الفصل الأول

الدوال الحقيقية Real functions

1-1 مقدمة :-

سوف نتناول فى هذا الفصل أحد المفاهيم الأساسية فى الرياضيات وهو مفهوم (الدالة) ، الذى قدمه العالم الرياضى "ليبنتز" "Lebnitz" فى القرن السابع عشر. وظهر هذا المفهوم عند دراستنا للقواعد والقوانين والعلاقات التى تربط بين كميات تمثل عناصر فيزيائية . وسوف نتابع أيضا ما صاحب هذا المفهوم من تطور فى معناه ودلالته. ولتحديد معنى لفظ "دالة" نبدأ بتقديم بعض الأمثلة التوضيحية :

مثال (1) : إذا كان الرمز x يرمز لطول ضلع مربع والرمز y يرمز لمساحة هذا المربع ، فإن العلاقة الدالة على ارتباط x مع y هى :

$$Y = X^2 \quad y = x^2$$

ولكل قيمة محددة x تتعين قيمة y لذا نقول أن قيمة المساحة y تتوقف على قيمة طول الضلع x.

ونقول أن y, x تمثل مقادير متغيرة (متغيرات).

مثال (2) : إذا كان الرمز x يدل على طول نصف قطر دائرة والرمز y يدل على مقدار مساحة الدائرة فإن العلاقة الدالة على ارتباط x مع y هى :

$$y = \pi x^2$$

والرمز π يدل على النسبة بين محيط أى دائرة وقطر هذه الدائرة وهى نسبة ثابتة. وكل قيمة محددة x تعطى قيمة محددة y عند التعويض عنها فى القانون. سوف نطلق على الرمز "π" لفظ ثابت (constant) بينما تسمى y, x "متغيرات" variables أو مقادير صغيرة.

مثال (3) : قانون "هوك" فى الفيزياء

ليكن l هو طول سلك زنبركى ولتكن y هى مقدار القوة اللازمة لإحداث استطالة فى السلك مقدارها x.

والعلاقة الدالة على ارتباط x مع y تعرف باسم قانون (هوك) وهى :

$$y = \frac{m}{l} x$$

حيث m مقدار ثابت يتوقف على نوع السلك المستخدم.

هنا l, m يدلان على (ثابتين) بينما y, x يدلان على (متغيرين) ونلاحظ أيضا أن كل استطالة محددة x تحتاج إلى قوة محددة لإحداث تلك الاستطالة وبمعنى آخر : أن كل قيمة محددة x تعين أو تحدد قيمة محددة y.

ولقد اتفق العلماء على تسمية المتغير y دالة فى المتغير x فى جميع الأمثلة التى سبق التعرض لها. وفى مواقف أخرى مماثلة لها.

مثال (4) : ليكن V هو الرمز الدال على حجم اسطوانة دائرية قائمة نصف قطر قاعدتها x وارتفاعها h والعلاقة الدالة على ارتباط V, h, x هى :

$$V = \Pi x^2 h$$

هنا الرمز Π يمثل كالعادة (ثابت) بينما الرموز v, h, x تمثل مقادير متغيرة ويمكن تعيين مقدار حجم الاسطوانة V إذا علمنا طول نصف القطر وطول ارتفاعها. أى أن قيمة V تتوقف على قيمة h, x.

فى هذا المثال نقول أن V دالة ذات متغيرين h, x.

تعليق :

فى الأمثلة السابقة استخدمنا الرموز الدالة على الثوابت والمتغيرات لتعبر عن كميات فيزيائية فهى تعبر أحيانا عن الأطوال أو المسافات أو الحجوم أو الزمن أو القوى أو المساحات أو السرعات ...... ألخ.

ولكننا سوف نتعامل أيضا مع مواقف رياضية لا تدل فيها الرموز على مقادير فيزيائية. وهذا الموقف هو الذى أدى إلى تعديل مفهوم (الدالة) عن ذلك المفهوم الذى افترضناه سابقا. وكما سنعرف فيما بعد.

2-1 تعريف "الدالة" Function :

حسب المفهوم التقليدى الذى قدمه العالم "ليبنتز" ومعاصروه ، فتعرف الدالة كما يلى :

(إذا ارتبط متغيران مثل y, x بحيث كانت قيمة y تتوقف على قيمة x فإننا نقول أن y دالة فى x ونعبر عن ذلك بكتابة الصورة :

$$y = f(x)$$

هنا الرمز x والرمز y هما المتغيران والرمز f يرمز للقاعدة التى تربط x مع y.

فى المثال الأول : $y = x^2$ أى أن $f(x) = x^2$

هنا : $f(x)$ تعنى تربيع (x) أو مربع (x).

وفى المثال الثانى : $y = \pi x^2$

فإن $f(x) = \pi x^2$ ، أى تربيع x مع ضرب الناتج فى π.

ولقد تطور هذا التعريف ليشمل مواقف رياضية لا يدل فيها الرمز x والرمز y على كميات فيزيائية.

ولسوف نعيد صياغة التعريف الحديث للدالة ذات المتغير الحقيقى كما يلى :

تعريف الدالة :

لتكن T, X فئتين غير خاليتين من الأعداد الحقيقية ولتكن f علاقة تعين لكل عنصر (عدد) من عناصر الفئة X عنصرا واحدا فقط (عدد واحد فقط) من عناصر الفئة Y . فإننا نسمى f دالة من x إلى y ونعبر عنها بالصورة :

$$f : X \to Y$$

أحيانا قد نطلق على الثلاثى $\{f, x, y\}$ لفظ دالة.

نسمى X مجال الدالة (نطاق الدالة) domain

ونسمى Y المجال المقابل (النطاق المصاحب) codomain

إذا كان العدد y من Y هو العدد المقابل للعدد x من X فإننا نسمى y صورة (image) العنصر x.

أو نسمى y قيمة الدالة عند x.

ونعبر عن ذلك رمزيا : $y = f(x)$

وأيضا $f : X \to Y$

نسمى x المتغير المستقل (independent variable) ، ونسمى y المتغير التابع (dependent variable).

المثال التالى يبين لنا أنه ليس من الضرورى أن نعبر عن الدالة بقاعدة جبرية.

مثال (6) :

الجدول الآتى يبين العلاقة بين وزن خطاب (x) مرسل بالبريد بوحدة الجرام ، وتكلفة (y) بالقرش.

x (mg)	$0 < x \le 10$	$10 < x \le 20$	$20 < x \le 30$	....
y (pt)	6	12	18	....

هذا الجدول يعبر عن علاقة بين متغيرين y, x.

ويمكننا منه تحديد قيمة الإرسال (y) لكل خطاب معلومة وزنه (x) بالجرام وكل قيمة مجددة x يقابلها سعر محدد y.

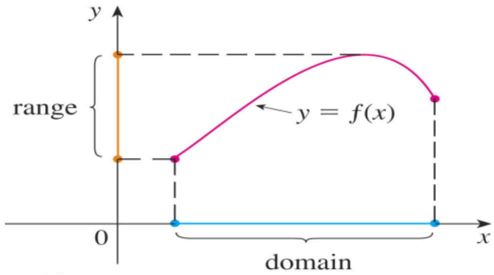
فالجدول يعبر عن دالة : مجالها فئة الأعداد الحقيقية الموجبة مميزة بالجرام (لتدل على الوزن) ومجالها المقابل فئة الأعداد الحقيقية مميزة بالقروش (لتدل على التكلفة). والجدول هنا يقوم بتحديد قاعدة الربط بين y, x.

مدى الدالة : Range of function

نسمى فئة جميع صور عناصر مجال الدالة X بمدى الدالة.

مدى (f) هو $\{y : y = f(x) \quad \forall x \in X\}$

أى أن مدى الدالة عادة هو فئة جزئية من فئة المجال المقابل أى أن مدى $(f) \subseteq Y$.



مثال (7) :

عين مجال ومدى الدالة f المعرفة بالقاعدة :

$$f(x)=\sqrt{x^2+5}$$

الحل :

واضح أن الدالة f معرفة لكل قيمة حقيقية x لأن ما تحت الجذر التربيعى وهو (x^2+5) مقدار موجب دائما لجميع قيم x.

فيكون مجال الدالة هو : فئة الأعداد الحقيقية R

ولتحديد المدى نرى أن :

لكل x حقيقية فإن $x^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \ x^2+5 \geq 5 \quad \Rightarrow \sqrt{x^2+5} \geq \sqrt{5}$$

أى أن $y=\sqrt{x^2+5} \ \geq \sqrt{5}$

فيكون مدى (f) هو $\{y : y \ \geq \ \sqrt{5}\}$

مثال (8) :

عين مدى الدالة السابقة على أساس أن المجال المعطى هو الفترة $[-2, 2]$.

الحل :

$$-2 \ \leq \ x \ \leq \ 2$$

بالتربيع $0 \ \leq \ x^2 \ \leq \ 4$ (لماذا ؟)

بإضافة 5 : $5 \ \leq \ x^2+5 \ \leq \ 9$

$$\Rightarrow \ \sqrt{5} \ \leq \ \sqrt{x^2+5} \ \leq \ 3$$

$\Rightarrow \ \sqrt{5} \ \leq \ y \ \leq \ 3$ (لاحظ أن المقادير الثلاث موجبة)

مدى (f) هو $\{y : \sqrt{5} \ \leq \ y \ \leq \ 3\}$

تعـاريف :

تعريف (1) :

يقال لدالتين f, g أنهما متساويتان وتكتب :

$$f = g$$

إذا تحقق أ- مجال f = مجال g

ب- $f(x) = g(x) \quad \forall \quad x$ فى المجال المشترك

تعريف (2) :

يقال للدالة g أنها امتداد أو اتساع للدالة f إذا تحقق :

أ - مجال f فئة جزئية من مجال g

ب - $f(x) = g(x) \quad \forall \quad x$ فى مجال f

ويمكننا أن نقول أيضا أن الدالة f اقتصار أو انكماش للدالة g

مثال (9) :

لتكن f هى العلاقة التى تعين لكل عدد طبيعى n مربعه n^2 ولتكن g هى العلاقة التى تعين لكل عدد صحيح n مربعه n^2 أعتبر أن فئة الأعداد الطبيعية هى

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

وأن فئة الأعداد الصحيحة هى

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$$

مجال (f) هو $\{1, 2, 3, ...\}$

مجال (g) هو $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$

$$f(n) = n^2 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

$$g(n) = n^2 \quad \forall \quad n \in \mathbb{Z}$$

مدى (f) هو $\{1, 4, 9, 15, ...\}$

مدى (g) هو $\{0, 1, 4, 9, 16, ...\}$

مجال (f) $\supseteq$ مجال (g)

g هى امتداد للدالة f

ملاحظة : توجد علاقات بين متغيرين وتعبر دالة حسب التعريف الجديد للدالة.

مثال (10) :

المعادلة $x^2 + y^2 = g$ أو الصورة المكافئة

$$y^2 = g - x^2$$

لا تعبر عن دالة لأنه لكل قيمة x حيث $-3 \le x \le 3$

توجد قيمتان مختلفتان للرمز y

وإذا كتبت هذه العلاقة بالصورتين :

$$y=+\sqrt{g-x^2}\,,\quad y=-\sqrt{g-x^2}$$

فإن كل منها على حدة يعبر عن دالة مجالها :

$$\{x : -3 \le x \le 3\}$$

وبالتالى فإن $\{0 \le x^2 \le g\}$

$$\Rightarrow \quad 0 \le g-x^2 \le g$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le \sqrt{g-x^2} \le 3$$

ويكون مدى الدالة الأولى هو : $0 \le y \le 3$

ومدى الدالة الثانية هو : $-3 \le y \le 0$

والسؤال الآن : كيف نحدد مجال الدالة التى قاعدتها :

$$f(x)=\sqrt{g-x^2}$$

واضح أن قيمة $f(x)$ تتوقف على قيمة المقدار $(g-x^2)$

وتكون $f(x)$ قيمة حقيقية إذا كانت $(g-x^2) \ge 0$

ومن الأهمية أن نبحث عن إشارة المقدار الجبرى $(g-x^2)$

ولكن $g-x^2 = (3-x)(3+x)$

والجدول التالى يوضح كيفية تحديد الفترات التى يكون فيها المقدار $(g-x^2)$ موجبا أو سالب.

$-\infty \quad -3 \quad 0 \quad 3 \quad \infty$

+	+	-	إشارة المقدار الجبرى $(3-x)$
-	+	+	إشارة المقدار الجبرى $(3+x)$
-	+	-	إشارة المقدار الجبرى $(g-x^2)$

واضح من الجدول السابق أن المقدار $(g-x^2)$ يكون موجبا إذا كانت x تحقق $-3 < x < 3$ وبالتالى فإن $g-x^2 \ge 0$ إذا كانت $3 \ge x \ge -3$

أى أن مجال الدالة f هو : $\{x : -3 \le x \le 3\}$.

تمرين (1-1)

1- لتكن $f(x) = 2x + 5$ احسب قيمة :

$$f(0),\quad f(2),\quad f\left(\frac{1}{3}\right),\quad f\left(\frac{1}{x}\right),\quad f(x-3)$$

2- لتكن $f(x) = x^2 + x + 1$ احسب قيمة :

$$f(0),\ f(-x),\ f(x^2),\ f(\cup\overline{x}),\ f(x+0)-f(x)$$

3- عين مجال الدوال التى قاعدتها :

أ - $f(x) = 3x - 2$

ب - $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$

ج - $f(x) = \dfrac{x}{(x+2)(x-3)}$

4 – عين مجال الدوال الآتية مع بيان المدى إن أمكن :

أ - $f(x) = \sqrt{x-6}$

ب - $f(x) = \sqrt{x^2+4}$

ج - $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

د - $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-4)}$

هـ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}}$

و - $f(x) = \sqrt{x^2-9} + \sqrt{x+2}$

بعض أنواع الدوال :

3-1 الدالة الأحادية والدالة الفوقية :

عند تعريف الدالة طالبنا بأن يكون لكل عنصر x فى X عنصر مقابل واحد فقط فى Y . ولم نطلب العكس وإذا كان كل عنصر فى مدى الدالة هو صورة لعنصر واحد فقط من عناصر X سميت الدالة أحادية وبالتالى :

تكون الدالة f أحادية إذا تحقق :

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

وهذا يؤدى بالتالى إلى أن :

$$f(x_1)=f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1=x_2$$

وتسمى الدالة f فوقية إذا كان مدى f هو Y

أى إذا كان كل عنصر فى Y هو صورة لأحد عناصر X

مثال (1) :

لتكن $f:R \to R$ قاعدتها $f(x)=x^2$

اختبر نوع الدالة من حيث كونها أحادية أو فوقية.

الحل :

حيث أن $f(1)=f(-1)$

وكذلك $f(2)=f(-2)$ .... فإن هذه الدالة غير أحادية

وحيث أن $y=x^2 \geq 0$

فإن مدى f فئة جزئية فعلية من □

مما يدل على أنها غير فوقية

مثال (2) :

لتكن $f:R^+ \to R^+$ ومعرفة بالقاعدة $f(x) = x^2$

بين نوع الدالة من حيث كونها أحادية أو فوقية.

الحل :

باعتبار أن $y = x^2$ ، $x \in R^+$

ولكن $0 < x$ فإن $y= x^2 > 0$

وإذا كانت : $x_1 \neq x_2$ فإن

$$y_1 = x_1^2 \neq y_2 = x_2^2$$

مما يدل على أن الدالة المعطاة دالة أحادية

وحيث أن لأى $y > 0$ توجد $x > 0$
تحقق $x^2 = y$ فإننا نرى أن الدالة المعطاة دالة فوقية.

مثال (3) :

لتكن $f : Z \to R$ معرفة بالقاعدة

$$f(x) = 2^x \qquad x \in Z$$

حيث Z هى فئة الأعداد الصحيحة
بين نوع الدالة من حيث كونها أحادية أو فوقية.

الحل :

الدالة أحادية لأنه إذا كانت $x_1 \neq x_2$ فإن $2^{x_1} \neq 2^{x_2}$
الدالة ليست فوقية لأن $2^x > 0$ دائما

مثال (4) :

لتكن $f : R \to R$ وقاعدتها $f(x) = \sin x$
بين نوع الدالة من حيث كونها أحادية أو فوقية.

الحل :

هذه الدالة تسمى (دالة مثلثية) ومثلها .... $f(x) = \tan x$, $f(x) = \cos x$,
كالعادة نتصور أن المتغير x هو قيمة زاوية مقدرة بالتقدير الدائرى. ومن الجداول المثلثية إذا وقعت x بين صفر و $\frac{\pi}{2}$ فإن : -

$\sin x$ تقع بين $0, 1$ (الربع الأول)

وكذلك إذا وقعت قيمة x بين $\frac{\pi}{2}, \pi$ فإن :

$\sin x$ أيضا تقع بين $0, 1$ (الربع الثانى)

أما الزاوية الواقعة قيمتها بين $\pi, \frac{3\pi}{2}$ (الربع الثالث)

أو بين $\frac{3\pi}{2}, 2\pi$ (الربع الرابع)

فإن جيب الزاوية ينحصر بين $0, -1$

وبوجه عام : فإنه مهما كانت قيمة س الحقيقية فإن $-1 \le \sin x \le 1$

الدالة غير أحادية لأن ......$\sin 30 = \sin 150 = \sin 390 =$

الدالة غير فوقية لأن المدى هو $\{y : -1 \le y \le 1\}$

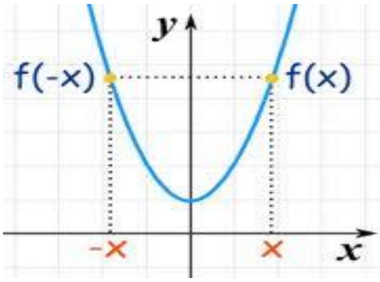
4-1 الدوال الفردية والدوال الزوجية :

لتكن f دالة ذات متغير حقيقى ، مجالها R.

تسمى الدالة f دالة زوجية (even function) إذا حققت القاعدة :

$$f(-x) = f(x) \qquad \forall\ x \in R$$

ويكـون الشـكل البيـانى للدالـة الزوجيـة متمـاثلا حـول محـور الصـادات لأنـه إذا كانـت النقطة (x, y) تقع علية فإن النقطة $(-x, y)$ تقع أيضا عليه وسبب ذلك أن $y = f(x)$ وأن $y = f(x) = f(-x)$

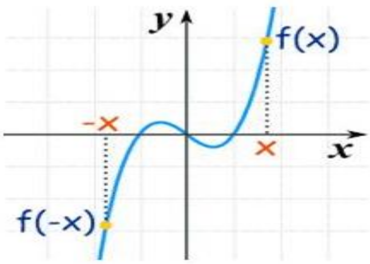


وتسمى الدالة f دالة فردية (odd function) إذا حققت القاعدة :

$$f(-x) = -f(x) \qquad \forall\ x \in R$$

والشكل البيانى للدالة الفردية يكون متماثلا حول نقطة الأصل يعنى أنه إذا كانت النقطة (x, y) تقـع عليـه فـإن النقطـة $(-x, -y)$ تقـع عليـه أيضـا وذلـك لأن :

$y = f(-x) = -f(x)$



(لاحظ أن بعض الدوال ليست فردية أو زوجية)

مثال (1) : الدوال التالية هى دوال زوجية :

أ - $f_1(x) = x^2$ ب - $f_2(x) = 4x^2 + 6$

ج - $f_3(x) = x^4 + \dfrac{1}{x^2} + 8 \qquad (x \neq 0)$

لأن $f_1(-x)=(-x^2)=x^2=f_1(x)$

$$f_2(-x)=4(-x)^2+6=4x^2+6=f_2(x)$$

$$f_3(-x)=(-x)^4+\frac{1}{(-x)^2}+8$$

$$=x^4+\frac{1}{x^2}+8=f_3(x)$$

مثال (2) : الدوال الآتية دوال فردية :

أ - $f_1(x)=x^3+x$

ب - $f_2(x)=\frac{1}{x}(x^4+2)$ $\qquad 0\neq x$

لأن $f_1(-x)=(-x)^3+(-x)$

$$=-(x^3+x)=-f_1(x)$$

$$f_2(-x)=\frac{1}{-x}\left[(-x)^4+2\right]$$

$$=-\left[\frac{1}{x}(x^4+2)\right]=-f_2(x)$$

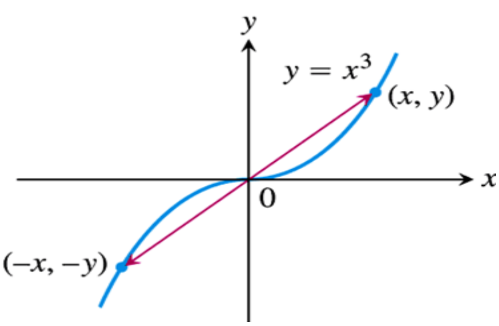
مثال (3) :

إبحث ما إذا كانت الدالة $f(x)=x^3$ دالة فردية أو زوجية أم خلاف ذلك:

الحل :

الدالة $f(x)=x^3$ دالة فردية لأن نطاقها الطبيعي هو I وهو نطاق متماثلة حول نقطة الأصل

وتحقق $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$ "x Î ¡



مثال (4) :

إبحث ما إذا كانت الدالة $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ دالة فردية أو زوجية أم خلاف ذلك:

الحل :

الدالة نطاقها الطبيعي هو {1 -} - ¡ وهو نطاق غير متماثلة حول نقطة الأصل وعلية فأن الدالة لا فردية ولا زوجية

مثال (5) : بين نوع الدوال الآتية من حيث كونها فردية أو زوجية :

أ - f (x) = sin x   ب - f (x) = cos x

ج - f (x) = tan x   د - f (x) = cosec x

الحل :

$$\because \sin(-x) = -\sin x\ , \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x\ , \quad \operatorname{cosec}(-x) = \frac{1}{\sin(-x)} = -\operatorname{cosec} x$$

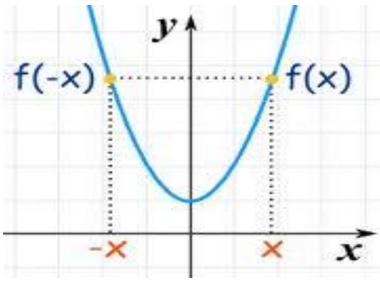
مما يدل على أن الدوال :

Sin x , tan x , cosec x هى دوال فردية

والدالة cos x هى دالة زوجية

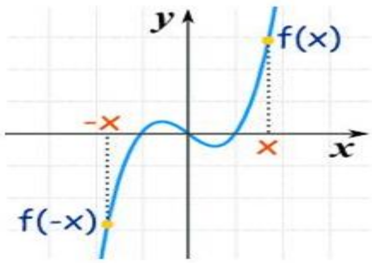
الشكل البيانى للدالة الزوجية والدالة الفردية :

يكون الشكل البيانى للدالة الزوجية متماثلا حول محور الصادات لأنه إذا كانت النقطة (x, y) تقع على هذا الشكل البيانى فإن النقطة (- x, y) تقع أيضا عليه وسبب ذلك أن y = f (x) وأن f (- x) = f (x) = y



بينما الشكل البيانى للدالة الفردية يكون حول نقطة الأصل يعنى أنه إذا كانت النقطة (x, y) تقع عليه فإن النقطة (- x, - y) تقع عليه أيضا وذلك لأن :

f (- x) = - f (x) = - y



5-1 جبر الدوال :

إذا كانت f, g دالتين معرفتين بالقاعدتين

$$f(x)=x^2 \quad , \quad g(x)=2x+1$$

فإن التعبير : x^2+2x+1

الناتج من جمع $f(x)+g(x)$ يعبر عن دالة ثالثة h :

$$H(x) = f(x) + g(x)$$

تسمى الدالة h بمجموع الدالتين f, g وتكتب $h = f + g$ وبالتالى فإن

$$H(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

وبالمثل يمكن أن نعبر عن : طرح – ضرب – قسمة الدالتين :

1 - $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2\ 2x+1$

2 - $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^2-2x-1$

3 - $(f.g)(x)=f(x).g(x)=x^2(2x+1)$

4 - $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2}{2x+1} \quad , \quad x\neq-\frac{1}{2}$

5 – تحصيل دالتين : لتكن $f:X\to Y$

حيث $F(x) = y$

ولتكن $G:Y\to Z$

حيث $G(y) = z$

أى أن $G(F(x)) = z$

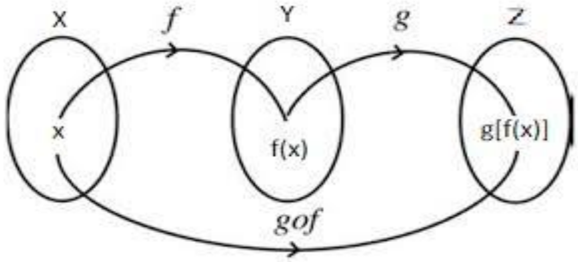
يمكننا تعريف دالة GoF

$$GoF:X\to Z$$

$$(GoF)(x)=z$$

أى أن $(GoF)(x)=G(F(x))$

تسمى هذه الدالة تحصيل الدالتين G, F



وفي هذه الحالة يتضح أن نطاق الدالة المركبة $g \circ f$ هو المجموعة X والنطاق المصاحب هو المجموعة Z.

مثال (1) :

فإذا كانت $F(x)=x^2 \quad , \; G(x)=2x+1$

فإن :

$$(FoG)(1)=F(G(1)) \qquad , \quad G(1)=3$$
$$\therefore (FoG)(1)=F(3)=9$$
$$(FoG)(-2)=F(G(-2)) \quad , \quad G(-2)=-3$$
$$\therefore (FoG)(-2)=F(-3)=(-3)2=9$$
$$(FoG)(a)=F(G(a))=F(2a+1)=(2a+1)^2$$
$$(FoG)(x)=F(G(x))=F(2x+1)=(2x+1)^2$$

مثال (2) :

إذا كانت $h(x)=(x^2+1)^3-(x^2+1)$

أوجد دالتين $F, \; G$ بحيث يكون $h = GoF$

الحل : يمكننا تصور أن :

$$h(x)=(GoF)(x)=G(F(x))$$

فإذا تصورنا أن : $G(y)=y^2-y$

حيث $y=(x^2+1)$

ووضعنا $F(x)=y=(x^2+1)$

فإن : $G(y)=G(F(x))=(x^2+1)^3-(-x^2+1)$

وهذا يدل على أن $h=GoF$

6-1 العلاقات العكسية والدوال العكسية :

فى البند السبق درسنا تحصيل دالتين G, F ولاحظنا بوجه عام أن :

$$G(F(x)) \neq F(G(x))$$

وسوف ندرس حالة خاصة لدلتين F, G يحققان ليس فقط :

$$F(G(x))=G(F(x))=x$$

بل أيضا
$$F(G(x))=G(F(x))$$

أى أن
$$(FoG)(x)=(GoF)(x)=x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

وبالتالى فإن
$$FoG=GoF=I$$

حيث I هى (الدالة المحايدة) أو (دالة الوحدة) :

$$I(x)=x$$

فإذا تحقق الشرط (1) لكل x تسمى كل من الدالتين F, G معكوس الدالة الأخرى وتكتب :

$$G=F^{-1} \quad \text{أو} \quad F=G^{-1}$$

أى أن

$$F^{-1}(F(x))=F.(F^{-1}(x))=x$$

فإذا كانت :
$$y=F(x)$$

فإن
$$F^{-1}(F(x))=F.(F^{-1}(y))=x$$

أى أن
$$x=F^{-1}(y)$$

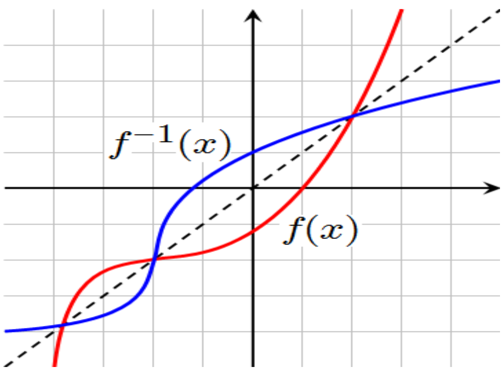
لتكن F دالة لها معكوس F^{-1} حيث :

$F: X \rightarrow Y$ (مجالها X ومداها Y) فإن :

$F^{-1}: Y \rightarrow X$ (مجالها Y ومداها X).

شرط تواجد معكوس للدالة :

لكى يتحقق وجود معكوس للدالة $F: X \rightarrow Y$ فإنه يجب أن تكون الدالة F أحادية وفوقية ، وإلا كانت F^{-1} تعبر فقط عن علاقة عكسية.



إذا كانت f دالة لها معكوس ، ونعبر عنها بصورة :

$$F=\{ (x,y) : y=f(x) \} \qquad (1)$$

فإن $F^{-1}=\{ (x,y) : y=f(x) \}$

وإذا أبدلنا x, y كل مكان الأخرى فإن :

$$F^{-1}=\{ (x,y) : x=f(y) \} \qquad (2)$$

ولتوضيح هذه الفكرة بمثال

مثال (1) : ابحث عن الدالة العكسية للدالة

$$y=x^2 \qquad \text{where} \quad x \geq 0$$

الحل : لاحظ هنا أن الدالة أحادية وفوقية

وأن $F=\{ (x,y) : y=x^2 \}$

فإن $F^{-1}=\left\{ (x,y) : x=y^{\frac{1}{2}} \right\}$

ولكن $y=\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad x=y^2$

لأن $x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0$

والنتيجة باختصار :

1 – حل المعادلة $y = f(x)$ لتصبح x علاقة أو دالة فى y

$$x = G(y)$$

2 – استبدال y, x كل فى مكان الأخرى :

$$y = G(x)$$

فتحصل على الدالة العكسية (إن وجدت)

مثال (2) :

بين أن الدالة $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1} \quad (x \neq -1)$

لها معكوس وأوجد قاعدته

الحل : لتكن $x \neq -1$ وأن $f(x_1)=f(x_2)$

$$\frac{x_1-2}{x_1+2}=\frac{x_2-2}{x_2+1}$$

$$(x_1-2)(x_2+1)=(x_1+1)(x_2-2)$$

$$x_1x_2+x_1-2x_2-2=x_1x_2-2x_1+x_2-2$$

$$3x_1=3x_2$$

$x_1=x_2$ هى الحل الوحيد

هذه الدالة تناظراً أحادياً

للحصول على الدالة العكسية للدالة

$$y=\frac{x-2}{x+1}$$

نكتب $x=\dfrac{y-2}{y+1}$ ونحلها فى y

$$xy+x=y-2$$
$$y(x-1)=-x-2$$
$$y(1-x)=x+2$$
$$y=\frac{x+2}{1-x}$$

بمعنى أنه إذا كانت :

$$f(x)=\frac{x-2}{x+1}$$

فإن $F^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{1-x}$ ، $(x\neq 1)$

ملحوظة :

إذا كانت الدالة $f:X\to Y$ تناظراً أحادياً فإن الدالة العكسية لها $f^{-1}:X\to Y$ ، تكون تناظراً أحادياً أيضاً، ويكون

$$D_f=R_{f^{-1}},\quad R_f=D_{f^{-1}}$$

تمارين (2-1)

1 – إذا كان $g(x)=x^2+1 \quad , \quad f(x)=3-2x$

اوجد $(f-g)(2) \quad , \quad (f+g)(2)$

$$(fog)(2)\ ,\ (fog)(1)\ ,\ \left(\frac{f}{g}\right)(2)\ ,\ (f.g)(2)$$

2 – إذا كان $g(x)=x^2+1 \quad , \quad f(x)=3-2x$

أوجد $(f-g)(x) \quad , \quad (f+g)(x)$

$$(f0g)(x)\ ,\ (fog)(x)\ ,\ \left(\frac{f}{g}\right)(x)\ ,\ (f.g)(x)$$

3 – إذا كانت :

أ - $h(x)=\sqrt{2x+8}$

ب - $h(x)=\left(\dfrac{x}{g-x^2}\right)^3$

ج - $h(x)=2(x+1)^2-3(x+1)+5$

أوجد دالتين f, g بحيث تكون $h=fog$

4 – إذا كانت $f(x)=x^2-3x$

أوجد الدوال التالية :

أ - $h(x)=\sqrt{f(x)}$

ب - $h(x)=\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

ج - $h(x)=f(f(x))$

5 – بين نوع الدوال التالية من حيث كونها أحادية وفوقية ثم عين معكوسها إن وجد :

أ - $f(x)=4x$ ب - $f(x)=x^2-4$

ج - $f(x)=\dfrac{1}{5x+3}$ د - $f(x)=x^3+1$

هـ $f\,9x)=(x+4)^3$ و - $f(x)=\dfrac{3x+5}{2x}$

6 – عين كل من الدوال الآتية مع تحديد مجال كل منها :

أ - $(f+g)(x)$ ب - $(f-g)(x)$

ج - $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ د - $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

هـ $g(f(x))$ و - $(f.g)(x)$

حيث f, g هما الدالتان :

i) $g(x)=(2x-1) \quad , \quad f(x)=|x|$

ii) $g(x)=(x-1) \quad , \quad f(x)=\sqrt{x}$

iii) $g(x)=\sqrt{x+3} \quad , \quad f(x)=\frac{-1}{x^2}$

7 – لكل من الدوال التالية عين ما إذا كانت الدالة فردية أو زوجية أو خلاف ذلك.

i) $f(x)=x|x|$ ii) $f(x)=\frac{1}{x^2+2}$

iii) $f(x)=x\cos x$ iv) $f(x)=x-|x|$

v) $f(x)=(2^x+2^{-x})$ vi) $f(x)=\tan^3 x-\operatorname{cosec}^3 x$

الدوال المثلثية Trigonometric Functions

7-1 مقدمة :

كثيرا ما نلاحظ الصفة الدورية لكثير من الظواهر الطبيعية بمعنى أن الظاهرة تكرر نفسها بعد فترة زمنية محددة فى مثل هذه الظواهر نستخدم نوعا من الدوال غير الجبرية ، نسميها دوال مثلثية (أو دوال دائرية). وتلعب هذه الدوال دوراً مهماً في علم الفيزياء عند دراسة الترددات أو الذبذبات لجسم أو موجة أو في أي ظاهرة متكررة ، فحتي إن لم تتبع سلوك هذه الدوال بالذات فإنه يمكن تحليلها في عدد غير منتهي من هذه الدوال عن طريق مفكوك فوريير.

تعريف :

لتكن f دالة حقيقية معرفة على مجموعة الأعداد R . تسمى الدالة f (دالة دورية) periodic إذا كانت تحقق القاعدة :

لكل x فى R $\qquad f(x + l) = f(x)$

حيث l عدد حقيقى ثابت. وأصغر عدد حقيقى l يحقق الشرط السابق يسمى (دورة) periodic وسوف نرى أن الدوال المثلثية تحقق هذا الشرط.

2-4 حساب المثلثات والدوال المثلثية :

من معلوماتنا الأولية فى حساب المثلثات أن الزاوية لها قياسان . قياس ستينى حيث تقدر الزاوية القائمة بتسعون درجة وتقدر الزاوية دائريا باعتبارها زاوية مركزية فى دائرة نصف قطرها r ويقابلها قوس من الدائرة طوله l كما يلى :

القياس الدائرى لزاوية $\theta = \dfrac{l}{r}$

حيث l هو طول القوس المقابل للزاوية θ باعتبارها زاوية مركزية فى دائرة نصف قطرها r.

الزاوية القائمة : تعادل (90°) (زاوية ستينية) والزاوية المستقيمة تعادل زاويتين قائمتين. وباعتبارها زاوية مركزية فهى تقابل نصف محيط الدائرة $= \pi r$

فيكون القياس الدائرى لها $= \dfrac{l}{r} = \dfrac{\pi r}{r} = \pi$

أى أن : 180° درجة ستينية $= \pi$ درجة دائرية $= 3.14$ (تقريبا) درجة دائرية

الدرجة الدائرية $= 57.3^\circ$ (درجة ستينية تقريبا)

والعلاقة $\frac{\text{الزاوية الدائرية}}{\pi} = \frac{\text{الزاوية بالتقدير الستينى}}{180}$

تستخدم فى التحويل من تقدير إلى آخر.

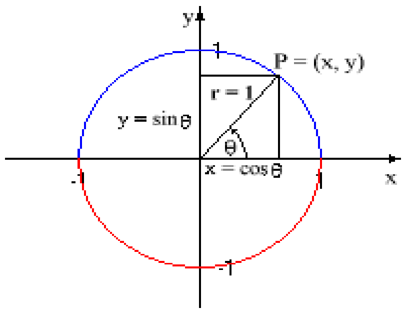
مساحة القطاع الدائرى $\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr = m$

(حيث θ مقدرة دائريا ، وهى زاوية رأس القطاع)

الدوال المثلثية :

لتكن $p\,(z, y)$ نقطة تتحرك على محيط دائرة نصف قطرها الوحدة $l = 1$ بدأت حركتها عندما كان نصف القطر op منطبقا على محور السينات فى الاتجاه الموجب.

لتكن θ هى الزاوية التى يصنعها $\overrightarrow{op}$ مع $\overrightarrow{ox}$ ، واضح أن تحرك النقطة p معناه تغير الزاوية θ . ويتغير تبعا لها قياس كل من x ، y .



لذا يمكننا تعريف مجموعة من الدوال نسميها الدوال المثلثية أو الدائرية :

1- دالة الجيب : ويرمز لها بالرمز sin

وتعرف بالقاعدة : $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$

(y هو الإحداثى الصادى للنقطة المتحركة)

2- دالة جيب التمام : ويرمز لها بالرمز cos

وتعرف بالقاعدة : $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$

(x هو الإحداثى السيني للنقطة المتحركة)

3- دالة الظل :ويرمز لها بالرمز tan

وتعرف بالقاعدة : $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

بالإضافة إلى ثلاث دوال أخرى هى مقلوبات (وليست معكوسات) الدوال الثلاث السابقة :

$$\cos ec = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \sec = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \cot = \frac{1}{\tan\theta}$$

ملاحظة هامة :

عند دراستنا للدوال المثلثية كدوال فى متغير حقيقى فإننا نستبدل رمز الزاوية θ بالرمز x ونقول :

$$y = \cos x,\ \ y = \sin x,\ \ y = \tan x,\ \ \ldots\ldots\ldots\text{etc.}$$

خواص الدوال المثلثية :

أ- دالة الجيب : **Sine function**

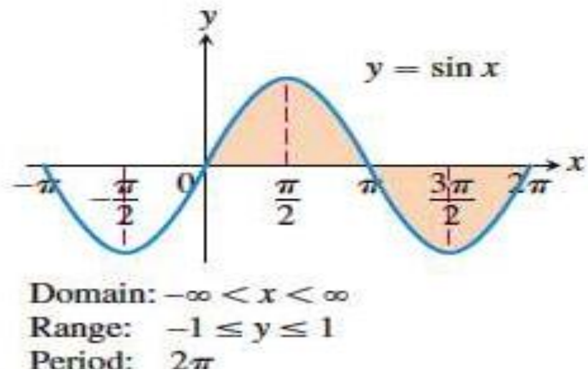
$$y = a \sin x \ , \qquad \sin\ :\ x \ \to\ \sin x$$

سوف نرمز بالرمز x للزاوية بدلا من الرمز θ

فيصبح احداثيات النقطة المتحركة هما $p\ (\cos x,\ \sin x)$

أى أن الإحداثى الصادى يمثل جيب الزاوية x ويتتبع تغير طول الإداثى الصادى y مع تغير الزاوية x نحصل على الخواص التالية للدالة $y = \sin x$

x	$-2p$	$-3p/2$	$-p$	$-p/2$	0	$p/2$	p	$3p/2$	$2p$
$\sin x$	0	1	0	- 1	0	1	0	- 1	0



1- دالة الجيب معرفة لجميع قيم x الحقيقية وبالتالى فإن مجال الدالة هو □

2- مدى الدالة هو الفترة المغلقة $[-1, +1]$ لأن جيب الزاوية تنحصر قيمته بين -1 ، $+1$

وأكبر قيمة للجيب هى عندما : $x = \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{5\pi}{2}\ ,\ \frac{9\pi}{2}\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\sin\frac{\pi}{2}=+1\ ,\quad \sin 0=0\ ,\quad \sin 30=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

وأقل قيمة للجيب هى عندما : $x=\frac{\pi}{2}\ ,\quad \frac{-5\pi}{2}$

$$\sin\frac{(-\pi)}{2}=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$$

3- دالة الجيب دالة دورية فهى تحقق $\sin(2\pi+x)=\sin x$

فنجد أن المنحنى يتكرر كل دورة قدرها 2π ، وبصورة عامة :

$$\sin(x+2n\pi)=\sin x,\quad n=0,\pm1,\pm2,..........$$

4- دالة الجيب محدودة (مقيدة) لأن :

$$-1\le\sin x\le+1$$

5- دالة الجيب دالة فردية لأنها تحقق القاعدة :

$$F(-x)=-f(x)$$

وذلك لأن : $\sin(-x)=-\sin x$

فمثلا : $\sin(-30)=-\sin 30=-\frac{1}{2}$

6- دالة الجيب متصلة ويمثلها منحنى متصل متماثل حول نقطة الأصل $(0, 0)$

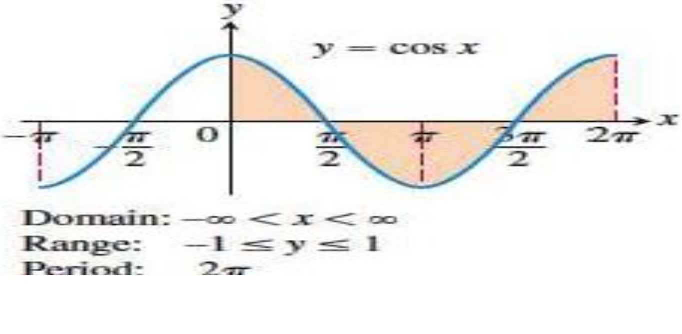
7- الدالة ليست أحادية

ب – دالة جيب التمام : Cosine function

$y=\cos x \qquad\qquad \cos\ :\ x\ \rightarrow\ \cos x$

(هنا x تدل على الزاوية (المتغير المستقل) ، $y=\cos x$ تدل على الإحداثى السينى للنقطة المتحركة ونحصل على الخواص التالية للدالة $y=\cos x$

x	$-2p$	$-3p/2$	$-p$	$-p/2$	0	$p/2$	p	$3p/2$	$2p$
$\cos x$	1	0	- 1	0	1	0	- 1	0	1



1- الدالة معرفة لجميع قيم x الحقيقية أى أن مجال الدالة cos هو

2- مدى الدالة هو الفترة [- 1, +1]

3- دالة جيب التمام دالة محدودة (مقيدة) أيضا :

$$-1 \le \cos x \le +1$$

وأكبر قيمة للدالة هى عندما $x = 0,\ 2\pi,\ 4\pi, ...$

$$\cos 0 = 1, \quad \cos 30 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos\frac{3\pi}{2} = 0, ...$$

وأقل قيمة للدالة هى عندما :

$$x = \pi,\ 3\pi,\ 5\pi, ...$$

$$\sin\pi = -1$$

4- دالة جيب التمام دالة دورية لأن :

$$\cos x = \cos(\pi + x) = \cos(2n\pi + x)$$

وطول دورتها = 2π وحيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

5- دالة جيب التمام دالة زوجية لأن :

$$\text{Cos}(-x) = \cos x$$

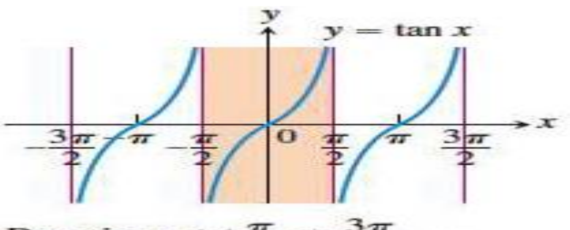
6- دالة جيب التمام دالة متصلة ومنحنى الدالة متصل ، متماثل حول المحور oy.

ج – دالة الظل :

$$\tan : x \to \tan x \qquad y = \tan x$$

حيث أن $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

يمكننا اشتقاق خواص الدالة tan من خواص الدالتين cos, sin فهى دالة معرفة لجميع قيم x ماعدا عندما $\cos x = 0$.



Domain: $x \ne \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, ...$

Range: $-\infty < y < \infty$

Period: π

1- مجال الدالة : هو المجموعة R ماعدا عندما :

$$x \ne \pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}, ...$$

وإن كنا أحيانا نكتب : $\tan\frac{\pi}{2} = \pm\infty$ للتعبير عن أن قيمة الظل تكبر بلا حدود عندما نقترب من القيمة $\frac{\pi}{2}$ حيث $\lim_{x\to+\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$ ،

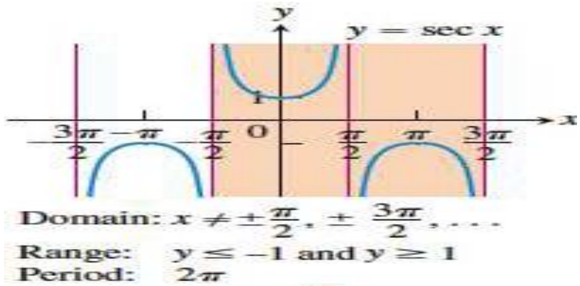
$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$$

2- مدى الدالة هو $\mathbb{R}$ لأنه واضح أنه :

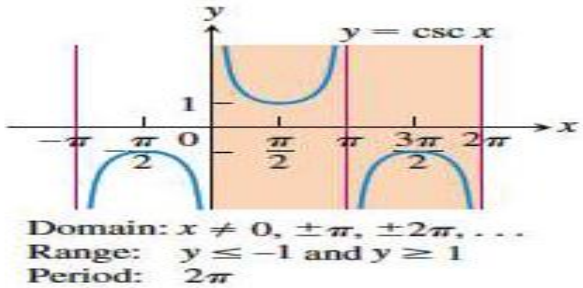
إذا كانت : $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$ فإن $-\infty < y < +\infty$

3- الدالة دورية ولكن دورتها = π (فقط) لأن $\tan(x+\pi) = \tan x$

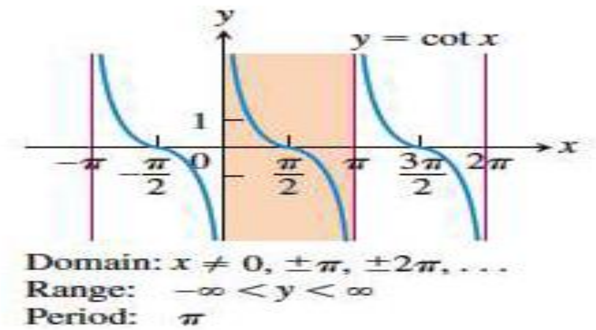
د) دالة القاطع :Secant function $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$



ه) دالة قاطع التمام :cosecant function $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$



و) دالة ظل التمام cosecant function: $y = \cot x = \dfrac{1}{\tan x}$



ونلاحظ أن الدوال $\tan x, \sec x, \cot x, \csc x$ ليست دوال محدودة.

ومن تعريف الدالتين لـ $\cos x, \sin x$ نلاحظ أن النقطة $p(x, y)$ تقع علي دائرة الوحدة إذن تحقق العلاقة $x^2 + y^2 = 1$ ، أي أن

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad (1)$$

ومن هذه المتطابقة ينتج أن :

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad (2)$$

$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x \qquad (3)$$

كذلك يمكن إستنتاج أن

$$\cos(x \pm y) = \cos x . \cos y \mp \sin x . \sin y \qquad (4)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x . \cos y \pm \cos x . \sin y \qquad (5)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \qquad (6)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \qquad (7)$$

$$\sin 2x = 2 . \sin x . \cos x \qquad (8)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad (9)$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad (10)$$

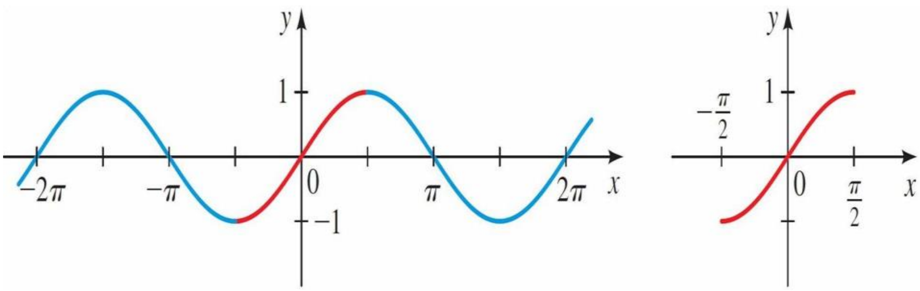
$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \qquad (11)$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x+y}{2} \qquad (12)$$

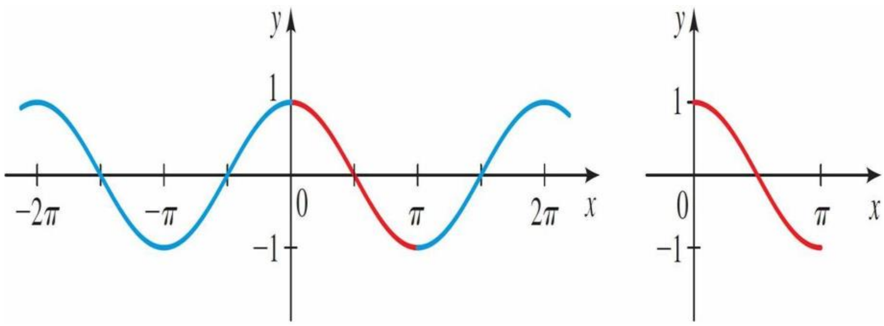
الدوال المثلثية العكسية : Inverse Trigonometric Functions

نعلم مما سبق أن الدوال المثلثية دوال دورية أي أنها تكرر نفسها عدد لا نهائي من المرات فبالتالي هي ليست دوال أحادية . ونعلم أنه من شروط الدوال العكسية أنها لابد أن تكون أحادية . فنلجا هنا لتحديد النطاق كي تكون دالة أحادية .

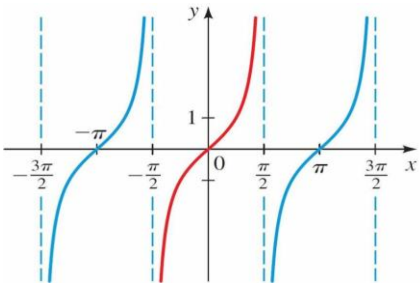
دالة الجيب العكسية: $y = \sin^{-1} x$

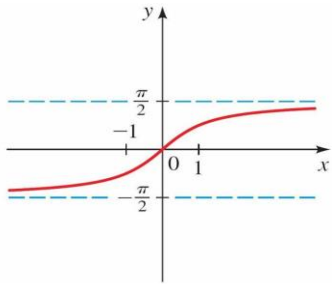


دالة جيب التمام العكسية $y = \cos^{-1} x$



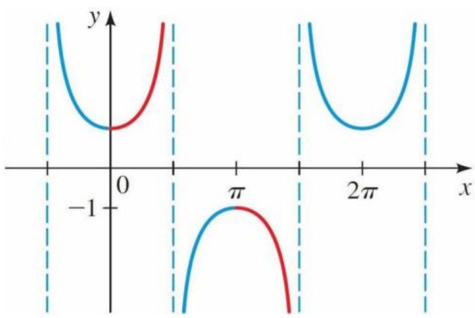
دالة الظل العكسية $y=\tan^{-1}x$

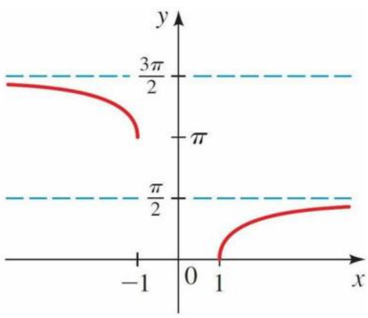




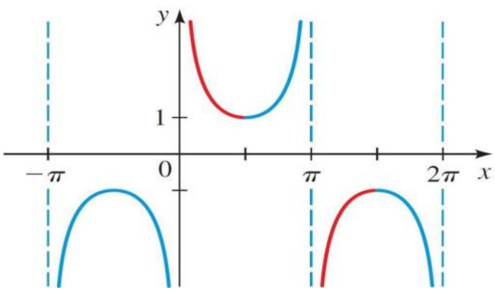
$y=\tan x, -\pi/2<x<\pi/2$; $y=\tan^{-1}x$

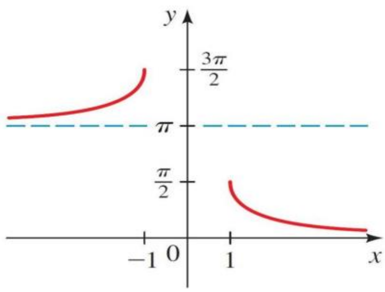
دالة القاطع العكسية $y=\sec^{-1}x$:



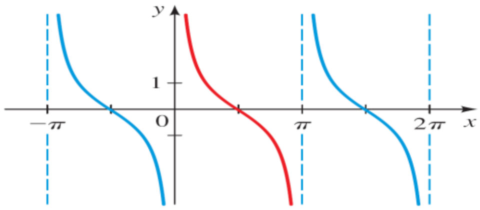


1) دالة قاطع التمام العكسية: $y=\csc^{-1}x$

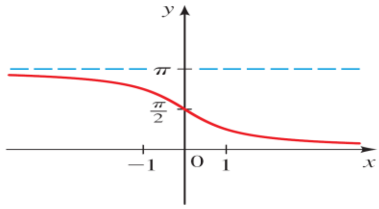




دالة ظل التمام العكسية $y=\cot^{-1}x$



$y = \cot x,\ 0 < x < \pi$;



$y = \cot^{-1} x$

تمارين (1-4)

1. بين ما إذا كانت الدوال فردية أو زوجية أو خلاف ذلك.

(1) $f(x) = x\cos x$, (2) $f(x) = 1 + \sin x$

2. عين نطاق الدوال التي قاعدتها:

(1) $f(x) = 1/(1+\sin x)$; (2) $f(x) = \sin\sqrt{x}$

(3) $g(x) = 1/(1-2\cos x)$; (4) $f(x) = \sqrt{\sin x}$

(5) $g(x) = \sec x/\sqrt{2-x}$

3. عين نطاق ومدي الدوال الأتية:

(1) $f(x) = \sin^{-1}(3x+1)$, (2) $f(x) = 1 + \sin x$

4. عبر عن الدوال الأتية في صورة $f \circ g$.

(1) $H(t) = \sqrt{\cos t}$; (2) $G(t) = \dfrac{\tan t}{1+\tan t}$; (3) $F(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$

5. عبر عن الدالة $H(x) = \sec^4\left(\sqrt{x}\right)$ الأتية في صورة $f \circ g \circ h$.

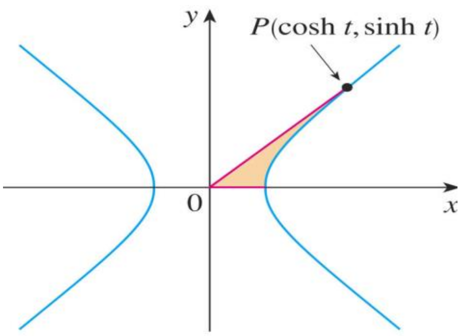
6. بفرض أن $F(x) = \cos^2(x+9)$ فأوجد كلا من الدوال f, g, h حيث أن $F = f \circ g \circ h$.

1. الدوال الزائدية : Hyperbolic functions

بإستخدام الدوال الأسية يمكن تعريف دوال جديدة وهامة مثل دالة جيب التمام الزائدى Hyperbolic cosine والتي تعرف في التطبيقات الرياضية والهندسية بالكاتينة catenary ومن أشهلا التطبيقات المعمارية لهذه الدالة قوس مدينة سان لويس Saint Louis Gateway Arch, Missouri بالولايات المتحدة الأمريكية.

سنتعرف هنا علي هذه الدوال ودوالها العكسية وخواصها وترجع تسمية هذه الدوال بالزائدية إلي الشبه بين خواص هذه الدوال والدوال المثلثية ولذلك فهي تأخذ مسميات مشابهة للدوال المثلثية.

إذا كان t أي عدد حقيقي وكانت $x=\sinh t, y=\cosh t$ ، فأن النقطة P والتي احداثياتها $(\sinh t, \cosh t)$ تقع علي القطع الزائد $x^2-y^2=1$ لأن $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$



$x^2 - y^2 = 1$

وتعرف الدوال الزائدية على النحو التالي :-

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad , \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} \quad , \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

ويتضح أن :

(1) $\cosh x+\sinh x=e^x, \quad \cosh x-\sinh x=e^{-x}$

ومنها

(2) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

الآن نوضح أنه يمكن اشتقاق عدد من المتطابقات الهامة :

(3) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

(4) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

(5) $\cosh^2 x - \sinh^2 y = 1$

(6) $\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$

(7) $1 + \operatorname{cosech}^2 x = \coth^2 x$

(8) $\tanh(x \pm y) = \dfrac{\tanh x \pm \tanh y}{1 - \tanh x \cdot \tanh y}$

(9) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cdot \cosh x$

(10) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

(11) $\tanh 2x = \dfrac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$

الإثبات :-

إثبات معظم العلاقات يأتي عن طريق التعويض بدلالة الدوال الأسية من تعريف الدوال الزائدية وسوف نثبت أحداها على سبيل المثال ولتكن .

$\sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y =$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4}$$

$$= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-x-y}}{4} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \sinh(x+y)$$

خواص الدوال الزائدية :

الدوال الزائدية $\sinh x, \cosh x, \tanh x, \ldots$ كلها دوال متصلة ومعرفة لكل قيم x الحقيقية ، ماعدا $x=0$ بالنسبة للدوال $\operatorname{cosech} x, \coth x$. كل الخواص التحليلية والجبرية لهذه الدوال يمكن اشتقاقها من خواص الدالتين e^{x}, e^{-x} . فمثلا: الدالة $\cosh x$ زوجية وهذا واضح من العلاقة :

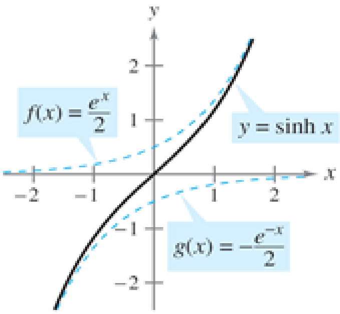
$$\cosh(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}+e^{x})=\cosh x$$

الدالة $\sinh x, \tanh x$ فرديتان :

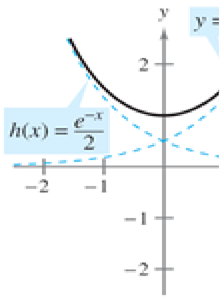
$$\sinh(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}-e^{x})=-\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})=-\sinh x$$

$$\tanh(-x)=\frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)}=\frac{-\sinh x}{\cosh x}=-\tanh x$$

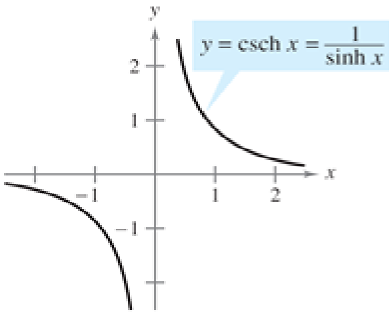
سلوك الدوال الزائدية يتضح بينيا من الأشكال الآتية :



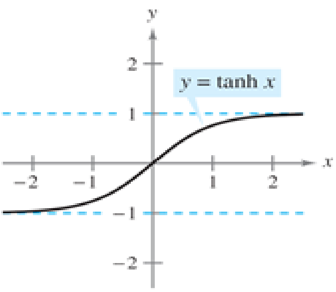
Domain: $(-\infty, \infty)$
Range: $(-\infty, \infty)$



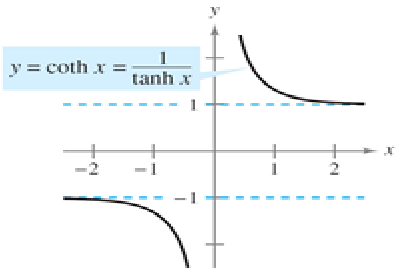
Domain: $(-\infty, \infty)$
Range: $[1, \infty)$



Domain: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Range: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



Domain: $(-\infty, \infty)$
Range: $(-1, 1)$



Domain: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Range: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

2. الدوال الزائدية العكسية :Inverse hyperbolic functions

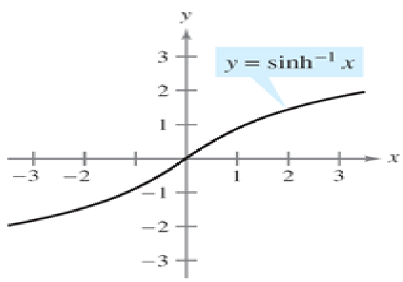
تكتب الجيب الزائدى العكسى على الصورة $\operatorname{arcsinh} x = \sinh^{-1} x$ كذلك يكتب جيب التمام الزائدى العكسى على الصورة $\operatorname{arcosh} x = \cosh^{-1} x$ وهكذا. وتعرف هذه الدوال الجديدة كما يلى :

$$y = \sinh^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sinh y$$
$$y = \cosh^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cosh y$$
$$y = \tanh^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \tanh y$$

ويلاحظ ما يلى :

1- الدالة $\sinh$ هى دالة أحادية وفوقية : $\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ لذا يكون لها معكوس هو :

$$\sinh^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$



Domain: $(-\infty, \infty)$
Range: $(-\infty, \infty)$

يمكن أن نعبر عنها بصورة لوغاريتمية :

$$\sinh^{-1} x = \ln\left[x + \sqrt{x^2 + 1}\right], \quad x \in \mathbb{R}$$

البرهان:

نفرض $y = \sinh^{-1} x$

$$\therefore\ x = \sinh y = \frac{1}{2}(e^{y} - e^{-y})$$

ومنها $e^{y} - 2x - e^{-y} = 0$ بضرب المعادلة في e^{y} نحصل علي

$$e^{2y} - 2xe^{y} - 1 = 0 \Rightarrow \left(e^{y}\right)^{2} - 2xe^{y} - 1 = 0$$

نحصل علي معادلة من الدرجة الثانية في e^{y} بحلها نحصل علي

$$e^{y} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^{2}+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^{2}+1}$$

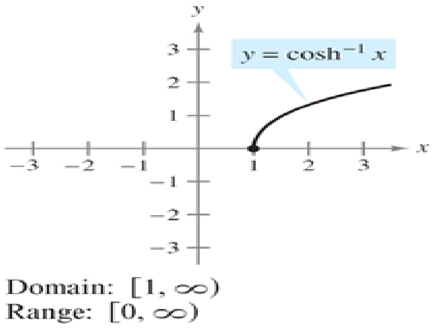
ولكن $e^{y} > 0$ ، وحيث أن $x < \sqrt{x^{2}+1}$ إذن $x - \sqrt{x^{2}+1} < 0$ ومنها

$$e^{y} = x + \sqrt{x^{2}+1}$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على

$$y = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^{2}+1})$$

2- الدالة cosh ليست دالة أحادية وليست فوقية وهي دالة زوجية ، مداها هو الفترة $(1,\infty)$،ولكى تكون $y = \cosh^{-1} x$ معرفة يجب أن تكون $1 \le x$ ولهذه القيم تكون $0 \le y$. أي أن $\cosh^{-1} : (1,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$



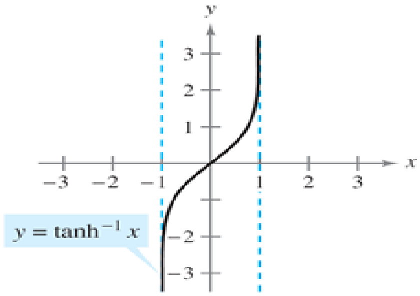
يمكن أن نعبر عنها بصورة لوغاريتمية :

$$\cosh^{-1} x = \ln\left[x + \sqrt{x^{2}-1}\right] \quad , x \ge 1$$

الإثبات : متروك للطالب

3- الدالة $\tanh$ دالة أحادية ولكن مداها $(-1,1)$ ولكى تكون $y=\tanh^{-1}x$ معرفة يجب أن تكون $-1<x<1$.

$$\tanh^{-1}:(-1,+1)\longrightarrow(-\infty,\infty)$$



Domain: $(-1,1)$
Range: $(-\infty,\infty)$

يمكن أن نعبر عنها بصورة لوغاريتمية :

$$\tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),-1<x<1$$

البرهان:

نفرض $y=\tanh^{-1}x$ ، إذن $x=\tanh y=\dfrac{e^{y}-e^{-y}}{e^{y}+e^{-y}}$

بالضرب بسط ومقام في e^{y} نحصل علي

$$x=\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}\Rightarrow\left(e^{2y}+1\right)x=\left(e^{2y}-1\right)$$

$$\Rightarrow(x+1)(e^{y})^{2}+x+1=0$$

نحصل علي معادلة من الدرجة الثانية في e^{y} بحلها نحصل علي

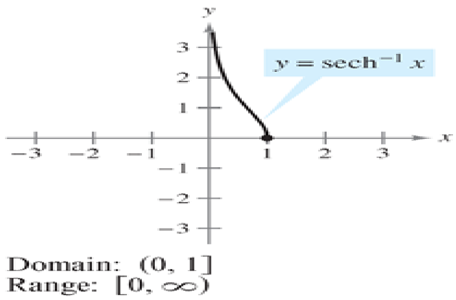
$$e^{y}=\pm\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$$

ولكن $e^{y}>0$ ، فنختار $e^{y}=\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على

$$y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

4- الدالة sech لها معكوس .

$$\operatorname{sech}^{-1} : (0,1] \longrightarrow (0,\infty)$$



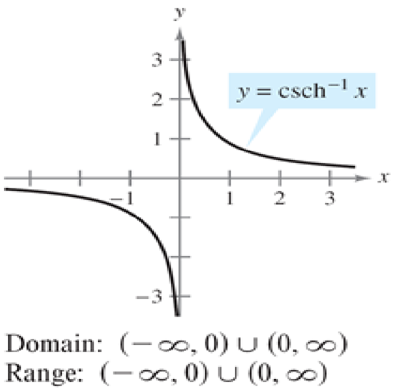
يمكن أن نعبر عنها بصورة لوغاريتمية :

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

الإثبات : متروك للطالب

5- الدالة csch لها معكوس .

$$\operatorname{csch}^{-1} : (-\infty,0)\cup(0,\infty) \longrightarrow (-\infty,0)\cup(0,\infty)$$

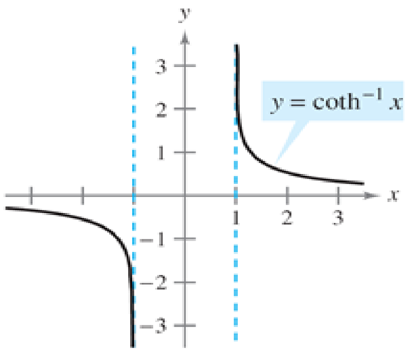


يمكن أن نعبر عنها بصورة لوغاريتمية :

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$$

6- الدالة $\coth$ لها معكوس .

$$\coth^{-1} : (-\infty,-1)\cup(1,\infty) \longrightarrow (-\infty,0)\cup(0,\infty)$$



Domain: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Range: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

يمكن أن نعبر عنها بصورة لوغاريتمية :

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

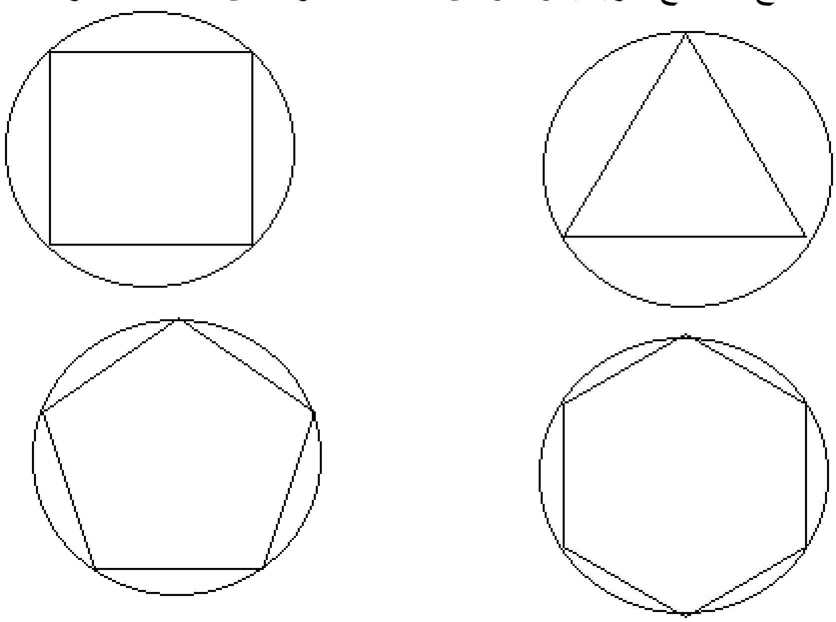
الإثبات : متروك للطالب

الفصل الثانى

النـهايات والاتصال limits and community

2-1 مقدمة :

مفهوم "النـهاية" هو المفهوم الرئيسى الثانى فى دراستنا لعلم التفاضل والتكامل. ولقد تناول الفلاسفة والرياضيون الإغريق قديما حتى صاغه العالم الرياضى "كوشي – Cauchy فى صورته الحالية. وكانت أول محاولة لاستخدام مفهوم النهاية عندما حاول العلماء الإغريق إيجاد مساحة الدائرة عن طريق إيجاد مساحة مضلع مرسوم داخلها وتمر الدائرة برءوسة ولكنهم وجدوا أن مساحة المضلع تقل عن مساحة الدائرة دائماً ، وبزيادة عدد أضلاع المضلع تدريجياّ وجدوا أن مساحتة تقترب من مساحة الدائرة.



وبهذا يمكن القول أن مساحة الدائرة هي نهاية مساحة المضلع المرسوم داخلها عندما تزداد عدد أضلاعة زيادة لا نهائية.

ويختلف أسلوب معالجة النهايات عن الأسلوب الذى ألفناه فى علم الحساب وعلم الجبر. وفى حياتنا اليومية أمثلة كثيرة لتوضيح مفهوم النهاية.

مثال (1) : أوجد مجموع n من حدود ما يلى

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+..............$$

فإذا عرفت قيمة عدد الحدود n وتصبح المشكلة حسابية ويمكننا حساب المجموع أما إذا طلبنا إيجاد هذا المجموع لعدد لا نهائى من الحدود فهذه مشكلة غير حسابية وتدخل فى علم "التحليل الرياضى" ودراستنا للنهايات.

وفى حياتنا اليومية أمثلة كثيرة لتوضيح مفهوم النهاية.

مثال (2) :

كلما ارتفعت الشمس فى السماء ، كلما قصر طول ظل أى جسم على سطح الأرض. وإذا اقتربت الشمس من أعلى موقع لها فإن طول ظل الجسم يصغر ويقترب من الصفر. وبصفة عامة يمكننا قول :

"نهاية طول الظل يساوى صفرا عندما تصل الشمس إلى أقصى ارتفاع لها".

مثال (3) :

حاول العلماء إيجاد عدد قياس عشرى قريب من قيمة العدد اللاقياسى $\sqrt{2}$. فوجد أن التقريب التالى :

1.9, 1.41, 1.414. 1.4142, ...

يعطى لنا التقريب المطلوب. وكلما زاد عدد الأرقام العشرية كلما اقتربنا من القيمة $\sqrt{2}$ ويمكننا القول :

"أن نهاية التقريب يساوى العدد $\sqrt{2}$ عندما تصبح الأرقام العشرية عدد لا نهائى"

مثال (4) :

اعتبر الدالة f حيث :

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x-1} \quad , \quad x\neq 1$$

هذه الدالة غير معرفة عندما $x = 1$ وبالتالى فلن نبحث عن قيمتها عند $x = 1$ ولكننا سوف نبحث عن قيمة الدالة لقيم x قريبة من العدد 1 واضح أنه عندما $x\neq 1$ فإن :

$$\frac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1$$

وعندما تكون $x = 1$ فإن القيمة للمقدار هى $(x^2+x+1=3)$

والسؤال الآن : هل تقترب $f(x)$ من القيمة 3 كلما اقتربت x من القيمة 1 ؟

إن الإجابة على هذا السؤال هو جوهر موضوع النهايات.

2-2 نهاية متغير :

لنفرض أن المتغير الحقيقى x يأخذ القيم الآتية على التوالى :

$4.1, \quad 4.01, \quad 4.001, \quad 4.0001, \ldots\ldots\ldots\ldots$ كما هو موضح بالشكل :

(i) واضح أن $x > 4$, $x \neq 4$
(ii) تقترب x من العدد 4 خلال قيم أكبر من 4 أى أن x تقترب من العدد 4 من جهة اليمين.
(iii) يمكننا جعل الفرق الموجب $|x - 4|$ صغيرا كما نشاء كلما اقتربت النقطة x من النقطة 4 .

يقال أن : المتغير x يقترب من العدد 4 من جهة اليمين ويرمز لذلك بالرمز :

$$x \to 4^{+}$$

أو أن العدد 4 هو النهاية اليمنى للمتغير x.

لنفرض أن المتغير الحقيقى x يأخذ القيم الآتية على التوالى :

$3.9, \quad 3.99, \quad 3.999, \ldots\ldots\ldots$ كما هو موضح بالشكل :

(i) واضح أن $x < 4$, $x \neq 4$.
(ii) تقترب x من العدد 4 خلال قيم أقل من 4 .
أى أن x تقترب من العدد 4 من جهة اليسار
(iii) يمكننا جعل الفرق الموجب $|x - 4|$ صغيرا كما نشاء كلما اقتربت x من النقطة 4.

يقال أن المتغير x يقترب من العدد 4 من جهة اليسار ونرمز لذلك بالرمز $x \to 4^{-}$

وإذا كانت $x \to 4^{+}$ ، $x \to 4^{-}$ كما هو موضح بالشكل

فيقال حينئذ أن : العدد 4 هو نهاية المتغير x ونرمز لذلك بالرمز "$x \to 4$"

2-3 اقتراب المتغير من اللانهاية :

فى كثير من الأحيان تزداد قيمة المتغير بلا حدود. فمثلا قد تأخذ x القيم التالية :

$$(10, 10^2, 10^3, 10^4, \ldots\ldots\ldots\ldots)$$

وفيها نلاحظ أن x تتزايد بلا حدود بمعنى أن " x تكون أكبر من أى عدد موجب مختاره" فى هذه الحالة نعبر عن ذلك بالصورة الرمزية : $x \to +\infty$
ونقول أن x تقترب من موجب ملا نهاية.
بمعنى أن x تكون أصغر من أى عدد سالب يمكن حسابه.

2-4 نهاية دالة عند نقطة :

لتكن $f(x)=\dfrac{2x^2-4x}{x-2}$ حيث $x \neq 2$

ابحث عن قيمة $f(x)$ كلما اقتربت x من العدد 2 .
واضح أن الدالة f غير معرفة عند $x=2$.
وعندما $x \neq 2$ فإن $f(x)=\dfrac{2x(x-2)}{x-2}=2x$

والجدول التالى يوضح قيم $f(x)$ كلما اقتربت x من العدد 2 من جهة اليمين واليسار

x	$f(x)$	x	$f(x)$	$\mid x-2 \mid$	$\mid f(x)-4 \mid$
2.1	4.2	1.9	3.8	0.1	0.2
2.01	4.02	1.99	3.98	0.01	0.02
2.001	4.002	1.999	3.998	0.001	0.002
2.0001	4.0002	1.9999	3.9998	0.0001	0.0002
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
2	4	2	4	0	0
$x \to 2^2$	$f(x) \to 4$	$x \to 2^-$	$f(x) \to 4$	$\mid x-2 \mid \to 0$	$\mid f(x)-4 \mid \to 0$

ملاحظات :

(i) نلاحظ أنه عندما اقتربت x من العدد 2 من جهة اليمين فإن $f(x)$ اقتربت من العدد 4.
نسمى ذلك بالنهاية اليمنى للدالة عند النقطة 2 ونعبر عن ذلك بالصورة
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=4$$

(ii) نلاحظ أنه عندما اقتربت x من العدد 2 من جهة اليسار فإن $f(x)$ اقتربت من العدد 4 أيضا.
نسمى ذلك بالنهاية اليسرى للدالة عند النقطة 2 ونعبر عن ذلك بالصورة
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=4$$

(iii) إذا تساوت النهاية اليمنى لدالة عند نقطة مع النهاية اليسرى للدالة عند نفس النقطة فإنه يقال أن للدالة نهاية عند تلك النقطة ونعبر عن ذلك بالصورة

$$\lim_{x\to 2} f(x)=4$$

(iv) لاحظ أن الفرق الموجب (الفرق المطلق) $|f(x) - 4|$ يمكن جعله صغيرا كما نشاء كلما كان الفرق الموجب $|x - 2|$ صغيرا صغرا كافيا.

فمثلا : $|f(x) - 4| < 0.02$ إذا كانت $|x - 2| < 0.01$ وهكذا .

وعلى هذا يمكن أن نعرف نهاية دالة عند نقطة كما يلى :

تعريف : نهاية دالة عند نقطة :

"لتكن f دالة معرفة فى فترة A ولتكن a نقطة (فى المجال A أو خارجه). يقال أن $f(x)$ تؤول إلى العدد M عندما تؤول x إلى العدد a إذا أمكن جعل الفرق الموجب $|f(x) - M|$ صغيرا حسبما نريد إذا كان الفرق الموجب $|x - a|$ صغيرا صغرا كافيا". ونرمز لذلك بالصورة :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=M$$

من التعريف السابق نستنتج أن :

1- لا يلزم أن تنتمى النقطة a إلى مجال f.

2- لا يلزم أن تنتمى النقطة M إلى المدى f.

3- لا يلزم أن تكون الدالة f معرفة عند النقطة a ولكن يلزم أن تكون الدالة معرفة فى فترة تحيط بهذه النقطة (ونقول أن الدالة معرفة بجوار النقطة) وهو شرط ضرورى لتواجد النهاية للدالة عند a.

4- لكى يكون للدالة نهاية عند a يجب أن تتساوى النهايتان اليمنى واليسرى للدالة عند a ، والعكس صحيح.

مثال : لتكن f هى الدالة المعرفة بالصورة

$$f(x)\begin{cases} -2 & x < 0 \\ 3 & x > 0 \end{cases}$$

احسب النهاية اليمنى واليسرى للدالة عند $x = 0$

الحل :

إذا كانت $x > 0$ فإن $f(x) = 3$ (دالة ثابتة)

وتكون $\lim_{x\to 0^+} f(x)=3$

وإذا كانت $x < 0$ فإن $f(x) = -2$ (دالة ثابتة) وتكون

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-2$$

وحيث أن النهايتين غير متساويتين فإن هذه الدالة ليست لها نهاية عند النقطة $x = 0$.

2-5 اتصال دالة عند نقطة : Continuity at a point

تعريف :

إذا كانت الدالة f معرفة عند النقطة a (أى أن النقطة a تقع فى مجال الدالة) وكانت :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

فإنه يقال أن هذه الدالة دالة متصلة (دالة مستمرة) عند النقطة a .

يتضح من هذا التعريف :

(i) $f(a)$ لها وجود (نتيجة لأن الدالة معرفة عند a)

(ii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

2-6 نظريات خاصة فى النهايات :

فى هذه المرحلة من دراسة التفاضل سوف تكون دراستنا للنهايات دراسة بديهية تعتمد فيها على استخلاص النتائج أو النظريات من دراستنا للنهايات دراسة دقيقة نظرية لا بد لنا فى المستقبل من القيام ببرهنة هذه النظريات برهانا رياضيا دقيقا.

مثال (1) :

لتكن $f(x) = 3x + 2$ ، $x \in \mathbb{R}$ ، $x = 1$

واضح أن $f(x) = 3 \times 1 + 2 = 5$

وبإعطاء x قيما قريبة من العدد 1 يمينا ويسارا وتسجيل النتائج فى جدول نجد أن :

x	f (x)	x	f (x)	$\lvert x - 1 \rvert$	$\lvert f(x) - 5 \rvert$
1.1	5.3	0.9	4.7	0.3	0.3
1.01	5.03	0.99	4.97	0.01	0.03
1.001	5.003	0.999	4.997	0.001	0.003
1.0001	5.0003	0.9999	4.9997	0.0001	0.0003
↓	↓	↓	↓	↓	↓
+ 1	5	- 1	5	0	0

نلاحظ أن الفرق الموجب $\lvert f(x) - 5 \rvert$ يصغر كلما صغر الفرق الموجب $\lvert x - 1 \rvert$ مما يدل على أن :

$$f(x) \to 5 \quad \text{when} \quad x \to 1$$

أى أن $\lim_{x \to 1} f(x) = 5 = f(1)$

النتيجة السابقة صحيحة أيضا لأى دالة بصورة كثيرة الحدود من أى درجة n.

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_o$$

نظرية 2-1 :

لأى كثيرة حدود $P_n(x)$ فإن : $\lim_{x\to a} P_a(x)=P_n(a)$

فمثلا : إذا كانت $P_2(x) = 2x^2 + 5x + 1$ فإن

$$\lim_{x\to 1} P_2(x)=P_2(1)=2\times1+5\times1-1=6$$

أى أن : $\lim_{x\to 1} =(2x^2+5x-1)=6$

نتيجة : أى كثيرة حدود هى دالة متصلة عند أى نقطة محدودة وهذا واضح من تعريف الدالة المتصلة.

مثال (2) :لتكن $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$, $x\neq 2,$

ولتكن $x = 3$

واضح أن $f(3)=\dfrac{9+1}{3-2}=10$

وبإعطاء x قيما قريبة من العدد 3 يمينا ويسارا وتسجيل ذلك فى جدول وكما فى المثال السابق ، فإننا نجد أن :

الفرق الموجب $|f(x) - 10|$ يصغر كلما صغر الفرق الموجب $|x-3|$ مما يدل على أن :

$$f(x)=\frac{3x+1}{x-2} \to 10 \qquad x\to 3$$

أى أن

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x+1}{x-2}=10$$

أى أنه $\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)$

هذه النتيجة صحيحة أيضا لأى دالة كسرية بصورة خارج قسمة كثيرة حدود ، فإذا كانت

$$f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}, \qquad x=0 \,,$$

وكانت $g(a) \neq 0$ فإن $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

نظرية 2-2 :

لأى دالة كسرية $f(x)$ معرفة عند نقطة $x = 0$ فإن :

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

نتيجة :

أى دالة كسرية معرفة عند نقطة تكون متصلة عند هذه النقطة.
ويمكننا إضافة القاعدة التالية :
إذا كانت $f(x)$ دالة (كثيرة حدود – كسرية – جذرية – مثلثية – أسية – لوغاريتمية) وكانت هذه الدالة معرفة عند نقطة a فى مجال الدالة فإن :

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

الاتصال: Continuity

لبعض الدوال سلوك متوقع ، فمثلاً هناك دوال إذا عرف سلوكها عند x في نطاقها ، فإننا نستطيع أن نتوقع قيمة الدالة عند أي نقطة في نطاقها تكون قريبة من x. وهذا النوع من الدوال يسمي بالدوال المتصلة.

تعريف: الدالة f تكون متصلة عند النقطة a (النقطة a تقع فى مجال الدالة) وإذا تحقق الآتي:

1- $f(a)$ لها وجود (نتيجة لأن الدالة معرفة عند a)

2- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$

3- $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$

نقول أن الدالة f متصلة علي نطاقها ، إذا كانت متصلة عند كل نقطة في نطاقها، إذا كانت الدالة f غير متصلة عند النقطة a ، فإننا نقول إن الدالة f منفصلة عند النقطة a .

تعريف:

الدالة f تكون متصلة علي الفترة المفتوحة (a,b) إذا كانت متصلة عند كل نقطة من نقاط الفترة (a,b)

تعريف:

الدالة f تكون متصلة علي الفترة المغلقة $[a,b]$ إذا كانت متصلة علي الفترة المفتوحة ـ، وتكون متصلة من جهة اليمين عند النقطة a ومتصلة من اليسار عند النقطة b.

مثال (1) :

إذا كانت $f(x)=c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ...+ c_1 x + c_o$ ناقش إتصال هذه الدالة

الحل :

واضح أن الدالة $f(x)$ معرفة لجميع قيم x الحقيقة

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ...+ c_1 x + c_o\right)$$

$$= c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + ...+ c_1 a + c_o = f(a)$$

ومن هذا المثال نستنتج أن

أي دالة كثيرة حدود تكون متصلة عند أي عدد حقيقي

مثال (2) :

لتكن $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}, x\neq 2$ ولتكن $x=3$ واضح أن

$$f(3)=\frac{9+1}{3-2}=10$$

وبإعطاء x قيما قريبة من العدد 3 يمينا ويسارا وتسجيل ذلك فى جدول وكما فى المثال السابق ، فإننا نجد أن :

الفرق الموجب $|f(x)-10|$ يصغر كلما صغر الفرق الموجب $|x-3|$ مما يدل على أن

$f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}\to 10$: عندما $x\to 3$

أى أن

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x+1}{x-2}=10$$

أى أنه $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$

هذه النتيجة صحيحة أيضا لأى دالة كسرية بصورة خارج قسمة كثيرة حدود ، فإذا كانت $f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$ وكانت $g(a)\neq 0$ فإن $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

نظرية(1):

لأى دالة كسرية $f(x)$ معرفة عند نقطة $x=a$ فإن $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

نتيجة :

أى دالة كسرية معرفة عند نقطة تكون متصلة عند هذه النقطة.

ويمكننا إضافة القاعدة التالية :

إذا كانــت $f(x)$ دالــة (كثيــرة حــدود – كســرية – جذريــة – مثلثيــة – أســية – لوغاريتمية) وكانت هذه الدالة معرفة عند نقطة a فى مجال الدالة فإن :

نظرية(2):

بفرض أن الدالتين $f(x), g(x)$ دالتان متصلتان عند النقطة a ، فإن

1- الدالة $f(x) \pm g(x)$ تكون متصلة عند النقطة a.

2- الدالة $f(x).g(x)$ تكون متصلة عند النقطة a.

3- الدالة $\frac{f(x)}{g(x)}$ تكون متصلة عند النقطة a بشرط $g(x) \neq 0$.

نظرية(3):

إذا كانــت الدالــة $g(x)$ متصــلة عنــد النقطــة a ، والدالــة $f(x)$ متصــلة عنــد النقطــة $g(a)$ فإن الدالة $f \circ g$ متصلة عند النقطة a.

فمثلا :

1- $\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{5-2(-2)}}{3(-2)+10} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

2- $\lim_{x \to -1} (2^x + 3^x) = 2^{-1} + 3^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6}$

3- $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$

4- $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$

5- $\lim_{x \to a} \tan x = \tan a \qquad (a \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}, n$ **عدد صحيح**$)$

6- $\lim_{x \to a} \log x = \log a$

نتيجة :

جميع الدوال السابقة تكون متصلة عند النقط المعرفة عندها وتكون النقطة داخل جوار فى مجال التعريف.

أمثلة على النهايات والاتصال

مثال (1) :

لتكن $$f(x)\begin{cases} x^2+x+2 & x<-1 \\ 3x & x\geq -1 \end{cases}$$

أوجد : $\lim_{x\to(-1)^+} f(x)$ ثم ناقش اتصال الدالة عند $x = -1$

الحل :

عندما $x > -1$ فإن :

$$f(x)=3x \quad \Rightarrow \lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}(3x)=3x-1=-3$$

عندما $x < -1$ فإن :

$$f(x)=x^2+x+2 \quad \Rightarrow \lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}(x^2+x+2)=(-1)^2+(-1)+2=2$$

وبالتالى فإن : $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) \neq \lim_{x\to(-1)^-} f(x)$

وبالتالى فإن : $\lim_{x\to-1} f(x)$ ليس لها وجود.

وبالتالى فإن الدالة أيضا ليست متصلة.

مع ملاحظة أنه عندما $x = -1$ فإن : $f(x) = 3x$

$$\Rightarrow \quad f(-1) = 3x - 1 = -3$$

مثال (2) :

إذا كانت : $$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x<2 \\ x^2+1 & x\geq 2 \end{cases}$$

ابحث نهاية واتصال الدالة عند $x = 2$

الحل :

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2}(x^2+1)=5$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2}(2x+1)=5$$

$f(x) = x^2 + 1$ عندما $x = 2$

أى أن $f(2) = 4 + 1 = 5$

واضح أن الدالة لها نهاية عند $x = 2$ وأنها دالة متصلة عند النقطة لأن :

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^-} f(x)=f(2)$$

تمارين (1-2)

1- $\lim_{x\to -1}(4x^2-5x+3)$

2- $\lim_{x\to 2}(x+2)(x+3)$

3- $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

4- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin 2x)$

5- $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$

6- $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{1+\cos 2x}{1-\tan x}$

7- $\lim_{x\to 1} f(x)$ where $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\le 1 \\ 2x & x>1 \end{cases}$

ثم ناقش اتصال الدالة عند $x = 1$

8- $\lim_{x\to 0} f(x)$ where $f(x)=\begin{cases} 2x^2+5 & x\ne 0 \\ 3 & x=0 \end{cases}$

ثم ناقش اتصال الدالة عند $x = 0$

9- $\lim_{x\to -1} f(x)$ where $f(x)=\begin{cases} 2x^2+3 & x\le -1 \\ x+1 & x>-1 \end{cases}$

ثم ناقش اتصال الدالة عند $x = -1$

10- $\lim_{x\to 2} f(x)$ where $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{\pi}{2}x & x<2 \\ x^2-4 & x\ge 2 \end{cases}$

ثم ناقش اتصال الدالة عند $x = 2$

القواعد الأساسية لحساب النهايات :

نظرية (3-2) :

لتكن f_1, f_2 دالتين معرفتين على فترة A ، ولتكن a نقطة لها جوار فى A وكانت :

$$\lim_{x\to a} f_1(x)=M_1\ , \qquad \lim_{x\to a} f_2(x)=M_2$$

حيث l_1, l_2 أعداد حقيقية فإن :

1- $\lim_{x\to a}\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]=\lim_{x\to a} f_1(x)\pm\lim_{x\to a} f_2(x)=M_1+M_2$

2- $\lim_{x\to a}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right]=\lim_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim_{x\to a} f_2(x)=M_1\times M_2$

3- $\lim_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f_1(x)}{\lim_{x\to a} f_2(x)}=\dfrac{M_1}{M_2}\qquad (M_2\neq 0)$

مثال (1) :

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f_2(x)=3\ ,\quad \lim f_1(x)=5$ فإن :

1- $\lim_{x\to 2}\left[f_1(x)+f_2(x)\right]=\lim_{x\to 2} f_1(x)+\lim_{x\to x} f_2(x)$

$= 5 + 3 = 8$

2- $\lim_{x\to 2}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right]=\lim_{x\to 2} f_1(x)\cdot\lim_{x\to x} f_2(x)$

$= 5 \cdot 3 = 15$

3- $\lim_{x\to 2}\left[f_1(x)/f_2(x)\right]=\lim_{x\to 2} f_1(x)/\lim_{x\to x} f_2(x)$

$= 5 / 3$

فإذا كان : $\lim_{x\to a} f_1(x)=l_1,\ldots\ldots\ldots\ldots\lim_{x\to a} f_n(x)=l_n$

1- $\lim_{x\to a}[f_1(x)\pm\ldots\ldots\pm f_n(x)]=l_1\pm\ldots\ldots\pm l_n$

2- $\lim_{x\to a}[f_1(x)\ldots\ldots\ldots-f_n(x)]=l_1x\ldots\ldots xl_n$

مثال (2) : أوجد $\lim_{x\to 0}(2x+1)(x^2+4)$

الحل : $\lim_{x\to 0}(2x+1)(x^2+4)=\lim_{x\to 0}(2x+1)\cdot\lim_{x\to 0}(x^2+4)=1\times 4=4$

مثال (3) :

أوجد $\lim_{x\to 1}=\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}}{x^3+1}$

الحل : $\lim_{x\to 1}=\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}}{x^3+1}=\dfrac{\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2+x+2}}{\lim_{x\to 1}x^3+1}=\dfrac{\sqrt{4}}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

2-7 إيجاد نهاية دالة عند نقطة (حيث الدالة غير معرفة عندها) :

سوف ندرس هنا إيجاد نهاية دالة $f(x)$ معرفة فى فترة بجوار النقطة a ، وتعطى قيما غير معينة مثل : $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\frac{0}{0}$
وذلك ناتج عن صورة الدالة حيث :

$$f(x)=\frac{h_1(x)}{h_2(x)} \qquad x \neq a$$

حيث $0 = h_2(a) = h_1(a)$

فإذا كانت كل من h_1 ، h_2 كثيرة حدود فإن $(x-a)$ تكون عاملا لكل منهما يمكن اختصاره عندما $x \neq a$ ثم نستخدم النظرية التالية :

نظرية 2-4 :

لتكن f, g دالتين معرفتين بجوار النقطة a ، حيث $f(a)$ غير موجودة ولكن $g(a)$ موجودة.

فإذا كانت :

$$f(x) = g(x) \text{ لكل } x \text{ ماعدا } x = a$$

فإن :

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to 0} g(x)=g(a)$$

وسوف تعطى تطبيقات النظرية فى الحالات التى يكون فيها :

$f(a)$ على الصورة $\frac{0}{0}$

مثال (1) :

لتكن $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3} \qquad x\neq 3$

نلاحظ أن $f(3) = \dfrac{0}{0}$

عندما $x \neq 3$ فإن : $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=x+3$

إذن : $\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$

مثال (2) :

لتكن $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2+2x-3} \qquad (x\neq 1,-3)$

أوجد قيمة $\lim_{x\to 1} f(x)$

الحل :

عندما $x \neq 1$

$$f(x)=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+3)}=\frac{(x^2+x+1)}{x+3}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+3}=\frac{3}{4}$$

مثال (3) :

لتكن $f(x)=\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4} \qquad (x\neq 4)$

أوجد قيمة $\lim_{x\to 4} f(x)$

الحل :

عندما $x \neq 4$ فإن :

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}\times\frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{2x+1}+3}$$

$$=\frac{(2x+1)-9}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$=\frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2x+1}+3}$$

إذن $\lim_{x\to 4} f(x)=\lim\frac{2}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{2}{3+3}=\frac{1}{3}$

(لاحظ أن : $f(4)=\frac{0}{0}$)

نظرية 5-2 :

إذا كانت n عدد صحيحا موجبا فإن :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^n-a^n}{x-a}=n\,a^{n-1}$$

البرهان :

بقسمة (x^n-a^n) على (x-a) نجد أن :

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+a\,x^{n-2}+\dots\dots\dots\dots+a^{n-1} \qquad (x\neq a)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+a\,x^{n-2}+............+a^{n-1})$$
$$=a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+.................+a^{n-1}=n\,a^{n-1}$$

نتيجة :

إذا كان n, m عددين صحيحين موجبين فإن :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^n-a^n}{x^m-a^m}=\frac{n}{m}a^{n-m}$$

البرهان :

$$\frac{x^n-a^n}{x^m-a^m}=\frac{x^n-a^n}{x-a}\div\frac{x^m-a^m}{x-a}\quad,\quad (x\neq a)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^n-a^n}{x^m-a^m}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n-a^n}{x-a}\Big/\lim_{x\to 0}\frac{x^m-a^m}{x-a}$$
$$=\frac{n\,a^{n-1}}{m\,a^{m-1}}=\frac{n}{m}a^{n-m}$$

أمثلة

مثال (1) :

أوجد $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}$

الحل :
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^4-3^4}{x-3}=3^4\times 4=27\times 4=108$$

مثال (2) : أوجد $\lim_{x\to -2}\frac{x^5+32}{x+2}$

الحل :
$$\lim_{x\to -2}\frac{x^5+32}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^5-(-2)^5}{x-(-2)}$$
$$=5\times(-2)^4=5\times 16=80$$

مثال (3) :

أوجد $\lim_{x\to -2}\frac{x^5-243}{x^3-27}$

الحل :
$$\lim_{x\to -2}\frac{x^5-243}{x^3-27}=\lim_{x\to -2}\frac{x^5-3^5}{x^3-3^3}$$
$$\frac{5}{3}\times(3)^{5-3}=\frac{5}{3}\times 9=15$$

مثال (4) :

أوجد
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$$

الحل :
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\lim_{x=\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{(x+\Delta x)-x}$$
$$=n\,x^{n-1}$$

مثال (5) :

أوجد
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

الحل :
$$\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\times\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$
$$\Rightarrow\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

حل آخر : يمكننا تطبيق النظرية السابقة فى حالة $n=\frac{1}{2}$ وسوف نرى أنها تعطى نفس النتيجة :
$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sqrt{x+\theta}-\sqrt{x}}{\theta}=\lim_{x+\theta\to x}\frac{(x+\theta)^{1/2}-x^{1/2}}{(x+\theta)-x}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)x^{(1/2)-1}=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال (6) :

أوجد
$$\lim_{x\to 5}\frac{x^{7/2}-125\sqrt{5}}{\sqrt{x^3}-5\sqrt{5}}$$

الحل :

$$\lim_{x\to5}\frac{x^{7/2}-125\sqrt{5}}{\sqrt{x^3}-5\sqrt{5}}=\lim_{x\to5}\frac{x^{7/2}-5^{7/2}}{x^{3/2}-5^{3/2}}$$

$$=\frac{(7/2)}{(3/2)}\times 5^{7/2-3/2}=\frac{7}{2}\times25=\frac{175}{3}=58\frac{1}{3}$$

(فى هذا المثال استخدمنا نتيجة النظرية السابقة فى حالة كون n, m كسرين ، وسوف نستخدم النظرية ونتيجتها فى حالة كون n, m سالبتين أيضا وكلا النتيجتين يكن برهانهما)

مثال (7) : أوجد $\lim_{x\to2}\frac{x^{-6}-1/64}{x^{-4}-1/16}$

الحل :

$$\lim_{x\to2}\frac{x^{-6}-1/64}{x^{-4}-1/16}=\lim_{x\to2}\frac{x^{-6}-(2)^{-6}}{x^{-4}-(2)^{-4}}=\frac{-6}{-4}\times2^{(-6)-(-4)}$$

$$=\frac{6}{4}\times2^{-2}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

النهايات الغير منتهية :

في بعض الأحيان لا تقترب قيمة الدالة $f(x)$ من قيمة محدودة بل تتزايد أو تتناقص بصورة غير منتهية .

مثال(1) :

أدرس سلوك الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ لقيم x القريبة من الصفر

الحل:

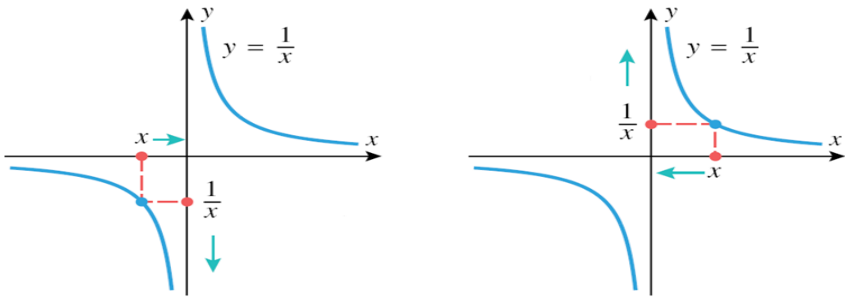
عندما تقترب x من الصفر من ناحية اليسار فأن

x	- 1	- 0.1	- 0.01	- 0.001	- 0.0001	- 0.00001	0
$f(x)=\frac{1}{x}$	- 1	- 10	- 100	- 1000	- 10000	- 100000	???

وعندما تقترب x من الصفر من ناحية اليمين فأن

x	0	0.00001	0.0001	0.001	0.01	0.1	1
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	???	100000	10000	1000	100	10	1

من الجدول و الرسم البياني للدالة $f(x)$ نلاحظ أن كلما أقتربت x من الصفر من جهة اليمين ، فأن قيمة الدالة $f(x)$ تكون موجبة وتتزايد بصورة لا نهائية ، وكذلك عندما تقترب x من الصفر من ناحية اليسار فأن قيمة الدالة $f(x)$ تكون سالبة وتتناقص بصورة لا نهائية .



تمارين (2-2)

أوجد قيمة النهايات التالية :

1- $\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+2}$ 2- $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-2}$

3- $\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{x^4+x^2-6}{x^2-2}$ 4- $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$

5- $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+3x}{x^2+6x+9}$ 6- $\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

7- $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{x-2}$ 8- $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

9- $\lim_{x\to 3}\frac{|x-3|}{x-3}$ 10- $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{|x-2|}$

11- $f(x)=2x^2+5x-1$

احسب $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ واحسب أيضا النهاية عندما $x = 2$

12- $f(x)=(x-2)(3-\frac{1}{x-2})$

أوجد $\lim_{x\to 2}f(x)$

13- $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-1}}$

14- $f(x)=\sqrt{x-3}$, $g(x)=\frac{x}{2x+|x|}$

فهل أ- للدالة f نهاية عندما $x\to 3$ ولماذا ؟

ب- للدالة g نهاية عندما $x\to 0$ ولماذا ؟

15- $y=\frac{x^2}{3-x}$ $z=\frac{12-x}{3-x}$ $(x\neq 3)$ أوجد

$\lim_{x\to 3}(z-y)$

16- $\lim_{x\to 2}\frac{x^7-128}{x^5-32}$

17- $\lim_{x\to -3}\frac{x^6+729}{x^4+81}$

18- $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{(2x+5)(x^3-8)}{(3x-2)(x^2-4)}}$

19- $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x}$

20- $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^{10}-x^{10}}{\Delta x}$

21- $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^5}-4\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

2-8 نهاية دالة عند اللانهاية :

في كل مما سبق ، نحن نستخدم النهايات لوصف سلوك الدالة $f(x)$ حال إقتراب المتغير x من القيمة a وطريقة إقتراب المتغير x مرتبطة بوضع x بالنسبة إلي وضع النقطة a كما يلي:

- إذا كانت $a < x$ ، فأن x تتناقص تدريجياً حتي تقترب من a (من جهة اليمين)
- إذا كانت $a > x$ ، فأن x تتزايد تدريجياً حتي تقترب من a (من جهة اليسار)

ولكن كيف يكون سلوك الدالة $f(x)$ في حالة تناقص المتغير x بدون حد أقصي (تناقص لا نهائي) أو يتزايد المتغير x بدون حد(تزايد لا نهائي)، سلوك الدالة في هذه الحالة يطلق علية سلوك النهاية للدالة ، لانه يصف سلوك الدالة في حالتي تباعد المتغير x عن نقطة الأصل (يميناً ويساراً) متجها نحو قيم لانهائية .

قاعدة (1) : إذا كانت n عددا صحيحا موجبا فإن :

(i) $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$

(ii) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

فإذا كانت $n = 1$ (مثلا) وأخذت x القيم $(x : 1, 2, 3, 10, 100, 1000, \ldots\ldots\ldots\ldots)$

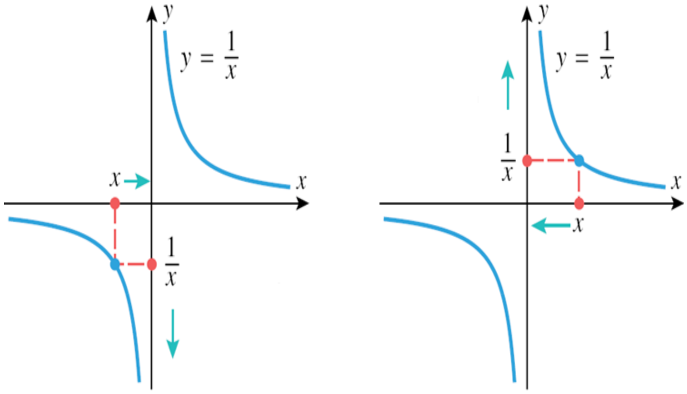
فإن $\frac{1}{x}$ تأخذ القيم : $(\frac{1}{x} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots\ldots\ldots\ldots)$

اى ان

x	1	10	100	1000	10000	....
$f(x) = \frac{1}{x}$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	....

وعندما تتناقص x تناقصا غير محدود (نهائي) فأن

....	- 10000	- 1000	- 100	- 10	- 1	x
....	- 0.0001	- 0.001	- 0.01	- 0.1	- 1	$f(x) = \frac{1}{x}$



من الجدول و الرسم البياني للدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ نلاحظ أنه عندما تتزايد x تزايدا غير محدود (نهائي) فأن الدالة $f(x)$ تقترب من الصفر، وعندما تتناقص x تناقصا غير محدود (نهائي) فأن الدالة $f(x)$ تقترب من الصفر أيضا.

وواضح أنه عندما $x\to+\infty$ فإن $\frac{1}{x}\to 0$

بالمثل فإن $\frac{1}{x^2}$ تأخذ القيم : $(\frac{1}{x^2}:1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{100},\frac{1}{10000},............)$

أى أن $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$

وبوجه عام فإنه لأى n موجبة : $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$

قاعدة (2) : إذا كانت n عددا صحيحا موجبا فإن :

(إذا كانت n زوجية) $\lim_{x\to-\infty}x^n=+\infty$

(إذا كانت n فردية) $\lim_{x\to-\infty}x^n=-\infty$

ولكن $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$

قاعدة (3) : $\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+......+a_n)=\lim_{x\to\pm\infty}a_0x^n=a_0\lim_{x\to\pm\infty}x^n$

أى أن نهاية كثيرة حدود عندما x تؤول إلى المالانهاية تساوى نهاية الحد ذى أكبر قوة للمتغير x

البرهان :

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+......+a_n=a_0x^n(1+\frac{a_1}{a_0x}+.....+\frac{a_n}{a_0x^n})$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+......+a_n)=\lim_{x\to\pm\infty}a_0x^n(1+0+....+0)=$$
$$=\ \lim_{x\to\pm\infty}a_0x^n$$

فمثلا :

1- $\lim_{x\to\pm\infty}(3x^2+1)=\lim_{x\to\pm\infty}3x^2=+\infty$

$2-\ \lim_{x\to\pm\infty}(-4x^3+2x-7)=-4\lim_{x\to\pm\infty}x^3=\pm\infty$

2-9 نهاية دالة بصورة $\frac{\infty}{\infty}$ عندما $x\to\infty$:

تمهيد : لتكن $f(x)=\frac{x}{2x+1}$

أوجد قيم $f(x)$ المقابلة لقيم $x:1, 3, 5, 10, 100, 1000$

x	1	3	5	10	100	1000	………
f(x)	1/3	3/7	5/11	10/21	100/201	1000/2001	………

واضح أن قيم $f(x)$ تقترب تدريجيا من القيمة $\frac{1}{2}$ كلما زادت قيمة x فمثلا عندما $x=10$ فإن الفرق : $\frac{1}{2}-\frac{10}{21}=\frac{1}{42}$

وعندما $x=1000$ فإن الفرق : $\frac{1}{2}-\frac{1000}{2001}=\frac{1}{4002}$

وحيث أن الفرق بين $f(x)$ والقيمة $\frac{1}{2}$ تصغر حسبما يزيد كلما كبرت قيمة ء

فإننا نعبر عن ذلك بكتابة :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2}$$

المثال السابق هو حالة خاصة من الدوال الكسرية بصورة :

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$$

حيث :

$$g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+.........+a_n$$
$$h(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+.........+b_n$$

وأن :

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{\lim_{x\to\infty}g(x)}{\lim_{x\to\infty}h(x)}$$

تعطى قيمة غير معينة $\pm\frac{\infty}{\infty}$

ولكن يمكننا التخلص من هذا الموقف بكتابة :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_0 \lim_{x\to\infty} x^n}{b_0 \lim_{x\to\infty} x^m}$$

$$= \frac{a_0}{b_0} \lim_{x\to\infty} x^{n-m}$$

حالة خاصة :

1- إذا كانت $n = m$ فإن $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_0}{b_0}$

2- إذا كانت $n < m$ فإن $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_0}{b_0} \times \infty$

3- إذا كانت $n > m$ فإن $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_0}{b_0} \times 0$

أمثلة

مثال (1) :

أوجد $\lim_{x\to\infty} f(x)$ إذا كانت $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{7x^2 + 4x - 5}$

الحل :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2}{7x^2 + 4x - 5}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{7x^2} = \frac{3}{7} \lim_{x\to\infty} 1 = \frac{3}{7}$$

حل آخر :

$$\lim f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{2}{x^2}}{7 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}} = \frac{3}{7}$$

(لاحظ أننا قسمنا البسط والمقام على x أكبر قوة وهى x^2)

مثال (2) :

ليكن $f(x) = \frac{2x^3 - 3x + 1}{-x^2 + 3x + 5}$ أوجد $\lim_{x\to\infty} f(x)$

الحل :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{-x} = -2\lim_{x\to\infty} x$$
$$= -2\times-\infty = +\infty$$

مثال (3) :

ليكن $f(x) = \dfrac{5x-4}{2x^2-3x+5}$ أوجد $\lim_{x\to\infty} f(x)$

الحل :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{2x^2} = \frac{5}{2}\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

2-10 نهاية متتابعة :

الدالة ذات المتغير الحقيقى n عددا طبيعيا ، أى الدالة التى مجالها $\mathbb{N}$ (أو مجموعة جزئية منها) تسمى متتابعة ومدى هذه الدالة يسمى "حدود المتتابعة" ونعبر عن المتتابعة إما بقاعدة مثل :

$$f(n) = \frac{1}{n+1} \qquad \text{where} \qquad n \in \mathbb{N}$$

وإما بسرد جميع حدودها مثل :

$$\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ... \right\rangle$$

حيث نعتبر $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

وعادة ما نكتب $f(n)$ بصورة "a_n"

فنقول أن : "$a_n = \dfrac{1}{n+1}$" كما فى المثال السابق أو نسميه "الحد النونى" للمتابعة.

والتعبير $n\to\infty$ يختلف عن التعبير $x\to\infty$ إذا كان المتغير x مستمرا أى يأخذ جميع قيم x الحقيقية ، بينما $n\to\infty$ يكون معناه أن قيمة n تتزايد بلا حدود ولكن خلال قيم n الطبيعية فقط.

ومع ذلك فإن القواعد التى درست فى البند السابق تتحقق فى حالة n بدلا من x .

فمثلا : لتكن m عدد صحيح موجب فإن :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^m} = 0 \qquad ، \qquad \lim_{n\to\infty} n^m = \infty$$

مثال (1) :

أوجد $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n-1}{2n^2+5n+7}$

الحل :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n-1}{2n^2+5n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

وبطريقة أخرى :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n-1}{2n^2+5n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{2n^2} = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty} 1 = \frac{3}{2}$$

مثال (2) :

أوجد $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

الحل :
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \times \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$
$$= \lim \frac{(n+1)-(n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

تمارين (2-3)

أوجد قيمة :

1- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1}$

2- $\lim_{x\to\infty} \frac{7}{x^2}$

3- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$

4- $\lim_{x\to\infty} (\frac{2}{x} + \frac{1}{3x^2})$

5- $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{2x-1}$

6- $\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x-2}$

7- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-1}{x-3x^2+4}$

8- $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+5x-1}{3x^2+7}$

9 - $\lim_{x\to\infty} \frac{-x^3+2x}{x^4+3}$

10- $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

11- $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})$

12- $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{4x+3}$

13- $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{2x-1}$

14- $\lim_{x\to\infty} \frac{2\times 3^x-1}{5\times 3^x+7}$

15- $\lim_{n\to\infty} \frac{3n-4}{\sqrt{n^2+5}}$

16- $\lim_{n\to\infty} \left[(n+1)-n\right]$

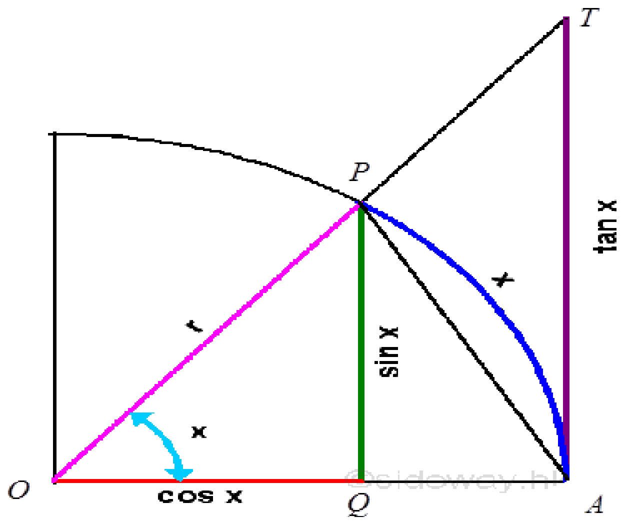
17- $\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3-2}}$

18- $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right]$

3-4 بعض النهايات المثلثية : Trigonometric limits

تعلمنا فى دراسة النهايات كيفية إيجاد بعض النهايات الجبرية وسوف ندرس الآن إحدى النهايات الهامة ناتجة من دراسة الدالة : $f(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ حيث θ مقدرة بالتقدير الدائرى

بملاحظة الشكل الهندسى



حيث القوس AP هو القوس المقابل لزاوية θ بالتقدير الدائرى لدائرة نصف قطرها الوحدة.

$$|OA|=|OP|=1$$

والملاحظة الهندسية أنه إذا كانت $\dfrac{\pi}{2}>\theta^{\circ}>0$ فإن

مساحة المثلث TAO < مساحة القطاع AOP < مساحة المثلث OAP

أى أن
$$\frac{1}{2}\sin\theta<\frac{1}{2}\theta^{\circ}<\frac{1}{2}\tan\theta$$

$$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$$

أو
$$\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1$$

نظرية (1-4)

إذا كانت θ مقيسة بالتقدير الدائرى

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

نتيجة (1) :

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}=0$$

البرهان : من العلاقة السابقة

$$\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1$$

ولكن $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1$

عندها $\theta\to 0$ فإن :

$$1\le\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\le 1$$

أى أن $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$

برهان النتيجة :

$$\frac{1-\cos\theta}{\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\theta}\times\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$=\frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}=\frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$

$$\therefore\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin}{\theta}\times\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

ولكن $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=0,\quad\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$

نتيجة (2) $\lim_{\theta\to 0}=\frac{\mathrm{ton}\theta}{\theta}=1$

أمثلة :

مثال (1) : أوجد $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}$

الحل : نكتب $\frac{\sin 2\theta}{\theta}=\frac{2\sin(2\theta)}{(2\theta)}$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\theta}=2\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(2\theta)}{2\theta}=2\times 1=2$$

مثال (2) : أوجد $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$

الحل :

$$\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}=\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\times\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{2\theta}{3\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}=\frac{2}{3}\times\lim_{2\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\times\lim_{3\theta\to 0}\frac{3\theta}{\sin 3\theta}$$

$$=\frac{2}{3}\times 1\times 1=\frac{2}{3}.$$

مثال (3) : أوجد $\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan 2\theta}{\theta\sec\theta}$

الحل :

$$\frac{\tan 2\theta}{\theta\sec\theta}=\frac{\sin 2\theta}{\theta\cos 2\theta\sec\theta}$$

$$=2\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\;\frac{\cos\theta}{\cos 2\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan 2\theta}{\theta\sec\theta}=2\lim_{2\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\times\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta}{\cos\theta}$$

$$=2\times 1\times\frac{1}{1}=2$$

مثال (4) : أوجد كلا من النهايات الآتية

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\tan^3 2x}$, (ii) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$

الحل :

(i)

$$\frac{x^3}{\tan^3 2x}=\frac{1}{8}\;\frac{(2x)^3}{\tan^3 2x}=\frac{1}{8}\left(\frac{2x}{\tan 2x}\right)^3$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\tan^3 2x}=\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\tan 2x}\right)^3$$

$$=\frac{1}{8}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\tan 2x}\right)^3$$

$$=\frac{1}{8}(1)^3=\frac{1}{8}$$

(ii) when $x\to\frac{\pi}{2}$, we have $(\frac{\pi}{2}-x)\to 0$

كذلك

$$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x), \quad \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\therefore \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{\frac{\theta}{2} - x \to 0} \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{1 - \cos y}{\sin y}$$

$$\frac{1 - \cos y}{\sin y} = \frac{1 - \cos y}{\sin y} \times \frac{1 + \cos y}{1 + \cos y} = \frac{\sin y}{1 + \cos y}$$

$$\therefore \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{1 + \cos y} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

تمارين (1-4)

أوجد قيم النهايات الآتية :

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{x}$ (2) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin a x}{x}$

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\tan 5x}$ (4) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan a x}{\tan b x}$

(5) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{2}$ (6) $\lim_{x \to 0} \sin 2x \cot an 3x$

(7) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin^2 2x}$ (8) $\lim_{x \to 0} \left(4 - \frac{\sin 3x}{x} \right)$

(9) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\frac{\pi}{2} - x}$ (10) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x + \sin 3x}{x}$

(11) $\lim_{x \to 0} \frac{3 \sin 2x - \tan 3x}{4x}$ (12) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

2-1 بعض النهايات للدوال الأسية واللوغاريتمية:

العدد الطبيعى: e

كثيرا ما يظهر العدد e كأساس للدالة أسية هى $y = e^x$.

ولهذا العدد أهمية بالغة فى كثير من المسائل الرياضية والفيزيائية وفى تعريف ما يسمى باللوغاريتم الطبيعى natural logarithm وتوجد عدة طرق يمكن بها تعريف العدد e أهمها وأشهرها :

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ويأخذ القيمة التقريبية. $e = 2.7182818284$

وسوف نثبت الآن أن $2 < e < 3$

نفرض أن $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

بتطبيق نظرية ذات الحدين

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+n\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+......+\frac{n(n-1)......[n-(n-1)]}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+.........$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)........\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

وحيث أن

$$1 > \left(1-\frac{1}{n}\right) > \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) > .... > \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)......\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

فإننا نستنتج أن

$$u_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.........+\frac{1}{n!}$$

وباستخدام البديهيات $\frac{1}{3!}<\frac{1}{2^2}\,,\;\frac{1}{4!}<\frac{1}{2^3}\,,\;.........\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}$

بذلك يكون

$$u_n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+.........+\frac{1}{2^{n-1}}$$

ومنها يتضح أن

$$2<u_n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+.........+\frac{1}{2^{n-1}}$$

بأخذ النهاية عندما $n\to\infty$ نجد أن

$$2<\lim_{n\to\infty}u_n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+.........$$

$$2<\lim_{n\to\infty}u_n<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3$$

وحيث أن $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

$$\therefore\quad 2<e<3$$

مع ملاحظة أننا تفادينا بعض التفاصيل الدقيقة والخاصة بتقارب التسلسلات.

يرتبط بتعريف العدد e عدد من النهايات الهامة التى تعطى تعريفا للدالة الأسية $y=e^x$ يتضح ذلك من النتائج التالية :

نتيجة (1) : $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{xn}=e^x$

البرهان :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{xn}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x=e^x$$

نتيجة (2) : $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

البرهان :

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)=\left\{\left(1+\frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right\}^x , \qquad n\to\infty \;\Rightarrow\; \frac{n}{x}\to\infty$$

لذلك

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{\frac{n}{x}\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right\}^x = \left[\lim_{\frac{n}{x}\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right]^x = e^x$$

نتيجة (3) : $$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+..........$$

البرهان : من نتيجة (2) نعلم أن

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

بتطبيق نظرية ذات الحدين

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= 1+\frac{n}{1!}\left(\frac{x}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2+.......\\ &\quad +\frac{n(n-1)(n-2).........[n-(n-1)]}{n!}\left(\frac{x}{n}\right)^n\\ &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{x^3}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\\ &\quad +.......+\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)......\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\end{aligned}$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+..........$$

نتيجة (4) : $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$

البرهان : بوضع $x=\frac{1}{y}$ فإن $x\to 0 \;\Rightarrow\; y\to\infty$

وبالتالى فإن
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e$$

من التعريف (1) سوف نقبل النتيجة السابقة إذا تصورنا أن y تأخذ فقط قيما صحيحة موجبة وأن $y\to\infty$.

مثال (1) : أوجد قيم النهايات الآتية :

$$(1)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x} \qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+4}$$

الحل :

$$(1)\quad \because\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad \therefore\ \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{5}=e^{5}$$

$$(2)\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+4}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{4}=e\times 1=e$$

مثال (2) : أوجد قيم النهايات التالية :

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-2}\right)^{n} \qquad (2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$$

الحل :

$$(1)\quad \left(\frac{n+2}{n-2}\right)^{n}=\left(\frac{1+2/n}{1-2/n}\right)^{2}=\frac{(1+2/n)^{n}}{(1-2/n)^{n}}=\frac{(1+2/n)^{n}}{[1+(-2/n)]^{n}}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-2}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n}\right)^{n}=e^{2}\times e^{-(-2)}=e^{4}$$

بتطبيق النتيجة (2).

(2) $$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{x}\ln(1+x)=\ln(1+x)^{1/x}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right]=\ln[e]=1$$

قاعدة:

(1) $\lim_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$

(2) $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

(3) $\lim_{x\to +\infty}e^{x}=+\infty$

(4) $\lim_{x\to -\infty}e^{x}=0$

(5) $\lim_{x\to +\infty}e^{-x}=0$

(6) $\lim_{x\to -\infty}e^{-x}=+\infty$

تمارين (2-4)

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}$

(3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+4\cot\!an\,x)^{\tan x}$

(4) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$

(5) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2+\sec x}{3+\sec x}\right)^{5\sec x}$

(6) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} x}\right)^{5\operatorname{cosec} x}$

(7) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

(8) $\lim_{x\to\infty}\left[\ln(1+x)-\ln x\right]$

(9) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-e^{x}}{1+e^{x}}$

(10) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$

(11) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

(12) $\lim_{x\to\infty}\left[\ln(1+x)-\ln x\right]$

(13) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} x}\right)^{5\operatorname{cosec} x}$

(14) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2+\sec x}{3+\sec x}\right)^{5\sec x}$

(15) $\lim_{x\to\infty}\left[\mathrm{Ln}(1+x)-\mathrm{Ln}\,x\right]$

(16) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\mathrm{Ln}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

(17) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$

(18) $\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{2}{\mathrm{Ln}\,x}\right)^{1/\ln x^{5}}$

(19) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+\sin x}{3+\sin x}\right)^{1/x}$

الفصل الثالث

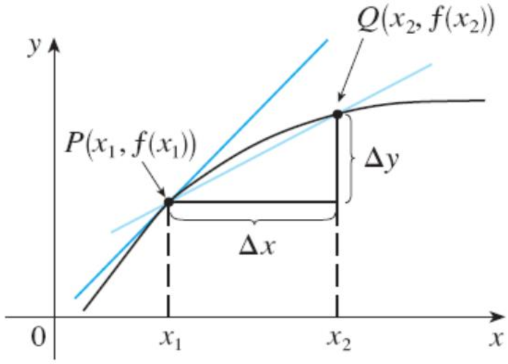
الاشتقاق Differentiation

قدم كل من العالم الالمانى ليبنتز والعالم الانجليزى نيوتن موضوع حساب التفاضل والتكامل فيما بين عام (1665- 1675م) كوسيلة لعل بعض المشكلات فى الهندسة والميكانيكا. ولقد نما هذا العلم نموا عظيما وأصبح وسيلة أساسية فى حل الكثير من المشاكل فى الرياضيات والفيزياء وبقية العلوم وتعريف "تفاضل دالة" أو إيجاد مشتقة دالة" يعتمد على حساب نهاية معينة. نمهد لها كما يلى :

1-3 ميل المماس لمنحنى عند نقطة عليه.

لتكن $y=f(x)$ هى معادلة منحنى أملس لدالة متصلة ولتكن $h_1(x_1, y_1), h_2(x_2, y_2)$ نقطتين على هذه المنحنى لذا فإن :

$$y_1 = (f(x_1) \qquad , \qquad y_2 = f(x_2)$$



ميل القاطع $h_1h_2 = \overline{PQ}$ حسب تعريف ميل أى مستقيم هو :

$$\bar{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

فإذا رمزنا بالرمزين $\Delta x, \Delta y$ للفرق :

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad , \qquad \Delta y = y_2 - y_1$$

(Δx هى دلتا x ، Δy هى دلتا y)

فيكون

$$\bar{m} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

وحيث أن المماس عند $h_1(x_1, y_1)$ هو قاطع يقطع المنحنى فى نقطتين منطبقتين ، فيمكننا تصور اقتراب النقطة h_2 تدريجيا من h_1.

وبالتالى اقتراب القيمة x_2 تدريجيا من x_1. وأيضا اقتراب النقطة y_2 تدريجيا من y_1 وفــى الوضــع النهــائى

فإن : $\Delta y \to 0 \quad \text{when} \quad \Delta x \to 0$

ولكن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وهى ميل القاطع h_1h_2 تؤول فى وضعها النهائى لميل المماس عند نقطة h_1 . أى أن :

$$m_1 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2-3 إيجاد سرعة نقطة متحركة عند لحظة معينة.

نفرض جسيم متحرك فى خط مستقيم وكانت المسافة f المقطوعة فى زمن معين t من بدء الحركة دالة فى الزمن

$$f = f(t)$$

فإذا كانت f_1f_2 مسافتين مقطوعتين فى زمن t_1t_2 على الترتيب.

$$f_1 = f(t_1) \qquad f_2 = f(t_2)$$

ليكن $\Delta t = t_2 - t_1, \quad \Delta f = f_2 - f_1$

Δf هى التغير فى المسافة الحادث فى زمن قدره Δt

السرعة المتوسطة v خلال الفترة الزمنية Δt هى :

$$v = \frac{\Delta f}{dt} = \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_2) - f}{t_2 - t_1}$$

$$= \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$$

لإيجاد السرعة اللحظية لحظة انتهاء الزمن t_1

يمكن تصور اقتراب الزمن t_2 تدريجيا من t_1 بحيث يتلاشى التغير فى الزمن Δt أى $\Delta t \to 0$ وبالطبع فإن $\Delta f \to 0$ ولكن : $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ تؤول إلى السرعة المطلوبة.

أى أن

$$v_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$$

تعريف المشتقة : من التمهيدين السابقين يمكننا صياغة تعريف مشتقة دالة معينة f عند نقطة x داخل نطاق (مجال) الدالة بالقاعدة

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

أو نكتب $x = \Delta x$ (اختصارا) فيكون :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

شرط تواجد تلك النهاية. وإذا وجدت النهاية عند نقطة معينة نقول أن الدالة قابلة للاشتقاق عند النقطة أو أن الدالة تفاضلية عند النقطة (differentiable).

رموز أخرى لمشتقة الدالة.

إذا كانت $y = f(x)$ فإنه يمكننا استخدام أحد الرموز التالية للتعبير عن مشتقة الدالة

$$y = f'(x), \quad \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

وحسب التعريف المعطى للمشتقة ، نكتب مشتقة الدالة عند نقطة x_0

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

وحسب تعريف النهاية اليمنى والنهاية اليسرى يمكننا أيضا بالمثل تعريف المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى لدالة عند نقطة :

فتعرف المشتقة اليمنى للدالة بالصورة :

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^{+}} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

وتعرف المشتقة اليسرى للدالة بالصورة :

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^{-}} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

تعريف :

تسمى الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند نقطة $-x_0$ إذا كان :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

لها وجود . وهذا يكافئ : $f'_{+}(x_0) = f'_{-}(x_0)$

ملاحظات عامة :

1- لكـى تكـون الدالـة $y = f(x)$ قابلـة للاشتقاق عنـد نقطـة x_0 فإنـه يجـب أن تكـون الدالة معرفة عند هذه النقطة أى أن $f(x_0)$ لها قيمة محددة.

2- لكى تكـون الدالـة $y = f(x)$ قابلـة للآشتقاق عنـد نقطـة x_0 يجـب أن تكـون الدالـة متصلة عند هذه النقطة أى أن :

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0)$$

لأنه إذ كانت

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) \neq f(x_0)$$

فإن :

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

نعطى قيماً لا نهائية ، وهذا معناه أن المشتقة ليس لها وجود

3- مشتقة أى دالـة f هـى دالـة جديـدة f' مجالهـا هـو جميـع فقط مجـال f التـى عندها $f'(x)$ لها وجود.

3-3 المبادئ الأولية لحساب مشتقة دالة :

لتكن $y = f(x)$ دالة معرفة فى فترة علـى خط الأعداد ، $[a, b]$ مثلا ولتكن x نقطة داخلية فى هذه الفترة أى أن $(a < x < b)$

1- نوجد قيمة $f(x_0+\Delta x), f(x_0)$.

2- إيجاد التغير فى y : $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

3- إيجاد (متوسط معدل التغير) فى y :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

4- إيجاد (معدل التغير) فى y وهو :

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

وهو ما نرمز له بالرمز $f'(x)$

بالنسبة لقواعد الاشتقاق بوجه عام نعتبر النقطة x بدلا من x_0 فيكون :

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f9x)}{\Delta x}$$

أمثلة

مثال (1) :

إذا كانت $f(x) = x^3$ أوجد من المبادئ الأولية : $f'(2), f'(x), f'(-4)$

الحل :

$$F(x) = x^3$$

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^3=x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3$$
$$f(x+\Delta x)-f(x)=(x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3)-x^3$$
$$=3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3$$
$$=\Delta x(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)$$
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=3x^3+3x\Delta x+\Delta x^2$$

بأخذ النهايات عندما $\Delta x\to 0$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=3x^2+o+o$$

أى إذا كانت $f(x) = x^3$ فإن $f^{/}(x) = 3x^2$

وكحالة خاصة : $f^{/}(2) = 3x4 = 12$

$f^{/}(-4) = 3x\ 16 = 48$

ملاحظة :

يمكن إعادة صياغة الحل فى المثال السابق باستخدام الرمزين $\Delta x, \Delta y$

نفرض $y = x^3$

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^3=x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$

بالطرح :

$$y=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$
$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2$$

مثال (2) :

إذا كانت $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad x\neq 0$

أوجد قيمة $f^{\backslash}(x)$ (من المبادئ الأولية)

الحل :

(i) $f(x+\Delta x)=\dfrac{1}{x+\Delta x}$

(ii) $f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}$

$$=\frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)}=\frac{-1}{x(x+\Delta x)}$$

(iii) $f^{\backslash}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = \frac{-1}{x-x} = -\frac{1}{x^2}$$

أى أن : $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f^{\backslash}(x) = -\frac{1}{x^2}$

مثال (3) :

لتكن $f(x) = \sqrt{x} \qquad x > 0$

أوجد $f^{\backslash}(X)$

الحل :

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$f^{\backslash}(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال (4) :

أوجد ميل المماس للمنحنى $y = x^3$

عند النقطة $(2, 3)$ على هذا المنحنى ، ثم معادلته.

الحل :

سبق لنا فى التمهيد أن بينا أن مشتقة دالة عند نقطة تعبر هندسيا عن ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة.

فإذا كتبنا صورة الدالة بالشكل $f(x) = x^3$

من المثال (1) :

$$f^{\backslash}(x) = 3x^2$$

(ميل المماس) $m = f^{\backslash}(2) = 3 \times 4 = 12$

معادلة المماس هى $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$

$$\frac{y-8}{x-2} = 12 \qquad \Rightarrow \qquad y - 8 = 12x - 24$$

$$y - 12x + 16 = 0$$

الأمثلة السابقة هى صور خاصة من اشتقاق الدالة الجبرية $y = x^n$ ومن المناسب حفظ صورة المشتقة لهذه الدالة.

نظرية 3-1 :

إذا كانت $y = x^n$

فإن $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

البرهان :

سوف نبرهن هذه النظرية على عدة مراحل :

n صحيحة موجبة – n صحيحة سالبة – n كسرية – n أى عدد حقيقى.

الحالة الأولى : n صحيحة وموجبة

لتكن $f(x) = x^n$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^n$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n n - x^n}{\Delta x}$$

$$\frac{(x-\Delta x)^n n - x^n}{(x+\Delta x) - x}$$

$$f^{\backslash}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x+\Delta x \to x} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{(x+\Delta x) - x}$$

ومن نظرية (2-5) فى النهايات فإن :

$$f^{\backslash}(x) = nx^{n-1}$$

كحالات خاصة :

$$y = x^{10} \Rightarrow y^{\backslash} = 10x^9$$
$$y = x^3 \Rightarrow y^{\backslash} = 3x^2$$
$$y = x^2 \Rightarrow y^{\backslash} = 2x^1 = 2x$$
$$y = x \Rightarrow y^{\backslash} = 1x^0 = 1$$

بعض القوانين لإيجاد المشتقة الأولي:

إستخدام المبادئ الأولية لإيجاد المشتة الأولي لبعض الدوال قد يكون صعباً مثل الدالة $f(x) = x^3(5x^4+3)^4 + \frac{x^6}{(x^2+3)^2}$ وذلك لإنها تحتاج إلي عمليات جبرية طويلة، لذلك يكون مطلوب إيجاد صيغ أبسط من هذه الطريقة. نحاول في هذ الجزء إعطاء نظريات والبرهنة عليها للإطمئنان علي إستخدامها.

نظرية 3-2 :

إذا كانت (ثابت) $y = a$ فإن $y^{\backslash} = 0$

البرهان :

هنا ثابت $f(x) = a$

$$f(x+\Delta x) = a$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{a-a}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

وبالتالى فإن $f^{\backslash}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$

القاعدة : مشتقة الدالة الثابتة تساوى صفرا

فمثلا : $y = 4 \;\; \Rightarrow \;\; y^{\backslash} = 0$

(a ثابت) $y = 4a$

$$\Rightarrow \;\; y = 0$$

$$Y = a^3 \qquad y^{\backslash} = 0$$

مثال (5) :

ابحث اشتقاق الدالة :

$$y\begin{cases} x & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$

عند النقطة $x = 0$

الحل : هنا الدالة معرفة بقاعدتين :

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$

ومع ذلك فالدالة متصلة عند $x = 0$

لأن النهاية اليمنى $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$

والنهاية اليسرى $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0$

المشتقة اليمنى للدالة : فى هذه الحالة نضع $f(x) = x$

$$f_+^{\backslash}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f_+^{\backslash}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} 1 = 1$$

المشتقة اليسرى للدالة : نضع $f(x) = x^2$

$$f_-^{\backslash}(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f_-^{\backslash}(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x^2 - 0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} = 0$$

أى أن $f_+^{\backslash}(0) \neq f_-^{\backslash}(0)$

مما يدل على أن الدالة المعطاة غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$

ملاحظة :

يمكننا للتبسيط أن نطبق قاعدة الاشتقاق العادى للدالة :

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$

فيكون

$$f^{\backslash}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$$

فيكون

$$f_+^{\backslash}(0) = 1$$

$$f_-^{\backslash}(0) = 2 \times 0 = 0$$

مثال (6) :

ابحث اشتقاق الدالة

$$y = \begin{cases} x+5 & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases}$$

عند النقطتين $x = 1$ ، $x = 0$

الحل : (أ) الدالة معرفة بقاعدتين

عندما $x \geq 1$ فإن $f(x) = x + 5$

وتكون $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x+5) = 6$

، عندما $x > 1$ فإن $f(x) = x^2$

ويكون $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2) = 1^2 = 1$

وحيث أن : $\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$

فإن الدالة غير متصلة عند $x = 1$

وهذا يكفى لإثبات عدم الاشتقاق لهذه الدالة عند $x = 1$

(ب) لإيجاد الاشتقاق عند $x = 0$

يكفى اختبار الدالة $f(x) = x^2$ $x < 1$

لأن النقطة $x = 0$ داخل مجال هذا الجزء من الدالة وهذه الدالة قابلة للاشتقاق عند أى نقطة فى مجالها : $f^{\backslash}(x) = 2x$

أى أن $f^{\backslash}(0) = 2 \times 0 = 0$

4-3 القواعد الأساسية للتفاضل :

نظرية 3-3 :

لتكن f, g معرفتين فى الفترة $a \le x \le b$
ولتكن لكل منها مشتقة عند أى نقطة فى الفترة $a < x < b$ فإن :

(i) $$[f(x) \pm g(x)]^{\backslash} = f^{\backslash}(x) \pm g^{\backslash}(x)$$

(ii) $$[f(x) \cdot g(x)]^{\backslash} = f(x) \cdot g^{\backslash}(x) + f^{\backslash}(x) \cdot g(x)$$

(iii) $$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^{\backslash} = \frac{g(x) \cdot f^{\backslash}(x) - f(x) \cdot g^{\backslash}(x)}{[(g(x)]^2}$$

البرهان : سوف نبرهن حالة مجموع دالتين. ويمكن إثبات بقية الصور بنفس الطريقة.

لتكن $h = f + g$

أى أن $h(x) = f(x) + g(x)$ …………(1)

$$h(x+\Delta x) = f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)\text{...............}(2)$$

$$\frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$h^{\backslash}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f^{\backslash}(x) + g^{\backslash}(x)$$

حالات خاصة :

مشتقة (ثايت × دالة) = الثابت × مشتقة الدالة

$$(a \,.\, f)^{\backslash} = a \,.\, f^{\backslash}$$

البرهان : مشتقة حاصل ضرب دالتين = الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى.

$$(a \,.\, f)^{\backslash} = a \,.\, f^{\backslash} + f \times (0) = a \,.\, f^{\backslash}$$

أمثلة

مثال (1) :

إذا كانت $y = 3x^2 - 3x + 2$ أوجد $f^{\backslash}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot 2x - 3 \cdot 1 + 0$$

$$= 6x - 3 = 3(2x - 1)$$

مثال (2)

لتكن $f(x) = (3x^2 + 1)(2x^5 + 8)$ أوجد $f^{\backslash}(x)$

الحل :

الدالة $f(x)$ بصورة حاصل ضرب دالتين

$$f^{\backslash}(x) = (3x^2 + 1)(2x^5 + 8)^{\backslash} + (2x^5 + 8)(3x^2 + 1)^{\backslash}$$
$$= (3x^2 + 1)(10x^4) + (2x^5 + 8)(6x)$$
$$= 2x\,[15x^5 + 5x^3 + 6x^5 + 24]$$
$$= 2x\,(21x^5 + 5x^3 + 24)$$

مثال (3) :

لتكن $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ أوجد $f^{\backslash}(x)$

الحل : الدالة f بصورة خارج قسمة دلتين

ومشتقة خارج القسمة = $\dfrac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$

$$f^{\backslash}(x) = \frac{(x^2+1)(x^2-1)^{\backslash} - (x^2-1)(x^2+1)^{\backslash}}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{(x^2+1)(2x) - (x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{2x(x^2+1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

مشتقة الدالة : $f(x) = x^n$ حيث (n صحيحة سالبة)

هى $f^{\backslash}(x) = nx^{n-1}$

البرهان :

$f(x) = x^m$ ، $N = -m$

$$f(x) = \frac{1}{x^m}$$
$$f^{\backslash}(x) = \frac{x^m \times (0) - 1 \times mx^{m-1}}{(x^m)^2}$$
$$= \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}}$$
$$= -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

مثال (4) :

لتكن $f(x) = (x^3 + \frac{4}{x^3})^2$ أوجد $f^{\backslash}(x)$

الحل :

$$f(x) = (x^3 + \frac{4}{x^3})^2 = x^6 + 8x^3 \times \frac{1}{x^3} + \frac{16}{x^6}$$
$$= x^6 = 8 = 16x^{-6}$$
$$f^{\backslash}(x) = 6x^5 + 0 + 16 \times (-6)x^{-7} = 6x^5 - \frac{96}{x^7}$$

تمارين (3-1)

أوجد مشتقات الدوال التالية :

1- $f(x) = x^3 + 2x + 1$

2- $f(x) = x^5 - 4x^{-3}$

3- $f(x) = (x^2 - \frac{3}{x^2})^2$

4- $f(x) = \frac{4}{7x^5}$

5- $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$

6- $f(x) = (2x^2 + 1)^2$

7- $f(x) = x(x + 1)(x - 2)$

8- $f(x) = \frac{(x - 4)(x^2 - 1)}{x}$

9- $f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$

10- $f(x) = (\frac{x^2}{1 + x^2})^2$

11- $f(n) = \sqrt{n} + \frac{4}{n}$

12- $f(n) = \sqrt{n}(2n - 1)$

13- $f(x) = x^2(1 - x)^{-1}$

14- $f(x) = (2x + 3)^3$

15- $f(x) = (x^2 - x)^{-2}$

16- $f(x) = (\frac{n + 1}{n - 1})^3$

أوجد ميل المماس للمنحنى عند النقطة المبينة ثم معادلته :

17- $f(x) = x^2$ عند (-2, 4)

18- $f(x) = (x - 3)^2$ عند (1, 4)

19- $f(x) = \frac{x + 2}{x - 2}$ عند (0, -1)

20- $f(x) = \sqrt{1 + x}$ عند $(2, \sqrt{3})$

5-3 قاعدة السلسلة (تفاضل دالة الدالة) :

من خلال دراستنا للدوال تعرفنا علي الدالة التركيبية $f \circ g$ ، والأن نحاول الحصول علي قانون لإيجاد المشتقة التفاضلية الأولي لها.

إذا كانت $y = f(z)$

$z = f(x)$ ، $z = G(x)$

فإن $y = f(f(x)) = (f \circ f)(x)$

فإذا كانت f قابلة للتفاضل بالنسبة لـ z فإن $\Delta x \to 0 \Leftarrow \Delta z \to 0$

وحيث أن $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \dfrac{\Delta z}{\Delta x}$

فإن
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

أى أن :
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

أو
$$(f \circ G)^{\backslash}(x) = f^{\backslash}(z) \cdot G^{\backslash}(x)$$
$$\Rightarrow \quad (f \circ f)^{\backslash}(x) = f^{\backslash}(G(x)) \; f^{\backslash}(x)$$

وبوجه عام : إذا كانت $y = f(z)$ ، $z = G(x)$ ، $x = h(t)$

فإن
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

مثال (1) :

إذا كانت $y = z^2$ ، $z = (x^2 + x)$

أوجد $\dfrac{dy}{dx}$

الحل :
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx}$$
$$= 3z^2 \times (2x+1)$$
$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2+x)^2(2x+1)$$

ملاحظة : لاحظ أن : $y = (x^2 + x)^2$
$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2+x)^2(2x+1)$$

أى أننا نفاضل أولا بالنسبة للقوس $(x^2 + x)$ ثم نضرب فى تفاضل القوس بالنسبة إلى x

وبوجه عام : إذا كان $y = [f(x)]^n$

فإن :
$$\frac{dy}{dx} = n\left[f(x)\right]^{n-1} \times f^{\backslash}(x)$$

مثال (2) :

إذا كان $y=\dfrac{1-z}{1+z}$ ، $z = n^2 + 3$ ، $n = 3x + 5$

أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ عندما $x = -1$

الحل : عندما $x = -1$ فإن $n = -3 + 5 = 2$

$$y=\frac{1-7}{1+49}=\frac{-6}{50} \quad , \quad z = 4 + 3 = 7$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dn}\times\frac{dn}{dx}$$

$$\frac{dy}{dz}=\frac{(1+z^2)(-1)-(1-z)(2z)}{(1+z^2)^2}$$

$$=\frac{-1-z^2-2z+2z^2}{(1+z^2)^2}=\frac{-1-2z+z^2}{(1+z^2)^2}$$

$$\frac{dz}{dn}=2n \qquad \frac{dn}{dx}=3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1-2z+z^2}{(1+z^2)^2}\times(2n)\times 3$$

عندما $x = -1$ فإن : $n = 2$ ، $z = 7$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1}=\frac{(-1-14+49)}{(50)^2}\times 4\times 3=\frac{34\times 4\times 3}{2500}=\frac{408}{2500}=\frac{102}{625}$$

6-3 التفاضل الضمنى :

الدوال مثل $y = x^3 + x^2 + 1$ ، $y=\sqrt{x^2+16}$

$$y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

تسمى دوال بصورة (صريحة) لأنها تعبر عن y بدلالة x بصورة صريحة ويمكن أن نعبر عن الدالة بصورة ضمنية غير مباشرة.

فمثلا العلاقة : $x^2 + y^2 = 25$ ………….. (1)

لكل قيمة x فى الفترة $[-5, 5]$ تعطى قيما للرمز y وحيث أن $y^2 = 25 - x^2$ تكافئ

$$y=-\sqrt{25-x^2} \quad , \quad y=+\sqrt{25-x^2}\text{...........(2)}$$

فالعلاقة (1) : لا تعبر عن دالة ولكنها تنتج لنا دالتين كما فى العلاقة (2) وسوف نقوم بعملية التفاضل للعلاقة (1) باعتبار أنه توجد على الأقل دالة $y = y(x)$ تحقق

(1). وباستخدام قاعدة التسلسل وبإجراء التفاضل للعلاقة (1) بالنسبة إلى x نحصل على :

$$\frac{d}{dx}[x^2+y^2-25]=0$$

$$2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$y\cdot\frac{dy}{dx}=-x$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

ربما نسأل أنفسنا أى الدالتين فى (2) قد فاضلنا (إشتققنا) والإجابة هى "فاضلنا الأثنين معا"

فمثلا إذا كانت $y=+\sqrt{25-x^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{25-x^2}}(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$$

وإذا كانت : $y=-\sqrt{25-x^2}$ فإن :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2\sqrt{25-x^2}}(-2x)=\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$$

مثال (1) :

إذا كانت $y^2+xy+x^2=3$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة (1, 1)

الحل :

نجرى الاشتقاق بالنسبة إلى x :

$$2y\cdot\frac{dy}{dx}+(x\cdot\frac{dy}{dx}+y\cdot 1)+2x=0$$

$$\frac{dy}{dx}(2y+x)+y+2x=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y+2x}{x+2y}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)}=-\frac{1+2}{1+2}=-1$$

مثال (2) :

لتكن $y = x^{m/n}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل :

$$y^n = x^m$$

تفاضل الطرفين بالنسبة إلى x :

$$n \cdot y^{n-1} \cdot \frac{dy}{dx} = m \cdot x^{m-1}$$

(بالضرب فى y)

$$n \cdot y^n \cdot \frac{dy}{dx} = m \cdot x^{m-1} \cdot x^{m/n}$$

$$n \cdot x^m \cdot \frac{dy}{dx} = m \cdot x^m \cdot x^{m/n-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{m/n-1}$$

أى أن : $\frac{dy}{dx} = rx^{r-1} \Leftarrow y = x^r$

حيث r كسرية بصورة $\frac{m}{n}$

مثال (5) : أوجد ميل المماس للمنحنى $x^4 + y^4 = 17$ عند النقطة (2,1) :

<u>الحل:</u>نوجد أولاّ: $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d}{dx}x^4 + \frac{d}{dx}y^4 = \frac{d}{dx}17 \Rightarrow 4x^3 + 4y^3\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x^3}{y^3}$$

إذن ميل المماس عند النقطة (2,1) هو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^3}{y^3} = \frac{-8}{1} = -8$$

7-3 تفاضل الدوال البارامترية : Derivative of Parametric Functions

أحيانا تعطى الدالة $y = f(x)$ بصورة مثل

$$x = \phi(t) \quad ، \quad y = \chi(t)$$

أى أن y ، x دالتـان فـى المتغيـر t. مثـل هـذه الصـورة تسـمى صـورة بارامتريـة ونسمى المتغير t (بارامتر). ومطلوب إيجاد $\frac{dy}{dx}$

القاعدة : $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt}\right) \Big/ \left(\frac{dx}{dt}\right)$

البرهان :

باعتبار ϕ ، χ دوال قابلة للتفاضل بالنسبة إلى t فإن :

$$\Delta t \to 0 \Leftarrow \Delta x \to 0 \quad ، \quad \Delta y \to 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = (\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \Big/ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t})$$

مثال :

لتكن $x = (t^2 + 1)$ ، $y = \sqrt{t}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل :

$$\frac{dx}{dn} = 2t \quad ، \quad \frac{dy}{dn} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4t\sqrt{t}}$$

تمارين (2-3)

1- $f(x) = (2x+1)^8$

2- $f(x) = (x^2 - 6x)^6$

3- $f(x) = (2x+1)^{-8}$

4- $f(x) = (2x^2 - 3x^{-2})^{-3}$

5- $f(x) = (x^2+1)^2 (x^3 - 3x)^{-2}$

6- $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$

7- $f(x) = \sqrt{(x^2+1)(x^2-2)}$

8- $f(x) = \sqrt[3]{(3x-2)^1}$

9- $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{x}$

10- $f(x) = \dfrac{x^2+3}{\sqrt{x+2}}$

11- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+4x}}$

12- $y = z^2$ ، $z = x^3 + x$ $\dfrac{dy}{dx}$ أوجد

13- $y = \dfrac{z^2}{z^2+1}$ ، $z = x^2 + 2$ $\dfrac{dy}{dx}$ أوجد

14- $y = z(\sqrt{z} - 1)$ ، $z = x^2\sqrt{2x-1}$

أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ بدلالة x ، y إذا كان :

15- $x^2 + y^2 = 4$

16- $x^4 + 2y^4 = 4$

17- $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

18- $\dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{x}{y}$

19- $1 = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$

20- $x^3 + x^2y + xy^2 = 0$

أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ إذا كان :

21- $x = n^6 - 4n^{-1}$ ، $y = n^3 - 2n$

22- $x = (z-2)^4$ ، $y = (z^3 - 2z)^{-2}$

23- $x = (z - 7z^{-2})^4$ ، $y = (z^2 + 4z)^5$

أوجد معادلة المماس للمنحنى عند النقط المبينة :

24- $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$ (1, 5)

25- $3x^2 + xy + 2y^2 = 9$ (-1, 2)

26- $x^3 - y^3 + 3xy = 3$ (2, -1)

8-3 المشتقات المتتالية ونظرية ليبنتز :

إذا كانت $y = f(x)$ دالة قابلة للإشتقاق فإننا بالتفاضل نحصل على (المشتقة الأولى) للدالة أو المعامل التفاضلى الأول :

$$y^{\backslash} = f^{\backslash}(x) \quad \text{or} \quad \frac{dy}{dx} = f^{\backslash}(x)$$

وإذا كانت الدالة الناتجة $f^{\backslash}$ قابلة للإشتقاق مرة ثانية فإننا بتفاضلها نحصل على (المشتقة الثانية) للدالة f ونرمز لها :

$$y^{\backslash\backslash} = f^{\backslash\backslash}(y)$$

أو

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = f^{\backslash\backslash}(x)$$

وهكذا إذا أمكن إيجاد المشتقات المتتالية فنحصل على :

$$y^{\backslash\backslash\backslash} = \frac{d^3y}{dx^3} = f^{\backslash\backslash\backslash}(x)$$

$$y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = f^{(4)}(x)$$

والمشتقة النونية بوجه عام :

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

مثال : أوجد المشتقات المتتالية للدالة : $y = x^6 + x^2$

الحل :

$$y^{\backslash} = 6x^5 + 2x$$

$$y^{\backslash\backslash} = 6\times 5x^4 + 2 = 30x^4 + 2$$

$$y^{\backslash\backslash\backslash} = 120x^3 \quad , \quad y^{(4)} = 360x^2$$

$$y^{(5)} = 720x \quad , \quad y^{(6)} = 720$$

$$y^{(7)} = y^{(8)} = ... = 0$$

قاعدة : إذا كانت $y = x^n$ فإن $y^{(n)} = n\,!$

البرهان :

$$y = x^n$$

$$y^{\backslash} = nx^{n-1} \qquad y^{\backslash\backslash} = n(n-1)x^{n-2}$$

$$y^{\backslash\backslash\backslash} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

وبوجه عام (ونحتاج للدقة الاستنتاج الرياضى) :

$$y^{(n)} = n(n-1)(n-2)...............2\times 1x^{n-n}$$
$$= n(n-1)(n-2)...............2\times 1$$
$$= n!$$

المشتقة النونية لحاصل ضرب دالتين :

4-3 (نظرية ليبنتز) Leibnitz's Theorem

لتكن $y = f \,.\, g$ حيث $f\,,\,g$ دالتين تفاضليتين فى x فإن :

$$y^{(n)} = f\cdot g^{(n)} + \binom{n}{1} f^{\backslash}\cdot g^{(n-1)} + \binom{n}{2} f^{\backslash\backslash}\cdot g^{(n-2)} + ... + f^{(n)}\cdot g$$

حيث $\binom{n}{r}$ هى معاملات مفكوك ذات الحدين ، $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

البرهان :

يحتاج لاستخدام الاستنتاج الرياضى ، ولكن نلاحظ أن :

$$y = f\cdot g$$
$$\Rightarrow \quad y^{\backslash} = f\cdot g^{\backslash} + f^{\backslash}\cdot g$$
$$y^{\backslash\backslash} = (f\cdot g^{\backslash\backslash} + f^{\backslash}\cdot g^{\backslash}) + (f^{\backslash}\cdot g^{\backslash} + f^{\backslash\backslash}\cdot g^{\backslash})$$
$$= f\cdot g^{\backslash\backslash} + 2f^{\backslash}\cdot g^{\backslash} + f^{\backslash\backslash}\cdot g$$
$$y^{\backslash\backslash\backslash} = f\cdot g^{\backslash\backslash\backslash} + 3f^{\backslash}\cdot g^{\backslash\backslash} + 3f^{\backslash\backslash}\cdot g^{\backslash} + f^{\backslash\backslash\backslash}\cdot g$$

لاحظ أن نظام المعاملات هو نفسه نظام معاملات مفكوك نظرية ذات الحدين ، مما يطمئن على صحة النتيجة ، وسوف لا نعطى تفاصيل البرهان.

مثال (1) :

أوجد المشتقة الرابعة للدالة $y = x^2\cdot(x+1)^5$

الحل : باستخدام نظرية ليبنتز :

$$F = x^2 \quad , \quad G = (x+1)^5$$
$$F^{\backslash} = 2x \quad , \quad G^{\backslash} = 5(x+1)^4$$
$$F^{\backslash\backslash} = 2 \quad , \quad G^{\backslash\backslash} = 4\cdot 5(x+1)^3$$
$$F^{(3)} = 0 \quad , \quad G^{(3)} = 4\cdot 5\cdot 3(x+1)^2$$
$$F^{(4)} = 0 \quad , \quad G^{(4)} = 4\cdot 5\cdot 3\cdot 2(x+1)$$
$$y = F\cdot G$$

$$y^{(4)} = F\cdot G^{(4)} + \binom{4}{1} F^{\backslash}\cdot G^{\backslash\backslash\backslash} + \binom{4}{2} F^{\backslash\backslash}\cdot G^{\backslash\backslash} + \binom{4}{3} F^{\backslash\backslash\backslash}\cdot G^{\backslash} + \binom{4}{4} F^{(4)}\cdot G$$

$$y^{(4)} = 120x^2(x+1) + 480x(x+1)^2 + 240(x+1)^3$$

لأن : $\binom{4}{1} = 4$, $\binom{4}{2} = \frac{4\times 3}{2\times 1} = 6$, $\binom{4}{3} = 4$

مثال (2) :

إذا كانت $y = \frac{x^2}{x+1}$ أوجد $f^{(3)}(1)$

الحل : باستخدام نظرية ليبتنز حيث :

$$f = x^2 \quad , \quad g = (x+1)^{-1}$$

$$f^{\backslash} = 2x \quad , \quad g^{\backslash} = -(x+1)^{-2}$$

$$f^{\backslash\backslash} = 2 \quad , \quad g^{\backslash\backslash} = +2(x+1)^{-3}$$

$$f^{(3)} = 0 \quad , \quad g^{(3)} = -6(x+1)^{-4}$$

$$y^{\backslash\backslash\backslash} = f \cdot g^{\backslash\backslash\backslash} + 3f^{\backslash} \cdot g^{\backslash\backslash} + 3f^{\backslash\backslash} \cdot g^{\backslash} + f^{\backslash\backslash\backslash} \cdot g$$

$$y^{\backslash\backslash\backslash} = -6x^2(x+1)^{-4} + 3(2x)\cdot 2(x+1)^{-3} + 3(2)(-1)(x+1)^{-2} + 0$$

بوضع $x = 1$

$$(y^{\backslash\backslash\backslash})_{x=1} = \frac{-6}{3^4} + \frac{12}{2^3} - \frac{6}{2^2} = \frac{-3}{8}$$

تمارين (3-3)

أوجد المشتقات التفاضيلية المبينة للدوال الآتية :

1- $y = 10x^2 - 7x$ $\qquad y^{\backslash\backslash}$

2- $y = (5x - 2)^2$ $\qquad y^{(3)}$

3- $y = \dfrac{x^2 - 5}{\sqrt{5}}$ $\qquad y^{\backslash\backslash}$

4- $y = \sqrt{2x + 1}$ $\qquad y^{(3)}$

5- $y = (2x + 1)^4$ $\qquad y^{(4)}$

6- $y = x^2 (x + 1)^3$ $\qquad y^{(4)}, \quad y^{(4)}(1)$

7- $y = \dfrac{x^3}{x - 1}$ $\qquad y^{(3)}, \; y^{(3)}(1)$

8- $y = y = x^2\sqrt{x + 3}$ $\qquad y^{(5)}, \; y^{(5)}(1)$

الفصل الرابع

4-1 مشتقات الدوال المثلثية : Derivatives of trigonometric functions

نظرية 4-1 :

إذا كانت $f(x) = \sin x$ فإن $f^{\backslash}(x) = \frac{df}{dx} = \cos x$

البرهان : بتطبيق خطوات الاشتقاق

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\sin x \cos x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\sin x(\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \sin x \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$\therefore f^{\backslash}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \sin x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \lim \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \sin x \times 0 + \cos x \times 1 = \cos x$$

نظرية 4-2 :

إذا كانت $f(x) = \cos x$ فإن $f^{\backslash}(x) = \frac{df}{dx} = -\sin x$

البرهان : بتطبيق خطوات برهان النظرية السابقة.

ملاحظات :

1- إذا كانت $y = \sin x$ فإن $y^{\backslash} = \frac{dy}{dx} = \cos x$

2- إذا كانت $z = \sin y$ حيث $y = f(x)$

فإن $\frac{dz}{dx} = \cos y \times \frac{dy}{dx}$

فمثلا : إذا كانت $z = \sin(3x+5)$ فإن

$$\frac{d}{dz} = \cos(3x+5) \times \frac{d}{dx}(3x+5)$$

$$= 3\cos(3x+5)$$

3- إذا كانت $y = f(\sin x)$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = f^{\backslash}(\sin x) \cos x$$

فمثلا إذا كانت $y = \sin^n x = (\sin x)^n$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = n\,(\sin x)^{n-1}\cos x$$
$$= n\ \sin^{n-1} x\ \cos x$$

مثال (1) : أوجد $y^{\backslash}$ إذا كانت $y = \sin(3x^2 + 5)$

الحل :

$$y^{\backslash} = \cos(3x^2+5) \times \frac{d}{dx}\ (3x^2+5)$$
$$= 6x\cos(3x^2+5)$$

ومنها نلاحظ أن $y^{\backslash\backslash} = 6\cos(3x^2+5) - 36x^2\sin(3x^2+5)$

مثال (2) : إذا كانت $y = \sin^3(3x^2+5)$ أوجد $y^{\backslash}$

الحل : يلاحظ أن $y = \sin^3\theta$ حيث $\theta = 3x^2+5$

وأن $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\theta} \times \dfrac{d\theta}{dx}$

ولكن $\dfrac{dy}{d\theta} = 3\sin^2\theta \times \cos\theta$

$$\frac{d\theta}{dx} = 6x$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = 18x\sin^2(3x^2+5)\cos(3x^2+5)$$

مثال (3) : إذا كانت $y = \cos\sqrt{x^2+4}\ \dfrac{dy}{dx}$ أوجد $\dfrac{dy}{dx}$

الحل : بفرض أن $\theta = \sqrt{x^2+4}$ نجد أن $y = \cos\theta$

وحيث أن $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{d\theta}{dx}$

ولكن $\dfrac{dy}{d\theta} = -\sin\theta,\ \dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{1}{2}(x^2+4)^{-1/2} \times 2x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\sin\sqrt{x^2+4}$$

مثال (4) : أوجد مشتقة الدالة $y = \cos^2(x^2+4)$ بالنسبة إلى x

الحل :بوضع $z = x^2+4$ نجد أن $y = \cos^2 z$

وبالتالى يكون $\dfrac{dy}{dz} = 2\cos z \times -\sin z$

$$= -2\cos z \sin z$$

$$\frac{dz}{dx} = 2x$$

وحيث أن $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} = \frac{dz}{dx}$

فإن $\frac{dy}{dx} = -4x\cos(x^2+4)\sin(x^2+4)$

نظرية 3-4 :

1- إذا كانت $y = \tan\ x$ فإن $y^{\backslash} = \sec^2 x$

2- إذا كانت $y = \text{cotan}\ x$ فإن $y^{\backslash} = -\ \text{cosec}^2 x$

3- إذا كانت $y = \sec\ x$ فإن $y^{\backslash} = \sec x \tan x$

4- إذا كانت $y = \text{cosec}\ x$ فإن $y^{\backslash} = -\ \text{cosec}\ x\ \text{cotan}\ x$

البرهان :

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

بإجراء الاشتقاق لخارج قسمة دالتين نجد أن

$$y^{\backslash} = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات صحة بقية أجزاء النظرية.

مثال (5) : أوجد $y^{\backslash}$ إذا كانت $y = \text{cosec}^3 6x$

الحل : بفرض أن $\theta = 6x$ نحصل على $y = \text{cosec}^3\theta\ ,\ \ \theta = 6x$

ومنها

$$y^{\backslash} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx} = -3\cos ec^2\theta \cos ec\theta \times \cot an\theta \times 6$$

$$= -18\cos ec^3 6x \cot an 6x$$

مثال (6) : إذا كانت $y = \tan(2x + y)$ أوجد $y^{\backslash}$

الحل : يلاحظ هنا أن الدالة معطاه فى صورة ضمنية. وللتفاضل بالنسبة إلى x فإن :

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(2x+y) \times \frac{d}{dx}(2x+y)$$

$$= \sec^2(2x+y) \times (2 + \frac{dy}{dx})$$

أى أن : $y^{\backslash} = 2\sec^2(2x+y) + y^{\backslash}\sec^2(2x+y)$

ومنها نحصل على

$$y^{\backslash} = -\frac{2\sec^2(2x+y)}{\sec^2(2x+y)-1}$$

$$= -\frac{2\sec^2(2x+y)}{\tan^2(2x+y)} = -2\operatorname{cosec}^2(2x+y)$$

ملاحظة : فى هذا المثال استخدمنا بعض المتطابقات المثلثية لوضع الإجابة فى أبسط صورة ممكنة.

مثال (7) : إذا كانت $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta), \quad y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

أوجد dy/dx حيث a ثابت حقيقى.

الحل : الدالة المعطاة فى صورة بارامترية حيث كلا من x, y دالة فى θ وبالتالى فإن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = \left(\frac{dy}{d\theta}\right) \Big/ \left(\frac{dx}{d\theta}\right)$$

ولكن

$$\frac{dy}{d\theta} = a\{\cos\theta - [\theta \times (-\sin\theta) + \cos\theta + 1]\}$$

$$= a\{\cos\theta + \theta\sin\theta - \cos\theta\}$$

$$= a\theta\sin\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a\{-\sin\theta + [\theta \times \cos\theta + \sin\theta \times 1]\}$$

$$= a\{-\sin\theta + \theta\cos\theta + \sin\theta\}$$

$$= a\theta\cos\theta$$

ومنها

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\theta\sin\theta}{a\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

مثال (8) : أوجد المشتقة التفاضلية للدالة

$$f(x) = 5\sin x - \frac{1}{2}\sec x + x\tan x - 7x^2 + 3$$

الحل :

$$f'(x) = 5\cos x - \frac{1}{2}\sec x\tan x + x\sec^2 x + \tan x(1) - 14x$$

مثال (9) : أوجد المشتقة التفاضلية للدالة

$$f(x)=\frac{1+\sin x}{x+\cos x}$$

الحل :

$$f'(x)=\frac{(x+\cos x)\dfrac{d}{dx}(1+\sin x)-(1+\sin x)\dfrac{d}{dx}(x+\cos x)}{(x+\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x+\cos x)(\cos x)-(1+\sin x)(1-\sin x)}{(x+\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x\cos x+\cos^2 x)-(1-\sin^2 x)}{(x+\cos x)^2}=\frac{x\cos x+\cos^2 x-1+\sin^2 x}{(x+\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x\cos x}{(x+\cos x)^2}$$

مثال (10) : إذا كانت $2y=x^2+\sin y$ أوجد $y^\backslash$

الحل :

$$\frac{d}{dx}2y=\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}\sin y\Rightarrow 2\frac{dy}{dx}=2x+\cos y\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow 2\frac{dy}{dx}-\cos y\frac{dy}{dx}=2x\Rightarrow\frac{dy}{dx}\left(2-\cos y\right)=2x$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{2-\cos y}$$

تمارين (4-1)

أوجد مشتقات الدوال الآتية حتى الرتبة الثانية بالنسبة إلى متغيرها المستقل :

(1) $y = x \sin x$
(2) $y = x / \sin x$
(3) $y = \sin x \cos 2x$
(4) $y = \sin^2 3x$
(5) $y = (\sin x + \cos x)^2$
(6) $y = \sin^2 \sqrt{x}$
(7) $y = \sin^2 4x + \cos^3 7x$
(8) $y = x^2 \sin(1/x)$
(9) $y = \sqrt{(1+\sin\theta)/(1-\sin\theta)}$
(10) $x = \sin 2\theta / \sin 3\theta$
(11) $x = \sec^2 5\theta$
(12) $x = \sec\Psi + 5\cot an\Psi$
(13) $y = 3\varphi \sin\frac{1}{\varphi}$
(14) $y = \tan\frac{x}{1-x}$
(15) $y = \frac{\sin 2\theta}{2\sin\theta}$
(16) $y = \cos(3x+7)^2$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان :

(17) $\sin y = x$
(18) $\tan x + \tan y = 1$
(19) $y = \sin(x - y)$
(20) $y = \cot an(2x + y) + \operatorname{cosec} y + 1$

2-4 الدوال المثلثية العكسية : **Inverse trigonometric functions**

نعلم مما سبق أن دالة الجيب : $y = \sin x$ معرفة لجميع قيم $x \in \mathbb{R}$ وهى دالة دورية دورتها 2π وبالتالى تتكرر قيم الدالة لقيم مختلفة للمتغير x فمثلا :

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

وهى دالة غير أحادية ولكن إذا قصرنا نطاق تعريف الدالة على الفترة

$$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

تصبح الدالة أحادية وفوقية حيث $-1 \le y \le 1$

أى أن $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$

وتعرف الدالة العكسية لها بالصورة : $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

أو $x = \sin^{-1} y \; ; \; -1 \le y \le 1$

فمثلا :

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \; , \quad \sin^{-1}\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin^{-1}(0) = 0 \quad , \quad \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

بالمثل يمكن تعريف بقية الدوال المثلثية العكسية بتغيير نطاق تعريف الدالة المثلثية المناظرة لتصبح دالة أحادية. وبالتالى نحصل على الدالة العكسية لها. وسنعطى ملخصا لذلك فبما يلى :

3-4 مشتقات الدوال المثلثية العكسية :

Derivatives of inverse trigonometric functions

نظرية 4-4 :

لتكن $y = \sin^{-1} x$ **حيث** $-1 \le y \le 1$ ، $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

فإن $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

البرهان : إذا كانت $y = \sin^{-1} x$ فإن $x = \sin y$

باعتبار هذه الدالة فى الصورة الضمنية بالنسبة إلى y نجد أن التفاضل الضمنى بالنسبة إلى x يعطى

$$1 = \cos y \times \frac{dy}{dx}$$

ومنها نحصل على $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \; -1 < x < 1$

نظرية 4-5 :

إذا كانت $y = \cos^{-1} x$ حيث $-1 < y < 1$ ، $0 < y < \pi$

فإن $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

البرهان :

كما سبق فى حالة دالة الجيب لاحظ أن :

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$$

لأنه إذا كانت $y = \cos^{-1} x$

فإن $\quad x = \cos y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \quad$ أو $\quad \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x = y = \cos^{-1} x$

نظرية 4-6 :

إذا كانت $y = \tan^{-1} x$ بحيث $-\infty < x < \infty$ ، $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

فإن $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}$

البرهان :

$$y = \tan^{-1} x \quad \rightarrow \quad x = \tan y$$

بالتفاضل الضمنى بالنسبة إلى x ، نحصل على

$$1 = \sec^2 y \times \frac{dy}{dx}$$

ومنها $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$

نظرية 4-7 :

(1) إذا كانت $-\infty < x < \infty$ ، $y = \cot an^{-1} x$

فإن $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$

(2) إذا كانت $1 < |x|$ ، $y = \sec^{-1} x$

فإن $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

(3) إذا كانت $1 < |x|$ ، $y = \operatorname{cosec}^{-1} x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

مثال (1) : أوجد تفاضل الدالة $y = \sin^{-1} 5x$

الحل : بوضع $\theta = 5x$ نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} \times 5 = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

مثال (2) : أوجد $y^\backslash$ إذا كانت $y = \cos^{-1}(1/x)$

الحل : نفرض أن $z = 1/x$ نحصل على $y = \cos^{-1} z$

$$\therefore\ y^\backslash = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}} \times \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

مثال (3) : فاضل الدالة $y = \cot an^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

الحل : بوضع الدالة على الصورة $y = \operatorname{cotan}^{-1} \theta$ حيث $\theta = 2x/(1-x^2)$

وبتفاضل دالة الدالة نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+\theta^2} \times \frac{dy}{dx}$$

ولكن $$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-x^2)(2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}$$

وبالتالى يكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+\left(\frac{2x}{(1-x^2)}\right)^2} \times \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{-(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2 + (2x)^2} \times \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{-2}{1+x^2}$$

تمارين (3-4)

أوجد المشتقة التفاضلية $(y^{\backslash})$ لكل من الدوال الآتية :

(1) $y = \sin^{-1}(2x)$

(2) $y = \cos^{-1}(x12)$

(3) $y = \tan^{-1}(2x + 5)$

(4) $y = \text{cotan}^{-1}(x^2 - 1)$

(5) $y = x^2 \sin^{-1} 7x$

(6) $y = \cos^{-1}(x + y)$

(7) $y = \tan^{-1} \dfrac{7x}{\sqrt{1-x^2}}$

(8) $y = \sin^{-1} \dfrac{xy}{x^2+1}$

(9) $y = \sec^{-1} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{6x}$

(10) $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

(11) $y = \sin^{-1}(3x^2+5x+1) + x^2\cos^{-1}(x+1)$

(12) $y = \dfrac{1}{4}\sec^{-1} x^2 + 2c0s^{-1}(1/x)$

(13) $y = x\sqrt{9-x^3} + 16\sin^{-1}\dfrac{x}{4}$

(14) $xy = \tan^{-1}\dfrac{4}{x^2}$

(15) $\tan^{-1} y = 2\tan^{-1}\dfrac{y}{2}$

(16) $y = x\sqrt{9-x^2}\,\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$

الفصل الخامس
الدوال الأسية واللوغاريتمية
Exponential & logarithmic functions

عند دراستنا لقواعد الأسس واللوغاريتمات فى مبادئ الجبر ، عرفنا أنه إذا كان a عدداً موجباً ، n , m عددين صحيحين موجبين فإن :

$$a^n \times a^m = ma^{m+n}, \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};\ m \geq n,$$

$$(am)^n = a^{m\,x\,n}$$

كما عرفنا الجذر النونى $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

وثبت أيضا أن القواعد السابقة صحيحة عند تكون m, n كسرية ولكن تعريف مثل العدد $a^{\sqrt{2}}$ ليس أمر سهلا ، كذلك تعريف العدد a^x لأى عدد حقيقى x. وسيكون قبولنا بالقواعد

$$a^x \times a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

حيث x, y عددان حقيقيان.

مرتبطاً بالمعنى المفهوم للعدد a^x. وبذلك فإن تناظر ينشأ بين قيم x الحقيقية والقيمة a^x وهذا يعرف دالة تعطى بالقاعدة $y = a^x$ تسمى الدالة الأسية. وكما هو معروف يسمى العدد a بالأساس ، x تسمى الأس أو القوة.

للتعرف على خواص الدالة $y = a^x$ نعتبر الحالة الخاصة عند $a = 7$ (مثلا) ، x تأخذ فقط قيما قياسية أى $x \in Q;\ x \in R;\ y = 7^x$

تحقق الخواص الآتية :

1- $y \geq 0 \ \forall\ x \in R$

فمثلا :

$y(1) = 7, \qquad y(2) = 49, \qquad y(0) = -1$

$y(-1) = 117, \quad y(-2) = \frac{1}{49}, \quad \ldots\ldots$

2- $y = 7^x$

دالة تزايدية Increasing function

لأنه إذا كانت $x_1 < x_2$ فإن $7^{x_1} < 7^{x_2}$

فمثلا :

$$y(2) < y(3), \quad 7^2 = 49 < 343 = 7^3$$

$$y(-3) < y(0), \quad 7^{-3} = \frac{1}{343} < 1 = 7^{0}$$

1-5 العدد الطبيعى ℓ :

كثيرا ما يظهر العدد e كأساس للدالة أسية هى $y = e^{x}$.

ولهذا العدد أهمية بالغة فى كثير من المسائل الرياضية والفيزيائية وفى تعريف ما يسمى باللوغاريتم الطبيعى natural logarithm وسوف نتعرض لذلك فيما بعد.

توجد عدة طرق يمكن بها تعريف العدد e أهمها وأشهرها :

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \qquad (1)$$

ويأخذ القيمة التقريبية.

$$e = 2.7182818284 \qquad (2)$$

وسوف نثبت الآن أن $2 < e < 3$

قبل مناقشة البرهان نبدأ بالتمهيد :

n	1	2	3	4	5	10
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$	2	2.25	2.3704	2.4414	2.4883	2.5938
n	100	$\lambda 000$		$\lambda 0000$		----
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$	2.7048	2.7169		2.7181		----

واضح من الجدول أن $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ تتزايد بتزايد n ولكن ليس سريعا.

الآن نفرض أن

$$u_{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

بتطبيق نظرية ذات الحدين

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^{2} + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)\ldots\ldots[n-(n-1)]}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

وحيث أن

$$1 > \left(1-\frac{1}{n}\right) > \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) > .... > \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)......\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

فإننا نستنتج أن

$$u_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.........+\frac{1}{n!}$$

وباستخدام البديهيات

$$\frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}\ ,\ \frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3}\ ,\ ....\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

بذلك يكون

$$u_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+.........+\frac{1}{2^{n-1}}$$

ومنها يتضح أن

$$2 < u_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+.........+\frac{1}{2^{n-1}}$$

بأخذ النهاية عندما $n \to \infty$ نجد أن

$$2 < \lim_{n\to\infty} u_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+.........$$

$$2 < \lim_{n\to\infty} u_n < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

وحيث أن

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\therefore\quad 2 < e < 3$$

مع ملاحظة أننا تفادينا بعض التفاصيل الدقيقة والخاصة بتقارب التسلسلات.

تترابط بالتعريف (1) للعدد e عدد من النهايات الهامة التى تعطى تعريفا للدالة الأسية e^x يتضح ذلك من النتائج التالية :

نتيجة (1) :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{xn} = e^x$$

البرهان :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{xn} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^x = e^x$$

نتيجة (2) :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = e^x$$

البرهان : $n \to \infty \;\Rightarrow\; \dfrac{n}{x} \to \infty$, $\left(1+\dfrac{x}{n}\right) = \left\{\left(1+\dfrac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right\}^{x}$

لذلك

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = \lim_{\frac{n}{x}\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right\}^{x}$$

$$=\left[\lim_{\frac{n}{x}\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right]^{x} = e^{x}$$

نتيجة (3) :

$$e^{x} = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

البرهان : من نتيجة (2) نعلم أن

$$e^{x} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$$

بتطبيق نظرية ذات الحدين

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = 1+\frac{n}{1!}\left(\frac{x}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^{2}+\ldots\ldots.$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots[n-(n-1)]}{n!}\left(\frac{x}{n}\right)^{n}$$

$$=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{x^{3}}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

$$+\ldots\ldots.+\frac{x^{n}}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما $n \to \infty$

$$e^{x} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$$

$$=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

نتيجة (4) : $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$

البرهان : بوضع $x = \dfrac{1}{y}$ فإن

$$x \to 0 \;\Rightarrow\; y \to \infty$$

وبالتالى فإن $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$$

من التعريف (1).

سوف نقبل النتيجة السابقة إذا تصورنا أن y تأخذ فقط قيما صحيحة موجبة وأن $y \to \infty$.

مثال (1) : أوجد قيم النهايات الآتية :

$$(1)\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x} \qquad\qquad (2)\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+4}$$

الحل :

$$(1)\quad \because\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x} = e^{5}$$

$$(2)\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+4} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{4} = e\times 1 = e$$

مثال (2) : أوجد قيم النهايات التالية :

$$(i)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-2}\right)^{n} \qquad\qquad (ii)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(1+x)}{x}$$

الحل :

$$(i)\quad \left(\frac{n+2}{n-2}\right)^{n} = \left(\frac{1+2/n}{1-2/n}\right)^{2} = \frac{(1+2/n)^{n}}{(1-2/n)^{n}} = \frac{(1+2/n)^{n}}{[1+(-2/n)]^{n}}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-2}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n}\right)^{n}$$

$$= e^{2}\times e^{-(-2)} = e^{4}$$

بتطبيق النتيجة (2).

$$(ii)\quad \frac{\mathrm{Ln}(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\mathrm{Ln}(1+x) = \mathrm{Ln}(1+x)^{1/x}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\mathrm{Ln}(1+x)^{1/x}$$

$$= \mathrm{Ln}\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right]$$

$$= \mathrm{Ln}[e] = 1$$

تمارين (5-1)

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$ (2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$ (4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+4\cot\text{an}\,x\right)^{\tan x}$

(5) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} x}\right)^{5\operatorname{cosec} x}$ (6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2+\sec x}{3+\sec x}\right)^{5\sec x}$

(7) $\lim_{x\to\infty}\left[\text{Ln}(1+x)-\text{Ln}\,x\right]$ (8) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\text{Ln}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

(9) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$ (10) $\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{2}{\text{Ln}\,x}\right)^{1/\ln x^5}$

(11) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+\sin x}{3+\sin x}\right)^{1/x}$

5-2 الدالة الأسية e^x :

تعرف الدالة الأسية e^x بالصورة $f(x)=e^x$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\dots\dots\dots,\qquad x\in\mathbb{R},\ (1)$$

وعلى أساس هذا التعريف يمكن اشتقاق الخواص الجبرية والتحليلية لهذه الدالة لأى عدد حقيقى x. وكما عرفنا من البند السابق أنه عندما $x = 1$ فإن التسلسلة (1) تعطى مجموعا محدودا ، فإنه يمكن بيان أنه لكل قيمة حقيقية x تكون e^x قيمة محدودة. أيضا خواص هامة للدالة e^x توضحها النظرية التالية :

نظرية 5-2 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\ \ \lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{e^x}=0\ ;\ p>0\quad (2)$$

البرهان : من (1) نجد أن

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{z}\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\dots\right)$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\dots\dots\right)=1$$

كذلك لكل $o < p$

$$0 < \frac{e^x}{x^p} = \frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.......+\frac{x^p}{p!}+\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}+.....}{x^p} > \frac{x}{(p+1)!}$$

$$\therefore \ \lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{e^x} \ < \ \lim_{x\to\infty}\frac{(p+1)!}{x}=0$$

بوضع x - بدلا من x فى (1) نحصل على :

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}............ \ (3)$$

بعض النتائج الهامة :

$$(1) \qquad \frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+..........$$

$$(2) \qquad \frac{e^x+e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+..........$$

وسنرى فيما بعد أن هاتين الصورتين تعبران عن دوال جديدة لها خواص ذات أهمية وتسمى بالدوال الزائدية.

3-5 الدالة اللوغاريتمية :

تعرف الدالة اللوغاريتمية بالصورة العامة :

$$y=\log_a x \ ; \quad a<x\in\mathbb{R}$$

ويسمى العدد $a \in \mathbb{R}$ بالأساس وترتبط الدالة اللوغاريتمية بالدالة الأسية.

$$x=a^y \quad , \quad y\in\mathbb{R}$$

هذا يعنى أن $y = a^x$ تكافئ $x=\log_a y$ كذلك فإن $y=\log_a x$ تكافئ $x = a^y$

أى أن الدالة اللوغاريتمية هى الدالة العكسية للدالة الأسية. وإذا كان $a = e$ فإن الدالة اللوغاريتمية الناتجة $y=\log_e x \ : \ln x \ ; \ x>0$

تسمى باللوغاريتم الطبيعى ويرمز لها بالرمز $\ln$ بدلا من $\log$ ويجب ملاحظة أن :

1- نطاق تعريف (مجال) الدالة الأسية هو فئة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

2- مدى الدالة الأسية هو فئة الأعداد الحقيقية الموجبة $\mathbb{R}^+$. مهما كانت قيمة x فإن $y=e^x>0$.

3- مجال الدالة اللوغاريتمية هو الأعداد الحقيقية الموجبة $\mathbb{R}^+$ ، أى أن

$$y = \log \ x \quad , \quad x \ > \ 0$$

4- مدى الدالة اللوغاريتمية هو فئة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، ويلاحظ أن

$$y=\log|x| \quad \forall \quad x\neq 0$$

كما أن مقبول لنا صحة القواعد الآتية :

إذا كانت a, b, c, r أعداد حقيقية فإن :

(1) $\log_a a = 1$ (2) $\log_c a^r = r\log_c a$

(3) $\log_a bc = \log_a b + \log_a c, \quad \log_c \dfrac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$

(4) $\log_c a = \dfrac{\log_c a}{\log_c c} = \dfrac{\ln a}{\ln c}, \quad \log_c e = \dfrac{1}{\ln c}$

4-5 الدالة الأسية a^x

نقدم هنا صيغة للتعبير عن الدالة الأسية a^x بدلا لة الدالة اللوغاريتمية والعدد e كأساس بدلا من a ، وهذه الصيغة تساعد فى دراسة الخواص التحليلية للدالة a^x .

فإذا كانت $a=e^b$ فإن $b=\ln a$ وبالتالى نجد أن

$$a=e^{\ln a} \quad , \quad a\in\mathbb{R}$$

والآن إذا كانت $y=a^x \quad ; \quad x\in\mathbb{R}$

فإن $y=e^{x\ln a}$

وهذا يعنى أنه يمكن التعبير عن أى دالة أسية بدلالة الدالة الأسية الطبيعية [التى أساسها e] وأن

$$a^x = 1+\frac{x\ln a}{1!}+\frac{x^2(\ln a)^2}{2!}+\frac{x^3(\ln a)^3}{3!}+.........$$

5-5 تفاضل الدوال الأسية واللوغاريتمية

Derivatives of exponential & logarithmic functions

نظرية 5-3 :

(1) إذا كانت $y=e^x$ فإن $\dfrac{dy}{dx}=e^x$

(2) إذا كانت $y=a^x$ فإن $\dfrac{dy}{dx}=a^x\ln a$

(3) إذا كانت $y=\ln x$ فإن $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x} \quad ; \quad x\neq 0$

(4) إذا كانت $y=\log_a x$ فإن $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x\ln a} \quad ; \quad x\neq 0$

البرهان :

(1) إذا كانت $f(x) = e^x$ فإن

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{(x+\Delta x)}-e^x}{\Delta x}$$

$$= e^x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x \times 1 = e^x$$

حيث استخدمنا نظرية (2-5). بذلك نكون قد أثبتنا أن

$$\frac{d}{dx}\left[e^x\right] = e^x$$

(2) إذا كانت $y = a^x$ فإن

$$y = e^{x\ln a}$$

بفرض $\theta = x\ln a$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = e^{\theta} \times \frac{d\theta}{dx} = a^x \ln a$$

وبصفة عامة:

$$\frac{d}{dx}\left(a^{u(x)}\right) = a^u \ln a \frac{du}{dx} \quad , \qquad \frac{d}{dx}\ln u(x) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \ ; \ u \neq 0$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a u(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln u}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \ , \qquad \frac{d}{dx}(e^{u(x)}) = e^{u(x)}\frac{du}{dx}$$

مثال (1) : أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية :

(1) $y = \ln(\cos x)$, (2) $y = \ln(e^{2x} + \sec x)$

(3) $y = \dfrac{e^x}{\ln x}$, (4) $y = 7^{\sin x}$

الحل :

(1) $$y^{\backslash} = \frac{1}{\cos x} \times \frac{d}{dx}(\cos x) = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

(2) $$y^{\backslash} = \frac{1}{e^{2x}+\sec x} \times (2e^{2x} + \sec x \tan x)$$

(3) $$y^{\backslash} = \frac{\ln x \times e^x - e^x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{e^x}{\ln x} - \frac{e^x}{x(\ln x)^2}$$

(4) $$y^{\backslash} = \sin^{-1}(e^{5x}) \times \frac{d}{dx}[\ln(x^2+2)] + \ln(x^2+2) \times \frac{d}{dx}[\sin^{-1}(e^{5x})]$$

$$= \frac{2x\sin^{-1}(e^{5x})}{x^2+2} + \frac{5e^{5x}\ln(x^2+2)}{\sqrt{1-e^{10x}}}$$

(5) $$y^{\backslash} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x}$$

(6) $$y^{\backslash} = 7^{\sin x}\ln 7\cos x$$

مثال (2) : أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية :

(1) $$y = e^{\sin x}(x + \sin^{-1} x^2).$$

(2) $$y = \log\left\{\log(\log x^2)\right\}.$$

(3) $$e^{\sin y} - 5\sin^2\sqrt{x} = 0.$$

(4) $$y = \ln x^4 + \ln^3 x^2.$$

الحل :

(1) $$y^{\backslash} = e^{\sin x}\left\{1 + \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} + \cos x(x + \sin^{-1} x^2)\right\}.$$

(2) $$y^{\backslash} = \frac{1}{\log(\log x^2)}\cdot\frac{1}{\log x^2}\cdot\frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x\log x^2\log\log x^2}.$$

(3) $$\cos y\, e^{\sin y} y^{\backslash} - 10\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$y^{\backslash}\cos y\, e^{\sin y} = \frac{5}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}$$

$$\therefore\ y^{\backslash} = \frac{5\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos y\, e^{\sin y}}$$

(4) $$y^{\backslash} = \frac{4}{x} + \frac{6\ln^2 x^2}{x}$$

مثال (3) : أوجد $y''(0)$ للدالة الآتية : $e^y + xy = e.$.

الحل :

$$e^y y' + y + xy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x+e^y} \Rightarrow y'' = -\frac{y'(x+e^y) - y(1+e^y y')}{(x+e^y)^2}$$

عند $x = 0$ نجد أن $y = 1,\ y'(0) = -\left.\frac{y}{x+e^y}\right|_{x=0} = -\frac{1}{e},$

إذن

$$y''(0) = -\frac{y'(x+e^y) - y(1+e^y y')}{(x+e^y)^2}\bigg|_{x=0} = \frac{1}{e^2}.$$

6-5 التفاضل اللوغاريتمى : Logarithmic differentiation

فى بعض الحالات يصعب إيجاد المشتقة التفاضلية بالطرق العادية ويلزمنا استخدام التفاضل اللوغاريتمى ، وذلك بإيجاد لوغاريتم الدالة المراد تفاضلها فنحصل على دالة ضمنية ، ثم بإجراء التفاضل بالطرق العادية نحصل على المشتقة المطلوبة ، لتوضيح ذلك نتبع الأمثلة الآتية.

مثال (1) : اشتق الدوال الآتية بالنسبة إلى x :

(i) $y = x^x$. (ii) $y = x^{\sin x}$.

(iii) $y^{\cos x} = (\sin x)^y$. (iv) $y = \sqrt{\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}}$

الحل :

(i) $y = x^x$

$\therefore \ \ln y = x \ln x$

بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على :

$$\frac{1}{y} y' = \ln x + 1$$

$$\therefore \ y' = x^x (\ln x + 1)$$

(ii) $y = x^{\sin x}$

$\ln y = \sin x \ln x$

$$\therefore \ y' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

مثال (2) : اشتق الدوال الآتية بالنسبة إلى x :

(3) $y = x^{x^x}$, (4) $y = (\sin(7x))^{2x}$

الحل :

(3) x^{x^x}

نضع $u = x^x$ ومن المثال السابق $\dfrac{du}{dx} = x^x(1 + \ln x)$

وتكون $y = x^u$ ، بأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل علي $\ln y = u \ln x$

نفاضل الطرفين بالنسبة إلى x

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{u}{x}+\ln x\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=x^{x^x}\left(x^{x-1}+x^x\ln x\times(1+\ln x)\right)$$

$(4)\,y=(\sin(7x))^{2x}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل علي:

$$\ln y=\ln\left(\sin(7x)\right)^{2x}=2x\cdot\ln\sin(7x)$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على :

$$\frac{d}{dx}\ln y=\frac{d}{dx}\left[2x\cdot\ln\sin(7x)\right]=2\frac{d}{dx}\left[x\cdot\ln\sin(7x)\right]$$

$$\frac{y'}{y}=2\left[1\cdot\ln\sin(7x)+x\cdot\frac{1}{\sin(7x)}\frac{d}{dx}\sin(7x)\right]$$

$$\frac{y'}{y}=2\left[\ln\sin(7x)+x\cdot\frac{1}{\sin(7x)}\cos(7x)\cdot\frac{d}{dx}(7x)\right]$$

$$\frac{y'}{y}=2\left[\ln\sin(7x)+x\cdot\cot(7x)\cdot 7\right]$$

$$\therefore\ y'=2(\sin(7x))^{2x}\left[\ln\sin(7x)+7x\cot(7x)\right]$$

مثال (3) : اشتق الدوال الآتية بالنسبة إلى x :

$$y=\frac{\sin^5 x\cdot\cos^7 x}{(2x^2+7x-1)^3}$$

<u>الحل:</u> بأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل علي:

$$\therefore\ \ln y=\ln(\sin^5 x)+\ln(\cos^7 x)-\ln(2x^2+7x-1)^3$$

$$\therefore \ln y=5\ln(\sin x)+7\ln(\cos x)-3\ln(2x^2+7x-1)$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على :

$$\frac{y'}{y}=\frac{5}{\sin x}(\frac{d}{dx}\sin x)+\frac{7}{\cos x}(\frac{d}{dx}\cos x)-\frac{3}{2x^2+7x-1}\frac{d}{dx}(2x^2+7x-1)$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{5}{\sin x}\cos x+\frac{7}{\cos x}(-\sin x)-\frac{3}{2x^2+7x-1}(4x+7)$$

$$\frac{y'}{y} = 5\cot x - 7\tan x - \frac{3(4x+7)}{2x^2+7x-1} \Rightarrow y' = y\left[5\cot x - 7\tan x - \frac{3(4x+7)}{2x^2+7x-1}\right]$$

$$\therefore y' = \frac{\sin^5 x \cdot \cos^7 x}{(2x^2+7x-1)^3}\left[5\cot x - 7\tan x - \frac{3(4x+7)}{2x^2+7x-1}\right]$$

تمارين (2-5)

(1) $y = x e^{x}$

(2) $y = x^{n} e^{-x}$

(3) $y = \dfrac{e^{x} - 1}{e^{x} + 1}$

(4) $y = e^{\sin^{2} x}$

(5) $y = e^{e^{x}}$

(6) $y = e^{x^{e}}$

(7) $y = 2e^{\sqrt{4-x^{2}}} \qquad |x| \le 2$

(8) $y = 2^{\sin^{-1} 3x} + (\sin^{-1} 3x)^{2}$

(9) $y = x \ln x$

(10) $y = \tan^{-1} \ln x$

(11) $y = \cos^{-1} \ln (x^{2} + 1)$

(12) $y = (\cos^{-1} x)^{x}$

(13) $y = \ln(\tan x + \sec x)$

(14) $y = x^{\ln x}$

(15) $y = x^{x^{2}} + x^{\sin x}$

(16) $\dfrac{x}{y} + \ln y = e^{x^{2}}$

(17) $\tan^{-1} \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2} \ln (x^{2} + y^{2})$

(18) $e^{y} = x + y$

(19) $x = e^{\theta} \cos\theta \,, \quad y = e^{\theta} \sin\theta$

(20) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^{3}(x+1)}}$

(21) $e^{x} + e^{y} = 3^{x}$

(22) $e^{x+y} + \ln x - 5 = 0$

(23) $e^{3y} + \ln 2x = 10x - 7y$

(24) $x^{2} e^{-y} + (y - x) e^{2x} = 100$

7-5 الدوال الزائدية Hyperbolic functions:

من المفيد أن نعرف دوال جديدة تسمى بالجيب الزائدى hyperbolic sine وتكتب cosh x وهذه الدوال تحقق خواصا تشبه خواص الدوال المثلثية (أو الدائرية) sin x, cos x ترتبط هذه الدوال الزائدية بالدالة الأسية e^x ، هذه العلاقة توضحها الصور الآتية :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \;; \quad x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

كنتيجة مباشرة للمتساوية (1) بند (5-) ، نستنتج أن

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots\dots\dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \qquad (2)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots\dots\dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \qquad (3)$$

كما يتضح أن :

$$\sinh x + \cosh x = e^x, \cosh x - \sinh x = e^{-x} \qquad (4)$$

ومنها

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad (5)$$

لأن

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^x \times e^{-x} = 1$$

المتطابقة (5) تذكرنا بالمتطابقة المثلثية

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

مما يوحى بعلاقة بين الدوال الزائدية والأخرى الدائرية ، نوضحها فى نهاية هذا الفصل.

أيضا يمكن تعريف دوال زائدية أخرى هى :

hyperbolic tangent, hyperbolic cotangent, cosecant and secabt,

وتكتب على الترتيب كالتالى

tanh x, coth x, cosech x, sech, x

تعرف بالصيغ الآتية

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}, \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

الآن نوضح أنه يمكن اشتقاق عدد من المتطابقات الهامة :

Sinh a cosh b + cosh a sinh b = sinh (a + b).

بالتعويض عن cosh b , sinh a من المتطابقات (1) نحصل على

$$\frac{e^{a}-e^{-a}}{2}\cdot\frac{e^{b}+e^{-b}}{2}+\frac{e^{a}+e^{-a}}{2}\cdot\frac{e^{b}-e^{-b}}{2}=\frac{e^{(a+b)}-e^{-(a+b)}}{2}$$

وهذا يثبت النتيجة المطلوبة حيث أن :

$$\frac{e^{(a+b)}-e^{-(a+b)}}{2}=\sinh(a+b)$$

بنفس طريقة المعالجة يمكن اثبات صحة المتطابقات الآتية :

$$\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y \qquad (6)$$

$$\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y \qquad (7)$$

$$\cosh^{2}x-\sinh^{2}y=1 \qquad (8)$$

$$\tanh^{2}x+\operatorname{sech}^{2}x=1 \qquad (9)$$

$$1+\operatorname{cosech}^{2}x=\coth^{2}x \qquad (10)$$

خواص الدوال الزائدية : properties of hyperbolic functions

الدوال الزائدية sinh x , cosh x , tanh x , ... كلها دوال متصلة ومعرفة لكل قيم x الحقيقية ، ماعدا $x = 0$ بالنسبة للدوال cosech x , coth x. كل الخواص التحليلية والجبرية لهذه الدوال يمكن اشتقاقها من خواص الدالتين e^{x}, e^{-x} . فمثلا

- الدالة cosh x زوجية وهذا واضح من العلاقة :

$$\cosh x=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$$

$$\cosh(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}+e^{x})=\cosh x$$

- الدالة sinh x, tanh x فرديتان :

$$\sinh(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}-e^{x})=-\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})=-\sinh x$$

$$\tanh(-x)=\frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)}=\frac{-\sinh x}{\cosh x}=-\tanh x$$

سلوك الدوال الزائدية يتضح بينيا من الأشكال الآتية :

تفاضل الدوال الزائدية : derivatives of hyperbolic functions

نظرية 5-4 :

(1) إذا كانت y = sinh x فإن

$$\frac{dy}{dx}=\cosh x$$

(2) إذا كانت y = cosh x فإن

$$\frac{dy}{dx}=\sinh x$$

(3) إذا كانت $y = \tanh x$ فإن

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{sech}^2 x$$

(4) إذا كانت $y = \coth x$ فإن

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{cosech}^2 x$$

(5) إذا كانت $y = \operatorname{sech} x$ فإن

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{sech} x\ \tanh x$$

(6) إذا كانت $y = \operatorname{cosech} x$ فإن

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{cosech} x\ \coth x$$

البرهان : استخدم العلاقات

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

يوضح أن

$$\frac{d}{dx}[\sinh x]=\frac{d}{dx}\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x$$

يترك برهان باقى النتائج كتمرين.

مثال : (أ) أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية

(1) $y=\ln(\tanh x)$ (2) $y=(\sinh x)e^{\cosh x}$

(ب) أثبت أن

(1) $\sinh 2x = 2\sinh x\ \cosh x$

(2) $\cosh^6 x-\sinh^6 x = 1+\frac{3}{4}\sinh^2 2x$

الحل : (أ)

(1) $y^{\backslash}=\dfrac{\operatorname{sech}^2 x}{\tanh x}=\dfrac{1}{\cosh x\ \sinh x}$

(2) $\because\ \cosh^2 x-\sinh^2 x=1\ y^{\backslash}=e^{\cosh x}\left\{\sinh^2 x+\cosh x\right\}$

(ب)

(1) $2\sinh x\ \cosh x = 2\cdot\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\dfrac{1}{2}[e^{2x}-e^{-2x}]=\sinh 2x$

(2) $\because \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

بتربيع الطرفين نجد أن

$$\cosh^4 x + \sinh^4 x - 2\sinh^2 x \cosh^2 x = 1$$

وبالتالى فإن

$$\cosh^6 x - \sinh^6 x = (\cosh^2 x - \sinh^2 x)\times(\cosh^4 x + 2\sinh^2 x \cosh^2 x + \sinh^4 x)$$

$$= (1)(1 + 3\sinh^2 x \ \cosh^2 x) = 1 + \frac{3}{4}\sinh^2 2x$$

تمارين (5-3)

(1) برهن أن

(1) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1.$

(2) $\sinh x \, \cosh y = \frac{1}{2}\{\sinh(x+y) + \sinh(x-y)\}.$

(3) $\cosh x \, \cosh y = \frac{1}{2}\{\cosh(x+y) + \cosh(x-y)\}.$

(4) $\sinh x \, \sinh y = \frac{1}{2}\{\cosh(x+y) - \cosh(x-y)\}.$

(5) $\sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}.$

(6) $\cosh x + \cosh y = 2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}.$

(7) $\cosh x - \cosh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}.$

(8) $[\cosh x + \sinh x]^n = \cosh nx + \sinh nx.$

(2) أوجد مشتقة كلا من الدوال الآتية :

(1) $f(x) = \sinh(10x+9).$

(2) $f(x) = \tanh 7x.$

(3) $y = \ln\cosh x^2.$

(4) $y = \operatorname{sech}^2 3x.$

(5) $y = \cosh\sqrt{x^2+1}.$

(6) $y = \tan(\tanh x).$

(7) $y = \cosh^2 3x - \sinh^3 2x.$

(8) $y = \frac{1-\cosh x}{1+\cosh x}.$

(9) $y = \sinh 2x \cosh^3 x.$

(10) $y = \cosh(\sinh x).$

(11) $y = \operatorname{sech}\left(x^2 + \frac{1}{2}\right).$

(12) $y = \ln[\operatorname{cosech} x + 1].$

(3) أحسب قيم النهايات الآتية مستخدما مفكوك الدالتين $\sinh x, \cosh x$ كمتسلسلة قوى فى x :

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3\cosh 2x + e^x}{(2x^3+x+1)e^{2x} + x^3 e^{-2x}}.$

(2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\cosh 2x + e^x}{(2x^3+x+1)e^{2x} + x^3 e^{-2x}}.$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh \alpha x}{x}.$

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh 2x}{3x^2}.$

8-5 الدوال الزائدية العكسية : Inverse hyperbolic functions

تكتب الجيب الزائدى العكسى على الصورة arcsinh x أو $\sinh^{-1}x$ كذلك يكتب جيب التمام الزائدى العكسى على الصورة arccosh x أو $\cosh^{-1}x$ وهكذا......... وتعرف هذه الدوال الجديدة كما يلى :

(1) $y = \sinh^{-1} x \iff x = \sinh y$

(2) $y = \cosh^{-1} x \iff x = \cosh y$

(3) $y = \tanh^{-1} x \iff x = \tanh y$

ويلاحظ ما يلى :

- الدالة sinh هى دالة أحادية وفوقية :

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

لذا يكون لها معكوس هو :

$$\sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- الدالة cosh ليست دالة أحادية وليست فوقية فى دالة زوجية ، مداها هو الفترة $(1, \infty)$

ولكى تكون $y = \cosh^{-1}x$ معرفة يجب أن تكون $1 \le x$ ولهذه القيم تكون $0 \le y$.

وسوف تكون هذه القيود مفهومة ضمنيا عند عدم ذكرها فى كل تمرين.

- الدالة tanh دالة أحادية ولكن مداها $(-1, 1)$ ولكى تكون $y = \tanh^{-1}x$ معرفة يجب أن تكون $-1 < x < 1$

وحيث أن الدوال الزائدية هى فى الواقع دوالا أسية ، فإن الدوال الزائدية العكسية يمكن أن نعبر عنها بصورة لوغاريتمية :

(1) $\sinh^{-1} x = \ln\left[x + \sqrt{x^2 + 1}\right]$

(2) $\cosh^{-1} x = \ln\left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right]$

(3) $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$

(4) $\coth^{-1} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1}$

(5) $\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

(6) $\operatorname{cosech}^{-1} x = \ln \dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$

للبرهنة على صحة هذه النتائج نكتفى ببرهان الثلاثة نتائج الأولى ويترك إثبات صحة باقى النتائج كتمرين :

(1) $y = \sinh^{-1} x$

$$\therefore\ x = \sinh y = \frac{1}{2}(e^{y} - e^{-y})$$

$$\sqrt{1+x^2} = \cosh y = \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y})$$

ومنها $x + \sqrt{1+x^2} = e^{y}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

بنفس الطريقة يمكن برهنة أن

(2)

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

(3) $y = \tanh^{-1} x$

$$\therefore\ x = \tanh y = \frac{\sinh y}{\cosh y} = \frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

$$\therefore\ e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\therefore\ 2y = \ln\frac{1+x}{1-x}$$

أو $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

وبنفس الإجراء يمكن أن نبرهن باقى النتائج .

derivatives of the inverse hyperbolic functions : تفاضل الدوال الزائدية العكسية

(1) $\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ ; \quad x \in \mathbb{R}$

(2) $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}; \quad \cosh^{-1} x > 0\ ; \quad x > 1$

(3) $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}; \quad \cosh^{-1} x < 0\ ; \quad x > 1$

(4) $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}; \quad |x| < 1$

(5) $\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}; \quad |x| > 1$

(6) $\quad \dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosech}^{-1} x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2+1}}; \qquad x \in \mathbb{R}$

(7) $\quad \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}; \qquad \operatorname{sech}^{-1} x > 0\,; \qquad 0 < x < 1$

(8) $\quad \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}; \qquad \operatorname{sech}^{-1} x < 0\,; \qquad 0 < x < 1$

البرهان :

(1) إذا كانت $y = \sinh^{-1} x$ فإن $x = \sinh y$
بالتفاضل الضمنى بالنسبة إلى x نجد أن

$$1 = \cosh y \cdot \frac{dy}{dx}$$

ومنها

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall\ x$$

يلاحظ من الشكل الهندسى للدالة $\cosh y$ أن $\cosh y > 0$ لجميع قيم y الحقيقية ، لذلك فإن النتيجة السابقة دائما موجبة.

(2) إذا كانت $y = \cosh^{-1} x$ كما فى الحالة السابقة نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sinh y}$$

ولكن الشكل الهندسى السابق يوضح أن $\sinh y > 0$ إذا كانت $y = \cosh^{-1}x > 0$ وتكون $0 > \sinh y$ وتكون $0 > \sinh y$ إذا كانت $y = \cosh^{-1}x < 0$ وبالتالى فإنه :

إذا كانت $y = \cosh^{-1}x > 0$ ، فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,; \quad x > 1$$

وإذا كانت $y = \cosh^{-1}x < 0$ ، فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sinh y} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,; \quad x > 1$$

بنفس الطريقة يمكن تعريف دوال زائدية عكسية آخرى ، ونترك للقارئ إثبات صحة باقى النتائج السابقة.

الأمثلة الآتية توضح كيفية التعامل مع مسائل حساب بالنهاية والتفاضل للدوال الزائدية العكسية.

مثال (1) :

(أ) أحسب النهاية التالية

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5\sinh 3x + xe^{x}}{4e^{3x}}$$

(ب) أوجد $f^{\backslash}(x)$ إذا كانت

$$f(x) = \sinh^{-1}(x^2 + 3x + 1)^{1/2}$$

(ج) أوجد $y^{\backslash}$ إذا كانت

$$y = \cosh^{-1}(\sin^2 x)\ ; \qquad y < 0$$

الحل : (أ) بالتعويض عن $\sin x$ بدلالة الدالة الأسية e^{x} نجد أن

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5\sinh 3x + xe^{x}}{4e^{3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5(e^{3x} - e^{-3x})}{8e^{3x}} + \lim_{x\to\infty} \frac{x}{4e^{3x}}$$

$$= \frac{5}{8}\lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{1}{40e^{6x}}\right) + \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}}$$

$$= \frac{5}{8}$$

لأن

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{p}}{e^{\alpha x}} = 0 \quad \forall \quad \alpha > 0,\ p \in \mathbb{R}$$

(ب) إذا كانت $f(x) = \sinh^{-1}(x^2 + 3x + 1)^{1/2}$

$$\therefore \quad \frac{df}{dx} = f^{\backslash}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}} \times \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}}$$

$$= \frac{2x+3}{2\sqrt{(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x + 1)}}$$

(ج) إذا كانت $y = \cosh^{-1}(\sin^2 x)$ فإن

$$\sin^2 x = \cosh y$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على

$$2\sin x \cdot \cos x = \sinh y \cdot \frac{dy}{dx}$$

أى أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin x \cos x}{\sinh y}$$

ولأن $y < 0$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin x \cos x}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{-2\sin x \cos x}{\sqrt{\sin^4 x - 1}}$$

مثال (2) : أوجد مشتقة كلا من الدوال التالية

(1) $y=\sinh^{-1}3x$ (2) $y=\ln\cosh^{-1}x^2$

(3) $y=\tanh^{-1}(\tan x)$ (4) $\left(\sinh^{-1}(\cos^2 x)\right)^5$

(5) $y=\ln(\tanh^{-1}x^5)$ (6) $y=\cosh^{-1}x(5\tan 3x)$

الحل :

(1) $y=\sinh^{-1}3x \quad \therefore \quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$

(2) $y=\ln\cosh^{-1}x^2 \quad \therefore\ y'=\dfrac{1}{\cosh^{-1}x^2}\cdot\dfrac{2x}{\sqrt{x^4-1}}$

(3) $y=\tanh^{-1}(\tan x) \quad \therefore \quad y'=\dfrac{1}{1-\tan^2 x}\cdot\sec^2 x$

(4) $y=\left(\sinh^{-1}(\cos^2 x)\right)^5$

$$\therefore\ y=5\left(\sinh^{-1}(\cos^2 x)\right)^4\cdot\frac{2\cos x(-\sin x)}{\sqrt{\cos^4 x+1}}$$

$$=\frac{-5\sin 2x\cdot\left(\sinh^{-1}(\cos^2 x)\right)^4}{\sqrt{\cos^4 x+1}}$$

(5) $y=\ln(\tanh^{-1}x^5)$

$$y'=\frac{1}{\tanh^{-1}x^5}\cdot\frac{5x^4}{1-x^{10}}\quad ;|x|^5\prec 1\quad \textit{or equivalently}, |x\prec 1|$$

(6) $y=\cosh^{-1}x(5\tan 3x)$

$$y'=\frac{5\sec^2 3x\cdot 3}{\sqrt{25\tan^2 3x-1}}=\frac{15\sec^2 3x}{\sqrt{25\tan^2 3x-1}}$$

تمارين (4-5)

1- أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

(1) $y = \sinh^{-1} 2x$ (2) $y = x \sinh^{-1} x$

(3) $y = \sinh^{-1} \dfrac{x-1}{x+1}$ (4) $y = \tanh^{-1} \dfrac{2x}{x^2+1}$

(5) $y = \cosh^{-1}(\sin \sqrt{x})$ (6) $y = \ln \sin^{-1} 2x$

(7) $y = \sinh^{-1}(\cosh x)^2$ (8) $y = e^{\tanh^{-1} 2x}$

(9) $y = (\sinh^{-1} 2x)^3$ (10) $y = 3^{\sinh^{-1} x} + 4^{\cosh^{-1} x}$

2- أحسب قيم النهايات

(i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \sinh x}{x - \sin x}$ (ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \sinh^{-1} x}{\ln \cosh x}$

(iii) $\lim_{x\to\infty} e^{(\sinh^{-1} x / \cosh^{-1} x)}$

3- إذا كانت $y = (\sinh^{-1} x)^2$ أثبت أن

$$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = 2$$

4- فاضل كلا من الدوال التالية :

(a) $\ln \tanh x^2$ (b) $\tan^{-1}(\sinh x)$

(c) $(\cosh x)^{\sinh^{-1} x}$ (d) $\tanh^{-1}[\sqrt{2-x}]$

(e) $\sinh^{-1}(\sin \sqrt{x})$

9-5 الدالة الأسية e^x والعلاقة بين الدوال الزائدية والمثلثية :

إذا استبدلنا x بـ ix فى مفكوك الدالة الأسية e^x نحصل على

$$e^{ix}=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}+.....+i^n\frac{x^n}{n!}+...$$

واضح أن e^{ix} عدد مركب لكل عدد حقيقى x ، وبكتابة هذا العدد على الصورة $e^{ix}=C(x)+iS(x)$ ومساواة الأجزاء الحقيقية والتخيلية للطرفين نجد أن

$$C(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+.....+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...$$

$$S(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+.....+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...$$

وبذلك إذا تغيرت x فإن $C(x), S(x)$ تكون دوالا فى x وتكون e^{ix} دالة فى متغير مركب ix .

بتفاضل متسلسلة الدالة $C(x)$ حد – حد بالنسبة إلى x نجد أن

$$C^{\backslash}(x)=-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+.....+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...=-S(x)$$

بتفاضل $C^{\backslash}(x)$ مرة ثانية بالنسبة إلى x نحصل على

$$C^{\backslash\backslash}=-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+.....+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...=-C(x)$$

والآن بوضع $x = 0$ نجد أن $C^{\backslash}(0)=0$ ، $c(0) = 1$. وبالتالى فإن الدالة $C(x)$ تبدو كحل للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0\ ;\quad y(0)=1\ ,\quad y^{\backslash}(0)=0$$

وهذه المعادلة تحقق بالدالة $y=\cos x$ لذلك يكون

$$C(x)=\cos x$$

بنفس الأجراء نجد أن $S(x)=\sin x$ بذلك يمكن أن نكتب

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \qquad (1)$$

باستبدال x بـ $-x$ نجد أن

$$e^{-ix}=\cos(-x)+i\sin(-x)$$

حيث أن الدالة $\cos x$ زوجية ، بينما الدالة $\sin x$ فردية ، فإن

$$e^{-ix}=\cos(-x)-i\sin(-x) \qquad (2)$$

من (1) ، (2) نجد أن

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\quad ,\qquad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad (3)$$

بمقارنة هاتين الصيغتين بالصيغ :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

نجد أن

$$\sinh ix = i \sin x \ , \qquad \cosh ix = \cos x \tag{4}$$

وبالتالى فإن

$$\tanh ix = i \tan x \tag{5}$$

وبصورة بديلة نجد أن

$$\sin ix = i \sinh x \ , \ \cos ix = \cosh x \ , \ \tan ix = i \tanh x \tag{6}$$

مثال : إذا كانت $z = x + iy$ فإن

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

الحل :

$$\cosh z = \cosh(x + iy) = \cosh x \cosh iy + \sinh x \sinh iy$$
$$= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

وفيما يلى نذكر بعض المتطابقات المثلثية الهامة ، والتى يمكن إثبات صحتها باستخدام العلاقات (3) السابقة :

إذا كانت x, y عددان حقيقيان فإن :

1- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

2- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$

3- $\tan(x \pm y) = (\tan x \pm \tan y)/(1 \pm \tan x \tan y)$

4- $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y)$

5- $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y)$

6- $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y)$

7- $\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y)$

8- $\sin x \ \sin y = \frac{1}{2}\{\cos(x - y) - \cos(x + y)\}$

9- $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x - y) + \cos(x + y)\}$

10- $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\{\sin(x - y) + \sin(x + y)\}$

11- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

12- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

13- $\tan 2x = 2\tan x / (1 - \tan^2 x)$

14- $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

15- $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

16- $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \sec^{-1} x + \operatorname{cosec}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

17- $\cos^{-1} x = \sec^{-1}(1/x)$, $\sin^{-1} x = \operatorname{cosec}^{-1}(1/x)$, $\tan^{-1} x = \cot^{-1}(1/x)$

18- $\sin^{-1}(x) + \sin^{-1}(-x) = \tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(-x) = \operatorname{cosec}^{-1}(x) + \operatorname{cosec}^{-1}(-x) = 0$

19- $\cos^{-1}(x) + \cos^{-1}(-x) = \cot^{-1}(x) + \cot^{-1}(-x) = \sec^{-1}(x) + \sec^{-1}(-x) = \pi$

20- $a\cos x \pm b\sin x = c\cos(x \mp 4)$

$c^2 = a^2 + b^2$, $4 = \tan^{-1}(b/a)$ حيث

تمارين (5-5)

1- إذا كان

$$u + i\nu = \ln\left(\frac{x + iy + a}{x + iy - a}\right)$$

حيث a مقدار ثابت ، أثبت أن

(1) $x^2 + y^2 - 2ax\coth u + a^2 = 0$

(2) $x = a\dfrac{\sinh u}{\cosh u - \cos\nu}$

(3) $|x + iy| = a^2\dfrac{\cosh u + \cos\nu}{\cosh u - \cos\nu}$

2- إذا كانت $z = x + iy$ أوجد حلا للمعادلة

$$\cosh z + 1 = \sinh z$$

3- أثبت صحة العلاقات الآتية :

(1) $\sin ix = i\sinh x$

(2) $\sinh ix = i\sin x$

(3) $\cos ix = \cosh x$

(4) $\cosh ix = \cos x$

الفصل السادس
تطبيقات التفاضل

التفاضل يمثل الأسلوب الرياضى لدراسة الحركة والتغيير ، وحيثما كان هناك حركة أو تغيير مثل قوة تعمل فتسبب حركة فى الجسم أو أن مادة تتحلل بتأثير خارجى أو بذاتها بمرور الزمن فإن التفاضل هو أداء الرياضيات الصحيحة لدراسة هذا الوضع. حيث يمكن تصميم النموذج الرياضى المعبر عن الظاهرة كل الدراسة. وبذلك يدخل التفاضل فى كثير من الظواهر الفيزيائية والهندسية والرياضية. فمثلا لتحديد مسارات الأقمار الصناعية ، تصميم أجهزة الطيران والرادار ، وفى حل مشكلات رحلات الفضاء ودراسة الأمواج البحرية والأكثر من ذلك يدخل التفاضل فى صياغة نظريات الاقتصاد وعلم الاجتماع وعلم النفس.

فالتفاضل هو ذلك الفرع من الرياضيات الذى يزودنا بطرق حل نوعية من المشاكل الرئيسية. الأولى خاصة بإيجاد الدالة إذا علم معدل التغير لها.

ويسمى النوع الأول بحساب التفاضل Differential calculus

ويسمى النوع الثانى بحساب التكامل Integral calculus

سوف نستعرض فى هذا الفصل عددا من التطبيقات الهامة لحساب التفاضل.

1-6 ميل المماس لمنحنى عند نقطة :

سبق أن أوضحنا فى الفصل الثالث أنه إذا كانت $y = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة x فى مجال تعريف الدالة وكان $m(x)$ هو ميل المماس لمنحنى هذه الدالة عند النقطة (x, y) فإن

$$m(x) = f^{\backslash}(x) = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x,y)} = \tan\varphi$$

أى أن المشتقة الأولى للدالة تعبر هندسيا عن ميل المماس لمنحنى الدالة حيث φ هى مقدار الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع المحور ox ، يعبر عن هذا كما يلى :

إذا كانت $a\ (x_1,\ y_1)$ نقطة على منحنى الدالة $y = f(x)$ المتصلة والقابلة للاشتقاق فإن :

$$m(x_1) = f^{\backslash}(x_1) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,y_1)}$$

هو ميل المماس عند هذه النقطة.

ومعنى $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,y_1)}$ هو التعويض عن إحداثيات النقطة $(x_1,\ y_1)$ بعد إجراء عملية التفاضل.

ملاحظات : يسمى ميل المماس لمنحنى عند نقطة بميل المنحنى عند هذه النقطة.

(1)يتعين نوع الزاوية φ من

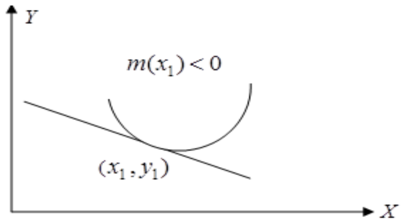
$$y'(x_1) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1, y_1)}$$

(2)إذا كان $y'(x_1) > 0$ فإن φ تكون حادة كما فى الشكل (6-1).

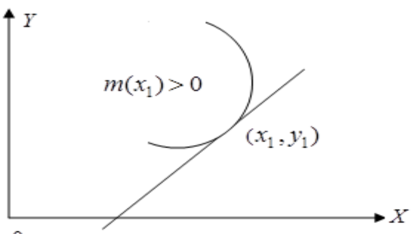
(3)إذا كان $y'(x_1) < 0$ فإن φ تكون منفرجة كما فى الشكل (6-2).

(4)إذا كان $y'(x_1) = 0$ فإن $\varphi = 0$ ويكون المماس موازيا للمحور OX أو منطبقا عليه (أفقيا) كما فى الشكل (6-3).

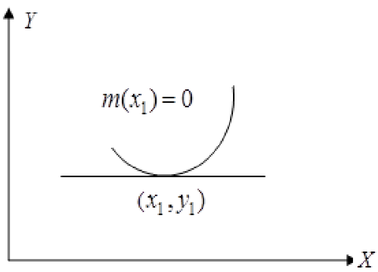
(5)إذا كان $y'(x_1) = \infty$ فإن $\varphi = 90^\circ$ (أو $\varphi = \frac{\pi}{2}$) ويكون المماس رأسيا أى موازيا للمحور OY أو منطبقا عليه كما فى الشكل (6-4).



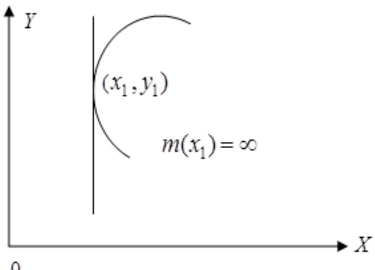
شكل (٦-١)



شكل (٦-٢)



شكل (٦-٣)



شكل (٦-٤)

مثال (1) : أوجد ميل المماس للمنحنى $y = x^3 - 2x^2 - 3$ عند النقطة (x, y) التى لها

(1) $x = 3$, (2) $x = 0$, (3) $x = 1$

الحل :

$$y = x^3 - 2x^2 - 3$$

$$\therefore \quad m(x) = \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$$

وبالتالى فإن

(1) $m(3) = 27 - 12 = 15 > 0$

أى أن المماس عندما $x = 3$ يميل بزاوية حادة على المحور ox

(2) $m(0) = 0$

أى أن المماس عندما $x = 0$ يكون أفقى وحيث أن $y(0) = -3$ فإن المماس عبارة عن مستقيم يوازى المحور ox ويقع أسفله بمقدار 3 .

(3) $m(1) = -1$

أى أن المماس يصنع زاوية منفرجة مع المحور ox مقدارها

$$\varphi = \tan^{-1}(-1) = \pi \ \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

مثال (2) : أوجد ميل المنحنى $y = x^2 - x + 5$ عند النقطة التى عندها

(i) $x = 1$, (ii) $x = 0$, (iii) $x = 1/2$

الحل : واضح أن ميل المنحنى عند أى نقطة (x, y) يحسب بالعلاقة

$$m(x) = y^{\backslash}(x) = 2x - 1$$

وبالتالى فإن

(i) $m(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$

أى أن المماس عند النقطة $(1, 5)$ يصنع زاوية نصف قائمة أى 45° مع المحور ox .

(ii) $m(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}$

(iii) $m(1/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$

مثال (3) : عين إحداثيات النقطة الواقعة على المنحنى $y = x^3 - 3x + 7$ والتى يكون المماس للمنحنى عندها

(أ) أفقيا (ب) موازيا للمستقيم $3x + y = 3$

الحل : حيث أن $y = x^3 - 3x + 7$ فإن $m(x) = 3x^2 - 3$

(أ) إذا كان المماس أفقى فإن $m(x) = 0$ وبذلك $3(x^2 - 1) = 0$

ومنها $(x + 1)(x - 1) = 0$

وبالتالى فإن النقط على المنحنى المعطى والتى عندها يكون المماس للمنحنى أفقى هى النقط التى عندها $x = 1$, $x = -1$

وحيث أن $y = x^3 - 3x + 7$ فإن $y(-1) = 9$, $y(1) = 5$

$\therefore$ النقط المطلوبة هى $(1 , 5) \quad , \quad (-1 , 9)$

(ب) إذا كان المماس موازيا للخط $3x + y = 3$ فإن $m(x) = -3$

وبالتالى فإن $3(x^2 - 1) = -3$ ومنها نجد أن $x = 0$

$\therefore$ النقطة على المنحنى التى يكون عندها المماس موازيا للخط المعطى هى $(0 , 7)$.

مثال (4) : أوجد النقط الواقعة على المنحنى $y = \dfrac{9x}{1-x^2} \; ; \quad x \neq \pm 1$

والتى يكون عندها المماس للمنحنى عموديا على المستقيم $x + 5y - 2 = 0$

الحل : حيث أن $y = \dfrac{9x}{1-x^2}$ فإن

$$m(x) = 9\frac{(1-x^2)+2x^2}{(1-x^2)^2} = 9\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

ولكن ميل المستقيم المعطى m_1 هو $m_1 = -\dfrac{1}{5}$ وبالتالى لابد أن يكون

$$5 = 9\,(1 + x^2)\,/\,(1 - x^2)^2$$

$$\therefore \quad 9 + 9x^2 = 5\,(1 - x^2)^2$$

$$= 5\,(1 - 2x^2 + x^4)$$

$$5x^4 - 19x^2 - 4 = 0$$

ومنها $(5x^2 + 1)(x^2 - 4) = 0$

ولكن $5x^2 = -1$ لا تعطى حلا حقيقيا

تبقى $x^2 = 4$ ومنها نجد أن $x = \pm 2$

وبالتالى فإن المماس يكون عموديا عاى المستقيم المعلوم عند النقطتين $(-2 , 6)$, $(2 , -6)$.

2-6 معادلتا المماس والعمودى على المنحنى عند نقطة عليه :

لتكن $y = f(x)$ هى معادلة منحنى ما ، $(x_1 \, , \, y_1)$ نقطة تقع على هذا المنحنى أى أن $y_1 = f(x_1)$.

فإن ميل المماس عند هذه النقطة يعطى بالعلاقة

$$m = m(x_1) = f^{\backslash}(x_1) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1, y_1)}$$

وتكون معادلة المماس عند هذه النقطة هى

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

أو

$$y - y_1 = m(x_1)(x - x_1)$$

أو

$$y - y_1 = f^{\backslash}(x_1)(x - x_1)$$

بينما يكون ميل العمودى على المماس للمنحنى عند النقطة $(x_1 \; , \; y_1)$ مساويا $-1/m$ وبالتالى فإن معادلة العمودى عند (x_1 , y_1) هى

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

مثال (1) : أوجد معادلة كل من المماس والعمودى للمنحنى

$$y = x^3 - 2x^2 + 4$$

عند النقطة $x = 2$ على المنحنى.

الحل : ميل المماس عند أى نقطة على المنحنى المعطى هو :

$$m(x) = 3x^2 - 4x$$

عندما $x = 2$ فإن

$$y = 8 - 8 + 4 = 4$$
$$m = 12 - 8 = 4$$

وبالتالى فإن معادلة المماس هى $y - y_1 = m(x - x_1)$

أى

$$y - 4 = 4(x - 2)$$
$$y - 4x + 4 = 0$$

ومعادلة العمودى هى

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

أو

$$y - 4 = \frac{-1}{4}(x - 2)$$
$$4y + x - 18 = 0$$

مثال (2) : أوجد معادلة المماس والعمودى للمنحنى

$$x^2 + xy + y^2 - 5 = 0$$

عند النقطة $(1, 1)$

الحل : نلاحظ أولا أن النقطة $(1, 1)$ تقع على المنحنى لأنها تحقق معادلته :

$$1 + 3 + 1 - 5 = 0$$

بإجراء التفاضل الضمنى للمعادلة نجد أن :

$$2x + 3x\,y^{\backslash} + 3y + 2y\,y^{\backslash} = 0$$

ومنها

$$y^{\backslash} = -\frac{2x + 3y}{3x + 2y}$$

ولذلك يكون ميل المماس عند النقطة $(1, 1)$ هو $m = -1$

معادلة المماس عند النقطة $(1, 1)$:

$$y - 1 = -(x - 1)$$
$$y + x - 2 = 0$$

معادلة العمودى عند النقطة $(1, 1)$:

$$y-1=x-1$$
$$y-x=0$$

مثال (3) : أثبت أن

(1) $x=a\sin^3\theta\,,\quad y=a\cos^3\theta\;;\quad 0\le\theta\le 2\pi$

تحقق المعادلة $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

(2) $y^{\backslash}=-\cot\theta\;;\quad \theta\ne 0,\pi,2\pi,.......$

(3) معادلة المماس والعمودى هما على الترتيب :

$$x\cos\theta+y\sin\theta=\frac{1}{2}a\sin 2\theta,$$
$$-x\sin\theta+y\cos\theta=a\cos 2\theta$$

الحل : (1) بالتعويض عن x فى المعادلة نجد أن

$$a\sin^2\theta+a^{2/3}\cos^2\theta=a^{2/3}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=a^{2/3}$$

(2) من المعطيات نجد أن

$$\frac{dx}{d\theta}=3a\sin^2\theta\cos\theta\,,\qquad \frac{dy}{d\theta}=-3a\cos^2\theta\sin\theta$$
$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta}=-\frac{3a\cos^2\theta\sin\theta}{3a\sin^2\theta\cos\theta}=-\cot\theta$$

(3) معادلة المماس عند النقطة $(a\sin^3\theta,\,a\cos^3\theta)$ هى :

$$y-a\cos^3\theta=-\cot\theta[x-a\sin^3\theta]$$

أو

$$\sin\theta[y-a\cos^3\theta]=-\cos\theta[x-a\sin^3\theta]$$
$$\therefore\quad y\sin\theta+x\cos\theta-a\cos^3\theta\sin\theta-a\sin^3\theta\cos\theta=0$$

ومنها

$$y\sin\theta+x\cos\theta=a\cos\theta\sin\theta\times(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$
$$=a\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}a\sin 2\theta$$

ومعادلة العمودى هى :

$$y-a\cos^3\theta=\tan\theta[x-a\sin^3\theta]$$

ومنها

$$y\cos\theta-x\sin\theta=a\cos^4\theta-a\sin^4\theta$$
$$=a(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\times(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=a\cos 2\theta$$

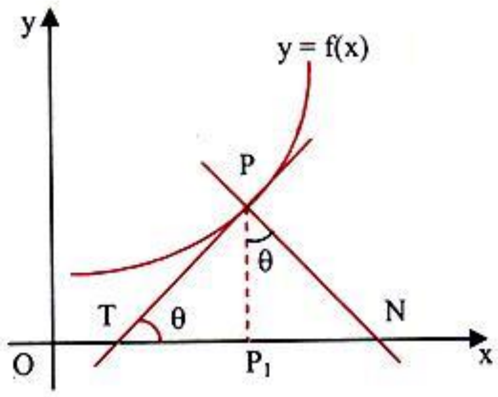
3-6 تحت المماس وتحت العمودى وطول المماس وطول العمودى :

إذا كان $y=f(x)$ منحنى أملس فى المستوى XY وكانت $P=(x_1,y_1)$ نقطة عليه بحيث يصنع المماس للمنحنى عند P مع المحور OX زاوية مقدارها θ .

فإن أطوال الأجزاء الأربعة الآتية :

- طول المماس عند $P=(x_1\,,\,y_1)$ هو $t=\overline{PT}$
- طول العمودى عند $P=(x_1\,,\,y_1)$ هو $n=\overline{PN}$
- طول تحت المماس هو $S_t=\overline{TP_1}$
- طول تحت العمودي هو $S_n=\overline{P_1N}$

تتعين كالتالى : من هندسة الشكل



حيث

$$t=\sqrt{y_1^2+S_t^2}\;,\qquad n=\sqrt{y_1^2+S_t^2}$$

ولكن

$$S_t=y_1/\tan\varphi=\left|y_1/y_1^{\backslash}\right|\;,\qquad S_n=y_1\tan\varphi=\left|y_1y_1^{\backslash}\right|$$

بذلك يكون

$$t=\sqrt{y_1^{\backslash}+\frac{y_1^2}{y_1^{\backslash 2}}}=\frac{y_1}{y_1^{\backslash}}\sqrt{y_1^{\backslash}+1}$$

$$n=\sqrt{y_1^2+y_1^2\,y_1^{\backslash 2}}=y_1\sqrt{1+y_1^{\backslash 2}}$$

$$S_t=\left|y_1/y_1^{\backslash}\right|\;,\qquad S_n=\left|y_1y_1^{\backslash}\right|$$

مثال (1) : أوجد أطوال المماس والعمودى وتحت المماس وتحت العمودى للمنحنى

$y=x^2-x+5$ عند النقطة $(1,5)$

الحل : أولا نلاحظ أن النقطة تقع على المنحنى المعطى حيث $5-1+1-5=0$

وحيث أن $y=x^2-x+5$ فإن $y^{\backslash}=2x-1$

عندما $x=1$ فإن $y^{\backslash}(1)=1$

$\therefore$ طول المماس t هو $t=\dfrac{5}{1}\sqrt{1+1}$

$\therefore$ طول العمودى n هو $n = 5\sqrt{2}$

طول تحت المماس S_t هو $S_t = |5/1| = 5$

طول تحت العمودى S_n هو $S_n = |5 \times 1| = 5$

مثال (2) : أوجد أطوال المماس والعمودى وتحت المماس وتحت العمودى للمنحنى $y = x^3 - 3x + 7$ بحيث يكون المماس موازيا للخط المستقيم $3x + y = 3$

الحل : إذا كان المماس موازيا للمستقيم $3x + y = 3$ فإن

$$m = y^{\backslash} = -3$$

وحيث أن $y = x^3 - 3x + 7$ فإن

$$y^{\backslash} = 3x^2 - 3 = 3((x-1)(x+1)$$

بذلك تكون نقطة التماس عند $x = 0$ وبالتالى $y(0) = 7$

$\therefore$ طول المماس هو $t = \left|\dfrac{y_1}{y_1^{\backslash}}\right|\sqrt{y_1^{\backslash 2} + 1}$

$$= \left|\frac{7}{-3}\right|\sqrt{9+1} = \frac{7}{3}\sqrt{10}$$

طول العمودى هو $n = y_1\sqrt{1 + y_1^{\backslash 2}}$

$$= 7\sqrt{10}$$

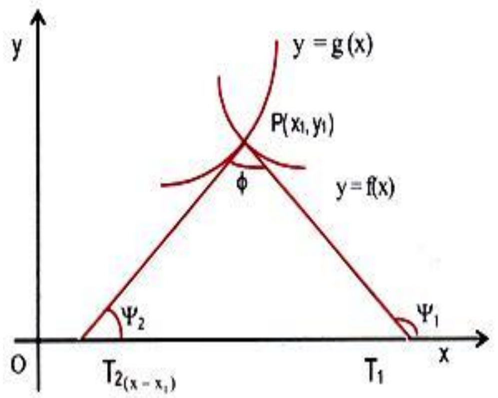
طول تحت المماس $S_t = |y_1 / y_1^{\backslash}| = 7/3$

طول تحت العمود $S_n = |y_1 y_1^{\backslash}| = 21$

4-6 الزاوية بين منحنيين متقاطعين :

إذا تقاطع منحنيان عند نقطة ما فإن زاوية تقاطع المنحنيين عند هذه النقطة هى الزاوية المحصورة بين المماسين للمنحنيين عند النقطة. لتكن p هى نقطة تقاطع منحنيين : $y = f(x), y = g(x)$

ولتكن φ_1 هى زاوية ميل المماس للمنحنى الأول عند النقطة p ، φ_2 هى زاوية ميل المماس للمنحنى الثانى عند p .



أى أن : $m_1 = \tan\psi_1$ هو ميل المماس للمنحنى $y = f(x)$

$m_2 = \tan\psi_2$ هو ميل المماس للمنحنى $y = g(x)$

الزاوية بين المماسين ϕ تعطى بـ $\phi = \psi_1 - \psi_2$

وبذلك يكون

$$\tan\phi = \frac{\tan\psi_1 - \tan\psi_2}{1 + \tan\psi_1 \tan\psi_2}$$

أو

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{f'(x) - g'(x)}{1 + f'(x)\,g'(x)}$$

ملاحظات :

1. ϕ هى زاوية التقاطع الحادة إذا كانت $\tan\phi > 0$
2. $180 - \phi$ هى زاوية التقاطع الحادة إذا كانت $\tan\phi < 0$
3. $\phi = 0$ إذا كان $m_1 = m_2$ وفى هذه الحالة فإن نقطة تقاطع المنحنيين هى نقطة تماسهما
4. $\phi = \frac{\pi}{2}$ إذا كان $m_1 m_2 = -1$ وفى هذه الحالة يتقاطع المنحنيان على التعامد ، أو أن المنحنيين متعامدين عند $\phi = \frac{\pi}{2}$

مثال (1) : أوجد زاوية التقاطع الحادة بين المنحنيين

$$y = x^3 + 2\,, \qquad y = 2x^2 + 2$$

الحل : نوجد أولا نقط تقاطع المنحنيين بحل المعادلتين جبريا :

نضع $x^3 + 2 = 2x^2 + 2$

ومنها $x^2(x - 2) = 0$

أى أن $x = 0\,, \quad x = 2$

ومنها $y = 2\,, \quad y = 10$

أى أن المنحنيان يتقاطعان عند النقطتين $(0, 2)\ ,\ (2, 10)$

لتكن $m_1(x)$ هى ميل المماس للمنحنى الأول ، $m_2(x)$ ميل المماس للمنحنى الثانى عند أى نقطة.

$$m_1(x) = 3x^2\,, \qquad m_2(x) = 4x$$

أولا : عندما $x = 0$ فإن

$$m_1(0) = 0\,, \qquad m_2(0) = 0$$

أى أن زاوية التقاطع $\theta = 0$

$\therefore$ المنحنيان لهما مماس مشترك عند النقطة $(0, 2)$ يوازى محور السينات وله
$y = 2$

ثانيا : عندما $x = 2$ فإن

$$m_1(2) = 12\,, \qquad m_2(2) = 8$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{12-8}{1+12\times 8} = \frac{4}{97}$$

وتكون زاوية التقاطع θ هى

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{97}\right)$$

مثال (2) : أوجد زاوية التقاطع الحادة للدائرتين :

$$x^2 + y^2 = 8\,, \qquad x^2 + y^2 = 4x$$

الحل : بطرح المعادلتين نجد أن :

$$4x = 8$$

أو $x = 2$ هى الإحداثى السينى لنقطة تقاطع الدائرتين وبالتعويض عن $x = 2$ فى معادلة إحدى الدائرتين نجد أن $4 + y^2 = 8$ ومنها $y = \pm 2$

$\therefore$ نقط التقاطع هى $(2, 2)\ ,\ (2, -2)$

بفرض أن $m_1(x)$ هو ميل المماس للدائرة الأولى ، $m_2(x)$ هو ميل المماس للدائرة الثانية عند أى نقطة.

بإجراء التفاضل الضمنى فإن : $2x + 2yy' = 0$

$$\therefore \; m_1(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

وبالنسبة للدائرة الثانية :

$$2x + 2yy' = 4$$

$$\therefore \quad m_2(x) = \frac{2-x}{y}$$

أولا : عند النقطة $(2, 2)$ فإن :

$$m_1(2) = -1 \quad , \quad m_2(2) = 0$$

إذا كانت θ_1 زاوية التقاطع الأولى فإن :

$$\therefore \quad \tan\theta_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = 3\pi/4 = 135^\circ$$

$\therefore$ زاوية التقاطع الحادة الأولى هى $180 - 135 = 45^\circ$

ثانيا : عند النقطة $(2, -2)$ فإن :

$$m_1(2) = 1 \quad , \quad m_2(2) = 0$$

إذا كانت θ_2 زاوية التقاطع الأولى فإن :

$$\therefore \quad \tan\theta_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \pi/4 = 45^\circ$$

هى زاوية التقاطع الحادة الثانية.

تمارين (6-1)

1- أوجد معادلة المماس والعمودى للمنحنيات الآتية عند النقطة المعطاة :

(i) $y = x^2 - 2x + 3$; $(1, 2)$

(ii) $y = \sqrt{x}$; $(4,2)$

(iii) $y = 2/\sqrt{x^3}$; $(-1,-2)$

(iv) $y = \sqrt{25 - x^2}$; $(3,4)$

2- أوجد نقط التقاطع لأزواج المنحنيات التالية ، ثم أوجد الزاوية بينهما عند هذه النقط :

(1) $y = x^2 + 1$, $y = 2x + 4$

(2) $y = 2x^2 + 3$, $y = x^2 - x + 5$

(3) $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 + y^2 - 3x + 4y = 32$

3- أوجد معادلتى المماس والعمودى عند النقطة (x_1, y_1) على كلا من المنحنيات التالية :

(i) $x^2 + y^2 = a^2$ (ii) $y^2 = 4a\,x$

(iii) $4a\,y = x^2$ (iv) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(v) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

4- عين النقط الواقعة على المنحنى :

$$y = x/(1+x) \quad ; \quad x \neq -1$$

والتى يكون المماس عندها :

(أ) يصنع زاوية 45° مع المحور ox .

(ب) عمودى على المستقيم $x + 9y = 7$

5- أوجد النقط التى تقع على المنحنى $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 9$ بحيث يصنع المماس للمنحنى عندها مع محور السينات زاوية مقدارها $\tan^{-1}(-3)$.

6- أوجد النقط الواقعة على المنحنى $y = x^4 - 2x^3$ بحيث يكون المماس عندها موازيا المحور ox

ثم أوجد معدلات الأعمدة على المنحنى عند هذه النقط.

7- أوجد الزاوية بين المماسين للمنحنى $y = x^2 + 5x - 12$ عند النقطتين (2, 2) ، (-5, -12) ثم أوجد معادلة كل من المماسين والعموديين عليهما.

8- أوجد نقطة تماس المستقيم $x - y = 1$ والمنحنى $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ ثم أوجد معادلة العمودى على المنحنى عند تلك النقطة. كذلك أطوال تحت المماس وتحت العمودى.

9- أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى $x - y = \sqrt{x + y}$ عند النقطة (3, 1).

10- أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنيات الآتية عند النقط المبينة :

(1) $y = \tan 2x \quad ; \quad (0, 0)$

(2) $y = \sin^{-1} \frac{x - 1}{2} \quad ;$

عند نقطة التقاطع مع المحور ox .

(3) $y = e^{(1 - x^2)}$

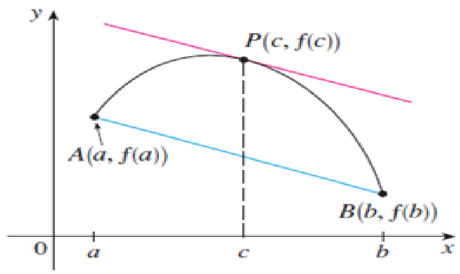
(4) $y = \ln x \quad ; \quad (1, 0)$

عند نقطة التقاطع مع المستقيم $y = 1$

(5) $x = \theta \cos\theta \, , \quad y = \theta \sin\theta \quad ; \quad \theta = \frac{\pi}{2}$

5-6 نظرية القيمة المتوسطة **Mean value theorem**

لتكن $f(x)$ دالة معرفة ومتصلة فى فترة ما $a \le x \le b$. فتكون النقطتان $A(a,f(a))$ ، $B(b,f(b))$ نقطتين على منحنى هذه الدالة.



ميل الوتر AB هو

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

النظرية التالية تعطينا الشروط اللازمة لكى تكون هناك نقط على هذا المنحنى يكون المماس عندها موازيا للوتر أو تسمى هذه النظرية بنظرية القيمة المتوسطة الأولى First mean-value theorem

نظرية (القيمة المتوسطة) (6-1) :

إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة ومتصلة فى الفترة $a \le x \le b$ وقابلة للتفاضل فى الفترة $a < x < b$ فإنه توجد على الأقل قيمة $x = c$ فى الفترة (a, b) بحيث أن

$$f^{\backslash}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

من الممكن إثبات هذه النظرية هندسيا كما يلى :

معادلة المستقيم AB هى

$$y = f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

حيث (x, y) نقطة على الخط المستقيم AB.

وبالتالى فإن الفرق فى الاحداثى اى الصادى لمستقيم AB والمنحنى AB يعطى بـ :

$$F(x) = f(x) - y = f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن

$$F^{\backslash}(x) = f^{\backslash}(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

وهذه دالة معرفة لقيم x بحيث $a \le x \le b$.
ولكن واضح أن $F(a) = F(b) = 0$ حيث أن المنحنى AB تتقاطع مع المستقيم AB عند هذه النقطة.
طبقا لنظرية رول (النظرية التالية) فإنه توجد نقطة $x = c$ فى الفترة (a, b) بحيث يكون $F^{\backslash}(c) = 0$ ، وبذلك يكون

$$f^{\backslash}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}; \quad a < c < b$$

مثال (1) : أوجد النقطة x فى الفترة $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ بحيث يكون المماس عندها للمنحنى $y = \sin 3x$ موازيا للوتر $y = \frac{6}{\pi} x$

الحل : واضح أن الدالة $y = \sin 3x$ متصلة وتفاضلية فى الفترة المعلومة. بالتالى فإنه توجد $C \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ بحيث

$$3\cos 3c = \frac{\sin 3\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin o}{\frac{\pi}{6} - 0} = \frac{6}{\pi}$$

$$\therefore \quad c = \frac{1}{3} \cos^{-1}(2/\pi)$$

مثال (2) : أبحث النقط على المنحنى $y = x^2$ فى الفترة $(-1, 3)$ بحيث تتحقق نظرية القيمة المتوسطة الأولى.
الحل : حيث أن $y = x^2$ فإن

$$Y(-1) = 1, \qquad y(3) = 9$$

$$\therefore \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{9 - 1}{3 - (-1)} = 2$$

ولكن $\frac{dy}{dx} = 2x$

لكى تتحقق نظرية القيمة المتوسطة لابد أن يكون $2x = 2$
$\therefore$ النظرية تتحقق عندما $x = 1$ وهى تقع داخل الفترة $(-1, 3)$.

نظرية رول (2-6) Rolle's theorem

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة فى الفترة $a \le x \le b$ وقابلة للاشتقاق فى الفترة $a < x < b$ فإنه توجد على الأقل قيمة واحدة $x = c$ بحيث $f^{\backslash}(c) = 0$ حيث $a < x < b$.
يمكن صياغة هذه النظرية بشكل آخر : طالما كانت الدالة $f(x)$ المتصلة والقابلة للتفاضل فى الفترة (a, b) غير ثابتة فى هذه الفترة فإنه توجد على الأقل

قيمة عظمى واحدة أو قيمة صغرى واحدة للدالة فى الفترة (a, b) كما فى الشكل المقابل.

كما أن هذه النظرية تعنى هندسيا وجود نقطة على منحنى الدالة

$$y = f(x) \quad ; \quad a \le x \le b \quad , \quad f(a) = f(b)$$

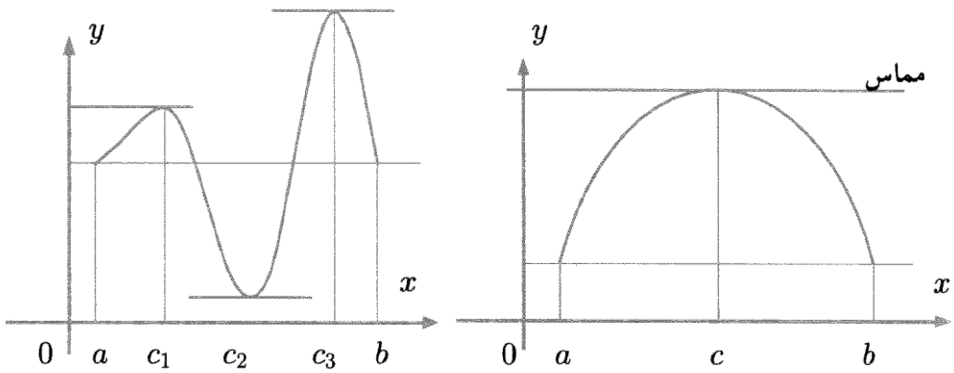
بحيث يكون المماس عند هذه النقطة موازيا للمحور ox.

برهان نظرية رول :

لبرهنة النظرية نعتبر الحالتين :

أولا : إذا كانت $f(x) = k$ ، حيث k مقدار ثابت ، فى المجال (a, b) . فى هذه الحالة تكون $f' = 0$ فى كل المدى وبذلك نكون قد أثبتنا النظرية فى هذه الحالة البسيطة.

ثانيا : إذا كانت $f(x) \neq k$ فى المجال (a, b). لذلك نفرض أن $f(x)$ تزداد بعد $x = a$ وبالتالى فإن $f'(x)$ تكون موجبة لبعض قيم $x > a$. ولكن $f(a) = f(b)$ متصلة. فلابد أن تتناقص القيمة $f(x)$ لبعض قيم أخرى للمتغير x. أى أن $f'(x)$ تغيرت إشارتها فى الفترة (a, b) وحيث أن $f'(x)$ دالة متصلة (لأن $f(x)$ (a, b)) فيجب أن تكون $f'(x) = 0$ عند النقطة c من نقط الفترة (a, b).



بالمثل يمكن الوصول إلى نفس النتيجة إذا فرضنا أن $f(x)$ تتناقص بعد $x = a$.

ملاحظات على نظرية رول :

سنعطى الآن بعض الملاحظات الهامة على نظرية رول :

1- الشروط المذكورة فى النظرية ضرورية بمعنى أنه ربما لا تتحقق النظرية مالم تتحقق كل أو بعض هذه الشروط. لتوضيح ذلك نعتبر الآتى :

i. فى الشكل المقابل نجد أن الدالة غير متصلة فى الفترة (a, b) وأن $f(a) = 0$, $f(b) = 0$ بينما $f^{\backslash}(x) \neq 0$ عند نقطة من الفترة (a, b). أى أن الشرط أن تكون $f(x)$ متصلة شرط ضرورى.

ii. الشرط أن $f(x)$ يجب أن تكون متصلة فى الفترة المغلقة $[a, b]$ شرط ضرورى أيضا.

لأنه إذا اعتبرنا الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 1 \\ x & 1 < x < 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

هذه الدالة متصلة فى الفترة $1 < x < 2$ فى حين أنها غير متصلة عند كل من $x = 1$, $x = 2$ أى أن الدالة غير متصلة على الفترة المغلقة $[1, 2]$ وبالتالى فنظرية رول غير متحققة.

iii. الشرط أن الدالة $f(x)$ يجب أن تكون قابلة للتفاضل فى الفترة المفتوحة (a, b) شرط ضرورى. فمثلا إذا اعتبرنا الدالة الممثلة بالشكل المقابل ، هى دالة غير قابلة للتفاضل عند p وبالتالى لا توجد نقطة $\zeta \ni (a, b)$ يكون عندها $f^{\backslash}(\zeta) = 0$.

iv. ليس من الضرورى أن تكون الدالة قابلة للتفاضل عند نقط نهاية النطاق $[a, b]$

2- يمكن استخدام نظرية رول لإيجاد جذور معادلة جبرية . لتوضيح ذلك نفرض أن لدينا المعادلة $f(x) = 0$ ونفرض أن a, b جذران من جذور هذه المعادلة ، أى أن $f(b) = 0$ $f(a) = 0$ أذن من نظرية رول نجد أن $f^{\backslash}(x) = 0$ لقيمة ما $x = c$ حيث $a < c < b$. وهذه النتيجة صحيحة مهما كان قرب b من a. فإذا انطبقت b على a فإنه تنطبق c على أيهما. أى أنه إذا كان للمعادلة $f(x) = 0$ جذران منطبقان عند $x = a$ فيجب أن تكون $f^{\backslash}(x) = 0$ عند $x = a$. بذلك نستنتج النتائج الهامة الآتية :

نتيجة (1) :

إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة ومتصلة على الفترة $a \leq x \leq b$ وقابلى للاشتقاق فى الفترة $a < x < b$ ، فإن بين أى جذرين من جذور المعادلة $f(x) = 0$ يوجد جذر واحد على الأقل للمعادلة $f^{\backslash}(x) = 0$.

نتيجة (2) :

الجذر المضاعف للمعادلة $f(x) = 0$ هو فى نفس الوقت جذر للمعادلة $f^{\backslash}(x) = 0$ وعلى وجه العموم إذا كان للمعادلة $f(x) = 0$ جذر مكرر r من المرات عند $x = a$ فإن $x = a$ تكون جذرا للمعادلات :

$$f^{\backslash}(x) = 0,\ f^{\backslash\backslash}(x) = 0, \ldots\ldots\ldots, f^{(r-1)}(x) = 0$$

مثال (3) :

بتطبيق نظرية رول على الدالة $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ بين أن للمعادلة $x \cot x = 1$ جذر بين $x = \pi,\ x = 2\pi$.

الحل : عند $x = \pi,\ x = 2\pi$ نجد أن $\frac{\sin x}{x} = 0$

$\therefore$ بتطبيق نظرية رول فإن

$$f^{\backslash}(x) = 0; \qquad \pi < \alpha < 2\pi$$

ولكن

$$f^{\backslash}(\alpha) = \frac{\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\alpha^2}$$

$$\therefore \quad \alpha \cos \alpha - \sin \alpha = 0\ ; \qquad \pi < \alpha < 2\pi$$

ولكن لكل $\pi < \alpha < 2\pi$ نعلم أن $\sin \alpha \neq 0$

وبذلك نجد أن $\alpha \cos \alpha - 1 = 0\ ; \qquad \pi < \alpha < 2\pi$

مثال (4) : باستخدام نظرية رول وضح أن للمعادلة

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 4x + 12 = 0$$

جذر مضاعف عند $x = 2$ ، ومن ثم أوجد الجذور.

الحل : بوضع $x = 2$ فى الطرف الأيسر للمعادلة نجد أن

$$f(2) = 16 - 36 + 8 + 12 = 0$$

نجد كذلك أن

$$f^{\backslash}(2) = 4(2)^3 - 18(2) + 4 = 0$$

أى أن

$$f(2) = 0 \quad , \qquad f^{\backslash}(2) = 0$$

عند $x = 2$ ، وبالتالى حسب نظرية رول نستنتج أن $x = 2$ جذر مضاعف للمعادلة المعطاة. وحيث أن $x = 2$ جذر مضاعف للمعادلة $f(x) = 0$ فإن $(x - 2)^2$ عامل من عوامل المقدار $f(x)$ ، وبالقسمة المطولة نجد أن

$$f(x) = (x - 2)^2 (x^2 + 4x + 3) = 0$$

أى أن

$$(x - 2)^2 (x + 1)(x + 3) = 0$$

$\therefore$ جذور المعادلة هى 2, 2, -1, -3.

نظرية كوش للقيمة المتوسطة (3-6) **Cauchy mean-value theorem**

إذا كانت $g(x), f(x)$ دالتان معرفتان ومتصلتان فى الفترة $[a, b]$ وتفاضليتان فى الفترة (a, b) وكانت $g^{\backslash}(x) \neq 0$ فى هذه الفترة فإنه توجد نقطة $x = c$ تقع داخل الفترة (a, b) بحيث يكون

$$\frac{f(x)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f^{\backslash}(c)}{g^{\backslash}(c)}$$

البرهان : نعتبر الدالة

$$F^{\backslash}(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}\big(g(x)-g(a)\big)$$

من الواضح أن $F(x)$ متصلة على الفترة $a \le x \le b$ ، وتفاضلية فى الفترة $a < x < b$ ، وأن $F(a) = F(b) = 0$.

أذن طبقا لنظرية رول نجد أنه توجد على الأقل نقطة $x = c$ بحيث أن $a < x < b$ ، $F^{\backslash}(x) = 0$

ولكن

$$F^{\backslash}(x) = f^{\backslash}(x) - \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} g^{\backslash}(x)$$

$$\therefore \quad f^{\backslash}(c) - \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} g^{\backslash}(c) = 0$$

ومنها يثبت المطلوب.

ملاحظات :

1 – لا يمكن استنتاج هذه النظرية من نظرية القيمة المتوسطة الأولى لأنه حسب هذه النظرية نجد أن :

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f^{\backslash}(x_1) \;, \quad \frac{g(a)-g(b)}{a-b} = g^{\backslash}(x_2)$$

حيث $a < x_1, x_2 < b$ بالقسمة نجد أن

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f^{\backslash}(x_1)}{g^{\backslash}(x_2)}$$

ولكن ليس من الضرورى أن تتساوى x_1, x_2 .

2 – عند وضع $g(x) = x$ فى نظرية كوش ينتج أن

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f^{\backslash}(c)$$

وهذه هى نظرية القيمة المتوسطة الأولى.

مثال (5) : إذا كانت $f(x) = x^2, \quad g(x) = \log x \;, \quad 1 \le x \le 4$

أوجد النقطة c فى الفترة $(1, 4)$ التى عندها تتحقق نظرية كوش.

الحل : تنص نظرية كوش على

$$\frac{f(1)-f(4)}{g(1)-g(4)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \quad ; \quad 1<c<4$$

وبالتالى فإن :

$$\frac{1-16}{0-\log 4}=\frac{2c}{1/c} \quad ; \quad 1<c<4$$

$$\therefore \quad 2c^2=\frac{15}{2\log 2} \quad \Rightarrow \quad c=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{\log 2}}$$

الصورة العامة لنظرية القيمة المتوسطة

نعلم أن نظرية القيمة المتوسطة الأولى تنص على أن :

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(c) \quad ; \quad a<c<b$$

وبكتابة هذه المتساوية على الصورة

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(c)$$

نفرض الآن أن $b-a=h$ يكون

$$c=a+\theta h \;;\; 0<\theta<1$$

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h) \;;\; 0<\theta<1$$

تسمى هذه الصيغة بنظرية القيمة المتوسطة من الرتبة الأولى لأنها تحتوى على المشتقة التفاضلية من الرتبة الأولى للدالة.

أما إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للتفاضل عدد من المرات فإننا نحصل على صيغ لنظرية القيمة المتوسطة من رتب أعلى :

نظرية القيمة المتوسطة من الرتبة الثانية (4-6) :

إذا كانت $f(x), f'(x)$ دوال معرفة ومتصلة على الفترة $a \le x \le b$ ، وكانت $f'(x)$ تفاضلية فى الفترة $a<x<b$ فإن :

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a+\theta h)$$

حيث $0<\theta<1 \quad , \quad b-a=h$

نظرية القيمة المتوسطة من الرتبة النونية (5-6) :

إذا كانت $f'(x), f''(x), ..., f^{(n-1)}(x)$ دوال معرفة ومتصلة على الفترة $a \le x \le b$ ، وكانت $f^{(n-1)}(x)$ قابلة للتفاضل فى الفترة $a<x<b$ فإن :

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+......+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)$$

حيث $b - a = h \quad , \quad 0 < \theta < 1$

يترك إثبات هذه النظريات كتمرين.

أمثلة على نظرية القيمة المتوسطة

مثال (6) : أوجد النقطة على قوس المنحنى $y = x^3 - x$ الواصل بين النقطتين $(2, 6)$, $(1, 0)$ بحيث يكون المماس للمنحنى عند هذه النقطة موازيا الوتر الواصل بين النقطتين المعلومتين.

الحل : من نظرية القيمة المتوسطة الأولى تكون النقطة المطلوبة هى c بحيث أن

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f^{\backslash}(c)$$

وحيث أن

$$f(x) = x^3 - x \ , \quad f^{\backslash}(x) = 3x^2 - 1 \ , \quad f(1) = 0 \ , \quad f(2) = 6$$

فإن :

$$\frac{6 - 0}{2 - 1} = 3c^2 - 1$$

ومنها

$$c = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

يلاحظ أننا أخذنا الإشارة الموجبة للجذر وذلك لأن الجذر الآخر السالب لا يقع بين $1, 2$.

$$\therefore \quad f(c) = y(c) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$$

$\therefore$ النقطة المطلوبة هى $\left(\sqrt{\frac{7}{3}}, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$

مثال (7) : استخدم نظرية القيمة المتوسطة لإثبات أن $x > \log(1 + x)$ لجميع قيم x الموجبة

الحل : نفرض أن $f(x) = x - \log(1 + x) \ ; \quad x > 0$

$$\therefore \quad f^{\backslash}(x) = \frac{x}{1 + x}$$

نستخدم نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ ، $a = 0$ ، b أى قيمة بحيث $b > 0$.

طبقا للنظرية توجد نقطة c بحيث $0 < c < b$ يكون عندها

$$f^{\backslash}(c) = \frac{f(b) - f(0)}{b - 0}$$

$$\therefore \quad \frac{c}{1 + c} = \frac{b - \log(1 + b) - 0}{b}$$

ومنها

$$b-\log(1+b)=\frac{bc}{1+c}>0$$

لأن $b, c > 0$ ، وبذلك يكون $b > \log(1+b)$

وحيث أن $0 < b$ إختيارية فإن لكل $0 < x$ يكون $x > \log(1+x)$

مثال (8) : ابحث عدد النقط التى تتحقق عندها نظرية رول للدالة المعرفة بالقاعدة الآتية :

$$f(x)=\begin{cases}2x & ; \quad x\geq 0\\ x^2 & ; \quad x<0\end{cases}$$

فى الفترة $[-2, 2]$.

الحل : عندما $x = -2$ نجد أن

$$f(-2)=(-2)^2=4$$

عندما $x = 2$ نجد أن

$$f(2)=2\times 2=4$$

أى أن $f(a) = f(b) = 4$

وبذلك يتحقق أحد شروط نظرية رول .

يلاحظ أيضا أن الدالة متصلة عند النقطة $x = 0$ لأن

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0} 2x=0$$

$$=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0} x^2=0$$

أى أن شرط الاتصال فى الفترة $[-2, 2]$ متحقق أيضا يبقى أن نبحث الاشتقاق عندما $x = 0$.

أولا : إذا كانت $x > 0$

$$\therefore \quad f^{\backslash}(x)=2$$

وبالتالى عندما $x = 0$ نجد أن

$$f^{\backslash}(0)=2$$

ثانيا : إذا كانت $x < 0$

$$\therefore \quad f^{\backslash}(x)=2x$$

وبالتالى عندما $x = 0$ نجد أن

$$f^{\backslash}(0)=0$$

هذا يدل على أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $x = 0$ داخل الفترة $[-2, 2]$

$\therefore$ نظرية رول لا تتحقق لأن أحد الشروط الثلاثة غير متوفر.

مثال (9) : حقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة

$$f(x)=x|x| \quad ; \quad -3\leq x\leq 3$$

الحل : نعتبر $a = -3 \quad , \quad b = 3$
من تعريف القيمة المطلقة نجد أن

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x \ge 0 \\ -x^2 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

عندما $x = -3$ نجد أن

$$f(-3) = -(-3)^2 = -9$$

عندما $x = 3$ نجد أن

$$f(3) = (3)^2 = 9$$

وحيث أن

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

فإن الدالة متصلة على الفترة $-3 \le x \le 3$.
واضح أن

$$f^{\backslash}(x) = \begin{cases} 2x & ; \quad x \ge 0 \\ -2x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

عندما $x = 0$ نجد أن

$$f^{\backslash}(0) = 0$$

أى أن المشتقة $f^{\backslash}(x)$ موجودة ومتصلة على الفترة [- 3, 3] وبالتالى تتحقق نظرية القيمة المتوسطة أى توجد قيمة c فى الفترة [- 3, 3] بحيث

$$\frac{f(3) - f(-3)}{3-(-3)} = f^{\backslash}(c)$$

ولكن

$$f^{\backslash}(c) = \begin{cases} 2c & ; \quad c \ge 0 \\ -2c & ; \quad c < 0 \end{cases}$$

$\therefore$ هناك احتمالان

$$2c = 3 \quad , \quad -2c = 3$$

أى توجد نقطتان تتحقق عند أى منهما النظرية وهما

$$\frac{3}{2} \ , \ -\frac{3}{2}$$

وكلاهما تقع فى الفترة [- 3, 3] .

تمارين (2-6)

1- عين النقطة c فى الفترة المعطاة بحيث تتحقق نظرية رول أو نظرية القيمة المتوسطة للدوال الآتية :

(1) $f(x)=x^2-6x+7 \quad ; \quad 1\le x\le 5$

(2) $f(x)=x^3-4x+3 \quad ; \quad 0\le x\le 2$

(3) $f(x)=|x^2-16| \quad ; \quad -4\le x\le 4$

(4) $f(x)=x^{2/3} \quad ; \quad 0\le x\le 8$

(5) $f(x)=(x+3)/x \quad ; \quad 1\le x\le 6$

(6) $f(x)=x^{1/3} \quad ; \quad -8\le x\le 1$

(7) $f(x)=\cos x \quad ; \quad -\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{\pi}{2}$

(8) $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \ x\ge 1 \\ 2x & ; \ x<1 \end{cases} \quad ; \quad 0\le x\le 4$

2- حقق نظرية رول للدوال الآتية :

(i) $y=x^3-4x \quad ; \quad -2\le x\le 2$

(ii) $y=\sin x \quad ; \quad 0\le x\le \pi$

(iii) $y=(x-a)(x-b) \quad ; \quad a\le x\le b$

(iv) $y=(\sin x)/x \quad ; \quad \pi\le x\le 2\pi$

(v) $y=e^x \sin x \quad ; \quad 0\le x\le \pi$

3- باستخدام نظرية رول بين أن المعادلات الآتية لها جذور مضاعفة عند النقطة المعطاة ومن ثم حل كل من هذه المعادلات :

(1) $x^3-12x+16=0 \quad ; \quad x=2$

(2) $x^4+5x^3-32x+32=0 \quad ; \quad x=-4$

4- أوجد قيم a, b, c حتى يكون للمعادلة :

$$x^5+ax^2+bx+c=0$$

جذر مكرر ثلاث مرات عند $x = 1$

5- أوجد قيمة c الواقعة بين a, b التى تحقق نظرية القيمة المتوسطة الأولى لكل من الدوال الآتية :

(1) $f(x)=x(x-1)(x-2) \quad ; \quad a=0\ ,\ b=2$

(2) $f(x)=x^3$

بين أى قيمتين a, b

6- حقق نظرية القيمة المتوسطة على المنحنى للدالة :

$$y=x^2+2p_1x+p_2$$

مبينـا أن الـوتر الواصـل بـين $x = a$ ، $x = b$ يكـون موازيـا للمـاس للمنحنـى عنـد النقطة $x = \frac{1}{2}(a+b)$

-7 إذا وضعنا نظرية القيمة المتوسطة الأولى على الصورة :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$$

أوجد قيمة θ لكل من الدوال الآتية :

(1) $f(x) = x^3 \quad ; \quad a = 0 \ , \quad h = 2$

(2) $f(x) = 1/x \quad ; \quad a = 1 \ , \quad h = 8$

-8 استخدم نظرية القيمة المتوسطة لإثبات :

(1) إذا كان a , r عددان حقيقيان وكان $r > 1$ ، $a > 1$ فاثبت

$$a^3 - 1 > r(a-1)$$

(2) أثبت أن $\tan^{-1} b - \tan^{-1} a \qquad b - a$

(3) أثبت أن $\frac{b-a}{b} < \log\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$

-9 أوجد قيمة x التـى تحقق نظريـة كوش للقيمـة المتوسـطة فـى الحـالات الآتية :

(1) $f(x) = x \ , \quad g(x) = \sin x \ ; \quad a = 0 \ , \quad b = \frac{\pi}{2}$

(2) $f(x) = x^4 \quad , \quad g(x) = x^2$

لأى قيمتين موجبتين a , b.

6-6 تقييم الدوال ذات الصور المعينة :

يقال لدالة ما $f\ (x)$ أنها فى صورة معينة إذا أخذت عند قيمة خاصة للمتغير x إحدى الصور الآتية :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\times\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

حيث تسمى هذه القيم بالقيم غير المعينة.

تعريف (6-1) :

إذا كانت $f\ (x)$ دالة غير معينة عند $x = a$ أو كان $\lim_{x\to a} f(x) = k$ فإنه يقال أن k هى قيمة الدالة غير المعينة وذلك بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة الأولى وذلك حسب النظرية التالية .

نظرية 6-6 : "صيغة لوبيتال الأولى" "First form of L'Hospital's rule"

إذا كانت $f\ (x), g\ (x)$ دالتين حقيقيتى القيمة وتفاضليتين فى جوار ما للنقطة $x = a$ وكان

$$f(a) = 0\ ,\ \ g(a) = 0 \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f^{\backslash}(x)}{g^{\backslash}(x)} = \lambda \qquad (2)$$

سواء كان λ عدد حقيقيا أو قيمة

فإن :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{\backslash}(x)}{g^{\backslash}(x)} = \frac{f^{\backslash}(a)}{g^{\backslash}(a)} = \lambda$$

البرهان : بتطبيق نظرية كوش للقيمة المتوسطة

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f^{\backslash}(c)}{g^{\backslash}(c)} \quad ; \quad a < c < x$$

وحيث أن $f\ (a) = g\ (a) = 0$

$$\therefore \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{\backslash}(c)}{g^{\backslash}(c)}\ ; \quad a < c < x$$

وعندما $x \to a$ فإن $c \to a$ وبذلك يكون

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{\backslash}(c)}{g^{\backslash}(c)}$$

وإذا كانت $f^{\backslash}\ (a)\ ,\ g^{\backslash}\ (a)$ لا يساويان الصفر معا ينتج أن

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{\backslash}(a)}{g^{\backslash}(a)}$$

أما إذا كان كل من $f^{\backslash}(a)\ ,\ g^{\backslash}(a)$ يساوى الصفر فإننا نطبق القاعدة مرة أخرى للمقدار $\frac{f^{\backslash}(x)}{g^{\backslash}(x)}$ ينتج أن

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{\backslash}(x)}{g^{\backslash}(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{\backslash\backslash}(x)}{g^{\backslash\backslash}(x)}=\frac{f^{\backslash\backslash}(a)}{g^{\backslash\backslash}(a)}$$

لذلك بفرض أن $f^{\backslash\backslash}(a)\neq 0\ ,\ g^{\backslash\backslash}(a)\neq 0$ معا ، إلا فإننا نطبق القاعدة مرة أخرى وهكذا.

ملاحظات هامة :

(1) لا نفاضل المقدار $\frac{f(x)}{g(x)}$ باعتباره خارج قسمة دالتين ، ولكن يجب مفاضلة كل من البسط على حدة والمقام على حدة.

(2) لا تطبق قاعدة لوبيتال مالم يكن كل من البسط والمقام مساويا الصفر.

نتيجة هامة ومفيدة لقاعدة لوبيتال نصيغها فى النتيجة التالية حيث نحصل بها على صيغة لحساب قيمة الدوال غير المعينة التى على الصورة $\frac{\infty}{\infty}$.

نتيجة 6-7 :

إذا كانت $f(x), g(x)$ دالتين حقيقيتى القيمة وتفاضليتين عند النقطة $x = a$ ، وكان

(1) $\lim_{x\to a} f(x)\to\pm\infty\ ,\quad \lim_{x\to a} g(x)\to\pm\infty$

(2) $\lim_{x\to a}\frac{f^{\backslash}(x)}{g^{\backslash}(x)}=\lambda$ سواء كان λ عددا حقيقيا أو قيمة لانهائية فإن

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{\backslash}(x)}{g^{\backslash}(x)}=\lambda$$

البرهان :

كما فى إثبات النظرية السابقة فإن بتطبيق نظرية كوش للقيمة المتوسطة للدالة $\frac{f(x)}{g(x)}$ فى الفترة المفتوحة (x , x_1) بحيث $a < x < x_1$ ، وبكتابة النتيجة على الصورة

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}}\right]\cdot\frac{f^{\backslash}(c)}{g^{\backslash}(c)}\ ;\qquad a<x<c<x_1$$

وعندما $x\to a$ فإن $c\to a$ ويكون

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\left[\frac{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}}\right]\times\lim_{c\to a}\frac{f^{\backslash}(c)}{g^{\backslash}(c)}$$

وحيث أن $\lim_{x\to a} f(x)\to\pm\infty\ ,\quad \lim_{x\to a} g(x)\to\pm\infty$

فإن
$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}}\right]=\frac{1}{1}=1$$

ومنها

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f^{\backslash}(c)}{g^{\backslash}(c)}=\frac{f^{\backslash}(a)}{g^{\backslash}(a)}=\lambda$$

بفرض أن $f^{\backslash}(a)\neq 0\ ,\ g^{\backslash}(a)\neq 0$ لا يساويا الصفر معا ، وإلا فإننا نعيد تطبيق القاعدة للمقدار $\dfrac{f^{\backslash}(x)}{g^{\backslash}(x)}$ وهكذا.

مثال : احسب قيم النهايات الآتية مستخدما قاعدة لوبيتال :

(a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{x}$ (b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2-2x-2}{2x^2-x-1}$

(c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x^3}$ (d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 3x}{\tan x}$

(e) $\lim_{x\to 0}\dfrac{(a/x)}{\cot bx}$

الحل : (a) واضح أن الدالة $\dfrac{\sin\alpha x}{x}$ ذات قيمة غير معينة على الصورة $\dfrac{0}{0}$ عندما $x = 0$

ولكن إذا كانت $f(x)=\sin\alpha x\ ,\ \ g(x)=x$

فإن $\dfrac{f^{\backslash}(x)}{g^{\backslash}(x)}=\dfrac{\alpha\cos\alpha x}{1}\to\alpha$

(b) بفرض أن $f(x)=x^3+3x^2-2x-2\ ,\quad g(x)=2x^2-x-1$

يتضح أن $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$

ولذا نطبق قاعدة لوبيتال حيث

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{f^{\backslash}(x)}{g^{\backslash}(x)}$$

ولكن
$$\lim_{x\to 1}\frac{f^{\backslash}(x)}{g^{\backslash}(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+6x-2}{4x-1}=\frac{7}{3}$$
$$\therefore \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-2x-2}{2x^2-x-1}=\frac{7}{3}$$

(c) كما فى الحالة (a) فإن
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x}{x^2}\to +\infty$$

(d) واضح أن $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\tan 3x}{\tan x}\right)\to\frac{\infty}{\infty}$ وبتطبيق النتيجة السابقة فإن
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 3x}{\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\sec^2 3x}{\sec^2 x}$$
$$=3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 3x}\to\frac{0}{0}$$

وفى هذه الحالة نطبق قاعدة لوبيتال فنجد أن
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 3x}{\tan x}=3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 3x}$$
$$=3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x\sin x}{6\cos 3x\sin x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin 3x}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos 3x}$$
$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos 3x}\to\frac{0}{0}$$

بتطبيق قاعدة لوبيتال مرة أخرى فإن
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 3x}{\tan x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{3\sin 3x}=\frac{1}{3}$$

(e) من الواضح أن
$$\lim_{x\to 0}\frac{(a/x)}{\cot bx}\to\frac{\infty}{\infty}$$

ولكن واضح كذلك أن بتطبيق النتيجة لقاعدة لوبيتال لا يؤدى إلى الحصول على دالة ذات قيمة معينة عند $x=0$ حيث :
$$\lim_{x\to 0}\frac{(a/x)}{\cot bx}=\lim_{x\to 0}\frac{(a/x^2)}{\operatorname{cosec}^2 bx}=\ldots\ldots\to\frac{\infty}{\infty}$$

ولذلك نعيد كتابة الدالة على الصورة :

$$\lim_{x\to 0}\frac{a/x}{\cot bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a\tan bx}{x}\ \to\ \frac{0}{0}$$

وبذلك يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال للحصول على

$$\lim_{x\to 0}\frac{a/x}{\cot bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ab\sec^2 bx}{1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ab}{\cos^2 bx}=ab$$

مثال (2) : أوجد قيم النهايات الآتية :

(i) $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\sin^2 x}$

الحل : هذه الدوال ذات قيم غير معينة على الصورة $\frac{0}{0}$ عند نقط النهايات. ولذا يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال لحساب قيم هذه النهايات.

(i) $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{nx^{n-1}}{1}=na^{n-1}$

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2\sin x\cos x}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$$

لأن $\lim_{x\to 0}\cos x=1$

مرة أخرى $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}\ \to\ \frac{0}{0}$ لذا نستخدم القاعدة مرة ثانية

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\sin^2 x}==\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$$

مثال (3) أحسب قيم النهايات الآتية :

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$ (2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{5x}}$

الحل : هذه الدوال على الصورة غير المعينة $\frac{\infty}{\infty}$ وبتطبيق النتيجة (7-6) يمكن حساب قيم هذه النهايات.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=\frac{1}{\infty}=0$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{5x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{5e^{5x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{25e^{5x}}=\frac{2}{\infty}=0$

مثال (4) : أحسب قيم النهايات الآتية :

(i) $\lim_{x\to 0} x\ln x$ (ii) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$

الحل : (i) المقدار $x \ln x$ يعطى عند $x = 0$ صورة غير معينة $0\times\infty$ ولحساب قيمة هذه النهاية نضعها على الصورة

$$\lim_{x\to 0} x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}\ \to\ \frac{\infty}{\infty}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0} x=0$$

(ii) المقدار $\sec x - \tan x$ على الصورة $\infty-\infty$ عند $x=\frac{\pi}{2}$. ولحساب هذه النهاية نكتبها على الصورة :

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}\ \to\ \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{0}{1}=0$$

مثال (5) : أحسب قيم النهايات الآتية :

(i) $\lim_{x\to 0} x^x$ (ii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ (iii) $\lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan\left(\frac{\pi a}{2x}\right)}$

الحل :

(i) المقدار x^x يصبح عندما $x = 0$ كمية غير معينة 0^0 .

نفرض أن $y = x^x$ لذا فإن

$$\ln y=x\ln x=\frac{\ln x}{1/x}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}=0$$

أنظر المثال السابق

$$\therefore\ \lim_{x\to 0} x^x=e^0=1$$

(ii) القيمة $\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ تصبح عندما $x = 0$ على الصورة ∞^0.

بفرض أن $y=\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ نجد أن

$$\ln y = \sin x \ln\frac{1}{x} = -\sin x \ln x = -\frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{-\operatorname{cosec} x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{\operatorname{cosec} x \cot x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x - x\sin x} = \frac{0}{1} = 0$$

(iii) المقدار $\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan\left(\frac{\pi a}{2x}\right)}$ يعطى عند $x = 0$ القيمة غير المعينـة 1^{∞}.

لذا نفرض أن

$$y = \left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan\left(\frac{\pi a}{2x}\right)}$$

فنجد أن

$$\ln y = \left(\tan\frac{\pi a}{2x}\right)\ln\left(2-\frac{x}{a}\right)$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to a}\ln y = \lim_{x\to a}\frac{\ln\left(2-\frac{x}{a}\right)}{\cot\frac{\pi a}{2x}}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{-1/a}{2-\frac{x}{a}}\cdot\frac{-2x^2/\pi a}{-\operatorname{cosec}^2\frac{\pi a}{2x}}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{-2x^2\sin^2\frac{\pi a}{2x}}{\pi a(2a-x)} = -\frac{2}{\pi}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi a}{2x}} = e^{-2/\pi}$$

تمارين (6-3)

1- احسب قيم النهايات الآتية :

(i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x}$ (ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$

(iii) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$; $n>0$ (iv) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x^n}$; $n>0$

(v) $\lim_{x\to\pi/2} \cos x \sec x$ (vi) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$

(vii) $\lim_{x\to 0} x^{\sin x}$ (viii) $\lim_{x\to 0}(\sin x)^{x^2}$

(ix) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ (x) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan \alpha x}{x}$

(xi) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$ (xii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}$

2- أوجد قيم النهايات الآتية :

(i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$ (ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$

(iii) $\lim_{x\to 0} (\pi/x)/\cot \pi x/2$ (iv) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x/\tan 5x$

(v) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+x-1}{x^2+2}$ (vi) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cot x}{x-\cot x}$

3- أحسب قيم النهايات الآتية :

(a) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$ (b) $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cot x$

(c) $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$ (d) $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$

(e) $\lim_{x\to\infty} x\sin\dfrac{3}{x}$ (f) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\cot x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$

6-7 مفكوك تيلور ومكلورين : Taylor and Maclaurin expansions

نصت نظرية القيمة المتوسطة من الرتبة النونية على أن :

إذا كانت $f(x), f^{\backslash}(x), ... f^{(n-1)}(x)$ دوال معرفة ومتصلة فى الفترة المغلقة $[a, b]$ وكانت $f^{(n-1)}(x)$ دالة تفاضلية فى الفترة $a < x < b$ وكان $h = b - a$ فإن :

$$f(a+h) = f(a) + hf^{\backslash}(a) + \frac{h^2}{2!} f^{\backslash\backslash}(a) + ... + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n \qquad (1)$$

حيث

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h) \; ; \qquad 0 < \theta < 1 \qquad (2)$$

تعرف النتيجة السابقة (1) بنظرية تيلور ، ويسمى R_n بصيغة لاجرانج للباقى
Lagrange's form of the remainoler

عند وضع $h = x , a = 0$ فى (1) فإن النظرية تأخذ الصيغة

$$f(x) = f(0) + xf^{\backslash}(0) + \frac{x^2}{2!} f^{\backslash\backslash}(0) + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \tilde{R}_n \qquad (3)$$

حيث

$$\tilde{R}_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x) \; ; \qquad 0 < \theta < 1 \qquad (4)$$

تعرف الصيغة (3) بنظرية مكلورين. وتسمى (4) بصيغة لاجرانج للباقى.

إذا كانت $R_n \to 0$ عندما $n \to \infty$ فإننا نحصل من (1) على متسلسلة تيلور
Taylor series

$$f(a+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(a) \; ; \qquad f^{(n)}(a) = f(a) \qquad (5)$$

كذلك إذا كانت $\tilde{R}_n \to 0$ عندما $n \to \infty$ فإننا نحصل من (3) على متسلسلة مكلورين Maclaurin series :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) \qquad (6)$$

ملاحظات :

1- يسمى المتسلسلة (5) بمفكوك تيلور للدالة $f(x)$ حول النقطة $x = a$ ، وشرط صحة هذا المفكوك هو وجود الدالة $f(x)$ وجميع مشتقاتها عند $x = a$ وايضا أن يكون

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

2- يسمى المتسلسلة (6) بمفكوك مكلورين للدالة $f(x)$ حول النقطة $x = 0$ ، وشرط صحة هذا المفكوك هو وجود الدالة $f(x)$ وجميع مشتقاتها عند $x = 0$ واتصالها فى جوار للنقطة $x = 0$ وأيضا يكون

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{R}_n = 0$$

3- مفكوك تيلور (5) يمكن كتابته على الصورة

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)\ ;\qquad f^{(0)}(a)=f(a)$$

مثال (1) : أوجد مفكوك مكلورين لكلا من الدوال الآتية :

(1) $f(x) = e^x$, (2) $f(x) = \sin x$

ثم برهن صحة ذلك باستخدام صيغة لاجرانج للباقى.

الحل : (1) بالتفاضل النونى للدالة $f(x) = e^x$ نجد أن

$$f^{(n)}(x)=e^x\ ,\qquad n=0,1,2,.........$$

وعندما $x = 0$ فإن

$$f(a)=1\ ,\quad f^{(n)}(0)=1$$

ومن نظرية مكلورين (3) نجد أن

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+....+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\tilde{R}_n$$

حيث

$$\tilde{R}_n=\frac{x^n}{n!}e^{\theta x}\quad ;\qquad 0<\theta<1$$

وحيث أن المقدار $e^{\theta x}$ مقدار محدود لجميع قيم x المحدودة. أى أن

$$\left|e^{\theta x}\right|<k$$

حيث k عدد محدود.

$$\therefore\qquad \left|\tilde{R}_n\right|<\frac{|x|^n}{n!}\cdot k$$

نفرض الآن أن $a_n=\frac{x^n}{n!}$ فنجد باستخدام اختبار النسبة لدالمبرت أن

$$\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right|=\frac{|x|}{n+1}$$

وبذلك

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0$$

وهذا يعنى أن المتسلسلة $\sum a_n$ نقاربية وأن

$$a_n\to 0\qquad \text{as}\qquad n\to\infty$$

ومن ثم فإن

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{R}n=\lim_{n\to\infty}a_n e^{\theta x}=0$$

$\therefore$ المفكوك صحيح لجميع قيم x وأن

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+....\ ;\qquad x\in\mathbb{R}$$

(2) إذا كانت $f(x) = \sin x$ فإن

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\therefore\ f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & ; \quad n = 1, 5, 9, 13, ... \\ 0 & ; \quad n = 2, 4, 6, 8, ... \\ -1 & ; \quad n = 3, 7, 11, 15, ... \end{cases}$$

باستخدام مفكوك مكلورين نجد أن

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - .... + \tilde{R}_n$$

حيث $\tilde{R}_n = \frac{x^n}{n!}\sin\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right); \quad 0 < \theta < 1$

وحيث أن $\left|\sin\left(\theta x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| < 1$ فإن

$$\left|\tilde{R}_n\right| < \frac{|x|^n}{n!} \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

كما فى الحالة السابقة

$$\therefore \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - ....; \quad x \in \mathbb{R}$$

صيغة كوش للباقى **Cauchy's formula of the remainder**

نفرض لأن

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f^{\backslash}(x) - .... - \frac{1}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} f^{(n-1)}(x) \qquad (7)$$

يتضح من ذلك أن $\varphi(x)$ دالة متصلة وأن مشتقتها هى

$$\varphi^{\backslash}(x) = -\frac{1}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} f^{(n)}(x) \qquad (8)$$

وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدالة $\varphi(x)$ فى الفترة a, b نجد أن

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b-a)\varphi^{\backslash}(c), \qquad a < c < b \qquad (9)$$

ولكن $\varphi(b) = 0$ ،

$$\varphi(a) = f(b) - f(a) - (b-a)f^{\backslash}(a) - ..... - \frac{1}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a),$$

$$\varphi^{\backslash}(c) = \frac{-1}{(n-1)!}(b-c)^{n-1} f^{(n)}(c)$$

بالتعويض فى (9) عن $\varphi(b), \varphi(a), \varphi^{\backslash}(c)$ نجد أن

$$-f(b)+f(a)+(b-a)f^{\backslash}(a)+.....+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$
$$=\frac{(b-a)(b-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(c)$$

أى أن

$$f(b)=f(a)+(b-a)f^{\backslash}(a)+.....+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_n^{/}$$

حيث

$$R_n^{/}=\frac{(b-a)(b-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(c)\ ; \qquad a<c<b$$

بوضع $h = b - a$ ، $c = a + \theta h$ حيث $0 < \theta < 1$ ، نجد أن

$$f(a+h)=f(a)+hf^{\backslash}(a)+\frac{h^2}{2!}f^{\backslash\backslash}(a)+....+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_n^{/}$$

بوضع $h = x$ فإننا نحصل على متسلسلة تيلور

$$f(x+a)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x^i}{i!}f^{(i)}(a)+R_n^{/}(x) \qquad (10)$$

حيث

$$R_n^{/}(x)=\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta x)\ ; \qquad 0<\theta<1 \qquad (11)$$

تسمى (11) بصيغة كوشى للباقى

عندما $a = 0$ فإن

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x^i}{i!}f^{(i)}(0)+R_n^{/}(x) \qquad (12)$$

حيث

$$R_n^{/}(x)=\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\theta x)\ ; \qquad 0<\theta<1 \qquad (13)$$

مثال (2) : أوجد مفكوك كا من الدوال الآتية مبينا قيم x التى يكون لها المفكوك الصحيح.

(1) $f(x) = \log(1 + x)$ (2) $f(x) = (1 + x)^r$

الحل : (1) إذا كانت $f(x) = \log(1 + x)$ فإن

$$f^{\backslash}(x)=\frac{1}{1+x}\ ,\quad f^{\backslash\backslash}(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}\ ,.......$$

$$f^{n}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

وباستخدام مفكوك مكلورين نجد أن

$$\log(1+x)=\log 1+\sum_{r=1}^{n-1}\frac{x^r}{r!}f^{(r)}(0)+R_n$$

$$=\sum_{r=1}^{n-1}\frac{x^r}{r!}\ \frac{(-1)^{r-1}(r-1)!}{1}+R_n$$

حيث R_n على صورة لاجرانج هو

$$R_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)\ ;\qquad 0<\theta<1$$

$$=\frac{x^n}{n!}\ \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+\theta x)^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$$

ولكن الباقى R_n على صورة كوش يعطى بالعلاقة

$$R_n=\frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(\theta x)\ ;\qquad 0<\theta<1$$

$$=(-1)^{n-1}\left(\frac{x^n}{1+\theta x}\right)\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$$

لإيجاد قيم x التى لها المفكوك صحيحا أى عندها يكون

$$\lim_{n\to\infty}R_n=0$$

نعتبر أولا صورة الباقى للاجرانج ، أى

$$R_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$$

(i) إذا كانت $0\le x\le 1$ فإن $\dfrac{x}{1+\theta x}<1$

$$\therefore\quad \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n\to 0\qquad \text{as}\quad n\to\infty$$

لأن $\dfrac{1}{n}\to 0\quad \text{as}\quad n\to\infty$

فإن

$$R_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n\ \to\ 0\qquad \text{as}\qquad n\to\infty$$

لجميع قيم $0 \le x \le 1$

(ii) إذا كانت x سالبة فإن $\frac{x}{1+\theta x}$ ليس من الضرورى أن تكون أقل من الواحد ، فمثلا إذا كانت $\theta = -\frac{2}{3}$ ، $\theta = \frac{3}{4}$ فإن $\left|\frac{x}{1+\theta x}\right| = \frac{4}{3} > 1$

هذا يعنى أن المفكوك غير صحيح لقيم $x < 0$ وفى هذه الحالة يستحسن أن نستخدم صيغة كوش للباقى أى نعتبر

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(1-\theta)}\left(\frac{x(1-\theta)}{1+\theta x}\right)^n$$

الآن إذا كانت

(i) $0 \le x \le 1$ فنجد أن

$$\frac{(1-\theta)x}{1+\theta x} < (1-\theta)x < 1$$

$$\therefore \quad R_n \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

(ii) $-1 < x < 0$ بوضع $y = -x$ يكون $0 < y < 1$

$$\left|\frac{(1-\theta)x}{1+\theta x}\right| = \left|\frac{(1-\theta)y}{1+\theta y}\right| = \frac{(1-\theta)y}{1+\theta y} < 1$$

$$\therefore \ |R_n| = \frac{1}{1-\theta}\left(\frac{(1-\theta)y}{1+\theta y}\right)^n \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

وبالتالى يكون المفكوك

$$\log(1+x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r} x^r = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots\dots\dots$$

لجميع قيم $-1 < x < 1$.

(2) لفك المقدار $(1+x)^r$ فى قوى x التصاعدية نضع $f(x) = (1+x)^r$ حيث r عدد غير صحيح موجب

$$\therefore \quad f^{(n)}(x) = r(r-1)(r-2)\dots\dots\dots[r-(n-1)](1+x)^{r-n}$$

$$f^{(n)}(0) = r(r-1)(r-2)\dots\dots\dots[r-(n-1)],$$

$$f(0) = 1$$

باستخدام مفكوك مكلورين نحصل على

$$(1+x)^r = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_n(x)$$

حيث الباقى R_n معبرا عنه فى صورة كوش هو

$$R_n(x)=\frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(\theta x)\ ,\quad 0<\theta<1$$

$$=\frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}r(r-1)(r-2).......[r-(n-1)](1+\theta x)^{r-n}$$

$$=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}r(r-1)(r-2).......[r-(n-1)]rx\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}\times(1+\theta x)^{r-1}$$

ولكن rx ، $(1+\theta x)^{r-1}$ كميتان محدودتان لجميع قيم x المحدودة

$$\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1\ ;\quad |x|<1$$

$$\therefore\quad\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}\to 0\quad \text{as}\quad n\to\infty$$

المقدار $$a_n=(r-1)(r-2).......[r-(n-1)]\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

هو الحد النونى لمتسلسلة:

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}(r-1)(r-2)........[r-(n-1)]$$

والآن نفحص تقارب هذه المتسلسلة باستخدام اختبار النسبة لدالمبرت :

$$\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right|=\left|x\cdot\frac{r-n}{n}\right|\to|x|\qquad \text{as}\quad n\to\infty$$

فإذا كانت $|x|<1$ تكون المتسلسلة السابقة تقاربية وفى هذه الحالة يكون $a_n\to 0$ عندما $n\to\infty$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0\ ;\quad |x|<1$$

$$\therefore\ (1+x)^r=1+x+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+\frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3+.........$$

لجميع قيم $1>|x|$

مثال (3) : أوجد مفكوك الدالة $f(x)=e^{3x}$ حول النقطة $x=0$ ثم قدر الخطأ إذا اكتفينا باستخدام أربعة حدود فقط من المفكوك للمتغير عن الدالة عند النقط

$$x=1/3\quad ,\quad x=0.02$$

الحل : واضح أن

$$f^{\backslash}(x)=3e^{3x},f^{\backslash\backslash}(x)=9e^{3x},.....,f^{(n)}(x)=3ne^{3x}$$

وأن $$f(0)=1,\quad f^{\backslash}(0)=3\ ,\quad f^{\backslash\backslash}(0)=9,.......,f^{n}(0)=3^n$$

$$\therefore\ e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + ... + \frac{(3x)^n}{n!} + R_n(x)$$

حيث
$$R_n(x) = \frac{(3x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{3\theta x} \ ; \quad 0 < \theta < 1$$

المقدار $e^{3\theta x}$ يعطى لجميع قيم x المحدود عددا محدودا ، ولمتسلسلة

$$\sum_n a_n = \sum_n \frac{(3x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

يمكن إثبات أن $a_n \to 0$ عندما $n \to \infty$ باستخدام اختبار النسبة حيث

$$\left| \frac{a_n + 1}{a_n} \right| = 3 \frac{|x|}{n+1} \to 0 \qquad \text{as} \quad n \to \infty$$

وهذا يعنى أنه لأى قيمة محدودة $x = c$ فإن

$$\lim_{n\to\infty} R_n(c) = 0$$

$$\therefore\ e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + ... = \sum_{r-0}^{\infty} \frac{(3x)^r}{r!}$$

بفرض أن (1) $x = 0.02$ ، $n = 3$ فإن

$$\frac{(0.06)^4}{4!} < R_n < \frac{(0.06)^4}{4!} e^{0.06}$$

التى تعطى بالتقريب

$$5 \times 10^{-7} < R_n < 6 \times 10^{-7}$$

هذا يعنى أن استخدام الأربعة حدود الأولى فقط المفكوك للتعبير عن قيمة الدالة عند $x = 0.02$ يعطى فيمة تختلف عن القيمة الأصلية $e^{0.06}$ بمقدار 6×10^{-7}

(2) $x = \frac{1}{3}$ ، $n=3$ فنجد أن

$$\frac{1}{4!} < R_n < \frac{e}{4!}$$

أو
$$0.042 < R_n < 0.133$$

واضح أن الخطأ كبير نسبيا مما يعنى أن استخدام أربعة حدود من مفكوك مكلورين غير كافية للتعبير عن قيمة الدالة e^{3x} عند $x = \frac{1}{3}$

مثال (4) : أوجد مفكوك تيلور للدالة $f(x) = \cos x$ حول النقطة $x = \frac{\pi}{3}$. وأوجد مقدار اخطأ إذا استخدم فقط الحدان الأول والثانى من المفكوك لحساب $\cos 61^\circ$

الحل : بالتفاضل المتتالى نحصل على

$$f^{\backslash}(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{\backslash\backslash}(x) = -\cos x = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2},\right)$$

$$f^{n}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

وبالتالى فإن

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\ , \quad f^{\backslash}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$f^{\backslash\backslash}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\ , \quad f^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

وهكذا ....

$$\therefore\ \cos x = \frac{1}{2} - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2}{2!} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3}{3!} - .....$$

$$+ \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^n}{n!}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{n\pi}{2}\right) + R_n(x)$$

حيث

$$R_n(x) = \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\theta x + \frac{\pi}{3} + \frac{n\pi}{2}\right)$$

وجيث أن $\quad \left|\cos\left(\theta x + \frac{\pi}{3} + \frac{n\pi}{2}\right)\right| < 1 \quad$ فإن

$$\left|R_n(x)\right| < \frac{\left|\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right|}{(n+1)!}$$

وكما فى الأمثلة السابقة يمكن إثبات أن $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ لكل قيم x المحدودة (أثبت ذلك)

$$\therefore\ \cos x=\frac{1}{2}-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2}{2!}\frac{1}{2}+....$$

$$+\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^n}{n!}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{n\pi}{2}\right)+........$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^n}{n!}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{n\pi}{2}\right)$$

هذا المفكوك صحيح لجميع قيم x الحقيقية مقدرة بالتقدير الدائرى.

فإذا كان مطلوبا إيجاد قيمة $\cos 61^\circ$ نضع

$$x=\cos 61^\circ$$

فنحصل على

$$\cos 61^\circ=\cos\left(\frac{61\pi}{180}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)-\frac{1}{2.2!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{2.2!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3+....$$

وإذا اكتفينا بحدين فقط من هذا المفكوك لتقدير قيمة $\cos 61^\circ$ نجد أن

$$\cos 61^\circ \simeq \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)=0.4849$$

عندئذ يكون هناك خطأ $R_1(x)$ يعطى بالعلاقة

$$\left|R_1\left(\frac{61\pi}{180}\right)\right|\le\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2=0.0001$$

وبالرجوع إلى الجداول المثلثية نجد أن $\cos 61^\circ=0.4848$

مثال (5) :أوجد مفكوك مكلورين للدالة

$$y=\sin(m\sin^{-1}x)\ ;\quad m=\text{const.}$$

إذا علم أن هذه الدالة تمثل حل للمعادلة التفاضلية

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+m^2y=0$$

الحل : إذا كانت $y=\sin(m\sin^{-1}x)$ فإن

$$y^{\backslash}=\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}\cos(m\sin^{-1}x)$$

$$y(0)=0\ ,\quad y^{\backslash}(0)=m$$

واضح أنه من الصعب إيجاد المشتقات التفاضلية ذات الرتب العليا للدالة المعلومة. ولكن يمكن استخدام المعادلة التفاضلية المعطاة لاستنتاج علاقة تكرارية لمشتقات الدالة y على النحو التالى :

بتطبيق قاعدة ليبينز للتفاضل المتتالى على المعادلة المعطاة نجد أن لقيم $n > 0$ يكون

$$(1-x^2)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}-(2n+1)x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}+(m^2-n^2)\frac{d^n y}{dx^n}=0$$

وعندما $x = 0$ فإن

$$\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}=(n^2-m^2)\frac{d^n y}{dx^n}$$

من هذه العلاقة يمكن حساب قيم تفاضليات الدالة y عند النقطة $x = 0$ وذلك بمعلومية

$$y(0)=0\ ,\quad y^{\backslash}(0)=m$$

فمثلا

$$n=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-m^2y(0) \qquad \Rightarrow \quad y^{\backslash\backslash}(0)=0$$

$$n=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^3y}{dx^3}=(1-m^2)\frac{dy}{dx}(0)=m(1-m^2)$$

وهكذا ....

$$\therefore\ y=mx+\frac{m(1-m^2)}{3!}x^3+\frac{m(1-m^2)(9-m^2)}{5!}x^5+.....$$

الآن نعطى متسلسلات مكلورين لبعض الدوال الأولية :

(1) $$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+.....,$$

صحيحة لجميع قيم x بحيث $-1 < x < 1$ ، α أى عدد حقيقى

(2) $$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+........ \qquad \forall x\in \mathbb{R}$$

(3) $$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+........ \qquad \forall x\in \mathbb{R}$$

(4) $$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+........; \qquad -\frac{\pi}{2}< x <\frac{\pi}{2}$$

(5) $$\ln(1+6x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{3}-\frac{x^4}{4}+.......; \qquad -1< x <1$$

$$(6)\qquad \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+........;\qquad -1<x<1$$

$$(7)\qquad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^{35}}{3!}+........\qquad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

$$(8)\qquad \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+........;\qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$(9)\qquad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+........;\qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$(10)\qquad \ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-+........;\qquad 0<x\le 2$$

مثال (6) : إذا علم أن $\ln 2 = 0.693$ فاحسب $\ln 5$ مقربا لثلاثة أرقام عشرية.

الحل :
$$\ln 5=\ln 4\cdot\frac{5}{4}=2\ln 2+\ln\frac{5}{4}$$

بوضع $\frac{5}{4}=\frac{1+x}{1-x}$ نجد أن $x=\frac{1}{9}$

$$\therefore\quad \ln\frac{5}{4}=2\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5+........\right]$$

واضح أنه لكى تكون النتيجة صحيحة لثلاثة أرقام عشرية فإننا نكتفى بالحدين الأولين

$$\therefore\quad \ln\frac{5}{4}=2\left[0.1111+0.00045\right]=0.22313$$

$$\therefore\quad \ln 5=1.386+0.22313=1.605$$

مثال (7) :قدر الخطأ فى حساب $\cos x$ من القانون التقريبى

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

إذا كانت $x<\frac{\pi}{4}$

الحل : نفرض أن الخطأ هو E ، وحيث أن

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+..........$$

$$\therefore\quad |E|<\left|\frac{x^6}{6!}\right|<\frac{(\pi/4)^6}{720}=\frac{1}{720}\left(\frac{3.1416}{4}\right)^6$$

$$<\ 0.0003$$

هذا هو حد الخطأ فى التقدير المستخدم

مثال (8) : أوجد قيم x التى يكون لها المفكوك التالى :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}$$ صحيحا لأربعة أرقام عشرية

الحل : نعلم أن

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - ....$$

وبالتالى فإن الخطأ فى استخدام المفكوك المعطى لتقدير $\sin x$ يكون

$$|E| < \left|\frac{x^5}{120}\right|$$

ولكى تكون نتيجة التقريب صحيحة لأربعة أرقام عشرية يجب أن يكون

$$|E| < 0.00005$$

$$\therefore \left|\frac{x^5}{120}\right| < 0.00005$$

$$\therefore |x| < (0.006)^{1/5} = 0.3585$$

$\therefore$ قيم x المطلوبة

$$-0.3585 < x < 0.3585$$

أو بالتقدير الستينى هى

$$-20.594 < x < 20.594$$

تمارين (4-6)

1- أوجد مفكوك كلا من الدوال الآتية مبينا قيم x التى تجعل المفكوك صحيحا :

(1)	$e^x \sin x$	(2)	$\cosh x \cos x$
(3)	$\tan^{-1} x$	(4)	$\ln[1/(1-x)]$
(5)	$\sec x$	(6)	$\cos(\sin x)$
(7)	$\sqrt{1+x}$	(8)	$e^x \cos^{-1} x$

2- أوجد مفكوك تيلور للدالة $\sqrt{x}$ حول $x = 1$ واثبت أن هذا المفكوك صحيحا فقط إذا كان $0 \le x \le 2$.

3- إذا علمت أن الدالة $y = e^{\sin^{-1} x}$ تمثل حلا للمعادلة التفاضلية

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

أثبت أن

$$e^{\sin^{-1}x}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{5}{24}x^4+......$$

4- إذا كانت $y\,(x)$ حلا للمعادلة التفاضلية

$$y(0)=1\,,\qquad y^{\backslash}(0)=0 \qquad \text{بحيث} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=xy$$

فأوجد هذه الدالة باستخدام مفكوك مكلورين.

5- أوجد مفكوك تيلور عندما تكون $\sin\ x$ حول النقطة $x=\frac{\pi}{6}$ ثم استخدم الأربعة الحدود الأولى من هذا المفكوك لحساب قيمة $\sin 31^{\circ}$

6- استخدم مفكوك تيلور عندما تكون h قيمة صغيرة فى إثبات أن :

(i) $$f^{\backslash}(a)=\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h},\quad R_n=\frac{1}{6}h^2f^{(3)}(a)$$

(ii) $$f^{\backslash\backslash}(a)=\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2},\qquad R_n=\frac{1}{12}h^2f^{(4)}(a))$$

وإذا كانت $f(x)=\sin x$, $h=\frac{\pi}{12}$ فاستخدم النتائج السابقة (ii) , (i) لحساب قيم تقريبية للمشتقات التفاضلية ذات الرتبة الأولى والثانية للدالة $\sin x$ عند النقطة $x=\frac{\pi}{4}$.

8-6 الدوال المطردة (تزايدية ، تناقصية)

Monotonic functions (Increasing , Decreasin)

إذا تتبعنا سلوك الدالة $y = x^2$ (مثلا) عندما تكون $0\le x$ نلاحظ أن y تتزايد بتزايد قيم x حيث

x = 0 , 1 , 2 , 3 , …………
y = 0 , 1 , 4 , 9, …………..

فى مثل هذه الحالة نقول أن $y = x^2$ دالة تزايدية increasing function عندما $0\le x$

بينما إذا اعتبرنا نفس الدالة $y = x^2$ عندما تكون $0 > x$ فنلاحظ أنه على عكس الحالة السابقة حيث تتناقص قيم y بتزايد قيم x فنجد أن

x = - 1 , - 2 , - 3 , - 4 , ………..
y = 1 , 2 , 3 , 4 , ………………

فى مثل هذه الحالة نقول أن $y = x^2$ دالة تناقصيةdecreasing function فى الفترة $0 > x$

مما سبق يمكن تعريف كل من الدالة التزايدية والدالة التناقصية والدالة الثابتة كما يلى :

تعريف (6-1) : إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة فى فترة ما $x \in I \subset \mathbb{R}$ فإن f تسمى دالة تزايدية فى I إذا كانت قيم الدالة $f(x)$ تتزايد بتزايد قيم x فى هذه الفترة ، أى أنه لكل x_1, x_2 فى I فإن

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$$

تعريف (6-2) : إذا كانت f دالة معرفة فى فترة ما I حيث $I \subset \mathbb{R}$ فإن f تسمى دالة تناقصية فى I إذا كانت قيم الدالة $f(x)$ تتناقص بتناقص قيم x فى هذه الفترة أى أنه لكل x_1, x_2 فى I فإن

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$$

تعريف _6-3) : إذا كانت f دالة معرفة فى فترة ما I وكان لكل $x_1 \neq x_2$ فى الفترة I نجد أن

$$f(x_1) = f(x_2)$$

سميت هذه الدالة بالدالة الثابتة على الفترة I. أنظر الشكل المقابل.

تعريف (6-4) :

تسمى الدالة f المعرفة فى الفترة I دالة مطردة إذا تحقق

(1) مطردة تزايدية Monotonic increasing

$f(x_1) \leq f(x_2)$ عندما $x_1 < x_2$

لكل x_1, x_2 فى I

(2) مطردة تناقصية Monotonic decreasing

$f(x_1) \geq f(x_2)$ عندما $x_1 < x_2$

لكل x_1, x_2 فى I

لاحظ أن (1) أى دالة تزايدية تكون مطردة تزايدية

(2) أى دالة تناقصية تكون مطردة تناقصية

والعكس ليس دائما صحيحا

يمكن توضيح ذلك بالأمثلة التالية :

مثال (1) :

الدالة $y = 2^x$ دالة تزايدية لجميع قيم $x \in \mathbb{R}$ لأنه عندما $x_1 < x_2$ نجد أن

$$2^{x_1} < 2^{x_2}$$

مثال (2) :

الدالة السلمية $y=[x]$ دالة مطردة التزايد ولكنها ليست تزايدية حيث تساوى مقدار ثابت بين كل قيمتين صحيحتين من قيم x.

إذا كانت $n \le x < n+1$ فإن $y = n$

وإذا كانت $x_1 < x_2$ فإن $[x_1] \le [x_2]$

فمثلا $8.1 < 8.5$ نجد أن $8 = [8.1] = [8.5]$

الآن نعطى اختبارا لمعرفة تزايد وتناقص الدوال حيث يرتبط ذلك بإشارة المشتقة التفاضلية الأولى للدالة ، كما توضحه النظرية التالية :

نظرية 6-8 :

إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة فى الفترة $a \le x \le b$ فإنه

(i) تكون f دالة تزايدية فى الفترة $a \le x \le b$ إذا كانت $f^{\backslash}(x) > 0 \quad \forall \; x \in (a,b)$

(ii) تكون f دالة تناقصية فى الفترة $a \le x \le b$ إذا كانت $f^{\backslash}(x) < 0 \quad \forall \; x \in (a,b)$

(iii) تكون f دالة ثابتة فى الفترة $a \le x \le b$ إذا كانت $f^{\backslash}(x) = 0 \quad \forall \; x \in (a,b)$

هذه النظرية توضح العلاقة بين إشارة المشتقة الأولى فى فترة ما وإطراد الدالة فى هذه الفترة. ونكتفى بذكر منطوق النظرية دون برهان. ويمكن توضيح التزايد والتناقص فى الدالة بالرسم التالى :

ففى حالة الدالة التزايدية يصنع المماس لمنحنى الدالة زاوية حادة مع المحور ox أما إذا كانت الدالة تناقصية فإن المماس يصنع زاوية منفرجة مع المحور ox.

مثال (3) :

أدرس الدالة الآتية من حيث التزايد أو التناقص

$$f(x) = 2x^2 - 8x$$

الحل : واضح أن $f^{\backslash}(x) = 4x - 8 = 4(x-2)$

وبالتالى فإن

$f^{\backslash}(x) = 0$ عندما $x = 2$ $\therefore$ الدالة ثابتة

$f^{\backslash}(x) > 0$ عندما $x > 2$ $\therefore$ الدالة تزايدية

$f^{\backslash}(x) < 0$ عندما $x < 2$ $\therefore$ الدالة تناقصية

مثال (4) :

أدرس الدالة الآتية من حيث التزايد أو التناقص

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$$

الحل : بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن

$$f^{\backslash}(x) = 6x^2 - 18x + 12$$
$$= 6(x-1)(x-2)$$

فإذا كانت $x = 2$ أو $x = 1$ فإن $f^{\backslash}(x) = 0$ وتكون الدالة عندئذ ثابتة القيمة.

إما إذا كانت $1 < x < 2$ فإن $f^{\backslash}(x) < 0$ وفى هذه الفترة تكون الدالة تناقصية.

وإذا كانت $x < 1$ أو $x > 2$ فإن $f^{\backslash}(x) > 0$ ولذا تكون الدالة تزايدية.

مما سبق يمكن القول بأن الدالة تناقصية فقط فى الفترة $1 < x < 2$ وخارج هذه الفترة تكون الدالة تزايدية ما عدا عندما $x = 1$ أو $x = 2$ تأخذ الدالة قيما ثابتة ندرسها فيما بعد.

مثال (5) :

أبحث تزايد وتناقص الدالة $f(x) = 5 - (x-4)^3$

الحل : $f^{\backslash}(x) = -3(x-4)^2$

واضح أن إشارة $f^{\backslash}$ سالبة دائما ما عدا عندما $x = 4$ فتساوى الصفر.

وهذا يدل على أن الدالة تناقصية دائما لجميع قيم x ما عدل $x = 4$ ولتحديد سلوك الدالة عند النقطة $x = 4$ هل هى تزايدية أو تناقصية أم ثابتة؟ نعوض بالقيم المتتالية

$$x = 4 - \varepsilon\ , \quad x = 4\ , \quad x = 4 + \varepsilon\ , \quad \varepsilon > 0$$

نجد أن

$$f(4 - \varepsilon) = 5 - (4 - \varepsilon - 4)^3 = 5 - \varepsilon^3 > 5$$
$$f(4) = 5 - (4 - 4)^3 = 5$$
$$f(4 + \varepsilon) = 5 - \varepsilon^3 < 5$$

وهذا يعنى أن الدالة تتناقص كلما زادت قيمة x فى جوار النقطة $x = 4$

مثال (6) :

أدرس تزايد وتناقص الدالة :

$$y = x + \frac{1}{x} \quad ; \quad x \neq 0$$

الحل : إذا كانت $y = x + \frac{1}{x}$ فإن

$$y^{\backslash} = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} \quad ; \quad x \neq 0$$

إشارة الدالة $y^\backslash$ تتوقف على إشارة البسط فقط لأن $0<x^2$ وتكون قيمة غير معرفة عندما $x = 0$. بينما $y^\backslash = 0$ عندما $x = 1\ ,\ x = -1$

وبذلك يكون لدينا أربعة فترات هى

$$x < -1\,,\quad -1 < x < 0\,,\quad 0 < x < 1\,,\quad 1 < x$$

ويمكن توضيح سلوك الدالة فى الجدول الآتى :

Interval	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Sign of $(x - 1)$	-	-	-	+
Sign of $(x + 1)$	-	+	+	+
Sign of $y^\backslash$	+	-	-	+
Behavior of y	Increasing	Decreasing	Decreasing	Increasing

9-6 القيم العظمى والصغرى النسبية وتطبيقاتها: Maxima , minima and applications

تعريف (6-5) :

إذا كانت $f(x)$ دالة قابلة للتفاضل فى فترة ما على خط الأعداد فإن f تسمى دالة مقعرة لأعلى عند النقطة $x_1 \in I$ إذا كانت $f^\backslash$ تزايدية فى جوار النقطة x_1 وتسمى f دالة مقعرة لأسفل عند النقطة x_2 إذا كانت $f^\backslash$ دالة تناقصية فى جوار النقطة x_2.

نظرية 6-9 :

إذا كانت الدالة $f(x)$ مقعرة لأعلى عند x_1 فإن $f^{\backslash\backslash}(x_1) > 0$

وإذا كانت f دالة مقعرة لأسفل عند x_2 فإن $f^{\backslash\backslash}(x_1) < 0$

النقط الحرجة ونقط الانقلاب :

تعريف (6-6) :

إذا كانت f دالة معرفة فى فترة ما I على خط الأعداد ، النقطة x_0 تسمى نقطة حرجة للدالة f إذا كانت $f^\backslash(x) = 0\,,\quad x_0 \in I$

أو عندما تكون $f^\backslash(x_0)$ غير معرفة.

تعريف (6-7) :

النقطة $x_0 \in I$ تسمى نقطة انقلاب (دوران) للدالة $f(x)$ المعرفة فى الفترة $I \subset$ إذا كانت النقطة $(x_0, f(x_0))$ نقطة يتحول عندها تقعر المنحنى $y = f(x)$.

نتيجة (6-10) :

إذا كانت x_0 نقطة انقلاب الدالة f فإن $f^\backslash(x) = 0$

ملاحظات :

(1) تغير تقعر المنحنى عند نقطة يعنى أن f'' تغير إشارته فى جوار لهذه النقطة

$$f(x_0-\varepsilon) \le 0 \quad , \quad f(x_0+\varepsilon) \;/\; 0$$

(2) عكس النتيجة السابقة (6-10) ليس صحيحا دائما ، فمثلا

إذا كانت $f(x)=x^4$ فإن

$$f'(x)=4x^3$$

$$f''(x)=12x^2$$

فواضح أن $f''(x)$ موجبة دائما لجميع قيم $x \neq 0$ ، لذا فالمنحنى مقعر لأعلى. وأن $f'(0)=f''(0)=0$ ومع ذلك فالنقطة $x = 0$ ليست نقطة انقلاب لأن المنحنى لا يغير من تقعره.

مثال (1) :

ابحث فترات تقعر منحنى الدالة $f(x)=2x^3-3x^2-36x+5$

ثم أوجد نقط الانقلاب.

الحل : إذا كانت $f(x)=2x^3-3x^2-36x+5$ فإن

$$f'(x)=6x^2-6x-36=6(x-3)(x+3)$$

$$f''(x)=12x-6=6(2x-1)$$

لدراسة تقعر الدالة f نبحث إشارة f'' بوضع $f''(x)=0$ نجد أن $2x-1=0$

$$x=\frac{1}{2}$$

لاحظ أن $f''(x)=12(x-1/2)$

فإذا كانت $x>\frac{1}{2}$ فإن $f''(x)>0$

وإذا كانت $x<\frac{1}{2}$ فإن $f''(x)<0$

أى أن الدالة مقعرة لأعلى عندما $x<\frac{1}{2}$

وتكون الدالة مقعرة لأسفل عندما $x>\frac{1}{2}$

وتوجد نقطة انقلاب (دوران) عندما $x=\frac{1}{2}$

مثال (2) : أوجد نقط الانقلاب للدالة : $f(x)=x(6-x)^2$

الحل : واضح أن $f(x)=x(36-12x+x^2)$

$$= x^3 - 12x^2 + 36x$$

وبالتالى فإن

$$f^{\backslash}(x) = 3x^2 - 24x + 36$$

$$f^{\backslash\backslash}(x) = 6x - 24 = 6(x-4)$$

لإيجاد نقط الانقلاب نضع $f^{\backslash\backslash}(x) = 0$ ، يتضح أن $x = 4$

للتأكد من أنها نقطة الانقلاب للدالة ندرس تقعر الدالة حول هذه النقطة $x = 4$

فعندما $x > 4$ نجد أن $f^{\backslash\backslash}(x) > 0$

بينما $x > 4$ تؤدى إلى $f^{\backslash\backslash}(x) < 0$

أى أن منحنى الدالة يغير من تقعره عند المرور بالنقطة $x = 4$

$\therefore$ $x = 4$ هى نقطة الانقلاب للدالة $f(x)$.

القيم العظمى والقيم الصغرى :

تعريف (6-8) :

لتكن $f(x)$ دالة متصلة فى الفترة $a \le x \le b$ ، يقال أن للدالة f قيمة عظمى محلية عند نقطة داخلية x_1 ، $a < x_1 < b$ إذا كانت

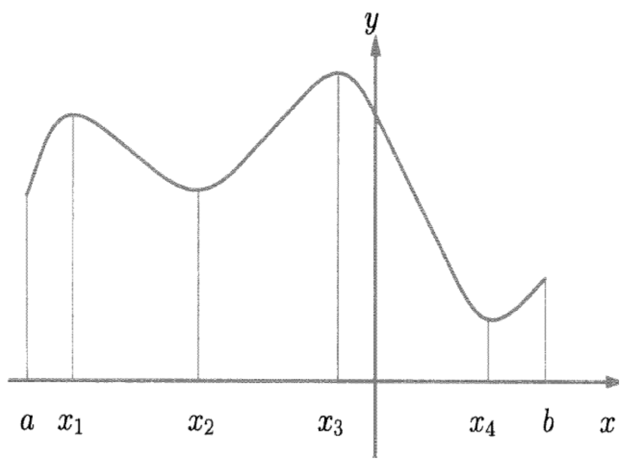
$$f(x_1) \ge f(x) \quad \forall \quad x \in [x_1 - \varepsilon, \quad x_1 + \varepsilon]$$

أى لجميع قيم x القريبة من x_1.

ويقال أن للدالة قيمة صغرى محلية عند النقطة x_2 حيث x_1 ، $a < x_2 < b$ إذا كانت

$$f(x_2) \le f(x) \quad \forall \quad x \in [x_2 - \varepsilon, \quad x_2 + \varepsilon]$$

أى لجميع قيم x القريبة من x_2.



نلاحظ من الشكل أن : الدالة $f(x)$ لها قيمة عظمي محلية عند النقطة x_1 ، ولها قيمة صغري محلية عند النقطة x_2 ، ولكن لها قيمة عظمي عند النقطة x_3 ، وقيمة صغري عند النقطة x_4 ، وفي بعض الأحيان تسمي القيمة القصوي المحلية بالقيمة القصوي المحلية

نظرية 6-11 :

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة فى الفترة $a \le x \le b$ وقبلة للتفاضل فى الفترة $a < x < b$ فيكون للدالة f قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية عند النقطة الدالة x_0 للفترة (a , b) أى $a < x < b$ إذا كانت $f^{\backslash}(x) = 0$.

سوف لا نبرهن النظرية ولكن نكتفى بالتفسير الهندسى لها. لأنه عند القيمة العظمى المحلية توجد قمة لمنحنى الدالة ، وعند القيمة الصغرى المحلية يوجد قاع للمنحنى ، فيكون المماس للمنحنى عند قمته وعند القاع أفقيا موازيا للمحور ox كما بالشكل السابق.

سبق أن عرفنا النقط الحرجة للدالة عندما تكون $f^{\backslash}(x) = 0$ أو أن $f^{\backslash}(x)$ غير موجودة وهذا يعنى أن النهايات العظمى والصغرى المحلية هى نقط حرجة للدالة.

الآن نعطى طرق تحديد النهايات العظمى والصغرى :

(أ) الطريقة الأولى :

إذا كانت الدالة f قابلة للتفاضل فإننا :

1- نوجد النقط x التى عندها تكون $f^{\backslash}(x) = 0$

2- عند هذه النقط نوجد قيم $f^{\backslash\backslash}(x)$ فإذا

أ – كانت $f^{\backslash}(x) = 0$ فإن المنحنى يكون مقعر لأعلى وهذا يعنى أن x تمثل نهاية صغرى

وقيمة $f(x)$ عندها تكون قيمة صغرى.

ب – إذا كانت $f^{\backslash\backslash}(x) < 0$ كان المنحنى مقعر لأسفل وهذا يعطى قيمة عظمى عند هذه النقطة.

مثال (1) : أوجد النقط التى عندها قيمة عظمى أو قيمة صغرى للدالة
$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

الحل : (1) نوجد $f^{\backslash}(x)$:

$$\begin{aligned} f^{\backslash}(x) &= 15x^4 - 15x^2 \\ &= 15x^2(x^2 - 1) \\ &= 15x^2(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

(2) نوجد $f^{\backslash\backslash}(x)$:

$$f^{\backslash\backslash}(x) = 60x^3 - 30x$$
$$= 30x(2x^2 - 1)$$

(3) نضع $f^{\backslash}(x) = 0$ فنجد أن $15x^2(x-1)(x+1) = 0$

ومنها نجد أن $x = 0 ,\quad x = 1 ,\quad x = -1$

هى قيم x التى تمثل نقط حرجة للدالة المعلومة.

(4) عوض بقيم x فى $f^{\backslash\backslash}(x)$:

$$f^{\backslash\backslash}(0) = 0 ,\quad f^{\backslash\backslash}(1) = 30 > 0 ,\quad f^{\backslash\backslash}(-1) = -30 < 0$$

وبالتالى نستنتج أن

(1) عند $x = 1$ توجد قيمة صغرى محلية $f^{\backslash\backslash}(1) > 0$

(2) عند $x = -1$ توجد قيمة عظمى محلية $f^{\backslash\backslash}(-1) < 0$

(3) عند $x = 0$ لا يوجد قيمة عظمى أو صغرى محلية للدالة.

(ب) الطريقة الثانية :

أحيانا تكون عملية حساب المشتقة الثانية $f^{\backslash\backslash}$ معقدة. لذلك نبحث الآن طريقة أخرى للكشف عن القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة وذلك اعتمادا على المشتقة الأولى $f^{\backslash}$:

نلاحظ ما يلى :

(1) إذا كانت عند النقطة x_1 قيمة عظمى محلية للدالة f فإن :

(i) $f^{\backslash}(x_1) = 0$

(ii) تتغير إشارة $f^{\backslash}(x)$ من قيمة موجبة لقيم $x_1 > x$ إلى قيمة سالبة لقيم $x_1 < x$ كما بالشكل التالى:

(2) إذا كان للدالة f قيمة صغرى محلية عند النقطة x_2 فإن

(i) $f^{\backslash}(x_2) = 0$

(ii) $f^{\backslash\backslash}(x)$ تتغير إشارتها من قيمة سالبة لقيم $x_2 > x$ إلى قيمة موجبة لقيم $x_2 < x$ كما بالشكل التالى :

يمكن تلخيص خطوات هذه الطريقة كما يلى :

1- نوجد قيم x بحيث يكون $f^{\backslash}(x) = 0$.

2- إذا كانت x_0 إحدى النقط الحرجة للدالة وكانت :

(أ) إشارة $f^{\backslash}(x)$ تتغير من + إلى - قبل وبعد x_0 مباشرة فإنه عند x_0 توجد قيمة
عظمى محلية للدالة هى $f(x_0)$

(ب)إشارة $f^{\backslash}(x)$ تتغير من – إلى + قبل وبعد x_0 مباشرة فإنه عند x_0 توجد قيمة
صغرى محلية للدالة هى $f(x_0)$

(ج) إشارة $f^{\backslash}(x)$ لا تتغير قبل وبعد x_0 مباشرة فلا توجد عند x_0 قيمة عظمى أو صغرى للدالة.

مثال (2) : أستخدم الاختبار الثانى فى المثال السابق.

الحل : إذا كانت $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

$$f^{\backslash}(x) = 15x^4 - 15x^2$$
$$= 15x^2(x^2 - 1)$$
$$= 15x^2(x-1)(x+1)$$

2- بوضع $f^{\backslash}(x) = 0$ نجد أن

$$x = 0 , \quad x = +1 , \quad x = -1$$

$\therefore$ النقط الحرجة هى $(0 , 0) , (+1 , -2) , (-1 , 2)$

3 – نوجد إشارة $f^{\backslash}(x) = 0$ حسب الجدول التالى :

وهى إشارة المقدار $(x – 1)(x + 1)$ لأن $15 x^2 > 0$

Interval	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Sign of $(x – 1)$	-	-	-	+
Sign of $(x +1)$	-	+	+	+
Sign of $f^{\backslash}(x)$	+	-	-	+
Behavior of y	Local maximum value		Local minimum value	

القيم العظمى المطلقة والقيم الصغرى المطلقة :

مما سبق يتضح أنه قد يكون للدالة أكثر من قيمة عظمى محلية وأكثر من قيمة صغرى محلية. ولكن قد يكون المطلوب تحديد أكبر قيمة يمكن أن تبلغها الدالة فى فترة معينة أو إيجاد أصغر قيمة يمكن أن تبلغها الدالة فى هذه الفترة.

تعريف (6-9) :

إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة فى فترة $a \le x \le b$ ولتكن x_0 نقطة فى هذه الفترة بحيث أن

$$f(x_0) \ge f(x) \quad \forall \quad x \in [a,b]$$

وتسمى $f(x_0)$ بالقيمة العظمى للدالة f فى الفترة [a, b]. بالمثل إذا كانت x_0 نقطة فى الفترة بحيث أن

$$f(x_0) \le f(x) \quad \forall \quad x \in [a,b]$$

تسمى $f(x_0)$ القيمة الصغرى للدالة فى الفترة [a, b].

ملاحظات :

1- قد لا نجد أحيانا نقطة فى الفترة يتحقق عندها شرط القيمة العظمى أو الصغرى.

2- قد تكون النهاية العظمى (أو الصغرى) إحدى النهايات العظمى المحلية (أو الصغرى) وقد تكون عند إحدى نهايتى الفترة المعرفة عليها الدالة.

مثال (3) : أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى المطلقة للدالة

$$f(x) = x^3 - 3x, \qquad -2 \le x \le 3$$

الحل : نوجد أولا :

$$f(-2) = -2, \qquad f(3) = 18$$

ونوجد $f^{\backslash}(x) = 3(x^2 - 1), \quad f^{\backslash\backslash}(x) = 6x$

بوضع $f^{\backslash}(x) = 0$ نجد أن النقط الحرجة هى عندما $x = \pm 1$ ، واضح أن

$$f^{\backslash\backslash}(1) = 6 > 0$$

$\therefore$ توجد قيمة صغرى محلية للدالة عندما $x = 1$ بينما

$$f^{\backslash\backslash}(-1) = -6 < 0$$

$\therefore$ توجد قيمة عظمى محلية للدالة عندما $x = -1$ وعند $x = \pm 1$ يكون

$$f(1) = 1 - 3 = 2$$

$$f(-1) = -1 + 3 = 2$$

مما سبق نجد أن القيمة العظمى المطلقة للدالة هى 18 عندما $x = 1$ ، وأن القيمة الصغرى المطلقة للدالة هى 2 - وتبلغها عند النقط $x = -2, 1$

مثال (4) : أوجد القيم العظمى والقيم الصغرى للدالة :

$$f(x) = e^{-x^2}$$

مبينا فترات التغير ونقط الانقلاب

الحل : إذا كانت $f(x) = e^{-x^2}$ فإن

$$f^{\backslash}(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$f^{\backslash\backslash}(x) = e^{-x^2}[4x^2 - 2]$$

ومنها $$f^{\backslash\backslash}(x) = 4e^{-x^2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

لإيجاد النقط الحرجة نضع $f^{\backslash}(x) = 0$ فنجد أن

$$4e^{-x^2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$$

$$\therefore \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad , \qquad x=\pm\infty$$

ثم نحدد إشارة $f^{\backslash\backslash}(x)$ $\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ولتحقيق ذلك نكون الجدول الآتى :

Interval	$-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \infty$
Sign of $\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	-	-	+
Sign of $\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	-	+	+
Sign of $f^{\backslash\backslash}(x)$	+	-	+
Value of f (x)	Local min.	Local max.	Local min.

مثال : أوجد القيم العظمى والقيم الصغرى للدالة

$$f(x)=x+\frac{1}{x} \;;\quad x\in[-2,2] \;;\quad x\neq 0$$

الحل : إذا كانت $f(x)=x+\frac{1}{x} \;;\qquad x\neq 0$

فإن $f^{\backslash}(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x-1)(x+1)}{x^2} \;;\quad x\neq 0$

$$f^{\backslash\backslash}(x)=\frac{2}{x^3} \qquad ; \qquad x\neq 0$$

بوضع $f^{\backslash}(x)=0$ نجد أن $x=\pm 1$

$$\therefore \quad f^{\backslash\backslash}(1) > 0 \;,\quad f^{\backslash\backslash}(-1) < 0$$

أى أن عندما $x = 1$ توجد قيمة صغرى محلية للدالة ، وعندما $x = -1$ توجد قيمة عظمى محلية للدالة وهذه القيم المحلية هى $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$

وقيم الدالة عند نهايتى الفترة $[-2 , 2]$ هى $f(-2)=-\frac{5}{2}, \quad f(2)=+\frac{5}{2}$

ولكن سلوك الدالة يمكن أن تتعدى أى قيمة موجبة نختارها ويمكن أيضا أن تقل عن أى قيمة سالبة نختارها. مثل هذه الدالة ليس لها نهاية عظمى وليس لها قيمة

صغرى مطلقة محدودة. ويقال لهذه الدالة أنها غير محدودة من أسفل كما بالشكل التالى :

تطبيقات على القيم العظمى والصغرى :

نتناول الآن بعضا من التطبيقات العملية فى إيجاد القيم العظمى والصغرى. وذلك من خلال الأمثلة الآتية :

مثال (1) : أوجد عددين مجموعهما 120 بحيث يكون حاصل ضرب أحدهما فى مربع الآخر أكبر ما يمكن.

الحل : نفرض أن أحد العددين هو x ، فيكون الآخر هو $120 - x$ ، نرمز لحاصل الضرب بالرمز y فيكون :

$$y = x^2 (120 - x)$$
$$= 120 x^2 - x^3 \qquad (1)$$
$$y' = 240 x - 3 x^2 = 3 x (80 - x) \qquad (2)$$
$$y'' = 6 (40 - x) \qquad (3)$$

بوضع $y' = 0$ فى (2) نجد أن

$$x = 0 \quad , \quad x = 80$$

عندما $x = 0$ نجد أن $y'' = 240 > 0$

$\therefore$ توجد قيمة صغرى محلية للدالة عندما $x = 0$

وعندما $x = 80$ نجد أن $y'' = -240 < 0$

$\therefore$ توجد قيمة عظمى محلية للدالة عندما $x = 180$

أى أن أحد العددين المطلوبين هو 180 ويكون العدد الآخر 40 ويكون حاصل ضرب هو

$$Y = 80^2 \times 40 = 256000$$

مثال (2) : أوجد إحداثيات النقط على المنحنى $x^2 - y^2 = 16$ وتكون أقرب ما يمكن من النقطة $(0 , 6)$.

الحل : المنحنى المعطى هو قطع زائدى إحدى طيتيه كما بالشكل.

نفرض أن $(x_1 y)$ نقطة على المنحنى تبعد بمقدار d عن النقطة $(0 , 6)$ وبذلك يكون

$$d^2 = x^2 + (y - 6)^2 \qquad (1)$$

وحيث أن $x^2 - y^2 = 16$ فإن

$$Z = d^2 = 16 + y^2 + (y - 6)^2$$
$$Z = 2y^2 - 12y + 52$$

ولإيجاد النقطة $(x_1 y)$ على المنحنى التى تكون على أقل بعد ممكن من النقطة $(0 , 6)$

نضع $Z' = 0$ أى

$$4y - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3$$

وبذلك نستنتج أن النقط $(\pm5,3)$ هى نقط حرجة للدالة Z ولمعرفة أى من النقطتين $(5 , 3)$, $(- 5 , 3)$ تكون على أقل بعد من $(0 , 6)$ نوجد

$$Z^{\backslash\backslash} = 4 > 0 \qquad \forall\ y$$

أى أن النقطتين تكونان على نفس البعد من النقطة $(0 , 6)$ ويكون هذا البعد هو أصغر بعد ممكن ومقداره $d = \sqrt{34}$

مثال (3) : تكاليف تشغيل سيارة تعطى بالقانون : $\left\{2+\frac{5}{100}(v-40)\right\}$ قرشا لكل كيلو متر ، حيث v هى سرعة السيارة مقدرة بالكيلو متر وكانت أجرة السائق هى 125 قرش فى الساعة. فما هى سرعة السيارة لكى تقطع 250 كم بأقل تكاليف كلية ممكنة. وماهى التكلفة ؟

الحل : تكايف تشغيل السيارة لمسافة 250 كم هى

$$250\ \left\{2+\frac{5}{100}(v-40)\right\}$$

وأجرة السائق لقطع هذه المسافة هى

$$125\times\frac{250}{v}$$

وبذلك تكون التكلفة الكلية y هى

$$y = \frac{125\times250}{v} + 250\left\{2+\frac{5}{100}(v-40)\right\}$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة إلى v نحصل على

$$y^{\backslash} = -\frac{125\times250}{v^2} + \frac{25}{2}$$

$$y^{\backslash\backslash} = \frac{2\times125\times250}{v^3}$$

ولكى تكون التكلفة y أقل ما يمكن لابد أن تسير السيارة بسرعة v بحيث تكون $y^{\backslash} = 0$ ، $y^{\backslash\backslash} > 0$ أى تكون

$$\frac{125\times250}{v^2} = \frac{25}{2}$$

$$v^2 = 250 \text{ x } 10$$

ومنها $v = 50 \ \text{km / h}$

والقيمة السالبة مرفوضة.

وعندما $v = 50$ فإن

$$y^{\backslash\backslash} = \frac{2\times125\times250}{(50)^3} > 0$$

أى أن y تبلغ قيمة صغرى عندما $v = 50$ وهذه القيمة هى

$$y = \frac{125\times250}{50} + 250\left\{2 + \frac{5}{100}(50-40)\right\}$$

$$= 625 + 500 + 125 = 1250 \text{ pt}$$

أى أن التكلفة الكلية هى 1250 قرشا.

مثال (4) : يتكلف مصنع فى انتاج وتوزيع أحدى الوحدات التى يقوم بتصنيعها مبلغا قدره m جنيها ، ويبيعها بمبلغ قدره x جنيه. وكانت العلاقة بين عدد الوحدات المبيعة y وثمن البيع هى

$$y = \frac{a}{x-m} + b(50-x)$$

حيث a, b مقادير ثابتة.

الحل : إذا كانت

$$y = \frac{a}{x-m} + b(50-x)$$

فإن

$$y^{\backslash} = \frac{-a}{(x-m)^2} - b$$

$$y^{\backslash\backslash} = \frac{2a}{(x-m)^3}$$

لكى يكون الربح أكبر ما يمكن يجب أن تكون x بحيث أن

$$y^{\backslash} = 0 \ , \quad y^{\backslash\backslash} < 0$$

أى يجب أن يكون

$$\frac{a}{(x-m)^2} = -b$$

ولأن x, m لابد أن تكون موجبة فإن a يجب أن تكون سالبة عندها تكون

$$x - m = \sqrt{\frac{-a}{b}}$$

$$\therefore\ x = m + \sqrt{\frac{-a}{b}}$$

وحيث أنه عندما $x = m + \sqrt{\frac{-a}{b}}$ تكون

$$y^{\backslash\backslash} = 2a\left(-\frac{b}{a}\right)^{3/2} > 0$$

$\therefore$ السعر الذى يبيع به المصنع ليحقق أعلى ربح يمكن هو

$$x = m + \sqrt{-a/b}$$

تمارين (5-6)

1- لكل من الدوال الآتية أوجد فترات التزايد ، فترات التناقص والنقط الحرجة :

1- $y = x + 4 \; ; \quad -1 \le x \le 4$

2- $y = 2 - 3x \; ; \quad 2 \le x \le 7$

3- $y = x^2 - 4x \; ; \quad x \in \mathbb{R}$

4- $y = 6x - x^2 - 5 \; ; \quad 0 \le x \le 5$

5- $x^3 + 3x^2 \; ; \quad x \in \mathbb{R}$

6- $y = \sin 2x \; ; \quad 0 \le x \le \pi$

7- $y = \sqrt{4 - x^2} \; ; \quad -1 \le x \le 1$

2- عين لكل من الدوال الآتية فترات التقعر ونقط الانقلاب :

(1) $y = (x-1)^3$

(2) $y = x^6 + 3x + 5$

(3) $y = 2x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 5x - 10$

(4) $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$

(5) $y = 2x^3 - 6x^2 + 7x + 1$

3- أوجد القيم العظمى والقيم الصغرى النسبية (المحلية) ، ثم أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدوال الآتية :

(1) $f(x) = x^2 - 6x + 1 \; ; \quad 0 \le x \le 7$

(2) $f(x) = 1 - 3x - x^2 \; ; \quad -3 \le x \le 4$

(3) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 71 \; ; \quad -1 \le x \le 5$

(4) $f(x) = x^3 - 3x + 5 \; ; \quad -4 \le x \le 2$

(5) $f(x) = x - \dfrac{1}{x} \; ; \quad \dfrac{1}{2} \le x \le 4$

(6) $f(x) = (x - +4)/(x-4) \; ; \quad -1 \le x \le 3$

(7) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2} \; ; \quad -2 \le x \le 2$

(8) $f(x) = \begin{cases} x & ; \quad -1 \le x \le 0 \\ 4x - x^2 & ; \quad 0 \le x \le 2 \end{cases}$

4- عين قيمتى a, b بحيث يكون للدالة :

$$f(x) = 4x + \frac{b}{x}$$

قيمة حرجة عند $x = 3$ ، وأن $f(3) = 2$ ، وهل النقطة $(2, 3)$ نهاية عظمى محلية أم صغرى محلية؟

5- أوجد أبعاد المستطيل الذى محيطه 120 ft ، ومساحته أكبر ما يمكن.
6- أوجد عددين يكون حاصل ضربهما أقل ما يمكن ، والفرق بينهما 20.
7- قطعة ورقية مستطيلة طولها 16 وعرضها 10 وحدة طول . قطع من أركانها مربعات صغيرة طول ضلع كل منها x. ثم صنع من المساحة المتبقية صندوق على شكل متوازى مستطيلات إرتفاعه x
(أ) أوجد x ليكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن.
(ب) أوجد x ليكون مساحة الصندوق الجانبية أكبر ما يمكن.
8- أوجد أبعاد المستطيل ذو أكبر مساحة يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها 6 وحدات .

10-6 رسم المنحنيات :

عند رسم منحنى دالة نتبع الخطوات الآتية :

(1) تحديد نطاق الدالة ومداها.
(2) تحديد نقط تقاطع المنحنى مع المحاور.
- بوضع $x = 0$ ، نحصل على الإحداثى y لنقط تقاطع المنحنى مع المحور oy.
- بوضع $y = 0$ ، نحصل على الإحداثى x لنقط تقاطع المنحنى مع المحور ox.

(3) تحديد تماثل المنحنى حول إحدى المحاور أو حول نقطة الأصل ، فإذا كتبت معادلة المنحنى $y = f(x)$ على الصورة $\varphi(x_1 y) = 0$ ولاحظ أن $\varphi(-x_1 y) = 0$ أيضا يكون المنحنى متماثل حول المحور oy ، مثل المنحنى $y = x^2$.
إما إذا كانت $\varphi(x_1 - y) = 0$ فإن المنحنى يتماثل حول المحور ox.
وإذا كانت $\varphi(-x_1 - y) = 0$ فإن المنحنى يكون متماثل حول نقطة الأصل مثل المنحنيات

$$y = x\ , \quad y = x^3\ , \quad y = \sin x$$

(4) تعيين النقط الحرجة (القيم العظمى والصغرى النسبية) للدالة ، وفترات تزايد وتناقص الدالة ، وتحديد نقط الانقلاب.
(5) تعيين الخطوط التقاربية للمنحنى :
(i) إذا كانت $y = f(x)$ وكان

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty\ , \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

فإن $x = a$ يمثل خط تقاربى رأسى

(ii) إذا كانت $x = \varphi(y)$ دالة عكسية للدالة $f(x)$ وكان

$$\lim_{y\to b^+} \varphi(y) = \pm\infty , \qquad \lim_{y\to b^-} \varphi(y) = \pm\infty$$

فإن $y = b$ يمثل خط تقاربى أفقى.

(iii) إذا كانت $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = c$$

فإن $y = mx + c$ خط تقاربى مائل.

(6) يمكن تسجيل قيم x, y المتناظرة (من القاعدة $y = f(x)$) فى جدول.

مثال (1) : أرسم منحنى الدالة $y = 4 - 2x^2$ فى الفترة $[-2, 3]$

الحل : نطاق الدالة $f(x) = 4 - 2x^2$ معرف فى المثال $[-2, 3]$ ومدى هذه الدالة فئة الأعداد الحقيقية.

وبوضع $-x$ بدلا من x لا تتغير الدالة حيث

$$f(-x) = 4 - 2(-x)^2 = 4 - 2x^2 = f(x)$$

أى أن المنحنى متماثل حول المحور oy ولكنه غير متماثل حول المحور ox لأن

$$4 - 2x^2 - (-y) \neq 0$$

لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع المحاور :

1- نضع $x = 0$ فنجد أن $y = 4$.

2- نضع $y = 0$ فنجد أن $x = \pm\sqrt{2}$.

أى أن المنحنى يتقاطع والمحور oy عند النقطة $(0, 4)$ ولكنه يتقاطع مع المحور ox عند النقطتين $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$.

الآن نوجد النقط الحرجة وذلك بفرض أن :

$$y' = -4x = 0$$

وبذلك تكون النقطة $(0, 4)$ هى نقطة حرجة وعندها يكون

$$y'' = -4 < 0$$

أى أن المنحنى يبلغ عند النقطة $(0, 4)$ نهاية عظمى محلية لقيم $0 < x$ يتضح أن $y' = -4x < 0$ أى أن الدالة تناقصية عندما $0 < x$. ولقيم $0 > x$ يتضح أن $0 < y'$ أى أن الدالة تزايدية فى الفترة $0 > x$.

ولتحديد نقط الانقلاب ندرس إشارة f'' ، وحيث أن

$$f''(x) = -4 < 0 \qquad \forall\, x$$

فهذا يعنى عدم وجود نقط انقلاب ، وأن المنحنى مقعر لأسفل. لإيجاد الخطوط التقاربية ندرس النهايات المعرفة سابقا . وإذا كانت $y = 4 - 2x^2$ نلاحظ أنه لا توجد ثوابت حقيقية a, b, m, c تحقق هذه النهايات.
أى أنه لا توجد خطوط تقاربية.
أخيرا نكون الجدول التالى :

x	- 2	$-\sqrt{2}$	- 1	0	1	$\sqrt{2}$	2	3
y	- 4	0	2	4	2	0	- 4	- 14

مثال (2) : أرسم منحنى الدالة $y = x + \frac{1}{x}$

الحل : إذا كانت $y = x + \frac{1}{x}$

فإن $y^{\backslash} = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$$y^{\backslash\backslash} = \frac{2}{x^3}$$

(1) الدالة معرفة لجميع قيم x ما عدا $x = 0$. ومدى الدالة هو

$$f(-x) = -x - \frac{1}{2} = -(x + \frac{1}{2}) = -f(x)$$

$\therefore$ المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

(2) بوضع $y = 0$ نجد أن $0.1x + \frac{1}{x} = 0$

$$x^2 + 1 = 0$$

$\therefore$ لا توجد قيم حقيقية x بحيث $y = 0$. أى أنه لا توجد نقط تقاطع للمنحنى مع المحاور.

(3) واضح أنه

$$\lim_{x \to 0^+} (x + \frac{1}{2}) = +\infty \, , \qquad \lim_{x \to 0^-} (x + \frac{1}{2}) = -\infty$$

$\therefore$ $x = 0$ هو خط تقاربى رأسى.

ولأن الدالة $x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2} \; ; \quad y \notin [-2, 2]$

معرفة ومحدودة فلا توجد خطوط تقاربية أفقية.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x^2}) = 1 \text{ ،}$$

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - x] = 0$$

∴ $y = x$ هو خط تقاربى مائل.

(4) النقط الحرجة : هى قيم x بحيث $y' = 0$ أى $1 - \frac{1}{x^2} = 0$

ومنها نجد أن $x = \pm 1$

∴ النقط الحرجة هى $(-1, -2)$, $(1, 2)$

ويلاحظ أن :

$$y''(1) = 2 > 0 , \quad y''(-1) = -2$$

حيث $y'' = 2/x^3$

∴ توجد قيمة صغرى للدالة عندما $x = 1$ ، وقيمة عظمى عندما $x = -1$ كما يتضح أنه لجميع قيم x الموجبة تكون $y'' > 0$ مما يدل على أن الدالة مقعرة لأعلى فى الربع الأول من المستوى.

أما إذا كانت $x < 0$ فإن $y'' < 0$ مما يدل على أن المنحنى يكون مقعر لأسفل فى الربع الثالث.

ولا يكون للدالة تمثيل فى الربع الثانى أو الرابع كما بالشكل :

تمارين (6-6)

-1 أرسم المنحنيات التالية :

(i) $y = x(x^2 - 1)$; $-2 \le x \le 2$

(ii) $y = 4 - 2x^2 + 4x$; $0 \le x \le 3$

(iii) $y = x^2(x - 1)$; $-2 \le x \le 2$

(iv) $y = x^4 - 2x^2$; $-2 \le x \le 2$

(v) $y = x^4 - x^3 - x^2$; $-1 \le x \le 3$

(vi) $y = (x + 2)^2 + 4$; $-4 \le x \le -2$

-2 أرسم المنحنيات الآتية :

(1) $f(x) = 3 + \frac{2}{x}$

(2) $y = \frac{2}{x - 2} - x$

(3) $f(x) = x - \frac{1}{x}$

(4) $y = x^3 - \frac{2}{x}$

(5) $y = \frac{1}{x^2}$

(6) $y = \frac{1}{x}$

(7) $y^2 = \frac{4(2 + x)}{x}$

11-6 تطبيقات فى الميكانيكا :

سبق لنا أن بينا فى الفصل الثالث العلاقة بين المشتقة التفاضلية من الرتبة الأولى وسرعة جسيم يتحرك فى خط مستقيم ليقطع مسافة قدرها x مستغرقا زمنا قدره t فهو يتحرك بسرعة تعطى بالعلاقة :

$$v = \frac{dx}{dt}$$

وإذا كانت هذه السرعة غير منتظمة ، أى تتغير مع الزمن فإن الجيم يتحرك بعجلة h تعطى بالعلاقة

$$h = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

مثال (1) : تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم طبقا للعلاقة

$$x = 2t^2 + 5t$$

حيث t مقدرة بالثوانى ، x مقدرة بالقدم تدل على بعد الجسيم عن نقطة ثابتة. أوجد

(1) السرعة المتوسطة والعجلة المتوسطة خلال الفترة الزمنية $2 \le t \le 2.1$

(2) السرعة والعجلة عندما $t = 2\ \text{sec}$

الحل :

إذا كانت $x = 2t^2 + 5t$ فإن

$$v = 4t + 5 \quad \text{ft/sec}$$

$$h = 4 \quad \text{ft/sec}^2$$

وإذا كان الجسيم على بعد x_1 من النقطة الثابتة (بدء الحركة) عندما $t = t_1$ وعندما $t = t_2$ أصبح على بعد x_2 فإن :

(1) السرعة المتوسطة تعطى بالعلاقة

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

وعندما تكون $t_1 = 2\ ,\ \ t_2 = 2.1$ فإن $x_1 = 18\ ,\ \ x_2 = 19.32$

وبذلك تكون $\bar{v} = 13.2\ \text{ft/sec}$

وإذا كانت v_1 هى سرعة الجسيم عند اللحظة t_1 ، وعند اللحظة t_2 تصبح السرعة v_2 . عندئذ تكون العجلة المتوسطة هى

$$\bar{h} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

وعند $t_1 = 2$ فإن $v_1 = 13$ وعند $t_2 = 2.1$ تكون $v_2 = 13.4$ وبالتالى فإن

$$\bar{h} = 4 \text{ ft/sec}^2$$

(2) من العلاقة $v = 4t + 5 \quad \text{ft/sec}$

تكون السرعة عند اللحظة $t = 2$ هى $v = 13 \text{ ft/sec}$ ، حيث أن

$$h = 4 \quad \forall \; t$$

فإنه عندما $t = 2$ تكون $h = 4 \text{ ft/sec}^2$

مثال (2) : يتحرك جسيم ليقطع مسافة مقدارها

$$x = \frac{3}{2} t^3 - 2t \text{ Cm}$$

كل لحظة زمنية قدرها t ثانية :

(أ) أوجد موضع الجسيم وسرعته وعجلته بعد مضى 4 ثانية .

(ب) أوجد موضع الجسيم عند سكونه اللحظى.

الحل : إذا كانت $x = \frac{3}{2} t^3 - 2t \text{ Cm}$

فإن

$$v = \frac{9}{2} t^2 - 2 \text{ Cm/sec}$$

$$h = 9t \text{ Cm/sec}^2$$

(1) بعد مرور 4 ثوانى يكون

$$x = 88 \text{ Cm}, \quad v = 70 \text{ Cm/sec}$$

$$h = 36 \text{ Cm/sec}^2$$

يصل الجسيم إلى حالة السكون اللحظى عندما تنعدم سرعنه أى أن

$$\frac{9}{2} t^2 - 2 = 0$$

وبذلك يصل الجسيم إلى حالة السكون اللحظى عندما

$$t = \pm \frac{2}{3} \text{ sec}$$

عندها تكون $x = -\frac{8}{9} \text{ Cm}, \quad x = +\frac{8}{9} \text{ Cm}$

الإشارة هنا تدل على موقع الجسيم بالنسبة لنقطة بدء القياس أما إشارة t الموجبة فتعنى أن الزمن المحسوب بعد بدء القياس ، أما الإشارة السالبة تعنى أن الزمن المحسوب قبل بدء القياس.

مثال (3) : قذف حجر رأسيا لأعلى من نقطة معينة. وبتعيين ارتفاع الحجر عن هذه النقطة فى أى لحظة t بالعلاقة :

$$x = 112\,t - 16\,t^2 \text{ ft.}$$

أوجد : (1) سرعة الحجر والعجلة عندما $t = 3\,, \quad t = 4$

(2) أقصى ارتفاع للحجر

(3) متى يكون الحجر على ارتفاع 96 ft من نقطة القذف.

الحل : إذا كانت $x = 112\,t - 16\,t^2 \text{ ft.}$ فإن

$$v = 112 - 32\,t\,, \qquad h = -32$$

بعد مرور ثلاثة ثوانى فإن :

$$v = 16 \text{ ft / sec.}\,, \qquad h = -32 \text{ ft / sec}^2$$

وبعد مرور أربعة ثوانى يكون :

$$v = -16 \text{ ft / sec.}\,, \qquad h = -32 \text{ ft / sec}^2$$

واضح أن السرعتان متساويتان عددا ومختلفان اتجاها بينما العجلة ثابتة. وهذا يدل على أن الحجر وصل أقصى ارتفاع له وبدأ يسقط بين الثانية الثالثة والرابعة أى عند $3 < t < 4$.

ولإيجاد أقصى ارتفاع يصل إليه الحجر نضع $v = 0$ أى

$$112 - 32\,t = 0$$

ومنها نجد أن

$$t = \frac{7}{3}\text{sec.}$$

$\therefore$ أقصى ارتفاع هو

$$x_{max} = 196 \text{ ft.}$$

وعندما $x = 96$ ft يكون

$$96 = 112\,t - 16\,t^2$$

$$\therefore \quad t = 1 \quad , \quad t = 6$$

أى أن الحجر يصل ارتفاع $x = 96$ ft بعد مرور ثانية واحدة من قذفه ، وبعد 6 ثوانى أثناء هبوطه.

تمارين (6-7)

1- إذا كانت إزاحة نقطة مادية عند أى لحظة معطاة بالقاعدة

$$X = 4\,t^3 - 12\,t \quad \text{ft}$$

أوجد : (1) السرعة والعجلة بعد مضى ثانيتين.

(2) فترات تزايد الإزاحة والسرعة.

(3) متى تنعدم السرعة.

2- قذف حجر رأسيا لأعلى وكان الارتفاع الذى يبلغه الحجر عند أى لحظة زمنية t من لحظة القذف هو $x = 40\,t - 16\,t^2 \quad \text{ft.}$

أوجد : (1) السرعة والعجلة عند أى لحظة.

(2) أقصى ارتفاع للحجر.

(3) الزمن اللازم ليعود إلى الأرض.

(4) الزمن اللازم لكى يكون على ارتفاع 24 ft من الأرض.

3- يتحرك جسيم تبعا للعلاقة :

$$x = \frac{3t + 24}{t + 2} \text{ ft}$$

t مقدرة بالثانية. أوجد السرعة والعجلة عند بدء الحركة وبعد مضى ثانيتين.