South valley University

Faculty of science-Qena
Mathematics Department

المقرر: تطبيقية (1) – دينكاميكا

الفرقة: الأولى رياضيات عام

الفصل الدراسي: الأول

المحاضر: أ. د. جمال عبدالله أحمد السيد حشودي

البـاب الأول

المحاضرة الأولي: مقدمة في علم الديناميكا

مفاهيم أساسية

علم الميكانيكا هو العلم الذي ندرس فيه حالة الأجسام من حيث السكون أو الحركة وينقسم علم **الميكانيكا** إلي فرعين أساسين هما:

1- **الإستاتيكا** يختص بدراسة سكون واتزان الأجسام

2- **الديناميكا** يختص بدراسة حركة الأجسام

سندرس بعون الله تعالي مبادئ علم **ديناميكا الجسيمات** خلال هذا الفصل الدراسي

بداية سنعرف **الجسيم** علي أنه نقطة مادية مهملة الأبعاد، وسنتناول دراسة الآتي:

حركة الجسيم في خط مستقيم- حركة الجسيم في المستوي وتطبيقاتها- المسارات المركزية وتطبيقاتها.

الحركة في خط مستقيم

تعاريف أساسية:

سنعرف الكميات الأساسية التي تحدد الحركة كالآتي:

1- **الإزاحة** $\vec{r}$

هي كمية متجهه وتعرف بأنها المسافة المقطوعة للجسيم في اتجاه معين، وبالتالي تكون المسافة هي $r = \|\vec{r}\|$

2- **السرعة** $\vec{v}$

هي كمية متجهه وتعرف بأنها معدل التغير الزمني للإزاحة التي يصنعها الجسيم

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \overrightarrow{r^{\bullet}}$$

ويكون مقدار السرعة هو $v = \|\vec{v}\|$

حيث $v = \dfrac{dr}{dt} = r^{\bullet}$

3- العجلة (التسارع) $\vec{f}$

هي كمية متجهة وتعرف بأنها معدل التغير الزمني للسرعة

$$\vec{f} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}^{\bullet}$$

ويكون مقدار العجلة هو $f = \left\| \vec{f} \right\|$

حيث

$$f = \frac{dv}{dt} = v^{\bullet}$$

ملاحظات:

1- إذا كان $r = r(t),\quad v = v(t)$ فإن

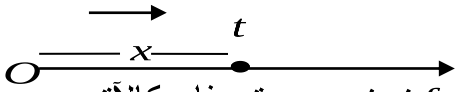
$$f = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} = r^{\bullet\bullet}$$

2- إذا كان $v = v(r)$ فإن

$$f = v\,\frac{dv}{dr}$$

الحركة في خط مستقيم

بفرض أن جسيما بدأ حركته من نقطة الأصل O وكانت المسافة التي تحركها بعد مضي زمن t هي



فإن سرعته v وعجلته f عند زمن t تعرفان كالآتي:

-1
$$v = \frac{dx}{dt}$$

-2
$$f = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = v\,\frac{dv}{dx}$$

وبالعكس يمكن إيجاد المسافة والسرعة ومربع السرعة باستخدام التكامل كالآتي:

-1
$$x = \int v\,dt + A$$

-2
$$v = \int f\,dt + B$$

-3
$$\int v\,dv = \int f\,dx + C$$

حيث A, B, C ثوابت تحدد باستخدام الشروط الابتدائية أو الشروط الحدية المعطاة في المسألة

<u>مثال1</u>

يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث أن بعده عن نقطة ثابتة O (نقطة الأصل) x يرتبط بالزمن t بالعلاقة

$$x = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 18$$

أوجد الآتي:

(أ) سرعة وعجلة الجسيم عند أي لحظة t

(ب) موضع الجسيم وعجلته عندما تتلاشى سرعته

(جـ) متى يمر الجسيم بنقطة الأصل O

<u>مثال 2</u>

أثبت أن معادلات السرعة و المسافة كدالة في الزمن وكذلك السرعة كدالة في المسافة لجسيم

v_0 f

يتحرك في خط مستقيم بعجلة منتظمة بدأ حركته من نقطة الأصل بسرعة ابتدائية هي:

$$v = v_0 + ft \quad (1) \qquad x = v_0 t + \tfrac{1}{2} ft^2 \quad (2) \qquad v^2 = v_0^2 + 2fx \quad (3)$$

ملخص قوانين الديناميكا

في حال حركة جسيم في خط مستقيم بعجلة متغيرة:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \;,\; a = \frac{d\upsilon}{dt} \;,\; a = \upsilon \frac{d\upsilon}{dx}$$

في حال حركة جسيم في خط مستقيم بعجلة ثابتة:

حيث الجسيم يبداء حركتة من نقطة الاصل وبسرعة ابتدائية مقدارها υ_0 فان القوانين المنظمة لحركتة يمكن وضعها في الصورة

$$\upsilon = \upsilon_o + a_c t, \quad x = \upsilon_o t + \frac{1}{2} a_c t^2, \quad \upsilon^2 = \upsilon_o^2 + 2 a_c x$$

الاثبات

سوف نبداء من العلاقة $a = \frac{d\upsilon}{dt}$ وحيث ان العجلة ثابتة فان

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} \quad \rightarrow \quad a_c = \frac{d\upsilon}{dt} \quad \rightarrow \quad d\upsilon = a_c\, dt$$

$$\int d\upsilon = a_c \int dt \quad \rightarrow \quad \upsilon = a_c t + c_1 \qquad (1)$$

في بداية الحركة اي عند اللحظة $t=0$ كانت $x=0,\ \upsilon = \upsilon_0$ وبالتعويض في العلاقة (1) نجد أن $c_1 = \upsilon_0$

وبالتعويض مرة اخري في العلاقة (1) عن قيمة c_1 نحصل علي $\upsilon = a_c t + \upsilon_0$ والتي يمكن كتابتها بالصورة

$$\upsilon = \upsilon_0 + a_c t \qquad (2)$$

بأخذ العلاقة (2) وحيث أن $\upsilon = \frac{dx}{dt}$ نجد أن

$$\frac{dx}{dt}=\upsilon_0+a_c\,t \;\rightarrow\; dx=\left\{\upsilon_0+a_c\,t\right\}dt \;\rightarrow\; \int dx=\int \upsilon_0\,dt+\int a_c\,t\,dt \rightarrow\; \int dx=\upsilon_0\int dt+a_c\int t\,dt$$

$$x=\upsilon_0\,t+\frac{1}{2}a_c\,t^2+c_2 \qquad (3)$$

في بداية الحركة اي عند اللحظة $t=0$ كانت $x=0,\ \upsilon=\ \upsilon_0$ وبالتعويض في العلاقة (3) نجد أن $c_2=\ 0$

وبالتعويض مرة اخري في العلاقة (3) عن قيمة c_2 نحصل علي

$$x=\upsilon_0\,t+\frac{1}{2}a_c\,t^2 \qquad (4)$$

بالتعويض من العلاقة (2) في العلاقة (4) عن قيمة $t=\dfrac{\upsilon-\upsilon_0}{a_c}$ نحصل علي

$$x=\upsilon_0\left\{\frac{\upsilon-\upsilon_0}{a_c}\right\}+\frac{1}{2}a_c\left\{\frac{\upsilon-\upsilon_0}{a_c}\right\}^2$$

$$x=\left\{\frac{\upsilon\upsilon_0-\upsilon_0^2}{a_c}\right\}+\frac{1}{2}a_c\left\{\frac{\upsilon^2-2\upsilon_0\upsilon+\upsilon_0^2}{a_c^2}\right\}$$

$$2x=\frac{2\upsilon\upsilon_0-2\upsilon_0^2}{a_c}+\frac{\upsilon^2-2\upsilon_0\upsilon+\upsilon_0^2}{a_c}$$

$$2xa_c=\underbrace{2\upsilon\upsilon_0}_{1+4=0}\underbrace{-2\upsilon_0^2}_{2+5=-\upsilon_0^2}+\upsilon^2-\underbrace{2\upsilon_0\upsilon}_{1+4=0}+\underbrace{\upsilon_0^2}_{2+5=-\upsilon_0}$$

$$2xa_c=-\upsilon_0^2+\upsilon^2$$

والتي يمكن كتابتها علي الصورة

$$v^2=\upsilon_0^2+2a_c\,x \qquad (5)$$

مثال: يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقا للعلاقة $x=\dfrac{v_0}{k}(1-e^{-kt})$ حيث x هي المسافة المقطوعة بالمتر

و t هو الزمن بالثانية وكل من v_0,k ثوابت أوجدي كل من $(v,t),(a,t),(v,x),(a,x),(a,v)$

الحـــــــــل

$$x=\frac{v_0}{k}(1-e^{-kt})$$

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{v_0}{k}(0-(-k)e^{-kt})=\frac{v_0}{k}k\,e^{-kt}=v_0\,e^{-kt}$$

$$v = v_0 e^{-kt} \;...........(v,t) \qquad (1)$$

$$a = \frac{dv}{at} = -k v_0 e^{-kt} ....(a,t) \qquad (2)$$

$$\frac{k}{v_0} x = 1 - e^{-kt} \rightarrow \quad e^{-kt} = 1 - \frac{k}{v_0} x ....v_0 e^{-kt} = v_0 - k x \qquad (3)$$

من (3) في (1)

$$v = v_0 - k x \;...........(v,x) \qquad (4)$$

من (3) في (2)

$$a = -k(v_0 - k x) = k(k x - v_0) ....(a,x) \qquad (5)$$

من (4) في (5)

$$a = -k(v_0 - k x) = -k v ....(a,v) \qquad (6)$$

....

مثال: يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقا للعلاقة $a = -0.4v$ حيث v هي السرعة , a هي العجلة اذا بداء الجسيم حركتة بسرعة 0.4 من علي بعد 1 كيلو متر من نقطة الأصل أوجد كل من السرعة والمسافة المقطوعة.

الحـــــــــــل

$$a = -0.4v$$

$$v\frac{dv}{dx} = -0.4v \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = -0.4 \quad \rightarrow$$

$$dv = -0.4\, dx \rightarrow \; v = -0.4x + c_1$$

من الشروط الابتدائية $0.8 = c_1$

$$v = -0.4x + 0.8$$

$$\frac{dx}{dt} = -0.4x + 0.8 \rightarrow \qquad \frac{dx}{-0.4x + 0.8} = dt \rightarrow \frac{-1}{0.4}\int \frac{-dx}{-x+2} = \int dt$$

$$\frac{-1}{0.4} Ln(-x+2) = t + c_2$$

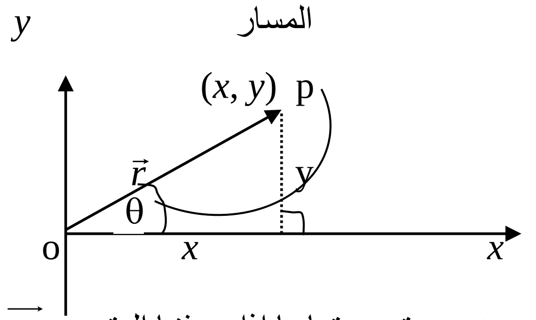
من الشروط الابتدائية $\frac{-1}{0.4} Ln(1) = +c_2 = 0$

$$Ln(-x+2) = -0.4t \rightarrow \quad -x + 2 = e^{-0.4t} \quad \rightarrow \quad x = 2 - e^{-0.4t}$$

كينماتيكا الجسيم فى مستوى

حركة جسيم في المستوي

مقدمة : عندما يتحرك الجسيم حركة مقيدة فى مستوى يلزم لتحديد موضعه تماما عند أى لحظة من الزمن – معرفة عددين هما الإحداثى x والإحداثى y عند إستخدام طريقة الإحداثيات الكارتيزية. وأثناء حركة الجسيم يتغير موضعه بمرور الزمن فيقال أن موضعه دالة فى الزمن. فإذا أدخلنا مفهوم المتجه نستطيع أن ندمج هذين العددين فى كمية متجهه هى متجه الموضع.



وتفسير ذلك أنه إذا كان لدينا جسيما عند نقطة p فإن موضعه يتعين تماما إذا عرفنا المتجه $\vec{r} = \overrightarrow{op}$ الذى مقداره يساوى الطول op حيث o نقطة الأصل واتجاهه هو الزاوية θ التى يصنعها op مع خط ثابت وليكن المحور ox . ويطلق على هذا المتجه اسم متجه موضع p لأنه يحدد موضع النقطة p . وواضح أن مركبتى متجه الموضع هما إحداثيا النقطة p . ويمكن التعبير عن ذلك بالإسلوب الاتجاهى كالآتى:

$$\vec{r} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j}$$

حيث $\vec{i},\ \vec{j}$ متجهان وحده فى الإتجاهين الموجبين للمحورين الثابتين $ox,\ oy$ على الترتيب . وبتغير موضع الجسيم مع الزمن أثناء الحركة تصبح $\vec{r}$ داله فى الزمن t أى أن $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ ويرسم الجسيم تبعاً لذلك منحنى فى المستوى يسمى بالمسار ، كما تصبح كل من y, x دالة فى الزمن:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y\,(t)$$

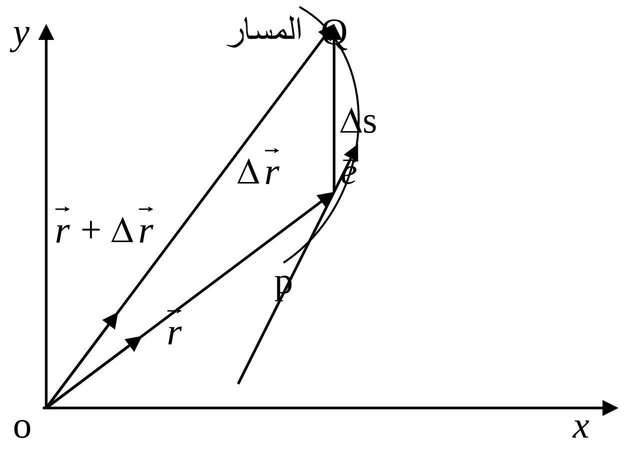
ويمكن اعتبار مثل هاتين المعادلتين كمعادلتين بارامتريتين للمسار حيث t هو البارامتر . وإذا حذفنا t بينهما نحصل على علاقة بين x, y تمثل المعادلة الكارتيزية للمسار $y = y\,(x)$ والهدف الأساسى من دراستنا الحالية هو إستنتاج الصور الرياضية المختلفة لمميزات الحركة أى سرعة وعجلة الجسيم المتحرك فى مستوى بدلالة ثلاث أنواع من الإحداثيات:-

أ- الإحداثيات الكارتيزية ب- الإحداثيات القطبية

ج- الإحداثيات الذاتية (أو الطبيعية أو الشخصية)

أ- إيجاد سرعة وعجلة الجسيم بدلالة الإحداثيات الكارتيزية:

نفرض أن جسيما يتحرك فى مستوى محدد بالمحورين الثابتين $ox,\ oy$ عند لحظة t من الزمن كان الجسيم عند النقطة p التى متجه موضعها $\vec{r}$. بعد فترة زمنية صغيرة Δt - تحرك فيها الجسيم على مساره – أصبح موضعه هو النقطة Q القريبة جدا من p والتى متجه موضعها $\vec{r} + \Delta \vec{r}$ حيث $\Delta \vec{r} =- p\vec{Q}$ وطول القوس $p\widehat{Q}$ على المسار يساوى Δs حيث s مقاسة على المسار من نقطة ثابتة عليه `o وتساوى القوس $\bar{o}\widehat{p}$.



السرعة المتوسطة للجسيم فى هذه الإزاحة الصغيرة تساوى $\dfrac{\text{متجه الازاحة}}{\text{الفترة الزمنية}}$

أى $\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ وبأخذ نهاية هذا المقدار عندما تقترب Δt من الصفر وبالتالى تقترب Q من p إقترابا متناهيا نحصل على السرعة عند الموضع p أى عند لحظة من الزمن t .

أى أن :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

وبذلك يكون متجه السرعة هو المعدل الزمنى لتغير متجه الموضع .

كذلك يمكننا كتابة ما يلى :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta s \to o} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}\vec{e} = \dot{s} \cdot \vec{e}$$

وذلك لأنه عندما تقترب Δt من الصفر تقترب Δs أيضا من الصفر ، وفى نفس الوقت تقترب $|\Delta \vec{r}|$ من Δs أى يقترب $\dfrac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s}$ من الواحد الصحيح كما يقترب إتجاه $\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$ من المماس للمسار عند p أى فى النهاية

يصبح $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{e}$ حيث $\vec{e}$ متجه وحده فى اتجاه المماس للمسار عند p ومن ثم : $v = \dot{s}$, $\vec{v} = \dot{s}\,\vec{e}$

وهذا يعنى أن متجه السرعة يكون دائما فى اتجاه المماس للمسار بينما يكون مقدار السرعة مساويا $\dot{s}$.

وإذا كان إحداثيا p هما x , y وإحداثيا Q هما : $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ فإن :

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\vec{i} + \Delta y\,\vec{j} \quad , \quad \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}$$

$$\lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}$$

$$\therefore \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} \qquad \therefore \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j}$$

$\vec{i}$, $\vec{j}$ فى حالتنا هذه متجهان وحده ثابتان لا يتأثران بمرور الزمن .

يتضح مما سبق أن متجه السرعة له مركبتين $\dot{x}$, $\dot{y}$ فى اتجاهى ox , oy على الترتيب.

ويتعين مقدار متجه السرعة من $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

أما ميله على ox فيتعين من $\theta = \tan^{-1} \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

أى أن اتجاه السرعة ينطبق على المماس للمسار كما سبق استنتاجه.

أما متجه العجلة فيعرف بأنه المعدل الزمنى لتغير متجه السرعة أى أن :

$$\vec{f} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\dot{x}}{dt}\vec{i} + \frac{d\dot{y}}{dt}\vec{j} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}$$

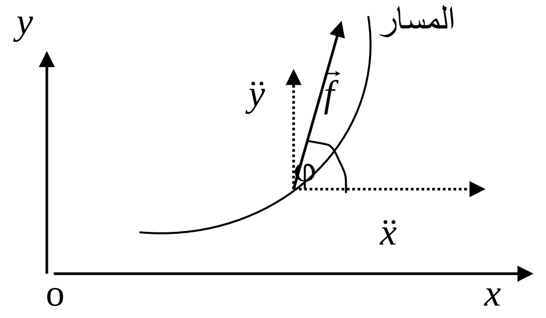
$$\vec{f} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}\vec{i} + \dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy}\vec{j}$$

وبذلك يكون مقدار متجه العجلة : $f = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$

ويتعين ميلها على ox من $\varphi = \tan^{-1}(\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}})$

نلاحظ أن اتجاه العجلة لا يكون فى اتجاه المماس للمسار.

نستنتج مما سبق أن الحركة المستوية للجسيم هى محصلة حركتين فى خطين مستقيمين هما محورا الإحداثيات.



ويمكن دراسة كل من هاتين الحركتين دراسة مستقلة ثم ندمج النتائج للحصول على محصلة السرعة أو العجلة عند أى لحظة.

أمثـــــلة

<u>مثال 1:</u> المعادلتان البارامتريتان لحركة جسيم فى مستوى هما $y = 3t^2 + 5.$ $x = t^2,$ حيث t الزمن بالثانية ، x , y بالمتر . أوجد معادلة المسار الكارتيزية وسرعة الجسيم عند بدء الحركة وأوجد أيضا عجلة الجسيم.

الحــــــــل

$$x = t^2 \qquad (1), \qquad\qquad y = 3t^2 + 5 \qquad (2).$$

بحذف t بين المعادلتين (1), (2) نحصل على $y = 3x + 5$ وهى المعادلة الكارتيزية للمسار.

من المعادلتين (1), (2) نحصل على

$$\dot{x} = 2t, \qquad \dot{y} = 6t,$$
$$\ddot{x} = 2, \qquad \ddot{y} = 6.$$

الان تعطي السرعة بالصورة $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(2t)^2 + (6t)^2} = 2t\sqrt{10}\ m/\sec$ وهي عند أي لحظة زمنية t.

بينما تعطي العجلة بالصورة $f = a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{(2)^2 + (6)^2} = 2\sqrt{10}\ m/\sec^2$ وهي ثابتة.

عند بداية الحركة نضع $t = o$ فنجد أن $v = 0$ ، أى أن الجسيم عند بدء الحركة من السكون

مثـــال 2: اذا تحركـت نقطــة ماديــة فــي المســتوي xoy بحيـث يتعـين أحـداثي موضـعهما بالصـورة $x = b\cos\omega t, \quad y = b\sin\omega t.$ حيث t الزمن بالثانية x, y الإزاحة المقاسـة بـالمتر , b, ω ثوابـت . أوجـد معادلة المسار الكارتيزية وسرعة الجسيم و أيضا عجلة الجسيم عند أي لحظة زمنية ؟

الحـــــــل

من العلاقات المعطاة $x = b\cos\omega t, \quad y = b\sin\omega t .$

وبتربيع هاتين المعادلتين $x^2 = (b\cos\omega t)^2, \quad y^2 = (b\sin\omega t)^2.$

والجمع $x^2 + y^2 = b^2 \left\{ (\cos\omega t)^2 + (\sin\omega t)^2 \right\} = b^2$

$$x^2 + y^2 = b^2$$

من العلاقات المعطاة نجد أيضا أي

$$x = b\cos\omega t, \qquad y = b\sin\omega t$$

$$.x^{\bullet} = -b\omega\sin\omega t, \qquad y^{\bullet} = b\omega\cos\omega t,$$

$$x^{\bullet\bullet} = -b\omega^2\cos\omega t, \qquad y^{\bullet\bullet} = -b\omega^2\sin\omega t.$$

ومنهم تعطي السرعة عند أي لحظة زمنية t بالصورة

$$.v = \sqrt{x^{\bullet 2} + y^{\bullet 2}} = \sqrt{(-b\omega\sin\omega t)^2 + (b\omega\cos\omega t)^2} = b\omega \ m/\sec$$

بينما تعطي العجلة بالصورة

$$f = \sqrt{x^{\bullet\bullet 2} + y^{\bullet\bullet 2}} = \sqrt{(-b\omega^2\cos\omega t)^2 + (-b\omega^2\sin\omega t)^2} = b\omega^2 \ m/\sec^2$$

مثـــال 3: أذا تحركـت نقطــة ماديــة فــي المســتوي xoy بحيـث يتعـين أحـداثي موضـعهما بالصـورة $x = 5\cos t + 3, \quad y = 5\sin t + 4.$ حيـث t الـزمن بالثانيــة x, y الازاحــة المقاســة بــالمتر . أوجـد معادلـة المسار الكارتيزية وسرعة الجسيم و أيضا عجلة الجسيم عند أي لحظة زمنية .

الحـــــــل

من العلاقات المعطاة $x = 5\cos t + 3, \quad y = 5\sin t + 4.$

نجد أن $x - 3 = 5\cos t, \quad y - 4 = 5\sin t.$

وبتربيع هاتين المعادلتين $(x-3)^2 = 25(\cos t)^2, \quad (y-4)^2 = 25(\sin t)^2.$

والجمع $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25\left\{ (\cos t)^2 + (\sin t)^2 \right\} = 25$

$$(x-3)^2+(y-4)^2=25$$
$$x^2-6x+9+y^2-8y+16=25$$
$$x^2-6x+y^2-8y=0$$

من العلاقات المعطاة نجد أيضا أي

$$\dot{x}=-5\sin t, \qquad \dot{y}=5\cos t,$$
$$\ddot{x}=-5\cos t, \qquad \ddot{y}=-5\sin t.$$

وبــــــذلك تعطــــــي الســــــرعة عنــــــد أي لحظـــــــة زمنيـــــــة t بالصــــــورة

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{(-5\sin t)^2+(5\cos t)^2}=\sqrt{25(\sin^2 t+\cos^2 t)}=5\ m/\sec$$

بينما تعطي العجلة بالصورة

$$f=a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\sqrt{(-5\cos t)^2+(5\sin t)^2}=\sqrt{25(\sin^2 t+\cos^2 t)}=5\ m/\sec^2$$ وهي ثابتة.

<u>مثــال 4 :</u> أذا تحركـت نقطـة ماديـة فـي المسـتوي xoy بحيـث يتعـين أحـداثي موضـعهما بالصـورة $x=a\cos\omega t,\quad y=b\sin\omega t.$ حيـث t الـزمن بالثانيـة x, y الازاجـة المقاسـة بـالمتر , a,b ثوابـت . أوجد معادلة المسار الكارتيزية وسرعة الجسيم و أيضا عجلة الجسيم عند أي لحظة زمنيـة وكـذلك عنـدما $x=0,\ x=a/2$.

الحـــــــل

من العلاقات المعطاة $x=a\cos\omega t,\quad y=b\sin\omega t$.

وبتربيع هاتين المعادلتين $x^2=(a\cos\omega t)^2,\quad y^2=(b\sin\omega t)^2$.

ومنهم $x^2=a^2\cos^2\omega t=a^2(1-\sin^2\omega t)=a^2\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}\right)$

$$x^2=a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

من العلاقات المعطاة نجد أيضا

$$x=a\cos\omega t, \qquad y=b\sin\omega t$$
$$.\dot{x}=-a\omega\sin\omega t, \qquad \dot{y}=b\omega\cos\omega t,$$
$$\ddot{x}=-a\omega^2\cos\omega t, \qquad \ddot{y}=-b\omega^2\sin\omega t.$$

ومنهم تعطي السرعة عند أي لحظة زمنية t بالصورة

$$.v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{(-a\omega\sin\omega t)^2+(b\omega\cos\omega t)^2}\ m/\sec$$

بينما تعطي العجلة بالصورة

$$f = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{(-a\,\omega^2 \cos\omega t)^2 + (-b\,\omega^2 \sin\omega t)^2}\ m/\sec^2$$

عندما $x=0$ نجد أن $x = a\cos\omega t = 0 \rightarrow \omega t = 90^O = \frac{\pi}{2}$

و تعطي السرعة عند ذلك بالصورة

$$.v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(-a\,\omega \sin\frac{\pi}{2})^2 + (b\,\omega \cos\frac{\pi}{2})^2} = a\,\omega\, m/\sec$$

بينما تعطي العجلة بالصورة

$$f = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}\ \sqrt{(-a\,\omega^2 \cos\frac{\pi}{2})^2 + (-b\,\omega^2 \sin\frac{\pi}{2})^2} = b\,\omega^2\, m/\sec^2$$

وعندما $x=a/2$ نجد أن $x = a\cos\omega t = a/2 \rightarrow \cos\omega t = 1/2 = \omega t = 60^O = \frac{\pi}{3}$

تعطي السرعة عند ذلك بالصورة

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(-a\,\omega \sin\frac{\pi}{3})^2 + (b\,\omega \cos\frac{\pi}{3})^2} = \sqrt{(-a\,\omega\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (b\,\omega\frac{1}{2})^2}$$

$$v = \frac{\omega}{2}\sqrt{3a^2 + b^2}\ m/\sec$$

بينما تعطي العجلة بالصورة

$$f = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{(-a\,\omega^2 \cos\frac{\pi}{3})^2 + (-b\,\omega^2 \sin\frac{\pi}{3})^2} = \sqrt{(-a\,\omega^2\ \frac{1}{2})^2 + (-b\,\omega^2\ \frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$f = \frac{\omega^2}{2}\sqrt{a^2 + 3b^2}\, m/\sec^2$$

ملاحظة

$$\vec{f} = -a\,\omega^2 \cos\omega t\,\vec{i} - b\omega^2 \sin\omega t\,\vec{j} = -\omega^2\left(a\ \cos\omega t\,\vec{i} + b\sin\omega t\,\vec{j}\right) = -\omega^2\,\vec{r}$$

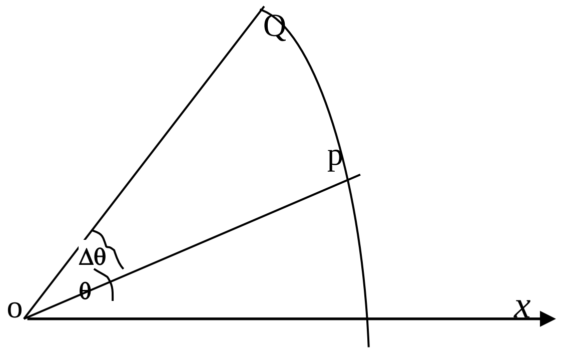
وهذا يشير الي أن متجة العجلة في عكس اتجاة متجة الموضع أي أن متجة العجلة متجهة دائما نحو نقطة الأصل.

حركة جسيم في الإحداثيات القطبية:

تعريف السرعة الزاوية والعجلة الزاوية:

إذا تحرك جسيم فى مستوى فيه o نقطة ثابتة، ox مستقيم ثابت وكان الجسيم عند اللحظة t عند النقطة p فإن الزاوية θ التى يصنعها op مع ox تسمى بالإزاحه الزاوية للجسيم عند هذه اللحظة منسوبة إلى ox. نفرض أنه فى زمن Δt إنتقل الجسيم إلى Q حيث oQ يصنع زاوية $\theta + \Delta\theta$ مع ox. أى أن الإزاحه الزاوية التفاضلية للجسيم فى الفترة الزمنية التفاضلية Δt هى $\Delta\theta$. نعرف السرعة الزاوية المتوسطة للجسيم حول o بالكسر $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ وعندما تقترب Q من p إقترابا متناهيا نحصل على السرعة الزاوية للجسيم حول o التى نرمز لها بالرمز w أى أن:

$$w = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$



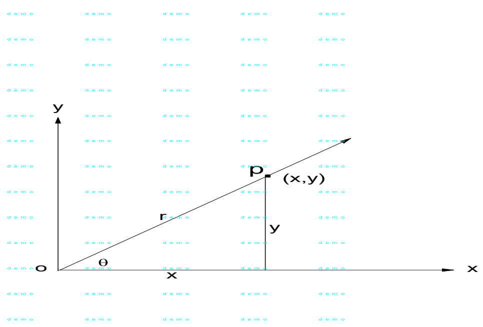
أى أن السرعة الزاوية للجسيم حول o هى السرعة الزاوية للمستقيم الواصل من الجسيم إلى o وتعرف بأنها المعدل الزمنى لتغير الزاوية التى يصنعها هذا الخط مع مستقيم ثابت فى المستوى. وتستخدم التقدير الدائرى لقياس الزاويا. وبالمثل نعرف العجلة الزاوية للجسيم حول o بأنها المعدل الزمنى لتغير سرعة الزاوية أى أن :

$$\dot{w} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = \dot{\theta}\,\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

ب – إيجاد سرعة وعجلة الجسيم بدلالة الإحداثيات القطبية:

في الاحداثيات القطبية يتعين موضع الجسيم المتحرك فى مستوى بواسطة إحداثية القطبين وهما (r,θ) حيث r بعده عن نقطة ثابتة فى المستوى تسمى القطب o والزاوية θ هى الزاوية التى يضعها r مع خط ثابت فى المستوى يمر بالمحور (القطب) ox.

وعندما يتحرك الجسيم على مساره تتغير كل من $r,\ \theta$ وتصبحان دوال فى الزمن t أى أن $r = r(r),\ \theta = \theta(r)$ هما المعادلتين البارامتريتين للمسار حيث t هو البارامتر.



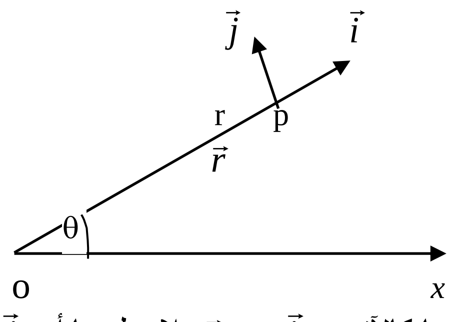
من المعروف بأن علاقات التحويل بين الكرتيزية و الاحداثيات القطبية تعطي بالصورة

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

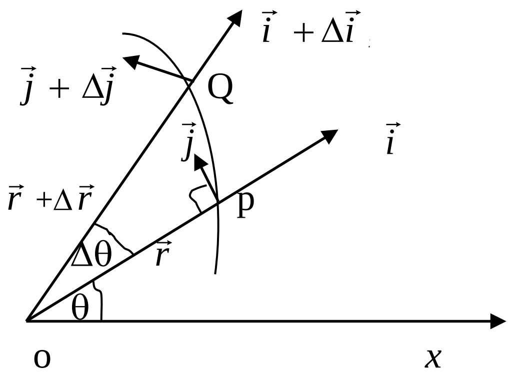
بينما تعطي التحويلات العكسية بالصورة

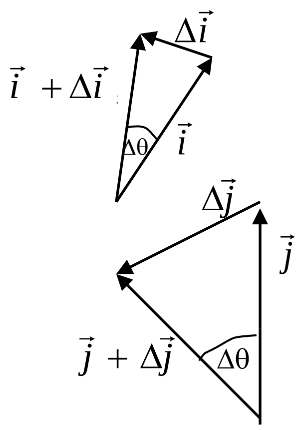
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$$

وجد مركبتى كل من السرعة والعجلة فى هذه الإتجاهات الموجبة أى فى إتجاه تزايد r وفى إتجاه تزايد θ أى عمودى على r. تلاحظ أن إتجاهى التحليل ليسا ثابتين كما كان الحال فى الإحداثيات الكارتيزية بل يتغيران بحركة الجسيم على مساره.
نختار هنا متجهى وحده $\vec{i}, \vec{j}$. الأول $\vec{i}$ فى إتجاه تزايد r والثانى $\vec{j}$ فى الإتجاه العمودى على r وفى إتجاه تزايد θ.



لذلك يمكن التعبير عن موضع الجسيم عند p إتجاهيا كالآتى : $\vec{r} = r\,\vec{i}$ نلاحظ هنا أن $\vec{i}, \vec{j}$ متجهان متغيران (بمعنى أنهما يغيران إتجاهيهما) مع ثبوت مقداريهما أثناء الحركة بعكس ما كان عليه فى حالة $\vec{i}, \vec{j}$ الإحداثيات الكارتيزية عندما كانا متجهين ثابتين. لذلك نوجد أولا المعدل الزمنى لتغير $\vec{i}, \vec{j}$.





نلاحظ أنه عندما ينتقل الجسيم انتقالا صغيرا من p إلى Q يدور كل من المتجهين $\vec{i}, \vec{j}$ زاويـة صـغيرة $\Delta\theta$ مع بقاء مقداريهما ثابت بدون تغيير وهو الوحدة. أى أن مقدار كل من $\vec{i}+\Delta\vec{i}, \vec{j}+\Delta\vec{j}$ هو الوحدة. كما أنه واضح أن إتجــاه $\Delta\vec{i}$ يقترب من إتجاه $\vec{j}$ وأن إتجاه $\Delta\vec{j}$ يقتــرب من إتجـــاه $\vec{i}$ - لذلك يمكن كتابة :

$$\frac{\Delta\vec{i}}{\Delta t}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{j} \quad , \quad \frac{\Delta\vec{j}}{\Delta t}=-\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{i}$$

ويجعل Δt تقترب من الصفر نحصل على :

$$\dot{\vec{i}}=\frac{d\vec{i}}{dt}=\dot{\theta}\vec{j} \quad , \quad \dot{\vec{j}}=\frac{d\vec{j}}{dt}=-\dot{\theta}\vec{i}$$

نعود الآن لإيجاد مركبات السرعة. من التعريـف تفاضـل متجـه الموضـع بالنسـبة للـزمن فنحصـل علـى متجـه السرعه.

$$\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{r}\vec{i}+r\dot{\vec{i}}=\dot{r}\,\vec{i}+r\dot{\theta}\,\vec{j}$$

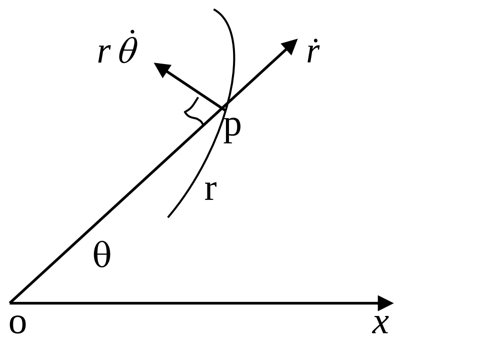
ثم نوجد متجه العجلة بتفاضل متجه السرعه بالنسبة للزمن.

$$\vec{f} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\ \vec{i} + \dot{r}\ \dot{\vec{i}} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\ \vec{j} + r\dot{\theta}\ \dot{\vec{j}}$$

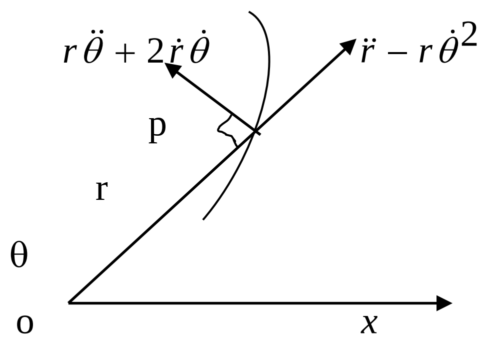
$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\ \vec{i} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\ \vec{j}$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\ \vec{i} + \frac{1}{r}\ (\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}))\ \vec{j}$$

وهذا يعنى أن لسرعة الجسيم مركبتان الأولى مركزية $\dot{r}$ فى إتجاه تزايد r والثانية عمودية عليها $r\dot{\theta}$ فى إتجاه تزايد θ.



مركبات السرعة

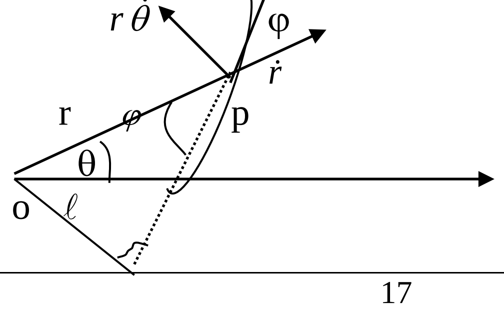


مركبات العجلة

أما مركبات العجلة فالأولى مركزية فى إتجاه تزايد r وهى $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ والثانية عمودية عليها فى إتجاه تزايد θ وهى :

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

نتيجة:



إذا تحرك جسيم فى مستوى وكانت سرعته عند أى لحظة $\vec{v}$ وهى طبعا مماسة للمسار عند موضع الجسيم كما علمنا فيما سبق وكان إتجاه السرعة يصنع زاوية φ مع op فإن سرعة الجسيم الزاوية حول o تتعين من

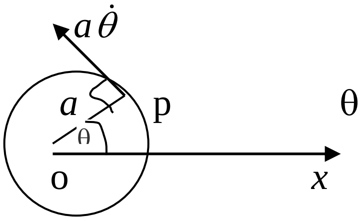
$$\dot{\theta}=\frac{v\ \ \sin\varphi}{r}=\ \frac{v\ell}{r^{2}}$$

حيث ℓ طول العمود الساقط من o على المماس عند p للمسار وذلك لأن

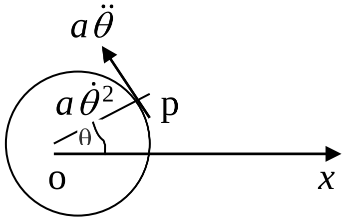
$\dot{r}\,=v\cos\,\varphi\ ,\ r\,\dot{\theta}=v\sin\,\varphi$

* نهاية المحاضرة الرابعة

حالة خاصة – الحركة فى محيط دائرة:



السرعة



العجلة

نفرض ان جسيما يتحرك فى محيط دائرة نصف قطرها a أى مقدار ثابت بسرعة زاوية θ حول المركز o (القطب). فى هذه الحالة يكون $r\,=\,a,\ \dot{r}\,=\ddot{r}\,=o$

وبالتعويض فى صيغ متجهى السرعة والعجلة نحصل على :

$$\vec{v}\,=a\,\dot{\theta}\,\vec{j}\quad\ ,\qquad \vec{f}\,=\,-a\,\dot{\theta}^{2}\,\vec{i}\,+a\,\ddot{\theta}\,\vec{j}$$

وإذا تحرك الجسيم حول الدائرة بسرعة زاوية منتظمة أى ثابتة مع مرور الزمن تتلاشى العجلة الزاوية. أى أن $\dot{\theta}\ =\ constant\ \ ,\ \ \ddot{\theta}\,=o$ أى أن متجه عجلة الجسيم يتعين فى هذه الحالة من $\vec{f}\ =\ -a\,\dot{\theta}^{2}\,\vec{i}$ وهذا يعنى أن عجلة الجسيم تكون بأكملها متجهه نحو مركز الدائرة وتساوى فى المقدار $a\,\dot{\theta}^{2}\,\vec{i}$ وهذا فى حالة ما إذا كانت حركة الجسيم بسرعة زاوية ثابتة حول المحيط.

مثال5 يتحرك جسيم فى مستوي بحث أن موضعة يتعين من العلاقتين $r=2t^3-3t^2,\ \theta=t^2+t$ أوجد مقدار كل السرعة و العجلة وذلك بعد مرور ثانتين من بداية الحركة.

الحـــــــل

$$r=2t^3-3t^2, \qquad \theta=t^2+t,$$
$$r^{\bullet}=6t^2-6t, \qquad \theta^{\bullet}=2t+1$$
$$r^{\bullet\bullet}=12t-6, \qquad \theta^{\bullet\bullet}=2.$$

وبعد مرور ثانتين من بداية الحركة يكون

$$r^{\bullet}=6(2)^2-6(2)=12, \qquad \theta^{\bullet}=2(2)+1=5$$
$$r^{\bullet\bullet}=12(2)-6=18, \qquad \theta^{\bullet\bullet}=2$$

ويكون بكذلك

$$v=(r^{\bullet},\ r\theta^{\bullet})=\left(12,(a+b\ \sin\theta)\right)$$
$$v=\sqrt{b^2\ \cos^2\theta+(a+b\ \sin\theta)^2}=\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2+2ab\ \sin\theta+b^2\ \sin^2\theta}$$
$$v=\sqrt{b^2\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+a^2+2ab\ \sin\theta}=\sqrt{b^2+a^2+2ab\ \sin\theta}$$

ويكون كذلك

$$f=(r^{\bullet\bullet}-r\theta^{\bullet\,2},r\theta^{\bullet\bullet}+2r^{\bullet}\ \theta^{\bullet})=\left(-b\,\omega^2\sin\theta-\omega^2(a+b\sin\theta),\ 0+2b\,\omega^2\cos\theta\right),$$
$$f=\ \omega^2\left(-2b\sin\theta-a,\ 2b\cos\theta\right),$$
$$f=\sqrt{\left(-2b\sin\theta-a\right)^2+\left(2b\cos\theta\right)^2}=\omega^2\sqrt{4b^2\sin^2\theta+4ab\sin\theta+a^2+4b^2\cos^2\theta},$$
$$f=\omega^2\sqrt{4b^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+4ab\sin\theta+a^2}=\omega^2\sqrt{4b^2+4ab\sin\theta+a^2}$$

مثال : يتحرك جسيم فى المنحنى $r=a\theta$ بسرعة زاوية ثابتة ω أوجد مركبتى السرعة و العجلة للجسيم حيث a ثابت وذلك بفرض أن الجسيم بدء حركتة من القطب .

الحـــــــل

من المعلوم بأن $v=(r^{\bullet},\ r\theta^{\bullet}),\ f=(r^{\bullet\bullet}-r\theta^{\bullet\,2},r\theta^{\bullet\bullet}+2r^{\bullet}\ \theta^{\bullet})$

$$\theta^{\bullet}=\omega,\ \theta^{\bullet\bullet}=0,$$

$$\theta^{\bullet}=\frac{d\theta}{dt}=\omega\rightarrow\int d\theta=\omega\int dt\rightarrow\theta=\omega t+c$$

وعند بداية الحركة $t=0,\ \theta=0$ وهذا يؤدي الى أن $c=0$ وبالتالى $\theta=\omega t$

$$r^{\bullet}=a\,\theta^{\bullet}=a\,\omega,$$
$$r^{\bullet\bullet}=0.$$

علي ذلك فان

$$v=(r^{\bullet},\ r\theta^{\bullet})=\big(a\omega,(a+b\ \sin\theta)\big)$$
$$v=\sqrt{b^2\ \cos^2\theta+(a+b\ \sin\theta)^2}=\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2+2ab\ \sin\theta+b^2\ \sin^2\theta}$$
$$v=\sqrt{b^2\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+a^2+2ab\ \sin\theta}=\sqrt{b^2+a^2+2ab\ \sin\theta}$$

ويكون كذلك

$$f=(r^{\bullet\bullet}-r\theta^{\bullet\,2},r\theta^{\bullet\bullet}+2r^{\bullet}\ \theta^{\bullet}\ )=\big(-b\,\omega^2\sin\theta-\omega^2(a+b\sin\theta),\ 0+2b\,\omega^2\cos\theta\big),$$
$$f=\ \omega^2\big(-2b\sin\theta-a,\ 2b\cos\theta\big),$$
$$f=\sqrt{\big(-2b\sin\theta-a\big)^2+\big(2b\cos\theta\big)^2}=\omega^2\sqrt{4b^2\sin^2\theta+4ab\sin\theta+a^2+4b^2\cos^2\theta},$$
$$f=\omega^2\sqrt{4b^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+4ab\sin\theta+a^2}=\omega^2\sqrt{4b^2+4ab\sin\theta+a^2}$$

الحــــــل

$$\theta^{\bullet}=\omega,\ \theta^{\bullet\bullet}=0,$$
$$r=a+b\sin\theta,$$
$$r^{\bullet}=\theta^{\bullet}\,b\cos\theta=b\,\omega\cos\theta,$$
$$r^{\bullet\bullet}=-\theta^{\bullet}\,\omega b\sin\theta=-b\,\omega^2\sin\theta.$$

علي ذلك فان

$$v=(r^{\bullet},\ r\theta^{\bullet})=\omega\big(b\ \cos\theta,(a+b\ \sin\theta)\big)$$
$$v=\sqrt{b^2\ \cos^2\theta+(a+b\ \sin\theta)^2}=\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2+2ab\ \sin\theta+b^2\ \sin^2\theta}$$
$$v=\sqrt{b^2\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+a^2+2ab\ \sin\theta}=\sqrt{b^2+a^2+2ab\ \sin\theta}$$

ويكون كذلك

$$f=(r^{\bullet\bullet}-r\theta^{\bullet\,2},r\theta^{\bullet\bullet}+2r^{\bullet}\ \theta^{\bullet}\ )=\big(-b\,\omega^2\sin\theta-\omega^2(a+b\sin\theta),\ 0+2b\,\omega^2\cos\theta\big),$$
$$f=\ \omega^2\big(-2b\sin\theta-a,\ 2b\cos\theta\big),$$
$$f=\sqrt{\big(-2b\sin\theta-a\big)^2+\big(2b\cos\theta\big)^2}=\omega^2\sqrt{4b^2\sin^2\theta+4ab\sin\theta+a^2+4b^2\cos^2\theta},$$
$$f=\omega^2\sqrt{4b^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+4ab\sin\theta+a^2}=\omega^2\sqrt{4b^2+4ab\sin\theta+a^2}$$

<u>مثال</u> يتحرك جسيم فى المنحنى $r=a+b\sin\theta$ بسرعة زاوية ثابتة ω أوجد مركبتى السرعة و العجلة للجسيم فى الإحداثيات القطبية حيث a,b ثوابت.

الحـــــــل

$$\theta^{\bullet}=\omega,\ \theta^{\bullet\bullet}=0,$$
$$r=a+b\sin\theta,$$
$$r^{\bullet}=\theta^{\bullet}\,b\cos\theta=b\,\omega\cos\theta,$$
$$r^{\bullet\bullet}=-\theta^{\bullet}\,\omega b\sin\theta=-b\,\omega^2\sin\theta.$$

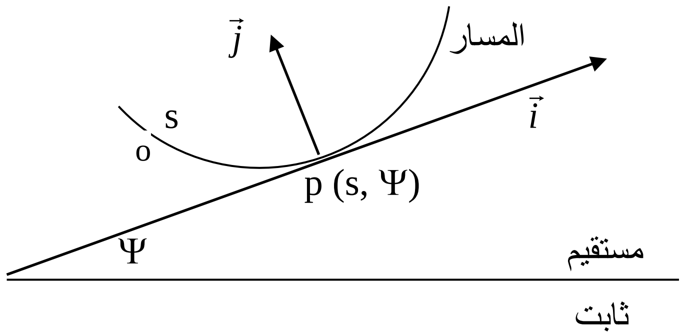
علي ذلك فان

$$v=(r^{\bullet},\ r\theta^{\bullet})=\omega\big(b\ \cos\theta,(a+b\ \sin\theta)\big)$$
$$v=\sqrt{b^2\ \cos^2\theta+(a+b\ \sin\theta)^2}=\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2+2ab\ \sin\theta+b^2\ \sin^2\theta}$$
$$v=\sqrt{b^2\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+a^2+2ab\ \sin\theta}=\sqrt{b^2+a^2+2ab\ \sin\theta}$$

ويكون كذلك

$$f=(r^{\bullet\bullet}-r\theta^{\bullet\,2},r\theta^{\bullet\bullet}+2r^{\bullet}\ \theta^{\bullet})=\big(-b\,\omega^2\sin\theta-\omega^2(a+b\sin\theta),\ 0+2b\,\omega^2\cos\theta\big),$$
$$f=\ \omega^2\big(-2b\sin\theta-a,\ 2b\cos\theta\big),$$
$$f=\sqrt{\big(-2b\sin\theta-a\big)^2+\big(2b\cos\theta\big)^2}=\omega^2\sqrt{4b^2\sin^2\theta+4ab\sin\theta+a^2+4b^2\cos^2\theta},$$
$$f=\omega^2\sqrt{4b^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+4ab\sin\theta+a^2}=\omega^2\sqrt{4b^2+4ab\sin\theta+a^2}$$

جـ- إيجاد سرعة وعجلة جسيم بدلالة الإحداثيات الذاتية:



عندما يتحرك جسيم فى مستوى حركة مقيدة كإنزلاق خرزة على سلك منحنى ثابت الشكل والموضع كانت الإتجاهات الملائمة للتحليل (حسب التجربة) التى تجعل دراسة الحركة أبسط ما يمكن من الوجهة الرياضية هى إتجاه المماس للمنحنى المعلوم وإتجاه العمودى عليه. وواضح أن هذين الإتجاهين يدوران مع حركة الجسيم فى مساره غير أنهما يحتفظان بتعامدهما. <u>وموضع الجسيم</u> p على المنحنى يتعين فى حالتنا هذه

من طــول القــوس s المقاس على المسار من نقطة ثابتة عليه o وزاوية ميل المماس لهذا المســار عنـد p علــى مستقيم ثابت فى المستوى ψ.

s,ψ الإحداثيات الذاتية للنقطة p وبمرور الزمن يتغير موضع الجسيم على مساره فتصبح كل من ψ , sدوال فى الزمن أى $s = s(t)$ ، $\psi = \psi(t)$ وهما أيضا معادلتان بارامتريتان للمســار حيــث t هــو البــارامتر. وإذا حذفنا هذا البارامتر t من هاتين المعادلتين نتجت معادلة تربط s, ψ تسمى بالمعادلة الذاتية للمسار (ψ) s = s

نختــار الآن متجهــى وحــده $\vec{j}$, $\vec{i}$ الأول منطبـق علــى الممــاس فــى اتجــاه تزايـد s (أى فــى الاتجــاه الموجب للمتغير التابع s) والثانى فى الاتجاه العمودى على الأول وفى اتجاه تزايد ψ (أى فى الاتجاه الموجـب للمتغير التابع ψ).

وسبق أن علمنا أن متجه السرعة فى إتجاه المماس للمسار ومقداره هو $\dot{s}$ لذلك نسـتطيع كتابــة $\vec{v}= \dot{s}\vec{i}$ وبإجراء التفاضل بالنسبة للزمن نحصل على متجه العجلة

$$\vec{f} = \ddot{s}\vec{i} + \dot{s}\dot{\vec{i}}$$

وبنفس الطريقة السابق توضيحها فى حالة الاحداثيات القطبية يمكن إثبات – فى حالتنا هذه - أن:

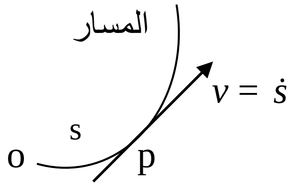
$$\dot{\vec{i}} = \dot{\psi}\,\vec{j}$$

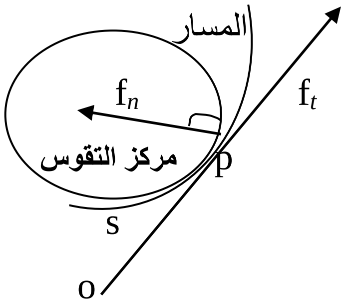
لأن اتجاه كل من $\vec{j}$, $\vec{i}$ يتغير مع حركة الجسيم ومن ثم:

$$\vec{f} = \ddot{s}\vec{i} + \dot{s}\dot{\psi}\,\vec{j} \quad , \quad \dot{s}\dot{\psi} = \frac{ds}{dt}\,\frac{d\psi}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\frac{d\psi}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \frac{\dot{s}^2}{\frac{ds}{d\psi}} = \frac{v^2}{\rho}$$

حيث $\rho = \dfrac{ds}{d\psi}$ وهى نصف قطر التقوس أو الانحناء للمنحنى أو المسار عند النقطة p.

إذن : $\vec{f} = \dot{v}\,\vec{j} + \dfrac{v^2}{\rho}\,\vec{j} = v\,\dfrac{dv}{ds}\,\vec{i} + \dfrac{v^2}{\rho}\,\vec{j}$





وهـذا يعنـى لعجلـة الجسـيم مركبتـان إحـداهما فـى اتجـاه الممـاس للمسـار وفـى اتجـاه تزايـد s ومقـدارها $f_t = \dot{v} = \ddot{s} = v\dfrac{dv}{ds}$ والأخرى عمودية على المماس وفى اتجاه تزايد ψ أو نحـو الـداخل للمنحنـى مـارة بمركز التقوس ومقدارها :

$$f_n = \frac{v^2}{\rho} = \dot{s}\,\dot{\psi}$$

وإذا كانت حركة الجسيم فى محيط دائرة نصف قطرها a ومركزها o. وهو أيضا مركز تقـوس المحـيط عنـد أى نقطة عليه بينما نصف قطر التقوس ثابت لجميع نقط المحيط ويساوى a فإن $(\rho = a)$:

$$v=\dot{s} = a\dot{\theta}\ ,\ s=a\theta\ ,\ f_n = \frac{v^2}{a} = a\dot{\theta}^2\ ,\ f_t = \ddot{s} = a\ddot{\theta}$$

(نحو مركز الدائرة كما سبق أن عرفنا).

ملحوظة:

إذا كانت عجلة الزاوية للجسيم حول o منتظمة فإنه يمكن الحصول على علاقات شبيهة بحالة الحركـة فى خط مستقيم بعجلة منتظمة كما يلى:

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \alpha = constant\ ,\quad d\dot{\theta} = \alpha\, dt\ ,\quad \dot{\theta} = \alpha t + \dot{\theta}_o$$

حيث $\dot{\theta}_o$ تمثل ثابت التكامل وهو قيمة السرعة الزاوية عند البدء $(t = o)$

$$d\theta = (\alpha t + \dot{\theta}_o)dt \quad , \quad \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \dot{\theta}_o t + \theta_o$$

حيث θ_o تمثل ثابت التكامل وهو قيمة الإزاحة الزاوية عند البدء . كذلك يمكن :

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \alpha \;, \; \dot{\theta}\, d\,\dot{\theta} = \alpha\, d\,\theta \quad , \; \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \alpha\,\theta + A$$

عند $\theta = \theta_o$ تكون $\dot{\theta} = \dot{\theta}_o$ إذن $A = \frac{1}{2}\dot{\theta}_o^2 - \alpha\theta_o$

$$\therefore \dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_o^2 + 2\alpha\,(\theta - \theta_o)$$

(5) إذا كانت مركبة العجـــلة فى إتجـاه المماس هــى : $ft = \frac{1}{1+v}$ حيث v السرعة فأوجد العلاقـة بـين v , s وكذلك العلاقة بين v والزمن t مع العلم بأن الجسـيم بدأ حركته من الســـكوت عــن s = o.

الحل

$$v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{1+v}$$

بفصـل المتغيـرات $(v + v^2)\,dv = ds$ وبالتكامـل $s = \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} + c$ عنـد $v = o, s = o$ تكـون $c = o$ كـذلك

$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{1+v}$ بفصـل المتغيرات $(1 + v)\,dv = dt$ ، $t = v + \frac{v^2}{2} + A$ عند $v = o,\; t = o$ تكون $A = o$.

مسائل ديناميكا

تمارين

1- يتحرك جسيم على القطع المكافىء $y = 2x^2$ حيث كل من x, y بالقدم والمركبة الأفقية لسرعته ثابتة وتساوى قدماً واحداً فى الثانية. أوجد عجلة الجسيم فى المقدار والاتجاه ، وأوجد أيضاً السرعة مقداراً واتجاهاً عند $y = 8$ ft .

الحل

$$\dot{y} = 4x\dot{x} = 4x \quad , \quad \ddot{y} = 4\dot{x} = 4 \quad , \quad \dot{x} = 1 \ , \ \ddot{x} = o$$

$$f = (\ddot{x} \ , \ \ddot{y}) = (o, 4) \quad , \quad |f| = 4$$

$$at \ y = 8 \rightarrow 8 = 2x^2 \quad , \quad x = \pm \ 2$$

$$at \ \underline{x=2} \quad , \quad \dot{x} = 1 \quad , \quad \dot{y} = 4x = 8 \quad ,$$

$$v = (1,8) \quad , \quad |v| = \sqrt{65}$$

$$at\, x = -2 \ , \ \dot{x} = 1 \quad \dot{y} = 4x = -8 \quad , \quad v = (1,-8) \quad , |v| = \sqrt{65}$$

2- المعادلتان البارامتريتان لمسار جسيم هما :

$$x = 2o\,t - 3t^2 \quad , \quad y = 16\,t - 4\,t^2$$

وفيها x , y بالقدم ، t بالثانية . أوجد العجلة وأقصى إرتفاع للجسيم فوق المحور x وسرعته فى هذا الموضع.

الحل

$$\dot{x} = 2o - 6t \quad , \quad \ddot{x} = -6$$

$$\dot{y} = 16 - 8t \quad , \quad \ddot{y} = -8$$

$$\therefore \ f = (-6 , -8) \quad , \quad |f| = 1oo$$

أقصى إرتفاع عند $\dot{y} = o$ ومنه:

$$\dot{y} = 16 - 8t = o \rightarrow (16 - 8t) = o \quad , \quad t = 2$$

$$y_{max} = 16\,(2) - 4\,(2)^2 = 32 - 16 = 16 \ \text{ft}$$

أما السرعة عندها :

$$\dot{x}\Big|_{t=2} = +8\,,\ \dot{y}\Big|_{t=2} = 16-16=o \qquad ,$$

$$V_{max} = (8\,,o) \qquad , \qquad \left|V_{max}\right| = 8$$

---

* نهاية المحاضرة الخامسة

3- يتحرك جسيم فى المنحنى $r = a^2\,\theta^2$ بسرعة زاوية منتظمة w حول القطب . أوجد السرعة والعجلة كدوال فى الزمن إذا علم أن الجسيم بدأ من النقطة $r = o$.

الحل

$$\dot{\theta} = w \qquad , \qquad \ddot{\theta} = o \qquad , \qquad \theta = wt + c$$
$$at\; t = o \qquad , \qquad \theta = o \qquad , \qquad c = o \qquad , \qquad \therefore\ \theta = wt$$

$$\dot{r} = 2a^2\ \theta\ \dot{\theta} = 2a^2\ w\,(wt) = 2a^2\ w^2 t \qquad ,$$

$$r\,\dot{\theta} = a^2\ w^2 t^2\ w = a^2\ w^3 t^2$$

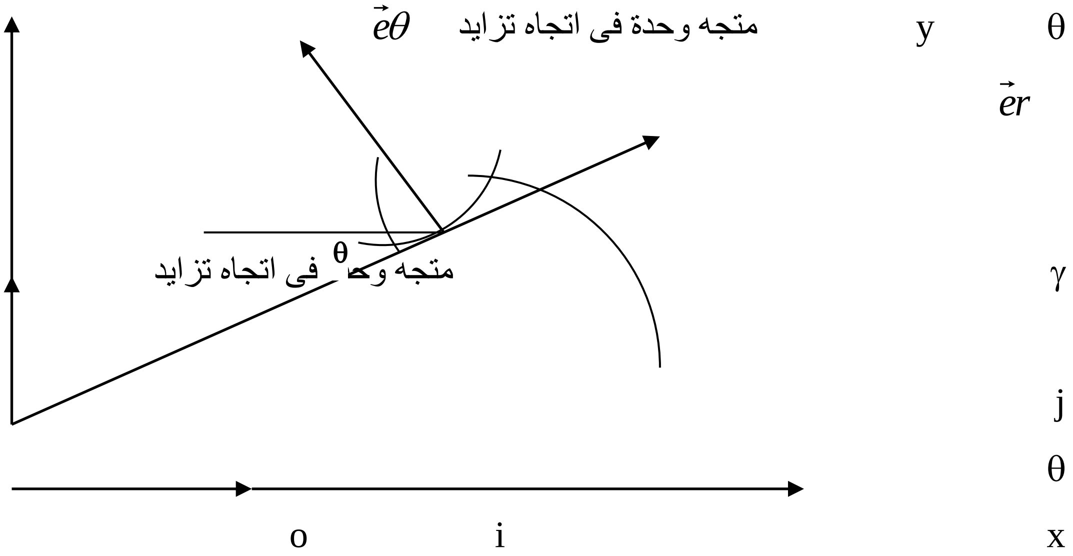
$$\therefore\ \vec{V} = (2a^2\ w^2 t \qquad , \qquad a^2\ w^3 t^2)$$
$$\ddot{r} = 2a^2\ w^2 \qquad , \qquad r\ \dot{\theta}^2 = a^2\ w^4 t^2$$
$$r\ \ddot{\theta} = a^2\ w^4 t^2\ (o) = o \qquad , \qquad \dot{r}\ \dot{\theta} = 2a^2\ w^3 t$$

$$\therefore\ \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 = 2a^2\ w^2 - a^2 w^4 t^2$$
$$r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\ \dot{\theta} = o + 4\,a^2\ w^3 t$$

الخلاصة

	الاحداثيات الكارتيزية	الاحداثيات القطبية	الاحداثيات الذاتية
الوضع	(x, y)	(r, θ)	(s, ψ)
السرعة	$(\dot{x}\ ,\ \dot{y})$	$(\dot{r}\ ,\ r\,\dot{\theta})$	$(\dot{s}\ ,\ o)$
العجلة	$(\ddot{x}\ ,\ \ddot{y})$	$(\ddot{r}-r\,\dot{\theta}^2\ ,\ \frac{1}{r}\frac{d\,r^2\,\dot{\theta}}{d\,t})$	$(\ddot{s}\ ,\frac{v^2}{\rho})$ $\rho=\frac{d\,s}{d\psi}=\frac{(1+y`^2)^{\frac{3}{2}}}{y``}=\frac{[1+(\frac{d\,y}{d\,x})^2]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}$
نقطة الأصل ومتجهات الوحدة	نقطة الأصل خارج المسار ومتجهات الوحدة ثابتة	نقطة الأصل خارج المسار ومتجهات الوحدة متغيرة مع الزمن	نقطة الأصل على المسار ومتجهات الوحدة متغيرة مع الزمن

إستنتاج مركبات السرعة فى الإحداثيات القطبية من نظيرتها الكارتيزية



$$x = r\cos\theta \qquad \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - \dot{\theta}\, r\sin\theta$$

$$y = r\sin\theta \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + \dot{\theta}\, r\cos\theta$$

r متجه وحدة فى اتجاه تزايد $\vec{e}r$

θ متجه وحدة فى اتجاه تزايد $\vec{e}\theta$

وكلاهما مقداره الوحدة ويتغير اتجاهه مع الزمن .

x متجه وحدة ثابت فى اتجاه تزايد $\vec{i}$

y متجه وحدة ثابت فى اتجاه تزايد $\vec{j}$

$$\boxed{\vec{i} = \vec{e}_r\cos\theta - \vec{e}_\theta\sin\theta \ , \ j = \vec{e}_r\sin\theta + \vec{e}_\theta\cos\theta \qquad (1)}$$

بالتعويض فى صيغة السرعة .

$$\vec{V} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} = (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)\,(\vec{e}_r\cos\theta - \vec{e}_\theta\sin\theta) +$$
$$+(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)\,(\vec{e}_r\sin\theta + \vec{e}_\theta\cos\theta)$$

$$= \vec{e}_r\,[\dot{r}\cos^2\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta + \dot{r}\sin^2\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta +$$

$$\vec{e}_\theta\,[-\dot{r}\cos\theta\sin\theta + r\dot{\theta}\sin^2\theta + \dot{r}\sin\theta\cos\theta + r\dot{\theta}\cos^2\theta]$$

$$= \vec{e}_r\,(\dot{r}) + \vec{e}_\theta\,(r\dot{\theta}) = (\dot{r}\,,\, r\dot{\theta})$$

للحصول على العجلة يمكن إستخدام الصيغة

$$\vec{f} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} = (\ddot{r}\cos\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - \ddot{\theta}r\sin\theta - \dot{\theta}\dot{r}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta)\,x$$
$$\vec{e}_r\cos\theta - \vec{e}_\theta\sin\theta) + (\ddot{r}\sin\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + \ddot{\theta}r\cos\theta$$
$$+\dot{\theta}\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta)(\vec{e}_r\sin\theta + \vec{e}_\theta\cos\theta)$$

أو بطريقة أخرى للعجلة بحل المعادلة (1) وإستخلاص $\vec{e}_\theta$ و $\vec{e}_r$ كالتالى :

$$\vec{i} = \vec{e}_r\cos\theta - \vec{e}_\theta\sin\theta \qquad (a)$$
$$\vec{j} = \vec{e}_r\sin\theta + \vec{e}_\theta\cos\theta \qquad (b)$$

بضرب (a) فى cos θ ، b فى sin θ والجمع

$$\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \qquad (2)$$

بضرب (a) فى sin θ ، b فى cos θ والطرح

$$\vec{e}_\theta = -\vec{i}\sin\theta + \cos\theta\,\vec{j} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ \frac{d\vec{e}_r}{dt} &= \dot{\theta}\,(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}) = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} &= \dot{\theta}\,(-\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j}) = -\dot{\theta}\vec{e}_r \end{aligned}\right\}$$

وهذا ما حصلنا عليه سابقا

$$\because\ \vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\therefore\ \vec{f} = \ddot{r}\,e_r + \dot{r}\dot{e}_r + \dot{r}\,\dot{\theta}\,e_\theta + r\,\ddot{\theta}e_\theta + r\dot{\theta}\dot{e}_\theta$$
$$= \ddot{r}\,e_r + \dot{\theta}\dot{r}\,e_\theta + \dot{r}\,\dot{\theta}e_\theta + r\,\ddot{\theta}e_\theta - r\dot{\theta}^2 e_r$$
$$= \vec{e}_r\,(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \vec{e}_\theta\,(2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$$

وأيضاً كما سبق.

1- يتحرك جسيم بسرعة زاوية ثابتة w فى مسار مستوى معادلته القطبية r = aθ حيث a مقدار ثابت.

أوجد سرعة وعجلة الجسيم إذا علمت أن الجسيم بدأ حركته من القطب.

الحل

$$\dot{\theta} = w \qquad , \qquad \theta = wt + c_1$$
$$at\ t = o \qquad , \qquad \theta = o \qquad , \qquad c_1 = o$$
$$\therefore\ \theta = wt \qquad , \qquad r = awt$$
$$\dot{r} = aw \qquad , \qquad \ddot{r} = o \qquad , \qquad \ddot{\theta} = o$$

مركبات السرعة :

$$\dot{r} = aw \qquad , \qquad r\dot{\theta} = awt(w) = aw^2 t$$

مركبات العجلة :

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = o - (awt)\, w^2 = -aw^3 t$$
$$r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = o + 2\,(aw)(w) = 2aw^2$$

2- أوجد عجلة جسيم يتحرك حركة مستوية بسرعة زاوية ثابتة مقدارها w إذا تحرك فى كل من المسارات القطبية الآتيه :

(i) $r = a + b\,\theta$

(ii) $r = ae^{\theta}$

حيث a, b ثابتان.

الحل

$$(i)\ \dot{\theta} = w \quad , \quad \ddot{\theta} = o \quad , \quad \dot{r} = b\,\dot{\theta} = bw \quad , \quad \ddot{r} = o$$
$$f_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = o - (a + b\theta)\, w^2 = -w^2\,(a + b\theta)$$
$$f_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = o + 2w\,(bw) = 2bw^2$$
$$(ii)\ \dot{r} = a\, e^{\theta}\,\dot{\theta} = a\,w e^{\theta} \quad , \quad \ddot{r} = a\,w e^{\theta}\dot{\theta} = aw^2 e^{\theta} \quad , \quad \ddot{\theta} = o$$

$$f_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = aw^2 e^{\theta} - a e^{\theta} w^2 = o$$

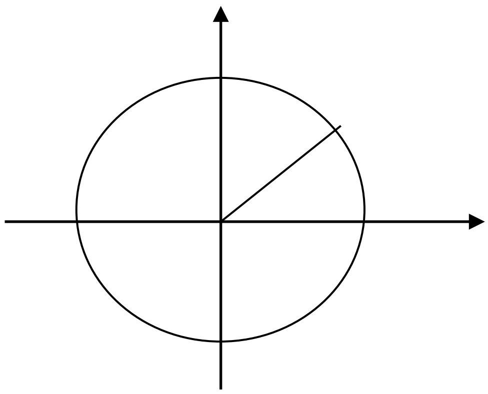
$$f_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = a\, e^{\theta}(o) + 2w(aw e^{\theta}) = 2aw^2 e^{\theta}$$

3- يتحرك جسيم على دائرة نصف قطرها a بين كيف يمكن وصف حركته بإستخدام كل من الإحداثيات الكارتيزية – الذاتية – القطبية.

الحل

الإحداثيات الكارتيزية :

y



a

θ

A

$$x = a\cos\theta\ ,\quad y = a\sin\theta$$

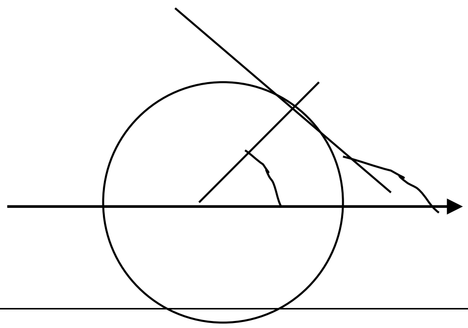
$$\dot{x} = -a\dot{\theta}\quad \sin(\theta) \qquad , \qquad \dot{y} = a\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\ddot{x} = -a\left[\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta\right] \qquad , \qquad \ddot{y} = a(-\dot{\theta}^2\sin\theta + \ddot{\theta}\cos\theta)$$

إذا كانت السرعة الزاوية ثابتة $\dot{\theta} = w$ و $\ddot{\theta} = o$ فإن مركبات العجلة.

$$\ddot{x} = -aw^2\cos\theta \qquad , \qquad \ddot{y} = -aw^2\sin\theta, \qquad f = aw^2$$

الذاتية :



Ψ a

x θ

$$s=a\,\theta=a\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$V=\frac{ds}{dt}=a\dot{\psi}=a\dot{\theta}$$

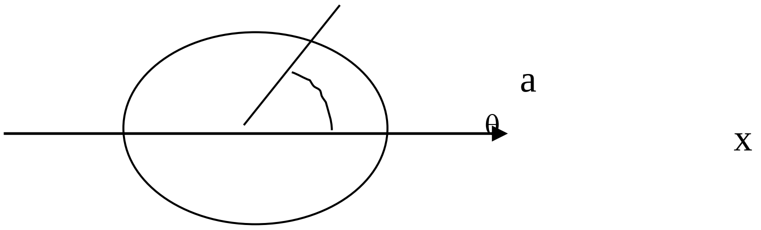
$$f_n=\frac{V^2}{\rho},\qquad \rho=\frac{ds}{d\psi}=a,\ \ f_n=\frac{(a\dot{\theta})^2}{a}=a\dot{\theta}^2$$

$$f_t=\frac{dv}{dt}=a\ddot{\psi}=a\ddot{\theta}$$

إذا كانت السرعة الزاوية ثابتة $\dot{\theta}=w$ و $\ddot{\theta}=o$

$f_t=o,$ $\qquad\qquad$ $f_n=\ a\,w^2$

القطبية:



$$r=a,\ \ \dot{r}=o,\ \ \ddot{r}=o$$

$$V_r=\dot{r}=o\qquad,\qquad V_\theta=r\dot{\theta}=a\dot{\theta}\qquad,\qquad V=a\dot{\theta}$$

$$f_r\ =\ \ddot{r}-r\dot{\theta}^2=\ -a\dot{\theta}^2\ =\ -\frac{V^2}{a}$$

$$f_\theta\ =r\,\ddot{\theta}\ +\ 2\dot{r}\dot{\theta}\ \ =\ a\ddot{\theta}+o$$

إذا كانت السرعة الزاوية ثابتة $\dot{\theta}=w$ و $\ddot{\theta}=o$

$$f_r=-\frac{V^2}{a},\quad f_\theta=o$$

4- إذا كانت المعادلة الذاتية لمسار جسيم يتحرك فى مستوى هى : $s=\alpha\, e^{\Psi}+\beta$

حيث α، β ثابتان، وأن المماس يدور بسرعة زاوية ثابتة w . أوجد سرعة وعجلة الجسيم .

الحل

$$\dot{\psi} = w \Rightarrow \psi = wt + c_1$$

$$at\ t = o \quad , \quad \psi = \psi_o \quad , \quad c_1 = \psi_o$$

$$\psi = \psi_o + wt \qquad , \qquad s = \alpha\, e^{\psi_o + wt} + \beta$$

$$v = \dot{s} = \alpha\, w\, e^{\psi_o + wt} \qquad , \qquad f_t = \ddot{s} = \alpha\, w^2\, e^{\psi_o + wt}$$

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = \alpha\, e^{\psi} = \alpha\, e^{\psi_o + wt}$$

$$f_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\alpha^2 w^2 e^{2(\psi_o + wt)}}{\alpha\, e^{(\psi_o + wt)}} = \alpha\, w^2\, e^{\psi_o + wt}$$

$$f_t = f_n \quad \therefore \quad f = \sqrt{f_t^2 + f_n^2} = \sqrt{2} \cdot \alpha\, w^2\, e^{\psi_o + wt}$$

5- بين أن العجلة الزاوية لاتجاه حركة جسيم فى مستوى تتعين من :

$$\frac{v}{\rho}\ \frac{dv}{ds} - \frac{v^2}{\rho^2}\ \frac{d\rho}{ds}$$

الحل

إتجاه الحركة (اتجاه السرعة) يصنع زاوية ψ مع خط ثابت فى المستوى $\dot{\psi}$ هى السرعة الزاوية لدوران هذا الاتجاه و $\ddot{\psi}$ هى العجلة الزاوية.

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{ds}\ \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho}$$

$$\ddot{\psi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\rho}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{v}{\rho}\right)\frac{ds}{dt} = \frac{d}{ds}\left(\frac{v}{\rho}\right)v$$

$$= v\,[\frac{1}{\rho}\ \frac{dv}{ds}\ + v\ \ (\frac{-1}{\rho^2})\ \ \frac{d\rho}{ds}]$$

$$=\ [\frac{v}{\rho}\ \frac{dv}{ds}\ -\ \frac{v^2}{\rho^2}\ \ \frac{d\rho}{ds}]$$

6- يتحرك جسيم فى محيط دائرة نصف قطرها a بدأ حركته من الوضع s = o بسرعة ابتدائية v_o . فإذا كان مقدار العجلة المماسية f_t والعجلة العمودية f_n مرتبطين بالعلاقة :

$f_t = -k f_n$ حيث k ثابت . أوجد العلاقة بين : (v, s) , (v, t) , (s, t) .

الحل

$$(1)\ v\frac{dv}{ds}\ =\ -k\ \frac{v^2}{a}\qquad ,\qquad \frac{dv}{v}=-k\frac{ds}{a}\ \longrightarrow \ln v=-\frac{ks}{a}+c_1$$

$$at\ \ s=o\ \ ,\ v=v_o\ \ ,\qquad c_1=\ln v_o\quad\longrightarrow$$

$$\boxed{v=v_o\ e^{\frac{-ks}{a}}}$$

<u>**مثال -**</u> - المعادلتان البارامتريتان لحركة جسيم فى مستوى همـا : $y = 20 - 5t^2$, $x = 5t$ حيـث t الزمن بالثانية ، x , y بالمتر . أوجد معادلة المسار الكارتيزية وسرعة الجسيم عند بدء الحركة وعند إلتقـاء الجسيم بالمحور x. أوجد أيضا عجلة الجسيم.

الحـــــــــل

بحذف t بين x ,y نحصل على $t = \frac{x}{5}$, $y = 20 - \frac{x^2}{5}$ وهـى المعادلـة الكارتيزيـة للمسـار. كـذلك $\dot{x} = 5$, $\dot{y} = -10t$ وعند بدء الحركة نضع $t = o$ فنجـد أن $\dot{x} = 5\ m/\sec$, $\dot{y} = o$ ، أى أن سـرعة الجسيم عند بدء الحركة كانت $5\ m/\sec$ فـى اتجـاه ox. ثـم نوجـد الـزمن عنـد إلتقـاء الجسـيم بـالمحور x

بوضــع $y = o$ فنحصـــل علــى $t = 2$ sec ونعوض فيكون $\dot{y} = -20$, $\dot{x} = 5$.

أى أنه عند التقاء الجسيم بالمحور x تكون سرعته :

$$V = \sqrt{25+400} = 7\sqrt{5}\, ml\sec$$

واتجاهها يصـنع $tan^{-1}(-4)$ مـع المحـور x . والعجلـة تتعـين مـن $\ddot{y} = -10$, $\ddot{x} = o$ هــذا يعنـى أن الجسيم يتحرك بعجلة منتظمة قدرها $10\ m/\sec^2$ فى الاتجاه السالب للمحور y.

<u>**مثال -**</u>- فى الحركة المستوية لجسيم كان احداثياه كدالة فى الزمن هما :

$$x = a\,[2t + \sin 2t] \qquad y = a\,[1 - \cos 2t]$$

إثبت أن العجلة ثابتة المقدار.

الحل

$$\dot{x} = a[2+2\cos 2t] \quad , \quad \dot{y} = 2a\sin 2t$$

$$\ddot{x} = -4a\sin 2t \quad , \quad \ddot{y} = 4a\cos 2t$$

مقدار العجلة هو $\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$ أى $4\,a$ وهو مقدار ثابت .

(3) أوجـد معادلــة المســار لجسـيم يتحـرك فــى مسـتوى بحيـث كانــت سـرعته عنـد أى لحظـة تتعـين مـن $\dot{x} = a + by$, $\dot{y} = c + bx$ حيث a, b, c ثوابت.

الحل

بالقسمة نحصل على :

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{c+bx}{a+by} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{c+bx}{a+by}$$

$$(a+by)\,dy = (c+bx)\,dx \quad , \quad \frac{1}{2b}(a+by)^2 = \frac{1}{2b}(c+bx)^2 + e$$

حيث e ثابت التكامل.