South valley University

Faculty of science-Qena
Mathematics Department

المقرر: تطبيقية (5) – ميكانيكا تحليلية

الفرقة: الثالثة رياضيات -عام

الفصل الدراسي: الأول

المحاضر: أ. د. جمال عبدالله أحمد حشودي

المبادئ الأساسية للميكانيكا التحليلية
المدخل للميكانيكا التحليلية

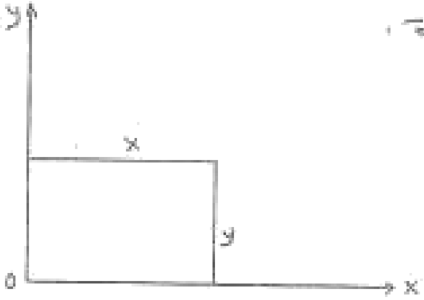
الباب الأول

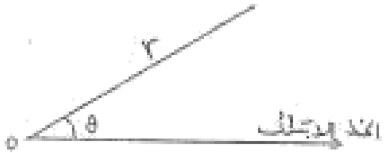
مقدمة Introduction

درسنا فيما سبق الميكانيكا وكنا نعتمد على قوانين الحركة لنيوتن في حل مسائل الميكانيكا وعلى الأخص قانون نيوتن الثاني أو معادلة الحركة $\underline{F} = m\underline{a}$ وقد صيغ في حالة الإحداثيات الكرتيزية. وإذا استخدمنا إحداثيات أخرى لتعيين موضع الجسم المتحرك كالإحداثيات القطبية مثلاً فإنه لا يمكن تطبيق قانون نيوتن الثاني باستبدال الإحداث x بالإحداث r ولكن يجب أن نكتب الجملة في حالة الإحداثيات القطبية، وهذا يعني أن قانون نيوتن الثاني تتغير صورته بتغير الإحداثيات المعطاة التي تعين موضع الجسم. وقد توصل كل من لاجرانج وهاميلتون إلى صورة جديدة لمعادلة الحركة يمكن استخدامها لأي نوع من الإحداثيات، فالإحداثيات في هذه المعادلات هي إحداثيات معممة والإحداثيات المعروفة هي أنواع خاصة منها مثل الإحداثيات الكرتيزية والإحداثيات القطبية وغيرها. ولذلك تعتبر هذه المعالجة طريقة عامة لحل مسائل الميكانيكا وهي طريقة سهلة يمكن استخدامها في حل الكثير من المسائل الميكانيكية إلى جانب علاقتها بنظريات وتطبيقات بمجالات حديثة مثل ميكانيكا الكم والميكانيكا الإحصائية والالكترو ديناميكا.

Degrees of freedom and generalized coordinates. درجات الحرية (الطلاقة) والاحداثيات المعممة

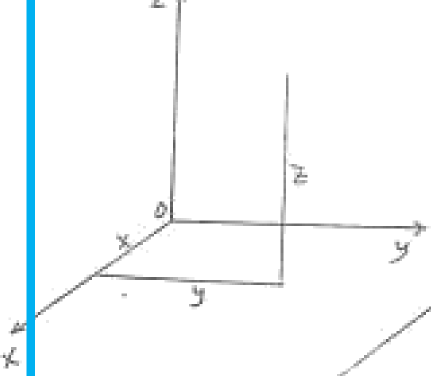
نعلم انه عندما يتحرك جسيم فى مستوى ثابت موضعه عند اى لحظة يتحدد بمعلومية احداثيين مثل (x,y) فى حالة الاحداثيات الكرتيزية ، (r,θ) فى حالة الاحداثيات القطبية .

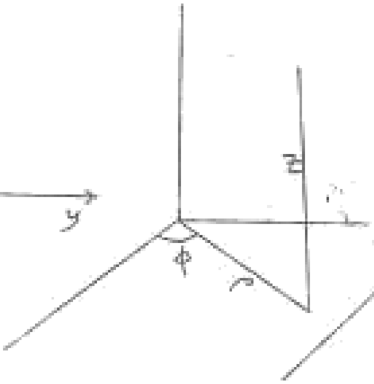


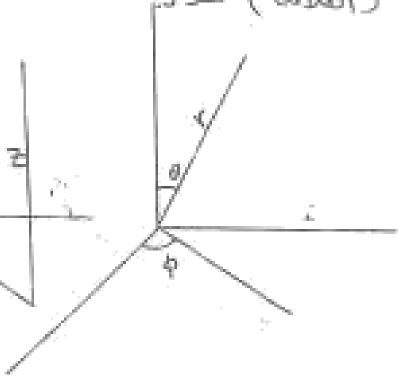


فى هذه الحالة نقول ان عدد درجات الحرية (الطلاقة) هو 2 .

عندما يتحرك الجسيم فى الفراغ فان موضعه يتعين بمعرفة ثلاثة احداثيات. فمثلا فى حالة الاحداثيات الكرتيزية يتعين موضع الجسيم اذا علمنا (x, y, z) وفى حالة الاحداثيات الاسطوانية يتحدد موضع الجسيم بمعرفة ρ, ϕ, z وكذلك فى حالة الاحداثيات القطبية الكرية يمكن تحديد موضع الجسيم عند اى لحظة اذا علمنا r, θ, ϕ . فى هذه الحالة يكون عدد درجات الحرية (الطلاقة) هو 3







أي أن عدد درجات الحرية (الطلاقة) هو عدد الاحداثيات اللازمة لتحديد موضع الجسيم. وإذا قيدنا حركة الجسيم كأن يظل دائما على سطح كرة فإنه يكفي لتحديد موضعه احداثيين نختارهما θ, ϕ وذلك لأن r تساوي مقدار ثابت وهو نصف قطر الكرة وتصبح عدد درجات الحرية في هذه الحالة مساوية 2.

وفي حالة مجموعة من الجسيمات فإن عدد الاحداثيات اللازمة لتحديد موضع المجموعة يسمى عدد درجات الحرية (الطلاقة) لهذه المجموعة. نعتبر حركة جسيمين في الفراغ فإنه يلزمنا لتحديد موضعهما ستة احداثيات اذا كانت حركتهما حرة. بينما يقل عدد الاحداثيات اذا كانت حركتهما مقيدة، فمثلا اذا كانت حركة الجسيمين بحيث تظل المسافة بينهما ثابتة كأن يكونا جسيمين من جسم متماسك فإنه في هذه الحالة يلزمنا خمسة احداثيات فقط لتحديد موضعهما ويكون عدد درجات الحرية (الطلاقة) مساويا 5.

نفرض الآن مجموعة من الجسيمات عددها N متحركة وعليها عدد من القيود وأن عدد الاحداثيات المستقلة اللازمة لتحديد حركة هذه المجموعة هو n، أي أن عدد درجات الحرية (الطلاقة) لهذه المجموعة هو n. نرمز لهذه الاحداثيات بالرموز $q_1, q_2, ..., q_n$ وتسمى بالاحداثيات المعممة. وكما لاحظنا أن هذه الاحداثيات يمكن أن تكون مسافات أو زوايا أو كميات أخرى تتصل بالمسافات والزوايا.

السرعات المعممة Generalized velocities

اذا تغيرت الاحداثيات المعممة $q_1, q_2, ..., q_n$ في الفترة الزمنية

الصغيرة Δt لتصبح $q_1 + \Delta q_1 , q_2 + \Delta q_2 , \ldots , q_n + \Delta q_n$

فإن

$$\dot{q}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q_i}{\Delta t} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

تسمى $\dot{q}_1 , \dot{q}_2 , \ldots , \dot{q}_n$ بالسرعات المعممة .

مثلاً في حالة حركة جسيم في الفراغ إذا أخذنا الاحداثيات الاسطوانية z , ϕ , ρ احداثيات معممة أي أن $q_1 = \rho$ ، $q_2 = \phi$ ، $q_3 = z$ فإن السرعات المعممة تكون $\dot{\rho} , \dot{\phi} , \dot{z}$. ويجب ملاحظة أنها تختلف عن مركبات سرعة الجسيم وهي $(\dot{\rho} , \rho\dot{\phi} , \dot{z})$.

القوى المعممة Generalized forces

إذا كان dW هو الشغل المبذول على مجموعة من الجسيمات بواسطة القوى $\underline{F}_j$ المؤثرة على الجسيم رقم j فإن $dW = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \, dq_i$

حيث $\phi_i = \sum_{j=1}^{N} \underline{F}_j \cdot \frac{\partial \underline{r}_j}{\partial q_i}$

وذلك لأن $d\underline{r}_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \underline{r}_j}{\partial q_i} dq_i$ ويكون الشغل المبذول هو

$$dW = \sum_{j=1}^{N} \underline{F}_j \cdot d\underline{r}_j = \sum_{j=1}^{N} \underline{F}_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \underline{r}_j}{\partial q_i} dq_i \right)$$

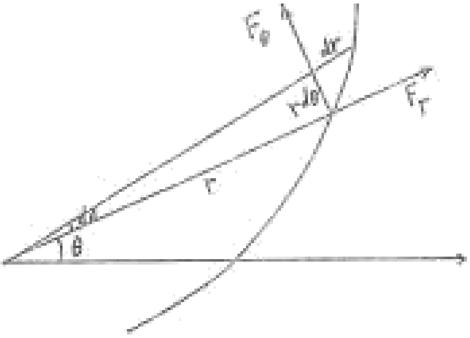
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{N} \underline{F}_j \cdot \frac{\partial \underline{r}_j}{\partial q_i} \right) dq_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \phi_i \, dq_i$$

حيث $\phi_i = \sum_{j=1}^{N} \underline{F}_j \cdot \frac{\partial \underline{r}_j}{\partial q_i}$

تسمى ϕ_i القوة المعممة المصاحبة للاحداث المعمم q_i .

فمثلا عندما يتحرك جسيم في مستوى وأخذ r, θ التي تحدد موضع الجسيم عند أي لحظة احداثيات معممة وكانت F_r , F_θ هما مركبتي القوى الخارجية في اتجاه تزايد r, θ على الترتيب فان الشغل المبذول لإزاحة صغيرة $dr, d\theta$ يعطى بـ



$$dW = F_r\, dr + F_\theta\, r\, d\theta$$

وتكون القوة المعممة في هذه الحالة هي

$$\Phi_1 = F_r \quad , \quad \Phi_2 = r\, F_\theta$$

ونلاحظ أنها تختلف عن القوى الخارجية ، فالقوة المعممة Φ_1 لها وحدات قوة بينما القوة المعممة Φ_2 لها وحدات عزم (أي قوة x مسافة).

المجموعة الهولونومية والمجموعة الغير هولونومية Holonomic and non-holonomic systems

إذا تغيرت الاحداثيات المعممة $q_1, q_2, \dots, q_n$ الى $q_1+dq_1 , q_2+dq_2 , \dots , q_n+dq_n$ بحيث لم تعتمد على بعضها البعض بمعنى أنه اذا تغيرت بعض هذه الاحداثيات دون أن تتغير الاحداثيات الأخرى فاننا نسمي المجموعة بمجموعة هولونومية (أي أن التغيرات $dq_1, dq_2, \dots, dq_n$ في هذه الحالة تكون مستقلة. أما اذا كانت المتغيرات تعتمد على بعضها البعض ، أي أنه بتغير أي من الاحداثيات فان باقي الاحداثيات أو بعضها سوف تتغير بالتالي فاننا نسمي المجموعة بمجموعة غير هولونومية.

المجموعات الزمنية و الغير زمنية

Scleronomic and rheonomic systems

اذا كان متجه موضع الجسيم رقم ν هو $\underline{r}_\nu = x_\nu \underline{i} + y_\nu \underline{j} + z_\nu \underline{k}$ بالنسبة لمجموعة احداثيات xyz فان $\underline{r}_\nu = \underline{r}_\nu(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ او هي

$$x_\nu = x_\nu(q_1, q_2, ---, q_n, t) ,$$
$$y_\nu = y_\nu(q_1, q_2, ---, q_n, t) ,$$
$$z_\nu = z_\nu(q_1, q_2, ---, q_n, t)$$

وتسمى معادلات التحويل.

اذا كان الزمن t يدخل صراحة في معادلات التحويل تسمى المجموعة الميكانيكية بمجموعة زمنية rheonomic ، اما اذا كان الزمن t لا يدخل صراحة في معادلات التحويل تسمى المجموعة الميكانيكية بمجموعة غير زمنية scleronomic .

المجموعات الحافظة والمجموعات الغير حافظة

Conservative and non-conservative systems

تسمى المجموعة حافظة عندما تكون جميع القوى المؤثرة عليها يمكن اشتقاقها من دالة الجهد (او طاقة الجهد) واذا لم يحدث هذا تسمى مجموعة غير حافظة.

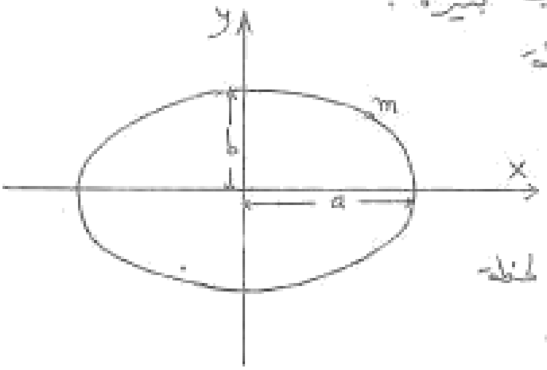
المجموعات تامة التقييد وغير تامة التقييد

Holonomic and non-holonomic constraints

عندما يتحرك جسيم او مجموعة من الجسيمات تكون هذه الحركة مقيدة في صورة معينة ، فمثلا عندما يتحرك جسم متماسك تماما المسافة بين اي جسيمين منه تظل دائما ثابتة ، وقد تكون حركة جسيم مقيدة على منحنى او سطح.

إذا كانت $q_1, q_2, \dots, q_n$ هي الإحداثيات المعممة التي تصف مجموعة ميكانيكية، t هو الزمن. يقال أن المجموعة تامة التقييد عندما يمكن التعبير عن جميع قيود المجموعة بمعادلات في الصورة $f(q_1, q_2, \dots, q_n, t)=0$ أو صور مكافئة وإلا فإن المجموعة يقال إنها غير تامة التقييد.

ملاحظة. مهارة اختيار الإحداثيات المعممة لدراسة مسألة معينة يمكن أن تجد دراستها تبسط لدرجة كبيرة.



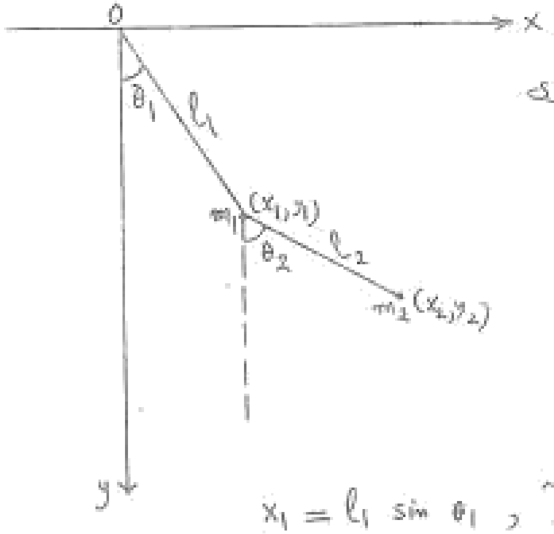
مثلاً في حالة جسم مقيد الحركة على القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

إحداثيا الجسم (x,y) عند أي لحظة يتعينان بدلالة θ من العلاقتين

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta$$

لذلك يمكن تحديد حركة الجسم تماما باستخدام الإحداثي المعمم θ.



أيضا كمثال آخر في البندول المزدوج مقيد الحركة في مستوى كما بالشكل.

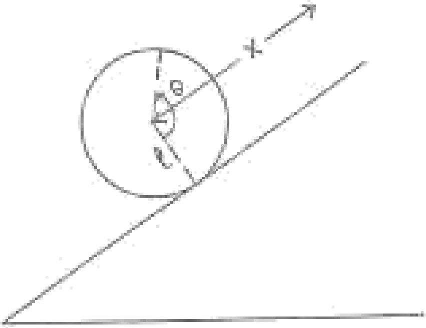
الإحداثيان θ_1، θ_2 يحددان موضعي الكتلتين m_1، m_2 ويمكن اعتبارهما الإحداثيين المعممين، ونلاحظ أنه إذا كان (x_1, y_1)، (x_2, y_2) هما موضعي الكتلتين عند أي لحظة فإن

$$x_1 = l_1 \sin\theta_1, \quad y_1 = l_1\cos\theta_1,$$

$$x_2 = l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2, \quad y_2 = l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2$$

أمثلة

مثال (١) عين الاحداثيات المعممة اللازمة للتحديد الكامل لحركة اسطوانة تتدحرج بدون انزلاق الى اسفل مستوى مائل خشن ومبينا ما اذا كانت هذه الحالة زمنية او غير زمنية ، تامة التقييد او غير تامة التقييد، حافظة او غير حافظة



الحل

موضع الاسطوانة على المستوى المائل يتحدد تماما بالمسافة x التى يقطعها مركز الكتلة والزاوية θ التى تدورها الاسطوانة حول محورها

وحيث أن الحركة تدحرجية بدون انزلاق فإن x ، θ ترتبطان بالعلاقة $x = \ell\theta$ ، أى أنه يلزم احداثى واحد معمم لهذه الحركة اما x أو θ . وهذه الحالة غير زمنية وتامة التقييد وحافظة.

مثال ٥)

يتحرك جسيم فى مستوى . باستخدام الاحداثيات القطبية (r,θ) كاحداثيات معممة اوجد القوى المعممة اذا أثرت على الجسم القوة

$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j}$$

الحل

توجد قوتان معممتان Φ_r , Φ_θ حيث

$$\Phi_r = \underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial r} \quad , \quad \Phi_\theta = \underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta}$$

حيث $\underline{r}$ متجه موضع الجسيم ويعطى بـ

$$\underline{r} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j}$$

$$= r\cos\theta\,\underline{i} + r\sin\theta\,\underline{j}$$

$$\therefore \frac{\partial \underline{r}}{\partial r} = \cos\theta\,\underline{i} + \sin\theta\,\underline{j} \quad , \quad \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} = -r\sin\theta\,\underline{i} + r\cos\theta\,\underline{j}$$

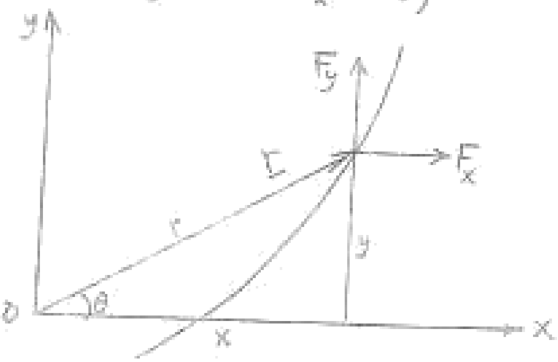
$$\therefore \Phi_r = (F_x \underline{i} + F_y \underline{j}) \cdot (\cos\theta \, \underline{i} + \sin\theta \, \underline{j})$$

$$= F_x \cos\theta + F_y \sin\theta \quad ,$$

$$\Phi_\theta = (F_x \underline{i} + F_y \underline{j}) \cdot (-r \sin\theta \, \underline{i} + r \cos\theta \, \underline{j})$$

$$= -r F_x \sin\theta + r F_y \cos\theta$$

$$= r (F_y \cos\theta - F_x \sin\theta)$$



تمارين

(١) عين الاحداثيات المعممة اللازمة للتعبير الكامل لحركة اسطوانة تتدحرج الى اسفل مستوى مائل اذا كان يوجد انزلاق

(٢) اوجد عدد درجات الحرية (الطلاقة) لكل مجموعة من المجموعات الميكانيكية الآتية :-

(أ) مجموعة تتكون من N جسيما تتحرك بحرية في الفراغ .
(ب) جسم جاسئ يمكنه الحركة بحرية في الفراغ ،
(جـ) جسيم يتحرك على منحنى فراغي معين .
(د) جسيمان مربوطان بواسطة قضيب جاسئ يتحرك بحرية في مستوى ،
(هـ) جسم جاسئ يتحرك موازيا لمستوى مثبت .

(٣) اوجد القوى المعممة لكل مجموعة من المجموعات الميكانيكية الآتية :

(أ) ملتقة كتلتها m تتحرك على سلك على شكل قطع مكافئ معادلته
$y = ax^2 , z = 0$.

(ب) جسم كتلته m يتحرك الى أسفل مستوى مائل خشن يميل على الأفق بزاوية $\frac{\pi}{3}$ وكان معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى يساوي $\frac{2}{3}$.

(ج) جسم كتلته m مربوط في طرف خيط مرن طوله الطبيعي ℓ ومعامل مرونته $K\ell$ والطرف الآخر للخيط مثبت والخيط رأسي .

(٤) قسم كلا من المجموعات الآتية على حسب ما اذا كانت : (i) زمنية أو غير زمنية ، (ii) كاملة التقييد أو غير كاملة التقييد ، (iii) محافظة أو غير محافظة .

(أ) جسم ينزلق الى أسفل من قمة كرة مثبتة .

(ب) اسطوانة تتدحرج بدون انزلاق الى أسفل مستوى مائل .

(ج) جسم ينزلق على السطح الداخلي لجسم مكافئ دوراني قمته الى أسفل ولدوره ثابت معامل الاحتكاك μ .

(٥) اوجد الاحداثيات المعممة اللازمة لكل من المجموعات الثلاثة المذكورة في التمرين السابق (٤) .

الباب الثاني

معادلات لاجرانج Lagrange's equations

طاقة الحركة Kinetic energy

نفرض مجموعة ميكانيكية يتعين موضعها بالاحداثيات المعممة $q_1, q_2, \dots, q_n$ وأن $r_i = (x_i, y_i, z_i)$ متجه موضع الجسم رقم i ، $i = 1, 2, \dots, N$ الذي كتلته m_i فإن الاحداثيات تكون دوال في الاحداثيات المعممة q_i, t

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t),\ y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t),\ z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

طاقة حركة الجسم رقم i تتعين من

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 = \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \qquad (2.1)$$

حيث أن

$$\dot{x}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \qquad (2.2a)$$

$$\dot{y}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial y_i}{\partial t}, \qquad (2.2b)$$

$$\dot{z}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial z_i}{\partial t} \qquad (2.2c)$$

بالتعويض من (2.2a, b, c) في (2.1) يمكن كتابة طاقة الحركة الكلية T في الصورة

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{N} T_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2 \right] \\ &= A_{11} \dot{q}_1^2 + A_{22} \dot{q}_2^2 + \dots + A_{nn} \dot{q}_n^2 + 2A_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots \\ &\quad + 2B_1 \dot{q}_1 + 2B_2 \dot{q}_2 + \dots + 2B_n \dot{q}_n + C \end{aligned} \qquad (2.3)$$

حيث

$$A_{rr} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial q_r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial q_r}\right)^2\right] , \quad (2.4)$$

$$A_{rs} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\frac{\partial x_i}{\partial q_r}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial y_i}{\partial q_r}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial z_i}{\partial q_r}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right] , (2.5)$$

$$B_r = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\frac{\partial x_i}{\partial q_r}\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial q_r}\frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_r}\frac{\partial z_i}{\partial t}\right] , (2.6)$$

$$C = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2\right] \quad (2.7)$$

من العلاقة (2.3) يتضح لنا أن طاقة الحركة دالة من الدرجة الثانية في السرعات المعممة وتعتبر المعاملات دوال في الاحداثيات المعممة والزمن. اذا اختفى الزمن صراحة من العلاقات السابقة فان $B_r = C = 0$ وتصبح طاقة الحركة في الصورة

$$T = A_{11}\dot{q}_1^2 + 2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \cdots + A_{nn}\dot{q}_n^2 \quad (2.8)$$

أي أن طاقة الحركة $T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n)$ تكون دالة متجانسة من الرتبة الثانية في السرعات المعممة $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$

<u>ملحوظة</u>: يقال أن الدالة $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ متجانسة من الرتبة m اذا كان

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (2.9)$$

والدوال المتجانسة تحقق نظرية أويلر والتي تنص على ما يلي: اذا كانت $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ دالة متجانسة من الرتبة m فان

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial f}{\partial x_i} = m f \quad , \quad (2.10)$$

أي أن

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = m f$$

وحيث أن طاقة الحركة $T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n)$ في المعادلة (2.8) دالة متجانسة من الرتبة الثانية في السرعات المعممة $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$

فانه حسب نظرية اويلر للدوال المتجانسة يكون

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T \qquad (2.11)$$

معادلات لاجرانج Lagrange's equations

للحصول على معادلات لاجرانج نثبت اولاً ان :

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right] - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\underline{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{F}_\nu \cdot \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \qquad (2.12)$$

لاثبات (2.12) نكتب معادلة نيوتن او معادلة الحركة للجسيم رقم ν الذي كتلته m_ν وتؤثر عليه محصلة القوى $\underline{F}_\nu$ وهي

$$m_\nu \ddot{\underline{r}}_\nu = \underline{F}_\nu$$

بضرب الطرفين قياسياً في $\frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$ نجد ان

$$m_\nu \ddot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha} = \underline{F}_\nu \cdot \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \qquad (2.13)$$

وحيث ان

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right) = \ddot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha} + \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right)$$

$$= \ddot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha} + \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\underline{r}}_\nu}{\partial q_\alpha}$$

اي ان

$$\ddot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right) - \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\underline{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} \qquad (2.14)$$

بالتعويض من (2.14) في (2.13) نجد

$$\frac{d}{dt}\left(m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right) - m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\underline{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} = \underline{F}_\nu \cdot \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \qquad (2.15)$$

بأخذ المجموع لطرفي (2.15) بالنسبة الى ν على جميع الجسيمات نجد

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right] - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\underline{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{F}_\nu \cdot \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$$

وهي المعادلة (2.12)

اذا كانت T هي طاقة الحركة الكلية ، $T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu^{2}$ ،

نا يمكن اثبات ان

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha \quad , \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.16)$$

حيث Φ_α هي القوة المعممة المناظرة للاحداثي المعمم q_α .

حيث ان طاقة الحركة الكلية T تعطى بـ

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \dot{\underline{r}}_\nu \qquad (2.17)$$

بتفاضل (2.17) بالنسبة الى q_α ثم $\dot q_\alpha$ نجد ان

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\underline{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} \quad , \qquad (2.18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\underline{r}}_\nu}{\partial \dot q_\alpha} \qquad (2.19)$$

ويمكن اثبات ان $\frac{\partial \dot{\underline{r}}_\nu}{\partial \dot q_\alpha} = \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$ ، وتسمى حذف النقط ، وذلك لان

$\underline{r}_\nu = \underline{r}_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$ فان

$$\dot{\underline{r}}_\nu = \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_1}\dot q_1 + \cdots\cdots + \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_n}\dot q_n + \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial t}$$

وبالتالي بتفاضل الطرفين جزئيا بالنسبة الى $\dot q_\alpha$ فان

$$\frac{\partial \dot{\underline{r}}_\nu}{\partial \dot q_\alpha} = \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \qquad (2.20)$$

بالتعويض من (2.20) في (2.19) نجد ان

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \qquad (2.21)$$

بالتعويض من المعادلتين (2.18) ، (2.21) في المعادلة (2.12) نحصل على

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha$$

وهي الصورة المطلوبة (2.16)

نفرض ان المجموعة محافظة ، اي ان القوى يمكن اشتقاقها من الجهد V .

من السؤال أ نرى أن $\Phi_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}$ ، وذلك لأن $dW = \sum_{\alpha=1}^{n} \Phi_\alpha dq_\alpha$

ومن جهة أخرى $dW = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} dq_\alpha$ وبالتالي فإن $\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\Phi_\alpha - \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}\right) dq_\alpha$

وحيث أن dq_α ، $\alpha=1,2,...,n$ مستقلة فإن جميع معاملات dq_α يجب أن تساوي صفر ، أي أن $\Phi_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}$ ، أي أن

$$\Phi_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \qquad (2.22)$$

ودالة لاجرانج L تعرف من العلاقة

$$L = T - V \qquad (2.23)$$

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}(T-V) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

وذلك لأن طاقة الجهد V دالة في الإحداثيات المعممة ومن المحتمل في الزمن t ولكنها ليست دالة في السرعات المعممة $\dot{q}_\alpha$ ، $\alpha=1,2,...,n$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) \qquad (2.24)$$

بالتعويض من (2.22) ، (2.24) في (2.16) نجد أن

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(T-V) = 0$$

وباستخدام (2.23) التي تعرف دالة لاجرانج L نحصل على

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 , \alpha=1,2,...,n \qquad (2.25)$$

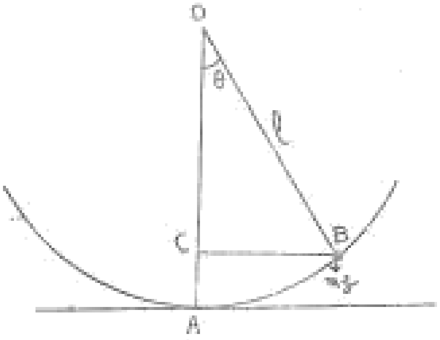
المعادلات (2.25) تسمى معادلات لاجرانج

ملحوظة: نلاحظ أن معادلات لاجرانج (2.25) هي مجموعة معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية وعددها n ، ويمكن استخدامها لحل المسائل الميكانيكية كما سنرى في الأمثلة التالية

أمثلة

مثال (1) اوجد دالة لاجرانج لبندول بسيط ثم اوجد معادلة الحركة باستخدام معادلات لاجرانج.

الحل



يتحدد موضع الجسم بواسطة الزاوية θ التي يصنعها الخيط OB مع الرأسي المار بالطرف الثابت O نفرض أن طول الخيط يساوي ℓ وأن كتلة الجسم هي m .

طاقة الحركة تعطى من

$$T = \frac{1}{2} m (\ell \dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2$$

بأخذ المستوى الأفقي المار بأسفل نقطة A مستوى قياسي. طاقة الجهد تعطى من

$$V = mg\, CA = mg(OA - OC)$$
$$= mg(\ell - \ell \cos\theta) = mg\ell(1 - \cos\theta)$$

دالة لاجرانج تكون في الصورة

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 - mg\ell(1 - \cos\theta)$$

حيث أنه توجد درجة حرية واحدة في هذه الحالة (أي أن n=1 ، واحداثي عام واحد وهو θ ، فإنه توجد معادلة واحدة للاجرانج بالنسبة الى θ وهي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

حيث أن

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2 \dot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\ell \sin\theta$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\ell^2 \dot{\theta}\right) = m\ell^2 \ddot{\theta}$$

بالتعويض في معادلة لاجرانج نحصل على

$$m\ell^2 \ddot{\theta} + mg\ell \sin\theta = 0$$

أو هي

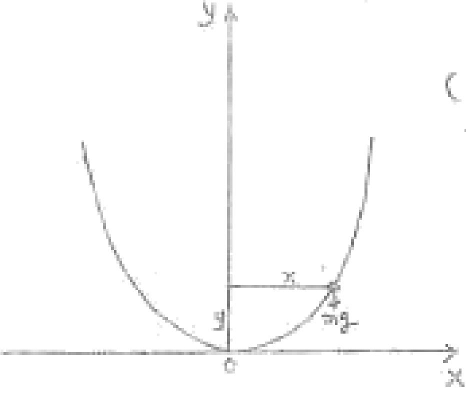
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0$$

ملاحظة: إذا كانت θ صغيرة نأخذ $\sin\theta \cong \theta$ ونحصل على

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

وهي معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري $\frac{2\pi}{\omega}$ أي يساوي $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

مثال (٢) اوجد دالة لاجرانج لحلقة كتلتها m تتحرك على سلك أملس على شكل قطع مكافئ معادلته $y = ax^2$ ثم اوجد معادلة حركة الحلقة باستخدام معادلات لاجرانج.



الحل

يتحدد موضع الحلقة بواسطة (x, y) ولكن x ، y ترتبطان بالعلاقة

$$y = ax^2 \qquad (1)$$

طاقة حركة الخرزة تعطى بـ

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (2)$$

بتفاضل (1) بالنسبة للزمن t نجد أن

$$\dot{y} = 2ax\dot{x} \qquad (3)$$

بالتعويض من (3) في (2) نجد أن

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 (1 + 4a^2x^2)$$

طاقة الجهد أو الوضع للحلقة هي

$$V = mgy = mgax^2$$

معتبرين المستوى الأفقي المار بنقطة الأصل O مستوى قياسي.

دالة لاجرانج تأخذ الصورة

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1+4a^2x^2) - mgax^2$$

هذه المجموعة الميكانيكية لها درجة حرية واحدة ، واحداثي معمم واحد هو x ، وتكون معادلة لاجرانج بالنسبة الى x هى

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

حيث

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}m(1+4a^2x^2)(2\dot{x}) = m\dot{x}(1+4a^2x^2) ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(8a^2x) - 2mgax = 4ma^2x\dot{x}^2 - 2mgax \quad (2)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}(1+4a^2x^2) + 8ma^2x\dot{x}^2 \qquad (3)$$

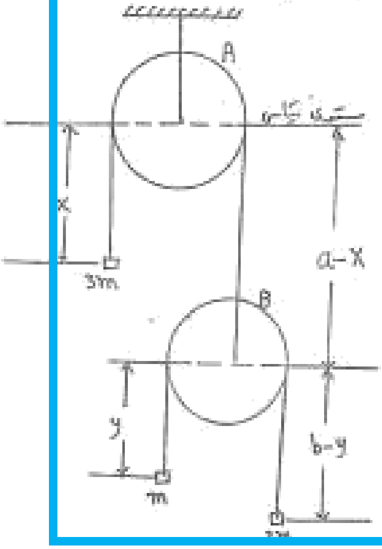
بالتعويض من (2) ، (3) فى (1) نجد ان معادلة حركة الحلقة تكون فى الصورة

$$m\ddot{x}(1+4a^2x^2) + 8ma^2x\dot{x}^2 - 4ma^2x\dot{x}^2 + 2mgax = 0$$

أو هى

$$\ddot{x}(1+4a^2x^2) + 4a^2x\dot{x}^2 + 2gax = 0$$

<u>مثال (٢)</u> الشكل يبين بكرة ثابتة A والأخرى متحركة B وهما خفيفتان ويمر عليهما الخيطان وطولهما a ، b . ادرس حركة الكتل المعلقة ثم اوجد عجلة كل كتلة مستخدما معادلات لاجرانج.



الحل

عدد الاحداثيات المعممة فى هذه المجموعة الميكانيكية هو 2 وهما الاحداثيان المعممان x ، y .

بأخذ المستوى الافقى المار بمركز البكرة الثابتة A مستوى قياسى . وتكون طاقة الجهد او الوضع سالبة لان الكتل أسفل المستوى القياسى .

الكتلة 3m لها طاقة حركة T_1 ، وطاقة الوضع V_1 تعطيان بـ

$$T_1 = \frac{3}{2} m \dot{x}^2 \quad , V_1 = -3mgx$$

الكتلتان m ، 2m لها طاقة الحركة والجهد لكل منهما تعطى بـ

$$T_2 = \frac{1}{2} m (\dot{y} - \dot{x})^2 \quad , V_2 = -mg(a - x + y) ,$$

$$T_3 = m(-\dot{x} - \dot{y})^2 \quad , V_3 = -2mg(a + b - x - y)$$

مع ملاحظة أن موضع الكتلتين m ، 2m بالنسبة للبكرة الثابتة هما $a - x + y$ ، $a + b - x - y$ وبالتالي سرعتاهما يكونان على الترتيب $-\dot{x} + \dot{y}$ ، $-\dot{x} - \dot{y}$

طاقة الحركة وطاقة الجهد للمجموعة الميكانيكية هما

$$T = \sum_{i=1}^{3} T_i = \frac{3}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{y} - \dot{x})^2 + m(\dot{x} + \dot{y})^2 ,$$

$$V = \sum_{i=1}^{3} V_i = -3mgx - mg(a - x + y) - 2mg(a + b - x - y)$$

أي أن

$$T = \frac{1}{2} m (6\dot{x}^2 + 3\dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}) \quad ,$$

$$V = -mg(3a + 2b - y)$$

دالة لاجرانج تعطى بـ

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (6\dot{x}^2 + 3\dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}) + mg(3a + 2b - y)$$

معادلتا لاجرانج بالنسبة للإحداثيين x ، y هما

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad , \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

نحسب التفاضلات الجزئية لدالة لاجرانج

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(6\dot{x} + \dot{y}) \quad , \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m(3\dot{y} + \dot{x}) \quad , \frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$

بالتعويض نجد أن معادلات الحركة هي

$$m(6\ddot{x}+\ddot{y})=0 \quad , \quad m(3\ddot{y}+\ddot{x})+mg=0$$

أي أن

$$6\ddot{x}+\ddot{y}=0 \quad , \qquad (1)$$

$$3\ddot{y}+\ddot{x}=-g \qquad (2)$$

بحل المعادلتين (1) ، (2) نجد أن -

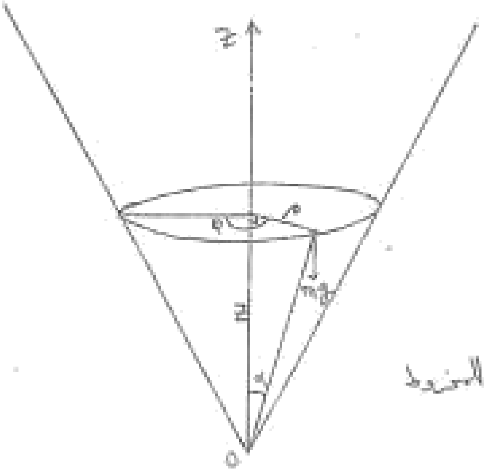
$$\ddot{x}=\frac{g}{17} \quad , \quad \ddot{y}=-\frac{6g}{17}$$

عجلة الكتلة 3m هي $\ddot{x}=\frac{g}{17}$

عجلة الكتلة m هي $\ddot{y}-\ddot{x}$ أي أنها $-\frac{7g}{17}$

عجلة الكتلة 2m هي $-\ddot{x}-\ddot{y}$ أي أنها $\frac{5g}{17}$

مثال (٤) اوجد دالة لاجرانج ومعادلات الحركة عندما يتحرك جسم على السطح الداخلي لمخروط باستخدام معادلات لاجرانج.



الحل

موضع الجسم يتعين بواسطة الاحداثيات الاسطوانية ρ, ϕ, z وحيث أن الجسم يتحرك على السطح المخروطي فان

$$z=\rho\cot\alpha \qquad (1)$$

حيث α هي الزاوية النصف رأسية للمخروط

سرعة الجسم تتعين من

$$\underline{v}=(\dot{\rho}, \rho\dot{\phi}, \dot{z})$$

$$\therefore v^2=\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2 \qquad (2)$$

بتفاضل (1) بالنسبة الى الزمن نجد أن

$$\dot{z}=\dot{\rho}\cot\alpha \qquad (3)$$

بالتعويض من (3) في (2) نحصل على

$$v^2 = \dot{\rho}^2 (1 + \cot^2\alpha) + \rho^2 \dot{\phi}^2$$
$$= \dot{\rho}^2 \operatorname{cosec}^2\alpha + \rho^2\dot{\phi}^2$$

طاقة حركة الجسم تكون

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 \operatorname{cosec}^2\alpha + \rho^2\dot{\phi}^2)$$

بأخذ المستوى الأفقي المار برأس المخروط o كمستوى قياسي ، فإن

طاقة الجهد تكون

$$V = mgz = mg\rho\cot\alpha$$

دالة لاجرانج هي

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 \operatorname{cosec}^2\alpha + \rho^2\dot{\phi}^2) - mg\rho\cot\alpha$$

هذه الحركة لها درجتان حرية ، أي أن $n = 2$ ، والإحداثيات المعممة هما ρ ، ϕ

معادلتا لاجرانج بالنسبة إلى ϕ ، ρ هما

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

وبإيجاد المعاملات التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}\operatorname{cosec}^2\alpha , \quad \frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\dot{\phi}^2 - mg\cot\alpha ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\rho^2\dot{\phi} , \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

بالتعويض نجد أن معادلة لاجرانج بالنسبة للإحداثي ρ تعطي

$$m\ddot{\rho}\operatorname{cosec}^2\alpha - m\rho\dot{\phi}^2 + mg\cot\alpha = 0$$

أو هي

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\sin^2\alpha + g\sin\alpha\cos\alpha = 0 \qquad (4)$$

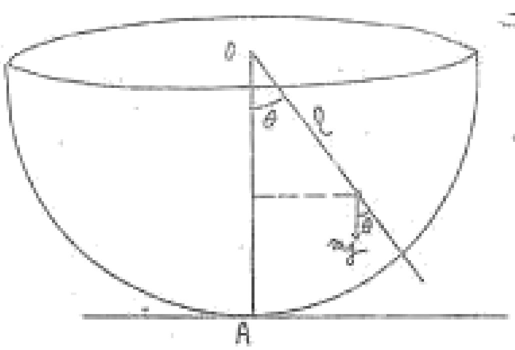
معادلة لاجرانج بالنسبة للإحداثي ϕ تعطي

$$m\rho^2\dot{\phi} = \text{constant} \qquad (5)$$

المعادلتان (4) ، (5) يكونان معادلتا حركة الجسم على السطح الداخلي للمخروط .

مثال (٥) . ينزلق جسيم كتلته m في مستوى أفقي على السطح الداخلي لنصف قشرة كروية ملساء محورها رأسي ورأسها إلى أسفل وكانت نقطة القذف تصنع زاوية β من أسفل نقطة . أوجد معادلات الحركة باستخدام معادلات لاجرانج وأثبت أن السرعة الابتدائية للقذف بحيث يصعد الجسيم بالكاد إلى حافة نصف الكرة هي $\sqrt{2gl\sec\beta}$ حيث l نصف قطر القشرة .

الحل



موضع الجسيم يتعين بالإحداثيات القطبية الكروية r, θ, ϕ ولكن r كمية ثابتة وتساوي نصف قطر القشرة $= l$ ، أي أن $r = l$ وبالتالي يتعين موضع الجسيم بدلالة ϕ, θ .

إذا أخذنا المستوى الأفقي المار بأسفل نقطة A كمستوى قياس نجد أن طاقة حركة الجسيم وطاقة جهده يتعينان من العلاقتين

$$T = \frac{1}{2} m \left(l^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2 \right) = \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2 \right),$$

$$V = mg\left(l - l\cos\theta\right) = mgl\left(1 - \cos\theta\right)$$

دالة لاجرانج هي

$$L = T - V = \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2 \right) - mgl\left(1 - \cos\theta\right)$$

معادلتا لاجرانج بالنسبة للإحداثيين θ ، ϕ هما

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 ,$$

نوجد المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = m l^2 \sin\theta\cos\theta\, \dot{\phi}^2 - mgl\sin\theta ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m l^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

بالتعويض نجد أن معادلة لاجرانج بالنسبة للاحداثي θ تكون

$$m\ell^2\ddot{\theta}-m\ell^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2+mg\ell\sin\theta=0$$

أو هي

$$\ddot{\theta}-\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2+\frac{g}{\ell}\sin\theta=0 \qquad (1)$$

معادلة لاجرانج بالنسبة للاحداثي ϕ تكون

$$\frac{d}{dt}\left(m\ell^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}\right)=0$$

أي أن

$$m\ell^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}=\text{constant} \qquad (2)$$

أو

$$\ell\sin^2\theta\,\dot{\phi}=\text{const.}=c_1 \qquad (3)$$

المعادلتان (1)، (2) أو (1)، (3) هي معادلات الحركة لحركة الجسم على السطح الداخلي للكرة.

مركبات سرعة الجسم في اتجاهات r,θ,ϕ هي

$$(v_r,v_\theta,v_\phi)=(0,\ \ell\dot{\theta},\ \ell\sin\theta\,\dot{\phi})$$

عند بداية الحركة نقذف الجسم أفقيا بسرعة ولتكن v_0 من المدفع $\theta=\beta$ ، أي أنه عند $t=0$ ، فإن $\theta=\beta$ ، $v_\theta=0$)

$v_\phi=v_0$ ، أي أن $\dot{\theta}=0$ ،

$$c_1=\ell\sin\theta\,\dot{\phi}\,(\sin\theta)=v_0\sin\beta$$

$$\therefore\ \ell\sin^2\theta\,\dot{\phi}=v_0\sin\beta$$

أي

$$\dot{\phi}=\frac{v_0\sin\beta}{\ell\sin^2\theta} \qquad (4)$$

بالتعويض من (4) في (1) نحصل على

$$\ddot{\theta}-\frac{v_0^2\sin^2\beta\cos\theta}{\ell^2\sin^3\theta}+\frac{g}{\ell}\sin\theta=0 \qquad (5)$$

بالضرب في $2\dot{\theta}$ والتكامل نجد أن

$$\dot{\theta}^2+\frac{v_0^2\sin^2\beta}{\ell^2\sin^2\theta}-2\frac{g}{\ell}\cos\theta=c_2 \qquad (6)$$

حيث C_2 ثابت يمكن تعيينه من شروط الحركة الابتدائية وهي $\dot{\theta}=0$ ، $\theta=\beta$ ونجد أن

$$C_2 = \frac{v_0^2}{l^2} - \frac{2g}{l}\cos\beta$$

وتأخذ المعادلة (٤) الصورة

$$\dot{\theta}^2 + \frac{v_0^2}{l^2}\left(\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\theta} - 1\right) - \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\beta) = 0$$

لكى يصعد الجسم الى حافة القصعة تماما نضع $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $\dot{\theta} = 0$ ونجد أن

$$\frac{v_0^2}{l^2}(\sin^2\beta - 1) + \frac{2g}{l}\cos\beta = 0$$

$$\therefore \frac{v_0^2}{l}\cos^2\beta - 2g\cos\beta = 0$$

ومنها

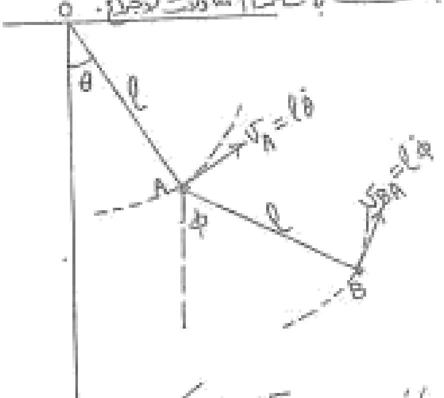
$$v_0^2 = 2gl\sec\beta$$

أى

$$v_0 = \sqrt{2gl\sec\beta}$$

∴ يجب أن يقذف الجسم بسرعة تساوى $\sqrt{2gl\sec\beta}$ حتى يصل بالكاد الى حافة القصعة .

<u>مثال (٦)</u> يتكون بندول مزدوج من جسيمين كتلة كل منهما m معلق بواسطة خيط طوله l من نقطة ثابتة والثانى معلق من طرف خيط آخر طوله l ومربوط طرفه الآخر فى الجسيم الأول ويتذبذبان فى مستوى رأسى واحد خلال ذبذبات صغيرة أوجد طرق وتردد هذه الذبذبات باستخدام معادلات لاجرانج .



الحل

يتحدد موضع الجسيمين بواسطة الاحداثيين θ ، ϕ .

سرعة الجسيم الأول A فى اتجاه العمودى على الخيط OA مقدارها

$$v_A = l\dot{\theta}$$

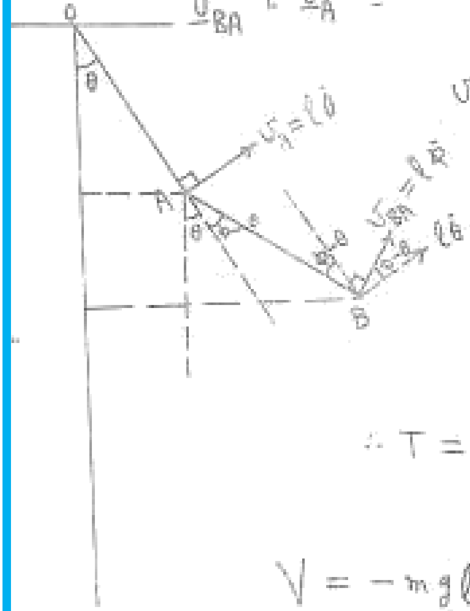
سرعة الجسيم الثانى بالنسبة الى الأول أى $\vec{v}_{BA}$ تكون فى اتجاه

العمودي على الخط AB ومقدارها $v_{BA} = l\dot{\phi}$

سرعة الجسيم B تعطى بـ

$$\underline{v}_B = \underline{v}_{BA} + \underline{v}_A$$

أي أن سرعة الجسيم B هي محصلة السرعتين $\underline{v}_A$ ، $\underline{v}_{BA}$ ومقدارها يعطى بـ



$$v_B^2 = l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2l^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi-\theta)$$

طاقة الحركة الكلية تكون

$$T = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2$$
$$= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$
$$+ \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi-\theta)\right)$$

$$\therefore T = ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + ml^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi-\theta)$$

طاقة الجهد للمجموعة تعطى بـ

$$V = -mgl\cos\theta - mgl(\cos\theta + \cos\phi)$$
$$= -mgl(2\cos\theta + \cos\phi)$$

وذلك بأخذ المستوى الأفقي المار بالنقطة الثابتة O كمستوى قياسي والإشارة السالبة في طاقة الجهد لأن الجسيم أسفل المستوى القياسي.

ودالة لاجرانج تعطى بـ

$$L = T - V$$
$$= ml^2\left(\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi-\theta)\right) + mgl(2\cos\theta + \cos\phi)$$

نوجد المشتقات الجزئية :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2(2\dot{\theta} + \dot{\phi}\cos(\phi-\theta)) \quad ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\phi-\theta) - 2mgl\sin\theta \quad ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = m\ell^2\left(\dot\phi + \dot\theta\cos(\phi-\theta)\right) \quad ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -m\ell^2\dot\theta\dot\phi\sin(\phi-\theta) - mg\ell\sin\phi$$

معادلة لاجرانج بالنسبة للاحداثي θ هي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left[m\ell^2\left(2\dot\theta + \dot\phi\cos(\phi-\theta)\right)\right] - m\ell^2\dot\theta\dot\phi\sin(\phi-\theta) + 2mg\ell\sin\theta = 0$$

$$2\ell\ddot\theta + \ell\ddot\phi\cos(\phi-\theta) - \ell\dot\phi(\dot\phi-\dot\theta)\sin(\phi-\theta) - \ell\dot\theta\dot\phi\sin(\phi-\theta) + 2g\sin\theta = 0 \quad (1)$$

معادلة لاجرانج بالنسبة للاحداثي ϕ هي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left[m\ell^2\left(\dot\phi + \dot\theta\cos(\phi-\theta)\right)\right] + m\ell^2\dot\theta\dot\phi\sin(\phi-\theta) + mg\ell\sin\phi = 0$$

$$\therefore \ell(\ddot\phi + \ddot\theta\cos(\phi-\theta) - \dot\theta(\dot\phi-\dot\theta)\sin(\phi-\theta) + \ell\dot\theta\dot\phi\sin(\phi-\theta) + g\sin\phi = 0 \quad (2)$$

معادلات حركة المجموعة الميكانيكية المعطاه تعطيها (1) ، (2)

. الذبذبات الصغيرة تكون عندما θ ، ϕ صغيرة ، وحينئذ . الآن نأخذ $\sin\theta \simeq \theta$ ، $\sin(\phi-\theta) \simeq \phi-\theta$ ، $\cos(\phi-\theta) \simeq 1$ ، أهمال الحدود المشتملة على كميات صغيرة من الرتبة الثانية أو أعلى . المعادلتان (1) ، (2) تصبحان في الصورة

$$2\ell\ddot\theta + \ell\ddot\phi + 2g\theta = 0 \quad , \qquad (3)$$

$$\ell\ddot\phi + \ell\ddot\theta + g\phi = 0 \quad : \qquad (4)$$

بقسمة (3) ، (4) على ℓ ووضع $K = \frac{g}{\ell}$ نحصل

$$2\ddot\theta + \ddot\phi + 2K\theta = 0 \quad , \qquad (5)$$

$$\ddot\theta + \ddot\phi + K\phi = 0 \qquad (6)$$

نفرض أن $\theta = A\cos\omega t$ ، $\phi = B\cos\omega t$

$$\therefore \dot{\theta} = -A\omega\sin\omega t \ , \ \ddot{\theta} = -A\omega^2\cos\omega t \ ,$$

$$\dot{\phi} = -B\omega\sin\omega t \ , \ \ddot{\phi} = -B\omega^2\cos\omega t$$

بالتعويض في المعادلتين (5) ، (6) نحصل على

$$-2A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\cos\omega t + 2KA\cos\omega t = 0 \ ,$$

$$-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\cos\omega t + KB\cos\omega t = 0$$

أي أن

$$2(K-\omega^2)A - \omega^2 B = 0 \ , \qquad (7)$$

$$-\omega^2 A + (K-\omega^2)B = 0 \qquad (8)$$

حيث أن θ ، ϕ لا يمكن أن تنعدما لذلك A ، B لا يمكن أن ينعدما ، ولكي يكون للمعادلتين (7) ، (8) حلاً غير صفرية للمجهولين A ، B يجب أن يتلاشى محدد المعاملات في المعادلتين (7) ، (8) ، أي أن

$$\begin{vmatrix} 2(K-\omega^2) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & K-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore 2(K-\omega^2)^2 - \omega^4 = 0$$

$$\therefore \sqrt{2}(K-\omega^2) = \pm\omega^2$$

$$\sqrt{2}K = (\sqrt{2}\pm 1)\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{\sqrt{2}K}{\sqrt{2}\pm 1}\cdot\frac{\sqrt{2}\mp 1}{\sqrt{2}\mp 1}$$

$$\therefore \omega^2 = (2\mp\sqrt{2})K = \frac{(2\mp\sqrt{2})g}{\ell}$$

$$\therefore \omega_1 = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})g}{\ell}} \ , \ \omega_2 = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})g}{\ell}}$$

بالتعويض عن $\omega = \omega_1$ في المعادلة (7) نجد أن

$$2(K - 2K + \sqrt{2}K)A - (2-\sqrt{2})KB = 0$$

$$\therefore 2(\sqrt{2}-1)A - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)B = 0$$

$\therefore \quad B = \sqrt{2}\, A$

بالتعويض عن $\omega = \omega_2$ في المعادلة (٢) نجد أن

$$2(K - 2K - \sqrt{2}K)A - (2 + \sqrt{2})KB = 0$$

$$\therefore -2(1 + \sqrt{2})A - \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)B = 0$$

$$\therefore \quad B = -\sqrt{2}\, A$$

أي أن البندول يتذبذب بطريقتين :

الطريقة الأولى : حيث $B = \sqrt{2}A$ ، $\omega = \omega_1$ ، ويكون التردد مساويا

$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$ كما بالشكل

أي أن $\theta = A \cos \omega_1 t$ ، و

$\phi = \sqrt{2} A \cos \omega_1 t$

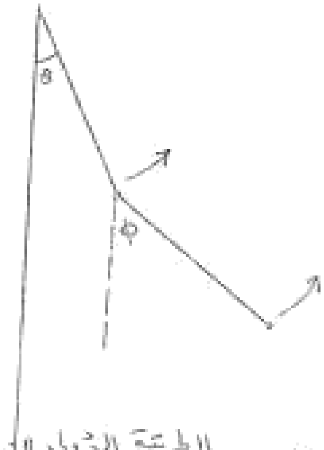
الطريقة الثانية :

حيث $B = -\sqrt{2}A$ ، $\omega = \omega_2$

ويكون التردد مساويا $\nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$

أي أن $\theta = A \cos \omega_2 t ,$

$\phi = -\sqrt{2} A \cos \omega_2 t$



الطريقة الأولى للذبذبة

الطريقة الثانية للذبذبة

مثال (٧) استنتج قانون ثبات الطاقة باستخدام معادلات لاجرانج.

الحل

عندما تكون المجموعة الميكانيكية لا تحتوي صراحة على الزمن ومحافظة فإن طاقة الحركة تكون دالة متجانسة في السرعات المعممة من الدرجة الثانية وحسب نظرية أويلر للدوال المتجانسة فإن

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = 2T \qquad (1)$$

معادلات لاجرانج هي

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad (2)$$

حيث أن طاقة الحركة $T = T(q_\alpha, \dot{q}_\alpha)$ ، الطاقة الجهد $V = V(q_\alpha)$ فإن

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}(T - V) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad , \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(T - V) = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \qquad (4)$$

بالتعويض من (3)، (4) في (2) نجد أن

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0$$

بالضرب في $\dot{q}_\alpha$ فإن

$$\dot{q}_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0$$

يمكن كتابة المعادلة الأخيرة في الصورة

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \ddot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0$$

بأخذ الجمع على α فإن:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\ddot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{q}_\alpha \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad (5)$$

حيث أن

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha\right) , \qquad (6)$$

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha \qquad (7)$$

بالتعويض من (1) ، (6) ، (7) في (5) نحصل على

$$\frac{d}{dt}(2T) - \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = 0$$

أي أن

$$\frac{d}{dt}(T+V) = 0$$

$$\therefore T + V = \text{constant}$$

تمارين

(1) إذا كانت طاقة الحركة وطاقة الجهد لمجموعة ديناميكية هما

$$V = c + dy^2 \quad , \quad 2T = \frac{\dot{x}^2}{a+by^2} + \dot{y}^2$$

فأثبت أن المجموعة تتحرك حركة توافقية بسيطة ، حيث a ، b ، c ، d ثوابت وأوجد الحل العام.

(2) تتحرك حلقة كتلتها m على سلك أملس على شكل منحنى السيكلويد الذي معادلتاه البارامتريتان هما $x = a(\theta - \sin\theta)$ ، $y = a(1 + \cos\theta)$ ، $0 \leq \theta \leq 2\pi$. أوجد دالة لاجرانج وأوجد معادلة الحركة ثم أثبت أن الحلقة تعمل ذبذبات زمنها الدوري يساوي $4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ حيث g عجلة الجاذبية الأرضية.

(3) استخدم معادلات لاجرانج لإيجاد معادلة الحركة لبندول بسيط يتذبذب في مستوى رأسي حول محور أفقي ثابت.

(٤) يتحرك جسم في مستوى تحت تأثير قوة جاذبة F نحو مركز الجذب o حيث $F=\frac{\lambda}{r^2}$ ، r بعد الجسم عن o اوجد معادلات حركة الجسم باستخدام معادلات لاجرانج.

(٥) حل مثال (٢) اذا استبدلنا الكتلة 3m بالكتلة 5m وكذلك استبدلنا الكتلتين m ، 1m بالكتلتين 2m ، 3m.

(٦) استخدم معادلات لاجرانج في ايجاد معادلات حركة جسم كتلته m يتحرك على السطح الداخلي للجسم الدوراني $x^2+y^2=9z$ تحت تأثير وزنه مع اعتبار السطح أملس.

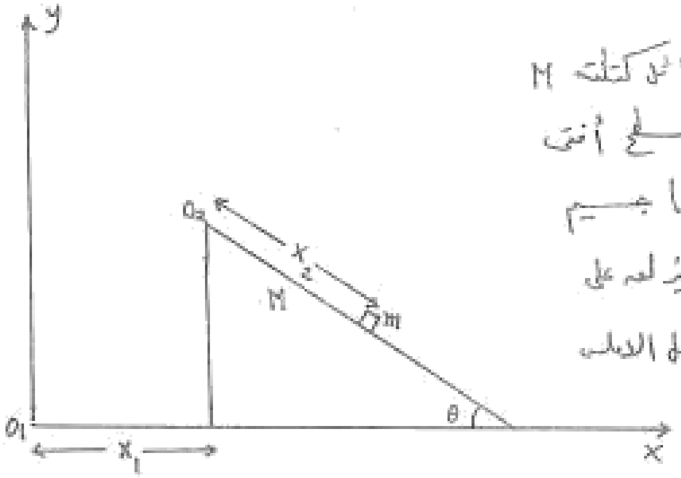
(٧) اسطوانة مصمتة كتلتها m ونصف قطرها l تتدحرج بدون انزلاق على مستوى مائل بزاوية α على الأفقي ، اوجد معادلات الحركة باستخدام معادلات لاجرانج ثم اثبت ان عجلة مركز الثقل تكون ثابتة واوجد قيمتها.

(٨) AB سلك مستقيم أملس مثبت عند النقطة A على عمود رأسي OA بحيث يدور AB حول OA بسرعة زاوية ثابتة ω . وضعت حلقة كتلتها m بحيث تكون مقيدة الحركة على السلك اوجد دالة لاجرانج ثم اوجد معادلات حركة الحلقة باستخدام معادلات لاجرانج ثم اوجد الحل العام.

(٩) يتحرك جسم كتلته m في مستوى تحت تأثير الجهد $V=-\frac{A}{r}$ حيث A ثابت . اوجد معادلات الحركة باستخدام معادلات لاجرانج ، اوجد كذلك الثوابت الحركية.

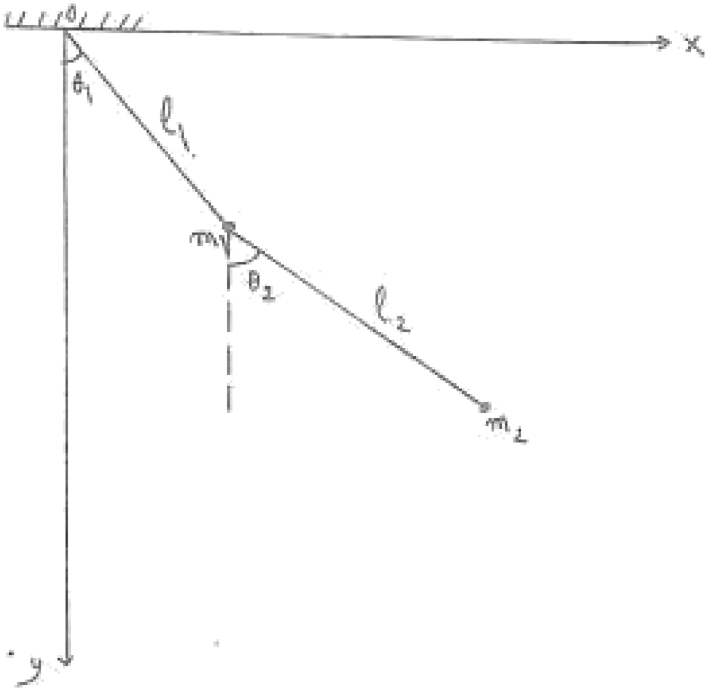
(١٠) كتلة M_2 معلقة من أحد طرفي خيط خفيف يمر على بكرة مثبتة ملساء وفي الطرف الآخر للخيط توجد بكرة ملساء كتلتها M_1 وغير قابلة للدوران ويمر حول هذه البكرة خيط خفيف يحمل الكتلتين m_1 ، m_2 اوجد دالة لاجرانج للمجموعة ثم اوجد عجلة الكتلة M_2 مستخدما معادلات لاجرانج.

(١١) جسم كتلته m يتحرك في مجال قوة محافظ اوجد دالة لاجرانج ومعادلات الحركة لهذا الجسم في الاحداثيات الاسطوانية.

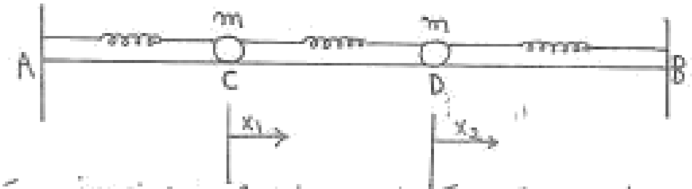


(١٢) مستوى مائل كتلته M ينزلق على سطح أفقي أملس بينما جسم كتلته m ينزلق على سطح المائل الاملس كما بالشكل. أوجد معادلات حركة الجسم والمستوى المائل باستخدام معادلات لاجرانج.

(١٣) اوجد معادلات الحركة لبندول ثنائي كما بالشكل حيث الجسمين m_1 ، m_2 متصلين في موضعين مختلفين من خيط خفيف والمجموعة تتحرك حركة تذبذبية في مستوى رأسي حول نقطة ثابتة من الخيط.



(١٤) وصلت كتلتان متساويتان كل منهما m بثلاثة اسلاك زنبركية لها نفس ثابت الزنبرك K بحيث تنزلق كل كتلة بحرية على منضدة ملساء كما بالشكل . اوجد معادلتى حركة الكتلتين باستخدام معادلات لاجرانج على فرض ان x_2 ، X_1 هما ازاحتى الكتلتين من موضعى اتزانهما C ، D .



(١٥) اوجد معادلة حركة قضيب كتلته m وطوله 2l يتذبذب فى مستوى رأسى حول أحد طرفيه مستخدما معادلات لاجرانج ثم اوجد الزمن الدورى فى حالة الذبذبات الصغيرة .

الباب الثالث

معادلات هاملتون Hamilton's equations

كميات الحركة المعممة Generalized momenta

دالة لاجرانج L تكون دالة فى الاحداثيات المعممة $q_1, q_2, \dots, q_n$ والسرعات المعممة $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ والزمن t أى أن $L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$

تعرف كمية الحركة المعممة p_i من العلاقة

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \qquad (3.1)$$

معادلات لاجرانج هى

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \qquad (3.2)$$

من المعادلتين (3.1)، (3.2) نجد أن

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (3.3)$$

دالة هاملتون Hamiltonian function or Hamiltonian

تعرف دالة هاملتون H أو هاملتونيان من العلاقة

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L \qquad (3.4)$$

يمكن حذف السرعات المعممة $\dot{q}_i$ من دالة هاملتون H وذلك باستخدام العلاقة (3-1) التى تربط بين كميات الحركة p_i

والسرعات المعممة $\dot{q}_i$ وبالتالي فإن دالة هاملتون تكون دالة
في الاحداثيات المعممة $q_1, q_2, \dots, q_n$ وكميات الحركة
المعممة $p_1, p_2, \dots, p_n$ والزمن t أي أن

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t) \tag{3-5}$$

معادلات هاملتون Hamilton's equations

من (3.4) لنا

$$dH = \sum_{i=1}^{n} p_i \, d\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, dp_i - dL \tag{3.6}$$

حيث dL تعطى من

$$dL = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{3.7}$$

بالتعويض من (3.7) في (3.6) واستخدام المعادلتين (3.1)، (3.3)
نحصل على

$$dH = -\sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i \, dq_i + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{3.8}$$

من ناحية أخرى من (3.5) لنا

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \tag{3.9}$$

بمقارنة المعادلتين (3.8)، (3.9) نستنتج أن

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} , \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.10}$$

المعادلات (3.10) تسمى معادلات هاملتون

ملحوظة. وتستخدم معادلات هاملتون في حل مسائل في الميكانيكا

كما تستخدم أيضا في ميكانيكا الكم والميكانيكا الاحصائية.

حالة خاصة.

اذا كانت دالة هاملتون H لا تحتوي صراحة على الزمن t فان H تكون ثابتة وتساوي الطاقة الكلية للمجموعة ، أي أن

$$H = T + V = \text{constant}$$

البرهان. في هذه الحالة $H=H(q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n)$

ونجد أن

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i$$

باستخدام معادلات هاملتون (3.10) نحصل على

$$\frac{dH}{dt} = -\sum_{i=1}^{n}\dot{p}_i\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\dot{p}_i = 0$$

$$\therefore \quad H = \text{constant}$$

دالة هاملتون هي

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - L$$

حيث أن كمية الحركة العامة p_i تعطى بـ

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

حيث $L = T - V$ ودالة الجهد لا تحتوي على السرعات العامة

$$\therefore \quad H = \sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - L$$

حيث أن طاقة الحركة دالة متجانسة من الدرجة الثانية في السرعات العامة وحسب نظرية اويلر للدوال المتجانسة فإن

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

ونجد أن

$$H = 2T - (T - V) = T + V$$

أمثلة

مثال (١) نظام ميكانيكي له درجة حرية واحدة ودالة هاملتون له في الصورة $H = q^2(1 + \frac{1}{2}p^2)$ اكتب معادلات هاملتون لهذا النظام. وإذا كان $p = 0$ ، $q = 1$ ، $\dot{q} = 0$ عند $t = 0$ فأثبت أن

$$q = \operatorname{sech} \sqrt{2}\, t$$

الحل

معادلات هاملتون هي

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

حيث $i = 1$ فقط (توجد درجة حرية واحدة للنظام الميكانيكي في هذا المثال)

حيث أن دالة هاملتون H معطاه في الصورة

$$H = q^2(1 + \frac{1}{2}p^2)$$

∴ معادلات هاملتون تأخذ الصورة

$$\dot{q} = p q^2 , \qquad (1)$$

$$\dot{p} = -2q(1 + \frac{1}{2}p^2)$$

$$\therefore \dot{p} = -q(2 + p^2) \qquad (2)$$

بقسمة (1) على (2) نحصل على

$$\frac{\dot{q}}{\dot{p}} = \frac{dq}{dp} = -\frac{pq}{p^2+2}$$

بفصل المتغيرات نجد أن

$$\frac{dq}{q} = -\frac{p\,dp}{p^2+2}$$

بالتكامل نجد

$$\ln q = -\frac{1}{2}\ln(p^2+2) + c_1$$

حيث c_1 ثابت يتعين بالشروط الابتدائية للحركة وهي

$p = 0$ ، $q = 1$ عند $t = 0$ ونجد أن

$$c_1 = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$$

$$\therefore \ln q = \ln(p^2+2)^{-\frac{1}{2}} + \ln\sqrt{2}$$

$$= \ln\sqrt{\frac{2}{p^2+2}}$$

$$\therefore q = \sqrt{\frac{2}{p^2+2}}$$

بتربيع الطرفين نجد أن

$$q^2 = \frac{2}{p^2+2}$$

$$\therefore q^2p^2 + 2q^2 = 2$$

$$\therefore p^2 = \frac{2(1-q^2)}{q^2}$$

$$\therefore p = \frac{\sqrt{2}}{q}\sqrt{1-q^2} \qquad (٣)$$

بالتعويض من (٣) في (١) نجد أن

$$\dot{q} = \sqrt{2}\,q\sqrt{1-q^2}$$

$$\therefore \frac{dq}{dt} = \sqrt{2}\,q\sqrt{1-q^2}$$

بفصل المتغيرات نجد

$$\frac{dq}{q\sqrt{1-q^2}} = \sqrt{2}\, dt$$

بالتكامل نحصل على

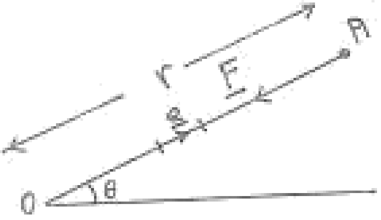
$$-\operatorname{sech}^{-1} q = \sqrt{2}\, t + c_2$$

حيث c_2 ثابت يتعين من الشروط الابتدائية المعطاه. وحيث $q=1$ عند $t=0$ نجد ان $c_2=0$

$$\therefore \operatorname{sech}^{-1} q = -\sqrt{2}\, t$$

$$\therefore q = \operatorname{sech}(-\sqrt{2}\, t)$$
$$= \operatorname{sech}(\sqrt{2}\, t)$$

<u>مثال (٤)</u> اوجد دالة هاميلتون بدلالة الاحداثيات القطبية وكميات الحركة المعممة لجسم كتلته m يتحرك في مستوى تحت تأثير قوة جاذبة تتناسب عكسيا مع مربع البعد من المركز الجاذب. ثم اوجد معادلات هاميلتون.



الحل

الاحداثيات المعممة هما r ، θ اللذان يعينان موضع الجسم A عند اي لحظة. القوة $\underline{F}$ المؤثرة على الجسم في الصورة

$$\underline{F} = -\frac{\lambda}{r^2}\,\underline{e}$$

حيث $\underline{e}$ متجه وحدة في اتجاه $\underline{OA}$ ، o المركز الجاذب

طاقة حركة الجسم هي

$$T = \tfrac{1}{2} m v^2$$
$$= \tfrac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

طاقة الجهد تعطى بـ

$$V = -\int \underline{F} \cdot d\underline{r} \quad , \quad d\underline{r} = dr\, \underline{e}$$

$$\therefore V = -\int -\frac{\lambda}{r^2} \underline{e} \cdot dr\, \underline{e} = \lambda \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{\lambda}{r}$$

دالة لاجرانج L تكون في الصورة

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{\lambda}{r}$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \qquad \text{حيث أن} \quad (1)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \qquad (2)$$

دالة هاملتون H تعطى بـ

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - L$$

$$\therefore H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{\lambda}{r} \qquad (3)$$

من (1) ، (2) نجد أن

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2} \quad , \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

بالتعويض في (3) نجد أن

$$H = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{m r^2} - \frac{1}{2} m \left(\frac{p_r^2}{m^2} + \frac{p_\theta^2}{m^2 r^2} \right) - \frac{\lambda}{r}$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2 m r^2} - \frac{\lambda}{r}$$

معادلات هاملتون هي

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{m r^3} - \frac{\lambda}{r^2} \quad , \qquad (4)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad , \qquad (5)$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{P_r}{m} , \qquad (6)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{P_\theta}{m r^2} \qquad (7)$$

نلاحظ أن المعادلتين الأخيرتين (6)، (7) هما نفس المعادلتين (1)، (2).

كذلك نلاحظ أن المعادلة (5) تعطي

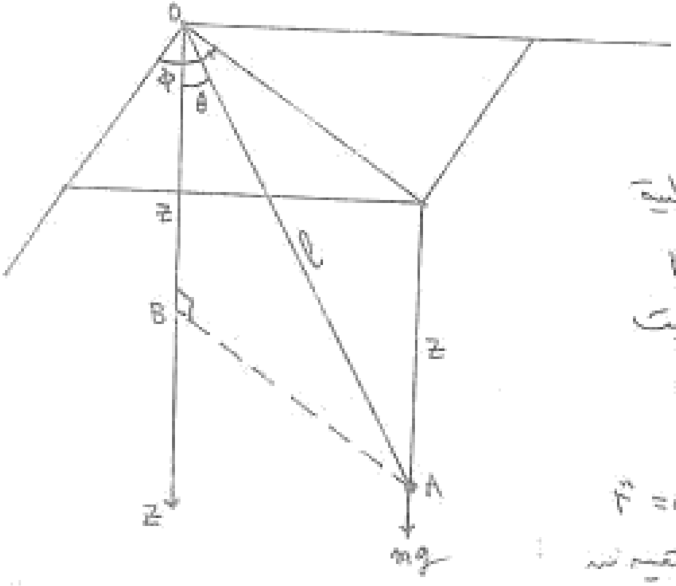
$$P_\theta = \text{constant}$$

أي أن

$$P_\theta = m r^2 \dot{\theta} = \text{constant}$$

<u>مثال (٢)</u> أوجد معادلات هاملتون للبندول الكري.

الحل



يتعين موضع الجسم A عند أي لحظة بدلالة الاحداثيات القطبية الكرية r, θ, φ حيث r يظل ثابت ويساوي l مثلا إذاً $r = l$ وبالتالي $\dot{r} = 0$، $\ddot{r} = 0$ سرعة الجسم تتعين من

$$\underline{v} = (\dot{r}, r\dot{\theta}, r\dot{\phi}\sin\theta)$$
$$= (0, l\dot{\theta}, l\dot{\phi}\sin\theta)$$

طاقة الحركة تتعين من

$$T = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right)$$

طاقة الجهد أو طاقة الوضع تتعين من

$$V = - m g z$$

حيث

$$z = OB = \ell \cos \theta$$

مع اعتبار المستوى الأفقي المار بالنقطة الثابتة O مستوى قياسي،

دالة لاجرانج تكون

$$L = T - V$$

$$\therefore L = \frac{1}{2} m \ell^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) + m g \ell \cos \theta$$

يوجد احداثيان معممان هما θ ، ϕ وكمية الحركة المعممة المناظرة هما P_θ ، P_ϕ ، حيث

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m \ell^2 \dot{\theta} \quad , \qquad (1)$$

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m \ell^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta \qquad (2)$$

دالة هاملتون تتعين من

$$H = P_\theta \dot{\theta} + P_\phi \dot{\phi} - L$$

$$= P_\theta \dot{\theta} + P_\phi \dot{\phi} - \frac{1}{2} m \ell^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) - m g \ell \cos \theta$$

من (1) ، (2) نجد:

$$\dot{\theta} = \frac{P_\theta}{m \ell^2} \quad , \qquad (3)$$

$$\dot{\phi} = \frac{P_\phi}{m \ell^2 \sin^2 \theta} \qquad (4)$$

بالتعويض من (3) ، (4) في دالة هاملتون نحصل على

$$H = \frac{P_\theta^2}{2 m \ell^2} + \frac{P_\phi^2}{2 m \ell^2 \sin^2 \theta} - m g \ell \cos \theta$$

معادلات هاملتون هي

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cos\theta}{m l^2 \sin^3\theta} - m g l \sin\theta \,, \quad (5)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \,, \quad (6)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m l^2} \,, \quad (7)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{m l^2 \sin^2\theta} \quad (8)$$

نلاحظ أن المعادلتين (7)، (8) هما نفس المعادلتين (3)، (4)

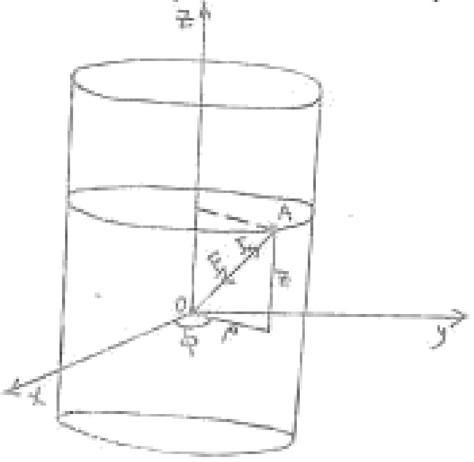
وبتكامل المعادلة (6) نجد أن

$$p_\phi = \text{constant}$$

وباستخدام المعادلة (2) نجد أن

$$p_\phi = m l^2 \dot{\phi} \sin^2\theta = \text{constant}$$

مثال (٤) يتحرك جسيم كتلته m على سطح اسطوانة دائرية نصف قطرها R تحت تأثير قوة جاذبة نحو نقطة الأصل O الواقعة على محور الاسطوانة وتتناسب مقدار القوة مع بعد الجسيم عن O . أوجد دالة هاملتون وأثبت أن الحركة في اتجاه محور الاسطوانة حركة توافقية بسيطة.



الحل

القوة الجاذبة المؤثرة على الجسم F تعطى بـ

$$\underline{F} = -K\underline{r}$$

حيث $\underline{r}$ متجه موضع الجسم عند موضع ما A ،

$$\underline{r} = (x, y, z)$$

حيث $x^2+y^2=R^2$

طاقة الجهد V تعطى بـ

$$V = -\int \underline{F}\cdot d\underline{r} = k\int \underline{r}\cdot d\underline{r}$$

$$= k\int r\,dr = \frac{1}{2}kr^2$$

$$= \frac{1}{2}k\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}k\left(R^2+z^2\right)$$

سرعة الجسم $\underline{v}$ عند الموضع A بالاحداثيات الاسطوانية تكون في الصورة

$$\underline{v} = (\dot{\rho}, \rho\dot{\phi}, \dot{z})$$

$$\therefore v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$$

في هذه الحالة نلاحظ ان

$$\rho = R = \text{constant}$$

$$\therefore \dot{\rho} = 0$$

$$\therefore v^2 = R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$$

طاقة الحركة تعطى بـ

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2\right)$$

دالة لاجرانج تكون

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2\right) - \frac{1}{2}K\left(R^2+z^2\right)$$

في هذه الحالة يوجد احداثيان مهملان هما ϕ, z وكميتا الحركة المعممة المناظرة هما P_ϕ , P_z حيث

$$P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad , \qquad (1)$$

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mR^2\dot{\phi} \qquad (2)$$

دالة هاملتن تعطى من

$$H = P_\phi \dot\phi + P_z \dot z - L$$

$$= P_\phi \dot\phi + P_z \dot z - \frac{1}{2} m (R^2\dot\phi^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2} K (R^2 + z^2)$$

بالتعويض من (1)، (2) عن $\dot z$، $\dot\phi$ نحصل على

$$H = \frac{P_\phi^2}{2mR^2} + \frac{P_z^2}{2m} + \frac{1}{2} K (R^2 + z^2)$$

معادلات هاملتن هي

$$\dot P_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \quad , \qquad (3)$$

$$\dot P_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -K z \quad , \qquad (4)$$

$$\dot\phi = \frac{\partial H}{\partial P_\phi} = \frac{P_\phi}{mR^2} \quad , \qquad (5)$$

$$\dot z = \frac{\partial H}{\partial P_z} = \frac{P_z}{m} \qquad (6)$$

المعادلتان الأخيرتان (5)، (6) هما نفس المعادلتين (1)، (2)

بتفاضل المعادلة (1) أو (6) نجد أن

$$\dot P_z = m \ddot z \qquad (7)$$

من المعادلتين (4)، (7) نحصل على

$$m \ddot z = - K z$$

$$\therefore \ddot z + w^2 z = 0 \quad , \quad w^2 = \frac{K}{m}$$

وهي تمثل حركة توافقية بسيطة

إذن حركة الجسم في اتجاه محور الاسطوانة هي حركة توافقية بسيطة.

تمارين

(١) جسيم كتلته m يتحرك في مجال طاقة جهده $V(r,\theta)$ حركة مستوية حيث (r,θ) تعين موضع الجسيم بالاحداثيات القطبية. اوجد دالة هاملتون ومعادلات هاملتون.

(٢) يتحرك جسيم كتلته m في مجال محافظ طاقة جهده $V(x,y,z)$ اوجد دالة هاملتون واثبت أن معادلات هاملتون تختزل الى معادلات نيوتن للحركة.

(٣) اوجد دالة هاملتون لجسيم كتلته m يتحرك في مجال طاقة جهده $V(r,\theta,\phi)$ حيث تتعين موضع الجسيم بالاحداثيات القطبية الكرية (r,θ,ϕ) ثم اوجد معادلات هاملتون.

(٤) اذا علم أن طاقة الحركة والجهد لنظام ميكانيكي هما

$$T = mk(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \sin^2 q_1) \quad ,$$

$$V = -2mg \cos q_1$$

اوجد دالة هاملتون ومعادلات هاملتون ثم اثبت أن

$$p_2 = \text{constant} \quad ,$$

$$\dot{q}_1^2 + \frac{c^2}{\sin^2 q_1} - \frac{2g}{K} \cos q_1 = \text{constant}$$

حيث K ، c ثابتان.

(٥) جسيم كتلته m يتحرك في مجال طاقة جهده $V(\rho, \phi, z)$ حيث ρ, ϕ, z هي الاحداثيات الاسطوانية لموضع الجسيم

اوجد دالة هاميلتون ومعادلات هاميلتون للجسم .

(٦) نظام ميكانيكي ذو درجتين حرية وكانت طاقة الحركة وطاقة الجهد هما

$$2T = \dot{x}^2 + x^2 \dot{y}^2 \; , \quad 2V = K^2 x^2$$

اثبت أن

$$x^2 = a \sin(2Kt + b) + c$$

حيث a ، b ، c ، K ثوابت .

(٧) باستخدام معادلات هاميلتون استنتج معادلات حركة جسم يتذبذب حركة توافقية بسيطة .

(٨) يتحرك جسم كتلته m تحت تأثير الجاذبية على الحلزون ($z = K\phi$ ، $\rho = a$ حيث K ، a ثابتين ، (ρ, ϕ, z) احداثيات الجسم عند أي لحظة . اوجد معادلات هاميلتون للحركة .

(٩) اذا كانت طاقتي الحركة والجهد لمجموعة ديناميكية هما

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) \; , \quad V = f(q_1 - q_2)$$

اذا كان $q = q_1 - q_2$ ، $b = q_1 + q_2$ فاوجد دالة هاميلتون H وبين أن كمية الحركة P_b تظل ثابتة . اثبت كذلك أن

$$t - t_0 = \frac{1}{2} \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{H - P_b^2 - f(q)}}$$

حيث $q = q_0$ عندما $t = t_0$.

(١٠) جسم كتلته m يتحرك على السطح الداخلي لمخروط رأسه أسفل زاويته النصف رأسية هي α اوجد دالة هاميلتون ومعادلات هاميلتون .

الباب الرابع

Routh's function دالة راوث

في بعض المسائل الديناميكية نجد أن دالة لاجرانج L لا تظهر فيها صراحة بعض الاحداثيات المعممة وإنما توجد السرعات المعممة المناظرة لهذه الاحداثيات المعممة المختفية.

نفرض أن الاحداثيات المعممة اللازمة لتعيين موضع مجموعة ديناميكية هي $q_1, q_2, \dots\dots, q_n$ وأن الاحداثيات $q_1, q_2, \dots, q_k$ تظهر صراحة في دالة لاجرانج L بينما لا تظهر الاحداثيات $q_{k+1}, q_{k+2}, \dots, q_n$ صراحة في L وعددها $n-k$ ولنسميها

$$\theta_1, \theta_2, \dots\dots, \theta_{n-k}$$

إذن

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{\theta}_{n-k}) \quad (٤-١)$$

هنا يجب أن

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_\beta} = 0, \quad \beta = 1, 2, \dots, n-k$$

ومن ثم نستنتج من معادلات لاجرانج المرافقة للاحداثيات المختفية أن

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\beta}\right) = 0 \quad , \beta = 1, 2, \dots, n-k$$

وبالتكامل نحصل على

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\beta} = C_\beta \quad , \beta = 1, 2, \dots, n-k \qquad (٤-٢)$$

حيث C_β ثوابت لا يعتمد على الزمن

تعرف دالة راوث بالصورة

$$R = \sum_{\beta=1}^{n-K} c_\beta \dot{\theta}_\beta - L \qquad (4.3)$$

نلاحظ من (4.1) ، (4.2) أن

$$\dot{\theta}_\beta = \dot{\theta}_\beta(q_1, q_2, \dots, q_K, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_K, c_1, c_2, \dots, c_{n-K}) \qquad (4.4)$$

وهذا يعني أن

$$R = R(q_1, q_2, \dots, q_K, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_K, c_1, c_2, \dots, c_{n-K}) \qquad (4.5)$$

$$\therefore dR = \sum_{\beta=1}^{K} \frac{\partial R}{\partial q_\beta} dq_\beta + \sum_{\beta=1}^{K} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\beta} d\dot{q}_\beta + \sum_{\beta=1}^{n-K} \frac{\partial R}{\partial c_\beta} dc_\beta \qquad (4.6)$$

ومن (4.3) نجد أن

$$dR = \sum_{\beta=1}^{n-K} c_\beta \, d\dot{\theta}_\beta + \sum_{\beta=1}^{n-K} \dot{\theta}_\beta \, dc_\beta - dL \qquad (4.7)$$

ومن (4.1) نجد أن

$$dL = \sum_{\beta=1}^{K} \frac{\partial L}{\partial q_\beta} dq_\beta + \sum_{\beta=1}^{K} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} d\dot{q}_\beta + \sum_{\beta=1}^{n-K} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\beta} d\dot{\theta}_\beta \qquad (4.8)$$

بالتعويض من (4.8) في (4.7) نحصل على بعد استخدام (4.2)

$$dR = -\sum_{\beta=1}^{K} \frac{\partial L}{\partial q_\beta} dq_\beta - \sum_{\beta=1}^{K} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} d\dot{q}_\beta + \sum_{\beta=1}^{n-K} \dot{\theta}_\beta \, dc_\beta \qquad (4.9)$$

بمقارنة المعادلتين (4.6) ، (4.9) نحصل على

$$\frac{\partial R}{\partial q_\beta} = -\frac{\partial L}{\partial q_\beta} , \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\beta} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} , \quad \beta = 1, 2, \dots, K \qquad (4.10)$$

$$\frac{\partial R}{\partial c_\beta} = \dot{\theta}_\beta , \quad \beta = 1, 2, \dots, n-K \qquad (4.11)$$

بالتعويض عن (4.10) في معادلات لاجرانج نحصل على

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\beta}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_\beta} = 0 , \quad \beta = 1, 2, --, K \qquad (4.12)$$

المعادلات (4.12) عددها K (حيث $K < n$) وبحلها نجد الاحداثيات المهمة $q_1, q_2, \dots, q_K$ بدلالة الزمن t

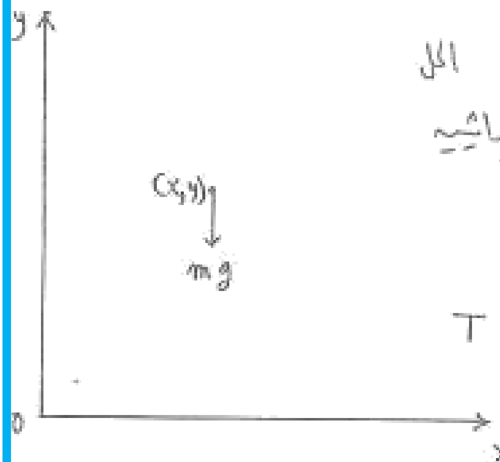
أما الاحداثيات الباقية $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-K}$ فنوجدها بحل المعادلة (4.11) ونجد أن

$$\theta_\beta = \int \frac{\partial R}{\partial c_\beta} dt , \quad \beta = 1, 2, \dots, n-K$$

ملاحظة. نلاحظ أن دالة راوث تحقق معادلات لاجرانج للاحداثيات المهمة $q_1, q_2, \dots, q_K$ وتسمى معادلات راوث.

أمثلة

مثال (1) أوجد دالة راوث في حالة حركة جسيم تحت تأثير الجاذبية الأرضية مع اهمال مقاومة الهواء وكذلك اهمال دوران الأرض.



الحل

يتعين موضع الجسم بالاحداثية
(x, y)

طاقة حركة الجسم هي

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

طاقة وضع الجسم هي

$$V = mgy$$

دالة لاجرانج للنظام

$$L = T - V$$

$$\therefore L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - m g y$$

نلاحظ أن دالة لاجرانج لا يظهر بها الاحداثي x صراحة

في هذه الحالة [illegible] وتكون [illegible] التركيبات

في الصورة

$$R = c_1 \dot{\theta}_1 - L$$

حيث $\theta_1 = x$ أي $\dot{\theta}_1 = \dot{x}$ ، ونضع $c_1 = c$

وبذلك تأخذ دالة راوث الصورة

$$R = c \dot{x} - L$$

$$= c \dot{x} - \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m g y$$

حيث

$$c = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

ومنه $\dot{x} = \frac{c}{m}$ ونجد أن دالة راوث تأخذ الصورة

$$R = \frac{c^2}{2m} + m g y - \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

<u>مثال (٥)</u> يتحرك جسيم كتلته m في مستوى في مجال طاقة جهده $V = \frac{-m}{r^2}$ حيث r بعد الجسيم عن نقطة الاحداثيات.

إذا كانت الشروط الابتدائية للحركة هي

$r = 1$ ، $\theta = 0$ ، $\dot{r} = \sqrt{2}$ ، $\dot{\theta} = 2$ عند $t = 0$

فأوجد دالة راوث ثم أوجد الاحداثيات المعممة بدلالة الزمن t .

الحل

طاقة حركة الجسم في الاحداثيات القطبية تعطى من

$$T = \frac{1}{2} m (\dot r^2 + r^2 \dot\theta^2)$$

دالة لاجرانج هي

$$L = T - V$$
$$= \frac{1}{2} m (\dot r^2 + r^2 \dot\theta^2) + \frac{m}{r^2}$$

نلاحظ أن الاحداثي المهمل θ لا يظهر صراحة في L وتكون دالة راوث هي

$$R = q_1 \dot\theta_1 - L$$

حيث $\theta_1 = \theta$ ، أي $\dot\theta_1 = \dot\theta$ ، نضع $q_1 = c$ وتأخذ دالة راوث الصورة

$$R = c\dot\theta - \frac{1}{2} m (\dot r^2 + r^2 \dot\theta^2) - \frac{m}{r^2}$$

حيث

$$c = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = m r^2 \dot\theta \qquad (1)$$

ومنها نجد أن

$$\dot\theta = \frac{c}{m r^2}$$

بالتعويض في دالة راوث نجد أن

$$R = \frac{c^2}{2 m r^2} - \frac{1}{2} m \dot r^2 - \frac{m}{r^2} \qquad (2)$$

لتعيين قيمة الثابت c نستخدم الشروط الابتدائية للحركة وهي $r = 1$ ، $\dot\theta = 2$ عند $t = 0$ في المعادلة (1) نجد أن

$$c = m (1)^2 (2) = 2m$$

بالتعويض عن قيمة الثابت c في المعادلة (2) نجد أن دالة راوث تأخذ الصورة

$$R = \frac{m}{r^2} - \frac{1}{2} m \dot r^2 \qquad (3)$$

لإيجاد الاحداثي المهم r نستخدم معادلة راوث لهذا الاحداثي

أي أن

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial R}{\partial r} = 0 \qquad (4)$$

نوجد المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} = -m\dot{r} \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{-2m}{r^3}$$

بالتعويض في (4) نحصل على

$$-m\ddot{r} + \frac{2m}{r^3} = 0$$

أي أن

$$\ddot{r} - \frac{2}{r^3} = 0$$

بالضرب في $2\dot{r}$ والتكامل نجد أن

$$\dot{r}^2 + \frac{2}{r^2} = \text{constant} = A$$

حيث الثابت A يتعين من الشروط الابتدائية للحركة وهي

$r = 1$ ، $\dot{r} = \sqrt{2}$ عند $t = 0$ نجد أن $A = 4$

$$\therefore \dot{r}^2 + \frac{2}{r^2} = 4$$

ومنها نجد أن

$$\dot{r}^2 = 4 - \frac{2}{r^2} = \frac{4}{r^2}\left(r^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{2}{r}\sqrt{r^2 - \frac{1}{2}}$$

بفصل المتغيرات نجد أن

$$\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{2}}} = 2\,dt$$

بالتكامل من بداية الحركة $t = 0$ الى لحظة ما t نجد أن

$$\int_1^r \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{2}}} = 2\int_0^t dt$$

$$\therefore \left[\sqrt{r^2 - \frac{1}{2}}\right]_1^r = 2[t]_0^t$$

$$\therefore \sqrt{r^2 - \frac{1}{2}} = 2t + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

بالتربيع نجد أن

$$r = \sqrt{4t^2 + 2\sqrt{2}\,t + 1}$$

ومنه تعطى الاحداثي المسم r بدلالة الزمن t

والاحداثي الثاني θ يعطى ب

$$\theta = \int \frac{\partial R}{\partial c}\,dt$$

حيث $\frac{\partial R}{\partial c}$ نحصل عليها من (2) ونجد

$$\theta = \int \frac{c}{mr^2}\,dt = 2\int \frac{dt}{r^2}$$

وذلك بعد التعويض عن $C = 2m$ ونكون

$$\theta = 2\int \frac{dt}{4t^2 + 2\sqrt{2}\,t + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}}$$

$$\theta = \sqrt{2}\tan^{-1}(2\sqrt{2}\,t + 1) + B$$

حيث الثابت B يعين من الشروط الابتدائية وهي

$\theta = 0$ عند $t = 0$ ونجد أن $B = -\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

$$\therefore \theta = \sqrt{2}\tan^{-1}(2\sqrt{2}\,t + 1) - \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

ومنه تعطينا الإحداثي المسم θ بدلالة الزمن t.

تمارين

(1) يتحرك جسم في مجال طاقة حركته $T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - x^2\dot{y}^2)$ وطاقة جهده $V = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ أوجد دالة راوث

ثم أثبت أن $x^2 = A \sin(2wt + B)$

حيث A، B، w ثوابت

(٢) يتحرك جسم كتلته m تحت تأثير قوة جاذبة تتناسب عكسياً مع مربع البعد عن المركز الجاذب. أوجد دالة راوث.

الباب الخامس

حساب التغاير Calculus of variations

معادلة اويلر Euler's equation

المسألة التي غالبا ما تظهر في الرياضيات هي مسألة إيجاد المنحنى $y=Y(x)$ الذي يصل بين النقطتين $x=x_1$ ، $x=x_2$ بحيث يكون التكامل

$$I=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx \qquad (5.1)$$

أكبر ما يمكن أو أقل ما يمكن ، ويسمى كذلك القيمة القصوى حيث $y'=\frac{dy}{dx}$. المنحنى نفسه يسمى منحنى النهاية العظمى أو النهاية الصغرى.

سنثبت الآن أن الشرط الضروري لكي يكون للتكامل (5.1) نهاية كبرى أو نهاية صغرى هو

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0 \qquad (5.2)$$

المعادلة (5.2) تسمى معادلة اويلر أو لاجرانج.

الاثبات.

نفرض أن المنحنى الذي يجعل I نهاية كبرى أو نهاية صغرى يعطى $y=Y(x)$, $x_1\leq x\leq x_2$. عندئذ يكون

$y=Y(x)+\epsilon\eta(x)=Y+\epsilon\eta$ حيث η اختيارية ، ϵ لا يعتمد على x هو المنحنى المجاور الذي يمر خلال $x=x_1$ ، $x=x_2$ إذا اخترنا η بحيث يكون

$$\eta(x_1)=\eta(x_2)=0 \qquad (5.3)$$

قيمة I لهذا المنحنى المجاور هي

$$I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y+\epsilon\zeta, Y'+\epsilon\zeta')\,dx$$

وهذه تكون قيمة قصوى عندما $\epsilon=0$ ، الشرط الضروري لكي تكون هذه القيمة كذلك هو

$$\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0$$

لكن

$$\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\zeta + \frac{\partial F}{\partial y'}\zeta'\right)dx = 0 \quad (5.4)$$

باستخدام التكامل بالتجزئة والشرط (5,3) نجد أن

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\zeta'\,dx = \zeta\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\zeta\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx$$

$$= -\int_{x_1}^{x_2}\zeta\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx \qquad (5.5)$$

بالتعويض من (5,5) في (5,4) نحصل على

$$\int_{x_1}^{x_2}\zeta\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx = 0$$

وحيث أن ζ اختيارية تماماً

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

أو

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

ملاحظة: يمكن تعميم النتيجة السابقة الى الحالة

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx$$

تكون منحنيات النهاية العظمى أو النهاية الصغرى ، أى التى تجعل
I نهاية عظمى أو صغرى تحقق معادلات أويلر أو لاجرانج

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \qquad (5.6)$$

مبدأ هاميلتون Hamilton's principle

التشابه الواضح بين (5.2) أو (5.6) ومعادلات لاجرانج التى سبق دراستها لمجموعة ميكانيكية يساعد على دراسة مسألة تعيين منحنيات النهاية العظمى أو النهاية الصغرى للتكامل

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)\, dt$$

أو باختصار للتكامل

$$\int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

حيث $L = T - V$ هى دالة لاجرانج للمجموعة الميكانيكية.

وبمقارنة هذا التكامل بالتكامل السابق

$$\int_{x_1}^{x_2} F(y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n', x)\, dx$$

فإننا نجد أن الشرط الضرورى لوجود نهاية عظمى أو نهاية صغرى هو

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

وهذه بالضبط هى معادلات لاجرانج .. هذه النتيجة مكنت هاميلتون من صياغة المبدأ التغايرى العام المعروف بمبدأ هاميلتون على النحو التالى :

يمكن لمجموعة ميكانيكية ما نقطة أن تتحرك من الزمن t_1 الى الزمن t_2 بطريقة تجعل الكمية $\int_{t_1}^{t_2} L\, dt$ لها قيمة قصوى . هذه الكمية تسمى

أحيانا تكامل الفعل . وغالبا مايكتب في الصورة

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = 0$$

حيث δ هو رمز التغاير .

أمثلة

مثال (١) . اوجد المنحنى الذى يجعل التكامل

$$I = \int_0^{\pi} (y^2 + y'^2 - 2y \sin x) \, dx$$

قيمة صغرى بحيث $y(0) = 1$ ، $y(\pi) = 0$.

الحل

في هذه الحالة الدالة F في الصورة

$$F = y^2 + y'^2 - 2y \sin x$$

والمنحنى المطلوب يحقق معادلة اويلر

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

نوجد المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2 \sin x$$

بالتعويض في معادلة اويلر نحصل على

$$2y'' - 2y + 2 \sin x = 0$$

أو

$$y'' - y = - \sin x$$

الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية هو

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x$$

الشرطان $y'(0) = 1$ ، $y(\pi) = 0$ نحصل منهما على الثابتين c_1 ، c_2

ونجد أن

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$c_1 e^{\pi} + c_2 e^{-\pi} = 0$$

بحل المعادلتين الخطيتين في c_1 ، c_2 نجد أن $c_1 = \frac{e^{-\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}}$ ، $c_2 = \frac{-e^{\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}}$

ونجد أن المنحنى المطلوب هو

$$y = \frac{e^{x-\pi} - e^{\pi - x}}{e^{-\pi} - e^{\pi}} + \frac{1}{2} \sin x$$

$$y = \frac{\sinh(\pi - x)}{\sinh \pi} + \frac{1}{2} \sin x$$

<u>مثال (٥)</u> اوجد المنحنى الذى يصل بين النقطتين (x_1,y_1) ، (x_2,y_2) بحيث يكون له أقل طول.

الحل

طول المنحنى الذى يصل بين النقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) يعطى من

$$I = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

المنحنى المطلوب يجعل I نهاية صغرى أي انه يحقق معادلة اويلر حيث الدالة F في الصورة

$$F = \sqrt{1 + y^2}$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

بالتعويض في معادلة اويلر نجد أن

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{1 + y^2}}\right] = 0$$

$$\therefore \frac{y'}{\sqrt{1 + y^2}} = \text{constant}$$

$$\therefore y' = \text{constant}$$

$$\therefore y = Ax + B$$

أي أن المنحنى هو خط مستقيم ويمكن تعيين الثابتين A ، B من الشرطين

$$y(x_1) = y_1 \quad , \quad y(x_2) = y_2$$

$$\therefore \; y_1 = A x_1 + B \quad ,$$

$$y_2 = A x_2 + B$$

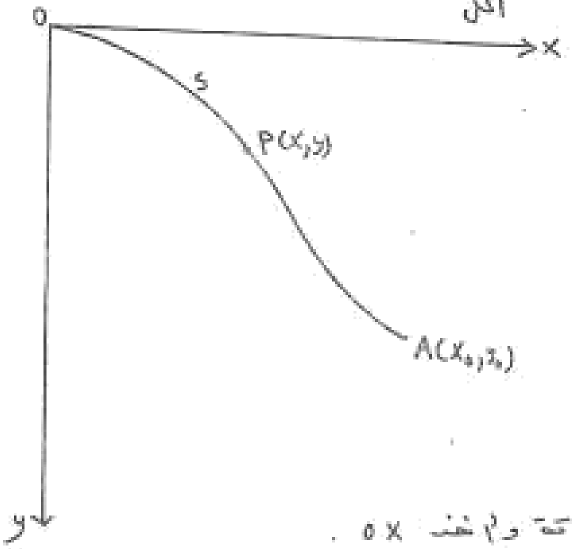
بحلها نجد أن $A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ، $B = y_1 - \frac{(y_2 - y_1)x_1}{x_2 - x_1}$

∴ المنحنى المطلوب هو الخط المستقيم

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

<u>مثال (٢)</u>. جسم ينزلق من السكون عند نقطة ما على سلك أملس في مستوى رأسي إلى نقطة أخرى تحت تأثير الجاذبية، أوجد الزمن الذي يستغرقه الجسم في ذلك ثم أوجد المنحنى الذي يأخذه السلك حتى يكون الزمن أقل ما يمكن.

الحل



نفرض أن نقطة الابتداء والانحدار هي نقطة الأصل O والنقطة $A(x_0,y_0)$ على السلك وأن $P(x,y)$ هو موضع الجسم عند اللحظة t.

من مبدأ ثبوت الطاقة ونأخذ ox لقياس طاقة الجهد نجد:

$$T_p + V_p = T_0 + V_0$$

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - mgy = 0 + 0$$

الإشارة السالبة لطاقة الجهد لأن P أسفل ox

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

الزمن τ الذي يستغرقه الجسم من o الى A يعطى بـ

$$\tau = \int_0^{\tau} dt = \int_{y=0}^{y=y_0} \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \int_0^{y_0} \frac{\sqrt{1+y'^2}\, dx}{\sqrt{2gy}}$$

المنحنى الذي يجعل التكامل أصغر ما يمكن حتى يكون الزمن أقل ما يمكن يحقق

معادلة أويلر

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

حيث الدالة F هي

$$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$$

نوجد المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy^3}}$$

بالتعويض في معادلة أويلر نجد أن

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\right) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y^3}} = 0$$

$$\therefore \frac{y''}{\sqrt{y(1+y'^2)}} - \frac{y'^2 y''}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}} - \frac{1}{2}\frac{y'^2}{\sqrt{y^3(1+y'^2)}} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y^3}} = 0$$

$$\therefore \frac{y''(1+y'^2)}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}} - \frac{y'^2 y''}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}} - \frac{1}{2}\frac{y'^2}{\sqrt{y^3(1+y'^2)}} + \frac{1}{2}\frac{1+y'^2}{\sqrt{y^3(1+y'^2)}} = 0$$

الحدان الأول والثاني يختصران الى $\frac{y''}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}}$ ، والحدان الثالث والرابع يختصران الى $\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y^3(1+y'^2)}}$ ونحصل على

$$\frac{y''}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y^3(1+y'^2)}} = 0$$

$$\therefore \frac{y\,y''}{\sqrt{y^3(1+y'^2)^3}} + \frac{1}{2}\frac{1+y'^2}{\sqrt{y^3(1+y'^2)^3}} = 0$$

$$\therefore 2yy'' + 1 + y'^2 = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية وخالية من x ولحلها نضع $u = y'$ ثم $y'' = u\frac{du}{dy}$ وتصبح المعادلة التفاضلية في الصورة

$$2yu\frac{du}{dy} + 1 + u^2 = 0$$

أو هي

$$\frac{2u\,du}{1+u^2} + \frac{dy}{y} = 0$$

بالتكامل نجد أن

$$\ln(1+u^2) + \ln y = \ln a$$

$$\therefore (1+u^2)y = a$$

$$\therefore u = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a-y}{y}}$$

بفصل المتغيرات ثم

$$dx = \sqrt{\frac{y}{a-y}}\,dy$$

بالتكامل نجد أن

$$x = \int\sqrt{\frac{y}{a-y}}\,dy + b$$

لحساب التكامل نضع $y = a\sin^2\phi$ ثم

$$x = 2a\int \sin^2\phi\,d\phi + b$$

$$\therefore x = a\int(1-\cos 2\phi)\,d\phi + b$$

$$x = \frac{a}{2}(2\phi - \sin 2\phi) + b$$

حيث أن المنحنى يمر بنقطة الأصل 0 ، وبوضع $y = 0$ نجد أن $\phi = 0$ وبوضع $\phi = 0$ ، $x = 0$ نجد أن $b = 0$

$$\therefore \quad x = \frac{a}{2}(2\phi - \sin 2\phi)$$

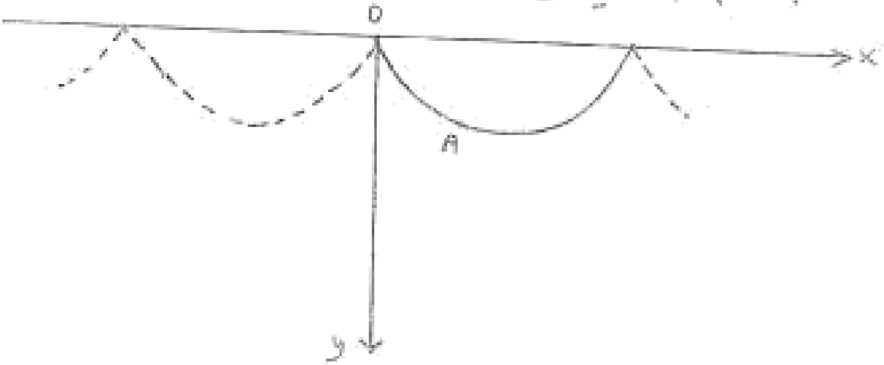
نضع $\theta = 2\phi$ ، $c = \frac{a}{2}$ فنجد

$$x = c(\theta - \sin\theta) \qquad (1)$$

$$\therefore \quad y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2\phi)$$

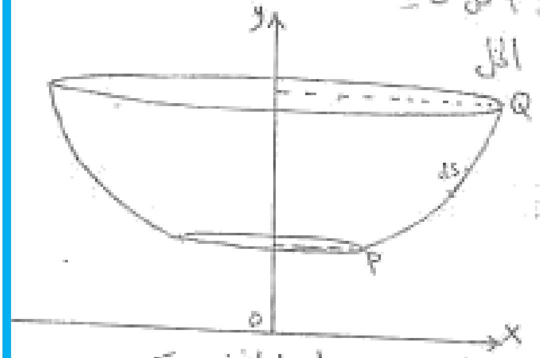
$$y = c(1 - \cos\theta) \qquad (2)$$

المعادلتان (1)(2) هما المعادلتان البارامتريتان للمنحنى الذي يأخذه السلك حتى يكون الزمن أقل ما يمكن. هذا المنحنى هو المعروف باسم السيكلويد



مثال (٤). يراد لمنحنى مثبت طرفاه عند P ، Q أن يدور حول المحور y دورة كاملة ليولد سطح دوران. أوجد المنحنى الذي يجعل مساحة السطح أقل ما يمكن.

الحل



العنصر ds من المنحنى يولد سطح مساحته

$2\pi x \, ds$

أي مساحته

$2\pi x\sqrt{1+y'^2}\, dx$

مساحة السطح الدوراني الناشئ من دوران المنحنى يعطى من

$$I = 2\pi \int_{x_p}^{x_Q} x\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

المنحنى الذى يجعل I أقل ما يمكن يتعين من معادلة أويلر

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

حيث الدالة F تكون

$$F = x\sqrt{1+y'^2}$$

نوجد المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{x y'}{\sqrt{1+y'^2}} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

بالتعويض نجد

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

بالتكامل نجد

$$\frac{x y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{Constant} = c$$

$$\therefore x^2 . y'^2 = c^2(1+y'^2)$$

$$\therefore y'^2(x^2 - c^2) = c^2$$

$$\therefore y' = \frac{dy}{dx} = \frac{c}{\sqrt{x^2-c^2}}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$y = c\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-c^2}} = c \cosh^{-1}\frac{x}{c} + b$$

$$\therefore \quad x = c \cosh\left(\frac{y-b}{c}\right)$$

معادلة أويلر - بواسون Euler - Poisson equation

عندما تكون الدالة F، تحتوى على مشتقات من رتب أعلى أى في حالة إيجاد المنحنى الذى يصل بين النقطتين $x = x_1$ ، $x = x_2$ بحيث يكون التكامل

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\, dx \qquad (5.7)$$

أكبر ما يمكن أو أقل ما يمكن فإنه يمكن إثبات أن الشرط الضروري
لكي يكون للتكامل (1) قيمة قصوى هو

$$\frac{d}{dx}F_{y'} - \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} - F_y = 0 \qquad (5,8)$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة 2n وتسمى معادلة
أويلر - بواسون .

الشروط الحدية تكتب في الصورة

$$\left.\begin{array}{l} y(x_1) = y_1 ,\; y'(x_1) = y_1' , \cdots\cdots , y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)} , \\ y(x_2) = y_2 ,\; y'(x_2) = y_2' , \cdots\cdots , y^{(n-1)}(x_2) = y_2^{(n-1)} \end{array}\right\} \qquad (5,9)$$

مثال. أوجد منحنى الدالة الذى يجعل التكامل الآتي قيمة قصوى

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2 - y''^2 + x^2)\, dx$$

الشروط الحدية هي

$$y(0) = 1 ,\; y'(0) = 0 ,\; y(\tfrac{\pi}{2}) = 0 ,\; y'(\tfrac{\pi}{2}) = -1 \;.$$

الحل

في هذه الحالة n=2 ومعادلة أويلر - بواسون تكون

$$\frac{d}{dx}F_{y'} - \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - F_y = 0$$

حيث

$$F = y^2 - y''^2 + x^2$$

نجد أن المشتقات الجزئية

$$F_{y'} = 0 ,\quad F_{y''} = -2y'' ,\quad F_y = 2y$$

بالتعويض نجد أن

$$0 - \frac{d^2}{dx^2}(-2y'') - 2y = 0$$

$$\therefore y^{(4)} - y = 0$$

الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية هو

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

حيث الثوابت الاربعة $c_1 ، c_2 ، c_3 ، c_4$ تتعين من الشروط الحدية الاربعة $y(0)=1$ ، $y'(0)=0$ ، $y(\frac{\pi}{2})=0$ ، $y'(\frac{\pi}{2})=-1$

وتحصل على اربعة معادلات في الصورة

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad و \qquad (1)$$

$$c_1 - c_2 + c_4 = 0 \quad و \qquad (2)$$

$$c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + c_4 = 0 \quad و \qquad (3)$$

$$c_1 e^{\frac{\pi}{2}} - c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - c_3 = -1 \qquad (4)$$

بجمع المعادلتين (1) ، (4) وبطرح (3) من (2) نجد أن

$$(1 + e^{\frac{\pi}{2}}) c_1 + (1 - e^{-\frac{\pi}{2}}) c_2 = 0 \quad و \qquad (5)$$

$$(1 - e^{\frac{\pi}{2}}) c_1 - (1 + e^{-\frac{\pi}{2}}) c_2 = 0 \qquad (6)$$

بحل المعادلتين (5) ، (6) نجد أن $c_1 = c_2 = 0$

المعادلتان (1) ، (2) تعطيان $c_3 = 1$ ، $c_4 = 0$

∴ المنحنى المطلوب هو $y = \cos x$

تمارين

(1) اثبت أنه اذا كانت الدالة F في التكامل $\int_{x_1}^{x_2} F\,dx$ لا تعتمد على x ، أي أن $F = F(y, y')$ فان التكامل تكون له قيمة قصوى اذا كان $F - y' F_{y'} = C$ حيث C مقدار ثابت

(٢) استخدم تمرين (1) لحل مثال (٢)

(٣) اعد حل مثال (٣) مستخدما تمرين (1) .

(٤) اوجد المنحنى الذي يجعل التكامل $I = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^{2x})$ له قيمة قصوى حيث $y(0) = \frac{1}{3}$ ، $y(1) = \frac{1}{3}e^2$.

(٥) اوجد منحنى النهاية العظمى او الصغرى للتكامل

$$I = \int_a^b \frac{1+y^2}{y'^2}\,dx$$

حيث $y(a)=A$ ، $y(b)=B$.

(٦) استخدم الاحداثيات الاسطوانية جـ، ط، م لايجاد البعد بين نقطتين على سطح اسطوانة دائرى ثم اوجد معادلة الخط الواصل بين هاتين النقطتين متخذا الخط هو أقصر بعد بينهما.

(٧) يراد لمنحنى مثبت طرفاه عند P ، Q أن يدور حول المحور x دورة كاملة اثبت أن مساحة السطح الدورانى الناشئ I تساوى

$$2\pi\int_{x_P}^{x_Q} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

اثبت أن المنحنى الذى يجعل مساحة السطح الدورانى I أقل ما يمكن هو منحنى الكتينة.

(٨) اوجد المنحنى الذى يجعل التكامل $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2-y^2)\,dx$ نهاية قصوى حيث $y(0)=0$ ، $y(\frac{\pi}{2})=1$.

(٩) اوجد منحنى الدالة الذى يجعل التكامل الآتى نهاية قصوى

$$I=\int_{x_1}^{x_2}(16y^2-y''^2+x^2)\,dx$$

(١٠) اثبت أن النهاية القصوى للتكامل $I=\int_{x_1}^{x_2}(p^2y'^2+q^2y^2)\,dx$ هى

$$p^2yy'\Big]_{x_1}^{x_2}$$

الباب السادس

التحويلات القانونية ومعادلة هاميلتون - جاكوبي

Canonical transformations and Hamilton-Jacobi equation

التحويلات القانونية Canonical transformations

سهولة حل العديد من المسائل في الميكانيكا تتوقف على اختيار الاحداثيات المهمة التي تستخدم. وتبعا لذلك فإنه يفضل اختيار التحويلات من مجموعة ما لاحداثيات الموضع وكمية الحركة الى مجموعة أخرى.

اذا كانت q_α ، p_α ترمزان لاحداثيات الموضع وكمية الحركة وكانت Q_α ، P_α هما الاحداثيات الجديدة للموضع وكمية الحركة فإن التحويل يكون

$$P_\alpha = P_\alpha(p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n, t),$$
$$Q_\alpha = Q_\alpha(p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n, t)$$

او للاختصار يكون

$$P_\alpha = P_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t),$$
$$Q_\alpha = Q_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t)$$

سنقتصر على التحويلات التي تسمى قانونية وهي التي توجد لها دالة $\mathcal{H}$ تسمى دالة هاميلتون في الاحداثيات الجديدة وتحقق العلاقتين

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha} \qquad (6.1)$$

في مثل هذه الحالة نسمي Q_α ، P_α الاحداثيات القانونية. دالتا لاجرانج في الاحداثيات القديمة والجديدة هما $L(p_\alpha, q_\alpha, t)$ ، $\mathcal{L}(P_\alpha, Q_\alpha, t)$ على الترتيب

ويرتبطان بدالتي هاملتون $H(p_\alpha, q_\alpha, t)$ ، $\mathcal{H}(P_\alpha, Q_\alpha, t)$ بواسطة المعادلتين

$$H=\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \quad , \quad \mathcal{H}=\sum_{\alpha=1}^{n} P_\alpha \dot{Q}_\alpha - \mathcal{L} \qquad (٦.٢)$$

شرط التحويلات القانونية.

نظرية.

التحويل $Q_\alpha = Q_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t)$ ، $P_\alpha = P_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t)$ يكون قانونيا اذا كان $\sum p_\alpha dq_\alpha - \sum P_\alpha dQ_\alpha$ هو تفاضل تاما.

ويمكن اثبات أن التحويل يكون قانونيا اذا وجدت دالة G تحقق العلاقة

$$\frac{dG}{dt} = L - \mathcal{L} .$$

تسمى G الدالة المولدة generating function

مثال (١). أثبت أن التحويل $P=\frac{1}{2}(p^2+q^2)$ ، $Q=\tan^{-1}\left(\frac{q}{p}\right)$ يكون قانونيا.

الحل

نستخدم النظرية السابقة ، وفي هذه الحالة نثبت أن $p\,dq - P\,dQ$ هو تفاضل تام.

حيث أن

$$p\,dq - P\,dQ = p\,dq - \frac{1}{2}(p^2+q^2)\frac{1}{1+\frac{q^2}{p^2}}\,\frac{p\,dq - q\,dp}{p^2}$$

$$= p\,dq - \frac{1}{2}(p\,dq - q\,dp)$$

$$= \frac{1}{2}(p\,dq + q\,dp) = d\left(\frac{1}{2}pq\right)$$

اذا $p\,dq - P\,dQ$ تفاضل تام ، وبالتالي فان هذا التحويل يكون قانونيا.

مثال (٥). إذا كانت الدالة المولدة $F=F(q_\alpha,Q_\alpha,t)$ ، أي دالة في احداثيات الموضع القديمة والجديدة q_α ، Q_α على الترتيب وأيضا دالة في الزمن t فأثبت أن

$$\mathcal{H}=\frac{\partial F}{\partial t}+H \quad , \quad P_\alpha=-\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha} \quad , \quad p_\alpha=\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}$$

حيث

$$\dot{Q}_\alpha=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha} \quad , \quad \dot{P}_\alpha=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}$$

الحل

حيث أن

$$\frac{dF}{dt}=L-\mathcal{L} \quad , \qquad (1)$$

$$H=\sum p_\alpha \dot{q}_\alpha-L \quad , \qquad (2)$$

$$\mathcal{H}=\sum P_\alpha \dot{Q}_\alpha-\mathcal{L} \qquad (3)$$

بطرح (3) من (2) نجد أن

$$H-\mathcal{H}=\sum p_\alpha \dot{q}_\alpha-\sum P_\alpha \dot{Q}_\alpha-(L-\mathcal{L}) \qquad (4)$$

بالتعويض من (1) في (4) لنا

$$\frac{dF}{dt}=\sum p_\alpha \dot{q}_\alpha-\sum P_\alpha \dot{Q}_\alpha+\mathcal{H}-H$$

أي أن

$$dF=\sum p_\alpha\, dq_\alpha-\sum P_\alpha\, dQ_\alpha+(\mathcal{H}-H)dt \qquad (5)$$

إذا كانت $F=F(q_\alpha,Q_\alpha,t)$ لنا

$$dF=\sum\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}dq_\alpha+\sum\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha}dQ_\alpha+\frac{\partial F}{\partial t}dt \qquad (6)$$

بمقارنة المعادلتين (5) ، (6) ينتج أن

$$p_\alpha=\frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \;,\; P_\alpha=-\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha} \;,\; \mathcal{H}-H=\frac{\partial F}{\partial t}$$

المعادلات $\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}$ ، $\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}$ تبقى صحيحة ، حيث $\mathcal{H}$ هي دالة هاملتن في الاحداثيات P_α ، Q_α .

The Hamilton–Jacobi equation معادلة هاملتن – جاكوبي

اذا امكننا ايجاد التحويل التماثل الذي يؤدي الى أن تكون $\mathcal{H} \equiv 0$ فإننا نرى أن $\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha} = 0$ ، $\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha} = 0$ أي أن P_α ، Q_α يكونان ثابتين . تسمى في هذه الحالة P_α ، Q_α احداثيات مستقرة . وعلى ذلك فانه باستخدام التحويل نستطيع ايجاد p_α ، q_α وبالتالي نحدد حركة المجموعة .

الخطوات تتوقف على ايجاد الدالة المولدة الصحيحة . حيث أن $\mathcal{H} = \frac{\partial F}{\partial t} + H$ حيث F الدالة المولدة . وبوضع $\mathcal{H} \equiv 0$ فان هذه الدالة المولدة يجب أن تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H(p_\alpha, q_\alpha, t) = 0$$

أو

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H\left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}, q_\alpha, t\right) = 0 \qquad (6.3)$$

وذلك لأن

$$p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \qquad (6.4)$$

المعادلة (6.3) تسمى معادلة هاملتن – جاكوبي .

Solution of the Hamilton–Jacobi equation حل معادلة هاملتن – جاكوبي

نحن الآن بحاجة الى ايجاد حل مناسب لمعادلة هاملتن – جاكوبي . وحيث أن هذه المعادلة تحتوي على n+1 متغيرات مستقلة ،

أي $q_1, q_2, \dots, q_n, t$ فإن الحل الكامل سوف يشتمل على
$n+1$ ثابتًا. بحذف الثابت المضاف الاختياري والرمز
إلى الثوابت المتبقية n بالرمز β_1، β_2، ..... β_n،
فإن هذا الحل يمكن كتابته في الصورة

$$F = F(q_1, q_2, \dots, q_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, t) \qquad (6.5)$$

عندما نحصل على هذا الحل (6.5) نستطيع منه أن نحدد
الإحداثيات المعممة لكمية الحركة بواسطة العلاقة (6.4)،
أي بواسطة $p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}$.
وأيضًا إذا تمعنا من الإحداثيات الجديدة لكمية الحركة P_α
مع الثابت β_α فإن

$$Q_\alpha = \frac{\partial F}{\partial P_\alpha} = \frac{\partial F}{\partial \beta_\alpha} = \gamma_\alpha \qquad (6.6)$$

حيث γ_α، $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ثوابت جديدة.
باستخدام هذه العلاقات نستطيع منها إيجاد q_α
كدوال في β_α، γ_α، t وهذا يعطي حركة الجسيم.

حالة عدم اعتماد دالة هاميلتون على الزمن Case where Hamiltonian is independent of time.

للحصول على الحل الكامل لمعادلة هاميلتون - جاكوبي يكون من المفيد
غالبًا أن نفترض حلًا على الصورة :

$$F = S_1(q_1) + S_2(q_2) + \dots + S_n(q_n) + K(t) \qquad (6.7)$$

حيث كل دالة في الطرف الأيمن تعتمد فقط على متغير واحد.
هذه الطريقة، المسماة بطريقة فصل المتغيرات، تكون مفيدة

بصفة خاصة عندما لا تعتمد دالة هاملتن صراحة على الزمن.
فإن (6.3) تصبح

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H\left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}, q_\alpha\right) = 0 \qquad (6.8)$$

بالتعويض من (6.7) في (6.8) نجد أن

$$\frac{dK}{dt} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, q_\alpha\right) = 0 \qquad (6.9)$$

حيث S في (6.9) هو الجزء الذي لا يعتمد على الزمن أي أن

$$S = S_1(q_1) + S_2(q_2) + \dots + S_n(q_n) \qquad (6.10)$$

$$\therefore \quad H\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, q_\alpha\right) = -\frac{dk}{dt} \qquad (6.11)$$

الطرف الأيمن في (6.11) دالة في الزمن t فقط والطرف الأيسر دالة في $q_1, q_2, \dots, q_n$ وبالتالي يجب أن كل طرف يساوي ثابت E مثلا $-\frac{dk}{dt} = E$ وبالتالي

$$K(t) = -Et \qquad (6.12)$$

أيضاً فإن

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, q_\alpha\right) = E \qquad (6.13)$$

E مقدار ثابت يمثل الطاقة الكلية للمجموعة.

مثال

(أ) أكتب دالة هاملتون لمتذبذب توافقي بسيط كتلته m.
(ب) أكتب معادلة هاملتون – جاكوبي المناظرة.
(جـ) استخدم طريقة هاملتون – جاكوبي لتحديد حركة المتذبذب.

الحل

(أ) نختار q ممثلاً للموضع للمتذبذب التوافقي البسيط

تكون $\dot{q}$ هي سرعته.

طاقة الحركة T وطاقة الجهد V تعطيان بالعلاقتين

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \quad , \quad V = \frac{1}{2} \kappa q^2$$

حيث κ ثابت الزنبلك

دالة لاجرانج هي

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \kappa q^2$$

كمية الحركة p تكون

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}$$

$$\therefore \dot{q} = \frac{p}{m} \qquad (1)$$

دالة هاملتون هي

$$H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$$

$$= p \dot{q} - \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \kappa q^2 \right) \qquad (2)$$

بالتعويض من (1) في (2) نجد:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} \kappa q^2 = H(p, q) \qquad (3)$$

(ب) معادلة هاملتون - جاكوبي هي

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H\left(\frac{\partial F}{\partial q} , q\right)$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} \kappa q^2 = 0 \qquad (4)$$

(جـ) نفرض حلاً على الصورة

$$F = S(q) + K(t) \qquad (5)$$

بالتعويض من (5) في (4) ينتج

$$\frac{dK}{dt} + \frac{1}{2m} \left(\frac{dS}{dq}\right)^2 + \frac{1}{2} \kappa q^2 = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2m} \left(\frac{dS}{dq}\right)^2 + \frac{1}{2} \kappa q^2 = - \frac{dK}{dt}$$

الطرف الأيمن دالة في t فقط والطرف الأيسر دالة في q فقط، فيصبح كل طرف يساوي ثابت β مثلاً.

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS}{dq}\right)^2 + \frac{1}{2}\varkappa q^2 = \beta \quad ,$$

$$-\frac{dK}{dt} = \beta$$

ومنها نجد أن

$$K = -\beta t \quad , \qquad (٦)$$

$$\frac{dS}{dq} = \sqrt{2m\left(\beta - \frac{1}{2}\varkappa q^2\right)}$$

$$\therefore S = \int \sqrt{2m\left(\beta - \frac{1}{2}\varkappa q^2\right)}\, dq \qquad (٧)$$

بالتعويض من (٦)، (٧) في (٥) نجد أن الدالة المولدة تأخذ الصورة

$$F = \int \sqrt{2m\left(\beta - \frac{1}{2}\varkappa q^2\right)}\, dq - \beta t$$

لنعتبر β هي إحداثي كمية الحركة الجديدة P. عندئذ يكون لدينا بالنسبة لإحداثي الموضع الجديد

$$Q = \frac{\partial F}{\partial P} = \frac{\partial F}{\partial \beta}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\int \sqrt{2m\left(\beta - \frac{1}{2}\varkappa q^2\right)}\, dq - \beta t\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2m}}{2} \int \frac{dq}{\sqrt{\beta - \frac{1}{2}\varkappa q^2}} - t$$

ولكن حيث أن الإحداثي الجديد Q هو الثابت γ مثلاً

$$\frac{\sqrt{2m}}{2} \int \frac{dq}{\sqrt{\beta - \frac{1}{2}\varkappa q^2}} - t = \gamma$$

$$\therefore \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2\beta}{\kappa} - q^2}} = t + \gamma$$

$$\therefore \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \sin^{-1}\left(\frac{q}{\sqrt{\frac{2\beta}{\kappa}}} \right) = t + \gamma$$

$$\therefore q = \sqrt{\frac{2\beta}{\kappa}} \sin\left[\sqrt{\frac{\kappa}{m}} (t + \gamma) \right]$$

الثابتان β ، γ يمكن تعيينهما من الشروط الابتدائية

ملاحظة. الثابت β يناظر الثابت E ، أي يساوي الطاقة الكلية المجموعة.

تمارين

(١) حل مثال (١) باستخدام التحويل ، أي أثبت أن التحويل $P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ ، $Q = \tan^{-1}\left(\frac{q}{p}\right)$ يكون قانونيا

إذا كان $\dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}$ ، $\dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}$

(٢) إذا كانت $S = S(q_\alpha, P_\alpha, t)$ هي الدالة المولدة أثبت أن

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \quad ، \quad Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial P_\alpha} \quad ، \quad \mathcal{H} = \frac{\partial S}{\partial t} + H$$

حيث

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha} \quad ، \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}$$

(٣) أثبت أن التحويل الآتي يكون قانونيا $Q = p$ ، $P = -q$

(٤) أثبت أن التحويل

$$p = \sqrt{2P\omega} \cos Q \quad ,$$

$$q = \sqrt{\frac{2P}{\omega}} \sin Q$$

يكون توافقي . وإذا كانت دالة هاملتون للمتذبذب
التوافقي تعطى في الصورة

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2$$

حيث $\omega = \sqrt{mk}$. اكتب هذه الدالة بدلالة الاحداثيات
القانونية P, Q حيث Q احداث دوري . اوجد
معادلات هاملتون واثبت أنها تمثل حركة المتذبذب
التوافقي .

(٥) إذا كانت الدالة المولدة $F = \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \cot Q$
حيث q ، Q الاحداث العمم القديم والاحداث العمم الجديد
على الترتيب ، m ، ω ثابتين . أوجد التحويل المناظر واثبت
أنه تحويل توافقي واوجد دالة هاملتون في الاحداثيات
الجديدة للمتذبذب التوافقي .

(٦) باستخدام طريقة هاملتون – جاكوبي حل مسألة كبلر لجسم
يتحرك تحت تأثير قوة مركزية جاذبة تتناسب عكسيا مع
مربع البعد عن المركز .

(٧) جسم كتلته m يتحرك في مجال طاقة جهده في الاحداثيات
القطبية الكروية هي $V = -\frac{K \cos \theta}{r^2}$. اكتب معادلة
هاملتون – جاكوبي التي تصف حركته ثم وضح كيف يمكن تحديد
حركة الجسم .

(٨) استخدم طريقة هاملتون – جاكوبي في حل مسألة جسيم مقذوف
بسرعة v_0 في اتجاه ما . استنتج المعادلات الحركة واوجد ارتفاع الجسم عن مستوى
الأفقي المار بنقطة القذف وكذلك معادلة المسار .

7- أقـواس بواسون

أقواس بواسون

أذا كانت لدينا منظومة ميكانيكية ما وتم تعريف كمية فيزيائية كدالة في الاحداثيات المعممة وكمية الحركة المعممة والزمن بالصورة $f = f(q_\alpha, p_\alpha, t)$ ومنها

$$\frac{df}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{dp_\alpha}{dt}\right\} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

$$\frac{df}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}q_\alpha^{\bullet} + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}p_\alpha^{\bullet}\right\} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

ولكن من معادلات هاملتون نعلم بأن $q_\alpha^{\bullet} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad p_\alpha^{\bullet} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$ بذلك تصبح المعادلة السابقة علي الصورة

$$\frac{df}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

التعبير $\left\{\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right\}$ نطلق علية اسم قوس بواسون وسوف نعبير عنة الصورة $\left\{f, H\right\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right\}$.

وعلي وجه العموم لاي كميتين f, g سوف نعرف قوس بواسون بالصورة $\left\{f, g\right\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right\}$

حيث $\alpha = 1,2,3,4,.........\,..........,, n$ هي عدد الأحداثيات المعممة.

بعض خواص أقواس بواسون

لأي ثلاث كميات فيزيائية f, g, h والتي هي دوال الاحداثيات المعممة وكمية الحركة المعممة وبفرض أن c مقدار ثابت.فإن أقواس بواسون تملك الخصائص التالية:

$(1)\ \left\{f, f\right\} = 0,$

$(2)\ \left\{f, c\right\} = 0,$

$(3)\ \left\{f, g\right\} = -\left\{g, f\right\},$

$(4)\ \left\{f + g, h\right\} = \left\{f, h\right\} + \left\{g, h\right\},$

$(5)\ \left\{f\,g, h\right\} = f\left\{g, h\right\} + g\left\{f, h\right\},$

$(6)\ \frac{\partial}{\partial t}\left\{f, g\right\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\},$

$(7)\ \left\{q_\alpha, f\right\} = \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}, \left[\left\{f, q_\alpha\right\} = -\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\right],$

$(8)\ \left\{p_\alpha, f\right\} = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\left[\left\{f, p_\alpha\right\} = -\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right],$

$(9)\ \left\{q_l, q_k\right\} = 0,$

$(10)\ \left\{p_l, p_k\right\} = 0,$

$$(11)\quad \left\{q_l, p_k\right\} = \begin{cases} 1, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases}$$

في الخواص السابقة q_αتمثل الأحداثيات المعممة و p_α كمية الحركة المعممة.

اثبات بعض الخواص

سوف نستخدم قوس بواسون والذي يكتب بالصورة $\left\{ f, g \right\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right\}$

$$(1)\ \left\{ f, f \right\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \right\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \right\} = 0$$

$$(2)\ \left\{ f, c \right\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial c}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial c}{\partial q_\alpha} \right\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}(0) - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}(0) \right\} = 0$$

$$(3)\ \left\{ f, g \right\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right\} = -\left\{ \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} \right\} = -\left\{ \frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \right\} = -\left\{ g, f \right\}$$

$$(4)\ \left\{ f+g, h \right\} = \left\{ \frac{\partial(f+g)}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial(f+g)}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right\} = \left\{ \left[\frac{\partial(f)}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial(g)}{\partial q_\alpha} \right]\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \left[\frac{\partial(f)}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial(g)}{\partial p_\alpha} \right]\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right\} =$$

$$\left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} \right] - \left[\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right] \right\} = \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right] + \left[\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right] \right\}$$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right\} + \left\{ \frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right\} = \left\{ f, h \right\} + \left\{ g, h \right\}$$

$$(5)\ \left\{ f\,g, h \right\} = \left\{ \frac{\partial(f\,g)}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial(f\,g)}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right\} = \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} g + f\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right]\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \left[\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} g + f\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} \right]\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right\} =$$

$$\left\{ f\left[\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right] + g\left[\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right] \right\} =$$

$$f\left\{ \frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right\} + g\left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right\} = f\left\{ g, h \right\} + g\left\{ f, h \right\}$$

$$(6)\ \frac{\partial}{\partial t}\left\{ f, g \right\} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \right)\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \right)\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right) \right\} =$$

$$\left\{ \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial t})}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial(\frac{\partial g}{\partial t})}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial t})}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial(\frac{\partial g}{\partial t})}{\partial q_\alpha} \right\} = \left\{ \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial t})}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial t})}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial(\frac{\partial g}{\partial t})}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial(\frac{\partial g}{\partial t})}{\partial q_\alpha} \right\} =$$

$$\left\{ \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial t})}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial t})}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right\} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial(\frac{\partial g}{\partial t})}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial(\frac{\partial g}{\partial t})}{\partial q_\alpha} \right\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}$$

$$(7)\ \left\{q_\alpha,\ f\right\}=\left\{\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial q_\alpha}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right\}=\left\{(1)\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}-(0)\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right\}=\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}$$

$$(8)\ \left\{p_\alpha,\ f\right\}=\left\{\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right\}=\left\{(0)\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}-(1)\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right\}=-\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}$$

$$(9)\ \left\{q_l,\ q_k\right\}=\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\frac{\partial q_l}{\partial q_\alpha}\frac{\partial q_k}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial q_l}{\partial p_\alpha}\frac{\partial q_k}{\partial q_\alpha}\right\}=\left\{(\frac{\partial q_l}{\partial q_\alpha})(0)-(0)(\frac{\partial q_k}{\partial q_\alpha})\right\}=0$$

$$(10)\ \left\{p_l,\ p_k\right\}=\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\frac{\partial p_l}{\partial q_\alpha}\frac{\partial p_k}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial p_l}{\partial p_\alpha}\frac{\partial p_k}{\partial q_\alpha}\right\}=\left\{(0)(\frac{\partial p_k}{\partial p_\alpha})-(\frac{\partial p_l}{\partial p_\alpha})(0)\right\}=0,$$

$$(11)\ \left\{q_l,\ p_k\right\}=\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\frac{\partial q_l}{\partial q_\alpha}\frac{\partial p_k}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial q_l}{\partial p_\alpha}\frac{\partial p_k}{\partial q_\alpha}\right\}=\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\frac{\partial q_l}{\partial q_\alpha}\frac{\partial p_k}{\partial p_\alpha}-0\right\}=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial q_l}{\partial q_\alpha}\frac{\partial p_k}{\partial p_\alpha}=\begin{cases}1, & l=k\\ 0, & l\neq k\end{cases}$$

$$\left\{q_l,\ p_k\right\}=\begin{cases}1, & l=k\\ 0, & l\neq k\end{cases}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial q_l}{\partial q_\alpha}\frac{\partial p_k}{\partial p_\alpha}=\frac{\partial q_l}{\partial q_1}\frac{\partial p_k}{\partial p_1}+\frac{\partial q_l}{\partial q_2}\frac{\partial p_k}{\partial p_2}+\frac{\partial q_l}{\partial q_3}\frac{\partial p_k}{\partial p_3}+\frac{\partial q_l}{\partial q_4}\frac{\partial p_k}{\partial p_4}+\frac{\partial q_l}{\partial q_4}\frac{\partial p_k}{\partial p_4}+\ldots\ldots\ldots..$$

لوكان $l=k$ عند ذلك يكون $l=k=1$ or $l=k=2$ or $l=k=3$ or $l=k=4$ or.......... في هذة الحالة

سوف نجد انة يوجد احد هذة الحدود

$$\frac{\partial q_1}{\partial q_1}\frac{\partial p_1}{\partial p_1}=1 \text{ or } \frac{\partial q_2}{\partial q_2}\frac{\partial p_2}{\partial p_2}=1 \text{ or } \frac{\partial q_3}{\partial q_3}\frac{\partial p_3}{\partial p_3}=1 \text{ or } \frac{\partial q_4}{\partial q_4}\frac{\partial p_4}{\partial p_4}=1 \text{ or } \frac{\partial q_5}{\partial q_5}\frac{\partial p_5}{\partial p_5}=1.....$$

بينما الحدود الاخري مثل $\frac{\partial q_1}{\partial q_1}\frac{\partial p_2}{\partial p_1}=0$ و هذا يكون لدينا $\left\{q_l,\ p_k\right\}=\begin{cases}1, & l=k\\ 0, & l\neq k\end{cases}$.

في الخواص السابقة q_α تمثل الأحداثيات المعممة و p_α كمية الحركة المعممة.

مثال 1: اكتب صيغة أقواس بواسون لــ $\left\{f,g\right\}$ وأذا أعطي متجهه الموضع لنقطة مادية بالصورة

$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

ومتجهه كمية الحركة المعممه بالصورة $\vec{p}=p_x\vec{i}+p_y\vec{j}+p_z\vec{k}$ فأوجد أقواس بواسون لـــكل من :

$\left\{\vec{r},\vec{r}\right\},\ \left\{\vec{p},\vec{p}\right\},\ \left\{\vec{r},\vec{p}\right\}.$

وإذا عرف متجهه كمية الحركة المعممه الزاوية بالصورة $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{p}$ فأوجد أقواس بواسون لكل من

$$\{\vec{r}, \vec{M}\}, \ \{\vec{p}, \vec{M}\}, \ \{\vec{M}, \vec{M}\}.$$

الأجـــــــابــة

من تعريف أقواس بواسون $\{f_\alpha, g_\alpha\} = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}$

لأيجاد $\{\vec{r}, \vec{r}\}$ سوف نستحدم الخاصية التي تجمع اقواس بواسون لكل من الاحداثيات المعممة معا والتي تصاغ بالصورة $\{q_l, q_k\} = 0$ ومنها $\{\vec{r}, \vec{r}\} = 0$.

ولإيجاد $\{\vec{p}, \vec{p}\}$ سوف نستحدم الخاصية التي تجمع اقواس بواسون لكل من كميات الحركة المعممة معا والتي تصاغ بالصورة $\{\vec{p}_l, \vec{p}_k\} = 0$ ومنها $\{\vec{p}, \vec{p}\} = 0$

ولإيجاد $\{\vec{r}, \vec{p}\}$ سوف نستحدم الخاصية التي تجمع أقواس بواسون لكل من الاحداثيات المعممة وكميات الحركه المعممة والتي تصاغ بالصورة $\{q_l, p_k\} = \begin{cases} 1, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases}$ ومنها

$$\{x, p_x\} = 1, \quad \{x, p_y\} = 0, \quad \{x, p_z\} = 0,$$

$$\{y, p_x\} = 0, \quad \{y, p_y\} = 1, \quad \{y, p_z\} = 0,$$

$$\{z, p_x\} = 0, \quad \{z, p_y\} = 0, \quad \{z, p_z\} = 1.$$

ويمكننا تكوين الجدول التالي

Function	p_x	p_y	p_z
x	1	0	0
y	0	1	0
z	0	0	1

لمتجهه كمية الحركة المعممه الزاوية $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$ يعطى من

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{p}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ p_x & p_y & p_z\end{vmatrix}=\left\{y\,p_z-z\,p_y\right\}\vec{i}-\left\{x\,p_z-z\,p_x\right\}\vec{j}+\left\{x\,p_y-y\,p_x\right\}\vec{k}=$$

$$=\left\{y\,p_z-z\,p_y\right\}\vec{i}+\left\{z\,p_x-x\,p_z\right\}\vec{j}+\left\{x\,p_y-y\,p_x\right\}\vec{k}=M_x\vec{i}+M_y\vec{j}+M_z\vec{k}$$

والأن نحاول إيجاد أقواس بواسون $\left\{\vec{r},\vec{M}\right\}$ وسوف نستحدم الخاصية التي تجمع أقواس بواسون لكل من الاحداثيات المعممة وأى كمية فيزيائية اخري $\left\{q_\alpha,f\right\}=\dfrac{\partial f}{\partial p_\alpha}$. ومنها يكون

$$\left\{x,M_x\right\}=\frac{\partial M_x}{\partial p_x}=0,\qquad \left\{y,M_x\right\}=\frac{\partial M_x}{\partial p_y}=-z,\qquad \left\{z,M_x\right\}=\frac{\partial M_x}{\partial p_z}=y,$$

$$\left\{x,M_y\right\}=\frac{\partial M_y}{\partial p_x}=z,\qquad \left\{y,M_y\right\}=\frac{\partial M_y}{\partial p_y}=0,\qquad \left\{z,M_y\right\}=\frac{\partial M_y}{\partial p_z}=-x,$$

$$\left\{x,M_z\right\}=\frac{\partial M_z}{\partial p_x}=-y,\qquad \left\{y,M_z\right\}=\frac{\partial M_z}{\partial p_y}=x,\qquad \left\{z,M_z\right\}=\frac{\partial M_z}{\partial p_z}=-y.$$

ويمكننا تكوين الجدول التالي

Function	M_x	M_y	M_z
x	0	z	$-y$
y	$-z$	0	x
z	y	$-x$	0

والأن نحاول إيجاد أقواس بواسون $\left\{\vec{p},\vec{M}\right\}$ سوف نستحدم الخاصية التي تجمع أقواس بواسون كمية الحركه المعممة وأى كمية فيزيائية اخري $\left\{p_\alpha,f\right\}=-\dfrac{\partial f}{\partial q_\alpha}$. ومنها يكون

$$\left\{p_x\,M_x\right\}=-\frac{\partial M_x}{\partial q_x}=-\frac{\partial M_x}{\partial x}=-(0)=0,$$

$$\left\{p_x,M_y\right\}=-\frac{\partial M_y}{\partial q_x}=-\frac{\partial M_y}{\partial x}=-(-p_z)=p_z$$

$$\left\{p_x,M_z\right\}=-\frac{\partial M_z}{\partial q_x}=\frac{\partial M_z}{\partial x}=-(p_y)=-p_y$$

$$\left\{p_y,M_x\right\}=-\frac{\partial M_x}{\partial q_y}=-\frac{\partial M_x}{\partial y}=-(p_z)=-p_z,$$

$$\left\{p_y,M_y\right\}=-\frac{\partial M_y}{\partial q_y}=-\frac{\partial M_y}{\partial y}=-(0)=0,$$

$$\left\{p_y,M_z\right\}=-\frac{\partial M_z}{\partial q_y}=-\frac{\partial M_z}{\partial y}=-(-p_z)=p_x.$$

$$\left\{p_z, M_x\right\} = -\frac{\partial M_x}{\partial q_z} = -\frac{\partial M_x}{\partial z} = -(-p_y) = p_y,$$

$$\left\{p_z, M_y\right\} = -\frac{\partial M_y}{\partial q_z} = -\frac{\partial M_y}{\partial z} = -(p_x) = -p_x,$$

$$\left\{p_z, M_z\right\} = -\frac{\partial M_z}{\partial q_z} = -\frac{\partial M_z}{\partial z} = -(0) = 0.$$

ويمكننا تكوين الجدول التالي

Function	M_x	M_y	M_z
p_x	0	p_z	$-p_y$
p_y	$-p_z$	0	p_x
p_z	p_y	$-p_x$	0

والآن نحاول إيجاد أقواس بواسون $\left\{\vec{M}, \vec{M}\right\}$ سوف نستحدم تعريف أقواس بواسون لأى كميتين فيزيائيتين

$$\left\{f, g\right\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right\}.$$

$$\left\{M_x, M_x\right\}, \left\{M_x, M_y\right\}, \left\{M_x, M_z\right\},$$

حيث سوف يكون لدينا العلاقات $\left\{M_y, M_y\right\}, \left\{M_y, M_y\right\}, \left\{M_y, M_z\right\},$ مع ملاحظة أن $\alpha = 1,2,3$ وهي عدد الاحداثيات

$$\left\{M_z, M_x\right\}, \left\{M_z, M_y\right\}, \left\{M_z, M_z\right\}.$$

وعند ذلك يكون

$$\left\{f, g\right\} = \sum_{\alpha=1}^{3}\left\{\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial g}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial g}{\partial q_1}\right\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial g}{\partial p_2} - \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial g}{\partial q_2}\right\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial q_3}\frac{\partial g}{\partial p_3} - \frac{\partial f}{\partial p_3}\frac{\partial g}{\partial q_3}\right\}$$

$$= \left\{\frac{\partial f}{\partial q_x}\frac{\partial g}{\partial p_x} - \frac{\partial f}{\partial p_x}\frac{\partial g}{\partial q_x}\right\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial q_y}\frac{\partial g}{\partial p_y} - \frac{\partial f}{\partial p_y}\frac{\partial g}{\partial q_y}\right\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial q_z}\frac{\partial g}{\partial p_z} - \frac{\partial f}{\partial p_z}\frac{\partial g}{\partial q_z}\right\}$$

وبذلك يكون لدينا

$$\left\{f, g\right\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p_x} - \frac{\partial f}{\partial p_x}\frac{\partial g}{\partial x}\right\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial p_y} - \frac{\partial f}{\partial p_y}\frac{\partial g}{\partial y}\right\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial p_z} - \frac{\partial f}{\partial p_z}\frac{\partial g}{\partial z}\right\}$$

من الخاصية $\left\{f, f\right\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\right\} = 0$ مباشراً يكون لدينا

$$\left\{M_x, M_x\right\} = \left\{M_y, M_y\right\} = \left\{M_z, M_z\right\} = 0$$

بينما يكون لدينا

$$\{M_x, M_y\} = \left\{\frac{\partial M_x}{\partial x}\frac{\partial M_y}{\partial p_x} - \frac{\partial M_x}{\partial p_x}\frac{\partial M_y}{\partial x}\right\} + \left\{\frac{\partial M_x}{\partial y}\frac{\partial M_y}{\partial p_y} - \frac{\partial M_x}{\partial p_y}\frac{\partial M_y}{\partial y}\right\} + \left\{\frac{\partial M_x}{\partial z}\frac{\partial M_y}{\partial p_z} - \frac{\partial M_x}{\partial p_z}\frac{\partial M_y}{\partial z}\right\}$$

$$= (0)(z)-(0)(-p_z) \quad + \quad (p_z)(0)-(-z)(0) \quad + \quad (-p_y)(-x)-(y)(p_x)$$

$$\therefore \{M_x, M_y\} = xp_y - y\,p_x = M_z$$

ويكون لدينا

$$\{M_x, M_z\} = \left\{\frac{\partial M_x}{\partial x}\frac{\partial M_z}{\partial p_x} - \frac{\partial M_x}{\partial p_x}\frac{\partial M_z}{\partial x}\right\} + \left\{\frac{\partial M_x}{\partial y}\frac{\partial M_z}{\partial p_y} - \frac{\partial M_x}{\partial p_y}\frac{\partial M_z}{\partial y}\right\} + \left\{\frac{\partial M_x}{\partial z}\frac{\partial M_z}{\partial p_z} - \frac{\partial M_x}{\partial p_z}\frac{\partial M_z}{\partial z}\right\}$$

$$= (0)(-y)-(0)(p_y) \quad + \quad (p_z)(x)-(-z)(-p_x) \quad + \quad (-p_y)(0)-(y)(0)$$

$$\therefore \{M_x, M_z\} = xp_z - z\,p_x = -M_y$$

وكذلك

$$\{M_y, M_z\} = \left\{\frac{\partial M_y}{\partial x}\frac{\partial M_z}{\partial p_x} - \frac{\partial M_y}{\partial p_x}\frac{\partial M_z}{\partial x}\right\} + \left\{\frac{\partial M_y}{\partial y}\frac{\partial M_z}{\partial p_y} - \frac{\partial M_y}{\partial p_y}\frac{\partial M_z}{\partial y}\right\} + \left\{\frac{\partial M_y}{\partial z}\frac{\partial M_z}{\partial p_z} - \frac{\partial M_y}{\partial p_z}\frac{\partial M_z}{\partial z}\right\}$$

$$= (-p_z)(-y)-(z)(p_y) \quad + \quad (0)(x)-(0)(-p_x) \quad + \quad (p_x)(0)-(x)(0)$$

$$\therefore \{M_y, M_z\} = yp_z - z\,p_y = M_x$$

ويمكننا تكوين الجدول التالي

Function	M_x	M_y	M_z
M_x	0	M_z	$-M_y$
M_y	$-M_z$	0	M_x
M_z	M_y	$-M_x$	0