مقدمة في بحوث العمليات

رقم المقرر ورمزه	اسم المقرر	توزيع ساعات الدراسة اسبوعياً			الاوراق الامتحانية		الدرجة
		ن	ع	ت	ن	ع	
4 ت ر	بحته 13(توبولوجي 1+بحوث عمليات) **جزء بحوث عمليات**	2	-	2	$\frac{1}{2}$	-	$\frac{150}{2}$

الموضوعات:

الفصل الأول:مقدمة

الفصل الثانى: البرمجة غير الخطية

الفصل الثالث: جبر و هندسة البرمجة الخطية

الفصل الرابع: طرق حل مسائل البرمجة الخطية

الفصل الخامس: مسألة البرمجة غير الخطية

الفصل السادس :البرمجة الغير خطية عديدة المتغيرات

المراجع:

[1] Hamdy Taha , Operations Research: An Introduction (Eight Edition) , Prentice Hall,2006.

[2] R. Bronson and G. Naadimuthu,Schaum's Outline of Theory and Problems of Operations Research, Second Edition, McGraw-Hill Companies, Inc. 1997

الفصل الأول:مقدمة

Chapter1:Intoduction

بحوث العمليات هو أحد فروع العلوم الرياضية التي تختص بتطبيق الطرق العلمية المناسبة للحصول على أفضل الحلول لمشكلة ما في أي مجال من مختلف المجالات في الحياة. ويُسمَّى الحل الناتج بالحل الأمثل ، ولذلك يطلق على جانب من هذا العلم إسم الأمثلية.

و يتطلب إيجاد الحل في هذا المجال ضرورة وضع خطوات أو مراحل رئيسية يجب أتباعها حتى نستطيع الحصول علي النتائج المرجوة وهذه المراحل هي

1- تعريف وتحديد المشكلة

2- بناء النموذج الرياضي الخاص بهذه المشكلة

3-عمل منهج للحل

4- التحقق بأن النموذج يتوافق مع منهج الحل

5- تنفيذ المنهج واستنباط النتائج النهائية

وحتى أوائل عام 1940 لم يكن هناك طرائق رياضية لحل مشاكل بحوث العمليات بالمعني الرياضي المعروف حاليا بل كل ما ظهر قبل ذلك هي نتائج بسيطة ناتجة عن مجهود فردي لبعض العلماء إلي إن تم عمل أول فريق عمل في هذا التخصص وتضمن مجموعة من العلماء المتخصصين في مختلف المجالات وبدأ في دراسة المشاكل الحربية وكان اهتمامهم هو تقديم العون العلمي للعسكريين خلال الحرب العالمية الثانية ولما كان لهذه الدراسات من نتائج طيبة حققها هذا الفريق في الجوانب العسكرية كان دافعا للبدء في دراسات مماثلة تمتد إلي العديد من المشاكل التي تواجه كافة الجوانب المدنية والتي حققت أيضا تقدم ملموس في حل معظم هذه المشاكل وبذلك ازدادت الرغبة للمزيد من هذه الدراسات في هذا الفرع العلمي الهام والضروري حتى أصبح اليوم من المقررات الدراسية الأساسية في جميع جامعات العالم ليس فقط هذا بل أصبح ضمن مراحل التعليم دون الجامعي لما له من دور بارز في تطوير وتنمية العملية الإنتاجية في المجتمعات.

لقد تفرع علم بحوث العمليات في السنوات الأخيرة إلى عدة فروع تطور ولا يزال يتطور كل منها في أساليبه النظرية والعملية ولكل منها تطبيقاته العملية ومجالاته المتخصصة .وقد أدى هذا إلى تخصص بعض الدارسين في فرع واحد من هذه الفروع لاتساع مجالاتها وكثرة ما يكتب فيها .ومن هذا الفروع البرمجة الرياضية سواء أكانت خطية أم غير خطية ,والبرمجة الديناميكية ,والبرمجة الصحيحة ,والبرمجة العشوائية ,ونظرية القرارات الإحصائية ,ونظرية المحاكاة. وتعتبر البرمجة الخطية والتي تعتبر موضوع دراستنا من أهم فروع بحوث العمليات

وأكثرها تطبيقا. وهذه جميعها تندرج تحت اسم واحد وهو "طرق البرمجة الرياضية " Methods of Mathematical Programming

الأمثلية: Optimization

الأمثلية هي الحصول على أفضل النتائج للمشكلة موضع الدراسة والبحث .وطبقا لما تقدم عند بناء النموذج الرياضي لمشكلة ما توضع كأي نموذج رياضي في كفتين أساسيتين وهما عبارة عن (المعطيات والمطلوب)

(أ) فالمعطيات هنا بمثابة الشروط المتوفرة لدي المشكلة ويطلق عليها اسم القيود(Constraints)

(ب)والمطلوب هو عبارة عن موضوع المشكلة أصلا والتي يرجى وضعه في نتيجة مثالية ويسمى دالة الهدف(Objective Function).

وحيث أن كافة المعلومات التي نتعامل معها في المشكلة بكل جوانبها تكون موجودة فعلا ,لذا يعبر عن كل منها بإحدى المتغيرات $x_1, x_2, \dots, x_n$ حيث n عددها ، بذلك لا يمكن أن يكون أي من هذه المتغيرات سالبا، أي أن

$$x_j \geq 0, j = 1,2, \dots, n$$

ويطلق علي هذا الشرط بعدم السالبية (non-negativity)

مثال : نتصور النموذج الرياضي التالي :

أوجد القيم الصغرى للدالة

$$\text{minimize} \qquad Z = x_1^2 + x_2$$

مع تحقق الشروط

$$\text{Subject to:} \quad x_1 - x_2 = 3$$

$$x_2 \geq 0$$

هذه مسائلة برمجة رياضية أو امثلية optimization لدالة الهدف z, المتغيرات هنا هي x_2, x_1 وهما مقيدان بالشرطين المذكورين سابقا. المطلوب هو إيجاد قيم x_2, x_1 التي تخفض من قيمة دالة الهدف z وتحقق بمجموعة القيود المعطاه.

صياغة مسألة الأمثلية (البرمجة الرياضية)

أوجد قيمة
$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

والتي تحقق القيمة الصغرى للدالة $f(X)$

ويحقق الشروط

$$g_i(X) \le 0 \qquad i = 1,2, \dots, m$$

$$p_i(X) = 0 \qquad i = 1,2, \dots, p$$

حيث X هو متجه يتكون من n عنصر يسمي متجه التصميم، $f(X)$ تسمي الدالة الهدف $g_i(X)$ تسمي شروط المتباينات و $p_i(X)$ تسمي شروط المعادلات

ليس شرطا أن تكون هناك علاقة بين $n\ ,\ m\ ,\ p$

هذه المسألة بالكامل تسمي أيضا مسألة أمثلية مقيدة والمقصود بالقيود هنا الشروط (المتباينات - المعادلات)

متجه التصميم

أي تصميم هندسي أو أي تطبيق علمي أو تجاري يتم تعريفه من خلال مجموعة من الكميات

بعض هذه الكميات تكون متغيرات ، والبعض الآخر تكون ثوابت وتسمي بارامترات النظام

مثال1:قيادة السيارة

سعة خزان الوقود:بارامتر ، استهلاك الوقود لكل كيلو متر متغير تبعا للسرعة: بارامتر

ولكن سرعة السيارة: متغير

مثال2 :الإقامة في شقة : الثوابت:عدد الغرف – المساحة ، المتغيرات: الإيجار

مثال3: وعاء به ماء: الثوابت: جم الوعاء (ثابت) ، المتغيرات: كمية الماء

شروط التصميم

هي الشروط التي ينبغي أن تحققها المتغيرات ولا تتجاوزها لنجاح النظام وتحقق القيمة الصغرى لدالة الهدف

مثال 1 : السرعة ≥ 60 كلم / ساعة داخل المدينة و ≥ 120 علي الطريقة السريعة

مثال 2 : الإيجار $\geq \frac{1}{3}$ الدخل الشهري

مثال 3 : كمية الماء $\geq \frac{9}{10}$ حجم الوعاء

الدالة الهدف

هي تلك الصيغة التي تعبر عن الدالة المطلوب إيجاد القيمة الصغرى لها. وتتم هذه الصياغة من خلال معرفة أساليب الرياضيات المختلفة في تحويل المسألة اللفظية إلي صيغة رياضية

تبويب مسألة الأمثلية

تصنف مسألة الأمثلية إلي مسألة أمثلية مقيدة ومسألة أمثلية غير مقيدة وذلك تبعا لوجود شروط في المسألة من عدمه

تصنف مسألة الأمثلية تبعا للطبيعة الفيزيائية للمسألة إلي مسألة تحكم أمثل ومسألة تحكم غير أمثل . ومسألة التحكم الأمثل هي مسألة برمجة رياضية تشمل مجموعة من المراحل حيث تعتمد كل مرحلة علي المراحل السابقة وتوصف مسألة التحكم الأمثل بنوعين من المتغيرات :

- متغيرات التحكم (متغيرات النظام)
- متغيرات الحالة

البرمجة الصحيحة " Integer Programming" :

هي مسألة برمجة خطية تكون فيها المتغيرات ذات قيم صحيحة , وعندئذ لن يكون من الضروري ان يكون المعاملات في تعبيرات الشروط والثوابت في تعبير الدالة الهدف أيضا أعداد صحيحة.

البرمجة التربيعية " Quadratic Programming " :

هي مسألة برمجة رياضية تكون فيها الدالة الهدف على الصورة

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} d_i x_i$$

وتكون الشروط خطية.

الأمثلية غير المقيدة

إذا لم تحتوي المسألة على شروط سواء متباينات $g_i(X) \leq 0$ أو متساويات $p_i(X) = 0$ حيث $i = 1,2, \dots, m$ قيل أن المسألة هي مسألة أمثلية غير مقيدة.

الأمثلية المقيدة بمتباينات

في هذه المسألة تكون الدالة الهدف $f(X)$ المطلوب إيجاد القيمة الصغرى لها مشروطة بمتباينات مثل

$$g_k(X) \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0 \ , k = 1,2, \dots, m \ \ , X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

وتنقسم هذه المسألة إلى نوعين

1. مسألة برمجة خطية
2. مسألة برمجة غير خطية

الفصل الثاني: صياغة مسألة البرمجة الخطية

إذا كانت الدالة الهدف والشروط في مسألة الأمثلية هي دوال خطية في المتغيرات فإن المسألة تسمي مسألة برمجة خطية وتكون الصورة القياسية لها كالتالي :

أوجد قيم المتغيرات $x_1, x_{2,} \dots . x_n$ التي تجعل قيمة الدالة (دالة الهدف) التالية أكبر أو أصغر ما يمكن :

Optimize (minimize or maximize) :

$$Z = c_1\, x_1 + \; c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

وذلك تحت مجموعة القيود أو الشروط التالية :

Subject to:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}\right\} \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \left\{\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{array}\right.$$

(قيد عدم السالبية) $\forall \;\; x_{\mathrm{j}} \geq 0, j = 1,2, \dots, n$

حيث أن قيم الثوابت $a_{\mathrm{ij}}, b_{\mathrm{i}}, \mathrm{c_j}, (i = 1,2, \dots, m, j = 1,2, \dots, m)$ معروفة أما قيم المتغيرات $x_1, x_{2,} \dots . x_n$ فنحصل عليها بحل مسائلة البرمجة الخطية .

و يمكن كتابة مسألة البرمجة الخطية بالشكل المختصر التالي:

أوجد قيمة

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

التي تحقق القيمة الصغري للدالة

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i \ x_i$$

مع تحقق الشروط

$$g(X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ x_j \geq b_i \qquad\qquad j = 1 ,2 , \dots , m$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,2, \dots , n$$

حيث c_i, a_{ij}, b_i جميعها ثوابت.

تكوين النموذج الرياضي Problem Formulation:

ندرس هنا كيفية تحويل مشكلة حياتية أو تطبيق علمي أو عملي إلى مسألة برمجة خطية . ويتم ذلك كالآتي :

خطوة 1 : نحدد الكمية المطلوب ايجاد القيم المثلى لها (القيم المثلى *Optimum* تعنى القيم العظمى والصغرى *Minimum and Maximum*) ونكتب الصيغة الرياضية للدالة الهدف , وفي هذه الأثناء يجب أن نحدد المتغيرات (المجاهيل المطلوب اجادها لتحقيق القيم المثلى للدالة الهدف).

خطوة 2 : نحدد الشروط التي يجب أن تحققها المتغيرات مع وجود القيم المثلى . ونكتب الصيغ الرياضية للشروط *constraints* .

خطوة 3 : نعبر عن الشروط المخفية " مثل هذه الشروط تعرف من الطبيعة الفيزيائية للمسألة وتشمل على سبيل المثال : شرط عدم السالبية أو أن تكون المتغيرات ذات قيم صحيحة " .

أما الآن فسوف نستعرض مجموعة من الأمثلة لمسائل يمكن وضع كل منها على شكل نموذج برمجة خطية .

أمثلة:

Example1: The Haty shop makes its sandwiches from a combination beef and goat meat. The beef contains 80% meat and 20% fat, and it costs 24 pounds per kilo. The goat meat contains 68% meat and 32% fat, and it costs 18 pounds per kilo. What is the amount of meat from each type must be used in each kilo of meat if it wants to minimize its costs and keep the ratio of fat so that no more than 25%

يقوم حاتي بعمل شطائر اللحم بتكوين من لحم بقري ولحم ماعز.يحتوي لحم البقر علي 80%لحم و20%دهون ويكلف 24جنيه لكل كيلو في حين أن لحم الماعز علي 68%لحم و32%دهون ويكلف 18جنيه لكل كيلو .ما هي كمية اللحم من كل نوع يجب أن يستخدمها المحل في كل كيلو من شطائر اللحم اذا علمت انه يجب تخفيض التكاليف والمحافظة علي نسبة الدهون .بحيث لا يزيد عن 25%

الحل:

المتغيرات:نفرض ان وزن لحم البقر المستخدم في الكيلو x_1 ووزن لحم الماعز المستخدم في الكيلو x_2

Solution 1 :let $x_1$weight of beef meat and $x_2$weight of goat meat

دالة الهدف objective function :

minimize $z = 24x_1+18x_2$

القيود :

The conditions (1) rate of fat

القيد الاول:يحتوي كل كيلو علي x_1 0.20 من الدهون من لحم البقر و $0.32x_2$ من الدهون من لحم الماعز ويجب الا تزيد الدهون فى الشطيرة عن 0.25

$$0.20x_1+0.32x_2 \le 0.25$$

(2) per kilo

القيد الثاني:ويجب ان يكون وزن لحم البقر ولحم الماعز مجتمعين في كل كيلو من الشطائر هو كيلو واحد.

$$x_1+x_2=1$$

(1) non-negative condition

القيد الثالث:قيد عدم السالبية

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Final formula for linear programming problem

النموذج الرياضي:

$$\text{Minimize} \quad z=24x_1+18x_2$$

علما بان:

Subject to

$$0.20x_1+0.32x_2 \le 0.25$$

$$x_1+x_2=1$$

$$x_1 \ge 0. x_2 \ge 0$$

Example2:A factory wants in the production of 2 models. The first one needs 3 units of wood; and 3 units of iron; 5 units of aluminum, models II needs a single unit of wood; 8 units of iron; 4 units of aluminum. If you know that the maximum available of wood is 53 units ,Steel 127 and 100 for aluminum. Form the mathematical model in the following cases
A - If the first model is given a profit of unit and the second 2 units. B – if the first model gives a profit of two units and the second gives a single unit.

يرغب صاحب مصنع في إنتاج سلعتين، فإذا كانت السلعة الأولى تحتاج لإنتاجها إلى 3 وحدات من الخشب ؛ و3 وحدات من الحديد ؛5 وحدات من الألمونيوم والسلعة الثانية تحتاج الى وحدة واحدة من الخشب ؛ 8 وحدات من الحديد ؛ 4 وحدات من الالمونيوم . فإذا عرفت ان الحد الاقصى المتاح للوحدات هي 53 للخشب ؛ 127 للحديد و100 للألمونيوم. كون النموذج الرياضي الأمثل في الحالات الآتية

أ- إذا علم ان السلعة الاولى تعطى ربحاً قدره الوحدة والثانية تعطي وحدتان

ب- إذا علم ان السلعة الأولى تعطي ربحا قدره وحدتان والثانية تعطي وحدة واحدة.

الحل:

حيث ان المطلوب الحصول على قيمة عظمى للربح (القيمة المثلى) نفرض أن المصنع ينتج x وحدة من السلعة الأولى ؛ y وحدة من السلعة الثانية .

وتكون القيود كالآتي:

قيد الخشب رياضيا كالآتي : $3x + y \leq 53$

قيد الحديد رياضيا كالآتي : $3x + 8y \leq 127$

قيد الالومنيوم رياضيا كالآتي : $5x + 4y \leq 100$

كذلك قيد عدم السالبية وهو : $x \geq 0\,,\ \ y \geq 0$

أما دالة الهدف فتكون كالآتي :

أ- في الحالة الأولى : $Max\ Z = x + 2y$

ب-في الحالة الثانية : $Max\ Z = 2x + y$

ويصبح النموذج الرياضي الأمثل هو: أوجد قيمة x و y التي تحقق القيمة العظمى للدالة Z على تحقق الشروط.

Example3: Wants farmers in rearing chickens, ducks and turkeys can not afford the place where Serbian where these birds only two hundred only he wants to no more than the number of turkeys for 25 and not more than the number of turkeys and ducks together 100; If the profit for each hen is pounds, and one and all duck two pounds each and turkey three pounds. fact mathematical model that demonstrates that he can prepare reared from each type so that achieves the largest possible profit

يرغب مزارع في تربية دجاج وبط وديوك رومي ولا يسع المكان الذي سيربي فيه هذه الطيور إلا لمائتين فقط وهو يريد أن لا يزيد عدد الديوك الرومي عن 25ولا يزيد عدد الديوك الرومي والبط معا عن 100؛فإذا كان ربحه عن كل دجاجة هو جنيها واحدا وعن كل بطة جنيهان وعن كل ديك رومي ثلاث جنيهات.كون النموذج الرياضى الذي يوضح الاعداد التي يمكنه تربيتها من كل نوع بحيث يحقق أكبر ربح ممكن .

الحل:

نفرض أن المزارع يستطيع تربية عدد x_1من الدجاج x_2; من البط ؛ x_3 من الديك الرومي

ولكي يحقق أكبر ربح تكون دالة الهدف هي: $\max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

ومجموعة_القيود هي

$$x_1+x_2+x_3 \leq 200$$

$$x_3 \leq 25$$

$$x_2+x_3 \leq 100$$

بالإضافة إلي قيد عدم السالبية وهو

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0 \qquad x_3 \geq 0$$

مثال5:

علي قطعة معينة من الارض نود أن نبنى عدة مساكن ،ونود أن تكون بعض هذه المبانى ذات أدوار خمسة والبعض الآخر ذات دورين. كون النموذج الرياضى المناسب لهذه المسألة .علما بأن المعطيات مبينة في الجدول الآتى:

عدد الادوار	تكلفة المبني الواحد	ساعات العمل الازمة لكل مبني	المساحة الازمة لكل مبني	عدد السكان في المبني الواحد	عدد المباني
5	600000	120	800	30	x_1
2	200000	60	600	12	x_2

ثم إن المبلغ المتوفر هو 18000000دولار ، وساعات العمل المتاحة 4500 ساعة ومساحة الارض الكلية تبلغ 42000 متر مربع

الحل:

النموذج الرياضي

$$Max: \qquad z = 30x_1 + 12x_2$$

وذلك تحت مجموعة القيود أو الشروط التالية:

$$800x_1+600x_2 \leq 42,000$$

$$120x_1+60x_2 \leq 4500$$

$$600,000x_1+200,000x_2 \leq 18,000,000$$

بالاضافة إلى قيد عدم السالبية وهو

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

مثال6:

تاجر فاكهة ثلاجته ممتلئة بإحد أنواع الفاكهة وعنده نوعين من الصناديق الفارغة الاول سعته $2m^3$ وملئه يحتاج إلي $\frac{4}{3}$ ساعة عمالة والنوع الثاني سعته $3m^3$ ويحتاج إلي 4ساعات عمالة لملئه فإذا كانت ساعات العمالة الكلية120 ساعة وسعة الثلاجة $150m^3$. كون النموذج الرياضي الذي يعطي أكبر ربح لهذا التاجر علما بأن ربحه من الصندوق الاول خمسة جنيهات والثاني سبعة

الحل :

نفرض أن : عدد الصناديق من النوع الأول x_1 وعدد الصناديق من النوع الثاني x_2

الدالة الهدف : نهدف زيادة الربح

$$F= 5x_1+7 x_2$$

الشروط :

1- شرط السعة :

$$2x_1 + 3x_2 \leq 150$$

2- شرط عدد ساعات العمالة :

$$1.25x_1 + 4x_2 \leq 120$$

الشروط الخفية :

1- شرط عدم السالبية .

2- $x_2 \geq 0 \quad , \quad x_1 \geq 0$

ونعلم أن x_3 , x_2 , x_1 يجب أن تكون أعداد صحيحة ولكن نظرا لطبيعة دراستنا فسوف نلجأ لتقريب القيم الناتجة لأقرب عدد صحيح .

عندئذ تصبح مسألة البرمجة الخطية لهذه المسألة كالآتي :

Maximize : $F = 5x_1 + 7 x_2$

Subject to : $2x_1 + 3x_2 \leq 150$

$1.25x_1 + 4x_2 \leq 120$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

تمارين(1)

) State the general formulation of linear programming problem in two ways. Then write the algorithm by which we can form the mathematical model of the linear programming problem.

(1)يرغب صاحب مصنع في إنتاج سلعتين من منتجات مصنعة وكل سلعة تحتاج إلي مواد خام وعمال للانتاج ومعدات فإذا كانت السلعة الاولي تحتاج لوحدة واحدة من المواد الخام وأيضا لعامل واحد بينما تستهلك وحدتان تشغيل من معدات المصنع بينما السلعة الثانية تحتاج لإنتاجها أيضا وحدة واحدة من المواد الخام وإلي عاملين كذلك وحدة تشغيل واحدة. فإذا كان الحد الأقصى لعدد عمال المصنع هو عشرة عمال بينما المواد الخام هو ستة وحدات كذلك عدد وحدات تشغيل المعدات هو عشرة وحدات أيضا. كون النموذج الرياضي الذي يحقق ذلك في الحالات الآتية :

أ- إذا كان ربح السلعة الاولي وحدتان ربح بينما تعطي السلعة الثانية ثلاث وحدات

ب-عكس الحالة (أ)

(2)يشتري رجل وزوجته نوع من اللحم يحتوي علي90% من اللحم الغير دهني؛10% من الدهن بسعر الكيلو عشرة جنيهات ونوع آخر يحتوي علي 70% من اللحم الغير دهني؛ 30%دهن؛ بسعر الكيلو خمسة جنيهات.فإذا كانت إحتياجات الرجل الاسبوعية من اللحم الصافي ستة كيلو جرامات علي الإقل؛ إحتياجات زوجته هي علي الاقل كيلو جرامين من الدهن إسبوعيا. كون النموذج الرياضي الذي يحقق ذلك بحيث يوضح الكم الذي يجب شرائه من كل نوع بحيث تكون تكاليف الشراء أقل ما يمكن .

(3)صاحب مصنع أدوات خشبية يريد إنتاج اربعة أنواع من منتج معين فإذا كانت هذه الانواع تحتاج إلي (5،4،5.3) ساعات عمل علي الترتيب لتجميعها وكذلك إلى (2،1.5،3،3) ساعات عمل لزخرفتها فإذا كانت إمكانية المصنع هي 750 عامل تجميع يعملون 40 ساعة /اسبوعيا،500 عامل زخرفة يعملون 45ساعة إسبوعيا .كون النموذج الرياضى الذي يهدف إلي ألاعداد التي ينتجها المصنع من كل نوع حتي يحقق اعظمية ربح علما بأن ارباحها هي (7،7،6،9) جنيه علي الترتيب بالمنتج الواحد من كل نوع

(4) شركة بترول تريد إقامة معمل تكرير يمد بثلاث منابع لتكن a,B,C فإذا كان موقع B علي بعد 300كم شرقا ،400شمالا من c،A علي بعد 400شرقا،100جنوبا منB.كون النموذج الرياضى الذي يحدد موقع المعمل مع تقليل كم الانابيب.

(5)تنتج شركة نوعين من المواد الغذائية x،y حيث يحقق النوع الاول ربحا قدره (70) وحدة نقدية ،أما النوع الثاني فيحقق ربحا مقداره (50) وحدة نقدية .إن إنتاج وحدة من النوع الاول يتطلب وحدتين من المادة الاولية الاولي وأربع وحدات من المادة الاولية الثانية.أما إنتاج وحدة من النوع الثاني فيتطلب أربع وحدات من المادة الاولية الاولي وأربع وحدات من المادة الاولية الثانية.أما الكمية المتاحة من المادة الاولية الاولي فهى (40) وحدة ، ومن المادة الاولية الثانية (70) وحدة. والمطلوب بناء نموذج رياضي لهذه المسألة.

(6)قرر أحد الاطباء نظام غذائي معين لأحد المرضي يحقق له 400 سعر حراري و200 وحدة بروتين و30 وحدة فيتامين فإذا كان لدي المستشفي نوعان من الغذاء مما قرره الطبيب ،النوع الأول تحتوي الوحدة منه علي 500 سعر حراري و50 وحدة بروتين و5 وحدات فيتامين . النوع الثاني تحتوي الوحدة منه 800 سعر حراري و20 وحدة بروتين و4 وحدات فيتامين. فإذا كان سعر الوحدة من النوع الاول 2 جنيه وسعر الوحدة من النوع الثاني 3 جنيه. المطلوب : تحديد الكمية الواجب إعطاؤها للمريض من كل نوع والتي تحقق له القيمة الغذائية المطلوبة بأقل تكلفة ممكنة

(7) مصنع لأنتاج أدوات السفرة يستخدم نوعين من الآلات في إنتاج الملاعق والسكاكين فإذا علمت أن الدستة (12 قطعة) من الملاعق تحتاج إلى 6 ساعات تشغيل على الآلة من النوع الأول وساعتين على الآلة من النوع الثاني . والدستة من السكاكين تحتاج إلى 3 ساعات تشغيل على كل آلة من النوعين . فإذا كانت ساعات التشغيل القصوى على الآلات 10 ساعات يوميا ، ولدى المصنع 8 آلات من النوع الأول ، و12 آلة من النوع الثاني .وكان ربح المصنع من بيع الدستة من الملاعق 15 جنيه ومن السكاكين 10 جنيه . حدد الكمية الواجب إنتاجها من كل نوع يوميا لتحقيق اقصى ربح ممكن.

(8) مصنع للأثاث ينتج نوعين من غرف النوم "نفرتيتي" و "كيلوباترا" فإذا علمت ان عملية التصنيع تمر بثلاثة اقسام هي التقطيع والتجميع والدهان وتحتاج الغرفة من النوع الأول إلى عدد 2،5،4 ساعة عمل على الترتيب في الاقسام الثلاثة بينما تحتاج الغرفة من النوع الثاني إلى عدد 4،2،4 ساعة عمل على الترتيب في الاقسام الثلاثة . فإذا علمت ان ساعات العمل المتاحة في الاقسام الثلاثة يوميا هي 56،60،64 ساعة عمل على الترتيب

. وأن ربح المصنع من بيع الغرفة من النوع الاول 700 جنيه ومن النوع الثاني 500 جنيه . حدد الكمية الواجب انتاجها يوميا من كل نوع لتحقيق اقصى ربح ممكن

الفصل الثالث

جبر وهندسة البرمجة الخطية

مقدمة:

لحل البرنامج الخطي سوف نستخدم الطريقة الجبرية ،ولكن من المناسب الآن دراسة الخواص الهندسية للبرنامج الخطي.ولذلك سوف نعطي في البداية بعض الأساسيات الهندسية والتي تمكننا من معرفة الحل الأمثل للبرنامج الخطي بطريقة هندسية . سندرس في هذا الباب بعض أساسيات التحليل المحدب وطريقة حل البرنامج الخطي هندسيا .ومن ثم سنعطى فكرة عن الحل الهندسي وننتقل إلي الصيغة القياسية وبعض المسائل المتعلقة بها.

1- حل مجموعة من المتباينات الخطية
سنفرض دائما المتغيرات في هذا الجزء هما متغيران فقط وهما x,y وبذلك

فإن المتباينة $ax + by \leq c$ حيث a,b,c ثوابت تمثل نصف مستوي ويمكن إيجاده بيانيا كالاتي:

نرسم المعادلة $ax + by = c$ ينتج خط مستقيم وبذلك يكون حل المتباينة هو أحد نصفي المستوي (أعلي أو أسفل) المستقيم الناتج ويكون النصف الثاني هو حل المتباينة $ax + by \geq c$

مثال1:حدد نصف المستوي الذي يحقق المتباينة $4x + 5y \leq 20$

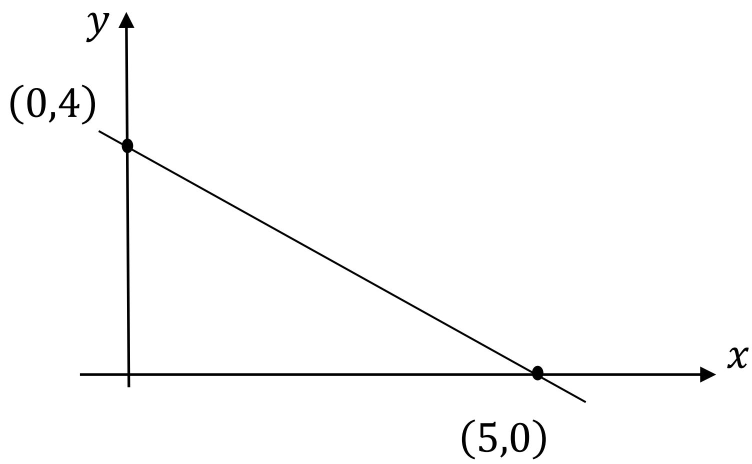
الحل:لرسم الخط المستقيم : $4x + 5y = 20$

نحل المستقيم $4X+5Y=20$ وذلك بإيجاد نقط تقاطعه مع محوري الإحداثيات وذلك بوضع $y=0$ مرة فينتج أن $x=5$ فتكون النقطة $A(5,0)$ هي نقطة تقاطعه مع محور السينات وبالمثل النقطة $B(0,4)$ هي نقطة تقاطعه مع محور الصادات

$$y = 0 \ \rightarrow 4x = 20 \ \rightarrow x = 5$$

$$x = 0 \ \rightarrow \ 5y = 20 \ \rightarrow \ y = 4$$

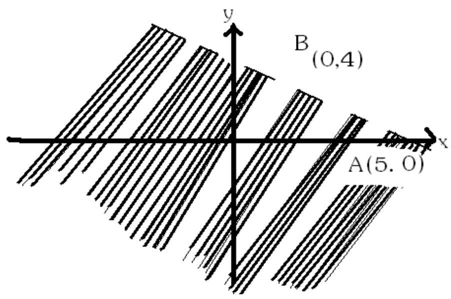
وبذلك يكون المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ قد قطع المستوي xoy إلي نصفين ثم نجد إختيار لنعرف أي النصفين يحقق المتباينة وذلك بنقطة الأصل 0 نجد أنها تحققها وبذلك يكون النصف الذي يحتوي نقطة الأصل هو المطلوب.



هذا الخط المستقيم يفصل المستوى الى نصفين اعلاه ويحقق المتباينة :

$$4x + 5y > 20$$

والنصف الاسفل من المستوى يحقق $4x + 5y \ < 20$



مثال2:

حدد مجموعة النقاط التي تحقق المتباينة 20 ≥4x+5y وأيضا y≥ $0, x \geq o$.

الحل:

يلاحظ أن نصف المستوي أعلي محور السينات يحقق المتباينة $y \geq 0$ وكذلك نصف المستوي علي يمين محور الصادات يحقق المتباينة $x \geq 0$ وبذلك تكون مجموعة نقاط المثلث OAB هي المطلوبة (انظر الرسم السابق)

مثال3:

أوجد مجموعة النقاط التي تحقق المتباينات الاتية

Find the set of points that satisfy the following set of inequalities:

$$4x + 5y \leq 33$$

$$x + 4y \geq 11$$

$$2x - 3y \geq -11$$

الحل: برسم الثلاث مستقيمات التي تمثلها حالة التساوي للثلاث متباينات ونحدد نصف المستوي من علامة التباين فيكون الرسم كالتالي:

We consider the line

$$4x + 5y = 33$$

$$x = 0 \ \rightarrow 5y = 33 \ \rightarrow y = \frac{33}{5} = 6\frac{3}{5} = 6.6$$

$$y = 0 \ \rightarrow 4x = 33 \ \rightarrow x = \frac{33}{4} = 8\frac{1}{4} = 8.25$$

$$\left(0\,,\frac{33}{5}\right),\left(\frac{33}{4},0\right)$$

(0,0) statisfies $4x + 5y \leq 33$ then this inequality is satisfied by the set of point down the line (0,6.6) , (8.25,0)

....

the line

$$x + 4y = 11$$

$$x = 0 \ \rightarrow 4y = 11 \ \rightarrow y = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$$

$$y = 0 \ \rightarrow x = 11$$

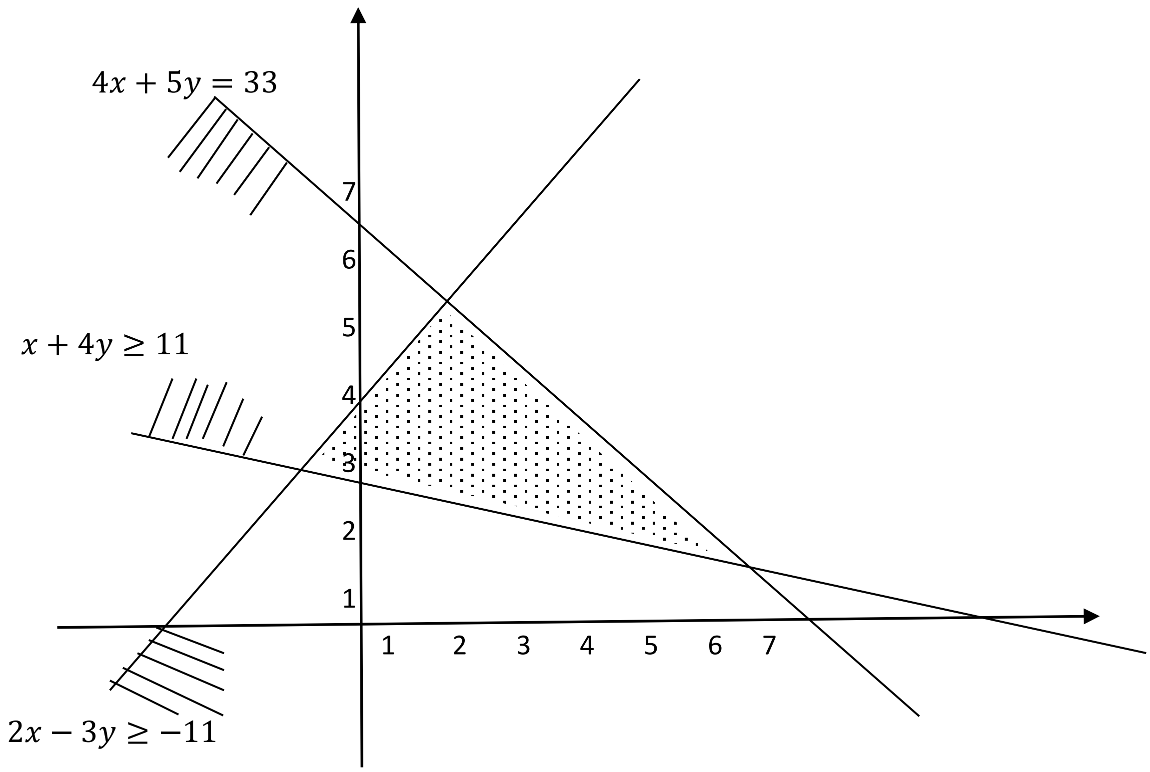
The point to that satisfies the inequality are over and on the line

the *line* $2x - 3y = -11$

$$x = 0 \ \rightarrow \ -3y = -11 \rightarrow y = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3} = 3.67$$

$$y = 0 \ \rightarrow 2x = -11 \ \rightarrow x = \frac{-11}{2} = -5\frac{1}{2} = -5.5$$

(0,0) satisfies $2x-3y \geq -11$ then this inequality is satisfied by the set of point down the line



∴ النقاط التي تحقق المتباينات الثلاث هي تلك الموجودة داخل وعلى محيط المثلث المبين بالرسم

The set of points that satisfy the three inequalities are those inside and at the triangle described at the figure ABC.

لتحديد نقاط التقاطع نحل المعادلتين معًا $4x + 5y = 33 \,, x + 4y = 11$

فنحصل على $\mathrm{P}(7,1)$

كيف (واجب)

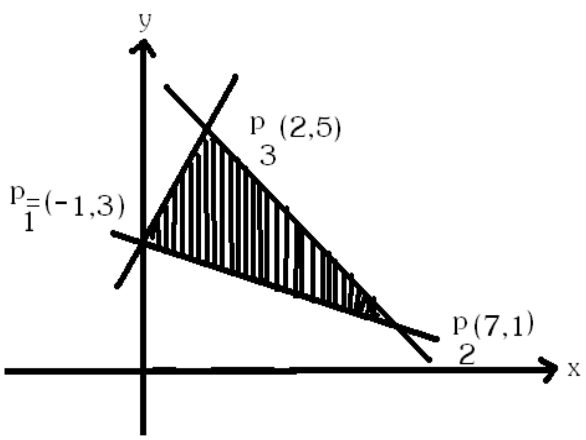
نقطة تقاطع $4\mathrm{x} + 5\mathrm{y} = 33 \,, 2\mathrm{x} - 3\mathrm{y} = -11$ هي $\mathrm{Q}(2,5)$

نقطة تقاطع $\mathrm{x} + 4\mathrm{y} = 11 \,, 2\mathrm{x} - 3\mathrm{y} = -11$ هي $\mathrm{R}(-1,3)$

حل آخر

لأيجاد مجموعة النقاط المطلوبة هناك طريقتان

أولهما:الطريقة المستخدمة في مثال(1) لكل متباينة علي حدة ثم نوجد نقاط تقاطعهما فتكون النقاط p_3, p_2, p_1 كما هو واضح بالشكل المرافق وتكون نقاط المثلث المظلل كما بالشكل



الثانية: نحل كل زوج من المعالات معا فمثلا المعادلتان $2x+3y=-11$ ، $x+4y=11$ تنتج النقطة $p_{1=(-1,3)}$ هي نقطة تقاطعهما وكذلك

النقطة $p_{2=(7,1)}$ للمعادلتان $4x+5y=33$ ، $x+4y=11$ بالمثل النقطة $p_1 = (-1,3)$ هي نقطة تقاطع الزوج من المعادلات $4x+5y=33$ ، $2x-3y=-11$ وبذلك تكون نقاط المثلث p_3, p_2, p_1 هي المطلوبة.

مثال4:

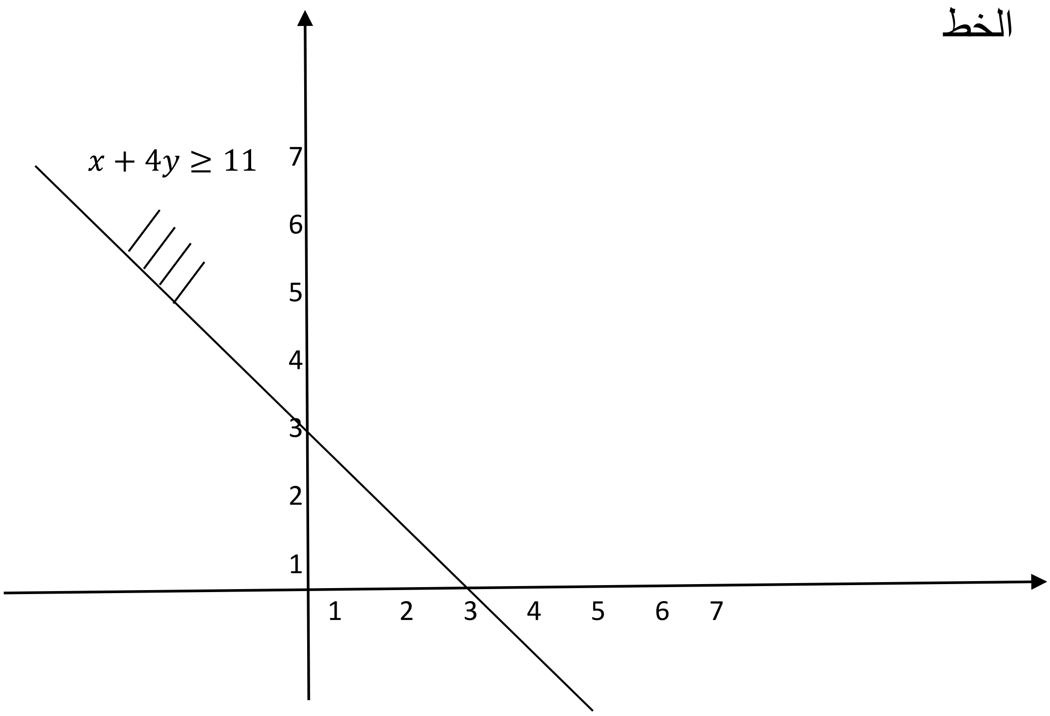
أوجد حل المتباينات الآتية: $y \geq 0, y \leq 3, x+y \geq 3$

الحل:

نرسم الخط المستقيم $x+y=3$ والذي تحققه النقطتان:

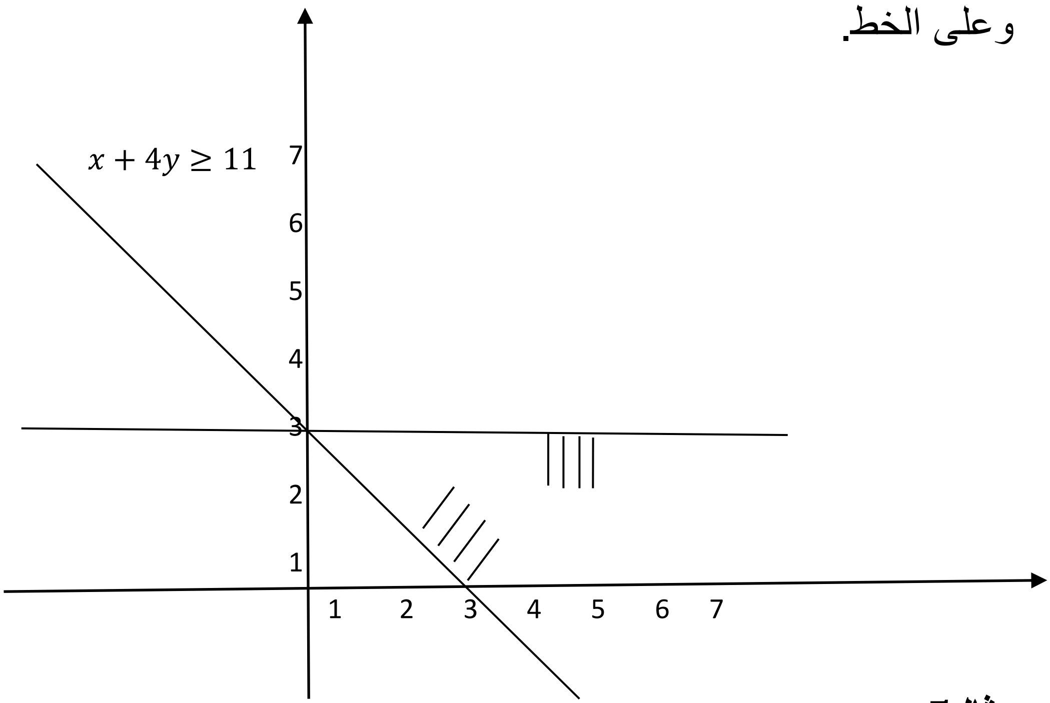
$$x = 0 \ggg y = 3, \qquad y = 0 \ggg x = 3$$

ولتحديد نصف المستوى الذي تحققه المتباينة $x+y \geq 3$ نجد أم النقطة $(0,0)$ لا تحققها وبالتالي يكون نصف المستوى المطلوب هو أعلى يمين الخط



نرسم الخط المستقيم $y = 3$ والذي يمثله الخط المستقيم الموازي لمحور x و يمر بالنقطة $(0,3)$

ولتحديد نصف المستوى الذي تحققه المتباينة $y \leq 3$ نجد أم النقطة $(0,0)$ تحققها وبالتالي يكون نصف المستوى المطلوب هو أسفل يمين وعلى الخط.

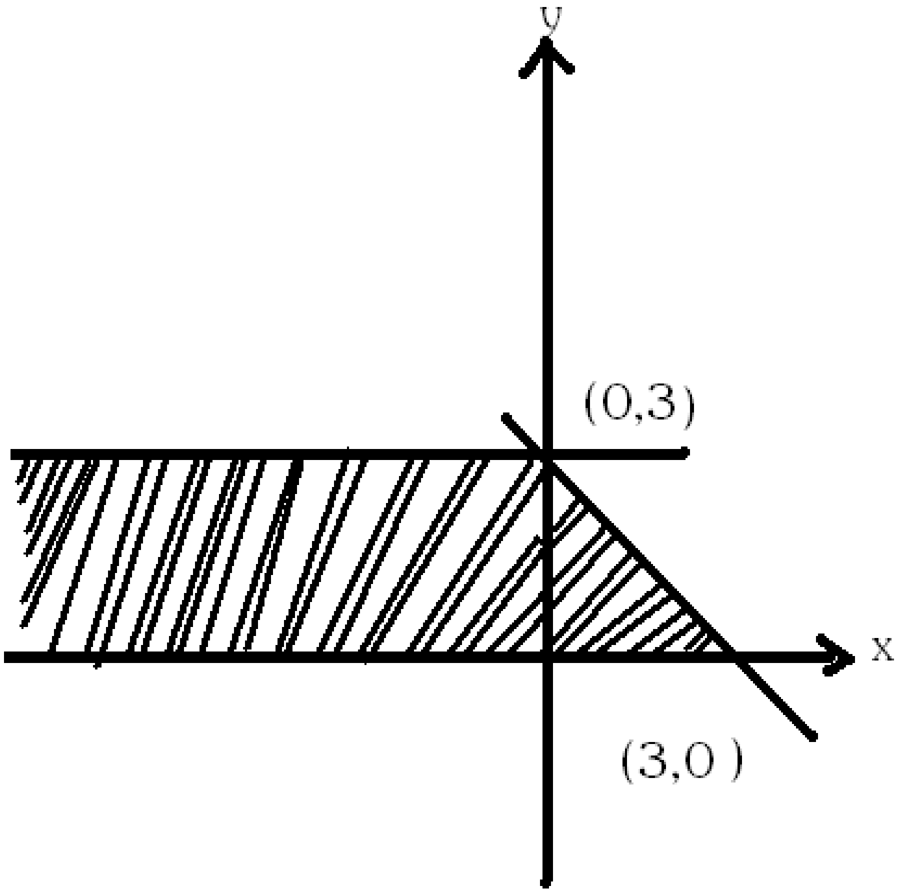


مثال5:

اوجد حل المتباينات الآتية: $y \geq 0, y \leq 3, x + y \leq 3$

الحل:

يلاحظ أن متباينات هذا المثال هي نفسها متباينات المثال السابق ما عدا علامة التباين في الأخيرة فهي عكس نظيرتها في مثال 4 لذا سيكون مضلع الحل في هذه الحالة ممتد من الجهة اليسري كما هو واضح بالشكل .



تعاريف ونظريات "*Definitions & Theorems*"

سنقدم في هذا الجزء أهم التعاريف والنظريات الأساسية في موضوع دراستنا الحالية .

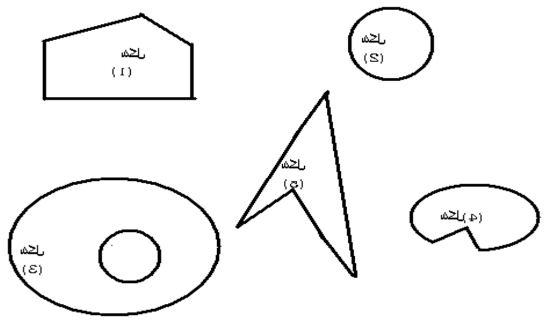
(1)المجموعة المحدبة (*Convex set*)

تسمي المجموعة الجزئية $C \in R^2$ مجموعة محدبة إذا تحقق ما يلي

$\lambda\in[0,1]$، $X_1,X_2\in C$ فإن $\lambda X_1+(1-\lambda)X_2\in C$ لاحظ أن

$\lambda X_1+(1-\lambda)X_2$ تمثل نقاط القطعة المستقيمة بين النقطتين X_1,X_2 أي أن تحدب المجموعة C يعني هندسيا بأنه لأى نقطتين X_1,X_2 في C فإن القطعة المستقيمة الواصلة بين هاتين النقطتين تنتمي إلي C

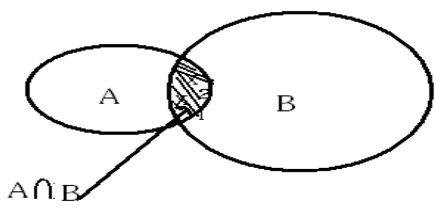
فمثلا: شكل(1)،(2) مجموعات محدبة بينهما الأشكال (3)،(4)،(5) غير



محدبة .

نظرية: تقاطع مجموعتين محدبتين أوأكثر يكون مجموعة محدبة

الإثبات:نفرض(A,B) مجموعتين محدبتين ونفرض $X_1\neq X_2$ نقطتان توجدان في $A\cap B$ هذا معناه أن النقطتان تقعان في كلاً من A,B ومن تحدب كلاهما يكون $\lambda X_1+(1-\lambda)X_2$ حيث $\lambda\in[0,1]$ موجود في كلاهما ومن خواص التقاطع يكون أيضا موجود في $A\cap B$. هذا معناه أن تقاطع المجموعتين A,B هوالآخر يكون مجموعة محدبة ويمكن تعميم ذلك لأكثر من مجموعتين



نتيجة هامة:إتحاد مجموعتين محدبتين فقط لا يكون دائما مجموعة محدبة .

(1) **منطقة السماح** (*Admissible Region*) هي مجموعة النقاط التي تحقق مجموعة القيود بالإضافة إلي قيد عدم السالبية؛ كل نقطة منها تسمي حلا ًمسموحاً به *feasible solution* .

Admissible Region is the set of points that satisfies all the constraints in addition to the non negative condition.

(2) **الركن** ***Corner*** هي أركان المضلع الذي يحقق مجموعة القيود أو بمعني تقاطع مثني مثني وتسمي أيضا نقاط متطرفة *Extreme points*

(3) **الحل الأمثل "*Optimal Solution*"** هي النقطة "قيم المتغيرات" التي تقع في منطقة السماح وتحقق القيمة المثلي للدالة الهدف في المسألة.

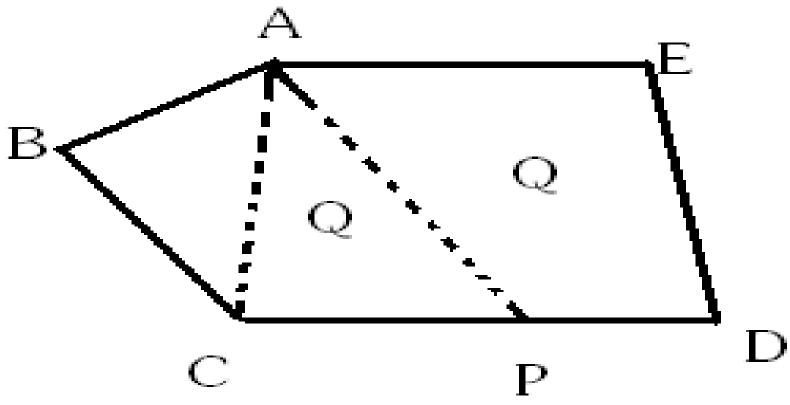
أيضا سنقدم النظرية التالية لما لها من أهمية قصوى عند حل مسائل البرمجة الخطية

نظرية:

لأي دالة خطية $f(x, y) = ax + by + c$ محسوبة داخل (أو على) مضلع محدب تعيّنه مجموعة من المتباينات الخطية فإن نهاية الدالة الخطية العظمى أو الصغرى للدالة $f(x, y)$ تقع عند نقط أركان المضلع .

الأثبات: نفرض أن Q نقطة داخل المضلع المحدب وتقع بين أي رأسين ليكن A,C مثلا أو بين الرأس A و النقطة P التي تقع بين الرأسين C,D كما بالشكل.

طول العمود النازل من النقطة (x,y) علي المستقيم $ax+by+c=0$ يتناسب طرديا مع مقدار $(ax+by+c)$ ؛ بذلك يكون طول العمود النازل من النقطة Q علي المستقيم $ax+by+c=0$ يكون محصورا بين طولي العمودين النازلين من A,C علي نفس المستقيم



أي أن قيمة الدالة $(ax+by+c)$ عند النقطة Q تقع بين قيمتها عند النقطتين A,C (في الحالة الأولي للنقطة Q) وكذلك بين قيمتها عند النقطتين A,P (في الحالة الثانية للنقطة Q) ولكن قيمة الدالة عند P يقع بين قيمتها عند النقطتين C,D وهذا يوضح دائما أن قيمة الدالة الخطية $(ax+by+c)$ عند أي نقطة داخل المضلع المحدب أو علي حوافه (أضلاعه) تقع دائما بين قيمتها عند ركنين من أركان هذا المضلع وهذا يؤدي مباشرة إلي أن القيمة الأمثلية (النهاية الصغري أو العظمي) يكون دائما عند أركان المضلع المحدب

مثال6:

أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة الخطية

$$f(x,y) = 3x + y + 2$$

حول المضلع المحدب الذي تعيّنه المتباينات الآتية

$$2x + y + 9 \geq 0$$
$$3y - x + 6 \geq 0$$
$$x + 2y \leq 3$$
$$y \leq x + 3$$

الحل :

$$2x + y + 9 \geq 0$$

==============

$2x + y = -9$➔$x = 0, y = -9$

$y = 0, x = -4.5$

(0,0) satisfies it, so the proposed area is up Wright the line

حيث أن نقطة الأصل (0,0) تحقق المتباينة فإن المنطقة المطلوبة تكون أعلى يمين الخط

$$3y - x + 6 \geq 0$$

==============

$3y - x = -6$➔ $x = 0, y = -2$

$y = 0, x = 6$

(0,0) satisfies it, so the proposed area is up Left the line

حيث أن نقطة الأصل (0,0) تحقق المتباينة فإن المنطقة المطلوبة تكون أعلى يسار الخط

The intersection of

تقاطع المستقيمين

$$2x + y = -9, 3y - x = -6$$

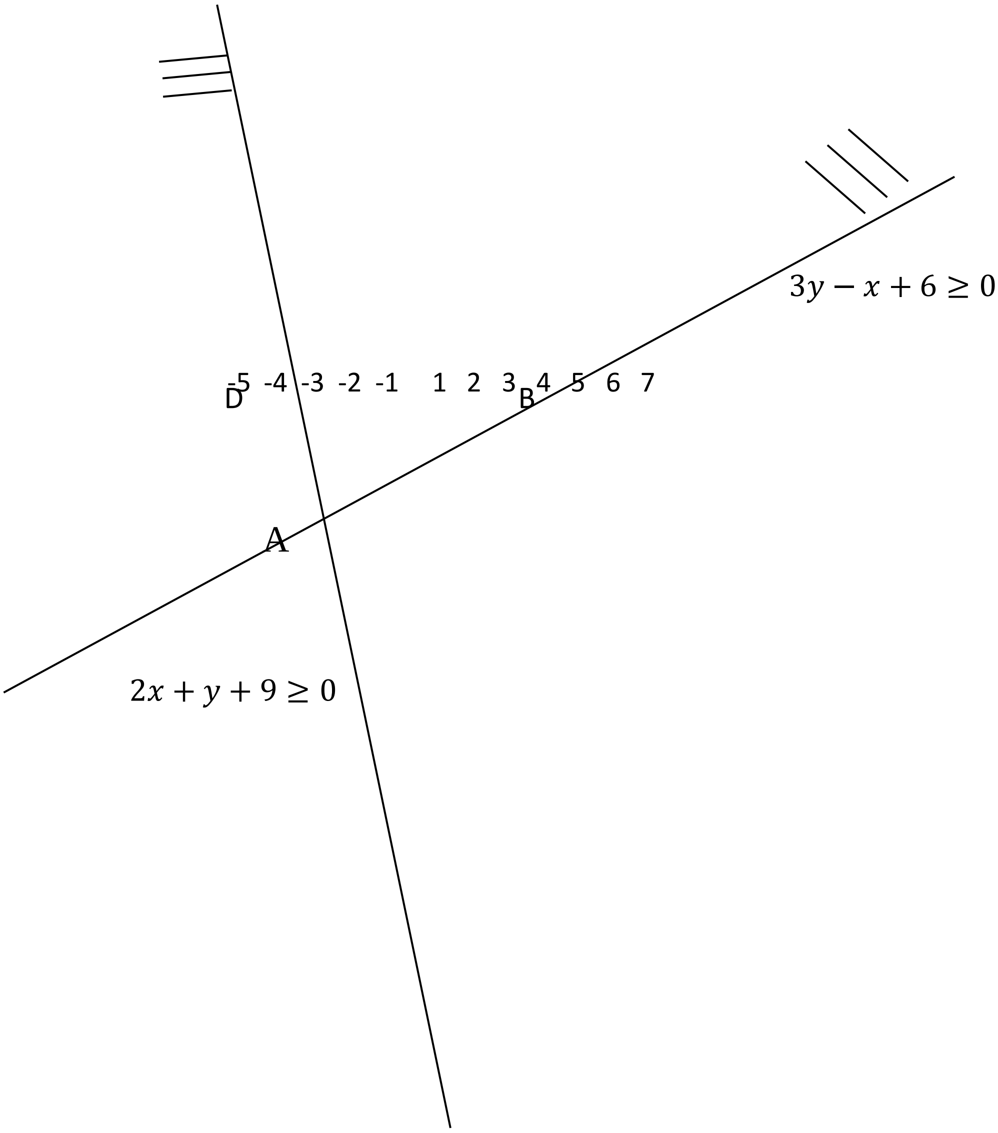
Is obtained by solving these two eqs. To obtain

يمكن الحصول عليه بحل هاتين المعادلتين لنحصل على

$$x = -3, y = -3$$

قيمة الدالة عند هذا الركن

$$f(at\ A) = 3(-3) + (-3) + 2 = -10$$



$x + 2y \leq 3$

=============

$x + 2y = 3$➔ $x = 0, y = 1.5$

$y = 0, x = 3$

(0,0) satisfies it, so the proposed area is Down Left the line

حيث أن نقطة الأصل تحقق المتباينة فإن المنطقة المطلوبة تكون أسفل يسار الخط

===

The intersection of

تقاطع المستقيمين

$3y - x = -6,\ x + 2y = 3$

Is obtained by solving these two eqs. To obtain

يمكن الحصول عليه بحل هاتين المعادلتين لنحصل على

$x = 4.5, y = -0.6$

قيمة الدالة عند هذا الركن

$f(at\ B) = 3(4.5) + (-0.6) + 2 = 14$

$y \le x + 3$

===========

$y - x = 3$➔ $x = 0, y = 3$

$y = 0, x = -3$

(0,0) satisfies it, so the proposed area is Down Wright the line

حيث أن نقطة الأصل تحقق المتباينة فإن المنطقة المطلوبة تكون أسفل يمين الخط

===

The intersection of

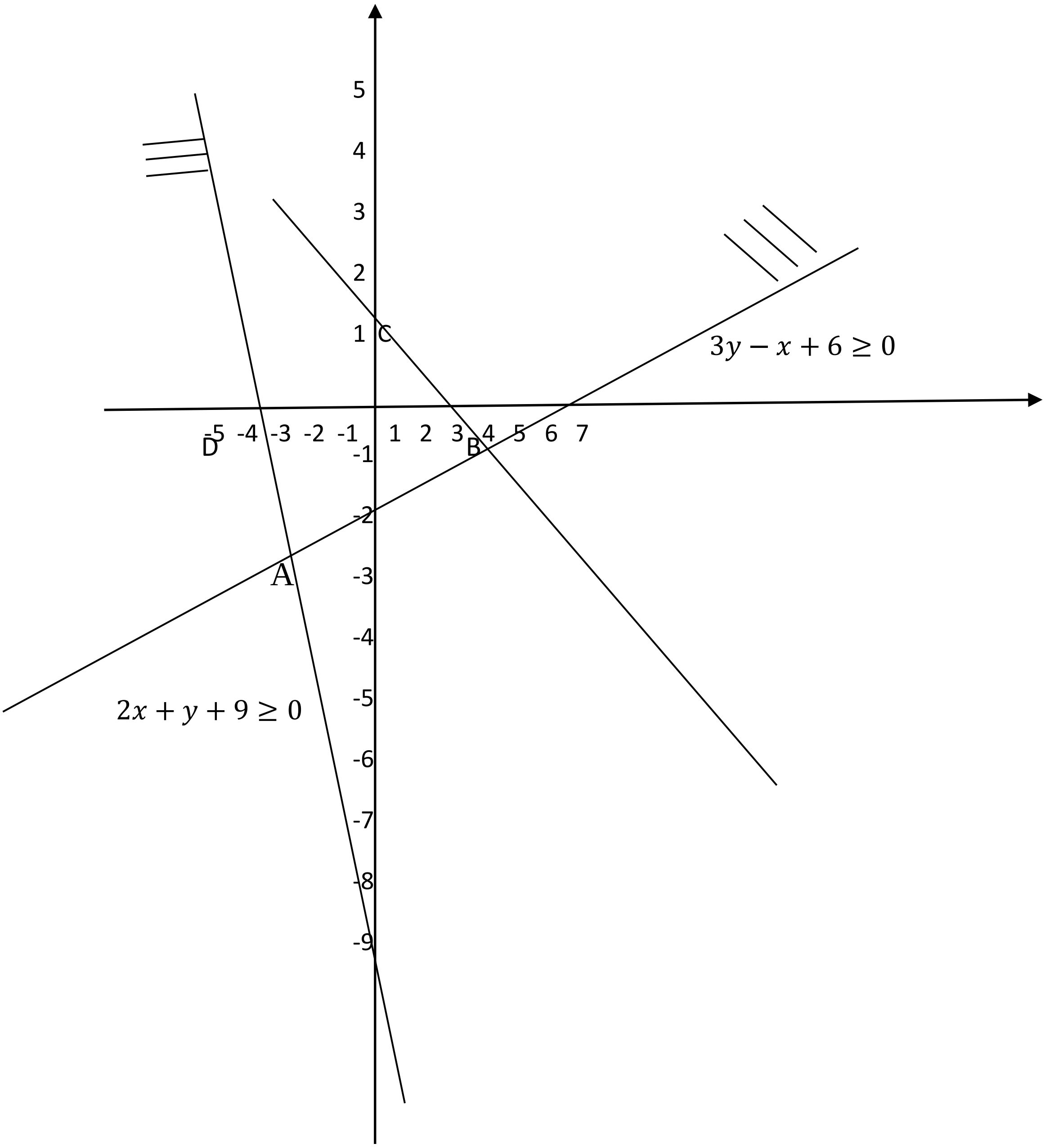
تقاطع المستقيمين

$y - x = 3,\ x + 2y = 3$

Is obtained by solving these two eqs. To obtain

يمكن الحصول عليه بحل هاتين المعادلتين لنحصل على

$x = -1, y = 2$



قيمة الدالة عند هذا الركن $f(at\ C) = 3(-1) + (2) + 2 = 1$

The intersection of

تقاطع المستقيمين

$y + x = 3,\ 2x + y = -9$

Is obtained by solving these two eqs. To obtain

يمكن الحصول عليه بحل هاتين المعادلتين لنحصل على

$$x = -4, y = -12$$

$f(at\ D) = 3(-41) + (-1) + 2 = -11$ قيمة الدالة عند هذا الركن

Thus

$f_A = -10$ at $A(-3,-3)$

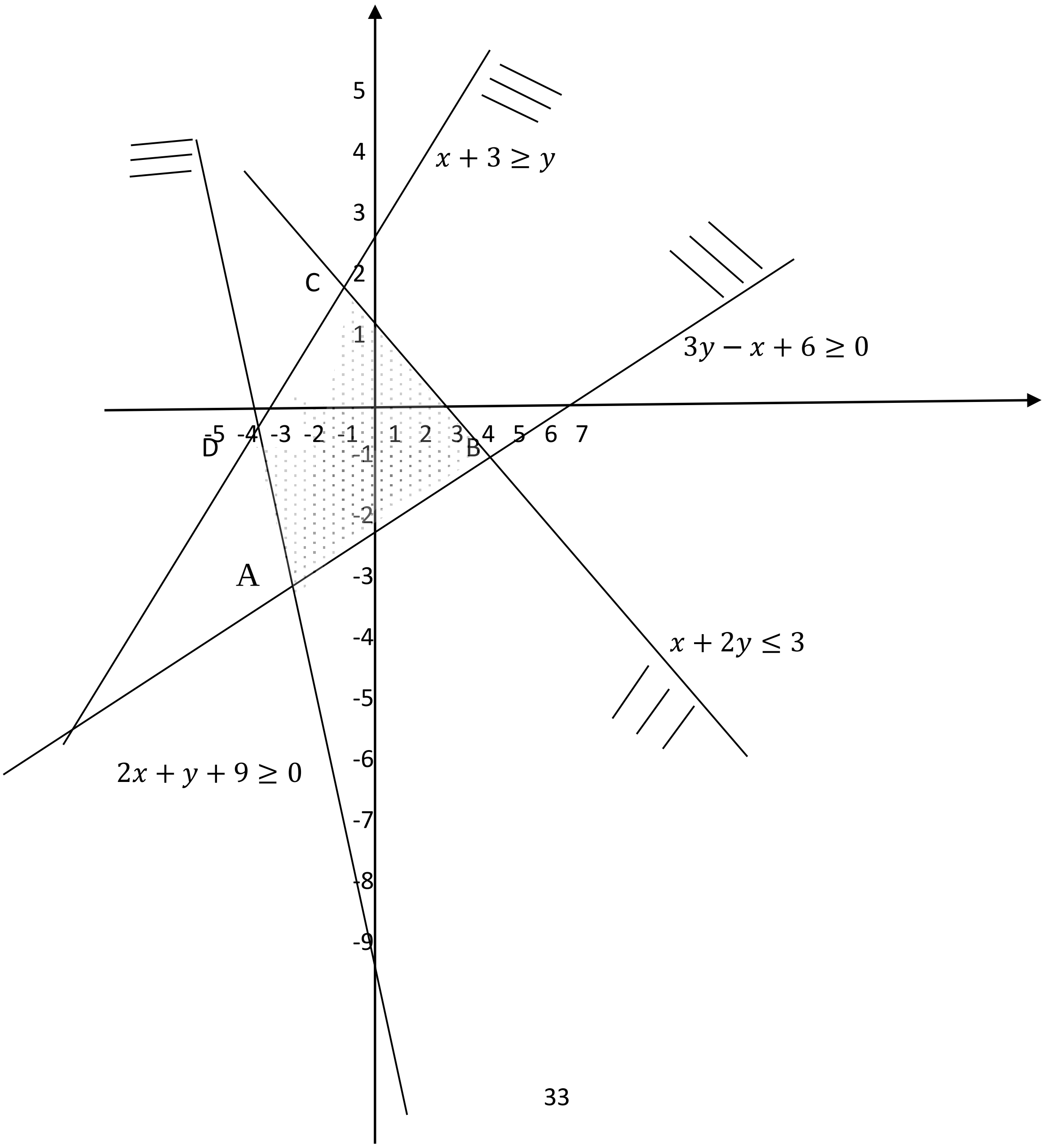
$f_C = 1$ at $C(-1,2)$

$f_B = 14$ at $B(4.2,-0.6)$

$f_D = -11$ at $D(-4,-1)$

Hence the Maximum value is $f_B = 14$ at $B(4.2,-0.6)$

And the Minimum value is $f_D = -11$ at $D(-4,-1)$



توجد مجموعة النقاط التي تحقق المتباينات وهى نقاط المضلع ABCD كما بالشكل وهذا يحصل عليه بيانياً أو جبرياً بحل كل زوج من المعادلات معاً ينتج إحداثيات الأركان ولإيجاد النهايات العظمى والصغرى للدالة الخطية $3x+y+2$

نضع أي قيمة لهذه الدالة ليكن $3x+y+2=-1$ ونرسم هذا المستقيم ثم نحركه موازياً لنفسه حتى يمس المضلع عند أسفل نقطة عندها النهاية الصغرى لهذه الدالة وكذلك عندما يمس المضلع عند أعلى نقطة يكون عندها النهاية العظمى للدالة المطلوبة ويتضح أنه عند النقطة P_4 هو P_2 موضع النهاية الصغرى للدالة وكذلك هو موضع النهاية العظمى لها ولإيجاد قيمتي النهايتين نعوض بإحداثيات النقاط مواضعها فى الدالة كالآتي :

قيمة النهاية الصغرى للدالة هو -11 ؛ قيمة النهاية العظمى لها هو 12

هناك حل جبري

ويمكن الحصول عليه بالتعويض بإحداثيات كل نقطة من نقاط أركان المضلع المحدب الناتج في الدالة المطلوب تعيين نهايتها العظمي والصغري ومن القيم الناتجة نستطيع تعيين مواضع وقيم النهايات المطلوبة .

ملاحظة هامة:

في بعض المسائل يكون المضلع الناتج مفتوح (ممتد) وهذا يؤدى إلي عدم تواجد أحد النهاتين مع تواجد الاخري .

مثال 7:

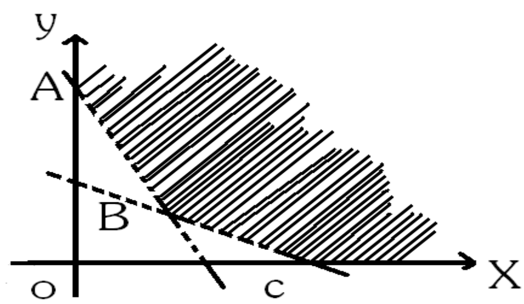
أوجد النهايات العظمي والصغري للدالة $3x+4y$ حول المضلع المحدب الذي تعينه المتباينات الآتية :

$$2x + y \geq 4 \qquad , \quad x \geq 0$$

$$x + 2y \geq 4 \qquad , \quad y \geq 0$$

الحل:

يلاحظ أن المضلع الذي يحقق المتباينات غير محدد كما هو بالشكل



وبذلك يمكن جعل الدالة $3x+4y$ كبيرة كما يزيد ولهذا ليس للدالة نهاية عظمي لكن لها نهاية صغري عند الركن $B = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ وقيمة هذه النهاية الصغري هو $\frac{28}{3}$

مثال8:

أوجد النهايات العظمي والصغري للدالة $3x+4y$ حول المضلع المحدب الذي تعينه المتباينات الآتية :

$$2x + y \leq 4$$

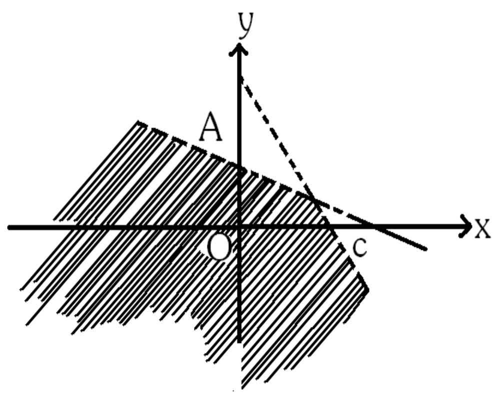
$$x + 2y \leq 4$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

الحل:

من الشكل المرافق يلاحظ أن المضلع الذي تعيينه المتباينات هو الأخير غير محدد مثل ذلك الناتج في المثال السابق عدا أنه غير محدد من الجهة الأخري لذا يلاحظ أن الدالة $3x+4y$ ليس لها نهاية صغري ؛ ويتضح أن نهايتها العظمي عند الركن B وقيمة النهاية العظمي هو $\frac{28}{3}$



مثال 10 :

بالطريقة البيانية حقق الآتي :

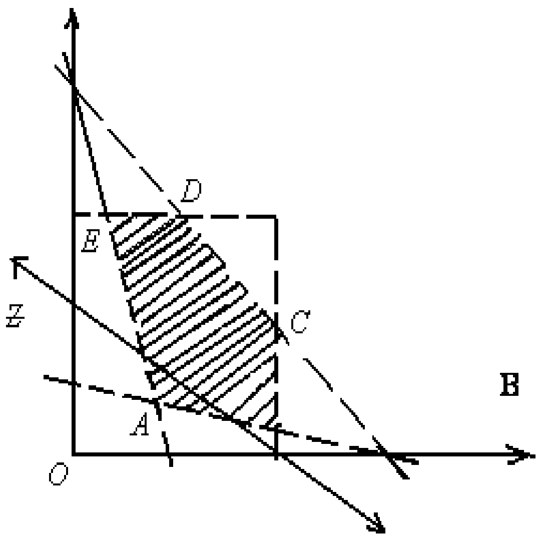
$$Min Z = 2x_1 + 3x_2$$

والتي تحقق القيود الآتية :

$$x_1 + x_2 \le 4 \quad ; \quad x_1 \le 3$$
$$3x_1 + x_2 \ge 4 \quad ; \quad x_2 \le 3$$
$$x_1 + 5x_2 \le 4 \quad .$$

مع قيد عدم السالبية وهو
$x_1 \ge 0 \quad , \quad x_2 \ge 0$

الحل :



نرسم مجموعة القيود ينتج المضلع المحدب $ABCDE$

نرسم المستقيم $2x_1 + 3x_2 = 6$ (مثلاً) فينتج المستقيم z ثم نحركه لأسفل للحصول على النهاية الصغرى لـ Z فيمس المضلع عند A التي عندها

والنهاية الصغرى المطلوبة هي $x_2 = \frac{4}{7} \quad ; \quad x_1 = \frac{8}{7}$

تمارين

(1) حدد نصف المستوي الذي تحدده كل متباينة من المتباينات الآتية :

(i) $7x + 8y \le 28$ *(ii)* $0.8x_1 + 0.3x_3 \le 60$ *(iii)* $2x + y \ge 6$

(2) حدد المنطقة التي تحقق مجموعة من المتباينات :

(i) $x + 2y \ge 3$ $4x + 5y \ge 6$ $7x + 8y = 15$	(ii) $6x_1 + x_2 \ge 6$ $4x_1 + 3x_2 \ge 12$ $x_1 + 2x_2 \ge 4$

(iv) $x_1 + x_2 \geq 1$ $7x_1 + 9x_2 \leq 6$ $x_1 \leq 6, \quad x_2 \leq 5$	(iii) $x + 2y \leq 10$ $x + y \geq 1$ $y \leq 4$

(3) أوجد مجموعة النقاط التي تحقق المتباينات الاتية

(ii) $9x + 10y \leq 330$ $21x - 4y \geq -36$ $x + 2y \geq 6$ $6x - y \leq 72$ $3x + y \leq 54$ $x \geq 0, \quad y \geq 0$	(i) $3x + 4y \leq 24$ $x - y \leq 3$ $x + 4y \leq 4$ $3x + y \geq 3$ $x \geq 0, \quad y \geq 0$
	(iii) $4x + 5y \leq 33$ $x + 4y \geq 11$ $2x - 3y \geq -11$

(4) أوجد النهايات الصغري والعظمي للدالة الخطية $z = 7x_1 + 5x_2 - 3$ حول كلاً من المضلعات المحدبة التي تعنيها المتباينات الآتية:

(1) $3x_1 + 2x_2 \leq 6$, $x_2 \geq 0$, $x_1 \geq 0$

(2) $2x_1 + 4x_2 \geq 5$, $x_2 \geq 0$, $x_1 \geq 0$

(3) $x_1 + 3x_2 \leq 3$, $x_2 - x_1 \leq 2$, $2x_1 + 3x_2 \leq 6$

(5) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة الخطية

$$f(x, y) = 50x + 100y$$

حول المضلع المحدب الذي تعيّنه المتباينات الآتية

$$10x + 5y \geq 2500$$
$$4x + 10y \geq 2000$$
$$x + 1.5y \geq 450$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

(6) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة الخطية

$$f(x, y) = -3x + 2y$$

حول المضلع المحدب الذي تعيّنه المتباينات الآتية

$$0 \leq x_1 \leq 4$$
$$1 \leq x_2 \leq 6$$
$$x_1 + x_2 \leq 5$$

(7) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة الخطية

$$f(x, y) = 3x + 2y$$

حول المضلع المحدب الذي تعيّنه المتباينات الآتية

$$8x_1 + x_2 \geq 8$$
$$2x_1 + x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 6x_2 \geq 8$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

الفصل الرابع
طرق حل مسائل البرمجة الخطية

هناك عدة طرق لحل مسألة البرمجة الخطية سنقدم منها ما يلي :

أولاً:الطريقة البيانية: *Graphical Method*

من الواضح أن كلا من دالة الهدف والقيود في مسألة البرمجة الخطية ويكون المطلوب تحديد الأمثلية لدالة الهدف؛ لذا سوف نستخدم ما سبق إيضاحه بالطريقة البيانية كالآتي :

(1) نرسم القيود جميعها ومنها نحدد منطقة السماح (المضلع المحدب)
(2) نفترض أي قيمة لدالة الهدف وبذلك نستطيع رسم مستقيم من هذا الفرض .
(3) نحرك هذا المستقيم موازيا لنفسه حتي يمس مضلع منطقة السماح في نقطة واحدة تكون هي موضع " الحل الأمثل " المطلوب.

مثال (1): بالطريقة البيانية حقق الآتي:

أ- $Max\ Z = x + 2y$

ب- $Max\ Z = 2x + y$

والتي تحقق القيود الآتية : $3x + y \leq 53$

$$3x + 8y \leq 172$$

$$5x + 4y \leq 100$$

مع قيد عدم السالبية وهو: $x \geq 0\ ,\ \ y \geq 0$

الحل:

نرسم القيود الثلاثة مع الحفاظ علي قيد عدم السالبية ينتج المضلع المحدب $OABCD$ كما بالشكل

ثم نرسم دالة الهدف في كلا الحالتين كالآتي :

(أ) $Max\ Z = x + 2y$ وذلك بوضع أي قيمة للدالة فمثلا $x+2y=10$ ونرسم ذلك المستقيم . فينتج المستقيم PZ وحيث أن المطلوب هو تعظيم Z لذا نحركه لأعلي حتي يمس المضلع OABCD في نقطة واحدة تكون هي الحل المطلوب ؛ يلاحظ أن ذلك يتحقق عند النقطة C ومنها يكون الحل الذي يعطي تعظيم هو أن ينتج صاحب المصنع 4 وحدات من السلعة الأولي و20 من السلعة الثانية وهذا يحقق ربح قدره (44) وكذلك بالمثل في الحالة (ب) من المثال.

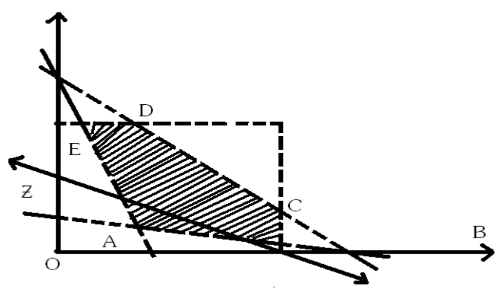
مثال (2): بالطريقة البيانية حقق الآتي : $Min\ Z = 2x_1 + 3x_2$
والتي تحقق القيود الآتية :

$$x_1 + x_2 \le 4\ ;\quad x_1 \le 3$$
$$3x_1 + x_2 \ge 4\ ;\quad x_2 \le 3$$
$$x_1 + 5x_2 \le 4$$

مع قيد عدم السالبية وهو $x_1 \ge 0\ ,x_2 \ge 0$

الحل:

نرسم مجموعة القيود ينتج المضلع المحدب OABCD نرسم المستقيم $2x_1 + 3x_2 = 6$ (مثلا) فينتج المستقيم z ثم نحركه لأسفل للحصول علي النهاية الصغري لـ z فيمس المضلع عند A التي عندها $x_1 = \frac{8}{7}; x_2 = \frac{4}{7}$ والنهاية الصغري هي 4



ملاحظة: بعض المسائل لا يكون لها حل وحيد ولكن يكون لها عدد لا نهائي وهذا يحدث بيانيا بأن ينطبق مستقيم دالة الهدف مع أحد أضلاع

المضلع المحدب ؛ يقال في هذه الحالة أن للمسألة بدائل مثلي (Alternative Optima) ويظهر ذلك من المثال التالي.

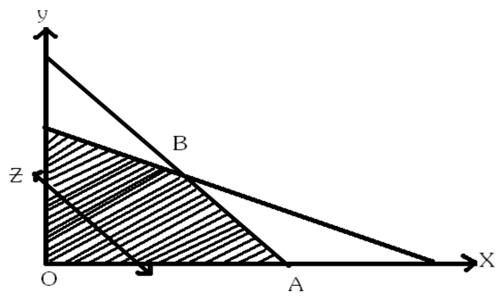
مثال(3): أوجد $Max\ Z = 10x + 4y$ والتي تحقق المتباينات الآتية:

$$3x + 5y \leq 15$$
$$5x + 2y \leq 10$$
$$x \geq 0\ , y \geq 0$$

الحل:

من القيود حصلنا علي المضلع المحدب $OABC$ ومن دالة الهدف حصلنا علي المستقيم Zمن العلامة $10x + 4y = 10$ (مثلا) بتحريكه لأعلي موازيا لنفسه نلاحظ أنه ينطبق مع الجانب AB هذا دليل علي وجود عدد لا نهائي من الحلول .

وهذا يتضح حليا من التناسب في معاملات دالة الهدف واحد القيود



نتيجة: في مثل هذا النوع من المسائل يكون من الضروري إضافة قيد أخر حتي يصبح للمسالة حل وحيد.

مثال(4): اوجد $Max\ Z = 20x + 15y$

والتي تحقق المتباينات الآتية:

$$2x + 4y \leq 16$$
$$2y + 3x \leq 12$$
$$x \geq 0\ , y \geq 0$$

الحل:

نحول المتباينات إلى معادلات:

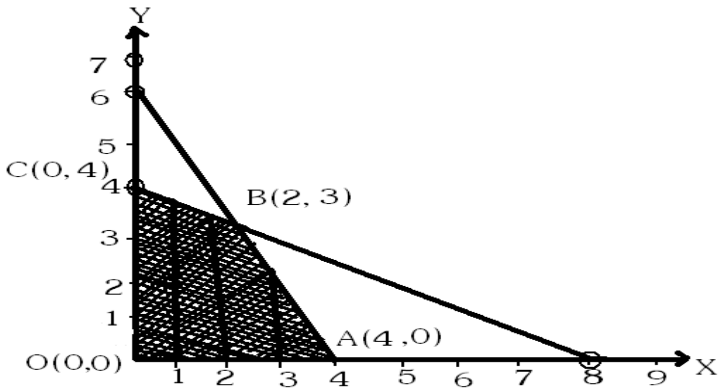
$$2x + 4y = 16$$

$$x = 0 \rightarrow y = 4\,; \qquad x = \quad \delta \rightarrow y = 0$$

$$2y + 3x = 12$$

$$x = 0 \rightarrow y = 6\,; \quad x = 4 \rightarrow y = 0$$

نحدد منطقة الحلول : وفقا لإتجاه المتباينات فإن منطقة الحلول تتحدد في النقط O,A,B,C .



نعوض بالنقط في دالة الهدف : $z = 20x + 15y$

عند النقطة $A(4,0)$ $\qquad Z = 20(4) + 15(0) = 80$

عند النقطة $B(2,3)$ $\qquad Z = 20(2) + 15(3) = 85$

عند النقطة $C(0,4)$ $\qquad Z = 20(0) + 15(4) = 60$

عند النقطة $O(0,0)$ $\qquad Z = 20(0) + 15(0) = 0$

اختيار الحل الأمثل :لما كان الهدف هو أكبر قيمة للربح

$\therefore$ يتحقق أقصي ربح ممكن وقدره 85 جنيه عند النقطة $B(2,3)$.

مثال (5): أوجد $Min\ Z = 5x + 8y$ التي تحقق المتباينات الآتية:

$$10x + 5y \geq 300$$

$$10y + 5x \leq 250$$

$$3y + 4x \leq 150$$

$$x \geq 0 \, , y \geq 0$$

الحل: نحول المتباينات إلي معادلات

$$10x + 5y = 300$$

$$x = 0 \rightarrow y = 60 \, ; \qquad x = 30 \rightarrow y = 0$$

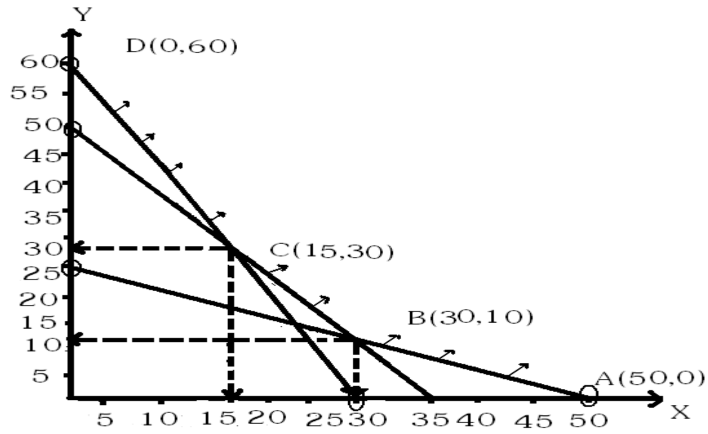
$$10y + 5x = 250$$

$$x = 0 \rightarrow y = 25 \, ; \qquad x = 50 \rightarrow y = 0$$

$$3y + 4x = 150$$

$$x = 0 \rightarrow y = 50 \, ; \qquad x = 37.5 \rightarrow y = 0$$

نحدد منطقة الحلول :وفقا لاتجاه المتباينات فإن منطقة الحلول تتحدد في النقطة A,B,C,D



نعوض بالنقط في دالة الهدف: $Z=5x+8y$

عند النقطة $A(50.0)$ $\quad z = 5(50) + 8(0) = 250$

عند النقطة $B(30.10)$ $\quad Z = 5(30) + 8(10) = 230$

عند النقطة $C(15.30)$ $\quad Z = 5(15) + 8(30) = 315$

عند النقطة $D(0.60)$ $\quad Z = 5(0) + 8(60) = 480$

اختيار الحل الامثل :تتحقق النهاية الصغري للدالة وقدرها 230 عند النقطة $B(30.10)$.

ثانيا :الطرق التحليلية:"$Analytic\ Methods$"

هناك عدة طرق تحليلية لحل مسألة البرمجة الخطية سندرس منها ما يلي:

(1) الطريقة الجبرية :

وهذه الطريقة تتلخص في تعيين أركان المضلع المحدب بحل المعادلات الناتجة من متباينات القيود مثني مثني وبالتعويض بكل ركن في دالة الهدف ينتج قيم لها عند كل الأركان بذلك نستطيع تعيين دالة الهدف من خلال النتائج التى حصلنا عليها؛ يراعى فى

النتائج التى نحصل عليها فى إحداثيات الأركان أن نطبق قيد عدم السالبية بمعني أنه يرفض القيم السالبة التي تنتج للمتغيرات .

مثال(6): حقق دالة الهدف الآتية بالطريقة الجبرية $Min\ Z = 2x + 3y$ التي تحقق القيود

$$4x + 5y \leq 33$$
$$x + 4y \geq 11$$
$$2x - 3y \geq -11$$

بالإضافة إلي قيد عدم السالبية $x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0$

الحل:

نحول المتباينات إلي معادلات كالآتي :

$$4x + 5y = 33 \qquad (1)$$
$$x + 4y = 11 \qquad (2)$$
$$2x - 3y = -11 \qquad (3)$$

ونحل المعادلات الثلاثة السابقة مثني مثني نحصل علي نقط التقاطع (الأركان) بحل (1)،(2) نحصل علي النقطة (*7.1*) وكذلك المعادلتان (1)،(3) نحصل علي النقطة (*2,5*) بينما المستقيمان (2)،(3) يتقاطعان في النقطة (*-1,3*) وحيث أن قيمة x سالبة فتكون هذه النقطة لاتحقق شرط عدم السالبية لذا تهمل ونستبدلها بنقط تقاطع هذين المستقيمين مع محور الصادات (لماذا)وذلك بوضع $x=0$ في كلا منهما فنحصل علي النقاط $\left(0,\frac{11}{3}\right),\left(0,\frac{11}{4}\right)$ وبذلك تكون أركان مضلع منطقة السماحية هي النقاط الآتية :

$$A=(7.1) \quad ,B=(2,5) \quad ,C=\left(0,\frac{11}{3}\right) \quad ,D=\left(0,\frac{11}{4}\right)$$

ثم نعوض بهذه الأركان الأربعة في Z القيمة الصغري تكون هي المطلوبة

$$\therefore Z_A = 17\ ;\ Z_B = 19\ ;\ Z_C = 11\ ;\ Z_D = \frac{33}{4}$$

مما تقدم نلاحظ أن دالة الهدف متحققة عند نقطة D أي عندما $x = 0, y = \frac{11}{4}$

وقيمة النهاية الصغري هو $\left(8\frac{1}{4}\right)$.

ملاحظة: في حالة المسائل ذات البدائل المثلي نلاحظ أن قيمة دالة الهدف عند نقطتين من أركان المضلع المحدب متساوية وبذلك تكون البدائل المثلي هي كل نقاط الضلع الواصل بين هاتين النقطتين ويوضح ذلك المثال التالي .

مثال(7):

أوجد بالطريقة الجبرية $Max\ Z = 10x + 4y$

والتي تحقق المتباينات الآتية:

$$3x + 5y \leq 15$$
$$5x + 2y \leq 10$$
$$x \geq 0; y \geq 0$$

الحل: بحل مجموعة المعادلات

$$3x + 5y = 15$$
$$5x + 2y = 10$$
$$x = 0; y = 0$$

مثني مثني نحصل علي الأركان الآتية للمضلع منطقة الحلول المسموح بها وهي: $0 = (0,0); A = (2,0); B = \left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)\ ; C = (0,3)$

وبالتعويض لإيجاد قيمة دالة الهدف عند هذه الأركان نحصل علي:

$$\mathrm{Z_0} = 0\ \ ;\ \ \mathrm{Z_A} = 20\ \ ;\ \ \mathrm{Z_B} = 20\ \ ;\ \ Z_C = 12$$

يلاحظ أن أكبر لدالة الهدف Z عند كلا النقطتين A,B وبذلك يكون هناك بدائل مثلي علي المضلع أكمله وكما ذكرنا من قبل للحصول علي قيمة مثلي واحدة لابد من إضافة قيد آخر إلي مجموعة القيود في المسألة.

(ii) طريقة الحذف:

هذه الطريقة هي طريقة آخري من الطرق التحليلية لحل مسألة البرمجة الخطية وتلخص كالأتي:

1- تحول كل قيد إلي معادلة (متساوية) وذلك بإضافة متغير جديد في الطرف الأيسر للقيد وبذلك يظهر لدينا عدد من المتغيرات الجديدة مساويا لعدد القيود وجميعها دائما تحقق قيد عدم السالبية.

2- نوجد المجاهيل الأصلية بدلالة المجاهيل المضافة وذلك بحل المعادلات التي حصلنا عليها في الخطوة السابقة.

3- نعوض بنتائج الخطوة (2) في دالة الهدف فتتحول دالة الهدف إلي علاقة في المتغيرات الجديدة بدلا من الأصلية وتكون دائما القيم الصفرية لهذه المتغيرات هي المناسبة في كل حالات دالة الهدف مهما كانت نهاية عظمي أو صغري .

مثال(8):حل مسألة البرمجة الخطية الآتية بطريقة الحذف:

أ- $\text{Max } Z=x+2y$

ب- $\text{Max } Z=2x+y$

والتي تحقق القيود الآتية:

$$3x + y \le 53$$
$$3x + 8y \le 172$$
$$5x + 4y \le 100$$

مع قيد عدم السالبية $x \ge 0 \quad , \quad y \ge 0$

الحل:

نحول القيود إلي معادلات كالآتي:

$$3x+y=53-u \qquad (1)$$
$$3x+8y=172-v \qquad (2)$$
$$5x+4y=100-w \qquad (3)$$

بحل المعادلتين (2)،(3) نحصل علي x,y بدلالة V,w كالآتي:

$$x = 4 - \left(\frac{2w - v}{7}\right) \quad ,$$
$$y = 20 - \left(\frac{5v - 3w}{28}\right)$$

وبالتعويض بهذه النتائج في دلالة في دالة الهدف في الحالة الأولي نحصل علي

$$z = x + 2y = 44 - \left(\frac{6v + 2w}{28}\right)$$

ولكي تكون Z نهاية عظمي لابد أن يكون الكمية السالبة أصغر ما يمكن و هذا يتحقق عندما $v=w=o$ وبذلك يكون

$$Max\ Z = 44 \quad at \quad x = 4, y = 20$$

وأيضا بحل المعادلتين (3)،(1) نحصل أيضا علي الآتي :

$$x = 16 - \left(\frac{4u - w}{7}\right) \quad ,$$

$$y = 5 - \left(\frac{3w - 5u}{7}\right)$$

وبالتعويض بهذه النتائج أيضا في دالة الهدف السابقة نحصل علي

$$z = x + 2y = 26 - \left(\frac{5w - 6u}{7}\right)$$

وبالتالي لكي قيمة Z نهاية عظمي لابد أن يكون $u=w=0$ وبذلك تكون $Max\ Z=26$ عندما $y=5\ ,\ x=16$

يلاحظ انه بحل المعادلتين (2)،(1) للحصول علي x,y بدلالة u,v فإن

$$x = 12 - \frac{8u}{21} + \frac{v}{21}$$

$$y = 17 - \frac{v}{7} + \frac{u}{7}$$

ومعني ذلك أن قيم المتغيرات ستكون $x=12 \quad , \quad y=17$

ويتضح أنه رغم أن هذه القيم ربحا أكبر لو عوضنا في دالة الهدف الأولي وتعطي مقدارا وهو (46) وبمقارنة هذه النتيجة بما حصلنا عليه في الطريقة البيانية لنفس المثال نجد أنه أكبر بينما هذه النتائج لا تحقق قيد الألمونيوم ذلك لأن احتياج السلعة الأولي إلي خمس وحدات من الألمونيوم و الثانية إلي أربعة فيكون إجمالي المحتاج إليه وهو $5 \times 12 +$ $4 \times 17 = 128$

وحدة ألمونيوم بينما أقصي كمية موجودة منه هي مائة وحدة فقط .
لذا يعتبر هذا الحل الناتج من حل المعادلتين (1)،(2) مرفوض.
بمقارنة النتائج الثلاثة نلاحظ أن النهاية العظمي للدالة الأولي متحققة عندما $x=4,y=20$ وقيمتها حينئذ هو (44).
وبالمثل يمكن التعويض بنتائج x,y في دالة الهدف الثانية وتحقيقها .
يمكن تطبيق طريقة الحذف إذا إحتوت المسألة علي أكثر من مجهولين كما هو واضح في المثال التالي :

مثال(9) حل مسألة البرمجة الخطية الآتية بطريقة الحذف

$$Min\ Z= x_1 + x_2 + 2x_3$$

تحت القيود الآتية :

$$x_1 + \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 \leq 9$$
$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1$$
$$6x_2 - 3x_1 - x_3 = 0$$

عدم السالبية وهو $x_{\mathrm{i}} \geq 0\ , \mathrm{i} = 1,2,3$

الحل:

بفرض أن هناك قيدين تساوي وقيد واحد متباينة نحولها إلي متساوية كالآتي :

$$x_1 + x_2 + x_3 + u = 9 \quad i.e.\ x_1 + x_2 + x_3 = 9 - u$$

بحل المعادلات الثلاثة للحصول علي قيم x_1, x_2, x_3

بدلالة لما نحصل علي :

$$x_1 = \frac{1}{2}(13 - 3u);\ x_2 = \frac{1}{4}(13 - u);\ x_3 = \frac{3}{4}(1 - 2)$$

وبالتعويض بهذه النتائج في دالة الهدف تصبح علي النحو التالي

$$z = \frac{1}{4}(33 - u)$$

وبتطبيق شرط عدم السالبية نجد أن $-1 \leq u \leq \frac{13}{3}$

وحيث أن المطلوب أن تكون دالة الهدف في نهايتها الصغري هذا لايتحقق إلا إذا أخذت u أكبر قيمة لها وهي $\frac{13}{3}$ بالتعويض في z يكون

$$Min\ Z = \frac{43}{6} \quad at\ x_1 = 0, x_2 = \frac{13}{6}\ , x_3 = \frac{5}{2}$$

مثال(10):

حل مسألة البرمجة الخطية الآتية بطريقة الحذف

$$Max\ Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

تحت القيود الآتية:

$$x_1 + \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 \leq 200$$

$$x_3 \leq 25$$

$$x_2 + x_3 \leq 100$$

بالأضافة إلي قيد عدم السالبية وهو $x_i \geq 0\ ,\ i \in \{1,2,3\}$

الحل:

كالعادة نحول متباينات القيود إلي متساويات (معادلات)كالآتي:

$$x_1 + \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 = 200 - \mathrm{u}$$

$$x_3 = 25 - \omega$$

$$x_2 + x_3 = 100 - v$$

بحل هذه المعادلات الثلاثة للحصول علي x_1, x_2, x_3 بدلالة u,v,ω نحصل علي

$$x_1 = 100 - u + v$$

$$x_2 = 75 - v + \omega$$

$$x_3 = 25 - \omega$$

بالتعويض بهذه النتائج في دالة الهدف نأخذ الشكل

$$Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 325 - (u + v + \omega)$$

ولكي تكون دالة الهدف (الربح) نهاية عظمي يجب أن نأخذ المجاهيل $u + v + \omega$ أصغر قيمة لها وهي الصفر لها (i.e. $u=v=\omega=0$) . وبذلك نحصل علي أن أكبر قيمة ربح ممكنة هي 325 عندما $x_1 = 100$ ؛ $x_2 = 75$; $x_3 = 25$ أو أنه إذا ربي المزارع مائة دجاجة وخمسة وسبعين بطة وخمسة وعشرون ديك رومي يحقق بذلك أكبر ربح وقدره 325 جنيها .

مثال(11): لدينا المنطقة المضلعة التالية

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

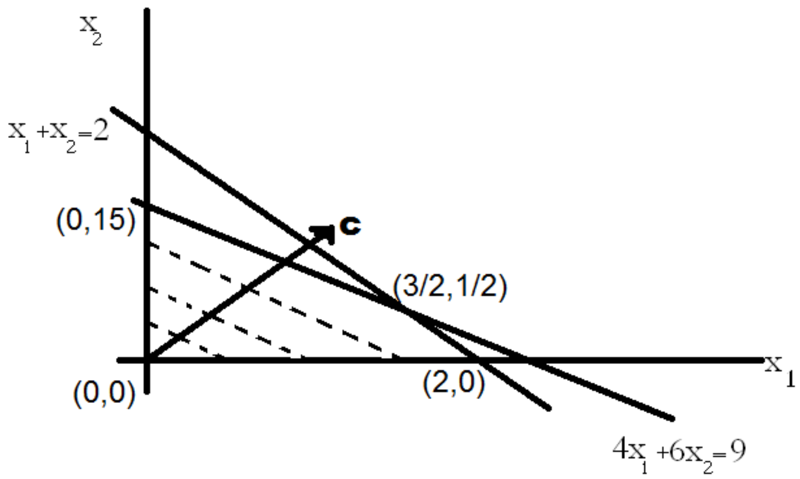
$$4x_1 + 6x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

أوجد النقاط الحدية .ثم أوجد الحل الأمثل بيانيا علما بأن دالة الهدف هي

$$Min\ Z = 2x_1 + 3x_2$$

هذا البرنامج الخطي يأخذ الشكل التالي :



إن المنطقة المضلعة هي المنطقة الواقعة بين المستقيمات الأربعة ، والمستقيم المتقطع يرمز إلي تزايد دالة الهدف ومن الواضح أنه مواز للمستقيم الممثل بالشرط $4x_1 + 6x_2 \leq 9$ وبالتالي فإن هناك عددا لا نهائيا من الحلول تقع علي القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $\left({}^{3}/_{2}, {}^{1}/_{2}\right)$ و $(0,1.5)$

لاحظ أن ميل المستقيم

لاحظ أن ميل المستقيم $4x_1 + 6x_2 = 9$ يساوي ميل دالة الهدف.

النظرية التالية من أهم النظريات في البرمجة الخطية :

نظرية (نظرية النقطة الحدية)

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي :

$$max(or\ min) \qquad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$s.t.$

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}\right\} \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \left\{\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array}\right. \qquad (3)$$

$$x_i \geq 0 \qquad\qquad i = 1, \dots, n$$

إذا كانت المنطقة المسموح بها لهذا البرنامج الخطي محدودة ، عندئذ يكون الحل الأمثل موجودا عند نقطة حدية من هذه المنطقة .

إذا كانت المنطقة المسموح بها لهذا البرنامج الخطي غير محدودة ، عندئذ يكون الحل الأمثل (إن وجد) موجودا عند نقطة حدية من هذه المنطقة .

البرهان: (مقصور علي المنطقة المحدودة)

لنفترض أن $x_1, x_2, \dots, x_m$ هي النقاط الحدية للمنطقة المسموح K ، ولنفترض أن هذه النقاط قد رقمت بحيث إن :

$$f(x_1) \leq f(x_i) \leq f(x_m) \qquad i = 1, \dots, m \qquad (4)$$

علما أن f هي دالة الهدف للبرنامج الخطي. لنفترض أن $x \in k$ نقطة إختيارية ،

عندئذ يمكن كتابتها كتركيب محدب علي النحو التالي :

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{ni}x_{ni} \qquad (5)$$

حيث a_i أعداد غير سالبة ، $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 1$.

إن:

$$f(x) = f(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m) \qquad (6)$$

$$= a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \cdots + a_m f(x_m)$$

وذلك لأن f دالة خطية، وبما أن $a_1 + \mathrm{a}_2 + \cdots + \mathrm{a}_\mathrm{m} = 1$ إذا:

$$f(x_1) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) f(x_1)$$

$$= a_1 f(x_1) + a_2 f(x_1) + \cdots + a_m f(x_1) \quad (7)$$

$$\leq a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \cdots + a_m f(x_m) = f(x)$$

كما أن:

$$f(x) = a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \cdots + a_m f(x_m)$$

$$\leq a_1 f(x_m) + a_2 f(x_m) + \cdots + a_m f(x_m) \qquad (8)$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) f(x_m)$$

$$= f(x_m)$$

وعلي هذا فإن :

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_m) \qquad (9)$$

لأية نقطة $x \in k$ ، مما يعني أن دالة الهدف f تأخذ قيمتها العظمي عند النقطة الحدية x_m وتأخذ قيمتها الصغرى عند النقطة الحدية x_1 و هذا يثبت النظرية.

لتطبيق هذه النظرية نأخذ المثال السابق .من الممكن الحصول علي الحل الأمثل بعد الحصول علي جميع النقاط الحدية في المنطقة المضلعة ، ومن ثم بتعويض هذه النقاط في دالة الهدف :

$$z_0 = -1 \times 0 - 3 \times 0 = 0$$

$$z_A = -1 \times 6 - 3 \times 0 = -6$$

$$z_B = -1 \times 4/3 - 3 \times 14/3 = -46/3$$

$$z_c = -1 \times 0 - 3 \times 4 = -12$$

من الواضح أن النقطة B تعطي أعلي قيمة لدالة الهدف .إن جميع الحلول المسموح بها تقع في منطقة محدبة ، في هذا المثال المنطقة محدودة ، وقد تكون في بعض الحالات غير محدودة وقد يكون الحل في هذه الحالة غير نهائي ، إن أي حل أمثلي لابد أن يكون عند إحدى النقاط الحدية.

في بعض الحالات قد يكون الحل الأمثل غير وحيد وذلك عندما يكون ميل دالة الهدف مساويا لميل أحد مستقيمات الشروط . أخيرا قد لا يوجد حل للبرنامج الخطي . وذلك عندما تكون منطقة الحلول المسموح بها خالية . كذلك من الممكن تطبيق النظرية علي المثال السابق ومن ثم حساب قيم النقاط الحدية ومن ثم بتعويضها في دالة الهدف .

الفصل الخامس: البرمجة غير الخطية

البرمجة غير الخطية بدون قيود في متغير واحد

إن الفكرة الأساسية في الطرق المستخدمة لإيجاد حل مسألة برمجة غير خطية بدون قيود في متغير واحد ، والتي تعتمد على التحليل العددي ، وهي أن نحسب تتابعات للقيمة المثلى المطلوبة (عظمى – صغرى) هذه التتابعات تتحسن متقاربةً نحو الحل الصحيح، ويستخدم في ذلك الخوارزمية التالية :

طريقة نيوتن لإيجاد جذر معادلة

$$f(x) = x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

حيث x_o معطاة

$$x_o = 1$$

$$x_1 = 1.5$$

$$x_2 = \cdots$$

.

.

.

.

الخوارزمية العامة لإيجاد القيمة المثلى لدالة

المسألة هي:

أوجد القيمة المثلى $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$ التي تحقق القيمة المثلى للدالة $f(X)$

1) نبدأ بقيمة(تخمين) للقيمة المثلى x_1 نضع $i = 1$.

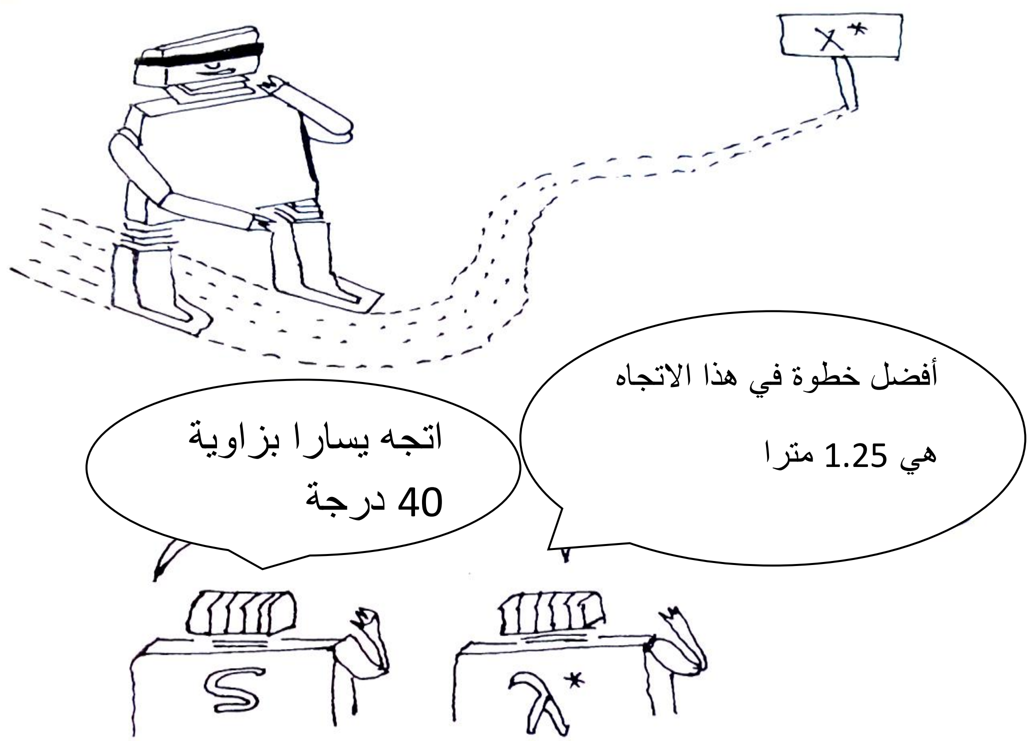
2) نوجد إيجاد مناسب نحو القيمة المثلىS_i .

3) نحدد الخطوة المناسبة ${\lambda^*}_i$ للتحرك بالاتجاه S_i نحو القيمة المثلى.

4) نوجد التقريب الجديد (التتابع) $x_{i+1} = x_i + {\lambda^*}_i S_i$.

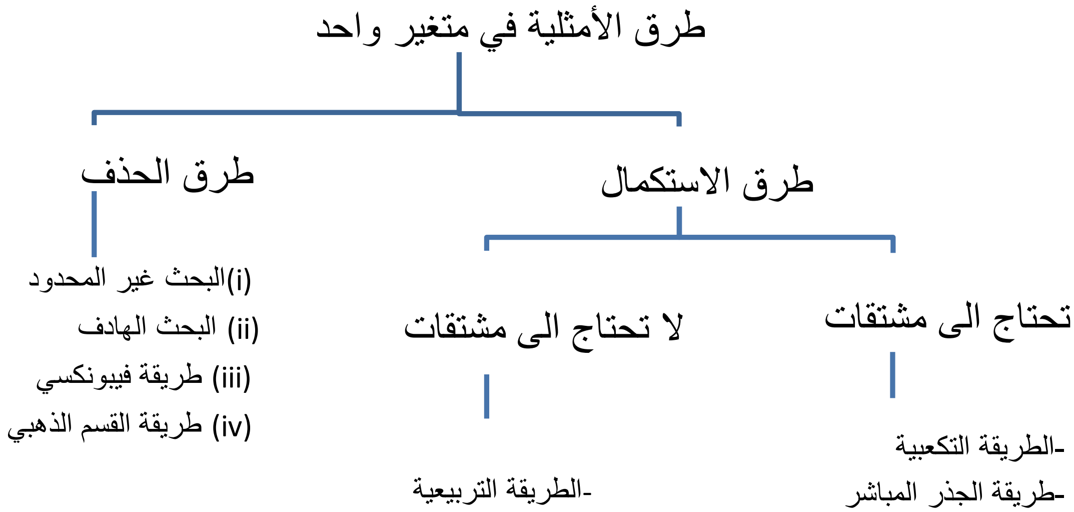
5) نختبر ما إذا كانت x_{i+1} قيمة مُثلى, فإذا كان توقفنا .

6) نضع $i = i + 1$ ونكرر الخطوات 2-6 .



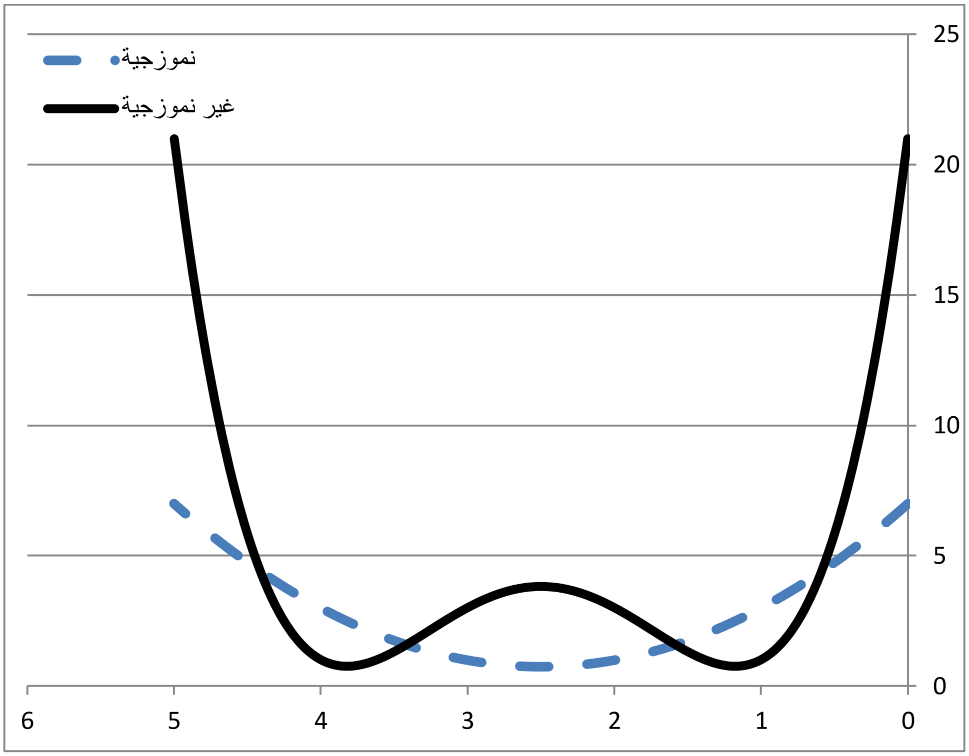
إن جزء (البرمجة غير الخطية بدون قيود في متغير واحد) يخدم الخطوة رقم (3) من الخوارزمية لإيجاد طول الخطوة التي يجب أن نتحركها من X_1 في الاتجاه S_1 لنصل إلى X_2 التي هي أقرب من سابقتها للنقطة المثلى

الطرق المستخدمة حل هذه المسألة تصنف كالآتي :



تعريف: الدالة النموذجية _ unimodal

هي دالة لها نقطة مثلى وحيدة في نطاق معين.



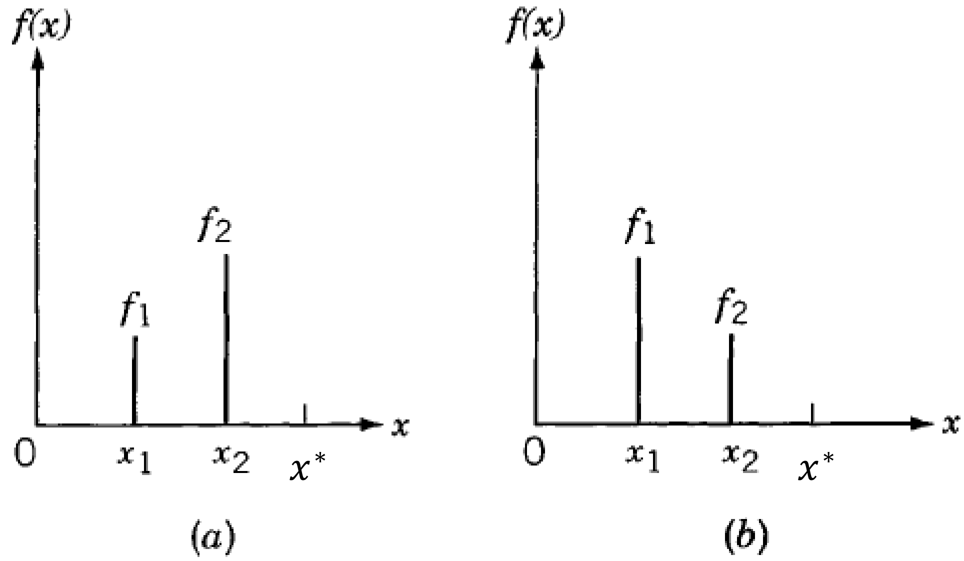
تكون الدالة نموذجية إذا تحقق :

$$a)\ x_2 < x^* \quad \rightarrow \quad f(x_2) < f(x_1)$$

أو

$$b)\ x_1 > x^* \quad \rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

حيث x^* هي القيمة المثلى و $x_1 < x_2$.



طرق الحذف

أولاً : طريقة البحث المباشر

سوف ندرس هنا هذه الطريقة مع استخدام خطوة ثابتة. في هذه الحالة تكون الخوارزمية كالاتي :

خوارزمية طريقة البحث المباشر

المسألة هي : إيجاد القيمة المثلى x^* لدالة نموذجية $f(x)$ في متغير واحد.

1) نبدأ بتخمين x_1 .

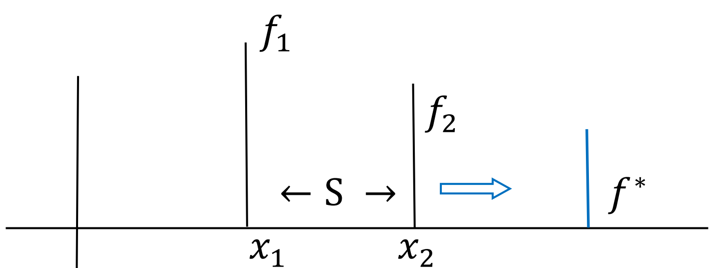
2) نحسب $f_1 = f(x_1)$.

3) نفرض قيمة للخطوة S ونحسب $x_2 = x_1 + S$.

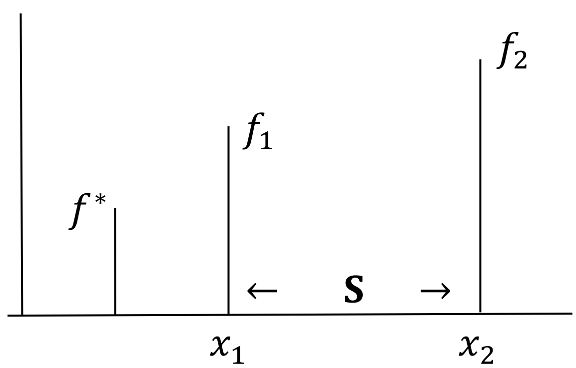
4) نوجد $f_2 = f(x_2)$.

5) نفرض أن المسألة القيمة المثلى فيها صغرى.

6) نفرض أن $f_2 < f_1$ .. فتكون f^* على اليمين و نحسب القيم التالية $x_{i+1} = x_i + S$



7) إذا كانت $f_2 > f_1$ .. فتكون f^* على اليسار نحسب القيم التالية $x_{i+1} = x_i - S$



مثال:

استخدم طريقة البحث المباشر لإيجاد القيمة العظمى للدالة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & x \le 2 \\ 3 - x, & x > 2 \end{cases}$$

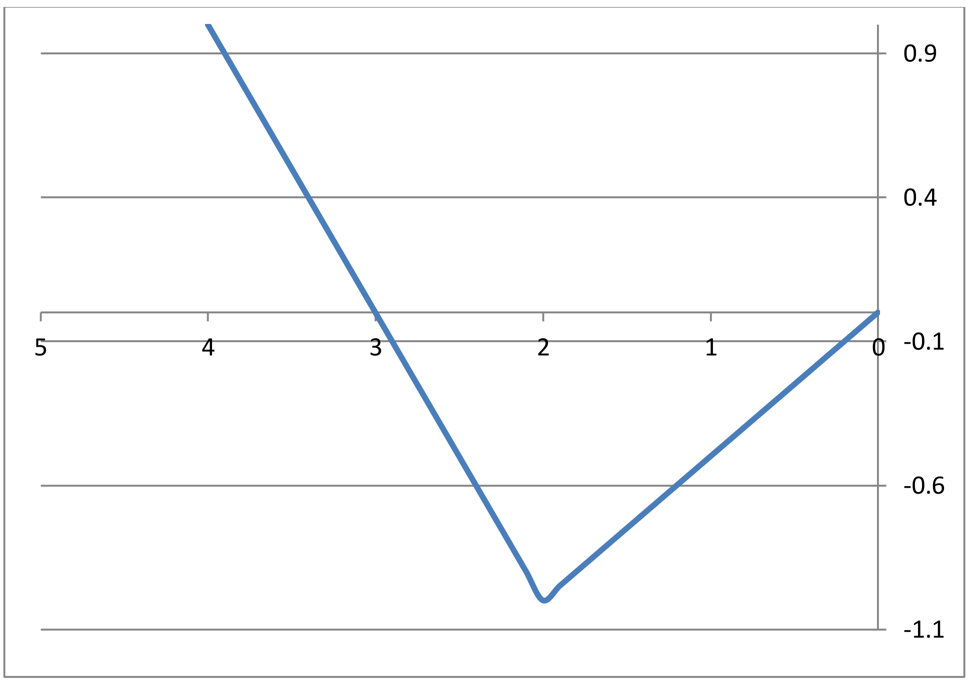
بدءا من $x_1 = 0$ و خطوة $s = 0.4$

الحل: هذه المسألة تكافئ:

أوجد النهاية الصغرى للدالة الخطية

$$f(x) = \begin{cases} -0.5x; & x \leq 2 \\ x-3; & x > 2 \end{cases}$$

باستخدام طريقة البحث المباشر بدءا من $x_1 = 0$ و خطوة $s = 0.4$.



الحل $f(x_1) = f(0) = 0$, $x_1 = 0$ نختار الخطوة بين كل نقطتين $S = 0.4$

$$x_2 = x_1 + S = 0.4$$

$$f(x_2) = f(0.4) = -\frac{1}{2}(0.4) = -0.2$$

من الرسم

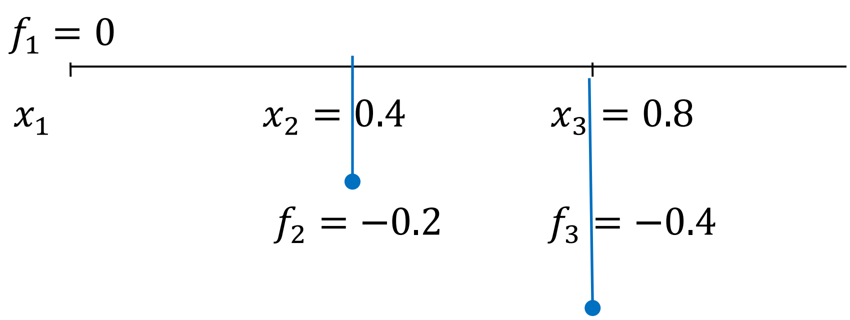
$x_1 = 0$ $\quad\quad\quad\quad$ $x_2 = 0.4$

$f_2 = -0.2$

يتضح أن اتجاه صفر الدالة ناحية اليمين أي نضيف خطوة على x_2 فنحصل على x_3

$$x_3 = x_2 + S = 0.4 + 0.4 = 0.8$$

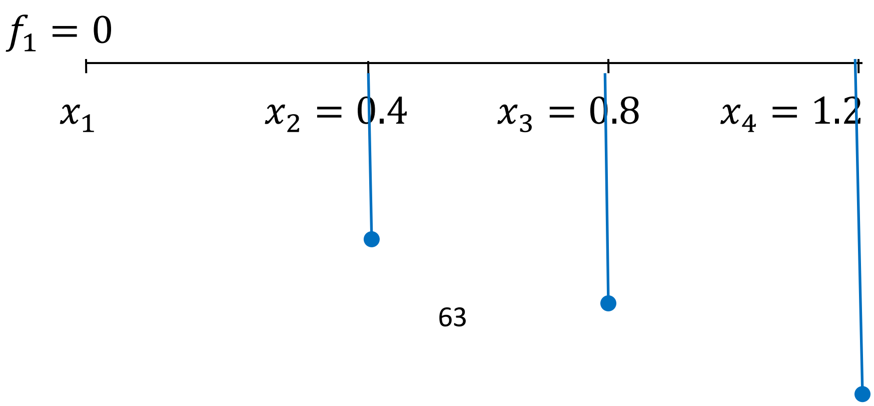
$$f(x_3) = f(0.8) = -\frac{1}{2}(0.8) = -0.4$$



اتجاه الصغرى هو ذات الاتجاه نضيف S

$$x_4 = x_3 + S = 0.8 + 0.4 = 1.2$$

$$f(x_4) = f(1.2) = -\frac{1}{2}(1.2) = 0.6$$



$$f_2 = -0.2 \qquad f_3 = -0.4 \qquad f_4 = -0.6$$

إتجاه الصفر يشير إلى قيمة زيادة S

$$x_5 = x_4 + S = 1.2 + 0.4 = 1.6$$

$$f(x_5) = f(1.6) = -\frac{1}{2}(1.6) = -0.8$$

اتجاه الصفر يشير الى استمرار زيادة S

$$x_6 = x_5 + S = 1.6 + 0.4 = 2.0$$

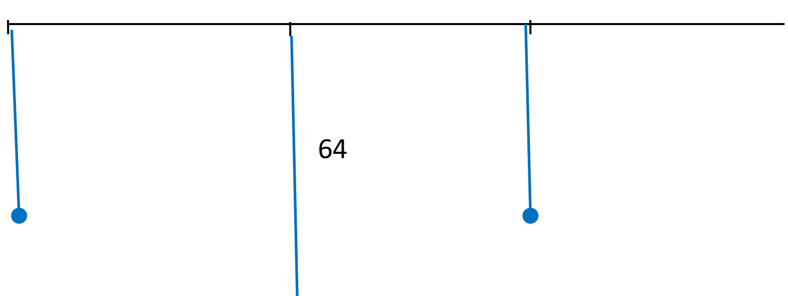
$$f(x_6) = f(2.0) = -\frac{1}{2}(2.0) = -1$$

نضيف S

$$x_7 = x_6 + S = 2.0 + 0.4 = 2.4$$

$$f(x_7) = f(2.4) = 2.4 - 3 = -0.6$$

انعكاس اتجاه تزايد الدالة



$x_5 = 1.6 \qquad x_6 = 2.0 \qquad x_7 = -0.6$

$f_5 = -0.8 \qquad f_6 = -1 \qquad f_7 = -0.6$

$\therefore$ $x_6 = 2.0$ هي القيمة الصغرى للدالة وقيمة الدالة عندها $f(2.0) = -1$

تمرين:

استخدم طريقة البحث المباشر لإيجاد القيمة الصغرى للدوال التالية آخذا في الاعتبار نقطة البدء والخطوة المعطى. قم بأجراء 4 خطوات في كل مسألة:

(a) $f(x) = x(1 - \frac{3}{2}), x_1 = 0\ , s = 0.2$

(b) $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5\ x_1 = 0.5\ , s = 0.2$.

(c) $f(x) = 0.65 - \frac{0.75}{1+x^2} - 0.65x\ tan^{-1}\frac{1}{x}\ x_1 = 1\ , s = 0.15$.

طريقة فيبونكسي *Fibonacci*:

أعداد فيبونكسي توصف المعادلة

$f_0 = f_1 = 1$ حيث $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n = 2,3,4, \dots$

وبالتالي تكون الأعداد الأولى من هذه المتوالية كالتالي 1,1,2,3,5,8,13,21

خوارزمية طريقة فيبونكسي

تتحدد خطوات طريقة فيبونكسي فيما يلي:

1) نفرض أن L_0 هو النطاق الابتدائي لمنطقة الحل $L_o = [a, b]$

2) نحدد n عدد الخطوات

3) نعرف $L^* = \frac{f_{n-2}}{f_n} L_0$

4) نضع نقاط الاختبار كالتالي $x_1 = a + L^*\,, x_2 = b - L^*$

5) نحذف جزءًا من النطاق إعتمادًا على خاصية نموذجية الدالة أي وجود نقطة صغرى واحدة داخل النطاق.

6) نحدد النطاق الجديد و ننقص n بمقدار 1ونكرر الخطوات 5-4 حتى $n=2$

مثال :

أوجد القيمة الصغرى للدالة $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & x \le 2 \\ x-3, & x > 2 \end{cases}$

في النطاق [0,3] باستخدام طريقة فيبونكسي مستخدما $n=6$

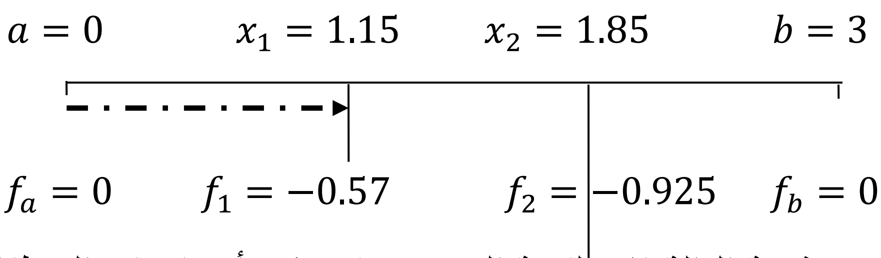
الحل:

حيث أن أعداد فيبونكسي هي1,1,2,3,5,8,13,21 $f_0 = f_1 = 1,$ وأن $n = 6$ فإن

$$L^{*}=\frac{f_{n-2}}{f_{n}}L_{o}=\frac{f_{4}}{f_{6}}(3-0)=\frac{5}{13}(3)=1.15$$

$$x_{1}=a+L^{*}=0+1.15=1.15\,,$$

$$x_{2}=b-L^{*}=3-1.15=1.85$$



بناءًا على نموذجية الدالة فإن القيمة الصغرى لا يمكن أن تقع في المنطقة $[a,x_1]$ ويحتمل وجودها في المنطقة$[x_1,b]$ $\therefore$ نحذف المنطقة $[a,x_1]$ فيصبح النطاق الجديد

$$[a=1.15, b=3]$$

الآن من جديد، أعداد فيبونكسي هي$1,1,2,3,5,8,13,21$ $f_0=f_1=1,$ وأن $n=5$ فإن

$$L^{*}=\frac{f_{n-2}}{f_{n}}L_{o}=\frac{3}{8}(3-1.15)=\frac{3}{8}(1.85)=0.694$$

$$x_{1}=a+L^{*}=1.15+0.694=1.84\,,$$

$$x_{2}=b-L^{*}=3-0.694=2.31$$

$a = 1.15$ $\quad x_1 = 1.84$ $\quad x_2 = 2.31$ $\quad b = 3$

$f_a = -058$ $\quad f_1 = -0.92$ $\quad f_2 = -0.69$ $\quad f_b = 0$

بناءًا على نموذجية الدالة فإن القيمة الصغرى لا يمكن أن تقع في المنطقة $[x_2, b]$ نحذف المنطقة $[x_2, b]$ فيصبح النطاق الجديد

$$[a = 1.15, b = x_2 = 2.31]$$

$$f_0 = f_1 = 1, \quad 1,1,2,3,5,8,13,21$$

$n = 4$

$$L^* = \frac{f_{\mathrm{n}-2}}{f_{\mathrm{n}}} \mathrm{L_o} = \frac{2}{5}(2.31 - 1.15) = \frac{2}{5}(1.16) = 0.464$$

$$x_1 = a + L^* = 1.15 + 0.464 = 1.614\,,$$

$$x_2 = b - L^* = 2.31 - 0.464 = 1.846$$

$a = 1.15 \qquad x_1 = 1.614 \qquad x_2 = 1.846 \qquad b = 2.31$

$f_a = -0.57 \qquad f_1 = -0.807 \qquad f_2 = -0.923 \qquad f_b = -0.69$

بناءًا على نموذجية الدالة فإن القيمة الصغرى لا يمكن أن تقع في المنطقة $[a, x_1]$

$$[a = x_1 = 1.614, b = 2.31]$$

$n = 3$

$$L^* = \frac{f_{n-2}}{f_n} L_o = \frac{1}{3}(2.31 - 1.614) = \frac{1}{3}(0.696) = 0.232$$

$$x_1 = a + L^* = 1.614 + 0.232 = 1.846\,,$$

$$x_2 = b - L^* = 2.31 - 0.232 = 2.078$$

$a = 1.614 \qquad x_1 = 1.846 \qquad x_2 = 2.078 \qquad b = 2.31$

$f_a = -0.807 \qquad f_1 = -0.923 \qquad f_2 = -0.922 \qquad f_b = -0.69$

بناءًا على نموذجية الدالة فإن القيمة الصغرى لا يمكن أن تقع في المنطقة $[a,x_1]$ نحذف المنطقة $[a,x_1]$ فيصبح النطاق الجديد

$$[a=1.846\ ,b=x_2=2.31]$$

$n=2$

$$L^*=\frac{f_{\mathrm{n}-2}}{f_{\mathrm{n}}}\mathrm{L_o}=\frac{1}{2}(2.31-1.846)=\frac{1}{2}(0.464)=0.232$$

$x_1=a+L^*=1.846+0.232=2.078\,,$

$x_2=b-L^*=2.31-0.232=2.078$

Then this is the minimum point

$x_2=x_1=2.078$

تمرين:

استخدم طريقة فيبونكسي لإيجاد القيمة الصغرى للدوال التالية آخذا في الاعتبار النطاق وعدد الخطوات المعطى.

(d) $f(x)=x(1-\frac{3}{2})$, [0,1],n=8.

(e) $f(x)=x^5-5x^3-20x+5$ [0,3],n=7.

(f) $f(x)=0.65-\frac{0.75}{1+x^2}-0.65x\,tan^{-1}\frac{1}{x}$ [0,3],n=5.

طريقة القسم الذهبي

وتشبه هذه الطريقة طريقة فيبونكسي ويكمن الاختلاف بينهما في أن عدد الخطوات لابد أن يتم تحديده مسبقا والذي يعتمد عليه طول الجزء المتقتطع من

نطاق وجدود القيمة الصغرى في طريقة فيبونكسي بينما في طريقة القسم الذهبي لا نحتاج لتحديد عددالخطوات مسبقا و طول الجزء المتقتطع هو نسبة ثابته من طول الفترة في الناتج من الخطوة السابقة.

مثال:

استنتج أفضل قيمة للجزء المحذوف من النطاق في طريقة فيبونكسي إذا أخذنا في الاعتبار إجراء عدد كبير جدا من التتابعات.

الحل:

$$f_0 = f_1 = 1, \quad 1,1,2,3,5,8,13,21$$

$$L^* = \frac{f_{n-2}}{f_n} L_o = \frac{f_4}{f_6}(3-0) = \frac{5}{13}(3) = 1.15$$

n	3	4	5	6	7
$\frac{f_{n-2}}{f_n}$	$\frac{f_1}{f_3} = \frac{1}{3} = 0.33$	$\frac{f_2}{f_4} = \frac{2}{5} = 0.4$	$\frac{3}{8} = 0.37$	$\frac{5}{13} = 0.38$	$\frac{8}{21} = 0.38$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n-2}}{f_n} = 0.38$$

من المثال السابق يتضح أن اختيار الجزء المحذوف من النطاق في طريقة فيبونكسي ليكون 0.38 من النطاق الحالي هو أفضل اختيار وأنه بالإضافة إلى أنه سوف يوفر في الحسابات ، فإنه سوف يحسن النتائج ، ويسرع الحصول على القيمة المثلى.

ومن هنا جاءت فكرة طريقة القسم الذهبي

خوارزمية طريقة القسم الذهبي

تتشابه خطوات طريقة القسم الذهبي مع طريقة فيبونكسي والاختلاف الوحيد هو أن الجزء المحذوف من النطاق ثابت و تكونالخطوات كالتالي:

1) نفرض أن L_o هو النطاق الابتدائي لمنطقة الحل $L_o = [a, b]$

2) نحدد n عدد الخطوات

3) نعرف

$$L^{*} = 0.382\mathrm{L_o}$$

4) نضع نقاط الاختبار كالتالي $x_1 = a + L^{*}\ , x_2 = b - L^{*}$

5) نحذف جزءًا من النطاق إعتمادًا على خاصية نموذجية الدالة أي وجود نقطة صغرى واحدة داخل النطاق.

6) نحدد النطاق الجديد و ننقص n بمقدار 1ونكرر الخطوات 4-5 حتى $n=2$

<u>مثال :</u>

أوجد القيمة الصغرى للدالة $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & x \le 2 \\ x - 3, & x > 2 \end{cases}$

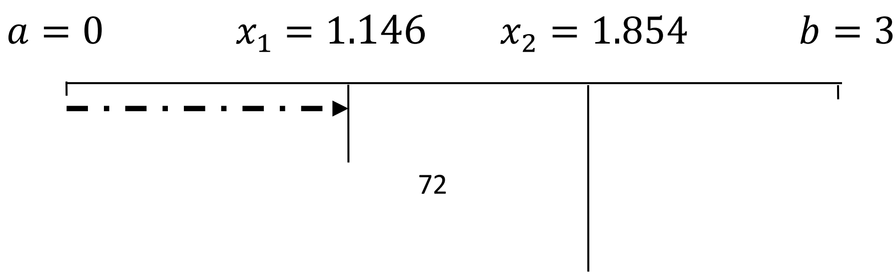
في النطاق [0,3] باستخدام طريقة القسم الذهبي حتى يصبح الجزء المتبقي من النطاق أقل من 0.1

الحل:

$$L^{*} = 0.382\mathrm{L_o} = 0.382(3) = 1.146$$

$x_1 = a + L^{*} = 0 + 1.146 = 1.146\,,$

$x_2 = b - L^{*} = 3 - 1.146 = 1.854$



$$f_a = 0 \qquad f_1 = -0.573 \qquad f_2 = -0.9252 \quad f_b = 0$$

بناءًا على نموذجية الدالة فإن القيمة الصغرى لا يمكن أن تقع في المنطقة $[a, x_1]$ ويحتمل وجودها في المنطقة$[x_1, b]$ ∴ نحذف المنطقة $[a, x_1]$ فيصبح النطاق الجديد

$$[a = 1.146 \ , b = 3]$$

$$L^* = 0.382\mathrm{L_o} = 0.382(3 - 1.146) = 0.382(1.854) = 0.708$$

$$x_1 = a + L^* = 1.146 + 0.708 = 1.854 \, ,$$

$$x_2 = b - L^* = 3 - 0.708 = 2.292$$

$a = 1.146 \qquad x_1 = 1.854 \quad x_2 = 2.292 \qquad b = 3$

$f_a = -058 \qquad f_1 = -0.927 \qquad f_2 = -0.708 \qquad f_b = 0$

بناءًا على نموذجية الدالة فإن القيمة الصغرى لا يمكن أن تقع في المنطقة $[x_2, b]$ ويحتمل وجودها في باقي النطاق إذن حذف المنطقة $[x_2, b]$ فيصبح النطاق الجديد

$$[a = 1.146 \, , b = x_2 = 2.292]$$

$$L^* = 0.382\mathrm{L_o} = 0.382(2.292 - 1.146) = 0.382(1.146) = 0.437$$

$$x_1 = a + L^* = 1.146 + 0.437 = 1.583 \, ,$$

$$x_2 = b - L^* = 2.292 - 0.437 = 1.855$$

$a = 1.146 \qquad x_1 = 1.583 \qquad x_2 = 1.855 \qquad b = 2.292$

$f_a = -0.573 \qquad f_1 = -0.7915 \qquad f_2 = -0.923 \qquad f_b = -0.708$

بناءًا على نموذجية الدالة فإن القيمة الصغرى لا يمكن أن تقع في المنطقة $[a, x_1]$ وهي التي سوف نحذفها. ويكون النطاق الجديد:

$$[a = x_1 = 1.583, b = 2.292\,]$$

$$L^* = 0.382\mathrm{L_o} = 0.382(2.292 - 1.583) = 0.382(0.709)$$
$$= 0.271$$

$$x_1 = a + L^* = 1.583 + 0.271 = 1.854\,,$$

$$x_2 = b - L^* = 2.292 - 0.271 = 2.021$$

$a = 1.583 \qquad x_1 = 1.854 \qquad x_2 = 2.021 \qquad b = 2.292$

$f_a = -0.7915 \qquad f_1 = -0.927 \qquad f_2 = -0.979 \qquad f_b = -0.708$

بناءًا على نموذجية الدالة فإن القيمة الصغرى لا يمكن أن تقع في المنطقة $[a, x_1]$ وهي التي سوف نحذفها. ويكون النطاق الجديد:

$$[a = x_1 = 1.854, b = 2.292\,]$$

$$L^* = 0.382\mathrm{L_o} = 0.382(2.292 - 1.854) = 0.382(0.438)$$
$$= 0.167$$

$$x_1 = a + L^* = 1.854 + 0.167 = 2.021\,,$$

$$x_2 = b - L^* = 2.292 - 0.167 = 2.125$$

$a = 1.854 \qquad x_1 = 2.021 \qquad x_2 = 2.125 \qquad b = 2.292$

$f_a = -0.927 \qquad f_1 = -0.979 \qquad f_2 = -0.875 \qquad f_b = -0.708$

بناءًا على نموذجية الدالة فإن القيمة الصغرى لا يمكن أن تقع في المنطقة $[x_2, b]$ وهي التي سوف نحذفها. ويكون النطاق الجديد:

$$[a = x_1 = 1.854, b = 2.125\,]$$

$$L^* = 0.382\mathrm{L_o} = 0.382(2.292 - 2.125\,) = 0.382(0.176)$$
$$= 0.064$$

وحيث أن الجزء المقطوع من النطاق يقل عن 0.1

وطبقا لقيم الدالة عند

a, x_1, x_2, b

وهي على الترتيب

$f_a = -0.927 \qquad f_1 = -0.979 \qquad f_2 = -0.875 \qquad f_b = -0.708$

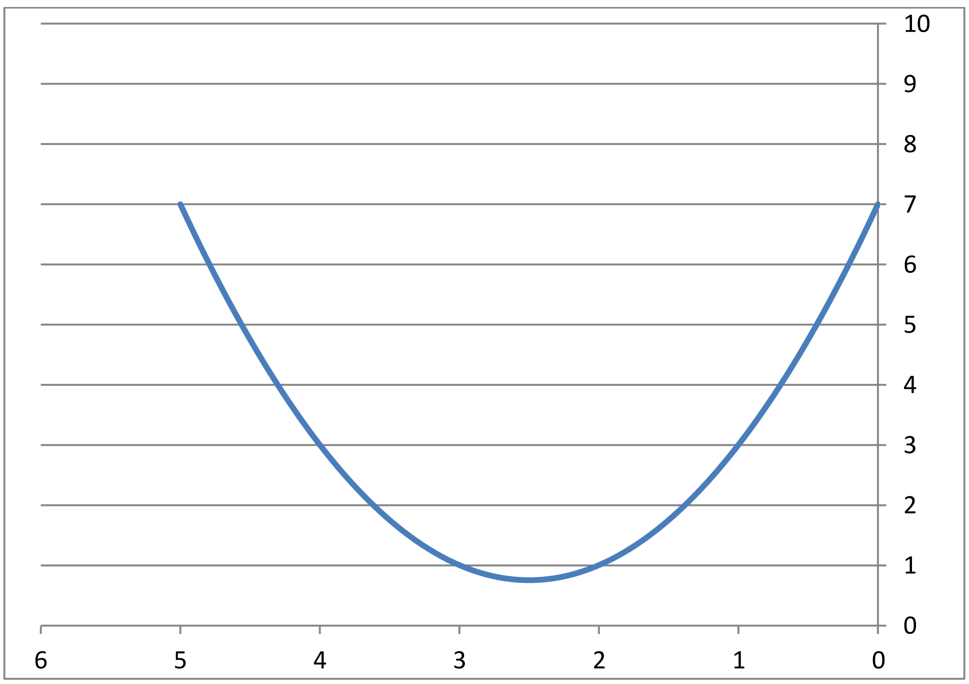
فإن القيمة الصغري هي $f_1 = -0.979$ عند $x_1 = 2.021$

تمرين:

اوجد القيمة الصغرى للدالة

$$f(x) = x^2 - 5x + 7$$

في النطاق [0,5] باستخدام طريقة القسم الذهبي. قم بعمل خطوات حتى تصل لدقة رقم عشري واحد.



الحل:متروك للطالب.

تمرين:

استخدم طريقة القسم الذهبي لإيجاد القيمة الصغرى للدوال التالية آخذا في الاعتبار النطاق المعطى. قم بأجراء عدد الخطوات المبين في كل مسألة:

(a) $f(x) = x(1-\frac{3}{2}), [0,1].$

(b) $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5\ [0,3].$

(c) $f(x) = 0.65 - \frac{0.75}{1+x^2} - 0.65x\ tan^{-1}\frac{1}{x}\ [0,3].$

طريقة نيوتن(الجذر المباشر)

الخوارزمية:

1- نحدد قيمة ابتدائية (تخمين) x_0.

2- نضع $k = 1$.

3- نحسب $f(x_k), f'(x_k)$.

4- نحسب

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

5- نختبر شرط التوقف

أ- الوصول إلى عدد N محدد سلفا من التتابعات

ب-الوصول إلى قيمة صغيرة مناسبة للدالة $f(x_k) \leq \varepsilon_1$

ت-الوصول إلى قيمة صغيرة مناسبة لمشتقة الدالة $f'(x_k) \leq \varepsilon_2$

6- عند عدم تحقق شرط التوقف نضع $k = k + 1$ ثم نذهب إلى الخطوة 4

مثال :

أوجد القيمة الصغرى للدالة $f(x) = x^2 - 6x + 9\ [0,3].$

بدءا من $x_0 = 2$ باستخدام طريقة طريقة نيوتن(الجذر المباشر)

حتى دقة رقمين عشريين

الحل

مشتقة الدالة

$$f'(x) = 2x - 6$$

$$x_0 = 2$$

$$f(x_0) = 2^2 - 6(2) + 9 = 1$$
$$f'(x_0) = 2(2) - 6 = -2$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \left(\frac{1}{-2}\right) = 2.5$$

- نختبر شرط التوقف

$$f(x_1) = 2.5^2 - 6(2.5) + 9 = 0.25$$
$$f'(x_1) = 2(2.5) - 6 = -1$$

وهوما يزال كبيرا.

نذهب إلى الخطوة 4

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.5 - \left(\frac{0.25}{-1}\right) = 2.75$$

- نختبر شرط التوقف

$$f(x_2) = 2.75^2 - 6(2.75) + 9 = 0.0625$$
$$f'(x_2) = 2(2.75) - 6 = -0.5$$

وقد وصلت الدالة لدقة رقم عشري واحد وهو غير كاف.

نذهب إلى الخطوة 4

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2.75 - \left(\frac{0.0625}{-0.5}\right) = 2.875$$

- نختبر شرط التوقف

$$f(x_3) = 2.875^2 - 6(2.875) + 9 = 0.0156$$
$$f'(x_3) = 2(2.875) - 6 = -0.25$$

واضح تصاغر الدالة رغم بقائها لدقة رقم عشري واحد وهو غير كاف.

نذهب إلى الخطوة 4

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 2.875 - \left(\frac{0.0165}{-0.25}\right) = 2.9$$

- نختبر شرط التوقف

$$f(x_4) = 2.9^2 - 6(2.9) + 9 = 0.01$$
$$f'(x_3) = 2(2.9) - 6 = -0.2$$

واضح هنا أن الخطوة التالية سوف تصل إلى الدقة المطلوبة
وهو ما نتركه للطالب.

الفصل السادس
البرمجة الغير خطية عديدة المتغيرات

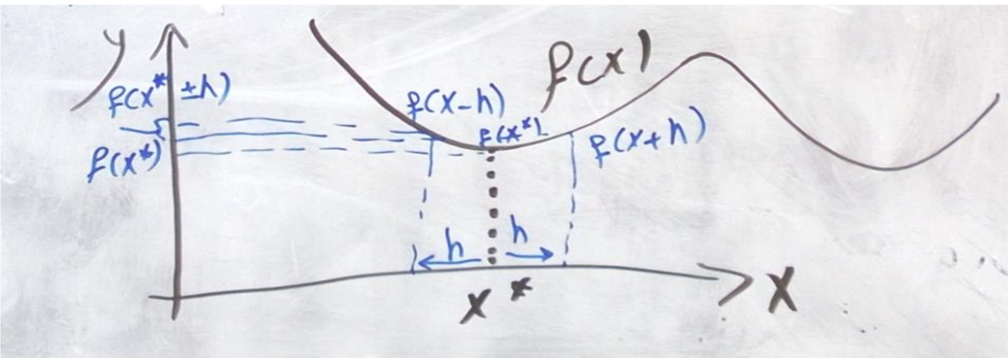
أساليب الأمثلة التقليدية

أولا: الأمثلية ذات المتغير الواحد

تعريف :

يقال لدالة ذات متغير واحد $f(x)$ أن لها نقطة صغري محلية عند $x = x^*$ إذا كان

$f(x^*) \leq f(x^* + h)$ لكل قيمة صغيرة h موجبة أو سالبة



تعريف :

يقال للدالة أن لها نقطة صغري عامة إذا كان $f(x^*) \leq f(x)$ لكل x .

تعريف :

مسألة الأمثلية ذات المتغير الواحد هي التي تلك نحاول فيها إيجاد القيمة $x = x^*$ لها داخل النطاق $[a, b]$ بحيث x^* تكون هي القيمة الصغرى للدالة $f(x)$.

نظرية (الشرط الضروري) :

يكون للدالة $f(x)$ المعرفة داخل النطاق $a \leq x \leq b$ قيمة صغري محلية عند $x = x^*$ إذا كانت $f(x)$ موجودة ومحدودة عند $x = x^*$ وإن $f'(x^*) = 0$

نظرية (الشرط الكافي) :

نفرض أن

$$f'(x^*) = 0 \ \ , f''(x^*) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x^*) = 0$$

ولكن

$$f^{(n)}(x^*) \neq 0$$

فإن $f(x^*)$ تكون

أ – قيمة صغري للدالة $f(x)$ إذا كان $f^{(n)}(x^*) > 0$ و n زوجية

ب – قيمة عظمي للدالة $f(x)$ إذا كان $f^{(n)}(x^*) < 0$ و n زوجية

ج – لا عظمي ولا صغري إذا كانت n فردية .

مثال :

أوجد القيم العظمي و الصغرى للدالة

$$f(x) = 12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 5$$

وذلك باستخدام الشرط الضروري و الكافي

الحل :

$$f'(x) = 60x^4 - 180x^3 + 120x^2$$
$$60[x^4 - 3x^3 + 2x^2]$$
$$60x^2[x^2 - 3x + 2]$$
$$60x^2(x-2)(x-1) = 0$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0 \ , \ \ 1 \ ,2$$

$$f''(x) = 60[4x^3 - 9x^2 + 4x]$$

عند $x^* = 0$ $\qquad$ $f''(x^*) = 0$

وبالتالي وطبقا للنظرية نحسب المشتقة التالية

$$f'''(x) = 60[12x^2 - 18x + 4]$$
$$f'''(x^*) = 60 \ \ (4) \neq 0$$

$\therefore \ \ x^* = 0$ هي نقطة لا عظمى ولا صغرى

عند $x^* = 1$ تكون $f''(x^*) = -60 \ < 0$ $\therefore$ هذه النقطة عظمي

عند $x^* = 2$ تكون $f''(x^*) = 240 \ > 0$ $\therefore$ هذه النقطة صغرى .

الأمثلية عديدة المتغيرات بدون شروط

سوف ندرس في هذا القسم الشرط الضروري والكافي لوجود قيمة صغري لدالة عديدة المتغيرات وذلك في حالة عدم وجود شروط

صياغة مسألة الأمثلية عديدة المتغيرات بدون شروط

أوجد قيمة
$$X=\begin{Bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{Bmatrix}$$
والتي تحقق القيمة الصغرى للدالة $f(X)$.

تعريف المشتقة الكائية

إذا كانت جميع المشتقات الجزئية للدالة f موجودة ومتصلة من الرتبة $k\geq 1$ عند النقطة x^* فإن كثيرة الحدود

$$d^k f(x^*)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\dots\sum_{l=1}^{n}\underset{k\ times}{h_i h_j \dots h_l}\frac{\partial^k f(x^*)}{\partial x_i\partial x_j\dots\partial x_l}$$

تسمى المشتقة الكائية ذات الرتبة k للدالة f عند x^* لاحظ أنه يوجد k تجميعا وواحدة h_i ملحقة بكل مجموع .

وعلي سبيل المثال فإنة إذا كانت $k=2$ و $n=3$

$$d^2 f(x^*)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}h_i h_j\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i\partial x_j}$$

i=1,j=1 i=2,j=2 i=3, j=3

$$=\mathrm{h}_1^2\frac{\partial^2\mathrm{f}}{\partial x_1^2}(\mathrm{X}^*)+\mathrm{h}_2^2\frac{\partial^2\mathrm{f}}{\partial x_2^2}(\mathrm{X}^*)+\mathrm{h}_3^2\frac{\partial^2\mathrm{f}}{\partial x_3^2}(\mathrm{X}^*)$$

i=1, j=2 i=2, j=1 i=2, j=3 /i=3, j=2

$$+2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(X^*)+2h_2h_3\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}(X^*)$$

i=1,j=3 / i=3, j=1

$$+2h_1h_3\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}(X^*)$$

متسلسلة تيلور للدالة$f(X)$ بالقرب من النقطة X^* هي

$$f(X)=f(X^*)+df(X^*)+\frac{1}{2!}d^2f(X^*)+\frac{1}{3!}d^3f(X^*)$$
$$+\cdots+\frac{1}{N!}d^Nf(X^*)+R_N(X^*,h)$$

حيث

$$R_N(X^*,h)=\frac{1}{(N+1)!}d^{N+1}f(X^*+\theta h)$$

Where $0<\theta<1$ *and* $h=X-X^*$

مثال :

أوجد متسلسلة تيلور من الرتبة الثانية للدالة

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2x_3+x_1e^{x_3}$$

وذلك بالقرب من

$$X^*=\begin{Bmatrix}1\\0\\-2\end{Bmatrix}$$

الحل : واجب ، و نعرض الحل باختصار

Solution The second-order Taylor's series approximation of function f about point X^* is given by

$$f(X)=f\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+df\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+\frac{1}{2!}d^2f\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

Where

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}=e^{-2}$$

$$df\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}=h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+h_3\frac{\partial f}{\partial x_3}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$= [h_1 e^{x3} + h_2(2x_2x_3) + h_3x_2^2 + h_3x_1e^{x3}]\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$= h_1e^{-2} + h_3e^{-2}$$

$$d^2f\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} h_ih_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$= \left(h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + h_3^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} + 2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1x_2} + 2h_2h_3\frac{\partial^2 f}{\partial x_2x_3} + 2h_1h_3\frac{\partial^2 f}{\partial x_1x_3}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$= [h_1^2(0) + h_2^2(2x_3) + h_3^2(x_1e^{x3}) + 2h_1h_2(0) + 2h_2h_3(2x_2) + 2h_1h_3(e^{x3})]\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$= -4h_2^2 + e^{-2}h_3^2 + 2h_1h_3e^{-2}$$

Thus the Taylor's series approximation is given by

$$f(X) = e^{-2} + e^{-2}(h_1 + h_3) + \frac{1}{2!}(-4h_2^2 + e^{-2}h_3^2 + 2h_1h_3\mathrm{e}^{-2})$$

Where $h_1 = x_1 - 1\,, h_2 = x_2\,, and\ \ h_3 = x_3 + 2$

نظرية الشرط الضروري :

إذا كان للدالة $f(X)$ نقطة حرجة عظمي أو صغري محتملة عند $X = X^*$ وكانت المشتقات الجزئية الأولي للدالة $f(X)$ موجودة عند $X = X^*$ فإن المشتقات الجزئية الأولى للدالة عند $X = X^*$ تساوي الصفر، أي أن

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(X^*) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(X^*) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(X^*) = 0$$

البرهان:
نفرض ان احد المشتقات الجزئية الأولى وليكن رقم k معامل عن الصفرر
متسلسلة تيلور للدالة $f(x)$ بالقرب من X^*

$$f(X^*+h)=f(X^*)+\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X^*)+R_1\,(x^*,h)$$

$$f(X^*+h)-f(X^*)=h_k\frac{\partial f(x_*^*)}{\partial x_k^*}+\frac{1}{2!}d^2f(X^*+\theta h)\,,$$

$$0\le \theta \le 1$$

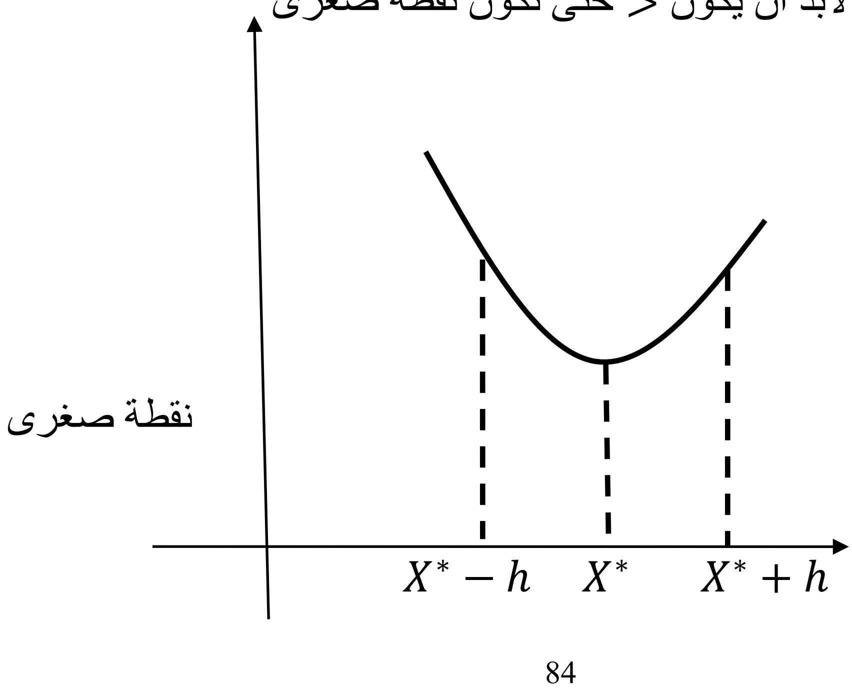
وحيث ان d^2 من رتبة h_1^2 فإن الحد الأخير يضمحل عندما h تقترب من الصفر وبالتالي فإن $h_k\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_k}$ سوف يحدد اشارة $f(X^*+h)-f(X^*)$ او بعبارة اخرى سوف يحدد علامة التباين.

$$f(X^*+h)-f(X^*)\ge 0$$
او $f(X^*+h)-f(X^*)\le 0$

نفرض ان $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_k}>0$ موجبة هذا معناه ان اشارة $f(X^*+h)-f(X^*)$
سوف تكون موجبة اذا كانت $h_k>0$ وسالبة اذا كانت $h_k<0$
و هنا تظهر حالتان:

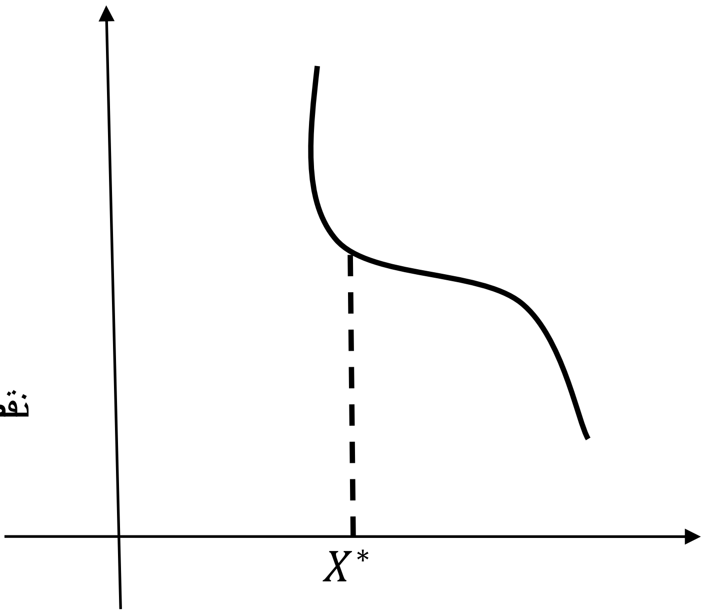
$$f(X^*+h)>f(X^*)$$
$$f(X^*-h)>f(X^*)$$

لابد ان يكون $>$ حتى تكون نقطة صغرى



$$f(X^* + h) > f(X^*)$$
$$f(X^* - h) < f(X^*)$$

نقطة انقلاب



و هذا معناه أن النقطة X^* لا يمكن أن تكون عظمي أو صغري
∴ الفرض غير صحيح
جميع المشتقات الجزئية الأولي لابد أن تساوي الصفر

نظرية الشرط الكافي :

الشرط الكافي لنقطة حرجة أن تكون قيمة عظمي أو صغري هو أن مصفوفة المشتقات الجزئية الثانية (مصفوفة هيس) للدالة $f(X)$ محسوبة عند X^* تكون

(أ) موجبة التعريف عندما X^* نقطة صغري محلية
(ب) سالبة التعريف عندما X^* نقطة عظمي محلية .

ومصفوفة هيس هي مصفوفة تحوي المشتقات الجزئية الثانية لدالة الهدف $f(x)$

$$J|_{X=X^*} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}\bigg|_{X=X^*}\right]$$

تعريف : تكون المصفوفة A موجبة التعريف اذا كان كل قيمها الذاتية موجبة.

القيم الذاتية لمصفوفة A هي القيم γ التي تحقق $|A - \gamma I| = 0$

تعريف:

وتكون المصفوفة A سالبة التعريف اذا كان كل قيمها الذاتية سالبة.

يوجد اختبار آخر يمكن من خلاله معرفة هل المصفوفة A موجبة ام سالبة التعريف.ويعتمد هذا الاختبار على حساب المحددات الجزئية من المصفوفة A

$$A_{nxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة A موجبة التعريف إذا كان وإذا كان فقط جميع المحيددات الجزئية من A : $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ موجبة . وسالبة التعريف إذا كان وإذا كانت فقط

$$A_j = (-1)^j \qquad ,j = 1,2, \dots ., n$$

ملاحظة :-

إذا كانت بعض القيم الذاتية موجبة وبعضها سالب أو كانت قيم المحيددات الجزئية A_j ليست جميعها موجب أو ليست موافقة لترتيب الإشارات $(-1)^j$,$j = 1,2, \dots ., n$ في هذه الحالة تكون المصفوفة A ليست موجبة التعريف ولا سالبة التعريف.

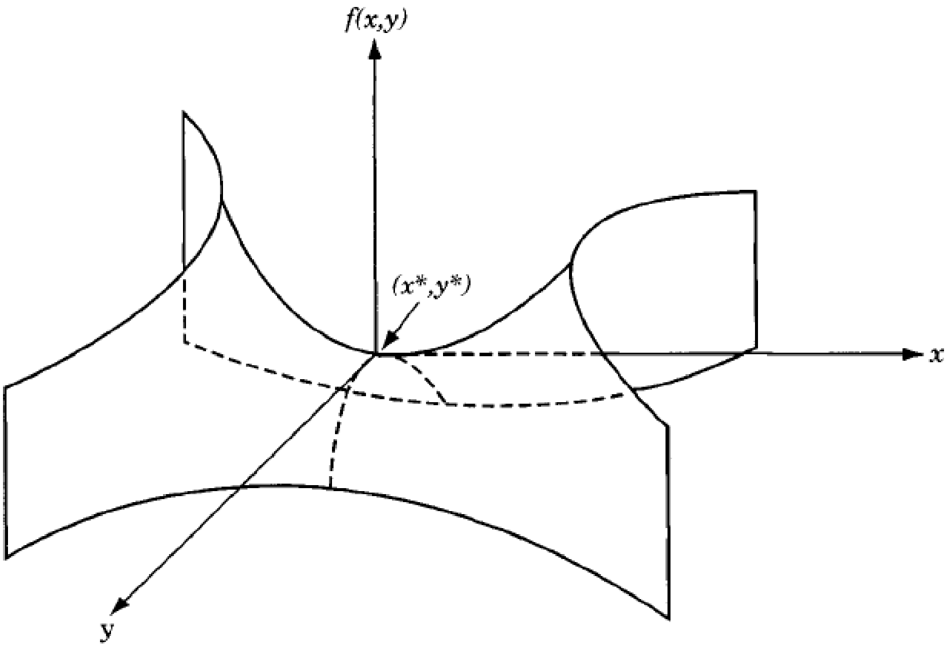
تعريف :-

إذا كانت بعض قيم A_j موجبة وباقي القيم أصفارا فإن المصفوفة A تكون شبه موجبة التعريف

تعريف (نقطة سرج) :-

تكون هذه النقطة عظمي بالنسبة لأحد المتغيرات وصغري بالنسبة للأخر وهي بذلك تشبه نقطة سرج الحصان. وفي الرسم ثلاثي الأبعاد التالي، توضيح لنقطة سرج حصان للدالة

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$



مثال :

أوجد النقاط العظمى والصغرى للدالة

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 + 2x_1^2 + 4x_2^2 + 6$$

الحل :-

الشرط الضروري لحدوث القيم العظمي والصغري هو

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 4x_1 = x_1(3x_1 + 4) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_2^2 + 8x_2 = x_2(3x_2 + 8) = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad or \quad x_1 = \frac{-4}{3}$$

$$x_2 = 0 \qquad or \quad x_2 = \frac{-8}{3}$$

النقاط المحتملة هي

$$(0,0)\,, \qquad \left(0\ ,\frac{-8}{3}\right)$$

$$\left(-\frac{4}{3},0\right), \qquad \left(-\frac{4}{3}\ ,\frac{-8}{3}\right)$$

لتحديد طبيعة هذه النقاط نستخدم الشرط الكافي ، والذي يحتاج لمصفوفة هي والذي تحتوي علي المشتقات الجزئية الثانية

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6x_1 + 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 6x_2 + 8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 6x_1 + 4 & 0 \\ 0 & 6x_2 + 8 \end{bmatrix}$$

ولتحديد ايجاب التعريف من سالبيته تحسب المحددات الجزئية من المصفوفة J وهو

$$J_1 = |6x_1 + 4| \text{ and } J_2 = \begin{bmatrix} 6x_1 + 4 & 0 \\ 0 & 6x_2 + 8 \end{bmatrix},$$

النقطة	قيمة J_1	قيمة J_2	طبيعة J	طبيعة النقطة	قيمة الدالة
$(0,0)$	$+4$	$+32$	موجبة التعريف	صغري	6
$(0,-\frac{8}{3})$	$+4$	-32	لا موجبة ولا سالبة التعريف	نقطة سرج	$\frac{418}{27}$
$(-\frac{4}{3},0)$	-4	-32	لا موجبة ولا سالبة التعريف	نقطة سرج	$\frac{194}{27}$
$(-\frac{4}{3},-\frac{8}{3})$	-4	$+32$	سالبة التعريف	عظمي	$\frac{50}{3}$

الأمثلية عديدة المتغيرات مع شروط متساويات

المسألة هي: أوجد قيمة

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

والتي تحقق القيمة الصغرى للدالة $f(X)$

ويحقق الشروط

$$g_i(X) = 0 \qquad i = 1,2, \dots, m$$

حيث $m \leq n$.

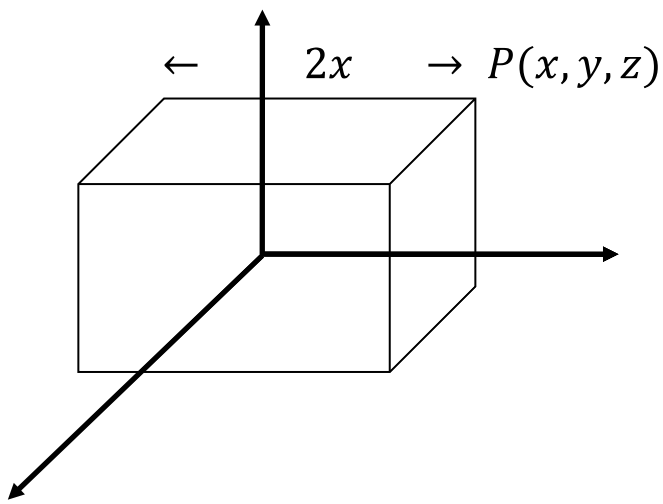
وإذا كانت $m > n$ فإن المسألة تصبح زائدة التعريف، الأمر الذي يجعلها غالبا بلا حل.

طريقة التعويض المباشر

حيث نقوم بالتعويض من معادلات الشروط $g_i(X) = 0$ في الدالة الهدف $f(X)$

مثال:

أوجد أبعاد صندوق بحيث يكون له أكبر حجم يمكن احتواؤه في كرة نصف قطرها الوحدة.



الحل :-

نفرض أن نقطة أصل المحاور x_1, x_2, x_3 عند مركز الكرة وبالتالي يكون أبعاد الصندوق هي $2x_1, 2x_2, 2x_3$ ويكون حجم الصندوق

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1(2x_2)(2x_3) = 8x_1x_2x_3$$

وحيث أن الحرف P يقع علي السطح فهو يحقق معادلة الكرة

$$g: \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

وبالتالي تصنف هذه المسألة علي أنها مسألة إيجاد قيمة $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ التي تحقق قيمة عظمي للدالة f مع تحقق الشرط g

$$f(x_1, x_2, x_3) = 8x_1\, x_2\, x_3 \qquad (1)$$
$$g = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \qquad (2)$$

من المعادلة (2)

$$x_1^2 = 1 - x_2^2 - x_3^2$$
$$x_1 = \sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}$$

بالتعويض في (1)

$$f(x_1, x_2, x_3) = 8\left(\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}\right)x_2x_3$$

فتصبح المسألة إيجاد القيمة الصغرى للدالة

$$f(x_2, x_3) = 8x_2x_3(1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (3)$$

وهذه مسألة أمثلية غير مقيدة ذات متغيرين أثنين .

لحل هذه المسألة نستخدم الشرط الضروري

أولا:- لإيجاد النقطة المحتملة :

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \qquad ,$$

$$f(x_2, x_3) = 8x_2x_3(1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{8}{2}x_2x_3(1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}-1}(-2x_2) + (1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}}[8x_3] = 0$$

$$-8x_2^2x_3(1 - x_2^2 - x_3^2)^{-\frac{1}{2}} + (8x_3)(1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$8x_3\left[\frac{-x_2^2}{(1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}}} + (1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}}\right] = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{8}{2}x_2x_3(1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}-1}(-2x_3) + 8x_2(1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$8x_2\left[\frac{-x_3^2}{(1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}}} + (1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}}\right] = 0 \qquad (5)$$

من المعادلة (4) :

$$8x_3\left[\frac{-x_2^2}{(1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}}} + (1 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}}\right] = 0 \qquad (4)'$$

إما $x_3 = 0$ أو القوس =0 .

الاحتمال $x_3 = 0$ مستبعد لأن معناه أن أحد أبعاد الصندوق صفر وهو غير مقبول .

$$\frac{-x_2^2}{(1-x_2^2-x_3^2)^{\frac{1}{2}}} + (1-x_2^2-x_3^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

بالضرب في $(1-x_2^2-x_3^2)^{\frac{1}{2}}$

$$-x_2^2 + (1-x_2^2-x_3^2) = 0$$

$$1-2x_2^2-x_3^2 = 0 \qquad (4b)$$

وبالمثل فإن المعادلة (5) تؤول إلى

$$1-2x_3^2-x_2^2 = 0 \qquad (5b)$$

$$1-2x_2^2-x_3^2 = 0 \quad (4b) \rightarrow 1-2x_2^2-x_3^2 = 0$$

$$1-x_2^2-2x_3^2 = 0 \quad (5b) \xrightarrow{*\,-2} -2+2x_2^2+4x_3^2 = 0$$

بالجمع

$$3x_3^2 = 1 \qquad \leftarrow \qquad -1+3x_3^2 = 0$$

$$x_3^2 = \frac{1}{3} \qquad \rightarrow x_3 = \mp\sqrt{\frac{1}{3}}$$

الإشارة السالبة تعني أن طول أحد أبعاد الصندوق بالسالب وهو غير مقبول

$$\therefore x_3 = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

بالتعويض في $(5b)$

$$x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

بالتعويض في (2)

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

قيمة الدالة (حجم الصندوق)

$$f = 8x_1x_2x_3 = \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

ونظرا لأن هذه هي القيم الوحيدة المقبولة فإن قيمة الدالة هذه متوقع أن تكون هي العظمي وقيم (x_1, x_2, x_3) هي النقطة العظمي .

الشرط الكافي (مصفوفة هيس تكون سالبة التعريف)

تمرين :-

احسب مصفوفة هيس (المشتقات الجزئية الثانية للدالة $f(x_2, x_3)$ من المعادلة (3)

عند النقطة $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ وتأكد من أنها سالبة التعريف .

الحل: نعرض ذلك باختصار

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -\frac{8x_1x_2}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}} - \frac{8x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}\left[\frac{x_1^3}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}} + 2x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}\right]$$

$$= -\frac{32}{\sqrt{3}} \text{ at } (x_1^*, x_2^*)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -\frac{8x_1x_2}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}} - \frac{8x_1}{1-x_1^2-x_2^2}\left[\frac{x_2^3}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}} + 2x_2(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}\right]$$

$$= -\frac{32}{\sqrt{3}} \text{ at } (x_1^*, x_2^*)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} = 8(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2} - \frac{8x_2^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}} - \frac{8x_1^2}{1-x_1^2-x_2^2} \cdot \left[(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2} + \frac{x_2^2}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}}\right]$$

$$= -\frac{16}{\sqrt{3}} \text{ at } (x_1^*, x_2^*)$$

وحيث أن

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} < 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 > 0$$

إذن مصفوفة هيس سالبة التعريف بالتالي النفقطة عظمى

تمارين

(1) وصل الدوال التالية بصفاتها المناظرة في علم بحوث العمليات

مجموعة الصفات	مجموعة الدوال
(أ) لها قيمة عظمى عند (1,2)	**(a)** $f = 4x_1 - 3x_2 + 2$
(ب) لها نقطة سرج عند نقطة الأصل	**(b)** $f = (2x_1 - 2)^2 + (x_1 - 2)^2$
(ج) ليس لها قيمة عظمى أو صغرى	**(c)** $f = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2$
(د) لها نقطة انقلاب عند نقطة الأصل	**(d)** $f = x_1 x_2$
(س) لها قيمة صغرى عند (1,2)	**(e)** $f = x^3$

(2) أوجد النقاط العظمى والصغرى للدوال

$$f(x) = \frac{x^4}{(x-1)(x-3)^3}$$

$$f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 27x - 7$$

$$f(x) = 10x^6 - 48x^5 + 15x^4 + 200x^3 - 120x^2 - 480x + 100$$

(3) حدد أي المصفوفات التالية يكون موجب التعريف وأيها سالب التعريف.
استخدم طريقة القيم الذاتية.

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} -14 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(4) حدد أي المصفوفات التالية يكون موجب التعريف وأيها سالب التعريف.
استخدم طريقة المحيددات.

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(5) عبر عن الدالة

$$f(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 - x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_1 - 5x_3 + 2$$

بالصورة المصفوفية:

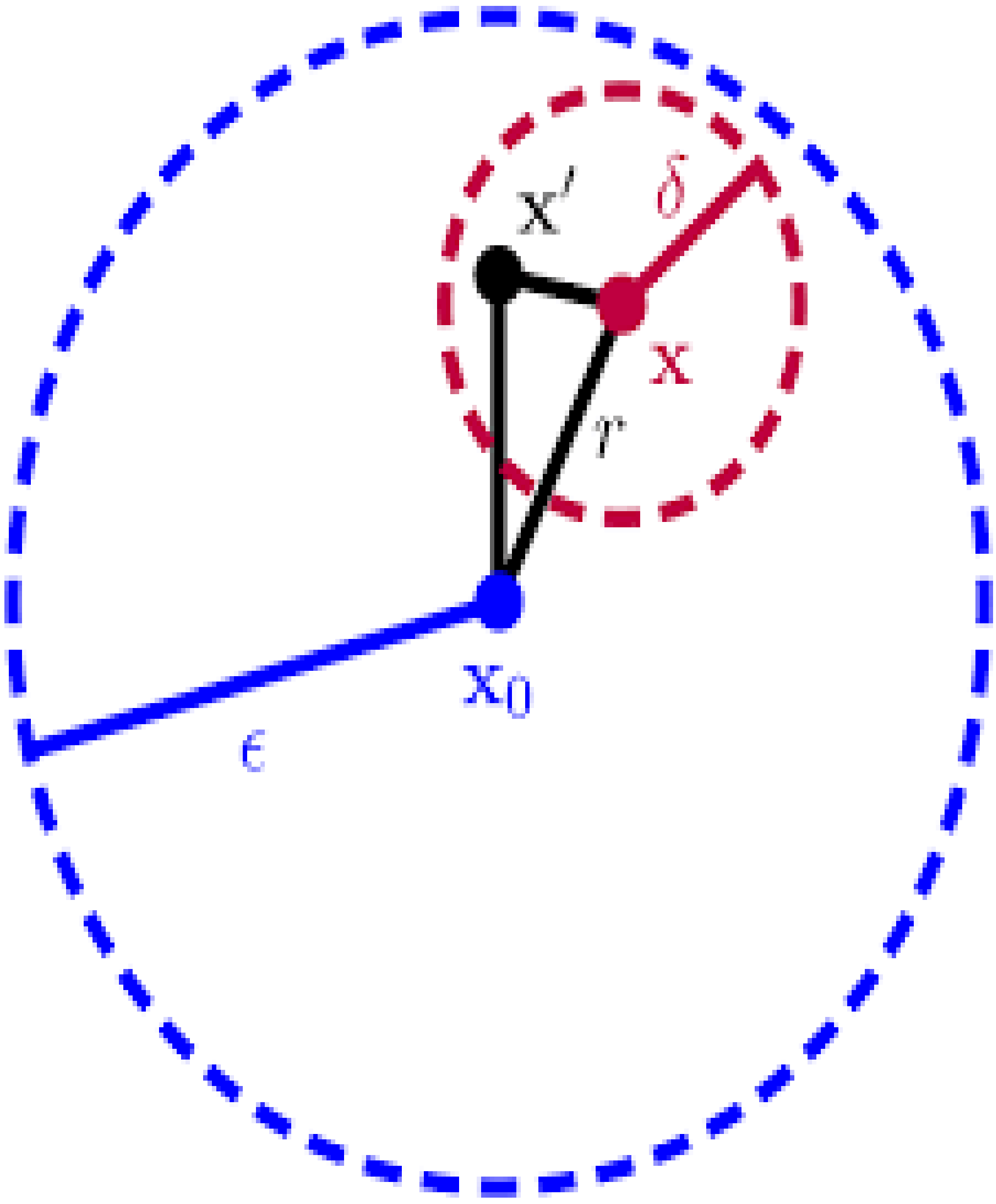
$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T[A]\,\mathbf{X} + \mathbf{B}^T\mathbf{X} + C$$

ثم حدد ما إذا كانت المصفوفة [A] موجبة التعريف أم غير ذلك.

(6) يمكن التعبير عن دالة الربح للقيراط الواحد من الأرض بالدالة

$$20x_1 + 26x_2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2$$

حيث x_1, x_2 هي على الترتيب تكلفة العمالة و تكلفة الأسمدة. أوجد قيمة x_1, x_2 التي تحقق أكبر مكسب.



مقدمة في التوبولوجي

(١)

الفصل الأول

مقدمة في نظرية المجموعات

Introduction in Set Theory

مقدمة

يرجع الفضل في تقديم مفهوم نظرية المجموعات لعالم الرياضيات الألماني جورج كانتور (١٨٤٥-١٩١٨م)، فهو أول من عرض الموضوع بشكل علمي متطور. في عام ١٩٣٧م قام عالم الرياضيات هاوسدورف بوضع لغة هذه النظرية كما هي الآن في كتابه "نظرية المجموعات".

منذ ذلك الحين و نظرية المجموعات تستخدم في العديد من فروع المعرفة المختلفة مثل المنطق و علوم الحاسب. فقد نتج عن هذه التطبيقات أنواعاً جديدة من المجموعات مثل المجموعات المشوشة (Fuzzy Sets) التي عُرفت بواسطة عالم الرياضيات الأزري الأصل لطفي زادة (Lotfy Zadeh) وكذلك نظرية مجموعات الإستقراب (Rough Sets) وغيرها.

ونظراً لأهمية دور نظرية المجموعات في كافة مجالات الرياضيات بصفة عامة ومجال التوبولوجي بصفة خاصة، فسوف نتطرق لموضوع نظرية المجموعات و خواصها للتعرف على بعض المفاهيم التي قد نحتاج إليها في ثنايا فصول هذا الكتاب.

(١,١) المجموعات والعمليات عليها Sets and Set Operations

لتكن A مجموعة ما، يرمز للعنصر a الذي ينتمي للمجموعة A بالرمز $a \in A$، و يرمز للعنصر b الذي لا ينتمي للمجموعة A بالرمز $b \notin A$.

يقال للمجموعة A بأنها مجموعة جزئية من المجموعة B (و يعبر عن ذلك رياضيا $A \subseteq B$) إذا و إذا فقط كان كل عنصر في A هو عنصر في B أي أن :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall a \in A \Rightarrow a \in B)$$

تسمى المجموعة A مجموعة جزئية فعلية من المجموعة B إذا و إذا فقط كان $A \subseteq B$ و $A \neq B$ و يعبر عن ذلك رياضيا بالصيغة $A \subset B$. ونقول أن $A = B$ إذا و إذا فقط كان $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

من الواضح أن أي مجموعة A هي مجموعة جزئية من نفسها . أي أن $A \subseteq A$. ويمكن ايضاً القول أن $A \subseteq B$ إذا و إذا كان فقط كل عنصر لا ينتمي إلى B لا ينتمي إلى A . أي أن

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \notin B \Rightarrow x \notin A .$$

المجموعة التي تحوي جميع عناصر عينة دراسية في أثناء دراسة معينه تسمى مجموعة كلية (شاملة) (Universal Set) و يرمز لها أحيانا بالرمز U أو X .

أما المجموعة التي لا تحوى أية عناصر تسمى المجموعة الخالية (Empty set) ويرمز لها بالرمز ϕ.

فإذا كانت A مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة X . مكملة المجموعة A بالنسبة للمجموعة الشاملة X و التي يرمز لها بالرمز A^c (أحيانا يرمز لها

بالرمز $X - A$ أو $X \setminus A$) هي مجموعة كل العناصر التي تنتمي إلى X ولا تنتمي إلى المجموعة A. أي أن:

$$A^{C} = \{x \in X \wedge x \notin A\}$$

إذا كانت A مجموعة غير خالية ،فإن المجموعة المكونة من جميع

المجموعات الجزئية من المجموعة A تسمى مجموعة قوى المجموعة A (power set) و يرمز لها بالرمز $P(A)$. أي أن :

$$P(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

فمثلاً إذا كانت $A = \{a,b,c\}$ فإن مجموعة القوى للمجموعة A هي:

$$P(A) = \{B : B \subseteq A\} = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, A\}$$

يلاحظ أنه لأي مجموعة منتهية تحتوي على عدد n من العناصر يكون عدد عناصر مجموعة المجموعات الجزئية هو 2^n ، فمثلاً إذا كانت $A = \{a,b,c\}$ فإن عدد عناصر المجموعة $P(A)$ هو $2^3 = 8$

بعد تعريف مجموعة المجموعات الجزئية. فإننا نلاحظ أن عناصر هذه

المجموعة هي مجموعات جزئية .لكى لا يحدث لبس بين مفهوم العنصر كعنصر ومفهوم المجموعة الجزئية كعنصر في مجموعة القوى، فسوف نستخدم تعبير تجمع أو عائلة من المجموعات الجزئية.

وهناك مفهوم آخر يسمى فضاء (Space) والذى سوف نستخدمه كثيراً في هذا الكتاب وهو عبارة عن مجموعة غير خالية تحقق أنواعاً مختلفة من التراكيب والخواص مثل الفضاء المتجه (Vector Space) والفضاء المتري

(Metric Space) والفضاء التوبولوجى (Topological Space) ... الخ. وفى هذه الحالة سوف نتعامل مع عناصر هذه الفضاءات كنقاط.

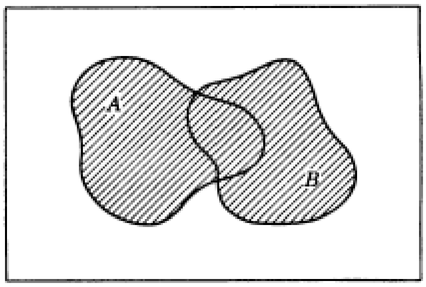
سوف نقدم الآن بعض العمليات الأساسية على المجموعات و التي من خلالها نستطيع إيجاد مجموعات أخرى جديدة من المجموعات المعلومة.

إذا كانت X مجموعة شاملة و $A, B \subseteq X$ فإن:-

١-اتحاد (Union) المجموعة A مع B هو المجموعة المكونة من كل عنصر $x \in X$ الذي ينتمي على الأقل إلى إحدى المجموعتين A أو B أو كليهما معاً، يرمز إلى اتحاد المجموعتين بالرمز $A \cup B$. أي أن

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$$

كما يعبر عن الاتحاد بأشكال فن كما في الشكل التالي



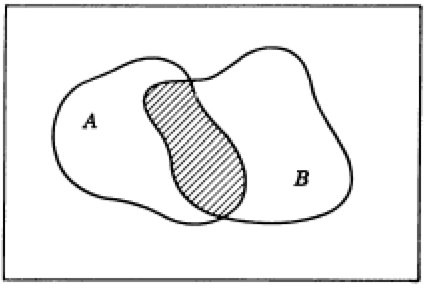
شكل(١,١)

٢- تقاطع (Intersection) المجموعة A مع B هو المجموعة المكونة من كل

عنصر $x \in X$ الذي ينتمي إلى كل من المجموعتين A و B، يرمز إلى تقاطع المجموعتين بالرمز $A \cap B$. أي أن

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$$

كما يعبر عن التقاطع بأشكال فن كما في الشكل التالي



شكل (١,٢)

لتكن A مجموعة غير خالية و لتكن I مجموعة ما بحيث إنه لكل عنصر i من I توجد مجموعة جزئية A_i من A.

عائلة المجموعات الجزئية A_i من A تسمى عائلة مجموعات جزئية مرقمة (Indexed family sets) و برمز لها بالرمز $\{A_i\}_{i \in I}$ و المجموعة I تسمى بمجموعة الدليل (Index set).

فإذا كانت $I = \{1,2,3,\dots,n\}$ فإن الاتحاد و التقاطع لعائلة المجموعات المرقمة $\{A_i\}_{i \in I}$ يُعطى بالصيغة.

$$\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$\cap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

اما في حالة كون $\{A_i\}_{i \in I}$ عائلة اختيارية من المجموعات الجزئية المرقمة بمجموعة الدليل I فإن الاتحاد و التقاطع يعطي بالصيغة:

$$\underset{i\in I}{\cup} A_i = \{x : x \in A_i \;\; for \;\; at \;\; least \;\; one \;\; i \in I\}$$

$$\underset{i\in I}{\cap} A_i = \{x : x \in A_i \;\; for \;\; every \;\; i \in I\}$$

نظرية (١,١)

إذا كانت X مجموعة شاملة ، $A, B, C \subseteq X$، فإن :

(1) $A \cup B = B \cup A \;,\; A \cap B = B \cap A$ (الإبدال)

(2) $A \cup \phi = \phi \cup A = A \,,\; A \cap \phi = \phi \cap A = \phi$ (العنصر المحايد)

(3) $A \cup X = X \cup A = X \;,\; A \cap X = X \cap A = A$

(4) $A \subseteq A \cup B, \;\; B \subseteq A \cup B \,,\; A \cap B \subseteq A \,,\; A \cap B \subseteq B.$

(5) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \;,\; A \cap B = A$

(6) $A \cup (B \cap C) = A \cup B) \cap (A \cup C)$ (قانون التوزيع)

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(7) $A \cup A = A, \;\; A \cap A = A$ (اللانمو)

(8) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (الدمج)

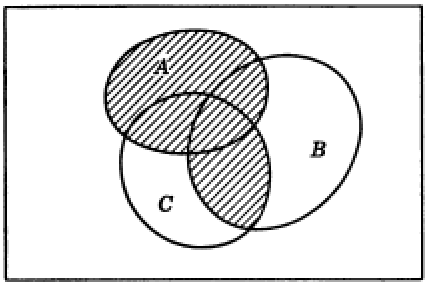
(9) $A \cap (B \cup A) = A$

$A \cup (B \cap A) = A$

البرهان

سوف نبرهن فقط الفقرة (6) و نترك الباقي لسهولته كتمرين.

$$A\cup(B\cap C)=\{x:x\in(A\cup(B\cap C))\}$$
$$=\{x:x\in A\vee x\in(B\cap C)\}$$
$$=\{x:x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)\}$$
$$=\{x:(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)\}$$
$$=\{x:x\in(A\cup B)\wedge x\in(A\cup C)\}$$
$$=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$



شكل (١,٣)

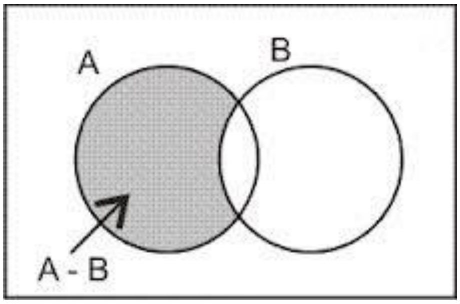
و بالمثل يمكن إثبات أن

$$\blacksquare.\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

٣-الفرق بين المجموعتين A,B هو المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A ولا تنتمي إلى المجموعة B و يرمز لها بالرمز $A-B$.

أي أن $A-B=\{x\in X: x\in A\wedge x\notin B\}$.

و يعبر عن الفرق بين مجموعتين بأشكال فن كما في الشكل:



شكل (١,٤)

نظرية (١,٢)

إذا كانت X مجموعة شاملة ، $A, B, C \subseteq X$ ، فإن :

(1) $A \neq B \Rightarrow A - B \neq B - A$

(2) $A - A = \phi$

(3) $A - \phi = A, \ \phi - A = \phi$

(4) $A - B \subseteq A$

(5) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(6) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) - C$

(7) $(B - C) \cap A = (A \cap B) \cap (B - C)$

(8) $(B \cup C) - A = (B - A) \cup (C - A)$

(9) $(B \cap C) - A = (B - A) \cap (C - A)$

البرهان

سوف نبرهن فقط الفقرتين (5)و (8) و نترك الباقي لسهولته.

إثبات رقم (5)

$$
\begin{aligned}
A-(B\cup C) &= \{x : x\in A \wedge x\notin (B\cup C)\}\\
&= \{x : (x\in A \wedge x\notin B) \wedge (x\in A \wedge x\notin C)\}\\
&= \{x : x\in (A-B) \wedge x\in (A-C)\}\\
&= (A-B)\cap(A-C).
\end{aligned}
$$

و بالمثل يمكن إثبات أن

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$$

$$
\begin{aligned}
A-(B\cap C) &= \{x : x\in A \wedge x\notin (B\cap C)\}\\
&= \{x : (x\in A \wedge x\notin B) \vee (x\in A \wedge x\notin C)\}\\
&= \{x : x\in (A-B) \vee x\in (A-C)\}\\
&= (A-B)\cup(A-C)
\end{aligned}
$$

إثبات رقم (8)

$$
\begin{aligned}
(B\cup C)-A &= \{x : x\in (B\cup C) \wedge x\notin A\}\\
&= \{x : (x\in B \vee x\in C) \wedge x\notin A\}\\
&= \{x : (x\in B \wedge x\notin A) \vee (x\in C \wedge x\notin A)\}\\
&= \{x : x\in (B-A) \vee x\in (C-A)\}\\
&= \{x : x\in (B-A)\cup(C-A)\}
\end{aligned}
$$

$$= (B - A) \cup (C - A)$$

وبالمثل يمكن إثبات أن $(B \cap C) - A = (B - A) \cap (C - A)$. ■

مثال (١,٢)

إذا كانت X مجموعة شاملة ، $A, B, C \subseteq X$، فإنه بصفة عامة:

$$(1) \quad A \cup (B - C) \neq (A \cup B) - (A \cup C)$$

$$(2) \quad (B - C) \cup A \neq (B \cup A) - (C \cup A)$$

$$(3) \quad A - (B \cup C) \neq (A - B) \cup (A - C)$$

لتوضيح عدم صحة العلاقة رقم (1) نضع المثال العكسي التالي:

$$C = \{e\} \qquad , B = \{c, d\} \qquad , A = \{a, b\}$$

$$A \cup (B - C) = \{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$$

$$A \cup B = \{a, b, c, d\}$$

$$A \cup C = \{a, b, e\}$$

$$(A \cup B) - (A \cup C) = \{c, d\}$$

لذا يتضح أن $A \cup (B - C) \neq (A \cup B) - (A \cup C)$.

البقية تترك للقارئ كتمرين.

نظرية (١,٣)

إذا كانت X مجموعة شاملة ، $A, B \subseteq X$ فإن:-

(1) $X^C = \phi, \quad \phi^C = X$

(2) $(A^C)^C = A$

(3) $A \cap A^C = \phi, \; A \cup A^C = X$

(4) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^C \subseteq A^C$

(5) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

(6) $A - B = A \cap B^C$

(7) $A - B = B^C - A^C$

البرهان

سوف نبرهن فقط الفقرات من (4) إلى (7) ونترك الباقي للقارئ لسهولته.

إثبات الفقرة رقم (4)

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \notin B \Rightarrow x \notin A)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in B^C \Rightarrow x \in A^C)$$

$$\Leftrightarrow B^C \subseteq A^C$$

إثبات الفقرة رقم (5)

$$(A\cup B)^C=\{x\in X : x\notin (A\cup B)\}$$

$$=\{x\in X : x\notin A\wedge x\notin B\}$$

$$=\{x\in X : x\in A^C\wedge x\in B^C\}$$

$$=\{x\in X : x\in (A^C\cap B^C)\}$$

$$=(A^C\cap B^C)$$

و بالمثل يمكن إثبات أن $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

إثبات الفقرة رقم (6)

$$A-B=\{x\in X : x\in A\wedge x\notin B)\}$$

$$=\{x\in X : x\in A\wedge x\in B^C\}$$

$$=\{x\in X : x\in (A\cap B^C)\}$$

$$=A\cap B^C$$

إثبات الفقرة رقم (7)

$$A-B=\{x\in X : x\in A\wedge x\notin B)\}$$

$$=\{x\in X : x\notin A^C\wedge x\notin B\}$$

$$=\{x\in X : x\notin A^C\wedge x\in B^C\}$$

$$=\{x\in X : x\in (B^C-A^C)\}$$

$$=B^C-A^C.\blacksquare$$

٤-الفرق التناظري بين المجموعتين A و B والذي يرمز له بالرمز $A\Delta B$ يعرف بالصيغة :

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A).$$

نظرية (١,٤)

إذا كانت X مجموعة شاملة ، $A,B,C\subseteq X$، فإن :

(1) $A\Delta\phi=A$

(2) $A\Delta A=\phi$

(3) $A\Delta B=B\Delta A$

(4) $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$

(5) $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

البرهان

(1) $A\Delta\phi=(A-\phi)\cup(\phi-A)=A$

(2) $A\Delta A=(A-A)\cup(A-A)=\phi\cup\phi=\phi$

(3) $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(B-A)\cup(A-B)=B\Delta A$

إثبات الفقرة رقم (4) نترك للقارئ كتمرين.

لإثبات الفقرة رقم (5) نتبع الخطوات التالية:

$$\begin{aligned}
(5)\ A\Delta B&=(A-B)\cup(B-A)\\
&=(A\cap B^C)\cup(B\cap A^C)\\
&=[(A\cap B^C)\cup B]\cap[(A\cap B^C)\cup A^C]\\
&=[(A\cup B)\cap(B^C\cup B)]\cap[(A\cup A^C)\cap(B^C\cup A^C)]\\
&=[(A\cup B)\cap X]\cap[X\cap(B^C\cup A^C)]
\end{aligned}$$

$$= (A \cup B) \cap (B^C \cup A^C)$$

$$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^C$$

$$= (A \cup B) - (A \cap B). \blacksquare$$

٥-**الضرب الديكارتي** للمجموعتين A, B و الذي يرمز له بالرمز $A \times B$ هو مجموعة كل الأزواج المرتبة (a,b)، حيث أن $a \in A$ و $b \in B$، يعرف رياضياً بالصيغة:

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

و يمكن تعريف الضرب الديكارتي على المجموعات $A_1, A_2, ..., A_n$ بالصيغة:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A_i\}$$

و ايضا

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = \{(a_1, a_2, ..., a_n, ...) : a_i \in A_i\}.$$

نظرية (١,٥)

إذا كانت X مجموعة شاملة ، $A, B, C \subseteq X$، فإن :

(1) $A \times \phi = \phi \times A = \phi$.

(2) $A \neq \phi \ , B \neq \phi \Rightarrow A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$

(3) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(4) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

البرهان:

يترك للطالب. ■

(١,٢) العلاقات Relations

لتكن A و B مجموعتين. إذا كانت $R \subseteq A \times B$ فإن R تسمى علاقة ثنائية (Binary Relation) من A إلى B، و نكتب $(a,b) \in R$ أو aRb.
لتعني أن العنصر a مرتبط بالعنصر b تحت تأثير العلاقة R. كما نكتب $(a,b) \notin R$ لتعني بذلك أن a غير مرتبط بالعنصر b وفق العلاقة R.

تعريف (١,١)
إذا كانت $R \subseteq A \times A$ علاقة ثنائية على المجموعة الغير خالية A فإن هذه العلاقة تسمى :-

(١) **علاقة عاكسة** (Reflexive) إذا كان $(a,a) \in R$ لكل $a \in A$.

(٢) **علاقة متماثلة** (Symmetric) إذا كان $(a,b) \in R$ فإن $(b,a) \in R$، لكل $(a,b) \in R$.

(٣) **علاقة متخالفة** (Anti-symmetric) إذا كان $(a,b) \in R$ و $(b,a) \in R$ فإن $a = b$ لكل $(a,b) \in R$.

(٤) **علاقة متعدية (ناقلة)** (Transitive) إذا كان $(a,b) \in R$ و $(b,c) \in R$ فإن $(a,c) \in R$ لكل $a,b,c \in A$.

(٥) **علاقة تكافؤ** (Equivalence relation) إذا كانت عاكسة و متماثلة وناقلة.

(٦) **علاقة ترتيب جزئي** (Partial order relation) على المجموعة A إذا

كانت عاكسة و متخالفة و متعدية. في هذه الحالة نكتب $a \le b$ بدلاً عن $(a,b) \in R$ أو aRb و نقول أن b أكبر من أو تساوي a أو أن العنصر b يلي العنصر a. في هذه الحالة يقال أن المجموعة A مجموعة مرتبة جزئياً و تكتب احياناً في الصورة $(A,\le)$.

مثال(١,٢)

لتكن $A = \{1,2,3,4,6,12\}$ ، و لتكن العلاقة "$\le$" معرفة بالصيغة:

$a \le b$ إذا و فقط إذا كان a يقسم b بدون باق

المجموعة $(A,\le)$ هي مجموعة مرتبة جزئياً.

مثال(١,٣)

إذا كانت A مجموعة تحتوي على الأقل عنصرين ،فإن مجموعة القوى $P(A)$ مرتبة جزئياً بالنسبة للعلاقة $\subseteq$.

تعريف (١,٢)

تسمى المجموعة المرتبة جزئياً $(A,\le)$ مجموعة مرتبة كلياً (Totally order) إذا كان لكل عنصرين $a,b \in A$ فإما $a \le b$ أو $b \le a$.

تعريف (١,٣)

لتكن $(A,\le)$ مجموعة مرتبة جزئياً . العنصر $a \in A$ يسمى :

(١) حداً علوياً للمجموعة الجزئية $B \subseteq A$ إذا كان $b \le a$ لكل $b \in B$.

(٢) حداً سفلياً للمجموعة الجزئية $B \subseteq A$ إذا كان $a \le b$ لكل $b \in B$.

المجموعة الجزئية $B \subseteq A$ تسمى محدودة من أعلى إذا كان لها حد علوي و تسمى محدودة من أسفل إذا كان لها حد سفلي. و يقال أنها محدودة متى كانت

محدودة من أعلى و من أسفل.

لكن قد يكون للمجموعة الجزئية $B \subseteq A$ عدد لا نهائي من الحدود العليا و أصغر هذه الحدود (إن وجد) يسمى أصغر حد علوي للمجموعة B. و بالمثل قد يكون للمجموعة عدد لا نهائي من الحدود السفلى و أكبر هذه الحدود يسمى أكبر حد سفلي للمجموعة B.

تعريف (١,٤)

لتكن $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً . العنصر $a_0 \in A$ يسمى أصغر حد علوي للمجموعة الجزئية $B \subseteq A$ إذا كان

(١) العنصر a_0 حداً علوياً للمجموعة B. أي أن $b \leq a_0$ لكل $b \in B$.

(٢) لا يوجد حد علوي آخر أصغر من a_0 للمجموعة الجزئية B. اي أنه إذا كان d حداً علوياً للمجموعة B فإن $a_0 \leq d$.

يرمز لأصغر حد علوي بالرمز $a_0 = \sup B$.

تعريف (١,٥)

لتكن $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً . العنصر $b_0 \in A$ يسمى أكبر حد سفلي للمجموعة الجزئية $B \subseteq A$ إذا كان

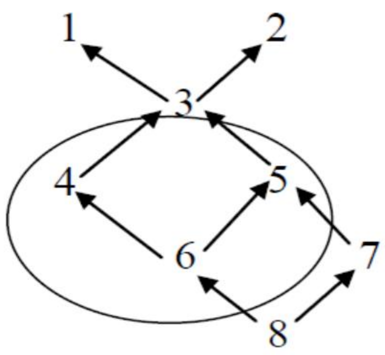
(١) العنصر b_0 حداً سفلياً للمجموعة B. أي أن $b_0 \leq b$ لكل $b \in B$.

(٢) لا يوجد حد سفلي آخر أكبر من b_0 للمجموعة الجزئية B. اي أنه إذا كان c حد سفلي للمجموعة B فإن $c \leq b_0$.

يرمز لأكبر حد سفلي للمجموعة B بالرمز $b_0 = \inf\ B$.

مثال (١,٤)

لتكن $A = \{1,2,...,7,8\}$ مجموعة مرتبة كما في الشكل التالي:



شكل (١,٥)

(١) اوجد مجموعة الحدود العليا للمجموعة الجزئية $B = \{4,5,6\}$.

(٢) اوجد مجموعة الحدود السفلى للمجموعة الجزئية $B = \{4,5,6\}$.

(٣) اوجد كل من $\sup B$ و $\inf\ B$.

الحل

(١) مجموعة الحدود العليا للمجموعة $B = \{4,5,6\}$ هي المجموعة $\{1,2,3\}$.

(٢) مجموعة الحدود السفلى للمجموعة $B = \{4,5,6\}$ هي المجموعة $\{6,8\}$.

(٣) $\sup B = 3$ و $\inf B = 6$.

فيما سبق كان كل من الحد العلوي و السفلي ليس من الضروري أن يكونا من ضمن عناصر المجموعة الجزئية $B \subseteq A$. ففي حالة كون أصغر حد علوي أو أكبر حد سفلى للمجموعة الجزئية B ينتمي لنفس المجموعة فهذا يقودنا لتعريف المفهومين التاليين:

تعريف (١،٦)

لتكن $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً و $B\subseteq A$.

(١) العنصر $M\in B$ يسمى قيمة عظمى (max) للمجموعة الجزئية $B\subseteq A$ إذا كان M حداً علوياً للمجموعة B.

(٢) العنصر $m\in B$ يسمى قيمة صغرى (min) للمجموعة الجزئية $B\subseteq A$ إذا كان m حداً سفلياً للمجموعة B.

نظرية (١،٦)

إذا وجدت القيمة العظمى (الصغرى) للمجموعة B فإن القيمة العظمى (الصغرى) هي أصغر حد علوي (أكبر حد سفلي) لهذه المجموعة.

البرهان

لتكن M هي القيمة العظمى للمجموعة B . فإن M هي حد علوي للمجموعة B (من التعريف).فإذا كان N حداً علوياً لهذه المجموعة فإن $M\leq N$ و ذلك لأن $M\in B$ و بالتالي يكون M هو أصغر حد علوي للمجموعة B.

بالمثل يمكن إثبات أن القيمة الصغرى للمجموعة B هي أكبر حد سفلي لهذه المجموعة.■

تمهيدة زورن (١،١) (Zorn's Lemma)

بفرض أن $(A,\leq)$ مجموعة غير خالية و مرتبه جزئياً وبفرض أن كل مجموعة جزئية من A ومرتبه كليا محدودة من أعلى فإن المجموعة $(A,\leq)$ تحتوي على أصغر حد علوي.

تعريف (١,٧)

المجموعة المرتبة جزئيا $(A,\le)$ والتي يكون لأي عنصرين $a,b\in A$ يوجد $\inf\{a,b\}=a\wedge b$ و $\sup\{a,b\}=a\vee b$ تسمى شبكة (Lattice) ويرمز لها بالرمز $(A,\le,\wedge,\vee)$.

مثال (١,٥)

لتكن X مجموعة تحتوي على الأقل عنصرين. المجموعة المرتبة جزئياً $(P(X),\subseteq)$ تشكل شبكة تسمى شبكة المجموعات الجزئية حيث أنه لكل $A,B\in P(X)$ ، فإن $\sup\{A,B\}=A\cup B$ و $\inf\{A,B\}=A\cap B$.

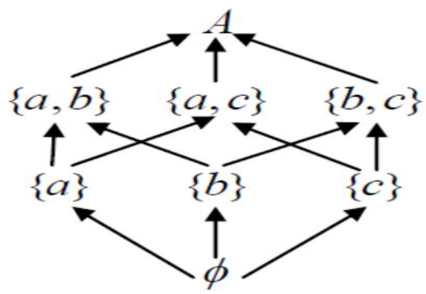
تعريف (١,٨)

الشبكة $(A,\le,\vee,\wedge)$ تسمى شبكة تامة (Complete lattice) إذا كان لأي مجموعة جزئية $B\subseteq A$ يوجد $\inf B$ و $\sup B$.

مثال (١,٦)

شبكة المجموعات الجزئية لمجموعة ما ولتكن $A\neq\phi$ هي شبكة تامة فيها العنصر الأصغر هو المجموعة الخالية ϕ و العنصر الأكبر هو المجموعة A.

فمثلاً لو كانت $A=\{a,b,c\}$ ، فإن الشبكة $(P(A),\subseteq)$ تمثيل بالشكل التالي:



شكل (١,٦)

تعريف (١,٩)

لتكن $(A,\leq,\vee,\wedge)$ شبكة. المجموعة الجزئية $B\subseteq A$ تسمى شبكة جزئية من $(A,\leq,\vee,\wedge)$ إذا كان لكل $x,y\in B$ فإن $x\wedge y\in B$ و $x\vee y\in B$.

(١,٣) الدوال Mappings

الدوال (أو الرواسم) من أهم المفاهيم الرياضية وأوسعها انتشارا وأكثرها أهمية . ففي كل فرع من فروع الرياضيات تجد أن للدوال دوراً هاماً مؤثراً ، فقد تجد الدوال في التحليل الرياضي والجبر والهندسة و التوبولوجي وغير ذلك.

تعريف (١,١٠)

لتكن كل من A و B مجموعة. العلاقة $f\subseteq A\times B$ تسمى دالة (راسم أو تطبيق) من A إلى B و يرمز له بالرمز $f:A\to B$ إذا و فقط إذا كان لكل عنصر $a\in A$ يوجد عنصر وحيد $b\in B$ بحيث يكون $(a,b)\in f$ و تكتب بالشكل $f(a)=b$.

مثال (١,٧)

إذا كانت $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{x,y,z,w\}$ فإن العلاقة المعرفة في الصورة

$$f=\{(a,y),(b,x),(c,y),(d,w)\}\subset A\times B$$

هي دالة (أو راسم) ومدى هذه الدالة هو المجموعة $f(A)=\{x,y,w\}$. أما العلاقة $g=f\cup\{(a,x)\}\subset A\times B$ ليست دالة (وضح لماذا؟) .

إذا كان $f:A\to B$ فإن $b=f(a)$ هي صورة العنصر $a\in A$ وإذا كانت $A_1\subset A$ فإن صورة المجموعة A_1 تعطى بالعلاقة التالية :

$$f(A_1)=\{b\in B: b=f(a)\wedge a\in A_1\}$$

هذا بالنسبة للدالة $f:A\to B$ ولكنه عندما نستخدم الرمز f^{-1} للدلالة على العلاقة العكسية للعلاقة f (أي أن $f^{-1}:B\to A$). ففى هذه الحالة نعرف ما يسمى بالصورة العكسية وذلك وفقا للتعريف التالي :

تعريف (١,١١)

إذا كان $f:A\to B$ راسماً وكانت $B_1\subseteq B$ فإن المجموعة $f^{-1}(B_1)$ تسمى الصورة العكسية للمجموعة B_1 ويعبر عنها كما يلي :

$$f^{-1}(B_1)=\{x\in A: f(x)\in B_1\}$$

فمثلاً إذا كانت $B_1=\{y\}$ أي مكونه من عنصر واحد فقط ، فإننا نكتب

$$f^{-1}(\{y\})=\{x\in A: y=f(x)\}$$

وتسمى الصورة العكسية للعنصر y .

مثال (١,٨)

إذا كانت $A=\{1,2,3,4,5\}$ وكان $f:A\to A$ راسما معرفاً بالصيغة

$$f=\{(1,4),(2,1),(3,4),(4,2),(5,4)\}$$

فإن:

- $f(\{1,3,5\}) = \{4\}$
- $f^{-1}(\{2,3,4\}) = \{1,3,4,5\}$
- $f^{-1}(\{3,5\}) = \phi$

.

نظرية (١,٧)

إذا كان $f : A \to B$ راسماً وكانت $A_1, A_2 \subseteq A$ و $B_1, B_2 \subseteq B$ فإن :

$(i)\ \ A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2);$

$(ii)\ \ f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2);$

$(iii)\ \ f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2);$

$(iv)\ \ f(A_1 - A_2) \supseteq f(A_1) - f(A_2);$

$(v)\ \ f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2);$

$(vi)\ \ f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2);$

$(vii)\ \ f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2);$

$(viii)\ \ B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2);$

البرهان

قبل الشروع في خطوات البرهان علينا أن نضع في حسابنا أن العلاقة العكسية f^{-1} ليس بالضرورة أن تكون راسماً من B إلى A.

أولا : لإثبات (i)

لنفرض أن $A_1 \subseteq A_2$

$$f(A_1)=\{b\in B: b=f(a): a\in A_1\}\subseteq\{b\in B: b=f(a): a\in A_2\}=f(A_2)$$

وهذا يعني أن : $f(A_1)\subseteq f(A_2)$

ثانيا : المطلوب إثبات أن

$$f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$$

نفرض أن $y\in f(A_1)\cup f(A_2)$ فإن هذا يؤدى إلى أن

$$y\in f(A_1)\cup f(A_2)\Rightarrow y\in f(A_1)\vee y\in f(A_2),$$

ومن ناحية أخرى نفرض أن $y\in f(A_1\cup A_2)$; فإن

$$y\in f(A_1\cup A_2)\Rightarrow \exists x\in(A_1\cup A_2): f(x)=y$$

$$\Rightarrow \exists x\in A_1 \ \vee\ x\in A_2 : f(x)=y$$

$$\Rightarrow \exists x\in(A_1\cup A_2): f(x)=y$$

$$\Rightarrow y=f(x)\in f(A_1\cup A_2),$$

$$\Rightarrow y\in f(A_1\cup A_2),$$

$$\Rightarrow f(A_1)\cup f(A_2)\subseteq f(A_1\cup A_2) \qquad (1)$$

ومن ناحية أخرى نفرض أن $y\in f(A_1\cup A_2)$; فإن

$$y \in f(A_1 \cup A_2) \Rightarrow \exists x \in (A_1 \cup A_2) : f(x) = y$$

$$\Rightarrow x \in A_1 \text{ or } x \in A_2 : f(x) = y$$

$$\Rightarrow y = f(x) \in f(A_1) \text{ or } y = f(x) \in f(A_2),$$

$$\Rightarrow y = f(x) \in f(A_1) \cup f(A_2),$$

$$\Rightarrow f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2) \qquad (2)$$

ومن (1) ,(2) نستنتج أن :

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2);$$

ثالثا : $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2);$

$$\forall y \in f(A_1 \cap A_2) : \exists x \in (A_1 \cap A_2) : f(x) = y,$$

$$\Rightarrow x \in A_1 \wedge x \in A_2 : f(x) = y;$$

$$\Rightarrow f(x) \in f(A_1) \wedge f(x) \in f(A_2) : f(x) = y;$$

$$\Rightarrow y = f(x) \in [f(A_1) \cap f(A_2)];$$

$$\Rightarrow f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2).$$

رابعاً : إثبات أن $f(A_1 - A_2) \supseteq f(A_1) - f(A_2)$

نفرض أن b عنصر ينتمي للطرف الأيمن أى أن :

$$b \in f(A_1) - f(A_2) \Rightarrow b \in f(A_1) \wedge b \notin f(A_2);$$

$$\Rightarrow \exists a \in A_1 \wedge a \notin A_2 : f(a) = b;$$

$$\Rightarrow a \in (A_1 - A_2) : f(a) = b;$$

$$\Rightarrow b = f(a) \in f(A_1 - A_2);$$

$$\Rightarrow f(A_1) - f(A_2) \subseteq f(A_1 - A_2).$$

خامساً : إثبات أن $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$

نفرض أن $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ ، فإن هذا يقتضي أن $f(x) \in (B_1 \cup B_2);$

$$\Rightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2;$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2);$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2);$$

$$\Rightarrow f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subseteq f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2); \qquad (1)$$

من ناحية ثانية نفرض أن $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ ، فإن هذا يقتضي أن $x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2)$ و من ثم:

$$\Rightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2;$$

$$\Rightarrow f(x) \in (B_1 \cup B_2);$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2);$$
$$\Rightarrow f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \subseteq f^{-1}(B_1 \cup B_2); \qquad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

سادساً : يترك كتمرين للقارئ.

سابعاً : $f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2).$

$$x \in f^{-1}(B_1 - B_2) \Rightarrow f(x) \in (B_1 - B_2);.$$

$$\Rightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \notin B_2;$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \notin f^{-1}(B_2);$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2);$$

$$\Rightarrow f^{-1}(B_1 - B_2) \subseteq f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2). \qquad (3)$$

$$x \in f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2) \Rightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \notin f^{-1}(B_2);$$
$$\Rightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \notin B_2;$$
$$\Rightarrow f(x) \in (B_1 - B_2);$$
$$\Rightarrow f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2) \subseteq f^{-1}(B_1 - B_2). \qquad (4)$$

من (3) و (4) نستنتج أن :

$$f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2).$$

ثامنا: يترك اثبات هذه الفقرة كتمرين للقارئ.■

فيما يلي سنضع مثلاً لتوضيح عدم صحة الفقرات التالية:

$$(1)\ \ f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2);$$

$$(2)\ \ f(A_1 - A_2) \neq f(A_1) - f(A_2);.$$

مثال(١,٩)

نفرض أن $f : A \longrightarrow B$ دالة معرفة بالعلاقة

$f = \{(a,1),(b,2),(c,1),(d,2)\}$ ،

حيث أن $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{1,2,3,4\}$. بفرض أن $A_1 = \{a,b\}$ و

$A_2 = \{c,d\}$. بما أن $A_1 \cap A_2 = \phi$ فإن $f(A_1 \cap A_2) = \phi$

و بما أن $f(A_2) = \{1,2\}$, $f(A_1) = \{1,2\}$ فإن $f(A_1) \cap f(A_2) = \{1,2\}$ و

من ثم يكون $f(A_1) \cap f(A_2) \neq f(A_1 \cap A_2)$.

بالنسبة للفقرة الثانية، نتبع الآتي:

$$f(A_1) - f(A_2) \neq f(A_1 - A_2)$$

$$A_1 - A_2 = \{a,b\} \Rightarrow f(A_1 - A_2) = \{1,2\}$$
$$f(A_1) - f(A_2) = \{1,2\} - \{1,2\} = \phi$$
$$\therefore\ f(A_1) - f(A_2) \neq f(A_1 - A_2)$$

تعريف (١,١٢)

بفرض أن $f : A \to B$ راسم من المجموعة الغير خالية A إلى المجموعة الغير خالية B . إذا كانت $D \subseteq A$ ، فإن الدالة $g : D \to B$ والمعرفة بالصيغة $g(x) = f(x)$ لكل $x \in D$ تسمى تقييد أو قصر (restriction) الدالة على D وعادة تعطى في الصيغة $f\,|_D$.

مثال (١,١٠)

بفرض أن R مجموعه الاعداد الحقيقية ، و أن $D = \{x \in R : x \geq 0\}$. نفرض الدالة $f : R \to R$ معرفة بالصيغة $f(x) = x^2$ و الدالة $g : D \to R$ معرفة بالصيغة $g(x) = x^2$. فإن $f\,|_D = g$.

تعريف (١,١٣)

بفرض أن A, B مجموعتين غير خاليتين، فإن الراسم $f : A \to B$ يسمى:

(١) راسم متباين (Injective) إذا تحقق شرط من الشرطين المتكافئين

$$(i)\quad \forall x_1, x_2 \in A,\quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\ .$$

$$(ii)\quad \forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

(٢) راسم (غامر - شامل) (Surjective) إذا كان $f(A) = B$.

(٣) راسم تقابل (Bijective) إذا كان متباينا وغامراً.

مثال (١,١١)

ليكن $f: R \to R$ راسماً معرفاً بالصيغة $f(x) = x^2$:

(أ) هل f راسم متباين ولماذا ؟.

(ب) هل f راسم غامر ولماذا ؟.

(ج) هل f راسم تقابل ولماذا ؟.

(د) أوجد مدى الراسم f .

الحل

(أ) الراسم f ليس راسما متبايناً لأن $f(1) = f(-1)$ في حين أن $1 \neq -1$.

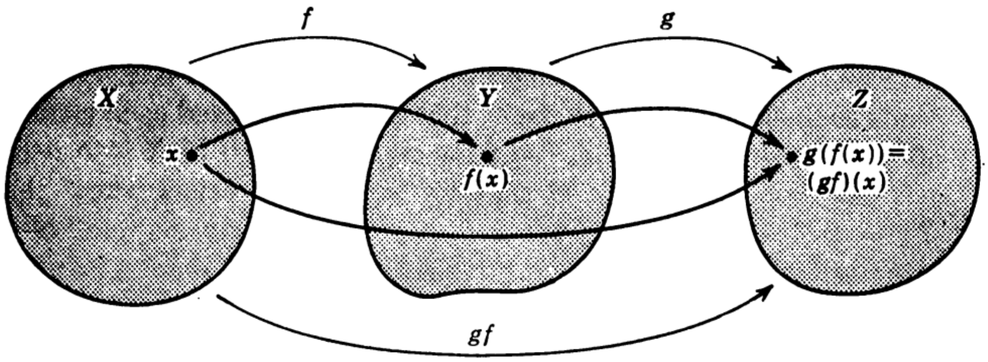
(ب) الراسم f ليس غامراً لأن $f(x) = x^2 \geq 0$ ومن ثم فإن جميع العناصر السالبة فى النطاق المصاحب ليست صوراً لعناصر من النطاق. فمثلاً لا يوجد عنصر $x \in R$ بحيث أن $f(x) = -1$.

(ج) الراسم f ليس راسم تقابل وذلك لعدم تحقق شروط التباين و الغمر.

(د) بالنسبة لمدي الراسم فيمكن الحصول عليه كما يلي:

$$f(R) = \{y \in R : y = f(x) = x^2,\ x \in R\}$$
$$= \{y \in R : y \geq 0\} = R^+ \cup \{0\}.$$

كما رأينا من خلال دراستنا للعلاقات أن هناك تركيباً لعلاقتين أو أكثر ونظراً لكون الرواسم نوعاً من العلاقات فإننا نستطيع بسهوله تعريف التركيب (التحصيل) لراسمين أو أكثر. فمثلا إذا كان $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ راسمين فإن الراسم $h: X \to Z$ هو تحصيل الراسمين f و g ويرمز له بالرمز $h = g \circ f : X \to Z$ حيث أن $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in Z$



شكل (١,٧)

مثال (١,١٢)

إذا كان $R \xrightarrow{g} R \xrightarrow{f} R$ راسمين حيث أن:

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ و } g(x) = x - 1$$

فأوجد :

(أ) تعريفاً لكل من الراسمين $g \circ f$ و $f \circ g$

(ب) بين أن. $f \circ g \neq g \circ f$

(ج) أوجد f^2 و g^2 ومن ثم $f^2(-1)$ و $g^2(-1)$

الحل

(أ) وفق تعريف f

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = (x^2 + 1) - 1 = x^2$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$$

لذ فإن أن $f \circ g \neq g \circ f$ أي أن تركيب الرواسم ليس إبداليا فى الحالة العامة.

(ب) باستخدام تعريف $g \circ f$ نحصل على أن :

$$g \circ f(2) = g(4+1) = g(5) = 4$$

باستخدام تعريف $f \circ g$ نحصل على أن $f \circ g(2) = f(2-1) = f(1) = 2$

وهكذا نجد أن $f \circ g(2) \neq g \circ f(2)$

(ج) باستخدام تعريف $f^2 = f \circ f$ و $g^2 = g \circ g$ يمكن إكمال الحل .

تعريف (١,١٤)

إذا كان $f : A \to A$ راسماً حيث $f(x) = x$ فإن هذا الراسم يسمى المحايد أو الراسم المطابق (identity function) ويرمز له بالرمز $I_A : A \to A$ ، حيث أن $I_A \circ f = f \circ I_A = f$

مثال (١,١٣)

إذا كان $f : R \longrightarrow R$ راسم (تطبيق) معرفاً كما يلي:

$$f(x) = 3x + 6, \quad \forall x \in R$$

بين أن هذا الراسم تقابل؟.

الحل

نفرض أن $f(a) = f(b)$ ، فإن

$$f(a) = f(b) \Rightarrow 3a + 6 = 3b + 6 \Rightarrow a = b$$

إذاً الراسم أحادي (تباين)

$$f(a) = y = 3a + 6 \Rightarrow a = \frac{y-6}{3}$$

$$\therefore a = f^{-1}(y) = \frac{y-6}{3}$$

و حيث أن المقدار $\frac{y-6}{3}$ دائماً عدد حقيقي أي أن $\frac{y-6}{3} \in R$ لكل $y \in R$. إذاً الراسم غامر و على ذلك فإن f تقابل.

نظرية (١,٨)

إذا كان $f : A \to B$ تقابلا فإن f^{-1} هو الآخر تقابل من B إلى A كما أن :

(أ) $f^{-1} \circ f = I_A$

(ب) $f \circ f^{-1} = I_B$

(ج) إذا كانت $A = B$ فإن $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_A$

البرهان

نفرض أن $f : A \to B$ راسم تقابل فإن كل عنصر من عناصر B هو صورة لعنصر وحيد من عناصر A. (ويكون $f(A) = B$) وهذا يقتضى بالضرورة أن تكون الصورة العكسية لكل عنصر من عناصر B مكونة من عنصر وحيد من عناصر A أي أنه :

$$\forall b \in B : \exists\, a \in A : a = f^{-1}(b)$$

وهذا يعني أن $f^{-1} : B \to A$ راسم.

نفرض أن b_1 و b_2 صورتين للعنصرين a_1 , a_2 على الترتيب وفق الراسم f فإنه يكون :

$$\begin{aligned} f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2) &\Leftrightarrow a_1 = a_2 \\ &\Leftrightarrow f(a_1) = f(a_2) \\ &\Leftrightarrow b_1 = b_2 \end{aligned}$$

أى أن الراسم f^{-1} متباين .

ولما كان $f^{-1}(B) = A$ فإن الراسم f^{-1} يكون غامراً (فوقياً) ولذا نستطيع القول بأن الراسم f^{-1} تقابل من B إلى A :

لتكن $b=f(a)$ فإن $f^{-1}(b)=a \Leftrightarrow b=f(a)$

(أ) $\forall a\in A: f^{-1}\circ f(a)=f^{-1}(f(a))=f^{-1}(b)=a=I_A(a)$

$$\therefore f^{-1}\circ f=I_A$$

(ب) $\forall b\in B: f\circ f^{-1}(b)=f(f^{-1}(b))=f(a)=b=I_B(b)$

$$\therefore f\circ f^{-1}=I_B$$

(ج) يترك للطالب لسهولته.■

نظرية (١,٩)

إذا كان $f:A\to B$ و $g:B\to C$ راسمين فإنه :

(أ) إذا كان كل من g و f راسم متباين فإن التركيب $g\circ f$ يكون راسم متباين (أحادى).

(ب) إذا كان كل من g و f راسم غامر (فوقي) فإن التركيب $g\circ f$ يكون راسم غامر (فوقي).

(ج) إذا كان كل من g و f راسم تقابل فإن التركيب $g\circ f$

(د) يكون تقابل وفى هذه الحالة يكون $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

البرهان

(أ) نفرض أن كل من الراسمين $f:A\to B$ و $g:B\to C$ متباين (أحادي) ونفرض أن $(g\circ f)(x)=(g\circ f)(y)$ فيكون لدينا $g(f(x))=g(f((y))$ ولما كان الراسم g متبايناً فإن $f(x)=f(y)$ ولكن الراسم f هو أيضاً متبايناً فإن ذلك يؤدى إلى أن $x=y$ ومن ثم فإن الراسم $g\circ f$ متباين (أحادي) .

(ب) نفرض أن كل من الراسمين $f : A \to B$ و $g : B \to C$ راسم فوقي فإن

ذلك يعني أن $g(B) = C$ و $f(A) = B$ ومن ثم نستنتج أن

$$g \circ f(A) = g(f(A)) = g(B) = C$$

أي ان الراسم المحصل $g \circ f$ غامر (فوقى) .

(ج) من (أ) و (ب) السابقين نستطيع إثبات أن $g \circ f$ يكون تقابل عندما يكـون

كل من الراسمين f و g تقابلا.

وبما أن :

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ I_B \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} = I_C\end{aligned}$$

وبالمثل فإن :

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = I_A$$

وهذا معناه أن معكوس الراسم $(g \circ f)$ هو $f^{-1} \circ g^{-1}$ أى أن :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \blacksquare$$

تمارين عامة على الفصل الأول

(١) إذا كانت X مجموعة شاملة ، $A,B,C \subseteq X$. ضع مثال توضح فيه أن :

$(i)\ A-(B\cup C)\neq (A-B)\cup (A-C)$

$(ii)\ (B-C)\cup A\neq (B\cup A)-(C\cup A)$

(٢) بفرض أن I مجموعة أدلة وأن $\{A_i\}_{i\in I}$ عائلة من المجموعات الجزئية من المجموعة الغير خالية. لأي مجموعة جزئية B من X برهن أنه:

- إذا كانت $A_i\subseteq B$ لكل $i\in I$ فإن $\bigcup_{i\in I} A_i\subseteq B$.
- إذا كانت $B\subseteq A_i$ لكل $i\in I$ فإن $B\subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$.
- $\bigcup_{i\in I} A_i=\phi$ إذا وفقط إذا كان $A_i=\phi$ لكل $i\in I$.

(٣) إذا كانت X مجموعة شاملة ، $A,B,C\subseteq X$، برهن أن :

$(i)\ A\times\phi=\phi\times A=\phi$

$(ii)\ A\neq\phi\ ,\ B\neq\phi,\ A\times B=B\times A\Leftrightarrow A=B$

$(iii)\ A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

$(iv)\ A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

$(v)\ A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$

(٤) بفرض المجموعتين $B=\{a,b,c,d,e\}$ و $A=\{1,2,3,4,5\}$.

بين أي من العلاقات الآتية تكون راسماً وحدد مجموعة تعريفها ومداها ، وأذكر سبباً واحداً على الأقل فى حالة كون العلاقة ليست راسماً.

(i) R = {(1, e), (2, d), (3, c), (4, b), (5, a)}

(ii) R = {(1, e), (2, e), (3, e), (4, b), (5, b)}

(iii) R = {(2, c), (3, d), (4, d), (5, e)}

(iv) R = {(1, d), (2, c), (3, e), (4, a), (2, b)}

(v) R = {(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3), (e, 3)}

(vi) R = (a, 1), (c, 3), (d, 4), (d, 5)}

(٥) بفرض أن $f:[0,1]\rightarrow[a,b]$ دالة معرفة بالصيغة

$$f(x)=(b-a)x+a$$

حيث أن a و b أعداد حقيقية و $a\neq b$. برهن أن الدالة f هي دالة تقابل. ثم اوجد صيغة الدالة العكسية f^{-1}.

(٦) بفرض أن $f:X\rightarrow Y$ دالة من المجموعة X إلى المجموعة Y.فإذا كانت $A\subset X$ و $B\subset Y$:

- فبرهن أن:

$(i)\ A\subseteq f^{-1}(f(A));$

$(ii)\ f(f^{-1}(B))\subseteq B.$

- ضع مثال بحيث يكون فيه الاحتواء في $(i),(ii)$ احتواءً فعلياً.

(٧) بفرض أن $f:A\rightarrow B$ تقابل . فإذا كانت $A=B$ فبرهن أن :

$$f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=I_A$$

(٨) ليكن $R\xrightarrow{g}R\xrightarrow{f}R$ راسمان كل منهما معرف كالآتي $f(x)=x^2-2$ و $g(x)=2x+1$ اوجد تعريف كل من $f\circ g$ و $g\circ f$ ثم بين أن عملية تحصيل الرواسم (التطبيقات) ليست إبدالية.

الفصل الثاني

الفضاءات المترية

Metric Spaces

مقدمة

يلعب مفهوم الدوال المتصلة continuous functions دوراً بارزاً في فروع الرياضيات المختلفة. ففى بداية دراستنا للتحليل الحقيقي تعرضنا لمفهوم الدالة المتصلة حيث عرفنا أن الدالة $f:A\to R$ حيث أن $A\subset R$ ، تكون متصلة عند النقطة $x_0\in A$ إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث أنه $\forall x\in A$ فإن:

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

ويقال أن هذه الدالة تكون متصلة على A إذا كانت متصلة عند جميع النقاط $x\in A$.

ففى هذه الحالة فإن القيمة المطلقة $|x-x_0|$ ما هي إلا مسافة بين عددين حقيقيين أو مركبين ومن ثم فإن الاتصال يتحقق متى نقلت نقاط متقاربة في مجال الدالة، إلى نقاط متقاربة أخرى في المجال المقابل للدالة. ولتعميم مفهوم الشهير لاتصال الدوال "ε-δ" إلى تعريف آخر يصف سلوك الدالة بالنسبة إلى مجموعات جزئية كل منها تسمى جوار أو بالنسبة إلى مجموعات مفتوحة.

ونظراً لأهمية الفضاء المتري فقد حظي بإهتمام العديد من العلماء والباحثين منذ أن تم تعريفه حتى يومنا هذا ، ومن خلال بحوث العلماء على الفضاء المتري وتطبيقاته المختلفة ظهرت صور عديدة ومختلفة من الفضاءات المترية الجديدة

مثل : الفضاء شبه المتري (quasi-metric space) ، الفضاء المتري الجزئي (partial metric space) الذي تم تعريفه من قبل باحثي علوم الحاسب النظرية ،الفضاء المتري المخروطي (cone metric space) . ومع ظهور نظرية المجموعات المشوشة (الضبابية) تم تعريف الفضاء المتري المشوش (fuzzy metric space) ...و هناك العديد من أنواع الفضاءات المترية الأخرى التي تذخر بها الدوريات و المراجع العلمية الحديثة والتي لا يتسع المقام لذكرها.

في هذا الفصل، سوف نتعرض لتعريف و دراسة الفضاء المتري مع تعريف كل من المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة و الدوال المتصلة حتى يتمكن الدارس من فهم و استيعاب مفاهيم قد تكون جديدة عليه مثل مفهوم الكرة المفتوحة والمجموعة المفتوحة والمجموعة المغلقة وجوار النقطة والدوال المتصلة . هذه المفاهيم سوف ندرسها ضمن الفضاء المتري في ظل وجود دالة المسافة التي تلعب دوراً مهما في تعريف هذه المفاهيم ومن ثم تصبح هذه المفاهيم معروفة لنا عندما نتعرض لها في الفصول التالية من هذا الكتاب.

(٢,١) الفضاء المتري Metric Space

فيما يلي سوف نقدم تعريف دالة المسافة وشروطها والفضاء المتري بالإضافة لبعض من الأمثلة التوضيحية لعدد من الفضاءات المترية.

تعريف (٢,١)

بفرض أن X مجموعة غير خالية وأن $d: X \times X \to R$ دالة حقيقية من $X \times X$ الى مجموعة الأعداد الحقيقية R وتحقق لكل $x, y, z \in X$ الشروط التالية:

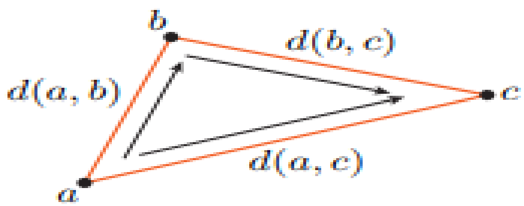
$(M_1)\ d(x,y) \geq 0;$

$(M_2)\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$

$(M_3)\ d(x,y) = d(y,x);$

$(M_4)\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$

الشرط (M_4) يسمى بمتباينة المثلث (كما في الشكل التالي).



شكل (٢,١)

الدالة d تسمى دالة مسافة (distance function) وتسمى $d(x,y)$ المسافة بين x و y . الثنائي المرتب (X,d) يسمى فضاءً مترياً.

مثال (٢,١)

الدالة $d: R\times R \to R$ و المعرفة بالصيغة $d(x,y)=|x-y|$، على مجموعة الأعداد الحقيقية، هي دالة مسافة، وذلك لأنه لكل $x,y,z \in R$ نجد أن:

$(M_1)\, d(x,y) \ge 0;$

$(M_2)\, d(x,y)=|x-y|=0 \Leftrightarrow x=y;$

$(M_3)\, d(x,y)=|x-y|=|-(y-x)|=|y-x|=d(y,x);$

$$\begin{aligned}(M_4)\, d(x,z)&=|x-z|=|x-y+y-z|=|(x-y)+(y-z)|\\ &\le |x-y|+|y-x|=d(x,y)+d(y,z).\end{aligned}$$

تسمى d في هذه الحالة دالة المسافة العادية أو الاقليدية.

مثال (٢,٢)

الدالة $d: R^2 \times R^2 \to R$ و المعرفة بالصيغة:

$$d(a,b)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

حيث أن $a=(x_1,y_1)\in R^2$ و $b=(x_2,y_2)\in R^2$، هي دالة مسافة وذلك لأنه لكل $a,b,c \in R^2$ نجد أن:

$(M_1)\ d(a,b)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \ge 0\ .$

$$\begin{aligned}(M_2)\ d(a,b)&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=0\\ &\Leftrightarrow x_1=x_2 \ and\ y_1=y_2 \Leftrightarrow a=b.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(M_3)\quad d(a,b)&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\\ &=d(b,a)\end{aligned}$$

$(M_4)\ d(a,c)\le d(a,b)+d(b,c)$

حيث نعلم أنه فى الهندسة المستوية يكون طول أي ضلع في مثلث أقل من أو يساوي مجموع طولي الضلعين الآخرين. في هذه الحالة تسمى d دالة المسافة الاقليدية في المستوى.

مثال (٢,٣)

يمكن تعميم دالة المسافة الاقليدية في المستوي إلى دالة مسافة في الفضاء الاقليدي ذي البعد النوني، وذلك بفرض أن الدالة $d: R^n \times R^n \to R$ معرفة بالصيغة:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

حيث أن

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \;\; , \;\; y = (y_1, y_2, ..., y_n) .$$

من السهل إثبات أن الدالة $d: R^n \times R^n \to R$ هي دالة مسافة باعتبارها تعميماً لدالة المسافة في المستوى.

مثال (٢,٤)

الدالة الحقيقية $d: R^2 \times R^2 \to R$ والمعرفة بالصيغة:

$$d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

هي دالة مسافة والزوج المرتب $(X\,,d)$ فضاء متري، حيث أن:

$$x = (x_1, x_2)\;, y = (y_1, y_2) \in R^2 .$$

الحل

لكل $x = (x_1, x_2)\;, y = (y_1, y_2) \in R^2$ نجد أن:

اولاً: بما أن $|x_1 - y_1| \geq 0$ و $|x_2 - y_2| \geq 0$ فإن

$$d(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|\geq 0$$

إذاً يكون الشرط الأول متحقق، أي أن

(M_1) $d(x,y)\geq 0$.

ثانياً:

$$\begin{aligned} d(x,y)=0 &\Leftrightarrow |x_1-y_1|+|x_2-y_2|=0 \\ &\Leftrightarrow |x_1-y_1|=0=|x_2-y_2| \\ &\Leftrightarrow x_1=y_1, x_2=y_2 \\ &\Leftrightarrow x=(x_1,x_2)=y=(y_1,y_2) \end{aligned}$$

ومن ثم يكون

(M_2) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$.

ثالثاً:

(M_3) $d(x,y)=d(y,x)$

$$\begin{aligned} d(x,y)&=|x_1-y_1|+|x_2-y_2| \\ &=|y_1-x_1|+|y_2-x_2|=d(y,x) \end{aligned}$$

رابعاً: بفرض أن $x=(x_1,x_2)\,, y=(y_1,y_2), z=(z_1,z_2)\in R^2$

$$\begin{aligned} (M_4)\ d(x,y)+d(y,z)&=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+|y_1-z_1|+|y_2-z_2| \\ &\geq |x_1-z_1|+|x_2-z_2|=d(x,z) \end{aligned}$$

, بهذا يكتمل اثبات أن الدالة $d:R^2\times R^2\to R$ دالة مسافة.

مثال (٢,٥)

الدالة الحقيقية $d:R\times R\to R$ و المعرفة بالصيغة:

$$d(x,y)=\begin{cases} 1 & if \quad x\neq y \\ 0 & if \quad x=y \end{cases}$$

هي دالة مسافة تسمى المترية البديهية (trivial distance).

الحل

$(M_1)\ d(x,y) \geq 0;$

وذلك من تعريف الدالة المترية.

ثانيا :

$(M_2)\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$

هذا الشرط متحقق من التعريف

$$d(x,y)=0 \Rightarrow x=y \Rightarrow d(y,x)=0.$$

ثالثا: لكل $x,y \in Z$ نجد أنه:

(i) إذا كانت $d(x,y)=1 \Rightarrow x \neq y \Rightarrow d(y,x)=1$ ومن ثم يكون

$$d(x,y)=d(y,x)$$

(ii)إذا كانت $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y \Rightarrow d(y,x)=0$ ومن ثم يكون

$$d(x,y)=d(y,x)$$

في كلا الاحتمالين نجد أن

$(M_3)\ d(x,y)=d(y,x) \quad \forall x,y \in X\ ;$

رابعاً: لكل $x,y,z \in Z$ نجد أن العلاقة:

$(M_4)\ d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$

متحققة لجميع القيم الممكنة لكل من $d(x,z),\ d(x,y),\ d(y,z)$ عدا حالة واحدة أن يكون $d(x,z)=1,\ d(x,y)=0,\ d(y,z)=0$ والذي سوف يترتب عليه أن يكون $d(x,z)=1 \not\leq 0+0 = d(x,y)+d(y,z)$

لكن هذا الاحتمال لا وجود له وذلك لأن

(1) $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$

(2) $d(y,z)=0 \Rightarrow y=z$

من (1) و (2) نجد أن $x=y=z$ ولكن $d(x,z)=1 \Leftarrow x\neq z$ وهذا تناقض وبناءً على ذلك فإن هذا الاحتمال لا وجود له وبذلك تكون العلاقة صحيحة دائماً.

(٢,٢) المجموعات المفتوحة Open sets

قبل الشروع في دراسة مفهوم المجموعات المفتوحة يجب علينا دراسة بعض المفاهيم الخاصة بالفضاء المتري مثل كل من الكرة المفتوحة و الكرة المغلقة.

تعريف (٢,٢)

بفرض أن (X,d) فضاء متري و x_0 عنصر في X و $\varepsilon>0$.

(١) المجموعة الجزئية $B(x_0,\varepsilon)=\{x\in X : d(x,x_0)<\varepsilon\}$

تسمى كرة مفتوحة نصف قطرها ε ومركزها النقطة x_0.

(٢) المجموعة الجزئية $\overline{B}(x_0,\varepsilon)=\{x\in X : d(x_0,x)\leq\varepsilon\}$

تسمى كرة مغلقة نصف قطرها ε ومركزها النقطة x_0.

مثال (٢,٦)

في حالة الفضاء المتري الإقليدي (R,d)، حيث أن $d(x,y)=|x-y|$ لأي عددين حقيقيين $x,y\in R$ فإن المجموعة:

$$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)=\{x\in R : a-\varepsilon<x<a+\varepsilon, \varepsilon>0\}$$

تسمى فترة مفتوحة، بينما المجموعة:

$$[a-\varepsilon,a+\varepsilon]=\{x\in R : a-\varepsilon\leq x\leq a+\varepsilon, \varepsilon>0\}$$

تسمى فترة مغلقة بالنسبة للفضاء المترى (R,d) .

مثال (٢,٧)

في حالة الفضاء المتري (R^2,d)، حيث أن $d:R^2\times R^2\to R$. فإن المجموعة:

$$B_1(a,\varepsilon)=\{x\in R^2 : d(a,x)<\varepsilon\}$$

تسمى قرص مفتوح (open disk)، بينما المجموعة:

$$\overline{B}_2(a,\varepsilon)=\{x\in R^2 : d(a,x)\le\varepsilon\}$$

تسمى قرص مغلق (closed disk).

مثال (٢,٨)

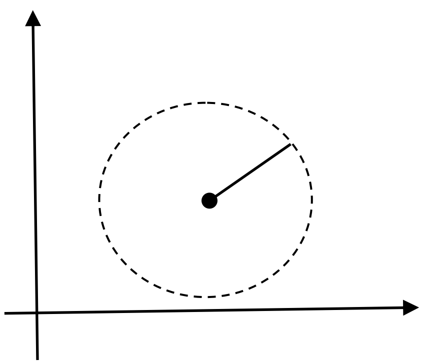
في حالة الفضاء المتري (R^2,d)، حيث أن الدالة $d:R^2\times R^2\to R$

معرفة بالصيغة:

$$d(a,b)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

حيث أن $a=(x_1,y_1)\in R^2$ و $b=(x_2,y_2)\in R^2$.

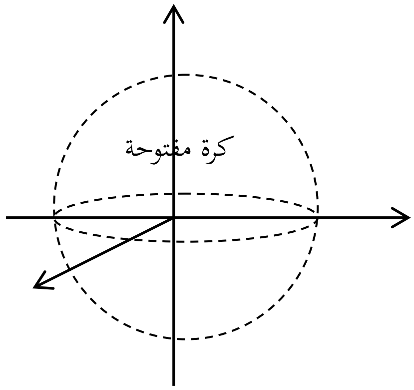
فالقرص المفتوح في هذا الفضاء يأخذ الشكل التالي



شكل (٢,٢):القرص المفتوح في المستوي

إذا تعاملنا مع الفضاء الثلاثي $R^3=R\times R\times R$ فإن المجموعة

$$B_d(a,\varepsilon)=\{x\in R^3 : d(x,a)<\varepsilon\}$$



شكل (٢,٣):الكرة المفتوحة

تسمى كرة مفتوحة (open ball) .

أما المجموعة $\overline{B}_d(a,\varepsilon)=\{x\in R^3 : d(x,a)\le\varepsilon\}$ فتسمى كرة مغلقة .

مثال (٢,٩)

بفرض أن $d:R\times R\to R$ دالة المسافة الاقليدية على مجموعة الأعداد الحقيقية R . فإن الكرة المفتوحة

$$B_d(0,1)=\{x\in R : d(0,x)<1\}=\{x\in R : |x|<1\}=(-1,1)$$

والتي مركزها 0 ونصف قطرها 1ما هي إلا الفترة المفتوحة $(-1,1)$.

مثال (٢,١٠)

بفرض أن $d:R^2\times R^2\to R$ دالة المسافة الاقليدية على المجموعة R^2 . فإن القرص المفتوح الذي مركزه النقطة $(0,0)$ ونصف قطره الوحدة يعطى في الصورة التالية:

$$B_d((0,0),1)=\{(x,y)\in R^2 : d((0,0),(x,y))<1\}$$
$$=\{(x,y)\in R^2 : \sqrt{x^2+y^2}<1\}$$

$$=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2<1\}$$

مثال (٢,١١)

بفرض أن $d:R^3\times R^3\to R$ دالة المسافة المعرفة على المجموعة R^3. فإن المجموعة التالية:

$$B_d((0,0,0),1)=\{(x,y,z)\in R^3 : d((0,0,0),(x,y,z))<1\}$$

$$=\{(x,y,z)\in R^3 : \sqrt{x^2+y^2+z^2}<1\}$$

$$=\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2<1\}$$

وهي عبارة عن كرة مفتوحة مركزها $(0,0,0)$ ونصف قطرها 1.

فيما يلي سوف نقوم بتعريف مفهوم الجوار (Neighborhood) لنقطة ما في أي فضاء متري.

تعريف (٢,٣)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً. المجموعة الجزئية A من X تسمى جواراً للنقطة $a\in A$ إذا وجد $\varepsilon>0$ بحيث أن $B_d(a,\varepsilon)\subseteq A$.

نظرية (٢,١)

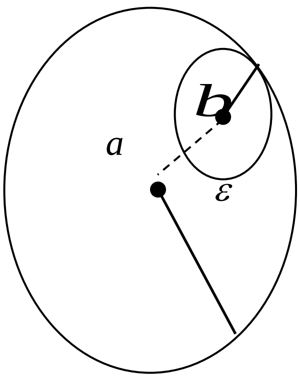
بفرض أن (X,d) فضاء متري، وأن $a\in X$,$\varepsilon>0$. الكرة المفتوحة $B_d(a,\varepsilon)$ تمثل جواراً لكل نقطة من نقاطها.

البرهان

اولاً نلاحظ أن الكرة المفتوحة $B_d(a,\varepsilon)$ ليست خالية لأن $a \in B_d(a,\varepsilon)$.
نفرض أن $b \in B_d(a,\varepsilon)$ والمطلوب إثبات أن $B_d(a,\varepsilon)$ تكون جواراً لهذه النقطة. بما أن $b \in B_d(a,\varepsilon)$ فإن $d(b,a) < \varepsilon$. نفرض أن $\eta = \varepsilon - d(a,b) > 0$. سوف نحاول بإثبات أن $B_d(b,\eta) \subseteq B_d(a,\varepsilon)$ كما هو موضح في الشكل (٢،٤). نفرض أن $x \in B_d(b,\eta)$ نقطة إختيارية والمطلوب إثبات أن $x \in B_d(a,\varepsilon)$

$$x \in B_d(b,\eta) \Leftrightarrow d(x,b) < \eta$$

باستخدام الشرط $(M_4)\ d(a,x) \le d(a,b) + d(b,x)$



شكل (٢،٤)

لذا نحصل على $d(a,x) \le d(a,b) + d(b,x) < d(a,b) + \eta < \varepsilon$ وهذا يعنى أن $x \in B_d(a,\varepsilon)$ ومن ثم فإن $B_d(b,\eta) \subseteq B_d(a,\varepsilon)$.

تعريف (٢,٤)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً. المجموعة $A \subseteq X$ تسمى مجموعة مفتوحة إذا كانت جواراً لكل نقطة من نقاطها.

نتيجة (٢,١)

في الفضاء المتري (X,d) كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة.

تعريف (٢,٥)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً و $A \subseteq X$. النقطة $a \in A$ تسمى نقطة داخلية للمجموعة A إذا كانت A جوراً لهذه النقطة ويرمز لمجموعة النقاط الداخلية للمجموعة بالرمز A^o ويعبر عنها في الصورة:

$$A^o = \{x \in A : B(x,\varepsilon) \subseteq A \ \ for\ some\ \varepsilon > 0\}.$$

نظرية (٢,٢)

بفرض أن A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (X,d). فإن

(١) المجموعة A^o هي مجموعة مفتوحة جزئية من A تحوي جميع المجموعات الجزئية المفتوحة من A.

(٢) المجموعة A تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كان $A = A^o$.

البرهان

إثبات (١) نفرض أن $x \in A^o$ نقطة اختيارية. فإنه من تعريف مجموعة النقاط

الداخلية توجد كرة مفتوحة $B(x,\varepsilon)\subseteq A$ ولكن $B(x,\varepsilon)$ هي في حد ذاتها مجموعة مفتوحة (انظر نظرية (٢,١) ومثال (٢,١٢)) لذا فإن كل نقطة من نقاطها هي مركز لكرة مفتوحة محتواه في $B(x,\varepsilon)$ ومن ثم في A. هذا يعني أن كل نقطة في $B(x,\varepsilon)$ هي نقطة داخلية للمجموعة A، أي أن $B(x,\varepsilon)\subseteq A^o$. ونظراً لكون النقطة $x\in A^o$ إختيارية فإن كل نقطة $x\in A^o$ هي مركز لكرة محتواه في A^o وهذا يعني أن A^o مجموعة مفتوحة.

لإثبات أن A^o تحوي كل المجموعات المفتوحة الجزئية $G\subseteq A$. نفرض أن $x\in G$. بما أن G المجموعة مفتوحة، فإنه توجد كرة مفتوحة $B(x,\varepsilon)$ بحيث أن $B(x,\varepsilon)\subseteq G\subseteq A$. إذاً $x\in A^o$ أي أن $G\subseteq A^o$.

إثبات (٢) يأتي مباشرة من (١). ■

نظرية (٢,٣)

بفرض أن (X,d) فضاء متري وأن $A,B\subseteq X$. فإن

$(i)\ A\subseteq B\Rightarrow A^o\subseteq B^o;$

$(ii)\ (A\cap B)^o=A^o\cap B^o;$

$(iii)\ (A\cup B)^o\supseteq A^o\cup B^o.$

البرهان

الفقرة (i):

نفرض أن $x\in A^o$. فإنه يوجد $\varepsilon>0$ بحيث يكون $B(x,\varepsilon)\subseteq A$ بما أن $A\subseteq B$ فإن $B(x,\varepsilon)\subseteq B$، أي أن $x\in B^o$ و هذا يقتضي أن $A^o\subseteq B^o$.

الفقرة (ii):

بما أن $A\cap B\subseteq A$ و $A\cap B\subseteq B$ فإنه من (i) نجد أن $(A\cap B)^0\subseteq A^o$ و $(A\cap B)^0\subseteq B^o$ وهذا يقتضي أن

$$(A\cap B)^0\subseteq A^o\cap B^o \qquad (1)$$

من ناحية أخرى نفرض أن $x\in A^o\cap B^0$ فإن هذا يقتضي أن $x\in A^o$ و $x\in B^0$. لذا يوجد $\varepsilon_1>o$ و $\varepsilon_2>o$ بحيث يكون $B(x,\varepsilon_1)\subseteq A$ ، $B(x,\varepsilon_2)\subseteq B$. نفرض $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ فإنه يتضح أن $\varepsilon>0$ و $B(x,\varepsilon)\subseteq A\cap B$ ، أي أن $x\in(A\cap B)^o$ وهذا يقتضي أن :

$$A^o\cap B^o\subseteq(A\cap B)^0 \qquad (2)$$

من (1) و (2) نحصل على المطلوب.

الفقرة (iii):

حيث أن $A\subseteq A\cup B$ و $B\subseteq A\cup B$ بتطبيق (i) نحصل على المطلوب.■

فيما يلي مثال لتوضيح عدم تحقق التساوي في (iii):

مثال (٢,١٢)

بفرض أن $A=[0,1]$ و $B=[1,2]$ ، فإن $A\cup B=[0,2]$. بما أن $A^o=(0,1)$ ، $B^o=(1,2)$ ، $(A\cup B)^0=(0,2)$ فنجد أن $(A\cup B)^o\neq A^o\cup B^o$.

تمهيدة (٢,١)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً. تقاطع أي مجموعتين مفتوحتين في X يكون مجموعة مفتوحة.

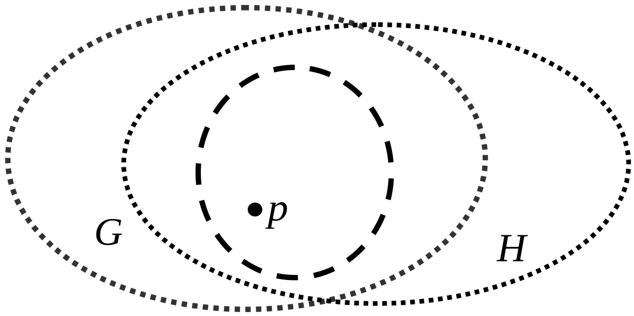
البرهان

نفرض أن G,H مجموعتان مفتوحتان في X وأن $p \in G \cap H$

$$\because p \in G \cap H \Rightarrow p \in G \wedge p \in H$$

بما أن G مجموعة مفتوحة وتحتوي على النقطة p ، فإنه توجد كره مفتوحة $B_1(p,\varepsilon)$ بحيث أن

$$p \in B_1(p,\varepsilon) \subseteq G.................(1)$$



شكل (٢,٥)

وبالمثل بالنسبة للمجموعة الثانية H ، فإنه توجد كره مفتوحة $B_2(p,\delta)$ بحيث أن

$$p \in B_2(p,\delta) \subseteq H...................(2)$$

من (1) و (2) نحصل على:

$$p \in B_1(p,\varepsilon) \cap B_2(p,\delta) \subseteq (G \cap H)$$

ليكن $\eta = \min\{\varepsilon,\delta\}$ ، فإنه توجد كره مفتوحة $B_p(p,\eta)$ بحيث أن

$$p \in B_p(p,\eta) = B_1(p,\varepsilon) \cap B_2(p,\delta) \subseteq (G \cap H)$$

أى أن $(G \cap H)$ $p \in B_p(p,\eta) \subseteq (G \cap H)$ و هذا هو إثبات أن التقاطع $G \cap H$ مجموعة مفتوحة. ■

بعد أن رأينا في التمهيدية السابقة أن التقاطع لمجموعتين مفتوحتين يعطي مجموعة مفتوحة، سوف نحاول فيما يلى إجمال بعض من خواص المجموعات المفتوحة في النظرية التالية.

نظرية (٢،٤)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً، فإن :

(١) كل من المجموعتين X,ϕ مجموعة مفتوحة.

(٢) إذا كانت $G_1,G_2,...,G_n$ مجموعات مفتوحة فإن التقاطع $G_1 \cap G_2 \cap ... \cap G_n$ مجموعة مفتوحة.

(٣) اتحاد أى تجمع من المجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة.

البرهان

أولا :لإثبات أن المجموعة ϕ مجموعة مفتوحة فهذا يتطلب أن تكون كل نقطة من نقاط ϕ مركزاً لكرة مفتوحة محتواة في ϕ و حيث أن ϕ خالية من العناصر فإن هذا المطلب متحقق دوماً.

والآن المجموعة X مفتوحة لأنه إذا كان $x \in X$ ، فإنه على سبيل المثال تكون كرة الوحدة $B(x,1) \subset X$.

ثانيا : نفرض أن $G_1, G_2,..., G_n$ مجموعات مفتوحة وأن

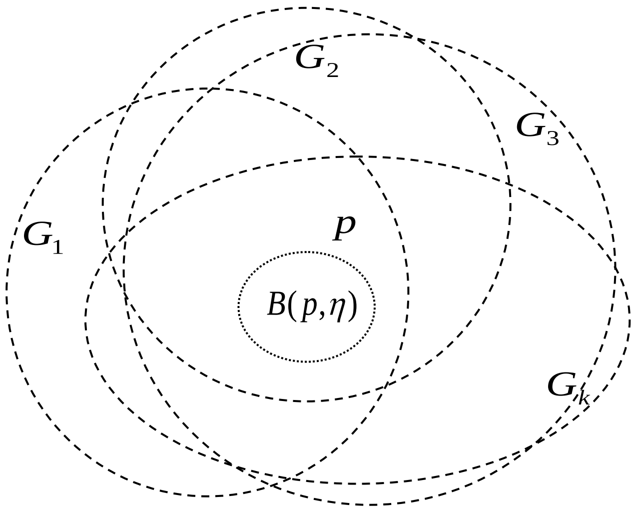
$$G = G_1 \cap G_2 \cap ... \cap G_n = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$$

إذا كانت G خالية فإنها مجموعة مفتوحة كما رأينا في (1). نفترض أن $G \neq \phi$ و $p \in G$. لذا نجد أن $p \in G_i$ لكل $i = 1,2,...,n$ ومن ثم يوجد $\varepsilon_i > 0$ بحيث تكون $B(p,\varepsilon_i) \subseteq G_i$ لكل $i = 1,2,...,n$.

نفرض أن $\eta = \inf\{\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\}$. فإن $\eta > o$ و $B(p,\eta) \subseteq B(p,\varepsilon_i)$ لكل $i = 1,2,...,n$. إذاً الكرة $B(p,\eta)$ التي مركزها p تحقق الشرط

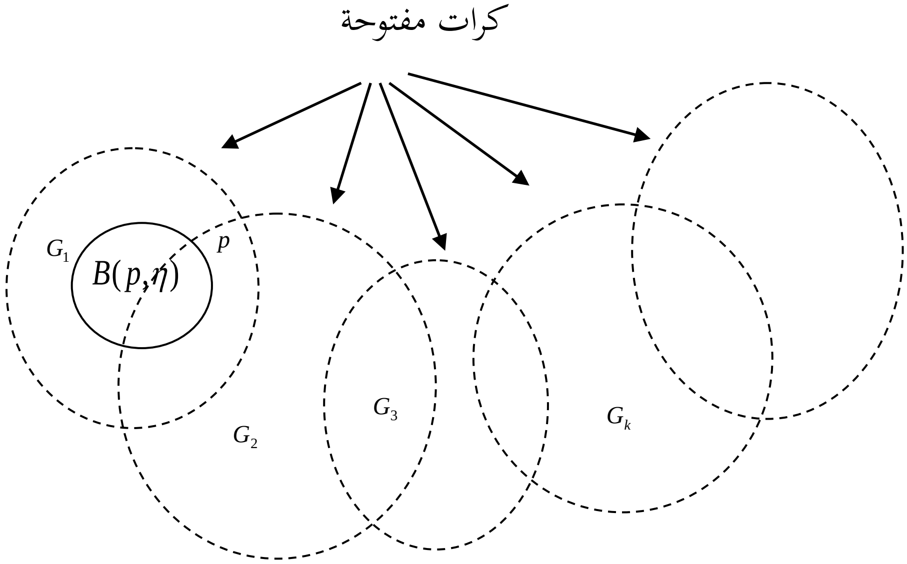
$$B(p,\eta) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} B(p,\varepsilon_i) \subseteq G$$

وهذا معناه أن التقاطع المنتهي $G_1 \cap G_2 \cap ... \cap G_n$ مجموعة مفتوحة.



شكل (٢،٦)

ثالثا : نفرض أن ξ هى عائلة من المجموعات المفتوحة وأن H هى اتحاد هذه العائلة والمطلوب إثبات أن H مجموعة مفتوحة.



شكل (٢,٧)

لإثبات ذلك نفرض أن $p \in H$ ، فإنه توجد مجموعة من مجموعات العائلة ع ولتكن G مجموعة مفتوحة بحيث أن $p \in G \subseteq H$. بما أن المجموعة Gمفتوحة ، فإنه توجد كره مفتوحة مركزها p بحيث أن $p \in B(p,\eta) \subseteq G$,هذا يقتضي أن $p \in B(p,\eta) \subseteq H$ وهذا يعني أن H مجموعة مفتوحة. ■

يلاحظ القارئ أننا استخدمنا التقاطع النهائي للمجموعات المفتوحة و لم نستخدم التقاطع الاختياري، في حين استخدمنا الاتحاد الاختياري للمجموعات المفتوحة الذي يتضمن ضمنياً الاتحاد النهائي .لذا نجد أنفسنا أمام السؤال التالي: هل التقاطع الاختياري للمجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة؟.

مثال (٢,١٣)

نفرض الفضاء المتري (R,d)، حيث أن $d(x,y)=|x-y|, \forall x,y \in R$. نفرض عائلة الفترات المفتوحة $B_d(0,\frac{1}{n})=\{(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}):n\in N\}$. ولكن نجد أن التقاطع اللانهائي لهذه العائلة لا يعطي مجموعة مفتوحة، حيث $\cap_n(\frac{-1}{n},\frac{1}{n})=\{0\}$.

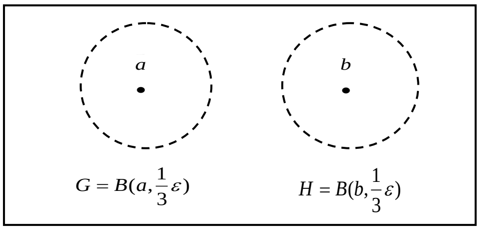
نظرية (٢,٥) (خاصية هاوسدورف)

لأي عنصرين مختلفين $a\neq b$ في الفضاء المترى (X,d) توجد مجموعتان مفتوحتان $G\ ,\ H$ بحيث أن $a\in H, b\in G,\ G\cap H=\phi$

البرهان

نفرض أن $a,b\in X$ عنصران مختلفان (أى أن $a\neq b$) فإنه يوجد $\varepsilon>0$ بحيث أن $d(a,b)=\varepsilon$. فإذا اخترنا المجموعتين المفتوحتين كما يلى:

$$G=B_d(a,\tfrac{1}{3}\varepsilon)\ ,\quad H=B_d(b,\tfrac{1}{3}\varepsilon)$$



شكل (٢,٨)

فإن وجود المجموعتين المفتوحتين $G\ ,\ H$ قد تحقق. فالمطلوب الآن إثبات أن $G\cap H=\phi$ ولكى نثبت ذلك سوف نفترض العكس، أى إننا سنفترض أن

$G \cap H \neq \phi$ وذلك بفرض أن هنـاك نقطـة p بحيـث أن $p \in G \cap H \neq \phi$ وهـذا الفرض يؤدى إلى أن :

(a) $p \in G = B_d(a, \frac{\varepsilon}{3}) \Rightarrow d(p,a) < \frac{\varepsilon}{3}.$

(b) $p \in H = B_d(b, \frac{\varepsilon}{3}) \Rightarrow d(p,b) < \frac{\varepsilon}{3}.$

باستخدام الشرط (M_4) من شروط الفضاء المترى (X,d) نحصل على :

$$d(a,b) \leq d(a,p) + d(p,b) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$$

أي أن $d(a,b) < \frac{2}{3}\varepsilon$ ولكن هذا يتعارض مع الفرض بأن $d(a,b) = \varepsilon$

إذاً $G \cap H = \phi$ وبهذا يكتمل البرهان.■

ملاحظة:

هذه الخاصية متحققة لكل فضاء متري ولكنا سوف نرى أنها لا تكون متحققة دائما في فضاءات أعم من الفضاء المتري مثل الفضاءات التوبولوجية.

(٢,٣) المجموعات المغلقة في الفضاء المتري

Closed Sets in Metric Space

تعريف(٢,٥)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً. المجموعة A في (X,d)تكون مغلقة إذا وفقط إذا كانت $A^c = X - A$ مجموعة مفتوحة.

فيما يلي سوف نقدم بعضاً من خواص المجموعات المغلقة .

نظرية (٢,٦)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً فإن :

(١) ϕ , X مجموعتان مغلقتان.

(٢)تقاطع أى تجمع من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة.

(٣) إذا كانت $F_1, F_2, \ldots, F_n$ مجموعات مغلقة فإن الإتحاد

$$F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n$$

يكون أيضا مجموعة مغلقة.

البرهان

أولا : المجموعتان ϕ , X مغلقتان لأنه $X = \phi^c$, $\phi = X^c$ والمجموعتان ϕ , X مفتوحتان كما رأينا فى النظرية (٢,٤).

ثانيا : نفرض أن W هى تجمع من المجموعات المغلقة وأن :

$$S = \cap\{F : F \in W\}$$

وبما أن :

$$S^c = (\cap F)^c = \cup\{F^c : F \in W\}$$

وأن F^c مفتوحة واتحاد المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة كما ورد فى النظرية (٢,٤) ومن ثم فإن S^c مجموعة مفتوحة و هذا يؤكد أن:

$$S = \cap\{F : F \in W\}$$

مجموعة مغلقة.

ثالثا : بفرض أن $F_1, F_2, ..., F_n$ مجموعات مغلقة و أن $H = F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n$ ومن ثم فإن

$$H^c = (F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n)^c = F_1^c \cap F_2^c \cap ... \cap F_n^c$$

حيث أن تقاطع المجموعات المفتوحة $F_1^c \cap F_2^c \cap ... \cap F_n^c$ هو مجموعة مفتوحة أي أن H^c مفتوحة ومن ثم فإن H مجموعة مغلقة. ■

نظرية (٢,٧)

بفرض أن (X, d) فضاء متري، فإنه لكل $x \in X$ تكون المجموعة وحيدة العنصر $\{x\}$ مغلقة.

البرهان

لإثبات أن المجموعة $\{x\}$ مغلقة يكفي أن نثبت أن المجموعة $\{x\}^c = X - \{x\}$ تكون مفتوحة. لإثبات ذلك نفرض أن $y \in X - \{x\}$ نقطة اختيارية. بما أن $x \neq y$ فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان $G, H \subseteq X$ بحيث أن $y \in H$, $x \in G$ و $G \cap H = \phi$ ومن ثم يكون

$$y \in H \subseteq X - G \subseteq X - \{x\}$$

و بما أن H مجموعة مفتوحة فإنه توجد كرة مفتوحة $B_d(y,\varepsilon)$ بحيث أن $y \in B_d(y,\varepsilon) \subset H \subseteq X - \{x\}$ وهذا يعني أن المجموعة $X - \{x\}$ مفتوحة ومن ثم تكون المجموعة $\{x\}$ مغلقة.■

نتيجة (٢,٢)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً فإن كل مجموعة منتهية في X هي مجموعة مغلقة.

البرهان

من النظرية السابقة نعلم أن المجموعة وحيدة العنصر مغلقة. بما أن كل مجموعة منتهية $A \subset X$ يمكن اعتبارها كاتحاد منته لمجموعات وحيدة العنصر اي أن $A = \underset{a \in A}{\cup}\{a\}$. لذا فإن المجموعة A تكون مغلقة.■

تمارين على الفصل الثاني

١) هل الدالة $d: R\times R \to R$ دالة مسافة على R .

- إذا كانت d معرفة بالصيغة: $d(a,b)=|2a-3b|,\ \forall a,b\in R$
- إذا كانت d معرفة بالصيغة: $d(a,b)=a^2-b^2,\ \forall a,b\in R$
- إذا كانت d معرفة بالصيغة: $d(a,b)=|a^2-b^2|,\ \forall a,b\in R$

٢) برهن أن الدالة الحقيقية $d: R^2\times R^2 \to R$ والمعرفة بالصيغة:

- $d(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$

هي دالة مسافة

٣) برهن أن الدالة الحقيقية $d: R\times R \to R$ والمعرفة بالصيغة:

- $$d(x,y)=\begin{cases}1 & if \quad x\neq y\\ 0 & if \quad x=y\end{cases}$$

هي دالة مسافة .

٤) بفرض أن $d: X\times X \to R$ دالة مسافة معرفة على المجموعة الغير خالية X ، وبفرض أن $e: X\times X \to R$ دالة معرفة بالصيغة

$$e(x,y)=\frac{d(x,y)}{d(x,y)+1}$$

- برهن أن $e: X\times X \to R$ هي ايضا دالة مسافة على X .
- برهن أن المجموعة $A\subseteq X$ تكون مفتوحة في (X,e) إذا وفقط إذا كانت مفتوحة في (X,d) .

٥) هل الدالة $d: R\times R \to R$ دالة مسافة على R .

- إذا كانت d معرفة بالصيغة: $d(a,b)=\min\{a,b\},\ \forall a,b\in R$
- إذا كانت d معرفة بالصيغة: $d(a,b)=\max\{a,b\},\ \forall a,b\in R$

٦) إذا كانت $d:R^2\times R^2\to R$ دالة معرفة بالصيغة:

$$d(a,b)=\max\{|a_1-a_2|,|b_1-b_2|\},\ \ \forall a=(a_1,a_2),b=(b_1,b_2)\in R^2$$

فهل d دالة مسافة على R^2.

٧) بفرض أن $f:X\to Y$ دالة تباين من المجموعة الغير خالية X إلى الفضاء المتري (Y,e). وبفرض أن $d:X\times X\to R$ دالة معرفة بالصيغة

$$d(x,y)=e[f(x),f(y)]$$

برهن أن $d:X\times X\to R$ دالة مسافة على X.

٨) ادرس ماإذا كانت الدالة $d:R\times R\to R$ هي دالة مسافة في الحالتين:

$$(1)\ d(a,b)=\begin{cases} a+b & if\ \ a\geq b \\ 1 & if\ \ a<b \end{cases}$$

$$(2)\ d(a,b)=\begin{cases} 4 & if\ \ a\neq b \\ 0 & if\ \ a=b \end{cases}$$

٩) بفرض أن (X,d) فضاء متري وأن $B(x,\varepsilon_1)$ و $B(y,\varepsilon_2)$ كرتان مفتوحان بحيث أن $B(x,\varepsilon_1)\cap B(y,\varepsilon_2)\neq\phi$. برهن أنه لأي نقطة

$$z\in B(x,\varepsilon_1)\cap B(y,\varepsilon_2)$$

يوجد $\varepsilon_3>0$ بحيث أن $B(z,\varepsilon_3)\subseteq B(x,\varepsilon_1)\cap B(y,\varepsilon_2)$.

١٠) برهن نظرية (٢,٨)؟.

Youtube	Presentation tupe	الموضوع
https://www.youtube.com/watch?v=oloPPwxcWmc&t=914s	https://slideator.com/watch/?v=Kl1Xx8Bv5fk	محاضرة الفضاء المتري ١
https://www.youtube.com/watch?v=A03tF2gUI4U&t=890s	https://slideator.com/watch/?v=qA8KowoDGaJ	محاضرة الفضاء المتري ٢

الفصل الثالث

الفضاءات التوبولوجية

Topological Spaces

مقدمة

بدأت دراسة مفهوم التوبولوجي على مجموعة الأعداد الحقيقية ومن ثم على المستوي الاقليدي. و نظراً لكون الفضاءات المترية أشمل وأعم من هاتين المجموعتين ، فدراسة التوبولوجي على الفضاءات المترية و الدوال المتصلة عليها تعتبر المرحلة الثانية من تطور علم التوبولوجيا، حيث أنه لم يتوقف عند الفضاءات المترية بل امتدت دراسته لتشمل مجموعات أخرى بغض النظر عن خواص هذه المجموعات.

هذا الفصل مخصص لدراسة مفهوم الفضاء التوبولوجي العام وخواصه. بالإضافة إلى دراسة بعض المفاهيم المتعلقة بالفضاءات التوبولوجية مثل نقاط النهاية ، النقاط الداخلية ، النقاط الخارجية ، النقاط الحدودية ، الانغلاق للمجموعات الخ. سندرس أيضاً مفهوم كل من الأساس والأساس الجزئي للتوبولوجي وكذلك التوبولوجي النسبي وتوبولوجي الجداء (الضرب). أخيراً نختتم هذا الفصل بدراسة مفهوم التقارب للمتتابعات في الفضاءات التوبولوجية.

(٣,١) الفضاءات التوبولوجية.

إن بناء الفضاء التوبولوجي يستند أساساً على فكرة المجموعات المفتوحة التي تطرقنا إليها في الفصل السابق ، و لقد عرفنا أن المجموعات المفتوحة في الفضاء المتري تحقق خواصاً معينة كما وردت في نظرية (٢,٤) والتي تنص على أنه في الفضاء المتري (X,d) يتحقق الآتي :

(i) كل من X, ϕ مجموعة مفتوحة.

(ii) إذا كانت $G_1, G_2, G_3, ..., G_n$ مجموعات مفتوحة فإن التقاطع

$$G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap ... \cap G_n$$

يعطي مجموعة مفتوحة.

(iii) اتحاد أي عدد من المجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة.

لهذا نعرف التوبولوجي ، على مجموعة غير خالية X ، بأنه عائلة من المجموعات الجزئية المفتوحة من X ولكي نضمن أن عناصر هذه العائلة هي مجموعات مفتوحة فيلزم أن تحقق هذه المجموعات خواص المجموعات المفتوحة الواردة في نظرية (٢,٤).

تعريف (٣,١)

لتكن X مجموعة غير خالية و τ عائلة مكونة من مجموعات جزئية من X بحيث تحقق الشروط التالية:

(i) المجموعتان X, ϕ تنتميان إلى τ.

(ii) لكل مجموعتين $A, B \in \tau$ فإن $A \cap B \in \tau$ (أي أن تقاطع عدد منته من عناصر τ يكون عنصراً في τ ايضا).

(iii) لتكن $A_i \in \tau$ فإن $\bigcup_i A_i \in \tau$.

العائلة τ تسمى توبولوجي على المجموعة X و أي مجموعة $G\in\tau$ تسمى مجموعة مفتوحة ($\tau-open$) ومكملتها تسمى مجموعة مغلقة ($\tau-closed$). ويسمى الثنائي المرتب (X,τ) فضاء توبولوجي (Topological space) .

مثال (٣,١)

بفرض أن $X=\{a,b,c\}$. فإنه يمكن تعريف التوبولوجيات التالية :

$\tau_1=\{X,\phi\}$

$\tau_2=\{X,\phi,\{a\}\}$

$\tau_3=\{X,\phi,\{b\}\}$

$\tau_4=\{X,\phi,\{c\}\}$

$\tau_5=\{X,\phi,\{a,b\}\}$

$\tau_6=\{X,\phi,\{a,c\}\}$

$\tau_7=\{X,\phi,\{b,c\}\}$

$\tau_8=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

$\tau_9=\{X,\phi,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$

$\tau_{10}=\{X,\phi,\{b\},\{c\},\{b,c\}\}$

$\tau_{11}=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\}\}$

$\tau_{12}=\{X,\phi,\{a\},\{a,c\}\}$

$\tau_{13}=\{X,\phi,\{b\},\{a,b\}\}$

$\tau_{14}=\{X,\phi,\{b\},\{b,c\}\}$

$\tau_{15}=\{X,\phi,\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$

$\tau_{16}=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$

$\tau_{17}=\{X,\phi,\{c\},\{a,c\},\{b,c\}\}$

ويمكن الحصول على توبولوجيات أخرى. علما بأن كل توبولوجي مما سبق يحقق الشروط الثلاث السابقة.

مثال (٣,٢)

إذا كانت $X=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعة. أي من التجمعات التالية تشكل توبولوجي على X :

(i) $\tau_1=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$

(ii) $\tau_2=\{X,\phi,\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,c,d\}\}$

(iii) $\tau_3=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$.

الحل

(i) τ_1 لا تمثل توبولوجي حيث أن $\{a,b\},\{a,c\}\in\tau_1$ و لكن نجد أن

$$\{a,b\}\cup\{a,c\}=\{a,b,c\}\notin\tau_1$$

و من ثم فإن τ_1 لا تحقق الشرط الثالث من شروط التوبولوجي.

(ii) τ_2 لا تمثل توبولوجي لأن $\{a,b,c\},\{a,b,d\}\in\tau_2$ ، بينما التقاطع

$$\{a,b,c\}\cap\{a,b,d\}=\{a,b\}\notin\tau_2$$

و من ثم فإن τ_2 لا تحقق الشرط الثاني من شروط التوبولوجي.

(iii) $\tau_3=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$ تمثل توبولوجي لأنها تحقق كل شروط التوبولوجي .

مثال (٣,٣)

نفرض أن X مجموعة ، فإن مجموعة القوة $P(X)$ (عائلة كل المجموعات الجزئية من X) تمثل توبولوجي على X وتسمى التوبولوجي المتقطعة (Discrete topology) أو التوبولوجي القوي. بينما التوبولوجي $\tau=\{X,\phi\}$ يسمى التوبولوجي الغير متقطع (Indiscrete topology) و يسمى أحيانا التوبولوجي الضعيف أو التوبولوجي التافه.

مثال (٣,٤)

بفرض أن X مجموعة غير خالية و أن

$$\tau=\{G\subseteq X:(X-G)\ \ finite\}\cup\{\phi\}$$

أي أن τ هي عائلة كل المجموعات الجزئية من X و التي مكملاتها تكون منتهية بالإضافة إلى المجموعة الخالية ϕ. العائلة τ تمثل توبولوجي على X يسمى توبولوجي المكملات المنتهية (Co-finite Topology) و ذلك يمكن ملاحظته من خلال دراسة مدى تحقق شروط التوبولوجي عليه:

الشرط الأول:

من التعريف نجد أن $\phi\in\tau$، و حيث أن $(X-X)=\phi$ و هي مجموعة منتهية فإن $X\in\tau$ و عليه نستنتج أن $X ,\phi\in\tau$.

الشرط الثاني:

نفرض أن $G,H\in\tau$ و المطلوب إثبات أن $G\cap H\in\tau$ ؟

بما أن $G,H\in\tau$، فإن كل من $(X-H)$ و $(X-G)$ مجموعة منتهية و من ثم فإن إتحادهما $(X-G)\cup(X-H)=X-(G\cap H)$ يكون مجموعة منتهية و من ثم نجد أن $G\cap H\in\tau$.

الشرط الثالث:

نفرض أن $\{G_i\}$ عائلة من عناصر τ و المطلوب إثبات أن $\cup_i G_i\in\tau$ ؟

حيث أن $G_i\in\tau$ لكل i فإن كل مجموعة من المجموعات $(X-G_i)$ هي مجموعة منتهية و من ثم تقاطع المجموعات المنتهية $\cap_i(X-G_i)$ مجموعة منتهية. و لكن $\cap_i(X-G_i)=X-\cup_i G_i$ و بالتالي فإن $X-\cup_i G_i$ مجموعة منتهية و عليه فإن $\cup_i G_i\in\tau$.

إذاً يمكن القول بأن τ تمثل توبولوجي على X.

مثال (٣,٥)

بفرض أن X مجموعة غير خالية و $p \in X$. العائلة

$$P = \{\phi, G \subseteq X : p \in G\}$$

تشكل توبولوجي على X يسمى توبولوجي النقطة المختارة .

الحل

الشرط الأول:

من التعريف نجد أن $\phi \in P$، و حيث أن $p \in X$ فإن $X \in P$ و علية نستنتج أن $X, \phi \in P$.

الشرط الثاني:

إذا كانت $G, H \in P$ فإن $p \in G \wedge p \in H$ و هذا يقتضي أن $p \in G \cap H$ و من ثم يكون $G \cap H \in P$.

الشرط الثالث:

نفرض أن $\{G_i\}$ عائلة من عناصر P ، فإن $p \in G_i$ و عليه فإن $p \in \cup_i G_i$ أي أن $\cup_i G_i \in P$.

إذاً $P = \{\phi, G \subseteq X : p \in G\}$ توبولوجي على X. هذ التوبولوجي يسمى توبولوجي النقطة المختارة (Particular point topology) والثنائي المرتب (X, P) يسمى فضاء النقطة المختارة .

مثال (٣,٦)

بفرض أن X مجموعة غير خالية و $p \in X$. العائلة

$$P = \{X, G \subseteq X : p \notin G\}$$

تشكل توبولوجي على X يسمى توبولوجي النقطة المستبعدة .

الحل

يترك كتمرين للقارئ.

مثال (٣,٧)

بفرض أن $X = R$ مجموعة الاعداد الحقيقية. عائلة المجموعات الجزئية من R التي على الصورة :

$$u = \{G \subseteq X : \forall x \in G,\ \exists\ \varepsilon > o : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq G\}$$

تشكل توبولوجي على X يسمى التوبولوجي العادي أو التوبولوجي الاقليدي.

الحل

الشرط الأول: واضح أ ن $R, \phi \in u$

الشرط الثاني:

بفرض أن $G_1, G_2 \in u$, وأن $x \in G_1 \cap G_2$ و من ذلك نحصل على أن $(x \in G_1) \wedge (x \in G_2)$. لذا توجد $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ بحيث يكون

$$(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \subseteq G_1 \ \ , \ \ (x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subseteq G_2 .$$

باختيار $\delta = \min\{\ \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ نجد أن

$$(x-\delta, x+\delta) \subseteq G_1 \ \ , \ \ (x-\delta, x+\delta) \subseteq G_2 .$$

إذاً

$$(x-\delta, x+\delta) \subseteq G_1 \cap G_2 \ .$$

وعليه فإن $G_1 \cap G_2 \in u$.

الشرط الثالث:

نفرض أن $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من عناصر u ، و أن $x \in \cup_i G_i$ إذاً يوجد

$G_{i_0} \in u$ بحيث أن $x \in G_{i_0}$ و من ثم يوجد $\delta > 0$ بحيث أن $(x-\delta, x+\delta) \subseteq G_{i_0}$. بما أن $G_{i_0} \subseteq \cup_i G_i$، فإن $(x-\delta, x+\delta) \subseteq \cup_i G_i$

إذاً $\cup_i G_i \in u$.

مثال (٣,٨)

بفرض أن N هي مجموعة الأعداد الطبيعية . العائلة:

$$\tau = \{\phi, N, A_n = \{1,2,,..., n\} : n \in N\}$$

تمثل توبولوجي على N.

الحل

الشرط الأول: واضح أ ن $N, \phi \in \tau$

الشرط الثاني :

بفرض أن $A_i, A_j \in \tau$, حيث $i, j \in N$ و عليه نحصل على $A_i \cap A_j = A_k \in \tau$ حيث أن $k = \min\{i.j\}$.

الشرط الثالث :

نفرض أن $A_{n_i} \in \tau$ حيث $i \in I$ و بالتالي فإن $A_{n_i} = \{1,2,..., n_i\}$ و عليه يكون $\cup A_{n_i} = \{1,2,..., k\} \in \tau$, حيث $k = \sup\{n_i : i \in I\}$ إذا كان k منته. أما إذا كان $k = +\infty$ فإن $\cup A_{n_i} = N \in \tau$.

مثال (٣,٩)

بفرض أن $X = \{0,1\}$ ، العائلة $S = \{\phi, \{1\}, X\}$ توبولوجي على المجموعة X . الزوج المرتب (X, S) فضاء توبولوجي، يسمى فضاء سيربنسكي (Sierpiński space) .

نظرية (٣,١)

بفرض أن X مجموعة غير خالية وأن كل من τ_1 و τ_2 توبولوجي على X، فإن التقاطع $\tau_1 \cap \tau_2$ توبولوجي على X.

البرهان

الشرط الأول :

بما أن $X,\phi \in \tau_1$ ، $X,\phi \in \tau_2$ فإن $X,\phi \in \tau_1 \cap \tau_2$.

الشرط الثاني:

نفرض أن $A,B \in \tau_1 \cap \tau_2$ ، إذاً $A,B \in \tau_1$ و $A,B \in \tau_2$ وبما أن كل من τ_1 و τ_2 تمثل توبولوجي على X فإن $A \cap B \in \tau_1$ و $A \cap B \in \tau_2$ وهذا يقتضي أن $A \cap B \in \tau_1 \cap \tau_2$.

الشرط الثالث:

نفرض أن $A_i \in \tau_1 \cap \tau_2$ ، إذاً $A_i \in \tau_1$ و $A_i \in \tau_2$

وبما أن كل من τ_1 و τ_2 تمثل توبولوجي فإن :

$$\cup A_i \in \tau_1 , \Rightarrow \cup A_i \in \tau_1 \cap \tau_2 \cup A_i \in \tau_2$$

لذا يمكن القول بأن $\tau_1 \cap \tau_2$ تمثل توبولوجي على X.

والآن بعد أن تأكدنا من أن تقاطع أي توبولوجيين هو توبولوجي ، فماذا عن الاتحاد $\tau_1 \cup \tau_2$؟. المثال التالي يبين أنه ليس من الضروري أن يكون الاتحاد $\tau_1 \cup \tau_2$ توبولوجي على X.■

مثال(٣,١٠)

نلاحظ أن كل من $\tau_1=\{X,\phi,\{a\}\}$ ، $\tau_2=\{X,\phi,\{b\}\}$ توبولوجي على المجموعة الغير خالية $X=\{a,b,c\}$.

من الواضح أن $\tau_1\cup\tau_2=\{X,\phi,\{a\},\{b\}\}$ ليس توبولوجي على X وذلك لأن $\{a\},\{b\}\in\tau_1\cup\tau_2$ ، بينما $\{a\}\cup\{b\}=\{a,b\}\notin\tau_1\cup\tau_2$. أي أن $\tau_1\cup\tau_2$ لا تحقق الشرط الثالث من شروط التوبولوجي.

تعريف (٣,٢)

نفرض أن كل من τ_1 و τ_2 توبولوجي على المجموعة الغير خالية X . يقال أن التوبولوجي τ_1 أضعف (coarser or weaker) من التوبولوجي τ_2 أو أن τ_2 أقوى (finer or stronger) من τ_1 إذا كان $\tau_1\subseteq\tau_2$ ويرمز لذلك بالرمز $\tau_1\le\tau_2$

نلاحظ من التعريف السابق أنه إذا كان $\tau_1\subseteq\tau_2$ فإنه لكل مجموعة $G\in\tau_1$ ، فإن $G\in\tau_2$. كما تجدر الاشارة إلى أن التوبولوجي المتقطع على مجموعة غير خالية X هو أقوى توبولوجي ، و التوبولوجي التافه هو أضعف توبولوجي على X .

كما يجدر بنا توضيح أنه إذا كانت T عائلة كل التوبولوجيات الممكنة على المجموعة X فإن $(T,\le)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

ولفهم العلاقة بين التوبولوجي الأقوى والتوبولوجي الأضعف، دعنا نتخيل فضاءً توبولوجياً يمكن تمثيل عناصره كمثل حمولة شاحنة ممتلئة بقطع الصخور، الحصيات و اتحاداتها تمثل المجموعات المفتوحة. تخيل أننا قمنا بعملية تفتيت الحصى إلى قطع صغيرة فسنجد أن عائلة الحصيات تم تكبيرها ومن ثم ننظر لها كما لو كانت توبولوجي أقوى من توبولوجي الحالة الأولى .

مثال (٣,١١)

نفرض أن $X = \{a,b,c,d\}$. و نفرض أن

$$\tau_1 = \{X, \phi, \{a\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

$$\tau_3 = \{X, \phi, \{a,b\}\}$$

نلاحظ أن $\tau_1 \leq \tau_2$ و $\tau_3 \leq \tau_2$ ولكن $\tau_2 \not\leq \tau_1$.

تعريف (٣,٣)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي. المجموعة $A \subseteq X$ تسمى جواراً للنقطة $p \in X$ إذا وجدت مجموعة $G \in \tau$ بحيث يكون $p \in G \subseteq A$.

مثال (٣,١٢)

في الفضاء الاقليدي كل مجموعة من المجموعتين $A = (-1,1)$ و $B = [-1,1]$ تعتبر جوار للنقطة $0 \in R$. بينما المجموعة $C = \{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots\}$ لا تكون جواراً لهذه النقطة.

مثال (٣,١٣)

المجموعة وحيدة النقطة $\{x\}$ تكون جواراً للنقطة $x \in X$ في الفضاء المتقطع.

نظرية (٣,٢)

المجموعة $X \subseteq A$ ، في الفضاء التوبولوجي (X,τ) ،تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت جواراً لكل نقطة من نقاطها.

البرهان

اولاً نفرض أن $G \in \tau$ و أن $x \in G$ إذاً $x \in G \subseteq G$ أي أن G جوار للنقطة x و هذا صحيح لكل نقطة $x \in G$.

ثانيا: نفرض أن G هي جوار لكل نقطة من نقاطها . أي أنه لكل $x \in G$ توجد مجموعة مفتوحة U_x بحيث أن $x \in U_x \subseteq G$ و بهذا نحصل على أن $G = \cup\{U_x : x \in G\}$ و هذا يعني أن G مجموعة مفتوحة.■

تمارين (٣,١)

(١). اكتب كل التوبولوجيات الممكنة على المجموعة $X=\{a,b,c\}$.

(٢). قارن بين جميع التوبولوجيات المعرفة على المجموعة $X=\{a,b,c\}$

(٣). بفرض أن $A,B\subseteq X$ مجموعتين غير خاليتين. أذكر الشروط التي يجب توفرها في المجموعتين A,B كي تكون العائلة $\tau=\{X,\phi,A,B\}$ توبولوجي على X.

(٤). بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي و أن $A\subseteq X$. برهن أن $A\in\tau$ إذا و فقط إذا كان لكل $x\in A$ ، فإنه توجد مجموعة $G\in\tau$ بحيث أن $x\in G\subseteq A$.

(٥). بفرض أن $\{\tau_i\}$ عائلة من التوبولوجيات المعرفة على مجموعة X. برهن أن $\cap_i\tau_i$ هو توبولوجي على X. بينما $\cup_i\tau_i$ فليس من الضروري أن يمثل توبولوجي على X.

(٦). هل العائلة $\tau=\{R,(a,\infty):a\in R\}\cup\{\phi\}$ تشكل توبولوجي على مجموعة الأعداد الحقيقية R؟. و ضح ذلك؟.

(٧). هل العائلة $\tau=\{\phi,N,E_n=\{n,n+1,n+2,...,\}:n\in N\}$ تشكل توبولوجي على مجموعة الأعداد الطبيعية N.

(٨). في الفضاء R^n بين أن دوال المسافة $d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$ و $d_2(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$ و $d_\infty(x,y)=\sup|x_i-y_i|$ تعرف نفس التوبولوجي على الفضاء R^n.

(٣,٢) المجموعات المغلقة و نقاط النهاية (التراكم)

Closed Sets and Accumulation Points

لقد استخدمنا المجموعات المفتوحة كنقطة البداية في تعريف التوبولوجي .سوف نستخدم المجموعات المفتوحة فيما يلي في تعريف و دراسة بعضاً من المفاهيم الأساسية مثل المجموعات المغلقة، إغلاق المجموعات و نقاط النهاية.

تعريف (٣,٤)

المجموعة الجزئية A من الفضاء التوبولوجي (X,τ) تسمى مجموعة مغلقة إذا كانت المجموعة $X-A=A^c$ مفتوحة.

مثال (٣,١٤)

(i) المجموعة الجزئية $R \supset [a,b]$ مغلقة لأن مكملتها

$$R-[a,b]=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$$

مجموعة مفتوحة في R

(ii) المجموعة الجزئية $R \supset [a,+\infty)$ مغلقة لأن مكملتها

$$R-[a,+\infty)=(-\infty,a)$$

مجموعة مفتوحة في R

مثال (٣,١٥)

لتكن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$ توبولوجي معرفة على المجموعة الغير خالية $X=\{a,b,c,d,e\}$. بما أن كل عناصر التوبولوجي τ

هي مجموعات جزئية مفتوحة ، فإنه بأخذ المكمل لكل عنصر من عناصر العائلة τ نحصل على عائلة المجموعات المغلقة وهي :

$$\tau^C = \{\phi, X, \{b,c,d,e\}, \{c,d,e\}, \{b,d,e\}, \{d,e\}\}$$

نظرية (٣,٣)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي. عائلة المجموعات المغلقة في الفضاء (X,τ) تحقق الخواص التالية :

(i) X, ϕ مجموعتان مغلقتان.

(ii) تقاطع أي عدد من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة.

(iii) اتحاد عدد محدود من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة.

البرهان

يترك للقارئ لسهولته . ■

تعريف (٣,٥)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي و τ^c عائلة المجموعات المغلقة بالنسبة للتوبولوجي τ. الانغلاق (closure) للمجموعة A في الفضاء التوبولوجي (X,τ) يعرف بأنه تقاطع كل المجموعات المغلقة في X والتي تحتوى المجموعة الجزئية A. أي أن :

$$\overline{A} = \cap\{F : A \subseteq F, F \in \tau^c\}.$$

وهناك تعريف آخر مكافئ لهذا التعريف وهو : الانغلاق للمجموعة الجزئية A عبارة عن أصغر مجموعة جزئية مغلقة تحتوى A ، وذلك بأنه إذا كانت F مجموعة مغلقة بحيث أن $A\subseteq F$ فإن $A\subseteq\overline{A}\subseteq F$.

مثال (٣,١٦)

بفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعة غير خالية وأن التوبولوجي

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c\},\{a,c\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$$

معرف عليها. عائلة المجموعات الجزئية المغلقة في X هي :

$$\tau^C=\{\phi,X,\{b,c,d,e\},\{a,b,d,e\},\{b,d,e\},\{a,b,e\},\{b,e\},\{a\}\}$$

(i) تقاطع كل المجموعات المغلقة التي تحتوى $\{b\}$

$$\begin{aligned}\{\overline{b}\}&=X\cap\{a,b,e\}\cap\{b,c,d,e\}\cap\{a,b,d,e\}\cap\{b,d,e\}\cap\{b,e\}\\&=\{b,e\}\end{aligned}$$

(ii) تقاطع كل المجموعات المغلقة التي تحتوى $\{a,c\}$ هي $\overline{\{a,c\}}=X$

(iii) تقاطع كل المجموعات المغلقة التي تحوى $\{b,d\}$

$$\overline{\{b,d\}}=X\cap\{b,c,d,e\}\cap\{a,b,d,e\}\cap\{b,d,e\}=\{b,d\}$$

تعريف (٣,٦)

المجموعة الجزئية A من الفضاء التوبولوجي (X,τ) تسمى مجموعة كثيفة (dense set) إذا كان $\overline{A}=X$.

مثال (٣,١٧)

في المثال السابق نجد أن المجموعة الجزئية $\{a,c\}$ كثيفة لأن $\overline{\{a,c\}}=X$، بينما المجموعة الجزئية $\{b,d\}$ ليست كثيفة.

مثال (٣,١٨)

فــي الفضـــاء التوبولــوجي الضـــعيف (الغيــر متقطــع) (X,I)، حيــث أن $I=\{X,\phi\}$، نعلم أن المجموعة الوحيدة المغلقة في هذا التوبولوجي والتي تحتوي A هي X، إذاً $\overline{A}=X$ لكل مجموعة جزئية غير خالية $A\subseteq X$.

مثال (٣,١٩)

في الفضاء التوبولوجي المتقطع (X,D)، حيث أن $D=P(X)$، فإن كل مجموعة جزئية فيه تكون مغلقة ومفتوحة في آن واحد، و من ثم فإن أصغر مجموعة مغلقة تحتوي المجموعة A هي المجموعة A ذاتها. أي أن $\overline{A}=A$. يكون $R\subseteq\overline{Q}$ و عليه يكون $\overline{Q}=R$. أي أن Q كثيفة في R.

نظرية (٣,٤)

لأي فضاء توبولوجي (X,τ) ولأي مجموعتين $A,B\subseteq X$ ، فإن :

(i) $A\subseteq\overline{A}$ لكل $A\subseteq X$

(ii) $A=\overline{A}$ إذا و فقط إذا كانت A مجموعة مغلقة.

(iii) إذا كانت $A\subseteq B$ ، فإن $\overline{A}\subseteq\overline{B}$.

البرهان

(i) إثبات هذه الفقرة يأتي مباشرة من التعريف ، حيث أن أصغر مجموعة مغلقة تحتوي المجموعة A هي $\overline{A}$.

(ii) نفرض أن $A=\overline{A}$، و حيث أن $\overline{A}$ مجموعة مغلقة (من التعريف) ، إذاً A مجموعة مغلقة.

من ناحية ثانية نفرض أن A مجموعة مغلقة، إذاً $A \subseteq \overline{A}$ ولكن $\overline{A} \subseteq A$. إذاً $A = \overline{A}$.

(iii) نفرض أن $A \subseteq B$ ، من الفقرة (i) نجد أن $A \subseteq B \subseteq \overline{B}$ و من ثم يكون فإن $A \subseteq \overline{B}$ و هذا يقتضي أن $A \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{B}$ لأن $\overline{B}$ مغلقة . أي أن $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.■

نظرية (٣,٥)

لأي فضاء توبولوجي (X,τ) و لأي مجموعتين $A,B \subseteq X$ ، فإن :

(i) $\overline{\phi} = \phi$

(ii) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$

(iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(iv) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

البرهان

(i) حيث أن ϕ مغلقة فإن $\overline{\phi} = \phi$

(ii) من كون $\overline{A}$ مغلقة (التعريف) فإن $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$

(iii) لإثبات $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ نتبع الآتي:

$$\because A \subseteq A \cup B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{A \cup B} \qquad (1)$$

$$\because B \subseteq A \cup B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B} \qquad (2)$$

من (1)و (2) نجد أن

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B} \qquad (3)$$

ومن ناحية ثانية. بما أن $B \subseteq \overline{B}$, $A \subseteq \overline{A}$ ، فإن $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ وبما أن

المجموعة $\overline{A}\cup\overline{B}$ مجموعة مغلقة تحتوى المجموعة $A\cup B$ ، بينما أصغر مجموعة مغلقة تحتوى $A\cup B$ هي انغلاقها . أي أن :

$$A\cup B\subseteq\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B} \qquad (4)$$

من (3) ، (4) نجد أن :

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

(iv) لإثبات $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$ نتبع الآتي:

$$\because A\cap B\subseteq A\Rightarrow\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A} \qquad (1)$$

$$\because A\cap B\subseteq B\Rightarrow\overline{A\cap B}\subseteq\overline{B} \qquad (2)$$

من (1)و (2) نجد أن $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$. ■

ولإثبات عدم تحقق التساوي في الفقرة (iv) نضع المثال التالي:

مثال (٣,٢٠)

نفرض أن $X=\{a,b,c,d\}$ و أن $\tau=\{X,\phi,\{a,c,d\}\}$ توبولوجي معرفة على X ، و إذا كان $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{b,d\}$ ، فإنه من السهل إثبات أن

$$\overline{A}=\{a,b,c,d\}=\overline{B}=X$$

و من ثم فإن

$$\overline{A}\cap\overline{B}=X \qquad (1)$$

بينما

$$\overline{A\cap B}=\overline{\{b\}}=\{b\} \qquad (2)$$

من (1) و (2) نحصل على $\overline{A}\cap\overline{B}\not\subset\overline{A\cap B}$.

الآن ننتقل لشرح طريقة أخرى لوصف إغلاق المجموعات. هذه

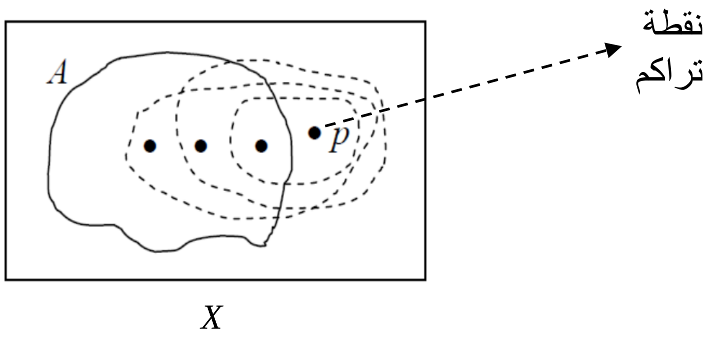
الطريقة تتم من خلال استخدام مفهوم نقاط النهاية (التراكم) للمجموعات .

تعريف (٣,٧)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي ، $p\in X$. يقال أن النقطة p هي نقطة تراكم أو نقطة نهاية (Limit Point) للمجموعة الجزئية $A\subseteq X$ إذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحتوى النقطة p تحتوى على نقطة واحدة على الأقل من A تختلف عن p, و يعبر عن ذلك رياضياً بالصيغة.

$$\forall G\in\tau, p\in G \Rightarrow (G-\{p\})\cap A\neq\phi$$

مجموعة كل نقاط النهاية (التراكم) للمجموعة A تسمى مشتقة A ويرمز لها بالرمز $A^{`}$ أو $d(A)$.



شكل (٣,١)

مثال (٣,٢١)

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ توبولوجي على المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$ ، فإذا كانت $A=\{a,b,c\}\subseteq X$ ، اوجد $A^{`}$.

الحل

(١). النقطة $a \in X$ ليست نقطة نهاية للمجموعة الجزئية A لأن المجموعة المفتوحة $\{a\} \in \tau$ والتي تحتوى النقطة a لا تحتوى على نقاط من A تختلف عن a. أي أن $a \notin A^{`}$.

(٢). النقطة $b \in X$ نقطة نهاية للمجموعة الجزئية A وذلك لأن المجموعات المفتوحة التي تحوى b هي $X, \{b, c, d, e\}$ و كل منها تحتوى على نقاط أخرى من A تختلف عن b. أي أن $b \in A^{`}$.

(٣). النقطة $c \in X$ ليست نقطة نهاية للمجموعة A، لأن المجموعة المفتوحة $\{c, d\} \in \tau$ والتي تحتوى على النقطة $c \in X$ لا تحتوى على نقاط من A تختلف عن c. أي أن $c \notin A^{`}$

(٤). بالمثل يمكن التأكد من كون كل من النقطتين $d, e \in X$ نقاط نهاية للمجموعة A. إذاً نقاط النهاية للمجموعة A هي مجموعة النقاط $A^{`} = \{b, d, e\}$.

مثال (٣,٢٢)

بفرض أن $X = \{a, b, c, d, e\}$ مجموعة غير خالية و أن التوبولوجي

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

معرف على المجموعة X، فإذا كانت $A = \{a, b, d\}$ ، اوجد $A^{`}$.

الحل

(١) العنصر $a \notin A^{`}$ لأن المجموعة المفتوحة $\{a\}$ تحوي العنصر a و لا تحوي أي عنصر من A يختلف عن a.

(٢) العنصر $b \in A^{`}$ لأنه لا يوجد سوى مجموعتين مفتوحتين تحتويان النقطة b هما $\{b,c,d,e\}$, X و كل منهما تحوي نقاط من A مختلفة عن b . أي أن :

$$(\{b,c,d,e\}-\{b\})\cap A\neq\phi \text{ و } (X-\{b\})\cap A\neq\phi$$

(٣) العنصر $c \in A^{`}$ لأن المجموعات المفتوحة التي تحوي العنصر c هي $X,\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}$ و جميعها تحتوي على نقاط من A.

(٤) العنصر $d \notin A^{`}$ لأنه توجد مجحموعة مفتوحة $\{c,d\}$ تحوي العنصر d و لكنها لا تحوي أي عنصر من A يختلف عن d . أي أن $(\{c,d\}-\{d\})\cap A=\phi$.

(٥) العنصر $e \in A^{`}$ لأن المجموعات المفتوحة التي تحوي العنصر $e$ هي $X,\{b,c,d,e\}$ و جميعها تحتوي على نقاط من $A$ . إذاً $A^{`}=\{b,c,e\}$.

مثال (٣,٢٣)

اوجد $A^{`}$ للمجموعة $A\subseteq X$ بالنسبة للفضاء المتقطع (X,D) .

الحل

نحن نعلم أنه في الفضاء المتقطع فإنه لكل نقطة $x\in X$ ، فإن المجموعة $\{x\}$ مفتوحة و من ثم يكون $(\{x\}-\{x\})\cap A=\phi$ مما يعني أنه لكل $x\in X$ فإن $x\notin A^{`}$ . وعليه يكون $A^{`}=\phi$.

مثال (٣,٢٤)

اوجد $A^{`}$ للمجموعة $A \subseteq X$ بالنسبة للفضاء الغير المتقطع (X,I) .

الحل

نحن نعلم أن $I=\{X,\phi\}$ أي أن X,ϕ هما المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان . فإذا كانت المجموعة A تحوي عنصر وحيد فقط أي أن $A=\{p\}$ فنجد أن المجموعة الوحيدة المفتوحة التي تحوي العنصر p هي المجموعة X و عليه نجد أن $(X-\{p\})\cap A=\phi$ إذاً $p \notin A^{'}$ و أي نقطة أخرى $q \in X$ بحيث أن $q \neq p$ نجد أن $(X-\{q\})\cap A \neq \phi$ و من ثم يكون $q \in A^{'}$ و حيث أن q نقطة اختيارية فإن $A^{'}=X-\{p\}=\{p\}^{C}$.

أما إذا كانت المجموعة A تحوي أكثر من عنصر فإننا نجد أن $A^{'}=X$.

وفي ضوء ذلك يمكن كتابة

$$A^{'}=\begin{cases} X-\{p\} & if \quad A=\{p\} \\ X & otherwise \end{cases}$$

وكلمة (otherwise) تعني خلاف ذلك ، أي أن المجموعة A تحوي أكثر من عنصر.

نظرية (٣,٦)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي و أن $A,B \subseteq X$ ،فإن:

(i) إذا كانت $A \subseteq B$ فإن $A^{`} \subseteq B^{`}$

$(A\cup B)^{`}=A^{`}\cup B^{`}$	(ii)
$(A\cap B)^{`}\subseteq A^{`}\cap B^{`}$	(iii)

البرهان

(i) نفرض أن $p\in X$ نقطة نهاية للمجموعة A ، أي أن $p\in A^{`}$ وذلك يعنى أن كل مجموعة مفتوحة G تحتوى النقطة p تحتوى على نقطة واحدة على الأقل من A تختلف عن p . أي أن $(G\setminus\{p\})\cap A\neq\phi$

وبما أن $A\subseteq B$ فإن ذلك يؤدى إلى أن :

$$\phi\neq(G\setminus\{p\})\cap A\subseteq(G\setminus\{p\})\cap B$$

أي أن

$$(G\setminus\{p\})\cap B\neq\phi$$

وهـذا معنـاه أن p نقطـة نهايـة للمجموعـة الجزئيـة B ومـن ثـم فإن $p\in B^{`}$ وهذا يؤدى إلى أنه $A^{`}\subseteq B^{`}$.

(ii) من إثبات البند رقم (i) نستطيع الحصول على الآتي :

$$\because\ A\subseteq(A\cup B)\Rightarrow A^{`}\subseteq(A\cup B)^{`} \qquad (1)$$

$$\because\ B\subseteq(A\cup B)\Rightarrow B^{`}\subseteq(A\cup B)^{`} \qquad (2)$$

ومن (1) ,(2) نحصل على أن :

$$A^{`}\cup B^{`}\subseteq(A\cup B)^{`} \qquad (3)$$

لإثبات أن $(A\cup B)^{`} \subseteq A^{`}\cup B^{`}$ سوف نحاول إثبات أن أي عنصر غير موجود في $A^{`}\cup B^{`}$ هو غير موجود في $(A\cup B)^{`}$ و ذلك كما يلي:

نفرض أن $p \not\in A^{`}\cup B^{`}$ فإن ذلك يؤدى إلى أن $p \not\in A^{`}$ و $p \not\in B^{`}$ ومن ثم فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان $G,H \in \tau$ بحيث يكون

$$p\in G,\ p\in H,\ (G-\{p\})\cap A=\phi\ ,(H-\{p\})\cap B=\phi$$

بما أن $p\in(G\cap H)\in\tau$ ، و في نفس الوقت

$$((G\cap H)-\{p\})\cap(A\cup B)=\phi$$

إذاً $p\not\in(A\cup B)^{`}$ و عليه يكون

$$(A\cup B)^{`} \subseteq A^{`}\cup B^{`} \qquad (4)$$

ومن (3) و (4)نجد أن:-

$$(A\cup B)^{`} = A^{`}\cup B^{`}$$

(iii) من المعلوم أن $A\cap B\subseteq A.$ و $A\cap B\subseteq B$.

باستخدام العلاقة (i) نجد أن $(A\cap B)^{`} \subseteq A^{`}$ و $(A\cap B)^{`} \subseteq B^{`}$

ومن ثم يكون

$$\blacksquare\ (A\cap B)^{`} \subseteq A^{`}\cap B^{`}.$$

ولإثبات عدم صحة الاتجاه الآخر نضح المثال التالي:

مثال (٣,٢٥)

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a,b\},\{b\}\}$ توبولوجي على المجموعة $X=\{a,b,c\}$ ، فإذا كانت $B=\{b,c\}, A=\{a,c\}$ ، فإنه يتضح أن $A^{`}=\{c\}$ ، $B^{`}=\{a,c\}$ ، و هذا يؤدي إلى أن $A^{`}\cap B^{`}=\{c\}$

و بما أن $A\cap B=\{c\}$ ، فإن $(A\cap B)^{`}=\{c\}^{`}=\phi$

$$\therefore A^{`}\cap B^{`}=\{c\}\not\subset(A\cap B)^{`}=\phi .$$

نظرية (٣,٧)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي وأن $A\subseteq X$ فإن:

(i) المجموعة A تكون مغلقة إذا و فقط إذا كان $A^{`}\subseteq A$.

(ii) المجموعة $A\cup A^{`}$ مغلقة.

البرهان

نفرض أن A مجموعة مغلقة وأن $x\notin A$ ، فإن ذلك يؤدى إلى أن A^{c} مجموعة مفتوحة وأن $x\in A^{c}$ و هذا معناه أنه توجد مجموعة مفتوحة تحتوي على النقطة x و تحقق أن $A^{c}\cap A=\phi$ ، إذاً $x\notin A^{`}$ ، و بالتالي فإن أي نقطة خارج $A$ لا تصلح أن تكون نقطة نهاية. أي أن $A^{`}\subseteq A$.

من ناحية أخرى نفرض أن $A^{`}\subseteq A$ والمطلوب إثبات أن $A$ مجموعة مغلقة. ولكي نثبت ذلك سوف نفترض أن $x\in A^{c}$ و هذا يؤدي إلى أن $x\notin A^{`}$ وهذا معناه أنه توجد مجموعة مفتوحة G_x تحقق الآتي :

$$x \in G, (G_x - \{x\}) \cap A = \phi$$

ولكن $x \notin A$ ،إذاً $G_x \cap A = \phi$ ، و هذا يقتضي أن $G_x \subseteq A^c$.

(وذلك معناه : أنه لكل $x \in A^c$ توجد مجموعة مفتوحة G_x بحيث أن $G_x \subseteq A^c$) أي أن A^c مجموعة مفتوحة نظراً لكونها اتحاد مجموعات مفتوحة G_x ومن ثم A^c مفتوحة $\Leftrightarrow A$ مغلقة .

(ii) لإثبات أن $A \cup A^{`}$ مجموعة مغلقة، سوف نثبت أن $(A \cup A^{`})^c$ مجموعة مفتوحة و ذلك كما يلي:

نفرض أن $x \in (A \cup A^{`})^c$ ، إذاً $x \notin (A \cup A^{`})$ و هذا يعني أن $x \notin A^{`}$ و $x \notin A$ . بما أن $x \notin A^{`}$ (أي أن x ليست نقطة نهاية للمجموعة A) ، فإنه توجد مجموعة مفتوحة G_x بحيث أن :

$$x \in G_x, (G_x - \{x\}) \cap A = \phi$$

ولكن $x \notin A$ ،إذاً $G_x \cap A = \phi$ و هذا يؤدي إلى أن $G_x \subseteq A^c$ ويفهم من هذا أن جميع نقاط المجموعة G_x لا يمكن أن تكون نقاط تراكم (نهاية) للمجموعة A و هذا يعني أن $G_x \cap A^{`} = \phi$ و من ثم $G_x \subseteq (A^{`})^c$.

إذاً لكل $x \notin (A \cup A^{`})$ نجد أن $G_x \subseteq A^c \cap (A^{`})^c = (A \cup A^{`})^c$. أي أن

$(A\cup A^{`})^c$ هي اتحاد مجموعات مفتوحة $G_x$ و من ثم فإنها مجموعة مفتوحة و هذا بدوره يقتضي أن مكملتها $A\cup A^{`}$ هي مجموعة مغلقة. ■

نظرية (٣,٨)

بفرض أن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي (X,τ). فإن :

$$\overline{A}=A\cup A^{`}$$

البرهان

أولاً : المجموعة $A\cup A^{`}$ مجموعة مغلقة (نظرية ٣,٨) و من ثم فإن :

$$A\subseteq \overline{A}\subseteq A\cup A^{`} \qquad (1)$$

حيث أن $\overline{A}$ هو اصغر مجموعة مغلقة تحتوى المجموعة A.

ثانيا : بما أن $A\subseteq \overline{A}$ ، $\overline{A}$ مجموعة مغلقة فإن $\overline{A}$ تحوى كل نقاط نهايتها من (نظرية ٣,٧). أي أن :

$$(\overline{A})^{`}\subseteq \overline{A} \qquad (3)$$

وبما أن $A\subseteq \overline{A}$ فمن نظرية (٣,٨)، نجد أن :

$$A^{`}\subseteq (\overline{A})^{`} \qquad (4)$$

من $(3), (4)$ نحصل على أن :

$$A^{`}\subseteq (\overline{A})^{`}\subseteq \overline{A} \qquad (5)$$

أي أن $A^{`}\subseteq \overline{A}$ وبما أن $A\subseteq \overline{A}$ فإن :

$$A\cup A^{`}\subseteq \overline{A} \qquad (6)$$

من $(1), (6)$ نحصل على أن $\overline{A}=A\cup A^{`}$. ■

تمارين (٣,٢)

(١). اثبت أن العائلة $\tau=\{R,\phi,(a,\infty):a\in R\}$ تشكل توبولوجي على مجموعة الأعداد الحقيقية R، ثم :

- اوجد المجموعات المغلقة في R.
- اوجد $\{2,5,9,...\}'$ و $\{3,7\}'$
- اثبت أن :

$\overline{[3,7)}=(-\infty,7], \overline{\{5,33,56,85\}}=(-\infty,85], \overline{\{2,5,8,...\}}=R$.

(٢). اثبت أن العائلة $\tau=\{N,\phi,E_n=\{n,n+1,n+2,...\}:n\in N\}$ تشكل. توبولوجي على مجموعة الأعداد الطبيعية N، ثم اوجد المجموعات الكثيفة في N و اوجد $\overline{\{3,6,9,12,...\}}$, $\overline{\{7,24,47,85\}}$

(٣). بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي وأن $A,B\subseteq X$. اثبت أنه إذا كانت A مجموعة مفتوحة فإن $A\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cap B}$

(٤). بفرض أن (X,τ) فضاءً توبولوجياً و أن $A,B\subseteq X$ اثبت أن $\overline{A}-\overline{B}\subseteq\overline{A-B}$

(٥). بفرض أن (X,τ) فضاءً توبولوجياً و أن $A,B\subseteq X$. ضع مثالا توضح فيه أن $\overline{A-B}\not\subset\overline{A}-\overline{B}$

(٦). برهن أن المجموعة A تكون كثيفة في X إذا و فقط إذا كانت $A^c\cap(A')^c=\phi$.

(٧). في الفضاء التوبولوجي (R,τ)) حيث $\tau=\{(a,\infty):a\in R\}\cup\{R,\phi\}$ اثبت أن المجموعتين $A=\{2,4,6,...\}$, $B=\{1,3,5,...\}$ مجموعات كثيفة في R بينما $C=\{-2,-4,-6,...\}$ ليست كثيفة في R.

(٨). برهن أن كل مجموعة جزئية منتهية من مجموعة الأعداد الحقيقية تكون مغلقة بالنسبة للتوبولوجي المعتاد على R .

(٩). بين أنه إذا كانت A مجموعة جزئية منتهية من مجموعة الأعداد الحقيقية، فإن $A^{`} = \phi$ (بالنسبة للتوبولوجي المعتاد على R).

(١٠).نفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي و أن $\{A_i\}_{i\in I}$ عائلة من المجموعات الجزئية من X ، برهن أن:

$$(i)\ \overline{(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

$$(ii)\ \overline{(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

$$(iii)\ \overline{(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)} \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} .$$

(١١).بفرض أن $cl : P(X) \to P(X)$ دالة معرفة على مجموعة القوى $P(X)$ بحث تحقق الشروط التالية:

$(i)\ cl(\phi) = \phi;$

$(ii)\ A \subseteq cl(A),\ \forall A \subseteq X;$

$(iii)\ cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B),\ \forall A, B \subseteq X;$.

$(iv)\ cl(cl(A)) = cl(A),\ \forall A \subseteq X;$

هذه الدالة تسمى مؤثر الانغلاق.

برهن أن العائلة

$$\Im = \{G \subseteq X : cl(X - G) = X - G\}$$

هي توبولوجي على X وهذا التوبولوجي وحيد.

(٣,٣) النقاط الداخلية والخارجية ونقاط الحدود للمجموعات

Interior, Exterior and Boundary points of sets

بعد أن عرفنا فيما سبق مفهوم نقاط التراكم للمجموعات . فيما يلي سنقوم بتعريف أنواعاً أخرى من النقاط للمجموعات مثل النقاط الداخلية والنقاط الخارجية و نقاط الحدود.

تعريف (٣,٨)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً و A مجموعة جزئية من X.

(i) النقطة $p \in X$ ، تسمى نقطة داخلية للمجموعة A (interior point) إذا وجدت مجموعة جزئية مفتوحة G بحيث يكون $p \in G \subseteq A$.

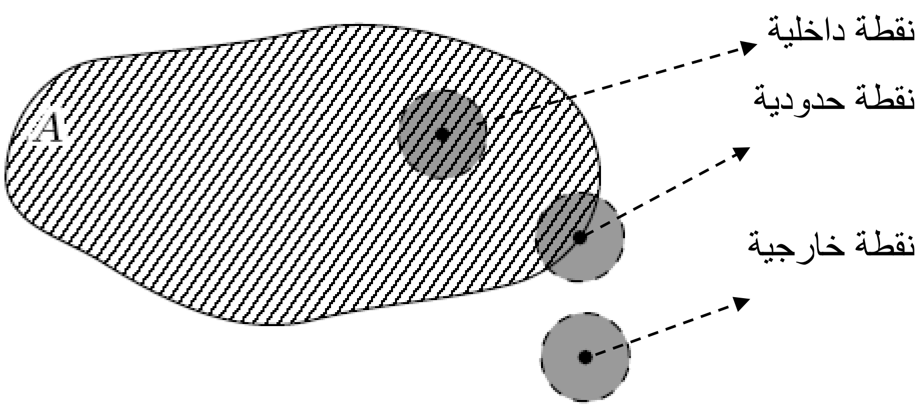
مجموعة كل النقاط الداخلية للمجموعة A تسمى داخلية A ، يرمز لها بالرمز A° أو $\operatorname{int}(A)$.

(ii) النقطة $q \in X$ ، تسمى نقطة خارجية (exterior point) للمجموعة A إذا وجدت مجموعة جزئية مفتوحة H بحيث يكون $q \in H \subseteq A^{c} = X - A$. أي أن $q \in (A^{c})^{\circ}$.

مجموعة النقاط الخارجية للمجموعة A يرمز لها بالرمز $ext(A)$.

(iii) النقطة $r \in X$ تسمى نقطة حدودية (boundary point) للمجموعة A إذا كانت r ليست نقطة داخلية و ليست نقطة خارجية. أي أن $r \in X - (A^{\circ} \cup ext(A))$.

ويرمز لمجموعة النقاط الحدودية للمجموعة الجزئية A بالرمز $b(A)$ وتسمى مجموعة حدود A.



شكل (٣,٢)

مثال (٣,٢٦)

اعتبر التوبولوجي $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ المعرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$ ، و بفرض أن $A=\{b,c,d\}$ ، فمن السهل التأكد من أن :

$$(1)\ \ A^{\circ}=\{c,d\}$$

$$(2)\ \ ext(A)=(A^{c})^{\circ}=\{a\}$$

$$(3)\ \ b(A)=\{b,e\}.$$

مثال(٣,٢٧)

بفرض أن (X,D) الفضاء التوبولوجي المتقطع ، فإنه لأي مجموعة غير خالية $A\subseteq X$ نجد أن $b(A)=\phi$, $ext(A)=A^{c}$, $A^{\circ}=A$.

مثال (٣,٢٨)

بفرض أن (X,I) الفضاء التوبولوجي الغير المتقطع ، فإنه لأي مجموعة

جزئية $A \subset X$ ($A \neq X$) نجد أن $b(A) = X$, $ext(A) = \phi$, $A^\circ = \phi$.

نظرية (٣,٩)

ليكن (X, τ) فضاءً توبولوجياً و $A \subseteq X$ فإن :

(i) A° عبارة عن اتحاد كل المجموعات المفتوحة والجزئية من A .

(ii) A° مجموعة مفتوحة.

(iii) إذا كانت G مجموعة مفتوحة بحيث أن $G \subseteq A$ فإن $G \subseteq A^\circ$.

(iv) المجموعة A تكون مفتوحة إذا وإذا كان فقط $A = A^\circ$.

البرهان

نفرض أن $\{G_i\}$ عائلة كل المجموعات المفتوحة والجزئية من A

(i) ونفرض أن $p \in A^\circ$ فإنه توجد مجموعة مفتوحة $G_0 \subseteq A$ بحيث أن

$$p \in G_0 \subseteq A$$

بما أن $G_0 \in \{G_i\}$ فإن $p \in \cup_i G_i$ ومن ثم فإن هذا يؤدى إلى أن

$$A^\circ \subseteq \cup_i G_i \qquad (1)$$

من ناحية أخرى ، نفرض أن $q \in \cup_i G_i$ و هذا يؤدى إلى أنه توجد على الأقل مجموعة مفتوحة $G_0 \subseteq A$ و تحتوى النقطة q - أي أن $q \in G_0 \subseteq A$.

ومن ثم فإن q نقطة داخلية للمجموعة A ، أي أن $q \in A^\circ$ ، إذاً

$$\cup_i G_i \subseteq A^\circ \qquad (2)$$

من (1) ، (2) نجد أن :

$A^\circ = \cup_i G_i$.

(ii) بما أن $A^\circ = \cup_i G_i$ فإن A° مجموعة مفتوحة.

(iii) بما أن G مجموعة مفتوحة وجزئية من A فإن $G \in \{G_i\}$ ومن ثم فإن $A \supseteq A^\circ = \cup_i \{G_i\} \supseteq G$.

(iv) نفرض أن $A^\circ = A$ ، إذاً المجموعة A مفتوحة، و بفرض أن A مجموعة مفتوحة مع الأخذ في الاعتبار أن $A \subseteq A$ ، فإننا نحصل من على $A \subseteq A^\circ$ و لكن $A^\circ \subseteq A$ ، فإن $A^\circ = A$.■

نظرية (٣,١٠)
ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً و $A, B \subseteq X$ فإن :
(i) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
(ii) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.

البرهان

(i) لإثبات $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ نتبع الآتي:

$$(A \cap B) \subseteq A \Rightarrow (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \qquad (1)$$

$$(A \cap B) \subseteq B \Rightarrow (A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ \qquad (2)$$

من (1) و (2) نحصل على

$$(A\cap B)^{\circ} \subseteq A^{\circ} \cap B^{\circ} \qquad (3)$$

بما أن $B^{\circ} \subseteq B$, $A^{\circ} \subseteq A$ ، فإن $A^{\circ} \cap B^{\circ} \subseteq (A\cap B)$. و لكن المجموعة $A^{\circ} \cap B^{\circ}$ مجموعة مفتوحة محتواه في $(A\cap B)$ ، فإن اكبر مجموعة مفتوحة في $(A\cap B)$ هي $(A\cap B)^{\circ}$.

إذاً $A^{\circ} \cap B^{\circ} \subseteq (A\cap B)^{\circ} \subseteq A\cap B$ ومن ثم فإن

$$A^{\circ} \cap B^{\circ} \subseteq (A\cap B)^{\circ} \qquad (4)$$

من (3) و (4) نحصل على $(A\cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$.

(ii) لإثبات $A^{\circ} \cup B^{\circ} \subseteq (A\cup B)^{\circ}$ نتبع الآتي:

$$A \subseteq (A\cup B) \Rightarrow A^{\circ} \subseteq (A\cup B)^{\circ}$$

$$B \subseteq (A\cup B) \Rightarrow B^{\circ} \subseteq (A\cup B)^{\circ}$$

$$A^{\circ} \cup B^{\circ} \subseteq (A\cup B)^{\circ} \blacksquare$$

المثال التالي يوضح أن التساوي ليس صحيحاً دائما.

مثال (٣,٢٩)

بفرض أن $X = \{a,b,c\}$ و أن $\tau = \{X,\phi,\{c\},\{a,b\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة X ، و بفرض أن $A = \{a,c\}$ و $B = \{b,c\}$. يتضح جلياً أن $A^{\circ} = \{c\}$, $B^{\circ} = \{c\}$, $A^{\circ} \cup B^{\circ} = \{c\}$ ولكن $A\cup B = X$ وعليه فإن $(A\cup B)^{\circ} = X$ أي أن $(A\cup B)^{\circ} = X \not\subset (A^{\circ} \cup B^{\circ}) = \{c\}$.

لذا فإن $(A\cup B)^{\circ} \neq (A^{\circ} \cup B^{\circ})$.

مثال (٣,٣٠)

بفرض أن $A=[0,1]$ و $B=[1,2]$ فإن $A\cup B=[0,2]$ و من ثم نجد أن

$A^\circ=(0,1)$ و $B^\circ=(1,2)$ و. كذلك $(A\cup B)^\circ=(0,2)$. بينما

$A^\circ\cup B^\circ=(0,1)\cup(1,2)$. إذاً $A^\circ\cup B^\circ\neq(A\cup B)^\circ$.

نظرية (٣,١١)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً وأن $A\subseteq X$ فإن :

$(i)\ (\overline{A})^c=(A^c)^o$

$(ii)\ (A^o)^c=\overline{(A^c)}$

البرهان

١) إثبات الفقرة (i) نفرض أن $p\in X-\overline{A}$ فإن

$$p\in X-\overline{A}\Leftrightarrow x\notin\overline{A}\Leftrightarrow\exists G\in\tau,p\in G:G\cap A=\phi$$

$$\Leftrightarrow\exists G\in\tau,p\in G:p\in G\subseteq A^c$$

$$\Leftrightarrow p\in(A^c)^o$$

اي أن $(A^c)^o=(\overline{A})^c$

٢) إثبات الفقرة (ii) بوضع $B=A^c$ في (i) نحصل على المطلوب .■

نظرية (٣,١٢)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً وأن $A\subseteq X$ فإن الخواص التالية متحققة:

$(i)\ b(A)=\overline{A}\cap\overline{(A^c)}$

$(ii)\ b(A)=b(A^c)$

$(iii)\ b(A)=\overline{A}-A^o$

البرهان

إثبات الفقرة (i)

$$b(A)=\{x\in X: x\notin A^o \wedge x\notin ext(A)\}$$

$$=\{x\in X: x\notin A^o \wedge x\notin (A^C)^o\}$$

$$=\{x\in X: x\notin \left(\overline{A^C}\right)^C \wedge x\notin (\overline{A})^C\}$$

$$=\{x\in X: x\in \overline{A^C} \wedge x\in \overline{A}\}$$

$$=\{x\in X: x\in \overline{A^C}\cap\overline{A}\}=\overline{A^C}\cap\overline{A}.$$

إثبات الفقرة (ii) يأتي من التعريف.

إثبات الفقرة (iii)

$$b(A)=\overline{A^C}\cap\overline{A}=\overline{A}\cap(A^O)^C=\overline{A}\cap(X-A^O)$$

$$=(\overline{A}\cap X)-(\overline{A}\cap A^O)$$

$$=\overline{A}-(\overline{A}\cap A^{o})$$

$$=\overline{A}-A^{o}.\blacksquare$$

نتيجة (٣,١)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً وأن $A\subseteq X$ فإن $b(A)$ مجموعة مغلقة.

البرهان

الإثبات يأتي من الفقرة (i) في النظرية السابقة حيث أن $b(A)=\overline{A}\cap\overline{A^{c}}.\blacksquare$

نتيجة (٣,٢)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً وأن $A\subseteq X$ فإن $\overline{A}=b(A)\cup A^{\circ}$

البرهان

بما أن $A^{\circ}\subseteq A\subseteq\overline{A}$ فإنه من الفقرة (iii) من النظرية السابقة نجد أن

$$A^{o}\cup b(A)=A^{o}\cup(\overline{A}-A^{o})=\overline{A}.\blacksquare$$

تمارين (٣,٣)

(١). إذا كانت $X=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعة ، و عُرف عليها التوبولوجي

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\}\}$$

فإذا كانت $A=\{c,d,e\}$ و $B=\{b\}$ ، فأوجد كل من :

$$ext(A)\,,\,b(A)\,,\,A^{\circ}\,,\,ext(B)\,,\,b(B)\,,\,B^{\circ}$$

(٢). اوجد $b(A)$ لأي مجموعة $A\subseteq X$ في الفضاء المتقطع $(X\,,D)$.

(٣). برهن أن $b(A)\subset A^{c}$ إذا و فقط إذا كانت A مجموعة مفتوحة.

(٤). برهن أن $b(A)\subset A$ إذا و فقط إذا كانت A مجموعة مغلقة.

(٥). برهن أن $b(A)=\phi$ إذا و فقط إذا كانت A مجموعة مفتوحة ومغلقة في آن واحد .

(٦). بفرض أن $(X\,,\tau)$ فضاء توبولوجي وأن $A,B\subseteq X$.

- برهن أن :

(1) $b(A\cup B)\subseteq b(A)\cup b(B).$

(2) $ext(A\cup B)=ext(A)\cap ext(B).$

- وضع بمثال أن $b(A\cup B)\neq b(A)\cup b(B).$.

(٧). بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{d\},\{a,d\},\{b,c,d\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$. حدد مجموعة جزئية $A\subseteq X$ بحيث يكون $A^{o}=\{a\},ext(A)=\{d\}\,,b(A)=\{b,c\}\,,A^{'}=\{c\}$.

(٨). بين أن المجموعة A كثيفة في X إذا و فقط إذا كانت $A^{c}\cap(A^{`})^{c}=\phi$.

(٣,٤) القواعد و القواعد الجزئيه Bases and Subbases

رأينا في بداية هذا الفصل أنه يمكن تعريف توبولوجي على مجموعة غير خالية X عن طريق تعريف المجموعات المفتوحة أو المجموعات المغلقة، ولكن هذه الطريقة قد تكون صعبة في بعض الأحيان. فهل توجد ثمة وسيلة أخرى للتعرف على التوبولوجي غير هذه الوسيلة ؟.

توجد طريقة أخرى للتعرف على التوبولوجي و ذلك عن طريق معرفة أصغر تجمع (جماعة) من المجموعات المفتوحة و هي ما يسمى بقاعدة أو أساس (Base) التوبولوجي.

تعريف (٣,٩)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً و لتكن β مجموعة جزئية من τ. تسمى β قاعدة (أو أساساً) للتوبولوجي τ إذا كان كل عنصر غير خالي من عناصر τ يمكن كتابته كاتحاد لعناصر من β . كل عنصر في β يطلق عليه اسم عنصر أساس.

تعريف (٣,١٠)

إذا كان β اساساً لتوبولوجي على مجموعة غير خالية X ، التوبولوجي τ المولد بالأساس β يمكن وصفه كالتالي: المجموعة الجزئية G من X تكون مفتوحة في X (أي ان $G\in\tau$) إذا كان لكل x في G يوجد عنصر اساس $B\in\beta$ بحيث أن $x\in B\subseteq X$

مثال (٣،٣١)

ليكن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$ توبولوجي على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$ فإن:

١) المجموعة $\beta_1=\{\{a\},\{b\},\{c,d\}\}$ تمثل قاعدة للتوبولوجي τ.

٢) المجموعة $\beta_2=\{\{a\},\{b\}\}$ لا تمثل قاعدة للتوبولوجي τ.

مثال (٣،٣٢)

في الفضاء التوبولوجي (X,τ)، تعتبر τ أساس (قاعدة) لنفسها.

مثال (٣،٣٣)

إذا كان (X,τ) الفضاء التوبولوجي المتقطع على المجموعة X، فإن المجموعة $\beta=\{\{x\}:x\in X\}$ تكون اساس (قاعدة) للتوبولوجي المتقطع.

مثال (٣،٣٤)

في فضاء التوبولوجي الإقليدي (R,τ) على الأعداد الحقيقية، مجموعة كل الفترات المفتوحة تشكل اساس (قاعدة) للتوبولوجي الإقليدي، وذلك لأنه لأي مجموعة مفتوحة $H\in\tau$ و لأي نقطة $p\in H$ توجد فترة مفتوحة $I=(p-\varepsilon,p+\varepsilon)$، بحيث يكون $p\in I\subseteq H$.

نظرية (٣،١٤)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً و β عائلة من المجموعات الجزئية المفتوحة. فإن β تكون أساس للتوبولوجي τ إذا وفقط إذا كان لكل مجموعة جزئية مفتوحة H ولكل عنصر $x\in H$ يوجد عنصرأساس B من β بحيث أن $x\in B\subseteq H$

البرهان

لتكن β قاعدة للتوبولوجي τ و $x \in H \in \tau$. فإنه من التعريف نجد أن $H = \underset{i \in I}{\cup}\{B_i : B_i \in \beta\}$. ومنها يمكن إيجاد $i_0 \in I$ بحيث أن $x \in B_{i_0} \subseteq H$.

في المقابل نفرض أن $H \in \tau$ و أنه لكل $x \in H$ يوجد $B_x \in \beta$ بحيث أن $x \in B_x \in H$ و هذا يؤدى إلى أن $H = \cup\{B_x : x \in H\}$ ، أي أن كل عنصر من τ عبارة عن اتحاد عناصر من β و هذا هو إثبات أن β أساس للتوبولوجي τ.■

بعد كل هذه الأمثلة ، فرُب سائلٍ قد يسأل :ما هي الشروط اللازم توافرها في عائلة من المجموعات الجزئية في X لكي تكون أساس لتوبولوجي ما. ولشرح مدى أهمية هذا السؤال نورد المثال التالي:

مثال (٣,٣٥)

لتكن $X = \{a,b,c\}$ مجموعة و $\beta = \{\{a,b\},\{a,c\}\}$ عائلة من المجموعات الجزئية من X. و لو افترضنا أن β هذه هي أساس لتوبولوجي ما على X و ليكن τ ، يجب أن تكون كل من $\{a,b\},\{a,c\}$ عنصر في τ ونظراً لكونهما عنصران في التوبولوجي τ، فيجب أن يكون تقاطعهما أيضا عنصر في τ ، أي أن $\{a,b\} \cap \{a,c\} = \{a\} \in \tau$.

إلا أن هذا العنصر الجديد $\{a\}$ لا يمكن التعبير عنه كاتحاد عناصر من β. لهذا يجب علينا عند اختيار β يجب أن يتوفر فيه الشرط التالي:

$$B_1, B_2 \in \beta \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \cup\{B_i : B_i \in \beta\}$$

إذاً، فأي عائلة من المجموعات الجزئية لا تصلح أن تكون أساس لأي توبولوجي إلا إذا حققت الشرط السابق ، وهذا ما سوف نراه من خلال النظرية التالية:

نظرية (٣,١٥)

لتكن β عائلة من المجموعات الجزئية غير الخالية من X. فإن β تكون أساس لتوبولوجي τ على X إذا و فقط إذا كان :-

(i) $X = \cup\{B : B \in \beta\}$

(ii) لأي $B_1, B_2 \in \beta$، فإنه يمكن التعبير عن $B_1 \cap B_2$ كاتحاد لعناصر من β أو بمعنى مكافئ لكل $p \in B_1 \cap B_2$ توجد مجموعة جزئية B_p من β بحيث أن $p \in B_p \subseteq B_1 \cap B_2$.

البرهان

اولاً: نفرض أن β أساس للتوبولوجي τ على X. من تعريف الأساس نجد الآتي:

بما أن $X \in \tau$ فإنه يمكن التعبير عن X كاتحاد لعناصر من الاساس. أي أن $X = \cup\{B : B \in \beta\}$. وايضا إذا كانت $B_1, B_2 \in \beta$، فإن $B_1, B_2 \in \tau$ من ثم يكون $B_1 \cap B_2 \in \tau$ وهذا يقتضي أن $B_1 \cap B_2 = \cup\{B_i : B_i \in \beta\}$.

ثانيا: نفرض أن β عائلة كل المجموعات الجزئية غير الخالية من X التي تحقق الشرطين (i) و (ii) وأن عائلة كل المجموعات الجزئية غير الخالية من X التي يمكن التعبير عنها كاتحاد عناصر من β. أي أن

$$\tau = \{G \subseteq X : G = \cup B_i : B_i \in \beta\}$$

سوف نحاول الآن اثبات أن τ توبولوجي على X و بالتالي β تكون اساس لهذا التوبولوجي.

الشرط الأول من شروط التوبولوجي:

من (i) نجد أن $X \in \tau$ و بما أن $\phi = \cup \phi$ حيث أن $\phi \in \beta$. أي أن ϕ يمكن التعبير عنها كاتحاد لعناصر من β و عليه يكون $X, \phi \in \tau$.

الشرط الثاني من شروط التوبولوجي:

نفرض أن $G, H \in \tau$ ، فإن

$$H = \bigcup_{j \in J} \{B_j : B_j \in \beta\} \text{ و } G = \bigcup_{i \in I} \{B_i : B_i \in \beta\}$$

و من ثم نجد أنه لكل $i \in I$ و لكل $j \in J$

$$G \cap H = (\bigcup_{i \in I} B_i) \cap (\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (B_i \cap B_j)$$

و لكن $(B_i \cap B_j)$ عبارة عن اتحاد لعناصر من β ، فإن $G \cap H$ عبارة عن اتحاد عناصر من β و من ثم نجد أن $G \cap H \in \tau$.

الشرط الثالث من شروط التوبولوجي:

نفرض أن $G_i \in \tau$. إذاً لكل $i \in I$ $\quad G_i = \cup \{B : B \in \beta\}$ وعليه يكون $\bigcup_{i \in I} G_i$ عبارة عن اتحاد عناصر من β و من ثم فإن $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$.

أي أن τ توبولوجي X على اساسه β.■

نظرية (٣,١٦)

بفرض أن X مجموعة غير خالية. لتكن β_1 اساس للتوبولوجي τ_1 على X و β_2 أساس للتوبولوجي τ_2 على X . فإن الشروط التالية متكافئة:

(i) التوبولوجي τ_1 تكون أقوى (finer) من التوبولوجي τ_2.

(ii) لكل $x \in X$ و لكل عنصرأساس $B_2 \in \beta_2$ يحوي x ، يوجد عنصر أساس $B_1 \in \beta_1$ بحيث أن $x \in B_1 \subseteq B_2$.

البرهان

$(i) \Rightarrow (ii)$ نفرض أن $x \in X$ و $B_2 \in \beta_2$ بحيث أن $x \in B_2$. بما أن $\beta_2 \subseteq \tau_2$ ، فمن التعريف و من كون $\tau_2 \subseteq \tau_1$ نجد أن $\beta_2 \subseteq \tau_1$. بما أن β_1 أساس للتوبولوجي τ_1 ، فإنه يوجد عنصر قاعدة $B_1 \in \beta_1$ بحيث أن $x \in B_1 \subseteq B_2$.

$(ii) \Rightarrow (i)$

نفرض أن $H \in \tau_2$ و نحاول إثبات أن $H \in \tau_1$. و لكي نصل إلى ذلك نفرض أن $x \in H$. بما أن β_2 اساس للتوبولوجي τ_2 ، فإنه يوجد عنصر $B_2 \in \beta_2$ بحيث أن $x \in B_2 \subseteq H$. من الشرط (ii) نجد أنه يوجد العنصر $B_1 \in \beta_1$ بحيث أن $x \in B_1 \subset B_2$ و من ثم يكون $x \in B_1 \subseteq H$ و هذا يؤدى إلى أن $H \in \tau_1$، أي أن τ_1 تكون أقوى (finer) من التوبولوجي τ_2.■

تعريف (3,11)

إذا كانت $d : X \times X \to R$ دالة مسافة على X . عائلة الكرات المفتوحة $\beta = \{B(x,\varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ تشكل أساس لتوبولوجي على X ، يسمى التوبولوجي المتري المولد بدالة المسافة d .

تعريف (3,12)

يقال للفضاء التوبولوجي (X,τ) أنه قابل للتمتر (Metrizable) إذا و فقط إذا كان τ مولداً بواسطة دالة مسافة على X.

مثال (3,36)

الفضاء التوبولوجي الاقليدي (R,u) هو فضاء قابل للتمتر، حيث أن دالة المسافة عليه هي دالة المسافة العادية التي تولد التوبولوجي المعتاد u.

مثال (3,37)

الفضاء التوبولوجي المتقطع (X,D) هو فضاء قابل للتمتر، حيث أن دالة المسافة البديهية هي التي تولد التوبولوجي المتقطع لأنه لكل $x \in X$، فإن

$$B_d(x,1) = \{y \in X : x \neq y\} = \{x\}$$

هي كرة مفتوحة ومن ثم فإن كل مجموعة أحادية العنصر هي مجموعة مفتوحة ومن ثم أي مجموعة جزئية من X هي مجموعة مفتوحة.

بعد أن عرفنا أن التوبولوجي المولد بالأساس β يمكن أن يوصف على أنه عائلة من الاتحادات الاختيارية لعناصر من القاعدة β . فرب سؤال قد يقع: ماذا لو بدأنا بجماعة من المجموعات الجزئية و أخذنا تقاطعات منتهية لها تماماً

مثل الاتحادات الاختيارية؟. هذا السؤال يقودنا نحو ، نوعية جديدة من الأساسات (القواعد) للتوبولوجي ، تسمى الأساسات (القواعد) الجزئية.

تعريف (3,13)

ليكن (X,τ) فضاءً توبولوجياً ، العائلة $S \subseteq \tau$ تسمى قاعدة جزئية (أو أساساً جزئياً) للتوبولوجي τ إذا كانت العائلة الناتجة من تقاطعات منتهية لعناصر من S تشكل أساس β للتوبولوجي τ .

و هذا يعني أن كل عنصر أساس B من عناصر الأساس β عبارة عن تقاطع لعدد منتهٍ من عناصر S مع الأخذ في الاعتبار أن التقاطع الخالي يعطى المجموعة X .

مثال (3,38)

إذا كانت $X=\{a,b,c,d\}$ و $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ فإن العائلة $S=\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ تشكل قاعدة جزئية للتوبولوجي τ . بأخذ تقاطعات عناصر S لإيجاد القاعدة β كما يلي:

$$\{a\}\cap\{a\}=\{a\}\ ,\ \{b\}\cap\{b\}=\{b\}\ ,\ \{a\}\cap\{b\}=\phi$$

العائلة $\beta=\{X,\phi,\{a\},\{b\}\}$ أساس للتوبولوجي $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.

مثال (3,39)

هل العائلة $S=\{\{a\},\{c\},\{a,b\}\}$ تشكل اساس جزئي للتوبولوجي

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$$

على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$.

الحل

التقاطعات المنتهية لعناصر العائلة $S=\{\{a\},\{c\},\{a,b\}\}$ كالتالي:

$$\{a\}\cap\{a\}=\{a\}\,,\,\{c\}\cap\{c\}=\{c\}\,,\,\{a\}\cap\{c\}=\phi$$
$$\{a,b\}\cap\{a,b\}=\{a,b\}\,,\,\{a,b\}\cap\{a\}=\{a\}\,,\,\{a,b\}\cap\{c\}=\phi$$

واضح أن العائلة $\beta=\{X,\phi,\{a\},\{c\},\{a,b\}\}$ أساس للتوبولوجي τ . إذاً S هي أساس جزئي لهذا التوبولوجي.

مثال (3,40)

في الفضاء التوبولوجي المنفصل (X,D)، العائلة $S=\{\{a,b\}:a,b\in X\}$ اساس جزئي للتوبولوجي المتقطع (القوي) D على X. ولتوضيح ذلك نفرض أن $X=\{a,b,c\}$. التوبولوجي المتقطع يأخذ الصورة

$$D=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$$

فإن العائلة $S=\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$ تشكل اساس جزئي للتوبولوجي D. لأن التقاطعات المنتهية لعناصر S هي $\beta=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$ والتي تعتبر اساس للتوبولوجي D على X.

مثال (3,41)

العائلة $S=\{(-\infty,b),(a,\infty):a,b\in R\}$ تعتبر اساس جزئي للتوبولوجي u على مجموعة الاعداد الحقيقية R وذلك لأن التقاطعات المنتهية لعناصر S هي $\beta=\{(a,b)=(-\infty,b)\cap(a,\infty):a,b\in R,a<b\}$ و هي أساس للتوبولوجي u على R.

نختتم موضوع الاساس و الأساس الجزئي بتعريف نوع خاص من الفضاءات التوبولوجية يسمى بالفضاء ذو بعد صفري (zero-dimensional) و هذا الفضاء سيرد ذكره فيما بعد عند دراسة موضوع الفضاءات الغير مترابطة .

تعريف (3,14)

الفضاء التوبولوجي الذي عناصر أساسة أو أساسه الجزئي عبارة عن مجموعات مفتوحة و مغلقة في نفس الوقت يسمي فضاء بعده صفري أو فضاء ذو بعد صفري (zero-dimensional).

أمثلة

كل فضاء من الفضاءات التالية هو فضاء ذو بعد صفري:

(١) الفضاء المتقطع و الفضاء الغير متقطع.

(٢) كل فضاء توبولوجي (X,τ) بحيث أن $A\in\tau \Leftrightarrow A^c\in\tau$ هو فضاء بعده صفري.

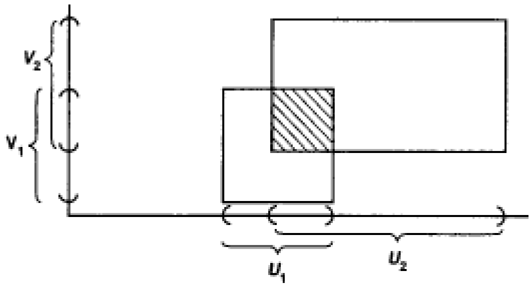
(٣,٥) توبولوجي الجداء (الضرب) Product topology

إذا كان كل من (X_1,τ_1) و (X_2,τ_2) فضاء توبولوجي . هل توجد طريقة لتعريف توبولوجي على مجموعة الضرب الديكارتي $X_1\times X_2$؟. فيما يلي سوف ندرس كيفية تعريف مثل هذا التوبولوجي و ما هي خواصه.

تعريف (3,15)

بفرض أن كل من (X_1,τ_1) و (X_2,τ_2) فضاء توبولوجي. التوبولوجي الضربي (الجدائي) على $X_1\times X_2$ هو التوبولوجي المولد بالأساس

$$\beta=\{U\times V: U\in\tau_1, V\in\tau_2\}.$$



شكل (٣,٣)

قبل الشروع في دراسة خواص هذا التوبولوجي دعنا نتأكد من أن هذا الأساس هو فعلاً أساس لتوبولوجي على $X_1\times X_2$

الشرط الأول للأساس متحقق لأن $X_1\times X_2\in\beta$ و ذلك من تعريف β و من كون $X_1\in\tau_1$, $X_2\in\tau_2$.

الشرط الثاني للأساس متحقق لأنه إذا كانت $B_1,B_2\in\beta$ حيث أن

$$B_1=U_1\times V_1, B_2=U_2\times V_2$$

فإن

$$B_1 \cap B_2 = (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$$
$$= (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$
$$= U \times V$$
$$= B_3 \in \beta$$

و ذلك لأن τ_1 $(U_1 \cap U_2) = U \in \tau_1$ بموجب أن τ_1 توبولوجي على X_1 ، و أيضاً $(V_1 \cap V_2) = V \in \tau_2$ بموجب أن τ_2 توبولوجي على X_2 .

إذاً β أساس للتوبولوجي الضربي على $X_1 \times X_2$.

نظرية (٣,١٧)

بفرض أن β_1 أساس للتوبولوجي τ_1 على X_1 و β_2 أساس للتوبولوجي τ_2 على X_2 . العائلة:

$$\beta = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \beta_1, B_2 \in \beta_2\}$$

هي أساس لتوبولوجي على $X_1 \times X_2$.

البرهان

نفرض أن W مجموعة مفتوحة في $X_1 \times X_2$ و أن $q \in W$،حيث أن $q = (a,b)$. من تعريف التوبولوجي الضربي على $X_1 \times X_2$ ، فإنه يوجد عنصر أساس $U \times V$ بحيث أن

$$q = (a,b) \in U \times V \subseteq W$$

و بما أن β_1 أساس للتوبولوجي τ_1 ،فإنه توجد $B_1 \in \beta_1$ بحيث أن

$$a \in B_1 \subseteq U$$

و بما أن β_2 أساس للتوبولوجي τ_2، فإنه توجد $B_2 \in \beta_2$ بحيث أن

$$b \in B_2 \subseteq V$$

أي أنه يوجد $B_1 \in \beta_1$ و $B_2 \in \beta_2$ بحيث أن

$$q = (a,b) \in B_1 \times B_2 \subseteq U \times V \subseteq W$$

و هذا يعني أن $\beta = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \beta_1, B_2 \in \beta_2\}$ هي أساس للتوبولوجي الضربي على $X_1 \times X_2$. ■

مثال (٣,٤١)

نحن نعلم أن عائلة كل الفترات المفتوحة في R هي أساس للتوبولوجي المعتاد (الاقليدي) على R. بناءً على هذا يمكن اعتبار العائلة

$$\beta = \{(a,b) \times (c,d) : a < b, c < d, a,b,c,d \in R\}$$

تشكل أساساً لتوبولوجي على $R \times R$ يسمى التوبولوجي العادي على $R \times R$.

(٣,٦) الفضاءات الجزئية و التوبولوجي النسبي

Subspaces and Relative topology

نظرية (٣,١٨)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي و A مجموعة جزئية من X. العائلة

$$\tau_A=\{G\cap A:G\in\tau\}$$

تمثل توبولوجي على المجموعة الجزئية A.

البرهان

من السهل جداً اثبات أن العائلة $\tau_A=\{G\cap A:G\in\tau\}$ يحقق الشروط الثلاث للتوبولوجي وذلك لما يلي:

أولا الشرط (i)

$A,\phi\in\tau_A$ لأن

$$\phi=\phi\cap A \text{ و } A=X\cap A$$

حيث أن $X,\phi\in\tau$.

ثانياً الشرط (ii)

ليكن $V,W\in\tau_A$ أي أن توجد $G,H\in\tau$ بحيث أن

$$W=H\cap A, V=G\cap A$$

لذا نجد أن

$$\begin{aligned}V\cap W&=(G\cap A)\cap(H\cap A)\\&=(G\cap H)\cap A\end{aligned}$$

و بما أن $G,H\in\tau$ ، فإن $G\cap H\in\tau$ و من ثم يكون $V\cap W\in\tau_A$.

ثالثاً الشرط (iii)

نفرض أن $\{V_i\}_{i\in I}$ عائلة جزئية من τ_A، فإنه لكل $V_i\in\tau_A$ يوجد $G_i\in\tau$ بحيث يكون $V_i=A\cap G_i$. لكون $G_i\in\tau$ يقتضي أن $\cup_i G_i\in\tau$ و من ثم يكون $\cup_i V_i=\cup_i(A\cap G_i)=A\cap(\cup_i G_i)$ أي أن $\cup_i V_i\in\tau_A$.■

تعريف (3,16)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي و A مجموعة جزئية من X. التوبولوجي $\tau_A=\{G\cap A : G\in\tau\}$ يسمى التوبولوجي النسبي (relative topology) والفضاء التوبولوجي المولد (A,τ_A) يسمى فضاء جزئي (subspace) من الفضاء التوبولوجي (X,τ).

مثال (٣,٤٣)

بفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعة و أن التوبولوجي المعرف عليها هو

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$$

فإذا كانت $A=\{a,d,e\}\subseteq X$ مجموعة جزئية فإن :

$$\tau_A=\{G\cap A : G\in\tau\}=\{A,\phi,\{a\},\{d\},\{a,d\},\{d,e\}\}$$

مثال (٣,٤٤)

بفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعة غير خالية و ليكن

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,e\},\\ \{a,b,c,e\},\{a,b,c,d\}\}$$

توبولوجي معرف عليها .فأوجد عناصر التوبولوجي النسبي τ_A على المجموعة الجزئية $A=\{a,c,e\}\subseteq X$.

الحل

التوبولوجي النسبي يعطى من العلاقة

$$\tau_A=\{G\cap A: G\in\tau\}=\{A,\phi,\{a\},\{a,c\},\{a,e\}\}.$$

مثال (٣,٤٥)

بفرض أن R مجموعة الأعداد الحقيقية ومعرف عليها التوبولوجي المعتاد (الاقليدي). التوبولوجي النسبي المعرف على مجموعة الأعداد الصحيحة هو التوبولوجي المتقطع على Z حيث أنه لكل عدد صحيح a نجد أن $\{a\}=Z\cap(a-\tfrac{1}{2},a+\tfrac{1}{2})$.

تمهيدة (٣,٢)

ليكن (A,τ_A) فضاءً جزئياً من الفضاء التوبولوجي (X,τ). فإذا كانت $A\in\tau$ و $B\in\tau_A$. فإن B مفتوحة بالنسبة للتوبولوجي τ.

البرهان

بما أن $B\in\tau_A$، فإنه توجد مجموعة $G\in\tau$ بحيث أن $B=A\cap G$. بما أن كل من $G,A\in\tau$ فإن $B=A\cap G\in\tau$. ■

مثال (٣,٤٦)

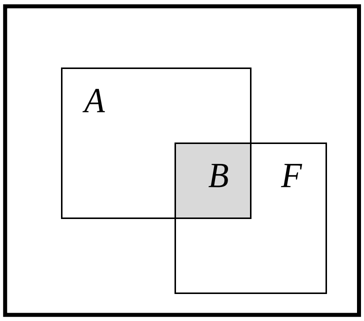
لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية و معرف عليها التوبولوجي T المولد بعائلة الفترات المفتوحة $(a,b)=\{x:a<x<b\}$ ولتكن $A=[0,1)\cup\{2\}$ مجموعة جزئية من R. المجموعة وحيدة العنصر $\{2\}$ مفتوحة بالنسبة للتوبولوجي النسبي T_A لأنها عبارة عن تقاطع الفترة المفتوحة $(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$ مع المجموعة A. أي أن $\{2\}=A\cap(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$.

نظرية (٣,١٩)

ليكن (A,τ_A) فضاءً جزئياً من الفضاء التوبولوجي (X,τ). المجموعة $B\subseteq A$ تكون مغلقة بالنسبة للتوبولوجي النسبي τ_A إذا وفقط إذا وجدت مجموعة جزئية F مغلقة بالنسبة للتوبولوجي τ بحيث أنه $B=F\cap A$.

البرهان

أولا : نفرض أن $B=F\cap A$ حيث أن F مجموعة مغلقة في X (انظر الشكل التالي).



شكل (٣,٤)

المكملة $F^c = X - F$ تكون مجموعة مفتوحة ، أي أن

$F^c = (X - F) \in \tau$ وهذا يؤدى إلى أنه

$(F^c) \cap A = (X - F) \cap A \in \tau_A$ (من تعريف الفضاء الجزئي)

وبما أن

$$A - B = A - (A \cap F) = A \cap (A \cap F)^c$$

$$= A \cap (A^c \cup F^c)$$

$$= (A \cap A^c) \cup (A \cap F^c)$$

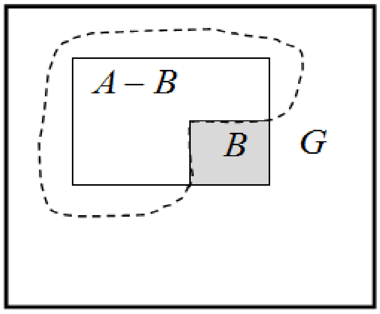
$$= A \cap F^c = A \cap H : H \in \tau .$$

فإن $(A - B) \in \tau_A$ ومن ثم فإن B مجموعة مغلقة بالنسبة للتوبولوجي τ_A.

ثانيا : نفرض أن B مجموعة مغلقة بالنسبة للتوبولوجي النسبي τ_A.

وهذا يؤدى إلى أن $(A - B) \in \tau_A$. نفرض أن $H = (A - B) \in \tau_A$

ولذا فإنها تكون عبارة عن تقاطع مجموعة مفتوحة في X ولتكن $G \in \tau$ مع A (انظر الشكل التالي).



شكل (٣,٥)

أي أن $H=(A-B)=A\cap G:G\in\tau$ وهذا يؤدى إلى أن:

$$B=A-H=A-(A\cap G)=A\cap G^c=A\cap(X-G)=A\cap F$$

حيث أن F مجموعة مغلقة بالنسبة للتوبولوجي τ.■

نظرية (3,20)

ليكن (A,τ_A) فضاءً جزئياً من الفضاء التوبولوجي (X,τ) و أن $B\subseteq A$. فإن $A\cap(\overline{B})_X=(\overline{B})_A$، حيث أن $(\overline{B})_A$ هو إغلاق المجموعة B بالنسبة للتوبولوجي τ_A و $(\overline{B})_X$ هو إغلاق المجموعة B بالنسبة للتوبولوجي τ.

البرهان

باستخدم تعريف إنغلاق المجموعة الجزئية B بالنسبة للتوبولوجي النسبي τ_A

$$(\overline{B})_A=\cap\{K:B\subseteq K,A-K\in\tau_A\}$$
$$=\cap\{K=A\cap F:B\subseteq(A\cap F),\ F^c\in\tau\}$$
$$=\cap\{A\cap F:B\subseteq F,\ F^c\in\tau\}$$
$$=A\cap(\cap\{F:B\subseteq F,\ F^c\in\tau\})$$
$$=A\cap(\overline{B})_X.■$$

(٣,٧) المتتاليات في الفضاءات التوبولوجية

Sequences in topological spaces

سوف نختم هذا الفصل بتعريف تقارب المتتاليات في الفضاءات التوبولوجية حتى نلاحظ الفرق بين تقارب المتتاليات في الفضاءات التوبولوجية و التقارب الذي درسناه سابقاً في مقررات التحليل.

تعريف (٣,١٧)

بفرض أن (X,τ) فضاء التوبولوجي و $(x_n)_n \in X$ متتالية (متتابعة) . يقال أن المتتالية $(x_n)_n$ تتقارب من النقطة $x_0 \in X$ إذا كان لكل مجموعة مفتوحة $G \subseteq X$ تحوي x_0 يوجد عدد طبيعي $n_0 \in N$ بحيث أن $x_n \in G$ لكل $n \geq n_0$.

مثال (٣,٤٧)

ليكن (X,τ) الفضاء التوبولوجي التافه (الغير متقطع). المتتالية $(x_n)_n$ في X تتقارب من كل نقطة $x \in X$ لأن المجموعة الوحيدة المفتوحة و الغير خالية هي X.

مثال (٣,٤٨)

ليكن (X,D) الفضاء التوبولوجي المتقطع. المتتالية $(x_n)_n$ في X تكون تقاربية إذا و فقط إذا وجد $n_0 \in N$ بحيث أن $x_n = x_{n_0}$ لكل $n \geq n_0$.

مثال (٣,٤٩)

ليكن (N,C) فضاء توبولوجيا المكملات المنتهية على مجموعة الأعداد الطبيعية. لتكن $(x_n)_n \in N$ متتالية بحيث أن $x_n \neq x_m$ لكل $n \neq m$. إذاً $(x_n)_n$ متقاربة و كل عدد طبيعي هو نهاية لهذه المتتالية في (N,C).

نظرية (٣,٢١)

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي، و أن $A \subseteq X$. فإذا وجدت متتالية من نقاط المجموعة A تتقارب إلى النقطة x ، فإن $x \in \overline{A}$ و العكس يكون صحيحا إذا كان (X,τ) قابل للتمتر .

البرهان

نفرض أن $x_n \in A$ و أن $x_n \to x$. إذاً كل جوار G للنقطة x يحوي نقطة من A أي ان $G \cap A \neq \phi$ و هذا يعني أن $x \in \overline{A}$ (نظرية (٣,٤)).

من ناحية أخرى، نفترض أن الفضاء (X,τ) قابل للتمتر و أن $x \in \overline{A}$.

لإثبات أنه توجد متتالية $(x_n)_n$ بحيث أن $x_n \to x$ نفرض أن $d : X \times X \to R$ متري للتوبولوجي τ على X. لكل عدد صحيح موجب n نختار الكرة المفتوحة $B_d(x,\frac{1}{n})$ و التي مركزها x و نصف قطرها $\frac{1}{n}$. نختار المتتالية x_n كنقطة من تقاطع الكرة $B_d(x,\frac{1}{n})$ مع المجموعة A ، أي أن

$$x_n \in A \cap B_d(x,\tfrac{1}{n})$$

نلاحظ الآن أن أي مجموعة مفتوحة G تحوي x فإنها تحوي أيضاً كرة مفتوحة $B_d(x,\varepsilon)$ مركزها x و نصف قطرها ε. بإختيار العدد الصحيح $n_0 \in N$ بحيث يكون $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$، فإن المجموعة المفتوحة G تحوي الحدود x_i لجميع قيم $i \geq n_0$ و هذا يعني أن $x_n \to x$. ■

تمارين (٣,٤)

(١) إذا كانت $X=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعة ، و عُرف عليها التوبولوجي $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\}\}$ و بفرض أن $A=\{a,c,d\}\subseteq X$ ، فأوجد التوبولوجي النسبي τ_A.

(٢) إذا كان (X,τ) فضاء توبولوجي متقطع، $Y\subseteq X$. فبين أن الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) هو ايضا فضاء توبولوجي متقطع على Y.

(٣) إذا كان (X,I) الفضاء التوبولوجي الغير متقطع، $Y\subseteq X$. فبين أن الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) هو ايضا فضاء غير متقطع على Y.

(٤) بفرض أن $Y=(0,1]$ فضاء جزئي من مجموعة الأعداد الحقيقية R. اوجد انغلاق المجموعة $A=(0,\frac{1}{2})$ في كل من الفضاء الجزئي Y و R.

(٥) إذا كانت $X=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعة، و عُرف عليها التوبولوجي التالي: $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\}\}$

فإذا كانت $A=\{c,d,e\}$ و $B=\{b\}$ ، فأوجد

$$A',\ \overline{A},\ ext(A),\ b(A),\ A^{\circ},\ B',\ \overline{B},\ ext(B),\ b(B),\ B^{\circ}$$

(٦) ليكن (A,τ_A) فضاءً جزئياً من الفضاء التوبولوجي (X,τ) و أن $B\subseteq A$. فاثبت أن:

- $(B)'_A=(B)'_X\cap A$ ، حيث أن $(B)'_A$ هو مجموعة نقاط النهاية للمجموعة B بالنسبة للتوبولوجي τ_A و $(B)'_X$ مجموعة نقاط النهاية للمجموعة B بالنسبة للتوبولوجي τ.

- $(B)^o_A = (B)^o_X \cap A$ ، حيث أن $(B)^o_A$ هو مجموعة النقاط الداخلية للمجموعة B بالنسبة للتوبولوجي τ_A و $(B)^o_X$ مجموعة النقاط الداخلية للمجموعة B بالنسبة للتوبولوجي τ.

(٧) إذا كانت $X = \{a,b,c\}$. بين أن العائلة $S = \{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$ هي اساس جزئي للتوبولوجي $\tau = \{X,\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$.

(٨) بفرض أن $X = \{a,b,c,d,e\}$. اوجد التوبولوجي المولد بالعائلة $\{\{a\},\{a,b,c\},\{c,d\}\}$.

(٩) اعتبر كل من التوبولوجي $\tau_1 = \{A : A \subseteq R\}$ والتوبولوجي $\tau_2 = \{R,\phi\}$ على مجموعة الاعداد الحقيقية R. ادرس تقارب المتتالية التي حدها العام $a_n = \frac{1}{n}$ في الفضائين (R,τ_1) و (R,τ_2).

(١٠) بفرض أن $X = \{a,b,c,d,e\}$. اوجد التوبولوجي المولد بالعائلة $\{\{a\},\{a,b,c\},\{c,d\}\}$.

(١١) برهن أن العائلة $S \subset P(X)$ تكون أساس جزئي لتوبولوجي وحيد على المجموعة الغير خالية X.

الموضوع	Presentation tupe	Youtube
الفضاءات التوبولوجية	https://slideator.com/watch/?v=jQKrj87LTOf	https://www.youtube.com/watch?v=gtOE8yjz3Nk&t=161s
النقاط الداخلية	https://slideator.com/watch/?v=nCbilCAbWKX	https://www.youtube.com/watch?v=jtH0ZAtHIfM&t=32s

الفصل الرابع

الدوال المتصلة والتكافؤ التوبولوجي

Continuous Functions and Topological Equivalence

مقدمة

درسنا في الفصل الثالث الفضاءات التوبولوجية و لاحظنا أن المجموعات المفتوحة تلعب دوراً رئيسياً في بناء هذه الفضاءات كما إنها تمثل عناصر التوبولوجي المعرف على مجموعة ما. و أيضا بعد دراستنا لمفهوم الدوال المتصلة بين الفضاءات المترية و الدور الذي تلعبه المجموعات المفتوحة في تحقيق مفهوم الاتصال لهذه الدوال سوف نحاول في هذا الفصل دراسة مفهوم اتصال الدوال في حالة غياب مفهوم الدالة المترية . في هذه الحالة سيتم تعريف الدوال المتصلة بين الفضاءات التوبولوجية، مع دراسة خواص الدوال المتصلة . أخيرا سنتعرض لمفهوم الدوال المفتوحة و الدوال المغلقة وكذلك التشاكل التوبولوجي.

(٤,١) الدوال المتصلة في الفضاء المتري

Continuous functions in Metric Space

قد تعاملنا فى دارستنا لمبادئ التحليل الرياضى (حساب التفاضل والتكامل) مع مفهوم الدوال المستمرة (المتصلة) حيث كان يقصد بأن الدالة :

$$f : R \to R$$

تكون متصلة عند النقطة $a \in R$ إذا تحقق الشرط:

لكل $x \in R$ يجب أن يكون " العدد الحقيقي $f(x)$ قريباً من العدد الحقيقى $f(a)$ بمقدار يتناسب مع قرب العدد الحقيقى x من العدد a في مجال الدالة".

أي أن اقتراب العدد الحقيقي x من العدد الحقيقي a يقتضي اقتراب العدد الحقيقي $f(x)$ من العددالحقيقي $f(a)$. ويمكن إعادة صياغة هذا المعنى بصورة أكثر وضوحاً بأن يقال أن الدالة $f : R \to R$ تكون متصلة عند النقطة $a \in R$ إذا تحقق الشرط :

كلما اقتربت x من a بدرجة (ولتكن $\delta > 0$) فإن $f(x)$ تقترب من $f(a)$ بدرجة مناظرة (ولتكن $\varepsilon > 0$).

لذلك نستطيع صياغة تعريف اتصال الدالة $f : R \to R$ في الصيغة الرياضية التالية:

تعريف (٤,١)

يقال أن الدالة $f : R \to R$ متصلة عند النقطة $a \in R$ إذا وفقط إذا كان لكل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$، يوجد عدد حقيقي مناظر $\delta > 0$ بحيث أنه إذا كان

فإن $|x-a|<\delta$ فإن $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

يقال أن الدالة f متصلة متى كانت متصلة عند كل نقطة من نقاط مجالها.

مما تقدم نلاحظ أن الصيغة $|x-a|<\delta$ تعنى أن $a-\delta<x<a+\delta$ أو بمعنى آخر أن x تنتمي إلى الفترة المفتوحة (الجوار) $(a-\delta,a+\delta)$ وبالمثل فإن الصيغة $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ تعنى أن العدد الحقيقي $f(x)$ ينتمي إلى الفترة المفتوحة (الجوار) $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ ولذا نستطيع إعادة صياغة تعريف الاتصال للدالة $f:R\to R$ بأن نقول أنه إذا كان لأي $\varepsilon>0$ فإنه يوجد $\delta>0$ بحيث يتحقق $f(x)\in(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ كلما كان $x\in(a-\delta,a+\delta)$.

مثال(٢, ٤)

لتكن $f:R\to R$ دالة معرفة على الاعداد الحقيقية بالصيغة

$$f(x)=ax+b,\ \ \forall(a,b)\in R, a\neq 0$$

. هذه الدالة متصلة لجميع نقاط المجموعة R.

الحل:

نفرض $y\in R$ و $\varepsilon>0$. لكي نحصل على $\delta>0$ مناسبة إلى ε نستخدم المتباينة $|(ax+b)-(by+c)|<\varepsilon$ وهذا يؤدي إلى إن $|x-y|<\frac{\varepsilon}{|a|}$ و بهذا لو وضعنا $\delta=\frac{\varepsilon}{|a|}$ فنجد أن الدالة $f:R\to R$ متصلة عند النقطة y وبما أن y نقطة اختيارية من R فإن الدالة متصلة على R.

فيما يلي سنحاول تعميم تعريف مفهوم الاتصال من اتصال الدوال على مجموعة الاعداد الحقيقية ليكون على أي فضاء متري.

تعريف(٤,٣)

ليكن كل من (X_1,d_1) و (X_2,d_2) فضاء متري. يقال أن الدالة

$$f : X_1 \to X_2$$

دالة متصلة عند النقطة $a \in X_1$ إذا كان لأي $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta > 0$ بحيث أنه

$$\forall x \in B_{d_1}(a,\delta) \Rightarrow f(\mathrm{x}) \in B_{d_2}(f(\mathrm{a}),\varepsilon)$$

وهذا يكافئ القول بأن:

$$f(B_{d_1}(\mathrm{a},\delta)) \subseteq B_{d_2}(f(\mathrm{a}),\varepsilon).$$

نظرية (٤,٤)

ليكن كل من (X_1,d_1) و (X_2,d_2) فضاءاً مترياً. يقال أن الدالة

$$f : X_1 \to X_2$$

متصلة عند النقطة $a \in X_1$ إذا كان لأي $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون

$$B_{d_1}(\mathrm{a},\delta) \subseteq f^{-1}(B_{d_2}(f(\mathrm{a}),\varepsilon)).$$

البرهان

يترك للقارئ كتمرين.■

فى كل ما قدمناه مازلنا نستخدم تعريف"$\varepsilon - \delta$" الشهير فى إثبات الاتصال للدوال ولكنه بعد أن عرفنا الآن ما هو المقصود بالجوار لنقطة ما، وأن الكرة المفتوحة هى جوار لكل نقطة بها نستطيع إعادة صياغة مفهوم

الاتصال وذلك بإعادة صياغة الشرطين المتكافئين الذين ورد ذكرهما فيما سبق و هما.

$$f(B_{d_1}(\mathrm{a},\delta)) \subseteq B_{d_2}(f(\mathrm{a}),\varepsilon)$$

أو

$$B_{d_1}(\mathrm{a},\delta) \subseteq f^{-1}(B_{d_2}(f(\mathrm{a}),\varepsilon))$$

وحيث أن $B_{d_2}(f(\mathrm{a}),\varepsilon)$ كره مفتوحة وجوار للنقطة $f(a)$ وأيضا $B_{d_1}(\mathrm{a},\delta)$ كره مفتوحة وجوار للنقطة a.

فإذا وضعنا $N = B_{d_1}(\mathrm{a},\delta)$ و $M = B_{d_2}(f(\mathrm{a}),\varepsilon)$ فإن الشرطين السابقين يمكن وضعهما فى الصيغة:

$$N \subseteq f^{-1}(M) \quad \text{أو} \quad f(N) \subseteq M$$

نظرية (٤,٥)

ليكن كل من (X,d) و $(Y,d^{\backslash})$ فضاء متري. الدالة

$$f: X \to Y$$

تكون متصلة عند النقطة $x \in X$ إذا وفقط إذا كان لكل جوار V للنقطة $f(x)$ ، يوجد جوار مناظر U لنقطة x بحيث أن

$$U \subseteq f^{-1}(V) \quad \text{أو} \quad f(U) \subseteq V$$

البرهان.

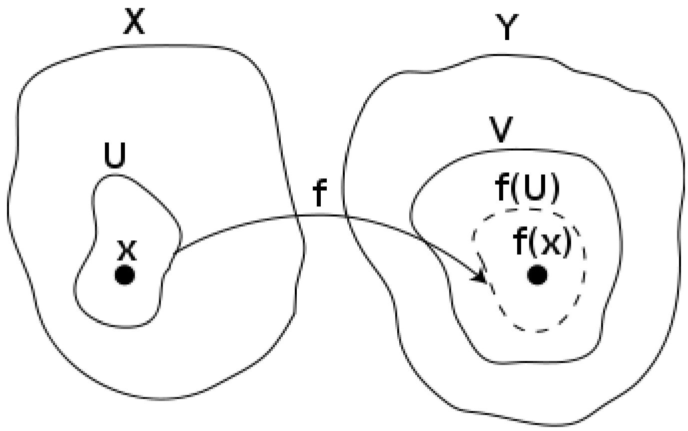
أولا : نفترض أن الدالة متصلة عند النقطة $x \in X$ و أن V جوار للنقطة $f(x)$ فإنه يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث $B(f(x),\varepsilon) \subseteq \mathrm{V}$

بما أن الدالة متصلة عند النقطة x فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$f[B(x,\delta)] \subseteq B(f(x),\varepsilon) \subseteq \text{V}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

بما أن الكره المفتوحة $U = B(x,\delta)$ جوار للنقطة x فإن :

$$f(\text{U}) = f[B(x,\delta)] \subseteq B(f(x),\varepsilon) \subseteq \text{V}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$



شكل (٢,٩)

ثانيا : إذا كانت الدالة $f : X \to Y$ تحقق الشرط : لكل جوار V للنقطة $f(x)$ فإنه يوجد جوار U للنقطة x بحيث أن $f(U) \subseteq V$. المطلوب إثبات أن الدالة متصلة عند النقطة $x \in X$. ولكى نثبت ذلك ، فلا بد من اثبات أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث يتحقق

$$f(B(\text{x},\delta)) \subseteq B(f(\text{x}),\varepsilon) \qquad (٢)$$

نقوم باختيار $\text{V} = B(f(\text{x}),\varepsilon)$ جواراً للنقطة $f(x)$ وبما أن $f(U) \subseteq V$ فإن ذلك

يؤدى إلى أن $f(\text{U}) \subset \text{V} = B(f(\text{x}),\varepsilon)$ وبما أنه يوجد جوار U للنقطة x فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$B(x,\delta) \subseteq \text{U} \qquad (3)$$

من (2), (3) نحصل على :

$$f[B(x,\delta)] \subseteq f(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V} = B(f(\mathrm{x}),\varepsilon)$$

أى أن :

$$f[B(x,\delta)] \subseteq B(f(\mathrm{x}),\varepsilon)$$

أى أن الدالة متصلة عند النقطة $x \in X$ وبهذا يكتمل البرهان. ■

فى النظرية السابقة فإن الدالة $f : X \to X^{\backslash}$ يقال أنها متصلة إذا كانت متصلة عند كل نقاط المجموعة X وذلك بالقول بإنه لكل جوار M لمجموعة نقاط من $X^{\backslash}$ فإن $f^{-1}(\mathrm{M})$ تكون جواراً لمجموعة نقاط من X وهكذا لكل نقاط المجموعة X. ونظراً لعدم فاعلية هذا المفهوم (جوار مجموعة نقاط) فيمكننا استبداله بمفهوم أكثر سهولة فى التعامل معه وهو مفهوم المجموعة المفتوحة ، حيث أن كلمة مفتوحة تعنى أنها جوار لكل نقطة من نقاطها. فلذا بدلا من كلمة جوار لمجموعة نقاط ، سوف نستخدم كلمة مجموعة مفتوحة (تحوى هذه النقاط وفى ذات الوقت هى جوار لهذه النقاط). واستناداً لهذا المفهوم نستطيع تعميم مفهوم الاتصال بصورة أكثر عمومية مما سبق كما .

نظرية (٤,٦)

ليكن كل من (X,d) و $(X^{\backslash},d^{\backslash})$ *فضاءً مترياً. الدالة*

$$f : X \to X^{\backslash}$$

تكون متصلة إذا وإذا كان فقط لكل مجموعة مفتوحة $H \subseteq X^{\backslash}$ فإن الصورة

العكسية $f^{-1}(H)$ تكون مجموعة مفتوحة فى X.

البرهان.

اولاً: نفترض أن الدالة f متصلة وأن المجموعة الجزئية $H \subseteq X^\backslash$ مجموعة مفتوحة. والمطلوب إثبات أن الصورة العكسية $f^{-1}(H)$ تكون مجموعة مفتوحة أي أنها جوار لجميع نقاطها ولكى نصل لهذه النتيجة نفترض أن

$a \in f^{-1}(H)$

، فإن ذلك يؤدى إلى أن $f(a) \in H$ ، بما أن H مجموعة مفتوحة (جوار لكل نقطة من نقاطها) ومن ثم تكون جواراً للنقطة $f(a)$.

بما أن الدالة $f : X \to X^\backslash$ متصلة ، فإن ذلك يؤدي إلى أن $f^{-1}(H)$ تكون جوار للنقطة a. و حيث أن a نقطة اختيارية ، فإن $f^{-1}(H)$ تكون جواراً لجميع نقاطها من ثم فإن $f^{-1}(H)$ تكون مجموعة مفتوحة.

ثانيا: نفترض أنه لكل مجموعة مفتوحة $H \subseteq X^\backslash$ فإن $f^{-1}(H)$ تكون مفتوحة والمطلوب إثبات أن الدالة متصلة . لإثبات ذلك نفرض أن $a \in X$ و أن $a \in f^{-1}(H)$ ، إذاً $f(a) \in H$. بما أن H مجموعة مفتوحة فهي جوار للنقطة $f(a)$ وأيضا $f^{-1}(H)$ هي جوار للنقطة a. بوضع $M = f^{-1}(H)$ فمن النظرية السابقة نجد أن الدالة متصلة عند النقطة الاختيارية a ومن ثم تكون متصلة عند كل نقطة من نقاط X. ■

مثال (٤,٧)

كل من الدالة $f : R \to R$ المعرفة بالصيغة $f(x) = 3x + 1$ والدالة العكسية

$f^{-1}:R\to R$ و المعطاة بالصيغة $f^{-1}(y)=\frac{1}{3}(y-1)$ هي دالة متصلة كما هو معلوم من خلال دراستنا للتفاضل والتكامل وهذه الدالة هي تقابل.

(٤,٢) الدوال المتصلة Continuous functions

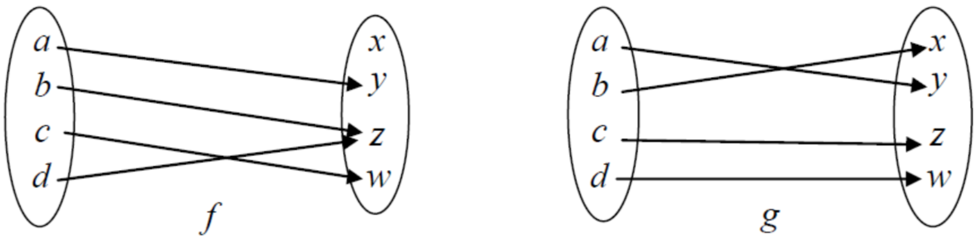
تعريف (٤,٨)

ليكن كل من (X,τ) و (Y,υ) فضاءً توبولوجياً. يقال أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة إذا كان لأي مجموعة مفتوحة H في Y فإن الصورة العكسية $f^{-1}(H)$ تكون مفتوحة في X. أي أن

$$\forall\ H\in\upsilon\Rightarrow f^{-1}(H)\in\tau$$

مثال (٤,٩)

اعتبر التوبولوجي $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$ معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$ و التوبولوجي $\upsilon=\{Y,\phi,\{x\},\{y\},\{x,y\},\{y,z,w\}\}$ على المجموعة $Y=\{x,y,z,w\}$. فإذا كانت $f:X\to Y$ و $g:X\to Y$ دالتين معرفتين بالمخطط التالي



شكل (٤,١)

أولا : الدالة $f : X \to Y$ دالة متصلة لأن الصورة العكسية لكل عنصر من عناصر التوبولوجي υ هي عنصر من عناصر التوبولوجي τ أي أنه :

$$\forall\ H \in \upsilon \Rightarrow f^{-1}(H) \in \tau\ .$$

ثانيا : الدالة $g : X \to Y$ ليست متصلة لأن المجموعة الجزئية $\{y, z, w\}$ تنتمي إلى υ في حين أن صورتها العكسية $g^{-1}(\{y, z, w\}) = \{a, c, d\}$ لا تنتمي إلى التوبولوجي τ .

ملاحظة:

بالرغم من كون الدالة f متصلة و لكنها لا تحافظ على صفة كون المجموعة مفتوحة أو مغلقة، فمثلا $\{a,b\} \in \tau$ و لكن $f(\{a,b\}) = \{y,z\} \notin \upsilon$ و ايضا المجموعة $\{d\}$ مغلقة في X ولكن $f(\{d\}) = \{z\}$ ليست مغلقة في Y.

نظرية (٤,١٠)

الدالة $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ من الفضاء التوبولوجي (X, τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y, υ) تكون متصلة إذا و فقط إذا كان لأي مجموعة مغلقة F في Y فإن الصورة العكسية $f^{-1}(F)$ تكون مغلقة في X .

البرهان

نفرض أن الدالة $f : (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ متصلة وأن $F \subseteq Y$ مجموعة مغلقة. إذاً المجموعة F^C مفتوحة. وعلية فإن المجموعة $f^{-1}(F^C)$ مفتوحة في X .

بما أن $f^{-1}(F^C)=(f^{-1}(F))^C \in \tau$. إذاً $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X.

من ناحية أخرى نفرض أنه لكل مجموعة مغلقة $F \subseteq Y$ يكون $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X ، و المطلوب إثبات أن الدالة $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\upsilon)$ متصلة ،لذلك نفرض أن $G \subseteq Y$ مجموعة مفتوحة في Y، إذاً المجموعة G^C هي مجموعة مغلقة في Y، و عليه تكون $f^{-1}(G^C)$ مجموعة مغلقة في X، ولكن $f^{-1}(G^C)=(f^{-1}(G))^C$ ، إذاً $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة، ومن ثم فإن الدالة $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\upsilon)$ متصلة. ■

نظرية (٤,١١)

بفرض أن (X,τ)، (Y,υ)، (Z,δ) ثلاث فضاءات توبولوجية و أن كل من

$$f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\upsilon) \text{ و } g:(Y,\upsilon)\rightarrow(Z,\delta)$$

دالة متصلة، فإن دالة التحصيل $g\circ f:(X,\tau)\rightarrow(Z,\delta)$ تكون متصلة.

البرهان

يترك للقارئ كتمرين. ■

نظرية (٤,١٢)

الدالة $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\upsilon)$ متصلة إذا و فقط إذا كان

$$f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)} \quad , \quad \forall\ A\subseteq X$$

البرهان

نفرض أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة و أن $A\subseteq X$.

$$\because\ f(A)\subseteq\overline{f(A)}\Rightarrow A\subseteq f^{-1}(f(A))\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$$

لكن $\overline{f(A)}$ مجموعة مغلقة، إذاً $f^{-1}(\overline{f(A)})$ مجموعة مغلقة لأن الدالة متصلة ، ولكن $\overline{A}$ هي أصغر مجموعة مغلقة تحتوي على المجموعة A

$$\because\ A\subseteq\overline{A}\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})\Rightarrow f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$$

من ناحية أخرى نفرض أن

$$f\left(\overline{A}\right)\subseteq\overline{f(A)}\quad,\quad\forall\ A\subseteq X$$

و المطلوب إثبات أن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة متصلة ، لذلك نفرض أن

$F\subseteq Y$ مجموعة مغلقة و أن $A=f^{-1}(F)$ ، إذاً

$$f\left(\overline{A}\right)=f\left(\overline{f^{-1}(F)}\right)\subseteq\overline{f(f^{-1}(F))}\subset\overline{F}=F$$

$$\therefore\ \overline{A}\subseteq f^{-1}(F)=A$$

$\therefore$ المجموعة A مغلقة، أي أن الصورة العكسية لأي مجموعة مغلقة هي أيضا مجموعة مغلقة، ومن ثم فإن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة. ■

نظرية (٤,١٣)

الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ) تكون متصلة إذا وإذا فقط كان :

$$f(b(A))\subseteq[f(A)\cup b(f(A))]$$

لكل $A\subseteq X$.

البرهان

أولاً نفرض أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة ، فإن $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$ لكل $A\subseteq X$. بما أن $b(A)\subseteq\overline{(A)}$ و كذلك $\overline{f(A)}=f(A)\cup b(f(A))$ فيكون لدينا

$$f(b(A))\subseteq[f(A)\cup b(f(A))]\ ,\ \forall\ A\subseteq X$$

ثانياً نفرض أن الدالة f تحقق الشرط:

$$f(b(A))\subseteq[f(A)\cup b(f(A))]\ ,\ \forall\ A\subseteq X$$

و المطلوب إثبات أن الدالة f دالة متصلة .

لتكن $A\subseteq X$ فإن $\overline{A}=A\cup b(A)$ و منه ينتج أن:

$$f(\overline{A})=f(A)\cup f(b(A))$$

و لكن من الفرض نحصل على

$$f(\overline{A})\subseteq f(A)\cup f(b(A))$$

و بما أن $\overline{f(A)}=f(A)\cup b(f(A))$ فإننا نحصل على أن

$$f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}\ ,\ \forall\ A\subseteq X\ .$$

أي أن الدالة f متصلة ■.

نظرية (٤,١٤)

لتكن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة متصلة من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ). إذا كانت $x_n\in X$ متتالية تقاربية بحيث أن $\lim x_n=x$، فإن $f(x_n)\in Y$ متتالية تقاربية ونهايتها $f(x)$.

البرهان

نفرض أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة و أن $x_n\to x$ و نريد إثبات أن $f(x_n)\to f(x)$. نفرض أن H هي جوار للنقطة $f(x)$ ، فإن $f^{-1}(H)$ هي جوار النقطة x و حيث أن $x_n\to x$ ، فإنه يوجد عدد n_0 بحيث أن $x_n\in f^{-1}(H)$ لكل $n\ge n_0$ وهذا يقتضي أن $f(x_n)\in H$ لكل $n\ge n_0$. أي أن $f(x_n)\to f(x)$.■

على القارئ ملاحظة أن عكس هذة النظرية ليس صحيحاً دائماً. ولكنة يكون صحيحاً في حالة كون الفضاء يحقق شرطاً ما يسمى مسلمة العد الأولى و هو ما يتحقق عندما يكون الفضاء قابل للتمتر كما في النظرية التالية:

نظرية (٤,١٥)

لتكن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة متصلة من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ). فإذا كان (A,τ_A) فضاءً جزئياً من (X,τ) فإن دالة التقييد $f|_A:A\to Y$ تكون متصلة على A.

البرهان

لتكن $f:X\to Y$ دالة متصلة. حيث أن $f|_A=f\cap(A\times Y)$ ، فإنه لأي دالة $g:A\to X$ بحيث أن $g(a)=a$ لكل $a\in A$ ، يمكن بسهولة ملاحظة أن الدالة $g:A\to X$ متصلة على A ومن ثم تكون دالة التحصيل $f|_A=f\circ g$ متصلة على A أيضا.■

في نهاية هذا الموضوع نستطيع القول ،بناءاً على الملاحظة على مثال (٤,١) ، أن الدالة المتصلة ليس من الضروري أن تضمن نقل المجموعات المفتوحة (المغلقة) من مجال الدالة إلى مجموعات مفتوحة (مغلقة) في مجالها

المقابل. الآن نقدم نوعاً من الدوال يضمن الحفاظ على صفة كون مجموعة مفتوحة أو مغلقة من المجال إلى المجال المقابل.

(٤,٣) الدوال المفتوحة و الدوال المغلقة Open and Closed Functions

تعريف (٤,١٦)

ليكن كل من (X,τ) و (Y,υ) فضاءً توبولوجياً. يقال أن الدالة

$$f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\upsilon)$$

(١) دالة مفتوحة إذا كانت صورة كل مجموعة مفتوحة في X هي مجموعة مفتوحة في Y.

(٢) دالة مغلقة إذا كانت صورة كل مجموعة مغلقة في X ، هي مجموعة مغلقة في Y.

مثال (٤,١٧)

بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b\}$ و $\upsilon=\{Y,\phi,\{x\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $Y=\{x,y\}$. بفرض الدالتين التاليتين:

$$f:X\rightarrow Y \qquad\qquad g:X\rightarrow Y$$

$$f(a)=f(b)=x \qquad\qquad g(a)=y\ \ ,\ \ g(b)=x$$

واضح أن الدالة $f:X\rightarrow Y$ مفتوحة و ليست مغلقة ، لأن $\{b\}$ مجموعة مغلقة بينما صورتها $f(\{b\})=\{x\}$ ليست مغلقة.

كما يتضح أيضا أن الدالة $g: X \to Y$ ليست مفتوحة ولا مغلقة (يمكن التأكد من ذلك).

مثال (٤,١٧)

بفرض أن $\tau = \{X, \phi, \{a\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X = \{a, b, c\}$ و أن $\upsilon = \{Y, \phi, \{x\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $Y = \{x, y\}$ و أن $f: X \to Y$ دالة معرفة كما يلي:

$$f(a) = f(b) = y \quad , \quad f(c) = x$$

واضح أن الدالة $f: X \to Y$ مغلقة و ليست مفتوحة.

يمكن للقارئ ملاحظة أن هناك دالة قد تكون مفتوحة و لكنها ليست مغلقة ، و العكس بالعكس .ولكن ما هو الشرط الضروري و الكافي لكي تحمل دالة ما الصفتين معا ، أي إنها تكون دالة مفتوحة و مغلقة في آن واحد.هذا الشرط يتحدد من خلال النظرية التالية:

نظرية (٤,١٩)

دالة التقابل $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ تكون مفتوحة إذا و فقط إذا كانت مغلقة.

البرهان

نفرض أن $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ دالة مفتوحة ، وأن $F \subseteq X$ مجموعة مغلقة،

$$F = (X - G) : G \in \tau$$

و من ثم فإن

$$f(F) = f(X - G) = f(X) - f(G) = Y - f(G)$$

بما أن الدالة $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ مفتوحة ، فإن $f(G) \in \upsilon$ و من ثم فإن $f(F) = Y - f(G)$ مجموعة مغلقة ، إذاً الدالة $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ مغلقة.

و بالمثل يمكن إثبات الجزء الثاني من النظرية.■

نظرية (٤,٢٠)

لتكن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ). الدالة f تكون مفتوحة إذا وإذا فقط كان

$$f(A^{\circ})\subseteq(f(A))^{\circ}\ ,\ \forall\ A\subseteq X$$

البرهان

نفرض أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مفتوحة ، و المطلوب إثبات أن $f(A^{\circ})\subseteq(f(A))^{\circ}\ ,\ \forall\ A\subseteq X$ نفرض أن $A\subseteq X$ ، بما أن $A^{\circ}\subseteq A$ ، فإن $f(A^{\circ})\subseteq f(A)$ و علية فإن $f(A^{\circ})$ مجموعة مفتوحة (لأن f دالة مفتوحة) و من ثم فإن $f(A^{\circ})=(f(A^{\circ}))^{\circ}\subseteq(f(A))^{\circ}$. أي أن

$$f(A^{\circ})\subseteq(f(A))^{\circ}$$

ثانيا: نفرض أن الشرط : $f(A^{\circ})\subseteq(f(A))^{\circ}\ ,\ \forall\ A\subseteq X$ متحقق ، والمطلوب إثبات أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مفتوحة. لإثبات ذلك نختار $G\in\tau$ مجموعة مفتوحة في X . من الشرط نجد أن

$$f(G)=f(G^{\circ})\subseteq(f(G))^{\circ}$$

و لكن من المعلوم أن $(f(G))^{\circ}\subseteq f(G)$ ، إذاً $f(G)=(f(G))^{\circ}$ ، أي أن $f(G)$ مجموعة مفتوحة و من ثم ، فإن الدالة f مفتوحة.■

نظرية (٤,٢١)

الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ تكون مغلقة إذا و فقط إذا كان

$\overline{f(A)}\subseteq f(\overline{A}),\quad \forall\ A\subseteq X$.

البرهان

أولاً: نفرض أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مغلقة و أن $A\subseteq X$. بما أن $A\subseteq\overline{A}$ ، فإن $f(A)\subseteq f(\overline{A})$.

بما أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مغلقة، فإن $f(\overline{A})$ مجموعة مغلقة تحتوي $f(A)$ و من ثم نجد أن $\overline{f(A)}\subseteq f(\overline{A})$.

ثانياً: نفرض أن الشرط $\overline{f(A)}\subseteq f(\overline{A}),\quad \forall\ A\subseteq X$ متحقق ، و بفرض أن $F\subseteq X$ مجموعة مغلقة. بوضع $A=F$ في الشرط نجد أن:

$$f(F)\subseteq\overline{f(F)}\subseteq f(\overline{F})=f(F)$$
$$\therefore\ \overline{f(F)}=f(F)$$

أي أن $f(F)$ مجموعة مغلقة، وعلية فإن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ مغلقة.■

(٤,٤) التشاكل (التكافؤ) التوبولوجي Homeomorphisms

بعد أن تعرفنا على مفهوم كل من الدوال المتصلة و الدوال المفتوحة والدوال المغلقة و لاحظنا أن الدوال المتصلة ليس من الضروري أن تنقل المجموعات المفتوحة (المغلقة) من المجال إلى مجموعات مفتوحة (مغلقة) في المجال المقابل. لذا نقول أن الدوال المتصلة فقط لا تحافظ على هذه الخاصية . ورب قائل أنه لو أضفنا إلى الدالة المتصلة صفة كونها مفتوحة، فهذه الدالة تستطيع الحفاظ فقط على خواص المجموعات المفتوحة دون المغلقة. وللحصول على نوع من هذه الدوال و التي تحافظ على صفة المجموعة سواء كانت مفتوحة أو مغلقة عندما تنقلها من المجال إلى المجال المقابل يجب أن تكون هذه الدوال تقابل بالإضافة إلى كونها متصلة و مفتوحة.

أهمية هذا النوع من الدوال لا تقتصر على الحفاظ فقط على صفات المجموعات من حيث كونها مفتوحة أو مغلقة بل تتعدى ذلك للعديد من الخواص الأخرى التي تحفظ تحت تأثير مثل هذه الدوال وهذه تسمى الخواص التوبولوجية. ومن أجل ذلك سوف نطلق على هذا النوع من الدوال أسم الدوال التوبولوجية أو التشاكل التوبولوجي.

تعريف (٤,٢٢)

الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ من الفضاء (X,τ) إلى الفضاء (Y,υ) تسمى دالة توبولوجية (تشاكل توبولوجي) إذا و فقط إذا كانت تقابل و متصلة ومفتوحة. كما يقال للفضائيين (X,τ) و (Y,υ) أنهما متكافئين توبولوجياً أو متشاكلين إذا وفقط إذا وجد بينهما تشاكل و يعبر عن ذلك بالرمز $(X,\tau)\cong(Y,\upsilon)$ وأحيانا يكتب $X\cong Y$.

مثال (٤,٢٣)

بفرض أن $f: X \to Y$ دالة معرفة بالصيغة

$$f(x) = (b-a)x + a \ , \ x \in X \ a, b \in R$$

حيث أن $X = [0,1]$، $Y = [a,b]$ مع اعتبار التوبولوجي المعتاد على $[0,1], [a,b]$. هذه الدالة متباينة (وضح ذلك؟)

نفرض أن $y \in [a,b]$ و أن $f(x) = (b-a)x + a = y$ و منها نحصل

على أن $x = \dfrac{y-a}{b-a} = f^{-1}(y) \in [0,1]$ و هذا يؤكد أن الدالة f شاملة

وبالتالي فإن الدالة العكسية تكون موجودة. كما يمكن ملاحظة أن الدالة

$f: X \to Y$ مفتوحة لأنه بفرض المجموعة المفتوحة $B = (x, y) \subseteq X$

حيث أن $0 \le x < y \le 1$. فإن صورة هذه المجموعة تعطى كما يلي:

$$\begin{aligned} f(B) &= f(x,y) = ((b-a)x + a, (b-a)y + a) \\ &= (c,d) \subseteq [a,b] \end{aligned}$$

لأن

$$\begin{aligned} c &= (b-a)x + a, \ 0 \le x \le 1 \\ &\le (b-a) + a = b \end{aligned}$$

كما أن $c \ge a$ لأنه إذا كانت $c < a$ فإن هذا يعني أن

$$\begin{aligned} &(b-a)x + a = c < a, \Rightarrow (b-a)x < 0 \\ &\therefore (b-a) < 0 \end{aligned}$$

وهذا تناقض. و عليه فإن $f(B)$ مجموعة مفتوحة في Y. لاحظ أن

$f(X) = Y$ و $f(\phi) = \phi$.

أيضاً هذه الدالة متصلة لأنه بفرض أن $H=(\alpha,\beta)\subseteq[a,b]$ مجموعة جزئية مفتوحة في Yحيث أن $a\le\alpha<\beta\le b$. فإن

$$f^{-1}(H)=\left(\frac{\alpha-a}{b-a},\frac{\beta-a}{b-a}\right)\subseteq[0,1]=X$$

فهذا يعني أن المجموعة $f^{-1}(H)$ مفتوحة في X وأن $f^{-1}(Y)=X$ وكذلك $f^{-1}(\phi)=\phi$. إذاً هذه الدالة هي تقابل متصل و مفتوح و من ثم فهي دالة توبولوجية .إذاً $[a,b]\cong[0,1]$.

مثال (٤,٢٤)

في المثال السابق يتضح أن خاصية الطول ليست توبولوجية . فمثلاً بإختيار $b=7,a=0$.يتضح المطلوب.

مثال (٤,٢٥)

خاصية كون الفضاء المتقطع (Discrete) هي خاصية توبولوجية.؟

الحل

بفرض أن الدالة $f:(X,D)\to(Y,D)$ تقابل. حيث أن كل مجموعة وحيدة العنصر $\{x\}$ في الفضاء المنفصل مفتوحة فإن كل مجموعة $\{y\}=\{f(x)\}$ هي أيضا مفتوحة. إذاً f هوميومورفيزم و من ثم يكون $(X,D)\cong(Y,D)$.

نظرية (٤,٢٦)

بفرض أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ تقابل. العبارات التالية متكافئة:

(i) الدالة f توبولوجية .

(ii) الدالتان f و f^{-1} متصلتان.

(iii) الدالة f متصلة و مغلقة.

(iv) $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ لكل $A \subseteq X$.

البرهان

$(i) \Leftarrow (ii)$ نفرض أن f دالة توبولوجية، فإنها تكون متصلة و مفتوحة لإثبات أن الدالة $g = f^{-1} : (Y,\upsilon) \to (X,\tau)$ متصلة نفرض أن $A \subseteq X$ مجموعة مفتوحة. بما أن الدالة f مفتوحة فإن $g^{-1}(A) = f(A) \in \upsilon$ و هذا يعني أن الدالة f^{-1} متصلة.

$(ii) \Leftarrow (iii)$

نفرض أن كل من الدالة f و الدالة f^{-1} متصلة. و نفرض أن $F \subseteq X$.مجموعة مغلقة . بما أن الدالة f^{-1} متصلة فإن $f(F) = (f^{-1})^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة و عليه تكون الدالة f مغلقة . إذاً الدالة f متصلة و مغلقة.

$(iii) \Leftarrow (iv)$

نفرض أن الدالة f متصلة و مغلقة. بما أن الدالة f متصلة فإنه من نظرية (٤,٣) نحصل على:

$$\forall A \subseteq X \Rightarrow f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \text{.........................(1)}$$

بما أن الدالة f مغلقة فإنه من نظرية (٤,١٢) نحصل على:

$$\forall A \subseteq X \Rightarrow \overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A}) \text{.........................(2)}$$

من (1) و (2) نحصل على

$$f(\overline{A}) = \overline{f(A)} \text{ لكل } A \subseteq X .$$

$(i) \Leftarrow (iv)$

نفرض أن $B \subseteq Y$ مجموعـة مغلقـة ، إذاً $f^{-1}(B) \subseteq X$ و باستخدام البنـد (iv) نجد أن

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) = \overline{f(f^{-1}(B))} = \overline{B} = B$$

و عليه يكون $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(B)$. أي أن $f^{-1}(B)$ مجموعة مغلقة وهذا يعني أن الدالة f متصلة. لأثبات أن الدالة f مفتوحة نفرض $F \subseteq X$ مجموعة مغلقة فإنه من (iv) نجد أن $f(F) = f(\overline{F}) = \overline{f(F)}$ وهذا يعني أن $f(F)$ مجموعة مغلقة. إذاً الدالة f مغلقة و بما أنها تقابل فإن الدالة f مفتوحة و من ثم تكون دالة توبولوجية. ■

تمـــارين (٤,١)

(١) برهن أن الدالة الثابتة من أي فضاء توبولوجي إلى فضاء توبولوجي آخر هي دالة متصلة .

(٢) بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي و أن (A,τ_A) فضاء جزئي من (X,τ) . برهن أن دالة الاحتواء $i:A\to X$ تكون متصلة .

(٣) إذا كانت $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ) فبرهن أن :

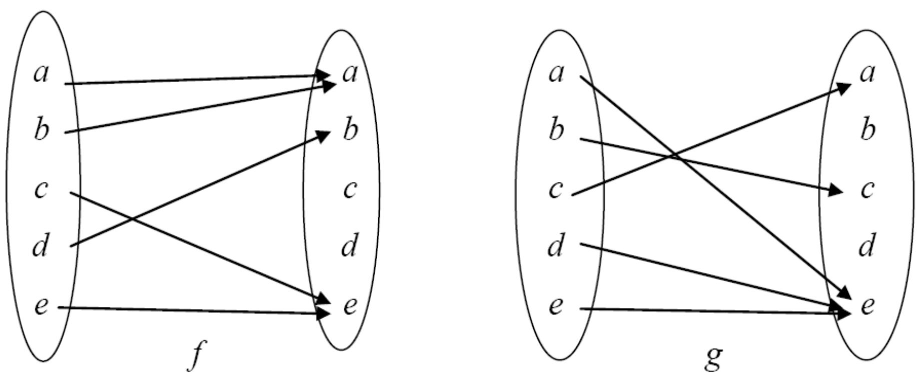
(i) f تكون متصلة إذا وفقط إذا كان

$$f^{-1}(A^o)\subseteq(f^{-1}(A))^o \quad \forall A\subseteq Y$$

(ii) f تكون متصلة إذا و فقط إذا كان

$f(B')\subseteq f(B)\cup(f(B))'$ لكل $B\subseteq X$.

(٤) إذا كان $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$ توبولوجي معرفة على المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$. فإذا كانت $f,g:(X,\tau)\to(X,\tau)$ دالتن معرفتين كما يلي:



- أي من f, g دالة متصلة
- أي من f, g دالة مفتوحة
- أي من f, g دالة مغلقة
- أي من f, g دالة توبولوجية

(٥) بفرض أن كل من $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ و $g:(Y,\upsilon)\to(Z,\rho)$ دالة متصلة ، فبرهن أن $g\circ f$ تكون أيضا دالة متصلة .

(٦) بفرض أن كل من $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ و $g:(Y,\upsilon)\to(Z,\rho)$ دالة مفتوحة ، فبرهن أن $g\circ f$ تكون أيضا دالة مفتوحة.

(٧) بفرض أن كل من $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ و $g:(Y,\upsilon)\to(Z,\rho)$ دالة مغلقة ، فبرهن أن $g\circ f$ تكون أيضا دالة مغلقة.

(٨) بفرض أن كل من $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ و $g:(Y,\upsilon)\to(Z,\rho)$ دالة توبولوجية ، فبرهن أن $g\circ f$ تكون أيضا دالة توبولوجية.

(٩) إذا علم أن $\tau=\{X,\phi,\{b,c\},\{b,c,d\},\{a,b,c\}\}$ توبولوجي على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$ و $\upsilon=\{Y,\phi,\{x\},\{y,z\},\{x,y,z\}\}$ توبولوجي على المجموعة $Y=\{x,y,z,w\}$. عرف دالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ بحيث تكون:

- متصلة
- مفتوحة و غير مغلقة
- مغلقة وغير مفتوحة

(١٠) برهن أن $(-1,1)\cong(0,1)$. استخدم الدالة

$$f(x)=2x-1,\ \forall x\in(0,1)$$

(١١) مستخدما الدالة

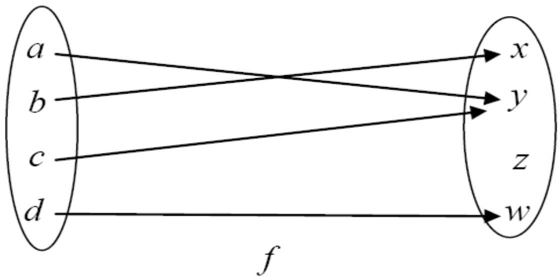
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x} & ,-1<x<0\\[2mm] \dfrac{x}{1-x} & ,0\le x<1\end{cases}$$

لإثبات أن $R\cong(-1,1)$

(١٢) إثبت أن $R\cong(0,1)$.

(١٣) هل يوجد هميومورفيزم بين R و $[0,1)$؟.

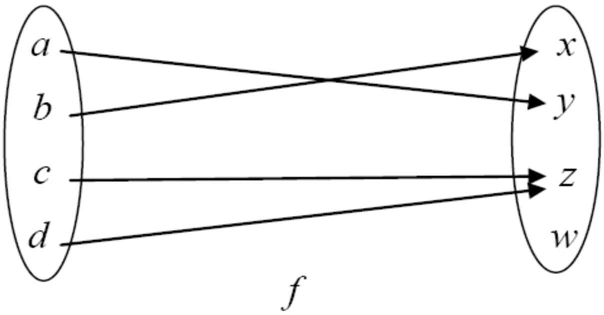
(١٤) بفرض أن $X=\{a,b,c,d\}$ $Y=\{x,y,z,w\}$ و أن $f:X\to Y$ معرفة بالمخطط الآتي:



وبفرض أن $\upsilon=\{Y,\phi,\{y,z\},\{x,y,z\},\{y,z,w\}\}$ توبولوجي على Y.

- عرف توبولوجي على X يجعل الدالة f متصلة و ليست مفتوحة و مغلقة..
- عرف توبولوجي على X (إن أمكن) يجعل الدالة f مفتوحة و غير مغلقة.
- عرف توبولوجي على X (إن أمكن) يجعل الدالة f مغلقة و غير مفتوحة.
- عرف توبولوجي على X (إن أمكن) يجعل الدالة f دالة توبولوجية.

(١٥) إذا كانت $\tau = \{X, \phi, \{a,b\}, \{c,d\}\}$ توبولوجي معرفة على المجموعة $X = \{a,b,c,d\}$ ، بفرض أن $Y = \{x,y,z,w\}$ و أن $f : X \to Y$ دالة معرفة بالمخطط الآتي:



- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f متصلة و ليست مفتوحة ولا مغلقة.
- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f متصلة ومغلقة و غير مفتوحة.
- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f متصلة ومفتوحة و غير مغلقة.
- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f مفتوحة و غير مغلقة.
- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f مغلقة و غير مفتوحة.

(١٦) ليكن (X,d) فضاءً مترياً . بين أن $(X,d) \cong (X, \frac{d}{1+d})$.

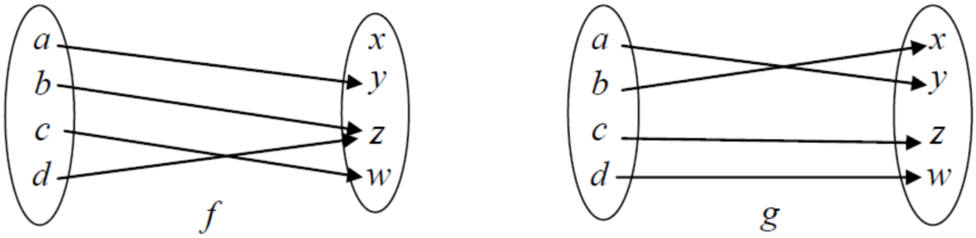
(١٧) هل يوجد تشاكل توبولوجي بين $[0,1]$ و $[a,b]$؟.

(١٨) هل يوجد تشاكل توبولوجي بين $(0,1)$ و $[a,b)$؟.

الموضوع	Presentation tupe	Youtube
الدوال المتصلة	https://slideator.com/watch/?v=wwpldXpcYHN	https://www.youtube.com/watch?v=eSLAj19zuSo&t=12s

تمارين عامة

١) اعتبر التوبولوجي $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$ معرف على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$ و التوبولوجي $\upsilon=\{Y,\phi,\{x\},\{y\},\{x,y\},\{y,z,w\}\}$ على المجموعة $Y=\{x,y,z,w\}$. فإذا كانت $f:X\to Y$ و $g:X\to Y$ دالتين معرفتين بالمخطط التالي



ادرس اتصال كل من الدالتين $f:X\to Y$ و $g:X\to Y$

٢) برهن أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ) تكون متصلة إذا و فقط إذا كان لأي مجموعة مغلقة F في Y فإن الصورة العكسية $f^{-1}(F)$ تكون مغلقة في X.

٣) بفرض أن (X,τ)، (Y,υ)، (Z,δ) ثلاث فضاءات توبولوجية و أن كل من

$$f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon) \text{ و } g:(Y,\upsilon)\to(Z,\delta)$$

دالة متصلة، فإن دالة التحصيل $g\circ f:(X,\tau)\to(Z,\delta)$ تكون متصلة.

٤) برهن أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ متصلة إذا و فقط إذا كان

$$f\left(\overline{A}\right)\subseteq \overline{f(A)} \quad , \quad \forall \ A\subseteq X$$

٥) لتكن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة متصلة من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,υ). فإذا كان (A,τ_A) فضاءً جزئياً من (X,τ) فإن دالة التقيد $f|_A : A\to Y$ تكون متصلة على A.

٦) بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b\}$ و $\upsilon=\{Y,\phi,\{x\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $Y=\{x,y\}$. بفرض الدالتين التاليتين:

$$f:X\to Y \qquad\qquad g:X\to Y$$

$$f(a)=f(b)=x \qquad\qquad g(a)=y \ , \ g(b)=x$$

٧) ادرس الدالة $f:X\to Y$ من حيث كونها مفتوحة أو مغلقة .

٨) بفرض أن $\tau=\{X,\phi,\{a\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $X=\{a,b,c\}$ و أن $\upsilon=\{Y,\phi,\{x\}\}$ توبولوجي معرف على المجموعة $Y=\{x,y\}$ و أن $f:X\to Y$ دالة معرفة كما يلي:

$$f(a)=f(b)=y \quad , \quad f(c)=x$$

٩) ادرس الدالة $f:X\to Y$ من حيث كونها مفتوحة أو مغلقة .

١٠) برهن أن دالة التقابل $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ تكون مفتوحة إذا و فقط إذا كانت مغلقة.

١١) لتكن $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ دالة من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء (Y,υ). برهن أن الدالة f تكون مفتوحة إذا وإذا فقط كان

$$f(A^{\circ}) \subseteq (f(A))^{\circ} , \ \forall A \subseteq X$$

١٢) برهن أن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ تكون مغلقة إذا و فقط إذا كان

$$. \overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A}), \quad \forall A \subseteq X .$$

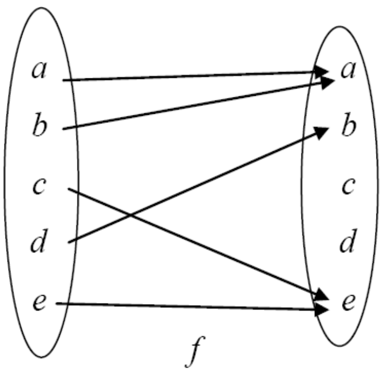
١٣) بفرض أن $f:X\to Y$ دالة معرفة بالصيغة

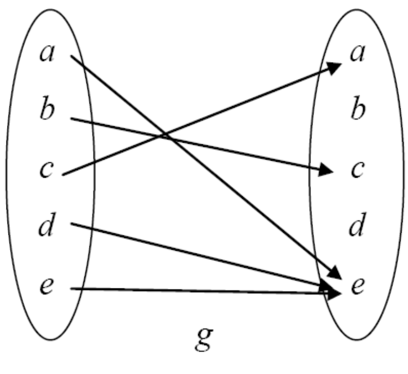
$$f(x)=(b-a)x+a , \ x\in X \ a,b\in R$$

حيث أن $X=[0,1]$، $Y=[a,b]$ مع اعتبار التوبولوجي المعتاد على $[0,1],[a,b]$. ادرس تكافؤ الفضائين $[0,1],[a,b]$.

١٤) برهن أن الدالة الثابتة من أي فضاء توبولوجي إلى فضاء توبولوجي آخر هي دالة متصلة .

١٥) إذا كان $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$ توبولوجي معرفة على المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$. فإذا كانت $f,g:(X,\tau)\to(X,\tau)$ دالتن معرفتين كما يلي:





- أي من f,g دالة متصلة

- أي من f,g دالة مفتوحة
- أي من f,g دالة مغلقة
- أي من f,g دالة توبولوجية

١٦) بفرض أن كل من $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ و $g:(Y,\upsilon)\to(Z,\rho)$ دالة متصلة ، فبرهن أن $g\circ f$ تكون أيضا دالة متصلة .

١٧) بفرض أن كل من $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ و $g:(Y,\upsilon)\to(Z,\rho)$ دالة مفتوحة ، فبرهن أن $g\circ f$ تكون أيضا دالة مفتوحة.

١٨) بفرض أن كل من $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ و $g:(Y,\upsilon)\to(Z,\rho)$ دالة مغلقة ، فبرهن أن $g\circ f$ تكون أيضا دالة مغلقة.

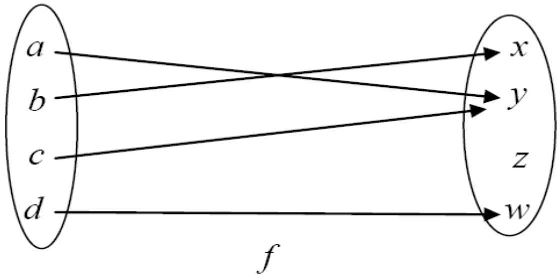
١٩) بفرض أن كل من $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ و $g:(Y,\upsilon)\to(Z,\rho)$ دالة توبولوجية ، فبرهن أن $g\circ f$ تكون أيضا دالة توبولوجية.

٢٠) إذا علم أن $\tau=\{X,\phi,\{b,c\},\{b,c,d\},\{a,b,c\}\}$ توبولوجي على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$ و $\upsilon=\{Y,\phi,\{x\},\{y,z\},\{x,y,z\}\}$ توبولوجي على المجموعة $Y=\{x,y,z,w\}$. عرف دالة $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ بحيث تكون:

- متصلة
- مفتوحة و غير مغلقة

- مغلقة وغير مفتوحة

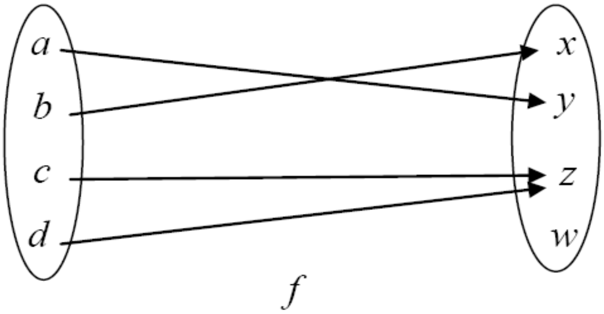
٢١) بفرض أن $X = \{a, b, c, d\}$ $Y = \{x, y, z, w\}$ و أن
$f : X \to Y$ معرفة بالمخطط الآتي:



وبفرض أن $\upsilon = \{Y, \phi, \{y, z\}, \{x, y, z\}, \{y, z, w\}\}$ توبولوجي على Y.

- عرف توبولوجي على X يجعل الدالة f متصلة و ليست مفتوحة و مغلقة..
- عرف توبولوجي على X (إن أمكن) يجعل الدالة f مفتوحة و غير مغلقة.
- عرف توبولوجي على X (إن أمكن) يجعل الدالة f مغلقة و غير مفتوحة.
- عرف توبولوجي على X (إن أمكن) يجعل الدالة f دالة توبولوجية.

٢٢) إذا كانت $\tau = \{X, \phi, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ توبولوجي معرفة على المجموعة $X = \{a, b, c, d\}$ ، بفرض أن $Y = \{x, y, z, w\}$ و أن $f : X \to Y$ دالة معرفة بالمخطط الآتي:



- عرف توبولوجي على Y(إن أمكن) يجعل الدالة f متصلة و ليست مفتوحة ولا مغلقة.
- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f متصلة ومغلقة و غير مفتوحة.
- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f متصلة ومفتوحة و غير مغلقة.
- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f مفتوحة و غير مغلقة.
- عرف توبولوجي على Y (إن أمكن) يجعل الدالة f مغلقة و غير مفتوحة.