محاضرات في

التحليل الدالي

لطلبة الفرقة الرابعة

تربية عام – رياضيات

مقرر: بحتة ١٤ جزء أ

١. الفضاءات الاتجاهية
1. Vector Spaces

نقدم في هذا الفصل بعض المفاهيم الأساسية التي تخص الفضاءات الاتجاهية و الاستقلال الخطي والدوال الخطية وذلك نظرا لأهميتها في فهم بعض مواضيع التحليل الدالي وحتى لا يضطر القارئ للبحث عن مرجع آخر لفهم مثل هذه المواضيع.

١.١. الفضاء الاتجاهي
1.1. Vector Space

تقابلنا في الحياة كميات كثيرة منها من لها مقدار فقط مثل درجة الحرارة و الوزن. تسمى هذه الكميات بالكميات القياسية ، كما تقابلنا أيضا كميات أخرى لها مقدار و اتجاه مثل السرعة والقوة.تسمى هذه الكميات بالكميات الاتجاهية أو المتجهات.

تعريف (١ - ١ - ١)

لتكن V مجموعة اختيارية من متجهات و معرف عليها عمليتي الجمع (جمع المتجهات) والضرب بثابت (عدد حقيقي).إذا تحققت مجموعة الشروط التالية لكل المتجهات u,v,w في V والثوابت l,k فإن V تسمى فضاءً اتجاهيًا أو فضاء المتجه

١. $u+v\in V$.

٢. $u+v=v+u$.

٣. $u+(v+w)=(u+v)+w$.

٤. يوجد $0\in V$ بحيث أنه لكل $u\in V$ يكون $0+u=u+0$.

٥. لكل $u\in V$ يوجد عنصر $-u\in V$ يسمى معكوس المتجه u بحيث أن:

$u+(-u)=(-u)+u=0$.

٦. $ku\in V$.

٧. $k(u+v)=ku+kv$.

٨. $(k+l)u=ku+lu$.

٩. $k(lu)=(kl)(u)$.

١٠. $1u=u$.

المتجه 0 في الشرط الرابع يسمى بالمتجه الصفري *Zero Vector*.

ملاحظة (١ - ١ - ١)

في بعض التطبيقات نجد أنه من الضروري أن تكون الثوابت أعداد مركبة *Complex Numbers* بدلاً من أعداد حقيقة Real Numbers في تعريف الفضاء الاتجاهي. يسمى الفضاء الاتجاهي في هذه الحالة بالفضاء الاتجاهي المركب *Complex Vector Space*.

مثال (١ - ١ - ١)

إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فإن مجموعة جميع الأزواج المرتبة $(a_1,a_2,...,a_n)$ حيث $a_1,a_2,...,a_n$ أعداد حقيقية تسمى الفضاء ذو الـ n ـ بعد *n - Space* ويرمز له بالرمز $\mathbb{R}^n$.

ليكن $U=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ و $V=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ متجهين في الفضاء $\mathbb{R}^n$ و k عدد حقيقي .تعرف عمليتي الجمع والضرب بثابت كالآتي :

١. $U+V=(u_1+v_1,u_2+v_2,\dots,u_n+v_n)$.

٢. $kU=(ku_1,ku_2,\dots,ku_n)$.

يستطيع القارئ أن يبرهن بسهولة أن $\mathbb{R}^n$ مع هاتين العمليتين يكون فضاءً اتجاهيًا .

مثال (١ - ١ - ٢)

إذا كانت V مجموعة جميع المصفوفات من درجة $m\times n$ والتي عناصرها من الأعداد الحقيقية فإنه تحت عمليتي جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي فإن V تمثل فضاءً اتجاهيًا.

مثال (١ - ١ - ٣)

المجموعة P التي تتكون من كثيرات الحدود في المتغير x ومعاملاتها من الأعداد الحقيقية تمثل فضاءً اتجاهيًا تحت عمليتي الجمع والضرب بعدد حقيقي.

تعريف (١ - ١ - ٢)

إذا كان $U=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ و $V=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ متجهان في $\mathbb{R}^n$ ، فإن حاصل الضرب القياسي $u.v$ يعرف كالآتي :

$$U\cdot V=u_1v_1+u_2v_2+\dots+u_nv_n.$$

٤.١ الدوال الخطية.
1.4. Linear Functions

تعريف (١ - ٤ - ١)

نفرض أن كل من E,F فضاء اتجاهي على $\mathbb{R}$ و $f : E \to F$. يُقال أن f دالة خطية إذا كان

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \ , \forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

مثال (١ - ٤ - ١)

يستطيع القارئ بسهولة معرفة أن كل من الدالتين

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(x,y) = (2x+3y, 3x+y, 5x+7y)$$

و

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ g(x) = 2x$$

خطية.

بينما كل من الدالتين

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, h(x,y) = (xy, 2x+y, 3y+4x)$$

و

$$z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, z(x,y,\varepsilon) = (x^2, 2x+y+3)$$

ليست خطية .

نظرية (١ - ٤ - ١)

إذا كانـت $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ دالـة خطيـة فإنـه توجـد مصـفوفة مـن رتبـة $n\times m$ مـــن الأعـــداد الحقيقـــة ، $M_f=\left(c_{ij}\right)_{i=1,2,..n,\,j=1,2,...,m}$ ، بحيـــث إذا كان $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ عنصر من $\mathbb{R}^n$ و
فإن $f(x)=y=(y_1,y_2,......,y_m)$

$$(1.1)\begin{cases} y_1=c_{11}x_1+c_{12}x_2+...+c_{1n}x_n \\ y_2=c_{21}x_1+c_{22}x_2+...+c_{2n}x_n \\ . \\ . \\ . \\ y_m=c_{m1}x_1+c_{m2}x_2+...+c_{mn}x_n \end{cases}$$

أيضا ، إذا كانت $M=\left(c_{ij}\right)_{i=1,2,..n,\,j=1,2,...,m}$ ، مصفوفة من الأعداد الحقيقية من رتبة $m\times n$ فإنه توجد دالة خطية وحيدة $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ بحيث إذا كانت $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ و $y=f(x)=(y_1,...,y_m)$ فإن $y=(c_{ij})x$.

البرهان:

لتكن

$$e_1=\left(1,0,0,...,0\right),e_2=\left(0,1,0,0,...,0\right),...,e_n=\left(0,0,...,0\right)$$

نفرض أن

$$\begin{aligned} f\left(e_1\right)&=\left(c_{11},c_{21},...,c_{m1}\right) \\ f\left(e_2\right)&=\left(c_{12},c_{22},...,c_{m2}\right) \\ &\vdots \\ f\left(e_n\right)&=\left(c_{n1},c_{n2},...,c_{mn}\right) \end{aligned}$$

ليكن $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ عنصرًا اختياريًا من $\mathbb{R}^n$. لدينا

$$x=x_1e_1+x_2e_2+...+x_ne_n$$

لأن f دالة خطية فيكون لدينا

$$\begin{aligned}
y&=(y_1,y_2,.....,y_n)=f(x)\\
&=x_1f(e_1)+x_2f(e_2)+...+x_nf(e_n)\\
&=x_1(c_{11},c_{21},...,c_{m1})\\
&\quad+x_2(c_{12},c_{22},...,c_{m2})\\
&\quad\vdots\\
&\quad+x_n(c_{1n},c_{2n},...,c_{mn})\\
&=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

بالتالي فإن المعادلات (1.1) متحققة. الآن نفرض العكس أي أن لدينا مصفوفة من رتبة $m\times n$ من أعداد حقيقية على الصورة

$$(c_{ij})=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix}$$

نعرف دالة $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ كالآتي

$$f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\left(c_{ij}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

لنـــــــبرهن أن f دالـــــــة خطيـــــــة. لـــــــتكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ و

$x=(x_1,x_2,\ldots.x_n), z=(z_1,z_2,\ldots\ldots,z_n)\in\mathbb{R}^n$. لدينا

$$f\left(\alpha x+\beta z\right)=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta z_1\\ \alpha x_2+\beta z_2\\ \vdots\\ \alpha x_n+\beta z_n\end{pmatrix}$$

$$=\alpha\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$+\beta\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}$$

$$=\alpha f\left(x\right)+\beta f\left(z\right).$$

تعريف (١ - ٤ - ٢)

إذا كانت $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ دالة خطية و $M_f = (c_{ij})_{i=1,2,..n,\, j=1,2,...,m}$ مصفوفة من رتبة $m \times n$ وتحقق العلاقة (1.1) فإننا نقول أن المصفوفة M_f هي المصفوفة التي تقابل f. من الواضح أن هذه المصفوفة وحيدة.

مثال (١ - ٤ - ٢)

أوجد المصفوفة M_f التي تقابل الدالة الخطية

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$
$$f(x,y,z) = (2x+3y+z,\, 5x+3y,\, 2x+3y+2z,\, 5y+z).$$

الحل:

$$M_f = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال (١ - ٤ - ٣)

أوجد الدالة الخطية التي تقابل المصفوفة

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

الحل:

هذه مصفوفة من رتبة 3×4. إذن تقابلها دالة

$$f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3, f(x,y,z,v)=(2x+3y+3z+4v, y+z, x+3v).$$

الآن نود أن نبرهن أنه إذا كانت $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ دالة خطية فإنها تكون دالة متصلة. لتحقيق ذلك نعطى أولاً النظرية الآتية:

نظرية (١ - ٤ - ٢)

نفرض أن $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ دالة خطية وأن $M_f=(c_{ij})_{i=1,2,..n, j=1,2,...,m}$ هي المصفوفة التي تقابلها ولنفرض أن $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ و $y=f(x)=(y_1,...,y_m)$. إذن

$$(1.2)\quad \sum_{i=1}^{m}|y_i|^2\le\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|^2\right)\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2$$

البرهان:

من العلاقة (1.1) لكل $1\le i\le m$ ومن متباينة كوشي شفارتز لدينا

$$|y_i|^2=\left(\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j\right)^2$$
$$\le\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|^2\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2$$

وبالتالي

$$\sum_{i=1}^{m}|y_i|^2\le\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|^2\right)\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2$$

الأن نذكر القارئ بأنه إذا كان $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ عنصراً من $\mathbb{R}^n$ فإن $\|x\|^2=\sum_{j=1}^{n}|x_i|^2$.بالتالي فمن النظرية السابقة نستنتج أن

$$\|f(x)\|\leq(\sum_{i=1}^{i=m}\sum_{j=1}^{j=n}|c_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}\|x\|.$$

نظرية (١ - ٤ - ٣)

إذا كانت $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ دالة خطية فإنها تكون متصلة بانتظام.

البرهان:

لتكن $M_f=(c_{ij})_{i=1,2,..n,\,j=1,2,\dots,m}$ ، هي المصفوفة التي تقابل الدالة f.

نضع

$$A=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

إذا كان $x,z\in\mathbb{R}^n$فمن النظرية السابقة نحصل على

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(z)\|&=\|f(x-z)\|\\&\leq A\|x-z\|\end{aligned}$$

إذن f دالة متصلة بانتظام.

١.٢ الفضاءات المترية.
2.1. Metric Spaces.

لقـد توصـل الريـاضـي الفرنسـي فريشـيه «Fréchet» مـن خـلال أطروحتـه للحصـول علـى درجـة الـدكتوراه عـام ١٩٠٦م إلى مـا يسـمى اليـوم بالفضـاء المتري.

الفضـاء المتري هو مجموعة يمكـن أن تكـون عناصرها نقاطاً أو منحنيـات أو دوالاً أو مصـفوفات أو متواليـات الـخ ...، وهـذه المجموعـة مـزودة بمفهـوم المسـافة بين عناصرها.

تعـريف (٢ - ١ - ١)

يعرف الفضـاء المتري بالزوج (X,d) ، حيث X مجموعة ما غير خالية و d دالة حقيقة معرفة على $X \times X$ بحيث تتحقق الشروط التالية:

لكل x, y, z في X

(M1) $d(x,y) \geq 0$.

(M2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(M3) $d(x,y) = d(y,x)$.

(M4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

الخاصية (M4) تسمى بالمتباينة المثلية.

الدالة d تسمى دالة مسافة (Distance Function) والمقدار $d(x,y)$ يسمى المسافة بين النقطتين x و y.

نعطي فيما يلي أمثلة على فضاءات مترية

مثال (٢ - ١ - ١)

اعتبر الدالة $d_{\mathbb{R}}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0,\infty[$ المعرفة كما يلي:

$$d_{\mathbb{R}}(x,y)=|x-y|$$

لكل x, y, z في $\mathbb{R}$ لدينا :

$$\text{(M1)}\quad |x-y|\geq 0\Rightarrow d_{\mathbb{R}}(x,y)\geq 0,$$

$$\text{(M2)}\quad d_{\mathbb{R}}(x,y)=|x-y|=0\Leftrightarrow x=y,$$

$$\text{(M3)}\quad d_{\mathbb{R}}(x,y)=|x-y|=|y-x|=d_{\mathbb{R}}(y,x),$$

$$\text{(M4)}\quad d_{\mathbb{R}}(x,z)=|x-z|=|x-y+y-z|$$

$$\leq|x-y|+|y-z|=d_{\mathbb{R}}(x,y)+d_{\mathbb{R}}(y,z).$$

ومن ثم نستطيع القول بأن الدالة d هي داله مسافة على $\mathbb{R}$ والفضاء $(\mathbb{R},d)$ فضاء متري.

مثال (٢ - ١ - ٢)

لتكن X مجموعة ليست فارغة ولتكن $d_0:X\times X\to[0,\infty[$ حيث :

$$d_0(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

نلاحظ أن الشروط (M1)، (M2)، (M3) متحققة، لإثبات الشرط (M4) نفرض أن x, y, z عناصر في X. نعتبر الحالات الآتية:

a) $x=y=z$

من الواضح أن المتباينة (M4) تتحقق في هذه الحالة .

b) $x=y\neq z$

لدينا

$$d_0(x,y)=0, d_0(x,z)=1, d_0(z,y)=1$$

وبالتالي فإن

$$d_0(x,y)\le d_0(x,z)+d_0(z,y)$$

بالمثل نستطيع أن نبرهن صحة المتباينة (M4) إذا كانت $x=z\ne y$ أو $y=z\ne x$

c) $x\ne y\ne z$

من الواضح أن

$$.\ d_0(x,y)=d_0(x,z)=d_0(z,y)=1$$

الفضاء (X,d_0) يسمى الفضاء المتري المتقطع Discrete Metric

لتعريف دالة مسافة على R^n نحتاج إلى متباينة كوشي – بونياكوفسكي – شوارتز و النتيجة التي تليها.

نظرية (٢ - ١ - ١) (متباينة كوشي – بونياكوفسكي – شوارتز):

لأي مجموعة من الأعداد الحقيقية $x_1,x_2,\dots\dots.x_n,y_1,y_2,\dots\dots.y_n$ يكون :

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\le\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

البرهان:

نعتبر الدالة $f:R\to R$ حيث $f(t)=At^2+Bt+C$ و

$$A=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\quad,\quad B=\sum_{i=1}^{n}2x_iy_i\quad,\quad C=\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

نلاحظ أن :

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2t^2+2x_iy_it+y_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_it+y_i\right)^2\geq 0.$$

هذا يعني ان الدالة $f(t)$ لا يمكن ان يكون لها جذران حقيقيان مختلفان.

بالتالي فان مميز المعادلة $At^2+Bt+C=0$ لا يمكن ان يكون موجبًا. إذن

$$4\left[\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right]^2-4\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right]\leq 0.$$

من هذه العلاقة نستنتج مباشرة متباينة كوشي – بونياكوفسكي – شوارتز.

نتيجة (٢ – ١– ١)

لأي مجموعة من الأعداد الحقيقية $x_1,x_2,.......x_n,y_1,y_2,.......y_n$ يكون :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+b_i\right)^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

البرهان:

من متباينة كوشي(Cauchy) – بونياكوفسكي(Bunyakovsky) – شوارتز(Schwarz) لدينا

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2+2a_ib_i+b_i^2\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$
$$\le\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$
$$=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2.$$

مثال (٢ - ١ - ٣)

الدالة $d_{\mathbb{R}^n}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ المعرفة كما يلي:

$$d_{\mathbb{R}^n}(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2},\ x=(x_1,x_2,...,x_n),\ y=(y_1,y_2,...,y_n)$$

تحقق شروط دالة المسافة.

من الواضح ان الشروط $(M_1),(M_2),(M_3)$ تتحقق. الآن نبرهن (M_4)

لنفرض أن $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ ، $z=(z_1,z_2,...,z_n)$ $y=(y_1,y_2,...,y_n)$.

لكل $i=1,2,...,n$ نضع $b_i=z_i-y_i$ ، $a_i=y_i-x_i$.

من نتيجة (٢- ١- ١) نستنتج أن

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-x_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}$$

هذا يعني أن

$$d_{\mathbb{R}^n}(x,z)\le d_{\mathbb{R}^n}(x,y)+d_{\mathbb{R}^n}(y,z)$$

إذن $(\mathbb{R}^n,d)$ فضاء متري .

دالة المسافة المعرفة في المثال (٢- ١- ٣) تسمى بالدالة الاقليدية والفضاء $(\mathbb{R}^n,d_{\mathbb{R}^n})$ يسمى بالفضاء الاقليدي ذي البعد n.

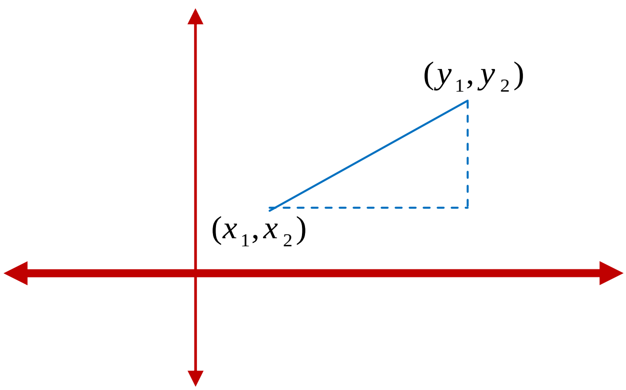
إذا وضعنا $n=2$ في المثال السباق نستنتج المثال التالي:

مثال (٢ - ١ - ٤)

الدالة $d_{\mathbb{R}^2}:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعرفة كما يلي :

$$d_{\mathbb{R}^2}((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

دالة مسافة على $\mathbb{R}^2$.



مثال (٢ - ١ - ٥)

افرض أن n عدد طبيعي. الدالة $d_\infty:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ المعرفة كما يلي :

$$d_\infty((x_1,x_2,....,x_n),(y_1,y_2,..,y_n))=\max\{|x_k-y_k|,k=1,2,..,n\}$$

دالة مسافة. من السهل إثبات الخواص (M1) و (M2) و(M3) . نبرهن الآن الخاصية (M4).

$$\begin{aligned} d_\infty(x,z) &= \max\{|x_k - z_k|, k = 12,\dots,n\} \\ &= \max\{|x_k - y_k + y_k - z_k|, k = 1,2,..,n\} \\ &\le \max\{|x_k - y_k|, k = 1,2,..,n\} + \max\{|y_k - z_k|, k = 1,2,..,n\} \\ &= d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z). \end{aligned}$$

إذن $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ فضاء متري .

مثال (٢ - ١ - ٦)

افرض أن n عدد طبيعي .الدالة $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ المعرفة كما يلي

$$d_1((x_1,x_2,\dots,x_n),(y_1,y_2,\dots,y_n)) = \sum_{k=1}^{k=n} |x_k - y_k|$$

دالة مسافة . من السهل إثبات الخواص (M1) و (M2) و(M3) . نبرهن الآن الخاصية (M4).لتوضيح ذلك نفرض أن $x = (x_1,x_2,\dots,x_n)$ و $y = (y_1,y_2,\dots,y_n)$ و $z = (z_1,z_2,\dots,z_n)$ في $\mathbb{R}^n$.

نلاحظ أن :

$$\begin{aligned} d_1(x,z) &= \sum_{k=1}^{k=n} |x_k - z_k| \le \sum_{k=1}^{k=n} |x_k - y_k| + \sum_{k=1}^{k=n} |y_k - z_k| \\ &= d_1(x,y) + d_1(y,z). \end{aligned}$$

مثال (٢ - ١ - ٧)

لتكن $C[a,b]$ مجموعة جميع الدوال المتصلة من الفترة المغلقة $[a,b]$ إلى $\mathbb{R}$. يستطيع القارئ أن يثبت أن الدالة

$$d(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}.$$

دالة مسافة على $C[a,b]$.

مثال (٢ - ١ - ٨)

نستطيع أن نعرف دالة مسافة أخرى على $C[a,b]$ كالتالي

$$. d_1(f,g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx,$$

في الأمثلة الآتية سنعتبر فضاءات تحتوي على متتابعات

مثال (٢ - ١ - ٩)

لتكن

$$\mathbb{R}^\infty=\{x=(x_1,x_2,..,x_n,..):x_n\in\mathbb{R}\},$$

و $d:\mathbb{R}^\infty\times\mathbb{R}^\infty\to[0,\infty]$ دالة معرفة كالاتي:

$$d(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|x_j-y_j|}{1+|x_j-y_j|},$$

حيث $x=(x_1,x_2,..,x_n,..)$ و $y=(y_1,y_2,..,y_n,..)$. من الواضح ان الدالة d حسنة التعريف وأن الشروط (M1)، (M2)، (M3) متحققة. لإثبات المتباينة المثلثية نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+=(0,\infty)$ كما يلي:

$$f(t)=\frac{t}{1+t},$$

نلاحظ ان

$$f'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}>0,\forall t\in\mathbb{R}^+.$$

أي ان الدالة f متزايدة . الآن نفرض أن $x=(x_1,x_2,......)$ و $y=(y_1,y_2,......)$ و $z=(z_1,z_2,......)$ ثلاثة متتابعات منتمية إلى $\mathbb{R}^\infty$.
لكل $j=1,2,.........$ نضع $a_j=y_j-x_j, b_j=z_j-y_j$ و .حيث أن f متزايدة فنجد أن

$$\begin{aligned}\frac{|a_j+b_j|}{1+|a_j+b_j|} &= f(|a_j+b_j|)\\ &\le f(|a_j|)+f(|b_j|)\\ &= \frac{|a_j|}{1+|a_j|}+\frac{|b_j|}{1+|b_j|}.\end{aligned}$$

هذا يؤدي إلى

$$\frac{|x_j-y_j|}{1+|x_j-y_j|}\le\frac{|x_j-z_j|}{1+|x_j-z_j|}+\frac{|z_j-y_j|}{1+|z_j-y_j|}, \forall j=1,2,....$$

بضرب طرفي هذه المتباينة في العدد $\frac{1}{2^j}$ نستنتج أن :

$$d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y).$$

الآن لكـل عـدد حقيقـي $p\ge 1$ نعتبر المجموعـة l^p التـي تحتـوي جميـع المتتابعـات الحقيقيـة $(x_n), n\ge 1$ بحيـث ان $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<\infty$. لتعريـف دالـة مسافة على l^p تحتاج الى متباينة مينوكوسكي Minkowski الاتية.

نظرية (٢ - ١ - ٢) متباينة مينوكوسكي

إذا كانت $p\in[1,\infty)$ و $a_1,a_2,...,a_n$ ، $b_1,b_2,...,b_n$ أعداداً حقيقية فإن

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

البرهان: من الواضح ان العلاقة متحققة عند $p=1$. لذلك نفرض ان $p>1$

ليكن q عددا حقيقيا بحيث أن $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.من متباينة هولدر لدينا

$$\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

بتطبيق هذه المتباينة ينتج ان:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|+|b_k|\right)^p = \sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|+|b_k|\right)^{p-1}|a_k| + \sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|+|b_k|\right)^{p-1}|b_k|$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|+|b_k|\right)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|+|b_k|\right)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(|b_k|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|+|b_k|\right)^p\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left(|b_k|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

لاحــظ ان $q(p-1)=p$. بقســـمة الطــرفين علـــى $\left(\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|+|b_k|\right)^p\right)^{\frac{1}{q}}$ و

ملاحظة أن $q(p-1)=p$ وأن $\frac{1}{p}=1-\frac{1}{q}$ نحصل على

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

نتيجة(٢ - ١ - ٢)

إذا كانـــت $a_1,a_2,...,a_n$ و $b_1,b_2,...,b_n$ اعـــداداً حقيقيـــة و $p\in[1,\infty)$

بحيث تكون المتسلسلتان $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p, \sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^p$ تقار بيتين فإن

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}(|a_i+b_i|)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

البرهان:

من نظرية (٢- ١- ٢) نعلم انه لكل عدد طبيعي n

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k\pm b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

حيث أن المتسلسلتين $\sum_{i=1}^{i=\infty}|a_i|^p,\sum_{i=1}^{i=\infty}|b_i|^p$ تقار بيتين .إذن لكل عدد طبيعي n

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n}(|a_i+b_i|)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{i=\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{i=\infty}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

لنجعل n تؤول الى ∞ فنجد أن

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}(|a_i+b_i|)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

مثال (٢ - ١ - ١٠)

نعتبر الدالة $d:l^p\times l^p\to[0,\infty)$ ، $d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

من نتيجة (٢- ١- ٢) نجد ان

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$$

هذا يعني ان الدالة d حسنة التعريف. من الواضح ان هذه الدالة تحقق الشروط (M1)، (M2)، (M3). لإثبات (M4) نفرض ان $z=(z_n)\in l^p,n\ge1$. لدينا من نتيجة (٢- ١- ٢)

$$d(x,z)=(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-z_i|^p)^{\frac{1}{p}}=(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i+y_i-z_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i-z_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le d(x,y)+d(y,z).$$

ملاحظة (٢- ١- ١)

نفرض أن (X,d) فضاء متري و A مجموعة جزئية غير خالية من X. إذا كان $x,y\in A$ فإن $d(x,y)$ هي المسافة بين x,y في الفضاء المتري (X,d) وبالتالي (A,d) يكون فضاءً متريًا أيضًا ويسمى فضاءً متريًا جزئيًا من (X,d).

تعريف (٢ - ١ - ٢)

نفرض أن (X,d) فضاء متري ، $p\in X$ و $A\subseteq X$ مجموعة جزئية غير خاليه.

١- نقول أن A محدودة إذا أمكن ايجاد عدد حقيقي موجب بحيث أن

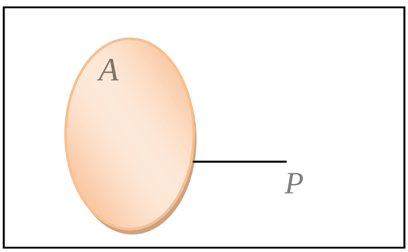
$$d(x,y)\le M,\forall x,y\in A.$$

٢- إذا كانت A محدودة، فيعرف قطرها بأنه

$$diam(A)=d(A)=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}.$$

٣- المسافة بين النقطة P والمجموعة الجزئية A تعرف بالصيغة

$$d(P,A)=\inf\{d(P,a):a\in A\}.$$



٤- إذا كانت $B \subseteq X$ مجموعة جزئية غير فارغة فإن المسافة بين A و B تعرف بالصيغة

$$d(A,B)=\inf\{d(x,y): x\in A, y\in B\}.$$

مثال (٢ - ١ - ١١)

١- في الفضاء المتري $(\mathbb{R},d_{\mathbb{R}})$ المسافة بين النقطة 4 والمجموعة الجزئية $A=[1,2]$ تساوي

$$d(4,[1,2])=\inf\{d(4,a): a\in[1,2]\}=2.$$

٢- جميع المجموعات في الفضاء المتري $(\mathbb{R},d_0)$ محدودة وقطرها لا يزيد عن الواحد .

٣- في الفضاء المتري l^2 اعتبر المجموعة $A=\{e_1,e_2,\ldots\ldots,e_n,\ldots\ldots\}$ حيث e_n هى المتتابعة التي جميع حدودها أصفار ما عدا الحد رقم n فيساوي الواحد. من التعريف نجد أن $d(A)=\sqrt{2}$.

ملاحظة (٢ - ٢ - ٣)

التقـاريـر الـثـلاث في نظريـة(٢- ٢- ٨) غـيـر متـكـافـئـة بالضـــرورة في الفضاءات التوبولوجية. انظر تمرين رقم (١٩) في تمارين٢- ٢.

٧.٢.٢ تكافؤ دالتي مسافة.
2.2.7. Equivalent of two Distance Functions.

تعريف (٢ - ٢ - ٩)

إفـرض أن d و ρ دالـتـي مسـافة علـى X. نقـول أن d و ρ متـكـافئـتـان إذا أمـكـن ايجاد عددين موجبين α و β بحيث لـكـل $x,y \in X$ لدينا

$$d(x,y) \le \alpha\rho(x,y) \le \beta d(x,y).$$

مثـال (٢ - ٢- ١١)

دوال المســافة d و d_∞ و d_1 متـكـافـئـة. افــرض أن $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ و $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ عنصرين من $\mathbb{R}^n$. لدينا

$$\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i| \le (\sum_{i=1}^{i=n}|x_i-y_i|^2)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{n}\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$$

هذا يعني أن d و d_∞ متـكـافئين. أيضا

$$(\sum_{i=1}^{i=n}|x_i-y_i|^2)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{i=1}^{i=n}|x_i-y_i| \le \sqrt{n}(\sum_{i=1}^{i=n}|x_i-y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

هذا يعني أن d و d_1 متـكـافئين. بالمثل نستطيع أن نبرهن أن

$$\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i| \le \sum_{i=1}^{i=n}|x_i-y_i| \le n\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|.$$

هذا يعني أن d_∞ و d_1 متـكـافئين.

مثـال (٢ - ٢- ١٢)

دالتـا المسـافة d و d_0 علـى $\mathbb{R}^n$ غـير متكـافئتين.افـرض أنـه يوجـد عـدد موجـب α بحيـث لكـل $\mathbb{R}^n$ لـدينا $d_\infty(x,y)\le \alpha d_0(x,y)$.نضـع $x=(0,0,...,0)$ و $y=(\alpha+1,0,...,0)$.مـن الواضـح أن $d_\infty(x,y)=\alpha+1$ و $d_0(x,y)=1$. هـذا يتنـاقض مـع الفـرض.إذن دالتـا المسـافة d و d_0 غـير متكافئتين.

الآن إذا كـان الفضـاء المـتري (X,d) يكـافئ توبولوجيـا الفضـاء المـتري (X,ρ) فهـل تكـون d و ρ متكـافئتين ؟ مـاذ عـن العلاقـة العكسـية؟ في النظرية التالية نجد الاجابة على هذين السؤالين.

نظرية (٢ - ٢ - ١٠)

افـرض أن كـل مـن (X,d) و (X,ρ). إذا كـانـت d و ρ متكـافئتين فـإن (X,d) و (X,ρ) متكـافئين توبولوجيًـا.عكـس المقولـة السـابقة غـير صـحيح بالضرورة.

البرهان

لأن d و ρ متكـافئتين فيوجد عددين موجبين α و β بحيث لكـل $x,y\in X$ لدينا

$$d(x,y)\le \alpha\rho(x,y)\le \beta d(x,y).$$

افرض أن (x_n) متتابعة تتقـارب الى عنصـر x في (X,d).من العلاقـة السـابقة نستنتج أن (x_n) تتقارب الى x في (X,ρ).بنفس الأسلوب نستطيع أن نثبت أنـه

إذا كانت (x_n) متتابعة تتقارب الى عنصر x في (X, ρ) فإن (x_n) تتقارب الى x في (X, d). بالتالي فإن (X, d) و (X, ρ) متكافئين توبولوجيا.

الآن اعتبر على $\mathbb{R}$ دالتي المسافة :

$d(x,y) = |x-y|$ و $\rho(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$. من الواضح أن المتتابعة (x_n) تتقارب الى عنصر x في $(\mathbb{R}, d)$ إذا وفقط كانت تتقارب الى x في $(\mathbb{R}, \rho)$. هذا يثبت أن $(\mathbb{R}, d)$ و $(\mathbb{R}, \rho)$ متكافئين توبولوجيا. الآن افرض أن يوجد عدد موجب α بحيث لكل $x, y \in \mathbb{R}$ لدينا $d(x,y) \le \alpha\rho(x,y)$.

نضع $x = \alpha + 5, y = 1$. إذن $\rho(x,y) = 1$ و $d(x,y) = \alpha + 4,$ و هذا تناقض.

نظرية (٢ - ٢ - ١١)

لأي عنصرين مختلفين $a \ne b$ في الفضاء المتري (X, d) توجد مجموعتان مفتوحتان G, H بحيث أن: $a \in H,\ b \in G,\ G \cap H = \phi$

البرهان

نفرض أن $a, b \in X$ $(a \ne b)$. إذن يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن $d(a,b) = \varepsilon$.

نضع $H = B_d(b, \frac{1}{3}\varepsilon),\ G = B_d(a, \frac{1}{3}\varepsilon).$ نبرهن ان $G \cap H = \phi$. نفرض أنه توجد نقطة p بحيث أن $p \in G \cap H \ne \phi.$ هذا يؤدي إلى أن

$$d(p,b) < \frac{1}{3}\varepsilon,\ d(p,a) < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

باستخدام الشرط M_4 من شروط الفضاء المتري (X, d) نحصل على

$$\begin{aligned} \varepsilon = d(a,b) &\le d(a,p) + d(p,b) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

اذن

$$G \cap H \ne \phi.$$

وهذا تناقض.

٣.٢ المتتابعات الكوشية في الفضاءات المترية
2.3. Cauchy Sequences in Metric Spaces

الان نتحدث عن مفهوم المتتابعات الكوشيه (Cauchy Sequences).

تعريف (٢ - ٣ - ١)

تسمى المتتابعة (x_n) في الفضاء المتري كوشيه اذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N = N(\varepsilon)$ بحيث

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon, \quad \forall m, n > N.$$

نظرية (٢ - ٣ - ١)

كل متتابعة متقاربة في فضاء متري (X, d) تكون متتابعة كوشيه.

البرهان

افرض أن (x_n) متتابعة متقاربة للعدد x و لتكن $\varepsilon > 0$. إذن يوجد عدد طبيعي $N = N(\varepsilon)$ بحيث

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N.$$

وعليه نجد أن لكل $m, n > N$

$$d(x_m, x_n) \le d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

هذا يعني ان المتتابعة (x_n) تكون كوشيه.

عكس النظرية السابقة غير صحيح، لتوضيح ذلك سنذكر مثال لمتتابعة كوشية ولكنها ليست تقاربية:

خذ $M=(0,\infty)$ و $d(x,y)=|x-y|$ لكل x,y في M، الفضاء (M,d) فضاء متري. لكن المتتابعة التي حدها العام $x_n=\dfrac{1}{n}$ كوشيه و ليست تقاربيه في (M,d) لأن الصفر غير موجود في M.

نظرية (٢ - ٣ - ٢)

كل متتابعة كوشيه في $(\mathbb{R},d_{\mathbb{R}})$ تكون تقاربية حيث $d_{\mathbb{R}}(x,y)=|x-y|$.

البرهان

لتكن (x_n) متتابعة كوشيه في $\mathbb{R}$. نبرهن أنها محدودة. من تعريف المتتابعة الكوشية يوجد عدد طبيعي K بحيث

$$m,n>K\Rightarrow d(x_m,x_n)<1.$$

من ذلك نحصل على $n>K\Rightarrow|x_n|<|x_K|+1$. ومنها يكون لكل $n\geq 1$

$$|x_n|\leq\max\{|x_1|,|x_2|,....,|x_k|\}+|x_{K+1}|+1.$$

هذا يبرهن أن (x_n) محدودة. بالتالي من نظرية بولوزانو فيراشتيرس نستنتج أنه توجد متتابعة (x_{n_k}) جزئية من (x_n) متقاربة لعنصر x.

نبرهن أن (x_n) تتقارب للعنصر x. ليكن $\varepsilon>0$. لأن (x_n) كوشية فيوجد عدد طبيعي K بحيث

$$m,n>K\Rightarrow d(x_m,x_n)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

الآن ليكن r عدد طبيعي بحيث $n_r > K$ و $d(x_{n_r}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. إذن لكل $n \ge K$ لدينا

$$d(x_n, x) \le d(x_n, x_{n_r}) + d(x_{n_r}, x) < \varepsilon$$

إذن المتتابعة (x_n) تتقارب للعنصر x.

نظرية (٢ - ٣ - ٣)

في $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ تكون المتتابعة متقاربة إذا وفقط إذا كانت كوشيه.

البرهان:

نفرض ان (x_m) متتابعة كوشيه في $\mathbb{R}^n$ حيث $x_m = \left(x_1^m, x_2^m ..., x_n^m\right), m > 1$ ، لتكن $\varepsilon > 0$ اذن يوجد عدد طبيعي N بحيث

$$p, q > N \Rightarrow d_{\mathbb{R}^n}\left(x_p, x_q\right) < \varepsilon \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} \left|x_k^p - x_k^p\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon .$$

بالتالي

$$p, q > N \Rightarrow \left|x_p^m - x_q^m\right| < \varepsilon, \qquad \forall k = 1, 2, ..., n.$$

اذن لكل $k = 1, 2, ..., n$ ، المتتابعة $\left(x_k^m\right)$ كوشيه في $\mathbb{R}$ و من نظرية (٢- ٣- ٢) يوجد عدد حقيقي x_k بحيث ان

$$\lim_{m \to \infty} x_k^m = x_k .$$

لدينا

$$\lim_{m \to \infty} d_{\mathbb{R}^n}\left(x_m, x\right) = \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \left|x_k^m - x_k\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\lim_{m \to \infty} \left|x_k^m - x_k\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0.$$

نظرية (٢ - ٣ - ٤)

إذا كان (X,d) فضاءً متريًا و $A \subset X$ فإن:

A مغلقة في (X,d) إذا وفقط إذا كان لكل متتابعة (x_n) من A وتتقارب إلى $x \in X$ فإن $x \in A$.

البرهان:

افرض أن (x_n) متتابعة من A وتتقارب إلى $x \in X$. هذا يؤدي الى أن x نقطة تراكم للمجموعة A. لأن A مغلقة فإن $x \in A$. الأن افرض أن الشرط متحقق. إذا كانت A منتهية فتكون مغلقة. إفرض أن A مجموعة غير منتهية و أن x نقطة تراكم لها .من نظرية (٢- ٢- ١٠) تكون x نقطة نهاية للمجموعة A. بالتالي توجد متتابعة (x_n) من A و تتقارب إلى x. من الشرط نجد أن $x \in A$. من نظرية (٢- ٢- ٧) نستنتج أن A مغلقة.

تعريف (٢ - ٣ - ٢)

لتكن A مجموعة من فضاء متري (M,d). يقال للنقطة $x \in A$ انها نقطة معزولة عن A اذا امكن ايجاد عدد معين موجب α بحيث ان $B(x,\alpha) \cap A = \{x\}$. هذا يعني أن x ليست نقطة تراكم للمجموعة.

مثال (٢ - ٣ - ٢)

اعتبر الفضاء المتري $(\mathbb{R},d_{\mathbb{R}})$ ولتكن $\mathbb{N}$ مجموعة الاعداد الطبيعية.

نلاحظ ان جميع نقاط $\mathbb{N}$ معزولة لان $B(x,\frac{1}{2}) \cap \mathbb{N} = \{x\}$ لكل $x \in \mathbb{N}$.

لاحظ كذلك في الفضاء المتري المتقطع (M ,d_0) جميع النقاط معزولة عن M لان $B(x ,\frac{1}{2})\bigcap M =\{x\}$ لكل $x \in M$.

٤.٢ الفضاءات المتري الكاملة
2.4. Complete Metric Spaces

١,٤,٢ تعريف وأمثلة
2.4.1. Definition and Examples

تعريف (٢ - ٤ - ١)

الفضاء المتري (X, d) يكون كاملاً (Complete) اذا كان كل متتابعة كوشيه في (X, d) متقاربة الى نقطة في (X, d).

مثال (٢ - ٤ - ١)

الفضاء المتري $((0,1), d)$ حيث:

$$d(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in (0,1),$$

ليس فضاءً متريًا كاملاً. لان المتتابعة $(\frac{1}{n})$ متتابعة كوشية لكنها ليست متقاربة لأي نقطة في الفترة $(0,1)$.

مثال (٢ - ٤ - ٢)

من نظرية(٢- ٣- ٢) نستنتج أن الفضاء المتري $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ كامل. ومن نظرية (٢- ٣- ٤) نستنتج أن الفضاء المتري $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ كامل.

مثال (٢ - ٤ - ٣)

الفضاء (M, d_0) كامل.

الحل:

إذا كانـت (x_n) متتابعـة كوشـية في (M,d_0) فيوجـد عـدد طبيعـي K بحيث

$$m,n>K \Rightarrow d\left(x_m,x_n\right)<\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow x_m=x_n .$$

ومن ثم فإن (x_n) تقاربية.

مثال (٢ - ٤ - ٤)

الفضاءالمتري $\left(C[a,b],d\right)$ يكون كاملًا.

البرهان:

لقد عرفنا سابقاً دالة مسافة على $C[a,b]$ على الصورة الاتية:

$$d(f,g)=\max_{t\in J}|f(t)-g(t)|, J=[a,b].$$

لتكن (f_n) متتابعة كوشيه من $C[a,b]$ ولتكن $\varepsilon>0$. اذن يوجد عدد طبيعي N بحيث انه لكل $m,n>N$

$$d(f_m,f_n)=\max_{t\in J}|f_m(t)-f_n(t)|<\varepsilon \qquad (5.1).$$

أى أن

$$m,n>N \Rightarrow |f_m(t)-f_n(t)|<\varepsilon, \quad \forall t\in J$$

وعليه لأي عنصر اختياري $t_0\in J$ لدينا

$$n,m>N \Rightarrow |f_m(t_0)-f_n(t_0)|<\varepsilon .$$

هذا يبرهن ان المتتابعة $(f_1(t_0), f_2(t_0),...)$ تكون متتابعة كوشية من أعداد حقيقية. وحيث ان $(\mathbb{R},d)$ فضاء متري كامل، فإن المتتابعة متقاربة، الى عنصر وحيد وليكن x_{t_0}.

أي انه لكل عنصر $t \in J$ يوجد عدد حقيقي وحيد x_t في $\mathbb{R}$ بحيث ان

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = x_t .$$

نعرف الدالة

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}, \ \text{،} \ f(t) = x_t .$$

بجعل $m \to \infty$ في العلاقة (5.1) نجد ان

$$n > N \Rightarrow \left| f_n(t) - f(t) \right| < \varepsilon, \quad \forall t \in J .$$

$$\Rightarrow \sup_{t \in J} \left| f(t) - f_n(t) \right| < \varepsilon.$$

هـذا يعـني ان المتتابعـة (f_n) تتقـارب بانتظـام الى الدالـة f . وبالتـالي فـان الدالة f تكون متصلة على J و ان f_n تتقارب الى الدالة f في $C[a,b]$.

مثال (٢ - ٤ - ٥)

الفضاء l^p كامل حيث $p \in [1,\infty[$.

البرهان:

لنفرض أن ($X_m = \left(x_1^m, x_2^m, ..., x_i^m, ...\right)$) متتابعة في l^p ، ولتكن $\varepsilon > 0$. اذن يوجد عدد طبيعي N بحيث ان:

$$n,m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k^n - x_k^m \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \qquad ....(5.2)$$

ينتج من ذلك انه لكل $k = 1, 2, ...$

$$\left| x_k^m - x_k^n \right|^p < \varepsilon^p, \qquad \forall n,m > N .$$

أي ان

$$\left| x_k^m - x_k^n \right| < \varepsilon, \qquad \forall n,m > N .$$

اذن لكل ......$k=1,2,$ المتتابعة $\left(x_k^m\right)$ كوشيه في $\mathbb{R}$ وحيث ان $\mathbb{R}$ فضاء متري كامل، يوجد لكل ......$k=1,2,$ عنصر وحيد في $\mathbb{R}$ بحيث ان $\lim_{m\to\infty} x_k^m = x_k$ نضع $x=\left(x_1,x_2,x_3,....\right)$ نبرهن ان $x\in l^p$. من العلاقة (5.2) لكل عدد طبيعي j لدينا

$$\sum_{k=1}^{j}\left|x_k^m - x_k^n\right|^p < \varepsilon^p, \qquad \forall n,m > N.$$

بجعل $n\to\infty$ نحصل على

$$\sum_{k=1}^{j}\left|x_k^m - x_k\right|^p < \varepsilon^p, \qquad \forall m > N.$$

بجعل $j\to\infty$ نحصل على

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^m - x_k\right|^p < \varepsilon^p, \qquad \forall m > N \qquad ....(5.3)$$

الان من متباينة مينوكوسكي لدينا

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^m + x_k^m\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^m\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^m\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^p + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^m\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

هذا يعني ان $x\in l^p$ ، العلاقة (5.3) تعني ان المتتابعة $\left(x_m\right)$ تتقارب الى x.

فيما يلي نعطي مثال لفضاء متري غير كامل.

مثال (٢ - ٤ - ٥)

لنعتبر الفضاء المتري $\left(C\left[-1,1\right],\rho\right)$ حيث $C\left[-1,1\right]$ مجموعة الدوال المتصلة على $\left[-1,1\right]$ و ρ دالة مسافة معرفة كالتالي:

$$\rho(f,g)=\left(\int_{-1}^{1}\left|f(t)-g(t)\right|^{2}dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

ولنعتبر المتتابعة (φ_n) الاتية

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}-1 & , \quad -1\le t\le -\frac{1}{n}\\ nt & , \quad -\frac{1}{n}\le t\le \frac{1}{n}\\ 1 & , \quad \frac{1}{n}\le t\le 1\end{cases}$$

نبرهن ان هذه متتابعة كوشيه. نفرض ان $n>m$

$$\int_{-1}^{1}\left(\varphi_n(t)-\varphi_m(t)\right)^{2}dt=\int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}}(-1-mt)^{2}dt+\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}(-nt-mt)^{2}dt$$

$$+\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}}(1-mt)^{2}dt<\frac{4}{3n}+\frac{2}{3m}+\frac{2}{m}$$

هذا يعني ان $\lim_{n,m\to\infty}d(\varphi_n,\varphi_m)=0$ ، نستنتج من ذلك ان المتتابعة (φ_n) كوشيه في $C[-1,1]$.الآن نفرض ان المتتابعة (φ_n) تتقارب الى دالة $f\in C[-1,1]$. لكل عدد طبيعي n لدينا

$$\int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}}|nt-f(t)|^{2}dt\le\int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}}(|nt|+|f(t)|)^{2}dt.$$

هذا يؤدي الى

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}}|nt-f(t)|^{2}dt=0$$

وبالتالي فإن

$$0=\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}|\varphi_n(t)-f(t)|^2\,dt$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{\frac{-1}{n}}|-1-f(t)|^2dt+\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}}|nt-f(t)|^2dt+\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1}|1-f(t)|^2dt$$

$$=\int_{-1}^{0}|-1-f(t)|^2dt+\int_{0}^{1}|1-f(t)|^2\,dt.$$

هذه المعادلة مع اتصال الدالة f دالة يؤكد أن

$$f(t)=\begin{cases}-1 & -1<t<0\\ 1 & 0<t<1\end{cases}$$

ولكن هذا يتناقض مع كون f متصلة.

مثال (٢ - ٤ - ٦)

لتكن $X=C[0,2]$. إذا كانت دالة المسافة المعرفة على X هي:

$$d(f,g)=\int_0^2|f(t)-g(t)|dt,$$

فإن (X,d) فضاء متري ليس كاملاً.

البرهان:

لإثبات أن (X,d) فضاء متري ليس كاملاً نعرف متتابعة الدوال

$$f_n(t)=\begin{cases}t^n, & 0\le t\le 1,\\ 1, & 1\le t\le 2.\end{cases}$$

لكل n,m $(n>m)$ لدينا

$$d\left(f_n,f_m\right)=\int_0^2\left|f_n-f_m\right|dt=\int_0^1\left|t^n-t^m\right|dt$$
$$=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right|$$

وهذا يعني ان المتتابعة $\left(f_n\right)$ كوشية. الان نفرض أن هذه المتتابعة تتقارب الى دالة $f\in C\left[-1,1\right]$. لكل عدد طبيعي n لدينا

$$|f(t)|-|t^n|\leq|t^n-f(t)|\leq|f(t)|+t^n$$

وبالتالي فإن

$$\int_0^1|f(t)|dt-\int_0^1|t^n|dt\leq\int_0^1|t^n-f(t)|dt\leq\int_0^1|f(t)|dt+\int_0^1 t^n dt$$

وبجعل $n\to\infty$ فينتج

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|t^n-f(t)|dt=\int_0^1|f(t)|dt.$$

من ذلك نستنتج أن

$$0=\lim_{n\to\infty}d\left(f_n,f\right)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left|t^n-f(t)\right|dt+\int_1^2\left|1-f(t)\right|dt$$
$$=\int_0^1\left|f(t)\right|dt+\int_1^2\left|1-f(t)\right|dt.$$

إذن $\int_0^1|f(t)|dt=0.$ و $\int_1^2|1-f(t)|dt=0$. لأن f دالة متصلة فيكون

$$f(t)=\begin{cases}0, & t\in(0,1)\\ 1, & t\in(1,2)\end{cases}$$

وهذ لا يمكن أن يتحقق مع إتصال الدالة f.

١.٤ الفضاءات المعيارية
4.1. Normed Spaces

في الفصل الثاني رأينا أننا نستطيع تعريف دالة مسافة على بعض الفضاءات الاتجاهية حيث لا توجد علاقة بين دالة المسافة والتركيبة الجبرية للفضاء الاتجاهي ، الأمر الذي لا يُمكننا من تخيل علاقة واضحة بين الخواص الجبرية والخواص الهندسية في الفضاءات المترية التي يكون فيها دالة المسافة معرفة على فضاء اتجاهي.

في هذا الفصل نُقدم للقارئ نوعًا آخر من الفضاءات المهمة في التحليل الدالي وهو الفضاء المعياري أو الفضاء المعياري المتجهي حيث ستظهر بوضوح العلاقة بين الخواص الجبرية والخواص الهندسية له.

يرجع تعريف الفضاء المعياري إلى كل من Banach H.S. و N. Wiener عام ١٩٢٢. هذا وقد تم إثبات العديد من خواص هذا الفضاء في أطروحة H.S.Banach والتي تم نشرها عام ١٩٣٢.

تعريف (٤ - ١ - ١):

إذا كان X فضاء اتجاهيًا على $\mathbb{C}$ فإننا نسمي معيار (Norm) على X كل دالة

$$\|\ \ \|: X \to \mathbb{R},$$

تحقق الشروط التالية:

$N_1) \forall x \in X, \| x \| \geq 0,$
$N_2) \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
$N_3) \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|,$
$N_4) \forall x, y \in X, \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|.$

الـزوج $(X, \| \ \|)$ يُسـمى فضـاء معياريًـا (Normed Space) والدالـة $\| \ \|$ تُسمى دالة معيار. ما يلي سنورد أمثلة على بعض الفضاءات المعيارية.

مثال (٤ - ١ - ١)

يستطيع القارئ أن يرى بسهولة أن $(\mathbb{R}, \| \ \|)$ فضاء معياري حيث

$$\| x \| = | x |, \forall x \in \mathbb{R}.$$

مثال (٤ - ١ - ٢)

نعرف على $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ الدالة الآتية:

$$\| x \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

حيث

$$\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

نلاحظ أنه لكل $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ، $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ و $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$N_1) \quad \| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \geq 0.$$

$$N_2)\quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = 0,$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0,$$

$$\Leftrightarrow x_k = 0,\ \forall k = 1,2,\dots,n.$$

$$\Leftrightarrow x = 0.$$

$$N_3)\ \|\alpha x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \alpha^2 x_k^2} = |\alpha|\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = |\alpha|\|x\|.$$

□

$$N_4)\ \|x+y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2}$$

$$\le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

$$= \|x\| + \|y\|.$$

ومن ذلك نستنتج أن $\left(\mathbb{R}^n, \|\ \|\right)$ فضاء معياري .

في المثال التالي نُقدم صيغ أخرى لدوال معيار على $\mathbb{R}^n$.

مثال (٤ - ١ - ٣)

لكل $x = \left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) \in \mathbb{R}^n$ نعرف :

١) $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.

٢) $\|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |x_k|$.

إذن كل من $\|\ \|_\infty, \|\ \|_1$ دالة معيار على $\mathbb{R}^n$.

الحل:

من الواضح أن

$$N_1)\quad \|x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k|\geq 0.$$

$$N_2)\quad \|x\|_1=0\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}|x_k|=0$$

$$\Leftrightarrow |x_k|=0,\ \forall k=1,2,...,n.$$

$$\Leftrightarrow x_k=0,\ \forall k=1,2,...,n.$$

$$\Leftrightarrow x=0,\forall x\in\mathbb{R}^n.$$

$$N_3)\quad \forall\alpha\in\mathbb{R},\ |\alpha x_k|=|\alpha||x_k|\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|\alpha x_k|=|\alpha|\sum_{k=1}^{n}|x_k|$$

$$=|\alpha|\|x\|_1,\forall x\in\mathbb{R}^n.$$

$$N_4)\quad \forall y=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R},\ \|x+y\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}|x_k|+\sum_{k=1}^{n}|y_k|$$

$$=\|x\|_1+\|y\|_1$$

بالتالي $\left(\mathbb{R}^n,\|\ \|_1\right)$ فضاء معياري. بالنسبة للدالة $\|\ \|_\infty$ لدينا ما يلي:

$$N_1)\quad \|x\|_\infty=\max_{1\leq k\leq n}|x_k|\geq 0.$$

$$N_2)\quad \|x\|_\infty=0\Rightarrow \max_{1\leq k\leq n}|x_k|=0$$

$$\Rightarrow |x_k|=0,\forall\ k=1,2,3,...n$$

$$\Rightarrow x_k=0,\ \forall k=1,2,3,...n$$

$$\Rightarrow x=0.$$

$$N_3)\quad \forall\alpha\in\mathbb{R},\ \|\alpha x\|_\infty=\max_{1\leq k\leq n}|\alpha x_k|=|\alpha|\max_{1\leq k\leq n}|x_k|=|\alpha|\|x\|_\infty.$$

$$N_4)\quad \forall \mathrm{y}=(\mathrm{y}_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n,\ \|x+y\|_\infty=\max_{1\leq k\leq n}|x_k+y_k|$$

$$\leq\max_{1\leq k\leq n}|x_k|+\max_{1\leq k\leq n}|y_k|=\ \|x\|_\infty+\|y\|_\infty$$

ومن ثم فإن $\left(\mathbb{R}^n,\|\ \|_\infty\right)$ فضاء معياري.

مثال (٤ - ١ - ٤)

الفضاءات $\left(\mathbb{C}^n,\|\ \|\right)$ ، $\left(\mathbb{C}^n,\|\ \|_1\right)$ ، $\left(\mathbb{C}^n,\|\ \|_\infty\right)$ معيارية حيث

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2}\ ,$$

$$\|z\|_1 = \sum_{k=1}^{n}|z_k|\ ,$$

$$\|z\|_\infty = \max_{1\le k\le n}|z_k|\ ,$$

لرؤية ذلك نتبع نفس الخطوات في المثال السابق.

مثال (٤ - ١ - ٥)

إذا عرفنـا علـى الفضـاء $C[a,b]$ الـذي يحـوي جميـع الـدوال الحقيقيـة المتصلة والمعرفة على الفترة $[a,b]$ الدالة:

$$\|f\| = \max_{t\in[a,b]}|f(t)|$$

فإن $\left(C[a,b],\|\ \|\right)$ فضاء معياري.

مثال (٤ - ١ - ٦)

نسـتطيع تعريـف دالـة معيـار أخـرى علـى الفضـاء $C[a,b]$ غـير الـتي تم تعريفهـــا في مثـــال(٤- ١- ٥)كـــالآتي :لكـــل $f\in C[a,b]$ نضـــع $\|f\| = \int_a^b |f(t)|dt$.

الحل:

لكل f و g في $C[a,b]$ ولكل $\alpha\in\mathbb{R}$ لدينا

$$N_1)\ \|f\| = \int_a^b |f(t)|dt \geq 0.$$

$$N_2)\ \|f\| = 0 \Leftrightarrow \int_a^b |f(t)|dt = 0$$

$$\Leftrightarrow |f(t)| = 0, \forall t \in [a,b]$$

$$\Leftrightarrow f(t) = 0, \forall t \in [a,b].$$

$$N_3)\ \|\alpha f\| = \int_a^b |\alpha f(t)|dt = |\alpha| \int_a^b |f(t)|dt = |\alpha| \|f\|.$$

$$N_4)\ \|f+g\| = \int_a^b |f(t)+g(t)|dt$$

$$\leq \int_a^b |f(t)|dt + \int_a^b |g(t)|dt$$

$$\leq \|f\| + \|g\|.$$

ومن ثم فإن $C[a,b]$ فضاء معياري حيث $\|f\| = \int_a^b |f(t)|dt$.

مثال (٤ - ١ - ٧)

اعتبر الفضاء l^∞ الذي يحتوي على كل المتتابعات الحقيقية المحدودة $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$.يستطيع القارئ أن يبرهن أن الدالة $\|x\| = \sup_k |x_k|$ تحقق شروط دالة المعيار ومن ثم يكون $(l^\infty, \|\ \|)$ فضاء معياريًا .

مثال (٤ - ١ - ٨)

لكل $1 \leq p < \infty$ ، $(l^p, \|\ \|)$ فضاء معياري حيث

. $l^p = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots), x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}$

و $\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty, \forall x\in\ell^p$.

الحل:

لكل x و y في l^p ولكل $\alpha\in\mathbb{R}$ لدينا

$$N_1)\ \|x\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\geq 0.$$

$$\begin{aligned}N_2)\ \|x\|=0 &\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=0\\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p=0\\ &\Leftrightarrow |x_k|^p=0, k=1,2,3,\ldots n\\ &\Leftrightarrow x_k=0, k=1,2,3,\ldots n\\ &\Leftrightarrow x=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_3)\ \|\alpha x\|&=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &=\left(|\alpha|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &=|\alpha|\|x\|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_4)\ \|x+y\|&=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(|x_k|+|y_k|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\Rightarrow \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|.\end{aligned}$$

إذن $\left(l^p, \|\ \|\right)(1 \le P < \infty)$ فضاء معياري.

مثال (٤ - ١ - ٩)

ليكن c هو الفضاء الاتجاهي الذي يحتوي على جميع المتتابعات الحقيقية التقاربية $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$. الدالة $\|x\| = \max\limits_{1 \le k} |x_k|$ تحقق شروط دالة المعيار ومن ثم يصبح c فضاء معياري.

مثال (٤ - ١ - ١٠)

ليكن c_0 هو الفضاء الاتجاهي الذي يحتوي على جميع المتتابعات الحقيقية $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ والتي تتقارب إلى الصفر. الدالة $\|x\| = \max\limits_{1 \le k} |x_k|$ تحقق شروط دالة المعيار ومن ثم يكون c_0 فضاء معياريًا.

العلاقة بين الفضاءات المعيارية والفضاءات المترية

الآن نوضح العلاقة بين الفضاءات المعيارية والفضاءات المترية .ليكن $\|\ \|$ دالة معيار على فضاء اتجاهي حقيقي X ولنعرف دالة حقيقية غير سالبة d على $X \times X$ كما يلي:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

من الواضح أنه لكل x, y, z من X لدينا:

١) $d(x, y) = \|x - y\| \ge 0$

٢) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

٣) $d(x, y) = \|-(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = d(y, x)$

٤)
$$\begin{aligned} d(x,y)+d(y,z) &= \|x-y\|+\|y-z\| \\ &\geq \|(x-y)+(y-z)\| \\ &= \|x-z\| = d(x,z). \end{aligned}$$

نستنتج من ذلك أن d دالة مسافة على X.أى أن كل دالة معيار على فضاء متجهي تولد دالة مسافة وبالتالي كل فضاء معياري يكون فضاء متريًا.

نلاحظ أن دالة المسافة المتولدة من دالة معيار تحقق الخاصيتين الآتيتين :

(١) $d(x+z,y+z)=d(x,y)$ لكل $x,y,z \in X$.

(٢) $d(\alpha x,\alpha y)=|\alpha| d(x,y)$ لكل $x,y \in X$ ولكل $a \in \mathbb{R}$.

التعليل:

(١)

$$\begin{aligned} d(x+z,y+z) &= \|x+z-(y+z)\| \\ &= \|x-y\| = d(x,y). \end{aligned}$$

(٢)

$$\begin{aligned} d(\alpha x,\alpha y) &= \|\alpha x-\alpha y\| \\ &= \|\alpha(x-y)\| \\ &= |\alpha| \|x-y\| \\ &= |\alpha| d(x,y). \end{aligned}$$

مما سبق نكون قد برهنا النظرية التالية:

نظرية (٤ - ١ - ١)

كل فضاء معياري $(X, \|\ \|)$ هو فضاء متري حيث $d(x,y)=\|x-y\|$ لكل $x,y \in X$ وأن دالة المسافة تحقق الخاصيتين (١) و (٢) .

نود أن نشير إلى أنه توجد دوال مسافة لا تنتج من دالة معيار .لتوضيح ذلك نعطي المثال الأتي:

مثال (٤ - ١ - ١١)

اعتبر الفضاء المتري $(\mathbb{R},d)$ حيث دالة المسافة d معرفة كالتالي:

$$d(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}, \forall x,y \in \mathbb{R},$$

نلاحظ أن دالة المسافة إذا كانت تنتج من دالة معيار يجب أن تحقق الخاصيتين (١) و(٢)في نظرية (٤- ١- ١). لدينا

$$d(\alpha x,\alpha y)=\frac{|\alpha x-\alpha y|}{1+|\alpha x-\alpha y|}=\frac{|\alpha||x-y|}{1+|\alpha||x-y|} \qquad (4.1)$$

$$|\alpha| d(x,y)=|\alpha|\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \qquad (4.2)$$

من المعادلتين (4.1) و (4.2) نلاحظ أنه عندما تكون $|\alpha| \neq 1$ فالخاصية $d(\alpha x,\alpha y)=|\alpha| d(x,y)$ غير متحققة ومن ثم فإن d لا تنتج من دالة معيار.

تمارين ١.٤

١- ليكن $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ دالتي معياريتين على الفضاء الاتجاهي X.أثبت أن

(أ) الدالة $\|\cdot\|_2 + \|\cdot\|_1$ دالة معيار على X.

(ب) إذا كان α عدد حقيقيًا موجبًا فإن الدالة $\alpha\|\ \|$ دالة معيار على X.

٢- نفرض أن X فضاء معياري و $x, y \in X$ أثبت أن

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\|$$

٣- لتكن d دالة مسافة مولدة من معيار على فضاء اتجاهي $X \neq \{0\}$ ولتكن ρ دالة على $X \times X$ معرفة كالآتي:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y, \\ d(x,y) + 1 & x \neq y \end{cases}$$

أثبت أن ρ دالة مسافة ولا يمكن توليدها من معيار.

٤- نفرض أن $X \neq \{0\}$ فضاء اتجاهي ولتكن d_0 دالة مسافة على X والتي عرفت في الفصل الثاني كالآتي:

$$d_0(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y, \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

أثبت أن d_0 لا يمكن توليدها من معيار.

٥- أثبت أن الدوال المعرفة في الأمثلة(٤- ١- ٤)،(٤- ١- ٥)،(٤- ١- ٧)،(٤- ١- ٩)و(٤- ١- ١٠) تحقق شروط دالة المعيار.

٢.٤ توبولوجيا الفضاءات المعيارية وفضاءات بناخ.
4.2. Topology on Normed Spaces and Banach Spaces

٢.٤. ١ توبولوجيا الفضاءات المعيارية
4.2.1 Topology on Normed Spaces

نعلم من نظرية (٤- ١- ١) أن كل فضاء معياريًا $(X,\|\ \|)$ يكون فضاء متريًا حيث $d(x,y)=\|x-y\|$ وبالتالي نستطيع تعريف الكرة المفتوحة التي مركزها x ونصف قطرها r كالتالي:

$$\begin{aligned} B(x,r) &= \{y \in X : d(x,y) < r\} \\ &= \{y \in X : \|x-y\| < r\}. \end{aligned}$$

وعلى ذلك فإن X يكون فضاء توبولوجي حيث تكون المجموعة $A \subseteq X$ مفتوحة إذا كان لكل $x \in A$ يوجد عدد حقيقي موجب r بحيث أن $B(x,r)=\{y \in X : \|x-y\| < r\} \subseteq A$. وتكون المجموعة مغلقة إذا كان مكملتها مفتوحة.

الآن نستطيع التحدث عن تقارب المتتابعات في الفضاءات المعيارية. وهذا ما نقدمه في التعريف التالي:

تعريف (٤ - ٢ - ١)

نقول أن المتتابعة (x_n) في الفضاء المعياري X متقاربة أو تتقارب إلى العنصر $x \in X$ إذا كان لكل عدد حقيقي موجب ε يوجد عدد طبيعي $N = N(\varepsilon)$ بحيث أن

$$n > N \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon .$$

يُعبرعن ذلك رياضياً بأن نكتب $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

نظرية (٤ - ٢ - ١)

إذا كان $(x_n),(y_n)$ متتابعتين بحيث أن $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ و $\lim_{n\to\infty} y_n = y$

فإن $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$.

البرهان:

لتكن $\varepsilon > 0$. بما أن $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ و $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ فيوجد عددين طبيعيين N_1, N_2 بحيث

$$n \ge N_1 \Rightarrow \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4.3)$$

$$n \ge N_2 \Rightarrow \|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2} . \qquad (4.4)$$

نضع $N = \max(N_1, N_2)$.من (4.3) و(4.4) لكل $n \ge N$ لدينا

$$\begin{aligned} \|(x_n + y_n) - (x + y)\| &= \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \\ &\le \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

إذن $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$.

نظرية (٤ - ٢ - ٢)

لتكن (λ_n) متتابعة من أعداد حقيقية وتتقارب إلى العدد λ و (x_n) متتابعة من فضاء معياري X وتتقارب إلى $x \in X$. إذن

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \lambda x$$

البرهان:

لتكن $\varepsilon > 0$. لأن (x_n) متتابعة تقاربية فيوجد عدد حقيقي موجب M بحيث

$$\|x_n\| < M \ , \forall n \geq 1$$

بما أن $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ إذن يوجد عدد طبيعي N_1 بحيث أن

$$n \geq N_1 \Rightarrow \|\lambda_n - \lambda\| < \frac{\varepsilon}{2M}. \qquad (4.5)$$

لأن $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ فيوجد عدد طبيعي N_2 بحيث أن

$$n \geq N_2 \Rightarrow \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}. \qquad (4.6)$$

من العلاقتين (4.5) و (4.6) لكل $n \geq \max(N_1, N_2)$ لدينا

$$\begin{aligned}
\|\lambda_n x_n - \lambda x\| &= \|\lambda_n x_n - \lambda x_n + \lambda x_n - \lambda x\| \\
&\leq \|\lambda_n x_n - \lambda x_n\| + \|\lambda x_n - \lambda x\| \\
&= \|(\lambda_n - \lambda) x_n\| + \|\lambda (x_n - x)\| \\
&= |\lambda_n - \lambda| \|x_n\| + |\lambda| \|x_n - x\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

هذا يعني $\lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \lambda x$.

تعريف (٤ - ٢ - ٢):

يُقال لمتتابعة (x_n) في فضاء معياري X أنها كوشية إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $N(\varepsilon)$ بحيث

$$n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow \| x_n - x_m \| < \varepsilon.$$

يستطيع القارئ أن يثبت بنفس الأسلوب المتبع في نظرية (٢- ٣- ١) أن كل متتابعة تقاربية تكون كوشية والعكس ليس صحيح بصفة عامة.

٤.٢.٢ فضاءات بناخ
4.2.2. Banach Spaces

تعريف (٤ - ٢ - ٣):

يُقال لفضاء معياري أنه كامل إذا كانت كل متتابعة كوشية تقاربية.

تعريف (٤ - ٢ - ٤)

الفضاء المعياري الكامل X يُدعى فضاء بناخ.

بإتباع الأسلوب المستخدم في الأمثلة (٢- ٤- ١)،(٢- ٤- ٢)،(٢- ٤- ٣) و (٢- ٤- ٤) نستطيع أن نبرهن أن $\mathbb{R}^n$ ، C^n ، $C[a,b]$ مع المعيار المعرف في مثال (٤- ١- ٥) و $\ell^p\,(p \geq 1)$ فضاءات بناخ. بالمثل بإتباع الأسلوب المستخدم في مثال(٢- ٤- ٥) نستطيع أن نبرهن أن الفضاء المعياري $C_2[a,b]$ ليس فضاء بناخ حيث دالة المعيارهي $\|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

نظرية (٤ - ٢ - ٣)

الفضاء الجزئي Y من فضاء بناخ X يكون كامل إذا كان وفقط إذا كان Y مغلقاً.

البرهان:

نفرض أن Y فضاء جزئي مغلق و (x_n) متتابعة كوشية في Y. إذن (x_n) متتابعة كوشية في X. لأن X فضاء بناخ فيوجد عنصر $x \in X$ بحيث تتقارب المتتابعة (x_n) إليه. لأن Y مغلق فنستنتج أن $x \in Y$ وهذا يؤدي إلى أن Y كامل. الآن نفرض أن Y كامل وأن (x_n) متتابعة من Y وتتقارب إلى عنصر $x \in X$. إذن (x_n) متتابعة كوشية في Y. حيث أن Y فضاء جزئي كامل ، إذن (x_n) تقاربية في Y وهذا يؤكد أن $x \in Y$.

تعريف (٤ - ٢ - ٥) المجموع المباشر (Direct Sum)

يعرف المجموع المباشر أو الضرب الكارتيزي للفضائين الاتجاهين Y, X بأنه

$$X \oplus Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

حيث تعرف عملية الجمع كالآتي:

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

و يعرف الضرب في عدد قياسي كالآتي:

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

من السهل اثبت أنه إذا كان كل من Y, X فضاء معياري فإن $X \oplus Y$ يصبح فضاء معياري حيث لكل $(x, y) \in X \oplus Y$ يكون

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

لاحظ أنه يرمز أحيانا للمجموع المباشر للفضائين الاتجاهين X, Y بالرمز $X \times Y$.

نظرية (٤ - ٢ - ٤)

$X \oplus Y$ فضاء معياري.

البرهان:

لنفرض أن $Z = X \oplus Y$ وأن $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{Z}$ و $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(1)\quad \|z_1\| = \|x_1\| + \|y_1\| \geq 0$$

$$\begin{aligned}(2)\quad \|z_1\| = 0 &\Leftrightarrow \|x_1\| = \|y_1\| = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = y_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow z_1 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3)\quad \|\alpha z_1\| &= \|\alpha x_1\| + \|\alpha y_1\| \\ &= |\alpha|\|x_1\| + |\alpha|\|y_1\| \\ &= |\alpha|(\|x_1\| + \|y_1\|) \\ &= |\alpha|\|z_1\| \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4)\quad \|z_1 + z_2\| &= \|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\| \\ &= \|(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\| \\ &= \|x_1 + x_2\| + \|y_1 + y_2\| \\ &\leq \|x_1\| + \|x_2\| + \|y_1\| + \|y_2\| \\ &= (\|x_1\| + \|y_1\|) + (\|x_2\| + \|y_2\|) \\ &= \|z_1\| + \|z_2\|\end{aligned}$$

وعليه Z فضاء معياري .

٤.٣. الفضاءات ذات البعد المنتهي وتكافؤ معيارين.
4.3. Finite Normed Spaces and Equivalent Two Norms

٤.٣. ١. الفضاءات ذات البعد المنتهي
4.3.1. Finite Normed Spaces

تلعب الفضـاءات المعيارية ذات البُعـد المنتهـي دوراً مهمـاً في بعض فـروع الرياضيات مثل نظرية التقريب وكذلك نظرية الطيف. لذلك نهتم في هذا الجـزء بتقـديم بعض خـواص الفضـاءات ذات البُعد المنتهي. تلعـب النظريـة الآتية دورا مهما في استنتاج تلك الخواص وسنذكرها بدون برهان.

نظرية (٤ - ٣ - ١)

إذا كانت $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ مجموعة مستقلة خطياً من المتجهات في فضاء معياري X فيوجد يوجد عدد حقيقي موجب $c = c(e_1, e_2, ..., e_n)$ بحيث لكل عدد n من الثوابت α_1 ، α_2 ، ... ، α_n لدينا

$$\|\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n\| \geq c(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|).$$

في النظرية التالية نطبق نظرية(٤- ٣- ١)

نظرية (٤ - ٣ - ٢)

كل فضاء جزئي بُعده منتهٍ Y من فضاء معياري X يكون كاملاً.
وبالتالي كل فضاء معياري بُعده منتهي يكون كامل.

البرهان:

لتكن (y_m) متتابعة كوشية في Y ونبرهن أنها متقاربة في Y. نفرض أن $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ أساس للفضاء Y. لكل $m \ge 1$ العنصر y_m يكون له تمثيل خطي وحيد على الشكل التالي:

$$y_m = \alpha_1^{(m)}e_1 + \alpha_2^{(m)}e_2 + ... + \alpha_n^{(m)}e_n$$

لتكن $\varepsilon > 0$. بما أن (y_m) متتابعة كوشية فيوجد عدد طبيعي N بحيث

$$m,r > N \Rightarrow \|y_m - y_r\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)})e_j\| < \varepsilon \qquad (4.7)$$

الأن من نظرية (٤- ٣- ١) يوجد $c > 0$ بحيث لكل $m,r > N$ لدينا

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}\right| \le \frac{1}{c}\left\|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)})e_j\right\| \qquad (4.8)$$

من العلاقتين(4.7)و (4.8)نستنتج أنه لكل $m,r > N$ ولكل $j = 1,2,...n$

$$\left|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}\right| \le \sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}\right| < \frac{\varepsilon}{c} \ .$$

إذن لكل $j = 1,2,...n$ تكون المتتابعة

$$(\alpha_j^{(m)}) = (\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}, ..., \alpha_j^{(n)}, ...)$$

كوشية في $\mathbb{C}$. لأن $\mathbb{C}$ فضاء كامل فلكل $j = 1,2,...n$ توجد $\alpha_j \in \mathbb{C}$ بحيث $\lim_{m\to\infty} \alpha_j^{(m)} = \alpha_j$. نضع $y = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$. من الواضح أن $y \in Y$. علاوة على ذلك

$$\lim_{m\to\infty}\|y_m - y\| = \lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j^{(m)} - \alpha_j)e_j\right\|$$
$$\leq \sum_{j=1}^{n}\lim_{m\to\infty}\left|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j\right| = 0.$$

إذن Y فضاء كامل.

لأن كل فضاء جزئي كامل يكون مغلق فمن النظرية السابقة لدينا النتيجة التالية

نتيجة (٤ - ٣ - ١)

كل فضاء جزئي بُعده منتهٍ Y من فضاء معياري X يكون مغلقاً في X .

نريد أن نقدم نتيجة F. Riesz التي أثبتها عام ١٩١٨ والتي تنص على أنه إذا كانت كرة الوحدة المغلقة متراصة فإن بُعد الفضاء المعياري يكون منتهي. نحتاج إلى النظرية التالية التي برهنها أيضاً Riesz .

نظرية (٤ - ٣ - ٥) (Riesz's Lemma)

ليكن Z فضاء معياري و Y فضاء جزئي مغلق فعليا. إذن لكل عدد حقيقي θ من الفترة $(0,1)$ يوجد z في $Z-Y$ بحيث $\|z\|=1$ و $\|z-y\|\geq\theta$ لكل $y\in Y$.

البرهان:

نفرض أن $\theta\in(0,1)$ و v_0 عنصر من $Z-Y$. نضع

$$a=d(v_0,Y)=\inf_{y\in Y}\|v_0-y\|.$$

نلاحظ أن $a>0$ لأن Y مغلقة و $v_0\notin Y$. من تعريف أكبر حد سفلي يوجد $y_0\in Y$ بحيث أن

$$a\leq\|v_0-y_0\|\leq\frac{a}{\theta} \tag{4.9}$$

لاحظ أن $\frac{a}{\theta}>a$ بسبب أن $0<\theta<1$. نضع $c=\frac{1}{\|v_0-y_0\|}$ و $z=c(v_0-y_0)$. من الواضح أن $\|z\|=1$. الآن نبرهن أن $\|z-y\|\geq\theta$ ، لكل y في Y. لتوضيح ذلك لتكن $y\in Y$. لدينا

$$\|z-y\|=\|c(v_0-y_0)-y\|=c\,\|v_0-y_0-c^{-1}y\|=c\,\|v_0-y_1\|.$$

حيث $y_1=y_0+c^{-1}y$. لأن Y فضاء جزئي ، $y_1\in Y$. وبالتالي $\|v_0-y_1\|\geq a$. من (4.9) نستنتج أن:

$$\|z-y\|=c\,\|v_0-y_1\|\geq ca=\frac{1}{\|v_0-y_0\|}\cdot a\geq a\cdot\frac{\theta}{a}=\theta$$

وهو المطلوب.

من تمهيدية Riesz's السابقة نستطيع أن نبرهن النظرية التالية:

نظرية (٤ - ٣ - ٦)

إذا كانت كرة الوحدة المغلقة في الفضاء المعياري X متراصة فإن بُعده يكون منتهي.

البرهان:

لتكن $M=\{x\in X:\|x\|\leq 1\}$ كرة الوحدة المغلقة في الفضاء المعياري X ولنفرض أن $\dim X=\infty$. لنختار عنصر x_1 في X بحيث أن $\|x_1\|=1$ وليكن X_1 هو الفضاء الجزئي ذو بُعد واحد والمتولد من x_1. أي أن

$$X_1=\{\alpha x_1:\alpha\in\mathbb{C}\}.$$

من نتيجة (٤- ٣- ١) الفضاء الجزئي X_1 مغلق. نلاحظ كذلك أن X_1 مجموعة جزئية فعلاً من X لأن $\dim X=\infty$. باستخدام نظرية (٤- ٤- ٢) يوجد x_2 في $X-X_1$ بحيث $\|x_2\|=1$ و $\|x_2-x_1\|\geq\frac{1}{2}$. ليكن X_2 هو الفضاء الجزئي الذي بُعده اثنان والمتولد من x_1 ، x_2.

أي أن

$$X_2=\{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2:\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}\}.$$

مرة أخرى باستخدام نظرية (٤- ٤- ٢) يوجد $x_2\in X-X_2$ بحيث $\|x_2\|=1$ ، $\|x_3-x_1\|\geq\frac{1}{2}$ و $\|x_3-x_2\|\geq\frac{1}{2}$. بتكرار الخطوات السابقة نستطيع تكوين متتابعة (x_n) من M بحيث

$$m\neq n\Rightarrow\|x_m-x_n\|\geq\frac{1}{2}.$$

من الواضح أنه لا توجد متتابعات جزئية متقاربة من المتتابعة (x_n) وهذا يبرهن أن M ليست متراصة.

٣.٣.٤. نظرية ارزيلا- أسكولي
4.3.3. Arrzela-Ascoli' Theorem

الآن نقدم نظرية ارزيلا- أسكولي(Arrzela-Ascoli) والتي توضح خواص المجموعات المتراصة في الفضاء $C_X[a,b]$ والذي يحتوي على الدوال المتصلة و المعرفة من $[a,b]$ الى فضاء بناخ X. [10, 14,15,30].

نقدم أولا التعريف التالي:

تعريف (٤- ٣- ٢)

نفرض أن (X,d) فضاء متري و $K \subseteq C_X[a,b]$. نقول أن K متصلة بالتساوي (equicontinuous)عند نقطة $t \in [a,b]$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث لكل $f \in K$ لدينا

$$\forall s \in [a,b], |t-s| < \delta \Rightarrow d(f(s), f(t)) < \varepsilon.$$

و نقول أنها متصلة اتصالا منتظما بالتساوي(uniform equicontinuous) إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث لكل $f \in K$ لدينا

$$\forall s,t \in [a,b], |t-s| < \delta \Rightarrow d(f(s), f(t)) < \varepsilon.$$

مثال (٤- ٣- ٣)

لتكن $S=\{f\in C[0,1]:\sup|f(x)|\le 1\}$. لكل $f\in S$ نعرف دالة $g_f(t)=\int_0^t f(x)dx\,,t\in[0,1]$. نبرهن أن عائلة الدوال $K=\{g_f:f\in S\}$ متصلة اتصالا منتظما بالتساوي. لذلك لتكن $t,s\in[0,1]$ و $g_f\in K$. لدينا

$$|g_f(s)-g_f(t)|=\left|\int_0^s f(x)dx-\int_0^t f(x)dx\right|=\left|\int_t^s f(x)dx\right|$$
$$\le\sup\{|f(x)|:x\in[0,1]\}|s-t|\le|s-t|.$$

إذن K متصلة اتصالا منتظما بالتساوي.

فيما يلي مثال لمجموعة من الدوال ليست متصلة اتصالا منتظما بالتساوي.

مثال (٤- ٣- ٤)

لكل عدد طبيعي n نعتبر الدالة $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2},x\in[0,1]$ و $K=\{f_n:n\ge 1\}$. الآن نفرض أن K متصلة بالتساوي. إذن توجد $\delta>0$ بحيث لكل $n\ge 1$ لدينا

$$|x|<\delta\Rightarrow|f_n(x)-f_n(0)|=|f_n(x)|<\frac{1}{2}.$$

نختار عددًا طبيعيًا m بحيث $\frac{1}{m}<\delta$. بالتالي $|f_m(\frac{1}{m})|<\frac{1}{2}$. من جهة اخرى نلاحظ أن أكبر قيمة للدالة f_m هي نصف وتأخذها عند $x=\frac{1}{m}$ بالتالي $f_m(\frac{1}{m})=\frac{1}{2}$ وهذ تناقض .نستنتج من ذلك أن K ليست متصلة اتصالا منتظما بالتساوي.

نظرية (٤ - ٣ - ٦) نظرية ارزيلا- أسكولي(Arrzela-Ascoli)

افرض $C_X[a,b]$ مجموعة الدوال المتصلة من و المعرفة من $[a,b]$ الى فضاء بناخ X. المجموعة حيث لكل $f\in C_X[a,b]$ لدينا

$$\| f \| = \max_{t \in [a,b]} \| f(t) \| .$$

المجموعة $K \subseteq C_X[a,b]$ تكون متراصة نسبيا إذا وفقط كانت متصلة بالتساوي عند كل نقطة من $[a,b]$ ولكل $t \in [a,b]$ تكون المجموعة $\{f(t) : f \in K\}$ متراصة نسبيا في X.

البرهان:

يمكن للقارئ أن يجد البرهان في أحد المراجع الآتية [10, 14,15].

١.٥ المؤثرات الخطية
5.1. Linear Operators

درسنا في الفصل الثاني الفضاء المتري ثم انتقلنا في الفصل الرابع إلى الفضاء المعياري ، في هذا الفصل نقدم مفهوم المؤثر الخطي من فضاء معياري إلى فضاء معياري آخر .

تعريف (٥ - ١ - ١)

نفرض أن كل من X ، Y فضاء اتجاهي على حقل الأعداد المركبة $\mathbb{R}$. الدالة T المعرفة من مجموعة جزئية من X إلى Y تُسمى مؤثر من X إلى Y . يرمز لهذه المجموعة بالرمز $D(T)$ وتسمى مجال المؤثر T.

يقال للمؤثر T أنه خطي إذا كان مجاله $D(T)$ فضاء جزئيًا من الفضاء الاتجاهي X وأن :

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y) \;,\; \forall x,y\in D(T) \;,\; \forall \alpha,\beta\in\mathbb{C}.$$

المجموعة $R(T)=\{T(x):x\in D(T)\}$ تُسمى مدى المؤثر T. بينما المجموعة $N(T)=\{x\in D(T):T(x)=0\}$ تُسمى الفضاء الفارغ (Null Space) للمؤثر T أو نواة (Kernel) المؤثر T .

مثال (٥ - ١ - ١)

المؤثر المحايد (Identity Operator)

$$I(x)=x \quad , \quad \forall x\in X \;\; I:X\to X \; .$$

المؤثر المحايد خطي لأنه لكل x,y في X و α,β ثوابت لدينا :

$$I(\alpha x+\beta y)=\alpha x+\beta y$$
$$=\alpha I(x)+\beta I(x)$$

مثال (٥ - ١ - ٢)

المؤثر التفاضلي (Differential Operator). ليكن

$$T(f)(t)=f'(t)\,T:C[a,b]\to C[a,b],$$

نلاحظ أن:

$$D(T)=\{f\in C[a,b]\ ,\ f'\ \text{is continuously differentiable}\}.$$

المؤثر T خطي لأنه لكل f,g في $D(T)$ و α,β في $\mathbb{R}$ لدينا

$$T(\alpha f+\beta g)=(\alpha f+\beta g)'(t)$$
$$=\alpha f'(t)+\beta g'(t)$$
$$=\alpha T(f)+\beta T(g).$$

مثال (٥ - ١ - ٣)

المؤثر التكاملي (Integral Operator). ليكن

$$T:C[a,b]\to C[a,b],$$
$$T(f(t))=\int_a^t f(s)ds\quad,\quad t\in[a,b].$$

نلاحظ أن $D(T)=C[a,b]$ ولكل f ، g في $C[a,b]$ ولكل α,β في $\mathbb{R}$ لدينا

$$T(\alpha f+\beta g)(t)=\int_a^t(\alpha f(s)+\beta g(s))ds$$
$$=\alpha\int_a^t f(s)ds+\beta\int_a^t g(s)ds$$
$$=\alpha T(f)(t)+\beta T(g)(t).$$

هذا يعني أن المؤثر التكاملي خطي.

مثال (٥ - ١ - ٤)

مؤثر المصفوفة (Matrix Operator).

لتكن $A=(\alpha_{jk}),\ j=1,2,\dots,n,\quad k=1,2,\dots m$ مصفوفة و $T:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ مؤثرًا معرفًا كالتالي:

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\.\\x_m\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\.\\x_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{k=m}\alpha_{1k}x_k\\\sum_{k=1}^{k=m}\alpha_{2k}x_k\\.\\.\\.\\\sum_{k=1}^{k=m}\alpha_{nk}x_k\end{pmatrix}$$

يترك للقارئ إثبات أن مؤثر المصفوفة خطي.

مثال (٥ - ١ - ٥)

ليكن $T:C[a,b]\to C[a,b]$ معرف كما يلي :

$$T(f)(t)=tf(t).$$

نلاحظ أنه لكل f ، g في $C[a,b]$ و α,β في $\mathbb{R}$ لدينا :

$$\begin{aligned}T(\alpha f+\beta g)(t)&=t(\alpha f+\beta g)(t)\\&=t(\alpha f(t)+\beta g(t))\\&=\alpha tf(t)+\beta tg(t)\\&=\alpha T(f)(t)+\beta T(g)(t)\end{aligned}$$

إذن المؤثر خطي.

نظرية (٥ - ١ - ١)

نفرض أن T مؤثر خطي من X إلى Y.لدينا ما يلي:

١- $R(T)$ يكون فضاء اتجاهي.

٢- إذا كان $\dim D(T)=n<\infty$ فإن $\dim R(T)\leq n$.

٣- $N(T)$ يكون فضاء اتجاهي.

البرهان:

١) نفرض أن y_1 ، y_2 في $R(T)$ و α,β ثوابت في $\mathbb{C}$. ليكن $x_1,x_2\in D(T)$ بحيث $y_1=T(x_1),y_2=T(x_2)$. بما أن $D(T)$ فضاء اتجاهي فإن $\alpha x_1+\beta x_2\in D(T)$ وحيث أن T مؤثر خطي فإن:

$$\begin{aligned} T(\alpha x_1+\beta x_2) &= \alpha T(x_1)+\beta T(x_2) \\ &= \alpha y_1+\beta y_2. \end{aligned}$$

هذا يوضح أن $R(T)$ فضاء اتجاهي .

٢) نفرض أن $y_1,y_2,\ldots,y_n,y_{n+1}\in R(T)$. إذن يوجد $x_1,x_2,\ldots\ldots x_n\in D(T)$ بحيث

$$y_1=T(x_1)\,,\; y_2=T(x_2)\,,\;\ldots\,,\; y_n=T(x_n)\,,\; y_{n+1}=T(x_{n+1}).$$

حيث أن $\dim D(T)=n$ فإن المجموعة $\{x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}\}$ تكون مرتبطة خطياً .أي أنه يمكن إيجاد $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\in\mathbb{C},$ وليست جميعها أصفار بحيث

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n+\alpha_{n+1}x_{n+1}=0.$$

وحيث أن T مؤثر خطي فإن $T(0)=0$. إذن

$$
\begin{aligned}
0 &= T\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}\right) \\
&= \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) + \ldots + \alpha_n T(x_n) + \alpha_{n+1} T(x_{n+1}) \\
&= \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n + \alpha_{n+1} y_{n+1}.
\end{aligned}
$$

هذا يوضح أن $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ غير مستقلة خطياً لأن α_i ، $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$ ليست جميعها أصفارًا. نستنتج أن $R(T)$ لا يوجد فيه مجموعات جزئية مستقلة خطــياً لـ $n+1$ أو أكثر من ذلك عناصر. وعليه $\dim R(T) \le n$.

٣) لنأخذ x_1 ، x_2 في $N(T)$. هذا يعني أن

$$T(x_1) = T(x_2) = 0\,,$$

وحيث أن T مؤثر خطي فإنه لأي ثوابت α, β يكون

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2) = 0$$

وهذا يوضح أن

$$\alpha x_1 + \beta x_2 \in N(T).$$

نظرية (٥ - ١ - ٢)

لــيكن X و Y فضــاءين مــتجهين (حقيقــيين أو مــركبين) ولــيكن $T : D(T) \to Y$ ، مؤثرًا خطيًا حيث $D(T) \subseteq X$.

١- المعكوس T^{-1} المعرف كالتالي:

$$T^{-1} : R(T) \to D(T)\,, T^{-1}(y) = x \Leftrightarrow T(x) = y$$

موجوداً إذا وفقط إذا $N(T) = \{0\}$.

٢- إذا كان T^{-1} موجودًا فيكون مؤثر خطي.

٣- إذا كان $\dim D(T) = n < \infty$ و T^{-1} موجود فإن

$$\dim R(T) = \dim D(T).$$

البرهان:

١- لنفرض أن $N(T)=\{0\}$ و $T(x_1)=T(x_2)$ حيث x_1 ، x_2 في $D(T)$.
بما أن T مؤثر خطي فإن $T(x_1-x_2)=T(x_1)-T(x_2)=0$ ولكن

$$T(x_1-x_2)=0 \Rightarrow x_1-x_2=0$$
$$\Rightarrow x_1=x_2$$

إذن T^{-1} موجود. بالنسبة للاتجاه المعاكس ، إذا كان T^{-1} موجود فإن T دالة متباينة (واحد لواحد). نفرض أن x في $N(T)$. هذا يعني أن $T(x)=0$. لأن $T(0)=0$ ولأن T متبايناً فإن $x=0$.

٢- لنفرض أن T^{-1} موجود. نريد أن نبرهن أنه مؤثر خطي. بمعنى آخر نريد برهان أنه لأي y_1 ، y_2 في $R(T)$ و α_1 ، α_2 ثوابت يكون:

$$T^{-1}(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)=\alpha_1 T^{-1}(y_1)+\alpha_2 T^{-1}(y_2).$$

الآن :

$$y_1\in R(T)\Rightarrow \exists x_1\in D(T):T(x_1)=y_1,$$
$$y_2\in R(T)\Rightarrow \exists x_2\in D(T):T(x_2)=y_2.$$

وعليه

$$x_1=T^{-1}(y_1)\ ,\ \ x_2=T^{-1}(y_2).$$

وبما أن T مؤثر خطي يكون لأي α_1 ، α_2 ثوابت

$$\begin{aligned}T(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)&=\alpha_1 T(x_1)+\alpha_2 T(x_2)\\&=\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore T^{-1}(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)&=T^{-1}(T(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2))\\&=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2\\&=\alpha_1 T^{-1}(y_1)+\alpha_2 T^{-1}(y_2).\end{aligned}$$

وهذا يوضح أن T^{-1} مؤثر خطي

٣- من نظرية (٥- ١- ١) نستنتج أن

$$\dim(R(T)) \le \dim(D(T)). \qquad (5.1)$$

نطبق نظرية (٥- ١- ١) مرة أخري على المؤثر T^{-1} فنستنتج أن

$$\dim(D(T)) = \dim(R(T^{-1})) \le \dim(D(T^{-1})) = \dim(R(T)). \qquad (5.2)$$

من (5.1) (5.2) نجد أن $\dim R(T) = \dim D(T)$.

٢.٥ المؤثرات الخطية المحدودة
5.2. Bounded Linear Operators

فيما يلي سنفترض أن كل من X ، Y فضاء معياري.

تعريف (٥ - ٢ - ١)

يقال للمؤثر الخطي , $T : D(T) \subseteq X \to Y$ أنه محدود إذا وجد عدد حقيقي موجب c بحيث

$$\| T(x) \| \leq c \| x \|, \forall x \in D(T).$$

بمعنى آخر يوجد عدد حقيقي موجب c بحيث

$$\frac{\| T(x) \|}{\| x \|} \leq c, \forall x \in D(T) - \{0\} \tag{5.3}$$

المتباينة السابقة توضح أن المؤثر الخطي المحدود ينقل المجموعات المحدودة والجزئية من $D(T)$ إلى مجموعات محدودة في Y. سيُرمز لعائلة المؤثرات الخطية المحدودة T من X إلى Y بحيث $D(T) = X$ بالرمز $\mathcal{L}(X, Y)$.

من الواضح أن $\mathcal{L}(X, Y)$ فضاء اتجاهي. العلاقة (5.3) تمكننا من تعريف دالة معيار على $\mathcal{L}(X, Y)$ كالآتي :

تعريف (٥ - ٢ - ٢)

لكل T في $\mathcal{L}(X, Y)$ نضع

$$\| T \| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\| T(x) \|}{\| x \|}$$

فيما يلي نوضح أن الدالة $\| \ \|$ تحقق شروط المعيار.

$$N_1)\quad \|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \geq 0.$$

$$N_2)\quad \|T\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \|T(x)\| = 0 \;\;,\;\; \forall x \in X$$

$$\Leftrightarrow T(x) = 0 \;\;,\;\; \forall x \in X$$

$$\Leftrightarrow T = 0.$$

$$N_3)\quad \|\alpha T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|\alpha T(x)\|}{\|x\|}$$

$$= \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} |\alpha| \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

$$= |\alpha| \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

$$= |\alpha| \|T\|.$$

$$N_4)\quad \|T_1 + T_2\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|(T_1 + T_2)(x)\|}{\|x\|}$$

$$= \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|T_1(x) + T_2(x)\|}{\|x\|}$$

$$\leq \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \left(\frac{\|T_1(x)\|}{\|x\|} + \frac{\|T_2(x)\|}{\|x\|} \right)$$

$$\leq \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \left(\frac{\|T_1(x)\|}{\|x\|} \right) + \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \left(\frac{\|T_2(x)\|}{\|x\|} \right)$$

$$= \|T_1\| + \|T_2\|.$$

ملاحظة (٥ - ٢- ١)

يمكن تعريف $\|T\|$ بالصيغة الآتية:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|T(X)\|.$$

التوضيح:

نفرض أن $x \in X$ بحيث $\|x\|=1$. لدينا

$$\|T(x)\| = \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \le \sup_{\substack{z \in X \\ z \neq 0}} \frac{\|T(z)\|}{\|z\|} = \|T\|$$

هذا يعني أن

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|T(x)\| \le \|T\|. \qquad (5.4)$$

نفرض أن x في X بحيث $x \neq 0$. نضع $y = \frac{x}{\|x\|}$. لدينا $\|y\|=1$ و أن

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \|T(\frac{x}{\|x\|})\| = \|T(y)\| \le \sup_{\substack{z \in X \\ \|z\|=1}} \|T(Z)\|.$$

إذن

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \le \sup_{\substack{z \in X \\ \|z\|=1}} \|T(z)\|. \qquad (5.5)$$

من المتباينتين (5.4) و (5.5) يتحقق المطلوب.

قبل البدء بذكر خصائص المؤثرات الخطية المحدودة سنورد بعض الأمثلة لمؤثرات خطية محدودة وأخرى غير محدودة .

مثال (٥ - ٢ - ١)

المؤثر المحايد $I(x): X \to X$ حيث $I(x)=x \quad , \quad \forall x \in X$

المعرف على الفضاء المعياري $X \neq \{0\}$ يكون محدودًا حيث $\|I\|=1$.

بطريقة اخرى:

$$T(x) = x \Rightarrow \|T(x)\| = \|x\| \leq K\|x\|, K \geq 1.$$

مثال (٥ - ٢ - ٢)

مؤثر المصفوفة محدود ولتوضيح ذلك نعتبر مصفوفة الأعداد الحقيقية $A=(\alpha_{jk})$ حيث $j=1,2,...,n, k=1,2,...,m$ ، n عدد الصفوف و m عدد الأعمدة. نعتبر مؤثر المصفوفة

$$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,$$
$$T(x)=Ax,$$

حيث أن

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

أي أن

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{k=m}\alpha_{1k}x_k \\ \sum_{k=1}^{k=m}\alpha_{2k}x_k \\ . \\ . \\ . \\ \sum_{k=1}^{k=m}\alpha_{nk}x_k \end{pmatrix}$$

إذن

$$\| T(x)\|^2 = \sum_{r=1}^{r=n}(\sum_{k=1}^{k=m}\alpha_{rk}x_k)^2 \leq \sum_{r=1}^{r=n}(\sum_{k=1}^{k=m}\alpha_{rk}{}^2 \sum_{k=1}^{k=m}x_k{}^2) = \| x\|^2 \sum_{r=1}^{r=n}\sum_{k=1}^{k=m}\alpha_{rk}{}^2$$

بالتالي $\| T(x)\| \leq (\sum_{r=1}^{r=n}\sum_{k=1}^{k=m}\alpha_{rk}{}^2)^{\frac{1}{2}}$. أي أن T مؤثر محدود.

مثال (٥ - ٢ - ٣)

اعتبر المؤثر التفاضلي والمعرف في مثال (٥- ١- ٢) كالتالي:

$$T(f)(t) = f'(t) \; T : C[0,1] \to C[0,1],$$

لكل $n \geq 1$ نعتبر الدالة

$$f_n(t) = t^n \;\; , \;\; \forall n \geq 1$$

لدينا $\| f_n \| = 1, \forall n \geq 1.$ و أن

$$\begin{aligned} \|T(f_n)\| &= \sup_{t\in J} \|f_n'(t)\| \\ &= \sup_{t\in J} n\left|t^{n-1}\right| \\ &= n \end{aligned}$$

هذا يعني أن المؤثر T نقل المجموعة المحدودة $\{f_n : n \geq 1\}$ إلى المجموعة الغير محدودة $\{T(f_n) : n \geq 1\}$. لذلك T مؤثر غير محدود.

مثال (٥ – ٢ - ٤)

نفرض أن T مؤثر خطي من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^n$ بحيث أن $D(T) = \mathbb{R}^n$.

نبرهن أن T محدود. لكل $k = 1,2,....n$ نضع

$e_k = (0,...,0,1,0,...,0)$ حيث جميع الإحداثيات تساوي صفر ما عدا الإحداثي رقم k يساوي 1. نفرض أن $x = (x_1,...,x_n)$. لدينا

$$\| T(x) \| = \| T(\sum_{k=1}^{k=n} x_k e_k) \| \leq \sum_{k=1}^{k=n} \| x_k T(e_k) \| \leq (\sum_{k=1}^{k=n} \| x_k \|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{k=n} \| T(e_k) \|^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \| x \| (\sum_{k=1}^{k=n} \| T(e_k) \|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

هذا يعني أن المؤثر T محدود. نستنتج من ذلك أن أى مؤثر خطي معرف على فضاء ذي بعد منتهٍ يكون محدودًا.

مثال (٥ – ٢ - ٥)

اعتبر الفضاء المعياري $\mathbb{R}^n$ حيث $\| x \| = \sum_{k=1}^{k=n} | x_k |$ ولنفرض أن $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ مؤثر مجاله $\mathbb{R}^n$ ومعرف كالتالي:

$$T(e_k) = \lambda_k e_k , \forall k = 1,2,...,n$$

حيث $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n$ أعداد حقيقية. نضع $M = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|$. نبرهن أن $\|T\| = M$. لكل $x = (x_1,...,x_n)$ لدينا.

$$\|T(x)\| = \|T(\sum_{k=1}^{k=n} x_k e_k)\| = \sum_{k=1}^{k=n} \|x_k \lambda_k e_k\| \le \sum_{k=1}^{k=n} \|x_k \lambda_k\|$$
$$\le M \sum_{k=1}^{k=n} |x_k| = M \|x\|.$$

إذن $\|T\| \le M$.من جهة أخرى لكل $k = 1, 2, \dots, n$ لدينا

$$\|T\| \ge \frac{\|T(e_k)\|}{\|e_k\|} = |\lambda_k|.$$

اذن $\|T\| \ge M$ومن ذلك نستنتج أن $\|T\| = M$.

مثال (٥ – ٢ – ٦)

لتكن $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للقياس بحيث أن

$$\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 \, ds \, dt < \infty$$

نعتبر المؤثر

$$T : L^2[a,b] \to L^2[a,b],$$
$$(Tf)(t) = \int_a^b K(t,s) f(s) ds.$$

نلاحظ أن المؤثر T معرف تعريفاً حسناً لأن

$$\int_a^b |T(f)(t)|^2 dt \le \int_a^b \left(\int_a^b |K(t,s) f(s)| ds\right)^2 dt$$
$$\le \int_a^b \left(\int_a^b |K(t,s)|^2 \, ds\right)\left(\int_a^b |f(s)|^2 \, ds\right) dt$$
$$= \| f \|^2 \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 \, dsdt < \infty$$

من الواضح أن T مؤثر خطي. كذلك من المتباينة السابقة نستنتج أن

$$\| T \| \le \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 \, dsdt.$$

لاحظ أن الدالة K تسمي نواة (kernel) المؤثر T.

مثال (٥ – ٢ – ٧)

اعتبر المؤثر $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ مؤثر والمعرف كالاتي :

$$T(x) = (\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\ldots..), \ \forall x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2.$$

اثبت انه مؤثر خطي و أن $\|T\| = 1$.

الحل:

نعلم أن ℓ^2 هو الفضاء المعياري لكل المتتابعات $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ التي تحقق

الشرط $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ حيث دالة المعيار تعرف كلاتي:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

من السهل اثبات أن T خطي. لكل $x \in \ell^2$

$$\| T(\mathrm{x})\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x_n}{n} \right|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^2 = \| x \|^2 .$$

نستنتج من ذلك أن $\|T\| \le 1$.لإثبات المساواة نضع $y = (1,0,0,0.....) \in \ell^2$. نلاحظ أن

$T(y) = (1,0,0,0,.....) = y$ و $\| y \| = 1$ وبالتالي $\|T\| = 1$.

في النظرية التالية نبين أن تعريف معيار المؤثر له صيغ متكافئة.

نظرية (٥ - ٢ - ١)

إذا كان كل من X و Y فضاء معياري وكان $T : X \to Y$ مؤثر خطي محدود فان

$$\begin{aligned} \| T \| &= \sup\{\| T(x) \| : \| x \| \le 1\} = \alpha; \\ &= \sup\{\| T(x) \| : \| x \| = 1\} = \beta; \\ &= \inf\{k > 0 : \| T(x) \| \le k \| x \|, \forall x \in X\} = \delta. \end{aligned}$$

وان

$$\| T(x) \| \le \| T \| \| x \|, \forall x \in X.$$

البرهان :

نثبت أولا أن $\alpha = \beta$. من التعريف يتضح أن $\beta \le \alpha$. نفرض ان $\varepsilon > 0$ ومن خواص أصغر حد علوي توجد $x_\varepsilon \in X$ بحيث $\|x_\varepsilon\| \le 1$ و $\|Tx_\varepsilon\| \ge \alpha - \varepsilon$. نضع $y = \frac{x_\varepsilon}{\| x_\varepsilon \|}$. نلاحظ أن $\| y \| = 1$ وأن

$$\beta \ge \|T(y)\| = \frac{\|T(x_\varepsilon)\|}{\|x_\varepsilon\|} \ge \|T(x_\varepsilon)\| \ge \alpha - \varepsilon.$$

إذن $\beta \ge \alpha$ و بالتالي $\alpha = \beta$

الآن نثبت أن $\delta \leq \beta$. نفرض أن $x \in X - \{0\}$ و $y = \dfrac{x}{\| x \|}$. نلاحظ ان

$$\beta \geq \|T(y)\| = \frac{\|T(x)\|}{\| x \|}.$$

بالتالي فإن $\|T(x)\| \leq \beta \|x\|$. بما أن هذه المتباينة تتحقق عندما تكون $x = 0$ فإننا نستنتج أن $\delta \leq \beta$.

لإثبات أن $\delta \geq \beta$ نفرض أن k عدد حقيقي موجب بحيث

$$\| T(x) \| \leq k \| x \|, \forall x \in X$$

بالتالي إذا كان $\| x \| = 1$ فإن $\|T(x)\| \leq k$ ومن ذلك نستنتج أن $\delta \geq \beta$.

الآن نفرض أن $x \in X - \{0\}$ و $y = \dfrac{x}{\| x \|}$. نلاحظ ان

$$\beta \geq \|T(y)\| = \frac{\|T(x)\|}{\| x \|}.$$

باستخدام $\|T\| = \beta$ فنجد $\| T(x) \| \leq \| T \| \| x \|$.من الواضح أن هذه المتباينة تتحقق عندما تكون $x = 0$.

٣.٥ اتصال المؤثرات الخطية
5.3. Continuity Linear Operators

نظرية (٥ - ٣ - ١)

ليكن X و Y فضائين معياريين و $T : D(T) \subseteq X \to Y$ مؤثرًا خطيًا.

أ- T يكون متصلا إذا وفقط إذا كان T محدودًا.

ب- إذا كان T متصلًا عند نقطة ما فإنه يكون متصلًا اتصالا منتظما.

البرهان:

إذا كان $T = 0$ فإن العبارة (أ) صحيحة . ليكن T مؤثرًا غير صفريًا ومحدودًا. نفرض أن $\varepsilon > 0$. لكل x ، y في $D(T)$ بحيث

$$\|x - y\| < \delta \quad , \quad \delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}.$$

لدينا

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(y)\| &= \|T(x - y)\| \\ &\le \|T\| \|x - y\| \\ &\le \|T\| \delta \\ &= \|T\| \frac{\varepsilon}{\|T\|} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

هذا يبرهن أن T متصل بانتظام وبالتالي متصل.

الآن نريد أن نبرهن العكس، أي أنه إذا كان T متصلًا فإنه محدود.

لتكن $\varepsilon > 0$ ومن اتصال T عند $x = 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث لكل x في $D(T)$

$$\|x\| < \delta \Rightarrow \|T(x)\| < \varepsilon.$$

نستنتج من ذلك أنه لكل y في $D(T)-\{0\}$ يكون لدينا

$$\left\|T\left(\frac{y}{\|y\|}\frac{\delta}{2}\right)\right\| < \varepsilon.$$

أي أن

$$\left\|T\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| < \frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

بالتالي فإن

$$\|T\| < \frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

هذا يعني أن T مؤثر محدود.

ب) نفرض أن T متصل عند نقطة x_0. لتكن $\varepsilon > 0$. إذن توجد $\delta > 0$ بحيث لكل x في $D(T)$

$$\| x - x_0 \| < \delta \to \| T(x) - T(x_0) \| < \varepsilon.$$

الآن نفرض أن $z, w \in D(T)$ بحيث $\| z - w \| < \delta$. لدينا

$$\begin{aligned}\|T(z) - T(w)\| &= \|T(z - w)\| \\ &= \|T(x_0 - (x_0 - z + w))\| \\ &= \|T(x_0) - T(x_0 - z + w)\| \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

إذن T متصل اتصالا منتظما.

في النظرية التالية نبرهن أن المؤثرات الخطية على فضاءات ذات بعد منتهٍ تكون محدودة.

نذكر القارئ بأن الفضاء المعياري الكامل يسمى فضاء بناخ.

نظرية (٥ - ٣ - ٢)

إذا كان X فضاءً معياريًا ذا بعد منتهٍ و T مؤثرًا خطيًا على X فإن T محدود.

البرهان:

لتكن $e_m, m=1,2,....n$ أساسًا للفضاء X و ليكن $x \in X$. إذن $x = \sum_{m=1}^{m=n} \beta_m e_m$ حيث $\beta_1, \beta_2, ...\beta_n$ أعداد حقيقية. بالتالي

$$\|T(x)\| \le \sum_{m=1}^{m=n} |\beta_m| \|T(e_m)\| \le \max_{1\le m\le n} \|T(e_m)\| \sum_{m=1}^{m=n} |\beta_m|$$

نظرية (٥ - ٣ - ٢)

إذا كان Y فضاء بناخ فإن $\mathcal{L}(X,Y)$ فضاء بناخ.

البرهان:

لتكن (T_n) متتابعة كوشية في $\mathcal{L}(X,Y)$. ونريد برهان أن (T_n) متقاربة إلى مؤثر T في $\mathcal{L}(X,Y)$. لتكن $\varepsilon > 0$. حيث أن (T_n) متتابعة كوشية، فيوجد عدد طبيعي N بحيث أن

$$n, m \ge N \Rightarrow \|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

لنفرض أن $x \in X$. لكل $n,m \geq N$

(5.6) $$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\|$$

هذا يعني أن المتتابعة $(T_n x)$ كوشية في Y ولأن Y كامل فيوجد $y_x \in Y$ بحيث $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = y_x$.نعرف مؤثر T على X بحيث $T(x) = y_x = \lim_{n\to\infty} T_n(x).$.

المؤثر T خطي لأن

$$\begin{aligned} T(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(x_1) + \beta \lim_{n\to\infty} T_n(x_2) \\ &= \alpha T(x_1) + \beta T(x_2). \end{aligned}$$

الآن بجعل $n \to \infty$ في العلاقة (5.6) فنحصل على

(5.7) $$n \geq N \to \|T_n(x) - T(x)\| < \varepsilon \|x\|, \forall x \in X .$$

لأن T_N مؤثر محدود فيوجد عدد $\delta > 0$ بحيث

(5.8) $$\|T_N(x)\| \leq \delta \|x\|, \forall x \in X .$$

من العلاقتين (5.7) و(5.8) نستنتج أنه لكل $x \in X$

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &\leq \|T_N(x) - T(x)\| + \|T_N(x)\| \\ &\leq (\varepsilon + \delta) \|x\| \end{aligned}$$

هذا يعني أن T محدود.

لاحظ أنه من العلاقة (5.7) نستنتج أن $n \geq N \to \|T_n - T\| < \varepsilon$.إذن $\mathcal{L}(X, Y)$ فضاء بناخ.

٥.٥ نظريات أساسية.
5.5. Fundamental Theorems.

في هذا الجزء نقدم أربع نظريات أساسية في التحليل الدالي وهى نظرية هان بناخ ونظرية الدالة المفتوحة ونظرية الراسم المغلق وأخيرا نظرية المحدودية المنتظمة.

٥.٥ .١نظرية هان بناخ
5.5.1. Hahn- Banach Theorem.

لنظرية هان بناخ للفضاءات المعيارية أهمية كبيرة في التحليل الدالي حيث تثبت انه إذا وجد دالي خطي متصل على فضاء معياري جزئي فانه يمكن مده أو توسيعه على الفضاء كله.

تعريف (٥ - ٥ - ١)

افرض أن X فضاء معياري حقيقي أو مركب و f و g داليتين خطيتين.

نقول أن g تمديد خطي للدلة f إذا وفقط $D(f)\subseteq D(g)$ و $g(x)=f(x)$ لكل $x\in D(f)$.

نظرية (٥ - ٥ - ١)(نظرية هان بناخ لتمديد الداليات الخطية)

افرض أن X فضاء معياري حقيقي و $P : X \to \mathbb{R}$ دالة تحقق الخاصيتين:

$$P(x+y)=P(x)+P(y), \forall x, y \in X, \tag{5.11}$$

$$P(\alpha x)=|\alpha| P(x). \tag{5.12}$$

افرض كذلك أن Z فضاء جزئي من X وأن $f : Z \to \mathbb{R}$ دالي خطي بحيث

$$f(x) \leq P(x), \forall x \in Z. \tag{5.13}$$

إذن توجد دالة خطيه $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ بحيث

$$\tilde{f}(x)=f(x), \forall x \in Z \tag{5.14}$$

و

$$\tilde{f}(x) \leq P(x), \forall x \in X. \tag{5.15}$$

البرهان:

سنكتب البرهان في الخطوات التالية:

(١) لتكن E مجموعة الداليات الخطية $g : D(g) \subseteq X \to \mathbb{R}$ بحيث $Z \subseteq D(g)$ و $f(x)=g(x), \forall x \in Z$ و $g(x) \leq P(x), \forall x \in D(g)$.

من الواضح أن E غير فارغة لأن $f \in E$. نعرف علاقة ترتيب جزئي على E كلاتي: $g \leq h$ إذا وفقط h تمديد للدالة g. بهدف تطبيق تمهيدية زورن

(Zorn'Lemma) نفرض أن C سلسلة من عناصر Eومرتبة تصاعديا. نضع $D(g)\underset{g\in C}{\cup} = D$. لنبرهن أن D فضاء جزئي من X.إذا كان $x, y \in D$و $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ فتوجد $g_1, g_2 \in C$ بحيث $x \in D(g_1), y \in D(g_2)$. لأن C سلسلة فيكون $D(g_1) \subseteq D(g_2)$ أو $D(g_2) \subseteq D(g_1)$.نفرض أحدهما وليكن $D(g_1) \subseteq D(g_2)$. إذن $\alpha x + \beta y \in D(g_2) \subseteq D$.الأن نعرف دالة

$$\tilde{g} : D \to \mathbb{R},\ \tilde{g}(x) = g(x),\ if \quad x \in D(g).$$

لتوضيح طريقة تعريف الدالة $\tilde{g}$نلاحظ أنه إذا كان $x \in D(g_1) \cap D(g_2)$و $g_1 \le g_2$فإن $\tilde{g}(x) = g_1(x)$ و إذا كان $g_2 \le g_1$ فإن $\tilde{g}(x) = g_2(x)$. نلاحظ أن $g \le \tilde{g}$ لكل $g \in C$ و $\tilde{g}(x) \le P(x), \forall x \in D(\tilde{g})$.هذا يعني أن $\tilde{g}$ حد علوي للسلسلة C.من تمهيدية ذورن يوجد حد أكبر $\tilde{f}$ للمجموعة E. نستنتج من ذلك أن $\tilde{f}$ تمديد خطي لكل عنصر من E ، كما أن $\tilde{f}(x) \le P(x), \forall x \in D(\tilde{f})$.

(٢)نثبت في هذه الخطوة أن $D(\tilde{f}) = X$. إذا لم يكن ذلك متحققا فيوجد عنصر $y_1 \in X - D(\tilde{f})$.ليكنX_1الفضاء الجزئي المتولد من $D(\tilde{f}) \cup \{y_1\}$.نلاحظ أن أى عنصر x منX_1له تمثيل وحيد على الصورة$x = y + \alpha y_1$. لتعليل ذلك افرض أن $x = y + \alpha y_1 = z + \beta y$.بالتالي فإن $y - z = y_1(\beta - \alpha)$. و

هذا لا يمكن أن يتحقق لأن $y-z \in D(\tilde{f})$ بينما $y_1(\beta-\alpha) \notin D(\tilde{f})$.الأن

نعرف الدالة

$$g_1 : X_1 \to \mathbb{R},\ g_1(y+\alpha y\ \ ) = \tilde{f}(y) + \alpha c,$$

حيث c ثابت سيتم تحديده لاحقا. من السهل اثبات أن g_1 خطية و

. $g_1(y) = \tilde{f}(y), \forall y \in D(\tilde{f})$

(٣) في هذه الخطوة سنحدد العدد c بحيث تحقق الدالة g_1 العلاقة

$$g_1(x) \le P(x), \forall x \in D(g_1) = X_1. \qquad (5.16)$$

و بالتالي تكون $g_1 \in E$ مما يعني أن g_1 تمديد خطي للدالي $\tilde{f}$ وهذا يتناقض

مع كون $\tilde{f}$ حدًا علويًا للمجموعة E.

لنفرض أن $y, z \in D(\tilde{f})$.لأن $\tilde{f} \in E$ فمن العلاقة (5.9) لدينا

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}(y) - \tilde{f}(z) = \tilde{f}(y-z) \le P(y-z) \\
&= P((y+y_1) + (-z-y_1)) \le P(y+y_1) + P(-z-y_1)
\end{aligned}$$

إذن

$$-P(-z_1 - y_1) - \tilde{f}(z) \le P(y+y_1) - \tilde{f}(y).$$

لأن $y, z \in D(\tilde{f})$ عنصرين اختياريين فنجد أن

$$\begin{aligned}
m_1 &= \sup_{z \in D(\tilde{f})} \{-P(-z_1 - y_1) - \tilde{f}(z)\} \\
&\le m_2 = \sup_{y \in D(\tilde{f})} \{P(y+y_1) - \tilde{f}(y)\}. \qquad (5.17)
\end{aligned}$$

الأن نختار العدد c بحيث $m_1 \le c \le m_2$.نبرهن العلاقة(5.16).ليكن $x \in X_1$.

إذن يوجد $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث $x = y + \alpha y_1$ و $y \in D(\tilde{f})$.إذا كانت $\alpha = 0$ فإن

$$g_1(x) = g_1(y) = \tilde{f}(y) \le P(y) = P(x).$$

لدينا حالتين

(أ) $\alpha < 0$. نستبدل z بالعنصر $\frac{y}{\alpha}$ في العلاقة (5.15) فنحصل على

$$-P(-\frac{y}{\alpha} - y_1) - \tilde{f}(y) \le c$$

بضرب تلك المتباينة في العدد $-\alpha$ واستخدام (5.11) و (5.12) نستنتج أن

$$\begin{aligned} g_1(x) &= g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c \\ &\le -\alpha P(-\frac{y}{\alpha} - y_1) = P(y + \alpha y_1) = P(x). \end{aligned}$$

(ب) $\alpha < 0$. نستبدل y بالعنصر $\frac{y}{\alpha}$ في العلاقة (5.17) فنحصل على

$$c \le P(\frac{y}{\alpha} + y_1) - \tilde{f}(\frac{y}{\alpha})$$

بضرب تلك المتباينة في العدد αواستخدام (5.11) و (5.12) نستنتج أن

$$g_1(x) = g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c \le P(x).$$

فيما يلي نقدم نظرية هان بناخ لتمديد الداليات الخطية والمحدودة و المعرفة على فضاء معياري وبرهانها يكون تطبيقاً لنظرية (٥ - ٥ - ١).

نظرية (هان - باناخ) لتمديد الداليات الخطية والمحدودة على فضاء معياري

نظرية (٥ - ٥ - ٢)

إذا كان Z فضاءً جزئيًا من الفضاء المعياري الحقيقي X و f دالي خطي محدود على Z فيوجد دالي خطي محدود $\tilde{f}$ معرف على كل الفضاء المعياري X بحيث $\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z$. إذا كان $Z = \{0\}$ فإن $\|\tilde{f}\|_Z = 0$

البرهان:

إذا كان $Z = \{0\}$ فإن $f = 0$. نختار في هذه الحالة $\tilde{f} = 0$. افرض أن $Z \neq \{0\}$. نعرف

$$P : X \to \mathbb{R},\ P(x) = \|f\|_Z \|x\|$$

من الواضح أن P يحقق الخاصيتين (5.11) و(5.12) من نظرية(٥ - ٥ - ١) وكذلك لكل $x \in Z$ لدينا $|f(x)| \le \|f\|_Z \|x\| = P(x)$. بتطبيق نظرية(٥ - ٥ - ١) توجد دالة خطية $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ بحيث لكل $x \in X$ لدينا

$$|\tilde{f}(x)| \le P(x) = \|f\|_Z \|x\|$$

ومنها نستنتج $\|\tilde{f}\|_X \le \|f\|_Z$. من جهة اخرى $\|f\|_Z = \|\tilde{f}\|_Z \le \|\tilde{f}\|_X$. لأن f محدودة فتكون $\tilde{f}$ كذلك أيضا.

ملاحظة (٥ - ٥ - ١)

تظل النظريتان (٥ - ٥ - ١)و (٥ - ٥ - ٢) صحيحتين إذا X فضاء معياري مركب.

نظرية (٥ - ٥ - ٣)

إذا كان X فضاءً معياريًا حقيقيًا و $x_0 \in X-\{0\}$ فيوجد دالي خطي ومحدود $\tilde{f}:X \to \mathbb{R}$ بحيث $\tilde{f}(x_0)=\|x_0\|, \|\tilde{f}\|_X=1.$

البرهان:

نضع $Z=\{\alpha x_0:\alpha \in \mathbb{R}\}$ و نعرف $f:Z \to \mathbb{R}, f(\alpha x_0)=\alpha\|x_0\|$. من الواضح أن f خطية محدودة و $\|f\|_Z=1$. بتطبيق نظرية(٥ - ٥ - ٢) يوجد تمديد خطي محدود $\tilde{f}:X \to \mathbb{R}$ بحيث $\tilde{f}(x_0)=f(x_0)=\|x_0\|$ و $\|\tilde{f}\|_X=\|f\|_Z=1$.

نتيجة (٥ - ٥ - ١)

إذا كان X فضاء معياري فانه لكل $x \in X$

$$\|x\| = \sup_{\substack{f\in X^* \\ f\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

وبالتالي إذا كان $f(x)=0$ لكل f على X^* فان $x=0$.

البرهان:

إذا كان $x=0$ فسيتحقق المطلوب. إذا كان $x\neq 0$ فمن نظرية (٥ -

٥- ٣) فيوجد دالي خطي ومحدود $\tilde{f}:X\to\mathbb{R}$ بحيث

$\tilde{f}(x_0)=\|x_0\|, \|\tilde{f}\|_X=1.$ إذن

$$\sup_{\substack{f\in X^*\\ f\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|f\|}\geq \sup_{\substack{f\in X^*\\ f\neq 0}}\frac{|\tilde{f}(x)|}{\|f\|}=\|x\|.$$

من جهة أخرى لكل $x\in X-\{0\}$ لدينا $\sup\limits_{\substack{f\in X^*\\ f\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|f\|}\leq\|x\|$. بالتالي يتحقق

المطلوب.

٥.٥ .٢نظرية الدالة المفتوحة
5.5.2. Open Mapping Theorem.

تعريف (٥ - ٥- ٢)

افرض أن كل من E و F فضاء معياري. نسمي المؤثر $T:D(T)\subseteq E\to F$ مفتوح إذا كان صورة كل مجموعة مفتوحة في $D(T)$ يكون مجموعة مفتوحة.

لإعطاء نظرية الدالة المفتوحة نحتاج الى التمهيدية التالية وسنعطيها بدون برهان.

تمهيدية (٥ - ٥- ١)

افرض أن كل من E و F فضاء بناخ و $T:D(T)=E\to F$ مؤثر خطي و محدود وبحيث $T(E)=F$. لتكن $B_E(0,1)=\{x\in E:\|x\|<1\}$. إذن يوجد عدد حقيقي موجب α بحيث $B_F(0,\alpha)=\{y\in F:\|y\|<\alpha\}\subseteq T(B(0,1))$.

نظرية (٥ - ٥- ٤)(نظرية الدالة المفتوحة)

إذا كان كل من E و F فضاء بناخ و $T:D(T)=E\to F$ مؤثرًا خطيًا محدودًا وبحيث $T(E)=F$ فإن المؤثر T مفتوح. بالتالي إذا كان بالإضافة لتلك الشروط T مؤثر واحد لواحد فإن T^{-1} متصل ومحدود.

البرهان:

نفرض أن A مجموعة جزئية ومفتوحة في E وأن $y_0 \in T(A)$. ليكن $x_0 \in A$ بحيث $y_0 = T(x_0)$. نضع $Z = \{a - x_0 : a \in A\}$. من الواضح أن Z مجموعة مفتوحة وتحتوي على النقطة $z_0 = 0$. بالتالي يوجد عدد حقيقي موجب r بحيث $B_E(0,r) \subseteq Z$. نضع $H = \frac{1}{r}Z$. إذن $B_E(0,1) \subseteq H$. من تمهيدية (٥- ٥- ١) يوجد عدد حقيقي موجب α بحيث

$$\begin{aligned} B_F(0,\alpha) = \{y \in F : \|y\| < \alpha\} &\subseteq T(B_E(0,1)) \\ &\subseteq T(H) \subseteq \frac{1}{r}T(Z) \\ &= \frac{1}{r}\{T(a) - T(x_0) : a \in A\} \\ &= \frac{1}{r}\{T(a) - y_0 : a \in A\} \end{aligned}$$

نستنتج من ذلك أن

$$rB_F(0,\alpha) \subseteq \{y - y_0 : y \in T(A)\}.$$

إذن

$$\{y + y_0 : y \in B_F(0, r\alpha)\} \subseteq T(A).$$

هذا يبرهن أن $T(A)$ مجموعة مفتوحة وبالتالي فإن المؤثر T مفتوح. الأن إذا كان T واحد لواحد فيكون تناظرًا احاديًا لأنه شامل .إذن يوجد له معكوس T^{-1} متصل وبالتالي محدود لأنه خطي.

٥. ٣,٥ نظرية الراسم المغلق
5.5.3. Closed Graph Theorem.

الأن نطبق نظرية الدالة المفتوحة لإثبات نظرية الراسم المغلق.

تعريف (٥ - ٥- ٣)

افرض أن كل من E و F فضاءً معياريًا. نسمي المؤثر $T:D(T)\subseteq E\to F$ مغلق أو راسم مغلق إذا كانت المجموعة

$$G(T)=\{(x,T(x))\in E\times F : x\in D(T)\}$$

مغلقة في الفضاء المعياري $E\times F$. المجموعة $G(T)$ تسمى بيان المؤثر T.

نظرية (٥ - ٥- ٥)(نظرية الراسم المغلق)

افرض أن كل من E و F فضاء بناخ و $T:D(T)=E\to F$ مؤثر خطي مغلق و محدود .إذا كان $D(T)$ مجموعة مغلفة فإن T محدود وبالتالي متصل

البرهان:

اعتبر المؤثر

$$P:G(T)\to D(T);$$
$$P(x,T(x))=x$$

لأن $D(T)$ مجموعة مغلقة و T خطي إذن $D(T)$ فضاء بناخ .أيضا لأن $G(T)$ مجموعة مغلقة فإنها فضاء بناخ جزئي من $E\times F$.نبرهن ان P يحقق شروط نظرية الدالة المفتوحة. لدينا

$$\begin{aligned}&P(\alpha(x_1,T(x_1))+\beta(x_2,T(x_2))\\&=P(\alpha x_1+\beta x_2+T(\beta x_2+\beta x_2))\\&=\alpha x_1+\beta x_2\\&=\alpha P((x_1,T(x_1))+\beta P(x_2,T(x_2))\end{aligned}$$

هذا يبرهن أن p مؤثر خطي. كذلك

$$\|P(x,T(x))\|=\|x\|\le\|x\|+\|T(x)\|=\|(x,T(x))\|.$$

إذن P محدود. من الواضح أن P شامل ومحدود. بتطبيق نظرية الدالة المفتوحة نستنتج أن P^{-1}متصل ومحدود. هذا يعني أنه يوجد عدد حقيقي $1<\alpha$بحيث لكل $x\in D(T)$ لدينا

$$\|P^{-1}(x)\|<\alpha(\|x\|)$$

بالتالي $\|x\|+\|T(x)\|\le\alpha\|x\|$ ومنها نجد أن $\|T(x)\|\le(\alpha-1)\|x\|$. إذن Pمؤثر محدود وبالتالي متصل.

المثال التالي يوضح أن كون المؤثر مغلقًا لا يؤدي بالضورة الى كونه محدودًا.

مثال (٥ - ٥- ١)

افرض أن $X = C[0,1]$ و$T : X \to X$ حيث $T(x) = x'$. سوف نبرهن أن T مغلق. من أجل ذلك لتكن (x_n) متتابعة من $D(T)$ بحيث $x_n \to x$ و$T(x_n) = x_n' \to y$. نعلم أن التقارب في الفضاء $X = C[0,1]$ يؤدي الى التقارب المنتظم وبالتالي لدينا لكل $t \in [0,1]$

$$\int_0^t y(s)ds = \int_0^t \lim_{n\to\infty} x_n'(s)ds = \lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(s)ds$$
$$= \lim_{n\to\infty}(x_n(t) - x_n(0)) = x(t) - x(0)$$

إذن $x' \in D(T), x' = y$.

من المفيد ملاحظة أن $D(T)$ ليس مغلقًا و T خطي وليس محدودًا.

المثال التالي يوضح أن كون المؤثر محدودًا لا يؤدي بالضورة الى كونه مغلقًا.

مثال (٥ - ٥- ٢)

افرض أن X فضاء معياري و Y فضاء جزئي فعلا من X وبحيث $\overline{Y} = X$.

ليكن $T:Y \to X\, , T(x)=x$. من الواضح أن T خطي ومحدود ولكن إذا أخذنا $x \in X - Y$ و (x_n) متتابعة من $Y = D(T)$ بحيث تتقارب الى x فينتج أن T ليس مغلقاً.

النظرية التالية توضح العلاقة بين كون مجال(نطاق) المؤثر مغلقاً وكون المؤثر مغلقاً.

نظرية (٥ - ٥- ٦)

افرض أن كل من X و Y فضاء معياري و $T:D(T)\subseteq X \to Y$ مؤثر خطي و محدود

(١) إذا كان $D(T)$ مغلقاً فإن T مغلق.

(٢) إذا كان T مغلقاً و Y كامل فإن $D(T)$ مغلق.

البرهان:

(١)افرض أن (x_n) متتابعة من $D(T)$ بحيث $x_n \to x$ و $T(x_n) \to y$. لأن $D(T)$ مغلق فإن $x \in D(T)$. لأن T متصل فنستنتج أن $T(x_n) \to T(x)$. إذن $T(x)=y$ وهذا يعني أن T مغلق.

(٢) افرض أن T مغلق ولتكن (x_n) متتابعة من $D(T)$ بحيث $x_n \to x$.

لأن T محدود فيكون لكل $n,m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n,m\to\infty} \| T(x_n) - T(x_m) \| \le \| T \| \lim_{n,m\to\infty} \| x_n - x_m \| = 0$$

هذا يبرهن أن المتتابعة $T(x_n)$ كوشية وحيث أن Y كامل. إذن يوجد $y \in Y$ بحيث $T(x_n) \to y$. لأن T فنستنتج أن $T(x) = y$. هذا يعني أن $x \in D(T)$.

٤. ٥.٥ نظرية المحدودية المنتظمة
5.5.4 Uniform Boundedness Theorem

فيما يلي نعطي نظرية المحدودية المنتظمة.

نظرية (٥ - ٥- ٦)(نظرية المحدودية المنتظمة)
Uniform boundedness theorem

افرض أن E فضاء بناخ و F فضاء معياري ولتكن (T_n) متتابعة من المؤثرات الخطية والمحدودة بحيث لكل $n \ge 1$ ، $T_n : D(T_n) = E \to F$. إذا كان لكل $x \in E$ يوجد عدد حقيقي موجب c_x بحيث لكل $n \ge 1$ لدينا

$$\| T_n(x) \| \le c_x . \qquad (5.18)$$

فإنه يوجد عدد حقيقي موجب α بحيث لكل $n \ge 1$ لدينا

$$\| T_n \| \le \alpha. \qquad (5.19)$$

البرهان:

لكل $k \in \mathbb{N}$ نضع

$$A_k=\{x\in E:\|T_n(x)\|\le k,\forall n\in\mathbb{N}\}.$$

لبرهان أن A_k مغلقة نفرض أن (x_j) متتابعة من A_k وتتقارب إلى $x\in E$. إذن

$$\|T_n(x_j)\|\le k,\forall n\in\mathbb{N}.$$

لأن T_n مؤثر متصل فنستنتج من هذه المتباينة أن $\|T_n(x)\|\le k,\forall n\in\mathbb{N}$ وبالتالي $x\in A_k$. إذن A_k مغلقة لكل $k\in\mathbb{N}$. الآن من العادلة (5.16) نجد أن

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k.$$

حيث أن E فضاء بناخ فمن نظرية بير(٢- ٤- ١) يوجد $k_0\in\mathbb{N}$ بحيث لا تكون A_{k_0} غير كثيفة في أي مكان. بالتالي توجد $x_0\in E$ و عدد حقيقي موجب r بحيث

$$B(x_0,r)=\{x\in E:\|x-x_0\|<r\}\subseteq A_{k_0}.$$

من أجل إثبات العلاقة (5.19) نفرض أن $x\in E-\{x_0\}$ ونضع $z=x_0+\gamma x$ حيث $\gamma=\frac{r}{2\|x\|}$. من الواضح أن $z\in A_{k_0}$ و بالتالي لكل $n\in\mathbb{N}$ لدينا

$$\|T_n(x)\|=\|T_n(\frac{z-x_0}{\gamma})\|$$

$$\le\frac{1}{\gamma}(\|T_n(z)\|+T_n(x_0)\|)$$ إذن. $\|T_n(z)\|\le k_0$

$$\le\frac{2k_0}{\gamma}=\frac{4k_0}{r}\|x\|.$$

إذن لكل $n \geq 1$

$$\|T_n\| \leq \frac{4k_0}{r}.$$

في المثال الآتي نعطي تطبيق لنظرية المحدودية المنتظمة.

مثال (٥ - ٥- ٣)

افرض أن X الفضاء المعياري الذي يحتوي على جميع كثيرات الحدود على $\mathbb{R}$ حيث $\|x\| = \max_j |\alpha_j|$ و α_j معاملات كثيرة الحدود x.سوف نبرهن باستخدام نظرية المحدودية المنتظمة أن X ليس كاملاً. سنكتب كثيرة الحدود f التي من درجة n على الصورة $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k$ حيث $\alpha_k = 0, \forall k > n$. الآن لكل عدد طبيعي n نعرف مؤثر

$$T_n : X \to \mathbb{R}, T_n(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k$$

من السهل اثبات أن T_n خطي. لكل $f \in X$ لدينا

$$|T_n(f)| \leq n \max_j |\alpha_j| = n\|f\|$$

إذن $\|T_n\| \leq n, \forall n \geq 1$. أيضا

$$|T_n(f)| \leq n \max_j |\alpha_j| \leq (N_f + 1) \max_j |\alpha_j|$$

حيث N_f درجة كثيرة الحدود f. هذا يعني أن مجموعة المؤثرات $\{T_n\}$ تحقق شروط نظرية المحدودية المنتظمة. سنبرهن الآن انه لا يوجد عدد حقيقي موجب c بحيث $\|T_n\| \leq c,\ \forall n \geq 1$. اعتبر كثيرة الحدود $f(t) = \sum_{k=0}^{k=n} t^k$. نلاحظ أن $\|f\| = 1,\ |T_n(f)| = n$. إذن $\|T_n\| \leq n,\ \forall n \geq 1$ وبالتالي لا يوجد عدد حقيقي موجب c بحيث $\|T_n\| \leq c,\ \forall n \geq 1$. من نظرية انتظام الحدودية نستنتج أن X ليس كاملاً.

٧.٥ مرافق المؤثر.
5.7. The Adjoint of An Operator.

نحتاج الى مفهوم مرافق المؤثر عند دراسة معادلة تحتوي على مؤثرات وكذلك عند دراسة طيف المؤثر.

تعريف (٥ - ٧- ١)

افرض أن كل من E و F فضاء معياري على $\mathbb{R}$ و $T : D(T) = E \to F$ موثر خطي و محدود. يرمز لمرافق T بالرمز T' و يعرف كالآتي:

$$T' : D(T') = F' \to E'$$
$$(T'f)(x) = f(T(x)), \ \forall x \in E, f \in F',$$

حيث E' و F' الفضائين المرافقين للفضائين E و F على الترتيب.

من المهم ملاحظة أن T' معرف تعريفا حسنا بمعنى أن $T'(f) \in E'$. للتأكد من ذلك لتكن $x, y \in E$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. لدينا

$$\begin{aligned}(T'f)(\alpha x + \beta y) &= f(T(\alpha x + \beta y)) \\ &= f(\alpha T(x) + \beta T(y)) \\ &= \alpha f(T(x)) + \beta f(T(y)) \\ &= \alpha(T'f)(x) + \beta(T'f)(y).\end{aligned}$$

هذا يبرهن أن $T'(f)$ خطية. لإثبات أنها محدودة نلاحظ أن

$$\|(T'f)(x)\| = \|f(T(x))\| \le \|f\| \|T\| \|x\|, \forall x \in E, f \in F'$$

لأن كل من f و T محدود فإن $T'(f)$ دالية محدودة على E.

في النظرية التالية نبرهن أن معيار المؤثر يساوي معيار المؤثر المرافق له.

نظرية (٥ - ٧- ١)

المؤثر T' خطي ومحدود ويحقق العلاقة $\|T'\| = \|T\|$.

البرهان

نلاحظ أن مجال المؤثر T' هو الفضاء الاتجاهي F' و لكل $f, g \in F'$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ و $x \in E$ لدينا

$$\begin{aligned}(T'(\alpha f + \beta g))(x) &= (\alpha f + \beta g)(T(x)) \\ &= \alpha f(T(x)) + \beta g(T(x)) \\ &= \alpha(Tf)(x) + \beta(Tg)(x).\end{aligned}$$

هذا يبرهن أن T' خطي. أيضا

$$\|(T'f)\| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|f(T(x))\|}{\|x\|} \leq \|f\|\|T\|, \forall f \in F'.$$

من ذلك نستنتج أن T' محدود و أن $\|T'\| \leq \|T\|$. لإثبات العلاقة العكسية ليكن x_0 عنصرًا اختياريًا من $E - \{0\}$ و نضع $y = T(x_0)$. من نظرية(٥-٦- ٣) يوجد $f \in F'$ بحيث $\|f\| = 1, \|f(y_0)\| = \|y_0\|$. لدينا

$$\begin{aligned}\|T(x_0)\| = \|y_0\| = \|f(y_0)\| &= \|f(T(x_0))\| \\ &= \|(T^*f)(x_0)\| \\ &\leq \|T^*\|\|f\|\|x_0\| \\ &= \|T^*\|\|x_0\|.\end{aligned}$$

و لأن x_0 عنصر اختياري من $E - \{0\}$ فنجد أن $\|T\| \leq \|T'\|$. إذن $\|T'\| = \|T\|$.

في المثال التالي نوجد المؤثر المرافق لمؤثر المصفوفة.

مثال (٥ - ٧- ١)

لـتكن $A = (a_{jk}), j = 1, 2, ...n, \ k = 1, 2, ...n$ مصـفوفة و $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ المـؤثر الـذي يقابـل هـذه المصـفوفة والمعـرف كمـا في مثـال (٥- ١- ٤) كالتالي:

لكل $j=1,2,....n$ نضع $e_m=(\alpha_j)$ حيث

$$\alpha_j=\begin{cases}1 & m=j,\\ 0 & otherwise.\end{cases}$$

لكل $x=x_1e_1+x_2e_2+....+x_ne_n$ لدينا

$$T(x)=A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ .\\ .\\ .\\ x_n\end{pmatrix}=e_1\beta_1+e_2\beta_2+...+e_n\beta_n,$$

حيث $\beta_j=\sum_{k=1}^{k=n}a_{jk}x_k$. لاحظ هنا أن التجميع يكون بالنسبة للإحداثي الثاني.

من مثال (٥- ٤- ٤) نعلم أن الدوال $f_1,f_2,......,f_n$ حيث

$$f_k(e_m)=\begin{cases}1 & m=k,\\ 0 & otherwise.\end{cases}$$

تكون أساسًا للفضاء $(\mathbb{R}^n)'$ نريد أن نبرهن أن T' مؤثر مصفوفة أيضا وأن المصفوفة التي تقابله هى منقول المصفوفة A. لتكن

$f=\alpha_1f_1+\alpha_2f_2+....+\alpha_nf_n$. من تعريف T' لدينا

$$(T'f)(x)=f(Tx)$$
$$=(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+....+\alpha_n f_n)(e_1\sum_{k=1}^{k=n}a_{1k}x_k+e_2\sum_{k=1}^{k=n}a_{2k}x_k+...+e_n\alpha_n\sum_{k=1}^{k=n}a_{nk}x_k)$$
$$=\alpha_1\sum_{k=1}^{k=n}a_{1k}x_k+\alpha_2\sum_{k=1}^{k=n}a_{2k}x_k+...+\alpha_n\sum_{k=1}^{k=n}a_{nk}x_k$$
$$=\sum_{j=1}^{j=n}\alpha_j\sum_{k=1}^{k=n}a_{jk}x_k=\sum_{j=1}^{j=n}\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_j a_{jk}x_k$$
$$=\sum_{k=1}^{k=n}x_k(\sum_{j=1}^{j=n}a_{jk}\alpha_j)=\sum_{k=1}^{k=n}x_k\gamma_k,$$

حيث $\gamma_k=\sum_{j=1}^{j=n}a_{jk}\alpha_j$. لاحظ هنا أن التجميع يكون بالنسبة للإحداثي الأول. هذا يعني أن T' مؤثر مصفوفة أيضا وأن المصفوفة التي تقابله هى منقول المصفوفة A.

١.٦ فضاءات الضرب الداخلي.
6.1. Inner product spaces.

في الفصل السابق قدمنا مفهوم المعيار للمتجه كتعميم لفكرة طول المتجه. في هذا الفصل نقدم مفهوم الضرب الداخلي لعنصرين في الفضاء الاتجاهي كتعميم لفكرة الضرب القياسي لمتجهين .

نقصد بالحقل F حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أو حقل الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ومعرف عليها عمليتي الجمع و الضَرب العاديتين .

١.١.٦ مفهوم فضاءات الضرب الداخلي وخصائها.
6.1. The Concept of Inner product spaces and its Properties.

تعريف (٦- ١- ١)

ليكن X فضاءً اتجاهيًا معرف على الحقل F. الدالة $\langle\, ,\rangle : X \times X \to F$ تسمى عملية ضرب داخلي على X إذا حققت الشروط الآتية:

لكل z,y,x في X ولكل β,α في F لدينا

1) $\langle x, x\rangle \ge 0,$

2) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle},$

4) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle.$

تعريف (٦- ١- ٢)

فضاء الضرب الداخلي هو فضاء اتجاهي X على الحقل F ومعرف عليه عملية ضرب داخلي. إذا كان X فضاءً اتجاهيًا معرفًا على $\mathbb{R}$ و الدالة $\langle\, ,\rangle$ مجالها المقابل هو $\mathbb{R}$ فإن X يسمى فضاء إقليدي (Euclidean Space).

ملاحظة (٦- ١- ١)

من الخاصيتين (3) و (4) في التعريف (٦- ١- ١) نستنتج أنه لكل w,z,y,x في X ولكل $\delta,\gamma,\beta,\alpha$ في F

1. $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\langle \alpha y, x\rangle} = \bar{\alpha}\,\overline{\langle y, x\rangle} = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle.$

2. $\langle x, y+z\rangle = \overline{\langle y+z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle z, x\rangle} = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle.$

$3.\ \langle 0,y\rangle=\langle x-x,y\rangle=\langle x,y\rangle-\langle x,y\rangle=0$.

$4.\ \langle \alpha x+\beta y,\gamma z+\delta w\rangle=\langle \alpha x,\gamma z+\delta w\rangle+\langle \beta y,\gamma z+\delta w\rangle$

$$
\begin{aligned}
&=\alpha\langle x,\gamma z+\delta w\rangle+\beta\langle y,\gamma z+\delta w\rangle\\
&=\alpha\overline{\langle \gamma z+\delta w,x\rangle}+\beta\overline{\langle \gamma z+\delta w,y\rangle}\\
&=\alpha(\overline{\langle \gamma z,x\rangle}+\overline{\langle \delta w,x\rangle})+\beta(\overline{\langle \gamma z,y\rangle}+\overline{\langle \delta w,y\rangle})\\
&=\alpha(\overline{\gamma}\overline{\langle z,x\rangle}+\overline{\delta}\overline{\langle w,x\rangle})+\beta(\overline{\gamma}\overline{\langle z,y\rangle}+\overline{\delta}\overline{\langle w,y\rangle})\\
&=\alpha\overline{\gamma}\langle x,z\rangle+\alpha\overline{\delta}\langle x,w\rangle+\beta\overline{\gamma}\langle y,z\rangle+\beta\overline{\delta}\langle y,w\rangle.
\end{aligned}
$$

مثال (٦- ١- ١)

الفضاء $\mathbb{R}^n$ فضاء إقليدي. لتوضيح ذلك نفرض أن $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ ، $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ عنصرين من $\mathbb{R}^n$. نضع

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{i=n}x_iy_i.$$

نبرهن الآن أن العملية $\langle\ ,\ \rangle$ تحقق شروط التعريف (٦- ١- ١). لكل z,y,x في $\mathbb{R}^n$ ولكل β,α في $\mathbb{R}$ لدينا

(1) $\langle x,x\rangle=\sum_{i=1}^{i=n}x_i^2>0.$

(2) $\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{i=n}{x_i}^2=0\Leftrightarrow x=0$

(3) $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\sum_{i=1}^{n}=x_iy_i=\langle y.x\rangle$

(4)

حيث أن z,y,x في $\mathbb{R}^n$ إذن نستطيع أن نعبر عنها كما يلي:

$$x=(x_1,x_2,...,x_n),y=(y_1,y_2,...,y_n),z=(z_1,z_2,...,z_n).$$

لدينا

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha x+\beta y,z\rangle&=\sum_{i=1}^{i=n}(\alpha x_i+\beta y_i)z_i\\
&=\sum_{i=1}^{i=n}(\alpha x_iz_i+\beta y_iz_i)\\
&=\alpha\sum_{i=1}^{i=n}x_iz_i+\beta\sum_{i=1}^{i=n}y_iz_i\\
&=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle.
\end{aligned}
$$

مثال (٦- ١- ٢)

نفرض أن n عدد صحيح موجب وليكن

$$\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, z_2, ..., z_n); z_k \in c, \forall k = 1, 2, ,...n\},$$

لكل $z, w \in \mathbb{C}^n$ نضع

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^{k=n} z_k \overline{w_k}.$$

نبرهن أن $\langle \, , \, \rangle$ تحقق شروط التعريف (٦- ١- ١). لكل $x. z. w$ في $\mathbb{C}^n$ ولكل β, α في $\mathbb{C}$ لدينا

$$(1) \qquad \langle z, z \rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{z_k} = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \geq 0.$$

$$(2) \qquad \langle z, z \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$(3) \qquad |\langle z, w \rangle| = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\overline{z_k} w_k} = \overline{\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} w_k} = \overline{\langle w, z \rangle}.$$

$$\begin{aligned}(4) \quad \langle \alpha x + \beta z, w \rangle &= \sum_{k=1}^{n} (\alpha x_k + \beta z_k) \overline{w_k} \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{w_k} + \beta \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k} \\ &= \alpha \langle x, w \rangle + \beta \langle z, w \rangle.\end{aligned}$$

مثال (٦- ١- ٣)

ليكن

$$l^2 = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) : x_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$$

نعلم أن l^2 فضاء اتجاهي على $\mathbb{C}$. لكل $x, y \in l^2$ نضع

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} \qquad (6.1)$$

نبرهن أن عملية الضرب المعرفة بالعلاقة (6.1) حسنة التعريف. طبقاً لمتباينة كوشي شفارتز، لكل عدد طبيعي n لدينا.

$$|\sum_{i=1}^{i=n} x_i \overline{y_i}| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

بالتالي فإن

$$|\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}| \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

بما أن $x+y \in l^2$ فإن

$$|\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}| < \infty.$$

هذا يعني أن العملية المعرفة بالعلاقة (6.1) حسنة التعريف. من الواضح أنها تحقق الخواص الثلاثة الأولى من شروط عملية الضرب الداخلي. الآن نبرهن أنها تحقق الشرط الرابع. من أجل ذلك ليكن $x, y, z \in l^2$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. لدينا

$$\begin{aligned}\langle \alpha x + \beta y, z \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \alpha x_n + \beta y_n, \overline{z_n} \rangle \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, \overline{z_n} \rangle + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \langle y_n, \overline{z_n} \rangle \\ &= \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle.\end{aligned}$$

مثال (٦- ١- ٤)

ليكن $L^2[a,b]$ هو الفضاء الاتجاهي المعرف على حقل الأعداد الحقيقية والذي يحتوي على جميع الدوال الحقيقية القابلة للقياس على $[a,b]$ وبحيث تكون الدالة $|f|^2$ قابلة للتكامل في مفهوم ليبيج على الفترة $[a,b]$. لاحظ أنه إذا كانت $f, g \in L^2[a,b]$ فإن $f = g$ إذا كان وفقط إذا كان $f(x) = g(x)$ تقريبًا على $[a,b]$. لكل $f, g \in L^2[a,b]$ نضع

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx. \qquad (6.2)$$

نبرهن أن $\langle \bullet, \bullet \rangle$ حسنة التعريف. لأن الدالتين g ، f قابلتين للقياس على $[a,b]$ ، فتكون الدالة fg قابله للقياس على $[a,b]$. لكل $x \in [a,b]$ لدينا

$$|f(x) g(x)| = |f(x)| |g(x)| \leq \frac{|f(x)|^2}{2} + \frac{|g(x)|^2}{2}. \qquad (6.3)$$

حيث أن الدالتين $|f|^2$ ، $|g|^2$ قابلتان للتكامل في مفهوم ليبيج على الفترة $[a,b]$ ، إذن العــلاقة (6.3) تؤدي إلى أن الدالة $|fg|$ قابله للتكامل على $[a,b]$ و بالتالي فإن الدالة fg تكون قابلة للتكامل على $[a,b]$. هذا يعني أن عملية الضرب المعرفة بالعلاقة (6.2) حسنة التعريف. نوضح الآن أن الفضاء الاتجاهي $L^2[a,b]$ مع عملية الضرب الداخلي المعرفة بالعلاقة (6.2) تكون فضاء ضرب داخلي . لتكن f ، g ، h في $L^2[a, b]$ و β, α في $\mathbb{R}$. لدينا

(1) $\langle f,f\rangle=\int_a^b f(x)f(x)dx=\int_a^b |f(x)|^2\,dx.$

(2) $\langle f,f\rangle=0\Leftrightarrow\int_a^b |f(x)|^2=0\Leftrightarrow f=0$ a.e. $\Leftrightarrow$ f $\in$ L[a,b].

(3) $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b g(x)f(x)dx=\langle g,f\rangle.$

(4) $$\begin{aligned}\langle \alpha f+\beta g,h\rangle&=\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))h(x)dx\\&=\alpha\int_a^b f(x)h(x)dx+\beta\int_a^b g(x)h(x)dx\\&=\alpha\langle f,h\rangle+\beta\langle g,h\rangle.\end{aligned}$$

مثال (٦- ١- ٥)

ليكن $C([a,b])$ هو الفضاء الاتجاهي الذي يتكون من جميع الدوال المتصلة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ومعرف عليه عملية الضرب الداخلي الآتية:

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

بإتباع نفس المناقشة التي تمت في مثال (٦- ١- ٤) نستطيع أن نبرهن أن العملية $\langle\,,\rangle$ حسنة التعريف وأن $C([a,b])$ مع هذه العملية فضاء ضرب داخلي.

٢.١.٦ متباينة كوشي – شفارتز و العلاقة بين الفضاء المعياري وفضاء الضرب الداخلي.
6.2.1 Cauchy – Schwarz inequality and the relation between inner product and normed spaces.

في هذا الجزء سنقدم بعض الخصائص المختلفة لفضاءات الضرب الداخلي منها متباينة كوشي – شفارتز وتوضيح العلاقة بين الفضاء المعياري وفضاء الضرب الداخلي.

نظرية (٦- ١- ١) : متباينة كوشي – شفارتز
Cauchy – Schwarz inequality

نفرض أن x,y عنصرين من فضاء ضرب داخلي X. إذن

(١) $|\langle x,y\rangle|\le\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle}$.

(٢)   إذا كانت $y \neq 0$ فإن المساواة تتحقق إذا كان وفقط إذا كان $x = \alpha y$ حيث $\alpha \in \mathbb{C}$.

البرهان

(١)   إذا كانت $\langle x , y \rangle = 0$ فإن المتباينة تكون متحققة. لذلك نفرض أن $\langle x , y \rangle \neq 0$ نضع.

$$\lambda = \frac{\langle x , x \rangle}{\langle y , x \rangle}$$

لدينا

$$\begin{aligned}
0 \leq \| x - \lambda y \|^2 &= \langle x - \lambda y , x - \lambda y \rangle = \langle x , x - \lambda y \rangle + \langle -\lambda y , x - \lambda y \rangle \\
&= \langle x , x \rangle + \langle x , -\lambda y \rangle + \langle -\lambda y , x \rangle + \langle -\lambda y , -\lambda y \rangle \\
&= \langle x , x \rangle - \overline{\lambda} \langle x , y \rangle - \lambda \langle y , x \rangle + \lambda \overline{\lambda} \langle y , y \rangle \\
&= \langle x , x \rangle - \frac{\langle x , x \rangle}{\langle x , y \rangle} \langle x , y \rangle - \frac{\langle x , x \rangle}{\langle y , x \rangle} \langle y , x \rangle + \frac{\langle x , x \rangle}{\langle y , x \rangle} . \frac{\langle x , x \rangle}{\langle x , y \rangle} . \langle y , y \rangle \\
&= - \frac{\langle x , x \rangle}{\langle x , y \rangle} \langle x , y \rangle + \frac{\langle x , x \rangle}{\overline{\langle x , y \rangle}} . \frac{\langle x , x \rangle}{\langle x , y \rangle} . \langle y , y \rangle \\
&= - \langle x , x \rangle + \frac{| \langle x , x \rangle |^2 \langle y , y \rangle}{| \langle x , y \rangle |^2}
\end{aligned}$$

إذن

$$\langle x , x \rangle \left| \langle x , y \rangle \right|^2 \leq \langle x , x \rangle^2 \langle y , y \rangle$$

حيث أن $\langle x , y \rangle \neq 0$ إذن $x \neq 0$ وهذا يعني أن $\langle x , x \rangle \neq 0$. من المتباينة الأخيرة نستنتج أن :

$$\left| \langle x , y \rangle \right| \leq \sqrt{\langle x , x \rangle \langle y , y \rangle}.$$

(٢) الآن نفرض أن $y \neq 0$. إذا كان $\langle x , y \rangle = 0$ فإن المساواة تتحقق إذا كان وفقط إذا كان $x = 0$ أي أن المساواة تتحقق إذا كان وفقط إذا كان $x = \alpha y$ حيث $\alpha = 0$.

أما إذا كان $\langle x , y \rangle \neq 0$ فإن

$$x = \alpha y , \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \left| \langle x , y \rangle \right| = \left| \langle \alpha y , y \rangle \right| = |\alpha| \langle y , y \rangle$$

كذلك

$$\begin{aligned}
x = \alpha y , \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \sqrt{\langle x , x \rangle \langle y , y \rangle} &= \sqrt{\langle \alpha y , \alpha y \rangle \langle y , y \rangle} \\
&= \sqrt{|\alpha|^2 \langle y , y \rangle^2} = |\alpha| \langle y , y \rangle
\end{aligned}$$

إذن

$$x = \alpha y , \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \left| \langle x , y \rangle \right| = \sqrt{\langle x , x \rangle \langle y , y \rangle}.$$

أخيراً نفرض أن المساواة متحققة وأن $\langle x,x\rangle \neq 0$.أى أن

$$|\langle x,y\rangle|^2=\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

بالتالي فإن

$$\langle x-\lambda y,x-\lambda y\rangle=0$$

وهذا يعني أن

$$x=\lambda y,\lambda=\frac{\langle x,x\rangle}{\langle y,x\rangle}.$$

النظرية التالية تبرهن أن كل فضاء ضرب داخلي يكون فضاءً معياريًا.

نظرية (٦- ١- ٢)

إذا كان $\langle\ ,\ \rangle$ عملية الضرب داخلي على فضاء اتجاهي E فإن الدالة $\|\ \|:E\to[0,\infty)$ حيث $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ تحقق شروط دالة المعيار ولكل x,y في E لدينا

$$(1)\quad |\langle x,y\rangle|\le\|x\|\ \|y\|.$$

$$(2)\quad \|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

المعيار المعرف بهذه الطريقة يسمى بالمعيار المتولد من عملية الضرب الداخلي $\langle\ ,\ \rangle$

البرهان:

من الواضح أن

$$(N_1)\ \|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}\ge 0.$$

$$(N_2)\ \|x\|=0\Leftrightarrow x=0.$$

$$(N_3)\ \|\alpha x\|=\sqrt{\langle\alpha x,\alpha x\rangle}=\sqrt{|\alpha|^2\langle x,x\rangle}=|\alpha|\sqrt{\langle x,x\rangle}=|\alpha|\|x\|.$$

أيضاً لكل $x,y\in E$ لدينا

$$\begin{aligned}(N_4)\ \|x+y\|^2&=\langle x+y,x+y\rangle\\&=\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle\\&=\|x\|^2+\langle x,y\rangle+\overline{\langle x,y\rangle}+\|y\|^2\\&=\|x\|^2+2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle+\|y\|^2\\&\le\|x\|^2+2|\langle x,y\rangle|+\|y\|^2.\end{aligned}$$

من هذه المتباينة ومن متباينة كوشي – شفارتز نستنتج أن

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\ \|y\| + \|y\|^2 = (\ \|x\| + \|y\|\ )^2.$$

هذا يعني أن $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$. إذن E فضاء معياري. من الواضح أن الخاصية رقم (1) من النظرية متحققة من متباينة كوشي – شفارتز. الآن نبرهن الخاصية رقم (2).ليكن $x, y \in E$. لدينا

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&\quad + \langle x,x\rangle + \langle x,-y\rangle + \langle -y,x\rangle + \langle -y,-y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&\quad + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= 2\langle x,x\rangle + 2\langle y,y\rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .
\end{aligned}$$

ملاحظة (٦- ١- ٢):

لأن كل فضاء معياري هو فضاء توبولوجي، فنستنتج من نظرية (٦- ٢- ١) أن كل فضاء ضرب داخلي هو فضاء توبولوجي.

نظرية (٦- ١- ٣)

ليكن E فضاءً معياريًا حقيقي ومعرف علية المعيار $\|\ \|$. الشرط الضروري والكافي لكي نستطيع أن نعرف على E عملية ضرب داخلي وتولد المعيار $\|\ \|$ هو لكل $x, y \in E$ لدينا

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\ \|x\|^2 + \|y\|^2\ ) \tag{6.4}$$

البرهان:

من نظرية (٦- ١- ٢) نستنتج أن الشرط ضروري.

الآن نبرهن أن الشرط كافٍ .لذلك نفرض أن Eفضاء معياري. نعرف على E عملية الضرب الداخلي الآتية:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\ ) \tag{6.5}$$

نبرهن أن هذه العملية تحقق شروط التعريف (٦- ١- ١) من أجل ذلك لتكن $x, y, z \in E$.لدينا

(1) $\langle x, x\rangle = \frac{1}{4}(\|x+x\|^2) = \|x\|^2 \geq 0$

(2) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(3) $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$

$$= \frac{1}{4}(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2) = \langle y, x\rangle$$

لبرهان الشرط الرابع سنبرهن العلاقتين الآتيتين :

$$\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \qquad (6.6)$$

$$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle \qquad (6.7)$$

لإثبات العلاقة (6.6) نعرف دالة $\phi : E\times E\times E \to R$ حيث

$$\phi(x, y, z) = 4\left[\langle x+y, z\rangle - \langle x, z\rangle - \langle y, z\rangle\right]$$

من العلاقة (6.5) نستنتج أن :

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 \\ &\quad - \|x+z\|^2 + \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 \\ &= \|(x+z)+y\|^2 - \|(x-z)+y\|^2 \\ &\quad - \|x+z\|^2 + \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 \qquad (6.8)\end{aligned}$$

ومن الشرط المعطى في النظرية نحصل على

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+z-y\|^2 \\ &\quad - 2\|x-z\|^2 - 2\|y\|^2 + \|x-z-y\|^2 \\ &\quad - \|x+z\|^2 + \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 \\ &= \|x-z-y\|^2 - \|x+z-y\|^2 + \|x+z\|^2 \\ &\quad - \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2. \qquad (6.9)\end{aligned}$$

بجمع (6-8) و (6-9) نحصل على

$$\begin{aligned}2\phi(x, y, z) &= \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 + \|x-z-y\|^2 \\ &\quad - \|x+z-y\|^2 - 2\|y+z\|^2 + 2\|y-z\|^2 \\ &= \|(y+z)+x\|^2 + \|(y+z)-x\|^2 \\ &\quad - \|(y-z)-x\|^2 - \|(y-z)-x\|^2 \\ &\quad - 2\|y+z\|^2 + 2\|y-z\|^2.\end{aligned}$$

بتطبيق الشرط المعطي مرة أخرى نحصل على

$$\begin{aligned}2\phi(x, y, z) &= 2\|y+z\|^2 + \|x\|^2 - (\|y+z\|^2 + \|x\|^2) \\ &\quad - 2\|y+z\|^2 + 2\|y-z\|^2 = 0\end{aligned}$$

هذا يعني أن $\phi(x,y,z)=0$ وبالتالي فإن العلاقة (6.6) تكون متحققة .

بالمثل لإثبات العلاقة (6.7) ليكن $x,y\in E$.نعرف دالة

$$\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$$
$$\psi(\alpha)=\langle \alpha x,y\rangle-\alpha\langle x,y\rangle.$$

نلاحظ أن

$$\psi(0)=\langle 0,y\rangle=\frac{1}{4}\langle\|y\|^2-\|y\|^2\rangle=0\ .$$

أيضاً

$$\begin{aligned}\psi(-1)&=\langle -x,y\rangle+\langle x,y\rangle\\&=\frac{1}{4}(\|-x+y\|^2-\|-x-y\|^2+\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)=0\ .\end{aligned}$$

إذن

$$\langle -x,y\rangle=-\langle x,y\rangle. \tag{6.10}$$

كذلك لكل عدد صحيح موجب n ، لدينا من العلاقة (6.8)

$$\langle n\,x,y\rangle=\langle x+x+...+x,y\rangle=n\langle x,y\rangle \tag{6.11}$$

أيضاً إذا كان n عددًا صحيحًا سالب فمن العلاقتين (6.10) و (6.11) نحصل على

$$\begin{aligned}\langle nx,y\rangle&=-\langle -nx,y\rangle\\&=(-1)(-n)\langle x,y\rangle\\&=n\langle x,y\rangle\end{aligned} \tag{6.12}$$

من العلاقتين (6.11) و (6.12) نستنتج أنه لكل عدد صحيح δ يكون $\psi(\delta)=0$ وبالتالي لكل عددين صحيحين $p,q(q\neq 0)$ لدينا

$$\begin{aligned}\psi(\frac{p}{q})&=\left\langle \frac{p}{q}x,y\right\rangle-\frac{p}{q}\langle x,y\rangle\\&=P\left\langle \frac{1}{q}x,y\right\rangle-\frac{p}{q}\langle x,y\rangle\\&=\frac{p}{q}.q\left\langle \frac{1}{q}x,y\right\rangle-\frac{p}{q}\langle x,y\rangle\\&=\frac{p}{q}\left\langle \frac{q}{q}x,y\right\rangle-\frac{p}{q}\langle x,y\rangle\\&=\frac{p}{q}\langle x,y\rangle-\frac{p}{q}\langle x,y\rangle=0.\end{aligned}$$

هذا يبرهن أنه لكل عدد نسبي β يكون $\psi(\beta)=0$.الآن من اتصال دالة المعيار نستنتج أن الدالة ψ تكون متصلة أيضا. حيث أن الأعداد النسبية كثيفة في $\mathbb{R}$ ، إذن $\psi(\alpha)=0\ ,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$ وبالتالي فإن

$$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle \quad , \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

في المثالين التاليين نوضح انه ليس من الضروري أن تكون دالة المعيار مولدة من عملية ضرب داخلي.

مثال (٦- ١- ٦)

اعتبر الفضاء المعياري $C([0,\frac{\pi}{2}])$ والذي يتكون من جميع الدوال الحقيقية المتصلة على الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$ حيث $\|f\| = \max\{|f(t)| : 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\}$. نأخذ $f(t)=\cos t$ و $g(t)=\sin t$.

نلاحظ أن

$$\|f+g\| = \max_{0\le t\le \frac{\pi}{2}} |\cos t + \sin t| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

و

$$\|f-g\| = \max_{0\le t\le \frac{\pi}{2}} |\cos t - \sin t| = 1 \quad , \quad \|f\| = \|g\| = 1.$$

لذلك فإن :

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 \ne 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right)$$

نستنتج من ذلك أن الشرط (6.4) لا يتحقق .إذن دالة المعيار المعرفة أعلاه على الفضاء المعياري $C([0,\frac{\pi}{2}])$ لا يمكن أن يتولد من عملية ضرب داخلي على الفضاء الاتجاهي $C([0,\frac{\pi}{2}])$.

مثال (٦- ١- ٧)

ليكن $p \in [1,\infty[$, $p \ne 2$ وليكن

$$l^p = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\}.$$

نعلم أن l^p فضاء معياري حيث $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. نبرهن أن هذا المعيار لا يمكن أن يتولد من عملية ضرب داخلي. نأخذ

$$x = (1,1,0,0,0,\ldots,0,\ldots),$$
$$y = (1,-1,0,0,0,\ldots,0,\ldots)$$

لدينا

$$x+y=(2,0,0,0,\dots,0,\dots)$$
$$x-y=(0,2,0,0,\dots,0,\dots)$$

وبالتالي فإن $\|x\|_p=\|y\|_p=2^{\frac{1}{p}}$ و $\|x+y\|_p=\|x-y\|_p=2$.نستنتج من ذلك أن

$$2(\|x\|_p{}^2+\|y\|_p{}^2)=2(2^{\frac{2}{p}}+2^{\frac{2}{p}}).$$

إذن العلاقة

$$\|x+y\|_p{}^2+\|x-y\|_p{}^2=2\left(\|x\|_p{}^2+\|y\|_p{}^2\right).$$

تؤدي إلى $2(2^{\frac{2}{p}}+2^{\frac{2}{p}})=8=2^3$ ومنها $p=2$ وهذا تناقض مع الفرض .هذا يعني أن الفضاءات $p\neq 2$, l^p معيارية ولا يمكن تعريف عملية ضرب داخلي تولد المعيار $\|\ \|_p$.

٢.٦. فضاءات هلبرت.
6.2. Hilbert spaces.

في نظرية (٦- ١- ٢) رأينا أن كل فضاء ضرب داخلي يكون فضاءً معياريًا ولذلك نستطيع أن نتحدث عن مفهوم تقارب المتتابعة في فضاءات الضرب الداخلي وكذلك مفهوم المتتابعة الكوشية.

تعريف (٦- ٢- ١)

يقال أن المتتابعة (x_n) والتي عناصرها من فضاء ضرب داخلي X أنها تتقارب إلى عنصر $x \in X$ إذا كان

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|^2 = \lim_{n\to\infty}\langle x_n - x, x_n - x\rangle = 0.$$

ويقال أن المتتابعة (x_n) كوشية إذا كان

$$\lim_{n,m\to\infty}\|x_n - x_m\|^2 = \lim_{n,m\to\infty}\langle x_n - x_m, x_n - x_m\rangle = 0.$$

نظرية (٦- ٢- ١)

كل متتابعة تقاربيه في فضاء ضرب داخلي X تكون كوشيه.

البرهان:

نفرض أن (x_n) متتابعة من X وتتقارب إلى عنصر $x \in X$ لدينا

$$\lim_{n,m\to\infty}\|x_n - x_m\| = \lim_{n,m\to\infty}\|x_n - x - (x_m - x)\|$$
$$\leq \lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| + \lim_{m\to\infty}\|x_m - x\| = 0$$

في الأمثلة التالية نوضح أنه ليست كل متتابعة كوشيه تكون تقاربيه .

مثال (٦- ٢- ١)

ليكن

$$l_{\neq}^2 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) : x_k = 0, \text{ for all but at most a finite number of k}\}.$$

هذا يعني أن المتتابعة (x_n) تنتمي إلى $l_{\neq}^2$ إذا كان جميع عناصرها يساوي صفر ما عدا عدد منتهٍ من العناصر. من الواضح أن $l_{\neq}^2$ فضاء اتجاهي جزئي من l^2. نعرف عملية الضرب

الداخلي على $l_{\neq}^2$ بأنها نفسها عملية الضرب الداخلي على l^2. أي أن $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$. الآن نعتبر المتتابعة الآتية (y_n) حيث :

$$y_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0, ...),$$
$$y_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, 0, ...),$$
$$y_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, ...),$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$y_n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, ..., \frac{1}{2^n}, ...).$$

نبرهن أن (y_n) متتابعة كوشية. لنفرض أن m, n عددان صحيحان موجبين و $n > m$. لدينا

$$\|y_n - y_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^{k=n} \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 \le \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$= \left(\frac{4}{3}\right)\frac{1}{2^{2m+2}} = \frac{1/3}{2^{2m}}.$$

هذا يبرهن أن المتتابعة (y_n) كوشية. سنبرهن أن هذه المتتابعة ليست تقاربيه في $l_{\neq}^2$ ضع

$$y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, ..., \frac{1}{2^n}, ...\right)$$

نلاحظ أن $y \in l^2$ وذلك لأن

$$\|y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{3}.$$

لدينا كذلك

$$\|y_n - y\|_{l^2} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+1)}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} = \frac{1}{3\ 2^{2n}}.$$

وهذا يعني أن $\lim_{n\to\infty}\|y_n - y\|_{l^2} = 0$ لأن l^2 فضاء معياري إذن نهاية المتتابعة وحيدة وبالتالي المتتابعة (y_n) ليس لها نهاية أخرى غير y . لكننا نلاحظ أن $y \notin l_{\neq}^2$.هذا يعني أن المتتابعة (y_n) ليست تقاربيه في $l_{\neq}^2$.

مثال (٦- ٢- ٢)

ليكن P هو الفضاء الاتجاهي الذي يتكون من جميع كثيرات الحدود المعرفة على الفترة $[0,1]$ ومعاملاتها أعداد مركبة. نعرف على P عملية الضرب الداخلي الآتية :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$

من الواضح أن P فضاء جزئي من فضاء الضرب الداخلي $L^2[0,1]$.

الآن نعتبر المتتابعة (f_n) من P والمعرفة كالآتي:

$$f_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x$$

$$f_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2^2}x^2$$

.

.

.

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}x^k \quad , \quad n \geq 1$$

نبرهن أن (f_n) متتابعة كوشيه. لنفرض أن m, n عددين صحيحين موجبين و $m < n$. لدينا

$$\|f_n - f_m\|^2 = \langle f_n - f_m, f_n - f_m\rangle$$

$$= \int_0^1 \|f_n - f_m\|^2 dx$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^k}|x|^k\right)^2 dx$$

$$\leq \left(\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^k}\right)^2 < \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right)^2 = \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

هذا يؤدي إلى أن $\lim_{n,m\to\infty}\|f_n - f_m\| = 0$ وبالتالي المتتابعة (y_n) كوشيه. الآن لتكن

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}x^k = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \quad , \quad x \in [0,1]$$

من الواضح أن :

$$\lim_{n\to\infty}\| f_n(x) - g(x)\|^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}|x|^k\right)^2 dx\right)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right)^2 = 0.$$

نلاحظ أن الدالة g لا تنتمي إلى الفضاء P وبالتالي فإن المتتابعة (f_n) ليس لها نهاية في الفضاء P هذا يعني أن المتتابعة كوشية وليست تقاربيه في الفضاء P.

مثال (٦- ٢- ٣)

نعتبر الفضاء الاتجاهي $C([-1,1])$ والذي يتكون من جميع الدوال الحقيقية والمتصلة على الفترة $[-1,1]$. نعرف علية عملية الضرب الداخلي

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

نعلم من مثال (٦- ١- ٥) أن هذه العملية تحقق شروط عملية الضرب الداخلي. لإثبات أنه غير كامل سوف نتبع الأسلوب المستخدم في مثال (٢- ٤- ٥) .لنعتبر متتابعة الدوال $\phi_n \in C_2([-1,1])$ حيث:

$$\phi_n(t) = \begin{cases} -1, & -1 \le t \le \frac{-1}{n}, \\ nt, & \frac{-1}{n} \le t \le \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} < t \le 1. \end{cases}$$

نبرهن أنها (ϕ_n) كوشيه. لنفرض أن m,n عددين صحيحين وموجبين و $n > m$.لدينا

$$\begin{aligned} \|\phi_n - \phi_m\|^2 &= \langle \phi_n - \phi_m, \phi_n - \phi_m\rangle \\ &= \int_{-1}^{1} |\phi_n(t) - \phi_m(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\frac{1}{m}}^{-\frac{1}{n}} |-1 - mt|^2 dt + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} (n-m)^2 t^2 dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} |1 - mt|^2 dt \\ &= \left[t + mt^2 + m^2 \frac{t^3}{3} \right]_{\frac{-1}{m}}^{\frac{-1}{n}} + \left[(n-m)^2 \frac{t^3}{3} \right]_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} \\ &+ \left[t - mt^2 + m^2 \frac{t^3}{3} \right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-1}{n} + \frac{m}{n^2} - \frac{m^2}{3n^2} + \frac{1}{m} - m\left(\frac{1}{m^2}\right) + \frac{m^2}{3}\left(\frac{1}{m^3}\right) \\
&+ \left(n^2 - 2nm + m^2\right)\frac{2}{3n^3} + \frac{1}{m} - m\left(\frac{1}{m^2}\right) + m^2\frac{1}{3m^3} \\
&- \left(\frac{1}{n} - \frac{m}{n^2} + \frac{m^2}{3n^3}\right).
\end{aligned}
$$

بالتالي لدينا

$$
\begin{aligned}
\|\phi_n - \phi_m\|^2 &= \frac{-1}{n} + \frac{m}{n^2} + \frac{1}{3m} + \frac{2}{3n} - \frac{4m}{3n^2} + \frac{1}{3m} - \frac{1}{n} + \frac{m}{n^2} \\
&= \left(-\frac{2}{n} + \frac{2}{3n}\right) + \frac{2}{3m} + \frac{m}{n^2}\left(2 - \frac{4}{3}\right) \\
&= -\frac{4}{3n} + \frac{2}{3m} + \frac{2m}{3n^2} \\
&< \frac{2}{3m} + \frac{2m}{3n^2} < \frac{2}{3m} + \frac{2m}{3m^2} \\
&= \frac{2}{3m} + \frac{2}{3m} = \frac{4}{3m}
\end{aligned}
$$

إذن $\lim_{n,m\to\infty}\left\|\phi_n - \phi_m\right\|^2 = 0$. هذا يعني أن المتتابعة (ϕ_n) كوشيه. الآن نفرض ان المتتابعة (φ_n) تتقارب الى دالة $f \in C[-1,1]$. لكل عدد طبيعي n لدينا

$$
\int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} |nt - f(t)|^2\, dt \le \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} (|nt| + |f(t)|)^2 dt.
$$

هذا يؤدي الى

$$
\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} |nt - f(t)|^2 dt = 0
$$

وبالتالي فإن

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} |\varphi_n(t) - f(t)|^2\, dt \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{\frac{-1}{n}} |-1 - f(t)|^2 dt + \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} |nt - f(t)|^2 dt + \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1} |1 - f(t)|^2 dt \\
&= \int_{-1}^{0} |-1 - f(t)|^2 dt + \int_{0}^{1} |1 - f(t)|^2\, dt.
\end{aligned}
$$

هذه المعادلة مع اتصال الدالة f دالة يؤكد أن

$$f(t)=\begin{cases}-1 & -1<t<0\\ 1 & 0<t<1\end{cases}$$

ولكن هذا يتناقض مع كون f متصلة.

تعريف (٦- ٢- ١)

يقال لفضاء ضرب داخلي أنه كامل إذا كان كل متتابعة كوشية تكون تقاربية ويقال لفضاء ضرب داخلي أنه هلبرت (Hilbert) إذا كان كامل .

مثال (٦- ٢- ٤)

من الأمثلة (٦- ٢- ١)، (٦- ٢- ٢)، (٦- ٢- ٣) نستنتج أن كل من فضاءات الضرب الداخلي $l_{\neq}^2$ و P و $C_2([-1,1])$ ليست فضاء هلبرت. نعطي أمثلة لفضاءات هلبرت.

مثال (٦- ٢- ٥)

الفضاء l^2 هو فضاء هلبرت.

سبق وأن أثبتنا في مثال (٦- ١- ٣) أن l^2 فضاء ضرب داخلي حيث عملية الضرب الداخلي معرفة كالآتي:

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\overline{y_k}.$$

الآن نفرض أن $x_n=\left(x_1^n,x_2^n,...,x_k^n,...\right),n\geq 1$ متتابعة كوشيه من ℓ_2. لدينا

$$\begin{aligned}0&=\lim_{n,m\to\infty}\|x_n-x_m\|^2\\&=\lim_{n,m\to\infty}\langle x_n-x_m,x_n-x_m\rangle\\&=\lim_{n,m\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^n-x_k^m\right)\overline{\left(x_k^n-x_k^m\right)}\\&=\lim_{n,m\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^n-x_k^m\right|^2\end{aligned}$$

من ذلك نستنتج أنه لكل عدد صحيح موجب k لدينا $\lim_{n,m\to\infty}|x_k^n-x_k^m|=0$. بالتالي المتتابعة $\left(x_k^n\right),n\geq 1$ تكون كوشية في حقل الأعداد المركبة $\mathbb{C}$. إذن لكل عدد صحيح موجب k يوجد عنصر $x_k\in\mathbb{C}$ بحيث أن $\lim_{n\to\infty}x_k^n=x_k$. نضع $x=\left(x_1,x_2,...,x_k,...\right)$. نثبت أولاً أن $x\in l^2$. حيث أن $\left(x_n\right)$ متتابعة كوشيه في l^2، إذن يوجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن $\|x_n\|<M,\forall n\geq 1$ وبالتالي لكل عدد صحيح موجب m لدينا

$$\sum_{k=1}^{m}|x_k|^2=\sum_{k=1}^{m}\lim_{n\to\infty}|x_k^n|^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}|x_k^n|^2\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k^n|^2<M^2.$$

إذن $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\le M^2$.هذا يعني أن $x\in l^2$.الآن نبرهن أن $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|_{l^2}=0$. من أجل ذلك لتكن $\varepsilon>0$. حيث أن (x_n) متتابعة كوشيه إذن يوجد عدد طبيعي N بحيث أنه إذا كانت $n,m>N$ فإن

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k^n-x_k^m|^2<\varepsilon$$

لنفرض أن q عددًا صحيحًا موجبًا. من العلاقة السابقة نجد أن لكل عدد طبيعي n بحيث أن $n>N$ لدينا

$$n,m>N\Rightarrow\sum_{k=1}^{q}|x_k^n-x_k^m|^2<\varepsilon.$$

بأخذ النهاية عندما $m\to\infty$ فنجد أن

$$n>N\Rightarrow\sum_{k=1}^{q}|x_k^n-x_k|^2<\varepsilon.$$

حيث ان q عددا صحيح موجب اختياري فإن $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$.

ملاحظة(٦- ٢- ١)

بنفس الأسلوب المتبع في مثال (٢- ٣- ٤) نستطيع اثبات أن $\mathbb{R}^n$ فضاء بناخ حيث عملية الضرب الداخلي معرفة في مثال (٦- ١- ١) وكذلك $\mathbb{C}^n$ حيث عملية الضرب الداخلي معرفة في مثال (٦- ١- ٢).

نظرية(٦- ٢- ٢)

الفضاء الجزئي Z من فضاء هلبرت H يكون كاملًا إذا كان وفقط إذا كان مغلقاً.

البرهان:

نفرض أن Z فضاء جزئي كامل و (x_n) متتابعة منه وتتقارب إلى عنصر $x\in H$.بالتالي تكون (x_n) كوشية. لأن Z فضاء جزئي كامل فتكون هذه المتتابعة تقاربية في Z.بما أن نهاية المتتابعة وحيدة إذن $x\in Z$.هذا يبرهن أن Z مغلقة. الأن نفرض أن Z فضاء جزئي مغلق و لتكن (x_n) متتابعة كوشية من Z.من الواضح أن (x_n) متتابعة كوشية من H

.حيث أن H كامل إذن يوجد $x \in H$ بحيث $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. لأن Z مغلقة فنستنتج أن $x \in Z$

. هذا يبرهن أن Z كامل.