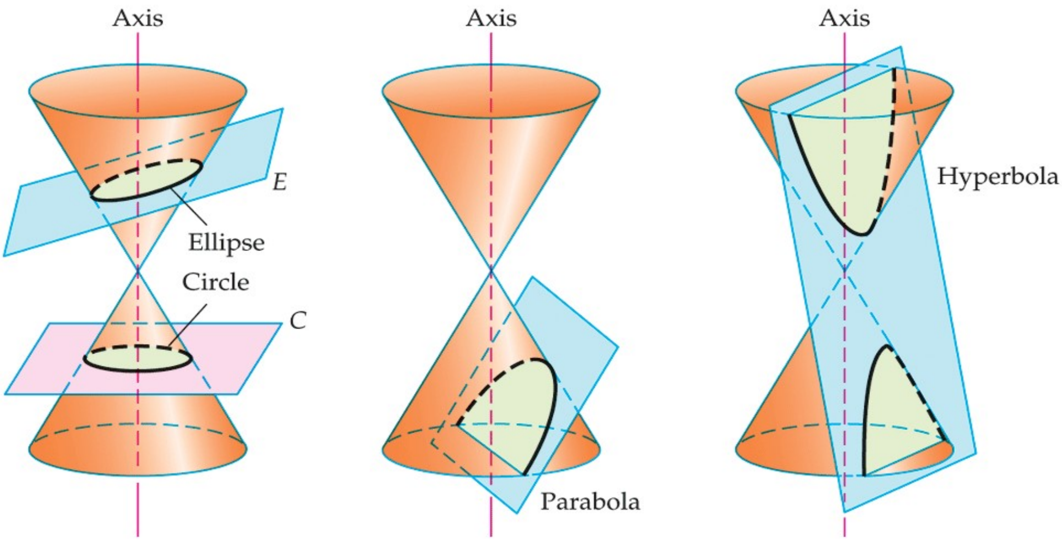
محاضـــــــــــــــرات في

الهندسة التحليلية (1)



لطلاب الفرقة الأولي بكلية التربية

إعداد

الدكتور / محمد السيد أحمد العاطون

مدرس الرياضيات البحتة بقسم الرياضيات - كلية العلوم بقنا

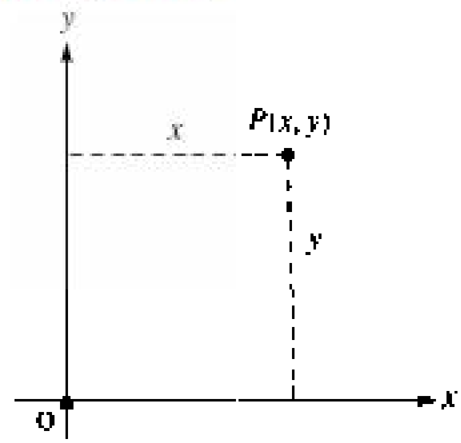
العام الجامعي: 2023–2024

الباب السابع

نُظم الإحداثيات في المستوى

أولاً: نظام الإحداثيات الكارتيزيه

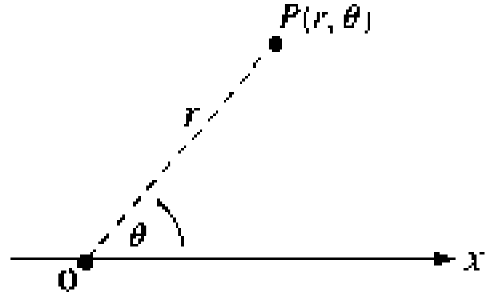
من نقطة ثابتة o في المستوى تُسمى نقطة الأصل نرسم مستقيمين متعامدين oy, ox يُسميان محاور الإحداثيات .فإذا كانت P نقطة ما في المستوى فإن P تتحدد تحديداً تاماً بواسطة كميتين عدديتين (x,y) تُسميان إحداثيات النقطة في المستوى، حيث x تمثل البعد العمودي للنقطة P عن محور oy ، وتمثل y البعد العمودي للنقطة P عن محور ox ، كما بالشكل المقابل:



ثانياً: نظام الإحداثيات القطبية

نظام الإحداثيات القطبية هو نظام أحداثي ثنائي الإبعاد يحدد إحداثيات أي نقطه P في المستوي تحديدا تاما من خلال المسافة r بين النقطة P ونقطه ثابتة في المستوي o والزاوية بين r واتجاه ثابت في المستوي.

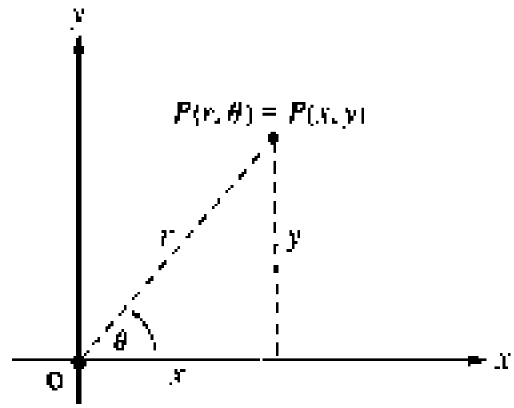
لتكن o نقطة ثابتة في المستوي. من هذه النقطة الثابتة نرسم مستقيم ثابت أفقي ينطبق على المحور ox ، كما بالشكل المقابل:



فإذا كانت P نقطة ما في المستوى فإن P تتعين تماماً إذا علمنا المسافة oP (أي بُعد P عن o)، وإذا علمنا أيضاً الزاوية θ التي يصنعها المستقيم oP مع المحور ox. تُسمى النقطة الثابتة o القطب والمستقيم الثابت ox الخط الابتدائي (القطبي).

العلاقة بين الإحداثيات القطبية و الكارتيزية

لتكن P نقطة في المستوى إحداثياتها القطبية (r,θ) وإحداثياتها الكارتيزية (x,y)، كما بالشكل المقابل:



ومن الشكل المقابل يتضح أن:

$$x = r\cos\theta \qquad (1), \qquad y = r\sin\theta \qquad (2)$$

هاتين العلاقتين تعبران عن x, y بدلالة r,θ.

وبتربيع العلاقتين (١)، (٢) وجمعهما نحصل على:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (3)$$

وبقسمة العلاقة (١) على العلاقة (٢) نحصل على:

$$\frac{y}{x} = \tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (4)$$

وهاتين العلاقتين (٣)، (٤) تعبران عن r,θ بدلالة x, y.

أمثله محـــــــــــلوله

مثال(١): حول المعادلة $x^2 + y^2 + 3x - 4y = 18$ إلى الصورة القطبية.

الحـــــــــل

بالتعويض عن $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ r^2 = x^2 + y^2$ في المعادلة المعطاة ينتج أن:

$$r^2 + 3r\cos\theta - -4r\sin\theta = 18$$

وهي تمثل معادلة دائرة في الإحداثيات القطبية.

مثال(٢): حول المعادلة القطبية $r = 2a\cos\theta$ إلي الصورة الكارتيزيه.

الحـــــــــــــــل

بطرب طرفي المعادلة المعطاة في r نجد أن: $r^2 = 2a\,r\cos\theta$ بالتعويض عن $x = r\cos\theta$ ، $r^2 = x^2 + y^2$ نحصل علي: $x^2 + y^2 = 2a\,x \Rightarrow x^2 + y^2 - -2a\,x = 0 \Rightarrow (x-a)^2 + y^2 = a^2$ وذلك هي الصورة الكارتيزيه للمعادلة المعطاة وهي تمثل دائرة مركزها $(a,0)$ النقطة ونصف قطرها a .

مثال(٣): حول المعادلة القطبية $r = a\sec\theta$ إلي الصورة الكارتيزيه.

الحـــــــــــــــل

$$\because r = a\sec\theta \Rightarrow r = \frac{a}{\cos\theta} \Rightarrow r\cos\theta = a$$

وبالتعويض عن $x = r\cos\theta$ نجد أن الصورة الكارتيزيه المناظرة للمعادلة القطبية المعطاة تأخذ الصورة $x = a$ ، وهي معادله خط مستقيم يوازي محور oy .

مثال(٤): حول المعادلة $r = \dfrac{2}{1+\cos\theta}$ إلى الصورة الكارتيزية.

الحـــــــــــــــل

$$r = \frac{2}{1+\cos\theta} \Rightarrow r(1+\cos\theta) = 2 \Rightarrow r + r\cos\theta = 2$$

وبالتعويض عن $x = r\cos\theta\ ,\ r = \sqrt{x^2 + y^2}$ نجد أن:

$$r + r\cos\theta = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = (x-2)^2$$

$$\therefore y^2 = -4(x-1)$$

وهي معادله قطع مكافئ سوف يدرس بالتفصيل لاحقاً.

مثال(٥): حول المعادلة $r = \dfrac{6}{2-\sin\theta}$ إلى الصورة الكارتيزية.

الحـــــــــــــــــل

$$\because r=\frac{6}{2-\sin\theta}\Rightarrow r(2-\sin\theta)=6\Rightarrow 2r-r\sin\theta=6$$

وبالتعويض عن $y=r\sin\theta \quad , \quad r=\sqrt{x^2+y^2}$ **نجد أن:**

$$2r-r\sin=6\Rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}-y=6\Rightarrow 4(x^2+y^2)=(6+y)^2$$

$$\therefore 4x^2+4y^2=y^2+12y+36\Rightarrow 4x^2+3y^2-12y-36=0$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها علي الصورة:

$$4x^2+3(y^2-4y)-36=0\Rightarrow 4x^2+3\left[(y-2)^2-4\right]-36$$

ومنها نحصل علي: $4x^2+3(y-2)^2=48$ وبالتالي **نجد أن الصورة الكارتيزيه للمعادلة المعطاة تصبح** بالصورة: $\frac{x^2}{12}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

وهي معادله قطع ناقص سوف يدرس بالتفصيل لاحقاً.

تمرين: حول المعادلات الآتية إلى الصورة الكارتيزية :

١) $r=\frac{6}{2-\cos\theta}$ ، ٢) $r=\frac{6}{2+\cos\theta}$ ، ٣) $r=\frac{6}{2+\sin\theta}$.

تمارين (٧)

١) حول المعادلات الآتية إلى الصورة القطبية:

$$(i)\ y^2 = -4(x-1),\ (ii)\ x^2 + y^2 = a^2,\ (iii)\ \frac{x^2}{12} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1 .$$

٢) حول المعادلات الآتية إلى الصورة الكارتيزية:

$$(i)\ r^2 = 9,\quad (ii)\ r = a\cos\theta,\quad (iii)\ r = \frac{6}{2-\sin\theta},\quad (iv)\ \frac{5}{r} = 1+\cos\theta .$$

الباب الثامن

التحويلات الهندسية واختزال معادلة الدرجة الثانية

العادلة العامة من الدرجة الثانية في متغيرين

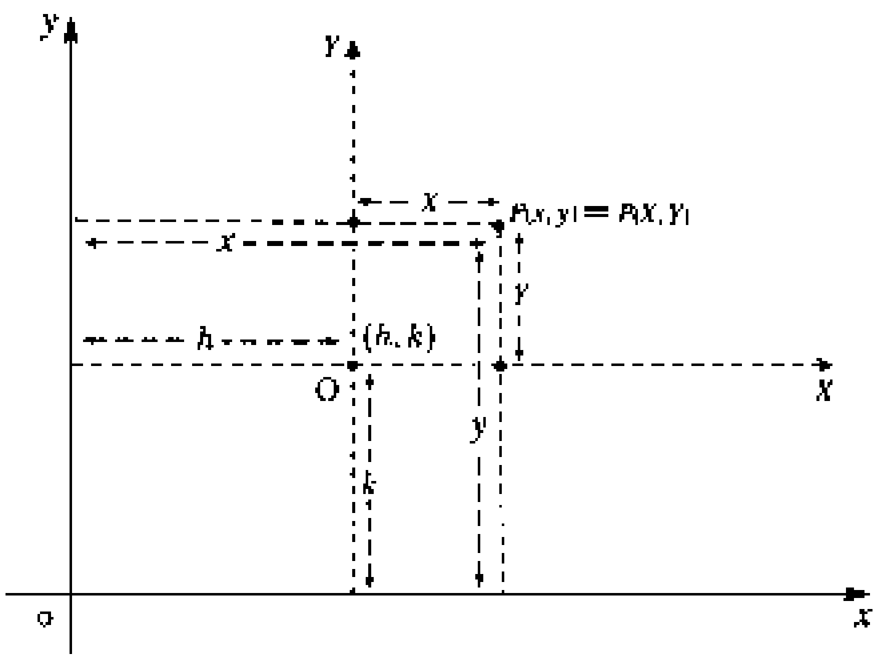
المعادلة التي علي الصورة: $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ تسمي بمعادلة الدرجة الثانية في متغيرين x ، y. وهذه المعادلة تمثل معادلة منحني ناتج من حركة نقطة في المستوي.

تغيير محاور الإحداثيات في المستوى

في بعض المواقف الهندسية يكون من المناسب السعي إلي تغير وضع محاور الإحداثيات. ويكون الغرض من ذلك هو وضع معادلات المنحنيات الممثلة بمعادلة الدرجة الثانية في أبسط صورة لها حتى نتمكن من دراسة خصائصها ومعرفة نوعها بسهوله مقارنتاً بصورتها الأصلية. وفيما يلي سندرس طريقتين لتغيير المحاور.

أولاً : نقل نقطة الأصل (نقل محاور الإحداثيات موازية لنفسها)

اذا كانت (x,y) هي إحداثيات أي نقطة P في المستوى، ونُقلت نقطة الأصل $o(0,0)$ إلى نقطة أخرى ولتكن $O(h,k)$ مع الإبقاء على اتجاه المحاور موازيا للمحاور الأصلية، وكانت إحداثيات النقطة P بالنسبة للمحاور الجديدة هي (X,Y) ، فإنه من الشكل المقابل:



يتضح أن معادلات التحويل بين الإحداثيات الجديدة والإحداثيات الأصلية يمكن كتابتها بالصورة:

$$x = X + h,\ y = Y + k.$$

حذف حدود الدرجة الأولي من معادلة الدرجة الثانية في متغيرين

نظرية(١): إحداثيات النقطة (x_1, y_1) التي يجب نقل محاور الإحداثيات أليها لحذف حدود الدرجة الأولي من معادلة الدرجة الثانية $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ يمكن الحصول عليها من حل المعادلتين: $ax_1 + hy_1 + g = 0,\quad hx_1 + by_1 + f = 0$.

البرهان: عندما تُنقل نقطة الأصل $(0,0)$ إلى النقطة (x_1, y_1) فإن معادلات بين الإحداثيات الأصلية x, y والإحداثيات الجديدة X, Y تكون بالصورة:

$$x = X + x_1, \quad y = Y + y_1 \qquad (1)$$

وبالتعويض من معادلات التحويل (١) في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$f(X,Y) = a(X + x_1)^2 + 2h(X + x_1)(Y + y_1) + b(Y + y_1)^2 + 2g(X + x_1) + 2f(Y + y_1) + c = 0$$

وبالفك نجد أن هذه المعادلة تصبح بالصورة:

$$f(X,Y) = aX^2 + 2hXY + bY^2 + 2(ax_1 + hy_1 + g)X + 2(hx_1 + by_1 + f)Y + C = 0 \qquad (2)$$

حيث أن C يعطي من العلاقة:

$$C = ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

ومن هذه المعادلة نجد أن:

١) معامل X هو $2(ax_1 + hy_1 + g)$

٢) معامل Y هو $2(hx_1 + by_1 + f)$

ولكي تصبح هذه المعادلة خاليه من حدود الدرجة الأولي يجب إن يكون معاملات حدود الدرجة الأولي مساوية للصفر. وبوضع معامل $X = 0$، معامل $Y = 0$ نجد أن:

$$ax_1 + hy_1 + g = 0, \quad hx_1 + by_1 + f = 0$$

وهما معادلتان في مجهولين x_1, y_1 وبحلهما جبرياً معاً نحصل علي إحداثيات النقطة التي يجب نقل

محاور الإحداثيات إليها لكي تصبح المعادلة المعطاة خاليه من حدود الدرجة الأولي. وبنقل نقط الأصل في هذه الحالة إلي النقطة (x_1, y_1) نجد أن معادلة الدرجة الثانية تصبح بالصورة:

$$aX^2 + 2hXY + bY^2 + C = 0$$

حيث أن:

$$C = ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c.$$

ملحوظة (١): من خلال برهان نظرية (١) يلاحظ أنة عند نقل نقطه الأصل فإن المعادلة الناتجة والمعادلة الأصلية يكون لهما نفس معاملات حدود الدرجة وبهذا يكون نقل محاور الإحداثيات إلي نقطه ما لا يغير من قيم معاملات حدود الدرجة الثانية في معادلة الدرجة الثانية ولكن فقط يغير معاملات حدود الدرجة الأولي والحد المطلق.

مثال (١): بنقل المحاور إلي نقطة مناسبة حول المعادلة $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 22x - 26y + 29 = 0$ إلي أخري خالية من حدود الدرجة الأولي.

الحـــــــــــــــل

بفرض أن (x_1, y_1) هي النقطة التي يجب نقل محاور الإحداثيات إليها لكي تصبح المعادلة المعطاة خالية من حدود الدرجة الأولي وبالتالي فإن معادلات التحويل بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الحديدة تكون بالصورة:

$$x = X + x_1,\ y = Y + y_1.$$

وتصبح المعادلة الأصلية بعد التعويض عن قيم y, x بالصورة:

$$5(X + x_1)^2 - 6(X + x_1)(Y + y_1) + 5(Y + y_1)^2 + 22(X + x_1) - 26(Y + y_1) + 29 = 0 \qquad (1)$$

وهذه المعادلة يمكن أعاده كتابتها علي الصورة

$$5X^2 - 6XY + 5Y^2 + 2(5x_1 - 6y_1 + 22)X + 2(-3x_1 + 5y_1 - 13)Y + C = 0 \qquad (2)$$

حيث أن:

$$C = 5x_1^2 - 6hx_1y_1 + 5y_1^2 + 22x_1 - 26y_1 + 29$$

من هذه المعادلة نجد أن:

➢ معامل X هو $2(5x_1-6y_1+22)$

➢ معامل Y هو $2(-3x_1+5y_1-13)$

ولكي تصبح المعادلة المعطاة خالية من حدود الدرجة الأولي يجب إن يكون معامل $X=0$ ، معامل $Y=0$. بوضع معامل $X=0$ ، معامل $Y=0$ نحصل علي المعادلتين:

$$5x_1-3y_1+11=0,\quad -3x_1+5y_1-13=0$$

وبحل المعادلتين جبرياً نجد أن $(x_1,y_1)=(-1,2)$ هي النقطة التي يجب نقل نقطة الأصل أليها لحذف حدود الدرجة الأولي من المعادلة المعطاة. وبنقل نقطه الأصل إلي النقطة $(x_1,y_1)=(-1,2)$ فان معادلات التحويل بين الإحداثيات تصبح بالصورة: $x=X-1\ ,\ y=Y+2$ وتصبح المعادلة الأصلية بعد التعويض عن قيم x ، y بالصورة:

$$5X^2-6XY+5Y^2-8=0 \qquad (3)$$

ملحوظة (٢): إذا كانت المعادلة المعطاة خالية من الحد xy فأنة يمكن تحويلها إلي معادلة أخري خالية من حدود الدرجة الأولي (أو في ابسط صورة ممكنة) بأتباع طريقة إكمال المربع .والأمثلة التالي توضح ذلك.

مثال (٢): باستخدام نقل المحاور حول المعادلة $x^2-4y^2+2x+8y-7=0$ إلي أخري خالية من حدود الدرجة الأولي .

الحـــــــــــــــل

نضع المعادلة المعطاة علي الصورة الآتية:

$$x^2-4y^2+2x+8y-7=0 \Rightarrow (x^2+2x)-4(y^2-2y)-7=0$$
$$\Rightarrow (x+1)^2-1-4(y-1)^2+4-7=0$$
$$\Rightarrow (x+1)^2-4(y-1)^2=4 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{1}=1.$$

وبنقل محاور الإحداثيات إلي النقطة $(-1,1)$ نجد أن: $x=X-1,\ Y=y+1$ أي أن:

$$X=x+1,\ \ Y=y-1$$

وبالتالي نجد أن المعادلة المعطاة تصبح بالصورة : $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{1}=1$.

مثال (٣): باستخدام نقل محاور الإحداثيات ضع المعادلة $y = 2x^2 + 4x + 3$ في ابسط صورة ممكنة :

الحـــــــــــــــــل

نضع المعادلة المعطاة على الصورة الآتية :

$$y = 2x^2 + 4x + 3 \Rightarrow y - 3 = 2x^2 + 4x \Rightarrow y - 3 = 2(x+1)^2 - 2$$

$$\Rightarrow y - 1 = 2(x+1)^2 \Rightarrow (x+1)^2 = \frac{1}{2}(y-1).$$

وبنقل محاور الإحداثيات إلي النقطة $(-1,1)$ فنجد أن: $x = X - 1,\ Y = y + 1$ أي أن :

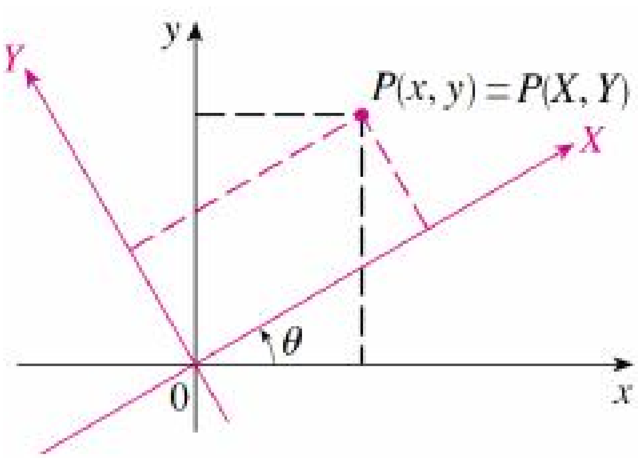
$$X = x + 1,\ Y = y - 1$$

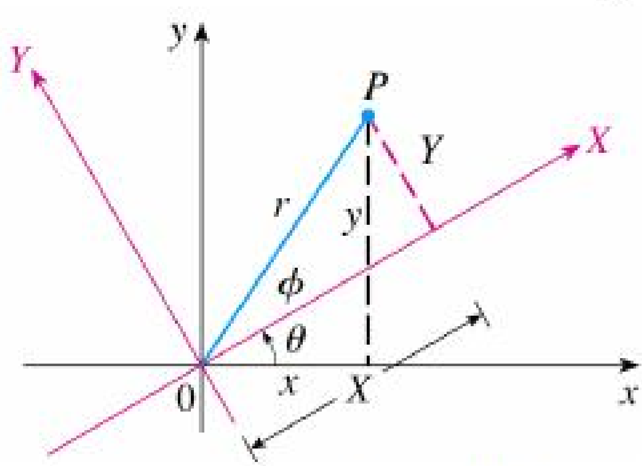
وبالتالي نجد أن المعادلة المعطاة تصبح بالصورة: $X^2 = \frac{1}{2}Y$.

ثانياً : دوران محاور الإحداثيات

نعتبر المحاور ox, oy أديرت بزاوية θ في اتجاه موجب مع الإبقاء على موضع نقطة الأصل o ،نفرض أن المحاور الجديدة هي oX, oY على الترتيب، وإذا كانت (x,y) ، (X,Y) هي إحداثيات النقطة

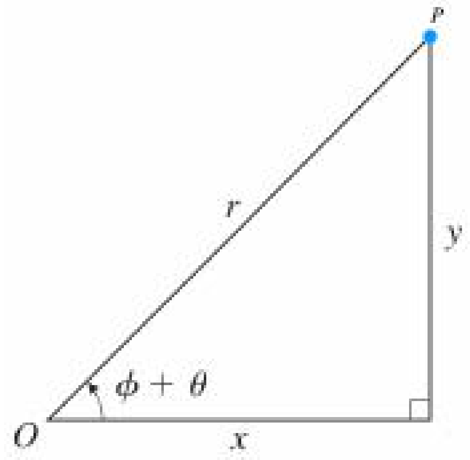
P بالنسبة للمحاور الأصلية ox, oy ،وبالنسبة للمحاور الجديدة oX, oY علي الترتيب، كما بالشكل المقابل:

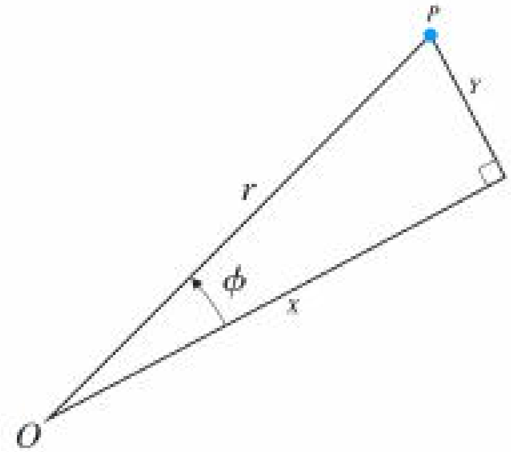




ومن الشكل المقابل نجد أن:

$$x = r\cos(\theta + \phi) = r(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) = (r\cos\phi)\cos\theta - (r\sin\phi)\sin\theta$$
$$= X\cos\theta - Y\sin\theta$$





وبالمثل نجد أن:

$$y = r\sin(\theta+\phi) = r(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) = (r\cos\phi)\sin\theta + (r\sin\phi)\cos\theta$$
$$= X\sin\theta + Y\cos\theta$$

أي أن معادلات التحويل التي علي الصورة:

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y &= X\sin\theta + Y\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

تعطي الإحداثيات الأصلية (x,y) بدلاله الإحداثيات الجديدة (X,Y). وبحل معادلات التحويل (١) بالنسبة إلي X ، Y نحصل علي معادلات التحويل الآتية:

$$\left.\begin{aligned} X &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ Y &= -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

وهذه المعادلات هي التي تعين الإحداثيات الجديدة X ، Y بدلالة الإحداثيات الأصلية x ، y وذلك في حالة دوران محاور الإحداثيات بزاوية θ حول نقطه الأصل.

ملحوظة (٣): معادلات التحويل السابقة بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة في حالة دوران محاور الإحداثيات بزاوية θ حول نقطة الأصل يمكن تذكرها من خلال الجدول التالي:

	X	Y
x	$\cos\theta$	$-\sin\theta$
y	$\sin\theta$	$\cos\theta$

حذف الحد المشتمل علي xy من معادلة الدرجة الثانية في متغيرين

نظريه(٢): يمكن حذف الحد xy من المعادلة $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ بدوران محاور الإحداثيات زاوية مناسبة θ لتعين قيمتها من العلاقة : $\tan 2\theta = \dfrac{2h}{a-b}$.

البرهان: إذا دارت محاور الإحداثيات بزاوية θ فإن معادلات التحويل بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة تكون بالصورة:

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta,\quad y = X\sin\theta + Y\cos\theta$$

وبالتعويض من معادلات التحويل السابقة في المعادلة الأصلية نجد أن:

$$a(X\cos\theta - Y\sin\theta)^2 + 2h(X\cos\theta - Y\sin\theta)(X\sin\theta + Y\cos\theta)$$
$$+b(X\sin\theta + Y\cos\theta)^2 + 2g(X\cos\theta - Y\sin\theta) + 2f(X\sin\theta + Y\cos\theta) + c = 0$$

ومعامل XY في هذه المعادلة هو:

$$-a(2\sin\theta\cos\theta) + 2h(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + b(2\sin\theta\cos\theta) \Rightarrow 2h\cos 2\theta + (b-a)\sin 2\theta$$

لكي تكون المعادلة المعطاة خاليه من الحد XY يجب أن يكون

$$2h\cos 2\theta + (b-a)\sin 2\theta = 0 \Rightarrow 2h\cos 2\theta = (a-b)\sin 2\theta$$

ومنها نجد أن الزاوية θ تحقق العلاقة : $\tan 2\theta = \dfrac{2h}{a-b}$.

ملحوظة (٤): واضح من برهان النظرية السابقة أن دوران محاور الإحداثيات يؤدي إلي تغيير جميع معاملات حدود معادلة الدرجة الثانية علي عكس نقل محاور الإحداثيات والذي يودي إلي تغيير معاملات حدود الدرجة الأولي والحد المطلق فقط

ملحوظة (٥): إذا كانت $a=b$ في معادلة الدرجة الثانية فإن الزاوية المناسبة التي يجب أن تُدور بها محاور الإحداثيات لحذف الحد المشتمل علي الحد xy من معادلة الدرجة الثانية هي الزاوية $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

مثال (٤): بدوران محاور الإحداثيات زاوية مناسبة ضع المعادلة $8x^2+12xy+17y^2=20$ في ابسط صورة ممكنة.

الحــــــــــــــــل

المعادلة المعطاة خالية من حدود الدرجة الأولي ولكي تصبح في ابسط صورة ممكنة لابد من تحويلها إلي معادلة أخري خالية من الحد المشتمل علي xy. ولكي تتحول المعادلة المعطاة إلي معادلة أخري خالية من الحد xy فإنه يجب تدوير محاور الإحداثيات زاوية مناسبة θ تتعين من العلاقة (نظريه ٢):

$$\tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}$$

ومن المعادلة المعطاة نجد أن $2h = 12, a = 8, b = 17$. وبذلك تكون:

$$\tan 2\theta = \frac{12}{8-17} = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = -\frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$2\tan^2\theta - 3\tan\theta - 2 = 0 \Rightarrow (2\tan\theta + 1)(\tan\theta - 2) = 0$$

وبالتالي نجد أن: $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ ، $\tan\theta = 2$ والتي كلاً منها تحقق المعادلة (١). وباختيار $\tan\theta = 2$ (الزاوية الحادة) نجد أن: $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

وإذا دارت محاور الإحداثيات زاوية θ فإن معادلات التحويل بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة تكون بالصورة:

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta, \quad y = X\sin\theta + Y\cos\theta.$$

وبالتعويض عن قيمه كل من $\sin\theta, \cos\theta$ نجد أن معادلات التحويل تصبح بالصورة:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(X - 2Y), \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y).$$

وبالتعويض من معادلات التحويل السابقة في المعادلة الأصلية نجد أن:

$$\frac{8}{5}(X-2Y)^2 + \frac{12}{5}(X-2Y)(2X+Y) + \frac{17}{5}(2X+Y)^2 = 20 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{8}{5} + \frac{24}{5} + \frac{68}{5}\right]X^2 + \left[-\frac{32}{5} + \frac{12}{5} - \frac{48}{5} + \frac{68}{5}\right]XY + \left[\frac{32}{5} - \frac{24}{5} + \frac{17}{5}\right]Y^2 = 20 \Rightarrow$$

وبالاختصار نجد أن:

$$\frac{100}{5}X^2 + \frac{25}{5}Y^2 = 20 \Rightarrow 20X^2 + 5Y^2 = 20 \Rightarrow \frac{X^2}{1} + \frac{Y^2}{4} = 1$$

وهي معادله قطع ناقص في الصورة القياسية بالنسبة لمحاور الإحداثيات الجديدة.

ملحوظة (٦): عمليه نقل ودوران محاور الإحداثيات يمكن أن تم بالتتابع أي أنة يمكن أجراء عمليه نقل المحاور ثم أجراء عمليه دوران المحاور أو العكس ولكن من الملاحظ كما ورد في المثال السابق أن دوران محاور الإحداثيات يؤدي إلي تغيير جميع معاملات حدود معادلة الدرجة الثانية فيكون من الأفضل والأيسر أجراء عملية نقل المحاور أولا ثم نتبعها بإجراء عملية دوران محاور الإحداثيات والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (٥): بنقل نقطه الأصل إلي نقطة مناسبة ثم تدوير محاور الإحداثيات زاوية موجبه مناسبة ضع المعادلة $5x^2-6xy+5y^2+22x-26y+29=0$ في ابسط صوره ممكنه.

الحـــــــــــــــــــل

لوضع المعادلة المعطاة في ابسط صوره ممكنه لابد من حذف كلاً من حدود الدرجة الأولي والحد المشتمل علي xy.

أولاً: حذف حدود الدرجة الأولي عن طريق نقل نقطه الأصل (انظر مثال (١))

في مثال (١) تم حذف حدود الدرجة الأولي من المعادلة المعطاة وذلك بنقل محاور الإحداثيات إلي النقطة $(-1,2)$ حيث أصبحت المعادلة المعطاة بعد نقل المحاور إلي هذه النقطة علي الصورة:

$$5X^2-6XY+5Y^2-8=0 \qquad (1)$$

ثانياً: حذف الحد المشتمل علي XY من خلال تدوير محاور الإحداثيات

الحذف الحد المشتمل علي XY ندير محاور الإحداثيات زاوية قدرها (نظريه٢):

$$\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2h}{a-b}\right)$$

ومن المعادلة المعطاة نجد أن $a=b=5, 2h=-6$ وبذلك نجد أن:

$$\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{-6}{0}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}\infty \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \sin\theta=\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

تدوير المحاور زاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$ يؤدي إلي التعبير عن كلاً من X ، Y بدلاله الإحداثيات الجديدة X' ، Y' كما في العلاقات الآتية:

$$X = X' \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - Y' \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{X' - Y'}{\sqrt{2}}, \quad Y = X' \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + Y' \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{X' + Y'}{\sqrt{2}}$$

وبالتعويض في المعادلة (١) نجد إنها تصبح بالصورة:

$$5\left(\frac{X' - Y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 6\left(\frac{X' - Y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{X' + Y'}{\sqrt{2}}\right) + 5\left(\frac{X' + Y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2X'^2 + 8Y'^2 = 8$$

وهذه المعادلة يمكن وضعها في الصورة: $\frac{X'^2}{4} + \frac{Y'^2}{1} = 1$ وهي تمثل معادله قطع ناقص في الصورة القياسية بالنسبة لنظام الإحداثيات الجديدة $X'Y'$ سيناقش بالتفصيل لاحقاً.

تماريـــن (٨)

١) أوجد الإحداثيات الجديدة للنقطة $P(-3,4)$ عندما تُنقل نقطة الأصــل إلى النقطة $(2,-5)$.

٢) باستخدام نقل محاور الإحداثيات ضع المعادلات الآتية في ابسط صورة ممكنة:

- $x^2-4x+8y+12=0$.
- $y^2+6y+2x+5=0$.
- $x^2-4y^2+2x+8y-7=0$.
- $x^2+4y^2-2x+8y+1=0$.

٣) باستخدام دوران محاور الإحداثيات ضع كلاً من المعادلات الآتية في ابسط صورة ممكنة:

- $8x^2-12xy+17y^2=20$
- $17x^2+12xy+8y^2-20=0$
- $17x^2-12xy+8y^2-20=0$
- $5x^2-6xy+5y^2=8$.
- $5x^2+6xy+5y^2=8$.

٤) اذا نقلت نقطة الاصل الي النقطة $(-1,2)$، ثم دارت محاور الاحداثيات زاوية $\theta=\frac{\pi}{4}$ فأوجد الصورة الجديده للمعادلة: $5x^2-6xy+5y^2+22x-26y+29=0$.

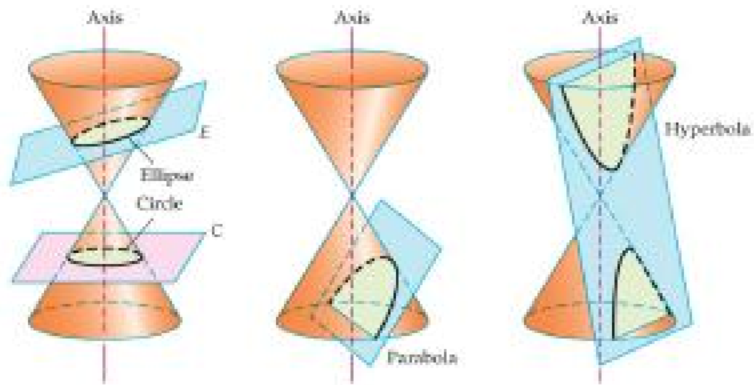
٥) منحني إذا دارت محاور الإحداثيات بزاوية $\theta=\frac{\pi}{3}$ تصبح معادلته بالنسبة لمحاور الإحداثيات الجديدة علي الصورة: $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{4}=1$. أوجد معادلته بالنسبة للمحاور الإحداثيات الأصلية.

٦) بدوران محاور الاحداثيات زاوية مناسة احذف الحد xy من المعادلة $xy=2$.

الباب التاسع

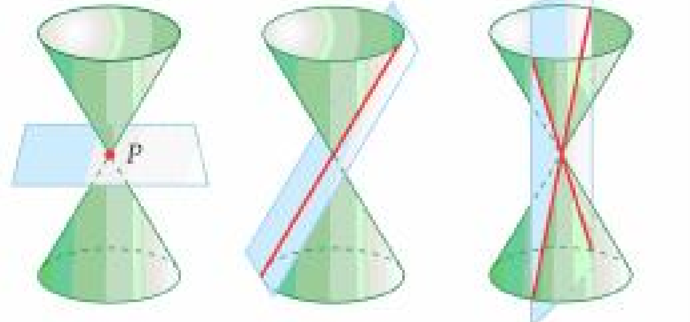
القطاعات المخروطية

تنشأ القطاعات المخروطية من تقاطع مستوي مع مخروط دائري قائم بحيث لا يمر المستوي برأس المخروط.ومن منطلق هذه النشأة الهندسية هناك أربعة حالات لمنحني التقاطع (المنحني الناتج من تقاطع المستوي مع المخروط) كما بالشكل المقابل:



- منحني التقاطع دائرة: عندما يكون المستوي القاطع عمودي علي محور المخروط.
- منحني التقاطع قطع مكافئ: عندما يكون المستوي القاطع موازيا لأحد رواسم المخروط.
- منحني التقاطع قطع ناقص: عندما يكون المستوي القاطع مائل علي محور المخروط ولا يوازي أي راسم من رواسمه .
- منحني التقاطع قطع زائد: عندما يكون المستوي القاطع موازياً لراسمين من رواسم المخروط.

وعندما يقطع المستوي المخروط مارا براسة تنتج القطاعات المخروطية "المشوهه" وهي النقطة والخط المستقيم والخطين المستقيمين المتقاطعين، كما بالشكل المقابل:

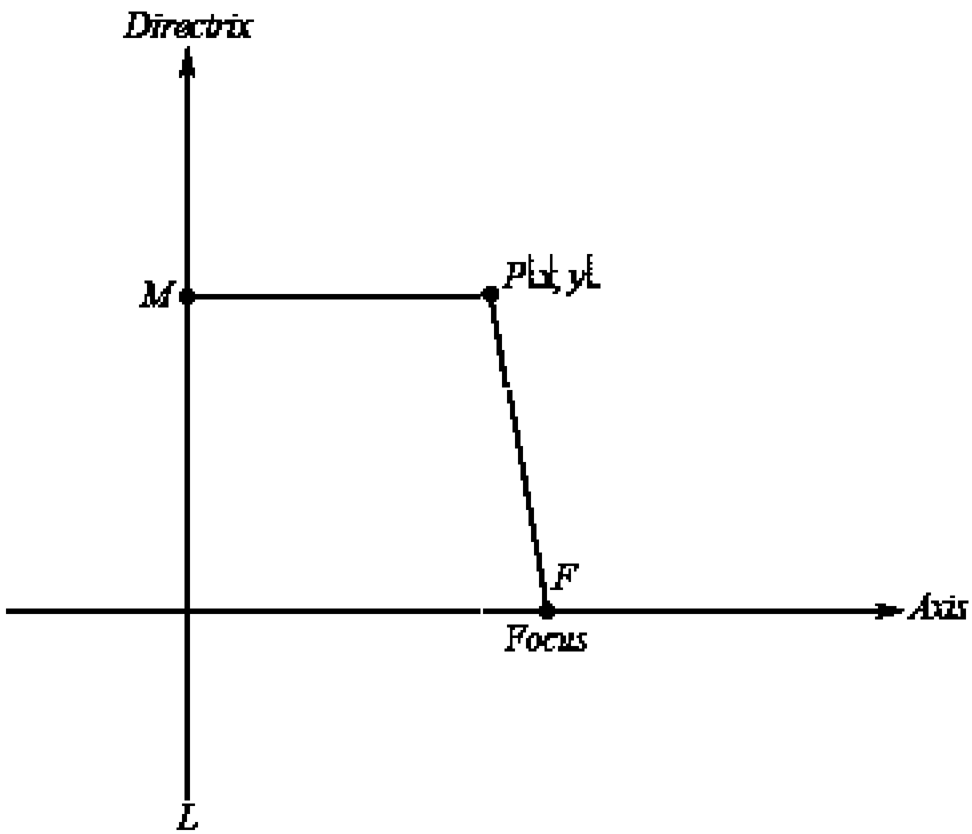


Point Line Two intersecting lines

التعريف الهندسي للقطاعات المخروطية

من جهة أخري تعرف القطاعات المخروطية علي أنها المحل الهندسي لنقطه $P(x,y)$ تتحرك في المستوي بحيث يكون بعدها عن نقطه ثابتة F إلي بعدها عن خط مستقيم ثابت L (F,L في نفس المستوي) مرتبطاً بالعلاقة :

$$\frac{FP}{PM} = e \qquad\qquad (1)$$



حيث أن e مقدار حقيقي. يسمي e بالاختلاف المركزي ، L بدليل القطع، F بالبؤرة .وبوجه عام فإن الخط المستقيم المار بالبؤرة عمودياً علي الدليل يسمي بمحور القطع . مع ملاحظه أنه في حاله القطاعين الناقص والذائد يكون لكلا منهما دليلين وبؤرتين.

وبصفة عامه يقال أن القطع المخروطي أفقي أذا كان محوره منطبقًا أو موازيًا لمحور ox وكذلك يقال انه رأسي أذا كان محوره منطبقًا أو موازيًا لمحور oy. وعلي هذا النحو يقال أن القطع المخروطي مائل أذا كان محوره يميل علي محور ox بزاوية ما ولتكن θ.

ويختلف شكل القطع المخروطي الناتج من حركة النقطة $P(x,y)$ في ظل العلاقة (١) تبعاً لقيمه الاختلاف المركزي e كما يلي:

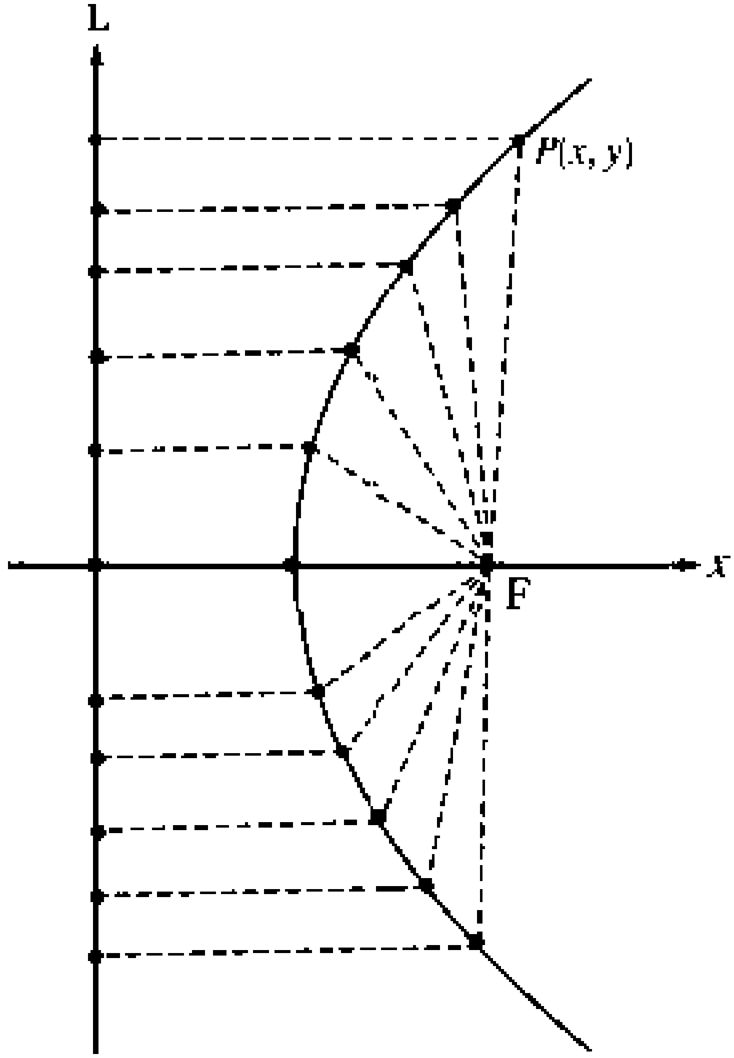
- عندما تكون $e=1$ فإن المنحني الناتج يكون قطع مكافئ.
- عندما تكون $e<1$ فإن المنحني الناتج يكون قطع ناقص.
- عندما تكون $e>1$ فإن المنحني الناتج يكون قطع زائد.
- عندما تكون $e=0$ فإن المنحني الناتج يكون دائرة.
- عندما تكون $e\to\infty$ فإن المنحني الناتج يكون خطين مستقيمين متقاطعين.

ويمكن الحصول علي الدائرة كحالة خاصة من القطع الناقص كما يمكن الحصول علي الخطين المستقيمين المتقاطعين كحالة خاصة من القطع الزائد.

وفيما يلي دراسة تفصلية للقطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد.

أولاً: القطع المكافئ

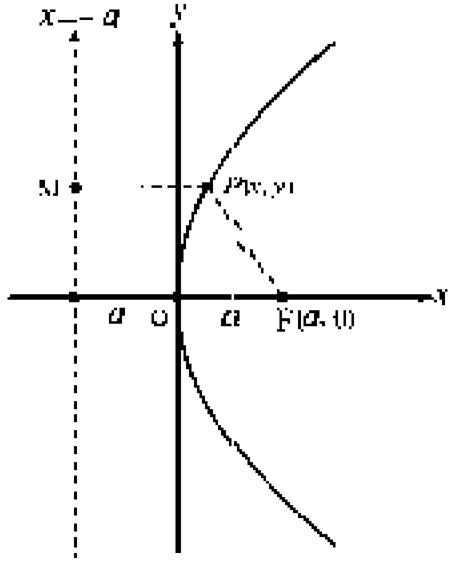
تعريف: القطع المكافئ هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوي بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة F (تسمي البؤرة) مساوياً لبعدها عن خط مستقيم ثابت L (يسمي الدليل).



يسمي الخط المستقيم المار بالبؤرة عموديا علي الدليل بمحور القطع المكافئ ، وتسمي نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محوره برأس القطع المكافئ (منتصف المسافة بين البؤرة والدليل) ، والقطع المكافئ يكون متماثل حول محوره. عندما تكون رأس القطع المكافئ عند نقطه أصل محاور الإحداثيات ومحوره ينطبق علي احدي محوري الإحداثيات فإن معادلة القطع تكون في ابسط صورة لها وتسمي في هذه الحالة "بالصورة القياسية". والمعادلة القياسية للقطع المكافئ لها أربع حالات مختلفة. وفيما يلي سوف نشتق المعادلات القياسية الخاصة بالقطع المكافئ لحالاته المختلفة.

المعادلة القياسية للقطع المكافئ

نعتبر قطع مكافئ مفتوح في الاتجاه الموجب لمحور ox ، كما بالشكل التالي:



وطبقاً للتعريف العام للقطع المكافئ يكون: $\overline{PF} = \overline{PM}$ أي أن: $\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2} = x+a$. وبتربيع الطرفين نحصل علي: $(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$ ومنها نجد أن: $y^2 = (x+a)^2 - (x-a)^2$ ومنها نحصل علي معادلة القطع في صورتها القياسية وهي:

$$y^2 = 4ax \qquad (1)$$

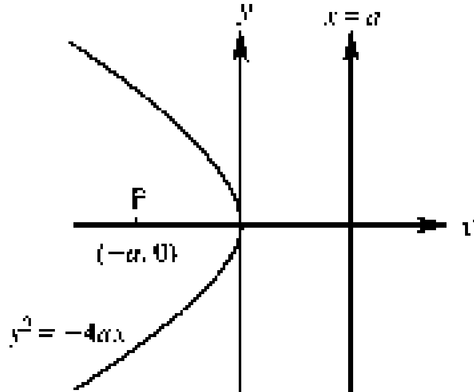
ويمكن أن تأخذ المعادلة القياسية الصور الآتية:

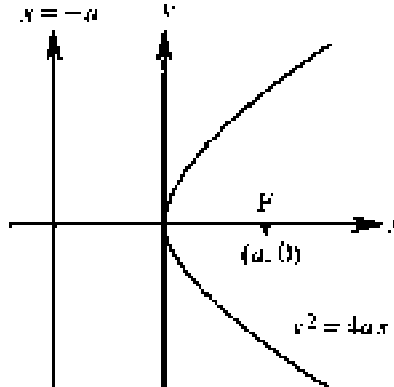
$$y^2 = -4ax \qquad (2)$$

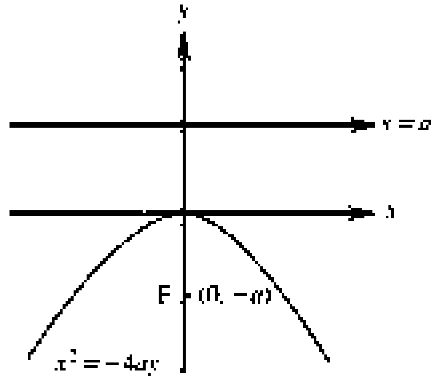
$$x^2 = 4ay \qquad (3)$$

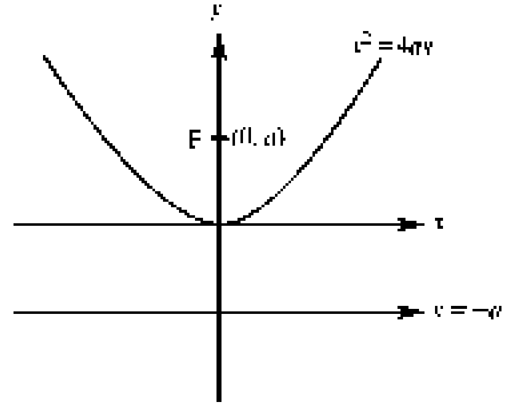
$$x^2 = -4ay \qquad (4)$$

ويمكن استنتاج هذه المعادلات بسهولة من التعريف السابق. وجميعها موضحة بالإشكال أسفلة :





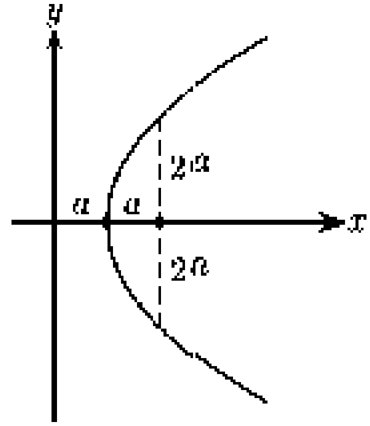




والصفات الهندسية للصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ موضحة بالجدول الآتي:

المعادلة القياسية	$y^2 = 4ax$	$y^2 = -4ax$	$x^2 = 4ay$	$x^2 = -4ay$
إحداثيات البؤرة	$(a,0)$	$(-a,0)$	$(0,a)$	$(0,-a)$
معادلة الدليل	$x=-a$	$x=a$	$y=-a$	$y=a$
معادلة المحور	$y=0$	$y=0$	$x=0$	$x=0$
إحداثيات الرأس	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
معادلة المماس عند الرأس	$x=0$	$x=0$	$y=0$	$y=0$

الوتر البؤري العمودي لقطع مكافئ: الوتر للقطع المكافئ هو المستقيم الذي يقطع القطع في نقطتين مختلفتين وإذا مر الوتر بالبؤرة يسمي وتر بؤري. وإذا مر الوتر بالبؤرة عموديًا علي محور القطع فيسمي في هذه الحالة بالوتر البؤري العمودي. وطول هذا الوتر هو الذي يحدد اتساع القطع المكافئ وطول الوتر البوري العمودي للقطع المكافئ يساوي $4a$ ، ويمكن أثبات ذلك كما يلي:



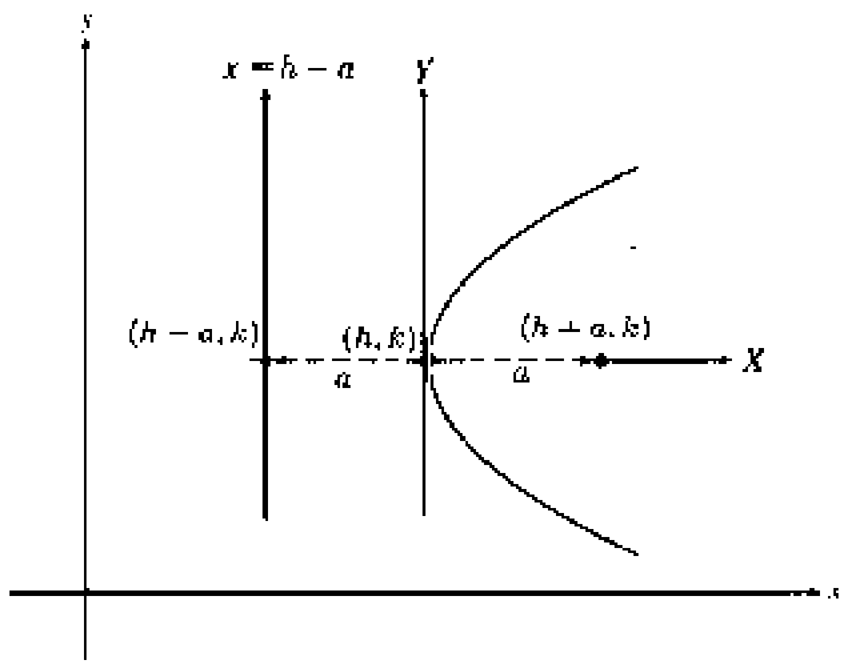
بفرض أن P هي نقطة تقاطع الوتر البؤري العمودي مع الجزء العلوي من القطع وبالتعويض عن $x=a$ في معادلة القطع المكافئ التي علي الصورة: $y^2=4ax$ نجد أن: $y=2a$ وبالتالي يكون طول الوتر البؤري العمودي يساوي $4a$ أي يساوي ضعف بعد البؤرة عن الدليل.

ملحوظة: في الصور الأربع السابقة يمس القطع المكافئ محورا من محاور الإحداثيات عند نقطة الأصل والتي تسمي في هذه الحالة رأس القطع وبالطبع يمكن أن تكون رأس القطع أي نقطة أخري غير نقطة الأصل ولكن تتحول معادلة القطع في هذه الحالة إلي صورة أخري غير الصورة القياسية .ومن معرفتنا السابقة بتغير محاور الإحداثيات يمكن عن طريق تحويلات مناسبة للإحداثيات التعبير عن معادلة القطع الغير قياسية في صورة قياسية.

المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي محوره يوازي أحد محاور الإحداثيات

أولاً: إذا كان محور القطع يوازي محور ox :

نعتبر قطع مكافئ رأسه النقطة (h,k) ومحوره يوازي محور ox والمماس عند الرأس يوازي محور oy ، كما بالشكل المقابل:



وبنقل محاور الإحداثيات موازية لنفسها إلي النقطة (h,k) حيث أن المحاور الجديدة هي OXY ، فتكون معادلة القطع المكافئ منسوبة إلي المحاور الجديدة علي الصورة: $Y^2=4aX$ باستخدام

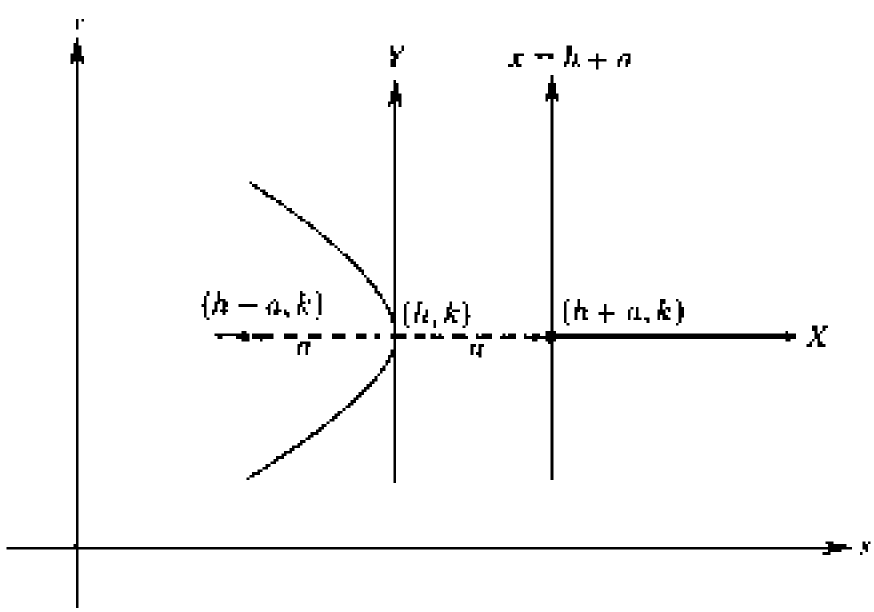
معادلات التحويل بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة والتي علي الصورة: $X = x - h$ ، $Y = y - k$ نحصل علي معادلة القطع منسوبة إلي الإحداثيات الأصلية في الصورة:

$$(y-k)^2 = 4a(x-h)$$

وهي المعادلة المطلوبة عندما يكون القطع مفتوح في الاتجاه الموجب لمحور ox، وتكون الصفات الهندسية للقطع في هذه الحالة كما هو موضحاً بالجدول التالي:

	بالنسبة للمحاور OXY	بالنسبة للمحاور oxy
المعادلة القياسية	$Y^2 = 4aX$	$(y-k)^2 = 4a(x-h)$
إحداثيات الرأس	$(0,0)$	(h,k)
معادلة المحور	$Y = 0$	$y - k = 0$
معادلة المماس عند الرأس	$X = 0$	$x - h = 0$
إحداثيات البؤرة	$(a,0)$	$(h+a,k)$
معادلة الدليل	$X = -a$	$x - h = -a$

وعندما يكون القطع مفتوح في الاتجاه السالب لمحور ox تكون معادلته منسوبة إلي الإحداثيات الأصلية علي الصورة: $(y-k)^2 = -4a(x-h)$ ، كما بالشكل المقابل:

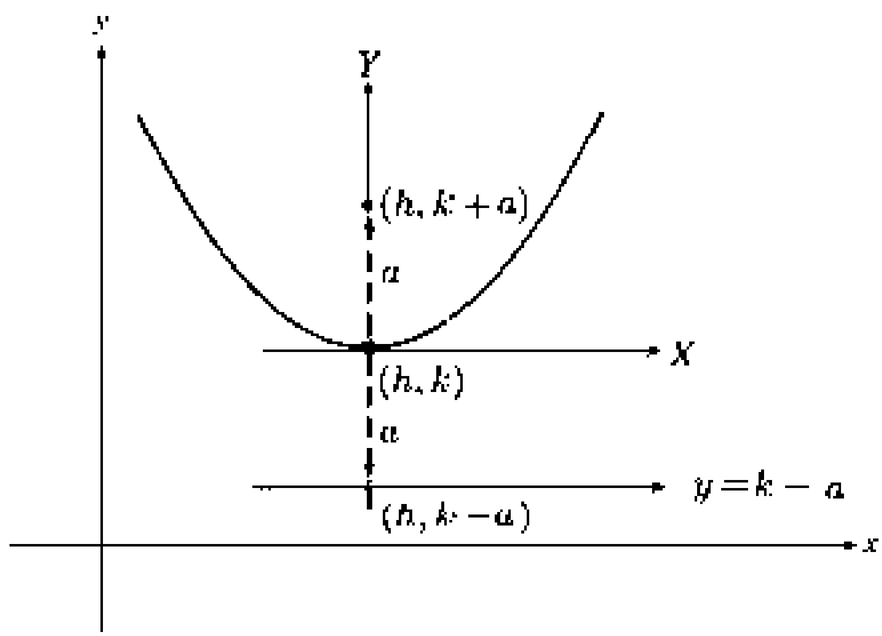


وتكون صفاته الهندسية كما هو موضحاً بالجدول التالي:

	بالنسبة للمحاور OXY	بالنسبة للمحاور oxy
المعادلة القياسية	$Y^2 = -4aX$	$(y-k)^2 = -4a(x-h)$
إحداثيات الرأس	$(0,0)$	(h,k)
معادلة المحور	$Y = 0$	$y-k = 0$
معادلة المماس عند الرأس	$X = 0$	$x-h = 0$
إحداثيات البؤرة	$(-a,0)$	$(h-a,k)$
معادلة الدليل	$X = a$	$x-h = a$

ثانياً: إذا كان محور القطع يوازي محور oy

نعتبر قطع مكافئ رأسه النقطة (h,k) ومحوره يوازي محور oy والمماس عند الرأس يوازي محور ox ، كما بالشكل المقابل:



وبنقل المحاور موازية لنفسها إلي النقطة (h,k) نحصل علي معادلة القطع المكافئ منسوبة للإحداثيات الجديدة في الصورة: $X^2 = 4aY$ وبتطبيق معادلات التحويل بين الإحداثيات والتي علي الصورة:

$$X = x-h, \quad Y = y-k$$

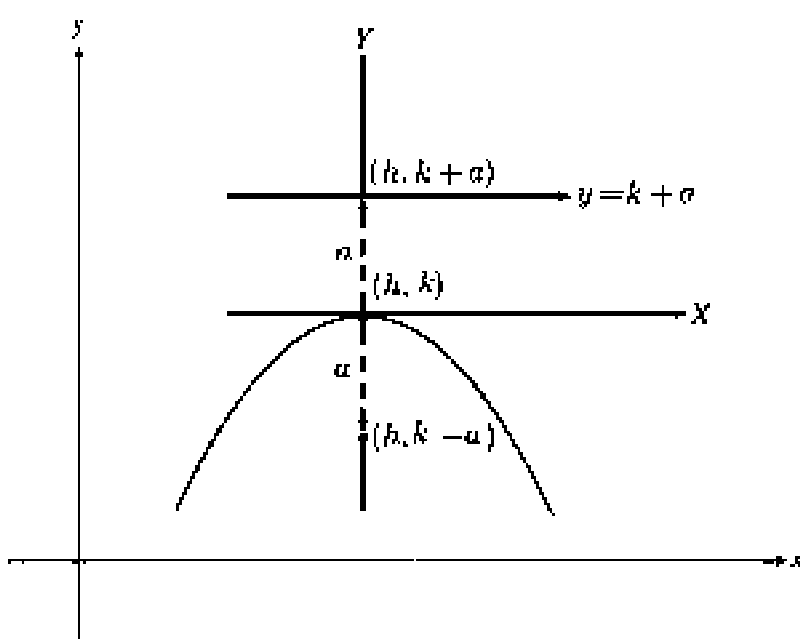
نحصل علي معادلة القطع منسوبة للإحداثيات الأصلية في الصورة:

$$(x-h)^2=4a(y-k)$$

وذلك عندما يكون القطع مفتوح في الاتجاه الموجب لمحور oy . والجدول التالي يعطي الصفات الهندسية لهذا القطع :

	بالنسبة للمحاور OXY	بالنسبة للمحاور oxy
المعادلة القياسية	$X^2=4aY$	$(x-h)^2=4a(y-k)$
إحداثيات الرأس	$(0,0)$	(h,k)
معادلة المحور	$X=0$	$x-h=0$
معادلة المماس عند الرأس	$Y=0$	$y-k=0$
إحداثيات البؤرة	$(0,a)$	$(h,k+a)$
معادلة الدليل	$Y=-a$	$y-k=-a$

ولكن بالنسبة للحالة التي يكون فيها القطع مفتوح في الاتجاه السالب لمحور oy فإن معادلته يمكن وصفها بالصورة: $(x-h)^2=-4a(y-k)$ ، كما بالشكل المقابل:



والجدول التالي يوضح الصفات الهندسية للقطع في هذه الحالة :

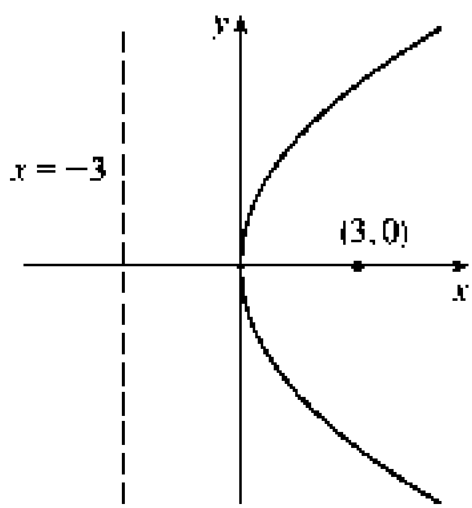
	بالنسبة للمحاور OXY	بالنسبة للمحاور oxy
المعادلة القياسية	$X^2=-4aY$	$(x-h)^2=-4a(y-k)$
إحداثيات الرأس	$(0,0)$	(h,k)
معادلة المحور	$X=0$	$x-h=0$
معادلة المماس عند الرأس	$Y=0$	$y-k=0$
إحداثيات البؤرة	$(0,-a)$	$(h,k-a)$
معادلة الدليل	$Y=a$	$y-k=a$

أمثلة محلولة

مثال(١): أرسم القطع المكافئ $y^2=12x$ وعين البؤرة والدليل.

الحــــــــــــــل

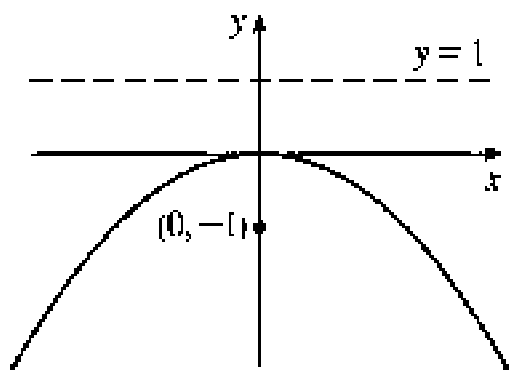
بمقارن المعادلة المعطاة بالمعادلة القياسية للقطع المكافئ والتي على الصورة: $y^2=4ax$ نجد أن $4a=12 \Rightarrow a=3$ وبالتالي فإن بؤرة القطع هي النقطة $(3,0)$ ورأسه النقطة $(0,0)$ ومعادلة دليلة هي $x=-3$.



مثال (٢): أرسم القطع المكافئ $4y+x^2=0$ وعين البؤرة والدليل.

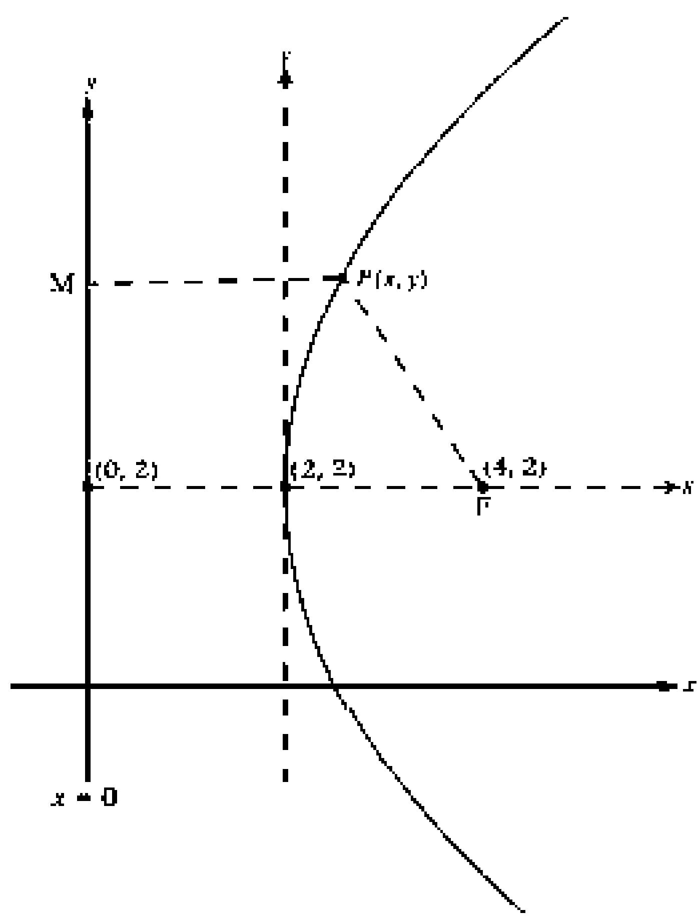
الحـــــــــــــــــل

المعادلة المعطاة يمكن كتابتها علي الصورة: $x^2 = -4y$ وبمقارنة هذه المعادلة بمعادلة القطع المكافئ التي علي الصورة: $x^2 = -4ay$ فنجد أن $a = 1$ وبالتالي تكون رأس القطع هي نقطة الأصل وبؤرته هي النقطة $(0,-1)$ ودليلة هو الخط المستقيم $y = 1$ ، كما بالشكل المقابل:



مثال (٣): أوجد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوي بحيث يكون بعدها عن النقطة $(4,2)$ مساويا لبعدها عن الخط المستقيم $x = 0$.

الحـــــــــــــــــل



نفرض أن النقطة $P(x,y)$ هي أي نقطة علي القطع وأن F هي بؤرة هذا القطع فيكون:

$$\overline{PF}^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2$$

وإذا كان PM هو العمودي من النقطة P علي الدليل فإن: $\overline{PM}^2 = x^2$ ، ومن التعريف العام للقطع المكافئ يكون : $\overline{PF}^2 = \overline{PM}^2$ أي أن:

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = x^2$$

وبالفك ولاختصار نجد أن:

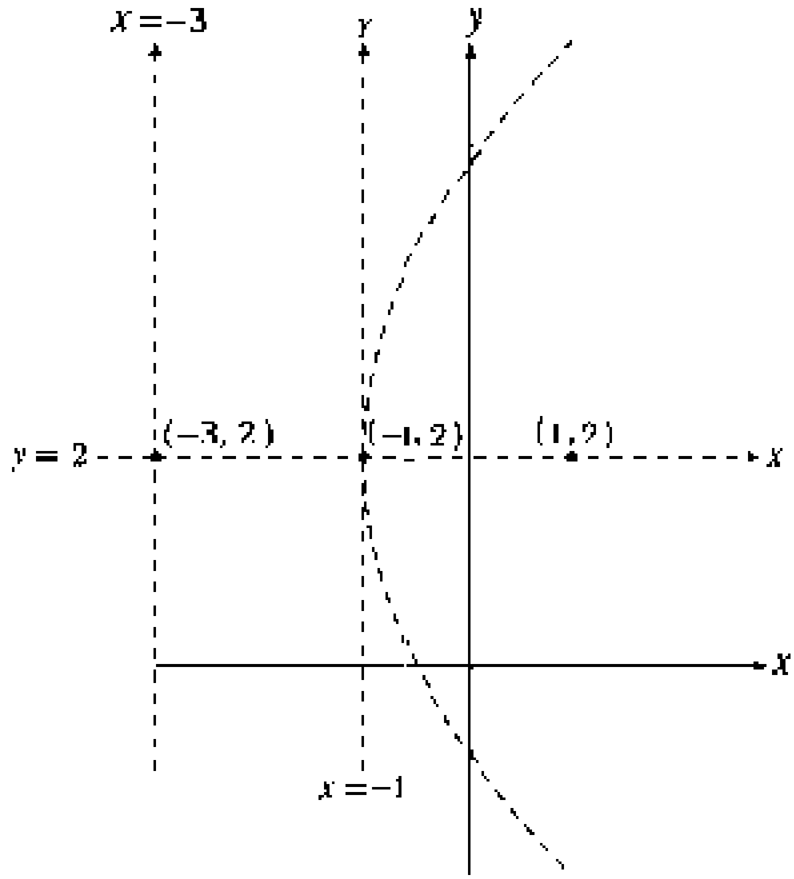
$$y^2 - 4y - 8x + 20 = 0$$

مثال (٤): بنقل محاور الإحداثيات إلي نقطة مناسبة أرسم القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 - 4y - 8x - 4 = 0$ ثم استنتج صفاته الهندسية.

الحـــــــــــــــــــــل

بإكمال المربع بالنسبة إلي حدود y نجد أن المعادلة المعطاة تصبح بالصورة: $(y-2)^2 = 8(x+1)$ وبنقل نقطة الأصل إلي النقطة $(-1,2)$ نجد أن: $X = x+1,\ Y = y-2$ وبالتالي فإن المعادلة المعطاة تصبح بالصورة: $Y^2 = 8X$ وهي معادلة قطع مكافئ مفتوح في الاتجاه الموجب لمحور ox ، كما بالشكل المقابل، والخواص الهندسية لهذا القطع كما بالجدول التالي:

بالنسبة للمحاور oxy	بالنسبة للمحاور OXY	
$(y-2)^2 = 8(x+1)$	$Y^2 = 8X$	المعادلة القياسية
$(h,k) = (-1,2)$	$(0,0)$	إحداثيات الرأس
$y-2=0 \Rightarrow y=2$	$Y=0$	معادلة المحور
$x+1=0 \Rightarrow x=-1$	$X=0$	معادلة المماس عند الرأس
$(h+a,k) = (1,2)$	$(a,0) = (2,0)$	إحداثيات البؤرة
$x+1=-2 \Rightarrow x=-3$	$X=-2$	معادلة الدليل



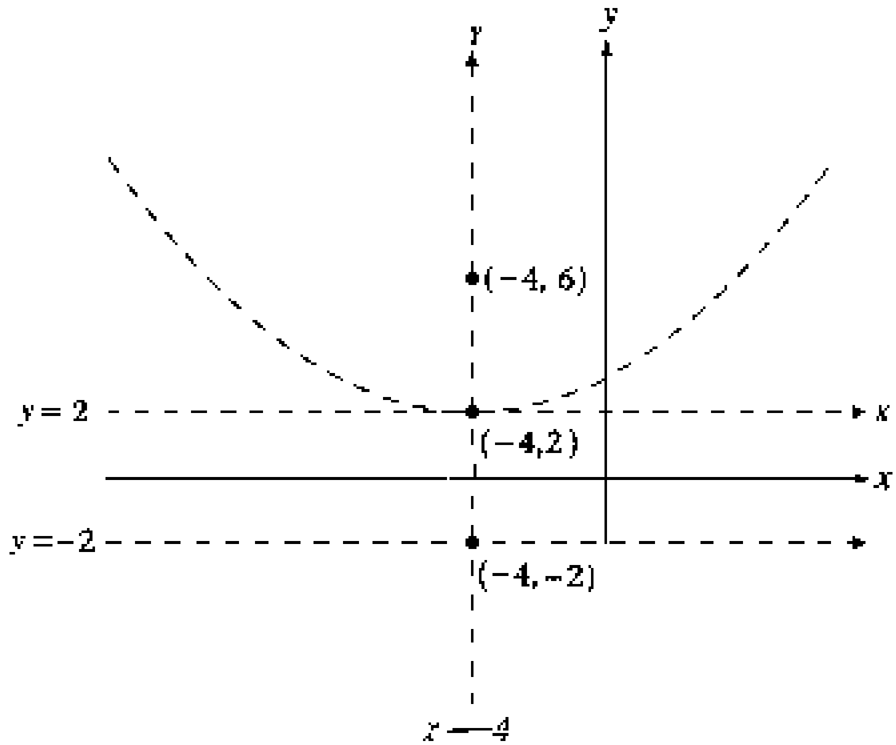
مثال (٥): باستخدام تحويل هندسي مناسب أرسم القطع المكافئ الذي معادلته $(x+4)^2=16(y-2)$ ثم استنتج صفاته الهندسية.

الحـــــــــــــــــــــل

بنقل محاور الإحداثيات إلي النقطة $(-4,2)$ نجد أن: $X=x+4,\ Y=y-2$ وبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن: $X^2=16Y$ وهي معادلة قطع مكافئ مفتوح في الاتجاه الموجب لمحور oy ، كما بالشكل المقابل، والخواص الهندسية لهذا القطع كما بالجدول التالي:

	بالنسبة للمحاور OXY	بالنسبة للمحاور oxy
المعادلة القياسية	$X^2=16Y$	$(x+4)^2=16(y-2)$
إحداثيات الرأس	$(0,0)$	$(h,k)=(-4,2)$
معادلة المحور	$X=0$	$x+4=0 \Rightarrow x=-4$
معادلة المماس عند الرأس	$Y=0$	$y-2=0 \Rightarrow y=2$

إحداثيات البؤرة	$(0,a)=(0,4)$	$(h,k+a)=(-4,6)$
معادلة الدليل	$Y=-a$	$y-2=-4 \Rightarrow y=-2$



مثال (٦): بالتحويل إلي الإحداثيات الكارتيزية ونقل محاور الإحداثيات إلي نقطة مناسبة استنتج الصفات الهندسية للقطع المكافئ الذي معادلته $r=\dfrac{6}{1-\cos\theta}$.

الحـــــــــــــــــل

$$r=\frac{6}{1-\cos\theta} \Rightarrow r(1-\cos\theta)=2 \Rightarrow r-r\cos\theta=6$$

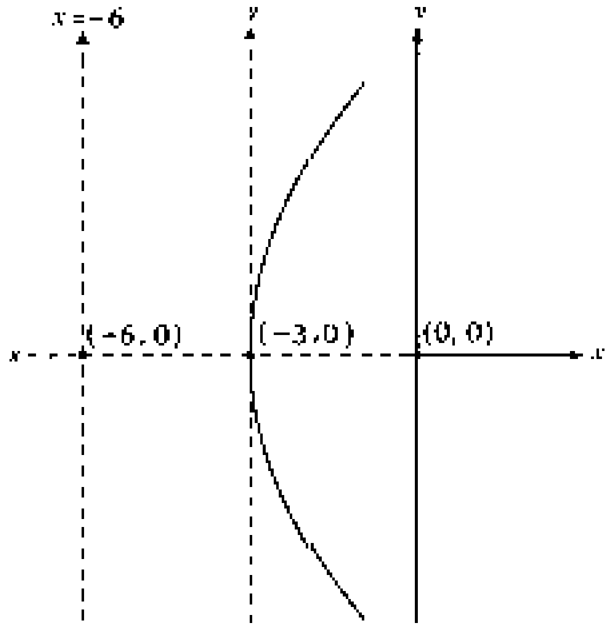
وبالتعويض عن $x=r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ **نجد أن:**

$$r-r\cos\theta=6 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}-x=6 \Rightarrow x^2+y^2=(x+6)^2$$

وبالفك والاختصار نحصل علي: $y^2=12(x+3)$ **وبنقل محاور الإحداثيات إلي النقطة** $(-3,0)$ **نجد أن:** $X=x+3, Y=y$ **وبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن:**

$$Y^2=12X$$

وهي معادله قطع مكافئ مفتوح في الاتجاه الموجب لمحور ox **، كما بالشكل المقابل:**



والخواص الهندسية لهذا القطع كما بالجدول التالي :

	بالنسبة للمحاور OXY	بالنسبة للمحاور oxy
المعادلة القياسية	$Y^2=12X$	$y^2=12(x+3)$
إحداثيات الرأس	$(0,0)$	$(h,k)=(-3,0)$
معادلة المحور	$Y=0$	$y=0$
معادلة المماس عند الرأس	$X=0$	$x+3=0\Rightarrow x=-3$
إحداثيات البؤرة	$(a,0)=(3,0)$	$(h+a,k)=(0,0)$
معادلة الدليل	$X=-3$	$x+3=-3\Rightarrow x=-6$

معادلتي المماس والعمودي للقطع المكافئ

معادلة المماس للقطع المكافئ $y^2=4ax$ عند النقطة (x_1,y_1) الواقعة عليه تكون بالصورة $yy_1=2a(x+x_1)$ ومعادلة العمودي عند نفس النقطة تكون بالصورة $y-y_1=-\dfrac{y_1}{2a}(x-x_1)$ ويمكن استنتاج ذلك كما يأتي: لتكن معادلة القطع المكافئ هي $y^2=4ax$ ، ولتكن (x_1,y_1) نقطة ما واقعة على القطع فهي تحقق معادلته ومن ثم يكون $y_1^2=4ax_1$ ، وميل المماس للقطع عند النقطة (x_1,y_1) نحصل عليه كما يلي:

$$2y\frac{dy}{dx}=4a \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2a}{y}$$

وإذاً ميل المماس للقطع عند النقطة (x_1,y_1) يكون هو $\frac{2a}{y_1}$. وبالتالي فإن معادلة المماس للقطع المكافئ عند النقطة (x_1,y_1) تكون بالصورة:

$$(y-y_1)=\frac{2a}{y_1}(x-x_1) \Rightarrow yy_1-y_1^{2}=2ax-2ax_1.$$

وبالتعويض عن $y_1^2=4ax_1$ نحصل على : $yy_1-4ax_1=2ax-2ax_1$ ومنها نحصل علي :

$$yy_1=2a(x+x_1) \qquad (1)$$

وهذه المعادلة هي معادلة المماس للقطع المكافئ $y^2=4ax$ عند النقطة (x_1,y_1) .

المعادلات البارامترية للقطع المكافئ

المقصود بالصورة البارامترية للمنحني هو التعبير عن إحداثيات أي نقطه (x,y) علية بدلالة بارامتر وليكن t (أي: $x=x(t),\ y=y(t)$) وهذه الإحداثيات تحقق معادلة المنحني في الصورة القياسية بدلالة x ، y . بالنسبة للقطع المكافئ $y^2=4ax$ نجد أن $y=2\sqrt{ax}$ وبالتالي أننا وضعنا $x=at^2$ نجد أن $y=2at$. وبالتالي تكون المعادلات: $x=at^2,\quad y=2at$ هي المعادلات البارامترية للقطع المكافئ $y^2=4ax$. ومن الملاحظ أن المعادلات البارامترية لنفس المنحني يمكن أن تأخذ أشكالا متعددة. فمثلاً المعادلات: $x=t,\ y=2\sqrt{at},\ t\geq 0$ هي أيضاً صوره بارامترية للقطع المكافئ $y^2=4ax$. وبالنسبة للصور القياسية الأخرى للقطع المكافئ يمكن وضع معادلات بارامترية مشابهه .

المعني الهندسي لبارامتر القطع المكافئ

من حساب التفاضل نعلم أن $\frac{dy}{dx}$ تمثل ميل المماس عند أي نقطه من نقاط منحني ما وفي حاله القطع المكافئ بالمعادلات البارامتريه أعلاه يكون :

$$m=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{t}\Rightarrow t=\frac{1}{m}$$

أي أن البارامتر t هنا هو مقلوب ميل المماس وهو يساوي " – ميل العمودي".

وتكون معادلة المماس عند أي نقطة $(at^2,2at)$ علي القطع المكافئ هي :

$$\frac{y-2at}{x-at^2}=\frac{1}{t}$$

أي أن:

$$y=\frac{1}{t}x+at \ \ or \ \ ty-x-at^2=0 \qquad (2)$$

هي معادلة المماس للقطع المكافئ $y^2=4ax$ وهي معادلة من الدرجة الثانية في البارامتر t أي أنة لأي نقطة (x_1,y_1) توجد قيمتين للبارامتر t تحقق المعادلة وهذا يعني أنة من أي نقطة لا تقع علي القطع يمكن رسم مماسان للقطع ومعادله العمودي عند أي نقطه علي القطع المكافئ تكون بالصورة :

$$\frac{y-2at}{x-at^2}=-t$$

أي:

$$y+tx-at^3-2at=0$$

معادله وتر في القطع مكافئ

معادله وتر القطع مكافئ الذي يصل بين النقطتين $P(at_1^2,2at_1)$ ، $Q(at_2^2,2at_2)$ هي:

$$\frac{x-at_1^2}{y-2at_1}=\frac{at_2^2-at_1^2}{2at_2-2at_1}=\frac{t_1+t_2}{2}$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها علي الصورة

$$2x-(t_1+t_2)y+2at_1t_2=0 \qquad (3)$$

وبضرب طرفي المعادلة (١) في $a(t_1-t_2)$ نحصل علي:

$$2a(t_1-t_2)x-2a(t_1-t_2)(t_1+t_2)y+2a^2t_1t_2(t_1-t_2)=0$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها علي الصورة:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2at_1^2 & 2at_1 & 1 \\ 2at_2^2 & 2at_2 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad (4)$$

وهذه المعادلة هي صورة أخري لمعادلة الوتر لقطع مكافئ بدلالة البارامتر t. وكذلك يمكن استنتاج معادلة الوتر بدلالة الإحداثيات الكارتزية.

معادله وتر القطع مكافئ الذي يصل بين النقطتين $P(x_1,y_1)$ ، $Q(x_2,y_2)$ هي :

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (5)$$

وحيث أن القطع يمر بالنقطتين $P(x_1,y_1)$ ، $Q(x_2,y_2)$ فيكون:

$$y_1^2=4ax_1 \qquad (7)$$

$$y_2^2=4ax_2, \qquad (6)$$

من المعادلتين (٦)، (٧) نحصل علي: $y_2^2-y_1^2=4a(x_2-x_1)$ وبالتعويض في المعادلة (٥) والاختصار نحصل علي معادلة الوتر في الصورة:

$$4ax-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0 \qquad (8)$$

ملحوظة: حيث أن لماس لنحني : هو الخط المستقيم الذي يقطع المنحني في نقطتين متطابقتين فإنة يمكن الحصول علي معادلة الماس من معادلة الوتر حيث أنة بوضع $t_1=t_2$ في المعادلة (٣) نحصل علي المعادلة (٢)، وكذلك بوضع $x_1=x_2,\ y_1=y_2$ في المعادلة (٧) نحصل علي المعادلة (١).

شرط تماس خط مستقيم لقطع مكافئ

شرط تماس الخط المستقيم $y=mx+c$ للقطع المكافئ $y^2=4ax$ هو $c=\dfrac{a}{m}$ وإحداثيات نقطة التماس تكون $\left(\dfrac{a}{m^2},\dfrac{2a}{m}\right)$ ، ويمكن إثبات ذلك كما يأتي:

معالة الماس للقطع المكافئ $y^2=4ax$ هي $y=\dfrac{2a}{y_1}(x+x_1)$ حيث أن (x_1,y_1) هي إحداثيات نقطة التماس. ولكي يكون الخط المستقيم $y=mx+c$ مماسا للقطع يجب أن يكون:

$$m=\frac{2a}{y_1},\ c=\frac{2ax_1}{y_1}$$

وبالتالي نجد أن:

$$y_1=\frac{2a}{m},\ x_1=\frac{cy_1}{2a}=\left(\frac{c}{2a}\right)\left(\frac{2a}{m}\right)=\frac{c}{m}$$

أي أن النقطة $\left(\frac{c}{m},\frac{2a}{m}\right)$ هي نقطة التماس .وحيث أن (x_1,y_1) هي إحداثيات نقطة التماس (نقطة تقع علي القطع) فيكون:

$$y_1 = mx_1 + c \Rightarrow \frac{2a}{m} = m\left(\frac{c}{m}\right) + c \Rightarrow c = \frac{a}{m}$$

وبالتالي تكون المعادلة التي علي الصورة: $y = mx + \frac{a}{m}$ هي معادلة المماس للقطع المكافئ $y^2 = 4ax$ لجميع قيم m الحقيقية وتكون النقطة $\left(\frac{a}{m^2},\frac{2a}{m}\right)$ هي نقطة التماس.

تمارين (٩-١)

١) أوجد معادلة القطع المكافئ إذا كانت:

- البؤرة $(-1,2)$ والدليل $x=0$.
- البؤرة $(3,6)$ والدليل $y=2$.
- البؤرة $(-4,1)$ والدليل $y=-1$.
- البؤرة $(-3,-6)$ والدليل $y=0$.

٢) بالتحويل إلي الإحداثيات الكارتيزية ونقل محاور الإحداثيات إلي نقطة مناسبة استنتج الصفات الهندسية للقطاعات المكافئة الآتية:

- $r=\dfrac{6}{1+\cos\theta}$ ، $r=\dfrac{6}{1-\sin\theta}$ ، $r=\dfrac{6}{1+\sin\theta}$.

٣) بنقل نقطة الأصل إلي نقطة مناسبة استنتج الخواص الهندسية للقطاعات المكافئة الممثلة بالمعادلات الآتية:

- $y^2+2y+12x+25=0$.
- $y^2-4y-8x+20=0$.
- $x^2-8x+4y+12=0$.
- $x^2+8x-16y+48=0$.

٤) أوجد معادلتي المماسين المرسومين من النقطة $(-3,-2)$ للقطع المكافئ $y^2=4x$. وأوجد إحداثيات نقطتي التماس.ومن ثم أوجد معادلة الوتر الواصل بين نقطتي التماس.

٥) أوجد معادلتي المماسين المرسومين من النقطة $(2,-3)$ للقطع المكافئ $y^2=4x$ وأوجد إحداثيات نقطتي التماس.

٦) برهن أن المحل الهندسي لنقطة تقاطع مماسين متعامدين لقطع مكافئ هو الدليل.

٧) أوجد معادلة المماس للقطع المكافئ $y^2=12x$ والذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور ox.

ثانياً: القطع الناقص

من التعريف العام للقطاعات المخروطية يعرف القطع الناقص:علي أنة هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة F (البؤرة) إلي بعدها عن خط مستقيم ثابت L (الدليل) يساوي مقدار ثابت (الاختلاف المركزي) اقل من الواحد الصحيح .

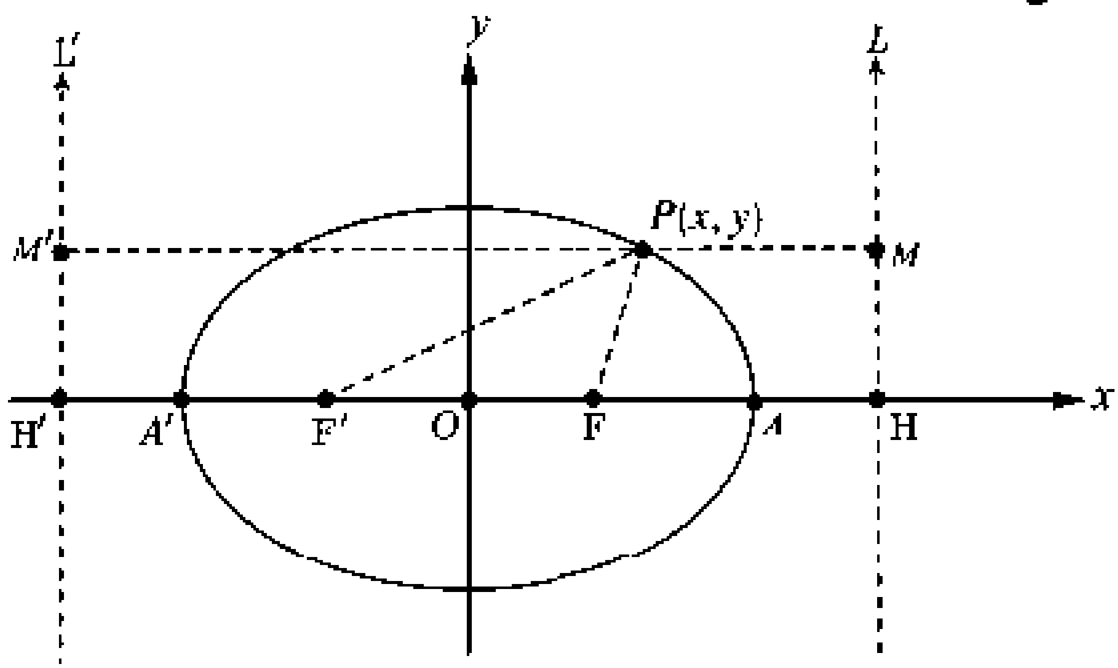
وهذا يعني أن القطع الناقص هو المنحني الناتج من حركة نقطة $P(x,y)$ بحيث يكون بعدها عن البؤرة F إلي بعدها عن الدليل L مرتبطاً بالعلاقة:

$$PF = ePM\,,\ e<1 \qquad (1)$$

من هذا التعريف يمكن استنتاج المعادلة القياسية للقطع الناقص كما يلي:

لإيجاد المعادلة القياسية للقطع الناقص نفرض أن البؤرة F تقع علي محور ox وأن الدليل L يكون عمودي علي محور ox والنقطة $P(x,y)$ هي النقطة التي تتحرك في المستوي بحيث تحقق العلاقة (١).

وبالتالي فإن النقطة $P(x,y)$ خلال حركتها تقطع محور ox في النقطتين A ، A' (نقطتي التقسيم من الداخل والخارج)، كما بالشكل المقابل:



ومن تعريف القطع الناقص نجد أن:

$$\frac{AF}{AH} = \frac{A'F'}{A'H'} = e,\ \ e<1$$

وبفرض أن المسافة بين النقطتين A ، A' هي مقدار ثابت $2a$ بحيث أن نقطة الأصل تقع في منتصف المسافة بينهما أي أن $OA = OA'$ وبذلك تكون إحداثيات النقطتين A ، A' هما $A(a,0)$ ، $A'(-a,0)$.
وبالتالي من الشكل نجد أن:

$$AF = eAH \Rightarrow OA - OF = e(OH - OA) \qquad (1)$$

$$A'F = eA'H \Rightarrow OA' + OF = e(OH + OA) \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين (١)، (٢) نجد أن:

$$AF + A'F = 2e\,OH \Rightarrow 2a = 2e\,OH \Rightarrow OH = \frac{a}{e}$$

أي أن الدليل يبعد عن المركز مسافة قدرها $\frac{a}{e}$. وتكون معادلة الدليل هي $x = \frac{a}{e}$.
وبطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢) نجد أن:

$$2OF = e(2OA) \Rightarrow OF = ae$$

أي أن البؤرة تبعد عن نقطة الأصل مسافة قدرها ae وتكون إحداثيات البؤرة هي $F(ae,0)$ والبعد PM هو $\frac{a}{e} - x$. وإذا كانت النقطة $P(x,y)$ تقع علي القطع الناقص فإن:

$$\overline{PF}^2 = e^2\overline{PM}^2 \Rightarrow (x-ae)^2 + y^2 = e^2\left(\frac{a}{e} - x\right)^2$$

وبالفك والاختصار نجد أن: $x^2(1-e^2) + y^2 = a^2(1-e^2)$ وحيث أن $e<1$ فإن $1-e^2$ يكون مقدار موجب دائما ، وبوضع: $b^2 = a^2(1-e^2)$ نحصل علي:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

وذلك هي معادلة لقطع الناقص في صورتها القياسية عندما تقع بؤرته علي محور ox ويكون دليلة موازيا لمحور oy. ومن العلاقة $b^2 = a^2(1-e^2)$ نلاحظ أن $a^2 > b^2$. ومن معادلة القطع نجد أن:

$$x = \pm a\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)},\ y = \pm b\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$$

وهذا يعني أن القطع الناقص يكون متماثل حول محوري الإحداثيات وكذلك متماثل حول نقطة الأصل

ولكي نحصل علي قيم حقيقية للمتغير x يجب أن يكون :

$$1-\frac{y^2}{b^2}\ge 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}-1\le 0 \Rightarrow y^2\le b^2 \Rightarrow |y|\le b$$

وبالمثل لكي نحصل علي قيم حقيقية للمتغير y يجب أن يكون:

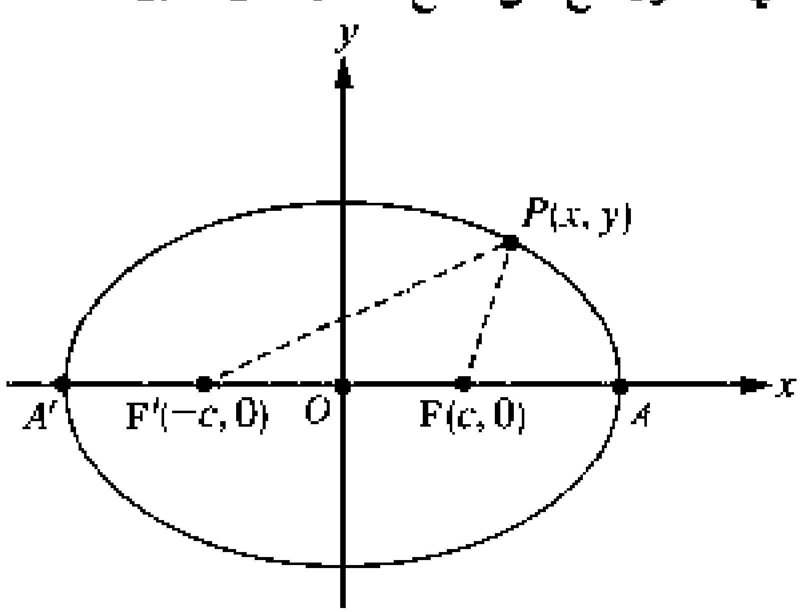
$$1-\frac{y^2}{b^2}\ge 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}-1\le 0 \Rightarrow y^2\le b^2 \Rightarrow |y|\le b$$

من تماثل القطع الناقص نجد أنة توجد له بؤرة أخري هي $F'(-ae,0)$ ودليل أخر معادلته $x=-\frac{a}{e}$ وكذلك نجد أن القطع يقطع محور oy في نقطتين ويكون منحني القطع مغلق.

ومن الشكل نعلم أن: $\overline{PF}=e\overline{PM},\quad \overline{PF'}=e\overline{PM'}$ ومنها نجد أن:

$$\overline{PF}+\overline{PF'}=e(\overline{PM}+\overline{PM'})=e\overline{HH'}=e\left(\frac{2a}{e}\right)=2a$$

ومن هنا نستنتج تعريفا اخر للقطع الناقص وهو أن: القطع الناقص هو الحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوي بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي مقدار ثابت (وهو طول المحور الأكبر). ومن هذا التعريف يمكن استنتاج معادلة القطع الناقص كما يأتي: لتكن بؤرتي القطع الناقص هما النقطتين $F'(c,0),F(-c,0)$ حيث c يُعد كلاً من البؤرتين عن نقطة الاصل ولتكن $P(x,y)$ نقطة في المستوى تقع على القطع، كما بالشكل المقابل:



ومن التعريف السابق للقطع الناقص يكون:

$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a.$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow (x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$\Rightarrow -4cx=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \Rightarrow a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx.$$

وبتربيع الطرفين نجد أن:

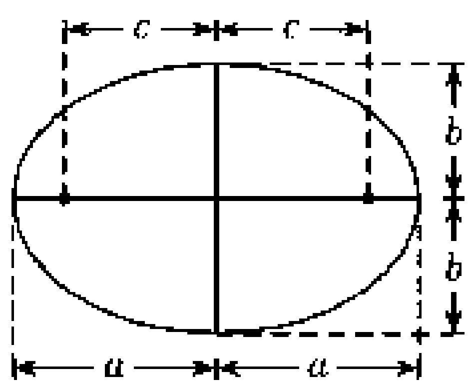
$$a^2[(x+c)^2+y^2]=(a^2+cx)^2 \Rightarrow a^2[x^2+2cx+c^2+y^2]=a^4+2a^2cx+c^2x^2 \Rightarrow$$

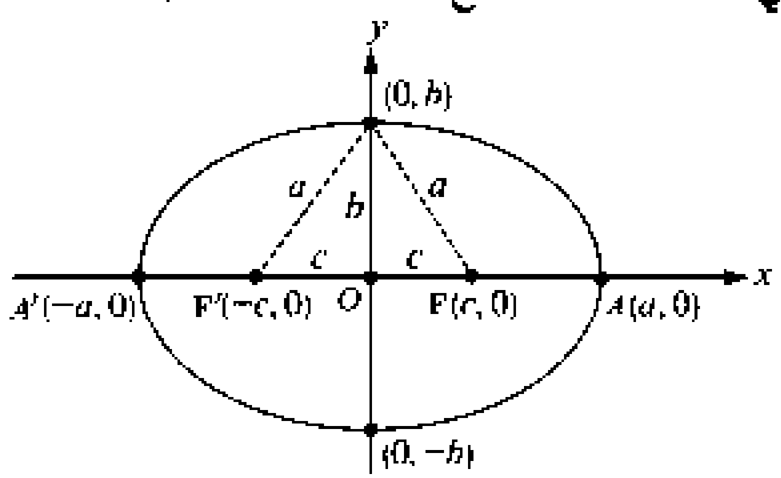
$$a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4+2a^2cx+c^2x^2 \Rightarrow x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

وبالقسمة علي $a^2(a^2-c^2)$ نحصل علي: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$ وحيث أن $a>c$ فإن المقدار a^2-c^2 يكون موجب دائما، وبوضع $b^2=a^2-c^2$ نحصل علي:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4)$$

وهي المعادلة القياسية للقطع الناقص، كما بالشكل المقابل:





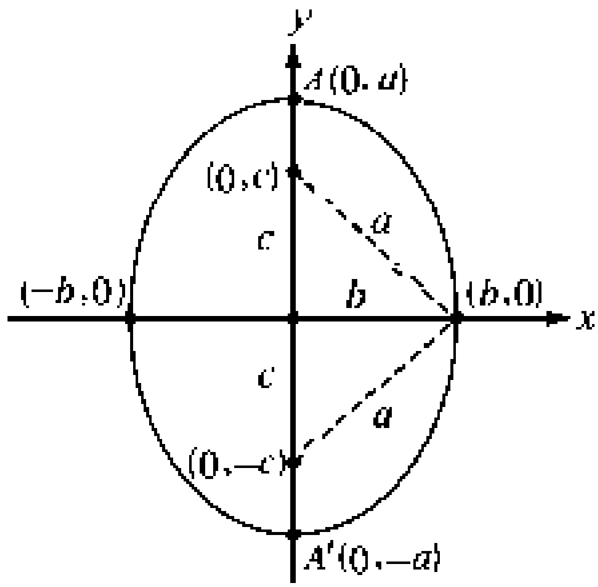
ملاحظات:

- النقطتين الثابتتين $F'(c,0)=(ae,0), F(-c,0)=(-ae,0)$ تسمي ببؤرتي القطع الناقص.
- الخط المستقيم المار بالبؤرتين يسمي بالمحور الأكبر وطوله $2a$.
- الخط المستقيم العمودي علي المحور الأكبر من منتصفة يسمي بالمحور الأصغر وطوله $2b$.
- نقطة تقاطع المحور الأكبر مع المحور الأصغر تسمي بمركز القطع الناقص.

❖ نقطتي تقاطع المحور الأكبر مع منحني القطع تسمي برأسي القطع الناقص.

وبالتالي نجد أن المعادلة (٤) تمثل قطع ناقص مركزه نقطة الأصل، ومحوره الأكبر منطبق علي محور ox ومحوره الأصغر منطبق علي محور oy. وإحداثيات بؤرتيه $(\pm c,0)$ حيث $c=\sqrt{a^2-b^2}$ وطول محوره الأكبر يساوي $2a$ وطول محوره الأصغر يساوي $2b$ وطول وتره البؤري العمودي يساوي $\frac{2b^2}{a}$ والاختلاف المركزي له $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}<1$. ومعادلتي دليليه هما $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$.

ملحوظة (١): وإذا كان المحور الأكبر للقطع الناقص منطبق علي محور oy ومحوره الأصغر منطبق علي محور ox كما بالشكل:



فإن معادلته تكون علي الصورة:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \qquad (5)$$

وإحداثيات بؤرتيه $(0,\pm c)$ حيث أن $c=\sqrt{a^2-b^2}$. وبالتالي تكون المعادلة (٤) تمثل قطع ناقص أفقي والمعادلة (٥) تمثل قطع ناقص رأسي والصفات الهندسية لهما تكون كما بالجداول التالي:

اتجاه القطع	أفقي	رأسي
المعادلة القياسية	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
المركز	(0,0)	(0,0)

إحداثيات الرأسين	$A(a,0),\ A'(-a,0),$	$A(0,a),\ A'(0,-a),$
معادلة المحور الأكبر	$y=0$	$x=0$
معادلة المحور الأصغر	$x=0$	$y=0$
إحداثيات البؤرتين	$F'(-c,0)=(-ae,0)$ $F(c,0)=(ae,0)$	$F'(0,-c)=(0,-ae)$ $F(0,c)=(0,ae)$
معادلة الدليلين	$x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$
نهايتي المحور الأصغر	$(0,\pm b)$	$(\pm a,0)$

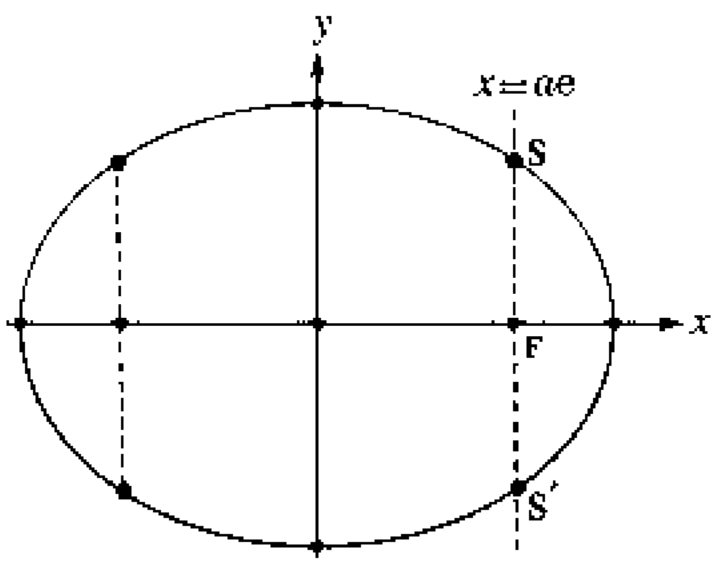
ملحوظة (٢):

❖ من المعادلتين (٣)، (٤) نجد أن: $c=ae \Rightarrow e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ وهو الاختلاف المركزي.

❖ إذا كانت $e=0 \Rightarrow \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=0 \Rightarrow a=b$ وبذلك تنطبق البؤرتين والمركز وتصبح المعادلة في الصورة: $x^2+y^2=a^2$ وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a. أي أن الدائرة هي حالة خاصة من القطع الناقص عندما $e=0$.

الوتر البؤري العمودي للقطع الناقص

الوتر البؤري العمودي للقطع الناقص هو الوتر المار بالبؤرة عموديا علي المحور الاكبر ويمكن حساب طولة كالاتي: حيث أن الوتر البؤري العمودي يمر بالبؤرة موازيا للدليل (كما بالشكل المقابل)، فتكون



معادلة الوتر البؤري العمودي هي $x = ae$ وهذا الوتر يقطع القطع الناقص في النقطتين $S(ae, y)$ ، $S'(ae, -y)$ وبالتالي فإن النقطة $S(ae, y)$ تحقق معادلة القطع أي أن:

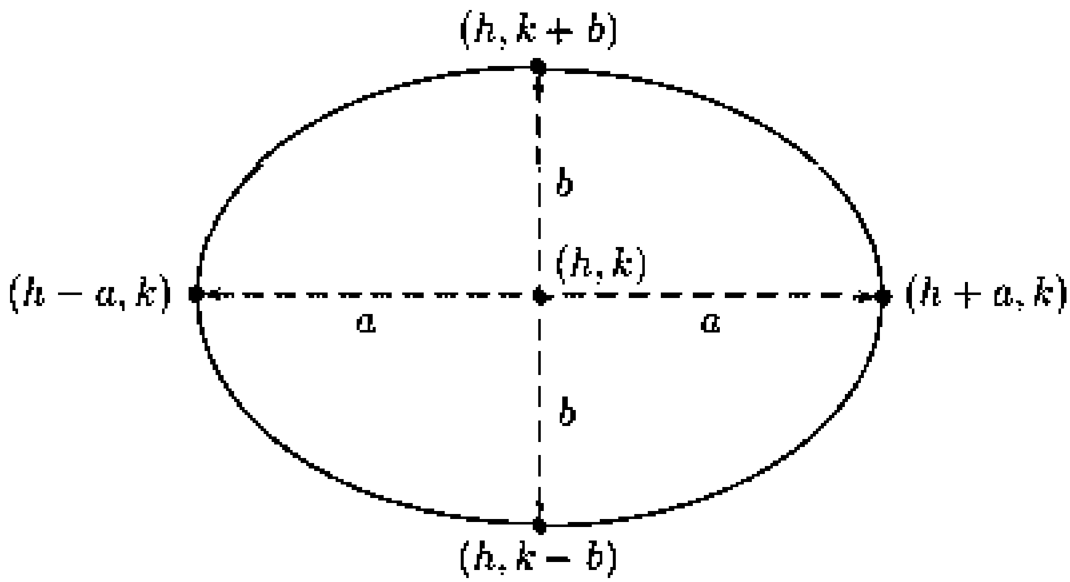
$$\frac{a^2e^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{e^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = (1 - e^2)b^2 = \frac{b^2}{a^2}b^2 \Rightarrow y^2 = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow y = \pm\frac{b^2}{a}$$

وبالتالي يكون طول الوتر البؤري العمودي للقطع الناقص هو:

$$SS' = |2y| = \frac{2b^2}{a}.$$

المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي محوريه يوازيان محوري الإحداثيات

أولاً: إذا كان المحور الأكبر للقطع يوازي محور ox : نعتبر قطع ناقص مركزة النقطة (h, k) ومحوره الاكبر يوازي محور ox ومحورة الاصغر يوازي محور oy ، كما بالشكل المقابل:



وبنقل محاور الإحداثيات موازية لنفسها إلي النقطة (h, k) حيث أن المحاور الجديدة هي OXY ، فتكون معادلة القطع الناقص منسوبة إلي المحاور الجديدة علي الصورة: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ باستخدام معادلات التحويل بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة والتي علي الصورة:

$$X = x - h, \quad Y = y - k$$

نحصل علي معادلة القطع الناقص بالنسبة إلي الإحداثيات الأصلية في الصورة:

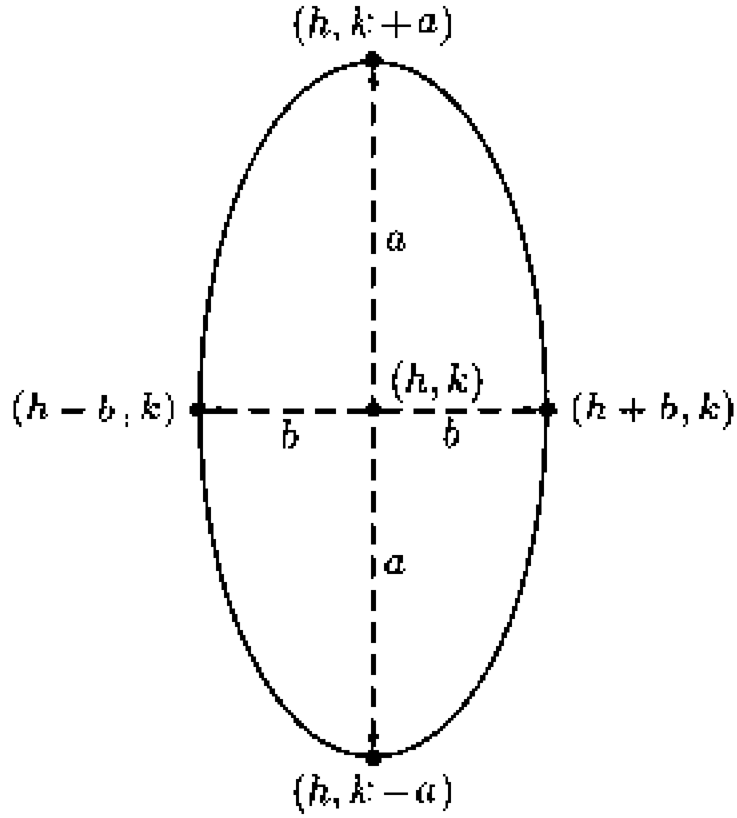
$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

وصفاته الهندسية كما في الجدول التالي :

	بالنسبة للمحاور oxy	بالنسبة للمحاور oxy
المعادلة القياسية	$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
إحداثيات المركز	$(0,0)$	(h,k)
معادلة المحور الأكبر	$Y=0$	$y-k=0$
معادلة المحور الأصغر	$X=0$	$x-h=0$
إحداثيات البؤرتين	$(\pm c,0)$	$(h\pm c,k)$
إحداثيات الرأسين	$(\pm a,0)$	$(h\pm a,k)$
معادلة الدليلين	$X=\pm\frac{a}{e}$	$x-h=\pm\frac{a}{e}$
نهايتي المحور الأصغر	$(0,\pm b)$	$(h,k\pm b)$

ثانياً: إذا كان المحور الأكبر للقطع يوازي محور oy : نعتبر قطع ناقص مركزه النقطة (h,k)

ومحوره الاكبر يوازي محور oy ومحوره الاصغر يوازي محور ox ، كما بالشكل المقابل:



وبنقل محاور الإحداثيات موازية لنفسها إلي النقطة (h,k) حيث أن المحاور الجديدة هي OXY ، فتكون معادلة القطع الناقص منسوبة إلي المحاور الجديدة علي الصورة: $\frac{Y^2}{a^2}+\frac{X^2}{b^2}=1$ وباستخدام معادلات التحويل بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة والتي علي الصورة:

$$X = x-h, \quad Y = y-k$$

نحصل علي معادلة القطع الناقص بالنسبة إلي الإحداثيات الأصلية في الصورة:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

والصفات الهندسية لهذا القطع كما في الجدول التالي:

	بالنسبة للمحاور OXY	بالنسبة للمحاور oxy
المعادلة القياسية	$\frac{X^2}{b^2}+\frac{Y^2}{a^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$
إحداثيات المركز	$(0,0)$	(h,k)
معادلة المحور الأكبر	$X=0$	$x-h=0$
معادلة المحور الأصغر	$Y=0$	$y-k=0$
إحداثيات البؤرتين	$(0,\pm c)$	$(h,k\pm c)$
إحداثيات الرأسين	$(\pm a,0)$	$(h,k\pm a)$
معادلة الدليلين	$Y=\pm\frac{a}{e}$	$y-k=\pm\frac{a}{e}$
نهايتي المحور الأصغر	$(\pm b,0)$	$(h\pm b,k)$

أمثله محـــــــــــــلولة

مثال (١): أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $(\pm 2,0)$ واختلافه المركزي يساوي $\frac{1}{2}$.

الحــــــــــــــــــل

من المعطيات نلاحظ أن بؤرتي القطع تقع علي محور ox وبالتالي فإن معادلة القطع المطلوبة يجب أن تكون علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ، ومن المعطيات نجد أن :

❖ إحداثيات البؤرتين هما: (1) $(\pm ae,0)=(\pm 2,0)\Rightarrow ae=2$

❖ الاختلاف المركزي : (2) $e=\dfrac{1}{2}$

من المعادلتين (١) ، (٢) نجد أن : (3) $a=4\Rightarrow a^2=16$

وكذلك

$$b^2=a^2(1-e^2)\Rightarrow b^2=16\left(1-\frac{1}{4}\right)=12 \qquad (4)$$

وبذلك تكون معادلة القطع المطلوبة هي: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

مثال (٢): أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $(0,\pm 2)$ ورأسية هما $(0,\pm 3)$.

الحـــــــــــــــــل

من المعطيات نلاحظ أن بؤرتي القطع تقع علي محور oy وبالتالي فإن معادلة القطع المطلوبة يجب أن تكون علي الصورة: $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ ومن المعطيات نجد أن :

❖ البؤرتين هما $(0,\pm 2)$ فيكون: $(0,\pm c)=(0,\pm 2)\Rightarrow c=2$

❖ الراسين هما $(0,\pm 3)$ فيكون: $(0,\pm a)=(0,\pm 3)\Rightarrow a=3$

وبالتالي يكون: $b^2=a^2-c^2=9-4=5$

ومن ثم فان معادلة القطع الناقص المطلوبة تكون هي: $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

مثال (٣): أرسم القطع الناقص $9x^2+16y^2=144$ ثم عين إحداثيات بؤرتيه ونهايتي كل من محورية الأكبر ولأصغر.

الحـــــــــــــــــل

المعادلة المعطاة يمكن كتابتها علي الصورة: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ ، وبمقارنة هذه المعادلة بمعادلة القطع الناقص التي علي الصورة: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

نجد أن: $a^2=16\Rightarrow a=4,\quad b^2=9\Rightarrow b=3$

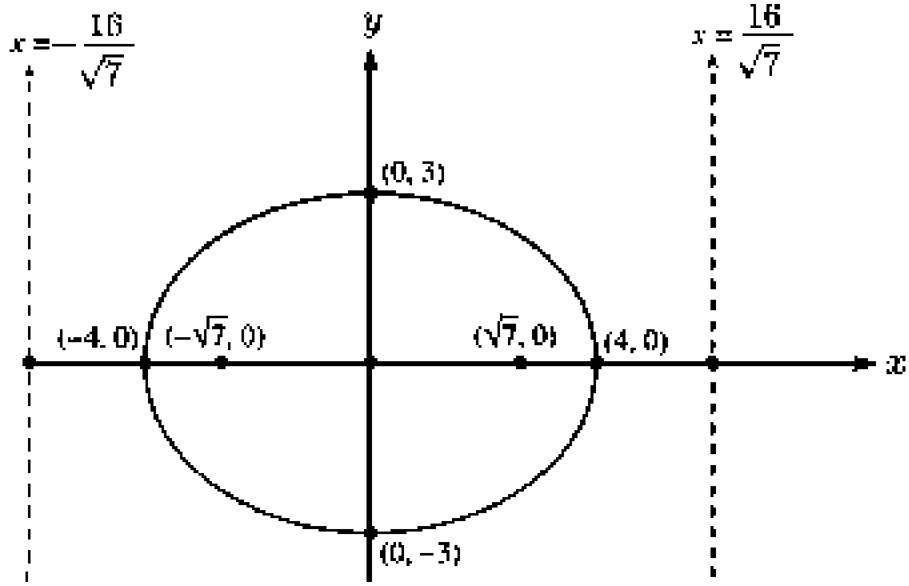
وبالتالي نجد أن: $c^2=a^2-b^2=16-9=7\Rightarrow c=\sqrt{7}$

وبالتالي تكون:

❖ إحداثيات البؤرتين هما $(\pm c,0)=(\pm\sqrt{7},0)$.

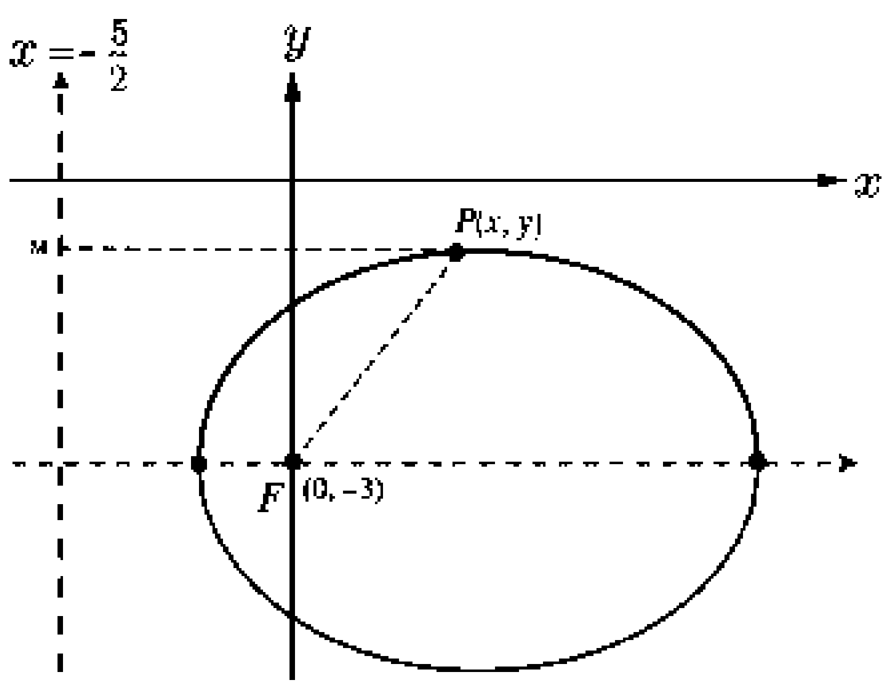
❖ إحداثيات نهايتي محوره الأكبر هما $(\pm a,0)=(\pm 4,0)$.

❖ إحداثيات نهايتي محوره الأصغر هما $(0,\pm b)=(0,\pm 3)$.



مثال (٤): أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرته $(0,-3)$ ودليلة الخط المستقيم $x=-\frac{5}{2}$ واختلافه المركزي $e=\frac{2}{3}$.

الحـــــــــــل



نفرض أن النقطة $P(x,y)$ هي أي نقطة علي القطع وأن F هي بؤرة هذا القطع فيكون:

$$\overline{PF}^2 = x^2 + (y+3)^2$$

وإذا كان PM هو العمودي من النقطة P علي الدليل فإن:

$$\overline{PM}^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$$

ومن التعريف العام للقطع الناقص يكون : $\overline{PF}^2 = e^2\overline{PM}^2$ أي أن:

$$x^2 + (y+3)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow 9\left(x^2 + (y+3)^2\right) = 4\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right)$$

وبالفك والاختصار نحصل علي : $5x^2 - 20x + 9y^2 + 54y + 56 = 0$ وبإكمال المربع بالنسبة للحدود x ، y نحصل علي:

$$5(x-2)^2 + 9(y+3)^2 - 20 - 81 + 56 = 0 \Rightarrow 5(x-2)^2 + 9(y+3)^2 - 20 - 81 + 56 = 0$$

وبالتالي نجد أن:

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{5} = 1$$

بنقل نقطه الأصل إلي النقطة $(2,-3)$ نجد أن: $X = x-2,\ Y = y+3$ وبالتالي تصبح معادلة القطع في الصورة:

$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{5} = 1$ وهي معادلة قطع ناقص أفقي.

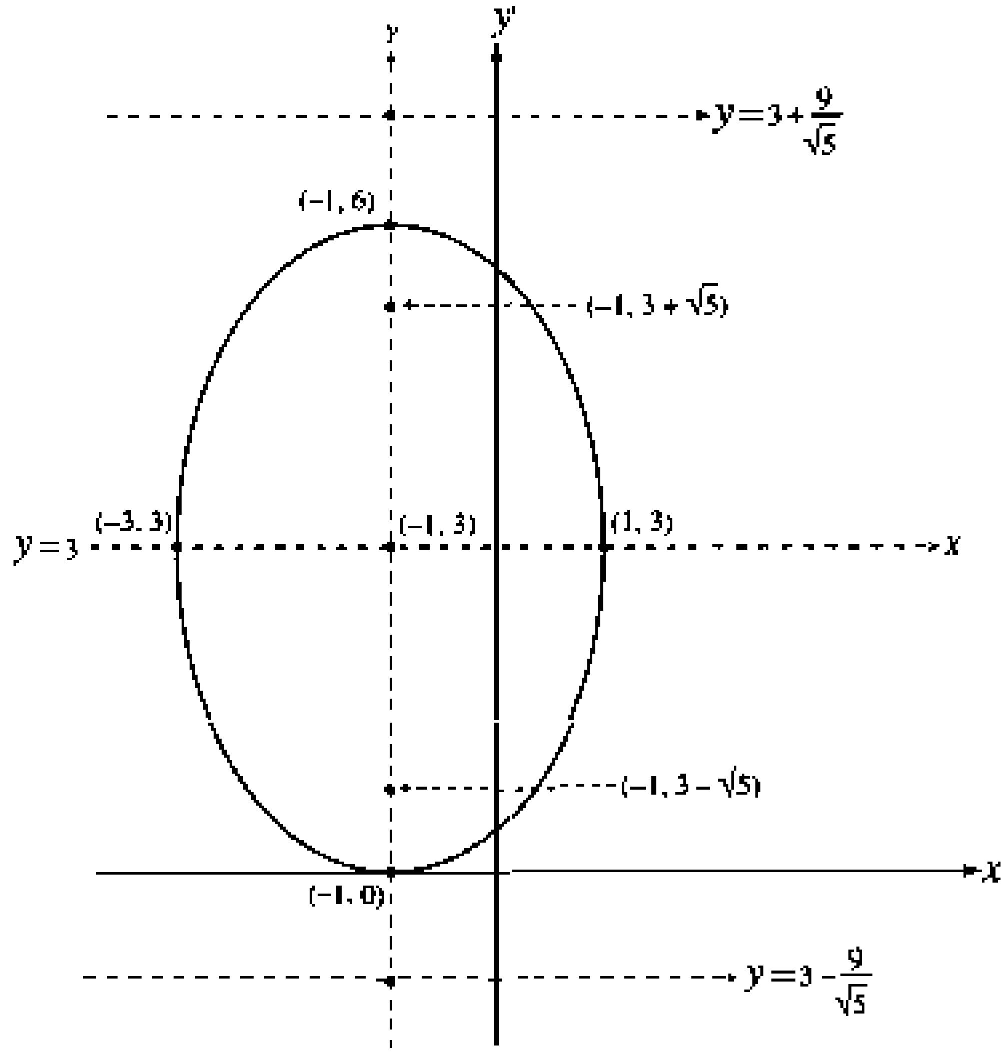
مثال (٥): بنقل محاور الاحداثيات الي نقطة مناسبة استنتج الصفات الهندسية للقطع الناقص الذي معادلته : $9x^2 + 4y^2 + 18x - 24y + 9 = 0$.

الحـــــــــــــــــــل

المعادلة المعطاة خالية من الحد xy وبالتالي يمكن اجراء عملية اكمال المربع بالنسبة لحدود x ، y كما يلي:

$$\begin{aligned}
9x^2 + 4y^2 + 18x - 24y + 9 = 0 &\Rightarrow 9x^2 + 18x + 4y^2 - 24y + 9 = 0\\
&\Rightarrow 9(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 6y) + 9 = 0\\
&\Rightarrow 9\left[(x+1)^2 - 1\right] + 4\left[(y-3)^2 - 9\right] + 9 = 0\\
&\Rightarrow 9(x+1)^2 + 4(y-3)^2 - 9 - 36 + 9 = 0\\
&\Rightarrow 9(x+1)^2 + 4(y-3)^2 = 36 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1
\end{aligned}$$

وبنقل محاور الاحداثيات الي النقطة $(-1,3)$ نجد أن: $X = x+1, \quad Y = y-3$ وبالتالي فإن المعادلة المعطاة يمكن كتابتها علي الصورة: $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{9}=1$ وهي معادلة قطع ناقص رأسي، كما بالشكل المقابل:



ويمكن استنتاج صفاتة الهندسية كما يلي:

من معادلة القطع نجد أن: $a^2=9 \Rightarrow a=3, \quad b^2=4 \Rightarrow b=2$

وبالتالي نجد أن: $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c^2=a^2-b^2=9-4=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}$

وبالتالي تكون الصفات الهندسية للقطع الناقص كما بالجدول التالي:

	بالنسبة للمحاور OXY	بالنسبة للمحاور oxy
المعادلة القياسية	$\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{9}=1$	$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$
إحداثيات المركز	$(0,0)$	$(-1,3)$

معادلة المحور الأكبر	$X=0$	$x+1=0 \Rightarrow x=-1$
معادلة المحور الأصغر	$Y=0$	$y-3=0 \Rightarrow y=3$
إحداثيات البؤرتين	$(0,\pm c)=(0\pm\sqrt{5})$	$(h,k\pm c)=(-1,3\pm\sqrt{5})$
إحداثيات الرأسين	$(0,\pm a)=(0,\pm 3)$	$(h,k\pm a)=(-1,3\pm 3)$
معادلة الدليلين	$Y=\pm\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}=\pm\frac{9}{\sqrt{5}}$	$y-3=\pm\frac{9}{\sqrt{5}} \Rightarrow y=3\pm\frac{9}{\sqrt{5}}$
نهايتي المحور الأصغر	$(\pm b,0)=(\pm 2,0)$	$(h\pm b,k)=(-1\pm 2,3)$

معادلة المماس والعمودي للقطع الناقص

نعتبر القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ،ويفرض أن النقطة (x_1,y_1) نقطة علية وبالتالي فان ميل المماس لهذا القطع عند أي نقطه علية هو: $m=\frac{dy}{dx}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$ وبالتالي فان ميل المماس للقطع الناقص عند النقطة (x_1,y_1) الواقعة علية هو: $m_1=\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}$ وبالتالي تكون معادلة المماس للقطع الناقص عند النقطة (x_1,y_1) الواقعة علية هي:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m_1=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}$$

ومنها نحصل علي: $\frac{y_1y-y_1^2}{b^2}=-\frac{x_1x-x_1^2}{a^2}$ وهذه المعادلة يمكن كتابتها علي الصورة:

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}$$

وحيث أن النقطة (x_1,y_1) تقع علي القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ فهي تحقق معادلته أي أن:

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

وبالتالي فأن معادلة المماس للقطع الناقص الذي معادلته بالصورة:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

عند النقطة (x_1, y_1) الواقعة علية تصبح بالصورة: $\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}=1$ و معادلة العمودي لهذا القطع عند النقطة (x_1, y_1) تكون بالصورة: $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{a^2}{b^2}\frac{y_1}{x_1}$.

المعادلات البارامترية للقطع الناقص

المعادلات البارامترية للقطع الناقص الذي معادلة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ هي:

$$x = a\cos\theta, \qquad y = b\sin\theta$$

حيث أن θ تسمي زاوية الاختلاف المركزي. لانة بحذف البارامتر θ بين المعادلتين ينتج أن:

$$\cos\theta = \frac{x}{a}, \quad \sin\theta = \frac{y}{b}$$

أي أن:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

ومعادلة المماس للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ عند النقطة $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ الواقعة علية تكون بالصورة:

$$\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1$$

شرط تماس خط مستقيم لقطع ناقص

الشرط اللازم لكي يكون الخط المستقيم $y = mx + c$ مماسا للقطع الناقص الذي معادلته علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ هو أن يكون $c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ ومعادلة المماس هي $y = mx \pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

وإحداثيات نقط التماس هي:

$$\left(\frac{-a^2 m}{\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{b^2}{\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$$

ويمكن استنتاج ذلك كالأتي:

معادلة المماس للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ يمكن إعادة كتابتها علي الصورة:

$$y=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}x+\frac{b^2}{y_1}$$

حيث أن (x_1, y_1) هي نقطة التماس.وبالتالي لكي يكون الخط المستقيم $y=mx+c$ مماسا للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ يجب أن يكون:

$$m=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1},\quad c=\frac{b^2}{y_1}$$

وبالتالي نجد أن:

$$y_1=\frac{b^2}{c},\quad x_1=-\frac{ma^2}{b^2}y_1=\left(-\frac{a^2}{b^2}\right)\left(\frac{b^2}{c}\right)=-\frac{ma^2}{c}$$

وبالتالي فإن نقطة التماس للقطع هي $(x_1,y_1)=\left(-\frac{ma^2}{c},\frac{b^2}{c}\right)$.

وحيث أن النقطة $(x_1,y_1)=\left(-\frac{ma^2}{c},\frac{b^2}{c}\right)$ هي نقط التماس فهي تحقق معادلة المماس أي أن:

$$y_1=mx_1+c\Rightarrow\frac{b^2}{c}=m\left(-\frac{ma^2}{c}\right)+c\Rightarrow c=\frac{b^2}{c}+\frac{m^2a^2}{c}\Rightarrow c^2=m^2a^2+b^2$$

أي أن الشرط اللازم لكي يكون المستقيم $y=mx+c$ مماسا للقطع الناقص هو أن:

$$c=\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}$$

ويكون المستقيمان $y=mx+\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}$ دائما يمسان القطع الناقص لجميع قيم m الحقيقية

وتكون نقطتي التماس هما:

$$\left(\frac{-ma^2}{\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}},\frac{b^2}{\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}}\right).$$

تمارين (٩-٢)

١) أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرته $F(3,0)$ ودليلة الخط المستقيم $L: y=\frac{5}{2}$ واختلافه المركزي $e=\frac{2}{3}$.

٢) بنقل نقطة الأصل إلي نقطة مناسبة استنتج الصفات الهندسية للقطاعات الناقصة الآتية:

❖ $9x^2+16y^2-18x-96y+9=0$.

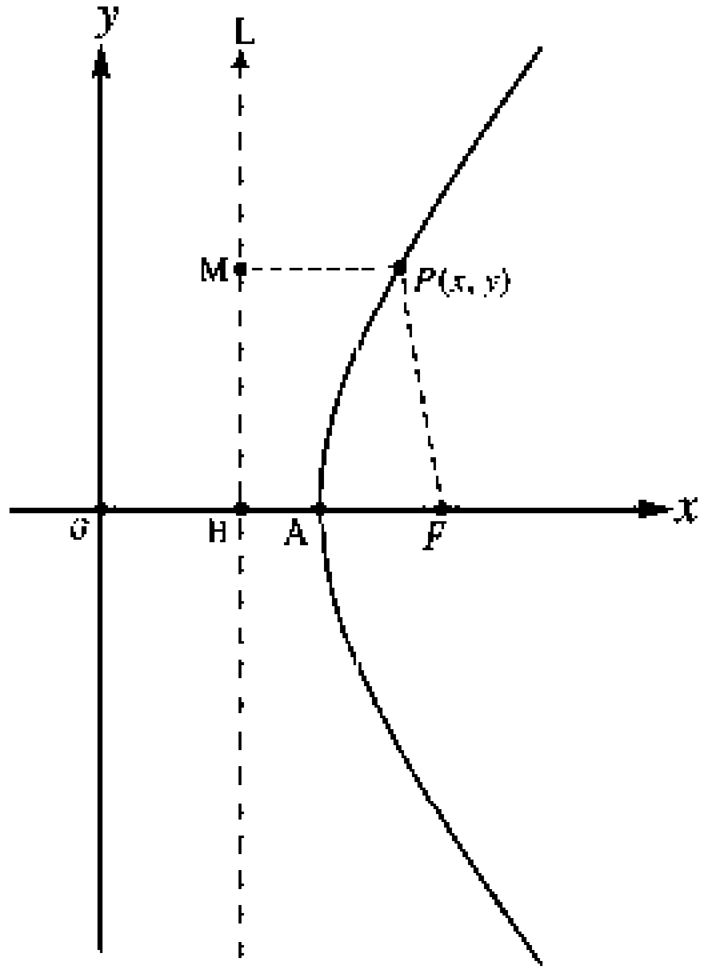
❖ $5x^2-20x+9y^2+54y+56=0$.

٣) بالتحويل إلي الإحداثيات الكارتيزية استنتج الصفات الهندسية للقطع الناقص الذي معادلته القطبية $r=\frac{6}{2-\sin\theta}$.

٤) أوجد الشرط اللازم لكي يكون المستقيم $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ مماسا للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

ثالثاً: القطع الزائد

تعريف: القطع الزائد هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة F (البؤرة) إلي بعدها عن خط مستقيم ثابت L (الدليل) يساوي مقدار ثابت (الاختلاف المركزي) اكبر من الواحد الصحيح .



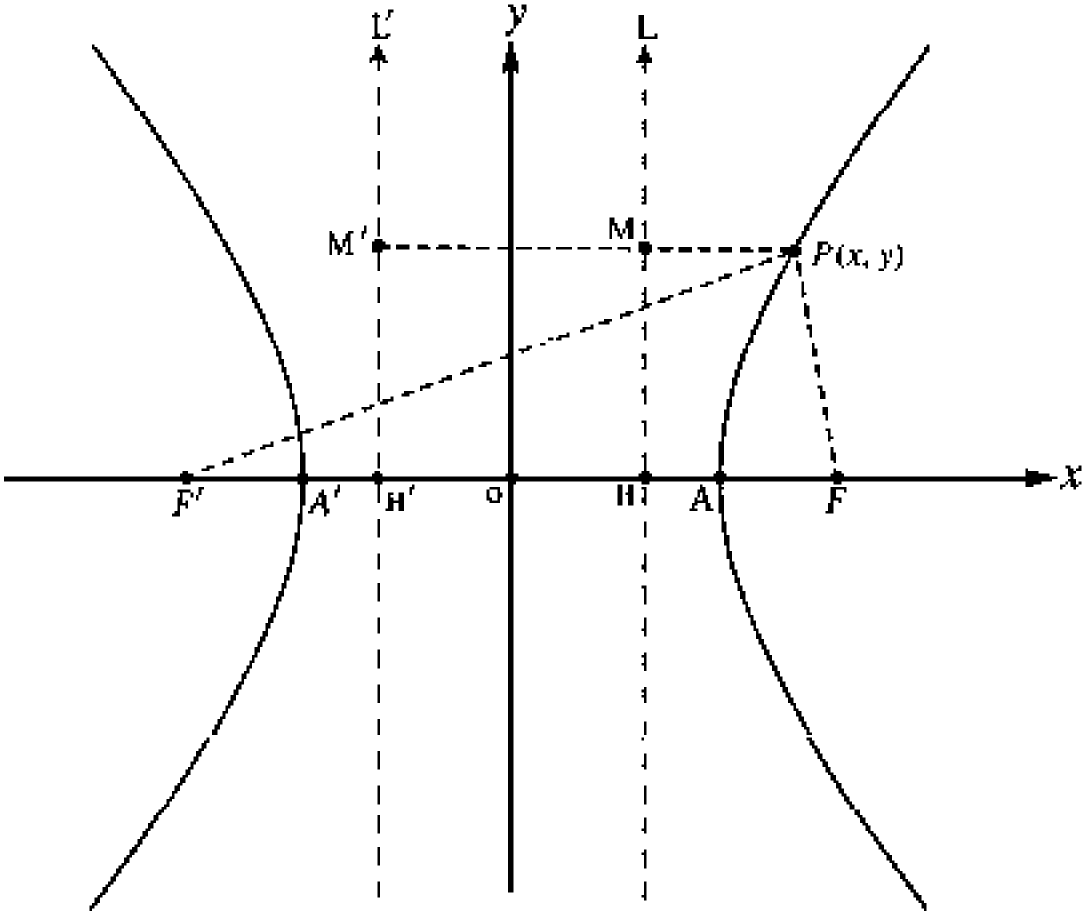
وهذا يعني أن القطع الزائد هو المنحني الناتج من حركة نقطة $P(x,y)$ بحيث يكون بعدها عن البؤرة F إلي بعدها عن الدليل L مرتبطاً بالعلاقة :

$$PF = ePM\,,\ e > 1 \qquad (1)$$

من هذا التعريف يمكن استنتاج المعادلة القياسية للقطع الزائد كما يلي:

لإيجاد المعادلة القياسية للقطع الزائد نفرض أن البؤرة F تقع علي محور ox وأن الدليل L يكون عمودي علي محور ox والنقطة $P(x,y)$ هي النقطة التي تتحرك في المستوي بحيث تحقق العلاقة (١).

وبالتالي فإن النقطة $P(x,y)$ خلال حركتها تقطع محور ox في النقطتين A ، A' (نقطتي التقسيم من الداخل والخارج)، كما بالشكل المقابل:



ومن تعريف القطع الزائد نجد أن: $\frac{AF}{AH}=\frac{A'F}{A'H}=e,\ e>1$ وبفرض أن المسافة بين النقطتين A ، A' هي مقدار ثابت $2a$ بحيث أن نقطة الأصل تقع في منتصف المسافة بينهما أي أن $OA'=OA$ وبذلك تكون إحداثيات النقطتين A ، A' هما $A(a,0)$ ، $A'(-a,0)$. وبالتالي من الشكل نجد أن:

$$AF=eAH\Rightarrow OF-OA=e(OA-OH)\qquad (2)$$

$$A'F=eA'H\Rightarrow OF+OA'=e(OA'+OH)\qquad (3)$$

بجمع المعادلتين (٢)، (٣) نجد أن: $AF+A'F=(e\,OA+OA')\Rightarrow 2OF=2e\,OA\Rightarrow OF=ae$

أي أن البؤرة تبعد عن نقطة الأصل مسافة قدرها ae أي أن البؤرة هي النقطة $F(ae,0)$.

وبطرح المعادلة (٢) من المعادلة (٣) نجد أن: $2OA=e(2OH)\Rightarrow OH=\frac{a}{e}$ أي أن الدليل يبعد عن المركز مسافة قدرها $\frac{a}{e}$ ،ومعادلته تكون بالصورة $x=\frac{a}{e}$. والبعد PM هو $x-\frac{a}{e}$.

وإذا كانت النقطة $P(x,y)$ تقع علي القطع الزائد فإن:

$$\overline{PF}=e\overline{PM}\Rightarrow\sqrt{(x-ae)^2+y^2}=e\left(x-\frac{a}{e}\right)^2$$

وبالفك والاختصار نجد أن: $x^2(e^2-1)-y^2=a^2(e^2-1)$ وحيث أن $e>1$ فإن e^2-1 يكون مقدار موجب دائما، وبوضع: $b^2=a^2(e^2-1)$ نحصل علي:

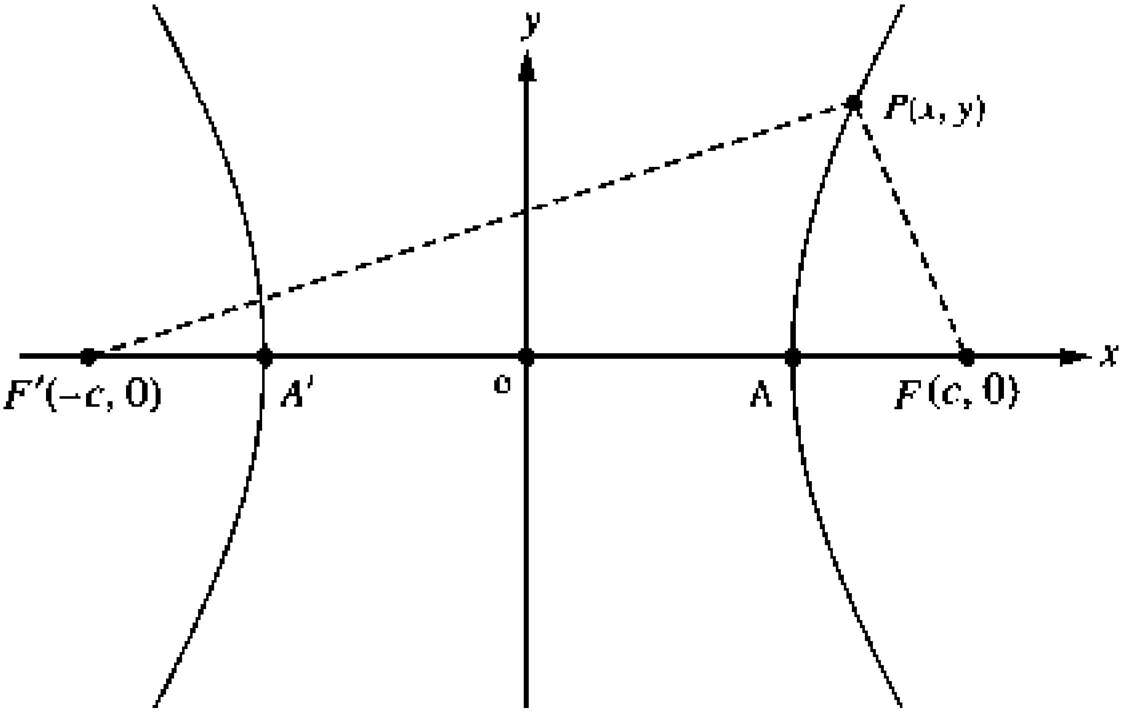
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3)$$

وذلك هي معادلة لقطع الزائد في صورتها القياسية عندما تقع بؤرته علي محور ox ويكون دليلة موازيا لمحور oy. ومن معادلة القطع نجد أن: $x=\pm a\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}$ وهذا يعني أن القطع الناقص يكون متماثل حول محور ox ويقطعه في نقطتين حقيقيتين هما $A(a,0)$ ، $A'(-a,0)$. وكذلك من معادلة القطع نجد أن: $y=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$ وهذا يعني أن القطع الزائد يكون متماثل حول محور oy ولا يقطعه في أي نقطة حقيقية، وكذلك يكون القطع متماثل حول نقطة الأصل أيضاً والتي تمثل مركز القطع . ومن تماثل القطع الزائد حول محوري الإحداثيات وحول نقطة الأصل نجد أنة توجد له بؤرة أخري هي النقطة $F'(-ae,0)$ وكذلك يوجد للقطع دليل أخر هو المستقيم الذي معادلته $x=-\frac{a}{e}$.

ومن الشكل المقابل نجد أن: $\overline{PF}=e\overline{PM},\quad \overline{PF'}=e\overline{PM'}$ ومنها نجد أن:

$$\overline{PF'}-\overline{PF}=e(\overline{PM'}-\overline{PM})=e\overline{MM'}=e\overline{HH'}=e\left(\frac{2a}{e}\right)=2a$$

ومن هنا يمكن صياغة تعريف اخر للقطع الزائد كا لاتي: القطع الزائد هو الحل الهندسي لنقطة $P(x,y)$ تتحرك في المستوي بحيث يكون الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي مقدار ثابت (يساوي طول المحور القاطع للقطع الزائد).حيث أن المحور القاطع هو الخط المستقيم المار بالبؤرتين F ، F' وطوله يساوي $AA'=2a$. ومن هذا التعريف يمكن استنتاج معادلة القطع الزائد كما يأتي: بفرض أن النقطتين الثابتتين هما $F(c,0)$ ، $F'(-c,0)$ حيث أن c هو بعد أي منهما عن نقطة الأصل. ولتكن $P(x,y)$ نقطة في المستوى تقع علي القطع الزائد ، كما بالشكل المقابل:



ومن التعريف السابق للقطع الزائد يكون: $c > a$ ، $\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a,$ أي أن:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

وبالاختصار كما فعلنا في استنتاج المعادلة القياسية القطع الناقص نحصل علي:

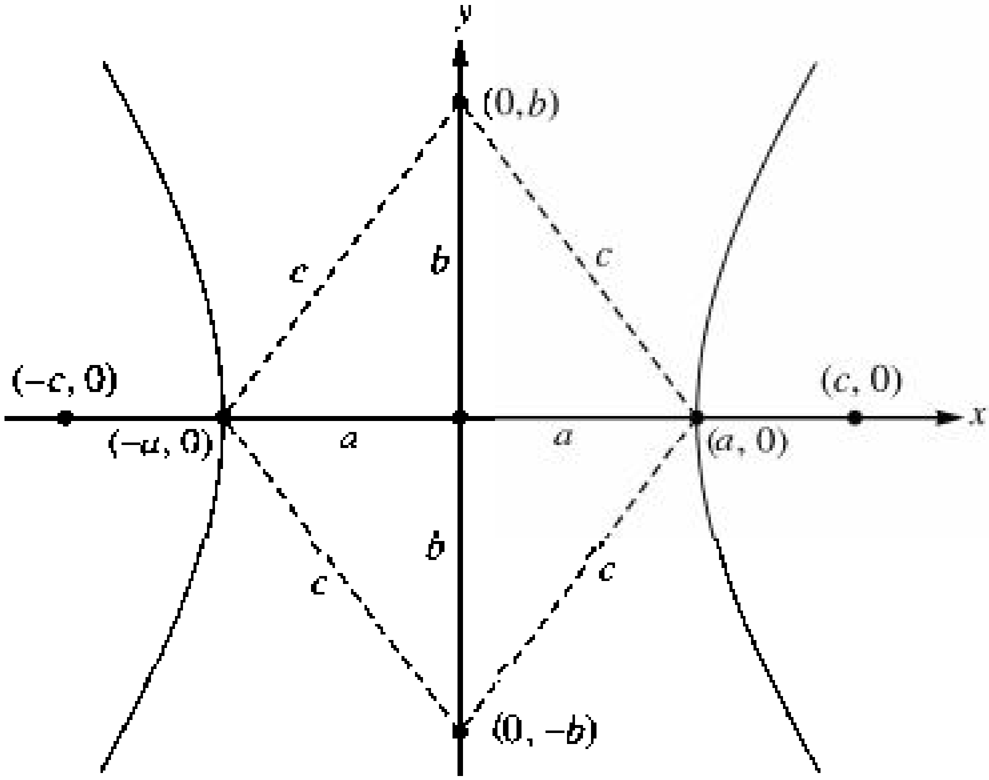
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

ونظراً لان $c > a$ فإن $c^2 - a^2 > 0$ وبوضع: $b^2 = c^2 - a^2$ (أي أن: $c^2 = a^2 + b^2$) نجد أن الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد تكون بالصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

ملاحظات:

- النقطتين الثابتتين F ، F' تسمي بؤرتي القطع الزائد.
- الخط المستقيم المار ببؤرتي القطع الزائد F ، F' يسمي المحور للقاطع القطع الزائد.
- الخط المستقيم العمودي علي المحور القاطع من منتصفة (النقطة O) يسمي المحور المرافق أو المحور التخيلي للقطع الزائد.
- نقطة تقاطع المحور القاطع مع المحور المرافق (النقطة O) تسمي مركز القطع الزائد.
- نقطتي تقاطع المحور القاطع مع منحني القطع (النقطتين A ، A') تسمي برأسي القطع الزائد.

وبذلك تكون المعادلة التي علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هي المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، ومحوره القاطع هو محور ox وطوله يساوي $2a$ ومحوره المرافق هو محور oy وطوله يساوي $2b$. وبؤرتيه هما النقطتين $(\pm c,0)=(\pm ae,0)$ حيث أن $c=\sqrt{a^2+b^2}$ ، ورأسيه هما النقطتين $(\pm a,0)$ ، كما بالشكل المقابل:

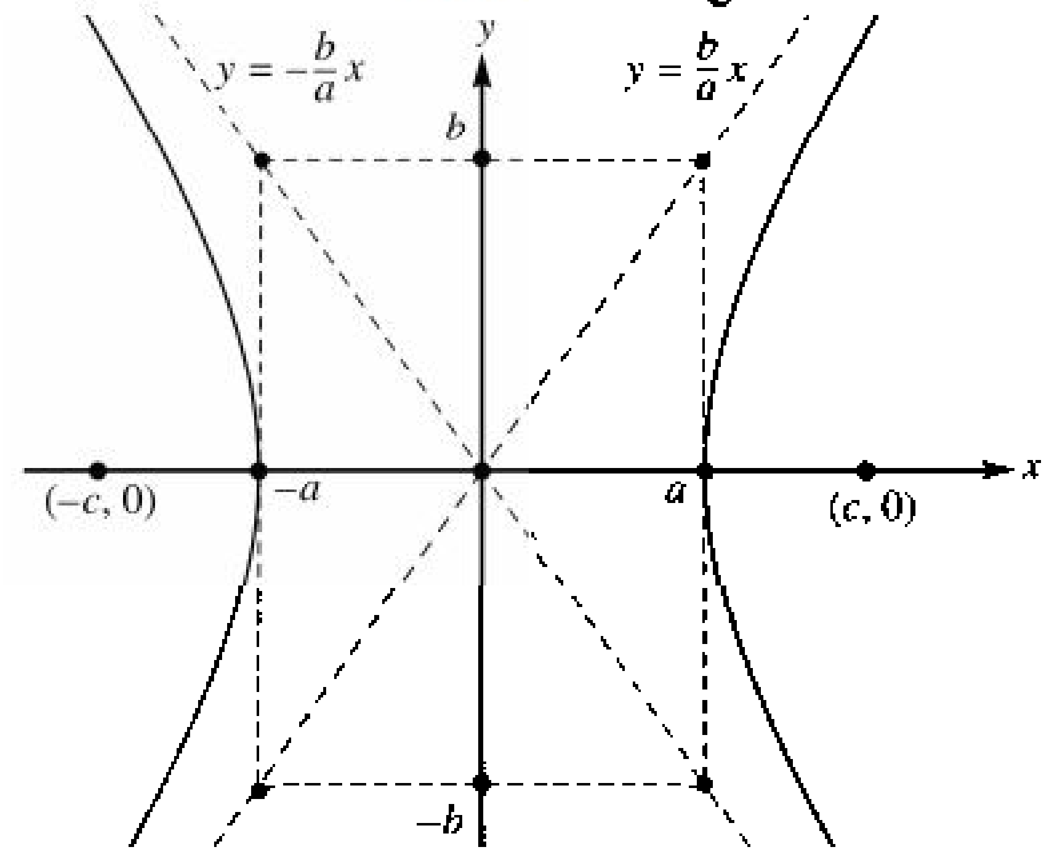


الاختلاف المركزي للقطع الزائد: مما سبق نلاحظ أن بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته القياسية علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هما النقطتين $(\pm c,0)=(\pm ae,0)$ حيث أن $c=\sqrt{a^2+b^2}$ ، وبالتالي فإن الاختلاف المركزي للقطع الزائد يتعين من العلاقة: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}>1$ وبالتالي نجد أن معادلتي الدليلين لهذا القطع هما: $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$.

الخطان التقاربيان للقطع الزائد: الخطان التقاربيان للقطع الزائد هما خطان مستقيمان يمسان القطع في نقطة عند اللانهاية، ويمكن الحصول معادلتيهما من المعادلة القياسية للقطع وذلك بأن نجعل قيمة x تزيد إلي ما لانهاية. من المعادلة القياسية للقطع الزائد نستنتج أن:

$$y=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)}=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)}$$

وعندما $x\to\infty$ فإن المقدار $\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\to 1$ وتصبح معادلة الخطان التقاربيان بالصورة: $y=\pm\frac{b}{a}x$ وهما خطين مستقيمين يمران بمركز القطع، كما بالشكل المقابل:

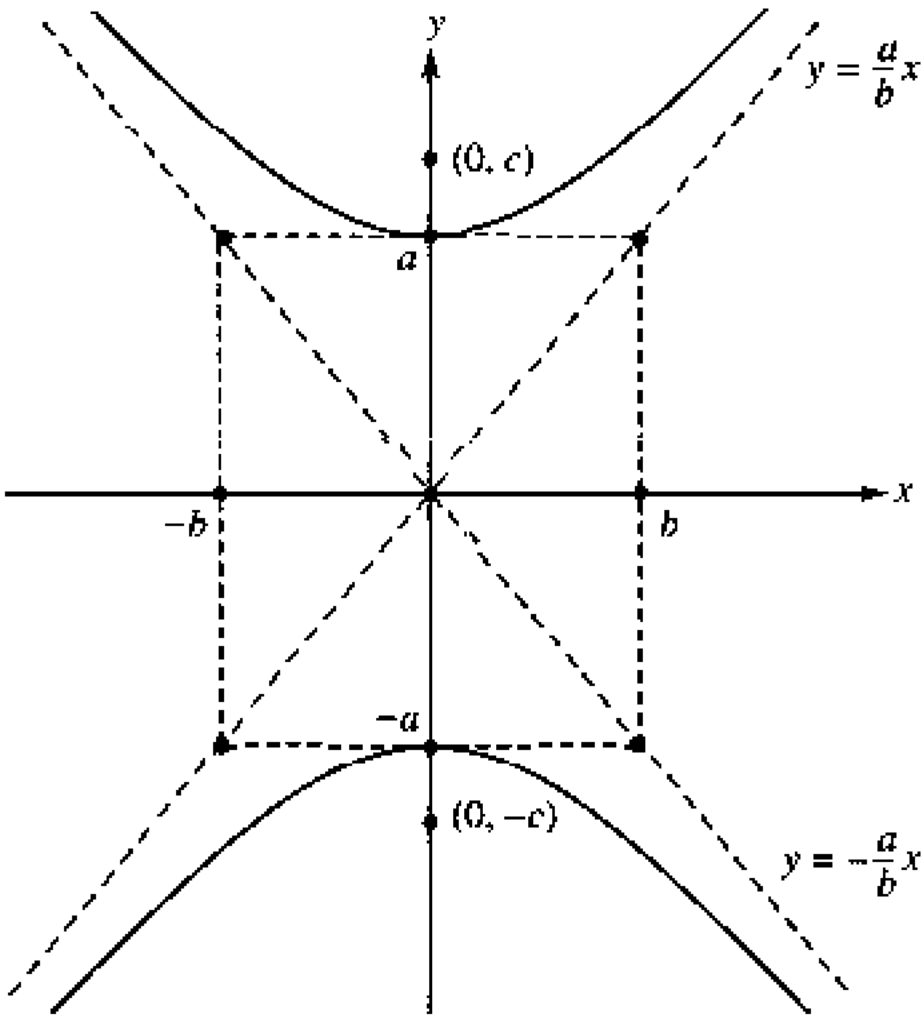


والمعادلة المشتركة للخطان التقاربيان هي:

$$\left(y-\frac{b}{a}x\right)\left(y+\frac{b}{a}x\right)=0\Rightarrow y^2-\frac{b^2}{a^2}x^2=0\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

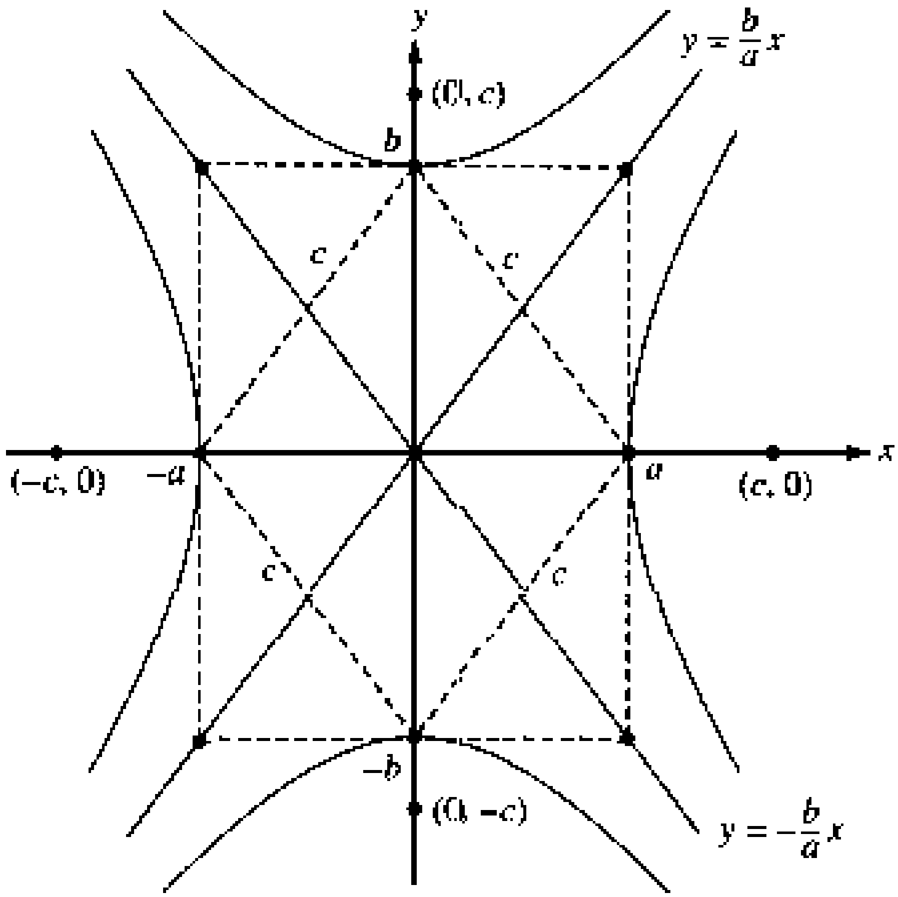
أي أن المعادلة التي على الصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ هي المعادلة المشتركة للخطان التقاربيان للقطع الزائد الذي معادلته علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ، وهي تختلف عن معادلة القطع في الحد المطلق فقط وهذا يعني أن معادلتي الخطين التقاربيان للقطع الزائد تنتجان مباشرة من المعادلة القياسية بجعل الحد المطلق مساوياً للصفر أي أن: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\Rightarrow\frac{x}{a}=\pm\frac{y}{b}\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x$ ويعتبر الخطان التقاربيان عناصر مساعدة لسرعة رسم القطع الزائد بدقة.

القطع الزائد الذي محوره القاطع هو محور oy : إذا كانت بؤرتي القطع الزائد هما النقطتين $(0,c)$ ، $(0,-c)$ فإن المعادلة القياسية للقطع تأخذ الصورة: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ وفي هذه الحالة يكون المحور القاطع هو محور oy ومحوره المرافق هو محور ox وتكون رأسي القطع هما النقطتين $(0,a),(0,-a)$ ، والمعادلة المشتركة لخطاه التقاربيان تكون علي الصورة : $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=0$ ، أي أن خطاه التقاربيان هما: $y=\pm\frac{a}{b}x$ ، كما بالشكل المقابل:

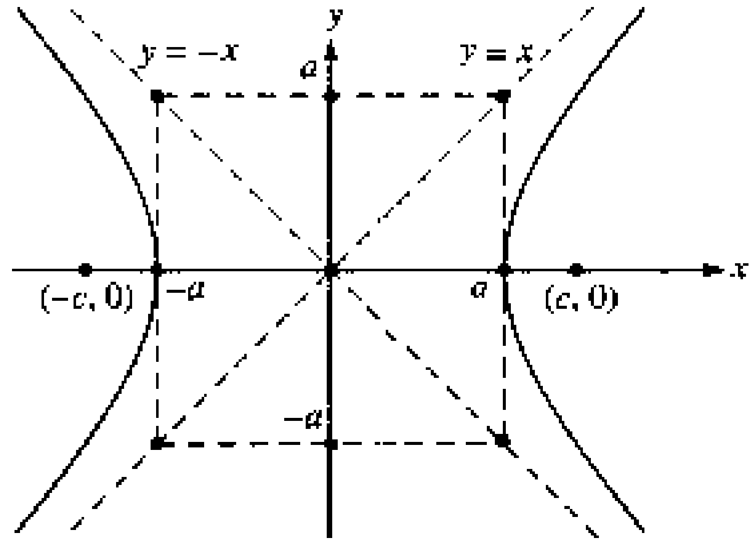


وهنا القطع يمكن إعادة كتابة معادلته علي الصورة: $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1$ وبذلك تكون الصورة العامة المعادلة القطع الزائد الذي مركزة نقطة الأصل وتقع بؤرتاه علي احدي محوري الإحداثيات هي: $Ax^2-By^2=\pm1$ ونأخذ الإشارة الموجبة إذا وقعت البؤرتان علي محور ox ونأخذ الإشارة السالبة إذا وقعت البؤرتان علي محور oy .

القطع الزائد المرافق: القطع الزائد المرافق للقطع $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هو القطع الزائد الذي له نفس المركز ومحوره القاطع هو المحور المرافق للقطع الأول وله نفس الخطان التقاربيان ومعادلته هي $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ ، كما بالشكل المقابل:

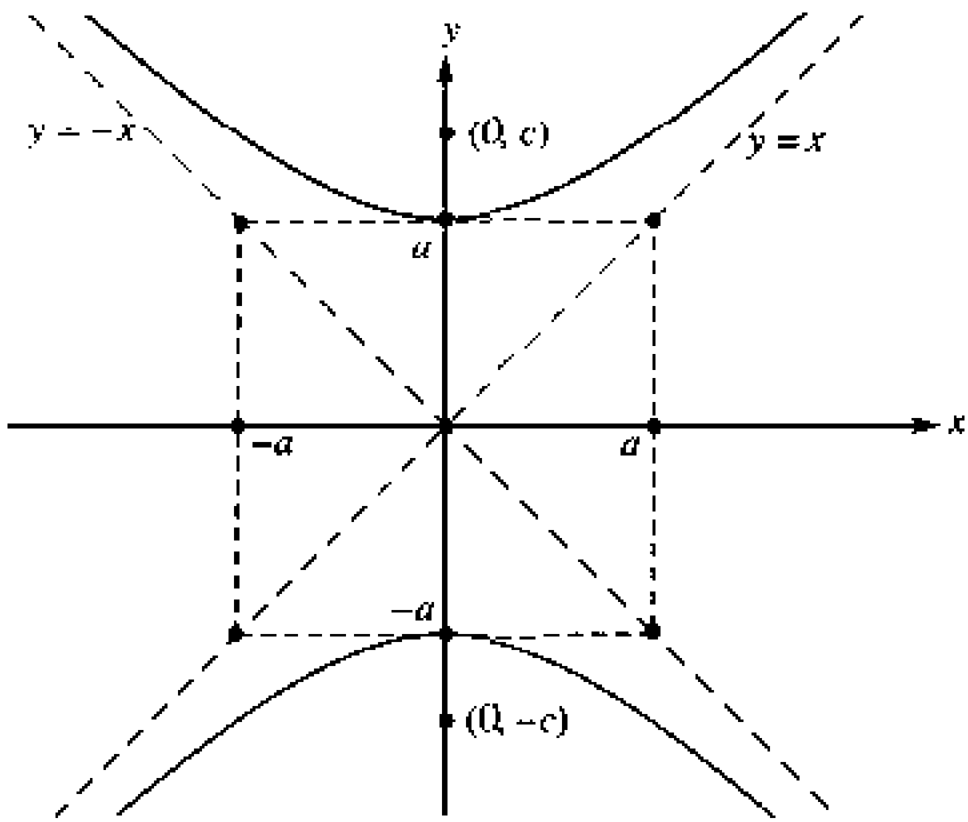


القطع الزائد القائم: عند تساوي طول المحور القاطع بطول المحور المرافق في حالة القطع الزائد الذي معادلته القياسية علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ نحصل علي: $x^2-y^2=a^2$ ويسمي القطع الزائد في هذه الحالة بالقطع الزائد القائم، والاختلاف المركزي للقطع الزائد القائم هو $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{a^2}{a^2}}=\sqrt{2}>1$. والخطان التقاربيان لهذا القطع هما $y=\pm x$ وهما خطان مستقيمان يتقاطعان علي التعامد عند مركز القطع أي عند نقطة الأصل ونلاحظ أن ميل المستقيم الأول هو 1 أي يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع محور ox وبالتالي يصنع المستقيم الثاني زاوية $\frac{3\pi}{4}$ أو $-\frac{\pi}{4}$ مع محور ox ، كما بالشكل المقابل:



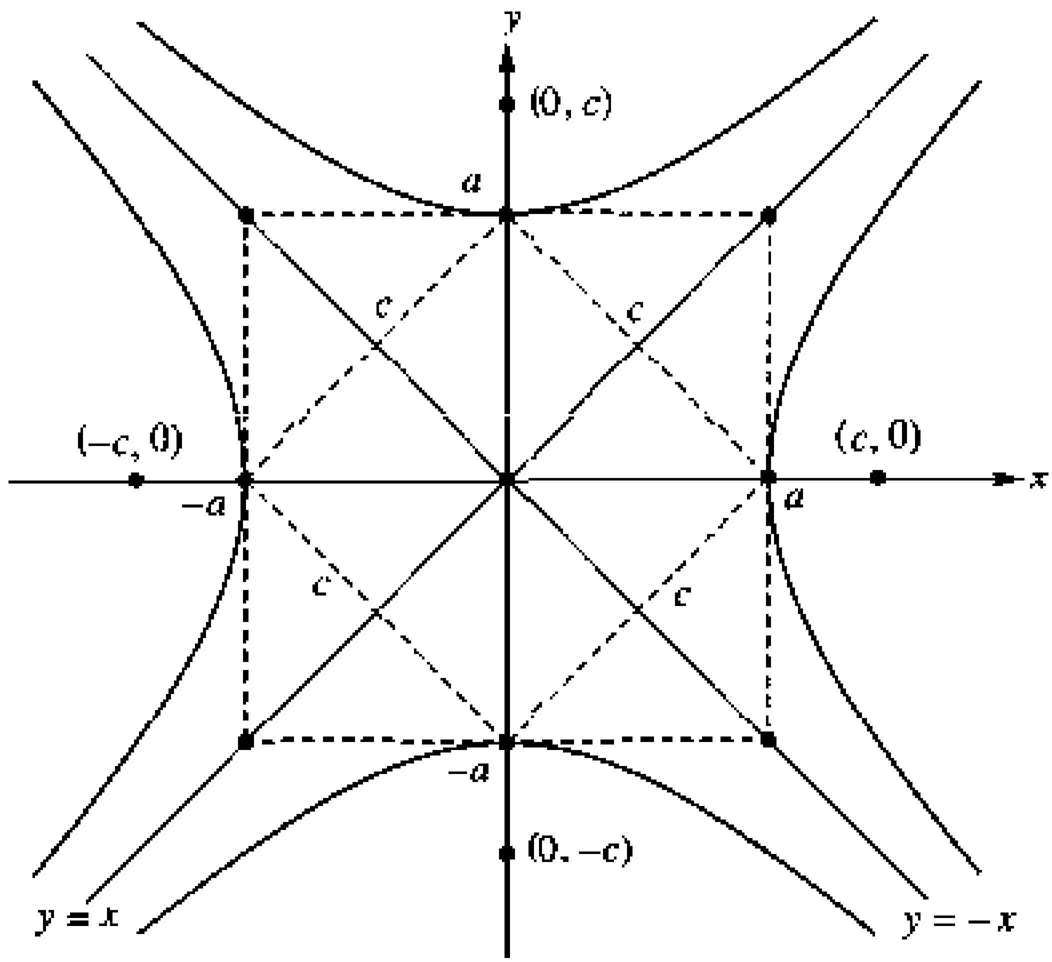
وبتدوير محاور الإحداثيات زاوية $\theta=\frac{\pi}{4}$ نحصل علي العلاقات الآتية : $x=\frac{X-Y}{\sqrt{2}}, y=\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$

وبالتعويض من هاتين المعادلتين في المعادلة: $x^2-y^2=a^2$ نحصل علي: $XY=-a^2$ وهي صورة قياسية أخري لمعادلة القطع الزائد القائم ونلاحظ أن الخطوط لتقاربيه لهذا القطع هي محاور الإحداثيات الجديدة X ، Y. والقطع الزائد الذي معادلته $y^2-x^2=a^2$ هو القطع الزائد المرافق للقطع الزائد القائم الذي معادلته $x^2-y^2=a^2$ ، وهو قطع زائد قائم أيضاً محوره القاطع هو محور oy ، كما بالشكل المقابل:

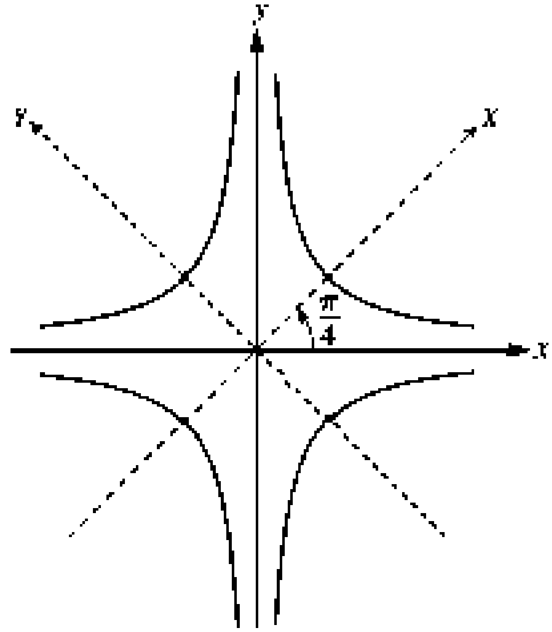


وبتدوير محاور الإحداثيات زاوية $\theta=\frac{\pi}{4}$ مع بقاء نقطة الأصل ثابتة نجد أن معادلة القطع الزائد القائم $y^2-x^2=a^2$ تتحول إلي الصورة $XY=a^2$ وهي صورة أخري للقطع الزائد القائم الذي محوره القاطع هو محور oy. ونلاحظ أن الخطوط لتقاربيه لهذا القطع هي محاور الإحداثيات الجديدة X ، Y.

وبالتالي نجد أن القطع الزائد الذي معادلته (بالنسبه للمحاور الإحداثيات الجديدة X ، Y) علي الصورة: $XY=a^2$ هو القطع الزائد المرافق للقطع الزائد الذي معادلته (بالنسبه للمحاور الإحداثيات الجديدة X ، Y) علي الصورة: $XY=-a^2$ وكلاً منهما قطع زائد قائم، كما بالشكل المقابل:

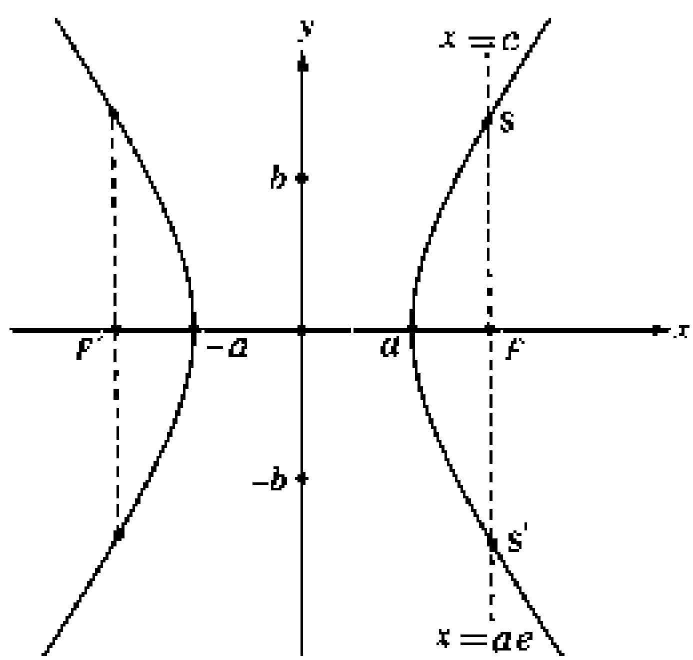


ملحوظة (١): قياسا علي ما سبق نستنتج أن المعادلة التي علي الصورة: $xy=\pm k^2$ حيث أن k ثابت تمثل عائلة من القطاعات الزائدة القائمه التي خطوطها التقاربية هي محاور الإحداثيات الأصلية. ويقع أحد فرعي أي من هذه القطاعات في الربع الأول ويقع الفرع الثاني في الربع الثالث عندما نأخذ الإشارة الموجبة،ويقع أحد فرعي أي من هذه القطاعات في الربع الثاني والفرع الأخر يقع في الربع الرابع عندما نأخذ الإشارة السالبة،كما بالشكل المقابل:



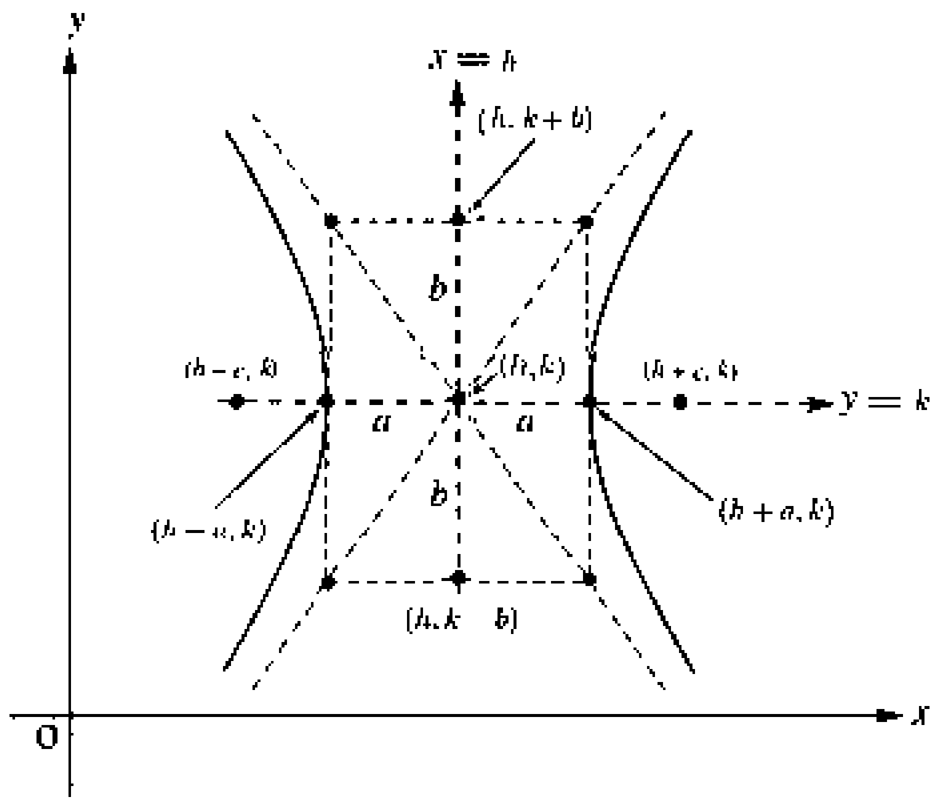
وبتدوير محاور الإحداثيات زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع بقاء نقطة الأصل ثابتة نجد أن معادلة عائلة القطاعات الزائدة القائم والتي علي الصورة $xy=\pm k^2$ تتحول إلي الصورة : $X^2-Y^2=\pm 2k^2$ وهي صورة أخري لمعادله عائلة القطاعات الزائدة القائم التي خطوطها التقاربيه هي محاور الإحداثيات الأصلية.

الوتر البؤري العمودي للقطع الزائد: بالتشابه مع حالة القطع الناقص يمكن إثبات بسهولة أن طول الوتر البؤري العمودي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هو $ss'=|2y|=\frac{2b^2}{a}$ ، كما بالشكل المقابل:

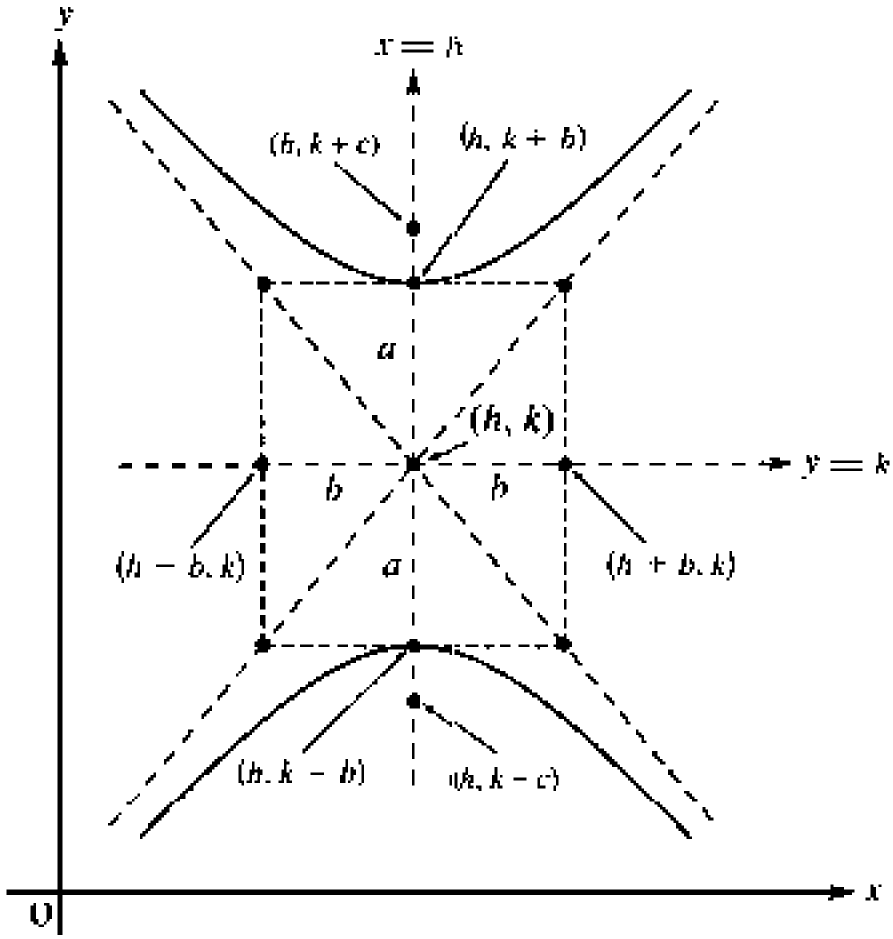


معادلة القطع الزائد الذي محوره القاطع يوازي أحد محوري الإحداثيات

ملحوظة (٣): إذا كان مركز القطع هو النقطة (h,k) وكان محوره القاطع يوازي محور ox فإن الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد تكون علي الصورة: $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ وتكون بؤرتي القطع في هذه الحالة هما النقطتين $(h+c,k)$ ، $(h-c,k)$ و رأسيه هما النقطتين $(h+a,k)$ ، $(h-a,k)$ وخطاه التقاربيان هما $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$ ، ومعادلة محوره القاطع هي $y=k$ ومعادلة محوره المرافق هي $x=k$ ، كما بالشكل المقابل:



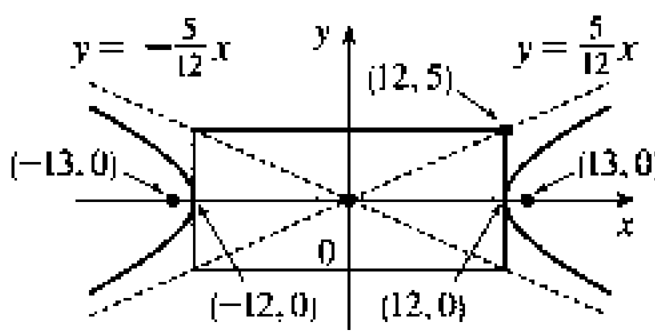
ملحوظة (٤): إذا كان مركز القطع هو النقطة (h,k) وكان محوره القاطع يوازي محور oy فإن الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد تكون علي الصورة: $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ وتكون بؤرتي القطع في هذه الحالة هما النقطتين $(h,k+c)$ ، $(h,k-c)$ ورأسيه هما النقطتين $(h,k+a)$ ، $(h,k-a)$ وخطاه التقاربيان هما $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$ ، ومعادلة محوره القاطع هي $x=h$ ومعادلة محوره المرافق هي $y=k$ ، كما بالشكل المقابل:



أمثلة محـــــــــلولة

مثال (١): ارسم القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ ثم وأوجد إحداثيات كلاً من بؤرتيه ورأسية ومعادلتي خطاه التقاربيان.

الحـــــــــل



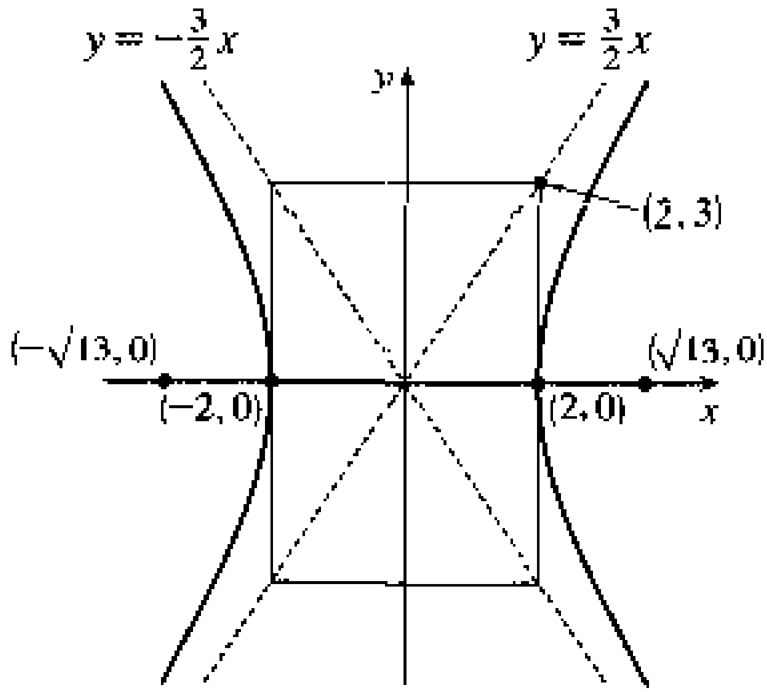
بمقارنة المعادلة المعطاة بمعادلة القطع الناقد التي علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ نحصل علي: $a=12$ ، $b=5$ ، وبالتالي نجد أن: $c=\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow c=13$ وبالتالي يكون مركز القطع هو نقطة الأصل

ورأسية هما النقطتين $(\pm12,0)$ وبؤرتيه هما النقطتين $(\pm13,0)$ ومعادلتي الخطان التقاربيان هما : $y=\pm\frac{b}{a}=\pm\frac{5}{12}x$ ، كما بالشكل المقابل.

مثال (٢): ارسم القطع الزائد $9x^2-4y^2=36$ ثم استنتج صفاته الهندسية.

الحـــــــــــــــــــل

معادلة القطع الزائد المعطاة يمكن إعادة كتابتها لتصبح بالصورة: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ وبالتالي تكون $b=3, a=2$ ومن ثم فإن: $c^2=a^2+b^2=\sqrt{13}$ وبالتالي فإن مركز القطع هو نقطة الأصل وبؤرتيه هما النقطتين $(\pm\sqrt{13},0)$ ورأسيه هما النقطتين $(\pm2,0)$ومعادلتي الخطان التقاربيان هما $y=\pm\frac{b}{a}=\pm\frac{3}{2}x$ ، كما بالشكل المقابل:

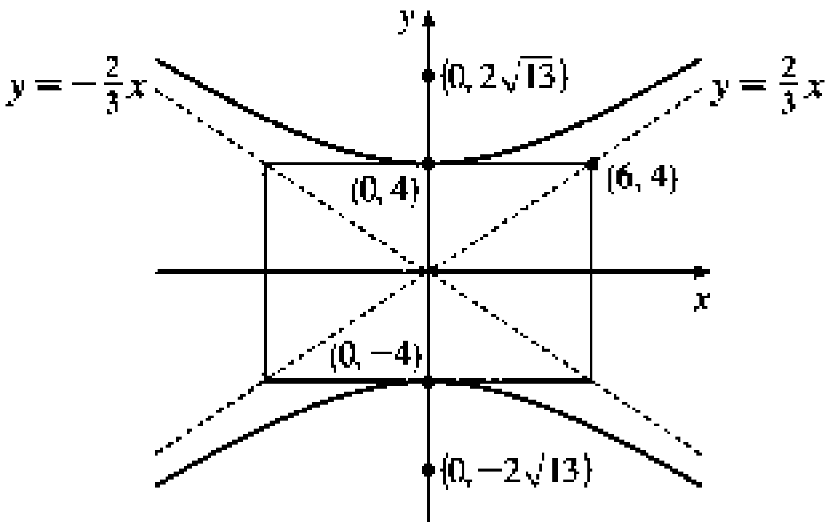


مثال (٣): ارسم القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{36}=1$ ثم وأوجد إحداثيات كلاً من بؤرتيه ورأسية .

الحـــــــــــــــل

بمقارنة المعادلة المعطاة بمعادلة القطع الزائد التي علي الصورة: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ نحصل علي: $a=4$ ، $b=6$ وبالتالي نجد أن: $c=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow c=2\sqrt{13}$ وبالتالي يكون مركز القطع هو نقطة الأصل

ورأسية هما النقطتين $(0,\pm4)$ وبؤرتيه هما $(0,\pm2\sqrt{13})$ ومعادلتي الخطان التقاربيان هما: $y=\pm\frac{a}{b}=\pm\frac{2}{3}x$ ، كما بالشكل المقابل:



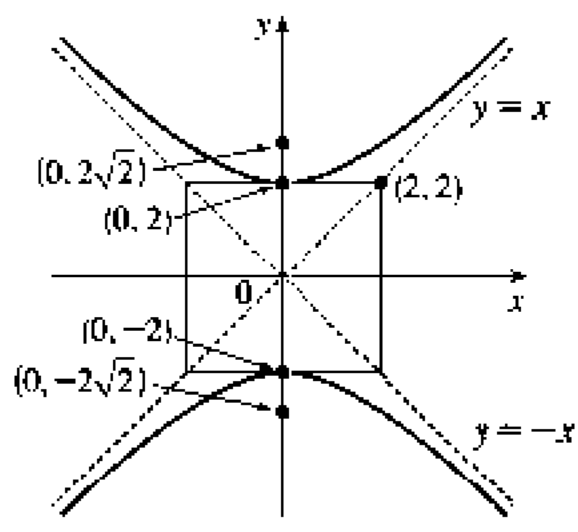
مثال (٤): ارسم القطع الزائد $y^2-x^2=4$ ثم أوجد بؤرتيه ورأسية ومعادلتي خطاه التقاربيان.

الحـــــــــــــــل

من المعادلة المعطاة نجد أن:

$$y^2-x^2=4\Rightarrow\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1\Rightarrow a=b=2$$

وبالتالي نجد أن: $c=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow c=2\sqrt{2}$ وبالتالي فإن مركز القطع هو نقطة الأصل ورأسية هما النقطتين $(0,\pm2)$ ، وبؤرتيه هما النقطتين $(0,\pm2\sqrt{2})$ ومعادلتي الخطان التقاربيان هما $y=\pm x$ ، كما بالشكل المقابل:



مثال (٥): أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتيه هما النقطتين $(\pm 5,0)$ ومركزه نقطة الأصل وطول محوره القاطع يساوي 8 وحدات.

الحـــــــــــــــل

من المعطيات واضح أن معادلة القطع الزائد المطلوبة يجب أن تكون علي الصورة : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ومن المعطيات نجد أن:

- طول المحور القاطع : $2a=8 \Rightarrow a=4$.
- بؤرتي القطع هما النقطتين: $(\pm c,0)=(\pm 5,0) \Rightarrow c=5$.

وبالتالي نجد أن: $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b^2=c^2-a^2 \Rightarrow b^2=25-16=9$ وبالتالي فإن معادلة القطع الزائد المطلوبة تصبح علي الصورة: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

مثال (٦): أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأسيه هما $(\pm 2,0)$ وبؤرتيه هما $(\pm 3,0)$.

الحـــــــــــــــل

من المعطيات نلاحظ أن رأسي القطع تقع علي محور ox وبالتالي فإن معادلة القطع الزائد المطلوبة يجب أن تكون علي الصورة :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

من المعطيات نجد أن:

- الرأسين هما النقطتين: $(\pm a,0)=(\pm 2,0) \Rightarrow a=2 \Rightarrow a^2=4 \qquad (2)$
- البؤرتين هما النقطتين: $(\pm c,0)=(\pm 3,0) \Rightarrow c=3$

وبالتالي نجد أن:

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2} \Rightarrow b=\sqrt{9-4}=\sqrt{5} \qquad (3)$$

وبالتعويض من (٢)، (٣) في (١) نجد أن معادلة القطع الزائد المطلوب تكون بالصورة: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

ملحوظة: في المثال السابق يمكن تعين قيمه b بطريقه أخري كالأتي: حيث أن بؤرتي القطع هما النقطتين $(\pm ae,0)=(\pm 3,0) \Rightarrow ae=3$ وحيث أن $a=2 \Rightarrow 2e=3 \Rightarrow e=\frac{3}{2}$ وحيث أن الاختلاف المركزي للقطع الزائد يعين من العلاقة $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$ فإن:

$$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow \frac{3}{2}=\sqrt{1+\frac{b^2}{4}} \Rightarrow \frac{9}{4}=1+\frac{b^2}{4} \Rightarrow b^2=5$$

مثال (٧): أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأسيه $(0,\pm 3)$ وخطاه التقاربيان هما $y=\pm x$.

الحـــــــــــــــــــــــل

من المعطيات نلاحظ أن رأسي القطع تقع علي محور oy وبالتالي فإن معادلة القطع الزائد المطلوبة يجب أن تكون علي الصورة:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

ومن المعطيات نجد أن:

- الرأسين هما النقطتين: $(0,\pm a)=(0,\pm 3) \Rightarrow a=3 \Rightarrow a^2=9$
- الخطان لتقاربيان هما: $y=\pm \frac{a}{b}x=\pm x \Rightarrow \frac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b=3$

وبالتالي فإن المعادلة المطلوبة تصبح بالصورة: $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{9}=1 \Rightarrow y^2-x^2=9$ وهي تمثل معادلة قطع زائد قائم محورة القاطع هو محور oy.

مثال (٩): أرسم القطع الزائد $16x^2+64x-9y^2-90y=305$ ثم أوجد إحداثيات كلاً من الرأسين والبؤرتين ومعادلتي الخطان التقاربيان.

الحـــــــــــــــــــــــل

المعادلة المعطاة يمكن كتابتها علي الصورة:

$$16x^2+64x-9y^2-90y=305 \Rightarrow$$

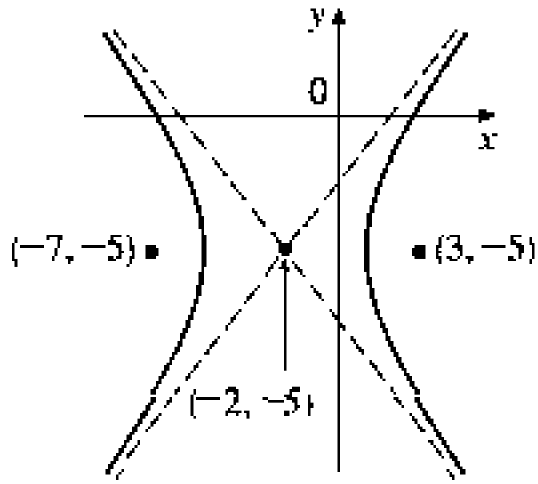
$$16(x^2+4x+4)-9(y^2+10y+25)=305+64-225 \Rightarrow$$

$$16(x+2)^2-9(y+5)^2=144 \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y+5)^2}{16}=1$$

وبنقل نقطة الأصل إلي النقطة $(-2,-5)$ نجد أن $X = x+2,\ Y = y+5$ وبالتالي فإن معادلة القطع تصبح بالصورة:

$$\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{16}=1 .$$

وبالتالي نجد أن $c=5, b=4, a=3$ وبالتالي يكون مركز القطع هو النقطة $(-2,-5)$ ورأسي القطع هما النقطتين $(1,-5)$ ، $(-5,-5)$ ، وبؤرتي القطع هما النقطتين $(-7,-5)$ ، $(3,-5)$ ، ومعادلتي الخطان التقاربيان هما $y+5=\pm\frac{4}{3}(x+2)$ ، كما بالشكل المقابل:



مثال (١٠): أرسم القطع الزائد $9x^2-4y^2-72x+8y+176=0$ ثم أوجد إحداثيات كلاً من الرأسين والبؤرتين ومعادلتي الخطان التقاربيان.

الحـــــــــــــــــل

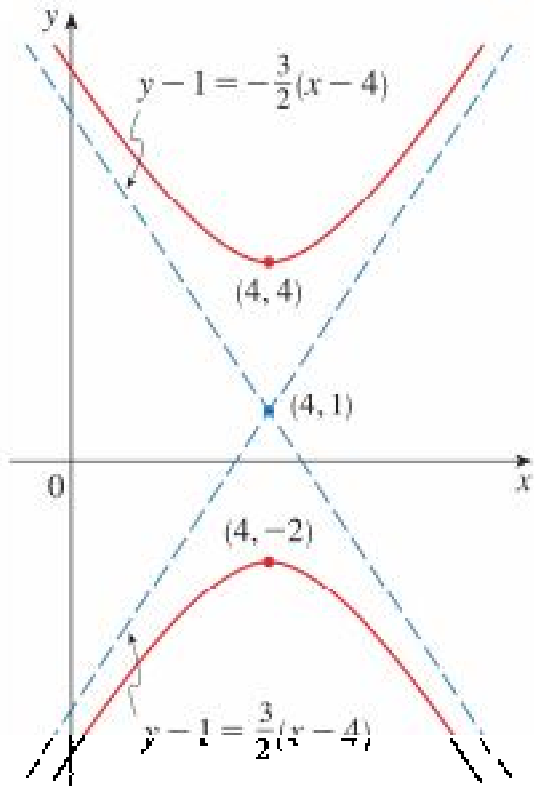
بإكمال المربع لحدود كل من x ، y ينتج أن: $4(y-1)^2-9(x-4)^2=36$ ومنها نجد أن معادلة القطع تصبح بالصورة :

$$\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x-4)^2}{4}=1$$

وبنقل نقطة الأصل إلي النقطة $(4,1)$ نجد أن: $X=x-4,\ Y=y-1$ وبالتالي فإن معادلة القطع يمكن كتابتها علي الصورة :

$$\frac{Y^2}{9}-\frac{X^2}{4}=1$$

وبالتالي فإن $a^2=9$ ، $b^2=4$ ، $c^2=13$ وبالتالي تكون بؤرتي القطع هما $(4,1\pm\sqrt{13})$ ،ورأسيه هما النقطتين $(4,4)$ ، $(4,-2)$ ومعادلتي الخطان التقاربيان هما : $y-1=\pm\frac{3}{2}(x-4)$ ، كما بالشكل المقابل:



معادلة المماس والعمودي للقطع الزائد

كما في حالة القطع الناقص يمكن استنتاج أن معادلة المماس للقطع الزائد الذي معادلته على الصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ عند النقطة (x_1,y_1) الواقعة علية تكون بالصورة:

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$$ ،

ومعادلة العمودي لهذا القطع عند النقطة (x_1,y_1) الواقعة علية تكون بالصورة:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{a^2}{b^2}\frac{x_1}{y_1}$$

المعادلات البارامترية للقطع الزائد

المعادلتان البارامتريتان للقطع الزائد الذي معادلته بالصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هما: $x=a\sec\varphi$ ، $y=b\tan\varphi$ ،لانة بحذف البارامتر φ بين المعادلتين ينتج أن: $\sec\varphi=\frac{x}{a},\ \tan\varphi=\frac{y}{b}$ أي أن:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\sec^2\varphi-\tan^2\varphi=1$. وكذلك يمكن تمثيل القطع الزائد بارا مترياً بالمعادلتين: $x=a\cosh\varphi,\quad y=b\sinh\varphi$ ، أما المعادلات البارامترية للقطع الزائد القائم $xy=c^2$ هي: $x=ct$ ، $y=\frac{c}{t}$ ومعادلة المماس للقطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^3}=1$ عند النقطة $(a\sec\varphi, b\tan\varphi)$ الواقعة علية تكون بالصورة:

$$\frac{x\sec\varphi}{a}-\frac{y\tan\varphi}{b}=1$$.

شرط تماس خط مستقيم لقطع زائد

بالتشابه مع حالة القطع الناقص نجد أن الشرط اللازم لكي يكون الخط المستقيم $y=mx+c$ مماسا للقطع الزائد الذي معادلته علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هو أن يكون $c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ ومعادلة المماس هي: $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ وإحداثيات نقط التماس هي:

$$\left(\frac{-a^2m}{\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}},\frac{-b^2}{\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right).$$

تمارين (٩-٣)

١) أوجد معادلة القطع الذي بؤرته النقطة $(3,-5)$ ودليلة الخط المستقيم الذي معادلته $x=-\frac{1}{5}$ واختلافه المركزي $e=\frac{5}{3}$. ثم استنتج صفاته الهندسية

٢) ارسم كلاً من القطاعات الزائده الاتية موضحا الصفات الهندسية :

❖ $\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{1}=1$.

❖ $\frac{(y-3)^2}{4}-\frac{(x+2)^2}{9}=1$.

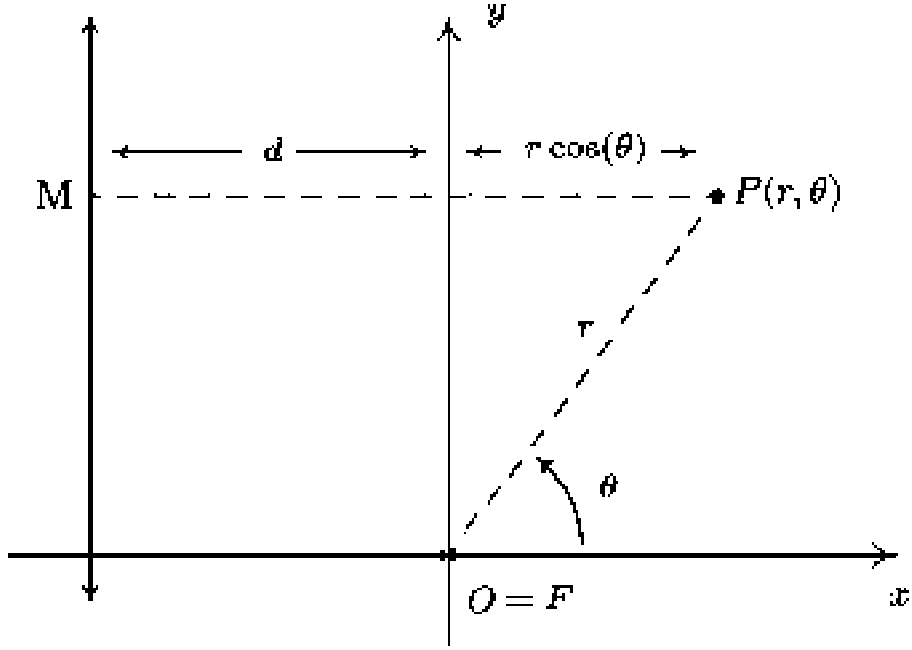
٣) بنقل محاور الإحداثيات إلي نقطة مناسبة استنتج ابسط صورة ممكنة للمعادلة المشتركة التي تمثل الخطان التقاربيان للقطع الزائد $x^2-4y^2-4x-8y-4=0$.

٤) أوجد معادلة القطع الزائد الذي اختلافه المركزي $e=3$ ومركزه نقطة الأصل وبؤرتيه تقع علي محور ox ويمر بالنقطة $(2,4)$.

٥) أوجد معادلة المماس والعمودي عند نهايتي الوتر البؤري العمودي للقطع الزائد $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

رابعاً: المعادلة القطبية للقطاعات المخروطية

الهدف الآن هو اشتقاق المعادلة القطبية للقطاعات المخروطية وذلك بدلالة البؤرة والدليل. وبفرض أن البؤرة عند قطب الإحداثيات القطبية والدليل عمودي علي الخط التطبي (أو موازيا للخط القطبي). إذا كان الدليل موازيا للخط القطبي فأن موقع الدليل قد يكون أسفل أو علي من القطب أما إذا كان الدليل عمودي علي الخط القطبي فإن موقع الدليل قد يكون علي يمين أو علي يسار القطب وبالتالي توجد أربعة حالات مختلفة يمكن أخذها في الاعتبار. وهنا سوف نشتق معادلة القطع المخروطي للحالة التي يكون فيها الدليل عموديا علي الخط القطبي ويقع علي يسار القطب، كما بالشكل المقابل:



إذا كانت $P(r,\theta)$ هي نقطة علي القطع المخروطي الذي اختلافه المركزي يساوي e فأنه يكون:

$$PF = ePM \qquad (1)$$

ومن الشكل المقابل نجد أن:

$$PF = r,\ \ PM = d + r\cos\theta$$

وبالتالي فإن المعادلة (١) يمكن كتابتها بالصورة:

$$r = e(d + r\cos\theta)$$

ومنها نجد أن:

$$r=\frac{ed}{1-e\cos\theta}$$

وهذه المعادلة هي المعادلة العامة للقطاعات المخروطية في الإحداثيات القطبية ويختلف نوع القطع المخروطي الذي تمثله هذه المعادلة تبعاً لقيمه الاختلاف المركزي e أي أن هذه المعادلة تمثل:

١) قطع مكافئ عندما يكون $e=1$.

٢) قطع ناقص عندما يكون $e<1$.

٣) قطع زائد عندما يكون $e>1$.

وذلك علي النقيض من حالة الإحداثيات الكارتيزية والتي يكون فيها لكل قطع مخروطي معادلة تختلف عن بقية القطاعات المخروطية الأخرى.والحالات الثلاثة الأخري للمعادلة القطبية للقطاعات المخروطية والتي تعتمد علي وضع الدليل بالنسبة القطب (البؤرة) والخط القطبي يمكن اشتقاقها بطريقة مشابهه. والمعادلات التي تمثل القطاعات المخروطية في هذه الحالات الأربعة تكون كما في النظرية التالية:

نظريه: في الإحداثيات القطبية القطع المخروطي الذي اختلافه المركزيe وبؤرته تنطبق علي القطب ودليلة يبعد مسافة قدرها d عن البؤرة بحيث يكون عموديا علي الخط القطبي (أو موازيا للخط القطبي) فإن معادلته تكون علي الصورة:

- $r=\dfrac{ed}{1+e\cos\theta}$ عندما يكون الدليل عمودي علي الخط القطبي و علي يمين القطب.
- $r=\dfrac{ed}{1-e\cos\theta}$ عندما يكون الدليل عمودي علي الخط القطبي و علي يسار القطب.
- $r=\dfrac{ed}{1+e\sin\theta}$ عندما يكون الدليل موازيا للخط القطبي و اعلي القطب.
- $r=\dfrac{ed}{1-e\sin\theta}$ عندما يكون الدليل موازيا للخط القطبي و أسفل القطب.

وهذا يعني أن المعادلتين $r=\dfrac{ed}{1\pm e\cos\theta}$ هي معادلات قطبية للقطاعات المخروطية عندما يكون الدليل عموديا علي الخط القطبي أي عندما يكون الدليل موازيا لمحور oy (والخط القطبي ينطبق علي محور ox). وبالمثل تكون المعادلتين $r=\dfrac{ed}{1\pm e\sin\theta}$ هي معادلات قطبية للقطاعات المخروطية عندما يكون

الدليل موازيا للخط القطبي أي عندما يكون الدليل موازيا لمحور ox (الخط القطبي ينطبق علي محور ox).

ملحوظة: في أي من القطاعات المخروطية (المكافئ والناقص والزائد) يمكن إثبات بسهولة أن البعد بين البؤرة والدليل والاختلاف المركزي يرتبطان بالعلاقة $d=\frac{\lambda}{e}$ حيث أن λ هي نصف طول الوتر البوري العمودي للقطع المخروطي، d هي البعد بين البؤرة والدليل، e هو الاختلاف المركزي، أي أن $\lambda=e\,d$ وبالتالي نلاحظ أن:

- ❖ للقطع المكافئ يكون $ed=2a$.
- ❖ للقطع الناقص والزائد يكون $ed=\frac{b^2}{a}$.

المعادلة القطبية للقطع المكافئ: في حالة القطع الكافئ نلاحظ أن الاختلاف المركزي $e=1$ وبعد البؤرة عن الدليل يساوي $d=2a$ وبالتالي فأن المعادلة القطبية للقطع المكافئ تكون:

- ❖ $r=\frac{2a}{1\pm\cos\theta}$ عندما يكون الدليل عمودي علي الخط القطبي.
- ❖ $r=\frac{2a}{1\pm\sin\theta}$ عندما يكون الدليل موازيا للخط القطبي.

المعادلة القطبية للقطع الناقص: في حالة القطع الناقص نلاحظ أن الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}<1$ ونصف طول الوتر البؤري العمودي يساوي $ed=\frac{b^2}{a}$ وبالتالي فأن المعادلة القطبية للقطع الناقص تكون بالصورة:

- ❖ $r=\frac{b^2}{a(1\pm e\cos\theta)}$ عندما يكون الدليل عمودي علي الخط القطبي.
- ❖ $r=\frac{b^2}{a(1\pm e\sin\theta)}$ عندما يكون الدليل موازيا للخط القطبي.

المعادلة القطبية للقطع الزائد : في حالة القطع الزائد نلاحظ أن الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}>1$ ونصف طول الوتر البؤري العمودي يساوي $ed=\frac{b^2}{a}$ وبالتالي فأن المعادلة القطبية للقطع الزائد تكون:

- ❖ $r=\frac{b^2}{a(1\pm e\cos\theta)}$ عندما يكون الدليل عمودي علي الخط القطبي.

❖ $r=\dfrac{b^2}{a(1\pm e\sin\theta)}$ عندما يكون الدليل موازيا للخط القطبي.

مع ملاحظة أنة في هذه الحالة تكون أي من المعادلتين السابقتين تمثل قطع زائد واحد وهذا يعني أنه عندما نأخذ المعادلة بالإشارة الموجبة نحصل علي فرع من فروع القطع الدائد وعندما نأخذ بالإشارة السالبة نحصل علي الفرع الأخر وذلك علي خلاف حالتي القطع المكافئ والناقص حيث أن الإشارة تعين قطع يختلف عن الآخر.

أمثلة محــــــــــلولة

مثال(١): بين نوع القطع الذي تمثله المعادلة $r=\dfrac{144}{13-5\sin\theta}$ ثم أوجد معادلته في الصورة القياسية.

الحـــــــــــــل

المعادلة المعطاة يمكن كتابتها علي الصورة

$$r=\frac{\frac{144}{13}}{1-\frac{5}{13}\sin\theta}$$

وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة القطبية والتي علي الصورة:

$$r=\frac{b^2}{a(1-e\sin\theta)}=\frac{\frac{b^2}{a}}{1-e\sin\theta}$$

نحصل علي:

$$\frac{b^2}{a}=\frac{144}{13};\quad e=\frac{5}{13}$$

وحيث أن $e=\dfrac{5}{13}<1$ فأن المعادلة المعطاة تمثل قطع ناقص.

وبالتالي نجد أن:

$$b^2=\frac{144}{13}a=a^2(1-e^2)\Rightarrow a=13,b=12$$

وبالتالي تكون المعادلة القياسية لهذا القطع هي

$$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1.$$

مثال(٢): أوجد المعادلة القطبية للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

الحـــــــــــــل

المعادلة المعطاة تمثل قطع زائد محورة القاطع هو محور ox وبالتالي يمكن اعتبار بؤرته أليسري قطب والاتجاه الموجب لمحور ox هو الخط القطبي وبالتالي فأن المعادلة القطبية لهذا القطع يجب أن تكون علي الصورة :

$$r=\frac{b^2}{a(1\pm e\cos\theta)}$$

ومن المعادلة المعطاة نجد أن: $a^2=16\Rightarrow a=4,\ \ b^2=9\Rightarrow b=3,$ وبالتالي نجد أن

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=5,\ e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$$

وبالتالي تكون معادلة القطع في الصورة القطبية هي: $r=\frac{9}{4\pm 5\cos\theta}$ وهذا يعني أن المعادلة القطبية للفرع الأيمن للقطع هي $r=\frac{9}{4-5\cos\theta}$ ومعادلة الفرع الأيسر للقطع هي $r=\frac{9}{4+5\cos\theta}$.

مثال(٣): بين نوع القطع الذي تمثله المعادلة $r=\frac{8}{4+5\sin\theta}$ ثم أوجد اختلافه المركزي ومعادلته دليلة .

الحـــــــــــــل

المعادلة المعطاة يمكن كتابتها علي الصورة:

$$r=\frac{2}{1+\frac{5}{4}\sin\theta}$$

وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة القطبية والتي علي الصورة:

$$r=\frac{b^2}{a(1+e\sin\theta)}=\frac{\frac{b^2}{a}}{1+e\sin\theta}=\frac{ed}{1+e\sin\theta}$$

نحصل علي: $ed=2,\ e=\frac{5}{4}$ وحيث أن $e=\frac{5}{4}>1$ فأن المعادلة المعطاة تمثل قطع زائد معادلة دليله هي $x=d=\frac{2}{e}=\frac{8}{5}$.

تمرين (٩–٤)

١) بين نوع القطع المخروطي الذي تمثله كلا من المعادلات القطبية الآتية واوجد اختلافة المركزي وطول الوتر البوري العمودي ومعادلة دليلة وصورته القياسية

- $r=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$.
- $r=\dfrac{3}{2-\cos\theta}$.
- $r=\dfrac{4}{1+3\cos\theta}$.
- $r=\dfrac{3}{2+\sin\theta}$.
- $r=\dfrac{2}{1+\sin\theta}$.
- $r=\dfrac{2}{1-2\sin\theta}$.

٢) أوجد طول الوتر البؤري العمودي وإحداثيات الرأس للقطع المكافئ الذي معادلته

$r=\dfrac{12}{5-5\sin\theta}$.

٣) أوجد المعادلة القطبية للقطع الناقص الذي معادلته $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$.

الباب العاشر

المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين

المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين

نفرض أن لدينا المستقيمين:

$$L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1), \quad L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

فإن حاصل ضرب المعادلتين(١) ،(٢):

$$(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

يمثل المعادلة المشتركة للخطين L_1، L_2 وهي بوجه عام معادله من الدرجة الثانية في متغيرين x، y والتي يمكن كتابتها في الحالة العامة علي الصورة:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

وفي هذا الفصل سنبحث متي تمثل المعادلة (٣) المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين.

مثال (١): أوجد المعادلة المشتركة التي تمثل الخطين المستقيمين الممثلين بالمعادلتين:

$$L_1 : x - y + 1 = 0, \quad L_2 : 3x - y - 2 = 0$$

الحـــــــــــــــــــــل

المعادلة المشتركة للخطين المستقيمين L_1 ، L_2 تكون بالصورة:

$$L_1 \cdot L_2 = 0 \Rightarrow (x - y + 1)(3x - y - 2) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4xy + y^2 + x + y - 2 = 0$$

واضح أن المعادلة الناتجة هي معادلة من الدرجة الثانية في المتغيرين x ، y وهي تمثل المعادلة المشتركة للخطين المستقيمين L_1، L_2. والآن نبحث متي تمثل معادلة الدرجة الثانية في متغيرين المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين ؟

معادله الدرجة الثانية المتجانسة التي تمثل خطين مستقيمين مارين بنقطه الأصل

معادلة الدرجة الثانية في متغيرين x ، y والتي علي الصورة: $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ تسمي بمعادلة الدرجة الثانية المتجانسة (المعادلة المتجانسة من الدرجة الثانية) وهي معادلة من الدرجة الثانية في

متغيرين x ، y وخالية من حدود الدرجة الأولي والحد المطلق. وهي دائما تمثل المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين مارين بنقطة الأصل وذلك بشرط أن يكون $h^3-ab\geq 0$. ويمكن الحصول علي معادلة الخطين الممثلين بالمعادلة المتجانسة من الدرجة الثانية كما يأتي: بقسمة طرفي المعادلة المتجانسة علي y^2 نجد أن: $a\left(\frac{x}{y}\right)^2+2h\left(\frac{x}{y}\right)+b=0$ ويكون جذرها هما:

$$\frac{x}{y}=\frac{\left(-2h\pm\sqrt{4h^2-4ab}\right)}{2a}$$

ومنها نجد أن الخطين المستقيمين هما:

$$ax+\left(-2h+\sqrt{h^2-ab}\right)y=0,\quad ax+\left(-2h-\sqrt{h^2-ab}\right)y=0$$

وكل منهما يمر بنقطه الأصل وذلك بشرط أن يكون $h^2-ab\geq 0$.

ملحوظة (١): المعادلة المشتركة لمعادلتي محوري الإحداثيات ox ، oy هي $xy=0$ حيث أن معادلة محور ox هي $y=0$ ومعادلة محور oy هي $x=0$.

مثال (٢): أوجد معادلتي الخطين المستقيمين الممثلين بالمعادلة المتجانسة للمعادلة:

$2x^2-13xy-7y^2+x+23y-6=0$.

الحـــــــــــــــــــل

المعادلة المتجانسة لمعادله الخطين المستقيمين المعطاة هي: $2x^2-13xy-7y^2=0$ وبتحليل هذه المعادلة نجد أن: $(2x+y)(x-7y)=0$ أي أن معادلتي الخطين المستقيمين الممثلين بالمعادلة المتجانسة للمعادلة المعطاة هما: $L_1:2x+y=0$ ، $L_1:x-7y=0$ وكلاً منهما يمر بنقطه الأصل.

الزاوية المحصورة بين المستقيمين اللذين تمثلهما المعادلة المتجانسة

ليكن لدينا المعادلة المتجانسة التي علي الصورة: $ax^2+2hxy+by^2=0$ وبقسمه طرفيها علي b فإنه يمكن إعادة كتابتها علي الصورة:

$$\left(\frac{a}{b}\right)x^2+\left(\frac{2h}{b}\right)xy+y^2=0$$

وبفرض انه أمكن فصل الخطين المستقيمين التي تمثلهما هذه المعادلة علي الصورة:

$$L_1 : y = m_1 x \ , \ L_2 : y = m_2 x.$$

وهما خطين مستقيمين يمران بنقطه الأصل أي أن:

$$\left(\frac{a}{b}\right)x^2 + \left(\frac{2h}{b}\right)xy + y^2 = (y - m_1 x)(y - m_2 x) = 0$$

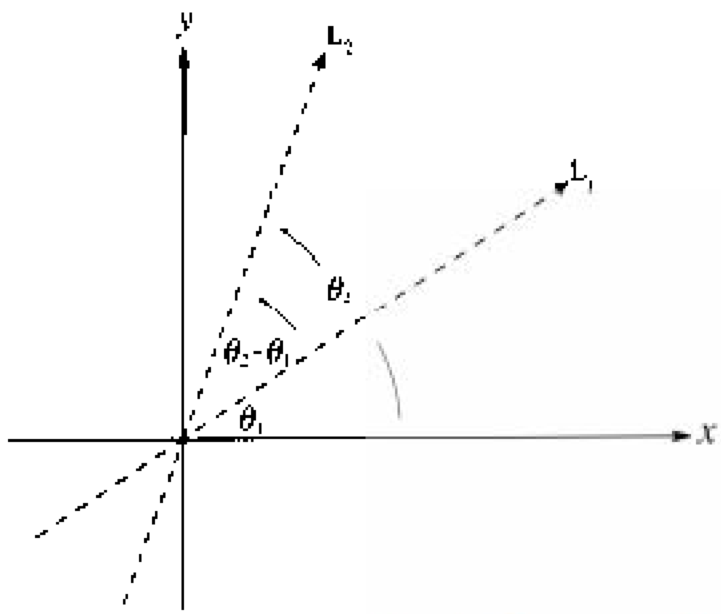
أي أن:

$$\left(\frac{a}{b}\right)x^2 + \left(\frac{2h}{b}\right)xy + y^2 = y^2 - (m_1 + m_2)xy + (m_1 m_2)x^2$$

وبمساواة معاملات $xy,\ x^2$ في الطرفين نحصل علي:

$$m_1 m_2 = \frac{a}{b}\ ,\ -(m_1 + m_2) = \frac{2h}{b}.$$

وإذا كانت θ هي الزاوية بين الخطين المستقيمين (كما بالشكل المقابل) فإن:



$$\tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{\sqrt{(m_1 - m_2)^2}}{1 + m_1 m_2} = \frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2}}{1 + m_1 m_2}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\sqrt{\left(-\frac{2h}{b}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{b}\right)}}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}.$$

وبالتالي فإن الزاوية بين الخطين المستقيمين الممثلين بالمعادلة المتجانسة من الدرجة الثانية تتعين من العلاقة:

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right).$$

ومن هذه العلاقة يمكننا أن نستنتج أن الخطين المستقيمين يكونا :

- حقيقيين ومختلفين إذا كان: $h^2>ab$.
- تخيليين إذا كان: $h^2<ab$.
- متوازيين (أو منطبقين) إذا كان: $h^2=ab$.
- متعامدين إذا كان: $a+b=0$.

شرط تمثيل المعادلة العامة من الدرجة الثانية في متغيرين لخطين مستقيمين

نظرية: إذا كانت معادلة الدرجة الثانية $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ تمثل المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين فإن النقطة (x_1,y_1) التي يجب نقل محاور الإحداثيات إليها حتى تتحول معادلة الدرجة الثانية إلي معادلة أخري خالية من حدود الدرجة الأولي تمثل نقطة تقاطع الخطين المستقيمين الممثلين بمعادلة الدرجة الثانية وبنقل المحاور إلي هذه النقطة تتحول المعادلة إلي الصورة: $aX^2+2hXY+bY^2=0$ وهي تمثل المعادلة المتجانسة للمعادلة الأصلية ولكنها بدلالة الإحداثيات الجديدة، والأمثلة التالية توضح ذلك.

مثال (٣): بنقل محاور الإحداثيات إلي نقطة مناسبة بر هن أن المعادلة $y^2+xy-2x^2-5x-y-2=0$ تمثل المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين وأوجدهما.

الحـــــــــــــــل

يفرض أن (x_1,y_1) هي النقطة التي يجب نقل محاور الإحداثيات إليها لكي تصبح المعادلة المعطاة خالية من حدود الدرجة الأولي ومن ثم تكون معادلات التحويل بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة هي: $x=X+x_1,\ \ y=Y+y_1$ وتصبح المعادلة الأصلية بعد التعويض عن قيم y, x بالصورة :

$$(Y+y_1)^2+(X+x_1)(Y+y_1)-2(X+x_1)^2-5(X+x_1)-(Y+y_1)-2=0$$

ولكي تصبح المعادلة المعطاة خالية من حدود الدرجة الأولي يجب إن يكون معامل $X=0$، معامل $Y=0$. بوضع معامل $X=0$، معامل $Y=0$ نحصل علي المعادلتين:

$$y_1-4x_1-5=0,\quad 2y_1+x_1-1=0,$$

وهما معادلتين في مجهولين x_1، y_1 وبحلهما معاً نجد أن إحداثيات النقطة المطلوبة هي $(-1,1)$.

وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد أن:

$$(Y+1)^2+(X-1)(Y+1)-2(X-1)^2-5(X-1)-(Y+1)-2=0$$

وبالفك والاختصار نجد أن هذه المعادلة تصبح بالصورة: $Y^2+XY-2X^2=0$ وهي تمثل المعادلة المتجانسة للمعادلة الأصلية ولكنها بدلالة الإحداثيات الجديدة، وهي المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين مارين بالنقطة $(-1,1)$ والتي تمثل نقطة أصل محاور الإحداثيات الجديدة وبالتالي تكون المعادلة المعطاة تمثل المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين مارين بالنقطة $(-1,1)$ (نقطة تقاطعهما) ويمكن الحصول علي معادلتي الخطين المستقيمين بدلالة الإحداثيات الأصلية كالآتي: بتحليل المعادلة المتجانسة بدلالة الإحداثيات الجديدة نحصل علي: $(Y+2X)(Y-X)=0$ ومنها نجد أن معادلتي الخطين المستقيمين بالنسبة للمحاور الجديدة هما:

$$Y+2X=0,\quad Y-X=0$$

وبتطبيق معادلات التحويل بين الإحداثيات الأصلية والإحداثيات الجديدة والتي علي الصورة:

$$X=x+1,\qquad Y=y-1.$$

نحصل علي معادلتي الخطين المستقيمين الممثلين بالمعادلة المعطاة بالنسبة للإحداثيات الأصلية بالصورة:

$$y-1+2(x+1)=0\Rightarrow y+2x+1=0,\quad y-1-(x+1)=0\Rightarrow\ y-x-2=0$$

وبحل معادلتي الخطين المستقيمين معاً جبريًا نجد أن نقطة تقاطعهما هي النقطة $(-1,1)$ وهي نفس النقطة التي تم نقل محاور الإحداثيات إليها. والزاوية بين الخطين المستقيمين تتعين من العلاقة:

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{2\left(\sqrt{\frac{1}{4}+2}\right)}{(-2+1)}\right)=\tan^{-1}(-3).$$

مثال (٤): بنقل محاور الإحداثيات إلي النقطة $(-1,-1)$ أعطي وصفاً هندسيًا للمعادلة $x^2-y^2+2x-2y=0$.

الحــــــــــــــــــــــل

المعادلة المعطاة خالية من الحد xy وبالتالي يمكن كتابتها مباشرة علي الصورة:

$$(x^2+2x)-(y^2+2y)=0\Rightarrow(x+1)^2-(y+1)^2=0$$

وبنقل محاور الإحداثيات إلي النقطة $(-1,-1)$ نجد أن: $X=x+1,\ \ Y=y+1$ حيث أن xy هي الإحداثيات الأصلية، XYهي الإحداثيات الجديدة. وبالتالي فإن المعادلة المعطاة تصبح بالصورة:

$$X^2-Y^2=0$$

وهذه المعادلة هي معادلة متجانسة من الدرجة الثانية تمثل المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين مارين بنقطة الأصل بالنسبة للمحاور الجديدة ومارين بالنقطة $(-1,-1)$ بالنسبة للمحاور الأصلية وتكون معادلتي الخطين بالنسبة للمحاور الجديدة علي الصورة :

$$X-Y=0,\ \ X+Y=0$$

ومعادلتي الخطين المستقيمين بالنسبة للمحاور الأصلية يمكن الحصول عليهما كالآتي:

$$X-Y=0\Rightarrow x+1-(y+1)=0\Rightarrow x-y=0,$$
$$X+Y=0\Rightarrow x+1+y+1=0\Rightarrow x+y+2=0$$

أي أن المعادلتين: $x-y=0,\ x+y+2=0$ هما معادلتي الخطين المستقيمين الممثلين بالمعادلة المعطاة ومارين بالنقطة $(-1,-1)$. وهذا يعني أن المعادلة المعطاة تمثل المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين ونقطة تقاطعهما هي النقطة $(-1,-1)$.

تمارين (١٠)

١) بنقل نقطة الأصل إلي نقطة مناسبة برهن أن كلاً من المعادلات الآتية تمثل المعادلة المشتركة لخطين مستقيمين وأوجدهما:

✓ $y^2+xy-2x^2-5x-y-2=0$.

✓ $2x^2-xy-3y^2-7x+8y+3=0$.

✓ $3x^2+2xy-y^2+x-3y-2=0$.

✓ $2x^2-13xy-7y^2+x+23y-6=0$.

✓ $x^2-y^2+x-y=0$.

٢) بنقل محاور الإحداثيات إلي نقطة مناسبة استنتج معادلتي الخطين المستقيمين الممثلين بالمعادلة المشتركة $y^2+xy-2x^2-5x-y-2=0$، وأوجد الزاوية بينهما.