استخدام الحاسب الآلي فى الفيزياء
3 تربية طبيعة

اعداد د/ خلف الله عمر قاسم

المحتوى

1- مقدمة عن الكمبيوتر 4

2-الباب الاول: مقدمة عن الفروق 7

-المقصود بالفروق الأمامية 7

- تفاضل الدالة المتصلة بدلالة الفروق 9

- التفاضل الاول بدلالة الفرق الامامى 10

- التفاضل الاول بدلالة الفرق الخلفى 11

- الحصول علي التفاضل الاول بدلالة الفرق الأمامي الاول باستخدام متسلسلة تايلور 16

- الحصول علي التفاضل الاول بدلالة الفرق الخلفى الاول باستخدام متسلسلة تايلور 18

- الحصول علي التفاضل الاول بدلالة الفرق المركزى باستخدام متسلسلة تايلور 18

2- الباب الثانى: 21

الفروق الامامية 22

-الفروق الامامية بدلالة المشتقات 36

-المشتقات بدلالة الفروق الامامية 38

3- الباب الثالث: 46

-الفروق الخلفية 47

- الفروق الخلفية بدلالة المشتقات 55

-المشتقات بدلالة الفروق الخلفية 60

4- الباب الرابع: 62

- الفروق المركزية 63

- القيمة المتوسطة للدالة 69

- الفروق المركزية بدلالة المشتقات 71

- المشتقات بدلالة الفروق المركزية 73
- العلاقة بين القيمة المتوسطة و الفرق المركزى 77
5- الباب الخامس: 79
- الاستكمال Interpolation 79
- الطريقة المباشرة 80
- طريقة نيوتن للفروق المقسمة 88
- طريقة لاجرانج 105
-طريقة شتيرلنج 112
6- الباب السادس: 117
- التوفيق الخطى 117
7

مقدمة عن الكمبيوتر

تم عمل الكمبيوتر لحل العديد من المشكلات. فقد حل فى البداية المسائل الرياضية والهندسية. ثم تعامل مع البيانات لأغراض تجارية. ويعمل هذه الأيام كأداة تحكم فى الغواصات والطائرات وخطوط إنتاج الآلات فى المصانع. يقوم الكمبيوتر بعمله فى كل هذه المجالات عن طريق استقبال البيانات ثم معالجتها ثم إخراج المخرجات.

مكونات الكمبيوتر:

يتكون الكمبيوتر من جزئين أساسيين هما:

1- Hardware الأجزاء الصلبة
2- Software مجموعة البرامج التي تتحكم فى عمل الأجزاء الصلبة.

يتميز الكمبيوتر بأنه آلة للاستخدامات المتعددة, بخلاف الآلات الأخرى التي تصمم للقيام بعمل واحد فقط. يرجع ذلك إلى قابلية الكمبيوتر للبرمجة ببرامج متعددة ومختلفة للقيام بمهام متعددة. وكذلك لاتصاله بالعديد من الأجهزة و المعدات الأخرى.

المكونات الصلبة للكمبيوتر:

يوجد أربعة أنواع من المكونات الصلبة للكمبيوتر وهى:

1- وحدات الإدخال
2- وحدات الإخراج

3- الذاكرة الرئيسية

4- وحدة العلاج والمنطق

وحدات الإدخال ووحدات الإخراج:

تعمل أجهزة الإدخال على إدخال البيانات من الخارج إلى ذاكرة الكمبيوتر. يوجد العديد من أجهزة الإدخال, منها, لوحة المفاتيح, محرك الأقراص, محرك الأقراص المغناطيسية, الماسح الضوئي, الفأرة.

أما أجهزة الإخراج فتشمل: محرك الأقراص, محرك الأقراص المغناطيسي, الشاشة, الطابعة.

من مميزات الكمبيوتر:

1- قدرته على الأداء بطريقة أوتوماتيكية Automation.

2- قابليته للبرمجة Programmable.

ينقسم الكمبيوتر حسب احجامة الى:

1- حجم صغير microcomputer

2- حجم وسط minicomputer

3- حجم كبير mainframe computer

توجد العديد من المشكلات فـى الهندسـة والعلـوم يمكـن أن يعبـر عنهـا فـى صـورة معادلات تفاضلية مثل مسائل الحركـة الاهتزازيـة ومسـائل التيـارات والجهـود فـى دوائر التيارات المترددة...وهكذا.لكن, قد يكـون الحـل الـدقيق لمثـل هـذه المعـادلات باستخدام قوانين التفاضل صعب أو غير موجود في بعض الحالات. لذلك نلجـأ إلـى حل تلك المعـادلات بطـرق تقريبيـة, وذلـك بحلهـا بطـرق عدديـة Numerically, وهى طرق طويلـة وتسـتهلك الكثيـر مـن الوقـت. لـذلك نسـتخدم بـرامج الكمبيـوتر. سوف نتناول هنا بعض الطرق الرياضية المستخدمة في برامج حل تلك المعـادلات عدديا. وكذلك بعـض طـرق الاسـتكمال Interpolation, أي تكملـة مـا نقـص مـن بيانات. و التوفيق Fitting, وهو استنتاج افضل خط أو منحنى يمر بمجموعة مـن البيانات.

الباب الاول

مقدمة عن الفروق

يوجد فرع من الرياضيات مهتم بالفروق بين الأرقام المتتالية في متسلسلة. تستخدم نتائج هذه الفروق في كثير من التطبيقات منها حساب قيم تفاضلات قد يصعب حسابها بالطرق التحليلية. يوجد ثلاثة انواع من الفروق: الفروق الامامية، والفروق الخلفية، والفروق المتوسطة.

-المقصود بالفروق الامامية

بفرض أن لدينا المعادلة $Y_n = 3n - 1$

صالحة للقيم $n = 1 , 2 , 3 , \dots$, بالتعويض عن هذه القيم في المعادلة

نحصل علي القيم التالية للمتغير Y $2 , 5 , 8 , 11 , 14 , ..$

والفروق الأمامية بين الأرقام المتتالية في النتائج هي :

$5 - 2 = 3 \quad , \quad 8 - 5 = 3 \quad , \quad 11\text{-}8 = 3 \quad , \quad 14\text{-}11 = 3 , ..$

يتم كتابة سلسله الأرقام وسلسله الفروق عادة كالتالي :

نتائج	19	11	8	5	2
فرق أمامي أول		3	3	3	3

كذلك بفرض أن لدينا المعادلة : $Y_n = n^2 - 3n - 2$

فإنه للقيم $n = 1 , 2 , 3 , ..$ تكون النتائج والفروق الأمامية في الصورة التالية:

نتائج	16	8	2	-2	-4	-4
فرق أمامي أول		8	6	4	2	0
فرق أمامي ثاني			2	2	2	2

تكون الأرقام في الصف الثاني هي فروق الأرقام في الصف الأول، وأرقام الصف الثالث هي فروق الأرقام في الصف الثاني . تسمى أرقام الصف الثاني بالفرق الأول للصف الأول، وأرقام الصف الثالث بالفروق الثانية له .

بصورة عامة ، إذا فرضنا أن $y_1 , y_2 , y_3 , .. y_n$

هي أية أرقام متتالية ، فإن الفروق الأولي لها تعطي من العلاقة

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$$

وفروقها الثانية تعطي ومن :

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

وفروقها الثالثة يعطي ومن :

$$\Delta^3 y_n = \Delta^2 y_{n+1} - \Delta^2 y_n$$

وهكذا ، يعطي جدول الأرقام وفروقها الأول و الثاني والثالث فى الصورة :

$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad y_5$

$\Delta y_1 \quad \Delta y_2 \quad \Delta y_3 \quad \Delta y_4 \quad \Delta y_5$

$\Delta^2 y_1 \quad \Delta^2 y_2 \quad \Delta^2 y_3 \quad \Delta^2 y_4 \quad \Delta^2 y_5$

$\Delta^3 y_1 \quad \Delta^3 y_2 \quad \Delta^3 y_3 \quad \Delta^3 y_4 \quad \Delta^3 y_5$

Etc

تفاضل الدالة المتصلة بدلالة الفروق

لحساب تفاضل دالة F (x) عند قيمة معلومة ل (×), يوجد ثلاث طرق لعمل ذلك بطريقة تقريبيةً, وذلك بالتعبير عن التفاضل بدلالة الفروق بين قيم هذه الدالة. تسمى هذه العملية بحساب تفاضل الدالة عددياً. هذه الطرق هي :

1. حساب التفاضل بدلالة الفرق الأمامي.
2. حساب التفاضل بدلالة الفرق الخلفي.
3. حساب التفاضل بدلالة الفروق المركزية.

.

ما هو التفاضل ؟

يعرف تفاضل دالة F(x) في الصورة التالية :

$$F^1(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \rightarrow \qquad (1)$$

لكـي يـتم إيجـاد هـذا التفاضـل عـدديا عنـد قيمـة معينـة x, لابـد مـن جعـل Δx

صـغيرة جـداً لكنهـا لا تسـاوي الصـفر . ويـتم حسـاب التفاضـل باحـدى الطـرق الـثلاث

السابقة.

1- التفاضل الاول بدلالة الفرق الامامي:

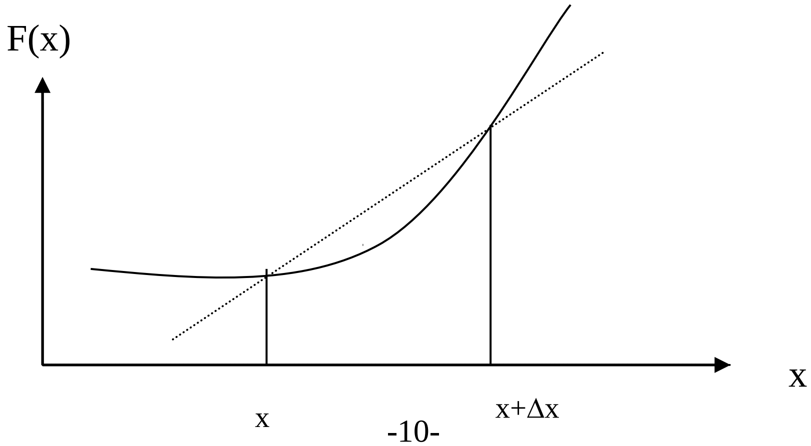
1- Forward difference approximation of the first derivative:

نعلم أن تفاضل الدالة F'(x) يكون في الصورة الآتية :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x+\Delta x) - (f(x)}{\Delta x}$$

وبجعل Δx صغيرة جداً يكون :

$$f^1(x) \cong \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



رسم توضيحى لحساب التفاضل الاول بدلالة الفرق الامامى

لذلك إذا أردنا إيجاد قيمة $f'(x)$ عند $x = x_i$، نختار نقطة أخرى تبعد

بمقدار Δx للأمام وعندها $x = x_{i+1}$ وبالتالي يكون :

$$f^1(x) \cong \frac{f(xi+\Delta x)-f(xi)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x_{i+1})-f(xi)}{x_{i+1}-x_i} \qquad \rightarrow \qquad (2)$$

حيث $\Delta x = x_{i+1} - x_i$

<u>التفاضل الاول بدلالة</u> <u>الفرق الخلفى:</u>

<u>2- Backward difference approaimation of the first derirahive</u>

نعلم مما سبق ان

$$f^1(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

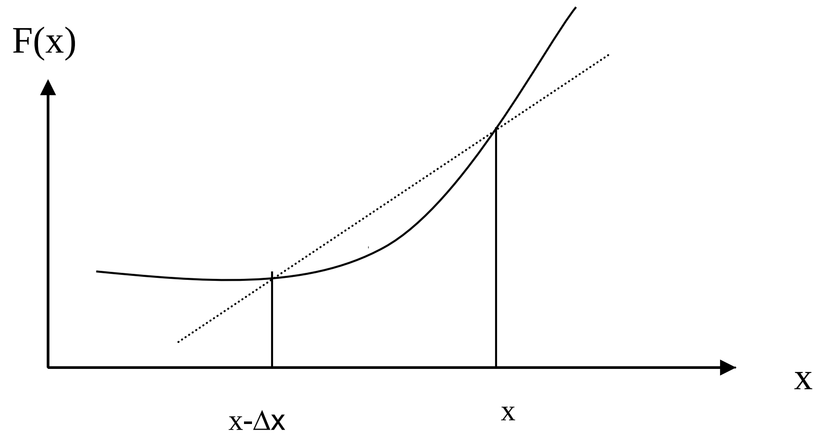
وباعتبارقيمة Δx صغيرة جداً يكون :

$$f^1(x) \cong \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

فإذا تم اختيار Δx كقيمة سالبة (أي فرق خلفي), فان

$$f^1(x) \cong \frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}$$

$$= \frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$



رسم توضيحى لحساب التفاضل الاول بدلالة الفرق الخلفى

فإذا أردنا إيجاد $F'(x)$ عند $x = x_i$ يمكننا أن نختار نقطة ترجع عنها بمقدار

Δx وهي $x = x_{i-1}$ وبالتالي :

$$f^1(x) \cong \frac{f(xi)-f(x_{i-1})}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(xi)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \qquad \rightarrow \qquad (3)$$

حيث $\Delta x = x_i - x_{i-1}$

مثال1

اذا كانت سرعة صاروخ تعطى من العلاقة التالية:

$$v(t) = 2000 \ln\left[\frac{14X10^4}{14X10^4 - 2100t}\right] - 9.8t \quad , \qquad 0 \le t \le 30$$

استخدم حساب التفاضل بواسطة الفرق الامامى لتعيين العجلة عند t=16s, استخدم

فرق مقداره $\Delta t=2s$.

الحل:

من المعادلة (2)

$$a(t) \cong \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{\Delta t}$$

$$\because t_i = 16,$$
$$\Delta t = 2$$

$$\therefore t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

$$= 16 + 2 = 18$$

$$\therefore a(16) = \frac{v(18) - v(16)}{2}$$

بالتعويض لحساب V(16) , V(18)

$$V(18) = 2000\,In\left[\frac{14\times10^4}{14\times10^4 - 2100(18)}\right] - 9.8(18)$$

$$= 453.02 \text{ m/s}$$

$$V(16) = 2000\,In\left[\frac{14\times10^4}{14\times10^4 - 2000(16)}\right] - 9.8(16)$$

$$= 392.07 \text{ m/s}$$

وبالتالي :

$$a(16) = \frac{v(18) - v(16)}{2} = \frac{453.02 - 392.07}{2} = 30.475 \text{ m/s}^2$$

وهذا هو الحل التقريبي بدلالة فرق السرعات

لإيجاد القيمة الحقيقية للعجلة عند .16s, a(16) فإننا نفاضل المعادلة :

$$V(t) = 2000\,In\left[\frac{14\times10^4}{14\times10^4 - 2100t}\right] - 9.8t$$

وذلك كالتالي :

$$a(t) = \frac{d}{dt}\left[V(t)\right]$$

من المعلوم أن :

$$\frac{d}{dt}[In(t)]=\frac{1}{t} \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)=-\frac{1}{t^2}$$

$$\therefore a(t)=2000\left[\frac{14\times10^4-2100t}{14\times10^4}\right]\frac{d}{dt}\left[\frac{14\times10^4}{14\times10^4-2100t}\right]-9..8$$

$$=a(t)=2000\left[\frac{14\times10^4-2100t}{14\times104}\right](-1)\left[\frac{14\times10^4}{(14\times104-2100t)^2}\right](-2100)-9.8$$

$$=\frac{4040-29.4t}{-200+3t}$$

$$a(16)=\frac{-4040-29.4(16)}{-200+3(16)}$$

$= 29.674\ m/s^2$

من مقارنة القيمة التقريبية بالقيمة الحقيقية يمكن معرفة مقدار الخطأ بسبب التقريب .

مثال 2 : إذا كانت سرعة صاروخ تعطي من العلاقة

$$V(t)=2000\,In\left[\frac{14\times10^4}{14\times10^4-2100t}\right]-9.8 \qquad o\le t\le 30$$

أحسب باستخدام تقريب الفرق الخلفي للتفاضل الأول العجلة عند $t = 16s$. ، استخدام

فرق مقداره $\Delta t = 2s$.

الحـــــل :

من العلاقة (3)

$$a(t)=\frac{v(t_i)-V(t_{i-1})}{\Delta t}$$

$$\because t_i=16$$
$$\Delta t=2$$
$$\therefore t_{i-1}=16-2=14$$
$$\therefore a(16)=\frac{V(16)-V(14)}{2}$$

$$\because V(16)=2000\,In\left[\frac{14\times10^4}{14\times10^4-2100(16)}\right]-9.8(16)$$
$$=392.07m/s$$

$$\because V(14)2000\,In\left[\frac{14\times10^4}{14\times10^4-2100(14)}\right]-9.8(14)$$
$$=334.24m/s$$

$$\therefore a(16)=\frac{v(16)-v(14)}{2}=\frac{392.07-334.24}{2}=28.915m/s^2$$

وبمعرفة القيمة الحقيقية للتفاضل يمكن حساب الخطأ .

الحصول علي التفاضل الاول بدلالة الفرق الأمامي الاول باستخدام متسلسلة تايلور

Derivative of the forward difference approximation

From Taylor series

تنص نظرية تايلور علي أنه في حالة معرفة قيمة دالة $F(x)$ عند نقطة x_i وكل

مشتقاتها عند تلك النقطة ، بشرط أن تكون المشتقات متصلة ما بين x_i و x_{i+1} فإن

قيمة الدالة عند x_{i+1} يعطي من العلاقة التالية:

$$F(x_{i+1}) = f(x_i) + f^{1}(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f^{11}(xi)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + ...$$

للتسهيل نعوض عن $\Delta x = x_{i+1} - x_i$

$$\therefore\ f(x_{i+1}) = f(x_i) + f^{1}(x_i)\Delta x + \frac{f^{11}(x_i)}{2!}(\Delta x)^2 + ...$$

$$\therefore\ f^{1}(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} - \frac{f^{11}(x_i)}{21}(\Delta x) - ....$$

$$\therefore\ f^{1}(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} - o(\Delta x)$$

حيث $o(\Delta x)$ تبين أن الخطأ في التقريب يكون دالة في (Δx) .

يلاحظ أننا استخدمنا هنا علامة = بدلاً من $\cong$ السابقة كما يلاحظ أن الحل الناتج عن

الفرق الأمامي يكون أكبر من القيمة الحقيقية بمقدار يتناسب مع (Δx) كما أتضح من

المثال (1).

الحصول علي التفاضل الاول بدلالة الفرق الخلفى الاول باستخدام متسلسلة تـايلور

Derivative of the backward difference approximation .

From Taylor series

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)\Delta x + \frac{f''(xi)}{2!}(\Delta x)^2 - \frac{f'''(x_i)}{3!}(\Delta x)^3 + \dots\dots$$

$$\therefore\ f^1(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} + o(\Delta x)$$

واضح ان درجة الدقة تكون دالة فى Δx لذلك فان الدقة تزداد بنقص Δx .

الحصول علي التفاضل الاول بدلالة الفرق المركزى باستخدام متسلسلة تايلور.

Central difference approximation of the first derivative.

نستخدم الفرق المركزى بدلا من الفرق الامامى او الفرق الخلفى وذلك للوصول الى دقة

اكبر فى تعيين التفاضل عدديا.

من مفكوك تايلور نعلم انه فى حالة الفروق الامامية:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(\Delta x) + \frac{f''(xi)}{2!}(\Delta x)^2 + .\frac{f'''(xi)}{3!}(\Delta x)^3 + \dots\dots \qquad 1$$

كذلك, فى حالة الفروق الخلفية:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f^{'}(x_i)\Delta x + \frac{f''(xi)}{2!}(\Delta x)^2 - \frac{f^{'''}(x_i)}{3!}(\Delta x)^3 + ... \qquad 2$$

بطرح المعادلة 2 من المعادلة 1

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = f^{1}(x_i)(2\Delta x) + .\frac{2f^{'''}(xi)}{3!}(\Delta x)^3 + ...$$

$$\therefore\ f^{'}(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} + o(\Delta x)^2 ....$$

تعتبر هذه المعادلة اكثر دقة فى حساب التفاضل الاول لان الخطأ دالة فى مربع

المسافة الصغيرة Δx.

مثال

إذا كانت سرعة صاروخ تعطي من العلاقة

$$V(t) = 2000 In\left[\frac{14\times 10^4}{14\times 10^4 - 2100t}\right] - 9.8 \qquad o \le t \le 30$$

أحسب التفاضل الأول باستخدام الفروق المركزية عند $t = 16s.$ ، مستخدما فرق مقداره

$.\Delta t = 2s.$

الحل:

$$\because\ f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x}$$

$$\because\ t_i = 16$$
$$\because\ \Delta t = 2$$
$$\therefore\ t_{i+1} = 18$$
$$\therefore\ t_{i-1} = 14$$

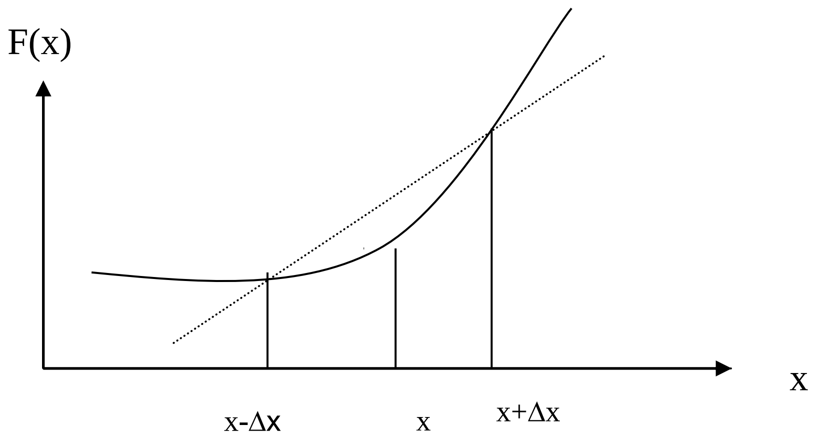
$$\therefore\ a(t) = \frac{v(18) - v(14)}{2*2}$$

$$v(18) = 2000 \ln\left[\frac{14x10^4}{14x10^4 - 2100(18}\right] - 9.8(18) = 453.02 m/s$$

$$v(14) = 2000 \ln\left[\frac{14x10^4}{14x10^4 - 2100(14}\right] - 9.8(14) = 334.24 m/s$$

$$\therefore\ a(16) = \left[\frac{453.02 - 334.24}{4}\right] = 29.659 m/s^2$$

وهى قيمة أدق من تلك التي تم الحصول عليها باستخدام الفرق الامامى أو الفرق الخلفي.



رسم توضيحى لحساب التفاضل الاول بدلالة الفرق المركزى

الباب الثانى

الفروق الأمامية

المشتقات بدلالة الفروق الأمامية

الفروق الأمامية بدلالة المشتقات

** الفـــروق الأماميـــة **

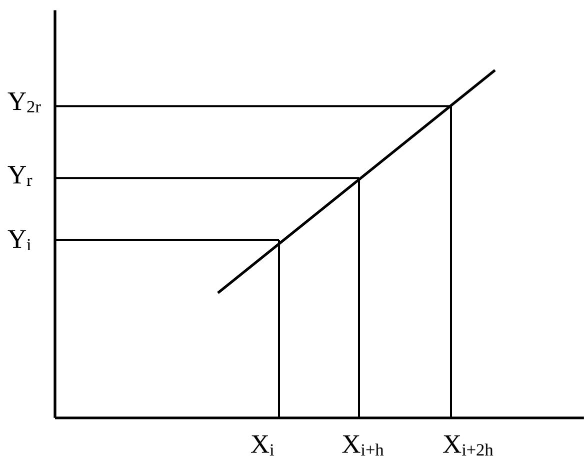
تستخدم الفروق الامامية عندما نتعامل مع بدايات متسلسلة البيانات. بفرض وجود قيم معلومة عند نقاط محددة للمتغير المستقل x_i [تسمى قيم x_i بالأدلة] ، كل قيمة يقابلها y_i كمتغير تابع . وبفرض أن الأدلة x_i علي أبعاد متساوية بحيث $x_{i+h} - x_i = h$ فإن فروق القيم الناتجة للمتغير التابع y_i تعطي من العلاقة :

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \qquad \rightarrow (1)$$

بوضع الصيغ التالية للتسهيل ،

$$y_{i+1} = y_r \,,\; y_{i+2} = y_{2r} \,,\; y_{i+3} = y_{3r} \; \ldots$$

فإنه يمكن رسم العلاقة بين yi , xi في الصورة **التالية** :



لذلك تأخذ المعادلة (1) الصورة **التالية** :

$\Delta y_i = y_r - y_i \qquad \rightarrow (1)$

وتسمي معادلة الفروق الأمامية الأولي .

نلاحظ أننا حسبنا الفروق الأمامية الأولي Δy_i بدلالة قيم المتغير التـابع (y_i),(

i) في هذه الحالة تعبر عن ترتيب الرقم في متسلسلة البيانات المعبرة عن النتائج .

فروق الفروق الأمامية الأولي تسمي بالفروق الأمامية الثانية وتحسب كالتالى :

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$

$$= \Delta y_r - \Delta y_i$$

$$= (y_{2r} - y_r) - (y_r - y_i)$$

$$= y_{2r} - y_r - y_r + y_i$$

$$= y_{2r} - 2y_r + y_i \qquad \rightarrow (3)$$

كذلك يمكن حساب الفرق الأمامي الثالث :

$$\Delta^3 y_i = \Delta(\Delta^2 y_i)$$

$$= \Delta(y_{2r} - 2y_r + y_i)$$

$$= \Delta y_{2r} - 2\Delta y_r + \Delta y_i$$

$$= (y_{3r} - y_{2r}) - 2(y_{2r} - y_r) + (y_r - y_i)$$

$$= y_{3r} - y_{2r} - 2y_{2r} + 2y_r + y_r - y_i$$

$$\Delta^3 y_i = y_{3r} - 3y_{2r} + 3y_r - y_i \qquad \rightarrow (4)$$

لا تنسى بأن $r = i + 1$ أو $i = r - 1$

وبالمثل، يمكن حساب الفرق الأمامي الرابع :

$\Delta^4 y_i = \Delta (\Delta^3 y_i)$

$= \Delta(y_{3r} - 3y_{2r} + 3y_r - y_i)$

$= \Delta y_{3r} - 3\Delta y_{2r} + 3\Delta y_r - \Delta y_i$

$= (y_{4r} - y_{3r}) - 3(y_{3r} - y_{2r}) + 3(y_{2r} - y_r) - (y_r - y_i)$

$= y_{4r} - y_{3r} - 3y_{3r} + 3y_{2r} + 3y_{2r} - 3y_r - y_r + y_i$

$\Delta^4 y_i = y_{4r} - 4y_{3r} + 6y_{2r} - 4y_r + y_i \qquad \rightarrow (5)$

مما سبق يمكن وضع قانون عام لحساب الفرق النونى الأمامي عند أية نقطة (i) في المتسلسلة وذلك علي الصورة التالية:

$\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$

فمثلاً يمكن إيجاد $\Delta^3 y_i$ وهو الفرق الثالث الأمامي عند النقطة i كالتالي :

$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i \qquad \rightarrow (1)$

*بتطبيف القانون على الحد الاول من الطرف الايمن نجد

$\Delta^2 y_{i+1} = \Delta y_{i+2} - \Delta y_{i+1}$ ……………………………*

** بتطبيف القانون على الحد الثانى من الطرف الايمن نجد

$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ ……………………………………**

من المعادلة(*) نحصل علي :

$\Delta^2 y_{i+1} = (y_{i+3} - y_{i+2}) - (y_{i+2} - y_{i+1})$

$$= y_{i+3} - y_{i+2} - y_{i+2} + y_{i+1}$$

$$= y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}$$

من المعادلة (**) نحصل علي :

$$\Delta^2 y_i \qquad = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i)$$

$$= y_{i+2} - y_{i+1} - y_{i+1} + y_i$$

$$= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

بالتعويض في معادلة (1) عن $\Delta^2 y_{i+1}$, $\Delta^2 y_i$ فإن :

$$\Delta^3 y_i \qquad = (y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}) - (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i)$$

$$= y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1} - y_{i+2} + 2y_{i+1} - y_i$$

$$= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$$

فإذا أردنا حساب الفرق الثالث عند النقطة $i = o$ مثلاً وهي أول نقطة في متسلسلة النتائج فإن :

$$\Delta^3 y_o = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_o$$

وذلك بالتعويض عن $i = o$ في $\Delta^3 y_i$ السابقة.

كذلك فإن الفرق الثالث عند النقطة الرابعة مثلاً $i = 3$ فإن

$$\Delta^3 y_3 = y_6 - 3y_5 + 3y_4 - y_3$$

كذلك فإن $\Delta^3 y_8$ عند النقطة التاسعة تكون

$$\Delta^3 y_8 = y_{11} - 3y_{10} + 3y_9 - y_8$$

وهكذا ....

<u>مثـــــال</u> :

أثبت أن

$$\Delta^4 y_o = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_o$$

<u>الحـــــــل :</u>

من التعريف

$$\Delta^4 y_o = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 \qquad \rightarrow (1)$$

وحيث أن $\Delta^3 y_o$ تم الحصول عليها وهي تساوي :

$$\Delta^3 y_o = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_o$$

فإن $\Delta^3 y_1$ نكون لها نفس الصيغة بزيادة الأدلة السفلية (بتقدمها) بمقدار 1

$$\Delta^3 y_1 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$$

بالتعويض في (1)

$$\Delta^4 y_o = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1 - y_3 - 3y_2 - 3y_1 + y_o$$

$$= y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_o$$ وهو المطلوب ,,,,

مثال : لحساب الفروق الأمامية

بفرض أن لـدينا المعادلـة $y_n = n^2 - 3n - 2$ صـالحة لقـيم $n = 1 , 2 , 3 , 4 , \ldots$

أوجد الفرق الأمامي الأول والفرق الأمامي الثاني عند $n = 3$

الحـــــل :

لقيم $n = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , \ldots$ تكون y_n لها النتائج التالية

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
-4	-4	-2	2	8

معادلة الفرق الأمامي الأول هـي

$$\Delta y_i = y_r - y_i$$

$$\Delta y_3 = y_4 - y_3$$

$$= 2 - (-2)$$

$$= 4$$

معادلة الفرق الأمامي الثانـي

$$\Delta^2 y_i = y_{2r} - 2y_r + y_i$$

$$\Delta^2 y_3 = y_5 - 2y_4 + y_3$$

$$= 8 - 2\,(2) + (-2) = 8 - 4 - 2 = 2$$

للتأكد من ذلك الحل نكتب متسلسلة النتائج ومتسلسلتين الفرق الأمامي الأول الثانى علي الترتيب كالتالي :

y_1 y_2 y_3 y_4 y_5

النتائج	8	2	-2	-4	-4
فرق امامى اول	6	4	2	0	
فرق امامى ثانى	2	2	2		

منها يتضح أن الفرق الأمامي الأول عند y_3 هو

$$2 - (-2) = 4$$

وأن الفرق الأمامي الثاني عند y_3 هو

$$6 - 4 = 2$$

يمكن حساب الفروق الامامية الاول و الثانى والثالث و .... بواسطة القانوت العام التالى:

$$\Delta^k y_i = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} y_{k-1}$$

يعطى هذا القانون الحد رقم i فى الفرق رقم k

أى ان k هى رتبة الفرق (الاول. الثانى, الثالث, ...) و i هى رتبة الحد داخله.

الحد $\binom{k}{i}$ عبارة عن $\frac{k^{(i)}}{i!}$ ويعطى كما فى الجدول التالى لقيم k مـن 1 الـى 5, و قـيم I

من 0 الى 5.

i	0	1	2	3	4	5
k	1	1				
2 i	1	2	1			
k	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

مثلا

$$\frac{4^{(3)}}{3!}=\frac{4*3*2}{3*2*1}=4,.....\frac{3^{(1)}}{1!}=\frac{3}{1}=3,........\frac{3^{(2)}}{2!}=\frac{3*2}{2*1}=3$$

مثـــال: باســتخدام القــانون $\Delta^k y_i=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}y_{k-1}$ احســب الفـرق الامــامى الاول

Δy_i

نضع فى القانون k=1 , i تتغير من 0 الى 1.

أولا: بوضع k=1 , i=0

$$\therefore \Delta y_0=(-1)^0\binom{1}{0}y_{1-0}=y_1$$

ثم بوضع k=1 , i=1

$$\therefore \Delta y_1 = (-1)^1 \binom{1}{1} y_0 = -y_0$$

بجمع المعادلتين السابقتين,

$$\therefore \Delta y_i = y_1 - y_0$$

وهو الفرق الامامى الاول.

ألفرق الامامى الثانى

لحساب الفرق الامامى الثانى, يأخذ القانون العام الصورة التالية:

$$\Delta^2 y_i = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \binom{2}{i} y_{2-i}$$

بوضع i=0 يكون

$$\Delta^2 y_0 = (-1)^0 \binom{2}{0} y_{2-0} = y_2$$

بوضع i=1 يكون

$$\Delta^2 y_1 = (-1)^1 \binom{2}{1} y_{2-1} = -2 y_1$$

بوضع i=2 يكون

$$\Delta^2 y_2 = (-1)^2 \binom{2}{2} y_{2-2} = y_0$$

بجمع الثلاث معادلات السابقة نحصل على

$$\Delta^2 y_i = y_2 - 2y_1 + y_0$$

بنفس الكيفبة يمكن حساب الفرق الامامى الثالث

حيث يأخذ القانون العام الصورة التالية:

$$\Delta^3 y_i = \sum_{i=0}^{3} (-1)^i \binom{3}{i} y_{3-i}$$

بوضع i=0 **نحصل على**

$$\Delta^3 y_0 = (-1)^0 \binom{3}{0} y_{3-0} = y_3$$

بوضع i=1 نحصل على

$$\Delta^3 y_1 = (-1)^1 \binom{3}{1} y_{3-1} = -3y_2$$

بوضع i=2 نحصل على

$$\Delta^3 y_2 = (-1)^2 \binom{3}{2} y_{3-2} = 3y_1$$

بوضع i=3 نحصل على

$$\Delta^3 y_3 = (-1)^3 \binom{3}{3} y_{3-3} = -y_0$$

بجمع الاربع معادلات السابقة

$$\therefore \Delta^3 y_i = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

كذلك يمكن حساب الفرق الرابع الأمامي,

حيث يأخذ القانون العام الصورة التالية:

$$\Delta^4 y_i = \sum_{i=0}^{4} (-1)^i \binom{4}{i} y_{4-i}$$

بوضع i=0 نحصل على

$$\Delta^4 y_0 = (-1)^0 \binom{4}{0} y_{4-0} = y_4$$

بوضع i=1 نحصل على

$$\Delta^4 y_1 = (-1)^1 \binom{4}{1} y_{4-1} = -4y_3$$

بوضع i=2 نحصل على

$$\Delta^4 y_2 = (-1)^2 \binom{4}{2} y_{4-2} = 6y_2$$

بوضع i=3 نحصل على

$$\Delta^4 y_3 = (-1)^3 \binom{4}{3} y_{4-3} = -\frac{24}{6} y_1 = -4y_1$$

بوضع i=4 نحصل على

$$\Delta^4 y_4 = (-1)^4 \binom{4}{4} y_{4-4} = y_0$$

بجمع المعادلات الخمس السابقة, نحصل على

$$\Delta^4 y_i = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$$

يمكن ان يأخذ القانون السابق الشكل التالى لحساب الفرق الامامى

$$\Delta^k y_i = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} y_{i+k-m}$$

حيث i تعبر عن رقم الحد فى متسلسلة البيانات الاصلية المراد حساب الفرق الامامى عنده ويمكن ان تأخذ القيم 0، 1، 2 ....للحد الاول ، الثانى ، الثالث .....على الترتيب.

K تعبر عن رتبة الفرق الامامى وتأخذ القيم 1، 2، 3، .... للفرق الامامى الاول ، الثانى ، الثالث، ... وهكذا.

m رقم الحد فى معادلة الفرق الناتجة وتأخذ القيم من 0 الى k+1 .

وبالتالى فإنه للفرق الامامى الاول يكون لدينا

k=1

m=0, 1

فيكون الحد الاول من قانون الفرق الاول نحصل عليه بوضع m=0 و k=1

$$\Delta y_i = (-1)^0 \binom{1}{0} y_{i+1-0}$$

$$= \Delta y_i = 1*1*y_{i+1} = y_{i+1}$$

ويكون الحد الثانى من قانون الفرق الاول نحصل عليه بوضع m=1 و k=1

$$\Delta y_i = (-1)^1 \binom{1}{1} y_{i+1-1}$$

$$\Delta y_i = -1*1*y_i = -y_i$$

فيكون قانون الفرق الامامى الاول هو مجموع الحدين السابقين

$$\Delta y_i = y_{i+1} - yi$$

قانون الفرق الامامى الثانى

فى هذه الحالة يتم وضع k=2 وبالتالى تكون m=0, 1, 2

نحصل على الحد الاول بوضع m=0 فى القانون

$$\Delta^2 y_i = \sum_m^2 (-1)^m \binom{2}{m} y_{i+2-m}$$

نحصل على الحد الاول بوضع m=0 فى القانون فيأخذ الصورة التالية

$$\Delta^2 y_i = (-1)^0 \binom{2}{0} y_{i+2-0} = 1 * 1 * y_{i+2} = y_{i+2}$$

بوضع m=1 نحصل على الحد الثانى

$$\Delta^2 y_i = (-1)^1 \binom{2}{1} y_{i+2-1} = -1 * 2 * y_{i+1} = -2 y_{i+1}$$

بوضع m=2 نحصل على الحد الثالث

$$\Delta^2 y_i = (-1)^2 \binom{2}{2} y_{i+2-2} = 1 * 1 * y_{i+2-2} = y_i$$

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2 y_{i+1} + y_i$$

$$\Delta^2 y_i = y_{2r} - 2 y_r + y_i$$

الفروق الأمامية بدلالة المشتقات

تنص نظرية تايلور علي أنه في حالة معرفة قيمة دالة $y = f(x)$ وكل مشتقاتها عند نقطة x بشرط أن تكون الدالة و المشتقات متصلة ما بين x , h فإن قيمة الدالة عند ($x + h$) تعطي من :

$$y(x+h) = y(x) + hDy(x) + \frac{h^2}{2i} D^2 y(x) + \frac{h^3}{3i} D^3 y(x) + ... + \frac{h^n}{ni} D^n y(x)$$

حيث $D = \frac{d}{dx}$

$$\therefore y(x+h) = y(x)\left[1 + hD + \frac{h^2}{2i} D^2 + ... \frac{h^n}{ni} D^n\right]$$

$$\therefore y(x+h) = y(x)e^{hD} \qquad \rightarrow (1)$$

حيث المؤثر :

$$e^{hD} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} h^i D^i$$

وحيث أن

y_x at y_i

$y (x + h)$ at y_r

فإن الفرق الأمامي الأول

$$\Delta y_i = y_r - y_i$$

$$= y (x + h) - y_x$$

$$= y_x e^{hD} - y_x$$

$$= y_x (e^{hD} - 1)$$

$$\Delta y_i = y_i \left(e^{hD} - 1 \right)$$

$$\Delta = e^{hD} - 1 \qquad \rightarrow (1)$$

الفرق الأمامي الثاني بدلالة المشتقات

$$\Delta^2 = \Delta.\Delta$$

$$= \left(e^{hD} - 1 \right)^2$$

$$= e^{2hD} - 2e^{hD} + 1 \qquad \rightarrow (2)$$

الفرق الأمامي الثالث بدلالة المشتقات

$$\Delta^3 = \Delta(\Delta^2)$$

بالتعويض عن Δ , Δ^2 من (1) , (2)

$$\Delta^3 = \left(e^{hD} - 1 \right)\left(e^{2hD} - 2e^{hD} + 1 \right)$$

$$= e^{3hD} - 2e^{2hD} + e^{hD} - e^{2hD} + 2e^{hD} - 1$$

$$= e^{3hD} - 3e^{2hD} + 3e^{hD} - 1 \qquad \rightarrow (3)$$

المشتقات بدلالة الفروق الأمامية

~~~~~~~~~~~~~~~~~~

المشتقة الأمامية الأولى

$$\because \Delta = e^{hD} - 1$$
$$\therefore e^{hd} = \Delta + 1$$

بأخذ ln للطرفين

$$\therefore hD = \ln(\Delta + 1)$$

$$\therefore hD = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \ldots\ldots.. \qquad \rightarrow 1$$

المشتقة الثانية بدلالة الفروق :

$$(hD)^2 = hD*hD$$

$$= \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4}\right)\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4}\right)$$

بضرب الحدين معاً

$$\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4}$$
$$*$$
$$\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4}$$

$$\Delta^2 - \frac{\Delta^3}{2} + \frac{\Delta^4}{3} - \frac{\Delta^5}{4}$$
~~~~~~~~~~~~~~~~~~

$$\frac{-\Delta^3}{2}+\frac{\Delta^4}{4}-\frac{\Delta^5}{6}+\frac{\Delta^6}{8}$$

$$\frac{\Delta^4}{3}-\frac{\Delta^5}{6}+\frac{\Delta^6}{9}-\frac{\Delta^7}{12}$$

$$\frac{-\Delta^5}{4}+\frac{\Delta^6}{8}-\frac{\Delta^7}{12}+\frac{\Delta^8}{16}$$

بالجمع ــــــــــــــــــ

$$\Delta 2-\frac{2\Delta^3}{2}+\frac{11\Delta^4}{12}-\frac{20D^5}{24}+\frac{26\Delta^6}{72}-\frac{2\Delta^7}{12}+\frac{\Delta^8}{16}$$

صيـــغ الفـــروق

~~~~~~

يوجد العديد من صيغ الفروق للدوال سوف ندرس منها :

1- فرق الدالة الثابتة يساوي أصفاراً :

$\Delta C = o$

أثبت أنه للدالة الثابتة تكون جميع الفروق أصفاراً

نفرض أن $y_i = c$ لجمبع قيم i وهذه دالة ثابتة ، وبالتالي يكون :

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = c - c = o$

2- بفرض أن c مقدار ثابت فـــإن :

$\Delta (cy_i) = c\Delta y_i$
~~~~~~

ولإثبات :

$$\Delta (cy_i) = cy_{i+1} - cy_i = c [y_{i+1} - y_i] = c\Delta y_i$$

3- الخاصية الخطية :

بفرض وجود دالتين معرفتين لنفس الفئة للأدلة x_i وأن قيم هاتين الدالتين هـي u_i ، v_i وباعتبار دالة ثالثة نأخذ القيم التالية :

$$W_i = c_1 u_i + c_2 v_i$$

حيث c_1 ، c_2 ثابتان مستقلان عن x_i ، أثبت أن :

$$\Delta w_i = c_1\Delta u_i + c_2\Delta v_i$$

البرهان من التعريفات :

$$\begin{aligned} \Delta w_i &= w_{i+1} - w_i \\ &= (c_1u_{i+1} + c_2v_{i+1}) - (c_1u_i + c_2v_i) \\ &= c_1 (u_{i+1} - u_i) + c_2 (v_{i+1} - v_i) \\ &= c_1 \Delta u_i + c_2 \Delta v_i \end{aligned}$$

وهو المطلوب

4- الفروق لحاصل ضرب دالتين تعطي بالصيغة

$$\Delta (u_iv_i) = u_i\Delta v_i + v_{i+1}\Delta u_i$$

البرهان

باعتبار دالتين معرفتين لنفس الفئة من الادلة x_i وأن قيم هاتين الدالتين u_i , v_i

ونعتبر دالة $z_i = u_i v_i$ فإنه :

من التعريف

$$\Delta z_i = u_{i+1}v_{i+1} - u_i v_i$$

بطرح وإضافة الحد $u_i v_{i+1}$ للطرف الأيمن

$$\Delta z_i = u_{i+1}v_{i+1} - u_i v_{i+1} + u_i v_{i+1} - u_i v_i$$

$$= v_{i+1} (u_{i+1} - u_i) + u_i (v_{i+1} - v_i)$$

$$= u_i \Delta v_i + v_{i+1} \Delta u_i$$ وهو المطلوب

يمكن البرهنة علي النتيجة

$$\Delta z_i = u_{i+1}\Delta v_i + v_i \Delta u_i$$

وذلك بإضافة وطرح $u_{i+1}v_i$ للطرف الأيمن

**** تماريـــــن ****

تمريـــن (1)

1- أحسب إلي الفروق الرابعة للقيم y_k الآتية [يمكن اعتبار أن $x_k = k$]

k	0	1	2	3	4	5	6
y_k	0	1	16	81	256	625	1296

الحـــــل :

يمكن وضع الجدول والفروق في الصورة التالية :

k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$
0	0				
1	1	1			
2	16	15	14		
3	81	65	50	36	
4	256	175	110	60	24
5	625	369	194	84	24
6	1296	671	302	108	24

واضح أن الفروق تصل إلي الثبات في المرحلة الرابعة وأن الفروق التي فوقها تكون أصفار

تمريــــن (2)

مستخدما العلاقة التالية:

$$\Delta^k Y_i = \sum_{i=0}^{k} -1^i \binom{k}{i} y_{k-i}$$

أثبت أن

$\Delta^5 y_i = y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_o$

الحـــــل

بوضع $i = o$ في التعريف

$$\therefore \Delta^5 y_o = (-1)^o \binom{5}{0} y_{5-o} = y_5 \qquad \rightarrow (1)$$

بوضع $i = 1$

$$\Delta^5 y_1 = (-1)^1 \binom{5}{1} y_{5-1} = -5y_4 \qquad \rightarrow (2)$$

بوضع $i = 2$

$$\Delta^5 y_2 = (-1)^2 \binom{5}{2} y_{5-2} = 10y_3 \rightarrow (3)$$

بوضع $i = 3$

$$\Delta^5 y_3 = (-1)^3 \binom{5}{3} y_{5-3} = -10y_2 \qquad \rightarrow (4)$$

بوضع $i = 4$

$$\Delta^5 y_4 = (-1)4 \binom{5}{4} y_{5-4} = 5y_1 \qquad \rightarrow (5)$$

بوضع $i = 5$

$$\Delta^5 y_5 = (-1)^5 \binom{5}{5} y_0 = -y_0 \qquad \rightarrow (6)$$

بجمع النتائج من (1) حتى (6) يكون

$$\Delta^5 y_i = y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_o$$

وهو المطلوب ....

تمريـــن (3)

أثبت أنه إذا كانت $y_k = k^4$ فإن $\Delta^4 y_k = 24$

الحـــــل :

$$Y_k = k^4$$

$$\Delta y_k = 4k^3 , \Delta^2 y_k = 12k^2 ، \Delta^3 y_k = 24k , \Delta^4 y_k = 24$$

وهو المطلوب :

تمريـــن (4)

باستخدام القيم للفروق الأولى المعطاة ، أحسب القيم المحترفة

y_k	o	…	…	…	…	…
Δy_k	1	2	4	7	11	18

الحـــــــل

y_k	o	1	3	7	14	25	43
Δy_k	1	2	4	7	11	18	

تمريـــن (5)

بتقدم جميع الأدلة في الصيغة

$$\Delta^2 y_o = y_2 - 2y_1 + y_o$$

أكتب مفكوكاً مماثلاً لكل من $\Delta^2 y_1$, $\Delta^2 y_2$ ثم أحسب حاصل الجمع للفروق الثلاثة هذه.

الحــــــــــل

$$\Delta^2 y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$$

$$\Delta^2 y_2 = y_4 - 2y_3 + y_2$$

حاصل ا لجميع للفروق التالية كلها يكون

$$\Delta^2 y_o + \Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2 = y_2 - 2y_1 + y_o + y_3 - 2y_2 + y_1 + y_4 - 2y_3 + y_2$$

$$= - y_1 + y_o - y_3 + y_4 = y_4 - y_3 - y_1 + y_o$$

وهو الحل ......

الباب الثالث

الفروق الخلفية

الفروق الخلفية بدلالة المشتقات

المشتقات بدلالة الفروق الخلفية

الفـــروق الخلفيـــة

~~~~~~~~~~

نحتـاج للتعامـل مـع الفروق الخلفيـة عنـدما نتعامـل مـع نهايـة متسلسـلة البيانـات. فـإذا فرضنا أنه لكل قيمة x_i توجد قيمة y_i للمتغير التابع, وبفرض ان الادلـة x_i تكون علـي ابعاد متساوية بحيث $x_i - x_{i-1} = h$ فإن الفروق للقيم الناتجـة للمتغير التـابع y_i تعطـي من :

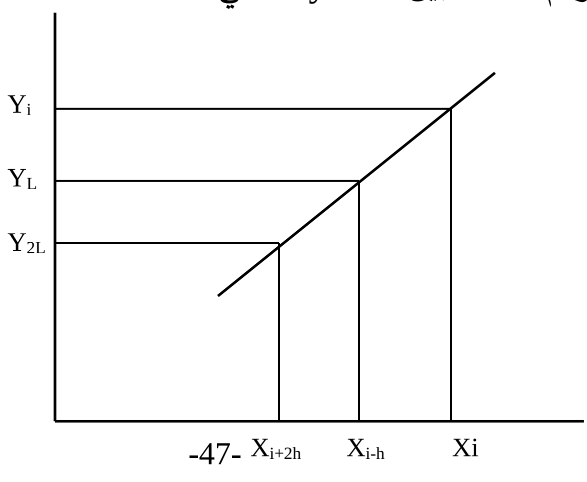
$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1} \qquad \rightarrow (1)$$

ويسمى هذا بالفرق الخلفي الأول

بوضع الصبغ التالية للتسهيل

$$Y_{i-1} = y_L \,,\, y_{i-2} = y_{2L} \,,\, y_{i-3} = y_{3L} \,,\, \ldots$$

فإنه يمكن رسم العلاقة بين x_i ، y_i كالتالي :


~~~~~~~~~~

لذلك نأخذ المعادلة (1) الصورة التالية :

$$\nabla y_i = y_i - y_L \qquad \rightarrow (2)$$

وتسمى معادلة الفرق الخلفي الأولي. i، كما في الفروق الأمامية السابق

الحديث عنها، تعبر عن ترتيب الرقم في متسلسلة النتائج .

فروق الفروق الخلفية الأولى تسمى بالفروق الخلفية الثانية :

$$\begin{aligned}
\nabla^2 y_i &= \nabla\,(\nabla y_i) \\
&= \nabla\,(y_i - y_L) \\
&= \nabla y_i - \nabla y_L \\
&= (y_i - y_L) - (y_L - y_{2L}) \\
&= y_i - y_L - y_L + y_{2L} \\
&= y_i - 2y_L + y_{2L} \qquad \rightarrow (3)
\end{aligned}$$

يلاحظ أن : $L = i - 1 \;,\; 2L = i - 2 \;,\; 3L = i - 3 \;, \ldots..$

كذلك يمكن حساب الفرق الخلفي الثالث

$$\begin{aligned}
\nabla^3 y_i &= \nabla\,(\nabla^2 y_i) \\
&= \nabla\,(y_i - 2y_L + y_{2L}) \\
&= \nabla y_i - 2\nabla y_L + \nabla y_{2L}
\end{aligned}$$

$$= (y_i - y_L) -2 (y_L - y_{2L}) + (y_{2L} - y_{3L})$$

$$= y_i - y_L - 2y_L + 2y_{2L} + y_{2L} - y_{3L}$$

$$= y_i - 3y_L + 3y_{2L} - y_{3L} \qquad \rightarrow (4)$$

كذلك يمكن حساب الفرق الخلفي الرابع :

$$\nabla^4 y_i = \nabla \ (\nabla^3 y_i)$$

$$= \nabla \ (y_i - 3y_L + 3y_{2L} - y_{3L})$$

$$= \nabla y_i - 3\nabla y_L + 3\nabla y_{2L} - \nabla y_{3L}$$

$$= (y_i - y_L) -3 (y_L - y_{2L}) +3 (y_{2L} - y_{3L}) - (y_{3L} - y_{4L})$$

$$= y_i - y_L - 3y_L + 3y_{2L} + 3y_{2L} - 3y_{3L} - y_{3L} - y_{4L}$$

$$= y_i - 4y_L + 6y_{2L} - 4y_{3L} + y_{4L} \qquad \rightarrow (5)$$

أمثلة علي حساب الفروق الخلفية :

بفرض أن لدينا المعادلة $y_n = n^2 - 3n - 2$

صالحة لقيم $n = 1 , 2 , 3 , 4 , \ldots$ ، أوجد الفرق الخلفي الأول والفرق الخلفي

الثاني عند $n = 3$

الحـــــــل :

للقيم $n = 1 , 2 , 3 , 4 , 5$ تكون النتائج y_n لها المتسلسلة التالية :

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
-4	-4	-2	2	8

معادلة الفرق الخلفي الأول هي

$$\nabla y_i = y_i - y_L$$

$$= y_3 - y_2$$

$$= -2 - (-4)$$

$$= 2$$

معادلة الفرق الخلفي الثاني هي

$$\nabla^2 y_i = y_i - 2y_L + y_{2L}$$

$$= y_3 - 2y_2 + y_1$$ حيث, $i=3,\ L = i-1 = 2,\ 2L = i-2 = 1$

$$= -2 -2(-4) + (-4)$$

$$= -2 + 8 - 4$$

$$= 2$$

للتأكد من ذلك الحل نكتب متسلسلة النتائج ومتسلسلة الفروق الخلفية الأولي ثم

متسلسلة الفروق الخلفية الثانية كالتالي

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
-4	-4	-2	2	8	الناتج
	0	2	4	6	فروق خلفية أولى
		2	2	2	فروق خلفية ثانية

منها يتضح أن الفرق الخلفي الأول عند y_3 هو

$$- 2 -(-4) = - 2 + 4 = 2$$

وأن الفرق الخلفي الثاني عند y_3 هو

$$2 - 0 = 2$$

استنتاج صيغ الفروق الخلفية من القانون:

$$\nabla^k y_i = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} y_{i-m}$$

حيث i تعبر عن رقم الحد فى متسلسلة البيانات الاصلية المراد حساب الفرق الخلفى عنده ويمكن ان تأخذ القيم 0، 1، 2 ....للحد الاول ، الثانى ، الثالث .....على الترتيب.

K تعبر عن رتبة الفرق الخلفى وتأخذ القيم 1، 2، 3، .... للفرق الخلفى الاول ، الثانى ، الثالث، ... وهكذا.

m رقم الحد فى معادلة (صيغة) الفرق الناتجة وتأخذ القيم من 0 الى k+1 .

مثال1 : استنتج صيغة الفرق الخلفى الاول من العلاقة $\nabla^k y_i = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} y_{i-m}$

الحل:

حيث ان المطلوب هو استنتاج صيغة الفرق الخلفى الاول، فإن k=1 وبالتالى فإن m تأخذ القيم 0، 1.

بالتعويض عن k=1 و m=0 فى العلاقة $\nabla^k y_i = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} y_{i-m}$

فإن

$$\nabla\ y_i = (-1)^0 \binom{1}{0} y_{i-0} = 1*1*y_i = y_i$$

بالتعويض عن k=1 و m=1 نحصل على

$$\nabla\ y_i = (-1)^1 \binom{1}{1} y_{i-1} = -1*1*y_{i-1} = -y_{i-1}$$

وبالتالى تكون الصيغة النهائية للفرق الخلفى الاول كالتالى:

$$\nabla\ y_i = y_i - y_{i-1}$$

ويمكن ان تكتب فى الصورة:

$$\nabla\ y_i = y_i - y_L$$

مثال 2

استنتج صيغة الفرق الخلفى الثانى من العلاقة $\nabla^k y_i = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} y_{i-m}$

الحل:

حيث ان المطلوب هو استنتاج صيغة الفرق الخلفى الثانى، فإن k=2 وبالتالى فإن m تأخذ القي 0، 1، 2.

بالتعويض عن k=2 و m=0 فى العلاقة $\nabla^k y_i = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} y_{i-m}$ نحصل على:

$$\nabla^2 y_i = (-1)^0 \binom{2}{0} y_{i-0} = y_i$$

بالتعويض عن k=2 و m=1

$$\nabla^2 y_i = (-1)^1 \binom{2}{1} y_{i-1} = -2y_{i-1}$$

بالتعويض عن k=2 و m=2

$$\nabla^2 y_i = (-1)^2 \binom{2}{2} y_{i-2} = y_{i-2}$$

$$\therefore \nabla^2 y_i = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$$

والتى يمكن ان تكتب فى الصورة

$$\nabla^2 y_i = y_i - 2y_L + y_{2L}$$

* الفــروق الخلفية بدلالــــة المشتقـــــات *

من مفكوك تايلور نعلم ان

$$\therefore y(x+h) = y(x)e^{hD} \qquad \rightarrow (1)$$

وإذا أخذنا h كقيمة سالبة –h فإن

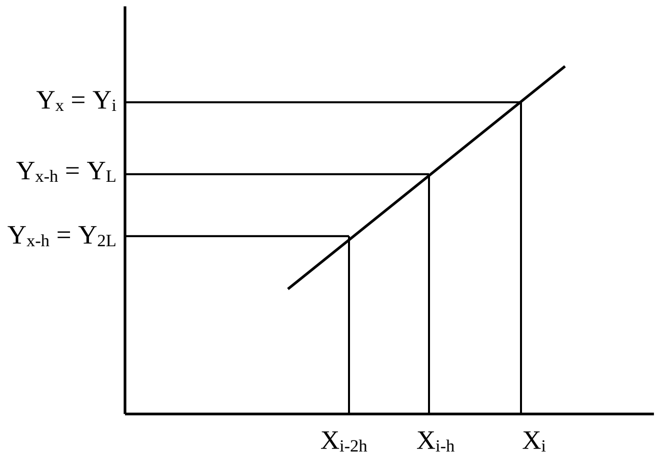
$$y(x-h) = y(x)e^{-hD} \qquad \rightarrow (2)$$

المعادلتين (1) ، (2) تعبر عن مفكوك تايلور للدالة y(x) عند قيمة +h وقيمة –h

قبل وبعد x أي في حالة الفرق الأمامي والخلفي.

التعبير عن الفرق الخلفي الأول عند yi بدلالة المشتقات

*** ~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~ ***



يعبر عن الفرق الخلفي الأول في الصورة التالية

$$\nabla y_i = y_i - y_L$$

$$= y_x - y\,(x - h)$$

بالتعويض عن $y\,(x - h)$ من مفكوك تايلور

$$= y_x - e^{-hD}\,y\,(x)$$

$$= y_x\,(1 - e^{-hD})$$

$$\nabla y_i = y_i\,(1 - e^{-hD})$$

الفرق الأول

$$\nabla = 1 - e^{-hD}$$

الفرق الخلفي الثاني

$$\nabla^2 y_i = \nabla\,(y_i - y_L)$$

$$= \nabla\,[\,y_x - y\,(x - h)\,]$$

$$= \nabla\,[\,y_x - y_x\,e^{-hD}\,]$$

$$= \nabla y_x\,[\,1 - e^{-hD}\,]$$

$$\nabla^2 y_i = \nabla y_i\,[\,1 - e^{-hD}\,]$$

$$\nabla^2 = \nabla\,[\,1 - e^{-hD}\,]$$

بالتعويض من ∇ من الحالة السابقة

$$\nabla^2 = (1 - e^{-hD})(1 - e^{-hD}) = 1 - 2e^{-hD} + e^{-2hD}$$

$$\text{or } = \left[1 - \left(1 - hD + \frac{h^2D^2}{2!} - \frac{h^3D^3}{3!} + \ldots\right)\right]\left[1 - \left(1 - hD + \frac{h^2D^2}{2!} - \frac{h^3D^3}{3!} + \ldots\ldots\right)\right]$$

$$= \left(1 - 1 + hD - \frac{h^2D^2}{2!} + \frac{h^3D^3}{3!}\right)\left(1 - 1 + hD - \frac{h^2D^2}{2!} + \frac{h^3D^5}{3!}\right)$$

$$= \left(hD - \frac{h^2D^2}{2!} + \frac{h^3D^3}{3!}\right)\left(hD - \frac{h^2D^2}{2!} + \frac{h^3D^3}{3!}\right)$$

بضرب القوسين معاً :

$$hD - \frac{h^2D^2}{2!} + \frac{h^3D^3}{3!}$$

$$hD - \frac{h^2D^2}{2!} + \frac{h^3D^3}{3!}$$

$$h^2D^2 - \frac{h^3D^3}{2!} + \frac{h^4D^4}{3i}$$

$$- \frac{h^3D^3}{2!} + \frac{h^4D^4}{2!.2!} - \frac{h^5D^5}{2!.3!}$$

$$\frac{h^4D^4}{3!}-\frac{h^5D^5}{2!.3!}+\frac{h^6D^6}{3!.3!}$$

بالجمــع ______________________

$$h^2D^2\frac{-2h^3D^3}{2!}+\frac{14h^4D^4}{24}-..............$$

$$\therefore \nabla^2=h^2D^2-h^3D^3+\frac{7h^4D^4}{12}-..............$$

الفرق الخلفي الثالث بدلالة المشتقات

$$\nabla^3 y_i = \nabla(\nabla^2)$$

$$=\left(hD-\frac{h^2D^2}{2!}+\frac{h^3D^3}{3!}\right)\left(h^2D^2-h^3D^3+\frac{7}{12}h^4D^4\right)$$

بضرب القوسين معاً :

$$h^2D^2-h^3D^3+\frac{7}{12}h^4D^4$$

$$hD-\frac{h^2D^2}{2!}+\frac{h^3D^3}{3!}$$

____

$$h^3D^3-h^4D^4+\frac{7}{12}h^5D^5$$

$$-\frac{h^4D^4}{2!}+\frac{h^5D^5}{2!}-\frac{7}{12}\frac{h^6D^6}{2!}$$

$$\frac{h^5D^5}{3!}-\frac{h^6D^6}{3!}+\frac{7}{12}\frac{h^7D^7}{3!}$$

$$= h^3D^3 - \frac{3}{2}h^4D^4 + \left(\frac{7h^5D^5 + 6h^5D^5 + 2h^5D^5}{12}\right) - \left(\frac{7h^6D^6 + 4h^6D^6}{24}\right) + \ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \nabla^3 = h^3D^3 - \frac{3}{2}h^4D^4 + \frac{5}{4}h^5D^5 - \frac{11}{24}h^6D^6 \rightarrow$$

المشتقات بدلالة الفروق الخلفية

اثبتنا ان

$$\nabla \quad = 1 - e^{-hD}$$

$$\therefore e^{-hD} = 1 - \nabla$$

$$\therefore \ln(e^{-hd}) = \ln(1 - \nabla)$$

$$\therefore -hD = \ln(1 - \nabla)$$

وحيث ان مفكوك:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - ....$$

$$\therefore -hD = -(\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4})$$

وهى معادلة تعبر عن المشتقة الاولى بدلالى الفروق $\therefore hD = \nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4}$

الخلفية

كذلك يمكن اثبات ان المشتقة الثانية بدلالة الفروق الخلفية تكون فى الصورة:

$$h^2 D^2 = \nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12}\nabla^4$$

و المشتقة الثالثة بدلالة الفروق الخلفية تكون فى الصورة:

$$h^3D^3 = \nabla^3 + \frac{3}{2}\nabla^4 + \frac{7}{4}\nabla^5$$

و المشتقة الرابعة بدلالة الفروق الخلفية تكون فى الصورة:

$$h^4D^4 = \nabla^4 + 2\nabla^5 + \frac{17}{6}\nabla^6$$

الباب الرابع

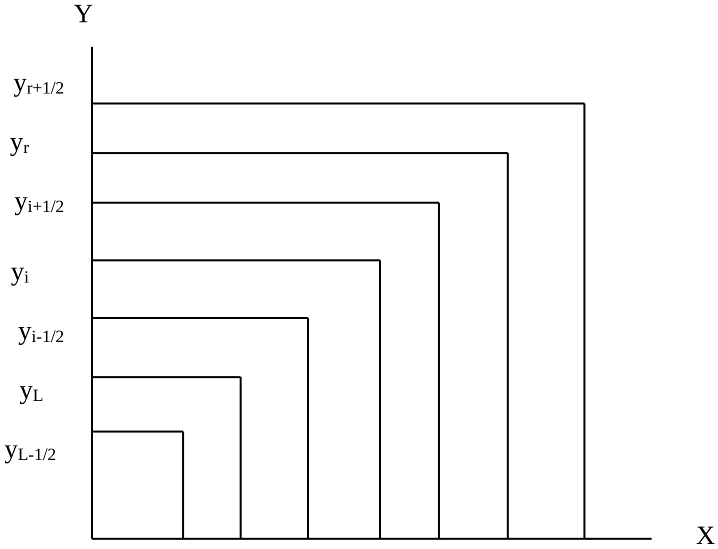
الفروق المركزية

الفروق المركزية بدلالة المشتقات
القيمة المتوسطة للدالة

الفروق المركزية
الاختلافات المركزية المتوسطة

~~~~~~~~~~
~~~~~~~~~~

الفروق المركزية (الاختلافات المركزية المتوسطة)



الفرق المركزي الأول :

$$\delta yi = y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}} \qquad \rightarrow ❻$$

الفرق المركزي الثاني :

$$\delta^2 yi = \delta(\delta yi)$$

$$= \delta(y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}})$$

$$= \delta y_{i+\frac{1}{2}} - \delta y_{i-\frac{1}{2}} \qquad \rightarrow ❼$$

$$= y_r - y_i - (y_i - y_L)$$

$$= y_r - 2y_i + y_L$$

الفرق الثالث :

$$
\begin{aligned}
&\delta^3 y_i = \delta(\delta^2 y_i) \\
&= \delta\left(y_r - 2y_i + y_L\right) \\
&= \delta y_r - 2\delta y_i + s y_L \\
&= \left(y_{r+\frac{1}{2}} - y_{i+\frac{1}{2}}\right) - 2\left(y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}\right) + \left(y_{i-\frac{1}{2}} - y_{L-\frac{1}{2}}\right) \qquad \rightarrow ❽ \\
&= y_{r+\frac{1}{2}} - y_{i+\frac{1}{2}} - 2y_{i+\frac{1}{2}} + 2y_{i-\frac{1}{2}} + y_{i-\frac{1}{2}} - y_{L-\frac{1}{2}} \\
&= y_{r+\frac{1}{2}} - 3y_{i+\frac{1}{2}} + 3y_{i-\frac{1}{2}} - y_{L-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

بالمثل يمكن حساب الفرق المركزي الرابع ، الخامس ، ....

استنتاج صيغ الفروق المركزية

يمكن استنتاج صيغ الفروق المركزية من العلاقات التالية:

اولاً: صيغ الفروق المركزية ذات الرتب الزوجية (الفرق الثانى، الفرق الرابع، الفرق السادس، ....)

تستنتج صيغ الفروق المركزية ذات الرتب الزوجية من العلاقة التالية:

$$\delta^{2k} y_i = \sum_{m}^{2k} (-1)^m \binom{2k}{m} y_{i+k-m}$$

حيث i تعبر عن رقم الحد فى متسلسلة البيانات الاصلية المراد حساب الفرق المركزى عنده ويمكن ان تأخذ القيم 0، 1، 2 ....للحد الاول ، الثانى ، الثالث .....على الترتيب.

K تعبر عن رتبة الفرق المركزى وتأخذ القيم 1، 2، 3، .... للفرق المركزى الاول ، الثانى ، الثالث، ... وهكذا.

m رقم الحد فى معادلة (صيغة) الفرق الناتجة وتأخذ القيم من 0 الى 2k .

مثال1:

استنتج صيغة الفرق المركزى الثانى من العلاقة $\delta^{2k} y_i = \sum_{m}^{2k} (-1)^m \binom{2k}{m} y_{i+k-m}$

الحل:لحساب الفرق المركزى الثانى يتم وضع k=1 وبالتالى m تأخذ القيم 0، 1، 2 .

نحصل على العلاقات التالية:

بوضع k=1 و m=0

$$\delta^2 y_i = (-1)^0 \binom{2}{0} y_{i+1-0} = y_{i+1}$$

بوضع k=1 و m=1

$$\delta^2 y_i = (-1)^1 \binom{2}{1} y_{i+1-1} = -2 y_i$$

بوضع k=1 و m=2

$$\delta^2 y_i = (-1)^2 \binom{2}{2} y_{i+1-2} = y_{i-1}$$

$$\therefore \delta^2 y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$$

$$\delta^2 y_i = y_r - 2y_i + y_L$$

وبنفس الطريقة يمكن استنتاج صيغة الفرق المركزى الرابع والسادس و...

ثانيا: صيغ الفروق المركزية ذات الرتب الفردية (الفرق الاول، الفرق الثالث، الفرق الخامس، ....)

تستنتج صيغ الفروق المركزية ذات الرتب الفردية من العلاقة التالية:

$$\delta^{2k+1} y_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{m}^{2k+1} (-1)^m \binom{2k+1}{m} y_{i+k+1-m}$$

مثال:

استنتج صيغة الفرق المركزى الاول من العلاقة $\delta^{2k+1} y_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{m}^{2k+1} (-1)^m \binom{2k+1}{m} y_{i+k+1-m}$

الحل: لحساب الفرق المركزى الاول يتم وضع k=0 وبالتالى m تأخذ القيم 0، 1.

نحصل على العلاقات التالية:

بوضع k=0 و m=0 .

$$\delta y_{i+\frac{1}{2}} = (-1)^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} y_{i+0+1-0} = y_{i+1}$$

بوضع k=0 و m=1 .

$$\delta y_{i+\frac{1}{2}} = (-1)1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} y_{i+0+1-1} = -y_i$$

بجمع الحدين السابقين

$$\therefore \delta y_{i+\frac{1}{2}} = y_{i+1} - y_i$$

بطرح ½ من الادلة

$$\therefore \delta y_i = y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}$$

مثال:

استنتج صيغة الفرق المركزى الثالث من العلاقة $\delta^{2k+1} y_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{m}^{2k+1} (-1)^m \begin{pmatrix} 2k+1 \\ m \end{pmatrix} y_{i+k+1-m}$

الحل: لحساب الفرق المركزى الثالث يتم وضع k=1 وبالتالى m تأخذ القيم 0،1،2،3

نحصل على العلاقات التالية:

بوضع k=1 و m=0 .

$$\delta^3 y_{i+\frac{1}{2}} = (-1)^0 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} y_{i+1+1-0} = y_{i+2}$$

بوضع k=1 و m=1 .

$$\delta^3 y_{i+\frac{1}{2}} = (-1)^1 \binom{3}{1} y_{i+1+1-1} = -3y_{i+1}$$

بوضع k=1 و m=2 .

$$\delta^3 y_{i+\frac{1}{2}} = (-1)^2 \binom{3}{2} y_{i+1+1-2} = 3y_i$$

بوضع k=1 و m=3 .

$$\delta^3 y_{i+\frac{1}{2}} = (-1)^3 \binom{3}{3} y_{i+1+1-3} = -y_{i-1}$$

بجمع الحدود السابقة

$$\delta^3 y_{i+\frac{1}{2}} = y_{i+2} - 3y_{i+1} + 3y_i - y_{i-1}$$

$$\therefore \delta^3 y_{i+\frac{1}{2}} = y_{2r} - 3y_r + 3y_i - y_L$$

بطرح ½ من الادلة نحصل على

$$\delta^3 y_i = y_{r+\frac{1}{2}} - 3y_{i+\frac{1}{2}} + 3y_{i-\frac{1}{2}} - y_{L-\frac{1}{2}}$$

*** القيمــة المتوسطــة للدالـــــة ***

من الرسم السابق نجد أن $y_{i+\frac{1}{2}}$ هي متوسط $y_r + y_i$ أي أن :

$$y_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(y_r + y_i\right)$$

كذلك نجد أن :

$$y_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_i + y_L)$$

فإذا أخذنا μ (مؤثر المنتصف) أو مؤثر أخذ المتوسط فإن :

$$\mu y_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_r + y_i) \qquad \rightarrow ❻$$

كذلك $\mu y_i = \frac{1}{2}(y_{i+\frac{1}{2}} + y_{i-\frac{1}{2}})$

فإذا أدخلنا هذا المؤثرعلى معادلة الفرق الأول :

$$\delta y_i = y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \mu\delta y_i = \mu y_{i+\frac{1}{2}} - \mu y_{i-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}[(y_r + y_i) - (y_i + y_L)] \qquad \rightarrow ❼$$

$$= \frac{1}{2}y_r + \frac{1}{2}y_i - \frac{1}{2}y_i - \frac{1}{2}y_L$$

$$\therefore \mu\delta yi = \frac{1}{2}(y_r - y_L)$$

بإدخال هذا المؤثر علي معادلة الفرق المتوسط الثاني :

$$\mu\delta^2 y_i = \mu\ \delta\ (\delta\ y_i)$$

$$= \mu\ (y_r - 2y_i + y_L)$$

$$= \mu y_r - 2\mu y_i + \mu y_L)$$

$$= ½\ (y_{r+½} + y_{i+½}) - 2 * ½\ (y_{i+½} + y_{i-½}) + ½\ (y_{i-½} + y_{L-½})$$

$$= ½\ y_{r+½} + ½\ y_{i+½} - y_{i+½} - y_{i-½} + ½\ y_{i-½} + 1/2\ y_{L-1/2}$$

$$= ½\ y_{r+½} - ½\ y_{i+½} - ½\ y_{i-½} + ½\ y_{L-½}$$

$$\mu\delta^2 y_i = ½\ (y_{r+½} - y_{i+½} - y_{i-½} + y_{L-½}) \qquad \rightarrow 3$$

بإدخال هذا المؤشر علي معادلة الفرق المتوسط الثالث :

$$\therefore\ \mu\delta^3 y_i = \mu y_{r+½} - 3\mu y_{i+½} + 3\mu y_{l-½} - \mu y_{L-1/2}$$

$$= ½\ (y_{2r}+y_r) - 3/2(y_r+y_i) + 3/2(y_i+y_L) - ½\ (y_L+y_{2L})$$

$$= ½\ \{ y_{2r} + y_r - 3y_r - 3y_i + 3y_i + 3y_L - y_L - y_{2L} \}$$

$$= ½\ \{ y_{2r} - 2\ y_r + 2y_L - y_{2L} \}$$

الفروق المركزية بدلالة المشتقات

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

من مفكوك تايلور نجد انه فى حالة الفروق الامامية:

$$y_r = e^{hD} y_i$$

وكذلك فى حالة الفروق الخلفية:

$$y_L = e^{-hD} y_i$$

وحيث ان متوسط الفرق المركزي عند yi يعطي من العلاقة :

$$\mu \delta yi = \frac{1}{2}\left[y_r - y_L\right]$$

بالتعويض عن y_r , y_L :

$$\therefore \mu \delta yi = \frac{1}{2}\left[e^{hD} y_i - e^{-hD} y_i\right]$$

$$\therefore \mu \delta yi = \frac{1}{2} yi\left[e^{hD} - e^{-hD}\right]$$

$$\therefore \mu \delta = \frac{1}{2}\left[e^{hD} - e^{-hD}\right]$$

$$\therefore \mu \delta = Sinh(hD)$$

$$\therefore \delta = \frac{1}{\mu} Sinh(hD)$$

وهو الفرق المركزي الأول بدلالة المشتقات

وحيث أن :
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

$$Sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...etc.$$

$$\therefore \mu\delta = Sinh(hD) = hD + \frac{(hD)^3}{3!} + \frac{(hD)^5}{5!} + ...$$

الفرق المركزي الثاني بدلالة المشتقات

$$\mu\delta^2 yi$$

$$\because \delta^2 yi = (y_r - 2y_i + y_L)$$

$$= e^{hD} y_i - 2y_i + e^{-hD} y_i$$

$$\delta^2 y_i = y_i(e^{hD} + e^{-hD} - 2)$$

$$\therefore \mu\delta^2 = \mu(e^{hD} + e^{-hD} - 2)$$

$$= \mu(h^2D^2 + \frac{2h^4D^4}{4!} + \frac{2h^6D^6}{6!})$$

المشتقات بدلالة الفروق المركزية

من الفروق المركزية بدلالة المشتقات وجد ان

$$\mu\delta = \sinh(hD)$$

$$\therefore hD = \sinh^{-1}(\mu\delta) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

من مفكوك $\sinh^{-1}$

$$\sinh^{-1}(x) = x - (\frac{1}{2})\frac{x^3}{3} + (\frac{1*3}{2*4})\frac{x^5}{5} - (\frac{1*3*5}{2*4*6})\frac{x^7}{7} + \ldots\ldots;$$

$$\therefore \sinh^{-1}(\mu\delta) = \mu\delta - \frac{(\mu\delta)^3}{3i} + \frac{3(\mu\delta)^5}{40} - \ldots + \ldots\ldots;$$

للتبسيط نستعمل الثلاث حدود الاولى فقط

$$\therefore \sinh^{-1}(\mu\delta) = \mu\delta - \frac{(\mu\delta)^3}{3i} + \frac{3(\mu\delta)^5}{40}$$

بالتعويض فى المعادلة (1), نحصل على

$$\therefore hD = \mu\left[\delta - \frac{\mu^2\delta^3}{3!} + \frac{3\mu^4\delta^5}{40}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

بالتعويض عن قيمة μ^2, μ^4 فى الحدين الثانى والثالث فيما بين الاقواس

$$\because \mu = \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + 1}$$

$$\therefore \mu^2 = \frac{\delta^2}{4} + 1$$

وبالتالى فان

$$\frac{\mu^2\delta^3}{3!} = \frac{\delta^3}{3!}\left[\frac{\delta^2}{4} + 1\right] = \frac{\delta^5}{24} + \frac{\delta^3}{6} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots *$$

كذلك لحساب $\frac{3\mu^4\delta^5}{40}$

$$\mu^4 = \left(\frac{\delta^2}{4} + 1\right)^2 = \frac{\delta^4}{16} + \frac{2\delta^2}{4} + 1$$

$$\therefore \mu^4 = \frac{\delta^4}{16} + \frac{\delta^2}{2} + 1$$

$$\therefore \frac{3\mu^4\delta^5}{40} = \frac{3\delta^5}{40}\left[\frac{\delta^4}{16} + \frac{\delta^2}{2} + 1\right] = \frac{3\delta^9}{40*16} + \frac{3\delta^7}{40*2} + \frac{3\delta^5}{40} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots **$$

بالتعويض عن المعادلتين *و ** فى المعادلة(2)

$$\therefore hD = \mu\left[\delta - \left(\frac{\delta^5}{24} + \frac{\delta^3}{6}\right) + \left(\frac{3\delta^9}{40*16} + \frac{3\delta^7}{40*2} + \frac{3\delta^5}{40}\right)\right]$$

$$= \mu\left[\delta - \frac{\delta^5}{24} - \frac{\delta^3}{6} + \frac{3\delta^9}{40*16} + \frac{3\delta^7}{40*2} + \frac{3\delta^5}{40}\right]$$

$$= \mu\left[\delta - \frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{30}\right]$$

وذلك بأخذ الحدود التى بها اقل ثلاث قوى فقط وذلك للتبسيط.

المشتقة من الدرجة الثانية بدلالة الفروق المركزية

$(hD)^2=(hD)(hD)$

$$=\mu(\delta-\frac{\delta^3}{6}+\frac{\delta^5}{30})*\mu(\delta-\frac{\delta^3}{6}+\frac{\delta^5}{30})$$

$$=\mu^2(\delta-\frac{\delta^3}{6}+\frac{\delta^5}{30})(\delta-\frac{\delta^3}{6}+\frac{\delta^5}{30})$$

$$=\mu^2\left(\delta^2-\frac{\delta^4}{6}+\frac{\delta^6}{30}-\frac{\delta^4}{6}+\frac{\delta^6}{36}-\frac{\delta^8}{180}+\frac{\delta^6}{30}-\frac{\delta^8}{180}+\frac{\delta^{10}}{900}\right)$$

$$=\mu^2(\delta^2-\frac{2\delta^4}{6}+(\frac{2\delta^6}{30}+\frac{\delta^6}{36}))$$

$$=\mu^2(\delta^2-\frac{2\delta^4}{6}+\frac{102\delta^6}{1080})$$

$$=\mu^2(\delta^2-\frac{2\delta^4}{6}+\frac{51\delta^6}{540})$$

بالتعويض عن $\mu^2=\frac{\delta^2}{4}+1$

$$\therefore (hD)^2=(\frac{\delta^2}{4}+1)(\delta^2-\frac{2\delta^4}{6}+\frac{51\delta^6}{540})$$

$$=\frac{\delta^4}{4}+\delta^2-\frac{2\delta^6}{24}-\frac{2\delta^4}{6}+\frac{51\delta^8}{4*540}+\frac{51\delta^6}{540}$$

باستبعاد الحد $\frac{51\delta^8}{4*540}$ لصغره

$$\therefore (hD)^2 = \delta^2 + \frac{6\delta^4 - 8\delta^4}{24} - \frac{2*540\delta^6 + 24*51\delta^6}{24*540}$$

$$\therefore (hD)^2 = \delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90}$$

ألمشتقة من الدرجة الثالثة بدلالة الفروق المركزية

$(hD)^3=(hD)*(hD)^2$

$$= \mu(\delta - \frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{30})(\delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90})$$

$$= \mu(\delta^3 - \frac{\delta^5}{12} + \frac{\delta^7}{90} - \frac{\delta^5}{6} + \frac{\delta^7}{72} - \frac{\delta^9}{540} + \frac{\delta^7}{30} - \frac{\delta^9}{30*2} + \frac{\delta^{11}}{30*90})$$

$$= \mu(\delta^3 - \frac{\delta^5}{12} - \frac{\delta^5}{6} + \frac{\delta^7}{90} + \frac{\delta^7}{72} + \frac{\delta^7}{30})$$

$$= \mu(\delta^3 - \frac{3\delta^5}{12} + \frac{4\delta^7}{90} + \frac{\delta^7}{72}) = \mu(\delta^3 - \frac{\delta^5}{4} + \frac{288\delta^7 + 90\delta^7}{90*72})$$

$$= \mu(\delta^3 - \frac{\delta^5}{4} + \frac{378\delta^7}{6480}) = \mu(\delta^3 - \frac{\delta^5}{4} + \frac{7\delta^7}{120}).$$

المشتقة من الدرجة الرابعة بدلالة الفروق المركزية

$(hD)^4=(hD)^2*(hD)^2$

$$= (\delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90})(\delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90})$$

$$= \delta^4 - \frac{\delta^6}{12} + \frac{\delta^8}{90} - \frac{\delta^6}{12} + \frac{\delta^8}{144} - \frac{\delta^{10}}{12*90} + \frac{\delta^8}{90} - \frac{\delta^{10}}{90*12} + \frac{\delta^{12}}{90*90}$$

$$= \delta^4 - \frac{\delta^6}{12} - \frac{\delta^6}{12} + \frac{2\delta^8}{90} + \frac{\delta^8}{144}$$

$$= \delta^4 - \frac{\delta^6}{6} + \frac{378\delta^8}{90*144}$$

$$= \delta^4 - \frac{\delta^6}{6} + \frac{7\delta^8}{240}$$

العلاقة بين القيمة المتوسطة و الفرق المركزى μ , δ

إيجاد μ كداله في δ

$$\mu^2 yi = \mu(\mu yi)$$

$$= \mu(\frac{1}{2}(y_{i+\frac{1}{2}} + y_{i-\frac{1}{2}}))$$

$$= \frac{1}{2}(\mu y_{i+\frac{1}{2}} + \mu y_{i-\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{1}{2}(1/2(y_r + y_i + y_i + y_l))$$

$$\therefore \mu 2yi = \frac{1}{4}(y_r + 2y_i + y_l)$$

$$\because \delta^2 y_i = y_r - 2y_i + y_L \qquad \rightarrow ❻$$

$$4\mu^2 y_i = y_r + 2y_i + y_L \qquad \rightarrow ❼$$

بطرح ❻ من ❼

$$\therefore y\mu 2yi - \delta 2yi = 4yi$$
$$\therefore (4\mu^2 - \delta^2)yi = 4yi$$
$$\therefore 4\mu^2 = \delta^2 + 4$$
$$\therefore \mu 2 = \frac{\delta^2 + 4}{4}$$
$$\therefore \mu = \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + 1}$$

كذلك يكون لدينا :

$$\mu^3 = \mu(\mu^2) = \left(\sqrt{\frac{\delta 2}{4} + 1}\right)\left(\frac{\delta 2}{4} + 1\right)$$
$$\therefore \mu^3 = \left(\frac{\delta^2}{4} + 1\right)^{\frac{3}{2}}$$

كذلك :

$$\mu^4 = \mu^2 . \mu^2$$
$$= \left(\frac{\delta^2}{4} + 1\right)\left(\frac{\delta^2}{4} + 1\right)$$
$$= \frac{\delta^4}{16} + \frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^2}{4} + 1$$
$$= \frac{\delta^4}{16} + \frac{\delta^2}{2} + 1$$

الباب الخامس

الاستكمال Interpolation

ما المقصود بـ الاستنتاج أو الاستكمال Interpolation.

بفرض وجود دالة $y= f(x)$ معرفة فقط عند نقاط محددة (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2), $\dots(x_n,y_n)$, كيف يمكن أن نوجد قيمة الدالة عند أية قيمة أخرى x غير تلك القيم ؟ يمكن عمل ذلك باستخدام دالة متصلة $f(x)$ تمثيل تلك البيانات بحيث أن الدالة $f(x)$ تمر بنقاط عددها $n+1$ ، حيث n درجة الدالة المستخدمة.

وبذلك يمكن حساب قيمة الدالة عند أية نقطة وهذا ما يسمي بـ Interpolation { استكمال }. بالطبع إذا كانت x تقع خارج مدى الدالة $f(x)$ فإن تعيين قيمة الدالة عند x في هذه الحالة يسمي Extrapolation { استنتاج } .

نأتي بعد ذلك لاختيار نوع الدالة التي يجب استخدامها لتمثيل البيانات .

من الشائع استخدام الدوال كثيرة الحدود polynomial وذلك للصفات التالية وهي :

(1)سهولة حسابها .

(2)سهولة تفاضلها .

(3)سهولة تكاملها .

وذلك بمقارنتها بدوال sin أو الدوال الأسيه .

كيفية عمل polynomial Interpolation

يمكن عمل كثيرة الحدود لتمثيل الدالة بعدة طرق منها

1. الطريقة المباشرة Direct method of Interpolation .

2. طريقة نيوتن للفروق المقسمة ewton's divided difference method .

3. طريقة لاجرانج Lagrange interpolation method .

4. طريقة شتيرلنج للاستدلال Sterling method

<u>أولا : الطريقة المباشرة لعمل كثيرة الحدود :</u>

$$Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n \rightarrow ❻$$

عبر البيانات بحيث $a_n \dots, a_1, a_0$ عبارة عن $n+1$ ثوابت حقيقية. وحيث أننا لدينا $n+1$ قيم لـ y يقابلها $n+1$ قيم لـ x ، فإننا يمكننا عمل $n+1$ معادلات . ثم بعد ذلك يتم حساب $n+1$ ثوابت وهي $a_0, a_1, a_2 .. an$. وبمعرفة تلك الثوابت يتم معرفة الدالة المعبرة عن البيانات رقم ❻ .وبالتعويض عن قيمة x فيها يتم معرفة قيمة y المطلوب حسابها .

لكن ما درجة كثيرة الحدود التي سوف نستخدمها ؟ هل يمكن استخدام كثيرة حدود من الدرجة الأول (والتي تسمي معادلة خطية) ، أم من الدرجة الثانية (معادلة تربيعية) ، أم من الدرجة الثالثة (تكعيبية) ، وما الفرق في دقة النتيجة ؟ يمكن إيضاح ذلك بمثال .

<u>مثــال 1 :</u> تعطي السرعة الرأسية لصاروخ كما في الجدول التالي كدالة في الزمن

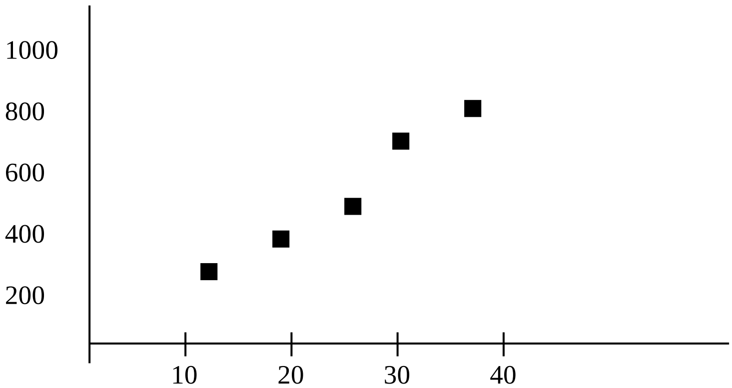
ts	0	10	15	20	22.5	30
$V_{m/s}$	0	227.04	362.78	517.35	602.97	901.67

عين سرعة الصاروخ عند t=l6s باستخدام الطريقة المباشرة وكثيرة حدود من الدرجة الأولي

<u>الحل :</u> حيث أننا مطلوب منا استخدام معادلة من الدرجة الأولي (معادلة خطية) ، تكون معادلة السرعة في الصورة التالية

$$V(t) = a_0 + a_1 t$$

ويكون رسمها البياني كما يلي

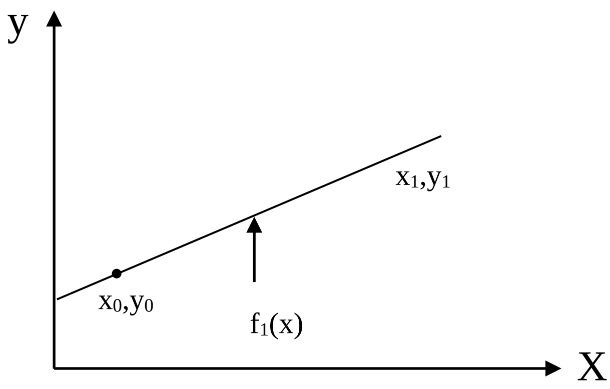


السرعة مقابل الزمن للصاروخ

حيث أننا مطلوب منا استخدام معادلة من الدرجة الأولى (معادلة خطية) . تكون معادلة السرعة في الصورة التالية :

$$v(t) = a_0+a_1t$$

ويكون رسمها البياني كما يلي :



رسم خط مستقيم لتمثيل البيانات الخاصة بالصاروخ

وحيث أن المعادلة من الدرجة الأولي $n = 1$ فإننا نختار $n + 1$ نقاط أي نقطتين .

هاتين النقطتين يجب أن يحيطا بالنقطة المطلوبة وذلك لكي تكون تلك النقطة واقعه في

مدى تطبيق المعادلة المستنتجة .

وحيث أن النقطة المطلوبة $t = 16s$ lΔ فإن النقطتين يجب أن يكونا

$t_1 = 20$, $t_0 = 15$

وحيث أننا لدينا

$t_0 = 15$, $v(t_0) = 362.78$

$t_1 = 20$, $v(t_1) = 517.35$

يكون لدينا معادلتين

$V(15) = a_0 + a_1(15) = 362.78$

$V(20) = a_0 + a_1(20) = 517.35$

يمكن كتابة المعادلتين في صورة مصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 1 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 362.78 \\ 517.35 \end{bmatrix}$$

بحل المعادلتين السابقتين تحصل علي :

$a_0 = -100.91$

$a_1 = 30.913$

وبالتالي تكون المعادلة المقترحة هي :

$v(t) = -100.91 + 30.913 \qquad 15 \leq t \leq 20$

لحساب السرعة عند $t = 16_s$ نعوض في هذه المعادلة عن قيمة t

$\therefore V(16) = 393.7 \text{ m/ s}$

مثـال2 :

تعطي سرعة صاروخ رأسيا كما بالجدول التالي :

t= s	0	10	15	20	22.5	30
$v(t)$ m/s	0	227.04	362.78	517.35	602.97	901.67

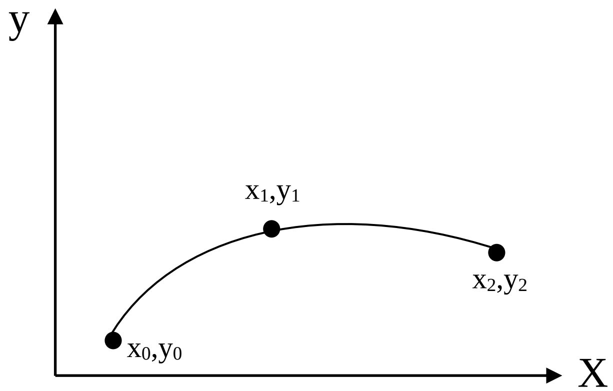
عين سرعة الصـاروخ عن $t = 16$ s باستخدام الطريقة المباشرة وكثيرة حدود

من الدرجة الثانية .

<u>الحـل :</u> لعمل معادلة من الدرجة الثانية (معادلـة تربيعيـة) تكون علـي الشكل

التالي : $v(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$

وترسم بيانياً كالتالي :



وحيث أننا نريد أن نستنتج سرعة الصـاروخ عند $t = 16$ s فإننا نختار ثلاث

نقاط (n+1) بحيث يشملان القيمة (16s) هذه النقاط هي :

$T_0=10$, $t_1 = 15$, $t_2 = 20$

وتعطي المعادلات التالية لكل نقطة :

$$v(10) = a_0 + a_1(10) + a_2(10)^2 = 227.04$$

$v(15) = a_0 + a_1(15) + a_2(15)^2 = 362.78$

$v(20) = a_0 + a_1(20) + a_2(20)^2 = 517.35$

نضع تلك المعادلات في صورة مصفوفة كالتالي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 1 & 15 & 225 \\ 1 & 20 & 400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 227.04 \\ 362.78 \\ 517.35 \end{bmatrix}$$

يمكن حل هذه المصفوفة بطريقة جاوس للحذف الأمامي والتعويض الخلفي أو

بطريقة LU . نحصل بعد ها علي :

$a_0 = 12.001$, $a_1 = 17.740$, $a_2 = 0.37637$

وتكون المعادلة المطلوبة هي :

$v(t) = 12.001 + 17.790t + 0.37637\ t^2 \quad 10 \le t \le 20$

بالتعويض عن قيمة $t = 16s$ في هذه المعادلة نحصل على $v(16)$:

$v(16) = 12.001 + 17.790\ (16) + 0.37637\ (16)^2$

$= 392.19$ m/s

من المثالين السابقين يمكن حساب الخطأ التقريبي النسبي المطلق : $|\in_c|$ absolute relative approximate error الناشئ عن التحول من معادلة درجة أولي إلي معادلة درجة ثانية :

$$|\in_c| = \left|\frac{392.19 - 393.70}{392.19}\right| \times 100$$
$$= 0.38502\%$$

Newton's Divided Difference Interpolating Polynomral

Method

طريقة نيوتن لعمل كثيرة حدود بواسطة الفرق المقسوم

لشرح هذه الطريقة سوف يتم أولاً عمل كثيرة حدود من الدرجة الأولي (معادلة خطية) ومن الدرجة الثانية (معادلة تربيعية) ثم يتم عمل الطريقة العامة وفيها يتم عمل معادلة من الدرجة الثالثة .

أولاً : استنتاج معادلة خطية (من الدرجة الأولي) :

بفرض أن لدينا نقطتين (x_0 ,y_0) ، (x_1 , y_1) , استنتج معادلة من الدرجة الاولى عبر البيانات.

بفرض ان $y_1 = f_1(x)$ الرقم (1) اسفل f, y يشير إلي درجة المعادلة .

لذلك يكون لدينا

$y_0 = f (x_o)$, $y_1 = f (x_1)$

بفرض أن المعادلة الخطية تكون علي الصورة

$f_1(x) = b_0 + b_1 (x - x_0)$

نريد حساب الثوابت b_0, b_1 نعوض عن $x = x_0$

$$\therefore f_1(x_0) = f(x_0) = b_0+b_1 (x_0 - x_0) = b_0$$

$$\therefore b_0=f(x_0) \qquad \rightarrow 1$$

ثم نعوض عن $x = x_1$

$$\therefore f_1(x_1) = f(x_1) = b_0 + b_1 (x_1 - x_0)$$

$$\therefore b1 = \frac{f(x_1) - b_0}{x_1 - x_0}$$

$$\therefore b1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad \rightarrow 2$$

وبالتالي تكون قيمة الثوابت هي :

$$\boxed{\begin{aligned} b_0 &= f(x_0) \\ b_1 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \end{aligned}}$$

وتكون المعادلة النهائية بالصورة :

$$f_{(1)}(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

مثال

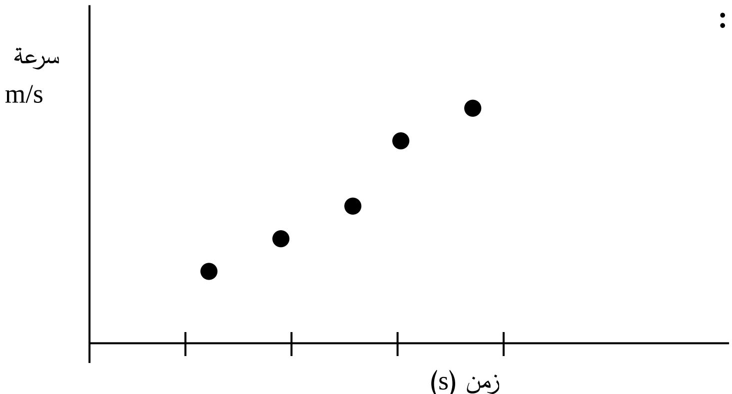
تعطي سرعة الصاروخ الرأسية كدالة في الزمن كما في الجدول التالي :

T= s	0	10	15	20	22.5	3-
s	0	227.04	362.78	517.35	602.97	901.67

عين قيمة السرعة عند $t = 16s$ باستخدام معادلة من الدرجة الأولـي مستخدماً

طريقة الفروق المقسمة لنيوتن .

الحل :



السرعة لأزمنة مختلفة كما فى المثال

باستخدام المعادلـة الخطيـة التـى مـن الدرجـة الاولـى بطريقـة الفروق المقسـمة لنيـوتن

تعطي السرعة من العلاقة :

$$V(t) = b_0 + b_1(t - t_0)$$

وحيث أننا نريد السرعة عند $t=16s$ فإننا نحتاج نقطتين قبل وبعد تلك النقطة وهما

$t_0 = 15$, $t_1 = 20$

at $t_0 = 15$, $v(t_0) = 362.78$

at $t_1 = 20$, $v(t_1) = 517.35$

ومنها يتم حساب الثوابت

$b_0 = v(t_0) = 362.78$

$$b1 = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}$$
$$= \frac{517.35 - 362.78}{20 - 15}$$
$$= 30.914$$

وبالتالي تكون المعادلة : $v(t) = b_0$

$+ b_1(t - t_0) = 362.78 + 30.914\,(t - 15) \quad 15 \le t \le 20$

لحساب السرعة عند $t = 16$ تعوض :

$v(t) = 362.78 + 30.914\,(t - 15)$

نحصل علي

$v(t) = -100.93 + 30.914\,t$

وهي نفس المعادلة التي تم الحصول عليها بالطريقة المباشرة

ثانياً : المعادلة التربيعية (quadrahc interpolation)

يفرض أن لدينا النقاط التالية $(x_0 , y_0) , (x_1 , y_1) , (x_2 , y_2)$

ارسم كثيرة حدود عبر البيانات في الجدول الذي في المثال السابق .

الحـــــل :

بملاحظة $y = f(x) , y_o = f(x_0) , y_1 = f(x_1) , y_2 = f(X_2)$

نفترض أن المعادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية تعطى من العلاقة

$$f_2 (x) = b_0 + b_1 (x - x_0) + b_2 (x-x_0) (x- x_1)$$

عند $y = x_0$ يكون لدينا

$$f (x_0) = f_2 (x_0) = b_0 + b_1 (x_0 - x_0) + b_2 (x_0-x_0)(x_0-x_1)$$

$$= b_0$$

$$b_0 = f(x_0)$$

عند $x = x_1$ يكون لدينا

$$f(x_1) = f_2 (x_1) = b_0 + b_1 (x_1 - x_0) + b_2 (x_1- x_0)(x_1- x_1)$$

$$f(x_1) = f(x_0) + b_1 (x_1 - x_0)$$

$$\therefore b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

عند $x = x_2$

$$F(x_2) = f_2(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_2)$$

عوض عن b_0 , b_1

$$\therefore f(x_2) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

نحصل على :

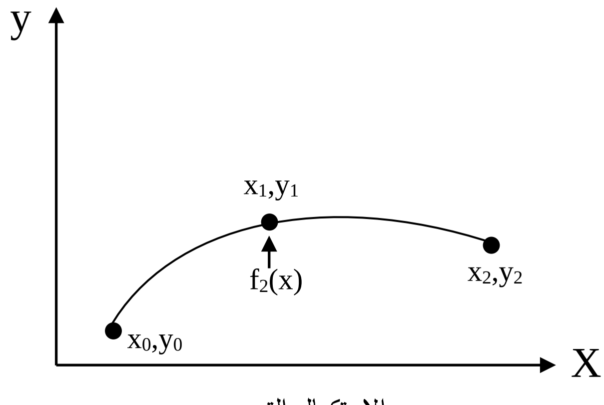
$$b2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

وبالتالي فإن المعادلة التي من الدرجة الثانية :

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

تصبح بعد التعويض عن الثوابت :

$$f_2(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}(x - x_0)(x - x_1)$$



الاستكمال التربيعي

مثـــال 2 :

تعطي سرعة صاروخ رأسياً كما في الجدول السابق

عين سرعة الصاروخ عند $t = 16$ s مستخدماً معادلة من الدرجة الثانية باستخدام

طريقة نيوتن للفرق المقسوم .

الحل المعادلة التربيعية تكون في الصورة

$$v(t) = b_0 + b_1 (t - t_0) + b_2 (t- t_0)(t- t_1)$$

وحيث أن هذه المعادلة تربيعية أن $n = 2$ فإننا في حاجة ألي ثلاث نقاط تكون قريبة

من $t = 16$ وتكون حولها (أي قبل وبعد $t=16$) ، هذه النقاط هي

$t_0 = 10$, $v(t_0) = 227.04$

$t_1 = 15$, $v(t_1) = 362.78$

$t_2 = 20$, $v(t_2) = 517.35$

وبالتالي يكون :

$b_0 = v(to)$

$= 227.04$

$$b1=\frac{v(t_1)-v(t_0)}{t_1-t_0}=\frac{362.78-227.04}{15-10}=27.148$$

$$b2=\frac{\frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}-\frac{v(t_1)-v(t_0)}{t_1-t_0}}{t_2-t_1}=\frac{\frac{517.35-362.78}{20-15}-\frac{362.78-227.04}{15-10}}{20-10}$$

$$=\frac{30.914-27.148}{10}=0.37660$$

بالتعويض عن هذه القيم للثوابت في المعادلة تحصل علي :

$v(t) = b_0 + b_1 (t - t_0) + b_2 (t- t_0)(t- t_1)$

$= 227.04 + 27.148 (t -10) + 0.37660 (t- 15)$

$10 \le t \le 20$

at $t = 16$

$v(16) = 227.04 + 27.148 (16 -10) + 0.37660 (16 - 10) (16-15)$

$= 392.19$ m/s

وبفك الأقواس نحصل على :

$V(16) = 12.05 + 17.733 t + 0.37660 t^2 \quad 10 \le t \le 20$

وهي المعادلة التي حصلنا عليها سابقاً بالطريقة المباشرة .

استنتاج طريقة عامة لاستنتاج المعادلة كثيرة الحدود بواسطة طريقة نيوتن

للفروق المقسمة .

من المعادلة التربيعية بطريقة نيوتن وجد أن الحل يكون من الصورة .

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

حيث تم حساب الثوابت كالأتي :

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

نلاحظ أن هذه الثوابت ما هي إلا فروق منتهية مقسومة ومن هنا جاء تسمية

الطريق بطريقة نيوتن للفروق المقسومة . حيث b_0 , b_1 , b_2 هي الفرق الأول

المقسوم ، الفرق الثاني المقسوم ، الفرق الثالث المقسوم علي التوالي .

سوف ترمز للفرق الأول المقسوم كالآتي :

$$f[x_0] = f(x_0)$$

وترمز للفرق الثاني المقسوم كالآتي :

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

والفرق الثالث المقسوم كالآتي :

$$f[x_2,x_1,x_0]=\frac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0}=\frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

حيث تسمي الدوال $f[x_0]$, $f[x_1, x_0]$, $F[x_2,x_1,x_0]$ بالدوال المقوسة

لمتغيراتها المحصورة داخل الأقواس .

وبكتابة الصورة العامة لمعادلة نيوتن للدرجة الثانية بالدوال المقوسة

$$F_2(x) = f[x_0] + f[x_1,x_0](x-x_0) + f[x_2,x_1,x_0](x-x_0)(x-x_1)$$

وبالتالي تكون الصورة العامة لطريقة نيوتن لعدد (n+ 1) من البيانات

$(x_0 ,y_0) , (x_1,y_1) , \dots(x_{n-1}, y_{n-1}) , (x_n ,y_n)$

لها الصورة التالية

$$F_n(x)=b_0+b_1(x-x_0)+\dots b_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

حيث تكون الثوابت كالتالى:

$b_0=f[x_0]$

$b_1=f[x_1-x_0]$

$b_2=f[x_2,x_1,x_0]$

$b_{n-1}=f[x_{n-1},x_{n-2},..x_0]$

$b_n=f[x_n,x_{(n-1)},\ldots.x_0]$

بحيث أن الصورة العامة لهذه الثوابت التي يطلق عليها m^{th} divided differences

هي

$$[b_m = f[x_m,......,x_0]]$$
$$= \frac{f[x_m,......,x_1]-f[x_{m-1},.....,x_0]}{x_m - x_0}$$

من التعريف السابق نجد أن الفروق المقسومة ثم حسابها recursively (

بالعودة للوراء) .

مثـــــال :

كمثال لعمل كثيرة حدود من الدرجه الثالثة ، نفرض أن لدينا البيانات التالية :

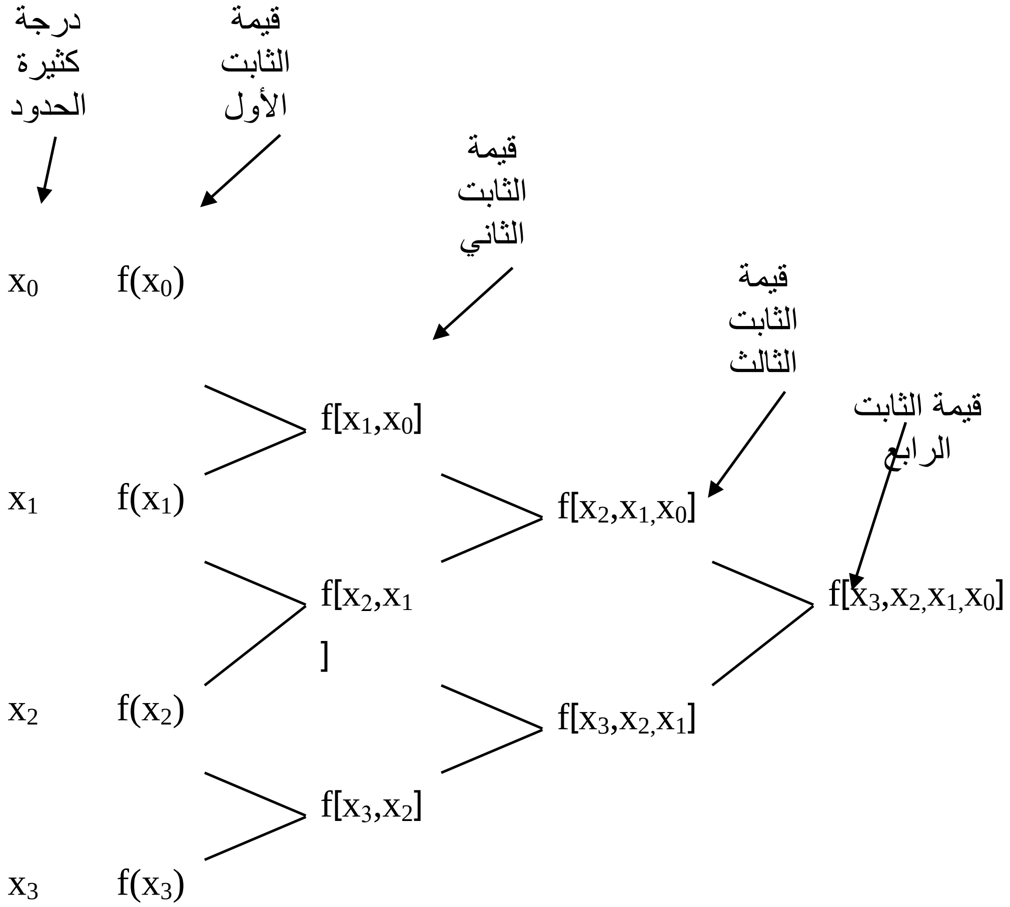
$(x_0,y_0),(x_{1,}y_1)(x_2,y_2)$ and (x_3,y_3)

فإن كثيرة الحدود تكون في الصورة العامة

$F_3(x)=f[x_0]+f[x_1,x_0](x-x_0)+f[x_2,x_1,x_0](x-x_0)(x-x_1)+f[x_3,x_2,x_1,x_0](x-$

$x_0)(x-x_1)(x-x_2)$.

يمكن عمل رسم تخطيطي لقيم الثوابت b_3,b_2,b_1,b_0 في حالة كثيرات الحدود من درجات مختلفة تتراوح ما بين كثيرة حدود من درجة (0) صفر x_0 إلى كثيرة حدود من الدرجة الثالثة x_3 كما يلى :



مثـــال 3 :

تعطي السرعة الرأسية لصاروخ كما في الجدول السابق في المثال السابق .عين قيمة السرعة عند $t=16s$ مستخدما كثيرة حدود من الدرجة الثالثة باستخدام طريقة نيوتن للفروق المقسومة .

الحـــــــــل : **تعطي معادلة السرعة من الدرجة الثالثة في الصورة التالية :**

$$v(t) = b_0 + b_1 (t - t_0) + b_2 (t- t_0)(t- t_1) + b_3 (t- t_0)(t- t_1) (t -t_2)$$

وحيث أننا نريد حساب السرعة عند $t = 16$ فإننا تختار أربع نقاط للبيانات قريبة من $t = 16$ وتحيط بها . هذه الأربع نقاط هي :

$t_0 = 10 \quad , \quad v(t_0) = 227.04$

$t_1 = 15 \quad , \quad v(t_1) = 362.78$

$t_2 = 20 \quad , \quad v(t_2) = 517.35$

$t_3 = 22.5 \quad , \quad v(t_3) = 602.97$

ثم نأتي لحساب b_3 , b_2 , b_1 , b_0 بدلالة قيم السرعة عند تلك الأزمنة المختلفة .

$b_0 = v[t_0]$

$= v(t_0)$

$= 227.04$

$b_1 = v[\ t_1\ ,\ t_0\ ]$

$$= \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}$$

$$= \frac{362.78 - 227.04}{15 - 10}$$

$$= 27.148$$

$b_2 = v\ [\ t_2, t_1\ , t_0\ ]$

$$= \frac{v[t_2, t_1] - v[t_1, t_0]}{t_2 - t_0}$$

$$v[t_2, t_1] = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$= 30.914$$

$$v[t_1, t_0] = 27.148$$

$$\therefore b_2 = 0.37660$$

$$b3 = \frac{v[t_3, t_2, t_1] - v[t_2, t_1, t_0]}{t_3 - t_0}$$

$$v[t_3, t_2, t_1] = \frac{v[t_3, t_2] - v[t_2, t_1]}{t_3 - t_1}$$

$$v[t_3, t_2] = \frac{v(t_3) - v(t_2)}{t_3 - t_2} = 34.248$$

$$v[t_2, t_1] = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = 30.914$$

$$v[t_3,t_2,t_1]=\frac{v[t_3,t_2]-v[t_2,t_1]}{t_3-t_1}$$
$$=\frac{34.246-30.414}{22.5-15}=0.44453$$
$$v[t_2,t_1,t_0]=0.37660$$
$$b_3=v[t_3,t_2,t_1,t_0]=\frac{v[t_3,t_2,t_1]-v[t_2,t_1,t_0]}{t_3-t_0}$$
$$=\frac{0.44453-o.37660}{22.5-10}=5.4347*10^{-3}$$

وبالتالي تكون

$V(t) = b_0 + b_1 (t - t_0) + b_2 (t - t_0) (t - t_1) + b_3 (t-t_0) (t - t_1) (t-t_2)$

$= 227.04+27.148(t - 10) + 0.37660(t- 10) (t- 15) + 5.437 * 10^{-3} (t - 10)(t- 15) (t - 20)$

بالتعويض عن $t =16$

$\therefore v(16) = 392.06$ m/s

يمكن كتابة المعاملات في صيغة نيوتن لكثيرات الحدود [هذه المعاملات هي الفروق المقسومة] في صورة جدول كما سبق.

مثـال : لداله F سوف يتم استكمالها interpolated علي التقاط $x_0 ,x_1 ,\ldots x_n$

يمكن عمل الجدول التالى:

x_0	$f(x_0)$		
		$\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$	
x_1	$f(x_1)$		$\dfrac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$
		$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	
x_2	$f(x_2)$		

ثم يتم عمل الحدود باستعمال مدخلات القطر الأعلى في الجدول كمعاملات .

مثال :

افترض عمل كثيرة حدود للدالة $f(x) = \tan x$ باستعمال الفروق المقسومة عند النقاط التالية

$X_0 = -1.5$ $x_1 = -0.75$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0.75$ $x_4 = 1.5$

$F(x_0) = -14.1014$, $f(x_1) = -0.931596$, $f(x_2) = 0$, $f(x_3) = 0.931596$, $f(x_4) = 14.1014$

يمكن عمل الجدول التالي باستعمال ستة أرقام دقة :

X	F(x)		
- 1.5	-14.1014		
		13.1698	
-0.75	-0.931596		-12.2382

0	0	0.931596		12.23821
0.75	0.931596	0.931596	0	
				12.23821
			12.23821	
1.5	14.01014	13.1698		

وبالتالي فإن المعادلة تأخذ الصورة

$$Tan(x) = -14.1014 + 13.1698\,(x+1.5) - 12.2382\,(x+1.5)(x+0.75) + 12.23821\,(x+1.5)(x+0.75)(x)$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Lagrangian interpolation

طريقة لاجرانج هي واحدة من الطرق المستخدمة لعمل كثيرة حدود من الدرجة

n تمر بعدد من النقاط (n + 1) .

تعطي كثيرة الحدود باستخدام طريقة لاجرانج كما يأتي :

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

حيث n فى $f_n(x)$, تمثل درجة كثيرة الحدود التي تقرب الدالة $y = f(x)$

لعدد من النقاط (n + 1) فى صورة

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots\ldots (x_n, y_n)$$

$L_i(x)$ تعطي في الصورة :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ J \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

الرمز $\prod$ يمثل حاصل ضرب عدد من الحدود مقداره (n) لا يدخل فيها الحدود التي

يتساوي بها j , i .

سوف يتضح هذا من المثال التالي :

تعطي السرعة الرأسية لصاروخ كدالة في الزمن كما في الجدول :

T= s	0	10	15	20	22.5	30
V(t) m/s	0	227.04	362.78	517.35	602.97	901.67

عين قيمة السرعة عند $t = 16$ s باستخدام كثيرة حدود من الدرجة الأولي بطريقة

لاجرانج :

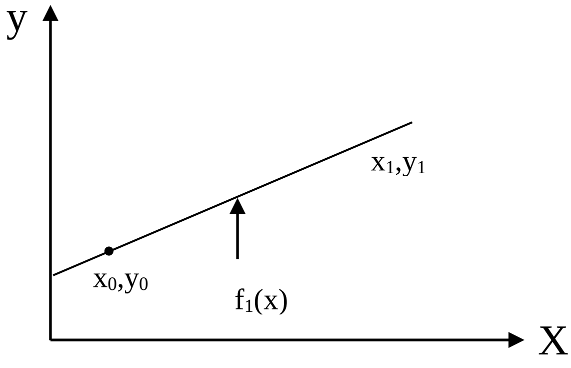
الحـــــل : لعمل كثيرة حدود من الدرجة الأولي (معادلة خطية) تعطى السرعة من

المعادلة التالية بطريقة لاجرانج :

$$v_1(t) = \sum_{i=0}^{1} L_i(t)v(t_i)$$

بالتعويض عن i=0 , i=1

$$= L_0(t)v(t_0)+L_1(t)v(t_1)$$



التمثيل الخطي

وحيث أننا نريد حساب v عند $t = 16s$ نختار نقطتين حول $t = 16$

وتحيطان بها وهما :

$t_0 = 15$, $v(t_0) = 362.78$

$t_1 = 20$, $v(t_1) = 517.35$

في حالة $i = 0$ تحزف الحد الذي به $j = 0$ وبالتالي تكون قيمة j في

هذا المدي من 0 الى 1 هي 1 فقط ومنها يكون

$$\therefore L_0(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq 0}}^{1} \frac{t - t_j}{t_0 - t_j}$$

$$L_0(t) = \frac{t - t_1}{t_0 - t_1}$$

وبالمثل يكون

$$L_1(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq 1}}^{1} \frac{t - t_j}{t_1 - t_j}$$

في هذه الحالة $i = 1$ وبالتالي يحذف الحد الذي به $j = 1$ وبالتالي تكون

قيمة j في هذا المدى من 0 الى 1 هي 0 فقط ومنها يكون :

$$L_1(t) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$$

بالتعويض عن $L_1(t)$, $L_0(t)$ في المعادلة نحصل علي :

$$v(t) = \frac{t-t_1}{t_0-t_1}v(t_0) + \frac{t-t_0}{t_1-t_0}v(t_1)$$
$$= \frac{t-20}{15-20}(362.78) + \frac{t-15}{20-15}(517.35)$$

بالتعويض عن t = 16 تحصل علي :

V(16) = 393.7 m/ s

مثال 2 :

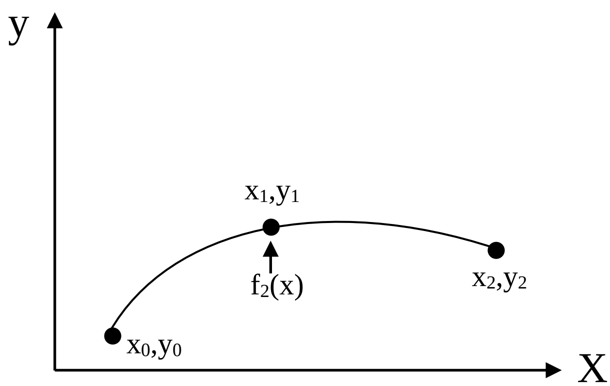
لنفس البيانات في المثال السابق استنتج معادلة تربيعية بطريقة لاجرانج ومنها

احسب السرعة عند t = 16 s

الحل :

في هذه الحالة تعطي السرعة من العلاقة :

$$v_2(t) = \sum_{i=0}^{2} L_i(t)v(t_i)$$
$$= L_0(t)v(t_0) + L_1(t)v(t_1) + L_2(t)v(t_2)$$



حيث أننا نريد السرعة عند $t = 16\ s$ فإننا نختار ثلاث نقط حول $t = 16$ وهي

$t_0 = 10$, $v(t_0) = 227.04$

$t_1 = 15$, $v(t_1) = 362.78$

$t_2 = 20$, $v(t_2) = 517.35$

وتحسب $L_0(t)$, $L_1(t)$, $L_2(t)$ كالتالي :

$$L_0(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq 0}}^{2} \frac{t-t_j}{t_0-t_j} = \left[\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\right]\left[\frac{t-t_2}{t_0-t_2}\right]$$

كذلك :

$$L_1(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{2} \frac{t-t_j}{t_1-t_j}$$

$$= \left[\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right]\left[\frac{t-t_2}{t_1-t_2}\right]$$

كذلك :

$$L_2(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq 2}}^{2} \frac{t-t_j}{t_2-t_j} = \left[\frac{t-t_0}{t_2-t_0}\right]\left[\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right]$$

بالتعويض عن $L_0(t)$, $L_1(t)$, $L_2(t)$ تحصل علي :

$$v(t)=\left[\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\right]\left[\frac{t-t_2}{t_0-t_2}\right]v(t_0)+\left[\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right]\left[\frac{t-t_2}{t_1-t_2}\right]v(t_1)+\left[\frac{t-t_0}{t_2-t_0}\right]\left[\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right]v(t_2)$$

$$\therefore v(16)=\frac{(16-15)(16-20)}{(10-15)(10-20)}(227.04)+\frac{(16-10)(16-20}{(15-10)(15-20)}(362.78)+\frac{(16-10)(16-15)}{(20-10)(20-15)}(517.35)$$

$$=(-0.08)(227.04)+(0.96)(362.78)+(0.12)(517.35)$$

= 392.19 m/s

مثـــــال 3 :

تقس بيانات الجدول السابق منها عين معادلة من الدرجة الثالثة (cubic) ومنها

أحسب السرعة عند t = 16 s بطريقة لاجرانج :

الحـــــــل :

تعطي معادلة لاجرانج للسرعة من الدرجة الثالثة في الصورة التالية :

$$v(t)=\sum_{i=0}^{3}Li(t)v(t_i)$$

$$=L_0(t)v(t_0)+L_1(t)v(t_1)+L_2(t)v(t_2)+L_3(t)v(t_3)$$

وبالتالياربع أربع نقاط تحيط بالنقطة t = 16 وهي :

$t_0 = 10$, $v(t_0) = 227.04$

$t_1 = 15$, $v(t_1) = 362.78$

$t_2 = 20$, $v(t_2) = 517.35$

$t_3 = 22.5$, $v(t_3) = 602.97$

بعد الحصول علي $v(t_0)$, $v(t_1)$, $v(t_2)$, $v(t_3)$ نريد حساب $L_3(t)$, $L_2(t)$, $L_1(t)$, $L_0(t)$ وذلك كالتالي :

$$L_0(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq 0}}^{3} \frac{t-t_j}{t_0-t_j} = \left[\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\right]\left[\frac{t-t_2}{t_0-t_2}\right]\left[\frac{t-t_3}{t_0-t_3}\right]$$

$$L_1(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq 1}}^{3} \frac{t-t_j}{t_1-t_j} = \left[\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right]\left[\frac{t-t_2}{t_1-t_2}\right]\left[\frac{t-t_3}{t_1-t_3}\right]$$

$$L_2(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq 2}}^{3} \frac{t-t_j}{t_2-t_j} = \left[\frac{t-t_0}{t_2-t_0}\right]\left[\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right]\left[\frac{t-t_3}{t_2-t_3}\right]$$

$$L_3(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq 3}}^{3} \frac{t-tj}{t3-tj} = \left[\frac{t-t_0}{t_3-t_0}\right]\left[\frac{t-t_1}{t_3-t_1}\right]\left[\frac{t-t_2}{t_3-t_2}\right]$$

بالتعويض عن هذه القيم في المعادلة الأصل نحصل علي :

$V(16) = 392.06$ m/s

طريقة شتيرلنج للاستكمال

يمكن كتابة متسلسلة تايلور على الصورة التالية:

$$y(x+\alpha h) = y(x)\left[1+\alpha hD+\frac{(\alpha h)^2}{2!}D^2+\frac{(\alpha h)^3}{3!}D^3+.....\right].........1$$

$$= y(x)e^{\alpha hD}$$

من الفروق المركزية وجد ان

$$hD = \mu(\delta-\frac{\delta^3}{6}+\frac{\delta^5}{30}...2$$

$$(hD)^2 = \delta^2-\frac{\delta^4}{12}+\frac{\delta^6}{90}...3$$

بالتعويض عن قيمة $(hD)^2$ و (hD) فى المعادلة الاولى:

$$\therefore\ y(x+\alpha h) = y(x)\left[1+\alpha\mu(\delta-\frac{\delta^3}{6}+......)+\frac{\alpha^2}{2!}(\delta^2-\frac{\delta^4}{12}+.......)\right]$$

$$= y(x)\left[1+\alpha\mu\delta+\frac{\alpha^2\delta^2}{2!}+......\right]$$

وذلك بأخذ الحد الاول بعد الضرب فى القوسين

$$= y(x)+\alpha\mu\delta y(x)+\frac{\alpha^2\delta^2}{2!}y(x)$$

بالتعويض عن $y_i = y(x)$

$$= y_i + \alpha\mu\delta y_i + \frac{\alpha^2\delta^2}{2!} y_i$$

$$= y_i + \alpha(\mu\delta y_i) + \frac{\alpha^2}{2}(\delta^2 y_i)$$

وهذه هي صيغة شتيرلنج للاستكمال, ويمكن استعمال الحدين الأوليين من الطرف

الأيمن أو باستعمال الثلاثة حدود.

فإذا استعملنا الحدين الأوليين فقط, تؤول العلاقة إلى الصورة التالية:

$$y(x+\alpha h) = y_i + \alpha(\mu\delta y_i)$$
$$= y_i + \frac{\alpha}{2}(y_r - y_L)$$

وذلك لان $\mu\delta y_i = \frac{1}{2}(y_r - y_L)$

أما اذا استعملنا الثلاثة حدود فان العلاقة تأخذ الصورة التالية

$$y(x+\alpha h) = y_i + \alpha(\mu\delta y_i) + \frac{\alpha^2}{2}(\delta^2 y_i)$$

$$= y_i + \frac{\alpha}{2}(y_r - y_i) + \frac{\alpha^2}{2}(y_r - 2y_i + y_L)$$

$$= y_i + \frac{\alpha}{2}[y_r - y_L + \alpha(y_r - 2y_i + y_L)]$$

$$= y_i + \frac{\alpha}{2}[y_r - y_L + \alpha y_r - 2\alpha y_i + \alpha y_L]$$

$$= y_i + \frac{\alpha}{2}[y_r(1+\alpha) + y_L(\alpha - 1) - 2\alpha y_i]$$

$$= y_i + \frac{\alpha}{2} y_r(1+\alpha) + \frac{\alpha}{2} y_L(\alpha - 1) - \alpha^2 y_i]$$

$$= \frac{\alpha}{2}(\alpha - 1)y_L + y_i(1-\alpha^2) + \frac{\alpha}{2}(1+\alpha)y_r \,.$$

مثال

أوجد قيمة $\tan\ 16^0$ باستخدام البيانات فى الجدول التالى, مستعملا طريقة شتيرلنج للاستكمال.

x	10^o	15^o	20^o	25^o
Tan x	0.1763	0.2679	0.3640	0.4603

الحل

$$\because \tan 16 = y(x + \alpha h)$$

x=15, h=20-15=5, αh=1

$$\therefore \alpha = \frac{1}{5} = 0.2$$

حيث h هى مقدار الخطوة التى تزداد بها البيانات, αh هى القيمة التى تزداد بها القيمة المطلوبة عن اقرب قيمة معلومة وهى فى هذا المثال 15^o.

باستعمال الطريقة الاولى لشتيرلنج وهى استعمال حدين فقط:

$$\tan 16 = y_i + \frac{\alpha}{2}(y_r - y_L)$$

حيث y_i هى قيمة tan عند 15^o.

y_r هى قيمة tan عند 20^o

y_L هى قيمة tan عند 10^o

$$\tan 16 = 0.2679 + \frac{0.2}{2}(0.3640 - 0.1763) = 0.2866$$

باستعمال الطريقة الثانية لشتيرلنج وهى استعمال الثلاثة حدود.

$$\tan 16^o = \frac{\alpha}{2}(\alpha - 1)y_L + y_i(1-\alpha^2) + \frac{\alpha}{2}(1+\alpha)y_r$$
$$= \frac{0.2}{2}(0.2-1)(0.1763) + (1-(0.2)^2)(0.2679) + \frac{0.2}{2}(0.2+1)(0.364) = 0.28679$$

والطريقة الثانية اكثر دقة. وهكذا كلما استعملنا عدد اكثر من الحدود كلما اقتربنا من القيمة الحقيقية.

الباب السادس

توفيق البيانات Regression

يوجد نوعين من توفيق البيانات Regression

1- linear regression توفيق خطى

2- nonlinear regression توفيق غير خطى

التوفيق الخطى linear regression

linear regression هو من أشهر موديلات التوفيق regression وفيه يتم وصف

سلوك عدد n من النقاط (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) … (x_n, y_n)

بواسطة موديل خطي يعطي في الصورة

$$y = a_0 + a_1 x \rightarrow ❻$$

حيث a_0 , a_1 هي ثوابت الموديل. لقياس كفاءة الموديل ، أي إلي أية مدي ينجح الموديل $y = a_0 + a_1 x$ في وصف سلوك البيانات نحتاج إلي تعيين المتبقي residual عند كل نقطة وهو يعطى من العلاقة التالية:

$$R = y_i - (a_0 + a_1 x_i)$$

حيث $i = 1,2,\ldots\ldots n$,

y_i هى القيمة الأساسية.

$(a_0 + a_1 x_i)$ القيمة المحسوبة بالموديل.

فى الحالة المثالية ، عندما يكون الباقىّ يساوي صفرا لكل النقاط ، فإن كل النقاط تكون واقعة على الخط (الموديل) وبالتالي فإن تقليل البواقي هو الهدف للحصول على معاملات الموديل الأنسب .

من أشهر الطرق لتقليل البواقي هي طريقة LEAST SQUARES METHOD (طريقة اقل المربعات) حيث يتم اختيار قيم ثوابت الموديل a_1، a_0 بحيث تعطي أقل قيمة لمجموع مربعات الفروق ، أي تقليل $\sum_{i=1}^{n} R^2$.

لماذا تلجأ إلى تقليل مجموع مربعات الفروق وليس إلى تقليل مجموع الفروق أو مجموع القيم المطلقة للفروق أو إلى الأخذ فى الاعتبار أن متوسط النهائي للفروق يساوي صفرا دون الأخذ فى الاعتبار تقليل الفرق لكل نقطة على حدي .

سوف نناقش ذلك فى المثال التالى:

أفترض أن لدينا البيانات التالية :

x	2	3	2	3
y	4	6	6	8

صف هذه البيانات بموديل (خط مستقيم) فى الصورة

$y=a_0+a_1x$

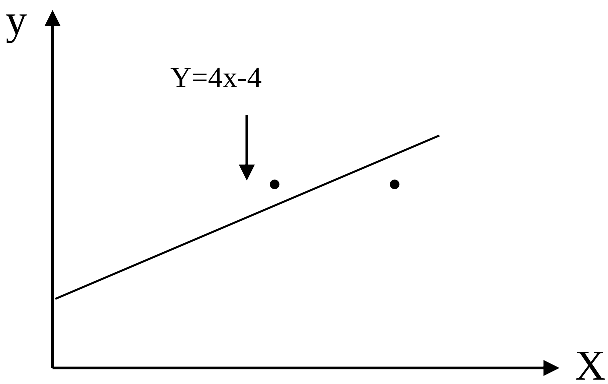
أولا:

نختار أن تقليل مجموع الفروق أى جعل $\sum_{i=1}^{n} R_i = 0$ وذلك للحصول على a_0 , a_1.

نجد أن الموديل قد يأخذ الصورة

$Y=4x-4$

كما فى الشكل التالي :



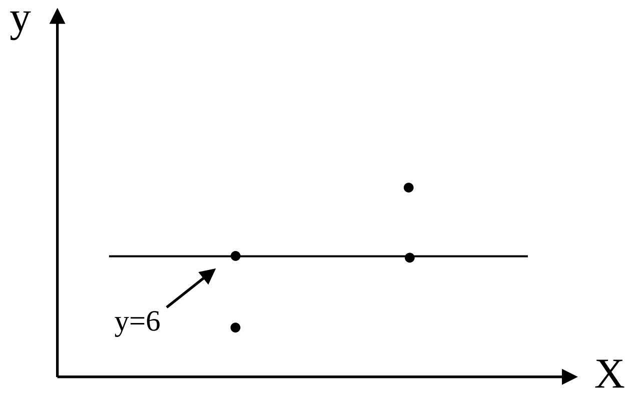
فى هذه الحال يكون مجموع البواقي $\sum_{i=1}^{4} R_i = 0$ كما هو مبين فى الجدول التالي :

x	y	y predicted	ζ =y-y predicted
2	4	4	0
3	6	8	-2
2	6	4	2
3	8	8	0
		$\sum_{i=1}^{n} R_i = 0$	

وبالتالي يكون لدينا أقل خطأ وهو فى صورة $\sum_{i=1}^{n} R_i = 0$ لكن هذا الشرط لا يعطي قيمة

واحدة لمعاملات الموديل. فإذا أخذنا الموديل فى صورة خط مستقيم له المعادلة y=6

كما في الشكل التالى:



يتحقق كذلك أن مجموع الفروق = صفرا $\sum_{i=1}^{n} R_i = 0$ ويكون الفروق لكل نقطة كما

بالجدول:

x	y	y predicted	ζ =y-y predizted
2	4	6	-2
3	6	6	0
2	6	6	0
3	8	6	2
		$\sum_{i=1}^{n} R_i = 0$	

وحيـث أن هـذا الشـرط $\left[\sum_{i=1}^{n} R_i = 0\right]$ لا يعطـي موديـل خطـي وحيـد فإنـه لا يمكـن

استخدامه لإيجاد قيم المعاملات a_0, a_1. دعنا الآن نري لماذا لا يمكن استخدام هذا

الشرط بصورة عامة .

حيث أننا نريد أن تقلل القيمة :

$$\sum_{i=1}^{n} Ri = \sum_{i=0}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i) \qquad 6$$

فإننا نفاضل المعادلة (6) وبالنسبة إلى a_0 وبالنسبة إلى a_1 تحصل على :

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} R_i}{\partial a_0} = -\sum_{i=1}^{n} 1 = -n \qquad 7$$

وكذلك :

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} R_i}{\partial a_1} = -\sum_{i=1}^{n} x_i = -n\overline{X}$$

حيث $\overline{X}$ تمثل المتوسط

مساواة هذه المعادلات بالصفر بتطلب أن تكون n=0 وهذا مستحيل لأن الموديل به حدود . لذلك نقول لا يوجد قيم وحيدة للمعاملات a_1 , a_0.

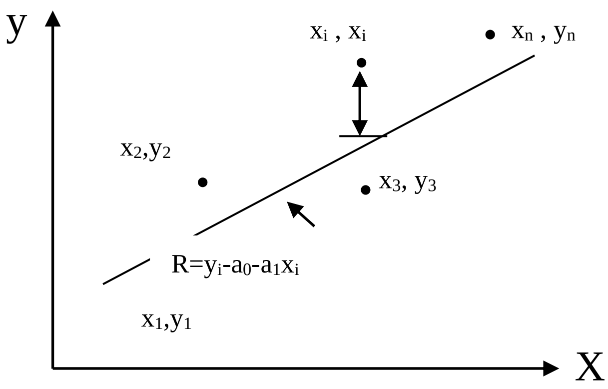
كذلك فى باقي الحالات نجد أن قيم المعاملات لا تكون وحيدة.

نأتي لمناقشة طريقة تقليل مجموع مربعات الفروق Least squares method

فى هذه الحالة نريد تقليل

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} R_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

حيث S_r مجموع مربعات الفروق :



موديل خطي بين المتغيرين موضحا المتبقي

لإيجاد a_1 , a_0 تعمل على تقليل المتبقي S_r بالنسبة إلى a_1 , a_0 . لا يتم ذلك

إلا بجعل التفاضل بالنسبة إلى a_1,a_0 يكون صفرا كالتالي :

$$\frac{\partial Sr}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1 x_i)(-1) = 0 \qquad 10$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1 x_i)(-x_i) = 0 \qquad 11$$

بالقسمة على (2-) للمعادلتين تحصل على :

$$-\sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i = 0 \qquad 12$$

$$-\sum_{i=1}^{n} y_i \times_i + \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i + \sum_{i=1}^{n} a_1 \times_i^2 = 0 \qquad 13$$

بملاحظة أن :

$$\sum_{i=1}^{n} a_0 = a_0 + a_0 + \ldots a_0 = n a_0$$

بالتعويض فى 12 تحصل على :

$$n a_0 + a_1 \sum_{i-1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad 14$$

وكذلك من 13 تحصل على :

$$a_0 \sum_{i-s}^{n} x_i + a_3 \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} = \sum_{i=1}^{\wedge} x_i y_i \qquad 15$$

يحل المعادلتين 15,14 للحصول على a_0 , a_1 .

من 14 :

$$na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

منها

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} yi - a1 \sum_{i=1}^{n} xi}{n}$$

بالتعويض عن a_0 فى 15

$$\therefore \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right] \sum_{i=1}^{n} \times_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

بالضرب فى n

$$\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a_1\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\sum_{i=1}^{n} x_i + na_1\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 = n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i - a_1\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^2 + na_1\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 = n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i - a_1\left[\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2\right] = n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\therefore a1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i - n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2} \qquad 16$$

بالتعويض من a_1 فى 14 تحصل على a_0 كالتالي :

$$na_0 + \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i - n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2}$$

يضرب الطرفين فى المقام

$$\therefore a_0 n\left[\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2\right] + \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i - n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2\right]\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\therefore a_0 n\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] = n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$= n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i - n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\therefore a_0 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i - n\sum_{i=1}^{n} xi^2 \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2\right]}$$

$$\therefore a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} xi - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} yi}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2} \qquad 17$$

يمكن للاختصار وضع :

$$a_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

$$a_0 = \overline{y} - a_1 \overline{x}$$

حيث

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2$$

,

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

مثـــــال :

يعطي المتغير y بدلالة المتغير x كما في الجدول التالي أوجد الثوابت a_1 ,

a_0 فى معادلة التوفيق التالية $y=a_1x+a_0$

x	y
1	3
2	5
3	7
4	9

الحـــــل :

لإيجاد قيم a_0 , a_1 تقوم بعمل الجدول التالي :

x	y	X2	xy
1	3	1	3
2	5	4	10
3	7	9	21
4	9	16	36
Sum. = 10	**24**	**30**	**70**

وحيث أن $n=4$ فإن :

$$a_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{4} x_i y_i - \sum_{i=1}^{4} x_i \sum_{i=1}^{4} y_i}{n\sum_{i=d}^{4} x_i^{\ 2} - \left[\sum_{i=1}^{4} x_i\right]^2}$$

$$= \frac{4(70)-(10)(24)}{4(30)-(10)^2} = \frac{280-240}{120-100}$$

$$= 40/20$$

$$\therefore a_1 = 2$$

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i y_i \sum_{i=1}^{4} x_i - \sum_{i=1}^{4} x_i^{\ 2} \sum_{i=1}^{4} y_i}{\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{4} x_i^{\ 2}} = \frac{(70)(10)-(30)(24)}{(10)^2 - 4(30)}$$

$$= \frac{700-720}{100-120} = \frac{-20}{-20}$$

وتكون المعادلة فى الصورة

$$\therefore a_0 = 1$$

$$y = 2x + 1$$

References

Autar K Kaw, An interactive e-Book, Holistic Numerical Methods Institute, College of Engineering, University of South Florida, Tampa, FL 33620-5350.