محاضرات في

نظرية المجالات الكهرومغناطيسية والنظرية النسبية الخاصة

إعداد

الدكتور / نصر الدين فريد الأنصارى

كلية العلوم بقنا

قسم الرياضيات

العام الجامعي

2023/2022

بيانات الكتاب

الكلية: العلوم

الفرقة: الرابعة

التخصص: شعبة الرياضيات

تاريخ النشر:

عدد الصفحات: 230

المؤلف: الدكتور/ نصر الدين فريد الأنصارى

الرموز المستخدمة

نص للقراءة والدراسة

أنشطة ومهام

أسئلة للتفكير والتقييم الذاتى

فيديو للمشاهدة

رابط خارجى

تواصل عبر مؤتمر الفيديو

بسم الله الرحمن الرحيم

قالوا سبحانك لا علم لنا إلا ما
علمتنا
إنك أنت العليم الحكيم

" صدق الله العظيم "

رؤية الكلية

التميز في تعليم العلوم الأساسية والبحث العلمى للمساهمة في التنمية المستدامة.

رسالة الكلية

تقديم تعليم مميز في مجالات العلوم الأساسية وإنتاج بحوث علمية تطبيقية للمساهمة في التنمية المستدامة من خلال اعداد خريجين متميزين طبقا للمعايير الأكاديمية القومية, وتطوير مهارات وقدرات الموارد البشرية وتوفير خدمات مجتمعية وبيئية تلبى طموحات مجتمع جنوب الوادى، وبناء الشراكات المجتمعية الفاعلة.

المحتوى

الجزء الأول (نظرية المجالات الكهرومغناطيسية)

الجزء الثانى (النظرية النسبية الخاصة)

الصور والأشكال
الجزء الأول (نظرية المجالات الكهرومغناطيسية)

الجزء الثانى (النظرية النسبية الخاصة)

الجزء الأول

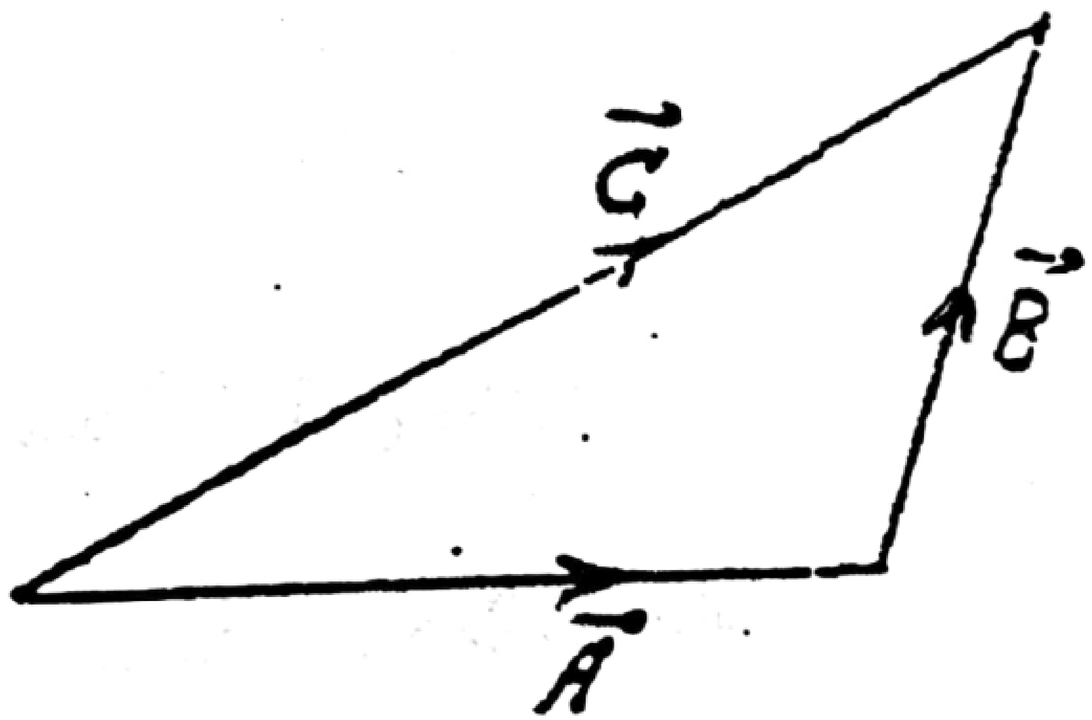
نظرية المجالات الكهرومغناطيسية

الباب الأول

مقدمة رياضية

المتجهات

المتجه هو كمية تتحدد بالمقدار والاتجاه مثل الازاحة والسرعة والقوة . أما الكمية القياسية فانها تتحدد بالمقدار فقط مثل الطول والزمن ودرجة الحرارة . المتجهان $\vec{B},\vec{A}$ يتساويان اذا كان لهما نفس المقدار والاتجاه بغض النظر عن نقطة البداية , وبذلك يكون $\vec{A}=\vec{B}$. مجموع أو محصلة متجهين $\vec{B},\vec{A}$ هو المتجه $\vec{C}$ أي أن $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$, والفرق بين المتجهين



شكل 1-1

$\vec{B},\vec{A}$ هو عبارة عن المتجه $\vec{A}+\left(-\vec{B}\right)$. اذا كان $\vec{A}=\vec{B}$ فان $\vec{A}-\vec{B}=\vec{0}$, ويعرف $\vec{0}$ بالمتجه الصفرى أي متجه مقداره يساوى صفر وليس له اتجاه محدد .

ضرب المتجه $\vec{A}$ بكمية قياسية m هو المتجه $m\vec{A}$ قيمته m مضروبة في مقدار المتجه $\vec{A}$ وله نفس اتجاه المتجه $\vec{A}$ أو عكس اتجاه المتجه تبعا لقيمة الكمية m موجبة أو سالبة على الترتيب .

اذا كان $\vec{C},\vec{B},\vec{A}$ ثلاثة متجهات , n,m كميات قياسية فان:

قانون التبديل للجمع : $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

قانون التنسيق للجمع : $\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}$

قانون التوزيع : $(m+n)\vec{A}=m\vec{A}+n\vec{A}$

قانون التوزيع : $m\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=m\vec{A}+m\vec{B}$

متجه الوحدة

هو متجه مقداره الوحدة , فاذا كان $\vec{A}$ متجه غير صفرى فان $\vec{A}/A$ هو متجه وحدة في اتجاه المتجه $\vec{A}$. ومثال على ذلك متجهات الوحدة $\vec{k},\vec{j},\vec{i}$ في اتجاه المحاور الكارتيزية المتعامدة z,y,x .

مركبات المتجه

في الفضاء الثلاثى بمكن التعبير عن أي متجه $\vec{A}$ بنقطة بداية عند نقطة الأصل o للاحداثيات المتعامدة وليكن $\left(A_1,A_2,A_3\right)$ الاحداثيات المتعامدة لنقطة النهاية للمتجه $\vec{A}$. المتجهات $A_3\vec{k},A_2\vec{j},\vec{A}\vec{i}$ تسمى المركبات الاتجاهية للمتجه $\vec{A}$ في الاتجاهات z,y,x على الترتيب . الكميات A_3,A_3,A_1 تسمى المركبات القياسية أو مركبات المتجه $\vec{A}$ في اتجاه المحاور z,y,x على الترتيب , وفى هذه الحالة فان المتجه $\vec{A}$ يكتب في الصورة الرياضية :

$$\vec{A}=A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k}$$

ومقدار هذا المتجه هو :

$$|\vec{A}|=A=\sqrt{A_1^{\,2}+A_2^{\,2}+A_3^{\,2}}$$

وجيوب تمام اتجاه هذا المتجه مع المحاور المتعامدة z,y,x هي :

$$\cos\theta_1=\frac{A_1}{A}\ \ ,\ \ \cos\theta_2=\frac{A_2}{A}\ \ ,\ \ \cos\theta_3=\frac{A_3}{A}$$

على الترتيب . واضح أن :

$$\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3=1$$

الضرب القياسى لمتجهين

ويعرف بالصورة :

$$\vec{A}\bullet\vec{B}=AB\cos\theta$$

حيث θ هي الزاوية بين المتجهين $\vec{B},\vec{A}$. لأى ثلاث متجهات $\vec{C},\vec{B},\vec{A}$ تتحقق العلاقات الآتية :

$$\vec{A}\bullet\vec{B}=\vec{B}\bullet\vec{A}$$

$$\vec{A}\bullet\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\bullet\vec{B}+\vec{A}\bullet\vec{C}$$

$$\vec{A}\bullet\vec{B}=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3$$

الضرب الاتجاهى لمتجهين

ويعرف بالصورة الرياضية :

$$\vec{C}=\vec{A}\wedge\vec{B}=AB\sin\theta\cdot\vec{e}$$

حيث θ هي الزاوية بين المتجهين $\vec{B},\vec{A}$ و $\vec{e}$ متجه وحدة في الاتجاه العمودى على المستوى الذى يجمع المتجهين $\vec{B},\vec{A}$, ولأى ثلاث متجهات $\vec{C},\vec{B},\vec{A}$ تتحقق العلاقات التالية :

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=-\vec{B}\wedge\vec{A}$$

$$\vec{A}\wedge\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\wedge\vec{B}+\vec{A}\wedge\vec{C}$$

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}$$

الضرب الثلاثى للمتجهات

يسمى حاصل الضرب : $\vec{A}\bullet\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$ بالضرب الثلاثى القياسى والذى يمكن وضعه بالصورة :

$$\vec{A}\bullet\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$$

أما حاصل الضرب الثلاثى $\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$ فيسمى بحاصل الضرب الثلاثى الاتجاهى والذى يمكن كتابته بالصورة :

$$\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\bullet\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\bullet\vec{B}\right)\vec{C}$$

وهو متجه يقع في المستوى الذى يقع فيه المتجهان $\vec{C},\vec{B}$.

تفاضل المتجهات

نفرض أن $\vec{A}=\vec{A}\left(u\right)$ متجه يتوقف على المتغير العددى u فيكون :

$$\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta u}=\frac{\vec{A}\left(u+\Delta u\right)-\vec{A}\left(u\right)}{\Delta u}$$

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta u}=\frac{d\vec{A}}{du}$$

ويسمى هذا المتجه مشتقة المتجه $\vec{A}$ بالنسبة للمتغير u . وهو متجه يتوقف على u .

اذا كانت المتجهات $\vec{C},\vec{B},\vec{A}$ دوال اتجاهية في المتغير u وكانت Φ دالة قياسية قابلة للتفاضل فان:

1) $$\frac{d}{du}\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{du}+\frac{d\vec{B}}{du}$$

2) $$\frac{d}{du}\left(\vec{A}\bullet\vec{B}\right)=\vec{A}\bullet\frac{d\vec{B}}{du}+\frac{d\vec{A}}{du}\bullet\vec{B}$$

3) $$\frac{d}{du}\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)=\vec{A}\wedge\frac{d\vec{B}}{du}+\frac{d\vec{A}}{du}\wedge\vec{B}$$

4) $$\frac{d}{du}\left(\Phi\vec{A}\right)=\Phi\frac{d\vec{A}}{du}+\vec{A}\frac{d\Phi}{du}$$

5) $$\frac{d}{du}\left[\vec{A}\bullet\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)\right]=\vec{A}\bullet\left(\vec{B}\wedge\frac{d\vec{C}}{du}\right)+\vec{A}\bullet\left(\frac{d\vec{B}}{du}\wedge\vec{C}\right)+\frac{d\vec{A}}{du}\bullet\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$$

6) $$\frac{d}{du}\left[\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)\right]=\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\frac{d\vec{C}}{du}\right)+\vec{A}\wedge\left(\frac{d\vec{B}}{du}\wedge\vec{C}\right)+\frac{d\vec{A}}{du}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$$

الترتيب في العلاقات 3) , 5) , 6) مهم .

التفاضل الجزئى للمتجهات

اذا كان المتجه يعتمد على أكثر من متغيرقياسى وليكن تفاضل المتجه بالنسبة للمتغير أو بالنسبة للمتغير أو بالنسبة للمتغير تعطى بالصيغة :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{A}\left(x + \Delta x, y, z\right) - \vec{A}\left(x, y, z\right)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\vec{A}\left(x, y + \Delta y, z\right) - \vec{A}\left(x, y, z\right)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\vec{A}\left(x, y, z + \Delta z\right) - \vec{A}\left(x, y, z\right)}{\Delta z}$$

باستخدام القواعد المعروفة في التفاضل الجزئى فانه يمكن التحقق من العلاقات الآتية :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{A} \bullet \vec{B}\right) = \vec{A} \bullet \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \bullet \vec{B}$$

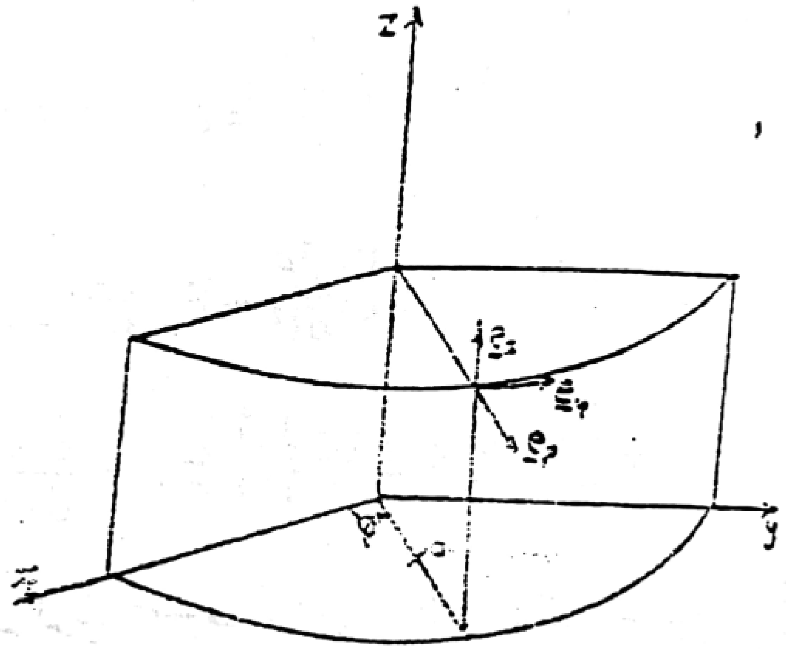
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \vec{A} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \wedge \vec{B}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\left(\vec{A} \bullet \vec{B}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\vec{A} \bullet \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \bullet \vec{B}\right)$$

$$= \vec{A} \bullet \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \bullet \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \bullet \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y\,\partial x} \bullet \vec{B}$$

.... الخ

نفرض أن الاحداثيات الاسطوانية لجسيم متحرك (كما هو موضح بالشكل) هي :
(ρ, ϕ, z) عند اللحظة الزمنية t . يمكن اثبات أن :



شكل 1- 2

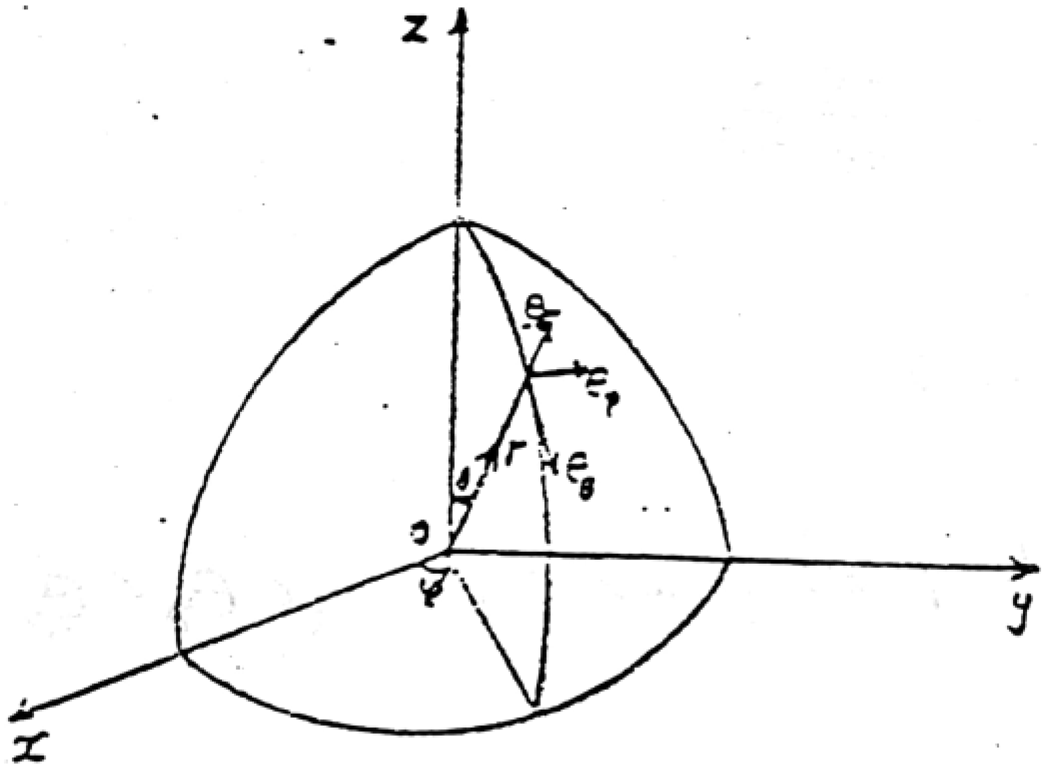
$$\frac{d\vec{e}_{\rho}}{dt}=\frac{d\phi}{dt}\vec{e}_{\phi}\ ,\ \frac{d\vec{e}_{\phi}}{dt}=-\frac{d\phi}{dt}\vec{e}_{\rho}\ ,\ \frac{d\vec{e}_{z}}{dt}=\vec{0}$$

حيث $\vec{e}_z,\vec{e}_\phi,\vec{e}_\rho$ هي متجهات الوحدة في اتجاه z,ϕ,ρ على الترتيب . باستخدام العلاقات السابقة فان متجهى السرعة والعجلة لجسيم يتحرك في الاحداثيات الاسطوانية يمكن ايجادها على الصورة :

$$\vec{v}=\frac{d\rho}{dt}\vec{e}_{\rho}+\rho\frac{d\phi}{dt}\vec{e}_{\phi}+\frac{dz}{dt}\vec{e}_{z}$$

$$\vec{f}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\left[\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]\vec{e}_{\rho}+\left[\rho\frac{d^2\phi}{dt^2}+2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\phi}{dt}\right]\vec{e}_{\phi}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_{z}$$

اذا كانت (r,θ,ϕ) هي الاحداثيات القطبية الكرية لجسيم عند اللحظة الزمنية t كما هو موضح بالشكل .فانه يمكن اثبات أن :



شكل 1- 3

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{d\phi}{dt}\sin\theta \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_r + \frac{d\phi}{dt}\cos\theta \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dt}\cos\theta \cdot \vec{e}_\theta - \frac{d\phi}{dt}\sin\theta \cdot \vec{e}_r$$

حيث $\vec{e}_\phi, \vec{e}_\theta, \vec{e}_r$ هي متجهات الوحدة في اتجاه ϕ, θ, r على الترتيب . وبذلك فانه يمكن إيجاد متجهى السرعة والعجلة لجسيم يتحرك في الاحداثيات القطبية الكرية على الصورة :

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\frac{d\phi}{dt}\sin\theta \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\vec{f}=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\sin^2\theta\right]\vec{e}_r$$
$$+\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\sin\theta\cos\theta\right]\vec{e}_\theta$$
$$+\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}\sin\theta+r\frac{d^2\phi}{dt^2}\sin\theta+2r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\phi}{dt}\cos\theta\right]\vec{e}_\phi$$

المجالات القياسية والاتجاهية

يمكن التعبير عن الكمية الفيزيائية بدالة نقطية متصلة في منطقة ما في الفضاء , ومثل هذه الدالة تسمى point function المنطقة التي تحدد فيها الكمية القياسية فتعرف بالمجال .
وتنقسم هذه المجالات الى نوعين أساسيين هما :

أ-مجالات قياسية

ومن أمثلتها مجال توزيع درجة الحرارة , ومجال توزيع الكثافة , ومجال توزيع الجهد الكهربى .....الخ . وأى من هذه المجالات يمكن تمثيله بدالة قياسية متصلة تعطى المقدار للكمية المعرفة عند كل نقطة . مثل هذه الدالة لا تمر بأى تغيرات فجائية في قيمتها عند انتقالها من نقطة الى أخرى مجاورة لها . كما أن مثل هذا المجال يمكن تخطيطه بيانيا بواسطة مجموعة من السطوح مثل سطوح التساوى الحرارى isothermal surfaces, وسطوح تساوى الكثافة Equi-density surfaces, وسطوح تساوى الجهد equi-potential surfaces ....الخ . والتي عندها يتحدد المجال بقيمة ثابتة , وتختار هذه السطوح بحيث أنه عند الانتقال من سطح الى آخر نحصل على فرق اختيارى يميز ذلك المجال . كما أن هذه السطوح لا يمكن أن تتقاطع ولكنها تقع متتالية , وأن الدوال القياسية النقطية الممثلة لها تكون وحيدة القيمة عند كل نقطة .

ب-مجالات اتجاهية

ومن أمثلتها مجالات توزيع السرعات في الموائع , شدة المجال الكهربى والمغناطيسى ...الخ .
وتتمثل عند أي نقطة دالة اتجاهية متصلة , وتتحدد هذه الدالة عند أي نقطة بواسطة متجه له قيمة قياسية واتجاه محددان . المقدار والاتجاه يتغيران باستمرار من نقطة الى أخرى في منطقة المجال , وتمثل هذه الدالة الاتجاهية بواسطة منحنى يسمى خط الفيض أو خط الانسياب أو خط المتجه vector line , line of flux or flux line . حيث يكون اتجاه الكمية المتجهة عند

أى نقطة على المنحنى هو اتجاه المماس للمنحنى عند هذه النقطة . ولتحديد مقدار المتجه عند هذه النقطة على المنحنى نرسم سطحا صغيرا جدا وعموديا على المنحنى عند هذه النقطة فيكون عدد النقط في وحدة المساحات من هذا السطح مساويا لمقدار المتجه (القيمة القياسية للمتجه) عدديا . وف الواقع فانه عند كل نقطة من هذه النقط يمر خط من خطوط الفيض , وبالتالي فان المجال يمكن تخطيطه اذا رسمنا عبر كل نقطة من هذه النقط خطا للفيض . ومعنى ذلك أن اتجاه هذه الخطوط (اتجاه المماسات لهذه الخطوط) هو نفسه اتجاه الدالة الاتجاهية , وكثافة هذه الخطوط (عدد الخطوط التي تعبر وحدة المساحات العمودية عليها) تساوى مقدار الدالة الانجاهية . وكذلك فان خطوط الفيض لا يمكن أن تتقاطع عند أي نقطة , وذلك لأن تقاطع الخطوط يعنى أنه عند نقطة التقاطع يكون اتجاه الدالة الاتجاهية غير محدد , وهذا يخالف مضمون الكمية الاتجاهية . كما أن الدالة النقطية للمتجه يجب أن تكون وحيدة القيمة .

التدرج أو الانحدار

نفرض أن $\Phi(x,y,z)$ دالة قياسية معرفة وقابلة للتفاضل عند كل نقطة (x,y,z) فى فضاء معين (أي أن Φ مجال قياسى) . تدرج أو ميل أو انحدار الدالة Φ يعرف رياضيا بالصورة :

$$\nabla\Phi = grad\,\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}$$

يلاحظ أن $\nabla\Phi$ عبارة عن دالة اتجاهية (مجال اتجاهى) .

التباعد (الانسياب)

نفرض أن المتجه $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ معرف وقابل للتفاضل عند كل نقطة (x,y,z) في فضاء معين (أي أن $\vec{A}$ يمثل مجال اتجاهى) . فان تباعد أو انسياب المجال $\vec{A}$ يعرف بالصورة الرياضية :

$$\nabla\bullet\vec{A} = div\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\bullet\left(A_1 i + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}\right)$$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

الدوران

اذا كان $\vec{A}(x,y,z)$ مجال اتجاهى قابل للتفاضل عند كل نقطة (x,y,z) في فضاء معين

. فان دوران المتجه يكتب بالصورة : $\nabla \wedge \vec{A}\ ,\ curl\vec{A}\ \ or\ \ rot\vec{A}$ ويعرف بالصيغة الرياضية :

$$\nabla \wedge \vec{A} = curl\vec{A} = rot\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \wedge \left(A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

هنا يجب ملاحظة أنه عند فك المحدد (متجه في صورة محدد) فان المؤثرات التفاضلية :

$\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}$ لابد أن تسبق المركبات A_1, A_2, A_3

أمثلة محلولة

مثال :

أثبت أن : $\nabla(FG) = F\nabla G + G\nabla F$ حيث G, F هي دوال قياسية قابلة للتفاضل عند أي نقطة (x,y,z) .

الحل :

$$\nabla(FG) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)(FG)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(FG)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(FG)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(FG)\vec{k}$$

$$= \left(F\frac{\partial G}{\partial x} + G\frac{\partial F}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(F\frac{\partial G}{\partial y} + G\frac{\partial F}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(F\frac{\partial G}{\partial Z} + G\frac{\partial F}{\partial z}\right)\vec{k}$$

$$= F\left(\frac{\partial G}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial G}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial G}{\partial z}\vec{k}\right) + G\left(\frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$=F\nabla G+G\nabla F$$

مثال : بين أن : $\nabla\bullet(\nabla\Phi)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\nabla^2\Phi$

الحل :

$$\nabla\bullet(\nabla\Phi)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\bullet\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\nabla^2\Phi$$

مثال : أثبت أن $\nabla\bullet\left(\Phi\vec{A}\right)=(\nabla\Phi)\bullet\vec{A}+\Phi\left(\nabla\bullet\vec{A}\right)$.

الحل :

$$\nabla\bullet\left(\Phi\vec{A}\right)=\nabla\bullet\left(\Phi A_1\vec{i}+\Phi A_2\vec{j}+\Phi A_3\vec{k}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(\Phi A_1)+\frac{\partial}{\partial y}(\Phi A_2)+\frac{\partial}{\partial z}(\Phi A_3)$$

$$=\frac{\partial\Phi}{\partial x}A_1+\Phi\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}A_2+\Phi\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}A_3+\Phi\frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial\Phi}{\partial x}A_1+\frac{\partial\Phi}{\partial y}A_2+\frac{\partial\Phi}{\partial z}A_3+\Phi\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$=(\nabla\Phi)\bullet\vec{A}+\Phi\left(\nabla\bullet\vec{A}\right)$$

مثال : أثبت أن $\nabla\bullet(U\nabla V-V\nabla U)=U\nabla^2V-V\nabla^2U$

الحل : بوضع $\Phi=U,\ \vec{A}=\nabla V$ فان :

$$\nabla\bullet(U\nabla V)=\nabla U\bullet\nabla V+U(\nabla\bullet\nabla V)=\nabla U\bullet\nabla V+U\nabla^2V$$

بتبادل V,U ينتج أن :

$$\nabla\bullet(V\nabla U)=\nabla V\bullet\nabla U+V\nabla^2U$$

ثم بالطرح نجد أن :

$$\nabla\bullet\left(U\,\nabla V\;-V\,\nabla U\right)=U\,\nabla^2 V\;-V\,\nabla^2 U$$

مثال : اثبت أن : $\nabla\wedge\left(\Phi\vec{A}\right)=\left(\nabla\Phi\right)\wedge\vec{A}+\Phi\left(\nabla\wedge\vec{A}\right)$

الحل :

$$\nabla\wedge\left(\Phi\vec{A}\right)=\nabla\wedge\left(\Phi A_1\vec{i}+\Phi A_2\vec{j}+\Phi A_3\vec{k}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \Phi A_1 & \Phi A_2 & \Phi A_3\end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi A_3\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi A_2\right)\right]\vec{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi A_1\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi A_3\right)\right]\vec{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi A_2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi A_1\right)\right]\vec{k}$$

$$=\left[\Phi\frac{\partial A_3}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}A_3-\Phi\frac{\partial A_2}{\partial z}-\frac{\partial\Phi}{\partial z}A_2\right]\vec{i}$$

$$+\left[\Phi\frac{\partial A_1}{\partial z}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}A_1-\Phi\frac{\partial A_3}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}A_3\right]\vec{j}$$

$$+\left[\Phi\frac{\partial A_2}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}A_2-\Phi\frac{\partial A_1}{\partial y}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}A_1\right]\vec{k}$$

$$=\Phi\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$

$$+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}A_3-\frac{\partial\Phi}{\partial z}A_2\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}A_1-\frac{\partial\Phi}{\partial x}A_3\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}A_2-\frac{\partial\Phi}{\partial y}A_1\right)\vec{k}$$

$$=\Phi\left(\nabla\wedge\vec{A}\right)+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}=\Phi\left(\nabla\wedge\vec{A}\right)+\left(\nabla\Phi\right)\wedge\vec{A}$$

مثال : أثبت أن $\nabla \wedge (\nabla \Phi) = \vec{0}$

الحل :

$$\nabla \wedge (\nabla \Phi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z\, \partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z\, \partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\, \partial x} \right) \vec{k} = \vec{0}$$

مثال : أثبت أن $\nabla \bullet (\nabla \wedge \vec{A}) = 0$

الحل :

$$\nabla \bullet (\nabla \wedge \vec{A}) = \nabla \bullet \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \vec{k} \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) = 0$$

مثال : أثبت أن $\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A} + \nabla (\nabla \bullet \vec{A})$.

الحل :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) = \nabla \wedge \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \vec{k} \right]$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} & \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} & \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\right]\vec{i}$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\right]\vec{j}$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\right]\vec{k}$$

$$=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_1\vec{i}-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_2\vec{j}-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_3\vec{k}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial z\,\partial x}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial z\,\partial y}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2}\right)\vec{k}$$

$$=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\cdot\left(A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$=-\nabla^2\vec{A}+\nabla\left(\nabla\bullet\vec{A}\right)$$

تكامل المتجهات

نفرض أن المتجه $\vec{A}$ يعتمد على التغير u أي

$$\vec{A}=\vec{A}(u)=A_1(u)\vec{i}+A_2(u)\vec{j}+A_3(u)\vec{k}$$

حيث A_1,A_2,A_3 دوال متصلة في منطقة فضائية معينة . التكامل المحدود للمتجه $\vec{A}$ بين النهايات $u=a$, $u=b$ يمكن وضعه في الصورة :

$$\int_a^b \vec{A}du=\vec{i}\int_a^b A_1du+\vec{j}\int_a^b A_2du+\vec{k}\int_a^b A_3du$$

وكما هو معروف فان هذا التكمل يمكن اعتباره كنهاية لمجموع .

التكامل الخطى

نفرض أن $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ متجه موضع نقطة موجودة على المنحنى c الواصل بين النقطتين p_2,p_1 ونفرض أن $\vec{A}=A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k}$ دالة في الموضع ومتصلة على

المنحنى c . حينئذ يكون التكامل للمركبة المماسية للمتجه $\vec{A}$ على طول المنحنى c من النقطة p_1 الى النقطة p_2 في الصورة :

$$\int_{p_1}^{p_2} \vec{A}\bullet d\vec{r} = \int_c \left(A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz\right)$$

ويعرف هذا التكامل بالتكامل الخطى للمتجه $\vec{A}$. اذا كان $\vec{A} = \vec{F}$ حيث $\vec{F}$ هي القوة المؤثرة على جسيم يتحرك على المنحنى c المغلق والبسيط (أي لا يقطع نفسه في أي مكان) فان التكامل الخطى يأخذ الصورة :

$$\oint_c \vec{F}\bullet d\vec{r} = \oint_c \left(A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz\right)$$

وهذا التكامل يمثل الشغل المبذول ضد القوة . في ميكانيكا الموائع وديناميكا الطيران التكامل الخطى يمثل دوران المتجه $\vec{A}$ على المنحنى c حيث $\vec{A}$ يمثل سرعة المائع .

نظرية :

اذا كان $\vec{A} = \nabla\Phi$ في منطقة فضائية R حيث $\Phi = \Phi(x, y, z)$ دالة قياسية تفاضلية ووحيدة القيمة ومتصلة في هذه المنطقة الفضائية فان :

أ) $\int_{p_1}^{p_2} \vec{A}\bullet d\vec{r}$ لا يتوقف على شكل المنحنى الواصل بين النقطتين p_2, p_1 .

ب) $\oint_c \vec{A}\bullet d\vec{r} = 0$ حول أي منحنى مغلق في المنطقة الفضائية R .

التكامل السطحى

باعتبار أن S سطح له جانبان كما هو موضح بالشكل , ونختار متجه الوحدة $\vec{n}$ العمودى على أحد جانبي السطح S (الجانب الموجب للسطح) . المتجه $d\vec{S}$ (عنصر سطحى) يمكن كتابته بالصورة :

$$d\vec{S} = \vec{n} dS$$

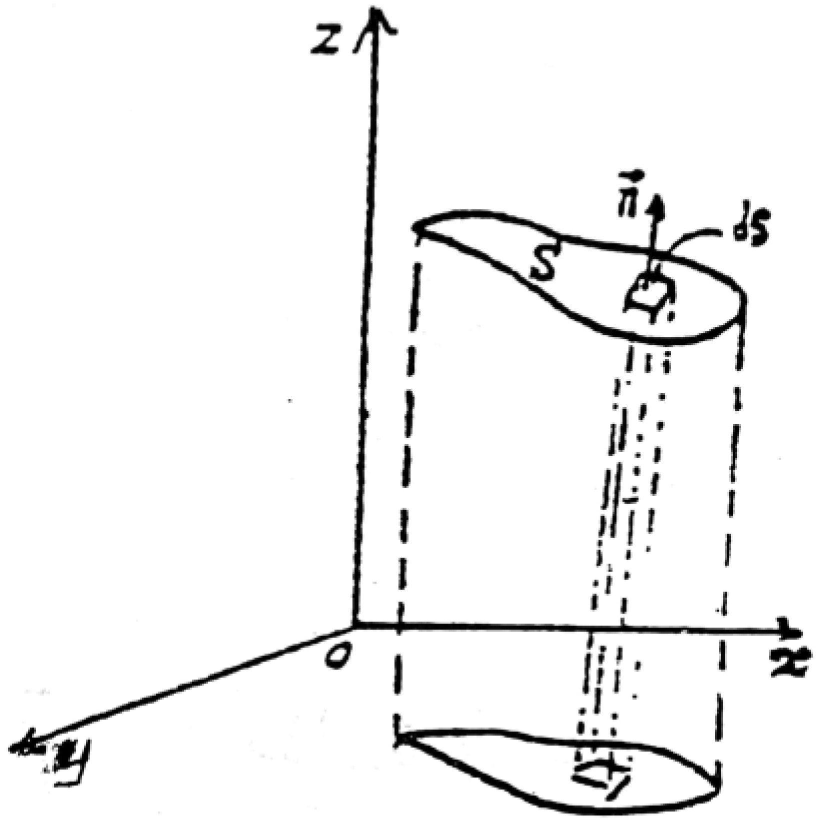
التكامل :

$$\iint \vec{A}\bullet d\vec{S} = \iint \vec{A}\bullet \vec{n} dS$$

يسمى بالتكامل السطحى (انسياب أو تدفق المتجه $\vec{A}$) للمتجه $\vec{A}$ فوق السطح S .
تكاملات سطحية أخرى في الصور :

$$\iint \Phi d\vec{S} = \iint \Phi \vec{n} dS \quad , \quad \iint \vec{A} \wedge d\vec{S}$$

حيث دالة قياسية . الرمز $\oiint$ أو الرمز $\oint$ يستخدم ليبين أن التكامل مأخوذ على السطح المغلق S أو المنحنى المغلق C على الترتيب .



شكل 1- 4

التكامل الحجمى

نفرض أن السطح المغلق S يحتوى على الحجم V (يحيط بالحجم). التكاملات :

$$\iiint_V \vec{A} d\tau \ , \ \iiint_V \Phi d\tau$$

تمثل تكاملات حجمية أو تكاملات في الفضاء . $d\tau$ تمثل عنصر حجمى .

نظرية جاوس للانسياب

وتنص على أنه اذا كان V هو الحجم المحدد بالسطح S والمتجه $\vec{A}$ دالة في الموضع وتفاضلية ومتصلة فان :

$$\iiint_V \left(\nabla \bullet \vec{A}\right) d\tau = \oiint_S \vec{A} \bullet \vec{n} dS$$

حيث $\vec{n}$ هو متجه وحدة عمودى (للخارج) على السطح S و $d\tau$ عنصر الحجم .

نظرية ستوكس

تنص على أنه اذا كان S سطحا مفتوحا ومحددا بالمنحنى c (حيث c منحنى بسيط) وكان المتجه $\vec{A}$ متجه تفاضلى متصل فان :

$$\oint_c \vec{A} \bullet d\vec{r} = \iint_S \left(\nabla \wedge \vec{A}\right) \bullet d\vec{S} = \iint_S \left(\nabla \wedge \vec{A}\right) \bullet \vec{n} dS$$

نظرية جرين في المستوى

اذا كانت R منطقة مغلقة في المستوى xy ومحددة بمنحنى بسيط مغلق c وكانت الدالتان متصلتين ولهما مشتقات متصلة فان :

$$\oint_c \left(M dx + N dy\right) = \oiint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx dy$$

نظريات التكامل المرتبطة

(1

$$\iiint_V \left(\Phi \nabla^2 \psi + \nabla \Phi \bullet \nabla \psi\right) d\tau = \iint_S \left(\Phi \nabla \psi\right) \bullet d\vec{S}$$

تسمى نظرية جرين أو متطابقة جرين الأولى .

(2

$$\iiint_V \left(\Phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \Phi\right) d\tau = \iint_S \left(\Phi \nabla \psi - \psi \nabla \Phi\right) \bullet d\vec{S}$$

تسمى متطابقة جرين الثانية أو نظرية جرين المتماثلة .

(3

$$\iiint_V \left(\nabla \wedge \vec{A}\right) d\tau = \iint_S \left(\vec{n} \wedge \vec{A}\right) dS = \iint_S d\vec{S} \wedge \vec{A}$$

(4

$$\oint_c \Phi d\vec{r} = \iint_S \left(\vec{n} \wedge \nabla\Phi\right) dS = \iint_S d\vec{S} \wedge \nabla\Phi$$

(5

نفرض أن ψ تمثل اما دالة اتجاهية أو دالة قياسية تبعا للرمز $*$ الذى يبين ضرب قياسى أو ضرب اتجاهى أو ضرب عادى اذن :

$$\iiint_V \left(\nabla * \psi\right) d\tau = \iint_S \left(\vec{n} * \psi\right) dS = \iint_S d\vec{S} * \psi$$

$$\oint_c d\vec{r} * \psi = \iint_S \left(\vec{n} \wedge \nabla\right) * \psi dS = \iint_S \left(d\vec{S} \wedge \nabla\right) * \psi$$

واضح أن نظرية جاوس للانسياب ونظرية ستوكس والنتيجتين (4), (3) هي حالات خاصة من هذه النظرية .

الاحداثيات

تحويل الاحداثيات

نفرض أنه يمكن وضع الاحداثيات الكارتيزية لنقطة مادية (x, y, z) في الصورة :

$$x = x\left(u_1, u_2, u_3\right)$$

$$y = y\left(u_1, u_2, u_3\right)$$

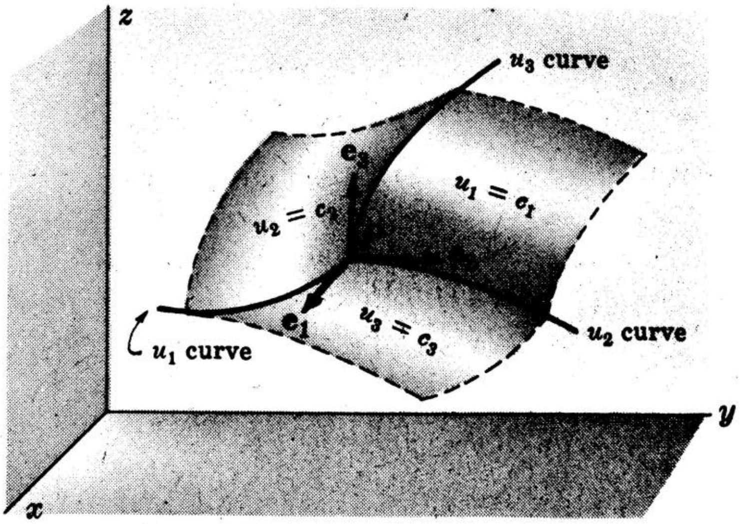
$$z = z\left(u_1, u_2, u_3\right) \tag{1}$$

بحل هذه المعادلات أي إيجاد u_3, u_2, u_1 بدلالة z, y, x فانه يمكن الحصول على :

$$u_1 = u_1\left(x, y, z\right)$$

$$u_2 = u_2\left(x, y, z\right) \tag{2}$$

$$u_3 = u_3\left(x, y, z\right)$$



شكل 1- 5

واضح أنه أمكن تعيين النقطة p بواسطة الاحداثيات المتعامدة (x, y, z) أو بواسطة الاحداثيات (u_1, u_2, u_3) والتي تسمى بالاحداثيات المنحنية . مجموعة المعادلات (1), (2) تعرف باحداثيات التحويل .

الاحداثيات المنحنية المتعامدة

السطوح : $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$, $u_3 = c_3$ (حيث c_3, c_2, c_1 ثوابت) تسمى احداثيات السطوح وكل زوج من هذه السطوح تتقاطع في منحنيات تسمى احداثى المنحنيات أو الخطوط كما هو مبين بالشكل السابق . اذا تقاطعت المنحنيات (احداثات السطوح) في زوايا قائمة تسمى الاحداثيات عندئذ بالاحداثيات المنحنية المتعامدة . الاحداثيات (u_1, u_2, u_3) في هذه الحالة تشابه محاور الاحداثيات (x, y, z) في نظام الاحداثيات المتعامدة .

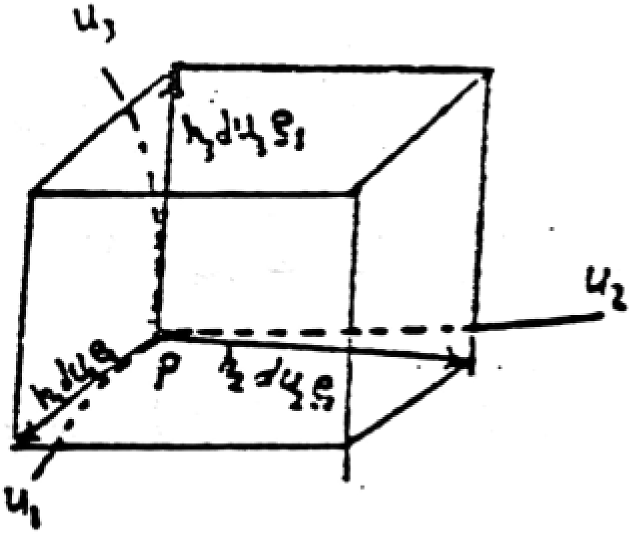
متجهات الوحدة

نفرض أن متجه موضع النقطة p هو $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. واضح أنه يمكن وضع $\vec{r}$ في الصورة $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$. متجه المماس للمنحنى u_1 عند p (التي لها u, u_2 ثوابت) هو : $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}$ اذن وحدة المتجه في اتجاه هذا المماس هو : $\vec{e}_1 = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} / \left| \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \right|$. أي أن $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = h_1 \vec{e}_1$

حيث h_1 هو مقدار متجه المماس . بالمثل اذا كانت $\vec{e}_3,\vec{e}_2$ هي متجهات الوحدة الأساسية للمنحنيات u_3,u_2 عند النقطة p على الترتيب فان : $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}=h_2\vec{e}_2$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}=h_3\vec{e}_3$ حيث $h_2=\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}\right|$, $h_3=\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}\right|$. متجهات الوحدة $\vec{e}_3,\vec{e}_2,\vec{e}_1$ في اتجاه تزايد u_3,u_2,u_1 على الترتيب .

طول القوس وعنصر الحجم

نفرض أن $\vec{r}=\vec{r}\left(u_1,u_2,u_3\right)$ هو متجه موضع النقطة p واضح من الشكل أن :



شكل 1- 6

$$d\vec{r}=\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}du_3$$
$$=h_1du_1\vec{e}_1+h_2du_2\vec{e}_2+h_3du_3\vec{e}_3$$

ويكون كذلك :

$$\left(ds\right)^2=d\vec{r}\bullet d\vec{r}=h_1^2\left(du_1\right)^2+h_2^2\left(du_2\right)^2+h_3^2\left(du_3\right)^2$$

حيث أخذنا في الاعتبار أنه بالنسبة للاحداثيات المنحنية المتعامدة يكون :

$$\vec{e}_1\bullet\vec{e}_2=\vec{e}_2\bullet\vec{e}_3=\vec{e}_1\bullet\vec{e}_3=0 \quad \text{و} \quad \vec{e}_1\bullet\vec{e}_1=\vec{e}_2\bullet\vec{e}_2=\vec{e}_3\bullet\vec{e}_3=1$$

واضح من الشكل السابق أن عنصر الحجم في الاحداثيات المنحنية المتعامدة يمكن كتابته بالصورة :

$$d\tau = \left(h_1 du_1 \vec{e}_1\right)\bullet\left[\left(h_2 du_2 \vec{e}_2\right)\wedge\left(h_3 du_3 \vec{e}_3\right)\right]$$
$$= h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$$

وذلك لأن : $\vec{e}_1\bullet\left(\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3\right)=1$.

التدرج والتباعد والدوران ولابلسيان في الاحداثيات المنحنية

نفرض أن $\Phi=\Phi\left(u_1,u_2,u_3\right)$ دالة قياسية والمتجه $\vec{A}$ حيث $\vec{A}=\vec{A}\left(u_1,u_2,u_3\right)$ وحيث u_1,u_2,u_3 هي احداثيات منحنية متعامدة . في هذه الاحداثيات المنحنية يمكن الحصول على الصيغ الآتية :

$$\nabla\Phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\vec{e}_3 \qquad (أ)$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(h_2h_3A_1\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(h_3h_1A_2\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(h_1h_2A_3\right)\right] \qquad (ب)$$

$$\nabla\wedge\vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix} \qquad (ج)$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\right)\right] \qquad (د)$$

حالات خاصة

الاحداثيات الاسطوانية

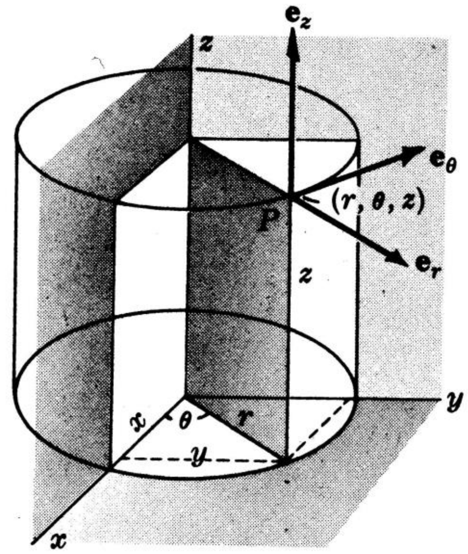
في الاحداثيات الاسطوانية (ρ,ϕ,z) يكون :

$$x = \rho\cos\phi \quad , \quad y = \rho\sin\phi \quad , \quad z = z$$

$$u_1 = \rho \ , \ u_2 = \phi \ , \ u_3 = z$$

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho \ , \ \vec{e}_2 = \vec{e}_\phi \ , \ \vec{e}_3 = \vec{e}_z$$

$$h_1 = h_\rho = 1 \ , \ h_2 = h_\phi = \rho \ , \ h_3 = h_z = 1$$



شكل 1- 7

العلاقات (أ) – (د) السابقة تأخذ في حالة الاحداثيات الاسطوانية على الترتيب الصور الآتية

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho A_z\right)\right]$$

$$\nabla \wedge \vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

الاحداثيات الكرية

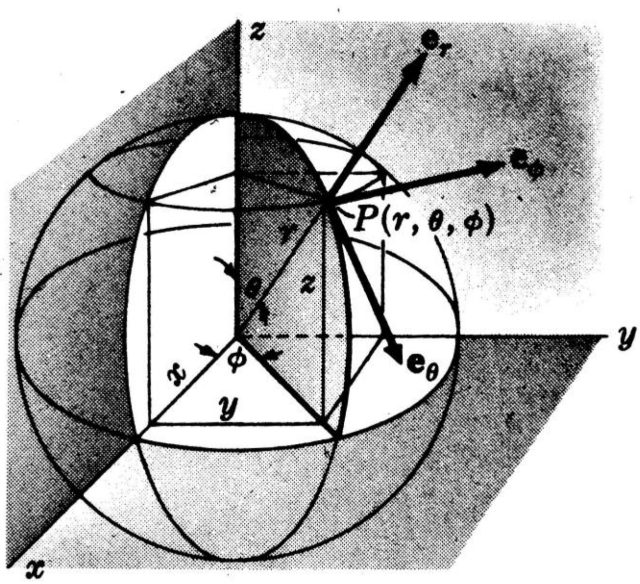
في الاحداثيات الكرية (r,θ,ϕ) تكون :

$$x = r\sin\theta\cos\phi \quad , \quad y = r\sin\theta\sin\phi \quad , \quad z = r\cos\theta$$

$$u_1 = r \quad , \quad u_2 = \theta \quad , \quad u_3 = \phi$$

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_r \quad , \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_\theta \quad , \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_\phi$$

$$h_1 = h_r = 1 \quad , \quad h_2 = h_\theta = r \quad , \quad h_3 = h_\phi = r\sin\theta$$



شكل 1- 8

وعليه فان العلاقات (أ) _ (د) في الاحداثيات الكرية تأخذ على الترتيب الصور :

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta\sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\wedge\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta\vec{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

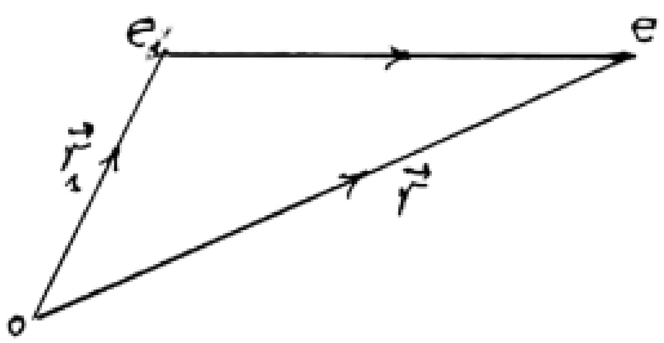
الباب الثانى

الكهرباء الساكنة

إن الوثائق التى ترجع إلى ماقبل 600 سنة قبل الميلاد تدل على توفر معلومات معرفية بالكهربية الساكنة وكلمة إستاتيكية مشتقة من الكلمة الإغريقية لمادة الكهرب . وقد كان الإغريق يقضون الساعات الطويلة بدلك قطعة من القماش بمادة الكهرب ويلاحظون كيف أن هذه المادة تقوم بعدئذ بجذب القطع الصغيرة إلا أن إهتمام الإغريق كان مركّزاً على المنطق والفلسفة وليس على العلم التجريبى . ولهذا إنقضت فترة طويلة قبل أن يصبح فى الإمكان إثبات أن ظاهرة الجذب هذه ليست سحراً .

1- قانون كولوم

أول من أجرى تجارب عملية هو الدكتور كلبرت طبيب ملكة إنجلترا حيث أعلن فى عام 1600 أن هذه الظاهرة لا تقتصر على الكهرب فقد بل تتعداها إلى الزجاج والخشب والكبريت ومواد أخرى . وبعد ذلك بقليل أجرى مهندس الجيش الفرنسى كولوم عدداً من التجارب المتقدمة بإستعمال ميزان إلتوائى خاص حقيقى بغرض معرفة مقدار قوة الجذب بين جسمين يحمل كلاً منهما شحنة كهربية إستاتيكية . إن نتائج كولوم تعرف الآن بإسم قانون كولوم وتحمل شبهاً كبيراً بقانون الجذب العام لينيوتن والذى أُكتشف قبل ذلك بمائة عام . إن قانون كولوم ينص على أن القوة بين جسمين مشحونين ومفصولين بمسافة كبيرة بالنسبة لحجميهما تتناسب طردياً مع حاصل ضرب الشحنتين وعكسياً مع مربع المسافة بينهما . وهذه القوة تعتبر قوة تنافر للشحنات التى لها نفس الإشارة وقوة تجاذب للشحنات مختلفة الإشارة . ويأخذ قانون كولوم الصورة الرياضية الأتية :



شكل 2- 1

$$\vec{F} = \frac{e\, e_i}{\left| \vec{r} - \vec{r}_i \right|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \; . \qquad (1)$$

حيث $\vec{F}$ هى القوة المؤثرة على الشحنة e الناتجة عن وجود الشحنة e_i ، $\vec{r}_i$ هو متجة موضع e_i بالنسبة لنقطة الأصل O . فى الصيغة (1) إخترنا ثابت التناسب يساوى الوحدة .
إذا كان هناك n من الشحنات $e_1, e_2, \ldots, e_n$ فإن القوة المؤثرة على الشحنة e تصبح على الصورة :

$$\vec{F} = e \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{\left| \vec{r} - \vec{r}_i \right|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \; . \qquad (2)$$

ويمكن تعميم الصيغتين (1)،(2) فى حالة التوزيع المتصل(المنتظم) من الشحنات والذى يميزه بدالتين قياسيتين فى الموضع هما :

أ - الكثافة الحجمية للشحنة وهى الشحنة لوحدة الحجوم يرمز لها بالرمز $\rho (r')$.

ب - الكثافة السطحية للشحنة وهى الشحنة لوحدة المساحات ويرمز لها بالرمز $\sigma (r')$.
وفى هذه الحالة يمكن وضع القوة المؤثرة على الشحنة e الناشئة عن الجسم المشحون فى الصورة :

$$\vec{F} = e \iiint_V \frac{\rho (r')}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^3} (\vec{r} - \vec{r}')\, d\tau \; +$$

$$e \oiint_S \frac{\sigma (r')}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^3} (\vec{r} - \vec{r}')\, dS \qquad (3)$$

حيث V هو حجم الجسم ، $d\tau$ عنصر الحجم ، S هو سطح الجسم ، dS عنصر السطح .
والصورة الرياضية العامة لقانون كولوم للقوة على شحنة e الناشئة عن توزيع مركّز للشحنات بالإضافة للتوزيعين السابقين هى :

$$\vec{F} = e \iiint_V \frac{\rho (r')}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^3} (\vec{r} - \vec{r}')\, d\tau \; +$$

$$e \oiint_S \frac{\sigma (r')}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^3} (\vec{r} - \vec{r}')\, dS \; +$$

$$e \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i) \quad . \qquad (4)$$

2 ـ المجال الكهربى

هو مفهوم رياضى نستخدمه لتمييز ظاهرة الكهربية ، وهو دالة إتجاهية فى الموضع ، وتُعرف شدة المجال الكهربى عند نقطة بأنه القوة المؤثرة على وحدة الشحنات الموجبة إذا وضعت عند هذه النقطة . والصورة الرياضية العامة لشدة المجال الكهربى هى :

$$\vec{E} = \iiint_V \frac{\rho(r')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')\,d\tau + \oiint_S \frac{\sigma(r')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')\,dS + \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i) \quad . \qquad (5)$$

بتكوين حاصل الضرب الإتجاهى للمؤثر ∇ والمتجه $\vec{E}$ (أى دوران المتجه $\vec{E}$) المعطى بالمعادلة (5) نجد أن :

$$\nabla \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad . \qquad (6)$$

بإستخدام نظرية ستوكس لتحويل التكامل السطحى إلى تكامل خطى أى أن :

$$\iint_S (\nabla \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \oint_c \vec{E} \cdot d\,\vec{l} \quad .$$

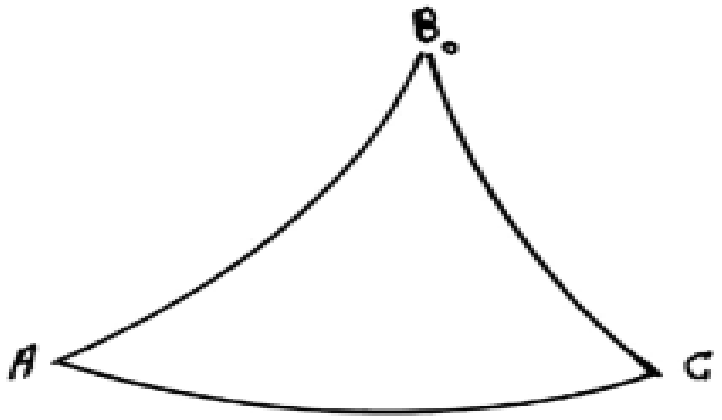
حيث S سطح محدد بواسطة المنحنى المغلق c ، $d\,\vec{l}$ عنصر متجه الطول من المنحنى c. ثم بالتعويض فى المعادلة (6) نجد أن :

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\,\vec{l} = 0 \quad . \qquad (7)$$

أى أن المتجة $\vec{E}$ (شدة المجال الكهربى) يمثل مجال محافظ (أى قوة محافظة) .

3 - الجهد الكهربى

يكون أحيانا من الصعب إيجاد شدة المجال الكهربى $\vec{E}$ باستخدام قانون كولوم (وفى كثير من الحالات معقد جدا) ويرجع السبب في ذلك الى أن متجه شدة المجال الكهربى من نو ع المجالات الاتجاهية الناشئة من توزيعات للشحنات ، ومن الضرورى في أغلب الحالات اجراء ثلاثة تكاملات (واحدة لكل مركبة من مركبات المجال الكهربى) . كما أن تحليل المجال لمركباته يزيد من صعوبة عملية التكامل في أغلب الحالات . لذلك فمن المرغوبفيه إيجاد دالة قياسية وبعملية واحدة للتكامل يمكن الحصول منها على المجال الكهربى . تعرف هذه الدالة القياسية بدالة الجهد وهى دالة في الموضع ، وحيث أن المجال الكهربى قوة محافظة فان الشغل المبذول بواسطة المجال لنقل وحدة الشحنات الموجبة من موضع A الى موضع B_0 لا يتوقف على المسار ، وانما يتوقف فقط على هذين الموضعين . فاذا كانت B_0 نقطة ثابتة معينة متفق عليها يسمى عندئذ الشغل المبذول بواسطة المجال الكهربى لنقل وحدة الشحنات الموجبة من الموضع A الى الموضع القياسى B_0 (يؤخذهذا الموضع القياسى في مالانهاية) بطاقة جهد الشحنة الموجبة التي مقدارها الوحدة عندما توضع عند A. أو باختصار جهد المجال عند A . ويرمز له بالرمز Φ_A ، وحيث أن الشغل لا يتوقف على المسار بين النقطتين فتكون الدالة القياسية في الموضع دالة وحيدة القيمة عند أي نقطة في الفضاء . فاذا رمزنا للشغل بالرمز W فان :



شكل 2- 2

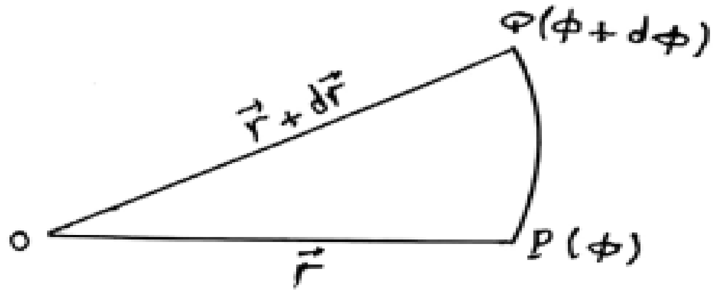
$$\Phi_A = W_{AB_o} , \Phi_C = W_{CB_o}$$

وعليه فان :

$$W_{AC} = W_{AB_0} + W_{B_0C} = W_{AB_0} - W_{CB_0}$$

$$= \Phi_A - \Phi_C = -\left(\Phi_C - \Phi_A\right) \qquad (8)$$

وهذا يعنى أن الشغل المبذول بواسطة المجال لنقل وحدة الشحنات الموجبة يساوى التغير في دالة الجهد بين الموضعين مضروبا في إشارة سالبة . والآن نفرض ان الشغل لنقل وحدة الشحنات الموجبة من النقطة $P(\vec{r})$ حيث دالة الجهد عندها ϕ والنقطة $Q(\vec{r}+d\vec{r})$ ودالة الجهد عندها $\Phi + d\Phi$ هو dW حيث :



شكل 2- 3

$$dW = -\left[\Phi + d\Phi - \Phi\right] = -d\Phi$$

وهذا الشغل يمكن وضعه بالصورة :

$$dW = \vec{E} \bullet d\vec{r}$$

$$\vec{E} \bullet d\vec{r} = -d\Phi = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz\right)$$

$$= -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{k}\right) \bullet \left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right)$$

$$= -\left(\nabla \Phi\right) \bullet d\vec{r} \qquad (9)$$

$$\vec{E} = -\nabla \Phi = grad\, \Phi \qquad (10)$$

وهذه العلاقة تأخذ في الاحداثيات الكارتيزية والاسطوانية والكرية على الترتيب الصور :

$$\left(E_x, E_y, E_z\right) = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$$

$$\left(E_\rho, E_\phi, E_z\right) = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$$

$$\left(E_r, E_\theta, E_\phi\right) = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right)$$

يلاحظ أن العلاقة (10) تحقق : $\nabla \wedge \vec{E} = \vec{0}$. كما يلاحظ مما سبق أنه اذا كانت هناك شحنة e موضوعة في مجال كهربى قان القوة المؤثرة على هذه الشحنة تصبح $e\vec{E}$ وطاقة جهد الشحنة هي $e\Phi$.

مثال : أوجد مجال وجهد شحنة موضوعة عند نقطة الأصل .

الحل : نفرض أن $\vec{r}$ موضع النقطة P بالنسبة للشحنة فيكون المجال عند هذه النقطة هو :

$$\vec{E} = \frac{e}{r^3}\vec{r}$$

أما دالة الجهد فتعطى بالصورة :

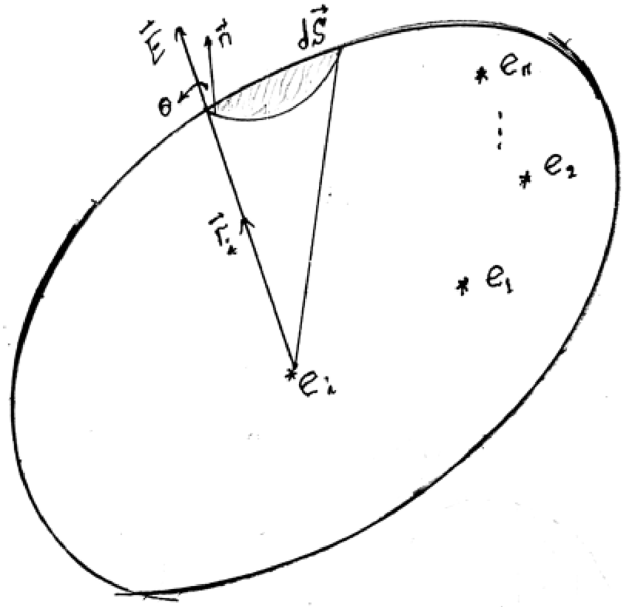
$$\Phi = \int_P^\infty \vec{E} \bullet d\vec{r} = \int_P^\infty \frac{e}{r^3}\vec{r} \bullet d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{e}{r^2} dr = \frac{e}{r}$$

نظرية جاوس للفيض

اذا كانت N الفيض الكهربى الخارج من السطح المغلق S للمجال الكهربى $\vec{E}$ فان هذا الفيض يعطى بالصيغة :

$$N = \oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = 4\pi Q$$

حيث Q هي الشحنة الكلية داخل السطح .



شكل 2- 4

البرهان : نفرض أن $\vec{E}_i$ شدة المجال الناشئ عن الشحنة e_i عند النقطة $P(\vec{r}_i)$ كما هو موضح بالشكل . التكامل السطحى السابق يمكن وضعه بالصورة :

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = \oiint_S \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{r_i^3} \vec{r}_i \right) \bullet d\vec{S}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} e_i \oiint_S \frac{\vec{r}_i \bullet d\vec{S}}{r_i^3} = \sum_{i=1}^{n} e_i \oiint_S d\,\omega_i = \sum_{i=1}^{n} e_i\,\omega_i$$

حيث ω_i هي الزاوية المجسمة عند الشحنة e_i . وتكون : $\omega_i = 0$ أو $\omega_i = 4\pi$ عندما تكون الشحنة خارج أو داخل السطح على الترتيب . وعليه فان التكامل السطحى السابق يصبح :

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = 4\pi Q \qquad (11)$$

اذا كانت هناك شحنات e_i' موزعة على السطح S بالإضافة للتوزيع السابق . ففي هذه الحالة تكون الزاوية المجسمة ω_i' المناظرة للشحنة السطحية e_i' . وعليه فان الفيض الكلى الناتج من الشحنات السطحية والتوزيع الداخلى للشحنات بالصيغة :

$$\oiint_S \vec{E} \bullet dS = 4\pi Q + 2\pi Q'$$

حيث Q' هي الشحنة الكلية الموجودة على السطح S . أما في حالة التوزيع المنتظم للشحنة ، وبفرض أن الكثافة الحجمية للشحنة داخل السطح هي ρ فيكون الفيض بالصورة :

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = 4\pi \iiint_V \rho d\tau \qquad (12)$$

حيث V هو الحجم المحاط بالسطح S ، $d\tau$ عنصر الحجم . اذا كان هناك توزيع سطحى منتظم بكثافة سطحية σ بالإضافة للتوزيع الحجمى المنتظم السابق فان الفيض يأخذ الصيغة :

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = 4\pi \iiint_V \rho d\tau + 2\pi \oiint_S \sigma dS$$

باستخدام العلاقة التكاملية

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = \iiint_V \left(\nabla \bullet \vec{E}\right) d\tau$$

وبالتعويض في المعادلة (12) نجد أن :

$$\nabla \bullet \vec{E} = 4\pi\rho \qquad (13)$$

وتعرف هذه المعادلة بالصيغة التفاضلية لقانون جاوس . اذا كانت $\rho = 0$ فان :

$$\nabla \bullet \vec{E} = 0 \qquad (14)$$

أي أنه عند النقط التي ليس بها شحنات يتلاشى تباعد المجال الالكتروستاتيكى .

معادلة بواسون

بوضع $\vec{E} = -\nabla\Phi$ في (13) نحصل على :

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho \qquad (15)$$

وهذه تسمى معادلة بواسون ، وهى معادلة أساسية في علم الكهربية .

معادلة لابلاس

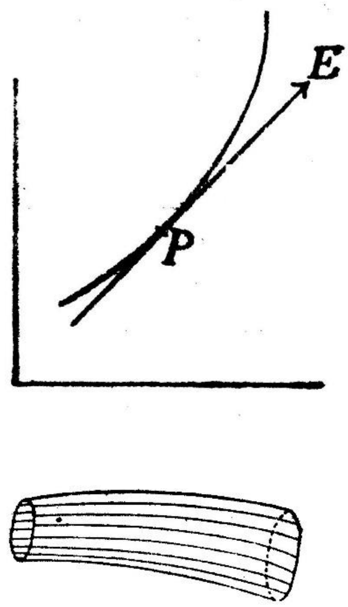
بوضع $\rho = 0$ في المعادلة (15) نحصل على :

$$\nabla^2\Phi = 0 \qquad (16)$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة لابلاس وهى احدى المعادلات الهامة في فروع الفيزياء النظرية.

خطوط القوى وأنابيب القوى

خط القوة هو المنحنى الذى يكون المماس له عند أي نقطة عليه ينطبق مع اتجاه المجال الكهربى عند هذه النقطة . بفرض أن $d\vec{\ell}$ هو عنصر الطول الاتجاهى من المنحنى ℓ فيكون :



شكل 2- 5

$$d\vec{\ell} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\vec{E} = E_X\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$$

$$d\vec{\ell} = \lambda\vec{E}$$

حيث $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ ، $\vec{k}$ متجهات الوحدة الأساسية ، ويكون :

$$\frac{dx}{E_X} = \frac{dy}{E_Y} = \frac{dz}{E_z} = \lambda$$

عامة عند كل نقطة في الفضاء يمر خط قوة واحد من خطوط القوى ، ولكن عندما يكون : $\vec{E} = \vec{0}$ فان اتجاه خط القوة عند هذه النقطة يكون غير محدد ، ومثل هذه النقطة تسمى نقطة التعادل . حزمة خطوط القوى التي تمر بمنحنى مغلق تسمى أنبوبة القوى . الفيض خلال أي مقطع من أنبوبة القوى يسمى شدة الانبوبة . أنبوبة الوحدة هي تلك الأنبوبة التي شدتها الوحدة .

ملاحظات :

(أ) خط تساوى الجهد يقطع خط القوة على التعامد لأن المجال الكهربى $\vec{E}$ يكون عموديا على خط تساوى الجهد .

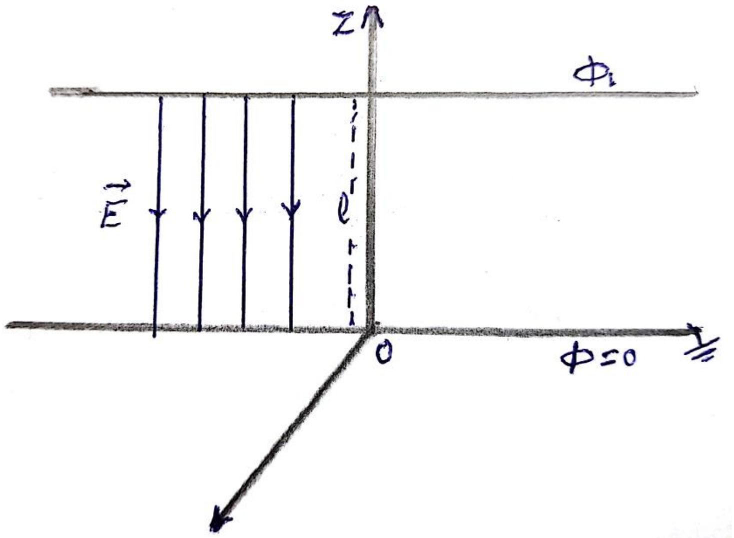
(ب) اذا شجن جسم موصل بشحنة فان هذه الشنة تستقرفقط وتتوزع على سطح الموصل أي لن توجد شحنات داخل هذا الموصل .

(ج) سطح الموصل هو سطح تساوى الجهد .

أمثلة محلولة

مثال (1) : استنتج الجهد الكهربى وشدة المجال الكهربى لمكثف يتكون من صفيحتين مستويتين موصلتين ولانهائيتين في الطول . احداهماموصلة بالأرض بينما الجهد على الصفيحة الأخرى عند أي نقطة عليها يساوى Φ_1 والمسافة بين الصفيحتين يساوى ℓ .

الحل : باختيار مجموعة المحاور الكارتيزية بحيث يكون المحور z عموديا على مستوى كل صفيحة . كما بالشكل .



شكل 2- 6

واضح من التماثل أن الجهد الكهربى (والمجال الكهربى) دالة في المتغير z أي أن $\Phi=\Phi(z)$ وتصبح معادلة لابلاس بالصورة :

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2}=0$$

ثم بالتكامل نجد أن :

$$\Phi=Az+B$$

باستخدام الشرطين : $\Phi=0$ عندما $z=0$ ، $\Phi=\Phi_1$ عندما $z=\ell$ نجد أن : $A=\frac{\Phi_1}{\ell}$ ، $B=0$ وبذلك فان دالة الجهد الكهربى تأخذ الصورة :

$$\Phi=\frac{\Phi_1}{\ell}z$$

وشدة المجال الكهربى تعطى بالعلاقة :

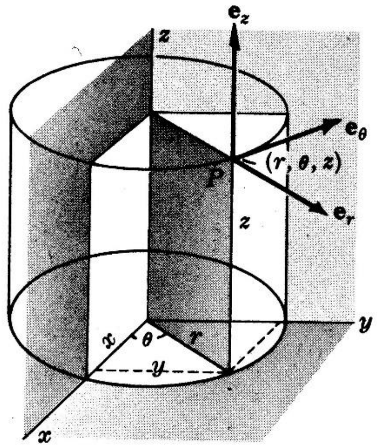
$$\vec{E} = -\frac{d\Phi}{dz}\vec{k} = -\frac{\Phi_1}{\ell}\vec{k}$$

حيث $\vec{k}$ متجه الوحدة في اتجاه المحور z. واضح أن المجال الكهربى مجال منتظم وفى اتجاه الصفيحة الموصلة بالأرض .

مثال (2): أوجد الجهد الكهربى والمجال الكهربى لمكثف يتكون من اسطوانتين لا نهائيتين في الطول ومشتركتين في المحور ، ونصف قطر الأسطوانة الداخلية a ودالة الجهد عند أي نقطة عليها Φ_a بينما الأسطوانة الخارجية موصلة بالأرض ونصف قطرها b .

الحل :

باختيار مجموعة المحاور الأسطوانية $(\rho \cdot \phi \cdot z)$ بحيث أن المحور z ينطبق على المحور المشترك لاسطوانتى المكثف من الواضح أن جميع النقط الواقعة على أسطوانة نصف قطرها ρ حيث $a \langle \rho \langle b$ متماثلة لكل من دالة الجهد الكهربى



شكل 2- 7

والمجال الكهربى . أي أن دالة الجهد $\Phi = \Phi(\rho)$. معادلة لابلاس في الاحداثيات الاسطوانية :

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

والتي تصبح في هذه الحالة بالصورة :

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\Phi}{d\rho}\right) = 0$$

ثم بالتكامل مرتين متتاليتين نجد أن :

$$\Phi = A\ln\rho + B$$

باستخدام الشرطين : $\Phi = \Phi_a$ عندما $\rho = a$ ، $\Phi = 0$ عندما $\rho = b$ نج أن :

$$A = -\frac{\Phi_a}{\ln b - \ln a} \quad , \quad B = \frac{\Phi_a \ln b}{\ln b - \ln a}$$

وشدة المجال للمكثف يعطى بالصورة :

$$\vec{E} = -\frac{d\Phi}{d\rho}\vec{e}_\rho = \frac{\Phi_a}{\rho(\ln b - \ln a)}\vec{e}_\rho$$

حيث $\vec{e}_\rho$ متجه الوحدة في اتجاه ρ . واضح أن المجال يتناسب عكسيا مع ρ , واتجاهه من الأسطوانة الصغرى الى الأسطوانة الكبرى .

مثال (3): أوجد الجهد الكهربى والمجال الكهربى لمكثف يتكون من قشرتين رقيقتين كرويتن ومشتركتين في المركز . نصف قطر الكرة الداخلية a ودالة الجهد عليها Φ_a . أما الكرة الخارجية فموصلة بالأرض ونصف قطرها b .

الحل : باختيار مجموعة المحاور الكرية (r,θ,ϕ) . من الواضح أنه لجميع النقط الواقعة على سطح كرة نصف قطرها $a<r<b$ فان دالة الجهد والمجال الكربى متماثلان لهذه النقط أي أن :

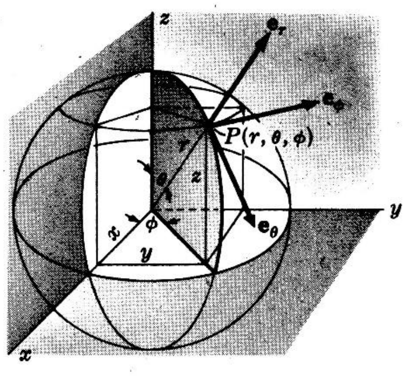


Fig. 22-13. Spherical coordinates.

شكل 2- 8

أي أن : $\Phi = \Phi(r)$ ، ومعادلة لابلاس في الاحداثيات الكرية هي :

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = 0$$

والتي تصبح في هذه الحالة بالصيغة :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = 0$$

بالتكامل نجد أن :

$$\Phi = -\frac{A}{r} + B$$

باستخدام الشرطين : $\Phi = \Phi_a$ عندما $r = a$ ، $\Phi = 0$ عندما $r = b$. نجد أن :

$$A = -\frac{ab\Phi_a}{b-a} \quad ، \quad B = -\frac{a\Phi_a}{b-a}$$

وبذلك فان :

$$\Phi = \frac{a\Phi_a}{b-a}\left(\frac{b}{r} - 1\right)$$

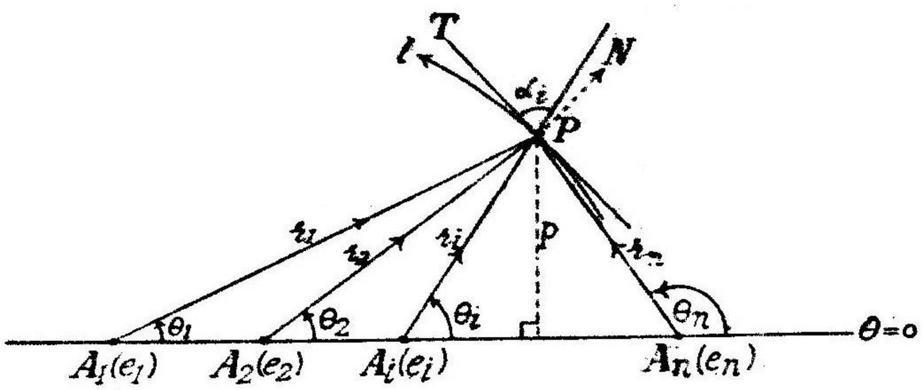
$$\vec{E} = -\frac{d\Phi}{dr}\vec{e}_r = \frac{ab\Phi_a}{r^2(b-a)}\vec{e}_r$$

أي أن المجال الكهربى يتناسب عكسيا مع r^2 واتجاهه من القشرة الصغرى الى القشرة الكبرى.

الظاهرة الكهربية لتركيبات من الشحنة

1- مجموعة من الشحنات على خط مستقيم

نفرض أن $e_1, e_2, ..., e_n$ مجموعة من الشحنات المركزة على الخط المستقيم $\theta = 0$ عند النقط $A_1, A_2, ..., A_n$. نفرض أن النقطة P على خط القوة ℓ كما هو موضح بالشكل . المجال الكهربى الكلى $\vec{E}$ يجب أن يكون في اتجاه المماس لخط القوة المار بالنقطة P . أي أن المركبة العمودية للمجال على المماس يجب أن تتلاشى . أي أن :



شكل 2- 9

$$\frac{e_1}{r_1^2}\sin\alpha_1 + \frac{e_2}{r_2^2}\sin\alpha_2 + ... + \frac{e_n}{r_n^2}\sin\alpha_n = 0 \qquad (1)$$

حيث α_i هي الزاوية بين $\vec{E}_i$ والمماس عند النقطة P لخط القوة ℓ , وحيث أن :

$\sin\alpha_i = r_i \dfrac{d\theta_i}{d\ell}$ فان المعادلة (1) تأخذ الصورة :

$$\frac{e_1}{r_1} d\theta_1 + \frac{e_2}{r_2} d\theta_2 + \dots\dots + \frac{e_n}{r_n} d\theta_n = 0 \qquad (2)$$

باستخدام العلاقات :

$$r_1 \sin\theta_1 = r_2 \sin\theta_2 = \dots\dots = r_n \sin\theta_n = m \qquad (3)$$

والتعويض في المعادلة (2) نحصل على :

$$e_1 \sin\theta_1 d\theta_1 + e_2 \sin\theta_2 d\theta_2 + \dots\dots + e_n \sin\theta_n d\theta_n = 0 \qquad (4)$$

وبتكامل هذه المعادلة نجد أن :

$$e_1 \cos\theta_1 + e_2 \cos\theta_2 + \dots\dots + e_n \cos\theta_n = cons. \qquad (5)$$

لجميع قيم الثابت نحصل على معادلات خطوط القوى لتوزيع الشحنات السابق . واضح أن هذه الخطوط تقع على سطح محوره ℓ . أما خطوط تساوى الجهد التي تقطع خطوط القوى على التعامد فتتعين من :

$$\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \dots\dots + \frac{e_n}{r_n} = const.$$

أي أن :

$$e_1 \sin\theta_1 + e_2 \sin\theta_2 + \dots\dots + e_n \sin\theta_n = const. \qquad (6)$$

لجميع قيم الثابت نحصل على معادلات خطوط تساوى الجهد .

2- المجال الكهربى والجهد الكهربى لشحنات خطية

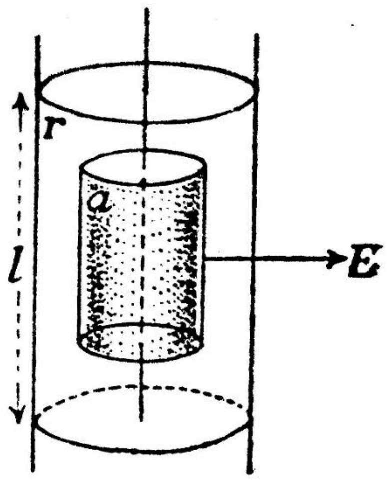
اذا وزعت شحنات خطية توزيعا متصلا على خط مستقيم لا نهائى الطول يسمى هذا التوزيع بالتوزيع الخطى للشحنة , وتسمى الشحنة e على وحدة الطول الكثافة الطولية . واذا كانت e لها نفس القيمة عند كل نقطة يسمى التوزيع بالتوزيع المنتظم للشحنة . لايجاد شدة المجال الكهربى والجهد الكهربى الناتج عن سلك

مشحون بشحنة منتظمة نفرض أن السلك عبارة عن أسطوانة نصف قطرها a صغير جدا وعليها شحنة خطية منتظمة . والآن نتخيل أسطوانة نصف قطرها r متحدة المحور مع الأسطوانة السابقة . الفيض الكلى الخارج من الأسطوانة الخارجية لطول مقداره L هو : $2\pi rLE$ حيث E مقدار شدة المجال . وحيث أن الشحنة الداخلية الكلية هي (eL) فانه بتطبيق نظرية جاوس للفيض نجد أن :

$$2\pi rLE = 4\pi(eL)$$

$$E = \frac{2e}{r} \qquad (7)$$

$$E = -\frac{d\Phi}{dr} = \frac{2e}{r}$$



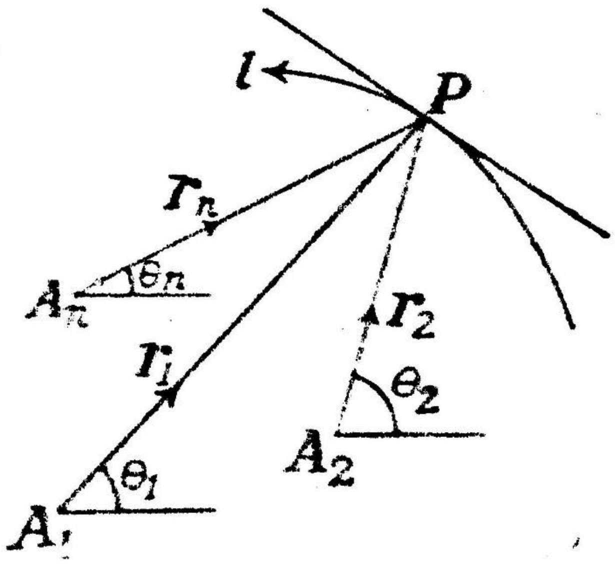
شكل 2- 10

ثم بالتكامل نجد أن :

$$\Phi = const. - 2e\ln r \qquad (8)$$

العلاقتان (7) ، (8) لا يعتمدا على نصف قطر الأسطوانة الداخلية ، وبفرض أن $a \to 0$ أي أن الأسطوانة الداخلية آلت الى سلك مشحون بشحنة خطية منتظمة فتكون (7) ، (8) هما المعادلتان لشدة المجال الكهربى والجهد الكهربى للسلك المشحون .

لايجاد خطوط القوى لمجموعة من الأسلاك ا لمتوازية اللانهائية الطول والمشحونة بشحنات منتظمة : نفرض أن الكثافة الطولية للشحنة لهذه الأسلاك هي $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n$ ونفرض أن الأسلاك تقطع على التعامد مستوى في النقط $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ على الترتيب ،ونفرض أن P نقطة على خط القوة ℓ في هذا المستوى ، ونفرض أن : $A_1P, A_2P, \ldots\ldots, A_nP$ تصنع الزوايا $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots, \theta_n$ مع خط ثابت في المستوى $\theta = 0$ كما هو موضح بالشكل .



شكل 2- 11

وحيث أن مركبة المجال الكهربى الكلى العمودية على المماس عند النقطة P للمنحنى ℓ يجب أن تتلاشى فان :

$$\frac{2e_1}{r_1}\sin\alpha_1 + \frac{2e_2}{r_2}\sin\alpha_2 + \ldots\ldots + \frac{2e_n}{r_n}\sin\alpha_n = 0 \qquad (9)$$

حيث α_i هي الزاوية بين A_iP والمماس للمنحنى وحيث أن : $\sin\alpha_i = r_i \dfrac{d\theta_i}{d\ell}$ فان :

$$e_1 d\theta_1 + e_2 d\theta_2 + \ldots\ldots + e_n d\theta_n = 0$$

ثم بالتكامل نجد أن :

$$e_1\theta_1 + e_2\theta_2 + \ldots\ldots + e_n\theta_n = const. \qquad (10)$$

لقيم الثابت المختلفة تعطى المعادلة (10) معادلة خطوط القوى في المستوى لمجموعة الأسلاك

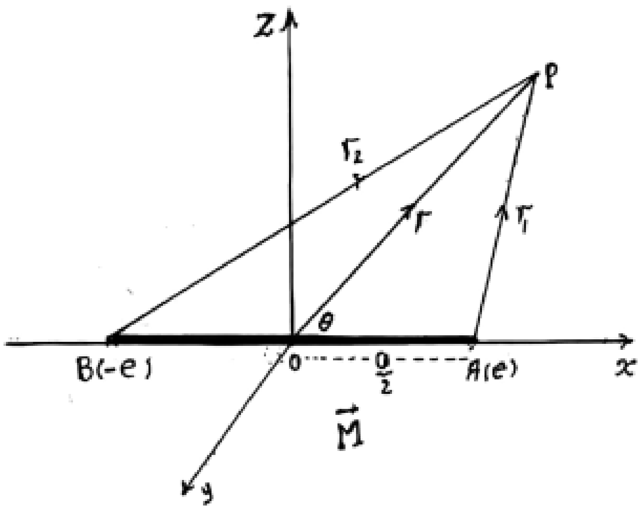
المتوازية المشحونة بشحنات خطية منتظمة . أما خطوط تساوى الجهد في هذا المستوى فتتعين من المعادلة :

$$e_1 \ln r_1 + e_2 \ln r_2 + \ldots\ldots + e_n \ln r_n = const. \qquad (11)$$

3-- المزدوج الكهربى

هو عبارة عن شحنتين كهربيتين كبيرتين جدا $(+e),(-e)$ تبعدان عن بعضهما بمسافة صغيرة جدا $\delta\ell$. ويتميز المزدوج الكهربى بمتجه يسمى متجه العزم أو الشدة الكهربية ، وهذا المتجه يعطى بالصيغة الرياضية :

$$\vec{M} = \lim_{\delta\ell \to \infty} \left(e\delta\vec{\ell} \right)$$



شكل 2- 12

المتجه الواصل من الشحنة السالبة الى الشحنة الموجبة يسمى محور المزدوج وهو نفس اتجاه متجه العزم الكهربى . الجهد الكهربى للمزدوج عند النقطة $P(\vec{r})$ يمكن وضعه بالصورة :

$$\Phi(P) = \frac{(+e)}{r_1} + \frac{(-e)}{r_2} = e\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \qquad (12)$$

باختيار مجموعة المحاور الكارتيزية (x, y, z) بحيث ينطبق محور المزدوج على المحور x كما هو موضح بالشكل . فانه يمكن وضع :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, M = ae$$

حيث a طول المزدوج الكهربى (a صغيرة جدا) . وكذلك :

$$r_1 = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2} = r\left(1 - \frac{ax}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (13)$$

$$r_2 = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2} = r\left(1 + \frac{ax}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (14)$$

ثم بالتعويض في (12) نجد أن فان الجهد الكهربى للمزدوج يصبح بالصورة :

$$\Phi(P) = \frac{e}{r}\left[\left(1 - \frac{ax}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{ax}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{ae}{r^2}\frac{x}{r}$$

$$= \frac{M\cos\theta}{r^2} = \frac{\vec{M}\bullet\vec{r}}{r^3} \qquad (15)$$

حيث θ هي الزاوية بين المتجهين : $\vec{r},\vec{M}$. المجال الكهربى عند النقطة P يكون :

$$\vec{E} = -\nabla\Phi = -\nabla\left(\frac{\vec{M}\bullet\vec{r}}{r^3}\right) = -\frac{\vec{M}}{r^3} + 3\frac{\vec{M}\bullet\vec{r}}{r^5}\vec{r} \qquad (16)$$

والمركبتان القطبيتان للمجال الكهربى يتعينا من العلاقتين :

$$E_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{2M\cos\theta}{r^3} \qquad (17)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{M\sin\theta}{r^3} \qquad (18)$$

والمعادلة التفاضلية القطبية لخطوط القوى تعطى بالصورة :

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta}$$

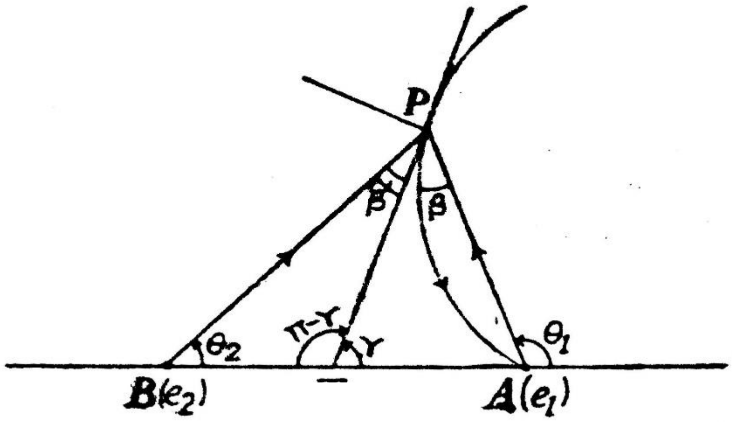
ثم بالتعويض والتكامل نحصل على معادلة خطوط القوى بالصيغة :

$$r = c\sin^2\theta \qquad (19)$$

مثال (4): ادرس خطوط القوى للشحنتين الموجبتين e_1,e_2 عند النقطتين A,B . ثم بين أن المماس عند اللانهاية (خط التقارب) لخط القوة الذى يبدأ من e_1 بزاوية ميل α مع BA يصنع مع BA الزاوية :

$$2\sin n^{-1}\left(\sqrt{\frac{e_1}{e_1+e_2}}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

الحل :



شكل 2- 13

نفرض أن P نقطة على خط القوة الذى يبدأ من A وينتهى عند مالانهاية . ونفرض أن الخط BA هو الخط : $\theta=0$. معادلة خطوط القوى هي :

$$e_1\cos\theta_1+e_2\cos\theta_2=C \qquad (1)$$

لايجاد C لخط القوة الذى يبدأ من A بزاوية ميل α وينتهى عند مالانهاية نستخدم الشرط عندما $P\to A$ فان : $\theta_2=0,\theta_1=\alpha$ ثم بالتعويض في المعادلة السابقة نجد أن :

$C=e_1\cos\alpha+e_2$ وتصبح معادلة خط القوة الذكور بالصورة :

$$e_1\cos\theta_1+e_2\cos\theta_2=e_1\cos\alpha+e_2 \qquad (2)$$

لايجاد ميل المماس عند اللانهاية (وهى زاوية ميل خط التقارب) نستخدم الشرط : عندما $P\to\infty$ فان $\theta_1=\theta_2=\theta$ ثم بالتعويض في المعادلة (2)نجد أن :

$$(e_1+e_2)\cos\theta=e_1\cos\alpha+e_2$$

$$(e_1+e_2)\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=e_1\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+e_2$$

$$(e_1+e_2)\sin^2\frac{\theta}{2}=e_1\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{e_1}{e_1+e_2}}\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\theta = 2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{e_1}{e_1+e_2}}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

تمارين

1- أوجد خطوط القوى لسلكين متوازيين ولانهائيين في الطول , والكثافة الطولية للشحنة لهما e , $-e$. أوجد كذلك منحنيات تساوى الجهد .

2- ثلاثة أسلاك لانهائية الطول , والكثافة الطولية للشحنة هي : 1, -2 , 1 وحدة شحنة . تقطع هذه الأسلاك على التعامد مستوى في ثلاث نقاط وعلى استقامة واحدة هي :

A , B , C على الترتيب حيث $AB = BC = a$. أثبت أن معادلة خطوط القوى هي : $r^2 = a^2\cos(2\theta+\alpha)\sec\alpha$ حيث B عند نقطة الأصل , BC خط قياس الزاوية θ , αa بارامتر .

3- ثلاثة أسلاك رفيعة متوازية ومتماثلة في الشحنة الخطية المنتظمة , وتقطع على التعامد مستوى في ثلاث نقاط A , B , C والتي تمثل رؤوس مثلث متساوى الأضلاع وطول ضلعه $\sqrt{3}c$. بين أن المعادلة القطبية لمنحنيات تساوى الجهد المرسومة في المستوى تكون على الصورة : $r^6 + c^6 - 2r^3c^3\cos\theta = cons.$ بفرض أن مركز المثلث هو نقطة الأصل .

4 – أربعة أسلاك متوازية ولانهائية الطول , وضعت بحيث تقطع على التعامد مستوى في أربع نقاط هي رؤوس المربع $ABCD$ والكثافة الطولية للشحنة المنتظمة هي :

e عند A , C , $-e$ عند B , D . اذا كان طول ضلع المربع هو $2a$

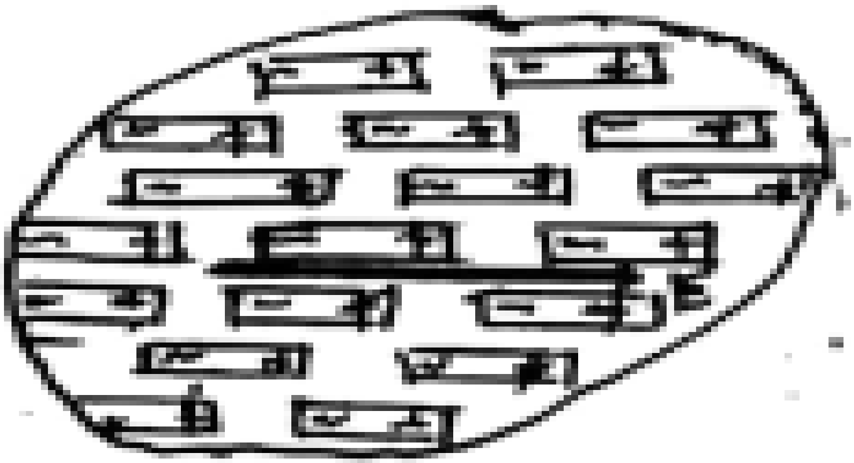
فأثبت أن الجهد Φ عند النقطة P الواقعة داخل المربع يأخذ الصورة :

$\Phi = 2er^2a^{-2}\cos 2\theta$ حيث (r,θ) الاحداثيات القطبية للنقطة بالنسبة لمركز المربع .

المواد العازلة القابلة للاستقطاب

وجد بالتجربة أن بعض المواد العاذلة مثل الميكا والزجاج اذا أثر عليها كهربيا فانها تستقطب بمعنى أن كل عنصر صغير منها يتحول الى مزدوج كهربى , وهذه الظاهرة يمكن تفسيرها بطريقتين كما يلى :

(أ) تحتوى ذرات أي مادة على شحنات موجبة وأخرى سالبة . فاذا كانت المادة موصلة فان الشحنات السالبة تكون حرة الحركة في المادة الواقعة تحت تأثيرمجال كهربى فينتج سريان للتيارالكهربى . أما اذا كانت المادة عاذلة وقابلة للاستقطاب فان هذا السريان لا يحدث ولكن المجال الكهربى المؤثريزيح الشحنات في الذرة إزاحة طفيفة بحيث تزاح الشحنة الوجبة في اتجاه المجال المؤثر والشحنة السالبة في الاتجاه المضاد , وبذلك تظهر المزدوجات الكهربية في المادة المستقطبة في اتجاه المجال الكهربى .



شكل 2- 14

(ب) يمكن تخيل أن جزيئات المادة العاذلة مكونة أساسا من مزدوجات كهربية موزعة في المادة توزيعا عشوائيا بحيث يتكون كل عنصر صغير منها على عدد كبير من هذه المزدوجات ولا يبدو هذا العنصر مستقطبا لأن هذه المزدوجات تلاشى بعضها بعضا , ولكن اذا وضعت هذه المادة في مجال كهربى فانه يحدث انتظام في اتجاهات هذه المزدوجات وتأخذ اتجاه المجال , وتصبح المادة مستقطبة .

متجه الاستقطاب

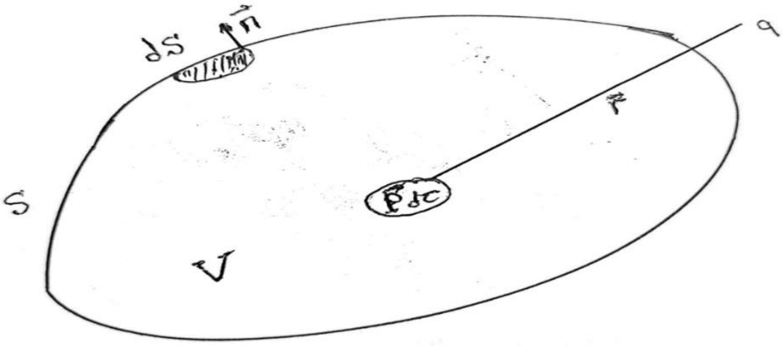
ندخل الآن مفهوما يميز شدة الاستقطاب للمادة وهو متجه الاستقطاب $\vec{P}$ والذى يعرف بأنه متجه عزم المزدوج الكهربى المكافئ لوحدة الحجوم للمادة المستقطبة . فاذا كان لدينا حجم من المدة $d\tau$ فانه يكافئ مزدوجا كهربيا عزمه : $\vec{P}d\tau$. لكثير من المواد تكون هناك علاقة خطية بين المتجه $\vec{P}$ ومتجه شدة المجال الكهربى $\vec{E}$ عند أي نقطة داخل المادة المستقطبة . أي أن :

$$\vec{P} = k\vec{E}$$

حيث k ثابت يتوقف على المادة ويسمى معامل القابلية للاستقطاب . اذا كان متجه الاستقطاب ثابت في المقدار والاتجاه عند جميع نقط المادة المستقطبة قيل أن الاستقطاب منتظم .

قاعدة بواسون للتوزيع المكافئ

نفرض أن لدينا جسما مستقطبا حجمه V ومحاط بالسطح S وأن $d\tau$ عنصر حجم من هذا الجسم . هذا العنصر يكافئ مزدوجا كهربيا متجه عزمه $\vec{P}d\tau$. فاذا كانت q نقطة خارج الجسم المستقطب فان الظاهرة الكهربية الناشئة عن الجسم عند النقطة q تتميز بمتجه المجال $\vec{E}$ ودالة الجهد Φ , ويقدران بتكامل تأثيرات المزدوجات الكهربية المكونة للجسم .



شكل 2- 15

لحساب دالة الجهد عند النقطة q نفرض أن الجهد الناتج عن المزدوج الكهربى $\vec{P}d\tau$ هو :

$$d\Phi = \vec{P}d\tau \bullet \nabla\left(\frac{1}{r}\right)$$

ويكون الجهد الناتج عن الجسم عند النقطة q هو :

$$\Phi_q = \iiint_V \vec{P} \bullet \nabla\left(\frac{1}{r}\right) d\tau = \iiint \left[\nabla \bullet \left(\frac{\vec{P}}{r}\right) - \frac{\nabla \bullet \vec{P}}{r}\right] d\tau$$

ويكون:

$$\Phi_q = \iiint_V \left(\frac{-\nabla \bullet \vec{P}}{r} \right) d\tau + \oiint_S \frac{\vec{P} \bullet d\vec{S}}{r} = \iiint_V \left(\frac{-\nabla \bullet \vec{P}}{r} \right) d\tau + \oiint_S \frac{P_n}{r} dS$$

وهذه النتيجة تبين أن الجسم المستقطب يكافئ تماما النموذج الكهربى التالى :

(1) مجموعة من الشحنات الموزعة على حجم الجسم وكثافتها الحجمية للشحنة هي :

$$\rho = -\nabla \bullet \vec{P}$$

(2) مجموعة من الشحنات الموزعة على سطح الجسم وكثافتها السطحية للشحنة هي :

$\sigma = P_n$ وهى المركبة العمودي لمتجه الاستقطاب على سطح الجسم المستقطب .

التوزيعان السابقان يعرفا بتوزيع بواسون المكافئ للجسم المستقطب .

واضح أن الشحنة الكلية الناتجة عن التوزيعين السابقين هي :

$$Q = \iiint_V \left(-\nabla \bullet \vec{P}\right) d\tau + \oiint_S P_n dS = -\iiint_V \left(\nabla \bullet \vec{P}\right) d\tau + \iiint_V \left(\nabla \bullet \vec{P}\right) d\tau = 0$$

كما هو متوقع لأنه يجب أن تكون الشحنة الكلية داخل الجسم المستقطب وعلى سطحه تساوى الصفر . شدة المجال الكهربى عند النقطة q الواقعة خارج الجسم المستقطب هو القوة المؤثرة على وحدة الشحنات الموجبة عند هذه النقطة ويحقق المعادلات :

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \quad , \nabla \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad , \oint \vec{E} \bullet d\vec{\ell} = 0$$

الظاهرة الكهربية داخل الجسم المستقطب تتميز أيضا بمتجه المجال الكهربى $\vec{E}$ ويحقق المعادلات السابقة .

متجه الازاحة الكهربية

عند أي نقطة داخل الجسم المستقطب يتحقق توزيع بواسون المكافئ . وهذا يعنى أن المجال $\vec{E}$ عند أي نقطة داخل الجسم المستقطب يرتبط بكثافة الشحنة الحجمية عند هذه النقطة (أي بالكثافة $-\nabla \bullet \vec{P}$) بواسطة نظرية جاوس للفيض . أي أن :

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = 4\pi \iiint_V \left(-\nabla \bullet \vec{P}\right) d\tau$$

حيث S هو سطح الجسم المستقطب المحيط بالحجم V . وباستحدام العلاقة التكاملية :

$$\oiint \vec{E} \bullet d\vec{S} = \iiint_V \left(\nabla \bullet \vec{E}\right) d\tau$$

وبالتعويض في نظرية جاوس للفيض نحصل على :

$$\nabla\bullet\left(\vec{E}+4\pi\vec{P}\right)=0$$

والآن يمكن تعريف متجه جديد لتمييز الظاهرة الكهربية داخل المادة المستقطبة والذى يمكن وضعه بالصورة :

$$\vec{D}=\vec{E}+4\pi\vec{P}$$

ويسمى متجه الازاحة الكهربية ويحقق العلاقة الرياضية : $\nabla\bullet\vec{D}=0$, وهذا صحيح في حالة الجسم المستقطب فقط وغير مشحون بشحنات إضافية من الخارج . وحيث أن $\vec{P}=k\vec{E}$ وبالتعويض فان متجه الازاحة الكهربية يأخذ الصيغة :

$$\vec{D}=\vec{E}+4\pi k\vec{E}=K\vec{E}\quad ,K=1+4\pi k$$

ويسمى K ثابت الاستقطاب . واضح كذلك أن :

$$\nabla\bullet\left(K\vec{E}\right)=0\quad ,\quad \nabla\bullet\left(K\,\nabla\Phi\right)=0$$

فاذا كانت K لا تعتمد على الموضع فان دالة الجهد تحقق معادلة لابلاس : $\nabla^2\Phi=0$.
أما اذا كان الجسم المستقطب مشحونا بشحنات حرة إضافية وكثافتها الحجمية ρ وبتطبيق نظرية جاوس للفيض نجد أن :

$$\nabla\bullet\vec{E}=4\pi\left(\rho-\nabla\bullet\vec{P}\right)\quad\Rightarrow\quad ,\nabla\bullet\left(\vec{E}+4\pi\vec{P}\right)=4\pi\rho$$

$$\nabla\bullet\vec{D}=4\pi\rho\qquad\Rightarrow\qquad \nabla\bullet\left(K\,\nabla\Phi\right)=-4\pi\rho$$

واذا كانت K لا تعتمد على الموضع فان دالة الجهد تحقق : $\nabla^2\Phi=-\frac{4\pi}{K}\rho$ وهى معادلة بواسون . في حالة الفضاء $\rho=0$, وتصبح $K=1$ ويكون $\vec{D}=\vec{E}$,

نتائج

1) اذا تخيلنا سطحا مغلقا مرسوم داخل المادة فانه ينتج مما سبق أن :

أ- اذا كانت المادة غير مشحونة بشحنات حرة فان :

$$\oiint_S \vec{D}\bullet d\vec{S}=\iiint\left(\nabla\bullet\vec{D}\right)d\tau=0$$

ب- اذا كانت المادة مشحونة بشحنات حرة كثافتها الحجمية ρ فان :

$$\oiint_S \vec{D}\bullet d\vec{S}=\iiint_V\left(\nabla\bullet\vec{D}\right)d\tau=4\pi\iiint_V \rho\,d\tau$$

2) اذا كان الجسم منتظم الاستقطاب أي أن $\vec{P} = cons.$ فان المجال الكهربى داخل المادة يكون منتظما أي أن $\vec{E} = cons.$ ويحقق $\nabla \bullet \vec{E} = 0$ اذا لم تكن هناك شحنات حرة أي $\rho = 0$ ويؤول توزيع بواسون المكافئ الى توزيع سطحى فقط أي :

$$\Phi = \oiint_S \frac{P_n}{r} dS$$

3) اذا كانت النقطة التي نحسب عندها الجهد Φ خارج الجسم غير المشحون بشحنات حرة (أي أن $\rho = 0$) بعيدة جدا عن الجسم فان : $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$ تظل ثابتة أثناء عملية التكامل أي أن :

$$\Phi = \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \bullet \iiint_V \vec{P} d\tau = \vec{m} \bullet \nabla\left(\frac{1}{r}\right)$$

أي أنه في هذه الحالة نعتبر الجسم المستقطب كما لو كان مزدوجا كهربيا ومتجه عزمه يتعين بالصيغة : $\vec{m} = \iiint_V \vec{P} d\tau$

4) اذا وضعنا شحنة $+e$ في مادة ثابت استقطابها K وأحطنا هذه الشحنة بكرة نصف قطرها r ومركزها الشحنة $+e$ وكانت $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{P}$ عند أي نقطة على بعد r من الشحنة فان : شكل

$$\oiint_S \vec{D} \bullet d\vec{S} = 4\pi e \Rightarrow 4\pi r^2 D = 4\pi e \Rightarrow D = \frac{e}{r^2} \Rightarrow \vec{D} = \frac{e}{r^3} \vec{r}$$

والمجال الكهربى يتعين من : $\vec{E} = \frac{e}{Kr^3} \vec{r}$ ومتجه شدة الاستقطاب يأخذ الصورة :

$$\vec{P} = \frac{\vec{D} - \vec{E}}{4\pi} = \frac{(K-1)e}{4\pi r^3} \vec{r}$$

هذا يعنى أنه اذا كانت هناك شحنة e' على بعد r من الشحنة $+e$ فان القوة المؤثرة على الشحنة e' تكون بالصورة : $\vec{F} = \frac{ee'}{Kr^3} \vec{r}$ واذا لم تكن هتاك مادة فان $\vec{F} = \frac{ee'}{r^3} \vec{r}$, أي أن وجود الشحنة $+e$ داخل المادة انقص مقدارها من $+e$ الى $\frac{+e}{K}$ لأن $K \geq 1$ ويمكن فهم ذلك من توزيع بواسون كالآتى : اذا اعتبرنا الشحنة $+e$ على هيئة كرة نصف قطرها b المادة بعد أن تستقطب تكافئ توزيع حجمى كثافته تتعين من :

$$-\nabla \bullet \vec{P} = -\frac{(K-1)e}{4\pi K} \nabla \bullet \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$$

وتوزيع سطحى كثافته السطحية : $-P_{a=b}$ لأن $\vec{P}$ في اتجاه $\vec{r}$ أي عمودى على سطح الكرة , وهذا يعنى ان استقطاب المادة يضيف الى الشحنة $+e$ شحنة أخرى مقدارها

$$q = \lim_{b \to 0} 4\pi b^2 P_{r=b} = \lim_{b \to 0} -4\pi b^2 \frac{(K-1)e}{4\pi K b^2} = -\frac{(K-1)e}{K}$$

الإشارة السالبة لأن اتجاه $\vec{P}$ هو اتجاه $\vec{r}$ والاتجاه العمودى على السطح (سطح الكرة) نحو الخارج في اتجاه $-\vec{r}$ وبذلك تكون الشحنة الكلية :

$$+e - \frac{(K-1)e}{K} = \frac{e}{K}$$

الشروط السطحية

الشروط السطحية الواجب توفرها عند السطح الفاصل بين مادتين مستقطبتين يمكن الحصول عليها بفرض أن Sهو السطح الفاصل بين مادتين (1) , (2) وثابيى استقطابهما K_1 , K_2 على الترتيب . ونتخيل أسطوانة عمودية على السطح S ومساحة قاعدتها A وأن $\vec{n}$ متجه وحدة عمودى على السطح , واذا كانت هناك شحنات حرة على السطح الفاصل S وكثافتها السطحية σ وبفرض أن ارتفاع الأسطوانة صغير جدا بحيث يمكن اهمال فيض $\vec{D}$ على السطح الدورانى نحصل على :

$$D_{n2}A - D_{n1}A = 4\pi\sigma A \quad \Rightarrow \quad D_{n2} - D_{n1} = 4\pi\sigma$$

وهذا يعنى أن المركبة العمودية لمتجه الازاحة الكهربية عند السطح الفاصل المشحون تكون غير متصلة , وحيث أن

$$\vec{D} = K\vec{E} \ , \quad E_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

فنجد أن :

$$K_2 E_{n2} - K_1 E_{n1} = 4\pi\sigma \quad \Rightarrow \quad K_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} - K_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = -4\pi\sigma$$

واذا كان السطح غير مشحون أي $\sigma = 0$ فان :

$$D_{n2} - D_{n1} = 0 \ , \quad K_2 E_{n2} - K_1 E_{n1} = 0 \quad \Rightarrow \quad K_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = K_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n}$$

أما بخصوص المركبة المماسية لمتجه المجال الكهربى في اتجاه السطح الفاصل فانها تكون متصلة , أي أن $E_{t2} = E_{t1}$ ومنها نجد أن الجهد يكون دالة متصلة عند السطح أي $\Phi_2 = \Phi_1$ اذا فرضنا أن المادة (2) هي مادة موصلة فان $\vec{E}_2 = 0$ أي $\vec{E}_{t2} = 0$ ويكون $E_{t1} = 0$ أي أن المجال الكهربى في المادة (1) يكون فقط عموديا على السطح S أي أن :

$$E_1 = -\frac{4\pi\sigma}{K_1} \quad , \quad \sigma = +\frac{K_1}{4\pi}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial n} \quad , \quad \Phi_1 = \Phi_2$$

تطبيق

وضعت كرة نصف قطرها a وثابت استقطابها K في مادة ثابت استقطابها K_1 وممتدة الى اللانهاية , وأثر على المادتين مجال كهربى منتظم شدته $\vec{E}_0$. احسب دالة الجهد عند أي نقطة .

الحل : يوجد حيذان (1) , (2) داخل الكرة (2) : $0<r<a$ وخارج الكرة $a<r<\infty$.

بأخذ المحور z في اتجاه المجال المنتظم $\vec{E}_0$ خلال مركز الكرة o فيكون هذا المحور هو محور تماثل , واذا اخترنا الاحداثيات القطبية الكرية للتعبير عن دالة الجهد والتي تعتمدعندئذ على θ , r أي أن : $\Phi = \Phi(r,\theta)$ لذلك سنبحث عن دالتى الجهد : $\Phi_1(r,\theta)$, $\Phi_2(r,\theta)$ في المنطقتين (1) , (2) وكل منهما تحققا الشروط :

(أ) $\nabla^2\Phi_1 = 0$, $\nabla^2\Phi_2 = 0$ عندما نكتب معادلة لابلاس في الاحداثيات القطبية الكرية .

(ب) Φ_1 تكون وحيدة القيمة ومحدودة القيمة عندما $r=\infty$, Φ_2 تكون وحيدة القيمة ومحدودة القيمة عندما $r=0$.

(ج) $\Phi_1 = \Phi_2$ عندما $r=a$ لجميع قيم الزاوية θ .

(د) $K_1\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial r} = K_2\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial r}$ عندما $r=a$ لجميع قيم الزاوية θ .

لذلك نركب الدالتين Φ_2 , Φ_1 من الدوال :

$$\frac{C}{r} \quad , \quad \frac{A\cos\theta}{r^2} \quad , \quad Br\cos\theta \quad , \quad -E_0 r\cos\theta$$

داخل الكرة $0<r<a$ نختار $\Phi_2 = Br\cos\theta$.

خارج الكرة $a<r<\infty$ يجب أن يؤول الجهد الى ذلك المجال المنتظم عند $r=\infty$ كما ان المجال عند النقط البعيدة يكون قريبا من ذلك للمزدوج الكهربى . لذا نختار

$$\Phi_1 = -E_0 r\cos\theta + \frac{A\cos\theta}{r^2}$$

ثم بتطبيق الشرطين (ج) , (د) نحصل على :

$$-E_0 a\cos\theta + \frac{A\cos\theta}{a^2} = Ba\cos\theta$$

$$K_1\left[-E_0\cos\theta-\frac{2A\cos\theta}{a^3}\right]=K_2B\cos\theta$$

$$-E_0+\frac{A}{a^3}=B\quad,\ -E_0-\frac{2A}{a^3}=\frac{K_2}{K_1}B$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن :

$$A=\frac{K_2-K_1}{K_2+2K_1}E_0a^3\quad,\quad B=\frac{-3K_1}{K_2+2K_1}E_0$$

وبذلك يكون :

$$\Phi_1=-E_0r\cos\theta+\frac{K_2-K_1}{K_2+2K_1}\cdot\frac{E_0a^3}{r^2}\cos\theta$$

$$\Phi_2=\frac{-3K_1E_0}{K_2+2K_1}\cdot r\cos\theta$$

نتيجة (1) : نستطيع أن نوجد توزيع من الشحنات في الفضاء والمكافئ للتركيبة السابقة ويعطى نفس دالتى الجهد Φ_2 , Φ_1 وذلك من

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+0=4\pi\rho$$

$$\left(E_{n1}-E_{N2}\right)_{r=a}=4\pi\sigma$$

والدالتان Φ_2 , Φ_1 تحققا معادلة لابلاس حيث $\rho=0$. في الحيزين (1) , (2) نضع

$$K_1=1\quad K_2=K$$

$$\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}-\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right)_{r=a}=-4\pi\sigma$$

$$-E_0\cos\theta-2\frac{K-1}{K+2}\cdot E_0\cos\theta+\frac{3}{K+2}\cdot E_0\cos\theta=-4\pi\sigma$$

$$\Rightarrow\quad\sigma=\frac{3(K-1)}{4\pi(K+2)}\cdot E_0\cos\theta$$

وهذا يعنى أن توزيع من الشحنات بكثافة سطحية σ على سطح الكرة (نصف قطرها a) وثابت استقطابها K موضوعة في الفضاء يعطى نفس الظاهرة الكهربية (مثل الكرة التي نصف قطرها a في مجال كهربى منتظم E_0) .

نتيجة (2) : اذا كانت الكرة هي فجوة في المادة K_1 فان :

$$\Phi_2 = \frac{-3K_1}{1+2K_1} \cdot E_0 r \cos\theta$$

مثال (5): احسب توزيع بواسون المكافئ في حالة كرة نصف قطرها a ومستقطبة بحيث كان متجه الاستقطاب يتعين من : $\vec{P} = \alpha \vec{r}$ حيث α ثابت , $\vec{r}$ متجه موضع نقطة بالنسبة الى مركز الكرة

الحل :

الكثافة الحجمية للشحنة تعطى من : $\rho = -\nabla \bullet \vec{P} = -\alpha \nabla \bullet \vec{r} = -3\alpha$

والكثافة السطحية تتعين من : $\sigma = \vec{P} \bullet \vec{n} = \alpha \vec{r} \bullet \frac{\vec{r}}{r} = \alpha r \quad \Rightarrow \quad \sigma = \alpha a$

لأن $r = a$ عند سطح الكرة . وواضح أن الشحنة الكلية :

$$Q = \iiint_V (-3\alpha) d\tau + \oiint_S (\alpha a) dS = (-3\alpha)\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) + (\alpha a)\left(4\pi a^2\right) = 0$$

التيارات الكهربية

عن توصيل موصلين دالتى الجهد عليهما Φ_1 , Φ_2 بواسطة سلك معدنى عندئذ يحدث سريان كهربى من الموصل ذي الجهد الأكبر للموصل الاخر حتى يتساوى الجهدان .

شدة التيار الكهربى

شدة التيار في موصل منتظم هو معدل تغير الشحنة Q أي أن : $I = \frac{dQ}{dt}$.

متجه كثافة التيار

معدل سريان التيار الكهربى عبر عنصر dS من سطح عند نقطة $p(\vec{r})$ هو : $\vec{j}\bullet d\vec{S}$ حيث

$\vec{j}=\vec{j}(\vec{r})$ هو متجه كثافة التيار .

معادلة الاتصال

معدل سريان الشحنة الكهربية خارج سطح S المحيط بالحجم V هو : $\oint\!\!\oint_S \vec{j}\bullet d\vec{S}$ ويساوى

معدل النقص في الشحنة , وبفرض أن السطح ثابت فيكون :

$$\oint\!\!\oint_S \vec{j}\bullet d\vec{S}=-\frac{\partial}{\partial T}\iiint_V \rho d\tau$$

وباستخدام العلاقة التكاملية :

$$\oint\!\!\oint_S \vec{j}\bullet d\vec{S}=\iiint_V \left(\nabla\bullet\vec{j}\right)d\tau$$

نجد أن :

$$\iiint_V \left(\nabla\bullet\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)d\tau=0$$

$$\nabla\bullet\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة الاتصال . عندما $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ فان : $\nabla\bullet\vec{j}=0$.

بوضع $\nabla\bullet\vec{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$ والتي تبين أن الشحنة المتباعدة في الثانية لكل وحدة حجوم تساوى معدل النقص في الشحنة بالنسبة للزمن لكل وحدة حجوم عند هذه النقطة .

تمارين

1 - شحنة $+e$ موضوعة أمام السطح المستوى لمادة ثابت استقطابها K ونصف لانهائية . أحسب القوة بين الشحنة والمادة .

2 - كرة نصف قطرها a منتظمة الاستقطاب وكان $\vec{P}$ متجه الاستقطاب . أحسب المجال الكهربى الكلى عند المركز الناتج عن الجزء السطحى من توزيع بواسون المكافئ .

3 - قضيب رفيع مساحة مقطعه A منطبق على المحور x من نقطة الأصل الى $x = L$ فاذا علم أن الاستقطاب كان في اتجاه القضيب ويتعين من : $\left|\vec{P}\right| = ax^2 + b$. أحسب الكثافة الحجمية لشحنة الاستقطاب وكذلك الكثافة السطحية لها عند كل طرف .

4 – ثلاث قشرات كروية رقيقة متحدة المركز $A\ ,\ B\ ,\ C$ أنصاف أقطارها $a\ ,\ b\ ,\ c$ على الترتيب حيث $a < b < c$. ملئ الفضاء بين $A\ ,\ B$ بمادة ثابت استقطابها K , والفضاء بين $B\ ,\ C$ بمادة ثابت استقطابها K' . وصلت القشرتان $A\ ,\ C$ بالأرض وشحنت القشرة B بشحنة كلية Q . أثبت أن Q تنقسم على السطحين الداخلى والخارجى للقشرة B بالنسبة : $\dfrac{Ka(c-b)}{K'c(b-a)}$.

الباب الثالث

الظاهرة المغناطيسية

الظاهرة المناطيسية في الفضاء تتحدد بوجود متجه $\vec{H}$ يعرف بمتجه شدة المجال المغناطيسى ودالة جهد قياسية Ω . ويمكن معالجة الظاهرة المغناطيسية بنفس الطريقة التي عالجنا بها الظاهرة الكهربية الاستاتيكية .

المجالات المغناطيسية تنشأ عادة من نوعين من الأجسام :

(أ) بواسطة شحنات كهربية متحركة أو تيارات كهربية .

(ب) بواسطة أجسام ممغنطة (مواد مغناطيسية) ويجب ملاحظة أن هناك فرق أساسى بين الظاهرة الكهربية والظاهرة المغناطيسية حيث من الممكن ظهور شحنات كهربية بصورة منفردة (موجبة أو سالبة) أما في الظاهرة المغناطيسية فان الأقطاب المغناطيسية تظهر في شكل أزواج متلازمة (أي قطب مغناطيسى موجب يلازمه قطب مغناطيسى سالب أو قطب شمالى يلازمه قطب جنوبي)

القانون العكسى لكولوم

لأى قطبين مغناطيسيين شدتهما p_1 , p_2 , وتفصلهما مسافة r ستظهر قوة بينهما تتناسب طرديا مع حاصل الضرب p_1p_2 وتتناسب عكسيا مع مربع المسافة بين القطبين , أي أن :

$$\vec{F} \propto \frac{p_1p_2}{r^3}\vec{r}$$

وثابت التناسب يتوقف على الوسط الموجود به هذين القطبين المغناطيسيين .

الجهد المغناطيسى لمغناطيس صغير

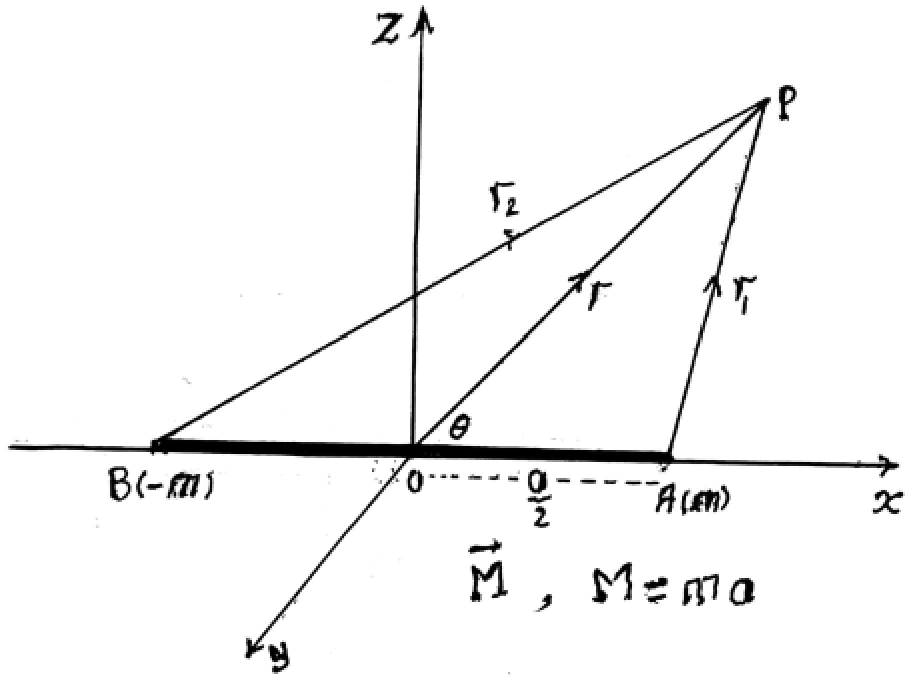
المغناطيس الصغير يسمى مزدوج مغناطيسى وهو يتكون من قطبين مغناطيسيين كبيرين تفصل بينهما مسافة صغيرة جدا . متجه العزم المغناطيسى للمزدوج يرمز له بالرمز $\vec{M}$ ومقداره :

$M = ma$ حيث m شدة القطب , a طول المغناطيس الصغير (a صغيرة جدا) .

اتجاه متجه العزم في اتجاه محور المزدوج (الخط الواصل من القطب السالب للقطب الموجب)

الجهد المغناطيسى الناشئ عن المزدوج عند النقطة $p(r)$ يعطى بالصيغة :

$$\Omega(p) = \frac{m}{r_1} + \frac{-m}{r_2} = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$



شكل 3- 1

باختيار مجموعة المحاور الكارتيزية بحيث ينطبق المحور x على محور المغناطيس الصغير كما هو موضح بالشكل , وعليه يمكن وضع :

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$r_1=\sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2+z^2}=r\left(1-\frac{ax}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$r_2=\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2+z^2}=r\left(1+\frac{ax}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

وبالتعويض فان دالة الجهد تصبح بالصورة :

$$\Omega(p)=\frac{m}{r}\left[\left(1-\frac{ax}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(1+\frac{ax}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]=\frac{ma}{r^2}\cdot\frac{x}{r}$$

وبفرض أن θ هي الزاوية بين المتجهين $\vec{M}$, $\vec{r}$ فتكون : $\cos\theta = \frac{x}{r}$, وتصبح دالة الجهد بالصورة :

$$\Omega(p) = \frac{M\cos\theta}{r^2} = \frac{\vec{M}\bullet\vec{r}}{r^3}$$

المجال المغناطيسى لمغناطيس صغير

شدة المجال المغناطيسى للمغناطيس الصغير عند النقطة p تتعين من العلاقة الآتية :

$$\vec{H} = -\nabla\Omega(p) = -\nabla\left(\frac{M\cos\theta}{r^2}\right)$$

وبذلك فان مركبة المجال في اتجاه تزايد r تعطى بالشكل :

$$H_r = -\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \frac{2M\cos\theta}{r^3}$$

أما مركبة المجال في اتجاه تزايد الزاوية θ فتعطى بالعلاقة :

$$H_\theta = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} = \frac{H\sin\theta}{r^3}$$

يمكن وضع المجال المغناطيسى أيضا بالصيغة :

$$\vec{H} = -\nabla\Omega = -\nabla\left(\frac{\vec{M}\bullet\vec{r}}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3}\nabla\left(\vec{M}\bullet\vec{r}\right) - \left(\vec{M}\bullet\vec{r}\right)\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$= -\frac{\vec{M}}{r^3} + \frac{3\left(\vec{M}\bullet\vec{r}\right)}{r^3}\vec{r}$$

وتكون :

$$H_M = -\frac{M}{r^3} \;\; , \;\; H_r = \frac{3M\cos\theta}{r^3}$$

المواد القابلة للمغنطة

عناصر هذه المواد عبارة عن مغناطيسات صغيرة . هذه المغناطيسات الصغيرة في حالة توزيع عشوائى . فاذا وضعت مادة قابلة للمغنطة في مجال مغناطيسى فانه يحدث تعديل في المغناطيسات الصغيرة بحيث يصبح اتجاه متجه العزم المغناطيسى لكل مغناطيس صغير في اتجاه المجال المغناطيسى الموجودة به هذه المادة القابلة للمغنطة وتصبح عندئذ المادة ممغنطة . لدراسة مثل هذه المواد نستخدم متجه يسمى متجه شدة المغنطة ويرمز له بالرمز $\vec{I}$ ويعرف بأنه متجه العزم المغناطيسى لوحدة الحجوم من المادة الممغنطة . وهناك علاقة (مبرهنة عمليا لبعض المواد الممغنطة) بين شدة المجال $\vec{H}$ والمتجه $\vec{I}$ للمادة الممغنطة بالصيغة :

$$\vec{I} = k\vec{H}$$

حيث k ثابت ويسمى بمعامل قابلية المادة للمغنطة . يرتبط مع المتجهين $\vec{I}$, $\vec{H}$ متجه آخر $\vec{B}$ ويسمى متجه الحث المغناطيسى بالعلاقة :

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{I} = \mu\vec{H}$$

حيث $\mu = 1 + 4\pi k$ ويسمى معامل النفاذية المغناطيسية . متجه الحث المغناطيسى يحقق :

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

الجهد الاتجاهى

من العلاقة $\nabla \bullet \vec{B} = 0$ فانه يمكن وضع متجه الحث المغناطيسى على الصورة :

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$$

يسمى المتجه $\vec{A}$ متجه الجهد الاتجاهى . اذا كان $\vec{A}'$ جهد اتجاهى فان $\vec{A}' + \nabla\Psi$ يمثل أيضا جهد اتجاهى (حيث Ψ دالة قياسية) , ويعطى نفس متجه الحث المغناطيسى , وذلك لأنه اذا كان $\vec{A} = \vec{A}' + \nabla\Psi$ فان : $\nabla \wedge \vec{A} = \nabla \wedge \vec{A}'$, ولذلك فانه لتحديد المتجه $\vec{A}$ الذى يتعين منه متجه الحث المغناطيسى تحديدا وحيدا فانه يلزم وضع شرط (قيد) على المتجه $\vec{A}$. من العلاقة $\vec{A} = \vec{A}' + \nabla\Psi$ نجد أن : $\nabla \bullet \vec{A} = \nabla \bullet \vec{A}' + \nabla^2\Psi$ سنختار الدالة القياسية Ψ بحيث تحقق الشرط : $\nabla^2\Psi = -\nabla \bullet \vec{A}'$ عندئذ فان متجه الحث المغناطيسى يعطى بالصورة : $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$ والمتجه $\vec{A}$ يحقق الشرط : $\nabla \bullet \vec{A} = 0$.

أمثلة محلولة

مثال (1):

أثبت أن الجهد الاتجاهى لمغناطيس صغير عند نقطة هو : $\vec{A}=\frac{\vec{M}\wedge\vec{r}}{r^3}$. حيث $\vec{M}$ متجه العزم المغناطيس للمغناطيس , $\vec{r}$ متجه موضع النقطة بالنسبة للمغناطيس .

الحل :

نفرض أن محور المغناطيس الصغير ينطبق على المحور oz بحيث يكون متجه العزم للمغناطيس الصغير بالصورة $\vec{M}=(0,0,M)$, ويصبح المتجه $\vec{A}$ بالصورة :

$$\vec{A}=\frac{\vec{M}\wedge\vec{r}}{r^3}=(\frac{-My}{r^3},\frac{Mx}{r^3},0)$$

ومنه نجد أن :

$$\nabla\wedge\vec{A}=\left(\frac{3Mxz}{r^5},\frac{3Myz}{r^5},\frac{3Mz^2}{r^5}-\frac{M}{r^3}\right)$$

وحيث أن $\vec{M}\bullet\vec{r}=Mz$ فانه يمكن وضع هذا المتجه بالشكل :

$$\nabla\wedge\vec{A}=\frac{3\vec{M}\bullet\vec{r}}{r^5}\vec{r}-\frac{\vec{M}}{r^3}$$

وهذا المتجه يمثل شدة المجال المغناطيسى للمغناطيس الصغير عند نقطة $p(r)$, والمتجه $\vec{A}$ يحقق الشرط :

$$\nabla\bullet\vec{A}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-My}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Mx}{r^3}\right)+0=0$$

وعليه فان المتجه $\vec{A}$ يمثل الجهد الاتجاهى للمغناطيس الصغير .

مثال (2) :

أثبت أن الجهد الاتجاهى لمجال مغناطيسى ثابت (حيث المجال المغناطيسى $\vec{H}$ في اتجاه المحور oz) يمكن وضعه في الصورة : $\vec{A}=\left[0,-aHz,(1-a)Hy\right]$ حيث a ثابت .

الحل :

متجه الدوران للمتجه $\vec{A}$ هو :

$$\nabla \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -aHz & (1-a)Hy \end{vmatrix} = (H, 0, 0)$$

والمتجه $\vec{A}$ يحقق الشرط :

$$\nabla \bullet \vec{A} = 0 + \frac{\partial}{\partial y}(-aHz) + \frac{\partial}{\partial z}(1-a)Hy = 0$$

ومن ذلك نستنتج أن المتجه $\vec{A}$ هو الجهد الاتجاهى للمجال المغناطيسى الثابت $\vec{H}$ حيث $\vec{H} = \vec{B}$.

مثال (3) :

باستخدام الاحداثيات الاسطوانية أثبت أنه اذا كان المجال المغناطيسى $\vec{H}$ في اتجاه المحور فان الجهد الاتجاهى يأخذ الصورة : $\vec{A} = \left(0, \frac{1}{2}H\rho, 0\right)$.

الحل :

متجه الدوران للمتجه المعطى $\vec{A}$ في الاحداثيات الاسطوانية يكون بالصورة :

$$\nabla \wedge \vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \dfrac{1}{2}A\rho^2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, H)$$

المتجه $\vec{A}$ يحقق الشرط :

$$\nabla \bullet \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{2}H\rho\right) = 0$$

من ذلك ينتج أن المتجه $\vec{A}$ يمثل الجهد الاتجاهى لمجال مغناطيسى ثابت في اتجاه المحور oz حيث $\vec{B} = \vec{H}$.

مثال (4) :

أثبت أنه لمجال مغناطيسى $\vec{H}$ يوازى محور الزاوية θ في الاحداثيات القطبية الكرية فان الجهد الاتجاهى يمكن وضعه بالصورة : $\vec{A} = \left(0, 0, \frac{1}{2} Hr \sin\theta\right)$.

الحل :

متجه الدوران للمتجه $\vec{A}$ في الاحداثيات القطبية الكرية يأخذ الصورة :

$$\nabla \wedge \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta \vec{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} Hr^2 \sin^2\theta \end{vmatrix}$$

$$= H\left(\cos\theta, -\sin\theta, 0\right)$$

والمتجه $\vec{A}$ يحقق الشرط :

$$\nabla \bullet \vec{A} = 0 + 0 + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{2} Hr \sin\theta\right) = 0$$

وعليه فان المتجه $\nabla \wedge \vec{A}$ يمثل شدة المجال المغناطيسى $\vec{H}$, ومركبته الأولى في اتجاه تزايد r والمركبة الثانية في اتجاه تناقص الزاوية θ . أي أن المجال المغناطيسى في اتجاه المحور oz وهو محور الزاوية θ .

الجهد لقشرة مغناطيسية منتظمة

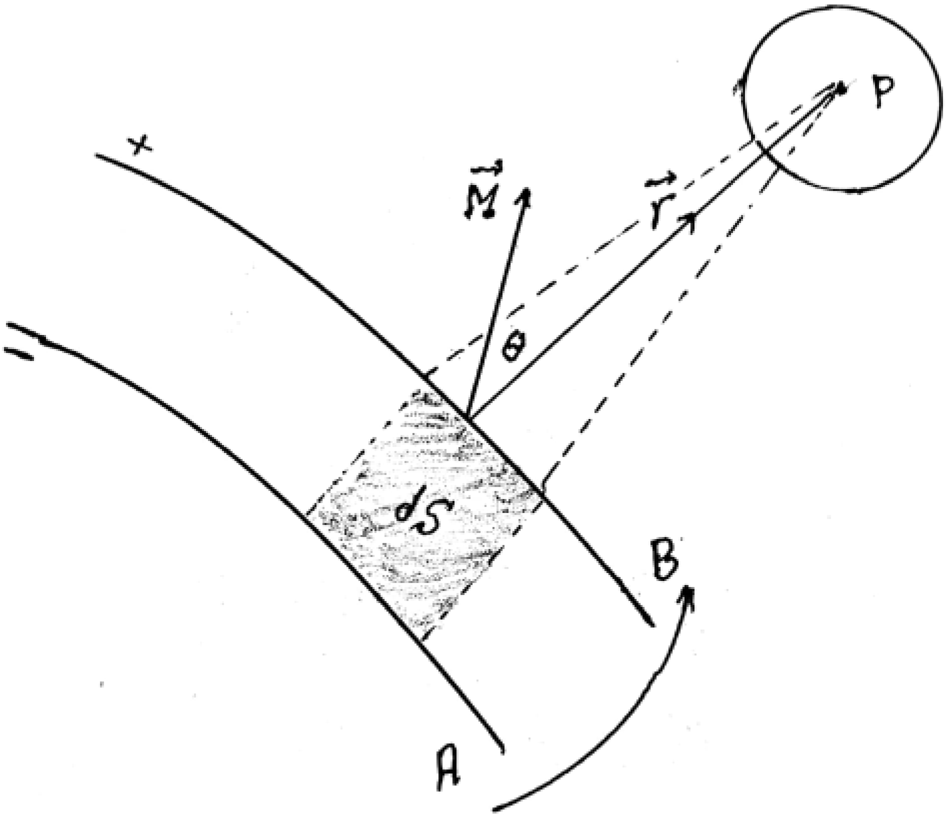
نعتبر قشرة ذات سمك صغير , ونفرض ان n هو عدد الأقطاب الموجبة المغناطيسية الصغيرة لوحدة السطح لهذه القشرة . ونفرض أن $\vec{M}$ هو متجه العزم لكل مغناطيس صغير. نفرض أن المغناطيسات الصغيرة موزعة توزيعا منتظما بحيث تكون الأقطاب الموجبة منطبقة على أحد سطحى القشرة بينما الأقطاب السالبة منطبقة على السطح الآخرللقشرة . لايجاد الجهد المناطيسى الناتج عن القشرة عند النقطة p فاننا نختار العنصر dS من سطح القشرة

المغناطيسية . نفرض أن r هو موضع النقطة p بالنسبة للعنصر dS. الجهد المغناطيسى الناتج عن العنصر السطحى عند النقطة p (الموضوعة في جهة الأقطاب الموجبة) يكون بالصورة :

$$d\Omega(p)=\frac{MndS\,\cos\theta}{r^2}$$

نرسم مخروط قاعدته العنصر dS ورأسه النقطة p فيكون :

$$\frac{dS\,\cos\theta}{r^2}=d\omega$$



شكل 3- 2

حيث $d\omega$ هي الزاوية المجسمة للمخروط الذى قاعدته dS . وعليه فان الجهد المغناطيسى الكلى الناشئ عن القشرة عند النقطة p يعطى بالعلاقة :

$$\Omega(p)=\Omega_+=\iint_S d\Omega=Mn\iint_S d\omega=Mn\omega$$

حيث $d\omega$ هي الزاوية المجسمة التي تصنعها القشرة عند النقطة p . بوضع $Mn = \Phi$ نجد أن :

$$\Omega_{+} = \Phi\omega$$

حيث Φ تمثل العزم المغناطيسى لوحدة السطح (لوحدة المساحة) أو الشدة المغناطيسية .
عندما تكون النقطة p على الجانب الآخر (اى في جهة الأقطاب السالبة) فان :

$$\Omega_{-} = -\Phi\omega$$

الشغل اللازم لنقل وحدة الأقطاب الموجبة من النقطة (الواقعة على سطح الأقطاب السالبة)

الى النقطة p (الواقعة على سطح الأقطاب الموجبة) يعطى بالعلاقة :

$$W = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \mu \int_A^B \vec{H} \bullet d\vec{\ell}$$

$$= \mu\left(\Omega_B - \Omega_A\right) = \mu\Phi\left(\omega_B + \omega_A\right)$$

$\vec{B} = \mu\vec{H}$ هو متجه الحث المغناطيسى , $d\vec{\ell}$ عنصر الازاحة ,وتعتمد الزاويتان المجسمتان ω_A , ω_B على محيط القشرة المغناطيسية . عندما تكون القشرة المغناطيسية ذات سمك صغير جدا فان النقطة A تنطبق تقريبا على النقطة B وفى هذه الحالة فان :
$\omega_A + \omega_B = 2\pi$ ويصبح الشغل عندئذ بالصورة :

$$W = 2\pi\mu\Phi$$

أمثلة محلولة

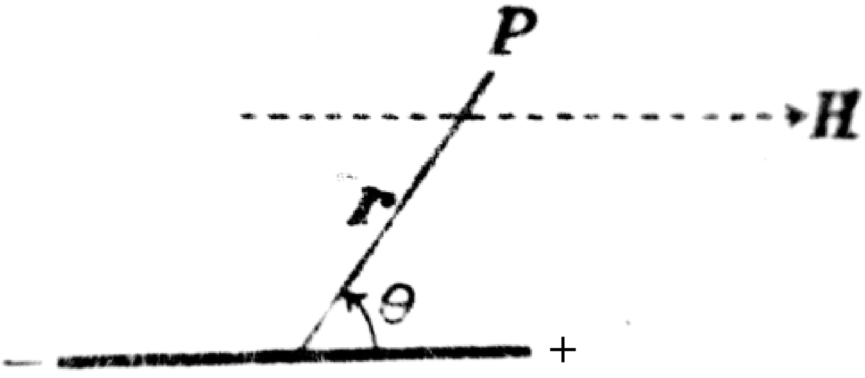
مثال (5) :

وضع مزدوج مغناطيسى عزمه $\vec{M}$ في مجال مغناطيسى منتظم $\vec{H}$ بحيث يكون محور المغناطيس يوازى المجال المغناطيسى . بين أن المجال المحصل بتلاشى على دائرة أو عند نقطتين . اوجد النسبة بين قطر الدائرة والمسافة بين النقطتين .

الحل :

محصلة المجال المغناطيسى $\vec{H}$ والمجال الناشئ عن المزدوج عند النقطة $p(r)$ هو :

$$\vec{H}_1 = \vec{H} - \frac{\vec{M}}{r^3} + \frac{3\vec{M}\bullet\vec{r}}{r^5}\vec{r}$$



شكل 3- 3

المجالان $\vec{M}$, $\vec{H}$ لهما نفس الاتجاه وعليه فان المجال $\vec{H}_1$ عبارة عن مجموع متجهين أحدهما في اتجاه المتجه $\vec{H}$ والآخر في اتجاه المتجه $\vec{r}$. يتلاشى المتجه المحصل $\vec{H}_1$ عندما يتلاشى معاملا $\vec{H}$, $\vec{r}$ أي عندما يكون :

$$H - \frac{M}{r^3} \quad , \quad \cos\theta = 0$$

ومنها نجد أن : $r = \left(\frac{M}{H}\right)^{\frac{1}{3}}$ ويكون r عمودى على $\vec{M}$. أي أن المجال $\vec{H}_1$ يتلاشى عند كل نقط الدائرة التي نصف قطرها $\left(\frac{M}{H}\right)^{\frac{1}{3}}$ وهذه الدائرة في مستوى عمودى على $\vec{M}$ أي أن الدائرة عمودية على محور المزدوج , ومن جهة أخرى اذا كان $\vec{M}$ في اتجاه مضاد للمتجه $\vec{H}$ فانه يمكن وضع $\vec{M} = -\lambda\vec{H}$ حيث $\lambda \geq 0$, ويكون المجال المحصل عندئذ بالصورة :

$$\vec{H}_1 = \left(1 + \frac{\lambda}{r^3}\right)\vec{H} - \frac{3\lambda\left(\vec{H}\bullet\vec{r}\right)}{r^5}\vec{r}$$

واضح من هذه العلاقة أن معامل $\vec{H}$ لا يساوى الصفر , ويتلاشى $\vec{H}_1$ فقط عندما يتوازى المتجهان $\vec{r}$, $\vec{H}$. وعندما يكون $\vec{r}$, $\vec{H}$ في نفس الاتجاه فان $\vec{H}_1$ يتلاشى عند النقطة (على محور المزدوج والتي موضعها r الذى يحقق :

$$\left(1+\frac{\lambda}{r^3}\right)H-\frac{3\lambda H}{r^3}=0$$

ومنها نجد أن : $r^3=2\lambda$. وعندما يكون $\vec{r}$, $\vec{H}$ في اتجاهين متضادين فان موضع النقطة يتحدد من :

$$\left(1+\frac{\lambda}{r^3}\right)H-\frac{3\lambda H}{r^3}=0$$

أي أن $r^3=2\lambda$. اى توجد نقطتان يتلاشى عندهما المجال $\vec{H}_1$. المسافة بين النقطتين هي $2r=2\left(2\lambda\right)^{\frac{1}{3}}$. وطول قطر الدائرة العمودية على محور المزدوج هي : $2r'=2\left(\frac{M}{H}\right)^{\frac{1}{3}}$

أي أن : $2r'=2\left(\lambda\right)^{\frac{1}{3}}$. وتكون النسبة بين قطر الدائرة والمسافة بين النقطتين هي :

$$\frac{2r'}{2r}=\frac{2\left(\lambda\right)^{\frac{1}{3}}}{2\left(2\lambda\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\left(2\right)^{\frac{1}{3}}}$$

مثال (6) :

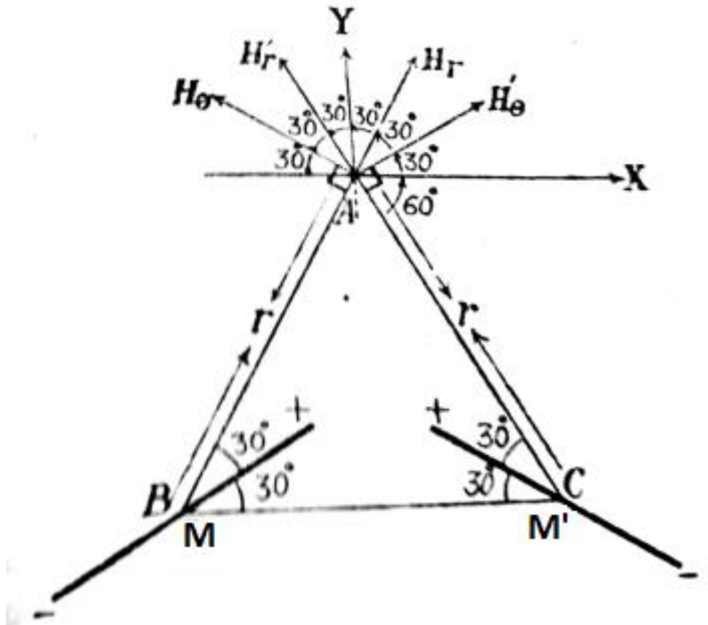
وضع مزدوجان عزمهما $\vec{M}'$, $\vec{M}$ عند الرأسين C , B للمثلث المتساوى الأضلاع ABC بحيث ينصف محور المزدوج الزاوية المناظرة , ثم وضع مغناطيس صغير عند A بحيث يدور بحرية . أثبت أن الزاوية بين محور المغناطيس الصغير ومنصف الزاوية A هي :

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{7}\bullet\frac{M-M'}{M+M'}\right)$$

الحل :

المزدوجان M' , M عند النقطتين C , B ينتجا عند النقطة المجالين المغناطيسيين :

$$\vec{H}=\left(H_r,H_\theta\right)\quad,\quad\vec{H}'=\left(H'_r,H'_\theta\right)$$



شكل 3- 4

$$H_r = \frac{2M\cos 30^o}{r^3} = \frac{\sqrt{3}M}{r^3} \quad , \quad H_\theta = \frac{M\sin 30^o}{r^3} = \frac{M}{2r^3}$$

$$H'_r = \frac{2M'\cos 30^o}{r^3} = \frac{\sqrt{3}M'}{r^3} \quad , \quad H'_\theta = \frac{M'\sin 30^o}{r^3} = \frac{M'}{2r^3}$$

مركبتا محصلة المجالين $\vec{H}'$, $\vec{H}$ هما Y , X حيث :

$$X = \left(H_r - H'_r\right)\cos 60^o + \left(H'_\theta - H_\theta\right)\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}\left(M - M'\right)}{4r^3}$$

$$Y = \left(H_r + H'_r\right)\cos 30^o + \left(H_\theta + H'_\theta\right)\cos 60^o = \frac{7\left(M + M'\right)}{4r^3}$$

خط القوة عند A (اتجاه المغناطيس الصغير عند A في حالة الاتزان) يميل على منصف الزاوية A بالزاوية θ حيث :

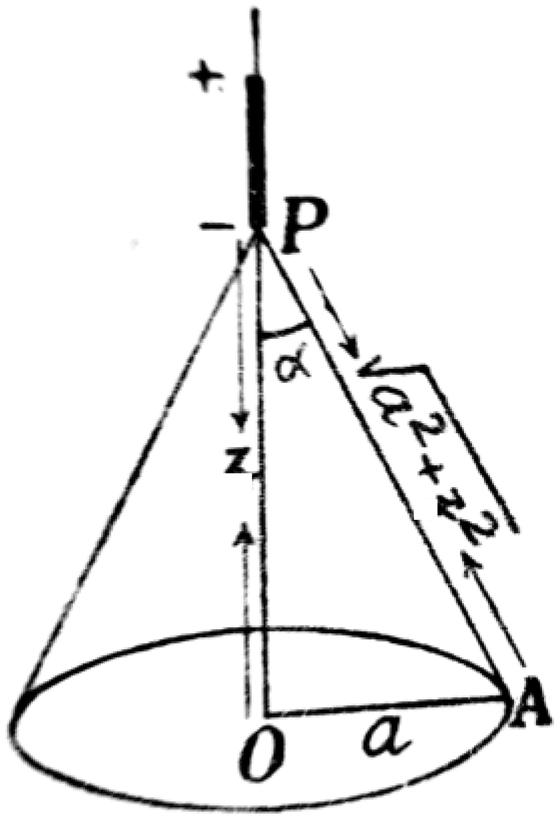
$$\tan\theta = \frac{X}{Y} = \frac{\sqrt{3}}{7}\bullet\frac{M - M'}{M + M'} \qquad \therefore \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{7}\bullet\frac{M - M'}{M + M'}\right)$$

مثال (7) :

قشرة مغناطيسية منتظمة شدتها Φ ومحدودة بمنحنى دائرى نصف قطره a . أوجد المجال المغناطيسى لهذه القشرة عند نقطة على محور القشرة وتبعد عن مركز الدائرة مسافة z . ثم أوجد القوة الميكانيكية المؤثرة على مغناطيس صغير يقع على محور القشرة (محور المغناطيس الصغير ينطبق على محور القشرة z) .

الحل :

أولا : نفرض أن النقطة p تبعد عن النقطة o بالمسافة z . الزاوية المجسمة عند النقطة p بواسطة المخروط الدائرى القائم هي :



شكل 3- 5

$$\omega = 2\pi\left(1-\cos\alpha\right)$$

ويكون الجهد المغناطيسى للقشرة عند p هو :

$$\Omega\left(p\right) = \Phi\omega = 2\pi\Phi\left(1-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

وشدة المجال للقشرة عند p يعطى بالصورة :

$$H=-\frac{\partial\Omega}{\partial z}=\frac{2\pi\Phi a^{2}}{\left(a^{2}+z^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ثانيا : نفرض أن $\vec{M}$ متجه عزم المغناطيس الصغير المنطبق على المحور z عند p , وبفرض أن القطبين$(-m),(+m)$ يبعدان عن النقطة o بالمسافتين : $z,z+dz$ القوتان المؤثرتان على القطبين المغناطيسيين هما : $-m\vec{H},+m\left(\vec{H}+d\vec{H}\right)$ وتكون القوة المؤثرة على المغناطيس الصغير (محصلة القوتين) هي :

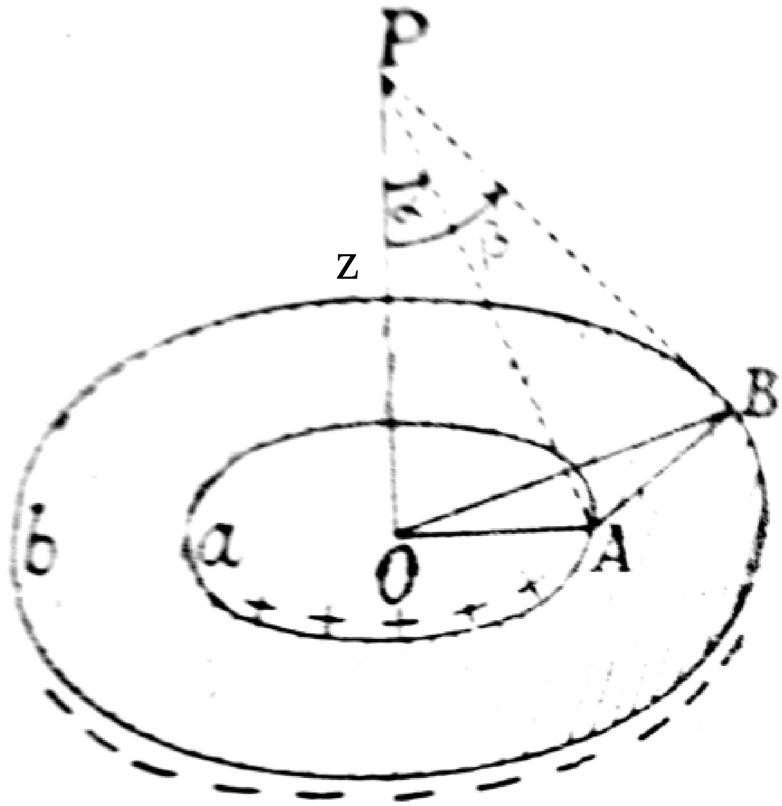
$$F=-mH+m\left(H+dH\right)=mH=-\frac{6\pi\Phi a^{2}z\left(mdz\right)}{\left(a^{2}+z^{2}\right)^{\frac{5}{2}}}=-\frac{6\pi\Phi a^{2}Mz}{\left(a^{2}+z^{2}\right)^{\frac{5}{2}}}$$

والاشارة السالبة تعنى أن القوة المؤثرة هي قوة جذب .

مثال (8) :

قشرة مغناطيسية منتظمة محدودة بالمنحنيين الدائريين والمشتركين في المركز o, ونصف قطريهما a,b . أثبت أن مجال القشرة يتلاشى عند نقطة على محور القشرة ويبعد عن المركز بالمسافة : $\dfrac{(ab)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}}$.

الحل :



شكل 3- 6

الجهد المغناطيسى للقشرة عند p يكون بالصورة :

$$\Omega = \Phi\left(\omega_b - \omega_a\right) = 2\pi\Phi\left\{\left(1-\cos\beta\right)-\left(1-\cos\alpha\right)\right\} = 2\pi\Phi\left(\cos\alpha - \cos\beta\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} \quad , \quad \cos\beta = \frac{z}{\sqrt{z^2+b^2}}$$

مقدار المجال المغناطيسى عند النقطة p يتعين من :

$$H = -\frac{\partial\Omega}{\partial z} = 2\pi\Phi\left\{\frac{b^2}{\left(b^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^2}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

يتلاشى المجال المغناطيسى $\vec{H}$ عندما يتحقق الشرط :

$$\frac{b^2}{\left(b^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a^2}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \therefore a^4\left(b^2+z^2\right)^3=b^4\left(a^2+z^2\right)^3$$

ومنها نجد أن :

$$z=z'=\frac{(ab)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}}$$

أي أن المجال $\vec{H}$ يتلاشى عند النقطة p' التي تبعد عن المركز o بالمسافة z' .

الشغل الكلى المبذول بالمجال المغناطيسى لنقل المغناطيس الصغير من مالانهاية الى نقطة معينة (تمثل طاقة الوضع للمغناطيس) يعطى بالعلاقة : $W=-\vec{M}\bullet\vec{H}$. وعند النقطة p' يكون :

$$W=-\vec{M}\bullet\vec{H}'=0$$

لأن $\vec{H}'=\vec{0}$ عند النقطة p' .

الباب الرابع

المجالات الكهرومغناطيسية المتغيرة

الآن نناقش حالة المجالات الكهرومغناطيسية المتغيرة مع الزمن .سنقدم مفهومين جديدين : مجال كهربى ينتج من مجال مغناطيسى متغير , وهذا المفهوم نتج من البحث التجريبى لميشيل فرداى . والمفهوم الثانى عبارة عن مجال مغناطيسى ينشأ عن مجال كهربى متغير مع الزمن .

قانون فرداى

بعد أن أوضح أورستد (1820م) أن تيارا كهربيا أثر على أبرة بوصلة . أعلن فرداى أنه اذا استطاع تيار كهربى انتاج مجال مغناطيسى فان المجال المغناطيسى يجب أن يكون قادرا على انتاج تيار كهربى . بدلالة المجالات يمكن القول بأن مجالا مغناطيسيا متغيرا مع الزمن ينتج قوة دافعة كهربية (e m f) والتي تنشئ تيارافى دائرة مغلقة . قانون فرداى يصاغ رياضيا فى الصورة :

$$emf = -\frac{dN}{dt} \qquad (1)$$

حيث N عبارة عن الفيض (الانسياب أو التدفق) المغناطيسى الكلى خلال المقطع العرضى لدائرة مغناطيسية . أي أن

$$N = \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{S} \qquad (2)$$

حيث $\vec{B}$ الحث المغناطيسى . العلاقة (1) تبين أن القوة الدافعة الكهربية كمية قياسية , وتعرف هذه الكمية القياسية كذلك بالصورة :

$$emf = \oint \vec{E} \bullet d\vec{l} \qquad (3)$$

حيث $\vec{E}$ شدة المجال الكهربى . عامة فان القوة الدافعة الكهربية تتغير اذا تغير شكل المسار من المعادلات (1)-(3) نجد أن :

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} \bullet d\vec{S} \qquad (4)$$

سنعتبر هنا أن المسار ساكن فان المعادلة (4) بالصورة :

$$emf = \oint \vec{E} \bullet d\vec{\ell} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{S} \qquad (5)$$

بتطبيق نظرية ستوكس فان المعادلة (5) تأخذ الصورة :

$$\iint_S \left(\nabla \wedge \vec{E}\right)\bullet d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{S}$$

وحيث أن dS عنصر سطح اختيارى فاننا نحصل على :

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (6)$$

هذه المعادلة تمثل احدى معادلات ماكسويل . المعادلة (6) تبين أن مجالا مغناطيسيا متغيرا مع الزمن ينشأ عنه مجال كهربى . وهذا المجال الكهربى له خاصية الدوران وتكامله الخطى حول مسار مغلق عامة لايساوى الصفر . اذا كان متجه الحث المغناطيسى $\vec{B}$ لايتغير مع الزمن فان المعادلتين (5) , (6) تؤولان على الترتيب الى المعادلتين الكهروستاتيكيتين :

$$\oint \vec{E}\bullet d\vec{\ell} = 0 \qquad (7)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = \vec{0} \qquad (8)$$

تيار الازاحة – قانون أمبير الدائرى

قانون أمبير الدائرى في حالة المجالات المغناطيسية التي لا تتغير مع الزمن يمكن كتابته في الصورة الرياضية :

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J} \qquad (9)$$

حيث $\vec{H}$ شدة المجال المغناطيسى , $\vec{J}$ متجه كثافة التيار . في حالة المجالات المغناطيسية التي تتغير مع الزمن فان المعادلة (9) تكون غير صحيحة وهذا واضح لأنه عندما نضرب طرفى المعادلة (9) قياسيا في المؤثر ∇ , أي أن :

$$\nabla\bullet\left(\nabla \wedge \vec{H}\right) = 0 = \nabla\bullet\vec{J}$$

والتي تقود الى النتيجة : $\nabla\bullet\vec{J} = 0$, وهذه النتيجة تتعارض مع معادلة الاتصال :

$$\nabla\bullet\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

وعليه فان المعادلة (9) صحيحة فقط اذا كانت : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. سنفرض اننا أضفنا حدا مجهولا $\vec{G}$ للطرف الأيمن للمعادلة (9) عندئذ فان (9) تأخذ الصورة :

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J} + \vec{G}$$

$$\therefore \quad \nabla\bullet\left(\nabla \wedge \vec{H}\right) = 0 = \nabla\bullet\vec{J} + \nabla\bullet\vec{G}$$

بمقارنة هذه المعادلة مع معادلة الاتصال نجد أن :

$$\nabla \bullet \vec{G} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

باستخدام المعادلة $\nabla \bullet \vec{D} = \rho$ فاننا نحصل على أبسط حل للمتجه $\vec{G}$ في الصورة :

$$\vec{G} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

وعلى ذلك فان قانون أمبير الدائرى يأخذ الصورة التفاضلية الآتية :

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (10)$$

المعادلة (10) لم تستنبط وانما هي صورة رياضية لقانون أمبير الدائرى حصلنا عليها ولا تتعارض مع معادلة الاتصال .المعادلة (10) متوافقة أيضا مع جميع النتائج الأخرى وهى معادلة مقبولة كما نفعل عادة مع اى قانون تجريبى والمعادلة المستنبطة منه . المعادلة (10) واحدة أخرى من معادلات ماكسويل . الحد الاضافى الموجود بالطرف الأيمن للمعادلة (10) أي الحد $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ له وحدات كثافة التيار (أمبير لكل متر مربع) ولأنه ينتج من التغير الزمنى لمتجه الازاحة $\vec{D}$ فانه يسمى كثافة تيار الازاحة ويرمز له بالرمز $\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. أما متجه كثافة التيار $\vec{J}$ فانه عبارة عن كثافة تيار التوصيل $\sigma \vec{E}$ (الذى ينتج من حركة الشحنات) وكذلك تيار الحمل $\rho \vec{v}$. في حالة الوسط الغير موصل ولا يوجد فيه كثافة شحنة حجمية (أي $\rho = 0$) فان المعادلة (10) تؤول الى الصورة البسيطة الآتية :

$$\nabla \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

تيار الازاحة الكلى العابر لأى سطح S يتعين بالتكامل :

$$I = \iint_S \vec{J}_d \bullet d\vec{S} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet d\vec{S} \qquad (11)$$

نستطيع الحصول على الصورة المتغيرة مع الزمن لقانون أمبير الدائرى التكاملية , وذلك بتكامل المعادلة (10) عل السطح S أي

$$\iint_S \left(\nabla \wedge \vec{H} \right) \bullet d\vec{S} = \iint_S \vec{J} \bullet d\vec{S} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet d\vec{S} = I + I_d$$

وبتطبيق نظرية ستوكس فان المعادلة السابقة تأخذ الصورة :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + I_d \qquad (12)$$

معادلات ماكسويل

حصلنا من قبل على معادلتين من معادلات ماكسويل للمجالات المتغيرة مع الزمن في الصورتين :

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (13)$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (14)$$

المعادلتان الباقيتان غير متغيرتين عن صورتيهما غير المتغيرة مع الزمن وهما :

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad (15)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (16)$$

المعادلات الأربعة السابقة هي معادلات ماكسويل التي تمثل الأساس لدراسة النظرية الكهرومغناطيسية , وهى معادلات تفاضلية جزئية تربط المجالات الكهربية والمغناطيسية ببعضها وبمنابعها (الشحنة وكثافة التيار) . التعرف على الصور التكاملية لمعادلات ماكسويل يكون عادة أسهل بدلالة القوانين التجريبية التي تم منها الحصول على هذه المعادلات بعملية تعميم (التجارب يجب أن تتعامل مع كميات ماكرسكوبية فيزيائية) . لذلك فان نتائج هذه التجارب يعبر عنها بعلاقات تكاملية .

سنحاول الآن إيجاد الصور التكاملية لمعادلات ماكسويل (13) – (16) السابقة . بتكامل المعادلة (13) لسطح S وتطبيق نظرية ستوكس نحصل على :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \qquad (17)$$

هذه المعادلة تسمى قانون فرداى . باجراء نفس العملية التكاملية على المعادلة (14) نجد أن :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \qquad (18)$$

والذى يسمى قانون أمبير الدائرى . باجراء التكامل الحجمى للمعادلة (15) وذلك باعتبار أن الحجم الكلى V محاط بالسطح S نجد أن :

$$\iiint_V \left(\nabla \cdot \vec{D}\right) d\tau = \iiint_V \rho \, d\tau$$

وباستخدام نظرية جاوس لتحويل التكامل الحجمى الى تكامل سطحى فان المعادلة السابقة تأخذ الصورة :

$$\oint\!\!\oint_S \vec{D}\bullet d\vec{S} = \iiint_V \rho d\tau \tag{19}$$

وباجراء نفس عملية التكامل السابقة على المعادلة (16) نحصل على :

$$\oint\!\!\oint_S \vec{B}\bullet d\vec{S} = 0 \tag{20}$$

عندما تستخدم الوحدات الالكتروستاتيكية لقياس ρ والمتجهات $\vec{J}$, $\vec{E}$, $\vec{D}$

وكذلك باستخدام الوحدات الالكترومغناطيسية لقياس المتجهات $\vec{B}$, $\vec{H}$ فان معادلات ماكسويل للمجالات الكهرومغناطيسية المتغيرة تأخذ الصور التفاضلية الآتية :

$$\nabla\bullet\vec{D} = 4\pi\rho \tag{21}$$

$$\nabla\bullet\vec{B} = 0 \tag{22}$$

$$\nabla\wedge\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{23}$$

$$\nabla\wedge\vec{H} = 4\pi\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{24}$$

حيث c هي سرعة الضوء في الفضاء .

الجهود الكهرومغناطيسية في معادلات ماكسويل

من المعادلة $\nabla\bullet\vec{B} = 0$ فان متجه الحث المغناطيسى $\vec{B}$ يمكن وضعه بالصورة $\vec{B} = \nabla\wedge\vec{A}$. حيث $\vec{A}$ يمثل الجهد الاتجاهى . بالتعويض في معادلة ماكسويل (23) نحصل على :

$$\nabla\wedge\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\wedge\vec{A}$$

$$\therefore\quad \nabla\wedge\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$$

وعليه فانه يمكن وضع :

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\Phi$$

أي أن شدة المجال الكهربى يمكن وضعه بالصورة :

$$\vec{E}=-\nabla\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{25}$$

بضرب طرفى هذه االعلاقة قياسيا في المؤثر ∇ وباستخدام المعادلة $\nabla\bullet\vec{D}=4\pi\rho$ حيث $\vec{D}=K\vec{E}$ فاننا نحصل على :

$$\nabla^2\Phi+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\bullet\vec{A}=-\frac{4\pi}{K}\rho \tag{26}$$

حيث فرضنا هنا أن الوسط ايثوتروبى متجانس (حيث μ,K كميات ثابتة) .

من معادلة ماكسويل (24) وباستخدام العلاقات :

$$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu}=\frac{\nabla\wedge\vec{A}}{\mu}\ ,\ \ \vec{D}=K\vec{E}$$

نجد أن :

$$\nabla\wedge\left(\nabla\wedge\vec{A}\right)=4\pi\mu\vec{J}+\frac{\mu K}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{27}$$

وباستخدام المتطابقة الاتجاهية الآتية

$$\nabla\wedge\left(\nabla\wedge\vec{A}\right)=\nabla\left(\nabla\bullet\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}$$

وكذلك باستخدام المعادلة (25) فان المعادلة (27) تأخذ الصورة :

$$\nabla\left(\nabla\bullet\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}=4\pi\mu\vec{J}-\frac{\mu K}{c}\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)-\frac{\mu K}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} \tag{28}$$

ثم باستخدام الشرط الآتى :

$$\nabla\bullet\vec{A}+\frac{\mu K}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0 \tag{29}$$

Equation of guage invarience

وعليه فان المعادلتين (26) ,(28) يصبحا على الترتيب بالصورتين :

$$\nabla^2\Phi-\frac{\mu K}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{K}\rho \tag{30}$$

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{\mu K}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-4\pi\mu\vec{J} \tag{31}$$

المعادلتان (30) , (31) هما المعادلتان الموجيتان للجهد القياسى المرتبط Φ والجهد الاتجاهى $\vec{A}$.

أمثلة محلولة

مثال (1) :

بين أن الدالة : $f\left(x,y,z\right)=\frac{1}{r}\rho\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{c}\right)$ تحقق المعادلة : $\Box f=0$ حيث

$\Box=\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, r هي المسافة بين النقطتين : $\left(x,y,z\right)$, $\left(\xi,\eta,\zeta\right)$, c هي سرعة الضوء في الفضاء .

الحل :

لايجاد $\nabla^2 f$ فاننا نعين أولا ∇f أي

$$\nabla f=\frac{1}{r}\nabla\rho+\rho\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$$

نفرض أن $\rho'=\frac{\partial\rho}{\partial u}$ حيث $u=t-\frac{r}{c}$. لذلك فاننا نحصل على :

$$\nabla f=\frac{1}{r}\left(-\frac{\rho}{c}\nabla r\right)-\frac{\rho}{r^2}\nabla r=-\left(\frac{\rho'}{cr}+\frac{\rho}{r^2}\right)\nabla r$$

وحيث أن $\nabla r=\frac{\vec{r}}{r}$ أي وحدة متجهات في اتجاه المتجه $\vec{r}$ وعليه فان ∇f تأخذ الصورة :

$$\nabla f=-\left(\frac{\rho'}{cr^2}+\frac{\rho}{r^3}\right)\vec{r}$$

$$\nabla^2 f=\nabla\bullet\nabla f=-\nabla\bullet\left(\frac{\rho'}{cr^2}+\frac{\rho}{r^3}\right)\vec{r}$$

$$=-\left[\left(\frac{\rho'}{cr^2}+\frac{\rho}{r^3}\right)\nabla\bullet\vec{r}+\vec{r}\bullet\nabla\left(\frac{\rho'}{cr^2}+\frac{\rho}{r^3}\right)\right]$$

$$=-\left[3\left(\frac{\rho'}{cr^2}+\frac{\rho}{r^3}\right)-\vec{r}\bullet\left(\frac{\rho''}{c^2r^2}+\frac{2\rho'}{cr^3}+\frac{3\rho}{r^4}+\frac{\rho'}{cr^3}\right)\frac{\vec{r}}{r}\right]=\frac{\rho''}{c^2r} \tag{1}$$

الدالة ρ'' يمكن كتابتها بالصيغة :

$$\rho''=\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2}=\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=r\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{2}$$

وبالتعويض عن ρ'' من المعادلة (2) في المعادلة (1) نجد أن :

$$\nabla^2 f = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad \therefore \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f = \Box f = 0 \tag{3}$$

المؤثر التفاضلى $\Box$ يسمى مؤثر دالمبرت . والمعادلة (3) تسمى المعادلة الموجية .

مثال (2):

اكتب معادلات ماكسويل لفضاء حر , وبين أن الجهد الاتجاهى : $\vec{A} = \frac{f'(u)}{cr}\vec{k}$ يمثل حلا لهذه المعادلات . حيث $f(u)$ دالة في المتغير $u = t - \frac{r}{c}$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\vec{k}$ متجه وحدة في اتجاه المحور z . أوجد مركبات المجال الكهربى والمجال المغناطيسى , وبين أن الجهد القياسى المرتبط Φ يمكن وضعه بالصورة :

$$\Phi = z\left(\frac{f'(u)}{cr^2} + \frac{f(u)}{r^3}\right)$$

الحل :

في حالة الفضاء الحر فان : $K = 1, \mu = 1, \rho = 0, \vec{J} = \vec{0}$. وعليه فان معادلات ماكسويل في هذه الحالة تأخذ الصورة :

$$\nabla\bullet\vec{E} = 0 \qquad , \qquad \nabla\bullet\vec{B} = 0$$

$$\nabla\wedge\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad , \qquad \nabla\wedge\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

وفى حالة الفضاء الحر فان المعادلة الموجية التي يحققها الجهد الاتجاهى تأخذ الصيغة :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = \vec{0} \tag{1}$$

سنبرهن الآن على أن الجهد الاتجاهى المعطى في المثال يحقق المعادلة الموجية (1) , ولاجراء ذلك نوجد الكميات التالية :

$$c\frac{\partial\vec{A}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f'(u)}{cr}\vec{k}\right) = \left[f'\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{f''}{r}\cdot\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right]\vec{k}$$

$$= -\left(\frac{xf'}{r^3} + \frac{xf'''}{cr^2}\right)\vec{k}$$

باجراء عملية التفاضل الجزئى مرة أخرى نحصل على :

$$c\,\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2}=-\left[\frac{r^2-3x}{r^5}\cdot f\,'+\frac{r^2-3x^2}{cr^4}\cdot f\,''-\frac{x^2}{c^2r^3}\cdot f\,'''\right]\vec{k} \qquad (2)$$

بالمثل يمكن إيجاد : $c\,\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial z^2}$, $c\,\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial y^2}$ بالصيغتين :

$$c\,\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial y^2}=-\left[\frac{r^2-3y^2}{r^5}\cdot f\,'+\frac{r^2-3y^2}{cr^4}\cdot f\,''-\frac{y^2}{c^2r^3}\cdot f\,'''\right]\vec{k} \qquad (3)$$

$$c\,\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial z^2}=-\left[\frac{r^2-3z^2}{r^5}\cdot f\,'+\frac{r^2-3z^2}{cr^4}\cdot f\,''-\frac{z^2}{c^2r^3}\cdot f\,'''\right]\vec{k} \qquad (4)$$

بجمع المعادلات (2) , (3) , (4) نحصل على :

$$\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial z^2}=\nabla^2\vec{A}=\frac{f\,'''}{c^3r}\cdot\vec{k} \qquad (5)$$

وحيث أن :

$$\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\frac{f\,'''}{cr}\cdot\vec{k} \qquad (6)$$

وبالتعويض من المعادلة (6) في المعادلة (5) نجد أن :

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\vec{0}$$

أي أن المتجه $\vec{A}$ المعطى في المثال يحقق المعادلة الموجية (1) , أي يمثل حلا لمعادلات ماكسويل في الفضاء الحر . لايجاد مركبات شدة المجال المغناطيسى $\vec{H}$ حيث $\vec{H}=\vec{B}$ فاننا نستخدم العلاقة الاتجاهية :

$$\vec{H}=\nabla\wedge\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & \dfrac{f\,'}{cr}\end{vmatrix} \qquad (7)$$

من العلاقة (7) نجد أن مركبات المجال المغناطيسى هي :

$$H_x=-y\left(\frac{f\,'}{r^3}+\frac{f\,''}{cr^2}\right)\ ,\ \ H_y=x\left(\frac{f\,'}{r^3}+\frac{f\,''}{cr^2}\right)\ ,\ \ H_z=0$$

لايجاد دالة الجهد القياسى المرتبط Φ فاننا نستخدم الشرط :

$$\nabla \bullet \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -c\nabla \bullet \vec{A} = -c\nabla \bullet \left(\frac{f'}{cr}\vec{k}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f'}{r}\right) = z\left(\frac{f'}{r^3} + \frac{f''}{cr^2}\right)$$

باجراء التكامل بالنسبة للزمن نحصل على :

$$\Phi = z\left(\frac{f}{r^3} + \frac{f'}{cr^2}\right) + F(x,y,z)$$

حيث $F(x,y,z)$ دالة اختيارية ويمكن اختيارها تساوى صفر , وعلى ذلك فان الجهد القياسى يأخذ الصورة :

$$\Phi = z\left(\frac{f}{r^3} + \frac{f'}{cr^2}\right) \tag{8}$$

شدة المجال الكهربى $\vec{E}$ يتعين من العلاقة :

$$\vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{9}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{f''}{cr} \tag{10}$$

$$\nabla \Phi = z\nabla\left(\frac{f}{r^3} + \frac{f'}{cr^2}\right) + \left(\frac{f}{r^3} + \frac{f'}{cr^2}\right)\vec{k}$$

$$= -z\left(\frac{3f}{r^4} + \frac{3f'}{cr^3} + \frac{f''}{c^2r^2}\right)\nabla r + \left(\frac{f}{r^3} + \frac{f'}{cr^2}\right)\vec{k} \tag{11}$$

ثم بالتعويض من المعادلتين (10) , (11) في المعادلة (9) نحصل على مركبات المجال الكهربى بالصورة :

$$E_x = xz\left(\frac{3f}{r^5} + \frac{3f'}{cr^4} + \frac{f''}{c^2r^3}\right)$$

$$E_y = yz\left(\frac{3f}{r^5} + \frac{3f'}{cr^4} + \frac{f''}{c^2r^3}\right)$$

$$E_z = z^2\left(\frac{3f}{r^5} + \frac{3f'}{cr^4} + \frac{f''}{c^2r^3}\right) - \left(\frac{f}{r^3} + \frac{f'}{cr^2} + \frac{f''}{c^2r}\right)$$

مثال (3) :

أثبت أن المجال المغناطيسى : $\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[(\nabla\Phi)\wedge\vec{k}\right]$, والمجال الكهربى :

$\vec{E}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\vec{k}+\frac{\partial}{\partial z}\nabla\Phi$ يحققا معادلات ماكسويل في الفضاء الحر . حيث $\vec{k}$ وحدة متجهات في اتجاه المحور z , والدالة Φ تحقق المعادلة الموجية : $\nabla^2\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0$.

الحل :

في حالة الفضاء الحرفان معادلات ماكسويل هي :

$$\nabla\bullet\vec{H}=0 \quad , \quad \nabla\bullet\vec{E}=0$$

$$\nabla\wedge\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \;\; , \;\; \nabla\wedge\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

سنثبت أن المتجهين $\vec{H}$, $\vec{E}$ المذكورين في المثال يحققا هذه المعادلات كما يلى :

i)

$$\nabla\bullet\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\bullet\left\{(\nabla\Phi)\wedge\vec{k}\right\}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\vec{k}\bullet\left[\nabla\wedge(\nabla\Phi)\right]-(\nabla\Phi)\bullet\nabla\wedge\vec{k}\right\}=0$$

ii)

$$\nabla\bullet\vec{E}=-\frac{1}{c^2}\nabla\bullet\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\vec{k}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\nabla\bullet(\nabla\Phi)=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\Phi$$

$$=\frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla^2\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)=0$$

iii)

$$\nabla\wedge\vec{E}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\nabla\wedge\left(\Phi\vec{k}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\nabla\wedge(\nabla\Phi)\right]=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\nabla\wedge\left(\Phi\vec{k}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[(\nabla\Phi)\wedge\vec{k}+\Phi\left(\nabla\wedge\vec{k}\right)\right]=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[(\nabla\Phi)\wedge\vec{k}\right]$$

$$=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[(\nabla\Phi)\wedge\vec{k}\right]\right\}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\vec{H}\right\}$$

$$\therefore \quad \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

iv)

$$\nabla \wedge \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\nabla \wedge \left[\left(\nabla\Phi\right) \wedge \vec{k}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(k \bullet \nabla\right)\left(\nabla\Phi\right) - \left[\left(\nabla\Phi\right) \bullet \nabla\right]\vec{k} + \left(\nabla\Phi\right)\nabla \bullet \vec{k} - \vec{k}\nabla^2\Phi\right\}$$

$$= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla\Phi\right) - \vec{k}\nabla^2\Phi\right\} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\vec{k} - \vec{k}\nabla^2\Phi\right\}$$

$$= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\vec{E} - \vec{k}\left(\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)\right\} \qquad \therefore \quad \nabla \wedge \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

الجزء الثانى

النظرية النسبية الخاصة

مقدمة

الباب الأول

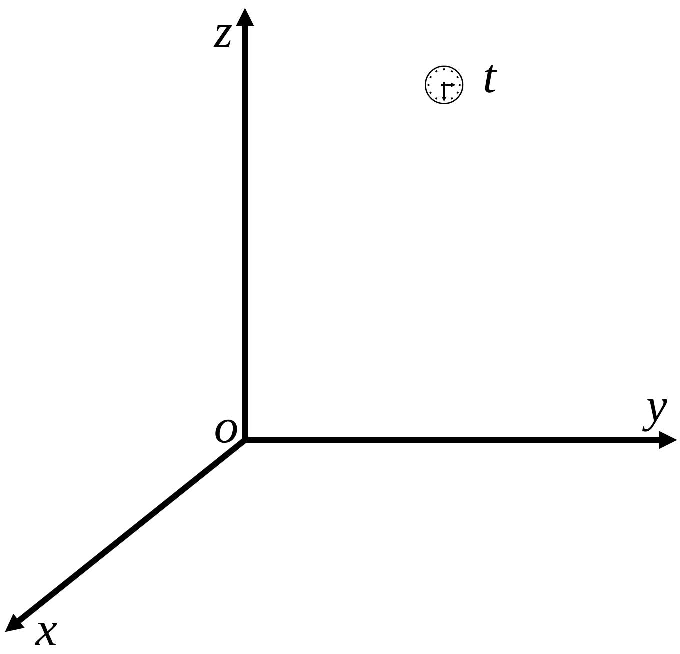
الفيزياء ماقبل النسبية ***Pre-Relativity Physics***

1-*الإطار الإنتسابى :* **Reference Frame**

تتألف الظواهر الفيزيائية من أحداث Events تقع عند مكان معين وزمن معين . ولكى نقيس تلك الأحداث ، ونصوغ القوانين التى تحكمها يلزمنا ساعة مضبوطة لمعرفة زمن وقوعها وهندسة فضاء تمكننا من تحديد أماكنها والمسافات بين هذه الأحداث .

تتعين خواص الفضاءالثلاثى الذى تقع فيه الأحداث فى الطبيعة الكلاسيكية بهندسة إقليدس، حيث تتحدد النقطة الهندسية بتقاطع ثلاثة مستويات يمكن إختيارها - للسهولة – متعامدة ، كل مستويين يتقاطعان فى خط مستقيم . وفى النموذج الرياضى تمثل الحادثة بنقطة هندسية يتحدد موضعها بقياس أبعادها (إحداثياتها Coordinates) عن ثلاثة مستويات تسمى المستويات الأساسية كما يطلق على خطوط تقاطعها بالمحاور الأساسية ، وتقاس الأطوال أو المسافات بين الأحداث بالنسبة لمجموعة المحاور

الأساسية تبعا لقواعدالهندسة الإقليدية . تعرف مجموعة المحاور الأساسية بالاضافة إلى ساعة قياس الزمن بالإطار الإنتسابى , ويرمز له بالرمز S .



شكل 1

حيث تكون الاحداثيات المكانية هى : (x, y, z) والزمن هو t شكل (1) – كما يطلق إسم الملاحظ أو المراقب Observer على من يقوم بالملاحظة والقياس فى هذا الإطار الإنتسابى ، ويرمز له بالرمز A . يوجد عدد لا نهائى من الإطارات الإنتسابية التى تصلح لقياس الظواهر الطبيعية وعادة يختار المراقب الإطار

الإنتسابى الذى يتفق مع حالته الميكانيكية ، فإذا كان المراقب ساكناً فإنه يختار إطاراً ساكناً ، وإذا كان المراقب متحركاً فإنه يتخذ إطاراً متحركاً معه بنفس حالته الديناميكية (أى يكون ساكناً بالنسبة له) .

سنرمز لهذا الإطارات المتحركة بالرموز S', S'' ....

حيث تكون الإحداثيات المكانية هى : $(x', y', z'), (x'', y'', z'')$.

والأزمنة المناظرة هى t', t''...... وهكذا . كذلك يرمزللمراقب المناظر لكل منها بالرموز B , C ،...... وهكذا . لكى نربط بين النتائج والقياسات التى يحصل عليها المراقبون $A, B, C,$ ......

كل فى إطاره الإنتسابي ، يلزمنا علاقة بين الإحداثيات :

(x, y, z) والزمن t , والإحداثيات (x', y', z') والزمن t' ,

والإحداثيات (x'', y'', z'') والزمن t'' , ...

هذه العلاقة تسمى تحويل Transformation , وتلعب التحويلات دوراً هاماً فى صياغة القوانين الطبيعية ، إذ أنه بواسطتها يمكن إختيار إطارات الإنتساب التى يأخذ فيها القانون

الطبيعى أبسط صورة له .

2- ***قوانين نيوتن للحركة :***

فرض نيوتن وجود إطار إنتسابى مفضل عن غيره ، ويمكن قياس جميع الظواهر من سكون أو حركة بالنسبة إليه ، فالأطوال والأبعاد يمكن قياسها ، والأزمنة التى تقع عندها الأحداث يمكن تعيينها أينما كان الجسم ومتى وقع الحادث . هذا الإطار أُطلق عليه الإطار المطلق : Absolute Frame وقد صاغ نيوتن قوانينه الثلاث المعروفة بالنسبة إلى الإطار المطلق . إذا رمزنا لهذا الإطار بالرمز S ، فإن قوانين نيوتن تأخذ الصورة :

القانون الأول :

إذا إنعدمت القوة $\vec{F}$ المؤثرة على جسيم ما ، فإنه يتحرك بسرعة منتظمة $\vec{v}_o$ فى خط مستقيم ، أى أنه إذا كانت :

$\vec{F} = \vec{0}$ فإن :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_o \qquad . \qquad (1)$$

حيث $\vec{r}$ متجه الموضع للجسيم ، t الزمن مقاسان بالنسبة للإطار المطلق ، كذلك فإن مسار الجسيم يكون بالصورة :

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t \qquad (2)$$

وهذه معادلة خط مستقيم فى الصورة الإتجاهية .

القانون الثانى :

إذا أثرت قوة $\vec{F}$ على جسيم كتلتة m فإنه يتحرك بعجلة $\vec{a}$ حيث :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} . \qquad (3)$$

ويتوقف مسار الجسيم على شكل القوة $\vec{F}$ أى شكل قانون القوة .

القانون الثالث :

كل فعل له رد فعل مساوٍ له فى المقداروم‍ضاد له فى الإتجاه .

فإذاكانت $\vec{F}_{12}$ هى القوة التى يؤثر بها الجسم 1على الجسم $2\ \vec{F}_{21}$, تلك التى يؤثر بها الجسم 2 على الجسم 1 عند نفس اللحظة ، فإن :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} . \qquad (4)$$

وهذا القانون يعنى أنه إذا كان الجسمان متباعدين ، فإن كل منهما يتأثر بالآخر عند نفس اللحظة ، أى أن تأثير القوى ينتقل لحظياً .

3- الزمن المطلق : Absolute Time

من قانون نيوتن الأول نجد أنه إذا تلاشت القوة المؤثرة على جسيم ما ، فإن مسار الجسيم مقاساً بالنسبة للإطار S يكون خطاً مستقيماً.إذا إعتبرنا إطاراً إنتسابياً آخر S' يتحرك بسرعة منتظمة $\vec{V}$فى خط مستقيم بالنسبة للإطار S ، نجد أن الجسيم يتحرك بالنسبة إلى الإطارالإنتسابى S' بسرعة منتظمة $\vec{v}'$ والتى تعطى بالصيغة:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \quad . \tag{5}$$

حيث $\vec{v}$ سرعة الجسيم بالنسبة إلى S. إذا كان $\vec{r}'$ هو متجه موضع الجسيم بالنسبة إلى الإطار الإنتسابى S' فإن :

$$\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \vec{v} - \vec{V} \quad . \tag{6}$$

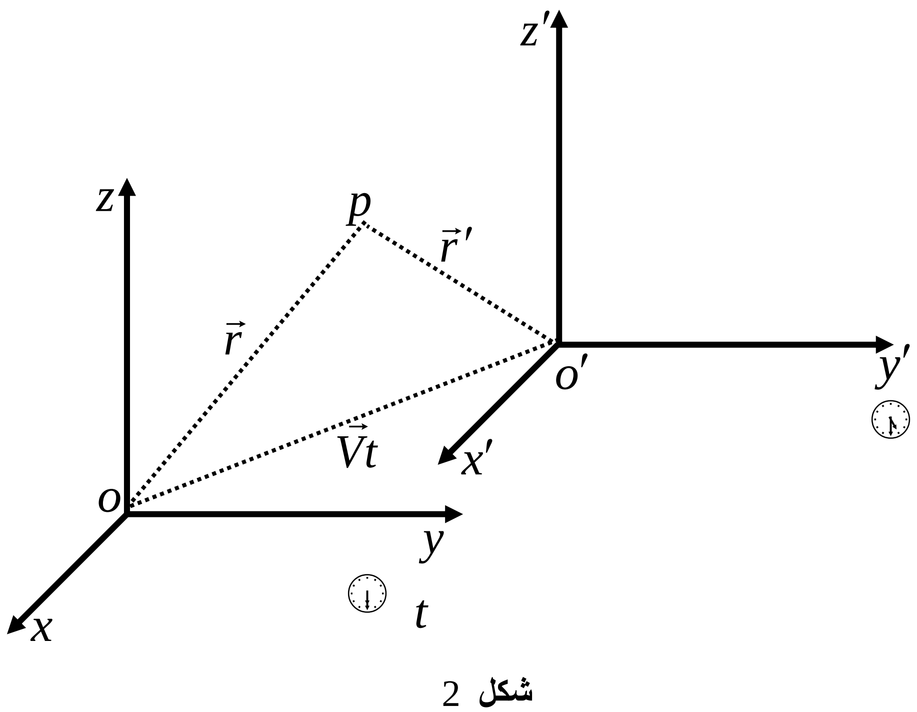
حيث t' الزمن المقاس بالنسبة إلى S' ، وبالتعويض عن $\vec{v}$ من المعادلة (1) فى المعادلة (6) فإن :

$$\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \vec{v}_o - \vec{V} \quad . \tag{7}$$

بإجراء التكامل بالنسبة إلى الزمن : t' نجد أن :

$$\vec{r'} = (\vec{v}_o - \vec{V})\,t' + \vec{r'}_o \qquad (8)$$

حيث $\vec{r'}_o$ هو موضع الجسيم عند اللحظة : $t' = 0$. المعادلة (8) هى معادلة مسار الجسيم إذا لوحظ بواسطة المراقب B فى الإطار الإنتسابى S' لكن B يلاحظ أيضاً أن الجسيم لا يقع تحت تأثير قوة ، لذا يجب أن يكون مساره بالنسبة له خطاً مستقيماً بفرض أن الإطارين S ، S' ينطبقان عندما : $t' = t = 0$ فإن : $\vec{r'}_o = \vec{r}_o$ كذلك ينتج ـ من شكل (2) ـ أن :



شكل 2

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{V}\,t = (\vec{v}_o - \vec{V})\,t + \vec{r}_o \quad . \qquad (9)$$

بالمقارنة مع المعادلة (8) نجد أن :

$$t = t' \quad . \qquad (10)$$

الشرط (10) يعنى أن الزمن مطلق ولا يعتمد على إطار الإنتساب المقاس بالنسبة له . نستنتج من ذلك ـ بفرض أن الزمن مطلق ـ أنه إذا إنطبق قانون نيوتن الأول فى الإطار S فإنه ينطبق أيضاً فى S' فى الواقع ، توجد مجموعة من الإطارات الإنتسابية التى تتحرك بالنسبة إلى بعضها بسرعة منتظمة فى خط مستقيم ، وفى كل منها ينطبق قانون نيوتن الأول . تسمى هذه الإطارات بذات القصور الذاتى : Inertial Frame ، وتلعب دوراً كبيراً فى القوانين الطبيعية . هذه الإطارات يمكن إعتبارها بديلاً للإطار المطلق الذى فرضه نيوتن ، وقد أطلق عليها حديثا إسم " الجسيم ألفا "

4- مبدأ تماثل الملاحظين – تحويل جاليليو :

إن الظواهر الطبيعية التى تحدث فى الكون تكون مستقلة تماماً عن المراقب الذى يلاحظها . إذا وجد الملاحظ A أن مسار جسيم

هو خط مستقيم وإستنتج من ذلك أن الجسيم لا يقع تحت تأثير قوة ، فإن الملاحظ B - الذى يتحرك بسرعة منتظمة فى خط مستقيم بالنسبة إلى الملاحظ A - لابد أن يجد ذلك أيضاً .

يعبر عن ذلك بأن الملاحظين فى الإطارات ذات القصور الذاتى يكونوا متماثلين أو متكافئين لوصف الظواهر الطبيعية . كل الفرق بينهم أنهم يستعملون رموزاً مختلفة ، ولكن صورة القانون الذى يحكم الظاهرة الطبيعية الذى يصلوا إليه تكون واحدة .

يمكن إيجاد العلاقة بين قياسات الملاحظين فى الإطارات ذات القصور الذاتى عن طريق التحويلات . نفرض أن الإطار الإنتسابى S' يتحرك بالنسبة للإطار الإنتسابى S بسرعة منتظمة $\vec{V}$ فى خط مستقيم – شكل (2) – إذا كان $\vec{r}$ ، $\vec{r'}$ هما موضعا الحدث p عند الزمنين t ، t' بالنسبة إلى كل من S ، S' فإن :

$$t' = t \quad ,$$
$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{V}\, t \quad . \qquad (11)$$

تُعرف المعادلتان (11) بتحويل جاليليو . هذا التحويل هو الأساس الذى بُنيت عليه الميكانيكا الكلاسيكية . تحت هذا التحويل الذى

يربط قياسات كل من الملاحظين A ، B ببعضهما نجد أن قانون نيوتن الثانى يحتفظ بصورته , فإذا فرضنا أن صورة هذا القانون بالنسبة إلى الملاحظ A هى :

$$m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad .$$

فإنه بالنسبة إلى الملاحظ B يكون :

$$\frac{d^2\vec{r'}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r} - \vec{V}\,t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad . \tag{12}$$

وذلك لأن $\vec{V}$ متجه ثابت .

إذا رمزنا للقوة المقاسة بالنسبة إلى الملاحظ B بالرمز $\vec{F'}$ فإن :

$$\vec{F'} = m\,\frac{d^2\vec{r'}}{dt'^2} = m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad . \tag{13}$$

يعبر عن ذلك بأن قوانين نيوتن " لاتغيرية فى الصورة " Invarient تحت تحويل جاليليو . أى أن المراقبين A ، B يحصلا على نفس صورة القوانين بلغة الإطارات الإنتسابية التى ينتميا إليها . ويطلق على هذا مبدأ النسبية لجاليليو . يلاحظ أننا فى الخطوة الأخيرة من المعادلة (13) فرضنا ـ مع نيوتن ـ أن :

$$m = m' \quad . \tag{14}$$

أى أن كتلة الجسيم تكون مطلقة ، لا تعتمد على الإطار الإنتسابى المقاسة بالنسبة إليه .

5- نتيجة : إذا فرضنا حادثين موضعيهما بالنسبة إلى الإطار الإنتسابى S هما $\vec{r}_2$ ، $\vec{r}_1$ عند نفس اللحظة t ، فإن موضعيهما بالنسبة إلى الإطار الإنتسابى S' يكونا :

$$\vec{r'}_1 = \vec{r}_1 - \vec{V}t \quad , \quad \vec{r'}_2 = \vec{r}_2 - \vec{V}t \ .$$

بالطرح والتربيع نجد أن :

$$(\vec{r'}_1 - \vec{r'}_2)^2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 \ . \qquad (15)$$

أى أن البعد بين الحادثين يبقى " لاتغيرى فى الصورة " تحت تحويل جاليليو ، وهذا يعنى أن الأطوال المقاسة تكون مطلقة .

إذا أخذنا الحادثين قريبين جداً من بعضهما فإن (15) تصبح :

$$(d\vec{r'})^2 = (d\vec{r})^2 \ ,$$

$$(dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz) \ . \quad (16)$$

ويطلق على هذه الصورة التربيعية " مربع عنصر الطول فى الفضاء الثلاثى الإقليدى " ويرمز له بالرمز $(ds)^2$ حيث ds عنصر الطول . من المعروف أن المتجهات فى الفضاء الثلاثى

(متجهات ثلاثية) لا تعتمد على إختيار إطار إنتسابى معين ، كما يمكن إثبات أن حاصل الضرب القياسى لمتجهين يبقى " لا تغيرى فى الصورة " تحت تحويل جاليليو ، وعلى ذلك فإن القوانين التى تحكم الظواهر الطبيعية فى الفضاء الثلاثى (لا تعتمد على الملاحظ الذى يقيسها) يجب أن تكون علاقة مطلقة .

6- قانون الجذب العام لنيوتن :

وينص على أن كل شئ يجذب كل شئ . وتقاس قوة الجذب $\vec{F}$ بين كتلتين m_1 , m_2 يبعدان عن بعضهما مسافة r بقانون التربيع العكسى :

$$\vec{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad . \tag{17}$$

وتبعاً لهذا القانون فإن الكواكب تدور فى مسارات ناقصية ثابتة حول الشمس التى تكون فى إحدى بؤرتيها ، ولكن فى عام 1882 إكتشف الفلكى الفرنسى لوفريير أن مسار الكوكب عطارد Mercury ليس ثابتاً وإنما يدور بزاوية صغيرة جداً .

7- النظرية الكهرومغناطيسية للضوء :

وضع ماكسويل المعادلات المعروفة بإسمه ، والتى تربط بين

الظواهر الكهربية والمغناطيسية ، وتبعا لنظرية ماكسويل فإن جميع الإشعاعات (وخاصة الضوء) تظهر على أنها أمواج (كهرومغناطيسية تسير بسرعة ثابتة فى الفضاء وتساوى حوالى 3×10^{10} cm / sec ويرمز لها عادة بالرمز c . كما وُجد- عن طريق ملاحظة النجوم الزوجية – أن سرعة الضوء لا تعتمد على سرعة المصدر الذى يشع الأمواج الضوئية . ولكن بالنسبة لأى إطار إنتسابى تقاس سرعة الضوء ؟

إن الأمواج عموماً تحتاج إلى وسط مادى لإنتشارها ، ويمكن قياس سرعتها بالنسبة للإطار الذى فيه هذا الوسط المادى ساكناً فمثلاً للأمواج الصوتية نجد أن سرعة الصوت تقاس بالنسة للهواء الساكن ، وقد إقترح علماء القرن التاسع عشر وسط غير مرئى يملأ كل الفضاء ويخترق كل المواد ويسمح بإنتقال الأمواج الكهرومغناطيسية حاملاً لها . سرعة الضوء بالنسبة للإطار الذى يكون فيه هذا الوسط ساكناً هى c. هذا الوسط سُمى :

" الأثير " Ether

وحتى أواخر القرن التاسع عشر كان العلماء يحاولون أن يرجعوا الظواهر الطبيعية (وعلى الأخص الظواهر الكهرومغناطيسية) إلى الميكانيكا ، لذا كان يجب أن تكون جميع القوانين الطبيعية " لاتغيرية فى الصورة " تحت تحويل جاليليو، الذى هو أساس قوانين الميكانيكا الكلاسيكية . ولكن فرض وجود الأثير جعل من الممكن تمييز إطار إنتسابى عن الإطارات الأخرى ، وهو الذى يكون فيه الأثير ساكناً ، وهذا التمييز يجعل معادلات ماكسويل " ليست لاتغيرية فى الصورة " تحت تحويل جاليليو.

هنا كان التساؤل : هل يمكن الإستغناء عن فرض وجود الأثير؟ وإذا كان كذلك ، فما هى التحويلات الأخرى بين الإطارات ذات القصور الذاتى التى تجعل معادلات ماكسويل "لا تغيرية فى الصورة " ؟

8- ضبط الساعات المتباعدة :

Synchronization oF distant coks

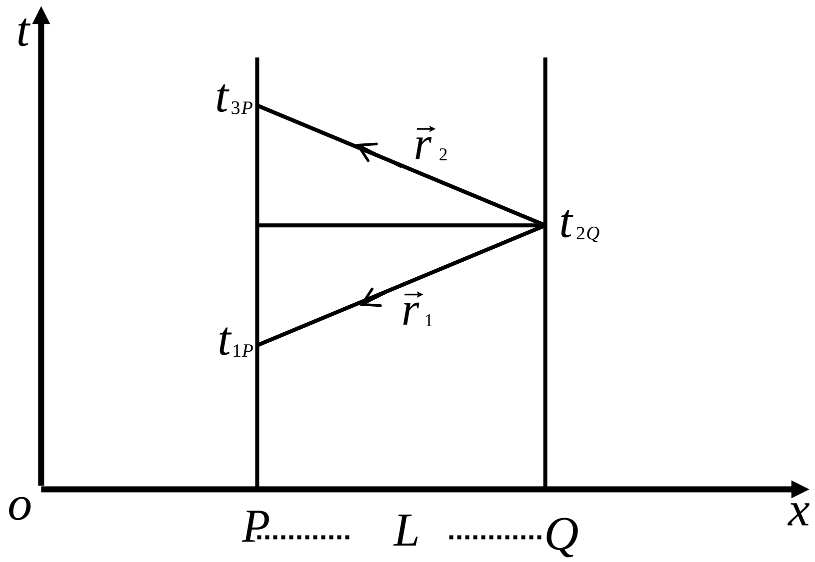
لقياس الأحداث المتعددة فى الكون نفترض وجود ملاحظ A

فى إطار إنتسابى S , ونفرض أن هناك مجموعة من الملاحظين موزعون عند النقط المختلفة فى الفضاء الثلاثى ، وكل منهم مزود بساعة وهذه الساعات متماثلة وتقرأ نفس الزمن عندما تكون بجانب بعضها البعض ، أى تكون مضبوطة. ولكن ماذا يحدث عندما تفترق الساعات عن بعضها ؟ أتكون أيضا مضبوطة ؟ للتحقق من ذلك نحضر إحدى الساعات البعيدة ونقارن قراءتها بقراءة ساعتنا .

من فرض الزمن المطلق فإن القراءات لابد أن تنطبق .

هناك سؤال آخر عما إذا كانت الساعات تقرأ نفس الزمن عندما تكون متباعدة. فى عبارة أخرى يمكن طرح هذا السؤال: عندما نقول " الآن " فى مكان ما ، هل يكون أيضا " الآن " فى مكان آخر بالنسبة إلى نفس الإطار الساكن S ؟

فى الطبيعة الكلاسيكية نحصل على الإجابة بنعم ، أى أنه يوجد " آن " مطلق . لكن دعنا نناقش التجربة المثالية الآتية : نفرض أن لدينا ساعتان P , Q مضبوطتان فى البداية ـ شكل (3) ـ عند اللحظة t_{1P} ندع إشارة ضوئية تنطلق من P إلى Q حيث



شكل 3

تصل إليها عند اللحظة t_{2Q} بالسرعة v_1 وفى هذه اللحظة تنطلق إشارة متماثلة من Q إلى P مرة ثانية فتصل إليها عند اللحظة t_{3P} بالسرعة v_2 . إذا كان البعد بين الساعتين هو L فإن :

$$L = v_1(t_{2Q} - t_{1P}) = v_2(t_{3P} - t_{2Q}) \quad . \qquad (18)$$

هذا هو الشرط الذى يجب توافره إذا كانت الساعتان مضبوطتين .

بفرض أن هذا الشرط يتحقق فإن السؤال الذى ينشأ الآن هو عما

إذا كان كل من P ، Q ساكنين بالنسبة للوسط الذى ينتقل فيه الضوء (الأثير) . إذا فرضنا أن سرعة الضوء بالنسبة للأثير هى c ، وسرعة الأثير بالنسبة للإطار الإنتسابى S هى u فإن :

$$c = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \ , \qquad u = \frac{1}{2}(v_1 - v_2) \ . \qquad (19)$$

من هذا يتضح أن P ، Q ليسا ساكنين بالنسة للأثير ، كما أنه بمعرفة كل من v_1 ، v_2 يمكن تعيين سرعتهما بالنسبة للأثير وسنرى فى البند التالى عندما نناقش تجربة ميكلسون ومورلى أن ذلك يتعارض مع نتائج التجربة .

9- ***التناقضات العلمية فى الفيزياء الكلاسيكية :***

فى النصف الثانى من القرن التاسع عشر قام العلماء بإجراء تجارب للتحقق من صحة الفروض والقوانين الكلاسيكية . والتى أدت إلى ظهور تناقضات علمية وتساؤلات عديدة إستدعت إلى ضرورة إعادة النظر فى المفاهيم الأساسية التى تقوم عليها قوانين

نيوتن ونظرية ماكسويل . وسنتناول هنا بعضاً من هذه التجارب .

(أ) تجربة فيزو وفرنسل : Fizeau Fresnel

قام كل من فيزو وفرنسل حوالى عام 1859 بتجارب لقياس سرعة الضوء فى المواد المتحركة حيث وجد فيزو أن سرعة الضوء u فى سائل يتحرك فى أنبوبة بسرعة v هى :

$$u = \frac{c}{n} \pm v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad . \qquad (20)$$

حيث n هو معامل إنكسار السائل والإشارة $\pm$ تبعاً إذا كان السائل يتحرك فى إتجاه أوعكس إتجاه سرعة الضوء . وقد كان من المتوقع تبعاً لقوانين نيوتن أن تكون سرعة الضوء فى هذه الحالة هى :

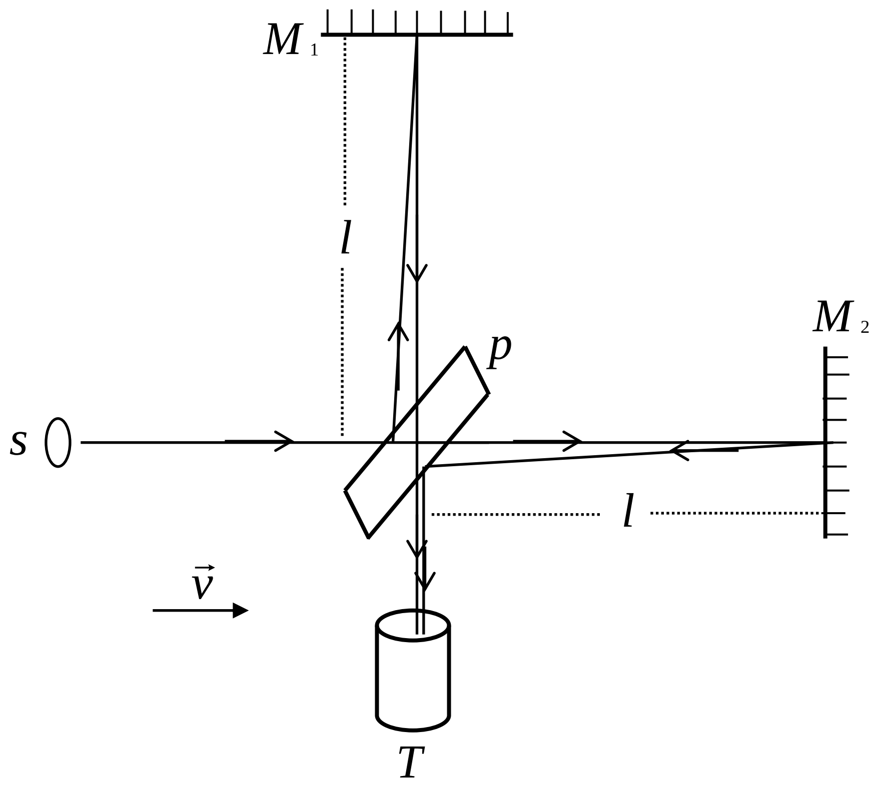
$$u = \frac{c}{n} \pm v \quad . \qquad (21)$$

(ب) تجربة ميكلسون ومورلى : Michelson & Morely

إفترض العلماء وجود الأثير كوسط مادى يحمل موجات الضوء ويسمح بحركة الأجسام المادية بدون إحتكاك وتكون سرعة الضوء الذى فيه الأثيرساكناً هى c ومن المفروض أن الأرض تتحرك حول

الشمس بسرعة تبلغ حوالى 30 km/ ses ، وتحت فرض وجود الأثير فإن هذه السرعة تمثل سرعة الأرض بالنسبة للأثير ، وبالتالى فإنه يمكن قياسها بالنسبة إليه .

قام كل من ميكلسون ومورلى بتجربة لإكتشاف الحركة النسبية للأرض بالنسبة للأثير، وذلك بإستخدام الجهاز المبين بشكل (4)



شكل 4

M_1 ، M_2 مرآتان مستويتان p صفيحة زجاجية نصف مفضضة

لكى تسمح بنفاذ وإنعكاس الضوء ، s مصدر ضوئى ، T تلسكوب.

نفرض أن سرعة الأرض (الجهاز) بالنسبة للأثير هى v،

وأن أطوال الذراعين $p\,M_1$ ، $p\,M_2$ متساويان ويساوى L

للإستعمال : يخرج الضوء من المصدر الضوئى s حيث ينفذ

بعضه إلى المرآة M_2 وينعكس إلى التلسكوب T والبعض الأخر

ينعكس من p إلى المرآه M_1 ثم ينعكس مرة أخرى إلى

التلكسوب T حيث يسجل زمن وصول الشعاعين . حيث أن

سرعتى الضوء والجهاز بالنسبة للأثير هما c ، v على

الترتيب . فإن سرعتى الضوء بالنسبة للجهاز فى الإتجاهين

$p\,M_2$ ، $M_2\,p$ تكون $c \mp v$ وفى الإتجاه العمودى $p\,M_1$

تساوى : $\sqrt{c^2 - v^2}$. من ذلك ينتج زمن وصول الشعاع $p\,M_2$

إلى التلسكوب يساوى :

$$\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} = 2lc \,/\, (c^2 - v^2) \quad .$$

وزمن وصول الشعاع $p\,M_1$ إلى التلسكوب :

$$2l / \sqrt{c^2 - v^2} \quad .$$

واضح أن هناك فرق زمنى لوصول الشعاعين ، بفرض أنه Δt

فإن :

$$\Delta t = 2l / \sqrt{c^2 - v^2} - 2lc / (c^2 - v^2)$$

$$= \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left[1 - \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right] \quad . \tag{22}$$

وحيث أن $c >> v$ فإنه بالتقريب تصبح المعادلة(22) بالصورة :

$$\Delta t = \frac{1}{c} \frac{v^2}{c^2} \quad . \tag{23}$$

هذا الفرق الزمنى يسبب تداخل فى الضوء مما ينتج عنه حلقات

ضوئية يمكن رؤيتها بالتلكسوب . فإذا كانت n عدد الحلقات ، λ

طول الموجة الضوئية ، فإن :

$$\Delta t = n\lambda \quad . \tag{24}$$

وبالرغم من تكرار التجربة فى أوقات مختلفة من السنة وعلى مدار

سنوات عديدة ، الإ أنه لم يلاحظ أى حلقات ضوئية . وهذا يعنى عدم

وجود فرق زمنى بين وصول الشعاعين .

10- ***محاولات العلماء لتفسير النتائج السابقة*** :

(أ) فرض جريان الأثير : Ether Drag

لتفسير نتائج التجربتين السابقتين ، فرض العلماء أن الأجسام " تجر " الأثير معها ، مما ينتج أن سرعة الأجسام بالنسبة للأثير تساوى صفراً . هذه الفرض يتناقض مع القياسات التى أُجريت على حيود الضوء الصادر من النجوم ، حيث وجد أن القياسات تتفق مع حركة الأرض بسرعة تبلغ حوالى 30 km/ sec .

(ب) فرض فيتزجيرالد ولورنتز : Fitzgeald-Lorntz

يمكن تفسير النتيجة السابقة لتجربة ميكلسون ومورلى بفرض أن الأجسام المتحركة تنكمش أطوالها فى إتجاه الحركة بنسبة : $1 : \sqrt{1-v^2/c^2}$. أى أن الطول pM_1 لايساوى l وإنما ويحدث له إنكماش ليصبح : $l\sqrt{1-v^2/c^2}$. فى هذه الحالة يصبح زمن وصول الشعاع pM_2 إلى التلسكوب هو :

$$\frac{2lc\sqrt{1-v^2/c^2}}{c^2-v^2} = 2l\sqrt{1-v^2/c^2} \;.$$

وهذا يساوى بالضبط زمن وصول الشعاع pM_1 .

11- ***الأفكار العلمية التى مهدت لنظرية النسبية الخاصة*** :

(أ) نظرية لورنتز :

فى الفترة مابين عامى 1895 – 1904 إستطاع لورينز أن يضع نظرية تفسرتلك التناقضات التى ظهرت فى علم الفيزياء حتى هذا الوقت . وفى نظريته كان لورنتز يعتقد فى المفاهيم النيوتونية عن الزمن والفضاء المطلقين ، حيث فرض أن الإطار الذى يكون فيه الأثير ساكناً هو الإطار المطلق (الذى تأخذ فيه معادلات ماكسويل أبسط صورة) وعند محاولته إيجاد التحويلات التى تجعل معادلات ماكسويل " لاتغيرية فى الصورة " فى الإطارات ذات القصور الذاتى ، توصل لورنتز إلى الصيغ الآتية والتى عُرفت بإسمه :

$$x' = \beta(x - Vt) \qquad y' = y \qquad z' = z \tag{25}$$

$$t' = \beta\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) \qquad \beta = 1/\sqrt{1-V^2/c^2} \;.$$

حيث V سرعة الإطار S' بالنسبة إلى S،والحركة النسبية فى إتجاه المحور ox. بواسطة هذا التحويل يمكن إستنتاج أن الأجسام تنكمش أطوالها فى إتجاه الحركة بينما لايحدث فى الإتجاهات الأخرى . ولما كانت الحركة تعنى قطع الجسم مسافة ما فى زمن معين فإن الفترة الزمنية لابد وأن يحدث لها أيضا تغيير نتيجة الحركة . مما يفسر تغير الزمن من إطار إلى آخر كما هو واضح واضح من تحويل لورتنز (25) . وعلى هذا الأساس فإن البناء الطبيعى للكون يكون بحيث أن الأجسام المتحركة تنكمش فى إتجاه حركتها، ولايمكن قياس هذا الإنكماش بوسائل طبيعية ، حيث أن القضبان المترية " Meterstick " تعانى أيضا نفس القدرمن الإنكماش لذلك فإنه لايمكن مثلا قياس سرعة الأرض بالنسبة للأثير

(ب) أفكار بوانكاريه : Poincare

لما كانت الحركة النسبية للأجسام بالنسبيه للأثير لا يمكن إكتشافها ، فقد تساءل العالم الفيزيائى بوانكاريه عام 1904 م عما إذا كان هذا الأثير له وجود حقيقى وطبيعى , كذلك فإنه فى

ميكانيكا نيوتن ينتقل تأثير أو فعل القوة Action لحظياً ، أى إذا كان لدينا جسمين فإن كل منهما يؤثر على الآخر بقوة يحس بها كلاً من الجسمين عند نفس لحظة تأثيرها ـ قانون نيوتن الثالث ـ وإذا غيرنا فى موضع أحدهما فإن التأثير يتغير وينتقل إلى الموضع الجديد فى نفس الوقت . هذا الوضع يمكن تصوره بفرض سرعة لانهائية فى الكبر لإنتقال التأثير أو الفعل . ولكن ثبت أن هذا غير صحيح فالضوء كأحد صوالتأثير يستغرق زمناً لإنتقاله من مكان لآخر(زمن إنتقال الضوء من الشمس إلى الأرض يبلغ حوالى 8 دقائق) .أعلن بوانكاريه أن الأفعال تنتشربسرعة محدودة وفرض أن سرعة الضوء فى الفضاء c تمثل النهاية العظمى لجميع السرعات الممكنة . وعلى ذلك يجب أن تُستبدل قوانين نيوتن بأخرى تكون فيها جميع السرعات الممكنة أقل من سرعة الضوء فى الفضاء. أى تقوم سرعة الضوء مقام السرعة النهائية . كان هذا هو الوضع عامى 1904 – 1905 م حينما خرج آينشتين بنظريته ، وبدون علم عن نظرية لورنتز أو أفكار بوانكاريه ، حيث

دعا إلى نبذ فكرة الأثير, والمفاهيم المطلقة لنيوتن .

الباب الثانى

النظرية النسبية الخاصة

1- مسلمات نظرية النسبية الخاصة :

The Postulates of Special Relativity

بنى العلامة آينشتن نظرية النسبية الخاصة على مسلمتين :

المسلمة الأولى :

القوانين الطبيعية لا تعتمد على حركة الإطارات ذات القصور الذاتى المنسوبة إليها والمقاسة فيها أى أنه توجد مجموعة من إطارات الإنتساب ، تتحرك بالنسبة إلى بعضها بسرعة منتظمة فى خط مستقيم ، ويأخذ فيها القانون الطبيعى ـ الذى يحكم الظواهر الطبيعية ـ نفس الصورة ، وبعبارة أخرى كل الإطارات ذات القصور الذاتى تكون متكافئة لوصف الظواهرالطبيعية . ويسمى هذا بمبدأ النسبية لآينشتين .

يلاحظ أن هذا المبدأ يستغنى عن فرض وجود الأثير،إذ لو فرض

أن الأثيريمكن إكتشافه فإن من الممكن تعيين حركات كل الإطارات ذات القصور الذاتى بالنسبة إليه ، مما يناقض مبدأ النسبية ولا يتفق مع الملاحظات . يمكن النظر إلى هذا المبدأ على أنه تعميم لمبدأ النسبية لجاليليو ، الذى يتطلب إحتفاظ القوانين الطبيعية بصورتها فى الإطارات ذات القصور الذاتى تحت تحويل جاليليو ، بينما مبدأ آينشتين لا يتطلب ذلك وإنما - كما سنرى فيما بعد - يؤدى إلى تحويلات أخرى أعم من تحويل جاليليو .

المسلمة الثانية :

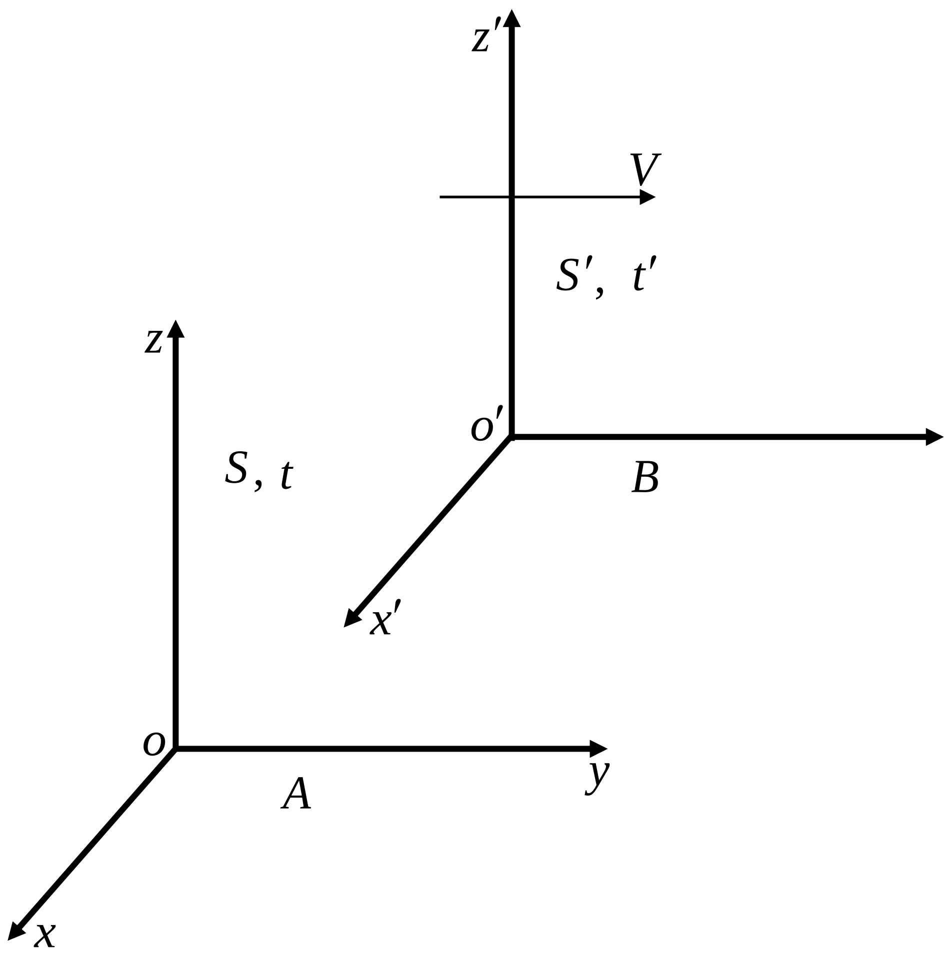
سرعة الضوء لا تعتمد على سرعة المصدر الذى يشعه أو الملاحظ الذى يقيسها ، ويسمى هذا بمبدأ ثبوت سرعة الضوء .

2- *تحويل لورنتز* : Lorentz Transformati

إستنادا إلى مسلمتى آينشتين يمكن التوصل إلى صيغ التحويلات بين الإطارات ذات القصور الذاتى .

إعتبر ملاحظين A ، B فى الإطارين S ، S' - شكل (5) -

فى البداية عندما : $t = t' = 0$ ، دع A ، B ينطبقان ،



شكل 5

وفى نفس اللحظة يطلق كل منهما إشارة ضوئية . دع S' (والمراقب B) يتحرك بالنسبة إلى S (المراقب A) بسرعة منتظمة V فى إتجاه ox. فى هذه الحالة تنتشر الإشارة الضوئية بالنسبة إلى كل من الملاحظين على شكل موجة كروية . نعتبر

قياسات A ، B :

قياسات A **:**

عند اللحظة t من ساعته تظهر معادلة سطح الموجة على صورة :

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \,. \qquad (1)$$

قياسات B :

عند اللحظة t' من ساعته تظهرمعادلة سطح الموجة على صورة :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c'^2t'^2 = 0 \,. \qquad (2)$$

بإستخدام مبدأ ثبوت سرعة الضوء من المسلمة الثانية فإن :

$$c = c' \,. \qquad (3)$$

وتصبح (2) بالصورة :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2\, t'^2 = 0 \,. \qquad (4)$$

من هذا نرى أن التحويل اللازم يجب أن يكون بحيث أن :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \,. \qquad (5)$$

بفرض أن الأطوال لا تتغير فى الإتجاهات العمودية على الحركة،

فإنه يمكن وضع :

$$y' = y \quad , z' = z \quad . \qquad (6)$$

فى هذه الحالة تصبح العلاقة (5) على الصورة :

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2 \quad . \qquad (7)$$

نفرض أن التحويل يكون له الصيغة الآتية :

$$x' = \beta x + \alpha t \quad ,$$
$$(8)$$
$$t' = \gamma x + \delta t \quad .$$

حيث α , β , γ , δ ثوابت تتعين بالطريقة الآتية :

نعتبر حركة نقطة الأصل o' بالنسبة إلى S :

إحداثى o' هو : $x' = 0$ وبالتعويض فى المعادلة الأولى من

المعادلتين (8) نحصل على سرعة o' بالنسبة إلى S بالصورة :

$$\frac{x}{t} = \frac{\alpha}{\beta} = V \quad .$$

ومنها نجد أن :

$$\alpha = -\beta V \quad .$$

بإعتبار حركة o بالنسبة إلى S' :

إحداثى o هو : $x = 0$ وبالتعويض فى المعادلتين (8)

نجد أن :

$$\frac{x'}{t'} = \frac{\alpha}{\delta} = -V \quad .$$

ومنها نحصل على :

$$\delta = \frac{\alpha}{V} = \beta \quad . \qquad (10)$$

فى هذه الحالة تصبح المعادلتان (8) على الصورة :

$$x' = \beta(x - Vt) \ ,$$
$$t' = \gamma x + \beta t \quad . \qquad (11)$$

بالتعويض فى (7) نجد أن :

$$\beta^2(x - Vt)^2 - c^2(\gamma x + \delta t)^2 = x^2 - c^2t^2 \ . \qquad (12)$$

بمقارنة المعاملات للطرفين ينتج أن :

$$\beta = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2} \ , \quad \gamma = -\beta V/c^2 \ . \qquad (13)$$

وبالتالى ينتج أن التحويل المطلوب يأخذ الصورة الآتية :

$$x' = \beta(x - Vt) \qquad y' = y \qquad z' = z$$
$$t' = \beta\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) \qquad \beta = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2} \ . \qquad (14)$$

يسمى هذا التحويل بتحويل لورنتز ، ويلاحظ أن صيغ التحويل تنطبق تماما مع التحويلات التى فرضها لورنتز فى نظريته. إلا أن المعنى الفيزيائى لها يختلف تماما عما تصوره لورنتز . فبينما يبنى لورنتز نظريته على المفاهيم المطلقة ويفسر تغير الأطوال من

إطار إلى آخر على أنه إنكماش حقيقى ، نحد أن آينشتين يرفض المفاهيم المطلقة والأثير ، حيث ينتج من مسلمته مباشرة أن الطول والزمن يتغيران من إطار لآخر تبعا لتحويل لورنتز (14)

يلاحظ أن تحويل لورنتز (14) يؤول إلى تحويل جاليليو (11) فى الباب الأول عندما تؤول c إلى ما لا نهاية ، وهذا هو معنى قولنا أن سرعة الضوء تقوم مقام السرعة اللانهائية فى قوانين نيوتن . من وجهة نظر أخرى ، يؤول تحويل لورنتز إلى تحويل جاليليو تقريبا عندما تكون :

$$V \ll c \qquad (15)$$

وهذا هو شرط تطبيق قوانين نيوتن للحركة على الظواهر الطبيعية أما إذا كانت سرعة الأجسام قريبة من سرعة الضوء فإن ميكانيكا نيوتن تفشل فى تفسير الظواهرالطبيعية التى تنشأ فى هذه الحالة ، ويجب إستبدالها بميكانيكا من نوع آخر تتفق مع مسلمات آينشتين (تحويل لورنتز) يطلق على الميكانيكا النسبية .

3- **ضبط الساعات المتباعدة :**

بتكرار نفس التجربة المثالية فى بند 8 من الباب الأول

- شكل (3) - مع إعتبار المسلمة الثانية لآينشتين ، فإن :

$$v_1 = v_2 = c \quad . \qquad (15)$$

ويصبح شرط إنضباط الساعتين P ، Q فى الإطارالساكن S على الصورة :

$$t_{2Q} = \frac{1}{2}(t_{1P} + t_{3P}) \quad . \qquad (16)$$

4- خواص تحويل لورنتز :

إن الأساس الذى يجب أن تقوم عليه الميكانيكا النسبية يتمثل فى تحويل لورنتز ، ولبيان التغييرات التى طرأت على المفاهيم الكلاسيكية يفضل وضع تحويل لورنتز بالصورة التفاضلية :

$$dx' = \beta (dx - Vdt) , dy' = dy , dz' = dz ,$$

$$dt' = \beta (dt - \frac{V}{c^2} dx) \quad . \qquad (17)$$

بواسطة هذا الصورة يمكن إستنتاج الخواص الآتية لتحويل لورنتز:

(أ) **تحويل لورنتز العكس**هو أيضا تحويل لورنتز: بحل المعادلات (17) لإيجاد dx ، dt بدلالة dx' ، dt' نجد أن :

$$dx = \beta (dx' + Vdt') \quad ,$$
$$dt = \beta (dt' + \frac{V}{c^2} dx') \quad . \tag{18}$$

وهذه هى نفس صورة تحويل لورنتز بإستبدال السرعة $(-V)$ بدلا من السرعة V .

(ب) تحت تحويل لورنتز يحتفظ التعبير :

$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2 (dt)^2$$

بصورته . إذا رمزنا لهذا العبير بالرمز $(ds)^2$ فإنه بإستخدام تحويل لورنتز العكسى (18) نجد أن :

$$(ds)^2 = \beta^2 (dx' + V\ dt')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 - \beta^2 c^2 (dt' + \frac{V}{c^2} dx')^2$$

$$= \beta^2 (1 - \frac{V^2}{c^2})\ (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 - \beta^2 c^2 (1 - \frac{V^2}{c^2})\ (dt')^2 \tag{19}$$

$$= (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 - c^2 (dt')^2 \quad .$$

وهذا التعبير $(ds)^2$ الذى يحتفظ بصورته تحت تحويل لورنتز يمثل من الوجهة الهندسية مربع المسافة الكلية بين حدثين قريبين محددين بالاحداثيات الرباعية : (x , y , z , t) ،

في فضاء رباعى للمكان $(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)$ والزمان . تسمى ds كذلك عنصر المسافة الزمكانية (Space-time interval) هذه النتيجة تختلف تماما عما يناظرها فى تحويل جاليليو الذى يفصل بين اللامتغير $(d\vec{r})^2$ واللامتغير الزمانى $(dt)^2$ حيث :

$$(d\vec{r})^2 = (d\vec{r}\,')^2 , \qquad (dt)^2 = (dt')^2 . \tag{20}$$

هذا الإنفصال فى الزمان والمكان هو نتيجة فرض أن الزمن مطلق أما فى تحويل لورنتز فإن الزمن يتغير من إطار ألى آخر ، تماما مثل تغير الإحداثيات المكانية . مما يجعل الزمن والمكان متصلا رباعيا (الزمكان) . فى هذا الفضاء الرباعى تمثل الأحداث بنقط (x, y, z, t) , والخط الواصل بينها يعطى تطور الحدث من ماضيه Past إلى مستقبله Future ، وهذا الخط يسمى :

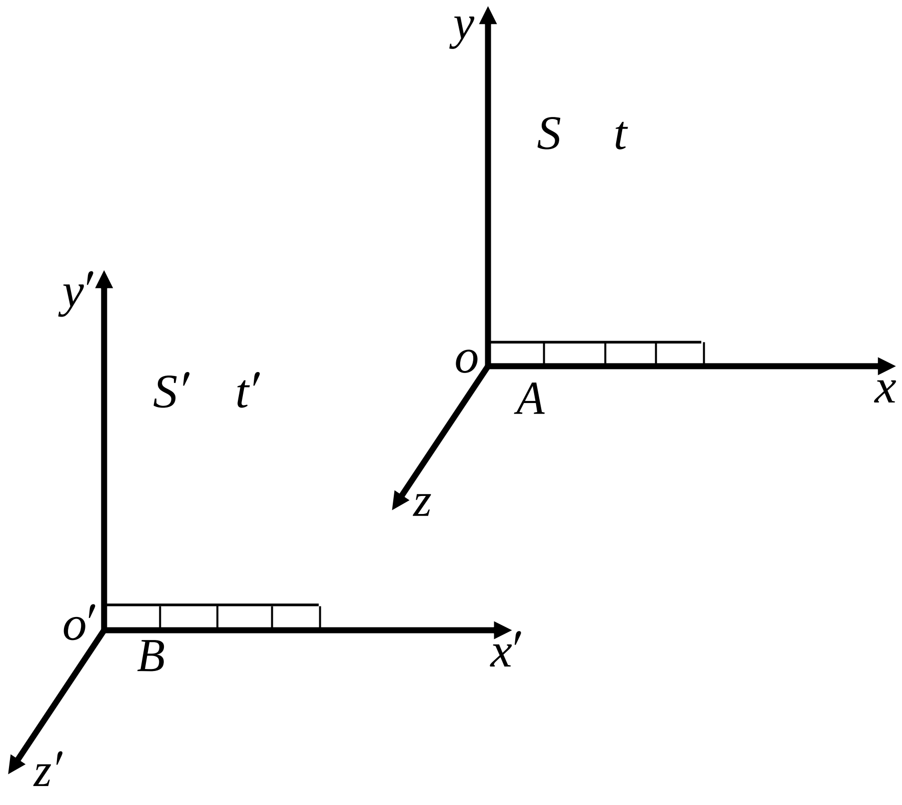
" الخط الدنيوى " Word line .

5- **النتائج المترتبة على تحويل لورنتز (الكينماتيكا النسبية) :**

(أ) إنكماش فيتزجيرالد – لورنتز :

Fitzgeald-lorentz contraction

إعتبر قضيبين متماثلين تماما عندما يكون ساكنين بالنسبة إلى بعضهما ، ثبت القضبين فى وضع مواز للمحور ox ، أحدهما فى الإطار S والأخر فى S' بحيث يسهل مقارنة تدارجهما عند إنزلاق أحدهما على الآخر - شكل (6) -



شكل 6

دع الملاحظ B فى S' يصنع علامتين على قضيبه تحدد مسافة dx'، والمراقب A يلاحظ حدثى إنطباق طرفى المسافة dx'

على تدريج قضيبه عندما يتحرك S' مارا به . فى هذه الحالة

يجب أن يسجل A الحادثين فى نفس اللحظة أى عندما :

$dt = 0$ من تحويل لورنتز (17) نجد أن :

$$dx' = \beta\, dx = dx / \sqrt{1 - V^2 / c^2} \ . \qquad (21)$$

حيث V سرعة S' بالنسبة إلى S . يمكن وضع (21)

على الصورة :

$$dx = dx' \sqrt{1 - V^2 / c^2} \ . \qquad (22)$$

ومنها ينتج أن : $dx < dx'$.

إذا كان طول القضيب فى S' هو L_o وفى S هو L فإن :

$$L = L_o \sqrt{1 - V^2 / c^2} \ . \qquad (23)$$

معنى ذلك أن قضيبا طوله L_o مقاسا بواسطة B (ساكن بالنسبة إلى S') يظهر منكمشا إذا قيس بواسطة A (متحرك بالنسبة إليه) ويجب أن يفهم هنا أن هذا الأنكماش لايمكن قياسه بوسائل طبيعية أو أنه يناظر إنكماشا حقيقيا للأجسام نتيجة حركتها بالنسبة إلى إطار

مطلق ، يكون فيه الطول والزمن مفهومين مطلقين . إننا فى نظرية النسبية قد قمنا باستبدال المفاهيم المطلقة لنيوتن بأخر نسبية تتغير تبعا لحركة الإطارات التى نقيس هذه المفاهيم النسبية بالنسبة إليها.

(ب) آنية الحوادث : Simultanity of events

تبعا لتحويل جاليليو يكون :

$$dt = dt' = 0 \ .$$

أى أنه إذا وقعت حادثتان عند نفس اللحظة فى إطار ما فإنهما يحدثا عند نفس اللحظة فى كل الإطارات الأخرى . ولكننا سنجد أن هذا المفهوم المطلق لآنية الحوادث يأخذ معنى آخر تبعا لتحويل لورنتز

إعتبر حادثتين آنيتين بالنسبة إلى S' أى أن : $dt' = 0 \ .$

بإستخدام تحويل لورنتز (17) نجد أن :

$$dt = \frac{V}{c^2}dx \ . \qquad (24)$$

معنى ذلك أن الحادثتين الآنيتين فى S' لا يكونا كذلك فى S

(جـ) تقصير الزمن : Time dilatation

إعتبر حادثين متتاليتين تقعان فى نفس المكان بالنسبة إلى

الملاحظ B فى S' . إذا فرضنا أن الفترة الزمنية بينهما

هى dt' ، فإنه ينتج ، بإستخدام (18) بعد وضع $dx' = 0$ أن :

$$dt = \beta\, dt' \tag{25}$$

ومنها ينتج أن :

$$dt > dt'$$

إذا كانت T_o هى الفترة الزمنية المقاسة فى S' , T فى S

فإن :

$$T = T_o / \sqrt{1 - V^2 / c^2} \;. \tag{26}$$

من هذا يتضح أن ساعة تعطى مرور زمن قدرة T_o مقاسا بواسطة

B (ساكنا بالنسبة إلى B) سوف تعطى زمنا قدره T إذا قيس

بواسطة A (تتحرك بالنسبة إليه) .

(د) تحويلات السرعة :

نفرض أن جسيما يتحرك بالسرعة $\vec{u}$ بالنسبة إلى S ,

$\vec{u}'$ بالنسبة إلى S' حيث :

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \;, \qquad \vec{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3) \;,$$

$$u_1 = \frac{dx}{dt} \;, \quad u_2 = \frac{dy}{dt} \;, \quad u_3 = \frac{dz}{dt} \;, \tag{27}$$

$$u'_1 = \frac{dx'}{dt'} \;,\; u'_2 = \frac{dy'}{dt'} \;,\; u'_3 = \frac{dz'}{dt'} \;,$$

بإستخدام تحويل لورنتز (18) فى الصيغ (27) نحصل على :

$$u_1 = \frac{dx' + V\,dt'}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'} = \frac{u'_1 + V}{1 + \frac{V\,u'_1}{c^2}} \;, \qquad (28)$$

$$u_2 = \frac{1}{\beta}\,\frac{u'_2}{1 + \frac{V\,u'_1}{c^2}} \;, \qquad (29)$$

$$u_3 = \frac{1}{\beta}\,\frac{u'_3}{1 + \frac{V\,u'_1}{c^2}} \;. \qquad (30)$$

نتائج :

(i) يلاحظ أن u_1 هى محصلة السرعتين u'_1 ، V فى نفس الأتجاه . تبعا للميكانيكا الكلاسيكية فإن :

$$u_1 = u_1 + V \;.$$

وهذه يمكن الحصول عليها من الصيغة (28) إذافرضنا أن c تؤول إلى مالانهايه أو $V << c$ وعلى ذلك إذا كانت u محصلة السرعتين v , w فى نفس الاتجاه فإنه فى نظرية النسبية الخاصة يكون :

$$u = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}} \tag{31}$$

تسمى هذه الصيغة بقانون جمع السرعات لآينشتين .

(ii) يلاحظ أن مركبات السرعة فى الإتجاه العمودى على حركة الإطار $u_2 \,,\; u_3$ تتغير أيضا ، بخلاف الإحداثيات ، ولكن إذا تلاشت $u'_2 \,,\; u'_3$ فإن $u_2 \,,\; u_3$ تتلاشيان أيضا .

(iii) يمكن كتابة الصيغة (31) على الصورة :

$$1 - \frac{u}{c} = 1 - \frac{1}{c}\frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}}$$

$$= \left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{w}{c}\right) / \left(1 + \frac{vw}{c^2}\right) \; . \tag{32}$$

من هذا نستنتج أنه إذا كانت : $v = c$ أو $w = c$ فإن : $u = c$ أيضا . أى أن محصلة سرعتين إحداهما سرعة الضوء فى الفضاء تساوى سرعة الضوء فى الفضاء. وهذا يعنى أن سرعة الضوء فى الفضاء هى أكبر السرعات الممكنة .

(iv) لإيجاد تحويل مربع السرعة $(\vec{u})^2$ نضع (28) - (30)

على الصورة :

$$u'_1 = \frac{u_1 - V}{1 - \frac{V\,u_1}{c^2}} \quad . \tag{28$'$}$$

$$u'_2 = \frac{1}{\beta}\,\frac{u_2}{1 - \frac{V\,u_1}{c^2}} \quad . \tag{29$'$}$$

$$u'_3 = \frac{1}{\beta}\,\frac{u_3}{1 - \frac{V\,u_1}{c^2}} \quad . \tag{30$'$}$$

بالتربيع والجمع وملاحظة أن : $u_1 V = \vec{u}\cdot\vec{V}$ نحصل على :

$$(\vec{u}\,')^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{V}}{c^2}\right)^2}\left[\, u_1^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{V} + \frac{1}{\beta^2}(u_2^2 + u_3^2)\,\right] \tag{33}$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{V}}{c^2}\right)^2}\left[\, (\vec{u})^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{V} + \frac{1}{c^2}(\vec{u}\wedge\vec{V})\,\right]$$

6- <u>خاصية هامة لتحويل لورنتز :</u>

نعلم أن تحويل جاليليو يمكن وضعه على الصورة :

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V}t \;, \qquad t' = t \;. \tag{34}$$

إذا كان لدينا ثلاثة إطارات ذات قصور ذاتى S ، S' ، S''

تتحرك بالنسبة لبعضها بالسرع $\vec{V}$ ، $\vec{V}'$ على الترتيب ، فإن

تحويل جاليلو الذى يربط بين S' ، S'' يكون :

$$\vec{r}'' = \vec{r}' - \vec{V}t' \ , \qquad t'' = t' \ . \qquad (35)$$

من هذا ينتج أن التحويل الذى يربط S ، S'' هو :

$$\vec{r}'' = \vec{r} - \vec{V}t - \vec{V}'t'$$

$$= \vec{r} - (\vec{V} + \vec{V}')\, t \ , \qquad (36)$$

$$t'' = t \ .$$

أيضا تحويل جاليلى بالسرعة $(\vec{V} + \vec{V})$ لجميع إتجاه السرع يعبر

عن ذلك بأن تحويلات جاليليو بين الإطارات ذات القصور الذاتى

تكون فيما بينهما مجموعة وتتميز هذه المجموعة بخاصيتين :

(i) أنها تحتوى على عنصر الوحدة الذى يحول الإطار الإنتسابى

نفسه ، ويرمز لهذا العنصر بالرمز :

$$e : S \longrightarrow S$$

(ii) أن حاصل ضرب عنصرين (تحويلين) يكون أيضا عنصرا

فى المجموعة . أى أنه إذا كان G_1 ، G_2 هما عنصران فى

المجموعة بالصورة :

$$G_1 : \quad S \longrightarrow S' \quad ‘ \quad G_2 : \quad S' \longrightarrow S''$$

فإن حاصل الضرب : $G_2 \; G_1$ يكون :

$$G_2 G_1 : \quad S \longrightarrow S''$$

واضح من هذا العناصر (التحويلات) تختلف بإختلاف سرعة

الإطارات . ويعبر عن ذلك بإن المجموعة ذات بارأمتر $\vec{V}$ ويكتب :

$$G_1 = G\,(\vec{V}\,) \quad ‘ \quad G_2 = G\,(\vec{V}'\,) \quad ‘ \quad \cdots\cdot$$

ويكون حاصل الضرب $G_2 \, G_1$ عنصراً له البارامتر $\vec{V} + \vec{V}'$. حيث

$$G_2 G_1 = G\,(\vec{V}'\,)\,G\,(\vec{V}\,) = G\,(\vec{V} + \vec{V}'\,)$$

هذه الخاصية تنطبق أيضا على تحويلات لورنتز فى حالة توازى

السرعات $\vec{V}' \,,\, \vec{V}$ فقط . لإثبات ذلك نفرض أن الإطارات

S ‘ S' ‘ S'' تتحرك بالنسبة إلى بعضها فى إتجاه ox بالسرعتين : $V \,,\, V'$.

إذا رمزنا للتحويلين بين الإطارات الثلاث على الترتيب بالرمزين

$L\,(V\,)$ ‘ $L\,(V'\,)$ فإن :

$L(V)$:

$$x' = \beta(x - Vt) \;, \qquad (37)$$

$$t' = \beta\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) \;, \quad \beta = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2} \;.$$

$L(V')$:

$$x'' = \beta'(x' - V't') \;, \qquad (38)$$

$$t'' = \beta'\left(t' - \frac{V'x'}{c^2}\right) \;, \quad \beta' = 1/\sqrt{1 - V'^2/c^2} \;.$$

بالتعويض عن x' , t' من المعادلة (37) فى المعادلة (38) نحصل على حاصل ضرب العنصرين $L(V)$ ، $L(V')$ على الصورة :

$L(V')\,L(V)$:

$$x'' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}(x - ut) \;, \qquad (39)$$

$$t'' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\left(t - \frac{u}{c}x\right) \;.$$

حيث u هى مجموع السرعتين V ، V' تبعا لقانون آينشتين (31) من هذا ينتج أن :

$$L(V')\, L(V) = L(u) \;.$$

أى أن التحويل الناتج هو تحويل لورنتز بالسرعة u ، ويسمى أحيانا بمحصلة التحويلين الأخيرين .

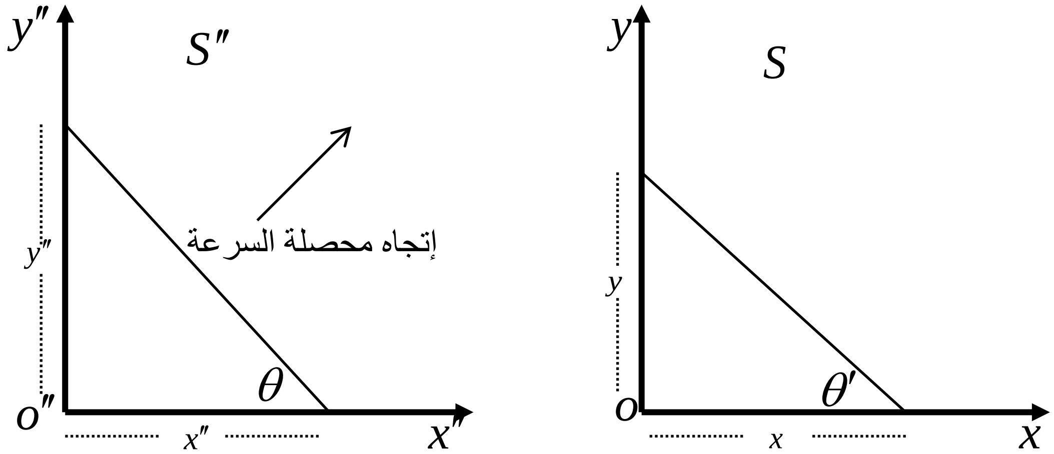
سندرس الأن الحالة عندما تكون السرعتان V ، V' ليسا فى إتجاه واحد وإنما متعامدين . نأخذ V فى إتجاه ox ، والسرعة V' فى إتجاه oy . فى هذه الحالة تصبح تحويلات لورنتز على الصورة :

$$x'' = x' = \beta\,(x - Vt)\;,$$

$$t'' = t' = \beta\,(t - \frac{Vx}{c^2})\;,$$

$$y'' = \beta'\,(y - V't')$$

$$= \beta'\,(y + \beta\,\frac{VV'}{c^2}\,x - \beta\,V't)\;. \qquad (40)$$



شكل 7

إذا كانت θ هى الزاوية التى يصنعها المستقيم المحصور بين المحورين $o''x''$ ، $o''y''$ فى S' مع $o''x''$ ، فإن طول هذا الجزء – شكل (7) – يساوى :

$$x'' \cos\theta + y'' \sin\theta = \beta\, x \left(\cos\theta + \beta' \frac{VV'}{c^2} \sin\theta \right) + \beta' y \sin\theta - \beta t \left(V \cos\theta + \beta' V' \sin\theta \right) . \tag{41}$$

وحيث أن طول الجزء العمودى على الحركة يبقى ثابتا بدون تغيير، فإن قيمة θ التى تناظر الإتجاه العمودى للحركة تتعين بمساواة معامل t للصفر . أى أن :

$$\tan\theta = -V / V'\beta' \quad . \tag{42}$$

بالتعويض فى المعادلة (41) نجد أن :

$$x''\cos\theta + y''\sin\theta = -V'x/\beta U + Vy/U \tag{43}$$

$$= x\cos\theta' + y\sin\theta' \quad .$$

حيث :

$$U^2 = V^2 + V'^2 - V^2V'^2/c^2 \quad , \tag{44}$$

$$\tan\theta' = -V\beta / V'^2 \quad . \tag{45}$$

واضح أن : $\theta \neq \theta'$. نستنتج من ذلك أنه يوجد دوران بزاوية

$\theta - \theta'$بجانب تحويل لورنتزالمحصل.لايجاد قيمة الدوران نعلم أن:

$$\tan(\theta - \theta') = \frac{\tan\theta - \tan\theta'}{1 + \tan\theta\tan\theta'}$$

$$= \frac{V(\beta - 1/\beta')}{V'(1 + V^2\beta / V'^2\beta')}$$

$$= \frac{VV'(\beta\beta' - 1)}{\beta V^2 + \beta' V'^2} \quad . \tag{46}$$

إذا كانت : $V, V' << c$ ، فإنه يمكن إجراء التقريبات الآتية :

$$\beta \cong 1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2} \quad , \qquad \beta' \cong 1 + \frac{1}{2}\frac{V'^2}{c^2} \quad .$$

وبالتعويض فى (46) وأعتبار الزاوية $\theta - \theta'$ صغيرة ، فإن :

$$\tan(\theta - \theta') \cong \theta - \theta' = \Delta\theta = \frac{1}{2}\frac{VV'}{c^2} \quad . \qquad (47)$$

هذا الدوران يسمى دوران توماس Thomas precession وله أهمية كبيرة فى علم الطبيعة الحديثة (دوران الأليكترون) .

7- *متناقضة الساعة* : Clock Paradox

فى الأيام الأولى لنظرية النسبية قامت مناقشات عديدة عما يسمى" متناقضة الساعة " بالرغم من عدم وجود متناقضة بالمعنى الصحيح . إعتبر ملاحظين A ، B كل منهما مزود بساعة .

فى البداية نفرض أنهما معا وساعتيهما مطبوطتين . دع A يتحرك بسرعة V بالنسبة إلى B ، وبعد أن يقطع مسافة معينة يعود ثانية إلى B حيث يقارن ساعتة B تبعا لظاهرة تقصير الزمن ، فإن ساعة A تظهر أبطأ من ساعة B . لكننا نستطيع أن نفرض أن A ساكن ، وأن B يتحرك فى الأتجاه المضاد بالسرعة $-V$ من ذلك يستنتج أن الساعتين يجب أن يدلا على نفس

الزمن حل هذه المتناقضة يظهر فى الفرض بأن الملاحظين A ، B متكافئان ، بينهما لايوجد هذا التكافؤ من الناحية الطبيعية ، إذ أن أحدهما B ساكن بينما الآخر A تحرك ثم غير إتجاه حركته مما يستلزم تأثير قوة عليه .

تمارين

1- أثبت أن تحويلات لورنتز تكّون فيما بينها مجموعة متبادلة إذا كانت السرعات فى نفس الإتجاه .

2 - أثبت أن عنصر الطول وعنصر الزمن فى الفضاء الثلاثى ليسا " لاتغيريين فى الصورة " تحت تحويل لورنتز .

3 - أوجد تحويل عنصر الحجم لجسم بالنسبة إلى الإطارين الإنتسابيين ذات القصور الذاتى S , S' . وأثبت أن الحجم ينكمش فى إتجاه الحركة .

4 - إذا دار صاروخ حول الأرض بسرعة تساوى $\frac{1}{10}.c$ حيث c هى سرعة الضوء . أوجد نسبة إنكماش الصاروخ بالنسبة لمراقب على الأرض .

5 - إذا كانت سرعة الضوء فى سائل هى : $\frac{c}{n}$ حيث n معامل إنكسار السائل . بيّن أن سرعة الضوء u فى السائل عندما يتحرك بسرعة $V << c$ تعطى بالصورة : $u = \frac{c}{n} \pm V(1 - \frac{1}{n^2})$

تبعا لإتجاه حركة السائل بالنسبة للضوء .

الباب الثالث

التمثيل الهندسى لنظرية النسبية الخاصة

1-الفضاء الرباعى لمينكوفسكى :

نعلم أنه تحت تحويل لورنتز (14) يبقى مربع عنصر المسافة

الزمكانية :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2 (dt)^2 \quad (1)$$

" لا تغيرى فى الصورة " Invariant .

فى عام 1908م أدخل مينكوفسكى : Minkowski

المتغيرات الآتية :

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict \ . \quad (2)$$

حيث $i = \sqrt{-1}$. فى هذه الحالة يأخذ مربع عنصرالطول $(ds)^2$

الصورة :

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_4)^2 \ . \quad (3)$$

من الوجهة الهندسية يطلق على ds فى الصورة (3)

مترك الفضاء الرباعى الإقليدى (أى المستوى) حيث معاملات

التفاضلات dx_1 ، dx_2 ،..... مساوية الوحدة . فى الحالة العامة يمكن إستنتاج الخواص الهندسية للفضاء من هذه المعاملات فى الهندسة " اللاإقليدية " تكون معاملات التفاضلات دوال للمتغيرات. كذلك إذا كانت معاملات التفاضلات هى على الترتيب $(1,1,1,-1)$ فإن الفضاء يسمى فضاءً إقليدياً غيرحقيقى Pseudo-Euclidean يطلق أحيانا على الفضاء الإقليدى الذى يكون فيه الإحداثى الرابع x_4 تخيليا بالفضاء الرباعى لمينكوفسكى. بدلالة الإحداثيات (x_1, x_2, x_3, x_4) يمكن وضع تحويل لورنتزعلى الصورة :

$$x'_1 = \beta\,(x_1 + i\frac{V}{c^2}x_4)\ ,\ x'_2 = x_2\ ,\quad x'_3 = x_3\ ,$$
$$x'_4 = \beta\,(x_4 - i\frac{V}{c^2}x_1)\ . \qquad (4)$$

بإستخدام التعويض :

$$\tan\theta = i\frac{V}{c}\ . \qquad (5)$$

نجد أن المعادلات (4) تصبح بالصورة :

$$x'_1 = x_1\cos\theta + x_4\sin\theta\ ,$$
$$x'_4 = x_1\cos\theta - x_4\sin\theta\ . \qquad (6)$$

(سنستغنى فيما بعد عن الإحداثيات الأخرى x_2 , x_3)

هذا يعنى أن تحويل لورنتز يمكن تمثيله هندسيا بدوران المحاور

ox_1 ، ox_4 فى الفضاء الرباعى لمينكوفسكى بزاوية تخيلية

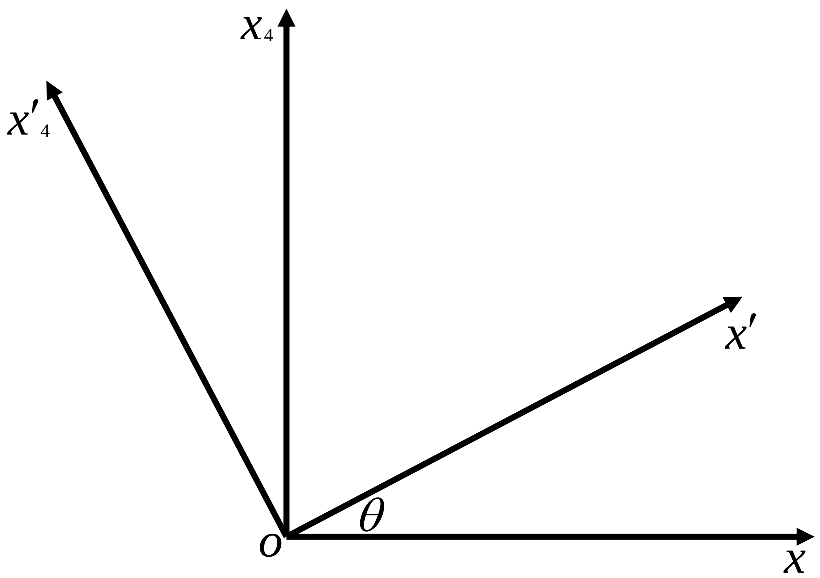
θ تعطى بالصيغة (5).

بعبارة أخرى فإنه لكى نتحول من الإطار S إلى S' ندير المحاور

ox_1 ، ox_4 بالزاوية θ . بهذه الوسيلة الهندسية يمثل الحدث

بنقطة فى الفضاء الرباعى (x_1, x_2, x_3, x_4) لكى نصف الحدث

بالنسبة إلى الإطار المتحرك S' علينا أن نقرأ الإحداثيات الجديدة



شكل 8

(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) التى نحصل عليها بدوران المحورين

ox_1 ، ox_4 بالزاوية :

$$x_1 \hat{o} x_4 = \theta = \tan^{-1}(iV/c) \cdot$$

كذلك فإن تحويل لورنتز العكسى يأخذ الصورة :

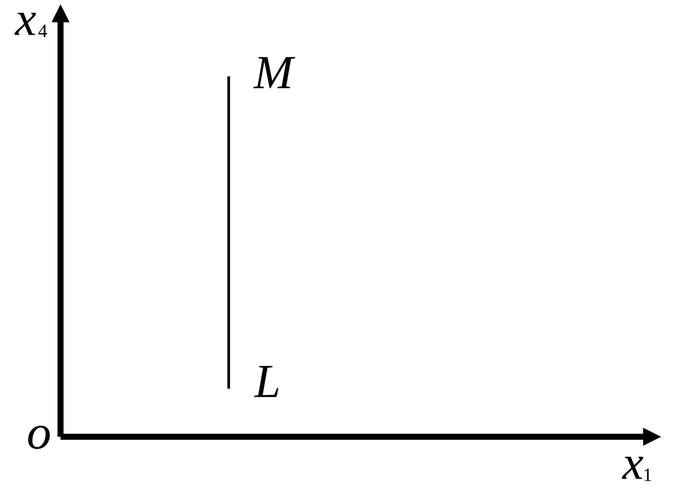
$$x_1 = x'_1 \cos\theta - x'_4 \sin\theta \ ,$$
$$x_4 = x'_4 \cos\theta + x'_1 \sin\theta \cdot \qquad (6)'$$

2- **الخط الدنيوى للجسيم :** World Line

حالة الجسيم الطبيعية (تاريخه) توصف بمجموعة الأحداث التى تقع فى ماضيه وحاضره ومستقبله . هذه الأحداث تمثل بنقط فى الفضاء الرباعى لمينكوفسكى .

(i) **الخط الدنيوى لجسيم ساكن :**

حيث أن الجسيم الساكن يشغل نفس الموضوع عند الأزمنة المختلفة فإن الخط الدينوى له يكون خطا مستقيما LM الذى



شكل 9

يوازى المحور ox_4 فى المستوى - شكل (9)-

(ii) *الخط الدنيوى لجسيم متحرك* :

إذا فرضنا جسيما متحركا بالسرعة المنتظمة V موازيا للمحور ox فى الإطار الإنتسابى S ، فإن معادلة مساره بالنسبة للملاحظ A تكون :

$$x = x_o + Vt \quad . \tag{7}$$

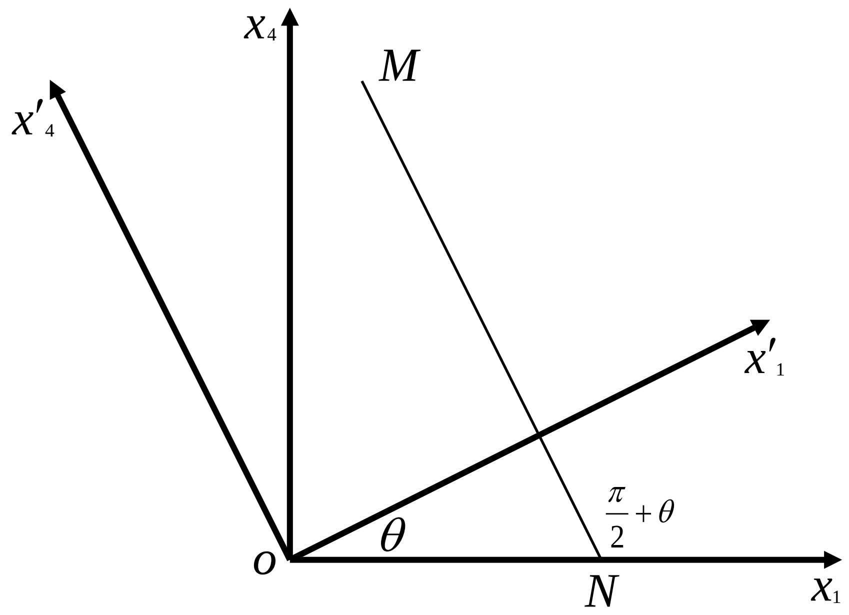
بإستعمال إحداثيات مينكوفسكى، تصبح المعادلة (7) على الصورة

$$x_1 = x_o - x_4 \tan\theta \quad . \tag{8}$$

حيث :

$$\tan\theta = iV/c \quad . \tag{9}$$

المعادلة (8) تمثل خطا مستقيما هو LM يميل بزاوية $(\frac{\pi}{2}+\theta)$ على المحور ox_1 فى المستوى x_1ox_4 - شكل (3) - بدوران المحورين ox_1 ، ox_4 بزاوية $\theta = \tan^{-1}(iV/c)$ فإنه يتضح أن الخط LM يوازى المحور ox_4 . أى أن الجسيم يكون ساكنا بالنسبة للمحاور الجديدة – شكل (10) .

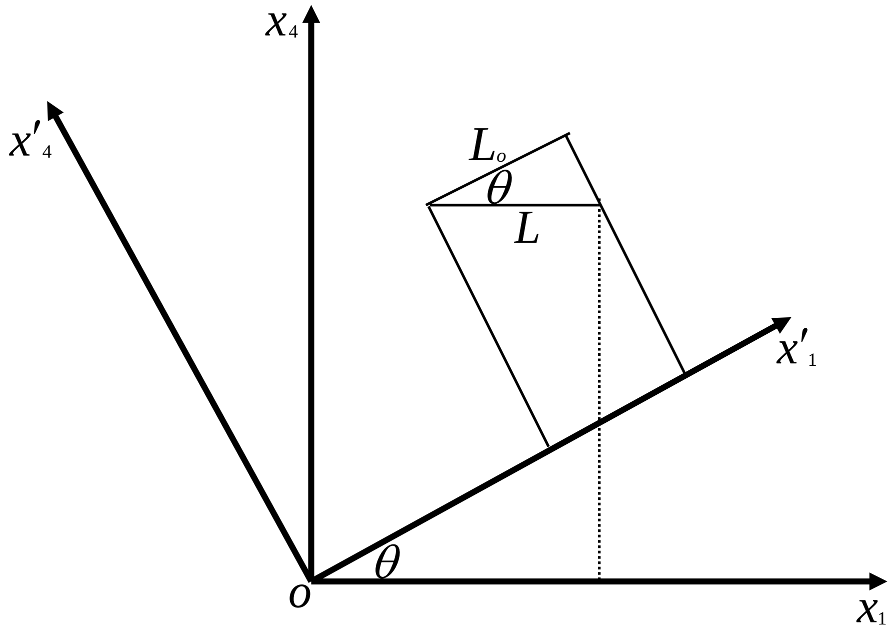


شكل 10

3- التمثيل الهندسى للظواهر الكينماتيكية :

(i) إنكماش فيتزجيرالد ولورنتز :

لما كان القضيب المتحرك الذى طوله L_o يكون ساكنا بالنسبة للإطار المتحرك معه أى بالنسبة للمحاور ox'_1، ox'_4 فإن مسارات نقطه المختلفة تكون موازية للمحور ox'_4 - شكل (11)- كذلك فإن القضيب الذى طوله L يكون ساكناً بالنسبة إلى الإطار S أى بالنسبة إلى المحاور ox_1 ، ox_4 فتكون مسارات نقطه موازية للمحور ox_4 من شكل (11) نستنتج أن :



شكل 11

$$L_o = L\cos\theta \quad . \qquad (10)$$

من الصيغة (9) نجد أن :

$$\cos\theta = 1/\sqrt{1-V^2/c^2} = \beta \quad . \qquad (11)$$

من ذلك ينتج أن :

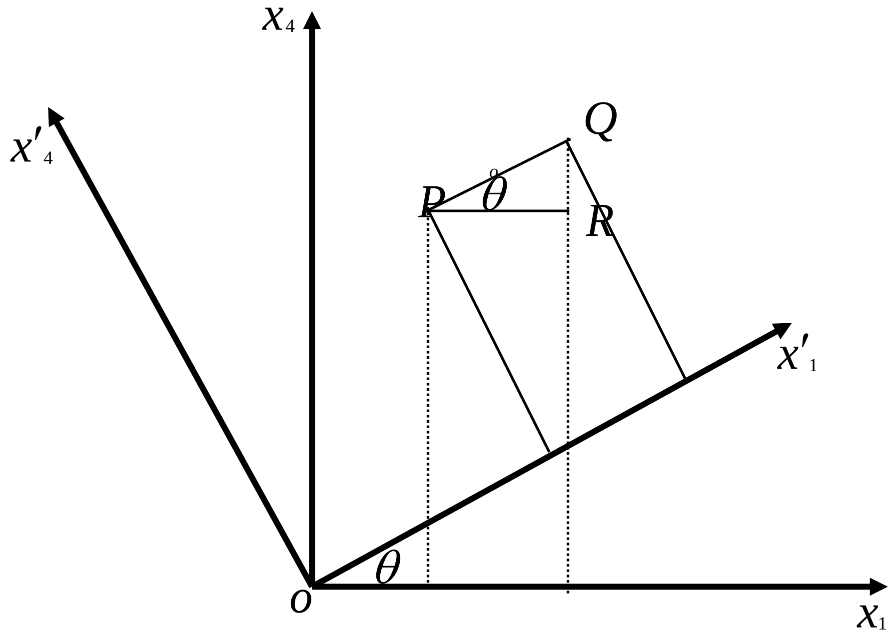
$$L = L_o\sqrt{1-V^2/c^2} \quad .$$

وهى نفس العلاقة السابقة (المعادلة (23) فى الباب الثانى) .

(ii) آنية الحوادث :

إعتبر حادثتين آنيتين P ، Q بالنسبة إلى الإطار S' هاتين

الحادثتين تمثلان بنقطتين بحيث يكون الخط الواصل بينهما موازياً



شكل 12

للمحور ox'_1- شكل (12) - واضح من الشكل أنه يوجد فارق زمنى

بين الحادثتين بالنسبة إلى الإطار S هذا الفرق الزمنى يساوى $\overline{QR}$

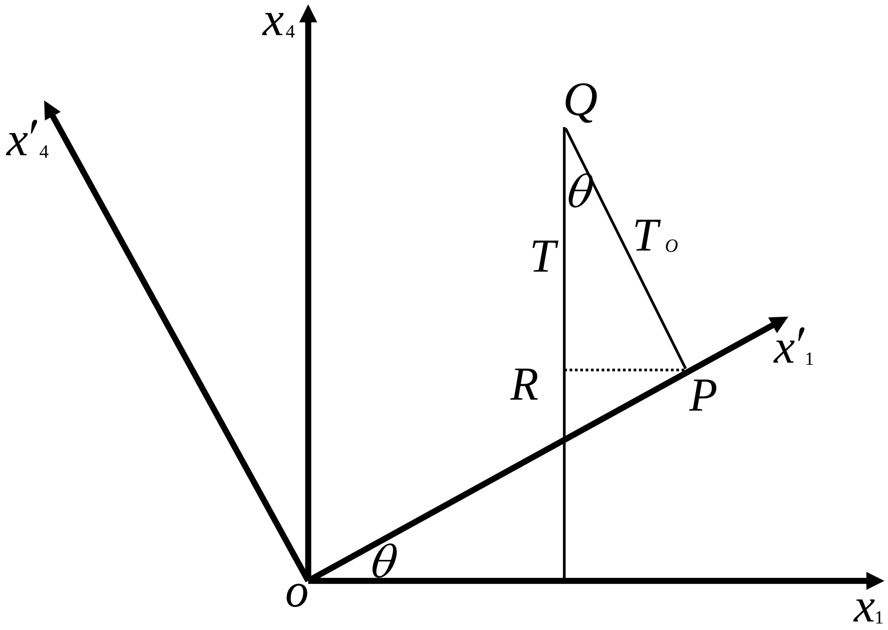
(iii) تقصيرالزمن :

إعتبر حادثتين تقعان عند نفس المكان بالنسبة إلى S'.هاتين

الحادثتين تمثلان بالنقطتين Q ، P حيث يكون الخط الواصل

بينهما موازيا للمحور ox'_4 - شكل (13) - الفرق الزمنى بين

بين الحادثتين مقاساً بالنسبة إلى S' هو :



شكل 13

$$T_o = \overline{PQ} \quad . \qquad (13)$$

بالنسبة إلى S يكون الفرق الزمنى هو :

$$T = \overline{RQ} \quad . \qquad (14)$$

واضح من الشكل أن :

$$T = T_o \cos\theta = T_o / \sqrt{1 - V^2 / c^2} \quad . \qquad (15)$$

وهى نفس العلاقة السابقة .

4-الزمن المحلى : Proper Time

وجدنا أن مترك الفضاء الرباعى ds يبقى"لا تغيرى فى الصورة"

تحت لورنتز ، أى أن :

$$(dx_1)^2+(dx_2)^2+(dx_3)^2-c^2(dt)^2 = \tag{16}$$

$$(dx'_1)^2+(dx'_2)^2+(dx'_3)^2-c^2(dt')^2 \ .$$

أو
$$(ds)^2 = (ds')^2 \ . \tag{17}$$

إذا فرضنا أن جسيما يتحرك بسرعة $\vec{v}$ بالنسبة إلى S، فإنه يمكن

إعتباره ساكنا بالنسبة إلى إطار آخر S' يتحرك بالنسبة إلى S

بنفس السرعة $\vec{v}$ وبالتالى يكون :

$$\left(\frac{dx'_1}{dt'}\right)^2+\left(\frac{dx'_2}{dt'}\right)^2+\left(\frac{dx'_3}{dt'}\right)^2 = 0 \ . \tag{18}$$

$$v^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 \ . \tag{19}$$

وبالتعويض فى (16) ينتج أن :

$$(ds)^2 = (v^2-c^2)(dt)^2 = -c^2(dt')^2 \ . \tag{20}$$

أو
$$dt' = \sqrt{1-v^2/c^2}\ dt \tag{21}$$

$$= -\frac{i}{c}ds \ . \tag{22}$$

من الصيغة الأخيرة (22) يتضح أن الفترة الزمنية dt' تبقى " لاتغيرية فى الصورة " تحت لورنتز .أى لاتتغير من إطار إلى آخرمن الإطارات ذات القصور الذاتى . يطلق على الزمن t' فى هذه الحالة الزمن المحلى ويرمز له بالرمز τ حيث

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2 / c^2}\ dt \quad . \tag{23}$$

<u>5- مخروط الضوء</u> : Ligh Cone

إذا وقعت حادثتان متجاورتان فإن المسافة الزمكانية بينهما تعطى بالصيغة :

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 - c^2 (dt)^2$$

$$= (v^2 - c^2)\ (dt)^2$$

$$\begin{matrix} \le \\ > \end{matrix}\ 0 \tag{24}$$

سندرس الآن ثلاث حالات هى :

(أ) إذا كانت $(ds)^2 < 0$ فإن v^2 تكون أقل من c^2 ، وهذا يتفق مع الظواهر الطبيعية . تسمى ds فى هذه الحالة

المسافة " شبه زمانية " Time Like

لأنه بالتحويل إلى إطار آخر يكون فيه الجسيم ساكنا ، نجد أن :

$$(ds)^2 = -c^2 \,(dt')^2 \;. \qquad (25)$$

أى أن المسافة الزمكانية تقاس بالفرق الزمنى فقط .

(ب) إذا كانت $(ds)^2 = 0$ فإن : $v^2 = c^2$ أى يتحرك الجسيم

بسرعة الضوء فى الفضاء ، وسنعود لدراسة هذه الحالة فيما بعد.

(جـ) إذا كانت $(ds)^2 > 0$ فإن v^2 تكون أكبر من c^2 وهذا لا

يتفق مع الظواهر الطبيعية ، إذا لاتوجد جسيمات مادية تتحرك

أسرع من الضوء فى الفضاء . ds تسمى فى هذه الحالة المسافة

" شبه مكانية " Space Like لأنه يمكن فى هذه الحالة التحويل

إلى إطار آخر تكون فيه :

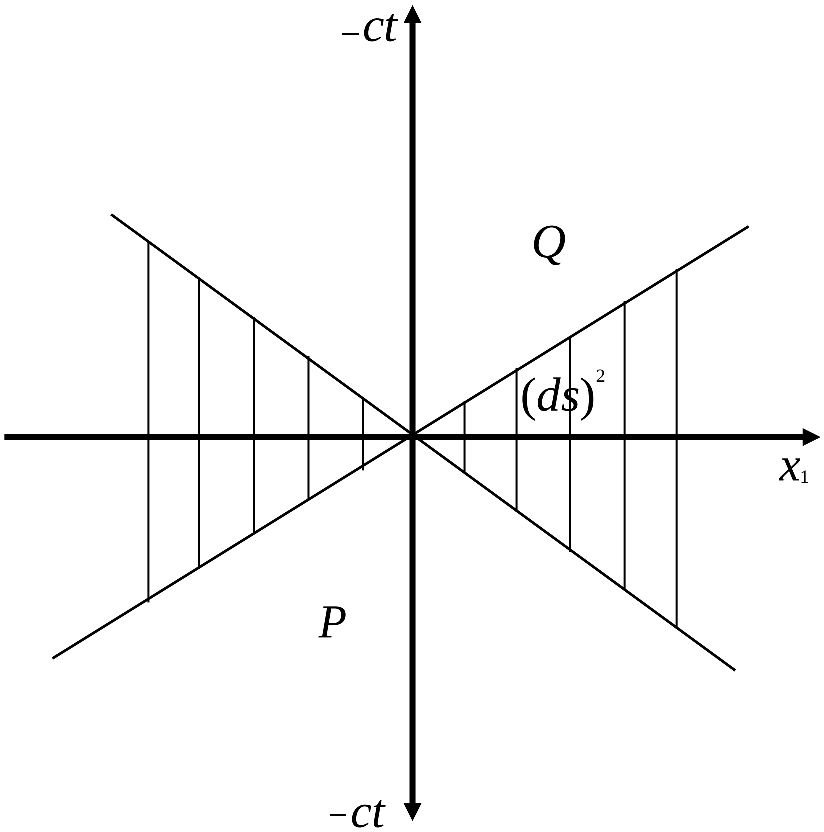
$$(ds)^2 = (dx'_1)^2 + (dx'_2)^2 + (dx'_3)^2 \;. \qquad (26)$$

فى الفضاء الرباعى لمينكوفسكى تمثل المعادلة :

$$(ds)^2 = 0 \;. \qquad (27)$$

مخروطا (خطان مستقيمان فى شكل (14) ، داخل المخروط يناظر

المسافات "شبه زمانية" بينما خارجه يناظر المسافات "شبه مكانية".



شكل 14

تناظر الأحداث الطبيعية النقط داخل المخروط : الجزء الأسفل P يمثل الماضى ، والأعلى Q المستقبل . أى خط يصل من P إلى Q خلال O يمثل خطا دنيويا . من الخاصية " اللاتغيرية فى الصورة"

للمترك ds تحت تحويل لورنتز ، يمكن إستنتاج أن المسافة " شبة زمانية " تبقى دائما شبه زمانية وكذلك " شبه مكانية " تبقى دائما شبه مكانية . وهذا يعنى أنه لا يمكن الربط بين داخل المخروط (الأحداث الطبيعية) وخارجه (الأحداث الغير طبيعية) ويعرف هذا بقانون السببية فى النسبة Causality Principle.

الباب الرابع

الميكانيكا النسبية

1- مقدمة :

رأينا فى الباب الأول أن قوانين نيوتن للحركة تحتفظ بصورتها تحت تحويل لورنتز ، بمعنى أنه إذا قاس ملاحظ A حدثا ما بالنسبة للإطار ذات القصور الذاتى S ووجد أنه يتبع أحد القوانين الثلاث لنيوتن فإن الملاحظ B فى الإطار ذات القصور الذاتى S' يصل إلى نفس النتيجة . من الناحية الرياضية فإن ذلك يرجع إلى صياغة قوانين نيوتن بدلالة المتجهات الثلاثية ، حيث تأخذ إحدى الصورتين :

" لا متغير" + " لا متغير " + ... = صفر أو

" متغير " × متجة ثلاثى +" لا متغير" × متجة ثلاثى +..... = متجه صفرى . والمقصود " باللامتغير" تلك الكمية القياسية التى لا تتغير من إطار إلى آخر مثل الكتلة أو حاصل الضرب القياسى

لمتجهين ثلاثين .

وفى الواقع ، فإن إحتفاظ المسافة المكانية (عنصرالطول فى الفضاء الثلاثى الإقليدى) والفترة الزمنية ، كل على حده ، بصورتها تحت تحويل جاليليو هو الذى يمكننا من تعريف المتجهات الثلاثية (لها ثلاث مركبات بالنسبة للأبعاد المكانية الثلاث) وإستنتاج أن حواصل الضرب القياسية لهم (على مثال مربع عنصر الطول) تبقى " لا تغيرية " تحت تحويل جاليليو .

وفى نظرية النسبية الخاصة – الباب الثانى – وجدنا أن المسافة الزمكانية (عنصر الطول فى الفضاء الرباعى) هى التى تحتفظ بصورتها تحت تحويل لورنتز ، وبناء على ذلك ، لكى نصل إلى قوانين نيوتن الصحيحة التى تحتفظ بصورتها تحت تحويل لورنتز ، يجب أن نستعين – بدلا من المتجهات الثلاثية – بمتجهات رباعية (لها أربع مركبات بالنسبة للأربع أبعاد الزمكانية) . بواسطة هذه المتجهات الرباعية 4 -Vectors فإنه يمكن صياغة القوانين التى تحكم الظواهر الطبيعية بحيث تتفق مع مبدأ النسبية حيث يجب

أن تأخذ إحدى الصورتين :

" لا متغير رباعى " + " لا متغير رباعى " +..... = صفر

" لا متغير رباعى " × متجه رباعى +"لامتغيرمتجه" × متجه

رباعى +..... = صفر (1)

ويكون " اللامتغير الرباعى" ، فى هذه الحالة ، حاصل الضرب القياسى لمتجهين رباعيين (على مثال مربع عنصر الطول فى الفضاء الرباعى) . وفيما يلى سنقوم بدراسة فرعى الميكانيكا النسبية : الكينماتيكا والديناميكا النسبية .

الكينماتيكا النسبية

2- المتجهات الرباعية : 4- Vectors

تحويل لورنتز (6) فى الباب الثالث فى الصورة التفاضلية

يصبح :

$$dx'_1 = \cos\theta\, dx_1 + \sin\theta\, dx_4\ ,$$

$$dx'_2 = dx_2\ , \qquad dx'_3 = dx_3\ ,$$

$$dx'_4 = \cos\theta\, dx_4 - \sin\theta\, dx_1\ . \qquad (2)$$

هذه المعادلات يمكن وضعها على الصورة :

$$dx'_{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\nu}} \, dx_{\nu} \quad . \qquad (3)$$

$$\mu, \upsilon = 1,2,3,4$$

حيث : $\dfrac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\nu}}$ تسمى عناصر التحويل ، ويمكن ترتيبها فى

صورة مصفوفة بالشكل :

$$\frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\nu}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad (4)$$

تحويل لورنتز العكسى يمكن إيجاد بحساب مقلوب المصفوفة (4)

إذا رمزنا للمقلوب بالرمز : $\dfrac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\mu}}$ فإن :

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad (5)$$

وبالتالى فإن تحويل لورنتز العكسى يأخذ الصورة :

$$dx_\nu = \sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \, dx'_\mu \; . \qquad (6)$$

$$\mu, \upsilon = 1,2,3,4$$

أو :

$$dx_1 = \cos\theta \, dx'_1 - \sin\theta \, dx'_4 \; ,$$

$$dx_2 = dx'_2 \; , \qquad dx_3 = dx'_3 \; ,$$

$$dx'_4 = \cos\theta \, dx'_4 + \sin\theta \, dx'_1 \; . \qquad (7)$$

يلاحظ أن التحويل (7) هى نفس صورة التحويل $(6)'$ فى الباب الثالث . يلاحظ كذلك أن :

$$\sum_{\mu=1}^{4} \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = 1 \quad . \qquad (8)$$

تعرف الكمية $\underline{A}$ بأنها متجه رباعى إذا كانت مركباتها A_μ $(\mu = 1,2,3,4)$ تتبع فى تحويلها من إطار لأخر نفس صيغ التحويل (3) , (6) التى تخضع لها المركبات dx_μ ، أى أن :

$$A'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} A_\nu \quad . \qquad (9)$$

$$A_\nu = \sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} A_\mu \quad . \qquad (10)$$

$$\mu = 1,2,3,4$$

واضح أن المركبات dx_μ تكون متجها رباعيا يسمى هذه المتجه بمتجه الموضع التفاضلى ، ويرمز له بالرمز $d\underline{R}$.

ملحوظة:

سنستغنى هنا عن علامة الجمع $\sum_{1}^{4}$ إذا تكرر " المزيل " Index

فمثلا فى الصيغ (9) ، (10) تتكرر المزيلات

μ,υ لذا سنكتبها على الصورة :

$$A'_\mu = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} A_\nu \; . \qquad (9)'$$

$$A_\nu = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} A_\mu \; . \qquad (10)'$$

حيث يؤخذ الجمع على المزيلات المكررة من 1 إلى 4 .

كذلك تسمى الكميات الرباعية A_μ بمتجهات رباعية Tensors

من المرتبة الأولى .

3- حاصل الضرب القياسى لمتجهين رباعيين : Inner product

يعرف حاصل الضرب القياسى لمتجهين رباعيين $\underline{A}$ ، $\underline{B}$

بالصيغة الآتية :

$$(\underline{A}, \underline{B}) = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4$$

$$= A_\mu B_\mu \; . \qquad (11)$$

كما يعرف مربع طول متجه رباعى $\underline{A}$ بأنه :

$$A^2 = (\underline{A} , \underline{A}) = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 \ . \qquad (12)$$

سنثبت أن حاصل الضرب القياسى (11) لمتجهين رباعيين يبقى

" لاتغيرى فى الصورة " تحت تحويل لورنتز ، أى أن :

$$(\underline{A}' , \underline{B}') = (\underline{A} , \underline{B}) \ . \qquad (13)$$

بإستخدام الصيغة (9) نجد أن :

$$(\underline{A}' , \underline{B}') = A'_\mu B'_\mu = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} A_\nu \cdot \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\lambda} B_\lambda$$

$$= \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\lambda} A_\nu B_\lambda \ . \qquad (14)$$

$$\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial x_\lambda} \ . \qquad (15)$$

بوضع :

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial x_\lambda} = \delta_{\nu\lambda} \ .$$

حيث :

$$\delta_{\nu\lambda} = \begin{cases} 0 & \nu \neq \lambda \\ 1 & \nu = \lambda \end{cases}$$

تسمى $\delta_{\nu\lambda}$ بدالة دلتا لكرونكر Kronecker delta function

بالتعويض فى (1) ينتج أن :

$$(\underline{A}', \underline{B}') = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} \cdot \delta_{\nu\lambda} A_\nu B_\lambda \quad . \qquad (17)$$

بإيجاد مربع طوله طول متجه الموضوع التفاضلى تبعا للصيغة

(13) نجد أن :

$$(d\underline{R}, d\underline{R}) = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 (dx_4)^2 \ .$$

وهذا يساوى مربع عنصر الطول فى الفضاء الرباعى الذى يبقى

"لاتغيرى فى الصورة"تحت تحويل لورنتز، يمكن التعبيرعن بكتابة

$$(d\underline{R}, d\underline{R}) = dx_\nu\, dx_\nu = dx_\mu\, dx_\mu$$
$$(18)$$
$$= (d\underline{R}', d\underline{R}') \ .$$

من هذا ينتج أن :

$$\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} = 1 \ . \qquad (19)$$

فى هذه الحالة تؤول (17) بعد إجراء الجمع بالنسبة للمزيل المكرر

λ إلى :

$$(\underline{A}', \underline{B}') = A_\nu B_\nu = (\underline{A}, \underline{B}) \ .$$

4- ***متجه الموضع الرباعى*** : Position 4- Vector

لتحديدحادثة ما (موضع جسيم) فى الفضاء الرباعى يلزمنا

أربع إحداثيات (x_1, x_2, x_3, x_4) . هذه الأعداد الأربعة هى مركبات

متجه الموضع الرباعى $\underline{R}$ ويكتب بالصورة :

$$\underline{R} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$= x_\mu \quad , \quad \mu = 1,2,3,4 \tag{20}$$

بإستخدام التعريف لإحداثيات مينكوفسكى، يمكن وضع $\underline{R}$ على الصورة :

$$\underline{R} = (x, y, z, ict) = (\vec{r}, ict) \, . \tag{21}$$

حيث $\vec{r}$ متجه الموضع الثلاثى.لايجاد مربع طول متجه الموضع

الرباعى R^2 نوجد :

$$(\underline{R}, \underline{R}) = r^2 - c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \tag{22}$$

وهذه كمية " لا تغيرية فى الصورة " تحت تحويل لورنتز بإيجاد

تفاضلى متجه الموضوع الرباعى ، نحصل على متجه الموضع

التفاضلى $d\underline{R}$ ، حيث :

$$d\underline{R} = (d\vec{r}, ic\, dt) \, . \tag{23}$$

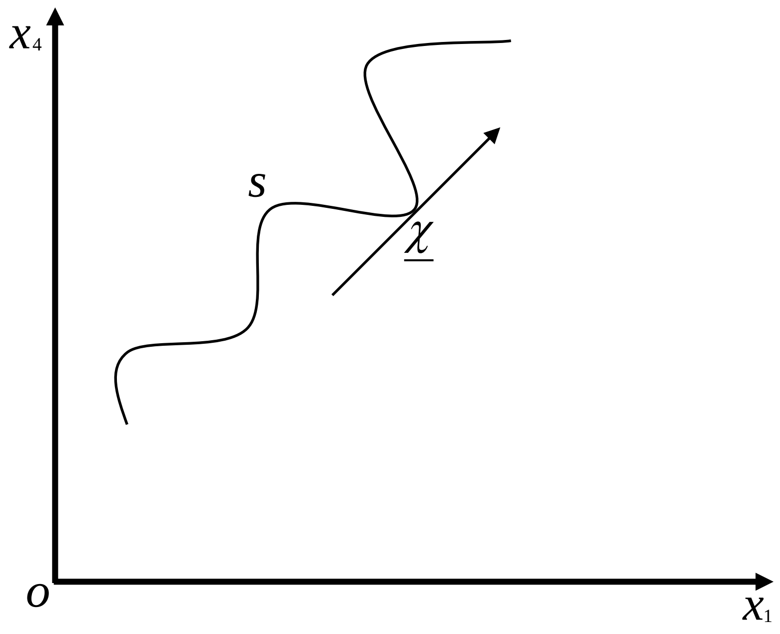
5- متجه السرعة الرباعى : Velocity 4- Vector

إذا إعتبرنا جسيما يتحرك فإن الخط الدينوى له يمثل فى الفضاء الرباعى (فى حالة الحركة المنتظمة يكون الخط الدينوى خطا مستقيما) . المعادلات البارامترية لهذا المنحنى تكون :

$$x_\mu = x_\mu(s) . \qquad (24)$$

$$\mu = 1,2,3,4$$

حيث s بارامتر يمثل طول المنحنى – شكل (15) - إتجاه المماس لهذا المنحنى يعطى بتفاضل المعادلة (24) بالنسبة



شكل 15

إلى s ، أى $\frac{dx_\mu}{ds}$ لكننا نعلم – من المعادلة (22) فى الباب الثالث – أن : $d\tau = -\frac{i}{c}ds$ حيث τ هو الزمن المحلى ، وهو كمية " لا تغيرية " تحت تحويل لورنتز .

سنعرف متجه السرعة الرباعى $\underline{\chi}$ تبعا للصيغة الآتية :

$$\chi_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} . \tag{25}$$

أو

$$\underline{\chi} = \frac{d\underline{R}}{d\tau} = \left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, ic\frac{dt}{d\tau} \right) . \tag{26}$$

من المعادلة (23) فى الباب الثالث نجد أن :

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}\ dt = \frac{1}{\beta}\ dt . \tag{27}$$

حيث :

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 .$$

هى مربع سرعة الجسيم الثلاثية ، $\beta = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ بالتعويض فى (26) نجد أن :

$$\underline{\chi} = (\beta \vec{v} , ic\beta) . \tag{28}$$

حيث $\vec{v}$ متجه السرعة الثلاثى للجسيم . يلاحظ من الصيغة (26)

أن متجه السرعة الرباعى $\underline{\chi}$ هو خارج قسمة متجه الموضع التفاضلى $d\underline{R}$ على العنصر التفاضلى للزمن المحلى، ويستنتج من ذلك أن متجه السرعة الرباعى (مثل متجه الموضع الرباعى) يتبع نفس تحويل لورنتز. كذلك فإن مربع متجه السرعة الرباعى يعطى بالصيغة :

$$\chi^2 = (\underline{\chi}, \underline{\chi}) = \beta^2 v^2 - c^2 \beta^2 = -c^2 \qquad (29)$$

وهذه بالطبع- كمية " لا تغيرية " يستنتج من ذلك أنه إذا تلاشت السرعة الثلاثية ، $\vec{v} = \vec{0}$ ، فإن السرعة الرباعية لا تتلاشى :

6- متجه العجلة الرباعى : Acceleration 4- Vector

بنفس الطريقة السابقة يُعرف متجه العجلة الرباعى $\underline{\alpha}$ بالصيغة الآتية :

$$\alpha_\mu = \frac{d\underline{\chi}}{d\tau} = \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} . \qquad (30)$$

بإستعمال الصيغتين : (27) ، (28) نحصل على :

$$\underline{\alpha} = \left[\beta \frac{d}{dt}(\beta \vec{v}) , i\beta c \frac{d\beta}{dt} \right] . \qquad (30)'$$

يلاحظ هنا ، بخلاف السرعة الرباعية ، أنه إذا تلاشت العجلة الثلاثية ، أى $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ ، فإن العجلة الرباعية تتلاشى أيضا .

كذلك إذا كان الجسم ساكناً لحظياً ، أى $\vec{v} = \vec{0}$ فإن : $\beta = 1$ وتكون العجلة الرباعية عندئذ بالصورة :

$$\underline{\alpha} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} , 0 \right) . \qquad (31)$$

إذا إعتبرنا الإطارين الإنتسابيين S ,S' . ويتحرك الإطار S' بسرعة الجسيم $\vec{v}$ ، فإن الجسيم يكون ساكنا بالنسبة إلى الإطار S' . يسمى S' فى هذه الحالة الإطار الساكن للجسيم Rest Frame وحيث أن مربع متجه العجلة الرباعي يكون كمية " لا تغيرية فى الصورة " تحت تحويل لورنتز , فيكون :

$$\alpha^2 = (\underline{\alpha} , \underline{\alpha}) = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)^2 . \qquad (32)$$

من ذلك نستنتج أن الكمية " اللاتغيرية فى الصورة " هى مربع

عجلة الجسيم الثلاثية مقاسة فى الإطار الساكن للجسيم .

الديناميكا النسبية

7 ***مبدأ التناظر :*** Correspondence Priniple

وجدنا من قبل أن تحويل لورنتز يؤول إلى تحويل جاليليو عندما تؤول سرعة الضوء إلى ما لانهاية , أو إذا أُهملت السرعة التى يتحرك بها جسيم بالنسبة إلى سرعة الضوء .

لإستنتاج القوانين النسبية التى تحكم الظواهر الفيزيائية ، يجب أن نأخذ هذه الخاصية فى الإعتبار، معنى ذلك أن قوانين النسبية التى نبحث عنها يجب أن تؤول إلى نظيرتها فى الفيزياء الكلاسيكية تحت الشرط المذكور. يسمى هذا بمبدأ التناظر,وسنرى ـ فيما يلى ـ كيف يمكن إستخدام هذا المبدأ فى الوصول إلى الصور الصحيحة لقوانين الديناميكا النسبية :

8- متجة كمية الحركة الرباعى : Mometum 4- Vector

بالقياس إلى ماسبق عند تحريف متجه الموضوع الرباعى $\underline{R}$

لجسيم يعرف متجه كمية الحركة الرباعى $\underline{\Pi}$ كما يلى :

$$\underline{\Pi} = (\vec{P}, i\,P_4) \qquad (33)$$

حيث $\vec{P}$ متجه كمية الحركة الثلاثى ، P_4 المركبة الرابعة .

نعتبر إطارى إنتساب S ، S' . إذا كان $\underline{\Pi}'$ هو متجه كمية الحركة الرباعى مقاساً بالنسبة إلى S' ، فإن :

$$\underline{\Pi}' = (\vec{P}', i\,P'_4) \qquad (34)$$

لإيجاد العلاقة بين $\underline{\Pi}$, $\underline{\Pi}'$ ، نستخدم تحويل لورنتزعلى الصورة :

$$P_1 = \beta\,(P'_1 + \frac{v}{c} P'_4) \; ; \qquad (35)$$

$$P_4 = \beta\,(P'_4 + \frac{v}{c} P'_1) \; ; \qquad \beta = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

حيث v هى سرعة الإطار S' بالنسبة إلى S .

نفرض الأن أن S' هو الإطار الساكن للجسيم (أى يتحرك مع الجسيم بنفس السرعة) وتصبح المعادلات (35)على الصورة.

$$P_1 = \beta \frac{v}{c} P'_4 \; ; \qquad (36)$$

$$P_4 = \beta \, P'_1 \; . \qquad (37)$$

لإيجاد قيمة P'_4 نستعين بمبدأ التناظر . حيث يجب أن تؤول

المعادلة (36) إلى نظيرتها فى الميكانيكا الكلاسيكية أى أن :

$$P_1 = mv \qquad (38)$$

بفك β بدلالة قوى $\frac{v^2}{c^2}$ التصاعدية ، وإعتبار $v << c$

فإنه بإستخدام (38) تؤول (36) إلى :

$$mv = \frac{v}{c} P'_4 \, [\, 1 + \text{حدود تهمل} \,] \, .$$

ومنها ينتج أن :

$$P'_4 = mc \; . \qquad (39)$$

حيث m هنا هى كتلة الجسيم مقاسة بالنسبة للإطار الساكن

للجسيم ، وسنرمز لها بالرمز m_o . تسمى m_o الكتلة الساكنة

للجسيم Rest mass وتصبح المعادلات (36) ، (37) بالصورة :

$$P_1 = \beta \, m_o v \quad . \qquad (40)$$

$$P_4 = \beta \, m_o c \quad . \qquad (41)$$

عامة يمكن كتابة (40) فى الصورة الإتجاهية :

$$\vec{P} = \beta \, m_o \vec{v} \quad . \qquad (42)$$

من ذلك ينتج أن متجه كمية الحركة $\underline{\Pi}$ يأخذ الصورة :

$$\underline{\Pi} = (\beta \, m_o \vec{v} \;\; , \;\; i \, \beta \, m_o c) \quad . \qquad (43)$$

بالمقارنة مع الصيغة (28) لمتجه السرعة الرباعى $\underline{\chi}$ ، نجد أن :

$$\underline{\Pi} = m_o \underline{\chi} \quad . \qquad (44)$$

أو بدلالة المركبات :

$$\Pi_\mu = m_o \chi_\mu \quad ، \quad \mu = 1,2,3,4 \qquad (45)$$

من الصيغة (43) يمكن إيجاد مربع طول المتجه $\underline{\Pi}$ على الصورة

$$(\underline{\Pi} , \underline{\Pi}) = P^2 - P_4^2 = \beta^2 m_o^2 (v^2 - c^2)$$

$$= - m_o^2 \, c^2 \quad . \qquad (46)$$

وهذه كمية " لا تغيرية " تحت تحويل لورنتز .

9- الكتلة المتحركة للجسيم : Moving mass

يمكن كتابة الصيغة (42) لمتجه كمية الحركة الثلاثى $\vec{p}$ بالصورة الآتية :

$$\vec{P} = m\vec{v} \quad . \tag{47}$$

حيث :

$$m = \beta\, m_o = m_o / \sqrt{1 - v^2 / c^2} \quad . \tag{48}$$

يلاحظ أنه عندما $\vec{v} = \vec{0}$ فإن : $m = m_o$ لذلك تسمى m كتلة الجسيم المتحركة . من ذلك نرى أن كتلة الجسيم ليست مفهوماً مطلقاً ، كما فى الفيزياء الكلاسيكية ، وإنما هى كمية متغيرة تتوقف على السرعة التى يتحرك بها الجسيم ، مثلها فى ذلك الطول والزمن . بإستخدام الصيغة (47) يصبح متجه كمية الحركة الرباعى على الصورة :

$$\underline{\Pi} = (\, m\vec{v} \;,\; i\, m\, c \,) = (\, \vec{P} \,, imc \,) \quad . \tag{49}$$

10- معادلات الحركة :

نعلم أن قانون نيوتن الثانى يُعطى طريقة لقياس القوة بدلالة كتلة الجسيم ، ولكننا وجدنا أن هذه الكتلة ليست ثابتة وإنما تتغير مع

سرعة الجسيم . لإيجاد الصورة الصحيحة لقانون نيوتن الثانى ،

يجب أن نُعيد صياغته بدلالة المتجهات الرباعية . لكى يأخذ

الصورة (1) التى تتفق مع مبدأ النسبية . بفرض أن Γ_μ مركبات

متجه القوة الرباعى ، فإن التعميم الصحيح لقانون نيوتن الثانى يكون

على الصورة :

$$\frac{d}{d\tau}\,\Pi_\mu = \Gamma_\mu \,. \qquad (\mu = 1,2,3,4) \qquad (50)$$

يسمى المتجه الرباعى $\underline{\Gamma}$ بمتجه القوة المينكوفسكية حيث :

$$\underline{\Gamma} = (\vec{G}\,, i\,G_4)\;. \qquad (51)$$

$\vec{G}$ هو متجه القوة الثلاثى .

بإستخدام تعريف متجه العجلة الرباعى (30) و الصيغة (44)

لكمية الحركة الرباعية ، فإن :

$$\frac{d}{d\tau}\,\Pi_\mu = m_\circ \frac{d}{d\tau}\,\chi_\mu = m_\circ\,\alpha_\mu \,. \qquad (52)$$

وبالتالى يمكن وضع قانون نيوتن فى النسبية على الصورة :

$$m_\circ\,\alpha_\mu = \Gamma_\mu \,. \qquad (53)$$

المعادلات (50) ، (53) تكون صالحة للإستعمال بالنسبة إلى أى إطارذات قصورذاتى بكتابة المعادلة (50) بالتفصيل ، أى بالصورة

$$\beta \frac{d}{dt}(\beta\, m_o \vec{v}) = \vec{G} \; . \qquad (54)$$

$$\beta \frac{d}{dt}(\beta\, m_o c) = G_4 \; . \qquad (55)$$

إعتبر الإطار S' الذى يتحرك مع الجسيم بنفس سرعته .

فى هذا الإطار تكون : $\beta = 1$ ، وتؤول المعادلات (54) ، (55) إلى الصورة :

$$m_o \frac{d\,\vec{v}}{dt} = \vec{F} \; . \qquad (56)$$

$$0 = G_4 \; . \qquad (57)$$

حيث $\vec{F}$ هى القوة الثلاثية المقاسة فى الإطار الساكن للجسيم .

يلاحظ أن المعادلة (56) هى نفسها قانون نيوتن المعتاد . من ذلك نستنتج أن القوة المينكوفسكية : $(\vec{G} , i\, G_4)$. هى التى تنتج من تحويل القوة النيوتونية : $(\vec{F} , 0)$ بواسطة تحويل لورنتز. فى الحالة العامة سنضع :

$$\vec{F} = \vec{G} / \beta \quad , \qquad P = G_4 / \beta \ . \qquad (58)$$

حيث $\vec{F}$ تعنى القوة المقاسة بالنسبة لإطار ذات قصور ذاتى يتحرك الجسيم فيه بالسرعة $\vec{v}$.

بوضع $m = \beta\, m_o$ تصبح المعادلات (54) , (55) بالصورة :

$$\frac{d}{dt}(m\, \vec{v}) = \vec{F} \ . \qquad (59)$$

$$\frac{d}{dt}(m\, c) = P \ . \qquad (60)$$

هذه المعادلات هى التى تستبدل قانون نيوتن الثانى فى الميكانيكا النسبية .

11- العلاقة بين الكتلة والطاقة :

بفرض أن مبدأ حفظ الطاقة صحيح فى النظرية النسبية الخاصة ، فأنه يمكن وضعه بالصورة :

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \ . \qquad (61)$$

حيث E طاقة الحركة للجسيم . من المعادلة (59) ينتج أن :

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = m\,\vec{v}\cdot\frac{d\,\vec{v}}{dt} + (\,\vec{v}\,)^2\frac{dm}{dt}\;. \qquad (62)$$

بتفاضل قانون تغير الكتلة (48) بالنسبة للزمن :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\beta^2 m}{c^2}\;\vec{v}\cdot\frac{d\,\vec{v}}{dt}\;. \qquad (63)$$

بالتعويض فى المعادلة (62) نجد أن :

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = (\,\vec{v}\,)^2\frac{dm}{dt} + \frac{c^2}{\beta^2}\,\frac{dm}{dt}$$

$$= c^2\,\frac{dm}{dt}\;. \qquad (64)$$

وبالتعويض فى المعادلة (61) فإن قانون حفظ الطاقة يصبح :

$$dE = c^2\,dm\;. \qquad (65)$$

إذا فرضنا أن : $E = 0$ عندما يكون الجسيم ساكناً ، أى

$m = m_o$ فإن :

$$E = (\,m - m_o)\,c^2\;. \qquad (66)$$

هذه العلاقة من أهم نتائج نظرية النسبية الخاصة ، وتعنى أن فرق

الكتلة $\Delta m = m - m_o$ يكافئ طاقة E تساوى : $\Delta m\, c^2$

وتعرف هذه العلاقة بقانون آينشتين لتكافؤ الكتلة والطاقة . يسمى

المقدار : $m_o c^2$ بطاقة السكون Rest Energy .

ملحوظة هامة :

فرض آينشتين أن كل كتلة m تكافئ طاقة E ، حيث

$$E = m\, c^2 \,. \qquad (67)$$

نتائج :

(أ) بإستعمال الصيغة (67) يمكن كتابة متجه كمية الحركة

الرباعى $\underline{\prod}$ كما يلى :

$$\underline{\prod} = (\,\vec{P}\,,\, i\,\frac{E}{c}) \,. \qquad (68)$$

لذا يسمى هذا المتجه بمتجه كمية الحركة والطاقة الرباعى .

(ب) يمكن وضع المعادلة (60) على الصورة :

$$\frac{d}{dt}(\,\frac{E}{c}) = P \,. \qquad (69)$$

بالمقارنة مع قانون حفظ الطاقة (61) ينتج أن :

$$c\,P = \vec{F}\cdot\vec{v}\ . \qquad (70)$$

أى أن المقدار: $c\,P$ يساوى معدل تغير الشغل المبذول بالقوة $\vec{F}$.

(جـ) بوضع المعادلة (60) على الصورة :

$$\frac{d}{dt}(m\,c^2) = \vec{F}\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\ .$$

وإجراء التكامل ، فإن :

$$mc^2 = \int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}\ . \qquad (71)$$

التكامل هوالشغل المبذول بالقوة $\vec{F}$.إذا كانت $\vec{F}$ قوة محافظة فإن:

$$\vec{F} = -\nabla\phi\ . \qquad (72)$$

حيث ϕ هى دالة طاقة الوضع (الجهد) . بالتعويض فى (71)

نحصل على قانون ثبوت الطاقة على الصورة :

$$mc^2 + \phi(\vec{r}) = constant\ . \qquad (73)$$

(د) يمكن وضع الصيغة " اللاتغيرية فى الصورة " لمربع طول

متجه كمية الحركة الرباعى (46) على الصورة :

$$(\vec{P})^2 - P_4^2 = P^2 - \frac{E^2}{c^2} = m_o^2c^2\ .$$

أى أن :

$$E^2 = c^2 P^2 + m_o^2 c^4 \quad . \qquad (74)$$

12- الكتلة الطولية والكتلة العرضية :

Longitudinal &Transverse Mass

من معادلات الحركة (59) ، (60) ينتج أن :

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad . \qquad (75)$$

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = c^2\frac{dm}{dt} \quad . \qquad (76)$$

بالتعويض عن m من المعادلة (76) فى (75) نحصل على :

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{c^2}\vec{F}\cdot\vec{v} \quad . \qquad (77)$$

بتحليل متجه القوة $\vec{F}$ ومتجه العجلة $\frac{d\vec{v}}{dt}$ إلى مركبتين ، إحداهما

موازية لإتجاه متجه السرعة $\vec{v}$ ، والأخرى عمودية عليها , أى :

$$\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp} \quad . \qquad (78)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{//} + \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\perp} \quad .$$

وبالتعويض فى المعادلة (77) نجد أن :

$$\vec{F}_{//} = m\,(\frac{d\vec{v}}{dt})_{//} + \frac{v^2}{c^2}\,\vec{F}_{//} \;.$$

أى أن :

$$\vec{F}_{//} = \beta^2 m\,(\frac{d\vec{v}}{dt})_{//} = \beta^3 m_o (\frac{d\vec{v}}{dt})_{//} \;. \qquad (79)$$

$$\vec{F}_{\perp} = \beta\, m_o (\frac{d\vec{v}}{dt})_{\perp} \;. \qquad (80)$$

من شكل المعادلات (79) ، (80) نستنتج أن أى جسيم متحرك يكون له كتلة طولية هى: $m_o \beta^3$ بالنسبة لتعرضه لقوة $\vec{F}_{//}$ موازية لإتجاه سرعته $\vec{v}$ ، وكتلة عرضية هى : $m_o \beta$ بالنسبة لتعرضه لقوة $\vec{F}_{\perp}$ عمودية على إتجاه سرعته . (لوحظ هذا التمييز بين الكتلتين فى التجارب الخاصة بحركة الإلكترونات) .

الباب الخامس

تطبيقات نظرية النسبية الخاصة

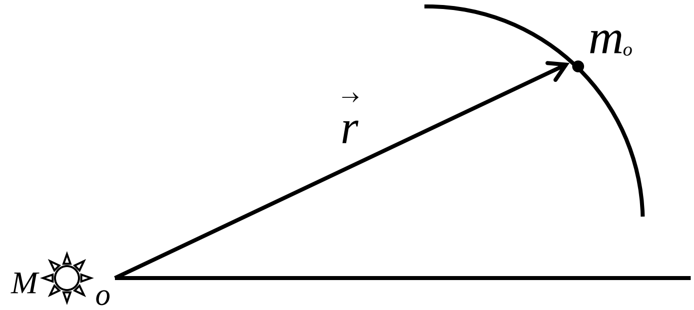
(أ) *التطبيقيات الميكانيكية*

1- حركة الكواكب حول الشمس :

نفرض أن الكتلة الساكنة للكواكب هى m_o بإستخدام تعريف السرعة الرباعية (16) ، فإنه يمكن كتابة الثلاث مركبات الأولى من معادلة الحركة (52) على الصورة :

$$m_o \vec{a} = \frac{d}{d\tau}\left(m_o \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right) \qquad (1)$$

حيث $\vec{r}$ متجه الموضع الثلاثى - شكل (16) - $\vec{a}$ متجه العجلة الثلاثى للكواكب , إذا فرضنا أن قانون الجذب العام لنيوتن صحيح



شكل 16

فإن :

$$m_o \vec{a} = \vec{G} = \beta \vec{F} = -\beta \frac{\gamma\, m_o M}{r^3} \vec{r} \qquad (2)$$

حيث γ ثابت الجذب العام ، M كتلة الشمس بفرض أنها عند

نقطة الأصل o . بالتعويض فى (1) نجد أن :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{d\tau^2} = -\beta \frac{\gamma M}{r^3} \vec{r} \qquad (3)$$

وضرب المعادلة (3) إتجاهيا فى $\vec{r}$ نجد أن :

$$\vec{r} \wedge \frac{d^2 \vec{r}}{d\tau^2} = \vec{0}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{d\tau}\right) = \vec{0}$$

ومنها ينتج أن :

$$\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{\Omega} = \text{متجه ثابت} \qquad (4)$$

وهذه تمثل معادلة ثبوت كمية الحركة الزاوية . فى الإحداثيات

القطبية نجد أن :

$$\left| \vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right| = r^2 \frac{d\theta}{d\tau} = \beta\, r^2 \frac{d\theta}{dt} = \Omega \qquad (5)$$

كذلك فإن مركبة العجلة فى إتجاه نصف القطر المتجه تكون :

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - r\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 \qquad (6)$$

وبالتعويض فى (3) نحصل على :

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - r\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 = -\beta\frac{\gamma M}{r^2} \qquad (7)$$

من المعادلة (5) ينتج أن :

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\Omega}{r^2} \qquad (8)$$

بوضع : $r = 1/u$ وإجراء التفاضل وبإستخدام (8) نجد أن :

$$\frac{dr}{d\tau} = -\Omega\frac{du}{d\theta}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\Omega^2\frac{d^2 u}{d\theta^2}u^2 \qquad (9)$$

وبالتعويض فى (7) نحصل على :

$$\Omega^2 u^2\left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u\right) = \beta\gamma M u^2$$

أو

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \beta\frac{\gamma M}{\Omega^2} \qquad (10)$$

بملاحظة أن دالة طاقة الوضع (مجال الجذب) ϕ يعطى بالصغة :

$$\phi = -\gamma \frac{m_o M}{r} = -\gamma m_o M u \qquad (11)$$

وتطبيق مبدأ حفظ الطاقة (73) من الباب الرابع على الصورة :

$$m_o \beta c^2 - \gamma m_o M u = \overline{E} = constant \qquad (12)$$

ينتج أن :

$$\beta = (\overline{E} + \gamma m_o M u) / m_o c^2 \qquad (13)$$

بالتعويض فى (10) نحصل على المعادلة التفاضلية لمسار الكوكب

حول الشمس بالصورة :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{\gamma^2 M^2}{c^2 \Omega^2}\right) u = \frac{\gamma M \overline{E}}{m_o c^2 \Omega^2} \qquad (14)$$

الحل العام لهذه المعادلة هو :

$$u = A \cos(\omega\theta + \varepsilon) + \frac{\gamma M \overline{E}}{m_o c^2 \Omega^2 \omega^2} \qquad (15)$$

حيث:

$$\omega^2 = 1 - \gamma^2 M^2 / c^2 \Omega^2 \qquad (16)$$

حيث ε , A ثابتان . المعادلة (15) تمثل قطع ناقص يدور ببطء

شديد (لأن $\omega \approx 1$) ، وقد شوهد هذا الدوران فى حركة الكوكب عطارد Mercury . إلا أن هذه النتيجة لا تعطى قيمة الدوران الصحيحة ، ولكنها تفسره إلى حد ما . وهذا ناتج عن فرضنا أن قانون نيوتن للجذب العام صحيح . إلا أن الواقع غير ذلك ، لكى نحصل على مقدار الدوران بالضبط يجب أن نغير نظرية الجاذبية لنيوتن . النظرية الجديدة للجاذبية أوجدها آينشتين أيضا وتسمى النظرية النسبية العامة .

(ب) *التطبيقات الضوئية*

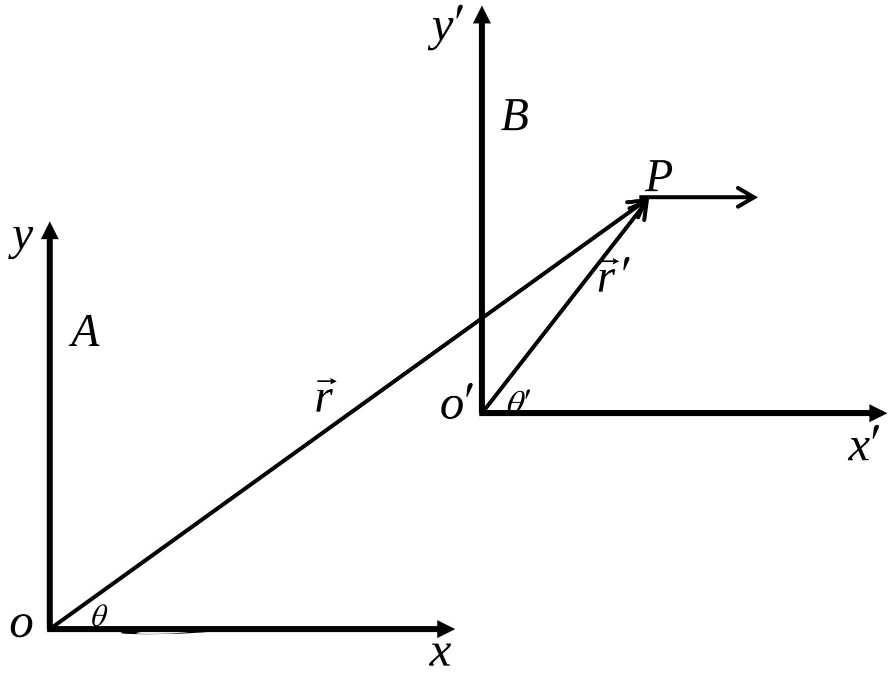
2- <u>تأثير دبلر</u> : Doppler effect

إذا تحرك مصدر ضوئى ، فإن تردد الموجة الضوئية الصادرة منه تتغير عما إذا كان المصدر ساكنا ، وقد لوحظ أن التردد يتناقص إذا كان المصدر يتحرك متباعدا عن الملاحظ ، ويتزايد إذا كان المصدر يقترب منه . تعرف هذه الظاهرة بتأثير دبلر .

لتفسير هذه الظاهرة نفرض أن المصدر يكون ساكنا بالنسبة إلى

إطار ذات قصور ذاتى S' يتحرك معه بسرعة منتظمة $\vec{V}$

موازية لمحور ox بالنسبة إلى إطار آخر S - شكل (17) -



شكل 17

نفرض أن المصدر P يشع موجات مستوية وحيدة اللون (لها

تردد معين Enochromatic) بالنسبة للملاحظ B فى الإطار

الإنتسابى S' تأخذ الموجة الشكل الممثل بالصورة الرياضية :

$$\exp \; i\,(\vec{k'} \cdot \vec{r'} - \omega' t') \qquad (17)$$

لفهم المعنى الطبيعى للصيغة السابقة نعتبر مثالا بسيطا : نأخذ

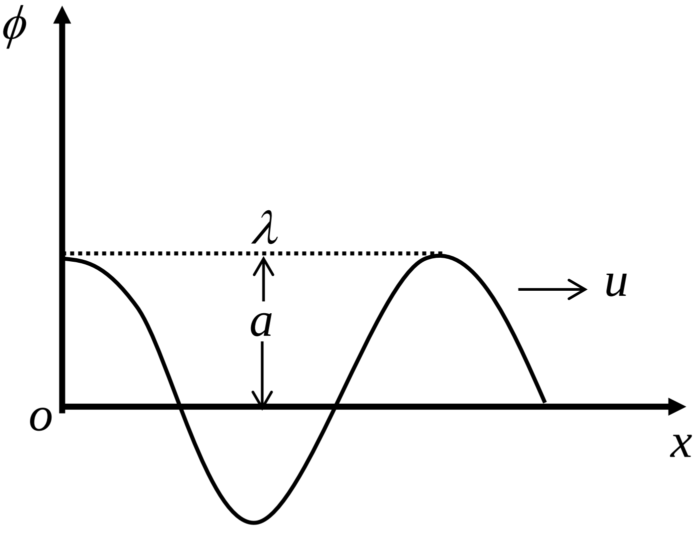
محورين متعامدين ϕ , x فى مستوى سطح الموجة Wave Profile عند اللحظة : $t = 0$ يعطى بالعلاقة :

$$\phi = f (x) \qquad (18)$$

إذا كان السطح دالة الجيب Sinnoidal فإن العلاقة تكون - شكل (18) – بالصورة :

$$\phi = a \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \qquad (18)$$

حيث a السعة ، λ طول الموجة عندما ينتقل السطح الموجى بسرعة u فى إتجاه المحور ox فإن معادلته عند اللحظة t تعطى



شكل 18

بالدالة الموجية :

$$\phi = a \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - ut) \qquad (19)$$

أو بالصورة التالية :

$$\phi = a \cos\ 2\pi\nu \left(\frac{x}{u} - t \right) \qquad (20)$$

حيث ν تسمى تردد الموجة Frequency :

$$\nu = u/\lambda \qquad (21)$$

فى الفضاء الثلاثى تصبح الدالة الموجية على الصورة :

$$\phi = a \cos\ 2\pi\nu \left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{u}}{u^2} - t \right)$$

$$= a \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda}\ \frac{\vec{r}\cdot\vec{u}}{u} - \omega t \right)$$

$$= a \cos \left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t \right) \qquad (22)$$

$$\omega = 2\pi\nu \ , \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\ \frac{\vec{u}}{u} \ , \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (23)$$

حيث ω التردد الدائرى ، $\vec{k}$ متجه الموجة Wave vector

ويعطى إتجاه إنتشار الموجة (حركة إنتقال الموجة) فى الفضاء .

بإيجاد $\nabla\phi$ نجد أن الإتجاه يكون هو إتجاه المتجه $\vec{k}$. من ذلك

نرى أن $\vec{k}$ يكون فى إتجاه العمودى على سطح الموجة .

فى الأمواج الضوئية يكون :

$$u = c \quad , \quad \nu = c/\lambda \tag{24}$$

ويعطى المتجه $\vec{k}$ إتجاه الشعاع الضوئى . فى الصورة المركبة تصبح المعادلة(22)على الصورة المذكورة فى الصيغة(17). بنفس الطريقة تأخذ الموجة(بالنسبة للملاحظ A فى الإطار الإنتسابى S) الصيغة المميزة بالتعبير الرياضى :

$$\exp \; i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \tag{25}$$

المقدار :

$$\nu\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{c}}{c^2} - t\right) = \frac{1}{2\pi}(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \tag{26}$$

يسمى طور الموجه Wave phase وهو كمية عددية . من هذا نستنتج أنه يمثل كمية "لا تغيرية فى الصورة" تحت تحويل لورنتز

أى أن :

$$\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = \vec{k}'\cdot\vec{r}' - \omega' t' \tag{27}$$

وحيث أن الكمية " اللاتغيرية فى الصورة " يجب أن تكون حاصل

الضرب القياسى لمتجهين رباعيين ، فإنه ينتج من الصيغة (27) أن

$(\vec{k}, i\frac{\omega}{c})$ هى مركبات متجه رباعى $\underline{K}$ حيث :

$$\underline{K} = (\vec{k}, i\frac{\omega}{c}) \tag{28}$$

يسمى $\underline{K}$ متجه الموجة والتردد الرباعى . يمكن وضع المعادلة (27) على الصورة :

$$(\underline{K}, \underline{R}) = (\underline{K}', \underline{\underline{R}}') \tag{29}$$

حيث $\underline{R}$ متجه الموضع الرباعى .

بتطبيق تحويل لورنتز يمكن إيجاد العلاقة بين المتجهين $\underline{K}', \underline{K}$ حيث يمكن وضع التحويل بينهما بالصيغة :

$$\begin{aligned} k'_1 &= \beta\,(k_1 - \frac{v}{c^2}\omega)\;, \\ \omega' &= \beta\,(\omega - v\,k_1)\;, \qquad \beta = 1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \end{aligned} \tag{30}$$

إذا كانت θ هى الزاوية بين المتجه $\vec{k}$ والمحور ox - شكل (18) (إتجاه السرعة $\vec{v}$) فإنه بإستخدام المعادلة (23) نحصل على :

$$k_1 = |\vec{k}| \cos\theta = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta = \frac{\omega}{c}\cos\theta \qquad (31)$$

وبالتعويض فى المعادلة (30) ينتج أن :

$$\omega' = \beta\,\omega\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right) \qquad (32)$$

سندرس هنا الحالتين الهامتين التاليتين :

(i) __ظاهرة دبلر الطولية :__ Radial وتنتج بوضع :

$$\theta = 0 \;,\; \pi$$

تصبح المعادلة (32) على الصورة :

$$\omega' = \omega\,\frac{(1 \mp v/c)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (33)$$

فى حالة $\theta = 0$ يكون :

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \qquad (34)$$

واضح من هذه العلاقة أن :

$$\omega' < \omega \quad ; \quad (\lambda' > \lambda)$$

أى أن الضوء يزاح بالحركة إلى منطقة الطيف الأحمر عندما يبتعد

المصدر عن الملاحظ . فى حالة $\theta = \pi$ يكون :

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \tag{35}$$

ومنها ينتج أن :

$$\omega' > \omega \quad ; \quad (\lambda' < \lambda)$$

أى أن الضوء يزاح إلى المنطقة البنفسجيه للطيف عندما يقترب

المصدر من الملاحظ .

(ii) <u>ظاهرة دبلر العرضية :</u> Transverse

هذه الظاهرة تنتج بوضع : $\theta = \pi/2$ فى هذه الحالة

تصبح (32) على الصورة :

$$\omega' = \beta\omega = \omega / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{36}$$

واضح أن :

$$\omega' > \omega \quad ; \quad (\lambda' < \lambda)$$

معنى ذلك أنه إذا تحرك المصدر الضوئى عموديا على إتجاه إنتشار الموجة فإن الضوء يزاح إلى منطقة الطيف البنفسجى . هذا التأثير العرضى لا يمكن إستنتاجه فى الفيزياء الكلاسيكة ، أى أنه ظاهرة نسبية بحتة ، أى نتيجة من نتائج النظرية النسبية الخاصة .

(جـ) التطبيقات فى الفيزياء الحديثة

3- الجسيمات متلاشية الكتلة الساكنة :

Particles of Zero Mass

يوجد فى الفيزياء جسيمات أولية تتحرك بسرعة الضوء فى الفضاء c . من أمثلة هذه الجسيمات : الفوتونات (جسيمات الضوء) Photons ، والنيوترينات Neutrinos . لكى نصف هذه الجسيمات نعلم من المعادلة (46) فى الباب الرابع أن :

$$P^2 - m^2 c^2 = - m_o^2 c^2 \qquad (37)$$

حيث m_o الكتلة الساكنة للجسيم ، m الكتلة المتحركة للجسيم ، $\vec{P}$ متجة كمية الحركة الثلاثى للجسيم . إذا فرضا أن إتجاه حركة الجسيم فى إتجاه متجه الوحدة $\underline{j}$ فإن :

$$\vec{P} = mc\,\underline{j} \qquad (38)$$

وبالتعويض فى المعادلة (37) نجد أن :

$$m_o = 0 \qquad (39)$$

معنى هذا أن الكتلة الساكنة لهذه الجسيمات تتلاش ، ويكون لها فقط

كتلة متحركة m . فرض آينشتين أن كل جسيم من هذه الجسيمات

يكون مصحوبا بموجة ذات تردد معين ν ، ويعتمد على طاقة

الجسيم E ، ويرتبطان معا بالعلاقة :

$$E = h\nu \tag{40}$$

حيث h يسمى ثابت بلانك ويساوى : $6.63\times10^{-27}\,erg-\sec$ من

الصيغة (74) من الباب الرابع يكون :

$$\vec{P} = \frac{E}{c}\underline{j} = \frac{h\nu}{c}\underline{j} \tag{41}$$

ويصبح متجة كمية الحركة الرباعى للجسيم على الصورة :

$$\underline{\Pi}_o = \left(\frac{h\nu}{c}\underline{j}\,,\, i\frac{h\nu}{c}\right) \tag{42}$$

4- **<u>تأثير كومبتون</u>** : Compton effect

إذا سقط شعاع (ضوء) Radiation على سطح فلز Metal

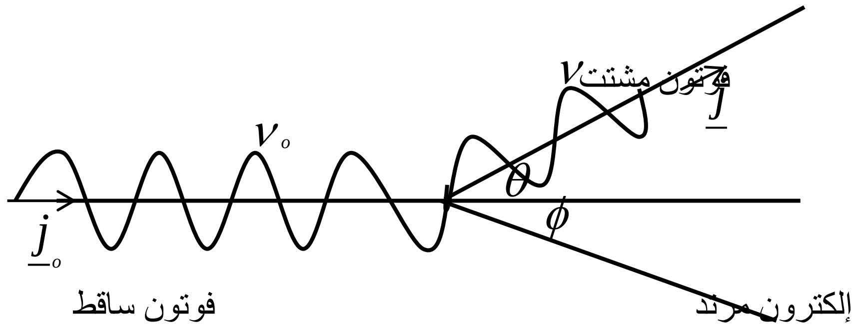
فإنه يحدث له تشتت Scattering وينتج عن ذلك تغيير فى تردده

وإتجاه سقوطه ، يمكن تفسير هذه الظاهرة بأنها تصادم بين

الفوتونات الساقطة (الضوء) والإلكترونات تحت سطح الفلز .

تسمى هذه الظاهرة بتأثير كومبتون ، الذى إكتشفها عام 1927 م .

لدراسة ذلك نفرض أن الفوتون الساقط ذو تردد ν_o ، وأنه إصطدم مع إلكترون ساكن كتلته الساكنة m_o . بعد التصادم يتشتت الضوء صانعا زاوية θ مع إتجاه سقوطه ويكون تردده ν - شكل (19) —



شكل 19

نتيجة للتصادم يكتسب الإلكترون طاقة حركة ويرتد recoil .

نفرض أنه يتحرك حينئذ فى إتجاه يصنع زاوية ϕ مع إتجاه الضوء الساقط . نفرض أن متجهى كمية الحركة الرباعية للفوتون قبل وبعد التصادم بالصورة :

$$\underline{\Pi}_o = \left(\frac{h\,\nu_o}{c}\,\underline{j}_o ,\ i\,\frac{h\,\nu_o}{c} \right)$$

$$\underline{\Pi'_o} = \left(\frac{h\nu}{c} \underline{j} \, , \, i \frac{h\nu}{c} \right) \qquad (43)$$

حيث $\underline{j}_o \, , \, \underline{j}$ وحدات متجهات فى إتجاه حركة الفوتون قبل وبعد التصادم . كذلك بالنسبة للإلكترون يكون :

$$\begin{aligned} \underline{\Pi} &= (0 \, , im_o c) \, , \\ \underline{\Pi'} &= (\vec{p} \, , im\, c) \, . \end{aligned} \qquad (44)$$

حيث m كتلة الإلكترون المتحركة ، $\vec{p}$ متجه كمية الحركة الثلاثى للإلكترون . فى النظرية النسبية يمكن تطبيق مبدأ حفظ الطاقة ومبدأ حفظ كمية الحركة فى التصادم . إذا عبرعنهما بدلالة المتجهات الرباعية ، بمساواة مجموع المتجهات الرباعية لكمية الحركة قبل وبعد التصادم نجد أن :

$$\underline{\Pi_o} + \underline{\Pi} = \underline{\Pi'_o} + \underline{\Pi'} \qquad (45)$$

من ذلك ينتج أن :

$$\underline{\Pi'} = \underline{\Pi_o} + \underline{\Pi} - \underline{\Pi'_o} \qquad (46)$$

بضرب كلا من الطرفين لهذه المعادلة قياسيا فى المتجه $\underline{\Pi}'$ ،

وبمعلومية أن :

$$(\underline{\Pi}, \underline{\Pi}) = (\underline{\Pi}', \underline{\Pi}) = -m_o^2 c^2 , \tag{47}$$

$$(\underline{\Pi}_o, \underline{\Pi}_o) = (\underline{\Pi}'_o, \underline{\Pi}'_o) = 0 . \tag{48}$$

فإننا نحصل على العلاقة :

$$(\underline{\Pi}_o, \underline{\Pi}) = (\underline{\Pi}_o, \underline{\Pi}'_o) + (\underline{\Pi}, \underline{\Pi}'_o) . \tag{49}$$

بالتعويض من (43) ، (44) فى (49) نجد أن :

$$-h\, m_o \nu_o = \frac{h^2 \nu_o \nu}{c^2}\, \underline{j} \cdot \underline{j}_o - \frac{h^2 \nu_o \nu}{c^2} - h m_o \nu . \tag{50}$$

وحيث أن : $\underline{j} \cdot \underline{j}_o = \cos\theta$ وبالتعويض فى المعادلة (50)

نجد أن :

$$\frac{h \nu_o \nu}{c^2}(1 - \cos\theta) = m_o(\nu_o - \nu) .$$

أو

$$\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu_o} = \frac{2h}{m_o c^2} \sin^2 \theta/2 . \tag{51}$$

وحيث أن :

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o = c\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu_o}\right) . \tag{52}$$

ثم بالتعويض فى المعادلة (51) من المعادلة (52) نحصل على :

$$\Delta\lambda = 2\bar{\lambda}\sin^{2}\frac{\theta}{2}\ , \tag{53}$$

$$\bar{\lambda} = h / m_{o}c\ . \tag{54}$$

تسمى $\bar{\lambda}$ طول موجة كومبتون .العلاقة (53) تعطى التغير فى طول موجة الضوء الساقط نتيجة تشتته.لإيجاد زاوية إرتداد الإلكترون ϕ نحل المعادلة(45) بإيجاد $\underline{\prod}'_{o}$ بدلامن $\underline{\prod}'$ ونتبع نفس الطريقة السابقة.

5- **<u>التأثير الكهروضوئى</u>** : Photo electric effect

لكى يخرج إلكترون من فلزما ، يجب أن يبذل شغلا ضد مقاومة سطح الفلز . إذا كان الضوء الساقط ذو طاقة عالية (تردد عالى) مثل أشعة إكس ، فإنه قد يحدث أن يمتص الإلكترون طاقة الفوتون الساقط كلها ويكتسب بذلك طاقة حركة كبيرة يستطيع بها أن يتغلب على مقاومة سطح الفلز ويخرج منه . لكى يتم حدوث ذلك ، وجد آينشتين (1905 م) أنه يجب أن يتحقق الشرط الآتى :

$$h\nu = E + A\ . \tag{55}$$

يسمى A بدالة الشغل لسطح الفلز، وتتوقف على طبيعة الفلز، E هى طاقة الحركة للإلكترون . يطلق على هذه الظاهرة التأثير

الكهروضوئى ، إذ أنه بتجميع الإلكترونات الخارجة يمكن الحصول على تيار كهربى . ويصنع لهذا الغرض جهاز يسمى :

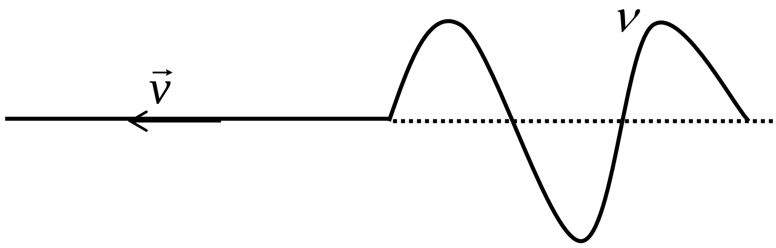
" الخلية الكهروضوئية " .

6- إشعاع الذرة المضطربة :

Emmission of a photon from an excited atom

نعلم أن الذرة – تبعا لنظرية بوهر الذرية – تتألف من إلكترونات تدور فى مدارات معينة حول النواة. إذا حدث إختلال فى حركة هذه الإلكترونات ، فإنه يقال أن الذرة فى حالة إضطراب Excitation . لكى تعود الذرة إلى حالتها المستقرة يجب أن تشع قدرا من الطاقة يخرج على هيئة ضوء ذو تردد معين ، ويعتمدعلى مقدارهذه الطاقة

نفرض ذرة ساكنة تشع فوتونا تردده ν وترتد بسرعة $\vec{v}$ شكل (20)



شكل 20

إذا كانت M_o , m_o هما كتلتى الذرة قبل وبعد الإشعاع ، m هى

الكتلة المتحركة للذرة . متجهات كمية الحركة الرباعية للفوتون $\underline{\Pi}_o$

وللذرة $\underline{\Pi}$ قبل وبعد التصادم تأخذ الصورة :

$$\underline{\Pi}_o = (0, 0) = \underline{0} \quad , \qquad (56)$$

$$\underline{\Pi}'_o = \left(\frac{h\nu}{c} \frac{\vec{v}}{v}, i \frac{h\nu}{c} \right) ,$$

$$\underline{\Pi} = (0, i M_o c) \quad , \qquad (57)$$

$$\underline{\Pi}' = (-m\vec{v}, i m c) \quad .$$

بتطبيق مبدأ حفظ كمية الحركة الرباعية قبل وبعد الإشعاع ، نجد أن

$$\underline{\Pi}_o + \underline{\Pi} = \underline{\Pi}'_o + \underline{\Pi}' . \qquad (58)$$

بكتابة هذه المعادلات بدالة المركبات :

$$\vec{0} = \frac{h\nu}{c} \frac{\vec{v}}{v} - m\vec{v} \quad , \qquad (59)$$

$$M_o c^2 = mc^2 + h\nu \quad .$$

أو

$$\left(M_o c - \frac{h\nu}{c} \right)^2 = m^2 c^2 . \qquad (60)$$

بتربيع المعادلة (59) والطرح من المعادلة (60) نحصل على :

$$(M_o c - \frac{h\nu}{c})^2 - \frac{h^2\nu^2}{c^2} = m^2 c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) \ . \qquad (61)$$

وحيث أن :

$$m = m_o / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ . \qquad (62)$$

وبالتعويض فى المعادلة (61) نجد أن :

$$(M_o c - \frac{h\nu}{c})^2 - \frac{h^2\nu^2}{c^2} = m_o^2 c^2 \ . \qquad (63)$$

إذا كانت ΔE هى الطاقة اللازمة للإنتقال من الحالة المضطربة للذرة (كتلتها حينئذ M_o) إلى الحالة المستقرة (كتلتها m_o) ، فإنه تبعا لقانون آينشتين (67) فى الباب الرابع – يكون :

$$\Delta E = (M_o - m_o) c^2 \ . \qquad (64)$$

بالتعويض فى المعادلة (63) فإن :

$$h\nu = \Delta E (1 - \Delta E / 2M_o c^2) \ . \qquad (65)$$

وهذه هى العلاقة بين تردد الإشعاع الصادر من الذرة المضطربة وطاقة الإضطراب ΔE .

7-إنحلال الجسيمات الأولية :

Decay of Elementary Particles

يوجد فى الطبيعة العديد من الجسيمات الأولية مثل :

البروتون p ، والنيوترون n ، والإلكترون e ، والميزونات mesons (منها $\pi^o , \pi^\pm , \mu , \Lambda , ...$) كذلك الفوتونات ph . ، والنيوترينات $\nu^o , \nu^\pm$.

بعض هذه الجسيمات مستقر ، أى يبقى محتفظا بطبيعته لمدة طويلة نسبيا (بعبر عن ذلك بأن مدة حياة الجسيم – عمره – Life time تكون كبيرة) والبعض الآخر من هذه الجسيمات غير مستقر أى يعيش لمدة قصيرة ، ينحل بعدها إلى جسيمات أولية أخرى . π (ميزون) ، حيث أنه جسيم أولى غير مستقر يبلغ عمره : $2{\cdot}5{\times}10^{-8}\sec$. هذا الميزون هو جسيم أولى كتلته الساكنة تساوى حوالى 273 مرة كتلة الإلكترون الساكنة ، ويوجد ثلاثة أنواع منه : موجب π^+ ، سالب π^- ، ومتعادل π^o . وقد وجد أن الميزون المتعادل ينحل إلى فوتونين ويمثل ذلك بالمعادلة :

$$\pi^o \rightarrow 2\ ph . \qquad (66)$$

أما الميزونات المشحونة فاتنحل تبعا للمعادلة :

$$\pi^{o} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu^{o} \qquad (67)$$

حيث $\mu^{\pm}$ نوع آخر من الميزونات كتلته الساكنة تساوى 207 مرة كتلة الإلكترون الساكنة ، ν^{o} هو النيوترينو المتعادل ذو الكتلة الساكنة المتلاشية تقريبا . لدراسة إنحلال الميزونات المشحونة ، نفرض أن الكتل الساكنة للجسيمات فى المعادلة (67) هى على الترتيب m_π ، m_μ ، m_ν . إذا كان الجسيم π ميزون ساكن فى إطار ذات قصور ذاتى ، فإن الجسيمات التى تنتج عن إنحلاله تتحرك فى إتجاهين متضادين ، ويكون لهما نفس كمية الحركة P (ثبوت كمية الحركة) . أى جسيم متحرك يكون له طاقة حركة E تعطى بالعلاقة (74) فى الباب الرابع :

$$E^{2} = c^{2}P^{2} + m_{o}^{2}c^{4} \qquad (68)$$

بتطبيق قانون حفظ الطاقة على إنحلال π - ميزون الممثل بالعلاقة (67) – فإن :

$$m_{\pi}^{2}c^{2} = (m_{\mu}^{2}c^{4} + c^{2}P^{2})^{\frac{1}{2}} + (m_{\nu}^{2}c^{4} + c^{2}P^{2})^{\frac{1}{2}}$$

$$= E_\mu + E_\nu \tag{69}$$

من المعادلة (68) يمكن إستنتاج أن :

$$E_\mu^2 - E_\nu^2 = (m_\mu^2 - m_\nu^2) c^4 \, . \tag{70}$$

بحل المعادلتين (69)،(70) يمكن تعين طاقة الجسيمات الناتجه عن الإنحلال :

$$E_\mu = c^2 (m_\mu^2 + m_\pi^2 - m_\nu^2) / 2m_\pi \, . \tag{71}$$

$$E_\nu = c^2 (m_\nu^2 + m_\pi^2 - m_\mu^2) / 2m_\pi \, . \tag{72}$$

كان يمكن الحصول على الكتلة الساكنة للنيوترينو من المعادلة (71) على الصورة :

$$m_\nu^2 = m_\mu^2 \left[\, (x - 1)^2 - 2xy \, \right] \tag{73}$$

حيث

$$x = m_\pi / m_\mu \, ,$$

$$y = \frac{E_\mu}{m_\mu c^2} - 1 = \frac{T_\mu}{m_\mu c^2} \, . \tag{74}$$

حيث T_μ هى طاقة حركة μ- ميزون . بالتعويض عن قيمتى $m_\mu \, , \, m_\pi$ نجد أن :

$$x = \frac{273}{207} = 1.3$$

أى أن :

$$(x - 1)^2 = 0.09.$$

بإهمال الحد الثانى فى المعادلة (73) نجد أن :

$$(m_\nu / m_\mu)^2 = 0.09$$

وبالتالى تكون :

$$m_\nu = 0.3\, m_\mu$$

مما يؤيد فرض كتلة النيوترينوالساكنة لتكون مساوية للصفر تقريبا.

8- **تحول الكتلة إلى طاقة** :

تلعب العلاقة بين الكتلة والطاقة لآينشتين – المعادلة (67) فى الباب الرابع – دورا كبيرا وخاصة فى التفاعلات النووية ، حيث يمكن (فعلا) أن تتحول المادة إلى طاقة هائلة (كما فى القنبلة الذرية) .

لفهم ذلك ، نعلم أن نواة الذرة تتكون من عدد من البروتونات وآخر من النيوترونات . فى الذرات المستقرة تكون الكتلة الساكنة للذرة M_o أقل من مجموع الكتل الساكنة $\sum m_o$ لمكوناتها

(البروتونات والنيوترونات و الإلكترونات) . الفرق فى الكتلة هوطاقة الربط Binding energy لمحتويات النوة – تبعا لقانون آينشتين (67) فى الباب الرابع ، إذا كان :

$$\Delta m = \sum m_o - M_o ,$$

فإن :

$$\Delta E = \Delta m\, c^2 \quad . \tag{76}$$

مثلا الكتلة الذرية لليثيوم ${}_3Li^6$ هى $6{\cdot}01697$ وحدة ذرية (الوحدة الذرية $(a{\cdot}m{\cdot}u{\cdot}) = 1{\cdot}66\times10^{-24}gm$ تتكون هذه الذرة من ثلاث نيوترونات (كتلةالنيوترون = $a{\cdot}m{\cdot}u{\cdot}$ $1{\cdot}00893$) بجانب ثلاث ذرات هيدروجين – كلا منها مكونة من بروتون وإلكترون (كتلة ذرة الهيدروجين = $1{\cdot}00812\ a{\cdot}m{\cdot}u{\cdot}$) يكون مجموع كل الكونات مساويا :

$$\sum m_o = 6{\cdot}05116\ a{\cdot}m{\cdot}u{\cdot}$$

بطرح الكتلة الذرية لليثيوم من هذا المجموع ، ينتج أن :

$$\Delta m = 0{\cdot}03419\ a{\cdot}m{\cdot}u{\cdot}$$

من العلاقة (76) تكون طاقة الربط :

$$\Delta E \approx 31{\cdot}8\ Mev \qquad (1\, erg \approx 6{\cdot}3\times 10^{5}\, Mev)$$

واضح أن هذه الطاقة هى اللازمة لفصل محتويات النواة عن بعضها ، أى لكى يحدث إنشطار Disintegration .

فى الأنوية غير مستقرة (أنوية المواد المشعة) يكون كتل المواد المشعة الناتجة أقل قليلا من الكتلة الأصلية . هذا الفرق يظهر على صورة طاقة حركية ، تتحرك بها نواتج العملية . بهذه الطريقة يمكن إحداث تفاعل نووى ينتج عنه طاقة هائلة .

مثلا ، إذا قذفت ذرة ليثيوم المشعة ${}_3Li^7$ بواسطة نيوترون ، فإنه ينتج ذرتين هيليوم ${}_3He^7$ مع طاقة قدرها $17{\cdot}15\ Mev$ هذه الطاقة هى ، فى الواقع ، الفرق بين كتلتى ذرتى الهيليوم و ذرة الليثيوم الأصلية . يمكن تمثيل ذلك بمعادلة التفاعلية الآتية :

$$ {}_3Li^7 + n \rightarrow 2\, {}_2He^4 + Q \qquad (77)$$

حيث Q هى الطاقة المتولدة وتساوى $17{\cdot}25\ Mev$. مثال آخر لتطبيق قانون آينشتين هو إنشطار المواد المشعة الثقيلة مثل اليورانيوم ، حيث تقفذ نواة ذرة اليورانيوم بنيوترون كتل المواد

الناتجة تكون أقل الكتلة الأصلية ، حيث يتحول الفرق إلى طاقة (القنبلة الذرية) .

9-تصادم الجسيمات فى الفيزياء النووية :

الفيزياء ذات الطاقة العالية High energy physics

تنشأ معظم الظواهر النووية من حدوث تصادم بين جسيمات تسير بسرعات كبيرة جدا ، وتتألف عملية التصادم من جسيم صادم (قذيفة: Projectile) وجسيم يتعرض للتصادم (هدف : Target) حيث ينتج عنها إحدى الحالتين التاليتين :

(i) تغيرالحالة الميكانيكية للمجموعة (القذيفة والهدف) ويمثل ذلك بالمعادلة :

$$a + b \rightarrow a' + b' \tag{78}$$

ويبقى كل جسيم محتفظا بطبيعته ، ويسمى التصادم فى هذه الحالة بالتصادم أو التشتت المرن Elastic Collision &Scattering ويتميز هذا النوع من التصادم بأنه لايحدث تغير فى مجموع متجهى كمية الحركة الربعيين أثناء التصادم .

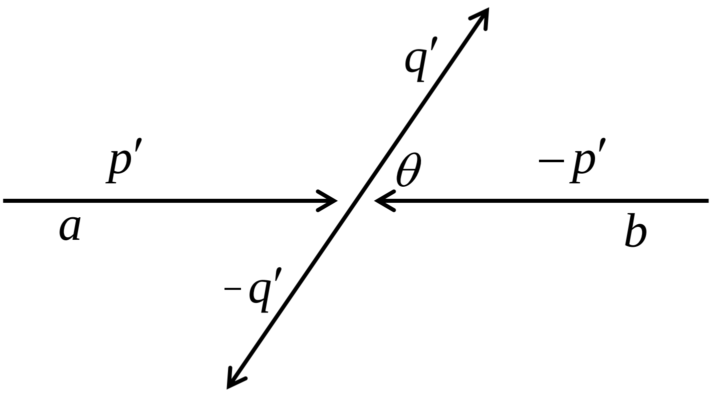
(ii) تفاعل نووى : Nuclear Reaction ويمثل بالمعادلة :

$$a + p \rightarrow c + d + \cdots \tag{79}$$

وتنشأ من التفاعل جسيمات أخرى تختلف عن الجسيمات المتصادمة ويسمى التصادم بالتصادم الغيرمرن Inelastic Collision وهنا يجب أن نأخذ فى الإعتبارتحول الفرق فى الكتل إلى طاقة .

عند دراسة ظواهرالتصادم يستخدم إطارإنتساب تقاس فيه الظاهرة ويسمى إطار المعمل Laboratory Frame ولتسهيل وصف العملية يستخدم – عادة – إطارآخريكون فيه مركز الكتلة – للقذيفة والهدف ساكنا ، بمعنى أن متجهى كمية الحركة الثلاثين يكونا متساويين ومتضادين فى الإتجاه . يسمى هذا الإطار بإطار مركز الكتلة (أو كمية الحركة Centre of Mass Frame) ويرمز له بالرمز CM . فى الإطار CM وبعد التصادم ، يكون متجهى كمية الحركة الثلاثيين للجسيمين المشتتين أو الناتجين عن التفاعل النووى (بفرض أن ناتج التفاعل هو جسيمين فقط c , d) متساوين ومتضادين فى الإتجاه شكل (21) فى حالة التصادم المرن فقط يكون:

$$| p' | = | q | \tag{80}$$



شكل 21

لكى نحول من الإطار CM إلى إطار المعمل أو العكس ، نستطيع الإستعانة بتحويل لورنتزحيث يمكن تعيين سرعة التحويل $\vec{v}_{CM}$

من الشرط :

$$p'_1 = -p'_2 \equiv p' \tag{81}$$

بدلا من ذلك يمكن تطبيق قانون حفظ متجه كمية الحركة الرباعية بالطريقة الآتية :

$$\underline{\Pi}_1 + \underline{\Pi}_2 = \underline{\Pi}'_1 + \underline{\Pi}'_2 \tag{82}$$

بإيجاد حاصل الضرب القياسى التالى :

$$(\underline{\Pi}_1 + \underline{\Pi}_2 \, , \, \underline{\Pi}_1 + \underline{\Pi}_2) = (\underline{\Pi}'_1 + \underline{\Pi}'_2 \, , \, \underline{\Pi}'_1 + \underline{\Pi}'_2) \tag{83}$$

حيث الطرف الأيسر منسوبا إلى إطار المعمل(ويكون فيه الهدف

b ساكنا ، أى $\vec{P}_2 = \vec{0}$) والطرف الأيمن منسوبا إلى الإطار CM

(وفيه يكون $P' = P'_2 = 0$) . بالتعويض عن ذلك فى المعادلة (83)

نحصل على :

$$P^2 - (E_1 + m_2c^2)^2 = -(E'_1 + E'_2)^2 \quad . \tag{84}$$

$$E_1^2 = m_1^2c^4 + P^2 \quad . \tag{85}$$

حيث وضعنا فى هذه الصيغ :

$$P_1 = P \tag{86}$$

بالتعويض فى المعادلة (84) ينتج أن الطاقة الكلية بالنسبة للإطار

CM تكون :

$$E' = E'_1 + E'_2$$

$$= c\,(m_1^2c^2 + m_2^2c^2 + 2E_1m_2)^{\frac{1}{2}} \quad . \tag{87}$$

لإيجاد كلامن $E'_1\ ,\ E'_2$ على حدة ، نعتبر حاصل الضرب

القياسى على الصورة :

$$(\underline{\Pi}_1\ ,\ \underline{\Pi}_1 + \underline{\Pi}_2) = (\underline{\Pi}'_1\ ,\underline{\Pi}'_1 + \underline{\Pi}'_2) \tag{88}$$

من ذلك ينتج أن :

$$E'_1 = (E'^2 + m_1^2c^4 - m_2^2c^4)/2E' \tag{89}$$

$$E'_2 = (E'^2 + m_2^2 c^4 - m_1^2 c^4) / 2E' \qquad (90)$$

بتطبيق تحويل لورنتز ينتج أن :

$$\vec{P}_2 = -\beta_{CM} m_2 \vec{v}_{CM} = -\vec{P'} \qquad (91)$$

$$E'_2 = \beta_{CM} m_2 c^2 \quad , \quad \beta_{CM} = 1/\sqrt{1 - v_{CM}^2 / c^2} \qquad (92)$$

كذلك يمكن إثبات أن :

$$\vec{P'} = \frac{m_2}{E'} \vec{P} \qquad (93)$$

بالتعويض من المعادلة (93) فى (91) يمكن إيجاد $\vec{v}_{CM}$ بالصورة :

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_2}{E' \beta_{CM}} \vec{P} \qquad (94)$$

لكن من المعادلة (92) نجد أن :

$$\beta_{CM} = E'_2 / m_2 c^2 \qquad (95)$$

بالتعويض فى المعادلة (94) والإستعانة بالصيغة (87) ينتج أن :

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{E_1 + m_2 c^2} \vec{P} \qquad (96)$$

كذلك يمكن إيجاد β_{CM} على الصورة :

$$\beta_{CM} = (E_1 + m_2 c^2) / E' \qquad (97)$$

ملحوظة :

المعادلات (93) ، (96) تؤول إلى الصيغ المألوفة عندما :

$\frac{v_{CM}}{c} << 1$ حيث تكون طاقة الحركة الكلية بالنسبة للإطار CM

فى هذه الحالة مساوية :

$$T' = E' - c^2(m_1 + m_2) \approx \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\frac{1}{2}m_1 v_1^2) \qquad (98)$$

وهى نفس النتيجة التى يمكن الحصول عليها عند تطبيق قوانين الميكانيكا الكلاسيكية .

ننتقل الآن إلى دراسة حالة أخرى ، وهى التى تنشأ عندما ينتج من التفاعل النووى جسيمين أوأكثر . نفرض أن كتل الجسيمات الناتجة هى : m_i حيث : $i = 1,2, ...$ والفرق بين الكتل هو Δm فيكون:

$$\Delta m = \sum_{i=3} m_i - (m_1 + m_2) \; . \qquad (99)$$

إذا كانت $\Delta m > 0$ ، فإن التفاعل لا يحدث إلا إذا كانت طاقة القذيفة (m_1 مثلا) تساوى أو تتعدى قيمة معينة T_{th} تسمى طاقة " عتبة التفاعل Threshold energy " هذا الشرط يمكن صياغته بالنسبة للإطار CM على الصورة :

$$(E')_{th} = (m_1 + m_2 + \Delta m) c^2 \ . \qquad (100)$$

من المعادلة (78) نجد أن الحركة عند " عتبة التفاعل " هى :

$$T_{th} = \Delta m \left(1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{\Delta m}{2m_2} \right) c^2 \ . \qquad (101)$$

مثال : إذا سقط فوتون على بروتون فإنه ينتج π^o - ميزون

يسمى هذا التفاعل بالإنتاج الضوئى للميزون –

(Photo – production of π^o -meson) ويمثل ذلك بالمعادلة

$$ph. + p \rightarrow p + \pi^o \ .$$

حيث رمزنا للبروتون بالرمز p . لحساب طاقة الحركة عند

" عتبة التفاعل " T_{th} ، نتبع الآتى :

$$\Delta m \, c^2 = m_{\pi^o} c^2 = 135 \ Mev \ .$$

$$m_2 c^2 = m_p \, c^2 = 938{\cdot}5 \ Mev \ .$$

بتطبيق الصيغة (101) نجد أن :

$$T_{th} = 135 \left[\ 1 + \frac{135}{2 \times 938{\cdot}5} \ \right] = 144 \ Mev \ .$$

ملحق (1)

Table of general physical constants*

Planck's constant	$h = 2\pi\hbar = (6.62559 \pm 0.00015) \times 10^{-27} erg \sec$ $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = (1.05449 \pm 0.00003) \times 10^{-27} erg \sec$
Light speed	$c = (2.997925 \pm 0.000001) \times 10^{10} cm \sec^{-1}$
Electric charge	$e = (4.80298 \pm 0.00006) \times 10^{-10} esu$ $= (1.60210 \pm 0.00002) \times 10^{-19} coul$
Gravitational constant	$G = (6.670 \pm 0.005) \times 10^{-8} dyne\, cm^2 gm^{-2}$
Avogadro's number	$N_o = (6.02252 \pm 0.00009) \times 10^{23} mol^{-1}$
Boltzmann's constant	$k = (1.38054 \pm 0.00006) \times 10^{-16} erg\, ({}^oK)^{-1}$
Faradway's constant	$N_{oe} = (96487.0 \pm 0.5)\, coul\, mol^{-1}$
General gas constant	$R = N_o k = 8.314 \times 10^7 erg\, ({}^oK)^{-1} mol^{-1}$
Electron mass	$m = (3.10903 \pm 0.0003) \times 10^{-23} gm$ $= (5.48597 \pm 0.00003) \times 10^{-4} amu$ $= (0.511006 \pm 0.000002)\, Mev / c^2$
Atomic mass unit	$amu = (1.66043 \pm 0.00002) \times 10^{-24} gm$ $= (931.478 \pm 0.005)\, Mev / c^2$
Proton mass	$M_P = (1.67252 \pm 0.00003) \times 10^{-24} gm$ $= (1.00727663 \pm 0.00000008)\, amu$ $= (938.256 \pm 0.005)\, Mev / c^2$
Neutron mass	$M_n = (1.0086654 \pm 0.000004)\, amu$ $= (938.550 \pm 0.005)\, Mev / c^2$

Compton wavelength of the electron	$\lambda_e = \frac{h_1}{mc} = (2.42621 \pm 0.00002) \times 10^{-10} cm$ $\bar{\lambda}_e = \frac{\hbar}{mc} = (3.86144 \pm 0.00003) \times 10^{-11} cm$
Fixed exact composition	$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = (7.29720 \pm 0.00003) \times 10^{-3}$
The classic radius of the electron	$e^2/mc^2 = \alpha\, \bar{\lambda}_e = (2.81777 \pm 0.00004) \times 10^{-13} cm$
Magnenton Bohr	$\mu_B = e\hbar/2mc = (9.27314 \pm 0.00021) \times 10^{-21} erg\ gauss^{-1}$
The frequency associated with 1 eV	$(2.41804 \pm 0.00002) \times 10^{14} cycle/\sec$
The wave number associated with 1 eV	$(8065.73 \pm 0.08) \times cm^{-1}$
The temperature associated with 1 eV	$(11604.9 \pm 0.5)\ {}^{o}K$

* E.R.Cohen and J. W. DuMond "Our Knowledge of Fundamental Constants of Physics and Chemistry in 1965" Reviews of Modern Physics 37,537(1965)

ملحق (2)

Table of most stable elementary particles*

Particle	Mass (MeV)	Average life time (Sec)
Photon γ	0	Stable
Leptons Neutrino ν_e e^- Neutrino ν_μ μ^-	$0(<0.2keV)$ $0(<2keV)$	Stable
Electron – positron $(e^{\mp})$	0.511006	Stable
Muons $\mu^{\mp}$	105.659	2.20×10^{-5}
Baryons Proton p Neutron n	 938.256 939.550	 Stable 1.01×10^{3}
Hebron-Lambda (Λ)	1115.58	2.51×10^{-10}
Sigma-hyperonate $\sum^+$ $\sum^0$ $\sum^-$	1189.47 1192.56 1197.44	0.81×10^{-19} $<1.0\times 10^{-14}$ 1.65×10^{-10}
Sequential particles Ξ^o Ξ^-	1314 13211.2	3.0×10^{-10} 1.74×10^{-10}
Negative Omega Ω^-	1674	1.5×10^{-10}
Mesons Charged pions $n^{\pm}$ Neutral pions n^0	 139.58 134.98	 2.608×10^{-8} 0.89×10^{-16}
Charged entities $K^{\pm}$	493.8	1.235×10^{-8}
Neutral Entities K^0 K_1 K_2	497.9	------- 0.87×10^{-10} 5.68×10^{-8}

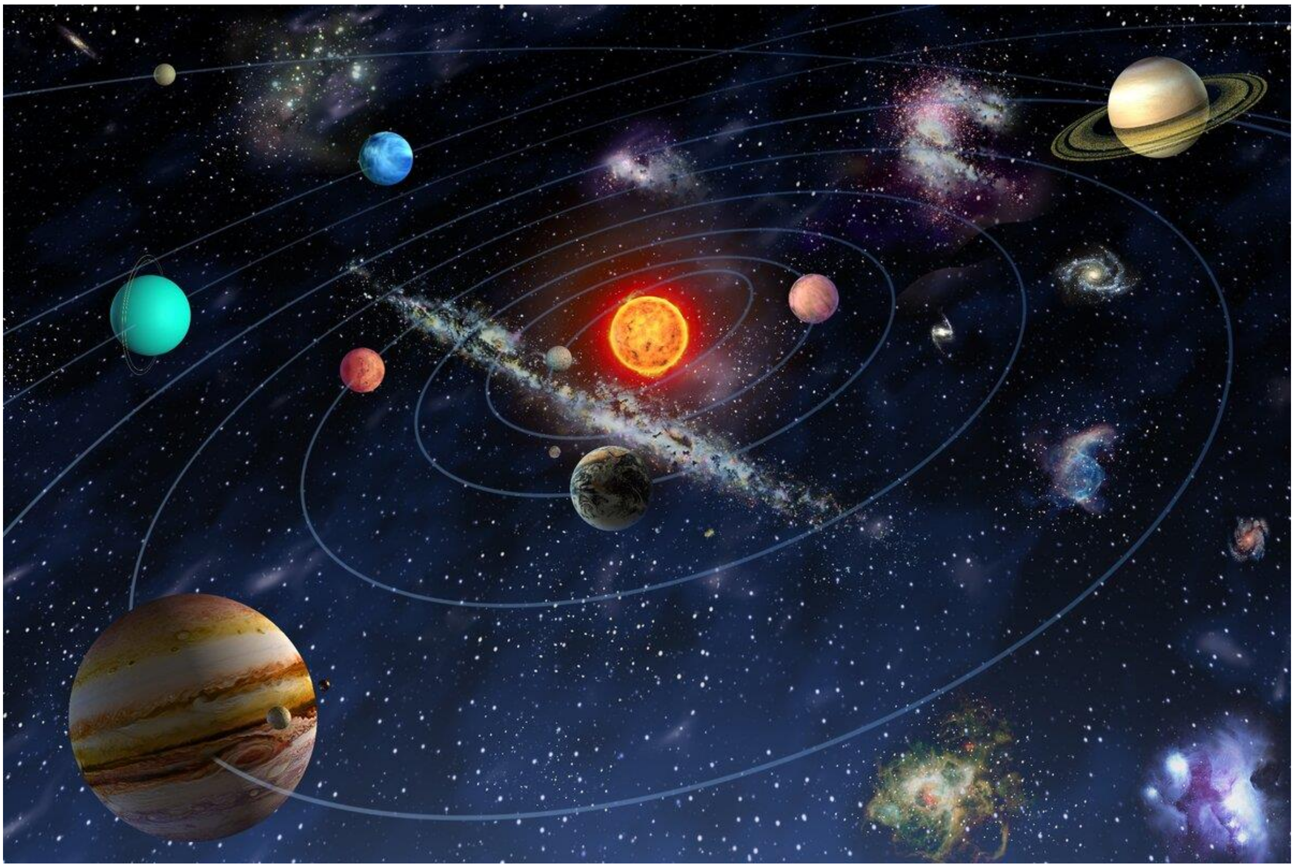
* Reviews of Modern Physics 39,1 (1967)

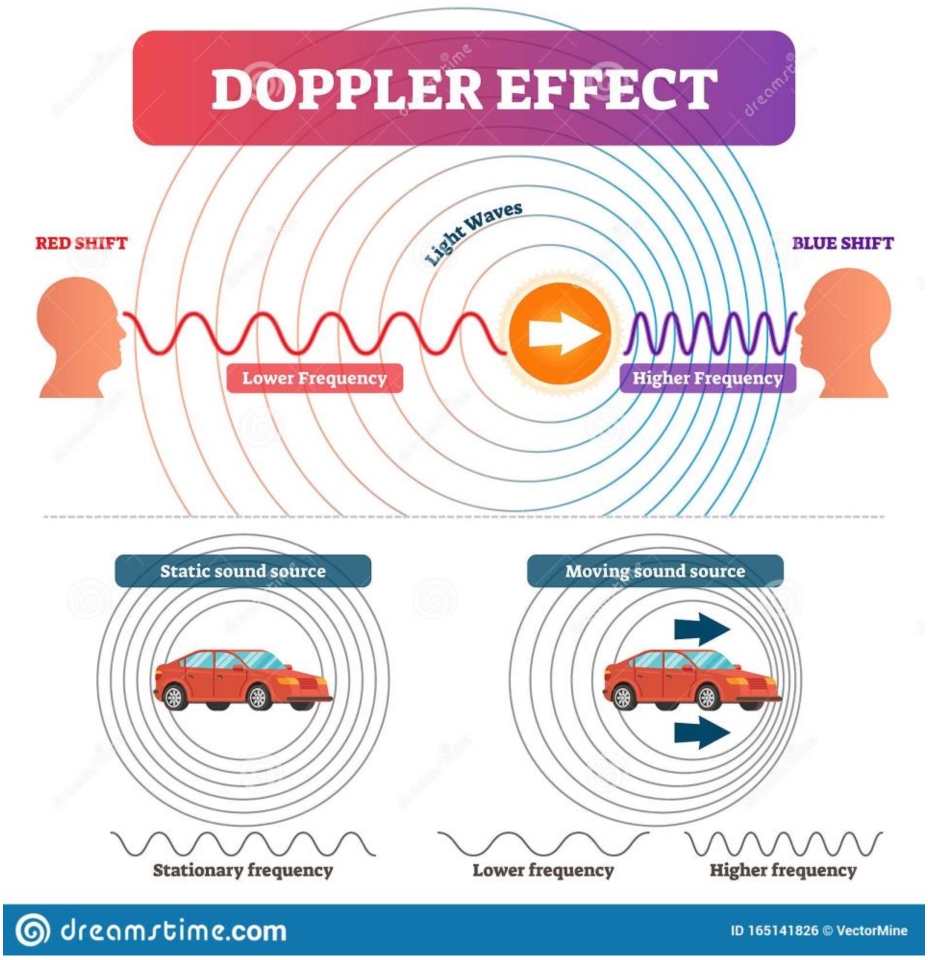
ملحق (3)

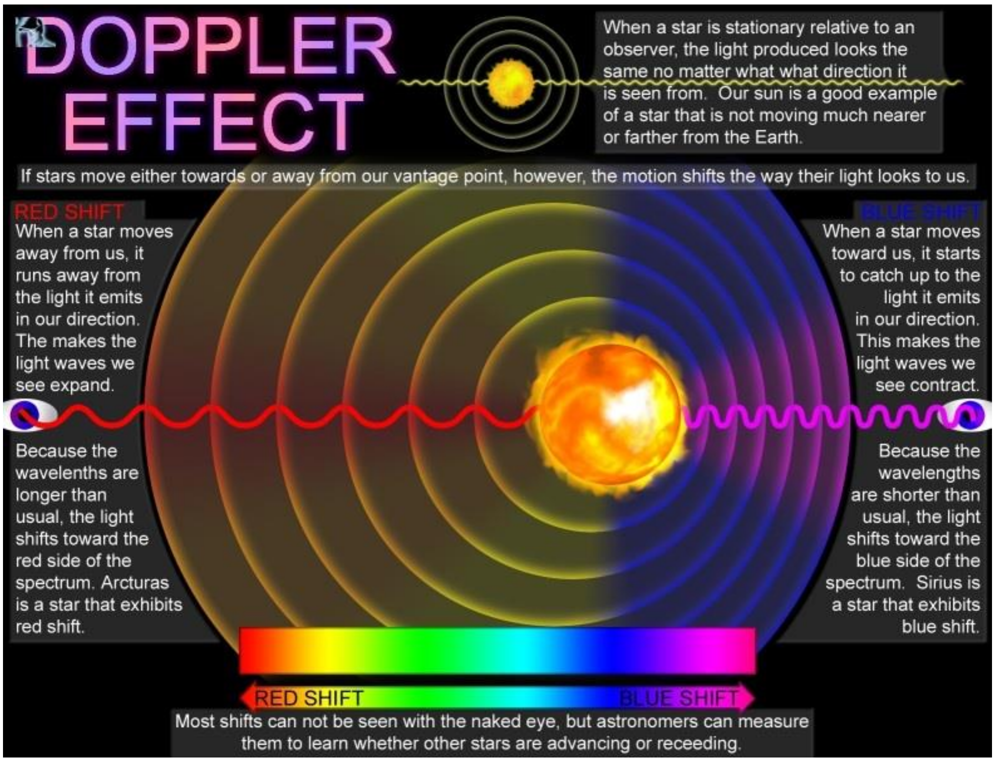
Table of units and conversion factors

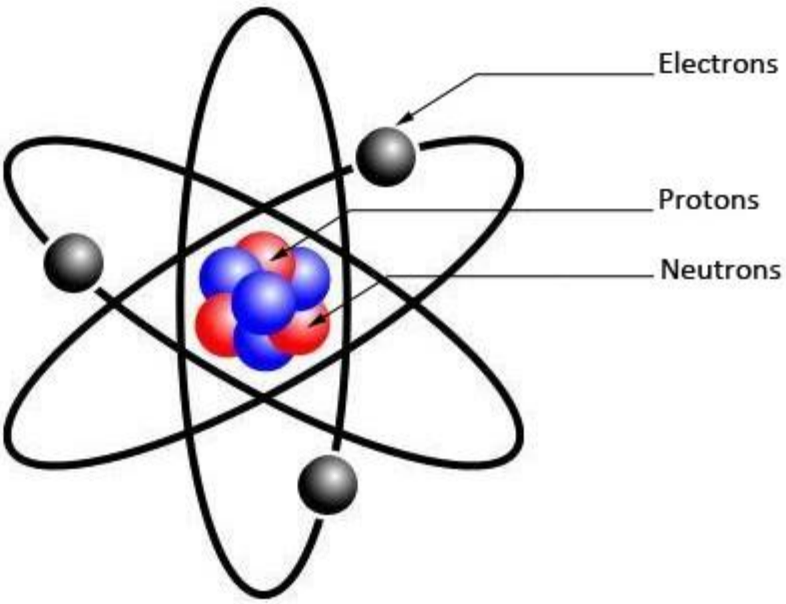
Length	$1\ micron(\mu) = 10^{-6}\ meter$ $1\ milimicron(m\mu) = 10^{-9}\ meter = 10^{-7}\ cm$ $A\ Angstrom(A^{o}) = 10^{-8}\ cm$ $1\ fermi(f) = 10^{-13}\ cm$
Area	$1\ barn(b) = 10^{-24}\ cm^{2}$
Time	$1\ year \cong 3{\cdot}156 \times 10^{7}\ \sec$
Force	$1\ newton = 10^{5}\ dyne$
Energy	$1\ joule = 10^{7}\ erg = (0{\cdot}2389 = 1/4{\cdot}186)\ calories$ $1\ electron\ volt\ (eV) = (1{\cdot}60210 \pm 0{\cdot}00002) \times 10^{-19}\ joul$
Mass	$1\ atomic\ mass\ unit\ (amu)$ $= (1{\cdot}66043 \pm 0{\cdot}00002) \times 10^{-24}\ gm$
Charge	$1\ coulomb = (2{\cdot}997925 \pm 0{\cdot}000001) \times 10^{9}\ esu$ $= 0{\cdot}1\ emu$
Voltage	$1\ esu = (299{\cdot}7920 \pm 0{\cdot}0001)\ volt(V)$
Magnetic induction	$1\ volt - \sec/m^{2} = 10^{4}\ gauss$
Energy equivalent to the unit of atomic masses	$(1\ amu) \times c^{2} = (9{\cdot}31478 \pm 0{\cdot}00005) \times 10^{8}\ eV$
Radioactive sample activity	$1\ curie = 3{\cdot}7 \times 10^{10}\ disintegration\ per\ second$

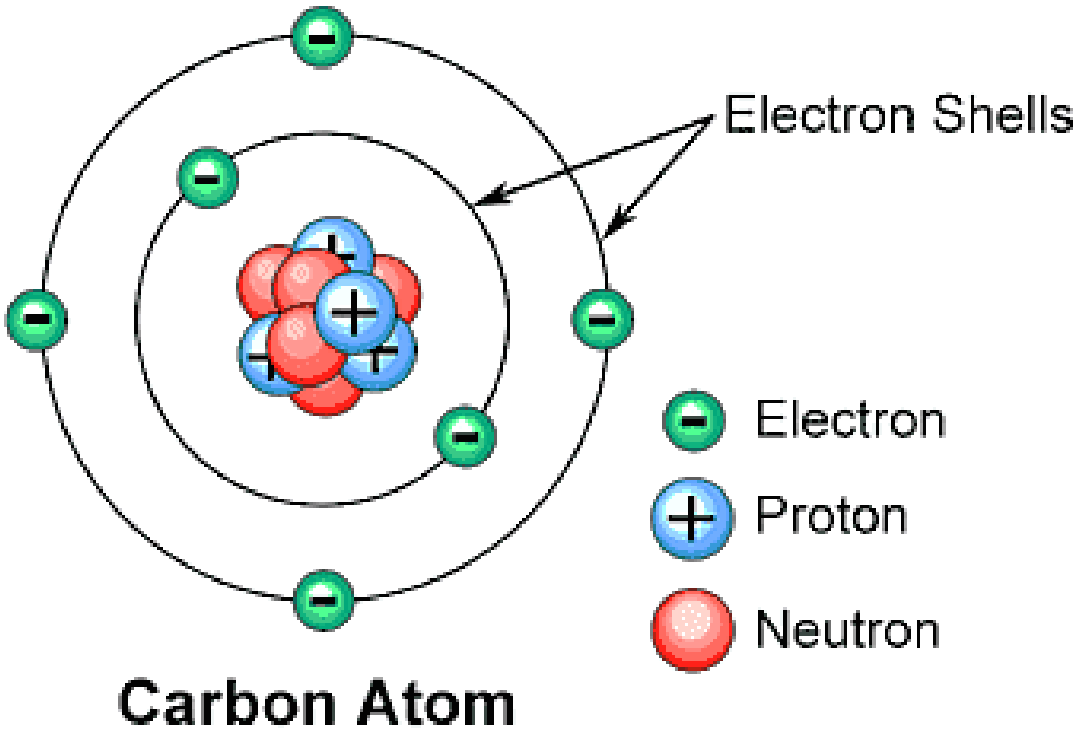
ظواهر فيزيائية Physical phenomena

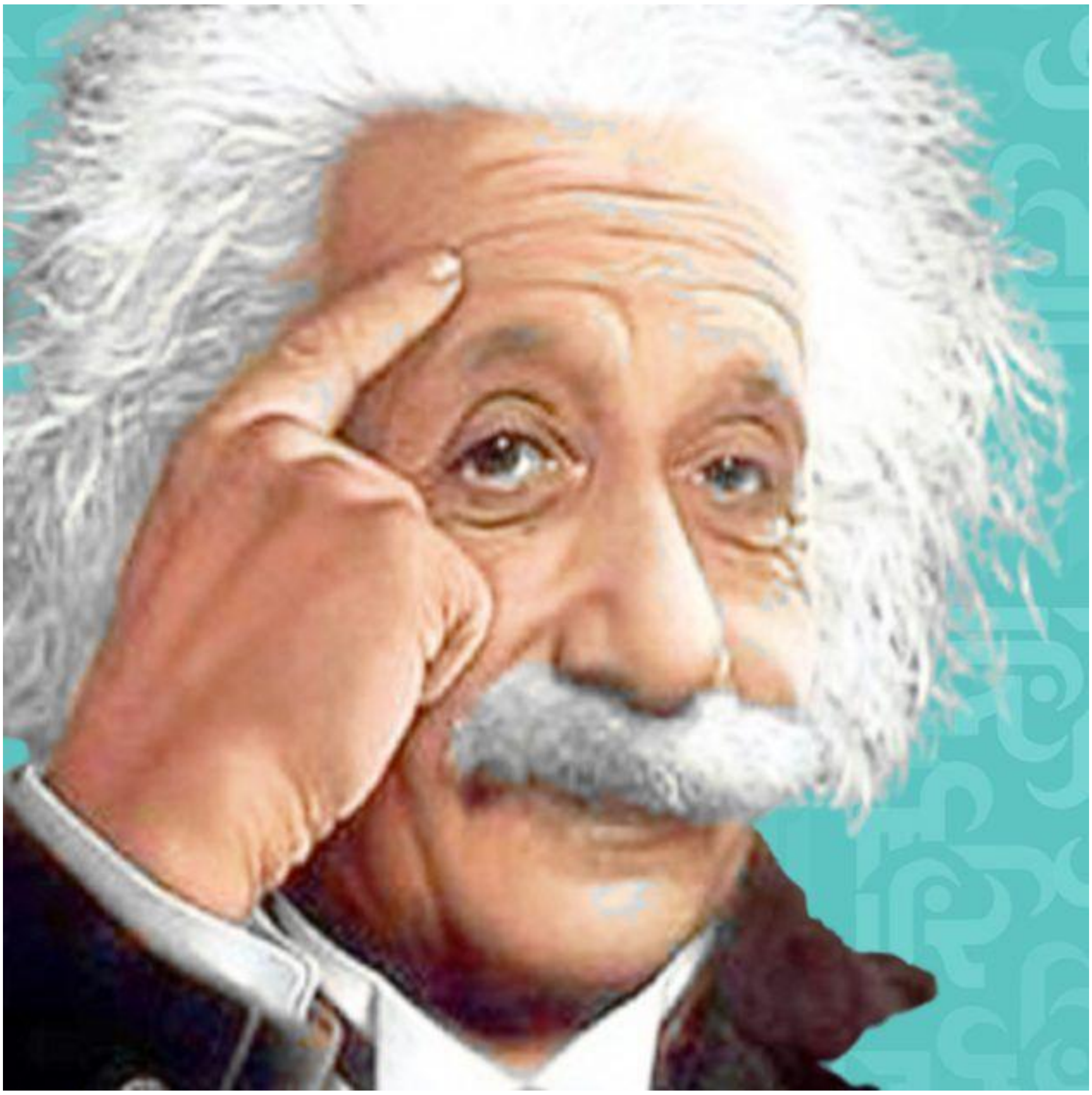



DOPPLER EFFECT
RED SHIFT
BLUE SHIFT
Light Waves
Lower Frequency
Higher Frequency
Static sound source
Moving sound source
Stationary frequency
Lower frequency
Higher frequency
dreamstime.com
ID 165141826 © VectorMine


DOPPLER EFFECT
When a star is stationary relative to an observer, the light produced looks the same no matter what what direction it is seen from. Our sun is a good example of a star that is not moving much nearer or farther from the Earth.
If stars move either towards or away from our vantage point, however, the motion shifts the way their light looks to us.
RED SHIFT
When a star moves away from us, it runs away from the light it emits in our direction. The makes the light waves we see expand.
BLUE SHIFT
When a star moves toward us, it starts to catch up to the light it emits in our direction. This makes the light waves we see contract.
Because the wavelenths are longer than usual, the light shifts toward the red side of the spectrum. Arcturas is a star that exhibits red shift.
Because the wavelengths are shorter than usual, the light shifts toward the blue side of the spectrum. Sirius is a star that exhibits blue shift.
RED SHIFT
BLUE SHIFT
Most shifts can not be seen with the naked eye, but astronomers can measure them to learn whether other stars are advancing or receeding.


Electrons
Protons
Neutrons


Electron Shells
Electron
Proton
Neutron
Carbon Atom



العالم ألبرت اينشتاين

المراجع

مراجع الجزء الأول

1- Basic Laws of Electromagnetism By : I. E. Irodov 1986.

2- A Treats on Electricity & Magnetism By : J. C. Maxwell.1954.

3- Classical Electrodynamics B: JOHN DAVID JACKSON 1962.

4- ELECTROMAGNETIC FIELDS AND WAVES By : Paul Lorain 1969.

5- Magnetofluid Dynamics By : Lazar Dragos 1975.

REFERENCES مراجع الجزء الثانى

- 1-W. H. MeCREA , Relativity physics , 1957, Methuen Monographs on physical, subjects,London
- 2-G.Stephenson & C.W.Kilmister , Special Reletivity for physicists , 1958. Longmans, Green and Co. , London .
- 3- H. Dingle,The Special Theary of Relativity, 1959, Methuen s Monographs on physical subjects , London.
- 4-W.Rindler , Special Relativity , 1960 , Oliver and Boyd , Edinburgh and London .
- 5- M.V. Laue , Die Relativitats Theorie Erester Band, 1961, Friedr, Vieweg,Sohn, Brannschweig.
- 6- J.D.Jackson,Classical Electrodynamics,ch.11, 12,1963.
- 7- C.Kacser,Introduction to The Speciel Theory of Relativity,1967 . Prentice-Hall,Inc,Englewood Cliffs,New Jersey .
- 8-A.Logunov and M.Mestvirishvili,The Relativistic Theory of Gravitation,Mir Publishers1989,Moscow
- 9-D.H.Frish and A.M.T.orndike,Elementary Particles,D.Van Nostr and Co.,Inc.,1964.
- 10-G.F. Chew,M.Gell-Mann and A.H.Rosenfeld Strongly Interacting Particles,February 1964.
- 11-F.J.Dyson,Mathematics in The Physical Sciences,September 1964.
- 12-Einstein A. , Relativity : The Special and General Theory , London (1954) .