المحتويات

الفصل الأول: الاعداد الحقيقية 3

مجموعات الاعداد 3

مبدأ الاستقراء 3

مسلمات الحقل للأعداد الحقيقية 4

خاصية الترتيب للأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ 5

نتائج خاصية الترتيب: 6

خاصية وجود أصغر حد علوي وأكبر حد سفلي: 7

نتائج لخاصية أصغر حد علوي وأكبر حد سفلي: 9

متباينات مهمة 11

خاصية ارشميدس (Archimedes property): 15

المجموعات المنتهية وغير المنتهية وقابلية العد في $\mathbb{R}$ 17

الخاصية المميزة للفترات (The property of the intervals): 21

الفترات المتعششة (Nested Intervals): 21

تطبيقات خاصية الفترات المتعششة: 23

كثافة الاعداد النسبية والاعداد غير النسبية في $\mathbb{R}$ 24

توبولوجيا الاعداد الحقيقية 25

المجموعات المفتوحة 25

المجموعات المغلقة 26

النقاط الداخلية والحدود لمجموعة في $\mathbb{R}$ 28

نقاط التراكم Accumulation points 29

الفصل الثاني 34

المتتابعات الحقيقية **Real sequences** 34

نظريات النهايات للمتتابعات الحقيقية 35

المتتابعات المطردة Monotone Sequences 43

المتتابعات الجزئية Subsequences 47

النهايات العليا والنهايات الدنيا Limit Superior and Limit Inferior 51

متتابعات كوشي Cauchy Sequences 55

الفصل الثالث 59

المتسلسلات الحقيقية Real Series 59

اختبارات تقارب المتسلسلات Series Convergence Tests 63

اختبار المقارنة Comparison Test 63

اختبار التكامل Integral Test 65

اختبار الجذر Root Test 67

اختبار النسبة Ratio Tests 68

اختبار راب Raabe's Test 70

اختبار برتراند Bertrand’s Test 73

الفصل الرابع 74

نهايات الدوال الحقيقية Limits of Real-valued Functions 74

المتتابعات التقاربية ونهاية الدالة الحقيقية 75

نظريات النهايات Limit Theorems 77

النهايات من جانب واحد One-Sided Limits 80

النهايات اللانهائية Infinite Limits 81

النهايات عند اللانهاية Limits at Infinity 82

الفصل الخامس 85

الدوال المتصلة Continuous Functions 85

تركيب الدوال المتصلة Combinations of Continuous Functions 90

أمثلة:1) دالة كثيرة الحدود $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x+a_0$ متصلة 91

على $\mathbb{R}$، لأنه لكل $c\in\mathbb{R}$ فإن $\lim\limits_{x\to c}P(x)=P(c)$ 91

تحصيل الدوال المتصلة Composition of Continuous Functions 92

الدوال المتصلة على فترات Continuous Functions on Intervals 96

نظرية(10): (نظرية بلزانو للقيمة البينية) 101

الاتصال المنتظم Uniform Continuity 106

التمديد المتصل Continuous Extension 111

الفصل الأول: الاعداد الحقيقية

مجموعات الاعداد

- **مجموعة الاعداد الطبيعية (أو الصحيحة الموجبة)** $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}$
- **مجموعة الاعداد الصحيحة** $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$
- **مجموعة الاعداد القياسية** $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}: \ m, n \in \mathbb{Z}, \ n \neq 0\right\}$
- **مجموعة الاعداد غير القياسية يرمز لها بـ** $\mathbb{Q}^c$
- **مجموعة الاعداد الحقيقية** $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$

مبدأ الاستقراء

ينص مبدأ الاستقراء أو الاستنتاج principle of induction على انه إذا كانت $P(n)$ خاصية يحققها كل عدد طبيعي n بحيث

1) $P(1)$ متحققة
2) إذا كان$k \in \mathbb{N}$ و $P(K)$ متحققة فإن $P(k+1)$ تتحقق

عندئذ تكون $P(n)$ متحققة لكل $n \in \mathbb{N}$. يمكن تعريف مبدأ الاستقراء بطريقة ثانية كخاصية للأعداد الطبيعية، وهذا ما توضحه النظرية التالية.

نظرية: الجمل التالية متكافئة

1) مبدأ الاستقراء
2) كل مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{N}$ يكون لها عنصر أصغر.

الخاصية (2) في النظرية السابقة تسمى خاصية الترتيب الحسن لمجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

نذكر هنا خاصية للأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ تعني عدم تحقق خاصية التمام للأعداد النسبية، وهي الخاصية المميزة للأعداد الحقيقية.

نظرية: لا يوجد عدد نسبي مربعه 2.

البرهان. بفرض العكس أن p/q عدد نسبي في أبسط صورة (q أصغر ما يمكن) يحقق $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. من هذه المتساوية نلاحظ أن $q < p < 2q$ ومن ثم $0 < p - q < q$ وأن $2q - p > 0$. من السهل حساب $\left(\frac{2q-p}{p-q}\right)^2 = 2$. هذا يتناقض مع فرضنا بأن p/q هو العدد النسبي ذو ابسط مقام q يحقق $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. وبالتالي لا يوجد عدد نسبي مربعه 2.

مسلمات الحقل للأعداد الحقيقية

يرمز عادة لمجموعة الاعداد الحقيقية بالرمز $\mathbb{R}$. إذا عرفنا العمليات التالية

$$+:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad \cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

نجد أن $(\mathbb{R},+,\cdot)$ حقل يحقق الخواص التالية

خاصية الابدال الجمعي: $(A_1)\ \ a+b=b+a\ \ \forall a,b\in\mathbb{R}$

خاصية الدمج الجمعي: $(A_2)\ \forall\ \ a,b,c\in\mathbb{R},$

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

خاصية وجود محايد جمعي: $(A_3)\ \exists\ 0\in\mathbb{R},\quad a+0=0+a=a\ \forall a\in\mathbb{R}$

خاصية وجود معكوس جمعي: $(A_4)\ \forall\ a\in\mathbb{R}\ \exists -a\in\mathbb{R}, a+(-a)=-a+a=0$

خاصية الابدال الضربي: $(A_5)\ \ a\cdot b=b\cdot a\ \ \forall a,b\in\mathbb{R}$

خاصية الدمج الضربي: $(A_6)\ \forall\ \ a,b,c\in\mathbb{R},\qquad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

خاصية وجود محايد ضربي: $(A_7)\ \exists\ 1\in\mathbb{R},\quad a\cdot 1=1\cdot a=a\ \forall a\in\mathbb{R}$

خاصية وجود مقلوب: $(A_8)\ \forall\ a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\ \exists\ a^{-1}\in\mathbb{R}, a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$

قانون التوزيع: $(A_9)\forall a,b,c\in\mathbb{R}, a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

ملاحظة: $(\mathbb{R},+)$ زمرة إبداليه، $(\mathbb{R}\backslash\{0\},\cdot)$ زمرة إبداليه.

بعض الخواص الأخرى:

1) لكل $a,b\in\mathbb{R}$ فإن

$$a+b=a+c\ \Rightarrow b=c$$

البرهان: لكل $a\in\mathbb{R}$ يوجد $-a\in\mathbb{R}$ (A_4) وبالتالي فإن تطبيق الخواص $(A_2), (A_3)$ يؤدي إلى

$$-a+(a+b)=-a+(a+c)\Rightarrow(-a+a)+b=(-a+a)+c$$
$$\Rightarrow 0+b=0+c$$

وهذا يكافئ المطلوب.

2) لكل $a,b,c\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ فإن

$$a \cdot b = a \cdot c \Longrightarrow b = c$$

البرهان: لكل $a \neq 0$ يوجد $a^{-1} \in \mathbb{R}$ (A_8). وبتطبيق الخواص (A_6) و (A_7) نحصل على

$$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c) \Longrightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c \Longrightarrow 1 \cdot b = 1 \cdot c \Longrightarrow b = c$$

3) لكل $a \in \mathbb{R}$ فإن $a + b = a$ يعني أن $b = 0 \in \mathbb{R}$.

البرهان: إذا كان $a \in \mathbb{R}$ فيوجد $-a \in \mathbb{R}$ (A_4). وبالتالي فإن الخواص (A_2)، (A_3) و (A_4) تؤدي إلى

$$0 = -a + a = -a + (a + b) = (-a + a) + b = 0 + b = b$$

4) لكل $a \in \mathbb{R}$ فإن $a \cdot 0 = 0$

البرهان: من النتيجة السابقة وباستخدام الخواص (A_3)، (A_7) و (A_9) نجد أن

$$a \cdot 1 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 + a \cdot 0 \Longrightarrow a \cdot 0 = 0$$

5) لكل $a, b \in \mathbb{R}$ فإن $a \cdot b = 0 \Longrightarrow a = 0 \ \vee b = 0$

البرهان: بفرض أن $a \neq 0$ سيوجد $a^{-1} \in \mathbb{R}$ و $a^{-1} \neq 0$. ومن ثم

$$0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b$$

بالمثل يمكن اثبات أن $a \cdot b = 0, b \neq 0$ تعني أن $a = 0$.

6) لأي $a, b \in \mathbb{R}$ فإن للمعادلة $a + x = b$ حل هو $x = b - a$

البرهان: إذا كان $a \in \mathbb{R}$ سيوجد $-a \in \mathbb{R}$ ، وبالتالي

$$x = -a + (a + x) = -a + b = b - a$$

7) لأي $a, b \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ فإن المعادلة $a \cdot x = b$ لها حل هو $x = a^{-1} \cdot b$

البرهان: واضح أن

$$x = 1 \cdot x = (a^{-1} \cdot a) \cdot x = a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot b$$

8) لكل $a \in \mathbb{R}$ فإن $-(-a) = a$

البرهان: لكل $a \in \mathbb{R}$ فإن

$$0 = 0 \cdot a = (-1 + 1) \cdot a = -a + a$$

وهذا يعني أن a معكوس $-a$

خاصية الترتيب للأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

تعريف: يقال لمجموعة غير خالية P جزئية من $\mathbb{R}$ أنها صف موجب إذا تحقق التالي

$(A_{10})\quad \forall a,b \in P, \qquad a+b \in P.$

$(A_{11})\quad \forall a,b \in P, \qquad a \cdot b \in P.$

$(A_{12})\quad a \in \mathbb{R} \implies a \in P \;\vee\; a = 0 \;\vee\; -a \in P.$

الخاصية الأخيرة (A_{12}) تسمى خاصية الانقسام الثلاثي (وتسمى مسلمة الترتيب).

تعريف: إذا كان $a \in P$ يقال أن $a > 0$، ويقال $a > b$ إذا كان $a - b \in P$. يقال أن $a \geq b$ إذا كان $a - b \in P \cup \{0\}$.

نتائج خاصية الترتيب:

1) إذا كان $a > b,\; b > c$ فإن $a > c$.

البرهان: بحسب التعريف السابق فإن $a - b, b - c \in P$. وبالتالي

$$a - c = (a - b) + (b - c) \in P \Rightarrow a > c$$

2) لأي $a, b \in \mathbb{R}$ فإن $a > b$، $a = b$، او $a < b$.

البرهان: لأي $a, b \in \mathbb{R}$ فإن $a - b \in \mathbb{R}$. وبحسب مسلمة الترتيب (A_{12}) فإن

$$a - b \in P \;\vee\; a - b = 0 \;\vee\; -(a - b) \in P$$

وهذا يكافئ على الترتيب

$$a > b \quad \vee \quad a = b \quad \vee \quad a < b$$

تعريف: المجموعة $N = P^{-} = \{-a; a \in P\}$ هي صف سالب ل $\mathbb{R}$ تسمى مجموعة الاعداد الحقيقية السالبة.

ملاحظة: لأي $a, b \in \mathbb{R}$ فإن

$$a - b \in P \;\vee\; a = b \quad a - b \in P^{-}$$

3) إذا كان $a > b$ و$c > 0$ فإن $a \cdot c > b \cdot c$

البرهان: لدينا

$$a > b, \quad c > 0 \Rightarrow a - b, c \in P \Rightarrow (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c \in P$$

وهذا يكافئ المطلوب.

4) إذا كان $a > b$ و$c < 0$ فإن $a \cdot c < b \cdot c$

البرهان: لدينا

$$a > b, \quad c < 0 \Longrightarrow a - b, -c \in P \Longrightarrow (a - b) \cdot (-c) = b \cdot c - a \cdot c \in P$$

وهذا يكافئ المطلوب.

5) لكل $a \neq 0$ في $\mathbb{R}$ فإن $a^2 > 0$.

البرهان: بحسب خاصية الانقسام الثلاثي فإن $a \neq 0$ تعني $a > 0$ أو $a < 0$. بفرض أن $a > 0$

فإن $a^2 = a \cdot a > 0$. وإذا كان $a < 0$ فإن $a^2 = (-a) \cdot (-a) > 0$.

6) $1 > 0$ لأن $0 \neq 1 = 1^2 > 0$.

7) لكل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$ فإن $n > 0$.

البرهان: باستخدام الاستنتاج الرياضي، وحيث أن $1 > 0$، فإنه بفرض انه للعدد طبيعي k أن $k > 0$ فإن $1, k \in P$. وبالتالي $1 + k \in P$. ومن ثم كل عدد طبيعي هو موجب.

تمرين:

8) إذا كان $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ بحيث $a > b, \; c > d$ اثبت أن $a + c > b + d$.

9) لكل $a \in P$ اثبت أن $a^{-1} \in P$.

10) إذا كان $a \cdot b > 0$ اثبت أن $a, b > 0$ أو $a, b < 0$. وإذا كان $a \cdot b < 0$ فاثبت ان $a > 0, b < 0$

أو $a < 0, b > 0$.

11) إذا كان $a > b$ فإن $a > \frac{a+b}{2} > b$.

البرهان: إذا كان $a > b$ فإن $2a > a + b > 2b$ ومنها ينتج المطلوب.

خاصية وجود أصغر حد علوي وأكبر حد سفلي:

تعريف: إذا كانت A مجموعة غير خالية من الاعداد الحقيقية، يقال:

1) أن العدد الحقيقي u هو حد علوي للمجموعة A إذا كان $x \leq u$ لكل $x \in A$.

2) أن العدد الحقيقي v هو حد سفلي للمجموعة A إذا كان $v \leq x$ لكل $x \in A$.

أمثلة: 1) للمجموعة $A = \{x \in \mathbb{R}, \; x \geq 0\}$ حد سفلي $v = 0$، وكل عدد حقيقي سالب هو حد سفلي للمجموعة. لا يوجد حد علوي، لتوضيح ذلك، نفرض على العكس أن u حد علوي للمجموعة A

فإن $u, u + 1 > 0$. ومن ثم فإن $u + 1 \in A$ وهذا يناقض كون u حد علوي لأن $u < u + 1$.

2) لمجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ لا توجد حدود علوية أو حدود سفلية.

3) للمجموعة $B = (0,1)$ فإن كل $u \geq 1$ هو حد علوي، وأن كل $v \leq 0$ هو حد سفلي.

تعريف: إذا كانت A مجموعة غير خالية من الاعداد الحقيقية،

1) يقال أن A محدودة من أعلى إذا وجد (حد علوي) عدد حقيقي u بحيث $x \leq u$ لكل $x \in A$.

2) يقال أن A محدودة من أسفل إذا وجد (حد سفلي) عدد حقيقي v بحيث $x \geq v$ لكل $x \in A$.

3) يقال أن A محدودة إذا وجد حد علوي u وحد سفلي v بحيث $v \leq x \leq u$ لكل $x \in A$.

خلاف ذلك تكون المجموعة A غير محدودة.

تعريف: إذا كانت A مجموعة غير خالية من الاعداد الحقيقية،

1) يقال للعدد الحقيقي a أنه أصغر حد علوي للمجموعة A، ونكتب $a = \sup A$، إذا كان

- $x \leq a$ لكل $x \in A$، أي أن a حد علوي للمجموعة A.
- لكل حد علوي u للمجموعة A فإن $a \leq u$.

2) يقال للعدد الحقيقي b أنه أكبر حد سفلي للمجموعة A، ونكتب $a = \inf A$، إذا كان

- $x \geq b$ لكل $x \in A$، أي أن b حد سفلي للمجموعة A.
- لكل حد سفلي v للمجموعة A فإن $b \geq v$.

ملاحظة: sup تقرأ supremum، inf تقرأ infimum.

أمثلة: 1) $\sup(a,b) = \sup(a,b] = b$

البرهان: واضح أن $x \leq b$ لكل x في (a,b)، (أو $(a,b]$). ويوجد $\epsilon > 0$ بحيث $a < b - \epsilon < b$. وبالتالي فإن $b - \epsilon$ ليس حد علوي للمجموعة (a,b)، (أو $(a,b]$).

2) $\sup\{\frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{2},\ \ \inf\{\frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}\} = -1$.

لاحظ أن $\left\{\frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} = \{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \cdots\}$.

نظرية: العدد الحقيقي a يكون أصغر حد علوي لمجموعة غير خالية A إذا وفقط إذا

1) $x \leq a$ لكل $x \in A$.

2) لأي $\epsilon > 0$ يوجد $x^* \in A$ بحيث $a - \epsilon \leq x^*$.

ملاحظة: الشرط (2) يعني أنه مهما كان $\epsilon > 0$ صغير فإن $a - \epsilon$ ليس حد علوي للمجموعة A.

بالمثل فإن العدد الحقيقي b يكون أكبر حد سفلي لمجموعة غير خالية A إذا وفقط إذا

1) $x \geq b$ لكل $x \in A$.

2) لأي $\epsilon > 0$ يوجد $x^* \in A$ بحيث $x^* \leq b + \epsilon$.

ملاحظة: الشرط الاخير يعني أنه مهما كان $\epsilon > 0$ صغير فإن $b + \epsilon$ ليس حد سفلي للمجموعة A.

نتائج لخاصية أصغر حد علوي وأكبر حد سفلي:

1) إذا كانت A مجموعة جزيئة غير خالية من الاعداد الحقيقية، وكان c عدد حقيقي فإن

$$c + A = \{c + x;\ \ x \in A\}$$

اثبت أن

$$(i)\ \sup\{c + A\} = c + \sup A, \qquad (ii)\ \inf\{c + A\} = c + \inf A$$

$$(iii)\ \sup(-A) = -\inf A, \qquad (iv)\ \inf(-A) = -\sup A$$

البرهان: سنكتفي ببرهان المطلوب الأول والثالث.

$(\boldsymbol{i})$ ليكن $a = \sup A$. فإن $x \leq a$ لكل $x \in A$. ومن ثم فإن $c + x \leq c + a$ لكل $x \in A$. أي أن $y \leq c + a$ لكل $y \in c + A$. ولذلك فإن $c + a$ هو حد علوي للمجموعة $c + A$. وبالتالي يوجد $u = \sup\{c + A\}$، يحقق $\underline{u \leq c + a}$. من جهة ثانية، فإن $y \leq u$ لكل $y \in c + A$. وهذا يؤدي إلى $c + x \leq u$ لكل $x \in A$، ومن ثم يكون $u - c$ حد علوي للمجموعة A. وعليه فإن $\underline{u \geq c + a}$. وهكذا فإن $u = c + a$، وهذا يكافئ المطلوب.

$(\boldsymbol{iii})$ ليكن $v = \inf A$. فإن $v \leq x$ لكل $x \in A$. ومن ثم $-x \leq -v$ لكل $x \in A$، أو $y \leq -v$ لكل $y \in (-A)$. وبالتالي، فإن العدد $(-v)$ حد علوي للمجموعة $-A$. لذا، يوجد $\underline{w = \sup(-A) \leq -v}$.

من جهة ثانية، فإن $-x \leq w$ لكل $x \in A$. ولهذا، فإن العدد $(-w)$ حد سفلي للمجموعة A، وبالتالي يكون $-w \leq v$، أو $\underline{w \geq -v}$. وهكذا، فإن $w = -v$، وهو المطلوب.

2) اثبت ان

(أ) كل عدد حقيقي هو حد علوي للمجموعة الخالية $\emptyset$.

(ب) كل عدد حقيقي هو حد سفلي للمجموعة الخالية $\emptyset$.

(جـ) $\sup \emptyset , \inf \emptyset$ غير موجودين.

البرهان: بفرض أن $\alpha \in \mathbb{R}$ ليس حد علوي للمجموعة $\emptyset$، سيوجد $x \in \emptyset$ بحيث $x \geq \alpha$. هذا يناقض كون $\emptyset$ خالية. هذا التناقض يثبت صحة الجملة (أ). الأن، بفرض أن $a = \sup \emptyset$ موجود في $\mathbb{R}$، فإن $a \geq x$ لكل $x \in \emptyset$، وهذا يناقض كون $\emptyset$ هي مجموعة خالية. وبالتالي، فإن $\sup \emptyset$ غير موجود (أي أن الجملة (**جـ**) صحيحة). بالمثل يمكن اثبات صحة الجمل الأخرى.

3) مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ غير محدودة (لا من أعلى ولا من أسفل).

البرهان: فرض أن عدد حقيقي a هو حد علوي للمجموعة $\mathbb{R}$ يناقض كون $2a \in \mathbb{R}$ لكل $a \in \mathbb{R}$. وفرض أن عدد حقيقي b هو حد سفلي للمجموعة $\mathbb{R}$ يناقض كون $\frac{b}{2} \in \mathbb{R}$ لكل $b \in \mathbb{R}$.

4) **مسلمة التمام** Completeness Axiom

إذا كانت A مجموعة غير خالية من الاعداد الحقيقية، ومحدودة من أعلى سيوجد $u \in \mathbb{R}$ بحيث $u = \sup A$. بعبارة أخرى، كل مجموعة غير خالية ولها حد علوي يكون لها أصغر حد علوي. فمثلا،

$$\sup(a, b) = b, \quad \sup\{x \in \mathbb{R};\ \ x \leq 1\} = 1.$$

كذلك، إذا كانت A مجموعة غير خالية من الاعداد الحقيقية، ومحدودة من أسفل سيوجد $v \in \mathbb{R}$ بحيث $v = \inf A$. بعبارة أخرى، كل مجموعة غير خالية ولها حد سفلي يكون لها أكبر حد سفلي. لاحظ أنه إذا كان $b \in \mathbb{R}$ حد سفلي للمجموعة A فإن $b \leq x$ (ومنها $-b \geq -x$) لكل $x \in A$، أي أن $-b$ حد علوي للمجموعة $-A$. وبالتالي، إذا كانت A مجموعة غير خالية من الاعداد الحقيقية، ومحدودة من أسفل فإن المجموعة $-A$ تكون محدودة من أعلى وأن $\sup(-A) = -\inf A$ (أو $\inf A = -\sup(-A)$).

5) إذا كانت f, g دوال حقيقية القيمة معرفة على فترة I بحيث $f(x) \leq g(x)$ لكل $x \in I$ فإن

$$\sup\{f(x), \quad x \in I\} \leq \sup\{g(x), \quad x \in I\}$$

البرهان: واضح أنه لكل $x \in I$ يكون

$$g(x) \leq \sup\{g(x), \quad x \in I\}$$

وبالتالي، فإن

$$f(x) \le \sup\{g(x), \quad x \in I\}$$

لكل $x \in I$. أي أن، $\sup\{g(x), \quad x \in I\}$ حد علوي للمجموعة $\{f(x), \quad x \in I\}$. ومن ثم

$$\sup\{f(x), \quad x \in I\} \le \sup\{g(x), \quad x \in I\}.$$

تعريف: إذا كانت A مجموعة غير خالية من الاعداد الحقيقية

(1) يقال للعنصر $a \in A$ أنه عنصر أكبر للمجموعة A، ونكتب $a = \max A$ (أي *maximum*) إذا كان $a \ge x$ لكل $x \in A$.

(2) يقال للعنصر $b \in A$ أنه عنصر أصغر للمجموعة A، ونكتب $a = \min A$ (أي *minimum*) إذا كان $b \le x$ لكل $x \in A$.

أمثلة: 1) $\max[0,1] = \sup[0,1] = 1, \ \min[0,1] = \inf[0,1] = 0$

2) كل من $\max(0,1)\, , \min(0,1)$ غير موجود، على الرغم من $\sup(0,1) = 1, \inf(0,1) = 0$.

متباينات مهمة

1) متباينة المتوسطين الحسابي والهندسي (The Arithmetic-Geometric Mean Inequality):

للعددين الموجبين a, b فإن العدد $(a+b)/2$ يسمى المتوسط الحسابي، والعدد $\sqrt{ab}$ يسمى المتوسط الهندسي، وأن $\sqrt{ab} \le (a+b)/2$. المتساوية في العلاقة السابقة تتحقق فقط عندما يكون $a = b$.

البرهان: لأي $a, b \in \mathbb{R}$ فإن $(a-b)^2 \ge 0$. وبالتالي، $a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$. ومنها فإن

$$ab \le \frac{a^2 + b^2}{2}$$

بوضع $a^2 = x, \ b^2 = y$ نحصل على (هو يكافئ المطلوب)

$$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}.$$

المتساوية في العلاقة السابقة تتحقق فقط عندما يكون $x = y$.

بصورة عامة، إذا كانت $x_1, x_2, \cdots, x_n$ أعداد حقيقية موجبة فإن

$$\sqrt{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

باستخدام الاستنتاج الرياضي يمكن برهان هذه المتباينة.

2) متباينة برنولي (Bernoulli's Inequality)**:** إذا كان $x \geq -1$ فإن

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

البرهان: باستخدام الاستنتاج الرياضي، وحيث أن المتساوية تتحقق عندما $n=1$، نفرض صحة العلاقة للعدد $n=k$. نجد عندما $n=k+1$، مع الاخذ في الاعتبار $1+x \geq 0$، أن

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x)\\ &\geq (1+kx)(1+x)\\ &= 1+(1+k)x+kx^2\\ &\geq 1+(k+1)x,\quad kx^2 \geq 0\ \ \forall\, k \in \mathbb{N},\quad x \geq -1\end{aligned}$$

هذا يثبت صحة المتباينة عندما $n=k+1$ بفرض صحتها عندما $n=k$. ومن صحتها عندما $n=1$، فإن المتباينة صحيحة لكل $n \in \mathbb{N}$.

3) القيمة المطلقة ومتباينة المثلث (The absolute value and the Triangle Inequality)**:**

القيمة المطلقة لعدد حقيقي a، ويرمز لها $|a|$، تعرف بالصورة

$$|a| = \begin{cases} a, & a>0\\ 0, & a=0\\ -a, & a<0\end{cases}$$

نظرية: للأعداد الحقيقية $a,b,c \in \mathbb{R}$ فإن

1) لكل $a,b \in \mathbb{R}$ فإن $|ab| = |a||b|$.

2) لكل $a \in \mathbb{R}$ فإن $|a|^2 = a^2$.

3) إذا كان $c \geq 0$ فإن $|a| \leq c$ إذا وفقط إذا $-c \leq a \leq c$.

نظرية: (**متباينة المثلث** Triangle Inequality)

إذا كان $a,b \in \mathbb{R}$ فإن $|a+b| \leq |a|+|b|$.

البرهان: لكل $a,b \in \mathbb{R}$ فإن $-|a| \leq a \leq |a|, -|b| \leq b \leq |b|$. وبالتالي، فإن

$$-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$$

وهذا يكافئ المطلوب.

بصورة عامة، لأي أعداد حقيقية $a_1, a_2, \cdots, a_n$ فإن

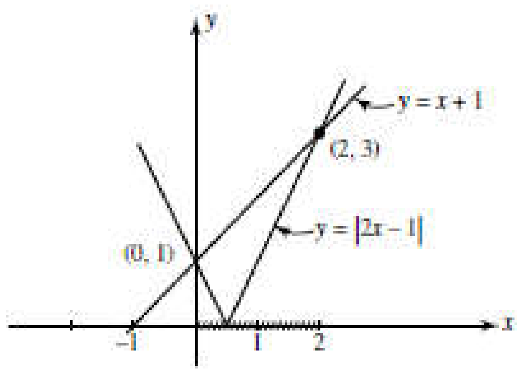
$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

نتيجة: أذا كان $a, b \in \mathbb{R}$ فإن

$$\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|, \qquad |a-b| \leq |a|+|b|.$$

مثال (1): حل المتباينة $|2x-1| \leq x+1$.

الحل: لدينا خاليتين، الأولى عندما يكون $x \leq \frac{1}{2}$ فإن $|2x-1| = -2x+1$. ومن ثم، فإن المتباينة المعطاة تكافئ $-2x+1 \leq x+1$. ومنها نحصل على $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. في الحالة الثانية، عندما $x \geq 1/2$ نجد أن $|2x-1| = 2x-1$. وعندئذ، المتباينة المعطاة تأخذ الصورة $2x-1 \leq x+1$. ومنها نحصل على $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$. وبالتالي، فإن حل المتباينة هو $0 \leq x \leq 2$، كما يوضحه الشكل التالي



مثال (2): إذا كانت

$$f(x) = \frac{2x^2+3x+1}{2x-1}, \qquad 2 \leq x \leq 3$$

فأوجد عدد حقيقي موجب M بحيث $|f(x)| \leq M$ لكل $2 \leq x \leq 3$.

الحل: لكل $2 \leq x \leq 3$ فإن $2 \leq |x| \leq 3$،

$$|f(x)| = \frac{|2x^2+3x+1|}{|2x-1|},$$

$$|2x^2+3x+1| \leq 28, \qquad |2x-1| \geq 3.$$

وبالتالي، فإن $|f(x)| \leq \frac{28}{3}$، أي أن $M = \frac{28}{3}$.

ملحوظة: العدد $M = \frac{28}{3}$ ليس الوحيد الذي يحقق المتباينة $|f(x)| \leq M$، فمن الواضح أن أي عدد $h > \frac{28}{3}$ يحقق $|f(x)| \leq H$. أيضًا، فإن العدد $\frac{28}{3}$ قد لا يكون هو أصغر عدد ممكن يحقق المطلوب.

4) متباينة كوشي – شفارتز (Cauchy-Schwarz inequality):

لأي أعداد حقيقية $a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n$ فإن

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

البرهان: عرف المتجهين

$$u = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \quad v = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

فإن

$$\|u\| = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \|v\| = \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

وبالتالي، لإثبات صحة متباينة كوشي – شفارتز يكفي إثبات أن

$$u \cdot v \leq \|u\|\,\|v\|$$

لذلك، عرف المتجه

$$w = -\left(\frac{u \cdot v}{v \cdot v}\right) v + u$$

نجد أن w, v متجهان متعامدان، لأن

$$w \cdot v = -\left(\frac{u \cdot v}{v \cdot v}\right) v \cdot v + u \cdot v = 0.$$

وحيث أن $u = w + \left(\frac{u \cdot v}{v \cdot v}\right) v$ فإن

$$\|u\|^2 = u \cdot u = \|w\|^2 + \left|\frac{u \cdot v}{v \cdot v}\right|^2 \|v\|^2 = \|w\|^2 + \frac{|u \cdot v|^2}{\|v\|^2}.$$

ومنها

$$\|u\|^2 \|v\|^2 = \|w\|^2 \|v\|^2 + |u \cdot v|^2 \geq |u \cdot v|^2$$

لأن $\|w\|\|v\| \geq 0$. وهذا يكمل البرهان.

خاصية ارشميدس (Archimedes property):

لكل عدد حقيقي $x > 0$ يوجد عدد طبيعي n_x بحيث $\frac{1}{n_x} < x$.

هذه الخاصية تعني أن:

1) مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ليست محدودة من أعلى.
2) لكل عدد حقيقي موجب يوجد عدد طبيعي أكبر منه.

البرهان: (1) بفرض العكس فإنه سيوجد $\alpha = \sup \mathbb{N}$ في $\mathbb{R}$. وبالتالي، فإن $n \le \alpha$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وحيث إن $n + 1 \in \mathbb{N}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $n + 1 \le\backslash alpha$، ومن ثم $n \le \alpha - 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وعليه فإن $\alpha - 1$ حد علوي للمجموعة $\mathbb{N}$، وهذا يناقض كون α أصغر حد علوي للمجموعة $\mathbb{N}$. هذا التناقض يعني أن $\mathbb{N}$ ليس لها حد علوي، أي ليست محدودة من أعلى.

(2) بناء على (1) فإنه لأي عدد حقيقي موجب x فإن $\frac{1}{x}$ ليس حد علوي للمجموعة $\mathbb{N}$. لذا سيوجد $n_x \in \mathbb{N}$ بحيث $n_x > \frac{1}{x}$. وهذا يكمل البرهان.

أمثلة: (1) إذا كانت $A = \{\frac{n}{n+1};\ \ n \in \mathbb{N}\}$ فإوجد $\inf A , \sup A , \max A , \min A$.

الحل: عرف $a_n = \frac{n}{n+1}$ نجد أن $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$. وبالتالي، فإن المجموعة A تزايدية. ويمكن كتابتها على الصورة

$$A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right\}$$

ومن ثم فإن $\inf A = \min A = \frac{1}{2}$. من جهة ثانية، واضح أن $1 \notin A$ $\frac{n}{n+1} < 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$. ولذلك، فإن $\max A$ غير موجود. وأن العدد 1 حد علوي للمجموعة A. يبقى إثبات أن العدد $\sup A = 1$. بحسب خاصية ارشميدس لأي عدد حقيقي $\epsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي n_ϵ بحيث $\frac{1}{n_\epsilon + 1} < \epsilon$. وبالتالي،

$$1 - \epsilon < 1 - \frac{1}{n_\epsilon + 1} = \frac{n_\epsilon}{n_\epsilon + 1} \in A$$

وهذا يعني أنه لأي $\epsilon > 0$ فإن العدد $1 - \epsilon$ ليس حد علوي للمجموعة A، أي أن $\sup A = 1$.

(2) للمجموعة $A=\left\{\frac{n+2}{n+1};n\in\mathbb{N}\right\}$ أوجد – إن وجد – كلا من $\inf A,\sup A,\min A,\max A$.

الحل: عرف $a_n=\frac{n+2}{n+1}$ نجد أن $a_n-a_{n+1}=\frac{1}{(n+2)(n+3)}>0$. ولذلك، فإن المجموعة A تناقصية، وحيث إن $\left\{\cdots,\frac{5}{4},\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right\}$ $A=\left\{\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\cdots\right\}$ فإن $\sup A=\max A=\frac{3}{2}$.

من جهة ثانية، فإن $\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}>1$ لكل $n\in\mathbb{N}$. وهذا يعني أن العدد 1 هو حد سفلي للمجموعة A.

لأي $\epsilon>0$ (بحسب خاصية ارشميدس) يوجد عدد طبيعي n_ϵ بحيث $\frac{1}{n_\epsilon+1}<\epsilon$. ومن هذا نجد أن

$1+\frac{1}{n_\epsilon+1}<1+\epsilon$ لكن $1+\frac{1}{n_\epsilon+1}\in A$ ولذلك، فإن $1+\epsilon$ ليس حد سفلي للمجموعة A، أي أن $\inf A=1$. وحيث إن $1\notin A$ فإن $\min A$ غير موجود.

ملاحظة:

$$\sup A=\sup\left\{1+\frac{1}{n+1};n\in\mathbb{N}\right\}=1+\sup\left\{\frac{1}{n+1};n\in\mathbb{N}\right\}=1+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{2}$$
$$\inf A=\inf\left\{1+\frac{1}{n+1};n\in\mathbb{N}\right\}=1+\inf\left\{\frac{1}{n+1};n\in\mathbb{N}\right\}=1+0=1$$

نظرية: (1) إذا كان $z>0,y>0$ عددان حقيقيان موجبان سيوجد عدد طبيعي n بحيث $ny>z$.

(2) إذا كان $z>0$ عدد حقيقي موجب سيوجد عدد طبيعي n بحيث $0<\frac{1}{n}<z$.

(3) إذا كان $y>0$ عدد حقيقي موجب سيوجد عدد طبيعي n بحيث $n-1\le y<n$.

البرهان: (1) إذا كان $y>0,z>0$ فإن $\frac{z}{y}>0$. بحسب خاصية ارشميدس يوجد عدد طبيعي n

بحيث $n>z/y$. ومن ثم فإن $ny>z$.

$$(2)\ z>0\Rightarrow\frac{1}{z}>0,\ \ \exists\, n\in\mathbb{N},\ \ n>\frac{1}{z}\Rightarrow\ 0<\frac{1}{n}<z$$

(3) إذا كـان $y > 0$ سيوجد عدد طبيعي m بحيث $m > y$. ليكن n هو أصـغر عدد طبيعـي بحيث $n > y$. فإن $n - 1 \leq y < n$.

نظريـة: (1) إذا كـان $x > 0$ عدد غيـر نسـبي، و$z > 0$ عدد حقيقـي سـيوجد عدد طبيعـي m بحيث

$$0 < \frac{x}{m} < z$$

(2) إذا كان $y < z$ عددان حقيقيان سيوجد عدد نسبيr بحيث $y < r < z$.

(3) إذا كان x عدد نسبي، و$y < z$ عددان حقيقيان سيوجد عدد نسبي r بحيث $y < rx < z$.

البرهان: يكفي برهان واحدة من الجمل السابقة وبرهان بقيتها يكون بالمثل. سنبرهن (3).

لنعتبر الحالة عندما $x > 0$ عدد غير نسبي و $0 < y < z$ عددان حقيقيـان. فـإن $\frac{z}{x} > \frac{y}{x} > 0$. وبالتالي،

$\frac{z}{x} - \frac{y}{x} > 0$. ومن ثم $0 < \min\left\{\frac{y}{x}, \frac{z}{x} - \frac{y}{x}\right\}$.

وبحســب خاصــية ارشــميدس يوجــد عــدد طبيعــي m بحيــث $\frac{1}{m} < \min\left\{\frac{y}{x}, \frac{z}{x} - \frac{y}{x}\right\}$، أي $\frac{1}{m} < \frac{y}{x}, \frac{1}{m} < \frac{z}{x} - \frac{y}{x}$. كذلك يوجد أصغر عدد طبيعي n بحيث $\frac{n-1}{m} \leq \frac{y}{x} < \frac{n}{m}$.

يبقى اثبات أن $\frac{n}{m} < \frac{z}{x}$. لذلك نفرض العكس، أن $\frac{z}{x} \leq \frac{n}{m}$. هذا يؤدي إلى

$$\frac{z}{x} - \frac{y}{x} \leq \frac{n}{m} - \frac{y}{x} \leq \frac{n}{n} - \frac{n-1}{m} = \frac{1}{m}$$

هذا يناقض كون $\frac{1}{m} < \frac{z}{x} - \frac{y}{x}$. هذا التناقض يثبت أن $\frac{y}{x} < \frac{n}{m} < \frac{z}{x}$. ومنها ينتج المطلوب (3).

المجموعات المنتهية وغير المنتهية وقابلية العد في $\mathbb{R}$

مجموعـة الاعـداد الطبيعيـة (مجموعـة العـد) هـي $\mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}$. هـي مجموعـة مرتبـة (ordered) وقابلة للعد (countable). يقال لمجموعة S جزئية من $\mathbb{N}$ أنها جزء أولي (او قطعة أوليـة initial segment) إذا وجـد عـدد طبيعـي n بحيـث $x \in S$ إذا كـان $x < n$. فمـثلا، المجموعات التالية هي قطع أولية من $\mathbb{N}$

$$S_1 = \{1,2\}, \qquad S = \{1,2,3,4\}, \qquad S_3 = \{1,2,3,\cdots,100\}$$

ولكن المجموعات التالية ليست كذلك

$$A_1 = \{1,3,5\}, \qquad A_2 = \{2,4,6,\cdots\}$$

تعريف: (1) يقال لمجموعة B انها منتهية (finite) إذا كانت خالية أو توجد دالة تقابل (أحادية وفوقية) نطاقها B ومداها قطعة أولية من $\mathbb{N}$. خلاف ذلك يقال للمجموعة B أنها غير منتهية (infinite).

(2) إذا وجدت دالة تقابل $f: B \to \mathbb{N}$ فيقال للمجموعة B انها منتهية أو قابلة للترقيم (Numerable).

(3) إذا كانت مجموعة B منتهية أو قابلة للترقيم فيقال أنها قابلة للعد.

نظرية: كل مجموعة جزئية من مجموعة منتهية تكون منتهية، وكل مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد تكون قابلة للعد.

نظرية: اتحاد عدد منتهي من مجموعات منتهية هو مجموعة منتهية، واتحاد قابل للعد من مجموعات قابلة للعد هو مجموعة قابلة للعد.

أمثلة: 1) مجموعة الاعداد الطبيعية الزوجية $A = \{2,4,6,\cdots\}$ قابلة للترقيم.

2) مجموعة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ قابلة للعد.

البرهان: (1) عرف الدالة $f: \mathbb{N} \to A$ بحيث $f(n) = 2n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. يكفي إثبات أن f دالة تقابل (أحادية وفوقية)، عندئذ تكون A مجموعة قابلة للترقيم.

- **الدالة $f: \mathbb{N} \to A$ بحيث $f(n) = 2n$ أحادية**

إذا كان $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ و $f(n_1) = f(n_2)$ فإن $2n_1 = 2n_2$، ومن ثم $n_1 = n_2$.

- **الدالة $f: \mathbb{N} \to A$ بحيث $f(n) = 2n$ فوقية**

إذا كان $x \in A$ فإن x عدد طبيعي زوجي، وبالتالي يوجد عدد طبيعي n_x بحيث $x = 2n_x$. أي أنه لكل $x \in A$ يوجد $n_x \in \mathbb{N}$ بحيث $f(n_x) = x \in A$.

(2) عرف الدالة $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ بحيث

$$f(z) = \begin{cases} 1, & z = 0 \\ 2z, & z > 0 \\ 1 - 2z, & z < 0 \end{cases}$$

يكفي اثبات أن f دالة تقابل، عندئذ تكون $\mathbb{Z}$ قابلة للترقيم.

أ) **الدالة f أحادية:**

- إذا كان z_1, z_2 عددان صحيحان موجبان، وبفرض ان $f(z_1) = f(z_2)$ فإن $2z_1 = 2z_2$. ومن ثم فإن $z_1 = z_2$.

- إذا كـان z_1, z_2 عددان صـحيحان سـالبان، وبفرض ان $f(z_1) = f(z_2)$ فـإن $1 - 2z_1 = 1 - 2z_2$. ومن ثم فإن $z_1 = z_2$.

ب) الدالة f فوقية:

لأي $n \in \mathbb{N}$ فإن

- إذا كـان n عـدد زوجـي فـإن $z = \frac{n}{2}$ عـدد صـحيح موجـب ومـن ثـم $f(z) = 2z = n$. أي أن كل عدد طبيعي زوجي n هو صورة لعدد صحيح موجب هو $z = \frac{n}{2}$.
- إذا كان n عدد فردي فإن $0 \geq z = \frac{1-n}{2}$ عدد صحيح غير موجب ومن ثم $f(z) = 1 - 2z = n$. أي أن كـل عـدد طبيعـي فـردي n هـو صـورة لعـدد صحيح غير موجب هو

$$z = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ \dfrac{1-n}{2}, & n > 1 \end{cases}$$

نتيجة: إذا كانت $B \subseteq \mathbb{N}$ فإن B مجموعة قابلة للعد.

البرهان: (1) إذا كانت B مجموعة منتهية فهي قابلة للعد.

(2) إذا كانت B مجموعة غير منتهية جزئية من $\mathbb{N}$ سيوجد أصـغر عنصـر $b_1 \in B$. وبالتـالي، فإن

$B - \{b_1\} \subset \mathbb{N}$ مجموعة غير منتهية، خلاف ذلك فإن B تكون منتهية وهذا ينـاقض الفرض. لـيكن b_2 أصـغر عنصـر للمجموعـة $B - \{b_1\}$، فـإن $B - \{b_1, b_2\}$ مجموعـة غيـر منتهيـة. وهكـذا، فـإن الاسـتمرار فـي هـذا الاجـراء يـؤدي إلـى $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$ حيـث $b_j \in \mathbb{N}$ لكـل $j \geq 1$، هذا يثبت أن B مجموعة قابلة للعد.

نظرية: مجموعة الاعداد القياسية $\mathbb{Q}$ قابلة للعد.

البرهان: حيث إن $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ هو اتحاد قابل للعد من المجموعات: $\mathbb{Q}^+$ مجموعة الاعداد القياسـية الموجبـة، $\{0\}$، و $\mathbb{Q}^-$ مجموعـة الاعداد القياسـية السـالبة. يكفـي إثبـات أن $\mathbb{Q}^+$ مجموعة قابلة للعد، عندئذ تكون $\mathbb{Q}$ مجموعة قابلة للعد. واضح أن

$$\mathbb{Q}^+ = \cup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$$

اتحاد قابل للعد، حيث

$$A_1 = \left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cdots\right\}, A_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \cdots\right\}, \cdots, A_n = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots\right\}, \cdots$$

مجموعات قابلة للعد فلكل عدد طبيعي $k \geq 1$ توجد دالة تقابل $f_k: \mathbb{N} \to A_k$ بحيث لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $f_k(n) = \frac{n}{k} \in A_k$. وبالتالي، $\mathbb{Q}^+$ مجموعة قابلة للعد، ومن ثم $\mathbb{Q}$ مجموعة قابلة للعد.

كذلك يمكن ترتيب مجموعة الاعداد القياسية $\mathbb{Q}$ على الصورة التالية

$$\begin{matrix} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \cdots \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{7}{4} & \cdots \\ \cdots & & & \ddots & & & & \cdots \end{matrix}$$

نظرية: الفترة $(0,1)$ غير قابلة للعد.

البرهان: بفرض العكس أن $A = (0,1)$ مجموعة قابلة للعد، وأن $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$. فإن $0 < a_k < 1$ لكل $k \geq 1$. ومن ثم يوجد تمثيل عشري لكل عنصر a_k في A، ليكن

$$a_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$$
$$a_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$$
$$\vdots$$
$$a_k = 0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\cdots$$
$$\vdots$$

حيث $a_{mn} \in \{0,1,2,3,\cdots,9\}$ لكل $m, n \in \mathbb{N}$. من جهة ثانية، يوجد العدد $b = 0.b_1b_2b_3\cdots$ في A بحيث $b_n \neq a_{nn}$ لكل $n \in \mathbb{N}$. أي أن $b \neq a_k$ لكل $k \geq 1$. هذا التناقض يقتضي أن تكون $A = (0,1)$ مجموعة غير قابلة للعد.

نتيجة: 1) كل مجموعة جزئية من الاعداد الحقيقية تحوي الفترة $(0,1)$ هي مجموعة غير قابلة للعد.

2) كل فترة هي مجموعة غير قابلة للعد.

3) مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي مجموعة غير قابلة للعد.

4) مجموعة الاعداد غير النسبية $\mathbb{Q}^c$ هي مجموعة غير قابلة للعد.

ملاحظات: 1) كل مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد تكون قابلة للعد.

2) تقاطع مجموعتين احداهما قابلة للعد هو مجموعة قابلة للعد.

3) إذا كانت Aمجموعة غير قابلة للعد، وكانت $A \subseteq B$ فإن B مجموعة غير قابلة للعد.

الخاصية المميزة للفترات (THE PROPERTY OF THE INTERVALS):

إذا كانت S مجموعة جزئية من الاعداد الحقيقية تحوي على الأقل عنصرين بحيث إذا كان $x < y$ في S فإن $[x, y] \subseteq S$، عندئذ تكون S فترة.

البرهان: (1) إذا كانت S مجموعة محدودة سيوجد $a = \inf S\,,\ b = \sup S$. وبالتالي، فإن $S \subseteq [a, b]$. الآن نثبت أن $(a, b) \subset S$. كل $x \in (a, b)$ ليس حداً للمجموعة S، ومن ثم يوجد $s_1, s_2 \in S$ بحيث

$$s_1 < x < s_2$$

وبالتالي، فإن $x \in [s_1, s_2] \subseteq S$. هذا يكمل البرهان $S = (a, b)$.

(2) إذا كانت S مجموعة محدودة فقط من أعلى سيوجد $b = \sup S$ وبالتالي $S \subseteq (-\infty, b]$. يبقى إثبات أن $(-\infty, b) \subset S$، وعندئذ يكون $S = (-\infty, b)$ هي فترة. كل $x \in (-\infty, b)$ ليس حداً للمجموعة S، ومن ثم يوجد $s_1, s_2 \in S$ بحيث

$$s_1 < x < s_2$$

وبالتالي، فإن $x \in [s_1, s_2] \subseteq S$.

بالمثل يمكن إثبات أنه إذا كانت S محدودة فقط من أسفل سيوجد $a \in \mathbb{R}$ بحيث $S = (a, \infty)$.

(3) إذا كانت S ليست محدودة (ليست محدودة من أعلى وليست محدودة من أسفل) فإن $S \subseteq (-\infty, \infty)$. وكل $x \in \mathbb{R}$ ليس حداً للمجموعة S، ومن ثم يوجد $s_1, s_2 \in S$ بحيث

$$s_1 < x < s_2$$

وبالتالي، فإن $x \in [s_1, s_2] \subseteq S$. أي أن $S = (-\infty, \infty)$.

الفترات المتعششة (NESTED INTERVALS):

تعريف: إذا كانت (I_n) متتابعة من فترات بحيث $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$ يقال أنها فترات متعششة (nested).

أمثلة: الفترات التالية متعششة. لكل $n \in \mathbb{N}$ عرف

$$I_n = \left(0,\frac{1}{n}\right), \qquad J_n = \left[0,\frac{1}{n}\right], \qquad K_n = (n,\infty)$$

مثال: إذا كان $I_n = \left[0,\frac{1}{n}\right]$ لكل $n \in \mathbb{N}$، فاثبت أن $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

الحل: واضح أن $0 \in I_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وبالتالي، فإن $0 \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. لأي عدد حقيقي $x \neq 0$ فإن

(1) إذا كان $x < 0$ فإن $x \notin I_n$ لكل $n \geq 1$. ومن ثم $x \notin \cap_{n=1}^{\infty} I_n$.

(2) إذا كان $x > 0$ فسيوجد عدد طبيعي n_x بحيث $x > \frac{1}{n_x} > 0$. ولذلك،

$x \notin I_{n_x} = \left[0,\frac{1}{n_x}\right]$. وبالتالي، فإن $x \notin \cap_{n=1}^{\infty} I_n$.

هذا يثبت أن $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

مثال: إذا كان $J_n = \left(0,\frac{1}{n}\right]$ لكل $n \in \mathbb{N}$، فاثبت أن $\cap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset$.

الحل: لأي عدد حقيقي x فإن

(1) إذا كان $x \leq 0$ فإن $x \notin J_n$ لكل $n \geq 1$. ومن ثم $x \notin \cap_{n=1}^{\infty} J_n$.

(2) إذا كان $x > 0$ فسيوجد عدد طبيعي n_x بحيث $x > \frac{1}{n_x} > 0$. ولذلك،

$x \notin J_{n_x} = \left(0,\frac{1}{n_x}\right]$. وبالتالي، فإن $x \notin \cap_{n=1}^{\infty} J_n$.

هذا يثبت أن $\cap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset$.

مثال: إذا كان $K_n = [n,\infty)$ لكل $n \in \mathbb{N}$، فاثبت أن $\cap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$.

نظرية (خاصية الفترات المتعششة): إذا كانت $I_n = [a_n, b_n]$ بحيث $I_n \supseteq I_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$، فإن $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ تقاطع غير خالي.

البرهـان: حيـث إن (I_n) متتابعـة مـن فتـرات متعشـشـة فـإن $a_n < b_1$ لكـل $n \in \mathbb{N}$. أي أن $\{a_n;\ \ n \in \mathbb{N}\}$ مجموعـــة محـــدودة مـــن أعلـــى. وبالتـــالي ســـيوجد $x \in \mathbb{R}$ بحيـــث $x = \sup\{a_n;\ \ n \in \mathbb{N}\}$. ومن ثم

$$a_n \leq x, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

يبقى ثبت ان

$$x \leq b_n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

عندئـذ، مـن $(1), (2)$ نجـد أن $a_n \leq x \leq b_n$، أي أن $x \in I_n$ لكـل $n \in \mathbb{N}$. ومـن ثـم فـإن $x \in \cap_{n=1}^{\infty}\ I_n$. هذا يثبت أن $\cap_{n=1}^{\infty}\ I_n \neq \emptyset$.

الآن، اثبـــات (2) يكـــافئ اثبـــات أن b_n (لكـــل $n \in \mathbb{N}$) هـــو حـــد علـــوي للمجموعـــة $A = \{a_k;\ \ k \in \mathbb{N}\}$. لتحقيق ذلك نعتبر الحالتين:

(i) إذا كـان $k < n$ فـي $\mathbb{N}$ فـإن $I_n \subseteq I_k$ ومـن ثـم $a_k \leq a_n < b_n \leq b_k$. أي أن $a_k < b_n$.

(ii) إذا كـــان $k > n$ فـــإن $I_k \subseteq I_n$، وبالتـــالي $a_n \leq a_k < b_k \leq b_n$. أي أن $a_k < b_n$.

مما سبق فإن $a_k < b_n$ لكل $k, n \in \mathbb{N}$. وهذا يكمل البرهان.

تطبيقات خاصية الفترات المتعششة:

نظرية: مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ غير قابلة للعد.

البرهان: يكفي اثبات أن الفترة $[0,1]$ غير قابلة للعد. عندئذ تكون $\mathbb{R}$ غير قابلة للعد. خـلاف ذلـك، إذا كانـت $\mathbb{R}$ قابلـة للعـد وحيث إن $[0,1] \subset \mathbb{R}$ فـإن تكـون $[0,1]$ قابلـة للعـد، وهـذا تنـــــاقض. الآن بفـــــرض العكـــــس، أي بفـــــرض ان $[0,1]$ قابلـــــة للعـــــد، وأن $I = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$. لـتكن $I_1 = I \backslash \{x_1\}$، فـإن $\boldsymbol{I_1}$ فتـرة محـدودة ومغلقـة (؟). بالمثل $I_2 = I_1 \backslash \{x_2\}$ فترة محدودة ومغلقة. وهكذا فـإن (I_n) متتابعـة من فترات محدودة ومغلقـة، حيـث $I_{n+1} = I_n \backslash \{x_{n+1}\}$ وتحقـق $I_{n+1} \subset I_n \subset \cdots \subset I_1 \subset I$ لكـل $n \in \mathbb{N}$، أي أن (I_n) متتابعة فترات متعششة. وبالتالي، يوجد عدد حقيقي y بحيث $y \in I_n$ لكل $n \geq 1$. ومن ثم، $y \neq x_n$ لكل $n \geq 1$. هذا يثبت ان $I = [0,1]$ (ومن ثم $\mathbb{R}$)ليست قابلة للعد.

نظريـة: لكل عدد حقيقـي x توجد فتـرة $I_n = [a_n, a_n + \frac{1}{n}]$ حيث $x \in I_n \subset I_{n-1}$ و a_n عدد نسبي لكل $n \geq 1$.

البرهان: إذا كان $x = 0$ فإن

$$x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \subset \left[-\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}\right] \subset \cdots \subset [-1,1]$$

لكل $n > 1$.

أمـا إذا كـان $x > 0$ (فـي الحالـة عنـدما $x < 0$ نتعامـل مـع العـدد $-x$) سيوجد أصـغر عـدد طبيعـي n_0 بحيث $n_0 - 1 \leq x < n_0$. اعتبـر $a_0 = n_0 - 1$، لاحـظ أنـه عـدد نسـبي، فإننا نحصل على

$$x \in I_1 = [a_1, a_1 + 1].$$

بتنصيف الفترة I_1 نحصل على الفترتين $\left[a_1 + \frac{1}{2}, a_1 + 1\right]$, $\left[a_1, a_1 + \frac{1}{2}\right]$.

فإذا كان $x \in \left[a_1, a_1 + \frac{1}{2}\right]$ اعتبرنا $a_2 = a_1$ وكان $x \in I_2 = \left[a_2, a_2 + \frac{1}{2}\right]$. خـلاف ذلك يكـون $x \in \left[a_1 + \frac{1}{2}, a_1 + 1\right]$ وعندئذ نعتبـر $a_2 = a_1 + \frac{1}{2}$. بالاسـتمرار فـي هـذا الاجراء نحصل على

$$x \in I_n = \left[a_n, a_n + \frac{1}{2^{n-1}}\right], a_n \in \mathbb{Q}, \quad n \geq 1$$

وهذا يكمل البرهان.

كثافة الاعداد النسبية والاعداد غير النسبية في $\mathbb{R}$

تعريـف: يقـال لمجموعـة A غيـر خاليـة جزئيـة مـن $\mathbb{R}$ أنهـا كثيفـة فـي $\mathbb{R}$ إذا كانـت كـل فتـرة مفتوحة (a, b) تحوي على الأقل عنصرا من A.

بعبارة أخرى، لكل عددان حقيقيان a, b يوجد عنصر $x \in A$ بحيث $a \leq x \leq b$.

نظرية: مجموعة الاعداد النسبية $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$.

البرهان: ليكن $a < b$ عددان حقيقيان، فإن $0 < b - a$.

(1) إذا كان $0 < a < b$ سيوجد عدد طبيعي n بحيث $0 < \frac{1}{n} < b - a$.

ومن ثم، $nb > na + 1$. وحيث إن $0 < na$ سيوجد أصغر عدد طبيعي m بحيث

$$m - 1 \leq na < m$$

ومن ذلك نحصل على $na < m \leq na + 1 < nb$. وبالتالي $a < x = \frac{m}{n} < b$،
وهذا يثبت المطلوب.

(2) إذا كان $a < 0 < b$ فإن $x = 0$ عدد نسبي يحقق المطلوب.

(3) إذا كان $a < b < 0$ فإن $0 < -b < -a$، وبحسب الحالة الأولى يوجد عدد نسبي x بحيث $-b < x < -a$. أو $a < -x < b$ وهو المطلوب.

نتيجة: مجموعة الاعداد غير النسبية $\mathbb{Q}^c$ كثيفة في $\mathbb{R}$.

البرهان: ليكن $a < b$ عددان حقيقيان. فإن $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}}$ عددان حقيقيان، وبالتالي سيوجد عدد نسبي x بحيث $\frac{a}{\sqrt{2}} < x < \frac{b}{\sqrt{2}}$. ومن ثم، نجد العدد غير النسبي $y = x\sqrt{2}$ (؟) ليحقق $a < y < b$ وهذا هو المطلوب.

توبولوجيا الاعداد الحقيقية

نقصد بتوبولوجيا $\mathbb{R}$ تحديد المجموعات المفتوحة Open Sets والمجموعات المغلقة Closed Sets في $\mathbb{R}$ ودراسة خواصها.

المجموعات المفتوحة

تعريف: يقال لمجموعة غير خالية A جزئية من $\mathbb{R}$ أنها مفتوحة إذا كان لكل $x \in A$ توجد فترة مفتوحة I بحيث $x \in I \subseteq A$.

أمثلة:

1) الفترة (a, b) هي مجموعة مفتوحة، لأنه لكل $x \in (a, b)$ يوجد العدد $\delta_x = \min\{x - a, b - x\}$ بحيث $x \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \subset (a, b)$.

2) مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ مجموعة مفتوحة، لأنه لكل $x \in \mathbb{R}$ نجد $x \in (x - \delta, x + \delta)$ لأي عدد حقيقي $0 < \delta$.

3) المجموعة الخالية $\emptyset$ مجموعة مفتوحة. بفرض العكس، أن $\emptyset$ غير مفتوحة، سيوجد $x \in \emptyset$ (!) وتوجد فترة مفتوحة I بحيث $x \in I \not\subset \emptyset$. وهذا يناقض كون $\emptyset$ مجموعة خالية.

4) كل مجموعة A قابلة للعد جزئية من $\mathbb{R}$ تكون غير مفتوحة.

البرهان: بفرض العكس، أن A مجموعة مفتوحة فإنه لكل $x \in A$ توجد فترة I (غير قابلة للعد لكونها فترة) بحيث $x \in I \subset A$. وهذا يناقض كون A مجموعة قابلة للعد.

5) المجموعات $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^c$ كلها غير مفتوحة. لنعتبر المجموعة $\mathbb{Q}^c$ (هي مجموعة كثيفة في $\mathbb{R}$، غير قابلة للعد!) فإنه لكل $x \in \mathbb{Q}^c$ ولكل فترة (a, b) تحوي x فإن $x \in (a, b) \not\subset \mathbb{Q}^c$.

6) الفترات $[a, b), (a, b], [a, b]$ كلها مجموعات غير مفتوحة. لنعتبر الفترة $[a, b)$، فإن كل فترة مفتوحة I تحوي a نجد أن $I \not\subset [a, b)$.

المجموعات المغلقة

تعريف: يقال لمجموعة غير خالية B جزئية من $\mathbb{R}$ أنها مغلقة إذا كانت $B^c = \mathbb{R} - B$ مجموعة مفتوحة.

أمثلة:

1) المجموعات $\mathbb{R}, \emptyset$ مغلقة.

2) الفترات $[a, b), (a, b], [a, b]$ كلها مجموعات غير مغلقة. فمثلا الفترة $[a, b)$ غير مغلقة لأن $\mathbb{R} - [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$ مجموعة غير مفتوحة، لأنه لكل فترة مفتوحة I تحوي b نجد أن $I \not\subset \mathbb{R} - [a, b)$.

خواص المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$

1) $\mathbb{R}, \emptyset$ مجموعات مفتوحة.

2) إذا كان $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$، وكانت A_k (لكل $1 \leq k \leq n$) مجموعات مفتوحة فإن

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_K$$

مجموعة مفتوحة.

3) إذا كانت $A_1, A_2, A_3, \cdots$ مجموعات مفتوحة فإن

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

مجموعة مفتوحة.

4) إذا كانت A_α (لكل $\alpha \in I$ و I فترة) مجموعة مفتوحة فإن الاتحاد التالي (غير قابل للعد)

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$$

هو مجموعة مفتوحة.

برهان (2): إذا كان $\bigcap_{k=1}^{n} A_K = \emptyset$ فإنها مجموعة مفتوحة. خلاف ذلك، لكل x في هذا التقاطع توجد الاعداد الحقيقية δ_k (لكل $1 \le k \le n$) بحيث $x \in I_k = (x - \delta_k, x + \delta_k) \subset A_k$. من ثم يوجد العدد الحقيقي $\delta = \min\{\delta_k; 1 \le k \le n\}$ بحيث

$$x \in (x-\delta, x+\delta) \subset \cap_{k=1}^{n} I_k \subset \cap_{k=1}^{n} A_k$$

هذا يثبت المطلوب.

برهان (4): إذا كان $\cup_{\alpha\in I} A_\alpha = \mathbb{R}$ فإنها مجموعة مفتوحة. خلاف ذلك، لكل x في هذا الاتحاد ستوجد فترة مفتوحة I_{α_0} بحيث $x \in I_{\alpha_0} \subset A_{\alpha_0} \subset \cup_{\alpha\in I} A_\alpha$، وهذا يثبت أن $\cup_{\alpha\in I} A_\alpha$ مجموعة مفتوحة.

برهان آخر: إذا كانت A_α (لكل $\alpha \in I$) مجموعة مفتوحة. وبالتالي لها مكملة $\mathbb{R} - A_\alpha$ مغلقة. لإثبات أن $\cup_{\alpha\in I} A_\alpha$ مجموعة مفتوحة يكفي إثبات أن مكملتها $\mathbb{R} - \cup_{\alpha\in I} A_\alpha = \cap_{\alpha\in I} (\mathbb{R} - A_\alpha)$ مغلقة. وهذا ما سنثبته لاحقا.

مثال يوضح أن التقاطع اللانهائي لمجموعات مفتوحة ليس بالضرورة يكون مجموعة مفتوحة. اعتبر الفترات المفتوحة $I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ لكل $n \in \mathbb{N}$. واضح أن $\cap_{n\ge1} I_n = \{0\}$ هي مجموعة غير مفتوحة (؟).

تعريف: إذا كانت τ عائلة كل المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ فإن

1) $\mathbb{R}, \emptyset \in \tau$
2) إذا كانت $A_1, A_2 \in \tau$ فإن $A_1 \cap A_2 \in \tau$
3) إذا كانت $A_1, A_2, \cdots \in \tau$ فإن $\cup_{k\ge1} A_k \in \tau$

تعريف: العائلة τ تسمى توبولوجي العادي (أو المعتاد) على $\mathbb{R}$. الثنائي $(\mathbb{R}, \tau)$ يسمي بالفضاء التوبولوجي العادي.

خواص المجموعات المغلقة في $\mathbb{R}$

1) $\mathbb{R}, \emptyset$ مجموعات مغلقة.
2) إذا كان $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$، F_k، لكل $1 \le k \le n$ مجموعة مغلقة فإن

$$\bigcup_{k=1}^{n} F_k$$

مجموعة مغلقة.

3) إذا كانت وكانت F_α (لكل $\alpha \in I$، حيث I فترة) مجموعات مغلقة فإن

$$\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$$

مجموعة مغلقة.

البرهان: يكفي إثبات الخاصيتين الثانية والثالثة

- إذا كانت F_k (لكل $1 \le k \le n$) مجموعة مغلقة فإن المكملة $\mathbb{R} - F_k$ مجموعة مفتوحة. وبالتالي التقاطع المنته

$$\cap_{k=1}^{n} (\mathbb{R} - F_k) = \mathbb{R} - \cup_{k=1}^{n} F_k$$

هو مجموعة مفتوحة. ومن ثم فإن الاتحاد $\cup_{k=1}^{n} F_k$ يكون مجموعة مغلقة (مكملته مفتوحة).

- إذا كانت F_α مجموعة مغلقة فإن المكملة $\mathbb{R} - F_\alpha$ مجموعة مفتوحة. ومن ثم، المجموعة

$$\mathbb{R} - \cap_{\alpha \in I} F_\alpha = \cup_{\alpha \in I} (\mathbb{R} - F_\alpha)$$

مجموعة مفتوحة (اتحاد من مجموعات مفتوحة). وبالتالي فإن مكملتها $\cap_{\alpha \in I} F_\alpha$ مجموعة مغلقة، وهو المطلوب.

النقاط الداخلية والحدود لمجموعة في $\mathbb{R}$

تعريف: (1) إذا كانت $A \subseteq \mathbb{R}$ مجموعة غير خالية، يقال للعنصر $x \in A$ أنه نقطة داخلية (interior point) للمجموعة A إذا وجدت مجموعة مفتوحة I بحيث $x \in I \subseteq A$. وتسمى مجموعة كل النقاط الداخلية لمجموعة A بالداخلية (*interior*) للمجموعة A، ويرمز لها A°.

(2) يقال للعدد الحقيقي u أنه نقطة حدودية (أو حدية، boundary point) لمجموعة $A \subset \mathbb{R}$ إذا كل مجموعة مفتوحة I تحوي العدد u يكون $I \cap A \neq \emptyset,\ I \cap (\mathbb{R} - A) \neq \emptyset$. وتسمى مجموعة كل النقاط الحدودية لمجموعة A بحدود (*boundary*) للمجموعة A، ويرمز لها $b(A)$.

أمثلة: (1) كل نقاط فترة مفتوحة هي نقاط داخلية لها.

البرهان: لتكن $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$، فإنه لأي $x \in I$ فإن $a < x < b$. وبالتالي يوجد

$$\delta = \min\{x - a, b - x\}$$

بحيث $x \in (x - \delta, x + \delta) \subset I$. وهذا يثبت المطلوب. في الحالة عندما $I = \mathbb{R}$ فإنه لأي $\delta > 0$ يتحقق $x \in (x - \delta, x + \delta) \subset I$.

(2) للمجموعة (a,b) فإن النقاط الحدية هي $\{a,b\}$.

البرهان: لأي $\epsilon > 0$ فإن $a - \epsilon < a < a + \epsilon$، وأن

$$(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap (a,b) \neq \emptyset, \qquad (a - \epsilon, a + \epsilon) \cap \big(\mathbb{R} - (a,b)\big) \neq \emptyset$$

هذا يبين أن a نقطة حدودية للمجموعة (a,b). بالمثل يمكن إثبات أن b نقطة حدودية.

(3) للمجموعة $[0,4)$ فإن $[0,4)^{\circ} = (0,4),\ b[0,4) = \{0,4\}$.

(4) واضـــح أن $\mathbb{N}^{\circ} = \emptyset,\ \mathbb{Z}^{\circ} = \emptyset,\ \mathbb{Q}^{\circ} = \emptyset,\ (\mathbb{R} - \mathbb{Q})^{\circ} = \emptyset,\ \emptyset^{\circ} = \emptyset, \mathbb{R}^{\circ} = \mathbb{R}$، لأنه لكل عدد حقيقي r فإن كل فترة مفتوحة I تحوي r تحقق

$$I \cap \mathbb{N} = \emptyset,\ \ I \cap \mathbb{Z} = \emptyset,\ \ I \cap \mathbb{Q} = \emptyset,\ \ I \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}),\ \ I \cap \emptyset = \emptyset,\ \ I \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

(5) بين أن

$$b(\mathbb{N}) = \mathbb{N}, b(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, b(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}, b(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \mathbb{R}, b(\mathbb{R}) = \emptyset, b(\emptyset) = \emptyset.$$

نقاط التراكم ACCUMULATION POINTS

أمثلة تمهيدية

1) للمجموعة $A = \left\{\frac{1}{n};\ \ n \in \mathbb{N}\right\}$ واضح أن العناصر في المجموعة تتراكم بالقرب من العدد $x = 0$، لذا نقول أن $x = 0$ نقطة تراكم للمجموعة A. فلأي $\epsilon > 0$ يكون $(-\epsilon, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. حيث يوجد (بحسب خاصية ارشميدس) عدد طبيعي N بحيث $\frac{1}{N} < \epsilon$، وبالتالي $0 \neq \frac{1}{N} \in (-\epsilon, \epsilon) \cap A$.

أي أن، كل جوار للعدد $x = 0$ يحتوي على عناصر من المجموعة A.

ملاحظة: $x = 0 \notin A$ نقطة التراكم الوحيدة للمجموعة A (سنهتم بذلك فيما بعد)**.**

2) للمجموعة $B = \left\{\frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}\right\}$ فإن العدد $x = 1$ هو نقطة تراكم (وحيدة!). فلأي $\delta > 0$ فإنه بحسب خاصية ارشميدس يوجد العدد الطبيعي N بحيث $\frac{1}{\delta} < N + 1$، وبالتالي

$$1-\delta < 1-\frac{1}{N+1} = \frac{N}{N+1} < \frac{N+2}{N+1} = 1+\frac{1}{N+1} < 1+\delta$$

ومن ثم، $1 \neq \frac{N}{N+1} \in (1-\delta, 1+\delta) \cap B \neq \emptyset$. وهذا يثبت المطلوب.

يتضح من هذه الأمثلة أن العدد الحقيقي x يكون نقطة تراكم لمجموعة غير خالية من الاعداد الحقيقية إذا كل فترة مفتوحة تحوي x فإنها تحتوي على الأقل على عنصر (خلاف x) من عناصر A. هذا يمكن صياغته في التعريف التالي.

تعريف: إذا كانت A مجموعة غير خالية جزئية من $\mathbb{R}$، يقال لعدد حقيقي x أنه نقطة تراكم للمجموعة A إذا كانت كل فترة مفتوحة I تحوي العدد x تحقق $I \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$.

بعبارة اخرى، العدد x يكون نقطة تراكم لمجموعة غير خالية A إذا كان لكل $0 < \epsilon$ يتحقق

$$(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset.$$

مثال: اثبت أن $x = 1$ هو نقطة تراكم للمجموعة $A = \left\{\frac{n+1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$.

الحل: اجعل $a_n := \frac{n+1}{n} \in A$ فإن $1 < a_{n+1} < a_n \leq 2$ لكل $n \in \mathbb{N}$. أي أن، عناصر A تتناقص من $2 \in A$ لتتراكم بالقرب من $1 \notin A$. لإثبات المطلوب يكفي اثبات أنه لكل $0 < \delta$ يوجد $a_n \in A$ بحيث $a_n \in (1-\delta, 1+\delta) \cap (A - \{1\})$. بحسب خاصية ارشميدس يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{n} < \delta$. ومن ثم فإن

$$1-\delta < 1-\frac{1}{n} < 1+\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} = a_n < 1+\delta$$

وهذا يكمل الاثبات.

تعريف: مجموعة كل نقاط التراكم لمجموعة A تسمى مشتقة (derivative) المجموعة، ويرمز لها A'. والمجموعة $A \cup A'$ تسمى انغلاق (closure) المجموعة A ويرمز له $\overline{A}$، ونكتب $\overline{A} = A \cup A'$.

أمثلة: 1) $\mathbb{N}' = \emptyset$. لأي $r \in \mathbb{R}$ فإن

i) إذا كان $r \in \mathbb{N}$ نجد أن $\left(r-\frac{1}{2}, r+\frac{1}{2}\right) \cap (\mathbb{N} - \{r\}) = \emptyset$. وبالتالي $r \notin \mathbb{N}$.

ii) إذا كان $r \notin \mathbb{N}$ سيوجد عدد طبيعي n بحيث $0 < \delta = |r - n| \leq \frac{1}{2}$، وبالتالي $\left(r - \frac{\delta}{2}, r + \frac{\delta}{2}\right) \cap (\mathbb{N} - r) = \emptyset$. أي أن، $r \notin \mathbb{N}$ لكل $r \in \mathbb{R}$. هذا يثبت $\mathbb{N}' = \emptyset$

2) بالمثل يمكن إثبات أن $\mathbb{Z}' = \emptyset$.

3) $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. لأي $r \in \mathbb{R}$ فإن كل فترة مفتوحة I تحوي r هي تحتوي على عدد لانهائي من الاعداد النسبية (وغير النسبية!) لذلك فإن $I \cap (\mathbb{Q} - \{r\}) \neq \emptyset$. وهذا يثبت المطلوب

4) بالمثل فإن $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})' = \mathbb{R}$ و$\mathbb{R}' = \mathbb{R}$.

5) $(-3, 5]' = [-3, 5],\ \{7\}' = \emptyset$.

6) مجموعة نقاط التراكم (المشتقة) للمجموعة $(-1, 15) \cup (15, 17]$ هي $[-1, 17]$.

ملاحظات: (1) خواص مجموعة الاعداد النسبية $\mathbb{Q}$

- $\mathbb{Q}$ مجموعة قابلة للعد
- $\mathbb{Q}$ مجموعة غير مفتوحة وغير مغلقة
- $\mathbb{Q}$ مجموعة كثيفة في $\mathbb{R}$، فلأي فترة مفتوحة I في $\mathbb{R}$ فإن $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$
- $\mathbb{Q}^{\circ} = \mathbb{Q},\ b(\mathbb{Q}) = \mathbb{R},\ \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

تمرين: اذكر خواص المجموعات $\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{R} - \mathbb{Q},\ \mathbb{R}$.

(2) إذا كانت $A \subseteq \mathbb{R}$ فإن

$$b(A) = (A \cup A') - A^{\circ},\ \ b(A) = \mathbb{R} - (A^{\circ} \cup (\mathbb{R} - A)^{\circ})$$

أمثلة:

$$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{b}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' - \mathbb{Q}^{\circ} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} - \emptyset = \mathbb{R}$$

$$\mathbf{2)}\ \boldsymbol{b}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}' - \mathbb{Z}^{\circ} = \mathbb{Z} \cup \emptyset - \emptyset = \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{3)}\ \boldsymbol{b}(\mathbb{N}) = \mathbb{R} - (\mathbb{N}^{\circ} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{N})^{\circ}) = \mathbb{R} - (\emptyset \cup (\mathbb{R} - \mathbb{N}) = \mathbb{N}$$

$$\mathbf{4)}\ \boldsymbol{b}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}' - \mathbb{R}^{\circ} = \mathbb{R} - \mathbb{R} = \emptyset.$$

نظرية: إذا كانت x نقطة حدودية لمجموعة مغلقة A فإن $x \in A$.

البرهان: بفرض العكس، أن $x \notin A$ نقطة حدودية. فإن $x \in \mathbb{R} - A$ وحيث إن $\mathbb{R} - A$ مجموعة مفتوحة ستوجد فترة مفتوحة I بحيث $x \in I \subset \mathbb{R} - A$. هذا يناقض كون x نقطة حدودية، ولذلك $x \in A$.

نتيجة: المجموعة A تكون مغلقة إذا وفقط إذا احتوت كل نقاطها الحدودية.

نظرية: المجموعة المفتوحة هي اتحاد لفترات مفتوحة.

بعبارة أخرى، إذا كانت A مجموعة مفتوحة ستوجد (I_n) متتابعة من فترات مفتوحة بحيث $A = \cup_n I_n$.

نظرية: إذا كانت A مجموعة مفتوحة ومغلقة فإن $b(A) = \emptyset$، أي أن $A = \overline{A}$.

ملاحظة:

العدد $x \in \mathbb{R}$ يكون نقطة داخلية لمجموعة غير خالية A إذا 1) $x \in A$ 2) توجد فترة مفتوحة I بحيث $x \in I \subseteq A$	العدد $x \in \mathbb{R}$ يكون نقطة حدودية (أو حدية) لمجموعة A، وليس بالضرورة $x \in A$، إذا لكل فترة مفتوحة I تحوي x يتحقق $I \cap A \neq \emptyset, I \cap (\mathbb{R} - A) \neq \emptyset$	العدد $x \in \mathbb{R}$ يكون نقطة تراكم لمجموعة A، وليس بالضرورة $x \in A$، إذا لكل فترة مفتوحة I تحوي x يتحقق $I \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$

نظرية (نظرية بلزانو-فيرشتراس *Bolzano-Weierstrass Theorem*)**:**

لكل مجموعة لانهائية ومحدودة توجد نقطة تراكم.

البرهان: لتكن $B \subset \mathbb{R}$ مجموعة لانهائية ومحدودة، سيوجد $a, b \in \mathbb{R}$ بحيث

$$a = \inf B, \quad b = \sup B$$

ومن ثم $B \subseteq [a, b]$. بتقسيم الفترة $I_1 = [a, b]$ إلى جزئين، فإن أحد الجزئين (ليكن I_2) يحتوي على عدد لانهائي من عناصر B، خلاف ذلك تكون B مجموعة محدودة، وهذا يناقض المعطى. مرة ثانية، بتقسيم الفترة I_2 إلى فترتين، ولتكن I_3 هي الفترة الجزئية التي تحتوي العدد اللانهائي من عناصر B. بالاستمرار في هذا الاجراء نحصل على متتابعة الفترات المتعشقة(I_n) حيث

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ I_3 \supseteq \cdots, \quad \ell(I_{n+1}) = \frac{1}{2} \ell(I_n)$$

حيث $\ell(I_n)$ ترمز لطول الفترة I_n. بحسب خاصية الفترات المتعشقة يوجد $y \in \mathbb{R}$ بحيث $y \in I_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. الأن لكل فترة مفتوحة J تحوي y فإن $J \cap (I_n - \{y\}) \neq \emptyset$ لكل

$n \in \mathbb{N}$. وحيث إن I_n (لكل $n \in \mathbb{N}$) تحتوي على عدد لانهائي من عناصر B. فإن $J \cap (B - \{y\}) \neq \emptyset$. وهذا يكمل المطلوب.

الفصل الثاني

المتتابعات الحقيقية REAL SEQUENCES

تعريف: المتتابعة هي دالة $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (من $\mathbb{N}$ إلى $\mathbb{R}$) بحيث $n \mapsto a_n$، أي تحدد لكل عدد طبيعي n عدد حقيقي وحيد a_n. العدد a_n يسمى بالعنصر رقم n من المتتابعة (a_n) (ونكتب كذلك $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ و $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

أمثلة: امثلة للمتتابعات

$$\left(\frac{1}{n}\right) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\},$$

$$((-1)^n) = \{-1,1,-1,1,\cdots\},$$

$$\left(\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right) = \left\{\sin x, \sin\frac{x}{2}, \sin\frac{x}{3}, \cdots\right\},$$

$$(\cos(mx)) = \{\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cdots\}.$$

ملاحظة: المجموعة $\{a_n\}$ تسمى مجموعة عناصر المتتابعة (a_n). واضح أن $(a_n) \neq \{a_n\}$ عامة. فمثلا، للمتتابعة $(a_n) = ((-1)^n)$ مجموعة العناصر $\{a_n\} = \{-1,1\}$. وللمتتابعة $(b_n) = (\text{SIN}\, n\pi)$ فإن مجموعة العناصر هي $\{b_n\} = \{0\}$.

تعريف: يقال لمتتابعة (a_n) أنها تتقارب إلى عدد حقيقي x إذا كانت كل فترة مفتوحة I تحوي x تحتوي على جميع عناصر المتتابعة a_n ابتداء من عنصر ما. ونكتب $\lim_{n\to\infty} a_n = x$

مثال: المتتابعة $\left(\frac{1}{n}\right)$ تتقارب إلى العدد $x = 0$. لأنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد العدد الطبيعي n_ϵ الذي يحقق $\frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon$، ومن ثم فإنه لكل $n \geq n_\epsilon$ نج أن $\frac{1}{n} \in (-\epsilon, \epsilon)$. هذا يعني أن الفترة المفتوحة (الاختيارية) $(-\epsilon, \epsilon)$ تحتوي جميع العناصر $\frac{1}{n}$ لكل $n \geq n_\epsilon$.

يمكن إعادة تعريف المتتابعة التقاربية كما يلي:

تعريف: يقال لمتتابعة (a_n) أنها تتقارب إلى عدد حقيقي x إذا كان لكل $\epsilon > 0$ معطى يوجد العدد الطبيعي n_ϵ بحيث $a_n \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$ لكل $n_\epsilon \leq n$.

تعريف: يقال لمتتابعة (a_n) أنها تتقارب إلى عدد حقيقي x إذا كان لكل $\epsilon > 0$ معطى يوجد العدد الطبيعي n_ϵ بحيث $|a_n - x| < \epsilon$ لكل $n_\epsilon \leq n$.

ملاحظة: المتتابعة (a_n) لا تتقارب إلى العدد x إذا وجدت فترة مفتوحة J تحوي x ولا تحوي عدد لانهائي من العناصر a_n.

مثال: اثبت أن المتتابعة $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب إلى العدد $x = 1$.

الحل: إذا كان $\epsilon > 0$ فإنه بحسب خاصية ارشميدس يوجد $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{n_\epsilon+1} < \epsilon$ (؟!).
وبالتالي لكل $n \geq n_\epsilon$ يكون $\left|\frac{1}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_\epsilon+1} < \epsilon$. وهذا يثبت المطلوب $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

مثال: اثبت أن $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$.

الحل: لكل $\epsilon > 0$ معطى فإن، بحسب خاصية ارشميدس يوجد $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon$.
ومن ثم، لكل $n \geq n_\epsilon$ نجد أن $\left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon$. وهذا يثبت المطلوب.

مثال: اثبت أن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{4n+1} = \frac{1}{4}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{(n+1)} = 3$$

الحل: متروك كتمرين.

مثال: إذا كان $0 < x < 1$ فاثبت أن $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

نقاش: إذا اعطينا $\epsilon > 0$ نريد أن $x^n < \epsilon$. وهذا يكافئ $n \ln x < \ln \epsilon$. أو $n > \frac{\ln \epsilon}{\ln x}$ لأن $\ln x < 0$.

الحل: لكل $0 < \epsilon,\ 0 < x < 1$، بحسب خاصية ارشميدس يوجد العدد الطبيعي k بحيث $k > \frac{\ln \epsilon}{\ln x}$ ومن ثم $x^k < \epsilon$. وبالتالي لكل $n \geq k$ فإن $x^n \leq x^k < \epsilon$ (لأن $0 < x < 1$).
هذا يثبت أن $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

نظريات النهايات للمتتابعات الحقيقية

نظرية: النهاية لمتتابعة، إن وجدت، تكون وحيدة.

البرهان: إذا كانت (a_n) متتابعة من أعداد حقيقية، وبفرض أن

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = y$$

فإنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|a_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\ n \geq k_1, \quad |a_n - y| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\, n \geq k_2. \qquad (*)$$

الان يمكن إيجاد $k = \min\{k_1, k_2\}$ فإنه لكل $n \geq k$ المتباينات $(*)$ تتحقق. وبالتالي فإن

$$|x - y| = |(a_n - y) - (a_n - x)| \leq |a_n - y| + |a_n - x| < \epsilon$$

لكل $\epsilon > 0$. ومن ثم فإن $|y - x| = 0$، هذا يعني أن $x = y$.

نظرية: إذا كانت (a_n) متتابعة، وكان m عدد طبيعي فإن المتتابعة (a_{n+m}) تتقارب إذا وفقط إذا كانت (a_n) متقاربة، وأن $\lim_{n\to\infty} a_{n+m} = \lim_{n\to\infty} a_n$.

البرهان: (1) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n = x$فإنه لكل $\epsilon > 0$ معطى يوجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq k$ فإن $|a_n - x| < \epsilon$. وبالتالي لكل $n \geq k - m$ (أو $n + m \geq k$) فإن

$$|a_{n+m} - x| < \epsilon$$

وهذا يثبت أن $\lim_{n\to\infty} a_n = x \Leftarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+m} = x$.

(2) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_{n+m} = x$فإنه لكل $\epsilon > 0$ معطى يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq N$ فإن $|a_{n+m} - x| < \epsilon$. وبالتالي لكل $r = n + m \geq N + m > N$ فإن

$$|a_r - x| < \epsilon$$

وهذا يثبت أن $\lim_{n\to\infty} a_{n+m} = x \Leftarrow \lim_{n\to\infty} a_n = x$.

نظرية: إذا كانت (x_n) متتابعة من أعداد حقيقية، وكانت (a_n) متتابعة من أعداد حقيقية موجبة بحيث $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$، وكان $c > 0$ عدد حقيقي بحيث $|x_n - x| \leq c\, a_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$فإن $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

البرهان: لكل $\epsilon > 0$ يوجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq k$ يكون $a_n < \frac{\epsilon}{c}$. وبالتالي لكل $n \geq k$

$$|x_n - x| \leq c\, a_n < \epsilon$$

هذا يثبت أن $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ وهو المطلوب.

مثال: إذا كان $a > 0$ فاثبت أن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a\,n} = 0$.

الحل: لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $1 + a\,n > a\,n$. وبالتالي فإن

$$\frac{1}{1+a\,n} < \frac{1}{a\,n} = \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{n}\right).$$

وحيث إن $\frac{1}{a} > 0$ و $\frac{1}{n} \to 0$ فإن $\frac{1}{1+a\,n} \to 0$.

مثال: إذا كان $0 < b < 1$ فاثبت أن $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$.

الحل: إذا كان $0 < b < 1$ فإنه يوجد عدد حقيقي $a > 0$ بحيث $b = \frac{1}{1+a}$.

من متباينة برنولي $(1+a)^n \geq 1 + a\,n$ لكل $a > 0$ و $n \in \mathbb{N}$. وبالتالي فإن

$$b^n = \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{1+a\,n} < \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

وحيث إن $\frac{1}{a} > 0$ و $\frac{1}{n} \to 0$ فإن $b^n \to 0$.

مثال: اثبت أن $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

الحل: لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $1 \leq n^{\frac{1}{n}}$. ولذلك، لكل $n \in \mathbb{N}$ يوجد عدد حقيقي موجب k_n بحيث $n^{\frac{1}{n}} = 1 + k_n$. وبالتالي $k_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$. من جهة ثانية، وبتطبيق نظرية ذات الحدين فإن

$$n = (1+k_n)^n = 1 + n\,k_n + \frac{n(n-1)}{2}k_n^2 + \cdots$$
$$> 1 + \frac{n(n-1)}{2}k_n^2$$

ومنها فإن $k_n < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \to 0$

ومن ثم

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} k_n = 0$$

وهذا يكافئ المطلوب.

تعريف: يقال لمتتابعة (a_n) أنها

(1) محدودة من أعلى إذا وجد عدد حقيقي M بحيث $x_n \leq M$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

(2) محدودة من أسفل إذا وجد عدد حقيقي m بحيث $m \leq x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

(3) محدودة إذا كانت المتتابعة محدودة من أعلى ومن أسفل.

نظرية: كل متتابعة تقاربية تكون محدودة.

البرهان: لتكن (x_n) متتابعة في $\mathbb{R}$ وتتقارب إلى $x \in \mathbb{R}$. فإنه للعدد $\epsilon = 1$ يوجد العدد الحقيقي k بحيث لكل $n \geq k$ يكون $|x_n - x| < 1$. وبالتالي لكل $n \geq k$ يكون $x - 1 < x_n < x + 1$.

ليكن $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{k-1}|, x + 1\}$ فإنه لكل $n \geq k$ يكون $|x_n| < M$.
وهذا يثبت المطلوب.

ملاحظة: ليس كل متتابعة محدودة تكون تقاربية، فمثلا المتتابعة $((-1)^n)$ محدودة وليست تقاربية (متذبذبة؟!)

نظرية: (1) إذا كانت $(a_n), (b_n)$ متتابعات في $\mathbb{R}$ تتقارب على الترتيب إلى a, b فإن المتتابعات التالية تقاربية $(a_n b_n), (a_n - b_n), (a_n + b_n)$ وأن

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = a \times b.$$

(2) وإذا كانت (c_n) متتابعة في $\mathbb{R}$ بحيث $c_n \neq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكانت $\lim_{n\to\infty} c_n = c \neq 0$، فإن المتتابعة $\left(\frac{a_n}{c_n}\right)$ متقاربة وأن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} c_n} = \frac{a}{c}$$

البرهان: نكتفي ببرهان بعض النتائج

(1) نهاية متتابعة المجموع: من الفرض فإنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \ \ \forall\, n \geq k_1,$$

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \ \ \forall \ \ n \geq k_2.$$

وبالتالي لكل $n \geq \max\{k_1, k_2\}$ يكون

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(2) نهاية متتابعة القسمة: في هذه الحالة لدينا

$$\left|\frac{a_n}{c_n} - \frac{a}{c}\right| \leq \frac{|a_n - a|}{|c_n|} + \frac{|a||c_n - c|}{|c_n||c|} \qquad (*)$$

الآن من الفرض فإن (c_n) متتابعة محدودة، أي يوجد $m, M \in \mathbb{R}$ بحيث $m \leq c_n \leq M$ لكل n، وأنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\frac{1}{m}|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \ \ \forall \, n \geq k_1,$$

$$\frac{|a|}{m|c|}|c_n - c| < \frac{\epsilon}{2} \ \ \forall \ \ n \geq k_2.$$

وبالتالي لكل $n \geq \max\{k_1, k_2\}$ ، باستخدام $(*)$ يكون

$$\left|\frac{a_n}{c_n} - \frac{a}{c}\right| \leq \frac{|a_n - a|}{|c_n|} + \frac{|a||c_n - c|}{|c_n||c|} \leq \frac{1}{m}|a_n - a| + \frac{|a|}{m|c|}|c_n - c|$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

وهذا يثبت المطلوب (2).

أمثلة:

$$1) \lim_{n\to\infty} \frac{3n - 5}{n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n + 1) - 8}{n + 1}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{8}{n + 1}\right) = 3 - 8 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n + 1} = 3$$

$$2) \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2 + 3n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1 + 0 + 0} = 0$$

نظرية: إذا كان $x_n \geq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$، وكان $x_n \to x$ فإن $0 \leq x$.

البرهان: بفرض العكس، أن $x < 0$. وحيث إن $x_n \to x$ فإنه للعدد $\epsilon = x$ (> 0) يوجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < -x \ \forall\, n \geq k$$

ومـن ثـم نجـد أن $x_n < x + (-x) = 0$. وهـذا ينـاقض كـون $x_n \geq 0$ لكـل $n \in \mathbb{N}$. هـذا التناقض يستلزم أن يكون $x \geq 0$، وهو المطلوب.

نظرية: إذا كان $a_n \leq b_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$، وكان $a_n \to a,\ b_n \to b$ فإن $a \leq b$.

البرهان: لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $0 \leq b_n - a_n$ ومن ثم

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = b - a$$

وهذا يعني تحقق المطلوب.

نظرية:

إذا كان $\alpha < x_n < \beta$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكان $x_n \to x$ فإن $\alpha < x < \beta$ حيث $\alpha, \beta\ \in \mathbb{R}$.

البرهان: عرف المتتـابعتين $\alpha_n = (\alpha, \alpha, \cdots),\ \beta_n = (\beta, \beta, \cdots)$ فـإن $\alpha_n < x_n < \beta_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. ومن ثم، بحسب النظرية السابقة، فإن

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n < \lim_{n\to\infty} x_n = x < \lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$$

وها هو المطلوب.

نظرية: (نظرية المحصور Squeeze Theorem**)**

إذا كـان $a_n \leq x_n \leq b_n$ لكـل $n \in \mathbb{N}$، وكـان $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x$ فـإن $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

البرهان: لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي $k \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq k$ يكون

$$|a_n - x| < \epsilon, \qquad |b_n - x|, \epsilon$$

من جهة ثانية، فإنه لكل $n \in \mathbb{N}$ لدينا

$$a_n - x \leq x_n - x \leq b_n - x$$

وهكذا فإنه لكل $n \geq k$

$$-\epsilon < a_n - x \leq x_n - x \leq b_n - x < \epsilon$$

وهذا يعني أن $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

أمثلة: 1) اثبت أن $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

الحل: لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$-1 \le \sin n \le 1 \implies -\frac{1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n}.$$

وحيث إن $\lim_{n\to\infty}\left(\pm\frac{1}{n}\right) = 0$ فإن $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} = 0$.

2) مستخدما نظرية المحصور ادرس تقارب المتتابعات $\left((n!)^{\frac{1}{n^2}}\right)$, $\left(n^{\frac{1}{n^2}}\right)$.

الحل: (1) لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$1 \le n^{\frac{1}{n^2}} \le n^{\frac{1}{n}}$$

وبالتالي

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

(2) حيث إن

$$1 \le n! \le n^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

فإن

$$1 \le (n!)^{\frac{1}{n^2}} \le (n^n)^{\frac{1}{n^2}} = n^{\frac{1}{n}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

ومن ثم فإن

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

نظرية: إذا كان $x_n \to x$ فإن $|x_n| \to |x|$، والعكس ليس بالضرورة صحيح.

البرهان: لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$\big||x_n| - |x|\big| \le |x_n - x|$$

من ذلك يمكن للقارئ بسهولة اثبات صحة المطلوب.

ملاحظة: المتتابعة (x_n)، حيث $x_n = (-1)^n$، ليست تقاربية بينما $|x_n| = (1,1,\cdots)$ هي متتابعة تقاربية.

بفرض أن $x_n = (-1)^n$ تتقارب إلى $a \in \mathbb{R}$. فإنه للعدد $\epsilon = 1$ يوجد العدد الطبيعي k بحيث لكل $k \le n$ يكون $|(-1)^n - a| < 1$.

الان خذ n عددا فرديا أكبر من k تجد أن

$$|(-1)^n - a| = |-1 - a| = |a + 1| < 1 \Rightarrow -2 < a < 0.$$

من جهة ثانية، لأي n هو عدد زوجي أكبر من k فإن

$$|(-1)^n - a| = |1-a| = |a-1| < 1 \Rightarrow 0 < a < 2.$$

هذا التناقض يثبت أن $x_n = (-1)^n$ متتابعة غير تقاربية.

نظرية: إذا كان (x_n) متتابعة من أعداد حقيقية موجبة، وكان $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L < 1$ فإن المتتابعة (x_n) تقاربية وأن $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

البرهان: يوجد عدد $r \in \mathbb{R}$ بحيث $0 \leq L < r < 1$، ومن ثم يكون $\epsilon = r - L > 0$. لهذا العدد ϵ يوجد بالتالي عدد طبيعي k بحيث لكل $k \leq n$ يكون $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - L\right| < r - L$. ومنها، لكل $k \leq n$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < L + (r - L) = r$$

أي أنه لكل $k \leq n$

$$x_{n+1} < r\, x_n < r^2 x_{n-1} < \cdots < r^{n-k+1} x_k = cr^n, \;\; c = r^{1-k} x_k > 0.$$

وحيث إن $0 < r < 1$ فإن $r^n \to 0$ ومن ثم يتحقق المطلوب.

أمثلة: 1) أوجد $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

الحل: عرف $x_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$ لكل $n \in \mathbb{N}$. واضح أن $x_n > 0$ لكل n، وأن

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left[\frac{2^{3(n+1)}}{3^{2(n+1)}}\right] \frac{3^{2n}}{2^{3n}} = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9} < 1$$

ولذلك، بتطبيق نظرية النسبة فإن $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} = 0$.

2) إذا كان $b > 1,\; 0 < a < 1$ فادرس تقارب كل من المتتابعات

$$X = (a^n), \quad Y = \left(\frac{b^n}{2^n}\right), \quad Z = \left(\frac{n}{b^n}\right).$$

الحل: (1) ليكن $x_n = a^n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$x_n > 0, \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{a^n} = a < 1$$

ومن ثم فإن $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

(2) ليكن $y_n = \frac{b^n}{2^n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$y_n > 0, \qquad \frac{y_{n+1}}{y_n} = \left(\frac{b}{2}\right)^{n+1} \left(\frac{2}{b}\right)^n = \frac{b}{2}$$

فإذا كانت $1 < b < 2$ فإن المتتابعة $Y = \left(\frac{b}{2}\right)^n$ تتقارب إلى الصفر.

(3) عرف $z_n = \frac{n}{b^n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$z_n > 0, \frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{n+1}{b^{n+1}} \; \frac{b^n}{n} = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{b} < 1$$

ولذلك فإن $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{b^n} = 0$.

3) احسب $\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ علما بأن $0 < a < b$.

الحل: لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$x_n := \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} = \frac{b^{n+1}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} + 1\right]}{b^n\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1\right]} = b\,\frac{c^{n+1} + 1}{c^n + 1}.$$

وحيث إن $0 < \frac{a}{b} < 1$ فإن $c^n \to 0, c^{n+1} \to 0$ ومن ثم $x_n \to b$ وهو المطلوب.

المتتابعات المطردة MONOTONE SEQUENCES

تعريف: (1) يقال لمتتابعة (x_n) في $\mathbb{R}$ أنها تزايدية إذا كان $x_{n+1} \geq x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وإذا كان $x_{n+1} > x_n$ يقال للمتتابعة (x_n) أنها تزايدية فعلية.

(2) يقال لمتتابعة (x_n) في $\mathbb{R}$ أنها تناقصية إذا كان $x_{n+1} \leq x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وإذا كان $x_{n+1} < x_n$ يقال للمتتابعة (x_n) أنها تناقصية فعلية.

(3) إذا كان $x_{n+1} = x_n$ كل $n \in \mathbb{N}$ فإن المتتابعة (x_n) تكون ثابتة.

(4) يقال لمتتابعة (x_n) في $\mathbb{R}$ أنها مطردة إذا كانت تزايدية أو تناقصية.

أمثلة: المتتابعات $(n), (n^2), \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ تزايدية فعلية، المتتابعات $\left(\frac{1}{n^2}\right), \left(\frac{1}{n}\right)$ تناقصية فعلية.

ملاحظة: عند دراسة العلاقة بين اطراد متتابعة وتقاربها من المهم أخذ الأمثلة التالية في الاعتبار. المتتابعة (n) هي مطردة (تزايدية فعلية) وليست تقاربية، المتتابعة $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ ليست مطردة (ليست تزايدية ولا تناقصية) لكنها تتقارب إلى الصفر، بينما المتتابعة $\left(\frac{1}{n}\right)$ هي تناقصية فعلية (أي مطردة) ومحدودة (حيث $1 > \frac{1}{n} > 0$) وتتقارب إلى الصفر.

نظرية: (نظرية التقارب المطرد Monotone Convergence Theorem)

إذا كانت (x_n) متتابعة مطردة في $\mathbb{R}$ فإن (x_n) تكون تقاربية إذا وفقط إذا

(1) كانت (x_n) تزايدية ومحدودة من أعلى، وعندئذ يكون $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.

(2) كانت (x_n) تناقصية ومحدودة من أسفل، وعندئذ يكون $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.

البرهان: سنبرهن فقط الحالة (1) وبالمثل يمكن برهان الحالة (2).

إذا كانت (x_n) متتابعة محدودة سيوجد عدد حقيقي M بحيث $x_n \le M$ لكل n. ومن ثم، يوجد

$$x_* = \sup\{x_n;\ \ n \in \mathbb{N}\}.$$

لكل $\epsilon > 0$ فإن $x_* - \epsilon$ ليس حد علويا لمجموعة عناصر المتتابعة (x_n) وبالتالي يوجد العنصر x_k بحيث $x_* - \epsilon < x_k \le x_* < x_* + \epsilon$. وحيث إن المتتابعة (x_n) تزايدية فإنه لكل $k \le n$ يكون $x_k \le x_n$. وهكذا فإنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد العدد الطبيعي k بحيث لكل $k \le n$ يكون

$$x_* - \epsilon < x_n < x_* + \epsilon$$

وهذا يثبت أن $\lim_{n\to\infty} x_n = x_*$، وهو المطلوب.

مثال (1): ادرس تقارب المتتابعة (x_n) حيث $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

الحل: واضح أن

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = \frac{9}{4} > x_1, \qquad x_3 = \frac{64}{27} > x_2$$

يمكن اثبات أن $x_{n+1} > x_n$ كما يلي: بتطبيق نظرية ذات الحدين Binomial Theorem نجد أن

$$x_n = 1 + \frac{n}{1}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} \qquad (*)$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

واضح أن x_n يتكون من $n+1$ حد موجب. بالمثل لدينا

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{(n+1)}\right)$$

والذي يتكون من $n+2$ حد موجب. هذا يعني أن $x_{n+1} > x_n$ لكل n، أي أن المتتابعة (x_n) تزايدية. من جهة ثانية، من $(*)$ نجد أن

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3$$

لكل n، أي أن المتتابعة (x_n) محدودة من أعلى بالعدد 3. وبالتالي، فالمتتابعة (x_n) تقاربية وأن

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

لإيجاد هذه النهاية بطريقة أسهل نستخدم صيغة أويلر للأعداد الحقيقية حيث

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left\{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\}$$

ولذلك فإن

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \exp\left[\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = e < 3.$$

مثال (2): ادرس تقارب المتتابعة (x_n) حيث

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

الحل: لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $\frac{1}{n+1} > 0$. وبالتالي $x_{n+1} > x_n$ لكل n، أي أن المتتابعة تزايدية.

من جهة ثانية، لدينا

$$x_1 = 1,\ \ x_2 = 1 + \frac{1}{2},\ \ x_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

بوجه عام فإن

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1 + \frac{n}{2} \end{aligned}$$

وحيث إن المقدار $\left(1 + \frac{n}{2}\right)$ غير محدود فإن المتتابعة (x_n) غير محدودة ومن ثم فهي ليست تقاربية.

مثال (3): ادرس تقارب المتتابعة (y_n) حيث

$$y_1 = 1,\ \ y_{n+1} = \frac{1}{4}\{2\,y_n + 3\},\ \ n \in \mathbb{N}$$

الحل: واضح أن $2 > y_2 = \frac{5}{4} > y_1$. الان نثبت أن

(1) $y_n < 2$ لكل n. حيث إن المتباينة صحيحة عندما $n = 1$، نفرض صحتها عندما $n = k$، أي $y_k < 2$. عندما $n = k + 1$ نجد أن $y_{k+1} = \frac{1}{4}\{2\,y_k + 3\} < \frac{7}{4} < 2$، أي أن المتباينة صحيحة عندما $n = k + 1$ وذلك من فرض صحتها عندما $n = k$. هذا يعني أن المتتابعة محدودة.

(2) مرة ثانية، باستخدام الاستقراء الرياضي فإن $y_n < y_{n+1}$ لكل n، أي أن المتتابعة تزايدية (مطردة).

وبالتالي، بحسب نظرية التقارب المطرد فإن المتتابعة (y_n) تقاربية وليكن إلى العدد الحقيقي y. وحيث إن

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\{2y_n + 3\} = \frac{1}{4}\left\{2 \lim_{n\to\infty} y_n + 3\right\}$$

فإن $y = \frac{1}{4}\{2y + 3\}$. ومنها $y = \frac{3}{2}$.

مثال (4): بين تقارب المتتابعة (z_n) حيث $z_1 = 1$ و $z_{n+1} = \sqrt{2\, z_n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

الحل: بالاستقراء الرياضي يمكن اثبات أن

$$z_n < z_{n+1} < 2 \ \ \forall \ n \in \mathbb{N},$$

أي أن المتتابعة (z_n) تزايدية ومحدودة. وبالتالي فإنها تقاربية، وليكن إلى العدد الحقيقي z. وحيث إن

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} z_{n+1} = z$$

فإنه بأخذ النهاية لطرفي المتساوية $z_{n+1} = \sqrt{2\, z_n}$ نحصل على $z = \sqrt{2z}$. ومنها $z = 2$.

مثال (5): بين تقارب متتابعة الاعداد الحقيقية (x_n) حيث

$$x_1 > 1, \ \ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), a > 0, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

الحل: واضح أن الاعداد الحقيقية تحقق المعادلة التربيعية $x_n^2 - 2x_{n+1}x_n + a = 0$. لذلك فهذه المعادلة لها حل حقيقي (في $\mathbb{R}$)، ومن ثم المميز $4\, x_{n+1}^2 - 4a$ غير سالب. وبالتالي $x_{n+1}^2 \geq a$ لكل $n \geq 1$، أي $x_n^2 \geq a$ لكل $n \geq 2$. هذا يثبت أن المتتابعة محدودة من أسفل بالعدد $0 < a$.

من جهة ثانية، فإن

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \geq 0$$

تثبت أن المتتابعة تناقصية. وبالتالي فإن المتتابعة تقاربية وليكن إلى x. هذا العدد يحقق المعادلة

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

ومنها نجد أن $x = \sqrt{a}$.

المتتابعات الجزئية SUBSEQUENCES

تعريف: إذا كانت (x_n) متتابعة في $\mathbb{R}$، وكانت (n_k) متتابعة تزايدية فعلية في $\mathbb{N}$ فإن المتتابعة (x_{n_k}) تسمى متتابعة جزئية من المتتابعة (x_n).

ملاحظة: نقصد بأن (n_k) متتابعة تزايدية فعلية $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$.

أمثلة: إذا كانت $x_n = \frac{1}{n}$ فإن المتتابعات التالية جزئية من (x_n)

$$X = \left(\frac{1}{2n}\right), \qquad Y = \left(\frac{1}{2n-1}\right), \qquad Z = \left(\frac{1}{n!}\right)$$

بينما المتتابعة التالية ليست جزئية من (x_n)

$$W = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \cdots\right).$$

وإذا كانت (x_n) متتابعة بحيث

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}), \qquad n \geq 3$$

فإن المتتابعة التالية جزئية من (x_n):

$$x_1 = 1, x_3 = \frac{3}{2}, \cdots, x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}}.$$

تمهيدية: إذا كانت (n_k) متتابعة تزايدية فعلية في $\mathbb{N}$ فإن $n_k \geq k$ لكل $k \in \mathbb{N}$.

البرهان: باستخدام الاستقراء الرياضي فإن $n_1 \geq 1$ لأي عدد طبيعي. بفرض أنه لعدد ما $k \in \mathbb{N}$ أن $n_k \geq k$. فإن $n_{k+1} > n_k$ وبالتالي

$$n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k + 1$$

وهذا يكمل البرهان.

نظرية: إذا كانت متتابعة تتقارب إلى عدد حقيقي x فإن كل متتابعة جزئية $\left(x_{n_k}\right)$ تتقارب إلى x.

البرهان: لتكن (x_n) متتابعة تتارب إلى x، فإنه لكل $\epsilon > 0$ يعطى يوجد عدد طبيعي N بحيث

$$|x_n - x| < \epsilon \quad \forall \; n \geq N. \qquad (*)$$

بحسب التمهيدية السابقة فإن إذا كان $k \geq N$ نجد أن $n_k \geq k \geq N$، ومن ثم يكون

$$\left|x_{n_k} - x\right| < \epsilon$$

وهذا يثبت أن المتتابعة الجزئية $\left(x_{n_k}\right)$ تتقارب إلى x.

أمثلة: (1) إذا كان $0 < b < 1$ فاثبت أن $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$.

الحل: من المعطى واضح أن $0 < b^n < 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$، هذا يعني أن (b^n) متتابعة محدودة. وحيث إن $b^n > b^{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $0 < b < 1$ فإن (b^n) متتابعة تناقصية. وبالتالي، فإن (b^n) متتابعة تقاربية، ليكن إلى x. فإن للمتتابعة الجزئية (b^{2n}) نجد أن

$$\lim_{n\to\infty} b^{2n} = \lim_{n\to\infty} b^n = x, \quad \lim_{n\to\infty} b^{2n} = \left(\lim_{n\to\infty} b^n\right)^2 = x^2$$

ولذلك، فإن $x^2 = x$، أو $x(x-1) = 0$ وهذا يعني أن $x = 0$ ($x = 1$ مرفوض؟).

(2) اثبت أن $\lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = 1$ إذا كان $1 \leq c$.

الحل: إذا كان $c = 1$ فالنتيجة متحققة ولا نحتاج إلى برهان. لكل $c > 1$ واضح ان $\left(c^{\frac{1}{n}}\right)$ متتابعة تناقصية ومحدودة من أسفل بالعدد 1. لذلك فهي تقاربية، وليكن إلى العدد x. من النظرية السابقة فإن

$$\lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = x, \quad \lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}}} = \sqrt{x}$$

وبالتالي فإن x تحقق المعادلة $\sqrt{x} = x$، أي أن $x = 1$ ($x = 0$ مرفوض؟).

نظرية: (معيار التباعد Divergence Criteria)

إذا كانت (x_n) متتابعة تتحقق لها احدى الخاصيتين التاليتين فإنها متتابعة تباعدية.

(1) توجد متتابعتين جزئيتين $(y_n), (z_n)$ تتقاربان ولكن $\lim_{n\to\infty} y_n \neq \lim_{n\to\infty} z_n$.

(2) المتتابعة (x_n) غير محدودة.

أمثلة: (1) المتتابعة $X = ((-1)^n)$ تباعدية.

المتتابعة الجزئية $X' = ((-1)^{2n}) = (1,1,1,\cdots)$ تتقارب إلى 1، ولكن المتتابعة الجزئية $X'' = ((-1)^{2n-1}) = (-1,-1,\cdots)$ تتقارب إلى -1. وبحسب النظرية السابقة نستنتج أن X متتابعة تباعدية.

(2) المتتابعة $X = \left(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \cdots\right)$ تباعدية.

فالمتتابعة الجزئية $X' = (x_{2n}) = \left(\frac{1}{2n}\right)$ تتقارب إلى 0. لكن المتتابعة الجزئية $X'' = (x_{2n-1}) = (1,3,5,\cdots)$ ليست محدودة. هذا يعني أن X متتابعة غير محدودة ومن ثم تباعدية.

(3) المتتابعة $S = (\sin n)$ تباعدية. في هذا المثال نحتاج إلى تذكر خواص دالة sin.

حيث إن لكل $1 \leq k$

$$\sin\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi(k-1)\right] = \sin\left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi(k-1)\right] = \frac{1}{2},$$

$$\sin x > \frac{1}{2} \ \ \forall x \in I_k = \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi(k-1), \frac{5\pi}{6} + 2\pi(k-1)\right).$$

وحيث إن طول الفترة I_k هو $2 < \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ فسيوجد في الفترة I_k عددان طبيعيان، ليكن n_k أحد العددين. لاحظ أن $n_{k+1} > n_k$، أي ان (n_k) متتابعة تزايدية فعلية. وبالتالي فإن المتتابعة

$$S' = (\sin n_k), \ \ \sin n_k \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \ \ \forall\, k \geq 1, n_k \in \mathbb{N}$$

جزئية من المتتابعة S. من جهة ثانية، فإنه لكل $1 \leq k$

$$\sin\left[\frac{7\pi}{6} + 2\pi(k-1)\right] = \sin\left[\frac{11\pi}{6} + 2\pi(k-1)\right] = -\frac{1}{2},$$

$$\sin x < -\frac{1}{2} \ \ \forall x \in J_k = \left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi(k-1), \frac{11\pi}{6} + 2\pi(k-1)\right).$$

وحيث إن طول الفترة J_k هو $2 < \frac{11\pi}{6} - \frac{7\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ فسيوجد في الفترة J_k عددان طبيعيان، ليكن m_k أحد العددين. لاحظ أن $m_{k+1} > m_k$، أي ان (m_k) متتابعة تزايدية فعلية. وبالتالي فإن المتتابعة

$$S'' = (\sin m_k), \ \ \sin m_k \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \ \ \forall\, k \geq 1, m_k \in \mathbb{N}$$

جزئية من المتتابعة S.

الآن، فإنه لأي عدد حقيقي c على الأقل واحدة من هاتين المتتابعتين تقع جميع عناصرها خارج الفترة

$$|x - c| < \frac{1}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

هذا يثبت أن العدد c لا يكون نقطة نهاية للمتتابعة S. وحيث إن $c \in \mathbb{R}$ عدد اختياري فإن المتتابعة S تكون تباعدية.

تعريف: يقال للعدد الحقيقي x_m أنه قمة (ذروة Peak) للمتتابعة (x_n) إذا كان $x_m \geq x_n$ لكل

.$m \leq n$

نظرية: (نظرية بلزانو – فيرشتراس Bolzano-Weierstrass Theorem)

لكل متتابعة محدودة متتابعة جزئية تقاربية

البرهان: لتكن (x_n) متتابعة محدودة في $\mathbb{R}$. فإذا كانت $x_n = \alpha$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $x_n \to \alpha$.

وإذا كانت (x_n) متتابعة غير ثابتة سيوجد بالمتتابعة عدد من القمم، ويكون لدينا إحدى الحالتين.

(1) إذا كان للمتتابعة عدد لانهائي من القمم، ولتكن $x_{m_1} \leq x_{m_2} \leq \cdots$ فإنها تكون متتابعة جزئية (x_{m_k}) مطردة ومحدودة ومن ثم تقاربية، وهذا يثبت المطلوب.

(2) إذا كان للمتتابعة عدد منتهي من القمم، ولتكن $x_{m_1}, x_{m_2}, \cdots, x_{m_r}$.

فإذا كان $s_1 = m_r + 1$، فإن x_{s_1} ليس قمة للمتتابعة (x_n) وبالتالي يوجد $x_{s_1} < x_{s_2}$ حيث $s_1 < s_2$ ، ومن ثم يوجد $x_{s_2} < x_{s_3}$ و $s_2 < s_3$. وهكذا تتكون (x_{s_k}) متتابعة تزايدية جزئية من المتتابعة الأصل (x_n)، حيث (s_k) متتابعة تزايدية فعلية في $\mathbb{N}$. المتتابعة الجزئية (x_{s_k}) مطردة ومحدودة، ولذا، فهي تقاربية. وهذا يكمل الاثبات.

النهايات العليا والنهايات الدنيا LIMIT SUPERIOR AND LIMIT INFERIOR

المتتابعة المحدودة ليست بالضرورة تقاربية، ولكن بحسب نظرية بلزانو-فيرشتراس توجد متتابعة (أو ربما متتابعات) جزئية منها تقاربية. ويقال لنهاية متتابعة جزئية (x_{n_k}) من متتابعة محدودة(x_n) أنها نهاية تتابع جزئي (subsequential limit) للمتتابعة (x_n). فإذا كانت S مجموعة نهايات كل المتتابعات الجزئية التقاربية من متتابعة محدودة، فإن Sمجموعة محدودة. فمثلا للمتتابعة (x_n)، حيث $x_n = (-1)^n + \frac{2}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن (x_{2n})، حيث $x_{2n} = 1 + 1/n$، متتابعة جزئية تتقارب إلى 1. بينما (x_{2n-1})، حيث $x_{2n-1} = -1 - \frac{2}{2n-1}$، متتابعة جزئية متقاربة إلى -1. وبالتالي، فإن $S = \{-1,1\}$. مثال آخر، حيث إن مجموعة الأعداد النسبية قابلة للترقيم فإن الأعداد النسبية في الفترة $(0,1)$ تكون متتابعة (r_n). ومن خاصية الكثافة للأعداد النسبية فإن كل عدد حقيقي r في الفترة $[0,1]$ هو نهاية لمتتابعة جزئية من المتتابعة (r_n)، وبالتالي فإن$S = [0,1]$.

للمتتابعات المحدودة يمكن رصد الملاحظة التالية. إذا كانت (x_n) متتابعة محدودة، وكان

$$t_m := \inf\{x_n; n \geq m\}, \quad \tau_m := \sup\{x_n; n \geq m\}, \quad m = 1,2,3,\cdots$$

فـإن جميـع عناصـر متتابعـة الـذيل $(x_n)_{n\geq m}$ تنتمـي إلـى الفتـرة $I_m = [t_m, \tau_m]$ لكـل $m = 1,2,3,\cdots$، الفترات I_m متعششة، أي أن $I_m \supset I_{m+1}$ لكل $m = 1,2,3,\cdots$، وبالتالي فإن المتتابعات $(t_m), (\tau_m)$ مطردة ومحدودة، ومن ثم فهي تقاربية.

بالإضـافة لمـا سـبق يمكـن رصـد الملاحظـة التاليـة عـن سـلوك نهايـات المتتابعـات الجزئيـة مـن متتابعـة محـدودة. إذا كـان v عـدد حقيقـي بحيـث $x_n > v$ علـى الأكثـر لعـدد منتهـي مـن قـيم $n \in \mathbb{N}$، فإنـه لا توجـد متتابعـة جزئيـة مـن (x_n) تتقـارب إلـى عـدد أكبـر مـن v. خـلاف ذلـك، سيوجد عدد لانهائي من العناصر x_n أكبر من v. بعبارة أخرى، إذا كان v عدد حقيقي بحيث $x_n \leq v$ لكل $N \leq n$، فإنه لا يوجد عدد حقيقي أكبر من v بحيث يكون نهاية لمتتابعة جزئيـة من (x_n). هذه الملاحظة تؤدي إلى التعريف التالي لنهاية أصغر حد علوي.

تعريف: إذا كانت (x_n) متتابعة محدودة فإن

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} x_n$$

تسمى النهاية العليا (أو نهاية أصغر حد علوي) ويرمز لها بالرمز $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

ملاحظة: هذه النهاية تمثل أكبر حد سفلي لمجموعة الاعداد v بحيث لكل v يوجد عدد منتهي n بحيث $x_k \geq v$ لكل $n \geq k$. وهـي أكبـر نهايـة يمكـن لمتتابعـة جزئيـة مـن (x_n) ان تتقـارب إليها.

تعريف: إذا كانت (x_n) متتابعة محدودة فإن

$$\lim_{n\to\infty} \inf x_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} x_n$$

تسمى النهاية العليا (أو نهاية أصغر حد علوي) ويرمز لها بالرمز $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

ملاحظة: هذه النهاية تمثل أصغر حد علوي لمجموعة الاعداد u بحيث لكل u يوجد عدد منتهي n بحيث $x_k \leq u$ لكل $n \geq k$. وهي أصغر نهاية يمكن لمتتابعة جزئية من (x_n) ان تتقارب إليها.

أمثلـــة: (1) اوجـــد $\lim_{n\to\infty} \sup x_n, \lim_{n\to\infty} \inf x_n$ إذا كـــان $x_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ لكـــل $n \in \mathbb{N}$.

الحل: واضح أن عناصر المتتابعة هي

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \cdots$$

وبالتالي فإن

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sup \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \cdots \right\}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

وأن

$$\lim_{n\to\infty} \inf x_n$$
$$= \lim_{n\to\infty} \inf \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \cdots \right\}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) اوجد $\lim_{n\to\infty} \inf x_n$, $\lim_{n\to\infty} \sup x_n$ إذا كان، لكل $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = \begin{cases} 2^{\frac{1}{n+1}}, & n \text{ is odd} \\ 1, & n \text{ is even} \end{cases}$$

الحل: عرف

$$M_k = \sup\{x_n; n \geq k\}, \quad m_k = \inf\{x_n; \quad n \geq k\}$$

فإن

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \lim_{k\to\infty} M_k, \quad \lim_{n\to\infty} \inf x_n = \lim_{k\to\infty} m_k$$

الجدول التالي يوضح قيم M_k, m_k لمتتابعة الذيل $\left(x_{n_k}\right)$ لقيم $k = 1,2,3,\cdots$

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$M_k =$	$2^{\frac{1}{2}}$	$2^{\frac{1}{4}}$	$2^{\frac{1}{4}}$	$2^{\frac{1}{6}}$	$2^{\frac{1}{6}}$	$2^{\frac{1}{8}}$	$2^{\frac{1}{8}}$	$\cdots$
$m_k =$	1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$

ومن ذلك نجد أن

$$m_k = 1, \qquad M_k = \begin{cases} 2^{\frac{1}{k+1}}, & k \text{ is odd} \\ \\ 2^{\frac{1}{k+2}}, & k \text{ is even} \end{cases}$$

وهكذا، فإن

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \lim_{k\to\infty} M_k = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \inf x_n = \lim_{k\to\infty} m_k = 1.$$

تمرين:

إذا كانت $(x_n), (y_n)$ متتابعين محدودتين في $\mathbb{R}$، بحيث $\lim_{n\to\infty} \sup x_n + \lim_{n\to\infty} \sup y_n \neq \infty - \infty$

فاثبت ان $\lim_{n\to\infty} \sup(x_n + y_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup x_n + \lim_{n\to\infty} \sup y_n$.

ملاحظة: من جهة ثانية، إذا كانت S مجموعة نهايات كل المتتابعات الجزئية من متتابعة (x_n) فإن

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \sup S, \quad \lim_{n\to\infty} \inf x_n = \inf S$$

أمثلة: (1) اوجد $\lim_{n\to\infty} \sup x_n , \lim_{n\to\infty} \inf x_n$ إذا كان $x_n = n^{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

الحل: واضح أن

$$(x_n) = \left(1^{\sin\frac{\pi}{2}}, 2^{\sin\pi}, 3^{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}, 4^{\sin 2\pi}, 5^{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)}, \cdots\right)$$
$$= \left(1, 1, \frac{1}{3}, 1, 5, 1, \frac{1}{7}, 1, 9, \cdots\right)$$

من الملاحظ أن توجد فقط ثلاث نهايات لمتتابعات جزئية تقاربية وهي

$$\lim_{n\to\infty} x_{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n-1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} x_{4n-3} = \lim_{n\to\infty} (4n-3) = \infty.$$

وبالتالي فإن مجموعة نهايات كل المتتابعات الجزئية من متتابعة (x_n) هي $S = \{0, 1, \infty\}$.

ومن ثم فإن $\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \inf x_n = 0$.

(2) اوجد $\lim_{n\to\infty} \sup x_n , \lim_{n\to\infty} \inf x_n$ إذا كان

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{n}{n+1}, & n \text{ is odd} \\ \dfrac{1}{n+1}, & n \text{ is even} \end{cases}$$

الحل: بإعادة كتابة المتتابعة على الصورة

$$\{x_1, x_2, x_3, \cdots\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{7}{8}, \frac{1}{9}, \cdots\right\}$$

لدينا امكانيتين للحصول على نهايات لمتتابعات جزية هما

$$1 = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n}, \quad 0 = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}.$$

وبالتالي فإن $\lim_{n\to\infty} \sup x_n = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \inf x_n = 0$.

نظرية: المتتابعة (x_n) تكون تقاربية إذا وفقط إذا $\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \lim_{n\to\infty} \inf x_n$.

مثال: المتتابعة $x_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$ تباعدية حيث

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = 1 \neq \lim_{n\to\infty} \inf x_n = -1.$$

متتابعات كوشي CAUCHY SEQUENCES

تعريف: يقال لمتتابعة (x_n)انها متتابعة كوشي إذا لكل $\epsilon > 0$ معطى يوجد عدد طبيعي k بحيث لكل $m, n \geq k$ يكون $|x_m - x_n| < \epsilon$.

فمثلا، المتتابعة $\left(\frac{1}{n}\right)$ كوشيه لأنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي k بحيث $\frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{2}$ (بحسب خاصية ارشميدس). وبالتالي لكل $m, n \geq k$ فإن $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{m} \leq \frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{2}$. ومن ثم يكون

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

ولكن المتتابعة $((-1)^n)$ ليست كوشية، فإذا اعطينا العدد $\epsilon = 1/2$ فإنه لأي $n \geq 1$ نجد

$$|(-1)^n - (-1)^{n+1}| = 2 > \epsilon.$$

نظرية: كل متتابعة تقاربية هي متتابعة كوشي.

البرهان: لتكن (x_n) متتابعة تقاربية، وليكن $x_n \to x$، فإنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي k بحيث

$$|x_m - x| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall \ m, n \geq \ k.$$

وبالتالي لكل $m, n \geq k$ فإن

$$|x_m - x_n| = |(x_m - x) + (x_n - x)| < |x_m - x| + |x_n - x| < \epsilon$$

وهذا يثبت المطلوب.

تمهيدية: متتابعة كوشي هي متتابعة محدودة.

البرهان: إذا كانت (x_n) متتابعة كوشية، فإنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي k بحيث

$$|x_m - x_n| < \epsilon \ \forall \ m, n \geq \ k$$

وبالتالي، للعدد $\epsilon_0 = 1$ يوجد العدد الطبيعي k بحيث

$$|x_n - x_k| < 1 \ \forall \ n \geq \ k$$

ومنها

$$x_k - 1 < x_n < x_k + 1 \quad \forall \ n \geq k$$

الان ليكن

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{k-1}|, |x_k| + 1\}$$

فإن

$$|x_n| \leq M \quad \forall \ n$$

هذا يثبت أن المتتابعة الكوشية (x_n) هي متتابعة كوشية.

نظرية: كل متتابعة كوشية في $\mathbb{R}$ هي تقاربية.

البرهان: لتكن (x_n) متتابعة كوشية في $\mathbb{R}$ فإن (x_n) متتابعة محدودة، ومن ثم لها نقطة تراكم x (بتطبيق نظرية بلزانو - فيرشتراس على مجموعة عناصر المتتابعة).

وبناء على ذلك، فإنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد العددان الطبيعيان k_1, k_2 بحيث

$$|x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall \ m, n \geq k_1 \tag{1}$$

$$|x_p - x| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall \ \ p \geq k_2 \tag{2}$$

الان، ليكن $k = \max\{k_1, k_2\}$ فإنه لكل $n \geq k$ والعدد $p_* \geq k$ نجد أن

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{p_*}| + |x_{p_*} - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

وهذا يثبت المطلوب.

مثال (1): ادرس تقارب المتتابعة التالية، ثم اوجد نهايتها (إن وجدت)

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}), \quad n > 2.$$

الحل: واضح أن $x_1 < x_2,\ x_2 > x_3$ أي أن المتتابعة المعطاة ليست مطردة. من جهة ثانية

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n+1}| &= \left|x_n - \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})\right| = \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}| \\ &= \frac{1}{2^2}|x_{n-1} - x_{n-2}| = \cdots = \frac{1}{2^{n-1}}|x_2 - x_1| = \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

ومنها فإنه لكل $m > n$ نجد أن

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + x_{m-2} - \cdots + x_{n+1} - x_n| \\ &\le |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\le \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{m-3}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right) \\ &\le \frac{2}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{1}{2^{m-n}}\right) < \frac{1}{2^{n-2}} \end{aligned}$$

وبالتالي إذا اعطينا $\epsilon > 0$ نجد العدد الطبيعي k بحيث لكل $n \ge k$ فإن $\frac{1}{2^{n-2}} < \epsilon$. ومن ثم فإنه لكل $m.n \ge k$ نجد أن $|x_n - x_m| < \epsilon$، وهذا يثبت أن المتتابعة (x_n) كوشية، ومن ثم فهي تقاربية، وليكن إلى العدد الحقيقي x. الان، نعمل على إيجاد العدد x، كنهاية لمتتابعة جزئية. لدينا

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1 + \frac{1}{2},\ x_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2},\ \cdots,\ x_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}$$

$$x_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}},\quad x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}}$$

للمتتابعة الجزئية (x_{2n+1}) فإن

$$x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right] = 1 + \frac{2}{3}\left[1 - \frac{1}{4^n}\right]$$

ومن ثم فإن

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left\{1 + \frac{2}{3}\left[1 - \frac{1}{4^n}\right]\right\} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

مثال (2): ادرس تقارب المتتابعة التالية

$$x_1 = 1,\ \ x_2 = 1 - \frac{1}{2!},\ \ x_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \mp \cdots + \frac{(-1)^n}{n!},\quad n \geq 3.$$

الحل: واضح أن $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{2}{3}$. وهذا يبين أن المتتابعة ليست مطردة.

لأي $m > n$ عددان طبيعيان فإن

$$x_m - x_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} + \cdots + \frac{(-1)^{m+1}}{m!},$$

$$|x_m - x_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{m!}.$$

وحيث إن $k! \leq 2^{k-1}$ لكل $1 \leq k$ (اثبت ذلك بالاستقراء الرياضي)، فإن

$$|x_m - x_n| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{m-1}}$$

$$\leq \frac{1}{2^n}\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right]$$

$$\leq \frac{1}{2^{n-1}}\left[1 - \frac{1}{2^{m-n}}\right] < \frac{1}{2^{n-1}}$$

هذا يثبت أن المتتابعة (x_n) متتابعة كوشية، وبالتالي فهي تقاربية، وليكن إلى العدد x.

باستخدام مفكوك الدالة الاسية نلاحظ أن

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!} = 1 - \frac{1}{e}.$$

الفصل الثالث

المتسلسلات الحقيقية REAL SERIES

تعريف: إذا كانت (x_n) متتابعة، فإن المتسلسلة S المتولدة بالمتتابعة (x_n) هي متتابعة المجاميع الجزئية (S_n) حيث

$$S_1 = x_1, S_2 = x_1 + x_2, \cdots, S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \cdots$$

فمثلا، إذا كانت $x_n = \frac{1}{n}$ فإن

$$S_1 = 1, S_2 = 1 + \frac{1}{2}, \cdots, S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + 1/n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \cdots$$

وبالتالي فإن المتسلسلة المتولدة بالمتتابعة $\left(\frac{1}{n}\right)$ هي $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (أو باختصار نكتب $\sum \frac{1}{n}$).

تعريف: إذا كانت (S_n) متتابعة المجاميع الجزئية لمتتابعة (x_n)، وكانت $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ يقال إن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ تقاربية إلى s، ونكتب $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$. خلاف ذلك، إذا كانت المتتابعة (S_n) تباعدية فيقال إن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ تباعدية.

ملاحظة: (1) العدد x_n يسمى الحد العام (أو النوني) للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

(2) العدد S_n يسمى المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

(3) العدد s (إن وجد) يسمى مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

أمثلة: (1) إذا كان $r \in \mathbb{R}$ فادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$.

الحل: المجموع الجزئي النوني لهذه المتسلسلة هو

$$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \begin{cases} n+1, & r = 1 \\ \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, & r \neq 1 \end{cases}$$

وحيث إن

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & |r|<1 \\ \infty, & |r|>1 \end{cases}$$

فإن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-r}, & |r|<1 \\ \infty, & |r|\geq 1 \end{cases}$$

وبالتالي فإن $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ تقاربية إذا كان $|r|<1$، وعندئذ يكون مجموعها هو

$$\lim_{n\to\infty} S_n(|r|<1) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$$

أي أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad |r|<1.$$

وتكون المتسلسلة تباعدية إذا كان $|r|\geq 1$. نماذج أخرى للمتسلسلة الهندسية

$$\frac{1}{5-r}=\frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{r}{5}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{5^{n+1}}, \quad |r|<5,$$

$$\frac{1}{3-2r}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2r}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n r^n, \quad |r|<\frac{3}{2},$$

$$\frac{1}{2+3r}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{3r}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n r^n, \quad |r|<\frac{2}{3}.$$

(2) بين أن المتسلسلة $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ تباعدية.

الحل: المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة هو

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \begin{cases} 0, & n \text{ is odd} \\ 1, & n \text{ is even} \end{cases}$$

وبالتالي فإن المتتابعة (S_n)، ومن ثم المتسلسلة $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ تكون تباعدية.

(3) اثبت أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

الحل: بالتحليل إلى كسور جزئية فإن

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \qquad k \geq 1$$

فإن المجموع الجزئي النوني هو

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

هذا يثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ وأن مجموعها $s = 1$.

نظرية: إذا كانت $\sum_{n\geq 1} x_n$ متسلسلة تقاربية فإن $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

البرهان: إذا كانت $\sum_{n\geq 1} x_n$ تقاربية فإن $\lim_{n\to\infty} S_n$ موجودة. وبالتالي، فإن

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0.$$

ملاحظة: النظرية تكون مفيدة على النحو التالي. إذا كان $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تكون تباعدية. نحذر أن عكس النظرية ليس بالضرورة صحيح، أي أن $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ لا تعني أن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تقاربية، فمثلا $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ في حين أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ليست تقاربية. إذا كان S_n هو المجموع الجزئي النوني لهذه المتسلسلة فإن

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2} \to \infty \end{aligned}$$

هذا يعني ان المتتابعة الجزئية (S_{2^n})، ومن ثم متتابعة المجاميع الجزئية (S_n) تكون تباعدية. وبالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ تباعدية.

نظرية: (معيار كوشي لتقارب المتسلسلات Cauchy Criterion for convergent Series)

المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n\geq 1} x_n$ تكون تقاربية إذا وفقط إذا كان لكل $0 < \epsilon$ يوجد عدد طبيعي $k(\epsilon)$ بحيث

$$|S_m - S_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + X_m| < \epsilon \quad \forall\ m > n \geq k(\epsilon).$$

نظرية: إذا كان $0 \le x_n$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\ge1} x_n$ تكون تقاربية إذا وفقط إذا كانت متتابعة المجاميع الجزئية (S_n)محدودة.

البرهان: اولاً: إذا كانت $\sum_{n\ge1} x_n$ تقاربية فإن المتتابعة (S_n) تكون تقاربية ومن ثم محدودة.

ثانياً: حيث إن $0 \le x_n$ فإن المتتابعة (S_n) تكون تزايدية، فإذا كانت (S_n) محدودة فإنها تكون تقاربية ومن ثم تكون $\sum_{n\ge1} x_n$ تقاربية.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n^p}$ لكل $p \in \mathbb{R}$.

الحل: لنعتبر الحالات التالية.

(1) إذا كانت $p \le 0$ فإن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} 1, & p = 0 \\ \infty, & p < 0 \end{cases}$$

وبالتالي فالمتسلسلة $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n^p}$ تكون تباعدية لكل $p \le 0$.

(2) إذا كانت $0 < p < 1$ فإن

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad n^p \le n \implies \frac{1}{n^p} \ge \frac{1}{n}$$

وحيث إن المتسلسلة $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n}$ تباعدية فإن $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n^p}$ تباعدية لكل $0 < p < 1$.

(3) إذا كانت $p = 1$ فإن المتسلسلة تكون تباعدية (انظر الملاحظة الأخيرة).

(4) إذا كانت $1 < p$ فإن $n \le 2^n - 1$, $\frac{1}{n^p} > 0$. وبالتالي فإن متتابعة المجاميع الجزئية (S_n) تكون مطردة حيث

$$S_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \frac{1}{(n+1)^p}$$

$$= S_n + \frac{1}{(n+1)^p} > S_n \;\forall\; n \ge 1$$

من جهة ثانية، إذا كانت $1 < p$ فإن $2^p < n^p$ لكل $2 < n$. عرف $n_k = 2^k - 1$ نجد أن

$$n_1 = 1,\quad S_{n_1} = S_1 = 1,$$

$$n_2 = 3,\quad S_{n_2} = S_3 = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < 1 + \frac{1}{2^{p-1}},$$

$$n_3 = 7, \quad S_{n_3} = S_7 = 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right)$$
$$< 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}}$$

يمكن بالاستقراء الرياضي اثبات أن

$$S_{n_k} < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{2(p-1)}} + \frac{1}{2^{3(p-1)}} + \cdots + \frac{1}{2^{(k-1)(p-1)}}, \qquad k \geq 1.$$

المجموع الأخير هو مجموع جزئي لمتسلسلة هندسية أساسها $r = \frac{1}{2^{p-1}}$. وحيث إن $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ فإن هذه المتسلسلة تتقارب إلى العدد

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}} = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1} - 1} = 1 + \frac{1}{2^{p-1} - 1} < 2.$$

لذلك فإن $1 < S_{n_k} < 2$. ومن ثم $1 < S_n < 2$.

وهكذا فإننا أثبتنا أن المتتابعة (S_n) مطردة ومحدودة. وبالتالي فهي تقاربية، ومن ثم فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$ تكون تقاربية لكل $1 < p$. وهذا يكمل الحل.

اختبارات تقارب المتسلسلات SERIES CONVERGENCE TESTS

اختبار المقارنة COMPARISON TEST

نظرية: إذا كانت $(x_n), (y_n)$ متتابعات في $\mathbb{R}$، و$k \in \mathbb{N}$ بحيث $0 \leq x_n \leq y_n$ لكل $k \leq n$ فإن

(1) إذا كانت المتسلسلة $\sum y_n$ تقاربية فإن $\sum x_n$ تقاربية.

(2) إذا كانت المتسلسلة $\sum x_n$ تباعدية فإن $\sum y_n$ تباعدية.

البرهان: (1) إذا كانت المتسلسلة $\sum y_n$ تقاربية فإنه لكل $0 < \epsilon$ يوجد $M \in \mathbb{N}$ بحيث

$$0 < y_{n+1} + \cdots + y_m < \epsilon \quad \forall\, m > n \geq M$$

وحيث إن $0 \leq x_n \leq y_n$ لكل $k \leq n$ فإنه لكل $m > n \geq \max\{M, k\}$ فإن

$$0 \leq x_{n+1} + \cdots + x_m \leq y_{n+1} + \cdots + y_m < \epsilon$$

وهذا يثبت أن المتسلسلة $\sum x_n$ تقاربية.

(2) إذا كانت المتسلسلة $\sum x_n$ تباعدية، وبفرض العكس، أن $\sum y_n$ تقاربية فإنه لكل $0 < \epsilon$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$0 \le x_{n+1} + \cdots + x_m \le y_{n+1} + \cdots + y_m < \epsilon \ \ \forall\, m > n \ge N$$

وهذا يناقض كون المتسلسلة $\sum x_n$ تباعدية. وبالتالي فإن $\sum y_n$ تباعدية.

نظريـــة: إذا كانــت $(x_n), (y_n)$ متتابعــات فــي $\mathbb{R}$، و $k \in \mathbb{N}$ بحيــث $0 < x_n \le y_n$ لكـل $n \in \mathbb{N}$ وكانت النهاية التالية موجودة

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

فإن

(1) إذا كانت $r \neq 0$ فإن $\sum x_n$ تتقارب إذا وفقط إذا كانت $\sum y_n$ تقاربية.

(2) إذا كانت $r = 0$ فإن $\sum x_n$ تتقارب إذا كانت $\sum y_n$ تقاربية.

البرهان: تمرين.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$$

الحل: لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2+n} < 0$. وحيث إن $\sum \frac{1}{n^2}$ متسلسلة تقاربيـة فـإن، باختبـار المقارنة، المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^2+n}$ تتقارب.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

الحل: لكل $4 \le n$ فإن $n! > n^2$. وبالتالي فإن المتسلسلة تقاربية لأن $\sum \frac{1}{n^2}$ تقاربية.

مثال: بين أن المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^2-n+1}$ تقاربية.

الحل: لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $\frac{2}{n^2} < \frac{1}{n^2-n+1} < 0$ (؟). وهذا يثبت أن المتسلسلة تقاربية لأن $\sum \frac{1}{n^2}$ تقاربية.

بطريقة أخرى: عرف $x_n = \frac{1}{n^2-n+1}$ و $y_n = \frac{1}{n^2}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

نجد أن $0 < x_n$ لكل $1 \le n$، لأن $n^2 - n + 1 = (n-1)^2 + n > 0$. وكذلك $0 < y_n$. وحيث إن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-n+1}=1\neq 0$$

فإن $\sum x_n$ تقاربية لأن $\sum y_n$ تقاربية.

مثال: بين أن المتسلسلة $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ تباعدية

الحل: عرف $x_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}, y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ لكل $n\in\mathbb{N}$. فإن $0<x_n, y_n$ وأن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=1\neq 0$$

وحيث إن $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ تباعدية (؟) فإن $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ تباعدية.

تعريف: إذا كانت $\sum |x_n|$ متسلسلة تقاربية فيقال إن المتسلسلة $\sum x_n$ تقاربية تقارب مطلق. خلاف ذلك، إذا كانت $\sum x_n$ تقاربية، ولكن $\sum |x_n|$ تباعدية عندئذ نقول إن $\sum x_n$ تقاربية تقارب مشروط.

مثال: المتسلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}$ تقاربية تقارب مطلق لأن $\sum_{n\geq 1}\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ متسلسلة تقاربية. والمتسلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ تقاربية تقارب مشروط لأن $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ تباعدية.

يمكن اثبات أن $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ كما يلي. اعتبر المجاميع الجزئية التالية

$$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right),$$

$$S_{2n+1}=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

واضح أن هذه المجاميع تعرف متتابعات مطردة، ومحدودة لأن

$$0<S_{2n}<S_{2n}+\frac{1}{2n+1}=S_{2n+1}<1.$$

ولذلك في متتابعات تقاربية وهذا يثبت أن متتابعة المجاميع الجزئية (S_n)، ومن ثم المتسلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ تكون تقاربية.

اختبار التكامل INTEGRAL TEST

نظرية: إذا كانت (x_n) متتابعة تناقصية، وكان $0<x_n$ لكل $n\in\mathbb{N}$ وكان

$$\int_1^\infty f(t)dt < \infty, \;\; f(n) = x_n$$

فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تقاربية.

مثال: اثبت أن $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ متسلسلة تقاربية.

الحل: عرف الدالة $f(t) = \frac{1}{t^3}$ لكل $1 \leq t$ فإن

$$\int_1^\infty f(t)dt = \int_1^\infty \frac{1}{t^3} dt = -\frac{1}{2t^2}\Big|_{t=1}^{\infty} = \frac{1}{2} < \infty$$

وحيث المتتابعة $\left(\frac{1}{n^3}\right)$تناقصية وجميع عناصرها موجبة، فإن المتسلسلة تقاربية.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة التالية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)}$$

الحل: اولاً: ندرس خواص المتتابعة المولدة $(x_n) = \left(\frac{1}{n \ln(n+1)}\right)$. حيث إن $n + 1 > 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $\ln(n+1) > 0$، ومن ثم $x_n > 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وحيث إن الدالة اللوغاريتمية تزايدية فإن

$$x_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\ln(n+2)} < \frac{1}{n \ln(n+1)} = x_n$$

أي أن المتتابعة (x_n) تناقصية.

ثانياً: الآن يمكن تطبيق اختبر التكامل لدراسة تقارب المتسلسلة. عرف الدالة

$$f(t) = \frac{1}{t \ln(t+1)}\,, \qquad t \geq 1.$$

فإن

$$\int_1^\infty f(t)dt = \int_1^\infty \frac{1}{t \ln(t+1)} dt > \int_1^\infty \frac{1}{(t+1)\ln(t+1)} dt$$

$$= \ln\ln(t+1)\Big|_{t=1}^{\infty} = \infty$$

هذا يعني أن التكامل، ومن ثم المتسلسلة غير تقاربية. أي أن المتسلسلة تباعدية.

اختبار الجذر ROOT TEST

نظرية: إذا كانت (x_n) متتابعة اعداد حقيقية غير سالبة، أي أن $0 \leq x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وإذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = c$$

(1) إذا كان $c < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تكون تقاربية.

(2) إذا كان $c > 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تكون تباعدية.

(3) إذا كان $c = 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ قد تكون تقاربية وربما لا تكون.

البرهان: (1) إذا كان $c < 1$ فإنه يمكن اختيار عدد حقيقي r بحيث $c < r < 1$. ومن ثم يوجد عدد طبيعي N بحيث $x_n^{\frac{1}{n}} < r$ لكل $n \geq N$، ومنها $x_n < r^n$ لكل $n \geq N$. باستخدام اختبار المقارنة بالمتسلسلة الهندسية $\sum_{n\geq 1} r^n$، وهي تقاربية لأن $0 \leq r < 1$، فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$.

(2) إذا كان $c > 1$ فإن يوجد عدد طبيعي k بحيث $x_n^{\frac{1}{n}} > 1$ لكل $n \geq k$. وبالتالي فإن $x_n \nrightarrow 0$. وبحسب اختبار الحد العام فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تكون تباعدية.

(3) للمتسلسلة التباعدية $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ نجد أن $c = 1$ حيث $n^{\frac{1}{n}} \geq 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$، ولذلك يوجد عدد حقيقي موجب δ بحيث $n^{\frac{1}{n}} = 1 + \delta$، ومن ثم $n = (1+\delta)^n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. بتطبيق نظرية ذات الحدين، نحصل على $n = (1+\delta)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\delta^2$، وبالتالي

$$1 \leq n^{\frac{1}{n}} = 1 + \delta \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 1$$

ولذلك فإن

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

وهذا يثبت أن $c = 1$ للمتسلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ التباعدية. بالمثل يمكن اثبات أن $c = 1$ للمتسلسلة التقاربية $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^p}$ لكل $1 < p$.

مثال: بين أن المتسلسلة التالية تقاربية

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$$

الحل: لكل $1 < n$ فإن $0 < \ln n$، ومن ثم $x_n = \frac{1}{(\ln n)^n} > 0$. وحيث إن

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = 0 < 1$$

فإن المتسلسلة تقاربية.

مثال: بين أن المتسلسلة التالية تباعدية

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

الحل: لدينا $0 \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \leq 1$ لكل $1 \leq n$، وأن

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$$

فإن المتسلسلة تباعدية، بحسب اختبار الحد العام.

تمرين: ادرس تقارب كل من المتسلسلات التالية

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n},\qquad \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$$

اختبار النسبة RATIO TESTS

نظرية: إذا كانت (x_n) متتابعة اعداد حقيقية موجبة، وكانت

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = c$$

(1) إذا كان $c < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تقاربية.

(2) إذا كان $c > 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تباعدية.

(3) إذا كان $c = 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ قد تكون تقاربية وقد تكون تباعدية.

ملاحظة: (1) حيث إن $x_n > 0$ فإن $0 \leq c$

(2) للمتسلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$ فإن $c = 1$ لكل $p \in \mathbb{R}$ لكن المتسلسلة تكون تقاربيـة لكل $1 < p$ وتكون تباعدية خلاف ذلك.

مثال: بين أن المتسلسلة التالية تقاربية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n}$$

الحل: واضح أن $x_n = \frac{n}{10^n} > 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$، وأن

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{10n} \to \frac{1}{10} < 1$$

لذلك، فالمتسلسلة تقاربية.

مثال: بين أن المتسلسلة التالية تقاربية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

الحل: لكل $n \in \mathbb{N}$فإن $x_n = \frac{3^n}{n!} > 0$، وان

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3}{n+1} \to 0 < 1$$

وبالتالي فإن المتسلسلة المعطاة تقاربية.

مثال: اثبت أن المتسلسلة التالية تقاربية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3.5.7 \cdots (2n+1)}$$

الحل: عرف

$$x_n = \frac{n!}{3.5.7 \cdots (2n+1)}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

نجد أن

$$x_n > 0, \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{2n+3}, \quad n \in \mathbb{N}$$

وبالتالي،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}<1$$

لذلك، فالمتسلسلة تقاربية.

اختبار راب Raabe's Test

نظرية: إذا كانت (x_n) متتابعة من أعداد حقيقية موجبة، وكانت

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)\right]=L$$

(1) إذا كان $1<L$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1}x_n$ تكون تقاربية (تقارب مطلق).

(2) إذا كان $1>L$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1}x_n$ تكون تباعدية.

(3) إذا كان $L=1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1}x_n$ قد تكون تقاربية أو تباعدية.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة التالية

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2.4.6\cdots(2n)}{5.7.9\cdots(2n+3)}$$

الحل: عرف

$$x_n=\frac{2.4.6\cdots(2n)}{5.7.9\cdots(2n+3)}\ ,\quad n\in\mathbb{N}$$

نجد أن

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2.4.6\cdots(2n)(2n+2)}{5.7.9\cdots(2n+3)(2n+5)}\times\frac{5.7.9\cdots(2n+3)}{2.4.6\cdots(2n)}=\frac{2n+2}{2n+5}\to 1$$

هذا يعني أن اختبار النسبة يفشل في هذه الحالة. لنطبق اختبار راب، حيث

$$n\left[1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right]=n\left[1-\frac{2n+2}{2n+5}\right]=\frac{3n}{2n+5}\to\frac{3}{2}>1$$

ولذلك المتسلسلة تقاربية.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة التالية

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2.4.6\cdots(2n)}{3.5.7.9\cdots(2n+1)}$$

الحل: عرف

$$x_n = \frac{2.4.6\cdots(2n)}{3.5.7.9\cdots(2n+1)}\ ,\ \ n \in \mathbb{N}$$

نجد أن

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2.4.6\cdots(2n)(2n+2)}{3.5.7.9\cdots(2n+1)(2n+3)} \times \frac{3.5.7.9\cdots(2n+1)}{2.4.6\cdots(2n)} = \frac{2n+2}{2n+3}$$
$$\to 1$$

هذا يعني أن اختبار النسبة يفشل في هذه الحالة. لنطبق اختبار راب، حيث

$$n\left[1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right] = n\left[1-\frac{2n+2}{2n+3}\right] = \frac{n}{2n+3} \to \frac{1}{2} < 1$$

ولذلك المتسلسلة تباعدية.

تمرين: ادرس تقارب كل من المتسلسلات التالية

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3.6.9\cdots(3n)}{7.10.13\cdots(3n+4)},\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3.6.9\cdots(3n)}{4.7.10.\cdots(3n+1)}\ ,n \in \mathbb{N}$$

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة التالية

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\alpha}},\ \ \alpha > 0$$

الحل: عرف

$$x_n = \frac{1}{(\ln n)^{\alpha}},\ \ n \in \mathbb{N},\ \ \alpha > 0$$

نجد أن

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{\alpha} \to 1$$

لذا نطبق اختبار راب

$$n\left[1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right] = n\left[1-\left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{\alpha}\right]$$
$$= \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{\alpha} n\left[\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha} - 1\right]$$

$$= \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{\alpha} n\left[\left(\frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^{\alpha} - 1\right]$$

$$\approx \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{\alpha} n\left[\left(1+\frac{1}{n\ln n}\right)^{\alpha} - 1\right]$$

$$\approx \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{\alpha} n\left[\frac{\alpha}{n\ln n}\right] = \frac{\alpha}{\ln n}\left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{\alpha} \to 0$$

$$< 1$$

وهذا يبين أن المتسلسلة تباعدية.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة التالية

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)}\right]^p, \ \ p > 0$$

الحل: واضح أن

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left[\frac{2n+1}{2n+2}\right]^p \to 1$$

لذا، نستخدم اختبار راب. لاحظ أن

$$\left[\frac{2n+1}{2n+2}\right]^p = \left[1 - \frac{1}{2(n+1)}\right]^p \approx 1 - \frac{p}{2(n+1)} \to 1$$

وبالتالي فإن

$$n\left[1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right] = n\left[1 - \left[\frac{2n+1}{2n+2}\right]^p\right] \approx \frac{np}{2(n+1)} \to \frac{p}{2}$$

فإذا كانت $2 < p$ فإن المتسلسلة تكون تقاربية، وإذا كانت $p < 2$ فإن المتسلسلة تكون تباعدية، وإذا كانت $p = 2$ فإن الاختبار يفشل.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة التالية

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3.5.7\cdots(2n+1)}{2.4.6\cdots(2n)}\right]^2$$

الحل: واضح أن

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left[\frac{2n+3}{2n+2}\right]^2 \to 1$$

لذا، نستخدم اختبار راب. لاحظ أن

وبالتالي فإن

$$n\left[1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right] = n\left[1-\left[\frac{2n+3}{2n+2}\right]^2\right] = -\frac{(4n+5)n}{4(n+1)^2} \to -1 < 1$$

ولذلك فالمتسلسلة تباعدية.

اختبار برتراند BERTRAND'S TEST

نظرية: إذا كانت (x_n) متتابعة من أعداد حقيقية موجبة، وكانت

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\ln n\left[n\left(1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)-1\right]\right\} = c$$

(1) إذا كان $c > 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تكون تقاربية (تقارب مطلق).

(2) إذا كان $c < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ تكون تباعدية.

(3) إذا كان $c = 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} x_n$ قد تكون تقاربية أو تباعدية.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة التالية

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)}\right]^2$$

الحل: واضح أن

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left[\frac{2n+1}{2n+2}\right]^2 \to 1$$

لذا، نحاول تطبيق اختبار راب. لاحظ أن

$$n\left[1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right] = n\left[1-\left[\frac{2n+1}{2n+2}\right]^2\right] = \frac{n(4n+3)}{4(n+1)^2} \to 1$$

لذا، فإن اختبار راب يفشل. نطبق اختبار برتراند. بتطبيق قاعدة لوبيتال نحصل على

$$\ln n\left[n\left(1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)-1\right] = \ln n\left[\frac{n(4n+3)}{4(n+1)^2}-1\right] = -\frac{5n+4}{4(n+1)^2}\ln n \to 0 < 1$$

وبالتالي فالمتسلسلة تباعدية.

الفصل الرابع

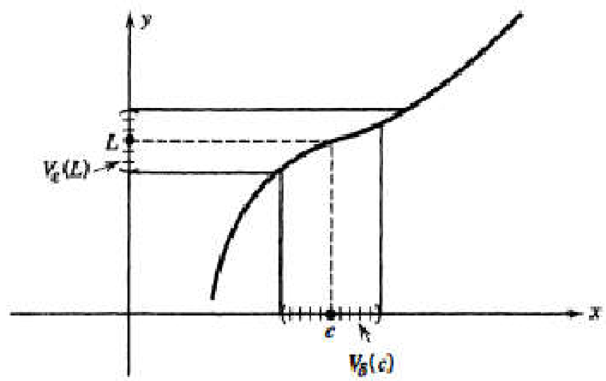
نـهايات الدوال الحقيقية LIMITS OF REAL-VALUED FUNCTIONS

تعريف: إذا كانت $A \subseteq \mathbb{R}$ مجموعة من اعداد حقيقية وكانت c نقطة تراكم للمجموعة A يقـال أن العدد الحقيقـي L هو نهايـة للدالـة $f: A \to \mathbb{R}$ عند النقطـة c إذا لكـل معطـى $\epsilon > 0$ يوجـد $\delta > 0$ بحيث إذا كانت $x \in A$ و $0 < |x - c| < \delta$ فإن $0 < |f(x) - L| < \epsilon$. عندئذ نكتب $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

بعبارة أخرى، نقول إن العدد الحقيقي L هو نـهاية الدالة $f: A \to \mathbb{R}$ عند النقطة c (نقطة تـراكم للمجموعة A) إذا لكل فترة مفتوحة $V_\epsilon(L)$ (جوار مفتوح) مركزها العدد الحقيقي L توجد فتـرة مفتوحة $V_\delta(c)$ مركزها العدد الحقيقي c بحيث

$$x \in V_\delta(c) \implies f(x) \in V_\epsilon(L)$$

ونكتب $x \to c \implies f(x) \to L$ أو $\lim_{x\to c} f(x) = L$.



مثال: اثبت ان $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-2x-15}{x-5} = 8$

الحل: إذا اعطينا $\epsilon > 0$ نريد إيجاد $\delta > 0$ بحيث

$$|x - 5| < \delta \implies \left|\frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} - 8\right| < \epsilon.$$

حيث إن

$$\frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} - 8 = \frac{x^2 - 10x + 25}{x - 5} = x - 5 \quad \forall\ x \neq 5$$

فإنه باختيار $\delta = \epsilon$ نحصل على

$$|x-5|<\delta=\epsilon \Longrightarrow \left|\frac{x^2-2x-15}{x-5}-8\right| = |x-5|<\epsilon$$

وهذا يثبت المطلوب.

مثال: اثبت أن $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4}{x^2+1}=\frac{4}{5}$

الحل: حيث إن

$$\frac{x^3-4}{x^2+1}-\frac{4}{5}=\frac{5x^3-4x^2-24}{5(x^2+1)}=\frac{(5x^2+6x+12)(x-2)}{5(x^2+1)}$$

من جهة ثانية، $x\to 2$ تعني أن x قريبة بدرجة كافية من 2، لتكن $1<x<3$. عندئذ نجد أن

$$|5x^2+6x+12|<75, \qquad |x^2+1|>2$$

ومن ثم فإن

$$\left|\frac{x^3-4}{x^2+1}-\frac{4}{5}\right| = \frac{1}{5}\left|\frac{5x^2+6x+12}{x^2+1}\right| |x-2| < \frac{75}{10}\ |x-2| = \frac{15}{2}\ |x-2|.$$

وبالتالي، لكل $\epsilon>0$ معطى يوجد $\delta=\inf\left\{\frac{12\epsilon}{15}\right\}>0$ بحيث

$$|x-2|<\delta \Longrightarrow \left|\frac{x^3-4}{x^2+1}-\frac{4}{5}\right|<\epsilon$$

وهذا يثبت المطلوب.

المتتابعات التقاربية ونهاية الدالة الحقيقية

نظرية: إذا كانت $f: A\to\mathbb{R}$ وكانت $c\in\mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة A، فإن الجمل التالية متكافئة.

(1) $\lim_{x\to c} f(x)=L$

(2) لكل متتابعة (x_n) في A بحيث $x_n\neq c$ لكل $n\in\mathbb{N}$ و $x_n\to c$ فإن $f(x_n)\to L$.

البرهان: (1) إذا كان $\lim_{x\to c} f(x)=L$، فإنه لكل $\epsilon>0$ معطى يوجد $\delta>0$ بحيث

$$0<|x-c|<\delta \Longrightarrow |f(x)-L|<\epsilon.$$

فإذا كانت (x_n) متتابعة في A بحيث $x_n\neq c$ لكل $n\in\mathbb{N}$ و $x_n\to c$ فإنه للعدد δ يوجد عدد طبيعي $k(\delta)$ بحيث

$$n \geq k(\delta) \Longrightarrow |x_n - c| < \delta.$$

ومن ثم لكل $k(\delta) \leq n$ فإن

$$n \geq k(\delta) \Longrightarrow |x_n - c| < \delta \ \Longrightarrow |f(x_n) - L| < \epsilon$$

هذا يثبت صحة (2)، أي أن $f(x_n) \to L$.

(2) إذا، لكل متتابعة (x_n) في A بحيث $x_n \neq c$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $x_n \to c$، كان $f(x_n) \to L$. بفرض أن (1) غير صحيحة. عندئذ سيوجد $\epsilon_0 > 0$بحيث لكل $\delta > 0$ يوجد x_δ في المجموعة $A \cap (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$ بحيث $f(x_\delta) \notin (L-\epsilon, L+\epsilon)$. هذا يؤدي إلى، لكل $n \in \mathbb{N}$ يوجد x_n في A بحيث $x_n \neq c$ و$|x_n - c| < \frac{1}{n}$ لكل n ، ولكن $|f(x_n) - L| \geq \epsilon_0$. هذا يعني أن المتتابعة (x_n) في $A \setminus \{c\}$ وتقاربية إلى c لكن المتتابعة $\left(f(x_n)\right)$ لا تتقارب إلى L. هذا يناقض صحة (2). وعلي ذلك فإن (1) صحيحة. هذا يكمل الاثبات.

نتيجة: لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$، و$f: A \to \mathbb{R}$، ولتكن $c \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة A.

(1) $\lim_{x \to c} f(x) \neq L$ إذا وجدت متتابعة (x_n) في A بحيث $x_n \neq c$ لكل n و $x_n \to c$، ولكن $f(x_n) \nrightarrow L$.

(2) النهاية $\lim_{x \to c} f(x)$ غير موجودة إذا وجدت متتابعة (x_n) في A بحيث $x_n \neq c$ لكل n و $x_n \to c$، ولكن المتتابعة $\left(f(x_n)\right)$ غير تقاربية.

سنعطي بعض الأمثلة على هذه النتيجة توضح كيفية استخدامها.

مثال: باستخدام المتتابعات التقاربية بين أن النهاية التالية غير موجودة

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

الحل: اعتبر المتتابعة $x_n = \frac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$. تجد أن $x_n \neq 0$ لكل n، و $x_n \to 0$، ولكن

$$f(x_n) = \frac{1}{x_n} = n \to \infty$$

أي أن المتتابعة $\left(f(x_n)\right)$ تباعدية. هذا يثبت المطلوب.

مثال: إذا كانت $\operatorname{sgn}(x)$ دالة الإشارة للعد الحقيقي x، أي

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

اثبت أن $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ غير موجودة.

الحل: للمتتابعة $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $x_n \neq 0$ لكل n و $x_n \to 0$، ولكن

$$f(x_n) = (-1)^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

متتابعة تباعدية (لأنها متذبذبة). هذا يثبت أن $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ غير موجودة.

مثال: اثبت أن النهاية التالية غير موجودة

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

الحل: اعتبر المتتابعتين

$$x_n = \frac{1}{n\pi}, \quad y_n = \left(\frac{1}{2}\pi + n\pi\right)^{-1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

يتضح أن $x_n \neq 0, y_n \neq 0$ لكل n، وأن $x_n \to 0, y_n \to 0$، ولكن

$$f(x_n) = \sin(n\pi) = 0, f(y_n) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi + n\pi\right) = 1$$

وهـــــــــذا يعنـــــــــي أن $f(x_n)) \to 0, f(y\_n)) \to 1$. ولـــــــــذلك $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ غير موجودة.

نظريات النهايات LIMIT THEOREMS

نظرية: إذا كانت $f: A \to \mathbb{R}$، وكانت $c \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة A، فإن الدالة f يمكن أن تكون لها نهاية واحدة فقط عند النقطة c.

بعبارة أخرى، نهاية الدالة، إن وجدت تكون وحيدة.

البرهان: تمرين.

تعريف: إذا كانت $A \subseteq \mathbb{R}$، و $f: A \to \mathbb{R}$، وكانت $c \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة A، يقال أن الدالة f محدودة في جوار النقطة c إذا وجد $\delta > 0$ و $M > 0$ بحيث لكل $x \in A \cap (c - \delta, c + \delta)$ يكون $|f(x)| \leq M$.

نظرية: إذا كانت $A \subseteq \mathbb{R}$ وكان للدالة $f: A \to \mathbb{R}$ نهاية عند النقطة c فإن f تكون محدودة في جوار للنقطة c.

البرهان: تمرين.

نظرية: إذا كانت $A \subseteq \mathbb{R}$، و f, g دوال من A إلى $\mathbb{R}$، و $c \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة A، وكان $b \in \mathbb{R}$.

(1) فإذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = L$, $\lim_{x\to c} g(x) = M$ فإن

$$\lim_{x\to c}\big(f(x) \pm g(x)\big) = L \pm M, \quad \lim_{x\to c} f(x)g(x) = LM, \quad \lim_{x\to c} bf(x) = bL$$

(2) إذا كانت $h: A \to \mathbb{R}$ بحيث $h(x) \neq 0$ لكل $x \in A$، وكان $\lim_{x\to c} h(x) = H \neq 0$ فإن

$$\lim_{x\to c}\left(\frac{f}{h}\right) = \frac{L}{H}.$$

البرهان: تمرين.

أمثلة:

1) $\lim_{x\to c} x = c, \quad \lim_{x\to c} x^2 = c^2, \lim_{x\to c, c\neq 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}.$

2) $\lim_{x\to 2}(x^2+1)(x^3-4) = 20,$

$$\lim_{x\to 2} 3(x^2+1) = 15, \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x^3-4} = \frac{5}{4}.$$

3) إذا كانت $p(x)$ كثيرة حدود فإن $\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$.

4) إذا كانت $p(x), \ q(x)$ كثيرات حدود بحيث $q(c) \neq 0$ فإن $\lim_{x\to c}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}$.

5) النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ غير موجودة.

نظرية: لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$، و $f: A \to \mathbb{R}$، ولتكن $c \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة A. فإذا

$$a \le f(x) \le b \quad \forall \ x \in A, \qquad x \neq c$$

وإذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = L$ فإن $a \le L \le b$.

البرهان: إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) = L$ فإنه لكل متتابعة (x_n) في A بحيث $x_n \neq c$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكان $x_n \to c$ فإن $f(x_n) \to L$. ومن ثم

$$a \le f(x_n) \le b \Longrightarrow a \le L \le b$$

وهو المطلوب.

نظرية: (Squeeze Theorem)

لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$، و $f, g, h: A \to \mathbb{R}$، ولتكن $c \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة A. فإذا

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall \; x \in A, \;\; x \neq c$$

وإذا كانت $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$ فإن $\lim_{x \to c} g(x) = L$.

مثال: بين أن $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

الحل: نعلم أن $-1 \leq \cos x \leq 1$. بالتكامل بالنسبة إلى x على الفترة $[0, \infty)$ نحصل على

$$-x \leq \sin x \leq x, \qquad x \geq 0 \qquad\qquad (*)$$

وحيث إن $\lim_{x \to 0} \pm x = 0$ فإن $\lim_{x \to 0} \sin x = 0.$

بالمثل، إذا $x < 0$ و $x \to 0$فإن $\sin x \to 0$.

مثال: بين أن $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

الحل: بتكامل $(*)$ بالنسبة إلى x على الفترة $[0, \infty)$ نحصل على

$$-\frac{1}{2}x^2 \leq 1 - \cos x \leq \frac{1}{2}x^2, \qquad x \geq 0$$

وحيث إن $\lim_{x \to 0} \pm \frac{x^2}{2} = 0$ فإن $\lim_{x \to 0}(1 - \cos x) = 0.$ وهذا يكافئ المطلوب.

بطريقة أخرى، حيث إن لكل $x \in \mathbb{R}$ لدينا $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x \leq 1$. فإن

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) = 1$$

مثال: اثبت ان $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x}\right) = 0$

الحل: من مفكوك تيلور فإن

$$\frac{1x}{2} \leq \frac{\cos x - 1}{x} \leq 0, \quad x > 0$$

$$0 \leq \frac{\cos x - 1}{x} \leq -\frac{x}{2}, \quad x < 0.$$

وبتطبيق نظرية المحصور ينتج أن المطلوب.

مثال: اثبت أن $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

الحل: لكل $x \neq 0$ فإن $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$. وبالتالي فإن

$$-|x| \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

وحيث إن $\lim_{x\to 0} |x| = 0$، فإن نظرية المحصور تؤدي إلى المطلوب.

نظريـــة: إذا كانـــت $g: A \to \mathbb{R}$ دالـــة محـــدودة علـــى المجموعـــة $A \subseteq \mathbb{R}$، وكانـــت $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ عند c، نقطة تراكم للمجموعة A فإن $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$.

نظريـة: لـتكن $A \subseteq \mathbb{R}$، و$f: A \to \mathbb{R}$. ولـتكن $c \in \mathbb{R}$ نقطـة تـراكم للمجموعـة A. فـإذا كانـت $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ سيوجد جوار $V_\delta(c)$ للنقطة c بحيث $0 < f(x)$ لكل $x \in V_\delta(c)$.

النهايات من جانب واحد ONE-SIDED LIMITS

تعريف: إذا كانت $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$، وكانت $f: A \to \mathbb{R}$

(1) إذا كانـت c نقطـة تـراكم لمجموعـة $A \cap (0, \infty)$ يقـال أن العـدد الحقيقـي L هـو نهايـة يمنى للدالة f عند c إذا لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$x \in A, \quad 0 < x - c < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

ونكتب $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ (أو $x \in A,\ x \to c^+ \Longrightarrow f(x) \to L$).

(2) إذا كانت c نقطة تراكم لمجموعة $A \cap (-\infty, 0)$ يقـال أن العـدد الحقيقـي L هـو نهايـة يسرى للدالة f عند c إذا لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$x \in A, \quad 0 < c - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

ونكتب $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ (أو $x \in A,\ x \to c^- \Longrightarrow f(x) \to L$).

نظريـة: لـتكن $A \subseteq \mathbb{R}$ و$f: A \to \mathbb{R}$، ولـتكن $c \in \mathbb{R}$ نقطـة تـراكم للمجموعـة $A \cap (0, \infty)$. فإن الجمل التالية متكافئة.

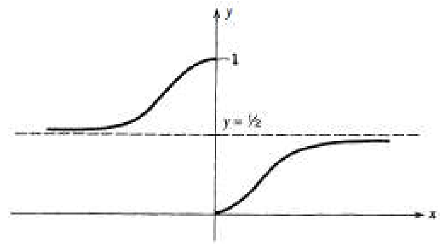
(1) $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$

(2) لكل متتابعة (x_n) في A بحيث $c < x_n$ لكل n و $x_n \to c$ فإن $f(x_n) \to L$.

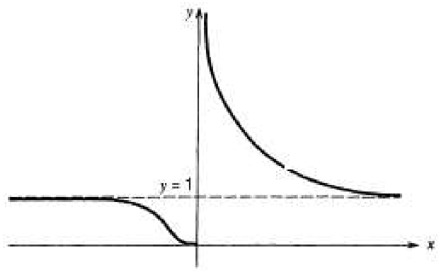
نظرية: لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$ و$f: A \to \mathbb{R}$، ولتكن $c \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعات $A \cap (0, \infty)$

و $A \cap (-\infty, 0)$. فـــإن $\lim_{x\to c} f(x) = L$ إذا وفقـــط إذا $L = \lim_{x\to c^-} f(x)$
$\lim_{x\to c^+} f(x)$.

أمثلة:



Graph of $h(x) = 1/(e^{1/x}+1)$ $(x \neq 0)$



Graph of $g(x) = e^{1/x}$ $(x \neq 0)$

النهايات اللانهائية INFINITE LIMITS

تعريف: لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$، و c نقطة تراكم للمجموعة A، ولتكن $f: A \to \mathbb{R}$

(1) يقال أن $f \to \infty$ عندما تقترب $x \to c$، نكتب $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$، إذا لكل عدد حقيقي

$0 < k$ يوجد $0 < \delta$ بحيث

$$x \in A,\ \ 0 < |x - c| < \delta \implies f(x) > k.$$

(2) يقال أن $f \to -\infty$ عندما تقترب $x \to c$، نكتب $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$، إذا لكل عدد حقيقي $0 < m$ يوجد $0 < \delta$ بحيث

$$x \in A,\ \ 0 < |x - c| < \delta \implies f(x) < k.$$

مثال: اثبت أن $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

الحل: لكل $0 < k$ نريد إيجاد $0 < \delta$ بحيث

$$0 < |x| < \delta \implies \frac{1}{x^2} > k.$$

المتباينـة المطلوبـة تكـافئ $\frac{1}{|x|} > \sqrt{k}$. فـإذا اعطينـا $0 < k$ فإنـه يمكـن إيجـاد $0 < \delta$ بحيـث $\delta \le \frac{1}{\sqrt{k}}$. عندئذ نجد أن

$$0 < |x| < \delta \implies \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} \ge k$$

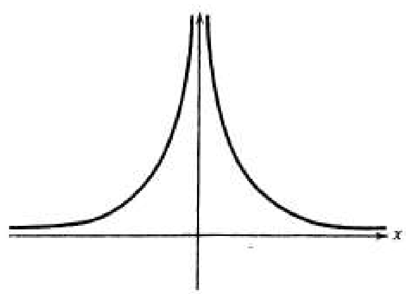
وهذا يثبت المطلوب.

مثال: اثبت أن $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

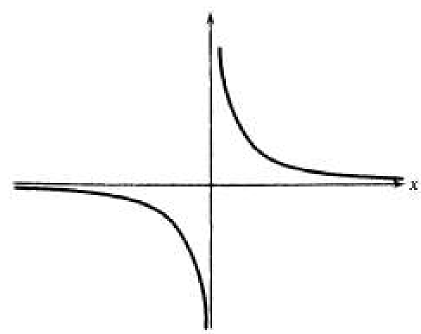
الحل: لكل $k > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث $\delta \le \frac{1}{k}$. وبالتالي لكل $0 < x < \delta$ فإن $k \le \frac{1}{\delta} < \frac{1}{x}$ وهذا يثبت المطلوب.

مثال: اثبت أن $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

الحـل: لكـل $k > 0$ يوجـد $\delta > 0$ بحيـث $\delta \le \frac{1}{k}$. وبالتـالي لكـل $0 < |x| < \delta$ ، $x < 0$ أي $-x < \delta$ فإن $-k \le -\frac{1}{\delta} < \frac{1}{x}$ وهذا يثبت المطلوب.



Graph of $f(x) = 1/x^2 \quad (x \neq 0)$



Graph of $g(x) = 1/x \quad (x \neq 0)$

نظريـــة: لــتكن $A \subseteq \mathbb{R}$، و c نقطـــة تـــراكم للمجموعـــة A، ولـــتكن $f, g: A \to \mathbb{R}$ بحيـــث $f(x) \le g(x)$ لكل $x \in A$ و $x \neq c$.

(1) فإذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ فإن $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$.

(2) فإذا كانت $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$.

البرهان: تمرين.

النهايات عند اللانهاية LIMITS AT INFINITY

تعريف: يقال إن العدد الحقيقي L هو نهاية الدالـة الحقيقيـة $f: A \to \mathbb{R}$ عند اللانهاية إذا لكل $\epsilon > 0$ معطى يوجد عدد حقيقي موجب k بحيث لكل $x > k$ فإن $|f(x) - L| < \epsilon$. عندئذ نكتب

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{or} \quad x \to \infty \Longrightarrow f(x) \to L.$$

نظرية: لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$، و$f: A \to \mathbb{R}$. فإذا كان $(a, \infty) \subseteq A$ لعدد حقيقي ما a فإن الجمل التالية متكافئة.

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

(2) لكل متتابعة (x_n) في $A \cap (a, \infty)$ بحيث $x_n \to \infty$ فإن $f(x_n) \to L$.

مثال: اثبت أن $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x+1}{x^2+5} = 2$

الحل: لدينا لكل $0 < x$

$$|f(x) - L| = \left|\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 5} - 2\right| = \left|\frac{3x - 9}{x^2 + 5}\right| \le \frac{3(x + 3)}{x^2 + 5}$$

فإذا كانت $0 < k < x$ فإن

$$\frac{x + 3}{x^2 + 5} = \frac{1 + \frac{3}{x}}{x + \frac{5}{x}} < \frac{1 + \frac{3}{x}}{x} < \frac{1 + \frac{3}{k}}{k}$$

وبالتالي إذا اعطينا $0 < \epsilon$ نختار $0 < k$ بحيث $\frac{1+\frac{3}{k}}{k} < \frac{\epsilon}{3}$. عندئذ نجد أن

$$x > k \Longrightarrow \left|\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 5} - 2\right| < \epsilon$$

وهذا يثبت المطلوب.

تمرين: اثبت أن $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{x+2} = 3$.

تعريف: إذا كان $A \subseteq \mathbb{R}$، و $f: A \to \mathbb{R}$، وكانت $c \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة A نقول أن الدالة $f \to \infty$، عندما $x \to \infty$ إذا لكل $0 < k$ يوجد $0 < M$ بحيث

$$x \in A, \ \ x > M \Longrightarrow f(x) > k$$

وعندها نكتب $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (أو $x \to \infty \Longrightarrow f(x) \to \infty$).

نظرية: لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$، و$f: A \to \mathbb{R}$. فإذا كان $(a, \infty) \subseteq A$ لعدد حقيقي ما a فإن الجمل التالية متكافئة.

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

(2) لكل متتابعة (x_n) في $A \cap (a, \infty)$ بحيث $x_n \to \infty$ فإن $f(x_n) \to \infty$.

مثال: اثبت أن $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x+5}=\infty$

الحل: حيث إن

$$\frac{x^2+2}{x+5}=x-5+\frac{27}{x+5}=x-5+\frac{27/x}{1+5/x}$$

فإنه لقيم $x>M$ الكبيرة بدرجة كافية نجد أن

$$\frac{x^2+2}{x+5}\approx x-5$$

وبالتالي، إذا أعطينا $k>0$ نوجد $M\ \geq k+5$ عندئذ نجد أن

$$x>M\Longrightarrow\ \frac{x^2+2}{x+5}\geq x-5>k$$

وهو المطلوب.

مثال: اثبت أن $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+5}{x-1}=\infty$

الحل: لكل $x>0$ فإن $x-1<x$, $x^3+2x+5>x^3$. وبالتالي فإن

$$\frac{x^3+2x+5}{x-1}>x^2.$$

فإذا أعطينا $k>0$ نوجد $M>0$ بحيث $M^2\geq k$ عندئذ نجد أن

$$x>M\Longrightarrow\ \ \frac{x^3+2x+5}{x-1}>M^2\geq k$$

وهو المطلوب.

الفصل الخامس

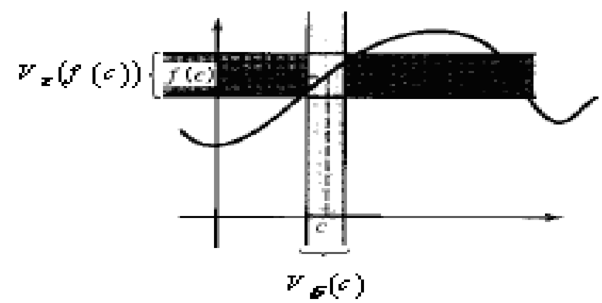
الدوال المتصلة CONTINUOUS FUNCTIONS

تعريف(1): إذا $f : A \to \mathbb{R}$, $c \in A \subseteq \mathbb{R}$. يقال أن f دالة متصلة عند c إذا لكل معطى $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إذا $x \in A$ و $|x-c| < \delta$ فإن $|f(x)-f(c)| < \varepsilon$.

إذا لم تكن f دالة متصلة عند c فيقال أن f منفصلة عند c .

هذا التعريف يمكن صياغته كما في تعريف النهاية عند نقطة وذلك باستخدام الجوارات. وهذا ما توضحه النظرية والشكل التاليين.

نظرية(1) : الدالـة $f : A \to \mathbb{R}$ تكون متصلة عند نقطـة c حيـث $c \in A \subseteq \mathbb{R}$ إذا وفقط وإذا لكل جـوار $V_\varepsilon(f(c))$ للنقطــة $f(c)$ يوجـد جـوار $V_\delta(c)$ للنقطــة c بحيـث إذا $x \in A \cap V_\delta(c)$ فــإن $f(x) \in V_\varepsilon(f(c))$, بمعنى $f(A \cap V_\delta(c)) \subseteq V_\varepsilon(f(c))$.



"إذا أعطيت جواراً $V_\varepsilon(f(c))$ لـ $f(c)$ يمكن تحديد جوار $V_\delta(c)$ لـ c"

ملاحظات:1) إذا $c \in A$ نقطة تراكم للمجموعة A فإن $f : A \to \mathbb{R}$ تكون متصلة عند c إذا وفقط إذا $f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$. هذا يعنى أنه إذا $c \in A$ نقطة تراكم للمجموعة A فإن $f : A \to \mathbb{R}$ تكون متصلة إذا تحققت الشروط التالية:

i) f معرفة عند c

ii) $\lim_{x \to c} f$ موجودة في $\mathbb{R}$

iii) القيمتين في *i*) و*ii*) متساويتين.

2) إذا $c \in A$ ليست نقطة تراكم، فإنه يوجد جوار $V_\delta(c)$ للنقطة c بحيث $A \cap V_\delta(c) = \{c\}$ ومن ثم فإن $f(x) - f(c) = 0$ لكل x في $A \cap V_\delta(c)$.

وهذا يعنى أن f متصلة عند كل نقطة c ليست نقطة تراكم. مثل هذه النقطة تسمى نقطة معزولة.

نظرية(2): الدالة $f : A \to \mathbb{R}$ تكون متصلة عند النقطة c حيث $c \in A \subseteq \mathbb{R}$ إذا وفقط إذا لكل متتابعة (x_n) في A متقاربة إلى c تكون $(f(x_n))$ متتابعة تقاربية إلى $f(c)$.

البرهان: إذا c ليست نقطة تراكم للمجموعة A فإن تقارب (x_n) إلى c يعنى وجود $k \in \mathbb{N}$ بحيث لكل $n \geq k$ فإن $x_n = c$ (؟). وبالتالي $f(x_n) = f(c)$ وهذا يعنى أن $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$. من جهة أخرى فإن f متصلة عند c, وهو ما يتحقق تلقائياً لأي $c \in A$ ليست نقطة تراكم.

وإذا c نقطة تراكم للمجموعة A فإن اتصال الدالة f عند c يكافئ الشرط $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, ومن ثم يكافئ الشرط المعطى في النظرية. (وضح تفاصيل ذلك البرهان؟)

مثال: إذا $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة معرفة لكل $0 \leq x$ بحيث $f(x) = \sqrt{x}$ فاثبت أن f دالة متصلة عند x لكل $0 \leq x$.

الحل: لكل $0 \leq c \in \mathbb{R}$ إذا (x_n) في $\mathbb{R}$ متقاربة إلى c و $x_n \geq 0$ لكل n فإن

i) إذا $c = 0$ فإن $x_n \to 0$ تعني أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $|x_n| < \varepsilon^2$ لكل $n \geq N$. وحيث أن $0 \leq x_n$ لكل n فإن $\sqrt{x_n} < \varepsilon$. وبالتالي $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = 0$.

ii) وإذا $x_n \to c, c > 0$ فإن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $|x_n - c| < \sqrt{c}\varepsilon$ لكل $n \geq N$. ومن ثم $\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{c}\right| = \frac{|x_n - c|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{c}} \leq \frac{|x_n - c|}{\sqrt{c}} < \varepsilon$.

أي أن $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{c}$

وهكذا فإن لكل $0 \le c \in \mathbb{R}$ ولكل (x_n) في $\mathbb{R}$ متقاربة إلى c فإن المتتابعة $\left(\sqrt{x_n}\right)$ تتقارب إلى $\sqrt{c}$. وبالتالي فإن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ أي أن $f(x) = \sqrt{x}$ دالة متصلة عند كل $0 \le c \in \mathbb{R}$.

نتيجة(1): الدالة $f : A \to \mathbb{R}$ غير متصلة عند نقطة $c \in A$ إذا وفقط إذا وجدت متتابعة (x_n) في A متقاربة إلى c بحيث $\left(f(x_n)\right)$ لا تتقارب إلى $f(c)$.

مثال: إذا $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث

$$g(x) = \begin{cases} 2 & ; \quad x \neq 1 \\ 0 & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

أثبت أن الدالة g غير متصلة عند $x = 1$.

الإثبات: للمتتابعة (x_n) حيث $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ فنجد أن $x_n \neq 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $x_n \to 1$ و $\lim g(x_n) = 2 \neq g(1) = 0$. وبالتالي فإن $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2 \neq g(1) = 0$. وهذا يعنى أن g غير متصلة عند $x = 1$.

تعريف(2): يقال للدالة $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ أنها متصلة على مجموعة B ($B \subseteq A$) إذا f متصلة عند كل نقطة في B.

أمثلة: 1) $f(x) := b$ متصلة على $\mathbb{R}$ حيث b مقدار ثابت. فإذا $c \in \mathbb{R}$ فإن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = b = f(c)$.

2) $g(x) := x$ متصلة على $\mathbb{R}$، حيث أنه لكل $c \in \mathbb{R}$ يكون $\lim\limits_{x \to c} g(x) = c = g(c)$.

3) $h(x) := x^2$ متصلة على $\mathbb{R}$، لأنه لكل $c \in \mathbb{R}$ يتحقق $\lim\limits_{x \to c} h(x) = c^2 = h(c)$.

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة دريشلت المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

غير متصلة عند أي نقطة $x \in \mathbb{R}$.

حل(4): لكل $c \in \mathbb{R}$ لدينا الحالتين:

i) إذا $c \in \mathbb{Q}$ فإن $f(c)=1$. وحيث أن $\mathbb{Q}^c$ كثيفة في $\mathbb{R}$ فإنه توجد (x_n) متتابعة في $\mathbb{Q}^c$ بحيث $x_n \to c$. وبذلك لدينا $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$ ($f(x_n)=0$ لكل n) متتابعة لا تتقارب إلى $f(c)=1$.

ii) إذا $c \notin \mathbb{Q}$ فإن $f(c)=0$. وحيث أن $\mathbb{Q}^c$ كثيفة في $\mathbb{R}$ فإنه توجد (y_n) متتابعة في $\mathbb{Q}$ بحيث $y_n \to c$. وعليه فإن $f(y_1), f(y_2), f(y_3), \dots$ ($f(y_n)=1$ لكل n) متتابعة غير تقاربية إلى $f(c)=0$.

وهكذا لكل $c \in \mathbb{R}$ توجد متتابعة (x_n) في $\mathbb{R}$ تقاربية إلى c بينما $(f(x_n))$ لا تتقارب إلى $f(c)$. وبالتالي f ليست متصلة عند c لكل $c \in \mathbb{R}$.

5) ادرس اتصال الدالة $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث

$$g(x)=\begin{cases} x & ; \ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; \ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

الحل متروك كتمرين.

6) إذا $A := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ وإذا $h : A \to \mathbb{R}$ معرفة بـ

$$h(x)=\begin{cases} 0 & ; \ x \notin A \cap \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{n} & ; \ x = \dfrac{m}{n} \in A \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

حيث m,n أعداد طبيعية و $\gcd(m,n)=1$. فإن h دالة متصلة عند كل عدد غير نسبي في A وغير متصلة عند كل عدد نسبي في A .

الحل: *i*) إذا $a > 0$ عدد نسبي فإن $h(a) > 0$ وإذا (x_n) متتابعة في $\mathbb{Q}^c$ فإن $h(x_n)=0$ لكل n . فإذا $x_n \to a$ فإن $(h(x_n))$ متتابعة تتقارب إلى الصفر وليس إلى $h(a)$. وبالتالي الدالة h غير متصلة عند a لكل $a \in A \cap \mathbb{Q}$.

ii) إذا $b>0$ عدد غير نسبي فإن $h(b)=0$. الآن نريد إثبات أن الدالة h متصلة عند النقطة b، أي يجب إثبات أنه لكل معطى $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ فإن $|h(x)-h(b)|<\varepsilon$ لكل $x\in A$ بحيث $|x-b|<\delta$.

حيث أنه لكل $\varepsilon>0$ يوجد $n_0\in\mathbb{N}$ (بحيث $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$) ومن ثم إذا (y_n) متتابعة في $A\cap\mathbb{Q}$ بحيث $y_n\to b$ فإن $|y_n-b|<1$ لكل $n\geq n_0$. أي أن $y_n\in(b-1,b+1)$ لكل $n\geq n_0$. هذا يعنى أنه يوجد في الفترة $(b-1,b+1)$ عدد محدود من الأعداد النسبية مقام أياً منها أقل من n_0. وبالتالي يمكن اختيار $\delta>0$ صغير لدرجة أن الجوار $V_\delta(b)$ للنقطة b لا يحتوي عدداً نسبياً مقامه أصغر من n_0. وبالتالي لكل $x\in A$ بحيث $|x-b|<\delta$ فإن $|h(x)-h(b)|=|h(x)|\leq\frac{1}{n_0}<\varepsilon$

أي أن h دالة متصلة عند العدد غير النسبي(الاختياري) b.

ملاحظات: قد تكون الدالة $f:A\to\mathbb{R}$ غير متصلة عند نقطة $c\in A$ لأن f غير معرفة عند هذه النقطة. في هذه الحالة فإن

1) إذا $\lim\limits_{x\to c}f=L$ موجودة فإنه يمكن تعريف الامتداد $F:A\cup\{c\}\to\mathbb{R}$ بالقاعدة

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & ; \quad x\in A \\ L & ; \quad x=c \end{cases}$$

ونحصل بذلك على دالة F متصلة عند c. وفي هذه الحالة تسمى c نقطة عدم اتصال (شاذة) بسيطة (أو قابلة للإزالة).

2) إذا $\lim\limits_{x\to c}f$ غير موجودة فإنه لا يوجد العدد L بحيث يكون الامتداد

$$G(x)=\begin{cases} f(x) & ; \quad x\in A \\ L & ; \quad x=c \end{cases}$$

دالة متصلة عند c. وفي هذه الحالة تسمى c نقطة شاذة أساسية (غير قابلة للإزالة) للدالة f.
ويقال عندئذ أن عدم الاتصال لا نهائي.

أمثلة: 1) الدالة $f(x):=\sin\frac{1}{x}$ متصلة على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. وعند $x=0$ ليس للدالة نهاية(؟) وبالتالي $x=0$ نقطة شاذة أساسية (لانهائية) للدالة f .

2) الدالة $g(x):=x\sin\frac{1}{x}$ غير معرفة عند $x=0$ وبالتالي فهي غير متصلة عند $x=0$. وحيث أن $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$. فإنه يمكن تعريف الامتداد $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث

$$F(x):=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$$

فنحصل على دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

تركيب الدوال المتصلة COMBINATIONS OF CONTINUOUS FUNCTIONS

نظرية(3): إذا f,g,h دوال حقيقية معرفة على مجموعة A جزئية من $\mathbb{R}$، إذا f,g,h متصلة عند $c\in A$ و $h(x)\neq 0$ لكل $x\in A$ وإذا $b\in\mathbb{R}$ فإن $bf\,,f+g\,,f-g\,,\,fg,f/h$ دوال متصلة عند c.

البرهان: إذا $c\in A$ ليست نقطة تراكم فإن جميع هذه الدوال تكون تلقائياً متصلة عند c. ولذا فإننا نحتاج لإثبات النظرية في حالة إذا c نقطة تراكم للمجموعة A .

إذا f,g,h دوال متصلة عند c فإن

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c),\ \lim_{x\to c} g(x)=g(c),\ \lim_{x\to c} h(x)=h(c)$$

وبالتالي فإنه من النظريات الأساسية لنهايات الدوال نحصل على

$$\begin{aligned}(i)\qquad \lim_{x\to c}(f\pm g)(x) &= \lim_{x\to c} f(x)\pm\lim_{x\to c} g(x)\\ &= f(c)\pm g(c)=(f\pm g)(c)\end{aligned}$$

هذا يعنى أن $f+g$ و $f-g$ دوال متصلة عند c، كذلك

$$(ii) \quad \lim_{x\to c}(fg)(x)=\left(\lim_{x\to c} f(x)\right)\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$$
$$=f(c)\times g(c)=(fg)(c)$$

أي أن fg دالة متصلة عند c،

$$(iii) \quad \lim_{x\to c}(bf)(x)=b\lim_{x\to c} f(x)=bf(c)$$

أي أن bf دالة متصلة عند c,

$$(iv) \quad \lim_{x\to c}\left(\frac{f}{h}\right)(x)=\frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} h(x)}=\frac{f(c)}{h(c)}=\left(\frac{f}{h}\right)(c)$$

وعليه فإن f/h دالة متصلة عند c .

وباستخدام هذه النظرية عند كل نقطة في A نحصل على النتيجة التالية

نظرية(4): إذا f,g,h دوال حقيقية معرفة على مجموعة A جزئية من $\mathbb{R}$، إذا f,g,h متصلة على A و $h(x)\neq 0$ لكل $x\in A$ وإذا $b\in\mathbb{R}$ فإن $bf\,,f+g\,,f-g\,,\,fg,f/h$ دوال متصلة على A .

أمثلة:1) دالة كثيرة الحدود $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x+a_0$ متصلة على $\mathbb{R}$، لأنه لكل $c\in\mathbb{R}$ فإن $\lim_{x\to c}P(x)=P(c)$.

2) الدالة القياسية متصلة عند كل نقطة في $\mathbb{R}$ تكون الدالة عندها معرفة. فإذا p,q كثيرتي حدود في $\mathbb{R}$ فإنه يوجد عدد محدود من النقاط $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$ بحيث $q(x_i)=0$ لكل $i=1,2,\ldots,n$. ومن ثم فالدالة القياسية $r(x):=\frac{p(x)}{q(x)}$ تكون معرفة لكل $x\notin\{x_1,x_2,....,x_n\}$ وبالتالي لكل $c\in\mathbb{R}\setminus\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ فإن

$$\lim_{x\to c} r(x)=\lim_{x\to c}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{\lim_{x\to c} p(x)}{\lim_{x\to c} q(x)}=\frac{p(c)}{q(c)}=r(c)$$

أي أن r دالة متصلة عند c حيث $q(c)\neq 0$ وهذا يثبت المطلوب.

3) الدالة $f(x) := \sin x$ متصلة على $\mathbb{R}$. فلكل $c, x \in \mathbb{R}$ لدينا

$$\sin x - \sin c = 2\sin\left(\frac{x-c}{2}\right)\cos\left(\frac{x+c}{2}\right)$$

وحيث أن $|\sin z| \le |z|$ و $|\cos z| \le 1$ لكل $z \in \mathbb{R}$ فإن

$$|\sin x - \sin c| \le 2 \cdot \frac{1}{2}|x-c| \cdot 1 = |x-c|$$

وبالتالي لكل $c \in \mathbb{R}$ ولكل معطى $\varepsilon > 0$ فإن $|\sin x - \sin c| < \varepsilon$ لكل $x \in \mathbb{R}$ بحيث $|x-c| < \varepsilon$. أي أن $f(x) = \sin x$ دالة متصلة عند c. وحيث أن c نقطة اختيارية فإن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

4) إذا $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = \cos x$ فاثبت أن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

ملحوظة: $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

5) حسب نظرية (4) فإن

i) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x = (n + \frac{1}{2})\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$

ii) $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$

iii) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x = (n + \frac{1}{2})\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$

iv) $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$

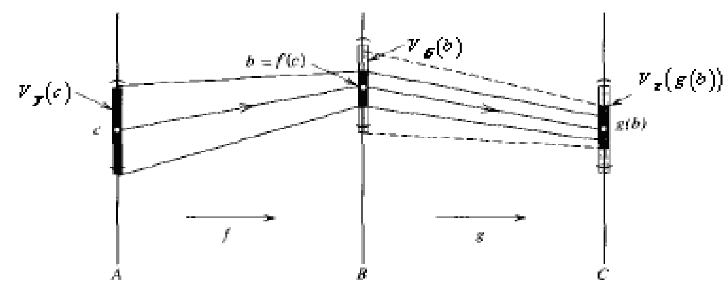
تحصيل الدوال المتصلة Composition of Continuous Functions

إذا $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ و $A, B \subseteq \mathbb{R}$ بحيث $f(A) \subseteq B$ فإن الدالة $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ وتسمى تحصيل f, g تُعرف بـ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

نظريـة(5): إذا $f : A \to \mathbb{R}$ دالـة متصـلة عنـد $c \in A \subseteq \mathbb{R}$، إذا $B \subseteq \mathbb{R}$ بحيـث $f(A) \subseteq B$ وإذا $g : B \to \mathbb{R}$ دالة متصلة عند $b = f(c)$ فإن $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ دالة متصلة عند c.

البرهان: إذا g دالة متصلة عند b فإنه لكل جوار $V_\varepsilon(g(b))$ للنقطـة $g(b)$ يوجد جوار $V_\delta(b)$ للنقطـة $b = f(c)$ بحيـث لكـل $y \in B \cap V_\delta(b)$ فـإن $g(y) \in V_\varepsilon(g(b))$. وحيـث أن f دالـة متصــلة عنــد c جــوار $V_\delta(b)$ للنقطـــة $b = f(c)$ ســيوجد جــوار $V_\gamma(c)$ للنقطـــة c بحيــث $f(x) \in V_\delta(b)$ لكل x في $A \cap V_\gamma(c)$.

وحيــث أن $f(A) \subseteq B$ فــإن $f(x) \in B \cap V_\delta(b)$ لكــل x فــي $A \cap V_\gamma(c)$. وعليــه فــإن $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \in V_\varepsilon(g(b))$ لكل x في $A \cap V_\gamma(c)$. وهذا يثبت أن $g \circ f$ دالـة متصلة عند c.



تحصيل f,g

بتطبيق هذه النظرية عند كل نقاط كلاً من A, B نحصل على النتيجة التالية:

نظريـة(6): إذا $f : A \to \mathbb{R}$ دالـة متصـلة علـى $A \subseteq \mathbb{R}$ و $g : B \to \mathbb{R}$ متصـلة علـى $B \subseteq \mathbb{R}$ حيث $f(A) \subseteq B$ فإن $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ متصلة على A.

أمثلة: 1) إذا $f : A \to \mathbb{R}$ متصلة على $A \subseteq \mathbb{R}$ فأثبت أن $h(x) = |f(x)|$ دالة متصلة على A.

الإثبات: عرف $g(x) := |x|$ لكل $x \in \mathbb{R}$. فإن $|g(x) - g(c)| \le |x - c|$ لكل $x, c \in \mathbb{R}$

وبالتالي g دالـة متصلة على $\mathbb{R}$. وحيث أن $h(x) = |f(x)| = (g \circ f)(x)$ فإن h دالـة متصـلة عند c لكل $c \in A$.

2) إذا $f:A\to\mathbb{R}$ متصلة على $A\subseteq\mathbb{R}$ فأثبت أن $w(x):=\sqrt{f(x)}$ دالة متصلة عند كل $x\in A$ بحيث $f(x)\geq 0$.

الإثبات: عرف $g(x):=\sqrt{x}$ لكل $x\geq 0$. وحيث أن $g(x)=\sqrt{x}$ دالة متصلة عند كل $0\leq c\in\mathbb{R}$. فإذا $f:A\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على A فإنه بحسب نظرية(5) تكون $w(x):=(g\circ f)(x)$ دالة متصلة عند كل $x\in A$ بحيث $f(x)\geq 0$.

3) إذا $f:A\to\mathbb{R}$ دالة متصلة فإن الدالة $s(x):=\sin(f(x))$ متصلة على A .

الحل: حيث أن $g(x):=\sin x$ لكل $x\in\mathbb{R}$ هي دالة متصلة على $\mathbb{R}$. فإذا $f:A\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على A فإنه لكل $\varepsilon>0$ معطى سيوجد $\delta>0$ بحيث $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$ لكل x,c في A تحقق $|x-c|<\delta$. وعليه فإن

$$|s(x)-s(x)|=|\sin(f(x))-\sin(f(c))|\leq|f(x)-f(c)|<\varepsilon$$

أي أن $s:=g\circ f$ دالة متصلة على A .

4) أعطى مثالاً لدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ غير متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$ ولكن $g(x):=|f(x)|$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

الحل: اجعل $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بحيث

$$f(x)=\begin{cases}1 & ;\ x\in\mathbb{Q}\\ -1 & ;\ x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

فنجد أن f غير متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$(؟) وأن $|f(x)|=1$ لكل $x\in\mathbb{R}$ وهي دالة متصلة.

5) إذا $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بحيث $f(x)=x+1$ لكل $x\in\mathbb{R}$ وإذا $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بحيث

$$g(x)=\begin{cases}2 & ;\ x\neq 1\\ 0 & ;\ x=1\end{cases}$$

أثبت أن الدالة $g\circ f$ غير متصلة عند $x=0$.

الحل: اجعل (x_n) متتابعة في $\mathbb{R}$ بحيث $x_n \neq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$، $x_n \to 0$ فيكون $x_n + 1 \neq 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ومن ثم

$$\lim_{n \to \infty} (g \circ f)(x_n) = \lim_{n \to \infty} g\left(f(x_n)\right) = \lim_{n \to \infty} g(x_n + 1) = \lim_{n \to \infty} 2 = 2$$

وبالتالي فإن $\lim_{x \to 0} (g \circ f)(x) = 2$. وحيث أن $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = 0$

فإن $\lim_{x \to 0} (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(0)$، **أي أن** $g \circ f$ **غير متصلة عند** $x = 0$.

الدوال المتصلة على فترات CONTINUOUS FUNCTIONS ON INTERVALS

للدوال الحقيقية المتصلة على فترات عدد من الخواص الهامة التي لا تتحقق للدوال المتصلة بوجه عام.

تعريف(3): يقال للدالة $f: A \to \mathbb{R}$ أنها محدودة على A إذا وجد الثابت $0 < M$ بحيث $|f(x)| < M$ لكل $x \in A$.

بعبارة أخرى نقول لدالة أنها محدودة على مجموعة إذا كان مدى الدالة في $\mathbb{R}$ هو مجموعة محدودة. ونقول أن الدالة $f: A \to \mathbb{R}$ ليست محدودة على A إذا لكل $0 < M$ معطى توجد $x_M \in A$ بحيث $|f(x_M)| > M$.

مثال: الدالة $f: A \to \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = 1/x$ لكل $x \in A = (0, \infty)$ ليست محدودة على A لأنه لكل $M > 0$ يوجد $x_M = 1/(M+1)$ يحقق $f(x_M) = M + 1 > M$

هذا المثال يوضح أن الدالة المتصلة ليست بالضرورة محدودة. والنظرية التالية تعطى الشرط الكافي للدالة المتصلة كي تكون محدودة.

نظرية(7): إذا $I := [a,b]$ فترة مغلقة ومحدودة وإذا $f: I \to \mathbb{R}$ دالة متصلة على I فإن f محدودة على I.

البرهان: بفرض أن f ليست محدودة على I, فإنه لكل $n \in \mathbb{N}$ يوجد $x_n \in I$ بحيث $|f(x_n)| \geq n$.
حيث أن I محدودة وحيث أن $x_n \in I$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن المتتابعة (x_n) محدودة. وبحسب نظرية بلزانو-فيرشتراس توجد متتابعة جزئية (x_{n_r}) تقاربية إلى عدد x في I لأن I مغلقة. وحيث أن الدالة f متصلة عند x فإن المتتابعة $(f(x_{n_r}))$ تتقارب إلى $f(x)$. ومن ثم فإن $(f(x_{n_r}))$ متتابعة محدودة وهذا يناقض كون $|f(x_{n_r})| \geq n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. هذا التناقض يؤدي إلى أن الدالة $f: I \to \mathbb{R}$ محدودة على I.

يجب ملاحظة أن كل فرضية في النظرية السابقة هي شرط أساسي لا تتحقق النتيجة بدونه. لتوضيح ذلك نعتبر الأمثلة التالية.

1) الدالـة $f_1:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ حيث $f_1(x)=x$ هـي دالـة متصـلة علـى$[0,\infty)$ وغيـر محـدودة فلكل $M>0$ فإن$x_M=M+1\in[0,\infty)$ و $f_1(x_M)>M$ لاحظ أن $I=[0,\infty)$ غير محدودة.

2) الدالـة $f_2:(0,1]\to\mathbb{R}$ حيـث $f_2(x)=1/x$ هـي دالـة متصـلة علـى$I=(0,1]$ وغيـر محـدودة، حيــث أنـــه لكــل$M>0$ يوجــد $n_M\in\mathbb{N}$ بحيــث $n_M>M$ و$\frac{1}{n_M}\in[0,1]$ ، ومــن ثــم فـــإن $f_2(1/n_M)=n_M>M$. لاحظ أن I غير مغلقة.

3) الدالة $f_3:[0,1]\to\mathbb{R}$ حيث

$$f_3(x)=\begin{cases}1/x & ; \quad x\in(0,1]\\ 1 & ; \quad x=0\end{cases}$$

هـي دالـة غيـر متصـلة علـى$I=[0,1]$. وبالتـالي توجـد متتابعـة$\left(\frac{1}{n}\right)$ و $n\in\mathbb{N}$ تحقـق$\frac{1}{n}\to 0$ و $\left(f_3\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ غير تقاربية إلى1 لأنـه لكل$M>0$ يوجد $n_M\in\mathbb{N}$ بحيث$n_M>M+1$ ، وبالتـالي يوجد $x_M=1/n_M$ في$[0,1]$ يحقق

$$|f_3(x_M)-1|\geq\left||f_3(x_M)|-1\right|=n_M-1>M$$

ومنها$f_3(x_M)>M+1$ لكل$M>0$. وهذا يبين أن f_3 ليست محدودة علىI.

تعريـف(4): إذا $A\subseteq\mathbb{R}$ و $f:A\to\mathbb{R}$ يقـال أن للدالــة f قيمــة عظمى(مطلقــة) علــى A إذا وجدت $x^*\in A$ بحيث $f(x^*)\geq f(x)$ لكل $x\in A$ وتسمى x^* نقطـة نهايـة عظمى(مطلقـة) للدالـة f.

ويقال أن للدالة f قيمة صغرى(مطلقة) على A إذا وجدت $x_*\in A$ بحيث $f(x_*)\leq f(x)$ لكل $x\in A$ وتسمى x_* نقطة نهاية صغرى(مطلقة) للدالة f .

يتضح من التعريف أنه إذا للدالة f قيمة عظمى عند x^* وصغرى عند x_* فإن

$$f(x_*)\leq f(x)\leq f(x^*)\qquad \forall\quad x\in A$$

ومن ثم فإن $f(A) \subseteq [f(x_*), f(x^*)]$. ويتضح كذلك أن

$$f(x_*) = \inf f(A), \quad f(x^*) = \sup f(A)$$

وعليه فالقيمة القصوى (عظمى أو صغرى) للدالة متى وجدت تكون وحيدة. ولكن الدالة قد تأخذ هذه القيمة عند أكثر من نقطة في A فمثلا الدالةً $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = \sin x$ تأخذ قيمتها العظمى 1 عند النقاط $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ لكل $n \in \mathbb{Z}$

وتأخذ قيمتها الصغرى -1 عند كل النقاط $x_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ لكل $n \in \mathbb{Z}$.

الآن نعطى أمثلة على أن الدالة المتصلة على مجموعة A في $\mathbb{R}$ ليس بالضرورة لها قيمة قصوى على A:

1) الدالة $f_1 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ بحيث $f_1(x) = 1/x$ ليس لها قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) على المجموعة $A = (0,\infty)$

a) ليس للدالة f_1 قيمة عظمى على A:

فلكل $M > 0$ يوجد $x_M = 1/(M+1)$ يحقق $f_1(x_M) = M+1 > M$ وبالتالي فإن

الدالة f_1 غير محدودة من أعلى. فإذا وجد $x^* \in A$ بحيث $f_1(x) \le f_1(x^*)$ لكل $x \in A$ فإننا نحصل على تناقض يقتضي عدم وجود قيمة عظمى للدالة f_1 على A.

b) لا يوجد قيمة صغرى للدالة f_1 على A:

حيث أن $1/x > 0$ لكل $x > 0$ فإن $\inf f_1(A) = 0 \notin f_1(A)$. فإذا وجد $x_* \in A$ بحيث $f_1(x) \ge f_1(x_*)$ لكل $x \in A$ فإن $f_1(x_*) = 1/x_*$ حد سفلي للمجموعة $f_1(A)$ وبالتالي $1/x_* \le \inf f_1(A) = 0$. وهذا يعني أن $x_* \notin A$.

هذا التناقض يؤدى إلى أنه لا توجد قيمة صغرى للدالة f_1 على A.

2) الدالة $f_2 : (0,1) \to \mathbb{R}$ حيث $f_2(x) = 1/x$ ليس لها قيمة قصوى على $A := (0,1)$

a) حيث أن $f_2(A)=(1,\infty)$ مجموعة غير محدودة من أعلى. فإذا وجد $M=f_2\left(x^*\right)$ لبعض $x^*\in A$ فإن $M>1$، ومن ثم يوجد $x_M=1/(M+1)$ في A ويحقق $f_2\left(x_M\right)>M$. وهذا يناقض كون $M=f_2\left(x^*\right)$ قيمة عظمى للدالة f_2 على A .

b) إذا وجد $x_*\in A$ بحيث $f_2(x)\geq f_2(x_*)$ لكل $x\in A$, أي $\frac{1}{x}\geq\frac{1}{x_*}$ لكل $x\in A$، فإن $\frac{1}{x_*}\leq\inf f_2(A)=1$. ومن ثم $x_*\geq 1$ وهذا يناقض كون $x_*\in A$. هذا التناقض يؤدى إلى أنه لا توجد قيمة صغرى للدالة f_2 على A .

3) للدالة $f_3:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ حيث $f_3(x)=1/x$ قيمة عظمى $f_3\left(x^*\right)=1$ عند $x^*=1$ لأن $f_3(x)=1/x\leq 1$ لكل $x\in[1,\infty)$. وليس للدالة f_3 قيمة صغرى. خلاف ذلك يوجد $x_*\in[1,\infty)$ بحيث $f_3\left(x\right)\geq 1/x_*$ لكل $x\in[1,\infty)$. وبالتالي يكون $1/x_*$ حد سفلي للمجموعة $f_3\left([1,\infty)\right)=(0,1]$، ومن ثم $\frac{1}{x_*}\leq\inf(0,1]=0$ ، أي أن $x_*\leq 0$

هذا يناقض كون $x_*\in[1,\infty)$. هذا التناقض يؤدى إلى أن f_3 ليس لها قيمة صغرى على $[1,\infty)$.

4) للدالة $f_4:[1,2]\to\mathbb{R}$ بحيث $f_4(x)=\frac{1}{x}$ توجد قيمة عظمى 1 عند $x^*=1$ وقيمة صغرى $\frac{1}{2}$ عند $x_*=2$ لأن $\frac{1}{2}\leq f(x)\leq 1$ لكل $x\in[1,2]$.

5) الدالة $g_1:(0,1)\to\mathbb{R}$ حيث $g_1(x)=x^2$ ليس لها قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) على $A:=(0,1)$. أثبت ذلك؟

6) للدالة $g_2:[0,1]\to\mathbb{R}$ حيث $g_2(x)=x^2$ توجد قيمة عظمى عند $x=1$ وقيمة صغرى عند $x=0$. بين صحة ذلك، وبرر الاختلاف بين المثالين 5 و6؟

نظرية(8): إذا $I=[a,b]$ فترة مغلقة ومحدودة وإذا $f:I\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على I فإن f تصل إلى قيمتها العظمى(المطلقة) وإلى قيمتها الصغرى(المطلقة) على I.

البرهان: من نظرية (7) واضح أن المجموعة غير الخالية $f(I)=\{f(x)\,;\,x\in I\}\subseteq \mathbb{R}$ محدودة. فإذا $s^*=\sup f(I)$ و $s_*=\inf f(I)$ فإننا سنبين أنه يوجد x^* و x_* في I بحيث $s^*=f(x^*)$ و $s_*=f(x_*)$.

1) لكل $n\in\mathbb{N}$ فإن s^*-1/n ليس حد علوي للمجموعة $f(I)$، أي أنه لكل $n\in\mathbb{N}$ يوجد $x_n\in I$ بحيث $s^*-\frac{1}{n}<f(x_n)\le s^*<s^*+\frac{1}{n}$ لكل $n\in\mathbb{N}$.

وحيث أن I محدودة فإن كل متتابعة (x_n) في I تكون محدودة وبالتالي لها متتابعة جزئية (x_{n_r}) تقاربية إلى نقطة x^*. وحيث أن I مغلقة فإن $x^*\in I$ وبالتالي f متصلة عند x^* ومن ثم $f(x_{n_r})\to f(x^*)$.

وحيث أن $s^*-\frac{1}{n}<f(x_{n_r})<s^*+\frac{1}{n}$ فإن $f(x^*)=\lim_{n\to\infty}f(x_{n_r})=s^*$.

وهكذا نحصل على $f(x^*)\ge f(x)$ لكل $x\in I$، أي أن $f(x^*)$ قيمة عظمى للدالة f على I.

2) بالمثل يمكن إثبات أن توجد $x_*\in I$ يكون للدالة f عندها قيمة صغرى هي $f(x_*)$. (تفاصيل البرهان متروكة كتمرين).

نظرية(9):(وجود جذر للدالة المتصلة)

إذا $I=[a,b]$ و $f:I\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على I، وإذا $f(a)f(b)<0$ فإنه توجد $c\in(a,b)$ بحيث $f(c)=0$.

البرهان: في الحالة عندما $f(a)<0<f(b)$ (الحالة عندما $f(a)>0>f(b)$ تناقش بالمثل.) سوف نقوم بتكوين متتابعة من الفترات المتداخلة، ومن ثم نضمن وجود نقطة c تنتمي إلى كل من هذه الفترات ونبين أن $f(c)=0$.

اجعل $I_1=[a_1,b_1]$ حيث $a_1=a,b_1=b$ واجعل ρ_1 هي نقطة منتصف I_1. فإذا $f(\rho_1)=0$ فإن $c=\rho_1$ ونتوقف. خلاف ذلك إذا $f(\rho_1)>0$ نضع $a_2=a_1,b_2=\rho_1$. وإذا $f(\rho_1)<0$ نضع

$a_2=\rho_1, b_2=b_1$. ومــن ثــم اجعــل $I_2=[a_2,b_2]$ فيكــون $I_2 \subset I_1$ و $f(a_2)<0<f(b_2)$.
بالاستمرار في طريقة تنصيف المدى نحصل على متابعة الفترات المتداخلة $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_k$
وفيها $f(a_k)<0<f(b_k)$ لكل $k \in \mathbb{N}$

وحيث أن هذه الفترات تكونت بتكرار التنصيف فإن طول الفترة I_n يساوي نصف طول الفترة I_{n-1}. وبالتالي فإن طول الفترة I_n هو $b_n-a_n=(b-a)/2^{n-1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وحيث أن I_n فترات متداخلة مغلقة ومحدودة فإنه توجد $c \in \mathbb{R}$ بحيث $c \in I_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$. أي أن $a_n \le c \le b_n$ ، ومن ثم لكل $n \in \mathbb{N}$ نحصل على $0 \le c-a_n \le b_n-a_n=(b-a)/2^{n-1}$. وهكذا فإن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=c$.

كذلك $0 \le b_n-c \le b_n-a_n=(b-a)/2^{n-1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=c$.

من جهة ثانية حيث أن f دالة متصلة على I فإن $f(a_n)\to f(c)$ عندما $n\to\infty$. وحيث أن $f(a_n)<0$ لكل n فإن $f(c)<0$. وكذلك $f(b_n)\to f(c)$ وحيث أن $f(b_n)>0$ لكل n فإن $f(c)>0$. وهكذا فإن هذا تناقض يقتضي أن $f(c)=0$.

مثال: إذا $f:[0,1]\to[0,1]$ متصلة فاثبت وجود $x_0 \in [0,1]$ بحيث $f(x_0)=x_0$

ملاحظة: مثل هذه النقطة تسمى نقطة ثابتة.

الحل: عرف $g(x)=f(x)-x$ فتكون $g:[0,1]\to[0,1]$ دالة متصلة على $[0,1]$. فإذا $f(0)=0$ فإن $x_0=0$, وإذا $f(1)=1$ فإن $x_0=1$. خلاف ذلك إذا $f(0)\neq 0$, $f(1)\neq 1$ فإن $f(0)>0$, $f(1)<1$. وبالتالي $g(1)=f(1)-1<0$ و $g(0)=f(0)-0>0$. وبذلك توجد x_0 في $[0,1]$ بحيث $g(x_0)=0$ ومن ثم $f(x_0)=x_0$.

نظرية(10): **(نظرية بلزانو للقيمة البينية)**
إذا I فترة وإذا $f:I\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على I. فإذا $a,b\in I$ و $k\in\mathbb{R}$ بحيث $f(a)<k<f(b)$ فإنه توجد نقطة c في I بين a,b بحيث $f(c)=k$.

البرهان: بفرض أن $a<b$. عرف $g(x):=f(x)-k$ فنجد أن $g(a)<0<g(b)$.

وحسب نظرية (9) ستوجد نقطة c و $a<c<b$ بحيث $g(c)=0$. وبالتالي $f(c)=k$. وإذا $a>b$ عرف $h(x):=k-f(x)$ فتحقق $h(b)<0<h(a)$. ومن ثم توجد نقطة c و $b<c<a$ تحقق $0=h(c)=k-f(c)$ ، ومن ثم $f(c)=k$.

نتيجة: إذا $I:=[a,b]$ فترة مغلقة ومحدودة وإذا $f:I\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على I . فإذا $k\in\mathbb{R}$ بحيث $\inf f(I)\le k\le \sup f(I)$ فإنه توجد نقطة c في I بحيث $f(c)=k$.

البرهان: حيث أن I مغلقة ومحدودة و f متصلة على I فإن $f(I)$ محدودة، ومن ثم تصل f إلى قيمة قصوى على I ، أي توجد النقاط $c^*,c_*\in I$ بحيث $f(c^*)=\sup f(I),\ f(c_*)=\inf f(I)$. وبالتالي $f(c_*)\le k\le f(c^*)$

ومن ثم حسب نظرية بلزانو للقيمة البينية توجد $c\in I$ و $c_*<c<c^*$ يحقق $f(c)=k$.

نظرية(11): إذا I فترة و $f:I\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على I فإن $f(I)=\{f(x)\ ;\ x\in I\}$ فترة.

البرهان: لكل $\alpha,\beta\in f(I)$ بحيث $\alpha<\beta$ ستوجد $a,b\in I$ بحيث $\alpha=f(a),\ \beta=f(b)$. وحسب نظرية بلزانو للقيمة البينية لكل $k\in(\alpha,\beta)$ ستوجد $c\in I$ و $a<c<b$ يحقق $f(c)=k$. وحيث k اختيارية في (α,β) فإن $[\alpha,\beta]\subseteq f(I)$. وحيث أن α,β عناصر اختيارية في $f(I)$ فإن $f(I)$ فترة.

نظرية(12): إذا I فترة مغلقة ومحدودة وإذا $f:I\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على I فإن $f(I)=\{f(x)\ ;\ x\in I\}$ فترة مغلقة ومحدودة.

البرهان: حيث أن I فترة مغلقة ومحدودة فإنه وبحسب نظرية (7) تكون $f(I)$ محدودة. وبالتالي سيوجد $m,M\in\mathbb{R}$ بحيث $M=\sup f(I)$ و $m=\inf f(I)$.

وحسب نظرية (8) فإن $m,M\in f(I)$. وبالتالي $f(I)\subseteq[m,M]$. وحسب النتيجة التالية لنظرية بلزانو للقيمة البينية فإنه لكل $k\in[m,M]$ يوجد $c\in I$ بحيث $f(c)=k$. وعليه $k\in f(I)$ هذا يعنى أن $[m,M]\subseteq f(I)$. وهكذا يكون $f(I)=[m,M]$.

تمارين:

1) إذا $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة متصلة بحيث $f(x)>0$ لكل $x\in[a,b]$ فاثبت أنه يوجد $0<\alpha\in\mathbb{R}$ بحيث $\alpha\le f(x)$ لكل $x\in[a,b]$.

الحل: حيث أن $I=[a,b]$ فترة مغلقة ومحدودة فإن $f(I)$ فترة مغلقة ومحدودة. وبالتالي يوجد α في $\mathbb{R}$ بحيث $\alpha=\inf f(I)$. وحيث أن $f(I)$ فترة مغلقة فإن $\alpha\in f(I)$ ومن ثم $0<\alpha$.

2) إذا $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ دوال متصلة على $I=[a,b]$ وإذا $A=\{x\in I; f(x)=g(x)\}$ فاثبت أنه إذا (x_n) متتابعة في A تتقارب إلى x_0 فإن $x_0\in A$.

الحل: إذا (x_n) متتابعة في A تتقارب إلى x_0 وحيث أن $A\subseteq I$ و I فترة مغلقة ومحدودة فإن $x_0\in I$. وحيث أن f,g دوال متصلة على I فإن $(f(x_n))$ تتقارب إلى $f(x_0)$ و $(g(x_n))$ تتقارب إلى $g(x_0)$. وحيث أن $x_n\in A$ لكل n فإن $f(x_n)=g(x_n)$ لكل n. وبالتالي فإن $f(x_0)=g(x_0)$. ومن ثم $x_0\in A$.

3) إذا $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على $I=[a,b]$ وإذا لكل $x\in I$ توجد $y\in I$ بحيث $|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(x)|$ فاثبت أنه يوجد $c\in I$ بحيث $f(c)=0$.

الحل: إذا (x_n) متتابعة في I بحيث $|f(x_{n+1})|\le\frac{1}{2}|f(x_n)|$ لكل n فإن $|f(x_{n+1})|\le\frac{1}{2^n}|f(x_1)|$ وبالتالي فإن $f(x_n)\to 0$.

وحيث أن I محدودة و $x_n\in I$ لكل n فإن (x_n) متتابعة محدودة ومن ثم توجد (x_{n_r}) متتابعة جزئية تقاربية إلى c في I لأن I مغلقة. وحيث أن f دالة متصلة و $x_{n_r}\to c$ فإن $f(x_n)\to f(c)$. وهكذا فإن $f(c)=0$.

4) بين أن كل كثيرة حدود من درجة فردية ذات معاملات حقيقية يكون لها جذر حقيقي واحد على الأقل.

الحل: اجعل $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ كثيرة حدود من درجة n و n عدد فردي. وبالتالي فإن $\lim_{x\to\pm\infty} x^n=\pm\infty$. فإذا $a_n>0$ فإن $\lim_{x\to\pm\infty} P_n(x)=\pm\infty$. وإذا $a_n<0$ فإن $\lim_{x\to\pm\infty} P_n(x)=\mp\infty$. وبالتالي $-\infty<P_n(x)<+\infty$ لكل $x\in\mathbb{R}$. وحيث أن $P_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ سيوجد a,b في $\mathbb{R}$ بحيث $-\infty<P_n(a)<0<P_n(b)<+\infty$، ومن ثم يوجد $c\in(a,b)$ بحيث $P_n(c)=0$.

5) إذا $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ وإذا $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$. فاثبت أن f محدودة على $\mathbb{R}$ وتصل إلى قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) على $\mathbb{R}$. وأعطي مثال يبين أن مثل هذه الدالة لا تصل بالضرورة إلى قيمة عظمى وقيمة صغرى.

الحل: إذا $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ متصلة على $\mathbb{R}$ بحيث فإنه لكل (x_n) متتابعة في $\mathbb{R}$ بحيث $x_n\to\pm\infty$ فإن $f(x_n)\to 0$. وبالتالي فإن $(f(x_n))$ متتابعة محدودة. وهذا يعني وجود عدد $M>0$ بحيث $|f(x_n)|<M$ لكل x_n.

وحيث أن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ فإنه لكل $x\in\mathbb{R}$ و $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث

$$|f(x)|\le|f(x)-f(x_n)|+|f(x_n)|<M$$

لكل x_n في الجوار $V_\delta(x)$.

وحيث أن $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ فإنه لكل $M>0$ معطى يوجد جوار $V_\delta(0)$ بحيث $f(x)\ge 0$ أو $f(x)\le 0$ لكل x في الجوار $V_\delta(0)$، أي أن f تصل إلى قيمة قصوى على $\mathbb{R}$.

مثال: الدالة $f(x)=\frac{1}{x^2}$ تحقق $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}=0$ و $\frac{1}{x^2}\ge 0$ لكل $0\ne x\in\mathbb{R}$. هذه الدالة تصل فقط إلى قيمة صغرى.

6) إذا $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$. اثبت أنه إذا $x_0\in\mathbb{R}$ بحيث $f(x_0)<\beta$ فإنه يوجد $\delta>0$ بحيث $f(x)<\beta$ لكل x الجوار $V_\delta(x_0)$.

الحل: عرف $g(x)=\beta-f(x)$ فنجد أن $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ وأن $g(x_0)>0$.

ومن ثم فإن $\lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$. وبالتالي للعدد $\varepsilon=\frac{1}{2}g(x_0)$ يوجد $\delta>0$ بحيث $|g(x)-g(x_0)|<\frac{1}{2}g(x_0)$ لكل x الجوار $V_\delta(x_0)$. ومن ذلك نحصل على $g(x)>\frac{1}{2}g(x_0)>0$، ومن ثم $f(x)<\beta$ لكل x الجوار $V_\delta(x_0)$.

7) إذا $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بحيث $f(x)=x^2$ لكل x في $\mathbb{R}$ اختبر تحت تأثير f صورة كل فترة مفتوحة(مغلقة)

8) أعطيت $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على الفترة $[0,1]$ و $f(x)\in\mathbb{Q}$ لكل $x\in[0,1]$ فاثبت أن f دالة ثابتة القيمة.

9) إذا $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (ليست بالضرورة متصلة على $[a,b]$) وإذا لكل x في $[a,b]$ يوجد جوار $V_{\delta_x}(x)$ بحيث f دالة محدودة على $V_{\delta_x}(x)$. فاثبت أن f دالة محدودة على $[a,b]$.

الحل: افرض على العكس أن f غير محدودة على $I=[a,b]$ فإنه لكل $n\in\mathbb{N}$ يوجد $x_n\in I$ بحيث $|f(x_n)|>n$. وحيث أن I مغلقة ومحدودة فإن المتتابعة (x_n) محدودة ومن ثم توجد متتابعة جزئية (x_{n_r}) تتقارب إلى x_0 في I. من جهة ثانية للعدد x_0 يوجد $\delta_x>0$ بحيث f دالة محدودة على الجوار $V_{\delta_x}(x_0)$. وبالتالي يوجد $M>0,\ N\in\mathbb{N}$ بحيث $|f(x_{n_r})|<M$ لكل $n_r\geq N$. وهذا يناقض كون $|f(x_n)|>n$ لكل n. هذا التناقض يؤدي إلى أن محدودة على I.

10) إذا $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على الفترة (a,b) وإذا لكل $x\in(a,b)$ يوجد $\delta_x>0$ بحيث f محدودة على الجوار $V_{\delta_x}(x)$ فاثبت بمثال أن f ليست بالضرورة محدودة على الفترة (a,b).

الحل: **الدالة** $f(x)=1/x$ **متصلة على الفترة** $J=(0,1)$، **ولكن** $f(J)=(1,\infty)$ **غير محدودة.**

الاتصال المنتظم UNIFORM CONTINUITY

إذا $A \subseteq \mathbb{R}$ و $f : A \to \mathbb{R}$ فإن f دالة متصلة عند c في A يعني أنه لكل معطى $\varepsilon > 0$ يوجد $0 < \delta = \delta(\varepsilon, c)$ بحيث $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ لكل x تحقق $|x - c| < \delta$. بوجه عام فإن العدد δ يعتمد على كل من ε, c فمثلا للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ متصلة على المجموعة $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ ولكل c في A فإن $f(x) - f(c) = \frac{c - x}{cx}$. ولكل معطى $\varepsilon > 0$ يوجد $0 < \delta = \min\left\{\frac{1}{2}|c|, \frac{1}{2}c^2\varepsilon\right\}$. وحيث أنه لكل x تحقق $|x - c| < \delta$ فإن $|x - c| < \frac{1}{2}|c|$ ومنها نجد أن $|x| > \frac{1}{2}|c|$ وبالتالي فإن $|f(x) - f(c)| < \frac{2}{c^2}|x - c|$

من جهة ثانية لدينا $|x - c| < \frac{1}{2}c^2\varepsilon$. وهكذا فإن $|f(x) - f(c)| < \frac{2}{c^2}\left(\frac{1}{2}c^2\varepsilon\right) = \varepsilon$

لكل $x \in A$ تحقق $|x - c| < \delta$. واضح من هذا المثال أنه عند دراسة الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ عند كل نقطة في A فإن الصيغة السابقة للعدد δ لا تحدد قيمة واحدة تصلح لكل $c \in A$ لأن $\inf\{\delta(\varepsilon, c) ; c \in A\} = 0$. بينما للدالة $f(x) = x$ المتصلة على $\mathbb{R}$ نجد أنه لكل $c \in \mathbb{R}$ ولكل معطى $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta = \varepsilon$ بحيث $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ لكل x تحقق $|x - c| < \delta$. أي أن العدد δ هذه المرة يعتمد فقط على ε. هذا يدفعنا لدراسة هذه الحالة للدوال المتصلة.

تعريف(5): إذا $A \subseteq \mathbb{R}$ يقال للدالة $f : A \to \mathbb{R}$ أنها متصلة اتصال منتظم على A إذا لكل معطى $\varepsilon > 0$ يوجد $0 < \delta(\varepsilon)$ بحيث $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ لكل x, c في A يحققان $|x - c| < \delta$.

يلاحظ أن الاتصال المنتظم يعرف على مجموعة. وأنه إذا f دالة متصلة بانتظام على مجموعة A فإن f متصلة عند كل نقطة في A، وعكس ذلك ليس بالضرورة صحيح على وجه العموم فمثلا الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ متصلة عند كل عدد $x > 0$ وهي غير متصلة بانتظام على المجموعة $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. النظرية التالية توضح معيار عدم الاتصال المنتظم.

نظرية(13): إذا $f : A \to \mathbb{R}$ دالة فإن الجمل التالية متكافئة

1) الدالة f غير متصلة بانتظام على المجموعة A

2) يوجد $\varepsilon_0 > 0$ بحيث لكل $\delta > 0$ يوجد x_δ, c_δ في A يحققان $|x_\delta - c_\delta| < \delta$ و

$|f(x_\delta) - f(c_\delta)| \geq \varepsilon_0$

3) يوجد $\varepsilon_0 > 0$ وتوجد (x_n) و (c_n) متتابعتان في A بحيث

$\lim_{n\to\infty}(x_n - c_n) = 0$ و $|f(x_n) - f(c_n)| \geq \varepsilon_0$.

البرهان: 1)$\Leftarrow$ 2) بحسب التعريف فإذا f غير متصلة بانتظام على A سيوجد $\varepsilon_0 > 0$ بحيث لكل $\delta > 0$ يوجد x_δ, c_δ في A يحققان $|x_\delta - c_\delta| < \delta$ و $|f(x_\delta) - f(c_\delta)| \geq \varepsilon_0$.

2) $\Leftarrow$ 3) لأنه بصحة2) يوجد $\varepsilon_0 > 0$ ولكل $n \in \mathbb{N}$ يوجد x_n, c_n في A بحيث $|x_n - c_n| < \frac{1}{n}$ و $|f(x_n) - f(c_n)| \geq \varepsilon_0$. ومن ثم يوجد $\varepsilon_0 > 0$ و $(x_n), (c_n)$ متتابعات في A بحيث $\lim_{n\to\infty}(x_n - c_n) = 0$ و $|f(x_n) - f(c_n)| \geq \varepsilon_0$.

والآن نفرض على العكس من 1) أن f متصلة بانتظام على A. ولكل معطى $\varepsilon > 0$ يوجد $0 < \delta = \delta(\varepsilon)$ بحيث $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ لكل x تحقق $|x - c| < \delta$.

فإذا 3) صحيحة فإنه للعدد δ يوجد $K \in \mathbb{N}$ بحيث $|x_n - c_n| < \delta$ لكل $n \geq K$. وبالتالي $|f(x_n) - f(c_n)| < \varepsilon$ لكل $n \geq K$ ولكل معطى $\varepsilon > 0$. وهذا يناقض أنه يوجد $\varepsilon_0 > 0$ بحيث $|f(x_n) - f(c_n)| \geq \varepsilon_0$ لكل $n \in \mathbb{N}$. هذا التناقض يؤدي إلى أنه بصحة3) تكون1) صحيحة. وهكذا فإن3) $\Leftarrow$ 1).

أمثلة:

1) بين أن الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ غير متصلة بانتظام على المجموعة $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

الحل: اجعل $x_n = \frac{1}{n}, c_n = \frac{1}{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ نجد أن $x_n, c_n \in A$ لكل n وأن $\lim_{n\to\infty}(x_n - c_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 0$. كذلك واضح أن $|f(x_n) - f(c_n)| = 1$ لكل n. وبالتالي

توجـــد (x_n) و (c_n) متتابعتـــان فـــي A بحيـــث $\lim_{n\to\infty}(x_n - c_n) = 0$ ولأي $\varepsilon_0 \in (0,1)$ فـــإن $|f(x_n) - f(c_n)| \geq \varepsilon_0$.

2) ادرس الاتصال المنتظم للدالة $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ على الفترة $(0, \infty)$.

الحل: رغم أن الدالة متصلة f على الفترة $(0, \infty)$ غير أنها غير متصلة اتصال منتظم على هذه الفترة وسوف نناقش مثل هذه الحالة لاحقا. ولإثبات أن f غير متصلة اتصال منتظم على $(0, \infty)$ نعتبـــــر المتتابعتـــــان $(x_n) = \left(\frac{1}{2n\pi}\right)$ و $(c_n) = \left(\frac{2}{(2n+1)\pi}\right)$. واضـــــح أن $\lim_{n\to\infty}(x_n - c_n) = 0$ ولكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $f(x_n) = 1, f(c_n) = 0$. وبالتالي $|f(x_n) - f(c_n)| = 1$، ومن ثم لكل $0 < \varepsilon \leq 1$ فإن $|f(x_n) - f(c_n)| \geq \varepsilon$. وبالتالي فإن f غير متصلة اتصال منتظم على $(0, \infty)$.

3) بين أن الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = x^2$ لكل $x \in \mathbb{R}$ غير متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$

الحل: لدينا (x_n) و (c_n) متتابعتان في $\mathbb{R}$ بحيث $x_n = n,\ c_n = n + \frac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ تحققان $\lim_{n\to\infty}(x_n - c_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ ولكل $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$|f(x_n) - f(c_n)| = \left|\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2\right| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2$$

ومن ثم $f(x) = x^2$ دالة غير متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

نظرية(14): إذا I فترة مغلقة ومحدودة وإذا $f : I \to \mathbb{R}$ دالة متصلة على I فإن f دالة متصلة اتصال منتظم على I.

البرهان: بفرض أن f غير متصلة بانتظام على I سيوجد (x_n) و (c_n) متتابعتان في I ويوجد $0 < \varepsilon_0$ بحيث $|f(x_n) - f(c_n)| \geq \varepsilon_0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $|x_n - c_n| < \frac{1}{n}$.

وحيث أن I مغلقة ومحدودة ستوجد $\left(c_{n_k}\right)$ و $\left(x_{n_r}\right)$ متتابعتان جزئيتان تتقاربان في I. فإذا $x_{n_r} \to z$ فإن $\left|c_{n_k} - z\right| \le \left|c_{n_k} - x_{n_r}\right| + \left|x_{n_r} - z\right| < \frac{2}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وبالتالي $c_{n_k} \to z$.

وحيث أن f متصلة على I فإن $\lim_{n\to\infty}\left(f\left(x_{n_r}\right) - f\left(c_{n_k}\right)\right) = f(z) - f(z) = 0$. هذا يعني أنه لكل معطى $\varepsilon > 0$ يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث $\left|f(x_n) - f(c_n)\right| < \varepsilon$ لكل $n \ge n_0$. وهذا يناقض كون $\left|f(x_n) - f(c_n)\right| \ge \varepsilon_0$ لكل $n \in \mathbb{N}$. هذا التناقض يؤدي إلى أن f متصلة بانتظام على I.

مثال(4): أعطيت $f:[0,2] \to \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = \sqrt{x}$ فاثبت أن f متصلة بانتظام على $I = [0,2]$.

الحل: يكفي إثبات أن f متصلة على I، وحيث أن I فترة مغلقة ومحدودة فإن f متصلة بانتظام على I.

تعريف(6): "دوال ليبشتز Lipschitz Functions"

إذا $A \subseteq \mathbb{R}$ يقال للدالة $f : A \to \mathbb{R}$ أنها تحقق شرط ليبشتز على A إذا وجد الثابت $0 < K$ بحيث $\left|f(x) - f(c)\right| \le K\left|x - c\right|$ لكل x, c في A.

أمثلة: 1) بين أن الدالة $f(x) = x^2$ بحيث $x \in [0, b]$ تحقق شرط ليبشتز على $[0, b]$.

الحل: لكل x, c في $[0, b]$ فإن $|x + c| \le 2b$. ومن ثم يوجد $K = 2b$ بحيث لكل x, c في $[0, b]$ نحصل على $\left|f(x) - f(c)\right| = \left|x^2 - c^2\right| = |x + c||x - c| \le K|x - c|$.

2) إذا $f(x) = \sqrt{x}$ لكل $1 \le x$ فاثبت أن الدالة f تحقق شرط ليبشزز على الفترة $[1, \infty)$.

الحل: لكل x, c في $[1, \infty)$ فإن $2 \le \sqrt{x} + \sqrt{c}$. وبالتالي يوجد $K = \frac{1}{2}$ بحيث لكل x, c في $[1, \infty)$ يكون $\left|f(x) - f(c)\right| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{c}\right| = \frac{|x - c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \le K|x - c|$.

3) اثبت أن الدالة $g(x) = \sqrt{x}$ بحيث $x \in [0, 2]$ لا تحقق شرط ليبشزز على $[0, 2]$.

الحـل: بفـرض أن $|g(x)-g(0)| \le K|x-0|$ فـإن $\sqrt{x} \le Kx$. ومنهـا $\frac{1}{\sqrt{x}} \le K$ لكـل x فـي $[0, 2]$. فإذا $x_n = \frac{1}{n^2}$ فإن $x_n \in [0, 2]$ لكل $n \in \mathbb{N}$، ومن ثم $n \le K$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وهذا ينـاقض كون المجموعة $\mathbb{N}$ غير محدودة من أعلى.

نظرية(15): إذا $f: A \to \mathbb{R}$ دالة تحقق شرط ليبشتز على المجموعة A الجزئية من $\mathbb{R}$ فإن f دالة متصلة اتصال منتظم على A.

البرهان: إذا f تحقق شرط ليبشتز سيوجد $K > 0$ بحيث $|f(x)-f(c)| \le K|x-c|$ لكل x, c فـي A. وإذا $\varepsilon > 0$ معطـى سـيوجد $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. ولكـل x, c فـي A بحيـث $|x-c| < \delta$ فـإن $|f(x)-f(c)| \le K|x-c| < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. أي أن f دالة متصلة اتصال منتظم على A.

أمثلة: 1) اثبت أن الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ متصلة بانتظام على الفترة $A = [a, \infty)$ لأي $0 < a$.

الحل: لكل x, c في A فإن $a \le x, a \le c$ و $|f(x)-f(c)| \le \frac{1}{a^2}|x-c|$. وبالتـالي فإن f تحقق شرط ليبشتز على A بثابت $K = \frac{1}{a^2}$، ومن ثم فإن f متصلة اتصال منتظم على A

2) أعطيت $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ لكـل $x \in \mathbb{R}$، فاثبـت أن f دالـة متصـلة بانتظـام على $\mathbb{R}$.

الحل: لكل x, c في $\mathbb{R}$ فإن

$$|f(x)-f(c)| = \left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+c^2}\right| = \left|\frac{c^2-x^2}{(1+x^2)(1+c^2)}\right|$$
$$\le \frac{|x|+|c|}{(1+x^2)(1+c^2)}|x-c| \le 2|x-c|$$

وهكذا فـإن الدالـة f تحقق شـرط ليبشـتز(بثابت $K = 2$) علـى $\mathbb{R}$. وبالتـالي فـإن f دالـة متصـلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

3) ادرس الاتصال المنتظم للدالة $f(x)=\sqrt{x}$ على الفترة $[0,\infty)$.

الحل: اجعل $I=[0,2]$ و $J=[1,\infty)$ فإن $[0,\infty)=I\cup J$. وحيث أن $f(x)=\sqrt{x}$ دالة متصلة على I وحيث أن I فترة مغلقة ومحدودة فإن f متصلة بانتظام على I.

ولكل x في J فإن $\sqrt{x}\geq 1$. وبالتالي إذا x,c في J فإن

$$\left|f(x)-f(c)\right|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{c}\right|=\frac{|x-c|}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}\leq\frac{1}{2}|x-c|$$

أي أن f تحقق شرط ليبشتز(بثابت $K=\frac{1}{2}$) على الفترة J. وهكذا فإن f متصلة بانتظام على $[0,\infty)=I\cup J$.

ملاحظة: ليس كل دالة متصلة اتصال منتظم على مجموعة A تحقق شرط ليبشتز على A. مثال ذلك الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ متصلة اتصال منتظم على الفترة $[0,1]$ ولا تحقق شرط ليبشتز على هذه الفترة.

التمديد المتصل CONTINUOUS EXTENSION

نظرية(16): الدالة f تكون متصلة اتصال منتظم على الفترة (a,b) إذا وفقط إذا أمكن تعريف الدالة f عند نقطتي النهاية a,b بحيث تكون الدالة الناتجة متصلة على الفترة $[a,b]$.

البرهان: $\Rightarrow$إذا أمكن تعريف الدالة f عند نقطتي النهاية a,b بحيث تكون الدالة الناتجة متصلة على الفترة $[a,b]$ فإنها تكون متصلة بانتظام على $[a,b]$. وبالتالي f دالة القصر على الفترة (a,b) تكون متصلة بانتظام على (a,b).

$\Leftarrow$ بفرض أن f دالة متصلة اتصال منتظم على (a,b) فإذا (x_n) متتابعة في (a,b) تتقارب إلى a فإن $(f(x_n))$ متتابعة تقاربية. اجعل $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=L_a$ حيث $L_a\in\mathbb{R}$ فإذا (c_n) متتابعة اخرى في (a,b) تتقارب إلى a فإن $\lim_{n\to\infty}(x_n-c_n)=0$.

وحيث أن f متصلة بانتظام على (a,b) فإنه لكل معطى $\varepsilon>0$ يوجد $n_0\in\mathbb{N}$ بحيث $\left|f(x_n)-f(c_n)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ لكل $n\geq n_0$. وبالتالي

$$\left|f(c_n)-L_a\right|\leq\left|f(x_n)-f(c_n)\right|+\left|f(x_n)-L_a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

أي أن $\lim\limits_{n\to\infty}f(c_n)=L_a$ لكل (c_n) متتابعة في (a,b) تقاربية إلى a.

بالمثل يوجد L_b في $\mathbb{R}$ بحيث $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=L_b$ لكل (x_n) متتابعة في (a,b) تقاربية إلى b. وبوضع $f(a)=L_a,f(b)=L_b$ تكون f متصلة عند كل من a,b. وحيث أنها متصلة بانتظام على (a,b) فإن f دالة متصلة على $[a,b]$.

أمثلة: 1) الدالة $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ متصلة على الفترة $(0,b]$ لكل عدد حقيقي $b>0$. وحيث أن $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$ فإن التمديد

$$F(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}\,; & x>0\\ 0\,; & x=0\end{cases}$$

متصل على $[0,b]$. وبالتالي فإن f دالة متصلة بانتظام على $(0,b]$.

2) الدالة $g(x)=\sin\frac{1}{x}$ متصلة على الفترة $(0,b]$ لكل عدد حقيقي $b>0$. وحيث أن $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ غير موجودة فإن g ليس لها تمديد متصل على $[0,b]$ وبالتالي فإن g ليست متصلة اتصال منتظم على $(0,b]$.

تمارين:

1) إذا $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ دالة معرفة بالقاعدة $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ بين بطريقتين مختلفتين أن f غير متصلة اتصال منتظم على الفترة $(0,\infty)$.

الحل(1): اجعل $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ و $c_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$ لكل $n \in \mathbb{N}$. فإن $\lim_{n\to\infty}(x_n - c_n) = 0$ وأن

$$\left|f(x_n) - f(c_n)\right| = \left|\sin(2n\pi) - \sin\frac{(2n+1)\pi}{2}\right| = 1$$

أي أنه لكل $\varepsilon \in (0,1]$ فإن $\varepsilon \le \left|f(x_n) - f(c_n)\right|$. وبالتالي فإن f ليست متصلة بانتظام على $(0, \infty)$.

الحل(2): حيث أن $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ غير موجودة فإنه لا يوجد تمديد متصل على $[0,\infty)$ للدالة f وبالتالي فإن f ليست متصلة بانتظام على $(0, \infty)$.

2) أعطيت $f, g : A \to \mathbb{R}$ دوال متصلة بانتظام على المجموعة $A \subseteq \mathbb{R}$. فاثبت أن دالة المجموع $f+g$ متصلة اتصال منتظم على A.

الحل: إذا f, g دوال متصلة اتصال منتظم على A فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0$ بحيث $\left|f(x) - f(c)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل x, c في A يحققان $|x-c| < \delta_1$ و $\left|g(x) - g(c)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل x, c في A يحققان $|x-c| < \delta_2$. فإذا $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ فإنه لكل x, c في A يحققان $|x-c| < \delta$ نجد أن

$$\left|(f+g)(x) - (f+g)(c)\right| \le \left|f(x) - f(c)\right| + \left|g(x) - g(c)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

أي أن الدالة $f+g$ متصلة اتصال منتظم على A.

3) إذا $f, g : A \to \mathbb{R}$ متصلة بانتظام على المجموعة $A \subseteq \mathbb{R}$. وإذا f, g دوال محدودة على A فاثبت أن دالة حاصل الضرب fg متصلة اتصال منتظم على A.

الحل: حيث أن كل من f, g دالة محدودة على A سيوجد $M_f > 0,\ M_g > 0$ في $\mathbb{R}$ بحيث $\left|f(x)\right| < M_f,\ \left|g(x)\right| < M_g$ لكل x في A. وحيث أن f, g دوال متصلة بانتظام على A فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0$ بحيث $\left|f(x) - f(c)\right| < \frac{\varepsilon}{2M_f}$ لكل x, c في A يحققان

$|x-c|<\delta_1$ و $|g(x)-g(c)|<\dfrac{\varepsilon}{2M_g}$ لكـــل $x\,,c$ فـــي A يحققـــان $|x-c|<\delta_2$. فـــإذا $\delta=\max\{\delta_1,\,\delta_2\}$ فإنه لكل $x\,,c$ في A يحققان $|x-c|<\delta$ نجد أن

$$\begin{aligned}\left|(fg)(x)-(fg)(c)\right| &\le |g(x)||f(x)-f(c)|+|f(x)||g(x)-g(c)| \\ &< M_f\,\frac{\varepsilon}{2M_f}+M_g\,\frac{\varepsilon}{2M_g}=\varepsilon\end{aligned}$$

أي أن الدالة fg متصلة اتصال منتظم على A.

4) بين أن كل من الدالتين $f(x)=x$ و $g(x)=\sin x$ متصلة اتصال منتظم على $\mathbb{R}$. وأن دالة الضرب $fg(x)=x\,\sin x$ غير متصلة اتصال منتظم على $\mathbb{R}$.

الحل: لكل $\varepsilon>0$ يوجد $0<\delta=\varepsilon$ ولكل $x\,,c$ في $\mathbb{R}$ يحققان $|x-c|<\delta$ فإن

$$\begin{aligned}&|f(x)-f(c)|=|x-c|<\delta=\varepsilon, \\ &|g(x)-g(c)|=|\sin x-\sin c|\le|x-c|<\delta=\varepsilon\end{aligned}$$

أي أن الدوال $f\,,g$ متصلة اتصال منتظم على $\mathbb{R}$.

بفرض أن الدالة fg متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$ فإنه لكل $\varepsilon>0$ ولكل $(x_n),\ (c_n)$ متتـابعتين فـي $\mathbb{R}$ تحققـــان $\lim_{n\to\infty}(x_n-c_n)=0$ يكـــون $\left|(fg)(x_n)-(fg)(c_n)\right|<\varepsilon$. مـــن جهـــة ثانيـــة إذا $x_n=n+\dfrac{1}{n},\ c_n=n$ لكل $n\in\mathbb{N}$ فإن $\lim_{n\to\infty}(x_n-c_n)=0$ ولكن

$$\begin{aligned}\left|(fg)(x_n)-(fg)(c_n)\right| &= \left|\left(n+\frac{1}{n}\right)\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)-n\sin n\right| \\ &\le n\left|\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)-\sin n\right|+\frac{1}{n}\le 1+\frac{1}{n}\end{aligned}$$

وهذا يناقض كون $\left|(fg)(x_n)-(fg)(c_n)\right|<\varepsilon$ لكل $n\in\mathbb{N}$. هذا التناقض يؤدي إلى أن الدالة fg ليست متصلة اتصال منتظم على $\mathbb{R}$.

5) أعطيت $f\,,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دوال متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$. فاثبت أن دالة التحصيل $f\circ g$ متصلة اتصال منتظم على $\mathbb{R}$.

الحـل: حيـث أن f دالـة متصـلة بانتظـام علـى $\mathbb{R}$ فلكـل $\varepsilon > 0$ يوجـد $\delta_f > 0$ بحيـث $|f(y) - f(b)| < \varepsilon$ لكل $y, b \in \mathbb{R}$ تحققان $|y - b| < \delta_f$. وحيث أن g دالـة متصـلة بانتظـام علـى $\mathbb{R}$ فإنـه للعـدد $\delta_f > 0$ يوجـد $\delta > 0$ بحيـث $|g(x) - g(c)| < \delta_f$ لكـل x, c فـي $\mathbb{R}$ تحققـان $|x - c| < \delta$. وهكذا لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث لكل x, c في $\mathbb{R}$ تحققان $|x - c| < \delta$ يكون $|(f \circ g)(x) - (f \circ g)(c)| = |f(g(x)) - f(g(c))| < \varepsilon$. وبالتالي فإن دالـة التحصيل $f \circ g$ متصلة اتصال منتظم على $\mathbb{R}$.

6) إذا $f : A \to \mathbb{R}$ دالـة متصـلة بانتظـام علـى A وإذا $|f(x)| \geq k > 0$ لكل $x \in A$. فاثبـت أن الدالة $\frac{1}{f}$ متصلة بانتظام على A.

الحل: عرف الدالة $g(x) = \frac{1}{x}$ لكل x بحيث $|x| \in [k, \infty)$ تجد أن

$$|g(x) - g(c)| \leq \frac{1}{k^2}|x - c|$$

أي أن g دالة تحقق شرط ليبشتز بثابت $\frac{1}{k^2}$ على الفترة $[k, \infty)$، ومن ثم فهي دالـة متصـلة اتصال منتظم على هذه الفترة. فإذا $f : A \to \mathbb{R}$ دالـة متصـلة بانتظـام علـى $A \subseteq \mathbb{R}$ وحيث أن $|f(x)| \geq k > 0$ لكل $x \in A$ فإن $f(A) \subseteq [k, \infty)$.

وحيث أن $(g \circ f)(x) = \frac{1}{f(x)}$ لكل $x \in A$ فـإن دالـة التحصـيل $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ متصـلة اتصـال منتظم على A.

7) إذا $A \subseteq \mathbb{R}$ مجموعـة محدودة وإذا $f : A \to \mathbb{R}$ دالـة متصـلة بانتظـام علـى A. فاثبـت أن f دالة محدودة على A.

الحل: افرض العكس بـأن f دالـة غيـر محدودة علـى A فإنـه لكل $n \in \mathbb{N}$ يوجد $x_n \in A$ بحيث $|f(x_n)| \geq n$. وحيث أن A مجموعة محدودة و $x_n \in A$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن (x_n) متتابعـة محـدودة ومن ثم لها متتابعة جزئية (x_{n_r}) تقاربية. وحيث أن f دالة متصلة اتصـال منـتظم علـى A فـإن

المتتابعة $\left(f\left(x_{n_r}\right)\right)$ تقاربية وبالتالي فهي محدودة. هذا يناقض كون $\left|f\left(x_n\right)\right| \geq n$ لكل $n \in \mathbb{N}$.
وهذا التناقض يؤدي إلى أن f دالة محدودة على A.

8) إذا f دالة متصلة على الفترة $[0,\infty)$ وإذا f متصلة اتصال منتظم على الفترة $[a,\infty)$ لكل $0<a$. فاثبت أن f دالة متصلة اتصال منتظم على $[0,\infty)$.

الحل: إذا f دالة متصلة على الفترة $[0,\infty)$ فإنه لكل $0<a$ تكون f متصلة على الفترة المغلقة والمحدودة $[0,a]$ ومن ثم فهي متصلة اتصال منتظم على هذه الفترة. وحيث أن f متصلة اتصال منتظم على الفترة $[a,\infty)$ لكل $0<a$. فإن f متصلة اتصال منتظم على $[0,\infty)=[0,a]\cup[a,\infty)$.

9) إذا $A \subseteq \mathbb{R}$ وإذا $f: A \to \mathbb{R}$ دالة تحقق الخاصية: لكل $0<\varepsilon$ توجد $g_\varepsilon : A \to \mathbb{R}$ دالة متصلة بانتظام على A بحيث $\left|f(x)-g_\varepsilon(x)\right|<\varepsilon$ لكل x في A. فاثبت أن f متصلة اتصال منتظم على A.

الحل: حيث أن g_ε دالة متصلة اتصال منتظم على A فإنه لكل $0<\varepsilon$ يوجد $0<\delta(\varepsilon)$ فإن $\left|g_\varepsilon(x)-g_\varepsilon(c)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$ لكل x,c في A تحققان $|x-c|<\delta$. وحيث أنه لكل $0<\varepsilon$ ولكل x في A لدينا $\left|f(x)-g_\varepsilon(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$. وبالتالي لكل $0<\varepsilon$ يوجد $0<\delta(\varepsilon)$ ولكل x,c في A تحققان $|x-c|<\delta$ فإن

$$\left|f(x)-f(c)\right| \leq \left|f(x)-g_\varepsilon(x)\right|+\left|g_\varepsilon(x)-g_\varepsilon(c)\right|+\left|f(c)-g_\varepsilon(c)\right|<\varepsilon$$

وهذا يعني أن f دالة متصلة اتصال منتظم على A.

10) إذا $A \subseteq \mathbb{R}$ و $f: A \to \mathbb{R}$ دالة متصلة اتصال منتظم على A وإذا (x_n) متتابعة كوشي في A فاثبت أن $\left(f(x_n)\right)$ متتابعة كوشي في $\mathbb{R}$.

الحل: إذا f دالة متصلة اتصال منتظم على المجموعة A فإنه لكل $0<\varepsilon$ يوجد $0<\delta$ بحيث $\left|f(x)-f(c)\right|<\varepsilon$ لكل $x,c \in A$ يحققان $|x-c|<\delta$. فإذا (x_n) متتابعة كوشي في A فإنه

للعدد $\delta > 0$ يوجد $K(\delta) > 0$ بحيث $|x_m - x_n| < \delta$ لكل $m,n \in \mathbb{N}$ بحيث $m,n \geq K(\delta)$. وهكذا فـإن $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$ لكـل m,n بحيـث $m,n \geq K(\delta)$. أي أن المتتابعـة $(f(x_n))$ هــي متتابعة كوشي.

11) إذا $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالـة دوريـة متصـلة علـى $\mathbb{R}$ فاثبـت أن f دالـة محدودة ومتصلة بانتظـام على $\mathbb{R}$.

الحل: اجعل $p > 0$ دورة الدالة f أي أن $f(x+p) = f(x)$. إذا f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ فإن f تكون متصلة علـى الفترة $[0,p]$، ومـن ثـم تكـون محـدودة علـى $[0,p]$. وبالتـالي سـيوجد $0 < M$ بحيث $|f(x)| < M$ لكل x في $[0,p]$. وحيث أن f دالة دورية فإنه لكل x في $\mathbb{R}$ يوجد عدد x_p في $[0,p]$ بحيث $f(x) = f(x_p)$. وبالتالي لكل x في $\mathbb{R}$ فإن $|f(x)| = |f(x_p)| < M$ أي أن f دالة محدودة على $\mathbb{R}$.

وحيث أن f متصـلة علـى $[-1,p+1]$ فـإن f متصـلة بانتظـام علـى $[-1,p+1]$. بفرض أن f ليسـت متصـلة بانتظـام علـى $\mathbb{R}$ سـيوجد $\varepsilon_0 > 0$ بحيـث لكـل $\delta > 0$ يوجـد x_δ, c_δ فـي $\mathbb{R}$ بحيـث $|x_\delta - c_\delta| < \delta$ و $|f(x_\delta) - f(c_\delta)| \geq \varepsilon_0$.

التحليل العددي

الموضوعات:

الفصل الأول:مقدمة

الفصل الثانى: الأخطاء

الفصل الثالث: المؤثرات

الفصل الرابع: الاستكمال

الفصل الخامس: التفاضل العددي

الفصل السادس : التكامل العددى

الفصل السابع : المعادلات الغير خطية

الفصل الثامن : المعادلات الجبرية الخطية

مقدمة

يتركز الاهتمام في كثير من المجالات العملية والتطبيقية الحديثة على الحصول على نتائج عددية يمكن استقراؤها بسهولة واستخدامها بصورة مباشرة. ومع تسارع التطور العلمي، وتنامي الصناعات واعتمادها على التطبيقات العلمية، ازدادت الحاجة إلى تطوير الفروع الرياضية التي تتعامل مع مثل هذه الحالات. ومن أهم هذه الفروع: **التحليل العددي والبرمجة الرياضية**.

و**التحليل العددي** هو: العلم الذي يهدف إلى استنباط طرق للحصول على حلول عددية لمسائل رياضية يصعب عادة حلها باستخدام الطرق التحليلية ووصف هذه الطرق وتحليلها.

و في الغالب هناك أربعة أسباب تدعو إلى استخدام التحليل العددي، وهي:

1 -عندما يصعب حل المشكلة بالطرق التحليلية، مثل:

-معادلات جبرية من الدرجة الخامسة فما فوق، مثل

$$x^6-3x^4-5x^3+x+1=0$$

-معادلات جبرية غير خطية تحتوى علي بعض الدوال المسترسلة، مثل:

$$xe^x-\cos x+1=0$$

-أو تكاملات محدودة لدوال يَصعُب تكاملها، مثل:

$$\int_0^5 e^{x^2}dx$$

2 -عندما تكون المشكلة معطاة على صورة جدول رياضي نتج من تجربه معينه، ففي هذه الحالة لا يكون عندنا إلا مجرد أرقام ، مثل: إيجاد قيمة تقريبية للمشتقة الثانية عند $x = 0.2$، للدالة الموصوفة بالجدول التالي:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625

3 -عندما تكون المشكلة من الممكن حلها بالطرق التحليلية، ولكن ناتج الحل معقد، بحيث يمثل مشكلة عند حساب قيمته عددياً، فمثلا المعادلة التفاضلية الجزئية $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ لها حل تحليلي

$$U(x,t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{2}n\pi\right)(\sin n\pi x)\exp\left(-n^2\pi^2 t\right)$$

حيث $-2 \le x \le 2, t \ge 0$. ومن الواضح أن هذا الحل يصعب حساب قيمته بدقة عند قيمة ما لـ x,t لأن عدد الحدود في المجموع لا نهائي.

4 -بعض الطرق التحليلية تبدو وكأنها قابلة للتطبيق دائما، وهو ما لا يكون حقيقيا في الواقع. ومن أمثلة هذا النوع: مسألة حل نظام معادلات جبرية خطية باستخدام طريقة المحددات أو طريقة إيجاد المعكوس ، وهي طرق تحليلية معروفة ، ومثل هذه الطرق تضعف دقة حلولها بشكل واضح متى كبر حجم النظام (عدد متغيراته – عدد معادلاته).

والطرق العددية تعتمد على التقريب، والتقريب يعني وجود خطأ، ولهذا فمن الضروري أن ندرس الأخطاء.

الفصل الأول

ا لأخطـــــــاء
ERRORS

ينصب معظم تركيز التحليل العددي على حل المسائل عددياً، أي على تطوير متتابعة من الحسابات العددية التي تعطي حلا مقبولا. ويعد جزءاً من هذه العملية حساب أو تقدير الخطأ الناتج من هذه العمليات، وهل هذا الخطأ ناتج من العمليات الحسابية أم من مصادر أخرى؛ كما سنوضح في هذا الفصل.

الأخطاء في التقريب ومصادرها
Errors in Approximation and its Sources

سوف ندرس الآن بعض التعريفات الهامة للخطأ كمصطلح في التحليل العددي، ثم نناقش مصادره.

مقاييس الخطأ Error Measurements:

يعرف الخطأ error في كمية محسوبة بـ

الخطأ = القيمة الحقيقية – القيمة التقريبية

وغالباً ما يتم تعريف الخطأ المطلق Absolute error كمقياس جيد للخطأ وهو:

الخطأ المطلق = القيمة المطلقة للخطأ

أما الخطأ النسبيrelative error فيقيس الخطأ بالتناسب مع حجم القيمة الحقيقية

الخطأ النسبي = الخطأ المطلق \ القيمة الحقيقية المطلقة

وإذا رمزنا للقيمة الحقيقية بـ X_T ، والقيمة التقريبية بـ X_A ، فإن الخطأ والخطأ النسبي يكونان على الترتيب

$$Error(X_A)=X_T - X_A , \qquad Rel(X_A)=|X_T - X_A|/X_T$$

وعلى سبيل المثال، إذا كانت

$$X_T = \pi=3.14159265, \qquad X_A=22/7=3.1428571$$

فإن:

$$Error(X_A)=\pi-22/7=3.14159265-3.1428571=-0.00126$$
$$Rel(X_A)==-0.00126/3.14159265=-0.000402$$

ويعتبر الخطأ النسبي أكثر مقاييس الخطأ (سالفة الذكر) في التعبير عن الخطأ بشكل دقيق. إن الخطأ (و كذلك الخطأ المطلق) قد يعطينا تصوراً مضللاً في بعض الأحيان، والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (1):

في التدريب الميداني لطلاب شعبة المساحة تم إعطاء أربع طلاب أربع مسافات مختلفة لقياسها ، فكانت نتائجهم كالتالي:

	1	2	3	4
F	100	20	200	400
P	104	19	194	390

حيث F هو الطول الصحيح بالكيلو متر و P هو قياس الطالب له. باستخدام مقياس الخطأ المناسب حدد أي الطلاب كان أكثر دقة في قياسه.

الحل: مقياس الخطأ النسبي المطلق هو على الترتيب

1	2	3	4
0.04	0.05	0.03	0.025

وبناءً على ذلك، فالطالب الرابع هو الأكثر دقة (على الرغم من أنه الأكثر خطئاً من حيث الخطأ المطلق).

(2-1-1) مصادر الأخطاء Error Sources

تصور أننا بصدد حل مسألة علمية رياضية وأن هذا الحل يتضمن خطوات حسابية، وهذه الحسابات تتضمن أخطاء، فإن هذه الأخطاء تندرج تحت أحد نوعين، هما ، أخطاء أصلية ، وأخطاء تابعة.

أ- الأخطاء الأصلية

1 - أخطاء النمذجة *Modelling Errors:*

النمذجة الرياضية Mathematical Modeling هي: عملية التعبير عن الظاهرة الطبيعية أو المشكلة الحياتية، أو التطبيق الصناعي أو العلمي في صورة مسألة رياضية.

إن صياغة المسألة الرياضية - نادرا - ما تعكس الظواهر الحقيقية بصورة دقيقة. فعند دراسة الظواهر الطبيعية نفرض الشروط التي تبسط المسألة مما يسبب نشوء سلسلة من الأخطاء، وقد تتطلب العملية إهمالا لأحد العوامل، أو تعديلا لآخر للوصول إلى النموذج الرياضي المقبول.

2 - أخطاء البرمجة **Programming Errors**:

في عملية صياغة المسألة على شكل خوارزمية Algorithm (خطوات متتابعة للحل) يتم كتابة هذه الخوارزمية من خلال إحدى لغات البرمجة، وغالبا ما تحدث بعض الأخطاء عند ذلك.

ولكي نستطيع اكتشاف هذه الأخطاء فمن المهم اختبار البرنامج بإعطاء بيانات اختيارية معلومة النتائج، ومقارنتها بالنتائج الواردة من البرنامج، وفي حالة البرامج الكبيرة، والمعقدة فيجب تقسيم البرنامج إلى مجموعة من البرامج الفرعية المستقلة والتي يمكن اختبار كل على حده.

3 - أخطاء القياسات ***Observational Errors***:

تحتوي معظم المسائل على بيانات فيزيائية، وهذه البيانات تتضمن أخطاء ملاحظة. وعلى سبيل المثال: فإن أشهر كمية فيزيائية مقاسة هي سرعة الضوء في الفراغ والمعلوم أنها تساوي ثلاثة آلاف مليون كيلومتر في الثانية. لكن الحقيقة أنها تتعين من

$$C = (2.997925+\varepsilon)10^{10}\, cm/\sec,$$
$$|\varepsilon| \le 0.000003$$

وحيث إن البيانات الفيزيائية تحتوي على أخطاء، فإن الحسابات المعتمدة عليها سوف تحتوي على تأثير لأخطاء الملاحظة تلك، وفي الواقع فإننا لن نتمكن من تلاشي هذه الأخطاء، ولكننا على أية حال سوف ندرس تأثير هذه الأخطاء في الحسابات ومحاولة إيجاد صيغ يمكن من خلالها تقليل مجمل الخطأ قدر الإمكان.

4 - أخطاء تمثيل الحاسب للأعداد Rounding/chopping Errors:

يحدث هذا عند استعمال الحاسب أو الآلة الحاسبة بأخطاء تمثيل الأعداد المذكورة في بداية هذا الفصل، مثل استخدام صيغة النقطة العائمة لتمثيل الأعداد، وهي المصدر الرئيسي للخطأ في بعض المسائل.

5 - أخطاء التقريب الرياضي Approximation Errors:

هي صيغ الأخطاء التي سوف نهتم بدراستها في الفصول المقبلة.

ولكي نفهم هذا النوع من الأخطاء ندرس التكامل:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

حيث لا يوجد حل تحليلي لهذا التكامل، وبديلاً عن ذلك سوف نوجد تقريباً لهذا التكامل بدالة يمكن تكاملها بسهولة، وسوف نستخدم كثيرة حدود تايلور مع القطع بعد أول خمسة حدود:

$$e^{-x^2} \cong 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}$$

عندئذ:

$$I = \int_0^1 \left[1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}\right] dx$$

وهذا التكامل يمكن حسابه بسهولة.

إن الخطأ الناتج من هذه العملية يسمى خطأ التقريب الرياضي، ويظهر هذا الخطأ عندما يكون لدينا مسألة لا يمكن حلها بالضبط فنستخدم تقريباً لها بمسألة يمكن حلها.

ويجب أن نحاول تقدير الخطأ الرياضي وأن نجعل قيمته أقل ما يمكن.

ب- الأخطاء التابعة Consequence errors:

سوف نصف الآن ثلاثة أنواع من الأخطاء التي - غالبا - ما تحدث في التطبيقات، وهي أخطاء مشتقة أو تابعة للأخطاء السابقة. وهذه الأنواع من الأخطاء يمكن تلافيها - غالبا - عن طريق اختيارات خاصة من الحسابات الرياضية.

خطأ نقص المواضع المعنوية Loss Of Significance Errors

يمكن أن يعتبر ذلك مصدرا للخطأ ناتجاً من محدودية استيعاب الحاسب للأعداد. وسوف نبدأ بمثال للتوضيح:

مثال (1) :نعرّف:

$$f(x) = x\left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right] \qquad (1)$$

ونفرض أننا سوف نحسب قيم هذه الدالة عند قيم موجبة متزايدة لـ x باستخدام حاسبة تستوعب 3 مواضع معنوية مع استخدام التقريب rounding فإننا نحصل على الجدول التالي:

جدول (1 -1): قيم الدالة $f(x)$ باستخدام حاسبة تستوعب 3 مواضع معنوية.

x	$\sqrt{x+1}$	$\sqrt{x}$	$[\sqrt{x+1}-\sqrt{x}]$
10	3.32	3.16	0.16
100	10.0	10.0	0.00

يتضح من الجدول أن الخطأ يظل صغيرا حتى تصل x إلى الـ3 مواضع وهي القدرة الاستيعابية للحاسبة، عندها ينعدم التوافق بين القيم الحقيقية والمحسوبة للدالة، ويصبح الخطأ كبيرا.

فإذا كانت الحاسبة تستوعب 4 مواضع معنوية، كان الجدول كما يلي:

جدول (1 -2): قيم الدالة $f(x)$ باستخدام حاسبة تستوعب 4 مواضع معنوية.

x	$\sqrt{x+1}$	$\sqrt{x}$	$[\sqrt{x+1}-\sqrt{x}]$
10	3.317	3.162	0.154
100	10.05	10.00	0.050
1000	31.62	31.62	0.000

يتضح من الجدول أن الخطأ يظل صغيرا حتى تصل x إلى الـ4 مواضع وهي القدرة الاستيعابية للحاسبة، عندها ينعدم التوافق بين القيم الحقيقية والمحسوبة للدالة ويصبح الخطأ كبيراً.

إن برنامج الحاسب في هذه الحالة يعاني من خطأ قلة المعنوية.

وللتغلب على هذه المشكلة سوف نجري التالي:

$$f(x) = x\left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right]$$

$$= x\left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right]\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

وبالتالي

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \qquad (2)$$

والآن نفهم أن سبب إنتاج الآلة لهذا الخطأ الكبير مقارنة بدقتها هو وجود عملية الطرح لعددين متساويين تقريبا في صيغة الدالة. وبمقارنة قيم الدالة بتعريفها الأصلي وقيمها بعد التعديل، يصبح الجدولان السابقان كالتالي:

جدول (1 -3) قيم الدالة $f(x)$ المعدلة باستخدام حاسبة تستوعب 3 مواضع معنوية.

x	$x\left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right]$	$\frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$	Error
10	1.58	1.45	0.13
100	0.00	5.00	5.00

جدول (1 -4) قيم الدالة $f(x)$ المعدلة باستخدام حاسبة تستوعب 4 مواضع معنوية.

x	$x\left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right]$	$\frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$	Error
10	1.547	1.543	0.004
100	5.0	4.988	0.012
1000	0.0	15.81	15.81

تعريف:

عندما نطرح عددين متساويين تقريبا ، فإننا نعاني من خطأ نقص الدلالة (المعنوية) Loss Of Significance Error في الحسابات وهو في الغالب خطأ صعب الاكتشاف لغير الخبير في هذا المجال. وحتى عند اكتشافه فمن الصعوبة بمكان إصلاحه.

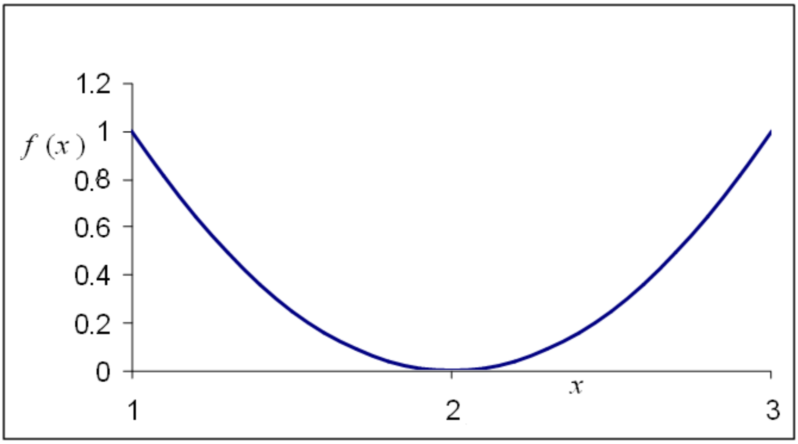
خطأ التشويش في قيم الدالة Noise In Function Evaluation

عند حساب الدالة يتم عمل تقريب أو قطع في العمليات الحسابية بها. وهذا معناه أن النتيجة المحسوبة من الآلة سيكون بها تشويش، وبالرغم من أن هذا التشويش يكون صغيرا ، إلا أنه يمكن أن يؤثر على دقة الحسابات الأخرى التي تعتمد عليها الدالة.

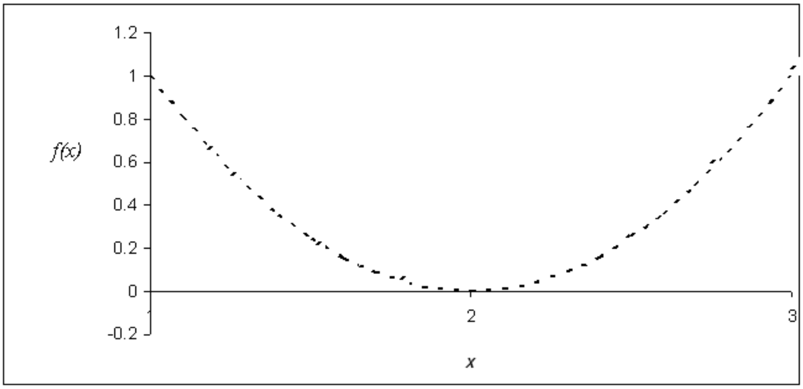
وعلى سبيل المثال، إذا أخذنا في الاعتبار حساب الدالة $f(x) = (x-2)^2$ لكل النقاط x في نطاقٍ ما ، فإنه إذا كانت الدالة متصلة فإن منحنى الدالة يكون متصلا.

وعند حساب هذه الدالة باستخدام صيغة النقطة العائمة، فإن العمليات الحسابية الموجودة في صيغة الدالة تؤدي إلى أخطاء في حسابها. ورغم صغر هذه الأخطاء - غالبا - فإنها تؤدي إلى عدم مماثلة المنحنى المحسوب للمنحنى المتصل المتوقع للدالة بالشكل (1 -1)، فيظهر المنحنى مشوشا كما بالشكل (1 -2).

ومن خلال إكسل يمكن الحصول على الرسم التالي بحسابات صيغة الدقة المضاعفة للدالة $f(x)=x^2-4x+4$ مقارنة بالرسم للدالة الحقيقية (المنحنى الأملس smooth curve).



شكل (1 -1) المنحنى الحقيقي للدالة $f(x)=x^2-4x+4$.



شكل (1 -2) المنحنى الناتج من الحاسب للدالة $f(x)=x^2-4x+4$.

خطأ السريان الدوني والفوقي Underflow and Overflow Errors

من تعريف صيغة النقطة العائمة لتمثيل الأعداد ، فإنه يوجد حد أدنى وحد أعلى لقيم الأعداد التي يمكن التعبير عنها بهذه الصيغة.

والحسابات Computations التي تؤدي إلى تخليق عدد صغير جدا أصغر من الحد الأدنى المسموح به تؤدي إلى ما يسمى خطأ سريان دوني Underflow Errors.

إن الخيار الذي تم برمجته في معظم الحاسبات هو اعتبار العدد في مثل هذه الحالة هو الصفر.

ويمكن توليد خطأ السريان الدوني باستخدام الحاسبة عن طريق قسمة الواحد الصحيح على 10 ، ثم تتوالى قسمة الناتج على 10 حتى تصبح النتيجة صفرا. عندها نكون قد وصلنا إلى خطأ السريان الدوني.

وفي آلة حاسبة ذات ثماني مواضع معنوية سوف تجد أن قسمة الواحد على 10^8 تعطي صفرا.

أما إذا كانت الحسابات Computations تؤدي إلى تخليق عدد كبير جدا أكبر من الحد المسموح به، فإنها تؤدي إلى ما يسمى: خطأ سريان فوقي Overflow Errors.

وهذا الخطأ لا تستطيع الحاسبات التعامل معه، وبالتالي تتوقف الحسابات Computations عند حدوثه مع إظهار رسالة خطأ

ويمكن توليد خطأ السريان الفوقي باستخدام الحاسبة عن طريق ضرب 10 في 10 ، ثم توالي ضرب الناتج في 10 حتى تظهر رسالة الخطأ. عندها نكون قد وصلنا إلى خطأ السريان الفوقي.

وفي آلة حاسبة ذات ثماني مواضع معنوية سوف تجد أن رسالة الخطأ سوف تظهر بعد 10^8 .

تمارين (1-2)

(1) احسب الخطأ، والخطأ النسبي، وعدد مواضع المعنوية في تقريب X_A لـ X_T للأعداد التالية:

(a) $X_T = 27.6415,\ X_A = 27.6409$
(b) $X_T = 0.00546985,\ X_A = 0.00546543$
(c) $X_T = e,\ X_A = 20/7$
(d) $X_T = \pi,\ X_A = 51/13$

(3) عرف خطأ نقص المعنوية، وبيِّن كيف يمكنك تجنب هذا النوع من الأخطاء في الحالات التالية(في كل الحالات عدا (ب) اعتبر x قريبة من الصفر) .

(أ) $f(x) = log(x+1) - log(x)$, x is large .

(ب) $f(x) = \sin(a+x) - \sin a$

(ج) $f(x) = \sqrt[3]{1+x} - 1$

(د) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4+x} - 2}{x}$

(4) استخدم متسلسلة تايلور في تجنب حدوث خطأ نقص المعنوية في الحالات التالية(اعتبر x قريبة من الصفر) .

(a) $f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x}$ (b) $f(x) = \dfrac{\log(1-x) + xe^{x/2}}{x^3}$

(c) $f(x) = \dfrac{x - \sin(x)}{x^3}$ (d) $f(x) = \dfrac{x - \sin(x)}{\tan(x)}$

(5) احسب قيمة $f(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{x}$ عند $x = 0.0195$ بفرض أن الحسابات تتم بالتقريب إلى أربعة أرقام عشرية، وقارن النتيجة مع الحل المضبوط. وضح لماذا تعطي هذه الصيغة قيما غير دقيقة للقيم x

حيث $x << 1$. أعط صيغة أخرى للدالة $f(x)$ تصلح لإعطاء نتائج أدق بالنسبة لقيم x الصغيرة ثم استخدمها لحساب قيمة الدالة عند $x = 0.0195$.

(6) نأخذ في الاعتبار المتطابقة

$$\int_0^x \sin(xt)dt = \frac{1-\cos x^2}{x}$$

ناقش استخدام الطرف الأيمن من هذه المتطابقة لحساب التكامل وبيِّن المشكلة الرياضية الناشئة عندما تقترب x من الصفر. اقترح سبيلا للتغلب على هذه المشكلة.

الفصل الثالث

المؤثرات The Operators

فكرة المؤثر تستخدم بتوسع في التحليل العددي، غالبا لتبسيط دراسة الصيغ المعقدة و الافكار الخاصة بالمؤثرات التي سنستخدمها هي كما يأتي:

نفرض ان مجموعة من النقاط مرتبة بحيث ان المسافة بين اي نقطتين متتاليتين ثابتة و تساوي h اي ان

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + h \\
x_2 &= x_1 + h = x_0 + 2h \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_i &= x_0 + ih \ , \ i = 0,1,2,\cdots,n
\end{aligned}
$$

1. المؤثر Δ : مؤثر الفروق الامامي Forward difference operator

يعرف مؤثر الفروق الامامي Δ و الذي يؤثر على الدالة $y(x)$ بالعلاقة التالية:

$$\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$$

و ينظر الي Δ مؤثر عندما نقدم له $y(x)$ كعدد مدخل ينتج لنا $y(x+h) - y(x)$ كعدد خارج فاذا استخدمنا الرمز y_i ليدل على الدالة $y(x_i)$ فيمكننا ان نكتب العلاقات التالية

$$
\begin{aligned}
\Delta y_0 &= y(x_0 + h) - y(x_0) = y_1 - y_0 \\
\Delta y_1 &= y(x_1 + h) - y(x_1) = y_2 - y_1
\end{aligned}
$$

أي ان

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

وسنكتب الفروق الامامية الثانية (Second differences) في الصورة $\Delta^2 y(x)$ و تعرف بالعلاقة

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_i &= \Delta\left(\Delta y_i\right) = \Delta\left(y_{i+1} - y_i\right)\\ &= \left(y_{i+2} - y_{i+1}\right) - \left(y_{i+1} - y_i\right)\\ &= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i\end{aligned}$$

و بنفس الطريقة يمكن تعريف الفروق الاعلى Higher differences فمثلا

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_i &= \Delta\left(\Delta^2 y_i\right) = \Delta\left(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i\right)\\ &= \left(y_{i+3} - y_{i+2}\right) - 2\left(y_{i+2} - y_{i+1}\right) + \left(y_{i+1} - y_i\right)\\ &= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i\end{aligned}$$

و عموما

$$\Delta^{n+1} y(x) = \Delta\left(\Delta^n y(x)\right),\ n = 1, 2, \cdots$$

حيث

$$\Delta^0 y(x) = y(x)$$

اذا اعطينا مجموعة من النقاط $\left(x_i, y_i\right),\ i = 0, 1, 2, \cdots, n$

يمكننا حساب الفروق المختلفة $\Delta^k,\ k = 1, 2, \cdots$

(حيث $\Delta^1 \equiv \Delta$) للدالة $y(x)$ عند النقاط المختلفة و وضع تلك القيم في جدول يسمى جدول الفروق او مخطط الفروق كما يبين الجدول التالي - حتى الفروق Δ^5 - لقيم y المعطاة.

جدول مؤثر الفروق الامامية Forward difference Table

x_n	y_n	Δy_n	$\Delta^2 y_n$	$\Delta^3 y_n$	$\Delta^4 y_n$	$\Delta^5 y_n$
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$			
		Δy_4				
x_5	y_5					

2. المؤثر ∇ مؤثر الفروق الخلفية Backward difference operator

يعرف مؤثر الفروق **الخلفية** ∇ و الذي يؤثر على الدالة $y(x)$ بالعلاقة التالية

$$\nabla y(x) = y(x) - y(x-h)$$

أي انه عندما نقدم له $y(x)$ كعدد مدخل ينتج لنا $y(x) - y(x-h)$ كعدد خارج و يمكننا ان نكتب العلاقات التالية

$$\nabla y_1 = y_1 - y_0$$
$$\nabla y_2 = y_2 - y_1$$

أي ان بصورة عامة

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$$

و بنفس الطريقة يمكن تعريف الفروق من الرتبة الثانية (Second differences) فمثلا

$$\begin{aligned}\nabla^2 y_i &= \nabla(\nabla y_i) = \nabla(y_i - y_{i-1}) \\ &= (y_i - y_{i-1}) - (y_{i-1} - y_{i-2}) \\ &= y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}\end{aligned}$$

و بنفس الطريقة يمكن تعريف الفروق الاعلى Higher differences فمثلا

$$\begin{aligned}\nabla^3 y_i &= \nabla(\nabla^2 y_i) = \nabla(y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}) \\ &= (y_i - y_{i-1}) - 2(y_{i-1} - y_{i-2}) + (y_{i-2} - y_{i-3}) \\ &= y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3}\end{aligned}$$

و عموما

$$\nabla^{n+1} y(x) = \nabla\left(\nabla^n y(x)\right), \ n = 1, 2, \cdots$$

ويلاحظ انه اذا كونًا جدول الفروق الخلفية لمجموعة من النقاط المعطاة فتكون عناصر هذا الجدول هي نفسها من حيث القيمة العددية عناصر جدول الفروق الامامية لنفس المجموعة من النقاط الا ان رموز العناصر او اسماءها تكون مختلفة فمثلا العنصر ∇y_1 هو نفس العنصر Δy_0 اي لهم نفس القيمة والشكل التالي يعطي جدولي الفروق الامامية و الفروق الخلفية لمجموعة معطاة من اربع نقاط. و من الشكل نتبين ان العناصر المتقابلة متساوية.

Forward differnce Table

x_n	y_n	Δy_n	$\Delta^2 y_n$	$\Delta^3 y_n$
x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		
x_3	y_3			

Back ward difference Table

x_n	y_n	∇y_n	$\nabla^2 y_n$	$\nabla^3 y_n$
x_0	y_0			
		∇y_1		
x_1	y_1		$\nabla^2 y_2$	
		∇y_2		$\nabla^3 y_3$
x_2	y_2		$\nabla^2 y_3$	
		∇y_3		
x_3	y_3			

جدول الفروق الخلفية

x_n	y_n	∇y_n	$\nabla^2 y_n$	$\nabla^3 y_n$	$\nabla^4 y_n$	$\nabla^5 y_n$
x_0	y_0					
		∇y_1				
x_1	y_1		$\nabla^2 y_2$			
		∇y_2		$\nabla^3 y_3$		
x_2	y_2		$\nabla^2 y_3$		$\nabla^4 y_4$	
		∇y_3		$\nabla^3 y_4$		$\nabla^5 y_5$
x_3	y_3		$\nabla^2 y_4$		$\nabla^4 y_5$	
		∇y_4		$\nabla^3 y_5$		
x_4	y_4		$\nabla^2 y_5$			
		∇y_5				
x_5	y_5					

3. مؤثر الفروق المركزية δ Central difference operator

للتعبير عن الفروق بصورة مماثلة يوجد مؤثر ثالث يسمي مؤثر الفروق المركزية و يعرف بالعلاقة

$$\delta y(x) = y(x+\frac{h}{2}) - y(x-\frac{h}{2})$$

او علي الصورة

$$\delta y_i = y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}$$

ومنها نحصل على

$$\delta^2 y_i = \delta(\delta y_i) = \delta\left(y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}\right)$$
$$= (y_{i+1} - y_i) - (y_i - y_{i-1})$$
$$= y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$$

جدول مؤثر الفروق المركزية

x_n	y_n	δy_n	$\delta^2 y_n$	$\delta^3 y_n$	$\delta^4 y_n$	$\delta^5 y_n$
x_0	y_0					
		$\delta y_{1/2}$				
x_1	y_1		$\delta^2 y_1$			
		$\delta y_{3/2}$		$\delta^3 y_{3/2}$		
x_2	y_2		$\delta^2 y_2$		$\delta^4 y_2$	
		$\delta y_{5/2}$		$\delta^3 y_{5/2}$		$\delta^5 y_{5/2}$
x_3	y_3		$\delta^2 y_3$		$\delta^4 y_3$	
		$\delta y_{7/2}$		$\delta^3 y_{7/2}$		
x_4	y_4		$\delta^2 y_4$			
		$\delta y_{9/2}$				
x_5	y_5					

ملاحظة

من خلال الجداول الثلاثة السابقة للفروق الامامية و الفروق الخلفية و الفروق المركزية نجد ان عناصر هذه الجداول هي نفسها من حيث القيمة العددية ام مسميات هذه العناصر تختلف من جدول الى اخر فمثلا القيمة العددية للفروق الامامية يرمز لها بالرمز Δy_0 و في الفروق الخلفية يرمز لها بالرمز ∇y_1 اما في الفروق المركزية يرمز لها بالرمز $\delta y_{1/2}$.

كما نلاحظ انه في جدول الفروق الامامية تكون الادلة ثابتة على خط منحدر من اعلى الى اسفل و في جدول الفروق الخلفية تكون الادلة ثابتة على خط مائل صاعدا من اسفل الى اعلى. و في جدول الفروق المركزية تكون الادلة ثابتة على خط افقي.

4. مؤثر الازاحة E Shifting operator

مؤثر الازاحة يعرف بالعلاقة

$$Ey(x) = y(x+h)$$
$$E^{-1}y(x) = y(x-h)$$
$$Ey_i = Ey(x_i) = y(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

و يمكننا استنتاج صورة عامة كالتالي

$$E^2 y_i = E(Ey_i) = E(y_{i+1}) = y_{i+2}$$

و بصورة عامة لاي قيمة لـ p يكون

$$E^p y_i = y_{i+p}$$

كلا من Δ , E له الخاصية الخطية اي ان

$$\Delta(c_1 y_k + c_2 z_k) = c_1 \Delta y_k + c_2 \Delta z_k$$
$$E(c_1 y_k + c_2 z_k) = c_1 E y_k + c_2 E z_k$$

حيث c_1, c_2 مقداران ثابتان.

5. مؤثر المتوسط μ Mean operator

مؤثر المتوسط يعرف بانه

$$\mu = \frac{E^{1/2} + E^{-1/2}}{2}$$

و هو الاداة الاساسية التي يمكن بها حذف الادلة الكسرية من عمليات الفروق الوسطي.

6. مؤثر التفاضل D Differential operator

موثر التفاضل يعرف بانه

$$Dy(x) = \frac{d}{dx} y(x) = y'(x)$$

$$D^n y(x) = \frac{d^n}{dx^n} y(x) = y^{(n)}(x)$$

2.2 خواص المؤثرات

❖ **حاصل جمع مضاعفات المؤثرات**

نعتبر مؤثرين L_1, L_2 يؤثران على العدد y_k فان الناتج يكون $L_1 y_k \ , \ L_2 y_k$ و يكون حاصل جمع هذين المؤثرين

$$\left(L_1 + L_2\right) y_k = L_1 y_k + L_2 y_k$$

و بصفة عامة اذا كان c_1, c_2 ثابتين (لا يعتمدان على k) فان المؤثر $c_1 L_1 \pm c_2 L_2$ ينتج العدد $c_1 L_1 y_k \pm c_2 L_2 y_k$ اي ان

$$\left(c_1 L_1 \pm c_2 L_2\right) y_k = c_1 L_1 y_k \pm c_2 L_2 y_k$$

- **حاصل ضرب مؤثرين**

يعرض حاصل ضرب مؤثرين L_1, L_2 بانه المؤثر الذي يخرج $L_1 L_2 y_k$ اي ان

$$\left(L_1 L_2\right) y_k = L_1 L_2 y_k$$

- **تساوي المؤثرات**

المؤثرين L_1, L_2 يسمان مؤثران متساويان اذا كان $L_1 y_k = L_2 y_k$

اي ان $L_1 = L_2$ اذا كان $L_1 y_k = L_2 y_k$

لجميع الادلة k تحت الاعتبار. بهذا التعريف لأي ثلاثة مؤثرات L_1, L_2, L_3 يكون

$$L_1 + L_2 = L_2 + L_1$$

$$L_1 + \left(L_1 + L_3\right) = \left(L_1 + L_2\right) + L_3$$

$$L_1\left(L_2 L_3\right) = \left(L_1 L_2\right) L_3$$

$$L_1\left(L_2 + L_3\right) = L_1 L_2 + L_1 L_3$$

لكن قانون الابدال للضرب ليس صحيحا دائما اي ان $L_1 L_2 \neq L_2 L_1$ اما اذا كان احد المؤثرين عددا c فان التساوي يكون $c L_1 = L_1 c$

3.2 المؤثرات العكسية

المؤثران L_1, L_2 يسميان مؤثرين عكسيين اذا كان

$$L_1 L_2 = L_2 L_1 = I$$

في مثل هذه الحالة نستخدم الرموز

$$L_1 = L_2^{-1} = \frac{1}{L_2}\,, L_2 = L_1^{-1} = \frac{1}{L_1}$$

المؤثر I يعرف بالمؤثر المحايد.

4.2 العلاقة بين المؤثرات

معادلات بسيطة تربط بين المؤثرات $\Delta, \nabla, E, \delta, E^{-1}$

من الممكن اثبات ان

$$(1) \quad E = 1 + \Delta$$

حيث ان

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

وباستخدام مؤثر الازاحة

$$E y_k = y_{k+1}$$

وبالتعويض

$$\Delta y_k = E y_k - y_k = (E - 1) y_k$$

وبالتالي يكون

$$\Delta = E - 1 \quad \Rightarrow \quad E = 1 + \Delta$$

$$(2) \quad E^{-1} = 1 - \nabla$$

حيث ان

$$E y_{k-1} = y_k \quad \Rightarrow y_{k-1} = E^{-1} y_k$$

و لكن

$$\nabla y_k = y_k - y_{k-1} = (1 - E^{-1}) y_k$$

اذن

$$\nabla = 1 - E^{-1} \quad \Rightarrow E^{-1} = 1 - \nabla$$

(3) $\Delta^2 = E^2 - 2E + 1$

بما ان

$$\Delta^2 y_k = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k$$

وحيث ان

$$E^p y_k = y_{k+p}$$

فيكون

$$\Delta^2 y_k = E^2 y_k - 2Ey_k + y_k$$

$$\Delta^2 y_k = (E^2 - 2E + 1) y_k$$

اذن

$$\Delta^2 = E^2 - 2E + 1$$

(4) $E\Delta = \Delta E$

$$\begin{aligned} E\Delta y_k &= E(y_{k+1} - y_k) \\ &= Ey_{k+1} - Ey_k = y_{k+2} - y_{k+1} \\ \Delta E y_k &= \Delta y_{k+1} = y_{k+2} - y_{k+1} \end{aligned}$$

اذن $E\Delta = \Delta E$

(5) $\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$

$$\begin{aligned} \delta y_k &= y_{k+1/2} - y_{k-1/2} \\ &= E^{1/2} y_k - E^{-1/2} y_k \\ &= \left(E^{1/2} - E^{-1/2}\right) y_k \end{aligned}$$

$$\therefore \delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$$

$$(6)\ E=\frac{\Delta^2}{\delta^2}$$

من (2)

$$E^{-1}=(1-\nabla)$$
$$E=(1-\nabla)^{-1}$$

و من (1)

$$E=1+\Delta$$

اي ان

$$E=1+\Delta=(1-\nabla)^{-1}$$

و من (5)

$$\delta E^{1/2}=E-1=\Delta$$

بالتربيع

$$\delta^2 E=\Delta^2$$
$$E=\frac{\Delta^2}{\delta^2}$$

اي ان

$$E=1+\Delta=(1-\nabla)^{-1}=\frac{\Delta^2}{\delta^2}$$

$$(7)\ E=e^{hD}$$

باستخدام مفكوك تايلور للدالة $y(x+h)$ نحصل على

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1!}y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \cdots$$

$$Ey(x) = y(x) + \frac{h}{1!}Dy(x) + \frac{h^2}{2!}D^2y(x) + \frac{h^3}{3!}D^3y(x) + \cdots$$

$$Ey(x) = \left[1 + \frac{hD}{1!} + \frac{(hD)^2}{2!} + \frac{(hD)^3}{3!} + \cdots\right]y(x)$$

$$E = 1 + \frac{hD}{1!} + \frac{(hD)^2}{2!} + \frac{(hD)^3}{3!} + \cdots$$

$$E = e^{hD}$$

$$(8) \quad \delta = 2\sinh\left(\frac{hD}{2}\right)$$

و من العلاقات (5) ، (7) نحصل على

$$\delta = e^{\frac{hD}{2}} - e^{-\frac{hD}{2}}$$

$$\delta = 2\sinh\left(\frac{hD}{2}\right)$$

$$(9) \quad \mu = \cosh\left(\frac{hD}{2}\right)$$

من تعريف مؤثر المتوسط و العلاقة (5) نحصل على

$$\mu = \frac{e^{\frac{hD}{2}} + e^{-\frac{hD}{2}}}{2}$$

$$\mu = \cosh\left(\frac{hD}{2}\right)$$

مثال (1)

كون جدول الفروق للدالة

$$y = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

من القيمة الابتدائية $x_0 = 0$ معتبرا الخطوة $h = 1$

الحل

بوضع $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ نعين القيم المناظرة للدالة

$$y_0 = -1, y_1 = 2, y_2 = 13, y_3 = 44$$

ومن هنا نحصل على

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	–1				
		3			
1	2		8		
		11		12	
2	13		20		0
		31		12	
3	44		32		
		63			
4	107				

مثال (2)

احسب كثيرة الحدود $y = \frac{5}{3}x^3 - \frac{23}{2}x^2 + \frac{5}{6}x - 1$ عند قيم x الصحيحة بين $x = 1, x = 4$ و استنتج جدول الفروق.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	-1				
		-11			
1	-10		-10		
		-21		6	
2	-31		-4		0
		-25		6	
3	-56		2		
		-23			
4	-79				

لاحظ ان الفروق الثالثة كلها تأخذ القيمة 6 و لهذا كل الفروق الرابعة تأخذ القيمة صفر.

5.2 الفروق المقسمة

عند تكوين جدول الفروق افترضنا حتى الان ان قيم متغير الدالة متساوية البعد اي لها خطوة ثابتة غير اننا نقابل احيانا في التطبيق العملي جداول بقيم للمتغير المستقل غير متساوية البعد أي جداول بخطوة متغيرة فعلى سبيل المثال يكون للمعطيات التجريبية في كثير من الاحيان مثل هذا الطابع والجداول ذات الخطوة المتغيرة تعمم مفهوم الفروق المحددة وبالتحديد يستعان بما يسمى بالفروق المقسمة.

نفرض ان الدالة $y=f(x)$ معطاة جدوليا و ان $x_0, x_1, x_2, \cdots$ هي قيم المتغير المستقل وان $y_0, y_1, y_2, \cdots$ هي قيم الدالة المناظرة. حيث الفروق

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \neq 0\,,\quad i=0,1,2,\cdots$$

ليست متساوية في ما بينها.

و العلاقات

$$[x_i\,,\,x_{i+1}] = \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} \quad (i=0,1,2,\cdots)$$

تسمى بالفروق المقسمة من الرتبة الاولى فعلى سبيل المثال

$$[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad , \quad [x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

و هكذا وبالمثل تعيين الفروق من الرتبة الثانية

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}] - [x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \quad , \quad (i = 0,1,2,\cdots)$$

فعلى سبيل المثال

$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_1, x_2] - [x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

وبوجه عام فان الفروق المقسمة من رتبة n تنتج من الفروق المقسمة من الرتبة $n-1$ بواسطة العلاقة السابقة

$$[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+n}] = \frac{[x_{i+1}, \cdots, x_{i+n}] - [x_i, \cdots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$$

$$(n = 1,2,\cdots) \; , \quad (i = 0,1,2,\cdots)$$

ونشير الى ان الفروق المقسمة لا تتغير عند تبديل اوضاع المتغيرات اي تكون عبارة عن دوال متماثلة في متغيراتها، فعلى سبيل المثال

$$[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = [x_1, x_0]$$

والفروق المقسمة توضع عادة في جدول على النمط التالي

x	y	First order	Second order	Third order	Fourth order
x_0	y_0				
		$[x_0, x_1]$			
x_1	y_1		$[x_0, x_1, x_2]$		
		$[x_1, x_2]$		$[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	y_2		$[x_1, x_2, x_3]$		$[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
		$[x_2, x_3]$		$[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	y_3		$[x_2, x_3, x_4]$		
		$[x_3, x_4]$			
x_4	y_4				

مثال (3)

كون الفروق المقسمة للدالة بالجدول التالي

x	0	0.2	0.3	0.4	0.7	0.9
y	132.651	148.877	157.964	166.375	195.112	216.000

الحل

بتطبيق العلاقة (1) على التوالي نحصل على

$$[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{148.877 - 132.651}{0.2 - 0} = 81.13$$

$$[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{157.464 - 148.877}{0.3 - 0.2} = 85.87$$

$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_1, x_2] - [x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{85.8 - 81.13}{0.3 - 0} = 15.8$$

وهكذا يمكن وضع النتائج في الجدول التالي:

x	y	First order	Second order	Third order	Fourth order
0	132.651				
		81.13			
0.2	148.877		15.8		
		85.87		1	
0.3	157.964		16.2		0
		89.79		1	
0.4	166.375		16.7		0
		95.79		1	
0.7	195.112		17.3		
		104.44			
0.9	216.000				

الفصل الرابع

الاستكمال (Interpolation)

الاستكمال هو طريقة تستخدم في التحليل العددي لتقريب الدوال وهدف هذه الطريقة استبدال الدالة المعطاة (المعلوم قيمها عند نقاط معينة) باخري ابسط منها.

للاستكمال تطبيقات عديدة منها تقريب قيمة الدالة عند نقطة بمعلومية قيمتها عند نقاط محددة و ايضا تقريب تكامل ومشتقات الدوال و الحصول علي الحلول العددية للمعادلات التكاملية والتفاضلية. كذلك كثيرا في حالة العمل التجريبي خاصة يكون لدينا معلومات عن الدالة في صورة جدول للقيم العددية لهذه الدالة $f(x)$ المناظرة لقيم معينة للمتغير x (ذات الابعاد المتساوية) وغالبا ما نحتاج قيم الدالة $f(x)$ المعطاة بهذه الصورة عند قيمة للمتغير x بين قيمتين من القيم المعطاة في الجدول و هذه مشكلة الاستكمال المباشر.

ومن اكثر الدوال البسيطة استخداما في الاستكمال هي (كثيرات الحدود ، المثلثية ، الاسية والكسرية).

(3) صياغة مسالة الاستكمال

نفرض ان لدينا الفترة $[a,b]$ و تم تقسيم هذه الفترة الي n من الفترات عند النقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ التي تسمى بعقد الاستكمال و قيم دالة ما $f(x)$ عند هذه النقاط هي

$$f(x_0) = y_0,\ f(x_1) = y_1, \cdots f(x_n) = y_n \qquad (1)$$

والمطلوب تكوين $F(x)$ (دالة الاستكمال) التي تأخذ نفس قيم $f(x)$ عند النقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ اي ان

$$F(x_0) = y_0,\ F(x_1) = y_1, \cdots F(x_n) = y_n \qquad (2)$$

المسالة بهذه الصياغة العامة يمكن ان يكون لها مجموعة لانهائية من الحلول او لايكون لها اي حل علي الاطلاق. غير ان هذه المسالة تصبح احادية القيمة اذا ما بحثنا بدلا من اي دالة اختيارية $F(x)$ عن كثيرة حدود $P_n(x)$ من درجة لا تتعدي n و تحقق الشرط في المعادلة (2) اي ان

$$P_n(x_0) = y_0,\ P_n(x_1) = y_1, \cdots P_n(x_n) = y_n$$

و العلاقة الاستكمالية الناتجة يستعان بها عادة في الحساب التقريبي لقيم الدالة $f(x)$ عند قيم المتغير x و المختلفة عند عقد الاستكمال.

3) قانون نيوتن الاول للاستكمال الامامي

نفرض ان للدالة $y=f(x)$ اعطيت القيم $y_i=f(x_i)$ في قيم المتغير المستقل متساوية البعد $x_i=x_0+ih,\ i=0,1,2,\cdots,n$ حيث h خطوة الاستكمال والمطلوب تكوين كثيرة حدود $P_n(x)$ من درجة لا تتعدي n والتي تحقق الشروط التالية

$$P_n(x_i)=y_i,\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

وباستخدام الفروق الامامية وكذلك مؤثر الازاحة

$$\Delta y_i=y_{i+1}-y_i\ ,\quad i=0,1,2,\cdots$$
$$Ey_i=y_{i+1}$$
$$\Delta y_i=Ey_i-y_i$$
$$\Delta y_i=(E-1)y_i$$
$$\Delta\equiv E-1\ \Rightarrow E=1+\Delta$$

نفرض ان $x_q=x_0+qh$ حيث

$$x_0<qh<x_1\ ,\quad 0<q<1$$

بالتالي يكون لدينا

$$y(x_q)=y(x_0+qh)=E^q y_0$$
$$y(x_q)=(1+\Delta)^q y_0$$

باستخدام مفكوك نظرية ذات الحدين

$$y(x_q)=\left[1+q\Delta+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2+\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^2+\cdots\right]y_0$$

و من المعادلة (1)

$$P_n(x_q)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^2 y_0+\cdots$$

وهذا هو قانون نيوتن للاستكمال الامامي

مثال (1)

كون كثيرة الحدود للبيانات المعطاة بالجدول

x	1	1.5	2.0	2.5
$y(x)$	4.0	18.25	44.0	84.25

ثم احسب قيمة $y(x)$ عند $x=1.25$.

الحل

نكون جدول الفروق الامامية وكذلك نحسب قيمة q

$$h=x_1-x_0 \Rightarrow h=1.5-1.0=0.5$$

$$x_0=1.0\,,\;\; x_q=1.25$$

$$x_q=x_0+qh \quad\Rightarrow\quad q=\frac{x_q-x_0}{h}=\frac{1.25-1.0}{0.5}=0.5$$

x	$y(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1.0	4.0			
		14.25		
1.5	18.25		11.5	
		25.75		3.0
2.0	44.0		14.5	
		40.25		
2.5	84.25			

$$y_0=4.0\,,\;\Delta y_0=14.25\;\;,\Delta^2 y_0=11.5\,,\;\Delta^3 y_0=3.0$$

$$y(x_q)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^2 y_0+\cdots$$

$$y(1.25)=4.0+(0.5)(14.25)+\frac{(0.5)(-0.5)}{2!}(11.5)$$
$$+\frac{(0.5)(-0.5)(-1.5)}{3!}(3)=9.875$$

مثال (2)

الجدول التالي الذي يعطي قيمة الدالة $y(x)=\sin x$ عند بعض النقاط

x	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\sin x$	0.56464	0.644218	0.717356	0.78332	0.841470

استخدم صيغة الفروق الامامية لتقدير قيمة $\sin x$ عند $x=0.63$

الحل

x	$y=\sin x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0.6	0.56464				
		0.079576			
0.7	0.644218		−0.006438		
		0.073338		−0.000792	
0.8	0.717356		−0.007167		−0.001452
		0.065971		−0.00066	
0.9	0.783327		−0.007827		
		0.058144			
1	0.841471				

$$x_0=0.6\,,\quad h=0.1,\quad x_q=x_0+qh\,,\quad x_q=0.63$$

$$q=\frac{x_q-x_0}{h}=\frac{0.63-0.6}{0.1}=0.3$$

$$y(x_q) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^2 y_0 + \cdots$$

$$y(0.63) = 0.564642 + (0.3)(0.079576) + \frac{(0.3)(-0.7)}{2!}(0.006438)$$
$$+\frac{(0.3)(-0.7)(-1.7)}{3!}(-0.000729)$$
$$+\frac{(0.3)(-0.7)(-1.7)(-2.7)}{4!}(0.00006) = 0.584145$$

مثال (3)

كون كثيرة الحدود للبيانات المعطاة بالجدول

x	0	1	2	3	4	5
$y(x)$	5.2	8.0	10.4	12.4	14.0	15.2

الحل

بتكوين جدول الفروق

x	$y(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	5.2				
		2.8			
1	8.0		0.4		
		2.4			
2	10.4		-0.4		
		2.0		0	
3	12.4		-0.4		0
		1.6		0	
4	14.0		-0.4		
		1.2			
5	15.2				

واضح ان $x_0 = 0 \, , h = 1$

بالاستعانة بعلاقة نيوتن الاستكمالية الاولى نحصل على

$$y = 5.2 + +(2.8)\frac{0.4}{2}x(x-1)$$

او

$$y = 5.2 + 3x - 0.2x^2$$

و هي كثيرة الحدود المطلوبة.

(3) قانون نيوتن الثاني للاستكمال الخلفي

قانون نيوتن الاول للاستكمال غير مناسب عمليا لاستكمال الدوال قرب نهاية الجدول. في هذه الحالة نستخدم عادة قانون نيوتن الثاني للاستكمال الخلفي و سنقوم باستنتاج هذا القانون

$$\nabla = 1 - E^{-1}$$

$$E = (1-\nabla)^{-1}$$

$$y_q = y(x_q) = y(x_0 + qh)$$

نضع

$$y_q = E^q y_0 = (1-\nabla)^{-q} y_0$$

و باستخدام نظرية ذات الحدين نحصل علي

$$y_q = \left[1 + \frac{q}{1!}\nabla + \frac{q(q+1)}{2!}\nabla^2 + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\nabla^3 + \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{3!}\nabla^4 + \cdots\right] y_0$$

$$y_q = y_0 + q\nabla y_0 + \frac{q(q+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\nabla^3 y_0 + \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{3!}\nabla^4 y_0 + \cdots$$

هذه العلاقة تسمى صيغة نيوتن للاستكمال الخلفي.

مثال (1)

احسب قيمة $y(1.457)$ باستخدام البيانات التالية

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$y(x)$	1	1.331	1.728	2.147	2.744	3.375

الحل

$$x_0 = 1.4 \quad x_q = 1.457 \quad h = 0.1$$

$$q = \frac{1.457 - 1.4}{0.1} = 0.57$$

الان نكون جدول الفروق

x	$y(x)$	∇	∇^2	∇^3	∇^4	∇^5
1	1.000					
		0.331				
1.1	1.331		0.066			
		0.397		−0.044		
1.2	1.728		0.022		0.200	
		0.419		0.156		−0.500
1.3	2.147		0.178		−0.300	
		0.597		−0.144		
1.4	2.744		0.034			
		0.631				
1.5	3.375					

$$y_0 = 2.744,\ \nabla y_0 = 0.597,\ \nabla^2 y_0 = 0.178$$
$$\nabla^3 y_0 = 0.156,\ \nabla^4 y_0 = 0.200$$

بالتعويض في صيغة نيوتن للاستكمال نحصل على

$$y(1.457) = 2.744 + 0.57(0.597) + \frac{0.57(1.57)}{2}(0.178) + \frac{0.57(1.57)(2.57)}{6}(0.156) + \frac{0.57(1.57)(2.57)(3.57)}{24}(0.2)$$

(4) الخطأ في صيغتي نيوتن للاستكمال

ان قانون نيوتن الاول (الامامي) للاستكمال والذي يستخدم لاستكمال الدالة $y = f(x)$ في جوار القيمة الابتدائية x_0 هو

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{q(q-1)(q-2)\cdots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

اما قانون نيوتن الثاني (الخلفي) للاستكمال و الذي يستخدم لاستكمال الدوال قرب نهاية الجدول فهو

$$P_n(x) = y_0 + q\nabla y_0 + \frac{q(q+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \cdots + \frac{q(q+1)(q+2)\cdots(q+n-1)}{n!}\nabla^n y_0$$

النظرية التالية تحدد الخطأ التقديري (المتوقع) في هاتين الطريقتين، و هي تأخذ في الاعتبار ان $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ حيث $R_n(x)$ هو الجزء الباقي او الخطأ التقديري.

نظرية (1)

الحد الباقي لكثيرة حدود نيوتن الاستكمالية الاولى يتعين من

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)(q-n)}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\zeta)$$

حيث ζ عدد ما وسطي بين القيم $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, x$ و $q = \frac{x - x_0}{h}$.

الحد الباقي لكثيرة حدود نيوتن الاستكمالية الثانية يتعين من

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q+1)(q+n)}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\zeta)$$

حيث ζ عدد ما وسطي بين القيم $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, x$ و $q = \frac{x - x_n}{h}$.

(5) صيغة بسل للاستكمال المركزي

نعلم مما سبق ان جدول الفروق المركزية يكتب في الصورة

x_m	f_m	δf_m	$\delta^2 f_m$	$\delta^3 f_m$	$\delta^4 f_m$	$\delta^5 f_m$
x_{-2}	f_{-2}					
		$\delta f_{-3/2}$				
x_{-1}	f_{-1}		$\delta^2 f_{-1}$			
		$\delta f_{-1/2}$		$\delta^3 f_{-1/2}$		
x_0	f_0		$\delta^2 f_0$		$\delta^4 f_0$	
		$\delta f_{1/2}$		$\delta^3 f_{1/2}$		$\delta^5 f_{1/2}$
x_1	f_1		$\delta^2 f_1$		$\delta^4 f_1$	
		$\delta f_{3/2}$		$\delta^3 f_{3/2}$		
x_2	f_2		$\delta^2 f_2$			
		$\delta f_{5/2}$				
x_3	f_3					

صيغة بسل للاستكمال المركزي تأخذ الشكل

$$f_s = f_0 + B_1 \delta f_{1/2} + B_2\left(\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1\right) + B_3 \delta^3 f_{1/2} + B_4\left(\delta^4 f_0 + \delta^4 f_1\right) + \cdots \qquad (1)$$

حيث تسمى $B_1, B_2, \cdots$ معاملات بسل للاستكمال.

لإيجاد قيم هذه المعاملات نستخدم العلاقات الاتية

$$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$$

بالضرب في $E^{1/2}$

$$E^{1/2}\delta = E - 1$$

$$E^{1/2}\delta = \Delta$$

$$E\delta^2 = \Delta^2$$

$$\delta^2 = \frac{\Delta^2}{E} = \frac{\Delta^2}{1+\Delta} \quad (\text{Since } E = 1+\Delta)$$

باستخدام مؤثر الازاحة δ العلاقة (1) يمكن كتابتها في الصورة

$$f_s = f_0 + B_1\left(\delta E^{1/2} f_0\right) + B_2\left(\delta^2 + \delta^2 E\right) f_0 + B_3 \delta^3 E^{1/2} f_0$$
$$+ B_4\left(\delta^4 + \delta^4 E\right) f_0 + \cdots$$

و لكن

$$f_s = E^s f_0$$
$$E^s f_0 = \left[1 + B_1 \delta E^{1/2} + B_2\left(\delta^2 + \delta^2 E\right) + B_3 \delta^3 E^{1/2}\right.$$
$$\left. + B_4\left(\delta^4 + \delta^4 E\right) + \cdots\right] f_0$$

بمساواة المؤثرات في الطرفين نحصل على

$$E^s = 1 + B_1 \delta E^{1/2} + B_2\left(\delta^2 + \delta^2 E\right) + B_3 \delta^3 E^{1/2} + B_4\left(\delta^4 + \delta^4 E\right) + \cdots$$
$$(1+\Delta)^s = 1 + B_1 \Delta + B_2\left[\frac{\Delta^2}{1+\Delta} + \Delta^2\right] + B_3 \frac{\Delta^2}{1+\Delta}\Delta$$
$$+ B_4\left[\frac{\Delta^4}{(1+\Delta)^2} + \frac{\Delta^4}{1+\Delta}\right] + \cdots$$
$$1 + \frac{s}{1!}\Delta + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!}\Delta^4 + \cdots$$
$$= 1 + B_1 \Delta + B_2\left\{\Delta^2 + \Delta^2 (1+\Delta)^{-1}\right\} + B_3 \Delta^3 (1+\Delta)^{-1}$$
$$+ B_4\left\{\Delta^4\left[(1+\Delta)^{-2} + (1+\Delta)^{-1}\right]\right\} + \cdots$$

$$= 1 + B_1 \Delta + B_2 \Delta^2\left\{1 + 1 - \Delta + \Delta^2 - \Delta^3 + \cdots\right\}$$
$$+ B_3 \Delta^3\left\{1 - \Delta + \Delta^2 - \Delta^3 + \cdots\right\}$$
$$+ B_4 \Delta^4\left\{1 - 2\Delta + 3\Delta^2 - 4\Delta^3 + \cdots + 1 - \Delta + \Delta^2 - \Delta^3 + \cdots\right\} + \cdots$$

بمقارنة المعاملات في الطرفين

معامل Δ

$$B_1 = s$$

معامل Δ^2

$$2B_2 = \frac{s(s-1)}{2} \Rightarrow B_2 = \frac{s(s-1)}{4}$$

معامل Δ^3

$$-B_2 + B_3 = \frac{s(s-1)(s-1/2)}{6} \Rightarrow B_3 = \frac{s(s-1)(2s-1)}{2(3!)}$$

معامل Δ^4

$$B_2 - B_3 + 2B_4 = \frac{s(s-1)(s-1/2)(s-3)}{4!} \Rightarrow B_4 = \frac{(s+1)(s-1)(s-2)}{2(4!)}$$

و هكذا

بالتعويض بقيم هذه المعاملات في الصيغة (1) نحصل علي

$$f_s = f_0 + s\delta f_{1/2} + \frac{s(s-1)}{2(2!)}\left(\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1\right) + \frac{s(s-1)(s-1/2)}{2(3!)}\delta^3 f_{1/2}$$
$$+ \frac{(s+1)(s)(s-1)}{2(4!)}\left(\delta^4 f_0 + \delta^4 f_1\right) + \cdots$$

و هذه العلاقة تسمي صيغة بسل للاستكمال المركزي

مثال (1)

باستخدام صيغة بسل للاستكمال المركزي احسب قيمة $f(x)$ عند $x = 0.36$ من البيانات الاتية.

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(x)$	1.172	1.008	0.878	0.828	0.720	0.692

الحل

$$x_0 = 0.3\,,\;\; x_s = 0.36,\;\; h = 0.1$$

$$s = \frac{0.36 - 0.3}{0.1} = 0.6$$

x	$f(x)$	$\delta f_{1/2}$	$\delta^2 f_0$	$\delta^3 f_{-1/2}$	$\delta^4 f_1$
0.1	1.172				
		−0.164			
0.2	1.008		0.034		
		−0.13		0.046	
0.3	0.878		0.08		−0.184
		−0.05		−0.138	
0.4	0.828		−0.058		0.276
		−0.108		0.138	
0.5	0.720		0.08		
		−0.028			
0.6	0.692				

$$f_0 = 0.878, \qquad \delta f_{1/2} = -0.05, \qquad \delta^2 f_0 = 0.08,$$

$$\delta^2 f_1 = -0.05, \quad \delta^3 f_{1/2} = -0.138$$

بالتعويض

$$f(0.36) = 0.878 + 0.6(-0.05) + \frac{(0.6)(-0.4)}{4}(0.08 - 0.058)$$

$$+ \frac{(0.6)(-0.4)(0.1)}{6}(-0.138) = 0.847232$$

(6) صيغة لاجرانج الاستكمالية

غالبية القوانين او الصيغ المستخدمة في الاستكمال تكون مناسبة فقط عندما تكون المسافات بين النقاط $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ متساوية البعد $\left(x_{i+1} - x_i = h\right)$ والصيغة الاكثر شمولا والتي

تعرف بصيغة لاجرانج الاستكمالية تستخدم لأي مجموعة من النقاط ولا يشترط فيها ان تكون المسافات بين النقاط متساوية.

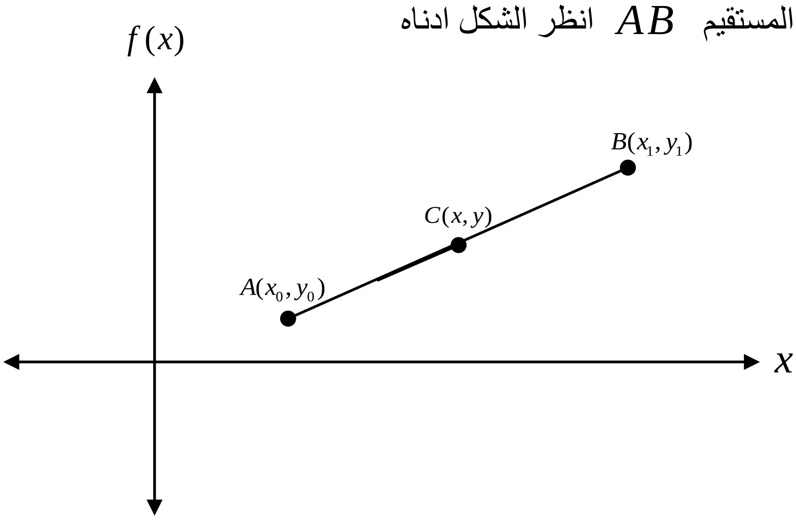
سوف نبدأ بدراسة كثيرة حدود يمر الرسم البياني الخاص بها خلال زوجين من النقاط $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ انظر شكل (1). ان الخط الذي يملا بهاتين النقطتين تمثله كثيرة حدود خطية.

اثبات قانون الاستكمال الخطى

لو كان لدينا الدالة $y = f(x)$ والمعروفة قيمتها عند x_0, x_1 اي ان

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1)$$

فان المنحنى من الدرجة الادنى والذي يمر بالنقطتين $A(x_0, y_0)$ و $B(x_1, y_1)$ هو الخط المستقيم AB انظر الشكل ادناه



شكل (1)

ونستطيع تقدير قيمة الدالة $f(x)$ عند اي نقطة بين هاتين النقطتين (مثل النقطة C) من معرفة معادلة الخط المستقيم AB .

وبما ان النقاط الثلاثة A و B و C تقع على نفس الخط المستقيم فان ميل القطعة AC يساوي ميل القطعة AB اي ان

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

ومنها

$$y-y_0=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}(y_1-y_0)$$

اي ان

$$y=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}(y_1-y_0)+y_0$$

$$y=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1+\left(1-\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)y_0$$

$$y=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1+\frac{x_1-x}{x_1-x_0}y_0$$

وبالتالي فان

$$y=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

اي ان معادلة الخط المستقيم الذي يصف هذه الدالة هي

$$P(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

لاحظ هنا ان

$$P(x_0)=y_0\ ,\ P(x_1)=y_1$$

ويمكن كتابة المعادلة (1) بالشكل

$$\begin{aligned}P(x)&=L_0(x)y_0+L_1(x)y_1\\&=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)\end{aligned}$$

حيث المعاملات

$$L_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\ ,\ L_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

تسمى معاملات لاجرانج و يرمز لها بصيغتها العامة بالرمز $L_{n,k}(x)$ حيث n يشير الى درجة كثيرة الحدود و k يشير الى رقم المعامل

من الواضح ان

$$L_0(x_0)=1,\ L_0(x_1)=0$$
$$L_1(x_0)=0,\ L_1(x_1)=1$$

مثال (1)

اوجد الدالة الاستكمالية الخطية التي تتوافق مع الدالة $f(x)$ عند النقطتين $(1,1),(4,2)$ ثم اوجد قيمة الدالة عند $x=3$

الحل

بفرض ان $(x_0,y_0)=(4,2),(x_1,y_1)=(1,1)$ فان

$$L_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=\frac{x-1}{4-1}=\frac{1}{3}(x-1)$$
$$L_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{x-4}{1-4}=-\frac{1}{3}(x-4)$$

وحيث ان

$$f(x_0)=y_0=2,\ f(x_1)=y_1=1$$

فتكون الدالة الاستكمالية الخطية المطلوبة

$$P(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)$$
$$=\frac{1}{3}(x-1)(2)-\frac{1}{3}(x-4)(1)$$
$$=\frac{2}{3}(x-1)-\frac{1}{3}(x-4)$$
$$=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$

وقيمة الدالة عند $x=3$ تتعين من

$$P(3)=\frac{1}{3}(3)+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

صيغة لاجرانج للاستكمال التربيعي

لنفرض الان الدالة $f(x)$ معرفة عند ثلاث نقاط مختلفة هي

$$(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$$

فان دالة الاستكمال التربيعية يمكن ان تعرف كالتالي

$$P(x)=L_0(x)y_0+L_1(x)y_1+L_2(x)y_2 \qquad (1)$$

حيث

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$
$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$
$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

تسمى (1) صيغة لاجرانج للاستكمال التربيعي.

والدوال

$$L_0(x),L_1(x),L_2(x)$$

تسمى دوال لاجرانج وهي تحقق

$$L_i(x_i)=1,\ L_i(x_j)=0, i\neq j,\quad i,j=0,1,2$$

مثال (2)

كون كثيرة حدود لاجرانج الاستكمالية التربيعية المتوافقة مع الدالة $y=f(x)$ عند النقاط $(0,-1),(1,-1),(2,7)$ ثم اوجد $f(3)$.

الحل

نفرض ان النقاط المعطاة تم جدولتها كالتالي

i	0	1	2
x_i	0	1	2
y_i	0	-1	7

$$L_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}=\frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}=-x(x-2)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}=\frac{x}{2}(x-1)$$

فتصبح كثيرة حدود لاجرانج التربيعية كالتالي

$$P_2(x)=L_0(x)y_0+L_1(x)y_1+L_2(x)y_2$$
$$=-\frac{1}{2}(x-1)(x-2)+x(x-2)+\frac{7}{2}x(x-1)$$

$$f(3)=-\frac{1}{2}(3-1)(3-2)+3(3-2)+\frac{7}{2}3(3-1)=23$$

مثال (3)

اوجد صيغة لاجرانج للاستكمال من الدرجة الثانية من البيانات الاتية

x	-2	0	1
y	10.75	-1.65	1.45

ثم اوجد $f(0.5)$.

الحل

صيغة لاجرانج للاستكمال من الدرجة الثانية تكون في الصورة

$$
\begin{aligned}
f(x) &= L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 \\
&= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f_1 \\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f_2 \\
&= \frac{(x-0)(x-1)}{(-2-0)(-2-1)}(10.75) + \frac{(x+2)(x-1)}{(0+2)(0-1)}(-1.65) \\
&+ \frac{(x+2)(x-0)}{(1+2)(1-0)}(1.45) \\
&= \frac{1}{6}(x-1)(10.75) + \frac{1}{2}(x+2)(x-1)(1.65) \\
&+ \frac{1}{3}x(x+2)(1.45)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(0.5) &= \frac{1}{6}(0.5-1)(10.75) + \frac{1}{2}(0.5+2)(0.5-1)(1.65) \\
&+ \frac{1}{3}(0.5)(0.5+2)(1.45) = 0.8755
\end{aligned}
$$

صيغة لاجرانج العامة للاستكمال

قبل البدء في استنتاج صيغة لاجرانج العامة نذكر النظرية التالية

نظرية (2)

اذا كانت $n \geq 0$, $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ هي $n+1$ من القيم المختلفة و القيم $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$ هي $n+1$ من القيم المناظرة لها و لا يشترط ان تكون مختلفة عندئذ فان من بين كل كثيرات الحدود التي تكون درجتها اقل من او تساوي n يوجد كثيرة حدود واحدة $P_n(x)$ تحقق ان

$$
P_n(x_i) = y_i, i = 0,1,2,\cdots,n
$$

- **الصيغة العامة**

في صيغة لاجرانج العامة نفرض انه في الفترة المغلقة $[a,b]$ لدينا $n+1$ من النقاط $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ ومعلوم لدينا قيم الدالة $y_i = f(x_i)$ عند هذه النقاط والمطلوب تكوين كثيرة الحدود $P_n(x)$ من درجة لا تتعدى n وتحقق الشرط

$$P_n(x_i) = y_i$$

ونحاول اولا ايجاد كثيرة الحدود $L_n(x_i)$ التي تحقق الشرط

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

وتعرف كالتالي

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

ويمكننا الان تعيين كثيرة الحدود $P_n(x)$ التي تحقق الشرط

$$L_i(x_i) = y_i$$

على الصورة

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) y_i = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

وهذه هي علاقة لاجرانج الاستكمالية.

مثال (3)

استخدم جدول البيانات التالي لإنشاء كثيرة حدود استكمال مناسبة ثم احسب قيمتها عند $x = 5$

i	0	1	2	3	4
x_i	1	2	3	4	6
y_i	1	8	27	64	216

الحل

لدينا $n = 4$ وبالتالي

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}$$

$$= -\frac{1}{30}(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}$$

$$= -\frac{1}{8}(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}$$

$$= -\frac{1}{8}(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}$$

$$= \frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-4)(x-6)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}$$

$$= -\frac{1}{12}(x-1)(x-2)(x-3)(x-6)$$

$$L_4(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$
$$=\frac{1}{120}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$P_4(x)=L_0(x)y_0+L_1(x)y_1+L_2(x)y_2+L_3(x)y_3+L_4(x)y_4$$
$$=-\frac{1}{30}(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)(1)$$
$$-\frac{1}{8}(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)(8)$$
$$+\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-4)(x-6)(27)$$
$$-\frac{1}{12}(x-1)(x-2)(x-3)(x-6)(64)$$
$$+\frac{1}{120}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(216)$$

و لإيجاد قيمة كثيرة حدود الاستكمال عند $x=5$ معوض عنها في $P_4(x)$ لتصبح

$$P_4(5)=-\frac{1}{30}(5-2)(5-3)(5-4)(5-6)$$
$$-(5-1)(5-3)(5-4)(5-6)$$
$$+\frac{27}{6}(5-1)(5-2)(5-4)(5-6)$$
$$-\frac{64}{12}(5-1)(5-2)(5-3)(5-6)$$
$$+\frac{216}{120}(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)=125$$

الخطأ في صيغة لاجرانج

سبق ان درسنا ان قانون لاجرانج الذي يستخدم لاستكمال الدالة $y=f(x)$ عند اي قيمة x يتعين من

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} L_i(x_i)y_i$$

حيث

$$L_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$
$$=\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}$$

النظرية التالية تحدد الخطأ التقديري (المتوقع) في هذه الطريقة

نظرية (3)

الحد الباقي لكثيرة حدود لاجرانج الاستكمالية يتعين من

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k) \quad (*)$$

حيث ξ عدد ما وسطى بين القيم $x_0, x_1, \cdots, x_n$ اي ان $x_0\le\xi\le x_n$.

لاحظ انه عند اي نقطة من النقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ فإن $R_n(x_i)=0$.

مثال (4)

- احسب الخطأ المتوقع عند استكمال الدالة $f(x)=\sin(\pi x)$ عند النقطة $x=\frac{1}{3}$ باستخدام كثيرة حدود لاجرانج باختيار النقاط $x_0=0, x_1=\frac{1}{6}, x_2=\frac{1}{2}$.
- احسب خطأ الاستكمال وذلك عند استكمال الدالة $f(x)=\sin(\pi x)$ عند النقطة $x=\frac{1}{3}$ باستخدام كثيرة لاجرانج باختيار النقاط $x_0=0, x_1=\frac{\pi}{6}, x_2=\frac{\pi}{2}$.

الحل

- بالتعويض في (*)

$$R_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(2+1)!}f^{(2+1)}(\xi)$$
$$=\frac{(x-0)(x-1/2)(x-1/6)}{3!}f^{(3)}(\xi)$$

وحيث ان

$$f'(x)=\pi\cos(\pi x),f''(x)=-\pi^2\sin(\pi x),f'''(x)=-\pi^3\cos(\pi x)$$

فان

$$R_2(x)=-\frac{x(x-1/2)(x-1/6)}{6}\pi^3\cos(\pi\xi)$$

ولكن $|\cos(\pi\xi)|\le 1$ و ان $x=1/3$ وبذلك يكون

$$\left|R_2\left(\frac{1}{3}\right)\right|\le\left|-\frac{(1/3)(1/3-1/2)(1/3-1/6)}{6}\right|\pi^3=0.04791$$

- باستخدام (1) ، (*) نجد ان

$$y_0=\sin 0=0,\ y_1=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ y_2=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$P_2(x)=L_0(x)y_0+L_1(x)y_1+L_2(x)y_2$$

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-1/6)(x-1/2)}{(-1/6)(-1/2)}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{x(x-1/2)}{(1/6)(1/6-1/2)}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{x(x-1/6)}{(1/2)(1/2-1/6)}$$

$$P_2(x)=L_0(x)y_0+L_1(x)y_1+L_2(x)y_2$$
$$=\frac{(x-1/6)(x-1/2)}{(-1/6)(-1/2)}(0)$$
$$+\frac{x(x-1/2)}{(1/6)(1/6-1/2)}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{x(x-1/6)}{(1/2)(1/2-1/6)}(1)$$

$$P_2(x)=-9x(x-1/2)+6x(x-1/6)$$

$$|f(1/3)-P_2(1/3)|=\left|\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-P_2(1/3)\right|$$
$$=0.866234-0.83333=0.032903$$

مثال (5)

اوجد كثيرة حدود لاجرانج والذى يمر منحناها بالنقاط التالية

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	5	7	9

الحل

الصيغة العامة ل كثيرة حدود لاجرانج هي

$$P_3(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)+L_3(x)f(x_3)$$

(لاحظ ان كثيرة حدود لاجرانج من الدرجة الثالثة لان عدد النقاط المعطاة هو اربعة).

حيث

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}$$
$$=-\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}$$
$$=\frac{1}{2}x(x-2)(x-3)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}$$
$$=-\frac{1}{2}x(x-1)(x-3)$$

$$L_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$$
$$=\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$$

وبالتالي فان

$$P_3(x)=-\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)(1)+\frac{1}{2}x(x-2)(x-3)(5)$$
$$-\frac{1}{2}x(x-1)(x-3)(7)+\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)(9)$$

$$P_3(x)=-\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)+\frac{5}{2}x(x-2)(x-3)$$
$$-\frac{7}{2}x(x-1)(x-3)+\frac{9}{6}x(x-1)(x-2)$$

لاحظ ان

$$P_3(0) = -\frac{1}{6}(0-1)(0-2)(0-3) = 1 = f(0)$$

$$P_3(1) = \frac{5}{2}(1)(1-2)(1-3) = 5 = f(1)$$

$$P_3(2) = -\frac{7}{2}(2)(2-1)(2-3) = 7 = f(2)$$

$$P_3(3) = \frac{9}{6}(3)(3-1)(3-2) = 9 = f(3)$$

ونستطيع استخدام صيغة كثيرة الحدود اعلاه لتقدير قيمة الدالة عند اي قيمة من قيم المتغير x في الفترة $[0,3]$ فمثلا

$$\begin{aligned} P_3(2.3) = &-\frac{1}{6}(2.3-1)(2.3-2)(2.3-3) \\ &+\frac{5}{2}(2.3)(2.3-2)(2.3-3) \\ &-\frac{7}{2}(2.3)(2.3-1)(2.3-3) \\ &+\frac{9}{6}(2.3)(2.3-1)(2.3-2) = 7.509 \end{aligned}$$

مثال (6)

اوجد كثيرة حدود لاجرانج لتقدير قيمة الدالة $f(x) = \sqrt{x+1}$ في الفترة $[0,3]$ ، استخدم النقاط $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$.

الحل

الصيغة العامة الكثيرة حدود لاجرانج هي

$$P_3(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3)$$

حيث

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}$$
$$=-\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}$$
$$=\frac{1}{2}x(x-2)(x-3)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}$$
$$=-\frac{1}{2}x(x-1)(x-3)$$

$$L_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$$
$$=\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$$

و بالتالي فان

$$P_3(x)=-\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)f(0)+\frac{1}{2}x(x-2)(x-3)f(1)$$
$$-\frac{1}{2}x(x-1)(x-3)f(2)+\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)f(3)$$

$$P_3(x)=-\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)+0.7071x(x-2)(x-3)$$
$$-0.8660x(x-1)(x-3)+\frac{1}{3}x(x-1)(x-2)$$

وتستطيع استخدام كثيرة الحدود هذه لتقدير قيم الدالة $f(x)=\sqrt{1+x}$ في الفترة $[0,3]$

فمثلا القيمة التقريبية ل $\sqrt{2.5}$ هي

$$\begin{aligned}\sqrt{2.5} \approx P_3(1.5) &= -\frac{1}{6}(1.5-1)(1.5-2)(1.5-3) \\ &+0.7071(1.5)(1.5-2)(1.5-3) \\ &-0.8660(1.5)(1.5-1)(1.5-3) \\ &+\frac{1}{3}(1.5)(1.5-1)(1.5-2)=1.5822\end{aligned}$$

مثال (7)

الجدول التالي لقيم الدالة $y=f(x)$ احسب $f(323.5)$

x	321.0	322.8	324.2	325.0
y	2.50651	2.50893	2.51081	2.5118

الحل

نفرض ان $x=323.5$ ، $n=3$ فنحصل من العلاقة (4) علي

$$P_3(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)+L_3(x)f(x_3)$$

$$\begin{aligned}L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \\ &= \frac{(323.5-322.8)(323.5-324.2)(323.5-325.0)}{(321-322.8)(321-324.2)(321-325.0)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ &= \frac{(323.5-321.0)(323.5-322.8)(323.5-325.0)}{(322.8-321)(322.8-324.2)(322.8-325.0)}\end{aligned}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$
$$=\frac{(323.5-321.0)(323.5-322.8)(323.5-325.0)}{(324.2-321)(324.2-322.8)(324.2-325.0)}$$

$$L_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$
$$=\frac{(323.5-321.0)(323.5-322.8)(323.5-324.2)}{(325.0-321)(325.0-322.8)(325.0-324.2)}$$

بالتعويض عن $y_3, y_2, y_1, y_0, L_3, L_2, L_1, L_0$ نحصل علي

$$f\ (323.5)=-0.07996+1.8794+1.83897-0.43708=2.50987$$

الفصل الخامس

التفاضل العددي $(\text{Numerical Differentiation})$

عند حل المسائل العملية كثيرا ما يلزم تعيين المشتقات من رتب معينة للدالة $y=f(x)$ المعطاة جدولياً ومن المحتمل ايضا ان تكون عملية تفاضل الدالة $f(x)$ مباشرة عملية معقدة بسبب تعقيد الصيغة التحليلية لها وفي هذه الحالات نلجأ عادة الى التفاضل العددي.

و سوف ندرس مجموعتين من طرق التفاضل تعتمد الاولى منهما على الفروق المحدودة ام الثانية فتعتمد على صيغ الاستكمال.

تقريب المشتقات بطريقة الفروق المحدودة

$(\text{Finite Difference Approximation of Derivatives})$

نفرض ان النقاط $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ متساوية البعد اي ان

$$x_{i+1}-x_i=h,\ \ i=0,1,2,\cdots,n-1$$

ونفرض ان الدالة $y=y(x)$ تأخذ القيم التالية

$$y_i=y(x_i),\ \ i=0,1,2,\cdots,n$$

تقريب المشتقة الاولي لدالة تعتمد على نقطتين فقط

نأخذ في الاعتبار صيغة تايلور لإيجاد متسلسلة الدالة $f(x)$ عند النقطة $x=a$ وهي بالصورة التالية

$$f(x)=f(a)+(x-a)f^{(1)}(a)+\frac{1}{2!}(x-a)^2f^{(2)}(a)+\cdots+\frac{1}{n!}(x-a)^nf^{(n)}(a) \qquad (1)$$

و بأخذ $x_i=a$ ، $x=x_i+h$ فتصبح $x-a=x_i+h-x_i=h$ وبالتالي تصبح المتسلسلة (1) كتالي

$$f(x_i+h)=f(x_i)+hf^{(1)}(x_i)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_i)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_i)+\cdots \qquad (2)$$

ومنها

$$f(x_i+h)-f(x_i)=hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i)$$
$$+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_i)+\cdots$$

و بالاكتفاء بالحدود حتى الدرجة الثانية من المتسلسلة

$$f(x_i+h)-f(x_i)=hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(\xi),\quad x_i\le\xi\le x_i+h$$

وبالقسمة على h

$$f'(x_i)=\frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h}-\frac{h}{2}f''(\xi),\quad x_i\le\xi\le x_i+h \qquad (3)$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$f'(x_i)=F+E_F,$$
$$F=\frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h},E_F=-\frac{h}{2}f''(\xi),\quad x_i\le\xi\le x_i+h$$

تسمى (3) صيغة الفروق الامامية لحساب المشتقة الاولى عدديا.

و بالعودة لمتسلسلة تايلور للدالة $f(x)$ حول النقطة $x=a$ الممثلة بالمعادلة (1)

و بأخذ $x_i=a$ ، $x=x_i-h$ فتصبح $x-a=x_i-h-x_i=-h$

وبالتالي تصبح المتسلسلة

$$f(x_i-h)=f(x_i)-hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i)-\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_i)+\cdots \qquad (4)$$

و بالاكتفاء بالحدود حتى الدرجة الثانية

$$f(x_i-h)-f(x_i)=-hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(\xi),\quad x_i-h\le\xi\le x_i$$

وبالقسمة على $-h$

$$f'(x_i)=\frac{f(x_i)-f(x_i-h)}{h}+\frac{h}{2}f''(\xi),\quad x_i-h\le\xi\le x_i \qquad (5)$$

تسمى (5) صيغة الفروق الخلفية لحساب المشتقة الاولى عدديا و التي يمكن كتابتها على الصورة

$$f'(x_i)=B+E_B,$$
$$B=\frac{f(x_i)-f(x_i-h)}{h}, E_F=-\frac{h}{2}f''(\xi),\quad x_i-h\le\xi\le x_i$$

و تعتبر الصيغتان الامامية و الخلفية من صيغ الفروق ذات النقطتين حيث انها تستخدم النقطة x_i ونقطة تالية او نقطة سابقة.

مثال (1)

اوجد قيمة تقريبية للمشتقة الاولي للدالة $f(x)=\cos x$ عند النقطة $x=\pi/4$ باستخدام صيغة الفروق الامامية ثم احسب الخطأ العددي المطلق، و كذلك الخطأ المتوقع و وضح مدى توافقهما (خذ $h=0.01$).

الحل

صيغة الفروق الامامية تتعين من

$$f'(x_i)=F+E_F,$$

حيث

$$F=\frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h}, E_F=-\frac{h}{2}f''(\xi),\quad x_i\le\xi\le x_i+h$$

و بالحساب نجد ان

$$F=\frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h}=\frac{0.700000476-0.707106781}{0.01}=0.71063051$$

حد الخطأ هو

$$|E_F|=\frac{h}{2}f''(\xi)=\frac{0.01}{2}|\cos\xi|$$

وحيث ان $|\cos\xi|\le 1$ إذن $|E_F|\le 0.005$

كما يمكن تقدير الخطأ بشكل أدق اذا اخذنا في الاعتبار $\frac{\pi}{4} \le \xi \le \frac{\pi}{4} + h$ و خلالها يكون

$$|\cos \xi| \le (0.005)(0.707107)$$

اي ان

$$|\cos \xi| \le 0.0035355$$

الخطأ العددي هو

$$|E| = |f\,'(\xi) - \mathrm{F}| = \left| -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 0.71063051 \right| = 0.003523729$$

ومن الواضح توافق الخطأ العددي و الخطأ المتوقع حتى 4 ارقام عشرية.

مثال (2)

اوجد قيمة تقريبية للمشتقة الاولي للدالة المعرفة كتالي عند $x = 0.2$ باستخدام صيغتي الفروق الامامية والخلفية احسب الخطأ العددي المطلق و كذا الخطأ المتوقع و وضح مدي توافقهما علما بان $f(x) = x^4$.

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625

الحل

باستخدام صيغة الفروق الامامية نجد ان

$$f\,'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = \frac{0.0081 - 0.0016}{0.1} = 0.065$$

$$f\,'(0.2) = 0.032 \quad |\mathrm{Error}| = |0.065 - 0.032| = 0.033$$

كان هذا للصيغة الامامية اما الصيغة الخلفية فتتعين من

$$f\,'(x_i) = \frac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{h} = \frac{0.0016 - 0.0001}{0.1} = 0.015$$

$$|Error| = |0.032 - 0.015| = 0.017$$

تقدير الخطأ المتوقع في صيغة الفروق الامامية و الخلفية يتعين من

$$\left|\text{Error}\right| = \frac{h}{2}\left|f''(\xi)\right| = \frac{0.1}{2}\left(12\xi^2\right) = 0.6\xi^2$$

وباختيار $\xi = x = 0.2$

$$\left|\text{Error}\right| = 0.6\left(0.2\right)^2 = 0.6\left(0.04\right) = 0.024$$

تقريب المشتقة الاولي للدالة تعتمد على ثلاث نقاط

باستخدام متسلسلة تايلور للدالة $f(x)$ حول النقطة $x = a$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f^{(1)}(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a) \qquad (1)$$

و بأخذ $x_i = a$ ، $x = x_i + h$ فتصبح $x - a = x_i + h - x_i = h$ وبالتالي تصبح المتسلسلة (1) كالتالي

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf^{(1)}(x_i) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_i) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi_1)\cdots \qquad (2)$$

و بأخذ $x_i = a$ ، $x = x_i - h$ فتصبح $x - a = x_i - h - x_i = -h$ وبالتالي تصبح المتسلسلة (1) كالتالي

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf^{(1)}(x_i) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_i) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi_2)\cdots \qquad (3)$$

و لاشتقاق صيغة ذات ثلاث نقاط نستخدم نقطة سابقة ل x_i و نقطة تالية لها و نطرح المعادلة (2) من (3) ينتج ان

$$f(x_i+h)-f(x_i-h)=\left[f(x_i)+hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi_1)\right]$$
$$-\left[f(x_i)-hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i)-\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi_2)\right]$$

اذن

$$f(x_i+h)-f(x_i-h)=2hf'(x_i)+\frac{h^3}{6}\left[f^{(3)}(\xi_1)+f^{(3)}(\xi_2)\right]$$
$$f'(x_i)=\frac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h}-\frac{h^2}{12}\left[f^{(3)}(\xi_1)+f^{(3)}(\xi_2)\right]$$

و اذا اخذنا (باستخدام نظرية القيمة المتوسطة)

$$f'''(\xi)=\frac{1}{2}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]$$

فان الصيغة المطلوبة تصبح

$$f'(x_i)=\frac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h}-\frac{h^2}{6}f'''(\xi) \qquad (4)$$

تسمي الصيغة (4) صيغة الفروق المركزية للمشتقة الاولى ويمكن كتابتها علي الصورة

$$f'(x_i)=C+E_C$$

حيث

$$C=\frac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h}\ ,\ E_C=-\frac{h^2}{6}f'''(\xi)$$

مثال (1)

اوجد قيمة تقريبية للمشتقة الاولي للدالة المجدولة كالتالي عند $x=0.2$ باستخدام صيغة الفروق المركزية. احسب الخطأ العددي المطلق وكذا الخطأ المتوقع و وضح مدى توافقهما علما بان $f(x)=x^4$

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625

الحل

$$x_i = 0.2, f(x_i + h) = 0.0081, f(x_i - h) = 0.0001, h = 0.1$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} = \frac{0.0081 - 0.0001}{2(0.1)} = \frac{0.008}{0.2} = 0.04$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3, f_e'(0.2) = 4(0.2)^3 = 0.032$$

اذن خطأ التقريب

$$|\text{Error}| = |f_e'(x_1) - f_a'(x_1)| = |0.04 - 0.032| = 0.08$$

و يكون الخطأ المتوقع في حساب المشتقة الاولى

$$f''(x) = 12x^2, f'''(x) = 24x$$

$$|R| = \frac{h^2}{6}|f'''(\xi)| = \frac{(0.1)^2}{6}(24\xi) = (0.01)(4\xi) \le (0.04)(0.1) = 0.004$$

المشتقة الثانية لدالة تعتمد على ثلاث نقاط

لحساب تقريب للمشتقة الثانية نجمع المعادلتين (2) ، (3) في الجزء السابق، لنحصل على

$$f(x_i + h) + f(x_i - h)$$
$$= \left[f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x_i) + \cdots \right]$$
$$+ \left[f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x_i) + \cdots \right]$$

إذن

$$f(x_i + h) + f(x_i - h) = 2f(x_i) + h^2 f''(x_i)$$
$$+ \frac{2h^4}{4!} f^{(4)}(x_i) + \frac{2h^6}{6!} f^{(4)}(x_i) + \cdots$$

و بالاكتفاء بالحدود حتى الدرجة الرابعة من المتسلسلة

$$f(x_i+h)+f(x_i-h)=2f(x_i)+h^2f''(x_i)+\frac{2h^4}{4!}f^{(4)}(\xi)$$
$$x_i-h\le\xi\le x_i+h$$

و بالقسمة علي h^2

$$f''(x_i)=\frac{f(x_i+h)-2f(x_i)+f(x_i-h)}{h^2}-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$$
$$x_i-h\le\xi\le x_i+h$$

و هي تقريب للمشتقة الثانية باستخدام صيغ الفروق

مثال (1)

اوجد قيمة تقريبية للمشتقة الثانية للدالة المجدولة كالتالي عند $x=0.2$. باستخدام صيغة فروق مناسبة احسب الخطأ العددي المطلق وكذا الخطأ المتوقع و وضح مدى توافقهما علما بان $f(x)=x^4$

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625

الحل

صيغة الفروق للمشتقة الثانية تتعين من

$$f''(x_i)=\frac{f(x_i+h)-2f(x_i)+f(x_i-h)}{h^2}-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$$
$$x_i-h\le\xi\le x_i+h$$

$$f''(0.2)=\frac{0.0081-2(0.0016)+0.0001}{(0.1)^2}=0.5$$

$$f''(x)=12x^2,\ f_e''(0.2)=12(0.2)=0.48$$

اذن خطأ التقريب

$$|\text{Error}| = |f_e''(x_1) - f_a''(x)| = |0.48 - 0.5| = 0.02$$

و يكون الخطأ المتوقع في حساب المشتقة الثانية

$$|R| = \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi) = \frac{(0.1)^2}{12}(24) = 0.02$$

تقريب المشتقات كدالة باشتقاق صيغ الاستكمال

نفرض ان لدينا الدالة $y = f(x)$ المعطاة في النقاط متساوية البعد x_i (حيث $i = 0,1,2,\cdots,n$) في الفترة المغلقة $[a,b]$ بواسطة القيم $y_i = f(x_i)$

لتعيين المشتقات $y' = f'(x)$ ، $y'' = f''(x)$ الى اخره في الفترة $[a,b]$ نستبدل الدالة $y = f(x)$ بالتقريب بكثيرة الحدود الإستكمالية المكونة لمجموعة النقاط $x_0, x_1, \cdots, x_k \ (k \le n)$.

و يمكن استخدام اي من صيغ الإستكمالية التي درست في الفصل السابق و سوف ندرس احدى هذه الصيغ كنموذج.

(1-2-4) طريقة نيوتن للاستكمال الامامي

لدينا

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots \qquad (1)$$

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \ h = x_{i+1} - x_i \ , \ i = 0,1,2,\cdots$$

و بإجراء عملية ضرب الاقواس المحتوية على q نحصل على

$$y(x)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q^2-q}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{q^3-3q^2+2q}{6}\Delta^3 y_0$$
$$+\frac{q^4-6q^3+11q^2-6q}{24}\Delta^4 y_0+\cdots$$

وحيث ان

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}=\frac{1}{h}\frac{dy}{dq}$$

فان

$$y'(x)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0+\frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0\right.$$
$$\left.+\frac{4q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0+\cdots\right] \qquad (2)$$

وبالمثل و حيث ان

$$y''(x)=\frac{d(y')}{dx}=\frac{d(y')}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}=\frac{1}{h}\frac{dy'}{dq}$$

$$y''(x)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0+(q-1)\Delta^3 y_0\right.$$
$$\left.+\frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0+\cdots\right] \qquad (3)$$

و بالطريقة نفسها يمكن اذا لزم الامر حساب مشتقات الدالة $y(x)$ من اي رتبة و نشير الى انه عند تعيين المشتقات $y'(x), y''(x),\cdots$ في نقطة مثبتة x يجب ان نأخذ x_0 بأقرب قيمة جدولية من قيم المتغير المستقل للدالة $y(x)$.

ويطلب احيانا تعيين مشتقات الدالة $y(x)$ في النقاط الاساسية الجدولية x_i و في هذه الحالة تكون علاقات التفاضل العددي اكثر بساطة وحيث ان كل قيمة جدولية يمكن اعتبارها بمثابة القيم الابتدائية نضع $x=x_0, q=0$ عندئذ نحصل على

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y + \cdots\right]_{q=0} \quad (4)$$

$$y''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \cdots\right]_{q=0} \quad (5)$$

مثال (1)

اوجد قيمة تقريبية للمشتقة الاولي للدالة المجدولة كالتالي عند $x = 0.1$ باستخدام صيغة نيوتن

x	0.1	0.2	0.3	0.4
y	0.01	0.04	0.09	0.16

الحل

نكون جدول الفروق كالتالي

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0.1	0.01			
		0.3		
0.2	0.04		0.2	
		0.5		0
0.3	0.09		0.2	
		0.7		
0.4	0.16			

حيث ان النقطة المطلوب حساب التفاضل العددي عندها هي $x = x_0 = 0.1$. اذن علاقة نيوتن الاولي سوف تكون مناسبة وبالتالي فان

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y}{5} + \cdots\right]_{q=0}$$

وبالتعويض من الجدول نجد ان

$$y'(x)=\frac{1}{0.1}\left(0.03-\frac{0.02}{2}+\frac{0}{3}\right)=10\left(0.02\right)=0.2$$

مثال (2)

اوجد قيمة تقريبية للمشتقة الاولى $y'(0.15)$ و الثانية $y''(0.22)$ للدالة في المثال السابق باستخدام صيغة نيوتن

الحل

نستخدم جدول الفروق السابق ونظرا لان قيم المتغير المستقل المطلوب حساب المشتقات عندها ليست ضمن نقاط الاستكمال لذا نستخدم الصيغ الاساسية (2) ، (3) فتكون المشتقة الاولي كالتالي

$$y'(x)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0+\frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0+\cdots\right]$$

حيث

$$q=\frac{x-x_0}{h}=\frac{0.15-0.1}{0.1}=0.5$$

عندئذ يكون

$$y'(0.15)=\frac{1}{0.1}\left[0.03+\frac{2(0.5)-1}{2}(0.02)+0\right]=\frac{0.03}{0.1}=0.3$$

اما المشتقة الثانية فتكون كالتالي

$$y''(x)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0+(q-1)\Delta^3 y_0+\cdots\right]$$

$$q=\frac{x-x_0}{h}=\frac{0.22-0.1}{0.1}=\frac{0.12}{0.1}=1.2$$

$$y''(0.22) = \frac{1}{(0.1)^2}\left[(0.02) + (1.2-1)(0)\right]$$

$$= \frac{1}{(0.1)^2}(0.02) = 2$$

مثال (3)

اوجد القيمة التقريبية للتفاضل الاول و الثاني و الثالث للدالة $y(x)$ عند النقطة $x = 3$ اذا اعطيت البيانات الاتية:

x	3	3.2	3.4	3.6	3.8	4
$y(x)$	-14	-10.032	-5.296	0.256	6.672	14

الحل

نكون جدول الفروق الامامية التالي

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
3	-14					
		3.968				
3.2	-10.032		0.768			
		4.736		0.048		
3.4	-5.296		0.816		0	
		5.552		0.048		0
3.6	0.256		0.814		0	
		6.416		0.048		
3.8	6.672		0.912			
		7.328				
4	14					

$$y'(x_0)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0-\frac{\Delta^2 y_0}{2}+\frac{\Delta^3 y_0}{3}-\frac{\Delta^4 y_0}{4}+\cdots\right]_{q=0}$$

$$y'(3)=\frac{1}{0.2}\left(3.986-\frac{0.768}{2}+\frac{0.048}{3}+0+0\right)=18$$

$$y''(x_0)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0-\cdots\right]_{q=0}$$

$$y''(3)=\frac{1}{(0.2)^2}\left[(0.768)-0.048+0+0\right]=18$$

$$y'''(x_0)=\frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_0-\frac{3}{2}\Delta^4 y_0+\cdots\right]_{q=0}$$

$$y'''(x_0)=\frac{1}{(0.2)^3}\left[0.048-0+0\right]=6$$

مثال (4)

استخدام البيانات في الجدول الاتي لحساب قيمة المشتقة الاولى عند $x=1.7$ مستخدما صيغة نيوتن

x	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3	2.5
$y(x)$	4.482	5.474	6.686	8.166	8.974	12.182

الحل

نكون جدول الفروق

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
1.5	4.482					
		0.992				
1.7	5.474		0.220			
		1.212		0.048		
1.9	6.686		0.268		0.12	
		1.48		0.06		0
2.1	8.165		0.328		0.12	
		1.808		0.072		
2.3	8.974		0.4			
		2.208				
2.5	12.182					

$x_1 = 1.7 \ , \ h = 0.2$

$$y'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \cdots\right]_{q=0}$$

$$y'(1.7) = \frac{1}{0.2}\left(1.212 - \frac{0.268}{2} + \frac{0.06}{3} - \frac{0.012}{4}\right) = 6.845$$

$$y''(x_1) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \cdots\right]_{q=0}$$

$$y''(1.7) = \frac{1}{(0.2)^2}\left[(0.268) - 0.06 + \frac{11}{12}(0.012)\right]$$
$$= 8.475$$

مثال (5)

استخدم البيانات الاتية بالجدول لحساب قيمة المشتقة الاولي و الثانية عند النقاط $x = 4$ ، $x = 4.5$ مستخدما صيغة نيوتن.

x	4	6	8	10
$y(x)$	1	3	8	20

الحل

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
4	1			
		2		
6	3		3	
		5		4
8	8		7	
		12		
10	20			

(i) حيث النقطة $x = 4$ نقطة من نقاط الجدول بأخذ

$$x_0 = 4 \, , q = 0 \, , h = 2$$

$$y'(x_q) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \cdots\right]_{q=0}$$

$$y'(4) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{11}{12}$$

$$y''(4) = \frac{1}{4}(3-4) = -\frac{1}{4}$$

$$y'''(4) = \frac{1}{8}(4) = \frac{1}{2}$$

(ii) النقطة $x = 4.5$ ليست من نقاط الجدول ولكن اقرب نقطة لها بالجدول هي $x = 4$

$$q=\frac{x_q-x_0}{h}=\frac{4.5-4}{2}=\frac{1}{4}$$

$$y'(x_q)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0+\frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0+\cdots\right]$$

$$y'(4.5)=\frac{1}{2}\left[2+\frac{2(1/4)-1}{2}(3)+\frac{3(1/4)^2-6(1/4)+2}{6}(4)\right]=\frac{41}{48}$$

وكذلك $y''(4.5)=0, y'''(4.5)=\frac{1}{8}(4)=\frac{1}{2}$.

ملحوظة

اذا كانت $P_k(x)$ هي كثيرة حدود نيوتن الإستكمالية المحتوية على الفروق

$$\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \cdots, \Delta^k y_0$$

وكان

$$R_k(x)=y(x)-P_k(x)$$

هو الخطأ المناظر فان الخطأ في تعيين المشتقة هو

$$R'_k(x)=y'(x)-P'_k(x)$$

نعلم ان الحد الباقي ل كثيرة حدود نيوتن الاستكمالية

$$R_k(x)=h^{k+1}\frac{q(q-1)(q-2)\cdots(q-k)}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi)$$

$$
\begin{aligned}
\therefore R_k'(x) &= \frac{dR_k(x)}{dq}\cdot\frac{dq}{dx} \\
&= \frac{h^k}{(k+1)!}\left\{ y^{(k+1)}(\xi)\frac{d}{dq}\left[q(q-1)(q-2)\cdots(q-k)\right]\right. \\
&\left. +\left[q(q-1)(q-2)\cdots(q-k)\right]\frac{d}{dq}\left[y^{(k+1)}(\xi)\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

الفصل السادس

التكامل العددي $(\text{Numerical Inetgration})$

التكامل العددي يستخدم لحساب التكاملات التي يصعب حسابها بالطرق العادية مثل التكاملات

$$\int_0^1 xe^{x^3}dx\,,\int_0^1 xe^{x^4}dx\,,\int_0^1 xe^{x^5}dx$$

التي لا يمكن ايجادها بالطرق العادية للتكامل ولحساب التكامل

$$\int_a^b ydx$$

حيث الدالة تحت علامة التكامل هي $y=f(x)$ معطاة في صورة جدول بالقيم

$$[x_i,y_i],\ i=1,2,\cdots,n,\quad a=x_0,b=x_n$$

و في طرق التكامل العددي نقرب الدالة $f(x)$ على صورة كثيرة حدود بإحدى الطرق التقريب ثم نجري عملية التكامل على كثيرة الحدود بين الحدين a,b.

سوف نستنتج معادلة تربيعية عامة لتقريب التكامل السابق.

المعادلة التربيعية العامة

في هذا الفصل سوف نستنتج معادلة تربيعية عامة عند مجموعة من النقاط متساوية البعد

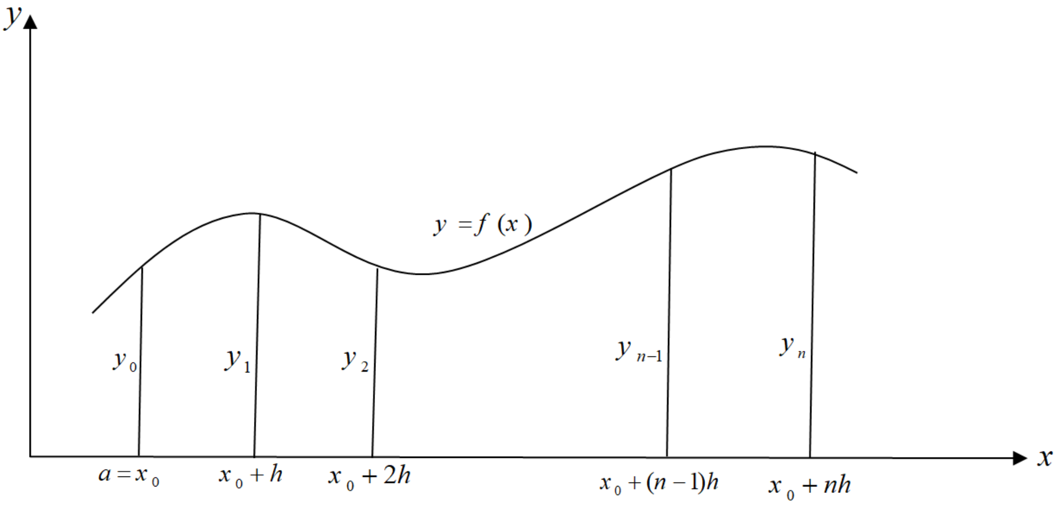
نفرض ان $I=\int_a^b ydx$ حيث $y=f(x)$ الدالة تحت علامة التكامل تأخذ القيم $y_0,y_1,\cdots,y_n$ و التي تناظر القيم $x_0,x_1,\cdots,x_n$ على الترتيب. نفرض اننا قسمنا الفترة $[a,b]$ الي n من الفترات الصغيرة التي طول كل منها h

لذلك فان

$$a=x_0,\ x_1=x_0+h,\ x_2=x_0+2h,\cdots,\ x_n=x_0+nh=b$$

$$I=\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx$$

و باعتبار ان $x = x_0 + Ph$ (حيث $0 < P < 1$).



شكل (1-5)

بالتعويض في التكامل السابق وتحويل التكامل بدلالة P بدلا من x

$$I = h\int_0^n f\left(x_0 + Ph\right)dP = h\int_0^n y_P dP$$

ثم التعويض عن y_P بكثيرة حدود نيوتن الاستكمالية الاولى نحصل على

$$I = h\int_0^n \left[y_0 + P\Delta y_0 + \frac{P(P-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{P(P-1)(P-2)}{3!}\Delta^3 y_0 \right.$$
$$\left. + \frac{P(P-1)(P-2)(P-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots \right] dP$$

ثم بمكاملة حد بحد نحصل على

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx = h\left[ny_0 + \frac{n^2}{2}\Delta y_0 + \frac{1}{2}\left\{\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2}\right\}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}\left\{\frac{n^4}{4} - n^3 + n^2\right\}\Delta^3 y_0 + \frac{1}{24}\left\{\frac{n^5}{5} - \frac{3n^4}{2} + \frac{11n^3}{3} - \frac{3n^2}{1}\right\}\Delta^4 y_0\right] \qquad (1)$$

المعادلة (1) هي معادلة نيوتن ـ كوتس التربيعية

(5- 2) طريقة شبه المنحرف

بوضع $n = 1$ في المعادلة (1) مع اهمال الحدود التي تحتوي علي فروق الرتبة الثانية و الثالثة وهكذا نحصل على

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = h\left[y_0 + \frac{1}{2}\Delta y_0\right] = h\left[y_0 + \frac{1}{2}(y_1 - y_0)\right] = \frac{h}{2}[y_0 + y_1]$$

بالمثل

$$\int_{x_0+h}^{x_0+2h} f(x)dx = \frac{h}{2}[y_1 + y_2]$$

$$\int_{x_0+2h}^{x_0+3h} f(x)dx = \frac{h}{2}[y_2 + y_3]$$

و هكذا

....

$$\int_{x_0+(n-1)h}^{x_0+nh} f(x)dx = \frac{h}{2}[y_{n-1} + y_n]$$

ثم بجمع ال n التكامل السابقة نحصل على

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx + \int_{x_0+h}^{x_0+2h} f(x)dx + \cdots + \int_{x_0+(n-1)h}^{x_0+nh} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{2}\left[\left(y_0 + y_n\right) + 2\left(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right)\right]$$

هذه القاعدة تسمى قاعده شبه المنحرف.

مثال (1)

استخدم طريقة شبه المنحرف في ايجاد قيمة التكامل المحدود

$$\int_4^{5.2} \ln x \, dx \, , \quad h = 0.2$$

الحل

نقسم مدي التكامل الى 6 اقسام متساوية طول كلا منها 0.2 ثم نحسب قيم الدالة $y = \ln x$ عند النقاط

$$x_0 = 4 \, , \, x_1 = 4.2 \, , \, x_2 = 4.4, \cdots, x_6 = 5.2$$

فنحصل على الجدول التالي

x	$\ln x$
4	1.386294
4.2	1.435085
4.4	1.481604
4.6	1.526056
4.8	1.568620
5	1.609435
5.2	1.648659

و يصبح التكامل على الصورة

$$\int_{4}^{5.2} \ln x dx = \frac{0.2}{2}\Big[(1.386294+1.648659)+2(1.435085+1.481604$$
$$+1.526056+1.568620+1.609438)\Big]$$
$$=(0.1)\big[3.034953+2(7.620803)\big]=1.8276559$$

علما بان القيمة المضبوطة لهذا التكامل تساوي $\int_{4}^{5.2} \ln x\, dx = 1.827847$

(5 - 3) علاقة الثلث لـ سيمبسون

بوضع $n = 2$ في المعادلة (1) مع اهمال الحدود التي تشتمل علي فروق الرتبة الثالثة و التي اعلى منها نحصل على

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx = h\left[2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-2\right)\Delta^2 y_0\right]$$
$$= h\left[2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right]$$
$$= \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]$$

بالمثل

$$\int_{x_0+2h}^{x_0+4h} f(x)dx = \frac{h}{3}[y_2 + 4y_3 + y_4]$$

$$\int_{x_0+2h}^{x_0+4h} f(x)dx = \frac{h}{3}[y_4 + 4y_5 + y_6]$$

و هكذا

....

$$\int_{x_0+(n-2)h}^{x_0+nh} f(x)dx = \frac{h}{3}[y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

حيث n عدد زوجي

ثم بجمع كل التكاملات السابقة نحصل على

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx + \int_{x_0+2h}^{x_0+4h} f(x)dx + \cdots + \int_{x_0+(n-2)h}^{x_0+nh} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{3}\Big[\left(y_0 + y_n\right) + 4\left(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}\right)$$

$$+ 2\left(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}\right)\Big]$$

تسمى هذه العلاقة علاقة الثلث لـ سمبسون

مثال (2)

بواسطة العلاقة الثلث لـ سمبسون احسب قيمة التكامل

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\,, \quad n = 10$$

الحل

$$n = 2m = 10, f(x) = \frac{1}{1+x}\,, h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$$

n	x_n	f_{2m-1}	f_{2m}
0	0		$f_0 = 1.00000$
1	0.1	$f_1 = 0.90909$	
2	0.2		$f_2 = 0.83333$
3	0.3	$f_3 = 0.76923$	
4	0.4		$f_4 = 0.71429$
5	0.5	$f_5 = 0.66667$	
6	0.6		$f_6 = 0.62500$
7	0.7	$f_7 = 0.58824$	
8	0.8		$f_8 = 0.55556$
9	0.9	$f_9 = 0.52632$	
10	1		
$\sum$		$\sigma_1 = 3.45955$	$\sigma_2 = 2.72818$

$$\sigma_0 = f_0 + f_{10} = 1.00000 + 0.00005 = 1.50000$$

$$I = \frac{h}{3}(\sigma_0 + 4\sigma_1 + 2\sigma_2)$$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{0.1}{3}\left[1.50000 + 4(3.45955) + 2(2.7218)\right] = 0.69317$$

(4 - 5) علاقة الثلاث اثمان لـ سيمبسون $\left(\frac{3}{8}\right)$

بوضع $n = 3$ في المعادلة (1) مع اهمال الحدود التي تحتوي على الفروق من الرتبة الرابعة والاعلى منها نحصل على

$$\int_{x_0}^{x_0+3h} f(x)dx = h\left[3y_0 + \frac{9}{2}\Delta y_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}\left(\frac{81}{4} - 27 + 9\right)\Delta^3 y_0\right]$$

$$= h\left[3y_0 + \frac{9}{2}(y_1 - y_0) + \frac{9}{4}(y_2 - 2y_1 + y_0) + \frac{3}{8}(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)\right]$$

$$= \frac{3h}{8}[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3]$$

بالمثل

$$\int_{x_0+3h}^{x_0+6h} f(x)dx = \frac{3h}{8}[y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6]$$

....

$$\int_{x_0+(n-3)h}^{x_0+nh} f(x)dx = \frac{3h}{8}[y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n]$$

حيث n يقبل القسمة علي 3

ثم بجمع التكاملات السابقة نحصل على

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx = \frac{3h}{8}\Big[\left(y_0+y_n\right)$$
$$+3\left(y_1+y_2+y_4+y_5+y_7+y_8+\cdots+y_{n-1}\right)$$
$$+2\left(y_3+y_6+y_9+\cdots+y_{n-3}\right)\Big]$$

مثال (1)

احسب قيمة التكامل باستخدام علاقة الثلاث اثمان ل سيمبسون

$$(1)\int_1^2\left(x^3+1\right)dx \qquad (2)\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin x}\; dx$$

الحل

(1) باختيار $n=3$ فيكون

$$\int_1^2\left(x^3+1\right)dx = \frac{3h}{8}\left[f(a)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(b)\right]$$

$$h=\frac{b-a}{3}=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3},$$
$$x_0=a=1,$$
$$x_1=a+h=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3},$$
$$x_2=a+2h=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3},$$
$$x_3=b=2$$

بالتالي

$$\int_1^2\left(x^3+1\right)dx = \frac{3h}{8}\left[f(1)+3f\left(\frac{4}{3}\right)+3f\left(\frac{5}{3}\right)+f(2)\right]=4.75$$

(2) باختيار $n=3$ فيكون

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\; dx = \frac{3h}{8}\left[f(a) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(b)\right]$$

$$h = \frac{b-a}{3} = \frac{\pi/2 - 0}{3} = \frac{\pi}{6},$$

$$x_0 = a = 0,$$

$$x_1 = a + h = 0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6},$$

$$x_2 = a + 2h = 0 + \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3},$$

$$x_3 = b = \frac{\pi}{2}$$

بالتالي

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\; dx = \frac{\pi}{16}\left[f(0) + 3f(\frac{\pi}{6}) + 3f(\frac{\pi}{3}) + f(\frac{\pi}{2})\right]$$

$$= \frac{\pi}{16}\left[0 + 2.121312 + 2.79181 + 1\right] = 1.16104$$

(5 - 5) الخطأ في علاقة شبه المنحرف

بفك الدالة $y = f(x)$ بجوار النقطة $x = x_0$ باستخدام مفكوك تايلور نحصل على

$$y = y_0 + (x - x_0)y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y_0'' + \cdots \qquad (1)$$

حيث

$$y_0'[y'(x)]\Big|_{x=x_0}, \quad y_0'' = [y''(x)]\Big|_{x=x_0}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} y\,dx = \int_{x_0}^{x_0+h}\left[y_0 + (x-x_0)y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{2!}y_0'' + \cdots\right]dx$$

$$= hy_0 + \frac{h^2}{2!}y_0' + \frac{h^3}{3!}y_0'' + \cdots \qquad (2)$$

و الان بتطبيق قاعدة شبه المنحرف في الفترة $[x_0, x_1]$ نحصل على

$$A_1 = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) \qquad (3)$$

بوضع $y = y_1$ ، $x - x_0 = h$ في المعادلة (1) نحصل علي

$$y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \cdots \qquad (4)$$

من المعادلتين (3) ، (4) نحصل على

$$A_1 = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \cdots\right]$$

$$= hy_0 + \frac{h}{2}y_0' + \frac{h^2}{2(2!)}y_0'' + \cdots \qquad (5)$$

بالتعويض من(2) في (5) نحصل على الخطأ في الفترة $[x_0, x_1]$ كالتالي

$$\int_{x_0}^{x_1} y\,dx - A_1 = \left[\frac{1}{3!} - \frac{1}{2(2!)}\right]h^3 y_0'' + \cdots = -\frac{h^3}{12}y_0''$$

وذلك بسبب اهمال باقي الحدود.

بالمثل الخطأ في الفترة $[x_1, x_2]$ يكون $-\frac{h^2}{12}y_1''$ وهكذا و الخطأ في الفترة $[x_{n-1}, x_n]$ يكون $-\frac{h^2}{12}y_{n-1}''$ ولذلك فان الخطأ الكلي يكون عبارة عن مجموع الاخطاء على الفترات الجزئية

$$E = -\frac{h^3}{12}\left[y_0'' + y_1'' + \cdots + y_{n-1}''\right]$$

و بفرض ان $y''(\xi)$ ، $a<\xi<b$ هي اكبر ما في القيم

$$|y_0''|, |y_1''|, \cdots, |y_{n-1}''|$$

فإن

$$E < -\frac{nh^3}{12}y''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12}y''(\xi), \text{ where } b-a=nh.$$

$\therefore$ الخطأ في طريقة شبه المنحرف هو من الرتبة h^2.

(5 - 6) الخطأ في طريقة الثلث لــ سمبسون

بفك الدالة $y=f(x)$ حول النقطة $x=x_0$ باستخدام مفكوك تايلور نحصل على

$$y = y_0 + (x-x_0)y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{2!}y_0'' + \cdots \qquad (1)$$

$$\int_{x_0}^{x_2} y\,dx = \int_{x_0}^{x_0+2h}\left[y_0 + (x-x_0)y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{2!}y_0'' + \cdots\right]dx$$

$$= 2hy_0 + 2h^2y_0' + \frac{8h^3}{3!}y_0'' + \frac{16h^4}{4!}y_0''' + \frac{32h^4}{5!}y_0^{(iv)} + \cdots \quad (2)$$

و الان بتطبيق قاعدة الثلث لــ سمبسون في الفترة $[x_0, x_2]$ نحصل على

$$A_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \qquad (3)$$

بوضع $y=y_1$ ، $x-x_0=h$ في المعادلة (1) نحصل علي

$$y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \frac{h^3}{3!}y_0''' + \cdots \qquad (4)$$

ثم بوضع $y=y_2$ ، $x=x_2=x_0+2h$ ايضا في المعادلة (1) نحصل علي

$$y_2 = y_0 + 2hy_0' + \frac{4h^2}{2!} y_0'' + \frac{8h^3}{3!} y_0''' + \cdots \qquad (5)$$

بالتعويض من المعادلتين (4) ، (5) في المعادلة (3) نحصل على

$$A_1 = 2hy_0 + 2h^2 y_0' + \frac{4h^3}{3} y_0'' + \frac{2h^4}{3} y_0''' + \frac{5h^5}{18} y_0^{iv} + \cdots$$

و الان الخطأ علي الفترة $[x_0, x_2]$ يعطي بالمعادلة

$$\int_{x_0}^{x_2} y\,dx - A_1 = \left[\frac{4}{15} - \frac{5}{18}\right] h^5 y_0^{iv} + \cdots$$

و بالتالي يمكن القول ان الخطأ على الفترة $[x_0, x_2]$ يساوي $-\frac{h^5}{90} y_0^{iv}$

بالمثل الخطأ على الفترة $[x_2, x_4]$ يساوي $-\frac{h^5}{90} y_2^{iv}$ و هكذا وبالتالي يكون الخطأ الكلي هو مجموع الاخطاء على الفترات الصغيرة يعني

$$E = -\frac{h^5}{90}\left[y_0^{iv} + y_2^{iv} + y_4^{iv} + \cdots + y_{n-2}^{iv}\right]$$

بفرض ان $y^{iv}(\xi)$ هي اكبر قيمة من بين القيم $|y_0^{iv}|, |y_2^{iv}|, |y_4^{iv}|, \cdots, |y_{n-2}^{iv}|$

فان

$$E < -\frac{h^5}{90} y^{iv}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} y^{iv}(\xi)$$

وبالتالي يمكن القول بان علاقة الثلث لـ سمبسون تحتوي على خطأ من رتبة h^4.

(5 - 7) الخطأ في علاقة الثلاث اثمان لــ سيمبسون

بعمل الحسابات اللازمة كما في علاقة الثلث لـ سمبسون يمكن الوصول الى ان الخطأ في علاقة الثلاث اثمان لـ سمبسون يساوي $-\frac{3h^5}{80} y_0^{iv}$ في الفترة $[x_0, x_3]$

مثال (1)

احسب قيمة التكامل $\int_0^{10} \frac{dx}{1+x^2}$ باستخدام

1. علاقة شبه المنحرف
2. علاقة الثلث لـ سيمبسون
3. علاقة الثلاث اثمان لـ سمبسون

الحل

بأخذ $h=1$ يكون $n=10$ ثم بحساب قيمة الدالة $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ عند كل نقطة من نقاط التقسيم نحصل على الجدول التالي

x	y
0	1
1	0.5
2	0.2
3	0.1
4	0.0588
5	0.0384
6	0.027
7	0.02
8	0.0153
9	0.0121
10	0.009

1. باستخدام علاقة شبه المنحرف نحصل على

الموضوع التالي	العودة إلى عناصر المحتوى	الموضوع السابق

$$\int_0^{10} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{h}{2}\left[\left(y_0 + y_{10}\right) + 2\left(y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 + 9.9009990 \times 10^{-3}\right) + 2\left(0.5 + 0.2 + 0.1 + 0.0588235\right.\right.$$

$$\left.\left.+0.0384615 + 0.027027 + 0.02 + 0.0153846 + 0.0121951\right)\right]$$

$$= 1.4768422$$

2. بواسطة علاقة الثلث لـ سيمبسون

$$\int_0^{10} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{h}{3}\left[\left(y_0 + y_{10}\right) + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9\right)\right.$$

$$\left.+ 2\left(y_2 + y_4 + y_6 + y_8\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(1 + 9.9009990 \times 10^{-3}\right) + 4\left(0.5 + 0.1 + 0.0384615\right.\right.$$

$$\left.+0.02 + 0.0121951\right)$$

$$\left.+ 2\left(0.2 + 0.0588235 + 0.027027 + 0.0153846\right)\right]$$

$$= 1.4316659$$

3. بواسطة علاقة الثلاث اثمان لـ سيمبسون نحصل على

الموضوع السابق	العودة إلى عناصر المحتوى	الموضوع التالى

$$\int_0^{10} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{8h}{3}\Big[\left(y_0+y_{10}\right)+3\left(y_1+y_2+y_4+y_5+y_7+y_8\right)$$

$$+2\left(y_3+y_6+y_9\right)\Big]$$

$$= \frac{8}{3}\Big[\left(1+9.9009990\times10^{-3}\right)+3\left(0.5+0.2+0.0588235\right.$$

$$\left.+0.0384615+0.02+0.0153846\right)+2\left(0.1+0.027027\right.$$

$$\left.+0.0121951\right)\Big]=1.4198828$$

ملاحظات

1. في علاقة شبه المنحرف الدالة $f(x)$ تكون دالة خطية في الصورة $f(x)=ax+b$ و هي ابسط علاقة و اقلها دقة.
2. علاقة الثلث لـــ سيمبسون $f(x)$ تكون كثيرة حدود من الدرجة الثانية يعني

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

و في هذه الطريقة عدد التقسيمات n لابد ان يكون عدد زوجي.

3. في علاقة الثلاث اثمان لـ سمبسون تكون $f(x)$ هي كثيرة حدود من الدرجة الثالثة في x يعني

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

و عند تطبيق هذه الصيغة لابد ان يكون عدد التقسيمات n يقبل القسمة على 3.

تمارين

الفصل السابع

الحلول العددية للمعادلات الجبرية غير الخطية

Numerical Solutions of Nonlinear Algebraic Equations

مدخل لإيجاد حل المعادلات الجبرية الغير الخطية

يمكن ايجاد حل (جذر) للمعادلات غير الخطية التي على الصورة $f(x)=0$ اذا كانت الدالة $f(x)$ عبارة عن كثيرة حدود من درجة اقل من او تساوي 4. بمجرد خطوة بسيطة يمكن ايجاد جذر معادلة الدرجة الاولى و كذلك نعلم انه يوجد القانون العام لحل معادلات الدرجة الثانية و هناك ايضا طريقة كاردان لحل معادلات الدرجة الثالثة، اما معادلات الدرجة الرابعة فيمكن حلها بطريقة فيراري او ديكارت.

اما بالنسبة للمعادلات التي تكون درجاتها اكبر من الرابعة فانه لا توجد طريقة عامة لإيجاد الحل اما المعادلات المتسامية والتي تتضمن فيها الدالة $f(x)$ دوال مثلثية او اسية او لوغاريتمية،...الخ، مثل

$$f(x)=2x+5\sin x=0$$

$$f(x)=4e^{x}+6\log x-x^{2}=0$$

فانه لا يوجد صيغة عامة او طريقة تحليلية محددة لحلها.

عموما اذا كانت المعادلة جبرية او متسامية و صعبة بدرجة كافية فانه يصعب تعيين جذورها بدقة و علاوة على ذلك في بعض الحالات تحتوي المعادلة على معاملات معلومة فقط بالتقريب و من ثم فان مسالة تعيين جذور المعادلة بدقة تفقد معناها و لذلك تكتسب الطرق التقريبية لتعيين جذور المعادلات الجبرية و تقدير درجات دقتها اهمية خاصة.

(2-6) فكرة ايجاد جذر معادلات جبرية غير خطية

نفرض ان المعادلة المطلوب إيجاد جذورها معطاة على الصورة

$$f(x)=0 \qquad (1)$$

حيث الدالة $f(x)$ معرفة و متصلة في فترة ما محدودة $a<x<b$ او لا نهائية. و فيما يلي سنحتاج في بعض الاحيان الى وجود و اتصال المشتقة الاولي $f'(x)$ او حتى المشتقة الثانية $f''(x)$ وهو ما سنذكره في حينه.

ان القيمة α التي تجعل الدالة مساوية للصفر أي $f(\alpha)=0$ تسمى جذرا للمعادلة (1) او صفرا للدالة $f(x)$.

وفي هذه الفصل سوف ندرس بعض الطرق العددية المختلفة لحل المعادلة غير الخطية (1) اخذين في الاعتبار بعض الصعوبات التي تواجه الدارس عند استخدام هذه الطرق وبرمجتها.

(3-6) طرق الفترة المغلقة (Closed Interval Methods)

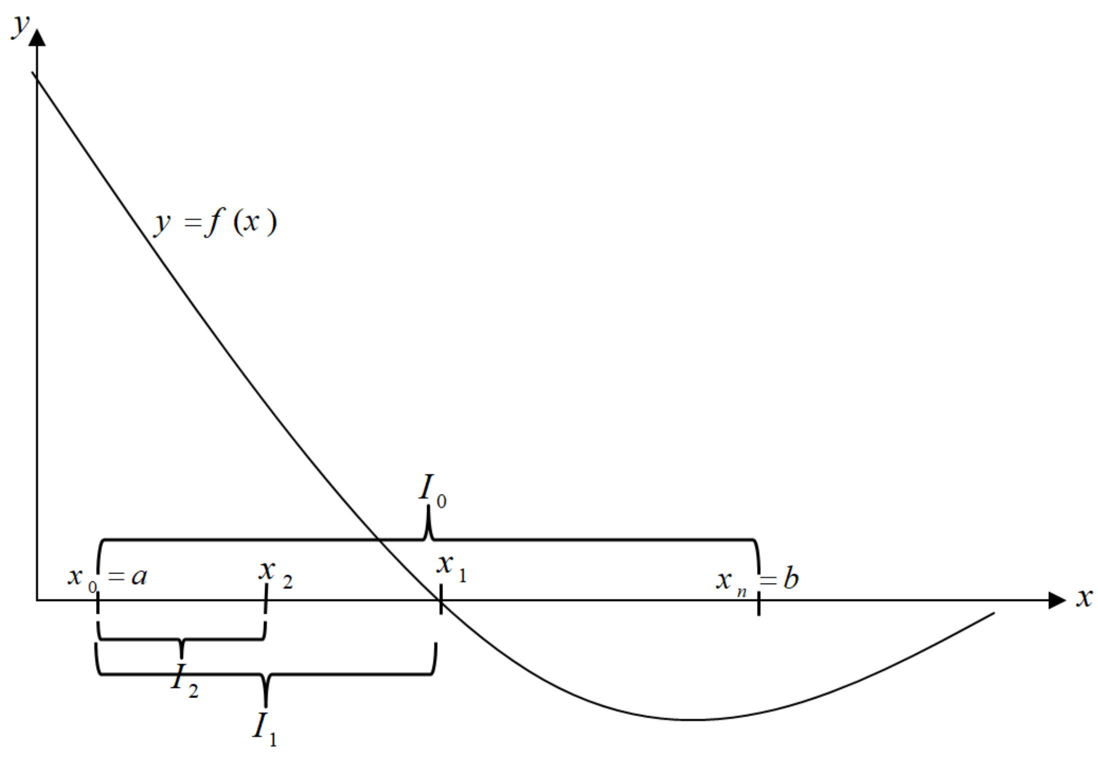
سوف ندرس ابسط هذه الطرق و هم طريقة تنصيف الفترة و طريقة النقطة الثابتة و طريقة نيوتن رافسون.

(1-3-6) طريقة تنصيف الفترة (Bisection method)

سوف نضع في الاعتبار ان $f(x)$ دالة حقيقية ومتصلة على الفترة $[a,b]$ و ان $f(x)$ تمر بمحور ox داخل هذا الفترة اي يتحقق ان

$$f(a)f(b)<0 \qquad (2)$$

وهذا الشرط يعني ان الدالة $f(x)$ تغير اشارتها اثناء مرورها في النطاق المعطي مما يدل علي وجود جذر واحد على الاقل داخل هذا النطاق.



شكل(1-6) طريقة تنصيف الفترة

ان ابسط الطرق العددية لإيجاد الجذر المطلوب هو تتابع تنصيف النطاق المعطي مع احتفاظ الدالة بخاصية تغيير اشارتها اثناء مرورها في النطاق الجديد في كل مرة ويسمى هذا الاسلوب بطريقة تنصيف الفترة. و من المتوقع ان تتقارب نقاط منصفات الفترات المتتابعة نحو الجذر

المطلوب و بإعادة صياغة هذه المفاهيم على شكل خطوات متتابعة نحصل على الخوارزمية التالية.

➢ **خوارزمية طريقة تنصيف الفترة (صورة اولية)**

المدخلات: فترة $I=[a,b]$ يتحقق فيها $f(a)f(b)<0$

خطوة 1: احسب $c=\dfrac{a+b}{2}$

خطوة 2:احسب $f(c)$.

اذا اختلفت اشارة الدالة عند a,c اي تحقق $f(a)f(c)<0$

نأخذ $b=c\Rightarrow f(b)=f(c)$

و إلا نأخذ $a=c\Rightarrow f(a)=f(c)$

خطوة 3: نكرر الخطوتين 1 و 2 حتى نحصل على $f(c)=0$.

و سوف تحتاج الخوارزمية لتعديل بسيط يحدد كيفية توقف الخوارزمية فربما طال الامد حتى نحصل على نقطة المنتصف التي تحقق الجذر اي تحقق $f(c)=0$ لذلك سوف نستبدل هذا الشرط بآخر مخفف و هو $f(c)<\epsilon$ حيث ϵ مقدار صغير جدا (مثلا $\epsilon=0.0001$) و لضمان تحقق شرط التوقف اكثر سوف نضيف شرط اخر وهو $b-c\le\epsilon$ و لضمان عدم الدوران اللانهائي نضيف شرط يحدد حد اقصى لعدد التتابعات n وبذلك تصبح الخوارزمية كالتالي

➢ **خوارزمية طريقة تنصيف الفترة (صورة نهائية)**

المدخلات:

- فترة $I=[a,b]$ يتحقق فيها $f(a)f(b)<0$
- مقدار صغير جدا ϵ
- عدد التتابعات n

خطوة 1: احسب $c=\dfrac{a+b}{2}$

خطوة 2: اذا كان $b-c\le\epsilon$ حيث ϵ مقدار صغير جدا اعتبر c هي الجذر ثم توقف.

خطوة 3: احسب $f(c)$. اذا كان $f(c) \le \epsilon$ اعتبر c هي الجذر ثم توقف.

خطوة 4: اذا اختلفت اشارة الدالة عند a,c أي $f(a)f(c) < 0$

نأخذ

$$b = c \Rightarrow f(b) = f(c)$$

و الا نأخذ

$$.a = c \Rightarrow f(a) = f(c)$$

خطو 5: نكرر الخطوات 1 الي 4 حتي نهاية عدد التتابعات n.

➢ **تقدير الخطأ** Error Estimation

نفرض ان a_n, b_n, c_n ترمز لقيم a, b, c المحسوبة عند تكرار رقم n على الترتيب. عندئذ يكون من السهل ان نكتب الخطوة التالية

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})\right]$$

و اذا استمر ذلك حتى نصل الى القيم الابتدائية لحدود نطاق المسألة نحصل علي

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2^n}(b - a), \quad n \ge 1$$

اذن

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b - a) \qquad (3)$$

و حيث ان الجذر α يقع اما في منتصف النطاق الحالي $[a_n, c_n]$ او $[c_n, b_n]$ فيمكننا كتابة

$$|\alpha - c| \le \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

و باستخدام $b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b - a)$

اذن

$$\left|\alpha - c\right| \le \frac{1}{2^n}(b-a)$$

وهذه العلاقة تعني ان التكرارات c_n تتقارب الي α عند $n \to \infty$.

و لمعرفة عدد التكرارات المطلوبة للوصول الى دقة معينة نفترض ان الدقة المطلوبة هي ϵ.

$$\left|\alpha - c\right| \le \epsilon \Rightarrow \frac{1}{2^n}(b-a) \le \epsilon$$

$$2^n \ge \frac{b-a}{\epsilon} \Rightarrow n\log 2 \ge \log\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)$$

$$n \ge \frac{\log\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{\log 2}$$

مثال (1)

اوجد عدد التتابعات n اللازمة للوصول لدقة لثلاثة مواضع عشرية عند تطبيق خوارزمية تنصيف الفترة و ذلك لحساب جذر الدالة $f(x) = x^6 - x - 1 = 0$ داخل النطاق $[0,2]$

الحل

للوصول لدقة ثلاث مواضع عشرية نضع

$$\left|\alpha - c\right| \le \frac{1}{2^n}(b-a) \le 0.001$$

أي

$$\frac{2.0-0.0}{2^n} \le 0.001 \Rightarrow \frac{1}{2^{n-1}} \le 0.001 \Rightarrow 2^{n-1} \ge 1000$$

حيث ان $2^{10} = 1024$ فإن $n-1 \ge 10$ أي $n \ge 11$ بالتالي فإن أحد عشر تتابعا سوف يعطي الدقة المطلوبة.

(2-3-6) طريقة النقطة الثابتة $(\text{The Fixed-Point Method})$

في هذه الطريقة و التي تسمى ايضا بطريقة التكرار البسيط يتم كتابة المعادلة $f(x)=0$ بالصيغة $x=g(x)$ بحيث ان هذه الصيغة تكون مناسبة لبناء سلسلة من القيم تؤول في النهاية الى جذر المعادلة $f(x)=0$.

➢ **خوارزمية طريقة النقطة الثابتة**

خطوة 1 : اكتب المعادلة $f(x)=0$ بالصيغة $x=g(x)$

خطوة 2 : اوجد قيمة تقريبية لجذر المعادلة $f(x)=0$ و ذلك باستخدام احدي الطرق التي تم شرحها سابقا لتكن هذه القيمة x_0 مثلا

خطوة 3 : عوض عن هذه القيمة بالطرف الايمن من المعادلة $x=g(x)$ لإيجاد القيمة التقريبية التالية x_1 اي ان

$$x_1=g(x_0)$$

خطوة 4 : عوض بهذه القيمة x_1 مرة اخرى بالطرف الايمن من المعادلة $x=g(x)$ لتجد القيمة التقريبية التالية لجذر المعادلة (القيمة x_2) اي ان

$$x_2=g(x_1)$$

خطوة 5 : استمر بتكرار الخطوة 4

$$x_3=g(x_2)$$
$$x_4=g(x_3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n+1}=g(x_n)$$

حتى الوصول الى الدقة المطلوبة بقيمة الجذر.

ملحوظة

مما يجب ذكره ان القيمة x_0 التي صورتها في الدالة $g(x)$ تساويها أي $x_0 = g(x_0)$ تسمى نقطة ثابتة للدالة $g(x)$ فمثلا للدالة $g(x) = x + \sin(\pi x)$ فان $x_0 = 0$ هي نقطة ثابتة لهذه الدالة لان

$$g(0) = 0$$

أي ان

$$x_0 = g(x_0)$$

كذلك $x_1 = 1$ هي ايضا نقطة ثابتة لهذه الدالة لان

$$g(1) = 1 + \sin\pi = 1$$

اي انه ايضا

$$x_1 = g(x_1)$$

و من المعروف انه يمكن كتابة المعادلة $f(x) = 0$ بصور مختلفة للصيغة $x = g(x)$

مثلا المعادلة $\cos(2x) - x = 0$ يمكن كتابتها بالعديد من الصيغ منها

$$x = \frac{\cos^{-1}(x)}{2}$$

$$x = \cos(2x)$$

$$x = \frac{\cos(2x) + x}{2}$$

و لكن ليس كل هذه الصيغ يمكن ان تنتج سلاسل تؤول نهايتها الى جذر المعادلة $f(x) = 0$.

سنتعرف لاحقا على كيفية الحكم فيما اذا كانت صيغة معينة من الصيغ تنتج سلسلة تؤول نهايتها الى جذر المعادلة $f(x) = 0$.

مثال (1)

باستخدام طريقة النقطة الثابتة اوجد جذر المعادلة

$$\cos(2x) - x = 0$$

في الفترة $[0.5, 0.75]$.

الحل

من المعادلة يمكن استنتاج ان

$$\cos(2x) = x$$
$$2x = \cos^{-1}(x)$$
$$x = \frac{\cos^{-1}(x)}{2}$$

اي ان صيغة التكرار التي سيتم استخدامها للوصول الى الجذر المطلوب هي

$$x_{n+1} = \frac{\cos^{-1}(x_n)}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

و يمكن اختيار اي قيمة مبدئية من داخل الفترة التي يوجد بها جذر المعادلة فمثلا عند اختيار $x_0 = 0.6$ وتكرار استخدام الصيغة السابقة فإننا نحصل على المتتالية التالية:

$$x_0 = 0.6$$
$$x_1 = \frac{\cos^{-1}(x_0)}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.6)}{2} = 0.46365$$
$$x_2 = \frac{\cos^{-1}(x_1)}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.46365)}{2} = 0.54434$$
$$x_3 = \frac{\cos^{-1}(x_2)}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.54434)}{2} = 0.4976$$

$$x_4 = \frac{\cos^{-1}(x_3)}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.4976)}{2} = 0.52499$$

$$x_5 = \frac{\cos^{-1}(x_4)}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.52499)}{2} = 0.50905$$

$$x_6 = \frac{\cos^{-1}(x_5)}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.50905)}{2} = 0.51836$$

$$x_7 = \frac{\cos^{-1}(x_6)}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.51836)}{2} = 0.51293$$

$$x_8 = \frac{\cos^{-1}(x_7)}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.51293)}{2} = 0.5161$$

$$x_9 = \frac{\cos^{-1}(x_8)}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.5161)}{2} = 0.51425$$

$$x_{10} = \frac{\cos^{-1}(x_9)}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.51425)}{2} = 0.51533$$

$$x_{11} = \frac{\cos^{-1}(x_{10})}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.51533)}{2} = 0.5147$$

$$x_{12} = \frac{\cos^{-1}(x_{11})}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.5147)}{2} = 0.51507$$

$$x_{13} = \frac{\cos^{-1}(x_{12})}{2} = \frac{\cos^{-1}(0.51507)}{2} = 0.51485$$

و نستطيع الاستمرار لإيجاد القيم التالية الى الدقة التي تريدها

مثال (2)

المعادلة في المثال السابق يمكن كتابتها بالصيغة $x = \cos(2x)$ اي ان صيغة التكرار التي يمكن استخدامها للوصول الى الجذر المطلوب هي

$$x_{n+1} = \cos(2x_n)$$

و باستخدام نفس القيمة الابتدائية التي تم استخدامها في المثال السابق فإننا سنحصل على السلسلة التالية

$$x_0 = 0.6$$
$$x_1 = \cos\left[2(0.6)\right] = 0.3624$$
$$x_2 = \cos\left[2(0.3624)\right] = 0.7468$$
$$x_3 = \cos\left[2(0.7468)\right] = 0.0735$$
$$x_4 = \cos\left[2(0.0735)\right] = 0.9892$$
$$x_5 = \cos\left[2(0.9892)\right] = -0.3964$$
$$x_6 = \cos\left[2(-0.3964)\right] = 0.7019$$

من الواضح انه حتى لو استمرينا باستخدام الصيغة اعلاه فإننا لن نستطيع الوصول الى القيمة الدقيقة لجذر المعادلة $\cos(2x) - x = 0$

و الذي قيمته $0.51494 \pm 3\times10^{-5}$.

من هذين المثالين يصبح واضحا انه ليست كل الصيغ $x = g(x)$ التي يتم تحويل المعادلة $f(x) = 0$ اليها تؤدي الي انتاج قيم متتالية تؤول الى قيمة الجذر.

ويمكن التأكد من أن تكرار استخدام صيغة معينة $x_{n+1} = g(x_n)$ يؤدي في النهاية الى الجذر المطلوب α باستخدام شرط ليبنز.

مما سبق يمكن ان نستنتج نظرية النقطة الثابتة التالية

نظرية (1-6) (شرط ليبنز)

اذا كانت الدالة $g(x)$ متصلة في الفترة $[a,b]$ و كانت قيم هذه الدالة دائما موجودة في الفترة $[a,b]$ لكل قيم x الموجودة في هذه الفترة فإن للدالة $g(x)$ نقطة ثابتة واحدة في الفترة $[a,b]$ اذا كانت $|g'(x)| < 1$ محققة لكل قيم x داخل هذه الفترة.

لذا فان الصيغة $x = g(x)$ التي يؤدي تكرار استخدامها الى الوصول الى جذر هذه المعادلة الموجود في الفترة $[a,b]$ هي تلك الصيغة التي تحقق $|g'(x)| < 1$ لكل النقاط داخل هذه الفترة.

مثال (3)

اوجد الجذر الواقع في المجال $[0.7,1]$ للمعادلة الغير خطية

$$x^3 - e^{-x} = 0$$

بطريقة النقطة الثابتة.

الحل

بتحويل المعادلة $x^3 - e^{-x} = 0$ الى الصيغة $x = g(x)$ كالاتي

$$x^3 = e^{-x} \Rightarrow x = e^{-x/3}$$

يبقي لنا التأكد من تحقق شرط ليبنز:

$$|g'(x)| = \left|-\frac{1}{3}e^{-x/3}\right| \le \frac{1}{3} < 1 \ , \quad \forall \ x \in [0.7,1]$$

و بالتالي فهي تحقق شرط ليبنز.

لذلك فان صيغة التكرار التي سيتم استخدامها للوصول الي الجذر المطلوب هي

$$x_{n+1} = g(x_n) \ , n = 0,1,2,\cdots$$
$$x_{n+1} = \mathrm{e}^{-x_n/3}, n = 0,1,2,\cdots$$

و هكذا نجد ان القيم المتتالية هي

$$x_0 = 0.7$$
$$x_1 = 0.7918895$$
$$x_2 = 0.7918897$$
$$x_3 = 0.7741418$$
$$x_4 = 0.7725527$$
$$x_5 = 0.7729665$$

و هكذا فاذا كان $|x_{n+1} - x_n| < 0.000407$ فإننا نتوقف و نعتبر ان x_{n+1} هو الجذر المطلوب. وبالتالي يمكن اعتبار ان x_5 هو الجذر المطلوب.

مثال (4)

بتطبيق خمس تكرارات بطريقة النقطة الثابتة اوجد جذر المعادلة

$$x = 0.5 + \sin x$$

حيث $x_0 = 1$

الحل

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0,1,2,\cdots$$

$$x_{n+1} = 0.5 + \sin x_n , \quad n = 0,1,2,\cdots$$

$$x_0 = 1$$
$$x_1 = 0.5 + \sin(x_0) = 0.5 + \sin(1) = 1.341470985$$
$$x_2 = 0.5 + \sin(x_1) = 1.495381998$$
$$x_3 = 0.5 + \sin(x_2) = 1.4953015$$
$$x_4 = 0.5 + \sin(x_3) = 1.4971517$$
$$x_5 = 0.5 + \sin(x_4) = 1.49712899$$

(3-3-6) طريقة نيوين – رافسون (Newton-Raphson method)

هذه الطريقة تعتبر من اشهر الطرق العددية المستخدمة لإيجاد جذر المعادلة $f(x) = 0$ و القريب من قيمة معينة و هذه الطريقة هي حالة خاصة من طريقة النقطة الثابتة التي تم شرحها سابقا.

و يمكن اشتقاق صيغة التكرار المستخدمة في هذه الطريقة واللازمة لإيجاد جذر المعادلة $f(x) = 0$ باستخدام متسلسلة تايلور.

اذا فرضنا ان x_0 هي قيمة تقريبية ابتدائية معروفة لجذر المعادلة $f(x) = 0$ و x_1 هي القيمة التقريبية التالية لهذا الجذر و كان الفرق بين القيمتين هو h ، أي ان

$$x_1 - x_0 = h \qquad (1)$$

فإننا و باستخدام متسلسلة تايلور نستطيع التعبير عن القيم الدقيقة x_1 بدلالة القيمة التقريبية المعروفة x_0 كما يلي

$$f(x_1) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(\xi) \qquad (2)$$

حيث ξ هي قيمة واقعة بين القيمتين x_0, x_1.

و حيث ان x_1 هي قيمة تقريبية اكثر دقة لجذر المعادلة $f(x)=0$ فان

$$f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(\xi)=0 \qquad (3)$$

بإهمال الحد المتبقي $\frac{h^2}{2!}f''(\xi)$ في المعادلة (3) و ذلك كون المقدار h^2 صغير جدا (لان القيمتين x_0, x قريبتين من بعضهما) فإننا نستنتج ان

$$f(x_0)+hf'(x_0)=0$$

من هذه المعادلة فإن

$$h=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

بالتعويض عن قيمة h في المعادلة (1) نستنتج ان

$$x_1-x_0=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

اي ان

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

اي ان صيغة التكرار التي تستخدم للوصول الى الجذر المطلوب هي

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\\
x_3 &= x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}\\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots\\
x_{n+1} &= x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,2,\cdots
\end{aligned}$$

و من هذه المعادلة الاخيرة نستطيع ايجاد القيمة الدقيقة لجذر المعادلة $f(x)=0$ من معرفة قيمته التقريبية. القيمة الابتدائية الجيدة x_0 هي التي تحقق المتباينة

$$f(x_0)f''(x_0)>0$$

مثال (1)

احسب بطريقة نيوتن – رافسون الجذر السالب للمعادلة

$$f(x)=x^4-3x^2+75x-10000=0$$

الحل

$$f(-100)=99952500 \;\;,\;\; f(-10)=-1050$$

و بالتالي في الجذر x في يقع في الفترة $(-100,-10)$ نضيق الفترة الناتجة حيث ان

$$f(-11)=3453$$

فان x في تقع في الفترة $(-11,-10)$ ويمكن اخذ $x_0=-11$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=-11-\frac{3453}{-5183}=-10.3$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=-10.3-\frac{134.3}{-4234}=-10.27$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=-10.27-\frac{37.8}{-4196}=-10.621$$

$\therefore$ الجذر ≈ -10.621

مثال (2)

استخدم طريقة نيوتن رافسون في ايجاد جذر المعادلة الواقع في $[0,1]$

$$f(x)=x^4+x^3-4x^2+3=0$$

الحل

$$f'(x)=4x^3+3x^2-8x-3$$

نبدأ بالقيمة $x_0 = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{-2}{-4} = 0.5$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.5 - \frac{0.6875}{-5.75} = 0.6196$$

$$\because f(x_2) = 0.0089$$

نلاحظ ان $f(x_2)$ قريبة من الصفر

اذن $x_2 = 0.6196$ هي تقريبا الجذر المطلوب

مثال (3)

استخدم طريقة نيوتن رافسون في ايجاد قيمة تقريبية للمقدار $\sqrt{7}$

الحل

نفرض ان

$$x = \sqrt{7} \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x^2 - 7 = 0$$

و ينتج ان $x^2 - 7 = 0$ هي المعادلة $f(x) = 0$ و الان نبحث عن الجذر لهذه المعادلة باستخدام طريقة نيوتن - رافسون

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - 7}{2x_{n-1}} = \frac{x_{n-1}^2 + 7}{2x_{n-1}}$$

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{7}{x_{n-1}}\right)$$

نستخدم القيمة الابتدائية $x_0 = 0.25$ نحصل علي

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{7}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(2.5 + \frac{7}{2.5}\right) = 2.65$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{7}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(2.65 + \frac{7}{2.65}\right) = 2.64576$$

و بالتكرار نحصل على

$$x_3 = 2.64575$$
$$x_4 = 2.6457$$

هاتين القيمتين x_4 , x_3 متطابقتين بخمس علامات عشرية.

مثال (4)

استخدم طريقة نيوتن - رافسون لإيجاد الجذر لأقرب رقمين عشريين للمعادلة

$$e^x - 3x = 0$$

في الفترة $[0,1]$.

الحل

$$f(x) = e^x - 3x$$

$$f'(x) = e^x - 3$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \ n = 0,1,2,\cdots$$

بأخذ $x_0 = 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{-1}{-2} = 0.5$$

$$f(x_1) = 0.15 \, , \, f'(x_1) = -1.35$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.5 + \frac{0.15}{1.35} = 0.61$$

$$f(x_2) = 0.01 \, , \, f'(x_2) = -1.16$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.61 + \frac{0.01}{1.16} = 0.62$$

$$f(x_3) = 0.0$$

$\therefore \; x_3$ هو الجذر المطلوب.

مثال (5)

استخدم طريقة نيوتن رافسون لإيجاد الجذر لأقرب اربع ارقام عشرية للمعادلة

$$x^4 - x = 10$$

بالقرب $x = 2$.

الحل

$$f(x) = x^4 - x - 10$$

$$f'(x) = 4x^3 - 1$$

$$f(2) = 4 \;\; , \;\; f'(2) = 31$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{4}{31} = 1.871$$

$$f(x_1) = f(1.871) = 0.383487$$

$$f'(x_1) = f'(1.871) = 6.54969$$

و هكذا و بتطبيق هذه الصيغة عدة مرات متتالية نحصل على القيم التالية

$$x_1 = 1.871$$
$$x_2 = 1.85578$$
$$x_3 = 1.85585$$
$$x_4 = 1.855584$$

و حيث ان

$$|x_4 - x_3| = 0.00000474 < 5\times10^{-5}$$

بذلك يكون الجذر هو $x_4 = 1.855584$

مثال (6)

باستخدام طريقة نيوتن رافسون اوجد جذر المعادلة $\cos(2x) - x = 0$ اذا علمت ان القيمة التقريبية لهذا الجذر هي $x_0 = 0.6$

الحل

من هذه المعادلة

$$f(x) = \cos(2x) - x$$
$$f'(x) = -2\sin(2x) - 1$$

اي ان صيغة التكرار هي

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\cos(2x_n) - x_n}{2\sin(2x_n) + 1}$$

اي ان

$$x_0 = 0.6$$

$$x_1 = x_0 + \frac{\cos(2x_0) - x_0}{2\sin(2x_0)+1} = 0.6 + \frac{\cos[2(0.6)] - 0.6}{2\sin[2(0.6)]+1} = 0.51703$$

$$x_2 = x_1 + \frac{\cos(2x_1) - x_1}{2\sin(2x_1)+1} = 0.51703 + \frac{\cos[2(0.51703)] - 0.51703}{2\sin[2(0.51703)]+1}$$

$$= 0.51493$$

$$x_3 = x_2 + \frac{\cos(2x_2) - x_2}{2\sin(2x_2)+1} = 0.51493 + \frac{\cos[2(0.51439)] - 0.51493}{2\sin[2(0.51493)]+1}$$

$$= 0.51493$$

لاحظ انه تم الحصول على القيمة الدقيقة للجذر بتكرار الصيغة اعلاه ثلاث مرات فقط.

مثال (7)

اعد حل المثال السابق باستخدام القيمة التقريبية للجذر $x_0 = 0.75$

الحل

باستخدام القيمة التقريبية $x_0 = 0.75$ نحصل على

$$x_0 = 0.75$$

$$x_1 = x_0 + \frac{\cos(2x_0) - x_0}{2\sin(2x_0)+1} = 0.75 + \frac{\cos[2(0.75)] - 0.75}{2\sin[2(0.75)]+1} = 0.5232$$

$$x_2 = x_1 + \frac{\cos(2x_1) - x_1}{2\sin(2x_1)+1} = 0.5232 + \frac{\cos[2(0.5232)] - 0.5232}{2\sin[2(0.5232)]+1} = 0.51496$$

$$x_3 = x_2 + \frac{\cos(2x_2) - x_2}{2\sin(2x_2)+1} = 0.51496 + \frac{\cos[2(0.51496)] - 0.51496}{2\sin[2(0.51496)]+1} = 0.51493$$

$$x_4 = x_3 + \frac{\cos(2x_3) - x_3}{2\sin(2x_3)+1} = 0.51496 + \frac{\cos[2(0.51496)] - 0.51496}{2\sin[2(0.51496)]+1} = 0.51493$$

لاحظ ان عدد مرات التكرار اللازمة للحصول على القيمة الدقيقة للجذر قد زاد عن عدد مرات التكرار في المثال السابق وذلك لان الفرق بين القيمتين التقريبية والدقيقة قد زاد عن ذلك في مثال (7)

مثال (8)

اعد حل المثال السابق باستخدام القيمة التقريبية للجذر $x_0 = 2$

الحل

باستخدام القيمة التقريبية $x_0 = 2$ نحصل على

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = x_0 + \frac{\cos(2x_0) - x_0}{2\sin(2x_0)+1} = 2 + \frac{\cos[2(2)] - 2}{2\sin[2(2)]+1} = 7.1667$$

$$x_2 = x_1 + \frac{\cos(2x_1) - x_1}{2\sin(2x_1)+1} = 7.1667 + \frac{\cos[2(7.1667)] - 7.1667}{2\sin[2(7.1667)]+1} = 4.861$$

$$x_3 = x_2 + \frac{\cos(2x_2) - x_2}{2\sin(2x_2)+1} = 4.861 + \frac{\cos[2(4.861)] - 4.861}{2\sin[2(4.861)]+1} = -0.3649$$

من الواضح انه حتى لو استمرينا باستخدام الصيغة اعلاه فإننا لن نستطيع الوصول الى القيمة الدقيقة لجذر المعادلة $\cos(2x) - x = 0$ و الذي قيمته $0.51494 \pm 3\times10^{-5}$ وذلك لان الفرق بين القيمة التقريبية التي افترضناها و القيمة الدقيقة للجذر كبيرة نسبيا.

من الامثلة السابقة نستنتج انه

1. باستخدام طريقة نيوتن رافسون يمكن الوصول الى القيمة الدقيقة لجذر المعادلة $f(x) = 0$ بعدد قليل من مرات تكرار صيغة هذه الطريقة.
2. سرعة الحصول على القيمة الدقيقة للجذر تعتمد على الفرق بين القيمة التقريبية للجذر التي نفرضها والقيمة الدقيقة له و كلما كان هذا الفرق قليلا كلما كان الوصول الى القيمة الدقيقة للجذر اسرع.
3. اذا كان الفرق بين القيمة التقريبية للجذر والقيمة الدقيقة له كبيرا فانك قد لا تستطيع الوصول الى القيمة الدقيقة للجذر.

- **تقارب طريقة نيوتن رافسون**

اذا فرضنا ان

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (1)$$

فلابد و ان

$$|g'(x)| < 1$$

و هو شرط التقارب. ومن المعادلة (1) نجد ان

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$|g'(x)| = \left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1$$

و بذلك تكون طريقة نيوتن - رافسون تقاربية عندما

$$|f(x)f''(x)| < [f'(x)]^2$$

- **تطبيقات على طريقة نيوتن رافسون**

اولا: ايجاد الجذر P للعدد N

في هذه الحالة فان المطلوب هو ايجاد $\sqrt[P]{N}$

$$x = \sqrt[P]{N} \Rightarrow x^P = N$$

نفرض ان

$$f(x) = x^P - N$$

$$f(x_n) = x_n^P - N$$

$$f'(x_n) = P\, x_n^{P-1}$$

و بتطبيق طريقة نيوتن رافسون نحصل علي

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{x_n^P - N}{P\,x_n^{P-1}}$$

$$= \frac{P\,x_n^P - x_n^P + N}{P\,x_n^{P-1}}$$

$$x_{n+1} = \frac{(P-1)x_n^P + N}{P\,x_n^{P-1}}$$

ملاحظة

اذا كان الجذر تربيعيا يتحول القانون السابق كالاتي

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right)$$

مثال (1)

اوجد قيمة $\sqrt{28}$

الحل

صيغة نيوتن رافسون التكرارية لإيجاد الجذر التربيعي هي

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right)$$

بوضع $x_0 = 5$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{N}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{28}{5}\right) = 5.3$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{N}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(5.3 + \frac{28}{5.3}\right) = 5.292$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{N}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(5.292 + \frac{28}{5.292}\right) = 5.2915$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{N}{x_3}\right) = \frac{1}{2}\left(5.2915 + \frac{28}{5.2915}\right) = 5.291502$$

$$|x_4 - x_3| = 0.00002$$

مثال (2)

استخدم الصيغة التكرارية للجذر التربيعي لإيجاد قيمة $\sqrt{40}$

الحل

حيث ان

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right)$$

بأخذ $x_0 = 6.5$ نجد ان

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{N}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(6.5 + \frac{40}{6.5}\right) = 6.32692$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{N}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(6.32692 + \frac{40}{6.32692}\right) = 6.324557$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{N}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(6.324557 + \frac{40}{6.324557}\right) = 6.324555$$

و حيث أن

$$|x_3 - x_2| = 0.000002$$

و بالتالي يكون

$$\sqrt{40} = 6.324555$$

ثانيا: ايجاد مقلوب الاعداد الحقيقية $\frac{1}{N}$

نفرض ان

$$x=\frac{1}{N} \Rightarrow \frac{1}{x}-N=0$$

$$f(x)=\frac{1}{x}-N$$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(1/x_n)-N}{(-1/x_n^2)}$$

$$x_{n+1}=x_n(2-Nx_n),\ n=0,1,2,\cdots$$

مثال (3)

اوجد مقلوب العدد 3 باستخدام قيمة ابتدائية $x_0=0.3$

الحل

$$x_{n+1}=x_n(2-Nx_n),\ n=0,1,2,\cdots$$

$$x_0=0.3$$

$$x_1=x_0(2-Nx_0)$$
$$=0.3[2-3(0.3)]=0.33$$

$$x_2=x_1(2-Nx_1)$$
$$=(0.33)[2-3(0.33)]=0.3333$$

$$x_3 = x_2\left(2 - Nx_2\right)$$
$$= \left(0.3333\right)\left[2 - 3\left(0.3333\right)\right] = 0.33333$$

(4-3-6) طريقة القاطع (Secant Method)

لاحظنا ان طريقة نيوتن رافسون لا يجاد جذر المعادلة $f(x) = 0$ تتطلب ايجاد مشتقة الدالة $f(x)$ (أي $f'(x)$).

في بعض الحالات و عندما تكون مشتقة الدالة $f(x)$ مكونة من عدد كبير من الحدود فان حساب قيمة هذه المشتقة و عند كل خطوة من خطوات طريقة نيوتن رافسون سيتطلب اجراء عدد من العمليات الحسابية الاضافية مثلا الدالة $f(x) = x^2 e^x \cos(2x)$ فإن

$$f'(x) = 2xe^x \cos(2x) + x^2 e^x - 2x^2 e^x \sin(2x)$$

لاحظ العدد الكبير للعمليات الحسابية اللازمة لحساب قيمة هذه المشتقة عند كل خطوة من خطوات طريقة نيوتن رافسون.

في مثل هذه الحالات فان طريقة القاطع تعطينا امكانية ايجاد جذر المعادلة $f(x) = 0$ دون الحاجة لحساب قيمة المشتقة $f'(x)$ في صيغة التكرار المستخدمة في طريقة نيوتن رافسون و هي

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , n = 0,1,2,\cdots$$

لو تم استبدال المشتقة $f'(x_n)$ بقيمتها التقريبية

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

لحصلنا علي صيغة التكرار بطريقة القاطع وهي

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\left(x_n - x_{n-1}\right)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, n = 1,2,3,\cdots$$

نلاحظ من هذه الصيغة بان حساب القيمة x_{n+1} يتطلب معرفة قيمة الدالة عند نقطة نقطتين سابقتين أي $f(x_n)$ ، $f(x_{n-1})$.

الموضوع السابق	العودة إلى عناصر المحتوى	الموضوع التالي

مثال (1)

باستخدام طريقة القاطع اوجد قيمة جذر المعادلة $x^2 e^x \cos(2x) = 0$ الموجود في الفترة $[0.7, 0.8]$.

الحل

صيغة التكرار بهذه الطريقة هي

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \; n = 1, 2, 3, \cdots$$

حيث

$$f(x) = x^2 e^x \cos(2x)$$

باستخدام طرفي الفترة التي يوجد فيها الجذر كقيمتين تقريبيتين معروفتين لجذر المعادلة فإننا نحصل على الجدول التالي:

n	x_n	x_{n-1}	$f(x_n)$	$f(x_{n-1})$	x_{n+1}
1	0.8	0.7	-0.0416	0.1677	0.7801
2	0.7801	0.8	0.0141	-0.0416	0.7851
3	0.7851	0.7801	0.0008	0.0141	0.7854
4	0.7854	0.7851	-5×10^{-4}	0.0008	0.7854

مثال (2)

أعد حل المثال السابق باستخدام طريقة نيوتن – رافسون.

الحل

صيغة التكرار باستخدام طريقة نيوتن رافسون هي

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; n = 0, 1, 2, \cdots$$

حيث

$$f(x) = x^2 e^x \cos(2x)$$

$$f'(x)=2xe^{x}\cos(2x)+x^{2}e^{x}-2x^{2}e^{x}\sin(2x)$$

استخدام القيمة $x_0=0.75$ (منتصف الفترة التي يوجد بها جذر المعادلة) كقيمة تقريبية اولية فإننا نحصل على الجدول التالي

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	0.75	0.0842	−2.0668
1	0.7907	−0.0146	−2.8085
2	0.7855	−0.0003	−2.7078
3	0.7854	−0.000005	−2.7059
4	0.7854	−0.000005	

➢ **مقارنة الطرق المختلفة**

تعرفنا سابقا على طرق مختلفة لإيجاد جذر معادلة المتغير الواحد $f(x)=0$. إن اختيار طريقة او اخرى لحل مسالة معينة يعتمد على فهم و امكانيات ومزايا كل طريقة من الطرق التي تم شرحها سابقا و فيما يلي ملخص لمزايا و امكانيات كلا من هذه الطرق.

- طريقة تنصيف الفترة: حيث ان الفترة التي يوجد فيها الجذر يتم تقليصها بعد كل خطوة من خطوات هذه الطريقة فإن الوصول الى قيمة جذر المعادلة $f(x)=0$ و بالدقة المطلوبة باستخدام هذه الطريقة مضمون ولكن هذه الطريقة تعتبر بطيئة اذا ما قورنت بالطرق الاخرى، أي ان ايجاد قيمة الجذر يتطلب تكرار تنصيف الفترة التي يوجد فيها الجذر عدد كبير من المرات.
- طريقة النقطة الثابتة: في هذه الطريقة تتم كتابة المعادلة بالصيغة $x=g(x)$ و فيما اذا كان استخدام صيغة معينة من الصيغ $x=g(x)$ التي يمكن كتابة الدالة بها يؤدي الى الوصول الى قيمة الجذر او لا فإن هذا يعتمد على اختيار الدالة $g(x)$ و كذلك القيم التقريبية الابتدائية للجذر و حتى تضمن الوصول الى القيمة الدقيقة للجذر باستخدام هذه الطريقة يجب التحقق من صحة الشرط $|g'(x)|<1$ لكل نقاط الفترة التي يتم البحث عن الجذر فيها.
- طريقة نيوتن رافسون: و هي من اكثر الطرق استخداما واسرعها في إيجاد القيمة الدقيقة لجذر المعادلة $f(x)=0$ و هي حالة خاصة من طريقة النقطة الثابتة و الشرط الضروري للوصول الى القيمة الدقيقة للجذر باستخدام هذه الطريقة هو ان تكون القيمة التقريبية الاولية للجذر قريبة بدرجة كافية من قيمته الدقيقة.

– طريقة القاطع: هذه الطريقة مشتقة اصلا من طريقة نيوتن رافسون و ذلك باستبدال المشتقة $f'(x)$ بقيمتها التقريبية و يفضل استخدام هذه الطريقة اذا كانت صيغة المشتقة $f'(x)$ معقدة نسبيا و سرعة الوصول الى القيم الدقيقة للجذر باستخدام هذه الطريقة تساوي تقريبا سرعة الوصول الى الجذر باستخدام طريقة نيوتن رافسون.

مما فإنه عند البحث عن القيمة الدقيقة لجذر معادلة المتغير الواحد $f(x)=0$ فإننا ننصح باتباع الخطوات التالية:

1. أوجد أقصر فترة يمكن ان يوجد بها جذر المعادلة (أدق قيمة تقريبية ممكنة) باستخدام احدي الطرق التي تم شرحها في البند السابق من هذا الفصل.
2. اذا كانت الفترة التي يوجد فيها جذر المعادلة واسعة نسبيا استخدم طريقة تنصيف الفترة مرات عديدة وذلك للوصول الى دقة معينة تضمن الوصول الى القيمة الدقيقة للجذر باستخدام الطرق الاخرى.

استخدم بعد ذلك طريقة نيوتن رافسون او طريقة القاطع (في حال كون في صيغة المشتقة $f'(x)$ معقدة نسبيا) مرات عديدة للوصول الى الدقة المطلوبة.

الفصل الثامن

الحل العددي لأنظمة المعادلات الجبرية الخطية

عند معالجة العديد من النماذج الرياضية تتحول المسالة الى مجموعة من المعادلات الخطية المطلوب حلها و على سبيل المثال عند حل المعادلات التفاضلية العادية او الجزئية باستخدام طرق الفروق المنتهية فانه ينتج نظام معادلات خطي وكذلك عند حل مسائل توفيق المنحنيات باستخدام طريقة المربعات الصغرى فان الناتج ايضا يكون نظام معادلات خطي واستخدام المصفوفات في هذا المجال ليس فقط مناسبا و لكنه فعال في استنتاج العلاقات الاساسية.

يمكننا كتابة المعادلات الخطية التالية

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

في صورة مبسطة باستخدام المصفوفات كالتالي

$$AX = B \qquad (1)$$

حيث

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$-x_2 + x_1 = 2$$

$$\frac{+x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{3}{2}}{0 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2}}$$

فيصبح نظام المعادلات الجديد

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \qquad E_1 \\ -2x_2 + x_3 &= 3 \qquad E_2 \\ \frac{1}{2}x_3 &= \frac{1}{2} \qquad E_3 \end{aligned}$$

الخطوة الثانية

حل النظام المثلثي بالتعويض الخلفي.

من المعادلة E_3 نجد ان $x_3 = 1$ وبالتعويض في E_2 نجد ان $-2x_2 + 1 = 3$ وبالتالي $x_2 = -1$ وبالتعويض في E_1 نجد ان

ان عمليات الحذف المذكورة في المثال السابق تكون اكثر سهولة اذا تم وصفها مصفوفيا ولهذا الغرض سوف ندرس المثال التالي

مثال (1)

استخدم الشكل المصفوفة لطريقة جاوس للحذف لحل النظام الخطي

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \qquad E_1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \qquad E_2 \\ -x_1 - 3x_2 &= 2 \qquad E_3 \end{aligned}$$

الحل

نكتب مصفوفة النظام

$$[A/B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

ونلاحظ ان حذف متغير من معادلة يكافئ جعل معامل هذا المتغير في صف المعادلة مساويا للصفر وعلى سبيل المثال فان حذف x_1 من E_2, E_3 عن طريق

$$E_3 + E_1 \to E_3$$
$$E_2 - 2E_1 \to E_2$$

يعطى الشكل المصفوفي

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

عند حذف x_2 من E_3 عن طريق

$$E_3 - \frac{1}{2}E_2 \rightarrow E_3$$

يصبح الشكل المصفوفي

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

وهذه هي نهاية خطوات الحذف وعندئذ يصبح شكل نظام المعادلات

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

و هو نظام مثلثي علوي يتم حله بالتعويض الخلفي لنحصل على نفس النتيجة

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$$

للتأكد من صحة الحل سنكتب المسالة في الصورة المصفوفية (1) حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

تغيير العنصر المحوري

في طريقة الحذف افترضنا ان $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ عند كل خطوة k خلال القيم $k = 1, 2, \cdots, n-1$.

ولإلغاء هذا الافتراض الذي قد لا يتحقق دائما بالرغم من ان النظام يكون قابلا للحل وسوف ننظر (في حالة $a_{kk}^{(k)} = 0$) الى الصف التالي وسنجد ان معامل x_k مختلف عن الصفر (طالما كان النظام قابلا للحل) اذا لم يكن كذلك بحثنا في الصف التالي له وهكذا. وعندما نجد الصف الذي يكون فيه معامل x_k مختلف عن الصفر نقوم بعملية تبديل بين هذا الصف والصف الحالي ليصبح نظام المعادلات الجديد محققا للشرط $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ (يسمى $a_{kk}^{(k)}$ العنصر المحوري في الصف رقم k).

مثال

استخدم طريقة جاوس للحذف في حل نظام المعادلات

$$6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2$$

$$2x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$$

الحل

سوف نستخدم الصورة المصفوفية

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2/3 & 1/3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$m_{21} = \frac{1}{3}, \quad m_{31} = \frac{1}{6}$$

$$E_3 - m_{31}E_1 \rightarrow E_3$$

$$E_2 - m_{21}E_1 \rightarrow E_2$$

فنحصل على

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

في هذا النظام $a_{22}^{(2)} = 0$ وحيث ان الصف الثاني يحمل المعامل $\frac{5}{3}$ في نفس الموضع فسنقوم بتبديل الصف الثاني والثالث.

الطرق التتابعية

اذا كانت المصفوفة A هشة اي تحتوي على عدد كبير من العناصر الصفرية فانه يفضل استخدام الطرق التتابعية وتعتمد هذه الطرق على البدء من تخمين ابتدائي للحل X_0 والتعويض في صيغة تتابعية تعتمد على نظام المعادلات موضع الحل للوصول الى تتابعات من التقريبات $X_1, X_2, \cdots$ تتقارب نحو الحل الصحيح X. و سوف نبدأ بدراسة الطريقة اليعقوبية.

الطريقة اليعقوبية

لنأخذ في الاعتبار نظام المعادلات

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \qquad E_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \qquad E_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \qquad E_3 \end{aligned}$$

تعتمد الطريقة اليعقوبية على فكرة ايجاد x_k في المعادلة رقم E_k، $k = 1,2,3$ بدلالة باقي المجاهيل لتصبح المعادلات (1) كالتالي

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right]$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right]$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right]$$

وذلك بشرط ان $a_{kk} \neq 0$.

ثم باختيار $X^{(0)} = \left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_2^{(0)}\right]^T$ كتقريب (تخمين) ابتدائي للحل. ثم كتابة العلاقات التتابعية اعتمادا على المعادلات (2) كالتالي

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right]$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}\right]$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}\right]$$

حيث $k = 1,2,3$.

هذه الطريقة تسمى الطريقة اليعقوبية او طريقة الاستبدالات المتماثلة

مثال

استخدم الطريقة اليعقوبية لحل النظام التالي للمعادلات الخطية

$$\begin{aligned} 9x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \qquad E_1 \\ 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 &= 19 \qquad E_2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 11x_3 &= 0 \qquad E_3 \end{aligned}$$

وذلك لتتابعين متتاليين مبتدئا من التخمين الابتدائي $X^{(0)} = [0,0,0]^T$.

و احسب الخطأ الاقصى في كل تتابع اذا علمت ان

$$X^* = [1,2,-1]^T$$

الحل

باستخدام المعادلات (3) و وضع $k = 0$ نجد ان

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}\right]$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)}\right]$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(0)} - a_{32}x_2^{(0)}\right]$$

ولكن من نظام المعادلات المعطي لدينا

$$a_{11} = 9 \, , b_1 = 10 \, , x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$$

وبالتالي يكون

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{9}[10 - 0 - 0] = \frac{10}{9} = 1.111$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{10}[19 - 0 - 0] = \frac{19}{10} = 1.9$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{11}[0 - 0 - 0] = 0$$

وباستخدام الحل الصحيح المعطي

$$e_1 = x_1 - x_1^{(1)} = 1.0 - 1.111 = -0.111$$
$$e_2 = x_2 - x_2^{(1)} = 2.0 - 1.9 = 0.1$$
$$e_3 = x_3 - x_3^{(1)} = -1.0 - 0.0 = -1.0$$

ويكون الخطأ الاقصى

$$e^{(1)} = \underset{1<k<3}{Max}\left|e_k\right| = Max\left|0.111, 0.1, 1.0\right| = 1.0$$

التتابع الثاني بالمثل يكون بوضع $k = 1$ نجد ان

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - a_{13}x_3^{(1)}\right] = \frac{1}{9}[10 - 1.9 - 0] = 0.9$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(1)}\right] = \frac{1}{10}\left[19 - (2)(1.111) - (3)(0)\right]$$
$$= 1.6778$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}\right] = \frac{1}{11}\left[0 - (3)(1.111) - (4)(1.9)\right]$$
$$= -0.99$$

و باستخدام الحل الصحيح المعطي

$$e_1 = x_1 - x_1^{(2)} = 1.0 - 0.9 = 0.1$$
$$e_2 = x_2 - x_2^{(2)} = 2.0 - 1.6778 = 0.322$$
$$e_3 = x_3 - x_3^{(2)} = -1.0 + 0.99 = -0.01$$

ويكون الخطأ الاقصى

$$e^{(2)} = \underset{1<k<3}{Max}\left|e_k\right| = Max\left|0.1, 0.322, -0.01\right| = 0.322$$

طريقة جاوس سيدال

لنأخذ في الاعتبار نظام المعادلات

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \qquad E_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \qquad E_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \qquad E_3$$

تستعين طريقة جاوس سيدال بنفس العلاقات التتابعية للطريقة اليعقوبية والتي هي على الصورة

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right]$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}\right]$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}\right]$$

وتعتمد الفكرة الجديدة على استخدام كل المعلومات التي حصلنا عليها قبل حساب كل مركبة فمثلا عند حساب $x_2^{(k+1)}$ نجد ان لدينا تقريبا جديدا ل x_1 هو $x_1^{(k+1)}$ قد تم حسابه في الخطوة السابقة مباشرة، وهو تقريب احدث من $x_1^{(k)}$ ونفس الشيء عند حساب $x_3^{(k+1)}$ لدينا تقريبان حديثان $x_2^{(k+1)}$ ، $x_1^{(k+1)}$ يمكن استخدامهما لتصبح العلاقات التتابعية الجديدة

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right]$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}\right]$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}\right]$$

وبشكل عام فان الصيغة التتابعية لطريقة جاوس سيدال هي

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}\right]$$

لكل $i = 1, 2, \cdots, n$ ، n عدد المعادلات.

مثال

استخدم طريقة جاوس سيدال لتتابعين متتاليين لحل نظام المعادلات

$$9x_1 + x_2 + x_3 = 10 \qquad E_1$$
$$2x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 19 \qquad E_2$$
$$3x_1 + 4x_2 + 11x_3 = 0 \qquad E_3$$

مبتدئا من التخمين الابتدائي $X^{(0)} = [0,0,0]^T$

احسب الخطأ الاقصى في كل تتابع اذا علمت ان الحل الصحيح هو $X^* = [1,2,-1]^T$.

الحل

باستخدام المعادلات (3) و بوضع $k = 0$ نجد ان

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}\right]$$

حيث انه من نظام المعادلات لدينا

$$a_{11} = 9, b_1 = 10, x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$$

اذن

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{9}[10 - 0 - 0] = 1.111$$

وكذلك فان

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)}\right]$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{10}\left[19 - 2(1.11) - 3(0)\right] = 1.6778$$

وكذلك

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}\right]$$

$$a_{33} = 11, b_3 = 0, a_{31} = 3, a_{32} = 4$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{11}\left[0 - 3(1.111) - 4(1.6778)\right] = -0.9131$$

و لحساب الخطأ الاقصى لدينا

$$e_1 = x_1 - x_1^{(1)} = 1.0 - 1.111 = -0.111$$
$$e_2 = x_2 - x_2^{(1)} = 2.0 - 1.6778 = 0.322$$
$$e_3 = x_3 - x_3^{(1)} = -1.0 + 0.9131 = -0.0869$$

ويكون الخطأ الاقصى

$$e^{(1)} = \underset{1<k<3}{Max}\left|e_k\right| = Max\left|-0.111, 0.322, -0.0869\right| = 0.322$$

التتابع الثاني $k = 1$ فتصبح

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - a_{13}x_3^{(1)}\right]$$
$$x_2^{(2)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(2)} - a_{23}x_3^{(1)}\right]$$
$$x_3^{(2)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(2)} - a_{32}x_2^{(2)}\right]$$

اذن

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{9}\left[10 - 1(1.678) - 1(0.9131)\right] = 1.0262$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{10}\left[19 - 2(1.0262) - 3(-0.9131)\right] = 1.9687$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{11}\left[0 - 3(1.0262) - 4(1.9687)\right] = -0.9958$$

ولحساب الخطأ الاقصى يكون

$$e_1 = x_1 - x_1^{(2)} = 1.0 - 1.0262 = -0.0262$$
$$e_2 = x_2 - x_2^{(2)} = 2.0 - 1.9687 = 0.0313$$
$$e_3 = x_3 - x_3^{(2)} = -1.0 + 0.9958 = -0.00421$$

ويكون الخطأ الاقصى

$$e^{(2)} = \underset{1<k<3}{Max} \left| e_k \right| = Max \left| -0.0262, 0.0313, -0.0042 \right| = 0.0042$$