حامعة جنوب الوادى

كلية التربية بالغردقة

الفرقة الثانية عام رياضيات (عربي)

المادة : (بحتة ٦)

إستاذ المادة / د. اسماعيل جاد امين

الفصل الدراسي الأول

الباب الأول

المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الاولي و الدرجة الاولي

مقدمة

المعادلات التفاضلية من الموضوعات الهامة لورودها في كثير العلوم مثل الرياضيات البحتة و التطبيقية وفي الطبيعة و الكيمياء وفي كثير من العلوم الهندسية فكثير من مسائل الانحناء تعتمد في حلها علي المعادلات التفاضلية وكذلك تذبذب الاجسام و الذبذبات الكهربية وانتقال الحرارة وانتشار الاجسام الذائبة وسرعة التفاعلات الكيميائية.

١.١ تعريف المعادلات التفاضلية

نفرض أن y دالة في المتغير x وأن $y', y'', ..., y^{(n)}$ المشتقات التفاضلية من الرتبة الاولي و الثانية حتي المشتقة النونية للمتغير y بالنسبة إلي x فإن إي علاقة تربط بين x, y وأحد المشتقات السابقة تسمي "معادلة تفاضلية عادية" أما إذا كانت y دالة في اكثر من متغير ولها مشتقات جزئية فإنها تسمي "معادلة تفاضلية جزئية " ونذكر الان بعض الامثلة المختلفة للمعادلات التفاضلية العادية .

$$\frac{d^2y}{dx^2} + w^2 y = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^2y}{dx^2} - 5x = \cos 2x \qquad (2)$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 2yx = 5 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial y}{\partial x} \qquad (5)$$

٢.١ رتبة و درجة المعادلة التفاضلية

رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلي مشتقة موجوده في المعادلة التفاضلية. درجة المعادلة التفاضلية هي الاس الذي يرفع الية أعلي معاملي تفاضلي المحدد لرتبة المعادلة. فمثلاً المعادلة (١) هي معادلة من الرتبة الثانية والدرجة الاولي . والمعادلة (٢) من الرتبة الرابعة والدرجة الأولي. والمعادلة (٣) معادلة من الرتبة الثالثة و الدرجة الثانية .والمعادلات (٤)، (٥) معادلات تفاضلية جزئية.

٣.١ تكوين المعادلة التفاضلية

يتم تكوين المعادلة التفاضلية بحذف الثوابت الاختيارية نفرض أن لدينا العلاقة

$$f(x,y,c)=0 \qquad (1)$$

هذه المعادلة تمثل مجموعة المنحنيات المستوية ذات البارامتر الواحد وبتفاضل العلاقة (١) بالنسبة إلي x نحصل علي معادلة تحتوي علي x, y, y', c ولتكن

$$\phi(x,y,y',c)=0 \qquad (2)$$

وبحذف c من (١) ، (٢) نحصل علي علاقة في الصورة

$$\psi(x,y,y')=0 \qquad (3)$$

و العلاقة (٣) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الاولي حصلنا عليها نتيجة لحذف ثابت اختياري واحد وتسمي هذه المعادلة بالمعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات (١) .

ولتوضيح ذلك نعتبر المثال الاتي

$$y^2=4a(x-c)$$

فهذه المعادلة تمثل مجموعة من القطاعات المكافئة التي محورها المحور السيني و وترها البؤري العمودي $4a$. بالتفاضل نحصل علي

$$y\frac{dy}{dx}=2a$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية لمجموعة القطاعات المكافئة.

و في الحالة العامة اذا اعتبرنا العلاقة

$$f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0 \qquad (4)$$

وهذه العلاقة تحتوي علي n من البارامترات $c_1, c_2, \ldots, c_n$. للحصول علي المعادلة التفاضلية المناظرة نفاضل هذه العلاقة n من المرات المتتالية بالنسبة الي x فنحصل علي n من العلاقات في الصورة

$$\left.\begin{array}{l} \phi_1(x, y, y', c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0 \\ \phi_2(x, y, y', y'', c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \phi_n(x, y, y', \ldots, y^{(n)}, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

من العلاقات (٤)، (٥) وعددها $n+1$ يمكن حذف الثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_n$ وتكون النتيجة هي الحصول علي معادلة تفاضلية عادية و رتبتها n علي الصورة

$$f(x, y, y', y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

مثال (١) كون المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات

$$c_1 x + (y - c_2)^2 = 0 \qquad (1)$$

الحل

حيث ان معادلة مجموعة المنحنيات تحتوي علي بارا مترين فإننا نفاضل مرتين باعتبار ان

$$c_1 + 2(y - c_2)y' = 0 \qquad (2)$$

$\Rightarrow c_1 = -2(y-c_2)y'$

$$2y'^2 + 2(y - c_2)y'' = 0 \qquad (3)$$

$2(y-c_2)y'' = -2y'^2$

بحذف c_1 من المعادلة (٢) نحصل علي

$$c_1 = -2(y - c_2)y' \qquad (4)$$

$y - c_2 = -\frac{y'^2}{y''}$

$-2(y-c_2)y'x + (y-c_2)^2 = 0$

نعوض من (٤) في(١) نجد ان

$$-2xy'(y-c_2)+(y-c_2)^2=0 \qquad (5)$$

بحذف C_2 من المعادلة (٣) نحصل علي

$$y-c_2=-y'^2/y'' \qquad (6)$$

بالتعويض من (٦) في (٥) نحصل علي المعادلة التفاضلية المطلوب وهي

$$y'+2xy''=0$$

مثال(٢) أوجد المعادلة التفاضلية للقطاعات المكافئة الراسية المحور.

الحل

المعادلة التفاضلية للقطاعات المكافئة الراسية المحور هي

$$x^2=\alpha x+\beta y+c$$

و حيث ان هذه المعادلة تحتوي علي ثلاث ثوابت α,β,C .بالتالي نفاضل ثلاث مرات متتالية

$$2x=\alpha+\beta\frac{dy}{dx},\quad 2=\beta\frac{d^2y}{dx^2},\quad 0=\beta\frac{d^3y}{dx^3}$$

$\therefore y''' = 0$

المعادلة التفاضلية المطلوبة هي $\dfrac{d^3y}{dx^3}=0$

مثال (٣) إذا كانت

$$y=ae^{2x}+be^{-x} \qquad (1)$$

فاثبت إن

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=0$$

الحل

بالتفاضل نجد أن

L.H.S = 0 = R.H.S

$$\frac{dy}{dx} = 2ae^{2x} - be^{-x} \qquad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4ae^{2x} + be^{-x} \qquad (3)$$

بجمع (١) ، (٢) نجد أن

$$\frac{dy}{dx} + y = ae^{2x}$$

وبجمع (٢) ، (٣) ينتج أن

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 6ae^{2x}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{dy}{dx} + y\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

وهو المطلوب.

٤.١ حل المعادلات التفاضلية

حل المعادلة التفاضلية هو عملية الحصول علي الأصل الكامل للمعادلة التفاضلية إي عملية عكس عملية تكوين المعادلة و التي درسناها. ويمكن تقسيم هذه المعادلات من حيث طرق حلها إلي الانواع الاتية

١. المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات القابلة للانفصال.
٢. المعادلات التفاضلية المتجانسة.
٣. المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية.
٤. المعادلات التفاضلية التامة.
٥. المعادلات التفاضلية الخطية.
٦. معادلات برنولي.
٧. معادلات ريكاتي.

و سوف ندرس كل نوع علي حدة

١.٤.١ المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات القابلة للانفصال

يمكن كتابة المعادلات التي يمكن فيها فصل المتغيرات علي الشكل الاتي

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (1)$$

$$M(y)dx + N(x)dy = 0 \qquad (2)$$

و المعادلة (٢) يمكن تحويلها إلي صورة المعادلة (١) وذلك بالقسمة علي $N(x)M(y)$ أي

$$\frac{dx}{N(x)} + \frac{dy}{M(y)} = 0$$

و هذ النوع من المعادلات يمكن حلها بإجراء التكامل مباشرة.

مثال (١) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$x\sqrt{y^2-1}\,dx + y\sqrt{x^2-1}\,dy = 0 \qquad (1)$$

الحل

بالقسمة علي $\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}$ نحصل علي

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}dy = 0$$

$\frac{1}{2}\int 2x\,(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

وبتكامل هذه المعادلة نحصل علي

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} + \int\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-1}} = c$$

$$\sqrt{x^2-1} + \sqrt{y^2-1} = c$$

وهي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية (١).

مثال (٢) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$xy^3\frac{dy}{dx} = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2 \qquad (1)$$

الحل

نضع المعادلة علي الصورة

$$xy^3\frac{dy}{dx}=(1-x^2)+y^2(1-x^2)\Rightarrow xy^3\frac{dy}{dx}=(1-x^2)(1+y^2)$$

$$xy^3dy=(1-x^2)(1+y^2)dx$$

بقسمة طرفي المعادلة علي $x(1+y^2)$

$$\frac{y^3}{1+y^2}dy=\frac{1-x^2}{x}dx$$

وبالتكامل نحصل علي

$$\int\frac{y^3}{1+y^2}dy=\int\frac{1-x^2}{x}dx+c,\quad \int(y-\frac{y}{y^2+1})dy=\int\frac{dx}{x}-\int xdx+c$$

$$\frac{y^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(y^2+1)=\ln x-\frac{x^2}{2}+c,\quad x^2+y^2=2\ln(x\sqrt{y^2+1})+c$$

وهذا يمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية (١)

مثال (٣) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}=\left(8x+2y+1\right)^2 \qquad (1)$$

الحل: **بوضع** $u=8x+2y+1$

ثم بالتفاضل بالنسبة إلي x نحصل علي

$$u'=8+2y',\quad y'=\frac{1}{2}\left(u-8\right)$$

بالتعويض عن قيمة y' في المعادلة (١) نحصل علي

$$u'-8=2u^2,\qquad \frac{du}{dx}=2u^2+8$$

بالتكامل نحصل علي

$$\int \frac{du}{u^2+4} = 2\int dx + c, \qquad \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{u}{2} = 2x + c$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هي

$$\tan^{-1}\frac{8x+2y+1}{2} = 4x + c$$

٢.٤.١ المعادلات التفاضلية المتجانسة

يقال للدالة $f(x,y)$ إنها متجانسة من درجة n إذا امكن وضعها علي الصورة

$$f(x,y) = x^n f(\frac{y}{x}), \qquad f(x,y) = x^n g(x,y)$$

حيث g دالة للمتغير $\frac{y}{x}$.

ويقال للمعادلة التفاضلية الآتية

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$$

انها متجانسة إذا كانت كل من الدالتين $g(x,y), f(x,y)$ متجانسة من نفس الدرجة إي إن

$$f(x,y) = x^n \phi(\frac{y}{x}), \qquad g(x,y) = x^n \psi(\frac{y}{x})$$

المعادلة السابقة تكون علي الصورة

$$\phi(\frac{y}{x})dx + \psi(\frac{y}{x})dy = 0 \qquad (1)$$

ويمكن تحويل هذه المعادلة إلي معادلة من النوع الأول أي ذات متغيرات قابلة للانفصال وذلك بفرض أن

$$z = \frac{y}{x}, \qquad y = xz, \qquad \frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$$

وبوضع المعادلة (١) علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\phi(\frac{y}{x})}{\psi(\frac{y}{x})},\qquad x\frac{dz}{dx}+z=-\frac{\phi(z)}{\psi(z)}$$

$$x\frac{dz}{dx}=-\left[z+\frac{\phi(z)}{\psi(z)}\right]$$

وهذه معادلة قابلة للانفصال يمكن حلها كما سبق

مثال (١) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$(x^2-y^2)dx+2xydy=0,\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy}$$

ويوضع $y=xz$ نجد أن

$$x\frac{dz}{dx}+z=\frac{z^2-1}{2z},\qquad x\frac{dz}{dx}=-\frac{1+z^2}{2z}$$

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{2z}{1+z^2}dz,\qquad \ln x+\ln c=-\ln(1+z^2)$$

$$x(1+z^2)=c,\qquad x(1+\frac{y^2}{x^2})=c$$

$$x^2+y^2-cx=0$$

وهي معادلة مجموعة من الدوائر نصف قطرها c .

مثال (٢) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$(2ye^{\frac{y}{x}}-x)\frac{dy}{dx}+2x+y=0$$

الحل : يمكن كتابة المعادلة السابقة علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{x-2ye^{\frac{y}{x}}}$$

نضع $y = zx$ نجد أن

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{2+z}{1-2ze^{z}}, \qquad x\frac{dz}{dx} = \frac{2(1+z^{2}e^{z})}{1-2ze^{z}}$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{1-2ze^{z}}{2(1+z^{2}e^{z})}dz\,, \qquad 2\ln x = \int\frac{e^{-z}-2z}{e^{-z}+z^{2}}dz$$

$$2\ln x = -\ln(z^{z} + e^{-z}) + \ln c, \qquad x^{2}(z^{z} + e^{-z}) = c$$

$$x^{2}\left(\frac{y^{2}}{x^{2}} + \frac{y}{e^{x}}\right) = c, \qquad y^{2} + x^{2}e^{-\frac{y}{x}} = c$$

مثال(٣) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$xy' = \sqrt{x^{2} - y^{2}} + y'$$

الحل

$$y' = \sqrt{1 - \frac{y^{2}}{x^{2}}} + \frac{y'}{x}$$

نضع $y = zx$ أي إن

$$y' = xz' + z\,, \qquad xz' + z = \sqrt{1-z^{2}} + z$$

$$xz' = \sqrt{1-z^{2}}, \qquad \int\frac{dz}{\sqrt{1-z^{2}}} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\sin^{-1} z = \ln cx\,, \qquad y = x\sin\ln cx$$

٣.٤.١ المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية.

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية تكون علي كصورة الآتية

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0 \qquad (1)$$

أو تكتب علي الصورة

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

وهذه المعادلات ذات المعاملات الخطية يمكن تحويلها إلي

(١) معادلات متجانسة.

(٢) معادلات ذات متغيرات قابلة للانفصال.

أولا: المعادلات ذات المعاملات الخطية والتي يمكن تحويلها إلي معادلات متجانسة.

في هذه الحالة المستقيمان

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad , \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

يتلاقيان في نقطة ولتكن (α, β) وهذا يعني إن محدد المعاملات لا يساوي الصفر.

نضع $x = u + \alpha\ ,\ y = y + \beta$. فيكون $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dv}$. و المعادلة (١) تصبح

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة فيمكن حلها كما سبق.

ثانيا: معادلات يمكن تحويلها إلي متغيرات منفصلة

ففي هذه الحالة يكون محدد المعاملات يساوي الصفر أي أن $a_1b_2 = a_2b_1$ والمستقيمان

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0\ ,\ \ a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

يكونان متوازيان ويكون

$$a_1x + b_1y = \alpha(a_2x + b_2y)$$

نضع

$$u = a_1x + b_1y\,, \qquad \frac{du}{dx} = a_1 + b_1\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_1}\left(\frac{du}{dx} - a_1\right)$$

والمعادلة (١) تصبح

$$\frac{1}{b_1}\left(\frac{du}{dx} - a_1\right) = \frac{u + c_1}{\alpha u + c_2}$$

وهذه معادلة ذات متغيرات قابلة للانفصال فيمكن حلها كما سبق.

مثال (١) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(2x-y+4)dy+(x-2y+5)dx=0$$

الحل

نلاحظ أن محدد المعاملات $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

وبالتالي المعادلة يمكن تحويلها إلي معادلة متجانسة.

أولا : نوجد نقطة التقاطع للمستقيمين

$$2x-y+4=0, \quad x-2y+5=0$$

وهي $(-1,2)$ باستخدام التعويض

$$x=u-1 \quad , \quad y=v+2$$
$$dx=du \quad , \quad dy=dv$$

المعادلة تصبح علي الصورة

$$\left(2u-2-v-2+4\right)+\left(u-1-2v-4+5\right)du=0$$

باستخدام التعويض $v=uz$

$$\frac{dv}{du}=z+u\frac{dz}{du}, \qquad (2-z)(z+u\frac{dz}{du})+(1-2z)=0$$

$$2z'+2v\frac{dz}{du}-z^2-uz\frac{dz}{du}+1-2z=0, \qquad u(2-z)\frac{dz}{du}=z^2-1$$

$$\frac{2-z}{z^2-1}dz=\frac{1}{u}du, \qquad (\frac{1}{2\left(z-1\right)}-\frac{3}{2\left(z+1\right)})dz=\frac{1}{u}du$$

$$\frac{1}{2}\ln(z-1)-\frac{3}{2}\ln(z+1)=\ln u+\ln c, \qquad \ln\frac{z-1}{(z+1)^3}=2\ln cu$$

بالتعويض عن قيم u, v نحصل علي

$$\frac{y-x-3}{(y+x-1)^3}=c$$

مثال (٢) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$(2x-4y+5)\frac{dy}{dx}+x-2y+3=0$$

الحل : نلاحظ إن محدد المعاملات يساوي الصفر

نضع

$$x-2y=u, \qquad 1-2\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(1-\frac{du}{dx})$$

المعادلة تصبح علي الصورة

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{du}{dx}=-\frac{u+3}{2u+5}, \qquad \frac{du}{dx}=\frac{4u+11}{2u+5}$$

$$\int dx=\int\frac{2u+5}{4u+11}du=\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{4u+11})du$$

$$2x+\frac{c}{4}=u-\frac{1}{4}\ln(4u+11), \qquad 8x+c=4x-8y-\ln(4x-8y+11)$$

$$4x+8y+\ln(4x-8y+11)+c=0$$

٤.٤.١ المعادلات التفاضلية الكاملة (التامة)

يقال للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

أنها كاملة (تامة) إذا تحقق للدالتين $M\ ,N$ المتصلتين العلاقة

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

حيث كل من $\frac{\partial N}{\partial x},\frac{\partial M}{\partial y}$ دالة متصلة وبذلك يكون الطرف الأيسر للمعادلة (١) عنصراً تفاضليا تاما لدالة ما $f(x,y)$ بالنسبة للمتغيرين x,y إي أن

$$df(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

والشرط الضروري و الكافي لذلك هو إن تحقق العلاقة (٢).

اولا : لإثبات ان الشرط الضروري

نفرض إن الطرف الأيسر للمعادلة (١) يمثل تفاضلاً تاماً للدالة $f(x,y)$

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

و بمقارنة المعاملات نحصل علي

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)\quad,\quad\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)\qquad(3)$$

وبتفاضل العلاقة الأولي من (٣) بالنسبة إلي y و الثانية بالنسبة إلي x نحصل علي

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y},\quad\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

وبمعني ذلك أنه إذا كانت المعادلة التفاضلية (١) تامة فإنه الشرط (٢) يجب أن يتحقق إي أن هذا الشرط ضروري.

ثانيا : لإثبات ان الشرط الكافي

نفرض إن العلاقة (٢) صحيحة ويكون المطلوب أثبات أن المعادلة التفاضلية (١) تكون تامة أي أن توجد دالة $f(x,y)$ وبحيث يكون

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)\qquad(4)$$

و العلاقة الأولي في (٤) تحقق إذا كان

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+\phi(y)=\psi(x,y)+\phi(y) \quad (5)$$

حيث $\phi(y)$ دالة اختيارية لا تحتوي علي x

وبتفاضل العلاقة (٥) بالنسبة إلي y نجد ان

$$N=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \psi}{\partial y}+\phi'(y) \qquad (6)$$

ومن العلاقة (٦) نحصل علي $\phi(y)$ وذلك بالتكامل بالنسبة إلـي y و بـالتعويض في العلاقـة (٥) عن $\phi(y)$ وبذلك تتعين الدالة $f(x,y)$ تاماً وهذا يثبت أن الشرط كافي.

مثال (١) اثبت أن المعادلة التفاضلية الآتية تامة و أوجد أصلها التام.

$$(2y^2+4xy-x^2)dx+(2x^2+4xy-y^2)dy=0 \qquad (1)$$

الحل : نفرض أن

$$M(x,y)=2y^2+4xy-x^2 \quad , \quad N(x,y)=2x^2+4xy-y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4y+4x \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x}=4x+4y$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

المعادلة تامة

نفرض أن حل المعادلة علي الصورة

$$f(x,y)=c$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M=2y^2+4xy-x^2 \qquad (3)$$

بتكامل المعادلة (٣) بالنسبة إلي x

$$f(x,y)=2y^2x+2x^2y-\frac{x3}{3}+\phi(y) \qquad (4)$$

وبتفاضل العلاقة (٤) بالنسبة إلي y

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N=2x^2+4xy-y^2=4xy+2x^2+\phi'(y)$$

$$\phi'(y)=-y^2(y),\qquad \phi(y)=-\frac{y^3}{3}+c$$

$$f(x,y)=2y^2x+2x^2y-\frac{x^3}{3}-\frac{y^3}{3}=c$$

مثال(٢) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$(\cos x e^{\sin x}+\sin y\cos x)dx+\cos y\sin x\,dy=0 \qquad (1)$$

الحل بوضع

$$M=\cos x e^{\sin x}+\sin y\cos x$$

$$N=\sin x\cos y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\cos y\cos x \qquad (2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\cos x\cos y \qquad (3)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

بالتالي المعادلة تامة

نفرض أن حل المعادلة علي الصورة

$$f(x,y)=c$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M=\cos x\, e^{\sin x}+\sin y\cos x \qquad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N=\sin x\cos y \qquad (5)$$

بتكامل العلاقة (٤) بالنسبة إلي x نحصل علي

$$f(x,y) = -e^{\sin x} + \sin x \sin y + \phi(y) \qquad (6)$$

و بتفاضل هذه العلاقة بالنسبة إلي y نجد أن

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cos y + \phi'(y) \qquad (7)$$

من (٥)، (٧) نحصل علي

$$\sin x \cos y = \phi'(y) + \sin x \cos y$$

$$\phi'(y) = 0, \qquad \phi(y) = c$$

بالتعويض في المعادلة (٦) عن قيم $\phi(y)$

$$f(x,y) = e^{\sin x} + \sin x \sin y + c$$

العوامل المكاملة

إذا كانت المعادلة التفاضلية التي من الدرجة الأولى والرتبة الأولى

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

غير تامة أي يكون

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

فإن يمكن تحويلها إلي معادلة تامة وذلك بضربها في عامل مكامل M والعامل المكامل M يكون غالبا دالة في (x,y) ولكن الحصول علي العامل المكامل في الحالة العامة هي مسألة رياضية غير بسيط لذلك سوف نعتبر أن M دالة في y فقط أو M دالة في y فقط.

بضرب المعادلة (١) في العامل المكامل $M(x,y)$ لكي تصبح تامة وبذلك يكون

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0. \qquad (2)$$

المعادلة (٢) اصبحت تامة إذا يكون

$$\frac{\partial x}{\partial y}(\mu M)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

$$M\,\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\,\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0 \qquad (3)$$

ومن هذه المعادلة يتعين العامل المكاملة μ كدالة في $x\,,y$

أولا : شرط وجود عامل مكامل دالة في x فقط.

نفرض أن المعادلة (١) لها عامل مكامل $\mu=\mu(x)$ وبذلك تصبح المعادلة (٣) علي الصورة

$$N\,\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right), \qquad \frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

واضح أن الطرف الأيسر للمعادلة الأخيرة دالة في x فقط وبذلك فإن الطرف الأيمن دالة في x فقط .

الشرط الضروري والكافي كي يكون للمعادلة (١) عامل مكامل دالة في x فقط هو أن يكون المقدار $\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})$ دالة في x فقط .

$$\frac{1}{\mu}d\,\mu=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx$$

وبالتكامل يكون

$$\ln\mu(x)=\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx\,,\ \Rightarrow \mu(x)=e^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$$

ثانيا : شرط و جود عامل دالة في y فقط .

نفرض أن المعادلة (١) لها عامل مكامل في y وبذلك تصبح المعادلة (٣) علي الصورة

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

واضح أن الطرف الأيسر للمعادلة هو دالة في y فقط وبذلك فإن الطرف الأيمن يكون كذلك دالة في y فقط.

الشرط الضروري والكافي لكي يكون للمعادلة (١) عامل مكامل دالة في y فقط هو أن يكون المقدار $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ دالة في y فقط .

وبتكامل هذه المعادلة

$$\ln \mu(y)=-\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dy \Rightarrow \mu(y)=e^{-\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dy}$$

وهذه العلاقة تعطي العامل المكامل بصورة صريحة.

مثال (١) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

الحل

$$xy^3dx+(x^2y^2-1)dy=0$$

$$M(x,y)=xy^3\ ,\ N(x,y)=x^2y^2-1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3xy^2\ ,\ \frac{\partial N}{\partial x}=2xy^2,\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

المعادلة غير تامة

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=xy^2$$

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{y}$$

يوجد عامل مكامل μ دالة في y فقط يتعين من

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{dy}{y}}=\frac{1}{y}$$

بعد الضرب في العامل المكامل تصبح المعادلة التفاضلية تامة.

$$xy^2dx+\left(x^2y-\frac{1}{y}\right)dy=0$$

ولإيجاد حل المعادلة التفاضلية (١) نفرض الحل العام لها علي الصورة

$$f(x,y)=c$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M=xy^2 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N=x^2y-\frac{1}{y} \qquad (3)$$

يتكامل المعادلة (٢) نحصل علي

$$f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2+\phi(y) \qquad (4)$$

ثم نفاضل المعادلة بالنسبة إلي y نحصل علي

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N=x^2y-\frac{1}{y}=x^2y+\phi'(y), \qquad \phi'(y)=\frac{1}{y}$$

$$\phi(y)=\ln y+\ln c$$

بالتعويض في (٤) نحصل علي الحل العام

$$f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2+\ln cy$$

مثال (٢) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(1-xy)dx+(xy-x^2)dy=0$$

الحل

$$M = 1 - xy \quad , \quad N = xy - x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -x \ , \ \frac{\partial N}{\partial x} = y - 2x , \qquad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

المعادلة غير تامة

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = x - y , \qquad \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{x - y}{x\left(y - x\right)} = -\frac{1}{x}$$

يوجد عامل مكامل μ دالة في x فقط يتعين من

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$$

بعد الضرب في العامل المكامل تصبح المعادلة التفاضلية تامة.

$$\left(\frac{1 - xy}{x}\right)dx + \left(\frac{xy - x^2}{x}\right)dy = 0$$

واضح أن حل المعادلة التفاضلية التامة السابقة هو

$$\ln x - xy + \frac{y^2}{2} = c$$

٥.٤.١ المعادلات التفاضلية الخطية

المعادلة التفاضلية تكون خطية إذا كانت y ومشتقاتها التفاضلية بالنسبة إلي x من الدرجة الأولي وغير مضروبة ببعضها و الصورة العامة لها

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

حيث أن $f(x)$, $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$ دوال في x.

والمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولي و الدرجة الأولي تكون علي الصورة

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = \phi(x) \qquad (1)$$

Or

$$\cancel{\frac{dx}{dy} + p(y)x = \phi(y)} \qquad (2)$$

ولحل هذه المعادلة نقوم بتحويلها إلي صورة معادلة تامة وذلك بضرب المعادلة (١) في عامل مكامل $\mu = \mu(x)$ فتصبح المعادلة (١) علي الصورة

$$\mu(x)dy + [\mu(x)p(x)y - \mu(x)\phi(x)]dx = 0 \qquad (3)$$

و المعادلة (٣) تكون تامة إذا تحقق الشرط

$$\frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x)p(x)y - \mu(x)\phi(x)\right]$$

ومنها يكون

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)p(x) \qquad (4)$$

$$\therefore \frac{d\mu}{\mu(x)} = p(x)dx \Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

وبالتعويض من (٤) في (٣) نحصل علي الصورة

$$\mu(x)dy + y\,d\mu = \mu(x)\phi(x)dx$$

$$d[\mu(x)y] = \mu(x)\phi(x)dx$$

و بتكامل هذه المعادلة نحصل علي

$$\mu(x)y = \int \mu(x)\phi(x)dx + c \Rightarrow y = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)\phi(x)dx + \frac{c}{\mu(x)}$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية (١).

وبالمثل يمكن إيجاد حل المعادلة التفاضلية (٢) علي الصورة

$$x(y)=\frac{1}{\mu(y)}\int \mu(y)\phi(y)\,dy+\frac{c}{\mu(y)}$$

مثال (١) : أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}+y\cot x=\sec x$$

الحل: نوجد أولا عاملاً مكاملاً يعتمد علي x

$$\mu(x)=e^{\int \cot x\,dx}=\sin x$$

الحل العام للمعادلة يصبح علي الصورة

$$\frac{d}{dx}(y\sin x)=\tan x,\qquad y\sin x=\int \tan x\,dx+c$$

$$y=\operatorname{cosec}x\,\ln\sec x+c\,\operatorname{cosec}x$$

مثال (٢) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$x\frac{dy}{dx}+(x+1)y=3x^2e^x$$

الحل: يمكن كتابة المعادلة علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}+\left(1+\frac{1}{x}\right)y=3x^2e^x,\qquad \mu=e^{\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx}=xe^x$$

$u = x^2,\ dv = e^x dx$

$du = 2x\,dx,\ e^x$

$$\frac{d}{dx}(yxe^x)=3x^3e^{2x},\qquad yxe^x=3\int x^3e^{2x}dx+c$$

$$xy=(x^3+c)e^{-x}$$

$\int x^2 e^x$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية

٦.٤.١ معادلة برنولي

هي المعادلة تكون علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}+yp(x)=Q(x)y^n \qquad (1)$$

حيث n عدد حقيقي لا يساوي 1

لحل هذه المعادلة يتم تحويلها أولاً إلي معادلة خطية وذلك بالقسمة علي y^n

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{1-n}p(x)=Q(x) \qquad (2)$$

ثم نفرض أن $u=y^{1-n}$. فيكون

$$\frac{du}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \qquad (3)$$

وبالتعويض من (٣) في (٢) نحصل علي

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx}+p(x)u=Q(x)\Rightarrow\frac{du}{dx}+(1-n)p(x)u=(1-n)Q(x)$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية يمكن حلها كما سبق.

مثال (١) : أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2x}=5x^2y^5 \qquad (1)$$

الحل

بقسمة المعادلة (١) علي y^5 نجد أن

$$y^{-5}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y^{-4}=5x^2 \qquad (2)$$

نفرض أن $u=y^{-4}$ فيكون $-4y^{-5}\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$ و بالتعويض في (٢)

$$-\frac{1}{4}\frac{du}{dx}-\frac{u}{2x}=5x^2\Rightarrow\frac{du}{dx}+\frac{2u}{x}=-20x^2$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية. يتك حلها كالتالي

$$\mu = e^{\int \frac{2dx}{x}} = x^2 \Rightarrow \frac{d}{dx}(ux^2) = -20x^4$$

$$ux^2 = -4x^5 + c \Rightarrow u = -4x^3 + \frac{c}{x^2} = \frac{c - 4x^5}{x^2} = y^{-4}$$

الحل العام المعادلة (١) هو

$$y^4 = \frac{x^2}{c - 4x^5}$$

٦.٤.١ معادلة ريكاتي

معادلة ريكاتي هي المعادلة التي تكون علي الصورة

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \qquad (1)$$

حيث R, Q, P دوال في x فقط ويمكن حل هذه المعادلة إلي علم أحد الحلول الخاصة لها $y = y_1$ حيث y_1 دالة في x . وفي هذه الحالة فالأصل التام للمعادلة(١) يعطي بالتعويض

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \qquad (2)$$

حيث أن z دالة في x يمكن ايجادها علي النحو التالي:

حيث أن $y = y_1$ حل للمعادلة (١) فبالتالي هو يحققها

$$\frac{dy_1}{dx} = p(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x) \qquad (3)$$

بطرح المعادلة (٣) من المعادلة (١) ينتج أن

$$\frac{d}{dx}(y - y_1) = p(x)(y^2 - y_1^2) + Q(x)(y - y_1) \qquad (4)$$

من المعادلة (٢) نحصل علي

$$\frac{d}{dx}(y - y_1) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

المعادلة (٤) تصبح علي

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=(y_1^2+\frac{1}{z^2}+\frac{2y}{z}+y_1^2)p(x)+\frac{1}{z}Q(x)$$

$$\boxed{\frac{dz}{dx}+\left[2y_1p(x)+Q(x)\right]z=-p(x)}$$

وهذه معادلة خطية يمكن حلها كما سبق.

مثال (١) اثبت أن $y=1$ حل خاص للمعادلة التفاضلية الآتية ثم أوجد حلها العام.

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=(y-1)(xy-y-x)}$$

الحل

بوضع المعادلة التفاضلية علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=(x-1)y^2+(1-2x)y+x \qquad (1)$$

وهذه معادلة تمثل معادلة ريكاتي

بالتعويض في المعادلة (١) نحصل علي

$$x-1+(1-2x)+x=0$$

ولذلك فإن $y=1$ حل خاص للمعادلة التفاضلية (١).

نفرض أن الحل العام للمعادلة التفاضلية علي الصورة $y=1+\frac{1}{z}$ و بالتالي $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$

بالتعويض في المعادلة (١) نحصل علي

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=(x-1)(1+\frac{1}{z})^2+(1-2x)(1+\frac{1}{z})+x$$

$$\frac{dz}{dx}+(x-1)(z+1)^2+(1-2x)(z^2+z)+z^2x=0$$

$$\frac{dz}{dx}+z^{2}(x-1+2x+x)+z(2x-2+1-2x)+x-1$$

$$\boxed{\frac{dz}{dx}-z=1-x} \qquad (2)$$

وهذه معادلة خطية عاملها المكامل هو $\mu(x)=e^{-\int dx}=e^{-x}$

و يمكن حل هذه المعادلة كما يلي

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}z)=(1-x)e^{-x} \Rightarrow e^{-x}z=\int(1-x)e^{-x}+c=xe^{-x}+c$$

$$z=x+ce^{x}$$

إي أن الحل العام لمعادلة (١) هو

$$\frac{1}{y-1}=x+ce^{x}$$

تمارين (١)

(١) كون المعادلات التفاضلية لمجموعة المنحنيات الآتية

$(i)\ y=(x-c)^3 \qquad (ii)\ y=\sin(x+c)$

$(iii)\ x^2+cy^2=2y \qquad (iv)\ y=c(x-2)^2$

$(iiv)\ y=ax^2+be^x \qquad (vi)\ y=ax^3+bx^2+cx$

$(vii)\ y=\alpha\cos(\ln x)+\beta\sin(\ln x)$

$(viii)\ y=a\{x+\sqrt{x^2-1}\}^n+b\{x-\sqrt{x^2-1}\}^n$

حيث n ثابت مطلق.

$(ix)\quad y=(a+bx)\cosh mx$

حيث m ثابت مطلق.

$(x)\ y=a(\sin^{-1}x)+b(\sin^{-1}x)^2$

$(xi)\ y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

$(xii)\ y=\alpha e^{\beta x}$

$(xiii)\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

(٢) أوجد المعادلة التفاضلية للقطاعات المكافئة التي محورها هو المحور السيني.

(٣) كون المعادلة التفاضلية للدوائر التي نصف قطرها الواحد الصحيح ومركزها تقع علي المستقيم $y=2x$

(٤) اوجد الحل العام المعادلات التفاضلية الاتية بطريقة فصل المتغيرات

$(i)\ \frac{dy}{dx}=\cos(y-x) \qquad (ii)\ \tan x\sin^2 y\,dx+\cos^2 x\cot y\,dy=0$

$(iii)\ x\frac{dy}{dx}-y=y^2 \qquad (iv)\ xy\frac{dy}{dx}=1-x^2$

$(iiv)\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{4x+2y-1}$ $(v)x^2\dfrac{dy}{dx}+y=a$

$(vi)xy^3\dfrac{dy}{dx}=1-x^2+y^2-x^2y^2$

$(vii)x(1-x^2)dy=(x^2-x+1)ydx$

$(viii)(x+y)^2(x\dfrac{dy}{dx}+y)=xy(1+\dfrac{dy}{dx})$

(٥) اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية المتجانسة الآتية

$(i)(x+2y)dx-xdy=0$ $(ii)xy'=y-xe^{y/x}$

$(iii)xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$ $(iv)xy'=y\cos(\ln\dfrac{y}{x})$

$(v)xy'-y=x\tan\dfrac{y}{x}$ $(vi)(x^2-2xy-y^2)\dfrac{dy}{dx}=x^2+2xy-y^2$

$(vii)(x+y)^2\dfrac{dy}{dx}=x^2-2xy+5y^2$ $(viii)x\dfrac{dy}{dx}=y-x\cos^2(\dfrac{y}{x})$

(٦) اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية الاتية

$(i)y'=\dfrac{4x-y+7}{2x+y-1}$ $(ii)(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$

$(iii)\ (x-y-1)+(y-x+2)y'=0$

$(iv)(3y-x)y'=3x-y+4$

$(v)(x-5y+5)dy+(5x-y+1)dx=0$

$(vi)x^2\dfrac{dy}{dx}=(2x-y+1)^2$ $(vii)(y+ax+b)\dfrac{dy}{dx}=y+ax-b$

(٧) بين أن المعادلات الاتية تامة واوجد الحل العام لها

$(i)\ 2xydx+(x^2-y^2)dy \quad (ii)\ (2-9xy^2)xdx+(4y^2-6x^3)ydy=0$

$(iii)\ (x^3-3xy^2)dx+(y^3+3x^3y)dy=0$

$(iv)\ xdx+ydy=a^2\left(\frac{xdx-ydy}{x^2+y^2}\right)$

$(v)\ (3x^2+4xy)dx+(2x^2+3y^2)dy=0$

$(vi)\ (\cos x-x\cos y)dy-(\sin y+y\sin x)dx=0$

$(vii)\ e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0 \quad (viii)\ \frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$

$(ix)\ \frac{2x^2+y^2}{y^2}dx-\frac{2x^3+5y}{y^3}dy=0$

$(x)\ (1+y^2\sin 2x)dx-2y\cos^2 xdy=0$

$(xi)\ \left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0$

$(xii)\ \sin x\cos ydy+\cos x\sin ydx+\cos xe^{\sin x}dx=0$

$(xiii)\ \left[3ax^2+2(a+2h)xy+(b+2h)y^2\right]dx$

$+\left[(a+2h)x^2+2(b+2h)xy+3by^2\right]dy=0$

(٨) أوجد عامل مكامل يعتمد علي x فقط لكل من المعادلات التفاضلية الآتية ومن ثم أوجد اصلها التام

$(i)\ (x^3+y^4)dx+8xy^3dy=0$

$(ii)\ (1-xy)dx+(1-x^2)dy=c$

$(iii)\ (x^3+2y^3-3xy)dx+3x(y^2+x)dy=0$

$(iv)\ (2x^2+xy+a^2)ydx+(x+2y)(x^2+a^2)dy=0$

(٩) أوجد عامل مكامل يعتمد علي y فقط لكل من المعادلات التفاضلية الآتية ومن ثم أوجد اصلها التام

$(i)\ xy^3dx+(x^2y^2-1)dy=0$

$(ii)\ y^2dx+(xy+1)dy=0$

$(iii)\ (y+1)dx+(xy+y^2+y+1)dy=0$

$(iv)\ dx+\left\{1+(x+y)\tan y\right\}dy=0$

(١٠) أوجد الحل العام لكل من المعادلات الخطية الآتية

$(i)\ (x+1)\frac{dy}{dx}-y=3x^4+4x^5 \quad (ii)\ \left\{2x\frac{dy}{dx}+y\right\}\sqrt{1+x}=1+2x$

$(iii)\ 2(x^2+x+1)\frac{dy}{dx}+(2x+1)y=8x^2+1$

$(iv)\ 2(1-x^2)\frac{dy}{dx}-(1+x)y=\sqrt{1-x^2}$

$(v)\ (1+x^2)^2\frac{dy}{dx}+(1+x)(1-x^2)y=2 \quad (vi)\ \frac{dy}{dx}+y\tan x=\sin 2x$

$(vii)\ \frac{dy}{dx}\sin x\cos^3 x+y\cos 2x\cos^2 x=0$

$(viii)\ \frac{1}{2}\frac{dy}{dx}=y\tan 2x+1+\sec 2x \quad (ix)\ \frac{dy}{dx}+2y=x^2+3\cosh x$

$(x)\ \frac{dy}{dx}+2y\ \mathrm{cosec}\, 2x=2\cot^2 x\cos 2x$

$(xi)\ \frac{dy}{dx}\cot x-y=\mathrm{cosec}\, 2x+\cos 2x$

$(xii)\ (1-x^2)\frac{dy}{dx}+xy=x\sin^{-1}x+(1-x)\sqrt{1-x^2}$

(١١) حول المعادلات التفاضلية الاتية إلي معادلات خطية ثم أكمل حلها

$$(i)(xy - y^2)\frac{dy}{dx} = y^2 - 1 \quad (ii)\left\{x\left(\frac{1-y^2}{1ty^2}\right) - 1\right\}\frac{dy}{dx} = y$$

$$(iii)\left\{(2y^2 - 1)x + y^3\right\}\frac{dy}{dx} = y(1-y^2)^2 \quad (iv)\,\mathrm{x}\frac{dy}{dx} = 4y - 4\sqrt{y}$$

$$(v)2x\frac{dy}{dx} - y = \frac{2x^3 - 1}{y} \quad (vi)x^3\frac{dy}{dx} = 2x^2y + y^3$$

$$(vii)\frac{dy}{dx}\cos x + y\sin x + y^3 = 0$$

$$(viii)2(1+x)y\frac{dy}{dx} + 2x - 3x^2 + y^2 = 0$$

(١٢) أثبت أن $y = 1$ حل خاص للمعادلة التفاضلية الآتية ثم أوجد أصلها التام

$$\frac{dy}{dx} = (y - 1)(xy - y - x)$$

(١٣) اثبت أن $y = \frac{x+1}{x^2}$ حل خاص للمعادلات التفاضلية الآتية واوحد أصلها التام

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{1}{x\,4}$$

(١٤) أثبت أن $y = x$ حل خاص لكل من المعادلات التفاضلية الآتية ثم أوجد حلها العام

$$(i)x\frac{dy}{dx} + (n-1)ax^n(y - x)^2 + y - 2x = 0$$

$$(ii)\frac{dy}{dx} + xy^2 - (2x^2 + 1)y + x^3 + x - 1 = 0$$

$$(iii)(x^2 + a)\frac{dy}{dx} + 2y^2 - 3xy - a = 0$$

الفصل الاول

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجات العليا

درسنا في الباب الأول كيفية حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجة الأولي وفي هذا الباب سوف ندرس كيفية حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجات الأعلى و المعادلات التي سوف ندرسها يمكن تقسيمها الي

(١) معادلات قابلة للحل في p **(٢) معادلات قابلة للحل في** x

(٣) معادلات قابلة للحل في y

وكذلك سوف ندرس الحلول الشاذة لبعض المعادلات التي من درجة أعلي من الأولي.

(١) المعادلات القابلة للحل في p

نعتبر المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجات العليا هي:

$$L_0\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + L_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \ldots.. + L_{n-1}\frac{dy}{dx} + L_n = 0 \qquad (1)$$

حيث أن $L_0, L_1, \ldots, L_n$ دوال في x, y

نفرض أن $p = \dfrac{dy}{dx}$ المعادلة (١) تصبح علي الصورة

$$p^n + L_1 p^{n-1} + \ldots.. + L_{n-1}p + L_n = 0 \qquad (2)$$

الطرف الأيسر لهذه المعادلة عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة n فاذا أمكن حلها بالنسبة إلي p علي الصورة.

$$(p-\varphi_1)(p-\varphi_2)\ldots\ldots(p-\varphi_n) = 0$$

حيث $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ دوال في x, y

و هذه معادلات تفاضلية من الرتبة الأولي و الدرجة الأولي.

$$p = \varphi_1, p = \varphi_2, \ldots\ldots., p = \varphi_n$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x,y), \quad \frac{dy}{dx} = \varphi_2(x,y), \quad \ldots.., \quad \frac{dy}{dx} = \varphi_n(x,y)$$

حلول هذه المعادلات يمكن فرضها علي الصورة

$$f_1(x,y,c_1) = 0,\ f_2(x,y,c_2) = 0,\ \ldots, f_n(x,y,c_n) = 0$$

ويكون الحل العام للمعادلة هو

$$f_1(x,y,c_1) f_2(x,y,c_2) \ldots. f_n(x,y,c_n) = 0 \qquad (3)$$

المعادلة (٣) تمثل مجموعات من المنحنيات

$$f_1(x,y,c_1) = 0, f_2(x,y,c_2) = 0, \ldots., f_n(x,y,c_n) = 0$$

إذا استبدلنا $c_1, c_2, \ldots, c_n$ بالثابت الاختياري C ورسمنا المنحنيات

$$f_1(x,y,c)=0, f_2(x,y,c)=0, \ldots, f_n(x,y,c)=0$$

وجعلنا C تتغير من $-\infty$ إلي $+\infty$ فإننا نحصل علي نفس المنحنيات.

الحل العام للمعادلة (١) هو :

$$f_1(x,y,c) f_2(x,y,c) \ldots f_n(x,y,c)=0$$

وهو يحتوي علي ثابت اختياري واحد لآن المعادلة من الرتبة الأولي.

مثال (١) اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx}\cosh x + 1 = 0$$

الحل : بوضع $\frac{dy}{dx} = p$

$$p^2 - p(e^x + e^{-x}) + e^x e^{-x} = 0$$

بالتحليل

$$(p-e^x)(p-e^{-x})=0$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x, \quad \frac{dy}{dx} = e^{-x}$$

$$y = e^x + c, \quad y = e^{-x} + c$$

هو الأصل التام للمعادلة هو

$$(y-e^x-c)(y+e^{-x}-c)=0$$

مثال (٢) أوجد الحل المعادلة التفاضلية

$$p^2 - (x+y)p + xy = 0$$

(حيث $p = \frac{dy}{dx}$)

الحل : بالتحليل

$$(p-x)(p-y)=0 \qquad p = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \qquad y = \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

$$p = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \qquad y = c_2 e^x$$

يكون الحل العام هو

$$\left(y - \frac{1}{2}x^2 - c\right)(y - ce^x) = 0$$

(٢) المعادلات القابلة للحل في x

المعادلات التفاضلية القابلة للحل في x تأخذ الصورة

$$x = f(y, p) \qquad (1)$$

$p = \frac{dy}{dx}$

حيث $p = \dfrac{dy}{dx}$

وبمفاضلة المعادلة (١) بالنسبة إلي y نحصل علي

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}$$

وهذه معادلة تفاضلية في المتغيرين y, p فإذا أمكن حلها علي الصورة

$$y = \psi(p, c) \qquad (2)$$

فإنه بالتعويض عن y في المعادلة (٢) نحصل علي

$$x = f(p, c) \qquad (3)$$

الحل العام للمعادلة **(١)** ينتج بحذف p من المعادلتين **(٢)**، **(٣)** وإذا لم يمكن حذف p من المعادلتين فإن المعادلتين **(٢)**، **(٣)** تسميان بالمعادلات البارا مترية للحل.

مثال (١) حل المعادلة التفاضلية

$$x - y = 2ap - ap^2$$

الحل:

$$x = y + 2ap - ap^2 \qquad (1)$$

بالتفاضل بالنسبة إلي y نجد أن

$$\frac{1}{p} = 1 + (2a - 2ap)\frac{dp}{dy} \quad \Rightarrow \frac{1}{p}(1-p) = 2a(1-p)\frac{dp}{dy}$$

$$dy = 2ap\, dp$$

و منها نحصل علي

$$y = ap^2 + c \qquad (2)$$

وبالتعويض عن قيمة y في المعادلة (١) نحصل علي

$$x = 2ap + c \qquad (3)$$

فلأخذ أن يمكن حذف p من المعادلة (٢)، (٣) وذلك كما يلي :

$$p^2 = \frac{y - c}{a} \quad , \quad p = \frac{x - c}{2a}$$

$$\frac{(x - a)^2}{4a^2} = \frac{y - c}{a}$$

$$(x-c)^2 = 4a(y-c)$$

وهي مجموعة من القطاعات المكافئة

مثال (٢) حل المعادلة التفاضلية

$$x = yp - p^2$$

حيث $p = \dfrac{dy}{dx}$

الحل : بالتفاضل بالنسبة إلي y

$$\frac{1}{p} = p + y\frac{dp}{dy} - 2p\frac{dp}{dy} \quad \Rightarrow \frac{dp}{dy}(y-2p) = \frac{1}{p} - p$$

$$y - 2p = (\frac{1}{p} - p)\frac{dy}{dp} \quad \Rightarrow (\frac{1}{p} - p)\frac{dy}{dp} - y = -2p$$

$$\frac{dy}{dp} - \frac{p}{1-p^2}y = -\frac{2p^2}{1-p^2}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولي، العامل المكامل لها

$$\mu(p) = e^{\int \frac{p}{p^2-1}dp} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{2p}{p^2-1}dp} = e^{\ln\sqrt{p^2-1}} = \sqrt{p^2-1}$$

$$\frac{d}{dp}(y\sqrt{p^2-1}) = \frac{-2p^2}{1-p^2}\sqrt{p^2-1} = \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}}$$

$$y\sqrt{p^2-1} = \int \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}}dp + c$$

و لإيجاد هذا التكامل نستخدم التعويض

$$p = \cosh\theta \qquad dp = \sinh\theta d\theta$$

$$\int \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}}dp = \int \frac{2\cosh^2\theta}{\sinh\theta} . \sinh\theta d\theta = \int 2\cosh^2\theta d\theta$$

$$= \int (1+\cosh 2\theta)d\theta = \theta + \frac{1}{2}\sinh 2\theta$$

$$= \theta + \sinh\theta\cosh\theta$$

$$y\sqrt{p^2-1} = \theta + \sinh\theta\cosh\theta + c$$

$$= \cosh^{-1}p + p\sqrt{p^2-1} + c$$

ومنها نجد

$$y = p + \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}(\cosh^{-1} p + c) \qquad (1)$$

بالتعويض عن y في المعادلة الأصلية

$$x = yp - p^2$$
$$= p^2 + \frac{p}{\sqrt{p^2-1}}(\cosh^{-1} p + c) - p^2$$

وتكون

$$x = \frac{p}{\sqrt{p^2-1}}(\cosh^{-1} p + c) \qquad (2)$$

المعادلتان (١)،(٢) تمثلان الحل البارا متري للمعادلة المطلوبة.

(٣) المعادلات القابلة للحل في y

المعادلات القابلة للحل في y يمكن كتابتها علي الصورة

$$y = f(x,p) \qquad (1)$$

بتفاضل بالنسبة إلي x

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}$$

وهذه معادلة تفاضلية في x , p فإذا أمكن حلها علي الصورة

$$x = \phi(p,c) \qquad (2)$$

فأنه بالتعويض عن قيمة x في المعادلة (١) نحصل علي

$$y = \psi(p,c) \qquad (3)$$

الحل العام للمعادلة (١) ينتج بحذف p من المعادلتين (٢)، (٣) و إذا تغدر الحذف تسمي المعادلتين (٢)، (٣) بالمعادلات البارا مترية للحل.

مثال (١) حل المعادلة التفاضلية الآتية

$$y = p + p^3 \qquad (1)$$

الحل

بالتفاضل بالنسبة إلي x نجد أن

$$p = \frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx}(1+3p^2)$$

$$\int dx = \int \frac{1+3p^2}{p} dp + c$$

لذلك يكون

$$x = \ln p + \frac{3}{2}p^2 + c \qquad (2)$$

المعادلتين (١)،(٢) تمثل المعادلات البارا مترية للحل.

مثال (٢) أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$y = xp^2 + p \qquad (1)$$

الحل

بتفاضل هذه المعادلة بالنسبة إلي x نحصل علي

$$p = \frac{dy}{dx} = p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}$$

$$p(1-p) = (2xp+1)\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2}{1-p}x = \frac{1}{p(1-p)}$$

وهذه معادلة خطية .

$$\mu(p) = e^{\int -\frac{2dp}{1-p}} = e^{2\ln(1-p)} = (1-p)^2$$

$$\frac{d}{dp}[x(1-p)^2] = \frac{1-p}{p}$$

وبالتكامل نحصل علي

$$x(1-p)^2 = \int \frac{1-p}{p}dp + c$$

$$x(1-p)^2 = \ln p - p + c$$

ويكون

$$x = \frac{\ln p - p + c}{(1-p)^2} + p \qquad (2)$$

بالتعويض من (٢) عن قيم X في (١) نحصل علي

$$y = \frac{p^2\ln p - p^3 + p^2c}{(1-p)^2} + p \qquad (3)$$

و المعادلتين (٢)، (٣) تمثلان الحل العام في الصورة البارا مترية.

(٤) معادلة كليروت +لاجرانج

معادلة كليروت تكون على الصورة

$$y = xp + f(p) \qquad (1)$$

حيث $p = \dfrac{dy}{dx}$ بالتفاضل بالنسبة إلى x تحصل على

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}[x + f'(p)] = 0$$

أما $\dfrac{dp}{dx} = 0$ ومنها $p = c$ وبالتعويض في (١) نحصل علي

$$y = cx + f(c) \qquad (2)$$

وهي معادلة مجموعة من الخطوط المستقيمة

وأما

$$x + f'(p) = 0$$

ومنها

$$x = -f'(p) \qquad (3)$$

وبالتعويض في (١) عن x

$$y = -f'(p)p + f(p) \qquad (4)$$

بحذف p بين (٣) ، (٤) نحصل على علاقة بين (x, y) على الصورة الاتية

$$\phi(x, y) = 0 \qquad (5)$$

المعادلة (٥) تمثل حل أخر للمعادلة (١) وتكون المعادلتين (٣)، (٤) هما المعادلتين البارامتريتين لهذا الحل. المعادلة (٥) لا تحتوى على ثابت اختياري فهي حل خاص وعلى العموم لا يمكن استنتاج هذا الحل من الحل العام بوضع قيمة خاصة للثابت c .

الحل الخاص (٥) هو "حل شاذ " أو حل "مفرد" للمعادلة التفاضلية.

المعادلة (٢) تمثل الحل العام وهي معادلة مجموعة من المستقيمات ذات البارامتر c.

مثال(١) : أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية الأتية

$$y = xp + ap(1 - p) \qquad (1)$$

الحل :

بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + (a - 2ap)\cancel{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dp}{dx}(x + a - 2ap) = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

الحل العام للمعادلة هو

$$y = cx + ac - ac^2$$

أو

$$x + a - 2ap = 0 \qquad (2)$$

بحذف p من المعادلتين (١) ، (٢) نجد أن

$$y = \frac{(x + a)^2}{4a}$$

أي أن

$$(x - a)^2 = 4ay$$

وهذا هو الحل المفرد ويمثل غلاف مجموعة المستقيمات المثلة بالحل العام.

مثال (٢) أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية

$$y = xp + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}$$

الحل: بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على

$$p = x\frac{dp}{dx} + \frac{a}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{dp}{dx}$$

بذلك يكون

$$[x + \frac{a}{(1 + p^2)^{3/2}}]\frac{dp}{dx} = 0$$

منها يكون أما $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$y = xc + \frac{ac}{\sqrt{1 + c^2}} \qquad (2)$$

وهي تمثل مجموعة من المستقيمات.

أو

$$x = -\frac{a}{(1+p^2)^{3/2}} \qquad (3)$$

بالتعويض من (٣) في (١) عن قيمة x نجد أن

$$y = \frac{ap^3}{(1+p^2)^{3/2}} \qquad (4)$$

المعادلتـان (٣)، (٤) همـا المعادلتـان البارامتريتـان للحـل المفـرد وبحـذف p بـين (٣)، (٤) نحصـل علـي المعادلـة الكارتيزية للحل المفرد من (٣) نجد أن

$$p^2 = (-\frac{a}{x})^{2/3}, \quad y = -xp^3$$

$$y^{2/3} = (-x)^{2/3} p^2 = (-x)^{2/3}[(-\frac{a}{x})^{2/3} - 1]$$

$$y^{2/3} = a^{2/3} - (-x)^{2/3} = a^{2/3} - x^{2/3}$$

و يكون الحل المفرد للمعادلة التفاضلية

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

وهو غلاف مجموعة المستقيمات التي يمثلها الحل العام .

مثال (٣) أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية

$$\sin px \cos y = \cos px \sin y + p$$

الحل: نكتب المعادلة على الصورة

$$\sin px \cos y = \cos px \sin y = p$$

$$\sin(px - y) = p$$

$$px - y = \sin^{-1} p$$

و بالتالي يكون

$$y = xp - \sin^{-1} p \qquad (1)$$

وهذه صورة معادلة كليروت.

بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن

$$p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}[x - \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}] = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

الحل العام هو

$$y = cx - \sin^{-1} c$$

ومن الناحية الأخرى

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}$$

$$p = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

بالتعويض في (١) نجد أن

$$y = \sqrt{x^2-1} - \sin^{-1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \sqrt{x^2-1} - \sin^{-1} x^{-1}\sqrt{x^2-1}$$

وهذا هو الحل المفرد ويمثل غلاف المستقيمات.

الفصل الثاني

المعادلات التفاضلية من الرتب العليا

الصورة العامة للمعادلات التفاضلية من الرتب العليا هي

$$f(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

ولا يوجد حتى الأن طريقة مباشره لحل هذه المعادلة .

و سوف ندرس في الأبواب القادمة طرق لحل حالات خاصة من هـذه المعـادلات وهـي الـتي تكـون فيهـا المعادلـة (١) خطية. و ايضا حتى في مثل هذه الحالات الخاصة لن نستطيع أن نحصل على طريقة مباشرة نوجد بها الحـل العـام لأى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة n إلا في الحالات التي تكون فيها المعاملات مقادير ثابتة.

وسوف ندرس الأن بعض الحالات للمعادلـة (١) الـتي يمكـن فيهـا باسـتخدام تعـويض مناسـب تحويلـها الى معادلـة تفاضلية أخرى ذات رتبة أقل.

أولا : المعادلات التفاضلية التي لا تحتوى على y بصورة صريحة

الصورة العامة لها هي

$$f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

وفى هذه الحالة فإن رتبة المعادلة يمكن أن تؤول الي $n-k$ وذلك بوضع $y^{(k)} = p$
المعادلة (١) تأخذ الصورة

$$f(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0 \qquad (2)$$

وهذه المعادلة التفاضلية من الرتبة $(n-k)$ في المتغيرين x, p فإذا أمكن حلها على الصورة

$$p = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots\ldots, c_{n-k}) = 0 \qquad (3)$$

وبأجراء التكامل k من المرات للمعادلة (٣) نحصل على الحل العام للمعادلة (١).

مثال(١) حل المعادلة

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{1}{x}\frac{d^3y}{dx^3} = 0 \qquad (1)$$

الحل

$$\text{let } \frac{d^3y}{dx^3} \Rightarrow \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{dp}{dx}$$

و بذلك تصبح المعادلة التفاضلية (١) على الصورة

$$\frac{dp}{dx}-\frac{1}{x}p=0$$

$$\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \ln p=\ln x+\ln c_1 \quad \Rightarrow p=c_1x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=cx \quad \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{c_1}{24}x^4+\frac{c_2}{2}x^2+c_3x+c_4$$

وهذا هو الحل العام.

مثال(٢) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$2x\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}=(\frac{dy}{dx})^2-1 \qquad (1)$$

الحل

$$\frac{dy}{dx}=p \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$$

المعادلة (١) تصبح على الصورة

$$2xp\frac{dp}{dx}=p^2-1 \Rightarrow \frac{pdp}{p^2-1}=\frac{1}{2}\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(p^2-1)=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}\ln c_1$$

$$p^2-1=c_1x \quad \Rightarrow (\frac{dy}{dx})^2=c_1x+1 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{c_1x+1}$$

$$y=\pm\int\sqrt{c_1x+1}\,dx \quad \Rightarrow y=\pm\frac{2}{3c_1}(c_1x+1)^{3/2}+c_2$$

و يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية (١)

$$9c_1^2(y-c_2)^2=4(c_1x+1)^3$$

ثانيا: المعادلات التفاضلية التي لا تحتوى x بصورة صريحة

هذه المعادلات تكون على الصورة.

$$f(y,y',y'',\ldots\ldots,y^{(n)})=0 \qquad (1)$$

وباستخدام التعويض $y'=p$ يمكن تخفيض رتبة المعادلة كما يلى

$$\frac{dy}{dx}=p\ ,\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}(p\frac{dp}{dy})=p^2\frac{d^2p}{dy^2}+p(\frac{dp}{dy})^2$$

و هكذا بالنسبة لباقي المشتقات من الرتب الأعلى. بالتعويض عن قيم $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ فإن المعادلة (١) تصبح على الصورة

$$\phi(y, p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2p}{dy^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}) = 0 \qquad (2)$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة $(n-1)$ في المتغيرين y, p فإذا أمكن حل المعادلة (٢) وإيجاد p كدالة في y فإنه باستخدام الفرض $y' = p$ نحصل على معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى وبحلها نوجد y.

مثال (١) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الأتية

$$y(y-1)\frac{d^2y}{dx^2} + (\frac{dy}{dx})^2 = 0 \qquad (1)$$

الحل: نضع

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$$

المعادلة تصبح على الصورة

$$y(y-1)p\frac{dp}{dy} + p^2 = 0 \qquad \Rightarrow y(y-1)\frac{dp}{dy} + p = 0$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y(y-1)} = -[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}]dy$$

$$\ln p = \ln\frac{y}{y-1} + \ln c_1 \quad \Rightarrow p = \frac{c_1 y}{y-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{c_1 y}{y-1} \quad \Rightarrow \int \frac{y-1}{y} dy = \int c_1 dx$$

$$y - \ln y = c_1 x + c_2$$

وهو الحل العام للمعادلة (١).

ملحوظة: إذا كانت المعادلة التفاضلية خالية من x, y فإن يمكن حل المعادلة بأخذ أحد التعويضين السابقين.

ولكن نلاحظ أن استخدام التعويض $y' = p,\ y'' = p\frac{dp}{dy}$ يكون أسهل في الحل.

مثال(٢): حل المعادلة التفاضلية

$$\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2} = m\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (1)$$

الحل : سوف ندرس حل هذه المعادلة باعتبارها معادلة لا تحتوى على x بصورة صريحة (ويترك دراستها باعتبارها معادلة لا تحتوى على y بصورة صريحة كتمرين) .

باستخدام التعويض

$$\frac{dy}{dx}=p \quad \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$$

المعادلة تصبح على الصورة

$$\sqrt{1+p^2}=mp\frac{dp}{dy} \quad \Rightarrow \int\frac{mpdp}{\sqrt{1+p^2}}=\int dy$$

$$m\sqrt{1+p^2}=y+c_1 \quad \Rightarrow 1+p^2=\frac{1}{m^2}(y+c_1)^2$$

$$p^2=\frac{(y+c_1)^2}{m^2}-1 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{(y+c_1)^2-m^2}}{m}$$

$$\int\frac{mdy}{\sqrt{(y+c_1)^2-m^2}}=\pm\int dx \quad \Rightarrow m\cosh^{-1}(\frac{y+c_1}{m})=\pm(x+c_2)$$

$$y=m\cosh\frac{x+c_2}{m}-c_1$$

وهو الحل العام.

ثالثا : المعادلات المتجانسة

تعريف : المعادلة التفاضلية تكون متجانسة إذا كانت كل حدودها من نفس البعد.

إذا اعتبرنا x, y من البعد الواحد فإن

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

و بالتالي فان $\frac{dy}{dx}$ من البعد صفر

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{dy}{dx}}{\Delta x}$$

المشتقة $\frac{d^2y}{dx^2}$ من البعد -1

وهكذا نلاحظ أن $\frac{d^3y}{dx^3}$ من البعد -2 ، $\frac{d^ny}{dx^n}$ تكون من البعد $(1-n)$

فمثلاً المعادلة التفاضلية

$$x^2\frac{dy}{dx}+4x^3\frac{d^2y}{dx^2}+2y^2=0$$

هي معادلة متجانسة من البعد ٢.

و المعادلة التفاضلية

$$(x^2-4xy)\frac{d^2y}{dx^2}+8y\frac{dy}{dx}=0$$

هي معادلة متجانسة من البعد ١.

و لحل المعادلات المتجانسة نعتبر الحالات الاتية

(ا) إذا كانت المعادلة التفاضلية يمكن كتابتها على الصورة الأتية

$$\phi(x\frac{dy}{dx},x^2\frac{d^2y}{dx^2},....,y)=0 \qquad (1)$$

يمكن حل هذه المعادلة باستخدام التعويض $t=\ln x \ \text{ or } \ x=e^t$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt})=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dt}.\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}$$

وهكذا يمكن إيجاد بقية الحدود وبالتعويض تصبح المعادلة (١) على الصورة

$$\phi(y,\frac{dy}{dt},\frac{d^2y}{dt^2},....)=0$$

هذه المعادلة لا تحتوى على t بصفة صريحة ويمكن حلها باستخدام التعويض

$$\frac{dy}{dt}=p,\ \frac{d^2y}{dt^2}=p\frac{dp}{dy}$$

وبذلك يمكن تخفيض رتبة المعادلة بمقدار الواحد.

مثال(١) أوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$y(x^2\frac{d^2y}{dx^2})+(\frac{dy}{dx})^2=3y(x\frac{dy}{dx}) \qquad (2)$$

الحل: هذه المعادلة متجانسة وتكون على الصورة

$$f\,(y\,,x\,\frac{dy}{dx},x^{2}\frac{d^{2}y}{dx^{2}},...)=0$$

باستخدام التعويض $x=e^{t}$ نجد أن

$$x\,\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\;,\;x^{2}\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=\frac{d^{2}y}{dt^{2}}-\frac{dy}{dt}$$

و بالتالي المعادلة (٢) تصبح على الصورة

$$y\,\frac{d^{2}y}{dt^{2}}-4y\,\frac{dy}{dt}+(\frac{dy}{dt})^{2}=0 \qquad (3)$$

بوضع

$$\frac{dy}{dt}=p\,,\quad \frac{d^{2}y}{dt^{2}}=p\,\frac{dp}{dy}$$

تصبح المعادلة (٣) علي الصورة

$$yp\,\frac{dp}{dy}-4yp+p^{2}=0\;\;\Rightarrow\frac{dp}{dy}+\frac{1}{y}\,p=4$$

وهذه معادلة خطية يكون عاملها المكامل هو

$$\mu(y)=e^{\int\frac{dy}{y}}=y\quad\Rightarrow\frac{d}{dy}(py)=4y\;\;\Rightarrow yp=2y^{2}+c_{1}$$

$$p=2y+\frac{c_{1}}{y}\quad\Rightarrow\frac{dy}{dt}=2y+\frac{c_{1}}{y}$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{4ydy}{2y^{2}+c_{1}}=\int \mathrm{dt}+\ln \mathrm{c}_{2}\quad\Rightarrow\frac{1}{4}\ln(2y^{2}+c_{1})=\ln x+\ln c_{2},$$

$$\sqrt[4]{2y^{2}+c_{1}}=xc_{2}\quad\Rightarrow 2y^{2}+c_{1}=x^{4}c_{2}^{4}\quad\Rightarrow y^{2}=\frac{x^{4}c_{2}^{4}}{2}-\frac{c_{1}}{2}$$

وهو الحل العام

(ب) إذا كانت المعادلة التفاضلية على الصورة

$$f\,(\frac{y}{x},\frac{dy}{dx},x\,\frac{d^{2}y}{dx^{2}},...)=0 \qquad (4)$$

أي تكون هذه المعادلة متجانسة من البعد صفر.

وفى هذه الحالة نضع $y=zx\,,\;x=e^{t}$

فيكون

$$\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx} \quad \text{and} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dz}{dx}+x\frac{d^2z}{dx^2}$$

ولكن

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dt}, \quad x^2\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dy}{dx}=z+\frac{dz}{dt}, \qquad (5)$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2}=2x\frac{dz}{dx}+x^2\frac{d^2z}{dx^2}=2\frac{dz}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dz}{dt} \qquad (6)$$

وبالتعويض عن (٥)، (٦) تتحول المعادلة (٤) الى الصورة

$$\phi(z,\frac{dz}{dt},\frac{d^2y}{dt^2},.....)=0$$

وهى معادلة خالية من t ويمكن حلها كما سبق.

مثال(٢) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة الأتية

$$(x^2+y^2)(y-xy')+x^2y^2y''=0 \qquad (7)$$

الحل : بالقسمة علي x^3 نجد أن

$$(1+\frac{y^2}{x^2})(\frac{y}{x}-y')+\frac{y^2}{x^2}xy''=0$$

بوضع

$$y=zx, \ x=e^t$$

تتحول المعادلة التفاضلية (٧) الى الصورة

$$(1+z^2)(z-z-\frac{dz}{dt})+z^2(\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dz}{dt})=0$$

$$-\frac{dz}{dt}-z^2\frac{dz}{dt}+z^2\frac{d^2z}{dt^2}+z^2\frac{dz}{dt}=0$$

$$z^2\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{dz}{dt} \qquad (8)$$

بوضع

$$\frac{dz}{dt}=p \quad , \frac{d^2z}{dt^2}=p\frac{dp}{dz}$$

تتحول المعادلة التفاضلية (٨)

$$z^2p\frac{dp}{dt}=p \qquad \Rightarrow \int dp=\int\frac{dz}{z^2}$$

$$p=\frac{dz}{dt}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{a}=\frac{z-a}{az}$$

$$\int\frac{az\,dz}{z-a}=\int dt \qquad \Rightarrow t-\ln b=a\int[1+\frac{a}{z-a}]dz=az+a^2\ln(z-a)$$

$$\mathrm{t=az+a^2ln(z-a)+lnb} \qquad \Rightarrow \mathrm{lnx=a}\frac{y}{x}+a^2\ln(\frac{y}{x}-a)+\ln b$$

و يكون

$$x=b(\frac{y}{x}-a)^{a^2}e^{a\frac{y}{x}}$$

وهو الحل العام

رابعاً: المعادلات التفاضلية يمكن كتابتها علي صورة مشتقة لمقدار تفاضلي اقل من رتبة المعادلة بمقدار الوحدة

الطرف الأيسر للمعادلة

$$f(x,y,y',y'',\ldots\ldots,y^{(n)})=0 \qquad (1)$$

هو عبارة عن مشتقة لمقدار تفاضلي ما من الرتبة $(n-1)$ وليكن مثلاً:

$$\phi=\phi(c,x,y,y',\ldots\ldots,y^{(n-1)})$$

هنا يمكن كتابة المعادلة (١) علي الصورة $\frac{d\phi}{dx}=0$ ومنها $\phi=c$

مثال(١) حل المعادلة التفاضلية

$$yy''+y'^2=0$$

الحل: هذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$d(yy')=0$$

ومنها يكون

$$yy'=c$$

$$y^2=c_1x+c_2$$

ملحوظة : أحيانا للحصول على دالة مشتقتها تساوى الطرف الأيسر للمعادلة فإن ذلك لا يتحقق إلا بعد ضرب طرفي المعادلة في دالة ما.

مثال(٢) حل المعادلة التفاضلية

$$yy'' = y'^2$$

الحل : بالقسمة على yy' نحصل على

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y} \Rightarrow \int \frac{y''}{y'} = \int \frac{y'}{y} \Rightarrow \ln y' = \ln y + \ln c$$

$$y' = yc \Rightarrow \frac{dy}{dx} = yc$$

$$\frac{dy}{y} = cdx \Rightarrow \ln y = cx + c_1$$

$$y = e^{cx + c_1} = c_1 e^{cx}$$

وهو الحل العام

مثال (٣) حل المعادلة التفاضلية الاتية:

$$y' y''' = 2y''^2$$

الحل: بالقسمة على $y' y''$ نحصل على

$$\frac{y'''}{y''} = 2\frac{y''}{y'} \Rightarrow \int \frac{y'''}{y''} = 2\int \frac{y''}{y'}$$

$$\ln y'' = 2\ln y' + \ln c \Rightarrow y'' = cy'^2$$

وبوضع $y' = p$

$$\frac{dp}{dx} = cp^2$$

$$\frac{1}{p^2} dp = cdx \Rightarrow -\frac{1}{p} = cx + c_1$$

$$p = -\frac{1}{cx + c_1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{cx + c_1}$$

$$y = \frac{1}{c} \ln(cx + c_1) + c_2$$

وهو الحل العام.

تمارين (٢)

(١) أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية بحلها بالنسبة إلى $p = \dfrac{dy}{dx}, p$

$(i)\ y^2p^2 - 3xyp + 2x^2 = 0$

$(ii)\ p^2 - (xy + 2x)p + 2x^2y = 0$

$(iii)\ p^2 - p - 6 = 0$

$(iv)\ p^3 - p(x^2 + xy + y^2) + xy(x + y) = 0$

$(v)\ p^2 - 2\cos x - 1 = 0$

$(vi)\ x + yp^2 = p(1 + xy)$

(٢) أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الأتية باعتبارها قابلة للحل في x

$(i) x = 4p + 4p^3$

$(ii) p^2 - 2xp + 1 = 0$

$(iii) 2y + p^2 + 2p = 2x(p + 1)$

$(iv) p = \tan(x - \dfrac{p}{1 + p^2})$

$(v) p^3 - p(y + 3) + x = 0$

(٣) أوجد الحل العام لكل من للمعادلات التفاضلية الأتية باعتبارها قابلة للحل في y

$(i)\ y = xp^2 + p \quad (ii)\ y = x + p^3 \quad (iii)\ p^2 + p = e$

$(iv)\ y = p\sin p + \cos p \quad (v)\ y = p\tan p + \log\cos p$

$(vi)\ e^{p-y} = p^2 - 1$

(٤) أوجد الحل العام والحل المفرد لمعادلة كليروت التفاضلية لكل من المعادلات الآتية

$(i) y = xp + p^2 \qquad (ii) y = xp + p^3 \qquad (iii) y = xp + \cos p$

$(iv) y = xp + \sqrt{a^2p^2 + b^2} \qquad (v) p = \log(xp - y)$

$(vi) \cosh xp \cosh y = \sinh px \sinh y + p \quad (vii) y = xp + \dfrac{p}{p+1}$

$(viii) y = xp + \sqrt{p^2 - 1} \qquad (ix) y = xp + \dfrac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}$

$(x) y = xp + \sqrt{p^2 + 1} - p\log(p + \sqrt{p^2 + 1})$

(٥) حل المعادلات التفاضلية باعتبارها خالية من y

$(i) 2xy'y'' = y'^2 - 1 \qquad (ii) x^2y'' = y'^2$

$(iii) y''^2 + y' = xy'' \qquad (iv) y'' \cos ecx = 1$

$(v) x(a-x)y'' + 2(1-x)y' = 1 \quad (vi) y^{(n)} - 2y^{(n-1)} = e^x$

(٦) حل المعادلات التفاضلية باعتبارها خالية من x

$(i)\ yy'' = y'^2y'' \qquad (ii)\ y'^2 - (3y - 2y')y'' = 0$

$(iii)\ yy'' + 1 = y'^2 \qquad (iv)\ y'' + y'^2 = 1$

$(v)\ 2yy'' = y'^2 \qquad (vi)\ yy'' = y'^2 - y'^3$

$(vii)\ yy'' + y'^2 + 2ay^2 = 0$

(٧) حل المعادلات التفاضلية المتجانسة الأتية

$(i)\ xy'' - xy' + y = 0 \qquad (ii)\ x^2y'' - xy' + 5y = 0$

$(iii)\ 2x^2yy'' + y^2 = x^2y'^2 \qquad (iv)\ (2yy'' - y'^2)x^2 + y^2 = 0$

٦. مبادئ الاحتمالات
Principles of Probability

(٦-١) مقدمة:

إن كلمة الاحتمال تستخدم كثيرا في حياتنا اليومية. فمثلا يقال أن من المحتمل نزول المطر اليوم. ويقال أن احتمال نجاح أحمد في الاختبار أكبر من احتمال نجاح خالد. ويقال من المستحيل نجاح من لم يحضر الاختبار. ويقال أن من المؤكد موت كل إنسان. ويقال أن من الممكن انتقال المرض من المريض إلى الطبيب المعالج ...وهكذا. إن كلمة الاحتمال تستخدم للتعبير عن قياس فرصة حدوث حادثة معينة غير مؤكدة الحدوث. ولذلك نشأت الحاجة إلى وضع مقاييس كمية تقيس فرصة حدوث هذه الحوادث. إن المقياس الكمي الذي يقيس فرصة حدوث حادثة معينة يسمى بمقياس الاحتمال وقيمة هذا المقياس تتراوح بين الصفر والواحد. فكلما زادت فرصة وقوع الحادثة كلما اقتربت قيمة هذا المقياس من الواحد. وكلما قلت فرصة وقوع الحادثة كلما اقتربت قيمة هذا المقياس من الصفر. ولتعريف الاحتمال فإننا لابد أن نتطرق لكثير من المفاهيم مثل مفهوم التجربة العشوائية والحوادث.

(٦-٢) التجربة العشوائية: Random Experiment:

التجربة العشوائية هي تجربة أو عملية تحقق الشروط التالية:

١. جميع النتائج الممكنة للتجربة تكون معلومة مسبقا قبل إجرائها.
٢. لا يمكن التنبؤ بنتيجة التجربة بشكل قطعي ومؤكد قبل إجرائها.
٣. يمكن معرفة أو قياس فرصة ظهور كل نتيجة من نتائج التجربة قبل إجراء التجربة.

(٦-٣) فضاء (فراغ) العينة: Sample Space:

- فضاء العينة للتجربة العشوائية هي المجموعة المكونة من جميع النتائج الممكنة للتجربة. ونرمز لفضاء العينة بالرمز S ويرمز لعدد عناصر فضاء العينة بالرمز $n(S)$.
- نقطة العينة هي أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية أي أنها أي عنصر من عناصر فضاء العينة S.

مثال (٦-١):

أوجد فضاء العينة وعدد عناصره للتجارب التالية:

١. تجربة قذف قطعة النقود مرة واحدة وتسجيل الرمز الظاهر على الوجه العلوي.
٢. تجربة قذف قطعتي نقود معا وتسجيل الرمز الظاهر على الوجه العلوي لكل قطعة.

الحل:

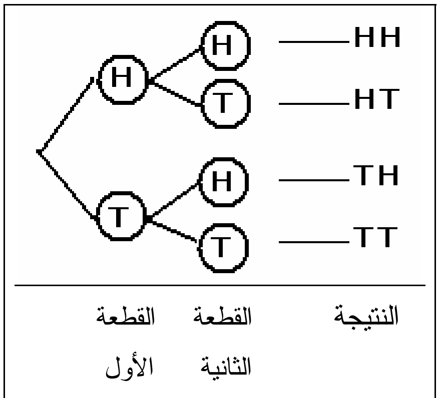
١. تجربة قذف قطعة النقود مرة واحدة:

لنرمز للصورة بالرمز H وللكتابة بالرمز T:

إن النتائج الممكنة هي H أو T ولذلك فإن فضاء العينة هو: $S = \{H , T\}$ وعدد عناصره يساوي: $n(S) = 2$.

٢. تجربة قذف قطعتي النقود معا:

لنرمز للصورة بالرمز H وللكتابة بالرمز T:



إن النتائج الممكنة هي:

(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)

ولذلك فإن فضاء العينة هو:

$S = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

وعدد عناصره يساوي: $n(S) = 4$

ملاحظة:

$S = \{H,T\}\times \{H,T\}$
$= \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$
$n(S) = 2 \times 2 = 4$ (باستخدام قاعدة الضرب)

مثال (٦-٢):

أوجد فضاء العينة وعدد عناصره للتجارب التالية:

١. تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي.

٢. تجربة رمي حجر النرد مرتين متتاليتين وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي لكل رمية.

الحل:

١. تجربة قذف حجر النرد مرة واحدة:

إن النتائج الممكنة هي: 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 ولذلك فإن فضاء العينة هو:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وعدد عناصره يساوي: $n(S) = 6$.

٢. تجربة رمي حجر النرد مرتين:

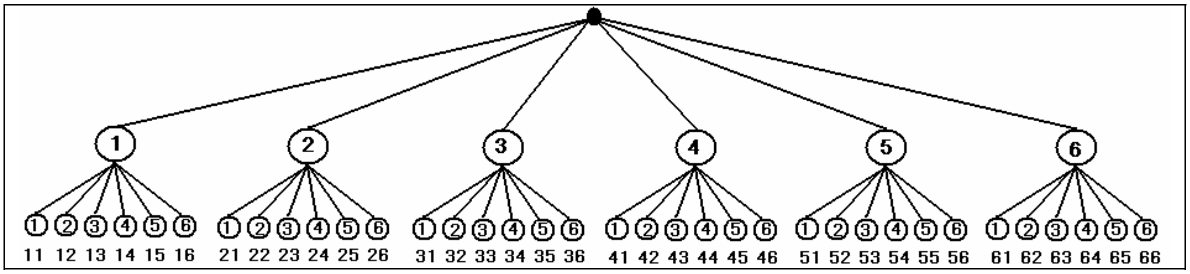
يمكن إيجاد فضاء العينة لتجربة رمي حجر النرد مرتين بعدة طرق. نذكر من هذه الطرق: (١) طريقة حاصل الضرب الديكارتي و (٢) طريقة الشجرة وطريقة الشبكة (أو الجدول):

أولا: إيجاد فضاء العينة باستخدام حاصل الضرب الديكارتي:

$S=\{1,2,3,4,5,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\}$
$=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$
$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$
$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

وعدد عناصر فضاء العينة (باستخدام قاعدة الضرب) يساوي: $n(S)=6\times6=36$

ثانيا: إيجاد فضاء العينة باستخدام طريقة الشجرة:



ثالثا: إيجاد فضاء العينة باستخدام طريقة الشبكة (أو الجدول):

نتيجة الرمية الثانية						
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	1	2	3	4	5	6

نتيجة الرمية الأولى

ملاحظة:

إن (4,3) عنصر من عناصر فضاء العينة وبالتالي فإن (4,3) هي نقطة عينة وذلك لأن $(4,3)\in S$. كما أن النتيجة (4,3) تعني ظهور الرقم 4 في الرمية الأولى وظهور الرقم 3 في الرمية الثانية وهذه النتيجة تختلف عن النتيجة (3,4) والتي تعني ظهور الرقم 3 في الرمية الأولى وظهور الرقم 4 في الرمية الثانية.

(٦-٤) الحادثة أو الحدث: Event:

تعرف الحادثة على أنها مجموعة جزئية من فضاء العينة S.

- A حادثة إذا وإذا فقط كانت $A \subseteq S$.
- يقال بأن الحادثة A وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي أحد عناصر الحادثة A.

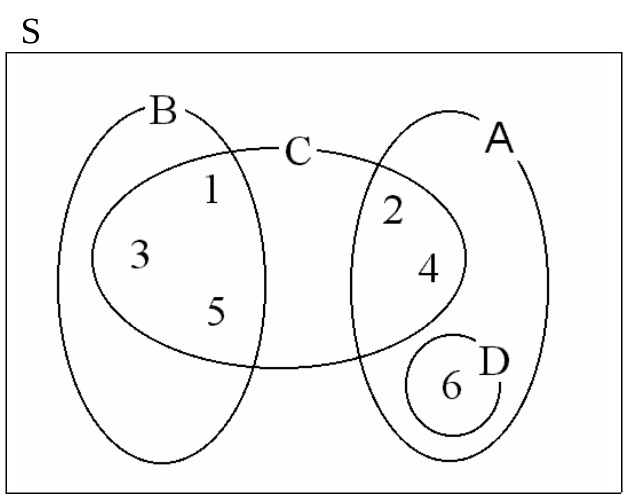
- الحادثة المستحيلة $\phi \subseteq S$. (Impossible Event) حيث أن ϕ هـــي المجموعـــة الخالية.
- الحادثة المؤكدة $S \subseteq S$. (Sure Event)
- يرمز لعدد عناصر الحادثة A بالرمز n(A). ونقول بأن الحادثة A وقعت إذا كانـــت نتيجة التجربة هي أحد عناصر الحادثة A.

<u>مثال (٦-٣):</u>

في مثال تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجـــه العلـــوي فـــإن المجموعات التالية تشكل حوادث لأنها مجموعات جزئية من فضاء العينة S.

عدد العناصر		الحادثة
n(A) = 3	$A \subseteq S$	A = { ظهور عدد زوجي } = {2, 4, 6};
n(B) = 3	$B \subseteq S$	B = { ظهور عدد فردي } = {1, 3, 5};
n(C) = 5	$C \subseteq S$	C = { ظهور عدد أقل من ستة } = {1, 2, 3, 4, 5};
n(D) = 1	$D \subseteq S$	D = { ظهور العدد ستة } = {6};
$n(\phi) = 0$	$\phi \subseteq S$	ϕ = { ظهور عدد سالب } = { };
n(S) = 6	$S \subseteq S$	S = { ظهور عدد موجب } = {1, 2, 3, 4, 5, 6};

في هذا المثال يمكن أم نمثل الحوادث بأشكال فن. فالشكل التالي يمثل الحـــوادث A و B و C و D:



تمثيل الحوادث باستخدام أشكال فن

في هذا المثال:

نقول بأن الحادثة $A=\{2,4,6\}$ وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي أحد الأعداد الزوجية 2 أو 4 أو 6.

نقول بأن الحادثة $D=\{6\}$ وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي العدد 6.

وهكذا...

مثال (٦-٤):

احسب الحوادث التالية وعدد عناصرها ثم مثلها باستخدام أشكال فن وذلك في تجربة قذف قطعة النقود مرتين متتاليتين:

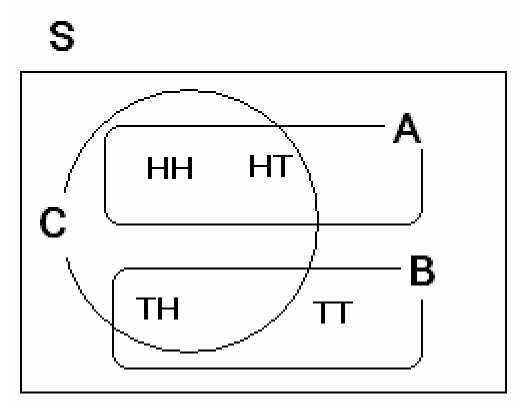
A = { الحصول على صورة في الرمية الأولى }

B = { الحصول على كتابة في الرمية الأولى }

C = { الحصول على صورة واحدة على الأقل }

الحل:

$S=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\};\ n(S)=4$
$A=\{(H,H),(H,T)\};\ n(A)=2$
$B=\{(T,H),(T,T)\};\ n(B)=2$
$C=\{(H,H),(H,T),(T,H)\};\ n(C)=3$



مثال (٦-٥):

احسب الحوادث التالية وعدد عناصرها وذلك في تجربة رمي حجر نرد مرتين متتاليتين باعتبار أن (x) يرمز لنتيجة الرمية الأولى و(y) يرمز لنتيجة الرمية الثانية:

$A=\{(x,y):\ x+y<4\}$
$B=\{(x,y):\ x=y\}$
$C=\{(x,y):\ x=5\}$
$D=\{(x,y):\ x+y=1\}$

الحل:

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	**(5,6)**	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	**(5,5)**	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	**(5,4)**	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	**(5,3)**	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	**(5,2)**	(6,2)
(1,1)	**(2,1)**	(3,1)	(4,1)	**(5,1)**	(6,1)
$\Uparrow$ A				$\Uparrow$ C	

$A = \{ (x,y): \; x + y < 4 \} = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}; \qquad n(A)=3$

$B = \{ (x,y): \; x = y \} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\} \; ; \; n(B)=6$

$C = \{ (x,y): \; x =5 \} = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\} \; ; \; n(C)=6$

$D = \{ (x,y): \; x+y =1 \} = \{ \} = \phi; \qquad n(D)=0$

(٦-٥) العمليات على الحوادث (جبر الحوادث): **Algebra of Events**:

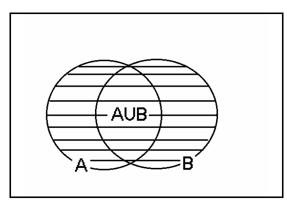
بما أن فضاء العينة ما هو إلا مجموعة والحوادث عبارة عن مجموعات جزئية منها فإن جميع العمليات على المجموعات تنطبق على الحوادث. وفي دراسة احتمالات الحوادث فإننا نحتاج إلى تعريف بعض الحوادث والتي يمكن تكوينها من حوادث أخرى.

(أ) اتحاد حادثتين: **Union**

اتحاد حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز $A\cup B$ وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر التي تنتمي إلى A أو تنتمي إلى B أو تنتمي لهما معًا. وتقع الحادثة $A\cup B$ إذا وقعت إحدى الحادثتين على الأقل أي إذا وقعت A أو إذا وقعت B أو إذا وقعت A و B معًا.

شكل فن لتمثيل الاتحاد

$A\cup B = \{x \in S: x\in A$ **أو** $x\in B \}$

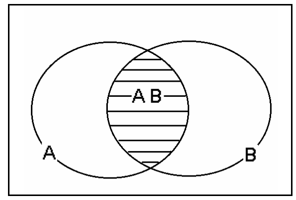


(ب) تقاطع حادثتين: **Intersection**

تقاطع حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز $A\cap B$ أو بالرمز AB وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر المشتركة في A و في B معًا. وتقع الحادثة $A\cap B$ إذا وقعت الحادثتان A و B معًا في نفس الوقت.

شكل فن لتمثيل التقاطع

$A\cap B = \{x \in S: x\in A$ و $x\in B\}$

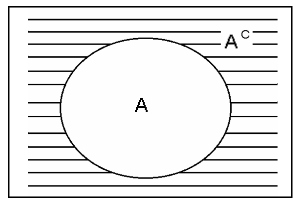


(ج) متممة أو مكملة حادثة: Complement

متممة أو مكملة الحادثة A هي حادثة يرمز لها بالرمز A^C أو $\overline{A}$ وهي الحادثة المكونة من جميع عناصر فضاء العينة التي لا تنتمي إلى A. وتقع متممة الحادثة $\overline{A}$ إذا لم تقع الحادثة A نفسها.

شكل فن لتمثيل المتممة

$\overline{A} = A^C = \{x \in S: x\notin A\}$



لاحظ أن:

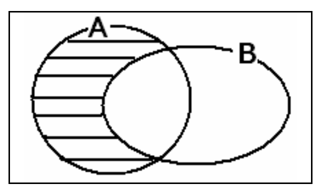
$n(A^C) = n(S) - n(A)$

(د) الفرق بين حادثتين: Difference between Two Events:

الفرق بين حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز A–B وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر التي تنتمي إلى الحادثة A ولا تنتمي إلى الحادثة B. وتقع الحادثة A–B إذا وقعت الحادثة A ولم تقع الحادثة B.

شكل فن لتمثيل الفرق

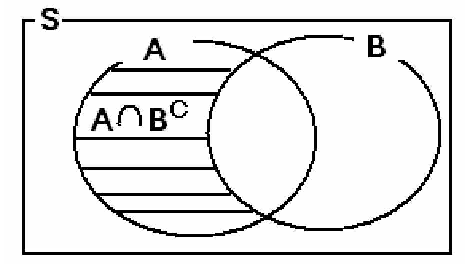
$A-B = \{x \in S: x\in A$ و $x\notin B\}$



نتائج:

- $(A^C)^C = A$
- $S^C = \phi$
- $\phi^C = S$
- $A^C = S-A$
- $A\cap A = A$
- $A\cup A = A$
- $A\cap S = A$
- $A\cup S = S$
- $A\cap\phi = \phi$

- $A \cup \phi = A$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$



$A-B= A \cap B^C$

نتيجة:

- $A-B = A \cap B^C$

نتيجة: قانونا دي مورجان:

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

مثال (٦-٦):

قذفت قطعة نقود ثلاث مرات متتالية.

١. أكتب فراغ العينة وعدد عناصره.

٢. أكتب الحوادث التالية وعدد عناصرها:

A = الحادثة الدالة على ظهور صورة في الرمية الأولى

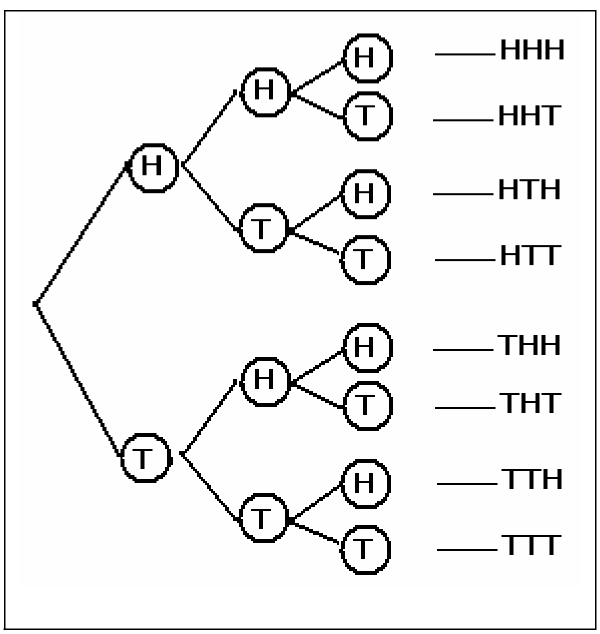
B = الحادثة الدالة على ظهور صورة واحدة على الأقل

C = الحادثة الدالة على ظهور كتابة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثالثة.

٣. أكتب الحوادث التالية وعدد عناصرها:

$A \cap B,\ A \cup C,\ A^C \cup B^C,\ (A \cap B)^C,\ A \cap B^C$

الحل:



١. فراغ العينة لهذه التجربة هو:

$S =\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$

عدد عناصر فراغ العينة يساوي:

$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$

.٢

$A=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T)\}$

$n(A) =4$

$B=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T), (T,T,H)\}$

$n(B) =7$

$C=\{(T,H,H), (T,T,H)\}$

$n(C) =2$

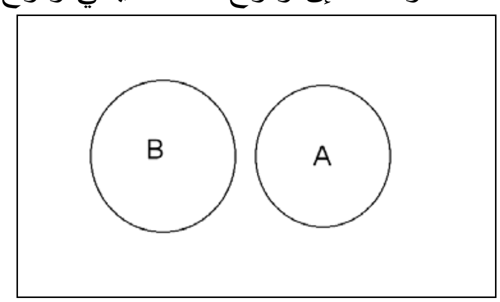
.٣

$A=\{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T)\}$
$B=\{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,H,T), (T,T,H)\}$
$C=\{(T,H,H), (T,T,H)\}$
$A^C = \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$
$B^C = \{(T,T,T)\}$

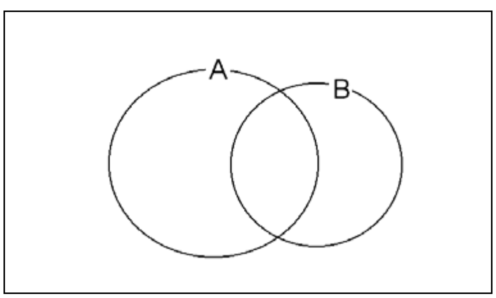
- $A\cap B = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T)\}$;
  $n(A\cap B) = 4$
- $A\cup C = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,T,H)\}$;
  $n(A\cup C)=6$
- $A^C \cup B^C = \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\} \cup \{(T,T,T)\}$
  $= \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$;
  $n(A^C \cup B^C) = 4$
- $(A \cap B)^C= \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$;
  $n((A \cap B)^C) = 4$
- $A\cap B^C = A - B = \phi$;
  $n(A\cap B^C) = 0$

الحوادث المتنافية (المنفصلة): Disjoint (Mutually Exclusive) Events

يقال بأن الحادثتين A و B متنافيتان أو منفصلتان إذا كانتا غير متقاطعتين، أي أن $A\cap B=\phi$. وهذا يعني عدم وجود عناصر مشتركة بينهما وبالتالي لا يمكن وقوعهما معًا أي يستحيل وقوعهما معًا. ولذلك فإن وقوع أحدهما ينفي وقوع الأخرى.



حادثتان متنافيتان $A\cap B = \phi$



حادثتان غير متنافيتين $A\cap B \neq \phi$

الحوادث الشاملة: Exhaustive Events

يقال بأن الحوادث $A_1,A_2,\ldots,A_n$ حوادث شاملة إذا كان لابد من وقوع إحداها (واحـــده منهـــا) على الأقل عند إجراء التجربة. أي إذا كان:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ \ldots \ \cup A_n = S$$

مثال:

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة فإن:

١. الحادثتان $A = \{2, 4, 6\}$ و $B = \{1, 3, 5\}$ حادثتان:

- متنافيتان لأن: $A \cap B \neq \phi$.
- شاملتان لأن: $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$.

٢. الحوادث $A_1=\{1,2,3\}$ و $A_2=\{2,3,4\}$ و $A_3=\{3,4,5,6\}$ حوادث شاملة ولكنها غير متنافية. لماذا؟

الحالات متساوية (أو متكافئة) الفرص: Equally Likely Outcomes:

إذا كانت فرصة ظهور أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية مساوية لفرصة ظهـــور أي نتيجـــة أخرى فإننا نقول بأن نتائج هذه التجربة متساوية (أو متكافئة) الفرصة. فمثلاً عند قذف قطعة عملة متزنة مرة واحدة فإن فرصة ظهور الصورة (H) مساوية لفرصة ظهور الكتابة (T). وكذلك في تجربة رمي حجر النرد المتزن مرة واحدة فإن فرصة ظهور الرقم 1 مساوية لفرصـــة ظهـــور الرقم 2 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 3 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 4 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 5 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 6. وعليه فإن كلا التجربتين المذكرتين متساوية الفرص.

الحالات المواتية للحادثة:

الحالات المواتية لحادثة معينة هي الحالات التي تؤدي إلى تحقق (أو وقوع) هذه الحادثة وبالتالي فإن الحالات المواتية لحادثة معينة هي نتائج التجربة الممكنة التي تؤدي إلى وقوع هذه الحادثة.

(٦-٦) الاحتمال: Probability:

نقرن كل حادثة (أو حدث) معرفة على فضاء العينة للتجربة العشوائية بقيمة حقيقية تقيس فرصـــة وقوع هذه الحادثة عند إجراء التجربة. تسمى هذه القيمة باحتمال الحادثة.

احتمال الحادثة: Probability of An Event

احتمال الحادثة A هو مقياس عددي يرمز له بالرمز $P(A)$ ويقيس فرصة وقوع الحادثة A عند إجراء التجربة. وتتراوح قيمة هذا المقياس بين الواحد الصحيح والصفر.

التعريف التقليدي للاحتمال: Classical Definition of Probability

إذا كان لدينا تجربة عشوائية جميع نتائجها متساوية الفرصة وعدد عناصر فضاء العينة لها محدود ويساوي n(S) فإن احتمال الحادثة A يعرف بالصيغة التالية:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{عدد عناصر الحادثة } A}{\text{عدد عناصر فضاء العينة } S}$$

مثال (٦–٧):

أوجد احتمال الحوادث في مثال تجربة رمي حجر النرد المتزن مرة واحدة المعطى في مثال (٦–٣).

الحل:

بما أن نتائج تجربة رمي حجر النرد المتزن متساوية الفرصة وعدد عناصر فضاء العينة n(S)=6 محدود فإن احتمالات الحوادث هي:

الحادثة	عدد العناصر	الاحتمال
A = {2, 4, 6}	n(A) = 3	P(A) = n(A)/n(S) = 3/6 =0.5
B = {1, 3, 5}	n(B) = 3	P(B) = n(B)/n(S) = 3/6 =0.5
C = {1, 2, 3, 4, 5}	n(C) = 5	P(C) = n(C)/n(S) = 5/6 =0.8333
D = {6}	n(D) = 1	P(D) = n(D)/n(S) = 1/6 =0.1667
ϕ = { }	n(ϕ) = 0	P(ϕ) = n(ϕ)/n(S) = 0/6 =0.0
S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}	n(S) = 6	P(S) = n(S)/n(S) = 6/6 = 1.0

مثال (٦–٨):

احسب احتمالات الحوادث في مثال (٦–٤) لتجربة قذف قطعة النقود المتزنة مرتين متتاليتين:

الحل:

بما أن نتائج تجربة قذف قطعة النقود المتزنة متساوية الفرصة وعدد عناصر فضاء العينة n(S)=4 محدود فإن احتمالات الحوادث هي:

الحادثة	عدد العناصر	الاحتمال
A = {(H,H),(H,T)}	n(A) = 2	P(A) = n(A)/n(S) = 2/4 =0.5
B = {(T,H),(T,T)}	n(B) = 2	P(B) = n(B)/n(S) = 2/4 =0.5
C = {(H,H),(H,T),(T,H)}	n(C) = 3	P(C) = n(C)/n(S) = 3/4 =0.75

ملاحظة:

إن من عيوب التعريف التقليدي للاحتمال أنه لا ينطبق على جميع أنواع التجارب العشوائية. إذ أنه مبني على تساوي الفرص لنتائج التجربة وعلى محدودية عدد عناصر فضاء العينة وهذا لا ينطبق على جميع التجارب العشوائية. لذلك فإننا فيما يلي نعطي تعريفاً آخر للاحتمال وهو ما يسمى بالتعريف التكراري النسبي للاحتمال.

التعريف التكراري النسبي للاحتمال Relative Frequency Probability:

إذا كررنا إجراء تجربة عشوائية n مرة تحت نفس الظروف وكان عدد مرات وقوع الحادثة A في هذه التكرارات يساوي $r_n(A)$ فإن احتمال الحادثة A بناءً على التعريف التكراري النسبي يعطى بالصيغة التالية:

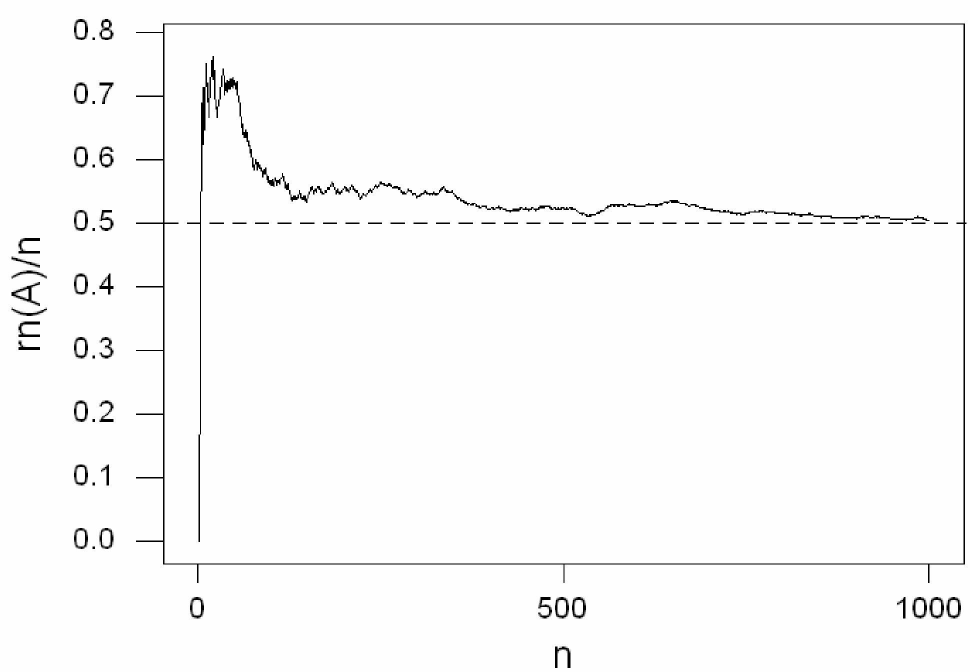
$$\boxed{P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{r_n(A)}{n}}$$

لاحظ أن $\frac{r_n(A)}{n}$ هو التكرار النسبي لعدد مرات وقوع الحادثة A عن تكرار إجراء التجربة n مرة وبالتالي فإن احتمال الحادثة A هو هذا التكرار النسبي عندما نكرر إجراء التجربة ما لا نهاية من المرات.

مثال:

لنعرف الحادثة A على أنها الحادثة الدالة على ظهور الصورة في تجربة قذف العملة المتزنة. ولنفرض أننا كررنا هذه التجربة 1000 مرة وليكن $r_n(A)$ هو عدد مرات ظهور الصورة عند المحاولة رقم n. قمنا بمحاكاة هذه العملية باستخدام الحاسب الآلي فحصلنا على الشكل أدناه. وهذا الشكل يبين لنا بوضوح حقيقة أنه للعملة المتزنة فإن:

$$P(A) = P(H) = \lim_{n \to \infty} \frac{r_n(A)}{n} = 0.5$$



ملاحظة:

بالرغم من أن التعريف التكراري النسبي للاحتمال مفيد وعام لأي نوع من أنواع التجارب العشوائية إلا أننا لا نستطيع التأكد من أننا سوف نحصل على النسبة نفسها لو كررنا إجراء التجربة n مرة في وقت آخر. كذلك فإنه من الصعب جدًا تطبيق هذا التعريف لأنه يعتمد على تكرار إجراء التجربة عدد كبير من المرات. كما أن هذا التعريف له بعض الصعوبات من الجهة الرياضية إذ قد لا توجد النهاية. ولهذه الأسباب فقد ظهر التعريف الرياضي للاحتمال والذي يعتمد على بعض المسلمات الأساسية.

(٦-٧) مسلمات (بديهيات) الاحتمال: Axioms of Probability:

إذا كان لدينا تجربة عشوائية فضاء عينتها هو S فإن الدالة الحقيقية P(.) والمعرفة لجميع الحوادث المعرفة على فضاء العينة S تكون دالة احتمال ويسمى العدد P(A) باحتمال الحادثة A لكل $A \subseteq S$ إذا تحققت المسلمات التالية:

١. لكل حادثة A يكون: $P(A) \geq 0$
٢. $P(S) = 1$
٣. إذا كانت الحوادث $A_1, A_2, A_3, \ldots$ حوادث متنافية (منفصلة) مثنى مثنى (أو تبادليًا) أي إذا كان $A_i \cap A_j = \phi$ لكل $i \neq j$ فإن:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ ) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

ملاحظة:

المسلمة رقم (٣) تعني أن احتمال إتحاد متتالية غير منتهية من الحوادث المتنافية تبادليًا يساوي مجموع احتمالاتها.

النتائج التالية هي بعض نتائج مسلمات الاحتمال الثلاث السابقة.

بعض نتائج مسلمات الاحتمال:

١. احتمال الحادثة المستحيلة يساوي الصفر، أي أن:

$$\boxed{P(\phi) = 0}$$

٢. إذا كانت الحوادث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ حوادث متنافية (منفصلة) تبادليًا فإن:

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)}$$

٣. لأي حادثة A يكون:

$$\boxed{P(A^C) = 1 - P(A)}$$

٤. لأي حادثتين A و B يكون:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

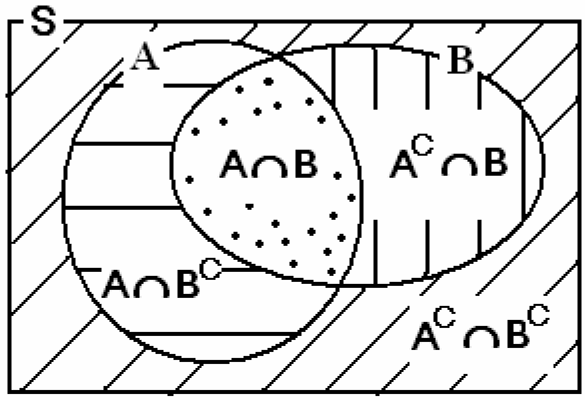
٥. لأي حادثتين A و B يكون:

$$\boxed{\begin{array}{c} P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) \\ \Leftrightarrow \\ P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C) \end{array}}$$

٦. إذا كان $A \subseteq B$ فإن $P(A) \le P(B)$

ملاحظة حول الاحتمالات المتعلقة بحادثتين:

يمكن تمثيل احتمالات الحوادث بالمساحات في شكل فن. فمساحة المستطيل الذي يمثل الحادثة المؤكدة أو فضاء العينة S تساوي الواحد الصحيح. ونمثل احتمال أي حادثة أخرى بمساحة المنطقة التي تمثلها هذه الحادثة في شكل فن منسوبًا إلى المساحة الكلية للمنطقة التي تمثلها الحادثة المؤكد. والشكل التالي يبين بعض الحالات المهمة:



لاستنباط القوانين المتعلقة باحتمالات حادثتين فإننا نحاول تمثيل الحادثة المطلوب إيجاد الاحتمال لها كإتحاد حوادث متنافية لكي نستطيع تطبيق النتيجة الثانية لمسلمات الاحتمال المذكورة أعلاه. فعلى سبيل المثال، القوانين التالية يمكن بسهوله استنباطها من شكل فن:

- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$
- $P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B)$
- $P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(A^C \cap B)$
  $= P(B) + P(A \cap B^C)$
  $= P(A \cap B^C) + P(A \cap B) + P(A^C \cap B)$
- $P(A^C \cap B^C) = 1 - P(A \cup B)$

أمثلة متنوعة

مثال:

إذا كان احتمال نجاح محمد في مقرر الإحصاء يساوي 0.6 فأوجد احتمال رسوبه.

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

A= {نجاح محمد في مقرر الإحصاء}

A^C = {نجاح محمد في مقرر الإحصاء}^{C} = {عدم نجاح محمد في مقرر الإحصاء}

= {رسوب محمد في مقرر الإحصاء}

المعطيات: $P(A) = 0.6$

المطلوب:

$$P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$$

<u>مثال:</u>

إذا كان احتمال نجاح محمد في أحد الاختبارات يساوي 0.6 واحتمال نجاح محمد وأحمد معًا في هذا الاختبار يساوي 0.1 فأوجد احتمال نجاح محمد ورسوب أحمد.

<u>الحل:</u>

لنعرف الحوادث التالية:

$A=$ {نجاح محمد في الاختبار}

$B =$ { نجاح أحمد في الاختبار }

$A\cap B =$ { نجاح محمد وأحمد معًا في الاختبار }

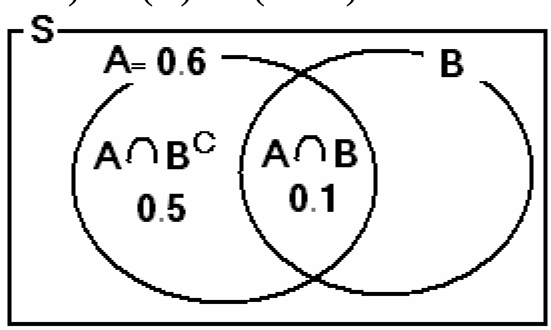
$B^C =$ { رسوب أحمد في الاختبار }

$A\cap B^C =$ { نجاح محمد ورسوب أحمد في الاختبار }

المعطيات: $P(A) = 0.6$ و $P(A\cap B) = 0.1$

المطلوب:

$$P(A\cap B^C) = P(A) - P(A\cap B) = 0.6 - 0.1 = 0.5$$



<u>مثال:</u>

إذا كان احتمال نجاح محمد في أحد الاختبارات يساوي 0.25 واحتمال رسوب أحمد في هذا الاختبار يساوي 0.3 واحتمال نجاح محمد وأحمد معًا في هذا الاختبار يساوي 0.1 فأوجد احتمال نجاح أحدهما على الأقل.

<u>الحل:</u>

لنعرف الحوادث التالية:

$A=$ {نجاح محمد في الاختبار}

$B =$ { نجاح أحمد في الاختبار }

$A\cap B =$ { نجاح محمد وأحمد معًا في الاختبار }

B^C = { رسوب أحمد في الاختبار }

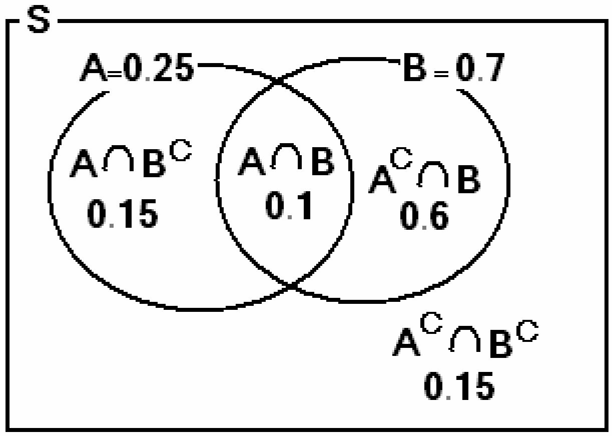
$A \cup B$ = { نجاح أحدهما على الأقل } = { نجاح محمد أو نجاح أحمد في الاختبار }

المعطيات: $P(A) = 0.25$ و $P(B^C) = 0.3$ و $P(A \cap B) = 0.1$

$$P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - 0.3 = 0.7$$

المطلوب:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.25 + 0.7 - 0.1 = 0.85$$



<u>مثال:</u>

إذا كان احتمال أن فصيلة دم أحد المتبرعين بالدم تكون من النوع A هو 0.35 واحتمال أن هذا المتبرع مصاب بضغط الدم هو 0.15 واحتمال أن هذا المتبرع مصاب بضغط الدم أو أن فصيلة دمه من النوع A هو 0.40. أوجد احتمال أن هذا المتبرع:

١. مصاب بضغط الدم وفصيلة دمه من النوع A.

٢. غير مصاب بضغط الدم.

<u>الحل:</u>

لنعرف الحادثتين: A: فصيلة دم المتبرع من النوع A.

B: المتبرع مصاب بضغط الدم.

المعطيات: $P(A \cup B) = 0.40, \quad P(B) = 0.15, \quad P(A) = 0.35$

المطلوب:

١. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.35 + 0.15 - 0.40 = 0.10$

٢. $P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - 0.15 = 0.85$

مثال:

في تجربة رمي حجر نرد متزن مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلـوي لنعـرف الحوادث التالية:

A: الحادثة الدالة على ظهور عدد زوجي

B: الحادثة الدالة على ظهور عدد أقل من أو يساوي 2

عرف الحوادث التالية واحسب احتمالها:

$$A, B, A\cap B, A\cup B, A\cap B^C, A^C\cap B, (A\cup B)^C, A^C\cap B^C$$

الحل:

فضاء العينة لهذه التجربة هو $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وهي تجربة متساوية الفـرص وعـدد عناصر فضاء العينة محدود ويساوي $n(S) = 6$.

الحادثة	عدد العناصر	الاحتمال
$A=\{2,4,6\}$	$n(A) = 3$	$P(A) = n(A)/n(S) = 3/6$
$B= \{1, 2\}$	$n(B) = 2$	$P(B) = n(B)/n(S) = 2/6$
$A\cap B=\{2\}$	$n(A\cap B) = 1$	$P(A\cap B) = n(A\cap B)/n(S) = 1/6$
$A\cup B=\{1,2,4,6\}$	$n(A\cup B) = 4$	$P(A\cup B) = n(A\cup B)/n(S) = 4/6$
$A\cap B^C=\{4,6\}$	$n(A\cap B^C) =2$	$P(A\cap B^C) = n(A\cap B^C)/n(S) = 2/6$
$A^C\cap B=\{1\}$	$n(A^C\cap B)=1$	$P(A^C\cap B) = n(A^C\cap B)/n(S) = 1/6$
$(A\cup B)^C=\{3,5\}$	$n((A\cup B)^C) =2$	$P((A\cup B)^C) = n((A\cup B)^C)/n(S) = 2/6$
$A^C\cap B^C=\{3,5\}$	$n(A^C\cap B^C) =2$	$P(A^C\cap B^C) = n(A^C\cap B^C)/n(S) = 2/6$

كما نلاحظ أنه بالإمكان إيجاد احتمالات بعض الحوادث أعلاه باستخدام القواعد التي ذكرناها آنفاً:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 3/6 + 2/6 - 1/6 = 4/6$$
$$P(A\cap B^C) = P(A) - P(A\cap B) = 3/6 - 1/6 = 2/6$$
$$P(A^C\cap B) = P(B) - P(A\cap B) = 2/6 - 1/6 = 1/6$$
$$P((A\cup B)^C) = 1 - P(A\cup B) = 1 - 4/6 = 2/6$$
$$P(A^C\cap B^C) = P((A\cup B)^C) = 1 - P(A\cup B) = 1 - 4/6 = 2/6$$

مثال:

إذا كانت A و B حادثتين معرفتين على نفس فضاء العينة بحيث:

$$P(A) = 0.2,\ P(B) = 0.4, P(A\cup B) = 0.5$$

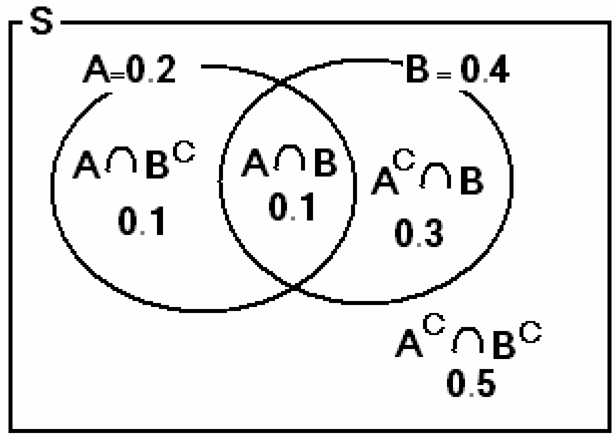
أوجد الاحتمالات التالية:

$$P(A\cap B),\quad P(A\cap B^C),\quad P(A^C\cap B),\quad P(A^C\cap B^C)$$

الحل:

$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) = 0.2 + 0.4 - 0.5 = 0.1$$

$P(A\cap B^C) = P(A) - P(A\cap B) = 0.2 - 0.1 = 0.1$
$P(A^C\cap B) = P(B) - P(A\cap B) = 0.4 - 0.1 = 0.3$
$P(A^C\cap B^C) = P((A\cup B)^C) = 1 - P(A\cup B) = 1 - 0.5 = 0.5$



مثال:

إذ اخترنا ورقتين من أوراق اللعب بشكل عشوائي وبدون مراعاة الترتيب فما هو احتمال أن يكون لوناهما أسود؟

الحل:

عدد الأوراق الكلية = 52 ورقة

عدد الأوراق التي لونها أسود = 26 ورقة

التجربة هي اختيار ورقتين من 52 ورقة

باستخدام قانون التوافيق فإن:

$n(S)$ = عدد عناصر فضاء العينة = عدد طرق اختيار ورقتين من 52 ورقة

$$= \binom{52}{2}$$

لتكن الحادثة A هي الحادثة الدالة على الحصول على ورقتين لونهما أسود

باستخدام قانون التوافيق فإن:

$n(A)$ = عدد عناصر الحادثة A = عدد طرق اختيار ورقتين من 26 ورقة سوداء

$$= \binom{26}{2}$$

ولأن التجربة متساوية الفرص فإن:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{26}{2}}{\binom{52}{2}}=\frac{\left(\frac{26!}{2!\times 24!}\right)}{\left(\frac{52!}{2!\times 50!}\right)}=\frac{\left(\frac{26\times 25\times 24!}{2\times 24!}\right)}{\left(\frac{52\times 51\times 50!}{2\times 50!}\right)}=\frac{26\times 25}{52\times 51}=0.245$$

(٦-٨) الاحتمال الشرطي: Conditional Probability:

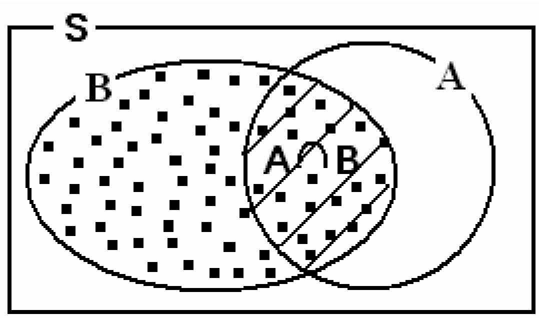
نواجه في كثير من التطبيقات العملية بعض الحالات التي نرغب فيها بإيجاد احتمال حادثة معينة A بعد معرفتنا بوقوع حادثة معينة أخرى B. أي أننا نكون مهتمين بإيجاد الاحتمال الشرطي للحادثة A مشروطًا بوقوع الحادثة B. فمثلاً قد نكون مهتمين بعرفة ما يلي:

١. احتمال وقوع حادث مروري لأحد السائقين إذا علمنا بأنه قد قام بالتأمين على السيارة.

٢. احتمال أن يستمر أحد الأجهزة الكهربائية في العمل لمدة 100 يومًا قادمة علمًا بأن هذا الجهاز ظل عاملاً لمدة 30 يومًا الماضية.

٣. احتمال أن يصاب الشخص بالمرض علمًا بأن هذا الشخص قد تم تلقيحه ضد هذا المرض.

يفهم مما سبق أننا نريد إيجاد احتمال الحادثة A منسوبًا إلى فضاء عينة جديد هو فضاء العينة المكون من عناصر الحادثة المشروطة B.



تعريف: (الاحتمال الشرطي):

لتكن A و B حادثتين معرفتين على نفس فضاء العينة S بحيث $P(B)\neq 0$. إن الاحتمال الشرطي للحادثة A علمًا (أو مشروطًا) بوقوع الحادثة B (أو معطى حدوث الحادثة B) يرمز له بالرمز $P(A|B)$ ويعرف كما يلي:

$$\boxed{P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

ملاحظات:

١. مقياس الاحتمال الشرطي $P(\bullet|B)$ يحقق مسلمات الاحتمال ونتائجها.

٢. الاحتمال الشرطي للحادثة B معطى A هو:

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

٣. بشكل عام فإن: $P(A|B) \neq P(B|A)$

نتائج:

١. إذا كانت عناصر فضاء العينة S متساوية الفرص فإن:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)/n(S)}{n(B)/n(S)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}}$$

٢. الاحتمال الشرطي للحادثة A^C (متممة A) معطى B يمكن حسابه بالقانون التالي:

$$\boxed{P(A^C| B) = 1 - P(A| B)}$$

٣. قاعدة الضرب في الاحتمال:

$$\boxed{\begin{aligned} P(A\cap B) &= P(A)\, P(B \mid A) \\ &= P(B)\, P(A \mid B) \end{aligned}}$$

مثال (٦-٩):

الجدول التالي يصنف أربعمائة شخصًا حسب عادة التدخين ومستوى ضغط الدم على النحو التالي:

			عادة التدخين: يدخن D	لا يدخن D^C	المجموع
مستوى	مرتفع	A	40	10	50
ضغط	متوسط	B	70	130	200
الدم	منخفض	C	55	95	150
	المجموع		165	235	400

ولتكن التجربة هي اختيار أحد هؤلاء الأشخاص بشكل عشوائي. ولنعرف الحوادث التالية:

A : حادثة اختيار شخص ضغط دمه مرتفع

D : حادثة اختيار شخص مدخن

المطلوب هو إيجاد احتمال أن الشخص المختار:

١. ضغط دمه مرتفع.

٢. مدخن.

٣. ضغط دمه مرتفع و يدخن.

٤. ضغط دمه مرتفع علمًا بأنه مدخن.

<u>الحل:</u>

عدد نتائج التجربة $n(S) = 400$ وهي متساوية الفرص.

١. $P(A) = n(A)/n(S) = 50/400 = 0.125$

٢. $P(D) = n(D)/n(S) = 165/400 = 0.4125$

٣. $P(A \cap D) = n(A \cap D)/n(S) = 40/400 = 0.1$

٤. $P(A \mid D) = P(A \cap D) / P(D) = 0.1 / 0.4125 = 0.2424$

أو

$P(A \mid D) = n(A \cap D)/n(D) = 40/165 = 0.2424$

<u>(٦-٩) الحوادث المستقلة: Independent Events:</u>

في بعض الحالات يكون احتمال حدوث حادثة معينة A لا يتأثر مطلقًا بحدوث أو عدم حدوث حادثة أخرى B. أي لا فرق بين احتمال الحادثة A والاحتمال الشرطي للحادثة A معطى B. أي أن $P(A|B)=P(A)$. وفي هذه الحالة نقول بأن الحادثتين A و B مستقلتان.

<u>تعريف:</u>

لتكن A و B حادثتين معرفتين على نفس فضاء العينة S. يقال بأن الحادثتين A و B مستقلتان إذا تحقق أحد الشروط المتكافئة التالية:

- $P(A|B) = P(A)$
- $P(B|A) = P(B)$
- $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

<u>مثال (٦-١٠):</u>

هل الحادثتان A و D في مثال (٦-٩) مستقلتان؟ ولماذا؟

<u>الحل:</u>

إن الحادثتين A و D في مثال (٦-٩) غير مستقلتين وذلك لأن:

- $P(A) = 0.125 \neq P(A|D) = 0.2424$

- $P(A\cap D) = 0.1 \neq P(A)\,P(D) = 0.125\times 0.4125 = 0.0516$
- $P(D) = 0.4125 \neq P(D|A) = 0.8$

نتيجة:

العبارات التالية متكافئة:

١. الحادثتان A و B مستقلتان.

٢. الحادثتان A و B^C مستقلتان.

٣. الحادثتان A^C و B مستقلتان.

٤. الحادثتان A^C و B^C مستقلتان.

مثال (٦-١١):

يحتوي صندوق على عشر كرات حمراء وعشرين كرة بيضاء. سحبت عينة مكونة من كرتين من هذا الصندوق واحدة بعد الأخرى عشوائيًا. أوجد احتمال أن تكون الكرتان لونهما أبيض في كلا الحالتين التاليتين:

١. إذا كان السحب بدون إرجاع

٢. إذا كان السحب بإرجاع

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

$A =$ { الكرة الأولى لونها أبيض }

$B =$ { الكرة الثانية لونها أبيض }

$A\cap B =$ { الكرتان لونهما أبيض }

إن المطلوب هو إيجاد $P(A\cap B)$. وسوف نوجد هذا الاحتمال لكلا الحالتين بطريقتين مختلفتين هما: (١) قاعدة الضرب للاحتمال و(٢) قاعدة التباديل.

أولاً: باستخدام قاعدة الضرب للاحتمال $P(A\cap B) = P(A)\,P(B\,|\,A)$:

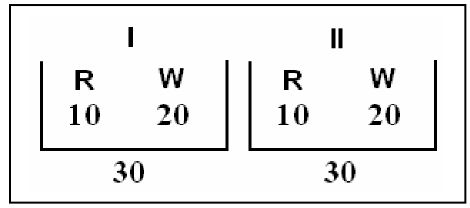
١. حالة السحب بدون إرجاع:

$$P(A) = \frac{20}{30}$$

$$P(B\,|\,A) = \frac{19}{29}$$

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B|A) = \frac{20}{30}\times\frac{19}{29} = 0.4368$$

I		II	
R	W	R	W
10	20	10	19
30		29	



$$P(A) = \frac{20}{30}$$

$$P(B \mid A) = \frac{20}{30}$$

$$P(A\cap B) = P(A)\, P(B|A) = \frac{20}{30}\times\frac{20}{30} = 0.4444$$

ثانياً: باستخدام قاعدة التباديل:

- عدد طرق سحب كرتين من ثلاثين كرة = $n(S)$
- عدد طرق سحب كرتين من عشرين كرة بيضاء = $n(A\cap B)$
- ويكون الاحتمال المطلوب هو: $P(A\cap B) = n(A\cap B)/n(S)$

١. حالة السحب بدون إرجاع:

$$n(S) = {}_{30}P_2 = 30 \times 29$$

$$n(A\cap B) = {}_{20}P_2 = 20 \times 19$$

$$P(A\cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(S)} = \frac{20\times 19}{30\times 29} = 0.4368$$

٢. حالة السحب بإرجاع:

$$n(S) = 30^2 = 30 \times 30$$

$$n(A\cap B) = 20^2 = 20 \times 20$$

$$P(A\cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(S)} = \frac{20\times 20}{30\times 30} = 0.4444$$

<u>مثال (٦-١٢):</u>

يحتوي صندوق على عشر كرات حمراء وعشرين كرة بيضاء. اخترنا عينة مكونة من 4 كرات من هذا الصندوق عشوائيًا دون مراعاة الترتيب. أوجد احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء وكرة واحدة بيضاء.

<u>الحل:</u>

لنعرف الحادثة A على أنها حادثة الحصول على ثلاث كرات حمراء وكرة واحدة بيضاء

- عدد طرق اختيار 4 كرات من ثلاثين كرة = $n(S)$
- عدد طرق اختيار على ثلاث كرات حمراء وكرة واحدة بيضاء = $n(A)$
- ويكون الاحتمال المطلوب هو: $P(A) = n(A)/n(S)$

$$n(S) = \binom{30}{4}$$

$$n(A) = \binom{10}{3} \times \binom{20}{1}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{10}{3} \times \binom{20}{1}}{\binom{30}{4}} = 0.088$$

(٦-١٠) نظرية بايز : Bayes' Theorem:

لنفرض أن هناك عدد من الأسباب المعينة التي يؤدي وقوع أحدها إلى حدوث حادثة ما. وهذه الحادثة تقع إذا وقع أحد أسبابها. ولنفرض أننا نعلم مسبقًا احتمال تحقق كل سبب من هذه الأسباب وكذلك نعلم الاحتمال الشرطي لهذه الحادثة عند تحقق كل سبب من أسبابها. إن نظرية بايز تعنى بحساب احتمال أن يكون سببًا محددًا من الأسباب هو مصدر حدوث هذه الحاثة والتي نعلم مسبقًا بحدوثها. وقبل استعراض نظرية بايز فإنه لابد من التطرق لما يسمى بقانون الاحتمال الكلي الذي يعنى بحساب وقوع هذه الحادثة بغض النظر عن السبب.

قانون الاحتمال الكلي Total Probability Law:

لتكن الحوادث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ حوادث شاملة ومتنافية مثنى مثنى (متنافية تبادليًا) ومعرفة على فضاء العينة S، أي أن:

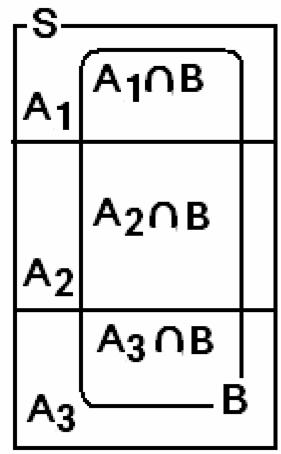
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$
- $A_i \cap A_j = \phi, \quad \forall\ i \neq j$

إذا كانت الحادثة B هي أي حادثة معرفة على نفس فضاء العينة S، فإن:

$$\boxed{\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)\,P(B|A_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\,P(B\,|\,A_k) \end{aligned}}$$

ملاحظة:

١. يمكن استنباط هذا القانون بشكل فن التالي (للحالة n=3):



- $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$
  $= \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$
- $(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \phi, \quad \forall\, i \neq j$
- $P(B) = P\{(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)\}$
  $= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$
  $= \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap B)$
  $= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P(B \mid A_k)$

٢. يمكن تلخيص قانون الاحتمال الكلي بواسطة شكل الشجرة التالية (للحالة n=3):

$A_1 \xrightarrow{P(A_1)} B \mid A_1 \xrightarrow{P(B|A_1)} \Rightarrow P(A_1)\, P(B|A_1)$

$A_2 \xrightarrow{P(A_2)} B \mid A_2 \xrightarrow{P(B|A_2)} \Rightarrow P(A_2)\, P(B|A_2)$

$A_3 \xrightarrow{P(A_3)} B \mid A_3 \xrightarrow{P(B|A_3)} \Rightarrow P(A_3)\, P(B|A_3)$

المجموع $= P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\, P(B \mid A_k)$

<u>مثال (٦-١٣):</u>

يتم إنتاج المصباح الكهربائي في أحد المصانع بواسطة إحدى ثلاث آلات. تنتج الآلة الأولى 20% من الإنتاج الكلي للمصنع وتنتج الآلة الثانية 30% من الإنتاج الكلي للمصنع وتنتج الآلة الثالثة 50% من الإنتاج الكلي للمصنع. ومعلوم من الخبرة السابقة أن نسبة الإنتاج التالف للآلة الأولى هي 1% و نسبة الإنتاج التالف للآلة الثانية هي 4% و نسبة الإنتاج التالف للآلة الثالثة هي 7%. إذا كانت التجربة هي اختيار مصباح واحد من إنتاج هذا المصنع بشكل عشوائي فما هو احتمال أن يكون هذا المصباح تالف؟

<u>الحل:</u>

لنعرف الحوادث التالية:

B = { المصباح تالف };

A_1 = { المصباح من إنتاج الآلة الأولى };

A_2 = { المصباح من إنتاج الآلة الثانية };

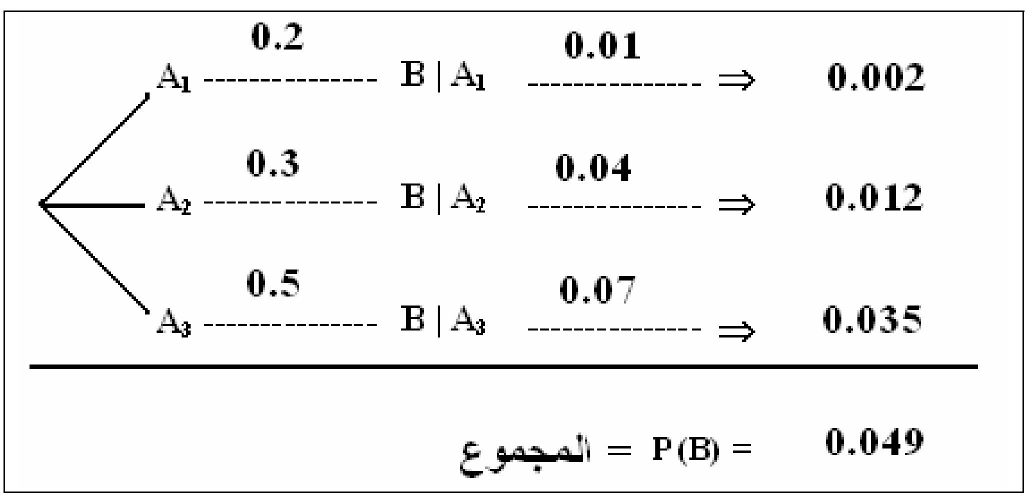
A_3 = { المصباح من إنتاج الآلة الثالثة };

المعطيات:

$$P(A_1) = \frac{20}{100} = 0.2; \quad P(B|A_1) = \frac{1}{100} = 0.01$$
$$P(A_2) = \frac{30}{100} = 0.3; \quad P(B|A_2) = \frac{4}{100} = 0.04$$
$$P(A_3) = \frac{50}{100} = 0.5; \quad P(B|A_3) = \frac{7}{100} = 0.07$$

المطلوب:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(B \mid A_k)$$
$$= P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2) + P(A_3)\,P(B|A_3)$$
$$= 0.2\times0.01 + 0.3\times0.04 + 0.5\times0.07$$
$$= 0.002 \quad + 0.012 \quad + 0.035$$
$$= 0.049$$



مثال (٦-١٤):

باعتبار المثال السابق، مثال (٦-١٣)، لنفرض أننا علمنا أن المصباح المختار كان تالفاً، فما هو احتمال أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الأولى؟

<u>الحل:</u>

إن المطلوب هو إيجاد $P(A_1|B)$ وباستخدام التعريف الشرطي وقانون الضرب للاحتمال فإن:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(B)} = \frac{0.2 \times 0.01}{0.049} = \frac{0.002}{0.049} = 0.0408$$

إن القانون المستخدم لحل هذا المثال ما هو إلا قانون بايز الذي سنستعرضه فيما يلي.

<u>قانون بايز : Bayes' Theorem:</u>

لتكن الحوادث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ حوادث شاملة ومتنافية مثنى مثنى (متنافية تبادليًا) ومعرفة على فضاء العينة S، أي أن:

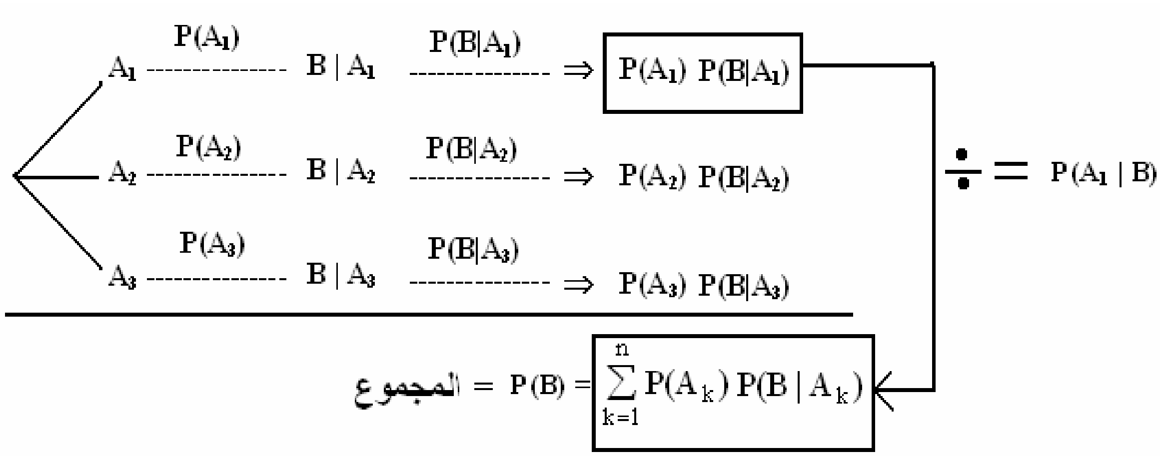
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ \ldots \ \cup A_n = S$
- $A_i \cap A_j = \phi, \quad \forall\ i \neq j$

إذا كانت الحادثة B هي أي حادثة معرفة على نفس فضاء العينة S، فإن:

$$\boxed{P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B \mid A_k)} = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(B)} \ ; \ i = 1, 2, \ldots, n}$$

<u>ملاحظة:</u>

يمكن تلخيص قانون بايز بواسطة شكل الشجرة التالية (للحالة n=3):



<u>مثال (٦-١٥):</u>

باعتبار مثال (٦-١٣)، لنفرض أننا علمنا أن المصباح المختار كان تالفًا، فما هو احتمال:

١. أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الأولى؟
٢. أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الثانية؟
٣. أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الثالثة؟

الحل:

1.

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.2\times 0.01}{0.049}=\frac{0.002}{0.049}=0.0408$$

2.

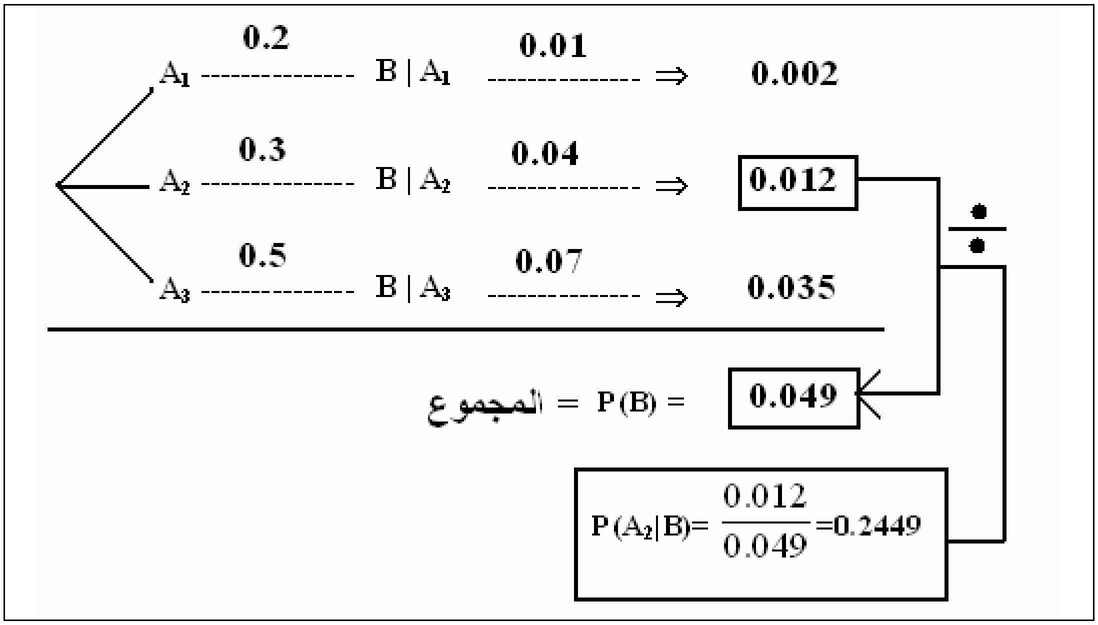
$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)}=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.3\times 0.04}{0.049}=\frac{0.012}{0.049}=0.2449$$

3.

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)}=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{0.5\times 0.07}{0.049}=\frac{0.035}{0.049}=0.7142$$

في هذا المثال، نلاحظ أنه لو كان المصباح المختار تالفًا فإن الاحتمال الأكبر أن يكون من إنتاج الآلة الثالثة.

ويمكن تلخيص استخدام قانون بايز لحل فقرة (٢) مثلاً في هذا المثال بواسطة شكل الشجرة التالية:



مثال (٦-١٦):

لنفرض أن لدينا صندوقين. يحتوي الصندوق الأول على 4 كرات بيضاء و 6 كرات سوداء، بينما يحتوي الصندوق الثاني على 8 كرات بيضاء و 8 كرات سوداء. اخترنا صندوق من هاذين الصندوقين بشكل عشوائي ثم سحبنا منه كرة واحدة بشكل عشوائي.

١. احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء.
٢. إذا علمنا أن الكرة المسحوبة سوداء، فما هو احتمال أن تكون من الصندوق الثاني؟

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

B = { الكرة المسحوبة سوداء };

A_1 ={ الصندوق المختار هو الصندوق الأول };

A_2 ={ الصندوق المختار هو الصندوق الثاني };

المعطيات:

$$P(A_1) = 0.5; \quad P(B|A_1)= \frac{6}{10} = 0.6$$

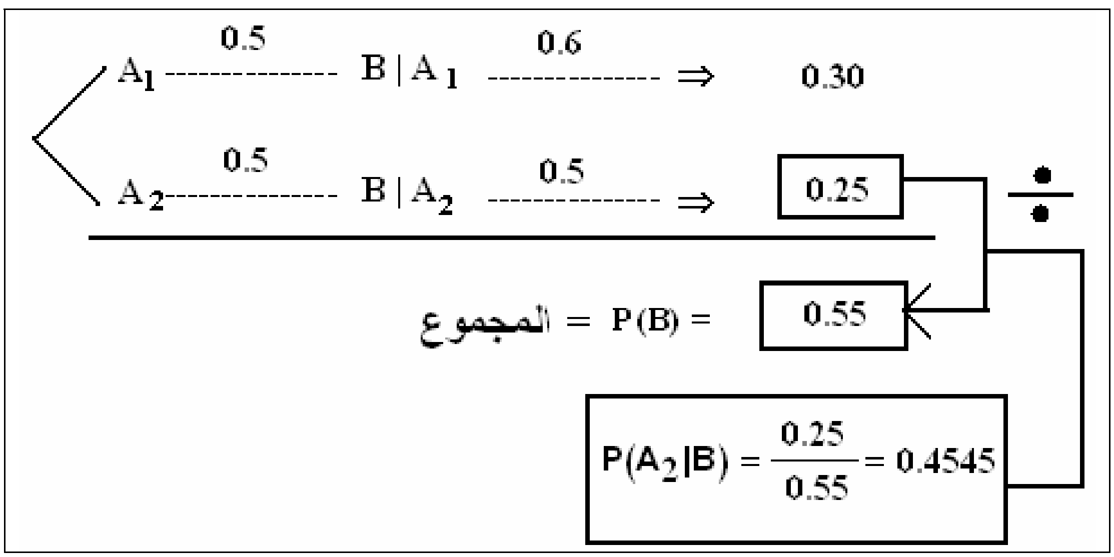
$$P(A_2) = 0.5; \quad P(B|A_2)= \frac{8}{16} = 0.5$$

المطلوب:

1. $P(B) = \sum_{k=1}^{2} P(A_k)P(B|A_k)$
$= P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2)$
$= 0.5\times0.6 + 0.5\times0.5 = 0.3 + 0.25$
$= 0.55$

2. $P(A_2|B) = \dfrac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{k=1}^{2} P(A_k)P(B|A_k)} = \dfrac{0.5\times0.5}{0.55} = \dfrac{0.25}{0.55} = 0.4545$

يمكن تلخيص حل هذا المثال بواسطة شكل الشجرة التالية:



٧. المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية
Random Variables and Probability Distributions

(٧-١) مقدمة:

تكلمنا في الباب السابق عن بعض مفاهيم الاحتمالات والتجارب العشوائية. وفي كثير من الأحيان نرغب في التعامل مع قيم عددية مرتبطة بنقاط العينة للتجربة العشوائية بدلاً من التعامل مع نقاط العينة نفسها إذ أن نقاط العينة أو النتائج الممكنة للتجربة العشوائية تكون في بعض الأحيان عبارة عن صفات أو مسميات يصعب التعامل معها رياضيًا. وفي هذه الحالة فإننا نقوم بتحويل هذه القيم الوصفية إلى قيم عددية حقيقية تسمى قيم المتغير العشوائي. إن الآلة المستخدمة لتحويل عناصر فضاء العينة للتجربة العشوائية إلى قيم عددية حقيقية هي ما يسمى بالمتغير العشوائي. إذن، فالمتغيرات العشوائية تستخدم للتعبير عن نتائج التجربة العشوائية وعن الحوادث بقيم عددية بدلاً من مسميات أو صفات. فعلى سبيل المثال قد نكون مهتمين فقط بعدد الصورة الظاهرة على الوجه العلوي عند رمي قطعة عملة عشر مرات متتالية بغض النظر عن التفصيلات الأخرى. إن عدد الصور في هذه الحالة عبارة عن متغير عشوائي تتغير قيمته بتغير نتيجة التجربة العشوائية. وهناك عدة أنواع للمتغيرات العشوائية نذكر منها نوعين هما:

١. متغيرات عشوائية منفصلة أو متقطعة Discrete Random Variables
٢. متغيرات عشوائية متصلة أو مستمرة Continuous Random Variables

وسنتكلم عن كل نوع منها على حدة في هذا الفصل.

(٧-٢) المتغير العشوائي Random Variable:

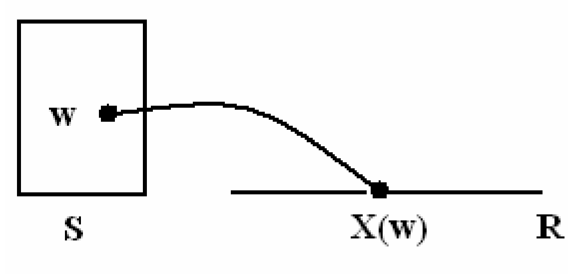
تعريف:

لنفرض أن S هو فضاء العينة لتجربة عشوائية. إن المتغير العشوائي X هو دالة حقيقية معرفة على فضاء العينة S. (لابد أن تتحقق بعض الشروط على الدالة لكي تكون متغيرًا عشوائيًا ولكننا لن نتطرق إلى تلك الشروط.)

ملاحظات:

١. إن المتغير العشوائي X يعطي قيمة حقيقية وحيدة لكل عنصر من عناصر فضاء العينة S.
٢. إن المتغير العشوائي X هو تطبيق مجاله فضاء العينة S ومجاله المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbf{R}$، أي أن: $X : S \to \mathbf{R}$.

٣. إذا كانت $w\in S$ نقطة عينة فإن صورة w تحت تأثير المتغير العشوائي X هـــي $X(w)$ وهي قيمة حقيقية، أي أن $X(w)\in \mathbf{R}$:



$$w: \xrightarrow{X} X(w)\in \mathbf{R}$$

٤. إن المجموعة $X(S)=\{x\in \mathbf{R}: X(w)=x,\ w\in S\}$ هـــي مـــدى التطبيـــق X وتـــسمى مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X، وهي مجموعة جزئية من مجموعة الأعـــداد الحقيقية أي أن $X(S)\subseteq \mathbf{R}$.

<u>مثال (٧-١):</u>

لتكن التجربة هي قذف قطعة نقود متزنة مرتين متتاليتين بـــشكل مـــستقل. ولنعـــرف المتغيـــر العشوائي X على أنه عدد الصور الظاهرة في الرميتين.

١. عبر عن المتغير العشوائي X كدالة.

٢. أوجد مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.

٣. عبر عن الحوادث التالية باستخدام المتغير العشوائي:

$$\{(T,T)\},\ \{(H,T),(T,H)\},\ \{(H,H)\},\ \{(H,H),(H,T),(T,H)\}$$

٤. عبر عن الحوادث التالية باستخدام نقاط العينة:

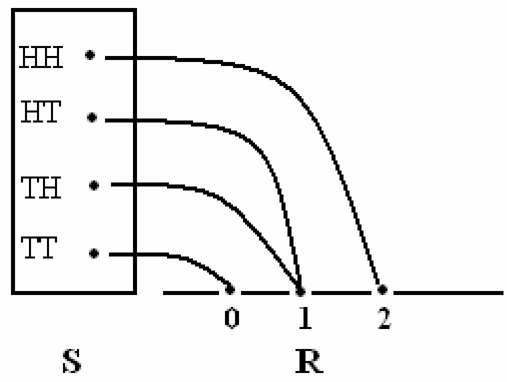
$$\{X=0\},\ \{X=1\},\ \{X=2\},\ \{X<1\},\ \{X\le 1\},\ \{X>5\}$$

٥. أوجد الاحتمالات التالية:

$$P(X=0),\ P(X=1),\ P(X=2),\ P(X<1),\ P(X\le 1),\ P(X>5)$$

<u>الحل:</u>

١. فضاء العينة لهذه التجربة هو $S=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$.



X = عدد الصور

إن المتغير العشوائي X يعطي كل عنصر من عناصر S قيمة حقيقية وحيدة في **R** كما يلي:

X(H,H) = 2
X(H,T) = 1
X(T,H) = 1
X(T,T) = 0

كما يمكن التعبير عن المتغير العشوائي X كدالة في الجدول التالي:

قيمة المتغير العشوائي X(w)	نقطة العينة w
2	HH
1	HT
1	TH
0	TT

٢. مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي:

$$X(S)=\{x\in \mathbf{R}: X(w)=x,\ w\in S\} = \{0, 1, 2\}$$

٣. التعبير عن الحوادث باستخدام المتغير العشوائي:

{(T,T)} = { X = 0 }={عدم ظهور صورة}

{(H,T), (T,H)} = { X = 1 }={ظهور صورة واحدة فقط}

{(H,H)} = { X = 2 }={ ظهور صورتين}

{(H,H), (H,T), (T,H)} = { X ≥ 1 }={ظهور صورة واحدة على الأقل}

٤. التعبير عن الحوادث باستخدام نقاط العينة:

$\{X=0\} = \{(T,T)\}$
$\{X=1\} = \{(H,T), (T,H)\}$
$\{X=2\} = \{(H,H)\}$
$\{X<1\} = \{X=0\} = \{(T,T)\}$
$\{X\leq 1\} = \{X=0\} \cup \{X=1\} = \{(H,T), (T,H), (T,T)\}$
$\{X>5\} = \{\ \} = \phi$

٥. إيجاد الاحتمالات:

بما أن العملة متزنة فإن التجربة متساوية الفرص، أي أن:

$$P(\{(H,H)\}) = P(\{(H,T)\}) = P(\{(T,H)\}) = P(\{(T,T)\}) = 1/4 = 0.25$$

وباستخدام هذه الحقيقة فإننا نوجد الاحتمالات المطلوبة فيما يلي:

$P(X=0) = P(\{(T,T)\}) = 0.25$
$P(X=1) = P(\{(H,T), (T,H)\}) = P(\{(H,T)\})+P(\{(T,H)\}) = 0.25 + 0.25 =0.5$
$P(X=2) = P(\{(H,H)\}) = 0.25$
$P(X<1) = P(\{(T,T)\}) = 0.25$
$P(X\le 1) = P(\{(H,T), (T,H), (T,T)\}) = P(\{(H,T)\})+ P(\{(T,H)\}) + P(\{(T,T)\})$
$= 0.25 + 0.25 + 0.25 = 0.75$
$P(X>5) = P(\phi) = 0$

(٧-٣) المتغير العشوائي المتقطع (المنفصل) Discrete Random Variable:

كما ذكرنا سابقاً فإن المتغيرات العشوائية تنقسم إلى عدة أنواع منها متغيرات عشوائية متقطعة (أو منفصلة) و متغيرات عشوائية مستمرة (أو متصلة). في هذا الجزء سنتناول المتغيرات العشوائية المتقطعة.

تعريف:

يكون المتغير العشوائي X متغيرًا عشوائيًا متقطعًا إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له $X(S)$ مجموعة متقطعة (أو قابلة للعد).

ملاحظة: مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي المتقطع X تأخذ إحدى الحالتين: $X(S)=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ أو $X(S)=\{x_1,x_2,x_3,\ldots\}$.

مثال (٧-٢):

في تجربة قذف قطعة نقود متزنة مرتين متتاليتين أوجد مجموعة القيم الممكنة المتغيرات العشوائية التالية وحدد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا:

١. المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصور.
٢. المتغير العشوائي Y الذي يمثل مربع عدد الصور.
٣. المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الصور مطروحًا منه عدد الكتابات.

الحل:

الجدول التالي يبين القيم الممكنة لكل متغير:

نقطة العينة w	قيمة المتغير العشوائي X X(w)	قيمة المتغير العشوائي Y Y(w)	قيمة المتغير العشوائي Z Z(w)
HH	2	4	2

نقطة العينة w	قيمة المتغير العشوائي X $X(w)$	قيمة المتغير العشوائي Y $Y(w)$	قيمة المتغير العشوائي Z $Z(w)$
HT	1	1	0
TH	1	1	0
TT	0	0	-2

والجدول التالي يبين مجموعة القيم الممكنة لكل متغير ونوعها وكذلك نوع المتغير:

المتغير العشوائي	مجموعة القيم الممكنة	نوع مجموعة القيم	نوع المتغير العشوائي
X	$X(S) = \{0,1,2\}$	متقطعة	متقطع
Y	$Y(S) = \{0,1,4\}$	متقطعة	متقطع
Z	$Z(S) = \{-2,0,2\}$	متقطعة	متقطع

مثال (٧-٣):

لتكن التجربة هي قذف قطعة نقود غير متزنة مرتين متتاليتين بشكل مستقل. ولنفرض أن هذه العملة غير متزنة بحيث أن $P(H)=\frac{1}{3}$ و $P(T)=\frac{2}{3}$. ولنعرف المتغير العشوائي X على أنه عدد الصور الظاهرة في الرميتين.

١. أوجد الاحتمالات التالية ثم لخصها في جدول:

$$P(X=0)\ ,\ P(X=1)\ ,\ P(X=2)$$

٢. باستخدام الفقرة (١) أوجد الاحتمالات التالية:

$$P(0<X<2)\ ,\ P(X\le 1)\ ,\ P(X\ge 2)\ ,\ P(X\ge 5), P(X<5)$$

الحل:

فضاء العينة لهذه التجربة هو $S = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$.

X = عدد الصور الظاهرة في الرميتين.

مجموعة القيم الممكنة المتغير العشوائي X هي: $X(S) = \{0,1,2\}$

نلخص حل هذا المثال في الجداول التالية:

نقطة العينة w	احتمال نقطة العينة $P(w)$	قيمة المتغير العشوائي X $X(w)$
HH	$P(HH)=P(H)\times P(H)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	2
HT	$P(HT)=P(H)\times P(T)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$	1

قيمة المتغير العشوائي X X(w)	احتمال نقطة العينة P(w)	نقطة العينة w
1	$P(TH)=P(T)\times P(H)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$	TH
0	$P(TT)=P(T)\times P(T)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$	TT

احتمال الحادثة	عناصر الحادثة	الحادثة
$P(X=0)=P(TT)=\frac{4}{9}$	$\{(T,T)\}$	$(X=0)$
$P(X=1)=P(HT)+P(TH)=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$	$\{(H,T),(T,H)\}$	$(X=1)$
$P(X=2)=P(HH)=\frac{1}{9}$	$\{(H,H)\}$	$(X=2)$

١. من الجدول السابق نجد أن:

$$P(X=0)=\frac{4}{9},\ P(X=1)=\frac{4}{9},\ P(X=2)=\frac{1}{9}$$

ويمكن تنظيم هذه المعلومات في جدول وهذا الجدول يمثل ما يسمى بدالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع X:

x	P(X = x)
0	4/9
1	4/9
2	1/9

٢. من جدول دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X نستطيع حساب جميع احتمالات الحوادث المعبر عنها باستخدام المتغير العشوائي X كما يلي:

$$P(0<X<2)=P(X=1)=\frac{4}{9}$$

$$P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$$

$$P(X\geq 2)=P(X=2)=\frac{1}{9}$$

$$P(X\geq 5)=P(\phi)=0$$

$$P(X<5) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

(٧-٣-١) دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع Probability Mass Function:

تعريف:

إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا مجموعة القيم الممكنة لـــه هـــي $X(S)=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ أو $X(S)=\{x_1,x_2,x_3,\ldots\}$ فإن دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X يرمز لها بالرمز $f_X(x)$ وتعرف كما يلي:

$$\boxed{f_X(x)=\begin{cases} P(X=x); & x \in X(S) \\ 0; & x \notin X(S) \end{cases}}$$

خواص دالة الكتلة الاحتمالية:

إن دالة الكتلة الاحتمالية $f_X(x) = P(X = x)$ لابد أن تحقق الشروط التالية:

- $0 \le f_X(x) \le 1$
- $\sum_{\forall x} f_X(x)=1$
- $P(X\in A)= \sum_{x\in A} f_X(x) = \sum_{x\in A} P(X=x); \quad \forall A \subseteq \mathbf{R}$

مثال (٧-٤):

أوجد دالة الكتلة الاحتمالية $f_X(x) = P(X = x)$ للمتغير العشوائي X في مثال (٧-٣).

الحل:

دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X:

x	$f_X(x) = P(X = x)$
0	$4/9= f_x(0)=P(X=0)$
1	$4/9= f_x(1)=P(X=1)$
2	$1/9= f_x(2)=P(X=2)$
المجموع	1.00

من هذا الجدول نلاحظ أن دالة الكتلة الاحتمالية $f_X(x) = P(X = x)$ تحقق ما يلي:

- $0 \le f_X(x) \le 1 \qquad ; \; x =0, 1, 2$

- $\sum_{\forall x} f_X(x) = \sum_{x=0}^{2} f_X(x) = 1$

(٧-٣-٢) التوقع (المتوسط) للمتغير العشوائي المتقطع Expected Value (Mean) of A Discrete Random Variable:

إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا مجموعة القيم الممكنة لـــه هـــي $X(S)=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ أو $X(S)=\{x_1,x_2,x_3,\ldots\}$ ودالة كتلته الاحتمالية هي $f_X(x)$ فإن التوقع (أو القيمـــة المتوقعـــة أو المتوسط) للمتغير العشوائي X يرمز له بالرمز $E(X)$ أو بالرمز μ_X ويعرف بالصيغة التالية:

$$\boxed{\begin{aligned}\mu_X = E(X) &= \sum_{x\in X(S)} x\, f_X(x) = \sum_{x\in X(S)} x\, P(X=x)\\ &= x_1\, f_X(x_1) + x_2\, f_X(x_2) + \ldots\end{aligned}}$$

ملاحظة:

إن القيمة المتوقعة أو متوسط المتغير العشوائي X والذي يأخذ القيم الممكنة $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ما هو إلا الوسط المرجح للقيم $x_1,x_2,\ldots,x_n$ باعتبار أن الأوزان هي احتمالات تلك القيم، أي باعتبار أن وزن القيمة x_i هو احتمالها $w_i=f_X(x_i)$ مع ملاحظة أن مجموع الأوزان يساوي الواحـــد، أي أن $\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} f_X(x_i) = 1$.

مثال (٧-٥):

أوجد توقع (أو متوسط) المتغير العشوائي X الذي دالة كتلته الاحتمالية معطاة في الجدول التالي:

x	$f_X(x) = P(X = x)$
0	4/9
1	4/9
2	1/9

الحل:

القيمة المتوقعة (أو متوسط) المتغير العشوائي X هي:

$$\begin{aligned}\mu_X = E(X) = \sum_{x=0}^{2} x\, f_X(x) &= x_1\, f_X(x_1) + x_2\, f_X(x_2) + x_3\, f_X(x_3)\\ &= 0 \times 4/9 + 1 \times 4/9 + 2 \times 1/9\\ &= 0 + 4/9 + 2/9\\ &= 6/9\end{aligned}$$

ويمكن تلخيص الحل في الجدول التالي:

x	$f_X(x)$	$x\, f_X(x)$
0	4/9	$0 \times 4/9 = 0$
1	4/9	$1\times 4/9 = 4/9$
2	1/9	$2\times 1/9 = 2/9$
المجموع	$\sum f_X(x) = 1.0$	$\mu_X = E(X) = \sum x\, f_X(x) = 6/9$

بعض خواص التوقع:

ليكن X متغيرا عشوائيا ولتكن a و b ثوابت. إن التوقع يحقق الخواص التالية:

- $E(a) = a$
- $E(X \pm b) = E(X) \pm b$
- $E(aX) = a\,E(X)$
- $E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$

نتيجة:

ليكن X متغيرا عشوائيا متقطعًا ولتكن $g(X)$ دالة حقيقية في المتغير العشوائي X. إن توقع الدالة $g(X)$ يمكن حسابه بالصيغة التالية:

$$\boxed{\mu_{g(X)} = E[(g(X)] = \sum_{x \in X(S)} g(x)\, f_X(x) = g(x_1)\, f_X(x_1) + g(x_2)\, f_X(x_2) + \ldots}$$

وكحالة خاصة عندما تكون $g(X)=X^2$ فإن:

$$\boxed{E(X^2) = \sum_{x \in X(S)} x^2\, f_X(x) = x_1^2 f_X(x_1) + x_2^2 f_X(x_2) + \ldots}$$

مثال (٧-٦):

أوجد توقع (أو متوسط) المتغيرات العشوائية التالية في مثال (٧-٥):

(أ) $g(X) = 9X+2$

(ب) $g(X) = X^2$

الحل:

(أ) وجدنا أن $E(X)=6/9$ وباستخدام خواص التوقع فإن:

$$E[g(X)] = E(9X+2) = 9\,E(X) + 2 = 9 \times 6/9 + 2 = 8$$

(ب) باستخدام نتيجة التوقع فإن:

$$\begin{aligned} E[g(X)] = E(X^2) &= \sum x^2\, f_X(x) \\ &= x_1^2 f_X(x_1) + x_2^2 f_X(x_2) + \ldots \\ &= 0^2 \times 4/9 + 1^2 \times 4/9 + 2^2 \times 1/9 \end{aligned}$$

$= 0 \times 4/9 \ + \ 1 \times 4/9 \ + \ 4 \times 1/9$
$= 0 + 4/9 \ +4/9$
$= 8/9$

ويمكن تلخيص حل هذه الفقرة في الجدول التالي:

x	$f_X(x)$	x^2	$x^2 f_X(x)$
0	4/9	0	$0 \times 4/9 = 0$
1	4/9	1	$1 \times 4/9 = 4/9$
2	1/9	4	$4 \times 1/9 = 4/9$
المجموع			$E(X^2) = \sum x^2 f_X(x) = 8/9$

(٧-٣-٣) التباين للمتغير العشوائي Variance of A Random Variable:

إذا كان X متغيرا عشوائيا توقعه (متوسطه) μ_X. فإن تباين المتغير العشوائي X يرمز له بالرمز $V(X)$ أو $Var(X)$ أو σ_X^2 ويعرف بالصيغة التالية:

$$\boxed{\sigma_X^2 = Var(X) = E[(X - \mu_X)^2]}$$

ويرمز للانحراف المعياري للمتغير العشوائي X بالرمز σ_X ويعرف بالصيغة التالية:

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}}$$

نتيجة:

إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعًا دالة كتلته الاحتمالية هي $f_X(x)$ وتوقعه (متوسطه) μ_X فــإن تباين المتغير العشوائي X يمكن أن يحسب بالصيغة التالية:

$$\boxed{\sigma_X^2 = Var(X) = \sum_{x \in X(S)} (x - \mu_X)^2 \ f_X(x) = \sum_{x \in X(S)} (x - \mu_X)^2 \ P(X = x)}$$

هذه النتيجة هي نتيجة مباشرة لخواص التوقع وذلك بجعل $g(X) = (X - \mu_X)^2$.

نتيجة: (صيغة حسابية للتباين)

باستخدام خواص التوقع فإنه يمكن إثبات الصيغة التالية:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_X^2 = Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - \mu_X^2 \end{aligned}}$$

حيث أن: $E(X^2) = \sum x^2 \ f_X(x)$.

مثال (٧-٧):

أحسب المتوسط والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X الذي دالة كتلته الاحتمالية معطاة في الجدول أدناه:

x	$f_X(x)$
0	0.6
1	0.3
2	0.1

الحل:

نلخص الحل في الجدول التالي:

x	$f_X(x)$	$x\, f_X(x)$	$(x-\mu_X)^2$	$(x-\mu_X)^2\, f_X(x)$	x^2	$x^2 f_X(x)$
0	0.6	0.0	0.25	0.150	0	0.0
1	0.3	0.3	0.25	0.075	1	0.3
2	0.1	0.2	2.25	0.225	4	0.4
المجموع	1.0	$\mu_X = \sum x\, f_X(x) = 0.5$		$\sigma_X^2 = \sum (x-\mu)^2 f_X(x) = 0.450$		$E(X^2) = \sum x^2 f_X(x) = 0.7$

(١) حساب المتوسط:

$$\mu_X = \sum x\, f_X(x) = 0.5$$

(٢) حساب التباين:

(أ) حساب التباين بصيغة التعريف:

$$\sigma_X^2 = \sum (x-\mu)^2 f_X(x) = 0.450$$

(ب) حساب التباين بالصيغة الحسابية:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= E(X^2) - \mu_X^2 = 0.7 - (0.5)^2 \\ &= 0.7 - 0.25 \\ &= 0.45\end{aligned}$$

(٣) حساب الانحراف المعياري:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{0.45} = 0.6708$$

بعض خواص التباين:

ليكن X متغيرا عشوائيا ولتكن a و b ثوابت. إن التباين يحقق الخواص التالية:

- $Var(a) = 0$
- $Var(X \pm b) = Var(X)$

- $Var(aX) = a^2 \, Var(X)$
- $Var(aX \pm b) = a^2 \, Var(X)$

مثال (٧-٨):

أحسب تباين المتغيرات العشوائية التالية في مثال (٧-٧):

أ- $g(X) = 10X$

ب- $g(X) = 10X+2$

الحل:

وجدنا أن $Var(X)=0.45$ وباستخدام خواص التباين فإن:

(أ)

$$Var[g(X)] = Var(10X) = 10^2 \, Var(X) = 100 \times 0.45 = 45$$

(ب)

$$Var[g(X)] = Var(10X+2) = 10^2 \, Var(X) = 100 \times 0.45 = 45$$

(٧-٤) بعض التوزيعات الاحتمالية المتقطعة Some Discrete Prabability Distributions:

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة هي توزيعات احتمالية (أو دوال كتل احتمالية) لمتغيرات عشوائية متقطعة. وفي هذه الفقرة سنتطرق إلى اثنين من التوزيعات الاحتمالية المتقطعة المهمة هما توزيع بيرنوللي وتوزيع ذات الحدين أو التوزيع ذي الحدين. وقبل استعراض هذين التوزيعين فإن من المفيد لنا معرفة ما يسمى بمحاولة بيرنوللي.

(٧-٤-١) محاولة بيرنوللي Bernoulli's Trial

محاولة بيرونللي هي تجربة عشوائية لها نتيجتين اثنتين فقط. نسمي النتيجة الأولى اصطلاحًا بالنجاح (Success) ونرمز لها بالرمز (s) والنتيجة الثانية نسميها بالفشل (Failure) ونرمز لها بالرمز (f). لذلك فإن فراغ العينة لمحاولة بيرنوللي هو $S=\{s,f\}$. ونرمز لاحتمال النجاح بالرمز $p=P(s)$ ولاحتمال الفشل بالرمز $q=P(f)$ وينبغي ملاحظة أن: $q=1-p$. ومن أمثلة محاولات بيرونللي نذكر ما يلي:

١. تجربة قذف قطعة نقود (صورة أو كتابة)
٢. تجربة تسجيل جنس المولود (ذكر أو أنثى)
٣. تجربة رصد نتيجة طالب في الاختبار (ناجح أو راسب)

٤. تجربة رصد نتيجة تحليل إصابة بمرض معين (مصاب أو غير مصاب)

٥. تجربة فحص قطعة من إنتاج أحد المصانع (سليمة أو تالفة)

(٧-٤-٢) توزيع بيرنوللي Bernoulli's Distribution

لنفرض أن لدينا محاولة بيرنوللي ولنعرف المتغير العشوائي X على أنه عدد مرات النجاح عند إجراء محاولة بيرنوللي، أي أن:

$$X(s) = 1, \quad X(f) = 0$$

إن مجموعة القيم الممكنة لهذا المتغير العشوائي هي $X(S)=\{0,1\}$ واحتمالاته هي:

$P(X=1) = P(s) = p$

$P(X=0) = P(f) = 1- p$

أي أن دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي:

$$\boxed{f_X(x) = P(X=x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x}; & x = 0, 1 \\ 0; & x \neq 0, 1 \end{cases}}$$

إن توزيع المتغير العشوائي X يسمى بتوزيع بيرنوللي بالمعلمة p. ويسمى المتغير العشوائي X بمتغير بيرنوللي. ومعلمة هذا التوزيع هي احتمال النجاح p.

(٧-٤-٣) التوزيع ذي الحدين Binomial Distribution

إن توزيع ذات الحدين أو التوزيع ذا الحدين من التوزيعات الاحتمالية المتقطعة المهمة شائعة الاستخدام في كثير من التطبيقات. لنفرض أن التجربة العشوائية تتكون من تكرار محاولة بيرنوللي عدد من المرات تحت الشروط التالية:

١. عدد المحاولات = n

٢. المحاولات مستقلة (نتيجة أي محاولة لا يؤثر ولا يتأثر بنتائج المحاولات الأخرى)

٣. احتمال النجاح $p=P(s)$ ثابت لجميع المحاولات

ولنعرف المتغير العشوائي X على أنه عدد مرات النجاح عند تكرار إجراء محاولة بيرنوللي وفق الشروط أعلاه. إن مجموعة القيم الممكنة لهذا المتغير العشوائي هي $X(S)=\{0,1,\ldots,n\}$.

ودالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي:

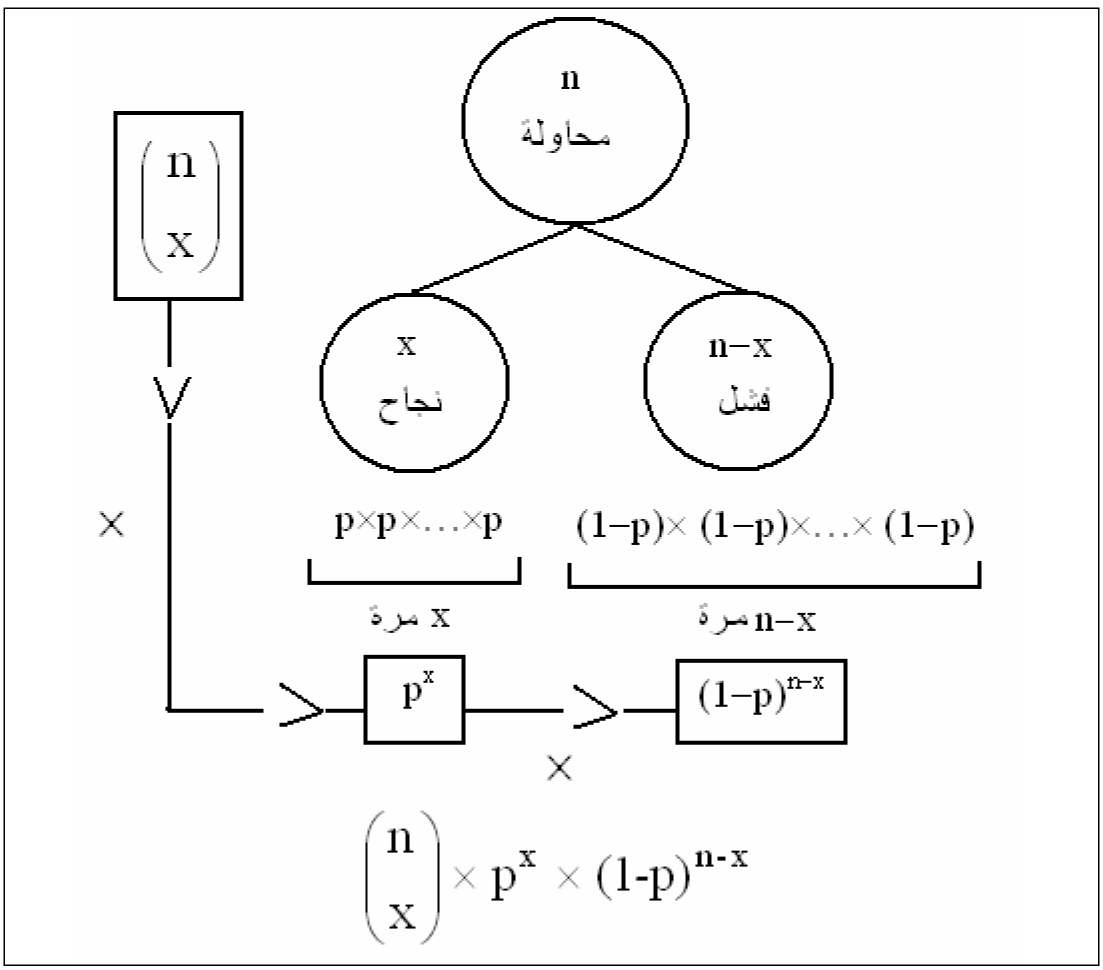
$$\boxed{f_X(x) = P(X=x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}; & x = 0,1,\cdots,n \\ 0; & x \neq 0,1,\cdots,n \end{cases}}$$

إن توزيع المتغير العشوائي X أعلاه يسمى بالتوزيع ذي الحدين بالمعالم n و p ونكتب:

$$X \sim \text{Binomial}(n, p)$$

ويسمى المتغير العشوائي X بمتغير ذي الحدين. معلمتا هذا التوزيع هما عدد المحاولات n واحتمال النجاح p. ويمكن تمثيل دالة الكتلة الاحتمالية لتوزيع ذات الحدين في الجدول التالي:

x	$f_X(x) = P(X = x)$
0	$\binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} \quad = (1-p)^n$
1	$\binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} \quad = n\,p\,(1-p)^{n-1}$
2	$\binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$
⋮	⋮
n	$\binom{n}{n} p^n (1-p)^{n-n} \quad = p^n$



ملاحظات:

١. إن توزيع بيرنوللي هو حالة خاصة لتوزيع ذي الحدين عندما $n=1$.

٢. ليكن المتغير العشوائي X هو عدد مرات النجاح وليكن المتغير العشوائي Y هو عدد مرات الفشل، أي أن $Y=n-X$. إذا كان X يتوزع وفق توزيع $Binomial(n,p)$، فإن Y يتوزع وفق توزيع $Binomial(n,1-p)$.

التوقع والتباين للتوزيع ذي الحدين:

نتيجة:

إذا كان X متغيرا عشوائيا يتوزع وفق التوزيع ذي الحدين بالمعلمتين n و p، فإن المتوسط والتباين للمتغير العشوائي X هما على التوالي كما يلي:

$$\boxed{\begin{aligned} \mu_X &= E(X) = np \\ \sigma_X^2 &= Var(X) = np(1-p) \end{aligned}}$$

مثال (٧-٩):

لنفرض أن لدينا عملة غير متزنة بحيث أن $P(H)=0.4$ و $P(T)=0.6$. رميت هذه العملة ثلاث مرات بشكل مستقل. ليكن المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات ظهور الصورة في الرميات الثلاث.

أ- أوجد دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X.

ب- أوجد التوقع (المتوسط) والتباين للمتغير العشوائي X.

ج- أوجد الاحتمالات التالية:

١. الحصول على صورتين

٢. الحصول على صورتين على الأقل

٣. الحصول على صورة واحدة على الأكثر

٤. الحصول على ثلاث كتابات

الحل:

محاولة بيرنوللي هي رمي العملة:

- نتيجة النجاح = ظهور الصورة (H) $\Leftarrow$ احتمال النجاح = $P(H) = p = 0.4$
- نتيجة الفشل = ظهور الكتابة (T) $\Leftarrow$ احتمال الفشل = $P(T) = 1-p = 0.6$

التجربة هي رمي العملة ثلاث مرات بشكل مستقل:

- عدد المحاولات $n=3$ (عدد الرميات)
- المحاولات مستقلة (لأن الرميات مستقلة)
- احتمال النجاح $p=0.4$ ثابت (لأننا نستخدم نفس العملة)

لنعرف المتغير العشوائي:

X = عدد مرات النجاح في المحاولات الثلاث

= عدد مرات ظهور الصورة في الرميات الثلاث

إن المتغير العشوائي X يتوزع وفق توزيع ذات الحدين بالمعلمتين $n=3$ و $p=0.4$، أي أن:

$$X \sim \text{Binomial}(3, 0.4)$$

أ- دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي:

$$f_X(x) = P(X=x) = \begin{cases} \binom{3}{x}(0.4)^x(0.6)^{3-x}; & x = 0,1,2,3 \\ 0; & x \neq 0,1,2,3 \end{cases}$$

ويمكن تمثيل دالة الكتلة الاحتمالية بالجدول التالي:

x	$f_X(x) = P(X=x)$
0	$\binom{3}{0}(0.4)^0(0.6)^{3-0} = (1)(0.4)^0(0.6)^3 = 0.216$
1	$\binom{3}{1}(0.4)^1(0.6)^{3-1} = (3)(0.4)(0.6)^2 = 0.432$
2	$\binom{3}{2}(0.4)^2(0.6)^{3-2} = (3)(0.4)^2(0.6)^1 = 0.288$
3	$\binom{3}{3}(0.4)^3(0.6)^{3-3} = (1)(0.4)^3(0.6)^0 = 0.064$

ب- التوقع (المتوسط) والتباين للمتغير العشوائي X هما على التوالي:

$$\mu_X = E(X) = np = 3 \times 0.4 = 1.2$$
$$\sigma_X^2 = Var(X) = np(1-p) = 3 \times 0.4 \times 0.6 = 0.72$$

ج- إيجاد الاحتمالات:

$P(\{\text{الحصول على صورتين}\}) = P(X=2) = f_X(2) = 0.288$

$$\begin{aligned} P(\{\text{الحصول على صورتين على الأقل}\}) = P(X\geq 2) &= P(X=2) + P(X=3) \\ &= f_X(2) + f_X(3) \\ &= 0.288 + 0.064 \\ &= 0.352 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\{\text{الحصول على صورة واحدة على الأكثر}\}) = P(X\leq 1) &= P(X=0) + P(X=1) \\ &= f_X(0) + f_X(1) \\ &= 0.216 + 0.432 \\ &= 0.648 \end{aligned}$$

$P(\{\text{الحصول على ثلاث كتابات}\}) = P(X=0) = f_X(0) = 0.216$

<u>مثال (٧-١٠):</u>

إن نسبة الإنتاج التالف لأحد مصانع المصابيح هي 10%. إذا أخذت عينة مكونة من 5 مصابيح بشكل عشوائي من إنتاج هذا المصنع، فأوجد ما يلي:

أ. أوجد الاحتمالات التالية:

١. الحصول على مصباح واحد تالف
٢. الحصول على جميع المصابيح تالفة
٣. الحصول على مصباح واحد تالف على الأكثر
٤. الحصول على مصباح واحد تالف على الأقل

ب. أوجد العدد المتوقع للمصابيح التالفة في العينة.

<u>الحل:</u>

محاولة بيرنوللي هي فحص المصباح:

- نتيجة النجاح = الحصول على مصباح تالف ⇐ احتمال النجاح = p = 0.1
- نتيجة الفشل = الحصول على مصباح سليم ⇐ احتمال الفشل = $1-p$ = 0.9

التجربة هي فحص 5 مصابيح بشكل مستقل:

- عدد المحاولات $n=5$ (عدد المصابيح)
- المحاولات مستقلة (لأن العينة أخذت بشكل عشوائي)

- احتمال النجاح $p=0.1$ ثابت (لأن المصابيح أخذت من نفس المصنع)

لنعرف المتغير العشوائي:

X = عدد مرات النجاح في المحاولات الخمس

= عدد المصابيح التالفة عند فحص 5 مصابيح

إن المتغير العشوائي X يتوزع وفق توزيع ذات الحدين بالمعلمتين $n=5$ و $p=0.1$، أي أن:

$$X \sim \text{Binomial}(5, 0.1)$$

إن دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي:

$$f_X(x) = P(X=x) = \begin{cases} \binom{5}{x}(0.1)^x (0.9)^{5-x}; & x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0; & x \neq 0,1,2,3,4,5 \end{cases}$$

ويمكن تمثيل دالة الكتلة الاحتمالية بالجدول التالي:

x	$f_X(x) = P(X = x)$
0	$\binom{5}{0}(0.1)^0 (0.9)^{5-0} = 0.59049$
1	$\binom{5}{1}(0.1)^1 (0.9)^{5-1} = 0.32805$
2	$\binom{5}{2}(0.1)^2 (0.9)^{5-2} = 0.07290$
3	$\binom{5}{3}(0.1)^3 (0.9)^{5-3} = 0.00810$
4	$\binom{5}{4}(0.1)^4 (0.9)^{5-4} = 0.00045$
5	$\binom{5}{5}(0.1)^5 (0.9)^{5-5} = 0.00001$

أ. إيجاد الاحتمالات:

P({الحصول على مصباح واحد تالف}) = $P(X=1) = f_X(1) = 0.32805$

P({الحصول على جميع المصابيح تالفة}) = $P(X=5) = f_X(5) = 0.00001$

P({الحصول على مصباح واحد تالف على الأكثر}) = $P(X\leq 1)$

$= P(X=0) + P(X=1)$
$= f_X(0) + f_X(1)$
$= 0.59049 + 0.32805$
$= 0.91854$

P({الحصول على مصباح واحد تالف على الأقل}) $= P(X \geq 1)$
$= 1 - P(X = 0)$
$= 1 - f_X(0)$
$= 1 - 0.59049$
$= 0.409510$

ب. العدد المتوقع للمصابيح التالفة في العينة هو:

$\mu_X = E(X) = np = 5 \times 0.1 = 0.5$

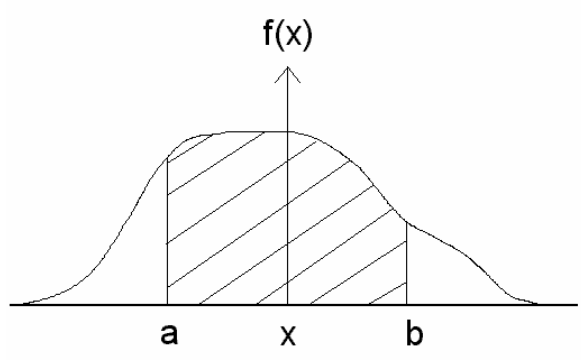
(٧-٥) المتغير العشوائي المستمر (المتصل) Continuous Random Variable:

لقد ذكرنا سابقًا أن المتغير العشوائي المتقطع X هو متغير عشوائي تكون مجموعة القيم الممكنة لـــه مجموعـــة متقطعـــة (أو قابلـــة للعـــد) أي علـــى الـــشكل $X(S)=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ أو $X(S)=\{x_1,x_2,x_3,\ldots\}$. أما المتغير العشوائي المستمر (المتصل) فيمكن أن يعرف بشكل مبسط على أنه متغير عشوائي مجموعة القيم الممكنة له عبارة عن فترة أو إتحاد عدد من الفترات. ومن أمثلة الكميات التي يمكن تمثيلها بواسطة متغيرات عشوائية متصلة:

- درجة حرارة تفاعل كيميائي معين
- نسبة تركيز مركب ما في محلول كيميائي
- الفترة الزمنية بين الإصابة بمرض الإيدز والوفاة
- طول الشخص
- المسافة المقطوعة لجسم معين خلال وحدة الزمن

(٧-٥-١) دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر Probability Density Function:

لأي متغير عشوائي مستمر (متصل) X يوجد دالة حقيقية غير سالبة يرمز لهـــا بـــالرمز $f_X(x)$ وتسمى دالة الكثافة الاحتمالية ومن خلالها نستطيع إيجاد احتمالات الحوادث المعبر عنها بواسطة المتغير العشوائي X. فالمساحة تحت منحنى هذه الدالة تعطي احتمال وقوع المتغير العشوائي X في الفترات المناظرة على المحور الأفقي.



المساحة تحت منحنى الدالة وفوق الفترة (a,b) $= P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

تعريف:

أي دالة حقيقية غير سالبة $f_X(x)$ والمعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbf{R}$ تسمى دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي المستمر X إذا وإذا فقط كان:

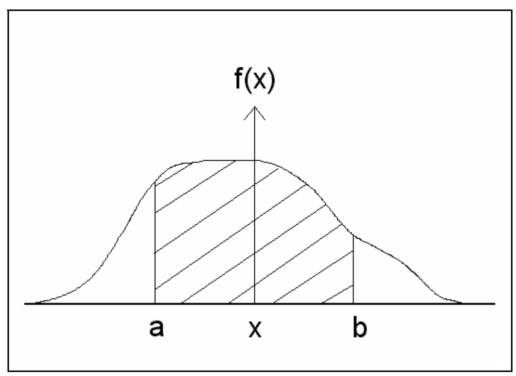
$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x)\,dx \quad \forall\ a, b \in \mathbf{R};\ a \le b$$

أي أن: احتمال وقوع المتغير العشوائي X في أي فترة يساوي المساحة فوق تلك الفترة وتحت منحنى الدالة $f_X(x)$.

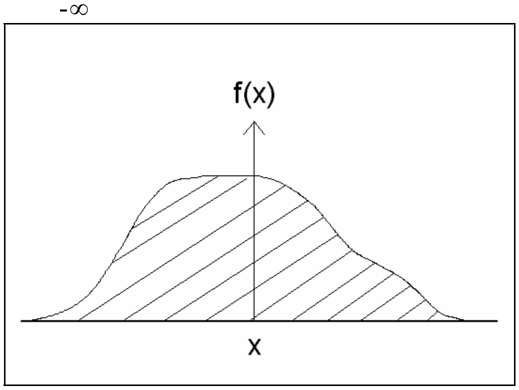
ملاحظات:

إذا كان X متغيرا عشوائيا مستمرا دالة كثافته الاحتمالية هي $f_X(x)$، فإن:

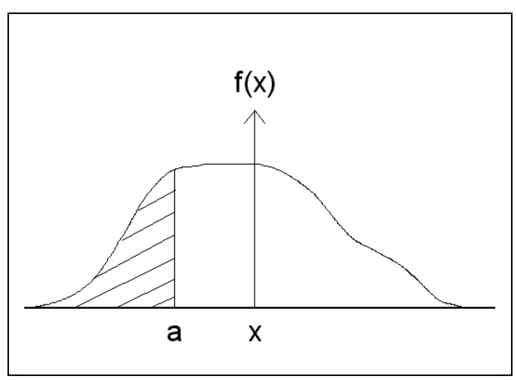
- $f_X(x) \ne P(X=x)$ (بشكل عام)
- $P(X=x) = 0\ ,\ \forall\ x \in \mathbf{R}$
- $P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b)$
- $f_X(x) \ge 0\ ,\ \forall\ x \in \mathbf{R}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$ (أي أن المساحة الكلية تحت منحنى الدالة يساوي الواحد)



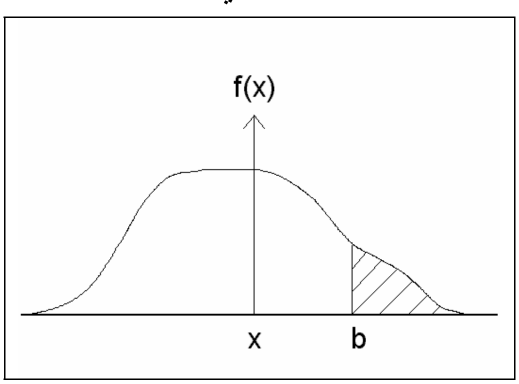
$P(a < X < b)$



المساحة الكلية = 1



$P(X < a)$



$P(X > b)$

(٧-٥-٢) التوزيع الطبيعي: Normal Distribution

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات المستمرة وذلك لأن كثير من الظواهر الطبيعية تخضع لهذا التوزيع. كما أن كثير من الظواهر الطبيعية التي لا تخضع لهذا التوزيع يمكن أن يقرب توزيعها بالتوزيع الطبيعي.

تعريف:

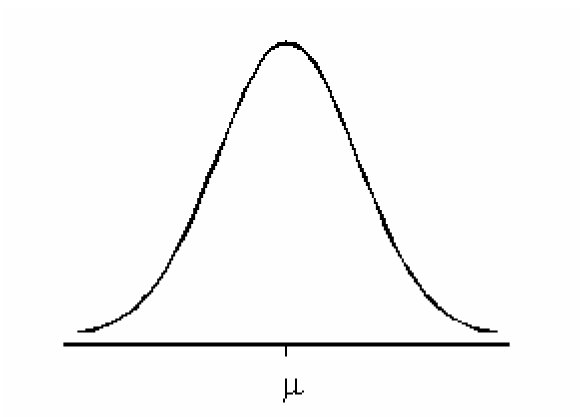
يقال أن المتغير العشوائي المستمر X يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية $f_X(x)$ تأخذ الصيغة التالية:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}; \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ -\infty < \mu < \infty \\ \sigma > 0 \end{cases}$$

وفي هذه الحالة نكتب:

$$X \sim N(\mu,\sigma^2)$$

إن دالة الكثافة الاحتمالية $f_X(x)$ للمتغير العشوائي الذي يتوزع وفق التوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ لها شكل الجرس ومتماثلة حول المتوسط.



ملاحظات:

- منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ متماثل حول المتوسط μ.
- للتوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ فإن: المتوسط = الوسيط = المنوال = μ.
- تعتمد دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ على معلمتي التوزيع وهما المتوسط μ والتباين σ^2 لذلك نكتب: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. وهاتان المعلمتان تحددان

μ تحدد موضع التوزيـــع والمعلمـــة σ^2

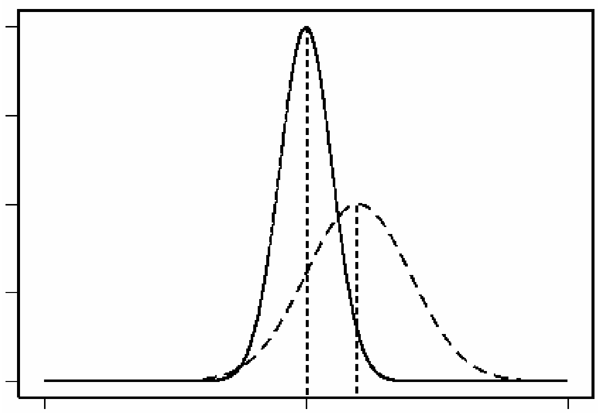
تحدد شكل وتشتت التوزيع.

- المساحة الكلية تحت منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ تـــساوي الواحد.

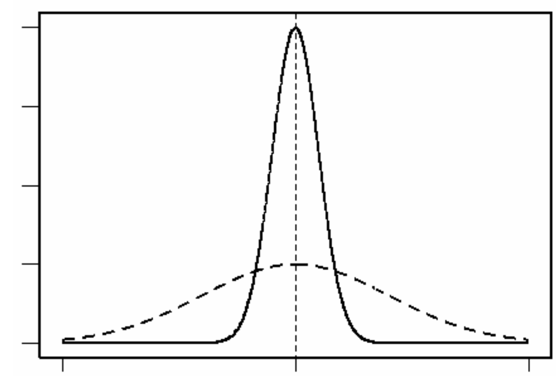
الأشكال التالية تبين تأثير المعالم علـــى شـــكل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي بفرض أن لدينا تـــوزيعين طبيعيـــين $N(\mu_1,\sigma^2_1)$ و $N(\mu_2,\sigma^2_2)$:

_______ $N(\mu_1, \sigma^2_1)$

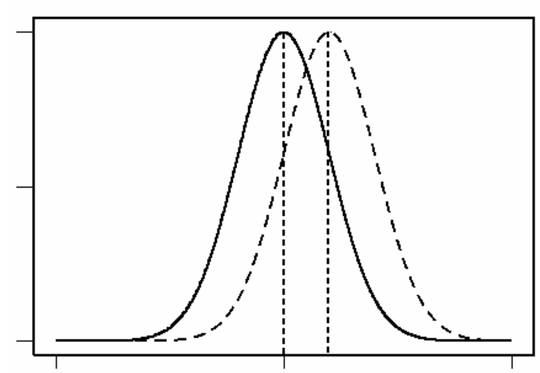
----------- $N(\mu_2, \sigma^2_2)$



$\mu_1 < \mu_2,\ \sigma^2_1<\sigma^2_2$



$\mu_1 = \mu_2,\ \sigma^2_1<\sigma^2_2$



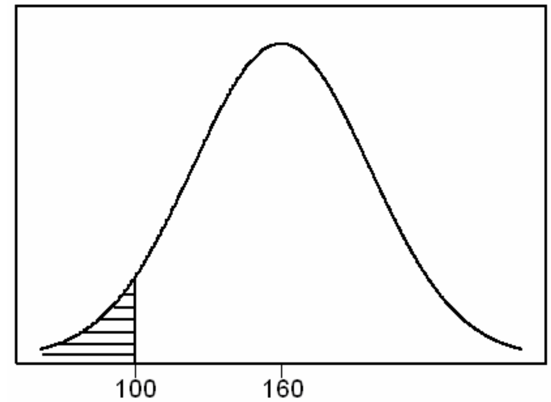
$\mu_1 < \mu_2,\ \sigma^2_1=\sigma^2_2$

<u>مثال:</u>

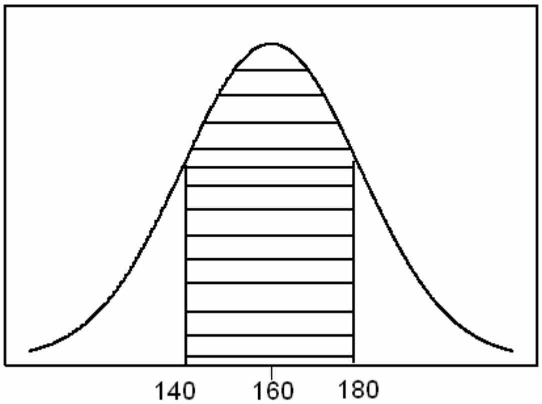
إذا كان طول الشخص في مجتمع ما X يتوزع تقريبًا وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 160 ســم وانحراف معياري 5 سم. مثل الاحتمالات التالية بمساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي:

$$P(X<100),\ \ P(140<X<180),\ \ P(X>180),\ \ P(X>140)$$

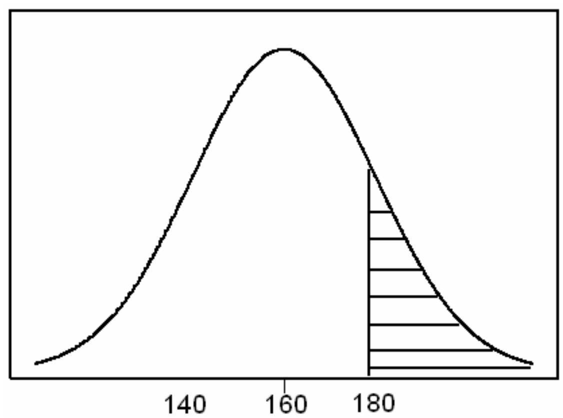
الحل:



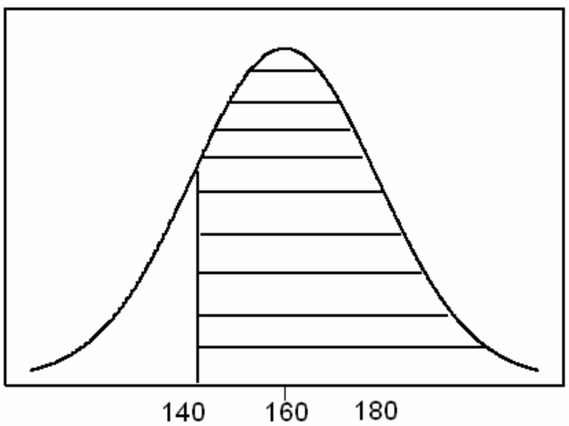
$$P(X<100)= \int_{-\infty}^{100} f_X(x)\,dx$$



$$P(140<X<180)= \int_{140}^{180} f_X(x)\,dx$$



$$P(X>180)= \int_{180}^{\infty} f_X(x)\,dx$$



$$P(X>140)= \int_{140}^{\infty} f_X(x)\,dx$$

(٧-٥-٣) التوزيع الطبيعي المعياري (القياسي): Standard Normal Distribution

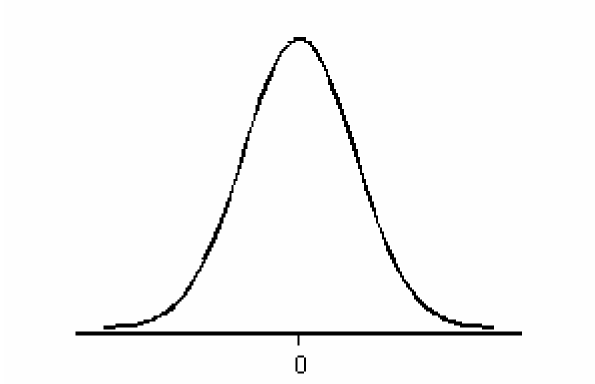
يقال بأن المتغير العشوائي Z يتوزع وفق التوزيع الطبيعي المعياري إذا كان يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر $(\mu=0)$ وتباين يساوي الواحد $(\sigma^2=1)$. ودالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي Z تأخذ الصيغة التالية:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2}z^2\};\ \ -\infty < z < \infty$$

وفي هذه الحالة نكتب:

$$Z \sim N(0,1)$$

والشكل التالي يصف دالة الكثافة الاحتمالية $f_Z(z)$ للتوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$.



إيجاد الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري $Z\sim N(0,1)$:

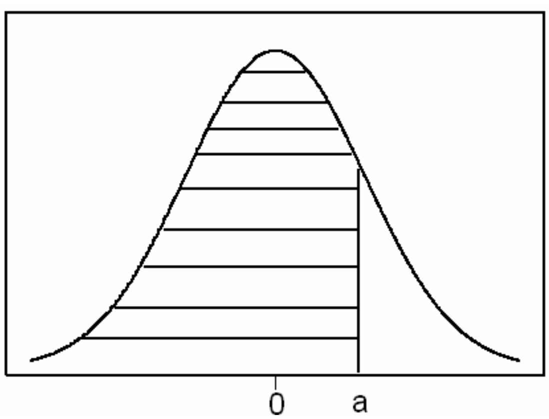
Calculating Probabilities for Standard Normal Distribution

مر معنا سابقاً أن المساحة المحصورة تحت منحنى دالة الكثافة الاحتمالية والواقعة فوق فترة معينة يمثل احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي المستمر قيمة في تلك الفترة. فإذا كان $Z\sim N(0,1)$ فإن:

$$P(Z\leq a) = \int_{-\infty}^{a} f_Z(z)\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2}z^2\}\,dz$$

وهذا التكامل يساوي المساحة المحصورة تحت منحنى الدالة $f_Z(z)$ وعن يسار النقطة a



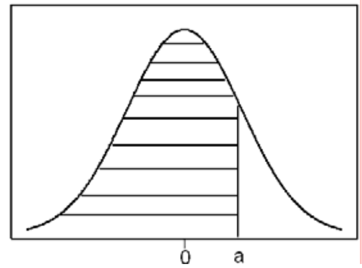
يرمز للاحتمال $P(Z<a)$ بالرمز $\Phi(a)$ أي أن:

$$P(Z\leq a) = \Phi(a)$$

هناك جدول خاص يسمى "جدول التوزيع الطبيعي المعياري" لإيجاد احتمالات المتغير العشوائي الطبيعي المعياري $Z\sim N(0,1)$ من النوع $P(Z\leq a) = \Phi(a)$. أي أن هذا الجدول يستخدم لإيجاد الاحتمالات من النوع $P(Z \leq z)$ لكل $z\in \mathbf{R}$. ولذلك فإننا في غنى عن إيجاد قيم التكامل السابق.

ولإيجاد الاحتمالات المتعلقة بالمتغير العشوائي الطبيعي المعياري $Z\sim N(0,1)$ فإننا نستعين بهذا الجدول مع مراعاة الملاحظات التالية:

1. $P(Z < z) = \Phi(z) =$ من الجدول مباشرة
2. $P(Z > z) = 1 - P(Z < z) = 1 - \Phi(z)$
3. $P(z_1 < Z < z_2) = P(Z < z_2) - P(Z < z_1)$
   $= \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$
4. $P(Z < 0) = P(Z > 0) = \Phi(0) = 0.5$
5. $P(Z = z) = 0$



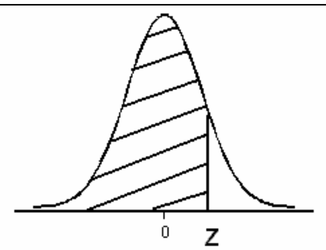
$P(Z < z) = \Phi(z) =$ المساحة المظللة

طريقة إيجاد $P(Z < z) = \Phi(z)$ من الجدول:

لتكن القيمة z مقربة إلى خانتين عشريتين أي على الصورة $z = a.bc$.

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

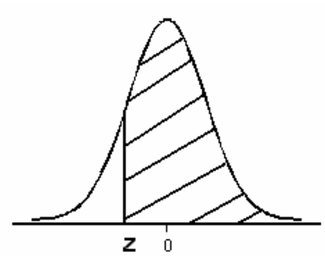
$P(Z < z) = \Phi(z) =$ المساحة المظللة



z	0.00	0.01	…	0.0c	…	0.09
−3.4				↓		
:				↓		
a.b	→ →	→ →	→	$\boxed{P(Z<z)=\Phi(z)}$		
:						
3.4						

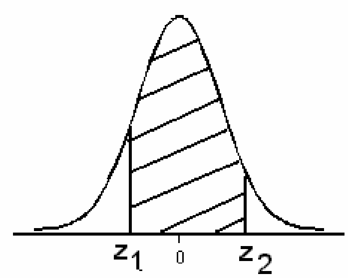
طريقة إيجاد $P(Z > z)$:

$P(Z > z) = 1 - P(Z < z) = 1 - \Phi(z)$



طريقة إيجاد $P(z_1 < Z < z_2)$:

$$P(z_1 < Z < z_2) = P(Z < z_2) - P(Z < z_1) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$



مثال:

إذا كان $Z \sim N(0, 1)$ فأوجد:

١. احتمال أن يأخذ Z قيمة أقل من 1.50.

٢. $P(Z < 0.98)$.

٣. $P(Z > 0.98)$

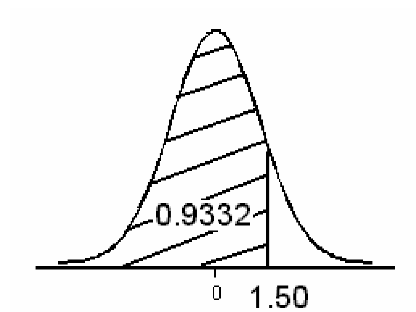
٤. $P(-1.33 < Z < 2.42)$

٥. أوجد قيمة Z التي يسبقها مساحة مقدارها 0.9505.

الحل:

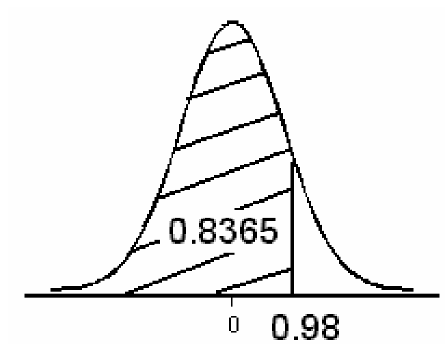
١. $P(Z < 1.50) = \Phi(1.50) = 0.9332$

z	0.00	…
⋮	↓	
⋮	↓	
1.5	→ → 0.9332	
⋮		
⋮		



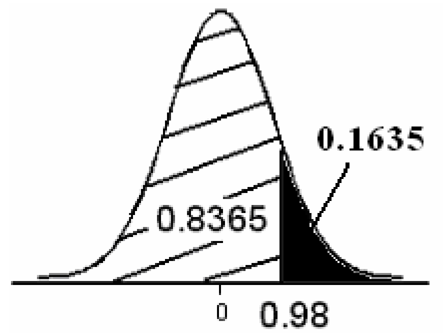
٢. $P(Z < 0.98) = \Phi(0.98) = 0.8365$

z	…	0.08	…
⋮		↓	
⋮		↓	
0.9	→ →	0.8365	
⋮			
⋮			



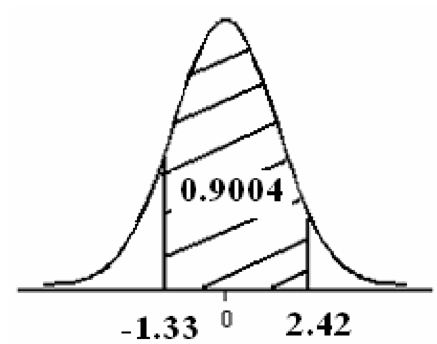
.٣

$$P(Z > 0.98) = 1 - P(Z < 0.98)$$
$$= 1 - \Phi(0.98)$$
$$= 1 - 0.8365$$
$$= 0.1635$$



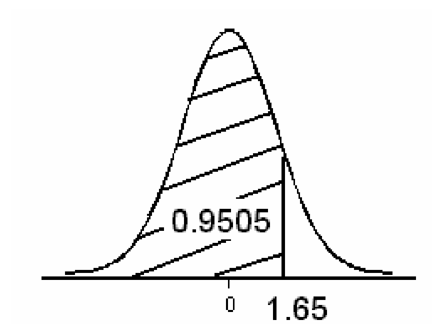
.٤

$$P(-1.33 < Z < 2.42)$$
$$= P(Z < 2.42) - P(Z < -1.33)$$
$$= \Phi(2.42) - \Phi(-1.33)$$
$$= 0.9922 - 0.0918$$
$$= 0.9004$$



.٥ $P(Z < z) = \Phi(z) = 0.9505 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1.65$

z	…	0.05	…
:		↑	
:		↑	
1.6	← ←	0.9505	
:			
:			



تحويل التوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ إلى توزيع طبيعي معياري N(0,1)

وإيجاد الاحتمـــالات للتوزيـــع الطبيعـــي $X\sim N(\mu,\sigma^2)$: Calculating Probabilities for Normal Distribution

لإيجاد احتمالات المتغير العشوائي الطبيعي $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ فإننا نحوله أولاً إلى متغير عـــشوائي طبيعي معياري $Z\sim N(0,1)$ ومن ثم نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد الاحتمالات من النوع $P(Z < z)= \Phi(z)$ وذلك باستخدام النتيجة التالية:

نتيجة:

$$X \sim N(\mu , \sigma^2) \Leftrightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

فمثلاً إذا كان $X\sim N(10,16)$ فإن $Z=\frac{X-10}{4}\sim N(0,1)$.

وباستخدام النتيجة السابقة فإن:

$$X < x \Leftrightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow Z < \frac{x-\mu}{\sigma}$$

وبالتالي فإن:

- $P(X < x) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}) = P(Z < \frac{x-\mu}{\sigma}) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
- $P(X > x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(Z < \frac{x-\mu}{\sigma}) = 1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
- $P(x_1 < X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1)$
  $= P(Z < \frac{x_2-\mu}{\sigma}) - P(Z < \frac{x_1-\mu}{\sigma})$
  $= \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$

ملاحظة:

إذا كان $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ وكانت x هي قيمة المتغير العشوائي X فإن القيمة $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ تسمى القيمة المعيارية (أو القياسية) للقيمة x.

مثال:

إذا كان المتغير العشوائي X الذي يمثل الطول في أحد المجتمعات البشرية يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 165 سم وانحراف معياري 5 سم. فأوجد ما يلي:

١. القيمة المعيارية للقيمة $x=172$.

٢. القيمة x إذا كانت القيمة المعيارية هي $z = -0.52$.

الحل:

$$\mu = 165$$
$$\sigma = 5 \;\Leftrightarrow\; \sigma^2 = 25$$
$$X \sim N(165\,,\,25)$$
$$1.\; z=\frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{172-165}{5}=1.4$$
$$2.\; z=\frac{x-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow x=\mu+\sigma z$$
$$\begin{aligned} x &= \mu+\sigma z \\ &= 165+5\times(-0.52) \\ &= 162.5 \end{aligned}$$

مثال:

لنفرض أن مستوى هيموجلوبين الدم في أحد المجتمعات البشرية يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 16 وانحراف معياري 0.9.

١. إذا اخترنا أحد الأشخاص بشكل عشوائي فما هو احتمال أن يكون مستوى هيموجلوبين الدم لديه أكبر من 14.
٢. ما هي نسبة الأشخاص الذين مستوى هيموجلوبين الدم لديهم أكبر من 14.
٣. ما هي نسبة الأشخاص الذين يتراوح مستوى هيموجلوبين الدم لديهم من 14 إلى 18.

الحل:

ليكن X = مستوى هيموجلوبين الدم

المعطيات:

$$\mu = 16$$
$$\sigma = 0.9 \;\Leftrightarrow\; \sigma^2 = 0.81$$
$$X \sim N(16\,,\,0.81)$$

١.

$$\begin{aligned} P(X>14) &= 1-P(X<14) \\ &= 1-P(Z<\frac{14-16}{0.9}) \\ &= 1-P(Z<-2.22) \\ &= 1-\Phi(-2.22) \end{aligned}$$

$$= 1 - 0.0132$$
$$= 0.9868$$

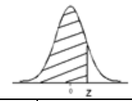
٢. نسبة الأشخاص الذين مستوى هيموجلوبين الدم لديهم أكبر من 14 هي:

$$P(X > 14) \times 100\% = 0.9868 \times 100\% = 98.68\%$$

٣.

$$\begin{aligned} P(14 < X < 18) &= P(X < 18) - P(X < 14) \\ &= P(Z < \frac{18-16}{0.9}) - P(Z < \frac{14-16}{0.9}) \\ &= P(Z < 2.22) - P(Z < -2.22) \\ &= \Phi(2.22) - \Phi(-2.22) \\ &= 0.9868 - 0.0132 \\ &= 0.9736 \end{aligned}$$

وعليه فإن نسبة الأشخاص الذين يتراوح مستوى هيموجلوبين الدم لديهم من 14 إلى 18 هي 97.36%.



جدول التوزيع الطبيعي المعياري

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993

3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998