جامعة جنوب الوادى

كلية التربية بالغردقة

الفرقة الرابعة عام رياضيات

المادة : تطبيقية 9 (ميكانيكا الكم)

إستاذ المادة / د. محمد محمد عبد العزيز

الفصل الدراسى الأول 2023-2024

محاضرات في تطبيقية 9
طلاب الفرقة الرابعة عام-رياضيات
الفصل الدراسي الأول 2022-2023

إعداد
د. محمد الصغير عطيتو

٢٨ سبتمبر ٢٠٢٢

المحتويات

١ صياغة ديراك لميكانيكا الكم **٥**
١.١ متجهات الكيت ١٧
٢.١ الضرب القياسي: متجه "برا" ٢٢
٣.١ المؤثرات الخطية ٣٨
٤.١ المؤثرات الهرميتية ٥٢
٥.١ أمثلة ٥٣
٦.١ مسائل القيم الذاتية ٥٨
٧.١ نظريات ٦٣

٢ كمية الحركة الزاوية، حركة الإلكترون المغزلية **٧٩**
١.٢ القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لكمية الحركة الزاوية . ٧٩

باب ١

صياغة ديراك لميكانيكا الكم

أن فشل الميكانيكا الكلاسيكية في تفسير كثير من الظواهر الفيزيائية كاستقرار الذرة والمادة، إشعاع الجسم الأسود، الحرارة النوعية للمواد الصلبة، ازدواجية الموجة-جسيم للضوء والجسيمات المادية وهكذا،أد إلى ملاحظة الفيزيائيين أن الأفكار الكلاسيكية غير كافية بشكل واضح لوصف السلوك الفيزيائي للأحداث التي تحدث في نطاق المقياس الذري. ولتفسير وشرح هذه الظواهر، فإن التحول من الميكانيكا الكلاسيكية اصبح واجبا

جتميا. هذا التحول يأخذ صورة فرض، كقانون أساسي للطبيعة، أن هناك حدود للدقة التي يتم من خلالها قياس او ملاحظة النظام الفيزيائي. بمعنى آخر، أن عملية القياس نفسها تعمل على ازعاج او اضطراب غير منضبط أو لا يمكن التحكم به للنظام الذي يتم قياسه، بصرف النظر عن العناية، المهارة او عبقرية القائم بالقياس. بالتالي، فإن هذا الاضطراب الناتج من عملية القياس يستلزم تعديل قوانين السببية الكلاسيكية، لأنه في السياق الكلاسيكي، يوجد هناك رابط سببي بين النظام وعملية القياس. هذا المفهوم يؤدي إلى نظرية من خلالها مكن فقط توقع احتمال الحصول على نتيجة معينة عندما نقوم بعملية القياس على أي نظام بدلا من قيمة معينة مضبوطة كما في الحالة الكلاسيكية.

من العرض السابق نجد أنه يجب احتواء الميكانيكا الكلاسيكية كمرحلة نهاية لميكانيكا الكم، بمعنى، أنه إذا تم اهمال الضطراب الناتج من عملية القياس او الملاحظة، فإننا نجد أن الميكانيكا الكلاسيكية صالحة وتتحقق. أي أن الوصف الكمي للنظام يجب أن ينحرف للوصف الكلاسيكي عند تلك النهاية او ذلك الحد الفاصل، والذي يعني ان النظام الكمي له نظير كلاسيكي. هذا المعنى الاخير اصطلح عليه اختصارا مبدأ التناظر والذي يقيد الصيغ الممكنة التي تنتهجها ميكانيكا الكم.

في الجزء التالي سوف نقدم محاولة بسيطة لصياغة ديراك لميكانيكا الكم غير النسبية. للتسهيل سوف نتقيد بمسائل البعد الواحد، في الغالب، حيث أن

التعميم للأبعاد الثلاث هو عملية سهلة وعلى نفس المنهاج.

تشمل صياغة ديراك فكرة المتجهات (والمؤثرات) في فراغ له عدد محدود او لا محدود من الأبعاد. لكي تكون الفكرة واضحة اكثر دعنا نأخذ مثل بسيط للطريقة التي يمكن لتلك المتجهات يمكن أن تصاغ بها في هذه النظرية. إعتبر جسيم له كتلة m مقيد للحركة في جهد $V(q)$، وحيد البعد، جيث q تمثل إحداثي الجسيم والذي يأخذ أي قيم من من $-\infty$ إلى $+\infty$، أي ان الجسيم يمكن أن يتواجد في أي مكان في الفراغ أحداي البعد. تبعا لصياغة شرودنجر للميكانيكا الموجية، توصف حالة الجسيم عند زمن t بالدالة الموجية الممثلة بمتجة الموضع ، $\psi(q,t)$.

إذا لم يحدث تداخل لأي عملية قياس، هذه الحالة للجسيم تتطور زمنيا بشكل تام بطريقة سببية من الحالة عند الزمن t_0, $\psi(q, t_0)$، وذلك طبقا لفرض شرودنجر للدالة الموجية:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q)\right]\psi(q,t) = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad (١٠١)$$

حيث $\hbar$ هو ثابت بلانك مقسوما على 2π. التفسير الاحتمالي (والذي هو ضروري عندما تتم عملية القياس لتحديد موضع الجسيم) للدالة $\psi(q,t)$ يمكن توضيحه كالتالى: $|\psi(q,t)|^2 dq$ يعطي احتمال تواجد الجسيم بين q و $q + dq$ عند لحظة زمنية t عندما تتم عملية قياس الموضع.

إذا اخذنا تحويل فوريه للدالة $\psi(q,t)$ للحصول على دالة موجية اخرى

$$\phi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(q,t) e^{-ipq/\hbar} dq \quad (١٠٢)$$

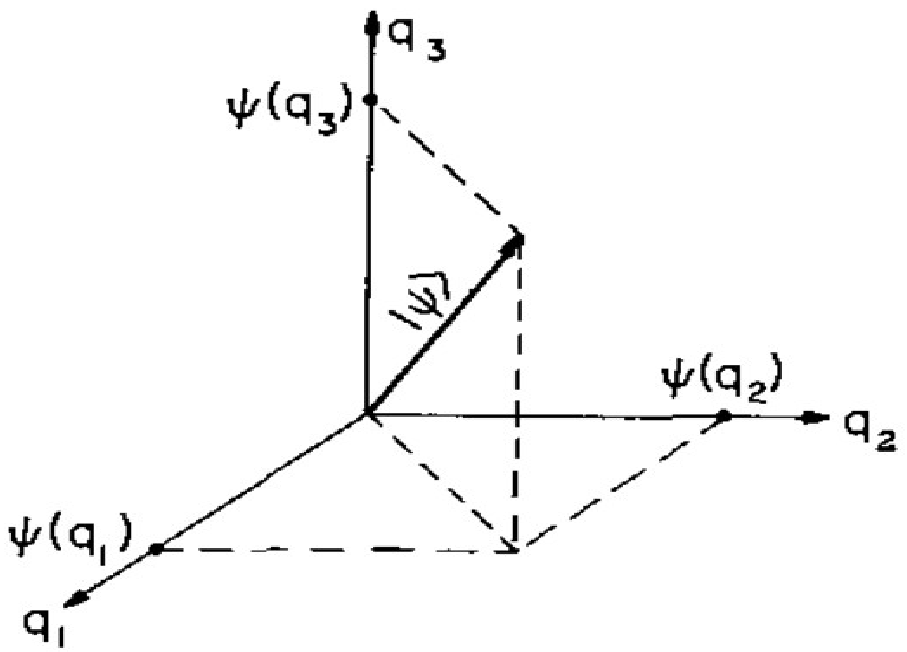
تسمى الدالة الاخيرة بدالة الموجية في تمثيل كمية الحركة.، حيث p تمثل كمية حركة الجسيم، والتي تتحدد تماما من خلال الدالة الموجية $\psi(q,t)$، والتي تمثل حالة النظام عند اللحظة الزمنية t. لذلك من المقبول والمنطقي أن نقول أن $\phi(p,t)$ تمثل نفس الحالة الديناميكية كالدالة $\psi(q,t)$. انها فقط طريقة أخرى لوصف الحالة. بالنسبة للدالة الموجية بدلالة كمية الحركة، يكون التفسير الاحتمالي أن $|\phi(p,t)|^2 dp$ يعطي الاحتمال لقياس كمية الحركة للجسيم بقيمة بين p و $p+dp$.

إن النظرية يمكن تتطور كليا بطريقة مكافئة في أي من التمثيلين الموضعي او كمية الحركة. في الحقيقة، يلعب التمثيل دورا مشابها للاحداثيات في الهندسة. ولأن، في الهندسة العادية، يمكن حل المسألة ببواسطة المتجهات، بدون استخدام نظام الاحداثيات (وبتعميم أكثر)، من المثير طرح سؤال عما إذا كانت ميكانيكا الكم يمكن صياغتها بدون استخدام أي نوع تمثيل خاص. النتائج ستكون مستقلة تماما عن أي تمثيل خاص عندئذ. الميزة الواضحة لاستخدام التمثيل بتلك الصياغة لن يتم فقدها، على أي حال. إن التمثيل المناسب الذي يمكن استخدامه دائما لأداء عملية حساب مثل نظام الاحداثيات يمكن اختياره عند استخدام المتجهات.

هذا هو الهدف من صياغة ديراك للميكانيكا الكمية: لكي نطور النظرية بعيد عن أي تمثيل محدد.

لكي نرى كيف نتقدم بخصوص هذا البرنامج، دعنا نحاول إعطاء تفسير هندسي للدالة الموجية $\psi(q)$ عند لحظة زمنية t مستثمرين ميزة فكرة المتجهات. إن الاحداثي q يمكن ان يأخذ أي قيمة من $-\infty$ إلى $+\infty$، كما نوهنا سابقا. لاي قيمة محدد، مثلا $q_1, q_2, q_3, \ldots$، تكون للدالة الموجية القيم $\psi(q_1), \psi(q_2), \psi(q_3), \ldots$. لنتخيل أن فراغ لانهائي الاحداثيات له مجموعة من المحاور المتعامدة مثنى مثني لكل منها لاحقة بواحدة من القيم $q(q_1, q_2, q_3, \ldots)$، وأن $\psi(q_1)$ تمثل مسقط متجه ما على المحور q_1 و $\psi(q_2)$ تمثل مسقط نفس المتجه

على المحور q_2، وهكذا. إذن في هذه الحالة فإن المتجه يمثل حالة النظام



شكل ١٠١: متجه "كيت" وإحداثيات الموضع الثلاثة الممثلة له

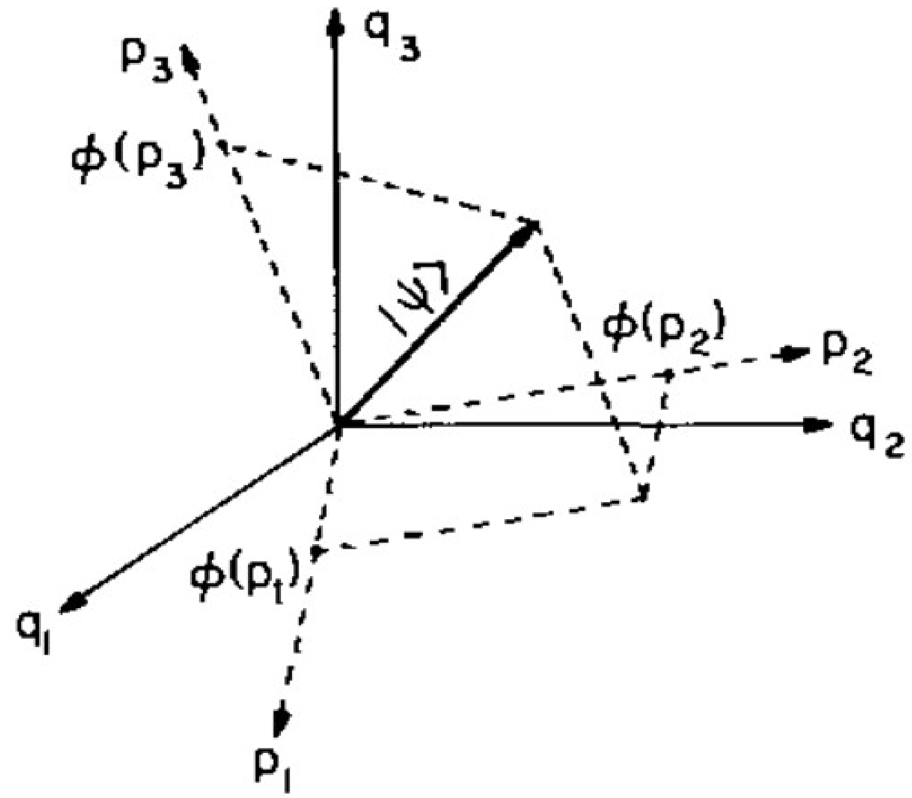
بالضبط كما تفعل مركباته. لاحظ أن هذا المتجه ليس متجها عاديا لأن

له صبغة مركبة، لذلك يجب علينا أن يكون لدينا صيغة خاصة لتصميمه،

تمام كالتي نفعل مع المتجهات العادية. استخدم ديراك الرمز ⟨ | لتصميم

او التعبير عن هذا النوع من المتجهات واطلق عليه لفظ "متجه كيت"، او اختصارا "كيت"، للتعبير عنه من خلال المتجهات العادية. تبعا لهذا، فإنه لمتجه معين مركباته هي $\psi(q_1), \psi(q_2), \ldots$ يطلق عليه "كيت ψ " ويكتب في الصورة $|\psi\rangle$. الشكل (1.1) يعرض رسم تخطيطي للمتجه $|\psi\rangle$ ومركباته من خلال محاور متعامدة مثنى مثنى كما وصفنا سابقا. بالمثل، إذا كان $\mathbf{A}$ متجها عاديا و (x, y, z) تمثل إحداثياته الكارتيزية، كما نعلم فإن المتجه $\mathbf{A}$ يمكن تعيينه عن طريق تعيين مركباته على تلك المحاور: $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$، أي أن المتجه A يمكن تمثيله من خلال مركباته. بالمثل، $|\psi\rangle$ يمكن تحديده من خلال تحديد مركباته على محاور q المتعامدة: $|\psi\rangle = [\psi(q_1), \psi(q_2), \psi(q_3), \ldots]$.

لذلك فإن المتجه $\mathbf{A}$ يمثل المتجه تماما كما تفعل مركباته خلال محاور معينه، كذلك $|\psi\rangle$ تمثل حالة النظام كما تفعل مركباتها. إن المتجه في هذه الحالة يقال أنه معطى بتمثيل متجه الموضع. أيضا كما نعلم أن المتجه $\mathbf{A}$ يمكن تعيينه من خلال مركباته في نظام إحداثيات كارتيزي آخر (x', y', z') من خلال دورانه بالنسبة لنظام الاحداثيات (x, y, z): $\mathbf{A} = (A_{x'}, A_{y'}, A_{z'})$. كذلك أيضا، $|\psi\rangle$ يمكن التعبير عنها من خلال تمثيل آخر: $|\psi\rangle = [\phi(p_1), \phi(p_2), \phi(p_3), \ldots]$. وهذا يطلق عليه تمثيل كمية الحركة وينظر إليه على أنه مركبات نفس المتجه من خلال مجموعة محاور متعامدة جدث لها دوران، كما هو موضح في شكل (١٠٢). هذه العلاقة بين q و p تعطي من خلال تحويل فوريه.



شكل ١.٢: متجه "كيت" وإحداثيات كمية الحركة الثلاثة الممثلة له

١٠١ متجهات الكيت

كما نوهنا من قبل، سمى المتجهات المعبر عنها بالرمز $|a\rangle, |x\rangle$، متجه "كيت". إن متجه "كيت" في الصورة العامة يعرف بالرمز $|\ \rangle$، حيث أن اللاحقة داخل القوس تعبر عن الحالة التي صمم من أجلها متجه "كيت". من خلال الوصف السابق، يصاحب كل متجه "كيت" حالة للنظام الديناميكي تحت الدراسة. وحيث أنه سوف نتبع الفرض أن التركيبة الخطية من عددة حالات للنظام تمثل أيضا حالة من حالات النظام، فإن متجه "كيت" يجب ان يكون متجه خطي في الفراغ. المتجه في فراغ ما يسمى خطيا بالوصف التالي. إذا كان c_1 و c_2 أعداد مركبة و $|a\rangle$ و

$|b\rangle$ يمثلات زوج من "كيت، فإن التركيبة الخطية منهما تمثل أيضا متجه "كيت"، وذلك لأن التركيبة الخطية من حالتين مصاحبتين

$$|u\rangle = c_1|a\rangle + c_2|b\rangle \tag{١.٣}$$

$|a\rangle$ and $|b\rangle$ هي حالة أيضا من حالات النظام. إذا اعتمد متجه "كيت" على بارامتر q'، والذي يأخذ اي قيمة في مدى معين $q'_1 \leq q' \leq q'_2$، يمكننا تعميم المعادلة (١.٣) في الصورة

$$|v\rangle = \int_{q'_1}^{q'_2} c(q')|q'\rangle dq' \tag{١.٤}$$

حيث $c(q')$ تمثل دالة عادية مركبة في المتغير q' والمتجه $|v\rangle$ في فراغ ال "كيت". إن متجهات "كيت" كالمتجه $|u\rangle$ (و $|v\rangle$) تسمى مرتبطة

خطيا بالمتجه $|a\rangle$ و $|b\rangle$ (or $|q'\rangle$)). إذا، في حالة مجموعة متجهات "كيت" معينة، لم نستطع التعبير عن أي منهم كتركيبة خطية من الأخرين، يطلق عليها في هذه الحالة أنها مجموعة مستقلة خطيا.

بالرغم من أن مبدأي التركيب الكلاسيكي والكمي مختلفين، كما سنرى لاحقا، إلا أننا يمكننا عن طريق التشابه بينهما أنه، إذا كان $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, و $\mathbf{k}$ ثلاث متجهات وحدة متعامدة مثنى مثنى في الفراغ العادي، فإن أي متجه آخر يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية من متجهات الوحدة تلك، أي أن، أي متجه ثابت آخر $\mathbf{A}$ يمكن كتابته في الصورة $\mathbf{A} = c_1\mathbf{j} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$. من ناحية أخرى، $\mathbf{i}$ لا يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية من $\mathbf{J}$ و $\mathbf{k}$ والذي يسمى مستقل خطيا عن كل من المتجهين $\mathbf{j}$ و

.k

هناك فرض آخر في النظرية وهو أنه أذا كان هناك حالة تمثل تركيبة خطية من نفسها، النتيجة الجديدة لا تمثل متجه حالة جديدة ولكن فقط الحالة الأصلية مرة أخرى، أي أنه عندما يضاف كلا من $c_1|a\rangle$ و $c_2|a\rangle$، حيث c_1 و c_2 تمثلان عددين مركبين اختياريين، تكون النتيجة كالتالي:

$$c_1|a\rangle + c_2|a\rangle = (c_1 + c_2)|a\rangle \qquad (١٠٥)$$

و كل متجهات "كيت" $c_1|a\rangle$, $c_1|a\rangle$, $(c_1 + c_2)|a\rangle$ تمثل نفس الحالة للنظام، باستثناء الحالة $c_1 + c2 = 0$، والتي تناظر "أنه لا يوجد

حالة مطلقا". لذلك، فإن الحالة تعين بشكل كامل باتجاه متجه "كيت".

يمكننا استنتاج أن $|a\rangle+$ and $|a\rangle-$ تمثل نفس الحالة للنظام. لذلك، هناك تناظر احداي بين حالة النظام واتجاهه من خلال متجه "كيت" في الفراغ. هذا الفرض يمثل تحولا من الميكانيكا الكلاسيكية ويوضح أن مبدأي التركيب الكمي والكلاسيكي مختلفين فعلا.

إن متجه "كيت" له عدد محدو أو لا جدود من أبعاد الفراغ. تلك البعدية تتعين من خلال عدد متجهات "كيت" المستقلة خطيا في الفراغ. ولأن الحالات المستقلة لنظام كمي يمكن تمثيلها بمتجه "كيت" مستقل، تحدد البعدية بعدد حالات النظام الكمي المستقلة.

١٠٢ الضرب القياسي: متجه "برا"

لقد قدمنا لمتجهات "كيت" في فراغ المتجهات الخطي المجرد بالعبارة "مسقط مجموعة معطاه من المحاور المتعامدة في فراغ لانهائي الأبعاد يعطي قيم الدالة الموجية $\psi(q,t)$ بتمثيل الموضع عند اللحظة الزمنية t.

إن التعريف الأساسي لمتجهات "كيت" أن الاتجاه في فراغ "كيت" وكذلك كل حالة للنظام يرتبطان بتناظر احادي.

في دراسة تحليل المتجهات العادية، نعرف الضرب القياسي للمتجهين $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ كالتالي: لكل متجهين $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ في الفراغ، يوجد عدد حقيقي

مصاحب f، يمكن كتابته في الصورة

$$\mathbf{f} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \qquad (١٠٦)$$

إذن من العلاقة السابقة تم تعريف الضرب القياسي لمتجهين، لن العدد المصاحب لي زوج من المتجهات قد تم تحديده. هذا التعريف يبدو غريبا من الوهلة الأولى ولكن بنظرة عكسية بسيطة نرى أنه يتبين أنه تعريف اكثر عمومية من أي صيغ يمكننا أعطائها لإيجاد عدد $\mathbf{f}$، لأي زوج معطى من المتجهات $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$. فقط هناك صيغة وحيدة هي $f = |A||B| \cos\theta$، حيث يمثل المعاملين الأولين قيم المتجين $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ وتمثل الزاوية θ الزاوية بينهما. أما الطول نفسه فيعرف فقط بدلالة

الضرب القياسي للمتجه في نفسه، ولهذا لا تخدم الصيغة كتعريف فعال للضرب القياسي، بالرغم من أهميتها في العملية التدريبية.

باكثر عمومية، يهتم الضرب القياسي لمتجه معين B بكل المتجهات الاخرى A في الفراغ كوسيلة لتعريف المتجه B. إذا اعطيت مجموعة الأعداد $f(\mathrm{B})$ لكل المتجهات A، فإن المتجه B اصبح محددا. في الفراغ الثلاثي، من الكافي أن نأخذ للمتجه A متجهات الوحدة الثلاث **i**, **j** و **k**، والتي هي مستقلة خطيا، ثم نقوم بتعريف المتجه B بإعطاء حاصل الضرب القياسي له بكل منها. أي أن

$$\boldsymbol{B}_x = \mathbf{B}\cdot\mathbf{i}, \qquad \mathrm{B}_{\mathrm{y}} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{j}, \qquad \mathrm{B}_{\mathrm{z}} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{k}, \quad (١.٧)$$

حيث الأعداد الثلاث B_x, B_y و B_z تعرف المتجه B.

من المعلوم أنه من فروض نظرية المتجهات العادية أن الدالة $f(\mathrm{B})$ هي دالة خطية في المتجه B. هذا يعني أنه، إذا كان B_1 و B_2 متجهين فإن:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_1 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_2 \qquad (١.٨)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{cB}) = \mathbf{c}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \qquad (١.٩)$$

حيث c هو عدد. اصبح الآن واضحا أن الاعداد $f(\mathrm{B})$ يمكن اعتبارها دالة في المتجه B وذلك لأن لكل متجه $\mathbf{A}$ يوجد عدد $f(\mathrm{B})$. هذا

هو ما عني بالتعبير دالة $\phi(x)$ في متغير متصلx: لكل x يوجد عدد مصاحب $\phi(x)$.

بعد هذه المقدمة، نعرف الضرب القياسي لمتجهات "كيت" في الصورة الآتية: لكل "كيت" $|a\rangle$ عدد مركب مصاحب f. لاحظ في الأمثلة السابقة كانت الأعداد حقيقية ولكن متجهات "كيت" تمثل حالة أكثر عمومية من صور المتجهات في الفراغ العادي. الآن، مجموعة الأعداد المصاحبة لمتجهات "كيت" المختلفة $|a\rangle$ تكون دالة في " كيت $|a\rangle$. هذه الدالة يجب أن تكون دالة خطية، والذي يعني أن $|a_1\rangle$ و $|a_2\rangle$ تمثلان زوج من "كيت"، لها العدد المصاحب لكل من $|a_1\rangle$ و $|a_2\rangle$ يكون مجموع الأعداد المصاحبة لمتجهات "كيت $|a_1\rangle$ و $|a_2\rangle$ بشكل

منفصل، والعدد المصاحب لمتجه " كيت $\langle a|c$، حيث c يكون عددا

مركبا، يكون مضاعفات c مرة العدد المصاحب لمتجه " كيت $\langle a|$، أي

أن

$$f(|a_1\rangle + |a_2\rangle) = f(|a_1\rangle) + f(|a_2\rangle) \qquad (١.١٠)$$

$$f(c|a_1\rangle) = cf(|a_1\rangle) \qquad (١.١١)$$

لقد اطلق ديراك على المتجهات المعرفة بالرمز | 〉 إسم متجه "برا". من

هنا يمكننا وصف الضرب القياسي لمتجهي "برا" $\langle f|$ و "كيت" $|a\rangle$ في

الصورة

$$f(|a\rangle) = \langle f|a\rangle \qquad (١٠١٢)$$

إذا أعطينا كل الأعداد f لكل متجه "كيت $|a\rangle$، إذا فقد عرفنا متجه "برا $\langle f|$. إن فراغ متجهات "برا" يختلف عن فراغ متجهات "كيت". إن التعريف هنا أكثر عمومية، لأن f ربما يكون عدد مركب في المعادلة (١٠١٢).

عندما نستخدم الضرب الاتجاهي كما في المعادلة (١٠١٢)، يمكننا كتابة المعادلتين (١٠١٠ و ١٠١١ في الصور

$$\langle f|(|a_1\rangle + |a_2\rangle) = \langle f|a_1\rangle + \langle f|a_2\rangle \qquad (١٠١٣)$$

$$\langle f|(c|a_1\rangle) = c\langle f|a_1\rangle \qquad (١٠١٤)$$

وحيث أن متجه "برا" يعرف بواسطة ضربه القياسي بمتجه "كيت"، فإن $\langle b| = 0$ إذا تحقق $\langle b|a\rangle = 0$ لكل متجه "كيت" $|a\rangle$. بالمثل، $\langle b_1| = \langle b_2|$ إذا تحقق $\langle b_1|a\rangle = \langle b_2|a\rangle$ لكل $|a\rangle$. أما مجموع زوج من "برا" فيعرف بضرب القياسي بمتجه "كيت $|a\rangle$. لذلك

$$(\langle b_1| + \langle b_2|)|a\rangle = \langle b_1|a\rangle + \langle b_2|a\rangle \qquad (١٠١٥)$$

$$(c\langle b_1|)|a\rangle = c\langle b_1|a\rangle \qquad (١٠١٦)$$

لذلك فقد عرفنا متجهات "برا" فقط بدلالة ضربها القياسي بمتجهات "كيت"، ولهذا لا توجد علاقة محددة بينهما. لكي نعطي علاقة ربط بينهما، دعنا نفرض الآتي: لكل متجه "كيت" يوجد متجه "برا" وحيد مصاحب بطريقة وحيدة، أي تناظر احادي بين متجهات "كيت" و "برا". لذلك فمن المقبول أن نعطي متجه "برا" نفس اللاحقة مثل متجه "كيت" المصاحب له. لذلك المتجه $|a\rangle$ هو متجه "برا" المصاحب لمتجه "كيت" $\langle a|$. بالمثل، مع متجه "كيت"

$$|u\rangle = |a\rangle + |b\rangle \qquad (١٠١٧)$$

يوجد متجه "برا " مصاحب

$$\langle u| = \langle a| + \langle b| \qquad (١.١٨)$$

كذلك مع متجه "كيت"

$$|v\rangle = c|a\rangle \qquad (١.١٩)$$

حيث c عدد مركب، يوجد متجه "برا" مصاحب

$$\langle v| = c^* \langle a| \qquad (١.٢٠)$$

جيث c^* المرافق المركب للعدد c. لذلك من المعقول أن نطلق على متجه "برا" المصاحب لمتجه "كيت" أنه "المرافق الهرميتي" والعكس بالعكس

ويمكننا كتابة

$$\langle u| = (|u\rangle)^{\dagger}, \qquad |u\rangle = (\langle u|)^{\dagger}, \qquad (١.٢١)$$

حيث رمز الخنجر ويقرأ "داجر" تعني أن متجه "برا" تم تغييره إلى متجه "كيت" المصاحب له والعكس بالعكس، كما أن المرافق الهرميتي لأي أعداد مركبة تم شمولها بالصيغة السابقة.

لاحظ أنه، طبقا للفرض بوجود تناظر أحداي بين متجهات "برا" و "كيت"، فإن اتجاه متجه "برا" يمثل حالة النظام الكمي أيضا كما هو الحال في اتجاه متجه "كيت". يطلق عليهما في هذه الحاله انهما زوج لكل منهما الآخر.

حتى الآن لم نقوم بتعريف طول متجهي "كيت" أو "برا". لننجز ذلك دعنا نعتبر زوج من متجهات "كيت" $|a\rangle$ و $|b\rangle$ حيث زوج متجهات "برا" المصاحب هما $\langle a|$ و $\langle b|$. من ذلك الزوج من المتجهات يمكننا تكوين اربع أعداد هي $\langle a|b\rangle$، $\langle b|a\rangle$, $\langle a|a\rangle$ و $\langle b|b\rangle$. بشكل عام الأعداد $\langle a|b\rangle$ و $\langle b|a\rangle$ ستكون مركبة، يمكن أضافة فرض أنها ترتبط بالعلاقة التالية

$$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^* \qquad (١٠٢٢)$$

حيث علامة النجمة "*" تعني المرافق المركب مستقبلا. بهذا الفرض، إذا وضعنا $|a\rangle = |b\rangle$ بالتالي نستنتج أن $\langle a|a\rangle$ هو عدد حقيقي. إذن

يمكن تعريف الطول أو "مقياس" متجه "كيت" $|a\rangle$ بالمقدار $\langle a|a\rangle$،

لاحظ أن الفرض بالمعادلة (١.٢٢) هو شرط ضروري لكي يكون

لمتجهات "كيت" مقياس حقيقي. من الآن فصاعدا سيكون الفرض أن

طول او مقياس المتجه المعني يجب أن يكون موجبا أو صفرا، أي أن

$$\langle a|a\rangle \geq 0 \qquad (١.٢٣)$$

حيث أن تلك المعادلة تتحقق فقط إذا كان $|a\rangle = 0$.

إن الفروض في المعادلات (١.٢٢) و (١.٢٣) يمكن أن تعطى كحافز

او دافع لاعتبار الدالة الموجية $\psi(q,t)$ ومرافقها المركب $\psi^*(q,t)$.

يمكننا ان ننظر إلى الدالة الموجية $\psi(q,t)$ كمركبة للمقدار $|\psi\rangle$ في

فراغ متجه "كيت". بالمثل يمكننا النظر إلى المرافق المركب للدالة الموجية $\psi^*(q,t)$ كمركبة للمقدار $\langle\psi|$ في فراغ متجه "برا". وكما نعلم من الميكانيكا الموجية أن الأعداد $\psi^*(q,t)\chi(q,t)$ و $\chi^*(q,t)\psi(q,t)$ ترتبط فيما بينها بالعلاقة

$$\psi^*(q)\chi(q) = [\chi^*(q)\psi(q)]^* \qquad (١٠٢٤)$$

و

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(q)|^2 dq \geq 0 \qquad (١٠٢٥)$$

هناك علاقات مشابهة يجب أن تتحقق لمتجهات "برا" و "كيت" لأنهما يمكن ان يكونا في نفس الوقت مرتبطين بالدالة الموجية. هذه العبارة

تحفزنا للفروض المذكورة في المعادلات (١٠٢٢) و (١٠٢٣).

إن فكرة التعامد أيضا فكرة مهمة حيث يمكن للمتجهات أن تكون مهمة. في هذه حالة متجهات "كيت" و "برا"، إذا تحقق في الضرب القياسي المتساوية$\langle a|b\rangle = 0$ كانت المتجهات متعامدة. في الميكانيكا الموجية، تكون الدوال $\psi^*(q)$ و $\chi(q)$ متعامدة إذا تحقق $\int \psi^*(q)\chi(q)dq = 0$. إن صيغة التعامد تشمل معنى مغاير لصيغة التعامد في المتجهات العادية$\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$. إذا كان $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ فإن $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ متعامدان. لاحظ أنه هنا المتجهان $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ في نفس الفراغ. في حالتنا الحالية الخاصة بمتجهات "برا" $|a\rangle$ و "كيت" $\langle b|$ فإنهما في فراغات مختلفة. مع ذلك، إذا كان $\langle a|b\rangle = 0$ يمكن القول ان $\langle a|$ و $|b\rangle$ متعامدان مثل

$|a\rangle$ و $|b\rangle$. عندما تحقق المتساوية $\langle a|b\rangle = 0$ يمكن أيضا القول ان الحالات الكمية المصاحبة التي تمثل النظام متعامدة.

نعلم أنه إذا كان مقياس أو طول كل المتجهات في الفراغ محدودة، سمي الفراغ فراغ "هيلبرت". إذن لابد للنظرية أن تشمل متجهات مقياس او طول لانهائي، كما سنرى لاحقا. إن فراغ تلك المتجهات يشكل حالة أكثر عمومية لفراغ المتجهات والذي يسمى فراغ متجهات "كيت" و "برا". إن اشتمال متجهات ذات مقياس أو طول لانهائي يتطلب مقدمة عن دالة ديراك δ في مرحالة لاحقة.

١٠٣ المؤثرات الخطية

فكرة المؤثرات الخطية تعتبر فكرة مألوفة لك كطالب قارب التخرج. على سبيل المثال، إذا كانت الدالة $f(t)$ قابل مربعها للتكامل "square integrable" في المتغير المستمر t فإن الدالة تنتمي لفراغ هيلبرت. لذلك يمكننا تعريف المؤثر الخطي $\frac{d}{dt}$ في هذا الفراغ بإيجاد دالة اخرى مصاحبة $g(t)$ للدالة $f(t)$ فيكون

$$g(t) = \frac{d}{dt}f(t) \qquad (١٠٢٦)$$

إذا أمكننا لكل دالة $f(t)$ في الفراغ، إيجاد دالة مصاحبة $g(t)$ يمكننا

تعريف المؤثر d/dt. علاوة على ذلك، نحتاج أن

$$\frac{d}{dt}[f_1(t) + f_2(t)] = g_1(t) + g_2(t) \qquad (١.٢٧)$$

$$\frac{d}{dt}cf(t) = cg(t) \qquad (١.٢٨)$$

حيث g_1, g_2 و g هي ثلاث دوال مصاحبة للدوال f_1, f_2 و f على

الترتيب، حيث c عدد، إذا فالمؤثر d/dt هو مؤثر خطي.

بالمثل يمكننا تعريف مؤثرات خطية أخرى كالتكامل والضرب بعدد

ثابت، ومؤثرات أخرى وكذلك يمكننا تكوين كل مخططات المؤثرات

الخطية بتلك الطريقة. من الواضح أن تلك المؤثرات تأتي الحاجة إليها في فراغ المتجهات لتوسيع مداها التطبيقي.

الآن يجب ان نعطي مقدمة عن المؤثرات الخطية في فراغ متجهات "كيت" و "برا". إذا كان لكل متجه "برا" $\langle a|$ في الفراغ يوجد متجه "كيت" $\langle b|$ مصاحب، فإن صفة المصاحبة تلك يمكن الاستفادة منها في تعريف المؤثر D والذي يمكن صياغته في الصورة

$$|b\rangle = D|a\rangle \qquad (١.٢٩)$$

حيث D يمكن أن يعني التفاضل أو التكامل او أي عملية أخرى. لاحظ أن ظهور المؤثر على يسار متجه "كيت" الذي يؤثر عليه.

نحن الآن مهتمين بالمؤثرات الخطية، والذي يعني أنه إذا كان $|a_2\rangle\,, |a_1\rangle$

و $|a\rangle$ هي ثلاث متجهات "كيت" و c عدد، فإن المؤثر D يجب ان

يحقق العلاقة

$$D(|a_1\rangle + |a_2\rangle) = D|a_1\rangle + D|a_2\rangle \qquad (١.٣٠)$$

$$D(c|a_\rangle) = cD|a\rangle \qquad (١.٣١)$$

ولأن أي مؤثر يتعين تماما عندما يكون تاثره على أي متجه "كيت" في

الفراغ معلوم، فإنه لأي مؤثرين D_1 و $D_2 2$ يكونا متساويين إذا تحقق

$D_1|a\rangle = D_2|a\rangle$ لكل متجه "كيت" $|a\rangle$. أ

أما المؤثر "الصفري" $D = 0$ يتم تعريفه بالعلاقة $D|a\rangle = 0$ لكل متجه "كيت" $|a\rangle$.

والمؤثر "المحايد" $D = I$ يمكن تعريفه بالعلاقة $D|a\rangle = |a\rangle$ لكل متجه "كيت" $|a\rangle$.

في هذه المرحلة يمكننا تكوين جبر المؤثرات الخطية. منه يمكننا تعريف جمع أي متجهين $D_1 + D_2$ بتأثيرهما على متجه "كيت" $|a\rangle$:

$$(D_1 + D_2)|a\rangle = D_1|a\rangle + D_2|a\rangle \qquad (١.٣٢)$$

أما الضرب

$$(D_1 D_2)|a\rangle = D_1(D_2)|a\rangle \qquad (١.٣٣)$$

من هنا إذا كان $D_1 = D_2$ فيمكننا تعريف أس المؤثرات وهكذا.

أيضا لدينا، على سبيل المثال

$$(D_1 + D_2)|a\rangle = (D_2 + D_1)|a\rangle \qquad (١.٣٤)$$

(١.٣٥)

$$[(D_1 + D_2) + D_3]|a\rangle = [(D_1 + (D_2 + D_3)|a\rangle$$

(١.٣٦)

$$[(D_1(D_2 + D_3)|a\rangle = D_1D_2|a\rangle + D_1D_3|a\rangle$$

العملية التبادلية بين أي مؤثرين D_1 و D_2 يمكن صياغتها في الصورة $[D_1, D_2]$

ويمكن تعريفها كالتالي

$$[D_1, D_2] = D_1, D_2 - D_2, D_1 \qquad (١.٣٧)$$

بشكل عام إذا كان، $D_1D_2 \neq D_2D_1$ وهي خاصية مشهورة وتتحقق في المصفوفات. إن الجبر في ميكانيكا الكم صفة غير تبادلية. لدينا زوج من المؤثرات المشهور غير تبادلية هما $D_1 = x$ وهي عملية الضرب في x و $D_2 = d/dx$ وهي عملية التفاضل بالنسبة للمتغير x. من السهل

إثبات أنه، إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة متصلة في x فإن

(١.٣٨)

$$\left[x, \frac{d}{dx}\right] f(x) = \left(x\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x\right) f(x) = -f(x)$$

لذلك فإن المؤثرات غير التبادلية مألوفة لدينا.

أما الضرب بعدد ثابت فهي أيضا عملية خطية. لذلك فإن المؤثر الثابت

يتبادل مع كل المؤثرات الخطية.

نأتي الآن للمؤثر المحايد، إذا كان لدينا المؤثرين D_1 و D_2 ويحققان العلاقة

$$D_1 D_2 = D_2 D_1 = I \qquad (١.٣٩)$$

حيث I يمثل المؤثر المحايد، إذا، المؤثر D_2 هو معكوس D_1 و D_2D_1

إذا وجد المعكوس. هذا التعبير يمكن صياغته كالتالي

$$D_2 = D_1^{-1}, \qquad D_1 = D_2^{-1}, \qquad (١٠٤٠)$$

أما عكس عملية ضرب المؤثرات فتصلغ كالتالي

$$(D_1D_2D_3)^{-1} = D_3^{-1}D_2^{-1}D_1^{-1} \qquad (١٠٤١)$$

كما لاحظنا سابقا، فإن تلك الخواص للمؤثرات هي خواص شائعة في المصفوفات المحدودة. في الحقيقة، لاحقا سوف نمثل المؤثرات باستخدام المصفوفات.

لقد عرفنا تأثير المؤثر الخطي على متجه "كيت"، الآن ينبغي ان نعطي

معنى لعملية تأثيره على متجه "برا". لنعتبر متجه "كيت"

$$|b\rangle = D|a\rangle \qquad (١٠٤٢)$$

يمكننا أن نأخذ الضرب القياسي لهذا المتجه بأي متجه "برا"، لنقل مثلا $\langle c|$ ، هذا الضرب القياسي في الصورة $\langle c|(D|a\rangle) = \langle c|b\rangle$ يعتمد خطيا على $|a\rangle$ لأن D هو مؤثر خطي. من تعريف متجه "برا"، الضرب القياسي يكون في الصورة $\langle c|b\rangle$ ويمكن اعتباره كضرب قياسي للمتجه $|a\rangle$ بأي متجه "برا"، مثلا $\langle d|$. لذلك لكل "كيت" $\langle c|$ يوجد "برا" مناظر $\langle d|$. متجه "برا" هذا $\langle d|$ يعتمد خطيا على $\langle c|$ لذلك يمكن القول أن متجه $\langle d|$ أمكن ايجاده من المتجه $\langle c|$ بتطبيق المؤثر الخطي

على $|c\rangle$. لأن هذا المؤثر يمكن تحديده بشكل وحيد من المؤثر D، أي أنه من المقبول أن نكتب

$$\langle d| = \langle c|D \qquad (١.٤٣)$$

لقد قلنا انه من المناسب ان تظهر المؤثرات دائما على يمين متجه "برا" ويمكننا تلخيص التعريف السابق بالعلاقة

$$\langle c|(D|a\rangle) = (\langle c|D)|a\rangle \qquad (١.٤٤)$$

من هنا نجد أنه ليس من الضروري ان نستخدم الاقواس، ويكون أي جانب يمكن كتابته في الصورة $\langle c|D|a\rangle$. لذلك فإن المؤثر D يمكن أن يؤثر اولا على متجه "برا" $|c\rangle$ ثم تطبق النتيجة على متجه "كيت" $\langle a|$،

والعكس بالعكس. المؤثرات المعطاه بالمعادلات (١٠٣٠) إلى (١٠٣٦) جميعها تتحقق في حال طبقت على متجهات "كيت" أو متجهات "برا". لاحظ أيضا أن $\langle c|D|a\rangle$ هو تعبير قوس مغلق ويكون عدد مركب بشكل عام.

لنعطي مثالا بسيطا لمؤثر خطي يتكرر وجوده في النظرية الكمية وهو $P = |a\rangle\langle b|$. نرى أن المؤثر P يمكن أن يؤثر على متجه "كيت" ليعطي

$$P|c\rangle = |a\rangle\langle b|c\rangle \qquad (١٠٤٥)$$

حيث أن متجه "كيت" $|a\rangle$ قد تم ضربه في العدد $\langle b|c\rangle$, كذلك

$$\langle c|P = \langle c|a\rangle\langle b| \qquad (١٠٤٦)$$

هو متجه "برا" $\langle b|$ مضروبا في العدد $\langle c|a\rangle$. يترك للطالب كتمرين لاثبات أن المؤثر P يحقق متطلبات المؤثر الخطي. كمثال من تحليل المتجهات العادية والذي يناظر تقريبا مؤثرا مثل P هو مؤثر "داياد" $\mathbf{ij}$. في هذه الحالة $\mathbf{ij}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{ij} = \mathbf{j}$ وهكذا.

تلعب المؤثرات الخطية دورا هاما في التفسيرات الفيزيائية للنظرية. تبعا لديراك، قد فرضنا أن كل كمية يمكن قياسها لنظام فيزيائي (والتي يطلق عليها متغير ديناميكي) يمكن تمثيلها بنوع معين من المؤثرات الخطية، سوف

نتعرض لوصفها في الجزء التالي. من الامثلة على المتغيرات الديناميكية المصاحبة للمؤثرات الخطية، الموضع (q)، كمية التحرك الخطية (p)، كمية التحرك الزاوية L والطاقة (H) وتلك التي توصف في الميكانيكا الكلاسيكية، أما كمية التحرك المغزلية (σ) ليس لها نظير كلاسيكي. من الناحية الكلاسيكية تكون المتغيرات تبدالية مع كل منها الآخر، اما في الحالة الكمية يمكن الفرض أن بعض من تلك الملؤثرات ليست تبادلية. إن علاقة التبديل تحدد نوع الجبر المستخدم في المؤثرات كما تضع علامة على التحول من الميكانيكا الكمية إلى الميكانيكا الكلاسيكية.

١٠٤ المؤثرات الهرميتية

المؤثرات الخطية، بشكل عام، كميات مركبة، إذا ناظروا متغيرات ديناميكية، فإنها تكون مركبة. على أي حال، فإن الكميات الفيزيائية مثل كمية التحرك والموضع ومثل تلك التي تعطي أعداد حقيقية عند قياسها. لذلك، فإن المؤثرات الخطية التي تمثل متغيرات ديناميكية يجب أن تقيد لحالة المؤثرات الخطية الحقيقية. مثل تلك المؤثرات يطلق عليها مؤثرات هرميتية وتعرف كالتالي:

متجه "برا" المصاحب لمتجه "كيت" $|q\rangle = L|p\rangle$ حيث L مؤثر خطي

يكتب في الصورة

$$\langle q| = \langle p|L^{\dagger} = (L|p\rangle)^{\dagger} = (|q\rangle)^{\dagger} \qquad (١.٤٧)$$

الرمز $L^{\dagger}$ يسمى المرافق الهرميتي للمؤثر L، أي أن، متجه "برا" $\langle q|$ والذي هو المرافق الهرميتي لمتجه "كيت" $|p\rangle$، يمكن اعتباره نتيجة مؤثر خطي أثر على متجه "برا" $\langle p|$ والذي تم تعيينه بالمؤثر $L^{\dagger}$.

١.٥ أمثلة

مثال: اثبت أن $L^{\dagger\dagger} = L$

البرهان

نفرض أن

$$|b\rangle = L|p\rangle \qquad (١٠٤٨)$$

حيث $|p\rangle$ متجه "كيت" اختياري. مرافقه (متجه "برا" المصاحب) يكون في الصورة

$$\langle b| = \langle p|L^{\dagger} \qquad (١٠٤٩)$$

دعنا نأخذ المرافق مرة أخرى، نحصل على

$$|b\rangle = L^{\dagger\dagger}|p\rangle \qquad (١٠٥٠)$$

إذا اخذنا الضرب القياسي لأي متجه "برا" اختياري $\langle a|$ وبالمعاديتين

(١٠٤٨) و (١٠٤٨) نحصل على

$$\langle a|b\rangle = \langle a|L|p\rangle = \langle a|L^{\dagger\dagger}|p\rangle \qquad (١.٥١)$$

وحيث أن متجهات "برا" $\langle a|$ و"كيت" $|p\rangle$ اختيارية، نحصل على

$$L = L^{\dagger\dagger} \qquad (١.٥٢)$$

وهو الاثبات المطلوب

إذا وضعنا $\langle a| = \langle p|L^{\dagger}$ و $|a\rangle = L|p\rangle$ في المعادلة (١٠٢٢)

نحصل على

$$\langle p|L^{\dagger}|b\rangle = \langle b|L|p\rangle^{*} \qquad (١.٥٣)$$

إذا كان المؤثر الخطي مرافق لنفسه، أي أن

$$L = L^\dagger \qquad (١.٥٤)$$

في هذه الحالة يسمى مؤثر هرميتي. من المعادلة (١.٦٠) إذا كان المؤثر L هرميتيا، فإنه يجب أن يحقق المعادلة

$$\langle p|L|b\rangle = \langle b|L|p\rangle^* \qquad (١.٥٥)$$

لأي متجهي "كيت" $|b\rangle$ و $|p\rangle$. لذلك، أي مؤثر يحقق المعادلة (١.٥٥) هو مؤثر هرميتي. الخواص التالية يمكن اثباتها لاي مؤثر خطي

$$(cL|a\rangle)^\dagger = c^*\langle a|L^\dagger \qquad (١.٥٦)$$

constant, a is $\boldsymbol{c}$ where

$$[(\boldsymbol{L_1}+\boldsymbol{L_2})|\boldsymbol{a}\rangle]^\dagger = \langle \boldsymbol{a}|(\boldsymbol{L_1^\dagger}+\boldsymbol{L_2^\dagger}) \tag{١.٥٧}$$

$$(\boldsymbol{L_1}\boldsymbol{L_2})|\boldsymbol{a}\rangle]^\dagger = \langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{L_2^\dagger}\boldsymbol{L_1^\dagger} \tag{١.٥٨}$$

$$(\langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{L_1}\boldsymbol{L_2}\boldsymbol{L_3})^\dagger = \boldsymbol{L_3^\dagger}\boldsymbol{L_2^\dagger}\boldsymbol{l_1^\dagger}|\boldsymbol{a}\rangle \tag{١.٥٩}$$

$$\langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{L_1}\boldsymbol{L_2}|\boldsymbol{b}\rangle^* = \langle \boldsymbol{b}|\boldsymbol{L_2^\dagger}\boldsymbol{L_1^\dagger}|\boldsymbol{a}\rangle \tag{١.٦٠}$$

$$(|a\rangle\langle b|)^\dagger = |b\rangle\langle a| \qquad (١.٦١)$$

لاحظ أن جبر المؤثرات المرافقة مثل جبر المصفوفات المربعة المحدودة.

١.٦ مسائل القيم الذاتية

كما ذكرنا سابقا، فإن متجهات "كيت" و "برا"، أو بدلا من ذلك اتجاهاتهم، تناظر حالات النظام، كذلك المؤثرات الخطية الهرميتية تناظر المتغيرات الديناميكية التي تصف النظام. في الجزء التالي نثبت كيف ترتبط تلك الافكار الرياضية بالقياسات الفيزيائية والتي تطبق على النظام. قبل هذا، يجب ان نقدم فكرة القيم الذاتية للمؤثرات الهرميتية.

إن مسائل القيم الذاتية هي مسائل مالوفة في الرياضيات الكلاسيكية كما هي في الفيزياء الكلاسيكية. من ابسط المسائل التي تشمل حل المعادلة

$$Lu(x) = \lambda u(x) \qquad (١.٦٢)$$

حيث L معروف يالتعبير $-d^2/dx^2$ و الدالة $u(x)$ و λ مجاهيل مطلوب حسابها.إذا أضفنا شرط جديا حيث $u(0) = u(l) = 0$، نجد أن λ تأخذ مجموعة من القيم الذاتية المنفصلة تعطي بالقيم $\lambda_n = \pi^2 n^2/l2$، حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. أما الداول الذاتية المصاحبة فتعطي بالدوال $u_n(x)$ حيث $u_n(x) = \sin(n\pi x/l)$.

لاحظ أن تأثير المؤثر L على الداول الذاتية $u_n(x)$ هو أن يعطي مجمعة

الداول $u_n(x)$. هنا نجد أنه إذا أثر المؤثر L على دالة اختيارية $u(x)$، وهذا ليس في العموم، سوف ينتج الدالة $u(x)$ مضروبة غي عدد.

بالمثل يمكننا تشكيل مسألة قيمة ذاتية للمؤثرات في فراغات "كيت" أو "برا". دعنا نفرض أن L هو مؤثر خطي و $|a\rangle$ هو "كيت المصاحب". إذا أثر L على "كيت" $|a\rangle$ فأعطى $|a\rangle$ مضروبا في عدد مثلا l حينئذ، يكون $|a\rangle$ هو "كيت" ذاتي للمؤثر L حيث l هو القيم الذاتية المصاحبة. هذا التفصيل يمكن كتابته في الصورة

$$L|a\rangle = l|a\rangle \qquad (١.٦٣)$$

تلك تمثل مسألة قيمة ذاتية: L مؤثر مجهول، l و $|a\rangle$ مجاهيل أيضا المطلوب الآن أن نجد متجه "كيت" حيث أنه عندما يتم التأثر عليه بالمؤثر L يعيد انتاج نفس متجه "كيت" مضروبا في عدد تحت مجموعة من الشروط الحدية. من المألوف أن نضع لاحقة لمتجه "كيت" الذاتي مرتبطة بقيمة الذاتية، بهذا الفرض، يمكننا إعادة كتابة مسألة القيمة الذاتية كالتالي

$$L|l\rangle = l|l\rangle \qquad (١٠٦٤)$$

كذلك فإن مسألة القيمة الذاتية يمكن صياغتها بدلالة متجه "برا"

$$\langle d|D = d\langle d| \qquad (١٠٦٥)$$

للسهولة، سوف نعتبر المسائل التي تشمل قيمة ذاتية واحدة وكذلك متجه ذاتي واحد.

إذا كان $|l\rangle$ هو متجه "كيت" ذاتي للمؤثر L، حينئذ باستخدام المعادلة (١.٦٤) أي ثابت c مضروبا في المتجه $|l\rangle$ يكون أيضا متجه "كيت" ذاتي له نفس القسمة الذاتية. بهذا الفرض، الحالات الممثلة بمتجهات "كيت" $|l\rangle$ و $c|l\rangle$ هي لنفس الحالة.

من المهم ملاحظة أن اهتمامنا سوف ينصب على حل مسائل القيمة الذاتية للمؤثرات الخطية الهرميتية. لننجز هذا، دعنا نقدم نظريتان هامتان مع براهينهما يختصان بالمؤثرات الخطية الهرميتية.

٧.١٠ نظريات

نظرية 1

القيم الذاتية للمؤثر الخطي الهرميتي تكون حقيقة

الاثبات

نفرض أن المؤثر L خطي هرميتي. اذن تكون قيمه الذاتية تحقق المعادلة

$$L|l\rangle = l|l\rangle \qquad (١.٦٦)$$

من الضرب القياسي بضرب الطرفين بمتجه "برا" $\langle l|$، نحصل على

$$\langle l|L|l\rangle = l\langle l|l\rangle \qquad (١.٦٧)$$

لنأخذ المرافق المركب لكلا الطرفين، نحصل على

$$\langle l|L|l\rangle^* = \langle l|L^\dagger|l\rangle = l^*\langle l|l\rangle \qquad (١٠٦٨)$$

ولكن لأن، $L^\dagger = L$ كما أن $\langle l|l\rangle \neq 0$، بمقارنة المعادلتين (١٠٦٨) و (١٠٦٨) نجد أن $l = l^*$ وهو ما يبرهن النظرية. لاحظ أن $\langle l|l\rangle = 0$ يتحقق فقط في الحالة التافهة، والتي لها $\langle l| = 0$. لاحظ أيضا أن المقياس $\langle l|l\rangle$ هو قيمة حقيقة.

نظرية 2

المتجهات الذاتية للمؤثر الخطي الهرميتي L والتي تنتمي لدوال ذاتية مختلفة تكون عمودية.

الاثبات

نفرض أن l' و l'' هما قيمتين ذاتيتين للمؤثر L و $|l'\rangle$ و $\langle l''|$ هي متجهات "كيت" المصاحبة. إذن ($L = L^{\dagger}; l'$ و l'' تكون حقيقة).

$$L|l'\rangle = l'|l'\rangle \qquad (١٠٦٩)$$

$$\langle l''|L = l''\langle l''| \qquad (١٠٧٠)$$

إذا قمنا بصيغة الضرب القياسي للمعادلة (١٠٦٩) بالضرب في متجه "برا" $|l''\rangle$ عندئذ، فكذلك الضرب القياسي للمعادلة (١٠٧٠) بمتجه "كيت"

$\langle l'|$ ثم قمنا بطرح المعادلتين نجد أن

$$(l' - l'')\langle l'|l''\rangle = 0 \qquad (١٠٧١)$$

ولأن $l' \neq l''$ من الفرض، فإن $\langle l'|l''\rangle = 0$ وبذلك تكون النظرية قد تم برهانها. من المعادلتين (١٠٦٩) و (١٠٧٠) نرى أن القيم الذاتية المصاحبة لمتجه "كيت" الذاتي هي نفسها المصاحبة لمتجه "برا" الذاتي.

لكي نوضح الطريقة، سوف نقوم بحل مسألة قيمة ذاتية خاصة بسيطة، لاحقا سوف نقوم بتوضيح النظام الفيزيائي والذي يمكن أن يوصف بتلك المسألة، لكن حاليا سوف نهتم فقط بالمثال من الناحية الرياضية.

نفرض أن المؤثر الخطي الهرميتي $\boldsymbol{\sigma}_z$ والذي يحقق شرط إضافي هو

$$\boldsymbol{\sigma}_z^2 = \boldsymbol{I} \qquad (١.٧٢)$$

حيث $\boldsymbol{I}$ هو مؤثر الوحدة، الآن مهمتنا أن نقوم بحل مسألة القيمة الذاتية

$$\boldsymbol{\sigma}_z|s\rangle = s|s\rangle \qquad (١.٧٣)$$

من نظرية 1، نعلم أن s حقيقة، ومن نظرية 2 نعلم أن $\langle s'|s''\rangle = \mathbf{0}$

.$s' \neq s''$

للحصول على القيم الذاتية والمتجهات الذاتية، نقوم بضرب طرفي المعادلة

(١.٧٣) من اليسار بالمقدار $\boldsymbol{\sigma}_z$ الأن نستخدم المعادلات(١.٧٢) و

(١٠٧٣) لنحصل على

$$\boldsymbol{\sigma}_z^2|s\rangle = |s\rangle = s\boldsymbol{\sigma}_z|s\rangle = s^2|s\rangle \qquad (١٠٧٤)$$

or

$$(s^2 - 1)|s\rangle = 0 \qquad (١٠٧٥)$$

إذا قمنا بتكوين الضرب القياسي بالضرب في متجه "برا" $|s\rangle$, نجد أنه،

لأن $\langle s|s\rangle$ هو مقدار موجب، القيم الذاتية للمؤثر $\boldsymbol{\sigma}_z$ تعطي من

$$s = \pm 1 \qquad (١٠٧٦)$$

الآن كما في المعادلة (١.٧٣) يمكننا كتابة

$$\boldsymbol{\sigma}_z|+\mathbf{1}\rangle = +\mathbf{1}|+\mathbf{1}\rangle, \qquad \boldsymbol{\sigma}_z|-\mathbf{1}\rangle = -\mathbf{1}|-\mathbf{1}\rangle \qquad (١.٧٧)$$

من نظرية 2 يمكننا أن نعلم أن

$$\langle+\mathbf{1}|-\mathbf{1}\rangle = \langle-\mathbf{1}|+\mathbf{1}\rangle = \mathbf{0} \qquad (١.٧٨)$$

العلاقات الأخيرة تمثل علاقة التعامد والتي تتبعها المتجهات الذاتية والتي تؤول لقيم ذاتية مختلفة.

كما نعلم، أي متجه "كيت" ذاتي مضروبا بعدد ثابت يمثا أيضا متجه ذاتي يؤول لنفس القيمة الذاتية. أذا اخترنا عدد ثابتا بحيث يكون مقياس

المتجهات الذاتية يساوي الوحدة طالما أن المقياس محودو، يمكننا كتابة

$$\langle +1|+1\rangle = \langle -1|-1\rangle = 1 \qquad (١.٧٩)$$

العلاقات الاخير تمثل علاقة المعايرة او شرط المعايرة. لاحظ أن المعايرة لا تعين المتجه بمفردها، لازلنا نحتاج لضرب $\langle 1+|$ في $e^{i\alpha}$ لأن $|1+\rangle$ سيتم ضربه في $e^{-i\alpha}$ حيث α حقيقة، كما أن المعادلة (١.٧٩) لن تتأثر. مثل هذا الانحراف في الطور ليس له اهمية فيزيائية في النظرية، ومن المألوف اختيار $\alpha = 0$.

لأي مسألة قيمة ذاتية بحيث لها مقياس المتجه محدود، تكون المتجهات الذاتية غالبا معايرة لذلك تتراكب المعادلتان (١.٧٨) و (١.٧٩) في

علاقات التعامد

$$\langle l'|l''\rangle = \delta_{l'l''} \qquad (١.٨٠)$$

حيث $\delta_{l'l''}$ دالة كرونيكر-ديلتا δ المعرفة كالآتي

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & if \;\; i = j \\ 0 & if \;\; i \neq j \end{cases} \qquad (١.٨١)$$

إذا كان للمتجهات مقياس لانهائي، يجب تعميم تلك النتائج كما سنصف

لاحقا.

لكي نجز العمل اللاحق، ينبغي ان نوضح أن المؤثر σ_z be may يمكن

تمثيله بمصفوفة مربعة 2×2 تعطى في الصورة

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (١.٨٢)$$

لكي نثبت تلك الصورة، نكون الضرب القياسي للمعادلتين (١٠٧٧) بمتجهات "برا" $|1+\rangle$ و $|1-\rangle$ على التوالي. وباستخدام المعادلتين (١٠٧٨) و (١٠٧٩) نحصل على ما يسمى بعناصر المصفوفة للمؤثر $\boldsymbol{\sigma}_z$ والتي تعطى في الصور

$$\langle +\mathbf{1}|\boldsymbol{\sigma}_z| + \mathbf{1}\rangle = \mathbf{1} \quad \langle +\mathbf{1}|\boldsymbol{\sigma}_z| - \mathbf{1}\rangle = \mathbf{0} \qquad (١٠٨٣)$$

$$\langle -\mathbf{1}|\boldsymbol{\sigma}_z| + \mathbf{1}\rangle = \mathbf{0} \quad \langle -\mathbf{1}|\boldsymbol{\sigma}_z| - \mathbf{1}\rangle = -\mathbf{1} \qquad (١٠٨٤)$$

كما نرى يمكننا تجميع تلك النتائج في مصفوفة بحيث كما في معادلة (١٠٨٢) من المناسب اختيار الصفوف معنونة بمتجهات "برا" الذاتية والأعمدة

بمتجهات "كيت" الذاتية.

إن أي متجه "كيت" في الفراغ يمكن التعبير عنه بدلالة متجهات "كيت" الذاتية $\langle 1+ |$ و $\langle 1- |$. عندما يحدث ذلك او يتحقق، يقال أن متجهات "كيت" الذاتية تكون مجموعة تامة بالتعريف. مرة أخرى سوف نشارك تلك النتائج في الجزء القادم.

لكي نثبت أن أي متجه "كيت" $\langle P|$ في الفراغ يمكن فكه او التعبير عنه بدلالة متجهات "كيت" $\langle 1+ |$ و $\langle 1- |$ نكتب متجه الوحدة في الصورة

$$|P\rangle = I|P\rangle = \frac{1}{2}(I + \sigma_z + I - \sigma_z)|P\rangle \quad (١٠٨٥)$$

$$= \frac{1}{2}(I + \sigma_z)|P\rangle + \frac{1}{2}(I - \sigma_z)|P\rangle \qquad (١.٨٦)$$

الآن نتعامل مع كل معامل على حدة. باستخدام المعادلة (١.٧٢) نحصل على

$$\sigma_z\Big[\frac{1}{2}(I + \sigma_z)|P\rangle\Big] = 1\Big[\frac{1}{2}(\sigma_z + I)|P\rangle\Big] \qquad (١.٨٧)$$

لذلك فإن المتجه $\frac{1}{2}(I + \sigma_z)|P\rangle$ هو متجه "كيت" ذاتي للمؤثر σ_z بالقيمة الذاتية المصاحبة $+1$. لذلك من المتجمل ان يكون مختلفا عن متجه "كيت" $|+1\rangle$ بثابت، لذلك يمكننا كتابة

$$\frac{1}{2}(I + \sigma_z)|P\rangle = c_1| + 1\rangle \qquad (١.٨٨)$$

حيث c_1 ثابت. بالمثل، نجد أن الحد الأخير من المعادلة (١٠٨٦) يعطى

من

$$\boldsymbol{\sigma_z}\Big[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\sigma_z})|\boldsymbol{P}\rangle\Big] = -\mathbf{1}\Big[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\sigma_z})|\boldsymbol{P}\rangle\Big] \quad (١٠٨٩)$$

لذلك يمكننا كتابة

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\sigma_z})|\boldsymbol{P}\rangle = \boldsymbol{c_2}|-\mathbf{1}\rangle \quad (١٠٩٠)$$

حيث c_2 ثابت أخر. لذلك يمكننا كتابة المعادلة (١٠٨٦) باستخدام

المعادلات (١٠٨٨) و (١٠٩٠)في الصورة

$$|\boldsymbol{P}\rangle = \boldsymbol{c_1}|+\mathbf{1}\rangle + \boldsymbol{c_2}|-\mathbf{1}\rangle \quad (١٠٩١)$$

كما فرضنا من الدباية أساسا. إذن، أي متجه "كيت" يكون مرتبط

خطيا متجهات "كيت" $|+1\rangle$ و $|-1\rangle$، بهذا قد أثبتنا أن المجموعة $\{|+1\rangle, |-1\rangle\}$ هي مجموعة تامة.

يمكننا ايضا اشتقاق ما يسمى بعلاقة التمام في هذا المثال البسيط. نضرب المعادلة (١.٩١) من اليسار بمتجه "برا" $\langle +1|$ و $\langle -1|$، وباستخدام علاقات التعامد بالمعادلات (١.٧٨) و (١.٧٩) نجد أن

$$c_1 = \langle +1|P\rangle \qquad c_2 = \langle -1|P\rangle \tag{١.٩٢}$$

إذا عوضنا العلاقات السابقة في المعادلة (١.٩١) نحصل على

$$|P\rangle = \Big(|+1\rangle\langle +1| + |-1\rangle\langle -1|\Big)|P\rangle \tag{١.٩٣}$$

ولأن متجه "كيت" $|P\rangle$ هو متجه اختياري، هذه المعادلة تتحقق إذا كان

$$|+1\rangle\langle+1| + |-1\rangle\langle-1| = I \qquad (١٠٩٤)$$

والتي تسمى علاقة التمام او علاقة الانغلاق. سوف نناقش علاقة التمام للمؤثرات الهرميتيه العامة في الجزء التالي.

كما أسلفنا، فراغ هيلبرت في هذا المثال هو فراغ ثنائي البعد لأننا عالجنا فقط القيم الذاتية غير المنحلة.

إذا عوضنا عن المعادلة (١٠٩٢) في (١٠٨٨) و (١٠٩٠) نحصل على المعادلات التالية

$$\frac{1}{2}(I + \sigma_z)|P\rangle = |+1\rangle\langle+1| \qquad (١٠٩٥)$$

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\sigma}_z)|\boldsymbol{P}\rangle = |-\mathbf{1}\rangle\langle-\mathbf{1}| \qquad (١.٩٦)$$

إذا طرحنا تلك المعادلات نحصل على $\boldsymbol{\sigma}_z$

$$\boldsymbol{\sigma}_z = |+\mathbf{1}\rangle\langle+\mathbf{1}| - |-\mathbf{1}\rangle\langle-\mathbf{1}| \qquad (١.٩٧)$$

هنا قد عبرنا عن المؤثر $\boldsymbol{\sigma}_z$ بدلالة مؤثرات من النوع $|\boldsymbol{a}\rangle\langle\boldsymbol{a}|$ والتي تم ذكرها في نهاية الجزء (١.٠٣). لاحظ أن القيم الذاتية لأي مؤثر غالبا ما يشار إليها على انها طيفه.

باب ٢

كمية الحركة الزاوية، حركة الإلكترون المغزلية

٢٠١ القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لكمية الحركة الزاوية

قبل أن نستمر، من الهام أن نلاحظ أن، إذا تمت عملية قياس مفردة على متغير يمكن ملاحظته، هذا يعني أن احد قيمه الذاتية قد تم الحصول عليها. إن القدرة على حل مسائل القيم الذاتية من الأساسي أن نربط النظرية بالتجربة. لذلك، سابقا جدا قد قمنا بحل مثل تلك المسألة في جزء ١٠٧، حيث أن الملاحظ يحقق المعادلة الجبرية $\sigma_z^2 = 1$. في هذه

الحالة يتكون فراغ هيلبرت من متجهين ذاتيين فقط، ويحتوي طيف القيم الذاتية على زوج فقط من القيم المنفصلة $1+$ و $1-$.

الآن لجسيم مفرد له الكتلة m مقيد ليتحرك في بعد واحد في مجال قوة. كلاسيكيا، هذا النظام يمكن وصفه بشكل تام باحداثي الموضع q و كمية التحرك p. إذا تم تعيين تلك القيم عند وقت معين، نكون قد عينا حالة النظام كلاسيكيا عند تلك اللحظة.

بدلا من ذلك، لكي نعالج النظام كميا، فإنه طبقا للنظرية التي طورت كثيرا الآن، نحدد لكل من تلك المتغيرات الديناميكية (وذلك لأنها أسياء يمكن ملاحظتها او قياسها) نعين لها مؤثر هرميتي خطي والذي يمكن أن نطلق

عليه q و p.

$$p = p^{\dagger} \qquad q = q^{\dagger} \tag{٢٠١}$$

الآن، بعد تحديد المؤثرات التي نحتاجها لوصف النظام، الخطوة التالية في إعداد المسألة الكمية هي أن نحدد نوع الجبر الذي سوف تتبعه المؤثرات. هذا يتطلب فرضا إضافيا للنظرية، والذي يعطى بدلالة علاقة التبديل للمؤثرات p و q ما نعني به أن

$$[q, q] = [p, p] = 0 \tag{٢٠٢}$$

$$[q, p] = qp - pq = i\hbar \tag{٢٠٣}$$

حيث $\hbar$ ثابت لانك مقسوما على 2π، نفرض أن p و q يحققان علاقة التبديل السابقة. كلاسيكيا، المؤثران q و p متبادلان، لذلك لكي أما كميا فهما غير متبادلان، بمعنى ان الانظمة الكلاسيكية والكمية تختلف اختلافا بينا. طبقا لذلك، فإن النظام الكلاسيكي يتم تكميمه عندما يحقق المؤثران q و p المعادلاتان (٢٠٢ و ٢٠٣). لاحظ ان ضبط الفرض الكمي هو ملاحظة الاتفاق بين التجربة والنظرية. إنه الفرض الأكثر أهمية في النظرية.

إذا كان $\hbar \rightarrow 0$ فإن المؤثران q و p سيكونان متبادلان، لذلك فإن الميكانيكا الكلاسيكية ينبغي ان تحتوى داخل الميكانيكا الكمية عندما $\hbar \rightarrow 0$. هذا بالفعل مبدأ التناظر. يقال أن المؤثران q و p يحققان جبرا

غير تبادلي. قبل ان نتقدم للأمام، دعنا نطور بعض العلاقات الجبرية الهامة. إذا كان l عدد صحيح، يمكننا إثبات أن بالاستنتاج الرياضي من المعادلتين (٢٠٢و ٢٠٣) أن

$$[q, p^l] = i\hbar l p^{l-1} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} p^l \qquad (٢٠٤)$$

$$[p, q^l] = -i\hbar l q^{l-1} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} q^l \qquad (٢٠٥)$$

لا يجب أن ننسى أن خواص المؤثرات q و p السابقة، تم تجهيزها لاستخدامها في الموضوع التالي وهو كمية الحركة الزاوية. كمية الحركة الزاوية تلعب تدورا هاما في الميكانيكا الكمية كما في الميكانيكا الكلاسيكية.

كلاسيكيا، تعرف كمية الحركة الازوية حول نفطة الاصل O كالآتي

$$\mathbf{I} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad (٢٠٦)$$

حيث $\mathbf{r}$ متجه نصف القطر من النقطة O إلى الجسيم و p كمية الحركة الخطية. ولأن $\mathbf{I}$ يمكن ملاحظته او قياسه، نفرض أن $\mathbf{I}$ مؤثر هرميتي يعرف بالمعادلة (٢٠٦) حيث $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ هما مؤثري الاحداثيات وككمية الحركة. إذا فرضنا أن $[q_1, q_2, q_3]$ هي مؤثرات الاحداثيات الثلاث والتي تناظر $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3]$ تناظر مؤثرات كمية الحركة. نفرض كما في المعادلتين (٢٠٢و ٢٠٣) ان هذه المؤثرات تحقق علاقات

التبادل

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}; \quad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \qquad (٢.٧)$$

حيث i و $j = 1, 2,$ أو 3. هذا يعني أن q_1 و p_2 متبادلان، على سبيل المثال. بمعنى آخر، قياسات الاحداثيات في اتجاه واحد لا يتداخل مع القياسات في كمية الحركة في الاتجاهات المتعامدة عكس ما يحدث في نفس الاتجاه.

من المعادلات (٢.٦) و (٢.٧) نرى أن

$$l_1 = q_2 p_3 - q_3 p_2 \qquad (٢.٨)$$

$$l_2 = q_3 p_1 - q_1 p_3 \qquad (٢.٩)$$

$$l_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1 \qquad (٢.١٠)$$

باستخدام المعادلة (٢.٧) نثبت بسهولة أن

$$[l_x, l_y] = i\hbar l_z \qquad (٢.١١)$$

$$[l_y, l_z] = i\hbar l_x \qquad (٢.١٢)$$

$$[l_z, l_x] = i\hbar l_y \qquad (٢٠١٣)$$

لذلك لا نحتاج لاي فروض إضافية لكي نكمم المتجه I. لاحظ أيضا أنه لأن، على سبيل المثال، q_2 و p_3 متبادلتان، كذلك تكون q_3 و p_2. في العموم لا نقلق بخصوص عملية الترتيب للمعملات المنفصلة في l_2،l_1، l_3.

كمية الحركة الزاوية الكلية تعطى في الصورة

$$\mathbf{I}^2 = l_1^2 + l_3^2 + l_3^2 \qquad (٢٠١٤)$$

أيضا

$$[\mathbf{I}^2, \boldsymbol{l}_i] = \mathbf{0} \qquad \text{حاول أن تثبت ذلك} \qquad (٢.١٥)$$

أي أن، كل مركبة من مركبات كمية الحركة الزاوية بشكل مفرد تبادلية

مع $\mathbf{I}^2$.

من المناسب تعريف المؤثرات غير الهرمية $\boldsymbol{l}_\pm$ من

$$\boldsymbol{l}_\pm = \boldsymbol{l}_1 \pm i\boldsymbol{l}_2 \qquad (٢.١٦)$$

أو

$$\boldsymbol{l}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{l}_- + \boldsymbol{l}_+) \qquad (٢.١٧)$$

$$\boldsymbol{l}_2 = \frac{1}{2}i(\boldsymbol{l}_- - \boldsymbol{l}_+) \qquad (٢٠١٨)$$

لأن $\boldsymbol{l}_1$ و $\boldsymbol{l}_2$ مؤثران هرميتيان نجد أن

$$\boldsymbol{l}_+ = \boldsymbol{l}_-^\dagger \qquad (٢٠١٩)$$

وبدلالة المؤثر $\boldsymbol{l}_\pm$ نرى أن

$$\mathbf{I}^2 = \boldsymbol{l}_3^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{l}_+\boldsymbol{l}_- + \boldsymbol{l}_-\boldsymbol{l}_+) \qquad (٢٠٢٠)$$

يترك للطالب كتمرين إثبات أن

$$[\mathbf{I}^2, \boldsymbol{l}_\pm] = \mathbf{0} \qquad (٢٠٢١)$$

$$[\boldsymbol{l}_z, \boldsymbol{l}_\pm] = \pm\hbar \boldsymbol{l}_\pm \qquad (٢.٢٢)$$

$$[\boldsymbol{l}_+, \boldsymbol{l}_-] = \mathbf{2}\hbar \boldsymbol{l}_3 \qquad (٢.٢٣)$$

إذا، بدلا من ذلك، أضفنا ثم طرحنا المعادلة (٢.٢٣) إلى ثم من المعادلة (٢.٢٠) نحصل على

$$\boldsymbol{l}_+\boldsymbol{l}_- = \mathbf{I}^2 - \boldsymbol{l}_3^2 + \hbar \boldsymbol{l}_3 \qquad (٢.٢٤)$$

$$\boldsymbol{l}_-\boldsymbol{l}_+ = \mathbf{I}^2 - \boldsymbol{l}_3^2 - \hbar \boldsymbol{l}_3 \qquad (٢.٢٥)$$

لقد اثبتنا ان المؤثر $\mathbf{I}^2$ تبادلي مع $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2$ و $\boldsymbol{l}_3$ لكن تلك المركبات ليست تبادلية مع كل منها الأخرى. أيضا لقد اثبتنا أن أن أي مؤثرين متبادلين يمكن ان يكونا في نفس الوقت قطريين. لذلك يمكننا إيجاد تمثيل ما بحيث تكون فيه المؤثرات قطرية، أي إيجاد المتجهات الذاتية التي تكون متجهات ذاتية لنفس المؤثرات التبادلية معا. اعتبر مسألة القيمة الذاتية

$$\boldsymbol{l}_z|\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\nu}\rangle = \boldsymbol{\mu}\hbar|\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\nu}\rangle \qquad (٢٠٢٦)$$

$$\mathbf{I}^2|\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\nu}\rangle = \boldsymbol{\nu}\hbar^2|\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\nu}\rangle \qquad (٢٠٢٧)$$

ولأن $[\boldsymbol{l}_z, \mathbf{I}^2] = \mathbf{0}$ نرى أن

$$\mathbf{I}^2 \boldsymbol{l}_z |\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\nu}\rangle = \boldsymbol{\mu}\hbar \mathbf{I}^2 |\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\nu}\rangle = \boldsymbol{\mu\nu}\hbar^3 |\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\nu}\rangle \qquad (٢.٢٨)$$

$$= \boldsymbol{l}_z \mathbf{I}^2 |\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\nu}\rangle \qquad (٢.٢٩)$$

الآن هدفنا إيجاد القيم الذاتية $\boldsymbol{\mu}$ و $\boldsymbol{\nu}$ بنفس التقنية الرياضية التي استخدمت في المتذبذب التوافقي. باستخدام المعادلة (٢.٢١) نجد أن

$$\mathbf{I}^2 \boldsymbol{l}_\pm = \boldsymbol{l}_\pm \mathbf{I}^2 \qquad (٢.٣٠)$$

وباستخدام المعادلة (٢.٢٦) نرى أن

$$\mathbf{I}^2 \{\boldsymbol{l}_\pm |\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\nu}\rangle\} = \boldsymbol{\nu}\hbar^2 \{\boldsymbol{l}_\pm |\boldsymbol{\mu};\boldsymbol{\nu}\rangle\} \qquad (٢.٣١)$$

هذا يعني أنه إذا كان $|\mu;\nu\rangle$ متجه ذاتي للمؤثر $\mathbf{I}^2$ بالقيمة الذاتية المصاحبة $\nu\hbar^2$، إذن فإن $l_+|\mu;\nu\rangle$ و $l_-|\mu;\nu\rangle$ أيضا متجهات ذاتية بالقيم الذاتية ذاتها. إعتبر أيضا المعادلة (٢٠٢٢):

$$l_z l_\pm = l_\pm l_z + \hbar l_\pm \qquad (٢٠٣٢)$$

من المعادلتين (٢٠٢٦ و ٢٠٢٧) نجد أن

$$l_z\{l_\pm|\mu;\nu\rangle\} = (\mu \pm 1)\hbar\{l_\pm|\mu;\nu\rangle\} \qquad (٢٠٣٣)$$

لذلك إذا كان $|\mu;\nu\rangle$ متجه ذاتي للمؤثر l_z بالقيمة الذاتية $\mu\hbar$ إذن فإن $l_+|\mu;\nu\rangle$ متجه ذاتي للمؤثر l_z بالقيمة الذاتية $(\mu+1)\hbar$ و $l_-|\mu;\nu\rangle$ متجه ذاتي للمؤثر l_z بالقيمة الذاتية $(\mu-1)\hbar$، كلا منهم بالقيمة الذاتية

ν باستخدام المعادلة (٢٠٣١). هنا نجد أننا قمنا بتوليد متجهين ذاتيين إضافيين للمؤثر l_z من القيم الذاتية الأصلية تختلف بالمقدار $\pm\hbar$. بهذه الطريقة يمكننا الاستمرار لتكوين عدد لا نهائي من المتجهات الذاتية والقيم الذاتية.

$$|\mu;\nu\rangle \quad l_+|\mu;\nu\rangle \quad l_+^2|\mu;\nu\rangle \quad l_+^3|\mu;\nu\rangle \dots \qquad (٢٠٣٤)$$

$$\mu\hbar \quad (\mu+1)\hbar \quad (\mu+2)\hbar \quad (\mu+3)\hbar \dots \qquad (٢٠٣٥)$$

$$|\mu;\nu\rangle \quad l_-|\mu;\nu\rangle \quad l_-^2|\mu;\nu\rangle \quad l_-^3|\mu;\nu\rangle \dots \qquad (٢٠٣٦)$$

$$\mu\hbar \quad (\mu-1)\hbar \quad (\mu-2)\hbar \quad (\mu-3)\hbar\ldots \qquad (٢٠٣٧)$$

حيث ν لا تتغير.

الآن، حيث ان مقياس المتجه يجب ان يكون أكبر من أو يساوي الصفر،

فنفرض أن

$$\langle\mu;\nu|\mu;\nu\rangle > 0 \qquad (٢٠٣٨)$$

أي أن، المتجه الاصلي موجود. لذلك لأن $l_- = l_+^\dagger$ نجد أن

(٢٠٣٩)

$$\langle\mu;\nu|l_-l_+|\mu;\nu\rangle = \langle\mu;\nu|(\mathbf{I}^2 - l_z^2 - \hbar l_z)|\mu;\nu\rangle$$

$$= \hbar^2(\nu - \mu^2 - \mu)\langle \mu;\nu|\mu;\nu\rangle \geq 0 \qquad (٢.٤٠)$$

حيث تم استخدام المعادلات (٢.٢٥)، (٢.٢٦ و ٢.٢٧). باستخدام المعادلة (٢.٣٨) ينتج أن

$$\nu - \mu^2 - \mu \geq 0 \qquad (٢.٤١)$$

حيث ν ثابت. هذا ينب نا ان لأي ν معطى، إذا كان μ كبيرة اختياريا سواءا موجبة او سالبة، فإن المتجه $l_+|\mu;\nu\rangle$ سوف ينتج مقياس سالب وهو مرفوض. هنا يجب علينا نحدد قيمة عليا وقيمة دنيا للمتغير μ لكل

قيمة للمتغير ν. هذه المتساوية تتحقق إذا كان

$$\mu = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \nu} \qquad (٢.٤٢)$$

والتي تمثل الحدود الدنيا والعليا للمتغير μ للثابت ν. دعنا نفرض أن l

هي اكبر قيمة للمتغير μ لذلك نجد أن

$$l \equiv -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \nu} \qquad (٢.٤٣)$$

أو

$$\nu = l(l+1) \qquad (٢.٤٤)$$

عندما $l = \mu$ نحصل على

$$l_+|l;\nu\rangle = 0 \qquad (٢.٤٥)$$

ولأننا فيما عد ذلك نأمل أن نولد متجه ذاتي بالقيمة الذاتية $\mu = l + 1$

والتي تتعارض مع المعادلة (٢٠٤١).

إذا بدأنا بالحالة $|l;\nu\rangle$ ثم طبقنا l_- عدد k مرة، فإننا نولد الحالة $|l -$

$k;\nu\rangle$ باستخدام المعادلات (٢٠٣٤-٢٠٣٧). في هذه الحالة يكون

طول المتجه $l_-|l - k;\nu\rangle$ كالآتي

(٢٠٤٦)

$$\langle l-k;\nu|l_+l_-|l-k;\nu\rangle = \langle l-k;\nu|(\mathbf{I}^2-l_3^2-\hbar l_3)|l-k;\nu\rangle$$

(٢٠٤٧)

$$= \{\nu - (l-k)^2 + (l-k)\}\hbar^2\langle l-k;\nu|l-k;\nu\rangle \geq 0$$

إذا كان $|l-k;\nu\rangle \neq 0$، فإنه ولأن $\nu = l(l+1)$ نستنتج أن

$$l(l+1) - (l-k)^2 + (l+k) \geq 0 \qquad (٢٠٤٨)$$

والذي يضع حدود على حجم قيم k

$$(l-k) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + l(l+1)} \qquad (٢٠٤٩)$$

أو k_{max} يمكن تعيينها من

(٢.٥٠)

$$l-k_{max}=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)}=\frac{1}{2}-\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}$$

لذلك

$$k_{max}=2l \qquad (٢.٥١)$$

لكن k عدد صحيح موجب لذلك يجب ان تكون $2l$ عدد صحيح موجب

أيضا. لذلك تأخذ l فقط القيم التالية

$$l=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},\ldots \qquad (٢.٥٢)$$

عندما تكون $k_{max} = 2l$ نستنتج أن

$$l_{-}|l - k_{max}; \nu\rangle = l_{-}| - l; \nu\rangle = 0 \qquad (٢.٥٣)$$

لذلك يتسع مدى μ فقط بين القيم $1+$ و $1-$ بخطوات قيمتها الوحدة.

من المناسب أن نضع $m = \mu$ و نصف ν بالمتغير l أيضا لذلك نكتب

$\nu = l(l + 1)$ ثم يكون

$$l_3|m; l\rangle = m\hbar|m; l\rangle \qquad (٢.٥٤)$$

$$I^2|m; l\rangle = l(l + 1)\hbar^2|m; l\rangle \qquad (٢.٥٥)$$

حيث تكون القيم الذاتية في الصورة

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots \qquad (٢.٥٦)$$

$$m = -l, -l+1, -l+2, \ldots, l-2, l-1, l \qquad (٢.٥٧)$$

إن المتجهات الذاتية تكون متعامدة لأن I^2 و l_3 مؤثرات هرميتية لذلك يكون

$$\langle m'; l' | m; l \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \qquad (٢.٥٨)$$

أيضا يمكن تكوين عناصر مصفوفات كلا من l_3 و I^2 كالآتي

$$\langle m'; l' | l_3 | m; l \rangle = m\hbar \delta_{ll'} \delta_{mm'} \qquad (٢.٥٩)$$

$$\langle m';l'|I^2|m;l\rangle = l(l+1)\hbar^2\delta_{ll'}\delta_{mm'} \qquad (٢٠٦٠)$$

دعنا الآن في هذا الجزء تكون عناصر مصفوفات المؤثرين $l_\pm$ من خلال التمثيل حيث يكزن l_3 و I^2 قطريين. لقد أثبتنا قبلا أن المتجه $l_+|m;l\rangle$ هو متجه ذاتي للمؤثر I^2 بالقيمة الذاتية $l(l+1)\hbar^2$ كذلك هو متجه ذاتي للمؤثر l_3 بالقيمة الذاتية $(m+1)\hbar$. لذلك فإن المتجه $l_+|m;l\rangle$ يمكن أن يختلف عن المتجه $|m+1;l\rangle$ بعدد مركب ثابت. يمكننا تدوين الآتي

$$l_+|m;l\rangle = \lambda_{l,m}\hbar|m+1;l\rangle \qquad (٢٠٦١)$$

لذلك

$$\langle m+1;l|l_+|m;l\rangle = \lambda_{l,m}\hbar \qquad (٢.٦٢)$$

إذا اخذنا المرافق المركب لكلا الطرفين، نجد أن

$$\langle m;l|l_-|m+1;l\rangle = \lambda^*_{l,m}\hbar \qquad (٢.٦٣)$$

هذه العلاقة تحقق عندما يكون

$$l_-|m+1;l\rangle = \lambda^*_{l,m}\hbar|m;l\rangle \qquad (٢.٦٤)$$

الخطوة التالية اعتبر أن

$$l_-l_+|m;l\rangle = l_-\lambda_{l,m}\hbar|m+1;l\rangle \qquad (٢.٦٥)$$

$$= \hbar^2 |\boldsymbol{\lambda}_{l,m}|^2 |\boldsymbol{m}; \boldsymbol{l}\rangle$$ (٢٠٦٦)

$$= [\boldsymbol{I}^2 - \boldsymbol{l}_3^2 - \hbar \boldsymbol{l}_3] |\boldsymbol{m}; \boldsymbol{l}\rangle$$ (٢٠٦٧)

$$= [\boldsymbol{l}(\boldsymbol{l}+\mathbf{1}) - \boldsymbol{m}^2 - \boldsymbol{m}] \hbar^2 |\boldsymbol{m}; \boldsymbol{l}\rangle$$ (٢٠٦٨)

حيث استخدمنا المعادلات (٢٠٦١)، (٢٠٦٤)، (٢٠٢٤)، و (٢٠٥٥).

لذلك يمكننا استنتاج الآتي

$$\boldsymbol{\lambda}_{l,m} = \sqrt{\boldsymbol{l}(\boldsymbol{l}+\mathbf{1}) - \boldsymbol{m}(\boldsymbol{m}+\mathbf{1})}$$ (٢٠٦٩)

$$= \sqrt{(l-m)(l+m+1)}$$

(٢.٧٠)

أيضا

(٢.٧١)

$$l_{+}|m;l\rangle = \hbar\sqrt{(l-m)(l+m+1)}|m+1;l\rangle$$

(٢.٧٢)

$$l_{-}|m;l\rangle = \hbar\sqrt{(l-m+1)(l+m)}|m-1;l\rangle$$

لذلك تكون عناصر المصفوفة في الصورة

(٢.٧٣)

$$\langle m'; l'|l_+|m; l\rangle = \hbar\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\delta_{ll'}\delta_{m'm+1}$$

(٢.٧٤)

$$\langle m'; l'|l_-|m; l\rangle = \hbar\sqrt{(l-m+1)(l+m)}\delta_{ll'}\delta_{m'm-1}$$

إذا استخدمنا المعادلات (٢٠١٧ و ٢٠١٨) نحصل على عناصر مصفوفة

غير صفرية في الصورة

(٢.٧٥)

$$\langle \boldsymbol{m+1; l|l_1|m; l} \rangle = \frac{\hbar}{\mathbf{2}}\sqrt{\boldsymbol{(l-m)(l+m+1)}}$$

(٢.٧٦)

$$\langle \boldsymbol{m-1; l|l_1|m; l} \rangle = \frac{\hbar}{\mathbf{2}}\sqrt{\boldsymbol{(l-m+1)(l+m)}}$$

(٢٠٧٧)

$$\langle m+1;l|l_2|m;l\rangle = -i\frac{\hbar}{2}\sqrt{(l-m)(l+m+1)}$$

(٢٠٧٨)

$$\langle m-1;l|l_2|m;l\rangle = i\frac{\hbar}{2}\sqrt{(l-m+1)(l+m)}$$

الآن نكتب البعض من تلك القيم بصورة صريحة. عندما يكون$0 = l$

نجد أن عناصر المصفوفة الصفرية في الصورة

$$l_3 = 0, \qquad I^2 = 0, \qquad l_1 = 0 = l_2 \qquad (٢٠٧٩)$$

عندما يكون $l = \frac{1}{2}, m = \pm\frac{1}{2}$ تصبح عناصر المصفوفة في الصورة

(٢٠٨٠)

$$\boldsymbol{I}^2 = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{l}_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

(٢٠٨١)

$$\boldsymbol{l}_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & i\\ \\ -i & 0\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{l}_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ \\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

حيث يأخد متجه الحالة الصورة

(٢٠٨٢)

$$\Big| -\frac{1}{2};\frac{1}{2}\Big\rangle = \begin{bmatrix}0\\ \\ 1\end{bmatrix} \qquad \Big| +\frac{1}{2};\frac{1}{2}\Big\rangle = \begin{bmatrix}1\\ \\ 0\end{bmatrix}$$

للحالة عندما $l = 1$, $m = -1, 0, +1$ نجد أن

(٢٠٨٣)

$$l_3 = \hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad I^2 = 2\hbar^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(٢٠٨٤)

$$l_1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad l_2 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

بينما

(٢٠٨٥)

$$|+1;1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |0;1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |-1;1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

يترك للطالب كتمرين الاستمرار في حساب المصفوفات السابقة للقيم $l = \frac{3}{2}$، $m = \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$ حيث تكون المصفوفة 4×4. لقد اخترنا المؤثرات I^2 و l_3 كمؤثرات تبادلية لنتمكن من جعلها في صورة قطرية. يمكننا أيضا اختيار I^2 و l_1 أو I^2 و l_2. من المألوف أن يطلق على الاحداثي الثالث أو احداثي z إحداثي او محور التكميم عندما نجعل المؤثرات I^2 و l_3 في صورة قطرية. لاحظ أنه عندما دراسة تأثير مجال مغناطيسي في اتجاه معين، من المناسب عادة أن نستفيد من تلك الميزة باختيار هذا الاتجاه كمحور للتكميم.

في الخلاصة، لقد اثبتنا أن المؤثر l_z يأخذ قيما صحيحة او مضاعفات نصف صحيحة لقيمه الذاتية. ببساطة تلك النتيجة تطفو لأن علاقات التبادل في

المعادلات (٢٠١١-٢٠١٣) و (٢٠١٥) و لا تعارض التعريفات في المعادلات (٢٠٨-٢٠١٠) للمؤثر I بدلالة الاحداثيات والكمية الحركة. لذلك، إذا كان المؤثر I يمثل مؤثر كمية الحركة الزاوية، حينئذ فإن المتجهات الذاتية للمؤثرات I^2 و l_3 يجب ان تشمل تمثيلا بالاحداثيات أو كمية الحركة. أي أن، يجب ان تكون لدينا الإمكانية أن نعبر عن مصفوفات المؤثر I بدلالة مصفوفات الاحداثيات وكمية الحركة. في الجزء التالي سوف نوضح أن هذا يكون ممكنا في حالة تقييد القيم الذاتية للمؤثر l_z فقط للمضاعفات الصحيحة للثابت $\hbar$. لاحظ أن القيم الممثلة بنصف العدد الصحيح ليس لها نظير كلاسيكي من ناحية أن المتجه $|m;l\rangle$ لا يمكن تمثيله بالاحداثيات عندما تكون قيمة m نصف عدد صحيح. ليس

هناك سبب للتخللي عن قيم انصاف العدد الصحيح إذا قلنا أن هذا يناظر التأثيرات الكمية الجوهرية التي ليس لها نظير كلاسيكي. يطلق على كمية الحركة الجوهرية اسم كمية الحركة المغزلية. لقد تم اكتشاف أن بعض الجسيمات ليس لها كمية حركة زاوية فقط وانما لها كمية حركة إضافية هي كمية الحركة المغزلية. تولد الإلكترونات بمكية حركة مغزلية $l = \frac{1}{2}$ so $m = \pm\frac{1}{2}$. إن قياس تلك التأثيرات يمكن إجراؤه معمليا حيث أن كل المحاولات الكلاسيكية لوصف تلك التأثيرات قد فشلت تماما.