محاضرات في الرياضيات

"الجبر والهندسة الفراغية"

لطلاب الفرقة الثانية –شعبة طبيعة وكيمياء –كلية التربية

إعداد

الدكتور / محمد السيد أحمد العاطون

عضو هيئة تدريس بقسم الرياضيات - كلية العلوم بقنا

العام الجامعي:٢٠٢٢-٢٠٢٣

الباب الأول

نظريه المعادلات الجبرية

مفهوم كثيرة حدود

تعريف: التعبير الجبري الذي علي الصورة:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$$

يسمي كثيرة حدود من الدرجة n في المتغير x حيث أن $a_0 \neq 0$ ، $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ هي عوامل كثيرة الحدود وجميعها أعداد حقيقية أو مركبة، n عدد صحيح غير سالب.

وعادة ما تستخدم الرموز $f(x)$ ، $p(x)$ التعبير عن كثيرات الحدود. ويقال أن $p(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n وتكتب علي الصورة:

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n \, .$$

مفهوم المعادلة الجبرية

تعريف: لتكن $p(x)$ كثرة حدود من الدرجة $n \geq 1$ ، فإن التعبير الجبري $p(x) = 0$ يسمي معادلة جبرية من الدرجة $n \geq 1$.

ويكون هذا التعبير معادلة جبرية من الدرجة الأولي عندما $n = 1$ ، ومعادلة جبرية من الدرجة الثانية عندما $n = 2$ ، ومعادلة جبرية من الدرجة الثالثة عندما $n = 3$ ، ...وهكذا.

العمليات الجبرية على كثيرات الحدود

تساوي كثيرات الحدود:

كثيرتي الحدود $f(x)$ ، $g(x)$ من الدرجة $n \geq 1$ تكون متساويتان إذا تساوت عوامل متغيراتها المرفوعة لنفس القوي.

مجموع (أو الفرق بين) كثيرتي حدود

مجموع (الفرق بين) كثيرتي حدود $f(x)$ ، $g(x)$ هو كثيرة حدود أيضا عواملها تساوي مجموع (الفرق بين) عوامل كثيرتي الحدود $f(x)$ ، $g(x)$ المرفوعة لنفس القوي. فمثلا: إذا كانت:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 1,$$

$$g(x) = x^2 + 1$$

فإن:

$$h(x) = f(x) + g(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2,$$
$$k(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 5x^2 + x$$

عملية ضرب كثيرات الحدود

حاصل ضرب أي كثيرتي حدود $f(x)$ ، $g(x)$ هو كثيرة حدود أيضا درجتها تساوي مجموع درجتي كثيرات الحدود $f(x)$ ، $g(x)$. فمثلا: إذا كانت:

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 5,$$

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$$

فإن:

$$\begin{aligned} L(x) &= f(x).g(x) \\ &= (2x^2 - 5x + 5)(x^3 - 3x^2 + 2x - 5) \\ &= 2x^5 - 11x^4 + 22x^3 - 29x^2 + 31x - 15 \end{aligned}$$

قسمة كثيرات الحدود:

في المراحل قبل الجامعية تعرف الطالب علي طريقة القسمة المطولة لكثيرات الحدود، وبصفة عامة ليس من الممكن دائما قسمة كثيرة حدود علي أخري بدون باقي. فمثلا: قسمة $p(x) = 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 7x + 3$ علي $g(x) = x + 2$ تكون كالآتي:

$$
\begin{array}{r}
3x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 1 \\
x+2 \overline{\big) \; 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 \qquad + 7x + 3} \\
-3x^5 - 6x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
-x^4 - 4x^3 \qquad\qquad\quad \\
x^4 + 2x^3 \qquad\qquad\quad \\
\hline
-2x^3 \qquad\qquad\quad \\
2x^3 + 4x^2 \qquad\quad \\
\hline
4x^2 + 7x \quad \\
-4x^2 - 8x \quad \\
\hline
-x + 3 \\
x + 2 \\
\hline
5
\end{array}
$$

وبذلك يكون خارج القسمة هو كثيرة الحدود:

$$q(x) = 3x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 1$$

والباقي يساوي 5. وبالتالي نجد أن كثيرة الحدود المعطاة يمكن كتابتها على الصورة:

$$p(x) = (x+2)q(x) + 5 \,.$$

نظرية: لتكن $p(x)$ ، $g(x)$ كثيرتي حدود من درجة $n \geq 1$ ، $m \geq 1$ علي الترتيب حيث أن $g(x) \neq 0$ ، $n \geq m$ فإنه ينتج عن قسمة $p(x)$ على $g(x)$ كثيرتي حدود $q(x)$ ، $r(x)$ بحيث أن: $p(x) = g(x)q(x) + r(x)$ حيث $q(x)$ ، $r(x)$ يتعينان بشكل وحيد. وتكون درجة كثيرة الحدود $r(x)$ أصغر من درجة كثيرة الحدود $g(x)$.

ملحوظة: في النظرية السابقة تسمي كثيرة الحدود $p(x)$ بالمقسوم و كثير الحدود $g(x)$ بالمقسوم عليه و كثيرة الحدود $q(x)$ بحاصل القسمة و كثيرة الحدود $r(x)$ هي باقي القسمة. وإذا كانت $r(x) = 0$ يقال أن كثيرة الحدود $p(x)$ تقبل القسمة علي $g(x)$ بدون باقي ومن ثم يكون: $p(x) = g(x)q(x)$ ويقال في هذه الحالة أن $g(x)$ تقسم $p(x)$ وأن $g(x)$ ، $q(x)$ عوامل لكثيرة الحدود $p(x)$ وبالتالي تكون كثيرة الحدود $p(x)$ قابلة للتحليل.

طريقة القسمة التركيبية (طريقة هورنر أو طريقة القسمة التحليلية)

نعلم أنة عند قسمة كثيرة الحدود $p(x)$ من درجة $n \geq 1$ علي $x-c$ فأنة ينتج بصفة عامة خارج قسمة هو كثيرة حدود $q(x)$ من درجة $n-1$ وباقي قسمة (عدد ثابت) أي أن:

$$p(x)=(x-c)q(x)+r$$

وإذا كانت $p(x)$ هي كثيرة حدود من درجة $n \geq 1$ بالصورة:

$$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \text{ ،}$$

وبفرض أن خارج القسمة هو كثيرة حدود علي الصورة:

$$q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}$$

وبالتالي يكون:

$$\begin{aligned}
p(x)&=q(x)(x-c)+r\\
&=(x-c)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1})+r\\
&=x(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1})-c(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1})+r\\
&=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x-c(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1})+r\\
&=b_0x^n+(b_1-cb_0)x^{n-1}+(b_2-cb_1)x^{n-2}+\ldots+(b_{n-1}-cb_{n-2})x+r-cb_{n-1}
\end{aligned}$$

فالمطلوب الآن هو تعيين b_0 ، b_1 ، ... ، b_{n-1} ، r.

وحيث أن العلاقة السابقة متطابقة ، فإنه يمكن أن نقارن معاملات قوي x المختلفة في طرفي هذه المتطابقة كالتالي:

بمقارنة معاملات x^n في الطرفين نجد أن:

$$a_0=b_0,$$

بمقارنة معاملات x^{n-1} في الطرفين نجد أن:

$$a_1=b_1-cb_0 \Rightarrow b_1=a_1+cb_0,$$

وبمقارنة معاملات x^{n-2} في الطرفين نجد أن :

$$a_2 = b_2 - cb_1 \Rightarrow b_2 = a_2 + cb_1$$

وهكذا...،

وبمقارنة معاملات x^{n-r} في الطرفين نجد أن :

$$a_r = b_r - cb_{r-1} \Rightarrow b_r = a_r + cb_{r-1}$$

وهكذا حتى نصل إلي مقارنة معاملات x ،

$$a_{n-1} = b_{n-1} - cb_{n-2} \Rightarrow b_{n-1} = a_{n-1} + cb_{n-2}$$

ومقارنة الحد المطلق في الطرفين فنجد أن

$$a_n = r - cb_{n-1} \Rightarrow r = a_n + cb_{n-1}$$

وهذه الخطوات يمكن ترتيبها في الجدول التالي:

$$\begin{array}{c|cccccc} c & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ & \downarrow & cb_0 & cb_1 & \cdots & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\ \hline & b_0 = a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & r \end{array}$$

وفي هذه الحالة يكون خارج القسمة هو كثيرة حدود علي الصورة:

$$q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2} x + b_{n-1}$$

ويكون الباقي هو $r = a_n + cb_{n-1}$. وتعرف هذه الطريقة بطريقة القسمة التركيبية وهي طريقة سريعة لقسمة كثيرات الحدود.

مثال (١): أوجد خارج القسمة والباقي عند قسمة : $p(x) = 2x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 4$ علي $x - 3$.

الحـــــــــــــل

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 2 & -8 & 5 & 0 & 4 \\
3 & \downarrow & 6 & -6 & -3 & -9 \\
\hline
 & 2 & -2 & -1 & -3 & -5
\end{array}
$$

أي أن كثيرة الحدود المعطاة يمكن التعبير عنها بالصورة:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 2x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 4 \\
&= (x-3)(2x^3 - 2x^2 - x - 3) - 5 \\
&= (x-3)q(x) + r
\end{aligned}
$$

حيث أن خارج القسمة هو كثيرة الحدود:

$$q(x) = 2x^3 - 2x^2 - x - 3$$

والباقي هو $r = -5$.

مثال (٢): أوجد خارج القسمة والباقي عند قسمة $p(x) = 2x^4 + 3x^3 + 8x - 11$ علي $x+3$.

الحـــــــــــــل

$$
\begin{array}{c|ccccc}
-3 & 2 & 3 & 0 & 8 & -11 \\
 & \downarrow & -6 & 9 & -27 & 57 \\
\hline
 & 2 & -3 & 9 & -19 & 46
\end{array}
$$

أي أن كثيرة الحدود المعطاة يمكن كتابتها الصورة:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 2x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 4 \\
&= (x+3)(2x^3 - 3x^2 + 9x - 19) + 46 \\
&= (x+3)q(x) + r
\end{aligned}
$$

حيث أن خارج القسمة هو كثيرة الحدود:

$$q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 19$$

والباقي هو $r = 46$.

ملحوظة (١): إذا كنا نقسم كثيرة الحدود $p(x)$ من درجة $n \ge 1$ علي $(x-a)(x-b)$ فإننا نقسم أولا –مثلا– علي $(x-a)$ فنحصل علي:

$$p(x) = (x-a)q_1(x) + r_1$$

حيث $q_1(x)$ كثيرة حدود من درجة $n-1$ ثم نقسم $q_1(x)$ علي $(x-b)$ فنحصل علي:

$$q_1(x) = (x-b)q_2(x) + r_2$$

حيث $q_2(x)$ كثيرة حدود من درجة $n-2$ وبالتالي يكون لدينا:

$$\begin{aligned} p(x) &= \big((x-b)q_2(x) + r_2\big)(x-a) + r_1 \\ &= (x-b)(x-a)q_2(x) + r_2(x-a) + r_1 \end{aligned}$$

أي أن خارج القسمة هو $q_2(x)$ من درجة $n-2$، وباقي القسمة هو $r_2(x-a) + r_1$ من الدرجة الأولي.

وبالتكرار فإنه بقسمة $q_2(x)$ علي $(x-c)$ نحصل علي:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-a)(x-b)\big((x-c)q_3(x) + r_3\big) + r_2(x-a) + r_1 \\ &= (x-a)(x-b)(x-c)q_3(x) + r_3(x-a)(x-b) + r_2(x-a) + r_1 \end{aligned}$$

حيث $q(x)$ كثيرة حدود من درجة $n-3$، وباقي القسمة هو:

$$r_3(x-a)(x-b) + r_2(x-a) + r_1$$

وهو يمثل كثيرة حدود من الدرجة الثانية. ويمكن تكرار هذه العملية.

مثال (٣): أوجد خارج القسمة والباقي عند قسمة $p(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ علي $(x-2)(x+5)$.

الحــــــــــــــل

سنقسم أولا علي $x-2$، ثم نقسم خارج القسمة علي $x+5$ كالآتي:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 2 & \downarrow & 4 & 2 & 12 & 14 \\ \hline & 2 & 1 & 6 & 7 & 20 \end{array}$$

أي أن كثيرة الحدود المعطاة يمكن كتابتها الصورة:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \\ &= (x-2)(2x^3 + x^2 + 6x + 7) + 20 \\ &= (x-2)q_1(x) + r_1 \end{aligned}$$

حيث أن خارج القسمة هو كثيرة الحدود:

$$q_1(x) = 2x^3 + x^2 + 6x + 7$$

والباقي هو $r_1 = 20$.

والآن نقسم خارج القسمة $q_1(x) = 2x^3 + x^2 + 6x + 7$ علي $x+5$ كالآتي:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & 6 & 7 \\ -5 & \downarrow & -10 & 45 & -255 \\ \hline & 2 & -9 & 51 & -248 \end{array}$$

أي أن كثيرة الحدود: $q_1(x) = 2x^3 + x^2 + 6x + 7$ يمكن كتابتها بالصورة:

$$\begin{aligned} q_1(x) &= 2x^3 + x^2 + 6x + 7 \\ &= (x+5)(2x^2 - 9x + 51) - 248 \\ &= (x+5)q_2(x) + r_2 \end{aligned}$$

حيث أن خارج القسمة هو كثيرة الحدود:

$$q_2(x) = 2x^2 - 9x + 51$$

والباقي هو $r_2 = -248$.

ومن ثم فإن كثيرة الحدود المعطاة يمكن التعبير عنها بالصورة:

$$p(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6=(x-2)q_1(x)+r_1$$
$$=(x-2)(2x^3+x^2+6x+7)+20=(x-2)\big((x+5)q_2(x)+r_2\big)+20$$
$$=(x-2)\Big((x+5)(2x^2-9x+51)-248\Big)+20$$
$$=(x-2)(x+5)(2x^2-9x+51)-248(x-2)+20$$
$$=(x-2)(x+5)q_2(x)+r(x)$$

وبالتالي يكون خارج القسمة عند قسمة كثيرة الحدود المعطاة علي $(x-2)(x+5)$ هو:

$$q_2(x)=2x^2-9x+51$$

وباقي القسمة هو كثيرة الحدود:

$$r(x)=-248(x-2)+20$$

ملحوظة (٢): إذا كنا نقسم كثيرة الحدود $f(x)$ علي $a\,x+b$ ،حيث $a\neq 0$ ، فإننا نكتب:

$$f(x)=q(x)\ (a\,x+b)+r=a\ q(x)\ \left(x+\frac{b}{a}\right)+r$$

وبالتالي فإننا نجري القسمة علي $x+\frac{b}{a}$ مع مراعاة أن خارج القسمة المطلوب هو خارج القسمة الذي حصلنا عليه مقسوما علي a .

كذلك يمكننا أن نكتب :

$$\frac{1}{a}f(x)=q(x)\ \left(x+\frac{b}{a}\right)+\frac{r}{a}$$

أي أننا في هذه الحالة نقسم $\frac{1}{a}f(x)$ علي $x+\frac{b}{a}$ مع مراعاة أن باقي القسمة المطلوب هو باقي القسمة الذي حصلنا عليه مضروبا في a .

مثال (٤): أوجد بطريقتين خارج القسمة والباقي عند قسمة $p(x)=2x^5-5x^4+7x^3+28x^2-63x+23$ علي $2x-3$.

الحـــــــــــل

الطريقة الأولي: سنقسم كثيرة الحدود علي $x-\frac{3}{2}$ كالآتي:

$$\begin{array}{c|cccccc}
\frac{3}{2} & 2 & -5 & 7 & 28 & -63 & 23 \\
 & \downarrow & 3 & -3 & 6 & 51 & -18 \\
\hline
 & 2 & -2 & 4 & 34 & -12 & 5
\end{array}$$

أي أن كثيرة الحدود المعطاة يمكن كتابتها الصورة:

$$\begin{aligned}
p(x) &= 2x^5-5x^4+7x^3+28x^2-63x+23 \\
&= (x-\frac{3}{2})(2x^4-2x^3+4x^2+34x-12)+5 \\
&= 2(x-\frac{3}{2})(x^4-x^3+2x^2+17x-6)+5 \\
&= (2x-3)(x^4-x^3+2x^2+17x-6)+5 \\
&= (2x-3)q(x)+r
\end{aligned}$$

حيث أن خارج القسمة هو:

$$q(x)=x^4-x^3+2x^2+17x-6$$

والباقي هو $r=5$.

الطريقة الثانية: سنقسم هنا $\frac{1}{2}p(x)$ علي $x-\frac{3}{2}$ كالآتي:

$$\begin{array}{c|cccccc}
\frac{3}{2} & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 14 & -\frac{63}{2} & \frac{23}{2} \\
 & \downarrow & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 3 & \frac{51}{2} & -\frac{18}{2} \\
\hline
 & 1 & -1 & 2 & 17 & -6 & \frac{5}{2}
\end{array}$$

أي أن كثيرة الحدود $\frac{1}{2}p(x)$ يمكن التعبير عنها بالصورة:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}p(x) &= x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{7}{2}x^3+14x^2-\frac{63}{2}x+\frac{23}{2} \\
&= \left(x-\frac{3}{2}\right)(x^4-x^3+2x^2+17x-6)+\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

وبضرب طرفي المعادلة السابقة في "2" نجد أن كثيرة الحدود المعطاة يمكن كتابتها بالصورة:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2\left(x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{7}{2}x^3 + 14x^2 - \frac{63}{2}x + \frac{23}{2}\right) \\ &= 2\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)(x^4 - x^3 + 2x^2 + 17x - 6) + \frac{5}{2}\right) \\ &= (2x-3)(x^4 - x^3 + 2x^2 + 17x - 6) + 5 \\ &= (2x-3)q(x) + 5 \end{aligned}$$

حيث أن خارج القسمة هو:

$$q(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 17x - 6$$

والباقي هو $r = 5$.

تحويل معادله إلى معادله أخرى جذورها تنقص(أو تزيد) عن جذور معادله معلومة:

ليكن لدينا المعادلة الجبرية $p(x) = 0$ من درجة $n \geq 1$ حيث أن:

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

والمطلوب هو تحويل المعادلة $p(x) = 0$ إلي معادلة أخري $f(x) = 0$ من درجة $n \geq 1$ بحيث ينقص كل جذر من جذورها عن الجذر المناظر له في المعادلة $p(x) = 0$ بمقدار ثابت α.

بفرض أن x هو احد جذور المعادلة $p(x) = 0$ و أن y هو الجذر المناظر له في المعادلة المطلوبة $f(x) = 0$ فيكون $y = x - \alpha$ أي أن $x = y + \alpha$ وبذلك تكون المعادلة المطلوبة علي الصورة $p(y + \alpha) = 0$ حيث أن:

$$f(y) = p(y+\alpha) = a_0(y+\alpha)^n + a_1(y+\alpha)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(y+\alpha) + a_n \qquad (2)$$

واضح أن المعادلة $p(y + \alpha) = 0$ بعد إعادة ترتيب حدودها يمكن التعبير عنها بالصورة:

$$f(y) = p(y+\alpha) = b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \cdots + b_{n-1}y + b_n = 0 \qquad (3)$$

حيث أن $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n$ هي المعاملات المطلوب تعينها.

وبالتعويض عن $y = x - \alpha$ في (٣) نجد أن كثيرة الحدود $p(x)$ يمكن التعبير عنها بالصورة:

$$p(x) = f(x-\alpha) = b_0(x-\alpha)^n + b_1(x-\alpha)^{n-1} + \cdots + b_{n-1}(x-\alpha) + b_n \qquad (4)$$

وبقسمه $p(x)$ على $x-\alpha$ نجد أن خارج القسمة يكون كثيرة حدود بالصورة:

$$q(x) = b_0(x-\alpha)^{n-1} + b_1(x-\alpha)^{n-2} + b_2(x-\alpha)^{n-3} + \cdots + b_{n-1}$$

ويكون الباقي هو b_n، أي أن b_n هو الباقي عند قسمه $p(x)$ على $x-\alpha$ وكذلك يكون b_{n-1} هو الباقي عند قسمه $q(x)$ على $x-\alpha$، وهكذا ... ويمكن إجراء عمليات القسمة المتتالية بالطريقة التحليلية. وبطريقه مماثله إذا كان المطلوب إيجاد معادله يزيد كل جذر من جذورها بمقدار ثابت α عن الجذر المناظر له في المعادلة الجبرية $p(x) = 0$.

ملحوظة (٣): المعادلة (٤) تمثل تعبير جبري لكثيرة الحدود $p(x)$ بدلالة قوي الفروق أي وضع كثيرة الحدود $p(x)$ علي الصورة: $f(x-\alpha)$ بحيث أن $p(x) = f(x-\alpha)$ وهي تكافئ إيجاد كثيرة الحدود $p(x+\alpha)$.

مثال (٥): عبر بدلالة قوي y حيث $y = x-2$ عن كثيرة الحدود $p(x)$ حيث أن:

$$p(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$

الحـــــــــــــل

واضح أن كثيرة الحدود في y ستكون كذلك من الدرجة الرابعة، وإذا قسمنا $f(x)$ علي $x-2$ سينتج خارج قسمة من الدرجة الثالثة وباقي قسمة، وبتكرار قسمة خارج القسمة ثلاث مرات أخري يكون لدينا خارج قسمة وهو عدد ثابت، وباقي قسمة هو أيضا عدد ثابت، ونكون قد انتهينا من التعبير عن $f(x)$ بدلالة قوي $x-2$، أي بدلالة y والآن ننفذ هذا الإجراء كالآتي:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 2 & \downarrow & 4 & 2 & 12 & 14 \\ \hline & 2 & 1 & 6 & 7 & 20 \end{array}$$

أي أن:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \\ &= (x-2)(2x^3 + x^2 + 6x + 7) + 20 \\ &= (x-2)q(x) + r \qquad (1) \end{aligned}$$

والآن نكرر قسمة خارج القسمة $q(x) = 2x^3 + x^2 + 6x + 7$ علي $x-2$ كالآتي:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & 6 & 7 \\ 2 & \downarrow & 4 & 10 & 32 \\ \hline & 2 & 5 & 16 & 39 \end{array}$$

فيكون:

$$2x^3 + x^2 + 6x + 7 = (x-2)(2x^2 + 5x + 16) + 39 \qquad (2)$$

ومرة ثالثة:

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & 5 & 16 \\ 2 & \downarrow & 4 & 18 \\ \hline & 2 & 9 & 34 \end{array}$$

أي أن:

$$2x^2 + 5x + 16 = (x-2)(2x+9) + 34 \qquad (3)$$

وأخيرا نقسم $2x+9$ علي $x-2$ كالآتي:

$$\begin{array}{c|cc} & 2 & 9 \\ 2 & \downarrow & 4 \\ \hline & 2 & 13 \end{array}$$

أي أن:

$$2x + 9 = 2(x-2) + 13 \qquad (4)$$

من (1) ، (2) ، (3) ، (4) لدينا:

$$2x^4-3x^3+4x^2-5x+6=(x-2)(2x^3+x^2+6x+7)+20$$
$$=(x-2)\left[(x-2)(2x^2+5x+16)+39\right]+20$$
$$=(x-2)\left[(x-2)(x-2)(2x+9)+34)+39\right]+20$$
$$=(x-2)\left[(x-2)((x-2)(2(x-2)+13)+34)+39\right]+20$$

وبوضع $y=x-2$ نجد أن:

$$p(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$$
$$=y\left[y(y(2y+13)+34)+39\right]+20$$
$$=2y^4+13y^3+34y^2+39y+20$$
$$=2(x-2)^4+13(x-2)^3+34(x-2)^2+39(x-2)+20$$

ويمكننا أن نؤدي هذه الخطوات باختصار كما هو موضح في الجدول التالي:

2	2	−3	4	−5	6
		4	2	12	14
2	2	1	6	7	20
		4	10	32	
2	2	5	16	39	
		4	18		
2	2	9	34		
		4			
	2	13			

وتكون

$$f(x)=2x^4+13x^3+34x^2+39x+20$$
$$=p(x+2)$$
$$=2(x+2)^4-3(x+2)^3+4(x+2)^2-5(x+2)+6$$

هي كثيرة الحدود التي جذورها تنقص بمقدار 2عن جذور كثيرة الحدود المعطاة. وكذلك

يمكن التعبير عن كثيرة الحدود المعطاة بالصورة:

$$p(x)=f(x-2)$$
$$=2(x-2)^4+13(x-2)^3+34(x-2)^2+39(x-2)+20$$

ملحوظة: طلب هذا التعبير يتكافأ تماما مع طلب إيجاد كثيرة الحدود التي جذورها تنقص عن جذور كثيرة الحدود المعطاة بمقدار 2 والتي تكافئ إيجاد كثيرة الحدود $p(x+2)$.

مثال (٦): أوجد كثيرة الحدود التي تزيد جذورها بمقدار "2" عن جذور كثيرة الحدود $p(x)$ حيث أن: $p(x)=x^4+6x^3+12x^2+11x+1$.

الحـــــــــــــل

سنجري الطريقة السابقة مع مراعاة الزيادة في الجذور بدلا من النقص فيها وذلك كالآتي:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 6 & 12 & 11 & 1 \\ -2 & \downarrow & -2 & -8 & -8 & -6 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 3 & -5 \end{array}$$

أي أن:

$$x^4+6x^3+12x^2+11x+1=(x+2)(x^3+4x^2+4x+3)-5 \qquad (1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 4 & 3 \\ -2 & \downarrow & -2 & -4 & 0 \\ \hline & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}$$

أي أن:

$$x^3+4x^2+4x+3=(x+2)(x^2+2x)+3 \qquad (2)$$

$$\begin{array}{r|rr} & 1 & 2 \\ -2 & \downarrow & -2 \\ \hline & 1 & 0 \end{array}$$

أي أن:

$$x^2+2x=(x+2)(x+0) \qquad (3)$$

$$\begin{array}{r|rr} & 1 & 0 \\ -2 & \downarrow & -2 \\ \hline & 1 & -2 \end{array}$$

أي أن:

$$x = 1.(x+2) - 2 \qquad (4)$$

من (1) ، (2) ، (3) ، (4) ينتج أن:

$$\begin{aligned} x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 11x + 1 &= (x+2)(x^3 + 4x^2 + 4x + 3) - 5 \\ &= (x+2)\left[(x+2)(x^2+2x)+3\right] - 5 \\ &= (x+2)\left[(x+2)((x+2)x+0)+3\right] - 5 \\ &= (x+2)\left[(x+2)((x+2)((x+2)-2)+0)+3\right] - 5 \end{aligned}$$

وبوضع $y = x+2$ نحصل علي:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 11x + 1 \\ &= y\left[y(y(y-2)+0)+3\right] - 5 \\ &= y^4 - 2y^3 + 3y - 5 \\ &= (x+2)^4 - 2(x+2)^3 + 3(x+2) - 5 \end{aligned}$$

وتكون

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 2x^3 + 3x - 5 \\ &= p(x-2) \\ &= (x-2)^4 + 6(x-2)^3 + 12(x-2)^2 + 11(x-2) + 1 \end{aligned}$$

هي كثيرة الحدود التي جذورها تزيد بمقدار 2 عن جذور كثيرة الحدود المعطاة. في هذه الحالة يمكن التعبير عن كثيرة الحدود المعطاة بالصورة:

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x+2) \\ &= (x+2)^4 - 2(x+2)^3 + 3(x+2) - 5 \end{aligned}$$

ويمكننا أن نؤدي هذه الخطوات باختصار كما هو موضح في الجدول التالي:

-2	1	6	12	11	1
		-2	-8	-8	-6
-2	1	4	4	3	-5
		-2	-4	0	
-2	1	2	0	3	
		-2	0		
-2	1	0	0		
		-2			
	1	-2			

ملحوظة (٤): المثال السابق يتكافأ تماما مع طلب التعبير عن كثيرة الحدود $p(x)$ بدلالة قوي y حيث $y=x+2$ والتي تكافئ إيجاد كثيرة الحدود $p(x-2)$.

مثال (٧): أوجد كثيرة الحدود التي تنقص جذورها بمقدار "2" عن جذور كثيرة الحدود $p(x)$ حيث أن: $p(x)=x^3-2x-5$

الحـــــــــــــل

واضح أن كثيرة الحدود المعطاة من الدرجة الثالثة، وإذا قسمنا $p(x)$ علي $x-2$ سينتج خارج قسمة من الدرجة الثانية وباقي قسمة، وبتكرار قسمة خارج القسمة مرتين متتاليتين يكون لدينا خارج قسمة وهو عدد ثابت، وباقي قسمة هو أيضا عدد ثابت، كما هو موضح بالجدول التالي:

2	1	0	-2	-5
		2	4	4
2	1	2	2	$\mathbf{-1}$
		2	8	
2	1	4	$\mathbf{10}$	
		2		
	1	$\mathbf{6}$		

وبالتالي تكون كثيرة الحدود التي تنقص جذورها بمقدار "2" عن جذور كثيرة الحدود المعطاة هي:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 10x - 1$$
$$= p(x+2)$$
$$= (x+2)^3 - 2(x+2) - 5$$

وفي هذه الحالة يمكن أيضا التعبير عن كثيرة الحدود المعطاة بالصورة:

$$p(x) = x^3 - 2x - 5$$
$$= f(x-2)$$
$$= (x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 10(x-2) - 1$$

مثال (٨): أوجد كثيرة الحدود التي تنقص جذورها بمقدار"2"عن جذور كثيرة الحدود $p(x)$ حيث أن: $p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x - 4$.

الحـــــــــــــل

واضح أن كثيرة الحدود المعطاة من الدرجة الرابعة، وإذا قسمنا $p(x)$ علي $x-2$ سينتج خارج قسمة من الدرجة الثالثة وباقي قسمة، وبتكرار قسمة خارج القسمة ثلاث مرات متتاليتين يكون لدينا خارج قسمة وهو عدد ثابت، وباقي قسمة هو أيضا عدد ثابت،كما هو موضح بالجدول التالي:

2	1	1	−3	−1	−4
		2	6	6	10
2	1	3	3	5	**6**
		2	10	26	
2	1	5	13	**31**	
		2	14		
2	1	7	**27**		
		2			
	1	**9**			

وبالتالي تكون كثيرة الحدود التي تنقص جذورها بمقدار"2"عن جذور كثيرة الحدود المعطاة هي:

$$f(x) = x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 32x + 6$$
$$= p(x+2)$$
$$= (x+2)^4 + (x+2)^3 - 3(x+2)^2 - (x+2) - 4$$

وفي هذه الحالة يمكن أيضا التعبير عن كثيرة الحدود المعطاة بالصورة:

$$p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x - 4$$
$$= f(x-2)$$
$$= (x-2)^4 + 9(x-2)^3 + 27(x-2)^2 + 32(x-2) + 6$$

ملحوظة (٥): من الأمثلة السابقة يتضح أنة إذا كانت $p(x)$ كثيرة حدود من درجة $n \geq 1$ فإن:

- $p(x+\alpha)$ هي كثيرة الحدود من درجة $n \geq 1$ جذورها تنقص بمقدار α عن جذور $p(x)$.
- $p(x-\alpha)$ هي كثيرة الحدود من درجة $n \geq 1$ جذورها تزيد بمقدار α عن جذور $p(x)$.

حالة خاصة (حذف الحد الثاني من كثرة حدود):

التحويل السابق يستخدم في حذف الحد الثاني من المعادلة $p(x) = 0$ وذلك بوضع $x = y + \alpha$ وفي هذه الحالة تصبح المعادلة $p(x) = 0$ بالصورة:

$$p(y+\alpha) = a_0(y+\alpha)^n + a_1(y+\alpha)^{n-1} + a_2(y+\alpha)^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

وبفك الحدين الأول والثاني باستخدام نظرية ذات الحدين والتجميع نجد أن معامل y^{n-1} في هذه المعادلة هو $na_0\alpha + a_1$، ولحذف الحد الثاني من هذه المعادلة نضع:

$$na_0\alpha + a_1 = 0$$

أي أن:

$$\alpha + \frac{a_1}{na_0} = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{a_1}{na_0}.$$

وبالتالي نجد أن المعادلة الخالية من الحد الثاني هي المعادلة التي تنقص جذورها بمقدار $-\frac{a_1}{na_0}$ عن جذور المعادلة الأصلية.

مثال(٩): احذف الحد الثاني من المعادلة $p(x)=x^3+3x^2-2x+5=0$.

الحـــــــــــل

لحذف الحد الثاني في المعادلة المعطاة نوجد المعادلة التي جذورها تنقص بمقدار $-1=\frac{-3}{(3)(1)}=\alpha$ (تزيد بمقدار) عن جذور المعادلة المعطاة وذلك كما يلي:

-1	1	3	-2	5
		-1	-2	4
-1	1	2	-4	9
		-1	-1	
-1	1	1	-5	
		-1		
	1	0		

وبالتالي تكون المعادلة المطلوبة (المعادلة التي تنقص جذورها بمقدار"-1" أو المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار"1") عن جذور المعادلة المعطاة هي: $f(x)=x^3-5x+9=0$. وفي هذه الحالة يمكن أيضا التعبير عن كثيرة الحدود المعطاة بالصورة:

$$\begin{aligned}p(x)&=x^3+3x^2-2x+5\\&=f(x+1)\\&=(x+1)^3-5(x+1)+9=0\end{aligned}$$

ويمكن التحقق من ذلك كما يأتي:

$$\begin{aligned}p(x)&=x^3+3x^2-2x+5\\&=(x+1)(x^2+2x-4)+9\\&=(x+1)\left[(x+1)(x+1)-5\right]+9\\&=(x+1)^3-5(x+1)+9\end{aligned}$$

تمارين (١)

١) بطريقة القسمة التحليلية أوجد خارج وباقي قسمة

- $x^5-4x^4+9x^3-6x^2-16x+13=0$ علي $x^2-2x+1=0$.
- $x^4-3x^3+4x^2+x+5$ علي $2x-1$.
- $2x^6-4x^5+6x^4-3x+1$ علي x^2+x-6 .

٢) بين أن كثيرة الحدود $x^4-3x^3+3x^2-3x+2$ تقبل القسمة علي x^2-3x+2 .

٣) بطريقة القسمة التحليلية أوجد المعادلة التي جذورها:

- تزيد بمقدار 2 عن جذور المعادلة $x^3-4x^2+3x-1=0$.
- تنقص بمقدار 3 عن جذور المعادلة $x^4-12x^3-48x^2-72x+35=0$.
- تنقص جذورها بمقدار 4 عن جذور المعادلة: $x^4-6x^3+35x-17=0$.
- تزيد جذورها بمقدار 3 عن جذور المعادلة: $4x^4+48x^3+151x^2+42x-245=0$ وبحل المعادلة الناتجة أوجد جذور المعادلة الأصلية.

٤) إذا كانت $p(x)=x^4+x^3-3x^2-x-4$ فأوجد بطريقة القسمة التحليلية $p(x+4)$ ، $p(x-3)$.

٥) احذف الحد الثاني من المعادلات الآتية:

(1) $x^3-6x^2+10x-3=0,$ (2) $x^3+3x^2-15x-52=0,$ (3) $x^4+4x^3+2x^2-4x-2=0$

الباب الثاني

جذور كثيرات الحدود

جذور كثيرات الحدود

تعريف: لتكن $p(x)$ كثيرة حدود من درجة $n \geq 1$ قيمتها مساوية للصفر عندما: $x=\alpha$ فإنه يقال أن العدد α جذرا لكثيرة الحدود $p(x)$ وأن $p(x)=0$ حيث أن $x=\alpha$.

النظرية الأساسية في جبر كثيرات الحدود

نظرية: كثيرة الحدود $p(x)$ من درجة $n \geq 1$ (ذات المعاملات الحقيقية أو المركبة) يوجد لها علي الأقل جذر (حقيقي أو مركب) واحد.

وعلي أساس هذه النظرية يمكن استخلاص النتيجة الآتية:

نتيجة: كثيرة الحدود $p(x)$ من درجة $n \geq 1$ (ذات المعاملات الحقيقية أو المركبة) لها بالضبط n من الجذور.

البرهان :من النظرية الأساسية في الجبر يتضح أن كثيرة الحدود $p(x)$ لها علي الأقل جذر واحد، وليكن هذا الجذر هو α. وبالتالي يكون $p(\alpha)=0$ ومن ثم تكون:

$$\begin{aligned}
p(x) &= p(x)-p(\alpha) \\
&= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \\
&\quad -(a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n) \\
&= a_0(x^n-\alpha^n) + a_1(x^{n-1}-\alpha^{n-1}) + a_2(x^{n-2}-\alpha^{n-2}) + \cdots + a_{n-1}(x-\alpha) \\
&= (x-\alpha)Q_1(x)
\end{aligned}$$

حيث أن $Q_1(x)$ كثيرة حدود من درجة $n-1$.

وبتطبيق النظرية الأساسية للجبر مرة ثانية علي كثيرة الحدود $Q_1(x)$ نجد أن $Q_1(x)$ لها علي الأقل جذر واحد، ليكن β وبالتالي تكون:

$$p(x)=(x-\alpha)(x-\beta)Q_2(x)$$

حيث أن $Q_2(x)$ كثيرة حدود من درجة $n-2$. وبتكرار هذه العملية نجد أن كثيرة الحدود $p(x)$ لها بالفعل عدد n من الجذور.

نظرية: لتكن $p(x)$ كثيرة حدود من درجة $n\geq 1$ فإن $x=\alpha$ يكون جذراً للمعادلة: $p(x)=0$ إذا كان وكان فقط $p(x)$ تقبل القسمة علي $x-\alpha$ بدون باقي.

وفي هذه الحالة نجد أن: $p(x)=(x-\alpha)Q(x)$ حيث أن $Q(x)$ خارج قسمة كثيرة الحدود $p(x)$ علي $x-\alpha$ وهي كثيرة حدود درجتها اقل من درجة كثيرة الحدود $p(x)$ بمقدار الوحدة.

حالة خاصة (الجذور المكررة)

إذا كانت كثيرة الحدود $p(x)$ تقبل القسمة علي $(x-\alpha)^2$ بدون باقي يقال أن كثيرة الحدود $p(x)$ لها جذر α مكرر مرتين. وبوجه عام يمكن تقديم التعريف الآتي:

تعريف: لتكن $p(x)$ كثيرة حدود من درجة $n\geq 1$، فإنه يقال أن المعادلة $p(x)=0$ لها جذر α مكرر k من المرات إذا كانت $p(x)$ تقبل القسمة علي $(x-\alpha)^k, k\geq 1$ بدون باقي.

وفي هذه الحالة نجد أن:

$$p(x)=(x-\alpha)^k Q(x) \qquad (1)$$

حيث أن $Q(x)$ هي كثيرة حدود من درجة $n-k$.

وبتفاضل المعادلة (١) نجد أن:

$$\begin{aligned} p'(x) &= k(x-\alpha)^{k-1}Q(x)+(x-\alpha)^k Q'(x) \\ &= (x-\alpha)^{k-1}\left(kQ(x)+(x-\alpha)Q'(x)\right) \end{aligned}$$

وبالتالي نجد أن $p'(x)$ لها جذر α مكرر $k-1$ من المرات. وبنفس الطريقة نجد أن $p''(x)$ لها جذر α مكرر $k-2$ من المرات،...وهكذا. وبالتالي نقدم النظرية الآتية:

نظرية: لأي كثيرة حدود $p(x)$ جذر c مكرر k من المرات إذا كان:

$$p(\alpha)=0=p'(\alpha)=0=p''(\alpha)=...=p^{(k-1)}(\alpha)=0,\ p^{(k)}(\alpha)\neq 0$$

وهذا يعني أن: لأي كثيرة حدود $p(x)$ جذر α مكرر k من المرات إذا كانت قيمة كثيرة الحدود ومشتقاتها المتتالية حتى الرتبة $k-1$ تكون مساوية للصفر عندما $x=\alpha$ ، $p^{(k)}(\alpha)\neq 0$.

مثال (١): اوجد جذور المعادلة: $p(x)=x^5-2x^4-2x^3+8x^2-7x+2=0$ إذا علم أن لها جذر مكرر أربع مرات.

الحـــــــــــل

نلاحظ أن المعادلة المعطاة من الدرجة الخامسة وبالتالي يكون لهذه المعادلة خمسة جذور وذلك حسب النظرية الأساسية لجبر كثيرات الحدود. وبفرض أن α هو الجذر المكرر أربع مرات ، وبفرض أن β هو الجذر الخامس.

وحيث أن α هو جذر مكرر أربع مرات فإنه يجب أن يكون جذرا للمعادلة: $p'''(x)=0$.

ومن المعادلة المعطاة نجد أن:

$$p'(x)=5x^4-8x^3-6x^2+16x-7$$

$$p''(x)=20x^3-24x^2-12x+16$$

$$p'''(x)=60x^2-48x-12$$

وبحل المعادلة $p'''(x)=60x^2-48x-12=0$ نجد أن:

$$p'''(x)=0\Rightarrow 5x^2-4x-1=0\Rightarrow (x-1)(5x+1)=0\Rightarrow x=1,-\frac{1}{5}$$

وباستخدام القسمة التحليلية أو بالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & -2 & -2 & 8 & -7 & 2 \\
1 & \downarrow & 1 & -1 & -3 & 5 & -2 \\
\hline
 & 1 & -1 & -3 & 5 & -2 & 0
\end{array}$$

$$p(1) = (1)^5 - 2(1)^4 - 2(1)^3 + 8(1)^2 - 7(1) + 2 = 1 - 2 - 2 + 8 - 7 + 2 = 0$$

وبالتالي نجد أن "1" يمثل جذر للمعادلة المعطاة.

$$p\left(-\frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5}\right)^5 - 2\left(-\frac{1}{5}\right)^4 - 2\left(-\frac{1}{5}\right)^3 + 8\left(-\frac{1}{5}\right)^2 - 7\left(-\frac{1}{5}\right) + 2 \neq 0$$

وبالتالي نجد أن "$-\frac{1}{5}$" لا يمثل جذر للمعادلة المعطاة.

وبالتالي يكون "1" هو الجذر المكرر أربع مرات للمعادلة المعطاة. وباستخدام القسمة التحليلية يمكن استنتاج الجذر الخامس كما يأتي:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & -2 & -2 & 8 & -7 & 2 \\
1 & \downarrow & 1 & -1 & -3 & 5 & -2 \\
\hline
 & 1 & -1 & -3 & 5 & -2 & 0 \\
1 & \downarrow & 1 & 0 & -3 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 0 & -3 & 2 & 0 & \\
1 & \downarrow & 1 & 1 & -2 & & \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & 0 & & \\
1 & \downarrow & 1 & 2 & & & \\
\hline
 & 1 & 2 & 0 & & &
\end{array}$$

وبالتالي نجد أن:

$$p(x) = (x-1)^4(x+2) = 0$$

وبالتالي فإن الجذر الخامس هو "-2".

نظرية الباقي: لتكن $p(x)$ كثيرة حدود من درجة $n \ge 1$ ، باقي قسمة $p(x)$ على كثيرة الحدود $g(x) = x - \alpha$ يساوي قيمة كثيرة الحدود $p(x)$ عندما $x = \alpha$ ، أي أن $r = p(a)$.

البرهان: عند قسمة كثيرة الحدود $p(x)$ على $g(x) = x - \alpha$ نجد أن:

$$p(x) = (x - \alpha)Q(x) + r,$$

ونظرا لأن تلك العلاقة صحيحة عندما $x = a$ فيكون:

$$p(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + r$$

ومنها نجد أن الباقي هو: $p(\alpha) = r$.

مثال (٢): أوجد باقي قسمة كثيرة الحدود $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 4$ ، علي $g(x) = x - 2$.

الحـــــــــــــل

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & \downarrow & 2 & 8 & 10 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 4 = (x-2)(x^2 + 4x + 5) + 6$$

حيث أن خارج القسمة هو:

$$q(x) = 2x^3 - 2x^2 - x - 3$$

والباقي هو $r = 6$. يمكن الحصول على هذا الناتج بتطبيق نظرية الباقي:

$$r = (2)^3 + 2(2)^2 - 3(2) - 4 = 6 .$$

مثال (٣): أوجد قيمة k التي تجعل باقي قسمة كثيرة الحدود

$p(x) = x^3 + (k-5)x^2 + (2k+1)x + 2$ ، تقبل القسمة علي $x + 3$ بدون باقي.

الحـــــــــــــل

من نظرية الباقي نعلم أن باقي قسمة كثيرة الحدود $p(x)$ علي $x-\alpha$ يساوي $p(\alpha)$. وحيث أن كثيرة الحدود المعطاة تقبل القسمة بدون باقي علي $x+3$ فإن

$$p(-3)=0 \Rightarrow p(x)=(-3)^3+(k-5)(-3)^2+(2k+1)(-3)+2=0$$

$$\Rightarrow 9k-6k-27+45-3+2=0 \Rightarrow 3k+17=0 \Rightarrow k=-\frac{17}{3}$$

نظرية العامل: لتكن $p(x)$ كثيرة حدود من درجة $n\geq 1$ ، فإنه إذا كان α جذر للمعادلة $p(x)=0$ فإن $x-\alpha$ يكون عامل لكثيرة الحدود $p(x)$.

وهذا يعني أن: $x-\alpha$ يكون عامل لكثيرة الحدود $p(x)$ إذا كانت $p(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ بدون باقي. والعكس صحيح أي انه إذا كان $x-\alpha$ عامل لكثيرة الحدود $p(x)$ فإن α يكون جذرا للمعادلة $p(x)=0$.

مثال (٤): تحقق من أن $x=-2$ ، $x=2$ جذور لكثيرة الحدود $p(x)=2x^4-x^3-6x^2+4x-8$.

الحــــــــــل

2	2	−1	−6	4	−8
		4	6	0	8
−2	2	3	0	4	0
		−4	2	−4	
	2	−1	2	0	

وبالتالي نجد أن:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^4-x^3-6x^2+4x-8 \\ &= (x-2)(x+2)(2x^2-x+2) \end{aligned}$$

الجذور التخيلية لكثيرات الحدود

نظريه: لتكن $p(x)$ كثيرة حدود من درجة $n \geq 1$ "ذات معاملات صحيحة"، فإنه إذا كان $\alpha + i\beta$ جذرا للمعادلة الجبرية $p(x) = 0$ فإن $\alpha - i\beta$ يكون جذرا للمعادلة أيضا.

الجذور الصماء لكثيرات الحدود

نظريه: لتكن $p(x)$ كثيرة حدود "ذات معاملات حقيقية" من درجة $n \geq 1$، فإنه إذا كان $\alpha + \sqrt{\beta}$ جذرا للمعادلة الجبرية $P(x) = 0$ فإن $\alpha - \sqrt{\beta}$ يكون جذرا للمعادلة أيضا، حيث أن α ، β أعداد حقيقية، β ليس مربعا كاملا.

العلاقة بين جذور معادلة جبرية ومعاملاتها

بفرض أن $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ هي جذور المعادلة الجبرية $p(x) = 0$ ذات المعاملات الصحيحة من درجه $n \geq 1$ حيث أن: $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$، فإن هذه المعادلة تكون الصورة:

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_n) = 0$$

وكحالة خاصة عندما $n = 2$ (عندما تكون $p(x)$ معادلة جبرية من الدرجة الثانية) فإن:

$$p(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0 \Rightarrow x^n + \frac{a_1}{a_0} x + \frac{a_2}{a_0} = 0$$

وبالتالي يكون

$$x^2 + \frac{a_1}{a_0} x + \frac{a_2}{a_0} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1 \alpha_2$$

وبالتالي نلاحظ أن:

- ✓ مجموع الجذرين يحقق:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{a_1}{a_0}$$

- ✓ حاصل ضرب الجذرين يحقق:

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{a_2}{a_0}$$

وعندما $n = 3$ (عندما تكون $p(x)$ معادلة جبرية من الدرجة الثالثة) فإن :

$$p(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \Rightarrow x^3 + \frac{a_1}{a_0}x^2 + \frac{a_2}{a_0}x + \frac{a_3}{a_0} = 0$$

وبالتالي يكون

$$x^3 + \frac{a_1}{a_0}x^2 + \frac{a_2}{a_0}x + \frac{a_3}{a_0} = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) = 0$$

أي أن :

$$x^3 + \frac{a_1}{a_0}x^2 + \frac{a_2}{a_0}x + \frac{a_3}{a_0} = x^3 - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0$$

وبالتالي نلاحظ أن :

- ✓ مجموع الجذور يحقق :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{a_1}{a_0}$$

- ✓ حاصل ضرب الجذور مثني مثني يحقق :

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{a_2}{a_0}$$

- ✓ حاصل ضرب الجذور يحقق :

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{a_3}{a_0}$$

وبوجه عام تكون :

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \Rightarrow x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \frac{a_2}{a_0}x^{n-2} + \ldots + \frac{a_n}{a_0} = 0$$

وبالتالي يكون

$$x^n+\frac{a_1}{a_0}x^{n-1}+\frac{a_2}{a_0}x^{n-2}+\ldots+\frac{a_n}{a_0}=0=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n)=0$$

$$=x^n-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)x^{n-1}$$
$$+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n)x^{n-2}$$
$$-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)x^{n-3}$$
$$+\ldots+(-1)^n(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n)=0.$$

وبذلك تكون العلاقة بين معاملات وجذور المعادلة $p(x)=0$ تكون بالصورة:

- ✓ بمقارنة معاملات x^{n-1} نجد أن مجموع الجذور يحقق:

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=-\frac{a_1}{a_0}$$

- ✓ بمقارنة معاملات x^{n-2} نجد أن حاصل ضرب الجذور مثني يحقق:

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{a_2}{a_0}$$

- ✓ بمقارنة معاملات x^{n-3} نجد أن حاصل ضرب الجذور ثلاثي يحقق:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n=-\frac{a_3}{a_0}$$

وهكذا...،

- ✓ بمقارنة الحد المطلق نجد أن حاصل ضرب الجذور يحقق:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n=(-1)^n\ \frac{a_n}{a_0}$$

وهى المعادلة المطلوبة.

مثال (٥): أوجد جذور المعادلة $x^3-3x^2-6x+8=0,$ إذا علمت أن جذورها تكون متتابعة عددية

الحـــــــــــــــل

بفرض أن الجذور هي $a-d$ ، a ، $a+d$ وبالتالي فإن

مجموع الجذور يحقق:

$$3a = \frac{-(-3)}{1} = 3 \Rightarrow a = 1$$

حاصل ضرب الجذور يحقق

$$a(a-d)(a+d) = -\frac{8}{1} = -8 \Rightarrow ((1-d)(1-d) = -8 \Rightarrow 1-d^2 = 8 \Rightarrow d = \pm 3$$

وبالتالي تكون الجذور هي -2 ، 1، 4.

مثال (٦): أوجد جذور المعادلة $x^3-7x^2+14x-8=0,$ إذا علمت أن جذورها تكون متتابعة هندسية.

الحــــــــــــل

بفرض أن الجذور هي $\frac{a}{r}$ ، a ، ar وبالتالي فإن

حاصل ضرب الجذور يحقق

$$ar(a)\left(\frac{a}{r}\right) = -(-8) \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

مجموع الجذور يحقق:

$$\frac{a}{r} + a + ar = -(-7) = 7 \Rightarrow \frac{2}{r} + 2 + 2r = 7 \Rightarrow$$
$$\frac{2}{r} + 2r = 5 \Rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0 \Rightarrow (2r-1)(r-2) = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}, 2$$

وبالتالي تكون الجذور هي 1، 2، 4.

مثال (٧): حل المعادلة $x^4-7x^3+19x^2-23x+10=0$ إذا علمت أن احد جذورها $2+i$.

الحــــــــــــل

نعلم أن الجذور المركبة للمعادلات تظهر مترافقة ومن ثم فإنه إذا كان $2+i$ جذراً للمعادلة المعطاة فإن $2-i$ يكون جذر أيضا لهذه المعادلة. وبفرض أن الجذران الآخران هما α ، β .

وبالتالي يكون لدينا :

✓ مجموع الجذور:

$$2+i+2-i+\alpha+\beta=7 \Rightarrow \alpha+\beta=3$$

✓ حاصل ضرب الجذور

$$(2+i)(2-i)\alpha\beta=10 \Rightarrow \alpha\beta=2$$

وبالتالي نجد أن:

$$\alpha+\frac{2}{\alpha}=2 \Rightarrow \alpha^2-3\alpha+2=0 \Rightarrow \alpha=1, \alpha=2$$

وبالتالي فإن الجذور الأربعة هي 1 ، 2 ، $2+i$ ، $2-i$.

مثال (٨): إذا كان $1+i$ جذرا للمعادلة $x^4-2x^3-2x^2+8x-8=0$ فأوجد باقي الجذور.

الحـــــــــــــل

يترك كتمرين للطالب

مثال (٩): أوجد جذور المعادلة $2x^3-5x^2-14x-3=0$ إذا علمنا أن $2-\sqrt{5}$ هو احد جذورها.

الحـــــــــــــل

يترك كتمرين للطالب مع مراعاة أتباع نفس خطوات مثال (٧).

الجذور الموجبة والجذور السالبة لكثيرات الحدود

قاعدة ديكارت للإشارات للجذور الموجبة: تنص قاعدة ديكارت للإشارات علي أنة "عدد الجذور الموجبة للمعادلة الجبرية $p(x)=0$ ذات المعاملات الصحيحة يكون إما مساويا لعدد تغيرات الإشارات في كثيرة الحدود $p(x)$ أو اقل من هذا العدد بعدد صحيح زوجي موجب"،

قاعدة ديكارت للإشارات للجذور السالبة: عدد الجذور السالبة للمعادلة الجبرية $p(x)=0$ ذات المعاملات الصحيحة يكون إما مساويا لعدد تغيرات الإشارة في كثيرة الحدود $p(-x)$ أو اقل من هذا العدد بعدد زوجي موجب.

مثال(١٠): ابحث الجذور الموجبة والجذور السالبة للمعادلة الجبرية $p(x)=0$ حيث أن $p(x)=x^3-4x^2+6x+9$.

الحــــــــــــل

واضح أنة في كثيرة الحدود $p(x)$ يوجد تغيران في الإشارة وطبقا لقاعدة الإشارات يكون للمعادلة $p(x)=0$ إما جذرين موجبين أو لا توجد جذور موجبه على الإطلاق. ولبحث الجذور السالبة للمعادلة الجبرية $p(x)=0$ نعتبر كثيرة الحدود $p(-x)$ حيث أن:

$$p(-x)=(-x)^3-4(-x)^2+6(-x)+9=-x^3-4x^2-6x+9$$

واضح أنة في كثيرة الحدود $p(-x)$ يوجد تغير واحد فقط في الإشارة وبالتالي يكون للمعادلة المعطاة جذر سالب واحد فقط. ومن ثم نستنتج في النهاية أن المعادلة المعطاة يكون لها جذران موجبان وجذر سالب واحد فقط أو يكون لها جذر سالب واحد فقط وجذرين تخيليان مترافقان.

لجذور الصحيحة لكثيرات الحدود:

نظريه: لتكن $p(x)$ كثيرة حدود "ذات معاملات صحيحة" من درجة $n \geq 1$ ، فإنه إذا وجد جذر صحيح للمعادلة الجبرية $p(x)=0$ فيجب أن يكون عامل من عوامل الحد المطلق.

مثال (١١): ابحث الجذور الصحيحة للمعادلة الجبرية $5x^3-9x+14=0$.

الحــــــــــــل

الإعداد الصحيحة التي يحتمل إن تكون جذور للمعادلة: $5x^3-9x+14=0$ هي $\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$ (عوامل الحد المطلق)، وعندما نجرب كل هذه الإعداد باستخدام القسمة التحليلية نجد انه لا يوجد جذر من هذه الإعداد وبذلك نستنتج أن المعادلة السابقة لا يوجد لها جذور صحيحة على الإطلاق.

فمثلا عند قسمة $5x^3-9x+14=0$ علي $x-1$ نجد أن باقي القسمة هو $r=28 \neq 0$ ،

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & 0 & 9 & 14 \\ 1 & \downarrow & 5 & 5 & 14 \\ \hline & 5 & 5 & 14 & 28 \end{array}$$

وبالتالي فإن 1 ليست جذرا لهذه المعادلة.

وعند قسمة $5x^3-9x+14=0$ علي $x+1$ نجد أن باقي القسمة هو $r=10 \neq 0$ ،

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & 0 & 9 & 14 \\ -1 & \downarrow & -5 & -5 & -4 \\ \hline & 5 & -5 & 4 & 10 \end{array}$$

وبالتالي فإن -1 ليست جذرا لهذه المعادلة.

وعند قسمة $5x^3-9x+14=0$ علي $x-2$ نجد أن باقي القسمة هو $r=58 \neq 0$ ،

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & 0 & 9 & 14 \\ 2 & \downarrow & 10 & 20 & 58 \end{array}$$

$$\begin{array}{|cccc} 5 & 10 & 29 & 72 \end{array}$$

وبالتالي فإن 2 ليست جذرا لهذه المعادلة .

وعند قسمة $5x^3-9x+14=0$ علي $x+2$ نجد أن باقي القسمة هو $r=-44\neq 0$ ،

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & 0 & 9 & 14 \\ -2 & \downarrow & -10 & 20 & -58 \\ \hline & 5 & -10 & 29 & -44 \end{array}$$

وبالتالي فإن -2 ليست جذرا لهذه المعادلة .وهكذا نجد أن $\pm 7,\pm 14$ ليست جذور لهذه المعادلة.

الجذور الكسريه

نظريه: إذا كان للمعادلة الجبرية $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=0$ ذات المعاملات الصحيحة جذر كسري على الصورة $\frac{\alpha}{\beta}$ حيث α ، β أعداد صحيحة، فإن α تكون عامل من عوامل الحد المطلق a_n ، β تكون عامل من عوامل a_0.

مثال(١٢): اوجد الجذور الكسرية للمعادلة $p(x)=2x^4+3x+1=0$. ومن ثم اوجد بقية الجذور.

الحـــــــــــــــل

الإعداد الكسريه التي من المحتمل أن تكون جذور للمعادلة: $p(x)=0$ هي ± 1 (عوامل الحد المطلق a_n) كبسط , $\pm 1,\pm 2$ (عوامل a_0) كمقام. أي الإعداد $\pm 1,\pm\frac{1}{2}$ وعندما نجرب هذه الإعداد باستخدام القسمة التحليلية فإننا نجد أن -1 هو الجذر الكسرى الوحيد للمعادلة المعطاة.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & \downarrow & 2 & 2 & 2 & 5 \\ \hline & 2 & 2 & 2 & 5 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & \downarrow & -2 & 2 & -2 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

مثال(١٣): أوجد الجذور الكسرية للمعادلة $p(x)=2x^3-7x^2+6x+5=0$. ومن ثم اوجد بقية الجذور.

الحــــــــــــل

الإعداد الكسريه التي من المحتمل أن تكون جذور للمعادلة : $p(x)=0$ هي $\pm1,\pm5$ (عوامل الحد المطلق a_n) كبسط , $\pm1,\pm2$ (عوامل a_0) كمقام. أي الإعداد $\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm5,\pm\frac{5}{2}$

وعندما نجرب هذه الإعداد باستخدام القسمة التحليلية فإننا نجد أن $-\frac{1}{2}$ هو الجذر الكسرى الوحيد للمعادلة المعطاة.

فمثلا عند قسمة $p(x)=2x^3-7x^2+6x+5=0$ علي $x-1$ نجد أن باقي القسمة هو $r=6\neq0$ ،

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -7 & 6 & 5 \\ 1 & \downarrow & 2 & -5 & 1 \\ \hline & 2 & -5 & 1 & 6 \end{array}$$

وبالتالي فإن 1 ليست جذرا لهذه المعادلة.

وعند قسمة $p(x)=2x^3-7x^2+6x+5=0$ علي $x+1$ نجد أن باقي القسمة هو $r=-10\neq0$ ،

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 6 & 5 \\ -1 & \downarrow & -2 & -9 & -15 \\ \hline & 2 & -9 & 15 & -10 \end{array}$$

وبالتالي فإن -1 ليست جذرا لهذه المعادلة.

عند قسمة $p(x)=2x^3-7x^2+6x+5=0$ علي $x-\frac{1}{2}$ نجد أن باقي القسمة هو $r=\frac{13}{2}\neq 0$،

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & -7 & 6 & 5 \\ & \downarrow & 1 & -3 & \frac{3}{2} \\ \hline & 2 & -6 & 3 & \frac{13}{2} \end{array}$$

وبالتالي فإن $\frac{1}{2}$ ليست جذرا لهذه المعادلة .

عند قسمة $p(x)=2x^3-7x^2+6x+5=0$ علي $x+\frac{1}{2}$ نجد أن باقي القسمة هو $r=0$،

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 2 & -7 & 6 & 5 \\ & \downarrow & -1 & 4 & -5 \\ \hline & 2 & -8 & 10 & 0 \end{array}$$

وبالتالي فإن $-\frac{1}{2}$ جذرا لهذه المعادلة ويكون لدينا:

$$2x^3-7x^2+6x+5=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-8x+10)$$

أي أن الجذرين الآخرين هما جذور المعادلة $2x^2-8x+10=0$ أي جذور المعادلة $x^2-4x+5=0$ وهما

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}=2\pm i$$

ويكون الجذر الكسري الوحيد هو $-\frac{1}{2}$.

مثال(١٤): ابحث الجذور الكسريه للمعادلة الجبرية $p(x)=2x^3+7x^2+2x-6=0$.

الحــــــــــــل

الإعداد الكسريه التي من المحتمل أن تكون جذور للمعادلة: $p(x)=0$ هي $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$ (عوامل الحد المطلق a_n) كبسط , $\pm1,\pm2$ (عوامل a_0) كمقام. أي الإعداد $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm1/2,\pm3/2$ وعندما نجرب هذه الإعداد باستخدام القسمة التحليلية فإننا نجد أن $-\frac{3}{2}$هو الجذر الكسرى الوحيد للمعادلة المعطاة. وقاعدة الإشارات تؤكد انه يوجد جذر موجب واحد فقط لهذه المعادلة، وبذلك يكون هذا الجذر عدد غير كسرى، وكذلك يكون للمعادلة المعطاة جذرا سالب أخر وهذا الجذر يجب أن يكون عدد غير كسرى. وبحل المعادلة الجبرية $2x^2+4x-4=0$ (الناتجة من خارج القسمة) نجد أن الجذران الآخران للمعادلة المعطاة هما $-1\pm\sqrt{3}$.

نتيجة: أي جذر كسرى للمعادلة الجبرية $p(x)=0$ حيث $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ كثيرة حدود ذات معاملات صحيحة بحيث أن $a_0=1$ يكون عدد صحيح من بين عوامل الحد المطلق a_n.

مثال(١٥): ابحث الجذور الكسريه للمعادلة $p(x)=x^3+12x^2-7x+4$.

الحــــــــــــل

الإعداد الكسريه التي يمكن أن تكون جذور المعادلة $p(x)=0$ هي $\pm1,\pm2,\pm4$ (عوامل الحد المطلق)، وعندما نجرب هذه الإعداد بواسطة القسمة التحليلية نجد انه لا يوجد بينهم أي جذر للمعادلة المعطاة، وبذلك نستنتج انه إذا وجدت جذور حقيقية للمعادلة المعطاة فإنها تكون إعداد غير كسريه. وبتطبيق قاعدة الإشارات على هذه المعادلة نجد انه يوجد لها جذر

حقيقي سالب، وأيضا يوجد لها إما جذران موجبان أو لا توجد جذور موجبه على الإطلاق وفى هذه الحالة يكون الجذران الآخران تخيليان مترافقان.

تمارين (٢)

١) ابحث الجذور الموجبة والسالبة لكثيرة الحدود $p(x)=x^3-2x^2-7x+2$. وإذا علم أن $2+\sqrt{3}$ جذرا للمعادلة $p(x)=0$ فاوجد باقي الجذور.

٢) أوجد الجذور الكسرية للمعادلة $2x^3-7x^2+6x+5=0$. ومن ثم اوجد باقي الجذور.

٣) أوجد الجذور الصحيحة للمعادلة $x^4-x^2-4x-4=0$. ومن ثم اوجد باقي الجذور.

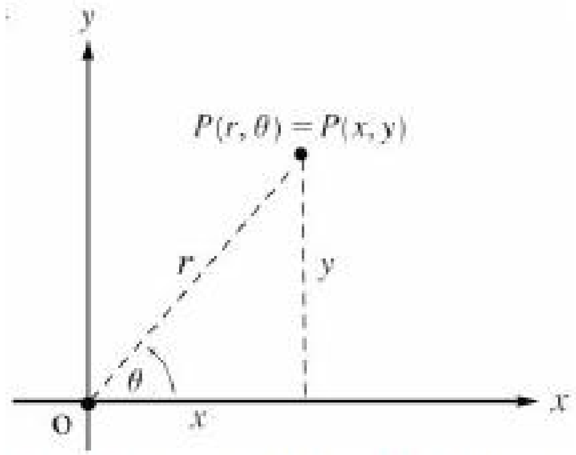
٤) ابحث الجذور الموجبة والجذور السالبة والجذور الصحيحة للمعادلة $2x^3-5x^2-14x-7=0$.

٥) أوجد جذور المعادلة $x^4+x^3-25x^2+53x+66=0$ إذا علم أن احد جذورها هو $1+2i$.

الباب الأول

نظم الإحداثيات في الفراغ ثلاثي الإبعاد

علمنا في الهندسة التحليلية المستوية (الهندسة التحليلية في الفراغ ثنائي الإبعاد) أن نظم الإحداثيات التي تحدد موضع نقطة ما في المستوى هي نظام الإحداثيات الكارتيزية (x, y) ونظام الإحداثيات القطبية (r, θ) ، كما بالشكل المقابل :

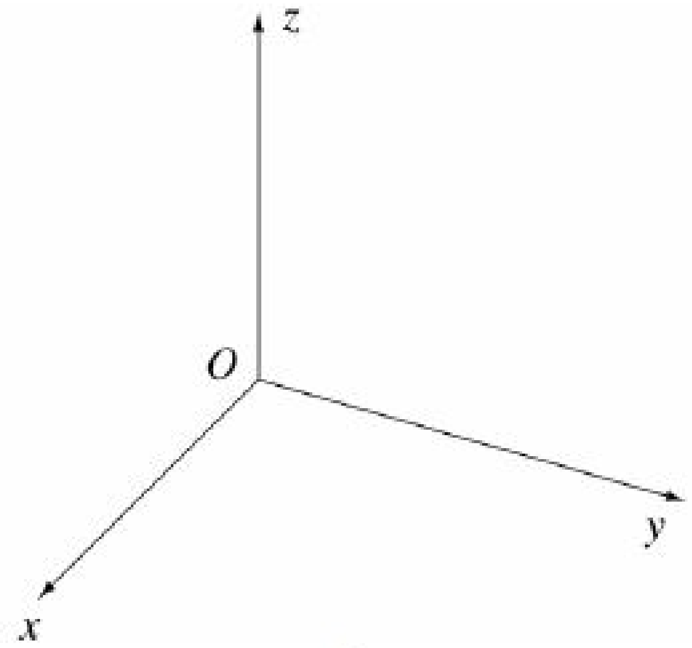


ولكن في الفراغ ثلاثي الإبعاد توجد ثلاث نظم مختلفة للإحداثيات لتحديد موضع أي نقطة.

أولا: الإحداثيات الكارتيزية في الفراغ ثلاثي الإبعاد

محاور الإحداثيات

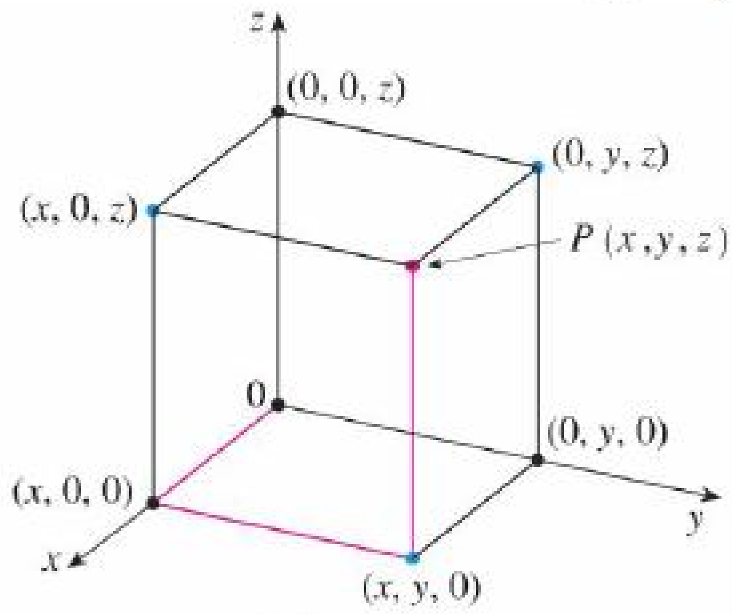
من نقطة o في الفراغ نرسم ثلاث مستقيمات ox ، oy ، oz متقاطعة عند النقطة o ومتعامدة مثنى مثنى، كما بالشكل المقابل:

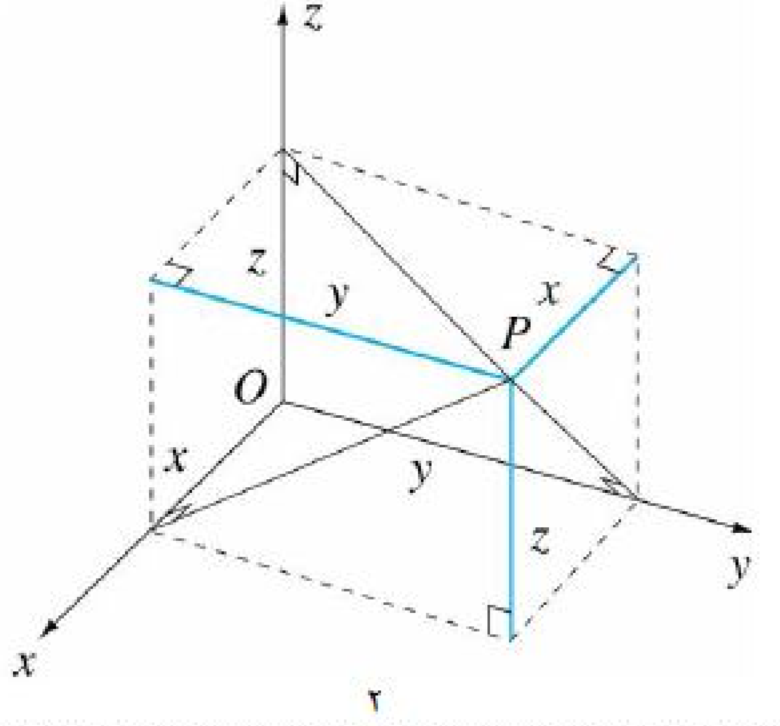


تُسمى المستقيمات ox ، oy ، oz محاور إحداثيات متعامدة أو محاور كارتيزية متعامدة ونقطة تقاطع محاور الإحداثيات o تسمي نقطة الأصل. وبالتالي الإبعاد ألمقاسه في الاتجاهات ox ، oy ، oz تعتر موجبة و الإبعاد ألمقاسه في الاتجاهات المضادة تعتبر سالبة.

مستويات الإحداثيات

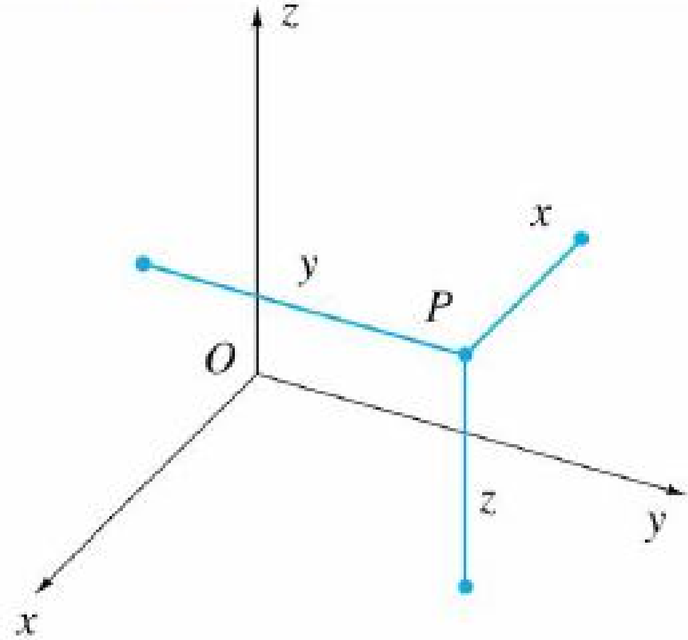
محاور الإحداثيات ox ، oy ، oz تحدد في الفراغ ثلاث الإبعاد ثلاث مستويات متعامدة مثني مثني تسمى بمستويات الإحداثيات. المستوي الذي يحتوي علي المحورين ox ، oy يسمي المستوي oxy ، المستوي الذي يحتوي علي المحورين ox ، oz يسمي المستوي oxz ، المستوي الذي يحتوي علي المحورين oy ، oz يسمي المستوي oyz .





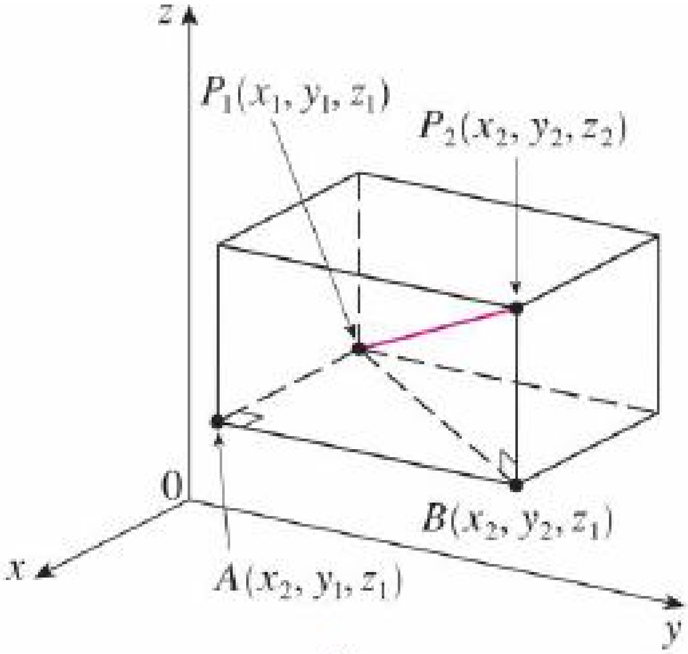
لتكن p نقطة في الفراغ ثلاثي الإبعاد وبفرض أن بعد هذه النقطة عن المستوي ozy هو x وبعدها عن المستوي oxz هو y وبعدها عن المستوي oxy هو z فإن الأعداد الحقيقية x ، y ، z تمثل إحداثيات النقطة p في الفراغ ثلاثي الإبعاد ويُرمز لها بالرمز $p(x,y,z)$.

أي ثلاث أعداد حقيقية x ، y ، z تحدد تحديدا تاما نقطة في الفراغ حيث أن x ، y ، z هي إبعاد هذه النقطة عن مستويات الإحداثيات ozy ، oxz ، oxy علي الترتيب، كما بالشكل المقابل :



المسافة بين نقطتين في الفراغ ثلاثي الإبعاد

لتكن $p_1(x_1,y_1,z_1)$ ، $p_2(x_2,y_2,z_2)$ نقطتين في الفراغ ثلاثي الإبعاد فإن المسافة بينهما تتعين من العلاقة $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ ، كما بالشكل المقابل :



يمكن التحقق من صحة هذه العلاقة كما يلي: من الشكل المقابل نلاحظ أن:

$$|P_1A| = |x_2 - x_1|, \quad |AB| = |y_2 - y_1|, \quad |BP_2| = |z_2 - z_1| \qquad (1)$$

وبتطبيق نظرية فيثاغورث علي المثلثين P_1AB ، P_1BP_2 حيث أن كلا منهما قائم الزاوية نجد أن:

$$|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2 + |BP_2|^2 \qquad (2)$$

$$\therefore |P_1B|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2 \qquad (3)$$

بالتعويض من (٣) في (٢) نجد أن:

$$|P_1P_2|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2 + |BP_2|^2 \qquad (4)$$

وبالتعويض من (١) في (٤) نحصل علي:

$$|P_1P_2|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2 + |BP_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

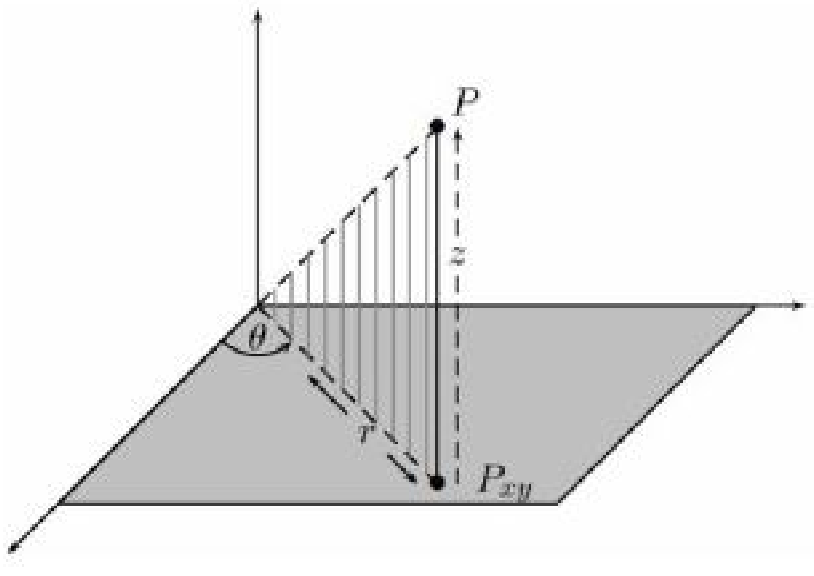
وبالتالي نجد أن:

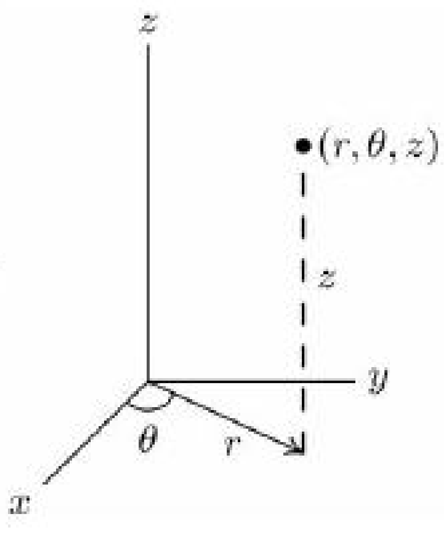
$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

تمرين: برهن أن إبعاد النقطة $p(x,y,z)$ عن محاور الإحداثيات ox ، oy ، oz تكون علي الترتيب هي: $\sqrt{y^2+z^2}$ ، $\sqrt{x^2+z^2}$ ، $\sqrt{x^2+y^2}$.

ثانيا: الإحداثيات الأسطوانية

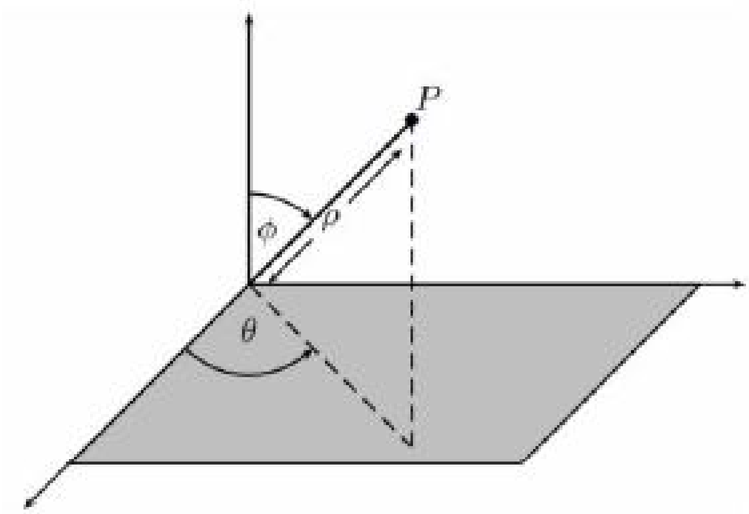
نظام ألإحداثيات الأسطوانية هو نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد. وتتعين إحداثيات النقطة في هذا النظام بواسطة الثلاثي المرتب $p(r,\theta,z)$ حيث أن r ، θ هي الإحداثيات القطبية لمسقط النقطة p على المستوى oxy ، z هو بعد النقطة P عن المستوى oxy ، كما بالشكل المقابل:

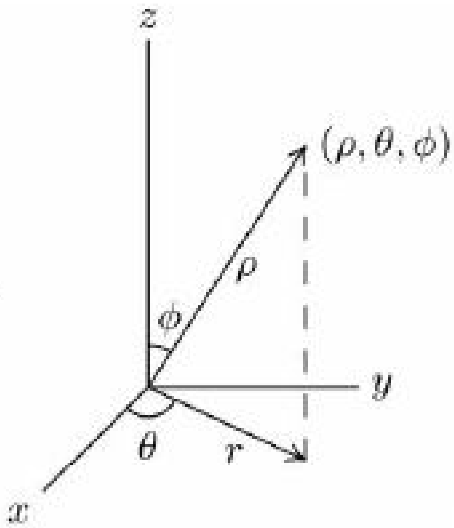




ثالثا: الإحداثيات الكريه أو الكروية

نظام الإحداثيات الكروية هو نظام إحداثي ثلاثي الإبعاد تتعين إحداثيات النقطة فيه بواسطة الثلاثي المرتب $p(\rho,\theta,\phi)$ حيث أن ρ هي المسافة بين نقطة الأصل والنقطة p ، θ لها نفس المعني الهندسي كما في الإحداثيات الاسطوانية (أي أن θ هي الزاوية بين الخط الواصل من نقطة الأصل ومسقط النقطة p علي المستوي oxy ، φ هي الزاوية بين الخط الواصل من نقطة الأصل والنقطة p ، كما بالشكل المقابل :





العلاقة بين نظم الإحداثيات في الفراغ ثلاثي الإبعاد

لتكن p نقطة ما في الفراغ فإن إحداثياتها الكارتيزية (x,y,z) وإحداثياتها الأسطوانية هي (r,θ,z) وإحداثياتها الكريه هي $p(\rho,\theta,\phi)$ ومن الأشكال الهندسية السابقة يتضح أن:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \qquad (1)$$

$$r = \rho\sin\phi,\ z = \rho\cos\phi \qquad (2)$$

العلاقة (١) تحول الإحداثيات الأسطوانية إلى الإحداثيات الكارتيزية.

والعلاقة (٢) تحول الإحداثيات الكريه إلى إحداثيات الاسطوانية .

ومن العلاقة (١) نستنتج أن:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad (3)$$

العلاقة (٣) تحول الإحداثيات الكارتيزية إلى الإحداثيات الاسطوانية.

ومن العلاقة (٢) نستنتج أن:

$$\rho=\sqrt{r^2+z^2}\ ,\ \varphi=\tan^{-1}\left(\frac{r}{z}\right) \qquad (4)$$

العلاقة (٤) تحول الإحداثيات الأسطوانية إلى الإحداثيات الكريه.

وبالتعويض من (٢) في (١) نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} x&=\rho\sin\phi\cos\theta \\ y&=\rho\sin\phi\sin\theta \\ z&=\rho\cos\phi \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

العلاقة (٥) تحول الإحداثيات الكريه إلى الإحداثيات الكارتيزيه.

وبالتعويض من (٣) في (٤) نحصل على:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x},\quad \phi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \qquad (6)$$

العلاقة (٦) تحول الإحداثيات الكارتيزيه إلى الإحداثيات الكريه.

حاصل الضرب القياسي و ألاتجاهي وحاصل الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات

حاصل الضرب القياسي:

حاصل الضرب القياسي للمتجهين $\vec{a},\vec{b}$ يعرف بأنه حاصل ضرب أطوال هذين المتجهين في جيب تمام الزاوية θ بينها، أي أن:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|a||b|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|}$$

خواص حاصل الضرب القياسي

$$(1)\ \vec{a}\cdot\vec{a}=a^2 \qquad or \quad \vec{a}^2=a^2$$

$$(2)\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \qquad if \quad \vec{a}=0\ \ or\ \ \vec{b}=0 \quad or \quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

$$(3)\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$(4)\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

حيث α كمية ثابتة.

ملحوظة: حاصل الضرب القياسي لمتجهات الوحدة $\vec{k}$, $\vec{j}$, $\vec{i}$ في اتجاه محاور الإحداثيات هو:

$$(i)\ \vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1,\ \ (ii)\ \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}.\vec{k}=0$$

الزاوية بين متجهين

إذا كان $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ ، $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ والزاوية بينهما θ فإن:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\,,\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos\theta$$

حيث:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}\,,\quad \|\vec{b}\| = \sqrt{b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + b_3^{\,2}}$$

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}\cdot\sqrt{b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + b_3^{\,2}}}$$

حاصل الضرب ألاتجاهي:

حاصل الضرب ألاتجاهي $\vec{a}\times\vec{b}$ للمتجهين $\vec{a},\vec{b}$ يعرف كما يلي:

$$\vec{a}\times\vec{b} = |a||b|\sin\theta\cdot\vec{n}$$

حيث θ هي الزاوية بين المتجهين $\vec{a},\vec{b}$ ، $\vec{n}$ متجه الوحدة في الاتجاه العمودي علي المستوي الذي يحتوي المتجهين $\vec{a},\vec{b}$ ويكون طول المتجه $|\vec{a}\times\vec{b}|$ يعطي من العلاقة: $|\vec{a}\times\vec{b}| = |a||b|\sin\theta$ والمعني الهندسي لطول حاصل الضرب ألاتجاهي نحصل عليه من حقيقة أن المقدار $|a||b|\sin\theta$ يعبر عن مساحة متوازي الأضلاع المنشأ علي المتجهين $\vec{a},\vec{b}$.

خواص حاصل الضرب ألاتجاهي

$$(1)\,\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$$

$$(2)\,\vec{a}\times\vec{b} = 0 \qquad if\ \ \vec{a} = 0 \quad or \quad \vec{b} = 0 \quad or \quad \vec{a}\,//\,\vec{b}$$

$$(3)\,(\alpha\,\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\alpha\,\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\times\vec{b})$$

حيث α كمية ثابتة.

$$(4)\,\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$$

ويكون حاصل الضرب ألاتجاهي لمتجهات الوحدة $\vec{k}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{i}$ هو:

$$(i)\,\vec{i}\times\vec{i} = \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$$

$$(ii)\,\vec{i}\times\vec{j} = -\vec{j}\times\vec{i} = \vec{k}\,,\ \vec{j}\times\vec{k} = -\vec{k}\times\vec{j} = \vec{i}\,,\ \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}\times\vec{k} = \vec{j}$$

حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين بدلالة مركبات المتجهين:

$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \ \ ،\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

يمكن كتابة الصورة :
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

حاصل الضرب القياسي الثلاثي: حاصل الضرب الثلاثي للمتجهات $\vec{a}, b, \vec{c}$ هو حاصل الضرب القياسي للمتجهين $\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b}$ ، أي أن $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ والقيمة المطلقة لحاصل الضرب القياسي الثلاثي تساوي حجم متوازي المستطيلات (السطوح) المكون بهذه المتجهات الثلاثة٠

خواص حاصل الضرب القياسي الثلاثي:

١) حاصل الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات يساوي صفرا إذا كان:

- علي الأقل متجه من المتجهات الثلاثة يساوي صفرا٠
- متجهين من هذه المتجهات يكونا متوازيين٠
- المتجهات الثلاثة توازي مستوي واحد٠

٢) حاصل الضرب القياسي الثلاثي لا يتغير إذا غيرنا فيه مكان علامة حاصل الضرب ألاتجاهي ($\times$) وعلامة الضرب القياسي ($\cdot$) كل منهما مكان الآخر أي أن:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

يمكن وباستخدام هذه الخاصية لحاصل الضرب المختلط للمتجهات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ يمكن كتابة حاصل الضرب المختلط في الصورة $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$.

٣) حاصل الضرب القياسي الثلاثي لا يتغير إذا كتبنا المتجهات في ترتيب دوري أي أن:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]=[\vec{c},\vec{a},\vec{b}]$$

٤) إذا بدلنا أي متجهين في حاصل الضرب القياسي الثلاثي كل منهما مكان الآخر فإن الإشارة فقط هي التي تتغير ، أي أن:

$$[\vec{b},\vec{a},\vec{c}]=-[\vec{a},\vec{b},\vec{c}],\ [\vec{c},\vec{b},\vec{a}]=-[\vec{a},\vec{b},\vec{c}],\ [\vec{a},\vec{c},\vec{b}]=-[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$$

٥) حاصل الضرب القياسي الثلاثي بدلالة مركبات المتجهات :

$$\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}\ ،\ \vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}\ ،\ \vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$

يمكن كتابته علي الصورة : $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

ومن خواص حاصل الضرب القياسي لثلاث متجهات ينتج الآتي :

١) الشرط الضروري والكافي لكي تقع المتجهات الثلاثة $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ في مستوي واحد هو أن يكون: $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]=0$.

٢) جسم متوازي السطوح الذي يبني علي المتجهات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ هو $v_1=\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$.

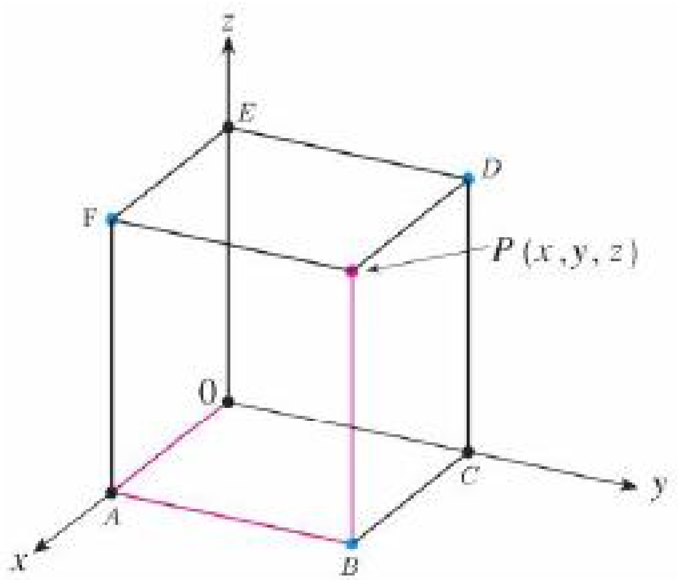
٣) حجم الهرم الذي يتكون من هذه المتجهات هو $v_2=\frac{1}{6}v_1=\frac{1}{6}\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$.

حاصل الضرب ألاتجاهي الثلاثي: حاصل الضرب ألاتجاهي لثلاث متجهات $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ يرمز له بالرمز $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ وهو متجه عمودي علي المتجهين $\vec{a}$ ، $(\vec{b}\times\vec{c})$ وهو يحقق العلاقة $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$.

تمارين (١)

١) لتكن $p(x,y,z)$ نقطة في الفراغ ثلاثي الإبعاد. استنتج (موضحًا إجابتك بالرسم):
مساقط النقطة p علي مستويات الإحداثيات، مساقط النقطة p علي محاور الإحداثيات، موضحا علي الرسم المستويات الموازية لمستويات الإحداثيات.

٢) لتكن $p(x,y,z)$ نقطة في الفراغ ثلاثي الإبعاد كما بالشكل المقابل: أوجد إحداثيات النقاط A ، B ، C ، D ، E ، F.



٣) لتكن $p(x,y,z)$ نقطة في الفراغ ثلاثي الإبعاد. استنتج **(موضحًا إجابتك بالرسم):**
أ) الإحداثيات الاسطوانية للنقطة p ، ب) الإحداثيات الكروية للنقطة p .

٤) أثبت أن المتجهين الآتيين متعامدين: $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+7\vec{k},\ \vec{b}=2\vec{i}-5\vec{j}+2\vec{k}$.

٥) أوجد الزاوية بين المتجهين $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k},\ \vec{b}=6\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$.

٦) أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$.

٧) أثبت أن المتجهات $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k},\ \vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-k,\ \vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ تقع في مستوي واحد.

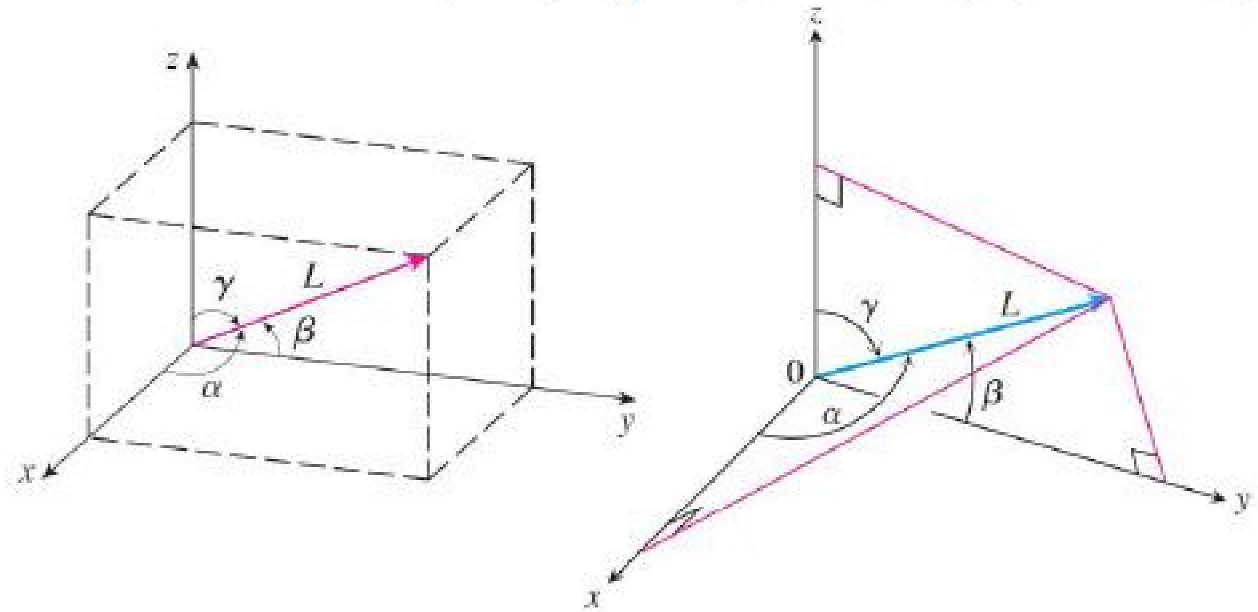
٨) عين الزاوية بين المتجهين $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k},\quad \vec{b}=4\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$.

الباب الثاني

المستوي والمستقيم في الفراغ ثلاثي الإبعاد

أولاً: زوايا الاتجاه لخط مستقيم في الفراغ ثلاثي الإبعاد

تعريف: الزوايا التي يصنعها خط مستقيم L في الفراغ مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات تسمي زوايا الاتجاه وجيوب تمام هذه الزوايا تسمي جيوب تمام الاتجاه.



أي أنة إذا كانت α ، β ، γ هي الزوايا التي يصنعها الخط المستقيم L مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات ox ، oy ، oz ، علي الترتيب، فإن $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ تسمي بجيوب تمام اتجاه الخط المستقيم ويرمز لها عادة بالرم ز (l,m,n) علي الترتيب أي أن $(l,m,n) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. وبالتالي تكون جيوب تمام الاتجاه لمحاور الإحداثيات ox ، oy ، oz هي $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ ، $(0,0,1)$ علي الترتيب.

العلاقة بين جيوب تمام الاتجاه لخط مستقيم في الفراغ ثلاثي الإبعاد

لتكن (l,m,n) هي جيوب تمام الاتجاه لخط مستقيم في الفراغ فإن $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. وهذا يعني أن المتجه الذي مركباته (l,m,n) هو متجه الوحدة الذي يصنع زوايا (α,β,γ) مع محاور الإحداثيات .وبالتالي إذا كان $\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ فإن:

$$l=\cos\alpha=\frac{\vec{A}\vec{i}}{\|\vec{A}\|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$m=\cos\beta=\frac{\vec{A}.j}{\|\vec{A}\|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$n=\cos\gamma=\frac{\vec{A}k}{\|\vec{A}\|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ونلاحظ أن جيوب تمام الاتجاه في هذه الحالة هي مركبات متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\vec{A}$. أي أن جيوب تمام الاتجاه لمتجه هي مركبات متجه الوحدة في اتجاه هذا المتجه.

مثال(١): أوجد جيوب تمام المتجه $\vec{a}=(1,-1,1)$.

الحـــــــــــــل

متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\vec{a}=(1,-1,1)$ هو

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=\frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

وبالتالي فإن جيوب تمام هذا المتجه هي:

$$(l,m,n)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

نسب اتجاه مستقيم في الفراغ ثلاثي الإبعاد

الأعداد a,b,c التي تتناسب مع جيوب تمام الاتجاه لخط مستقيم في الفراغ تسمي بنسب الاتجاه لهذا المستقيم. أي انه إذا كانت (a,b,c) هي نسب اتجاه خط مستقيم فإن : $\frac{l}{a}=\frac{m}{b}=\frac{n}{c}=s$ حيث أن (l,m,n) هي جيوب تمام الاتجاه . ولحساب s نجد أن:

$$l^2+m^2+n^2=1\Rightarrow s^2(a^2+b^2+c^2)=1$$

ومنها نحصل علي:

$$s=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

وبالتالي نجد أن:

$$l=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ m=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad n=\pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ويمكن التعبير عن ذلك بالصورة الاتجاهية : $(a,b,c)=s(l,m,n)$.

مثال(٣): ليكن L خط مستقيم نسب اتجاهه هي $(1,2,-2)$. أوجد جيوب تمام الاتجاه لهذا المستقيم .

الحـــــــــــــل

جيوب تمام الاتجاه للخط المستقيم L الذي نسب اتجاهه $(1,2,-2)$ هي :

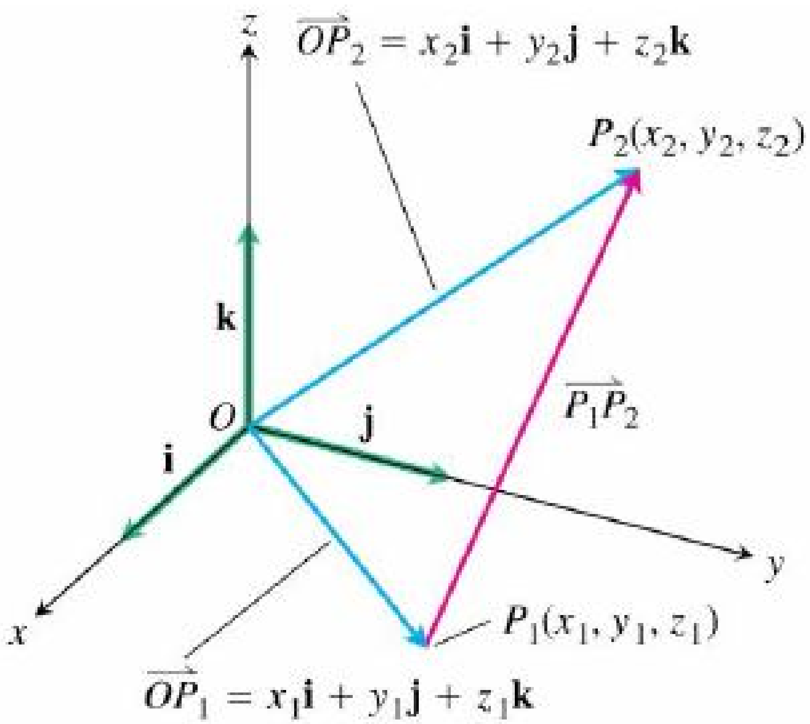
$$l=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{1}{3},\ \ m=\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{2}{3},\ \ n=\frac{-2}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=-\frac{2}{3}$$

نسب اتجاه خط مستقيم مار بنقطتين في الفراغ ثلاثي الإبعاد

لتكن $p_1(x_1,y_1,z_1)$ ، $p_2(x_2,y_2,z_2)$ نقطتين في الفراغ ثلاثي الإبعاد فإن نسب اتجاه الخط المستقيم p_1p_2 هي :

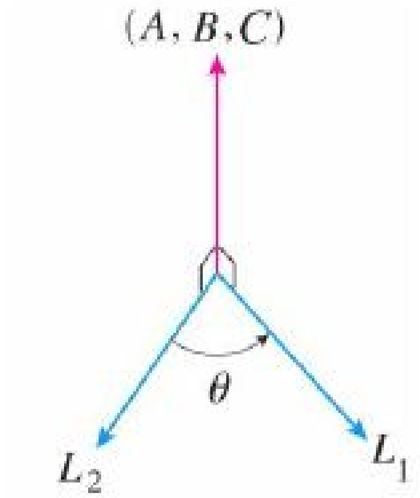
$$P_2-P_1=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)\text{ ،}$$

كما بالشكل المقابل :



نسب اتجاه العمودي علي خطين مستقيمين في الفراغ ثلاثي الإبعاد

ليكن L_1, L_2 مستقيمين في الفراغ ثلاثي الإبعاد بحيث أن نسب اتجاه المستقيم L_1 هي (a_1,b_1,c_1) ونسب اتجاه المستقيم L_2هي (a_2,b_2,c_2) ، وبفرض أن المستقيم العمودي عليهما هو L و نسب اتجاهه هي (A,B,C) فإن:



$$(A,B,C)=(a_1,b_1,c_1)\times(a_2,b_2,c_2)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

أي أن:

$$A=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\quad B=-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

مثال(١): أوجد نسب اتجاه الخط المستقيم العمودي علي المستقيمين PQ ، PR حيث أن: $P=(1,3,2)$ ، $Q=(3,-1,6)$ ، $R=(5,2,0)$.

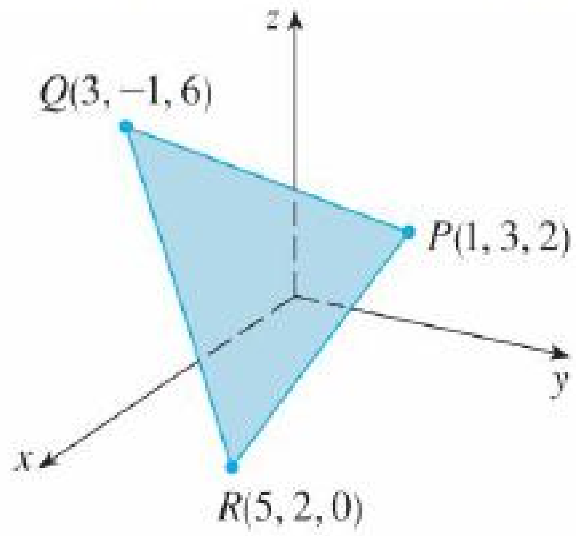
الحـــــــــــــــل

نسب اتجاه المستقيم PQ هي:

$$(a_1,b_1,c_1)=Q-P=(2,-4,4)\text{ ،}$$

نسب اتجاه المستقيم PR هي:

$$(a_2, b_2, c_2) = R - P = (4, -1, -2)$$



وبالتالي نجد أن نسب اتجاه العمودي علي المستقيمين PQ ، PR تعطي بالصورة :

$$(A, B, C) = (a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (12, 20, 14)$$

ثانياً: معادلة المستوي في الفراغ ثلاثي الإبعاد

تعريف: المستوى هو السطح الذي إذا أُخذت عليه نقطتان p_1 ، p_2 فإن جميع النقاط الواقعة علي المستقيم p_1p_2 تكون واقعة على هذا السطح أيضاً.

معادله المستوي المار بنقطة و يحتوي(أو يوازي) متجهين:

معادلة المستوي المار بالنقطة $p_0(x_0, y_0, z_0)$ ويحتوي أو يوازي الاتجاهين $\vec{a} = (a_1, b_1, c_1)$ ، $\vec{b} = (a_2, b_2, c_2)$ تتعين من شرط وقوع المتجهات $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\overrightarrow{p_0 p}$ في مستوي واحد حيث أن $p(x, y, z)$ هي نقطة اختيارية في المستوي، أي أن:

$$\overrightarrow{p_0 p} . (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

وبالفك نجد أن:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}(x-x_0) - \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}(y-y_0) + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}(z-z_0) = 0$$

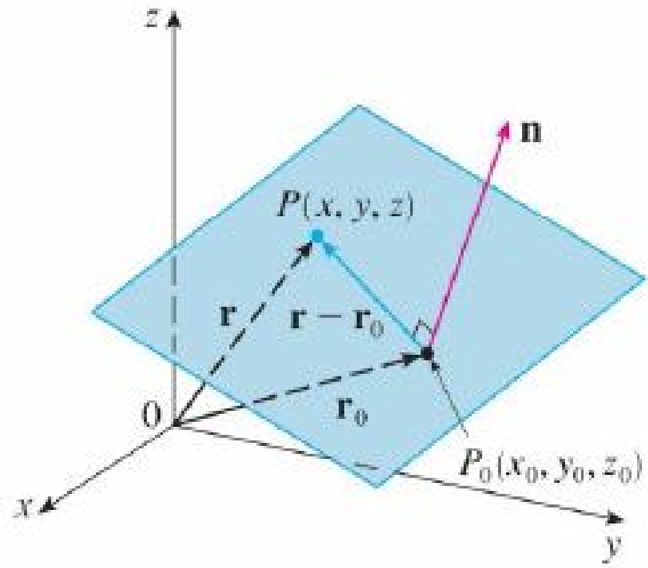
وهذه المعادلة يمكن كتابتها علي الصورة :

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

حيث أن :

$$A = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

هي نسب اتجاه العمودي علي المستوي كما بالشكل المقابل:



وهذا يعني أن معادلة المستوى المار بالنقطة (x_0, y_0, z_0) ونسب اتجاه العمودي عليه هي (a,b,c) تكون على الصورة :

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها بالصورة :

$$ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0$$

أي أن معادلة المستوي تكون بالصورة:

$$ax+by+cz+d=0$$

حيث أن $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$.

ملحوظة: معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة $p_0(x_0,y_0,z_0)$ ونسب اتجاه العمودي عليه هي (a,b,c) تكون على الصورة :

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

مثال(٢): أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $(1,2,-1)$ و يحتوي الاتجاهين $(1,7,0)$ ، $(4,3,2)$.

الحـــــــــــل

معادلة المستوي المار بالنقطة $(1,2,-1)$ ويوازي (أو يحتوي) الاتجاهين $(1,7,0)$ ، $(4,3,2)$ تكون علي الصورة :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 14x-2y-25z-35=0$$

معادلة المستوي المار بثلاث نقاط

إذا كان المستوي يمر بالنقاط $p_1(x_1,y_1,z_1)$ ، $p_2(x_2,y_2,z_2)$ ، $p_3(x_3,y_3,z_3)$ وباعتبار $p(x,y,z)$ نقطة اختيارية في المستوي فإن المتجهات $\overrightarrow{p_1p}$ ، $\overrightarrow{p_1p_2}$ ، $\overrightarrow{p_1p_3}$ تقع في مستوي واحد وشرط ذلك هو أن يكون:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

مثال(١): أوجد معادلة المستوي المار بالنقاط $p_1(1,1,1)$ ، $p_2(6,3,2)$ ، $p_3(2,5,1)$.

الحـــــــــــل

معادله المستوي المار بثلاث نقاط $p_1(x_1, y_1, z_1)$ ، $p_2(x_2, y_2, z_2)$ ، $p_3(x_3, y_3, z_3)$ تكون بالصورة :

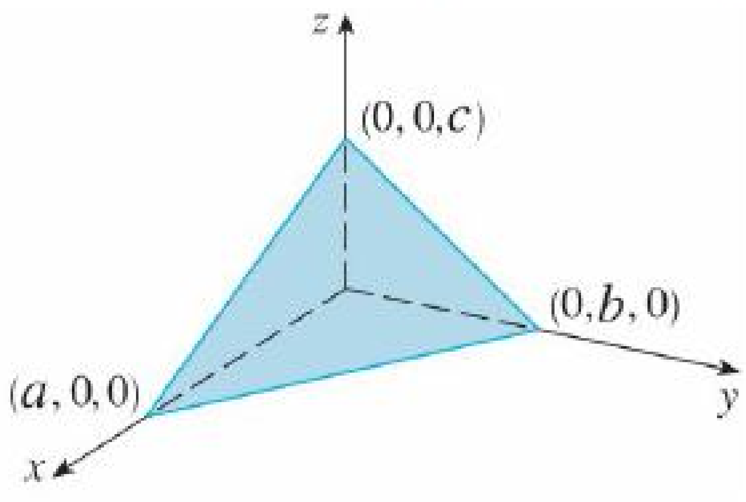
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

وبتطبيق ذلك علي المثال السابق نجد أن معادلة المستوي المار بالنقاط المعطاة تكون بالصورة :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x - y - 18z + 15 = 0$$

معادلة المستوي بدلالة الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات

نفرض أن الأجزاء المقطوعة من المحاور هي a,b,c أي أن المستوى يمر بالنقاط $p_1(a,0,0)$ ، $p_2(0,b,0)$ ، $p_3(0,0,c)$ ، كما بالشكل المقابل :



وبذلك تكون معادلة المستوى هي :

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0.$$

أي أن :

$$bcx + acy + abz = abc$$

فإذا كانت $abc \neq 0$ فإن المعادلة السابقة تصبح على الصورة:

$$.\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

مثال (١): أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $p(5,4,3)$ ويقطع أجزاء متساوية من محاور الإحداثيات.

الحـــــــــــــــل

معادله المستوي الذي يقطع من محاور الإحداثيات أجزاء أطوالها a,b,c من محاور الإحداثيات هي:

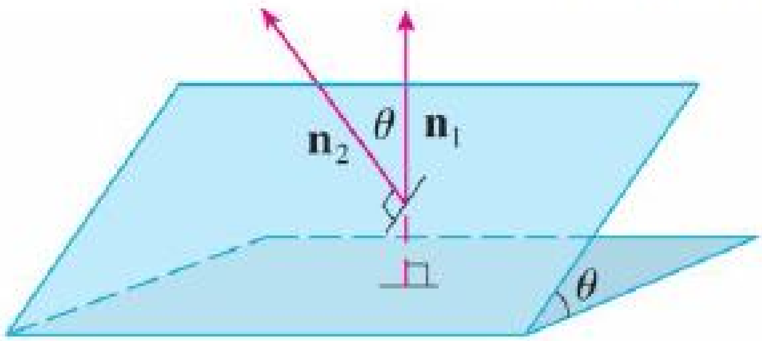
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

وحيث أن المستوي المطلوب يقطع أجزاء متساوية من محاور الإحداثيات أي أن $a=b=c$ وتصبح معادلته علي الصورة:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1 \Rightarrow x+y+z=a$$

وحيث أن هذا المستوي يمر بالنقطة $p(5,4,3)$ فإن إحداثيات هذه النقطة يجب أن تحقق معادلته، أي أن: $a=5+4+3=12$ وبذلك تصبح معادله المستوي علي الصورة: $x+y+z=12$.

الزاوية بين مستويين في الفراغ ثلاثي الإبعاد



تعريف: تعرف الزاوية بين مستويين علي أنها هي الزاوية بين العمودان عليهما، أي أن: الزاوية بين المستويين $\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ، $\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ تتعين من العلاقة:

$$\cos\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2+{c_1}^2}\sqrt{{a_2}^2+{b_2}^2+{c_2}^2}}$$

وبالتالي يكون :

- شرط توازي المستويين π_1 ، π_2 هو: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\lambda\neq 0$ حيث أن λ مقدار ثابت.
- شرط تعامد المستويين π_1 ، π_2 هو أن يكون: $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

مثال(٣): أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $(4,-3,2)$ عموديا علي المستويين $x+2y-z=0$ ، $2x-3y+4z-5=0$.

الحـــــــــــــــل

المستوي المطلوب يمر بالنقطة $(4,-3,2)$ وبالتالي فإن معادلته يمكن كتابتها بالصورة :

$$(x-4,y+3,z-2).(a,b,c)=0\Rightarrow a(x-4)+b(y+3)+c(z-2)=0$$

حيث أن (a,b,c) هي نسب اتجاه العمودي علي المستوي المطلوب. وحيث أن المستوي المطلوب عمودي علي المستويين $x+2y-z=0$ ، $2x-3y+4z-5=0$ فيكون العمودي علي المستوي المطلوب والذي نسب اتجاهه هي (a,b,c) عموديًا علي كلاً من هذين المستويين، وبالتالي فإن العمودي علي المستوي المطلوب يكون عموديًا علي المستقيمين الذي نسب اتجاهما هما $(1,2,-1)$ ، $(2,-3,4)$ وبالتالي يكون :

$$(a,b,c)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

وبالتالي فإن معادله المستوي المطلوب تكون بالصورة:

$$(x-4,y+3,z-2).(a,b,c)=0\Rightarrow \begin{vmatrix} x-4 & y+3 & z-2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}=0\Rightarrow 5x-6y-7z-24=0$$

ملحوظة (١): من المثال السابق نلاحظ أن معادلة المستوي المار بالنقطة (x_0, y_0, z_0) وعموديًا علي المستويين $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ، $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ تكون بالصورة :

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

و هي نفس معادله المستوي المار بنقطه يحتوي (أو يوازي) اتجاهين معلومين وهذا يعني انه في الحالة السابقة يكون المستوي يحتوي علي (أو يوازي) الاتجاهين (a_1, b_1, c_1) ، (a_2, b_2, c_2).

مثال (٣): أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $p_0(2,3,-1)$ و ويوازي المستوي $5x - 3y + 2z = 0$.

الحــــــــــــــــل

معادله المستوي المار بالنقطة $p_0(2,3,-1)$ يمكن كتابتها بالصورة : $a(x-2) + b(y-3) + c(z+1) = 0$
حيث أن (a,b,c)هي نسب اتجاه العمودي علي المستوي وحيث أن المستوي المطلوب يوازي المستوي $5x - 3y + 2z = 0$ فيكون :

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{-3} = \frac{c}{2} = \lambda,\ \lambda \neq 0$$

وبالتالي نجد أن : $a = 5\lambda, b = -3\lambda, c = 2\lambda$ وبالتالي تكون معادله المستوي المطلوب بالصورة :

$$5\lambda(x-2) - 3\lambda(y-3) + 2\lambda(z+1) = 0$$
$$\Rightarrow 5\lambda(x-2) - 3\lambda(y-3) + 2\lambda(z+1) = 0$$

أي أن :

$$5x - 3y + 2z + 1 = 0$$

هي معادله المستوي المطلوب وهي تختلف عن معادله المستوي الموازي له في الحد المطلق فقط وهذا يعني أن المستويين المتوازيان يكونان علي الصورة :

$$ax + by + cz + d_1 = 0 \ ،\ ax + by + cz + d_2 = 0$$

أي أن المستويان المتوازيان هما مستويان لهما نفس نسب اتجاه العمودي (أي العمودي علي كلاً منهما يوازي العمودي علي الآخر).

معادله المستوي المار بخط تقاطع مستويين

إذا تقاطع المستويين $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ، $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ فإن تقاطعهما يكون في خط مستقيم ويسمي هذا الخط بخط تقاطع المستويين. وخط تقاطع مستويين يمكن أن يمر به عائلة من المستويات. والصورة العامة لمعادلة المستوي المار بخط تقاطع مستويين تكون علي الصورة :

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$$

حيث أن λ مقدار ثابت .ولتعين قيمه λ يجب أن يتوافر شرط إضافي.

مثال(١): أوجد معادله المستوي المار بخط تقاطع المستويين $\pi_1: 2x-5y+z-3=0$ ، $\pi_2: y=0$ وعمودي علي المستوي الأول.

الحـــــــــــــــل

معادله المستوي المار بخط تقاطع المستويين π_1 ، π_2 تكون علي الصورة:

$$\pi_1+\lambda\pi_2=0 \Rightarrow 2x-5y+z-3+\lambda y=0$$

أي أن: $2x+(\lambda-5)y+z-3=0$ وبالتالي تكون نسب اتجاه العمودي علي المستوي المطلوب هي: $(2,\lambda-5,1)$ ، وحيث أن المستوي المطلوب عمودي علي المستوي π_1 والذي نسب اتجاه العمودي عليه هي $(2,-5,1)$ ومن شرط التعامد نجد أن :

$$(2,\lambda-5,1).(2,-5,1)=0 \Rightarrow 4-5(\lambda-5)+1=0 \Rightarrow \lambda=6$$

وبالتالي تكون معادله المستوي المطلوب هي: $2x+y+z-3=0$.

مثال(٢): أوجد معادله المستوي π المار بخط تقاطع المستويين $\pi_1: x-2y+z-4=0$ ، $\pi_2: x+6y-5z=0$ والذي:

➢ يمر بالنقطة $P_0(-1,1,2)$.

- عمودي علي المستوي $2x-y-z+4=0$.

الحــــــــــــل

معادله المستوي المار بخط تقاطع المستويين π_1 ، π_2 تكون علي الصورة:

$$\pi:\pi_1+\lambda\pi_2=0\Rightarrow x-2y+z-4+\lambda(x+6y-5z)=0$$

أي أن:

$$(\lambda+1)x+(6\lambda-2)y+(1-5\lambda)z-4=0$$

وهذا يعني أن المستوي المطلوب تكون نسب اتجاه العمودي عليه هي: $(\lambda+1,6\lambda-2,1-5\lambda)$.

إذا كان المستوي π مارا بالنقطة $P_0(-1,1,2)$ فهي تحقق معادله أي أن:

$$-(\lambda+1)+(6\lambda-2)+2(1-5\lambda)-4=0\Rightarrow -5\lambda-5=0\Rightarrow \lambda=-1$$

وتصبح معادله المستوي π في هذه الحالة بالصورة: $8y-6z+4=0$.

إذا كان المستوي π عمودي علي المستوي $2x-y-z+4=0$ فمن شرط التعامد نجد أن :

$$2(\lambda+1)-(6\lambda-2)-(1-5\lambda)=0\Rightarrow \lambda+3=0\Rightarrow \lambda=-3$$

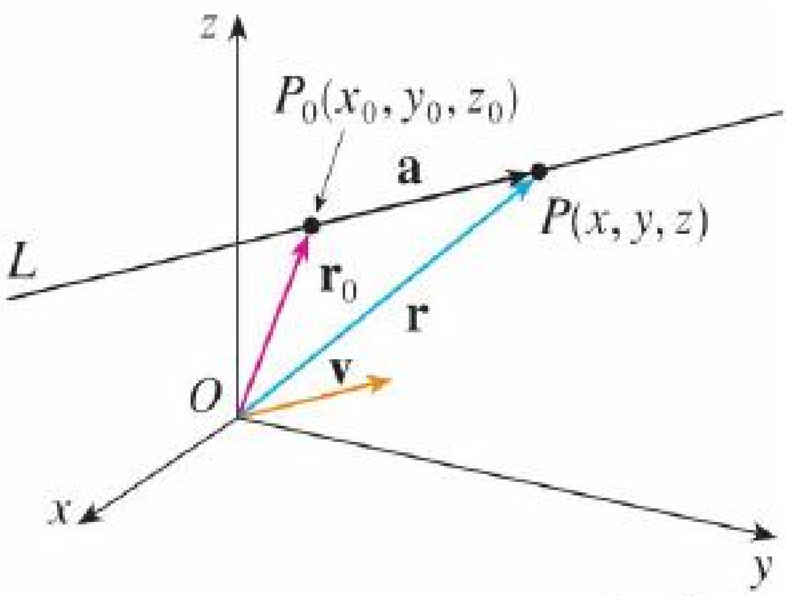
وتصبح معادله المستوي π في هذه الحالة بالصورة:

$$(-3+1)x+(-18-2)y+(1+15)z-4=0\Rightarrow$$
$$-2x-20y+16z-4=0\Rightarrow x+10y-8z+2=0$$

ثالثاً: معادلة المستقيم في الفراغ ثلاثي الإبعاد

معادلات الخط المستقيم لمار بنقطة معلومة و يوازي اتجاه معلوم

بفرض أن $p_0(x_0,y_0,z_0)$ هي نقطة معلومة علي المستقيم، وأن $\vec{v}=(a,b,c)$ متجه يوازي المستقيم بحيث أن المتجه $\vec{v}$ لا يقع علي الخط المستقيم نفسه وأن $p(x,y,z)$هي نقطة اختيارية علي المستقيم، كما بالشكل المقابل:



وبفرض أن $\vec{r_0}$ ، $\vec{r}$ هما متجهي الموضع لنقطتين p_0 ، p علي الترتيب، بحيث أن $\vec{r}-\vec{r_0}=\lambda\vec{v}$ وبالتالي يكون : $\vec{r}=\vec{r_0}+\vec{a}$ وحيث أن $\vec{a}=\overrightarrow{p_0p}=p-p_0$ فإن $\vec{a}=\overrightarrow{p_0p}\uparrow\uparrow\vec{v}$ $\overrightarrow{p_0p}=\lambda\vec{v}$

وبالتالي نجد أن :

$$\vec{r}-\vec{r_0}=\lambda\vec{v}$$

وتسمي هذه المعادلة بالمعادلة الاتجاهية للخط المستقيم وهذه المعادلة يمكن كتابتها بدلاله المركبات كالأتي :

$$x-x_0=\lambda a,\quad y-y_0=\lambda b,\quad z-z_0=\lambda c$$

وتسمى هذه المعادلات بالمعادلات البارامترية للخط المستقيم. ومن هذه المعادلات نجد أن :

$$\frac{x-x_0}{a}=\lambda,\quad \frac{y-y_0}{b}=\lambda,\quad \frac{z-z_0}{c}=\lambda$$

وبالتالي نجد أن :

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

وتسمي هذه المعادلة بالصورة القانونية (القياسية) للخط المستقيم المار بالنقطة $p_0(x_0,y_0,z_0)$ ويوازي المتجه $\vec{v}=(a,b,c)$. وهذا يعني أن معادله الخط المستقيم المار بالنقطة (x_0,y_0,z_0) ونسب اتجاهه هي (a,b,c) تكون بالصورة :

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

معادلات الخط المستقيم المار بنقطتين معلومتين

إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين $P_1(x_1,y_1,z_1)$ ، $P_2(x_2,y_2,z_2)$ ، وكانت نسب اتجاهه هي a,b,c فيكون :

$$a:b:c=x_2-x_1:y_2-y_1:z_2-z_1$$

وبذلك تصبح الصورة القياسية المعادلة الخط المستقيم في هذه الحالة بالصورة :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

مثال(١): أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(2,3,1)$ عموديًا علي المستوي $3x+y+2z-1=0$.

الحـــــــــــــل

من معادله المستوي نلاحظ أن نسب العمودي علي المستوي هي $(3,1,2)$ وبالتالي فإن معادله الخط المستقيم العمودي علي المستوي من النقطة $(2,3,1)$ هي :

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{2}$$

مثال(٢): أوجد معادله المستوي الذي يمر بالنقطة $(3,2,1)$ والمستقيم $\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{2}$.

الحـــــــــــــل

من المعطيات نلاحظ أن المستوي المطلوب يمر بالنقطتين $p_1(3,2,1)$ ، $p_2(2,-3,1)$ ويحتوي علي الاتجاه $\vec{a}=(4,1,2)$ وبالتالي فإن معادلته تكون بالصورة :

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix}=0\Rightarrow 10x-2y-19z=0$$

الزاوية بين مستقيمين في الفراغ ثلاثي الإبعاد

نظريه: الزاوية بين المستقيمين $L_1:\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1},\quad L_2:\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$ تعطي من العلاقة :

$$\cos\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}+c_1^{\,2}}\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}+c_2^{\,2}}}$$

نتيجة: من النظرية السابقة يكون :

- شرط تعامد المستقيمين $L_1,\ L_2$ هو أن يكون: $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.
- شرط توازي المستقيمين $L_1,\ L_2$ هو أن يكون: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.

الزاوية بين مستقيم ومستوي في الفراغ ثلاثي الإبعاد

نظريه: الزاوية بين المستقيم $L:\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ والمستوي $\pi:a_2x+b_2y+c_2z+d=0$

تتعين من العلاقة :

$$\sin\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}+c_1^{\,2}}\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}+c_2^{\,2}}}$$

حيث أن θ هي الزاوية بين المستقيمين L ، والعمودي علي المستوي π.

نتيجة: من النظرية السابقة يكون:

- شرط تعامد المستوي π والمستقيم L هو أن يكون: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.
- شرط توازي المستوي π والمستقيم L هو أن يكون: $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

ملحوظة: شرط توازي المستقيم الذي نسب اتجاهه (a_1,b_1,c_1) للمستوى $ax+by+cz+d=0$ هو أن يكون العمودي علي المستوي عمودي علي المستقيم ، أي أن: $aa_1+bb_1+cc_1=0$.

مثال(١): ليكن $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$ مستقيم في الفراغ ، $\pi:x+y+z=0$ مستوي. أوجد نقطة تقاطع L مع π ، الزاوية بين L ، π.

الحـــــــــــــــل

لإيجاد تقاطع الخط المستقيم $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$ مع المستوي $\pi:x+y+z=0$ نضع :

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}=\lambda$$

وبالتالي نجد أن

$$x=2\lambda+1,\quad y=2-\lambda,\quad z=2\lambda \qquad (1)$$

وبالتعويض في معادله المستوي نجد أن:

$$x+y+z=0 \Rightarrow 2\lambda+1+2-\lambda+2\lambda=0 \Rightarrow 3\lambda+3=0 \Rightarrow \lambda=-1$$

وبالتعويض في المعادلات (١) نجد أن نقطه التقاطع هي $(-1,3,-2)$.

الزاوية بين المستقيم والمستوي هي $\frac{\pi}{2}-\theta$ حيث أن الزاوية θ تتعين من العلاقة :

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{(2,-1,2).(1,1,1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

وبالتالي تكون الزاوية بين المستقيم والمستوي هي $\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

مثال(٣): بفرض أن π هو المستوي المار بالنقاط $P_1(2,1,0)$ ، $P_2(1,0,1)$ ، $P_3(3,0,1)$ وأن L هو الخط المستقيم المار بالنقطة $P_0(0,0,2)$ عموديا علي المستوي π .أوجد معادله المستوي π ونقطه تقاطعه مع المستقيم L .

الحـــــــــــــل

معادله المستوي المار بثلاث نقاط $p_1(x_1,y_1,z_1)$ ، $p_2(x_2,y_2,z_2)$ ، $p_3(x_3,y_3,z_3)$ تكون بالصورة :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

وبتطبيق ذلك علي المثال السابق نجد أن معادلة المستوي π تكون بالصورة :

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-0 \\ 1-2 & 0-1 & 1-0 \\ 3-2 & 0-1 & 1-0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow y+z-1=0$$

معادله الخط المستقيم L المار بالنقطة $P_0(0,0,2)$ وعمودي علي المستوي π تكون بالصورة :

$$L:\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$$

ولإيجاد نقطه تقاطع المستقيم L مع المستوي π نضع $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}=\lambda$ وبالتالي نجد أن:

$$x=0,\quad y=\lambda,\quad z=\lambda+2$$

وبالتعويض في معادله المستوي π نجد أن:

$$y+z-1=0\Rightarrow \lambda+\lambda+2-1=0\Rightarrow \lambda=-\frac{1}{2}$$

وبالتالي نجد أن نقطه تقاطع المستقيم L مع المستوي π هي $\left(0,-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

معادله المستوي المار بخطين مستقيمين في الفراغ ثلاثي الإبعاد

بفرض انه لدينا الخطين المستقيمين :

$$L_1:\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1},\quad L_2:\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

المستوي المار بالخطين المستقيمين L_1 ، L_2 يكون مارا بالنقطتين (x_1,y_1,z_1) ، (x_2,y_2,z_2) ويحتوي علي الاتجاهين (a_1,b_1,c_1) ، (a_2,b_2,c_2) وبالتالي تكون نسب اتجاه العمودي علي المستوي المار بهذين الخطين هي:

$$(a,b,c)=(a_1,b_1,c_1)\times(a_2,b_2,c_2)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

وتكون معادله المستوي المار بالخطين تكون علي الصورة:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$$

أو علي الصورة:

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$$

تقاطع مستقيمين في الفراغ ثلاثي الإبعاد

شرط تقاطع المستقيمين (وهو شرط وقوعهما في مستوى واحد):

$$L_1 : \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}, \quad L_2 : \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$$

هو أن يكون:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

ومعادلة المستوى الذي يقعان فيه تكون علي الصورة:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \quad or \quad \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

مثال(١): برهن أن المستقيمين: $L_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}, \quad L_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$

يقعان في مستوى واحد وأوجد معادلته. واوجد نقطه تقاطع L_1 ، L_2.

الحــــــــــــــــل

شرط تقاطع مستقيمين (وقوعهما في مستوى واحد) هو:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -(16-15) + (12-10) - (9-8) = -1 + 2 - 1 = 0$$

أي أن المستقيمين L_1 ، L_2 يقعان في مستوي واحد.ومعادله هذا المستوي هي:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

أي أن:

$$(16-15)(x-2) - (12-10)(y-3) + (9-8)(z-4) = 0 \Rightarrow x - 2y + 2 = 0$$

لإيجاد نقطه تقاطع المستقيمين نضع :

$$L_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5} = \lambda$$

وبالتالي نجد أن أي نقطه علي المستقيم L_1 تكون علي الصورة البارامترية :

$$x = 3\lambda + 2,\ y = 4\lambda + 3,\ z = 5\lambda + 4$$

وبالتعويض في معادله الخط المستقيم L_2 نجد أن :

$$\frac{3\lambda + 2 - 1}{2} = \frac{4\lambda + 3 - 2}{3} = \frac{5\lambda + 4 - 3}{4} \Rightarrow \frac{3\lambda + 1}{2} = \frac{4\lambda + 1}{3} = \frac{5\lambda + 1}{4}$$

ومنها نجد أن :

$$\frac{3\lambda + 1}{2} = \frac{4\lambda + 1}{3} \Rightarrow \lambda = -1$$

وتكون نقطة تقاطع الخطين المستقيمين L_1 ، L_2 هي $(-1,-1,-1)$.

مثال(٣): أوجد قيمه α التي تجعل المستقيمين L_1 ، L_2 حيث أن :

$$L_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-\alpha} = \frac{z-1}{-1},\quad L_2 : \frac{x-4}{-\alpha} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{\alpha}.$$

- يقعان في مستوى واحد وأوجد معادلته ،
- غير واقعان في مستوي واحد.

الحـــــــــــل

شرط وقوع المستقيمين في مستوى واحد هو:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

ومنها نجد أن :

$$\begin{vmatrix} 4-1 & 3-2 & -2-1 \\ 2 & -\alpha & -1 \\ -\alpha & -1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & -\alpha & -1 \\ -\alpha & -1 & \alpha \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 3.$$

أي أن المستقيمين يتقاطعان عندما $\alpha = 3$.أي أن المستقيمان يقعان في مستوي واحد عندما $\alpha = 3$

وتكون معادلة هذا المستوي بالصورة:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 10x + 3y + 11z - 27 = 0$$

ويكون المستقيمان غير واقعان في مستوي واحد عندما $\alpha \neq 3$.

مثال(٣): أوجد قيم α ، β التي تجعل المستقيمين :

$$L_2 : \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{\beta}, L_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{\alpha} = \frac{z-4}{1}$$

يقعان في مستوي واحد وكل منهما عمودي علي الأخر.

الحـــــــــــــــل

لكي يقع المستقيمين في مستوي واحد يجب أن يكون

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0-2 & 3-4 & 2-4 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & -1 & \beta \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & -1 & \beta \end{vmatrix} = 0$$

وبالفك نجد أن:

$$2(\alpha\beta + 1) - (\beta - 1) + 2(-1 - \alpha) = 0 \Rightarrow 2\alpha\beta - 2\alpha - \beta + 1 = 0 \qquad (1)$$

ولكي يكون الخطين المستقيمين متعامدين يجب أن يكون

$$(1, \alpha, 1).(1, -1, \beta) = 0 \Rightarrow 1 - \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = \alpha - 1 \qquad (2)$$

بالتعويض من (٢) في (١) نحصل علي:

$$2\alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0 \Rightarrow (2\alpha - 1)(\alpha - 2) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, 2 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}, 1$$

مثال(٤): ليكن $L_1 : \frac{x-1}{\alpha} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{2\alpha}$ ، $L_2 : \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2\alpha} = \frac{z-4}{5}$ مستقيمان في الفراغ ،

$\pi : x - y + z + 1 = 0$ مستوي. أوجد:

١) قيمة α الصحيحة الموجبة التي تجعل L_1 ، L_2 يقعان في مستوي واحد وليكن π_1. وأوجد معادلة المستوي π_1.

٢) معادلة المستوي π_2 المار بالنقطة p_0 عموديا علي المستويين π ، π_1 حيث أن p_0 هي نقطة تقاطع L_2 مع π.

٣) معادله الخط المستقيم L المار بالنقطة p_0 عموديا علي L_1 ، L_2.

٤) الزاوية بين المستقيم L والمستوي π_1.

الحـــــــــل

١) شرط وقوع المستقيمين في مستوى واحد هو:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$$

ومنها نجد أن:

$$\begin{vmatrix} 2-1 & 3-2 & 4-3 \\ \alpha & 3 & 2\alpha \\ 3 & 2\alpha & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 3 & 2\alpha \\ 3 & 2\alpha & 5 \end{vmatrix}=0.$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2-\alpha-6=0 \Rightarrow (2\alpha+3)(\alpha-2)=0 \Rightarrow \alpha=2$$

ومعادلة هذا المستوي هي:

$$\pi_1:\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0$$

وبالفك والاختصار نجد أن:

$$\therefore (15-16)(x-1)-(10-12)(y-2)+(8-9)(z-3)=0$$
$$\Rightarrow -(x-1)+2(y-2)-(z-3)=0 \Rightarrow x-2y+z=0$$

٢) لإيجاد نقطه تقاطع المستقيمين نضع $L_2: \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5} = \lambda$ وبالتالي نجد أن أي نقطه علي المستقيم L_1 تكون هي $x = 3\lambda + 2,\ y = 4\lambda + 3,\ z = 5\lambda + 4$ وبالتعويض في معادله الخط المستقيم L_1 نجد أن:

$$\frac{3\lambda + 2 - 1}{2} = \frac{4\lambda + 3 - 2}{3} = \frac{5\lambda + 4 - 3}{4} \Rightarrow \frac{3\lambda + 1}{2} = \frac{4\lambda + 1}{3} = \frac{5\lambda + 1}{4}$$

ومنها نجد أن:

$$\frac{3\lambda + 1}{2} = \frac{4\lambda + 1}{3} \Rightarrow \lambda = -1$$

وتكون نقطة تقاطع الخطين المستقيمين L_1 ، L_2 هي $p_0(-1,-1,-1)$.

معادلة المستوي المار بالنقطة p_0 وعموديا علي المستويين $\pi_1 : x - 2y + z = 0$ ، $\pi : x - y + z + 1 = 0$ هي:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1+2)(x+1) - (1-1)(y+1) + (-2+1)(z+1) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1) - (z+1) = 0 \Rightarrow x - z = 0$$

٣) معادلة الخط المستقيم L المار بالنقطة p_0 عموديا علي المستوي π_1.

معادلة الخط المستقيم L هي:

$$L : \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{1}$$

٤) الزاوية بين المستقيم L والمستوي π_1 هي $\frac{\pi}{2} - \theta$ حيث أن الزاوية θ تتعين من العلاقة :

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(1,-2,1).(1,-2,1)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}}\right) = \cos^{-1}(1) = 0$$