محاضرات في
التحويلات التكاملية
لطلبة الفرقة الرابعة
تربية عام – رياضيات
مقرر: بحتة ١٤ جزء ب

التحويلات التكاملية وتطبيقاتها

INTEGRAL TRANSFORMS AND ITS APPLICATIONS

١ مقدمة

التحويل التكاملي هو تحويل دالي F على الصورة:

$$F(x)=\int_{\Gamma} k(x,t) f(t)\,dt$$

حيث Γ هو نطاق في المستوى الإقليدي. الدالة $F(x)$ هي صورة التحويل للدالة الأصلية $f(t)$، والدالة $k(x,t)$ تسمى نواة التحويل F.

في معظم الحالات تكون $k(x,t)=k(xt)$، والنطاق Γ هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أو فترة (a,b). وإذا كان $\Gamma=(a,b)$ فترة محدودة نقول إن التحويل هو تحويل تكاملي منته. من أمثلة التحويلات التكاملية:

١) تحويل فوريير (Fourier transform):

$$F(x)=\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(t)\,dt$$

٢) تحويل فوريير الجيبي (Fourier sine transform):

$$F(x)=\int_{0}^{\infty} \sin(xt) f(t)\,dt$$

٣) تحويل فوريير الجيب تمامي (Fourier cosine transform):

$$F(x)=\int_{0}^{\infty}\cos(xt)f(t)dt$$

٤) تحويل لابلاس (Laplace transform):

$$F(x)=\int_{0}^{\infty}e^{-xt}f(t)dt$$

٥) تحويل ميلن (Mellin transform):

$$F(x)=\int_{0}^{\infty}t^{x-1}f(t)dt$$

٦) تحويل هانكل (Hankel transform):

$$F(x)=\int_{0}^{\infty}J_{\gamma}(xt)t\,f(t)dt$$

حيث J_{γ} دالة بسل.

٧) تحويل هلبرت(Hilbert transform):

$$F(x)=\int_{0}^{\infty}k(x,t)f(t)dt$$

حيث $k(x,t)=(t-x)^{-1}$ أو $k(x,t)=\cot\left(\frac{x-t}{2}\right)$.

٨) تحويل لاجير (Laguerre transform):

$$F(n)=\int_{0}^{\infty} e^{-t} L_n(t) f(t)\,dt$$

حيث L_n كثيرة حدود لاجير.

٩) تحويل لاجندر (Legendre transform):

$$F(n)=\int_{-1}^{1} P_n(t) f(t)\,dt$$

حيث P_n كثيرة حدود لاجندر.

الصيغة التي تمكننا من حساب $f(t)$ متى علمنا $F(x)$ تسمى المعكوس للتحويل التكاملي أو باختصار التحويل العكسي.

إذا كانت $x, t \in \mathbb{R}^n$، و Γ هو نطاق في الفراغ الإقليدي $\mathbb{R}^n$ فإننا نحصل على التحويل التكاملي المضاعف (المتعدد الأبعاد).

طريقة التحويلات التكاملية فعالة -غالباً -لكثير من المعادلات التفاضلية والتكاملية التي تظهر في الفيزياء الرياضية، وتعتمد على أن تكامل المعادلة مع دالة النواة k في متغيرين يؤدي -غالباً - لتبسيط المسألة الأساسية.

إن الشرط الأساسي لاستخدام التحويلات التكاملية هو إمكانية تطبيق نظريات المعكوس التي تسمح بإيجاد الدالة الأصلية (دالة حل المسألة) في حالة معرفة دالة التحويل لها. ويشترط عند اختيار التحويل التكاملي أن يكون

مناسباً لاختزال المعادلة التفاضلية أو التكاملية إلى معادلة أبسط للدالـة $F(x)$ وأن تكون الصيغة العكسية لهذا التحويل ممكنة.

٢ نظريات الانعكاس **Inversion Theorems**

الجدول التالي يوضح بعض نظريات الانعكاس في الحالات التي يمكن فيها إيجاد معكوس التحويل التكاملي.

نظريات الانعكاس لبعض التحويلات التكاملية				
	التحويل		التحويل العكسي	
اسم التحويل	(α,β)	$k(\xi,x)$	(γ,δ)	$H(\xi,x)$
فورييه *Fourier*	$(-\infty,\infty)$	$\dfrac{e^{i\xi x}}{\sqrt{2\pi}}$	$(-\infty,\infty)$	$\dfrac{e^{-i\xi x}}{\sqrt{2\pi}}$
فورييه-جيب التمام *Fourier Cosine*	$(0,\infty)$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos(\xi x)$	$(0,\infty)$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos(\xi x)$
فورييه-جيب *Fourier Sine*	$(0,\infty)$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin(\xi x)$	$(0,\infty)$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin(\xi x)$
لابلاس *Laplace*	$(0,\infty)$	$e^{-\xi x}$; $\mathrm{Re}(\xi)>0$	$(\gamma - i, \gamma + i\infty)$	$\dfrac{e^{\xi x}}{2\pi i}$ $\gamma>0$

$\frac{1}{2\pi i}x^{-\xi}$	$(\gamma-i\infty,\gamma+i\infty)$	$x^{\xi-1}$	$(0,\infty)$	تحويل ميلن *Mellin*
$\xi J_{\gamma}(\xi x)$	$(0,\infty)$	$xJ_{\gamma}(\xi x)$; $\gamma\geq\frac{-1}{2}$	$(0,\infty)$	تحويل هانكل *Hankel*

٣ تحويلات فوريير التكاملية وخواصها

Fourier integral transforms and its properties

تعريف (١): إذا كانت f دالـة متصـلة، وملسـاء قطعيـا، ومقياسـها قابـل للتكامل على الفترة $(-\infty,\infty)$ فـإن تحويـل فـوريير للدالـة f يُعَرف بالصيغة:

$$\Im[f]=F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}f(x)dx \qquad (12)$$

ولكل x في $\mathbb{R}$ فإن التحويل العكسي للدالة $F(\omega)$ يُعرف بـالصيغة:

$$\Im^{-1}[F]=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}F(\omega)d\omega \qquad (13)$$

مثال (١): أوجد $\Im\left[e^{-ax^2}\right]$ إذا كان $0<a$.

الحل: واضح أن:

$$\Im\left[e^{-ax^2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}e^{-ax^2}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x^2 + \frac{i\omega}{a}x\right)} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left\{\left(x + \frac{i\omega}{2a}\right)^2 + \frac{\omega^2}{4a^2}\right\}} dx$$

$$= \frac{e^{-\omega^2/4a}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x + \frac{i\omega}{2a}\right)^2} dx$$

$$= \frac{e^{-\omega^2/4a}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy \,, \qquad \left(y = x + \frac{i\omega}{2a}\right)$$

$$= \frac{e^{-\omega^2/4a}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{e^{-\omega^2/4a}}{\sqrt{2a}}$$

مثال (٢): أثبت أن:

$$\Im\left[e^{-a|x|}\right](\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \omega^2}; \qquad a > 0.$$

الحل:

$$\Im\left[e^{-a|x|}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-a|x|} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{0}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-ax} dx + \int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega x} e^{ax} dx \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)x} dx + \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)x} dx \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{(a+i\,\omega)(a-i\,\omega)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+\omega^2}$$

تمرين: إذا كانت:

$$f\ (x\ ) = \begin{cases} 1; & |\,x\,| < a \\ 0; & |\,x\,| > a \end{cases}$$

حيث $a > 0$ فأثبت أن $\Im[f\ ] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin a\omega}{a} \right)$.

مثال (٥): أوجد تحويل فوربيير لدالة الموجة المربعة:

$$f\ (x\ ) = \begin{cases} 0, & x\ < a \\ 1, & a \le x\ \le b \\ 0, & x\ > b \end{cases}$$

الحل: واضح أن:

$$\Im[\,f\,] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f\,(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-i\omega x} dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}}{i\omega\sqrt{2\pi}}, & \omega \ne 0 \\ \dfrac{b-a}{\sqrt{2\pi}}, & \omega = 0. \end{cases}$$

من هذه النتيجة، وبحسب نظرية (١)، نحصل على:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}}{i\omega} e^{i\omega x}\, d\omega = \begin{cases} 0, & x < a \\ \pi, & x = a \\ 2\pi, & a < x < b \\ \pi, & x = b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

تمرين: أوجد تحويل فوريير للدالة

$$f(x) = \begin{cases} k, & 0 < x < a \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

ومن ثم أوجد قيمة التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-i\omega a}}{i\omega} e^{i\omega x}\, d\omega$.

مثال (٤): أوجد تحويل فوريير للدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{x<0} \end{cases}$$

الحل: واضح أن:

$$\Im[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-(1+i\omega)x}\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(1+i\omega)^3}.$$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{(1+i\omega)^3} d\omega = \pi x^2 e^{-x} .$$

٣-١ جداول تحويلات فوريير Tables of Fourier Transforms

	$f(x)$	$F(\omega)$
1	$\begin{cases} 1; -b < x < b \\ 0; \text{ otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin b\omega}{\omega}$
2	$\begin{cases} 1; -b < x < c \\ 0; \text{ otherwise} \end{cases}$	$\frac{e^{-ib\omega} - e^{-ic\omega}}{i\omega\sqrt{2\pi}}$
3	$\frac{1}{x^2+a^2}; a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a\omega}}{a}$
4	$\frac{x}{x^2+a^2}; a>0$	$-\sqrt{\frac{\pi}{2}} i e^{-a\omega}$
5	$\begin{cases} x \quad ; 0 < x < b \\ 2x - a \; ; b < x < 2b \\ 0 \quad ; \text{ otherwise} \end{cases}$	$\frac{-1+2e^{ib\omega} - e^{-2ib\omega}}{\sqrt{2\pi}\,\omega^2}$
6	$\begin{cases} e^{-ax} \; ; x > 0 \\ 0 \quad ; \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+i\omega)}$
7	$\begin{cases} e^{ax} \; ; b < x < c \\ 0 \quad ; \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{e^{(a-i\omega)c} - e^{(a-i\omega)b}}{\sqrt{2\pi}(a-i\omega)}$
8	$\begin{cases} e^{iax} \; ; b < x < c \\ 0 \quad ; \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ib(a-\omega)} - e^{ic(a-\omega)}}{a-\omega}$
9	$\frac{\sin ax}{x}; a>0$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} ; \lvert\omega\rvert < a \\ 0 ; \lvert\omega\rvert > a \end{cases}$

	$f(x)$	$F(\omega)$
10	$\begin{cases} e^{-x} \; ; \; x \geq 0 \\ -e^{-x} ; \; x < 0 \end{cases}$	$-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{1+\omega^2}$
11	$e^{-ax^2} \; ; a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\omega^2/4a}$
12	$f(x-a)$	$e^{ia\omega}F(\omega)$
13	$f\ (bx)e^{iax}$	$\frac{1}{b}F\left(\frac{\omega-a}{b}\right)$
14	$x^n f(x)$	$i^n \frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$

٢-٣ تحويلات جا- فورير وجتا- فورير

Fourier sine and cosine Transforms

تعريف (٢): إذا كانت $f\ (x)$ دالة معرفة على الفترة $[0,\infty)$ قابلة للتمديد بدالة زوجية على الفترة $(-\infty,\infty)$ وتحقق شروط وجود تحويل فورير فعند نقاط اتصال f فإن تحويل جتا- فورير *Fourier cosine transform* للدالة f يُعرَّف بالصيغة:

$$\Im_c\left[f\ (x)\right] = F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f\ (x)\cos\omega x dx \qquad (14)$$

والتحويل العكسي هو:

$$\Im_c^{-1}\left[F_c(\omega)\right] = f\ (x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_c(\omega)\cos\omega x\, d\omega \qquad (15)$$

بالمثل يمكن تعريف تحويل جا- فورييه *Fourier sine transform* للدالة f

تعريف (٣): إذا كانت $f(x)$ معرفة كما في تعريف (١) فعند نقاط اتصال f فإن تحويل جا- فورييه للدالة f يُعَرَّف بالصيغة:

$$\Im_s\left[f(x)\right]=F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\sin\omega x dx \qquad (16)$$

والتحويل العكسي له:

$$\Im_s^{-1}\left[F_s(\omega)\right]=f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_s(\omega)\sin\omega x\, d\omega \qquad (17)$$

مثال (٥): أوجد

$$\Im_c\left[e^{-ax}\right]\ ;\quad a>0$$

الحل:

$$\Im_c\left[e^{-ax}\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-ax}\cos\omega x dx$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{-1}{a}\int_0^{\infty}\cos\omega x\, de^{-ax}$$

$$=-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{e^{-ax}\cos\omega x\Big|_0^{\infty}+\omega\int_0^{\infty}e^{-ax}\sin\omega x dx\right\}$$

$$=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}-\frac{\omega}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-ax}\sin\omega x\, dx$$

$$=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\frac{\omega}{a^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin\omega x\, de^{-ax}$$

$$=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\frac{\omega}{a^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{e^{-ax}\sin\omega x\Big|_0^\infty-\omega\int_0^\infty \cos\omega x e^{-ax}dx\right\}$$

$$=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}-\frac{\omega^2}{a^2}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-ax}\cos\omega x\, dx\right)$$

وبالتالي فإن:

$$\left(1+\frac{\omega^2}{a^2}\right)\Im_c\left[e^{-ax}\right]=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

ومن ثم نحصل على:

$$.\Im_c\left[e^{-ax}\right]=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a^2}{a^2+\omega^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+\omega^2}$$

مثال (٦): إذا $a>0$ فأوجد $\Im_s\left(e^{-ax}\right)$.

الحل: كما في المثال السابق:

$$\Im_s\left[e^{-ax}\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-ax}\sin\omega x dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

مثال (٧): أوجد $\Im_s^{-1}\left[\frac{1}{\omega}e^{-a\omega}\right]$ حيث a مقدار ثابت.

الحل:

$$\Im_s^{-1}\left[\frac{1}{\omega}e^{-a\omega}\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\omega}e^{-a\omega}\sin\omega x\,d\omega$$

وحيث إن:

$$\int_a^\infty e^{-t\omega}dt=-\frac{e^{-t\omega}}{\omega}\Big|_{t=a}^{\infty}=\frac{e^{-a\omega}}{\omega}$$

وبالتالي فإن:

$$\Im_s^{-1}\left(\frac{1}{\omega}e^{-a\omega}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\left(\int_a^\infty e^{-t\omega}dt\right)\sin\omega x\,d\omega$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\left(\int_a^\infty e^{-t\omega}\sin\omega x dt\right)d\omega$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^\infty\left(\int_0^\infty e^{-t\omega}\sin\omega x\,d\omega\right)dt$$

وحيث إن:

$$\int_0^\infty e^{-t\omega}\sin\omega x\,d\omega=\frac{x}{t^2+x^2}$$

فإن:

$$\Im_s^{-1}\left(\frac{1}{\omega}e^{-a\omega}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^\infty\frac{x}{t^2+x^2}dt$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^\infty\frac{1}{\left(\frac{t}{x}\right)^2+1}d\left(\frac{t}{x}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\tan^{-1}\frac{t}{x}\Big|_{t=a}^{\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{a}{x}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

جداول تحويلات جا- فورير

Tables of Fourier sine Transforms

	$f(x)$	$F_s(\omega)$
1	$\begin{cases}1\ ;\ 0<x<a\\ 0\ ;\ \text{otherwise}\end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos a\omega}{\omega}$
2	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\omega}}$
3	$1/x^{3/2}$	$2\sqrt{\omega}$
4	$x^{a-1}\ ;\ 0<a<1$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma(a)}{\omega^{a}}\sin\frac{\pi\omega}{2}$
5	x^{-1}	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
6	$\frac{x}{x^2+a^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a\omega}$
7	$e^{-ax}\ ;\ a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{\omega^2+a^2}$
8	$\frac{e^{-ax}}{x}\ ,\ a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\tan^{-1}\frac{\omega}{a}$
9	$x^n e^{-ax}\ ;\ a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{n!}{\left[\omega^2+a^2\right]^{n+1}}\operatorname{Im}(a+i\,\omega)^{n+1}$
10	$xe^{-ax^2}\ ;\ a>0$	$\frac{\omega}{(2a)^{3/2}}e^{-\omega^2/4a}$

	$f(x)$	$F_s(\omega)$
11	$\begin{cases} \sin x \ ; \ 0<x<a \\ 0 \quad ; \ otherwise \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin a(1-\omega)}{1-\omega}-\frac{\sin a(1+\omega)}{1+\omega}\right]$
12	$\frac{\sin bx}{x} \ ; b>0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ln\left(\frac{\omega+b}{\omega-b}\right)$
13	$\frac{\sin bx}{x^2} \ ; b>0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{cases} \omega \ ; \omega<b \\ b \ ; \omega>b \end{cases}$
14	$\frac{\cos bx}{x} \ ; b>0$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \ ; \ \omega>b \\ 0 \ ; \ \omega<b \end{cases}$
15	$x^{-n} \ , 0<n<2$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega^{n-1}\sec n\pi/2}{\Gamma(n)}$
16	$\tan^{-1}\frac{x}{b}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-b\omega}}{\omega}$
17	$\operatorname{cosech} ax \ , \ a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}\tanh\frac{\pi\omega}{2a}$
18	$\tan^{-1}\frac{2a}{x} \ , a>0$	$\sqrt{2\pi}\frac{\sinh a\omega}{\omega}e^{-a\omega}$
19	$\frac{1}{e^{2x}-1}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\pi}{4}\coth\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)-\frac{1}{2\alpha}\right]$

جداول تحويلات جتا ـ فورير

Tables of Fourier cosine Transforms

	$f(x)$	$F_c(\omega)$
1	$\begin{cases} 1 \;; < x < a \\ 0 \;;\text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin a\omega}{\omega}$
2	$x^{a-1}, 0<a<1$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\Gamma(a)}{\omega^a}\cos\dfrac{a\omega}{2}$
3	$e^{-ax} \;;\; a>0$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{a}{a^2+\omega^2}$
4	$x^n e^{-ax}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{n!}{(a^2+\omega^2)^{n+1}}\mathrm{Re}\,[a+i\,\omega]^{n+1}$
5	$e^{-ax^2}, a>0$	$\dfrac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\omega^2/4a}$
6	$\dfrac{\sin ax}{x} \;;a>0$	$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, & \omega<a \\ 0, & \omega>a \end{cases}$
7	$\cos ax^2 \;;\; a>0$	$\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\cos\left(\dfrac{\omega^2}{4a}-\dfrac{\pi}{4}\right)$
8	$\sin ax^2 \;,a>0$	$\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\cos\left(\dfrac{\omega^2}{4a}+\dfrac{\pi}{4}\right)$
9	$\dfrac{e^{-x}\sin x}{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\tan^{-1}\dfrac{2}{\omega^2}$
10	$\ln\left(\dfrac{x^2+a^2}{x^2+c^2}\right)$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{e^{-c\omega}-e^{-a\omega}}{\pi\omega}$

	$f(x)$	$F_c(\omega)$
11	$\dfrac{\cosh(\sqrt{\pi}x/2)}{\cosh(\sqrt{\pi}x)}$	$\dfrac{\cosh(\sqrt{\pi}\omega/2)}{\cosh(\sqrt{\pi}\omega)}$
12	$\operatorname{sech}(ax), \quad a>0$	$\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\operatorname{sech}\dfrac{\pi\omega}{2a}$
13	$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\dfrac{\pi e^{-a\omega}}{2a}$
14	$e^{-b\sqrt{x}}/\sqrt{x}$	$\sqrt{2}\cos\left(2b\sqrt{\omega}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ or $\sqrt{2}\sin\left(2b\sqrt{\omega}-\dfrac{\pi}{4}\right)$

٣-٣ خواص تحويلات فورييرProperties of Fourier Transforms

نوضح الآن عدداً من الخواص الأساسية لتحويلات فوريير التكاملية.

نظرية (١): (الخاصية الخطية *Linearity*) *تحويل فوريير هو تحويل خطي. بمعنى أنه إذا كانت* a,b *مقادير ثابتة وإذا كانت* F,G *هي صور تحويل فوريير للدوال* $f\ ,g$ *على الترتيب فإن:*

$$\Im[af+bg]=aF+bG.$$

نظرية (٢): (خاصية الإزاحة *Shifting*)

إذا كان c *مقداراً ثابتاً فإن:*

$$\Im\left[f\left(x-c\right)\right]=e^{-i\omega c}\Im\left[f\left(x\right)\right].$$

نظرية (٣): (خاصية الضرب *Scaling*)

إذا كانت $F\left(\omega\right)$ تحويل فورييه للدالة $f\left(x\right)$ فإن:

$$\Im\left[f\left(cx\right)\right]=\frac{1}{|c|}F\left(\frac{\omega}{c}\right).$$

نظرية (٤): (تحويل المشتقات *Transform of the derivatives*)

إذا كانت f دالة متصلة و $f\left(x\right)\to 0$ عندما $|x|\to\infty$، وإذا كانت f' دالة متصلة قطعياً على الفترة $(-\infty,\infty)$. وإذا كانت $|f|$ و $|f'|$ دوال قابلة للتكامل على الفترة $(-\infty,\infty)$ فإن:

$$\Im\left[f'(x)\right]=i\omega\Im\left[f\left(x\right)\right].$$

بوجه عام، إذا كانت $f^{(r)}\left(x\right)$، لكل $0\le r\le n-1$، دوال متصلة وكانت $f^{r}\left(x\right)\to 0$ عندما $|x|\to\infty$، وإذا كانت $f^{(n)}\left(x\right)$ دالة متصلة قطعياً على الفترة $(-\infty,\infty)$. وإذا كانت الدالة $\left|f^{(r)}\right|$، لكل $0\le r\le n-1$، قابلة للتكامل على الفترة $(-\infty,\infty)$ فإن:

$$\Im\left[f^{(n)}\left(x\right)\right]=\left(i\omega\right)^{n}\Im\left[f\left(x\right)\right]$$

لكل $0 \le n$.

مثال (٨): واضح أن:

$$\Im\left[xe^{-x^2}\right]=\Im\left[-\frac{1}{2}\left(e^{-x^2}\right)'\right]=-\frac{1}{2}\Im\left[\left(e^{-x^2}\right)'\right]$$
$$=-\frac{i\,\omega}{2}\Im\left[e^{-x^2}\right]=-\frac{i\,\omega}{2\sqrt{2}}e^{-\omega^2/4}.$$

الآن نناقش تحويل المشتقات الجزئية. إذا كان $u(x,t)\to 0$ عندما $|x|\to\infty$ فإن:

$$\Im\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]=i\,\omega\Im\left[u(x,t)\right],\quad \Im\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\frac{d}{dt}\Im[u]$$

لإثبات ذلك نعتبر

$$\Im\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}e^{-i\,\omega x}dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{u(x,t)e^{-i\,\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty}+ik\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\,\omega x}dx\right\}$$
$$=i\,\omega\Im\left[u(x,t)\right],$$

وكذلك

$$\Im\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}e^{-i\omega x}dx$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ue^{-i\omega x}dx\right\}=\frac{d}{dt}\Im[u]$$

بوجه عام إذا كانت $u(x,t)$ دالة متصلة، وملساء قطعياً (piecewise continuous) ولها مقياس $|u|$ قابل للتكامل على الفترة $(-\infty,\infty)$، وإذا كان $U(\omega,t)$ تحويل فوريير للدالة $u(x,t)$ فإن:

$$\Im\left[\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\right]=\frac{d^n}{dt^n}U(k,t)$$

وإذا كانت $\frac{\partial^m u}{\partial x^m}$، لكل $0\le m\le n$، دالة متصلة وإذا $\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\to 0$ عندما $|x|\to\infty$ لكل $0\le m\le n-1$ فإن:

$$\Im\left[\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right]=(i\omega)^n U(\omega,t),\qquad n\ge 0$$

نظرية (٥): *إذا كانت $f(x), f'(x)$ تقاربية إلى الصفر عندما $x\to\infty$ فإنه:*

(١) إذا كان $F_c(\omega)$ هو تحويل جتا-فوريير للدالة f فإن:

$$\Im_c\left[f''(x)\right]=-\omega^2F_c(\omega)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0).$$

(٢) إذا كان $F_s(\omega)$ هو تحويل جا-فوريير للدالة f فإن:

$$\Im_s\left[f''(x)\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega f(0)-\omega^2F_s(\omega).$$

نظرية الالتفاف Convolution Theorem

الدالة

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

تسمى التفاف الدالتين f, g على الفترة $(-\infty, \infty)$.

نظرية (٦): (نظرية الالتفاف *Convolution Theorem*)

إذا كانت $F(\omega), G(\omega)$ تحويلات فورييه للدوال f, g على الترتيب فإن:

$$\Im[f * g] = \sqrt{2\pi} F(\omega) G(\omega) \qquad (1)$$

البرهان: بحسب التعريف، وبتغيير ترتيب التكامل نحصل على:

$$\Im[f * g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(x-\tau) e^{-i\omega x} d\tau dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(x-\tau) e^{-i\omega x} dx d\tau$$

باستخدام التعويض $v = x - \tau$ ينتج أن:

$$\Im[f*g]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(v)e^{-i\omega(\tau+v)}dv\,d\tau$$
$$=\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(v)e^{-i\omega v}dv\right)$$
$$=\sqrt{2\pi}\,\Im[f]\,\Im[g].$$

وبأخذ تحويل فوريير العكسي لطرفي المتساوية (1)، وبوضع

$$\Im[f]=F(\omega),\ \Im[g]=G(\omega)$$

نحصل على:

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)G(\omega)e^{i\omega x}d\omega \qquad (2)$$

أي أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)G(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g(t)dt\,.$$

دالة الالتفاف $f*g$ تحقق الخواص التالية:

(إبدالية) $(1)\ f*g=g*f$

(دامجة) $(2)\ f*(g*h)=(f*g)*h$

(التوزيع) $(3)\ f*(ag+bh)=a(f*g)+b(f*h)$

حيث a,b مقادير ثابتة.

مثال (٩): إذا كان $0<a<b$ ثابتين و f دالة تحقق شروط نظرية (١)

أوجد حل المعادلة التكاملية:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)dt}{(x-t)^2+a^2} = \frac{1}{x^2+b^2}, \qquad 0<a<b$$

الحل: واضح أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)dt}{(x-t)^2+a^2} = f * g$$

حيث $g(x) = 1/\left(x^2+a^2\right)$.

وبأخذ تحويل فوريير لطرفي المعادلة التكاملية المعطاة ينتج أن

$$\sqrt{2\pi}\,\Im[f]\,\Im[g] = \Im\left[\frac{1}{x^2+b^2}\right]$$

وحيث إن:

$$\Im\left[\frac{1}{x^2+y^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-y|\omega|}}{y}, \qquad y>0$$

فإننا نحصل على:

$$\Im[f]\frac{\pi e^{-a|\omega|}}{a} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-b|\omega|}}{b}$$

$$\Im[f] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{ae^{-(b-a)|\omega|}}{\pi b} = \frac{a(b-a)}{\pi b}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-(b-a)|\omega|}}{b-a}$$

وتطبيق التحويل العكسي ينتج أن:

$$f(x)=\frac{a(b-a)}{\pi b\left[x^2+(b-a)^2\right]}.$$

مثال (١٠): احسب التكامل التالي:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)},\quad a>0,\ b>0$$

الحل: عرف الدالتين:

$$f(x)=\frac{1}{x^2+a^2},\ (a>0);\quad g(x)=\frac{1}{x^2+b^2}\ ,\ (b>0)$$

يمكن وضع التكامل المعطى على الصورة:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}=(f*g)(0)$$

ومن المعادلة(2) نحصل على:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}=(f*g)(0)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)G(\omega)d\omega$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(a+b)|\omega|}}{ab}d\omega$$

$$=\frac{\pi}{ab}\int_{0}^{\infty}e^{-(a+b)|\omega|}d\omega=\frac{\pi}{ab(a+b)}$$

٤-٣ تحويلات فورييرالمحدودة Finite Fourier transforms

تستخدم تحويلات فورييرالمحدودة لإيجاد حلول مسائل غير متجانسة. هذه التحويلات، وهي بالتحديد تحويلات الجيب وجيب التمام، محدودة وتنتج بصورة مباشرة من متسلسلة فورييرر.

إذا كانت f دالة متصلة قطعيا على فترة محدودة، مثل $(0,L)$.

تعريف (٤): تحويل جا- فورييرالمحدود لدالة $f(x)$ حيث $0<x<L$ يعرف بالصيغة:

$$\Im_s[f]=F_s(n)=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx ,$$

حيث $n \geq 1$ عدد صحيح. وعندئذ يقال للدالة $f(x)$ أنها معكوس تحويل جا- فورييرالمحدود، وهذا المعكوس يعطى بالمتسلسلة:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_s(n)\sin\frac{n\pi x}{L} .$$

تعريف (٥): تحويل جتا- فورييرالمحدود لدالة $f(x)$ حيث $0<x<L$ يعرف بالصيغة:

$$\Im_c[f]=F_c(n)=\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx ,$$

حيث $n \geq 0$ عدد صحيح. وعندئذ يقال للدالة $f(x)$ أنها معكوس تحويل جتا- فورييرالمحدود، وهذا المعكوس يعطى بالمتسلسلة

$$f(x)=\frac{F_c(0)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}F_s(n)\cos\frac{n\pi x}{L}.$$

نظرية (٧): *إذا كانت f' دالة متصلة و f'' دالة متصلة قطعيا على الفترة $[0,L]$ فإن:*

$$\Im_s\left[f''(x)\right]=\frac{2n\pi}{L^2}\left[f(0)-(-1)^n f(L)\right]-\frac{n^2\pi^2}{L^2}F_s(n),$$

$$\Im_c\left[f''(x)\right]=\frac{2}{L}\left[(-1)^n f'(L)-f'(0)\right]-\frac{n^2\pi^2}{L^2}F_c(n).$$

البرهان: يكفي أن نبرهن المتطابقة الأولى، وبالمثل يمكن للقارئ برهان المتطابقة الثانية:

بحسب التعريف (٤) فإن:

$$\Im_s\left[f''(x)\right]=\frac{2}{L}\int_0^L f''(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$=\frac{2}{L}\left[f'(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_{x=0}^{L}-\frac{2n\pi}{L^2}\int_0^L f'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$=-\frac{2n\pi}{L^2}\left[f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_{x=0}^{L}-\frac{2n^2\pi^2}{L^3}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$=\frac{2n\pi}{L^2}\left[f(0)-(-1)^n f(L)\right]-\frac{n^2\pi^2}{L^2}F_s(n).$$

٤ تطبيقات تحويلات فوريير في المعادلات التفاضلية العادية

Applications of Fourier transforms to ODEs

لنعتبر المعادلة التفاضلية العادية الخطية وذات المعاملات الثابتة

$$\{a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0\} y(x) = f(x), \qquad (1)$$

حيث $a_n, \cdots, a_0$ مقادير ثابتة، $D \equiv \frac{d}{dx}$ ، و $f(x)$ دالة معطاة في x. بتطبيق تحويل فوريير على طرفي المعادلة (1) نحصل على

$$\{a_n (ik)^n + a_{n-1} (ik)^{n-1} + \cdots + a_1 ik + a_0\} Y(k) = F(k), \qquad (2)$$

حيث $\Im\{f(x)\} = F(k)$, $\Im\{y(x)\} = Y(k)$. عرف

$$P(ik) = a_n (ik)^n + a_{n-1} (ik)^{n-1} + \cdots + a_1 ik + a_0$$

فإنه يمكن وضع المعادلة (2) على الصورة

$$Y(k) = \frac{F(k)}{P(ik)} = F(k) Q(k), \quad Q(k) = \frac{1}{P(ik)}. \qquad (3)$$

بتطبيق نظرية الالتفاف (نظرية (٦)) نحصل على حل المعادلة (1)

$$y(x) = \Im^{-1}\{F(k) Q(k)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) q(x-t)\, dt, \qquad (4)$$

حيث $q(x) = \Im^{-1}\{Q(k)\}$.

مثال (١): (دائرة كهربائية بسيطة)

بفرض أن $I(t)$ شدة التيار في دائرة بسيطة مكونة من مقاومة R ومكثف L تحقق المعادلة

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E(t), \qquad (5)$$

حيث $E(t)$ قوة كهرومغناطيسية، وكلا من R, L مقادير ثابتة. فإذا كانت $E(t)=E_0\exp(-a|t|)$ فأوجد شدة التيار $I(t)$.

الحل: بتطبيق تحويل فوريير:

$$\Im\{f(t)\}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ikt}dt$$

على طرفي المعادلة(5) نجد أن

$$(ikL+R)\hat{I}(k)=E_0\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+k^2}, \quad \hat{I}(k)=\Im\{I(t)\}.$$

ومنها

$$\hat{I}(k)=\frac{aE_0}{iL}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\left(k-\frac{iR}{L}\right)\left(k^2+a^2\right)}.$$

وبتطبيق تحويل فوريير العكسي:

$$\Im^{-1}\{F(k)\}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(k)e^{ikt}dk$$

نحصل على

$$I(t)=\frac{aE_0}{i\pi L}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikt}}{\left(k-\frac{iR}{L}\right)\left(k^2+a^2\right)}dk. \qquad (6)$$

بتطبيق نظرية البواقي (انظر الملحق ١) نجد أن

أ) في الحالة عندما $t>0$ فإن

$$I(t)=\frac{aE_0}{i\pi L}\cdot 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(\frac{e^{izt}}{\left(z-\frac{iR}{L}\right)\left(z^2+a^2\right)},\frac{iR}{L}\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{e^{izt}}{\left(z-\frac{iR}{L}\right)\left(z^2+a^2\right)},ia\right)\right]$$
$$=\frac{2aE_0}{L}\left[\frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{a^2-\frac{R^2}{L^2}}-\frac{e^{-at}}{2a\left(a-\frac{R}{L}\right)}\right]$$
$$=E_0\left[\frac{e^{-at}}{R-aL}-\frac{2aLe^{-\frac{R}{L}t}}{R^2-a^2L^2}\right]$$

ب) في الحالة عندما $t<0$ فإن

$$I(t)=\frac{aE_0}{i\pi L}\cdot 2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{e^{izt}}{\left(z-\frac{iR}{L}\right)\left(z^2+a^2\right)},-ia\right)$$
$$=-\frac{2aE_0}{L}\frac{-Le^{-at}}{2a(aL+R)}=\frac{E_0e^{-at}}{aL+R}.$$

مثال (٢): بطريقة تحويل فورييه أوجد الحل للمعادلة التفاضلية

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+a^2u=f(x),\quad -\infty<x<\infty. \qquad (7)$$

الحل: بفرض أن $U(k)=\Im\{u(x)\},\ F(k)=\Im\{f(x)\}$، وبتطبيق تحويل فورييه على المعادلة(7) ينتج أن

$$U(k)=\frac{F(k)}{k^2+a^2}.$$

وباستخدام نظرية الالتفاف (نظرية (٦)) نستنتج أن

$$u(x)=\Im^{-1}\{U(k)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)dt,$$

حيث

$$g(x)=\Im^{-1}\left\{\frac{1}{k^2+a^2}\right\}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a|x|}$$

المتساوية الأخيرة نحصل عليها بتطبيق نظرية البواقي. وبالتالي فإن

$$u(x)=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-a|x-t|}dt.$$

مثال (٣): نعتبر معادلة أويلر – برنولي لإنحناء عارضة لانهائية. فإذا كانت $u(x)$ تعبر عن الانحراف الرأسي في عارضة مرنة لانهائية تحت تأثير حمل رأسي $W(x)$ فإن $u(x)$ تحقق المعادلة

$$El\frac{d^4u}{dx^4}+\kappa u=W(x),\quad x\in(-\infty,\infty)$$

حيث El هو معامل الصلابة، و κ هو معامل الأساس للعارضة. أوجد الحل للمعادلة السابقة بفرض أن $W(x)$ دالة محدودة وأن u,u',u'',u''' تؤول إلى الصفر عندما $|x|\to\infty$.

الحل: بوضع $a^4=\kappa/El\,,w(x)=W(x)/El$ فإن المعادلة المعطاة تصبح

$$\frac{d^4u}{dx^4}+a^4u=w(x),\quad x\in(-\infty,\infty).$$

بتطبيق تحويل فوريير على المعادلة الأخيرة ينتج

$$U(k)=\frac{\hat{w}(k)}{k^4+a^4},\quad U(k)=\Im\{u(x)\},\ \hat{w}(k)=\Im\{w(x)\}.$$

وباستخدام تحويل فوريير العكسي فإن

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{w}(k)}{k^4+a^4}e^{ikx}dk$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k^4+a^4}\left(\int_{-\infty}^{\infty}w(t)e^{-ikt}dt\right)dk$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}w(t)G(t,x)dt,$$

حيث

$$G(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-t)}}{k^4+a^4}dk=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos k(x-t)}{k^4+a^4}dk,$$

وبحسب نظرية البواقي فإن

$$G(t,x)=\frac{1}{2a^3}\exp\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}|x-t|\right)\sin\left(\frac{a(x-t)}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right).$$

٥ تطبيقات تحويلات فورييه في المعادلات التفاضلية الجزئية

Applications of Fourier transforms to PDEs

مثال (١): أوجد الحل لمسألة دريشلت في نصف المستوى $0<y$:

$$u_{xx}+u_{yy}=0\quad;\quad -\infty<x<\infty,\quad y>0$$
$$u(x,0)=f(x);\quad -\infty<x<\infty$$
$$|u(x,y)|\le M\ ;\quad -\infty<x<\infty,\quad y>0$$

حيث f دالة ملساء قطعيا ومقياسها، $|f|$ دالة قابلة للتكامل على الفترة $(-\infty,\infty)$. إذا كان $f(x)\to 0$ عندما $|x|\to\infty$ فإن الشروط الحدية تؤدي ضمنيا إلى:

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,y)=0, \quad \lim_{y\to\infty} u(x,y)=0$$

الحل: اجعل $U(\omega,y)$ تحويل فوريير للدالـة $u(x,y)$، بالنسـبة إلـى x.

أي

$$U(\omega,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)e^{-i\omega x}dx$$

وبتطبيق التحويل على المعادلة التفاضلية نحصل على:

$$(i\omega)^2 U(\omega,y)+\frac{d^2}{dy^2}U(\omega,y)=0$$

وهذه المعادلة تكافئ:

$$\frac{d^2U}{dy^2}-\omega^2 U=0$$

وهي معادلة تفاضلية عادية لها الحل

$$U(\omega,y)=Ae^{|\omega|y}+Be^{-|\omega|y}$$

حيث A, B ثوابت اختيارية.

وحيث إن $\lim_{y\to\infty} u(x,y)=0$ فـإن $\lim_{y\to\infty} U(\omega,y)=0$. ولـذلك $A\equiv 0$ وبالتالي:

$$U(\omega,y)=Be^{-|\omega|y}$$

وحيث إن $u(x,0)=f(x)$ فإن تطبيق تحويل فوريير يعطي:

$$U(\omega,0)=\Im\left[f(x)\right]=F(\omega)$$

وبالتالي فإن $B = F(\omega)$. ومن ثم فإن:

$$U(\omega, y) = F(\omega) e^{-|\omega| y}$$

للحصول على $u(x, y)$ نطبق تحويل فوريير العكسي حيث:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega, y) e^{i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-|\omega| y} e^{i\omega x} d\omega \end{aligned}$$

وبالتعويض عن $F(\omega)$ نحصل على:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x - |\omega| y} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-x) - |\omega| y} \right\} dt \end{aligned}$$

حيث إن:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-x) - |\omega| y} d\omega &= \int_{-\infty}^{0} e^{-\omega[i(t-\omega) - y]} d\omega + \int_{0}^{\infty} e^{-\omega[i(t-x) + y]} d\omega \\ &= \frac{-1}{i(t-x) - y} + \frac{+1}{i(t-x) + y} \\ &= \frac{1}{y - i(t-x)} + \frac{1}{y + i(t-x)} \\ &= \frac{2y}{y^2 + (t-x)^2} \end{aligned}$$

فإننا نحصل على:

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{2y}{y^2+(t-x)^2}dt$$
$$=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{y^2+(t-x)^2}dt$$

وهذه صيغة بواسون لنصف المستوى.

فمثلاً إذا كانت $f(x)=a$ مقداراً ثابتاً، لكل $-\infty<x<\infty$ فإن:

$$u(x,y)=\frac{a\,y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2+(t-x)^2}dt=\frac{a}{\pi}\tan^{-1}\frac{t-x}{y}\Bigg|_{t=-\infty}^{\infty}$$
$$=\frac{a}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=a.$$

كحالة خاصة أخرى، نعتبر:

$$u(x,0)=f(x)=\begin{cases}1, & a<x<b\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

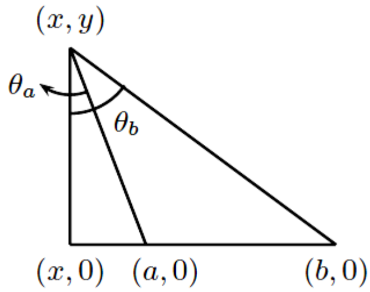
حيث a,b ثوابت اختيارية. عندئذ تكون:

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{a}^{b}\frac{y}{y^2+(t-x)^2}dt$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{(a-x)/y}^{(b-x)/y}\frac{1}{1+v^2}dv, \qquad (v=(t-x)/y)$$

وبالتكامل ينتج أن:

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\left(\tan^{-1}\frac{b-x}{y}-\tan^{-1}\frac{a-x}{y}\right)=\frac{1}{\pi}(\theta_b-\theta_a),$$

حيث θ_a , θ_b تكون كما بالشكل التالي



مثال (٢): حل مسألة نيومان:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad ; \qquad -\infty < x < \infty, \ y > 0$$
$$u_y(x,0) = g(x) \quad ; \qquad -\infty < x < \infty$$
$$|u(x,y)| \le M \ ; \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0$$

حيث إن g دالة ملساء قطعيا ومقياسها، $|g|$، دالة قابلة للتكامل على الفترة $(-\infty,\infty)$. وأن $g(x) \to 0$ عندما $|x| \to \infty$.

الحل: اجعل $v(x,y) = u_y(x,y)$ نجد أن:

$$u(x,y) = \int^{y} v(x,t)\,dt$$

وكذلك $v_{yy} = u_{yyy}, \quad v_{xx} = u_{xxy}$. ومن ثم نجد أن:

$$v_{xx} + v_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(u_{xx} + u_{yy}\right) = 0$$
$$v(x,0) = u_y(x,0) = g(x)$$

فإذا كان $g(x) \to 0$ عندما $|x| \to \infty$ فإن الشروط الحدية تؤدي ضمنيا إلى $\lim_{|x|\to\infty} v(x,y) = 0$ ، وكذلك $\lim_{y\to\infty} v(x,y) = 0$ وعندما $|x| \to \infty$.

من المثال السابق نجد أن:

$$v(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{y^2 + (t-x)^2} dt$$

وبالتكامل بالنسبة إلى y نجد أن:

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \ln\left\{y^2 + (t-x)^2\right\} dt + c$$

حيث c مقدار ثابت اختياري.

مثال (٣): باستخدام تحويل جا-فوريير أوجد الحل لمسألة القيمة الحدية لمعادلة لابلاس في شريحة نصف لانهائية:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad ; \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < b$$
$$u(x,0) = f(x); \quad 0 < x < \infty$$
$$u(0,y) = 0 ; \quad 0 < y < b$$
$$u(x,b) = 0; \quad 0 < x < \infty$$

إذا كان $\lim_{x\to\infty} u(x,y) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} u_x(x,y) = 0$

حيث $0<b$ مقدار ثابت و f دالة ملساء قطعيا، $|f|$ قابلة للتكامل على الفترة $[0,\infty)$.

الحل: إذا كان F_s, U_s صور تحويل جا-فورييه للدالتين $f\,, u$ على الترتيب. أي أن:

$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f\,(x)\sin\omega x\,dx\,,$$

$$U_s(\omega,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x\,,y)\sin\omega x\,dx$$

فإنه بتطبيق تحويل جا-فورييه على طرفي المعادلة التفاضلية في هذه المسألة نحصل على المعادلة التفاضلية العادية

$$U_s''=\omega^2 U_s$$

ويكون الحل العام لهذه المعادلة على الصورة:

$$U_s(\omega,y)=c_1(\omega)\cosh\omega y+c_2(\omega)\sinh\omega y\ .$$

من الشرط الحدي $U_s(\omega,b)=0$ نحصل على:

$$c_1(\omega)=-c_2(\omega)\frac{\sinh\omega b}{\cosh\omega b}$$

وهكذا فإن:

$$U_s(\omega,y)=-c_2(\omega)\frac{\sinh\omega b}{\cosh\omega b}\cosh\omega y+c_2(\omega)\sinh\omega y$$

$$=c_2(\omega)\frac{\sinh\omega(y-b)}{\cosh\omega b}$$

والآن بتطبيق الشرط الحدي $U_s(\omega,0)=F_s(\omega)$ ينتج أن:

$$c_2(\omega)=F_s(\omega)\frac{\cosh\omega b}{\sinh\omega b}$$

ومن ثم ينتج أن:

$$U_s(\omega,y)=F_s(\omega)\frac{\sinh\omega(y-b)}{\sinh\omega b}$$

وهذه الدالة بتطبيق التحويل العكسي تعطي الحل المطلوب

$$u(x,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(\omega)\frac{\sinh\omega(y-b)}{\sinh\omega b}\sin\omega x\,d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(t)\sin\omega t\,\frac{\sinh\omega(y-b)}{\sinh\omega b}\sin\omega x\;dt\,d\omega.$$

مثال (٤): حل مسألة التوصيل الحراري

$$\begin{aligned}
&u_t=c^2u_{xx} \quad ; && -\infty<x<\infty,\ t>0\\
&u(x,0)=f(x); && -\infty<x<\infty\\
&u(x,t)\to 0 \quad \text{as} && |x|\to\infty
\end{aligned}$$

حيث f دالة ملساء قطعيا، ومقياسها $|f|$ قابل للتكامل على الفترة $(-\infty,\infty)$.

الحل: إذا كان $U(\omega,t)$ تحويل فورييه للدالة $u(x,t)$ فإن:

$$U(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}dx$$

بتطبيق التحويل على المعادلة التفاضلية الجزئية في المسألة نحصل على المعادلة التفاضلية العادية:

$$U_t(\omega,t)=c^2(i\omega)^2U(\omega,t)$$

ومنها فإن المعادلة المعطاة تؤول إلى الصورة:

$$U_t+c^2\omega^2U=0 \qquad (1)$$

ومن الشرط الابتدائي نجد أن:

$$U(\omega,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)e^{-i\omega x}dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=F(\omega)$$

حيث F تحويل فوريير للدالة f .

وحيث إن $\lim_{|x|\to\infty}u(x,t)=0$ فإن $\lim_{|\omega|\to\infty}U(\omega,t)=0$. وبالتالي فإن حل المعادلة (1) يأخذ الصورة:

$$.U(\omega,t)=F(\omega)e^{-c^2\omega^2t}$$

وبتطبيق التحويل العكسي نجد أن:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}U(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-c^2\omega^2 t}e^{i\omega x}d\omega$$
$$=\Im^{-1}\left[F(\omega)e^{-c^2\omega^2 t}\right]$$
$$=(f*g)(x,t)$$ (بحسب نظرية الالتفاف)

حيث $g(x,t)=\Im^{-1}\left[e^{-c^2\omega^2 t}\right]$ ، أي أن:

$$g(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-c^2\omega^2 t}e^{i\omega x}d\omega$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-c^2 t\left[\omega^2-\frac{ix}{c^2 t}\omega\right]}d\omega$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-c^2 t\left\{\left(\omega-\frac{ix}{2c^2 t}\right)^2+\frac{x^2}{4c^4 t^2}\right\}}d\omega$$
$$=\frac{e^{-x^2/4c^2 t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-c^2 t\left[\omega-\frac{ix}{2c^2 t}\right]^2}d\omega$$
$$=\frac{e^{-x^2/4c^2 t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}\frac{dy}{\sqrt{c^2 t}}$$
$$=\frac{e^{-x^2/4c^2 t}}{\sqrt{2c^2 t\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-y^2}dy$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{c^2 t}}e^{-x^2/4c^2 t}=\frac{e^{-x^2/4c^2 t}}{\sqrt{2c^2 t}}$$

وعليه فإن:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (f*g)(x,t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(x-\tau,t)\, d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\frac{e^{-(x-\tau)^2/4c^2t}}{\sqrt{2c^2t}}\, d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-(x-\tau)^2/4c^2t}\, d\tau \end{aligned}$$

مثال (٥): حل مسألة التالية لمعادلة الموجة:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad ; \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0,\ c > 0 \\ &u(x,0) = f_1(x)\ ; \quad -\infty < x < \infty \\ &u_t(x,0) = f_2(x); \quad -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

حيث u, u_x تكون محدودة عندما $x \to \infty$. والدوال f_1, f_2 ملساء قطعيا، و $|f_1|, |f_2|$ دوال قابلة للتكامل على الفترة $(-\infty,\infty)$.

الحل: لإيجاد الحل لهذه المسألة، فإننا نعرف تحويلات فوريير:

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega x}\, dx,$$

$$F_j(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_j(x)\, e^{-i\omega x}\, dx, \qquad j = 1,2$$

وبتطبيق تحويل فوريير على المسألة نحصل على:

$$\frac{d^2U}{dt^2}+c^2\omega^2U=0,$$

$$U(\omega,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)e^{-i\omega x}dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)e^{-i\omega x}dx=F_1(\omega),$$

$$U_t(\omega,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_t(x,0)e^{-i\omega x}dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x)e^{-i\omega x}dx=F_2(\omega)$$

والحل لهذه المسألة الناتجة يكون على الصورة:

$$U(\omega,t)=F_1(\omega)\cos\omega ct+\frac{F_2(\omega)}{\omega c}\sin\omega ct$$

ومن ثم فإن تطبيق التحويل العكسي يعطي الحل المطلوب بالصيغة

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[F_1(\omega)\cos\omega ct+\frac{F_2(\omega)}{\omega c}\sin\omega ct\right]e^{i\omega x}d\omega$$

وحيث إن:

$$\cos\theta=\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)/2,\ \ \sin\theta=\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)/2i$$

فإن:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\omega)e^{i\omega x}\cos\omega ct\,d\omega$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\omega)e^{i\omega x}\left(e^{i\omega ct}+e^{-i\omega ct}\right)d\omega$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) \left(e^{i\omega(x+ct)} + e^{i\omega(x-ct)} \right) d\omega$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ f_1(x+ct) + f_1(x-ct) \right\}$$

بالمثل فإن:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) e^{i\omega x} \frac{\sin \omega ct}{\omega c} d\omega$$

$$= \frac{1}{2i\omega c\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) e^{i\omega x} \left(e^{i\omega ct} - e^{-i\omega ct} \right) d\omega$$

$$= \frac{1}{2i\omega c\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) \left(e^{i\omega(x+ct)} - e^{i\omega(x-ct)} \right) d\omega$$

$$= \frac{1}{2c\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) \left(\int_{x-ct}^{x+ct} e^{i\omega\tau} d\tau \right) d\omega$$

$$= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \right) d\tau$$

$$= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} f_2(\tau) d\tau$$

وهكذا فإن الحل المطلوب هو:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left\{ f_1(x+ct) + f_1(x-ct) \right\} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} f_2(\tau) d\tau$$

وهذه صيغة دالمبرت d’Alembert’s formula.

مثال (٦): حل المسألة التالية لمعادلة الحرارة:

$$u_t = \alpha u_{xx} \qquad ; \qquad x > 0,\ t > 0$$
$$u(x,0) = 0 \qquad ; \qquad x \ge 0$$
$$u_x(0,t) = g(t); \qquad t \ge 0$$

حيث $\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0$ ، وأن g دالة ملساء قطعيا، ولها مقياس $|g|$ قابل للتكامل على الفترة $[0,\infty)$.

الحل: اجعل $U_c(\omega,t)$ تحويل جتا- فورييـر للدالة $u(x,t)$ فإن:

$$\Im_c[u_{xx}] = -\omega^2 U_c(\omega,t) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}u_x(o,t)$$
$$\Im_c[u_t] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\cos\omega x dx$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,t)\cos\omega x dx\right\}$$
$$= \frac{\partial U_c(\omega,t)}{\partial t}$$

وحيث إن $u(x,0) = 0$ فإن:

$$U_c(\omega,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,0)\cos\omega x dx = 0$$

وعلى ذلك تصبح المسألة على الصورة:

$$\frac{dU_c}{dt} = \alpha\left\{-\omega^2 U_c - \sqrt{\frac{2}{\pi}}g(t)\right\}$$
$$U_c(\omega,0) = 0$$

ومنها:

$$\frac{dU_c}{dt}+\alpha\omega^2 U_c=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha g\left(t\right)$$

وهذه معادلة تفاضلية عادية خطية. لها العامل المكامل $\mu=e^{\alpha\omega^2 t}$.

والحل على الصورة:

$$U_c\left(\omega,t\right)=e^{-\alpha\omega^2 t}\left\{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha\int_0^t g\left(\tau\right)e^{\alpha\omega^2\tau}d\tau+A\right\}$$

حيث A ثابت اختياري يتعين بالشرط الابتدائي، الذي يؤدي إلى $A=0$.

وبالتالي فإن:

$$U_c\left(\omega,t\right)=e^{-\alpha\omega^2 t}\left\{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha\int_0^t g\left(\tau\right)e^{\alpha\omega^2\tau}d\tau\right\}$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha\int_0^t g\left(\tau\right)e^{-\alpha\omega^2(t-\tau)}d\tau$$

وبتطبيق التحويل العكسي نحصل على:

$$u\left(x,t\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\left\{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha\int_0^t g\left(\tau\right)e^{-\alpha\omega^2(t-\tau)}d\tau\right\}\cos\omega x\,d\omega$$

$$=-\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^t g\left(\tau\right)\left\{\int_0^\infty e^{-\alpha\omega^2(t-\tau)}\cos\omega x\,d\omega\right\}d\tau$$

$$=-\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^t g\left(\tau\right)\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha(t-\tau)}}e^{-x^2/4\alpha(t-\tau)}\right\}d\tau$$

حيث:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\omega^2(t-\tau)}\cos\omega x\, d\omega=\int_0^\infty e^{-\alpha\omega^2(t-\tau)}\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}d\omega$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[e^{-\alpha\omega^2(t-\tau)+i\omega x}+e^{-\alpha\omega^2(t-\tau)-i\omega x}\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha(t-\tau)\left[\omega^2-\frac{ix}{\alpha(t-\tau)}\omega\right]}d\omega$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha(t-\tau)\left[\omega^2+\frac{ix}{\alpha(t-\tau)}\omega\right]}d\omega$$

ويمكن إيجاد قيمة كل من هذين التكاملين، والخطوات متروكة كتمرين.

مثال (٧): حل المسألة:

$$u_t=\alpha u_{xx}\,,\qquad x>0,\quad t>0$$
$$u(x,0)=0,\quad x>0$$
$$u(0,t)=u_0,\quad t>0$$

حيث u_0 مقدار ثابت.

الحل: بجعل $U_s(\omega,t)$ تحويل جا-فورييه للدالة $u(x,t)$ فإن:

$$\Im_s[u_{xx}]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega u(0,t)-\omega^2U_s(\omega,t)$$

$$\Im_s[u_t]=\frac{\partial}{\partial t}\Im_s[u]=\frac{d}{dt}U_s(\omega,t)$$

$$u(x,0)=0\qquad\Rightarrow\qquad U_s(k,0)=0$$

وبالتالي بتطبيق تحويل جا-فورييه على المسألة المعطاة نحصل على:

$$\frac{dU_s}{dt}=\alpha\left\{-\omega^2U_s+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega u_0\right\}$$

أي:

$$\frac{dU_s}{dt}+\alpha\omega^2U_s=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha\omega u_0,$$
$$U_s\left(\omega,0\right)=0$$

والحل لهذه المسألة هو:

$$U_s\left(\omega,t\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha U_0\int_0^t e^{-\alpha\omega^2(t-\tau)}d\tau$$

وبحساب التكامل السابق نحصل على:

$$U_s\left(\omega,t\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha\omega U_0\frac{1-e^{-\alpha\omega^2t}}{\alpha\omega^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}U_0\frac{1-e^{-\alpha\omega^2t}}{\omega}$$

وبتطبيق التحويل العكسي نحصل على:

$$u\left(x,t\right)=\mathfrak{I}_s^{-1}[U_s]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty U_s\left(\omega,t\right)\sin\omega x\,d\omega$$
$$=\frac{2u_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega x}{\omega}\left(1-e^{-\alpha\omega^2t}\right)d\omega.$$

مثـال (٨): اعتبـر حركـة وتـر مثبـت مـن طرفيـه عنـد نقطتـين البعـد بينهما π ، إذا كانت $f\left(x,t\right)$ تمثل القـوة المـؤثرة علـى الـوتر. هـذه الحركة تخضع للعلاقات التالية:

$$u_{tt}=c^2u_{xx}+f\left(x,t\right),\quad 0<x<\pi,\quad t>0$$
$$u\left(x,0\right)=0,\quad u_t\left(x,0\right)=0,\quad 0<x<\pi$$
$$u\left(0,t\right)=0,\quad u\left(\pi,t\right)=0,\quad t>0$$

الحل: بتطبيق تحويل جا ـ فورييرعلى معادلة الحركة ينتج أن

$$\Im_s\left[u_{tt}-c^2u_{xx}-f\left(x,t\right)\right]=0$$

وباستخدام الخاصية الخطية للتحويل التكاملي نجد أن:

$$\Im_s\left[u_{tt}\right]-c^2\Im_s\left[u_{xx}\right]=\Im_s\left[f\left(x,t\right)\right]$$

بفرض أن $U_s\left(n,t\right)$ هي تحويـل جـا ـ فـورييرالمحـدود للدالـة $u\left(x,t\right)$، فإن:

$$\Im_s\left[u_{tt}\right]=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u_{tt}\sin nx\,dx$$
$$=\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u\left(x,t\right)\sin nx\,dx\right]=\frac{d^2U_s\left(n,t\right)}{dt^2}$$

وباستخدام نظرية (٧) نحصل على:

$$\Im_s\left[u_{xx}\right]=\frac{2n}{\pi}\left[u\left(0,t\right)-\left(-1\right)^nu\left(\pi,t\right)\right]-n^2U_s\left(n,t\right).$$

وحيث إن $u\left(0,t\right)=u\left(\pi,t\right)=0$ فإن:

$$\Im_s\left[u_{xx}\right]=-n^2U_s\left(n,t\right).$$

وبفرض أن $F_s\left(n,t\right)$ هي تحويل جا- فورييز المحدود للدالة $f\left(x,t\right)$، فإننا نحصل على المعادلة التفاضلية العادية ذات الرتبة الثانية:

$$\frac{d^2U_s}{dt^2}+n^2c^2U_s=F_s\left(n,t\right).$$

لهذه المعادلة حل على الصورة:

$$U_s\left(n,t\right)=A\cos nct+B\sin nct$$
$$+\frac{1}{nc}\int_0^t F_s\left(n,\tau\right)\sin nc\left(t-\tau\right)d\tau.$$

من جهة ثانية، فإن تطبيق التحويل على الشروط الابتدائية يؤدي إلى:

$$U_s\left(n,0\right)=\Im_s\left[u\left(x,0\right)\right]=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u\left(x,0\right)\sin nx\,dx=0$$

$$\frac{d}{dt}U_s\left(n,0\right)=\Im_s\left[u_t\left(x,0\right)\right]=0$$

وهكذا فإن هذه الشروط تؤدي إلى:

$$U_s\left(n,t\right)=\frac{1}{nc}\int_0^t F_s\left(n,\tau\right)\sin nc\left(t-\tau\right)d\tau.$$

التحويل العكسي تعطي:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}U_s(n,t)\sin nx$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nc}\left[\int_0^t F_s(n,\tau)\sin nc(t-\tau)d\tau\right]\sin nx .$$

في الحالة الخاصة، عندما $f(x,t)=a$ مقدار ثابت فإن:

$$F_s(n,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}a\sin nx dx=\frac{2a}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right].$$

ومن ثم نحصل على:

$$U_s(n,t)=\frac{1}{nc}\int_0^t\frac{2a}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]\sin nc(t-\tau)d\tau$$
$$=\frac{2a}{n^3c^2\pi}\left[1-(-1)^n\right](1-\cos nct)$$

وهكذا فإن الحل يأخذ الصورة:

$$u(x,t)=\frac{2a}{c^2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left[1-(-1)^n\right](1-\cos nct)\sin nx .$$

مثال (٩): أوجد توزيع درجة الحرارة في سلك معدني طوله π إذا كانت الحرارة تتولد بمعدل $g(x,t)$ في وحدة الزمن. وإذا كانت نهايتا السلك معزولتين، وكان التوزيع الابتدائي لدرجة الحرارة يعطى بالمقدار $f(x)$. هذه المسألة تتلخص في إيجاد دالة درجة الحرارة $u(x,t)$ التي تحقق:

$$u_t = u_{xx} + g(x,t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le \pi$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0$$

الحل: بفرض أن $U_c(n,t)$ هو تحويل جتا ـ فوريير المحدود للدالة $u(x,t)$. كما في الأمثلة السابقة، فإن تطبيق التحويل على معادلة الحرارة، والأخذ في الاعتبار الشروط الحدية يعطي معادلة الرتبة الأولى:

$$\frac{dU_c}{dt} = -n^2 U_c + G_c(n,t)$$

حيث $G_c(n,t)$ تحويل جتا ـ فورييرللدالة $g(x,t)$، أي

$$G_c(n,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x,t)\cos nx dx$$

الحل لهذه المعادلة هو:

$$U_c(n,t) = \int_0^t e^{-n^2(t-\tau)} G_c(n,\tau) d\tau + A e^{-n^2 t}$$

التحويل للشرط الابتدائي يعطي:

$$U_c(n,0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(x,0)\cos nx dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = F_c(n)$$

وباستخدام هذا الشرط الابتدائي على الحل $U_c(n,t)$ ينتج أن:

$$U_c(n,t)=\int_0^t e^{-n^2(t-\tau)}G_c(n,\tau)d\tau+F_c(n)e^{-n^2t}$$

وهكذا فإن التوزيع المطلوب يعرف بالدالة:

$$u(x,t)=\frac{F_c(0)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}U_c(n,t)\cos nx\ .$$

مثال (١٠): باستخدام تحويل جا ـ فوريير المحدود أوجد حل المسألة:

$$u_t=u_{xx}\ ,\quad 0<x<4,\quad t>0$$
$$u(x,0)=2x\,,\qquad 0\le x\le 4$$
$$u(0,t)=0,\qquad u(4,t)=0,\quad t\ge 0$$

الحل: إذا كان $U_s(n,t)$ هو تحويل جا ـ فوريير المحدود للدالة $u(x,t)$.

فإن تطبيق التحويل على معادلة الحرارة، والأخذ في الاعتبار الشروط الحدية $u(0,t)=u(4,t)=0$، يعطي معادلة الرتبة الأولى

$$\frac{dU_s}{dt}=-\frac{n^2\pi^2}{16}U_s$$

الحل لهذه المعادلة هو:

$$U_s(n,t)=Ae^{-n^2\pi^2t/16}\ .$$

التحويل للشرط الابتدائي يعطي

$$U_s(n,0)=\frac{1}{2}\int_0^4 u(x,0)\sin\frac{n\pi x}{4}dx$$
$$=\int_0^4 x\sin\frac{n\pi x}{4}dx=-\frac{16}{n\pi}(-1)^n$$

وبالتــالي فــإن $U_s(n,t)=-\frac{16}{n\pi}(-1)^n e^{-n^2\pi^2 t/16}$، وهكـذا فـإن الحـل المطلوب يعرف بالدالة

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}U_s(n,t)\sin\frac{n\pi x}{4}$$
$$=\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-n^2\pi^2 t/16}\sin\frac{n\pi x}{4}.$$

6 تطبيقات تحويلات فوريير في المعادلات التكاملية

Applications of Fourier transforms to IEs

طريقة تحويلات فوريير يمكن أن تستخدم لحل بعض المعادلات التكاملية عندما تكون نواة المؤثر التكاملي الموجود في المعادلة على الصورة $g(x-t)$. ولتوضيح الطريقة نعتبر معادلة فريدهولم

$$u(x)+\lambda\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\,g(x-t)\,dt=f(x), \qquad (1)$$

حيث f,g دوال معطاة، و λ بارامتر معلوم.

بتطبيق تحويل فوريير على طرفي المعادلة (1)، واستخدام نظرية الالتفاف، نجد ان

$$U(k)+\sqrt{2\pi}\lambda U(k)G(k)=F(k).$$

ومنها فإن

$$U(k)=\frac{F(k)}{1+\sqrt{2\pi}\,\lambda G(k)}.$$

وبالتحويل العكسي نحصل على حل المعادلة (1)

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(k)e^{ikx}}{1+\sqrt{2\pi}\,\lambda G(k)}dk.$$

فإذا كانت $g(x)=\frac{1}{x}$ فإن $G(k)=-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sgn}(k)$، ومن ثم

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(k)e^{ikx}}{1-i\pi\,\lambda\operatorname{sgn}(k)}dk.$$

وإذا كانت $g(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{|x|}\right)$ ،$\lambda=1,$ فإن $G(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik}$ ، وبالتالي

$$\begin{aligned}u(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(k)e^{ikx}}{1+ik}ik\,dk\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Im\{f'(x)\}\Im\left\{\sqrt{2\pi}e^{-x}\right\}e^{ikx}\,dk\\&=f'*\sqrt{2\pi}e^{-x}=\int_{-\infty}^{\infty}f'(t)e^{x-t}dt.\end{aligned}$$

مثال (١): أوجد الحل للمعادلة التكاملية

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)dt}{(x-t)^2+a^2}=\frac{1}{x^2+b^2},\qquad b>a>0.$$

الحل: بأخذ تحويل فوريير لطرفي المعادلة، واستخدام نظرية الالتفاف نجد أن

$$\sqrt{2\pi}U(k)\Im\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-b|k|}}{b},$$

أو

$$\pi\frac{e^{-a|k|}}{a}U(k)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-b|k|}}{b},$$

حيث $U(k)=\Im\{u(x)\}$. ومن ذلك نحصل على

$$U(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{a}{b}\right)e^{-(b-a)|k|}$$

بتطبيق التحويل العكسي ينتج الحل

$$u(x)=\frac{a}{2\pi b}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(b-a)|k|}e^{ikx}dx$$
$$=\frac{a}{2\pi b}\left[\frac{1}{(b-a)+ix}+\frac{1}{(b-a)-ix}\right]$$
$$=\frac{a}{\pi b}\frac{b-a}{x^2+(b-a)^2}\ .$$

مثال (٢): حل المعادلة التكاملية

$$u(x)+4\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|x-t|}u(t)dt=g(x).$$

الحل: بفرض أن $U(k)=\Im\{u(x)\},\ G(k)=\Im\{g(x)\}$، وبأخذ تحويل فوريير لطرفي المعادلة المعطاة فإن

$$U(k)+4\sqrt{2\pi}U(k)\cdot\frac{2a}{\sqrt{2\pi}\left(k^2+a^2\right)}=G(k),$$
$$U(k)=\frac{k^2+a^2}{k^2+8a+a^2}G(k).$$

ومن ثم فإن تطبيق التحويل العكسي يؤدي إلى

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k^2+a^2}{k^2+8a+a^2}G(k)e^{ikx}dk.$$

الآن نعتبر بعض الحالة الخاصة، عندما $a=1,\ g(x)=e^{-|x|}$ فإن

$G(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2+1}$. ومن ثم يكون

$$u(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k^2+9}dk.$$

باستخدام نظرية البواقي، في حساب التكامل السابق، نحصل على الحل المطلوب

$$u(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-3x}, & x>0\\ \frac{1}{3}e^{3x}, & x<0\end{cases}$$
$$=\frac{1}{3}e^{-3|x|}.$$

مثال (٣): أوجد الحل للمعادلة التكاملية

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x-t)u(t)dt=\frac{1}{x^2+a^2}.$$

الحل: بوضع $U(k)=\Im\{u(x)\}$، واستخدام تحويل فورييه فإننا نحصل على

$$\sqrt{2\pi}U^2(k)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a|k|}}{a}$$

وبالتالي $U(k)=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{1}{2}a|k|}$. وبتطبيق التحويل العكسي فإن

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2a}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}a|k|}e^{ikx}dk$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\left[\int_{0}^{\infty}e^{-k\left(\frac{a}{2}+ix\right)}dk+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k\left(\frac{a}{2}-ix\right)}dk\right]$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\frac{4a}{4x^2+a^2}=\sqrt{\frac{a}{\pi}}\frac{2}{4x^2+a^2}.$$

7 تحويلات لابلاس وخواصها

Laplace transforms and its properties

تحويل لابلاس يعطي طريقة مباشرة لإيجاد حلول لمعادلات تفاضلية تحقق شروط ابتدائية وحدودية دون الحاجة إلى إيجاد الحل العام ومن ثم تحديد قيم الثوابت الاختيارية التي يتضمنها هذا الحل. في هذا الفصل سوف نقدم بعض المفاهيم النظرية الأساسية لتحويل لابلاس.

تعريف (١): *إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة على الفترة $[0,\infty)$ فإن تحويل لابلاس للدالة f هو:*

$$L\left[f(t)\right]=F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt \qquad (1)$$

لكل $s>0$ أو لكل s عدد مركب بحيث $\operatorname{Re}(s)>0$. يفترض أنه توجد على الأقل قيمة للعدد s، لتكن s_0،بحيث يكون هذا التكامل تقاربياً. وعندئذ فإن التكامل يتقارب لكل $s_0<s$.

الدالة $f(x)$ تسمى التحويل العكسي، أو تحويل الدالة $F(s)$، وعادة يرمز للتحويل العكسي بالرمز $L^{-1}[F]$. ونكتب $f(x)=L^{-1}[F]$.

في الحالة عندما يكون s عدداً مركباً فإن $\operatorname{Re}(s)$ يجب أن يكون كبيراً بحيث يكون التكامل (1)تقاربياً.

عند حساب تحويل لابلاس لدالة f فإننا نستخدم $f(x)$ فقط لقيم x في الفترة $[0,\infty)$. ولكل $x<0$ نعتبر $f(x)=0$.

النظرية التالية تعطي الشروط الكافية لوجود تحويل لابلاس.

نظرية (١): *إذا كانت f دالة متصلة قطعيا على الفترة $[0,\infty)$، وإذا وجدت الأعداد الموجبة T, M والعدد الحقيقي α بحيث لكل $t \geq T$ $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$. فإن تحويل لابلاس $L[f]$ يكون موجوداً لكل $\alpha < s$.*

البرهان: واضح أن:

$$L[f]=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt=\int_0^{T} e^{-st} f(t)dt+\int_T^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

التكامل الأول في الطرف الأيمن هو تكامل تقاربي؛ لأن الدالة f، ومن ثم الدالة $e^{-st} f(t)$ هي متصلة قطعيا على الفترة $[0,T]$ لأي مقدار ثابت s. من جهة ثانية، فإنه لكل $t \geq T$ فإن:

$$\left|e^{-st} f(t)\right| \leq M\, e^{-(s-\alpha)t}.$$

ولذلك، فإننا لكل $\alpha < s$ نحصل على:

$$\left|\int_T^{\infty} e^{-st} f(t)dt\right| \leq \int_T^{\infty}\left|e^{-st} f(t)\right|dt$$

$$\leq M\int_T^{\infty} e^{-(s-\alpha)t}dt=\frac{M\, e^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha}<\infty$$

ملاحظة: إذا وجدت الأعداد الموجبة $M\ ,T$ والعدد الحقيقي α بحيث لكل $t \geq T$ $\left|f\left(t\right)\right| \leq Me^{\alpha t}$ عندئذ يقال أن للدالة f رتبة أسية α.

مثال (١): أوجد تحويل لابلاس لكل من الدوال f التالية:

$(1)\ f\left(t\right)=c \qquad (2)\ f\left(t\right)=e^{\alpha t}$

$(3)\ f\left(t\right)=t^2 \qquad (4)\ f\left(t\right)=\sin\omega t$

حيث c, α مقادير ثابتة.

الحل: (١) إذا $f\left(t\right)=c$ حيث c مقدار ثابت فإن:

$$F\left(s\right)=\int_0^{\infty} c\,e^{-st}dt = c\int_0^{\infty} e^{-st}dt = \frac{-c}{s}e^{-st}\Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{c}{s},\ s>0$$

(٢) إذا $f\left(t\right)=e^{\alpha t}$

$$F\left(s\right)=\int_0^{\infty} e^{-st}e^{\alpha t}dt=\int_0^{\infty} e^{-\left(s-\alpha\right)}dt$$

$$=\frac{-1}{s-\alpha}e^{-\left(s-\alpha\right)}\Big|_{t=0}^{\infty}=\frac{1}{s-\alpha}\ , \qquad s>\alpha$$

(٣) إذا $f\left(t\right)=t^2$

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}t^2dt$$
$$=\frac{-t^2}{s}e^{-st}\Big|_{t=0}^{\infty}+\frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt$$
$$=\frac{-2te^{-st}}{s^2}\Bigg|_{t=0}^{\infty}+\frac{2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}dt=\frac{2}{s^3}\ ,\qquad s>0$$

بوجه عام يمكن إثبات أن $L\left[t^n\right]=\frac{n!}{s^{n+1}}$ لكل $0<s$.

(٤) إذا $f\left(t\right)=\sin\omega t$ حيث ω مقدار ثابت فإن:

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t dt$$
$$=\left[-\frac{e^{-st}}{s}\sin\omega t\right]_0^\infty+\frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\,dt$$
$$=\frac{\omega}{s}\left\{\left[-\frac{e^{-st}}{s}\cos\omega t\right]_{t=0}^\infty-\frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t\,dt\right\}$$
$$=\frac{\omega}{s^2}-\frac{\omega^2}{s^2}F(s),\quad s>0$$

وبالتالي نحصل على:

$$F(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\ ,\qquad s>0$$

بالمثل يمكن إثبات أن:

$$L\left[\cos\omega t\right]=\frac{s}{s^2+\omega^2}\ ,\quad s>0.$$

مثال (٢): أوجد تحويل لابلاس للدالة

$$f(x)=\begin{cases} x \;; & 0<x<2 \\ 1 \;; & x>2 \end{cases}$$

الحل: لاحظ أن f دالة متصلة قطعياً على $[0,\infty)$ وأن

$$e^{ax}=\sum_{n>0}\frac{a^n x^n}{n!}\geq 1 \qquad , \qquad a\geq 0$$

هذا يعني أن الدالة f (حيث $f(x)=1$ لكل $2<x$) لها رتبة أسية تساوي1. وحيث إن

$$e^{x}=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}>x$$

فإن الدالة $f(x)=x$ ، لكل x في $(0,2)$، لها رتبة أسية a لأي $0<a$.

لذلك فإن تحويل للدالة f موجود، وأن

$$L\left[f(x)\right]=\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

$$=\int_0^2 xe^{-sx}dx+\int_2^\infty e^{-sx}dx$$

$$=\frac{-x}{s}e^{-sx}\Big|_{x=0}^{2}+\frac{1}{s}\int_0^2 e^{-sx}-\frac{1}{s}e^{-sx}\Big|_{x=2}^{\infty}$$

$$=\frac{-2e^{-2s}}{s}-\frac{1}{s^2}\left[e^{-2s}-1\right]+\frac{e^{-2s}}{s}$$

$$=\frac{1}{s^2}-\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right)e^{-2s}, \qquad s>0$$

مثال (٣): للدالة المتصلة قطعيا

$$f(x)=\begin{cases}-2 ; & 0\le x<1\\ 1 ; & 1\le x<3\\ e^{2x} ; & x\ge 3\end{cases}$$

فإن:

$$L[f]=-2\int_0^1 e^{-st}dt+\int_1^3 e^{-st}dt+\int_3^\infty e^{(2-s)t}dt$$
$$=-\frac{2}{s}+\frac{3e^{-s}}{s}-\frac{e^{-3s}}{s}+\frac{e^{3(2-s)}}{s-2}, \qquad s>2$$

ملاحظة: يمكن الحصول على تحويل لابلاس العكسي لدالة قياسية $F(s)$ بتحليلها إلى كسور جزئية، وباستخدام جداول تحويلات لابلاس يمكن إيجاد التحويل العكسي لكل كسر، ومن ثم للدالة $F(s)$. المثال التالي يوضح ذلك.

مثال (٤): أوجد $L^{-1}[F]$ إذا كان

$$F(s)=\frac{1}{(s-a)(s-b)} \quad ; \quad a\neq b$$

الحل: بتحليل $F(s)$ إلى كسور جزئية نحصل على:

$$F(s)=\frac{1}{(s-a)(s-b)}=\frac{1}{a-b}\left\{\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right\}$$

وبالتالي فإن:

$$L^{-1}[F]=\frac{1}{a-b}\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s-b}\right]\right\}=\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$$

١-٧ خواص تحويلات لابلاس

Properties of Laplace transforms

نظرية (١): "تحويل لابلاس خطي"

إذا كان $L[f]$, $L[g]$ تحويلات لابلاس للدوال f, g على الترتيب فإن:

$$L[af(t)+bg(t)] = aL[f(t)] + bL[g(t)]$$

حيث a, b *مقادير ثابتة.*

البرهان: متروك كتمرين.

مثال (٥): (١) حيث إن $\cos^2 \omega t = \frac{1}{2}(1+\cos 2\omega t)$ فإن:

$$L\left[\frac{1}{2}\right] + L\left[\frac{1}{2}\cos 2\omega t\right] = \frac{1}{2}L[1] + \frac{1}{2}L[\cos 2\omega t]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4\omega^2}\right)$$

$$(2)\ L\left[4x + 7e^{2x} + 5\cos 3x\right]$$

$$= L[4x] + L\left[7e^{2x}\right] + L[5\cos 3x]$$

$$= 4L[x] + 7L\left[e^{2x}\right] + 5L[\cos 3x]$$

$$= 4\frac{1}{s^2} + 7\frac{1}{s-2} + 5\frac{s}{s^2+9}$$

$$= \frac{4}{s^2} + \frac{7}{s-2} + \frac{5s}{s^2+9}$$

نظرية (٢): "خاصية إزاحة- s"

إذا كان $F(s)$ تحويل لابلاس للدالة f و a مقدار ثابت فإن:

$$L\left[e^{at}f(t)\right]=F(s-a).$$

البرهان:

$$L\left[e^{at}f(t)\right]=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt$$
$$=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt=F(s-a)$$

مثال (٦):

$$(1)\ L\left[t^2\right]=\frac{2}{s^3},\quad L\left[e^{7t}t^2\right]=\frac{2}{(s-7)^3}$$

$$(2)\ L\left[\sin\omega t\right]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2},\quad L\left[e^{at}\sin\omega t\right]=\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$$

نظرية (٣): "الإزاحة t"

إذا كانت $F(s)$ تحويل لابلاس لدالة f فإن تحويل لابلاس للدالة

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}0, & x<\alpha\\ f(x-\alpha) & x>\alpha\end{cases}$$

هو $e^{-\alpha s}F(s)$.

البرهان: عرف الدالة:

$$H(t)=\begin{cases}0 & ; \quad t<0\\ 1 & ; \quad t>0\end{cases}$$

واضح أن:

$$L[H]=\int_0^{\infty} e^{-st}dt=\frac{1}{s}$$

من جهة ثانية واضح أن:

$$f_{\alpha}(t)=f(t-\alpha)H(t-\alpha)$$

لأن:

$$f_{\alpha}(t)=\begin{cases}0 & ; \quad t<\alpha\\ f(t-\alpha) & ; \quad t>\alpha\end{cases}$$

$$=f(t-\alpha)\begin{cases}0 & ; \quad t<\alpha\\ 1 & ; \quad t>\alpha\end{cases}$$

$$=f(t-\alpha)H(t-\alpha)$$

يبقى إثبات أن:

$$L\left[f(t-\alpha)H(t-\alpha)\right]=e^{-\alpha s}F(s)$$

فإذا كان $F(s)$ تحويل الدالة $f(t)$ فإن:

$$e^{-\alpha s}F(s)=e^{-\alpha s}\int_0^{\infty} e^{-\tau s}f(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^{\infty} e^{-(\tau+\alpha)s}f(\tau)d\tau$$

بوضع $x=\tau+\alpha$ فإن التكامل السابق يصبح على الصورة:

$$e^{-\alpha s}F(s)=\int_{\alpha}^{\infty}e^{-sx}f(x-\alpha)dx$$
$$=\int_{0}^{\infty}e^{-sx}f(x-\alpha)H(x-\alpha)dx$$
$$=L[f_{\alpha}]$$

مثال (٧): أوجد تحويل لابلاس للدالة:

$$f(t)=\begin{cases}1 & ; \quad 0<t<\pi\\ 0 & ; \quad \pi<t<2\pi\\ \sin t & ; \quad t>2\pi\end{cases}$$

الحل: واضح أن:

$$f(t)=H(t)-H(t-\pi)+\sin(t-2\pi)H(t-2\pi)$$

وبالتالي فإن:

$$L[f(t)]=L[H(t)]-L[H(t-\pi)]$$
$$+L[\sin(t-2\pi)H(t-2\pi)]$$
$$=\frac{1}{s}-\frac{e^{-\pi s}}{s}+\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

مثال (٨): تحويل لابلاس العكسي للدالة:

$$F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s^2}-\frac{2e^{-2s}}{s}-\frac{2se^{-\pi s}}{s^2+1}$$
$$=L[t]-e^{-2s}L[t]-2e^{-2s}L[1]+2e^{-\pi s}L[\cos t]$$
$$=L[t]-L[(t-2)H(t-2)]-2L[H(t-2)]$$
$$+2L[\cos(t-\pi)H(t-\pi)]$$

وهكذا فإن:

$$\begin{aligned}L^{-1}\left[F(s)\right] &= t-(t-2)H(t-2)-2H(t-2)\\ &\quad +2\cos(t-\pi)H(t-\pi)\\ &= t\left[1-H(t-2)\right]+2\cos(t-\pi)H(t-\pi)\\ &= t\left[1-H(t-2)\right]-2\cos(t)H(t-\pi)\end{aligned}$$

وبالتالي فإن:

$$L^{-1}\left[F(s)\right]=\begin{cases} t & ; \quad 0<t<2\\ 0 & ; \quad 2<t<\pi\\ -2\cos t & ; \quad t>\pi\end{cases}$$

نظرية (٤): "تحويلات لابلاس للمشتقات التفاضلية"

إذا كانت f دالة متصلة وذات رتبة أسية α،وإذا كانت f' دالة متصلة قطعياً على الفترة $[0,\infty)$، فإن:

$$L\left[f'(t)\right]=sL\left[f(t)\right]-f(0).$$

البرهان: واضح أن:

$$\begin{aligned}L[f'] &= \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt\\ &= f(t)e^{-st}\Big|_{t=0}^{\infty}+s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\\ &= sL[f]-f(0)\end{aligned}$$

حيث إن $|f(x)|\le M e^{\alpha x}$ فإذا $s>\alpha$ فإن $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st}=0$.

نتيجة (٥): *إذا كانت* $f\,, f\,', \ldots, f^{\,(n-1)}$ *دوال متصلة على الفترة* $[0,\infty)$ *وإذا كانت* $f^{\,(n)}$ *دالة متصلة قطعياً على* $[0,\infty)$. *وإذا كانت الدوال* $f^{\,(k)}$ *لكل* $k=0,1,2,\ldots$ *هي دوال ذات رتبة أسية. فإن تحويل لابلاس* $L\left[f^{\,(n)}\right]$ *موجود ويعرف بالصيغة*

$$\begin{aligned} L\left[f^{\,(n)}(t)\right] &= s^{n}L\left[f\,(t)\right]-s^{n-1}f\,(0) \\ &\quad -s^{n-2}f\,'(0)-\ldots-sf^{\,(n-2)}(0)-f^{\,(n-1)}(0). \end{aligned}$$

مثال (٩): واضح أن:

$$\begin{aligned} L\left[2\alpha\cos\alpha t-\alpha^{2}t\sin\alpha t\right] &= L\left[\frac{d^{2}}{dt^{2}}(t\sin\alpha t)\right] \\ &= s^{2}L\left[t\sin\alpha t\right]-s\left(t\sin\alpha t\right)\Big|_{t=0}-\left(t\sin\alpha t\right)'\Big|_{t=0} \\ &= s^{2}L\left[t\sin\alpha t\right] \end{aligned}$$

ومن ذلك فإنه يمكن إيجاد $L\left[t\sin\alpha t\right]$. حيث:

$$\begin{aligned} s^{2}L\left[t\sin\alpha t\right] &= L\left[2\alpha\cos\alpha t-\alpha^{2}t\sin\alpha t\right] \\ &= 2\alpha L\left[\cos\alpha t\right]-\alpha^{2}L\left[t\sin\alpha t\right] \end{aligned}$$

وهكذا فإن:

$$\left(s^{2}+\alpha^{2}\right)L[t\sin\alpha t]=2\alpha L[\cos\alpha t]=2\alpha\frac{s}{s^{2}+\alpha^{2}}$$

ومن ثم:

$$L\left[t\sin\alpha t\right]=\frac{2\alpha s}{\left(s^2+\alpha^2\right)^2}$$

مثال (١٠): إذا كانت $f(t)=\sin^2 t$ فإن:

$$f'(t)=2\sin t\cos t=\sin 2t\ ,\qquad f(0)=0$$

وحيث إن $sL[f]-f(0)=L[f']$ فإن:

$$sL\left[\sin^2 t\right]-0=L\left[\sin 2t\right]=\frac{2}{s^2+4}$$

وبالتالي فإن:

$$L\left[\sin^2 t\right]=\frac{2}{s\left(s^2+4\right)}$$

نظرية (٦): "تحويل التكاملات"

إذا كانت f دالة متصلة قطعيا، وذات رتبة أسية α، على الفترة $[0,\infty)$ فإن:

$$L\left[\int_0^t f(u)du\right]=\frac{1}{s}L[f],\qquad s>\max\{0,\alpha\}.$$

البرهان: الدالة:

$$g(x)=\int_0^t f(u)du\ ,\quad g(0)=0$$

متصلة وذات رتبة أسية α. وأن $g'(t)=f(t)$ ماعدا النقاط t التي عندها تكون الدالة f غير متصلة. ولذلك فإن g' متصلة قطعيا على الفترة $[0,\infty)$. وبالتالي فإن:

$$L[f]=L[g']=sL[g]-0=sL\left[\int_0^t f(u)du\right]$$

وهذا يكافئ:

$$L\left[\int_0^t f(u)du\right]=\frac{1}{s}L[f]\ ,\qquad s>\max\{0,\alpha\}$$

ملاحظة: إذا كان $F(s)$ تحويل لابلاس للدالة f فإن:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s}F(s)\right]=\int_0^t f(u)du$$

مثال (١١): أوجد تحويل لابلاس العكسي:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s\left(s^2+\omega^2\right)}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right]$$

$$=\frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega u\,du=\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$$

مثال (١٢):

$$L\left[\frac{1}{\omega^2}\left(t-\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)\right]=L\left[\frac{1}{\omega^2}\int_0^t(1-\cos\omega\tau)d\tau\right]$$

$$=\frac{1}{\omega}L^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot L\left[\sin\omega t\right]\right]=\frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega\tau d\tau$$

$$=-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega\tau\Big|_{\tau=0}^{t}=\frac{1}{\omega^2}\left[1-\cos\omega t\right]$$

$$=L\left[\int_0^t \frac{1-\cos\omega\tau}{\omega^2}d\tau\right]=\frac{1}{s}L\left[\frac{1-\cos\omega t}{\omega^2}\right]$$

$$=\frac{1}{s^2\left(s^2+\omega^2\right)}.$$

نظرية (٧): "مشتقات التحويلات"

إذا كان $F(s)$ تحويل لابلاس لدالة f فإن:

$$L\left[t^n f(t)\right]=(-1)^n F^{(n)}(s),\quad n=1,2,\ldots$$

البرهان: حيث إن $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ فإن:

$$F'(s)=\int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(e^{-st}f(t)dt\right)=-\int_0^\infty te^{-st}f(t)dt$$

وبالتالي فإن:

$$F'(s)=-\int_0^\infty e^{-st}\{tf(t)\}dt=L\left[tf(t)\right]$$

بتكرار التفاضل بالنسبة إلى s نحصل على:

$$(-1)^n F^{(n)}(s)=\int_0^\infty e^{-st}\{t^n f(t)\}dt=L\left[t^n f(t)\right]$$

مثال (١٣): أوجد تحويل لابلاس للدوال $t\cos\omega t,\quad t^2\sin 4t$

الحل:

$$(1)\ L\left[t\cos\omega t\right]=-\frac{d}{ds}L\left[\cos\omega t\right]$$

$$=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)=-\left\{\frac{1}{s^2+\omega^2}-\frac{2s^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}\right\}$$

$$(2)\ L\left[t^2\sin 4t\right]=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}L\left[\sin 4t\right]$$

$$=\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{4}{s^2+16}\right]=4\frac{d}{ds}\left[\frac{-2s}{\left(s^2+16\right)^2}\right]$$

$$=-8\left[\frac{1}{\left(s^2+16\right)^2}-\frac{4s^2}{\left(s^2+16\right)^3}\right]$$

نظرية (٨): "تكامل التحويلات"

إذا كان $F(s)$ تحويل لابلاس لدالة $f(t)$. وإذا كانت الدالة $f(t)/t$ محدودة في جوار النقطة $t=0$ (أي أن $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$ موجودة) فإن:

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^\infty F(y)\,dy\,.$$

البرهان: واضح أن:

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}dt$$

$$=\int_0^\infty\left[\int_s^\infty e^{-yt}dy\right]f(t)dt$$

$$=\int_s^\infty\left(\int_0^\infty e^{-yt}f(t)dt\right)dy$$

$$=\int_s^\infty F(y)dy$$

مثال (١٤): أوجد

$$L\left[\frac{4\sin^2\left(\frac{\omega}{2}x\right)}{x}\right]=L\left[\frac{2(1-\cos\omega x)}{x}\right]$$

الحل: اجعل $f(x)=1-\cos\omega x$ فإن:

$$F(s)=L[f]=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

وبالتالي فإن:

$$L\left[\frac{4\sin^2\left(\frac{\omega}{2}x\right)}{x}\right]=2\int_s^\infty F(y)dy=2\int_s^\infty\left[\frac{1}{y}-\frac{y}{y^2+\omega^2}\right]dy$$

$$=\left[2\ln y-\ln\left(y^2+\omega^2\right)\right]\Big|_{y=s}^{\infty}=\ln\frac{y^2}{y^2+\omega^2}\Bigg|_{y=s}^{\infty}$$

$$=\ln 1-\ln\frac{s^2}{s^2+\omega^2}=-\ln\frac{s^2}{s^2+\omega^2}$$

نظرية (٩): "تحويل الدوال الدورية"

إذا كانت f *دالة متصلة قطعيا على الفترة* $[0,\infty)$ *ودورية ودورتها* T *فإنه لكل* $0<s$.

$$L[f]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-sx}f(x)dx$$

البرهان: حيث إن:

$$L[f]=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

$$=\int_0^T e^{-sx}f(x)dx+\int_T^\infty e^{-sx}f(x)dx \qquad (1)$$

باستخدام التعويض $x=t+T$ فإنه:

$$\int_T^\infty e^{-sx}f(x)dx=\int_0^\infty e^{-s(t+T)}f(t+T)dt$$

$$=e^{-sT}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \qquad (2)$$

لاحظ أن $f(t+T)=f(t)$ لأن f دالة دورية ودورتها T.

بالتعويض من (2) في (1) نحصل على:

$$L[f(x)]=\int_0^T e^{-sx}f(x)dx+e^{-st}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$=\int_0^T e^{-sx}f(x)dx+e^{-sT}L[f]$$

ومن ثم فإن:

$$\left[1-e^{-sT}\right]L[f]=\int_0^T e^{-sx}f(x)dx$$

$$L[f]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-sx}f(x)dx$$

مثال (١٥): أوجد تحويل لابلاس للدالة:

$$f(x)=\begin{cases}\sin Tx & ; \quad 0<x<\pi/T \\ 0 & ; \quad \pi/T<x<2\pi/T\end{cases}$$

الحل: الدالة f دورية ودورتها $\dfrac{2\pi}{T}$ حيث:

$$\sin T\left(x+\frac{2\pi}{T}\right)=\sin(Tx+2\pi)=\sin Tx$$

وبالتالي فإن:

$$L[f]=\frac{1}{1-e^{-2\pi s/T}}\int_0^{2\pi/T} e^{-sx}f(x)dx$$
$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi s/T}}\int_0^{\pi/T} e^{-sx}\sin Tx dx$$

وحيث إن:

$$I=\int_0^{\pi/T} e^{-sx}\sin Tx dx$$
$$=\frac{-1}{s}e^{-sx}\sin Tx\Big|_{x=0}^{\pi/T}+\frac{T}{s}\int_0^{\pi/T} e^{-sx}\cos Tx\, dx$$
$$=\frac{T}{s}\int_0^{\pi/T} e^{-sx}\cos Tx\, dx$$

$$=-\frac{T}{s^2}e^{-sx}\cos Tx\Big|_{x=0}^{\pi/T}-\frac{T^2}{s^2}\int_0^{\pi/T} e^{-sx}\sin Tx\, dx$$
$$=\frac{T}{s^2}\left[1+e^{-s\pi/T}\right]-\frac{T^2}{s^2}I$$

وهكذا فإن:

$$I = \frac{T}{s^2 + T^2}\left(1 + e^{-\frac{\pi s}{T}}\right)$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} L[f] &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s/T}} \cdot \frac{T\left(1 + e^{-\pi s/T}\right)}{s^2 + T^2} \\ &= \frac{T}{\left(s^2 + T^2\right)\left(1 - e^{-\pi s/T}\right)} \end{aligned}$$

تعريف (١): *إذا كانت g , f دوال قابلة للتكامل فإن التفاف g , f ويرمز له $f * g$ (ويقرأ convolution of f, g) يعرف بالصيغة:*

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_0^x f(t)\,g(x - t)\,dt \\ &= \int_0^x f(x - t)\,g(t)\,dt \end{aligned}$$

نظرية (١٠): "نظرية الالتفاف *Convolution Theorem* "

إذا كانت $F(s),\ G(s)$ تحويلات لابلاس للدوال $f(x), g(x)$ على الترتيب فإن $F(s)G(s)$ تحويل لابلاس لدالة الالتفاف $f * g$.

ملاحظة:

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=(f*g)(x)$$
$$=\int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

البرهان: حيث إن:

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)G(s)d\tau \qquad (1)$$

من جهة ثانية، وحيث إن $G(s)$ تحويل لابلاس للدالة g فإن:

$$e^{-s\tau}G(s)=L\left[g(x-\tau)H(x-\tau)\right]$$
$$=\int_0^\infty e^{-sx}g(x-\tau)H(x-\tau)dx$$

وحيث إن:

$$H(x-\tau)=\begin{cases}1 & ; \quad x>\tau\\ 0 & ; \quad x<\tau\end{cases}$$

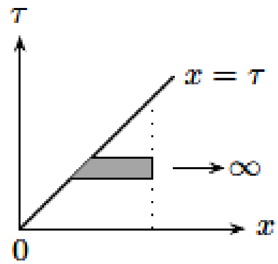
فإن:

$$e^{-s\tau}G(s)=\int_\tau^\infty e^{-sx}g(x-\tau)dx$$

وبالتعويض في (1) عن $e^{-s\tau}G(s)$

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty f(\tau)\left(\int_\tau^\infty e^{-sx}g(x-\tau)dx\right)d\tau$$
$$=\int_0^\infty\int_\tau^\infty e^{-sx}f(\tau)g(x-\tau)dx\,d\tau$$

هذا التكامل الثنائي على منطقة في المستوى $x\tau$ كما بالشكل التالي:



وبتغيير ترتيب التكامل نحصل على:

$$\int_0^\infty\int_\tau^\infty e^{-sx} f(\tau)g(x-\tau)\,dx\,d\tau$$
$$=\int_0^\infty\int_0^x e^{-sx} f(\tau)g(x-\tau)\,d\tau\,dx$$

ولذلك:

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\left[\int_0^x f(\tau)g(x-\tau)\,d\tau\right]dx$$
$$=\int_0^\infty e^{-sx}(f*g)(x)\,dx=L[f*g]$$

وهذا هو المطلوب.

ملاحظات:

(1) $f*g=g*f$ (الالتفاف إبدالي)

(2) $(f*g)*h=f*(g*h)$ (الالتفاف دامج)

(3) $f*(g+h)=f*g+f*h$ (الالتفاف يحقق قانون التوزيع)

(4) $f*0=0*f=0$

(5) $f*1\neq f$ (بوجه عام)

مثال (١٦): أوجد تحويل لابلاس العكسي للدالة

$$k(s)=\frac{2s}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

الحل: من الواضح:

$$k(s)=\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{2}{s^2+4}$$

وحيث إن:

$$L[\sin 2t]=\frac{2}{s^2+4}, \quad L[\cos t]=\frac{s}{s^2+1}$$

فإن:

$$L^{-1}[k(s)]=\int_0^t \cos(t-\tau)\sin 2\tau d\tau \qquad (1)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية

$$\sin 2\tau\cos(t-\tau)=\frac{1}{2}\{\sin(t+\tau)+\sin(3\tau-t)\}$$

في (1) نحصل على:

$$L^{-1}[k(s)]=\frac{1}{2}\int_0^x\{\sin(x+t)+\sin(3t-x)\}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left\{-\cos(\tau+t)-\frac{1}{3}\cos(3\tau-t)\right\}\Bigg|_{\tau=0}^{t}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\cos t - \cos 2t + \frac{1}{3}\left[\cos t - \cos 2t\right]\right\}$$

$$= \frac{2}{3}\left[\cos t - \cos 2t\right].$$

٢-٧ جدول تحويلات لابلاس *Laplace Transform Table*

$y = f(x)$	$Y(s) = L[f]$
1. x^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}},\ n > -1$
2. $x^n e^{ax}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
3. $x^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
4. $e^{ax} \sin bx$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$
5. $e^{ax} \cos bx$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$
6. $\sinh ax$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
7. $\cosh ax$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
8. $\frac{e^{ax} - e^{bx}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)},\ a \neq b$

$y=f(x)$	$Y(s)=L[f]$
9. $\dfrac{ae^{ax}-be^{bx}}{a-b}$	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)},\ a\neq b$
10. $x\sin ax$	$\dfrac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
11. $x\cos ax$	$\dfrac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
12. $x\sinh ax$	$\dfrac{2as}{\left(s^2-a^2\right)^2}$
13. $x\cosh ax$	$\dfrac{s^2-a^2}{\left(s^2-a^2\right)^2}$
14. $\dfrac{1}{a}e^{-x/a}$	$\dfrac{1}{1+as}$
15. $1-e^{-x/a}$	$\dfrac{1}{s(1+as)}$
16. $\dfrac{1}{a^2}xe^{-x/a}$	$\dfrac{1}{(1+as)^2}$
17. $e^{-x/a}(1-ax)$	$\dfrac{s}{(s+a)^2}$
18. $\dfrac{1}{a^2}(1-\cos ax)$	$\dfrac{1}{s\left(s^2+a^2\right)}$

$y=f(x)$	$Y(s)=L[f]$
19. $\frac{1}{a^3}(ax-\sin ax)$	$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$
20. $\frac{1}{2a^3}(\sin ax-ax\cos ax)$	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$
21. $\frac{1}{3}e^{-ax}-\frac{1}{3}e^{ax/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}ax-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}ax\right)$	$\frac{a^2}{s^3+a^3}$
22. $\frac{1}{2}(\sinh ax-\sin ax)$	$\frac{a^3}{s^4-a^4}$
23. $\frac{e^{-ax}}{\sqrt{\pi x}}$	$\frac{1}{\sqrt{s+a}}$

٨ تطبيقات تحويلات لابلاس في حساب تكاملات المحددة

Applications of Laplace Transforms to Definite Integrals

يستخدم تحويل لابلاس في حساب تكاملات محدودة تحتوي على بارامتر. وتعتمد الطريقة أساسا على تبديل ترتيب علامات التكامل، أي

$$L\int_a^b f\left(x,t\right)dx=\int_a^b Lf\left(x,t\right)dx\,.$$

ويمكن توضيح الطريقة بالأمثلة التالية.

مثال (١): احسب التكامل $\int_0^t \cos bx\,dx$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس للتكامل نجد أن

$$L\left\{\int_0^t \cos bx\,dx\right\}=\frac{1}{s}\frac{s}{s^2+b^2}=\frac{1}{s^2+b^2}$$

وبالتحويل العكسي فإن

$$\int_0^t \cos bx\,dx=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+b^2}\right\}=\frac{1}{b}\sin bt$$

مثال (٢): احسب التكامل $\int_0^t e^{ax}\sin bx\,dx$

الحل: باستخدام تحويل لابلاس نجد أن

$$L\left\{\int_0^t e^{ax}\sin bx\,dx\right\}=\frac{1}{s}\frac{b}{\left(s-a\right)^2+b^2}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{b}{s}-b\frac{s-a}{\left(s-a\right)^2+b^2}+a\frac{b}{\left(s-a\right)^2+b^2}\right]$$

وذلك باستخدام الكسور الجزئية. بتطبيق التحويل العكسي نجد أن

$$\int_0^t e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{1}{a^2+b^2}\left[b-be^{at}\cos bt+ae^{at}\sin bt\right].$$

مثال (٣): اوجد قيمة التكامل

$$f(t)=\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x\left(x^2+a^2\right)}dx\ .$$

الحل: بفرض أن $L\{f(t)\}=\hat{f}(s)$ فإن

$$\hat{f}(s)=\int_0^\infty \frac{dx}{x\left(x^2+a^2\right)}\int_0^\infty e^{-st}\sin tx\,dt$$

$$=\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x^2+s^2\right)\left(x^2+a^2\right)}$$

$$=\frac{1}{s^2-a^2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{1}{x^2+s^2}\right)$$

$$=\frac{1}{s^2-a^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{s}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{sa\left(s+a\right)}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right).$$

بتطبيق التحويل العكسي نحصل على المطلوب

$$f(t)=\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-at}\right).$$

مثال (٤): احسب التكامل

$$f(t)=\int_0^\infty \frac{\sin^2 tx}{x^2}dx\ .$$

الحل: حيث إن $2\sin^2 tx = 1-\cos 2tx$ ، وبفرض أن $L\{f(t)\} = \hat{f}(s)$ فإن

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4x^2}\right)dx = \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{d(2x)}{(2x)^2+s^2} = \frac{\pi}{2s^2}\operatorname{sgn}(s),$$

$$\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} 1, & s>0, \\ -1, & s<0. \end{cases}$$

بالتحويل العكسي نجد أن

$$f(t) = \frac{\pi t}{2}\operatorname{sgn}(t).$$

مثال (٥): احسب التكامل

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{x\sin tx}{x^2+a^2}dx .$$

الحل: باستخدام تحويل لابلاس، وبوضع $L\{f(t)\} = \hat{f}(s)$ نجد أن

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)(x^2+s^2)}$$

$$= \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+s^2} - \frac{a^2}{s^2-a^2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{1}{x^2+s^2}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{2s}\left(1 - \frac{a}{s+a}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{s+a}\right).$$

بأخذ التحويل العكسي فإن

$$f(t) = \frac{\pi}{2}e^{-at}.$$

9 تطبيقات تحويلات لابلاس في المعادلات التكاملية

Applications of Laplace Transforms to IEs

لإيجاد حل معادلة فولتيرا التكاملية

$$u(t)+\lambda\int_{0}^{t} g(t-\tau)u(\tau)\,d\tau = f(t),$$

فإنه يمكن استخدام تحويلات لابلاس. نظرية الالتفاف لتحويل لابلاس ستلعب دور في هذه الطريقة. بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة السابقة نحصل على

$$\hat{u}(s)=\frac{\hat{f}(s)}{1+\lambda\hat{g}(s)},$$

حيث $\hat{u}(s)=L\{u(t)\},\ \hat{f}(s)=L\{f(t)\},\ \hat{g}(s)=L\{g(t)\}$. باستخدام التحويل العكسي ينتج الحل المطلوب

$$u(t)=L^{-1}\left\{\frac{\hat{f}(s)}{1+\lambda\hat{g}(s)}\right\},$$

في كثير من المسائل يمكننا حساب التحويل العكسي باستخدام الكسور الجزئية. بالأمثلة التالية نبين هذه الطريقة في إيجاد حلول عدد من المعادلات التكاملية و التكاملية-التفاضلية.

مثال (١): إذا كان a, λ ثابتان فأوجد الحل للمعادلة التكاملية

$$u(t)=a+\lambda\int_{0}^{t} u(\tau)\,d\tau .$$

الحل: بتطبيق تحويل لابلاس فإن $\hat{u}(s)=\dfrac{a}{s-\lambda}$. ومن ثم باستخدام التحويل العكسي نجد أن $u(t)=a\,e^{\lambda t}$.

مثال (٢): أوجد الحل للمعادلة التكاملية-التفاضلية التالية تحت الشرط الابتدائي التالي

$$u(t)=a\sin t+2\int_0^t u'(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau,\quad u(0)=0.$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة التكاملية-التفاضلية نجد أن

$$\begin{aligned}\hat{u}(s)&=\frac{a}{s^2+1}+2L\{u'(t)\}L\{\sin t\},\\&=\frac{a}{s^2+1}+2\frac{s\hat{u}(s)-u(0)}{s^2+1}.\end{aligned}$$

وحيث إن $u(0)=0$ فإننا نحصل على

$$\hat{u}(s)=\frac{a}{(s-1)^2},$$

وباستخدام التحويل العكسي ينتج الحل المطلوب $u(t)=a\,t\,e^t$.

مثال (٣): حل المعادلة التكاملية

$$u(t)=at^n-e^{-bt}-c\int_0^t u(\tau)e^{c(t-\tau)}d\tau$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس للطرفين، بفرض ان $\hat{u}(s)=L\{u(t)\}$، فإن

$$\hat{u}(s)=\frac{a\,n!}{s^{n+1}}-\frac{1}{s+b}-c\hat{u}(s)L\{e^{ct}\}=\frac{a\,n!}{s^{n+1}}-\frac{1}{s+b}-\hat{u}(s)\frac{c}{s-c}.$$

ومنها فإننا نحصل على

$$\hat{u}(s)=\frac{s-c}{s}\left[\frac{a\,n!}{s^{n+1}}-\frac{1}{s+b}\right]$$
$$=\frac{a\,n!}{s^{n+1}}-\frac{a\,c\,n!}{s^{n+2}}-\frac{s-c}{s(s+b)}$$
$$=\frac{a\,n!}{s^{n+1}}-\frac{a\,c\,n!}{s^{n+2}}+\frac{c}{b\,s}-\left(1+\frac{c}{b}\right)\frac{1}{s+b},$$

وبأخذ التحويل العكسي ينتج

$$u(t)=a\,t^{n}-\frac{n!\,a\,c}{(n+1)!}t^{n+1}+\frac{c}{b}-\left(1+\frac{c}{b}\right)e^{-bt}.$$

مثال (٤): اوجد الحل للمعادلة التكاملية

$$u(t)=\sqrt{t}+\frac{\pi}{2}t-\int_{0}^{t}\frac{1}{\sqrt{t-x}}u(x)\,dx.$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس للطرفين نجد أن

$$L\{u(t)\}=L\left\{\sqrt{t}\right\}+\frac{\pi}{2}L\{t\}-L\{u(t)\}L\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}$$
$$=\frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}}+\frac{\pi}{2s^{2}}-\frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{s}}L\{u(t)\}$$

ومن ثم

$$L\{u\}=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}=\frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}}.$$

بتطبيق التحويل العكسي فإن الحل المطلوب يكون على الصورة

$$u(t)=\sqrt{t}.$$

10 تطبيقات تحويلات لابلاس في المعادلات التفاضلية الجزئية

Applications of Laplace Transforms to PDEs

الآن نبدأ في تطبيق تحويلات لابلاس في حل المعـادلات التفاضـلية الخطية. نحتـاج لتحديـد تحـويلات لابـلاس للمشـتقات التفاضـلية الجزئيـة. لذلك نستخدم نظريـة (٥) مـن الفصـل السـابق. إذا كانـت $U(x,s)$ تمثـل تحويل لابلاس للدالة $u(x,t)$، معرفة لكل $a \le x \le b$ و $0 \le t$ فإن:

$$L\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial u}{\partial x}dt$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty e^{-st}u(x,t)dt = \frac{d}{dx}L[u] = \frac{dU}{dx} \qquad (1)$$

نلاحظ أننا اعتبرنا التفاضل الأخير تفاضلاً عادياً لأن النتيجة هي دالة فـي x وبارامتر s, أي أننا نعتبر التكامل دالة في متغير واحد هو x.

بالمثل فإن:

$$L\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = \frac{d^2U}{dx^2} \qquad (2)$$

من جهة ثانية فإن:

$$L\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial u}{\partial t}dt$$

$$= \left\{e^{-st}u(x,t)\right\}\Big|_{t=0}^{\infty} + s\int_0^\infty u(x,t)e^{-st}dt$$

$$= -u(x,0) + sU(x,s) \qquad (3)$$

بالمثل يمكن حساب:

$$L\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=L\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]=sL\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]-\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$$

$$=s\left[sL[u]-u(x,0)\right]-u_t(x,0)$$

$$=s^2U(x,s)-su(x,0)-u_t(x,0) \qquad (4)$$

مثال (١): أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية

$$u_x=2u_t+u,\quad u(x,0)=6e^{-3x} \qquad (5)$$

بحيث يكون الحل u محدوداً لكل $x>0$ و $t>0$.

الحل: بتطبيق تحويل لابلاس على المعادلة التفاضلية (5) نجد أن:

$$L[u_x]=L[2u_t+u]=2L[u_t]+L[u] \qquad (6)$$

اجعل $U(x,s)=L[u]$. باستخدام النتائج (1)و (3) نحصل على:

$$\frac{dU}{dx}=2\{sU(x,s)-u(x,0)\}+U(x,s)$$

وحيث إن $u(x,0)=6e^{-3x}$ فإن المعادلة الأخيرة تصبح على الصورة:

$$\frac{dU}{dx}-(2s+1)U=-12e^{-3x} \qquad (7)$$

هذه معادلة تفاضلية عادية خطية. ولحل المعادلة (7) نوجد العامل المكامل

$$\mu(x)=\exp\left\{-\int(2s+1)dx\right\}=e^{-(2s+1)x}$$

وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة (7) على الصورة:

$$U(x,s)=e^{(2s+1)x}\left\{-12\int e^{-3x}e^{-(2s+1)x}dx+c(s)\right\}$$

$$=e^{(2s+1)x}\left\{-12\int e^{-2(s+2)x}dx+c(s)\right\}$$

$$=e^{(2s+1)x}\left\{\frac{6}{s+2}e^{-2(s+2)x}+c(s)\right\}$$

$$=\frac{6}{s+2}e^{-3x}+c(s)e^{(2s+1)x}$$

حيث c دالة اختيارية فـي s. حيـث إن $u(x,t)$ محـدودة عنـدما $x\to\infty$ فإننا نضع $c(s)=0$ وبالتالي يكون:

$$U(x,s)=\frac{6}{s+2}e^{-3x}$$

الآن بتطبيق تحويل لابلاس العكسي نجد أن:

$$u(x,t)=L^{-1}\left[U(x,s)\right]=6e^{-3x}L^{-1}\frac{1}{(s+2)}$$

$$=6e^{-3x}\cdot e^{-2t}$$

$$=6e^{-3x-2t}$$

هذا هو الحل المطلوب.

مثال (٢): أوجد حل المسألة:

$$u_x+xu_t=0\ ,\quad x>0,\ t>0 \tag{8}$$

$$u(x,0)=0\quad ,\quad u(0,t)=t \tag{9}$$

الحل: بتطبيق تحويل لابلاس، بالنسبة إلى t، على المعادلة التفاضلية(8) نحصل على:

$$\frac{dU}{dx}+x\left[sU\left(x,s\right)-u\left(x,0\right)\right]=0,\ x>0,\ s>0$$

حيث$U\left(x,s\right)$ هو تحويل لابلاس للدالة$u\left(x,t\right)$ بالنسبة إلى t.

باستخدام الشرط الأول في (9) نجد أن:

$$\frac{dU}{dx}+sxU\left(x,s\right)=0,\quad x>0,\quad s>0 \qquad (10)$$

معادلة(10) هي معادلة تفاضلية عادية قابلة لفصل المتغيرات حيث

$$\frac{dU}{U}=-sx\,dx$$

وبالتكامل ينتج أن:

$$\ln U=-\frac{1}{2}sx^{2}+c\left(s\right)$$

ومن هذه المعادلة نحصل على:

$$U\left(x,s\right)=C\left(s\right)e^{-\frac{1}{2}sx^{2}} \qquad (11)$$

حيث $C\left(s\right)=e^{c(s)}$ دالة اختيارية في s فقط. ولإيجاد c نستخدم الشرط الثاني في (9). من هذا الشرط نجد أن:

$$U\left(0,s\right)=L\left[u\left(0,t\right)\right]=L\left[t\right]=\frac{1}{s^{2}} \qquad (12)$$

من المعادلتين (11)و (12) نحصل على:

$$U(x,s)=\frac{1}{s^2}e^{-\frac{1}{2}sx^2}$$

لإيجاد $u(x,t)$ نطبق تحويل لابلاس العكسي على الدالة $U(x,s)$، فينتج أن:

$$u(x,t)=L^{-1}\left[U(x,s)\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}e^{-\frac{1}{2}sx^2}\right]$$

$$=\left(t-\frac{1}{2}x^2\right)H\left(t-\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$=\begin{cases} 0 & ;\ t<\dfrac{x^2}{2} \\ t-\dfrac{1}{2}x^2 & ;\ t>\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

مثال (٣): أوجد $u(x,t)$ بحيث

$$u_t=u_{xx}\ ,\qquad 0<x<1,\quad t>0 \qquad (13)$$

$$u(x,0)=3\sin 2\pi x\ ,\quad 0<x<1 \qquad (14)$$

$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0\ ,\quad t>0 \qquad (15)$$

الحل: بتطبيق تحويل لابلاس على المعادلة التفاضلية(13) ينتج أن:

$$\frac{d^2U}{dx^2}=sU(x,s)-u(x,0)$$

حيث $U\left(x,s\right)$ هو تحويل لابلاس للدالة $u\left(x,t\right)$ بالنسبة إلى t.

وباستخدام الشرط الابتدائي (14) نحصل على:

$$\frac{d^2U}{dx^2}-sU=-3\sin 2\pi x$$

هذه معادلة تفاضلية عادية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة وهي معادلة غير متجانسة. يمكن كتابة هذه المعادلة على الصورة:

$$\left(D_x^2-s\right)U=-3\sin 2\pi x$$

والحل العام لهذه المعادلة يكون على الصورة:

$$U\left(x,s\right)=c_1\left(s\right)e^{\sqrt{s}x}+c_2\left(s\right)e^{-\sqrt{s}x}+\frac{1}{D_x^2-s}\left\{-3\sin 2\pi x\right\}$$

وبالتالي فإن:

$$U\left(x,s\right)=c_1\left(s\right)e^{\sqrt{s}x}+c_2\left(s\right)e^{-\sqrt{s}x}+\frac{3}{4\pi^2+s}\sin 2\pi x \qquad (16)$$

لإيجاد الدوال الاختيارية c_1, c_2 نستخدم الشروط الحدية (15) حيث

$$L\left[u\left(0,t\right)\right]=L\left[0\right]=0, \qquad L\left[u\left(1,t\right)\right]=L\left[0\right]=0$$

من ذلك نحصل على:

$$U\left(s,0\right)=0, \qquad U\left(s,1\right)=0$$

بتطبيق هذه الشروط على المعادلة (16) ينتج أن:

$$c_1+c_2=0$$
$$c_1e^{\sqrt{s}}+c_2e^{-\sqrt{s}}=0$$

وهذه معادلات جبرية خطية في c_1, c_2، لها حل وحيد هو $c_1 = c_2 = 0$.

ومن ثم يكون:

$$U(x,s) = \frac{3}{s+4\pi^2}\sin 2\pi x .$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي فإن الحل المطلوب هو:

$$u(x,t) = L^{-1}\left[U(x,t)\right] = 3\sin(2\pi x) L^{-1}\left[\frac{1}{s+4\pi^2}\right]$$
$$= 3e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x)$$

مثال (٤): لحل مسألة القيمة الابتدائية – الحدية التالية:

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad 0 < x < a,\ t > 0 \qquad (17)$$

$$u(x,0) = b\sin\frac{\pi}{a}x, \qquad 0 < x < a \qquad (18)$$

$$u_t(x,0) = -b\sin\frac{\pi}{a}x, \qquad 0 < x < a \qquad (19)$$

$$u(0,t) = 0,\ u(a,t) = 0, \qquad t > 0 \qquad (20)$$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس للمعادلة التفاضلية (17) والشروط الحدية (20) فنحصل على:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = s^2U - bs\sin\frac{\pi}{a}x + b\sin\frac{\pi}{a}x$$
$$U(0,s) = U(a,s) = 0 \qquad (21)$$

والحل للمسألة (21) يكون على الصورة:

$$U(x,s)=\frac{a^2b(s-1)}{a^2s^2+\pi^2}\sin\frac{\pi}{a}x$$

ومن ثم بأخذ التحويل العكسي للدالة $U(x,s)$ فإن حل المسألة $(17)-(20)$ يكون على الصورة:

$$u(x,t)=b\sin\frac{\pi}{a}x\left[\cos\frac{\pi}{a}t-\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi}{a}t\right]$$

مثال (٥): حل المسألة التالية:

$$u_{tt}-4u_{xx}+u=16x+20\sin x,\qquad 0<x<\pi,\ \ t>0 \qquad (22)$$

$$u(x,0)=16x+12\sin 2x-8\sin 3x,\ \ 0<x<\pi \qquad (23)$$

$$u_t(x,0)=0,\qquad 0<x<\pi \qquad (24)$$

$$u(0,t)=0,\qquad u(\pi,t)=16\pi,\qquad t>0 \qquad (25)$$

الحل: بتطبيق تحويل لابلاس، بالنسبة إلى t، على المعادلة (22) نجد أن:

$$s^2U-su(x,0)-u_t(x,0)-4\frac{d^2U}{dx^2}+U=\frac{16x}{s}+\frac{20\sin x}{s}$$

وباستخدام الشروط الابتدائية $(24),(23)$ نحصل على:

$$\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{1}{4}\left(s^2+1\right)U$$
$$=-\frac{4\left(s^2+1\right)x}{s}-\frac{5\sin x}{s}-3s\sin 2x+2s\sin 3x \qquad (26)$$

لإيجاد حل للمعادلة التفاضلية (26) تحت الشروط الحدية

$$U(0,s)=0,\ U(\pi,s)=\frac{16\pi}{s} \qquad (27)$$

هذه الشروط تمثل صور لابلاس للشروط الحدية (25).

الحل العام للمعادلة (26) هو:

$$U(x,s)=c_1(s)e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\,x}+c_2(s)e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\,x}+\frac{16x}{s}$$
$$+\frac{20\sin x}{s\left(s^2+5\right)}+\frac{12s\sin 2x}{s^2+17}-\frac{8s\sin 3x}{s^2+37}$$

واستخدام الشروط الحدية (27) يؤدي إلى أن $c_1=c_2=0$ وبالتالي:

$$U(x,s)=\frac{16x}{s}+\frac{20\sin x}{s\left(s^2+5\right)}+\frac{12s\sin 2x}{s^2+17}-\frac{8s\sin 3x}{s^2+37}$$

وهذا يعطي الحل المطلوب:

$$u(x,t)=16x+4\sin x\left(1-\cos\sqrt{5}t\right)$$
$$+12\sin 2x\cos\sqrt{17}t-8\sin 3x\cos\sqrt{37}t.$$

١٠ تحويل ميلن التكاملي Millen Integral Transform

تعريف (١): إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة على الفترة $(0,\infty)$ فإن تحويل ميلن للدالة f يعرف بالصيغة

$$M\{f(x)\} = \tilde{f}(p) = \int_0^\infty x^{p-1} f(x)\,dx,$$

ويعرف تحويل ميلن العكسي بالصيغة

$$M^{-1}\{\tilde{f}(p)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-p} f(p)\,dp,$$

حيث c مقدار ثابت، و p عدد مركب.

<u>أمثلة:</u> (١) لكل $n>0,\ x\in(0,\infty)$ فإن

$$M\{e^{-nx}\} = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-nx}\,dx = \frac{\Gamma(p)}{n^p}$$

(٢) لكل $x\in(0,\infty)$ فإن

$$M\left\{\frac{1}{1+x}\right\} = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x},$$

باستخدام التعويض $x=\dfrac{t}{1-t}$ فإن $t=\dfrac{x}{1+x}$ وأن

$$M\left\{\frac{1}{1+x}\right\} = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{(1-p)-1}\,dt = \beta(p,1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p),$$

حيث $\beta(p,q),\Gamma(p)$ هي دوال جاما وبيتا على الترتيب.

(٣) لكل $x\in(0,\infty)$ فإن

$$M\left\{\frac{1}{e^{x}-1}\right\}=\int_{0}^{\infty}x^{p-1}\frac{dx}{e^{x}-1}.$$

باستخدام $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}=\frac{1}{1-e^{-x}}$ نجد أن $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}=\frac{1}{e^{x}-1}$. ومن ثم

$$M\left\{\frac{1}{e^{x}-1}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}x^{p-1}e^{-nx}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(p)}{n^{p}}=\Gamma(p)\zeta(p),$$

حيث $\zeta(p)$ هي دالة زيتا.

(٤) إذا كانت $x\in(0,\infty)$ فإن

$$M\left\{\frac{1}{(1+x)^{n}}\right\}=\int_{0}^{\infty}x^{p-1}(1+x)^{-n}dx,$$

بوضع $x=\frac{t}{1+t}$ نجد أن

$$M\left\{\frac{1}{(1+x)^{n}}\right\}=\int_{0}^{1}t^{p-1}(1-t)^{n-p-1}dt=\beta(p,n-p)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(n-p)}{\Gamma(n)}.$$

(٥) أثبت أن

$$M\{\cos kx\}=k^{-p}\Gamma(p)\cos\left(\frac{\pi p}{2}\right),\quad M\{\sin kx\}=k^{-p}\Gamma(p)\sin\left(\frac{\pi p}{2}\right).$$

الحل:

$$M\left\{e^{-ikx}\right\}=\int_{0}^{\infty}x^{p-1}e^{-ikx}dx=\frac{\Gamma(p)}{(ik)^{p}}=\frac{\Gamma(p)}{k^{p}}\left(\cos\frac{p\pi}{2}-i\sin\frac{p\pi}{2}\right),$$

وبفصل الأجزاء الحقيقية والتخيلية في الطرفين واستخدام الخاصية الخطية للتكامل نحصل على المطلوب.

خواص تحويل ميلن

نظرية (١): إذا كان $M\{f(x)\}=\tilde{f}(p)$ فإن

$$M\{f(ax)\}=a^{-p}\tilde{f}(p),\quad a>0 \tag{1}$$

$$M\{x^a f(x)\}=\tilde{f}(p+a) \tag{2}$$

$$M\{f(x^a)\}=\frac{1}{a}\tilde{f}\left(\frac{p}{a}\right) \tag{3}$$

$$M\{f'(x)\}=-(p-1)\tilde{f}(p-1) \tag{4}$$

$$M\{f''(x)\}=(p-1)(p-2)\tilde{f}(p-2) \tag{5}$$

بوجه عام

$$M\{f^{(n)}(x)\}=(-1)^n\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-n)}\tilde{f}(p-n) \tag{6}$$

بشرط أنه لكل $r=0,1,2,\cdots,(n-1)$ يكون $x^{p-r-1}f^{(r)}(x)=0$ عندما $x=0$ وعندما $x\to\infty$.

$$M\{x^n f^{(n)}(x)\}=(-1)^n\frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}\tilde{f}(p) \tag{7}$$

بشرط أنه لكل $r=0,1,2,\cdots,(n-1)$ يكون $x^{p+r}f^{(r)}(x)=0$ عندما $x=0$ وعندما $x\to\infty$.

$$M\left\{\left(x\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\right\}=(-1)^n p^n\tilde{f}(p),\ n\geq 1 \tag{8}$$

$$M\left\{\int_0^x f(t)dt\right\}=-\frac{1}{p}\tilde{f}(p+1). \tag{9}$$

البرهان:.

تعريف (٢): (نظريات الالتفاف لتحويل ميلن)

إذا كانت $f\,,g$ دوال قابلة للتكامل على الفترة $(0,\infty)$ فإن

$$f(x)*g(x)=\int_0^{\infty} f(t)g\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t},\quad f(x)\circ g(x)=\int_0^{\infty} f(tx)g(t)dt.$$

نظرية (٢): إذا كان $M\{f(x)\}=\tilde{f}(p),\ M\{g(x)\}=\tilde{g}(p)$ فإن

$$M\{f(x)*g(x)\}=M\left\{\int_0^{\infty} f(t)g\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}\right\}=\tilde{f}(p)\tilde{g}(p),\qquad (10)$$

$$M\{f(x)\circ g(x)\}=M\left\{\int_0^{\infty} f(tx)g(t)dt\right\}=\tilde{f}(p)\tilde{g}(1-p).\qquad (11)$$

وأن

$$M^{-1}\{\tilde{f}(p)\tilde{g}(p)\}=f(x)*g(x)=\int_0^{\infty} f(t)g\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t},\qquad (12)$$

$$M^{-1}\{\tilde{f}(p)\tilde{g}(1-p)\}=f(x)\circ g(x)=\left\{\int_0^{\infty} f(tx)g(t)dt\right\}.\qquad (13)$$

نظرية (٣): (خاصية بارسيفال)

إذا كان $M\{f(x)\}=\tilde{f}(p),\ M\{g(x)\}=\tilde{g}(p)$ فإن

$$M\{f(x)g(x)\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s)\tilde{g}(p-s)ds.\qquad (14)$$

بعبارة أخرى

$$\int_0^{\infty} x^{p-1}f(x)g(x)dx=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s)\tilde{g}(p-s)ds.\qquad (15)$$

بصفة خاصة عند وضع $p=1$ نحصل على صيغة بارسيفال لتحويل ميلن

$$\int_0^{\infty} f(x)g(x)dx=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\tilde{f}(s)\tilde{g}(1-s)ds. \qquad (16)$$

١١ تطبيقات تحويل ميلن التكاملي

Millen Integral Transform in Applications

مثال (١): أوجد الحل لمسألة القيم الحدية

$$x^2u_{xx}+xu_x+u_{yy}=0,\quad 0\le x<\infty,\ 0<y<1, \qquad (1)$$

$$u(x,0)=0,\qquad u(x,1)=\begin{cases}A, & 0\le x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases} \qquad (2)$$

حيث A مقدار ثابت.

الحل: بفرض ان $\tilde{u}(p,y)$ هو تحويل ميلن للدالة $u(x,y)$ بالنسبة إلى x،

فإن تطبيق التحويل على المعادلات المعطاة يؤدي إلى مسألة القيم الحدية

$$\tilde{u}_{yy}+p^2\tilde{u}=0,\quad 0<y<1,$$

$$\tilde{u}(p,0)=0,\qquad \tilde{u}(p,1)=A\int_0^1 x^{p-1}dx=\frac{A}{p},\quad p\ge 1.$$

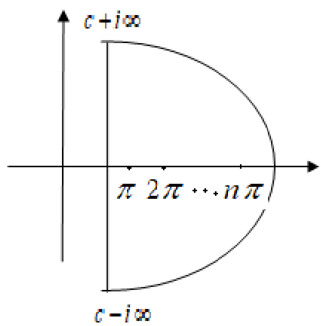
الحل لهذه المسالة يكون على الصورة

$$\tilde{u}(p,y)=\frac{A}{p}\frac{\sin py}{\sin p},\quad p\ge 1,\ 0\le y\le 1.$$

باستخدام التحويل العكسي فإن

$$u(x,y)=\frac{A}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^{-p}}{p}\frac{\sin py}{\sin p}dp,\quad 0<\operatorname{Re}p=c<\pi,\ 0\le y\le 1.$$

لكل p بحيث $|p|\ge 1$ فإن دالة تحليلية $\tilde{u}(p,y)$ ماعدا عند الأقطاب البسيطة $p=n\pi$ لكل $n=1,2,\cdots$. هذه الأقطاب تقع في نصف المستوى الأيمن.



وبالتالي فإن

$$u(x,y)=A\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Res}\left[\frac{x^{-p}}{p}\frac{\sin py}{\sin p},n\pi\right]$$

وبتطبيق نظرية البواقي فإن

$$u(x,y)=A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\pi}x^{-n\pi}\sin n\pi y,\quad x\ge 1,\ 0\le y\le 1.$$

ولكل $0\le x<1,\ 0\le y\le 1$ فإن $u(x,y)=Ay$.

مثال (٢): أوجد دالة الجهد $\phi(r,\theta)$ التي تحقق معادلة لابلاس

$$r^2\phi_{rr}+r\phi_r+\phi_{\theta\theta}=0,\quad 0<r<\infty,\ -\alpha<\theta<\alpha,$$

تحت الشروط الحدية

$$\phi(r,\alpha)=f(r),\quad \phi(r,-\alpha)=g(r),\quad 0\le r<\infty,$$

ولكل $\theta\in[-\alpha,\alpha]$ فإن $\phi(r,\theta)\to 0$ عندما $r\to\infty$.

الحل: عرف

$$\tilde{\phi}(p,\theta)=M\{\phi(r,\theta)\}=\int_0^\infty r^{p-1}\phi(r,\theta)dr.$$

بتطبيق تحويل ميلن على المعادلات المعطاة نحصل على المسألة التالية

$$\tilde{\phi}_{\theta\theta}+p^2\tilde{\phi}=0,\quad \tilde{\phi}(p,\alpha)=\tilde{f}(p),\quad \tilde{\phi}(p,-\alpha)=\tilde{g}(p).$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية السابقة يكون على الصورة

$$\tilde{\phi}(p,\theta)=A\cos p\theta+B\sin p\theta,$$

وباستخدام الشروط الحدية نجد أن

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(p,\theta)&=\frac{\tilde{f}(p)+\tilde{g}(p)}{2\cos p\alpha}\cos p\theta+\frac{\tilde{f}(p)-\tilde{g}(p)}{2\sin p\alpha}\sin p\theta\\&=\tilde{f}(p)\frac{\sin p(\theta+\alpha)}{\sin 2p\alpha}+\tilde{g}(p)\frac{\sin p(\theta-\alpha)}{\sin 2p\alpha}\\&=\tilde{f}(p)\tilde{h}(p,\theta+\alpha)+\tilde{g}(p)\tilde{h}(p,\theta-\alpha),\end{aligned}\tag{1}$$

حيث

$$\tilde{h}(p,\theta)=\frac{\sin p\theta}{\sin 2p\alpha}$$

ومنها فإن

$$\begin{aligned}h(r,\theta)&=M^{-1}\{\tilde{h}(p,\theta)\}=M^{-1}\left\{\frac{\sin p\theta}{\sin 2p\alpha}\right\}\\&=\left(\frac{1}{2\alpha}\right)\frac{r^{-\beta}\sin\beta\theta}{1+2r^{-\beta}\cos\beta\theta+r^{-2\beta}},\quad \beta=\frac{\pi}{2\alpha}.\end{aligned}\tag{2}$$

وذلك لأنه لكل $r \geq 1$ فإن

$$M^{-1}\left\{\frac{\sin p\theta}{\sin 2p\alpha}\right\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} r^{-p}\,\frac{\sin p\theta}{\sin 2p\alpha}\,dp$$

باستخدام التعويض $2\alpha p=t$ نجد أن

$$\begin{aligned}M^{-1}\left\{\frac{\sin p\theta}{\sin 2p\alpha}\right\}&=\frac{1}{2\alpha}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_*-i\infty}^{c_*+i\infty} r^{-t/2\alpha}\,\frac{\sin\left(t\theta/2\alpha\right)}{\sin t}\,dt\\&=\frac{1}{2\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{Re}s\left[r^{-t/2\alpha}\,\frac{\sin\left(t\theta/2\alpha\right)}{\sin\left(t-n\pi\right)},t=n\pi\right]\end{aligned}$$

وبحساب هذه البواقي ينتج ان

$$\begin{aligned}M^{-1}\left\{\frac{\sin p\theta}{\sin 2p\alpha}\right\}&=\frac{1}{2\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, r^{-n\pi/2\alpha}\sin\left(n\pi\theta/2\alpha\right)\\&=\frac{1}{2\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, r^{-n\beta}\sin\left(n\beta\theta\right)\qquad\left(\beta=\frac{\pi}{2\alpha}\right)\\&=\frac{1}{2\alpha}\operatorname{Im}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, r^{-n\beta}e^{i(n\beta\theta)}\right\}\\&=\frac{1}{2\alpha}\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{1+r^{-\beta}e^{i\beta\theta}}-1\right\}\end{aligned}$$

ومنها نحصل على النتيجة (٢).

بالعودة إلى النتيجة (١) وآخذ التحويل العكسي نجد أن

$$\begin{aligned}\phi(r,\theta)&=M^{-1}\left\{\tilde{\phi}(p,\theta)\right\}\\&=M^{-1}\left\{\tilde{f}(p)\tilde{h}(p,\theta+\alpha)\right\}+M^{-1}\left\{\tilde{g}(p)\tilde{h}(p,\theta-\alpha)\right\},\end{aligned}$$

باستخدام نظرية الالتفاف ينتج أن

$$\phi(r,\theta)=\int_0^\infty f(t)h\left(\frac{r}{t},\theta+\alpha\right)\frac{dt}{t}+\int_0^\infty g(t)h\left(\frac{r}{t},\theta-\alpha\right)\frac{dt}{t}$$
$$=\frac{r^\beta\cos\beta\theta}{2\alpha}\int_0^\infty\frac{t^{\beta-1}f(t)}{t^{2\beta}-2(rt)^\beta\sin n\theta+r^{2\beta}}dt$$
$$+\frac{r^\beta\cos\beta\theta}{2\alpha}\int_0^\infty\frac{t^{\beta-1}g(t)}{t^{2\beta}+2(rt)^\beta\sin n\theta+r^{2\beta}}dt.$$

مثال (٣): أوجد حل المعادلة التكاملية

$$\int_0^\infty f(t)k(xt)\,dt=g(x),\quad x>0.$$

الحل: بتطبيق تحويل ميلن على طرفي المعادلة بالنسبة إلى x، وبحسب نظرية الالتفاف نحصل على

$$\tilde{f}(1-s)\tilde{k}(s)=\tilde{g}(s),$$

بوضع $p=1-s$ ينتج ان

$$\tilde{f}(p)=\tilde{g}(1-p)\tilde{h}(p),\ \tilde{h}(p)=\frac{1}{\tilde{k}(1-p)}$$

باستخدام التحويل العكسي فإن الحل المطلوب يكون على الصورة

$$f(x)=M^{-1}\left\{\tilde{g}(1-p)\tilde{h}(p)\right\}=\int_0^\infty g(t)h(xt)\,dt,\quad h(x)=M^{-1}\left\{\tilde{h}(p)\right\}.$$

مثال (٤): حل المعادلة التكاملية $f(x)=e^{-ax}+\int_0^\infty f(t)e^{-x/t}dt$.

ملحق (١)

حساب البواقي وتطبيقاتها

Calculus of Residues and applications

تصنيف النقاط الشاذة المعزولة

تعريف (١): يقال لنقطة $a \in \mathbb{C}$ انها نقطة شاذة معزولة لدالة f إذا وجد $r > 0$ بحيث تكون الدالة f تحليلية على الحلقي المفتوح

$$B(a; 0, r) = \{z \in \mathbb{C}:\ 0 < |z - a| < r\}.$$

يمكن تصنيف النقاط الشاذة المعزولة كالتالي:

١. a نقطة شاذة قابلة للإزالة إذا وفقط إذا وجدت دالة تحليلية g على القرص $B(a; r)$ بحيث $g(z) = f(z)$ لكل $z \in B(a; 0, r)$. أي أن f قابلة للتمديد كدالة تحليلية على القرص $B(a; r)$، وتمديدها $\tilde{f}$ هو الدالة g.

٢. a قطب من رتبة m إذا وفقط إذا كانت a نقطة شاذة قابلة للإزالة للدالة $g(z) = (z - a)^m f(z)$ و $\tilde{g}(a) \neq 0$.

٣. a نقطة شاذة أساسية إذا وفقط إذا لم تكن a نقطة شاذة قابلة للإزالة وليست قطب.

أمثلة: ١) الدالة $f(z)=\frac{2z^2+z}{2z+1}$ تحليلية على الحلقي $B\left(-\frac{1}{2}:0,r\right)=\mathbb{C}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$ لأي $r>0$. وأن $a=-\frac{1}{2}$ نقطة شاذة قابلة للإزالة للدالة f.

٢) الدالة $h(z)=\frac{1}{z-1}$ تحليلية على الحلقي $B(1;0,r)=\mathbb{C}\backslash\{1\}$ لأي $r>0$. وأن $a=1$ قطب بسيط، أي قطب من الرتبة الأولى.

٣) للدالة $g(z)=\frac{\cos z-1}{z^3}$ قطب بسيط (من الرتبة الأولى) عند النقطة $a=0$.

٤) $a=0$ نقطة شاذة أساسية لكل من الدوال $w(z)=e^{\frac{1}{z}}, k(z)=z\sin\frac{1}{z}$.

نظرية (١): (مفكوك لورانت) إذا كان $0<r<R, a\in\mathbb{C}$. وكانت f دالة تحليلية على نطاق مفتوح Ω يحوي الحلقي $B(a;r,R)$ فإنه لكل $z\in B(a;r,R)$ يكون

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n.$$

حيث

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=t}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,\quad t\in(r,R).$$

أمثلة: ١) مفكوك لورانت للدالة $f(z) = \frac{1}{z-3}$ على الحلقي

$B = \{z; |z| < 3\}$ هو

$$f(z) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{3^{n+1}} z^n$$

٢) مفكوك لورانت للدالة $f(z) = \frac{1}{z-3}$ على الحلقي

$B = \{z; |z| > 3\}$ هو

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}}$$

٣) للدالة

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2} = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

فإن

أ) لكل $|z| < 1$ يكون

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) z^n$$

ب) لكل $1 < |z| < 2$ يكون

$$f(z)=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

ج) لكل $|z|>2$ يكون

$$f(z)=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{2}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^n}.$$

البواقي

تعريف (٢): إذا كانت a نقطة شاذة معزولة لدالة f لها مفكوك لورانت

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n,\quad z\in B(a;0,r),r>0$$

فإن باقي الدالة f عند النقطة a يساوي قيمة المعامل a_{-1} (معامل $\frac{1}{z-a}$)

ونكتب $Res(f,a)=a_{-1}$.

أمثلة:

(١

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \cdots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \mp \cdots$$

وبالتالي فإن للدالة $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ نقطة شاذة قابلة للإزالة عند $a = 0$ وأن

$$Res\left(\frac{\sin z}{z}, 0\right) = 0$$

(٢

$$\begin{aligned}
\frac{z^2}{(z-1)(z-i)^2}
&= \frac{(z-1+1)^2}{z-1} \cdot \frac{1}{\big(z-1+(1-i)\big)^2} \\
&= \left[(z-1) + 2 + \frac{1}{z-1}\right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{(1-i)^{n+1}} (z-1)^{n-1},
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن للدالة $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-i)^2}$ قطب بسيط عند $a = 1$

وأن

$$Res(f, 1) = \frac{1}{(1-i)^2} = \frac{i}{2}.$$

كذلك لدينا

$$\frac{z^2}{(z-1)(z-i)^2} = \frac{(z-i+i)^2}{(z-i)^2} \cdot \frac{1}{z-i-(1-i)}$$
$$= -\left[1 + \frac{2i}{z-i} - \frac{1}{(z-i)^2}\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}},$$

وبالتالي فإن للدالة $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-i)^2}$ قطب من الرتبة ٢ عند $a = i$ وأن

$$Res(f, i) = -\frac{2i}{1-i} + \frac{1}{(1-i)^2} = 1 - \frac{i}{2}.$$

٣) $Res\left(e^{\frac{1}{z}}, 0\right) = 1$.

نتيجة (١): إذا كانت a قطب من رتبة $m \geq 1$ لدالة $f(z)$ فإن

$$Res(f, a) = \lim_{z \to a} \frac{[(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}}{(m-1)!}.$$

مثال:

$$Res\left(\frac{z^2}{(z-1)(z-i)^2}, 1\right)$$
$$= \lim_{z \to 1}(z-1) \frac{z^2}{(z-1)(z-i)^2} = \frac{i}{2},$$

$$Res\left(\frac{z^2}{(z-1)(z-i)^2}, i\right)$$
$$= \lim_{z\to i}\left[(z-i)^2 \frac{z^2}{(z-1)(z-i)^2}\right]' = 1 - \frac{i}{2}.$$

نظرية البواقي

نظرية (٢): (نظرية البواقي)

إذا كانت f دالة تحليلية على وبداخل قوس أملس بسيط مغلق Γ ماعدا عند النقاط، والتي تقع داخل القوس، $a_1, a_2, \dots, a_n$ فإن

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f, a_j).$$

أمثلة:

$$\mathbf{1)} \quad \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{z^2}{(z-1)(z-i)^2}\,dz = 2\pi i \cdot \frac{i}{2} = -\pi,$$

$$\mathbf{2)} \quad \int_{|z-i|=\frac{1}{3}} \frac{z^2}{(z-1)(z-i)^2}\,dz = 2\pi i\left(1 - \frac{i}{2}\right),$$

$$3)\qquad \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{z^4+1}\,dz,\qquad \Gamma_R(t) = \begin{cases} Re^{it}, & 0 \le t \le \pi \\ \dfrac{2t-3\pi}{\pi}R, & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

فإن

$$\int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{z^4+1}\,dz = 2\pi i\left(Res\left(\frac{z^2}{z^4+1}, a_1\right) + Res\left(\frac{z^2}{z^4+1}, a_2\right)\right)$$

حيث a_1, a_2 هما قطبي الدالة $f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$ الواقعين في النصف العلوي من المستوى داخل المنحنى Γ_R. لاحظ أن أقطاب الدالة هي

$$a_k = \exp\left(\frac{(1+2k)\pi}{4} i\right).$$

وبالتالي

$$Res\left(\frac{z^2}{z^4+1}, a_1\right) = \frac{a_1^2}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)} = \frac{a_1^2}{a_1^3\left(1-\frac{a_2}{a_1}\right)\left(1-\frac{a_3}{a_1}\right)\left(1-\frac{a_4}{a_1}\right)} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$$

بالمثل نجد أن

$$Res\left(\frac{z^2}{z^4+1}, a_2\right) = -\frac{1+\mathrm{i}}{4\sqrt{2}}$$

ومن ثم فإن

$$\int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{z^4+1} dz = 2\pi i\left(\frac{1-i}{4\sqrt{2}} - \frac{1+\mathrm{i}}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

تطبيقات نظرية البواقي

نظرية (٣): إذا كانت $P(x), Q(x)$ كثيرتي حدود في $\mathbb{R}$ بحيث إن $2 + \deg P \leq \deg Q$ وأن $Q(x) \neq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$. وإذا كانت $a_1, a_2, \dots, a_n$ هي أصفار $Q(z)$ في $\mathbb{C}$ فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{Im\, a_j > 0} Res\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, a_j\right).$$

أمثلة:

$$1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \qquad 2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{x^2+2x+2} dx = 3\pi$$

نظرية (٤): إذا كان $\alpha > 0$ وكانت $P(x), Q(x)$ كثيرتي حدود في $\mathbb{R}$ بحيث إن

$1+\deg P \le \deg Q$ وأن $Q(x) \neq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$. وإذا كانت $a_1, a_2, \dots, a_n$ هي أصفار $Q(z)$ في $\mathbb{C}$ فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)e^{i\alpha x}}{Q(x)}dx = 2\pi i \sum_{Im\, a_j>0} Res\left(\frac{P(z)e^{i\alpha z}}{Q(z)}, a_j\right).$$

مثال: واضح أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}dx = 2\pi i\, Res\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1}, i\right) = \pi e^{-1},$$

ومن ثم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx = Re\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}dx\right\} = \pi e^{-1},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}dx = Im\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}dx\right\} = 0.$$

نظرية (٦): إذا كانت $f(\cos x, \sin x)$ دالة كسرية فإن

$$\int_{0}^{2\pi} f(\cos x, \sin x)dx = \int_{|z|=1} f\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}.$$

مثال: لكل $a \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$ فإن

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{a+\cos x} dx = \int_{|z|=1} \frac{2z}{z^2+2az+1} \frac{dz}{iz} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

تمارين

١) للدالة $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ بين أن

أ) الصفر نقطة شاذة أساسية.

ب) أوجد $\int_{|z|=1} f(z) dz$.

٢) اوجد قيم التكاملات التالية

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+1}{x^4+2x^2+1} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos^2 x}{x^4+1} dx$$

٣) لكل قيم $k = 0,1,2$ أوجد

$$Res\left(\frac{1}{z^3+1}, e^{\frac{(1+2k)\pi}{3}}\right)$$

من ثم أوجد $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$.

٤) لأي $\alpha \in \mathbb{R}$ أوجد

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{(x-2i)(x^2+1)} dx.$$