجد كلا مما يأتى :

أ- $\ell^{-1}\left\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\}$ ب- $\ell^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$

ج- $\ell^{-1}\left\{\frac{4s+12}{s^2+8s+16}\right\}$ د- $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2s+3}}\right\}$

2) إذا علم أن $\ell^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s^{\frac{1}{2}}}\right\} = \frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}$ فأوجد $\ell^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{a}{s}}}{s^{\frac{1}{2}}}\right\}$

3) طبق القاعدة $\ell^{-1}\left\{f^{(n)}(s)\right\} = (-1)^n\, t^n\, F(t)$........... لإيجـــاد

$$\ell^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$$

4) أوجد $\ell^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\}$

5) إستخدم القاعدة $\ell^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u)\, du$.......... لإيجـــاد

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\}$$

6) إذا علم أن $\ell^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right\}=\dfrac{1}{2}t\sin t$

فأوجد $\ell^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$

7) بإستخدام الكسور الجزيئية أوجد كلا مما يأتى :

أ- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$

ب- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\}$

ج- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\}$

د- $\ell^{-1}\left\{\dfrac{3s+1}{(s-1`)(s^2+1)}\right\}$

هـ - $\ell^{-1}\left\{\dfrac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right\}$

الفصل السادس

تطبيق تحويـــــــــل لابـــــــــلاس فى حل المعادلات التفاضلية العادية

المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات الثابتة :

يستخدم تحويل لابلاس فى حل هذا النوع من المعادلات . فمثلا إذا كان المطلوب حل المعادلة الخطية من الرتبة الثانية

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+\alpha\frac{dY}{dt}+\beta Y=F(t) \quad ,or\ Y''+\alpha Y'+\beta Y=F(t)..............................(1):$$

حيث α,β ثوابت وحيث يكون الحل محققا للشروط الابتدائية :

$$Y(0)=A \quad , \quad Y'(0)=B ....(2)$$

حيث A , B ثوابت معلومة . فإنه بأخذ تحويل لابلاس لطرفى المعادلة (1) وتطبيق الشروط (2) نحصل

غلى معادلة جبرية تتضمن الدالة $y(s)=\ell\{Y(t)\}$. ويصبح المطلوب هو إيجاد التحويل العكسى للدالة $y(s)$.

هذه الطريقة يمكن أيضا تطبيقها على معادلات من رتب أعلى من الرتبة الثانية كما سيتضح من الامثلة .

المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات النتغيره:

يستخدم تحويل لابلاس لحل بعض المعادلات من هذا النوع خاصه عندما تكون حدود المعادله بالصورة:

$t^mY^{(n)}(t)$ حيث يكون تحويل لابلاس لمثل هذا الحد هو:

$$(-1)^m\frac{d^m}{ds^m}\ell\{Y^{(n)}(t)\}$$

وسنري في التمارين امثله لهذا النوع.

المعادلات التفاضلية الأنيه:

يستخدم تحويل لابلاس لحل اثنين او اكثرمن المعادلات التقاضليه الأتيه كما سيتضح من الامثله .

المعادلات التفاضلية الجزيئيـــة:

يستخدم تحويل لابلاس كثيرا في حل المعادلات التفاضلية الجزيئية الخاضعة لشروط حديه ـــ اي في حل المسائل اي في حل المسائل الحدية .كما سنرى في الامثلة .

أمثــــــلة وتمـــــــــــاريـــــــن

1) أوجد حل المعادلة الاتية مع الشروط المذكورة.

$$Y'' + Y = t \quad , \quad Y(0)=1 \quad , \quad Y'(0)=-2$$

2) أوجد حل المعادلة الاتية مع الشروط المذكورة .

$$Y'' - 3Y' + 2Y = 4e^{2t} \quad , \quad Y(0)=-3 \quad , \quad Y'(0)=5$$

الحل

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين وبالتعويض بالشروط المعطاة نحصل على :

$$\ell\{Y''\} - 3\ell\{Y'\} + 2\ell\{Y\} = 4\,\ell\{e^{2t}\}$$

$$s^2 y - sY(0) - Y'(0) - 3[s\,y - Y(0)] + 2\,y = \frac{4}{s-2}$$

$$(s^2\,y - 3s - 5) - 3(sy + 3) + +2\,y = \frac{4}{s-2}$$

$$(s^2 - 3s + 2)\;y + 3s - 14 = \frac{4}{s-2}$$

$$y=\frac{4}{(s^2-3s+2)(s-2)}+\frac{14-3s}{(s^2-3s+2)}=\frac{-3s^2+20s-24}{(s-1)(s-2)^2}$$

$$y=\frac{-7}{s-1}+\frac{4}{s-2}+\frac{4}{(s-2)^2}$$

$$Y=-7e^{t}+4e^{2t}+4te^{2t}$$

3) أوجد حل المعادلة الاتية مع الشروط المذكورة.

$$Y''+2Y'+5Y=e^{-t}\sin t \quad , \quad Y(0)=0 \quad , \quad Y'(0)=1$$

4) أوجد حل المعادلة الاتية مع الشروط المذكورة .

$$Y'''-3Y''+3Y'-Y=t^2\ e^{t} \quad , \quad Y(0)=1 \quad , \quad Y'(0)=0 \quad , Y''(0)=-2$$

5) أوجد حل المعادلة الاتية مع الشروط المذكورة .

$$Y''+9Y=\cos 2t \quad , \quad Y(0)=1 \quad , \quad Y(\pi/2)=-1$$

الحل

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين وبالتعويض بالشروط المعطاة

وحيث أن $Y'(0)$ غير معلومة فلنفرض أن قيمته C نحصل على:

$$(s^2y-sY(0)-Y'(0))+9y=\frac{s}{s^2+4}$$

$$(s^2+9)y-s-c=\frac{s}{s^2+4}$$

$$y=\frac{s+c}{s^2+9}+\frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)}$$

$$y=\frac{s}{s^2+9}+\frac{c}{s^2+9}+\frac{s}{5\,(s^2+4)}-\frac{s}{5(s^2+9)}$$

$$y=\frac{4}{5}(\frac{s}{s^2+9})+\frac{c}{s^2+9}+-\frac{s}{5(s^2+4)}$$

$$Y=\frac{4}{5}\ \cos 3t\ +\ \frac{c}{3}\ \sin 3t\ +\ \frac{1}{5}\ \cos 2t$$

ولتحديد قيمة الثابت c نستخدم الشرط $Y(\frac{\pi}{2})=-1$ فنحصل على $c=\frac{12}{5}$ ومن ذلك ينتج أن :

$$Y=\frac{4}{5}\ \cos 3t\ +\ \frac{4}{5}\sin 3t\ +\frac{1}{5}\ \cos 2t$$

6) أوجد حل المعادلة الاتية مع الشروط المذكورة

$$Y''+a^2Y=F(t)\quad ,\quad Y(0)=1\quad ,\ Y'(0)=-2$$

الحل

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين وبالتعويض بالشروط المعطاة نحصل على :

$$(s^2y-sY(0)-Y'(0))+a^2\ y=\ell\{F(t)\}=f(s)$$

$$(s^2y-s+2)+a^2\ y=\ f(s)$$

$$y=\frac{s-2}{s^2+a^2}+\frac{f(s)}{s^2+a^2}$$

$$Y=\cos\ at-\frac{2}{a}\ \sin at+F(t)*\frac{\sin at}{a}$$

$$Y=\cos\ at-\frac{2}{a}\ \sin at+\frac{1}{a}\int_0^t F(u)\ \sin a(t-u)\ du$$

7) أوجد حل المعادلة الاتية مع الشروط المذكورة

$$tY^{''}+2Y^{'}+tY=0 \quad , \quad Y(0)=1 \quad , \quad Y(\pi)=0$$

الحل

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين وبالتعويض بالشروط المعطاة نحصل على :

نفرض أن $Y^{'}(0)=c$ وبأخذ تحويل لابلاس ينتج أن :

$$-\frac{d}{ds}(s^2y-sY(0)-Y^{'}(0))+2(sy-Y(0))-\frac{dy}{ds}=0$$

$$-s^2y^{'}-2sy+1+2sy-2-y^{'}=0$$

$$-(s^2+1)y^{'}-1=0 \qquad or \quad y^{'}=\frac{-1}{s^2+1}$$

وحل هذه المعادلة $y=-\tan^{-1}s+A$

ولكن من خاصية القيم النهائية نجد أن $y\to 0\ \ as\ \ s\to\infty$

وينتج عن هذا أن $A=\frac{\pi}{2}$ أن :

$$\therefore Y(t)=\frac{\sin\ t}{t}$$

$$y=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s=\tan^{-1}\frac{1}{s}=\int_{s}^{\infty}\frac{du}{u^2+1}=\ell\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$$

واضح أن هذه الدالة تحقق الشرط : $Y(\pi)=0$ لذا فهى الحل المطلوب .

8) أوجد حل المعادلتين الانيتين الاتيتين مع الشروط المذكورة

$$\frac{dX}{dt}=2X-3Y \qquad , \qquad X(0)=8$$

$$\frac{dY}{dt}=Y-2X \qquad , \qquad Y(0)=3$$

الحل

بأخذ تحويل لابلاس لطرفى المعادلتين وبالتعويض بالشروط المعطاة نحصل على :

بفرض **أن** $\ell\{Y\}=y$, $\ell\{X\}=x$ فيكون

$$s\,x-8=2x-3 \qquad or \quad (s-2)\,x+3y=8$$

$$s\,y-3=y-2 \qquad or \quad 2\,x+(s-1)\,y=3$$

وبحل هاتين المعادلتين الجبريتين بالنسبة إلى y , x ينتج أن :

$$x=\frac{\begin{vmatrix}8 & 3\\ 3 & s-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s-2 & 3\\ 2 & s-1\end{vmatrix}}=\frac{8s-17}{s^2-3s-4}=\frac{8s-17}{(s+1)(s-4)}=\frac{5}{s+1}+\frac{3}{s-4}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}s-2 & 8\\ 2 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s-2 & 3\\ 2 & s-1\end{vmatrix}}=\frac{3s-22}{s^2-3s-4}=\frac{3s-22}{(s+1)(s-4)}=\frac{5}{s+1}-\frac{2}{s-4}$$

$$\therefore \; X = \ell^{-1}\{x\} = 3e^{-t} + 3e^{4t}$$

$$Y = \ell^{-1}\{y\} = 5e^{-t} - 2e^{4t}$$

9)أوجد حل المعادلتين الانيتين الاتيتين مع الشروط المذكورة

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{dY}{dt} + 3X = 15\, e^{-t} \qquad X(0) = 35 \qquad , \; X'(0) = -48$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} - 4\frac{dX}{dt} + 3Y = 15\sin 2t \qquad Y(0) = 27 \qquad Y'(0) = -55$$

تطبيقات على المعادلات التفاضلبة الجزئية

يستخدم تحويل لابلاس كثيرا فى حل المعادلات التفاضلية الجزئية الخاضعة لشروط حدية ------ أى فى حل المسائل الحدية كما سنرى فى الأمثلة .

نفرض أن $U(x,t)$ دالة فى المتغيرين x,t حيث $t \ge 0$, $0 \le x \le b$
ونفرض أن $u(x,s)$

هى تحويل لابلاس للدالة $U(x,t)$ بالنسبة إلى t أى أن :

$$u(x,s) = \ell\{U(x,t)\} = \int_0^\infty U(x,t)\; e^{-st}\; dt$$

بالنسبة للمشتقات الجزئية للدالة $U(x,t)$ فإن :

$$\ell\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \int_0^\infty \frac{\partial U}{\partial t}\, e^{-st}\; dt$$

$$= -s\ e^{-st}\ U(x,t)\ \Big|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} U(x,t)\ e^{-st} dt$$

$$= s\,u(x,s) - sU(x,0)$$

كذل $\ell\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{\partial U}{\partial x}\ e^{-st}\ dt \quad = \frac{d}{dt}\int_0^{\infty} U(x,t)\ e^{-st}\ dt \quad = \frac{dU}{dx}$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن :

$$\ell\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = s^2\,u(x,s) - s\,U(x.0) - U_t(x,0)$$

كذلك $\ell\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \frac{d^2 u}{dx^2}$

أمثـــــلة وتماريـــــــن

1) أوجد حل المعادلة الأتية مع الشروط المذكورة :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2\,\frac{\partial U}{\partial t} - U \qquad U(x,0) = 6\,e^{-3x} \qquad , \qquad |U(x,t)| < M$$

2) أوجد حل المعادلة الأتية مع الشروط المذكورة:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad U(x,0) = 3\ \sin 2\pi x \qquad , \qquad U(0,t)=0 \quad ,U(1,t)=0 \quad ,0<x<1$$

1) أوجد حل المعادلة الأتية مع الشروط المذكورة:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - 4\ \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + Y = 16x + 20\sin x$$

بالشــروط:

$$Y(0,t) = 0 \quad ,Y(\pi,t)=16\,\pi \quad ,Y_t(x,0)=0$$

$$Y(x,0) = 16\ x + 12\sin 2x - 8\sin 3x$$

===============

حل التمرين (3)

بأخذ تحويل لابلاس ينتج أن :

$$s^2 y - sY(x,0) - Y_t(x,0) - 4\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \frac{16x}{s} + \frac{20\sin x}{s} \qquad (1)$$

وبالتعويض من $Y(x,0) \quad ,Y_t(x,0)$ ينتج أن :

$$s^2 y - 16s\,x - 12\sin 2x + 8\,s\,\sin 3x - 4\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \frac{16x}{s} + \frac{20\sin x}{s}$$

والتى يمكن وضعها فى صورة معادلة تفاضلية عادية غير متجانسة بالشكل:

$$4\frac{d^2 y}{dx^2} - (s^2+1)\,y = -16s\,x - 12s\sin x - 8\sin 3x - \frac{16}{s}x - \frac{20\sin x}{s} \qquad (2)$$

والتى تحقق الشروط :

$$Y(0,t) = 0 \quad ,Y(\pi,t) = 16\pi \qquad (3)$$

الحل الخاص للمعادلة (2) يكون على الصورة :

$$y_p = a\,x + b\sin x + c\sin 2x + d\sin 3x$$

وبالتعويض من هذا فى المعادلة (1) نحصل على الثوابت a, b, c, d ويصبح الحل الخاص هو :

$$y_p = \frac{16x}{s} + \frac{20\sin x}{s(s^2+5)} + \frac{12\,s\,\sin 2x}{s^2+17} - \frac{8s\sin 3x}{s^2+37} \qquad (4)$$

والحل التكميلى (أى حل المعادلة المتجانسة هو):

$$y_c = c_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\,x} + c_2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\,x} \qquad (5)$$

أما الحل العام فهو :

$$y = y_p + y_c \qquad (6)$$

وبالتعويض من الشروط (3) فى المعادلة (6) ينتج أن :

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad , c_1\, e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}} + c_2\, e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\ x} = 0$$

ومن هذا نجد أن: .... $c_1 = 0 \quad , c_2 = 0$

$$\therefore\ y = \frac{16x}{s} + \frac{20\sin x}{s(s^2+5)} + \frac{12s\ \sin 2x}{s^2+17} - \frac{8s\sin 3x}{s^2+37}$$

وبإجراء التحويل العكسى ينتج أن :

$$Y(x,t) = 16x + 4\sin x(1-\cos\sqrt{5}\ t) + 12\sin 2x\cos\sqrt{17}\,t - 8\sin 3x\cos\sqrt{37}\,t$$

==