المحتويات

بسم الله الرحمن الرحيم

تمهيد

أفضلُ ما أبدأ به هو حمدُ اللهِ بما هو أهله وأصلي وأسلم على من لانبي بعده سيدنا محمد عليه وعلى آله وصحبه.

نعلم أنه حينما تؤثر القوى على الاجسام المادية فإما أن تجعلها في سكون أو تكسبها عجلة ومن ثم تتحرك ، ويمكن القول أنه في الحالة الأولي (السكون) تتزن مجموعة القوى المؤثرة على الجسم فيصبح الجسم ساكناً ، أما في الحالة الثانية والتي لا تتزن فيها القوى فيصبح الجسم في حالة حركة.

وعلم الميكانيكا هو العلم الذي يختص بدراسة الحالتين. ومن ثم فعلم الميكانيكا ينقسم إلى شقين الاستاتيكا والديناميكا ، وفي هذا الجزء من المنهج سنتناول بمشيئة الله دراسة الجزء الخاص بالاستاتيكا. فعلم الاستاتيكا يعني بدراسة عمليات تركيب وتحليل القوى وشروط توازن هذه القوى. ولما كانت هذه الدراسة هي البنية الاساسية لمشروعات الانشاء الهندسي اكتسب علم الاستاتيكا أهمية قصوى لدى المهندسين بشكل خاص.

وحيث أن القوى ما هي الا فصيل من فصائل المتجهات كما أن فهم علم الميكانيكا يحتاج إلى التعرف على نظام المتجهات فقد قمنا بدراسة المتجهات وتطبيقاتها في الفصل الأول. كما أحتوي الفصل الثاني والثالث على بعض المفاهيم والقوانين الاساسية واللازمة لدراسة حالة الاتزان والفعل ورد الفعل ، وما يسمى بالعزوم والازدواجات ، واختزال القوى ، اتصال الاجسام بمفصلات ملساء والتعرف على بعض طرق الارتكاز ، نتعرف كذلك في الفصل الرابع على الاحتكاك وزاوية الاحتكاك ومخروط الاحتكاك ودراسة اتزان الاجسام في وجود قوى الاحتكاك.

وأخيراً

" فإن كان من توفيق فمن الله وإن كان من خطأ فمن نفسي ومن الشيطان "

الفصل الأول

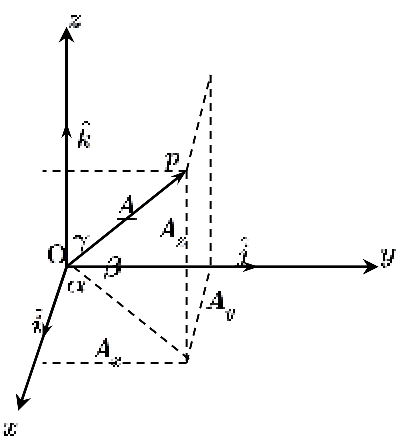
المتجهات Vectors

من المعلوم أن الكميات التي تظهر في علوم الرياضيات أو الطبيعية تنقسم إلى قسمين كميات متجهه و كميات قياسية.

الكميات المتجهه والكميات القياسية

هناك كميات طبيعية ، مثل الطول والكتلة والزمن ودرجة الحرارة والحجم والكثافة....الخ ، يلزم لتعيينها معرفة مقدارها فقط مثـل هـذه الكميـات تسـمى بالكميـات القياسـية **Scalar Quantities** ، وهناك كميات طبيعية أخرى ، مثل الإزاحة والسرعة والعجلة ...الخ يلزم لتعيينها معرفة كل من الاتجاه والمقدار لهـذه الكميـة وتسـمى بالكميـات المتجهـه **Vector Quantities** وسنرمز للمتجه A بالصورة $\underline{A}$.

التعبير عن المتجه



يمكن كتابة المتجه $\underline{A}$ (كمـا بالشـكل) في الاحـداثيات الكارتيزية حيـث $\underline{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ ، (A_x, A_y, A_z) هـي مركبـات المتجـه $\underline{A}$ ، $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ هي متجهات الوحدة الأساسية في اتجاه المحاور Ox, Oy, Oz على الترتيـب كـذلك يمكن كتابة المتجه بدلالة النقطتين $\underline{Op}$ حيث

$$\underline{A} = \underline{Op} = \underline{p} - \underline{O} = \; A_x, A_y, A_z \; - (0,0,0)$$

وبصفة عامة لأي متجه $\underline{A}$ يصل بين النقطتين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ فإن $\underline{A} = \underline{\mathbf{ab}} = \underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}}$

كذلك إذا كانت α, β, γ هي الزوايا التي يصنعها المتجـــه $\underline{A}$ مـــع محـــاور الاحـــداثيات $\mathbf{O}x, \mathbf{O}y, \mathbf{O}z$ على الترتيب فإن

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

كما نستنتج من هذه العلاقة (بالتربيع)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

توضيح

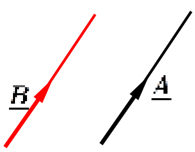
ومن ثم إذا أُعطيَ طول المتجه وليكن L والزوايا التي يصنعها مع المحاور ولتكن α, β, γ فإن مركبات المتجه تعين من

$$L_x = L\cos\alpha, \quad L_y = L\cos\beta, \quad L_z = L\cos\gamma \qquad \mathbf{(1)}$$

والمتجه الذي بدايته نقطة الاصل يسمى متجه الموضع.

تساوي متجهين

يُقال أن المتجهين $\underline{A}$, $\underline{B}$ متساويان إذا كان لهما نفس الطول ونفس الاتجاه ، وليس من الضروري أن يكون لهما نفس خـــط العمل ويُكتب $\underline{A} = \underline{B}$ أما المتجه $-\underline{A}$ هو متجه له نفس طول المتجه $\underline{A}$ وفي اتجاه معاكس له (يُقال معكوس المتجه $\underline{A}$).



طول المتجه

لأي متجه $\underline{A} = \quad A_x, A_y, A_z$ يمكن تعيين مقياس (طول) هذا المتجه A من

$$A = |\underline{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

متجه الوحدة

متجه الوحدة لمتجه ما $\underline{A}$ هو متجه طوله (مقياسه) الواحد وله نفس اتجاه المتجــه $\underline{A}$ و لأي متجه $\underline{A}$ يمكن تعيين متجه الوحدة له $\hat{A}$ من العلاقة $\hat{A} = \dfrac{\underline{A}}{A}$ أي أن أي متجــه يمكــن أن يكتب في الصورة $\underline{A} = A\hat{A}$. ومن الجدير بالذكر أن $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ تســمى بمتجهــات الوحــدة الاساسية حيث $\hat{i}$ متجه وحدة في اتجاه المحور Ox ، $\hat{j}$ متجه وحدة في اتجاه المحور Oy ، $\hat{k}$ متجه وحدة في اتجاه المحور Oz . من العلاقة (1) السابقة

$$L_x = L\cos\alpha, \quad L_y = L\cos\beta, \quad L_z = L\cos\gamma$$

ومن ثم نستنتج أن

$$\underline{L} = L_x\hat{i} + L_y\hat{j} + L_z\hat{k} = L\cos\alpha\,\hat{i} + L\cos\beta\,\hat{j} + L\cos\gamma\,\hat{k}$$

$$= L \;\; \cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k} \;\; = L\hat{L}$$

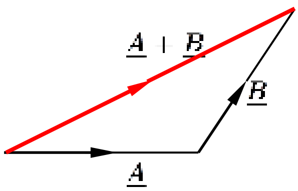
أي أن $\hat{L} = \cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k}$ يمثل متجه وحدة للمتجه $\underline{L}$ ، أي أن جيوب تمام الاتجاه لزوايا متجه ما هي مركبات متجه الوحدة لهذا المتجه.

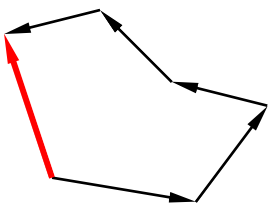
جمع وطرح المتجهات

لأي مـــتجهين $\underline{A}\,,\,\underline{B}$ حيـــث $\underline{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ ، $\underline{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ يمكن تعيين حاصل جمعهما أو طرحهما من

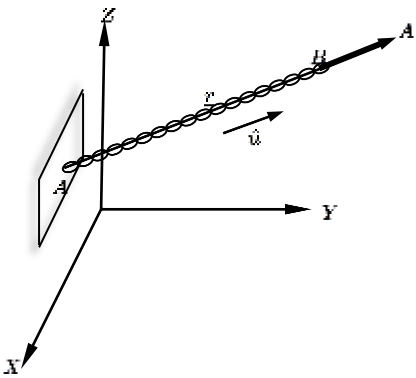
$$\underline{A} \pm \underline{B} = \;\; A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \;\; \pm \;\; B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$
$$= \;\; A_x \pm B_x \;\; \hat{i} + \;\; A_y \pm B_y \;\; \hat{j} + \;\; A_z \pm B_z \;\; \hat{k}$$

كذلك يمكن تعيين حاصل جمع المـــتجهين $\underline{A}\,,\,\underline{B}$ كمـــا بالشكل ٢ وهو المتجه الذي يقفل المثلث وتعرف هـــذه القاعدة بقاعدة المثلث ، وهذه القاعدة تنطق لأي شكل بحيث إذا وضعت المتجهات في اتجاه دوري واحد لتكون شكل ما كانت محصلة هذه المتجهات هو المتجه الـــذي يقفل الشكل وفي اتجاه معاكس (كما بالشكل).





تعيين المتجه بدلالة نقطتين



في كثير من الأحيان في مسائل الاســـتاتيكا ثلاثيـــة الأبعاد ، يتم تحديد اتجاه القوة بنقطتين يمر عبرهما خط عملها .يظهر مثل هذا الموقف في الشكل المجـــاور ، حيث المتجه $\underline{A}$ يتجه مباشرة على طول الحبل AB يمكننا صياغة $\underline{A}$ كمتجه ديكارتي من خلال إدراك أن له نفس اتجاه المتجه الموضع $\underline{r}$ الموجه من النقطة A إلى النقطة B على حبل يتم تحديد هذا الاتجاه الشائع بواسطة متجه الوحدة $\hat{u} = \underline{r} / r$ بالتالي،

$$\underline{A} = A\hat{u} = A\left(\frac{\underline{r}}{r}\right) = A\left(\frac{(x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}\right)$$

الضرب القياسي

يمكن تعيين حاصل الضرب القياسي للمتجهين $\underline{A}$, $\underline{B}$ حيث $\underline{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ ، $\underline{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ والذي يُكتب على الصورة $\underline{A}.\underline{B}$ بإحدى طريقتين

$$\underline{A}.\underline{B} = \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\right) . \left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}\right) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

أو

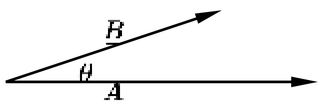
$$\underline{A}.\underline{B} = AB\cos\theta$$

حيث A , B هما طولا المتجهين $\underline{A}$, $\underline{B}$ ، θ هي الزاوية بين المتجهين $\underline{A}$, $\underline{B}$ ، نلاحظ أن حاصل الضرب القياسي هو كمية قياسية ، كذلك هناك بعض القوانين الأساسية مثل

$$\underline{A}.\underline{A} = A^2, \qquad \underline{A}.\underline{B} = \underline{B}.\underline{A},$$

$$\underline{A}.(\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A}.\underline{B} + \underline{A}.\underline{C},$$

$$\left(\lambda\underline{A}\right).\underline{B} = \underline{A}.\left(\lambda\underline{B}\right) = \lambda\left(\underline{A}.\underline{B}\right)$$

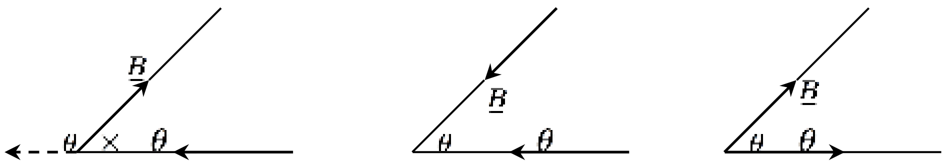


نلاحظ كذلك من تعريف حاصل الضرب القياسي أنه إذا كان $\underline{A}.\underline{B}=0$ ولم تكن المتجهات $\underline{A}\,,\,\underline{B}$ صفرية فإن المتجهين $\underline{A}\,,\,\underline{B}$ متعامدان ، وإذا كـــان المتجهـــان متـــوازيين فإن $\underline{A}.\underline{B}=AB$.

يمكن أيضاً تعيين الزاوية بين المتجهين $\underline{A}\,,\,\underline{B}$ من العلاقة $\cos\theta=\dfrac{\underline{A}.\underline{B}}{AB}$

كما يُعطينا حاصل الضرب القياسي الشغل المبذول بالقوة $\underline{F}$ لتحريك جســم ازاحــة $\underline{r}$ حيث $W=\underline{F}.\underline{r}$.

انتبه: الزاوية بين المتجهين إما أن يكون المتجهان داخلين عند النقطة أو خارجين منـــها كمـــا بالشكل.



الضرب الاتجاهي

يُعـــرف حاصــــل الضــــرب الاتجــــاهي للمــــتجهين $\underline{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$ ، $\underline{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$ والذي يُكتب على الصورة $\underline{A}\wedge\underline{B}$ أو $\underline{A}\times\underline{B}$ بأحدى طريقتين

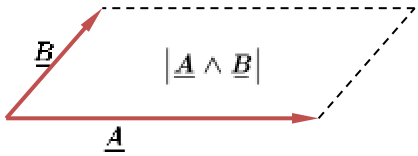
$$\underline{A}\wedge\underline{B}=\ AB\sin\theta\ \hat{n}$$

حيث $\hat{n}$ متجه وحده عمودي على مستوى المتجهين $\underline{A}\,,\,\underline{B}$ أو بطريقة أخرى

$$\underline{A}\wedge\underline{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

$$=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}-(A_xB_z-A_zB_x)\hat{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}$$

نلاحظ أنه إذا كان المتجهان متساويين أو متوازيين ينعدم حاصل الضرب الاتجــاهي لهمـــا. واضح كذلك أن حاصل الضرب الاتجاهي هو كمية متجهه ، أيضاً هناك بعــض القـــوانين الأساسية مثل



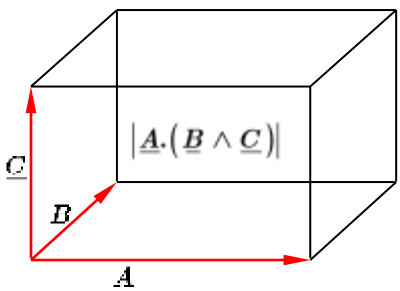
$$\underline{A} \wedge \underline{A} = \underline{0},$$
$$\underline{A} \wedge \underline{B} = -\underline{B} \wedge \underline{A},$$
$$\underline{A} \wedge (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \wedge \underline{B} + \underline{A} \wedge \underline{C},$$
$$\lambda\underline{A} \ \wedge \underline{B} = \underline{A} \wedge \ \lambda\underline{B} \ = \lambda \ \underline{A} \wedge \underline{B}$$

تحقق من هذه العلاقات

إذا كان $\underline{A} \wedge \underline{B} = \underline{0}$ ولم تكن المتجهات $\underline{A}$, $\underline{B}$ صفرية فإن المتجهين $\underline{A}$, $\underline{B}$ متوازيان.

أحد تطبيقات حاصل الضرب الاتجاهي هو حساب مساحة متوازي الاضـــلاع والـــذي لـــه $\underline{A}$, $\underline{B}$ ضلعين متجاورين حيث تتعين مساحة متوازي الاضلاع من $|\underline{A} \wedge \underline{B}|$.

الضرب الثلاثي القياسي



حاصـــل الضـــرب الثلاثـــي لثلاثـــة متجهـــات $\underline{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ ، $\underline{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ ، $\underline{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}$ والذي يُكتب على الصورة $\underline{A}. \ \underline{B} \wedge \underline{C}$ يُعرف على الصورة

$$\underline{A}. \ \underline{B} \wedge \underline{C} \ = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

ومن خواص المحددات يمكن استنتاج أن

$$\underline{A}.\ \underline{B} \wedge \underline{C} = \underline{C}.\ \underline{A} \wedge \underline{B} = \underline{B}.\ \underline{C} \wedge \underline{A}$$

اثبت ذلك بنفسك

والقيمة $|\underline{A}.\ \underline{B} \wedge \underline{C}|$ تعطينا حجم متوازي السطوح والذي فيه $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ ثلاثة متجهات متلاقية عند ركن من أركان متوازي السطوح. كذلك إذا تلاشى حاصل الضرب الثلاثي لثلاثة متجهات يُقال أن المتجهات تقع في مستوى واحد.

الضرب الثلاثي الاتجاهي

يرمز لحاصل الضرب الثلاثي الاتجاهي بالصورة $\underline{A} \wedge\ \underline{B} \wedge \underline{C}$ ويمكن حسابه من العلاقة

$$\underline{A} \wedge\ \underline{B} \wedge \underline{C} = \underline{A}.\underline{C}\ \underline{B} - \underline{A}.\underline{B}\ \underline{C}$$

كما يمكن استنتاج أن

$$\underline{A} \wedge\ \underline{B} \wedge \underline{C} \neq \underline{A} \wedge \underline{B}\ \wedge \underline{C}$$

اثبت ذلك بنفسك

﴿ مثـــ ١ ـــال ﴾

أوجد متجه وحـــدة يـــوازي محصـــلة المـــتجهين $\underline{A}\ ,\ \underline{B}$ حيـــث $\underline{A} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + 3\hat{k}$ ، $\underline{B} = -4\hat{i} + 8\hat{j} - \hat{k}$.

﴿ الحـــــل ﴾

محصلة المتجهين هي

$$\underline{R} = \underline{A} + \underline{B} = \left(2\hat{i} - 7\hat{j} + 3\hat{k}\right) + \left(-4\hat{i} + 8\hat{j} - \hat{k}\right) = -2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

ومتجة الوحدة $\hat{R}$ للمحصلة يتعين من

$$\hat{R} = \frac{\underline{R}}{R} = \frac{-2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}}{3}$$

﴿ مثـــ ٢ ـــال ﴾

أوجـــــد قيمـــــة الثابـــــت λ لكـــــي يتعامـــــد المتجهـــــان $\underline{A} = 2\lambda\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$ ، $\underline{B} = 4\hat{i} - 3\lambda\hat{j} + \lambda\hat{k}$.

﴿ الحـــــل ﴾

نعلم أن شرط تعامد المتجهين $\underline{A}\ ,\ \underline{B}$ هو تلاشي حاصل ضربهما القياسي أي أن $\underline{A}.\underline{B} = 0$

$$\therefore\ \underline{A}.\underline{B} = \left(2\lambda\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}\right).\left(4\hat{i} - 3\lambda\hat{j} + \lambda\hat{k}\right) = 8\lambda - 3\lambda^2 + \lambda = 0 \quad \therefore\ \lambda = 0,3$$

﴿ مثـــ ٣ ـــال ﴾

أوجـــــد متجـــــه وحـــــدة عمـــــودي علـــــى مســـــتوى المـــــتجهين $\underline{a} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ ، $\underline{b} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$.

﴿ الحـــــل ﴾

نعلم أن المتجة $\underline{a} \wedge \underline{b}$ هو متجه عمودي على مستوى المتجهين $\underline{a}, \underline{b}$ ولذلك

$$\underline{a} \wedge \underline{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}$$

ومن ثم فإن متجه الوحدة في اتجاه $\underline{a} \wedge \underline{b}$ أي في الاتجاه العمودي على مستوى المتجهين $\underline{a}, \underline{b}$

$$\hat{n} = \frac{\underline{a} \wedge \underline{b}}{\left|\underline{a} \wedge \underline{b}\right|} = \cancel{5}\,\frac{3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}}{\cancel{5}\sqrt{49}} = \frac{1}{7}\left(3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}\right)$$

﴾ مثـــال ٤ ﴿

أوجد متجه وحدة للمتجه الذي يصل من النقطة $A(2,-1,3)$ إلى النقطة $B(3,1,5)$.

﴾ الحـــــل ﴿

المتجه الذي يصل من النقطة A إلى النقطة B يتعين من

$$\underline{r} = \underline{AB} = \underline{B} - \underline{A} = (3,1,5) - (2,-1,3) = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

ومن ثم فإن متجه الوحدة لهذا المتجه هو

$$\hat{r} = \frac{\underline{AB}}{\left|\underline{AB}\right|} = \frac{\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3} = \frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$$

﴾ مثـــال ٥ ﴿

إذا كان $\underline{A} + \underline{B} = 5\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ، $\underline{A} \wedge \underline{B} = 8\hat{i} - 14\hat{j} + \hat{k}$ أوجد المتجهين $\underline{B}$, $\underline{A}$.

﴾ الحـــــل ﴿

بفرض أن مركبات المتجه $\underline{A}$ هي A_x, A_y, A_z

$$\because\ \underline{A} + \underline{B} = 5\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k} \qquad \Rightarrow \underline{A} \wedge \left(\underline{A} + \underline{B}\right) = \overbrace{\cancel{\underline{A} \wedge \underline{A}}}^{0} + \underline{A} \wedge \underline{B} = \underline{A} \wedge \underline{B}$$

$$\because\ \underline{A} \wedge \left(\underline{A} + \underline{B}\right) = \underline{A} \wedge \underline{B}$$

$$\Rightarrow\ \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\right) \wedge \left(5\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}\right) = 8\hat{i} - 14\hat{j} + \hat{k}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \left(2A_y - 3A_z\right)\hat{i} - \left(2A_x - 5A_z\right)\hat{j} + \left(3A_x - 5A_y\right)\hat{k}$$

$$\because\ \left(2A_y - 3A_z\right)\hat{i} - \left(2A_x - 5A_z\right)\hat{j} + \left(3A_x - 5A_y\right)\hat{k} = 8\hat{i} - 14\hat{j} + \hat{k}$$

$$\therefore\ 2A_y - 3A_z = 8, \qquad 2A_x - 5A_z = 14, \qquad 3A_x - 5A_y = 1$$

وبحل الثلاث معادلات الأخيرة نحصل على

$$A_x = 2, \quad A_y = 1, \qquad A_z = -2 \qquad\qquad \therefore\ \underline{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

ومن المعطيات $\underline{A} + \underline{B} = 5\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ يكون المتجه $\underline{B} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$

نلاحظ أن هناك عدد لانهائي من المتجهات $\underline{B}$, $\underline{A}$ يمكن أن يحققا المعادلات المعطاة منها

$$\underline{A} = 7\hat{i} + 4\hat{j} \qquad \text{and} \qquad \underline{B} = -2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

وهكذا........ اوجد متجهات أخرى تحقق نفس المعطيات.

﴿ مثـــ ٦ ـــال ﴾

أوجد المتجه $\underline{x}$ الذي يحقق المعادلات الآتية $\underline{a} \wedge \underline{x} = \underline{b} + \underline{a}$, $\underline{a}.\underline{x} = b$.

﴿ الحـــــل ﴾

بضرب طرفي المعادلة $\underline{a} \wedge \underline{x} = \underline{b} + \underline{a}$ اتجاهياً في المتجه $\underline{a}$ واســـتخدام تعريـــف حاصـــل الضرب الثلاثي الاتجاهي نحصل على

$$\underline{a} \wedge \ \underline{a} \wedge \underline{x} \ = \underline{a} \wedge \ \underline{b} + \underline{a}$$

$$b \qquad\qquad a^2$$

$$\therefore\ \ \underline{a}.\underline{x}\ \ \underline{a} - \ \ \underline{a}.\underline{a}\ \ \underline{x} = \underline{a} \wedge \underline{b} + \cancel{\underline{a} \wedge} \underline{a}$$

$$\therefore\ b\underline{a} - a^2\underline{x} = \underline{a} \wedge \underline{b} \qquad \Rightarrow \underline{x} = \frac{b\underline{a} - \underline{a} \wedge \underline{b}}{a^2}$$

﴿ مثـــ ٧ ـــال ﴾

أوجد المتجه $\underline{x}$ الذي يحقق المعادلة الآتية $\underline{a} \wedge \underline{x} + \underline{x} + m\underline{a} = \underline{0}$ حيث m عدد قياسي.

﴿ الحــــــل ﴾

بضرب طرفي المعادلة $\underline{a} \wedge \underline{x} + \underline{x} + m\underline{a} = \underline{0}$ قياسياً في المتجه $\underline{a} \wedge \underline{x}$ نحصل على

$$\underline{a} \wedge \underline{x} \cdot \underline{a} \wedge \underline{x} + \underbrace{\underline{x}.\ \underline{a} \wedge \underline{x}}_{0} + m\underbrace{\underline{a}.\ \underline{a} \wedge \underline{x}}_{0} = \underline{0}$$

$$\therefore \left|\underline{a} \wedge \underline{x}\right|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{a} \wedge \underline{x} = \underline{0}$$

بالتعويض من النتيجة الأخيرة في المعادلة الأصلية يكون

$$\therefore \underline{x} + m\underline{a} = \underline{0} \qquad \Rightarrow \underline{x} = -m\underline{a}$$

﴿ مثـــ ٨ ـــال ﴾

أوجد المتجه $\underline{x}$ والذي يحقق المعادلة $k\underline{x} + \underline{a} \wedge \underline{x} = \underline{b}$ حيث k عدد قياسي.

﴿ الحــــــل ﴾

بضرب المعادلة $k\underline{x} + \underline{a} \wedge \underline{x} = \underline{b}$ قياسياً في $\underline{a}$ ومن ثم

$$\underline{a}\bullet(k\underline{x} + \underline{a} \wedge \underline{x}) = \underline{a}\bullet\underline{b}$$

$$k(\underline{a}\bullet\underline{x}) + \underbrace{\underline{a}\bullet\cancel{(\underline{a} \wedge \underline{x})}}_{0} = \underline{a}.\underline{b} \qquad \Rightarrow k(\underline{a}\bullet\underline{x}) = \underline{a}\bullet\underline{b} \qquad \therefore \underline{a}\bullet\underline{x} = \frac{\underline{a}\bullet\underline{b}}{k}$$

مرة أخرى بضرب المعادلة $k\underline{x} + \underline{a} \wedge \underline{x} = \underline{b}$ اتجاهياً في $\underline{a}$ واستخدام حاصل الضرب الثلاثي الاتجاهي يكون

$$k(\underline{a} \wedge \underline{x}) + \underbrace{\underline{a} \wedge (\underline{a} \wedge \underline{x})}_{(\underline{a}\bullet\underline{x})\underline{a} - (\underline{a}\bullet\underline{a})\underline{x}} = \underline{a} \wedge \underline{b}$$

$$\Rightarrow k(\underline{a} \wedge \underline{x}) + (\underline{a}\bullet\underline{x})\underline{a} - a^2\underline{x} = \underline{a} \wedge \underline{b}$$

حيث أن المعادلة $k\underline{x} + \underline{a} \wedge \underline{x} = \underline{b}$ تؤدي الى $\underline{a} \wedge \underline{x} = \underline{b} - k\underline{x}$ وبالتعويض في المعادلة السابقة ينتج أن

$$\Rightarrow k(\underline{b}-k\underline{x})+\left(\frac{\underline{a}\bullet\underline{b}}{k}\right)\underline{a}-a^2\underline{x}=\underline{a}\wedge\underline{b}$$
$$\Rightarrow (a^2+k^2)\underline{x}=k\underline{b}+\left(\frac{\underline{a}\bullet\underline{b}}{k}\right)\underline{a}-\underline{a}\wedge\underline{b}$$

Or $$\underline{x}=\frac{1}{k(a^2+k^2)}\{k^2\underline{b}+(\underline{a}\bullet\underline{b})\underline{a}-k\underline{a}\wedge\underline{b}\}$$

﴿ مثـــ ٩ ـــال ﴾

أثبت صحة العلاقات التالية

$(i)\underline{A}\wedge\ \ \underline{B}\wedge\underline{C}\ \ +\underline{B}\wedge\ \ \underline{C}\wedge\underline{A}\ \ +\underline{C}\wedge\ \ \underline{A}\wedge\underline{B}\ \ =\underline{0}$

$(ii)(\underline{A}+\underline{B})\wedge(\underline{B}-\underline{A})=2\underline{A}\wedge\underline{B}$

$(iii)\underline{A}.\ \ \underline{A}\wedge\underline{B}\ \ =0$

﴿ الحـــــل ﴾

(i)من تعريف حاصل الضرب الثلاثي الاتجاهي يكون

$$\begin{aligned}\underline{A}\wedge\ \ \underline{B}\wedge\underline{C}\ \ &=\ \ \underline{A}.\underline{C}\ \ \underline{B}-\ \ \underline{A}.\underline{B}\ \ \underline{C}\\ \underline{B}\wedge\ \ \underline{C}\wedge\underline{A}\ \ &=\ \ \underline{B}.\underline{A}\ \ \underline{C}-\ \ \underline{B}.\underline{C}\ \ \underline{A}\\ \underline{C}\wedge\ \ \underline{A}\wedge\underline{B}\ \ &=\ \ \underline{C}.\underline{B}\ \ \underline{A}-\ \ \underline{C}.\underline{A}\ \ \underline{B}\end{aligned}$$

وبجمع المعادلات الثلاث مع ملاحظة أن خاصية التبديل متحققة مع الضرب القياسي ينتج أن

$$\underline{A}\wedge\ \ \underline{B}\wedge\underline{C}\ \ +\underline{B}\wedge\ \ \underline{C}\wedge\underline{A}\ \ +\underline{C}\wedge\ \ \underline{A}\wedge\underline{B}\ \ =\underline{0}$$

(ii) حيث أن

$$(\underline{A}+\underline{B})\wedge(\underline{B}-\underline{A})=\underline{A}\wedge\underline{B}-\overbrace{\cancel{\underline{A}\wedge\underline{A}}}^{0}+\overbrace{\cancel{\underline{B}\wedge\underline{B}}}^{0}-\underline{B}\wedge\underline{A}$$
$$=\underline{A}\wedge\underline{B}+\underline{A}\wedge\underline{B}=2\ (\underline{A}\wedge\underline{B})$$

(من خواص حاصل الضرب الاتجاهي)

(iii) حيث أن $$\underline{A}.\ \ \underline{A}\wedge\underline{B}\ \ =\underline{B}.\ \overbrace{\cancel{\underline{A}\wedge\underline{A}}}^{0}\ \ =0$$

أو بطريقة أخرى من خواص المحددات (نظراً لتساوي صفين)حيث أن

$$\underline{A}.\ \underline{A}\wedge\underline{B} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = 0$$

﴿ مثـــ ١٠ ـــال ﴾

لأي اربعة متجهات $\underline{A},\underline{B},\underline{C},\underline{D}$ اثبت أن

$$\underline{D}.\ \ \underline{A}\wedge\ \ \underline{B}\wedge\ \ \underline{C}\wedge\underline{D} \quad = \ \underline{B}.\underline{D}\quad \underline{C}\wedge\underline{D}\ .\underline{A}$$

﴿ الحـــــل ﴾

$$\text{L.H.S.} = \underline{D}.\left\{\underline{A}\wedge\ \underbrace{\underline{B}\wedge\ \ \underline{C}\wedge\underline{D}}_{\downarrow}\ \right\}$$

$$= \underline{D}.\left\{\underline{A}\wedge\ \overbrace{\ \underline{B}.\underline{D}\ \ \underline{C} - \ \underline{B}.\underline{C}\ \ \underline{D}\ }\right\}$$

$$= \underline{D}.\ \ \ \underline{A}\wedge\underline{C}\ \ \ \underline{B}.\underline{D}\ - \ \underline{B}.\underline{C}\ \ \ \underline{A}\wedge\underline{D}$$

$$= \ \underline{B}.\underline{D}\ \ \ \underline{D}.\ \ \underline{A}\wedge\underline{C}\ \ - \ \underline{B}.\underline{C}\ \ \overbrace{\cancel{\underline{D}.\ \underline{A}\wedge\underline{D}}}^{0}$$

$$= \ \underline{B}.\underline{D}\ \ldots \wedge\underline{C}$$

$$= \ \underline{B}.\underline{D}\ \ldots \wedge\underline{D}\ \ldots \text{H.S.}$$

L.H.S. means Left hand side, **R.H.S. means Right hand side**

والآن يمكن استخدام المتجهات في اثبات بعض العلاقات الاتجاهية

﴿ مثـــال ١١ ﴾

ABCDEF شكل سداسي منتظم. أثبت أن $\underline{AB}+\underline{AC}+\underline{AE}+\underline{AF}=2\underline{AD}$

﴿ الحـــــل ﴾

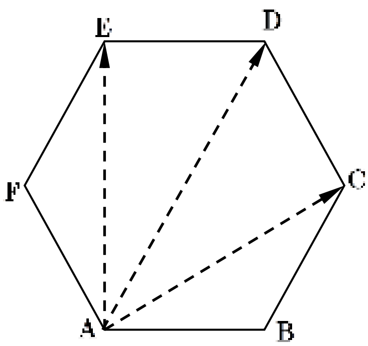
$\because\ \underline{AD}=\underline{AC}+\underline{CD},\qquad \text{and}\qquad \underline{AD}=\underline{AE}+\underline{ED}$

$\therefore\ 2\underline{AD}=\underline{AC}+\underline{AE}+\underset{\underline{AF}}{\underline{CD}}+\underset{\underline{AB}}{\underline{ED}}$

ولكن $\underline{AB}=\underline{ED},\quad \text{and}\quad \underline{AF}=\underline{CD}$

وبالتالي يكون

$\underline{AB}+\underline{AC}+\underline{AE}+\underline{AF}=2\underline{AD}$



﴿ مثـــ ١٢ ـــال ﴾

إذا كانت المستقيمات AB, AC, AD في المثلث ABC حيث D نقطة تقسم BC بنســـبة $\lambda : \mu$ تمثل المتجهات $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}$ على الترتيب فاثبت $\lambda \underline{r}_1 + \mu \underline{r}_2 = (\lambda + \mu)\underline{r}$.

﴿ الحــــــل ﴾

من الشكل بالاسفل نجد أن

$$\underline{r} = \underline{r}_1 + \underline{\mathbf{BD}}, \qquad \text{and} \qquad \underline{r} = \underline{r}_2 + \underline{\mathbf{CD}}$$

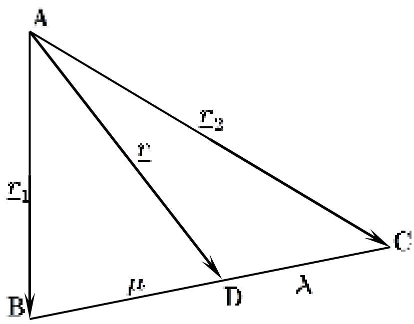
بضرب الجزء الأول في λ والجزء الثاني في μ والجمع

$$\therefore (\lambda + \mu)\underline{r} = \lambda \underline{r}_1 + \mu \underline{r}_2 + \underbrace{\lambda \underline{\mathbf{BD}} + \mu \underline{\mathbf{CD}}}_{0} \qquad \Rightarrow (\lambda + \mu)\underline{r} = \lambda \underline{r}_1 + \mu \underline{r}_2$$

حيث $\dfrac{\underline{\underline{\mathbf{BD}}}}{\underline{\mathbf{DC}}} = \dfrac{\mu}{\lambda}$ أي أن $\mu \underline{\mathbf{DC}} = \lambda \underline{\mathbf{BD}} \quad \Leftarrow \quad \lambda \underline{\mathbf{BD}} + \mu \underline{\mathbf{CD}} = 0$

مع مراعاة الاتجاه في النسبة في العلاقة $\dfrac{\underline{\underline{\mathbf{BD}}}}{\underline{\mathbf{DC}}} = \dfrac{\mu}{\lambda}$

هذا المثال سيستخدم كنظرية في اثبات بعض العلاقات ونلاحظ أنـــه عنـــدما تكـــون D في منتصف المسافة BC فإن الاثبات السابق يأخذ الصـــورة $2\underline{r} = \underline{r}_1 + \underline{r}_2$ وذلـــك بوضـــع $\lambda = \mu = 1$ في العلاقة السابقة



﴿ مثــ ١٣ ـــال ﴾

إذا كان a', b', c' هي منتصفات أضلاع المثلث abc فاثبت أن

$$\underline{Oa'} + \underline{Ob'} + \underline{Oc'} = \underline{Oa} + \underline{Ob} + \underline{Oc}$$

حيث O هي نقطة اختيارية.

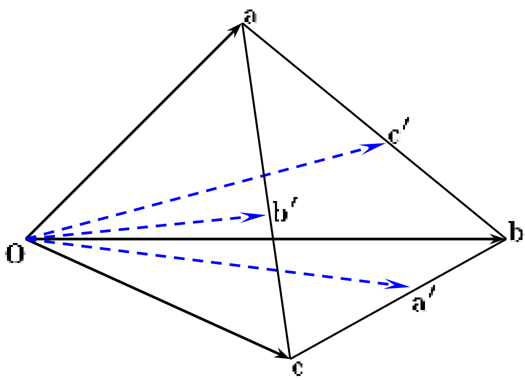
﴿ الحـــــل ﴾

من النظرية السابقة (مثــ ١١ ـــال) حيث أن المنصفات تقسم الأضلاع بنسبة 1 : 1 فإن

$$2\underline{Oa'} = \underline{Ob} + \underline{Oc}$$

$$2\underline{Ob'} = \underline{Oa} + \underline{Oc}$$

$$2\underline{Oc'} = \underline{Oa} + \underline{Ob}$$



بجمع المعادلات الثلاث ينتج أن

$$2\left(\underline{Oa'} + \underline{Ob'} + \underline{Oc'}\right) = \underline{Oa} + \underline{Ob} + \underline{Oa} + \underline{Oc} + \underline{Ob} + \underline{Oc} = 2\left(\underline{Oa} + \underline{Ob} + \underline{Oc}\right)$$

بالقسمة على 2

$$\therefore \underline{Oa'} + \underline{Ob'} + \underline{Oc'} = \underline{Oa} + \underline{Ob} + \underline{Oc}$$

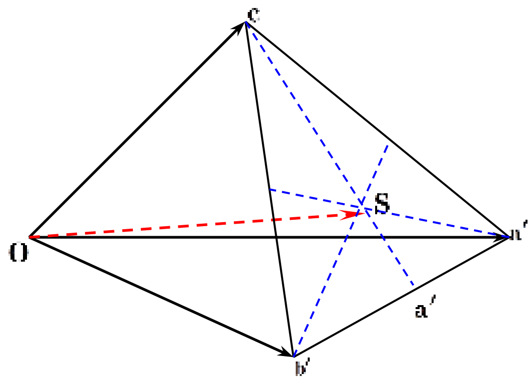
﴿ مثـــال ١٤ ﴾

إذا كانت S هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث abc فاثبت أنه لأي نقطة اختيارية O فإن

$$\underline{Oa}+\underline{Ob}+\underline{Oc}=3\,\underline{OS}\ .$$

﴿ الحـــــل ﴾

من الشكل المجاور يكون



$$\underline{Oa}=\underline{OS}+\underline{Sa}$$

$$\underline{Ob}=\underline{OS}+\underline{Sb}$$

$$\underline{Oc}=\underline{OS}+\underline{Sc}$$

بجمع المعادلات الثلاث ينتج أن

$$\underline{Oa}+\underline{Ob}+\underline{Oc}=\underline{OS}+\underline{Sc}+\underline{OS}+\underline{Sb}+\underline{OS}+\underline{Sa}$$

$$=3\underline{OS}+\underline{Sa}+\underbrace{\underline{Sb}+\underline{Sc}}_{2\underline{Sa'}}=3\underline{OS}+\underbrace{\underline{Sa}+2\underline{Sa'}}_{\underline{0}}=3\underline{OS}$$

لاحظ أننا استخدمنا النظرية السابقة حيث أن النقطة a' تقسم cb بنسبة $1:1$

كذلك نعلم أن نقطة متوسطات المثلث تقسمه بنسبة $3:2$ أي أن $\underline{Sa}=-2\underline{Sa'}$

الخلاصـــــــــــــــة

- يـــــــتعين طـــــــــول متجـــــــه $\underline{A} = (A_x, A_y, A_z)$ مـــــــن $A = |\underline{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$.
- متجه الوحدة للمتجة $\underline{A} = (A_x, A_y, A_z)$ يتعين من $\hat{A} = \dfrac{\underline{A}}{A}$.
- حاصل الضرب القياسي يعرف بـــ $\underline{A}.\underline{B} = AB\cos\theta$ حيث θ هي الزاوية بين المتجهين أو بطريقـــة أخـــرى $\underline{A}.\underline{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ ويمكـــن باستخدام حاصل الضرب القياسي تعيين الزاوية بين متجهين وكـــذلك حســـاب الشغل المبذول بقوة لتحريك جسم إزاحة ما.
- حاصل الضرب الاتجاهي يعرف بـــ $\underline{A} \wedge \underline{B} = AB\sin\theta\,\hat{n}$ حيث $\hat{n}$ متجه وحدة عمودي على مستوى المتجهين $\underline{A}, \underline{B}$. أو بطريقة أخرى

$$\underline{A} \wedge \underline{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

ويمكن باستخدام حاصل الضرب الاتجاهي تعيين الزاوية بين متجهين وكـــذلك تعيين مساحة متوازي الاضلاع $|\underline{A} \wedge \underline{B}|$.

- حاصل الضرب الثلاثي القياسي يعرف بـــ

$$\underline{A}.(\underline{B} \wedge \underline{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

يمكن اثبات أن $\underline{A}.(\underline{B} \wedge \underline{C}) = \underline{C}.(\underline{A} \wedge \underline{B}) = \underline{B}.(\underline{C} \wedge \underline{A})$ ويمكن باستخدام حاصل الضرب الثلاثي القياسي تعيين حجم متوازي السطوح $|\underline{A}.(\underline{B} \wedge \underline{C})|$.

- حاصل الضرب الثلاثي الاتجاهي يعرف بـــ

$$\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) = (\underline{A}.\underline{C})\underline{B} - (\underline{A}.\underline{B})\underline{C}$$

تمـــــــــارين

(١) اوجد مركبات المتجه الذي طوله 18 ويعمل في اتجاه الخـــط الواصـــل مـــن النقطـــة $(2,3,-1)$ إلى النقطة $(-2,12,7)$.

(٢) أوجد متجه وحدة في اتجاه المتجه $8\hat{i}+7\hat{j}-12\hat{k}$.

(٣) أوجد قيمة الثابت m والتي تجعل المتجه $\underline{A}=m\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ عمودياً على المتجـــه $\underline{B}=3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$.

(٤) أوجد الزاوية بين المتجهين $\underline{A}=2\hat{i}-5\hat{j}+6\hat{k}$ ، $\underline{B}=4\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$.

(٥) اثبت أن $\left|\underline{A}\wedge\underline{B}\right|^2+\left(\underline{A}.\underline{B}\right)^2=A^2B^2$.

(٦) أوجد قيمة λ حـــتى تقـــع المتجهـــات $\underline{A}=2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ ، $\underline{B}=\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ ، $\underline{C}=\hat{i}+\lambda\hat{j}$ في مستوى واحد.

(٧) أوجد المتجه $\underline{x}$ الذي يحقق المعادلات الآتية إذا كان $\underline{a}\wedge\underline{x}=\underline{a}\wedge\underline{b}$ $\underline{a}.\underline{b}=0,$.

(٨) إذا كانت النقاط $(1,-2,1),(-1,2,2),(2,1,-1)$ هي نهايـــة متجهـــات الموضـــع $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ على الترتيب فأوجـــد

– حجم متوازي السطوح الذي فيه $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ ثلاثة أحرف متجاورة.

– مساحة المثلث الذي أرؤسه هي هذه النقـــاط.

(٩) اثبت صحة المتطابقة $\left(\underline{a}\wedge\underline{b}\right)\wedge\underline{c}=\left(\left(\underline{a}\wedge\underline{b}\right).\hat{n}\right)\left(\hat{n}\wedge\underline{c}\right)$ حيـــث $\hat{n}$ متجـــه وحدة عمودي على مستوى المتجهين $\underline{a},\underline{b}$.

(١٠) لأي ثلاثة متجهات $\underline{a},\ \underline{b},\ \underline{c}$ اثبت أن

$$(i)\ \left(\underline{a}\wedge\underline{b}\right).\left(\left(\underline{b}\wedge\underline{c}\right)\wedge\left(\underline{c}\wedge\underline{a}\right)\right)=\left(\left(\underline{a}\wedge\underline{b}\right).\underline{c}\right)^2$$

$$(ii)\ \left(\underline{a}\wedge\left(\underline{b}\wedge\underline{c}\right)\right)\wedge\underline{c}=\left(\underline{a}.\underline{c}\right)\left(\underline{b}\wedge\underline{c}\right)$$

(١١) أوجد المتجه $\underline{x}$ الذي يحقـــق المعادلـــة $\underline{x} \wedge \underline{a} \;+\; \underline{x}.\underline{b}\;\; \underline{c} = \underline{d}$ حيـــث $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ متجهات معلومة.

(١٢) أوجد المتجه $\underline{x}$ الذي يحقق المعادلة $\underline{x} \wedge \underline{b} \;+ 4\underline{b} - 2\underline{x} = \underline{0}$ بمعلومية $\underline{b}$.

(١٣) حاول حل المعادلة $k\underline{x} + \underline{a} \wedge \underline{x} = \underline{b}$ حيث k عدد قياسي.

(١٤) $\mathbf{ABCD}$ شكل رباعي فيه $\mathbf{P, M}$ منتصفا $\mathbf{AC, BD}$ على الترتيب . أثبت أن

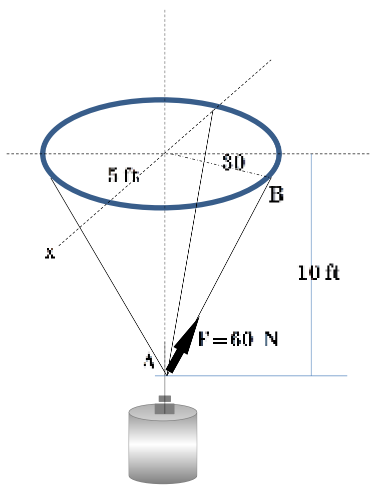
$$\underline{\mathbf{AB}} + \underline{\mathbf{CD}} + \underline{\mathbf{AD}} + \underline{\mathbf{CB}} = 4\underline{\mathbf{PM}}$$

(١٥) $\mathbf{ABC}$ مثلـــث فيـــه $\mathbf{D, E}$ منتصـــفات أضـــلاعه $\mathbf{AB, AC}$ علـــى الترتيـــب اثبت أن $\underline{\mathbf{BE}} + \underline{\mathbf{DC}} = \frac{3}{2}\underline{\mathbf{BC}}$

(١٦) أثبت باستخدام المتجهات أن $\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_2 \cos\theta_1$.

(١٧) استخدم المتجهات في اثبات أن ميلي m, m' متجهين متعامدين يحقق $mm' = -1$.

(١٨) الثقل عند **A** يولد قوة **N 60** في السلك عند النقطة **A** متجهه نحو **B** كما بالشكل، عبّر عن هذه القوة كمتجه في الاحداثيات الكارتيزية.



الفصل الثاني

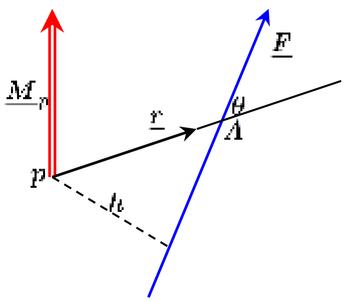
العزوم والازدواجات

كما أوضحنا سالفاً أن القوى ما هي الا فصيلة من فصائل المتجهات ، ومن ثم فتُمثل القـــوة بمتجه ينطبق عليه كل ما ذكرناه عن جبر المتجهات.

عزم قوة حول نقطة

يُعرف عزم قوة حول نقطة بأنه المتجه العمودي عل المستوى الذي يضم كلاً من خط عمـــل القوة والنقطة: بحيث يكّون المتجه الواصل من النقطة إلى خط عمل القوة مع متجـــه القـــوة نفسها والمتجه العمودي على المستوى مجموعة يمينية.

و مقدار عزم القوة $\underline{F}$ حول النقطة p يساوي حاصل ضرب مقدار القوة في البعد العمودي من النقطة p إلى خط عمل القوة أي أن



$$\left|\underline{M}_p\right| = \left|\underline{r} \wedge \underline{F}\right| = \left|Fh\,\hat{n}\right| = Fh = Fr\sin\theta$$

حيث $\hat{n}$ هو متجه وحدة عمودي على مستوى المتجهين $\underline{r}, \underline{F}$ ، كمـــا أن $\underline{r} = \underline{pA}$ هـــو المتجه الواصل من النقطة المأخوذ حولها العزم p إلى نقطة تأثير القوة A . ونلاحظ أنه لـــيس من الضروري أن يكون $\underline{r}$ متجه موضع نقطة معينة على خط عمل القوة ولكن يمكن اختيار أي نقطة تقع على خط عمل القوة لحساب المتجه $\underline{r}$. كما نلاحظ أنه إذا وقعت جميع القوى في مستوى واحد وليكن هـــذا المســـتوى هـــو المســـتوى Oxy نجـــد أن متجـــه العـــزم يكون في اتجاه المحور Oz .

وإذا كانت مركبات كل من $\underline{r}, \underline{F}$ هي $\underline{r} = (x, y, z)$, $\underline{F} = (F_x, F_y, F_z)$ فإن

$$\underline{M}_p = \underline{r} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$
$$= (yF_z - zF_y)\hat{i} - (xF_z - zF_x)\hat{j} + (xF_y - yF_x)\hat{k}$$

أيضاً يمكن الحصول على عزوم مجموعة من القوى المتلاقية في نقطة

لنفرض أنه لدينا مجموعة من القوى $\underline{F}_1, \underline{F}_2, ..., \underline{F}_n$ المتلاقية في نقطة ولتكن A وان $\underline{r} = \underline{OA}$ فإن مجموع عزوم هذه القوى حول النقطة O يتعين من

$$\begin{aligned} \underline{M}_o &= \underline{r} \wedge \underline{F}_1 + \underline{r} \wedge \underline{F}_2 + ... + \underline{r} \wedge \underline{F}_n \\ &= \underline{r} \wedge \quad \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + ... + \underline{F}_n \\ &= \underline{r} \wedge \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \underline{r} \wedge \underline{R} \end{aligned}$$

أي أن عزم مجموعة من القوى المتلاقية في نقطة يساوي عزم المحصلة حول نفس النقطة.

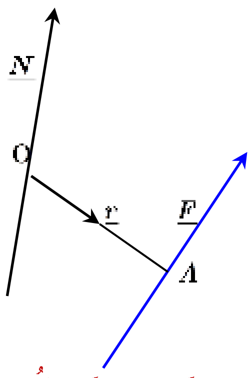
والعزم كأي متجه أي إذا كان $\underline{M} = (M_x, M_y, M_z)$ فإن مقدار العزم هو

$$\left|\underline{M}\right| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

عزم قوة حول محور

يعرف عزم القوة $\underline{F}$ حول المحور $\underline{N}$ بأنه مسقط متجه العزم عند نقطة (تقع على المحور ولتكن O) على هذا المحور في اتجاه متجه الوحدة للمحور أي أن $\underline{M}_N = \underline{M}_o.\hat{n}\ \hat{n}$

حيث $\underline{M}_o$ هو عزم القوة $\underline{F}$ حول نقطة ما O تقع على المحور $\underline{N}$ ، كذلك $\hat{n}$ هو متجه وحدة في اتجاه المحور $\underline{N}$



وبطريقة أخرى إذا كانت مركبات كلٌ من $\hat{n},\underline{F}$ هي $\hat{n}=(\ell,m,n)$ ، $\underline{F}=(F_x,F_y,F_z)$ وأن احداثيات النقطة O والتي تقع على المحور $\underline{N}$ هي $O(x_1,y_1,z_1)$ وأن احداثيات النقطة A مثلا والتي تقع على خط عمل القوة $\underline{F}$ هي $A(x_2,y_2,z_2)$ فإن:

$$M_{\underline{N}} = \left|\underline{M}_{\underline{N}}\right| = \begin{vmatrix} \ell & m & n \\ x_2-x_z & y_2-y_z & z_2-z_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

حيث $M_{\underline{N}}$ هو مقدار عزم القوة حول المحور. نلاحظ أن عزم القوة حول محور يوازيها ينعدم.

ويمكن تلخيص القول أنه لحساب عزم قوة حول محور نتبع الآتي

١– إيجاد متجه الوحدة للمحور $\underline{N}$ وليكن $\hat{n}$

٢– حساب عزم القوة $\underline{F}$ حول نقطة تقع على المحور وليكن هذا العزم $\underline{M}_o$

٣– وأخيراً فإن عزم القوة حول المحور $\underline{N}$ يتعين من $\underline{M}_{\underline{N}} = \underline{M}_o.\hat{n}\ \hat{n}$

حالات خاصة

عزم القوة حول المحور Ox يتعين من $\underline{M}_{Ox} = \underline{M}_o.\hat{i}\ \hat{i}$

بالمثل عزم القوة حول المحورين Oy, Oz هما

$$\underline{M}_{Oy} = \underline{M}_o.\hat{j}\ \hat{j} \quad \text{and} \quad \underline{M}_{Oz} = \underline{M}_o.\hat{k}\ \hat{k}$$

﴿ مثـــ ١ ـــال ﴾

أوجد عزم القوة $\underline{F} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ المارة بالنقطة $A(3,2,0)$ حول نقطة الأصل والنقطة $B(2,1,-1)$.

﴿ الحـــــل ﴾

حيث أن $\underline{r} = \underline{OA} = \underline{A} - \underline{O} = (3,2,0) - (0,0,0) = 3\hat{i} + 2\hat{j}$

ومنها عزم القوة حول نقطة الأصل يتعين من

$$\therefore \underline{M}_o = \underline{r} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8\hat{i} - 12\hat{j} + 5\hat{k}$$

كذلك عزم القوة حول النقطة $B(2,1,-1)$

$$\therefore \underline{M}_B = \underline{r'} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3-2 & 2-1 & 0+1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

﴿ مثـــ ٢ ـــال ﴾

أوجد عزم القوة والتي مقدارها $10\sqrt{3}$ والتي تؤثر في الاتجاه الواصل من النقطة $A(5,3,-3)$ إلى النقطة $B(4,4,-4)$ حول نقطة الأصل.

﴿ الحـــــل ﴾

أولا يجب كتابة القوة في صورة متجهه ومن ثم نوجد متجه وحده في اتجاه الخط الواصل مـــن النقطة $A(5,3,-3)$ إلى النقطة $B(4,4,-4)$ ومتجه الوحده هذا $\hat{F}$ يتعين من

$$\because \underline{AB} = \underline{B} - \underline{A} = (4,4,-4) - (5,3,-3) = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

$$\therefore \hat{F} = \frac{\underline{AB}}{AB} = \frac{-\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{3}} \equiv \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

ونحصل على القوة في صورة متجهه في الشكل

$$\therefore \underline{F} = F\hat{F} = 10\sqrt{3}\left\{\frac{-\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{3}}\right\} \equiv -10\hat{i} + 10\hat{j} - 10\hat{k}$$

وباختيار أي من النقطتين A, B كنقطة تأثير للقوة وبالتالي فإن عزم القوة حول نقطة الأصل يتعين من (باختيار النقطة $A(5,3,-3)$ كنقطة تأثير للقوة)

$$\therefore \underline{r} = (5,3,-3) - (0,0,0) = (5,3,-3)$$

$$\therefore \underline{M}_o = \underline{r} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 3 & -3 \\ -10 & 10 & -10 \end{vmatrix} = 80\hat{j} + 80\hat{k}$$

وإذا اخترنا النقطة $B(4,4,-4)$ كنقطة تأثير للقوة فإن

$$\therefore \underline{M}_o = \underline{r'} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 4 & -4 \\ -10 & 10 & -10 \end{vmatrix} = 40\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 80\hat{j} + 80\hat{k}$$

وهي نفس النتيجة أي لا يتغير متجه العزم باختيار أي نقطة يمر بها خط عمل القوة.

تدريب: أوجد عزم القوة السابقة حول النقطة $A(3,5,-5)$.

﴿ مثـــ ٣ ـــال ﴾

أوجد عزم القوة $\underline{F} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ والتي تمر بالنقطة $O(0,1,-1)$ حول مســــتقيم يمــر بالنقطتين $A(-2,-1,4)$ ، $B(-1,1,2)$.

﴿ الحـــــل ﴾

أولا نوجد متجه وحده في اتجاه المستقيم الواصل بين النقطتين A, B ويتعين كالآتي

$$\because \underline{AB} = \underline{B} - \underline{A} = (-1,1,2) - (-2,-1,4) = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\therefore \hat{n} = \frac{\underline{AB}}{AB} = \frac{\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{9}} \equiv \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

ثانيا نوجد عزم القوة حول نقطة تقع على المحور (لا ننسى أنه لدينا نقطتــان تقعــان علــى المستقيم هما A, B ومن ثم يمكن إيجاد عزم القوة حول أيٍ من النقطتين ولتكن مثلاً A)

$$\because \underline{r} = (0,1,-1) - (-2,-1,4) = (2,2,-5)$$

$$\therefore \underline{M}_A = \underline{r} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 10\hat{i} + 4\hat{k}$$

أخيراً عزم القوة حول المستقيم يتعين من

$$\underline{M}_{\underline{AB}} = \underline{M}_A . \hat{n} \ \hat{n} = \left\{(10\hat{i} + 4\hat{k}).\left(\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k}\right)\right\}\left(\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k}\right)$$

$$\underline{M}_{\underline{AB}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k}\right) = \frac{2}{9}(\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}), \quad \text{and} \quad \left|\underline{M}_{\underline{AB}}\right| = \frac{2}{3}$$

﴿ مثـــ ٤ ـــال ﴾

أوجد محصلة عزوم مجموعة القوى $\underline{F} = 2\hat{i}$ وتؤثر عند نقطة الأصل والقوة $-\frac{1}{2}\underline{F}$ وتـــؤثر عند النقطة $\underline{r}_2 = 3\hat{j}$ والقوة $-\frac{1}{2}\underline{F}$ وتؤثر عند النقطة $\underline{r}_3 = 5\hat{k}$ حول نقطة الأصل.

﴿ الحـــــل ﴾

من الواضح أن محصلة هذه المجموعة من القوى تتلاشى. بينما نجد أن العزم المحصل حول نقطة الأصل يتعين من

$$\therefore \underline{M}_o = \underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{F}_2 + \underline{r}_3 \wedge \underline{F}_3 = \cancel{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \underline{M}_o = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -5\hat{j} + 3\hat{k} \qquad \text{and} \qquad \left|\underline{M}_o\right| = \sqrt{34}$$

﴿ مثـــ ه ـــال ﴾

قوة مقدارها 10 توازي الاتجاه الموجب لمحور x وتمر بالنقطة $A(0,1,0)$ ، اوجد عزم هـــذه القوة حول محور يمر بنقطة الأصل ويوازي المتجه $2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$.

﴿ الحـــــل ﴾

أولا نوجد متجه الوحده في اتجاه المحور الموازي للمتجة $2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ وهو

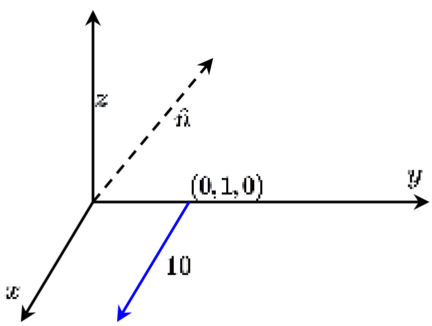
$$\hat{n}=\frac{1}{3}\ 2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$$

ثانيا نوجد عزم القوة حول نقطة تقع على المحور (نقطة الأصل) لاحظ أن $\underline{F}=10\hat{i}$

$$\underline{M}_o=\underline{r}\wedge\underline{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 10 & 0 & 0\end{vmatrix}=-10\hat{k}$$

أخيراً عزم القوة حول المستقيم يتعين من

$$\underline{M}_N=\ \underline{M}_o.\hat{n}\ \hat{n}=\frac{1}{3}\ (-10\hat{k}).\ 2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}\quad \hat{n}=\frac{10}{3}\hat{n}=\frac{10}{9}\ 2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$$



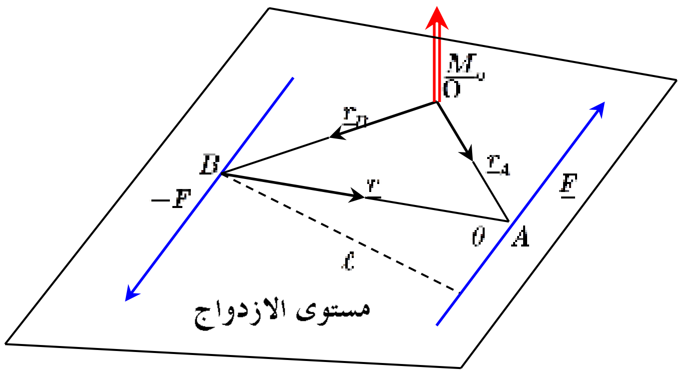
الازدواج The Couple

الازدواج هو ابسط مجموعات القوى وهو تركيب مكون من قوتين متساويتين مقداراً ومتضادتين اتجاهاً (محصلتهما صفر) وتعملان في خطي عمل متوازيين (أي أن خطي عملهما ليس على استقامة واحدة) نلاحظ أن الازدواج لا يكسب الجسم الذي يؤثر فيه أي حركة انتقالية ولكن يكسبه حركة دورانية (أي يعمل الازدواج على دوران الجسم) ومن الشكل ينتج أن مجموع عزمي القوتين $\underline{M}_o$ حول أي نقطة O يتعين من:

$$\underline{M}_o = \underline{r}_A \wedge \underline{F} + \underline{r}_B \wedge (-\underline{F})$$

$$\underline{M}_o = \underline{r}_A - \underline{r}_B \wedge \underline{F} = \underline{r} \wedge \underline{F}$$

هذا المتجه عمودي على مستوى الازدواج وفي اتجاه الحركة البريمية اليمينية كما أن مقدار هذا العزم يساوي ℓF حيث ℓ هي المسافة العمودية بين قوتي الازدواج.



والآن إذا اختزلت مجموعة القوى $\underline{F}_1, \underline{F}_2, \ldots\ldots, \underline{F}_i, \ldots\ldots, \underline{F}_n$ عند نقطة اختيارية O فإن المحصلة الناتجة هي $\underline{M}_o, \underline{F}$ (تسمى الداينام) حيث

$$\underline{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \wedge \underline{F}_i, \qquad \underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i$$

وإذا اختزلت نفس مجموعة القوى عند النقطة O' فإن الداينام يتكون من $\underline{M}_{o'}, \underline{F}$ حيث

$$\underline{M}_{o'} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i' \wedge \underline{F}_i, \qquad \underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i$$

أي أنه عند تغيير نقطة الاختزال من نقطة O إلى نقطة O' فإن المحصلة $\underline{F}$ لا تتغير وإنما عزم الازدواج هو الذي يتغير ويكون

$$\therefore \underline{M}_{o'} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i - \underline{L} \wedge \underline{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \wedge \underline{F}_i - \sum_{i=1}^{n} \underline{L} \wedge \underline{F}_i$$

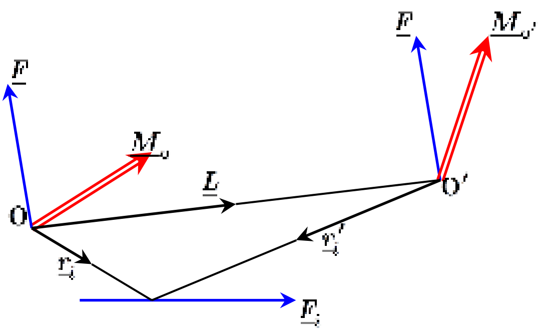
$$= \underline{M}_o - \sum_{i=1}^{n} \underline{L} \wedge \underline{F}_i = \underline{M}_o - \underline{L} \wedge \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i$$

$$\therefore \underline{M}_{o'} = \underline{M}_o - \underline{L} \wedge \underline{F}$$

نلاحظ كذلك أن

$$\therefore \underline{F}.\underline{M}_{o'} = \underline{F}.\ \underline{M}_o - \underline{L} \wedge \underline{F} = \underline{F}.\underline{M}_o - \overbrace{\cancel{\underline{F}.\ \underline{L} \wedge \underline{F}}}^{0} = \underline{F}.\underline{M}_o = \text{const.}$$

وتسمى مثل هذه الكمية بالكمية اللاتغيرية.



مجموعة اللولبية The Wrench

تعريف : مجموعة القوى التي تُختزل إلى قوة وازدواج بحيث يكون اتجاه محور الازدواج منطبقاً على اتجاه القوة تسمى لولبية ، كما أن هذا المحور يسمى محور اللولبية أو المحور المركزي.

إذا كان الداينام لمجموعة من القوى الفراغية عند النقطة O يتكون من $\underline{M}_o, \underline{F}$ فعند تغيير نقطة الاختزال (كما رأينا) يتغير عزم الازدواج ، ومن الممكن إيجاد نقطة O' ينطبق عنـــدها كل من $\underline{M}_{o'}, \underline{F}$ وعند هذه النقطة يكون

$$\underline{M}_{o'} = \underline{M}_o - \underline{r} \wedge \underline{F} = \lambda \underline{F} \qquad \Rightarrow \underline{F}.\ \ \underline{M}_o - \underline{r} \wedge \underline{F}\ \ = \lambda F^2 \quad \therefore \lambda = \frac{\underline{F}.\underline{M}_o}{F^2}$$

حيث λ كمية قياسية تعرف بخطوة اللولبية.

وحيث أنه عند النقطة O' فإن $\underline{M}_{o'}, \underline{F}$ منطبقان وبالتالي $\quad \underline{F} \wedge \underline{M}_{o'} = \underline{0}$

بضرب طرفي هذه المعادلة اتجاهياً في $\underline{F}$ نجد أن

$$\therefore \underline{F} \wedge \underbrace{\ \underline{M}_o - \underline{r} \wedge \underline{F}\ }_{\underline{M}_{o'}} = \underline{F} \wedge \underline{M}_o - \underline{F} \wedge\ \ \underline{r} \wedge \underline{F}\ \ = \underline{0}$$

و من خواص حاصل الضرب الثلاثي الاتجاهي

$$\underline{F} \wedge\ \ \underline{r} \wedge \underline{F}\ \ =\ \ \underline{F}.\underline{F}\ \ \underline{r} -\ \ \underline{F}.\underline{r}\ \ \underline{F} = F^2 \underline{r} -\ \ \underline{F}.\underline{r}\ \ \underline{F}$$

$$\therefore \underline{F} \wedge \underline{M}_o -\ \ F^2 \underline{r} -\ \ \underline{F}.\underline{r}\ \ \underline{F}\ \ = \underline{0}$$

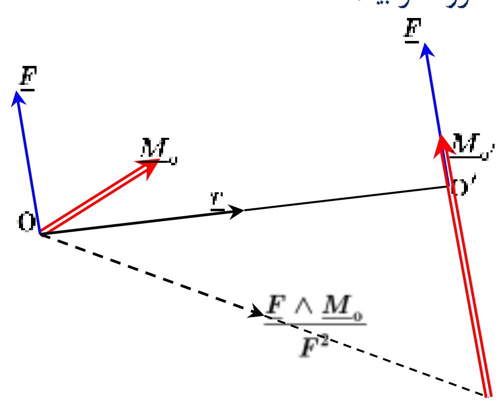
$$\therefore \underline{r} = \underbrace{\frac{\underline{F} \wedge \underline{M}_o}{F^2}}_{\underline{r}_1} + \underbrace{\frac{\underline{r}.\underline{F}}{F^2}}_{\mu} \underline{F} \qquad \text{Or} \quad \underline{r} = \underline{r}_1 + \mu \underline{F} \qquad (1)$$

المعادلة (1) هي معادلة محور اللولبية في صورة متجهه ويمكن وضعها في صورة معادلة خـــط مستقيم بدلالة الاحداثيات الكارتيزية كالاتي

إذا كان $\underline{F} = (F_x, F_y, F_z)$، $\underline{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$، $\underline{r} = (x, y, z)$ فإن المعادلة الاتجاهيـــة لمحور اللولبية (1) تأخذ الصورة

$$\frac{x - x_1}{F_x} = \frac{y - y_1}{F_y} = \frac{z - z_1}{F_z}$$

و هذه هي المعادلة الكارتيزية لمحور اللولبية.



صور خاصة

لتعيين المحور الاساسي (محور اللولبية) لمجموعة ما من القوى وكذلك المحصلة اللولبية لها تختزل المجموعة أولاً عند أية نقطة اختيارية O إلى داينام $\underline{F}, \underline{M}_o$ وقد نجد الآتي

(i) $\underline{F}.\underline{M}_o = 0$ and $\underline{F} \neq 0, \underline{M}_o = 0$

أي أن المجموعة تؤول إلى قوة وحيدة تؤثر عند O وتعمل في الخط المستقيم $\underline{r} = \lambda \underline{F}$.

(ii) $\underline{F}.\underline{M}_o = 0$ and $\underline{F} = 0, \underline{M}_o \neq 0$

أي أن المجموعة تختزل عند أي نقطة إلى ازدواج عزمه $\underline{M}_o$.

(iii) $\underline{F}.\underline{M}_o = 0$ and $\underline{F} \neq 0, \underline{M}_o \neq 0$

في هذه الحالة يتعامد $\underline{M}_o$ على $\underline{F}$ ويمكن اختزال المجموعة إلى لولب يعمل في الخط المستقيم

$$\therefore \underline{r} = \frac{\underline{F} \wedge \underline{M}_o}{F^2} + \mu \underline{F}$$

(iv) $\underline{F} = 0$ and $\underline{M}_o = 0$

في هذه الحالة تصبح مجموعة القوى متزنة.

﴿ مثـــ ٦ ـــال ﴾

ثلاثة قوى $\lambda, 2\lambda, 3\lambda$ تؤثر في ثلاثة أحرف من حروف مكعب طول ضلعه ℓ كما بالشكل.
اختزل المجموعة عند النقطة O وعند النقطة A .

﴿ الحـــــل ﴾

المجموعة تُختزل عند النقطة O إلى قوة $\underline{F}$ وازدواج عزمه $\underline{M}_o$ حيث

$$\underline{F}_1 = \lambda\hat{i}, \qquad \underline{F}_2 = 2\lambda\hat{j}, \qquad \underline{F}_3 = 3\lambda\hat{k}$$

$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \lambda \ \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

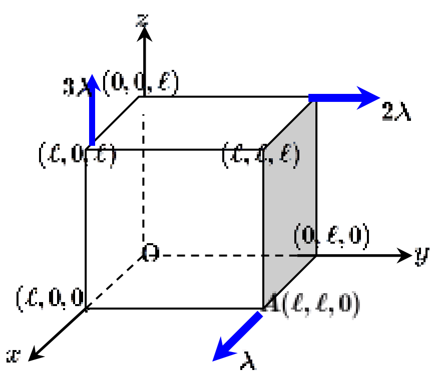
$$\underline{M}_o = \underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{F}_2 + \underline{r}_3 \wedge \underline{F}_3$$

$$\therefore \underline{M}_o = \lambda\ell\left\{\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}\right\} = -\lambda\ell \ \ 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$$

كذلك تُختزل المجموعة عند A إلى قوة نفس القوة $\underline{F}$ (لا تتغير) وازدواج عزمه $\underline{M}_B$ حيث

$$\underline{M}_B = \underline{M}_o - \underline{L} \wedge \underline{F} \qquad \text{where} \qquad \underline{L} = \underline{OA} = (\ell, \ell, 0)$$

$$\underline{M}_B = -\lambda\ell \ \ 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k} \ \ - \lambda\ell\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix} = -\lambda\ell \ \ 5\hat{i} + 2\hat{k}$$



﴿ مثـــ ٧ ـــال ﴾

القوة $2\hat{i}-\hat{j}$ تؤثر في الخط المستقيم المار بالنقطة $(4,4,5)$ والقوة $3\hat{k}$ تمر بنقطة الأصـــل ، أوجد خطوة اللولبية ومعادلة محورها.

﴿ الحـــــل ﴾

القوتان تختزل عند نقطة الأصل إلى قوة $\underline{F}$ وازدواج عزمه $\underline{M}$ حيث

$$\underline{F}=\underline{F}_1+\underline{F}_2=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}, \qquad \therefore\ F^2=14$$

$$\underline{M}=\underline{r}_1\wedge\underline{F}_1+\underline{r}_2\wedge\underline{F}_2=\underline{0}+\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\4&4&5\\2&-1&0\end{vmatrix}=5\hat{i}+10\hat{j}-12\hat{k}$$

وتتعين خطوة اللولبية من العلاقة $\lambda=\dfrac{\underline{F}.\underline{M}}{F^2}$ ومن ثم

$$\lambda=\frac{\underline{F}.\underline{M}}{F^2}=\frac{2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}\ .\ 5\hat{i}+10\hat{j}-12\hat{k}}{14}=-\frac{36}{14}=-\frac{18}{7}$$

وكذلك معادلة محور اللولبية هي $\quad \underline{r}=\underline{r}_1+\mu\underline{F}$ حيث

$$\underline{r}_1=\frac{\underline{F}\wedge\underline{M}}{F^2}=\frac{1}{14}\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\2&-1&3\\5&10&-12\end{vmatrix}=\frac{1}{14}\ -18\hat{i}+39\hat{j}+25\hat{k}$$

وتصبح المعادلة الاتجاهية لمحور اللولبية هو

$$\underline{r}=\frac{1}{14}\ -18\hat{i}+39\hat{j}+25\hat{k}\ +\mu(2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})$$

والمعادلة الكارتيزية تتعين من

$$\frac{x+\frac{18}{14}}{2}=\frac{y-\frac{39}{14}}{-1}=\frac{z-\frac{25}{14}}{3} \qquad \text{Or} \quad \frac{14x+18}{2}=\frac{14y-39}{-1}=\frac{14z-25}{3}$$

﴿ مثــ ٨ ـــال ﴾

تؤثر القوتان $(0,0,1),\ (0,1,0)$ في النقطتين $(0,0,0),\ (3,0,0)$ على الترتيب ، أوجد خطـــوة اللولبية التي تؤول إليها المجموعة ومعادلة محورها.

﴿ الحـــــل ﴾

بفرض أن

$$\underline{F}_1 = (0,0,1) = \hat{k}, \quad \underline{F}_2 = (0,1,0) = \hat{j}$$

المجموعة تختزل إلى قوة $\underline{F}$ وازدواج عزمه $\underline{M}$ عند نقطة الأصل حيث

$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \hat{j} + \hat{k} \qquad \therefore F^2 = 2$$

$$\underline{M} = \underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{F}_2 = \underline{0} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\hat{k}$$

وتتعين خطوة اللولبية من العلاقة $\lambda = \dfrac{\underline{F}.\underline{M}}{F^2}$ ومن ثم

$$\lambda = \frac{\underline{F}.\underline{M}}{F^2} = \frac{\hat{j} + \hat{k} \ . \ 3\hat{k}}{2} = \frac{3}{2}$$

وكذلك معادلة محور اللولبية هي $\underline{r} = \underline{r}_1 + \mu \underline{F}$ حيث

$$\underline{r}_1 = \frac{\underline{F} \wedge \underline{M}}{F^2} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}\hat{i}$$

وتصبح المعادلة الاتجاهية لمحور اللولبية هو

$$\underline{r} = \frac{3}{2}\hat{i} + \mu(\hat{j} + \hat{k})$$

والمعادلة الكارتيزية تتعين من

$$\frac{x - 1.5}{0} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 0}{1}$$

﴿ مثـــ ٩ ـــال ﴾

قوتـــــان متســـــاويتان مقــــــدار كـــــل منـــــهما P تـــــؤثران في المســــــتقيمين $\frac{x \mp a\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{y - b\sin\theta}{\mp b\cos\theta} = \frac{z}{c}$ بـــيّن أن محـــور اللولبيـــة يقـــع علـــى الســـطح $y\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) = b\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)$.

﴿ الحـــــل ﴾

نعلـــــــــم مـــــــــن المعـــــــــادلتين $\frac{x - a\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{y - b\sin\theta}{-b\cos\theta} = \frac{z}{c}$ ، $\frac{x + a\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{y - b\sin\theta}{b\cos\theta} = \frac{z}{c}$ أن نســـــب اتجـــــاه المســـــتقيم الأول هـــــي $(a\sin\theta, -b\cos\theta, c)$ وأن النقطة $(a\cos\theta, b\sin\theta, 0)$ تقع عليه وبالنسبة للمستقيم الثـــاني نسب اتجاهه هي $(a\sin\theta, b\cos\theta, c)$ ويمر بالنقطة $(-a\cos\theta, b\sin\theta, 0)$

ولذلك يمكن حساب متجه وحدة في اتجاه المستقيم الأول وهو

$$\hat{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2}}(a\sin\theta, -b\cos\theta, c)$$
$$= \frac{1}{\mu}\ a\sin\theta\hat{i} - b\cos\theta\hat{j} + c\hat{k}$$

وكذلك يمكن حساب متجه وحدة في اتجاه المستقيم الثاني وهو

$$\hat{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2}}(a\sin\theta, b\cos\theta, c) = \frac{1}{\mu}\ a\sin\theta\hat{i} + b\cos\theta\hat{j} + c\hat{k}$$

حيث

$$\mu = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2}$$

وبالتالي متجه القوة الأولى يتعين من

$$\underline{F}_1 = P\hat{n}_1 = \frac{P}{\mu}\ a\sin\theta\hat{i} - b\cos\theta\hat{j} + c\hat{k}$$

وأيضاً متجه القوة الثانية يتعين من

$$\underline{F}_2 = P\hat{n}_2 = \frac{P}{\mu}\ a\sin\theta\hat{i} + b\cos\theta\hat{j} + c\hat{k}$$

و تؤول المجموعة عند نقطة الأصل إلى قوة $\underline{F}$ وازدواج عزمه $\underline{M}$ حيث

$$\begin{aligned} \underline{F} &= \underline{F}_1 + \underline{F}_2 \\ &= \frac{P}{\mu}\ \ a\sin\theta\hat{i} - b\cos\theta\hat{j} + c\hat{k}\ \ + \frac{P}{\mu}\ \ a\sin\theta\hat{i} + b\cos\theta\hat{j} + c\hat{k} \\ &= \frac{2P}{\mu}\ \ a\sin\theta\hat{i} + c\hat{k} \qquad\qquad\qquad \text{and} \quad F^2 = \frac{4P^2}{\mu^2}\ \ a^2\sin^2\theta + c^2 \end{aligned}$$

$$\underline{M} = \underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{F}_2 = \frac{P}{\mu}\left\{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a\cos\theta & b\sin\theta & 0 \\ a\sin\theta & -b\cos\theta & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a\cos\theta & b\sin\theta & 0 \\ a\sin\theta & b\cos\theta & c \end{vmatrix}\right\}$$

$$\therefore\ \underline{M} = \frac{2P}{\mu}\ \ cb\sin\theta\hat{i} - ab\hat{k}$$

ومن ثم معادلة محور اللولبية هي $\underline{r} = \underline{r}_1 + \mu\underline{F}$ حيث

$$\underline{r}_1 = \frac{\underline{F} \wedge \underline{M}}{F^2} = \frac{1}{a^2\sin^2\theta + c^2}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a\sin\theta & 0 & c \\ cb\sin\theta & 0 & -ab \end{vmatrix} = \frac{c^2 + a^2\ \ b\sin\theta}{a^2\sin^2\theta + c^2}\hat{j}$$

وتصبح المعادلة الاتجاهية لمحور اللولبية هي

$$\underline{r} = \frac{(c^2 + a^2)b\sin\theta}{a^2\sin^2\theta + c^2}\hat{j} + \mu\ \ a\sin\theta\hat{i} + c\hat{k}$$

والمعادلة الكارتيزية تتعين من

$$\frac{x - 0}{a\sin\theta} = \frac{y - \dfrac{(c^2 + a^2)b\sin\theta}{a^2\sin^2\theta + c^2}}{0} = \frac{z - 0}{c}$$

ومن هذه المعادلة نستنتج المعادلتين الآتيتين

$$y = \frac{(c^2 + a^2)b\sin\theta}{a^2\sin^2\theta + c^2} \qquad\qquad \text{and} \qquad \frac{x}{z} = \frac{a\sin\theta}{c}$$

$$y\ \ a^2\sin^2\theta + c^2\ \ =\ \ c^2 + a^2\ \ b\sin\theta \qquad \Rightarrow y^2\left(a^2\sin\theta + \frac{c^2}{\sin\theta}\right) = b\ \ c^2 + a^2$$

بالقسمة على ac وبالتعويض من الجزء الثاني من المعادلة في الجزء الأول نحصل على

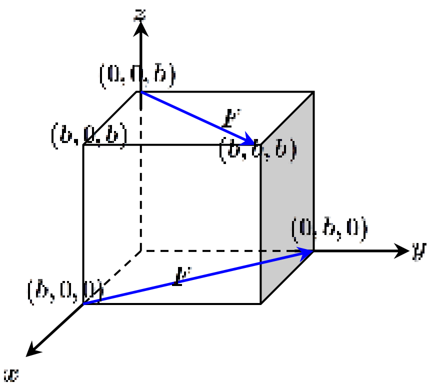
$$y\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) = b\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)$$

﴿ مثـــال ١٠ ﴾

تؤثر قوتان مقدار كل منهما F في أقطار أوجه مكعب طول ضلعه b (كما بالشكل) أوجد محصلتهما البريمية (اللولبية) .

﴿ الحـــــل ﴾

لقد أوضحنا على الرسم احداثيات اركان المكعب ، ومن ذلك نستنتج أن متجه وحدة للقوى الأولى هو



$$\hat{n}_1 = (b,b,b) - (0,0,b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j})$$

$$\therefore \underline{F}_1 = F\hat{n}_1 = \frac{F}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j})$$

كذلك متجه الوحدة في اتجاه القوة الثانية يتعين من

$$\hat{n}_2 = (0,b,0) - (b,0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{i} + \hat{j})$$

$$\therefore \underline{F}_2 = F\hat{n}_2 = \frac{F}{\sqrt{2}}(-\hat{i} + \hat{j})$$

المجموعة تختزل إلى قوة $\underline{R}$ وازدواج عزمه $\underline{M}$ عند نقطة الأصل حيث

$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \sqrt{2}F\hat{j} \qquad \therefore R^2 = 2F^2$$

$$\underline{M} = \underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{F}_2 = \frac{Fb}{\sqrt{2}}\left\{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right\} = \frac{Fb}{\sqrt{2}} \ \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$$

وذلك باختيار النقطة $(0,0,b)$ كنقطة تأثير للقوة الأولى والنقطة $(b,0,0)$ كنقطة تأثير للقوة الثانية. وتتعين خطوة اللولبية من العلاقة $\lambda = \dfrac{\underline{\underline{R}}.\underline{\underline{M}}}{R^2}$ ومن ثم

$$\lambda = \frac{\underline{\underline{R}}.\underline{\underline{M}}}{R^2} = \frac{\sqrt{2}F\hat{j}\ .\dfrac{Fb}{\sqrt{2}}\ \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}}{2F^2} = -\frac{b}{2}$$

وأيضاً معادلة محور اللولبية هي $\underline{r} = \underline{r}_1 + \mu\underline{F}$ حيث

$$\underline{r}_1 = \frac{\underline{R} \wedge \underline{M}}{R^2} = \frac{\cancel{F^2}b}{2\cancel{F^2}}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{b}{2}\ \hat{i} + \hat{k}$$

وتصبح المعادلة الاتجاهية لمحور اللولبية هو $\underline{r} = -\dfrac{b}{2}\ \hat{i} + \hat{k}\ + \mu\hat{j}$

والمعادلة الكارتيزية تتعين من

$$\frac{x + \frac{b}{2}}{0} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z + \frac{b}{2}}{0} \qquad \text{Or} \qquad z = -\frac{b}{2} \text{ and } x = -\frac{b}{2}$$

﴿ مثـــال ١١ ﴾

إذا أُعطيت ثلاث قوى مقدار كل منهم μ الأولى منطبقة على المحور x وفي الاتجاه السالب له والثانية توازي محور x وتمر بالنقطة $(0,0,a)$ والثالثة توازي محور z وتمر بالنقطة $(0,a,0)$. اختـــزل المجموعـــة عنـــد نقطـــة الأصـــل وعـــين المحـــور الأساســـي (محور اللولبية) للمجموعة.

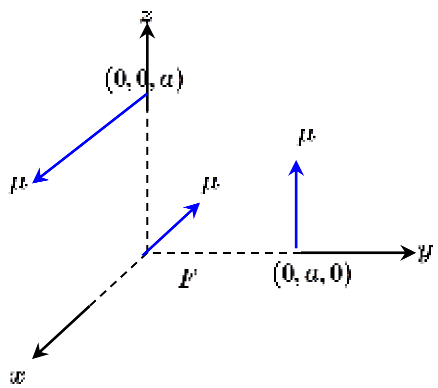
﴿ الحـــل ﴾

تُختزل المجموعة عند نقطة الأصل إلى قوة $\underline{F}$ وازدواج $\underline{M}_{o}$ حيث

$$\underline{F}_1 = \mu\hat{i}, \qquad \underline{F}_2 = -\mu\hat{i}, \qquad \underline{F}_3 = \mu\hat{k},$$

$$\therefore\ \underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \mu\hat{i} - \mu\hat{j} + \mu\hat{k} = \mu\hat{k}$$

$$\because\ \underline{M}_{o} = \underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{F}_2 + \underline{r}_3 \wedge \underline{F}_3$$



$$\therefore\ \underline{M}_{o} = \mu a \left\{ \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \underline{0} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \mu a(\hat{i} + \hat{j})$$

$$\lambda = \frac{\underline{F}.\underline{M}}{F^2} = \frac{\mu\hat{k}\ \ .\mu a\ \ \hat{i}+\hat{j}}{\mu^2} = 0$$

معادلة محور اللولبية هي تتعين من $\underline{r} = \underline{r}_1 + \mu'\underline{F}$ جعلنا) μ' بدلاً مــن μ حــتى لا تتداخل مع μ قيمة القوة والتي في المسألة)حيث

$$\underline{r}_1 = \frac{\underline{F}\wedge\underline{M}}{F^2} = \frac{\cancel{\mu^2}a}{\cancel{\mu^2}}\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} = a\ \ -\hat{i}+\hat{j}$$

وتصبح المعادلة الاتجاهية لمحور اللولبية هو $\underline{r} = a\ \ -\hat{i}+\hat{j}\ \ +\mu'\hat{k}$

والمعادلة الكارتيزية تتعين من

$$\frac{x+a}{0} = \frac{y-a}{0} = \frac{z}{1} \qquad \text{Or} \qquad y = a \ \text{ and } \ x = -a$$

لاحظ أن خطوة اللولبية صفراً.

الخلاصـــــــــــــــة

➤ يتعين عزم قوة حول نقطة ما من العلاقة

$$\underline{M}_p = \underline{r} \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\hat{i} - (xF_z - zF_x)\hat{j} + (xF_y - yF_x)\hat{k}$$

➤ عزم قوة حول محور ما متجه الوحدة له $\hat{n}$ يتعين من. $\underline{M}_N = \left(\underline{M}_o . \hat{n}\right)\hat{n}$

حيث $\underline{M}_o$ عزم القوة حول نقطة تقع على المحور.

➤ الازدواج وهو تركيب مكون من قوتين متساويتين مقداراً ومتضادتين اتجاهـــاً (محصلتهما صفر) وتعملان في خطي عمل متوازيين (أي أن خطي عملهما لـــيس على استقامة واحدة)

➤ مجموعة القوى التي تُختزل إلى قوة وازدواج بحيث يكون اتجاه محور الازدواج منطبقاً على اتجاه القوة تسمى لولبية ، كما أن هذا المحور يسمى محور اللولبيـــة أو المحور المركزي.

➤ الكمية $\underline{F}.\underline{M}_o = \text{const}$ هي كمية لا تغيرية

تمـــــــــــارين

(١) إذا أثرت القوة $\underline{F} = 3\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}$ في نقطة الأصل فما هو عزمهـــا حـــول النقطـــة $(4,4,6)$.

(٢) قوة مقدارها 100 تؤثر في المستقيم الواصل من النقطة $(0,1,0)$ إلى النقطة$(1,0,0)$. أوجد عزم هذه القوة حول نقطة الأصل وكذلك حول محاور الاحداثيات .

(٣) أوجد متجه عزم القوة $-\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ والتي تؤثر في النقطة $(1,2,1)$ حول محـــور يمـــر بنقطة الأصل ويوازي المتجه $2\hat{i} - 3\hat{k}$.

(٤) أوجد مقدار واتجاه عزم قوة مقدارها الوحدة وتصنع الزوايا $(45^o, 60^o, 60^o)$ مع محاور الاحداثيات وتمر بالنقطة $(1,-1,2)$ حول نقطة الأصل.

(٥) أوجد متجه عزم القوة $-\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ والتي تؤثر في النقطة $(1,2,1)$ حول محور يمـــر بنقطة الأصل ويوازي المتجه $2\hat{i} - 3\hat{k}$.

(٦) القوى الثلاث $-\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} \;,\; \hat{j} - 2\hat{k} \;,\; 2\hat{i} + 2\hat{j}$ تؤثر عند النقاط الـــثلاث $(0,0,1), \;\; (1,0,0), \;\; (0,1,0)$ على الترتيب . أوجد خطوة اللولبية.

(٧) قوتـــان متســـاويتان مقـــدار كـــل منـــهما $3F$ وتعمـــلان في الخطـــين المســـتقيمين $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{1}$ ، $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{2}$ أوجد ما تؤول إليه القوتان عند نقطة الأصل.

(٨) القوى $\underline{F}_1, \underline{F}_2, \underline{F}_3$ تعمل في ثلاثة احرف غير متقاطعة لمكعب. اوجد خط عمل اللولبيـــة المكافئة.

(٩) قوتان $\underline{F}_1, \underline{F}_2$ تؤثران في خطين غير متقاطعين L_1, L_2 بحيث كان العمود المشترك بينهما يقابل الخط L_1 في النقطة $\underline{r}_1$ ويقابل الخط L_2 في النقطة $\underline{r}_2$. أثبت أن خطـــوة اللولبيـــة تساوي $\underline{r}_1 - \underline{r}_2 \wedge \underline{F}_2 \cdot \underline{F}_1 \;\; \left|\underline{F}_1 + \underline{F}_2\right|^{-2}$.

(١٠) قوتـــــــان F_1 , F_2 تـــــــؤثران في المســــــــتقيمين $(z = \mathrm{c},\ y = x\tan\alpha)$ ، $(z = -\mathrm{c},\ y = -x\tan\alpha)$ على الترتيب أوجد معادلة محور اللولبية المكافئة.

(١١) تؤثر القوة $2\hat{i} - \hat{j}$ في الخط المستقيم المار بالنقطة $(4, 4, 5)$ والقوة $3\hat{k}$ تمــر بنقطــة الأصل أوجد خطوة اللولبية ومعادلة محورها.

(١٢) تؤثر القوى $3, 2, 4, 3, P$ في المستقيمات $\overleftrightarrow{\mathrm{ab}}, \overleftrightarrow{\mathrm{cb}}, \overleftrightarrow{\mathrm{cd}}, \overleftrightarrow{\mathrm{ad}}, \overleftrightarrow{\mathrm{db}}$ على الترتيب من المربــع abcd . أوجد مقدار القوة P لكي تؤول المجموعة إلى ازدواج.

الفصل الثالث

اتزان القوى

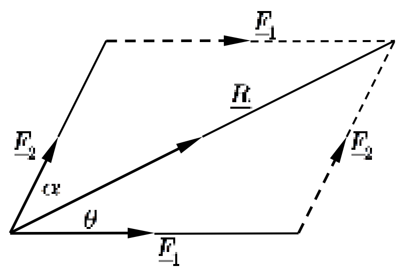
من دراستنا السابقة نعلم أن مقدار محصلة أي قوتين $\underline{F}_1, \underline{F}_2$ يتعين من

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha$$

حيث α هي الزاوية بين القوتين $\underline{F}_1, \underline{F}_2$ واتجاه المحصلة $\underline{R}$ يصنع مع القوة $\underline{F}_1$ زاوية ولتكن θ تتعين من

$$\tan\theta = \frac{F_2\sin\alpha}{F_1 + F_2\cos\alpha}$$

معادلة المحصلة يمكن استنتاجها باستخدام المتجهات حيث أنه من قاعدة المثلث (من الشكل)

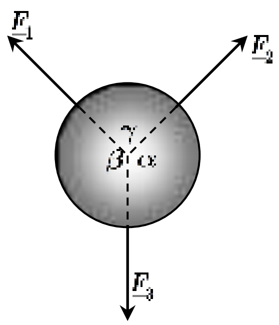


$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2$$

وبضرب هذه المعادلة قياسياً في نفسها يكون

$$\underline{R}.\underline{R} = (\underline{F}_1 + \underline{F}_2)\cdot(\underline{F}_1 + \underline{F}_2) \quad \Rightarrow R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2\underbrace{\underline{F}_1.\underline{F}_2}_{F_1F_2\cos\alpha}$$

$$\therefore R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha$$



أيضاً تنص قاعدة لامي على أنه إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى كما بالشكل فإن $\dfrac{F_1}{\sin\alpha} = \dfrac{F_2}{\sin\beta} = \dfrac{F_3}{\sin\gamma}$. كما نعلم أنه إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازية وفي مستوى واحد فإن خطوط عمل هذه القوى الثلاث يجب أن تتلاقي في نقطة واحدة.

نظريتان مهمتان

هناك نظريتان لهما اهمية واستخدام كبير في حل المسائل الاستاتيكية. إذا رسم الخط CD خلال رأس المثلث ABC ويقطع الضلع AB في النقطة D والتي تقسم هذا الضلع بنسبة $m:n$ كما يقسم الرأس الى زاويتين α, β وكان $\angle CDB = \theta$ فإن

(i) $$(m+n)\cot\theta = m\cot\alpha - n\cot\beta$$

(ii) $$(m+n)\cot\theta = n\cot A - m\cot B$$

البرهان

$$\because \frac{m}{n} = \frac{AD}{DB} = \frac{AD}{DC} \times \frac{DC}{DB} = \frac{\sin\alpha}{\sin\angle A} \times \frac{\sin\angle B}{\sin\beta}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)} \times \frac{\sin(\theta+\beta)}{\sin\beta}, \quad \angle DBC = 180^0 - (\beta+\theta)$$

$$= \frac{\sin\alpha(\sin\theta\cos\beta + \cos\theta\sin\beta)}{\sin\beta(\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha)} = \frac{\cot\beta + \cot\theta}{\cot\alpha - \cot\theta}$$

$$\Rightarrow m(\cot\alpha - \cot\theta) = n(\cot\beta + \cot\theta) \qquad \text{or}$$

$$(m+n)\cot\theta = m\cot\alpha - n\cot\beta$$

مرة أخرى

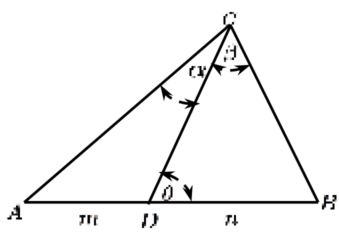
$$\because \frac{m}{n} = \frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle DAC} \times \frac{\sin\angle B}{\sin\beta}$$

$$= \frac{\sin(\theta - A)}{\sin A} \times \frac{\sin B}{\sin(\theta+B)},$$

$$= \frac{\sin B(\sin\theta\cos A - \cos\theta\sin A)}{\sin A(\sin\theta\cos B + \cos\theta\sin B)} = \frac{\cot A - \cot\theta}{\cot B + \cot\theta}$$

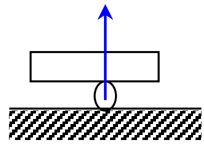
$$\Rightarrow m(\cot B + \cot\theta) = n(\cot A - \cot\theta) \qquad \text{or}$$

$$(m+n)\cot\theta = n\cot A - m\cot B$$

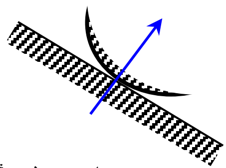


طرق الارتكاز و القوى المؤثرة

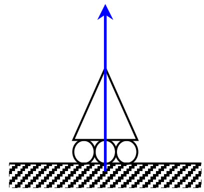
بعض أنواع الركائز وكيفية حدوث رد الفعل عندها



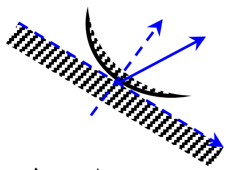
دعامة منزلقة



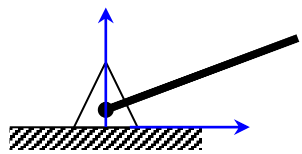
اتزان جسم على سطح أملس



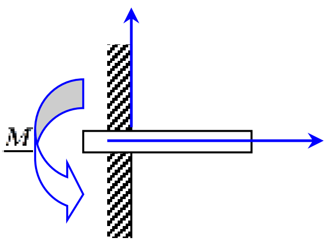
دعامة منزلقة



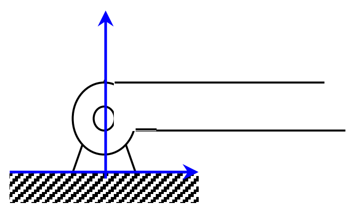
اتزان جسم على سطح خشن



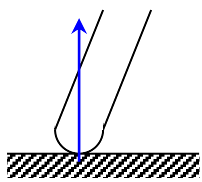
دعامة مفصلية



دعامة ثابتة



دعامة مفصلية



دعامة مفصلية

شروط الاتزان

نعلم أنه عندما يكون أي جسم واقع تحت تأثير قوة ما فإنه سيحاول التحرك في اتجاه تـــأثير القوة وبالتالي فإن الجسم يصبح في حالة عدم اتزان. كذلك فإن الجسم عندما يكون تحت تأثير مجموعة من القوى ومجموعة من العزوم فإن الجسم سوف يتحرك تحت تأثير القوى والعـــزوم. والحالة الوحيدة التي يكون فيها الجسم في حالة اتزان (ساكناً) هو عندما تكون محصلة القوى الخارجية وردود الافعال تساوي صفرا وكذلك محصلة العزوم تساوي صفر.

أي أن

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \underline{0}, \qquad \underline{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \underline{M}_i = \underline{0}$$

ويمكن أن تكتب بدلالة المركبات في الصورة

$$\sum_{i=1}^{n} F_x = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_y = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_z = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_x = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_x = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_x = 0$$

وتعرف المعادلات السابقة بمعادلات الاتزان أو قانون نيوتن للاتزان.

حالات خاصة من الاتزان

☜ القوى المؤثرة على نفس الخط

حينما تكون القوة مؤثرة في نفس الخط فإن معادلة الاتزان تؤول إلى الصـــورة $\sum_{i=1}^{n} F_x = 0$ فقط حيث لا يوجد دوران

☜ حالة القوى المتوازية

عندما تكون القوى متوازية فإن الجسم يمكن أن يكون في حالة اتزان عندما تتلاشى محصـــلة جميع القوى بحيث تتحقق المعادلتين

$$\sum_{i=1}^{n} F_x = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M = 0$$

وذلك على اعتبار أن القوى موازية لمحور x وبالتالي لا توجد قوى في الاتجاهات الاخرى.

☜ حالة القوى المستوية

عندما تكون القوى مستوية فإن الجسم يمكن أن يكون في حالة اتزان عندما تتلاشى محصلة جميع القوى بحيث تتحقق المعادلات (على اعتبار أن القوى تقع في المستوى xy)

$$\sum_{i=1}^{n} F_x = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_y = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M = 0$$

وبصفة عامة فإن محصلة مجموعة قوى مستوية متلاقية في نقطة تتعين من

$$R^2 = \sum F_x{}^2 + \sum F_y{}^2, \qquad \tan\theta_x = \frac{\sum F_y}{\sum F_x}$$

حيث $\sum F_x, \sum F_y$ هو المجموع الجبري لمركبات القوى في الاتجاهين x, y على الترتيب ، والزاوية θ_x هي الزاوية التي تصنعها المحصلة مع المحور x .

أما إذا كانت مجموعة القوى غير مستوية (فراغية) فإن مقدار محصلة هذه القوى هي

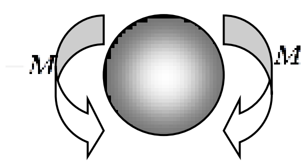
$$R^2 = \sum F_x{}^2 + \sum F_y{}^2 + \sum F_z{}^2,$$

حيث $\sum F_x, \sum F_y, \sum F_z$ هو المجموع الجبري لمركبات القوى في الاتجاهات x, y, z على الترتيب ، كما تصنع هذه المحصلة زوايا مع المحاور جيوب تمام اتجاهها يتعين من

$$\cos\theta_x = \frac{\sum F_x}{R}, \qquad \cos\theta_y = \frac{\sum F_y}{R}, \qquad \cos\theta_z = \frac{\sum F_z}{R}$$

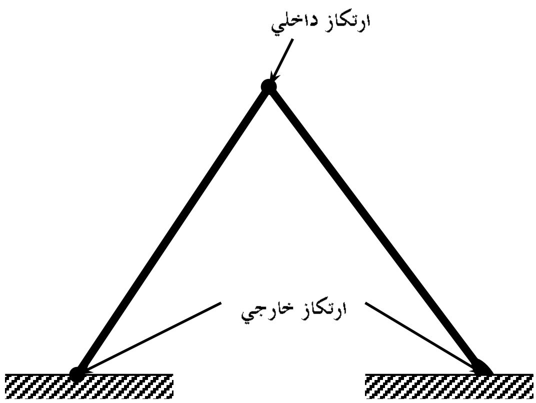
☜ حالة ازدواجين متعاكسين

عندما يكون الجسم واقع تحت تأثير ازدواجين متعاكسين متساويين في المقدار ومتضادين في الاتجاه فإن الجسم يكون في حالة اتزان كما بالشكل.



وجدير بالذكر أنه لإيجاد معادلات الاتزان لجسم ما فلابد من عزل الجسم عن المحيط الذي فيه واستبدال الارتكازات والدعامات بردود الافعال (يسمى بالجسم الحر). نلاحظ أنه قد يكون من غير الضروري استخدام كل المعادلات في المجموعة للحصول على الحل. كما أن الاختيار المناسب لمركز العزم يؤدي مثلاً إلى معادلة تحتوي على مجهول واحد.

وأخيراً إذا اتزنت مجموعة من الاجسام المتماسكة المرتبطة معاً عن طريق المفاصل أو الارتكاز على بعضها فيمكن اعتبار المجموعة كلها عبارة عن جسم واحد وتُكتب له المعادلات الخاصة باتزانه كما يمكن النظر إلى كل جسم على حده على أنه جسم واحد متزن وأيضاً تُكتب لــه معادلات الاتزان ويجب التفريق هنا بين نوعين من الارتكازات. النوع الأول ، هو الارتكــاز الخارجي وهو الارتكاز الذي يربط أي جسم في المجموعة بالخارج مثل الحائط أو الارض أو أي جسم آخر لا ندرس اتزانه. بينما النوع الثاني هو الارتكاز الداخلي وهو الارتكاز الذي يحدث بين أي جسمين أو أكثر من مجموعة الاجسام ولا يكون متصلاً بأي جسم خارجي ، والشكل التالي يوضح النوعين.



﴿ مثـــال ١ ﴾

أوجد الزاوية بين قوتين متساويتين قيمة كل منها F عندما تكون محصلتهما $\sqrt{3}F$.

﴿ الحـــــل ﴾

نفرض أن الزاوية بين القوتين هي α وحيث أن الزاوية θ بين المحصلة والقوة F تتعين من

$$3F^2 = F^2 + F^2 + 2F^2 \cos\alpha \qquad \Rightarrow 1 = 2\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left\{\frac{1}{2}\right\} \qquad \text{Or} \qquad \alpha = 60^{o}$$

﴿ مثـــال ٢ ﴾

إذا كانت محصلة القوتين المتلاقيتين $F, 2F$ عمودية على القوة F . أوجد الزاوية بين القوتين.

﴿ الحـــــل ﴾

نفرض أن الزاوية بين القوتين هي α وحيث أن الزاوية θ بين المحصلة والقوة F تتعين من

$$\tan\theta = \frac{2F\sin\alpha}{F + 2F\cos\alpha}$$

$$\therefore \tan 90 = \frac{2\sin\alpha}{1 + 2\cos\alpha}$$

$$\therefore 1 + 2\cos\alpha = 0$$

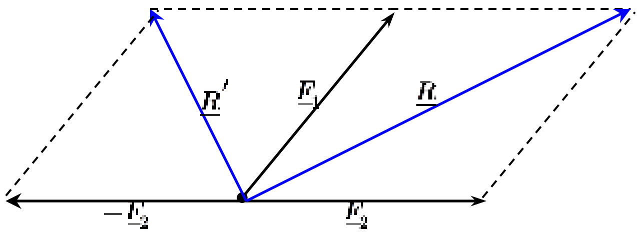
$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$\text{Or} \qquad \alpha = 120^{o}$$

﴿ مثـــ ٣ ـــال ﴾

قوتان متلاقيتان في نقطة ، إذا عُكس اتجاه احدهما فإن المحصلة تدور زاوية قائمة بالنسبة للحالة الأولى. بّين أن القوتين متساويتين في المقدار.

﴿ الحـــــــل ﴾



يمكن حل هذه المسألة بأكثر من طريقة

حيث أنه من المتجهات نعلم

$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2, \qquad \underline{R}' = \underline{F}_1 - \underline{F}_2$$

ولكن $\underline{R}.\underline{R}' = 0$ لأن المحصلتين متعامدتين وبالتالي

$$\underline{R}.\underline{R}' = (\underline{F}_1 + \underline{F}_2) \cdot (\underline{F}_1 - \underline{F}_2) = F_1^2 - F_2^2 = 0 \qquad \Rightarrow F_1 = F_2$$

طريقة ثانية بفرض أن الزاوية بين القوتين في الحالة الأولى هي α ومن ثم تصبح الزاوية بـــين القوتين في الحالة الثانية هي $\pi - \alpha$ ، وإذا افترضنا أن الزاوية بين المحصلة الأولى والقوة $\underline{F}_2$ هي θ فإن الزاوية بين المحصلة الجديدة والقوة $-\underline{F}_2$ هي $90 - \theta$ ومن قانون تعيين الزاويـــة بين المحصلة وإحدى القوتين يكون في الحالة الأولى

$$\tan\theta = \frac{F_1 \sin\alpha}{F_2 + F_1 \cos\alpha}$$

والزاوية بين المحصلة الجديدة والقوة $-\underline{F}_2$

$$\tan(90 - \theta) = \frac{F_1 \sin(180 - \alpha)}{F_2 + F_1 \cos(180 - \alpha)} \qquad \therefore \cot\theta = \frac{F_1 \sin\alpha}{F_2 - F_1 \cos\alpha}$$

$$\therefore \frac{F_2 - F_1 \cos\alpha}{F_1 \sin\alpha} = \frac{F_1 \sin\alpha}{F_2 + F_1 \cos\alpha} \qquad F_1^2 \sin^2\alpha = F_2^2 - F_1^2 \cos^2\alpha$$

$$\therefore F_1^2 \sin^2\alpha + F_1^2 \cos^2\alpha = F_2^2 \qquad \Rightarrow F_1 = F_2$$

﴿ مثـــ ٤ ـــال ﴾

كرة وزنها w مستقرة على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية α ومربوطة بخـــيط طرفه الاخر مربوط في نقطة على مستوى رأسي بحيث يصنع الخيط مع الرأسي زاوية β . إذا وقع الخيط وخط أكبر ميل للمستوى في مستوى واحد. أوجد الشد ورد فعل المستوى.

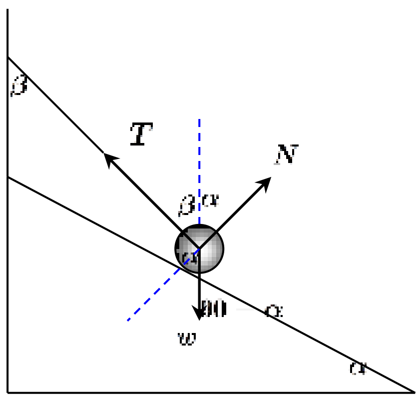
﴿ الحـــــل ﴾

نعلم أنه من قاعدة لامي ومن الشكل المجاور فإن

$$\frac{w}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{T}{\sin(180-\alpha)} = \frac{N}{\sin(180-\beta)}$$

$$\therefore T = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} w,$$

$$N = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} w$$



﴿ مثـــ ه ـــال ﴾

جسم وزنه w معلق بواسطة خيطين إذا كان اتجاه أحد الخيطين هو α مع الأفقي أوجد اتجاه الخيط الآخر حتى يكون الشد فيه أقل ما يمكن واوجد قيمته.

﴿ الحـــــل ﴾

نفرض أن الخيط الثاني يميل على الافقي بزاوية θ (كما بالشكل) وأن الشد في الخيط الأول هو T والشد في الخيط الثاني هو T' وحيث ان الوزن w متزن تحت تأثير ثلاث قوى ومن ثم يمكن تطبيق قاعدة لامي

$$\frac{w}{\sin(\pi-(\alpha+\theta))}=\frac{T}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=\frac{T'}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} \qquad \therefore T'=\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\alpha+\theta)}\right\}w$$

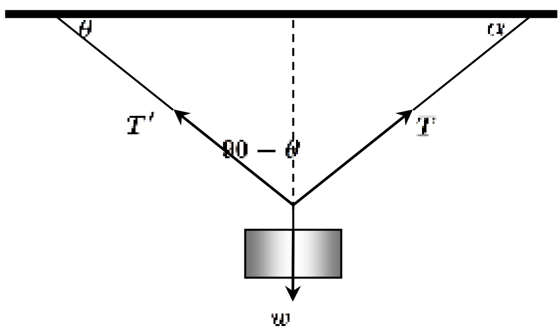
وواضح أن التغير في T' يعتمد على الزاوية θ وبالتالي يكون T' أقل ما يمكن حينما يكـــون المقام أكبر ما يمكن وبالتالي يجب أن يكون

$$\sin(\alpha+\theta)=1 \ \textbf{Or} \qquad \theta+\alpha=\frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

كما يمكن حساب الزاوية θ بطريقة أخرى ، حيث أن الشد T' أقل ما يمكن فإن

$$\frac{dT'}{d\theta}=0 \qquad \Rightarrow \frac{\cos(\alpha+\theta)}{\sin^2(\alpha+\theta)}=0 \qquad \therefore \cos(\alpha+\theta)=0 \qquad \Rightarrow \alpha+\theta=\frac{\pi}{2}$$

وتكون قيمة الشد عندئذ $\therefore T'=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)w$



﴿ مثـــ ٦ ـــال ﴾

قضيب منتظم وزنه w ، وطوله ℓ يستند بطرفه A على حائط رأسي أملس بينما الطـــرف الآخر مربوط بخيط طوله a والطرف الآخر للخيط مثبت في الحائط الرأسي أعلى النقطة A وعلى بعد معين منها اوجد هذا البعد في حالة الاتزان.

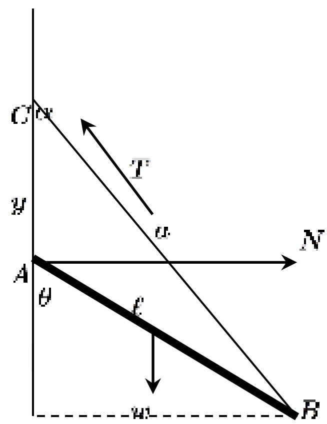
﴿ الحـــــل ﴾

من قاعدة لامي يكون

$$\frac{w}{\sin(90+\alpha)} = \frac{N}{\sin(180-\alpha)} = \frac{T}{\sin 90} \quad \text{Or}$$

$$\frac{w}{\cos\alpha} = \frac{N}{\sin\alpha} = T$$

من الشكل



$$\ell\sin\theta = a\sin\alpha, \quad \text{and} \quad \ell\cos\theta = \frac{1}{2}a\cos\alpha$$

$$\ell^2 = a^2\left\{\underbrace{\sin^2\alpha}_{1-\cos^2\alpha} + \frac{1}{4}\cos^2\alpha\right\} \qquad \Rightarrow \ell^2 = a^2\left\{1 - \frac{3}{4}\cos^2\alpha\right\}$$

$$\therefore \cos^2\alpha = 4\frac{a^2-\ell^2}{3a^2} \qquad \Rightarrow \cos\alpha = 2\sqrt{\frac{a^2-\ell^2}{3a^2}}$$

ولكن $y = \frac{a}{2}\cos\alpha$ ومن ثم يكون $y = \sqrt{\frac{a^2-\ell^2}{3}}$

﴿ مثـــ ٧ ـــال ﴾

قضيب غير منظم مركز ثقله يقسمه إلى جزئين أطوالهما a,b حيث $a>b$ وضع باكملـــه داخل قشرة كروية ملساء نصف قطرها ℓ أوجد الزاوية التي يميل بها القضيب على الأفقـــي وردود الافعال.

﴿ الحـــــــل ﴾

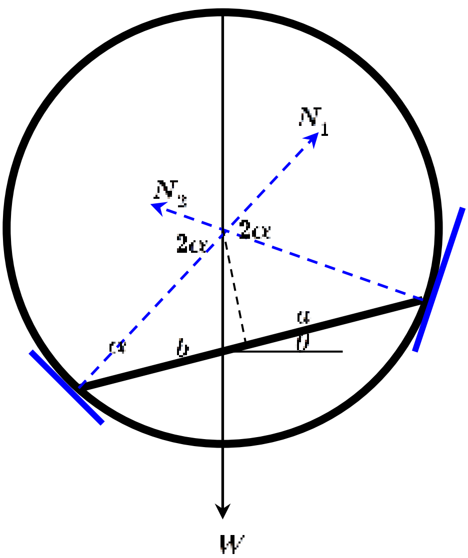
نعلم أن ردود الافعال للأسطح الملساء تكون عمودية على الماس للسطح وحيث أن العمودي على المماس للكرة يمر بالمركز ومن ثم نجد أن ردي الفعل عند نهايتي القضيب N_1, N_2 يمران بمركز الكرة ، وحيث أن القضيب متزن فيجب أن يمر وزنه بنقطة تلاقي ردي الفعـــل عنـــد المركز ومن قاعدة لامي يكون (بفرض أن الزاوية بين القضيب ورد الفعل هي α)

$$\frac{W}{\sin(180-2\alpha)}=\frac{N_2}{\sin(90+\alpha+\theta)}=\frac{N_1}{\sin(90-\theta+\alpha)} \quad \text{Or}$$

$$\frac{W}{\sin 2\alpha}=\frac{N_2}{\cos(\alpha+\theta)}=\frac{N_1}{\cos(\alpha-\theta)}$$

كذلك من الشكل $\cos\alpha=\dfrac{a+b}{2\ell}$ ، $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{4\ell^2-(a+b)^2}}{2\ell}$

$$\frac{a+b}{\underbrace{\sin 2\alpha}_{2\sin\alpha\cos\alpha}}=\frac{\ell}{\sin\alpha} \qquad \cos\alpha=\frac{a+b}{2\ell}, \qquad a\cos\theta=\ell\cos(\alpha-\theta),$$



$$\because \cos(\alpha-\theta)=\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta$$
$$=\left\{\frac{a+b}{2\ell}\right\}\cos\theta+\sqrt{\frac{4\ell^2-(a+b)^2}{2\ell}}\sin\theta$$
$$\therefore\ a\cos\theta=\ell\left[\left\{\frac{a+b}{2\ell}\right\}\cos\theta+\sqrt{\frac{4\ell^2-(a+b)^2}{2\ell}}\sin\theta\right]$$

بالقسمة على $\cos\theta$ نحصل على

$$\therefore\ a=\left[\left\{\frac{a+b}{2}\right\}+\sqrt{\frac{4\ell^2-(a+b)^2}{2}}\tan\theta\right]$$

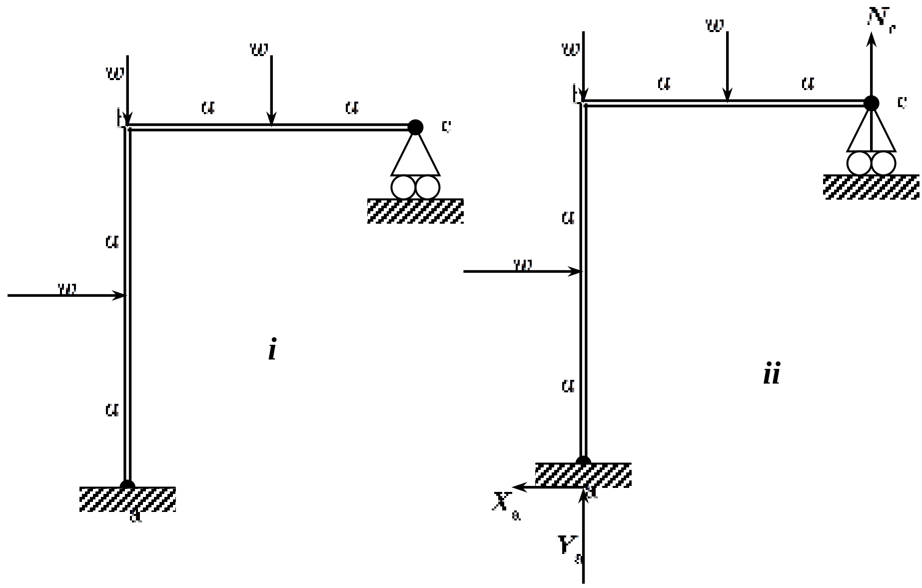
$$\Rightarrow \tan\theta=\frac{a-b}{\sqrt{4\ell^2-(a+b)^2}}$$

أكمل لإيجاد ردود الافعال N_1, N_2 .....

﴿ مثـــ ٨ ـــال ﴾

الجسم المتماسك abc والموضح بالشكل (i) يرتكز مفصلياً في a وارتكازاً حراً في c أوجد ردي الفعل عند a,c .

﴿ الحــــــل ﴾



الجزء (ii) يوضح شكل القوى المؤثرة على الجسم بالاضافة إلى قوى ردود الافعال عند نقاط الارتكاز ، عند النقطة c يكون رد الفعل عمودي حيث أن الركيزة متحركة وعند النقطة a نجهل اتجاه رد الفعل ومن ثم فيكتب بدلالة مركبتين X_a و Y_a ، وبكتابة معادلات الاتـــزان وأخذ العزوم حول النقطة a نحصل على

$$\sum x = 0 \qquad \Rightarrow w = X_a$$

$$\sum M_a = 0 \qquad \Rightarrow N_c(2a) = w(a) + w(a) \qquad \Rightarrow N_c = w$$

$$\sum Y = 0 \qquad \Rightarrow Y_a + N_c = w + w \qquad \Rightarrow Y_a = w$$

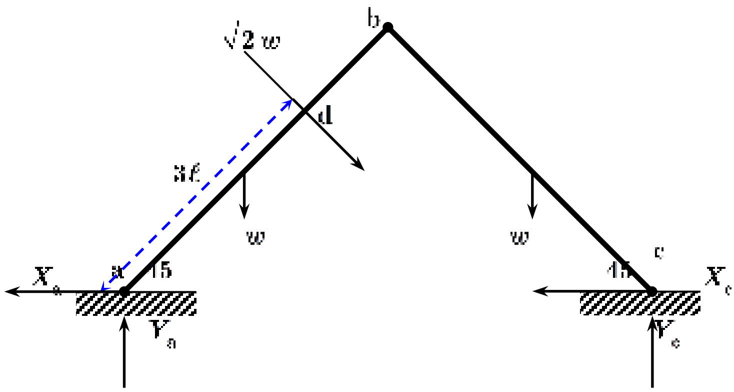
وبذلك نكون قد حصلنا على جميع القوى المجهولة في الهيكل.

﴿ مثـــ ٩ ـــال ﴾

قضيبان متشابهان منتظمان ab, bc وزن كل منهما w وطوله 4ℓ ، مرتبطان مفصلياً عند b ويربطهما إلى الأرض المفصلات a, c . يؤثر حمل $\sqrt{2}\,w$ عمودياً على ab عند نقطة d حيث $ad = 3\ell$. عين ردود الافعال عند المفاصل إذا علم أن زاوية ميل كل قضيب على الأفقـــي هي 45^0 .

﴿ الحـــــل ﴾

عند المفصلين a, c فإن ردود الافعال لا تكون معلومة الاتجاه ومن ثم يستعاض عنها بمركبتين X_a, Y_a و X_c, Y_c أما رد الفعل عند b المفصل فلن يظهر الا حينما نفصل القضبان



وبكتابة معادلات الاتزان وأخذ العزوم حول النقطة a نحصل على

$$\sum x = 0 \quad \Rightarrow 0 = -X_a - X_c + \sqrt{2}\,w\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \therefore X_a + X_c = w$$

$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow Y_a + Y_c - 2w - \sqrt{2}w\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \quad \Rightarrow Y_a + Y_c = 3w$$

$$\sum M_a = 0 \quad \Rightarrow -w(\sqrt{2}\ell) - \sqrt{2}w(3\ell) - w(3\sqrt{2}\ell) + Y_c(4\sqrt{2}\ell) = 0 \quad \Rightarrow Y_c = \frac{7}{4}w$$

$$\therefore Y_a = \frac{5}{4}w$$

وبفصل القضيبان (كما بالشكل) فإن ردي الفعل على كل قضيب عند النقطة b يكونـــان متساويان في المقدار ومتضادان في الاتجاه ، وباعتبار اتزان كل قضيب على حده فمن اتـــزان القضيب ab نجد أن

$$\sum M_b = 0 \quad \Rightarrow w(\sqrt{2}\ell) + w(\sqrt{2}\ell) - X_a\left(\frac{4\ell}{\sqrt{2}}\right) - Y_a\left(\frac{4\ell}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow X_a = -\frac{1}{4}w \qquad \text{and} \qquad X_c = \frac{5}{4}w$$

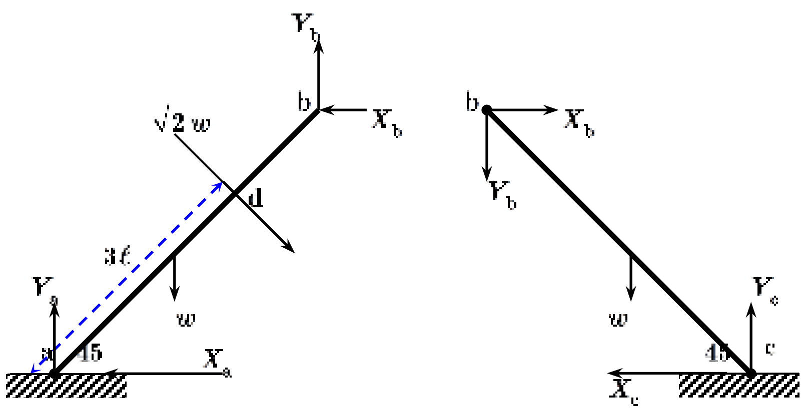
وباعتبار معادلة الاتزان لنفس القضيب في اتجاه Y نحصل على

$$\sum Y = 0 \qquad \Rightarrow Y_a + Y_b - w - \sqrt{2}w\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \;\Rightarrow Y_b = \frac{3}{4}w$$

أيضاً معادلة الاتزان في اتجاه X يكون

$$\sum X = 0 \qquad \Rightarrow -X_a - X_b + \sqrt{2}w\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \;\Rightarrow X_b = \frac{5}{4}w$$

وبذلك نكون قد حصلنا على جميع قوى ردود الافعال المجهولة في الهيكل.



﴿ مثـــ ١٠ ـــال ﴾

لوح منتظم abcd وزنه w ، مرتكز على المفصل b ويحفظ اتزانه بواسطة حبل رأسي ae .
إذا سار رجل وزنه $2w$ على اللوح أوجد أصغر مسافة x يستطيع الجل الوصول إليها حتى لا يفقد اللوح اتزانه ، وإذا كان الحبل لا يتحمل شد أكثر من $5w$ أوجد اكبر مسافة يستطيع الرجل الوصول إليها حتى لا ينقطع الحبل (كما بالشكل).

﴿ الحـــــل ﴾

اولاً لحساب أقل مسافة

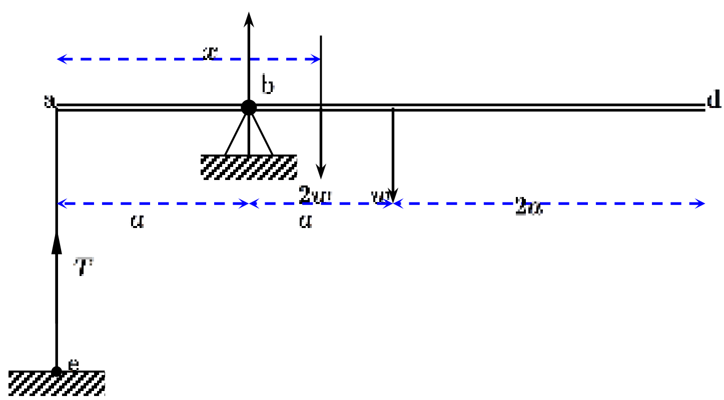
واضح أنه لابد ان تكون القوة في الحبل ae قوة شد ، القوى المؤثرة على اللوح هـــي وزن الرجل ووزن اللوح وردود الافعال وهي رد فعل المفصل عند b والشد في الحبل ومن شروط الاتزان يكون

$$\sum M_{\mathrm{b}} = 0 \quad \Rightarrow Ta - wa - 2w(x-a) = 0$$

$$\frac{T}{w} = 1 + 2\frac{x}{a} - 2 = 2\frac{x}{a} - 1 > 0 \qquad \Rightarrow x > \frac{a}{2}$$

ثانياً إذا سار الرجل في الاتجاه العكسي فإن الشد يزيد بزيادة x إلى أن يصل إلى $5w$ فينقطع الحبل:

$$\therefore 5w > T = w\left(2\frac{x}{a} - 1\right) \qquad \Rightarrow x < 3a$$

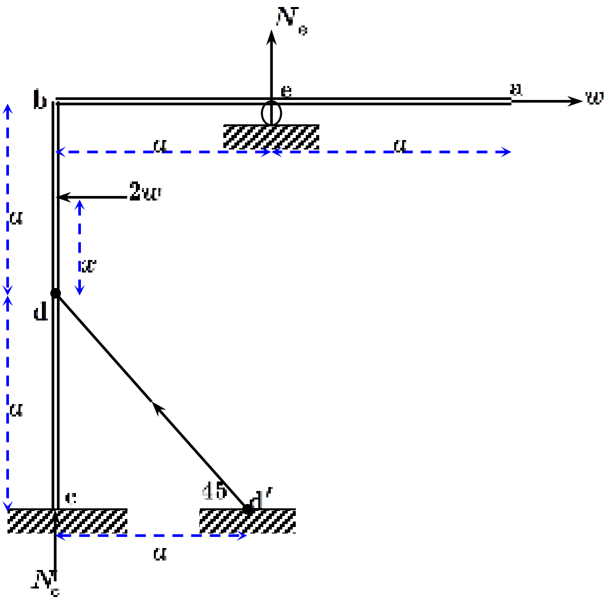


﴿ مثـــ ١١ ـــال ﴾

جسم متماسك على شكل زاوية قائمة abc يرتكز على أرض أفقية ملساء عند c وعلى وتد أملس عند e ويحفظ الاتزان عضو خفيف dd' ويؤثر على الجسم قوة أفقية w في اتجاه ba ، عيّن حدود تغير المسافة x والتي تحدد موضع تأثير قوة أفقية مقدارها $2w$ بحيـــث يبقـــى الاتزان بالارتكازات البسيطة e,c.

﴿ الحــــــل ﴾

لدراسة اتزان الجسم ، القوى المؤثرة عليه هي w ، $2w$ وردود الافعال عنـــد e ويكـــون عمودي على سطح التلامس أي عمودي على ab $(N_e > 0)$ كذلك رد الفعل عند c وهو عمودي على مستوى التماس $(N_c > 0)$ والقوة في العضو dd' وهي يمكن أن تكون شد أو ضغط



$$\sum M_d = 0 \quad \Rightarrow N_e a + 2wx - wa = 0 \qquad \therefore N_e = w - 2w\frac{x}{a} > 0 \quad \therefore x < \frac{a}{2}$$

وبأخذ العزوم حول d' مع ملاحظة أن هذه النقطة تقع أسفل النقطة e مباشرة

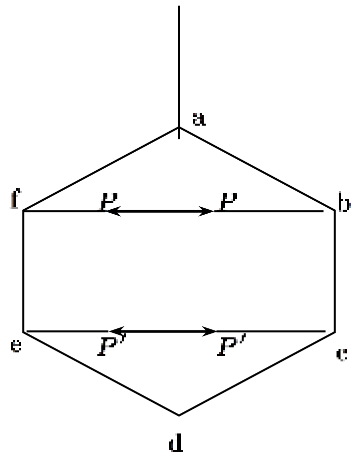
$$\sum M_{d'} = 0 \Rightarrow 2w(x+a) - N_c a - 2wa = 0 \quad \therefore N_c = 2wx - 2wa + 2wa > 0$$

$$\therefore x > 0 \qquad \Rightarrow \frac{a}{2} > x > 0$$

﴿ مثـــ ١٢ ـــال ﴾

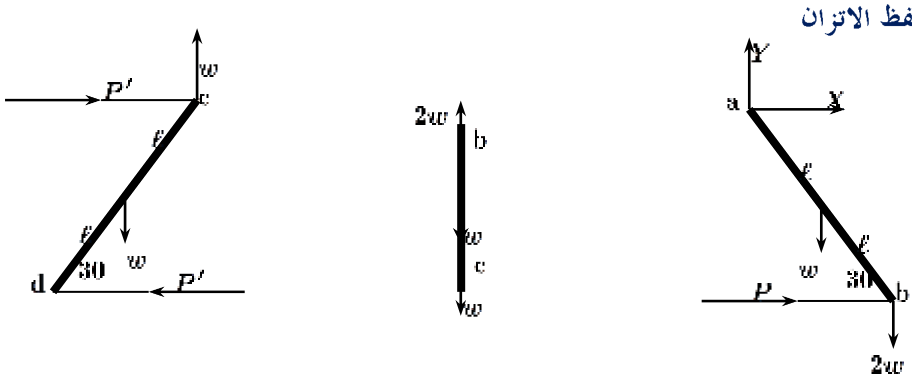
مسدس منتظم abcdef مكون من ستة قضبان متساوية وزن كل منها w ومتصلة اتصـــالاً سهلاً عند نهايتها ، عُلق المسدس من نقطة a وحفظ في هذا الوضع المنتظم بواسطة قضـــيبان خفيفان bf و ce . اثبت أن الضغط في القضـــيب bf يســـاوي خمســـة امثـــال الضـــغط في القضيب ce .

﴿ الحــــل ﴾



نفرض أن P, P' الضغط في القضيبين bf, ce على الترتيب ، من التماثل حول المســـتقيم الرأسي ad يكفي دراسة اتزان القضبان الثلاثة ab, bc, cd

القضيب cd متزن تحت تأثير الضغط الأفقي P' عند c ، ورد الفعل عند d يجب أن يكون أفقياً لذا يساوي P' وفي الاتجاه المبين بالشكل. يجب أن تؤثر عند c قوة رأسية w لأعلـــى لحفظ الاتزان



حتى يتزان القضيب bc يجب ادخال قوة $2w$ رأسياً لأعلى عند b ، وبالنسبة للقضيب ab يجب ادخال قوة $2w$ رأسياً لأسفل عند b وقوتين X,Y عند a وبأخذ العزوم حـــول a نجد أن

$$\sum M_{a} = 0 \quad \Rightarrow -w\ell \sin 60 - 2w(2\ell \sin 60) + P(2\ell \cos 60) = 0$$
$$\therefore P = 5w \sin 60 = \frac{5\sqrt{3}}{2} w$$

لإيجاد P' نعتبر اتزان القضيب cd ونأخذ العزوم حول c فنجد أن

$$\sum M_{c} = 0 \quad \Rightarrow w\ell \cos 30 - P'(2\ell \sin 30) = 0$$
$$\therefore P' = 5w \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} w$$

ومن العلاقتين السابقتين يكون $P = 5P'$ أي أن الضغط في القضيب bf يســـاوي خمســـة امثال الضغط في القضيب ce .

الخلاصـــــــــــــــــة

- إذا أثرت ثلاث قوى غير متوازية وفي مستوى واحد على جسم في حالة اتزان فإن هذه القوى الثلاث يجب أن تلتقي في نقطة واحدة.

- مقدار محصلة أي قوتين $\underline{F}_1, \underline{F}_2$ يتعين من

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha$$

- محصلة مجموعة قوى مستوية متلاقية في نقطة تتعين من

$$R^2 = \left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2, \qquad \tan\theta_x = \frac{\sum F_y}{\sum F_x}$$

- شرط اتزان مجموعة من القوى هو

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \underline{0}, \qquad \underline{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \underline{M}_i = \underline{0}$$

- مراجعة طرق الارتكاز وردود الافعال

تمــــــــــارين

(١) أوجد الزاوية بين قوتين متساويتين قيمة كل منها F عندما تكون محصلتهما $\sqrt{3}F$.

(٢) تنزلق خرزة على سلك دائري أملس في مستوى رأسي متصلة بخيط خفيف مثبتة في نقطة على المستقيم الرأسي الذي يمر بمركز الدائرة. اوجد في وضع الاتزان ضغط الســـلك علـــى الخرزة .

(٣) عُلق وزن w بخيط من نقطة ثابتة وأزيح الخيط خارجاً بواسطة قوة F . أوجد اتجـــاه القوة حتى يكون ميل الخيط على الرأسي في حالة الاتزان أكبر ما يمكن .

(٤) جسمان وزنيهما $3w, 2w$ عند نهايتي خيط غير مرن يمر على وتدين أملسين في نفـــس المستوى الأفقي وفي حالة اتزان ، وجسيم آخر w' مثبت عند نقطة في الخيط بين الوتـــدين. إذا كانت الزاوية بين الجزئين المائلين من الخيط تساوي 120^{o} فاثبت أن $w' = \sqrt{7}w$.

(٥) تستقر كتلة وزنها w على مستوى مائل أملس يميل على الافقي بزاويـــة α . أتصـــلت الكتلة بخيط خفيف من أحد طرفيه ومر الطرف الآخر للخيط على بكرة ملساء وأتصـــل في نهايته بكتلة وزنها w' . أوجد الزاوية التي يصنعها الخيط مع المستوى في حالة الاتزان.

(٦) قضيب منتظم طوله $2a$ يستقر جزء منه داخل نصف كرة مجوفة ملساء نصف قطرها L ومثبته بحيث تكون فوهتها لاعلى. إذا ارتكز القضيب بإحدى نقاطه على حافة الكرة ، وكان ميله على الأفقي في حالة الاتزان هو α ، اثبت أن $2L\cos 2\alpha = a\cos\alpha$.

(٧) قضيب ab منتظم طوله $2L$ ووزنه w ، يرتكز بطرفه b على حائط رأســـي أملـــس ويستند كذلك على وتد ثابت أملس يبعد مسافه h عن الحائط. اثبت أن القضيب يميل على الأفقي في وضع الاتزان بزاوية $\cos^{-1}\left\{\sqrt[3]{\dfrac{h}{L}}\right\}$.

(٨) قضيب منتظم طوله a يستند طرفه على حائط رأسي أملس بعد أن ربط طرفه الآخر في خيط طوله b عُلق في نقطة في الحائط إذا احتوى المستوى الرأسي القضيب والخيط. أوجـــد زاوية ميل القضيب على الرأسي في حالة الاتزان.

(٩) يستقر قضيب داخل كرة ملساء في وضع يميل على الأفقي بزاوية θ فإذا كان مركز ثقل القضيب يقسمه إلى جزئين a,b وكان القضيب يحصر زاوية 2α عند مركز الكرة ، اثبت أن $\tan\theta = \dfrac{a-b}{a+b}\tan\alpha$.

(١٠) كرة ثقيلة وزنها W ترتكز على مستويين أملسين احدهما رأسي والآخر يصنع زاوية α مع الراسي. أوجد رد فعل المستويين على الكرة.

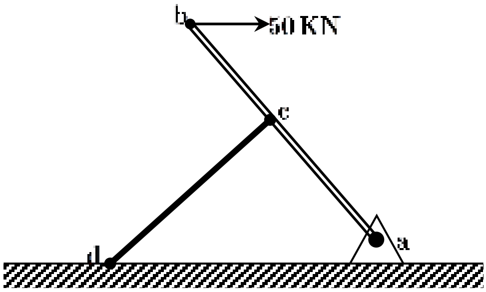
(١١) قضيب منتظم وزنه w ، وطوله ℓ يستند بطرفه A على حائط رأسي أملس بينما الطرف الآخر مربوط بخيط طوله a والطرف الآخر للخيط مثبت في الحائط الرأسي أعلى النقطة A وعلى بعد b منها اوجد الشد في الخيط ورد الفعل.

(١٢) يتكون المربع abcd من أربعة قضبان منتظمة ومتساوية وزن كل منها w ومتصلة مع بعضها البعض بمفاصل ملساء. علقت المجموعة من a ، وصل خيط بين a,c ليحفظ شكلها المربع. اوجد الشد في الخيط ومقادير واتجاهات ردود الافعال عند جميع المفاصل.

(١٣) ac,ab قضيبان طول كل منهما 2L ووزن كل منهما w متصلان اتصالاً سهلاً عند a والنهايات b,c على أرض أفقية ملساء وحفظ القضيبان في المستوى الرأسي بواسطة خيطين يصلان b,c بمنتصفي القضيبين المقابلين. أوجد الشد في أيٍ من الخيطين ورد الفعل عند المفصل إذا علمت أن θ هي زاوية ميل كل قضيب مع الأفقي.

(١٤) قضيبين منتظمين ac,ab متساويان في الطول وزنيهما w, w' ، متصلين اتصالاً مفصلياً عند a علقا في مستوى رأسي في مفصلين c,b في نفس المستوى الأفقي. أثبت أن المركبة الأفقية لرد الفعل عند a تساوي $0.25(w+w')Lh^{-1}$ ، حيث 2L هي المسافة بين b,c ، h هو عمق a عن bc .

(١٥) قضيب ab متصل بالأرض بمفصل عند a ومرتكز على دعامة cd وتؤثر عليه قوة أفقية مقدارها 50 KN عند b كما هو مبين بالشكل. اوجد قوة الشد في الدعامة ورد الفعل عند a حيث الزاوية bcd قائمة وارتفاع النقطة b عن الارض 8m والنقطة c هو 4m وبعد مسقط النقطة b عن النقطة a هو 12m وبعد مسقط c عن a هو 6m .



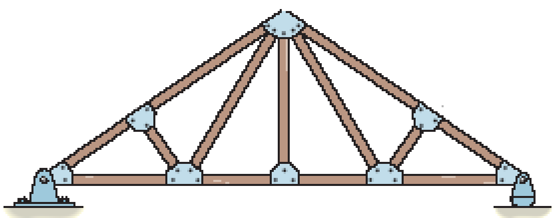
(١٦) قضيبان متساويان طول كل منهما 2ℓ ووزن كل منهما w متصلين اتصالاً سهلاً والنهايات الحرة متصلة بخيوط مثبتة في نقطة معينة ، إذا كان طول كل خيط 2ℓ والزاوية بين القضيبين 2θ ووضع قرص نصف قطره a بين القضيبين والمجموعة متزنة في المستوى الرأسي والقرص وزنه $3w$ فاثبت أن $a = 6\ell \sin^2\theta \tan\theta$.

(١٧) قضيب ab منتظم متصل بمفصل عند a عند حائط رأسي أملس والنهاية b تتصل بقضيب bc بمفصل سهل عند b . إذا كانت النهاية c مرتكزة على الحائط وأن $ab = 2bc$ والقضيبين لهما نفس الكثافة وفي مستوى رأسي واحد عمودي على الحائط فاثبت أنه في وضع الاتزان يصنع القضيب ab مع الرأسي زاوية $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ وأن رد الفعل عند b يساوي $\frac{1}{\sqrt{2}}$ من وزن القضيب ab وأوجد رد الفعل عند a .

الفصل الرابع

الهياكل FRAMEWORK

الهياكل (الشبكيات) عبارة عن مجموعة من القضبان المتصلة بواسطة وصلات مفصلية أو مثبتة بمسامير وتهدف إلى حمل الأثقال عند الوصلات فقط. من المفترض أن يدور كل مفصل بحرية دون احتكاك ؛ ومن ثم فإن جميع القضبان في الهيكل تنشأ بها قوى مباشرة فقط وبالتالي فهي في حالة شد أو ضغط. يعتبر حمل الشد موجبًا ويسمى العضو الذي يحمل الشد ربطة عنق. الحمل الانضغاطي سلبي ويسمى العضو في الضغط دعامة. عادة ما يُفترض أن تكون القضبان خفيفة مقارنة بالأحمال الواقعة عليها. في الممارسة العملية ، قد يتم لحام مفاصل هيكل ولكن يتم حساب القوى الناشئة على العضو غالبًا على افتراض أن المفاصل مثبتة وليست ملحومة. يعطي هذا الافتراض قيم الشد أو الانضغاط الموجودة في الجانب الآمن. من أجل أن يكون الهيكل صلبًا وقادرًا على حمل الاثقال ، يشكل كل جزء مثلثًا ، ويتكون الإطار بأكمله من مثلثات. يمكن الحصول على القوى الموجودة في أعضاء الهيكل الصلب الموصل بمسامير من خلال طرق الإحصائيات ، أي باستخدام المثلث والمضلع للقوى ، وتحليل القوى ومبدأ العزوم. يقال إن نظام القوى في مثل هذا الهيكل محدد استاتيكياً.

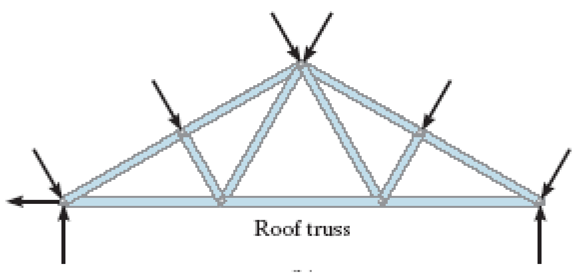


المخطط الحر للجسم

يتطلب التطبيق الناجح لمعادلات التوازن تحديدًا كاملاً لجميع القوى الخارجية المعروفة وغير المعروفة التي تعمل على الجسم .أفضل طريقة لحساب هذه القوى هي رسم مخطط الجسم الحر . هذا المخطط هو رسم تخطيطي للشكل المحدد للجسم ، والذي يمثله على أنه معزول أو "متحرر" من محيطه ، أي جسم حر .في هذا المخطط ، من الضروري إظهار جميع القوى والعزوم التي تؤثر بها البيئة المحيطة على الجسم بحيث يمكن حساب هذه التأثيرات عند تطبيق معادلات التوازن .يعد الفهم الشامل لكيفية رسم مخطط الجسم الحر ذا أهمية أساسية لحل المشكلات في الميكانيكا.

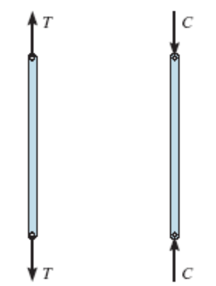
الجمالـــــــون

الجمالون عبارة عن هيكل يتكون من أعضاء رفيعة مرتبطة معًا في نقاط نهايتهم .تتكون العناصر المستخدمة بشكل شائع في البناء من دعامات خشبية أو قضبان معدنية .على وجه الخصوص ، تقع الجمالونات المستوية في مستوى واحدة وغالبًا ما تستخدم لدعم الأسطح والجسور .الجمالون الموضح في الشكل هو مثال على الجمالون النموذجي الداعم للسقف .في هذا الشكل ، ينتقل حمل السقف إلى الجمالون عند المفاصل عن طريق سلسلة من المدادات. نظرًا لأن هذا التحميل يعمل في نفس مستوى الجمالون ، فإن تحليل القوى المطورة في أعضاء الجمالون سيكون ثنائي الأبعاد لتصميم كل من الأعضاء ووصلات الجمالون ، من الضروري أولاً تحديد القوة الواقعة في كل عضو عندما يتعرض الجمالون لتحميل معين .للقيام بذلك ، سنضع افتراضين مهمين:



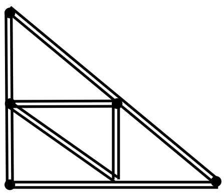
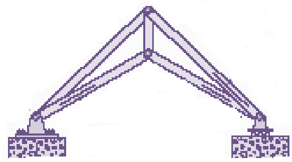
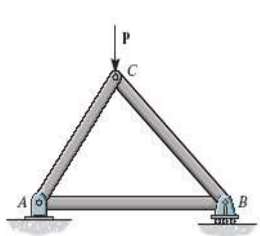
◈كل الاحمال تكون عند الوصلات. في معظم الحالات ، مثل دعامات الجسور والسقف ، يكون هذا الافتراض صحيحًا. في كثير من الأحيان يتم إهمال وزن الأعضاء لأن القوة التي يدعمها كل عضو عادة ما تكون أكبر بكثير من وزنه .ومع ذلك ، إذا تم تضمين الوزن في التحليل ، فمن المقبول عمومًا تطبيقه كقوة رأسية ، مع تطبيق نصف حجمها في نهاية كل عضو.

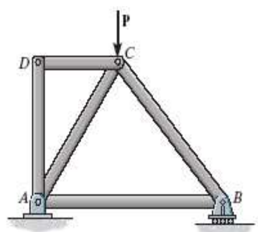
◈ عادة ما يتم تشكيل وصلات الوصلات عن طريق ربط نهايات الأعضاء أو لحامها بلوحة مشتركة ، تسمى لوحة مجمعة ، كما هو موضح في الشكل ، أو ببساطة عن طريق تمرير مسمار أو دبوس كبير عبر كل عضو ، كما هو موضح .يمكننا أن نفترض أن هذه الاتصالات تعمل كدبابيس بشرط أن تكون الخطوط المركزية للأعضاء المنضمين متزامنة ، كما هو موضح. بسبب هذين الافتراضين ، سيعمل كل عضو من أعضاء الجمالون كعضوين في القوة ، وبالتالي فإن القوة المؤثرة في كل طرف من العضو سيتم توجيهها على طول محور العضو ، إذا كانت القوة تميل إلى إطالة العضو ، فهي قوة شد **T** ، كما في الشكل ، بينما إذا كانت تميل إلى تقصير العضو ، فهي قوة ضغط **P**. في التصميم الفعلي للجمالون ، من المهم تحديد ما إذا كانت طبيعة القوة قابلة للشد أو الانضغاط .في كثير من الأحيان ، يجب جعل أعضاء الضغط أكثر سمكًا من أعضاء الشد بسبب الالتواء أو تأثير العمود الذي يحدث عندما يكون العضو في حالة ضغط.



الجمالون البسيط

إذا تم توصيل ثلاثة أعضاء في نهاياتهم ، فإنهم يشكلون جمالًا مثلثيًا سيكون صلبًا ، كما هو موضح .إن ربط عضوين آخرين وربط هؤلاء الأعضاء بمفصل جديد **D** يشكل دعامة أكبر ، كما هو موضح .يمكن تكرار هذا الإجراء عدة مرات حسب الرغبة لتشكيل تروس أكبر .إذا كان من الممكن بناء الجمالون عن طريق توسيع الجمالون المثلث الأساسي بهذه الطريقة ، فإنه يسمى الجمالون البسيط .المعادلة الأساسية بين عدد أعضاء الجمالون m وعدد المفاصل n هي $m = 2n - 3$



طريقة الوصلات

من أجل تحليل أو تصميم الجمالون ، من الضروري تحديد القوة في كل عضو من أعضائه. طريقة واحدة للقيام بذلك هي استخدام طريقة الوصلات أو المفاصل. تعتمد هذه الطريقة على حقيقة أنه إذا كان الجمالون بأكمله في حالة اتزان ، فإن كل وصلاته في حالة اتزان أيضًا. لذلك ، إذا تم رسم مخطط الجسم الحر لكل وصلة ، فيمكن بعد ذلك استخدام معادلات اتزان القوى للحصول على قوى الأعضاء التي تعمل على كل وصلة. نظرًا لأن أعضاء الجمالون المستوى هي أعضاء مستقيمة من قوتين متلاقيتان في مستوى واحد ، فإن كل مفصل

يخضع لنظام قوة مستوى. نتيجة لذلك ، فقط $\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$ يجب أن يتحققا في حالة الاتزان. عند استخدام طريقة الوصلات ، ابدأ دائمًا من وصلة له قوة واحدة معينة على الأقل وقوتين غير معينتين على الأكثر. وبهذه الطريقة ، يتم تطبيق $\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$ وإعطاء معادلتين جبريتين يمكن حلهما للمجهولين. عند تطبيق هذه المعادلات ، يمكن تحديد الاتجاه الصحيح لقوة عضو غير معروفة باستخدام إحدى طريقتين.

يمكن ، في كثير من الحالات ، تحديد الاتجاه الصحيح لقوة عضو "عن طريق البحث". في الحالات الأكثر تعقيدًا ، يمكن افتراض اتجاه قوة عضو المجهولة ؛ وبعد ذلك ، بعد تطبيق معادلات الاتزان ، يمكن التحقق من الاتجاه الذي تم افتراضه من النتائج العددية. تشير القيمة "الموجبة" إلى أن الاتجاه الذي تم افتراضه صحيح ، بينما تشير القيمة "السالبة" الناتجة إلى أن الاتجاه الموضح في مخطط الجسم الحر يجب عكسه.

افترض دائمًا أن قوى الأعضاء المجهولة التي تعمل على مخطط الجسم الحر للمفصل في حالة شد ؛ على سبيل المثال ، القوى "تسحب" الدبوس. إذا تم ذلك ، فإن الحل العددي لمعادلات الاتزان سينتج عنه قيم موجبة للأعضاء في حالة شد وقيم سالبة للأعضاء في حالة ضغط. بمجرد العثور على قوة عضو غير معروفة ، استخدم قيمتها واتجاهها الصحيحين T أو P في الرسوم البيانية اللاحقة للجسم الحر.

الأعضاء ذات القوى الصفرية

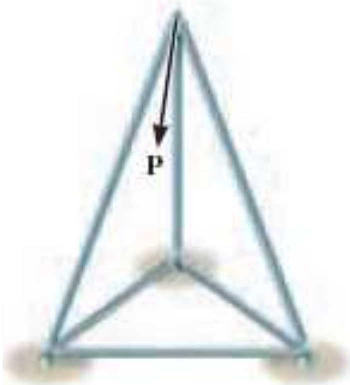
يتم تحليل الجمالون باستخدام طريقة الوصلات إلى حد كبير إذا تمكنا أولاً من تحديد تلك الأعضاء التي لا تدعم التحميل .يتم استخدام أعضاء القوة الصفرية هذه لزيادة ثبات الجمالون أثناء البناء ولتوفير دعم إضافي إذا تم تغيير التحميل .يمكن بشكل عام العثور على أعضاء القوة الصفرية في الجمالون عن طريق فحص كل مفاصل.

طريقة المقاطع

عندما نحتاج إلى إيجاد القوة في عدد قليل فقط من أعضاء الجمالون ، يمكننا تحليل الجمالون باستخدام طريقة المقاطع ، يعتمد على مبدأ أنه إذا كان الجمالون في حالة اتزان ، فإن أي جزء من الجمالون يكون أيضًا في حالة اتزان. عند تطبيق معادلات الاتزان ، يجب أن نفكر بعناية في طرق كتابة المعادلات حتى نحصل على حل مباشر لكل من المجاهيل ، بدلاً من الاضطرار إلى حل المعادلات الآنية .هذه القدرة على تحديد القوة مباشرة في عضو الجمالون المعين هي واحدة من المزايا الرئيسية لاستخدام طريقة المقاطع.

الجمالونات الفراغية

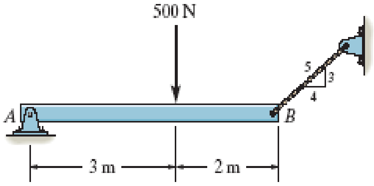
يتكون الجمالون الفراغي من أعضاء مرتبطين معًا في نهاياتهم لتشكيل هيكل ثابت ثلاثي الأبعاد. أبسط شكل من أشكال الجمالون الفضائي هو رباعي السطوح ، يتكون من ربط ستة أعضاء معًا ، كما هو موضح. أي عناصر إضافية تضاف إلى هذا العنصر الأساسي ستكون زائدة عن الحاجة في دعم القوة P يمكن بناء الجمالون الفراغي البسيط من هذا العنصر رباعي السطوح الأساسي بإضافة ثلاثة أعضاء إضافية ومفصل ، والاستمرار بهذه الطريقة لتشكيل نظام متعدد التوصيل رباعي السطوح. افتراضات التصميم. يمكن التعامل مع أعضاء الجمالون الفراغي كأعضاء من قوتين شريطة أن يتم تطبيق التحميل الخارجي في المفاصل وتتكون المفاصل من وصلات كروية ومقبس. تكون هذه الافتراضات مبررة إذا تقاطعت الوصلات الملحومة أو المثبتة بمسامير للأعضاء المتصلة عند نقطة مشتركة



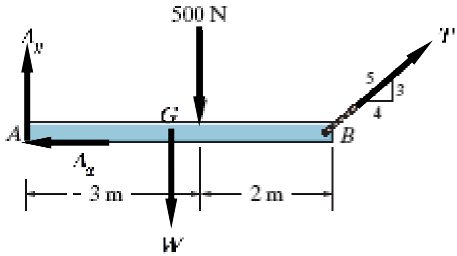
ويمكن إهمال وزن الأعضاء. في الحالات التي يتم فيها تضمين وزن العضو في التحليل ، يكون من المقبول عمومًا تطبيقه كقوة رأسية ، حيث يتم تطبيق نصف قيمتها في نهاية كل عضو.

《 مثـــ ١ ـــال 》

ارسم مخطط الجسم الحر للعارضة كما هو موضح.

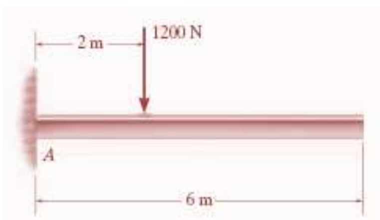


《 الحـــــل 》



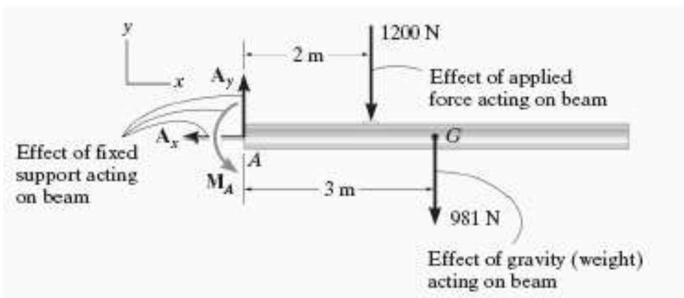
مخطط الجسم الحر، تتم إزالة الـــدعامات ، ويظهر مخطط الجسم الحر للعارضة في الشكل أدناه .نظرًا لأن التثبيت في **A** هو دعامة ثابتة ، فإن الدعامة يمارس ردي فعل على العارضة ، يُشار إليه بـــــ A_x ، A_y مقـــدار ردود الافعال هذه غير معروفة ، وقد تم افتـــراض إتجاهها .وزن العارضة **W**، يؤثر عند مركز جاذبية الشعاع **G** ، والذي يبعد **2.5 m** عن **A** لأن العارضة منتظمة الشد في الخيط كما هو موضح.

《 مثـــ ٢ ـــال 》

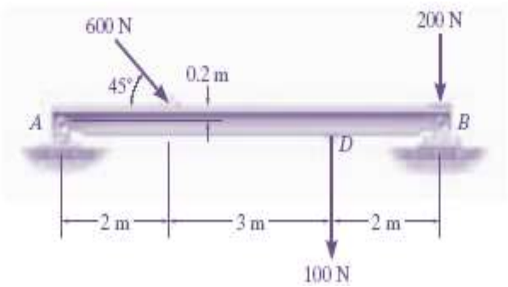


ارسم مخطط الجسم الحر للعارضة المنتظمة الموضـــحة في الشكل ، كتلة العارضة **100 kg**.

《 الحـــــل 》



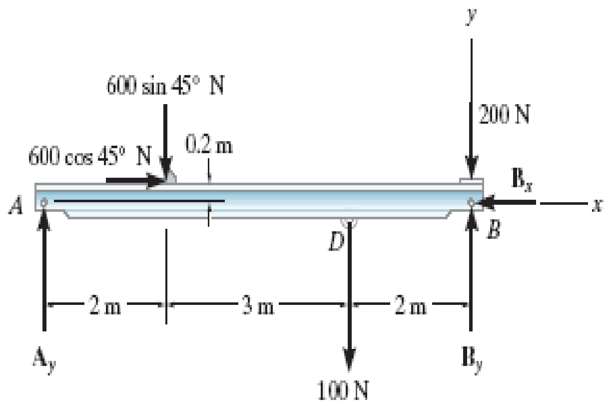
يظهر مخطط الجسم الحر للعارضة في الشكل، نظرًا لأن التثبيت عند **A** ثابت ، فإن الجدار يمارس ثلاثة ردود فعل على العارضة ، يُشار إليها بالرمز A_y ، A_x ، M_A مقدار ردود الفعل هذه غير معروف ، وقد تم افتراض إتجاهها . وزن العارضة ، **W = 100 (9.81) N = 981 N**، يؤثر عند مركز ثقل الحزمة **G** ، والذي يبعد **3 m** عن **A** لأن العارضة منتظمة.



﴿ مثـــ ٣ ـــال ﴾

حدد المركبات الأفقية والرأسية لرد الفعل على العارضة عن التثبيت عند **B** والضغط عند **A** كما هو موضح ، مع إهمال وزن العارضة.

﴿ الحـــــــل ﴾



تتم إزالة الدعامات ، ويظهر مخطط الجسم الحر للعضو في الشكل ، من أجل التبسيط ، يتم تمثيل القوة **600 N** بمركباتها الافقية والرأسية كما هو موضح .معادلات الاتزان .

جمع القوى في الاتجاه x ينتج

$$\underset{\rightarrow}{+} \quad \sum F_x = 0, \qquad 600\cos 45 - B_x = 0, \qquad \Rightarrow B_x = 424 \ \text{N}$$

الحل المباشر للمركبة A_y يمكن الحصول عليه من معادلة العزم $\sum M_B = 0$ حول **B**

$$\sum M_B = 0, \qquad 100(2) + 600\sin 45(5) - 600\cos 45\,(0.2) - A_y(7) = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 319 \ \text{N}$$

جمع القوى في الاتجاه y ينتج

$$+\uparrow \sum F_y = 0,$$

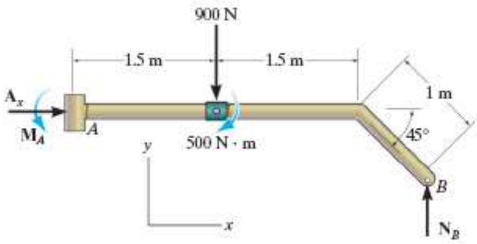
$$319 - 600\sin 45 - 100 - 200 + B_y = 0,$$

$$\Rightarrow B_y = 405$$

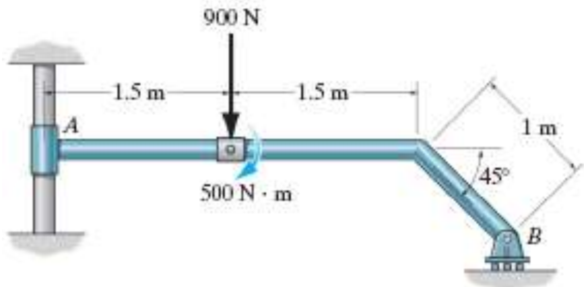
ملاحظة: تذكر أن قوى التثبيت في الشكل هي نتيجة المسامير التي تؤثر على العارضة.

﴿ مثـــ ٤ ـــال ﴾

عيّن ردود الفعل على العضو في الشـــكل ، طوق في A مثبت على العضو ويمكن أن يتزلق عموديًا على طول العمود الرأسي.



﴿ الحـــــل ﴾



مخطط الجسم الحر، عند إزالة الدعامات ، يظهر مخطط الجسم الحر للعضو .يمارس الطوق قوة أفقية A_x وعزم M_A على العضو ، يكون رد فعل الدعامة المتزلقة N_B على العضو رأسيًا يمكن تحديد القوى A_x ، N_B مباشرة من معادلات اتزان القوى

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0, \qquad A_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0, \qquad N_B - 900 = 0 \qquad \Rightarrow N_B = 900\text{ N}$$

يمكن تعيين العزم بأخذ العزوم حولالنقطة A او النقطة B

$$\sum M_A = 0, \qquad M_A - 500 + 900((1.5) + (1)\cos 45) = 0$$

$$\Rightarrow M_A = -1486\text{ N}$$

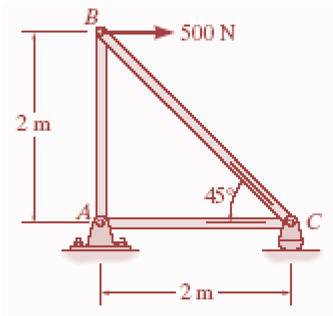
or B

$$\sum M_B = 0, \qquad M_A + 900((1.5) + (1)\cos 45) - 500 = 0$$

$$\Rightarrow M_A = -1486\text{ N}$$

تشير القيمة السالبة إلى أن M_A لها اتجاه دوران معاكس لم هو الموضح في مخطط الجسم الحر.

﴾ مثـــ ه ـــال ﴿

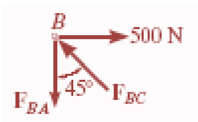


حدد القوة في كل عضو من الجمالون كما هو موضح ووضح ما إذا كانت الأعضاء في حالة شد أو ضغط.

﴾ الحــــــل ﴿

نظرًا لأنه لا ينبغي أن يكون لدينا أكثر من قوتين مجهولتين في الوصلة وقوة واحدة معروفة على الأقل تعمل هناك ، فسنبدأ تحليلنا في الوصلة **B**

الوصلة B

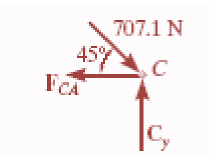


من مخطط الجسم الحر للمفصل عند **B** وبتطبيق معادلات الاتزان يكون

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0, \qquad 500 - F_{BC}\sin 45 = 0 \qquad \Rightarrow F_{BC} = 707.1 \text{ N}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0, \qquad F_{BC}\cos 45 - F_{BA} = 0 \qquad \Rightarrow F_{BA} = 500 \text{ N}$$

نظرًا لأنه تم حساب القوة في العضو **BC** ، يمكننا المضي قدمًا في تحليل الوصلة **C** لتحديد القوة في العضو **CA** ورد فعل الدعامة المتزلقة عند **C**



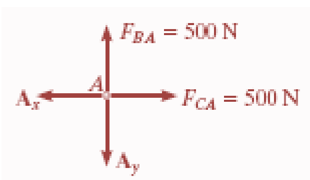
الوصلة C

من مخطط الجسم الحر للوصلة عند **C** وبتطبيق معادلات الاتزان يكون

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0, \qquad -F_{CA} + 707.1\cos 45 = 0 \qquad \Rightarrow F_{CA} = 500 \text{ N}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0, \qquad C_y - 707.1\sin 45 = 0 \qquad \Rightarrow C_y = 500 \text{ N}$$

الوصلة A

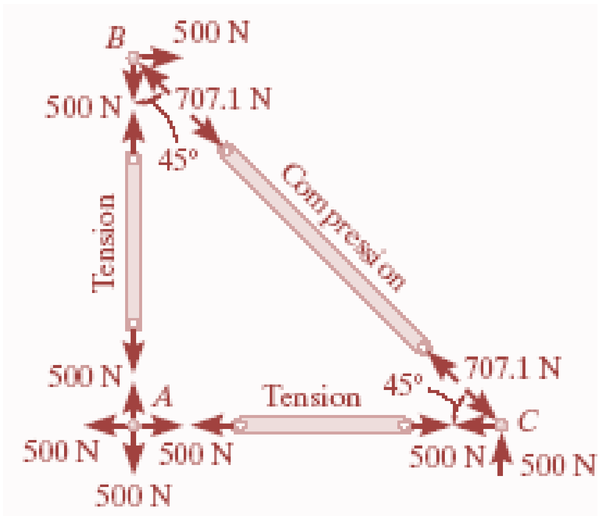


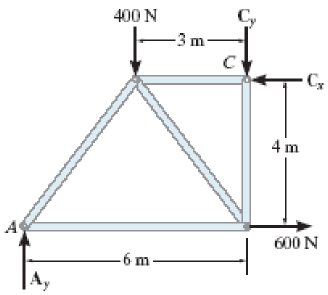
على الرغم من أنه ليس ضروريًا ، يمكننا حساب مركبات ردود الفعل للدعامة الثابتة عند المفصل **A** باستخدام نتائج F_{CA} ، F_{BA} ومن مخطط الجسم الحر وبتطبيق معادلات الاتزان يكون

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0, \qquad 500 - A_x = 0 \qquad \Rightarrow A_x = 500 \text{ N}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0, \qquad 500 - A_y = 0 \qquad \Rightarrow A_y = 500 \text{ N}$$

ملاحظة: تم تلخيص نتائج التحليل في الشكل الأخير .لاحظ أن مخطط الجسم الحر لكل مفصل (أو دبوس) يوضح تأثيرات جميع الأعضاء المتصلة والقوى الخارجية الواقعة على الوصلة ، بينما يوضح مخطط الجسم الحر لكل عضو فقط تأثيرات نهاية الوصلات على العضو.



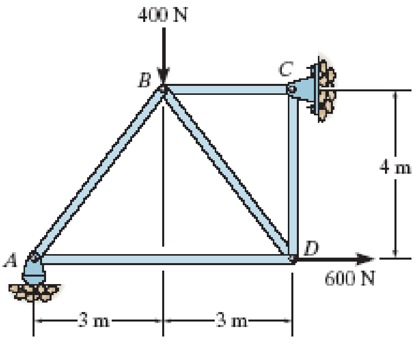


﴿ مثـــال ٦ ـــال ﴾

حدد القوة في كل عضو من الجمالون المبين في الشكل ثم وضح ما إذا كانت الأعضاء في حالة شد أو ضغط.

﴿ الحـــــل ﴾

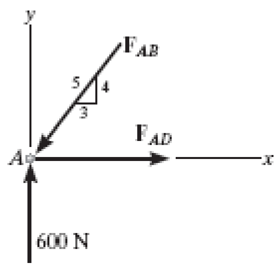
ردود فعل الدعامات. لا يمكن تحليل أي وصلة حتى يتم تحديد ردود فعل الدعامات ، لأن كل وصلة لها على الأقل ثلاث قوى مجهولة تؤثر عليها ، و في الشكل رسم تخطيطي للجسم الحر للجمالون بأكمله. بتطبيق معادلات الاتزان



$$
\begin{array}{llll}
\overset{+}{\rightarrow} & \sum F_x = 0, & 600 - C_x = 0 & \Rightarrow C_x = 600\ \mathrm{N} \\
+\uparrow & \sum F_y = 0, & 600 - 400 - C_y = 0 & \Rightarrow C_y = 200\ \mathrm{N} \\
 & \sum M_C = 0, & -A_y(6) + 400(3) + 600(4) = 0 & \Rightarrow A_y = 600\ \mathrm{N}
\end{array}
$$

يمكن أن يبدأ التحليل الآن إما عند المفصل **A** أو **C** و يكون الاختيار اختيارياً نظرًا لوجود قوة معروفة وقوتين مجهولتين يعملان على الدبوس عند كل من هذه المفاصل.

الوصلة A

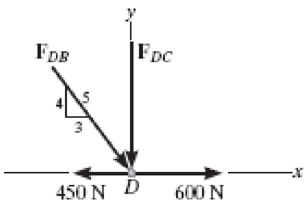


كما هو موضح في الرسم التخطيطي للجسم الحر ، F_{AB} من افترض أن يكون ضغطًا ، F_{AD} قابلاً للشد ، بتطبيق معادلات الاتزان نحصل على

$$+\uparrow \sum F_y = 0, \qquad 600 - \frac{4}{5}F_{AB} = 0 \qquad \Rightarrow F_{AB} = 750 \text{ N}$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0, \qquad F_{AD} - \frac{3}{5}(750) = 0 \qquad \Rightarrow F_{AD} = 730 \text{ N}$$

الوصلة D



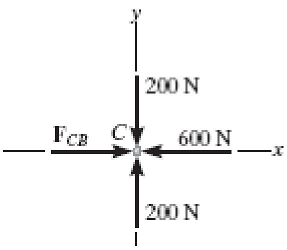
باستخدام نتيجة قيمة F_{AD} وجمع القوى في الاتجاه الأفقي، يكون

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0, \qquad -450 + \frac{3}{5}F_{DB} + 600 = 0 \qquad \Rightarrow F_{DB} = -250 \text{ N}$$

تشير الإشارة السالبة إلى أن اتجاه F_{DB} يعمل في الاتجاه المعاكس أي عكس الاتجاه المفروض. للتحديد F_{DC}، يمكننا إما تصحيح الإتجاه على مخطط الجسم الحر لـــ F_{DB} ، ثم تطبيق $F_y = 0$ أو تطبيق هذه المعادلة مع الاحتفاظ بالإشارة السالبة لــ F_{DB} ، أي أن

$$+\uparrow \sum F_y = 0, \qquad -F_{DC} - \frac{4}{5}(-250) = 0 \qquad \Rightarrow F_{DC} = 200 \text{ N}$$

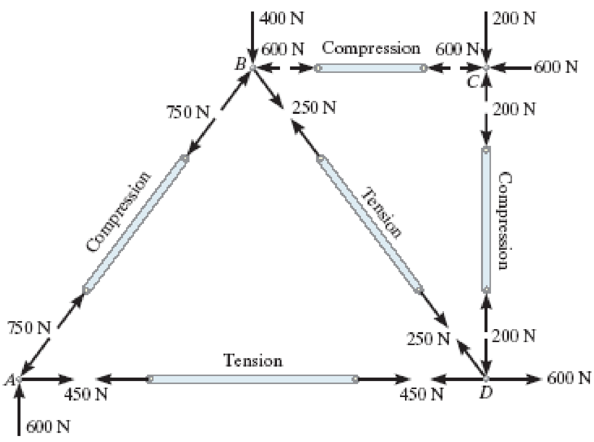
الوصلة C



$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0, \qquad F_{CB} - 600 = 0$$

$$\Rightarrow F_{CB} = 600 \text{ N}$$

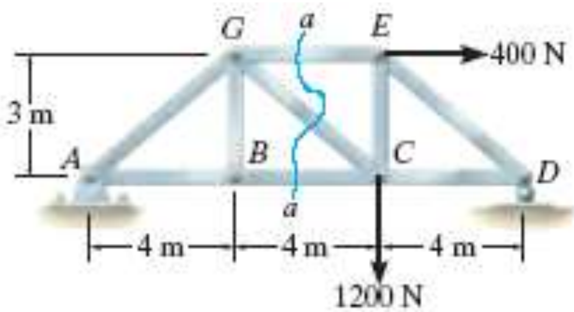
$$+\uparrow \sum F_y = 0, \qquad 200 - 200 = 0$$



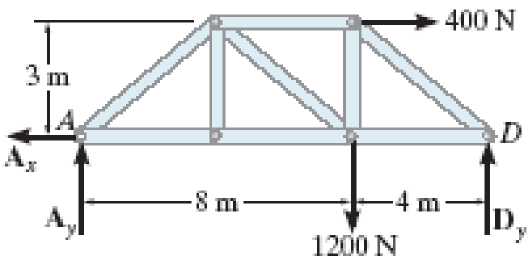
ملاحظة: تم تلخيص التحليل في الشكل الأخير ، والذي يوضح مخطط الجسم الحر لكل مفصل وعضو.

﴿ مثـــال ٧ ﴾

حدد القوة في الأعضاء GE ، GC ، BC للجمالون المبين في الشكل ثم وضح ما إذا كانت الأعضاء في حالة شد أو ضغط.

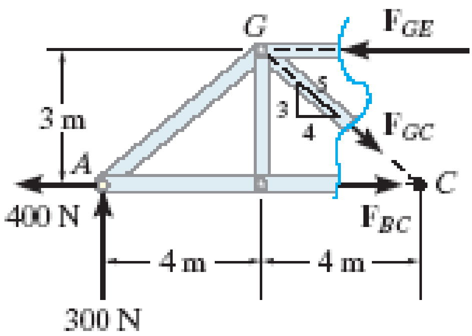


﴿ الحـــــل ﴾



تم اختيار المقطع aa في الشكل لأنه يتقاطع مع الأعضاء الثلاثة الذين سيتم تحديد القوى التي تعمل عليهم ، من أجل استخدام طريقة المقاطع ، من الضروري أولاً تحديد ردود الفعل الخارجية عند A ، D لماذا؟ يظهر رسم تخطيطي للجسم الحر للجمالون بأكمله في الشكل الثاني ، بتطبيق معادلات الاتزان يكون لدينا

$$\begin{aligned}
&\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0, && 400 - A_x = 0 && \Rightarrow A_x = 400\ \text{N}\\
&\sum M_A = 0, && -1200(8) - 400(3) + D_y(12) = 0 && \Rightarrow D_y = 900\ \text{N}\\
&+\uparrow \sum F_y = 0, && A_y - 1200 + 900 = 0 && \Rightarrow A_y = 300\ \text{N}
\end{aligned}$$



من أجل التحليل ، سيتم استخدام مخطط الجسم الحر للجزء الأيسر من الجمالون المقطوع ، لأنه يتضمن أقل عدد من القوى ،اخذ العزوم حول النقطة **G** يلغي كلا من F_{GE} ، F_{GC} ويؤدي إلى حل مباشر لــ F_{BC} .

$$\sum M_G = 0, \qquad -300(4) - 400(3) + F_{BC}(3) = 0 \ \Rightarrow F_{BC} = 800 \ \text{N}$$

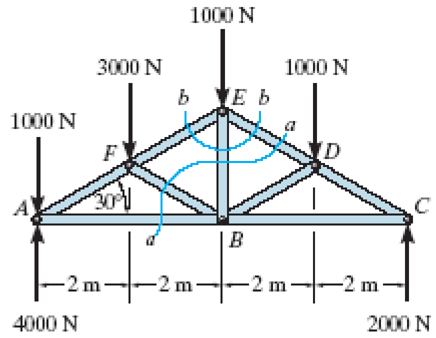
بنفس الطريقة ، من خلال اخذ العزوم حول النقطة **C** ، نحصل على حل مباشر لــ F_{GE}

$$\sum M_C = 0, \qquad -300(8) - F_{GE}(3) = 0 \ \Rightarrow F_{GE} = 800 \ \text{N}$$

حيث أن F_{BC} ، F_{GE} ليس لهما مركبات رأسية ، فإن جمع القوى في الاتجاه y يؤدي بشكل مباشر لــ F_{GC} ، أي أن

$$+\uparrow \sum F_y = 0, \qquad 300 - \frac{3}{5}F_{GC} = 0 \qquad \Rightarrow F_{GC} = 500 \ \text{N}$$

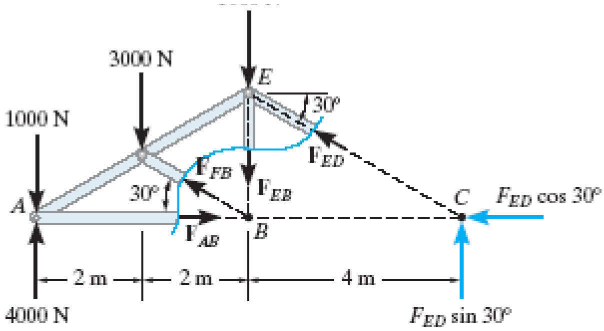
ملحوظة: هنا من الممكن تحديد الاتجاه الصحيح لكل قوة عضو مجهولة من خلال البحث. على سبيل المثال ، يتطلب أن يكون ضغطًا لأنه يجب أن يوازن بين عزم قوة **300 N** حول **C**



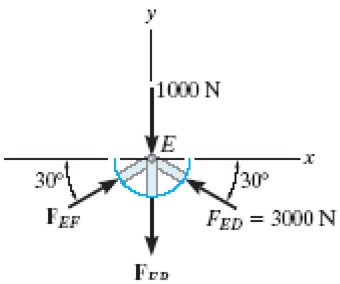
﴿ مثـــ ٨ ـــال ﴾

عيّن القوة في العضو EB من جمالون السقف الموضح في الشكل وضح ما إذا كان العضو في حالة شد أو ضغط.

﴿ الحـــــل ﴾



مخطط الجسم الحر من خلال طريقة المقاطع ، سيتعين على أي مقطع وهي يخترق EB ، كما هو موضح ، أن يخترق ثلاثة أعضاء آخرين مجهولة القوى العاملة عليهم. على سبيل المثال ، يقطع القسم aa خلال ED و EB وFB و AB. إذا أخذنا في الاعتبار رسم تخطيطي للجسم الحر للجانب الأيسر من هذا المقطع ، فمن الممكن الحصول علي F_{ED} عن طريق جمع العزوم حول B لإزالة العناصر المجهولة الثلاثة الأخرى ؛ ومع ذلك ، F_{EB} لا يمكن تحديدها من معادلتي الاتزان المتبقيتين. إحدى الطرق الممكنة للحصول علي F_{EB} هي تحديد F_{ED} أولاً من القسم aa ، ثم استخدام هذه النتيجة في القسم bb ، الموضح في الشكل، هنا يكون نظام القوة متزانًا ومخطط الجسم الحر المقطوع هو نفس مخطط الجسم الحر للمفصل عند E من أجل تحديد عزم F_{ED} حول النقطة B ، سنستخدم مبدأ القابلية للانتقال ونحرك القوة للنقطة C ثم تحليلها إلى مركباتها كما هو موضح .وبالتالي،



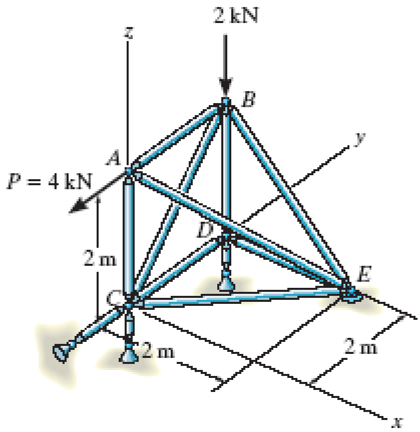
$$\sum M_B = 0, \quad 1000(4) + 3000(2) - 4000(4) + F_{ED}\sin 30\,(4) = 0$$
$$\Rightarrow F_{ED} = 3000 \text{ N}$$

بالنظر الآن إلى مخطط الجسم الحر للقسم bb ، ينتج

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0, \qquad F_{EF}\cos 30 - 3000\cos 30 = 0 \qquad \Rightarrow F_{EF} = 3000 \text{ N}$$
$$+\uparrow \sum F_y = 0, \qquad 2(3000\sin 30) - 1000 - F_{EB} = 0 \qquad \Rightarrow F_{EB} = 2000 \text{ N}$$

﴿ مثـــ ٩ ـــال ﴾

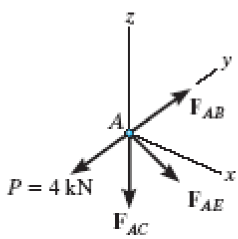
حدد القوى المؤثرة في أعضاء الجمالون الفراغي الموضح في الشكل ومن ثم وضح ما إذا كانت الأعضاء في حالة شد أو ضغط.



﴿ الحـــــــل ﴾

نظرًا لوجود قوة واحدة معروفة وثلاث قوى غير معروفة تعمل في المفصل **A** ، سيبدأ تحليل قوة الجمالون عند هذا المفصل .معبرة عن كل قوة تعمل على مخطط الجسم الحر للمفصل **A** كمتجه كارتيزي ، يكون

الوصلة A

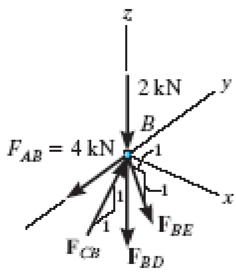


$$P = -4000\hat{j}, \qquad \underline{F}_{AB} = F_{AB}\hat{j}, \qquad \underline{F}_{AC} = -F_{AC}\hat{k}$$

$$\underline{F}_{AE} = F_{AE}\left(\frac{\underline{r}_{AE}}{r_{AE}}\right) = F_{AE}(0.577\hat{i} + 0.577\hat{j} - 0.577\hat{k})$$

حيث أن F_{AB} اصبحت معلومة ومن ثم يمكن تحليل الوصلة عند B

الوصلة B



$$\sum F_x = 0, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} F_{BE} = 0 \qquad \Rightarrow F_{BE} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \qquad -4000 + \frac{1}{\sqrt{2}} F_{CB} = 0 \qquad \Rightarrow F_{CB} = 5650 \text{ N}$$

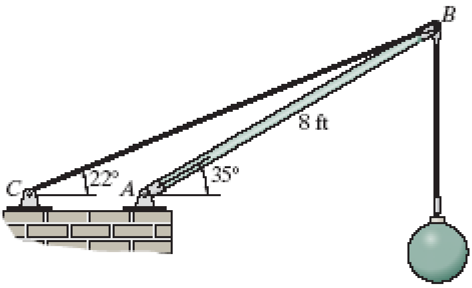
$$\sum F_z = 0, \qquad -2000 + F_{BD} - \frac{1}{\sqrt{2}} F_{BE} + \frac{1}{\sqrt{2}} F_{CB} = 0$$

$$\Rightarrow F_{BD} = 2000 \text{ N}$$

يمكن الآن تطبيق معادلات الاتزان على القوى المؤثرة على مخططات الجسم الحر للوصلات عند D ، C حيث ان

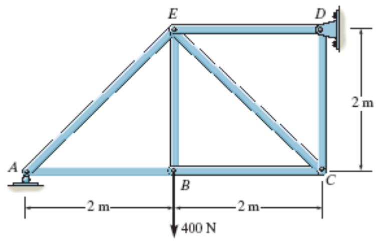
$$F_{DE} = F_{DC} = F_{CE} = 0$$

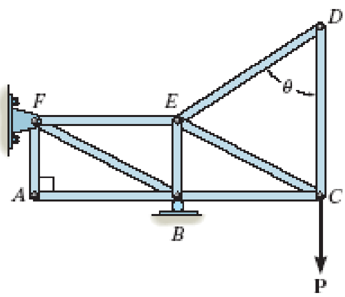
تمــــــــارين

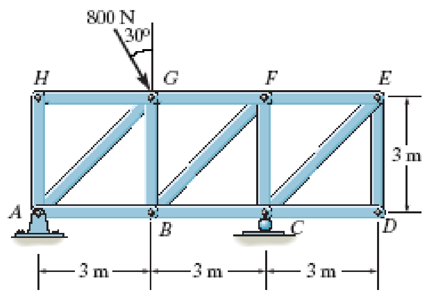


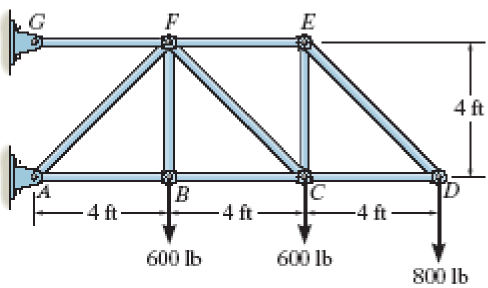
❒ حدد مقدار القوة عند المفصل A وفي الكبل BC اللازم لدعم الحمل 500-lb إهمال وزن ذراع التطويل AB .

❒ في كل حالة ، قم بحساب ردود الافعال ثم ارسم مخططات الجسم الحر للمفاصل A و B و Cللجمالون.

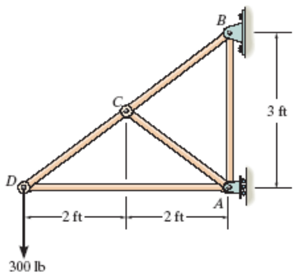




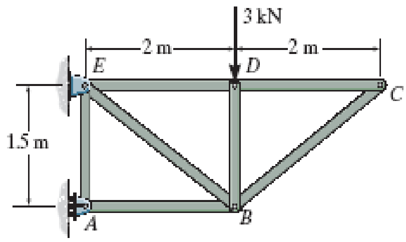


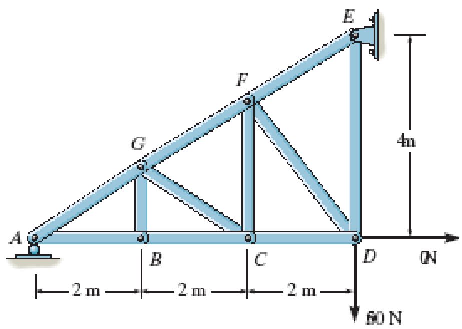


❒ حدد القوة في كل عضو من الجمالون .اذكر ما إذا كان الأعضاء في حالة شد أو ضغط



❒ عين الاعضاء ذات القوى الصفرية





أمثلة متنوعة

أوجد متجه وحدة في اتجاه المتجه $8\hat{i}+7\hat{j}-12\hat{k}$.

《 الحـــــل 》

نعلم أن متجه الوحدة لأي متجه $\underline{A}$ يتعين من $\hat{A}=\frac{\underline{A}}{A}$ ومن ثم فإن متجه الوحدة للمتجه $\underline{A}=8\hat{i}+7\hat{j}-12\hat{k}$ هو

$$\hat{A}=\frac{8\hat{i}+7\hat{j}-12\hat{k}}{\sqrt{64+49+144}}=\frac{8\hat{i}+7\hat{j}-12\hat{k}}{\sqrt{257}}$$

اثبت صحة المطابقة $\underline{a}\wedge\underline{b}\ \wedge\underline{c}=\ \underline{a}\wedge\underline{b}\ .\hat{n}\ \ \hat{n}\wedge\underline{c}$ حيث $\hat{n}$ متجـــه وحـــدة عمودي على مستوى المتجهين $\underline{a},\underline{b}$.

《 الحـــــل 》

نعلم أن المتجه $\underline{a}\wedge\underline{b}$ هو متجه عمودي على مستوى المتجهين $\underline{a},\underline{b}$ ومن ثم

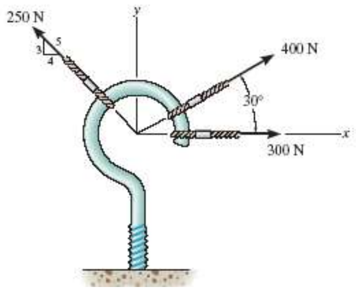
$$\therefore\ \underline{a}\wedge\underline{b}=\left|\underline{a}\wedge\underline{b}\right|\hat{n},\qquad \text{L.H.S.}=\ \left|\underline{a}\wedge\underline{b}\right|\hat{n}\ \ \wedge\underline{C}=\left|\underline{a}\wedge\underline{b}\right|\ \hat{n}\wedge\underline{C}$$

$$\textbf{Again}\ \ \because\ \underline{a}\wedge\underline{b}=\left|\underline{a}\wedge\underline{b}\right|\hat{n},\qquad \Rightarrow\ \underline{a}\wedge\underline{b}\ .\hat{n}=\ \left|\underline{a}\wedge\underline{b}\right|\hat{n}\ \ .\hat{n}$$

$$\therefore\ \ \underline{a}\wedge\underline{b}\ .\hat{n}=\left|\underline{a}\wedge\underline{b}\right|\overbrace{\ \hat{n}.\hat{n}\ }^{n^2=1}=\left|\underline{a}\wedge\underline{b}\right|$$

$$\therefore \text{L.H.S.}=\left|\underline{a}\wedge\underline{b}\right|\ \hat{n}\wedge\underline{C}\ =\ \ \underline{a}\wedge\underline{b}\ .\hat{n}\ \ \ \hat{n}\wedge\underline{C}\ =\text{R.H.S.}$$

عيّن مقدار واتجاه القوة المحصلة للقوى المؤثرة على



《 الحـــــل 》

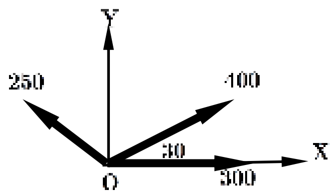
القوى المعاطاة يمكن كتابتها اتجاهياً في الصور

$$\underline{F}_1 = 300\,\hat{i},$$

$$\underline{F}_2 = 400\cos 30\,\hat{i} + 400\sin 30\,\hat{j}, = 200\sqrt{3}\hat{i} + 200\hat{j}$$

$$\underline{F}_3 = -250\;\; 0.8\;\; \hat{i} + 250(0.6)\hat{j} = -200\hat{i} + 150\hat{j}$$

ومن ثم محصلة القوى هي $\underline{F} = \;\; 100 + 200\sqrt{3}\;\; \hat{i} + 350\hat{j}$



ABCD شكل رباعي فيه P,M منتصفا AC,BD على الترتيب . أثبت أن

$$\underline{AB} + \underline{CD} + \underline{AD} + \underline{CB} = 4\underline{PM}$$

﴿ الحــــــل ﴾

من النظرية السابقة (مثـــ ١١ ـــــال) حيث M تقسم BD بنسبة 1:1 ومن المثلث ABD

يكون $\underline{AB} + \underline{AD} = 2\underline{AM}$ **and**

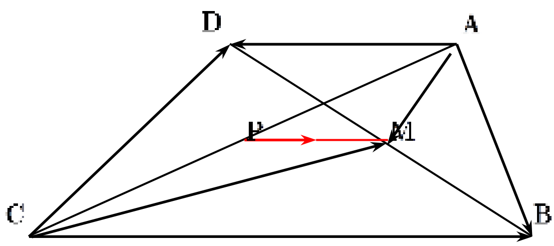
$$\underline{AB} + \underline{AD} + \underline{CB} + \underline{CD} = 2 \quad \underline{AM} + \underline{CM} \qquad (1)$$

كذلك من المثلث ACB حيث P تقسم AC بنسبة 1:1 ومن ثم

$$\underline{AM} + \underline{CM} = 2\underline{PM}$$

وبالتعويض من هذه العلاقة في المعادلة (1) يكون

$$\underline{AB} + \underline{AD} + \underline{CB} + \underline{CD} = 2 \quad \underline{AM} + \underline{CM} \quad = 2 \times 2\underline{PM} = 4\underline{PM}$$



أوجد متجه عزم القوة $-\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ والتي تؤثر في النقطة $(1,2,1)$ حول محور يمر بنقطة الأصل ويوازي المتجه $2\hat{i}-3\hat{k}$.

﴿ الحـــــل ﴾

حيث أن المحور المطلوب إيجاد العزم حوله يوازي المتجه $2\hat{i}-3\hat{k}$ فإنه يكون لهما نفس متجه الوحدة أي أن متجه الوحدة للمحور هو $\hat{n}=\dfrac{2\hat{i}-3\hat{k}}{\sqrt{13}}$

أيضا يمكن حساب عزم القوة $\underline{M}_o$ والتي تمر بالنقطة $(1,2,1)$ حول نقطة تمر بالمحور وهي هنا نقطة الأصل ومن ثم $\underline{r}=(1,2,1)-(0,0,0)=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$

$$\therefore\ \underline{M}_o=\underline{r}\wedge\underline{F}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\1&2&1\\-1&1&2\end{vmatrix}=3\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k}$$

$$\therefore\ \underline{M}_o.\hat{n}=\ 3\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k}\ .\left(\frac{2\hat{i}-3\hat{k}}{\sqrt{13}}\right)=\frac{-3}{\sqrt{13}}$$

وبالتالي فإن العزم حول المحور هو

$$\therefore\ \underline{M}_N=\ \underline{M}_o.\hat{n}\ \ \hat{n}=\frac{-3}{\sqrt{13}}\left(\frac{2\hat{i}-3\hat{k}}{\sqrt{13}}\right)=\frac{3}{13}\ \ 3\hat{k}-2\hat{i}$$

قوتـــان متســـاويتان مقـــدار كـــل منـــهما $3F$ وتعمـــلان في الخطـــين المســـتقيمين $\frac{z-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{x-1}{2}$ ، $\frac{z-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{x-2}{1}$ أوجد ما تؤول إليه القوتان عند نقطة الأصل.

《 الحـــل 》

نعلم من معادلة المستقيم الأول $\frac{z-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{x-1}{2}$ أن نسب اتجاهه هي $(2,2,1)$ وأن النقطة $(1,-1,2)$ تقع عليه وبالنســـبة للمســـتقيم الثـــاني والـــذي معادلتـــه $\frac{z-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{x-2}{1}$ نسب اتجاهه هي $(1,-2,2)$ ويمر بالنقطة $(2,-1,1)$

ولذلك يمكن حساب متجه وحدة في اتجاه المستقيم الأول وهو

$$\hat{n}_1=\frac{1}{3}(2,2,1)=\frac{1}{3}\ \ 2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$$

وكذلك يمكن حساب متجه وحدة في اتجاه المستقيم الثاني وهو

$$\hat{n}_2=\frac{1}{3}(1,-2,2)=\frac{1}{3}\ \ \hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$$

وبالتالي فإن متجه القوة الأولى يتعين من

$$\underline{F}_1=3F\hat{n}_1=F\ \ 2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$$

وأيضاً متجه القوة الثانية يتعين من

$$\underline{F}_2=3F\hat{n}_2=F\ \ \hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$$

و تؤول المجموعة عند نقطة الأصل إلى قوة $\underline{R}$ وازدواج عزمه $\underline{M}$ حيث

$$\begin{aligned}\underline{R}&=\underline{F}_1+\underline{F}_2\\&=F\ \ 2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}\ \ +F\ \ \hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}\\&=3F\ \ \hat{i}+\hat{k}\ \ ,\qquad\qquad R^2=18F^2\end{aligned}$$

$$\underline{M} = \underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{F}_2$$
$$= F\left\{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$\therefore \underline{M} = F \quad -5\hat{i} + \hat{k}$$

ومن ثم معادلة محور اللولبية هي $\underline{r} = \underline{r}_1 + \mu \underline{R}$ حيث

$$\underline{r}_1 = \frac{\underline{R} \wedge \underline{M}}{R^2}$$
$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\hat{j}$$

وتصبح المعادلة الاتجاهية لمحور اللولبية هي

$$\underline{r} = -\ \hat{j} + \mu \ \ \hat{i} + \hat{k}$$

والمعادلة الكارتيزية تتعين من

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-0}{1}$$

قوتان $\underline{F}_1,\underline{F}_2$ تؤثران في خطين غير متقاطعين L_1 , L_2 بحيث كان العمود المشترك بينهما يقابل الخط L_1 في النقطة $\underline{r}_1$ ويقابل الخط L_2 في النقطة $\underline{r}_2$. أثبت أن خطوة اللولبيـــة تســـاوي $\left|\underline{F}_1+\underline{F}_2\right|^{-2}\ \ \underline{F}_1\cdot\ \underline{F}_2\wedge\ \ \underline{r}_1-\underline{r}_2$.

﴿ الحـــــل ﴾

نعلم أن خطوة اللولبية λ تتعين من

$$\lambda=\frac{\underline{R}.\underline{M}}{R^2}$$

حيث $\underline{R}$ هي محصلة القوى و $\underline{M}$ هي محصلة العزوم وحيث أن

$$\underline{R}=\underline{F}_1+\underline{F}_2 \qquad \Rightarrow \qquad R^2=\left|\underline{F}_1+\underline{F}_2\right|^2$$

$$\underline{M}=\underline{r}_1\wedge\underline{F}_1+\underline{r}_2\wedge\underline{F}_2$$

$$\therefore\ \underline{R}.\underline{M}=\ \ \underline{F}_1+\underline{F}_2\ \ \cdot\ \underline{r}_1\wedge\underline{F}_1+\underline{r}_2\wedge\underline{F}_2$$

$$=\underline{F}_1\cdot\ \underline{r}_1\wedge\underline{F}_1+\underline{r}_2\wedge\underline{F}_2\ \ +\underline{F}_2\cdot\ \underline{r}_1\wedge\underline{F}_1+\underline{r}_2\wedge\underline{F}_2$$

$$=\underline{F}_1\cdot\ \underline{r}_2\wedge\underline{F}_2\ \ +\underbrace{\underline{F}_2\cdot\ \underline{r}_1\wedge\underline{F}_1}_{\underline{F}_1\cdot\ \underline{F}_2\wedge\underline{r}_1}$$

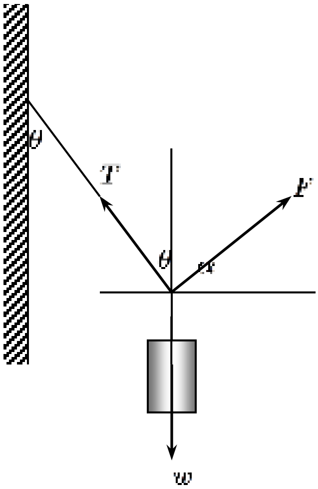
$$\therefore\ \underline{R}.\underline{M}=\underline{F}_1\cdot\underbrace{\ \underline{r}_2\wedge\underline{F}_2\ }_{-\underline{F}_2\wedge\underline{r}_2}+\underline{F}_1\cdot\ \underline{F}_2\wedge\underline{r}_1$$

$$=\underline{F}_1\cdot\ \ \underline{F}_2\wedge\underline{r}_1-\underline{F}_2\wedge\underline{r}_2\ \ =\underline{F}_1\cdot\ \ \underline{F}_2\wedge\ \ \underline{r}_1-\underline{r}_2$$

$$\lambda=\frac{\underline{R}.\underline{M}}{R^2}=\frac{\underline{F}_1\cdot\ \ \underline{F}_2\wedge\ \ \underline{r}_1-\underline{r}_2}{\left|\underline{F}_1+\underline{F}_2\right|^2}=\left|\underline{F}_1+\underline{F}_2\right|^{-2}\ \ \underline{F}_1\cdot\ \underline{F}_2\wedge\ \ \underline{r}_1-\underline{r}_2$$

عُلق وزن w بخيط من نقطة ثابتة وأزيح الخيط خارجاً بواسطة قوة F . أوجد اتجاه القوة حتى يكون ميل الخيط على الرأسي في حالة الاتزان أكبر ما يمكن. ثم أوجد قيمة هذا الميل.

﴿ الحـــــــل ﴾



من قاعدة لامي ومن الشكل المجاور ينتج أنه عند الاتزان

$$\frac{F}{\sin(180-\theta)}=\frac{w}{\sin(90+\theta-\alpha)}=\frac{T}{\sin(90+\alpha)}$$

$$\frac{F}{\sin\theta}=\frac{w}{\cos(\theta-\alpha)}=\frac{T}{\cos\alpha}$$

$$F\cos(\theta-\alpha)=w\sin\theta$$

$$\therefore\ F(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)=w\sin\theta$$

$$\therefore\ F\cos\theta\cos\alpha=\ w-F\sin\alpha\ \ \sin\theta\qquad\Rightarrow\tan\theta=\frac{F\cos\alpha}{w-F\sin\alpha}$$

نلاحظ أن θ هي دالة في α وحتى تكون θ أكبر ما يمكن فيجـــب أن يتحقـــق $\dfrac{d\theta}{d\alpha}=0$

وبالتالي من تفاضل العلاقة الاخيرة يكون

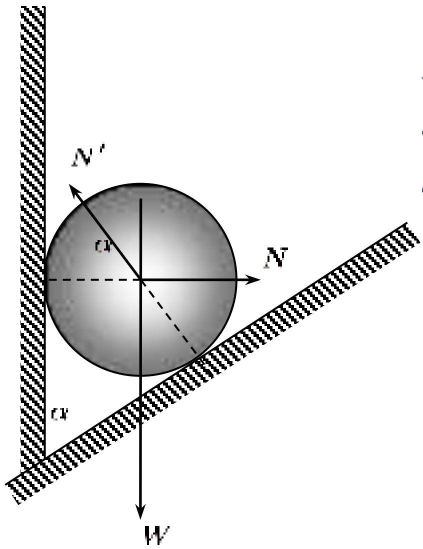
$$\sec^2\theta\overset{0}{\left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)}=\frac{F^2\cos^2\alpha-F\sin\alpha\ \ w-F\sin\alpha}{w-F\sin\alpha\ \ ^2}$$

$$\therefore\ \frac{F^2\ -wF\sin\alpha}{w-F\sin\alpha\ \ ^2}=0\qquad\Rightarrow F^2-wF\sin\alpha=0\quad\therefore\ \sin\alpha=\frac{F}{w}$$

Or $\qquad\alpha=\sin^{-1}\left(\dfrac{F}{w}\right)$

كرة ثقيلة وزنها W ترتكز على مستويين أملسين احدهما رأسي والآخر يصنع زاوية α مع الراسي. أوجد رد فعل المستويين على الكرة.

﴿ الحـــــل ﴾



الكرة متزنة تحت تأثير ثلاث قوى يمرون جميعهم بمركـــز الكرة (حيث أن رد الفعل يكون عمودياً علـــى المماـــس وبالتالي يمر بمركز الكرة)ومن قاعدة لامي ومن الشـــكل المجاور ينتج أن

$$\frac{W}{\sin(180-\alpha)}=\frac{N}{\sin(90+\alpha)}=\frac{N'}{\sin 90}$$

Or $$\frac{W}{\sin\alpha}=\frac{N}{\cos\alpha}=\frac{N'}{1}$$

$$\therefore N=W\cot\alpha,\qquad N'=W\csc\alpha$$

قضيبان متساويان طول كل منهما 2ℓ ووزن كل منهما w متصلين اتصالاً سهلاً والنهايات الحرة متصلة بخيوط مثبتة في نقطة معينة ، إذا كان طول كل خيط 2ℓ والزاوية بين القضيبين 2θ ووضع قرص نصف قطره a بين القضيبين والمجموعة متزنة في المستوى الرأسي والقرص وزنه $3w$ فاثبت أن $a=6\ell\sin^2\theta\tan\theta$.

﴿ الحـــــل ﴾

بدراسة اتزان القرص منفصل نجد أن $3w=2N\sin\theta$

ثم بدراسة اتزان المجموعـــة ككـــل شـــكل (i) وكتابـــة معـــادلات الاتـــزان في الاتجـــاه الرأسي عليه ينتج أن $5w=2T\cos\theta$

$$T = \frac{5w}{2\cos\theta} \qquad \text{and} \qquad N = \frac{3w}{2\sin\theta}$$

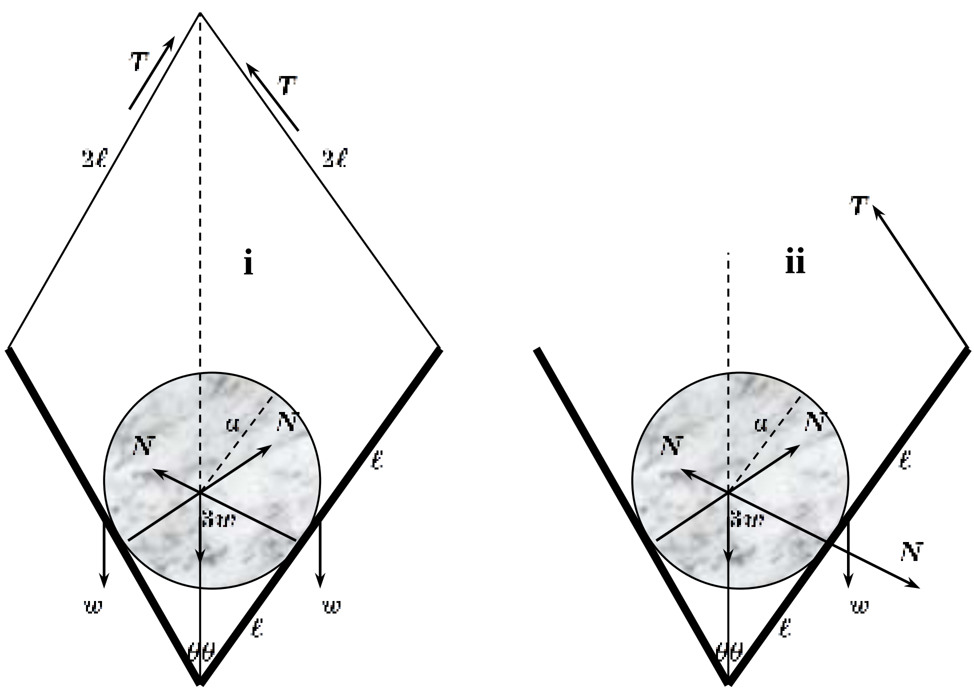
وبدراسة اتزان أحد القضيبين (القضيب الأيمن) وأخذ العزوم حول نقطة الاتصال (مع ملاحظة انعكاس رد الفعل N في هذه الحالة كما موضح بالشكل (ii) وهو رد فعل القرص على القضيب وهو يساوي رد فعل القضيب على القرص ويضاده في الاتجاه) نحصل على

$$Na\cot\theta + w\ell\sin\theta = T\cos\theta(2\ell\sin\theta) + T\sin\theta(2\ell\cos\theta)$$

$$\left(\frac{3w}{2\sin\theta}\right)a\cot\theta + w\ell\sin\theta = \left\{\frac{5w}{\cos\theta}\right\}\ 2\ell\cos\theta\sin\theta$$

$$\therefore \frac{3a\cos\theta}{2\sin^2\theta} + \ell\sin\theta = 10\ell\sin\theta$$

$$\therefore 3a = 18\ell\tan\theta\sin^2\theta \qquad \therefore a = 6\ell\tan\theta\sin^2\theta$$



المـــــــــــراجع

١- أسس علم الميكانيكا ٩. احمد بدر الدين خليل ، عبدالشافي فهمي عبادة ، على محمد أبوستة ، عبدالرحمن أحمد السمان ، دار الفكر العربي ٢٠٠٥.

٢- امجد ابراهيم شحاته- الاستاتيكا- دار الفجر للنشر والتوزيع ٢٠٠١

3- Arthur Stanley Ramsey, Statics A Text-Book, Cambridge University Press.

4- R. C. Hibbeler, Engineering Mechanics, Statics, 14Edition.

5- S. L. Loney, The elements of Statics and Dynamics, Part I, Cambridge University Press.