محاضـــــــــــــــرات في

الجـــــــــبر

لطلاب الفرقة الأولي بـكلية التربـية

العام الجامعي: 2023–2024

.

الباب الأول

المجموعات Sets

مقدمة Introduction:

تُعتبر نظرية المجموعات من أهم ما كشف العقل البشري في الرياضيات. ولا ترجع أهمية نظرية المجموعات إلى مجرد أنها إضافة جديدة إلى مجال الرياضيات ، فحسب بل لأنها علاوة على ذلك أمدت الرياضيين بأسس وأساليب جديدة لمعالجة فروع الرياضيات المختلفة التي كانت قائمة ، كما أتاحت الفرصة لكشف الكثير من الفروع الحديثة ولقد ساعدت لغة ورموز وجبر نظرية المجموعات في دراسة هندسة إقليدس وجبر الأعداد ونظرية الدوال الحقيقية كما أنها أصبحت أداة رئيسية في دراسة المنطق وجبر بوليان والجبر المجرد Boolean & Abstract Algebra والهندسات المختلفة والتوبولوجي Topology. وسوف تقتصر دراستنا في هذا الباب على لغة ورموز وجبر المجموعات.

مفهوم المجموعة The Mathematical Concept of a Set :

هناك أمثلة كثيرة لمفهوم المجموعة في حياتنا اليومية. فكثيراً ما نتحدث عن "مجموعة" الطلاب التي يتكون منها فريق كرة القدم لكلية العلوم بقنا ،و"مجموعة" الدول الأعضاء في هيئة الأمم المتحدة ، و"مجموعة" الحروف الهجائية التي تتكون منها كلمة "المجتهدون" .

إن كلاً من التجمعات السابقة يُطلق عليها لفظ "مجموعة".

وعلى ذلك فإن "المجموعة" هي تجمع من الأشياء. ولعل هذه العبارة تبرز لنا سؤالاً هو ، هل كل تجمع من الأشياء – أو العناصر – يحدد مجموعة بالمعنى الرياضي؟ فمثلاً هل يمكن أن نطلق لفظ مجموعة على تجمعات مثل: الأعداد المهمة ، الأشكال الهندسية الجميلة، الأعداد الصحيحة الأكبر بكثير من 10 .إن تحديد هذه التجمعات يتوقف أساساً على وجود إجابة محددة للأسئلة: ما هو العدد المهم؟ وما هو الشكل الهندسي الجميل؟ وماذا نعني بأكبر بكثير من؟.

في الواقع أنه ليست هناك إجابة محددة على كل هذه التساؤلات فإن الجمال والأهمية أمور تختلف من ثقافة لأخرى ومن شخص لآخر ، ومن ثم فإنه لا يمكن أن تحدد عبارات

مثل الأعداد المهمة مجموعة بالمعنى الرياضي ، لأننا لا نستطيع الحكم بصفة قاطعة عما إذا كان عنصر ما ينتمي إلى هذا التجمع أم لا. وبتعبير آخر إن العبارات السابقة تمثل تجمعات من العناصر غير المعرفة تعريفاً جيداً. وعلى العكس من ذلك فإن عناصر تجمعات مثل فريق كرة القدم بكلية العلوم بقنا ، وزوايا المثلث ABC والأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من 7 معرفة تعريفاً جيداً ، حيث إنه في كل حالة يمكن الحكم بصفة قاطعة أن عنصراً ما ينتمي إلى ذلك التجمع أم لا ، ولذلك فإن كلاً منها تمثل مجموعة بالمعنى الرياضي ، وعلى ذلك يمكننا القول بأن:

"**المجموعة: هي تجمع من العناصر المعرفة تعريفاً جيداً**".

وسوف نصطلح في هذا المقرر على استخدام الحروف الهجائية الكبيرة للتعبير عن المجموعة فمثلاً قد نعتبر:

X هي مجموعة الأعداد الأولية ..... ,2, 3, 5, 7, 11

Y هي مجموعة الألوان الأخضر والأصفر والأزرق

N هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $N = \{1, 2, 3, ...\}$

وكذلك سوف نستخدم الحروف الهجائية الصغيرة للتعبير عن العناصر التي تتكون منها المجموعات. فمثلاً نعتبر المجموعة T هي $T = \{a, b, c, d, e, f\}$ فإن a عنصر ينتمي إلى المجموعة T ويعبر عن ذلك رمزياً كالآتى :

$a \in T$ وتُقرأ a ينتمي إلى T.

أي أننا استخدمنا الرمز $\in$ للتعبير عن انتماء عنصر إلى مجموعة ونلاحظ مثلاً أن العنصر g لا ينتمي إلى المجموعة T ويعبر عن ذلك رمزياً:

$g \notin T$ وتُقرأ g لا تنتمي إلى المجموعة T.

أي أننا استخدمنا الرمز $\notin$ للتعبير عن عدم انتماء عنصر إلى مجموعة.

- **التعبير عن المجموعات Set Formulation** :

توجد طريقتان للتعبير عن المجموعات:

1- طريقة السرد Tabulation Method وتُسمى أيضا طريقة الحصر:

ويتم ذلك بكتابة جميع العناصر التي تتكون منها المجموعة (إذا كان ذلك ممكناً) أوكتابة بعضها بطريقة توضح كيفية استنتاج بقية العناصر، وتُوضع عناصر المجموعة بين قوسين متوسطين وبين كل عنصرين تُوضع فاصلة "," مثال على ذلك:

$X = \{2, 3, 5, 7, 11\}$,
$Y = \{a, b, c, d, e\}$,
$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

ونلاحظ أننا كتبنا بين القوسين الرموز الدالة على جميع العناصر في كل من المجموعات X,Y أما N فقد كتبنا الرموز الدالة على أربع عناصر فقط إذ يمكن استنتاج باقي العناصر. ونود أن ننبه إلى أن اختلاف ترتيب العناصر بين القوسين في مجموعة لا يغير من المجموعة.

2- طريقة الخاصية المميزة The Rule Method: ويتم ذلك بإعطاء خاصية معينة تميز عناصر المجموعة عن غيرها من العناصر بحيث يمكن باستخدام هذه الخاصية أن نحدد بطريقة قاطعة ما إذا كان عنصر ما ينتمي إلى هذه المجموعة أم لا.

فإذا كانت p خاصية معينة فإن { x : x لها الخاصية p } هي المجموعة التي تتكون من جميع العناصر مثل x حيث x تتمتع بالخاصية p . ونلاحظ هنا أن الرمز ":" يقوم مقام كلمة "حيث" مثال على ذلك:

X= { x : x عدد أولى بين 0 ، 12 } وهذه تعني أن

$X = \{2,3,5,7,11\}$.

- **المجموعة الخالية The Empty Set** :

إذا تأملنا المجموعة { x : x عدد زوجى يقع بين 0 ،1 } فإننا نجد أن هذه المجموعة لا تحتوي على أي عناصر ، ويُقال للمجموعة التي لا تحتوى على أي عناصر بأنها "مجموعة خالية" وسنبرهن فيما بعد أن المجموعة الخالية مجموعة وحيدة. وعادة نستخدم الرمز ϕ ويقرأ "فاي" ليدل على المجموعة الخالية وقد يُستخدم الرمز{ } أحياناً.

- **المجموعات المنتهية والمجموعات اللانهائية** :

يُقال لمجموعة ما إنها منتهية Finite إذا كانت خالية أو كانت تحتوى على عدد محدود n من العناصر حيث إن n عدد صحيح موجب ، وفي غير هذه الحالات يُقال للمجموعة أنها لا نهائية Infinite.

- **تساوي مجموعتين** :

يُقال لمجموعتين Y ، X أنهما متساويتين إذا كانتا تتكونان من نفس العناصر بالضبط بغض النظر عن الترتيب ، أي أن المجموعتين X ، Y تكونان متساويتين إذا كانتا مجرد اسمين لمجموعة واحدة $X = Y$.

ومن تعريف تساوي مجموعتين يتضح أن :

1. إذا كانت $X = Y$ فإن كل عنصر من عناصر X ينتمي إلى Y وكل عنصر من عناصر Y ينتمي إلى X.
2. إذا كانت X, Y مجموعتين وكل عنصر من عناصر Y ينتمي إلى X وكل عنصر من عناصر X ينتمي إلى Y فإن $X = Y$.

وإذا كانت المجموعة X لا تساوي المجموعة Y فإننا نعبر عن ذلك بأن نكتب $X \neq Y$.

- **الاحتواء Inclusion** :

يُقال أن المجموعة X مجموعة جزئية Subset من المجموعة Y إذا كان كل عنصر من عناصر X ينتمي إلى Y ، ويُكتب "$X\subset Y$" ويُقرأ X مجموعة جزئية من Y. وفي بعض الأحيان يُكتب "$Y\supset X$" وتقرأ "Y تحتوى على X" لتدل على أن المجموعة X مجموعة جزئية من Y وإذا كانت X ليست مجموعة جزئية من Y فإننا نعبر عن ذلك بالرمز $X \not\subset Y$ (وهذا يعني أن هناك عنصراً واحداً على الأقل ينتمي إلى X ولا ينتمي إلى Y).

تعريف:

يُقال للمجموعة غير الخالية X أنها مجموعة جزئية فعلية Proper Subset من المجموعة Y إذا كان $X\subset Y$ ، $X\neq Y$ والنظرية التالية تتضمن الخواص الأساسية لمفهوم الاحتواء.

نظرية(1):

1 – لأي مجموعة X يكون $X \subseteq X$.

2 – لأي مجموعتين X,Y إذا كان $X\subset Y, Y\subset X$ فإن $X=Y$.

3 – لأي ثلاث مجموعات X,Y,Z إذا كان $X\subset Y, Y\subset Z$ فإن $X\subset Z$.

البرهان: سنبرهن الخاصية الثانية فقط ونترك برهان الخاصيتين الأولى والثالثة للطالب.

بما أن $X\subset Y$ إذاً كل عنصر من عناصر X ينتمي إلى Y .

(من تعريف المجموعة الجزئية).

وبما أن $Y\subset X$ إذاً كل عنصر من عناصر Y ينتمي إلى X .

(من تعريف المجموعة الجزئية).

إذاً $X=Y$ (من تعريف تساوي مجموعتين).

نتيجة: المجموعتان X,Y تكونان متساويتين إذا وإذا فقط كان $X\subset Y, Y\subset X$.

"إذا وإذا فقط" تعني أن النتيجة وعكسها صحيحة.

نظرية(2): المجموعة الخالية ϕ مجموعة جزئية من أي مجموعة.

البرهان: لتكن X أي مجموعة وبفرض أن $\phi \not\subset X$ فهذا يعني أن ϕ تحتوي على عنصر لا ينتمي إلى المجموعة X ولكن هذا مستحيل لأن المجموعة ϕ لا تحتوي على أية عناصر ، وإذاً $\phi \not\subset X$ فرض خاطئ ، وعلى ذلك فلا بد أن تكون $\phi \subset X$.

نظرية(3): المجموعة الخالية وحيدة.

البرهان: بفرض أن هناك مجموعتين خاليتين هما ϕ_1 , ϕ_2 .

فمن النظرية السابقة تكون ϕ_1 مجموعة جزئية من أي مجموعة ممكن أن تكون ϕ_2 أي أن $\phi_1 \subset \phi_2$.

وبالمثل ϕ_2 مجموعة جزئية من أي مجموعة ولتكن ϕ_1 أي أن $\phi_2 \subset \phi_1$.

ومن نظرية (1) نستنتج أن $\phi_2 = \phi_1$ أي أن المجموعة الخالية وحيدة.

مثال:

إذا كانت المجموعة $X = \{1,2,3\}$ فاكتب جميع المجموعات الجزئية للمجموعة X.

الحل:

المجموعات الجزئية للمجموعة X هي

$\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.

ونلاحظ أنه إذا كانت W هي المجموعة التي عناصرها هي كل المجموعات الجزئية للمجموعة X فإن:

$W = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$

ونلاحظ أن $X \not\subset W$ وإنما $X \in W$

كما نلاحظ أن $1 \in X$ ولكن $1 \notin W$

وأيضا $\{2\} \notin X$ بينما $\{2\} \in W$

تُسمى المجموعة W بمجموعة المجموعات الجزئية Power set للمجموعة X ويُرمز لها بالرمز $P(X)$ وتُسمى أيضا مجموعة القوى للمجموعة X .

- **المجموعة الشاملة Universal Set** :

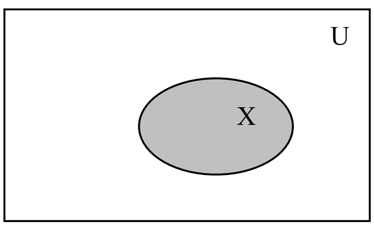
إذا كان لدينا عدد من المجموعات فإن المجموعة الشاملة هي المجموعة التي تحتوي على كل عناصر هذه المجموعات ، أو بمعنى آخر أن عناصر هذه المجموعات تنتمي جميعها إلى هذه المجموعة الأم (الشاملة). ويُرمز لها بالرمز U ويمكن تعيين أكثر من مجموعة شاملة لمجموعة أو لعدد من المجموعات ، ويُفضل تحديد واحدة منها في المسألة.

(اذكر مثال لمجموعة شاملة لمجموعة أو لعدد من المجموعات؟).

- **أشكال فن Venn Diagram** :

من المفيد دائماً أن يكون لدينا صورة مرئية تمثل محتوى أي مسألة رياضية ، فإن ذلك يساعد على الفهم واقتراح الحلول. لذلك سنمثل دائماً المجموعة الشاملة U بمستطيل في مستوى الورقة على أن نعتبر أن عناصر U هي جميع النقط الواقعة داخل هذا المستطيل وفي هذه الحالة يمكن أن نمثل المجموعات المختلفة بمساحات داخل هذا المستطيل

انظر الشكل:



شكل (1)

تُسمى مثل هذه الأشكال بأشكال فن ويمكن استخدام هذه الأشكال في توضيح العلاقة بين المجموعات المختلفة.

ولكن ينبغى الإشارة إلى أن توضيح مسألة باستخدام أشكال فن لا يمكن أن يُقبل كبرهان لمسائل المجموعات. ويجب التعود على استخدام البرهان المنطقى سواء في برهنة النظريات أو في حل التمارين.

- **التضمين Implication** :

إذا كانت A,B جملتين خبرتين فإن أي واحدة منهما يُحتمل أن تكون صحيحة أو خاطئة. إذا حدث أن صحة الجملة A تستلزم بالضرورة أن تكون الجملة B صحيحة فمعنى هذا أن صحة الجملة A شرط لازم لصحة الجملة B ، أو بعبارة أخرى صحة الجملة B متضمنة في صحة الجملة A

ونكتب ذلك بالصورة الرمزية $A \Rightarrow B$ وتُقرأ A تؤدى إلى B .

مثال: إذا كانت الجملة A هي $x = 3$ وكانت B هي الجملة $x^2 = 9$ في هذه الحالة يكون $A \Rightarrow B$.

وإذا حدث أن $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ فإننا نكتب $A \Leftrightarrow B$ وتُقرأ " A إذا وإذا فقط B "

ويُقال في هذه الحالة أن الجملتين A, B متكافئتان.

مثال: $y = 2 \Leftrightarrow 3y + 1 = 7$

وباستخدام مفهوم التضمين يمكننا تعريف احتواء مجموعة لأخرى كما يلي:

$X \subset Y$ إذا كان $a \in X \Rightarrow a \in Y$ لكل عنصر a .

كذلك تعريف تساوي مجموعتين يمكن كتابته كما يلي:

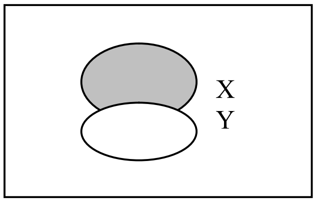
$X = Y$ إذا كان $a \in X \Leftrightarrow a \in Y$ لكل عنصر a .

- **الفروق والمكملات Differences and Complements** :

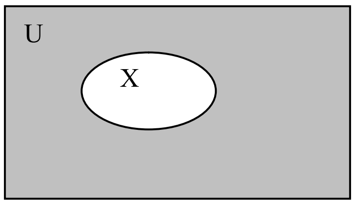
تعريف(1): الفرق بين مجموعتين X,Y هو المجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمي إلى المجموعة X ولا تنتمي إلى المجموعة Y ويُرمز للفرق بين X,Y بالرمز $X - Y$

أي أن $X - Y = \{a : a \in X, a \notin Y\}$

(انظر الشكل) المساحة المظللة تمثل $X - Y$



تعريف(2): إذا كانت $X \subset U$ فإن المجموعة $U - X$ تُسمى مكملة أو متممة المجموعة X بالنسبة للمجموعة الشاملة ، ومجازاً تُسمى "مكملة X" ويُرمز لها بالرمز X^c وأحياناً بالرمز $X^{\backslash}$ أي أن $X^c = \{a : a \in U, a \notin X\}$ (انظر الشكل):



المساحة المظللة في الشكل السابق تمثل المجموعة X^c (مكملة المجموعة X).

نلاحظ أن لأي عنصر $a \in U$ يكون إما $a \in X$ أو $a \in X^c$

مثال: باعتبار أن Z (مجموعة الأعداد الصحيحة) هي المجموعة الشاملة.

(1) أوجد مكملة كل من المجموعات الآتية:

(i) The set of all Even Numbers.

مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية.

(ii) $X = \{x : x \in Z, x < 1\}$.

(iii) $Y = \{y : y \in Z, 4 < y \leq -4\}$.

(2) أوجد: $Z - X^c$ ، $X^c - Y$

الحل: $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$

(1) مجموعة الأعداد الزوجية (i) $E = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \dots\}$

$\therefore E^c = Z - E = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots\}.$

أي أن مكملة مجموعة الأعداد الزوجية هي مجموعة الأعداد الفردية Odd Numbers.

(ii) $X = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}.$

$\therefore X^c = Z - X = \{1, 2, 3, \dots\}.$

(iii) $Y = \{\dots, -6, -5, -4, 5, 6, 7, \dots\}.$

$\therefore Y^c = Z - Y = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}.$

(2) $X^c - Y = \{1, 2, 3, 4\},\ Z - X^c = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}.$

نظرية(4): لأي مجموعة X يكون $(X^c)^c = X$.

البرهان: إذا كان a أي عنصر في المجموعة الشاملة فإن:

$a \in (X^c)^c \Rightarrow a \notin X^c \Rightarrow a \in X.$

لأن أي عنصر إما أن ينتمي إلى المجموعة أو إلى مكملتها،ومن تعريف المجموعة الجزئية:

$\therefore (X^c)^c \subset X. \qquad (1)$

ويكون: $a \in X \Rightarrow a \notin X^c \Rightarrow a \in (X^c)^c$

$\therefore X \subset (X^c)^c. \qquad (2)$

من (1),(2) نستنتج أن:

$(X^c)^c = X .$

ويمكن إثبات نظرية (4) بطريقة جداول الانتماء:

حيث نكون جدول مكون من ثلاث أعمدة هي عمود لكل من $X, X^c, (X^c)^c$

وإذا أخذنا العنصر a من عناصر المجموعة الشاملة التي تحتوى على المجموعة X

فيكون لدينا احتمالين إما $a \in X$ أو $a \notin X$ فنبدأ بملء الجدول:

بوضع 1 في عمود X إذا كان $a \in X$ ووضع 0 في عمود X إذا كان $a \notin X$

وبالمثل نملأ الأعمدة الباقية باستخدام تعريف هذه المجموعات فنحصل على الجدول:

X	X^c	$(X^c)^c$
1	0	1
0	1	0

ونلاحظ من الجدول أن قيم الإنتماء التي في العمودين الأول والثالث متطابقة ،

ومن ثم يكون $(X^c)^c = X$.

الاتحاد والتقاطع Union and Intersection

إذا كان X,Y مجموعتين فإن المجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمى إلى إحدى المجموعتين على الأقل تُسمى اتحاد المجموعتين X,Y ويُرمز لها بالرمز $X\cup Y$ ويُقرأ "X اتحاد Y" ويمكن التعبير رمزياً عن اتحاد المجموعتين X,Y كما يلي:

$$X\cup Y = \{a: a\in X\vee a\in Y\}.$$

حيث "$\vee$" تعني أن $a\in X$ أو $a\in Y$ أو a تنتمي لكل من X,Y .

أما المجموعة التي تتكون من العناصر المشتركة فقط بين المجموعتين X,Y فتمثل تقاطع المجموعتين X,Y ويُرمز لها بالرمز "$X\cap Y$" وتُقرأ "X تقاطع Y" أي أن :

$$X\cap Y = \{a: a\in X\wedge a\in Y\}.$$

حيث "$\wedge$" تعني أن $a\in X$ و $a\in Y$ (أي تنتمي لكل من X,Y في نفس الوقت).

مثال: إذا كانت $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 3, 5, 7\}$

فإن $X\cap Y = \{1, 3\}$, $X\cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

وإذا كانت $X = \{d, e, f\}$, $Y = \{a, b, c\}$ فإن $X\cap Y = \phi$.

ملاحظات: (1) يُقال لمجموعتين X,Y أنهما متباعدتان Disjoint إذا كان:

$$X\cap Y = \phi.$$

(2) إذا كانت U هي المجموعة الشاملة للمجموعة X فإن:

$$X\cup X^c=U , X\cap X^c=\phi$$

(3) لأي مجموعتين X,Y يكون:

(i) $a\notin X\cup Y\Leftrightarrow a\notin X\wedge a\notin Y$. (ii) $a\notin X\cap Y\Leftrightarrow a\notin X\vee a\notin Y$.
(iii) $X\subset X\cup Y$, $Y\subset X\cup Y$. (iv) $X\cap Y\subset X$, $X\cap Y\subset Y$.

نظرية(5): لأي مجموعتين X,Y يتحقق:

$$X\subset Y \Leftrightarrow X\cup Y=Y.$$

البرهان: النظرية تنص على أن الجملتين $X\subset Y$، $X\cup Y=Y$ متكافئتان.

أي أنه أولاً: إذا كان $X\subset Y$ فإن $Y=X\cup Y$.

ثانياً: وإذا كان $X\cup Y=Y$ فإن $X\subset Y$.

أولاً: نفرض أن $X\subset Y$ وسنبرهن أن $X\cup Y=Y$ كما يلي:

من الواضح أن:

$Y\subset X\cup Y.$ (1)
$a\in X\cup Y \Rightarrow a\in X\vee a\in Y \Rightarrow a\in Y \; ; X\subset Y$
$\therefore X\cup Y\subset Y.$ (2)

من (2),(1) يكون $X\cup Y=Y$ وهو المطلوب أولاً.

ثانياً: نفرض أن $X\cup Y=Y$ وسنبرهن أن $X\subset Y$:

من الواضح أن:

$X\subset X\cup Y \Rightarrow X\subset Y \;\; ; X\cup Y=Y.$

وهو المطلوب ثانيا.

من أولا وثانيا تثبت النظرية.

نظرية(6): لأي مجموعتين X,Y يتحقق:

$X\subset Y \Leftrightarrow X\cap Y = X.$

البرهان:

أولاً: نفرض أن $X\subset Y$ وسنبرهن أن $X\cap Y=X$:

من الواضح أن:

$X\cap Y\subset X.$ (1)
$a\in X \, , X\subset Y \Rightarrow a\in X \wedge a\in Y \Rightarrow a\in X\cap Y$
$\therefore X\subset X\cap Y.$ (2)

من (2),(1) يكون $X\cap Y=X$ وهو المطلوب أولاً.

ثانياً: نفرض أن $X\cap Y=X$ وسنبرهن أن $X\subset Y$:

$a\in X = X\cap Y \Rightarrow a\in X \wedge a\in Y \Rightarrow a\in Y.$
$\therefore X\subset Y.$

وهو المطلوب ثانيا.

ومن أولا وثانيا تثبت النظرية.

نظرية(7): إذا كانت $X_1 \subset X_2$, $Y_1 \subset Y_2$ فإن:

(1) $X_1 \cup Y_1 \subset X_2 \cup Y_2$.

(2) $X_1 \cap Y_1 \subset X_2 \cap Y_2$.

البرهان:

(1) $a \in X_1 \cup Y_1 \Rightarrow a \in X_1 \vee a \in Y_1 \Rightarrow a \in X_2 \vee a \in Y_2 \;\; ; X_1 \subset X_2 , Y_1 \subset Y_2$

$\therefore \;\; X_1 \cup Y_1 \subset X_2 \cup Y_2$.

(2) $a \in X_1 \cap Y_1 \Rightarrow a \in X_1 \wedge a \in Y_1 \Rightarrow a \in X_2 \wedge a \in Y_2 \;\; ; X_1 \subset X_2 , Y_1 \subset Y_2$

$\therefore \;\; X_1 \cap Y_1 \subset X_2 \cap Y_2$.

نظرية(8): لأي مجموعة X يتحقق:

(1) $X \cup X = X$.

(2) $X \cap X = X$.

ويُشار إلى هذين القانونين بقانونى اللا نمو Idempotency .

نظرية(9): لأي مجموعتين X,Y يتحقق:

(1) $X \cup Y = Y \cup X$.

(2) $X \cap Y = Y \cap X$.

ويُشار إلى هذين القانونين بقانونى الإبدال Commutative Laws .

نظرية(10): لأي ثلاث مجموعات X, Y, Z يتحقق:

(1) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$.

(2) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$.

ويُشار إلى هذين القانونين بقانونى الدمج أو قانوني الترتيب Associative Laws .

نظرية(11): إذا كانت X, Y أي مجموعتين فإن:

$X - Y^c = X \cap Y$.

البرهان: باستخدام نتيجة نظرية (1) وهي الطريقة العامة لأي عنصر a من عناصر المجموعة الشاملة ومن تعريف الفرق بين المجموعتين نجد أن:

$a \in (X - Y^c) \Rightarrow a \in X \wedge a \notin Y^c$

$\Rightarrow a \in X \wedge a \in Y$ من تعريف المجموعة المكملة

$\Rightarrow a \in (X \cap Y)$ من تعريف تقاطع مجموعتين

$\therefore \;\; X - Y^c \subset X \cap Y$. (1)

وبالعكس يكون:

$$\begin{aligned} a\in(X\cap Y) &\Rightarrow a\in X \wedge a\in Y \\ &\Rightarrow a\in X \wedge a\notin Y^c \\ &\Rightarrow a\in(X - Y^c) \\ \therefore\ (X\cap Y) &\subset X - Y^c. \qquad (2) \end{aligned}$$

ومن (2),(1) نستنتج أن:

$$(X - Y^c) = (X\cap Y)\ .$$

ويمكن إثبات ذلك بطريقة جداول الانتماء حيث نكون جدول مكون من خمس أعمدة هي عمود لكل من:

$X, Y, Y^c, (X - Y^c), (X\cap Y).$

وإذا أخذنا العنصر a من عناصر المجموعة الشاملة التي تحتوي على المجموعتين X, Y فيكون لدينا الاحتمالات الآتية:

$a\in X\ , a\in Y.$
$a\in X\ , a\notin Y.$
$a\notin X\ , a\in Y.$
$a\notin X\ , a\notin Y.$

وليس هناك أية احتمالات أخرى.

نبدأ بملء الجدول بأن نضع 1 في عمود X إذا كان $a\in X$ ونضع 0 إذا كان $a\notin X$ وبالمثل نملأ الأعمدة الباقية باستخدام تعريف هذه المجموعات فنحصل على الجدول الآتي:

X	Y	Y^c	$(X - Y^c)$	$(X \cap Y)$
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0

ونلاحظ من الجدول أن قيم الإنتماء التي في العمودين الأخيرين متطابقة، ومن ثم فإن:

$(X - Y^c) = X\cap Y\ .$

نظرية(12): قانوني دي مورجان De Morgan's Laws :

لأي مجموعتين X, Y يتحقق:

(1) $(X\cap Y)^c = X^c\cup Y^c$.
(2) $(X\cup Y)^c = X^c\cap Y^c$.

البرهان:

سنبرهن (1) باستخدام جداول الانتماء كما يلي:

نكون جدول الإنتماء كما يلي:

X	Y	X^c	Y^c	$X\cap Y$	$(X\cap Y)^c$	$(X^c\cup Y^c)$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

نلاحظ من الجدول أن قيم الإنتماء التي في العمودين الأخيرين متطابقة، ومن ثم فإن:
$(X\cap Y)^c = X^c\cup Y^c$.

وسنبرهن (2) باستخدام الطريقة العامة كما يلي:

(2) إذا كان a عنصر من عناصر المجموعة الشاملة فإن :

$$\begin{aligned} a\in(X\cup Y)^c &\Rightarrow a\notin(X\cup Y)\\ &\Rightarrow a\notin X \wedge a\notin Y\\ &\Rightarrow a\in X^c \wedge a\in Y^c\\ &\Rightarrow a\in X^c\cap Y^c .\end{aligned}$$

$$\therefore\ (X\cup Y)^c \subset X^c\cap Y^c . \qquad (1)$$

وأيضاً

$$\begin{aligned} a\in(X^c\cap Y^c) &\Rightarrow a\in X^c \wedge a\in Y^c\\ &\Rightarrow a\notin X \wedge a\notin Y\\ &\Rightarrow a\notin(X\cup Y)\\ &\Rightarrow a\in(X\cup Y)^c .\end{aligned}$$

$$\therefore\ (X^c\cap Y^c) \subset (X\cup Y)^c . \qquad (2)$$

من (1),(2) نستنتج أن

$$(X\cup Y)^c = (X^c\cap Y^c).$$

نظرية(13): قانوني التوزيع Distributive laws :

لأي ثلاث مجموعات X, Y, Z يتحقق:

(1) $X\cap(Y\cup Z) = (X\cap Y)\cup(X\cap Z)$
(2) $X\cup(Y\cap Z) = (X\cup Y)\cap(X\cup Z)$

البرهان:

سنبرهن (1) باستخدام جداول الانتماء كما يلي:

X	Y	Z	$X\cap Y$	$X\cap Z$	$Y\cup Z$	$X\cap(Y\cup Z)$	$(X\cap Y)\cup(X\cap Z)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

نلاحظ من الجدول أن قيم الإنتماء التي في العمودين الأخيرين متطابقة، ومن ثم فإن :

$X\cap(Y\cup Z) = (X\cap Y)\cup(X\cap Z).$

وسنبرهن (2) بالطريقة العامة كما يلي:

(2) إذا كان a أحد عناصر المجموعة الشاملة فإن:

$a\in(X\cup(Y\cap Z)) \Rightarrow a\in X \vee a\in(Y\cap Z).$

فإذا كان:

$$\begin{aligned} a\in X &\Rightarrow a\in(X\cap Y),\ a\in(X\cap Z) \\ &\Rightarrow a\in(X\cap Y)\cup(X\cap Z). \end{aligned}$$

وإذا كان:

$$\begin{aligned} a\in(Y\cap Z) &\Rightarrow a\in Y,\ a\in Z \\ &\Rightarrow a\in X\cup Y,\ a\in X\cup Z \\ &\Rightarrow a\in(X\cup Y)\cap(X\cup Z). \end{aligned}$$

$\therefore\ X\cup(Y\cap Z)\subset(X\cup Y)\cap(X\cup Z). \qquad (I)$

والعكس نفرض أن:

$$a\in(X\cup Y)\cap(X\cup Z) \Rightarrow a\in(X\cup Y) \qquad (1),$$
$$a\in(X\cup Z) \qquad (2)$$

إذا كان $a \notin X$ فإنه من (2) , (1) يكون:

$$a\in Y,\ a\in Z \Rightarrow a\in(Y\cap Z).$$
$$\therefore\ a\in X \vee a\in(Y\cap Z)$$
$$\therefore\ a\in X\cup(Y\cap Z).$$
$$\therefore\ (X\cup Y)\cap(X\cup Z)\subset X\cup(Y\cap Z). \qquad (II)$$

من (I),(II) يكون :

$$\therefore\ X\cup(Y\cap Z) = (X\cup Y)\cap(X\cup Z).$$

ملاحظة: يمكن اختصار الطريقة العامة لإثبات ما سبق كما يلي:

$$\begin{aligned} a\in X\cup(Y\cap Z) &\Leftrightarrow a\in X \vee a\in(Y\cap Z)\\ &\Leftrightarrow a\in(X\cap X) \vee a\in(Y\cap Z)\\ &\Leftrightarrow [a\in X \wedge a\in X] \vee [a\in Y \wedge a\in Z]\\ &\Leftrightarrow [a\in X \vee a\in Y] \wedge [a\in X \vee a\in Z]\\ &\Leftrightarrow a\in(X\cup Y) \wedge a\in(X\cup Z)\\ &\Leftrightarrow a\in(X\cup Y) \cap (X\cup Z) \end{aligned}$$
$$\therefore\ X\cup(Y\cap Z) = (X\cup Y)\cap(X\cup Z).$$

نتيجة: عملية التقاطع "$\cap$" تتوزع على عملية الفرق "-" بالنسبة للمجموعات.

بينما عملية الإتحاد "$\cup$" لا تتوزع على عملية الفرق "-" بالنسبة للمجموعات.

أي أن لأي ثلاث مجموعات X,Y,Z يتحقق:

$$X\cap(Y-Z) = (X\cap Y)-(X\cap Z). \quad , \quad (X-Y)\cap Z = (X\cap Z)-(Y\cap Z).$$
$$X\cup(Y-Z) \neq (X\cup Y)-(X\cup Z). \quad , \quad (X-Y)\cup Z \neq (X\cup Z)-(Y\cup Z).$$

تحقق من ذلك؟.

تمرين: باستخدام قوانين التوزيع برهن أن لأي مجموعتين X,Y يتحقق:

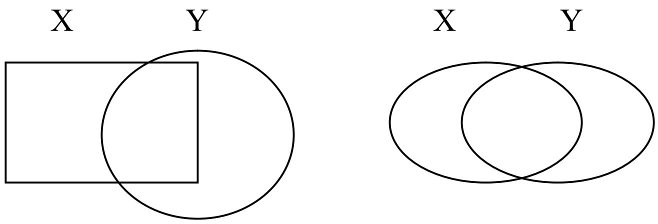
(1) $X\cap(X^c\cup Y) = X\cap Y.$

(2) $X\cup(Y-X) = X\cup Y.$

▪ **تعريف**: تُعرف مجموعة الفرق المتماثل (أو الاختلاف المتماثل) للمجموعتين X,Y والتي يُرمز لها بالرمز $X\Delta Y$ كما يلي:

$$X\Delta Y = (X\cup Y)-(X\cap Y) = (X-Y)\cup(Y-X).$$

وتُمثل كما بالشكل:



تمرين: تحقق من أن $(X\cup Y)-(X\cap Y) = (X-Y)\cup(Y-X)$

مثال: إذا كانت $X = \{x : x \in N, 3 \le x \le 10\}$, $Y = \{y : y \in N, 5 < y < 12\}$

فإن $X\Delta Y = \{3,4,5,11\}$ (تحقق من ذلك؟) .

▪ **تعميم فكرتي الاتحاد والتقاطع Generalization of Union & Intersection**:

يمكن تعميم فكرتى الاتحاد والتقاطع لتشمل أي عدد من المجموعات (سواء كان منتهياً أو غير منته). فإذا كانت $G = \{X, Y, Z, \ldots\}$ عائلة من المجموعات ، أي أن G هي مجموعة عناصرها مجموعات X, Y, Z ,... يُعرف اتحاد هذه المجموعات بأنه المجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمي إلى واحدة على الأقل من هذه المجموعات X, Y, Z ,....

ويُرمز لاتحاد هذه المجموعات بالرمز $X\cup Y\cup Z\cup\ldots$

كذلك نعرف تقاطع المجموعات التي تنتمي إلى G بأنه المجموعة التي تتكون من العناصر المشتركة بين جميع المجموعات X, Y, Z ,...

ويُرمز لتقاطع هذه المجموعات بالرمز $X\cap Y\cap Z\cap \ldots$

وإذا كان لدينا عدد محدود من المجموعات $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ فإننا نكتب $\cup_{i=1}^{n} X_i$ لاتحاد هذه المجموعات ونكتب $\cap_{i=1}^{n} X_i$ لتقاطع هذه المجموعات.

$$\cup_{i=1}^{n} X_i = \{x : x \in X_i \ \ for\, some\ i\},\ \ \cap_{i=1}^{n} X_i = \{x : x \in X_i \ \ for\, all\ i\}.$$

- **التجزيء Partition** :

تعريف: يُقال لمجموعة من المجموعات الجزئية غير الخالية من المجموعة X أنها تجزيء للمجموعة X إذا كانت هذه المجموعات متباعدة ثنائياً وكان اتحادها هو المجموعة X.

مثال: المجموعة $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}, \ldots\}$ تكون تجزيء لمجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N.

كذلك المجموعة $\{\{1,4,7,\ldots\},\{2,5,8,\ldots\},\{3,6,9,\ldots\}\}$ تجزيء آخر لـ N .

بينما المجموعة $\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}, \ldots\}$ ليست تجزيء لـ N .

- **الأزواج (الثنائيات) المرتبة Ordered Pairs** :

ليكن x,y عنصرين في مجموعة . من هذين العنصرين يمكن تكوين ما يُسمى بالزوج المرتب أو الثنائي المرتب ، حيث تُسمى x المركبة الأولى (المسقط الأول) ،وتُسمى y المركبة الثانية (المسقط الثاني) للزوج المرتب . أي أن الزوج المرتب هو مجموعة من عنصرين الترتيب بينهما أساسي ، لذلك يُرمز للزوج المرتب الذي مركبته الأولى x ومركبته الثانية y بالرمز (x,y) .

لاحظ أن $\{x,y\} = \{y,x\}$ في حين أن $(x,y) \neq (y,x)$ ، ويتم التساوي فقط في حالة $x = y$ ، وبوجه عام يمكن القول أن $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$.

مثال: أوجد x,y إذا علمت أن $(x+2y , 3) = (4 , x+y)$.

الحل: من تعريف تساوي الأزواج المرتبة نجد أن $x+y = 3$, $x+2y = 4$

فبالطرح نجد أن $y = 1$ ، وبالتعويض نجد أن $x = 2$.

- **الحاصل الديكارتي (الضرب الكرتيزي) لمجموعتين**

Cartesian Product of two Sets :

ليكن X,Y مجموعتين غير خاليتين. الحاصل الديكارتي $X\times Y$ هو مجموعة الأزواج المرتبة التي مركبتها الأولى تنتمي للمجموعة X ،ومركبتها الثانية تنتمي للمجموعة Y أي أن:

$$X\times Y = \{(x,y) : x\in X \wedge y\in Y\}.$$

مثال(1): ليكن $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$ فإن

$A\times B = \{(a,x), (a,y), (b,x), (b,y), (c,x), (c,y)\}$,
$B\times A = \{(x,a), (x,b), (x,c), (y,a), (y,b), (y,c)\}$,
$A\times A = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$,
$B\times B = \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y)\}$.

مثال(2): إذا كان $X=\{1,2,3\}$ اكتب $X\times X$.

الحل:

$$X\times X=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}.$$

نظرية(14): لأي مجموعات اختيارية A, B, C, D يتحقق:

(i) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$.

(ii) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

(iii) $(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$.

الإثبات: سنبرهن (i),(iii) ونترك برهان (ii) للطالب.

$$\begin{aligned}\text{(i)}\quad (x,y)\in A\times(B\cap C) &\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B\cap C\\ &\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B \wedge y\in C\\ &\Leftrightarrow (x, y)\in A\times B \wedge (x, y)\in A\times C\\ &\Leftrightarrow (x, y)\in(A\times B)\cap(A\times C).\end{aligned}$$

$\therefore\ A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$.

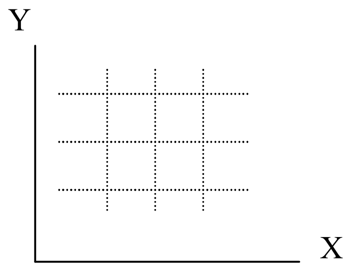
$$\begin{aligned}\text{(iii)}\quad (x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D) &\Leftrightarrow (x,y)\in A\times B \wedge (x,y)\in C\times D\\ &\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B \wedge x\in C \wedge y\in D\\ &\Leftrightarrow x\in A\cap C \wedge y\in B\cap D\\ &\Leftrightarrow (x, y)\in(A\cap C)\times(B\cap D).\end{aligned}$$

$\therefore\ (A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$.

في بعض الأحيان يُسمى حاصل الضرب الكرتيزي $X\times X$ المربع الكرتيزي ويُرمز له بالرمز X^2 .

- **تمثيل حاصل الضرب الكرتيزي Representation of Cartesian Products** :

يُمثل حاصل الضرب الكرتيزي $X\times Y$ بيانياً برسم محورين المحور الأفقي يمثل عناصر المجموعة X ، والمحور الرأسي يمثل عناصر المجموعة Y ، وتُمثل الأزواج المرتبة (x,y) (أي عناصر حاصل الضرب الكرتيزي) بنقط في المستوى كما بالشكل:



ملاحظة:

إذا كانت X مجموعة عدد عناصرها m ، وكانت Y مجموعة عدد عناصرها n فإن حاصل الضرب الكرتيزي$X\times Y$ يكون مجموعة عدد عناصرها $m\times n$ (عدد الأزواج المرتبة).

تمارين

1- استخدم طرق التعبير عن المجموعات لتحديد عناصر المجموعات الآتية:

(أ) الأعداد الطبيعية الأقل من 8

(ب) الأعداد الكسرية التي لها البسط يساوي1 ولها المقام الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من7

(ج) الحروف المختلفة المكونة للجملة " مَن جد وجد ومَن زرع حصد " .

2- عبر عن المجموعات الآتية بذكر صفة مشتركة بين عناصر المجموعة:

(أ) $\{ a , e , i , o , u \}$

(ب) $\{ 10 , 100 , 1000 , 10000 , ...\}$

(ج) $\{ 1 , 1/2 , 1/3 , 1/4 , ...\}$.

3- عبر عن المجموعات الآتية بطريقة الحصر (السرد):

(أ) X={ x: x is a factor of 6 }

(ب) Y={ y: y is a solution of $y^2=0$ }

(ج) A={ a: $a\in N$, a is odd number,$1<a<10$}

(د) B={ b: $b\in N$, b is prime number,$1<b<12$}

حيث N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة.

4- اعط مثال لمجموعات تحتوي على:

(أ) عنصرين فقط.

(ب) لا تحتوي على عناصر.

(ج) عنصر واحد فقط.

(د) عدد غير محدود من العناصر.

5- بفرض المجموعة$A = \{ 3 , 5 , 8 , 9 \}$ عبر برموز جبرية عن الآتي:

(أ) 8 عنصر في A

(ب) 4 ليس عنصرا في A

(ج) يوجد فقط ثماني مجموعات جزئية من عناصر A تحتوي العنصر 8

6- حدد أي من المجموعات الآتية تكون منتهية ، وأيها تكون لانهائية:

(أ) $A = \{ x , y , p , q , 6 , 8 \}$

(ب) $B = \{ x : x \text{ is a multiple of } 3 \}$

(ج) مجموعة حروف اللغة العربية

(د) $D = \{ x : x \in R, 0 \le x \le 1\}$ حيث R مجموعة الأعدادالحقيقية.

7- اكتب بعض المجموعات التي تصلح كل منها كمجموعة شاملة للمجموعات:

$A = \{1,2\}$, $B = \{2,3,4\}$, $C = \{3,4,5\}$.

8- مالعلاقة بين $\{1\}$, 1 ، وبين $\{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \}$, $\{1, 2, 3\}$

9- بفرض المجموعات:

$A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{3,5\}$, $E = \{2\}$, $D = \{5, 7, 9\}$.

حدد أي من العبارات الآتية يكون صحيحا ، وأيها خطأ:

(1) $B \subset A$	(2) $E \subset B$	(3) $D \subset A$
(4) $B \in A$	(5) $\phi \subset B$	(6) $\phi \in B$
(7) $E \not\subset A$	(8) $7 \subset D$	(9) $2 = E$
(10) $5 \in A$	(11) $\{5\} \in A$	(12) A finite.

10- اكتب عناصر مجموعة المجموعات الجزئية لكل من المجموعات الآتية:

(أ) $\{a, b\}$

(ب) $\{a, b, c, d\}$

11- إذا كانت $X = \{a,b,c\}$ بيّن الصواب من الخطأ فيما يلي (وصحح الخطأ):

(1) $\{a\} \in X$	(2) $\{a,b\} \subset P(X)$	(3) $\{\phi\} \in P(X)$
(4) $\{\phi\} = \phi$	(5) $\{a,b\} \subset X$	(6) $\{\{a\}\} \subset X$
(7) $\{d\} \subset P(X)$.		

12- بفرض أن $a \in X$, $b \in Y$, $X \subset Y$, $Y \subset Z$

(أ) هل $a \in Z$

(ب) هل $b \in Z$

(ج) هل $a \in Y$

(د) هل كل عنصر من عناصر Z يتطلب أن يكون عنصرا من عناصر كلا من X,Y

(هـ) هل كل عنصر من عناصر X يتطلب أن يكون عنصرا من عناصر Z وليس Y

13- بفرض أن $A = \{a,b,c,d\}, B = \{c,d,e\}, C = \{c,e,f,g\}, D = \{a,b,e,f\}$

عبر عن المجموعات الآتية:

(i) $A\cup(B\cup C)$.
(ii) $(A\cup B)\cap C$.
(iii) $(A\cap B)\cup(C\cap D)$.
(iv) $A-B$.
(v) $(A\cup B)-(A\cap B)$.

14- بفرض أن $B=\{2,3,4\}$, $A=\{1,2\}$. اكتب عناصر المجموعات الآتية:

(i) $A\times A$.   (ii) $A\times B$.
(iii) $B\times A$.   (iv) $B\times B$.
(v) $(A\times B)\cup(B\times A)$.   (vi) $(A\times A)\cup(B\times A)$.
(vii) $(A\times A)\cup(A\times B)$.   (viii) $(A\cup B)\times A$..

15- بفرض أن $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فحدد أي من المجموعات الآتية تكون تجزيئ للمجموعة A وأيها لا تكون (مع ذِكر السبب):

(i) $\{ \{1, 2, 6\}, \{6, 3\} \}$.
(ii) $\{ \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 2\} \}$.
(iii) $\{ \{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5, 6\} \}$.
(iv) $\{ \{1, 2\},\{3, 4\},\{5, 6\} \}$.

16- لأي ثلاث مجموعات اختيارية A, B, C برهن أن:

(i) $A\cap(B\cap C)^c = (A-B)\cup(A-C)$.
(ii) $A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$.
(iii) $(A\cup B)-C = (A-C)\cup(B-C)$.
(iv) $A\times(B-C) = (A\times B)-(A\times C)$.
(v) $(A\times A)\cap(B\times C) = (A\cap B)\times(A\cap C)$.

الباب الثاني

العمليات الثنائية Binary Operations

نعلم أن عمليتي الجمع والضرب على الأعداد تختص بتركيب Composing عددين معاً لينتج عدد ثالث ، وكذلك عمليتي الاتحاد والتقاطع على المجموعات تختص بتركيب مجموعتين معاً لتنتج مجموعة ثالثة ، وكذلك عملية تحصيل العلاقات (أو الرواسم) تقوم بتحصيل علاقتين (أو راسمين) لتكوين علاقة ثالثة (أو راسم ثالث) ،

وهكذا يتبين لنا مفهوم العمليات الثنائية ويمكن تعميمه.

تعريف(1): الراسم $b: X \times X \to X \ ; \ b(x,y) = z \in X \ \ \forall (x,y) \in X \times X$

يُسمى **عملية ثنائية** binary operation على المجموعة غير الخالية X .

أي أن العملية التي تحصل عناصر مجموعة ما (كل اثنان معاً) على أن يكون ناتج التحصيل ينتمي للمجموعة تُسمى عملية ثنائية على هذه المجموعة ، وفي هذه الحالة نقول أن المجموعة مغلقة بالنسبة للعملية.

وعادة يُرمز للعملية الثنائية بالرموز $*$ ، $\#$ ، $\circ$ ، $\oplus$ ، $\otimes$ ، ... .

تعريف(2): يُقال للعملية الثنائية $*$ على المجموعة X أنها دامجة associative

إذا تحقق الشرط: $(x*y)*z = x*(y*z) \ \ \forall x,y,z \in X$

ويُقال أنها ابدالية commutative إذا تحقق الشرط: $x*y = y*x \ \ \forall x,y \in X$

مثال(1): عملية الجمع العادية "+" عملية ثنائية دامجة على مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية ، وعملية الضرب العادية "×" عملية ثنائية دامجة على مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية ، وعملية الجمع العادية "+" ليست عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية حيث إن مجموع أي عددين فرديين لا يكون بالضرورة عدد فردي ، ولكن عملية الضرب"×" عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية حيث إن حاصل ضرب أي عددين فرديين دائماً يكون عدد فردي.

العنصر المحايد والمعكوس Identity and Inverse Elements:

تعريف(3): إذا كانت $*$ عملية ثنائية على المجموعة غير الخالية X فإن العنصر $e \in X$ يُسمى **عنصراً محايداً** بالنسبة للعملية $*$ إذا تحقق الشرط: $x * e = e * x = x \;\; \forall x \in X$

وإذا كانت $*$ عملية ثنائية ذات عنصر محايد $e \in X$ وليكن $x \in X$ فإن العنصر $y \in X$ يُسمى **معكوس** (**نظير**) للعنصر x إذا تحقق الشرط: $x * y = y * x = e$

مثال(2): لتكن العملية $*$ معرفة في مجموعة الأعداد الصحيحة Z كما يلي:

$$x * y = x + y - 3 \;\; \forall x, y \in Z$$

ادرس العملية $*$ (من حيث كونها عملية ثنائية إبدالية ، ودامجة ، ووجود العنصر المحايد ووجود المعكوس).

الحل:

(1) $x * y = x + y - 3 \in Z \;\; \forall x, y \in Z.$

وإذاً $*$ عملية ثنائية في Z .

(2) $x * y = x + y - 3 = y + x - 3 = y * x \;\; \forall x, y \in Z.$

وإذاً $*$ إبدالية.

(3) $(x * y) * z = (x + y - 3) * z = (x + y - 3) + z - 3 = x + y + z - 6,$

$x * (y * z) = x * (y + z - 3) = x + (y + z - 3) - 3 = x + y + z - 6.$

$\therefore (x * y) * z = x * (y * z) \;\; \forall x, y, z \in Z.$

وإذاً $*$ دامجة.

(4) $x * e = x \Rightarrow x + e - 3 = x$

$\Rightarrow e = 3,$

$e * x = x \Rightarrow e + x - 3 = x$

$\Rightarrow e = 3.$

وإذاً العنصر المحايد بالنسبة للعملية $*$ يكون $e = 3 \in Z$

(5) $x * y = e \Rightarrow x + y - 3 = 3$

$\Rightarrow y = 6 - x,$

$y * x = e \Rightarrow y + x - 3 = 3$

$\Rightarrow y = 6 - x.$

وإذاً معكوس العنصر $x \in Z$ يكون $6 - x \in Z$

تمثيل العمليات الثنائية بالجداول Representation by Tables :

إذا كانت X مجموعة منتهية (عدد عناصرها محدود n مثلاً) وكانت $*$ عملية ثنائية في X فإنه يلزم كتابة عدد n^2 من الأزواج المرتبة وصورها.

وللسهولة نلجأ إلى ما يُسمى بجدول العملية وهو شبيه بجدول الضرب.

كما سيتضح من المثال التالي:

مثال: لتكن $X = \{-1,0,1\}$ معرف عليها عمليتي الجمع والضرب العاديتين $+ , \times$

الحل: المجموعة X منتهية (عدد عناصرها 3) فيمكن تمثيل العمليتين $+ , \times$ بالجداول كما يلي:

الجدول الذي يمثل العملية $+$ في المجموعة X يكون:

+	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

ونلاحظ من الجدول أن بعض العناصر الموجودة داخله (أي بعض الصور) لا تنتمي إلى المجموعة X (مثلاً $-2,2 \notin X$) وبذلك فإننا بنظرة واحدة إلى الجدول نستنتج أن $+$ ليست عملية ثنائية في المجموعة X.

والجدول الذي يمثل العملية $\times$ على المجموعة X يكون:

×	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

ونلاحظ من الجدول أن جميع العناصر الموجودة داخله تنتمي إلى المجموعة X ومن ثم فإن $\times$ تكون عملية ثنائية في المجموعة X.

الجمع والضرب بمقياس العدد الصحيح n :

Addition & Multiplication Mod n :

تعريف: يُقال أن العددين الصحيحين a,b **متطابقين بمقياس العدد الصحيح** n

إذا كان $a-b$ يقبل القسمة على n حيث $n \geq 2$ ويُكتب جبرياً $a \equiv b(\text{mod } n)$

ومن خلال دراستنا للعلاقات في الباب الثاني رأينا أن علاقة التطابق هذه تكون علاقة تكافؤ ، ومجموعة فصول التكافؤ لها تكون تجزيء لمجموعة الأعداد الصحيحة Z ويُرمز لمجموعة فصول التكافؤ لهذه العلاقة بالرمز Z/n حيث $Z/n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{n-1}\}$

ومن باب الإيجاز نكتب $Z_n = \{0,1,2,...,n-1\}$

وعمليتي الجمع والضرب في Z_n نعرفهما كما يلي:

حاصل جمع $a,b \in Z_n$ بمقياس العدد الصحيح n يكون عبارة عن **باقي ناتج قسمة المجموع** $a+b$ **على العدد الصحيح** n

وحاصل ضرب $a,b \in Z_n$ بمقياس العدد الصحيح n يكون عبارة عن **باقي ناتج قسمة حاصل الضرب** $a \times b$ **على العدد الصحيح** n

ويُرمز لعملية الجمع بمقياس العدد الصحيح n بالرمز $\oplus_n$

ولعملية الضرب بمقياس العدد الصحيح n بالرمز $\otimes_n$

ملاحظة: كلا من العمليتين $\oplus_n, \otimes_n$ في Z_n تكون دامجة.

مثال(1): لتكن $\oplus_4$ عملية الجمع بمقياس 4 معرفة على المجموعة $Z_4 = \{0,1,2,3\}$

ادرس العملية $\oplus_4$ (من حيث كونها عملية ثنائية إبدالية ، ودامجة ، ووجود العنصر المحايد ، ووجود المعكوس).

الحل: نمثل العملية $\oplus_4$ بجدول كما يلي:

$\oplus_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

ونلاحظ من الجدول أن:

(1) جميع العناصر الموجودة داخله تنتمي إلى المجموعة Z_4. ومن ثم فإن $\oplus_4$ تكون عملية ثنائية في المجموعة Z_4.

(2) عناصر الجدول متماثلة حول القطر الرئيسي للجدول. ومن ثم فإن $\oplus_4$ تكون ابدالية.

(3) العنصر $0 \in Z_4$ هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية $\oplus_4$

(حيث ينطبق الصف (العمود) المناظر له على الصف (العمود) الرئيسي للجدول).

(4) معكوسات عناصر المجموعة Z_4 تكون كما يلي:

العنصر	0	1	2	3
المعكوس	0	3	2	1

وحيث إن كلا من العمليتين $\oplus_n, \otimes_n$ في Z_n تكون دامجة. وعلى ذلك $\oplus_4$ تكون دامجة.

مثال(2): لتكن $\otimes_{10}$ عملية الضرب بمقياس 10 معرفة على المجموعة $X = \{2,4,6,8\} \subset Z_{10}$ ادرس العملية $\otimes_{10}$

(من حيث كونها عملية ثنائية إبدالية ، ودامجة ، ووجود العنصر المحايد والمعكوس).

الحل: نمثل العملية $\otimes_{10}$ بجدول كما يلي:

$\otimes_{10}$	2	4	6	8
2	4	8	2	6
4	8	6	4	2
6	2	4	6	8
8	6	2	8	4

ونلاحظ من الجدول أن:

(1) جميع العناصر الموجودة داخله تنتمي إلى المجموعة X.

ومن ثم فإن $\otimes_{10}$ تكون عملية ثنائية في المجموعة X.

(2) عناصر الحدول متماثلة حول القطر الرئيسي للجدول.

ومن ثم فإن $\otimes_{10}$ تكون ابدالية.

(3) العنصر $6 \in X$ هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية $\otimes_{10}$ (حيث ينطبق الصف (العمود) المناظر له على الصف (العمود) الرئيسي للجدول).

(4) معكوسات عناصر المجموعة X تكون كما يلي:

العنصر	2	4	6	8
المعكوس	8	4	6	2

وحيث إن كلا من العمليتين $\oplus_n, \otimes_n$ في Z_n تكون دامجة.

وعلى ذلك $\otimes_{10}$ تكون دامجة.

تمارين

(**1**) حدد أي من العبارات الآتية صحيح وأيها خطأ (مع ذكر السبب) :

(أ) عملية الجمع إبدالية على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N.

(ب) عملية الضرب دامجة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N.

(ج) عملية الرفع إلى قوى (أس ل) إبدالية على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N

(د) عملية الطرح عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة Z .

(هـ) عملية الطرح عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N .

(**2**) لتكن العملية * معرفة في مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N كما يلي:

$x * y = 2x + 3y \ \forall x, y \in N$.

تحقق من أن * تكون عملية ثنائية غير دامجة وغير إبدالية في N

وهل * تكون عملية ثنائية في المجموعة الجزئية $\{1,2,3,4\}$ من N ؟ ولماذا؟.

(**3**) لتكن $\otimes_5$ عملية الضرب بمقياس 5 معرفة على المجموعة $X = Z_5 - \{0\}$

ادرس العملية $\otimes_5$ (من حيث كونها عملية ثنائية إبدالية ، ودامجة ، ووجود العنصر المحايد ووجود المعكوس).

الباب الثالث

الأنظمة الرياضية ذات العملية الثنائية الواحدة:

Mathematical System with One Operation:

تعريف: لتكن $*$ عملية ثنائية معرفة على مجموعة غير خالية X فإن الثنائي $< X,* >$ يُسمى **نظاماً رياضياً (أو نظاماً جبرياً أو بناءً جبرياً) ذو عملية ثنائية واحدة** .

فمثلاً كل من $< N,+ >, < N,\times >$ حيث N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة يكون نظام رياضي ذو عملية ثنائية واحدة، بينما $< N,- >$ ليس نظاماً ذا عملية حيث إن $1-2 \notin N$ ، كذلك $< N,\div >$ ليس نظاماً ذا عملية (لماذا؟).

مثال(1): إذا كانت Z هي مجموعة الأعداد الصحيحة. بيّن أي من الثنائيات الآتية يعبر عن نظام رياضي ذي عملية:

$< Z,+ >, < Z,\times >, < Z,- >, < Z,\div >$.

الحل:

حيث إن مجموع أي عددين صحيحين يكون دائماً عدداً صحيحاً فإن عملية الجمع $+$ عملية ثنائية في Z ومن ثم فإن $< Z,+ >$ يكون نظاماً ذا عملية.

كذلك حيث إن حاصل ضرب أي عددين صحيحين يكون دائماً عدداً صحيحاً فإن $< Z,\times >$ يكون نظاماً ذا عملية .

وحيث إن ناتج طرح أي عددين صحيحين يكون دائماً عدداً صحيحاً فإن $< Z,- >$ يكون نظاماً ذا عملية .

أما $< Z,\div >$ فليس نظاماً ذا عملية حيث خارج قسمة عددين صحيحين ليس دائماً عدد صحيح.

مثال(2): إذا كانت $O = \{\pm1,\pm3,\pm5,...\}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية. وضح أي من الثنائيات الآتية يكون نظاماً ذا عملية:

$< O,+ >, < O,\times >, < O,- >$.

الحل:

حيث إن مجموع أي عددين صحيحين فرديين يكون دائماً عدداً صحيحاً زوجياً

فمثلاً $-2 \notin O$ ، $3+(-5)=-2 \notin O$ ، $5+7=12 \notin O$ ومن ثم $<O,+>$ ليس نظاماً ذا عملية.

كذلك $<O,->$ ليس نظاماً ذا عملية لنفس السبب.

أما $<O,\times>$ فيكون نظاماً ذا عملية حيث حاصل ضرب أي عددين صحيحين فرديين هو عدد صحيح فردي ويمكن إثبات ذلك في الحالة العامة كما يلي:

$$x, y \in O \;\; ; x = 2m+1, y = 2n+1 \;, m, n \in Z$$
$$\begin{aligned} \therefore x \times y &= (2m+1)(2n+1) \\ &= 4mn + 2m + 2n + 1 \\ &= 2(2mn + m + n) + 1 \in O. \end{aligned}$$

التمثيل بالجداول Representation by Tables :

إذا كانت X مجموعة منتهية (عدد عناصرها محدود n مثلاً) وكانت $*$ عملية ثنائية في X فإنه يلزم كتابة عدد n^2 من الأزواج المرتبة وصورها، وللسهولة وكما ذكرنا في الباب الرابع نمثل الثنائي $<X,*>$ بجدول كما سيتضح في الأمثلة التالية:

مثال(1): لتكن $X=\{-1,0,1\}$ بيّن أي من الثنائيات الآتية يكون نظاماً ذا عملية:

$<X,+>, <X,\times>$.

الحل: المجموعة X منتهية عدد عناصرها 3 ومن ثم فإن عدد عناصر $X \times X$ يساوي $3^2=9$ حيث:

$$X \times X = \{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1).(1,0),(1,1)\}.$$

ولكي نعرف ماإذا كانت العملية $+$ أو العملية $\times$ عملية ثنائية في X أم لا .

يجب أن نوجد صورة كل عنصر من عناصر $X \times X$ (أي ناتج تحصيل العنصر الأول مع العنصر الثاني لكل زوج مرتب في $X \times X$ بواسطة العملية $+$ أو العملية $\times$) ونتأكد أن جميع الصور تنتمي إلى X

وللسهولة نستخدم الجداول الممثلة للعمليات المعطاة في المجموعة X كما يلي:

✓ الجدول الذي يمثل $<X,+>$ يكون:

+	-1	0	1
-1	-2	-1	0

0	-1	0	1
1	0	1	2

نلاحظ من الجدول أن بعض العناصر الموجودة داخله (أي بعض الصور) لا تنتمي إلى المجموعة X (مثلاً $-2,2 \notin X$) وبذلك فإننا بنظرة واحدة إلى الجدول نستنتج أن $+$ لا تكون عملية ثنائية في المجموعة X وأن $< X,+ >$ لايكون نظاماً ذا عملية.

✓ والجدول الذي يمثل $< X,\times >$ يكون:

$\times$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

نلاحظ من الجدول أن جميع العناصر الموجودة داخله تنتمي إلى المجموعة X ومن ثم فإن $\times$ تكون عملية ثنائية في المجموعة X، وأن $< X,\times >$ نظاماً ذا عملية.

مثال(2): لتكن $X = \{1,2\}$، ولتكن $Y = P(X)$ ادرس كلاً من الثنائيات:

$< Y,\cup >, < Y,- >, < Y,\Delta >$

(من حيث كون كل منها نظام ذا عملية أم لا).

الحل: المجموعة Y هي مجموعة القوى للمجموعة X أي $Y = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

والعمليات $\cup, -, \Delta$ هي الإتحاد، والفرق،والفرق المتماثل على الترتيب في المجموعات.

✓ الجدول الذي يمثل $< Y,\cup >$ يكون:

$\cup$	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
ϕ	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

من الجدول نلاحظ أن جميع عناصره تنتمي إلى المجموعة Y ومن ثم فإن $<Y,\cup>$ نظام ذو عملية.

✓ والجدول الذي يمثل $<Y,->$ يكون:

$-$	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
$\{1\}$	$\{1\}$	ϕ	$\{1\}$	ϕ
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	ϕ	ϕ
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	ϕ

من الجدول نلاحظ أن جميع عناصره تنتمي إلى المجموعة Y ومن ثم فإن $<Y,->$ نظام ذو عملية.

✓ والجدول الذي يمثل $<Y,\Delta>$ يكون:

Δ	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
ϕ	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	ϕ	$\{1,2\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	ϕ	$\{1\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	ϕ

من الجدول نلاحظ أن جميع عناصره تنتمي إلى المجموعة Y ومن ثم فإن $<Y,\Delta>$ نظام ذو عملية.

مثال(3): تحقق من أن كلا من $<Z_4,\oplus_4>,<Z_4,\otimes_4>$ يكون نظاماً ذا عملية.

الحل:

$Z_4=\{0,1,2,3\}$ والجدولين الممثليين للعمليتين $\oplus_4,\otimes_4$ في Z_4 يكونا كما يلي:

$\oplus_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\otimes_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

من الجدولين واضح أنه لا توجد عناصر غريبة (أي أن عناصر كل جدول جميعها تنتمي للمجموعة Z_4) وإذاً كلا من $<Z_4,\oplus_4>,<Z_4,\otimes_4>$ يكون نظاماً ذا عملية.

مثال(4): إذا كانت $X=Z_6-\{0\}$ فبيّن ما إذا كان $<X,\otimes_6>$ نظاماً ذا عملية أم لا ؟.

الحل: $Z_6=\{0,1,2,3,4,5\}$ ومن ثم تكون $X=\{1,2,3,4,5\}$ والجدول الممثل لعملية الضرب بمقياس العدد 6 في المجموعة X يكون:

$\otimes_6$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

من الجدول يتبين أن $<X,\otimes_6>$ لا يكون نظامً ذا عملية ،

حيث يوجد العنصر 0 لا ينتمي إلى X .

مثال(5): لتكن $X = R - \{1\}$ حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية ، ولتكن $*$ عملية في X بحيث: $x * y = x + y - xy \ \ \forall x, y \in X$

فتحقق من أن $< X,* >$ يكون نظام ذا عملية.

<u>الحل</u>: واضح أن عدد عناصر المجموعة X لانهائي ومن ثم فلا يمكن تمثيل $< X,* >$ بجدول ولذلك نتبع ما يلي:

ليكن $x, y \in X$ حيث $x * y = x + y - xy$ فإذا كان $x * y = x + y - xy \ = 1$

فإن $x(1-y) = 1-y$ وحيث $y \neq 1$ فإنه يمكن القسمة على $1-y$ فينتج $x = 1$

وهذا يناقض الفرض. ومن ثم فإن $x * y = x + y - xy \neq 1$

وإذا X مغلقة بالنسبة للعملية $*$ أي أن $< X,* >$ يكون نظاماً ذا عملية.

<u>الأنظمة الإبدالية</u>:

تعريف: إذا كانت العملية الثنائية $*$ إبدالية في المجموعة X أي أن:

$$x * y = y * x \ \forall x, y \in X$$

فإن النظام $< X,* >$ يُسمى **نظام إبدالي**.

مثال(1): النظامان $< Z,+ >, < Z,\times >$ إبداليان أما النظام $< Z,- >$ فليس إبدالياً.

مثال(2): لتكن العملية الثنائية $*$ معرفة على N كما يلي:

$$a * b = a^b \ \forall a, b \in N$$

فإن العملية $*$ غير إبدالية حيث إن:

$$2,3 \in N \ \ , 2 * 3 = 2^3 = 8 , 3 * 2 = 3^2 = 9$$
$$\therefore 2 * 3 \neq 3 * 2.$$

وعلى ذلك فإن النظام $< N,* >$ ليس إبدالياً.

مثال(3): لتكن العملية $*$ معرفة في المجموعة $X = R - \{1\}$

(حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية) كما يلي:

$$x * y = x + y - xy \ \ \forall x, y \in X$$

تحقق من أن النظام $< X,* >$ إبدالي.

<u>الحل</u>: لكل $x, y \in X$ يكون:

$$\begin{aligned} x * y &= x + y - xy \\ &= y + x - yx \\ &= y * x. \end{aligned}$$

وإذاً العملية * إبدالية في X ومن ثم فالنظام $< X, * >$ إبدالي.

مثال(4): لتكن $M_{2\times 2}(R)$ هي مجموعة المصفوفات ذات العناصر الحقيقية من النوع 2×2 (أي أن $M_{2\times2}(R) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \ real\}$).

فإن عملية الجمع في $M_{2\times2}(R)$ تكون إبدالية حيث:

$$A + B = B + A \quad \forall A, B \in M_{2\times2}(R).$$

بينما عملية الضرب في $M_{2\times2}(R)$ ليست إبدالية حيث إنه ليس من الضروري أن يكون $AB = BA \quad \forall A, B \in M_{2\times2}(R)$

فمثلاً إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإننا نجد أن:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore AB \neq BA.$$

مثال(5): إذا تأملنا الجدول الذي يمثل النظام $< Z_3, \oplus_3 >$ حيث $Z_3 = \{0,1,2\}$ ، $\oplus_3$ عملية الجمع بمقياس 3 وهو كما يلي:

$\oplus_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

نجد أن الجدول متماثل حول القطر الرئيسي (أي العناصر متساوية البعد عن القطر الرئيسي) مما يدل على أن: $x \oplus_3 y = y \oplus_3 x \quad \forall x, y \in Z_3$

أي أن النظام $< Z_3, \oplus_3 >$ إبدالي.

وستكون وسيلتنا في بيان أن نظاماً عدد عناصره محدود هو نظام إبدالي هي النظر في الجدول الذي يمثله فإذا كان الجدول متماثلاً حول القطر الرئيسي قلنا أن النظام إبدالي.

الأنظمة الدامجة (التجميعية):

تعريف: يُقال أن النظام $<X,*>$ **دامج** (أو **تجميعي**) إذا كانت العملية $*$ دامجة في X أي أن:

$$(x*y)*z = x*(y*z)\ \forall x,y,z \in X.$$

مثال(1): لتكن العملية الثنائية $*$ معرفة على N كما يلي:

$$a*b = a^b\ \forall a,b \in N$$

فإن العملية $*$ غير دامجة حيث إن:

$$a,b,c \in N\ ,(a*b)*c = (a^b)^c = a^{bc}, a*(b*c) = a^{(b^c)} \neq a^{bc},$$
$$\therefore (a*b)*c \neq a*(b*c).$$

فمثلاً:

$$(2*3)*4 = 2^3*4 = (2^3)^4 = 2^{12},$$
$$2*(3*4) = 2*(3^4) = 2^{(3^4)} = 2^{81}.$$

وعلى ذلك فإن النظام $<N,*>$ ليس دامجاً.

مثال(2): لتكن العملية $*$ معرفة في المجموعة $X = R-\{1\}$ حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية كما يلي:

$$x*y = x+y-xy\ \ \forall x,y \in X$$

تحقق من أن النظام $<X,*>$ يكون دامج.

الحل: ليكن $x,y,z \in X$ فإن:

$$\begin{aligned}(x*y)*z &= (x+y-xy)*z\\ &= (x+y-xy)+z-(x+y-xy)z\\ &= x+y+z-xy-xz-yz+xyz,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}x*(y*z) &= x*(y+z-yz)\\ &= x+(y+z-yz)-x(y+z-yz)\\ &= x+y+z-xy-xz-yz+xyz.\end{aligned}$$

وإذاً $(x*y)*z = x*(y*z)\ \forall x,y,z \in X$ أي أن العملية $*$ دامجة ومن ثم يكون النظام $<X,*>$ دامج.

مثال(3): كل من الأنظمة $< Z_n,\oplus_n >,< Z_n,\otimes_n >$ تكون دامجة (حيث إن تحصيل العمليتين $\oplus_n,\otimes_n$ الجمع والضرب بمقياس العدد الصحيح n لأي عنصرين من عناصر المجموعة Z_n هو ناتج باقي قسمة الجمع والضرب العادي للعنصرين على العدد الصحيح n وأن كلاً من عملية الجمع والضرب العادي عملية دامجة على أي مجموعة من العناصر).

مثال(4): كل من الأنظمة $< P(X),\cup >,< P(X),\cap >,< P(X),\Delta >$ دامجة.

بينما النظام $< P(X),- >$ ليس دامجاً.

مثال(5): جمع وضرب المصفوفات $M_{2\times2}$ عمليات دامجة حيث إن:

$$\begin{aligned}(A+B)+C&=A+(B+C),\\ (AB)C&=A(BC).\end{aligned}\qquad \forall A,B,C\in M_{2\times2}$$

النظام ذو العنصر المحايد:

تعريف: يُقال أن النظام $< X,* >$ **ذو عنصر محايد** إذا وُجد عنصر $e\in X$ بحيث:

$x*e=e*x=x \ \ \forall x\in X.$

وإذا كان النظام $< X,* >$ إبدالي فيكفي أن نحقق أحد الشرطين:

$x*e=x \ \ \forall x\in X$ أو $e*x=x \ \ \forall x\in X$

أما إذا لم يكن النظام $< X,* >$ إبدالياً وتحقق الشرط: $x*e=x \ \ \forall x\in X$ فقط فإن e في هذه الحالة تُسمى **عنصر محايد يميني** .

وكذلك إذا تحقق الشرط: $e*x=x \ \ \forall x\in X$ فقط فإن e في هذه الحالة تُسمى **عنصر محايد يساري** .

أما إذا تحقق الشرطان معاً فإن e تُسمى **عنصر محايد** .

مثال(1): العنصر المحايد في النظام $< Z,+ >$ هو الصفر، أما العنصر المحايد في النظام $< Z,\times >$ فهو الواحد الصحيح.

مثال(2): العنصر المحايد في كل من النظامين $< P(X),\cup >,< P(X),\Delta >$ هو المجموعة الخالية ϕ والعنصر المحايد في النظام $< P(X),\cap >$ هو المجموعة الأصلية X

أما النظام $<P(X),->$ له عنصر محايد يميني فقط هو المجموعة الخالية ϕ وليس له محايد يساري وذلك لأن:

$$\left.\begin{array}{l} A-\phi = A, \\ \phi - A = \phi. \end{array}\right. \quad \forall A \in P(X).$$

مثال(3): ابحث وجود العنصر المحايد في النظام $<X,*>$ حيث $X = R-\{1\}$

(R مجموعة الأعداد الحقيقية) والعملية * معرفة في X كما يلي:

$$x*y = x+y-xy \quad \forall x,y \in X .$$

الحل:

$$\begin{aligned} x*e = x &\Rightarrow x+e-xe = x \\ &\Rightarrow e-xe = 0 \\ &\Rightarrow e(1-x) = 0 \\ &\Rightarrow e = 0 \vee 1-x = 0 \\ &\Rightarrow e = 0 \vee x = 1 \\ &\Rightarrow e = 0 \ , x \neq 1 \ \ ; x \in R-\{1\}. \end{aligned}$$

وإذاً العنصر $0 \in X$ هو العنصر المحايد اليميني للنظام $<X,*>$

وحيث إن النظام $<X,*>$ إبدالي لذلك فالعنصر $0 \in X$ هو أيضاً محايد يساري ، وعلى ذلك فإن $0 \in X$ هو العنصر المحايد لهذا النظام.

مثال(4): لتكن $X = \{1,2,3,4\}$ ولتكن العملية * معرفة في X كما يلي:

$$x*y = x \quad \forall x,y \in X.$$

ادرس النظام $<X,*>$ (من حيث الإبدال والدمج ووجود العنصر المحايد).

الحل: حيث إن عدد عناصر X محدود فنكون جدول يمثل النظام كما يلي:

*	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4

من الجدول نلاحظ أن:

(أ) النظام $<X,*>$ غير إبدالي (لعدم تماثل الجدول حول قطره الرئيسي).

(ب) النظام $<X,*>$ دامج لأن: $(x*y)*z = x*(y*z) = x \quad \forall x,y,z \in X$.

(ج) كل من العناصر 1,2,3,4 محايد يميني حيث إن:

$x*1 = x \ , \ x*2 = x \ , \ x*3 = x \ , \ x*4 = x \quad \forall x \in X.$

(د) النظام $<X,*>$ لايحتوي على محايد يساري.

مثال(5): لتكن $X = \{2,4,6,8\} \subset Z_{10}$ ولتكن $\otimes_{10}$ هي عملية الضرب بمقياس 10 ادرس النظام $<X,\otimes_{10}>$ (من حيث الإبدال والدمج ووجود العنصر المحايد).

الحل: الجدول الذي يمثل النظام $<X,\otimes_{10}>$ يكون كالتالي:

$\otimes_{10}$	2	4	6	8
2	4	8	2	6
4	8	6	4	2
6	2	4	6	8
8	6	2	8	4

من الجدول نلاحظ أن:

(أ) النظام $<X,\otimes_{10}>$ إبدالي (لتماثل الجدول حول قطره الرئيسي).

(ب) النظام $<X,\otimes_{10}>$ دامج لأن:

$(x \otimes_{10} y) \otimes_{10} z = x \otimes_{10} (y \otimes_{10} z) \quad \forall x,y,z \in X$

فمثلاً:

$(2 \otimes_{10} 4) \otimes_{10} 6 = 8 \otimes_{10} 6 = 8 \ , \ 2 \otimes_{10} (4 \otimes_{10} 6) = 2 \otimes_{10} 4 = 8,$

$(2 \otimes_{10} 6) \otimes_{10} 8 = 2 \otimes_{10} 8 = 6 \ , \ 2 \otimes_{10} (6 \otimes_{10} 8) = 2 \otimes_{10} 8 = 6,$

ولإثبات ذلك على كل اختبار ممكن لثلاثة عناصر من X فهى عملية شاقة ، ولذلك نستنتج إدماج العملية $\otimes_{10}$ من كون أن عملية الضرب بمقياس العدد الصحيح n لأي عنصرين من المجموعة Z_n هي ناتج باقي قسمة الضرب العادي للعنصرين على n وحيث إن عملية الضرب العادية دامجة على أي مجموعة من العناصر فبالتالي تكون العملية $\otimes_{10}$ دامجة على X .

(ج) العمود الثالث في الجدول يتطابق مع العمود الذي على يسار الجدول (العمود الرئيسي للجدول) ، وأن الصف الثالث يتطابق مع الصف أعلى الجدول (الصف الرئيسي للجدول) ، وأن العمود الثالث والصف الثالث يتقاطعان عند العنصر 6

وهذا يدل على أن العنصر 6 هو العنصر المحايد للنظام $< X,\otimes_{10} >$

(حيث يتحقق: $x \otimes_{10} 6 = 6 \otimes_{10} x = x \ \ \forall x \in X$).

العنصر المعكوس (النظير):

تعريف: ليكن $< X,* >$ نظاماً ذا عنصر محايد e وليكن $x \in X$ إذا وُجد عنصر $y \in X$ بحيث $x * y = e$ فإن العنصر y يُسمى **معكوس (نظير) يميني** للعنصر x

كذلك إذا وُجد عنصر $z \in X$ بحيث $z * x = e$ فإن العنصر z يُسمى **معكوس (نظير) يساري** للعنصر x

وإذا كان النظام $< X,* >$ إبدالياً فإن المعكوس اليميني لأي عنصر $x \in X$ (إن وُجد) يكون هو نفسه المعكوس اليساري للعنصر x وفي هذه الحالة نتحدث عن معكوس العنصر.

وبالطبع لا معنى للحديث عن المعكوسات إذا لم يكن للنظام عنصر محايد.

ونستطيع أن نتبين بسهولة أن معكوس العنصر المحايد e هو نفسه.

مثال(1): في المثال السابق نستطيع أن نتبين من جدول النظام $< X,\otimes_{10} >$ أن معكوسات عناصر المجموعة X تكون كما يلي:

العنصر	2	4	6	8
المعكوس	8	4	6	2

مثال(2): لتكن العملية * معرفة في المجموعة $X = R - \{1\}$ حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية كما يلي:

$$x * y = x + y - xy \ \ \forall x, y \in X$$

عيّن المعكوس لأي عنصر في النظام $< X,* >$

الحل: أثبتنا فيما سبق أن العنصر المحايد للنظام $< X,* >$ هو 0 وليكن معكوس العنصر $x \in X$ هو العنصر y وعلى ذلك فإن:

$$x * y = 0 \Rightarrow x + y - xy = 0$$
$$\Rightarrow y(1-x) = -x$$
$$\Rightarrow y = \frac{-x}{1-x} \ \forall x \in X = R - \{1\}.$$

وإذاً العنصر $\frac{x}{x-1}$ هو المعكوس اليميني للعنصر x في النظام $< X,* >$ وكذلك يكون هو نفسه المعكوس اليساري للعنصر x حيث إن النظام $< X,* >$ إبدالي.

ومن ثم يكون العنصر $\frac{x}{x-1}$ هو معكوس العنصر x في النظام $< X,* >$

مثال(3): لتكن العملية $*$ معرفة في مجموعة الأعداد الصحيحة Z كما يلي:

$$x * y = x + y - 3 \ \ \forall x, y \in Z$$

ادرس النظام $< Z,* >$ (من حيث الإبدال، والدمج، ووجود العنصر المحايد، ووجود المعكوس).

الحل:

(1) $x * y = x + y - 3 = y + x - 3 = y * x \ \ \forall x, y \in Z.$

إذاً النظام $< Z,* >$ إبدالي.

(2) $(x * y) * z = (x + y - 3) * z = (x + y - 3) + z - 3 = x + y + z - 6,$

$x * (y * z) = x * (y + z - 3) = x + (y + z - 3) - 3 = x + y + z - 6.$

$\therefore (x * y) * z = x * (y * z) \ \ \forall x, y, z \in Z.$

إذاً النظام $< Z,* >$ دامج.

(3) $x * e = x \Rightarrow x + e - 3 = x$
$\Rightarrow e = 3,$
$e * x = x \Rightarrow e + x - 3 = x$
$\Rightarrow e = 3.$

إذاً العنصر المحايد للنظام $< Z,* >$ هو $e = 3$

(4) $x * y = e \Rightarrow x + y - 3 = 3$
$\Rightarrow y = 6 - x,$
$y * x = e \Rightarrow y + x - 3 = 3$
$\Rightarrow y = 6 - x.$

إذاً معكوس العنصر x هو العنصر $6-x$

تمارين

1– لتكن العملية * معرفة في المجموعة $X = R - \{-1\}$ حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية كما يلي: $x * y = x + y + xy \quad \forall x, y \in X$

فتحقق من أن $< X,* >$ يكون نظام دامج وإبدالي ،

وابحث وجود العنصر المحايد، والمعكوس.

2– إذا كانت $X = \{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \; reals\}$ وكانت $\times$ عملية ضرب المصفوفات.

فتحقق من أن $< X,\times >$ يكون نظام دامج وإبدالي وذو عنصر محايد ،

وأن جميع عناصر هذا النظام عدا العنصر $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ لها معكوس ضربي.

3– لتكن $\otimes_8$ عملية الضرب بمقياس 8 معرفة على المجموعة $X = \{1,3,5,7\} \subset Z_8$

ادرس النظام $< X,\otimes_8 >$ (من حيث الإبدال والدمج ووجود العنصر المحايد والمعكوس).

الباب الرابع

مقدمة في نظرية الزمر

تكتسب الزمر أهمية خاصة في الجبر الحديث لما لها من تطبيقات في علوم أخرى مثل الفيزياء والكيمياء. وسنعرض بمشيئة الله تعالى في هذا المقرر لمفهوم الزمرة ، وبعض الخصائص الأساسية للزمرة، وبعض أنواع الزمر وتطبيقاتها، ومفهوم تشاكل وتماثل الزمر.

- **مفهوم الزمرة Group** :

تعريف(1): لتكن * عملية ثنائية معرفة على المجموعة غير الخالية G

فإن الثنائي $<G,*>$ يُسمى **زمرة Group** إذا تحققت الشروط التالية:

(أ) (شرط الإغلاق) $a*b\in G \ \ \forall a,b\in G$

(ب) (شرط الدمج) $(a*b)*c=a*(b*c) \ \ \forall a,b,c\in G$

(ج) (شرط وجود العنصر المحايد) $\exists\ e\in G\ ;\ e*a=a*e=a \ \ \forall a\in G$

(د) (شرط وجود المعكوس) $\forall a\in G\ \exists\ a^{-1}\in G\ ;\ a^{-1}*a=a*a^{-1}=e$

ملاحظة: إذا تحقق الشرطان (أ) ، (ب) فقط فإن $<G,*>$ يُسمى **شبه زمرة Semi-Group** ، وإذا تحققت الشروط (أ) ، (ب) ، (ج) فقط فإن $<G,*>$ يُسمى **شبه زمرة تحتوي على عنصر محايد Monoid** .

(أي أن الزمرة هي النظام الجبري $<G,*>$ بحيث يكون هذا النظام دامج ، وذا عنصر محايد ، وذا معكوس).

أمثلة:

مثال(1): النظام $<Z,+>$ حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة ، + عملية الجمع العادية يمثل زمرة (وضح ذلك؟).

مثال(2): النظام $<Z,\times>$ حيث $\times$ عملية الضرب العادية يمثل شبه زمرة تحتوي على عنصر محايد (وضح ذلك؟).

مثال(3): النظام $<C^{`},\times>$ حيث $C^{`}=\{C-\{0\}\}$ مجموعة الأعداد المركبة بدون العنصر $0\in C$ وحيث $\times$ عملية الضرب العادية يمثل زمرة (وضح ذلك؟).

تعريف(2): يُقال للزمرة $<G,*>$ أنها **زمرة إبدالية Commutative Group** إذا تحقق الشرط التالي:

(شرط الإبدال) $a*b=b*a \quad \forall a,b\in G$

الزمرتين في الأمثلة (1) ، (3) إبداليتين ، شبه الزمرة في المثال (2) إبدالية.

تمارين محلولة:

1– ادرس الثنائي $<Q,\times>$ (من حيث كونه شبه زمرة – زمرة)

حيث Q مجموعة الأعداد النسبية ، $\times$ عملية الضرب .

الحل:

(أ) حيث إن $\forall a,b\in Q$ يكون $a\times b\in Q$ أي أن العملية $\times$ مغلقة على Q

(ب) عملية الضرب العادية $\times$ هي عملية دامجة (تجميعية) على أي مجموعة من الأعداد، وعلى ذلك فهي دامجة على المجموعة Q

(ج) يوجد عنصر محايد $1\in Q$ بحيث لأي $a\in Q$ يتحقق: $1\times a=a\times 1=a$

(د) العنصر $0\in Q$ لا يوجد له معكوس بالنسبة لعملية الضرب $\times$

(حيث لا يمكن تعريف 0^{-1}) وأي عنصر خلاف العنصر 0 يوجد له معكوس ضربي ، وعلى ذلك لا يكون لكل عنصر في المجموعة Q معكوس ضربي.

(هـ) لكل $a,b\in Q$ يتحقق: $a\times b=b\times a$ أي أن العملية $\times$ إبدالية على Q

وبالتالي فإن النظام $<Q,\times>$ يكون شبه زمرة إبدالية تحتوي على عنصر محايد.

2– لتكن $A=\{a: a=3^n ; n\in Z\}$ ، × عملية الضرب العادية. تحقق من أن الثنائي $<A,\times>$ يمثل زمرة إبدالية؟.

الحل:

(أ) لكل $a,b\in A$ حيث $n,m\in Z$; $a=3^n , b=3^m$ يكون $a\times b=3^n\times 3^m=3^{n+m}\in A$

أي أن العملية × مغلقة على المجموعة A

(ب) لكل $a,b,c\in A$ حيث $n,m,k\in Z$; $a=3^n , b=3^m , c=3^k$ يكون:

$$(a\times b)\times c = (3^n\times 3^m)\times 3^k = 3^{n+m}\times 3^k = 3^{(n+m)+k} = 3^{n+(m+k)}$$
$$= 3^n\times 3^{m+k} = 3^n\times(3^m\times 3^k) = a\times(b\times c).$$

أي أن العملية × دامجة على A

(ج) ليكن $e\in A$ هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية × حيث $m\in Z$; $e=3^m$ وعلى ذلك يكون لأي $a=3^n\in A$ يكون:

$$a\times e=a \Rightarrow 3^n\times 3^m=3^n \Rightarrow 3^{n+m}=3^n \Rightarrow n+m=n \Rightarrow m=0$$
$$\therefore e=3^0=1$$

أي أنه يوجد عنصر محايد بالنسبة للعملية × هو $1=3^0\in A$

(د) ليكن $a^{-1}\in A$ هو معكوس العنصر $a\in A$ بالنسبة للعملية × حيث:

$a=3^n , a^{-1}=3^k ; n,k\in Z$ وعلى ذلك يكون:

$$a\times a^{-1}=e \Rightarrow 3^n\times 3^k=3^0 \Rightarrow 3^{n+k}=3^0 \Rightarrow n+k=0 \Rightarrow k=-n$$

أي أنه يوجد لكل عنصر $a=3^n\in A$ معكوس بالنسبة للعملية × هو $a^{-1}=3^{-n}\in A$.

(هـ) لكل $a,b\in A$ حيث $n,m\in Z$; $a=3^n, b=3^m$ يكون:

$$a\times b=3^n\times 3^m=3^{n+m}=3^{m+n}=3^m\times 3^n=b\times a$$

أي أن العملية × إبدالية على المجموعة A

وبالتالي فإن النظام $<A,\times>$ يكون زمرة إبدالية.

3- لتكن $M(A)$ هي مجموعة التقابلات (الرواسم التناظر آحادية) من المجموعة A إلى المجموعة A ، ولتكن"$_o$" هي عملية تحصيل(تركيب) الرواسم. تحقق من أن الثنائي $<M(A)\ ,\ _o>$ يكون زمرة.

الحل:

(أ) إذا كانت $f,g\in M(A)$ أي أن :

$$f: A \to A,\ g: A \to A$$

ومن تعريف العملية "$_o$" نجد أن :

$$f_o\, g : A \to A$$

أي أن التحصيل يكون راسم ينتمى إلى $M(A)$ وبذلك فإن عملية التحصيل "$_o$" تكون عملية مغلقة على المجموعة $M(A)$.

(ب) ولإثبات خاصية الدمج نفرض أن $f,g,h\in M(A)$ ويجب أن نثبت أن أى عنصر من عناصر A له نفس الصورة بأي من الراسمين:

$$(f_o\, g)_o\, h \vee f_o\,(g_o\, h)\ ,$$
$$((f_o\, g)_o\, h)(a) = (f_o\, g)\, h(a) = f(g(h(a))) = f((g_o\, h)(a))$$
$$= (f_o\,(g_o\, h))(a)$$
$$\therefore (f_o\, g)_o\, h = f_o\,(g_o\, h)$$

وإذاً "$_o$" عملية دامجة على المجموعة $M(A)$

(ج) نثبت أن $M(A)$ تحتوى على عنصر محايد بالنسبة للعملية "$_o$"

حيث إن:

$$e : A \to A\ ;\ e(a) = a \quad \forall\, a\in A$$

ولأي عنصر $f\in M(A)$ يكون:

$$(f_o\, e)(a) = f(e(a)) = f(a)$$
$$\therefore f_o\, e = f$$
$$(e_o\, f)(a) = e(f(a)) = f(a)$$
$$\therefore e_o\, f = f$$

وبذلك فإن $e\in M(A)$ هو الراسم المحايد وهو العنصر المحايد المطلوب.

(د) حيث إن $M(A)$ هي مجموعة الرواسم التناظر آحادية على المجموعة A فكل عنصر (راسم) $f\in M(A)$ يكون له راسم معكوس $f^{-1}\in M(A)$ بحيث:

$$(f_o f^{-1})(a) = f(f^{-1}(a)) = e(a)$$
$$\therefore f_o f^{-1} = e$$
$$(f^{-1}{}_o f)(a) = f^{-1}(f(a)) = e(a)$$
$$\therefore f^{-1}{}_o f = e$$

وعلى ذلك فإن كل عنصر $f\in M(A)$ يكون له معكوس $f^{-1}\in M(A)$

(هـ) من دراستنا للرواسم نعلم أنه ليس من الضروري أن يكون:

$$f_o g = g_o f \quad \forall f,g\in M(A)$$

وإذاً النظام $<M(A)\,,\,_o>$ يكون زمرة.

4- إذا كانت $A=\{x,y\}$ وعرفنا عملية الفرق المتماثل Δ على مجموعة القوى للمجموعة A كما يلى: $X\Delta Y = (X\cup Y)-(X\cap Y) \quad \forall X,Y\in P(A)$

ماذا يكون النظام $<P(A),\Delta>$ ؟.

الحل: $P(A)=\{\phi,\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$

والجدول الذي يمثل النظام $<P(A),\Delta>$ يكون كما يلي:

Δ	ϕ	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{x,y\}$
ϕ	ϕ	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{x,y\}$
$\{x\}$	$\{x\}$	ϕ	$\{x,y\}$	$\{y\}$
$\{y\}$	$\{y\}$	$\{x,y\}$	ϕ	$\{x\}$
$\{x,y\}$	$\{x,y\}$	$\{y\}$	$\{x\}$	ϕ

من الجدول نلاحظ أن:

(أ) جميع العناصر التى ظهرت فى الجدول تنتمى إلى $P(A)$ أى أن Δ عملية ثنائية مغلقة على $P(A)$

(ب) ومن دراستنا لنظرية المجموعات نعلم أن عمليات الاتحاد والتقاطع والفرق المتماثل هى عمليات دامجة ، وعلى ذلك تكون Δ دامجة.

(ج) بالنظر إلى عناصر الصف الأول نجد أن جميع العناصر لم تتغير بإجراء العملية Δ للعناصر مع ϕ (ϕ على يمين العنصر) وأيضا بالنظر إلى العمود الأول نجد أن العناصر لم تتغير بإجراء العملية Δ للعناصرمع ϕ (ϕعلى يسار العنصر)

ومن ذلك نستنتج أن $\phi \in P(A)$ هي العنصر المحايد بالنسبة للعملية Δ

(د) حتى يكون للعنصر $\{x\} \in P(A)$ مثلاً معكوس بالنسبة للعملية Δ فى $P(A)$ يجب أن يكون محصلة $\{x\}$ مع معكوسه بواسطة العمليةΔ هيϕ(العنصر المحايد)، ومن الجدول نلاحظ أن كل عنصر هو معكوس نفسه.

(هـ) عناصر الجدول متماثلة حول عناصرالقطر الرئيسى في الجدول أى أن العملية الثنائية Δ إبدالية على المجموعة $P(A)$

وعلى ذلك فإن النظام $<P(A),\Delta>$ يكون زمرة إبدالية.

5- تحقق من أن النظام $<Z_4,\oplus_4>$ يكون زمرة إبدالية.

الحل:

$Z_4=\{0,1,2,3\}$ وعملية الجمع $\oplus_4$ تُعرف كما يلي:

لأي $a,b \in Z_4$ فإن $a\oplus_4 b$ تعني باقي قسمة $a+b$ على 4

فيكون الجدول الممثل للنظام $<Z_4,\oplus_4>$ هو:

$\oplus_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

ومن الجدول نلاحظ أن:

(أ) جميع العناصر فى الجدول تنتمى إلى المجموعة Z_4 أى أن المجموعة Z_4 مغلقة بالنسبة للعملية $\oplus_4$

(ب) تطابق الصف الأول والعمود الأول (المناظرين للعنصر 0)مع صف وعمود العناصر الأساسية للجدول وعلى ذلك فإن العنصر$0\in Z_4$ هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية $\oplus_4$

(ج) لكل عنصر معكوس في Z_4 العنصران 0,2 كل منهما معكوس نفسه، والعنصران 1,3 كل منهما معكوس الآخر.

(د) عناصر الجدول متماثلة حول عناصرالقطر الرئيسى في الجدول أى أن العملية الثنائية $\oplus_4$ إبدالية على المجموعة Z_4

(هـ) يمكن إثبات أن العملية $\oplus_4$ دامجة وذلك بإثبات أن:

$$(a \oplus_4 b) \oplus_4 c = a \oplus_4 (b \oplus_4 c) \quad \forall\, a,b,c\in Z_4$$

على سبيل المثال :

$$(3 \oplus_4 2) \oplus_4 1 = 1 \oplus_4 1 = 2\ ,$$
$$3 \oplus_4 (2 \oplus_4) = 3 \oplus_4 3 = 2$$

ولإثبات ذلك على كل اختبار ممكن لثلاثة عناصر من Z_4 فهي عملية شاقة ، ولذا نستنتج إدماج العملية $\oplus_4$ من كون أن عملية الجمع بمقياس العدد الصحيح n لأي عنصرين من المجموعة Z_n هي ناتج باقي قسمة الجمع العادي للعنصرين على n ، وحيث إن عملية الجمع العادية دامجة على أي مجموعة من العناصر ، فبالتالي تكون العملية $\oplus_4$ دامجة على Z_4 .

ملاحظة: الملاحظات السابقة على الجدول الممثل للنظام $<Z_4,\oplus_4>$ يمكن إختصارها لتكون كما يلي:

(1) كل صف أو عمود في الجدول يحتوي على جميع عناصر المجموعة Z_4 .

(2) لا يتكرر ظهور أي عنصر في أي صف أو عمود في الجدول.

(3) يوجد تماثل حول عناصر القطر الرئيسي للجدول.

✓ وهذه الملاحظات الثلاث تكفي ليكون النظام الممثل بالجدول زمرة إبدالية، والملاحظتان (1)،(2) فقط تكفيان ليكون النظام الممثل بالجدول زمرة ، وهكذا بالنسبة لأي نظام مُمثل بجدول.

✓ وبالمناسبة عدم تحقق أيا من هذه الملاحظات لا يكفي للدلالة على أن النظام لا يمثل زمرة ، وإنما يجب ذِكر الشرط الذي لا يتحقق من الشروط الأصلية التي وردت في تعريف الزمرة.

==

تمارين:

1- حدد أي من الثنائيات الآتية يكون زمرة،وأيها لايكون زمرة مع ذكر السبب:

(1) $< A,\times > \; ; A = \{1, \omega, \omega^2 : \omega = \sqrt[3]{1}\}.$

(2) $< A,\times > \; ; A = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} : \omega^3 = 1\}.$

(3) $< A,\times > \; ; A = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} : i^2 = -1\}.$

(4) $< A,\times > \; ; A = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\}.$

(5) $< A,\times > \; ; A = \{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x, y \; real, xy = 1\}.$

(6) $< A,\times > \; ; A = \{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \; real, x^2 + y^2 \neq 0\}.$

(7) $< A,\times > \; ; A = \{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} : x, y \; real, y \neq 0\}.$

2- تحقق من أن النظام $<M_{2\times 2}(R), \times>$ يكون زمرة؟

حيث $M_{2\times 2}(R)$ هي مجموعة المصفوفات غير المفردة من النوع 2×2 ذات العناصر الحقيقية ، $\times$ هي عملية ضرب المصفوفات. وهل هذه الزمرة إبدالية (ولماذا؟).

3- تحقق من أن النظام $<Q-\{0\}, \times>$ يكون زمرة إبدالية؟

حيث Q مجموعة الأعداد النسبية.

▪ بعض الخصائص الأساسية للزمرة:

ليكن $<G,*>$ زمرة فإن الخصائص التالية تكون متحققة:

(1) العنصر المحايد في الزمرة يكون وحيد:

نفرض e_1,e_2 عنصرين محايدين في الزمرة $<G,*>$

$\therefore e_1= e_1*e_2$ (باعتبار e_2 عنصر محايد)

$\therefore e_2= e_1*e_2$ (باعتبار e_1 عنصر محايد)

$\therefore e_1=e_2$

أي أن العنصر المحايد في الزمرة وحيد.

(2) معكوس أي عنصر في الزمرة يكون وحيد:

نفرض أن b,c معكوسان للعنصر $a\in G$ وأن $e\in G$ هو العنصر المحايد للزمرة $<G,*>$

$\therefore a*b = b*a =e$,
$a*c = c*a =e$

$c = c*e = c*(a*b) = (c*a)*b$ (خاصية الدمج)
$= e*b = b.$

أي أن المعكوس في الزمرة وحيد.

(3) خاصيتي الحذف من اليمين والحذف من اليسار:

لكل $a,x,y\in G$ يتحقق:

$x*a = y*a \Rightarrow x = y,$
$a*x = a*y \Rightarrow x = y\ .$

البرهان:

$x*a = y*a \Rightarrow (x*a)*a^{-1} = (y*a)*a^{-1}$
$\Rightarrow x* (a*a^{-1}) = y*(a*a^{-1})$ (من خاصية الدمج)
$\Rightarrow x*e = y*e$
$\Rightarrow x = y\ .$

وبالمثل يمكن إثبات خاصية الحذف من اليسار.

(4) حل المعادلات في الزمرة:

إذا كان للمعادلة $a*x = b$ حل في الزمرة فيكون هذا الحل وحيد على الصورة $x = a^{-1} * b$ كذلك يكون للمعادلة $x*a = b$ حل وحيد على الصورة $x=b*a^{-1}$

البرهان:

يكون $x = a^{-1} *b$ حل للمعادلة $a*x = b$ إذا حققها:

$$L.H.S = a*x = a*(a^{-1}*b) = (a^{-1}*a)*b = e*b = b = R.H.S.$$

وإذاً $x = a^{-1} *b$ يكون حل للمعادلة $x*a = b$

ويتبقى إثبات أن هذا الحل يكون وحيد كما يلي:

نفرض أن للمعادلة $a*x = b$ حلان هما x_1,x_2 (أي يحققاها) وإذاً:

$$a*x_1 = b \ , \ a*x_2 = b$$
$$\therefore a*x_1 = a*x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

(من خاصية الحذف من اليسار)

أي أن الحل يكون وحيد.

وبالمثل يمكن إثبات أن $x=b*a^{-1}$ هو الحل الوحيد للمعادلة الثانية $x*a = b$

أمثلة:

(1) حل المعادلة $2x = 3$ في الزمرة $< Z_4,\oplus_4 >$ يكون:

$$2 \oplus_4 x = 3 \Rightarrow x = 2^{-1} \oplus_4 3 = 2 \oplus_4 3 = 1.$$

(انظر جدول الزمرة $< Z_4,\oplus_4 >$ في مثال 5).

(2) النظام $< Z,* >$ حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة ، والعملية $*$ معرفة على Z كما يلي: $a * b = a + b - 3 \ \forall a,b \in Z$ يكون زمرة إبدالية (تحقق من ذلك؟). وحل المعادلة $5x = -2$ في هذه الزمرة يكون:

$$5 * x = -2 \Rightarrow x = 5^{-1} * (-2) = (6-5) * (-2) = 1 * (-2) = 1 + (-2) - 3 = -4.$$

(حيث معكوس العنصر a يكون $(6-a)$ في هذه الزمرة.

(5) معكوس المعكوس في الزمرة هو العنصر الأصلي:

$$(a^{-1})^{-1} = a .$$

البرهان:

let $(a^{-1})^{-1} = b$

$\therefore a^{-1} * b = e$
$\Rightarrow a* (a^{-1} * b) = a*e \Rightarrow (a*a^{-1})*b = a \Rightarrow e*b = a \Rightarrow b = a.$
$\therefore (a^{-1})^{-1} = a$.

نتيجة: لأي عنصرين a,b في الزمرة يتحقق:

$(a*b)^{-1} = b^{-1} *a^{-1}$.

البرهان:

$$\begin{aligned}(a*b) * (b^{-1} *a^{-1}) &= a* (b* (b^{-1} *a^{-1}))\\ &= a* ((b*b^{-1}) *a^{-1})\\ &= a* (e*a^{-1})\\ &= a*a^{-1}\\ &= e\end{aligned}$$
$\therefore (a*b)^{-1} = b^{-1} *a^{-1}$.

(6) الرفع إلى قوى صحيحة:

لأي عنصر $a\in G$ يكون $a*a*a=a^3\in G$ ، $a*a=a^2\in G$ ، وهكذا ...حتى يكون $a*a*\ldots*a$ (n من المرات) فيكون:

$a*a*\ldots*a = a^n\in G$, $a^0 = e\in G \ \forall a\in G.$

وإذا كان $a^{-1}\in G$ هو معكوس $a\in G$ فيكون:

$a^{-1} *a^{-1} = a^{-2}$,
$a^{-1} *a^{-1} *a^{-1} = a^{-3}$
… … … …
$a^{-1} *a^{-1} *\ldots* a^{-1} = a^{-n}$.   (n-times)

وفي الحالة العامة يكون:

$a^n*a^m = a^{n+m}$, $(a^n)^m = a^{nm} \ \forall a\in G ,\forall n,m\in Z$ (مجموعة الأعداد الصحيحة)

ملحوظة: في الحالة العامة يكون: $(a*b)^r \neq a^r*b^r \ ; r\in Z$. وسنكتب ab بدلا من a*b من باب التخفيف والإيجاز.

نظرية: إذا كانت G زمرة إبدالية فإن: $(ab)^n = a^nb^n \ \forall a,b\in G , n\in Z^+$

البرهان: باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي:

(i) at $n=1 \quad \therefore (ab)^1 = a^1b^1$.

أي أن العلاقة صحيحة في حالة n=1

(ii) let n=k , $(ab)^k = a^k b^k$.
(iii) at n=k+1,

$$\begin{aligned}
L.H.S. = (ab)^{k+1} &= (ab)^k (ab)^1 \\
&= (a^k b^k)(ab) && (\text{من} (ii)) \\
&= ((a^k b^k)a)b && (\text{الدمج}) \\
&= (a^k (b^k a))b && (\text{الدمج}) \\
&= (a^k (ab^k))b && (\text{الإبدال}) \\
&= ((a^k a)b^k)b && (\text{الدمج}) \\
&= (a^{k+1} b^k)b \\
&= a^{k+1}(b^k b) && (\text{الدمج}) \\
&= a^{k+1} b^{k+1} = R.H.S.
\end{aligned}$$

أي أن العلاقة صحيحة في حالة n=k+1 بفرض صحتها في حالة n=k وهي صحيحة في حالة n=1 وعلى ذلك فهي صحيحة لأي عدد صحيح موجب n

ملاحظات:

(**1**) إذا كانت العملية الثنائية المعرفة في الزمرة G هي عملية الجمع "+" فإن:

$a+a+\ldots+a = na$, (عدد المرات وهو عدد صحيح موجب n)

$-a-a-\ldots-a = -na$,

$(n+m)a = na+ma$, (n,m أعداد صحيحة)

$n(ma) = (nm)a$.

(2) عدد عناصر الزمرة يُسمى رتبة الزمرة the order of a group وإذا كان عدد عناصر الزمرة منته فإننا نقول أن الزمرة منتهية finite group وإذا كان عدد عناصر الزمرة غير منته فإننا نقول أن الزمرة لا نهائية infinite group .

■ **تمارين:**

1- تحقق من أن النظام $< R,* >$ حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية، ولكل $x, y \in R$ يكون $x * y = x + y - 5$ يمثل زمرة إبدالية.

ثم أوجد حل المعادلة $4x=-3$ في هذه الزمرة.

2- لتكن $X=R-\{1\}$ حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية ولتكن * عملية معرفة

على المجموعة X كما يلي: $a*b=a+b-ab\ \ \forall a,b\in X$

تحقق من أن النظام $<X,*>$ يكون زمرة إبدالية.

ثم أوجد حل المعادلة $3x=5$ في هذه الزمرة.

3- إذا كانت $<X,*>$ زمرة حيث $x=x^{-1}$ لكل $x\in X$

فتحقق من أن $<X,*>$ تكون زمرة إبدالية.

4- إذا كانت $<X,*>$ زمرة حيث $(x*y)^{-1}=x^{-1}*y^{-1}$ لكل $x,y\in X$

فتحقق من أن $<X,*>$ تكون زمرة إبدالية.

5- بيّن أن أي زمرة محتوية فقط على ثلاث عناصر تكون إبدالية.

==

■ أنواع خاصة من الزمر:

(1) زمر التبديلات(أو زمر التماثل)(Permutation groups (Symmetric groups):

رأينا فيما سبق أن النظام $<M(A),\circ>$ يمثل زمرة .حيث M(A) هي مجموعة التقابلات(الرواسم أحادية التناظر من A إلى A) والعملية "$\circ$ " هي عملية تحصيل الرواسم.

فإذا كانت A مجموعة منتهية finite فإن M(A) تُسمى **زمرة التبديلات** الممكن إجراءها على عناصر المجموعة A وإذا كان عدد عناصر المجموعة A هو n فإن عدد التبديلات على A يكون مساوياً !n

وعلى سبيل المثال إذا كانت:

$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$

وكانت $\alpha\in M(A)$ (تبديلة) فإن α تُعرف بالعلاقة:

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \alpha(a_1) & \alpha(a_2) & \dots & \alpha(a_n) \end{pmatrix} .$$

حيث $\alpha(a_1), \alpha(a_2), \dots, \alpha(a_n) \in A$ وإذا كانت:

A={1,2,. . .,n}

فإن $M_n(A)$ تُسمى **زمرة التبديلات من درجة n** ويُرمز لها بالرمز $\mathbf{S_n}$

حيث $\alpha \in S_n$ تُعرف بالعلاقة:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \dots & \alpha(n) \end{pmatrix}.$$

ملاحظات ونتائج:

(1) إذا كان $\alpha, \beta, \gamma \in S_4$ حيث:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

فإنه يمكن التعبير عن α, β, γ بأكثر من طريقة كما يلي:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \equiv (1\ 4\ 2\ 3),$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \equiv (1\ 4\ 2)(3) \equiv (1\ 4\ 2),$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv (1\ 3)(2\ 4).$$

كلا من التعبيرات $(1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 2), (1\ 3)(2\ 4)$ يُسمى **التعبير الدائري** للتبديلات α, β, γ على الترتيب. وبالطبع عدد عناصر S_4 يكون مساوياً $4!=24$

(2) ولحساب التبديلة المحصلة $\alpha \circ \beta$ نكتب أولاً α بعد إعادة ترتيب الصف الأول في α بنفس ترتيب الصف الثاني في β مع مراعاة أن العنصر يُنقل بصورته، فتكون المحصلة $\alpha \circ \beta$ هي التبديلة التي صفها الأول هو الصف الأول في التبديلة β وصفها الثاني هو الصف الثاني في التبديلة α بعد الترتيب المشار إليه أي أن:

$$\alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 4\ 3).$$

(3) ومعكوس التبديلة يكون هو التبديلة التي صفها الأول هو الصف الثاني في التبديلة الأصلية ، وصفها الثاني هو الصف الأول في التبديلة الأصلية فمثلاً:

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2\ 4)..$$

(4) والتبديلة $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ تُسمى تبديلة الوحدة في S_4

(5) وإذا كان $\frac{\alpha(i)-\alpha(j)}{i-j} < 0 \ \forall i < j$ فإننا نقول أنه يوجد انقلاب inversion في التبديلة $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ..... & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & ..... & \alpha(n) \end{pmatrix}$

وعدد الانقلابات للصورة $\alpha(i)$ في التبديلة α يكون مساويا لعدد الصور $\alpha(j)$ التالية لهذه الصورة بحيث يكون $i < j$, $\alpha(j) < \alpha(i)$

ويُرمز للعدد الكلي لانقلابات التبديلة α (عدد انقلابات صورها) بالرمز $inv(\alpha)$ أو بالرمز V_α . فمثلاً للتبديلات α, β, γ المعطاه في (1) يكون:

$$V_\alpha = 3+2+0+0 = 5,\ V_\beta = 3+0+1+0 = 4,\ V_\gamma = 2+2+0+0 = 4$$

ملاحظة: عند حساب عدد انقلابات التبديلة لابد أن تكون في الصورة الأصلية.

مثال(1): لتكن S_3 هي مجموعة التبديلات من الدرجة الثالثة للمجموعة $\{1,2,3\}$ فإن النظام $< S_3, \circ >$ يكون زمرة ،حيث "$\circ$" عملية تحصيل الرواسم.

الإثبات: حيث إن عدد عناصر المجموعة $\{1,2,3\}$ هو 3 فإن عدد عناصر مجموعة التبديلات من الدرجة الثالثة للمجموعة $\{1,2,3\}$ يساوي 6=!3 وهذه العناصر هي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

أي أن $S_3 = \{I, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$.

وحيث إن المجموعة S_3 محدودة فيمكن تمثيل النظام $< S_3, \circ >$ بجدول كما يلي:

$\circ$	I	(1 2 3)	(1 3 2)	(1 2)	(1 3)	(2 3)
I	I	(1 2 3)	(1 3 2)	(1 2)	(1 3)	(2 3)
(1 2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)	I	(1 3)	(2 3)	(1 2)
(1 3 2)	(1 3 2)	I	(1 2 3)	(2 3)	(1 2)	(1 3)
(1 2)	(1 2)	(2 3)	(1 3)	I	(1 3 2)	(1 2 3)
(1 3)	(1 3)	(1 2)	(2 3)	(1 2 3)	I	(1 3 2)
(2 3)	(2 3)	(1 3)	(1 2)	(1 3 2)	(1 2 3)	I

من الجدول نلاحظ أن :

(1) كل صف أو عمود في الجدول يحتوي على جميع عناصر S_3

(2) لا يتكرر ظهور أي عنصر في أي صف أو عمود في الجدول.

وعلى ذلك فإن النظام $< S_3, \circ >$ يمثل زمرة.

التبديلات الزوجية والتبديلات الفردية:

إذا كان عدد التقاطعات عندما يصل كل عنصر في الصف الأول للتبديلة إلى نفس العنصر في الصف الثاني عدد زوجي فإن التبديلة تُسمى **تبديلة زوجية** ، وإذا كان عدد التقاطعات عدد فردي فإن التبديلة تُسمى **تبديلة فردية**.

أو إذا كان عدد انقلابات التبديلة عدد زوجي فإن التبديلة تُسمى تبديلة زوجية ، وإذا كان عدد انقلابات التبديلة عدد فردي فإن التبديلة تُسمى تبديلة فردية.

وعدد التبديلات الزوجية على n من العناصر يساوي عدد التبديلات الفردية على n من العناصر.

ومحصلة تبديلتين زوجيتين تكون تبديلة زوجية، ومحصلة تبديلتين فرديتين تكون تبديلة زوجية . أما محصلة تبديلتين واحدة زوجية والأخرى فردية يكون تبديلة فردية.

فإذا أخذنا مجموعة التبديلات من الدرجة الثالثة للمجموعة $\{1,2,3\}$ وهي S_3

فإن S_3 بها ثلاث تبديلات زوجية هي:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = I, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} = (1\ 2\ 3), \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} = (1\ 3\ 2).$$

وبها ثلاثة تبديلات فردية هي:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix} = (1\ 2), \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} = (1\ 3), \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix} = (2\ 3)..$$

ويُرمز لمجموعة التبديلات الزوجية من الدرجة الثالثة بالرمز S_3^+ ولمجموعة التبديلات الفردية من الدرجة الثالثة بالرمز S_3^-

- **تمارين**:

1- لتكن $\alpha, \beta, \gamma \in S_6$ حيث:

$$\alpha = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2\end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5\end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6\end{pmatrix}.$$

(أ) اكتب كلا من α, β, γ بالتعبير الدائري.

(ب) احسب $\alpha \circ \beta,\ \alpha^2 \circ \beta,\ \alpha \circ \gamma \circ \alpha^{-1}$

2- حدد أي من التبديلتين الآتيتين فردية وأيها زوجية:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3\end{pmatrix}, (1\ \ 2\ \ 3) \circ (2\ \ 4\ \ 6) \circ (5\ \ 4\ \ 3\ \ 2).$$

3- تحقق من أن الثنائي $< S_3^+, \circ >$ يمثل زمرة إبدالية،بينما $< S_3^-, \circ >$ لا يمثل زمرة.

4- إذا كانت $X = \{I, (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4), (1\ \ 3)(2\ \ 4), (1\ \ 4\ \ 3\ \ 2)\} \subset S_4$

فتحقق من أن الثنائي $< X, \circ >$ يمثل زمرة إبدالية؟.

==

(2) الزمر الدائرة Cyclic groups:

لتوضيح مفهوم الزمرة الدائرة ندرس النظام $< A,\times >$

حيث $A=\{1,-1,i,-i\};i=\sqrt{-1}$ ، "$\times$" عملية الضرب العادية.

نكون جدول يمثل النظام كما يلي:

$\times$	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

نلاحظ من الجدول أن:

(1) كل صف أو عمود في الجدول يحتوي على جميع عناصر A

(2) لا يتكرر ظهور أي عنصر في أي صف أو عمود في الجدول.

(3) يوجد تماثل حول عناصر القطر الرئيسي في الجدول.

وعلى ذلك فإن النظام $< A,\times >$ يمثل زمرة إبدالية.

فإذا أخذنا قوى العنصر $i\in A$ فإننا نلاحظ أن:

$$i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1$$

وبذلك نكون قد حصلنا على جميع عناصر المجموعة A كقوى للعنصر i

يُقال في هذه الحالة أن الزمرة $< A,\times >$ مولدة بالعنصر i

أو أن العنصر i **مولد للزمرة** The Generator of a Group

ونلاحظ أن العنصر $-i\in A$ هو مولد آخر للزمرة حيث :

$$(-i)^1=-i,\ (-i)^2=-1,\ (-i)^3=i,\ (-i)^4=1$$

والعنصران $1,-1\in A$ لا يكونا مولدات للزمرة.

مثل هذه الزمرة $< A,\times >$ تُسمى زمرة دائرة مولداها $i,-i\in A$

تعريف: يُقال أن الزمرة G **زمرة دائرة** أو **زمرة دائرية** مولدة بالعنصر $a \in G$ إذا وإذا فقط كان:

$$\forall x \in G \; \exists n \in Z ; x = a^n .$$

(أو $x = na$ في حالة عملية الجمع).

ويُعبر عن الزمرة في هذه الحالة بدلالة مولدها بالرمز $G =< a >$

لذا الزمرة $< A, \times >$ يُعبر عنها هكذا $A =< i >$ أو $A =< -i >$

مثال(1): الزمرة $< \{1,-1\}, \times >$ زمرة دائرة مولدها الوحيد هو -1

مثال(2): النظام $< Z_2, \oplus_2 >$ زمرة دائرة مولدها العنصر 1

مثال(3): الزمرة $< \{1, \omega, \omega^2\}, \times >$ زمرة دائرة مولداها العنصران ω, ω^2 حيث $1, \omega, \omega^2$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.

مثال(4): النظام $< Z_3, \oplus_3 >$ زمرة دائرة مولداتها العناصر 1,2

مثال(5): إذا كانت $X = \{I, (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4\ 3\ 2)\}$ فإن النظام $< X, \circ >$ يكون زمرة دائرة مولداتها $(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4\ 3\ 2)$

مثال(6): النظام $< Z_7 - \{0\}, \otimes_7 >$ زمرة دائرة مولداتها العناصر 3,5

مثال(7): النظام $< Z, + >$ زمرة دائرة مولداتها العناصر $1, -1$

مثال(8): الزمرة $< X, \otimes_8 > ; X = \{1,3,5,7\} \subset Z_8$ ليست دائرية حيث ليس لها مولدات.

تمرين: تحقق من صحة الأمثلة السابقة؟.

- **تكوين وخصائص الزمرة الدائرة:**

لتكن G زمرة دائرة مولدة بالعنصر a أي أن $G = <a>$ ومن ثم تكون G على الصورة $G = \{..., a^{-2}, a^{-1}, a^0 = e, a^1, a^2, ...\}$ ويكون لدينا حالتان:

الحالة الأولى: إذا كانت جميع العناصر في الزمرة $G = <a>$ مختلفة فإن الزمرة تكون لانهائية infinite (أي عدد عناصرها غير محدود)، وفي هذه الحالة إذا كان للزمرة مولدات أخرى ولتكن a^m مثلاً فإنه يوجد عدد صحيح $r \in Z$ بحيث:

$$a^1 = (a^m)^r = a^{mr} \Rightarrow mr = 1 \Rightarrow m = 1 \wedge r = 1 \quad \vee \quad m = -1 \wedge r = -1$$

أي أنه إذا كان a مولد للزمرة اللانهائية فإن العنصر a^{-1} يكون مولد آخر لها فقط.

الحالة الثانية: إذا كانت العناصر في الزمرة $G = <a>$ ليست جميعها مختلفة فإن الزمرة تكون منتهية finite (أي عدد عناصرها محدود ويكون $a^n = a^0 = e$) وفي هذه الحالة إذا كان للزمرة مولدات أخرى فتكون على الصورة a^m حيث m عدد أولي بالنسبة لعدد عناصر الزمرة المحدود وليكن n مثلاً (أي لا يوجد بين m, n عامل مشترك سوى الواحد الصحيح) كما ستوضح النظرية التالية.

نظرية: لتكن $G = <a>$ وليكن $|G| = n$ فإن $G = <a^m> \Leftrightarrow (m, n) = 1$

البرهان:

أولاً: نفرض أن $(m, n) = 1$ (أي أن العامل المشترك الأعلى بين m, n هو 1)

وسنثبت أن $G = <a^m>$ كما يلي:

حيث إن العامل المشترك الأعلى بين m, n هو 1 فيمكن كتابة:

$$1 = \alpha m + \beta n \quad ; \alpha, \beta \in Z$$

$$\therefore a = a^1 = a^{\alpha m + \beta n} = a^{\alpha m} a^{\beta n} = (a^m)^\alpha (a^n)^\beta$$
$$= (a^m)^\alpha (e)^\beta = (a^m)^\alpha e = (a^m)^\alpha$$

ولأي عنصر في الزمرة G وليكن $x = a^r \in G$ حيث $r \in Z$ يكون:

$$x = a^r = [(a^m)^\alpha]^r = (a^m)^{\alpha r} = (a^m)^k \quad ; k = \alpha r \in Z$$

وإذاً يكون $G = <a^m>$

ثانيا: نفرض أن $G =< a^m >$ وسنثبت أن $(m,n)=1$ كما يلي:
لأي عنصر في الزمرة G وليكن $a \in G$ يمكن التعبير عنه بدلالة مولد الزمرة a^m كما يلي:

$$a = (a^m)^\alpha \quad ; \alpha \in Z$$
$$\therefore a^1 = a^{\alpha m} \Rightarrow a^{1-\alpha m} = a^0 = e = e^\beta = (a^n)^\beta = a^{\beta n}$$
$$\therefore 1 - \alpha m = \beta n \Rightarrow \alpha m + \beta n = 1$$
$$\therefore (m,n) = 1 \ .$$

من أولاً وثانياً تثبت النظرية.

مثال(8): لتكن $A = \{1 = \omega^8, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7\}$ مجموعة الجذور الثامنة للواحد الصحيح فإن $< A, \times >$ تكون زمرة دائرة مولدها العنصر ω وحيث إن عدد عناصر هذه الزمرة محدود وهو 8 فطبقا للنظرية السابقة لبحث المولدات الأخرى لهذه الزمرة نستبعد العناصر $\omega^2, \omega^4, \omega^6$ حيث إن بين قواها $\{2,4,6\}$ وبين عدد عناصر الزمرة 8 عامل مشترك خلاف الواحد الصحيح ، ومن ثم تكون المولدات الأخرى لهذه الزمرة هي $\omega^3, \omega^5, \omega^7$
أي أن $A =< \omega >=< \omega^3 >=< \omega^5 >=< \omega^7 >$

- **رتبة العنصر في الزمرة:**

تعريف: إذا كانت G زمرة فإنه يُقال أن **رتبة العنصر** $a \in G$ هي (أو تساوي) n (ويُكتب $|a|=n$) إذا كان n هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق $a^n = e$ حيث $e \in G$ هو العنصر المحايد للزمرة.
وإذا كان $a^n \neq e$ قيل أن العنصر a في الزمرة ليس له رتبة أو أن رتبته تساوي الصفر وبديهي أن رتبة العنصر المحايد في الزمرة هي الواحد الصحيح حيث $e^1=e$

مثال(1): الزمرة $< Z, + >$ زمرة إبدالية عنصرها المحايد هو 0 (رتبته1)
وأي عنصر آخر في Z خلاف 0 ليس له رتبة (أو أن رتبته هي 0) .

مثال(2): الزمرة $< S_3 , \circ >$ رتب عناصرها تكون كالتالي:

العنصر	I	(1 2 3)	(1 3 2)	(1 2)	(1 3)	(2 3)
الرتبة	1	3	3	2	2	2

(تحقق من ذلك؟).

مثال(3): الزمرة $< Z_3 , \oplus_3 >$ رتب عناصرها تكون كالتالي:

العنصر	0	1	2
الرتبة	1	3	3

(تحقق من ذلك؟).

من هذه الأمثلة يتضح أنه توجد بعض الزمر جميع عناصرها لها رتبة ، كما توجد بعض الزمر لبعض عناصرها رتب وليس للباقين من عناصرها رتب.

والنظرية التالية تحدد الحالة التي يكون فيها لعناصر الزمرة رتب.

نظرية: إذا كانت G زمرة عدد عناصرها محدود فإن جميع عناصرها لها رتب.

البرهان: نفرض أن $a \in G$ ونكون المجموعة:

$$X = \{a^0 = e, a^1, a^2, a^3, ...\} \subseteq G$$

وحيث إن عدد عناصر G محدود وليكن m فإن عناصر المجموعة الجزئية X لا يمكن أن تكون جميعها مختلفة وإلا كان عدد عناصرها لانهائي مما يناقض كونها مجموعة جزئية من مجموعة محدودة، فإذا كان $a^r = a^m$ حيث $m > r$ فإنه بضرب طرفي المتساوية $a^r = a^m$ في a^{-r} من ناحية اليمين نجد أن:

$$a^r a^{-r} = a^m a^{-r} \Rightarrow e = a^{m-r} = a^h \ ; h = m - r \in Z^+$$

أي أنه يوجد عدد صحيح موجب h بحيث $a^h = e$ يتبقى أن نتأكد أن هذا العدد h هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق $a^h = e$

لتكن مجموعة كل الأعداد الصحيحة الموجبة h_i التي تحقق العلاقة $a^{h_i} = e$ هي المجموعة:

$Y = \{h_i \in Z^+ : a^{h_i} = e\}$

ومن خصائص مجموعات الأعداد نعلم أن كل مجموعة عناصرها أعداد صحيحة موجبة لها حد أصغر وهو أصغر عدد صحيح موجب فيها ، وواضح أن $h_1 = 0$ أحد عناصر المجموعة Y يكون أصغر عدد يحقق العلاقة $a^{h_i} = e$

وإذاً رتبة العنصر a هي h_1 وعلى ذلك فإن لأي $a \in G$ يمكن إيجاد عدد صحيح موجب h يحقق العلاقة $a^h = e$

ومن ثم يكون لجميع عناصر الزمرة المحدودة رتب.

- **تمارين:**

1- ابحث رتب عناصر كل من الزمر:

(1) $< S_3^+, \circ >$.

(2) $< G, \times > \; ; \; G = \{1, -1, i, -i\} \quad ; \; i = \sqrt{-1}.$

(3) $< A, \times > \; ; \; A = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\} \; ; \; i^2 = -1.$

(4) $< X, \otimes_8 > \; ; \; X = \{1,3,5,7\} \subset Z_8.$

2- تحقق من أن $< A, \times > \; ; \; A = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$

يمثل زمرة دائرية ، وأوجد رتب عناصرها؟.

3- تحقق من أن النظام $< X,\otimes_{10} > \; ; \; X = \{2,4,6,8\} \subset Z_{10}$ يمثل زمرة دائرية ، وأوجد رتب عناصرها؟.

==

- **الزمرة الجزئية** Subgroup:

لنأخذ الزمرة $<G,\times>$ حيث $G=\{1,-1,i,-i\};i=\sqrt{-1}$ ، "$\times$" عملية الضرب العادية.

الممثلة بالجدول:

×	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

نلاحظ أن الجدول الجزئي بالركن الأعلى الأيسر وهو:

×	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

يمثل النظام $<\{1,-1\},\times>$ والذي بدوره يكون زمرة أيضاً ، وحيث إن $\{1,-1\}$ مجموعة جزئية من المجموعة $G=\{1,-1,i,-i\}$

فإنه في هذه الحالة نقول أن $<\{1,-1\},\times>$ زمرة جزئية من الزمرة $<G,\times>$

ونلاحظ أن ليس كل مجموعة جزئية من G مع العملية"$\times$" تكون زمرة جزئية من الزمرة $<G,\times>$. فمثلاً $<\{1,i\},\times>$ لا تمثل زمرة أصلاً وبالتالي لا تكون زمرة جزئية من الزمرة $<G,\times>$

تعريف: لتكن $<G,*>$ زمرة ، ولتكن $H\subseteq G$ فإذا كان $<H,*>$ زمرة أيضاً فإننا نقول أن H **زمرة جزئية** من G ويُرمز لذلك جبرياً بالرمز $H\leq G$

ملاحظة: لأي زمرة G توجد دائماً زمرتان جزئيتان تُسميان بالزمرتين غير الفعليتين أو الزمرتين الواضحتين trivial subgroups وهما G , $\{e\}$ وعلى ذلك

نقول أن H زمرة جزئية فعلية من الزمرة G إذا كانت $H \neq G$, $H \neq \{e\}$

مثال(1): الزمرة $< S_3^+, \circ >$ زمرة جزئية من الزمرة $< S_3, \circ >$ (تحقق من ذلك؟).

الإثبات:

$$S_3 = \{I, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\},$$
$$S_3^+ = \{I, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.$$

واضح أن $S_3^+ \subset S_3$

نكون الجدول الممثل للنظام $< S_3^+, \circ >$ كما يلي:

$\circ$	I	(1 2 3)	(1 3 2)
I	I	(1 2 3)	(1 3 2)
(1 2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)	I
(1 3 2)	(1 3 2)	I	(1 2 3)

من الجدول نلاحظ أن :

(1) كل صف أو عمود في الجدول يحتوي على جميع عناصر S_3^+ .

(2) لا يتكرر ظهور أي عنصر في أي صف أو عمود في الجدول.

وعلى ذلك فإن النظام $< S_3^+, \circ >$ يمثل زمرة، وبالتالي يكون $S_3^+ \leq S_3$

مثال(2): إذا كانت $a \in G$ فإن أي زمرة مولدة بالعنصر a تكون زمرة جزئية من G (أي أن $< a > \leq G$).

تمثيل الزمر الجزئية بالشكل العنقودي Lattice diagram:

لتكن G زمرة ، ولتكن H_1, H_2, H_3 زمر جزئية فعلية من الزمرة G ، ولتكن H_3 زمرة جزئية فعلية من كل من الزمرتين H_1, H_2 فيمكن تمثيل مجموعة الزمر الجزئية الفعلية H_1, H_2, H_3 بالإضافة إلى الزمرتين غير الفعليتين $\{e\}, G$ بالشكل العنقودي التالي:

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
H_1 \arrow[dr] \arrow[ddr] & & H_2 \arrow[dl] \arrow[ddl] \\
 & H_3 \arrow[d] & \\
 & \{e\} &
\end{tikzcd}$$

ويُفهم من الشكل العنقودي أن أي مجموعة (زمرة) تقع في صف من الصفوف للشكل تكون مجموعة جزئية (زمرة جزئية) من أي مجموعة (زمرة) تقع في صف أعلى منه.

مثال: اكتب جميع الزمر الجزئية من الزمرة S_3 وارسم شكلاً عنقوديا لها.

<u>الحل:</u>

المجموعات الجزئية الفعلية من مجموعة التبديلات S_3 والتي تمثل كل منها زمرة مع عملية تحصيل التبديلات "$\circ$" هي $S_3^+,\{I,(1\,2)\},\{I,(1\,3)\},\{I,(2\,3)\}$

وتوجد زمرتان جزئيتان غير فعليتان للزمرة S_3 هما $\{I\},S_3$ وعلى ذلك فإن جميع الزمر الجزئية من الزمرة S_3 تكون:

$$S_3,\{I\},S_3^+,\{I,(1\,2)\},\{I,(1\,3)\},\{I,(2\,3)\}$$

والشكل العنقودي الممثل لها يكون كالتالي:

$$\begin{tikzcd}
 & & S_3 \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drr] \arrow[dd] & & \\
S_3^+ \arrow[drr] & \{I,(1\,2)\} \arrow[dr] & & \{I,(1\,3)\} \arrow[dl] & \{I,(2\,3)\} \arrow[dll] \\
 & & \{I\} & &
\end{tikzcd}$$

<u>تمارين محلولة:</u>

1- إذا كانت $H_1=\{1,2,4,5,7,8\},\ H_2=\{1,4,7\},\ H_3=\{1,8\}$

تحقق من أن:

1. كلاً من $<H_1,\otimes_9>,<H_2,\otimes_9>,<H_3,\otimes_9>$ تكون زمرة.
2. كلاً من $<H_2,\otimes_9>,<H_3,\otimes_9>$ تكون زمرة جزئية من $<H_1,\otimes_9>$

الحل:

1. نكون الجداول الممثلة للأنظمة $< H_1,\otimes_9 >, < H_2,\otimes_9 >, < H_3,\otimes_9 >$ كما يلي:

الجدول الممثل للنظام $< H_1,\otimes_9 >$:

$\otimes_9$	1	2	4	5	7	8
1	1	2	4	5	7	8
2	2	4	8	1	5	7
4	4	8	7	2	1	5
5	5	1	2	7	8	4
7	7	5	1	8	4	2
8	8	7	5	4	2	1

والجدول الممثل للنظام $< H_2,\otimes_9 >$:

$\otimes_9$	1	4	7
1	1	4	7
4	4	7	1
7	7	1	4

والجدول الممثل للنظام $< H_3,\otimes_9 >$:

$\otimes_9$	1	8
1	1	8
8	8	1

من الجداول نلاحظ أن :

(1) كل صف أو عمود في الجدول يحتوي على جميع عناصر المجموعة الممثلة .

(2) لا يتكرر ظهور أي عنصر في أي صف أو عمود في الجدول.

وعلى ذلك فإن كلاً من $< H_1,\otimes_9 >, < H_2,\otimes_9 >, < H_3,\otimes_9 >$ تكون زمرة.

2. واضح أن $H_2 \subset H_1 , H_3 \subset H_1$ وأثبتنا أن $< H_2,\otimes_9 >, < H_3,\otimes_9 >$ كلاهما يكون زمرة .

فإذاً كلاً من $< H_2,\otimes_9 >, < H_3,\otimes_9 >$ تكون زمرة جزئية من $< H_1,\otimes_9 >$

2- اكتب جميع الزمر الجزئية للزمرة $A = \{1 = \omega^8, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7\}$ بدلالة مولداتها. ثم ارسم شكلاً عنقودياً لها.

الحل:

المجموعات الجزئية الفعلية من مجموعة الجذور الثامنة للواحد الصحيح والتي تمثل كل منها زمرة مع عملية الضرب هي $\{1,\omega^2,\omega^4,\omega^6\}, \{1,\omega^4\}$ وتوجد زمرتان جزئيتان غير فعليتان للزمرة A هما A ,$\{1\}$ وعلى ذلك فإن جميع الزمر الجزئية من الزمرة A تكون:

$$A \ , \{1\}, \{1,\omega^2,\omega^4,\omega^6\}, \{1,\omega^4\}$$

وببحث مولدات هذه الزمر الجزئية تكون كالتالي:

$$A = <\omega> = <\omega^3> = <\omega^5> = <\omega^7> ,$$
$$\{1\} = <1> ,$$
$$\{1,\omega^2,\omega^4,\omega^6\} = <\omega^2> = <\omega^6> ,$$
$$\{1,\omega^4\} = <\omega^4> .$$

والشكل العنقودي الممثل لها يكون كالتالي:

$$\begin{array}{l} A = <\omega> = <\omega^3> = <\omega^5> = <\omega^7> \\ \downarrow \\ \{1,\omega^2,\omega^4,\omega^6\} = <\omega^2> = <\omega^6> \\ \downarrow \\ \{1,\omega^4\} = <\omega^4> \\ \downarrow \\ \{1\} = <1> \end{array}$$

3- اكتب جميع الزمر الجزئية للزمرة S_3 بدلالة مولداتها. ثم ارسم شكلاً عنقوديا لها.

<u>الحل:</u>

المجموعات الجزئية الفعلية من مجموعة التبديلات S_3 والتي تمثل كل منها زمرة مع عملية تحصيل التبديلات "$\circ$" هي $S_3^+, \{I,(1\ 2)\}, \{I,(1\ 3)\}, \{I,(2\ 3)\}$

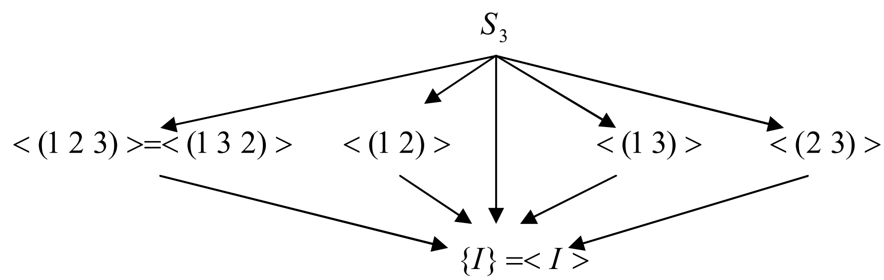
وتوجد زمرتان جزئيتان غير فعليتان للزمرة S_3 هما $\{I\}, S_3$ وعلى ذلك فإن جميع الزمر الجزئية من الزمرة S_3 تكون:

$$S_3, \{I\}, S_3^+, \{I,(1\ 2)\}, \{I,(1\ 3)\}, \{I,(2\ 3)\}.$$

وببحث مولدات هذه الزمر الجزئية تكون كالتالي:

$$\{I\} = < I >,$$
$$S_3^+ = < (1\ 2\ 3) > = < (1\ 3\ 2) >,$$
$$\{I,(1\ 2)\} = < (1\ 2) >,$$
$$\{I,(1\ 3)\} = < (1\ 3) >,$$
$$\{I,(2\ 3)\} = < (2\ 3) >.$$

والشكل العنقودي الممثل لها يكون كالتالي:



- **<u>خصائص الزمرة الجزئية:</u>**

(1) أي زمرة جزئية من زمرة إبدالية تكون إبدالية ، ولكن إذا كانت الزمرة الجزئية إبدالية فليس من الضروري أن تكون الزمرة الأصلية إبدالية.

(مثال: الزمرة S_3^+ زمرة إبدالية وهي كما نعلم زمرة جزئية من الزمرة S_3 الغير إبدالية).

(2) العنصر المحايد في أي زمرة جزئية يكون هو نفس العنصر المحايد في الزمرة الأصلية .

<u>ولإثبات ذلك على وجه العموم:</u>

نفرض أن $<H,*>$ زمرة جزئية من الزمرة $<G,*>$ وأن العنصر المحايد في الزمرة G هو e_1 وأن العنصر المحايد في الزمرة الجزئية H هو e_2 وعلى ذلك يكون:

$$a*e_1 = a \quad \forall a \in H \subseteq G,$$
$$a*e_2 = a \quad \forall a \in H \subseteq G$$
$$\therefore a*e_1 = a*e_2 \Rightarrow e_1 = e_2.$$

(3) معكوس أي عنصر في الزمرة الجزئية هو معكوسه في الزمرة الأصلية.

ولإثبات ذلك:

نفرض أن $<H,*>$ زمرة جزئية من الزمرة $<G,*>$ وأن معكوس العنصر $a \in H$ هو العنصر b ، وأن معكوس العنصر $a \in H \subseteq G$ في الزمرة G هو العنصر c وعلى ذلك يكون:

$$a*b = e\,,\, a*c = e \quad \forall a \in H \subseteq G, e \in H \subseteq G,$$
$$\therefore a*b = a*c \Rightarrow b = c.$$

نظرية(1): لتكن H مجموعة جزئية من G حيث $<G,*>$ زمرة فإن $<H,*>$ تكون زمرة جزئية من $<G,*>$ إذا وإذا فقط تحقق الشرطان:

(i) $a*b \in H \;\; \forall a,b \in H$,

(ii) $a^{-1} \in H \;\; \forall a \in H$.

البرهان:

أولاً: نفرض أن $<H,*>$ زمرة جزئية من $<G,*>$ وبالتالي تكون $<H,*>$ زمرة أي تحقق شروط الزمرة ، وإذاً يتحقق الشرطان (i),(ii) .

ثانياً: نفرض تحقق الشرطان (i),(ii) ، وسنثبت أن $<H,*>$ تكون زمرة جزئية من $<G,*>$ كما يلي:

(أ) من الشرط (i) نجد أن العملية "$*$" مغلقة على H

(ب) حيث إن جميع عناصر H تنتمي إلى G والعملية "$*$" دامجة على G لأن G زمرة فتكون العملية "$*$" دامجة على H

(ج) من الشرطين (i),(ii) نجد أن: $a, a^{-1} \in H \;\; , a*a^{-1} = e \in H$

أي يوجد عنصر محايد $e \in H$

(د) من الشرط (ii) لكل $a \in H$ يوجد معكوس $a^{-1} \in H$

وإذاً $< H,* >$ تحقق شروط الزمرة ومن المعطيات $H \subseteq G$

وعلى ذلك فإن $< H,* >$ تكون زمرة جزئية من $< G,* >$

نظرية(2): لتكن H مجموعة جزئية من G حيث $< G,* >$ زمرة فإن $< H,* >$ تكون زمرة جزئية من $< G,* >$ إذا وإذا فقط تحقق الشرط:

$$a * b^{-1} \in H \;\; \forall a,b \in H .$$

البرهان:

أولاً: نفرض أن $< H,* >$ زمرة جزئية من $< G,* >$ وبالتالي فإن:

$$a,b \in H \Rightarrow a^{-1},b^{-1} \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H .$$

ثانياً: نفرض أن $a * b^{-1} \in H \;\; \forall a,b \in H$ وسنثبت أن $< H,* >$ تكون زمرة جزئية من $< G,* >$:

(أ) لكل $a \in H$ يكون $a * a^{-1} \in H \Rightarrow e \in H$ أي أنه يوجد عنصر محايد.

(ب) لكل $a \in H$ يكون $e * a^{-1} \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$ أي أنه يوجد معكوس.

(ج) لكل $a,b \in H$ يكون $a,b^{-1} \in H \Rightarrow a * (b^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow a * b \in H$

أي أن العملية * مغلقة على H.

(د) حيث إن العملية * دامجة على G وأن $H \subseteq G$ فهي دامجة على H

وإذاً النظام $< H,* >$ يحقق شروط الزمرة ، ومن المعطيات $H \subseteq G$

وعلى ذلك فإن $< H,* >$ تكون زمرة جزئية من $< G,* >$

نظرية(3): ليكن H_1, H_2 زمرتين جزئيتين من الزمرة G

فإن $H_1 \cap H_2$ تكون زمرة جزئية من G

البرهان:

Let $a,b \in H_1 \cap H_2$

$\Rightarrow a,b \in H_1 \wedge a,b \in H_2$

$\Rightarrow a * b^{-1} \in H_1 \wedge a * b^{-1} \in H_2$ (من نظرية(2))

$\Rightarrow a * b^{-1} \in H_1 \cap H_2 .$

$\Rightarrow H_1 \cap H_2 \leq G$ (من نظرية(2)).

ملاحظة: إذا كانت H_1, H_2 زمرتين جزئيتين من الزمرة G فليس من الضرورة أن يكون $H_1 \cup H_2$ زمرة جزئية من G كما يتضح في المثال التالي:

مثال: $H_1 = \{I, (1\ 2)\}, H_2 = \{I, (1\ 3)\}$ زمرتين جزئيتين من الزمرة S_3 بينما $H_1 \cup H_2 = \{I, (1\ 2), (1\ 3)\}$ لا تكون زمرة (تحقق من ذلك؟) . ومن ثم لا تكون زمرة جزئية من الزمرة S_3

- **<u>المجموعات المرافقة للزمرة الجزئية Co-sets</u>:**

تعريف: لتكن $< H,* >$ زمرة جزئية من الزمرة $< G,* >$ وليكن $a \in G$ فإن المجموعتين: $aH = \{a * h : h \in H\}$, $Ha = \{h * a : h \in H\}$ تُسميان **المجموعة المرافقة** (أو المصاحبة أو المشاركة) **اليمينية** Right Co-set و**المجموعة المرافقة** (أو المصاحبة أو المشاركة) **اليسارية** Left Co-set للزمرة H بالنسبة للعنصر a على الترتيب0

مثال(1): لنأخذ الزمرة $< G,\times >$ حيث $G = \{1,-1,i,-i\}; i = \sqrt{-1}$ ، "$\times$" عملية الضرب العادية ، والزمرة الجزئية $< H,\times >$ حيث $H = \{1,-1\}$ من الزمرة $< G,\times >$ فإن المجموعات المرافقة اليمينية واليسارية للزمرة H بالنسبة للعنصر $i \in G$ تكون:

$$Hi = \{1 \times i, -1 \times i\} = \{i, -i\},$$
$$iH = \{i \times 1, i \times -1\} = \{i, -i\}.$$

مثال(2): المجموعات المرافقة اليمينية واليسارية للزمرة الجزئية S_3^+ (زمرة التبديلات الزوجية من الدرجة الثالثة) من الزمرة S_3 (زمرة التبديلات من الدرجة الثالثة) بالنسبة للعنصر $(1\ 2) \in S_3$ تكون:

$$S_3^+(1\ 2) = \{I \circ (1\ 2), (1\ 2\ 3) \circ (1\ 2), (1\ 3\ 2) \circ (1\ 2)\}$$
$$= \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}.$$
$$(1\ 2)S_3^+ = \{(1\ 2) \circ I, (1\ 2) \circ (1\ 2\ 3), (1\ 2) \circ (1\ 3\ 2)\}$$
$$= \{(1\ 2), (2\ 3), (1\ 3)\}.$$

نلاحظ أن $S_3^+(1\ 2) = (1\ 2)S_3^+ = S_3^-$

والمجموعات المرافقة اليمينية واليسارية للزمرة الجزئية S_3^+ (زمرة التبديلات الزوجية من الدرجة الثالثة) بالنسبة للعنصر $(1\ 2\ 3) \in S_3$ تكون:

$$\begin{aligned} S_3^+(1\ 2\ 3) &= \{I \circ (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 3) \circ (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2) \circ (1\ 2\ 3)\} \\ &= \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), I\}. \\ (1\ 2\ 3)S_3^+ &= \{(1\ 2\ 3) \circ I, (1\ 2\ 3) \circ (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 3) \circ (1\ 3\ 2)\} \\ &= \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), I\}. \end{aligned}$$

نلاحظ أن $S_3^+(1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3)S_3^+ = S_3^+$

تمرين: كون المجموعات المرافقة اليمينية واليسارية للزمرة الجزئية $H = \{I, (1\ 2)\}$ من الزمرة S_3 بالنسبة للعناصر $a = (1\ 3), b = (1\ 2)$ حيث $a, b \in S_3$

الحل:

$$\begin{aligned} Ha &= \{I \circ (1\ 3), (1\ 2) \circ (1\ 3)\} \\ &= \{(1\ 3), (1\ 3\ 2)\}. \\ aH &= \{(1\ 3) \circ I, (1\ 3) \circ (1\ 2)\} \\ &= \{(1\ 3), (1\ 2\ 3)\}. \\ Hb &= \{I \circ (1\ 2), (1\ 2) \circ (1\ 2)\} \\ &= \{(1\ 2), I\}. \\ bH &= \{(1\ 2) \circ I, (1\ 2) \circ (1\ 2)\} \\ &= \{(1\ 2), I\}. \end{aligned}$$

نلاحظ أن $Ha \neq aH$, $Hb = bH = H$

مما سبق نستنتج الملاحظات الآتية:

ملاحظات: إذا كانت $a \in G$, $H \leq G$ فإن:

(1) $aH = Ha$ عندما تكون G إبدالية .

(2) من الممكن ألا يكون Ha أو aH زمرة جزئية من G

- **خصائص المجموعات المرافقة:**

لتكن H زمرة جزئية من الزمرة G فإن الخصائص التالية تتحقق:

(1) $Ha = H \Leftrightarrow a \in H$, $aH = H \Leftrightarrow a \in H$.

الإثبات:

أولاً: نفرض أن $a \in H$ وسنثبت أن $Ha = H$:

$h_1 \in Ha \Rightarrow h_1 = ha \in H \ \ \forall h, a \in H$

$\therefore Ha \subseteq H \qquad \text{(i)}$

$h \in H \Rightarrow h = he = h(a^{-1}a) = (ha^{-1})a = h_1 a \in Ha \quad ; h_1 = ha^{-1}$

$i.e \ \ h \in H \Rightarrow h \in Ha.$

$\therefore H \subseteq Ha \qquad \text{(ii)}$

من (i),(ii) ينتج أن $Ha = H$

ثانياً: نفرض أن $Ha = H$ وسنثبت أن $a \in H$ كما يلي:

من تعريف المجموعة المرافقة اليمينية يكون:

$Ha = \{ha : h \in H\} = H.$

ويحدث هذا فقط إذا كان $a \in H$

من أولاً وثانياً نستنتج أن $Ha = H \Leftrightarrow a \in H$

وبالمثل يمكن إثبات أن $aH = H \Leftrightarrow a \in H$

(2) $Ha = Hb \Leftrightarrow ba^{-1} \in H \ \ , \ aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$.

الإثبات:

$$\begin{aligned} Ha = Hb &\Leftrightarrow (Ha)a^{-1} = (Hb)a^{-1} \\ &\Leftrightarrow H(aa^{-1}) = H(ba^{-1}) \\ &\Leftrightarrow He = H(ba^{-1}) \\ &\Leftrightarrow H = H(ba^{-1}) \\ &\Leftrightarrow ba^{-1} \in H. \quad (\textit{from } (1)) \end{aligned}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$.

(3) $Ha \cap Hb \neq \phi \Leftrightarrow Ha = Hb \ \ , \ aH \cap bH \neq \phi \Leftrightarrow aH = bH$.

(أي أن أي مجموعتين مختلفتين من المجموعات المرافقة تكونا منفصلتين).

الإثبات:

$$\begin{aligned} c \in Ha \cap Hb &\Leftrightarrow c \in Ha \wedge c \in Hb \\ &\Leftrightarrow c = h_1 a \wedge c = h_2 b \; ; h_1, h_2 \in H \\ &\Leftrightarrow h_1 a = h_2 b \\ &\Leftrightarrow ba^{-1} = h_2^{-1} h_1 \in H \\ &\Leftrightarrow Ha = Hb. \qquad (\mathit{from}\ (2)) \end{aligned}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن $aH \cap bH \neq \phi \Leftrightarrow aH = bH$

(4) $\exists\, 1-1$ *corrosponding* $f : Ha \to Hb \;\; ; f(ha) = hb \;\; \forall\, ha \in Ha$,

$\exists\, 1-1$ *corrosponding* $g : aH \to bH \;\; ; g(ah) = bh \;\; \forall\, ah \in aH$.

(أي يوجد تقابل(راسم تناظر أحادي) بين أي مجموعتين مرافقتين يمينيتين أو يساريتين للزمرة الجزئية H من الزمرة G وبعبارة أخرى أي عدد العناصر في كل منهما متساوي).

الإثبات:

لإثبات أن الراسم $f : Ha \to Hb$ تناظر أحادي نثبت أنه أحادي وفوقي:

$$\begin{aligned} h_1 a, h_2 a \in Ha \; , f(h_1 a) = f(h_2 a) & \\ &\Leftrightarrow h_1 b = h_2 b \\ &\Leftrightarrow h_1 = h_2 \\ &\Leftrightarrow h_1 a = h_2 a. \end{aligned}$$

وإذاً f يكون أحادي.

$$x \in f(Ha) \Leftrightarrow x = hb \Leftrightarrow x \in Hb$$
$$\therefore f(Ha) = Hb.$$

وإذاً f يكون فوقي.

وعلى ذلك فإن الراسم $f : Ha \to Hb$ تناظر أحادي .

وبالمثل يمكن إثبات أن الراسم $g : aH \to bH$ تناظر أحادي .

(5) $\bigcup\limits_{a \in G} Ha = G \;\; , \;\; \bigcup\limits_{a \in G} aH = G$ **.**

(أي اتحاد جميع المجموعات المرافقة اليمينية أو اليسارية للزمرة الجزئية H يساوى الزمرة الأصلية G).

الإثبات:

$$x \in \bigcup_{a \in G} Ha \Leftrightarrow x = ha \in Ha \;\; ; a \in G, H \leq G \Leftrightarrow x \in G$$

$$\therefore \bigcup_{a \in G} Ha = G.$$

وبالمثل يمكن إثبات أن $\bigcup_{a \in G} aH = G$

تمرين: تحقق من صحة الخصائص السابقة على المجموعات المرافقة اليسارية0

- **نظرية لاجرانج للزمر**:

لتكن H زمرة جزئية من الزمرة G ، وليكن عدد عناصر G محدود(n مثلاً)، وعدد عناصر H محدود (m مثلاً) فإن n تقبل القسمة على m

البرهان: لتكن $Ha_1, Ha_2, ..., Ha_l$ هي كل المجموعات المرافقة اليمينية المختلفة للزمرة H حيث إن أحد العناصر $a_1, a_2, ..., a_l$ لابد أن يكون هو العنصر المحايد $e \in G$ وليكن $a_1 = e$ ومن الخاصيتين (5),(3) للمجموعات المرافقة نستنتج أن المجموعة $\{He, Ha_2, ..., Ha_l\}$ تكون تجزيء للمجموعة G وعلى ذلك يكون:

$$G = He \cup Ha_2 \cup ... \cup Ha_l.$$

$$\therefore |G| = |He| + |Ha_2| + ... + |Ha_l|.$$

وحيث إن عدد عناصر أي مجموعة مرافقة للزمرة الجزئية H يكون مساوياً لعدد عناصر H وعلى ذلك يكون:

$$|G| = |H| + |H| + ... + |H|. \quad (l - times)$$

$$\therefore n = lm.$$

وإذاً n تقبل القسمة على m

مثال: الزمرة $< H_1, \otimes_9 >$ حيث $H_1 = \{1,2,4,5,7,8\}$ عدد عناصرها $|H_1| = 6$ ،

والزمرة $< H_2, \otimes_9 >$ حيث $H_2 = \{1,4,7\}$ عدد عناصرها $|H_2| = 3$ ،

والزمرة $< H_3, \otimes_9 >$ حيث $H_3 = \{1,8\}$ عدد عناصرها $|H_3| = 2$ ،

وواضح أن H_2, H_3 زمر جزئية من H_1 وأن 6 تقبل القسمة على كل من 2,3

ملاحظة: عكس نظرية لاجرانج غير صحيح في الحالة العامة. أي إذا كان عدد عناصر الزمرة G محدود (n مثلاً) ، وكان هذا العدد يقبل القسمة على العدد m فليس بالضرورة أن نجد زمرة جزئية من الزمرة G عدد عناصرها m

مثال: الزمرة $< S_4^+ , \circ >$ حيث S_4^+ مجموعة التبديلات الزوجية من الدرجة الرابعة:

$$S_4^+ = \{I, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}.$$

واضح أن $|S_4^+| = 12$ ولكن لا توجد زمرة جزئية منها عدد عناصرها يساوي 6

■ **الزمر الجزئية القياسية(الناظمة) Normal Sub-groups**:

تعريف: لتكن H زمرة جزئية من الزمرة G فإذا كان $aH = Ha$ لكل $a \in G$ فإن H تُسمى **زمرة جزئية قياسية (أو زمرة جزئية ناظمة)** على الزمرة G

ويُرمز لذلك بالرمز $H \lhd G$

مثال(1): الزمرة S_3^+ تكون زمرة جزئية قياسية على الزمرة S_3 وذلك لأن:

$$IS_3^+ = S_3^+ I \ ,$$
$$(1\ 2\ 3)S_3^+ = S_3^+(1\ 2\ 3) \ ,$$
$$(1\ 3\ 2)S_3^+ = S_3^+(1\ 3\ 2) \ ,$$
$$(1\ 2)S_3^+ = S_3^+(1\ 2) \ ,$$
$$(1\ 3)S_3^+ = S_3^+(1\ 3)$$
$$(2\ 3)S_3^+ = S_3^+(2\ 3) \ .$$

أي أن $aS_3^+ = S_3^+ a \ \forall a \in S_3$ (تحقق من ذلك؟).

مثال(2): الزمرة $H = \{I, (1\ 2)\}$ ليست زمرة جزئية قياسية على الزمرة S_3

وذلك لأن $(1\ 3)H \neq H(1\ 3)$ (تحقق من ذلك؟).

مثال(3): إذا كانت $< G, \times >$ زمرة حيث $G = \{1, -1, i, -i\}$ وكانت $H = \{1, -1\}$ زمرة جزئية من G فتحقق من أن $H \lhd G$

الحل:

$$1H = \{1\times 1, 1\times -1\} = \{1\times 1, -1\times 1\} = H1 \ ,$$
$$(-1)H = \{-1\times 1, -1\times -1\} = \{1\times -1, -1\times -1\} = H(-1) \ ,$$
$$iH = \{i\times 1, i\times -1\} = \{1\times i, -1\times i\} = Hi \ ,$$
$$(-i)H = \{-i\times 1, -i\times -1\} = \{1\times -i, -1\times -i\} = H(-i).$$

أي أن لكل $a \in G$ يتحقق $aH = Ha$ وإذاً $H \lhd G$

نظرية(1): $H \lhd G \Leftrightarrow aHa^{-1} = H \quad \forall a \in G$ (أي أن الزمرة الجزئية H تكون زمرة قياسية على الزمرة G إذا وإذا فقط كان $aHa^{-1} = H$ لكل $a \in G$).

البرهان: أولاً: نفرض أن $aHa^{-1} = H$ لكل $a \in G$ وسنثبت أن $H \lhd G$:

$$h \in H = aHa^{-1} \Rightarrow h = aha^{-1} \in H$$
$$\Rightarrow ah = ha$$
$$\Rightarrow aH = Ha$$
$$\therefore H \lhd G.$$

ثانياً: نفرض أن $H \lhd G$ وسنثبت أن $aHa^{-1} = H$ لكل $a \in G$:
حيث إن H زمرة قياسية على الزمرة G فيكون $aH = Ha$ لكل $a \in G$
وهذا يؤدي إلى أن $aHa^{-1} = H$ لكل $a \in G$
من أولاً وثانياً تثبت النظرية.

- **الزمرة البسيطة** Simple group:

تعريف: إذا كانت الزمرة G لا تحتوي على أي زمر جزئية قياسية سوى الزمرتين غير الفعليتين $\{e\}, G$ فإنها تُسمى **زمرة بسيطة**.

مثال: كلا من الزمرتين $<\{1,-1\},\times>$, $<\{I,(1\ 2)\},\circ>$ زمرة بسيطة.

وكلا من الزمرتين $<Z_4,\oplus_4>$, $<Z,+>$ زمرة ليست بسيطة (تحقق من ذلك؟)

ملاحظة: إذا كانت G زمرة إبدالية فإن أي زمرة جزئية منها تكون زمرة قياسية عليها، والعكس ليس صحيحا في الحالة العامة، وذلك لأنه توجد زمرة جزئية قياسية من زمرة غير إبدالية كما في المثال التالي:

مثال: زمرة التبديلات الزوجية من الدرجة الثالثة S_3^+ زمرة جزئية قياسية على الزمرة S_3 الغير إبدالية.

نظرية(2): إذا كانت G زمرة وكانت H زمرة جزئية قياسية على G وكانت $T = \{Ha : a \in G\}$ هي مجموعة كل المجموعات المرافقة اليمينية للزمرة الجزئية H وعرفنا العملية " $*$" على T بالعلاقة:

$$Ha * Hb = Hab \quad \forall a, b \in G$$

فإن النظام $<T,*>$ يكون زمرة عدد عناصرها $|T| = |G|/|H|$

البرهان:

حيث إن T مجموعة كل المجموعات المرافقة اليمينية للزمرة الجزئية القياسية H على الزمرة G فإن $aH = Ha$ لأي $a \in G$ ومن نظرية لاجرانج يكون $|G| = |T||H|$ أي أن $|T| = |G|/|H|$

ولإثبات أن $< T,* >$ زمرة نتبع الآتي:

(أ) حيث إن لأي $a,b \in G$ يمكن كتابة $a = h_1a_1 \, , b = h_2b_1$

حيث $a_1, b_1 \in G \, , h_1, h_2 \in H \subseteq G$ فيكون لأي $Ha, Hb \in T$:

$$\begin{aligned} Ha * Hb = Hab &= H(h_1a_1)(h_2b_1) \\ &= Hh_1(a_1(h_2b_1)) \\ &= H(a_1(h_2b_1)) \ \ ; H \lhd G \\ &= H((a_1h_2)b_1) \\ &= H((h_2a_1)b_1) \ ; H \lhd G \\ &= Hh_2(a_1b_1) \\ &= Ha_1b_1 \ \ \ ; H \lhd G \\ &= Hc \in T \ \ ; c = a_1b_1 \in G. \end{aligned}$$

وإذا تكون العملية "$*$" مغلقة على T

(ب) العملية "$*$" دامجة على T حيث لأي $Ha, Hb, Hc \in T$ نجد أن:

$$\begin{aligned} (Ha * Hb) * Hc = (Hab) * Hc &= H(ab)c \\ &= Ha(bc) = Ha * Hbc = Ha * (Hb * Hc). \end{aligned}$$

(ج) العنصر $He \in T$ يمثل العنصر المحايد بالنسبة للعملية "$*$" حيث لأي $Ha \in T$ نجد أن:

$$Ha * He = Hae = Ha \, ,$$
$$He * Ha = Hea = Ha \, .$$

(د) لأي عنصر $Ha \in T$ يوجد معكوس بالنسبة للعملية "$*$" هو $Ha^{-1} \in T$ بحيث:

$$Ha * Ha^{-1} = Haa^{-1} = He \, ,$$
$$Ha^{-1} * Ha = Ha^{-1}a = He \, .$$

وعلى ذلك فإن النظام $< T,* >$ يحقق شروط الزمرة .

وتُسمى هذه الزمرة **الزمرة العاملة** Factor group

(أو زمرة التقسيم Quotient group) ويُرمز لها بالرمز G/H

- **<u>التشاكل والتشابه النمطي بين الزمر</u>** <u>Isomorphism between groups:</u>

مفهوم التشاكل والتشابه النمطي بين الأنظمة الجبرية من أشهر المفاهيم الأساسية في الرياضيات الحديثة ، ويُستخدم مفهوم التشاكل والتشابه في دراسة نظام جبري معقد نوعاً ما عن طريق نظام جبري آخر أسهل منه يشابهه ، ولذلك سنبحث فيما يلي تشاكل وتشابه الزمر.

تعريف(1): إذا كانت $< G_1,* >, < G_2,\# >$ زمرتين. فإن الراسم $f : G_1 \to G_2$ يُسمى **راسم حافظ (أو تشاكل)** Homomorphism بين الزمرتين G_1, G_2 إذا كان يحافظ على العملية في كل من الزمرتين أي إذا تحقق الشرط:

$$f(a*b) = f(a)\# f(b) \;\; \forall\, a,b \in G_1 .$$

- إذا كان $G_1 = G_2$ فإن الراسم f يُسمى تشاكل داخلي Endomorphism
- وإذا كان f أحادي فإن f يُسمى تشاكل أحادي Monomorphism
- وإذا كان f فوقي فإن f يُسمى تشاكل فوقي Epiomorphism

مثال(1): نعلم أن $< Z,+ >$ حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة، "+" عملية الجمع العادية تكون زمرة ابدالية، والمجموعة $A = \{1,-1,i,-i\}$ حيث $i = \sqrt{-1}$ تكون زمرة مع عملية الضرب العادية.

فإذا عرفنا الراسم $f : Z \to A$ كما يلي:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & if\;\; n\;\; even, \\ -1 & if\;\; n\;\; odd. \end{cases} \quad \forall n \in Z.$$

فإن f يكون راسم حافظ.

<u>الإثبات</u>: نفرض $m,n \in Z$ فتوجد ثلاث حالات:

<u>أولاً</u>: إذا كان كلا من m,n أعداد زوجية فإن مجموعهما $m+n$ يكون عدد زوجي

$$\therefore f(m) = 1, f(n) = 1,$$
$$f(m+n) = 1 = 1\times 1 = f(m)\times f(n).$$

ثانياً: إذا كان كلا من m,n أعداد فردية فإن مجموعهما $m+n$ يكون عدد زوجي

$$\therefore f(m)=-1, f(n)=-1,$$
$$f(m+n)=1=-1\times -1=f(m)\times f(n).$$

ثالثاً: إذا كان أحد العددين m,n عدد زوجي، والآخر عدد فردي فإن مجموعهما $m+n$ يكون عدد فردي،

$$\therefore f(m)=1, f(n)=-1 \vee f(m)=-1, f(n)=1\ ,$$
$$f(m+n)=-1=1\times -1=f(m)\times f(n),$$
$$f(m+n)=-1=-1\times 1=f(m)\times f(n).$$

مما سبق نجد أنه في كل الحالات $f(m+n)=f(m)\times f(n)$

ومن ثم فإن الراسم f يكون راسم حافظ.

ومن المثال السابق نلاحظ أن:

(1) $f(0)=1$

(2) إذا عرفنا الراسم $f:Z\to A$ كما يلي: $\forall n\in Z$ $f(n)=\begin{cases}-1 & if\ n\ even, \\ 1 & if\ n\ odd.\end{cases}$

فإن f لا يكون راسم حافظ حيث $2,4\in Z$ ومن ثم يكون:

$$f(2)=-1, f(4)=-1,$$
$$f(2+4)=f(6)=-1,$$
$$f(2)\times f(4)=-1\times -1=1$$
$$\therefore f(2+4)\neq f(2)\times f(4).$$

مثال(2): الراسم $f:<S_3,\circ>\to<Z_6,\oplus_6>$ المعرف كما يلي:

$$f(I)=f((1\ 2\ 3))=f((1\ 3\ \ 2))=0,$$
$$f((1\ 2))=f((1\ 3))=f((2\ 3))=3.$$

يكون راسم حافظ (تحقق من ذلك؟).

ومن المثال السابق نلاحظ أن:

(1) $f(I)=0$

(2) $f(x^{-1})=[f(x)]^{-1}\ \forall x\in S_3$ حيث x^{-1} هو معكوس x بالنسبة للعملية "$\circ$" (تحقق من ذلك؟).

(3) الزمرة $< S_3, \circ >$ زمرة ليست ابدالية بينما الزمرة $< Z_6, \oplus_6 >$ زمرة ابدالية.

ومن الأمثلة السابقة نستنتج النظرية التالية:

نظرية(1): إذا كان f راسم حافظ بين الزمرتين $< G_1, * >, < G_2, \# >$ وكان e_1, e_2 هما العنصران المحايدان في الزمرتين G_1, G_2 على الترتيب فإن:

(1) $f(e_1) = e_2$.

(2) $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1} \quad \forall x \in G_1$.

الإثبات:

(1) $let \ x \in G_1 \ , f(x) \in G_2$.

$\therefore f(x) = f(x * e_1) \Rightarrow f(x) \# e_2 = f(x) \# f(e_1) \Rightarrow e_2 = f(e_1)$.

(2) $\because f(e_1) = e_2$

$$\begin{aligned}
\therefore f(x * x^{-1}) = e_2 &\Rightarrow f(x) \# f(x^{-1}) = e_2 \\
&\Rightarrow [f(x)]^{-1} \# [f(x) \# f(x^{-1})] = [f(x)]^{-1} \# e_2 \\
&\Rightarrow [[f(x)]^{-1} \# f(x)] \# f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1} \\
&\Rightarrow e_2 \# f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1} \\
&\Rightarrow f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}.
\end{aligned}$$

- **نواة ومدى الراسم الحافظ:**

The Kernel and Image of a Homomorphism:

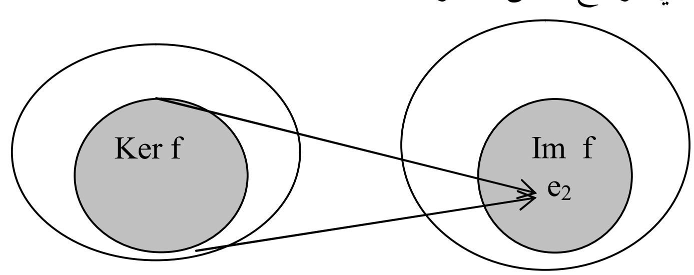
تعريف(2): إذا كان $f : G_1 \to G_2$ راسم حافظ بين الزمرتين G_1, G_2 فإن نواة f تُعرف كما يلي:

$\ker f = \{x : x \in G_1, f(x) = e_2\} \subset G_1$.

كذلك مدى f يُعرف كما يلي:

$\operatorname{Im} f = \{y : y \in G_2, \exists x \in G_1 ; f(x) = y\} \subset G_2$.

والشكل التالي يوضح هذين المفهومين:



G_1 f G_2

مثال(3): نواة ومدى الراسم الحافظ $f : Z \to A$ المعرف في مثال(1) تكونان:

$\ker f = \{n : n \in Z , n \;\; even\} = \{0,\pm 2,\pm 4,...\} \subset Z,$

$\operatorname{Im} f = \{1,-1\} \subset A.$

(تحقق من ذلك؟).

مثال(4): الراسم $f :< S_3,\circ > \to < Z_4,\oplus_4 >$ والمعرف كما يلي:

$f(I) = f((1\ 2\ 3)) = f((1\ 3\ \ 2)) = 0,$

$f((1\ 2)) = f((1\ 3)) = f((2\ 3)) = 2.$

هو راسم حافظ بين الزمرتين S_3, Z_4 (تحقق من ذلك؟) ويكون:

$\ker f = \{I,(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2)\} \subset S_3,$

$\operatorname{Im} f = \{0,2\} \subset Z_4.$

مثال(5):إذا كانت $A = \{a,b\}$ فإن $< P(A),\Delta >$ تكون زمرة ابدالية حيث Δ الفرق المتماثل ، وإذا كانت $B = \{1,-1,i,-i\}$ حيث $i = \sqrt{-1}$

فإن $< B,\times >$ تكون زمرة ابدالية أيضاً.

نعرف الراسم $f : P(A) \to B$ كما يلي:

$f(X) = 1 \;\; \forall \; X \in P(A).$

فإن f يكون راسم حافظ (تحقق من ذلك؟) ويكون $\ker f = P(A)$, $\operatorname{Im} f = \{1\}$

نظرية(2): إذا كان f راسم حافظ بين الزمرتين $< G_1,* >, < G_2,\# >$

وكان أن e_1,e_2 هما العنصران المحايدان في الزمرتين G_1,G_2 على الترتيب فإن:

(1) $\ker f \le G_1$ (أي أن $\ker f$ تكون زمرة جزئية من الزمرة G_1).

(2) $\operatorname{Im} f \le G_2$ (أي أن $\operatorname{Im} f$ تكون زمرة جزئية من الزمرة G_2).

الإثبات:

(1) لكي تكون $\ker f$ زمرة جزئية من الزمرة G_1 يجب أن يتحقق الشرط:

$x_1 * x_2^{-1} \in \ker f \;\; \forall x_1, x_2 \in \ker f.$

$let\ x_1, x_2 \in \ker f \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) = e_2\ ,$

$\because f(x_2^{-1}) = [f(x_2)]^{-1} = [e_2]^{-1} = e_2\ ,$

$\therefore f(x_1 * x_2^{-1}) = f(x_1) \# f(x_2^{-1}) = e_2 \# e_2 = e_2 \Rightarrow x_1 * x_2^{-1} \in \ker f.$

$\therefore \ker f \le G_1.$

(2) ولكي تكون $\operatorname{Im} f$ زمرة جزئية من الزمرة G_2 يجب أن يتحقق الشرط:

$y_1 \# y_2^{-1} \in \operatorname{Im} f \quad \forall\, y_1, y_2 \in \operatorname{Im} f.$

$let\ y_1, y_2 \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in G_1\ ; f(x_1) = y_1\ ,\ f(x_2) = y_2\ ,$

$\therefore y_1 \# y_2^{-1} = f(x_1) \# [f(x_2)]^{-1} = f(x_1) \# f(x_2^{-1}) = f(x_1 * x_2^{-1}) \in \operatorname{Im} f.$

$\therefore \operatorname{Im} f \le G_2.$

نظرية(3): إذا كان f راسم حافظ بين الزمرتين $< G_1, * >, < G_2, \# >$

وكان أن e_1, e_2 هما العنصران المحايدان في الزمرتين G_1, G_2 على الترتيب فإن:

الراسم f يكون أحادي إذا وإذا فقط كان $\ker f = \{e_1\}$

الإثبات:

أولاً: نفرض أن f أحادي، وسنثبت أن $\ker f = \{e_1\}$ كما يلي:

$$\begin{aligned} x \in \ker f &\Rightarrow f(x) = e_2\ ,\ f(e_1) = e_2 \\ &\Rightarrow f(x) = f(e_1) \\ &\Rightarrow x = e_1. \end{aligned}$$

وإذاً تكون $\ker f = \{e_1\}$

ثانياً: نفرض أن $\ker f = \{e_1\}$ وسنثبت أن f راسم أحادي كما يلي:

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in G_1\ ,\ f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow f(x_1) \# [f(x_2)]^{-1} = f(x_2) \# [f(x_2)]^{-1} \\ &\Rightarrow f(x_1) \# f(x_2^{-1}) = e_2 \\ &\Rightarrow f(x_1 * x_2^{-1}) = e_2 \\ &\Rightarrow x_1 * x_2^{-1} \in \ker f = \{e_1\} \\ &\Rightarrow x_1 * x_2^{-1} = e_1 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

وإذاً f راسم أحادي .

تعريف(3): إذا كانت $<G_1,*>,<G_2,\#>$ زمرتين فإن الراسم الحافظ $f:G_1\to G_2$ يُسمى **تماثل (أو تشابه نمطي)** Isomorphism بين الزمرتين G_1,G_2 إذا كان f تناظر أحادي (أحادي وفوقي)، وفي هذه الحالة يُقال أن الزمرتين G_1,G_2 متماثلتان (أو متشابهتان نمطياً) Isomorphic

ويُرمز لذلك جبرياً بالرمز $G_1\cong G_2$

مثال(6): الزمرتين $<Z,+>,<E,+>$ متشابهتان نمطيا حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة، E مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية ، "+" عملية الجمع العادية.

الإثبات:

أولاً: نعرف راسم $f:Z\to E$ بالعلاقة $f(x)=2x \ \forall x\in Z$

ثانياً: نثبت أن هذا الراسم يكون راسم حافظ كما يلي:

$$\begin{aligned}
&x_1,x_2\in Z\\
&\therefore f(x_1+x_2)=2(x_1+x_2)\\
&\qquad\qquad\quad =2x_1+2x_2\\
&\qquad\qquad\quad =f(x_1)+f(x_2).
\end{aligned}$$

ثالثاً: نثبت أن الراسم f تناظر أحادي (أحادي وفوقي) كما يلي:

(1) $x_1,x_2\in Z,\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$.

وإذاً f يكون راسم أحادي.

(2) $y\in E \quad ,y=f(x)\Rightarrow y=2x\Rightarrow x=\dfrac{y}{2}\in Z$.

وإذاً f يكون راسم فوقي.

يتضح من أولاً وثانياً وثالثاً أن f تشابه نمطي بين الزمرتين $<Z,+>,<E,+>$

أي أن $Z\cong E$

تمرين محلول: إذا كانت $A=\{a:a=3^n\ ,n\in Z\}$ فتحقق من أن الزمرة $<A,\times>$ تشابه نمطياً الزمرة $<Z,+>$

الحل:

نعرف الراسم $f : Z \to A$ بالعلاقة $f(n) = 3^n \quad \forall n \in Z$

ونثبت أن f راسم حافظ وتناظر أحادي كما يلي:

$$(1)\ m,n \in Z\ ,\ f(m+n) = 3^{m+n} = 3^m \times 3^n = f(m) \times f(n).$$

$$(2)\ m,n \in Z\ ,\ f(m) = f(n) \Rightarrow 3^m = 3^n \Rightarrow m = n.$$

$$(3)\ \forall 3^n \in A\ \ \exists n \in Z\ ; 3^n = f(n).$$

وعلى ذلك فإن الراسم f راسم حافظ وتناظر أحادي .

ومن ثم يكون $A \cong Z$.

ملاحظة: لبحث التشاكل والتشابه النمطي بين زمرتين عدد عناصركل منهما محدود: نكون الجدولين الممثلين لكل منهما فإذا كان الجدولان الممثلان للزمرتين متشابهين تماماً (أي أن تركيبهما متشابه تماماً) بحيث يمكن اعتبار أحدهما ناتج من الأخر أو أن كلاً منهما تعبير مختلف لتركيب واحد.

فإنه في هذه الحالة نقول أن الزمرتين متشابهتان نمطيا.

مثال(7): ابحث تشاكل وتشابه الزمرتين: $< S_3^+, \circ >, < Z_3, \oplus_3 >$

الحل: $S_3^+ = \{I, (1\,2\,3), (1\,3\,2)\},\ Z_3 = \{0,1,2\}$

نكون الجدولين الممثلين للزمرتين كما يلي:

جدول الزمرة $< S_3^+, \circ >$:

$\circ$	I	(1 2 3)	(1 3 2)
I	I	(1 2 3)	(1 3 2)
(1 2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)	I
(1 3 2)	(1 3 2)	I	(1 2 3)

وجدول الزمرة $< Z_3, \oplus_3 >$:

$\oplus_3$	0	1	2
0	0	1	2

1	1	2	0
2	2	0	1

ونلاحظ أنه إذا عرفنا الراسم $f : S_3^+ \to Z_3$ بالعلاقة:

$$f(I) = 0 \ , \ f((1\ 2\ 3)) = 1 \ , \ f((1\ 3\ 2)) = 2.$$

فيكون هذا الراسم حافظ ويكون تناظر أحادي.

كما نلاحظ أن:

إذا استبدلنا في الجدول الأول العنصر I بالعنصر0 و العنصر (3 2 1) بالعنصر1 والعنصر (2 3 1) بالعنصر 2 فإننا نحصل مباشرة على الجدول الثاني.

ولذلك يمكن تكوين جدول واحد يشمل الجدولين السابقين كما يلي:

$\circ$ / $\oplus_3$	I / 0	(1 2 3) / 1	(1 3 2) / 2
I / 0	I / 0	(1 2 3) / 1	(1 3 2) / 2
(1 2 3) / 1	(1 2 3) / 1	(1 3 2) / 2	I / 0
(1 3 2) / 2	(1 3 2) / 2	I / 0	(1 2 3) / 1

ونلاحظ من هذا الجدول أن:

(1) العنصر المحايد للزمرة الأولى وهو I يجاور العنصر المحايد للزمرة الثانية وهو 0 .

(2) العنصر الثاني في الزمرة الأولى وهو (3 2 1) يجاور العنصر الثاني في الزمرة الثانية وهو 1 .

(3) العنصر الثالث في الزمرة الأولى وهو (2 3 1) يجاور العنصر الثالث في الزمرة الثانية وهو 2 .

أي أن العناصر المتناظرة في الزمرتين متجاورة في خانات الجدول.

ومن ثم يكون $S_3^+ \cong Z_3$

- **ملاحظات على التشاكل بين الزمر:**

عند بحث تشاكل أو تشابه زمرتين يجب أولاً التأكد مما يلي:

(1) إذا كانت إحدى الزمرتين ابدالية فلابد أن تكون الأخرى ابدالية.

(2) إذا كانت إحدى الزمرتين ليست ابدالية فلابد أن تكون الأخرى ليست ابدالية.

(3) إذا كانت إحدى الزمرتين دائرية فلابد أن تكون الأخرى دائرية، وفي هذه الحالة يجب أن يكون مولد إحداهما هو صورة لمولد الأخرى، ومن ثم يكون للزمرتين الدائرتين المتشاكلتين نفس العدد من المولدات.

(4) أي زمرة دائرية منتهية رتبتها n تماثل الزمرة $< Z_n, \oplus_n >$

وأي زمرة دائرية غير منتهية تماثل الزمرة $< Z, + >$.

تمارين:

(1) حدد أي من الرواسم الآتية يكون تشاكل داخلي على زمرة الأعداد الصحيحة $< Z, + >$ وإذا كان الراسم تشاكل عين نواة ومدى هذا الراسم.

(1) $f(n) = n + 1.$

(2) $f(n) = 2n.$

(3) $f(n) = 1.$

(2) ليكن f راسم من زمرة الأعداد المركبة $< C, \times >$ إلى زمرة الأعداد الحقيقية $< R, \times >$ معرف كما يلي:

$f(a+ib) = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$.

فتحقق من أن f يكون راسم حافظ غير أحادي وغير شامل.

(3) ليكن $f :< R,+ > \to < R^{+},\times >$ راسم معرف كما يلي:

$f(x) = e^{x} \ \ \forall x \in R$.

فتحقق من أن f يكون تشابه نمطي.

(4) ليكن f راسم من الزمرة $< X,\oplus >$ إلى الزمرة $< Y,\otimes >$ معرف كما يلي:

$f(n) = -n \ \ \forall n \in X$.

حيث:

$x \oplus y = x + y + xy. \ \forall x, y \in X = R - \{-1\}$,
$a \otimes b = a + b - ab. \ \forall a, b \in Y = R - \{1\}$.
R the set of all real numbers.

فتحقق من أن $X \cong Y$

(5) ليكن $X = Z_5 - \{0\}, Y = \{1, i, -i, -1\}$ فإن كلا من $< X,\otimes_5 >, < Y,\times >$ يكون زمرة دائرية (تحقق من ذلك؟) وتحقق من أن $X \cong Y$

==