بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة عن المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية

تعريف :

هي معادلة تربط بين متغيرين احداهما متغير تابع والاخر متغير مستقل وبين المشتقات التفاضلية للمتغير التابع بالنسبة للمتغير المستقل ومن اى رتبة تسمى معادلة تفاضلية .
او بمعنى اخر المعادلة التفاضلية هى معادلة تحتوى على مشتقات .

مثال

(1) $\dfrac{dx}{dt} = t + 1$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} + x = 0$

(3) $\left(\dfrac{d^3x}{dt^3}\right)^2 + \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} = x$

تعريف :

رتبة المعادلة هى رتبة اعلى مشتقة بها ، بينما درجة المعادلة التفاضلية هى درجة المشتقة الاعلى رتبة بالمعادلة .

مثال

المسالة (1) من المثال (1) هى معادلة من الرتبة الاولى والدرجة الاولى .
المسالة (2) من المثال (1) هى معادلة من الرتبةالثانية والدرجة الاولى.
المسالة (3) من المثال (1) هى معادلة من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية.

لايجاد الحل للمعادلة التفاضلية سوف نجرى عملية التكامل عليها وعلى ذلك فان حل المعادلة التفاضلية لابد ان يحتوى على عدد من الثوابت يساوى رتبة المعادلة نفسها . فمثلا عند حل المعادلة التفاضلية التى من الرتبة الاولى فسنجرى التكامل مرة واحدة وعلى ذلك يحتوى الحل على ثابت واحد فقط وهكذا .
وسوف ندرس فيما يلى حل لبعض المعادلات التفاضلية التى ستقابلنا اثناء دراستنا وسنعتبر المتغير x المسافة هى المتغير التابع اما المتغير المستقل نعتبره الزمن t

1-المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى :

وتظهر هذه المعادلات فى صيغ كثيرة سنورد منها ما سوف يقابلنا اثناء دراستنا فمثلا .

$$f(x)\frac{dx}{dt} = g(t) \qquad (1)$$

حيث $g(t)$ دالة فى t و $f(x)$ دالة فى المتغير x .

وهذه معادلة من الرتبة الاولى (اذ انها تحتوى على $\frac{dx}{dt}$ فقط) ومن الدرجة الاولى حيث $\frac{dx}{dt}$ مرفوع الى الاس واحد
ويمكن حل مثل هذه المعادلات مباشرة بطريقة ما تعرف بطريقة فصل المتغيرات فيمكن الفصل بين متغيرين x, t بالصورة

$$f(x)dx = g(t)\ dt$$

وبجراء التكامل نحصل على

$$\int f(x)dx = \int g(t)\ dt + c$$

حيث c ثابت التكامل . ومن ذلك يمكن ايجاد x بدلالة المتغير المستقل t . ومن الممكن ايجاد المعادلة (1) على الصورة

$$f(x) = g(t)\frac{dx}{dt} \qquad (2)$$

التى يمكن ايضا حلها بنفس طريقة فصل المتغيرات وذلك على الصورة

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int \frac{dt}{g(t)} + c$$

حيث c ثابت التكامل .

مثال :

حل المعادلات التفاضلية الاتية

$$(i)\ \sin x \frac{dx}{dt} = 3t$$

$$(ii)\ t^2 \frac{dx}{dt} = x^3$$

الحل :

باستخدام طريقة فصل المتغيرات السابقة .

$$(i)\ \int \sin x\ dx = \int 3t dt$$

$$-\cos x = \frac{3}{2}t^2 + c$$

$$\therefore\ x = \cos^{-1}\left(-\frac{3t^2}{2} - c\right)$$

$$(ii) \int \frac{dx}{x^3} = \int \frac{dt}{t^2}$$

$$-\frac{x^{-2}}{2} = -\frac{1}{t} + c$$

$$\therefore\ x = \left(\frac{2}{t} - 2c\right)^{-1/2}$$

2- المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية

وسنعتبر فقط ما يمكن تحويلة الى معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى فاذا كانت المعادلة على الصورة

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = g(x)$$

بوضع $y = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ يكون

$$\frac{dy}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\frac{dy}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

وعلى ذلك تؤول المعادلة (3) الى الصورة

$$\frac{dy}{dx} + 2f(x)y = 2g(x)$$

وهى معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى منها المتغير المستقل هو x والمتغير التابع هو y والتى سنورد بعد ذلك حل مثل هذه المعادلات . كذلك المعادلات التفاضلية التى على الصورة

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \tag{4}$$

نفرض ان $y = \frac{dx}{dt}$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$y = \frac{dy}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

وتصبح المعادلة (4) على الصورة

$$ydy = f(x)dx$$

وذلك بعد فصل المتغيرات فى المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى فيها المتغير المستقل x والمتغير التابع y وبذلك يمكن حل المعادلة بسهولة كما سبق

3- المعادلات التفاضلية الخطية

المعادلات التفاضلية التى على الصورة

$$F_n(t)\frac{d^n x}{dt^n}+F_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+.....F_2(t)\frac{d^2x}{dt^2}+F_1(t)\frac{dx}{dt}+F_0(t)x=\varphi(t) \qquad (5)$$

حيث $F_n(t),......F_0(t),\varphi(t)$ دوال فى المتغير المستقل t مثل هذة المعادلات تسمى معادلة تفاضلية خطية من رتبة n ذات المعاملات المتغيرة .

(ا) اذا كانت $\varphi(t)$ تساوى الصفر قان هذة المعادلة تسمى معادلة تفاضلية متجانسة.

(ب)اذا كانت F_n ,......, F_0 ثوابت تسمى المعادلات التفاضلية معادلة تفاضلية خطية من رتبة n وذات معاملات ثابتة .

نعتبر الان المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الاولى والتى يمكن وضعها على الصورة

$$F_1(t)\frac{dx}{dt}+F_0(t)x=\varphi(t) \qquad (6)$$

بالقسمة على $F_1(t)$ نحصل على صيغة المعادلة (6) فى الصورة

$$\frac{dx}{dt}+F(t)x=g(t) \qquad (7)$$

وهى الصورة القياسية للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الاولى حيث $F(t), g(t)$ دوال فى المتغير t.

ولحل المعادلة (7) نضرب طرفيها فى دالة ما $\mu(t)$ دالة فى الزمن t المتغير المستقل ونحاول وضع الطرف الايسر للمعادلة (7) على صورة تفاضل تام لحاصل ضرب دالتين احدهما هى μ نفسها والثانية هى المتغير التابع x نفسه ولكى يتحقق ذلك يكون المقدار

$$\frac{d}{dt}(x\mu)=\mu\frac{dx}{dt}+x\frac{d\mu}{dt}$$

مساوى للطرف الايسر للمعادلة (7) اى انه يجب ان يكون

$$\mu\frac{dx}{dt}+x\frac{d\mu}{dt}=\mu\frac{dx}{dt}+\mu xF(t)$$

(وذلك بعد ضرب المعادلة (7)فى μ)وعلى هذا يجب ان يكون .

$$\frac{d\mu}{dt}=\mu F(t)$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=F(t)dt$$

وبالتكامل يمكن الحصول على على الدالة μ

$$\ln \mu = \int F(t)dt$$

$$\therefore \mu = e^{\int F(t)dt}$$

(ولا داعى لكتابة ثابت التكامل اذ ليس له اى قيمة هنا) وبذلك اذا ضرب طرفى المعادلة (7) فى الدالة $\mu = e^{\int F(t)dt}$ فانه سوف يكون الطرف الايسر عبارة عن تفاضل حاصل ضرب الدالتين x μ اى ان المعادلة (7) سوف تاخذ الصورة .

$$\frac{d}{dt}(\mu x) = \mu g(t)$$

والذى يمكن تكاملها بسهولة اذ ان الطرف الايمن دالة فى المتغير t

$$\mu x = \int \mu(t) g(t) + c$$

ويكون

$$x = e^{-\int F(t)dt} \int \mu(t) g(t) dt + c\, e^{-\int F(t)dt}$$

وهو حل المعادلة التفاضلية (7) .(**<u>الدالة</u>** <u>$\mu(t)$</u> **<u>تسمى بمعامل التكامل</u>**)

<u>مثال :</u>

حل المعادلة التفاضلية

$$(i) \quad \frac{dx}{dt} + x \tan t = 5 \cos t$$

$$(ii) \quad \frac{dx}{dt} + \frac{x}{3t} = 5t^2$$

<u>الحل</u>

$$(i) \frac{dx}{dt} + x \tan t = 5 \cos t$$

$$\mu = e^{\int \tan t dt} = e^{-\ln \cos t} = e^{\ln \frac{1}{\cos t}}$$

$$= e^{\ln \sec t} = \sec t$$

بضرب طرفى المعادلة (i) فى معامل التكامل

$$\sec t \frac{dx}{dt} + x \sec t \tan t = 5 \cos t \sec t$$

$$\frac{d}{dx}\left(x \sec t\right) = 5$$

$$\int d\left(x \sec t\right) = \int 5\,dt$$

$$x \sec t = 5t + c$$

$$x = 5t \cos t + c \cos t$$

وهو حل لمعادلة التفاضلية (i).

$$(ii)\quad \frac{dx}{dt} + \frac{x}{3t} = 5t^2$$

$$\therefore\ \mu = e^{\int \frac{dt}{3t}} = e^{\frac{1}{3}\ln t} = e^{\ln t^{1/3}} = t^{1/3}$$

بضرب طرفى المعادلة فى $t^{1/3}$

$$t^{1/3}\frac{dx}{dt} + \frac{x}{3t} t^{1/3} = 6t^2\, t^{1/3}$$

$$t^{1/3}\frac{dx}{dt} + \frac{x}{3t^{2/3}} = 5t^{7/3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(t^{1/3} x\right) = 5t^{7/3}$$

$$\int dt^{1/3} x = 5\int t^{7/3}\,dt$$

$$\therefore\ t^{1/3} x = \frac{15}{10} t^{\frac{10}{3}} + c$$

$$\therefore\ x = \frac{3}{2} t^3 + c\,t^{-1/3}$$

وهو حل لمعادلة التفاضلية (ii)

الحل السابق يسمى بالحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية ونلاحظ انه ينفسم الى كميتين الاولى لا تحتوي على ثابت والاخرى تحتوى على عدد من الثوابت يساوى رتبة المعادلة .
الجزء الاول يسمى بالحل الخاص للمعادلة التفاضلية تحقق المعادلة التفاضلية. والجزء الأخر هوحل المعادلة التفاضلية المتجانسة اى عندما يكون الطرف الايمن $y(t) = 0$ يساوى صفرا وعلى ذلك يكون الحل العام للمعادلة هو

هو مجموع الحلين الحل الخاص وحل المعادلة المتجانسة .ويمكن تعميم هذه الخاصية فى حل اى معادلة تفاضلية من رتبة اكبر من الاولى . فالحل العام بذلك يتكون من جزئين .

(أ) حل خاص وهو اى حل يحقق المعادلة وخالى من الثوابت .

(ب) حل للمعادلة المتجانسة ويحتوى على عدد من الثوابت الاختبارية تساوى رتبة المعادلة .

<u>ففى المثال الاول</u> : نجد ان الحل الخاص هو $5t\cos t$ وهو يحقق المعادلة الاولى وحل اخر $\cos t$ وضرب فى ثابت c ويمكن التأكد من انه حل للمعادلة المتجانسة $\frac{dx}{dt}+x\tan t=0$.

<u>فى المثال الثانى :</u> نجد ان $3/2\,t^{3}$ هو حل خاص وان $t^{-3/2}$ هو حل المعادلة المتجانسة .

<u>(4) المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية :</u>

سنعتبر فقط حل المعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة ويمكن وضعها على الصورة

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2k\frac{dx}{dt}+w^2x=\varphi(t) \qquad (9)$$

كما سبق نعتبر اولا المعادلة التفاضلية المتجانسة ونوجد حلها الذى يجب ان يحتوى على ثابتين وعلى ذلك سوف نحل المعادلة المتجانسة .

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2k\frac{dx}{dt}+w^2x=0 \qquad (10)$$

لحل هذه المعادلة نفرض حل لها على الصورة

$$x=c\,e^{\alpha t} \qquad (11)$$

وبالتعويض نحصل على المعادلة (10) فى الصورة (اذ ان المعادلة (11) حل للمعادلة (10) فيجب ان يحققها)

$$x=c\alpha\, e^{\alpha t}, \qquad \ddot{x}=c\alpha\, e^{\alpha t}$$

بالتعويض فى المعادلة (10)

$$\therefore \alpha^2c\ e^{\alpha t},+ +2kc\alpha\ e^{\alpha t}+w^2c\,e^{\alpha t}$$

وبالقسمة على $c\,e^{\alpha t}\neq 0$ نحصل على

$$\alpha^2 + 2k\alpha + w^2 = 0 \qquad (12)$$

وهى معادلة جبرية من الدرجة الثانية فى α والتى يمكن حلها وايجاد جذريها

$$\alpha_1, \alpha_2 = -k \pm \sqrt{k^2 - w^2} \qquad (13)$$

وعلى ذلك يكون هناك حلان للمعادلة وهى

$$c_1\ e^{\alpha_1 t}, c_2\ e^{\alpha_2 t}$$

ويكون الحل العام للمعادلة (10) هو عبارة عن مجموع الحلين اذ يجب ان يحتوي علي ثابتين اختيارين لانها معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

$$\therefore\ x = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} \qquad (14)$$

حيث α_1, α_2 هما جذري المعادلة (12) والتي تسمي **بالمعادلة المساعدة** (اى التى تساعد فى الحصول على الحل) من السهولة الحصول عليها مباشرة من المعادلة التفاضلية الاصلية (10) .
من المعادلة (13) التى تعين الجذرين α_1, α_2 يتضح ان هناك ثلاث احتمالات لهذين الجذرين.

أ) اذا كان الجذران حقيقين ومختلفين

اى $k^2 > w^2$ وفى هذه الحالة سيكون حل المعادلة (10)هو (14)

ب) اذا كان الجذران حقيقين ومتساويين

اى اذا كانت $k^2 = w^2$ فيكون α_1, α_2 ليكن كلا منهما مساويا α مثلا فيصبح الحل فى الصورة

$$x = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{\alpha t}$$

$$x = (c_1 + c_2) e^{\alpha t} = c\, e^{\alpha t}$$

ولكن الحل العام لابد ان يحتوى على ثابتين وعلى ذلك فان هذا الحل لن يكون هو الحل العام للمعادلة التفاضلية (10) وقد وجد فى هذه الحالة ان الحل سوف ياخذ الصورة .

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{\alpha t} \qquad (15)$$

(ج)اذا كان الجذران تخيلين مختلفين

اى اذا كان $k^2 < w^2$ فبوضع $\beta = \sqrt{w^2 - k^2}$ نحصل على

$$\alpha_1 = -k + i\beta \;, \alpha_2 = -k - i\beta$$

ويصبح الحل العام (14) فى الصورة

$$x = e^{-kt}(c_1 e^{i\beta t} + c_2 e^{-i\beta t}) \qquad (16)$$

وباستخدام العلاقات الاتية

$$e^{i\beta t} = \cos \beta t + i \sin \beta t$$

$$e^{-i\beta t} = \cos \beta t - i \sin \beta t$$

فان المعادلة (16) سوف تؤول الى

$$x = e^{-kt}\left[(c_1 + c_2)\cos \beta t + i(c_1 - c_2)\sin \beta t\right]$$

او نضع الخل فى الصورة

$$x = e^{-kt}\left[A\cos \beta t + B\sin \beta t\right] \qquad (17)$$

مثال

حل المعادلات التفاضلية الخطية الاتية

$$(i)\;\; \frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} - 3x$$

$$(ii)\;\; \frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} - 4x$$

$$(iii)\;\; \frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} - 13x$$

$$(iv)\, \ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0$$

الحل

المعادلة المساعدة تكون على الصورة

$$\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0$$

$$\alpha_1, \alpha_2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$\alpha_1, \alpha_2 = 2 \pm 1 = 3,1$$

اى ان الجذران مختلفان وحقيقيان ويكون الحل على الصورة

$$x = A e^{3t} + B e^{t}$$

$$(iv)\, \ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$$

المعادلة المساعدة تكون على الصورة

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$$

$$\alpha_1, \alpha_2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 13.4}}{2} = 2$$

اى ان الجذرين متساويان وعلى ذلك يكون الحل العام للمعادلة هو

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{2t}$$

$$(iii)\, \ddot{x} - 4\dot{x} + 13x = 0$$

المعادلة المساعدة تكون على الصورة

$$\alpha^2 - 4\alpha + 13 = 0$$

$$\alpha_1, \alpha_2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 13.4}}{2} = 2 \pm 3i$$

وعى ذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$x = c_1 \; e^{2t+3it} + c_1 \; e^{2t-3it}$$

$$= e^{2t}\left[c_1 \; e^{3it} + c_2 \; e^{-3it}\right] = e^{2t}\left[A \cos 3t + B \sin 3t\right].$$

الباب الاول

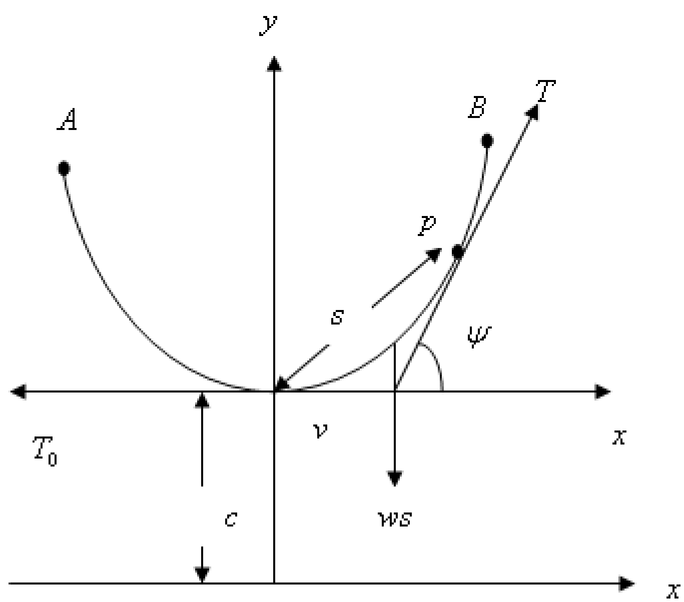
اتزان السلاسل والحبال الثقيلة المعلقة تحت تاثير الجاذبية الارضية

(أ) الكتينة العادية

اذا علقت سلسلة ثقيلة منتظمة قابلة للثنى بسهولة بين نقطتين فان المنحنى الذى تتخذه يسمى ***الكتينة العامة او الكتينة العادية***

إيجاد المعادلة الذاتية لمنحنى الكتينة العادية:

نفرض سلسلة ثقيلة معلقة بين النقطتين A, B حيث AB افقى . ناخذ اسفل نقطة v فى السلسلة (تسمى براس الكتينة) كنقطة اصل للاحداثيات الذاتية . ناخذ الافقى كإتجاه لقياس زاوية ميل المماس وباخذ اى نقطة اختيارية ولتكن التقط p من نقاط السلسلة ولتكن إحداثياتها (s, ψ) وبفرض ان w وزن وحدة الاطوال من السلسلة وندرس إتزان الجزء $v\,p$ طولة s والتى تؤثر عليه القوى الاتية



(1)وزن الجزء $v\widehat{p}$ ويساوى ws لاسفل.

(2)الشد T_0 عند v وهو افقى لان النقطة v اسفل نقطة من الكتينة

(3) الشد T عند p فى اتجاه المماس للمنحنى عند p .

وحيث ان الجزء من الحبل vp متزن تحت تأثير ثلاثة قوى فانه يجب ان تتلاقى فى نقطة واحدة كما بالشكل .وبفرض ان المماس للمنحنى عند p يصنع زاوية ψ مع الافقى فانه بالتحليل فى الاتجاهين الافقى والراسى نجد ان

$$T \cos \psi = T_0 \tag{1.1.1}$$

$$T \sin \psi = ws \tag{1.1.2}$$

المعادلة (1.1.2) تبين إحدى الخواص المميزة للكتيبة ، وهى ان المركبة الافقية للشد عند اى نقطة من نقاط السلسلة تكون ثابتة المقدار وتساوى الشد عند راس الكتينة .

وبفرض ان الشد T_0 يمثل وزن جزء من السلسلة طولة c اى ان

$$T_0 = wc \tag{1.1.3}$$

وبالتعويض من (1.1.3) فى (1.1.1) نحصل على

$$T \cos \psi = wc \tag{1.4}$$

بقسمة (1.1.2) على (1.1.4) نحصل على

$$\tan \psi = \frac{s}{c}$$

اى ان

$$s = c \tan \psi \tag{1.1.5}$$

وحيث ان المعادلة (1.1.5) تربط بين الاحداثيات الذاتية (s, ψ) فانها تسمى ***<u>المعادلة الذاتية للكتينة</u>*** . وحيث ان الثابت الوحيد فيها هو c، فان c **يسمى** ***<u>بارامتر الكتينة</u>*** .

<u>المعادلتان البارمتريتان للكتينة</u>

بفرض ان الاحداثيين الكرتيزيان للنقطة p هما (x, y) سنوجد الان المعادلتين الرامتريتين للكتينة ، اى سنوجد كلا من (x, y) كدالة فى بارامتر وسنرى انه يمكن ايجاد كلا من (x, y) كدالة فى الزاوية ψ.

$$\frac{dx}{d\psi} = \frac{dx}{ds}\,\frac{ds}{d\psi} \tag{1.1.6}$$

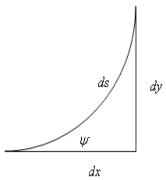
بتفاضل المعادلة (1.1.5) بالنسبة الى ψ نحصل على

$$\frac{ds}{d\psi} = c\sec^2\psi \tag{1.1.7}$$

ايضا واضح ان

$$\frac{dx}{ds} = \cos\psi \tag{1.1.8}$$

بالتعويض من (1.1.7) ، (1.1.8) فى (1.1.6) نحصل على



$$\frac{dx}{d\psi} = c\sec^2\psi\cos\psi$$
$$= c\sec\psi$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$x = c\ln\left(\sec\psi + \tan\psi\right) + c_1$$

حيث c_1 ثابت . وباختيار المحور الرأسى vy مارا باسفل نقطة من الكتينة فإنه عند v يكون $x = 0, \psi = 0$ وبالتعويض نجد ان قيمة الثابت $c_1 = 0$.

$$x = c\ln\left(\sec\psi + \tan\psi\right) \tag{1.1.9}$$

المعادلة (1.1.9) تعطينا x كدالة فى البارامتر ψ.
بالنسبة الى المعادلة البارامترية الاخرى الخاصة بالاحداثى y كدالة فى ψ فإن

$$\frac{dy}{d\psi}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{ds}{d\psi} \qquad (1.1.10)$$

وحيث ان

$$\frac{dy}{ds}=\sin\psi \qquad (1.1.11)$$

بالتعويض من (1.1.7) ، (1.1.11) فى (1.1.10) نحصل على

$$\frac{dy}{d\psi}=c\sin\psi\sec^{2}\psi=c\sec\psi\tan\psi$$

بالتكامل نجد ان

$$y=c\sec\psi+c_{2}$$

حيث c_2 ثابت التكامل . وباختيار المحور x منخفضا مسافة c عن اسفل نقطة من الكتينة v فانه عند النقطة v يكون $y=c\,,\psi=0$ بالتالى يكون $c_2=0$.

$$\therefore\ y=c\sec\psi \qquad (1.1.12)$$

المعادلتان (1.1.12)،(1.1.9) هما المعادلتان البارامتريتان لمنحنى الكتينة

المعادلة الكارتيزية لمنحنى الكتينة :

بحذف البارمتر ψ بين المعادلتين (1.12)،(1.9) نحصل على علاقة بين الاحداثيين x, y وتكون هى المعادلة الكارتيزية للكتينة من المعادلة (9) فان

$$\begin{aligned}&\sec\psi+\tan\psi=e^{x/c}\\&\sec^{2}\psi-\tan^{2}\psi=1\end{aligned} \qquad (1.1.13)$$

وحيث ان

$$(\sec\psi-\tan\psi)=\frac{1}{\sec\psi+\tan\psi}=\frac{1}{e^{x/c}}=e^{-x/c}$$

$$\therefore \sec\psi - \tan\psi = e^{-x/c} \qquad (1.1.14)$$

بجمع (1.1.14)، (1.1.13) نحصل على

$$2\sec\psi = e^{x/c} + e^{-x/c}$$

باستخدام العلاقة (1.1.12) نحصل على

$$y = c\ \cosh\left(x/c\right) \qquad (1.1.15)$$

وهى علاقة بين (x, y) وهى المعادلة الكارتيزية لمنحنى الكتينة .

الشد عند ايه نقطة :

من المعادلة (1.1.4) فإن

$$T = wc\sec\psi$$

وباستخدام المعادلة (1.1.12) نجد ان

$$T = wy \qquad (1.1.16)$$

المعادلة (1.1.16) تعين الشد عند اى نقطة من نقاط السلسلة .

بعض العلاقات الاخرى للكتينة :

$$\therefore S = c\ \tan\psi, \qquad y = c\sec\psi$$

$$\therefore S^2 = c^2\ \tan^2\psi, \qquad y^2 = c^2\sec^2\psi$$

$$\therefore S^2 = c^2\left(\sec^2\psi - 1\right), \qquad S^2 = c^2\sec^2\psi - c^2 = y^2 - c^2$$

$$\therefore y^2 = S^2 + c^2 \qquad (1.1.17)$$

العلاقة (1.1.17) تربط بين S والاحداثى الراسى عند اى نقطة من الكتينة .
بالتعويض من العلاقة (1.1.15) عن قيمة y بدلالة x فان المعادلة (1.1.17) تصبح

$$S^2 = c^2\left(\cosh^2(x/c) - 1\right)$$
$$= c^2 \sinh^2(x/c)$$

اى ان

$$S = c \sinh\left(\frac{x}{c}\right) \qquad (1.1.18)$$

العلاقة $(1.1.18)$ تربط بين S والاحداثى الافقى x عند اى نقطة على منحنى الكتينة.

$$\therefore S = c \tan\psi \qquad , y = c \sec\psi$$
$$\therefore \tan\psi = \frac{s}{c} \qquad , \sec\psi = y/c$$
$$\therefore x = c \ln(\sec\psi + \tan\psi)$$

$$\therefore x = c \ln\left(\frac{y+S}{c}\right) \qquad (1.1.19)$$

العلاقة $(1.1.19)$ تربط بين S والاحداثى (x, y) عند اى نقطة على المنحنى الكتينة

ملحوظة

المحور x يسمي دليل الكتينة واذا كانت نقطتى التعليق تقعان على نفس الخط الافقى فإن البعد بينهما يسمى بفتحة او بحر الكتينة. فى هذه الحالة فان عمق الرأس v عن AB يسمى بسهم الكتينة σ . كما ان المنحنى فى هذة الحالة يكون متماثلا حول المحور y فإذا كان طول السلسلة $2l$ فإن σ يمكن إيجادها بمعلومية (l, c) كالاتى.

بتطبيق العلاقة $(1.1.17)$ عند إحدى نقطتى التعليق يكون

$$(c+\sigma)^2 = l^2 + c^2$$
$$\therefore c + \sigma = \sqrt{l^2 + c^2}$$

$$\therefore \sigma = -c + \sqrt{l^2 + c^2} \qquad (1.1.20)$$

(2) اسلاك التليفون والتلغراف

من المعروف انه عند تركيب اسلاك التليفون او التليغراف بين الاعمدة فانه يتم شد السلك عند نقاط التعليق بحيث يصل الشد عندها الى افصى قيمة يمكن للسلك ان يتحملها ،. والهدف من ذلك هو ان تصل اسفل نقطة من نقاط السلك الى اقصى ارتفاع ممكن لها على الارض اى ان الزيادة فى الشد عند نقاط التعليق يؤدى الى زيادة البارمتر c وبالتالى يتناقص المقدار $\frac{x}{c}$.

فاذا فرضنا ان الشد قد تزايد حتى وصل الى قيمة عندها يمكن يمكن اهمال القوى الرابعة والاعلى للمقدار $\frac{x}{c}$ فان المفكوك

$$y = c\cosh\frac{x}{c} = \frac{c}{2}\left[e^{x/c} + e^{-x/c}\right]$$

$$= \frac{c}{2}\left[\left\{1 + \frac{x}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{c}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{c}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{x}{c}\right)^4 ......\right\}\right]$$

$$+ \left\{1 - \frac{x}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{c}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{c}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{x}{c}\right)^4 .\right\}$$

$$\therefore\ y = \frac{c}{2}\left[2 + \left(\frac{x}{c}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{x}{c}\right)^4 + ...\right]$$

ويمكن كتابتها فى الصورة

$$y = \frac{c}{2}\left[2 + \left(\frac{x}{c}\right)^2 + ...\right]$$

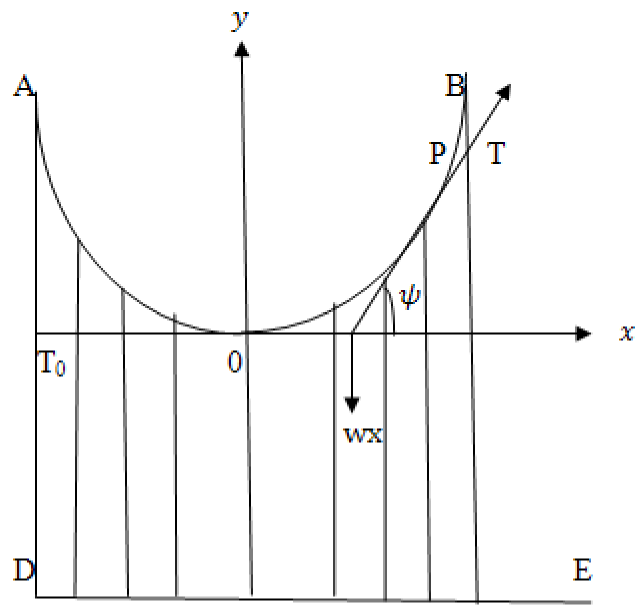
$$y = c + \frac{x^2}{2c}$$

$$\therefore\ x^2 = 2c(y - c) \qquad (1.1.21)$$

وهى معادلة قطع مكافئ راسة عند النقطة $(0,c)$ وطول وترة البؤرى العمودى يساوى $2c$.

(3) الكوبرى المعلق :

هو عبارة عن كبل مهمل الوزن بين نقطتين A, B يحمل قوائم راسية مهملة الوزن ايضا وتحمل بدورها الطريق DE وهو الحمل الاساسي على الكوبرى . ويتم تصميم الكوبرى المعلق بحيث يكون وزن الطريق وما يمر علية موزعا توزيعا افقيا منتظما اى وزن وحدة الاطوال ω من الطريق يكون ثابت .



لايجاد المنحنى الذى ياخذ الكبل AB فى هذة الحالة ناخذ نقطة الاصل 0 للمحاور الكرتيزية والذاتية عند اسفل نقطة من الكبل (المماس عندها يكون افقيا) والمحور ox افقيا والمحور oy راسيا الى اعلى وياخذ اى نقطة اختيارية p من نقاط الكبل ولتكن احداثياتها (x, y) ودراسة اتزان الجزء op من الكبل تحت تاثير ثلاثة قوى هما T, T_o والوزن ωx.

$$T \cos \psi = T_0 \qquad (1.1.22)$$

$$T \sin \psi = wx \qquad (1.1.23)$$

ومن ثم فان

$$Tan \ \psi = \frac{\omega x}{T_0}$$

وبذلك يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega x}{T_0}$$

وبالتكامل نحصل على

$$y = \frac{\omega x^2}{2T_0} + c_1$$

وفيها يتلاشى التكامل (x, y) عند النقطة 0 .

$$\therefore y = \frac{\omega x^2}{2T_0} \qquad (1.1.24)$$

المعادلة (1.1.24) تمثل معادلة قطع مكافئ محوره راسى وراسة الى اسقل وطول وتره البؤرى العمودى يساوى $\frac{2T_0}{\omega}$.

اما الشد فى الكبل عند النقطة الاختيارية p فيمكن الحصول عليه مباشرة من معادلات الاتزان كالاتى

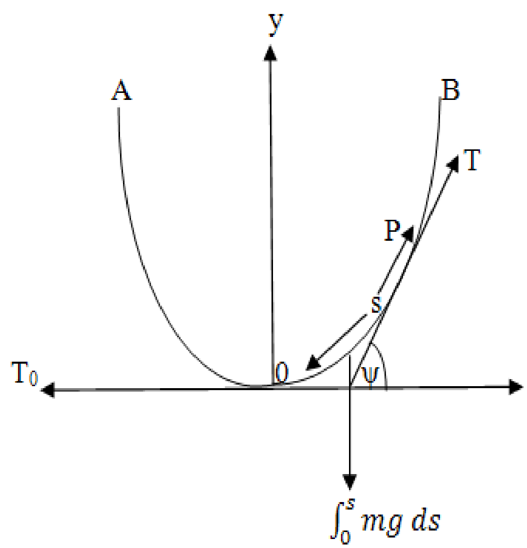
$$T^2 = T_0^2 + \omega^2 x^2$$

$$T = T_0 \sqrt{1 + \frac{\omega^2 x^2}{T_0^2}} \qquad (1.1.25)$$

(4) الكتينة متغيرة الكثافة الطولية:

وهى عبارة عن سلسلة ثقيلة غير منتظمة معلقة بين نقطتين A, B فى هذه الحالة فان كتلة وحدة الاطوال m من السلسلة لا تساوى مقدارا ثابتا . فاذا فرضنا ان $m = \lambda q$ حيث λ هى الكثافة الحجمية للمادة المصنوع منها السلسلة q هى مساحة المقطع فان m ستكون متغيرة إما بتغير λ او بتغير q أوبتغير كلاهما .

بأخذ نقطة إختيارية p من نقاط السلسلة وبأحذ اسفل نقطة فى السلسلة 0 نقطة اصل الاحداثيات الذاتية ودراسة إتزان الجزء op من السلسلة نجد ان



$$T\cos\psi = T_0 \tag{1.1.26}$$

$$T\sin\psi = \int_0^s mg\,ds \tag{1.1.27}$$

بقسمة المعادلة (1.1.27) على المعادلة (1.1.26) نجد ان

$$\tan\psi = \frac{g}{T_0}\int_0^s m\,ds \tag{1.1.28}$$

وبتفاضل طرفى هذه المعادلة بالنسبة الى s

$$\therefore \sec^2\psi\,\frac{d\psi}{ds} = \frac{g}{T_0}m$$

اى ان

$$m\cos^2\psi\frac{ds}{d\psi}=\frac{T_0}{g}=\cos t \qquad (1.1.29)$$

فاذا اعطينا قيمة m وتكامل هذه العلاقة يمكننا الحصول على المعادلة الذاتية للمنحنى الذى تاخذة السلسلة . أما اذا كان المنحنى الذى تاخذة السلسلة معلوما فان هذه العلاقة تعطى كتلة وحدة الاطوال من السلسلة .

(4) الكتينة منتظمة المتانة:

وهى عبارة عن سلسلة ثقيلة مصنوعة من مادة منتظمة $(\lambda =$ Const.) ومعلقة تعليقا حرا تحت تاثير الجاذبية الارضية بين نقطتين A, B بحيث تتناسب مساحة المقطع q عند اى نقطة p مع الشد T عند نفس النقطة اى ان

$$T=\alpha q \qquad (1.1.30)$$

حيث α ثابت التناسب .

وبفرض ان ω هى وزن وحدة الاطوال من السلسلة عند p يكون

$$\omega=m\,g=\lambda\,q\,g \qquad (1.1.31)$$

وبالتالى يكون

$$T=\beta\,\omega\ \ ,\beta=\frac{\alpha}{g\lambda} \qquad (1.1.32)$$

وباخذ المحاور كما فى الكتينة متغيرة الكثافة الطولية . ودراسة إتزان الجزء op نجد ان

$$T\cos\psi=T_0 \qquad (1.1.33)$$

$$T\sin\psi=\int_o^s\omega\,ds \qquad (1.1.34)$$

من المعادلتين السابقتين وباستخدام العلاقة

$$T=T_0\sec\psi$$

نجد ان

$$\tan\psi = \frac{1}{T_0}\int_o^s \omega\, ds = \frac{1}{T_0\beta}\int_o^s ds$$

$$= \frac{1}{\beta}\int \sec\alpha\, d\psi$$

وبالتفاضل نحصل على

$$\sec^2\psi\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\beta}\sec\psi$$

اى ان

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\beta}\cos\psi = \frac{1}{\beta}\frac{dx}{ds}$$

ومنها يكون

$$\beta\, d\psi = dx$$

وبالتكامل نحصل على

$$x = \beta\psi + c_1$$

حيث يتلاشى الثابت c_1 وذلك التلاشى x,ψ عند النقطة o وبالتالى يكون

$$x = \beta\psi \qquad (1.1.35)$$

وبالتالى فان

$$\frac{dy}{dx} = \tan\psi = \tan\left(\frac{x}{\beta}\right)$$

وبالتكامل نحصل على

$$y = \beta\ln\sec(x/\beta) + c_2$$

حيث يتلاشى الثابت c_2 وذلك التلاشى x, y عند النقطة o وبذلك تصبح المعادلة السابقة فى الصورة

$$y = \beta\ln\sec\left(\frac{x}{\beta}\right) \qquad (1.1.36)$$

هذه المعادلة الكرتيزية للمنحنى الذى تاخذة السلسلة ومنها يتضح ان المنحنى متماثل بالنسبة للمحور y.
ومنها يتضح ان عندما

$x \to \pm\frac{\pi}{2}\beta$ عندما $y \to \infty$

اى ان هناك خطى تقارب راسين عند

$$x = -\frac{\pi}{2}\beta \ , x = \pi/2\,\beta$$

وبالتالى فان اكبر بعد افقى بين نقطتى التعليق $\pi\beta$.

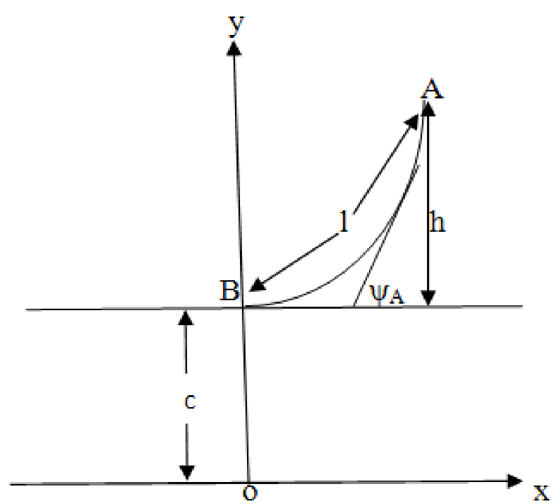
امثلة محلولة

مثال1:

تطير طائرة من ورق على ارتفاع h من سطح الارض بواسطة خيط طولة l بحيث كانت راس الكتينة على الارض . أثبت ان زاوية ميل الخيط عند الطائرة على الافقى تساوى $2\tan^{-1}\left(\frac{h}{l}\right)$. إثبت ايضا ان الشد فى الخيط عند الطائرة وعلى الارض يساوى على الترتيب $\frac{w}{2h}\left(l^2+h^2\right)$ ، $\frac{w}{2h}\left(l^2-h^2\right)$ حيث w وزن وحدة الاطوال من الخيط

.

الحل



حيث ان

$$y^2 = S^2 + c^2 \qquad (1)$$

عند الطائرة A فإن

$$s_A = l, \qquad y_A = h + c$$

بتطبيق العلاقة (1) عند النقطة A نجد ان

$$(h + c)^2 = l^2 + c^2$$

ومنها تعين بارمتر الكتينة c ويساوى

$$c = \frac{l^2 - h^2}{2h} \qquad (2)$$

حيث ان

$$S = c \tan \psi$$

$\therefore$ عند الطائرة A فإن

$$S_A = c \tan \psi_A = l$$

$$\therefore \tan \psi_A = \frac{l}{c} \qquad (3)$$

وبالتعويض عن قيمة c من (2) فى (3) نجد ان

$$\tan \psi_A = \frac{2hl}{l^2 - h^2}$$

$$\tan \psi_A = \frac{2(h/l)}{1 - (h/l)^2} \qquad (4)$$

ونعلم ان

$$\tan \psi_A = \frac{2 \tan\left(\frac{\psi_A}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\psi_A}{2}\right)}$$

بمقارنة (4)و(5) نحصل على

$$\tan\left(\frac{\psi_A}{2}\right) = \frac{h}{l}$$

اى ان

$$\psi_A = 2\tan^{-1}\left(\frac{h}{l}\right)$$

اى ان المماس للخيط عند الطائرة A يميل على الافقى بزاوية تساوى $2\tan^{-1}\left(\frac{h}{l}\right)$ ولايجاد الشد عند الطائرة A وعند الارض B نستخدم العلاقة

$$T_A = wy_A = w(h+c) \tag{7}$$

وبالتعويض عن قيمة c من (2) نجد ان الشد عند الطائرة يتعين من

$$T_A = w\left[h + \frac{l^2 - h^2}{2h}\right]$$

$$= \frac{w}{2h}\left(l^2 + h^2\right) \tag{8}$$

الشد عند الارض يتعين من

$$T_B = wy_B = wc$$

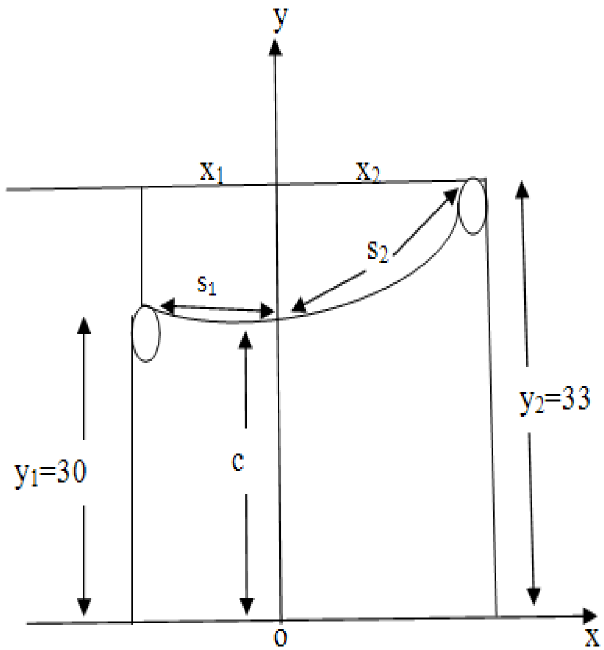
$$T_B = \frac{w}{2h}\left(l^2 - h^2\right) \tag{9}$$

مثال2:

حبل ثقيل منتظم طولة 90 بوصة مغلق فوق بكرتين صغيرتين ملساويتين على ارتفاعين مختلفين فاذا كان طول الجزئين المتدليين هما 30,33 بوصة . فاثبت ان راس الكتينة يقسم الحبل كلة بنسبة 4:5 ثم اوجد المسافة الافقية بين البكرتين .

الحل

حيث ان البكرتين ملساويتين فان الشد فى الحبل لايتغير بمروره على اى منهما . ولكن من العلاقة $T = wy$ يتضح ان الشد فى الجزء المنحنى من الحبل عند التقائة بالبكرتين يساوى $T_1 = wy_1 \;\; , T_2 = wy_2$ حيث y_1, y_2 هما ارتفاعى البكرتين اما الشد فى الاجزاء الرأسية للحبل عند إلتقائها بالبكرتين فكل منهما يساوى وزن الجزء المناظر له اى يساوى w مضروبا في طول هذا الجزء ومن هذا يتضح ان



$wy_1 = 30\omega \qquad , \quad wy_2 = 33\omega$

$y_1 = 30 \qquad , \quad y_2 = 33$ (1)

اى ان طرفا الحبل يجب ان يقعا على محور x .

بتطبيق العلاقة

$$y^2 = S^2 + c^2$$

عند كل من البكرتين نحصل على

$$(30)^2 = S^2 + c^2 \qquad (2)$$

$$(33)^2 = S_2^2 + c^2 \qquad (3)$$

بطرح المعادلة (2) من (3) نحصل على

$$(33)^2 - (30)^2 = S_2^2 - S_1^2 \qquad (4)$$

$$(S_2 - S_1)(S_2 + S_1)189$$

$$S1+S2=65-30-33=27 \qquad (5)$$

بالتعويض من(5) فى (4) نجد ان

$$S_2-S_1=7 \qquad (6)$$

والان من (5) و(6) نجد ان

$$S_1=10 \quad ,S_2=17 \qquad (7)$$

وبالتالى فان الراس تقسم الخيط كله بنسبة

$$\frac{S_1+30}{S_2+33}=\frac{40}{50}=\frac{4}{5}$$

والان بالتعويض من (7)فى (2) او (3) نحصل على بارامتر الكتينة

$$c=20\sqrt{2} \qquad (8)$$

بتطبيق العلاقة

$$x=c\ln\left(\frac{y+S}{c}\right)$$

عند كل من البكرتين نحصل على

$$x_1=c\ln\left(\frac{y_1+S_1}{c}\right)$$

واستخدام (1) و(7)و(8) نحصل على

$$=20\sqrt{2}\ \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$x_2=c\ln\left(\frac{y_2+S_2}{c}\right)$$

$$x_2=20\sqrt{2}\ln\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)$$

وبالتالى فإن المسافة الافقية بين البكرتين تساوى

$$x=x_1+x_2$$

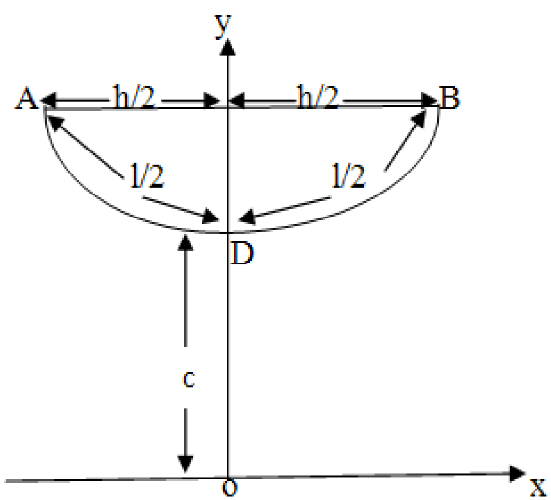
$$x=20\sqrt{2}\left[\ln\frac{2}{\sqrt{2}}+\ln\frac{5}{2\sqrt{2}}\right]$$

$$x = 20\sqrt{2}\ln(5/2) = 25.92$$

مثال3:

علق سلك تلغراف طولة l **بين عموديين على بعد يساوى** h **من بعضهما بحيث كان الشد فى نهايتيه اقل ما يمكن. إثبت ان** $l = \frac{h}{\mu}\sinh\mu$ **حيث** μ **تحقق المعادلة** $\mu\tanh\mu = 1$

الحل



الشد T عند النهاية A او B يتعين من

$$T_B = \omega y_B = wc\cosh\left(\frac{x_B}{c}\right) \tag{1}$$

وذلك باستخدام المعادلة الكريتيزية لمنحنى الكتينة $y = c\cosh\frac{x}{c}$ عند النقطة B وحيث ان $x_B = h/2$ فإن

$$T = T_B = wc\cosh\left(\frac{h}{2c}\right) \tag{2}$$

الشد T فى (2) يعتمد على بارمترات الكتينة c ويكون الشد اقل ما يمكن عندما $\frac{dT}{dc} = 0$ حيث

$$\frac{dT}{dc} = w\left[\cosh\left(\frac{h}{2c}\right) - \frac{h}{2c}\sinh\left(\frac{h}{2c}\right)\right] = 0$$

ومنها

$$\tanh\left(\frac{h}{2c}\right) = \frac{2c}{h} \tag{3}$$

نضع

$$\mu = \frac{h}{2c} \tag{4}$$

$$\therefore \tanh\mu = \frac{1}{\mu}$$

اى ان μ تحقق العلاقة

$$\mu\tanh\mu = 1 \tag{5}$$

وحيث ان

$$S_B = c\sinh\frac{x_B}{c}$$

$$\frac{l}{2} = c\sinh\left(\frac{h}{2c}\right)$$

$$\frac{l}{2} = c\sinh\mu$$

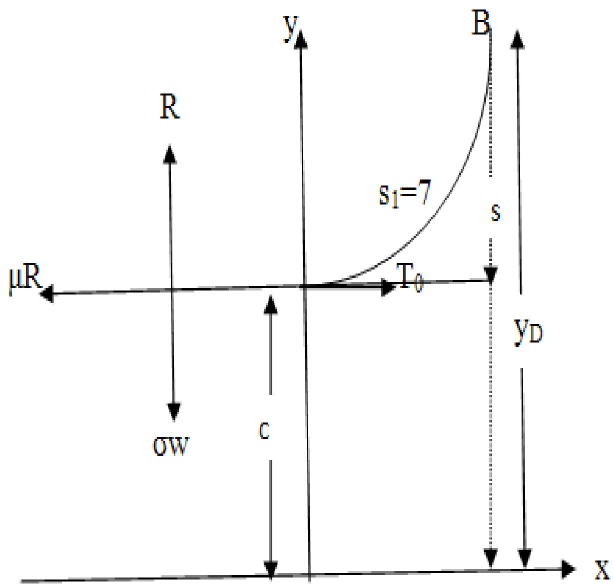
$$l = \frac{c}{2}\sinh\mu = \frac{h}{\mu}\sinh\mu \tag{6}$$

وذلك باستخدام العلاقة (4).

مثال4:

سلسلة ثقيلة منتظمة طولها $13\ ft$ ثبت احد طرفيها فى نقطة على ارتفاع $5\ ft$ من منضدة افقية خشنة وترك باقى السلسلة وطولة $6\ ft$ على المنضدة الخشنة . إثبت ان معامل الاحتكاك بينهما يساوى $\frac{2}{5}$.

الحل



من إتزان الجزء الموضوع على المنضدة نجد ان

$$R = 6w \tag{1}$$

$$\mu R = T_0 \tag{2}$$

حيث w وزن وحدة الاطوال من السلسلة .

من (1) و(2) نجد ان

$$T_0 = \mu 6w \tag{3}$$

وحيث لن الشد عند اسفل نقطة من السلسلة يعطى من

$$T_0 = wc \tag{4}$$

$$wc = \sigma\,\mu\,w$$
$$c = \sigma\,\mu \tag{5}$$

بتطبيق العلاقة $y^2 = S^2 + c^2$ عند النقطة D من السلسلة نجد ان

$$y_D^2 = S_1^2 + c^2$$
$$(5+c)^2 = (7)^2 + c^2$$

ومنها يتج ان

$$10\,c = 24$$
$$c = 2.4 \tag{7}$$

بالتعويض فى (5) ينتج ان

$$\mu = \frac{2}{5}$$

مثال5:

وصل قضيب منتظم AB طولة $2l$ بواسطة مفصل عند طرفة A الى نقطة ثابتة وربط طرفة الأخر B بطرف سلسلة منتظمة ثم ثبت طرفها الاخر فى نقطة D بحيث كان كل من AD المماس عند B افقيا ـفإذا كان وزن وحدة الاطوال من القضيب والسلسلة متساويين . إثبت ان طول السلسلة يساوى

$2l\sqrt{\sin^2\alpha + \cos\alpha}$ **حيث** $\alpha = B\hat{A}D$

الحل

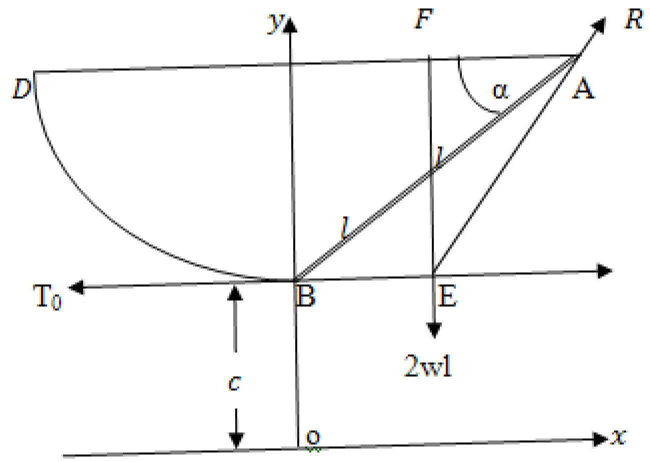
القضيب AB متزن تحت تأثير ثلاث قوى هى

(1) وزنه $2wl$ راسيا الى اسفل ويؤثر فى منتصف القضيب حيث w وزن وحدة الطول لكل من القضيب والسلسلة .

(2) الشد T_0 عند B ويكون افقيا .

(3) رد فعل R عند المفصل .

$\therefore$ يجب ان تتلاقى هذه القوى الثلاث فى نقطة واحدة كما فى الشكل .



واضح ان المثلث AFE مثلث القوى ونجد ان

$$\frac{2wl}{FE} = \frac{T_0}{FA} \qquad (1)$$

حيث ان

$$FE = 2l\sin\alpha$$
$$FA = l\cos\alpha$$
$$T_0 = wc$$

بالتعويض فى المعلدلة (1)نجد ان

$$\frac{2wl}{2l\sin\alpha} = \frac{wc}{l\cos\alpha}$$
$$\therefore c = l\cot\alpha \qquad (2)$$

وباستخدام العلاقة

$$y^2 = S^2 + c^2$$
$$\therefore y_D^2 = S_D^2 + c^2 \qquad (3)$$

حيث S_D هى طول السلسلة المطلوب

$$y_D = FE + Bo$$
$$= 2l\sin\alpha + c$$

بالتعويض فى المعادلة (3) ينتج ان

$$(2l\sin\alpha + c) = S_D^2 + c^2$$
$$S_D^2 = 4l^2\sin^2\alpha + 4lc\sin\alpha$$

وبالتعويض عن قيمة بارمترالكتينة c من (2) نجد ان

$$S_D^2 = 4l^2\sin^2\alpha + 4l^2\cos\alpha$$
$$S_D = 2l\sqrt{\sin^2\alpha + \cos\alpha}$$

و هو طول السلسلة المطلوب .

مثال6:

سلسلة ثقيلة غير منتظمة معلقة تعليقا حرا تحت تأثير الجاذبية الارضية بين نقطتين . فاذا كانت المعادلة الذاتية للمنحنى الذى تاخذه السلسلة هى $S = 4a\sin\psi$ حيث اسفل نقطة فى السلسلة هى نقطة الاصل للاحداثيات الذاتية . اوجد العلاقة بين كتلة وحدة الاطوال من السلسلة والزاوية ψ.

الحل

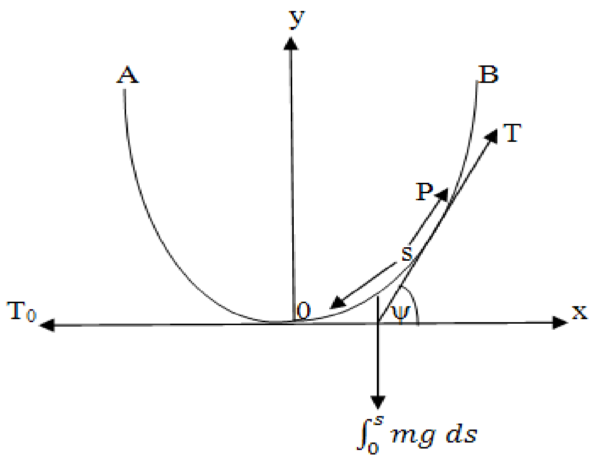
بدراسة إتزان الجزء op نجد ان

$$T\cos\psi = T_o \tag{1}$$

$$T\sin\psi = \int_o^S mg\, ds \tag{2}$$

بقسمة معادلة (2) على معادلة (1) ينتج ان

$$\tan\psi = \frac{g}{T_o}\int_o^S m dS \tag{3}$$



بتفاضل المعادلة (3) بالنسبة الى s نحصل على

$$Sec^2\psi \frac{d\psi}{dS} = \frac{g}{T_o} m \tag{4}$$

ولكن من معادلة المنحنى يكون

$$\frac{dS}{d\psi} = 4a\cos\psi$$

$$\frac{d\psi}{dS} = \frac{1}{4a}\sec\psi \tag{5}$$

بالتعويض من (5) فى (4) نحصل على

$$m = \frac{T_o}{4ag}\sec^3\psi \tag{6}$$

المعادلة (6) تعطى العلاقة بين m , ψ ويمكن كتابتها بالصورة

$$m = \alpha\sec^3\psi$$

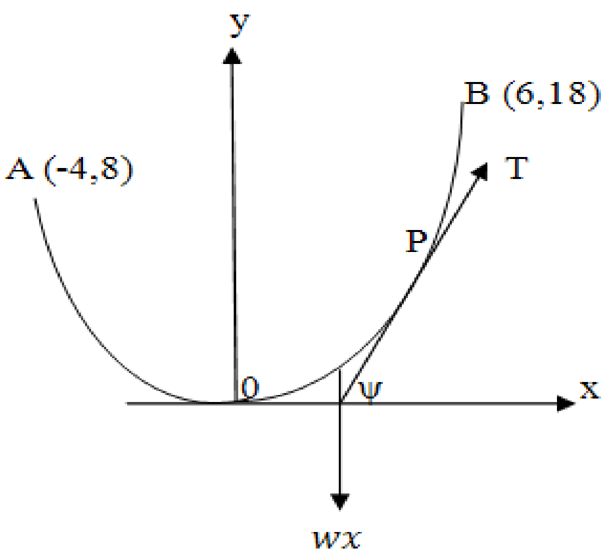
حيث

$$\alpha = \frac{T_o}{4ag} = const$$

مثال7:

اذا كانت o هى اسفل نقطة من نقاط سلسلة ثقيلة معلقة تعليقا حرا بين نقطتين A, B إحداثياتهما (6,18) ، $(-4,8)$ حيث o هى نقطة الاصل والمحور x افقى والمحور y رأسي لاعلى وكان وزن كل جزء من السلسلة يتناسب مع مسقطة الافقى . فأثبت ان السلسلة تاخذ شكل منحنى القطع المكافئ . اذا كان الوزن الكلى للسلسلة هو 100 باوند فأوجد اقل قيمة للشد ،واجد كذلك الشد عند كل من نقطتى التعليق .

الحل



باعتبار اتزان الجزء op نجد ان

(1) $$T\cos\psi = T_o$$

(2) $$T\sin\psi = \omega x$$

بقسمة المعادلة (2) على المعادلة (1) نحصل على

$$\tan\psi = \frac{\omega x}{T_o}$$

اى ان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega x}{T_o}$$

وبالتكامل وباستخدام الشروط الابتدائية عند النقطة o نجد ان

$$y = \frac{\omega}{2T_o} x^2 \qquad (3)$$

وهى معادلة قطع مكافئ .
وحيث ان هذا القطع يمر بالنقاط A, B لذا فانها تحقق معادلته

$$\frac{\omega}{2T_o} = \frac{y}{x^2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \qquad (4)$$

ومنها ينتج ان

$$T_o = \omega = \frac{100}{4+6} = 10 \qquad (5)$$

وهى اقل قيمة للشد .
من(1)، (2)، (5) نجد ان

$$T = \sqrt{T_o^2 + \omega^2 x^2} = \omega\sqrt{1 + x^2} = 10\sqrt{1 + x^2}$$

الشد عند النقطة A .

$$T_A = 10\sqrt{1+16} = 10\sqrt{17} \ . \qquad (6)$$

الشد عند النقطة B .

$$T_B = 10\sqrt{1+36} = 10\sqrt{37} \ . \qquad (7)$$

مثال8:

سلسلة ثقيلة مصنوعة من مادة منتظمة معلقة تعليقا حرا تحت تأثير الجاذبية الارضية فإذا كانت مساحة مقطع السلسلة عند اى نقطة تتناسب تناسبا عكسيا مع الشد عند نفس النقطة ، فأثبت ان السلسلة تاخذ شكل قطع مكافئ محوره رأسى ورأسة الى اسفل .

الحل

بدراسة إتزان الجزء op (أنظر الشكل فى المثال رقم (6)) نجد ان

$$T\cos\psi = T_o \tag{1}$$

$$T\sin\psi = g\int_o^S m\,dS \tag{2}$$

بقسمة المعادلة (2) على المعادلة (1) نحصل على

$$\tan\psi = \frac{g}{T_o}\int_o^S m\,dS \tag{3}$$

بفرض ان الكثافة الحجمية للمادة المصنوع منها السلسلة هى $\lambda = con\ st$ وان مساحة المقطع عند p هى q يكون

$$m = \lambda q \tag{4}$$

وحيث ان

$$q\,\alpha\,\frac{1}{T}$$

(حيث α مقدار ثابت)

$$\therefore\ q = \frac{\alpha}{T} \tag{5}$$

$$\therefore\ m = \frac{\lambda\alpha}{T}$$

وباستخدام العلاقة (1)

$$m = \frac{\lambda\alpha}{T_o\sec\psi} = \frac{\lambda\alpha}{T_o}\cos\psi$$

$$mdS = \frac{\lambda\alpha}{T_o}\cos\psi \qquad dS = \frac{\lambda\alpha}{T_o}dx \qquad (4)$$

بالتعويض فى المعادلة (3) مع ملاحظة ان عندما

$$x = 0 \ for \ S = 0, x = x \quad \text{for} \ S = S$$

$$\therefore \tan\psi = \frac{\lambda g\alpha}{T_0^2}\int_0^x dx = dx$$

حيث $\delta = \dfrac{\lambda g\alpha}{T_0^2} = \cos t$

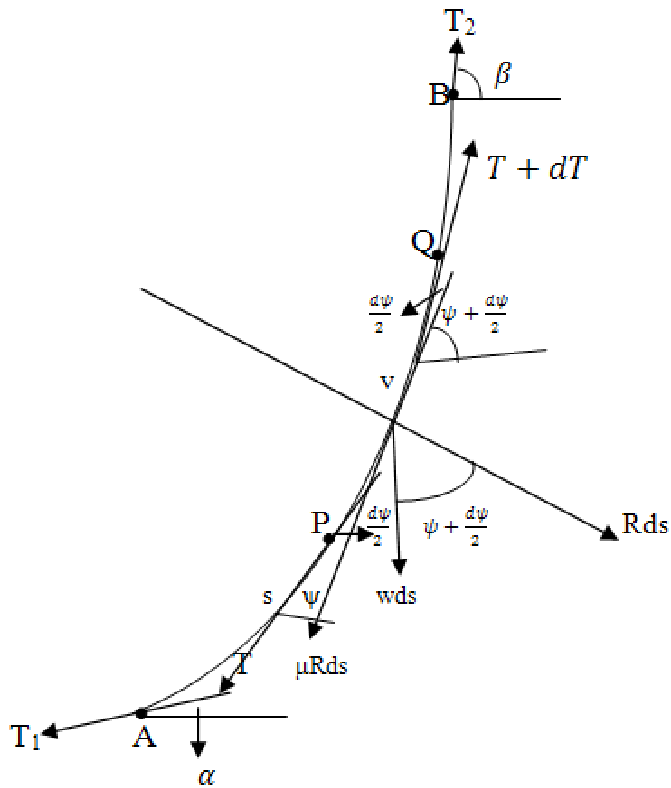
$$\frac{dy}{dx} = \delta x$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$y = \frac{\delta}{2}x^2 + c_1$$

ويتلاشى ثابت التكامل x, y عند o وهذه هى معادلة قطع المكافئ.

ثانيا : إتزان الحبال والسلاسل على اسطح خشنة:



نعتبر ساساة قابلة للثنى بسهوله ومنتظمة AB . وان وزن وحدة الطول فى السلسلة w . الشد فى السلسلة يكون دائما فى إتجاه المماس لها طالما انها لا تبدى اية مقاومة للشد. وبفرض ان هذه السلسلة موضوعة فى تماس مع سطح خشن معامل الاحتكاك له μ .

نفرض ان الشد عند A هو T_1 ويصنع زاوية α مع الافقى وكذلك نفرض ان الشد عند B هو T_2 ويصنع زاوية β مع الافقى . كما نفرض ان السلسلة على وشك الانزلاق فى الاتجاه AB . نعتبر إتزان جزء من السلسلة PQ طوله ds حيث S طول القوس AP .

يتزن الجزء PQ تحت تأثير :

(1) الشد عند P هو T ويصنع زاوية ψ مع الافقى .

(2) الشد عند Q هو $T + dT$ ويصنع زاوية $\psi + d\psi$ مع الافقى .

(3) وزن العنصر ds ويكون مساويا wds لاسفل .
(4) رد الفعل العمودى Rds حيث R رد الفعل لوحدة الاطوال من السلسلة .
(5) قوة الاحتكاك μRds وتصنع زاوية $\psi + \frac{d\psi}{2}$ مع الافقى .

بالتحليل فى إتجاه المماس عند V نحصل على

$$(T + dT)\cos\left(\frac{d\psi}{2}\right) = \mu Rds + wds \sin\left(\psi + \frac{d\psi}{2}\right) + T\cos\left(\frac{d\psi}{2}\right)$$

وباهمال مربعات الكميات المتناهية الصغر نجد ان :

$$dT = \mu Rds + wds \sin\psi$$

$$\frac{dT}{ds} = \mu R + w\sin\psi \tag{1.2.1}$$

بالتحليل فى الإتجاه العمودى على المماس عند V نحصل على

$$(T + dT)\sin\left(\frac{d\psi}{2}\right) + T\sin\left(\frac{d\psi}{2}\right) = Rds + wds\cos\left(\psi + \frac{d\psi}{2}\right)$$

وباهمال الكميات المتناهية الصغر نجد ان :

$$Td\psi = Rds + wds\cos\psi \tag{1.2.2}$$

$$T\frac{d\psi}{ds} = R + w\cos\psi \tag{1.2.3}$$

وبحذف R بين (1.2.1)و(1.2.2) نحصل على :

$$\frac{dT}{ds} - \mu T\left(\frac{d\psi}{ds}\right) = w(\sin\psi - \mu\cos\psi)$$

وبما ان

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

حيث ρ نصف قطر التقوس فإن .

$$\frac{dT}{d\psi} - \mu T = \rho w(\sin\psi - \mu\cos\psi) \tag{1.2.4}$$

هذه المعادلة التفاضلية التى تربط بين الشد T عند اى نقطة وزاوية ميل المماس عند هذه النقطة .
ويجرى تكامل هذة المعادلة التفاضلية بواسطة ضرب طرفيها فى العامل المكامل $e^{-\mu\psi}$ فنجد ان

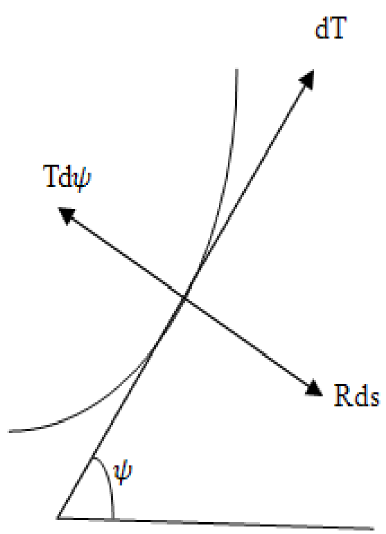
$$\frac{d}{d\psi}\left(Te^{-\mu\psi}\right) = \rho w e^{-\mu\psi}(\sin\psi - \mu\cos\psi)$$

باجراء تكامل الطرفين نحصل على

$$Te^{-\mu\psi} = \int \rho w e^{-\mu\psi}(\sin\psi - \mu\cos\psi)\,d\psi + c \tag{1.2.5}$$

حالات خاصة :

1-حبل خفيف على سطح املس:



فى هذه الحالة $\mu = 0$, $w = 0$ بالتعويض فى المعادلة (1) ينتج ان :

$$dT = 0$$

$$T = const$$

وهذا يعنى ان الشد فى الحبل الخفيف الملامس لسطح املس يكون ثابت القيمة عند جميع نقط الحبل .
كذلك يكون بالتعويض فى المعادلة (2) عن $\mu = 0 \quad , \quad w = 0$ نحصل على

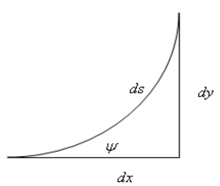
$$T\,d\psi = R\,ds$$

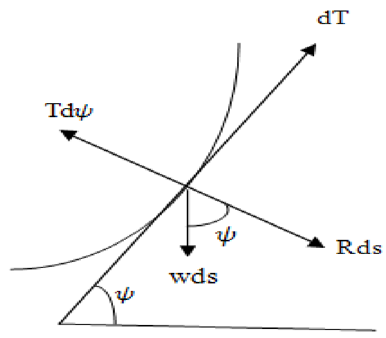
$$\therefore \frac{T}{\rho} = R \qquad\qquad ,\therefore R = \frac{const}{\rho}$$

هذا يعنى ان رد الفعل العمودى على السطح يتناسب تناسبا عكسيا مع نصف قطر التقوس $\left(R\,\alpha\,\frac{1}{\rho}\right)$

2-حبل ثقيل على سطح املس:

فى هذه الحالة $\mu = 0$ فينتج ان





$$dT = wds\,\sin\psi = wdy$$

$$T = wy + c$$

بفرض ان $T = T_0$ عند $y = y_0$ فنجد ان

$$c = T_0 - wy_0$$

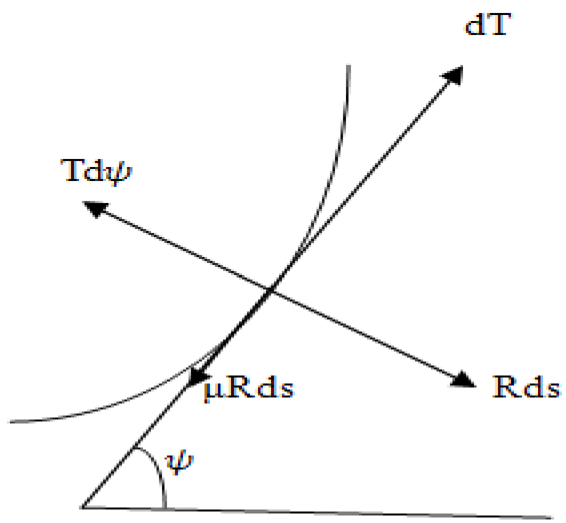
$$\therefore T - T_0 = w(y - y_0) \tag{1.2.6}$$

هذا يعنى انه إذا لامس خيط ثقيل سطحا املسا كان الفرق بين الشدين عند نقطتين منه مساويا لوزن جزء من الحبل طولة يساوى المسافة الراسية بين النقطتين .

أما رد الفعل العمودى على الحبل فيتعبن من

$$R = \frac{T}{\rho} - w \cos\psi \tag{1.2.7}$$

3-حبل خفيف على سطح خشن:



فى هذه الحالة $w = 0$ فينتج ان:

$$\frac{dT}{d\psi} = \mu T$$

$$\frac{dT}{T} = \mu\, d\psi$$

$$\ln T = \mu\psi + \ln c$$

التى يمكن كتابتها على الصورة

$$T = c\ e^{\mu\psi} \tag{1.2.8}$$

حيث c ثابت . فاذا كان الشد عند A هو T_1 و الشد عند B هو T_2وكانت $\psi = \alpha$ عند A ، $\psi = \beta$ عند B فان

$$T_1 = c\ e^{\mu\alpha},\ T_2 = c\ e^{\mu\beta}$$
$$\therefore T_2 = T_1\, e^{\mu(\beta-\alpha)} \tag{1.2.9}$$

حيث $\beta - \alpha$ هى الزاوية بين المماسين عند النقطتين A, B وهذه العلاقة لا تتوقف على شكل السطح.
ورد الفعل يتعين من

$$R = \frac{T}{\rho} \tag{1.2.10}$$

أمثلة محلولة:-

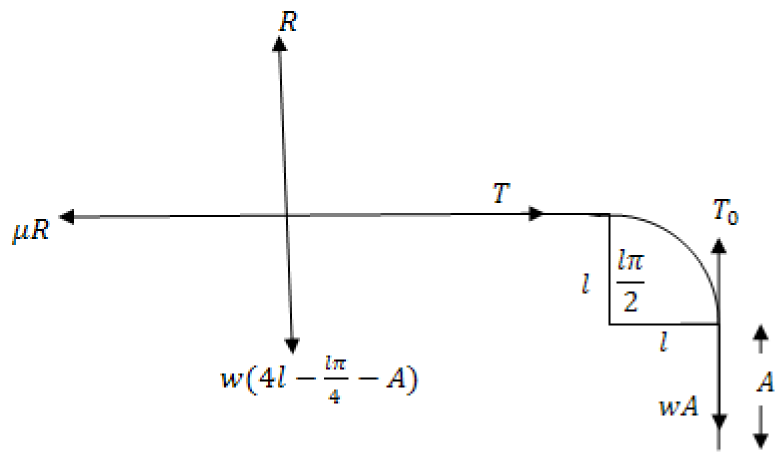
مثال1:

خيط ثقيل طولة $4l$ وضع جزء منه على منضدة افقية خشنة معامل الاحتكاك بينهما يساوى $\frac{1}{2}$ ويمر الخيط على حافة المنضدة الملساء التى تاخذ شكل ربع دائرة نصف قطرها l ويتدلى باقى الخيط رأسيا لأسفل .

أثبت ان اكبر طول للجزء المتدلى لحفظ الاتزان يساوى $\frac{l}{6}(4-\pi)$.

الحل

نفرض ان A هو طول الجزء المعلق وأن w وزن وحدة الاطوال من السلسلة



$$T - T_0 = wl \qquad (1)$$

ومن اتزان الجزء المعلق

$$T_0 = wA \qquad (2)$$

ومن اتزان الجزء الموضوع على المنضدة الخشنة :

$$R = w\left(4l - \frac{l\pi}{4} - A\right) \tag{3}$$

$$T = \mu R \tag{4}$$

$$\therefore T = \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}w\left(4l - \frac{l\pi}{4} - A\right)$$

ومن (1)و(2) ينتج ان

$$T = w(l + A)$$

$$\therefore w(l + A) = \frac{1}{2}w(4l - \frac{l\pi}{4} - A)$$

ومنها ينتج ان

$$A = \frac{l}{6}(4 - \pi) \quad .$$

مثال2:

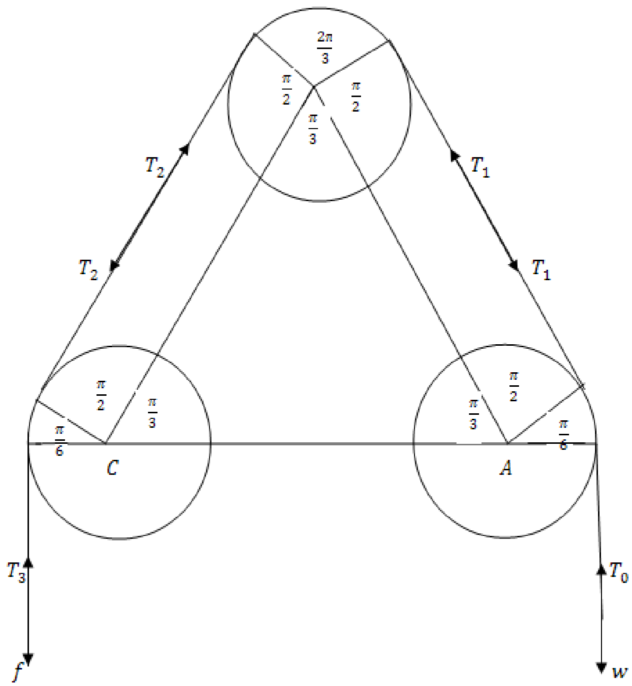
$A, B.C$ ثلاث بكرات خشنة متساوية معامل الاحتكاك لها $\mu_1, \mu_2.\mu_3$ على الترتيب بحيث تكون مثلث متساوى الاضلاع رأسة B فوق ضلعه الافقى AC . فاذا مر حبل خفيف حول البكرات وعلق ثقل w فى طرف الحبل عند البكرة A فاثبت القوة الراسية التى تؤثر فى الطرف الأخر للحبل عند c التي تجعل الحبل على وشك الحركة تساوى $w\, e^{\frac{\pi}{6}[\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3]}$.

الحل

نفرض ان القوة الرأسية عند c هى f

$$T_o = W$$

$$T_1 = T_o e^{\mu_1 \pi/6},$$



$$T_2 = T_1 e^{\mu_2 \frac{4\pi}{6}},$$

$$\therefore T_2 = T_o e^{\mu_1 \frac{\pi}{6}} e^{\mu_2 \frac{4\pi}{6}},$$

$$T_3 = T_2 e^{\mu_3 \pi/6}$$

$$\therefore T_3 = T_o e^{\frac{\mu_3 \pi}{6}} e^{\frac{\mu_1 \pi}{6}} e^{\frac{4\mu_2 \pi}{6}}$$

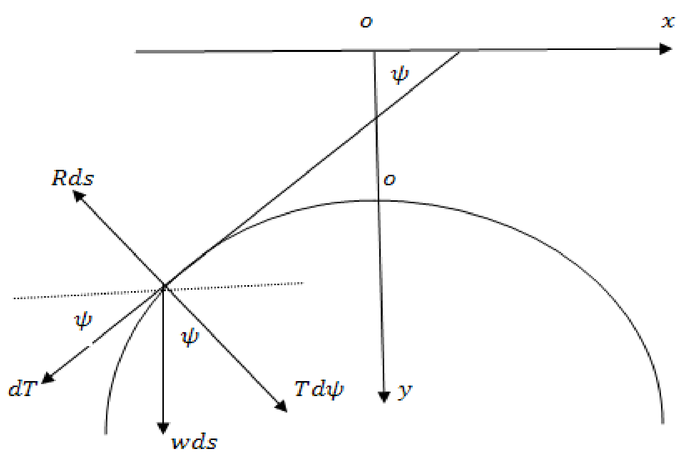
$$= T_o e^{\pi/6(\mu_3 + 4\mu_2 + \mu_1)}$$

$$T_3 = we^{\frac{\pi}{6}(\mu_3 + 4\mu_2 + \mu_1)} = f$$

مثال3:

تستقر سلسلة منتظمة ثقيلة فى وضع تماثل على سلك املس على هيئة كتينة محورها رأسى وراسها الى اعلى .اوجد الشد عند اى نقطة واثبت ان الضغط على السلك عند اي نقطة يتناسب عكسيا مع مربع بعدها الراسى عن دليل الكتينة .

الحل



$$\therefore (T+dT)\cos\left(\frac{d\psi}{2}\right)+wds\sin\psi=T\cos\left(\frac{d\psi}{2}\right).$$

$$Rds=wds\cos\psi+(T+dT)\sin\left(\frac{d\psi}{2}\right)$$

اى ان

$$\frac{dT}{ds}=-w\sin\psi \tag{1}$$

$$R=w\cos\psi+\frac{T}{\rho} \tag{2}$$

بتكامل المعادلة (1) نحصل على

$$T = -w\int \sin\psi \, ds$$

∴المعادلة الذاتية لمنحنى الكتينة هى

$$S = c\tan\psi$$

$$\rho = \frac{dS}{d\psi} = c\sec^2\psi \qquad (3)$$

$$\therefore dS = c\sec^2\psi \, d\psi$$

$$\therefore T = -cw\int \sin\psi \sec^2\psi \, d\psi$$

$$= -cw\int \sec\psi \tan\psi \, d\psi$$

$$\therefore T = -cw\sec\psi + c_1$$

عند النقطة o يتلاشى الشد T وتتلاشى زاوية ميل المماس ψ

$$\therefore c_1 = wc$$

$$\therefore T = wc\left[1 - \sec\psi\right] \qquad (4)$$

بالتعويض من (3) ، (4) فى (2) نجد ان

$$R = \frac{wc^2}{c^2\sec^2\psi} \qquad (5)$$

ولكن من المعادلات البارمترية للكتينة

$$y = c\sec\psi$$

$$\therefore R = \frac{wc^2}{y^2} = \frac{const.}{y^2}$$

$$R \propto \frac{1}{y^2}$$

حيث ωc^2 مقدار ثابت.

مثال4:

سلسلة ثقيلة منتظمة موضوعة داخل انبوبة ملساء على هيئة قطع مكافئ محورة رأسى وراسة الى اسفل وكانت السلسلة تكاد تلمس الانبوبة عند الراس . اوجد رد الفعل عند اى نقطة بدلالة زاوية ميل المماس عندها على الافقى .

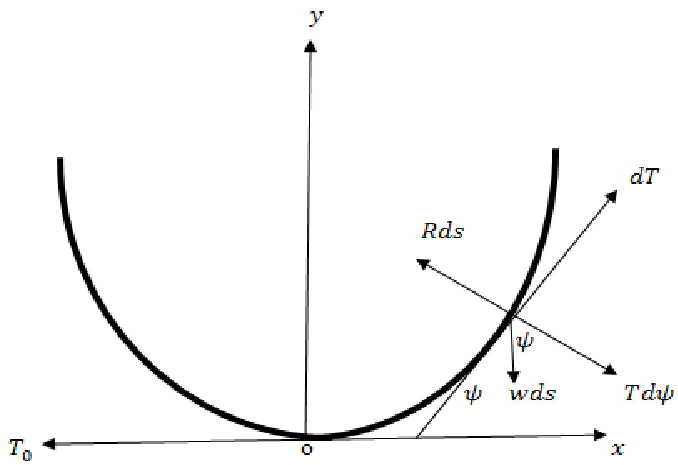
الحل

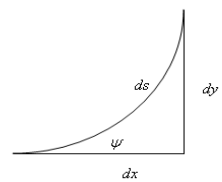
من معادلات الاتزان

$$dT = \omega\, ds \,\sin\psi \qquad (1)$$

$$R = \frac{T}{\rho} + \omega \cos\psi \qquad (2)$$

$$\therefore\ dy = \sin\psi\ ds \qquad (3)$$





$$\therefore\ dT = \omega\, dy$$

بالتكامل نحصل على

$$T = \omega\, y + c_1 \qquad (*)$$

ولكن عند $\psi = 0$ وكانت $R = 0$ وبالتعويض فى المعادلة (2)

$$o = \frac{T_o}{\rho_o} + \omega \qquad \therefore\ T_o = -\omega\,\rho_o \qquad (4)$$

حيث T_o الشد عند رأس الكتينة .

ومن معادلة القطع المكافئ فى حالة اذا كان رأس القطع عند نقطة الاصل.

$$x^2 = 4ay \qquad (5)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tan\psi = \frac{x}{2a}. \qquad (6)$$

بالتفاضل مرة اخرى بالنسبة الى x

$$y'' = \frac{1}{2a}$$

من المعادلة (6) نحصل على

$$x = 2a\tan\psi$$

بالتعويض فى معادلة القطع المكافئ نحصل على

$$y = a\tan^2\psi \qquad (7)$$

$$y = a(\sec^2\psi - 1)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tan\psi$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \sec^2\psi\,\frac{d\psi}{dx} = \sec^2\psi\,\frac{d\psi}{ds}\frac{ds}{dx}$$

$$y'' = \sec^3\psi\,\frac{1}{\rho}$$

$$\therefore\ \rho = \frac{\sec^3\psi}{y''} = \frac{\left(1+\tan^2\psi\right)^{3/2}}{y''}$$

$$\rho = \frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{y''} = \frac{\left(1+\tan^2\psi\right)^{3/2}}{\frac{1}{2a}} = 2a\sec^3\psi$$

وعند $\psi = 0$ كانت $\rho = \rho_o$

$$\therefore\ \rho_o = 2a \qquad (9)$$

بالتعويض من (7) فى (*) نحصل على

$$T = +\omega a\tan^2\psi + c_1$$

عندما $T = T_o$ كانت $\psi = 0$

$$\therefore\ c_1 = T_o$$

بالتعويض عن قيمة c_1 نجد ان

$$T = T_o + \omega a \tan^2 \psi \qquad (10)$$

بالتعويض عن فيمة T_o من (4)، (9) نحصل على

$$T_o = -2a\omega$$

بالتعويض فى (10) نحصل على

$$T = -\omega a\left(\tan^2 \psi + 2\right) \qquad (11)$$

بالتعويض من (11) فى (3) فى معادلة (2) نحصل على

$$R = \frac{\omega}{2}\sin^2 \psi \cos \psi .$$

مثال5:

_احسب القدرة المنقولة بواسطة سير خفيف ملفوف على عجلة دائرية خشنة نصف قطرها a بحيث يحصر الجزء المطوى من السير على العجلة زاوية α عند المركز . اوجد كذلك السرعة التى تعطى اكبر قدرة.

الحل

نفرض ان السير يدور على بكرة نصف قطرها a على طول $a\alpha$ من المحيط وان القوى المؤثرة على عنصر طولة ds من السير هما الشدين $T, T + dT$ والقوة الطاردة المركزية $\frac{\omega v^2}{g} d\theta$ فى اتجاه نصف القطر الى الخارج والتى تعمل على حركة السير على العجلة حيث g عجلة الجاذبية الارضية ، ω وزن وحدة الاطوال v عى سرعة السير عند النقطة B وتكون فى اتجاه المماس (سرعة منتظمة) ورد الفعل العمودى Rds وقوة الاحتكاك μRds حيث ds طول عنصر من السير حركة العنصر ds فى اتجاه المماس هى :

$$(T + dT)\cos d\theta - T - \mu Rad\theta = 0 \qquad (1)$$

لا توجد حركة فى الاتجاه العمودى نجد ان

$$(T + dT)\sin d\theta - Rad\theta - \frac{\omega v^2}{g} d\theta = 0 \qquad (2)$$

وحيث ان $d\theta$ زاوية صغيرة تقترب من الصفر فيكون

$$\sin d\theta \approx d\theta, \qquad \cos d\theta \approx 1$$

وتصبح المعادلتين (2)و(1) فى الصورة

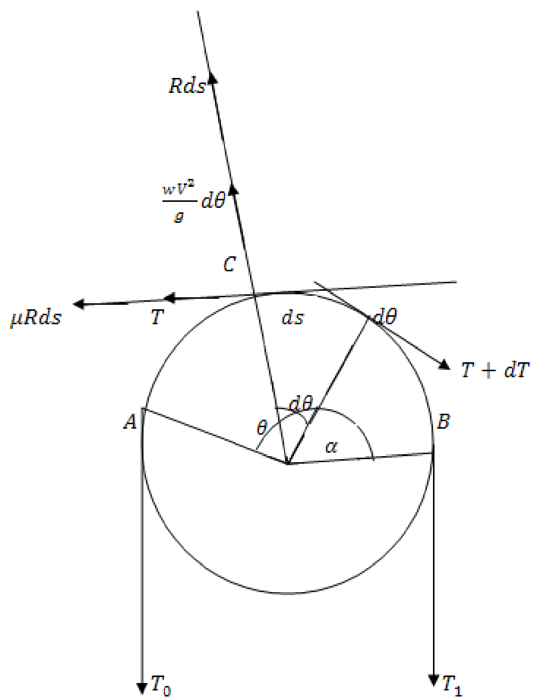
$$dT = \mu Ra\, d\theta \qquad (3)$$

$$T = Ra + \frac{\omega v^2}{g} \qquad (4)$$

وذلك باهمال الكمية الصغبرة من الثانية $dTd\,\theta$ بحذف رد الفعل R بين المعادلتين (4)و(3) فان

$$\frac{dT}{d\theta} - \mu T = -\frac{\mu \omega v^2}{g} \qquad (5)$$

المعادلة (5) هى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى يمكن حلها بضرب طرفى المعادلة فى العامل المكامل $e^{-\mu\theta}$ فنحصل على



$$\frac{d}{d\theta}\left(Te^{-\mu\theta}\right) = -\frac{\mu \omega v^2}{g} e^{-\mu\theta}$$

بالتكامل نجد ان

$$Te^{-\mu\theta} = \frac{\omega}{g} v^2 e^{-\mu\theta} + c$$

حيث c ثابت التكامل يمكن تعينة من الشروط الابتدائية فى المسالة الشد عند A يساوى T_o عندما $\theta = 0$ اى ان

$$c = T_o - \frac{\omega}{g} v^2$$

$$\therefore T = \left(T_o - \frac{\omega v^2}{g} \right) e^{-\mu\theta} + \frac{\omega}{g} v^2 \qquad (6)$$

المعادلة (6) تعين الشد عند اى نقطة من السير.

عند النقطة B فان $T = T_1$. ونجد ان $\theta = \alpha$

$$T_1 = \left(T_0 - \frac{\omega v^2}{g} \right) e^{\mu\alpha} \frac{\omega v^2}{g}$$

$$T_1 - T_o = \left(T_0 - \frac{\omega v^2}{g} \right) e^{\mu\alpha} + \frac{\omega v^2}{g} - T_o$$

$$= \left(T_0 - \frac{\omega v^2}{g} \right) \left(e^{\mu\alpha} - 1 \right)$$

وتكون القدرة مساوية

$$P = (T_1 - T_o) v$$

$$P = \left(e^{\mu\alpha} - 1 \right) \left(T_0 v - \frac{\omega v^3}{g} \right) \qquad (7)$$

وهذه هى القدرة المطلوبة .

واضح ان القدرة ρ دالة فى السرعة v وللحصول على اكبر قدرة نوجد

$$\frac{dP}{dv} = \left(e^{\mu\alpha} - 1 \right) \left(T_o - \frac{3\omega v^2}{g} \right) \qquad (8)$$

نضع $\frac{dP}{dv} = 0$ فنجد ان السرعة التى تعطى اكبر قدرة تحقق المعادلة.

$$T_o - \frac{3\omega v^2}{g} = 0$$

ومنها

$$v = \sqrt{\frac{g T_o}{3\omega}} \qquad (9)$$

تمارين

(1) اذا كان عمق راس الكتينة عند نقطة التعليق هو d واذا كان طول الكتينة $2L$. فاثبت ان بارمتر الكتينة c يتعين من العلاقة

$$c = \frac{L^2 - d^2}{2d}$$

(2) سلسلة طولها $2L$ مثبت طرفها فى نقطتين فى نفس المستوى الافقى على بعد $2a$ اذا كان a اكبر من L فاثبت ان الشد فى الخيط هو $\sqrt{\frac{a^3}{6(L-a)}}\omega$ وان انخفاض اسفل نقطة من طرفها هو $\frac{1}{2}\sqrt{6a(L-a)}$.

(3) اذا كانت المسافة الافقية بين عمودين تلغراف متتاليين هى $2L$ باستخام التقريب الثانى من المعادلة الكرتيزية للكتينة . اوجد طول السلك اللازم توصيلة بين العمودين بدلالة L, d حيث d تمثل عمق راس الكتينة عن المستوى المار بنقطتى التعليق.

(4) تمر سلسلة ثقيلة منتظمة على بكرتين ملساوتين واقعتين على خط افقى واحد المسافة بينهما $2h$. اثبت ان اقل طول للسلسلة فى حالة الاتزان يساوى $2he$.

(5) سلك طوله L ينتهى طرفاه بحلقتين خفيفتين تنزلقان على قضيب افقى خشن معامل الاحتكاك بينهم μ . فاثبت ان اكبر مسافة بين الحلقتين فى وضع الاتزان تساوى

$$\mu L \ln\left[\frac{1+\sqrt{1+\mu^2}}{\mu}\right]$$

(6) اذا كان الوزن الكلى لكوبرى معلق يساوى 200 ثقل باوند موزعة توزيعا افقيا منتظما على بعده الافقى الذى يساوى 150قدم. وكان ارتفاع الكوبرى 20 قدم . اثبت ان الشدين فى اسفل نقطة ونقطتى التعليق تساوى $187\frac{1}{2}, 214\frac{1}{6}$ ثقل باوند على الترتيب.

(7) طائرة من الورق اقصى ارتفاع لها يساوى واحد ميل وطول خيطها يساوى ميلين . برهن ان الشد عند اسفل نقطة يساوى وزن جزء من الخيط طولة $3/2$ ميل وان جذب الطائرة يساوى $2\frac{1}{2}$ ميل من الخيط وانه فى اتجاه يصنع زاوية $\tan^{-1}(3/4)$ مع الراسى .

(8) طائرة من الورق طول الخيط منها الى اليد يساوى 600 قدم . قيس الشد عند اليد بواسطة زنبرك فوجد انه يساوي وزن **100** قدم من الخيط كما وجد انه فى اتجاه يصنع زاوية 30° مع الافقى . اوجد البعد الراسى للطائرة عند اليد.

(9) تستقر سلسلة فى حالة الاتزان النهائى عند طرفيها الموزعين على منضدتين افقيتين خشنتين معامل الاحتكاك μ وكانت المسافتين الافقية والراسية بين طرفى المنضدتين القريبتين هما $h,2a$ على الترتيب. اثبت ان الجزء المعلق من السلسلة هو D وان الطول الكلى للسلسلة هو $D\left[1+\frac{1}{\mu}\coth\frac{a}{2}\right]$ حيث $D^2=h^2+4c^2\sinh^2\frac{a}{c}$. حيث c بارمتر الكتينة. المستوى الذى تقع فية السلسلة عمودى على حرفى المنضدتين.

(10) كتينة ذات كثافة متغيرة علقت من طرفيها فاذا كان T_1,T_2,T_3 تمثل الشد عند ثلاث نقاط A,B,C هى على التوالى $\alpha-\beta,\alpha,\alpha+\beta$ وكان ω_1,ω_2 يمثلان الاوزان للاطوال AB,BC اثبت ان

$$\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_3}=\frac{2\cos\beta}{T_2},$$

$$\frac{T_1}{\omega_1}=\frac{T_3}{\omega_2}$$

(11) سلسلة AE مثبتة عند طرفيها A,E تحمل الاثقال $400, 300, 200$ ثقل باوند عند النقط B,C,D فاذا كانت الاحداثيات السينية لهذه النقط على التوالى $10, 20, 30\ ft$ وكان طول $AE=40\ ft$ وكان البعد الراسى للنقطة C عن AE هو $6\ ft$ اوجد مركبات الفعل عند A وكذلك البعد الراسى لكل من B,D عن AE ثم اوجد اكبر شد للسلسلة.

(12) سلسلتان AB,BC من نفس النوع ربطت ببرج إرسال عند النقطة B بحيث ان المركبة الافقية لرد الفعل على السلاسل عند البرج منعدمة وبفرض ان السلاسل على هيئة قطع مكافئ وكانت المسافات الافقية $AB=300\ ft, Bc=200\ ft$ وكان سهم السلسلة BC هو $10\ ft$ اوجد سهم السلسلة AB .

(13) سلسلة منتظمة طولها $2a(1+\lambda)$ علقت من طرفيها بحيث كانت فى نفس المنسوب الافقى والمسافة بينهما $2a$ فاذا كانت λ صغيرة جدا بحيث يمكن اهمال قواها الاعلى من القوى الثانية اثبت ان سهم السلسلة يساوى $\frac{1}{2}a\sqrt{6\lambda}\left(1+\frac{7}{20}\lambda\right)$.

(14) اربعة بكرات متساوية الخشونة (معامل الاحتكاك μ) موضوعة عند رؤوس مربع مستواه رأسيا واضلاعة افقية وراسية . وعلى كل بكرة يمر خيط خفيف ويحمل فى طرفة ثقل ω بينما عقدت الاطراف الاربعة الاخرى . اثبت ان اكبر ثقل يمكن ان يعلق فى هذه العقدة بحيث تظل العقدة عند مركز المربع فى حالة اتزان هو $2\sqrt{2}\omega\, e^{\mu\frac{\pi}{4}}\sinh\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)$.

(15) يستقر خيط منتظم ثقيل فى حالة اتزان النهائى على دائرة راسية خشنة معامل الاحتكاك μ ونصف قطرها a ويتدلى جزء منها راسيا . اثبت انة اذا كانت احد طرفيها اعلى نقطة فان طول الجزء المتدلى يكون مساويا $\left[2\mu a+\left(\mu^2-1\right)a\,e^{\mu\pi/2}\right]/\left(\mu^2+1\right)$.

(16) يستقر خيط منتظم ثقيل طولة l فى حالة الاتزان النهائى على اسطوانة دائرية خشنة معامل الاحتكاك μ ونصف قطرها a ومحورها افقى . اثبت ان طول الجانب الاكبر من الجانبين الراسيين هو $\frac{l-\pi a}{1+e^{-\mu\pi}}+\frac{2\mu a}{1+\mu^2}$.

(17) يمر خيط خفيف على وتدين خشنين B, A واقعين فى نفس المستقيم الافقى المسافة بينهما $2a$. ربط الطرفان فى ثقل عند C. وفى حالة الاتزان النهائى كان AB يحصر زاوية قائمة عند C . اثبت ان المسافة الافقية بين C ومنتصف AB فى هذا الموضع هى $a\tanh\left(\frac{3\mu\pi}{2}\right)$ حيث μ معامل الاحتكاك بين الخيط والوتد.

الباب الثاني

مبادئ المرونة

كما نعلم أن ***الجسم الصلب*** ***يعرف بأنة ذلك الجسم الذي لا تتغير المسافات بين جزيئاته نتيجة للمؤثرات الخارجية (القوة الخارجية) . أي أنة ذلك الجسم الذي لا يتغير شكله نتيجة للمؤثرات الخارجية*** . إلا أنة من الواضح لا يوجد في الطبيعة علي الإطلاق جسم واحد يتمتع بهذه الخاصية المثالية.

إذا كان الهدف من الدراسة هي دراسة حركة الأجسام الصلبة وكانت القوي الخارجية المؤثرة على الجسم الصلب صغيره بشرط أن تكون التغير في شكل الأجسام صغيره جدا بالمقارنة بأبعادها الأصلية فأنة يمكن إهمال التغير في الشكل . وعلي ذلك يكون التعريف السابق ذكره للأجسام الصلبة تعريفا مناسبا لأجراء هذه الدراسة .

أما إذا كان الهدف من الدراسة مثلا دراسة تحمل الإنشاءات المختلفة للأحمال الواقعة عليها . فأنة بالرغم من أن التغير في أشكال الأجسام المكونة لهذه الإنشاءات تكون عادة صغيرة جدا –إلا أنة لا يمكننا إهماله علي الإطلاق بل من الضروري أخذة في الحساب عند القيام بهذه الدراسة .

ومثال علي ذلك تحديد أقصي حمولة للكباري والإنشاءات المختلفة . وتختلف الأجسام عن بعضها البعض من حيث كيفية استجابتها للتغير في أشكالها تحت تأثير المؤثرات الخارجية. فهناك أجسام (مثل الحديد الصلب والبلاستيك و الألومينيوم وغيرها) تعود إلي شكلها الأصلي إذا أزيلت القوي الخارجية . مثل هذه الأجسام تسمى بالأجسام المرنة(Elastic Bodies) وتسمي خاصية الرجوع إلي الحالة الأولى (قبل التشكيل)بالخاصية المرنة (Elasticity) . كما أنة هناك أجسام آخري (مثل الحديد الزهر ولأسمنت وغيرها) لا تعود إلى شكلها الأصلي بعد إزالة القوى الخارجية وهذه تسمى بالأجسام الغير مرنة .

وسوف ندرس فقط الأجسام المرنة .

أولا : التشكيل في الأجسام تحت تأثير قوى خارجية محورية

في الحياة العملية نتعامل عادة مع الأجسام منتظمة الشكل أبسط صور الانتظام في الشكل – هو التماثل حول محورها (اسطوانة – قضيب منتظم – مخروط قائم -......) هي أشكال متماثلة حول محورها وهذا يعنى – هندسيا – أن المحل الهندسي لمركز مقاطعها متوازيه وهو خط مستقيم – يعرف بمحور الجسيم . فإذا كانت القوي الخارجية المؤثرة علي الجسم في اتجاه هذا المحور فإن هذه القوي تسمى بالقوي المحورية .

1- التمدد (الانكماش) في الأسطوانات: معامل ينج :

يتعين التمدد (الانكماش) في أسطوانة منتظمة نتيجة لقوي شد T (أو ضغط p) محوريه .

من قانون هوك (Hook's Law)

$$T = \lambda\left(\frac{l - l_0}{l_0}\right) \tag{2.1}$$

أو

$$p = \lambda\left(\frac{l_0 - l}{l_0}\right) \tag{2.2}$$

حيث λ هي معامل المرونة لمادة الأسطوانة .
l_0 هو ارتفاع الأسطوانة قبل تأثير القوة المحورية .
l هو ارتفاع الأسطوانة بعد تأثير القوة المحورية .
إلا أنة في العادة تجري في العلاقات السابقة بعض التعويضات التالية .

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} \tag{2.3}$$

في حالة وجود شد

$$\sigma = \frac{T}{A} \tag{2.4}$$

أما في حالة وجود ضغط فإننا نأخذ

$$\varepsilon = \frac{l_0 - l}{l_0} \tag{2.5}$$

$$\sigma = \frac{T}{A} \tag{2.6}$$

وتكون

$$\lambda = EA \tag{2.7}$$

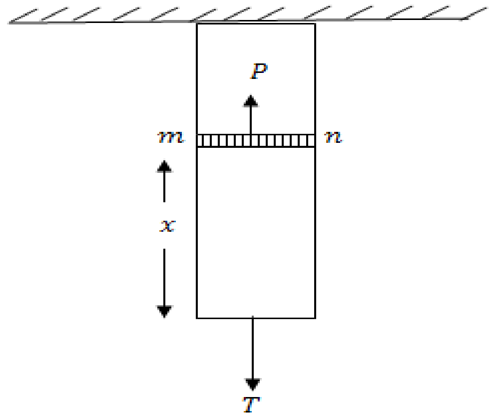
حيث E مقدار ثابت يعرف بمعامل ينج للمرونة (Young's Modulus) لمادة الأسطوانة .
A مساحة مقطع الاسطوانة العمودي على محورها
σ هو الإجهاد لوحدة المساحات (الإجهاد)
ε هو الانفعال لوحدة الأطوال (الانفعال)
وبذلك نأخذ العلاقة (2.1),(2.2) الصورة الآتية:

$$\sigma = E\varepsilon \tag{2.8}$$

ويلاحظ أن صحة العلاقة (2.8) ترتبط بتوافر الشروط الآتية
أ- القوي الخارجية المؤثرة (P or T) هي قوى محورية
ب-الاسطوانة مصنوعة من مادة مرنة – أي أنة إذا أزيلت القوى الخارجية فإن الاسطوانة تعود إلى شكلها الأصلي (قبل تأثير هذه القوى)
ج-التغير في مساحة مقطع الاسطوانة A ضئيل بحيث يمكن إهالة .

2-الإجهاد والانفعال تحت تأثير الوزن :

نأخذ قضيبا مساحة مقطعة A ووزن وحدة الحجوم γ ومثبت في وضع رأسي من نهايته العليا وتؤثر علية قوة شد T عند نهايته السفلي .



من الواضح أن الإجهاد عند أي مقطع يساوى الإجهاد الناشئ عن T مضافا إلية الإجهاد الناشئ عن وزن الجزء الواقع أسفل هذا المقطع . وبالتالي فإن أقصي إجهاد يكون عند النهاية العليا ويساوى

$$\sigma_{\max} = \frac{T + \gamma A l}{A}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{T}{A} + \gamma l \qquad (2.9)$$

حيث الحد الثاني في الطرف الأيمن يمثل الإجهاد الناشئ عن الوزن لإيجاد الإجهاد $\sigma(x)$ عند مقطع علي بعد x من الطرف السفلي كما بالشكل .

نلاحظ أن الجزء السفلي متزن تحت تأثير وزنة والقوة T وقوة شد الجسم العلوي له ولتكن p . أي أن

$$p = T + \gamma A x \qquad (2.10)$$

ولكن

$$p = A\sigma(x)$$

لذا فإن

$$\sigma(x) = \frac{p}{A} = \frac{T}{A} + \gamma x \qquad (2.11)$$

ولكن

$$\sigma_{\max} = \sigma(l)$$

لذا فإن

$$A = \frac{T}{\sigma(l) - \gamma l} \tag{2.12}$$

من هذه العلاقة نجد أنة عندما تؤول γl إلي القيمة $\sigma(l)$ فإن A ستؤول إلي ∞ .

وهذا يعني أنة لا يمكن تصميم قضيب أو وصلة منتظمة المقطع طولها l يصل إلى $\frac{\sigma(l)}{\gamma}$ ـ وهذا يفسر استخدام وصلات متغيره المقطع في بعض الأحيان .

<u>لحساب الانفعال في القضيب تحت تأثير وزنة .</u>

نأخذ عند المقطع mn عنصرا سمكة dx . وحيث أن طول العنصر صغير ، فأنة يمكننا اعتبار أن الإجهاد فيه ثابت ويتحدد من العلاقة (2.11) وباستخدام العلاقة (2.8) فإن الزيادة في طول العنصر يساوي

$$\Delta x = \frac{\sigma(x)}{E} dx$$

$$= \left(\frac{T}{EA} + \frac{\gamma x}{E}\right) dx$$

الزيادة الكلية في القضيب هي Δl حيث

$$\Delta l = \int_0^l \left(\frac{T}{EA} + \frac{\gamma x}{E}\right) dx$$

$$\Delta l = \frac{Tl}{EA} + \frac{\gamma l^2}{2E} \tag{2.13}$$

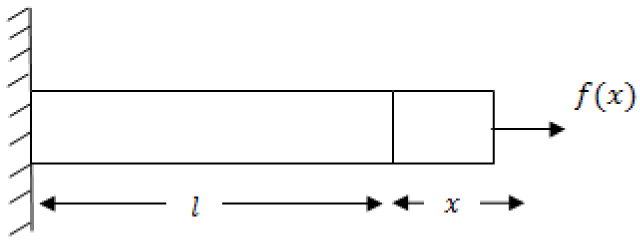
من الواضح أن الحد الثاني من الطرف الأيمن يعبر عن الزيادة في الطول الناشئة من وزن القضيب .
بفرض أن القضيب مهمل الوزن ومشدود من طرفه السفلي بقوة تساوي نصف وزن القضيب . في هذه الحالة فإن من (2.8),(2.3) تكون الزيادة في طول القضيب هي

$$\varepsilon l = \frac{\sigma}{E} l$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\gamma A l}{AE} l = \frac{1}{E} \frac{1}{2} \gamma l^2 \tag{2.14}$$

وبالمقارنة مع (2.13) نجد أن الزيادة في طول القضيب الناشئة من وزن القضيب تساوي الزيادة في طول القضيب إذا أهملنا وزن القضيب وعلقنا فيه ثقلا مساويا لنصف وزنة .

3-الطاقة الداخلية المرنة Elastic Energy



نأخذ قضيبا مهمل الوزن طوله l ومساحة مقطعة A إذا ثبتنا أحد الطرفين وأثرنا علي الطرف الآخر بقوي تبدأ من الصفر وتتزايد تدريجيا حتي تصل إلي القيمة F.

ولنفرض إنه عندما استطال القضيب بمقدار x فإن القوه كانت $f(x)$ الشغل المبذول بواسطة هذه القوة في إزاحة dx يساوي

$$d\omega = f(x)dx \qquad (2.15)$$

ولكن من(2.3),(2.8)نعلم أن

$$\frac{f(x)}{A} = E\frac{x}{l} \qquad (2.16)$$

$$\therefore\ d\omega = \frac{EAx}{l}dx$$

بفرض أن عندما نصل $f(x)$ إلي القيمة F فإن الزيادة الكلية في القضيب هي Δl نجد أن الشكل الكلي المبذول إثناء هذه الزيادة يساوي

$$w = \int_0^{\Delta l} d\omega = \frac{EA}{l}\int_0^{\Delta l} x dx$$

$$w = \frac{EA}{2l}(\Delta l)^2 \qquad (2.17)$$

ولكن من(2.3),(2.8)نعلم أن

$$F = EA\frac{\Delta l}{l}$$

لذا فإن

$$w = \frac{1}{2}F.\Delta l \qquad (2.18)$$

هذا الشكل يتحول إلي طاقة داخلية تعرف بالطاقة الداخلية المرنة العلاقة (2.18) يمكن كتابتها في الصورة .

$$w = \frac{1}{2}\sigma A.\varepsilon l$$

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon\sigma v \qquad (2.19)$$

حيث $v = Al$ هو الحجم الابتدائي للقضيب . من هنا نجد أن الطاقة الداخلية المرنة لوحده الحجوم تساوي

$$\frac{w}{v} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \qquad (2.20)$$

4-انكماش المقاطع نتيجة لاستطالة القضبان المرنة:

درسنا فيما سبق الاستطالة الناشئة في القضيب نتيجة لتأثير قوي الشد علية ، وذلك بفرض إن مساحة مقطع القضيب تظل ثابتة إثناء ذلك . ولكن ثبت من التجربة إن الاستطالة في إيه قضيب يصحبها انكماش في مقاطعة العرضية وإن النسبة بين الانكماش في الإبعاد العرضية والزيادة النسبية في الطول ثابتة للمادة الواحدة .
ويسمى هذا الثابت بمعامل بواسون ويرمز له بالرمز M .

وبالدراسة النظرية للتكوين الكريستالى للمادة تمكن بواسون من حساب هذا العامل ووجد أنة يساوي $\frac{1}{4}$. وقد ثبت من التجربة أنه باستثناء بعض المواد مثل الفلين $(M = 0)$ والكاوتشوك والبرافين $(M = 0.5)$ فإنه للغالبية العظمي من المواد تكون M قريبة من قيمة بواسون (مثلا للصلب $M = 0.3$) .
إذا علم معامل بواسون للمادة المصنوع منها القضيب فإنه يمكن حساب التغير النسبي في حجمه نتيجة لتأثير قوي الشد علية . لذا نفرض إن الإنفعال الطولي للقضيب هو ε أي النسبة بين طوله بعد تأثير الشد وطوله الأصلي

$$1 + \varepsilon : 1$$

وأن إبعاده العرضية تنكمش بنسبة

$$1 - M\varepsilon : 1$$

أي النسبة بين مساحة المقطع بعد تأثير الشد ومساحة الأصلية هي

$$(1 - M\varepsilon)^2 : 1$$

من هنا نجد أن النسبة بين الحجم بعد تأثير الشد والحجم الأصلي هي

$$(1 - M\varepsilon)^2 (1 + \varepsilon) : 1$$

ويفرض إن ε صغيرة حيث يمكن إهمال مربعاتها فإن النسبة بين حجم القضيب بعد التشكيل وحجمه قبل التشكيل هي

$$1 + \varepsilon - 2M\varepsilon : 1$$

أي أن التغير النسبي في حجم القضيب هو $\varepsilon(1 - 2M)$. ولقد ثبت من التجارب العملية أن حجوم القضبان تزداد نتيجة لتأثير قوي الشد عليها ومن هنا ينتج أن $M < 0.5$.

أمثلة محلولة

مثال 1:

أحسب قوي الشد المؤثرة علي اسطوانة من الصلب قطرها $1cm$ إذا كانت الزيادة النسبية في طولها 0.7×10^{-3} ومعامل ينج للصلب يساوي

$$E = 2-1\times 10^{6}\ kg/cm^{2}$$

الحل

من قانون هوك ، نجد أن الإجهاد يساوي

$$\begin{aligned}\sigma &= E\varepsilon \\ &= 2.1\times 10^{6}\times 0.7\times 10^{-3} \\ &= 1.47\times 10^{3}\quad kg./cm^{2}\end{aligned}$$

وبالتالي ، فإن قوي الشد تساوي

$$\begin{aligned}T &= 1.47\times 10^{3}\times 3.14\times 0.5\times 0.5 \\ &= 1153.95\quad kg.\end{aligned}$$

مثال 2:

أحسب مساحة مقطع قضيب من الصلب معلق رأسيا من احدي قاعدتيه وتؤثر علي قاعدته الأخرى قوة شد محورية $p = 30\ ton$ ، إذا كان طول القضيب $200\ cm$ والإجهاد المسموح بة هو $700\ kg/cm^{2}$ ووزن السنتيمتر المكعب من الصلب يساوي $7.8\ gr.$ ومعامل ينج للصلب يساوي $2.1\times 10^{6}\ kg/cm^{2}$. أحسب الزيادة الكلية في طول القضيب .

الحل

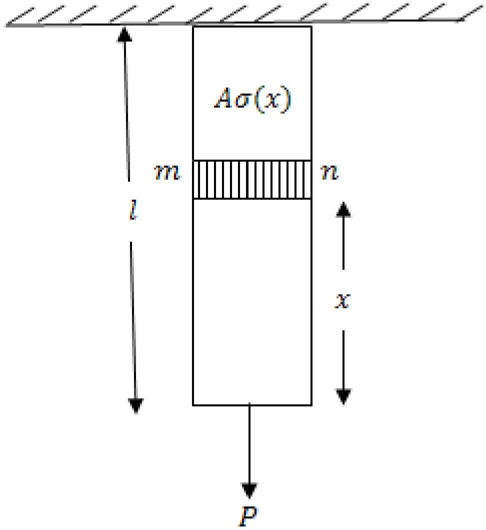
نفرض أن l طول القضيب $A,$ مساحة مقطعة $\gamma,$ وزن وحدة الحجوم منة .

بأخذ مقطع عمودي mn علي بعد x من القاعدة السفلية

وبفرض إن الإجهاد عند هذا المقطع هو $\sigma(x)$ فإنه من اتزان جزء القضيب الواقع أسفل المقطع mn نجد أن

$$A\sigma(x) = p+\gamma Ax,\ \sigma(x) = \frac{p}{A}+\gamma x \qquad (1)$$

من(1) يتضح أن الإجهاد يتزايد x ، ويأخذ قيمته القصوى σ_{max} عند القاعدة العليا $x = l$ وبالتالي يكون



$$A=\frac{p}{\sigma_{max}-\gamma l}=\frac{30\times10^{3}}{700-7.8\times10^{-3}\times200}$$

$$=42.29\ \ cm^{2}. \qquad (2)$$

لحساب الزيادة في طول القضيب ،نأخذ عنصرا صغيرا dx أعلي المقطع mn. إذا كانت الزيادة النسبية في طول العنصر (الصغير) هي $\varepsilon(x)$ ، فإن الزيادة في طول العنصر تساوي $\varepsilon(x)dx$ ، وبالتالي تكون الزيادة الكلية Δl في طول القضيب هي

$$\Delta l=\int_0^l\varepsilon(x)dx=\int_0^l\frac{\sigma(x)}{E}dx \qquad (3)$$

بالتعويض عن معادلة(1)في معادلة (3) نجد أن

$$\Delta l=\frac{1}{E}\int_0^l(\frac{p}{A}+\gamma x)dx=\frac{l}{E}(\frac{p}{A}+\frac{\gamma l}{2}) \qquad (4)$$

$$\Delta l=\frac{l}{E}(\sigma_{max}-\frac{1}{2}\gamma l)$$

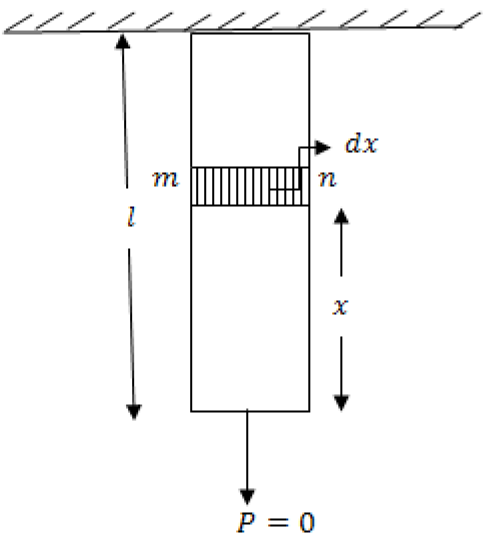
$$= \frac{200}{2.1\times10^{6}}(700-\frac{1}{2}\times7.8\times10^{-3}\times200)$$

$$\therefore\ \Delta l = 6.659\times10^{-2}\ cm.$$

مثال 3:

احسب الزيادة في حجم قضيب معدني ، الناشئة من قوة شد محورية p ، وذلك بإهمال وزنة . إذا علق نفس القضيب رأسيا ، وكانت $p = 0$ فاحسب الزيادة في حجمه ، الناشئة من وزنه . قارن بين النتيجتين .

الحل



نعلم أن الزيادة في الجم تساوي

$$\Delta v = \varepsilon(1-2\mathrm{M})v \qquad (1)$$

نوجد ε في الحالة الأولي (إهمال الوزن) يكون الانفعال الطولي ε_1 للقضيب مساويا

$$\varepsilon_1 = \frac{P}{EA} \qquad (2)$$

لذا فإن

$$\Delta_1 v = \frac{PV}{EA}(1-2\mathrm{M}) \qquad (3)$$

أما في الحالة الثانية (إهمال قوي الشد P) ولإيجاد الانفعال الطولي ε_2 نأخذ عنصرا صغيرا dx علي بعد x من الطرف السفلي .

من دراسة اتزان الجزء أسفل العنصر نجد أن

$$A\sigma(x) = \gamma AX$$

$$\therefore \sigma(x) = \gamma x = E\varepsilon(x) \tag{4}$$

لذا فإن استطالة العنصر dx هي

$$\varepsilon(x)dx = (\frac{\gamma}{E})x\,dx$$

والاستطالة الكلية Δl تساوي

$$\Delta l = \int_0^l (\frac{\gamma}{E})x\,dx$$

$$= \frac{\gamma l^2}{2E} \tag{5}$$

وبالتالي يكون

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l}{l}$$

$$= \frac{\gamma l}{2E} = \frac{\gamma V}{2EA} \tag{6}$$

وبالتعويض من(6) في (1) نحصل علي

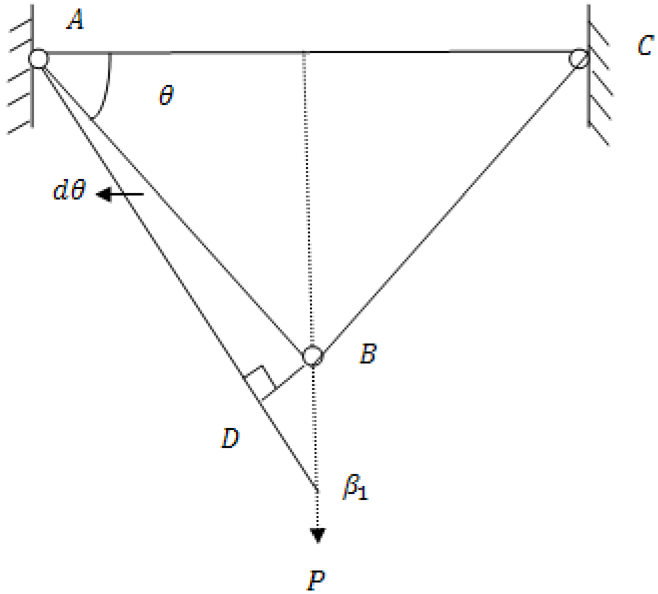
$$\Delta_2 v = \frac{\gamma v^2}{2EA}(1 - 2\mathrm{M}) \tag{7}$$

من (3),(7) نجد أن

$$\frac{\Delta_1 v}{\Delta_2 v} = \frac{2P}{\gamma v} \tag{8}$$

يلاحظ إننا – للسهولة – اعتبرنا إن الانفعال الطولي والانفعال العرضي يحدثان كل مستقل عن الآخر ، مما أدي إلي إنه عند حساب الانفعال الطولي أهملنا التغير في مساحة المقطع .

تمارين علي الباب الثاني



(1) الهيكل المبين بالشكل يتكون من قضيبين من الصلب مهملي الوزن AB , CB لهما نفس مساحة المقطع وطول كل منهما l . فإذا علق ثقل p في المفصلة عند B ، فاحسب مساحة المقطع اللازمة لحفظ التوازن عند النقطة B إذا كانت .

$$\sigma_{max} = 500 \ kg / cm^2$$
$$P = 2 ton$$
$$E = 2 \times 10^6 kg / cm^2$$
$$\theta = 30^0 , l = 4.5 m.$$

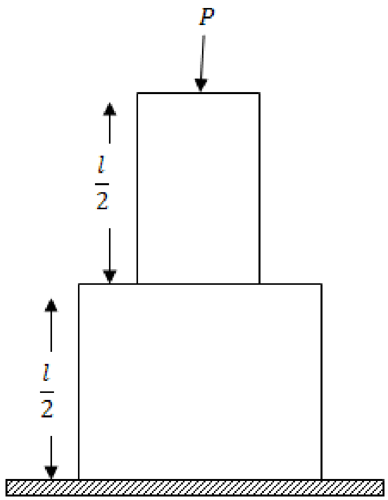
(2)العمود الموضح بالشكل يتكون من جزئين لهما نفس الارتفاع ومصنوعين من نفس المادة .
فإذا أثرنا علي القاعدة العليا للعمود بقوة ضغط P ، وكان وزن وحدة الحجوم لمادة العمود هو γ وأكبر إجهاد ضغط يتحمله هو σ_{max} فأحسب حجم العمود كله حيث

$\sigma_{max} = 10\, kg / cm^2$,

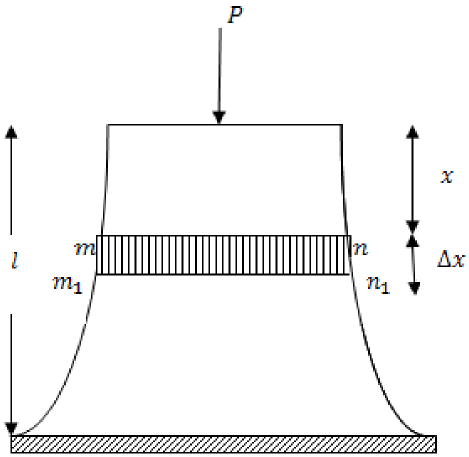
$p = 240 \;\; ton$,

$l = 28\, cm \, , \gamma = 2 ton \, / \, m^3$.

قارن بين حجم هذا البناء وحجم عمود واحد يحقق نفس الشروط .



(4) أوجد شكل العمود بحيث يكون الإجهاد فيه ثابتا ويساوي σ_{max} وباستخدام القيم المعطاة في التمرين السابق أوجد حجم العمود ثم قارن بين حجمه وحجم البناء وحجم العمود السابق اللتى تم الحصول عليهم في التمرين السابق .



(4) أثرت قوة شد p **علي قضيب من الصلب (معامل ينج للصلب يساوي** 2.1×10^6 **) بحيث تغير قطر مقطعة الدائري من** $1cm$ **إلي** $9.998\ cm$ **.**

احسب P **إذا كان معامل بواسون للصلب هو** $M = 0.3$ **.**

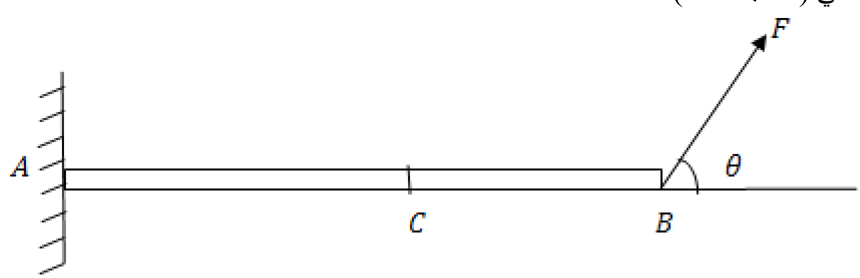
(5) مخروط دائري قائم مصمت مثبت من قاعدته بحيث كان محوره رأسيا ورأسه إلي أسفل . احسب الاستطالة في ارتفاع المخروط تحت تأثير وزنة .

الباب الثالث

اتزان القضبان الرفيعة تحت تأثير قوي غير محورية

أولا:القوي القاصة وعزم الانحناء

درسنا فيما سبق اتزان القضبان الرفيعة تحت تأثير قوي محورية ، أي أن القوي تؤثر في اتجاه محور القضيب وعرفنا إنه يكون في القضبان قوي أو إجهادات داخلية .
وسوف ندرس في هذا الباب دراسة اتزان القضبان الرفيعة عندما تؤثر عليها قوي غير محوريه . في هذه الحالة تنشأ إجهادات داخلية في القضبان وتظهر عند المقاطع قوي قاصة عمودية علي محاور القضبان وعزوم انحناء.
في بعض المجالات مثل المباني والإنشاءات الهندسية يكون من المهم حساب هذه القوي القاصة وعزوم الانحناء . ويجب الإشارة هنا إلي أن هذا الموضوع من الموضوعات التي تهم المهندسين ويدرسه طلاب كلية الهندسة وذلك لأهمية دراسة التأثيرات الناتجة من قوي التحميل المختلفة وعلاقتها بالإجهادات الداخلية من شد أو ضغط وقوي قاصة وكذلك عزوم الانحناء وذلك في الإنشاءات الهندسية المختلفة.
ولكي نلمس وجود هذه القوي الداخلية من شد أو ضغط وقوي قاصة وعزوم انحناء نعتبر اتزان قضيب أفقي خفيف AB مثبت أحد طرفية A في حائط رأسي ويؤثر في الطرف الحر B للقضيب قوة مقدارها F في اتجاه يصنع زاوية θ مع الأفقي (كما بالشكل)



نعتبر مقطع للقضيب عند C . لكي يتزن الجزء CB من القضيب فإنه يجب أن تظهر عند المقطع C قوتان إحداهما T في اتجاه محور القضيب وتساوي مركبة القوه F في اتجاه محور القضيب

أي أن

$$T = F \cos \theta \tag{3.1.1}$$

والثانية N في اتجاه العمودي علي القضيب وتساوى مركبة القوة F في اتجاه العمودي علي محور القضيب أي أن

$$N = F \sin \theta \tag{3.1.2}$$

وكذلك يظهر عند المقطع C الازدواج M كما هو مبين بالشكل أي في اتجاه دوران عقارب الساعة ويساوي الازدواج المكون من القوتين المتساويتين $N, F \sin \theta$ في المقدار وعكسه في الاتجاه أي أن

$$M = CB.F \sin \theta \tag{3.1.3}$$

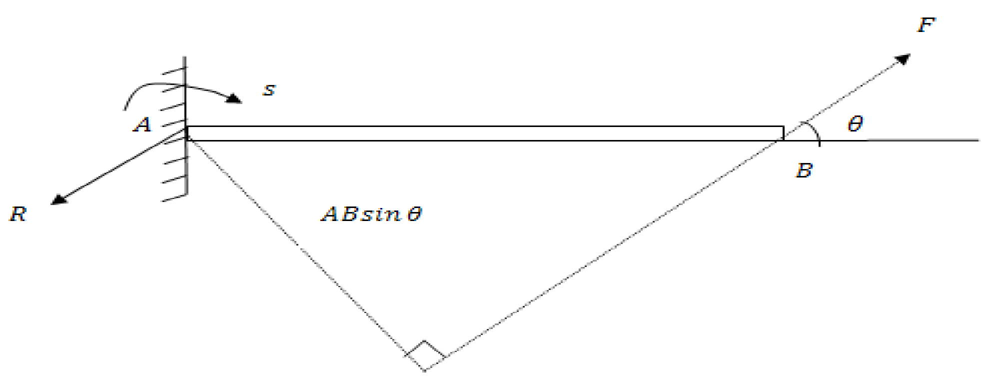
ويجب ملاحظة أن الجزء الأيسر من القضيب AC يؤثر علي الجزء الأيمن CB بالقوتين T في اتجاه محور القضيب والقوي القاصة N وعزم الانحناء M وكذلك فإن الجزء الأيمن CB يؤثر علي الجزء الأيسر AC بنفس القوتين السابقتين وعزم الانحناء ولكن في الاتجاهات المضادة

نلاحظ انه باعتبار اتزان القضيب كله AB فإنه عند موضع التثبيت A يؤثر رد الفعل R يوازي ويساوي في المقدار القوه F عند الطرف B ولكن في اتجاه مخالف .

أي أن $R = F$ كذلك يؤثر عند الطرف المثبت A ازدواج S يساوي في المقدار الازدواج المكون من القوتين R, F وعكسه في الاتجاه أي أن

$$S = AB.F \sin \theta$$

وفيما يلي نعطي بعض الأمثلة لتوضيح كيفية تعيين القوي القاصة وعزوم الانحناء عند مقاطع القضيب المختلفة وسوف نقوم برسم المنحنيات التي تمثل القوي القاصة ، عزوم الانحناء

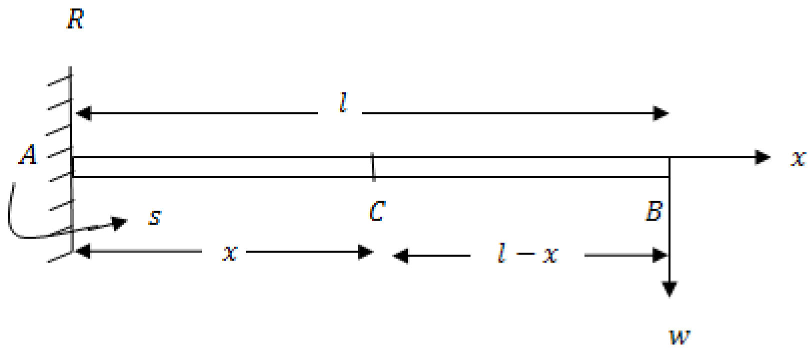


أمثلة محلولة

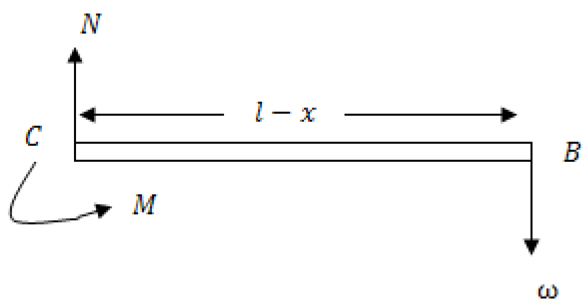
مثال1:

أوجد القوي القاصة وعزوم الانحناء عند أي مقطع لقضيب خفيف أفقي طوله l مثبت من أحد الطرفين في حائط رأسي إذا وضع ثقل ω عند الطرف الحر للقضيب.

الحل



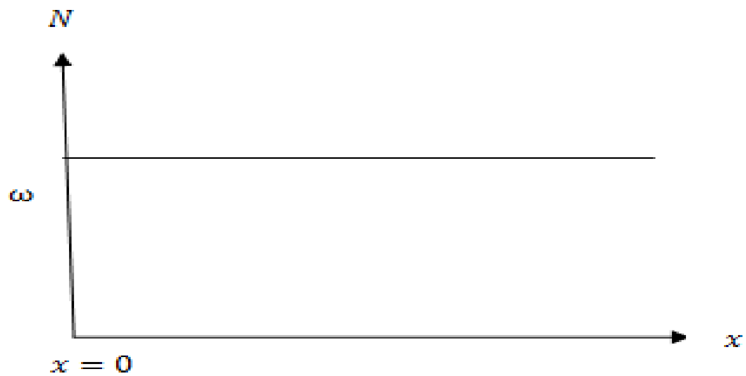
نفرض أن القضيب هو AB وإنه مثبت عند الطرف A ونأخذ مقطع للقضيب عند C حيث $AC = x$.
لإيجاد القوه القاصة N وعزوم الانحناء M عند المقطع C.
ندرس اتزان أحد الجزئيين AC أو CB .



نلاحظ أن دراسة اتزان الجزء الأيمن من القضيب CB أسهل من دراسة اتزان الجزء الأيسر AC وذلك لوجود رد فعل R وازدواج S.
باعتبار اتزان الجزء الأيمن من القضيب CB نلاحظ إنه لكي يتزن هذا الجزء يجب أن يكون عند C قوة قاصة N راسيا لأعلي وازدواج موجب (أي في اتجاه مضاد لدوران عقارب الساعة) وليكن M كما بالشكل حيث

$N = \omega$ (1)
$M = \omega(l - x)$ (2)

المعادلة (1) توضح لنا أن القوة القاصة ثابتة عند جميع مقاطع القضيب وباعتبار محور القضيب AB هو المحور الأفقي x فإن منحني القوة القاصة N يكون خطا مستقيما أفقيا يبعد عن المحور x مسافة تساوى ω كما بالشكل .

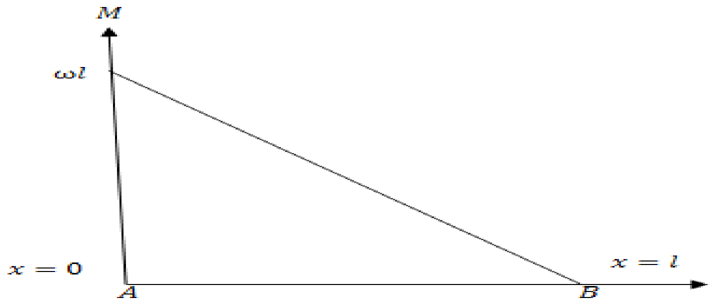


أما المعادلة (2) تعطينا عزوم الانحناء M عند المقطع C وواضح أن عزوم الانحناء يعتمد علي x . أي يتغير من مقطع لآخر .
وبرسم المنحني الذي يمثل عزوم الانحناء عند المقاطع المختلفة للقضيب نجد أنه يمثل خطا مستقيما يمر بالنقطتين $(l, o), (o, \omega l)$
نلاحظ أن عزوم الانحناء أكبر ما يمكن عندما $x = 0$ (أي عند الطرف المثبت A) ويساوي ωl بينما ينعدم عزوم الانحناء عند $x = l$ (أي عند الطرف الحر B) .

<u>ملحوظة</u>: نلاحظ انه بدراسة اتزان القضيب كله AB فإننا نعين رد الفعل R والازدواج S .

من الاتزان نجد أن

$R = \omega, S = \omega l$



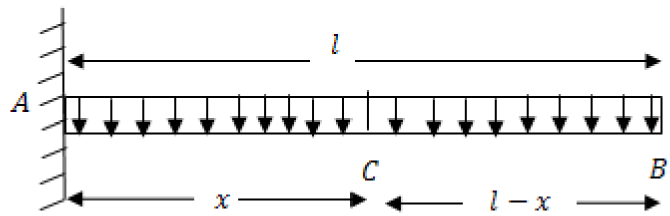
واتجاهيها كما بالشكل الموضح

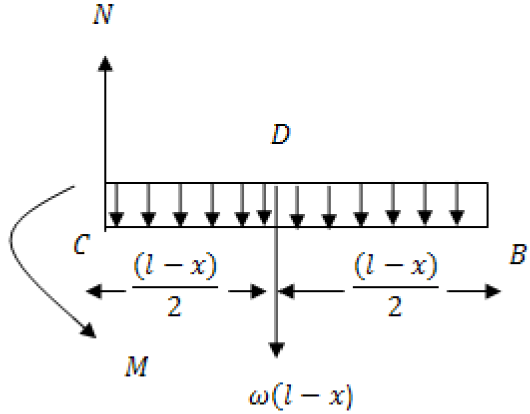
مثال2:

أوجد القوي القاصة وعزوم الانحناء لقضيب أفقي AB طوله l مثبت من طرفة A ومحمل تحميلا منتظما قدرة ω لوحده الأطوال .

الحل

نفرض مقطع عند C يبعد مسافة x عن الطرف المثبت A .





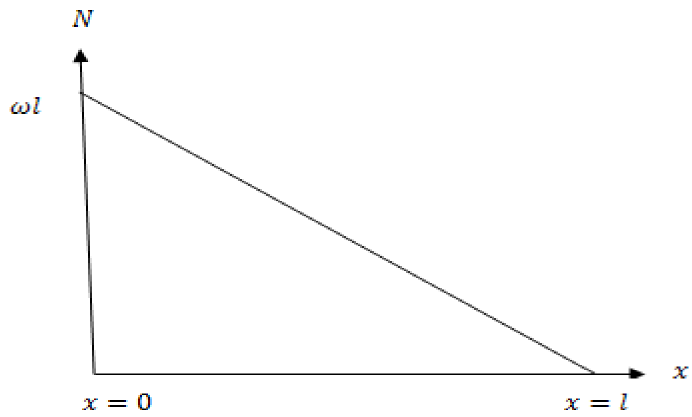
لإيجاد القوي القاصة وعزوم الانحناء عند المقطع c فإننا ندرس اتزان Bc .
نلاحظ أن التحميل الواقع علي الجزء CB يساوي $\omega(l-x)$ ويؤثر عند منتصفة عند نقطة D $(CB = DB)$
وبالتالي فإنه من اتزان هذا الجزء نجد أن

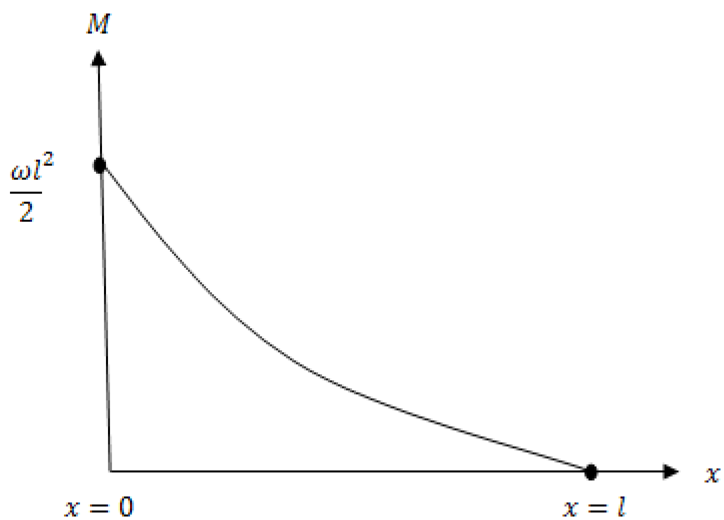
$$N = \omega(l-x) \tag{1}$$

$$M = \omega(l-x)\frac{1}{2}(l-x)$$

$$M = \frac{\omega}{2}(l-x)^2 \tag{2}$$

المعادلة (1) تعين القوي القاصة عند أي مقطع للقضيب ونلاحظ أنها تتغير من مقطع لآخر ويمثلها خط مستقيم مار بالنقطتين $(l,o),(o,\omega l)$ كما بالشكل.
نلاحظ أيضا أن أكبر قوة قاصة تكون عند الطرف المثبت للقضيب $(x=0)$ وتساوي ωl وأن القوة القاصة تتلاشي عند الطرف الحر للقضيب $x = l$.





المعادلة(2) تعين عزوم الانحناء عند مقاطع القضيب المختلفة ونجد إنها تتغير من مقطع لآخر . وبتمثيل منحني عزوم الانحناء نجد أنة قطع مكافئ رأسه النقطة (l,o) مفتوح لأعلي وطول وتره البؤري العمودي يساوي $\frac{2}{\omega}$.

وأكبر عزوم انحناء يكون عند الطرف المثبت للقضيب ويساوي $\frac{\omega l^2}{2}$ ويكون مساويا الصفر عند الطرف الحر للقضيب $(x = l)$.

مثال3:

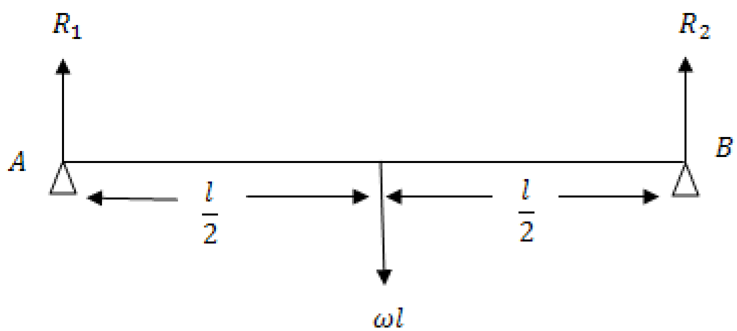
أوجد القوي القاصة وعزوم الانحناء لقضيب ثقيل منتظم AB طوله l ووزن وحده الأطوال منة ω ويرتكز بطرفيه على وتدين في مستوي أفقي.

الحل

باعتبار اتزان القضيب كله AB

$$R_1 + R_2 = \omega l$$

ومن التماثل في الشكل



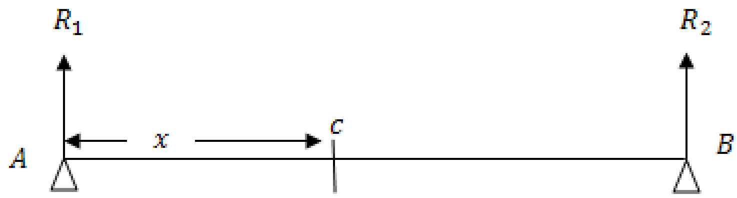
نجد أن

$$R_1 + R_2 = \frac{1}{2}\omega l$$

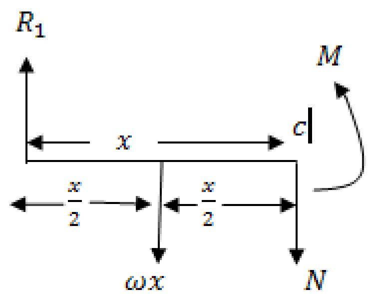
نعتبر مقطع للقضيب عند c حيث $Ac = x$ وباعتبار اتزان الجزء Ac فإنه في الاتجاه الرأسي يكون

$$R_1 = \omega x + N$$

$$\frac{1}{2}\omega l = \omega x + N$$



$$N = \omega(l/2 - x) \qquad (1)$$

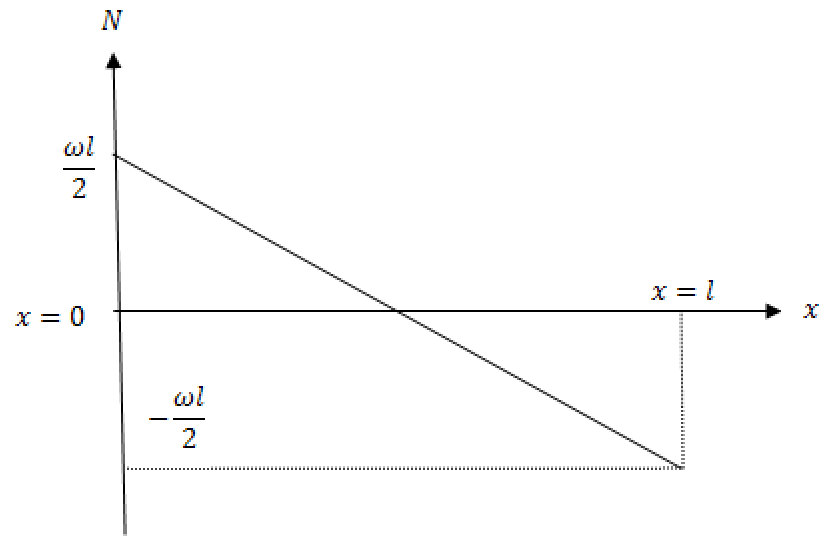


يأخذ العزوم حول c نحصل علي

$$M + \omega x(\frac{x}{2}) = R_1 x$$

$$M = \frac{1}{2}\omega l x - \frac{\omega x^2}{2} = -\frac{\omega}{2}(x^2 - lx) \qquad (2)$$

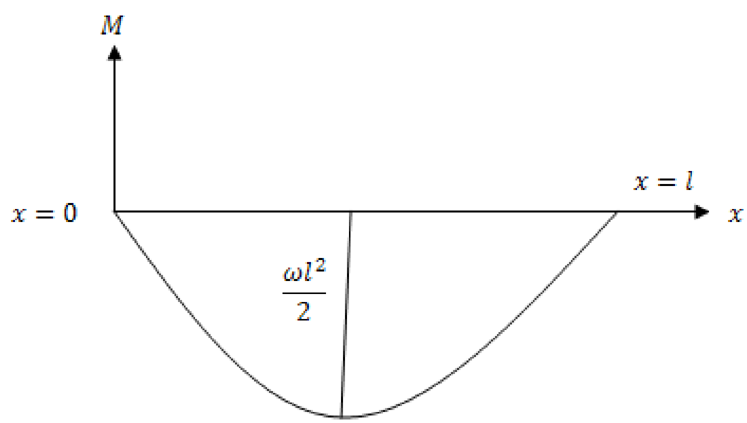
المعادلة (1) هي خط مستقيم كما بالشكل



وواضح إن أكبر قوة قاصة عند طرف القضيب $A\,(x = 0)$ وتساوي $\frac{1}{2}\omega l$ وبتزايد x تتناقص القوة القاصة إلي أن تنعدم عند منتصف القضيب عندما $x = l/2$ ثم تعكس اتجاهها في النصف الأيمن من القضيب AB .

المعادلة (2) تمثل معادلة قطع مكافئ

وواضح أن عزم الانحناء ينعدم عند طرفي القضيب أي عندما $x = 0$, $x = l$ ويأخذ أكبر قيمة عندما $x = l/2$ عند منتصف القضيب



تمرين

(1) قضيب خفيف أفقي طوله l يرتكز عند طرفية A, D علي حاملين وضع ثقلين متساويين كل منهما ω عند النقطتين B, C حيث $AB = CD = a(a < 1/2)$. أوجد القوة القاصة وعزوم الانحناء عند أي مقطع للقضيب.

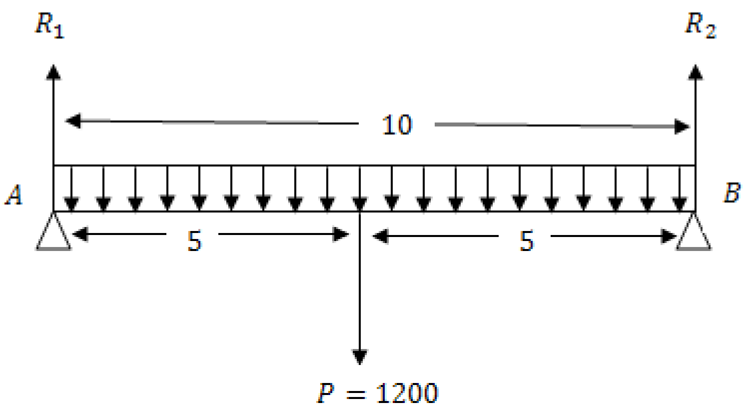
مثال4:

قضيب خفيف AB مرتكز عند طرفية A, B طوله $10\ ft$. محمل بتحميل منتظم حيث وزن وحده الأطوال تساوي $120\ Ib$. عين القوة القاصة وكذلك عزوم الانحناء والتمثيل الهندسي لها علي بعد x من الطرف A .

الحل

الحمل الكلي الذي يؤثر علي القضيب يكون مساويا

$$P = 120 \times 10 = 1200\ Ib$$



ومن التماثل في الشكل نجد أن

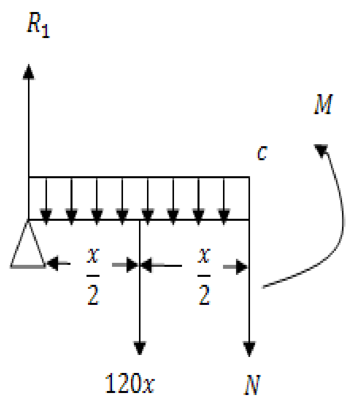
$$R_1 = R_2 = 600\ Ib$$

تعتبر المحور x في اتجاه محور القضيب ويأخذ نقطة A نقطة أصل وباعتبار مقطع من القضيب علي بعد x من النقطة A ودراسة اتزان نجد أن
القوة القاصة عند c يكون مساويا

$$N = R_1 - 120\ x$$

$$N = 600 - 120x \qquad (1)$$

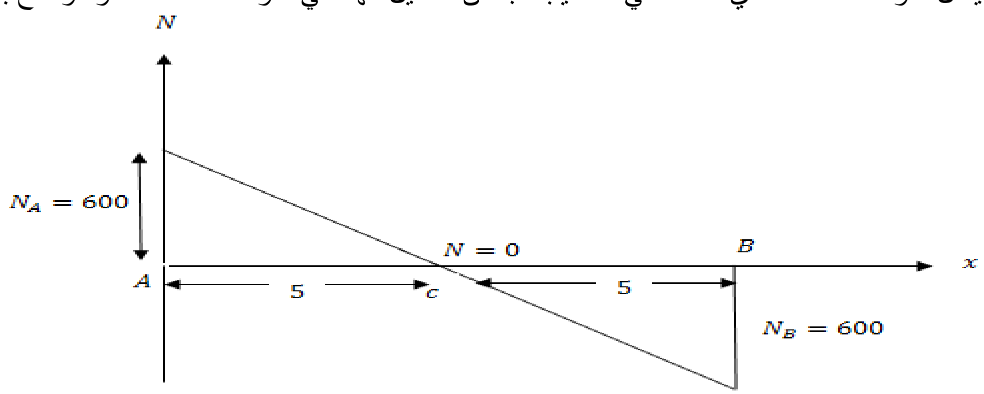
وحيث إنه لا توجد تحميل آخر علي القضيب غير الحمل الموزع توزيع منتظم فإن N تمثل هنا القوة القاصة عند أي نقطة علي القضيب



وعزم الانحناء عند c يكون مساويا

$$M = R_1 x - 120x.\frac{x}{2}$$
$$= 600x - 60x^2 \qquad (2)$$

نلاحظ أن N هي دالة خطية في x وتنعدم عند منتصف القضيب وبأخذ القضيب هو المحور السيني والعمودي علية يمثل القوة القاصة عند أي نقطة علي القضيب نجد أن التمثيل الهندسي للقوة القاصة كما هو موضح بالرسم .



عزوم الانحناء عند A يكون مساويا

$M_A = 0$

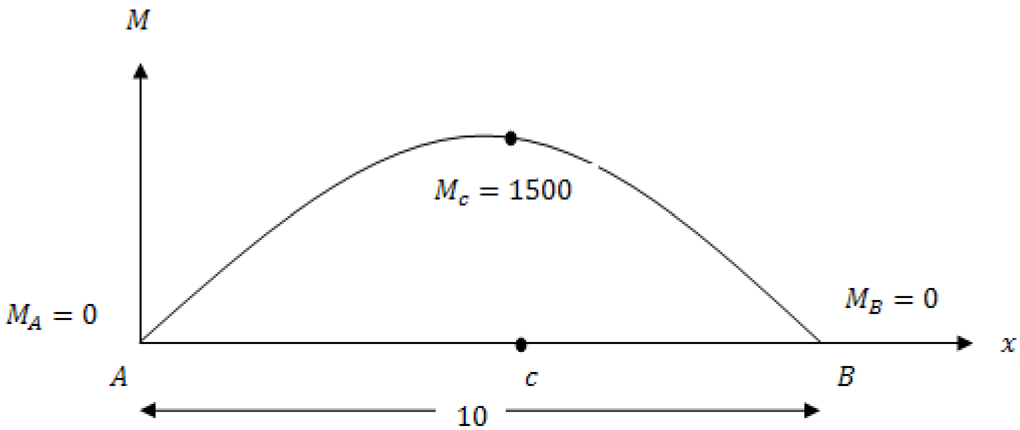
عزوم الانحناء عند B يكون مساويا

$M_B = 0$

عزوم الانحناء عند c يكون مساويا

$$M_c = 600 \times 5 - 60 \times 25$$
$$= 3000 - 1500 = 1500 \ Ib.ft.$$

ونلاحظ أن المعادلة (2) تمثل معادلة قطع مكافئ



مثال5:

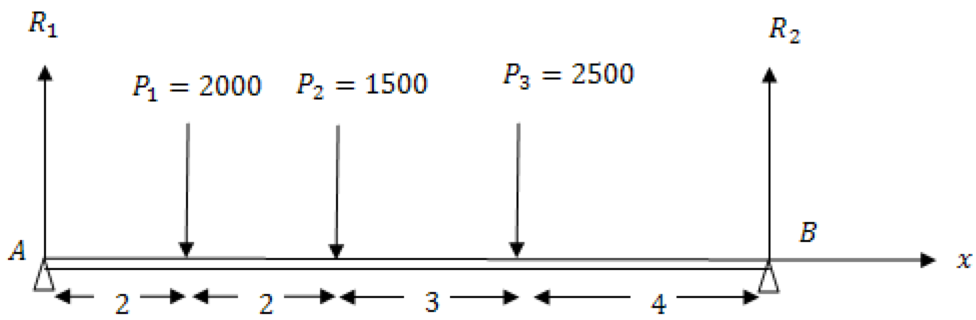
قضيب خفيف AB مرتكز عند طرفية A, B طوله $11\ ft$ تؤثر علية ثلاثة أحمال خارجية هي علي التوالي 2500 ,1500, $2000\ Ib$ عند النقط التي تبعد $2,4,7\ ft$ من الطرف A أوجد القوي القاصة وعزوم الانحناء وكذلك التمثيل الهندسي لكل منها .

الحل

بدراسة اتزان القضيب AB نجد أن

$$R_1 + R_2 = 6000 \qquad (1)$$

وبأخذ العزوم حول B نحصل علي



$$11\,R_1 = 2000 \times 9 + 1500 \times 7 + 2500 \times 4$$

$$= 18000 + 10500 + 10000$$

$$11\,R_1 = 38500$$

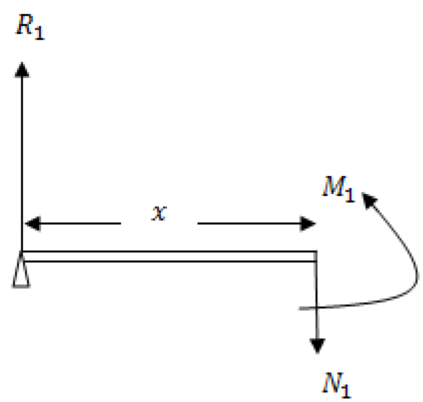
$$R_1 = 3500 \;\; Ib. \qquad (2)$$

بالتعويض من (2) في (1) نجد أن

$$R_2 = 2500 \qquad Ib$$

نعتبر المحور السيني في اتجاه القضيب .
لتعين القوة القاصة وعزوم الانحناء عند أي نقطة تعتبر اتزان المقاطع التي تبدأ من الطرف الأيسر

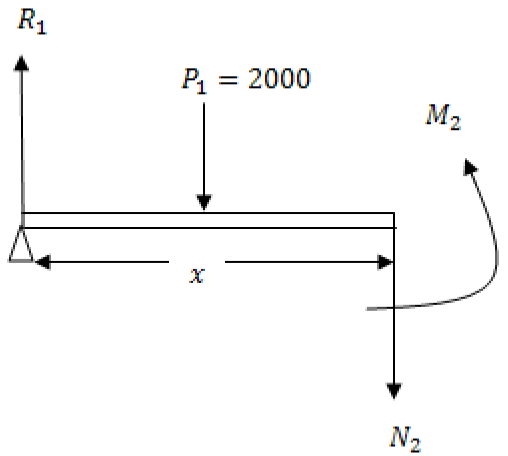
أولا: عندما تكون $0 < x < 2$



$$N_1 = R_1 = 3500 \;\; Ib$$

$$M_1 = R_1 x = 35001 \;\; x \;\; Ib.ft$$

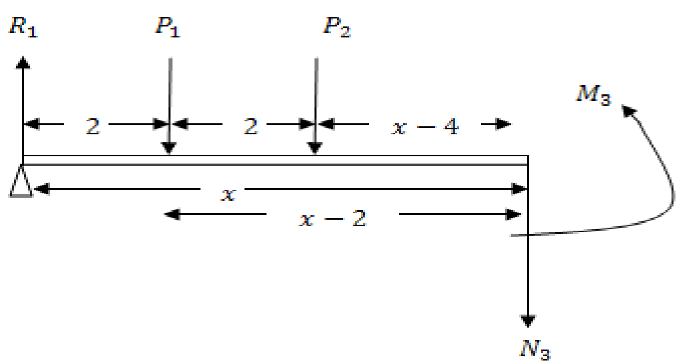
ثانيا: عندما تكون $2 < x < 4$



$$N_2 = R_1 - p_1 = 3500 - 2000 = 1500$$

$$M_2 = 3500\ x - 2000\ (x - 2)$$

ثالثا : عندما تكون $4 < x < 7$



$$N_3 = R_1 - p_1 - p_2$$

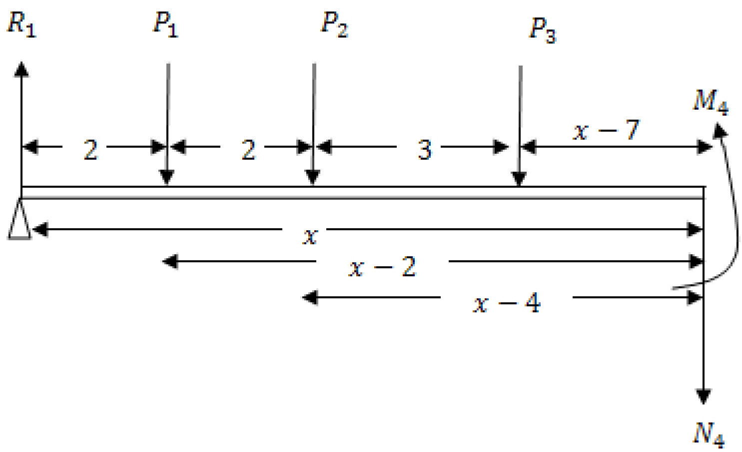
$$= 3500 - 2000 - 1500$$

$$N_3 = 0$$

$$M_3 = R_1 x - 2000\ (x - 2)$$

$$- 1500\ (x - 4)$$

رابعا : عندما تكون $7 < x < 11$

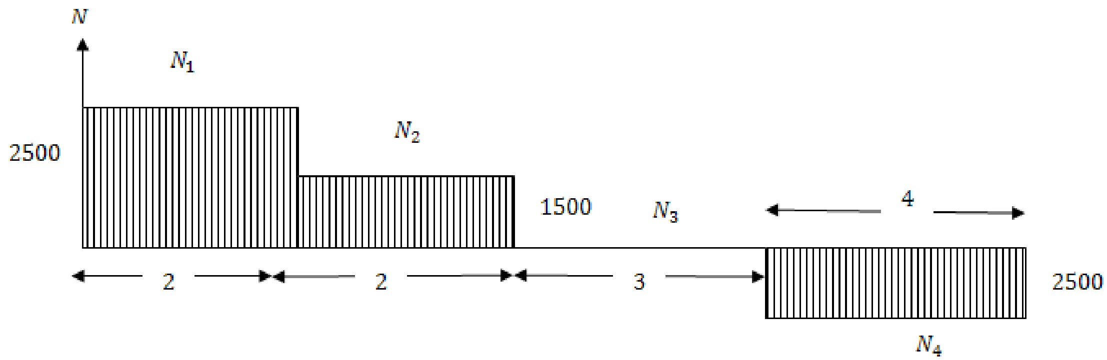


$$N_4 = R_1 - p_1 - p_2 - p_3$$
$$N_4 = 3500 - 2000 - 1500 - 2500$$

$$N_4 = -2500$$
$$m_4 = 3500\ x - 2000\ (x-2) - 1500\ (x-4) - 2500\ (x-7)$$
$$M_3 = 3500\ x - 2000\ (x-2)$$
$$-1500\ (x-4)$$

التمثيل الهندسي للقوة القاصة .

نأخذ اتجاه القضيب لمحور سيني نقطه A هي نقطه الأصل أعلي القضيب يمثل القيم الموجبة للقوه القاصة وأسفل القضيب يمثل القيم السالبة للقوة القاصة .
وبالتالي بالنسبة إلي $N_1 = 3500$ عبارة عن مستقيم يوازي المحور ox وكل نقطة علية علي بعد 3500 لأعلي .
وبالمثل N_2 ونلاحظ أن $N_3 = 0$ أي المحور ox نفسه هو الممثل للقوة القاصة N_3 أما بالنسبة إلي N_4 فهي سالبة وبذلك نرسم مستقيم يوازي ox وينخفض مسافة مقدارها 2500 وبذالك تكون قد رسمنا التمثيل الهندسي للقوة القاصة كما هو مبين بالرسم التالي



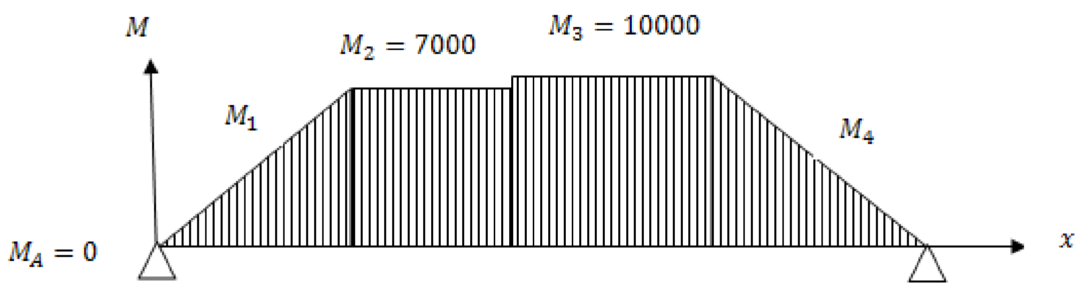
التمثيل الهندسي لعزوم الانحناء :

لكي يمكن تمثيل كل من M_1, M_2, M_3, M_4 هندسيا يجب معرفة عزوم الانحناء عند نقط تأثير p_1, p_2, p_3 عزوم الانحناء عند p_1 يعطي

$(M_1)_{x=2} = 3500 \times 2 = 7000 \ Ib.ft$

$(M_2)_{x=4} = 10000 \ Ib.ft, (M_3)_{x=7} = 10000 \ Ib.ft$

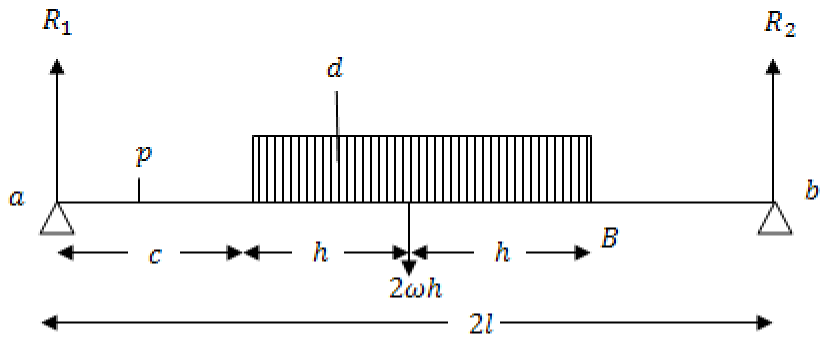
حيث أن القضيب مرتكز عن A, B فإن عزوم الانحناء عند نقط الارتكاز واضح من المعادلات التي تعطي عزوم الانحناء أنها فقط دالة خطية في x أي يمكن تمثلها بخط مستقيم .



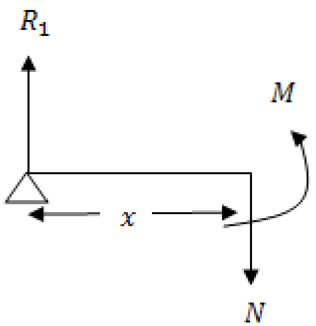
مثال6:

قضيب خفيف أفقي ab طوله $2l$ مرتكز عند نهايتيه ويحمل ثقل متحرك AB طولـه $2h\ (h < l)$ ووزن وحدة الطول منه ω . أوجد أكبر عزم انحناء عند نقطة ما علي القضيب وأثبت أنه في هذه الحالـة تقسم هذه النقطة المستقيم AB بنفس النسبة التي تقسم بها المستقيم ab

الحل



بأخذ وضعا للقضيب ab (كما بالشكل) بحيث يكون $aA = c$ نوجد قيمة c بحيث يكون عزوم الانحناء عند d أكبر ما يمكن لذلك باعتبار اتزان القضيب ab كله نجد أن



$$R_1 + R_2 = 2\omega h$$

وبأخذ العزوم حول النقطة b نجد أن

$$R_1 \times 2l = 2\omega l(2l - c - h)$$

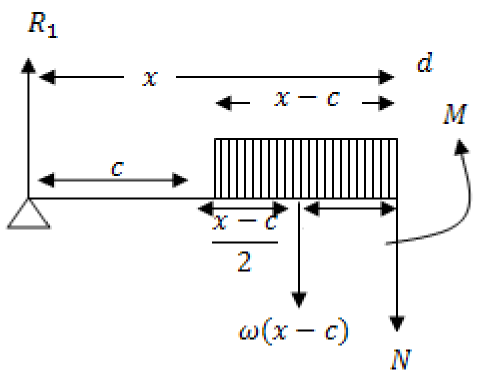
$$\therefore\ R_1 = \frac{\omega h}{l}(2l - c - h) \qquad (2)$$

وبأخذ مقطع للقضيب عند p حيث $ap = x$ وبشرط أن $x < c$ في حالة $x < c$

$$N = R_1 = \frac{\omega h}{l}(2l - c - h) \tag{3}$$

$$M = R_1 x = \frac{\omega h}{l}(2l - c - h)x \tag{4}$$

وأخذ مقطع عند النقطة d علي بعد x من النقطة a بحيث تكون $ad = x$ أي أن $x > c$.
القوة القاصة وعزوم الانحناء في هذه الحالة تكون



$$N = R_1 - \omega(x - c)$$

$$N = \frac{\omega h}{l}(2l - c - h) - \omega(x - c) \tag{5}$$

$$M = \frac{\omega h}{l}(2l - c - h)x - \frac{1}{2}\omega(x - c)^2 \tag{6}$$

واضح أن عزوم الانحناء M يتغير بتغير c .

M نهاية عظمي عندما تحقق c الشرط الآتي

$$\frac{dM}{dc} = 0 \tag{7}$$

$$-\frac{x\omega h}{l} + \omega(x - c) = 0$$

ومنها

$$c = (1 - \frac{h}{l})x \tag{8}$$

وبالتعويض بهذه القيمة c فإننا نحصل علي أكبر عزوم انحناء بالصورة

$$\begin{aligned} M_{max} &= (M)_{c=x(1-h/l)} \\ &= \frac{\omega h}{l}[2l - h - x(1 - h/l)]x \\ &\quad - \frac{1}{2}\omega[x - x(1 - h/l]^2 x \end{aligned} \tag{9}$$

وفي هذه الحالة فإن النسبة $\frac{Ad}{dB}$ نأخذ الصورة

$$\frac{Ad}{dB} = \frac{x - c}{2h - (x - c)} \tag{10}$$

بالتعويض عن قيمة c من المعادلة (8) ينتج أن

$$\begin{aligned} \frac{Ad}{dB} &= \frac{\frac{h}{l}}{2h - \frac{h}{l}x} = \frac{h/l(x)}{\frac{h}{l}(2l - x)} \\ &= \frac{x}{2l - x} = \frac{ad}{db} \end{aligned}$$

أي أن النقطة d التي عندها عزوم الانحناء أكبر ما يمكن تقسم الثقل المتحرك AB بنفس النسبة التي تقسم بها القضيب ab.

مثال7:

قضيب أفقي AB طوله l مثبت طرفه B في حائط رأسي ومحمل بثقل W موزع خطيا علي طول القضيب بازدياد منتظم يبدأ من الصفر عند الطرف الحر A . أوجد القوة القاصة وعزوم الانحناء عند أي مقطع للقضيب .

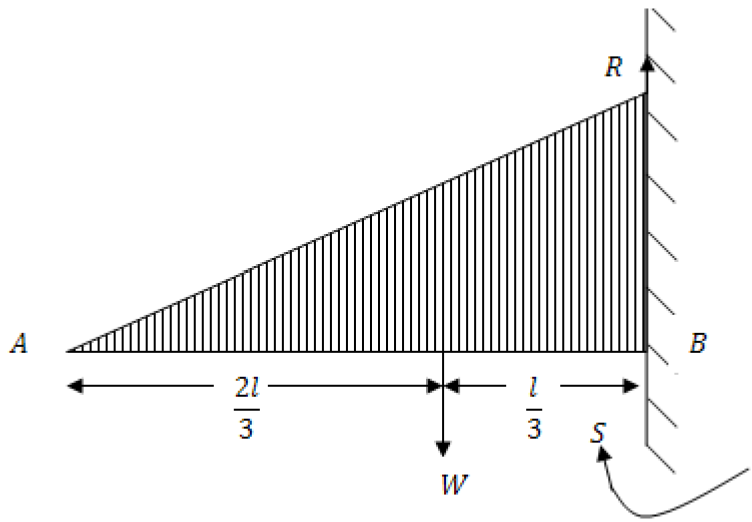
الحل

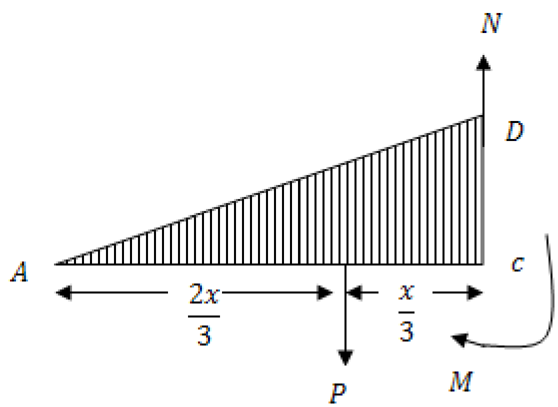
حيث أن كثافة التحميل $\omega(x)$ عند المقطع c علي بعد x من الطرف الحر A موزعا توزيعا خطيا علي طول القضيب فإن هذا الخط المستقيم يجب أن يمر بنقطة الأصل لذا فإن العلاقة بين $x, \omega(x)$ هي

$$\omega(x) = \lambda x \tag{1}$$

حيث λ هي ميل الخط المستقيم .

كثافة تحميل $\omega(x)$ عند المقطع c تعبر عن الارتفاع DC ويكون الثقل الواقع علي عنصر صغير طوله dx من القضيب يساوي $\omega(x)dx$ وعلي ذلك يكون التحميل الكلي الواقع علي القضيب AB يتعين من





$$W = \int_0^l \omega(x)dx$$

$$W = \int_0^l \lambda x dx$$

$$W = \frac{\lambda l^2}{2} \tag{2}$$

ومنها نعين قيمة λ وتساوي

$$\lambda = \frac{2W}{l^2} \tag{3}$$

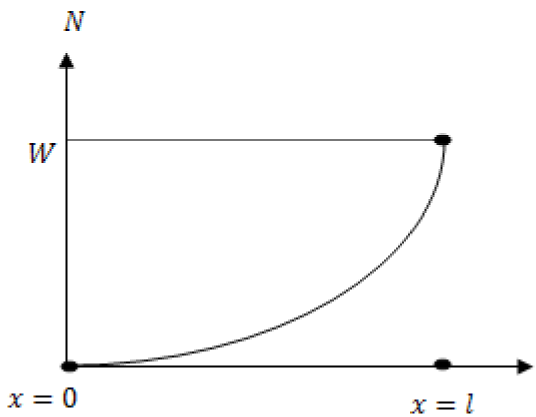
أي أن كثافة التحميل $\omega(x)$ تكون في الصورة

$$\omega(x) = \frac{2W}{l^2}x \tag{4}$$

باعتبار اتزان الجزء Ac من القضيب نجد أن القوة القاصة N تساوي الثقل p الواقع علي الجزء Ac, أي أن

$$N = p = \int_0^x \omega(x)dx = \int_0^x \frac{2W}{l^2}x\,dx$$

$$N = \frac{Wx^2}{l^2} \tag{5}$$



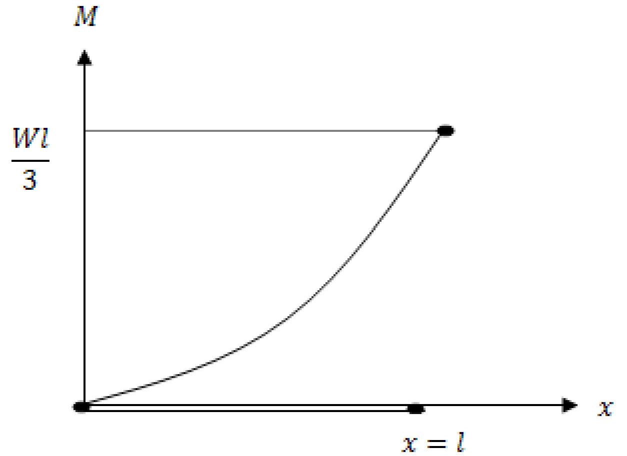
حيث يقسم الثقل p المسافة Ac بنسبة $1:2$, أي أن

$$AE = 2Ec = \frac{2x}{2}$$

واضح أن العلاقة (5) تعين القوة القاصة عند أي مقطع للقضيب وواضح أيضا أنها تمثل قطع مكافئ رأسه عند نقطة الأصل (كما بالشكل) وأن القوة القاصة تساوي صفر عندما $x = 0$ (أي عند الطرف الحر A) وأن أكبر قيمة للقوة القاصة عندما $x = l$ أي عند الطرف المثبت في الحائط B وتساوي W

وبأخذ العزوم حول المقطع c نجد أن

$$M = p\frac{x}{3} = \frac{Wx^2}{l^2}\frac{x}{3} = \frac{Wx^3}{3l^2} \qquad (6)$$



المعادلة (6) تعطي عزوم الانحناء عند أي مقطع وهي علاقه من الدرجة الثالثة في x ونلاحظ أن $M = 0$ عندما $x = 0$ (أي عند الطرف الحر A يتلاشي عزوم الانحناء) .

أيضا عزوم الانحناء يكون أكبر ما يمكن عندما $x = l$ (أي عند الطرف المثبت B) ويساوي $\frac{1}{2}Wl$ وفي الاتجاه الموجب أي في اتجاه عكس دوران عقارب الساعة .

ملحوظة:

يمكن إيجاد رد الفعل R والازدواج S عند الطرف المثبت B وذلك باعتبار الاتزان القضيب كله AB فنجد أن

$$R = W$$

$$S = \frac{1}{3}Wl$$

وذلك لأن الثقل W يؤثر في نقطة تقسم القضيب AB بنسبة 2:1 أي أن

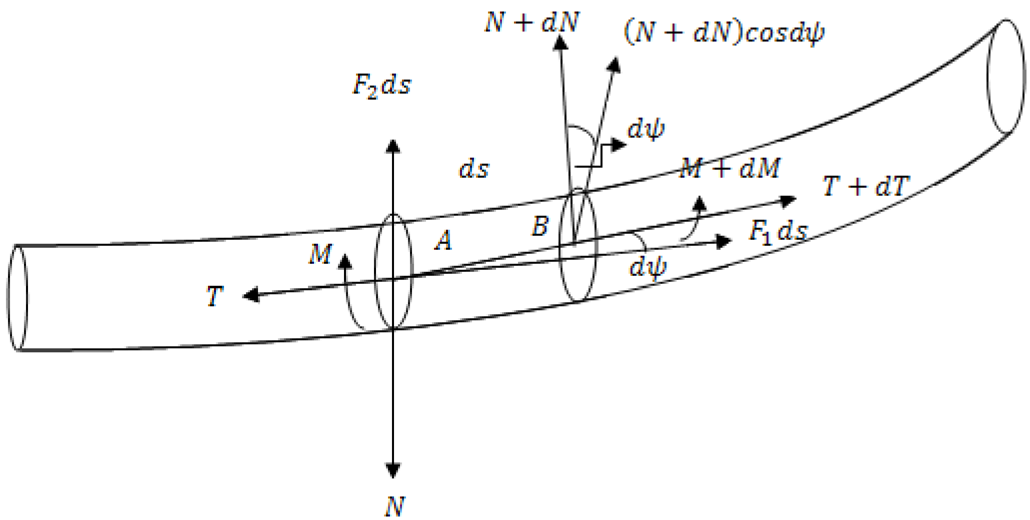
$$AF = 2FB = \frac{2}{3}l$$

ثانيا:- معادلات الاتزان لقضيب رفيع منحني :

بفرض اتزان عنصر طوله dS من قضيب رفيع منحني ونفرض أن T القوة في اتجاه محور القضيب (المماس عند A)، N القوة القاصة العمودية علي محور القضيب , M عزوم الانحناء علي المقطع الأيسر .

ونفرض أن $T + dT$ القوة في اتجاه محور القضيب (المماس عندB) و $N + dN$ هي القوة القاصة العمودية علي محور القضيب عند B , $\mathrm{M} + d\mathrm{M}$ هي عزوم الانحناء علي المقطع الأيمن .

ونفرض أن مركبتي القوة الخارجية المؤثرة علي العنصر في اتجاهي محور القضيب (المماس عند A) والعمودي علية هما F_1dS , F_2dS كما بالشكل .



بكتابة معادلات الاتزان في اتجاهي محور القضيب (المماس عند A) والعمودي علية وأخذ العزوم حول A فإن

$$(T + dT)\cos d\psi + F_1dS - T - (N + dN)\sin d\psi = 0 \qquad (3.2.1)$$

$$(T + dT)\sin d\psi + (N + dN)\cos d\psi + F_2dS - N = 0 \qquad (3.2.2)$$

$$(\mathrm{M} + d\mathrm{M}) - \mathrm{M} + (N + dN)dS = 0 \qquad (3.2.3)$$

وحيث أن $d\psi$ زاوية صغيره جدا فإن

$$\sin d\psi = d\psi , \cos d\psi = 1$$

وبإهمال الكميات الصغيرة من الدرجة الثانية فإن المعادلات السابقة تأخذ الصورة

$$dT + F_1 dS - N d\psi = 0 \tag{3.2.4}$$

$$dN + T d\psi + F_2 dS = 0 \tag{3.2.5}$$

$$dM + N dS = 0 \tag{3.2.6}$$

وبالقسمة على dS تصبح المعادلات (3.2.4-3.2.6) فى الصورة

$$\frac{dT}{dS} - N\frac{d\psi}{dS} + F_1 = 0 \tag{3.2.7}$$

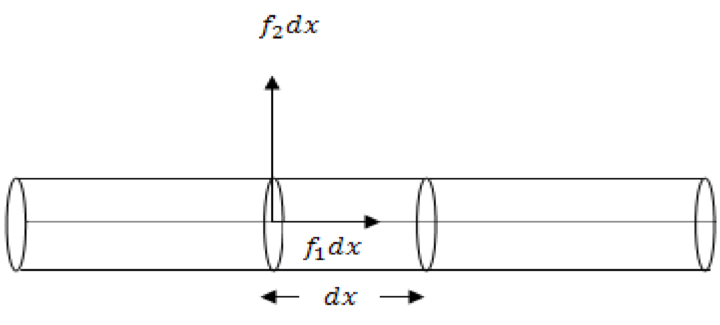
$$\frac{dN}{dS} + T\frac{d\psi}{dS} + F_2 = 0 \tag{3.2.8}$$

$$\frac{dM}{dS} + N = 0 \tag{3.2.9}$$

حيث $\rho = \dfrac{dS}{d\psi}$ هو نصف قطر الانحناء قطر الانحناء (النقوس) لمحور القضيب المعادلات (3.2.7 – 3.2.9) هي معادلات الاتزان لقضيب رفيع منحنى.

حالة خاصة:

عنـدما يكـون القضـيب مسـتقيما فـان نصـف قطـر الانحنـاء يكـون مالانهايـه $\rho = \infty$ ونأخذ معادلات الاتزان لقضيب مستقيم الصورة



$$\frac{dT}{dx} + F_1 = 0 \tag{3.2.10}$$

$$\frac{dN}{dx} + F_2 = 0 \tag{3.2.11}$$

$$\frac{dM}{dx} + N = 0 \tag{3.2.12}$$

ملحوظة :

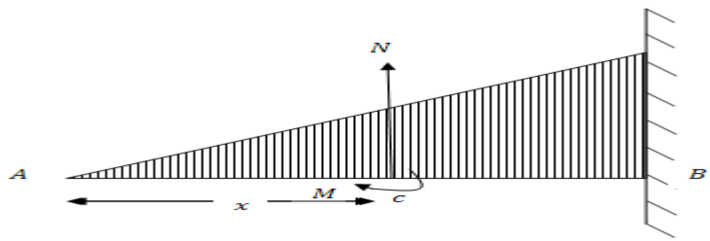
يمكن حذف القوة الفاصلة N بين المعادلتين (3.2.11),(3.2.12) وذلك بتفاضل المعادلة (3.2.12) بالنسبة إلى x وطرح (3.2.11) من الناتج نحصل على معادلة تفاضلية تربط عزم الانحناء M بمركبة القوى الخارجية F_2 في الصورة

$$\frac{d^2M}{dx^2} = F_2 \tag{3.2.13}$$

مثال (1)

حل مثال (7) السابقة مستخدما معادلات الاتزان لقضيب رفيع مستقيم.

الحل



فى هذه الحالة كثافة التحميل $\omega(x)$ تساوى $\frac{2W}{l^2}x$ ويكون

$$F_2 = -\omega(x) = -\frac{2W}{l^2}x$$

وباستخدام العلاقة (11) فان القوة القاصة N عند اى مقطع تكون

$$N = -\int F_2 dx = +\int_o^x \frac{2W}{l^2} x dx$$

$$N = \frac{Wx^2}{2l^2}$$

وباستخدام المعادلة (12) نحصل على عزم الانحناء M في الصورة

$$M = -\int N dx = -\frac{W}{l^2}\int_o^x x^2 dx \qquad = -\frac{Wx^3}{3l^2}$$

وهى نفس النتائج التى حصلنا عليها فى الحل السابق لمثال (7) .

تمارين على الباب الثالث

(1) قضيب AB يمكنه الدوران حول طرفه A ويرتكز بطرفة الآخر B على حائط رأسي أملس. اثبت ان عزم الانحناء عند نقطة c على القضيب يتناسب مع $CA.CB$.

(2) ثلاث قضبان متساوية متصلة عند نهايتها العليا ومرتكزة عند نهايتها السفلى على مستوى افقى وتحمل عند أعلى نقطة ثقل F . اذا كان طول اى قضيب يساوى $2l$ ويصنع زاوية α مع الرأسي وان ω وزن وحدة الطول لكل منها . فاوجد عزم الانحناء عند اى نقطة من القضيب واثبت انه لا يعتمد على الثقل F .

(3) وضع طوق الدائري على مستوى افقى بحيث كان مستواه راسيا . اثبت أن عزم الانحناء الناشئ عن الطوق يكون اكبر ما يمكن عند نقطة بعدها الزاوي θ عن أعلى نقطة من الطوق يتعين من

$$\theta + \tan\theta = 0$$

(4) قضيب طوله $3l$ ووزن وحدة الأطوال منه ω . وزع توزيعا متصلا على الثلث الأوسط منه بكثافة وزنها p لوحدة الأطوال. ادرس القوى القاصة وعزوم الانحناء عند مقاطع القضيب المختلفة عندما يرتكز القضيب عند نهايتية على وتدين أملسين.

(5) ثقل مستمر ω طن لكل قدم يتحرك ببطىء على كوبري طوله l قدم إذا أهمل وزن الكوبري فاثبت أن اكبر قوة قاصة عند نقطة p على بعد λ من الطرف الأقرب تساوى تساوى $\frac{\omega}{2l}(l-\lambda)^2$.

(6) رجل وزنه ω يمكنه أن يعبر قضيب مرتكز عند نهايتيه وزنه $\omega\eta$ وطوله l بدون أن ينكسر . إذا ثبت القضيب من احد نهايتيه بحيث كان المماس عندها افقيا فاثبت أن أقصى مسافة يمكن للرجل أن يتحركها على القضيب تساوى $\frac{1}{4}l\left(1-\frac{3}{2}\eta\right)$.

(7) قضيب AB طوله $12\ ft$ يرتكز عند نهايتيه على حاملين في مستوى افقى ويحمل ثقلا يزيد بانتظام من الصفر عند الطرف الأيسر A حتى اكبر قيمة $600\ Ib/ft$ عند الطرف B . اوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند اى مقطع .

(8) قضيب خفيف AB طوله l مثبت عند نهايتيه اليمنى B ومحمل نصفه الأيمن تحميلا منتظما كثافته ω_0 لوحدة الأطوال . فإذا وضع ثقل ω عند الطرف الحر A فاوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند اى نقطة من القضيب .

(9) قضيب راسي طوله $3\ ft$ مثبت على ارض أفقية. اوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند الطرف المثبت وعند نقطتي تثليث القضيب إذا أثرت علي الطرف العلوي للقضيب قوة أفقية مقدارها $200\ Ib$.

(10) قضيب oAB مثبت أفقيا عند طرفة o بحيث يكون $oA = 2AB = 2\ ft$ وضع ثقلين $300\ Ib, 200\ Ib$ عند B, A على الترتيب. اوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند النقطتين اللتين تنصفان AB, oA .

(11) قضيب منتظم طوله $2l$ يرتكز في وضع متماثل على حاملين في نفس المستوى الافقى المسافة بينهما $2h$. إذا كان $l < 2h$ فاثبت إن عزم الانحناء يكون نهاية عظمى عند الحامل أو في المنتصف حسبما يكون $2l \underset{<}{>} (2 + \sqrt{2})h$ وإذا كان $l > 2h$ فاثبت إن عزم الانحناء عند الحامل يكون نهاية عظمى عند الحامل واوجد قيمته.

(12) قضيب خفيف أفقي طوله l مرتكز عند نهايتيه ومحمل بحيث يتناسب عزم الانحناء عند اى نقطة مع وزن وحدة الطول عند نفس النقطة . اثبت ان الوزن عند اى نقطة يتناسب مع $\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ حيث x بعد النقطة عن احد طرفي القضيب .

(13) قضيب ثقيل وزنه W وطوله $3l$ يرتكز على حاملين املسيين احدهما عند طرفة والأخر على بعد l من الطرف الأخر . وزع ثقلا مقداره $2lp$ توزيعا منتظما علي المسافة المحصورة بين الوتدين من القضيب . ادرس منحنيات القوى القاصة وعزوم الانحناء.

(14) قضيب يرتكز عند نهايتيه على حاملين ومحمل تحميلا كثافته لوحدة الأطول عند اى نقطة تعطى من العلاقة $\omega(x) = \omega_0(a + bx)$ حيث b, a ثابتين .اوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند اى نقطة واستنتج الحالات الخاصة التي فيها $b = 0$ ثم $a = 0$.

(15) حل التمرين السابق **(14)** إذا كان القضيب مثبت عند الطرفين .

(16) قضيب افقى AB طوله $8\ ft$ مثبت طرفة الأيمن B في حائط راسي وحمل النصف الأيسر من القضيب بانتظام بكثافة $100\ Ib/ft$. اوجد القوة القاصة وعزم الانحناء عند اى مقطع من مقاطع القضيب المختلفة.

الباب الرابع

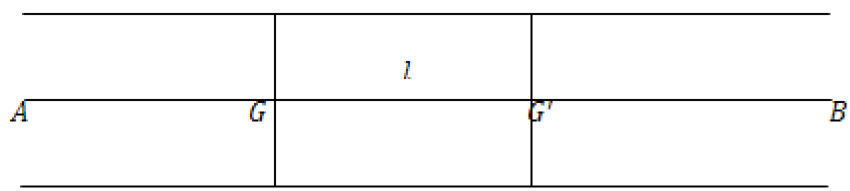
القضبان قليلة القابلية للانحناء

فيما سبق كنا نفترض دائما وجود اجسام صلبة ذات شكل ثابت لا يتغير مهما كانت القوة المؤثرة علية . او نفترض وجود خيوط طولها ثابت لا يزيد تحت تاثير ايه شد . ولكن المواد فى طبيعتها تختلف عن ذلك فجميع الاجسام تتغير تحت تأثير القوى المؤثرة تغييرا يتوقف من حيث المقدار والنوع تبعا لمادة الجسم وشكلة ومقدار هذة القوة. وسوف نقتصر فى هذا الباب على دراسة هذة التغيرات فىالقضبان الرفيعة وفى ابسط الحالات فى تلك التى يمكن حساب الشد فيها تبعا لقانون هوك.

اولا: انحناء القضبان:

اذا حمل قضيب بطريقة ما فانه ينحنى نتييجة لهذا الحمل . ويبدو ان هناك علاقة ما بين شكل القضيب وعزم الانحناء وعن طريقة التجربة توصل برنوللى Bernoulli، ايلر Euler ***ان عزم الانحناء عند اية نقطة على قضيب رفيع يتناسب تناسبا عكسيا مع نصف قطر الانحناء عند هذة النقطة*** . وفيما يلى برهانا لهذة العلاقة فى حالات خاصة وباستخدام فروض ليست صحيحة تماما.

نعتبر قضيبا مستقيما اثرت علية مجموعة من القوى الخارجية يضمها مستوى واحد بقسم القضيب الى قسمين متماثلين.



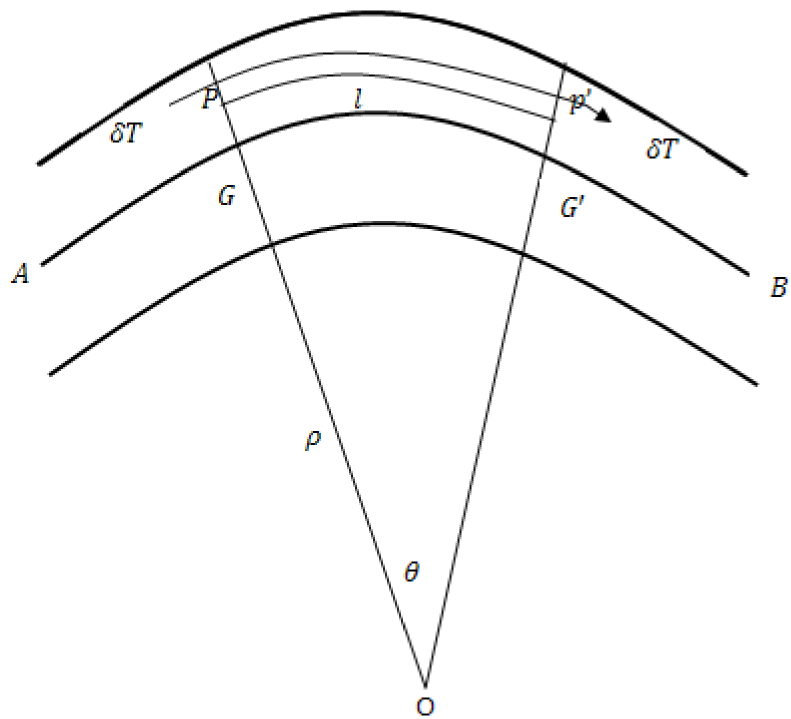
شكل (أ)

فى الشكل (أ) AB هو مقطع القضيب بواسطة مستوى القوى وفى الشكل (ب) نفس المقطع بعد انحناء القضيب تحت تاثير هذة القوى نتيجة لهذا الانحناء فان الالياف التى يتكون منها القضيب يزاد طولها اذا كانت اقرب الى السطح العلوى وبذلك تكون فى حالة شد ويقل طولها اذا كانت اقرب الى السطح السفلى وبذلك تكون فى حالة ضغط اما الالياف التى تفصل بين هذه وتلك فلن بتغير طولها بالانحناء وتعرف باسم خطوط التعادل Neutral Lines فى الشكل GG' هو خط التعادل فى مقطع القضيب بواسطة مستوى القوى ويعرف بمحور القضيب . اما ابعاد القضيب العرضية فإنها سوف تتغير هى الاخرى نتيجة لانحناء القضيب الإننا سوف نهمل هذا التغير نظرا لصغره . كذلك سوف نفترض ان اية مقطع عرضى للقضيب وهو مستقيما يظل مقطعا عرضيا لة وهو منحنى ومحتويا على نفس الجزيئات . نعتبر مقطعين عرضيين عند G, G' بينهما مسافة صغيرة L ونفترض انهما عند الانحناء تقابلا فى O .

فاذا كانت ρ هى نصف قطر إنحناء محور القضيب ، θ الزاوية التى يحصرها GG' عند 0 فان

$$l = \rho\theta \tag{4.1.1}$$

كذلك نعتبر الالياف pp' عند اية نقطة P على المقطع عند G وتبعد مسافة y عنها فإذا اصبح طول هذة الالياف بعد إنحناء القضيب $l + h$ فإن



شكل (ب)

$$l + h = (\rho + y)\theta$$

$$\therefore\ h = y\theta \tag{4.1.2}$$

ومن العلاقة (4.1.1) ، (4.1.2) ينتج ان

$$\frac{h}{y} = \frac{l}{\rho} \tag{4.1.3}$$

وبستخدام قانون هوك فان الشد في pp'

$$E\,\delta A\,\frac{h}{l} = E\,\delta A\,\frac{y}{\rho} \tag{4.1.4}$$

حيث δA هي مساحة مقطع الالياف pp' و E معامل ينج لمادة القضب .

$\therefore$محصلة الشد التى تؤثر على المقطع عند G يعطى من العلاقة

$$T = \int \frac{E}{\rho}\, y\,dA \tag{4.1.5}$$

ويحسب هذا التكامل على هذا المقطع

$$T = \frac{E}{\rho}\,\bar{y}\,A \tag{4.1.6}$$

وفيها A هى مساحة المقطع $\bar{y}$ بعد مركز ثقلة عن G هذة العلاقة تحدد وضع محور القضيب بالنسبة لمراكز ثقل مقاطعة . وفى تلك الحالات التى ينحنى فيها القضيب نتيجة لقوى عمودية عليه فإن T تساوى صفر عند ايه مقطع ومنها $\bar{y}$ يساوى صفر اى ان محور القضيب فى هذة الحالات يمر بمراكز ثقل مقاطع القضيب العرضية .

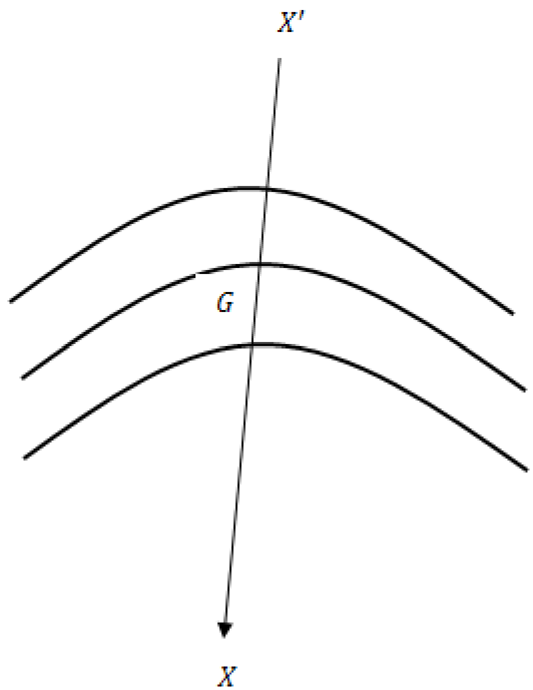
كذلك يمكن حساب عزم الانحناء M عند المقطع عند G وذلك باخذ عزوم الشد فى الالياف حول المحور XGX العمودى على مستوى القوى الخارجية

$$\therefore\; M = \int \frac{E}{\rho}\, y^2\,dA \tag{4.1.7}$$

حيث

$$\because\; I = \int y^2\,dA \tag{4.1.8}$$

هى عزوم القصور الذاتى لمساحة مقطع القضيب حول XGX' .



$$\therefore M = \frac{EI}{\rho} \qquad (4.1.9)$$

المقدار EI يعرف بمعامل المرونة الحجمى Flexural Rigidity ويرمز له عادة بالرمز K

$$\therefore M = \frac{K}{\rho} \qquad (4.1.10)$$

تدل العلاقة السابقة اذا كانت M ثابتة لجميع نقط قضيب منتظم فان ρ ايضا ثابتة . اى انه اذا اثرفي طرفى قضيب خفيف منتظم ازدواجين متضادين، ومقدار عزمها متساويان وفى مستوى واحد يضم القضيب سوف ينحنى متخذا شكل دائرة .

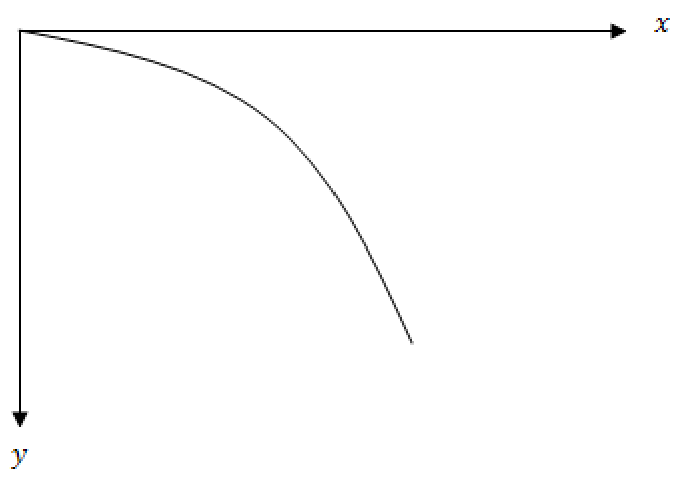
باخذ محور القضيب وهو مستقيما كمحور x فان

$$M = \frac{K}{\rho} = \frac{\pm K \dfrac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad (4.1.11)$$

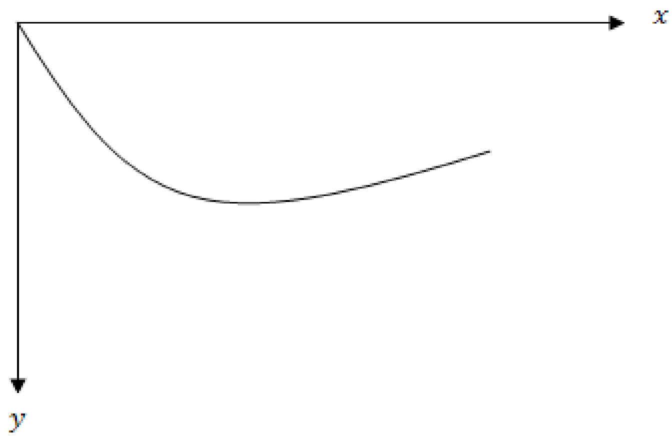
حيث y تمثل ازاحة النقطة x من محور القضيب عن موضعها عندما كان القضيب مستقيما . وعندما يكون القضيب قليل المرونة فان K كبيرة . اما $\frac{dy}{dx}$، y فكميات صغيرة يمكن اهمال مربعاتها وبذلك يمكن تقريب المعادلة (4.1.11) الى

$$M = \pm K \frac{d^2 y}{dx^2} \qquad (4.12)$$

وتؤخذ الاشارة المناسبة التى تجعل طرفى العلاقة (.4.1.12) لها نفس الاشارة . فاذا كانت القوى المؤثرة فى مستوى راسى مثلا واتخذنا الراسى الى اسفل هو الاتجاه الموجب لمحور y فانه باتباع القاعدة المتفق عليها فى تحديد اشارة عزم الانحناء نرى ان الاشارة الموجبة هى الواجب استعمالها . ذلك لانه فى الاجزاء التى تكون فيها M موجبة فان القضيب سوف بنحنى الى اعلى كما فى الشكل (أ) وفية تزيد $\frac{dy}{dx}$ بزيادة x اى ان $\frac{d^2 y}{dx^2}$ موجبة ولذا تاخذ الاشارة الموجبة فى تلك الاجزاء التى تكون فيها M سالبة فإن القضيب سوف ينحنى الى اسفل كما بالشكل (ب) وفيه



شكل (أ)



شكل (ب)

تتناقص $\frac{dy}{dx}$ بزيادة x اى ان $\frac{d^2y}{dx^2}$ تكون سالبة على ذلك تستخدم الاشارة الموجبة حتى يكون طرفا العلاقة السابقة سالبتين .

شروط تتحقق عند نقط خاصة فى القضبان المثبتة :

(أ) عند الاطراف الحرة للقضبان يتلاشى كلا من عزم الانحناء وقوه القص أي ان $y''' = 0, y'' = 0$ عند هذه الاطراف

(ب) اذا ارتكز القضيب ارتكازا بسيطا مفصليا فان عزم الانحناء يساوي صفر أي ان $y'' = 0$ عند نقطة الارتكاز هذه اما y فتكون معلومة عندها .

(ج) القضبان المثبتة تثبيتا كاملا فان $y, \frac{dy}{dx}$ معلومتان عند الطرف المثبت.

لايجاد شكل القضيب انحنى نتيجة لحمل معين نحل المعادلة التفاضلية

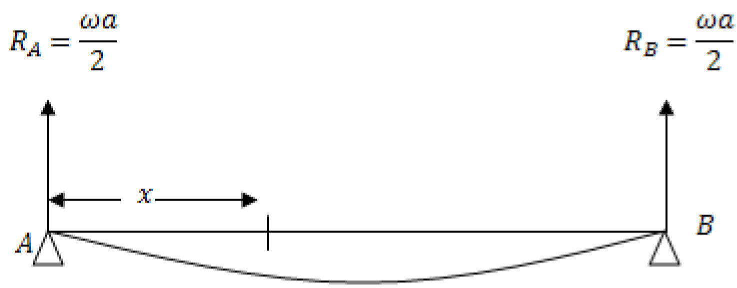
$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

مع استخدام الشرط المناسب تبعا لنوع التثبيت كما فى الامثلة التالية :

مثال(1):

ارتكز قضيب منتظم عند نهايتيه على وتدين في نفس المستوى الافقى . أثبت ان الانخفاض عند مسافة x من إحدى نهايتيه يساوى $\frac{\omega x}{24\,EI}(a-x)(a^2+ax-x^2)$ حيث a طول القضيب ، و ωa وزنة .

الحل



عزم الانحناء عند ايه نقطة تبعد مسافة x عن الطرف A يساوى

$$M = -\frac{\omega a}{2}x + \frac{\omega x^2}{2} \tag{1}$$

حيث ان

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M \tag{2}$$

$$\therefore\ EIy'' = -\frac{\omega ax}{2} + \frac{\omega x^2}{2} \tag{3}$$

بالتكامل

$$EIy' = \frac{\omega ax^2}{4} + \frac{\omega x^3}{6} + c \tag{4}$$

$$EIy = -\frac{\omega ax^3}{12} + \frac{\omega x^4}{24} + cx + c^1 \tag{5}$$

الايجاد الثوابت c, c^1 تتطبق الشروط الابتدائية فى المسألة

عند الطرف A :

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad \therefore c^1 = 0$$

عند الطرف B :

$$x = a, \qquad y = 0, \qquad \therefore c = \frac{\omega a^3}{24}$$

بالتعويض عن c, c^1 فى المعادلة السابقة (5)

$$\therefore EIy = \frac{\omega x}{24}\left(a^3 + x^3 - 2ax^2\right)$$

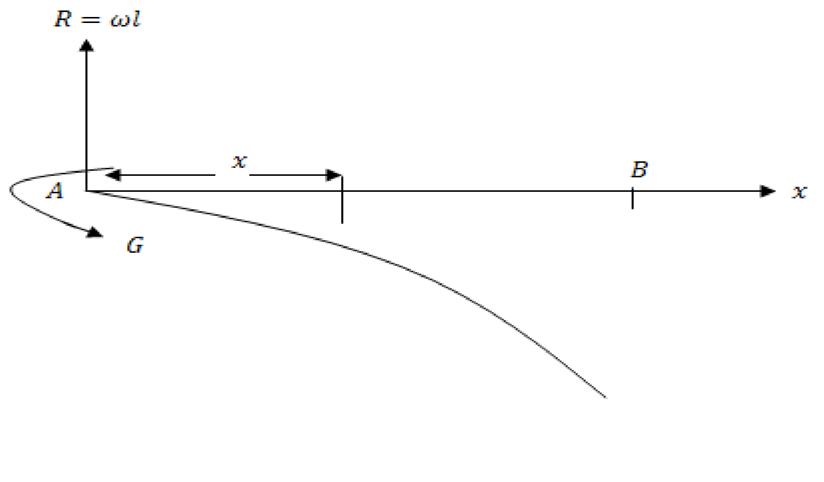
$$\therefore y = \frac{\omega x}{24 EI}(a - x)\left(a^2 + ax - x^2\right)$$

مثال(2):

ثبت قضيب منتظم تثبيتا افقيا عندإحدى نهايتيه فانحنى تحت تأثير وزنه . إثبت ان الانخفاض عند نهايته يساوى $\frac{3}{8}$ الانخفاض الذى يحدث اذا اعتبر القضيب خفيفا وعلق من نهايته ثقلا مساوى لوزنه .

الحل

نفرض ان طول القضيب l ,ω وزن وحدة الاطوال .



الحالة الاولى :

القضيب ثقيل .عزم الانحناء عند اى نقطة من القضيب تبعد مسافة $l-x$ عن الطرف الحر يساوى

$$M=\frac{\omega}{2}(l-x)^2 \tag{1}$$

$$Ky''=\frac{\omega}{2}\left(l^2-2lx+x^2\right) \tag{2}$$

بالتكامل

$$Ky'=\frac{\omega}{2}\left[l^2x-lx^2+\frac{x^3}{3}\right]+c$$

لايجاد c تطبق الشرط الابتدائى عند نقطه التثبيت A

$$x=0 \qquad y^1=0 \qquad \therefore c=0$$

$$\therefore\ Ky'=\frac{\omega}{2}\left[l^2x-lx^2+\frac{x^3}{3}\right] \tag{3}$$

بالتكامل مره اخرى

$$Ky=\frac{\omega}{2}\left[\frac{1}{2}l^2x^2-\frac{lx^3}{3}+\frac{x^4}{12}\right]+c_1 \tag{4}$$

لايجاد c_1

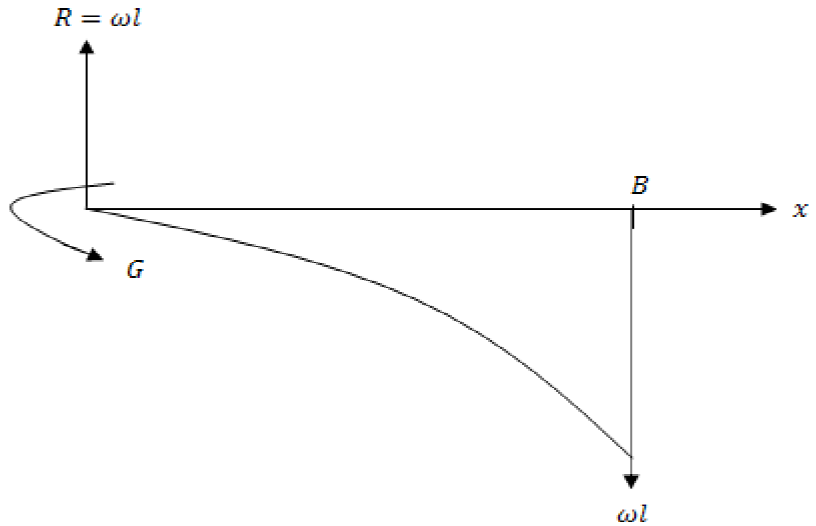
$$y=0 \qquad x=0 \qquad c_1=0$$

لايجاد الانخفاض عند الطرق الحر نضع $x=l$ في المعادلة (4) تجد ان

$$y_1=\frac{\omega l^4}{8k} \tag{5}$$

الحالة الثانية:

القضيب خفيف ومعلق ثقلا $\omega\, l$ عند طرفه الحر . عزم الانحناء عند أي نقطه تبعد مسافه $l-x$ عن الطرف الحر يساوي



$M = \omega l(l - x)$ (1)

$Ky'' = \omega l(l - x)$ (2)

بالتكامل

$Ky' = \omega l\left(l.x - \frac{x^2}{2}\right) + c$ (3)

ثابت التكامل يساوي صفر لان $x = 0$ at $y^1 = 0$ وبالتعويض عن الثابت والتكامل مرة اخرى

$Ky = \omega l\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + c_1$ (4)

ثابت التكامل يساوي صفر لان عند

$x = 0$ $y = 0$

$\therefore\ Ky = \omega l\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$ (5)

وعند : $x = l$ $y = y_2,$

$y_2 = \frac{\omega l^4}{3K}$ (6)

النسبه بين الانخفاضين

$$\frac{Ky_1}{Ky_2} = \frac{3}{8}$$

$$\therefore \; y_1 = \frac{3}{8} y_2 . \qquad (7)$$

ملاحظة:

اذا اثر الوزن والثقل معا فإن نتيجة لحل المعادلة التفاضلية والشروط الحدية المستخدمة فى حلها يكون إنخفاض الطرف الحر

$$y = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3}\right)\frac{\omega l^4}{K} = \frac{11}{24}\frac{\omega l^4}{K} .$$

مثال(3):

كابولى من مادة متجانسة على شكل قطع مكافئ دورانى طوله l ونصف قطر طرفة المثبت a . اذا كانت ω هى وزن وحدة الحجوم من الكابولى وكان محوره عند الطرف المثبت افقيا . أوجد انخفاض الطرف الحر .

الحل

الشكل المقابل هو مقطع الكابولى بواسطة المستوى الرأسى المار بمحوره . نفرض ان معادلة المقطع بالنسبة للمحاور المبينة

$$y2 = Ax + B \qquad (1)$$

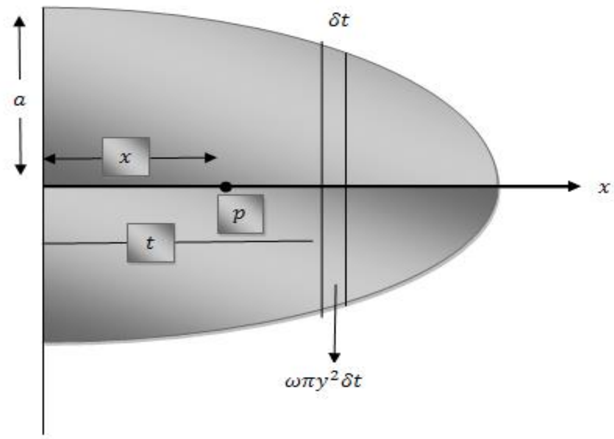
عند $x = 0$ وكانت $y = a$ ومنها $B = a^2$ وكذلك عند $x = l$ كانت $y = 0$ ومنها $A = -a^2/l$

$\therefore$ معادلة المقطع هى

$$y^2 = a^z\left(1 - \frac{x}{l}\right) \qquad (2)$$

$$= \int_x^l \omega \pi \, y^2 (t - x) dt .$$

عزم الانحناء عند اية p على بعد x من 0



$$\therefore\ M = \frac{w\,\pi a^2}{l}\int_x^l (l-t)(t-x)dt$$

$$= \frac{w\,\pi a^2}{6\,l}(l-x)^3 \qquad (3)$$

عزم القصور الذاتى لمقطع الكابولى عند p حول محور افقى (مقطع الكابولى العرضى للمساحة)يساوى

$$I = \pi\, y^2 \bullet \frac{y^2}{4}$$

$$= \frac{\pi\, a^2}{4l^2}(l-x)^2 \qquad (4)$$

$$\therefore\ \frac{\pi\, a^2}{4l^2}E\ y''(l-x)^2 = \frac{\omega\pi\ a^2}{6l}(l-x)^3$$

$$\therefore\ y'' = \frac{2}{3}\frac{\omega\, l}{Ea^2}(l-x) \qquad (5)$$

$$y' = \frac{2\omega\, l}{3a^2E}\left[lx - \frac{x^2}{2}\right] + c$$

وبالتعويض عن الثابت $x = 0\,,\ y' = 0\ \therefore\ c = 0$

$$y' = \frac{2\omega l}{3a^2 E}\left[lx - \frac{x^2}{2}\right] \tag{6}$$

بالتكامل مرة اخرى

$$y = \frac{2\omega l}{3a^2 E}\left[\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right] + c_1 \tag{7}$$

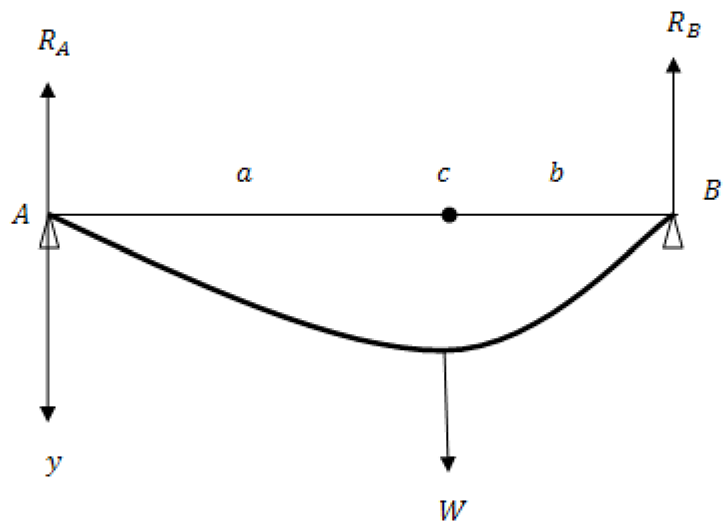
$x = 0\ at \quad y = 0 \quad \therefore c_1 = 0$

بوضع $x = l$ والتعويض عن $c_1 = 0$ فى معادلة (7) ينتج انخفاض الطرف الحر يساوى $-\dfrac{2}{9}\dfrac{\omega l^4}{Ea^2}$

مثال (4):

قضيب خفيف AB طولة $(a+b)$ يرتكز بطرفيه على وتدين رأسيين فى مستوى افقى واحد ويحمل ثقلا W عند نقطة تبعد مسافة a عن الطرف الحر . أوجد شكل القضيب وعين اقصى انخفاض له.

الحل



ردا الفعل عند B, A على الترتيب

$$R_A = \frac{Wb}{a+b}$$
$$R_B = \frac{Wa}{a+b}$$

شكل القضيب يتعين من المعادلتين

$0 \le x \le a \qquad a \le x \le b+a$

$$Ky'' = -\frac{wb}{a+b}x \quad , Ky'' = \frac{-wb}{a+b}x + w(x+a)$$

$$Ky' = \frac{-wb}{a+b}\frac{x^2}{2} + c \ , \ Ky' = \frac{-wb}{a+b}\frac{x^2}{2} + \frac{w}{2}(x-a)^2 + c'$$

وحيث ان y' متصلة عند $x = a$ فإن $c = c'$

$$\therefore Ky = \frac{-wb}{a+b}\frac{x^3}{6} + cx + D \, ; Ky = \frac{-wbx^3}{6(a+b)} + \frac{w}{6}(x-a)^3 + c'x + D^1$$

وحيث ان y متصلة عند $x = a$ فان $D = D^1$ عند الطرف A :

$x = 0 \qquad y = 0 \qquad \therefore D = 0$

عند الطرف B :

$x = a+b \qquad , \quad y = 0$

$$\therefore C = \frac{wba}{6}\frac{a+2b}{a+b}$$

اى ان شكل القضيب هو المنحنى فى حالة $a \le x \le a$

$$Ky = \frac{-wb}{a+b}.\frac{x^3}{6} + \frac{wba}{6}\frac{a+2b}{a+b}x \qquad (1)$$

$$Ky = \frac{-wb}{a+b}.\frac{x^3}{6} + \frac{wba}{6}\frac{a+2b}{a+b}x + \frac{w}{6}(x-a) \ in \ a \le x \le a+b \qquad (2)$$

وقد تساوت ثوابت التكامل فى جزأى القضيب لاتصال $y, \frac{dy}{dx}$ عند $x = a$ ولإن الحدود الزيادة فى الجزء $a \le x \le a + b$ كتبت وكوملت بدلالة $(x - a)$ حتى تتلاشى عند $x = a$ وفى هذة الحالة لا داعى لتكرار الحدود المتشابهة ونكتفى فقط بإضافة الحدود الازمة للجزء الثانى من القضيب . وتعرف طريقة التكامل هذة بطريقة ماكولى (Macaullay,s Method).

لايجاد اقصى إنخفاض نبحث عن الاوضاع التى تتلاشى عندها ميل القضيب من المعادلات السابقة .

$a \le x \le a$　　　　　　　　$a \le x \le a + b$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{wb}{a+b}\frac{x^2}{2} + \frac{wba}{6}\frac{a+2b}{a+b} + \frac{w}{2}(x-a)^2$$

وهذان يتلاشى عند

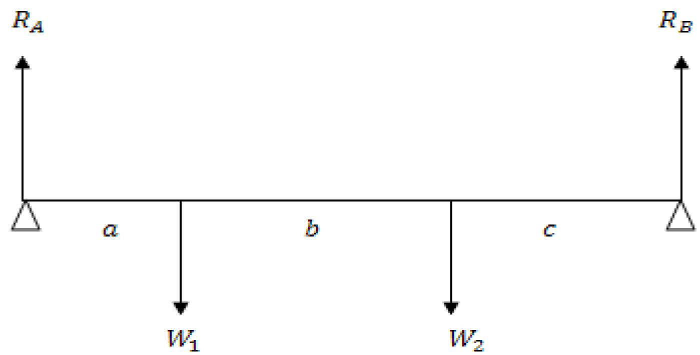
$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}a(a+2b)}\ ,\ x_2 = a + b \pm \sqrt{\frac{1}{3}b(b+2a)}$$

وتهمل الاشارة السالبة فى x_1 والموجبة فى x_2 اذ انها تعطيان نقطا خارج القضيب واذا كانت $a > b$ فان كلا من x_1, x_2 اقل من a وعلى ذلك فان $\frac{dy}{dx}$ تساوى الصفرعند نقطة على القضيب تبعد مسافة $\sqrt{\frac{1}{3}b(b+2a)}$ من الطرف الحر. وبالتعويض في (1) للجزء $0 \le x \le a$ يمكن الحصول علي أقصي انخفاض . وبالمثل اذا كانت $b > a$ فان $\frac{dy}{dx} = 0$ عند نقطة علي القضيب تبعد مسافة $\sqrt{\frac{1}{3}b(b+2a)}$ من B اى مسافة $(a+b) - \sqrt{\frac{1}{3}b(b+2a)}$ من A .

مثال (5):

قضيب خفيف AB طولة $a+b+c$ يرتكز فى وضع افقى على وتدين رأسيين عند طرفية ويحمل ثقلين w_1, w_2 عند نقطتين تبعدان مسافة $a, a+b$ من الطرف A على الترتيب أوجد شكل القضيب .

الحل



باخذ العزوم حول A ثم حول B ينتج ان

$$R_A = \frac{W_1(b+c)+W_2 c}{a+b+c},$$
$$R_B = \frac{W_1 a + W_2(a+b)}{a+b+c}.$$

شكل القضيب يتعين من :

$$a \le x \le a \qquad a \le x \le a+b \quad a+b \le x \le a+b+c$$
$$Ky'' = -R_A x + W_1(x-a) + W_2(x-a-b)$$
$$Ky' = -R_A \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}W_1(x-a)^2 + \frac{1}{2}W_2(x-a-b)^2$$

وقد تساوت ثوابت التكامل في النطاق الثلاث لان y, y' دالتان متصلتان.

$$Ky = -R_A \frac{x^3}{6} + \frac{1}{6}W_1(x-a)^3 + \frac{1}{6}W_2(x-a-b)^3 \qquad (1)$$

الحالات غير المحددة إستاتيكيا:

هناك بعض حالات القضبان المرتكزة او المثبتة لاتكفى فيها معادلات الاتزان العادية لحساب ردود الافعال فيها . ويطلق على مثل هذه الحالات إنها غير محددة استاتيكيا ، اما اذا اتخذنا مرونه هذه القضبان فى الحسبان فانه باستخدام القانون $Ky'' = M$.

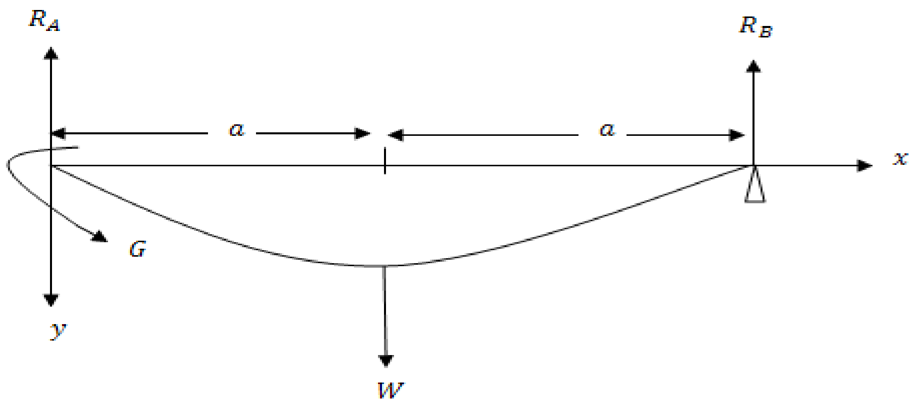
يمكن حساب ردود الافعال هذه. وهذا يتضح فى الامثلة التالية:

مثال (1):

قضيب خفيف AB طولة $2a$ طرفة A مثبت أفقيا وطرفة B يرتكز على وتد رأسى بحيث كان الطرفان فى مستوى افقى واحد . فاذا علق من منتصف القضيب ثقلا W أوجد انخفاض الثقل W عن الطرفين B, A وارسم منحنى عزم الانحناء.

الحل

نفرض ان ردى الفعل عند B, A هما R_A, R_B وان عزم التثبيت A هو G.



$$R_A + R_B = W \tag{1}$$

$$2aR_A = G + Wa \tag{2}$$

وباتخاذ الافقى AB محور x والراسى الى الى اسفل عند A هو محور y فان

$0 \le x \le a \qquad\qquad a \le x \le 2a$

$$M = EIy'' = G - R_A x \qquad + W(x-a) \tag{3}$$

$$\therefore\ EIy' = Gx - R_A \frac{x^2}{2} \qquad + \frac{W}{2}(x-a)^2 \tag{4}$$

$$EIy = \frac{1}{2}Gx^2 - R_A \frac{x^3}{6} + \frac{W}{6}(x-a)^3 \tag{5}$$

وقد تلاشى ثابتا التكامل فى (4) و(5) لتلاشى y, y' عند $x = 0$.

وحيث ان $y = 0$ عند $x = 2a$

$$\therefore\ 2G - \frac{4}{3}aR_A + \frac{Wa}{6} = 0 \tag{6}$$

بحل المعادلات (1) و(2) و (6) ينتج ان

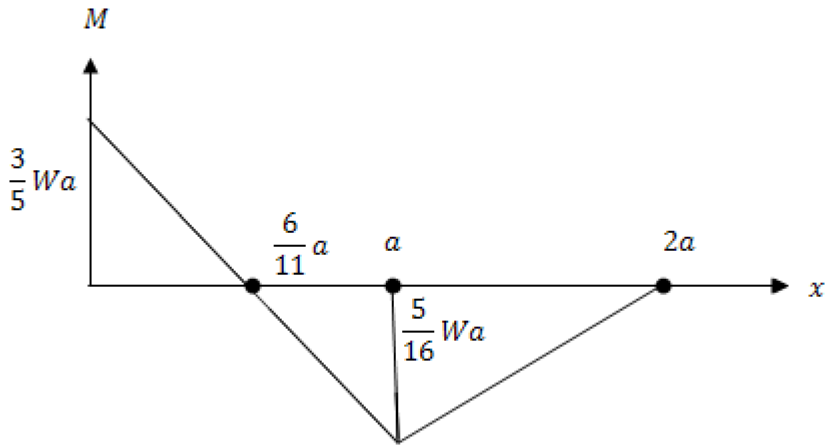
$$R_A = \frac{11}{16}W\ ,\ R_B = \frac{5}{16}W\ ,\ G = \frac{3}{8}Wa\ .$$

وعلى ذلك فإن القضيب ياخذ شكل المنحنى

$$EIy = \frac{Wx^2}{96}(18a - 11x) \qquad\qquad 0 \le x \le a.$$

$$EIy = \frac{Wx^2}{96}(18a - 11x) + \frac{W}{6}(x-a)^3 \quad a \le x \le 2a$$

بوضع $x = a$ ينتج ان إنخفاض الثقل W عن الطرفين B, A يساوى $\frac{7}{96}\frac{Wa^3}{EI}$.



شكل (أ)

وكذلك فان عزم الانحناء تعطية المعادلتان

$$M = \frac{W}{16}(6a - 11x) \qquad 0 \le x \le a$$

$$M = \frac{5W}{16}(x - 2a) \qquad a \le x \le 2a$$

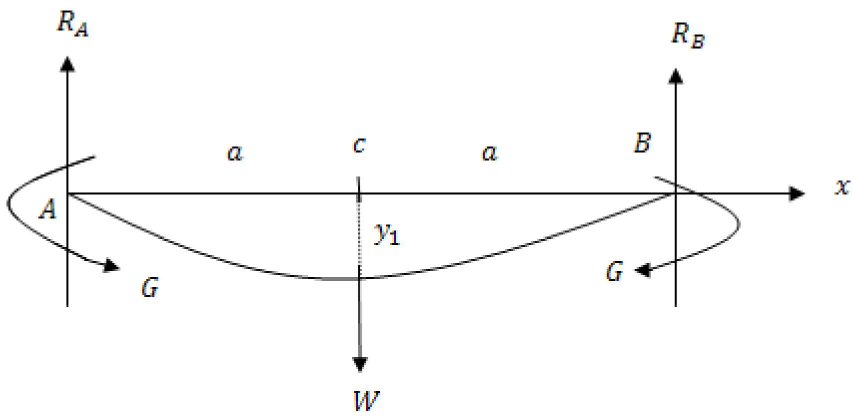
والشكل (أ) يبين هذا المنحنى .

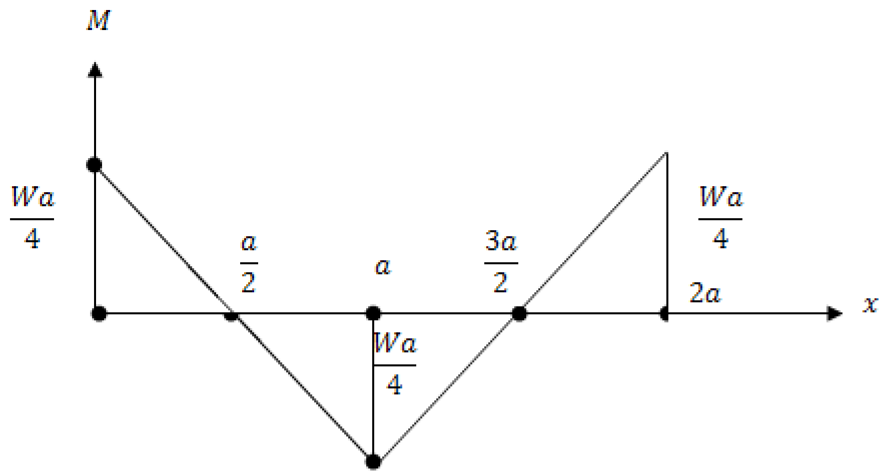
مثال (2):

قضيب خفيف AB طولة $2a$ مثبت من طرفية B, A بحيث كان الطرفان فى مستوى افقى واحد. فإذا علق من منتصف القضيب ثقلا W اوجد انخفاض الثقل W عند الطرفين B, A وارسم عزم الانحناء.

الحل

فى هذه الحالة يصبح القضيب متماثلا حول الثقل المعلق وينتج عن ذلك ان :





شكل (ب)

$$R_A = R_B = \frac{W}{2} \qquad (1)$$

وان مقدار العزم (التثبيت) واحد عند الطرفين G. نتيجة للتماثل فى الشكل يكفى اعتبار نصف القضيب الايسر مثلا. شكل هذا النصف يتحدد من العلاقة .

$$EIy'' = G - \frac{W}{2}x \qquad 0 \le x \le a \tag{2}$$

$$EIy' = Gx - \frac{Wx^2}{4} \qquad 0 \le x \le a \tag{3}$$

$$EIy = \frac{1}{2}Gx^2 - \frac{Wx^3}{12} \qquad 0 \le x \le a \tag{4}$$

وقد تلاشى ثابتا التكامل لتلاشى y, y' عند $x = 0$ من التماثل $y' = 0$ عند $x = a$ ومنها ينتج ان

$$G = \frac{Wa}{4} \tag{5}$$

$\therefore$ معادلة النصف الايسر للقضيب هى

$$EIy = \frac{Wx^2}{24}(3a - 2x) \tag{6}$$

بوضع $x = a$ ينتج ان انخفاض الثقل w عن الطرفين يساوى

$$y_1 = \frac{Wa^3}{24\,EI} \tag{7}$$

عزم الانحناء عند اية نقطة على القضيب تعطية المعادلتان

$$M = \frac{W}{4}(a - 2x) \qquad 0 \le x \le a \tag{8}$$

and

$$M = \frac{W}{4}(2x - 3a) \qquad a \le x \le 2a \tag{9}$$

والشكل (ب) يبين منحنى عزم الانحناء .

مثال (3):

قضيب AB طولة l ووزنه ω لكل وحدة طول. ثبت طرفة A أفقيا وارتكز الطرف B على وتد رأسي بحيث كان الطرفان B, A فى مستوى افقى واحد. عين رد الفعل والازدواج التثبت عند A.

إثبت ان الانخفاض منتصف القضيب عن الطرفين $\dfrac{\omega l^4}{192\ EI}$ وارسم منحنى عزم الإنحناء.

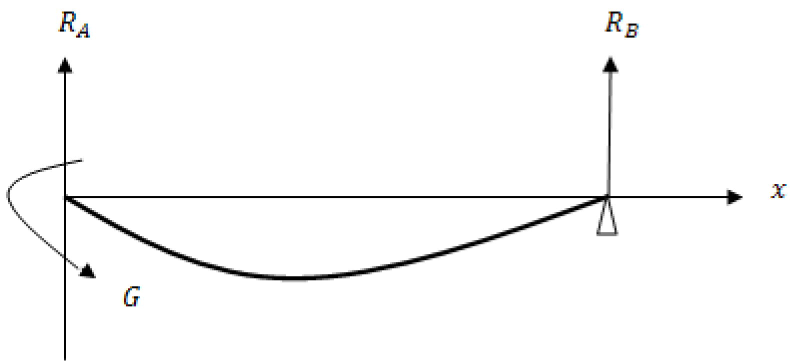
الحل

نفرض ان رد الفعل عند B, A هما R_B , R_A وان عزم التثبيت عند A هو G.

$$\therefore\ R_A + R_B = \omega l \qquad (1)$$

$$R_A l = G + \frac{\omega l^2}{2} \qquad (2)$$

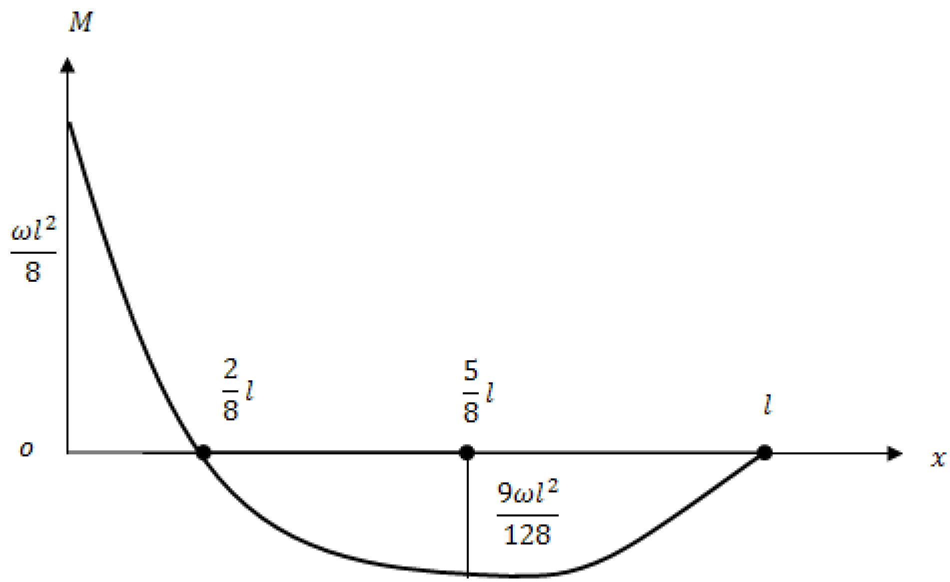
بإتخاذ محورين إحداهما أفقى والأخر رأسى عند A.



$$EI y'' = G - R_A x + \frac{\omega x^2}{2} \qquad (3)$$

$$EI y' = Gx - \frac{1}{2} R_A x^2 + \frac{\omega x^3}{6} + c_1 \qquad (4)$$

$$EI y = \frac{1}{2} G x^2 - \frac{1}{6} R_A x^3 + \frac{\omega x^4}{24} + c_1 x + c_2 \qquad (5)$$



شكل (ج)

$$x = 0 \qquad y' = 0 \qquad c_1 = 0$$

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad c_2 = 0$$

$$\therefore\ EIy = \frac{1}{2}Gx^2 - \frac{1}{6}R_A x^3 + \frac{\omega x^4}{24} \tag{6}$$

وحيث ان $y = 0$ عند $x = l$

$$\therefore\ \frac{1}{2}G - \frac{l}{6}R_A + \frac{\omega l^2}{24} = 0 \tag{7}$$

بحل المعادلات (1)و(2)و(7) ينتج ان

$$R_A = \frac{5}{8}\omega l \qquad ; R_B = \frac{3}{8}\omega l\ ; G = \frac{1}{8}\omega l^2$$

∴شكل القضيب يتحدد بالمعادلة

$$EIy = \frac{11}{16} l^2 x^2 - \frac{5\omega}{48} lx^3 + \frac{\omega}{24} x^4$$

i.e

$$EIy = \frac{\omega x^2}{48}(2x - 3l)(x - l)$$

وبوضع $x = l/2$ ينتج ان إنخفاض منتصف القضيب عن طرفيه يساوى $\frac{\omega l^2}{192\, EI}$

عزم الانحناء عند اى نقطة على القضيب تعطية المعادلة .

$$M = \frac{1}{8}\omega l^2 - \frac{5}{8}\omega lx + \frac{1}{2}\omega x^2$$
$$= \frac{\omega}{2}\left[(x - \frac{5}{8}l)^2 - \frac{9}{64} l^2 \right]$$

والشكل (ج) يبين منحنى عزم الانحناء.

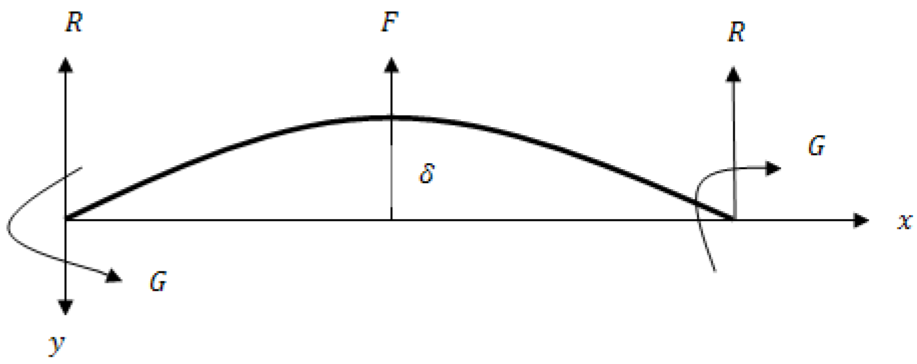
مثال (4):

قضيب منتظم مثبت افقيا عند كل من نهايتية. اذا رفع القضيب من منتصفه الى اعلى بقوة مسافة مقدارها δ فوق النهايتين . إثبت ان القوة تساوى $\frac{W}{2} + \frac{24K\delta}{a^3}$ وان العزم عند النهايتين يساوى $\frac{Wa}{24} + \frac{6K\delta}{a^2}$ − حيث $2a$ طول القضيب و W وزنة و $K = EI$.

الحل

من التماثل رد الفعل R واحد عند الطرفين وكذلك عزم الانحناء G نفرض ان القوة المؤثرة عند منتصف القضيب هى F .

معادلة الاتزان تعطى من :



$$F + 2R = W \tag{1}$$

بإتخاذ الافقى AB محور x والرأسى الى اسفل عند A محور y فإن شكل النصف الايسر من القضيب $0 \le x \le a$ يتحدد من المعادلة

$$M = EIy'' = G - Rx + \frac{W}{2a}\frac{x^2}{2} \tag{2}$$

$$\therefore\ EIy' = Gx - \frac{1}{2}Rx^2 + \frac{W}{2a}\frac{x^3}{6} \tag{3}$$

$$EIy = \frac{Gx^2}{2} - \frac{1}{6}Rx^3 + \frac{W}{2a}\frac{x^4}{24} \tag{4}$$

وقد تلاشى ثابت التكامل فى (3) و(4) لتلاشى y, y' عند $x = 0$.

وحيث ان $y = -\delta$ عند $x = a$ وبالتعويض فى (4)

$$\therefore\ -\frac{2EI\delta}{a^2} = G - \frac{Ra}{3} + \frac{Wa}{24} \tag{5}$$

وحيث ان $y' = 0$ عند $x = a$

$$0 = G - \frac{1}{2}Ra + \frac{Wa}{12} \tag{6}$$

بحل المعادلتين (6)و(5) والمعادلة (1) نحصل على

$$R = \frac{W}{4} - \frac{12K\delta}{a^3},\ F = \frac{24K\delta}{a^3} + \frac{W}{2},$$

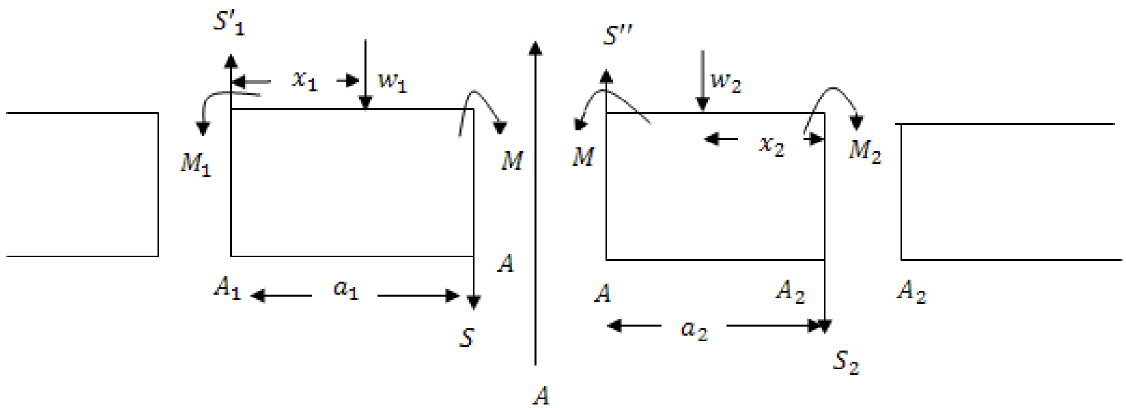
$$G = -\frac{6K\delta}{a^2} + \frac{Wa}{24}.$$

ثانيا: معادلة كلابيرون Clapeyron,s للعزوم الثلاثة:

اولا-معادلة كلابيرون للعزوم الثلاثة لأحمال المركزة :

تعتبر جزئين $A_1A\ ,\ AA_2$ من قضيب خفيف منتظم طولها $a_1\ ,\ a_2$ لنفرض أن القضيب اتزن والجزءان $A_1A\ ,\ AA_2$ محملان بثقلين $w_1\ ,\ w_2$ عند نقطتين منها تبعدان مسافتين $x_1\ ,\ x_2$ عن $A_1\ ,\ A_2$ على الترتيب فإذا كانت $M_1\ ,\ M\ ,\ M_2$ هى عزوم الأنحناء عند $A_1\ ,\ A,\ A_2$ وكانت $\delta_1\ ,\ \delta_2$ هى مقدار إنخفاض A عن الأفقى عن $A_1\ ,\ A_2$ فإن

$$a_1M_1 + 2(a_1 + a_2)M + a_2M_2 = \frac{w_1x_1(a_1^2 - x_1^2)}{a_1} + \frac{w_2x_2(a_2^2 - x_2^2)}{a_2} - 6EI\left(\frac{\delta_1}{a_1} + \frac{\delta_2}{a_2}\right).$$



لإثبات ذلك:

نفرض أن قوى القص عند $A_1,\ A,\ A_2$ كما هى مبينة بالشكل وإذا كانت إحدى النقط الثلاث فقط نقط إرتكاز للقضيب – وفى الشكل إتخذت A نقطة ارتكاز – فإن قوه القص تكون غير متصلة بمقدار $(S^1 - S)$ يساوى رد الفعل عندها بإعتبار إتزان $A_1A\ ,\ AA_2$ كل على حده واخذ العزوم حول $A\ ,\ A_2$ على الترتيب نحصل على .

$$-a_1S_1^1 + w_1(a_1 - x_1) + M_1 - M = 0 \qquad (4.2.1)$$

$$-a_2S^1 + w_2x_2 + M - M_2 = 0 \qquad (4.2.2)$$

إذا أخذنا محورى الاحدثيات عند A_1 فإن شكل A_1A يتعين من العلاقات الاتية

$.......... .0 \le x \le x_1$ $\qquad x_1 \le x \le a_1$

$$EIy'' = M_1 - S_1^1 x \qquad + w_1(x - x_1)$$

$$EIy' = c_1 + M_1 x - \frac{1}{2} S_1^1 x^2 \qquad + \frac{w_1}{2}(x - x_1)^2$$

$$EIy = D_1 + c_1 x + \frac{1}{2} M_1 x^2 - \frac{1}{6} S_1^2 x^3 \qquad + \frac{w_1}{6}(x - x_1)^3$$

لكن $y = 0$ عند $x = 0$ ، $y = \delta_1$ عند $x = a_1$

$$\therefore D_1 = 0$$

$$and \quad c_1 + \frac{1}{2} M_1 a_1 - \frac{1}{6} S_1^1 a_1^2 + \frac{1}{6} \frac{w_1}{a_1}\left(a_1 - x_1\right)^3 = EI \frac{\delta_1}{a_1} \qquad (4.2.3)$$

للجزء AA_2 للقضيب نأخذ محوري الاحداثيات عند A

$0 \le x \le a_2 - x_2$ $\qquad a_2 - x_2 \le x \le a_2$

$$EIy'' = M - S^1 x \qquad + w_2(x - a_2 + x_2)$$

$$EIy' = c_2 + Mx - 1/2\, S^1 x^2 \qquad + \frac{w_2}{2}(x - a_2 + x_2)^2$$

$$EIy = D_2 + c_2 x + \frac{1}{2} Mx^2 + \frac{1}{6} S^1 x^3 \qquad + \frac{w_2}{6}(x - a_2 + x_2)^3$$

وحيث ان $y = 0$ عند $x = 0$ ، $y = \delta_2$ عند $x = a_2$

$$\therefore D_2 = 0$$

$$c_2 + \frac{1}{2} Ma_2 - \frac{1}{6} S^1 a_2^2 + \frac{1}{6} \frac{w_2}{a_2} x_2^3 = -EI \frac{\delta_2}{a_2} \qquad (4.2.4)$$

كذلك ميل $A_1 A_2$ عند A هو نفسة ميل AA_2 عند النقطة A

$$c_1 + M_1 a_1 - \frac{1}{2} S_1^1 a_1^2 + \frac{1}{2} w_1(a_1 - x_1) + c_2 \qquad (4.2.5)$$

بحذف c, c_1 من المعادلات (4.2.3)و(2.4.4)و(4.2.5) نحصل على:

$$\frac{1}{2}M_1a_1+\frac{1}{2}Ma_2-\frac{1}{3}S_1^1a_1^2-\frac{1}{6}S^1a_2^2+\frac{w_1}{6a_1}(a_1-x_1)^2$$

$$x(2a_1+x_1)+\frac{w_2}{6a_2}x_2^2=-EI\left(\frac{\delta_1}{a_1}+\frac{\delta_2}{a_2}\right)$$

بالتعويض فى هذة العلاقة عن S', S_1' من (1) و(2) ينتج ان

$$M_1a_1+2M(a_1+a_2)+M_2a_2=\frac{w_1x_1(a_1^2-x_1^2)}{a_1}+\frac{w_2x_2(a_2^2-x_2^2)}{a_2}-6EI\left(\frac{\delta_1}{a_1}+\frac{\delta_2}{a_2}\right)\qquad(4.2.6)$$

والحد الاخير يعطى تأثير انخفاض A عن A_2, A_1 على عزوم الانحناء عند هذه المواضع .

هذه العلاقة يمكن تعميميها لاكثر من ثقل على الجزئين AA_2, A_1A وتكون النتيجة على الصورة :

$$M_1a_1+2M(a_1+a_2)+M_2a_2=\frac{\sum w_ix_i(a_1^2-x_i^2)}{a_1}+\frac{\sum w_jx_j(a_2^2-x_j^2)}{a_2}-6EI\left(\frac{\delta_1}{a_1}+\frac{\delta_2}{a_2}\right)\qquad(4.2.7)$$

وفيها x_i هى ابعاد w_i عن A_1 ،

x_j هى ابعاد w_j عن A_2 .

<u>ثانيا: معادلة العزوم الثلاثة لقضيب محمل بإنتظام:</u>

نفرض أنة بدلا من الأحمال المركزة فى البند السابق هناك حملا w_1 لكل وحدة طول عند اية نقطة من جزء القضيب A_1A , ω_2 لكل وحدة طول عند ايه نقطة من AA_2 بالتعويض عن w_i, w_j بالكميتين $\omega_1\delta x_1, \omega_2\delta x_2$ على الترتيب واستبدال عملية الجمع بعملية تكامل ينتج ان

$$M_1a_1+2M(a_1+a_2)+M_2a_2=\int_0^{a_1}\frac{w_1x_1}{a_1}(a_1^2-x_1^2)dx_1+\int_0^{a_2}\frac{\omega_2x_2}{a_2}(a_2^2-x_2^2)dx-6EI\left(\frac{\delta_1}{a_1}+\frac{\delta_2}{a_2}\right)$$

و هده الاحمال المنتظمة تعطى

$$M_1a_1+2M(a_1+a_2)+M_2a_2=\frac{w_1a_1^3}{4}+\frac{w_2a_2^3}{4}-6EI\left(\frac{\delta_1}{a_1}+\frac{\delta_2}{a_2}\right)\qquad(4.2.8)$$

ثالثا: المعادلة العامة للعزوم الثلاثة:

اذا كان الجزءان A_1A و AA_2 من القضيب محملين أحمالا موزعة توزيعا منتظما واخرى مركزة بينما النقط A_1, A, A_2 ليست فى مستوى افقى واحد فإن:

$$M_1a_1 + 2M(a_1 + a_2) + M_2a_2 = \frac{w_1a_1^3}{4} + \frac{w_2a_2^3}{4} + \frac{\sum w_ix_i(a_1^2 - x_i^2)}{a_1} + \frac{\sum w_jx_j(a_1^2 - x_j^2)}{a_2} - 6EI\left(\frac{\delta_1}{a_1} + \frac{\delta_2}{a_2}\right) \tag{4.2.9}$$

والرموز فى هذه العلاقة تحمل نفس المعنى الذى استخدمت فيه من قبل. تعرف هذه العلاقة بمعادلة كلابيرون والصور السابقة حالات خاصه منها.

أمثلة:

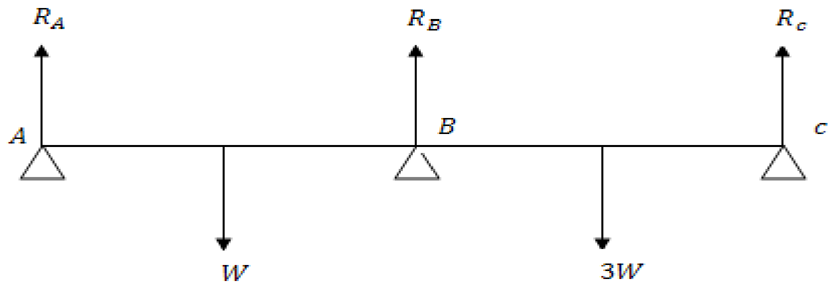
مثال(1):

قضيب خفيف AC يرتكز عند طرفيه A, C وعند منتصفه B على ثلاث أوتاد فى مستوى أفقى واحد . وحمل عند منتصف AB , BC بحملين W , $3W$ على الترتيب . احسب ردود الافعال على الاوتاد . واثبت أن القضيب أفقى عند طرفة A .

الحل

عزم الانحناء عند الطرفين C, A يساوى صفرا. نفرض ان عزم الانحناء عند B هو M .

بتطبيق معادلة كلابيرون للعزوم الثلاثة للاوزان المركزة على نقط الارتكاز C, B, A نحصل على :



$$8aM = W\left(\frac{a-3a^2}{2a}\right) + 3W\left(\frac{a-a^2}{2a}\right)$$

$$i.e.\quad M = \frac{3}{4}Wa \qquad (1)$$

حيث $4a$ طول القضيب

بفرض أن ردود الافعال عند C, B, A هى $R_c . R_B , R_A$ على الترتيب . اذن عزم الانحناء عند B .

$$M = \frac{3aW}{4} = -2aR_A + Wa \qquad (2)$$

$$= -(2aR_c - 3aW)$$

$$\therefore\ R_A = \frac{1}{8}W\ ,\ R_c = \frac{9}{8}W \qquad (3)$$

ولكن إتزان القضيب

$$R_A + R_B + R_c = 4W \qquad (4)$$

$$\therefore\ R_B = \frac{11}{4}W \qquad (5)$$

شكل الجزء AB يتعين من العلاقات

$0 \le x \le a$	$a \le x \le 2a$
$EIy'' = -\frac{1}{8}Wx$	$+W(x-a)$
$EIy' = c - \frac{1}{16}Wx^2$	$+\frac{W}{2}(x-a)^2$

$$EIy = D + cx - \frac{1}{32}Wx^3 + \frac{W}{6}(x-a)^3$$

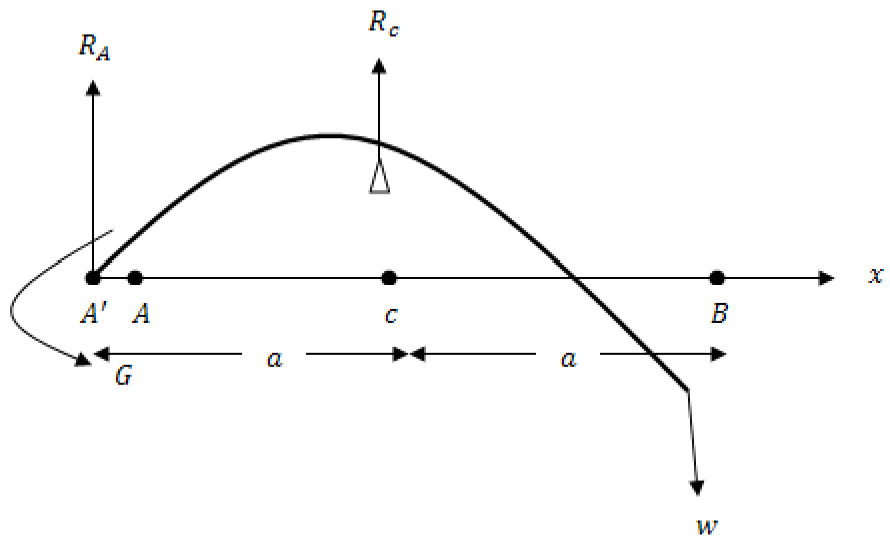
ولكن $y = 0$ عند $x = 2a, x = 0$ ينتج ان $D = 0$.

وايضا $c = 0$ وهذا يعنى ان ميل القضيب عند A يساوى صفرا. **أى ان القضيب افقى فى هذا الطرف**.

مثال (2):-

قضيب خفيف AB طولة $2a$ ثبت طرفة A أفقيا، وارتكز منتصفة c على وتد يرتفع مسافة $\frac{1}{6}\frac{wa^2}{EI}$ فاذا علق ثقلا w من الطرف الحر B. أحسب انخفاض الطرف B عن A. كذلك أوجد ردود الافعال عند c, A.

الحل



نفرض ان ردى الفعل عند c, A هما R_c, R_A وان عزم الانحناء عند A هو G أما عزم الانحناء عند c هو wa. التثبت عند A يمكن اعتباره تركيزا عند نقطتين إحداهما A والاخرى A' قريبه جدا من A بحيث يمكن إعتبار AA'=صفر $\delta_1 = 0$ كذلك فان النسبة $\frac{\delta_1}{a_1}$ تؤول الى الصفر حيث انها تعطى ميل الجزء AA' على الافقى وهذا يساوى صفرا لان هذا الطرف للقضيب مثبت أفقيا بتطبيق معادلة كلابيرون للعزوم الثلاثة لاحمال المركزة عند c, A, A^1 ينتج ان

$$2G.a + wa.a = -6EI\,\frac{wa^2}{6EI}$$

$$i.e\ G = -wa$$

وبتطبيق معادلة كلابيرون عند النقط B, c, A

$$G.a + 4a - wa = -6EI\left(-\frac{wa^3}{6EIa} + \frac{\delta}{a}\right)$$

$$i.e \quad \delta = -\frac{1}{3}\frac{wa^3}{EI}$$

اى ان c تعلو B مسافة $\frac{wa^3}{3EI}$ وتعلو A مسافة $\frac{1}{6}\frac{wa^3}{EI}$. اذن B اسفل A مسافة $\frac{wa^3}{6EI}$.

لحساب ردود الافعال نعتبر إتزان $\mathbf{A}B$. باخذ العزوم حول A

$$R_c = 3w$$

ومنها

$$R_A = -2w$$

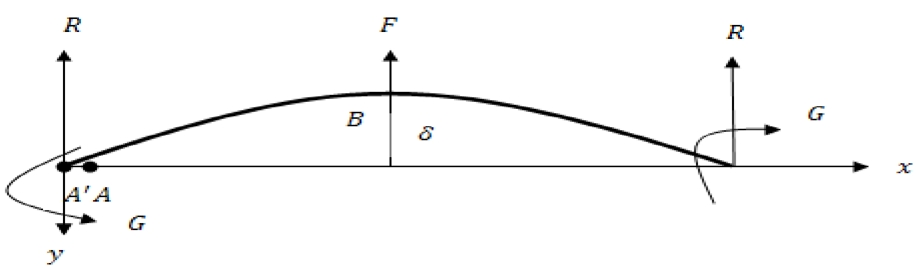
مثال (3):

باستخدام معادلة كلابيرون حل هذه المسالة.

قضيب منتظم مثبت افقيا عند كلامن نهايتة. اذا رفع القضيب من منتصفة الى اعلى بقوة مسافة مقدارها δ فوق النهايتين. اثبت ان القوة تساوى $\frac{w}{2} + \frac{24K\delta}{a^2}$ وان العزم عند النهايتين يساوى $\frac{w}{24} + \frac{6K\delta}{a^2}$ – حيث $2a$ طول القضيب w وزنه ، $K = EI$.

الحل

باعتبار نقط التثبيت عند A تركيزا عند نقطتين متقاربتين جدا احدهما A والأخرى A^1 بحيث يمكن اعتبار



$AA^{1} = 0$

$\delta_1 = 0$

$\frac{\delta_1}{A^1 A} \approx 0$

(كما اوضحنا فى المثال السابق)

بتطبيق معادلة كلابيرون للعزوم الثلاثة عند النقط A^1, A, B مع ملاحظة ان

$a_1 = 0 \qquad , a_2 = a$

$M_1 = G \qquad , M = G \qquad , M_2 = M_B$

نحصل على

$$2aG + aM_B = \frac{w}{2a}\left(\frac{a^3}{4}\right) - 6K\frac{\delta}{a} \qquad (1)$$

بتطبيق معادلة كلابيرون للعزوم الثلاثة عند النقط A, B, c مع ملاحظة ان

$a_1 = a \qquad , a_2 = a$

$M_1 = G \qquad , M = M_B \qquad , M_2 = G$

نحصل على

$$aG + 4aM_B + aG = \frac{w}{2a}\left(\frac{a^3}{4} + \frac{a^3}{4}\right) - 6K\left(-\frac{\delta}{a} - \frac{\delta}{a}\right)$$

$$i.e \ 2G + 4M_B = \frac{wa}{4} + \frac{12K\delta}{a^2} \qquad (2)$$

بحل المعادلتين (1)و(2) نجد ان

$$M_B = \frac{wa}{24} + \frac{6K\delta}{a^2}, G = \frac{wa}{24} - \frac{6k\delta}{a^2},$$

باعتبار الجزء AB فان عزوم الانحناء عند B.

$$M_B = G - Ra + \frac{wa}{4}$$

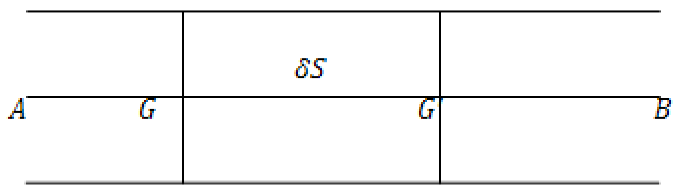
$$\therefore\ R = \frac{w}{4} - \frac{12\,KG}{a^3}$$

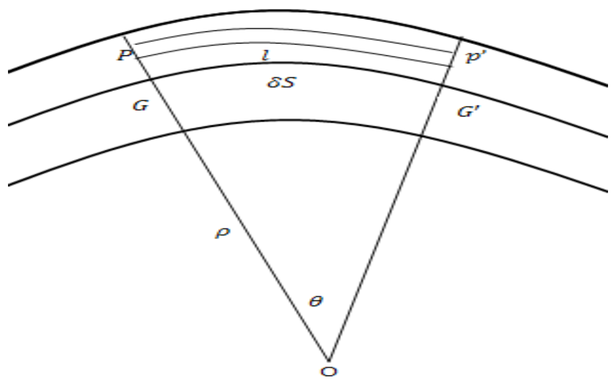
من اتزان القضيب كله

$$F = W - 2R$$
$$= \frac{W}{2} + \frac{24\,K\delta}{a^3}\cdot$$

ثالثا:- طاقة جهد قضيب نتيجه لانحنائه:

نفرض ان AB هو مقطع القضيب بواسطة المستوى الذى يضم القوى المؤثرة علية وان GG^1 جزء صغير من محور القضيب طوله δS . ونعتبر جزء القضيب المحصور بين المقطعين العرضيين له G^1, G .





نفرض انه عند إنحناء القضيب تقاطع هذان المقطعان فى o الالياف عند ايه نقط p على المقطع عند G وعلى بعد y منها تتغير طولها بالانحناء.

نفرض انه اصبح $\delta S + h$ فاذا كانت ρ هى نصف قطر انحناء محور القضيب عند G فإن

$$\frac{h}{y} = \frac{\delta S}{\rho} \tag{4.3.1}$$

اذا كانت δA هى مسافة مقطع الالياف عند p . فان طاقة جهد هذه الالياف نتيجة لاستطالتها تساوى

$$\frac{1}{2}\frac{E\,\delta A}{\delta S}h^2 \tag{4.3.2}$$

$$=\frac{1}{2}E\,\frac{y^2}{\rho^2}\delta A\,\delta S$$

∴طاقة جهد جزء طولة δS من القضيب

$$=\frac{1}{2}\frac{E\,\delta S}{\rho^2}\int y^2\,dA \tag{4.3.3}$$

ويحسب التكامل على مقطع القضيب عند p وهذا يساوى عزم القصور الذاتى I لمقطع القضيب عند G حول محور عندها عمودى على مستوى القوى.

اذا كانت V هى طاقة جهد القضيب نتيجة لانحنائة فان

$$U=\frac{1}{2}\int\frac{EI}{\rho^2}\,ds \tag{4.3.4}$$

وهذا التكامل محسوبا على محور القضيب.

عندما يكون القضيب فى حالته الطبيعية على شكل منحنى ثم تغير هذا الانحناء فان يمكن اثبات ان طاقة الجهد U المخزونة نتيجة لهذا الانحناء تعطيها العلاقة

$$U=\frac{1}{2}\int EI\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)^2 ds \tag{4.3.5}$$

محسوبا على محور القضيب ρ,ρ_0 هما نصفا قطر الانحناء لمحور القضيب عند اية نقطة فيه قبل وبعد التغير فى انحنائة .

$$\because\ M=\frac{EI}{\rho} \tag{4.3.6}$$

يمكن كتابة طاقة جهد القضيب بدلالة عزم الانحناء M وذلك بالتعويض من (4.3.6) فى (4.3.4) ينتج ان

$$U=\frac{1}{2}\int\frac{M^2}{EI}\,ds \tag{4.3.7}$$

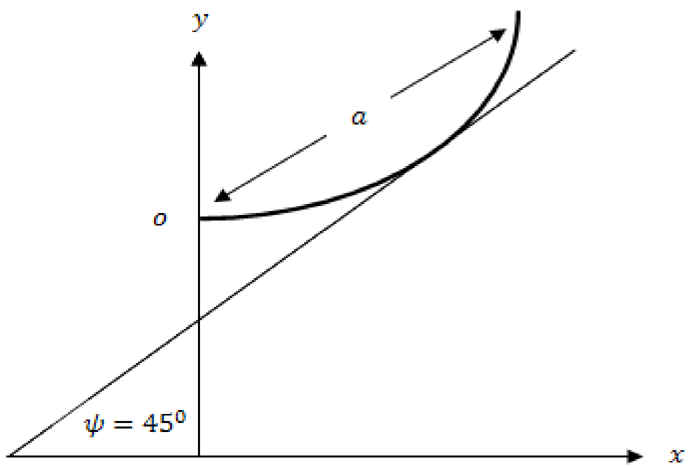
وهذا التكامل محسوبا على محور القضيب

أمثلة:

مثال(1):-

قضيب طولة a شكلة الطبيعى كتينة ذات بارامتر a احد طرفية عند راسها انحنى القضيب بعد ذلك لياخذ شكل دائرة نصف قطرها a : أثبت ان الطاقة المخزونة فيه تساوى $\frac{EI}{16a}(10-3\pi)$

الحل



المعادلة الذاتية لمنحنى الكتينة هى

$$S = a\tan\psi \qquad (1)$$

حيث S مقاسة من راس الكتينة ، ψ زاوية ميل المماس عند اى نقطة على منحنى الكتبنة على الافقى .

$\therefore$ نصف قطر انحناء القضيب عند اية نقطة فية قبل انحنائة

$$\rho_0 = \frac{dS}{d\psi} = a\sec^2\psi \qquad (2)$$

نصف قطر انحناء القضيب بعد انحنائة

$$\rho = a \qquad (3)$$

∴ الطاقة المخزونة فى القضيب نتيجة إنحنائة

$$U = \frac{1}{2}\int_{o}^{a} EI\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)^2 ds$$

$$= \frac{EI}{2}\int_{0}^{\pi/4}\left[\frac{1}{a} - \frac{\cos^2\psi}{a}\right]^2 a\sec^2\psi\, d\psi$$

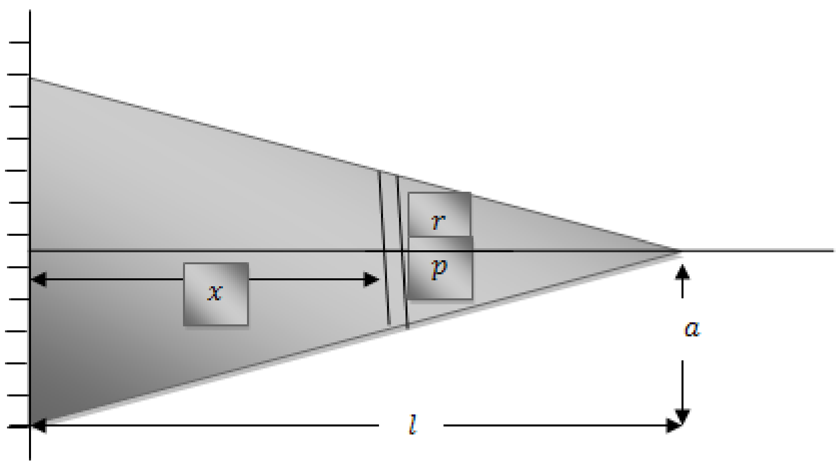
$$= \frac{EI}{2a}\int_{0}^{\pi/4}\left(\sec^4\psi - 2 + \cos^2\psi\right)d\psi$$

$$= \frac{EI}{16a}(10 - 3\pi) \qquad (4)$$

مثال(2):-

كابولى على شكل مخروط ، ارتفاعة a ونصف قطر قاعدتة المثبتة a ووزنه σ لكل وحدة حجوم .
إحسب الطاقة المخزونة فية نتيجه لإنحنانه تحت تأثير ثقله.

الحل



باخذ مركز القاعدة المثبتة كنقطة اصل للاحداثيات o ومحور الكابولى قبل انحنائة محور x فاذا كانت r هى نصف قطر المقطع عند اية نقطة على بعد x من o فان

$$\frac{r}{l-x} = \frac{a}{l} \qquad (1)$$

ويكون وزن وحدة الطول عند p

$$\omega = \sigma \pi r^2$$

$$= \frac{\sigma \pi a^2}{l^2}(l-x)^2 \qquad (2)$$

$\therefore$ قوة القص تعطى من العلاقة

$$\frac{dS}{dx} = -\omega \qquad (3)$$

$$\therefore = \frac{\sigma \pi a^2}{l^2}(l-x)^2$$

بالتكامل

$$S = \frac{\sigma \pi a^2}{3l^2}(l-x)^2 \div c$$

ولكن $S = 0$ عند الطرف الحر $x = l$

اذن $c = 0$

$$\therefore S = \frac{\sigma \pi a^2}{3l^2}(l-x)^3 \qquad (3)$$

كذلك فان عزم الانحناء M تعطى من العلاقة

$$\frac{dM}{dx} = -S \qquad (4)$$

$$\frac{dM}{dx} = -\frac{\sigma \pi a^2}{3l^2}(l-x)^3 \qquad (5)$$

$$M = -\frac{\sigma \pi a^2}{12 l^2}(l-x)^4 \qquad (6)$$

ويتلاشى ثابت التكامل لتلاشى M عند الطرف الحر $x = l$.

$\therefore$ عزم القصور الذاتى لمقطع الكابولى عند p .

$$I = \frac{1}{4}\pi r^4 = \frac{\pi}{4}\frac{a^4}{l^4}(l-x)^4 \qquad (7)$$

∴ الطاقة المخزونة فى الكابولى نتيجة لانحنائة

$$U = \frac{1}{2}\int_o^l \frac{M^2}{EI}dx$$

$$= \frac{\sigma^2\pi}{18E}\int_o^l (l-x)^4 dx$$

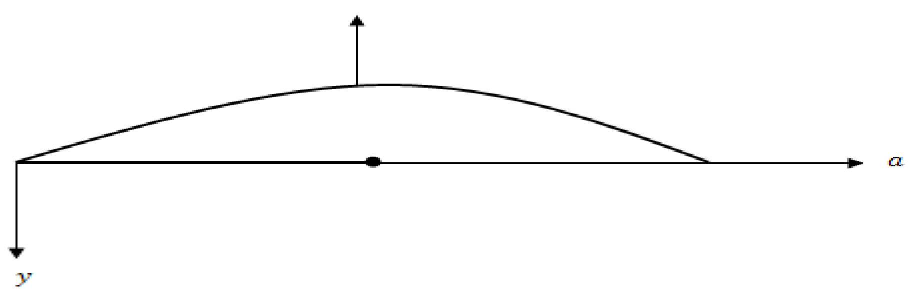
$$\therefore U = \frac{\sigma^2\pi}{90E}l^5 \qquad (8)$$

مثال (3):

قضيب منتظم طوله $2a$ وزنه W يرتكز على مستوى افقى. اثرت على منتصفة قوة راسية رفعتة الى ان ترك طرفاه المستوى. أثبت ان الشغل المبذول $\frac{W^2}{20}\frac{a^3}{EI}$.

الحل

لايجاد شكل القضيب فى وضعه النهائى ناخذ محورين احداهما افقى والاخر راسى الى أسفل عند احد طرفى القضيب وليكن الطرف الايسر o .



شكل النصف الايمن من القضيب تحددة العلاقة

$$EIy'' = \frac{W}{4a}x^2 \qquad (1)$$

$$EIy' = \frac{Wx^3}{12a} + c \qquad (2)$$

وحيث ان القضيب متماثل حول الرأسى عند منتصف القضيب .

فان $y' = 0$ عند $x = a$ ومنها .

$$c = -\frac{Wa^3}{12a} = -\frac{Wa^2}{12}$$

$$\therefore EIy' = \frac{Wx^3}{12a} - \frac{Wa^2}{12} = \frac{W}{12a}\left[x^3 - a^3\right] \qquad (3)$$

$$\therefore EIy = \frac{W}{12a}\left[\frac{x^4}{4} - a^3 x\right] + c$$

ويتلاشى ثابت التكامل لان $x = 0, y = 0$

$$\therefore EIy = \frac{W}{12a}\left[\frac{x^4}{4} - a^3 x\right] \qquad (4)$$

باتخاذ المستوى الافقى موضع قياسى فان طاقة جهد القضيب نتيجة لوضعة

$$= 2\int_o^a - y\frac{W}{2a}dx$$

$$= \frac{W^2}{12a^2 EI}\int_0^a\left[a^3 x - \frac{x^4}{4}\right]dx = \frac{3W^2 a^3}{80EI} \qquad (5)$$

طاقة جهد القضيب نتيجة لانحنائة

$$= 2.\frac{1}{2}\int_o^a \frac{M^2}{EI}dx$$

$$= \frac{W^2}{16a^2 EI}\int_o^a x^4 dx = \frac{W^2 a^3}{80EI} \qquad (6)$$

$\therefore$ الشغل المبذول بواسطة القوة الرأسية يساوى مجموع طاقتى الجهد اللتين اكتسبها نتيجة لموضعة ونتيجة لانحنائة اى تساوى

$$= \frac{Wa^3}{20EI}. \qquad (7)$$

تمارين على الباب الرابع

1. قضيب منتظم طولة l ووزن وحدة الاطوال منه ω مرتكز فى وضع افقى عند نهايته . أوجد هبوط اى نقطة من نقاط القضيب .

2. قضيب منتظم وزن وحدة الاطوال منه تساوى ω ومرتكز فى وضع افقى عند نهايتة . وقف رجل ثقله W عند نقطة على بعد a من طرف $b,$ من الطرف الاخر . أثبت ان انخفاض النقطة التى يقف عليها الرجل عن مستوى الحاملين يساوى

$$\frac{ab}{24\,EI}\left[\omega(a^2+3ab+b^2)+\frac{8\,ab}{a+b}W\right]$$

3. قضيب منتظم مرتكز عند نقطتى ثلثيه A, B افقيا. أثبت ان النسبة بين ارتفاع منتصف القضيب عن AB الى انخفاض نهاية القضيب عن AB تساوى $128 : 19$.

4. قضيب منتظم طولة $4l$ وضع ثقل W عند منتصفه ومرتكز افقيا عند نقطتين على بعدين متساويين l من منتصفة (مركزه). اذا كان القضيب عند كل من نقطتى الارتكاز . فاثبت ان W تساوى $\frac{1}{6}$وزن القضيب.

5. قضيب منتظم طولة $4l$ مرتكز عند خمس نقاط على نفس الخط الافقى ولى ابعاد متساوية l من بعضهما . إثبت ان ردود الافعال عند نقاط الارتكاز تتناسب مع $32 : 26 : 11$ اثبت ايضا ان عزم الانحناء عند منتصف القضيب وعند كل من نقطتى الرتكاز المجاوره له هو $\frac{3wl}{112}, \frac{wl}{56}$ حيث w وزن القضيب.

6. قضيب منتظم وزن وحدة الاطوال منه ω وطوله $3l$ مثبت عند طرفيه بحيث كان المماس للقضيب عند كل منهما أفقيا . ارتكز أيضا عند نقطة منه تبعد مسافة l عن احد الطرفين . فاذا كان طرفا القضيب ونقطة الارتكازعلى خط افقى واحد . فأوجد ردود الافعال وعزوم الانحناء عند الطرفين ونقطة الارتكاز.

7. قضيب منتظم $ABCD$ وزن وحدة الاطوال منه ω وطوله $3l$ يرتكز عند النقط A, B, C, D حيث $AB = BC = CD$ بحيث كان الخط الواصل بين النقاط الاربع أفقيا . اوجد عزوم الانحناء عند كل من B, C ورد الفعل عند كل من النقاط الاربع.

.8 قضيب منتظم طولة $2l$ يرتكز فى وضع متماثل على حاملين على نفس الخط الافقى المسافة بينهما $2a$. اذا كانت $l<2a$، فأثبت ان عزم الانحناء يكون نهايه عظمى عند الحامل او عند المنتصف حسبما $2l \geq (2+\sqrt{2})a$ اذا كانت $l>2a$ فان عزم الانحناء يكون نهاية عظمى عند الحامل .

.9 قضيب مرن منتظم مثبت من احد طرفيه بحيث كان افقيا عندها . فاذا علق عند منتصف القضيب ثقلا مساو لوزنه . فأوجد انخفاض النهاية الحرة للقضيب.

.10 قضيب منتظم طوله $5l$ ومرتكز فى وضع متماثل على حاملين على نفس الخط الافقى كل منهما يبعد مسافة $2l$ عن الطرف . أوجد النسبة بين ارتفاع منتصف القضيب عن مستوى الحاملين الى انخفاض النهايه الحرة عنها.

.11 -قضيب مهمل الوزن AB ، صلابته EI وطوله $2l$ طرفية مثبتان فى حائطين راسيين بحيث كان المماس للقضيب عند كل من الطرفين افقيا. علق ثقل مقداره $4\omega l$ من منتصف القضيب c ، كما حمل الجزء AC تحميلا منتظما كثافتة الطولية ω ، وحمل الجزء CB تحميلا منتظما كثافتة الطولية 2ω ، اوجد ردود الافعال وعزم الانحناء عند كل من A, B . اوجد ايضا الهبوط عند المنتصف C .

.12 اثبت انه اذا ارتكز قضيب رفيع منتظم AB طولة l على حاملين ، احدهما عند الطرف A والاخر عند الطرف C تبعد مسافة $(2l/3)$ عن A فان المماس للقضيب عند C يكون افقيا.

.13 قضيب ثقيل منتظم يرتكز على أربعة اوتاد فى نفس المستوى بحيث كانت المسافة بين كل وتدين متتاليين $100\ ft$ وكانت كتلته وحدة الاطوال من القضيب $2\tan s/ft$ احسب ردود الافعال عند الاوتاد وارسم منحنى عزم الانحناء للقضيب كلة .

.14 قضيب منتظم مرتكز على اربعة اوتاد فى خط افقى واحد اذا كانت المسافة الوسطى تساوى $15\ ft$ والمسافتان الاخريتان كل من منهما تساوى $10\ ft$ وكان القضيب يحمل ثقلا قدرة $200\ Ib/ft$ موزع توزيعا منتظما على القضيب. ارسم عزم الانحناء عند اية نقطة من القضيب . واوجد الانخفاض عند اية نقط منه .

.15 بين ان الشغل المبذول فى انحناء سلك مستقيم طولة $2\pi a$ ليكون شكل دائرة نصف قطرها a هو $\dfrac{\pi EI}{a}$.

الباب الخامس
إستاتيكا الموائع (الهيدرواستاتيكا)

مقدمة

من المعروف ان جميع المواد تتحمل تشويهات (deformation) تحت تاثير القوى الخارجية وهذا التشويه يسمى مرن (Elastic) اذا اختفى بعد ازالة تاثير القوى ويسمى صلب (plastic) اذا احتفظ بنفسة بعد ازالة القوى ويسمى انسياب Flow اذا استمر التشوية يزداد بدون حد تحت تاثير القوى مهما كانت صغيرة.
وتعرف الموائع Fluids بانها مواد قابلة للانسياب وعلى التشكل بشكل الاوعية المحتوية لها ولا تظل الموائع ساكنة اذا اثرت عليها قوة مماسية.
وتنقسم الموائع الى سوائل وغازات:

السوائل:

اذا ضغطت فى حيز فانها تتحمل ضغوطا عالية دون تغيير يذكر فى حجمها وكثافتها (اى انها غير قابلة للانضغاط) بعكس الغازات فانها قابلة للانضغاط ويتغير حجمها وكثافتها.
والموائع حقيقية لا تملا تماما الحيز الذى يشغلة فهى عبارة عن جزئيات المسافة بينهما فى السوائل اصغر كثيرا منها فى الغازات وانضغاط الموائع ما هو إلا نقصان فى حجم الفرغات الموجودة بين الجزيئات .
ودراسة الموائع بهذه الصوره خارجة عن نطاق هذا الباب وفي واقع الأمر ليس هناك مايدعو لإعتبار المائع بهذةالصورة إذا اقتصرنا فى دراستنا على السوائل أوحتي الغازات ما دامت غير مخلخله صغيرة الكثافة ولهذا الهدف يمكن أن نفترض أن المائع منتشر انتشارا متصلا فى الحيزالذى يشغلة بمعنى أن أية عنصر حجمة $\delta\tau$ من هذا الحيز يشغلة تماما جزء من هذا المائع .

القوى فى الموائع:

القوى التى تؤثر فى الموائع سواء عند إتزانها أو حركتها يمكن تقسيمها إلى نوعين :

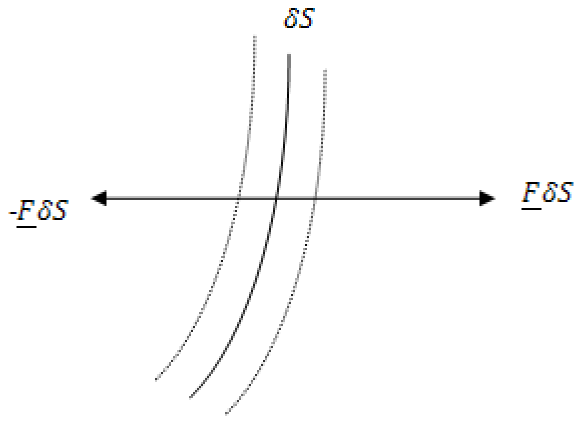
1-قوى حجمية (Body or Valume Forces):

وهذه ناتجة من مؤثرات خارجية عن المائع وتؤثر على جميع جزيئاتة مثل قوى الجاذبية .
ولعنصر $\delta\tau$ من المائع عند نقطة ما فإن قوة من هذا النوع تؤثر علية يمكن كتابتها على الصوره $\vec{F}\rho\delta\tau$ وفيها F هى القوة لكل وحدة كتل من الموائع عند هذه النقطه.

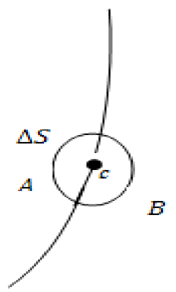
2-قوى سطحية surface forces:

وهى تمثل تاثير جزء من المائع الاخر (او على جدار السطح المحتوى) فهى نوع من قوى الفعل ورد الفعل.

بفرض ان سطحا δS عند نقطة A داخل المائع. جزئيات المائع على احد جانبى δS تؤثر على جزئياته على الجانب الاخر بقوة يمكن كتابتها على الصورة $\vec{F}\delta S$ والجزيئات الاخيرة تؤثر على الاولى بنفس القوة ولكن فى الاتجاه المضاد F اذن هى القوة لكل وحدة مساحات عند A اى الاجهاد عند A .



اذا قسمنا المائع الى جزئين A, B وبفرض ان $\vec{F}$ هى القوة المحصلة التى يؤثر بها الجزء B على مساحة ΔS حول النقطة c فان الاجهاد عند c هو نهاية $\frac{F}{\Delta S}$ عندما تؤول ΔS الى الصفر ويمكن تحليل الاجهاد عند اية نقطة



بالنسبة الى مستوى معلوم الى مركبتين مركبة فى اتجاه المماس للسطح ΔS ويسمى الاجهاد القاص ويقاوم المستويات المختلفة من الانزلاق بسهولة على بعضها حتى يمنع تغير الشكل ومركبة اخرى عمودية وتسمى بالاجهاد العمودى. نلاحظ ان المركبة الاولى تكون كبيرة نسبيا للسوائل اللزجة.

الضغط فى المائع

عندما يكون السائل فى حالة سكون (حالة اتزان)يتلاشى الاجهاد القاص عند اى نقطة بالنسبة لاى مستوى مار بها واذا تحرك المائع فان الاجهاد القاص يبدا بالظهور ويعتمد على سرعة الحركة. وفى حالة السوائل المتزنة وهى موضوع دراستنا فان سنعتبر فقط الاجهاد العمودى على المستوى الفاصل . وعلى هذا فان الضغط لمائع فى حالة سكون الواقع على اى سطح مار بنقطة معينة تكون عموديا على ذلك السطح .

شدة الضغط P

اذا كانت ΔN هى مقدار القوة الناتجة من ضغط المائع على المساحة ΔS عند A فان العلاقة

$$P = \frac{\Delta N}{\Delta S} \tag{5.1}$$

تعطى متوسط شدة الضغط P على المساحة ΔS وباخذ النهاية عندما تؤل ΔS الى الصفر فان العلاقة

$$P = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta S} \tag{5.2}$$

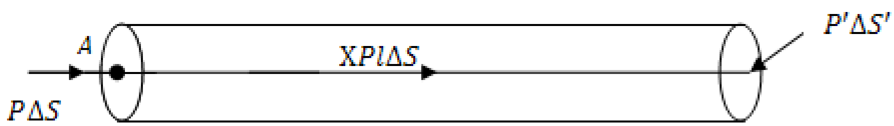
تعطى شدة ضغط المائع عند النقط A .

نلاحظ من العلاقة (5.1)او (5.2) ان P تتوقف ليس فقط على موضع A بل ايضا على اتجاه ΔS فى المائع ولكن هذا غير صحيح فى الموائع المتزنة عموما. ويمكن اثبات ذلك كما يلى

اعتبر إتزان جزء من المائع على شكل اسطوانة طولها l وقاعدتها ΔS عند النقطة A عمودية على محور الاسطوانة اما القاعدة الاخرى ΔS فتميل على المحور بزاوية α .

اى ان

$$\Delta S = \Delta S' \cos \alpha$$



هذه الاسطوانة متزنة تحت تاثير

1-القوى الخارجية. بفرض ان مركبتها فى اتجاه المحور هى $X\rho\, l\, \Delta S$.

2-ضغط المائع على الجوانب المنحنية وهذه لتعامدها على هذه الجوانب ليس لها مركبة فى اتجاه المحور.

3-ضغط المائع على القاعدتين مقدارة $P'\Delta S', P\Delta S$.

$\therefore$ معادلة الاتزان فى اتجاه محور الاسطوانة تعطى

$$X\rho\, l\Delta S - P'\Delta S'\cos\alpha + P\Delta S = 0$$

$$P' - P = X\rho\, l \tag{5.3}$$

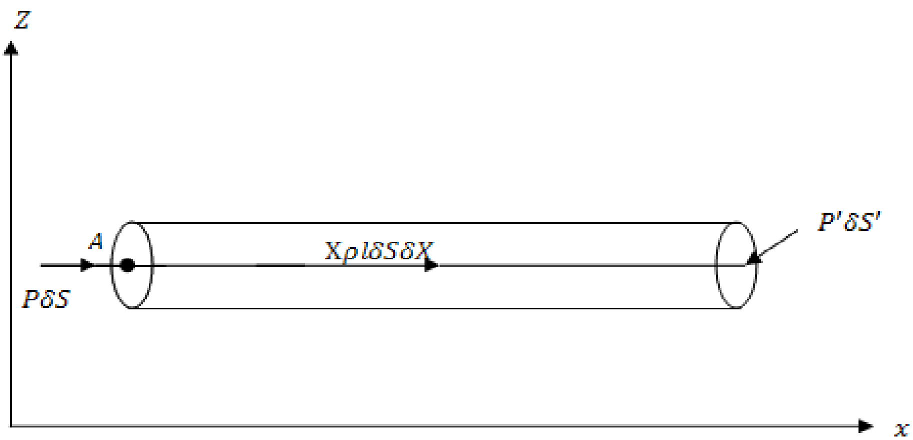
اذا انكمش العنصر حتى انطبقت القاعدتان عند A $(l \to 0)$ ينتج ان

$$P' = P$$

اى ان شدة الضغط لاتتوقف على اتجاة المساحة.
اذن شدة الضغط P دالة قياسية تتوقف على الموضع فقط

المعادلات العامة لاتزان مائع:

نعتبر إتزان جزء من المائع على شكل اسطوانة قائمة محورها AB فى اية اتجاه وليكن فى اتجاه المحور x نفرض ان مساحة قاعدة الاسطوانة ΔS وطول محورها Δx.



كما فى البند السابق يمكننا كتابة معادلة الاتزان فى اتجاه المحور على الصورة

$$P'-P = X\rho.\Delta x \tag{5.4}$$

وحيث ان شدة الضغط دالة فى الموضع فقط واذا إفترضنا ان مفكوك تيلور لهذه الدالة صحيح عند A ، والمنطقة حولها فإن

$$P' = P + \Delta P = P + \frac{\partial P}{\partial x}\Delta x \tag{5.5}$$

بالتعويض فى المعادلة الاتزان واخذ النهاية عندما $\Delta x \to 0$ ينتج ان

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho X \tag{5.6}$$

وبالمثل فى الاتجاهين y, z نحصل على

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho Y \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho Z \tag{5.8}$$

اى ان معادلات الاتزان لمانع يمكن كتابتها فى الصوره الاتجاهية

$$\nabla P = \rho \bar{F} \tag{5.9}$$

إتزان سائل متجانس:

فى الحالة تكون ρ مقدار ثابت ويتعين شدة الضغط p عند اية موضع A فى السائل من معادلات الاتزان ولما كانت p دالة للموضع ووحيدة القيمة ومتصلة فان

$$\begin{aligned} dp &= \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz \\ &= \rho\left(Xdx + Ydy + Zdz\right) \end{aligned} \tag{5.10}$$

إذن الكمية بين القوسين يجب ان تكون تفاضل تام وكما هو معلومة فان هذا يتحقق اذا كانت

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}$$

اى ان

$$\nabla \wedge \vec{F} = 0 \tag{5.11}$$

هذه المعادلة تعطى الشرط الازم تحققه حتى يمكن للسائل أن يتزن تحت تاثير مجال القوى $\vec{F}$
بتكامل المعادلة (5.10) نحصل على

$$P - P_o = \rho\int_o^A (Xdx + Y\,dy + Zdz) \tag{5.12}$$

حيث p_o هى شدة الضغط عند نقطة ما o .
ويحسب التكامل على اى منحنى يصل بين A, o ونتيجة للشرط (5.11) فاننا نحصل على نفس الدالة لشدة الضغط مهما كان اختيارنا لمنحنى التكامل .
عندما يكون المائع متزنا تحت تاثير الجاذبية فان $F = (o, o, g)$ وذلك عند إتخاذ المحور z راسيا الى اسفل .
واذا كانت نقطة الاصل عند o فان المعادلة (5.12) تعطى

$$\begin{aligned} p - p_o &= \rho\int_o^z g\,dz \\ &= \rho\,g\,z \end{aligned}$$

$$\therefore\ p = p_o + \rho\,g\,z \tag{5.13}$$

من الواضح انه اذا كانت o عند السطح الحر للسائل فان p_o تكون مساوية للضغط الجوى .
من العلاقة (5.13) نرى ان السطوح متساوية الضغط (اى ان السطوح التى يتساوى عليها شدة الضغط عند كل نقطة منها) هى المستويات الافقية

$$Z = \cos\tan t$$

وعلى ذلك فان السطح الحر للسائل هو الأخر افقى اذن هو احد هذه المستويات شدة الضغط عليها مساوية للضغط الجوى.

مثال:

إسطوانة دائرية نصف قطرها a وارتفاعها h بها كمية من سائل متجانس ، وضعت الاسطوانة ومحورها راسى فى مجال للقوى اثر على السائل بقوة طاردة عمودية على محور الاسطوانة ومقدارها $\frac{2hg}{c^2}r$ لكل وحدة كتل ، r هى البعد عن محور الاسطوانة . اوجد شدة الضغط عند اية نقط من السائل اذا كانت p_o هو الضغط الجوى. اوجد ايضا حجم اكبر كمية من السائل يمكن ان تحتويها الاسطوانة.

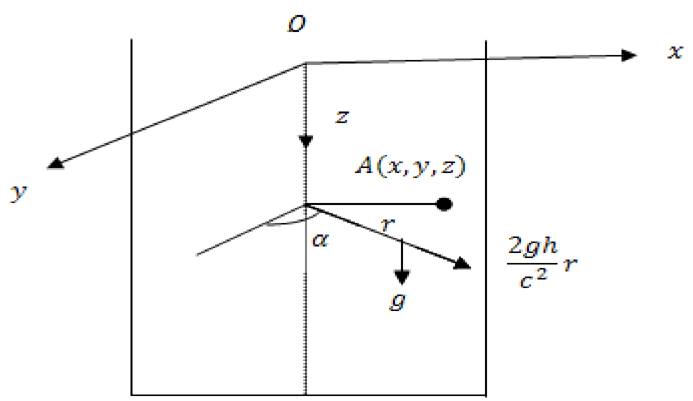
الحل

باتخاذ المحور oz راسيا الى اسفل منطبقا على محور الاسطوانة فان القوى المؤثرة على السائل فى اتجاه محاور الاحداثيات عند النقطه (x, y, z) هى

$$X = \frac{2gh}{c^2} r \sin \propto$$

$$\therefore X = \frac{2gh}{c^2} x$$

$$Y = \frac{2gh}{c^2} r \cos \propto$$



$$\therefore Y = \frac{2gh}{c^2} y$$

$$Z = g$$

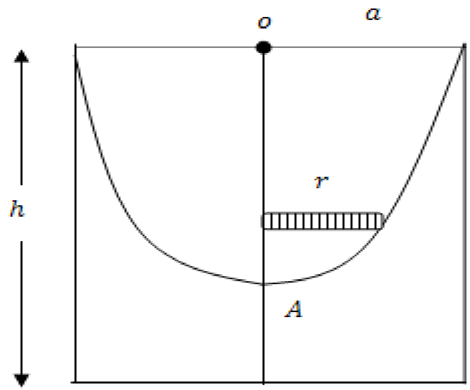
ومن معادلة الاتزان للسائل

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2gh\rho}{c^2}x$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{2gh\rho}{c^2}y$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$$

$$\therefore dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$



(أ)

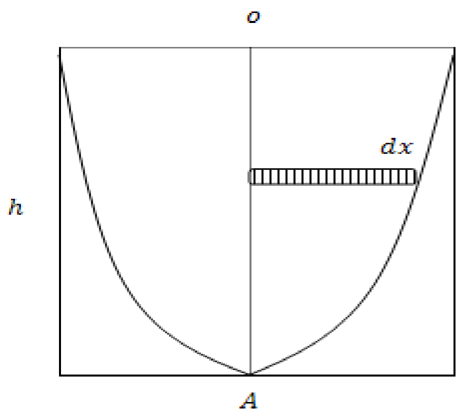
$$dp = \rho\left[\frac{2gh}{c^2}(xdx + ydy) + gdz\right]$$

$$\therefore p = \rho\left[\frac{2gh}{c^2}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right) + gz\right] + c$$

$$p = \rho\left[\frac{gh}{c^2}r^2 + gz\right] + c$$

فاذا اتخذنا نقطة الاصل o عند مركز حافة الاسطوانة فان $p = p_o$ عند $r = a, z = 0$ اى ان

$$c = p_o - \frac{\rho gh a^2}{c^2}$$



(ب)

$$\therefore\ p = p_o + \rho\left[\left(\frac{gh}{c^2}\left(r^2 - a^2\right) + gz\right)\right]$$

عند السطح الحر للسائل $p = p_o$ فتكون معادلتة

$$z = \frac{h}{c^2}\left(a^2 - r^2\right)$$

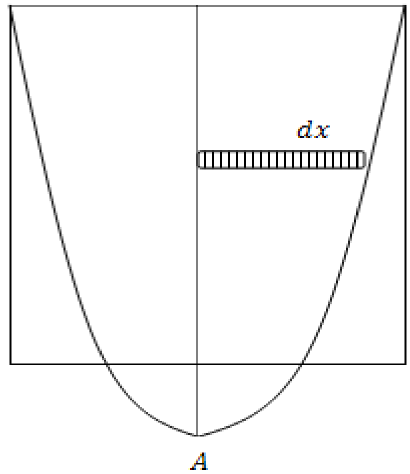
وهو قطع مكافئ دورانى حول محور الاسطوانة اكبر كمية من السائل يمكن ان تحتويها الاسطوانة عندما يمر هذا القطع بحافة الاسطوانة.

بوضع $r = 0$ يكون ارتفاع القطع

$$oA = \frac{a^2}{c^2}h$$

عند إيجاد حجم السائل هناك حالتان ينبغى التعويض لها.

(أ) $a \le c$, $oA \le h$ كما بالشكل (أ) او(ب)الحجم المطلوب V



(ج)

$$V = \pi a^2 h - \int_{r=a}^{r=0} \pi r^2 dz = \pi a^2 h - \int_o^a \frac{2\pi h}{c^2} r^3 dr$$

$$= \pi a^2 h - \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{r^4}{4}\right)_0^a = \pi a^2 h - \frac{\pi h a^4}{2c^2}$$

$$V = \pi a^2 h\left(1 - \frac{a^2}{2c^2}\right)$$

(ب) $oA \ge h \;\; , \; a \ge c$ كما بالشكل (ج) او(ب) حجم السائل فى هذه الحالة

$$V = \pi a^2 h - \int_o^h \pi r^2 dz = \pi a^2 h - \int_o^h \pi\left(a^2 - \frac{c^2}{h} z\right) dz$$

$$V = \frac{\pi a^2 h}{2}$$

إتزان غاز:

لما كان الغاز قابلا للانضغاط اى ان ρ كمية متغيرة فان لحساب p يلزمنا معادلة أخرى بالاضافة الى معادلة الاتزان . هذه المعادلة نستمدها فى كثير من الاحيان من معادلات علم الديناميكا الحرارية المعروف بمعادلات حالة الغاز مثل

$$p = k\rho \tag{5.13}$$

عندما تظل درجة الحرارة ثابتة للغاز

او

$$p = k\rho^{\gamma}$$

(حيث γ مقدار ثابت) عندما تظل كمية الحرارة ثابتة وفى أحيان اخرى تكون ρ معلومة كدالة فى الموضع .

بضرب طرفى معادلة الاتزان فى $\nabla \wedge$ نحصل على

$$\nabla \wedge \nabla p = \nabla \wedge \rho \vec{F}$$

$$o = \nabla \wedge \rho \vec{F} \tag{5.14}$$

$$\because \nabla \wedge \phi \vec{A} = \nabla \phi \wedge \vec{A} + \phi \nabla \wedge \vec{A}$$

حيث ϕ كمية قياسية و A كمية متجهة وبذلك يمكن كتابة المعادلة (5.14) فى الصورة

$$o = \nabla \rho \wedge \vec{F} + \rho \nabla \wedge \vec{F} \tag{5.15}$$

وبضرب هذه المعادلة قياسيا فى $\vec{F}$

$$o = \vec{F} \cdot \nabla \rho \wedge \vec{F} + \rho \vec{F} . \nabla \wedge \vec{F}$$

وبالقسمة على ρ

$$\therefore \vec{F} . \nabla \wedge \vec{F} = 0 \tag{5.16}$$

وهذا هو الشرط اللازم تحققه حتى يمكن للغاز ان يتزن تحت تاثير مجال القوى $\vec{F}$.

كما اثبتنا فى السوائل فإن شدة الضغط p عند اية نقطة A مثلا تتعين بتكامل المعادلة

$$dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz) \tag{5.17}$$

اذا إتزن الغاز تحت تاثير الجاذبية الارضية فإن

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 , \frac{\partial p}{\partial y} = 0 , \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{5.18}$$

وفى هذه المعادلات اتخذنا المحور oz رأسيا الى أعلى اذن p دالة للمتغير z

وبفرض ان العلاقة بين ρ , p معطاه فى الصوره

$$p = k\rho^{n} \tag{5.19}$$

حيث k ثابت . إذن

$$\frac{dp}{dz} = -g\left(\frac{p}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (5.20)$$

بفضل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)p^{\left(\frac{n-1}{n}\right)} = \frac{-g}{k^{\frac{1}{n}}}z + c_1 \qquad n \neq 1$$

واذا كانت $p = P_o$ عندما $z = o$ فان

$$c_1 = \left(\frac{n}{n-1}\right)p_o^{\frac{n-1}{n}}$$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)\left[p^{\frac{n-1}{n}} - p_o^{\frac{n-1}{n}}\right] = \frac{-g}{k^{\frac{1}{n}}}z \qquad (5.21)$$

ومن معادلة (5.19) يمكن ايجاد الثابت k عندما

$\rho = \rho_o, \, p = p_o, \, z = o$

$$\therefore \rho_o = k\rho_o^n$$

$$k = \frac{p_o}{\rho_o^n} \qquad (5.22)$$

$$\therefore \left(\frac{n}{n-1}\right)\left[p^{\frac{n-1}{n}} - \rho_o^{\frac{n-1}{n}}\right] = \frac{-g\,\rho_o}{p_o^{1/n}}z$$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)p_o^{\frac{n-1}{n}}\left[\left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right] = \frac{-g\rho_o z}{p_o^{\frac{1}{n}}}$$

$$\left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 = \frac{-g\rho_o z}{p_o^{\frac{1}{n}}\,p_o^{\frac{n-1}{n}}}\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{-g\,p_o z}{p_o}\left(\frac{n-1}{n}\right) + 1$$

$$\frac{p}{p_o}=\left[1-\frac{g\,\rho_o z}{p_o}\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]^{\frac{n}{n-1}}$$

$$\frac{p}{p_o}=\left[1-\frac{gz}{RT_o}\left(\frac{n-1}{n}\right)z\right]^{\frac{n}{n-1}} \tag{5.23}$$

5

اذا ان $p_o=\rho_o RT_o$ كما هو معروف من القانون العام للغازات وللقيمة الخاصة $n=1$

$$\frac{p}{\rho}=K=RT_o=\frac{p_o}{\rho_o}$$

وتعطى معادلات الاتزان العلاقة

$$\frac{dp}{dz}=-\frac{g}{k}p=-\frac{g}{RT_o}\rho$$

$$\frac{p}{p_o}=\exp\left(-\frac{g}{k}z\right)=\exp\left(-\frac{g}{RT_o}z\right) \tag{5.24}$$

ولقيم z الصغيرة فانه باستخدام مفكوك تيلور يمكن تقريب المعادلتين (5.23)،(5.24) لتصبحا على الصورة

$$p=p_o-\rho_o gz \tag{5.25}$$

وبقارنة هذه العلاقة بالعلاقة (5.13) فى البند السابق للسوائل يمننا القول انة لقيم z الصغيرة اى فى المنطقة المحيطة بالنقطة o يمكن معاملة الغاز كما لو كان مائعا ذات كثافة ثابتة ρ .

هذه النتائج لها اهمية خاصة عند دراسة الغلاف الجوى فالعلاقة $p=k\rho^n$ صحيحة للهواء وتاخذ n فيما تختلف باختلاف الارتفاع عن سطح الارض فهى تساوى 1.238 حتى ارتفاع 11 كيلو متر ثم ناخذ القيمة 1 حتى ارتفاع 32 كيلو متر عن سطح الارض.

مثال:

على ارتفاع z من سطح الارض كانت كثافة الهواء ρ وشدة ضغطه p وعند سطح الارض كانت قيمتها ρ_o , p_o اذا كانت $\rho = \rho_0 e^{-\lambda z}$ حيث λ ثابت واعتبرت الجاذبية الارضية ثابتة اوجد p عند ايه ارتفاع z.
اذا اتزن فى هذا الجو بالون كردى نصف قطرة a عندما كان ارتفاع مركزه عن سطح الارض h
أوجد وزن البالون.

الحل

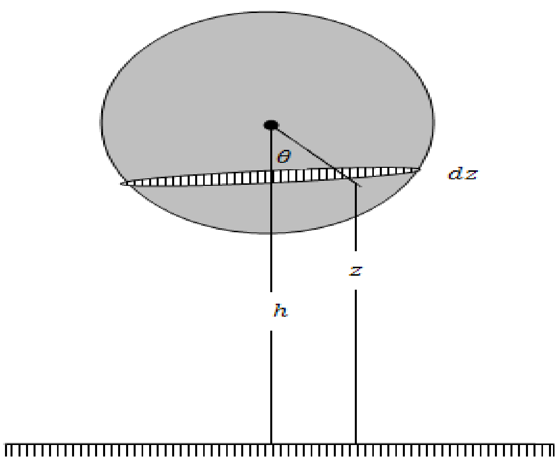
معادلتا اتزان الهواء فى الاتجاهين الافقيين x, y هما

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad , \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

اى ان p لا يتوقف على x او y.

$\therefore$ معادلة إتزان الهواء فى الاتجاة الراسى تصبح

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\rho_o e^{-\lambda z} g \qquad (2)$$



$$\therefore \ p = \frac{\rho_o g}{\lambda} e^{-\lambda z} + c$$

ولكن $\rho_o = p_o$ عندما $z = 0$ اذن

$$c = p_o - \frac{\rho_o g}{\lambda}$$

$$\therefore\ p = p_o - \frac{g\rho_o}{\lambda}(1-e^{-\lambda z}) \qquad (3)$$

ضغط الهواء على العنصر ΔS من سطح البالون عمودى علية ويساوى $p\Delta S$.
من التماثل محصلة القوى الناتجه من ضغط الغاز على سطح البالون كله راسيا ومقدارها

$$P = \int p\cos\theta\, dS$$

$$= \int\left[p_o - \frac{\rho_o g}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda z}\right)\right]\cos\theta\, dS$$

على سطح البالون

$$dS = 2\pi a\, dz$$

$$z = h - a\cos\theta$$

$$\frac{dz}{d\theta} = o + a\sin\theta$$

$$dz = a\sin\theta\, d\theta$$

بالتعويض نحصل على

$$P = -2\pi a\int_{h-a}^{h+a}\left[p_o - \frac{\rho_o g}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda z}\right)\right]\left(\frac{z-h}{a}\right)dz$$

ضع

$$Z = z - h$$

$$dZ = dz$$

$$\therefore\ P = -2\pi\int_{-a}^{a}\left[p_o - \frac{\rho_o g}{\lambda} + \frac{\rho_o g e^{-\lambda h}}{\lambda}e^{-\lambda h}\right]Zdz$$

$$\therefore\ P = -\frac{2\pi\rho_o}{\lambda}e^{-\lambda h}\left[\frac{-ze^{-\lambda z}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda z}}{\lambda^2}\right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{4\pi\rho_o}{\lambda^3}e^{-\lambda h}\left[a\lambda\cosh\lambda a + \sinh\lambda a\right]$$

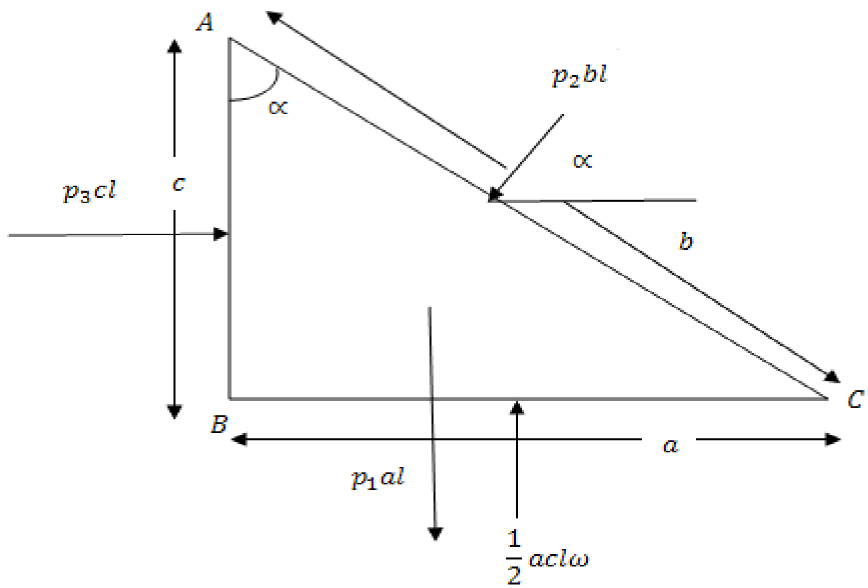
البالون متزن تحت تاثير وزنة W ومحصلة ضغط الهواء P

$$\therefore\ W - P = 0$$

$$\therefore\ W = \frac{4\pi\rho_o}{\lambda^3}e^{-\lambda h}\left[a\lambda\cosh\lambda a + \sinh\lambda a\right].$$

نظريات:
نظرية (1):
الضغط عند اى نقطة ثابت بالنسبة لجميع المستويات المارة بها .

لاثبات هذه النظرية . نعتبر منشور ثلاثى من المانع طولة l ومقاطعة كما بالشكل ممثل بالمثلث ABC الذى اطواله a, b, c فى حالة الاتزان.



نفرض ان الضغط المؤثر على الاضلاع المنشور هى p_1, p_2, p_3 اجهادات عمودية وتؤثر على الاوجه الثلاثة

$p_2 = \frac{F_1}{bl}$ (الاجهاد العمودى المؤثر على الضلع Ac)

$p_1 = \frac{F_2}{al}$ (الاجهاد العمودى المؤثر على الوجه الممثل بالضلع Ac)

$p_3 = \frac{F_3}{cl}$ (الاجهاد المؤثر على الوجه الممثل بالضلع AB)

اذن $F_3 = p_3 cl \;, F_1 = p_1 al \;, \; F_2 = p_2 bl$

هذا المنشور من المائع متزن تحت تاثير وزنة راسيا لاسفل وهذه القوى الثلاثة.

بتحليل القوى فى الاتجاهين الافقى والراسى فان معادلتى الاتزان هما

$$p_3 lc = p_2 lb \cos \propto \tag{5.26}$$

$$p_1 la = p_2 lb \sin \propto + \frac{1}{2} acl\ \omega \tag{5.27}$$

حيث ω هى الوزن النوعى للمائع ووحداتها هى قوة على وحدة الحجم.
من هندسة الشكل نلاحظ ان

$$\cos \propto = \frac{c}{b}\ ,\ \sin \propto = \frac{a}{b} \tag{5.28}$$

بالتعويض من (5.28) فى (5.26)،(5.27) نحصل على

$$p_3 = p_2\,, \tag{5.29}$$

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2} c\,\omega \tag{5.30}$$

العلاقة (5.30) صحيحة لاى ابعاد للمنشور.
اذا كانت أبعاد المنشور صغيرة جدا تؤول الى الصفر فان المعادلة (5.30) تعطى

$$p_1 = p_2 \tag{5.31}$$

من المعادلات (5.29)،(5.31) نحصل على

$$\boxed{p_1 = p_2 = p_3}$$

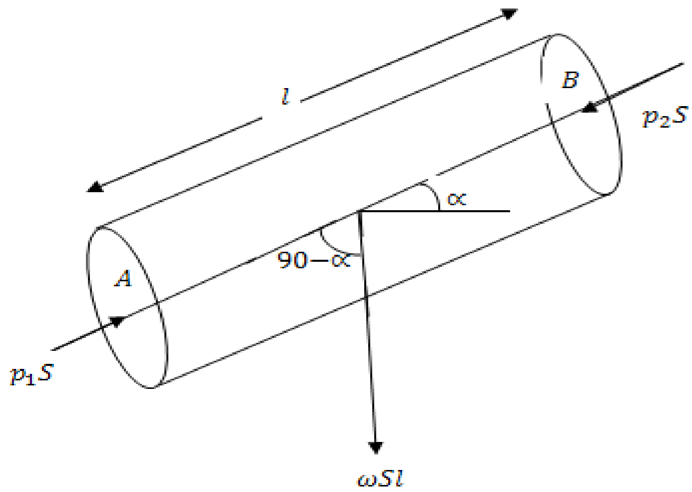
إنتقال الضغط:

اذا اثر ضغط اضافى عند اى جزء من مائع فى حالة سكون فان هذا الضغط ينتقل الى جميع اجزاء المائع بنفس القيمة .

ولاثبات ذلك نعتبر اسطوانة من المائع كما بالشكل
الاسطوانة فى حالة اتزان تحت تاثير وزنها $\omega\, S\, l$ والقوى الناتجة من الضغطين على المقطعين عند A, B وهما $p_1 S\,,\, p_2 S$ على الترتيب. حيث S مساحة مقطع الاسطوانة، l طولها ، ω الوزن النوعى للمائع.

من شروط الاتزان نجد انه بالتحليل فى اتجاه محور الاسطوانة AB فان

$$p_1 S - \omega\, Sl \sin \propto - p_2 S = 0 \tag{5.36}$$



بفرض حدوث إضافة عند A فى الضغط وليكن مقداره p_1^1 وان الضغط الاضافى الناتج B هو p_2^1 من شروط الاتزان والتحليل فى اتجاه AB نجد ان

$$\left(p_1 + p_1^1\right)S - \left(p_2 + p_2^1\right)S - \omega\, sl \sin \alpha = 0 \qquad (5.37)$$

بطرح (5.36)من(5.37) نحصل على

$$P_1^1 = P_2^1 \qquad (5.38)$$

النتيجة (5.38) تعنى ان الضغط الاضافى p_1^1 عند A ينتقل كما هو عند B . وحيث ان النتيجة السابقة لا تعتمد على طول الاسطوانة فان الضغط الاضافى p_1^1 عند A ينتقل على الفور الى جميع نقط السائل .

ملحوظة:

نلاحظ انة اذا اعتبرنا الاسطوانة افقية ، اى ان $\alpha = 0$ فان من معادلة (1) نحصل على

$$p_1 = p_2$$

اى ان الضغط عند نقطتين فى مستوى افقى واحد يكون متساوى.

الضغط على السطوح المستوية:

نفرض سطح مستوى مغمور فى سائل. والمطلوب إيجاد القوى الناتجة من الضغط المحصل على هذا السطح المستوى.

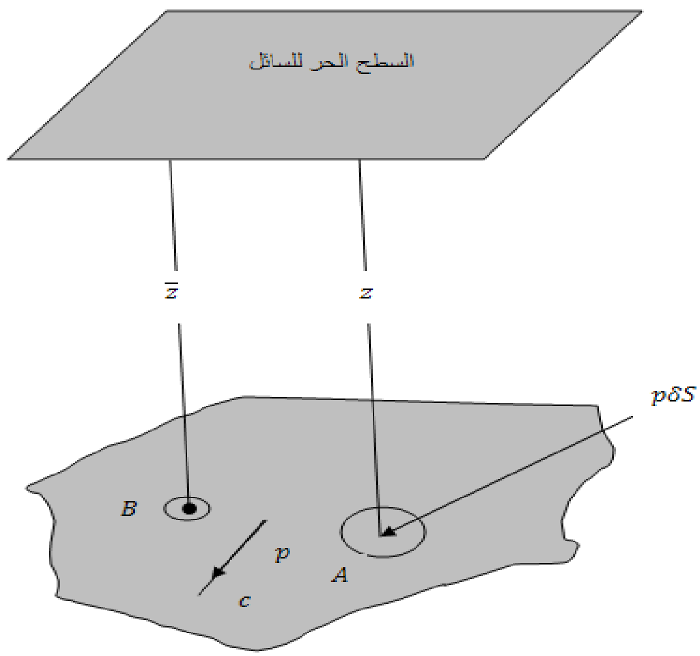
النظرية التالية توضح لنا كيفية حساب القوى الناتجة من الضغط المحصل على الصفائح المستوية المغمورة فى سوائل.

نظرية(2):

القوى الناتجة من الضغط المحصل على صفيحة مستوية مغمورة فى سائل يساوى حاصل ضرب الضغط عند مركز كتلى الصحيفة x مساحة الصحيفة.

لاثبات هذة النظرية نفرض اننا قسمنا الصحيفة الى عناصر صغيرة وتعتبر عنصر مساحة δS عند A على عمق z من سطح السائل.

شدة الضغط عند A هو p القوى الواقعة على هذا العنصر الناتجة من الضغط هى $p\,\delta S$ وتكون عمودية على العنصر وحيث ان القوى على العناصر المختلفة المكونة للسطح متوازية ، فمحصلتها اذن توازيها اى عمودية على مستوى السطح ومقدارها



$$P = \lim_{\delta S \to 0} \sum p \delta S = \int_S p \, d S \tag{5.39}$$

ولما كان السائل متزنا تحت تاثير الجاذبية فان

$$P = p_o + \rho gz$$
$$= p_o + \omega z \tag{5.40}$$

حيث $\omega = \rho g$ الوزن النوعى للسائل

$$\therefore P = \int_S (p_o + \omega z) dS$$
$$= p_o S + \omega \int_S z dS \tag{5.41}$$

حيث S مساحة الصحيفة المستوية

حيث ان B مركز كتلة الصحيفة فان

$$\overline{Z} = \frac{\int z dS}{\int dS}$$
$$\int z dS = \overline{Z} S \tag{5.42}$$

بالتعويض من (5.42) فى (5.41) ينتج ان

$$P = p_o S + \omega \overline{Z} S$$
$$P = (p_o + \omega \overline{Z}) S \tag{5.43}$$

وحيث ان مركز كتلة الصحيفة عند B الضغط عند B يكون مساويا $p_o + \omega \overline{Z}$ فان المعادلة (5.43) تعنى ان القوى الناتجة من الضغط المحصل لسائل على صحيفة مستوية يساوى حاصل ضرب الضغط عند مركز كتلة الصحيفة فى مساحة الصحيفة .

عند اهمال الضغط الجوى فان

$$P = \omega \overline{Z} S$$
$$P = \rho g \overline{Z} S \tag{5.44}$$

مثال (1):

اذا كان الضغط المحصل لسائل على صفيحة دائرية راسية نصف قطرها a يساوى ضعف وزن كرة من نفس السائل نصف قطرها a . فادا خفضت الدائرة فى السائل مسافة $2a$ راسيا. فاثبت ان ضغط السائل الجديد على الصفيحة يساوى $\frac{7}{4}$ من الضغط الاول مع اهمال الضغط الجوى.

الحل

نفرض ان الضغط الواقع على الصفيحة الدائرية فى الواضع الاول يساوى p_1 وان P_2 هو الضغط الجديد الواقع على الصفيحة بعد ان خفضت مسافة راسية $2a$.

وزن كرة من السائل نصف قطرها a يساوى

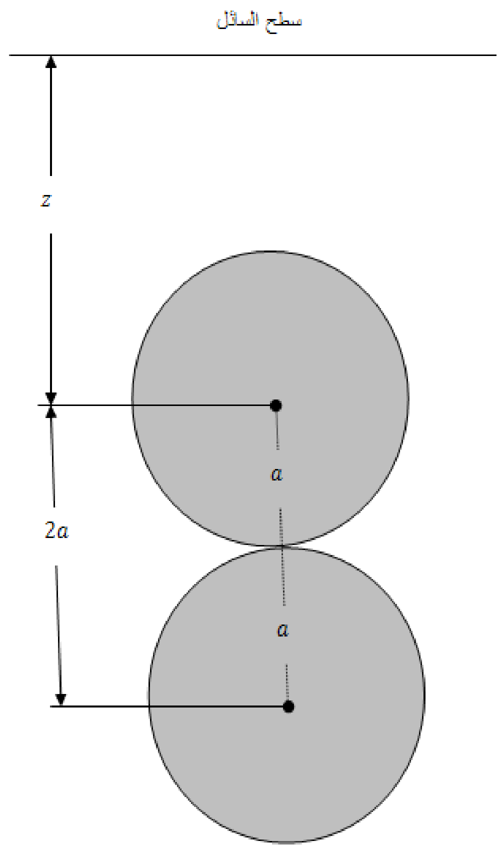
$$W = \frac{4}{3}\pi a^3 \omega$$

حيث ω الوزن النوعى للسائل او وزن وحدة الحجوم من السائل

$$p_1 = \pi a^2 \omega z \qquad (1)$$

حيث z بعد مركز ثقل الصفيحة الدائرية عن سطح السائل وحيث ان

$$P_1 = 2W$$



$$\pi a^3 \omega z = \frac{8}{3}\pi a^3 \omega$$

$$\therefore\ Z = \frac{8}{3}a \qquad (2)$$

وحيث ان

$$P_2 = \pi a^2 \omega (z + 2a) \qquad (3)$$

بالتعويض عن z نجد ان

$$p_2 = \frac{14}{3}\pi a^3 \omega \qquad (4)$$

$$p_1 = \frac{8}{3}\pi a^3 \omega \qquad (5)$$

بقسمة (5) على (4) نجد ان

$$\frac{p_1}{P_2} = \frac{\frac{8}{3}\pi a^3 \omega}{\frac{14}{3}\pi a^3 \omega} = \frac{4}{7}$$

اى ان

$$p_2 = \frac{7}{4} p_1$$

مثال(2)

صفيحة على شكل مثلث متساوى الاضلاع طول ضلعة l غمرت الصفيحة راسيا فى سائل بحيث كان راس المثلث عند سطح السائل وقاعدتة المناظرة لهذا الراس افقية . فاذا قسمت الصفيحة بمستقيم يوازى القاعدة الى جزئيين بحيث كانت نسبة الضغط على الجزء العلوى الى الضغط على الجزء السفلى كنسبة $\lambda : \mu$ فاثبت ان المستقيم يبعد عن سطح السائل مسافة $\frac{\sqrt{3}}{2} l \sqrt[3]{\frac{\lambda}{\lambda + \mu}}$ مع إهمال الضغط الجوى .

الحل

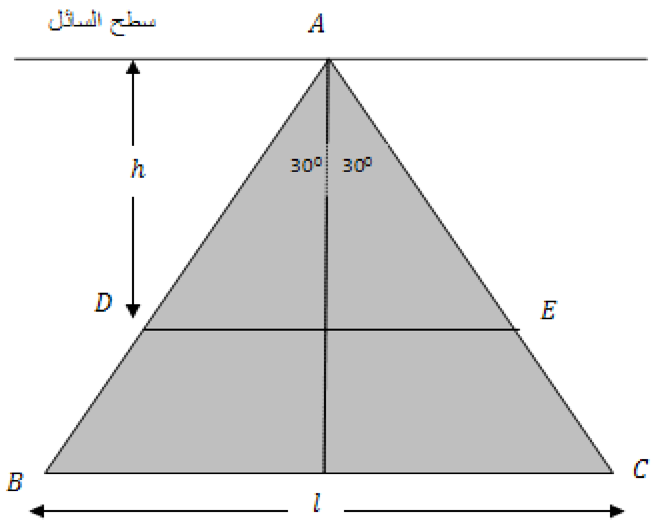
نفرض ان p_3, p_2, p_1 هى الضغوط على المثلث ADE ، وشبة المنحرف $BECB$ ، المثلث ABC على الترتيب (انظر الشكل) وحيث ان

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (1)$$

$$\therefore\ \frac{p_1}{p_1 + p_2} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

اى ان

$$\therefore \frac{p_1}{p_3} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \qquad (2)$$



حيث ان p_3 , p_1 يتعينان من

$$p_1 = \left(\frac{1}{2} DEh\right)\left(\frac{2}{3} h \,\omega\right) \qquad (3)$$

$$p3 = \left(\frac{1}{2} l \frac{\sqrt{3}}{2} l\right)\left(\frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} l \,\omega\right) \qquad (4)$$

حيث h هو ارتفاع المثلث DE المناظر للقاعدة DE

بقسمة (3)على (4) نجد ان

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{4 DE .h^2}{3 l^3} \qquad (5)$$

من هندسة الشكل نجد ان

$$DE = 2h \tan 30 = \frac{2h}{\sqrt{3}} \qquad (6)$$

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{8 h^3}{3\sqrt{3} l^3} \qquad (7)$$

من (2)، (7) نحصل على

مركز الضغط:

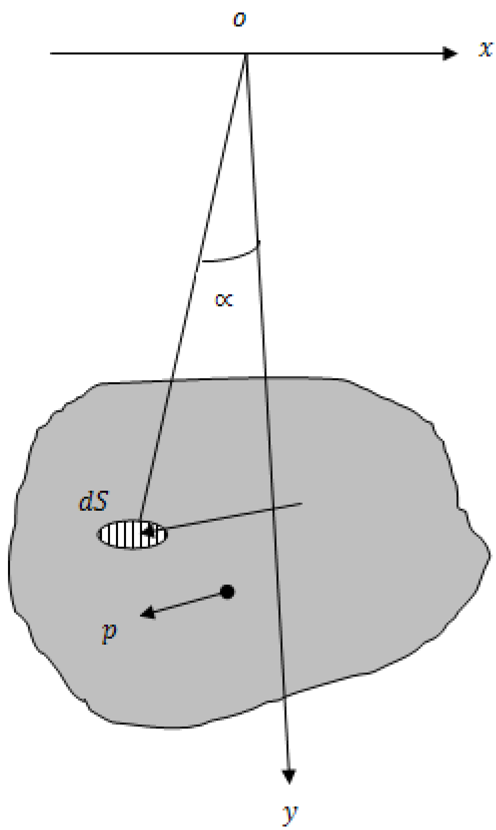
الضغط على اى صفيحة مستوية مغمورة فى سائل هو محصلة ضغوط عمودية متوازية عند كل نقطة من الصفيحة وتؤثر هذه المحصلة فى نقطه ***تعرف بمركز الضغط*** .

لتعين مركز الضغط:

نفرض ان خط تقاطع صفيحة مستوية مغمورة فى سائل مع سطح السائل هو المحور ox وان العمودى علية فى مستوى الصفيحة هو المحور oy الضغط dp على عنصر من الصفيحة dS يتعين من

$$dp = \omega \, y \cos \propto ds \tag{5.45}$$

مع إهمال الضغط الجوي وحيث α زاوية ميل الصفيحة علي الرأسي .



الضغط الكلي علي الصفيحة P يساوي

$$\underline{P} = \int dp = \omega \cos \int_s ydS \tag{5.46}$$

بأخذ العزوم حول المحور ox فإن

$$Py_p = \int ydp \tag{5.47}$$

حيث y_p هو الأحداثي y لمركز الضغط

بالتعويض من (5.54) في (5.47) فإن

$$Py_p = \int y\omega y \cos \propto dS$$

$$= \omega \cos \propto \int y^z dS$$

$$= \omega \cos \propto I_x \tag{5.48}$$

حيث I_x عزوم القصور الذاتي للصفيحة حول المحور ox

$$y_p = \frac{\omega \cos I_x}{\omega \cos \int ydS}$$

$$y_p = \frac{I_x}{\int ydS} \tag{5.49}$$

بفرض أن مركز كتلة الصفيحة عند $\bar{x}, \bar{y}$ فإن

$$\bar{y} = \frac{\int ydS}{\int dS} = \frac{\int ydS}{S} \tag{5.50}$$

حيث S مساحة الصفيحة

بالتعويض من(5.50) في (5.49)

$$y_p = \frac{I_x}{\bar{y}S} \tag{5.51}$$

يمكن كتابة عزم القصور الذاتي I_x في الصوره

$$I_x = k_x^2 S \tag{5.52}$$

حيث k_x نصف قطر القصور الذاتي للصفيحة حول المحور ox

من (5.51),(5.52) نحصل علي

$$y_p = \frac{k_x^2}{y} \tag{5.53}$$

بإستخدام نظرية المحاور المتوازية لعزم القصور الذاتى فان

$$k_x^2 = k_x^2 + d^2 \tag{5.54}$$

حيث k_x نصف قطر القصور الذاتى حول محور موازى للمحور ox ومار بمركز الكتلة ، d المسافة بين المحورين المتوازيين فى هذه الحالة $d = \bar{y}$ ونجد ان

$$y_p = \frac{k_{x'}^2 + \bar{y}^2}{\bar{y}}$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{k_{x'}^2}{\bar{y}} \tag{5.55}$$

اى ان

$$y_p - \bar{y} = \frac{k_{x'}^2}{\bar{y}}$$

اى ان مركز الضغط يقع اسفل مركز الكتلة و نلاحظ ما يلى

1- مركز الضغط لا يتوقف مكانه على الزاوية $\propto$ وهذا يعنى ان هذا المركز لن يتغير اذا دار السطح حول خط تقاطعة مع السطح الحر
2- مركز الضغط يقع على المحور الرئيسى لقصور السطح المغمور العمودى على خط التقاطع اسفل مركز الثقل بمسافة $\frac{k_1^2}{\bar{y}}$.
3- اذا كانت $\alpha = 0$ بحيث يكون السطح المغمور مواز للسطح الحر فان مركز الضغط ينطبق على مركز الثقل اذ ان شدة الضغط فى هذه الحالة تكون واحدة عند جميع النقط المساحة المغمورة.

أمثلة:-

مثال(1):-

صفيحة على شكل قطع ناقص مغمورة فى سائل ومحورها الاكبر راسيا ونهاية المحور الاكبر عن السطح السائل فاذا انطبق مركز الضغط على البؤرة. اثبت ان الاختلاف المركزى للقطع يساوى $\frac{1}{4}$.

الحل

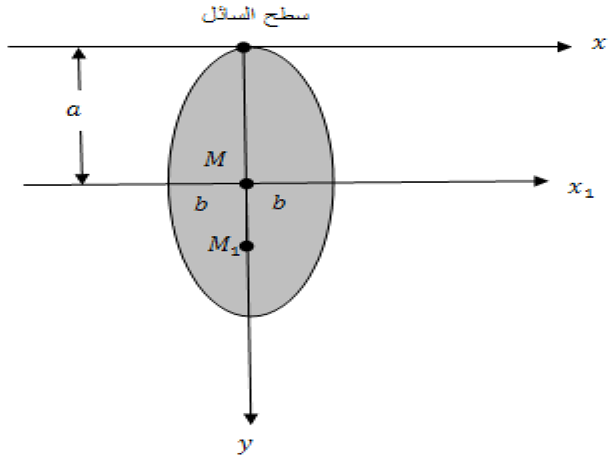
نفرض ان

M_1, M

هما مركز الكتلة ومركز الضغط على الترتيب حيث ان

$$M_1M = \frac{k_1^2}{\bar{y}} \tag{1}$$

وحيث ان عزم القصور الذاتى حول محور يمر بمركز ثقل القطع الناقص



$$I_{x'} = \frac{1}{4}a^2 S$$

$$\therefore\ k_1^2 = \frac{1}{4}a^2 \tag{2}$$

$$\bar{y} = a \tag{3}$$

$$MM_1 = \frac{\frac{1}{4}a^2}{a} = \frac{a}{4}$$

لكن من خواص القطع الناقص نعلم ان

$$MM_1 = ae$$

حيث e الاختلاف المركزى الناقص

$$\therefore\ ae = \frac{1}{4}a$$

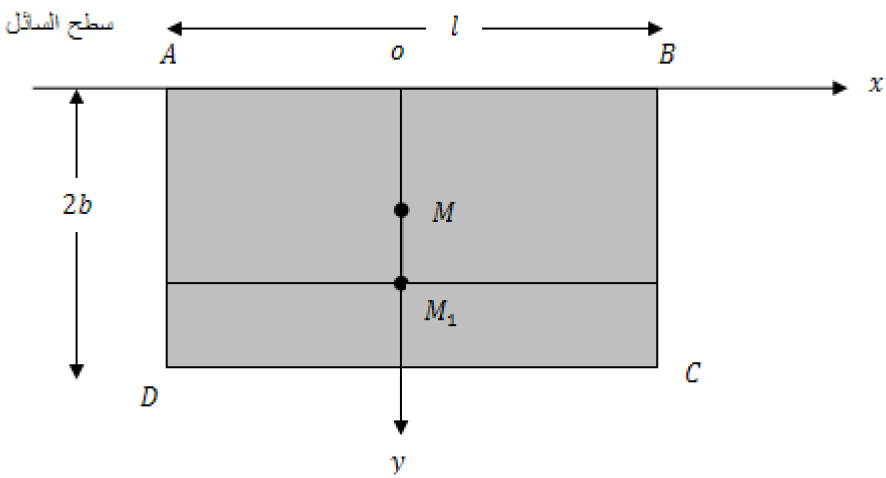
$$\therefore\ e = \frac{1}{4}$$

مثال (2):

مسطيل مغمور فى سائل واحد اضلاعة عند سطح السائل. إثبت ان الخط الافقى المار بمركز الضغط يقسم المستطيل الى جزئيين الضغط عليهما يكون بنسبة $4:5$ مع إهمال الضغط الجوى.

الحل

نفرض ان المستطيل ابعادة هما $2b, l$ اى ان $Bc = 2b, AB = l$.



بفرض ان مركز الضغط عند M_1 ومركز الكتلة عند M . وبفرض ان FE هو الخط الافقى المار بمركز الضغط M_1 .

عزم القصور الذاتى للمستطيل $ABCD$ حول محور يوازى المحور ox ويمر بمركز كتلتة M يساوى $\frac{1}{3}mb^2$ حيث m كتلة المستطيل

$$\therefore k_1^2 = \frac{1}{3}b^2$$

$$\therefore MM_1 = \frac{k_1^2}{y_c} = \frac{\frac{1}{3}b^2}{b} = \frac{1}{3}b$$

وحيث ان p_1, p_2 هما الضغطين على الجزئيين (المستطيلين) $FECD$, $ABEF$ على الترتيب

$$\therefore p_1 = \omega \bar{z} S$$

$$p_1 = \left(l.\frac{4}{3}b\right)\left(\frac{2}{3}b\right)\omega \qquad (1)$$

$$p_2 = \left(l.\frac{2}{3}b\right)\left(\frac{5}{3}b\right)\omega \qquad (2)$$

بقسمة (1) على (2) نحصل على

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{4}{5}$$

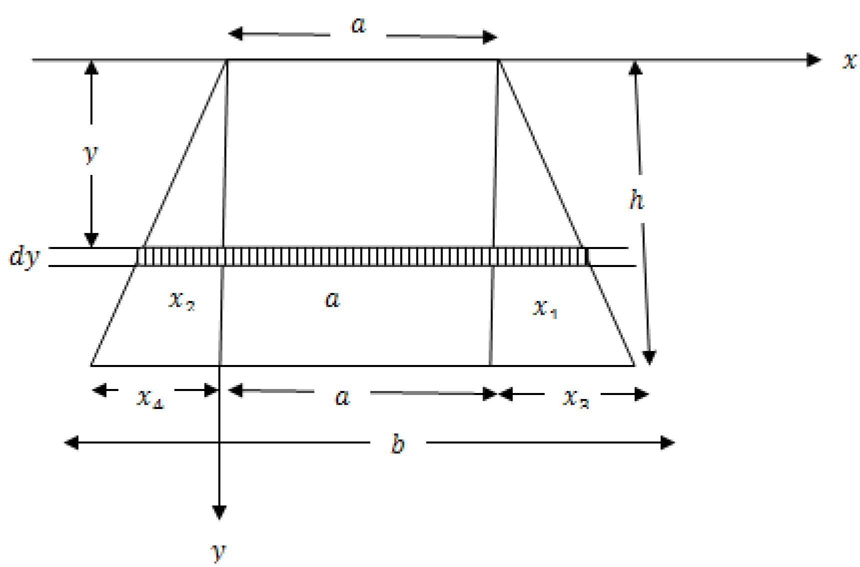
مثال (3):

غمرت صفيحة راسيا على شكل شبة منحرف فى سائل بحيث كان احد الضلعين المتوازيين الذى طوله a عند سطح السائل وكان طول الضلع الاخر b والمسافة بينهما h.

إثبت ان مركز الضغط يقع على عمق يساوى $\frac{a+3b}{2(a+2b)}h$ من سطح السائل.

الحل

مركز الضغط يقع على عمق y_p من سطح السائل حيث



$$y_p = \frac{\int y^2 dS}{\int y dS}$$

طول العنصر الذى على عمق y من سطح السائل يساوى $x_1 + x_2 + a$ وسمكة dy واضح من الشكل ان

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{y}{h}, \frac{x_2}{x_4} = \frac{y}{h}$$

$$\therefore (x_1 + x_2) = \frac{y}{h}(x_3 + x_4)$$

$$= \frac{y}{h}(b - a)$$

وتكون مساحة العنصر ds تساوى

$$\left[a + \frac{y}{h}(b - a)\right]dy$$

$$\therefore y_p = \frac{\int_o^h y^2\left[a + \frac{y}{h}(b - a)\right]dy}{\int_o^h y\left[a + \frac{(b - a)}{h}y\right]dy}$$

$$= \frac{\left[\frac{ay^3}{3} + \frac{y^4}{4h}(b - a)\right]_o^h}{\left[\frac{ay^2}{2} + \frac{b - a}{h}\frac{y^3}{3}\right]_o^h}$$

$$= \frac{\frac{ah^3}{3} + \frac{b - a}{h}\frac{h^4}{4}}{\frac{ah^2}{2} + \frac{b - a}{h}\frac{h^3}{3}}$$

$$y_p = \frac{a + 3b}{2(a + 2b)}h.$$

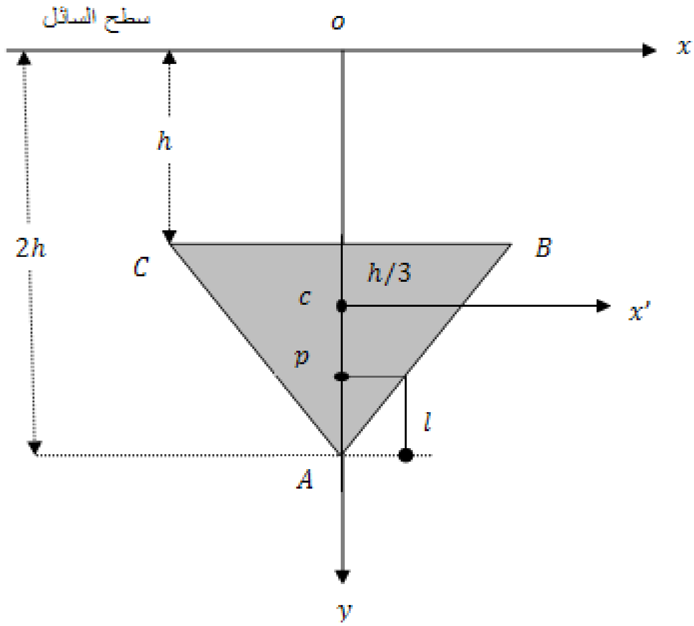
مثال (4):

صفيحة مستوية على شكل مثلث ABC فية $AB = AC$ وارتفاعة من A هو h. فاذا غمرت هذه الصفيحة راسيا فى سائل بحيث كان A على عمق $2h$ من سطح السائل فاثبت ان الفرق بين بعدى مركزى الضغط عند A فى الحالتين التى يكون فيها BC افقيا فوق A او افقيا اسفل A يساوى $\frac{h}{16}$.

الحل

باخذ المحورين ox, oy كما بالشكلين، فان من الواضح ان محور oy فى كلا الحالتين يمر بمركز ثقل الصفيحة. لذا فانه فى كلا الحالتين $x_p = o$

نوجد الان y_p فى كلا الحالتين



(أ) عندما يكون BC فوق A فان

$$y_p = \frac{I_x}{\bar{y}\, S} \tag{1}$$

من الواضح ان

$$\bar{y} = \frac{4}{3} h \tag{2}$$

كما انه باستخدام نظرية المحاور المتوازية نجد ان

$$I_x = I_{x'} + S\left(\frac{h}{3} + h\right)^2$$

$$= \frac{1}{18} Sh^2 + S\left(\frac{16}{9} h^2\right)$$

$$= \frac{11}{6} Sh^2$$

بالتعويض من (2)،(3)فى (1) نحصل على

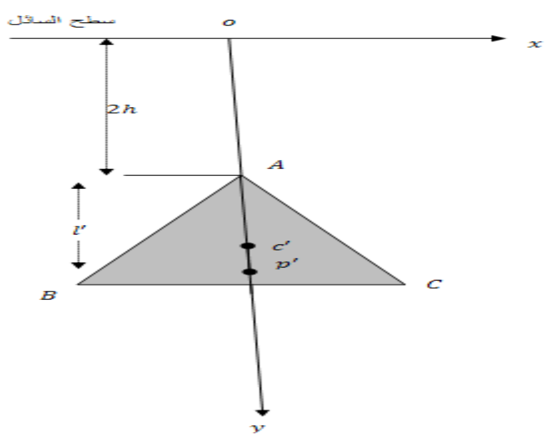
$$y_p = \frac{\frac{11}{6} Sh^2}{\frac{4}{3} Sh} = \frac{11}{6} \times \frac{3}{4} h$$

$$y_p = \frac{11}{8} h \qquad (4)$$

وبالتالي فإن مركز الضغط يبعد عن A مسافة lحيث

$$l = 2h - \frac{11}{8} h = \frac{5}{8} h \qquad (5)$$

(ب)عندما يكون BC أسفل A فإن



$$y'_p = \frac{I'_x}{S \overline{y'}} \qquad (6)$$

ولكن من الواضح ان

$$\overline{y'} = 2h + \frac{2}{3}h$$

$$\overline{y'} = \frac{8}{3}h \qquad (7)$$

وباستخدام نظرية المحاور المتوازية نجد ان

$$I_x^1 = \frac{1}{18}Sh^2 + \left(\frac{8}{3}h\right)^2 S$$
$$= \frac{43}{6}Sh^2 \qquad (8)$$

بالتعويض من (7)، (8) فى (6) نجد ان

$$y'_p = \frac{43}{16}h \qquad (9)$$

وبالتالى فان الضغط يبعدعن A مسافة l'حيث

$$l' = \frac{43}{16}h - 2h = \frac{11}{16}h \qquad (10)$$

$\therefore$ الفرق بين بعدى مركزى الضغط عن A فى الحالتين يكون مساويا

$$l' - l = \frac{11}{16}h - \frac{5}{8}h = \frac{h}{16}. \qquad (11)$$

مثال (5):

اذا غمرت صفيحة مستوية على شكل مربع $ABCD$ فى سائل بحيث كان الراس A عند سطح السائل والقطر BD أفقيا ، فاثبت ان مركز الضغط يقع على القطر AC وبقسمة بنسبة $7:5$.

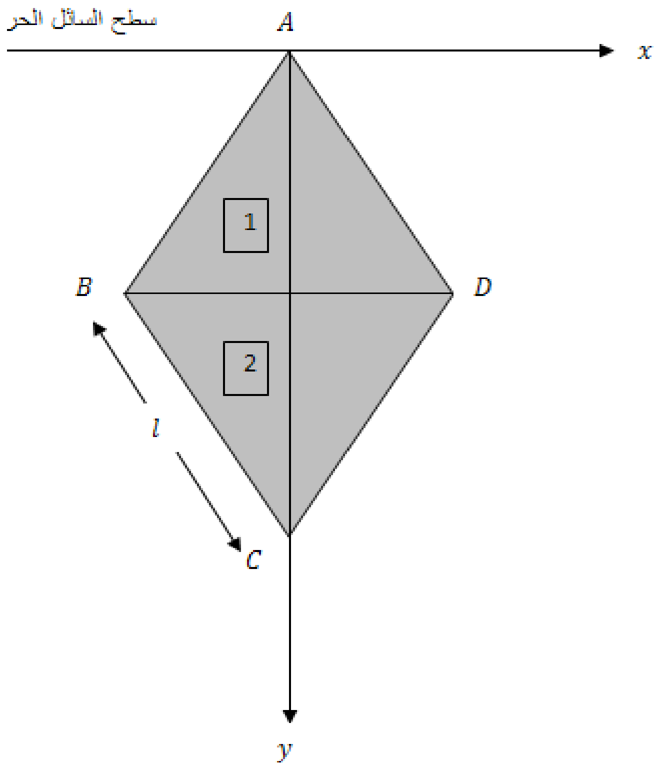
الحل

باخذ المحاور كما بالشكل فانة من الواضح ان المحور oy يمر بمركز ثقل الصحيفة، لذا فان إحداثيات مركز الثقل واضح ان $\bar{x} = 0$? $\bar{y} =$

$$\bar{y} = \sqrt{2}l \qquad (1)$$

حيث l طول ضلع المربع .

$$y_p = \frac{I_x}{S\,\bar{y}} \qquad (2)$$



نوجد I_x لذلك سوف نعتبر الصفيحة مكونة من المثلثين ABD , BDC .
بالنسبة للمثلث ABD نعلم ان

$$I_x^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{S}{2}\right)\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$I_x^{(1)} = \frac{1}{8} S l^2 \qquad (3)$$

حيث S مساحة المربع .

وبالنسبة للمثلث BDE فانه من نظرية المحاور المتوازية

$$I_x^{(2)} = \frac{1}{18}\left(\frac{S}{2}\right)\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2 + S/2\left(\frac{l}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{11}{24} Sl^2 \qquad (4)$$

وحيث ان

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^2$$

$$= \frac{1}{8} Sl^2 + \frac{11}{24} Sl^2 = \frac{7}{12} Sl^2 \qquad (5)$$

والان بالتعويض من (1) ،(5) فى (2) ينتج ان

$$y_p = \frac{7}{6\sqrt{2}} l \qquad (6)$$

وبالتالى يكون

$$AC - y_p = \frac{2l}{\sqrt{2}} - \frac{7}{6\sqrt{2}} l = \frac{5l}{6\sqrt{2}} \qquad (7)$$

لذا فان

$$\frac{y_p}{AC - y_p} = \frac{7}{5}.$$

الضغط الكلى على السطوح المنحنيية المغمورة فى سائل ما:

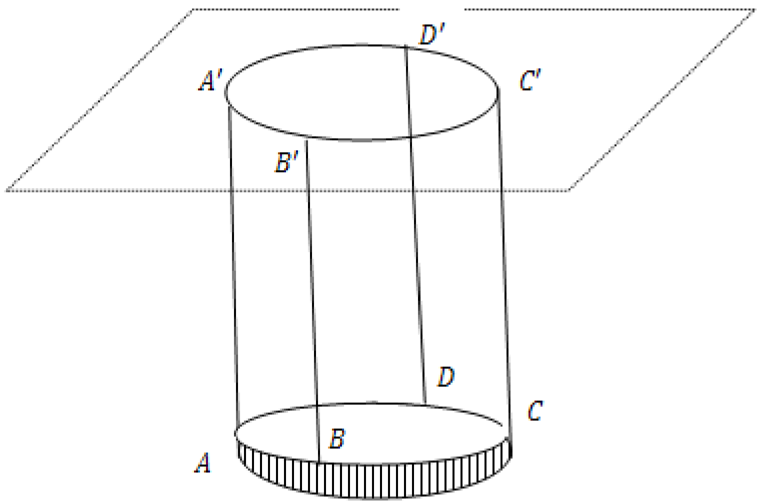
اذا لم يكن السطح المغمور فى السائل مستويا فان الضغوط عند نقاطة المختلفة لن تكون متوازية ، وبالتالى فان الضغط المحصل سيكون محصلة القوى غير متوازية . لذا فاننا نوجد مركبات هذا الضغط المحصل فى إتجاه ثلاث محاور متعامدة احدهما راسى . اى ان الضغط المحصل هو محصلة للقوى الثلاث المتعامدة الاتية :

1- ضغط محصل رأسى :

لايجادة نسقط اعمدة من نقاط السطح المنحنى المغمورة $ABCD$ على مستوى سطح السائل فترسم هذه الاعمدة منحنى $A'B'C'D'$ على سطح السائل .من دراسة إتزان اسطوانة ذات المقطع العمودى $A'B'C'D'$ والتى يحدها من اعلى سطح السائل ومن اسفل السطح المعطى نجد ان وزن اسطوانة السائل هده يجب ان يتعادل مع محصلة الضغط على السطح المنحنى فى الاتجاه الرأسى .

اى ان

المركبة الراسية للضغط المحصل = وزن عمود السائل المقام على هذا السطح ويمر بمركز ثقل هذا العمود من السائل



.

2- ضغط محصل فى اتجاه افقى:

لايجاده نسقط السطح المنحني المعطي علي مستوي راسي بواسطة خطوط افقية فنحصل علي منحني ما $A'B'C'D'$ من اتزان اسطوانة المشكلة من الخطوط الافقية نجد ان محصلة الضغط علي السطح المنحني في اتجاه الخطوط الافقية يجب ان يتعادل مع الضغط الافقي علي المساحة المستوية الراسية $A'B'C'D'$.

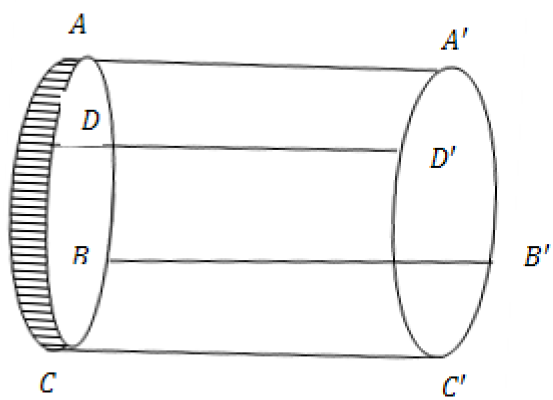
أي ان مركبة الضغط المحصل في اتجاه افقي ما =محصلة الضغط علي مسقط السطح المنحني المعطى علي مستوى راسى عمودي علي هذا الاتجاه الافقي وتؤثر في مركز ضغط هذا المسقط .

4. ضغط محصل في اتجاه افقي عمودي علي الاتجاه السابق :

ويمكن ايجاده بنفس الطريقة التي اوجدنا بها الضغط الافقي المحصل السابق .

الضغط المحصل علي السطوح المقفله (قاعدة ارشميدس) . مركز الطفو

تنص قاعدة ارشميدس علي انة اذا غمر جسم في سائل ساكن فانة يعاني ضغطا من اسفل الي اعلي مقداره يساوي وزن السائل المزاح وخط عملة يمر بمركز ثقل السائل المزاح .



ولاثبات ذلك نفترض ان الحيز الذي يشغلة الجسم قد شغل بحجم مماثل من السائل . هذا الحجم من السائل يكون متزنا تحت تاثير وزنة لاسفل ومحصلة الضغوط من السائل الخارجى . اى ان المركبة الراسية لمحصلة الضغوط تساوى فى المقدار وزن السائل المزاح وتؤثر فى الاتجاه من اسفل لاعلى (عكس اتجاه وزن السائل المزاح) .

من هذا نستنتج انة اذا طفا الجسم فوق سائل وكان الجسم في حالة سكون فانة وزن السائل المزاح يساوى الوزن الكلى للجسم ويقع مركز السائل المزاح (الذي يسمى مركز الطفو) علي الخط الراسي المار بمركز ثقل الجسم .

امثلة :-

مثال (1) :-

اذا كان عمق الماء على جانبى بوابة هاويس هو h_2, h_1 حيث $h_1 > h_2$ فاثبت ان الضغط المحصل على جانبي هذه البوابة يساوى $\frac{1}{2}\omega\, a\left(h_1^2 - h_2^2\right)$. حيث ω هو الوزن النوعى للماء $a,$ عرض البوابة .

اثبت كذلك ان نقطة تاثير الضغط المحصل تقع على عمق c من السطح المتوسط حيث

$$c = \frac{h_2^1 + h_2^2 + 4h_1h_2}{6(h_1 + h_2)}$$

الحل

باخذ مقطع راسى عمودى على البوابة ومار بمركز ثقلها ، فننا نحصل على الشكل المبين حيث AB البوابة ، D, E سطح الماء على جانبيها .

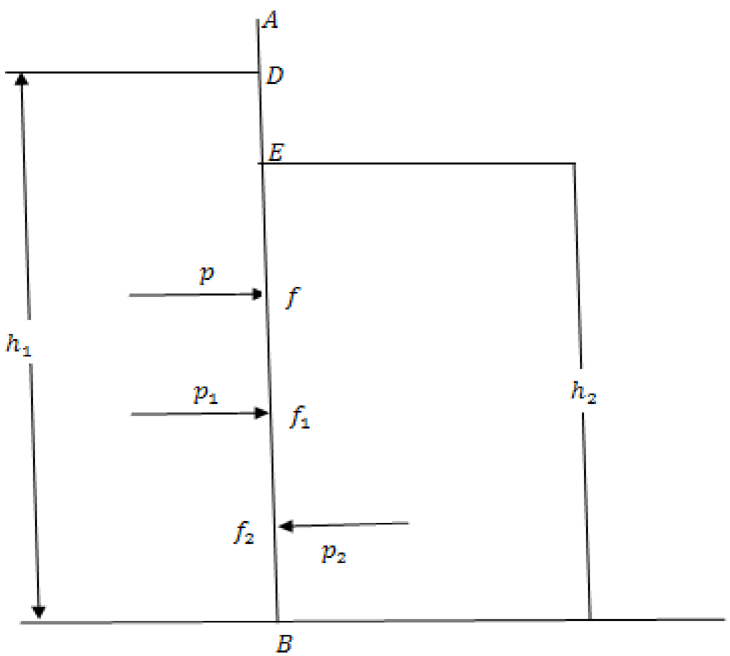
فاذا فرض ان الضغط على BD هو p_1 والضغط على BE هو p_2

$$p_1 = \omega \bar{Z} S$$

وباهمال الضغط الجوى

$$\bar{Z} = \frac{1}{2} h_1$$

$$S = ah_1$$



$$\therefore\ p_1 = \omega\, ah_1 \left(\frac{1}{2} h_1\right)$$

$$p_1 = \frac{1}{2} a\,\omega\, h_1^2 \qquad (1)$$

وبالمثل

$$p_2 = \frac{1}{2} a\,\omega\, h_2^2 \qquad (2)$$

ويكون الضغط المحصل

$$p = p_1 - p_2$$

$$= \frac{1}{2}\omega\, a\left(h_1^2 - h_2^2\right) \qquad (3)$$

بفرض ان f_1, f_2 هما نقطتى تاثير p_1, p_2 على الترتيب

$$\therefore DF_1 = \frac{Ix}{Sy} = \frac{Sk_x^2}{s\bar{\bar{y}}}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}h_1\right)^2}{\frac{1}{2}h_1} = \frac{2}{3}h_1 \qquad (4)$$

وبالمثل

$$\therefore DF_2 = \frac{\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}h_2\right)^2}{\frac{1}{2}h_2} = \frac{2}{3}h_2$$

وبالتالى فان

$$\therefore BF_1 = \frac{h_1}{3}, \quad BF_2 = \frac{h_2}{3} \qquad (5)$$

لايجاد نقطة تاثير F للضغط المحصل p ناخذ العزوم حول B فيكون

$$pxBF = p_1 xBF_1 - p_2 xBF_2$$

$$\therefore BF = \frac{\frac{1}{2}\omega\, a h_1^2 x \frac{1}{3}h_1 - \frac{1}{2}\omega\, a h_2^2 x \frac{1}{3}h_2}{\frac{1}{2}\omega\, a\left(h_1^2 - h_2^2\right)}$$

$$= \frac{h_1^3 - h_2^3}{3\left(h_1^2 - h_2^2\right)} = \frac{\left(h_1 - h_2\right)\left(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2\right)}{3\left(h_1 - h_2\right)\left(h_1 + h_2\right)}$$

$$= \frac{h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2}{3(h_1 + h_2)}$$

$$\therefore C = \frac{h_1 + h_2}{2} - \frac{h_1^2 2h_1 h_2 + h_2^2}{3(h_1 + h_2)}$$

$$= \frac{3(h_1^2 2h_1 h_2 + h_2^2) - h_1^2 2h_1 h_2 + 2h_2^2}{6(h_1 + h_2)}$$

$$\therefore C = \frac{h_1^2 2h_1 h_2 + h_2^2}{6(h_1 + h_2)}$$

مثال (2):

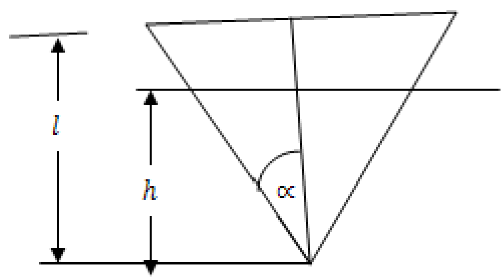
يطفو اناء مخروطى فى الماء بحيث كان محوره راسيا وراسه الى اسفل وجزء h من المحور مغمور فى الماء. اذا سكب ماء داخل المخروط حتى اصبح ارتفاعة h فان الاناء يغوص حتى تصبح فوهته عند سطح السائل .

اثبت ان $h = \frac{l}{\sqrt[3]{2}}$ حيث l ارتفاع المخروط .

الحل

في الحالة الاولي :

المخروط يتزن تحت تأثير وزنة ω رأسيا ألي اسفل ودفع السائل رأسيا إلي اعلي والذي يساوي وزن السائل المزاح حسب قاعدة ارشميدس .



$$\therefore W = v_1 \sigma \qquad (1)$$

حيث σ كثافة الماء ، v_1 حجم المخروط (الجزء المغمور) الذي ارتفاعة h

في الحالة الثانية:

عند إضافة ماء وزنة W لان ارتفاع الماء داخل الاناء ارتفاعة (h) فإن من الاتزان يكون مجموع وزني المخروط والماء المسكوب داخلة والمؤثر رأسيا لاسفل مساويا دفع الماء لاعلي والمؤثر رأسيا لاعلي

$$W + W = v_2 \sigma \qquad (2)$$

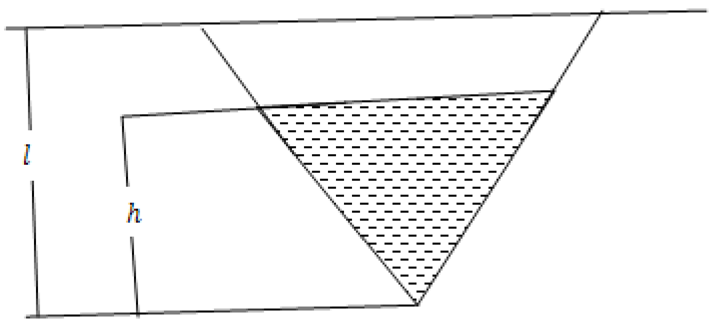
حيث V_2 هو حجم المخروط الذي ارتفاع l.

بقسمة (1) علي (2)نحصل علي

$$\frac{1}{2} = \frac{V_1}{V_2} \qquad (3)$$

حيث أن

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{h^3}{l^3} \qquad (4)$$



من(3)،(4)نجد أن

$$\frac{h^3}{l^3} = \frac{1}{2}$$

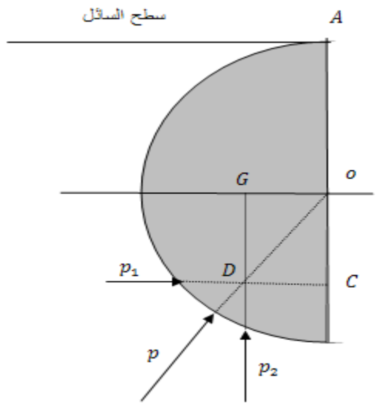
$$\therefore\ h = \frac{l}{\sqrt[3]{2}}$$

مثال (3):

أوجد مقدار واتجاه الضغط المحصل علي السطح المنحني لنصف كره مصمته نصف قطرها a مغموره في سائل وزنة النوعي ω بحيث تكون قاعدتها المستوية رأسيا ومركز هذه القاعدة علي عمق a من سطح السائل.

الحل

لناخذ مقطعا راسيا فى مستوى عمودى على القاعدة المستوية ومارا بمركزها فنحصل على الشكل المبين .



الضغط المحصل p على السطح المنحنى ينشا من

1- ضغط محصل افقى p_1 يتعادل مع الضغط الافقى الواقع على القاعدة المستوية ، من هذا يتضح ان

$$p_1 = \omega \bar{z} s$$

وذلك باهمال الضغط الجوى

$$p1 = \omega \pi a^2 (a)$$
$$= \omega \pi a^3 \qquad (1)$$

وخط عمل p_1 افقى يقطع القاعدة المستوية فى مركز الضغط لها c ، اى ان

$$oc = \frac{\frac{1}{4} a^2}{a} = \frac{1}{4} a. \qquad (2)$$

2- ضغط محصل رأسى p_2 يتعادل مع وزن السائل المزاح بنصف الكرة اى ان:

$$p_2 = \frac{2}{3} \pi a^3 \omega \qquad (3)$$

وخط عمل رأسى يمر بمركز ثقل نصف الكرة G اى ان

$$oG = \frac{3}{g} a.$$

ومن هذا يتضح ان

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$
$$= \sqrt{\left(\pi a^3 \omega\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \pi a^3 \omega\right)^2}$$

$$p = \pi a^3 \omega \sqrt{1+\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{B}}{3} \pi a^3 \omega \qquad (5)$$

ويميل على p_2 بزاوية $\propto$ حيث

$$\tan \propto = \frac{p_1}{p_2} = \frac{\pi a^3 \omega}{\frac{2}{3}\pi a^3 \omega} = \frac{3}{2} = \frac{Go}{oc}$$

اى ان p يمر بمركز الكرة o.

مثال (4):

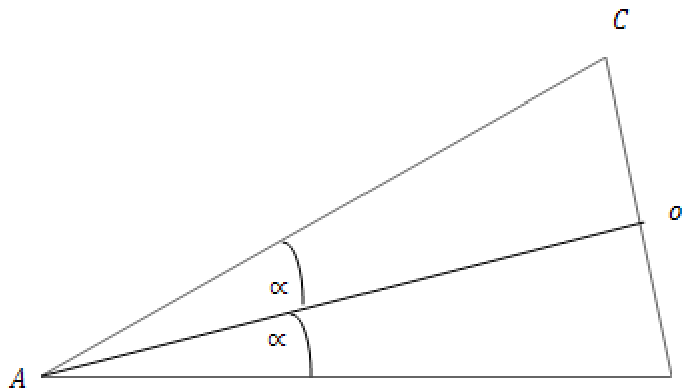
وضع مخروط دائرى قائم زاوية رأسه $2\propto$ بحيث كان اسفل رأسى افقيا فاذا كان المخروط مفرغا ومهمل الوزن ومملوء بسائل فاثبت ان الضغط المحصل على سطحة المنحنى يساوى $\sqrt{1+15\sin^2\propto}$ من المرات من وزن السائل .

الحل

لناخذ مقطعا راسيا مارا بمركز القاعدة المستوية o فنحصل على الشكل المبين .
بفرض ان نصف قطر قاعدة المخروط هو a وارتفاعة h وان ω هو الوزن النوعى للسائل . نجد ان عمق o اسفل c يساوى $a\cos\propto$ وبالتالى فان الضغط المحصل على القاعدة المستوية هو p حيث

$$p = \pi a^2 . a\,\omega \cos\propto = \pi a^2 \omega \cos\propto \qquad (1)$$

ويؤثر عموديا على هذه القاعدة .



الضغط المحصل p^1 على السطح المنحنى له مركبتان احدهما افقية p_1^1 وتتعادل مع المركبة الافقية ل p ، اى ان

$$p_1^1 = p\cos\propto = \pi a^3\omega\cos^2\propto \qquad (2)$$

والاخرى p_2^1 راسية وتتعادل مع وزن السائل والمركبة الراسية ل p ، اى ان

$$p_2^1 = \frac{1}{13}\pi a^2 h\,\omega + \pi a^3\omega\cos\propto\sin\propto \qquad (3)$$

وبالتالى فان الضغط المحصل p^1 على السطح المنحنى يساوى

$$p^1 = \sqrt{p_1^{1^2} + p_2^{1^2}}$$

$$p' = \pi a^3\omega\left[\cos^4\propto + \left(\frac{1}{3}\cot\propto + \sin\propto\cos\propto\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \cot\propto\frac{1}{3}\pi a^3\omega\left[9\sin^2\propto\cos^2\propto + (1+3\sin^2\propto)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^3\omega\cot\propto\left[9\sin^2\propto\cos^2\propto + 1 + 6\sin^2\propto + 9\sin^4\propto\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^3\omega\cot\propto\sqrt{1+15\sin^2\propto}$$

$$p' = W\sqrt{1+15\sin^2\propto} \qquad (4)$$

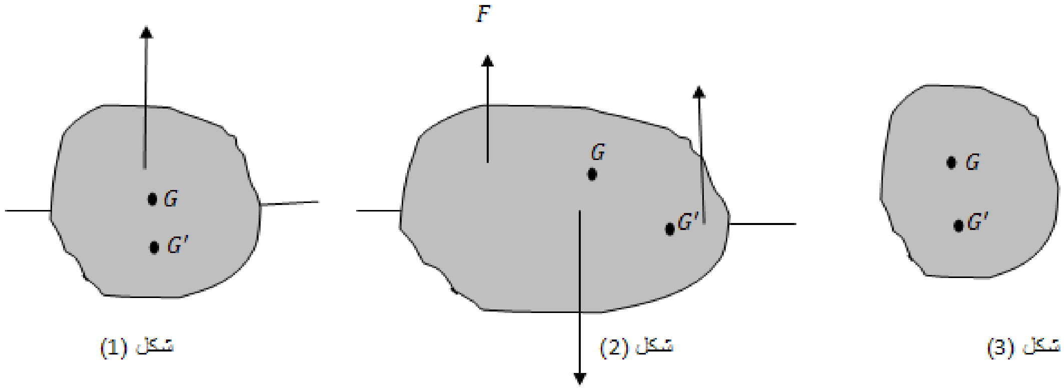
حيث

$$W = \frac{1}{3}\pi a^3\omega\cot\propto$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^3 h\omega. \quad (5)$$

w هو وزن السائل

إتزان الاجسام فى السوائل:



عندما يتزن جسم فى سائل سواء كان مغمورا فيه او طافيا فان القوى المؤثرة علية هى وزن الجسم وتؤثر عند مركز ثقله G ومحصلة الضغط السائل علية وتؤثر عند مركز ثقل السائل المزاح بالاضافة الى ايه قوة خارجية اخرى تكون موجودة .
ولما كانت القوة الاولى والثانية رأسيتين فان نتيجة للاتزان يتحتم ان تكون محصلة القوى الخارجية F راسية هى الاخرى وهذا عادة ينتج للجسم وضعين للاتزان. فى احدهما تكون القوى الثلاثة على خط رأسى واحد اى ان GG' رأسى (شكل (1)) وفى الاخر تكون القوى الثلاث غير منطبقة اى ان GG' مائل على الراسى (شكل 2) ومن الواضح إنه فى حالة عدم وجود قوى خارجية غير الوزن $(F = 0)$ لا يتزن الجسم الا فى الواضح الاول (شكل3)

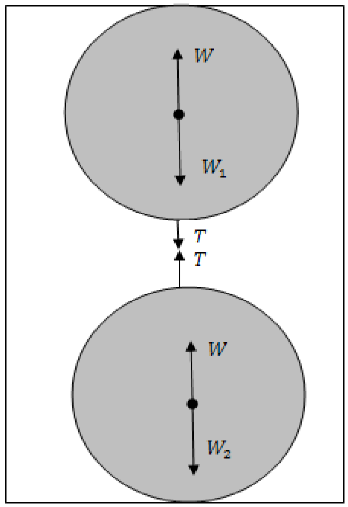
امثلة :-

مثال(1):-

كرة نصف قطرها $\frac{1}{2}ft$ وكثافتها النوعية $\frac{3}{2}$ يربطها خيط خفيف الى كرة اخرى نصف قطرها $\frac{1}{2}ft$ وكثافتها النوعية $\frac{2}{3}$. تركت الكرتان وهما مغمورتان فى خزان عميق للمياه . اثبت انه فى وضع الاتزان ترتكز الكرة الاولى على قاع الخزان. ثم احسب الشد فى الخيط فى هذا الموضع.

الحل

نعتبر أولا الكرتين معا . القوى المؤثرة عليهما هى



(أ) وزن الكرة الاولى

$$W_1 = \frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{3}{2}\int g \qquad (1)$$

∫ كثافة الماء gl عجلة الجاذبية الارضية .

(ب)وزن الكرة الثانية

$$W_2 = \frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{3}{2}\int g \qquad (2)$$

(ج) محصلة ضغط الماء W وهو واحد على الكرتين لتساوى حجمها .

$$W = \frac{4}{3}\pi a^3 \int g \qquad (3)$$

$$W_1 + W_2 = \frac{4}{3}\pi a^3 . \frac{13}{6}\int g$$

$$W_1 + W_2 > 2W \qquad (4)$$

∴ تهبط الكرتان حتى ترتكز الاولى على قاع الخزان وعند الاتزان تكون الكرة الثانية فوقها. نعتبر اتزان الكرة العليا . المؤثرة عليها W_1, W_2 وتمران بمركز الكرة والشد فى الخيط T.

∴ الخيط فى وضع الاتزان راسى مارا بمركز الكرتين.

معادلة الاتزان تعطى من

$$T = W - W_2 = \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{1}{3}\int g \qquad (5)$$

$$T = \frac{4}{3}\pi.\frac{1}{8}.\frac{1}{3}.\frac{125}{2}g \quad poundals$$

$$T = \frac{125}{36}\pi \qquad Ib.wt$$

مثال (2):-

صفيحة منتظمة سميكة على شكل مستطيل $ABCD$ يمكنها التحرك بسهولة فى مستوى راسى محور افقى مثبت عند الراس A. اذا اتزنت الصفيحة ونصفها الاسفل BCD مغمور فى ماء . اثبت ان كثافتها النوعية $\frac{2}{3}$.

الحل

نفرض ان كثافة الماء النوعية p والكثافة النوعية للصفيحة S وحجمها V والقوى المؤثرة على الصفيحة هى

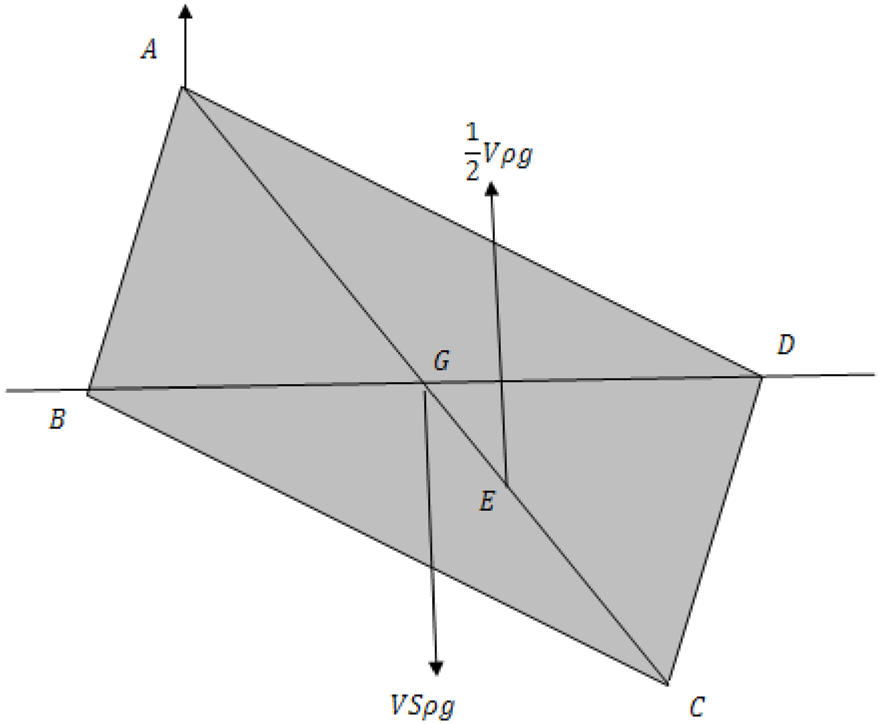
(أ) وزنها $VSpg$ وتؤثر عند مركز ثقل الصفيحة G رأسيا الى اسفل .

(ب) محصلة الضغط الماء $\frac{1}{2}Vpg$ ويؤثر عند E راسيا الى اعلى حيث $GE = \frac{1}{3}Gc$.

(ت) رد الفعل عند A وهذا من شرط الاتزان راسى الى اعلى باخذ العزوم حول A ينتج ان

$$VSpg.AG = \frac{1}{2}Vpg.AE = \frac{1}{2}pg\frac{4}{3}AG$$

$$\therefore S = 2/3$$



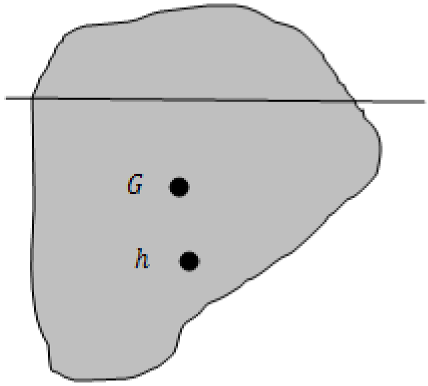
استقرار الاجسام الطافية :

اذا طفا جسم فى سائل فانه يقع تحت تاثير

(أ) وزنه ويمر بمركز ثقلة G.

(ب) محصلة ضغط السائل وهى قوة رأسية الى اعلى تساوى وزن السائل المزاح وتمر بمركز ثقلة H .

والجسم يتزن فى وضع تكون فيه هاتان القوتان متساويتين وتقع G ، H على خط راسى واحد . نعرف H بمركز الطفو (التعويم) أما مقطع الجسم بواسطة مستوى سطح السائل فيعرف بمستوى الطفو .



وفيما يلى سوف نتعرض لدراسة استقرار هذا الاتزان والمقصود بالاستقرار ان الجسم يعود نحو موضع اتزانة اذا اعطى ازاحة صغيرة من هذا الموضع .
باتخاذ مركز ثقل مستوى الطفو o كنقطة اساس فان اية ازاحة تعطى للجسم يمكن اعتبارها مكونة من ازاحتين احداهما انتقالية مع o والاخرى دورانية حول محور عند o ولما كانت هذه الازاحات صغيرة فانة يمكن دراسة الاستقرار لكل ازاحة على حده.

<u>إستقرار الاتزان للازاحات الانتقاليه:-</u>

اية ازاحة انتقالية يمكن تحليلها الى ازاحتين احداهما أفقية والاخرى راسية

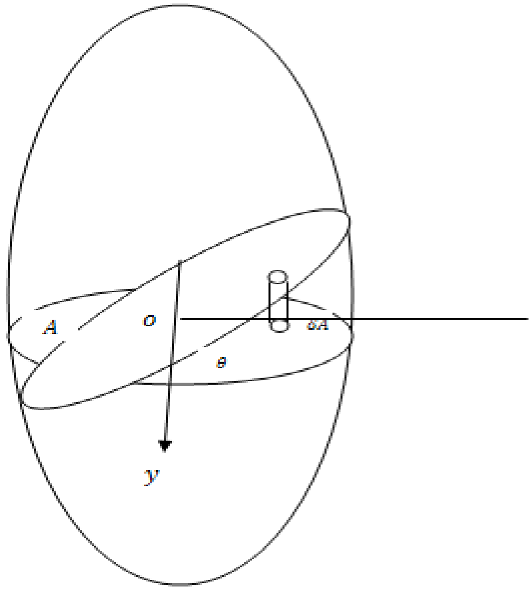
(أ) <u>للازاحة الافقية :</u>

حيث ان مركبة ضغط الماء فى الاتجاه الافقى بعد الازاحة تساوى صفر فان الجسم يتزن فى وضعه الجديد اى ان الاتزان بالنسبة للازاحات الافقية للجسم الطافى يكون اتزانا متعادلا

(ب) <u>الازاحة الراسية:</u>

اذا كانت الازاحة الى اسفل فان محصلة ضغط الماء تزداد وبذلك تكون محصلة الوزن وضغط الماء قوة راسية الى اعلى تعمل على اعادة الجسم الى وضع الاتزان مرة اخرى . واذا كانت الازاحة الى اعلى فان ضغط الماء يقل وبذلك تكون محصلة وزن الجسم وضغط الماء قوة راسية الى اسفل تعمل على اعادة الجسم الى وضع الاتزان اى ان الاتزان يكون مستقرا بالنسبة للازاحات الراسية – وعلى دلك فان اتزان الاجسام الطافية يكون مستقرا بالنسبة للازاحات الانتقالية عموما.

<u>اذا قطع مستوى جسم ودار حول محورما بزاوية صغيرة بحيث يقسمة دائما الى حجمين ثابتين هذا المحور يمر بمركز المقطع.</u>



ناخذ اى وضعين للمستوى بينهما زاوية θ وناخذ خط التقاطع محورا للاحداثى y أما محور x فواقع فى المستوى عند احد الوضعين فى الرسم المستوى A هو مستوى الاحداثيات oxy.

نفرض ان عنصر عند (x, y) مساحته δA عند دوران المستوى هذا العنصر يعطى حجما $x\theta\delta A \;\; x\theta\, SA$

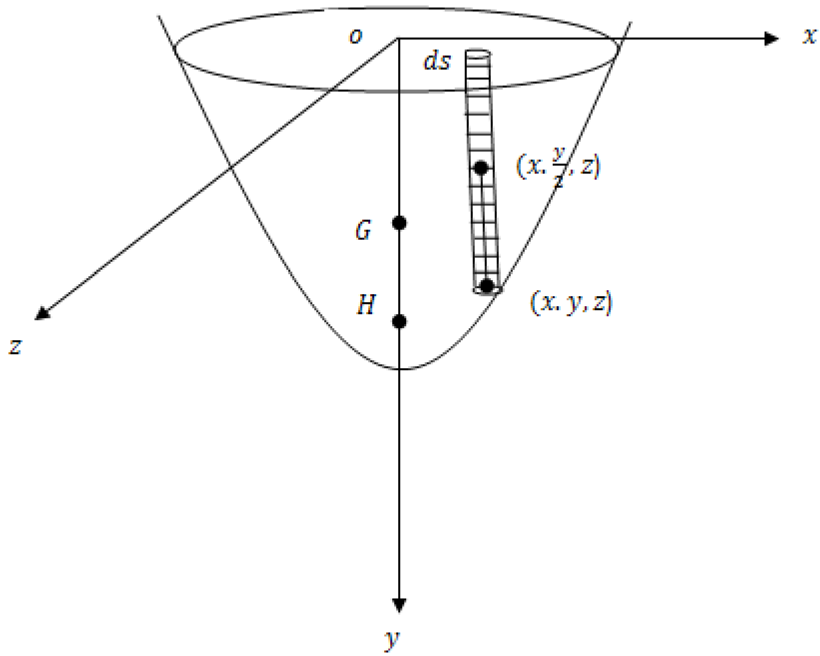
$\therefore$ الزيادة الكلية فى الحجم تساوى $\int \theta x dA$ =صفر

$$\therefore \; A\bar{x} = 0$$

اى ان مركز ثقل المساحة A يقع على المحور y اى محور الدوران.

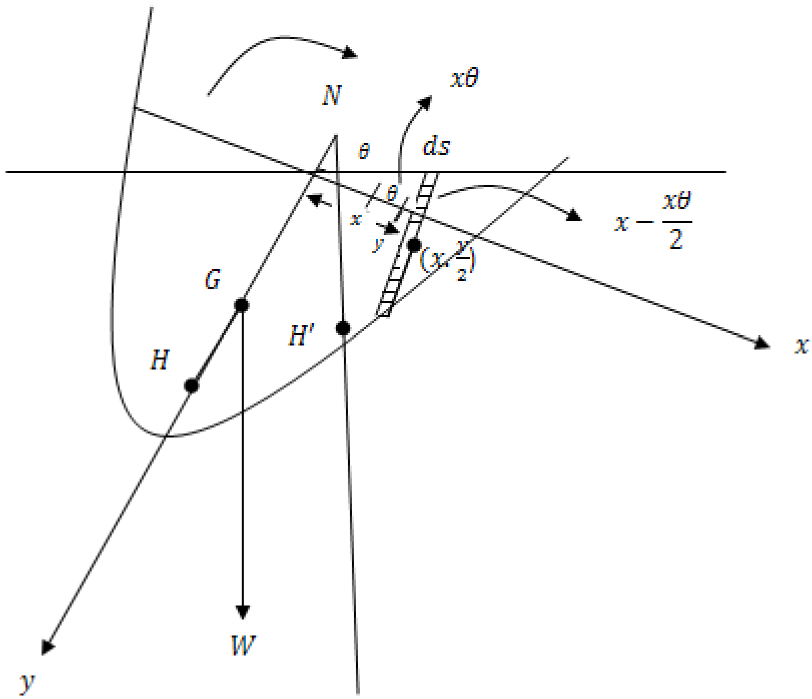
إيجاد شرط الاتزان المستقر للازاحة الدورانية للاجسام الطافية:

نعتبر الجسم الطافى متماثل حول مستوى وفى حلة الاتزان يكون مستوى التماثل راسى. نأخذ مركز كتلة مستوى الطفو (تقاطع الجسم مع سطح السائل) تقع فى مستوى التماثل.



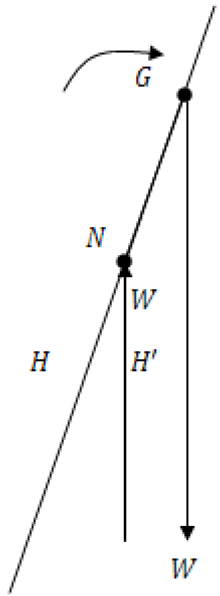
نفرض ان G هى مركز كتلة الجسم وان H هى مركز التعويم (اى مركز كتلة السائل المزاح) نفرض ازاحة دورانية صغيرة للجسم بدون تغيير حجم السائل المزاح وان H' هو الموضع الجديد لمركز التعويم . نفرض ان المستقيم الرأسى المار بالنقطة H' يقابل HG او امتداده فى نقطة N والتى تسمى بالمركز الافقى . عند دوران الجسم بزاوية صغيرة θ مع الرأسى فان الجسم يقع تحت تاثير قوتين هما وزنة W راسيا لاسفل ويؤثر فى مركز الكتلة G وقوة دفع السائل W ايضا راسيا لاعلى (حجم السائل المزاح لم يتغير) ويؤثر فى مركز التعويم H' فتكونان إزدواج. اذا كانت النقط N تقع اعلى المستوى الافقى المار بالنقط G فان هذا الازدواج يعمل على دوران الجسم وابعادة عن موضع الاتزان الاصلى وفى هذه الحالة يكون **الاتزان غير المستقر**. اذا انطبقت N على G فان **الاتزان يكون متعادل** لذلك يجب تعين المركز الاقصى N لمعرفة نوع الاتزان.

نفرض ان مستوى الطفو هو المستوى zox وان oy هو العمودى على هذا المستوى الذى تقع H, G علية فى وضع الاتزان الاصلى.



نعتبر عنصر حجم من السائل المزاح قبل الدوران يكون حجمة $dV = ydS$ واحداثيات مركز كتلة $(x, y/2, z)$ فيكون حجم السائل المزاح $V = \int ydS$ وبعد الازاحة الدورانية الصغيرة θ فان حجم العنصر $dV = (y + x\theta)dS$ ويكون حجم السائل المزاح $V = \int (y + x\theta)dS$ حيث ان حجم السائل المزاح لم يتغير بعد الازاحة الدورانية الصغيرة فان $V = V$
اى ان

$$V = \int ydS = \int (y + x\theta)dS = V \tag{1}$$



$$\therefore \int x dS = 0 \qquad (2)$$

نفرض ان مركز التعويم H' فى المستوى xoy هما $\bar{x}, \bar{y}$ وباخذ العزوم حول المحورين ox, oy نجد ان

$$\bar{x} = \frac{\int (y + x\theta) dS . x}{\int (y + x\theta) dS}$$

$$\bar{y} = \frac{\int ydS . y/2 + \int x\theta \, dS \left(-\frac{x\theta}{2}\right)}{\int (y + x\theta) dS} \qquad (4)$$

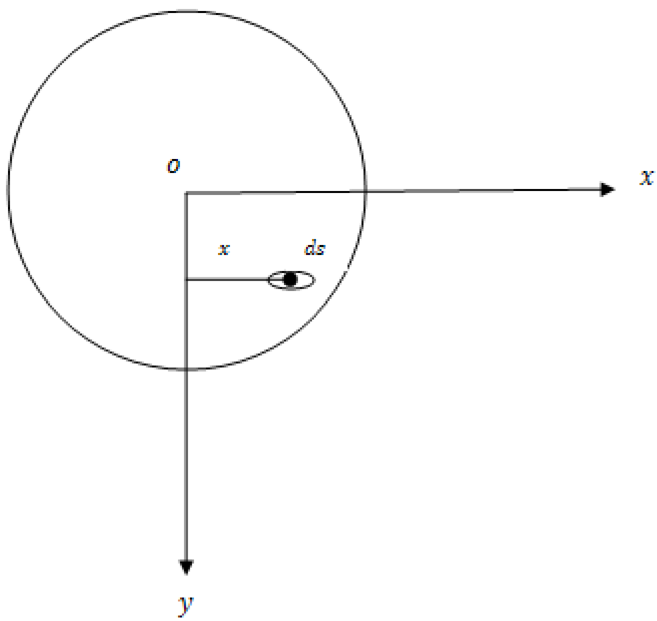
من التماثل واستخدام المعادلة (2) واهمال الحد الذى يحتوى على θ^2 نحصل على

$$\bar{x} = \frac{\theta \int x^2 \, dS}{\int y \, dS} \qquad (5)$$

$$\bar{y} = \frac{\int y^2 \, dS}{\int y \, dS} \qquad (6)$$

$$\therefore\ HH' = \bar{x} = \frac{\theta I}{V} \qquad (7)$$

حيث I عزم القصور الذاتى لمستوى الطفو حول محور التماثل oz , V حجم السائل المزاح.
لكن



$$HH^{1} = HN\,.\theta$$

$$HN = \frac{HH^{1}}{\theta} = \frac{I}{V} \qquad (8)$$

وذلك باستخدام (7) حيث ان

$$HN = HG + GN$$

$$GN = \frac{I}{V} - HG \qquad (9)$$

لكى يكون الاتزان مستقرا يجب ان يكون $GN > 0$. اى ان

$$\frac{I}{V} - HG > 0$$

$$HG < \frac{I}{V} \qquad (10)$$

و هذا هو شرط الكافى لكى يكون الاتزان مستقرا.

مثال(1):

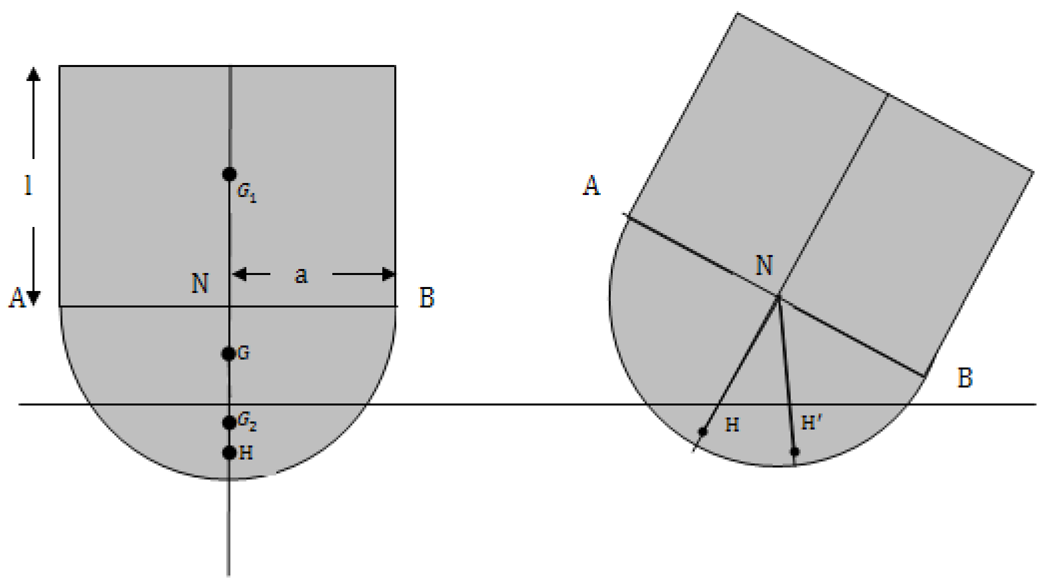
جسم مكون من اسطوانه مصمتة ارتفاعها l فى نهايتها نصف كرة مصمتة نصف قطرها a. اذا طفا الجسم وجزء من نصف الكرة مغمور فى سائل فاثبت ان الاتزان يكون مستقرا اذا كان $l < \frac{a}{\sqrt{2}}$.

الحل

واضح ان المركز الاقصى N هو القاعدة المستوية لنصف الكرة نعين مركز ثقل الجسم الطافى G باخذ العزوم حول القطر AB فنجد ان

$$\frac{2}{3}\pi a^3 . \frac{3}{8} a + \pi a^2 l . \left(-\frac{1}{2} l \right) = \left(\frac{2}{3}\pi a^3 + \pi a^2 l \right) GN$$

$$\therefore GN = \frac{\frac{1}{4}\pi a^4 - \frac{1}{2}\pi a^2 l^2}{\frac{2}{3}\pi a^3 + \pi a^2 l}$$



$$= \frac{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}l^2}{\frac{2}{3}a + l}$$

يكون الاتزان مستقرا اذا كان

$$GN > 0$$

اى اذا كان

$$\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}l^2 > 0$$

$$l^2 < 1/2\, a^2$$

$$l < \frac{a}{\sqrt{2}}$$

اى ان الاتزان مستقرا اذا كان

$$l < \frac{a}{\sqrt{2}}$$

تمارين على الباب الخامس

1- غمر مثلث فى سائل . اثبت ان مجموع الضغوط عند الضغوط عند رؤوس المثلث يساوى ثلاثة امثال الضغط عند مركز كتلة المثلث.

2- انبوبة رفيعة منتظمة فى مستوى راسى تحتوى على اربعة سوائل مختلفة متساوية الاحجام ولا تختلط السوائل ببعضها وكثافتها كنسبة $3:4:2:1$ اثبت ان زاوية ميل القطر بين نقط انفصال السوائل الاربعة مع الرأسى تساوى $\tan^{-1}\frac{1}{2}, \tan^{-1} 2$.

3- صفيحة على شكل نصف دائرة مغمورة رأسيا فى سائل وقطرها عند سطح السائل . اثبت ان مركز الضغط يبعد مسافة $\frac{3\pi a}{16}$ عن سطح السائل حيث a نصف قطر نصف الدائرة.

4- مثلث متساوى الساقين abc فية النقطة a ثابتة وارتفاع المثلث من a يساوى h والنقط a على بعد $2h$ من سطح السائل. اثبت ان الفرق بين مركز الضغط عن a عندما يكون bc افقى فوق a او تحت a يساوى $\frac{h}{16}$.

5- مخروط دائرى قائم قسم الى جزئين بمستوى يمر بالمحور والمحور رأسى . اثبت ان الضغط المحصل على السطح المنحنى للمخروط يساوى $\frac{1}{6}a^3 \int g \cot\alpha \sqrt{\pi^2 + 4\cot^2\alpha}$ فى اتجاه يصنع زاوية θ مع الافقى حيث $\tan\theta = \frac{\pi}{2}\tan\alpha$ حيث 2α زاوية راس المخروط.

6- علقت صفيحة مربعة الشكل طول ضلعها $2a$ من احد رؤوسها عند السطح الحر لسائل متجانس كثافتة $\int$. عين محصلة الضغط ومركزة .

7- لوح مثلث الشكل قاعدته $2a$ وارتفاعة h غمر فى ماء كثافته ρ بحيث كان مستواه رأسي وقاعدته عند سطح الحر للماء. أوجد محصلة ضغط الماء وعين مركزه.

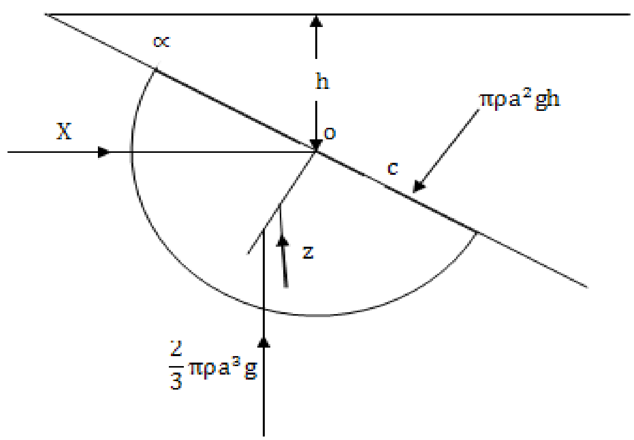
8- لوح على شكل ربع دائرة نصف قطرها a غمرت فى سائل بحيث كان مستواة رأسي واحد حدية المستقيمين عند السطح الحر للسائل. اوجد محصلة الضغط على اللوح ونقطة تاثيرها .

9- غمرت صفيحة مساحتها S رأسيا فى سائل وكان مركز ثقلها G يقع على عمق h أسفل السطح الحر للسائل. اذا كان $Gy\,,Gx$ هما المحوران الراسيان لقصور الصفيحة عند G
اثبت ان المحل الهندسى لمركز الضغط $(X\,,Y)$ على الصفيحة بالنسبة لهذين المحورين عندما تدورالصفيحة فى مستويهما حول مركز ثقلها G هو القطع الناقص.

$$\frac{X^2}{a^4}+\frac{Y^2}{b^4}=\frac{1}{h^2}.$$

10- ثمن كرة مصمتة نصف قطرها a غمر فى سائل كثافتة ρ بحيث كان احد اوجهة المستوية عند سطح السائل .عين تماما محصلة الضغط على سطح المنحنى.

11-جسم نصف كروي مصمت نصف قطره a غمر تماما فى سائل كثافتة ρ الشكل يوضح مقطع الجسم بواسطة مستوى التماثل الرأسي فيه h هو انخفاض مركز السطح الكروى للجسم عن السطح الحر للسائل، α الزاوية التى يصنعها القاعدة المستوية مع الافقى . اوجد محصلة ضغط السائل على السطح الكروى للجسم.



12- مخروط اجوف خفيف ارتفاعة $2a$ وزاوية رأسة $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ملئ تماما بسائل وزنة W ثم علق من نقطة ثابتة على قاعدته . عين تماما محصلة ضغط السائل على سطح المنحنى للمخروط .

13- جسم على شكل اسطوانة مائلة غمرت تماما فى سائل بحيث كانت قاعدتها افقيتين . اثبت ان محصلة الضغط على السطح المنحنى ازدواج عزمة $Wd\tan\alpha$ حيث W هو وزن السائل المزاح ، d عمق مركز ثقلة ، α ميل رواسم الجسم على الراس.

14- قشرتان نصف كرويتان قطرهما متساويان. ربط ببعضهما بمفصل من نقطة على حافتيهما بحيث يكونان معا كرة ملئت تماما بالماء من فتحة بجانب المفصل وحتى لا يتسرب الماء عند الحافتين دهنت هاتين الحافتين بمادة دهنية وعلقت الكرة من المفصل . اثبت ان نصفى الكرة لن ينفصلا اذا كان وزن القشرتين معا اكثر من ثلاثة امثال وزن الماء بالداخل .

15- اسطوانة ارتفاعها h ونصف قطرها a وكثافتها النوعية S تطفو فوق ماء بحيث كان محور الاسطوانة راسي . اوجد شرط الاتزان المستقر .

16- اسطوانة مصمتة منتظمة ارتفاعها $2h$ ومقطعها قطع ناقص طول محورية $(a > b)2a,2b$ وكثافتها النوعية $\frac{1}{2}$. تطفو الاسطوانة فوق ماء بحيث كان ارتفاعها راسيا . اثبت ان الاتزان يكون دائما مستقرا اذا كانت $\sqrt{2h} < b$.

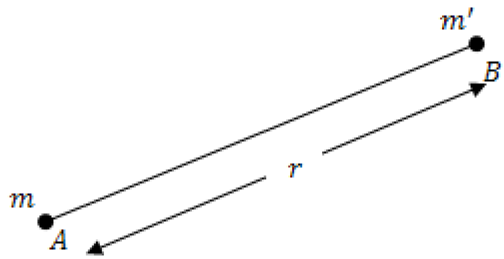
17- اذا غمرت صفيحة مستوية على شكل متوازى اضلاع فى سائل بحيث كان الرأس A عند سطح السائل والقطر BD افقيا ، فاثبت ان مركز الضغط يقع على القطر AC ويقسمة بنسبة $5:7$.

18- غمرت صفيحة مستوية على شكل مثلث ABC فى سائل بحيث كان الرأس عند سطح السائل . اوجد موضع الخط DE الموازى ل BC والذى يقسم الصفيحة الى جزئين بحيث يكون الضغط على المساحة ADE مساويا للضغط على المساحة $DBCE$ ، ثم بين ان موضع هذا الخط DE لا يعتمد على ميل مستوى الصفيحة على الراس .

19- اناء على شكل متوازى مستطيلات طولة $4\ ft.$ وعرضة $4\ ft.$ وعمقه $3\ ft.$ ومفتوح من اعلى . فاذا سكب فى هذا الاناء ماء حتى اصبح عمقه $2\ ft.$ ثم دار الاناء حول احد احرف قاعدته السفلى حتى اصبح الماء على وشك الانسكاب من الاناء فاوجد النسبة التى يتغير بها الضغط على القاعدة السفلى وكذلك على كل من جوانبة الغير راسية .

الباب السادس

المجال والجهد



نفرض ان نقطتين ماديتين عند B, A كتلتهما m^{1}, m على الترتيب والمسافة بينهما r فتكون قوة الجذب بينهما F تتعين من قانون الجذب العام لنيوتن

$$F = \frac{rmm^{1}}{r^{2}} \qquad (6.1)$$

حيث γ ثابت الجاذبية لنيوتن .

يعرف **المجال** E عند النقطة B الناتج من وجود الكتلة m عند A بانه القوة التى تؤثر على وحدة الكتل عند B اى ان

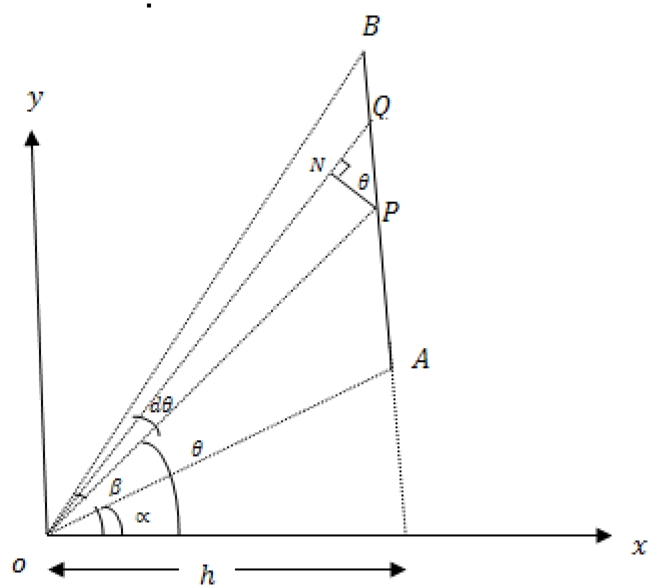
$$E = \frac{\gamma m}{r^{2}} \qquad (6.2)$$

العلاقة(6.2) تعين مقدار المجال واتجاهة يكون فى الاتجاه BA . يعرف **الجهد** v عند B من العلاقة

$$v = \frac{\gamma m}{r} \qquad (6.3)$$

الجذب بين سلك رفيع ونقطة مادية:

نفرض سلك AB والمطلوب ايجاد الجذب عند نقطة o التى تبعد h عن AB ناخذ المحور ox عموديا على السلك AB ، oy وموازيا للسلك حيث oB, oA يصنعان زاويتين β, α مع المحور ox .



ناخذ عنصر من السلك pQ حيث $op\,, oQ$ يصنعان زاويتين $\theta, \theta + d\theta$ مع المحور ox على الترتيب.
المجال عند o بسبب العنصر pQ يتعين مقداره من

$$dE = \frac{\gamma\,\sigma\,.\,pQ}{(op)^2} \tag{6.4}$$

حيث σ كتلة وحدة الطول من السلك .
نزل العمود pN على oQ فتكون الزاوية NpQ مساوية θ ونجد ان

$$pQ = pN\,.\sec\theta \tag{6.5}$$

حيث ان

$$pN = op\,.d\theta \tag{6.6}$$

بالتعويض من (6.6) فى (6.5) نجد ان

$$pQ = op\,.\sec\theta\, d\theta \tag{6.7}$$

ويكزن مقدار مجال العنصر مساويا

$$dE = \frac{\gamma\,\sigma\,.op\,.\sec\theta\, d\theta}{(op)^2}$$

$$= \frac{\gamma\,\sigma\,\sec\theta\, d\theta}{op}$$

$$= \frac{\gamma\,\sigma}{h}\, d\theta \tag{6.8}$$

وذلك لان $op = h \sec \theta$.

مركبتا المجال dE_x , dE_y فى اتجاهى ox , oy يتعينان من

$$dE_y = \frac{\gamma \sigma}{h} \cos \theta \, d\theta, \tag{6.9}$$

$$dE_x = \frac{\gamma \sigma}{h} \sin \theta \, d\theta, \tag{6.10}$$

مركبة المجال للسلك AB فى اتجاه ox نحصل عليها بتكامل (6.9) ونجد ان

$$E_x = \frac{\gamma \sigma}{h} \int_{\alpha}^{\beta} \cos \theta \, d\theta,$$

$$\therefore E_x = \frac{\gamma \sigma}{h} \left(\sin \beta \approx \sin \alpha \right) \tag{6.11}$$

بالمثل مركبة المجال E_y للسلك AB فى اتجاه oy يتعين من

$$E_y = \frac{\gamma \sigma}{h} \int_{\alpha}^{\beta} \sin \theta \, d\theta,$$

$$\therefore E_y = \frac{\gamma \sigma}{h} \left(\cos \alpha - \cos \beta \right)$$

ويكون مقدار المجال E هو محصلة المركبتين E_x , E_y اى ان

$$E = \sqrt{E_y^2 + E_x^2} \tag{6.13}$$

بالتعويض عن قيمتى E_x , E_y من (6.11)(6.12) فى (6.13) نجد ان

$$E = \frac{\gamma \sigma}{h} \sqrt{\left(\sin \beta - \sin \alpha \right)^2 + (\cos \alpha - \cos \beta)^2}$$

$$= \frac{\gamma \sigma}{h} \sqrt{2 - 2\left(\cos \alpha \cos \beta + \sin \beta \sin \alpha \right)}$$

$$= \frac{\gamma \sigma}{h} \sqrt{2 - 2 \cos \left(\alpha - \beta \right)}$$

$$\therefore E = \frac{\gamma \sigma}{h} \sqrt{2 \left[2 \sin^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right]}$$

$$= \frac{2 \gamma \sigma}{h} \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \tag{6.14}$$

وذلك باستخدام المتطابقات المثلثية

$$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$$
$$\cos(\phi - \psi) = \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\psi,$$
$$\cos 2\phi = 1 - 2\sin^2\phi$$

اتجاه المجال يصنع زاوية ψ مع ox حيث

$$\tan\psi = \frac{E_y}{E_x} \tag{6.15}$$

بالتعويض عن قيمتى E_x, E_y من (6.11)(6.12) فى (6.15) نجد ان

$$\tan\psi = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\beta - \sin\alpha} \tag{6.16}$$

باستخدام المتطابقتين المثلثية

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$
$$\sin\beta - \sin\alpha = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

فان (6.16) تصبح على الصورة

$$\tan\psi = \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \tag{6.17}$$

اى ان

$$\psi = \frac{\alpha+\beta}{2} \tag{6.18}$$

المعادلة (6.18) تعنى ان المجال E يكون فى اتجاه منصف الزاوية AoB كما بالشكل.

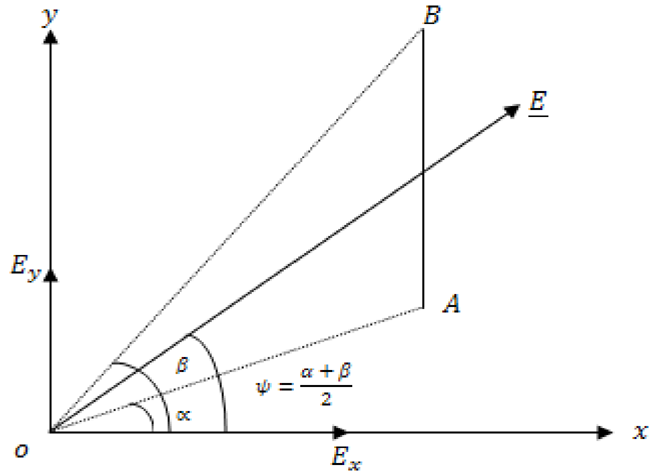
<u>نتائج</u>

(1) اذا امتد السلك الى ∞ من كلتا نهايتين فان فى هذه الحالة $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ ونجد ان

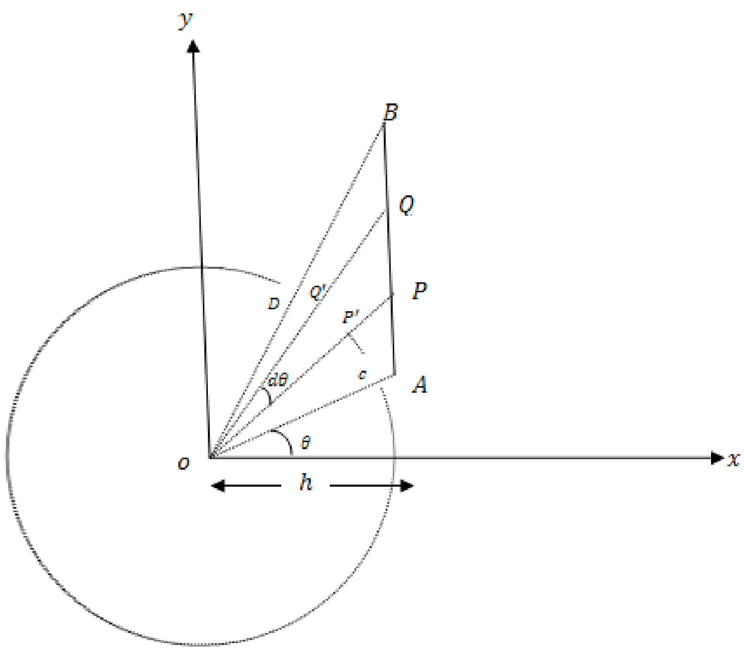
$$E = \frac{2\gamma\sigma}{h}\sin\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)\right]$$
$$= \frac{2\gamma\sigma}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{2\gamma\sigma}{2} \tag{6.19}$$

واتجاهه فى اتجاه ox.

(2) من نقطة الاصل o نرسم دائرة نصف قطرها يساوى h ونفرض انها تقطع المستقيمين oA , oB فى C , D على التوالى.



.



نتصور ان القوس CD يمثل سلكا رفيعا كثافته σ فيكون مجال العنصر $P'Q'$ الذى طولة $hd\,\theta$ مساويا.

$$dE = \frac{\gamma\sigma . hd\theta}{h^2} = \frac{\gamma\sigma}{h} d\theta$$

المعادلة الاخيرة هى نفسها المعادلة (6.8) والتى تعين مجال العنصر pQ من السلك AB .

اى ان مجال العنصر $P'Q'$ من القوس CD يساوى مجال العنصر pQ من السلك المستقيم AB .

ومن ذلك نستنتج ان مجال السلك الذى على شكل قوس من دائرة CD هو نفسه مجال السلك المستقيم AB والذى سبق الحصول عليه وتعيينه مقدارا واتجاها بالمعادلتين (6.14) ,(6.18) على الترتيب .

(3) اذا كانت o على امتداد السلك AB فان $E_x = o$ فى هذه الحالة فان

$$E = E_y = \frac{\gamma\sigma}{h}(\cos\alpha - \cos\beta) \tag{6.20}$$

نلاحظ ان

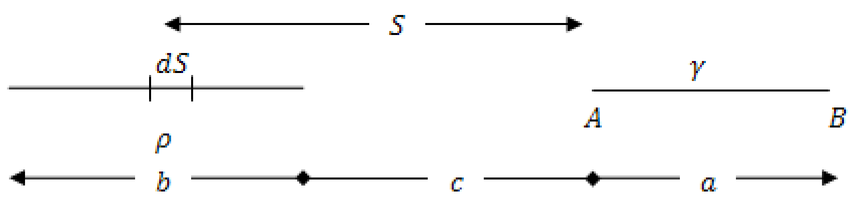
$$\cos\alpha = \frac{h}{oA}, \cos\beta = \frac{h}{oB} \tag{6.21}$$

وبالتالى يمكن كتابة (6.20) باستخدام(6.21) فى الصورة

$$E = E_y = \gamma\sigma\left(\frac{1}{oA} - \frac{1}{oB}\right)$$
$$= \gamma\sigma . \frac{oB - oA}{oA . oB}$$

$$= \frac{\gamma\,\sigma\,.AB}{oA\,.oB} \qquad (5.22)$$

الجذب المتبادل بين سلكين رفيعين على استقامة واحدة



جذب السلك الاول (طوله a) لعنصر طوله ds من السلك الثانى (طولة b) كما بالشكل يتعين من

$$dE = \frac{\gamma\,\sigma\, a.p\, ds}{s(s+a)} \qquad (6.23)$$

وذلك باستخدام النتيجة (6.22) حيث $\rho\,,\sigma$ هما كثافتى السلكين الاول والثانى على الترتيب.
بالتكامل نجد ان قوة الجذب المتبادل بين السلكين تساوى

$$E = \gamma\,\sigma\rho\; a \int_{c}^{c+b} \frac{ds}{s(s+a)} \qquad (6.24)$$

باستخدام الكسور الجزئية فان

$$\frac{1}{s(s+a)} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right] \qquad (6.25)$$

بالتعويض من (6.25) فى (6.24) نجد ان

$$E = \gamma\,\sigma\,\rho \int_{c}^{c+b} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right) ds$$

$$= \gamma\,\sigma\,\rho \left[\ln\, s - \ln(\,s+a)\right]_{c}^{c+b}$$

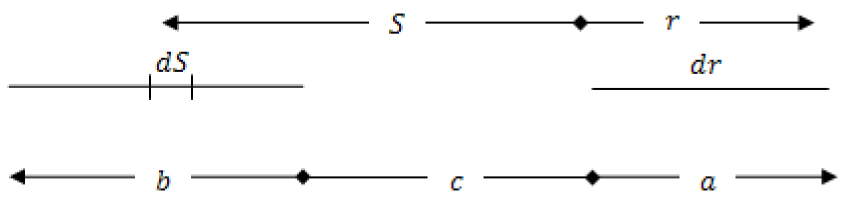
$$= \gamma\,\sigma\,\rho\; ln\left(\frac{s}{s+a}\right)\Bigg|_{c}^{c+b}$$

$$= \gamma\,\sigma\,\rho\left[\ln\left(\frac{c+b}{c+b+a}\right) - \ln\left(\frac{c}{c+a}\right)\right]$$

$$\therefore\ E = \gamma\,\sigma\,\rho \ln\left[\frac{(c+b)(c+a)}{c(c+a+b)}\right] \tag{6.26}$$

ملحوظة

يمكن الحصول على النتيجة (6.26) بطريقة مباشرة ودون الاستعانه بالنتيجة السابقة (6.22) والتى تعين جذب سلك رفيع لنقطة مادية على امتداده وذلك باستخدام التكامل الثنائى كالاتى



الجذب المتبادل بين عنصرين طوليهما $ds\,,dr$ من السلكين يتعين من

$$dE = \frac{\gamma\ \ \sigma\,dr\,.\rho\,ds}{(r+s)^2}$$

ويكون الجذب المتبادل بين السلكين مساويا

$$E = \gamma\,\sigma\,\rho \int_{s=c}^{s=c+b}\int_{r=0}^{r=a} \frac{dr\ ds}{(r+s)^2} \tag{6.27}$$

باجراء التكامل بالنسبة الى r نجد ان

$$E = -\gamma\,\sigma\rho \int_{s=c}^{s=c+b} \left[\frac{1}{r+s}\right]\Bigg|_{r=0}^{r=a} ds$$

$$= \gamma\,\sigma\rho \int_{c}^{c+b} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) ds$$

نلاحظ ان التكامل بالنسبة الى s هو نفسه التكامل الذى سبق حسابه ونحصل على نفس النتيجة السابقة.

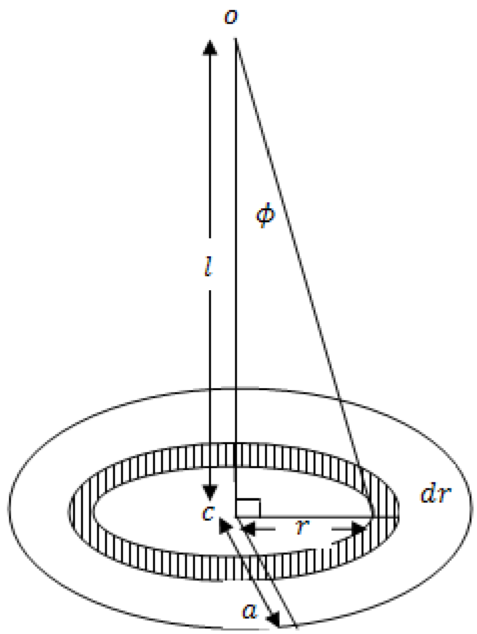
نتيجة

اذا كان احد السلكين لا نهائيا فان الجذب المتبادل يظل محدودا فمثلا اذا كان السلك الاول لا نهائيا ، اى ان $a = \infty$ فان

$$E = \gamma\,\sigma\,\rho \lim_{a\to\infty}\ \ln\left[\frac{(c+b)(c+b)}{a(a+b+c}\right]$$

$$= \gamma \sigma \rho \ln \left(\frac{c+b}{c} \right) \qquad (6.28)$$

الجذب بين قرص دائرى ونقطة مادية على محوره.



نقسم القرص الى حلقات ونعتبر احدهما نصف قطرها r وسمكها dr من التماثل يتضح ان الجذب يكون محوريا اى فى اتجاه oc ويتعين من

$$dE = \frac{\gamma \, dm}{y^2 + l^2} \cos \phi \qquad (6.29)$$

حيث dm كتلة الحلقة وتساوى

$$dm = 2\pi \, r \sigma \, dr \qquad (6.30)$$

بالتعويض عن كتلة العنصر من (6.30) فى (6.29) نجد ان

$$dE = \frac{2\pi \, \gamma \, \rho \, l \, rdr}{(r^2 + l^2)^{3/2}} \qquad (6.31)$$

وذلك باستخدام

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{r^2 + l^2}} \qquad (6.32)$$

ويكون جذب القرص للنقطة المادية مساويا

$$E = 2\pi\,\gamma\,\sigma\,l\int_{o}^{a}\frac{rdr}{(r^2+l^2)^{3/2}} \tag{6.33}$$

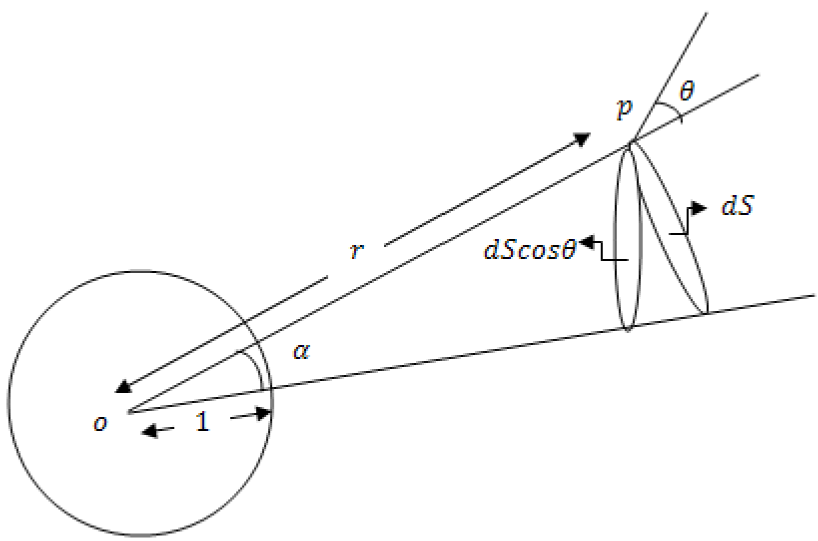
بإجراء التكامل في (6.33) نجد أن

$$E = -2\pi\,\gamma\,\sigma\,l(r^2+l^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{o}^{a}$$

$$= -2\pi\,\gamma\,\sigma\,l\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+l^2}}-\frac{1}{l}\right]$$

$$= 2\pi\,\gamma\,\sigma\left[1-\frac{l}{\sqrt{a^2 l^2}}\right] \tag{6.34}$$

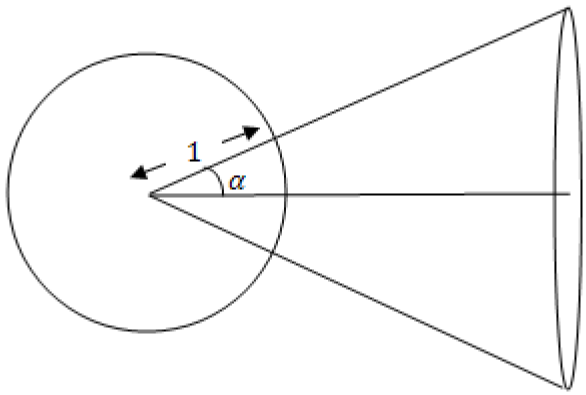
الزاوية المجسمة



نفرض ان مخروط راسه عند o . الزاوية المجسمة للمخروط هى المساحة التى يقطعها المخروط على سطح كرة نصف قطرها الوحدة ومركزها يقع عند راس المخروط o .

نفرض ان عنصر مساحة ds يقابل الزاوية المجسمة dw وان العمودي على المساحة ds ويعمل زاوية حادة θ مع op كما بالشكل .

من هندسة الشكل فان



$$\frac{ds\cos\theta}{dw}=\frac{r^2}{1}$$

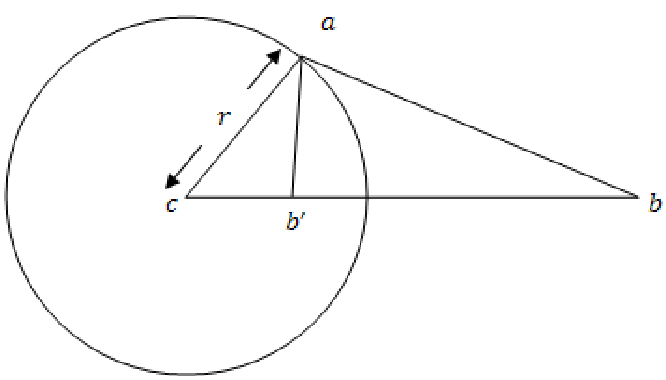
$$\therefore\ dw=\frac{ds\cos\theta}{r^2} \tag{6.35}$$

وعلىذلك تكون الزاوية المجسمة للمخروط الدائرى القائم الذى زاوية راسة 2α تساوى مساحة الطاقيه التى ارتفاعها $1-\cos\alpha$.

اى أن

$$\omega=2\pi(1-\cos\alpha) \tag{6.36}$$

النقطة العكسية



اذا كانت b نقطة خارج كرة نصف قطرها r ومركزها c فانه توجد نقطة b' تسمى النقطة العكسية للنقطة b حيث

$$cb'.cb = r^2 \tag{6.37}$$

يمكن كتابة (5.37) في الصورة

$$\frac{cb'}{r} = \frac{r}{cb} \tag{6.38}$$

المعادلة (6.38) تعنى أن المثلثية cab' , cba متشابهان

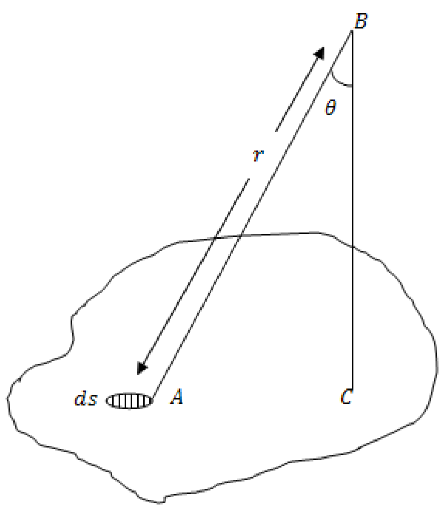
مجال صحيفة مستوية عند نقطة خارجها.

نقسم الصفيحة المستوية إلى عناصر ونعتبر أحداها الذي مساحته ds مجال العنصر عند B يساوى

$$\frac{\gamma\,\sigma\,ds}{r^2}$$

وفى الاتجاه $\underline{AB}$ حيث r هي البعدين B والعنصر ds وعند A المركبة العمودية للمجال (أي في الاتجاه العمودي على الصفيحة) تساوى

$$dE = \frac{\gamma\,\sigma\,ds}{r^2}\cos\theta \tag{6.39}$$



باستخدام العلاقة (3.35) فان (6.39) تأخذ الصورة البسيطة

$$dE = \gamma\,\sigma\,d\omega \tag{3.40}$$

حيث $d\omega$ هي الزاوية المجسمة التي يحدها العنصر ds عند B .

بتكامل (6.40) نحصل على

$$E = \gamma \sigma \omega \qquad (3.41)$$

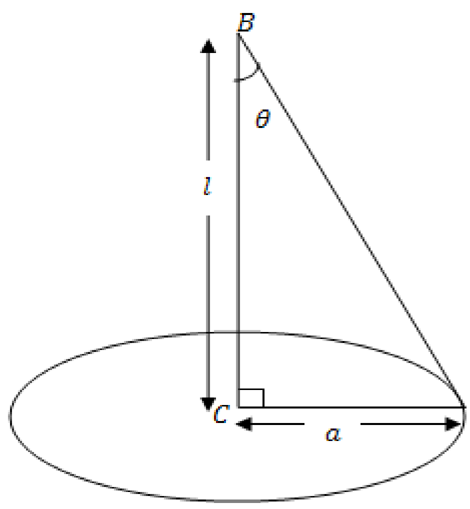
حيث ω هي الزاوية المجسمة التي تحصدها الصفيحة عند B .

أمثلة

مثال (1):

استخدام المعادلة (6.41) لإيجاد مجال قرص دائري عند نقطة B الواقعة على العمودي علي مستوي القرص ويمر بالمركز c .

الحل



حيث ان الزاوية المجسمة التي تحصرها الدائرة عند B تتعين من

$$\omega = 2\pi(1 - \cos\theta).$$

باستخدام المعادلة (6.41) نجد أن

$$E = 2\pi\gamma\sigma(1 - \cos\theta)$$

حيث أن

$$\cos\theta = \frac{l}{\sqrt{l^2 + a^2}}$$

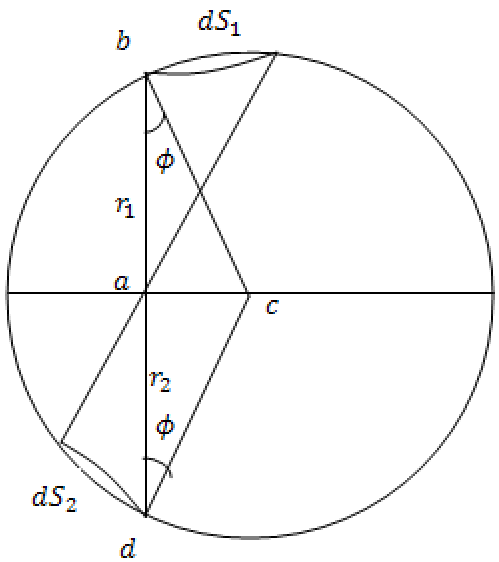
$$E = 2\pi\gamma\sigma\left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + a^2}}\right)$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها فيما سبق.

مثال (2):

اثبت أن مجال قشرة كروية عند نقطة داخلها يساوى صفر وان مجال القشرة عند نقطة خارجها هو نفس المجال لجسيم عند مركز الكرة وكتلته تساوى كتلة القشرة.

الحل



أولا: عند نقطة داخل القشرة a .

نأخذ عنصر مساحة ds_1 على سطح القشرة الكروية يحصر زاوية مجسمة $d\omega$ عند a المطلوب حساب المجال عندها.

نفرض إن $d\omega$ تقابل القشرة الكروية من الجهة الأخرى في المساحة ds_2 .

$$\therefore \; d\omega = \frac{ds_1 \cos\phi}{r_1^2} = \frac{ds_2 \cos\phi}{r_2^2} \qquad (1)$$

حيث $r_1 = ab$, $r_2 = ad$. مجال العنصر ds_1 عند a يتعين من

$$dE_1 = \frac{\gamma\,\sigma\, ds_1}{r_1^2} \qquad (2)$$

من (1) فان

$$\frac{ds_1}{r_1^2} = \frac{d\omega}{\cos\phi}$$

بالتعويض في (2) نجد إن

$$dE_1 = \frac{\gamma\,\sigma}{\cos\phi}\, d\omega \qquad (3)$$

وفى الاتجاه $\underline{ab}$.

بالمثل مجال العنصر ds_2 عند a يتعين من

$$dE_2 = \frac{\gamma\,\sigma\, ds_2}{r_2^2} \qquad (4)$$

باستخدام (1) نجد إن (4) تأخذ الصورة

$$dE_2 = \frac{\gamma\,\sigma}{\cos\phi}\, d\omega \qquad (5)$$

وفى الاتجاه $\underline{ad}$.

من (3)،(5) نجد أن مجال العنصرين ds_2 , ds_1 عند نقطة a متساوي في المقدار ومتضاد في الاتجاه ، اى أن محصلة مجال العنصرين عند a يساوى الصفر، وحيث انه يمكن تقسيم سطح القشرة الكروية إلى عناصر ds_1 في جهة وعناصر مقابلة ds_2 فى الجهة الاخري من a فأننا نستنتج أن المجال الكلي للقشرة عند نقطة داخلها فإن a يساوي صفر

<u>ثانيا :</u> عند نقطة خارج القشرة a

مجال العنصر ds عند a يساوي $\dfrac{\gamma\sigma\, ds}{r^2}$ وفي الاتجاه $\underline{ab}$.

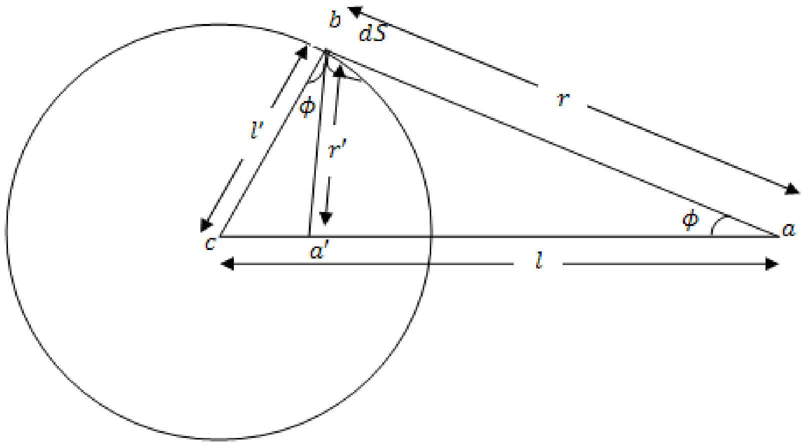
مركبة مجال العنصر ds في الاتجاه $\underline{ac}$ تساوي

$$dE = \frac{\gamma\sigma\, ds}{r^2}\cos\phi \qquad (6)$$

نفرض أن a' هي النقطة العكسية للنقطة a وأن العنصر ds يحصد عند a' زاوية $d\omega$ حيث

$$d\omega = \frac{ds \cos\phi}{r'^2} \tag{7}$$

من (6),(7) نجد أن



$$dE = \frac{\gamma\sigma\, r'^2}{r^2}\, d\omega \tag{8}$$

بتغير العنصر ds علي سطح القشرة الكروية يتغير كل من r', r ولكن من تعريف النقطة العكسية a' للنقطة a فإن المثلثية $cba\ , ca'b$ يكونان متشابهين وينتج أن

$$\frac{a'b}{ba} = \frac{cb}{ca}$$

أي أن

$$\frac{r'}{r} = \frac{l'}{l} \tag{9}$$

أي أن النسبة بين r, r' تظل ثابتة لجميع العناصر ds.

بالتعويض من (9) في (8) نجد أن

$$dE = \frac{\gamma\,\sigma\, l'^2}{l^2}\, d\omega$$

بالتكامل نجد أن

$$E = \frac{\gamma\,\sigma\, l'^2 \omega}{l^2}$$

حيث ω هي الزاوية المجسمة للقشرة الكروية عند a' وتساوى 4π ونجد ان

$$E = \frac{4\pi\, \gamma\, \sigma\, l'^2}{l^2}$$

حيث ان كتلة القشرة الكروية m تساوى

$$m = 4\pi\, \sigma\, l'^2$$

$$\therefore E = \frac{\gamma\, m}{l^2} \qquad (10)$$

العلاقة (10) تعين مجال القشرة الكروية عند نقطة خارجها مثل a ونستنتج ان مجال القشرة الكروية عند نقطة خارجها يساوى مجال جسيم كتلته تساوى كتلة القشرة الكروية وموضوع عند مركز الكرة c.

مثال (3)

اثبت أن جهد مخروط أجوف كتلته m عند رأس المخروط يساوى $\frac{2\gamma\, m \cos\alpha}{h}$ حيث h ارتفاع المخروط ، 2α زاوية راسة.

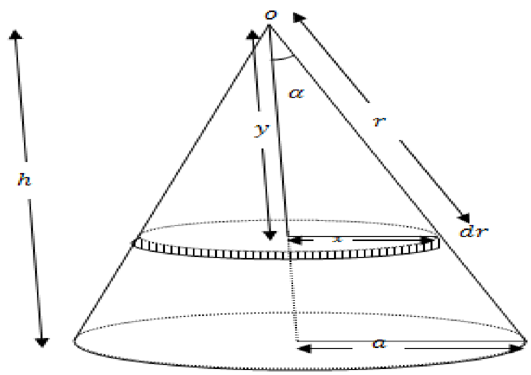
الحل

نقسم المخروط الأجوف إلى عناصر كل منها عبارة عن حلقة ونعتبر إحدى هذه الحلقات.

جهد العنصر (الحلقة) عند راس المخروط o يتعين من

$$dv = \frac{\gamma\, dm}{r} \qquad (1)$$

حيث dm كتلته العنصر وتساوى



$$dm = 2\pi \times \sigma \, dr$$

بالتعويض من (2) في (1) نجد أن

$$dv = \frac{2\pi \, \gamma\sigma \times dr}{r} \qquad (3)$$

من الشكل نجد ان

$$\sin \alpha = \frac{x}{r} \qquad (4)$$

من (3)، (4) نحصل على

$$dv = 2\pi \, \gamma \, \sigma \sin \alpha \, dr$$

جهد المخروط الأجوف كله عند رأسه o يتعين من

$$v = 2\pi \, \gamma \, \sigma \sin \alpha \int_{o}^{h \sec \alpha} dr$$

حيث طول راسم المخروط يساوى $h \sec \alpha$.

$$\therefore \; v = 2\pi \, \gamma \, \sigma \sin \alpha \;\; h \sec \alpha$$

$$v = 2\pi \, \gamma \, \sigma \;\; h \tan \alpha \qquad (5)$$

تم بحمد الله تعالي وتوفيقه

د/رمضان عبدالله محمد

الباب الأول
الدوال في اكثر من متغير

لقد درسنا فيما سبق دوال المتغير الواحد ونهايتها واتصالها وكذلك تفاضلها وتكاملها بالتفصيل وفى هذا الباب سوف نقوم بدراسة دوال المتغيرات المتعدده والتى غالبا ما تقابلنا فى القوانين الرياضية والتطبيقات الفيزيائية والهندسيه والعلوم المختلفة وسوف ندرس نهايتها واتصالها وكذلك تفاضلها بالتفصيل.

أمثلة للدوال فى اكثر من متغير

(١) مساحة المستطيل A هى دالة فى طولة x وعرضة y أى أن:

$$A = f(x, y) = xy$$

(٢) حجم متوازى المستطيلات V هو دالة فى طولة x وعرضة y وارتفاعة z أى أن:

$$V = f(x, y, z) = xyz$$

سوف نرمز للمستوى بالرمز R^2 أى أن:

$$R^2 = \{(x, y):\ x, y \in R\}$$

سوف نرمز للفراغ النونى بالرمز R^n أى أن:

$$R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n):\ \ x_1, x_2, ..., x_n \in R\}$$

تعريف: الدوال في متغيرين:

إذا كانت $z = f(x, y)$ فإنه يقال أن z متغير تابع وأن كل من x, y متغيرات مستقلة ويقال أن الدالة f وحيدة القيمة إذا ناظر كل زوج مرتب (x, y) قيمة وحيدة للمتغير z ويقال أن الدالة f متعددة القيمة إذا كان للمتغير z أكثر من قيمة مناظرة للزوج المرتب (x, y).

مجال الدوال في متغيرين

مجال تعريف الدالة $z = f(x, y)$ يقصد به مجموعة النقاط (x, y) في المستوي R^2 والتي تكون عندها الداله معرفة أي تاخد قيما حقيقية .

أي أن مجال الدالة $z = f(x, y)$ يكون علي الصورة:

$$D = \{(x, y) : x, y \in R\} \subset R^2$$

ويكون العدد $f(x,y)$ هو قيمة الدالة f عند (x,y) وتسمى المجموعة D بنطاق الدالة أو مجال الدالة f وتسمى مجموعة القيم $f(x,y)$ بالنطاق المصاحب أو المدى للدالة f .

مثال(١)

أوجد مجال تعريف الدالة $$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

الحل:

حيث ان الجذر $\sqrt{4-x^2-y^2}$ فى مقام المقدار $f(x,y)$ فإن نطاق الدالة يجب أن يكون كل النقاط (x,y) بحيث $4-x^2-y^2>0$ أى أن $x^2+y^2<4$ أي أن:

$$D=\{(x,y):4-x^2-y^2>0\}=\{(x,y):x^2+y^2<4\}$$

وهذا يعني أن D هى مجموعة كل النقاط (x,y) التى تقع داخل الدائرة التى مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها 2 .

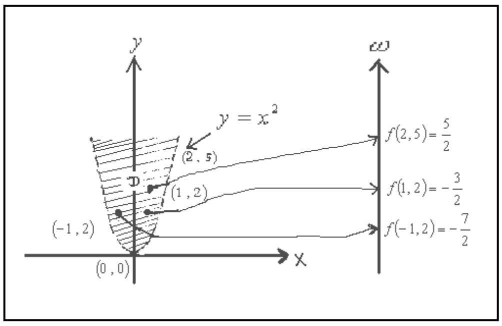
مثال(٢)

أوجد نطاق ومدى الدالة $f(x,y)=\dfrac{xy-5}{2\sqrt{y-x^2}}$ وقيمتها عند النقاط

$$f(-1,2),\ f(1,2),\ f(2,5)$$

الحل:

نطاق الدالة D هو مجموعة النقاط (x,y) بحيث $y-x^2>0$ أى أن $y>x^2$ هى مجموعة جزئية فى المستوى أعلى (وداخل) القطع المكافىء $y=x^2$ كما بالشكل التالى :



وقيمة الدالة عند النقاط المعطاة هى

$$f(2,5)=\frac{2\times5-5}{2\sqrt{5-2^2}}=\frac{5}{2}\ ,\qquad f(-1,2)=-\frac{7}{2}\quad ,\qquad f(1,2)=-\frac{3}{2}$$

ومدى هذه الدالة هو R

مثال(٣)

أوجد نطاق ومدى كلا من الدوال الاتية

$(i)\ f(x,y)=\ln(x+y-2)$

$(ii)\ f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-36}}{2x+y-4}$

$(iii)\ f(x,y)=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-2x^2-y^2}$

الحل:

(i) حيث ان $\ln(t)$ تعرف اذا كان وكان فقط $t>0$ فإنه ينتج أن مجال الدالة المعطاه معرف فى النصف المفتوح من المستوى أى فى المنطقة $x+y-2>0$ (الحدود $x+y-2=0$ لا تدخل فى هذه المنطقة). ومدى الدالة هو $(-\infty,\infty)$.

(ii) نطاق الدالة $f(x,y)$ يتكون من كل الازواج المرتبه (x,y) والتى لها $x^2+y^2-36\geq 0$ ، $2x+y-4\neq 0$. وهذه فئة النقط التى تكون إما على الدائرة $x^2+y^2=36$ التى نصف قطرها 6 ومركزها $(0,0)$ أو فى خارج المنطقة المحيطة بها (باستثناء النقاط التى تقع على الخط المستقيم $2x+y-4\neq 0$). المدي هو R

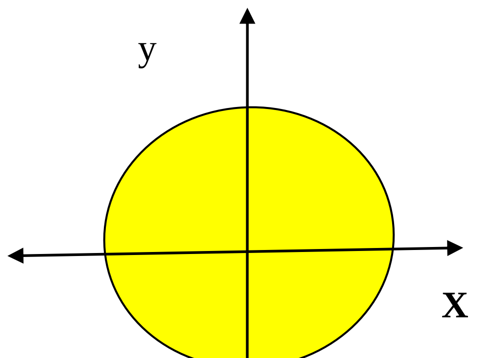
(iii) عندما $z=f(x,y)=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-2x^2-y^2}$ يكون هو الشكل البيانى للنصف العلوى للمجسم الناقص التالى : $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$ والنطاق هو كل (x,y) بحيث أن $2x^2+y^2\leq 4$ والذى يكون قطع ناقص $2x^2+y^2=4$ ، والذى مركزه عند $(0,0)$ مع داخله. المدى يكون هو $0\leq z\leq 1$

مثال(٤)

أوجد مجال تعريف الدالة $\qquad f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

الحل:

حيث ان الجذر $\sqrt{4-x^2-y^2}$ فى مقام المقدار $f(x,y)$ فإن النطاق D يجب أن يكون كل النقاط (x,y) بحيث $4-x^2-y^2>0$ أى أن $x^2+y^2<4$ وبالتالى فإن D هى مجموعة كل النقاط التى تقع داخل الدائرة التى مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها 2.



مثال(٥)

أوجد مجال تعريف الدالة $f(x,y)=\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{xy}$

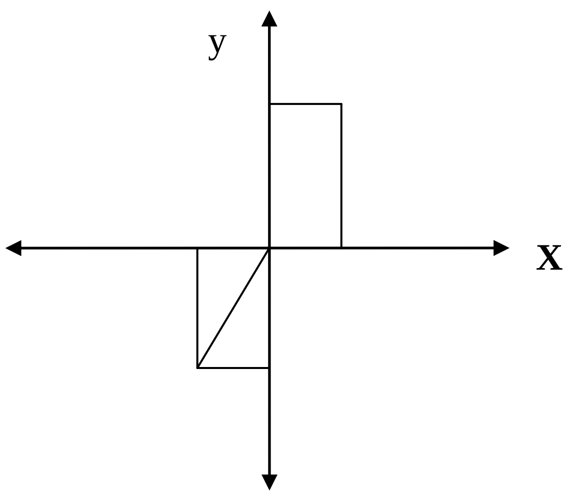
الحل:

الحد الاول من الدالة معرف لكل $-2\le x\le 2$ والحد الثانى يأخذ قيما حقيقية اذا كان $xy\ge 0$

وهذا يحدث عندما:

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} x\le 0 \\ y\le 0 \end{cases}$$

اى ان مجال تعريف الدالة الموضح بالشكل



مثال(٦)

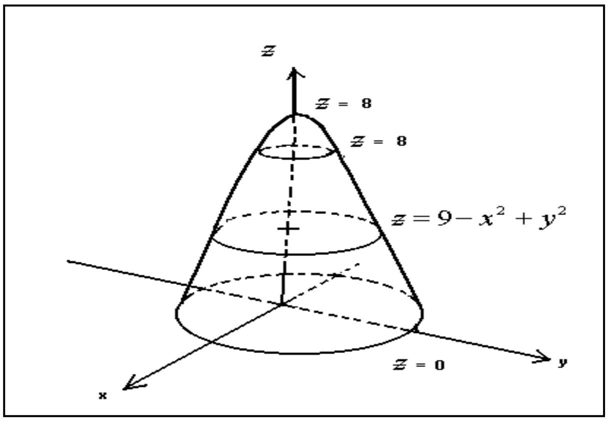
ارسم الدالة f المعرفة بـ

$$f(x,y)=9-x^2-y^2\ :\ D=\{(x,y)\ ;\ x^2+y^2\le 9\}$$

الحل:

لــدينا D منطقــة دائريــة مركزهــا $(0,0)$ ونصــف قطرهــا 3 فــى المســتوى xy و $z=9-(x^2+y^2)\ge 0$ لكل (x,y) فى D

$\therefore$ فالدالــة $z=f(x,y)$ تمثــل ســطحاً يقــع أعلــى المســتوى xy ويقطــع محــور z عنــد النقطــة $(0,0,9)$ لكــل $0\le k\le 9$ فــإن $9-(x^2+y^2)=K$ هــى معادلــة دائــرة مركزهــا $(0,0,k)$ ونصف قطرها $0\le\sqrt{9-k}$ هى تقاطع السطح $z=9-(x^2+y^2)$ والمستوى $z=k$ وبالتالى فإن $z=f(x,y)$ تمثل سطح المخروط الدائرى كما هو مبين بالشكل



مثال(٧)

إرسم نطاق كلا من الدوال الاتية :

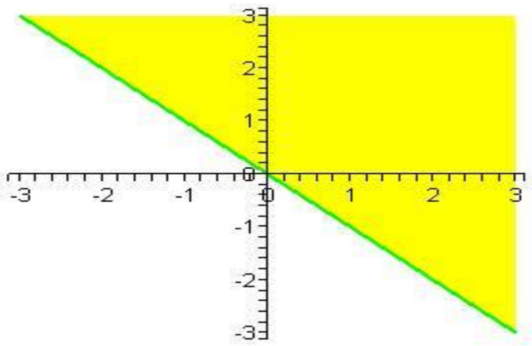
$(1) f(x,y)=\sqrt{x+y}$

$(2) f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

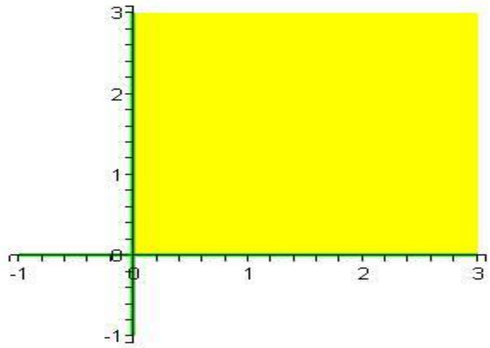
$(3) f(x,y)=\ln(9-x^2-9y^2)$

الحل:

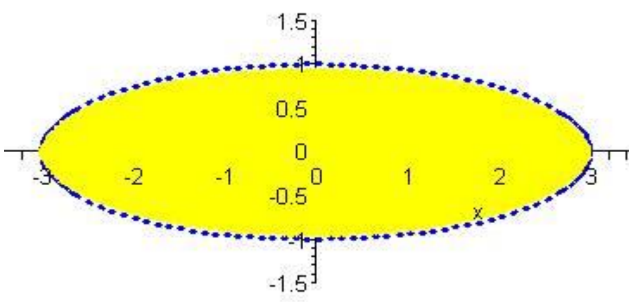
(١) واضح أن الدالة $f(x,y)$ معرفة لجميع القيم الحقيقية التى تحقق المتباينة الاتية $x+y\geq 0$ وبالتالى فإن النطاق D هى مجموعة كل النقاط (x,y) التى تحقق المتباينة الاتية $x\geq -y$ كما بالشكل التالى :



(٢) واضح أن الدالة $f(x,y)$ معرفة لجميع القيم الحقيقية التى تحقق كلا من المتباينات الاتية $x\geq 0$ ، $y\geq 0$ وبالتالى فإن النطاق D هى مجموعة كل النقاط (x,y) التى تحقق المتباينة الاتية $x\geq -y$ كما بالشكل التالى :



(٣) واضح أن المقدار $9-x^2-9y^2$ يجب ان يكون موجب ولا يساوى الصفر اى ان $9-x^2-9y^2>0$ ويمكن كتابة المتباينه بالصورة الاتيه $\frac{x^2}{9}+y^2<1$ وبالتالى فإن النطاق D هى مجموعة كل النقاط (x,y) التى تقع داخل القطع الناقص ولا تقع على حدوده والذى معادلتة $\frac{x^2}{9}+y^2<1$ كما بالشكل التالى :



نهاية الدالة فى متغيرين

يقــال أن الدالــة f تــؤول إلــى النهايــة L عنــدما تــؤول النقطــة (x,y) إلــى النقطة (x_0,y_0) وذلك إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يمكن ايجاد $\delta>0$ بحيث يكون:

$$|f(x,y)-L|<\varepsilon$$

كلما كان

$$|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta$$

وتكتب على الصورة :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L \quad or \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=L$$

وتسمي هذه النهاية بالنهاية الانية للدالة في متغيرين.

العمليات على النهايات

نظريــة: إذا كــان لكــل $f(x,y),g(x,y)$ معرفــة فــى المنطقــة D وأن النقطــة $(x_0,y_0)\in D$ وبفرض ان

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L \quad ; \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=M$$

ونفرض ان α عدد حقيقى فإن:

$$i)\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)\pm g(x,y)]=L\pm M$$

$$ii)\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f\ ,g)(x,y)=LM$$

$$iii)\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{L}{M} \ ;\ M\neq 0$$

$$(iv)\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \alpha f(x,y)=\alpha L$$

$$(v)\ if\ f(x,y)\le g(x,y)\ ,(x,y)\in D\Rightarrow L\le M$$

نظرية: إذا كانت $f(x,y)$ معرفـة فـى المنطقـة D وأن $(x_0,y_0)\in D$ وبفـرض أن

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

وكانت $y=\varphi(x)$ فإن: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\varphi(x))=L$

نتيجة(١): إذا كانت $f(x,y)$ معرفة فى المنطقة D وأن $(x_0,y_0)\in D$ وامكن ايجاد العلاقتين

$y=\varphi_1(x)$ ، $y=\varphi_2(x)$ بحيث أن $\lim_{x\to x_0} f(x,\varphi_2(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x,\varphi_1(x))$ فإن النهاية $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ تكون موجودة،

وهذا يعني أن إذا كان للنهاية $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ قيمتين مختلفتين عند الاقتراب من النقطة (x_0,y_0) خلا مسارين مختلفين فإنه نهاية الدالة $f(x,y)$ عند النقطة (x_0,y_0) تكون غير موجودة.

نتيجة(٢): إذا كانت $f(x,y)$ معرفة فى المنطقة D وأن $(x_0,y_0)\in D$ وامكن ايجاد العلاقة

$y=\varphi(mx)$ بحيث أن $\lim_{x\to x_0} f(x,\varphi_1(x)) = g(m)$ فإن النهاية $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ تكون غير موجودة.

مثال٨:

اثبت أن $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2+2y)=5$

الحل :

باستخدام تعريف النهاية يجب أن نثبت بأنه لأى $\varepsilon>0$ يمكن أن نجد $\delta>0$ بحيث أن لكل

$|x-1|<\delta, |y-2|<\delta$ فإن $|x^2+2y-5|<\varepsilon$

إذا كان $|x-1|<\delta, |y-2|<\delta$ فإن $2-\delta<y<2+\delta \quad , \quad 1-\delta<x<1+\delta$

مستبعدا النقطة $(x,y)=(1,2)$ وبالتالى فإن

$$1-2\delta+\delta^2<x^2<1+2\delta+\delta^2$$

$$4-2\delta<2y<4+2\delta$$

وبالجمع نحصل على $5-4\delta+\delta^2<x^2+2y<5+4\delta+\delta^2$

أى أن $-4\delta+\delta^2<x^2+2y-5<4\delta+\delta^2$

فإذا كان $\delta\le 1$ فإنه يتضح أن $-5\delta<x^2+2y-5<5\delta$

أى أن $|x^2+2y-5|<5\delta=\varepsilon$

وبالتالى نأخذ $\delta=\varepsilon/5$ (أو $\delta=1$ أيهما أصغر)

وبالتالى فإنه إذا كان $|x-1|<\delta, |y-2|<\delta$ فإن $\left|x^2+2y-5\right|<\varepsilon$

وعلية فإن

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2+2y)=5$$

مثال٩:

اثبت أن $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=0$

الحل:

باستخدم الاحداثيات القطبية نحصل على

$$\left|xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0\right|=\left|r^2\cos\theta\sin\theta\cos2\theta\right|=\left|\frac{r^2}{4}\sin4\theta\right|\le\frac{r^2}{4}=\frac{x^2+y^2}{4}<\varepsilon$$

بفرض أن $\frac{x^2}{4}<\frac{\varepsilon}{2}$ ، $\frac{y^2}{4}<\frac{\varepsilon}{2}$ فأنة لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث يكون

$$\left|xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon \text{ ، } |x|<\delta, |y|<\delta$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=0$$

مثال١٠:

بين أن النهاية $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ غيرموجودة

الحل

بالاقتراب من النقطة $(0,0)$ على الخط المستقيم $y=mx$ نجد أن

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{mx^3}{x^4+m^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{mx}{x^2+m^2}=0$$

أى أن الاقتراب إلى نقطة الاصل على أى خط مستقيم يعطى النهاية صفرا.

ولكن بالاقتراب من النقطة $(0,0)$ خلال منحنى القطع المكافئ $y=mx^2$ فإن

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{mx^4}{x^4+m^2x^4}=\frac{m}{1+m^2}=g(m)$$

نلاحظ أن هذه النهاية تعتمد علي قيمة m وبالتالى فإن قيمة النهاية تختلف قيمتها بناء على الطريقة التى نقترب بها من النقطة$(0,0)$ وعلية فإن هذه النهاية غير موجودة .

مثال١١: بين أن النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ غيرموجودة .

الحل

بالاقتراب من النقطة $(0,0)$ خلال الخط المستقيم $y=mx$ نجد أن:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}=g(m)$$

أى أن قيمة النهاية تعتمد على العدد m وحيث أن m أختيارية وأن النهاية تكون وحيدة (أن وجدت) بغض النظر عن كيفية الاقتراب من $(0,0)$وعلية فإن نهاية الدالة المعطاة غير موجودة.

طريقة أخرى:

نستخدم الاحداثيات القطبية $x=r\cos\theta\ ,y=r\sin\theta$ فنحصل على

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}=\cos\theta\sin\theta$$

أى أن قيمة النهاية تعتمد على قيمة θ وبالتالى فهى غير موجودة.

النهايات المتتالية(المكررة) للدوال في اكثر من متغير

إذا كانت الدالة $f(x,y)$ معرفة فى جوار النقطة (x_0,y_0) فإن النهاية $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ إن وجدت فهى دالة فى x ولتكن $\phi(x)$ وعلية فإن قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to x_0} \phi(x)$ تكون موجودة وتساوى α (مثلا) وتكتب

$$\lim_{x\to x_0}\left\{\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right\}=\lim_{x\to x_0}\phi(x)=\alpha$$

وبالتالى تكون α هى النهاية المتتالية للدالة $f(x,y)$ عندما $y\to y_0$ أولا ثم عندما $x\to x_0$. وإذا بدلنا ترتيب النهاية فإننا نحصل على نهاية متتالية

أخـرى وذلـك بــإفتراض أن $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$ هــى دالــة فــى y بينمــا $\lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y)$ موجودة وتساوى α' وهذا يعنى

$$\lim_{y\to y_0}\left\{\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right\}=\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\alpha'$$

وعموما يمكن أن تكون هاتان النهايتان متساويتان أو لا.

ملاحظات:

١. اذا وجدت النهايتان $\lim\limits_{x\to x_0}\left\{\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right\}$ ، $\lim\limits_{y\to y_0}\left\{\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right\}$ ليس بالضرورة أن تكون متساويتان.

٢. قد تكون النهايتان $\lim\limits_{x\to x_0}\left\{\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right\}$ ، $\lim\limits_{y\to y_0}\left\{\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right\}$ موجودتين ولكن النهاية الانية $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ غير موجودة.

٣. اذا كانت النهايه الانية $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ موجودة فأنة يكون $\lim\limits_{y\to y_0}\left\{\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right\}=\lim\limits_{x\to x_0}\left\{\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right\}$ ولكن العكس غير صحيح.

مثال١٢: بين أن النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x-y}{x+y}$ غيرموجودة

الحل

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right\}=\lim_{y\to 0}(-1)=-1,\ \lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right\}=\lim_{x\to 0}(1)=1$$

أى أن النهايات المكررة غير متساوية وكذلك $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x-y}{x+y}$ غيرموجودة

مثال١٣: أدرس وجود النهاية

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(-x+y)}{(x+y)}.\frac{(1+x)}{(1+y)}$$

الحل

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{(-x+y)}{(x+y)}\cdot\frac{(1+x)}{(1+y)}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(-x)}{(x)}\cdot\frac{(1+x)}{(1)}=-1$$

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{(-x+y)}{(x+y)}\cdot\frac{(1+x)}{(1+y)}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(y)}{(y)}\cdot\frac{(1)}{(1+y)}=1$$

أى أن النهايات المكررة غيرمتساوية

وكذلك

$$\lim_{(x,y)\to(0,\,0)}\frac{(-x+y)}{(x+y)}\cdot\frac{(1+x)}{(1+y)}$$

غيرموجودة

مثال١٤: ادرس وجود نهاية للدالة $f(x,y)$ عند النقطة $(0,0)$ حيث

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الحل

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right\}=\lim_{y\to 0}0=0$$

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right\}=\lim_{x\to 0}0=0$$

أى أن النهايات المتتالية متساوية ولكن النهاية الانية للدالة غيرموجودة.

اتصال الدوال في اكثر من متغير

الاتصال عند نقطة للدوال في اكثر من متغير

تعريف: إذا كانت الدالة $f(x,y)$ معرفة فى المنطقة D وأن النقطة $(x_0,y_0)\in D$ فإنة يقال أن الدالة $f(x,y)$ متصلة عند النقطة (x_0,y_0) إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد عدد $\delta>0$ بحيث أن $(x,y)\in N_\delta(x_0,y_0)$ لكل $\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|<\varepsilon$.

تعريف: إذا كانت الدالة $f(x,y)$ معرفة فى المنطقة D وأن النقطة $(x_0,y_0)\in D$ فإنة يقال أن الدالة $f(x,y)$ متصلة عند النقطة (x_0,y_0) اذا تحققت الشروط التالية:

١) الدالة $f(x,y)$ معرفة عند النقطة (x_0,y_0).

٢) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ موجودة.

٣) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

اتصال الدوال في اكثر من متغير على منطقة

تكون الدالة $f(x,y)$ متصلة فى المنطقة D إذا كانت متصلة عند كل نطاقها.

قاعدة : بتطبيق قواعد النهايات السابقة يمكن إثبات أن المجموع والفرق بين الدوال المتصلة فى متغيرين أو أكثر هى أيضاً دوال متصلة كذلك حواصل ضرب والمضاعفات الثابتة(حواصل الضرب فى مقادير ثابتة) للدوال المتصلة تعرف دوال متصلة ،حاصل قسمة دالتين متصلتين هو دالة متصلة عند كل نقطة يكون عندها المقام غير صفري ،كثيرات الحدود والدوال القياسية هي دوال متصلة عند كل نقطة في نطاقها

مثال١٥: ادرس إتصال كل من الدوال الآتية:

$$(1)\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$(2)\quad f(x,y)=\begin{cases}x^2+2y, & (x,y)\neq(1,2)\\ 0, & (x,y)=(1,2)\end{cases}$$

$$(3)\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$(4)\quad f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\neq(0,0)$$

الحل

(١) اثبتنا سابقا أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة وعلى ذلك تكون الدالة غير متصلة عند النقطة $(0,0)$ ومتصلة عند باقى نقاط المستوى.

(٢) نبحث نهاية الدالة عند النقطة $(1,2)$ نجد أن $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)=5$ والدالة معرفة عند النقطة $(1,2)$ حيث أن $f(1,2)=0$ ،اذن

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)\neq f(1,2)$ ومنها الدالة غير متصلة عند النقطة $(1,2)$ ومتصلة عند باقى نقاط المستوى.

(٣) اثبتنا سابقا أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة وعلى ذلك تكون الدالة غير متصلة عند النقطة $(0,0)$ ومتصلة عند باقى نقاط المستوى

(٤) الدالة غير معرفة عند النقطة $(0,0)$ وبالتالى فإنها غير متصلة عند النقطة $(0,0)$ ومتصلة عند باقى نقاط المستوى.

مثال١٦: ادرس إتصال الدالة $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

الحل

بالاقتراب من النقطة $(0,0)$ خلال الخط المستقيم $y=mx$ نجد أن:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \lim_{x\to 0} x = 0$$

و حيث أن الدالة معرفة عند $(0,0)$ حيث أن $f(0,0)=0$ وبالتالي يكون:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

وبالتالي تكون الدالة المعطاة متصلة عند النقطة $(0,0)$ ومتصلة عند باقى نقاط المستوى.

مثال١٧:

ادرس إتصال كل من الدوال الآتية:

$$(1)\quad f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left[\dfrac{1}{x^2+y^2}\right] & , \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الحل

لكل $(x,y)\neq(0,0)$ نحصل على

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|(x^2+y^2)\sin\left[\frac{1}{x^2+y^2}\right]-0\right|$$

$$\therefore |f(x,y)-f(0,0)| = \left|x^2+y^2\right|\left|\sin\left[\frac{1}{x^2+y^2}\right]\right| \leq x^2+y^2 < \varepsilon$$

أذن $|f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon$ عند $\varepsilon=\delta^2$, $x^2+y^2<\delta^2$ أذن الدالة متصلة عند $(0,0)$

تمارين (١)

(١) اذا كانت $f(x,y)=x^3-2xy+3y^2$ فاوجد

(1) $f(-2,3)$; (2) $f\left(\frac{1}{x},\frac{3}{y}\right)$; (3) $\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k},\ k\neq 0$

(٢)عين نطاق ومدى الدوال الاتية:

(1) $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$

(2) $f(x,y)=1/xy$

(3) $f(x,y)=\sin(xy)$

(4) $f(x,y)=-1/(x^2+y^2)$

(5) $f(r,s)=\sqrt{1-r}\,e^{r/s}$

(6) $f(u,v)=\frac{uv}{u-2v}$

(7) $f(x,y)=\ln(x+y)$

(8) $f(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

(٣) أوجد كل من النهايات التالية

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\,0)}\frac{x^2-2}{3+xy}$

(2) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(\frac{\pi}{2},1)}\frac{y+1}{2-\cos x}$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\frac{x^4-2x^3+x^2+x^2y^2}{(x-1)^2+y^2}$

(5) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,0,0)}\frac{x^4-2x^3+x^2+x^2(y^2+z^2)^2}{(x-1)^2+y^2+z^2}$

(6) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,\,0,0)}\frac{x^3-x^2y+z^2y+x(y^2+z^2)^2-y^3}{x^2+y^2+z^2}$

(٤) بين أن كل من النهايات التالية غيرموجودة

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}$

(4) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,0,0)}\frac{(x-2)yz^2}{(x-2)^4+y^4}$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-2xy+5y^2}{3x^2+4y^2}$ (5) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^3+y^3+z^3}{3yz}$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,1)} \dfrac{xy-x+2y-2}{(x+2)^2+(y-1)^2}$ (6) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2}$

(٥) استخدم الاحداثيات القطبية لإيجاد النهاية (إن وجدت):

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ (3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,1)} \dfrac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}$ (4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)}$

(٦) أوجد النقاط (x,y) فى المستوى xy التى تكون عندها الدوال التالية متصلة

(1) $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{xy}$ (3) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y}$

(2) $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2+1}$ (4) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-3x+2}$

الباب الثاني
المشتقات الجزئية

تعريف: اذا كان لدينا الدالة $z=f(x,y)$ دالة متصلة فى المتغيرين المستقلين x,y فإذا جعلنا المتغير المستقل y ثابت وبالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على المشتقة الجزئية للدالة $z=f(x,y)$ عند النقطة (x,y) بالنسبة إلى x ونرمز لها بأى من الرموز الأتية:

$$f_x(x,y)=f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=z_x=\frac{\partial z}{\partial x}=D_x f$$

ويصاغ ذلك رياضيا كالأتى

$$f_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

وبالمثل إذا جعلنا المتغير المستقل x ثابت وبالتفاضل بالنسبة إلى y نحصل على المشتقة الجزئية للدالة $z=f(x,y)$ عند النقطة (x,y) بالنسبة إلى y ونرمز لها بأى من الرموز الأتية:

$$f_y(x,y)=f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=z_y=\frac{\partial z}{\partial y}=D_y f$$

ويصاغ ذلك رياضيا كالأتى

$$f_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

تعميم: إذا كانت f دالة فى n من المتغيرات المستقلة $x_1,x_2,...,x_n$ فإن التفاضل الجزئى للدالة بالنسبة إلى x_1 مع اعتبار باقى المتغيرات $x_1,x_2,...,x_n$ ثابتة نرمز له بالرمز f_{x_1} أو $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ ويصاغ ذلك رياضيا كالأتى:

$$f_{x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h,x_2,...,x_n)-f(x_1,x_2,...,x_n)}{h}$$

وعلى وجه العموم يكون:

$$f_{x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,x_2,x_i+h,...,x_n)-f(x_1,x_2,x_i,...,x_n)}{h}$$

حيث $i=1,2,...,n$ وذلك بشرط وجود نهاية لهذه الدوال.

مثال١: إذا كانت $f(x,y)=2x^2-xy+2y^2+1$ أوجد f_x, f_y .

الحل:

الطريقة الأولى (بأستخدام التعريف)

$$f_x=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[2(x+h)^2-(x+h)y+2y^2+1]-[2x^2-xy+2y^2+1]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(x^2+2h+h^2)-xy-hy+2y^2+1-2x^2+xy-2y^2-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(4x+2h-y)}{h}=4x-y$$

$$\therefore f_x|_p=4-2=2$$

بالمثل

$$f_y=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{[2x^2-x(y+k)+2(y+k)^2+1]-[2x^2-xy+2y^2+1]}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{k(-x+2k+4y)}{k}=-x+4y$$

$$\therefore f_y|_p=-1+8=7$$

الطريقة الثانية:

بتفاضل الدالة f مباشرة بالنسبة إلى x مع اعتبار y ثابتا نحصل على:

$$f_x=4x-y$$

وبتفاضل الدالة f مباشرة بالنسبة إلى y مع اعتبار x ثابتا نحصل على:

$$f_y=-x+4y$$

مثال٢ : اذا كانت $z=x^2y^3$ **فاوجد** z_x ، z_y .

الحل

$$z_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y^3\right)=2xy^3$$

$$z_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y^3\right)=3x^2y^2$$

مثال٣ : اذا كانت $z=\frac{y}{x}$ **فأوجد** z_x ، z_y .

الحل

$$z_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)=y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{y}{x^2}$$
$$z_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}(y)=\frac{1}{x}$$

مثال: إذا كانت $z=e^{x^2+y^2}$ أوجد z_x,z_y ثم برهن أن $z_x+z_y=2(x+y)z$.

الحـــــــــــــــــل

$$z_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^2+y^2}\right)=e^{x^2+y^2}\ \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)=2xe^{x^2+y^2}$$

$$z_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2+y^2}\right)=e^{x^2+y^2}\ \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)=2ye^{x^2+y^2}$$

وبالتالي نجد أن

$$z_x+z_y=2ye^{x^2+y^2}+2ye^{x^2+y^2}=2(x+y)e^{x^2+y^2}=2(x+y)z$$

مثال: إذا كانت $z=e^{f(x,y)}$ أوجد z_x,z_y ثم برهن أن $z_x+z_y=(f_x+f_y)z$.

الحـــــــــــــــــل

$$z_x=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{f(x,y)}\right)=e^{f(x,y)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=e^{f(x,y)}f_x(x,y)$$

$$z_y=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{f(x,y)}\right)=e^{f(x,y)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=e^{f(x,y)}f_y(x,y)$$

وبالتالي نجد أن

$$z_x+z_y=e^{f(x,y)}f_x+e^{f(x,y)}f_y=(f_x+f_y)e^{f(x,y)}=(f_x+f_y)z$$

مثال: أوجد f_x,f_y للدوال الأتية:

(1) $f(x,y)=x^2+3xy+y-1$ (2) $f(x,y)=y\sin(xy)$

(3) $f(x,y)=\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ (4) $f(x,y)=\frac{2y}{y+\cos x}$

الحـــــــــــــــــل

(1) $f_x(x,y)=2x+3y$, $f_y(x,y)=3x+1$

(2) $f_x(x,y)=y^2\cos(xy)$, $f_y(x,y)=\sin(xy)+xy\cos(xy)$

(3) $f_x=-\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$, $f_y(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$

(4) $f_x(x,y)=\frac{2y\sin x}{(y+\cos x)^2}$, $f_y(x,y)=\frac{2\cos x}{(y+\cos x)^2}$

مثال: إذا كانت $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ أوجد f_x,f_y .

الحل

$$f_x = \frac{1}{1+(y/x)^2}(-y/x^2) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f_y = \frac{1}{1+(y/x)^2}(1/x) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

مثال: إذا كانت $f(x,y) = \sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{x^3+y^3}$ أثبت أن

$x\, f_x + y\, f_y = \sqrt{x^2-y^2}$.

الحل

$$f_x = (-y/x^2)\frac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$\therefore\ x\, f_x = (-y/x)\frac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-y^2}} \qquad (١)$$

$$f_y = (-1/x)\frac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$\therefore\ y\, f_y = (-y/x)\frac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2-y^2}} \qquad (٢)$$

بجمع (١)،(٢) نحصل على

$$x\, f_x + y\, f_y = \sqrt{x^2-y^2}$$

ملاحظات :

١-إذا كان للدالة $f(x,y)$ لمشتقتين f_x, f_y وكانتا متصلتين فى المنطقة D فإن الدالة $f(x,y)$ تكون متصلة فى هذه المنطقة

٢- وجود المشتقة الجزئية عند نقطة ما فى المنطقة D لا يضمن اتصال الدالة $f(x,y)$ عند هذه النقطة

مثال : اثبت أن كل من f_x, f_y موجودة عند $(0,0)$ ولكن ليست متصلة عند $(0,0)$ للدالة

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

الحل :

نوجد كل من f_x, f_y عند $(0,0)$ باستخدام التعريف

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=0$$

إذا وضعنا $y=mx$ وجعلنا $x\to 0$ نجد أن

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

أى أن قيمة النهاية تعتمد على العدد m وحيث أن m أختيارية وأن النهاية تكون وحيدة (إن وجدت) بغض النظر عن كيفية الاقتراب من $(0,0)$ وعلية فإن نهاية الدالة المعطاة غير موجودة.أى أن الدالة غير متصلة عند النقطة $(0,0)$

<u>الشرط الكافى للاتصال :</u>

<u>نظرية:</u>

الشرط الكافى لتكون $f(x,y)$ دالة متصلة عند النقطة (x_0,y_0) هو أن تكون $f_y(x_0,y_0)$ ، $f_x(x_0,y_0)$ موجودتان وكلا من f_x, f_y محدوده فى جوار النقطة (x_0,y_0).

المشتقات الجزئية من الرتب العليا

إذا كانت $z=f(x,y)$ لها مشتقات جزئية من الرتبة الأولى عند النقطة (x,y) على منطقة تعريفها فإن f_x, f_y تكون دوال x,y فى ويكون لها مشتقات جزئية وتسمى المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة $f(x,y)$ ويرمز لها كالتالى

$$f_{xx}(x,y)=f_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{yy}(x,y)=f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{xy}(x,y)=f_{xy}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

$$f_{yx}(x,y)=f_{yx}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

وبنفس الطريقة يمكن تعريف المشتقة الجزئية من الرتبة الثالثة وعلى سبيل المثال

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial x\partial y}=f_{xxy}\ ,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial y}=f_{xyy}\ ,\ldots\ldots\ldots\ldots$$

والتعريف الرياضى للمشتقات الجزئية من الرتبة الثانية عند النقطة (x_0,y_0) يكون على الصورة

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(x+h,y)-f_x(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \lim_{k\to 0} \frac{f_y(x,y+k)-f_y(x,y)}{k}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(x,y+k)-f_x(x,y)}{k}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(x+h,y)-f_y(x,y)}{h}$$

مثال: أوجد f_x, f_y, f_z للدوال الأتية:

(1) $f(x,y,z)=1+xy^2-2z^2$

(2) $f(x,y,z)=x-\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(3) $f(x,y,z)=\cos^{-1}(xyz)$

(4) $f(x,y,z)=\sec^{-1}(x+xz)$

(5) $f(x,y,z)=x(1-\cos\ y)-z$

(6) $f(x,y,z)=z\sin x\cos\ y$

الحل

(1) $f_x=y^2$, $f_y=2xy$, $f_z=-4z$

(2) $f_x=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $f_y=\dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$f_z=\dfrac{-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(3) $f_x=\dfrac{-yz}{\sqrt{1-(xyz)^2}}$, $f_y=\dfrac{-xz}{\sqrt{1-(xyz)^2}}$, $f_z=\dfrac{-xy}{\sqrt{1-(xyz)^2}}$

4) $f_x=\dfrac{1}{(x+yz)\sqrt{(x+yz)^2-1}}$

$f_y=\dfrac{z}{(x+yz)\sqrt{(x+yz)^2-1}}$

$f_z=\dfrac{y}{(x+yz)\sqrt{(x+yz)^2-1}}$

(5) $f_x=1-\cos y$, $f_y\ =x\sin y$, $f_z=-1$

(6) $f_x\ =z\cos\ x\cos\ y$, $f_y=-z\sin x\sin y$, $f_z=\sin x\cos y$

مثال: أوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى والثانية والثالثة للدالة:

$$f(x,y)=x\,cos\,y+ye^x$$

الحل

$f_x=\cos y+ye^x$, $f_y=x\sin y+e^x$

$f_{xx}=ye^x$, $f_{yy}=x\cos y$

$f_{xy} = -\sin y + e^x$, $f_{yx} = (-x\sin y + e^x)x = -x\sin y + e^x$

$f_{xxx} = ye^x$, $f_{xxy} = e^x$

$f_{xyy} = -\cos y$, $f_{yyy} = x\sin y$,.......

مثال: أوجد f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} للدوال الأتية:

(1) $f(x,y) = x + y + xy$ (3) $f(x,y) = \ln(2x+3y)$

(2) $f(x,y) = x^2y + \cos y + y\sin x$ (4) $f(x,y) = \tan^{-1}(y/x)$

الحـــــــــــــــــــل

(1) $f_x = 1 + y$, $f_y = 1 + x$

$f_{xx} = f_{yy} = 0$, $f_{xy} = 1$

(2) $f_x = 2xy + y\cos x$, $f_y = x^2 - \sin y + \sin x$

$f_{xx} = 2y - y\sin x$, $f_{yy} = -\cos y$

$f_{xy} = 2x + \cos y$

(3) $f_x = \dfrac{2}{(2x+3y)}$, $f_y = \dfrac{3}{(2x+3y)}$, $2x+3y \neq 0$

$f_{xx} = \dfrac{-4}{(2x+3y)^2}$, $f_{yy} = \dfrac{-9}{(2x+3y)^2}$, $2x+3y \neq 0$

$f_{xy} = \dfrac{-6}{(2x+3y)^2}$, $2x+3y \neq 0$

(4) $f_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$

$f_{xx} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $f_{yy} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$

$f_{xy} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$

مثال: إذا كانت $z = e^{-y}\sin x$ فأوجد z_{xx} ، z_{yy}.

الحـــــــــــــــــــل

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-y}\sin x\right) = e^{-y}\cos x$$

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(z_x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-y}\cos x\right) = -e^{-y}\sin x$$

وبالمثل نجد أن:

$$z_y = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-y}\sin x\right) = -e^{-y}\sin x$$

$$z_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(z_y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-e^{-y}\sin x\right) = -e^{-y}\cos x$$

مثال: إذا كانت $z=e^{x^2+y^2}$ أوجد z_{xy}, z_{yx} ثم برهن أن $z_{xy}+z_{yx}=2(xz_x+yz_y)$.

الحـــــــــــــــــــل

$$z_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^2+y^2}\right)=e^{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)=2xe^{x^2+y^2}$$

$$z_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2+y^2}\right)=e^{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)=2ye^{x^2+y^2}$$

$$z_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(2xe^{x^2+y^2}\right)=2xe^{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)=4xye^{x^2+y^2}$$

$$z_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2ye^{x^2+y^2}\right)=2ye^{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)=4xye^{x^2+y^2}$$

وبالتالي نجد أن:

$$z_{xy}+z_{yx}=8xye^{x^2+y^2}$$

$$yz_x+xz_y=2xye^{x^2+y^2}+2xye^{x^2+y^2}=4xye^{x^2+y^2}$$

وبالتالي نجد أن

$$z_{xy}+z_{yx}=2(xz_x+yz_y)$$

مثال: إذا كانت $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ فأثبت أن $f_{xx}+f_{yy}=0$.

الحـــــــــــــــــــل

بالتفاضل الجزئى للعلاقة بالنسبة إلى x مرة وبالنسبة الى y مرة نحصل على

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x^2+y^2}(2x)=\frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(f_x)=\frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \qquad (١)$$

$$f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{x^2+y^2}(2y)=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial f}{\partial y}(f_y)=\frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \qquad (٢)$$

بجمع العلاقات (١) ، (٢) نحصل على $f_{xx}+f_{yy}=0$.

مثال: إذا كانت $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ فأثبت أن $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=0$.

الحـــــــــــــــــــل

$$z_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[x^2+y^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2}\left[x^2+y^2\right]^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)$$

$$=-x\left[x^2+y^2\right]^{-\frac{3}{2}}=-x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x^2}}\right)^3=-xf^3(x,y),$$

$$z_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-xf^3(x,y)\right)=-\left(f^3\frac{\partial}{\partial x}(x)+x\frac{\partial}{\partial x}(f^3)\right)=-f^3-3xf^2f_x=-f^3+3x^2f^5$$

وبالمثل نجد أن:

$$z_{yy}=-f^3+3y^2f^5$$

$$z_{zz}=-f^3+3z^2f^5$$

وبالتالي نجد أن:

$$f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=-3f^3+3(x^2+y^2+z^2)f^5$$

وحيث أن

$$f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Rightarrow f^2=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\Rightarrow x^2+y^2+z^2=\frac{1}{f^2}$$

وبالتالي نجد أن:

$$f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=-3f^3+3\frac{f^5}{f^2}=-3f^3+3f^3=0$$

ملحوظة: معادلة لابلاس فى بعدين هى $f_{xx}+f_{yy}=0$ وهى تصف التوزيع المستقر للحرارة فى جسم مستقر (كصفيحة) ومعادلة لابلاس فى ثلاثة أبعاد هى $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=0$ ،

مثال: بين أن كل من الدوال التالية تحقق معادلة لابلاس:

(1) $f(x,y)=x^2-y^2$ (4) $f(x,y,z)=e^{3x+4y}\cos 5z$

(2) $f(x,y)=e^{-2y}\cos 2x$ (5) $f(x,y,z)=\cos 3x\cos 4y\sinh 5z$

(3) $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

الحـــــــــــل

(1) $f_x=2x$, $f_{xx}=2$, $f_y=-2y$, $f_{yy}=-2$

$$\therefore\ f_{xx}+f_{yy}=2-2=0$$

(2) $f_x=-2e^{-2y}\sin 2x$, $f_{xx}=-4e^{-2y}\cos 2x$

$f_y=-2e^{-2y}\cos 2x$, $f_{yy}=4e^{-2y}\cos 2x$

$$\therefore\ f_{xx}+f_{yy}=-4e^{-2y}\cos 2x+4e^{-2y}\cos 2x=0$$

(3) $f_x=-x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2},$

$$f_{xx}=(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\left[-(x^2+y^2+z^2)+3x^2\right]$$

بالمثل نجد أن

$$f_{yy}=(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\left[-(x^2+y^2+z^2)+3y^2\right]$$

$$f_{zz}=(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\left[-(x^2+y^2+z^2)+3z^2\right]$$

ومنها نحصل على:

$$f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\left\{-3(x^2+y^2+z^2)+3y^2+3z^2+3y^2\right\}=0$$

(4) $f_x=3e^{3x+4y}\cos 5z \quad , \quad f_{xx}=9e^{3x+4y}\cos 5z$

$f_y=4e^{3x+4y}\cos 5z \quad , \quad f_{yy}=16e^{3x+4y}\cos 5z$

$f_z=-5e^{3x+4y}\sin 5z \quad , \quad f_{zz}=-25e^{3x+4y}\cos 5z$

وبالتالى فإن

$$\therefore \quad f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=(9+16-25)e^{3x+4y}\cos 5z=0$$

(5) $f_x=-3\sin 3x\cos 4y\sinh 5z$

$\therefore \quad f_{xx}=-9\cos 3x\cos 4y\sinh 5z=-9f(x,y,z)$

$f_y=-4\cos 3x\sin 4y\sinh 5z$

$\therefore \quad f_{yy}=-16\cos 3x\cos 4y\sinh 5z=-16\, f(x,y,z)$

$f_z=5\cos 3x\cos 4y\cosh 5z$

$\therefore \quad f_{zz}=25\cos 3x\cos 4y\sinh 5z=25f(x,y,z)$

ومن ذلك ينتج أن

$$\therefore f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=(-9-16+25)f=0$$

نظرية : إذا كانت $z=f(x,y)$ معرفة فى منطقة D وكانت كل من المشتقات الجزئية f_x ، f_y ، f_{xy} ، f_{yx} موجودة ومتصلة فى جوار النقطة (x_0,y_0) فإن $f_{xy}=f_{yx}$ عند هذه النقطة.

مثال : اذا كانت $z=x\tan y$ فبرهن أن: $z_{xy}=z_{yx}$.

الحــــــــــــــل

$$z_x=\frac{\partial}{\partial x}(x\tan y)=\tan y, \qquad z_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}(z_x)=\frac{\partial}{\partial y}(\tan y)=\sec^2 y$$

$$z_y=\frac{\partial}{\partial y}(x\tan y)=x\sec^2 y, \qquad z_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}(z_y)=\frac{\partial}{\partial x}(x\sec^2 y)=\sec^2 y$$

وبالتالي نجد أن: $z_{xy} = z_{yx}$.

مثال : اذا كانت $f = x^3 y + e^{xy^2}$ فبرهن أن: $f_{xy} = f_{yx}$.

الحـــــــــــــــــل

$$\therefore f_x = 3x^2 y + y^2 e^{xy^2} \ , \qquad f_{yx} = 3x^2 + 2y e^{xy^2} + 2x y^3 e^{xy^2}$$

وكذلك

$$\therefore f_y = x^3 + 2x y e^{xy^2} \ , \qquad f_{xy} = 3x^2 + 2y e^{xy^2} + 2x y^3 e^{xy^2}$$

$$\therefore f_{xy} = f_{yx}$$

مثال : إذا كانت $f(x,y) = x^2 \sin y + y^2 \cos x$ فبرهن أن: $f_{xy} = f_{yx}$.

الحـــــــــــــــــل

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \sin y + y^2 \cos x\right) = 2x \sin y - y^2 \sin x,$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(z_x) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x \sin y - y^2 \sin x\right) = 2x \cos y - 2y \sin x$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 \sin y + y^2 \cos x\right) = x^2 \cos y + 2y \cos x,$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(z_y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \cos y + 2y \cos x\right) = 2x \cos y - 2y \sin x$$

وبالتالي نجد أن: $f_{xy} = f_{yx}$.

نظرية :

إذا كانت $z = f(x,y)$ معرفة فى منطقة D وكانت كل من المشتقات الجزئية f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} موجودة ومتصلة فى جوار النقطة (x_0, y_0) فإن $f_{xy} = f_{yx}$ عند هذه النقطة

مثال : ابحث هل $f_{xy} = f_{yx}$ للدالة $f = x^3 y + e^{xy^2}$

الحل :

$$\therefore f_y = x^3 + 2x y e^{xy^2} \ , \qquad f_{xy} = 3x^2 + 2y e^{xy^2} + 2x y^3 e^{xy^2}$$

وكذلك

$$\therefore f_x = 3x^2 y + y^2 e^{xy^2} \ , \qquad f_{yx} = 3x^2 + 2y e^{xy^2} + 2x y^3 e^{xy^2}$$

$$\therefore \quad f_{xy} = f_{yx}$$

مثال : أثبت أن $f_{xy} \neq f_{yx}$ إذا كان

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x y (x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

الحل :

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}$$

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=0$$

$$f_y(h,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(h,k)-f(h,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{hk(h^2-k^2)}{k(h^2+k^2)}=h$$

$$\therefore f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=0$$

بالمثل

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}$$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$$f_x(0,k)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,k)-f(h,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{hk(h^2-k^2)}{h(h^2+k^2)}=-k$$

$$\therefore f_{yx}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{-k-0}{k}=-1$$

ومنها نجد أن $f_{xy}\neq f_{yx}$

التفاضل الكلي للدوال في اكثر من متغير

يعرف التفاضل الكلي للدالة $f(x,y)$ بالصورة:

$$dz=f_x dx+f_y dy$$

والتفاضل الكلي للداله $f(x,y,z)$ يكون بالصورة:

$$df=f_x dx+f_y dy+f_z dz$$

وبصفة عامة إذا كانت $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ فإن

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$.

مثال: أوجد التفاضل الكلي للدوال الاتيه:

$(i)\ f(x,y)=\frac{x}{y}e^x \qquad (ii)\ f(x,y)=\frac{x}{y} \qquad (iii)\ f(x,y,z)=e^{x^2+y^2}\sin z^2$

الحـــــــــــل

يترك للطالب كتمرين

تفاضل دالة الدالة:

نظرية: لتكن $z = f(x,y)$ دالة قابلة للتفاضل بالنسبة إلى x ، y حيث أن $x = x(u,v)$ ، $y = y(u,v)$ فإن:

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = f_x x_u + f_y y_u \;\; or \;\; z_u = \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = z_x x_u + z_y y_u$$

$$f_v = \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = f_x x_v + f_y y_v \;\; or \;\; z_v = \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = z_x x_v + z_y y_v$$

نتيجة(١): نفرض أن $z = f(x,y)$ قابلة للتفاضل بالنسبة إلى x, y حيث أن $x = x(t), y = y(t)$ فيكون

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = f_x x'(t) + f_y y'(t) \;\; or \;\; \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = z_x x'(t) + z_y y'(t)$$

ويسمى $\frac{df}{dt}$ أو $\frac{dz}{dt}$ بالمعامل التفاضلى الكلى.

نتيجة(٢): نفرض أن $z = f(r)$ قابلة للتفاضل بالنسبة إلى r حيث أن $r = r(x,y)$ فيكون

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = r_x f'(r)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} = r_y f'(r)$$

مثال : اذا كانت $z = f(x,y)$ حيث أن $x = r\cos\theta \;,\; y = r\sin\theta$ فبرهن أن:

$$z_x^2 + z_y^2 = z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta^2$$

الحـــــــــــــــل

$$z_r = \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial r}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r} = z_x\cos\theta + z_y\sin\theta \qquad (1)$$

$$z_\theta = \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \theta} = z_x(-r\sin\theta) + z_y(r\cos\theta) \qquad (2)$$

بقسمة الطرفين فى المعادلة (٢) على r نحصل على

$$\frac{1}{r} z_\theta = -z_x\sin\theta + z_y\cos\theta \qquad (3)$$

اذن من (١) ،(٣) بالتربيع والجمع نحصل على

$$z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta^2 = (z_x\cos\theta + z_y\sin\theta)^2 + (-z_x\sin\theta + z_y\cos\theta)^2 = z_x^2 + z_y^2$$

مثال : أثبت أن الدالة $z = f(x^2 y)$ تحقق العلاقة $xz_x = 2yz_y$.

الحـــــــــــــــل

نفرض أن $u = x^2 y$ أذن $z = f(u)$ ويكون

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = 2xyf'(u)$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 f'(u)$$

$$\therefore\ xz_x = f'(u).2x^2y = 2y(f'(u).x^2) = 2yz_y$$

مثال : إذا كانت $z = f(x^2+y^2)$ فأثبت أن $yz_x - xz_y = 0$.

الحـــــــــــــــل

بوضع $u = x^2+y^2$ نجد أن $z = f(u)$ ويكون:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = 2xf'(u)$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = 2yf'(u)$$

$$\therefore\ yz_x = 2xyf'(u),\ xz_y = 2xyf'(u)$$

$$yzx - xz_y = 2xyf'(u) - 2xyf'(u)$$

مثال : إذا كانت $z = f(x+ct)+g(x-ct)$ فبرهن أن: $z_{tt} = c^2 z_{xx}$.

الحـــــــــــــــل

نفرض أن $u = x+ct$ ، $v = x-ct$ أذن $z = f(u)+g(v)$ ويكون

$$z_x = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dg}{dv}\frac{\partial v}{\partial x} = f'(u)+g'(v),\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 1$$

$$z_{xx} = \frac{df'}{du}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dg'}{dv}\frac{\partial v}{\partial x} = f''(u)+g''(v)$$

وبالمثل يكون:

$$z_t = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dg}{dv}\frac{\partial v}{\partial t} = c\left[f'(u)-g'(v)\right],\ \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial t} = c$$

$$z_{tt} = \frac{df'}{du}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dg'}{dt}\frac{\partial v}{\partial x} = c^2\left[f''(u)+g''(v)\right]$$

وبالتالي يكون:

$$z_{tt} = c^2 z_{xx}$$

مثال : إذا كانت $z = f(r),\ r = \sqrt{x^2+y^2}$ فبرهن أن: $z_{xx}+z_{yy} = f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)$.

الحـــــــــــــــل

$$\because\ z_x = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\ r_x,$$

$$\therefore\ z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'(r)r_x) = \frac{\partial}{\partial x}(f'(r))r_x + f'(r)\frac{\partial}{\partial x}(r_x)$$

$$= \frac{df'}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}.r_x + f'(r)r_{xx}$$

$$= f''(r)(r_x)^2 + f'(r)r_{xx}$$

وبالمثل نجد أن

$$z_{yy}=f''(r).(r_y)^2+f'(r)r_{yy}$$

وبالتالي نجد أن:

$$z_{xx}+z_{yy}=f''(r)\left[(r_x)^2+(r_y)^2\right]+f'(r)\left[r_{xx}+r_{yy}\right]$$

ولكن

$$r_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r},\quad r_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{r-xr_x}{r^2}=\frac{r-\dfrac{x^2}{r}}{r^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}=\frac{y^2}{r^3}$$

وبالمثل نجد أن

$$r_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{r},\quad r_{yy}=\frac{x^2}{r^3}$$

وبالتالي نجد أن:

$$(r_x)^2+(r_y)^2=1,\ r_{xx}+r_{yy}=\frac{1}{r}$$

$$z_{xx}+z_{yy}=f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)$$

مثال : اذا كانت $z=f(x,y)$ حيث $x=r\cos\theta\ ,y=r\sin\theta$ أوجد كلاً من f_{xx},f_{yy} ثم أثبت أن

$$f_{xx}+f_{yy}=f_{rr}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}$$

الحــــــــــــــــل

من العلاقات $x=r\cos\theta\ ,y=r\sin\theta$ نستنتج أن

$$r^2=x^2+y^2\ ,\ \theta=\tan^{-1}(y/x)$$

$$\therefore\quad \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\cos\theta\quad ,\ \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}=\sin\theta$$

$$\therefore\quad \frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{1}{1+(y/x)^2}.\frac{-y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{-y}{r^2}=-\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{1}{1+(y/x)^2}.\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{x}{r^2}=\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x=\frac{\partial f}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\theta}.\frac{\partial\theta}{\partial x}=\cos\theta\, f_r-\frac{\sin\theta}{r}f_\theta$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial r}(f_x).\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\theta}(f_x)\,.\frac{\partial\theta}{\partial x}==\cos\theta\frac{\partial f_x}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f_x}{\partial\theta}$$

$$=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left[\cos\theta\, f_r-\frac{\sin\theta}{r}f_\theta\right]-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\cos\theta\, f_r-\frac{\sin\theta}{r}f_\theta\right]$$

$$=\cos^2\theta\, f_{rr}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}f_\theta-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}f_{\theta r}$$

$$-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}f_{r\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}f_r+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}f_\theta+\frac{\sin^2\theta}{r^2}f_{\theta\theta}$$

وبالتالي نجد أن:

$$\therefore f_{xx}=\cos^2\theta f_{rr}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\left[f_{r\theta}+f_{\theta r}\right]+2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}f_\theta$$

$$+\frac{\sin^2\theta}{r}f_r+\frac{\sin^2\theta}{r^2}f_{\theta\theta} \qquad (1)$$

بالمثل

$$\frac{\partial f}{\partial y}=f_y=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}=\sin\theta\, f_r+\frac{\cos\theta}{r}f_\theta$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]=\frac{\partial}{\partial r}(f_y)\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\theta}(f_y)\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial}{\partial r}\left[\sin\theta\, f_r+\frac{\cos\theta}{r}f_\theta\right]\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\, f_r+\frac{\cos\theta}{r}f_\theta\right]\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$=\left[\sin\theta\, f_{rr}+\frac{\cos\theta}{r}f_{r\theta}-\frac{\cos\theta}{r^2}f_\theta\right].\sin\theta$$

$$+\left[\sin\theta\, f_r+\sin\theta\, f_{\theta r}+\frac{\cos\theta}{r}f_{\theta\theta}-\frac{\sin\theta}{r}f_\theta\right]\cdot\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\therefore f_{yy}=\sin^2\theta f_{rr}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\left[f_{r\theta}+f_{\theta r}\right]-2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}f_\theta$$

$$+\frac{\cos^2\theta}{r}f_r+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}f_{\theta r}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}f_{\theta\theta} \qquad (2)$$

وبجمع $f_{\theta r}=f_{r\theta}$ متصلة ومشتقاتها الجزئية متصلة فإن f وحيث أن الدالة (١) ، (٢) نحصل على معادلة لابلاس فى الأحداثيات القطبية

$$f_{xx}+f_{yy}=f_{rr}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}$$

ملحوظة : النتيجة السابقة يمكن كتابتها على الصورة

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)f$$

حيث يعرف المؤثر التفاضلى $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ بمؤثر لابلاس بدلالة الاحداثيات الكارتيزية x,y ؛ وعليه فإن الصورة $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)$ تعطى مؤثر لابلاس بدلالة الاحداثيات القطبية r,θ

بصورة عامة يعرف مؤثر لابلاس فى الفراغ في الإحداثيات الكارتيزية

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}==\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi})+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

الدوال المتجانسة:

تعريف : الدالة $f(x,y)$ تسمى دالة متجانسة من الدرجة n فى x,y إذا كان:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y) \qquad (١)$$

حيث أن $\lambda \neq 1$ مقدار ثابت.

وعموما يقال أن $f(x_1,x_2,...,x_n)$ أنها دوال متجانسة من الدرجة n فى $x_1,x_2,...,x_n$ إذا كان

$$f(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n)=\lambda^n f(x_1,x_2,...,x_n) \qquad (٢)$$

بوضع $\lambda=\frac{1}{x}$ فى (١) نحصل على

$$f(1,y/x)=\frac{1}{x^n}f(x,y)=f(y/x)$$

$$f(x,y)=x^n f(y/x) \qquad (٣)$$

وهذا هو الصورة العامة لدالة متجانسة من الدرجة النونية

مثال : برهن أن الدالة $f(x,y)=x^4-5y^4+2xy^3$ متجانسة.

الحـــــــــــــــل

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^4-5(\lambda y)^4+2(\lambda x)(\lambda y)^3=\lambda^4(x^4-5y^4+2xy^3)$$

أذن الدالة متجانسة من الدرجة الرابعة.

نظرية أويلر للدوال المتجانسة:

نظريه: إذا كانت $f(x,y)$ دالة متجانسة من الدرجة n فى x,y فإن

$$x\,f_x+y\,f_y=nf$$

البرهان :

حيث أن $f(x,y)$ دالة متجانسة من الدرجة n فى x,y فإن $f(x,y)=x^n g(y/x)$ وبالتالى فإن

$$f_x=nx^{n-1}g(y/x)+x^n g'(y/x).(y/x^2)$$

$$=nx^{n-1}g(y/x)-y\,x^{n-2}g'(y/x)$$

$$f_y=x^n g'(y/x).(1/x)$$

بالتعويض عن f_x, f_y نحصل على

$$x\,f_x+y\,f_y=nx^{n-1}g(y/x)-y\,x^{n-2}g'(y/x)+x^n g'(y/x).(1/x)$$

$$=nx^n g(y/x)=n\,f(x,y)$$

مثال: حقق نظرية أويلر للدوال المتجانسة للدالة $f(x,y,z)=5x^2-2y^2+7z^2$.

الحـــــــــــــــل

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=5(\lambda x)^2-2(\lambda y)^2+7(\lambda z)^2=\lambda^2 f(x,y,z)$$

أى أن الدالة متجانسة من الدرجة الثانية وبالتالي يكون:

$$\therefore x\, f_x + y\, f_y = 2f$$

مثال : إذا كانت $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ فأثبت أن $xf_x+yf_y=0$.

الحــــــــــــــــــل

$$\because f_x(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\because f_y(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\therefore xf_x+yf_y=-\frac{xy}{x^2+y^2}+\frac{xy}{x^2+y^2}=0$$

مثال : إذا كانت $z=\frac{x-y}{x+y}$ فأثبت أن $xz_x+yz_y=0$

الحــــــــــــــــــل

يترك للطالب كتمرين

مثال : إذا كانت $f(x,y)=x\,y\,e^{y/x}$ فأثبت أن $xf_x+yf_y=2f$

الحــــــــــــــــــل

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,y\,e^{y/x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(x\,y\,)e^{y/x}+x\,y\frac{\partial}{\partial x}\left(\,e^{y/x}\right)$$

$$=ye^{y/x}+x\,y\,e^{y/x}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=ye^{y/x}+x\,y\,e^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$=ye^{y/x}-\frac{y^2}{x}e^{y/x}=\left(y-\frac{y^2}{x}\right)e^{y/x}$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(x\,y\,e^{y/x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(x\,y\,)e^{y/x}+x\,y\frac{\partial}{\partial y}\left(\,e^{y/x}\right)$$

$$=xe^{y/x}+x\,y\,e^{y/x}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=xe^{y/x}+x\,y\,e^{y/x}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=xe^{y/x}+y\,e^{y/x}=(x+y)e^{y/x}$$

$$xf_x+yf_y=x\left(y-\frac{y^2}{x}\right)e^{y/x}+y(x+y)e^{y/x}$$

$$=(xy-y^2)e^{y/x}+(xx+y^2)e^{y/x}$$

$$=\left[xy-y^2+xy+y^2\right]e^{y/x}=2xye^{y/x}=2\,f\,(x,y)$$

مثال:ـ إذا كانت $z=\sin^{-1}\frac{x^2+y^2}{x+y}$ فأثبت أن $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{df}{dy}=\tan z$.

الحــــــــــــــــــل

بما أن $z=\sin^{-1}\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ أذن $f=\sin z=\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$

وهى دالة متجانسة من الدرجة الأولى ، وباستخدام نظرية أويلر نحصل على

$$x\frac{\partial}{\partial x}(\sin z)+y\frac{d}{dy}(\sin z)=1.\sin z$$

وبالتالي نجد أن

$$x\frac{\partial}{\partial z}(\sin z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{d}{dz}(\sin z)\frac{\partial z}{\partial y}=\sin z$$

$$x\cos z\frac{\partial z}{\partial x}+y\cos z\frac{\partial z}{\partial y}=\sin z$$

بالقسمة على $\cos z$ نحصل على: $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\tan z$.

الدوال الضمنية

يمكن استخدام المشتقات الجزئيه الدوال في اكثر من متغير لايجاد مشتقات الدوال المعرفة ضمنيا، فمثلا المعادلة: $e^{xy}+\sin(x+y)=0$ هي دالة ضمنية علي الصورة $F(x,y)=0$ وهي معادلة تعرف دالة ضمنية في متغير واحد x بحيث أن $F(x,y)=0, y=f(x)$ أو $F(x, f(x))=0$ ، وكذلك المعادلة $F(x,y,z)=0$ تعرف دالة ضمنية فى المتغيرين x ، y حيث أن $z=f(x,y)$ ويكون $F(x,y,f(x,y))=0$ او $F(x,y,z)=0,\ z=f(x,y)$.

نظرية: اذا كانت المعادلة $F(x,y)=0$ تعرف دالة ضمنية قابلة للتفاضل في متغير واحد x بحيث أن $y=f(x)$ فإن $y'=-\dfrac{F_x}{F_y}$.

البرهان

بفرض أن المعادلة $F(x,y)=0$ تعرف دالة في متغير واحد x بحيث أن $F(x, f(x))=0$ ، وبفرض أن:

$$z = F(x,y) = 0, y = f(x)$$

وبتطبيق قاعدة السلسلة نجد أن:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(1) + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow F_x + F_y y' = 0$$

وبالتالي نجد أن:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $xe^y + ye^x = 0$.

الحـــــــــل

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{(y+1)e^x}{(x+1)e^x} = -\frac{y+1}{x+1}$$

مثال: اذا كانت $y = f(x)$ تحقق المعادلة $y^4 + 3y - 4x^3 - 5x - 1 = 0$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحـــــــــل

بفرض أن $F(x,y) = y^4 + 3y - 4x^3 - 5x - 1 = 0$ فيكون $y' = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{12x^2+5}{4y^3+3}$.

نظرية: اذا كانت المعادلة $F(x,y,z) = 0$ تعرف دالة ضمنية فى المتغيرين x ، y بحيث أن $z = f(x,y)$ فإن $z_x = -\frac{F_x}{F_z},\ z_y = -\frac{F_y}{F_z}$.

البرهان: بفرض أن المعادلة $F(x,y,z) = 0$ تعرف دالة ضمنية فى المتغيرين x ، y حيث أن $z = f(x,y)$ فيكون:

$$F(x,y,f(x,y)) = 0$$

أو

$$F(x,y,z) = 0, \quad z = f(x,y)$$

وبتطبيق قاعده السلسلة نجد أن:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 ,$$

وبالتالي نجد أن:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1) + \frac{\partial F}{\partial y}(0) + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow F_x + F_z z_x = 0 \Rightarrow z_x = -\frac{F_x}{F_z}$$

حيث أن $F_z \neq 0$

وبالمثل يمكن الحصول علي:

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

مثال: اذا كانت الداله $z = f(x,y)$ تحقق الدالة الضمنية $x^2z^2 + xz^2 - z^3 + 4yz - 5 = 0$.

الحـــــــــــــل

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{2xz^2 + y^2}{2x^2z - 3z^2 + 4z}$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2xy + 4z}{2x^2z - 3z^2 + 4y}$$

المشتقة الاتجاهيه للدوال في اكثر من متغير

تعريف: معدل تغير الدالـة $f(x,y)$ فـي اتجـاة متجـة الوحـدة $\vec{u} = (a,b)$ يسـمي بالمشـتقة الاتجاهيـه لهـذه الدالـة ويرمـز لهـا بـالرمز $D_{\vec{u}} f$ وهـذه المشـتقة تعرف بالصورة:

$$D_{\vec{u}} f = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+ah, y+bh) - f(x,y)}{h}$$

وبوجه عام فإن حساب هذه النهاية يكون في غاية الصعوبة ولذلك نحن بحاجة الي طريقه اكثر سهولة لحساب المشتقة الاتجاهيه وذلك من خلال استنتاج صيغة تكافئ هذا التعريف . ولاستنتاج صيغة تكافئ هذه النهاية لحساب المشتقة الاتجاهيه للدالة $f(x,y)$ نتبع التالي:

نعرف دالة جديدة في متغير واحد بالصورة:

$$g(z) = f(x_0 + az, y_0 + bz)$$

حيث أن x_0 ، y_0 ، a ، b ثوابت اختيارية.

وبالتالي من خلال تعريف المشتقة للدوال في متغير واحد نجد أن:

$$g'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h}$$

وبالتالي نجد أن:

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h}$$

وبالتعويض في العلاقة السابقة عن $g(z)$ نجد أن:

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h} = D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$$

وبالتالي يكون لدينا العلاقة:

$$g'(0) = D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) \qquad (*)$$

نظرية: المشتقة الاتجاهية للدالة $f(x,y)$ عند النقطة (x_0, y_0) في اتجاة متجة الوحدة $u = (a,b)$ تعطي من العلاقة:

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b$$

والمشتقة الاتجاهية للدالة $f(x,y,z)$ في اتجاة متجة الوحدة $u=(a,b,c)$ تعطي بالصورة:

$$D_{\vec{u}} f = f_x a + f_y b + f_z c$$

البرهان

لتحقق من صحة هذه النظريه نعتبر الدالة

$$g(z) = f(x,y), \qquad x = x_0 + az, \qquad y = y_0 + bz$$

وبتطبيق قاعده السلسلة نجد أن:

$$g'(z) = \frac{dg}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dz} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dz} = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$$

وبوضع $z=0$ نجد أن $x = x_0$ ، $y = y_0$ وبالتالي يكون

$$g'(0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b \qquad (**)$$

ومن العلاقتين (*) ، (**) نجد أن المشتقة الاتجاهية للدالة $f(x,y)$ عند النقطة (x_0, y_0) تعطي من العلاقة:

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = g'(0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b$$

ملحوظة: في سياق النظرية السابقة تكون المشتقة الاتجاهية للدالة $f(x,y)$ عند النقطة (x,y) في اتجاة متجة الوحدة $u=(a,b)$ تعطي بالصورة:

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$$

والمشتقة الاتجاهية للدالة $f(x,y,z)$ عند النقطة (x,y,z) في اتجاة متجة الوحدة $u=(a,b,c)$ تعطي بالصورة:

$$D_{\vec{u}} f(x,y,z) = f_x(x,y,z)a + f_y(x,y,z)b + f_z(x,y,z)c$$

ملحوظة: متجة الوحدة $\vec{u}$ في اتجاة المتجة الذي يصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور ox هو $\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$.

مثال: اذا كانت $f(x,y) = xe^{xy} + y$ فاوجد $D_{\vec{u}} f(2,0)$ حيث أن $\vec{u}$ هو متجة وحدة في الاتجاة $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

الحـــــــــــــــل

في هذه الحالة متجه الوحدة $\vec{u}$ يعطي بالصورة:

$$\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

وبالتالي نجد أن:

$$\because D_{\vec{u}} f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b = \left(-\frac{1}{2}\right)(e^{xy} + xye^{xy}) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x^2 e^{xy} + 1)$$

وبالتالي نجد أن:

$$D_{\vec{u}} f(2,0) = \left(-\frac{1}{2}\right)(1) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(5) = \frac{5\sqrt{3}-1}{2}$$

مثال: اذا كانت $f(x,y,z) = x^2 z + y^3 z^2 - xyz$ فاوجد $D_{\vec{u}} f(x,y,z)$ في اتجاه المتجة $\vec{v} = (-1,0,3)$.

الحـــــــــــــــــــــل

متجة الوحدة $\vec{u}$ في اتجاه المتجة $\vec{v} = (-1,0,3)$ يعطي بالصورة:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,0,3)$$

وبالتالي نجد أن:

$$D_{\vec{u}} f(x,y,z) = f_x(x,y,z)a + f_y(x,y,z)b + f_z(x,y,z)c$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)(2xz - yz) + (0)(3y^2 z^2 - xy) + \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)(x^2 + 2y^2 z - xy)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}(3x^2 + 6y^3 z - 3xz + yz)$$

الانحدار للدوال في اكثر من متغير

متجة الميل او الانحدارللدالة $f(x,y)$ يعطي بالصورة:

$$\nabla f = (f_x, f_y) = f_x \vec{i} + f_y \vec{j}$$

والانحدار للدالة $f(x,y,z)$ تكون بالصورة:

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$$

وبالتالي يمكن حساب المشتقة الاتجاهيه الدوال في اكثر من متغير من خلال متجة الميل لهذه الدوال كمايلي:

$$\because D_{\vec{u}} f(x,y,z) = f_x(x,y,z)a + f_y(x,y,z)b + f_z(x,y,z)c = (f_x, f_y, f_z).(a,b,c) = \nabla f.(a,b,c)$$

وبالتالي نجد أن:

$$D_{\vec{u}} f(x,y,z) = \nabla f.\vec{u}$$

مثال: اذا كانت $f(x,y) = x\cos y$ فاوجد $D_{\vec{u}} f(x,y)$ في اتجاة المتجه $\vec{v} = (2,1)$.

الحـــــــــــــــــــــل

نوجد متجة الوحدة $\vec{u}$في اتجاه المتجة $\vec{v} = (2,1)$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

وبحساب متجة الميل (الانحدار) نجد أن:

$$\nabla f = (f_x, f_y) = (\cos y, -x\sin y)$$

وبالتالي نجد أن:

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = \nabla f.\vec{u} = (\cos y, -x\sin y)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\cos y - x\sin y)$$

مثال: اذا كانت $f(x,y,z) = \sin(yz) + \ln(x^2)$ **فأوجد** $D_{\vec{u}} f(x,y,z)$ عند النقطة $(1,1,\pi)$ في اتجاة المتجه $\vec{v} = (1,1,-1)$ **.**

الحـــــــــــــــل

نوجد متجة الوحدة $\vec{u}$ في اتجاه المتجة $\vec{v} = (1,1,-1)$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

وبحساب متجة الميل (الانحدار) نجد أن:

$$\nabla f(x,y,z) = (f_x, f_y, f_z) = \left(\frac{2}{x}, z\cos yz, y\cos yz\right)$$

وبالتالي نجد أن:

$$\nabla f(1,1,\pi) = \left(\frac{2}{1}, \pi\cos\pi, \cos\pi\right) = (2, -\pi, -1)$$

وبالتالي تكون:

$$D_{\vec{u}} f(1,1,\pi) = (2,-\pi,-1).\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2-\pi+1) = \frac{3-\pi}{\sqrt{3}}$$

تمارين (٢)

(١) أوجد المشتقات الجزئية الأولى لكل من الدوال التالية :

(1) $f(x,y) = 2x^2 - 3y - 4$

(2) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(3) $f(x,y) = \ln xy$

(4) $f(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

(5) $f(x,y,z) = 1 + yx^2 - 2z^2$

(6) $f(x,y,z) = \sin^{-1}(xyz)$

(7) $f(x,y) = (xy-1)^2$

(8) $f(x,y) = x^y$

(9) $f(x,y) = e^{-y}\sin(x+y)$

(10) $f(x,y,z) = \sec^{-1}(x+yz)$

(11) $f(x,y,z) = x - \sqrt{y^2 + z^2}$

(12) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(٢) أوجد المشتقات الجزئية الثانية لكل من الدوال التالية:

(1) $f(x,y) = x + y + xy$

(2) $f(x,y) = \ln(x+y)$

(3) $f(x,y) = \sin(xy)$

(4) $h(x,y) = xe^y y + 1$

(٣) بين أن $w_{xy} = w_{yx}$ لكل من

(1) $w = \ln(2x+3y)$

(2) $w = e^x + x\ln y + y\cos x$

(3) $w = x\sin y + y\sin x$

(4) $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(٤) أوجد المشتقة f_{xyz} إذا كان $f=3x^2y^3z+2xy^4z^2-yz$

(١٠) بين أن الدوال التالية تحقق الشرط $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$

(1) $u(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

(2) $u(x,y,z)=e^{3x+4y}\cos 5z$

(3) $u(x,y,z)=\cos 3x\cos 4y\sinh 5z$

(١١) أوجد $\dfrac{dw}{dt}$ إذا كان

(1) $w=x^2+y^2$, $x=\cos t$, $y=\sin t$

(2) $w=x^2+y^2$, $x=\cos t+\sin t$, $y=\cos t-\sin t$

(3) $w=\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{z}$, $x=\cos^2 t$, $y=\sin^2 t$, $z=\dfrac{1}{t}$

(4) $w=z-\sin xy$, $x=t$, $y=\ln t$, $z=e^t$

(١٢) أوجد w_r, w_θ اذا كان

(1) $w=4e^x\ln y$, $x=\ln(r\cos\theta)$, $y=r\sin\theta$

(2) $w=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$, $y=r\cos\theta$, $x = r\sin\theta$

(١٣) أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ من العلاقات الآتية:

(1) $x^3-2y^2+xy=0$

(2) $xy+y^2-3x-3=0$

(3) $xe^y+\sin xy+y=\ln 2$

(١٤) أوجد z_x, z_y إذا كانت

(1) $z^3-xy+yz+y^3-2=0$

(2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$

(3) $\sin(x+y)+\sin(y+z)+\sin(x+z)=0$

(١٥) برهن أن الدوال الاتية تحقق نظرية أويلر للدوال المتجانسة:

(1) $f(x,y)=2x^3+3x^2y+y^3$

(2) $f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$

(3) $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

(١٦) إذا كان $z=\cos(x+y)+\cos(x-y)$ أثبت أن $z_{xx}-z_{yy}=0$

الباب الثالث

تطبيقات على المشتقات الجزئية

تطبيقات هندسية:

في الفراغ الثلاثي والذي يتحدد بالإحداثيات الكارتيزية المتعامدة (x,y,z) المعادلة $f(x,y,z)=c$ هي معادلة السطح S في R^3. وسوف ندرس بعض المفاهيم الهندسية على هذا السطح.

تعريف: يسمى السطح $f(x,y,z)=c$ بالسطح التفاضلى عند النقطة (x_0,y_0,z_0) إذا كانت المشتقات الجزئية f_x,f_y,f_z كلها موجودة ومتصلة عند النقطة (x_0,y_0,z_0).

وبما أن لأى مستوى يوجد مماس وحيد (إن وجد) عند كل نقطة عليه.فبالمثل لأى سطح S يوجد مماس وحيد (إن وجد) عند كل نقطة عليه.

وعليه نجد أن المستوى المماس للسطح عند النقطة (x_0,y_0,z_0) يحتوى على كل خطوط التماس عند النقطة (x_0,y_0,z_0).

لتعيين معادلة المستوى المماس للسطح عند النقطة $P(x_0,y_0,z_0)$. نفرض أن النقطة $Q(x,y,z)$ تقع فى هذا المستوى. وليكن $\underline{r},\underline{r}_0$ المتجهين المرسومين من نقطة الأصل إلى النقطتين P,Q على الترتيب، وعليه فإن المتجه $(\underline{r}-\underline{r}_0)$ يقع فى المستوى المطلوب.ليكن أيضا المتجه العمودى على السطح عند النقطة P هو $\underline{N}_0=\underline{\nabla}f\big|_p$ والرمز السفلى P يشير إلى معدل التغير العمودى يحسب عند النقطة P. فتكون معادلة المستوى المماس هى:

$$(\underline{r}-\underline{r}_0).\underline{N}_0=(\underline{r}-\underline{r}_0).\underline{\nabla}f\big|_p=0 \qquad (١)$$

لأن المتجه $(\underline{r}-\underline{r}_0)$ عمودى على المتجه $\underline{N}_0$ (العمودى على السطح S).

ويمكن كتابة المعادلة (١) فى الصورة الكارتيزية وهى:

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_p+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_p+(z-z_0)\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_p=0 \qquad (٢)$$

نظرية: في السطح $f(x,y,z)=c$ يكون $\underline{\nabla}f$ هو متجه عمودى على السطح.

البرهــان: نفــرض أن $\underline{r}=x\,\underline{i}+y\,\underline{j}+z\,\underline{k}$ هــو متجــه الموضــع لأى نقطــة $P(x,y,z)$ على السطح وبالتالي فإن:

$$d\underline{r}=dx\,\underline{i}+dy\,\underline{j}+dz\,\underline{k} \qquad (١)$$

يقـع فـى المسـتوى الممـاس للسـطح عنـد P . وبكتابـة معادلـة السـطح علـى الصورة $\phi(x,y,z)=f(x,y,z)-c=0$ فنحصل على

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz \qquad (٢)$$

ويمكن كتابة هذا المقدار كحاصل ضرب قياسى لمتجهين على النحو التالى:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\underline{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\underline{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\underline{k}\right).(dx\,\underline{i}+dy\,\underline{j}+dz\,\underline{k})=0$$

من (١) ، (٢) يكون $\underline{\nabla}\phi\,.\,d\underline{r}=0$

أى أن $\underline{\nabla}\phi$ يكون عموديا على $d\underline{r}$ ولذلك فهو عمودي على السطح .

ملاحظات:

١- يمكن إيجاد معادلة المستوى المماس لسطحين S_1,S_2 عند نقطة التماس بنفس الطريقة السابقه.

٢- يكون السطحان متماسين من الداخل إذا كان المتجهان العموديان على السطحين عند نقطة تماسهما متوازيين ولهما نفس الاتجاه.

٣- يكون السطحان متماسين من الخارج إذا كان المتجهان العموديان على السطحين عند نقطة تماسهما متوازيين ولكن اتجاههما مختلفين .

معادلة الخط العمودى على السطح:

لإيجاد معادلات الخط العمودى على السطح S عند النقطة P نفرض أن النقطة $R(x,y,z)$ تقع على العمود $\underline{N}_0$ على السطح عند P ويكون $\underline{r}$ هو المتجه المرسوم من o إلى النقطة R .وعلى ذلك يكون المتجه $(\underline{r}-\underline{r}_0)$ ينطبق على المتجه $\underline{N}_0$ وبالتالى تكون معادلة العمودى على السطح على الصورة:

$$(\underline{r}-\underline{r}_0)\,/\!/\,\underline{N}_0$$

أى أن $(\underline{r}-\underline{r}_0)=\lambda\ \underline{N}_0$ (حيث بارامتر).
وعليه فيكون

$$(x-x_0)\underline{i}+(y-y_0)\underline{j}+(z-z_0)\underline{k}=\lambda\left[\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_p\underline{i}+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_p\underline{j}+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_p\underline{k}\right] \quad (٣)$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة:

$$\frac{(x-x_0)}{(f_x)_p}=\frac{(y-y_0)}{(f_y)_p}=\frac{(z-z_0)}{(f_z)_p}=t \quad (٤)$$

مثال: أوجد معادلة المستوى المماس والمستقيم العمودى على السطح

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z-9=0$$

عند النقطة $p(1,2,4)\in S$

الحـــــــــــــــل

نوجد أولاً المشتقات الجزئية عند النقطة $p(1,2,4)$

$$f_y=2y\Rightarrow(f_y)_p=4\ ;\ f_x=2x\Rightarrow(f_x)_p=2\ :\quad f_z=1\Rightarrow(f_z)_p=1$$

∴معادلة المستوى المماس للسطح عند النقطة $(1,2,4)$ هي

$2(x-1)+4(y-2)+(z-4)=0$ أو $2x+4y+z=14$

معادلات الخط العمودى على السطح عندالنقطة $(1,2,4)$ هي

$$\frac{(x-1)}{2}=\frac{(y-2)}{4}=\frac{(z-4)}{1}=t$$

أي $x=1+2t\quad,\quad y=2+4t\quad,\quad z=4+t$

مثال : أوجد معادلة المستوى المماس والخط العمودى على السطح $x^2+xyz-z^3=1$ عند النقطة $(1,1,1)$

الحـــــــــــــــل

نوجد أولاً المشتقات الجزئية عند النقطة $p(1,1,1)$

$$f_x=(2x+yz)\Rightarrow(f_x)_p=3$$

$$f_y=xz\Rightarrow(f_y)_p=1$$

$$f_z=xy-3z^2\Rightarrow(f_z)_p=-2$$

∴معادلة المستوى المماس للسطح عند النقطة $(1,1,1)$ هي

$$3(x-1)+(y-1)-2(z-1)=0$$

أو

$$3x+y-2z=2$$

معادلات الخط العمودى على السطح عندالنقطة $(1,1,1)$ هى

$$\frac{(x-1)}{3}=\frac{(y-1)}{1}=\frac{(z-1)}{-2}=t$$

أي $x=1+3t \quad , \quad y=1+t \quad , \quad z=1-2t$

مثال : أوجد معادلة المستوى المماس والخط العمودى على السطح

$$S: x^2+y^2+z^2=4x-6y+2z-5\sqrt{2}$$

عند النقطة $(4,-1,2)$.

الحـــــــــــــــل

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+5$$

نوجد أولاً المشتقات الجزئية عند النقطة $p(4,-1,2)$

$$f_x=(2x-4) \Rightarrow (f_x)_p=4$$

$$f_y=2y+6 \Rightarrow (f_y)_p=4$$

$$f_z=2z-2 \Rightarrow (f_z)_p=2$$

$\therefore$ معادلة المستوى المماس للسطح عند النقطة $(4,-1,2)$ **هي**

$$4(x-4)+4(y+1)+2(z-2)=0 \quad \text{أو} \quad 2x+2y+z=8$$

معادلات الخط العمودى على السطح عندالنقطة $(4,-1,2)$ **هي**

$$\frac{(x-4)}{4}=\frac{(y+1)}{4}=\frac{(z-2)}{2}=t$$

أي $x=4+2t \quad , \quad y=-1+2t \quad , \quad z=2+t$

مفكوك تايلور:

درسنا في العام السابق مفكوك تايلور للدالة $f(x)$ حول $x=a$ وكان على الصورة

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{(n)}}{n!}f^{n}(a)+R_n$$

حيث R_n هو الباقى بعد n من الحدود ومقداره

$$R_n=\frac{(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta x) \ , \ 0<\theta<1$$

والآن يمكننا تعميم مفكوك تايلور للدالة $f(x,y)$ حول النقطة (a,b)

مفكوك تايلورللدوال فى متغيرين

إذا كانت $f(x,y)$ دالة لها مشتقات جزئية متصلة من الرتبة النونية فى منطقة مغلقة تحتوى النقطة (a,b) وهذه المنطقة كبيرة بدرجة ما لتحتوى النقطة $(a+h,b+k)$ بداخلها فإنه يوجد عدد موجب $0<\theta<1$ بحيث أن :

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)+...+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)+R_n$$

حيث R_n هو الباقي بعد n من الحدود ومقداره

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(a+\theta h,b+\theta k)\ ,\ 0<\theta<1$$

وتسمى بنظرية تايلور أو مفكوك تايلور حول النقطة (a,b)

يمكن كتابة مفكوك السابق على الصورة المختصرة :

$$f(x,y)=\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^r f\,|_{(a,b)}+R_n$$

وعندما $n\to\infty$ تسمى المتسلسلة التالية متسلسة تيلور للدالة $f(x,y)$ حول النقطة (a,b) :

$$f(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^r f\,|_{(a,b)}$$

صيغ تايلور السابقة تعد المصدر القياسى لتقريب الدوال فى متغيرين بإستخدام كثيرات حدود في x,y .الحدود ال n الاولى تعطى كثيرة الحدودية التقريب والحد الأخير يعطى الخطأ فى التقريب . الثالثة حدود الاولى فى صيغة تيلور لدالة تعطى التقريب الخطى للدالة.لتحسين التقريب الخطى نضيف حدود القوى الأعلى .

مثال: أوجد الحدود الثلاثة الأولى فى مفكوك تايلور للدالة $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ حول النقطة $(1,1)$

الحــــــــــــــــــل

$$\because f(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$f(1,1)=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$$

$$f_x(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \therefore\quad f_x(1,1)=-\frac{1}{2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2} \qquad \therefore\quad f_y(1,1)=\frac{1}{2}$$

$$f_{xx}(x,y)=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad \therefore\quad f_{xx}(1,1)=\frac{1}{2}$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad \therefore\quad f_{xy}(1,1)=0$$

$$f_{yy}(x,y) = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad \therefore \quad f_{yy}(1,1) = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x,y) = f(1,1) + \left\{(x-1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right\} f(1,1)$$

$$+\frac{1}{2}\left\{(x-1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right\}^2 f(1,1) + \ldots.$$

$$= f(1,1) + (x-1)f_x(1,1) + (y-1)f_y(1,1)$$

$$+\frac{1}{2}(x-1)^2 f_{xx}(1,1) + x\,y\,f_{xy}(1,1) + \frac{1}{2}(y-1)^2 f_{yy}(1,1) + ..$$

$$\therefore f(x,y) = \tan^{-1}\frac{x}{y} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(y-1)^2 + \ldots\ldots$$

مثال: أوجد كثيرة الحدود من الدرجة الثانية لتقريب الدالة $f(x,y) = \sin x \sin y$ حول نقطة الأصل .ووضح درجة دقة التقريب إذا كان $|y| \le 0{\cdot}1$ و $|x| \le 0{\cdot}1$

الحــــــــــــل

$$f(x,y) = \sin x \sin y \qquad \therefore \quad f(0,0) = \sin 0 \sin 0 = 0$$

$$f_x(x,y) = \cos x \sin y \qquad \therefore \quad f_x(0,0) = \cos 0 \sin 0 = 0$$

$$f_y(x,y) = \cos y \sin x \qquad \therefore \quad f_y(0,0) = \cos 0 \sin 0 = 0$$

$$f_{xx}(x,y) = -\sin x \sin y \qquad \therefore \quad f_{xx}(0,0) = -\sin 0 \sin 0 = 0$$

$$f_{yy}(x,y) = -\sin x \sin y \qquad \therefore \quad f_{yy}(0,0) = -\sin 0 \sin 0 = 0$$

$$f_{xy}(x,y) = \cos x \cos y \qquad \therefore \quad f_{xy}(0,0) = \cos 0 \cos 0 = 1$$

$$\therefore f(x,y) = f(0,0) + \left\{x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right\} f(0,0) + \frac{1}{2}\left\{x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right\}^2 f(0,0) + \ldots.$$

$$= f(0,0) + xf_x(0,0) + yf_y(0,0)$$

$$+\frac{1}{2}x^2 f_{xx}(0,0) + x\,y\,f_{xy}(0,0) + \frac{1}{2}y^2 f_{yy}(0,0) + ..$$

$$\therefore f(x,y) = \sin x \sin y = 0 + 0 + 0 + 0 + xy + R_2 = xy + R_2$$

هذه هي كثيرة الحدود من الدرجة الثانية لتقريب الدالة $f(x,y) = \sin x \sin y$ عند نقطة الأصل ويقدر الخطأ في التقريب

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(a+\theta h, b+\theta k)$$

$$R_2 = \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy}) f(a+\theta h, b+\theta k)$$

كل المشتقات الجزئية من الرتبة الثالثة لا تزيد قيمتها المطلقة عن الواحد

$$\therefore |R_2| \le \frac{1}{6}\left[(0.1)^3 + 3(0.1)^3 + 3(0.1)^3 + (0.1)^3\right] \le \frac{8}{6}(0\cdot 1)^3 \le 0.0014$$

أي أن الخطأ فى تقريب $\sin x \sin y$ حول نقطة الأصل باستخدام كثيرة حدود من الدرجة الثانية لا يزيد عن ≤ 0.0014 لما كانت $|y| \le 0\cdot 1$ و $|x| \le 0\cdot 1$

مثال: أثبت أن لجميع قيم x, y المتناهية في الصغر يكون

$$e^x \ln(1+y) = y + xy - \frac{1}{2}y^2$$

الحـــــــــــــــل

نفرض أن $f(x,y) = e^x \ln(1+y)$

$$\therefore f(0,0) = 0$$

$$f_x(x,y) = e^x \ln(1+y) \qquad \therefore\ f_x(0,0) = 0$$

$$f_y(x,y) = e^x \cdot \frac{1}{1+y} \qquad \therefore\ f_y(0,0) = 1$$

$$f_{xx}(x,y) = f_{xxx}(x,y) = ... = e^x \ln(1+y)$$

$$\therefore \quad f_{xx}(0,0) = f_{xxx}(0,0) = ... = 0$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{-e^x}{(1+y)^2} \qquad \therefore\ f_{yy}(x,y) = -1$$

$$f_{yyy}(x,y) = \frac{2(-1)^2 e^x}{(1+y)^3} \qquad \therefore\ f_{yyy}(0,0) = 2$$

وعليه فإن

$$\frac{\partial^r}{\partial y^r} f(x,y) = \frac{(-1)^{r-1}(r-1)}{(1+y)^r} e^x \qquad \therefore\ \frac{\partial^r}{\partial y^r} f(0,0) = (r-1)(-1)^{r-1}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{e^x}{1+y} \qquad \therefore\ f_{xy}(0,0) = 1$$

$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial x^s \partial y^r} f(x,y) = \frac{(-1)^{r-1}(r-1)!e^x}{(1+y)^r} \qquad \therefore\ \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^s \partial y^r} f(0,0) = (r-1)(-1)^{r-1}$$

$$\therefore \qquad e^x \ln(1+y) = 0 + x(0) + y(1) + \frac{1}{2}x^2(0) + xy(1) + \frac{1}{2}y^2(-1) + ...$$

ولقيم x, y المتناهية فى الصغر يمكن إهمال قوى x, y ابتداء من الدرجة الثالثة فتحصل على

$$e^x \ln(1+y) = y + xy - \frac{1}{2}y^2$$

لقيم x, y المتناهية في الصغر

حل آخر:من صغية تيلور لدالة فى متغير واحد ؛ نعلم أن

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ...$$

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + ...$$

$$e^x \ln(1+y) = \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ...\right)\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + ...\right) = y + xy - \frac{1}{2}y^2$$

بإهمال حدود الدرجة الثالثة فأكثر في x, y وذلك لقيم x, y المتناهية فى الصغر

مثال: أوجد مفكوك الدالة $f(x,y) = x^2y + 3y - 2$ في قوى $(x-1),(y+2)$

الحـــــــــــــــــــل

نستخدم مفكوك تايلور حيث أن $(a,b) = (1,-2)$ وعلية فإن

$$f(x,y) = x^2y + 3y - 2 \qquad \therefore\ f(1,-2) = -10$$

$$f_x(x,y) = 2xy \qquad \therefore\ f_x(1,-2) = -4$$

$$f_y(x,y) = x^2 + 3 \qquad \therefore\ f_y(1,-2) = -4$$

$$f_{xx}(x,y) = 2y \qquad \therefore\ f_{xx}(1,-2) = -4$$

$$f_{yy}(x,y) = 0 \qquad \therefore\ f_{yy}(1,-2) = 0$$

$$f_{xy}(x,y) = 2x = f_{yx}(x,y) \qquad \therefore\ f_{xy}(1,-2) = 2 = f_{yx}(1,-2)$$

$$f_{xxy}(x,y) = 2 = f_{yxx}(x,y) \qquad \therefore\ f_{xxy}(1,-2) = 2 = f_{yxx}(1,-2)$$

والمشتقات العليا الأخرى كلها تساوى صفرا

$$f_{xyy}(x,y) = f_{yyy}(x,y) = f_{yxy}(x,y) = 0$$

وعلية فإن

$$x^2y + 3y - 2 = -10 - 4(x-1) + 4(y+2) + \frac{1}{2}\left[-4(x-1)^2 + 4(x-1)(y+2)\right]$$
$$+\frac{1}{6}\left[3(x-1)^3(y+2)(2) + 0\right]$$

$$x^2y + 3y - 2 = -10 - 4(x-1) + 4(y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2)$$
$$+(x-1)^2(y+2)$$

مفكوك مكلورين للدوال فى متغيرين:

إذا وضعنا $a = 0$ ، $b = 0$ ، $h = x,\ y = k$ فى مفكوك تايلور نحصل على

$$f(x,y) = f(0,0) + \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0) + ... + \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0) + R_n$$

حيث R_n هو الباقي بعد n من الحدود ومقداره

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(\theta x, \theta y)\ ,\ 0 < \theta < 1$$

وهو ما يسمى بمفكوك مكلورين للدالة $f(x,y)$ حول نقطة $(0,0)$
يمكن كتابة مفكوك السابق على الصورة المختصرة :

$$f(x,y) = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!}\left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right]^r f\,|_{(0,0)} + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(\theta x, \theta y)\ \ ,0 < \theta < 1$$

تمارين (٣)

(١)أوجد معادلة المستوى المماس والخط العمودى للسطوح التالية عند النقاط المبينة أمام كل منها:

(1) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(1,0,0)$

(2) $xy^2 - yz^2 + zx^2 = 1$, $(1,1,1)$

(3) $xyz = 4$, $(1,2,2)$

(4) $xe^y = ye^x$, $(0,0,1)$

(5) $\sin x\,y - 2\cos y\,z = 0$, $(\pi/2, 1, \pi/3)$

(٢) أوجد معادلة المستوى المماس المشترك للسطحين عند النقطة $(1,-2,3)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14 \quad , \quad x - 2y + 3z = 9 + 5\cosh(3x^2 - z)$$

(٣) أوجد مفكوك الدالة $f(x,y) = e^x \tan^{-1} y$ حول النقطة $(1,1)$ حتى حدود من الدرجة الثانية فى قوى $(x-1),(y-1)$.

(٤) أوجد مفكوك الدالة $x^4 + x^2y^2 - y^4$ حول النقطة $(1,1)$ حتى حدود من الدرجة الثانية.

(٥) أوجد مفكوك الدالة $x^2y + 3y - 2$ في قوى $(x-1),(y+2)$.

(٦) أوجد مفكوك الدالة $\sin^{-1}\dfrac{y}{x}$ حول النقطة $(2,1)$.

(٧) أوجد مفكوك الدالة $z = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ في قوى $(x-1),(y-1)$.

تمارين (٢)

(١) أوجد المشتقات الجزئية الأولى لكل من الدوال التالية :

(1)	$f(x,y) = 2x^2 - 3y - 4$	(7)	$f(x,y) = (xy-1)^2$
(2)	$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$	(8)	$f(x,y) = x^y$
(3)	$f(x,y) = \log x$	(9)	$f(x,y) = e^{-y}\sin(x+y)$
(4)	$f(x,y) = \tan^{-1}(y/x)$	(10)	$f(x,y,z) = \sec^{-1}(x+yz)$
(5)	$f(x,y,z) = 1 + yx^2 - 2z^2$	(11)	$f(x,y,z) = x - \sqrt{y^2+z^2}$
(6)	$f(x,y,z) = \sin^{-1}(xyz)$	(12)	$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$

(٢) أوجد المشتقات الجزئية الثانية لكل من الدوال التالية:

(1) $f(x,y)=x+y+xy$ (3) $f(x,y)=\sin(xy)$

(2) $f(x,y)=\ln(x+y)$ (4) $h(x,y)=xe^{y}y+1$

(٣) بين أن $w_{xy}=w_{yx}$ لكل من

(1) $w=\ln(2x+3y)$ (3) $w=x\sin y+y\sin x$

(2) $w=e^{x}+x\ln y+y\cos x$ (4) $w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(٤) أوجد المشتقة f_{xyz} إذا كان $f=3x^2y^3z+2xy^4z^2-yz$

(٥) أوجد المشتقة f_{tut} إذا كان $f=u^4t^2v-3uv^2t^3$

(٦) أوجد المشتقة u_{rvr} إذا كان $u=v\sec(rt)$

(٧) أوجد المشتقة v_{zzy} إذا كان $v=y\ln(x^2+z^4)$

(٨) أوجد المشتقة $\dfrac{\partial^3 w}{\partial z\partial y\partial x}$ إذا $w=\sin(xyz)$

(٩) أوجد المشتقة $\dfrac{\partial^5 w}{\partial x^2\partial y^3}$ إذا كان

(1) $w=y^2x^6e^{x}+2$

(2) $w=y^2+y(\sin x-x)$

(١٠) بين أن الدوال التالية تحقق الشرط $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$

(1) $u(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

(2) $u(x,y,z)=e^{3x+4y}\cos 5z$

(3) $u(x,y,z)=\cos 3x\cos 4y\sinh 5z$

(١١) أوجد $\dfrac{dw}{dt}$ إذا كان

(1) $w=x^2+y^2$, $x=\cos t$, $y=\sin t$

(2) $w=x^2+y^2$, $x=\cos t+\sin t$, $y=\cos t-\sin t$

(3) $w=\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{z}$, $x=\cos^2 t$, $y=\sin^2 t$, $z=\dfrac{1}{t}$

(4) $w=z-\sin xy$, $x=t$, $y=\ln t$, $z=e^{t}$

(١٣) أوجد w_r, w_θ اذا كان

(1) $w = 4e^x \ln y \quad , \quad x = \ln(r\cos\theta) \quad , \quad y = r\sin\theta$

(2) $w = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \quad , \quad y = r\cos\theta \quad , \quad x = r\sin\theta$

(١٣) بـــين أنـــه إذا كانـــت $w = f(u,v)$ تحقــق معادلـــة لابـــلاس $f_{uu} + f_{vv} = 0$ وكانـــت $u = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2),\ v = xy$ فإن $w_{xx} + w_{yy} = 0$

■ المحتويات:

▪ الباب الأول (الهندسة التحليلية في ثلاثة أبعاد):

طرق تعيين النقطة في الفضاء الثلاثي (الإحداثيات الكرتيزيةوالإحداثيات الأسطوانية والإحداثيات الكرية) — المساقط – البعد بين نقطتين–نقطة التقسيم – زوايا الاتجاه – الزاوية بين مستقيمين – نسب اتجاه العمودي على مستقيمين معلومين.

▪ الباب الثاني (المستوى والخط المستقيم في الفضاء الثلاثي):

المستوى في الفضاء الثلاثي –الزاوية بين مستويين – معادلة المستوى المار بثلاث نقاط معلومة – معادلة المستوى بمعلومية أطوال الأجزاء التي يقطعها من المحاور – معادلة المستوى في الصورة العمودية – طول العمود النازل على مستوى معلوم من نقطة معلومة – المستويان المنصفان للزاوية الزوجية بين مستويين معلومين – معادلة

أي مستوى يمر بخط تقاطع مستويين – وضع ثلاث مستويات بالنسبة لبعضها في الفضاء الثلاثي – الصورة العامة لمعادلات الخط المستقيم – معادلات الخط المستقيم بدلالة نسب اتجاهه ونقطة عليه – معادلات الخط المستقيم المار بنقطتين معلومتين – طول العمود النازل من نقطة على مستقيم– تقاطع مستقيمين –معادلة الكرة – العمودي على سطح الكرة–المستوى المماس للكرة – طول المماس المرسوم للكرة – المستوى الأساسي لكرتين–تقاطع كرتين.

▪ الباب الثالث جزء الجبر(نظرية المعادلات):

- القسمة بطريقة المعاملات المنفصلة — تحويل المعادلات — تكوين معادلة جبرية جذورها معلومة — بحث الجذور الموجبة والجذور السالبة والجذور الصحيحة والجذور الكسرية للمعادلات الجبرية ذات المعاملات

الصحيحة – حذف الحد الثاني في معادلة جبرية معلومة – الحل الجبري للمعادلات الجبرية من الدرجة الثالثة والرابعة.

■ المراجع:

١- د.برهامي حشيش – " الوسيط في الجبر والهندسة التحليلية "– سلسلة الرياضيات الهندسية – دار الراتب الجامعية (بيروت) الطبعة الأولى.

٢- د.مصطفى الجندي – " تقليدات الجبر والهندسة التحليلية "– دار الراتب الجامعية (بيروت) الطبعة الأولى.

٣- د.رمضان جهينة – " مبادئ الرياضيات "– منشورات ELGA – الطبعة الثانية (٢٠٠٠م).

4- Crowell, R. and Slesnick, W.E. (1989). *Calculus and Analytic Geometry*. Norton.

5- Thomas, J.G.R. and Finney, R. (1992). *Calculus and Analytic Geometry.* Addison .

6- Selby,P.H. (1986). *Analytic Geometry.* San Diego,Calefornia. College outline series.

7- Yefimov, N.V. (1964). *A Brief course in Analytic Geometry.* Mir publishers.

الباب الأول

الهندسة التحليلية في ثلاثة أبعاد

١ – طرق تعيين النقطة في الفضاء الثلاثي:

رأينا في الهندسة التحليلية المستوية أن موضع النقطة في المستوى يتحدد تماماً بواسطة كميتين عدديتين وهذا هو السبب في أن الهندسة التحليلية المستوية تُسمى بالهندسة التحليلية في بعدين.

ولتحديد موضع النقطة في الفضاء الثلاثي يلزمنا ثلاث كميات عددية، ولذلك فإن الهندسة التحليلية الفراغية تسمى أيضاً بالهندسة التحليلية في ثلاثة أبعاد.

رأينا أيضاً في الهندسة التحليلية المستوية أن موضع النقطة في المستوى يتحدد بطريقتين إحداهما طريقة الإحداثيات الكرتيزية (x, y) حيث $-\infty < x < \infty \, , -\infty < y < \infty$

والثانية طريقة الإحداثيات القطبية (r, θ) حيث $o \le r < \infty, 0 \le \theta \le 2\pi$

والعلاقة بين (x, y) ، (r, θ) تكون كما يلي:

$$x = r\cos\theta.$$
$$y = r\sin\theta.$$

أو تكون:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\theta = \tan^{-1}\ \frac{y}{x}.$$

أما في الفضاء الثلاثي فتوجد ثلاث طرق مختلفة – ولكنها أيضا مرتبطة– سنوضحها فيما يلي:

▪ **الطريقة الأولى: الإحداثيات الكرتيزية (x, y, z)**

من نقطة الأصل O في الفضاء الثلاثي نرسم ثلاث مستقيمات OX, OY, OZ بحيث يكون كل اثنان منهما متعامدان.

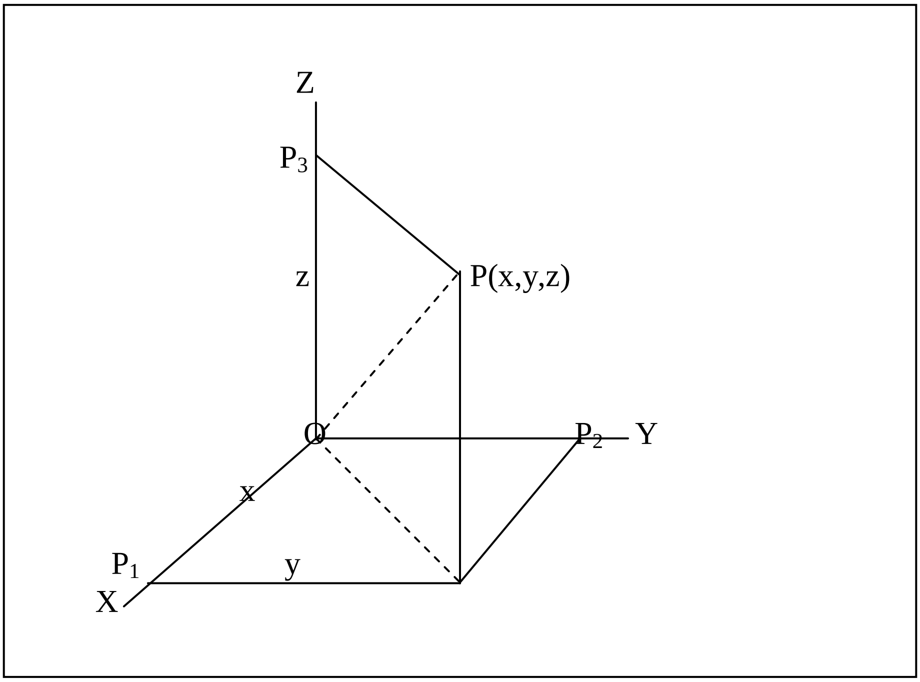
تُسمى المستقيمات OX, OY, OZ محاور الإحداثيات فإذا تخيلنا الرسم فإن محاور الإحداثيات الثلاث تقسّم الفضاء الثلاثي إلى ثمانية مناطق كما يلي:

المنطقة الأولى	$X > 0, Y > 0, Z > 0$
المنطقة الثانية	$X > 0, Y > 0, Z < 0$
المنطقة الثالثة	$X > 0, Y < 0, Z > 0$
المنطقة الرابعة	$X > 0, Y< 0, Z < 0$
المنطقة الخامسة	$X < 0, Y > 0, Z > 0$
المنطقة السادسة	$X < 0, Y > 0, Z < 0$
المنطقة السابعة	$X < 0, Y < 0, Z > 0$
المنطقة الثامنة	$X < 0, Y < 0, Z < 0$

وعلى ذلك فإن أي نقطة في الفضاء الثلاثي يماثلها سبع نقاط.

وبفرض P نقطة في الفضاء الثلاثي ، نوجد مساقطها على المحاور OX, OY, OZ ولتكن على الترتيب P_1, P_2, P_3 واضح أن النقط P_1, P_2, P_3 تتحدد تماما بالنقطة P وبالتالى فإن $x = OP_1, y = OP_2, z = OP_3$ وتُسمى الكميات x, y, z بإحداثيات النقطة P في الفضاء الثلاثي ويُرمز لها بالرمز $P(x,y, z)$ ، وكذلك العكس صحيح أي أنه إذا عرفنا الإحداثيات (x, y, z) فإنه يمكن تحديد النقطة P التي لها هذه الإحداثيات تحديداً تاماً بمعنى أنه توجد نقطة واحدة فقط P إحداثياتها x, y, z .

انظر الشكل التالي:



ملاحظة: واضح أن محاور الإحداثيات OX, OY, OZ تكوّن في الفضاء ثلاث مستويات XOY, YOZ, ZOX تُسمى هذه المستويات بمستويات الإحداثيات ويُطلق على المستوى XOY بالمستوى $z = 0$ والمستوى YOZ بالمستوى $x = 0$ والمستوى ZOX بالمستوى $y = 0$.

بينما على المحور OX تكون $y = 0, z = 0$ وعلى المحور OY تكون $x = 0, z = 0$ وعلى المحور OZ تكون $x = 0, y = 0$.

وكما ذكرنا سابقا أن أي نقطة في الفضاء الثلاثي يماثلها سبع نقاط:

- ثلاث نقاط بالنسبة لمحاور الإحداثيات OX, OY, OZ
- وثلاث نقاط بالنسبة لمستويات الإحداثيات XOY, YOZ, ZOX
- ونقطة واحدة بالنسبة لنقطة الأصل (القطب) O .

مثال(١): أوجد النقط المتماثلة الوضع مع النقطة (a, b, c) بالنسبة:

١ – لمحاور الإحداثيات.

٢– لمستويات الإحداثيات.

٣ – لنقطة الأصل (القطب) O .

الحل:

١– النقط المتماثلة مع النقطة(a, b, c) بالنسبة لمحاور الإحداثيات OX, OY, OZ تكون (a, -b, -c) , (-a, b, -c) , (-a, -b, c) على الترتيب.

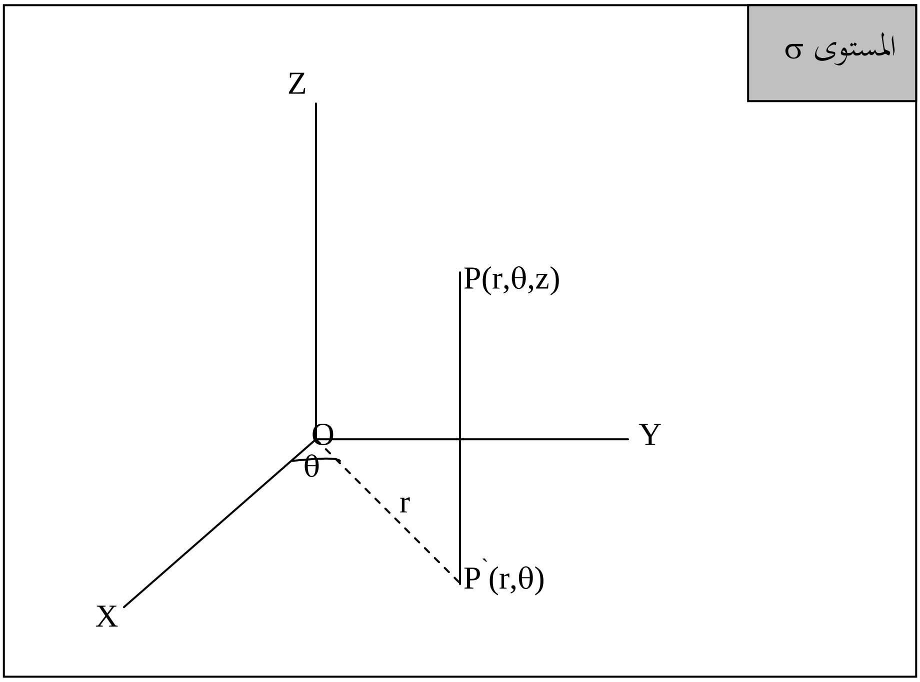
٢– النقط المتماثلة مع النقطة(a, b, c) بالنسبة لمستويات الإحداثيات XOY,YOZ,ZOX
تكون (a, b, -c) , (-a, b, c) , (a, -b, c) على الترتيب.

٣– النقطة المتماثلة مع النقطة(a, b, c) بالنسبة للقطب O تكون (-a, -b, -c) .

- **الطريقة الثانية: الإحداثيات الأسطوانية (r, θ, z)**

نفرض أن لدينا مستوى ما وليكن σ محدد به مجموعة إحداثيات قطبية

(قطب O وخط ابتدائي OX) وليكن OZ عمودي على المستوى σ كما بالشكل:



لأي نقطة P في الفضاء الثلاثي نحسب الكميات r, θ, z حيث r, θ الإحداثيات القطبية لمسقط P على المستوى σ والمقدار z هو بعد النقطة P عن المستوى σ

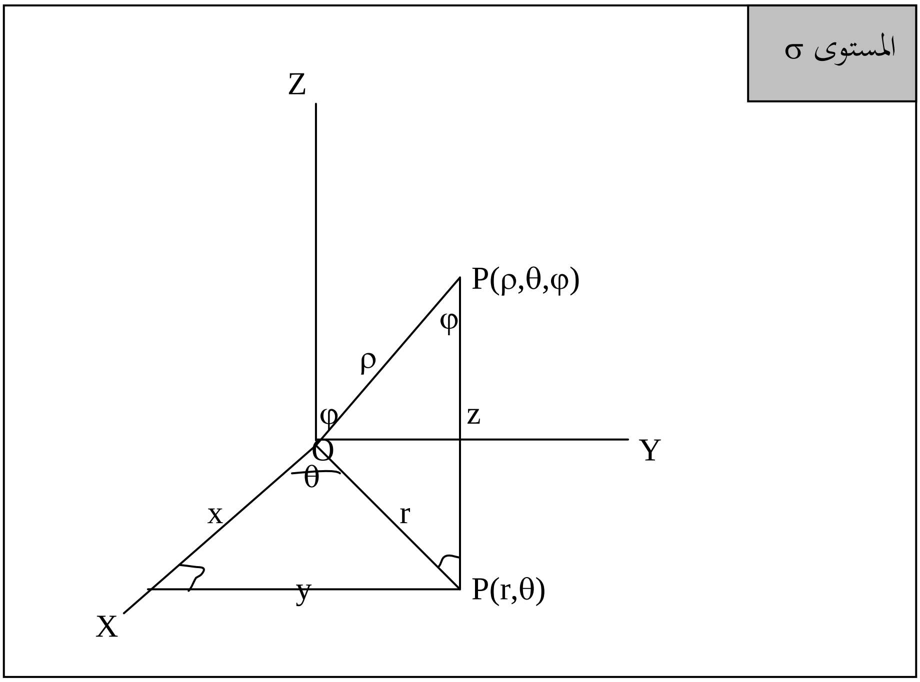
حيث $0 \le r < \infty,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi\ ,\ -\infty < z < \infty$

وتُسمى الكميات الثلاثة r, θ, z بالإحداثيات الأسطوانية للنقطة P ويُرمز لها بالرمز $P(r, \theta, z)$.

تُفضل الإحداثيات الأسطوانية لدراسة السطوح في الفضاء الثلاثي وذلك عندما تكون مقاطع هذه السطوح بمستويات توازي المستوى σ عبارة عن منحنيات معادلاتها معطاة بالإحداثيات القطبية أنسب للدراسة عما لو كانت هذه المعادلات معطاة بالإحداثيات الكارتيزية.

▪ **الطريقة الثالثة: الإحداثيات الكريه** (ρ, θ, φ)

تتحدد هذه الإحداثيات أيضاً كما في حالة الإحداثيات الأسطوانية فإذا كان لدينا مستوى ما σ محدد عليه مجموعة إحداثيات قطبية (قطب O وخط ابتدائى OX) وليكن OZ عمودي على المستوى σ كما بالشكل:



لأي نقطة P في الفضاء الثلاثي يمكن أن تحدد تحديداً تاماً الكميات ρ, θ, φ

حيث $0 \le \rho < \infty, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le 2\pi$

وتُسمى الكميات ρ,θ,φ بالإحداثيات الكريه للنقطة P ويرمز لها بالرمز $P(\rho, \theta, \varphi)$

والعكس صحيح أي أن الكميات ρ,θ,φ تحدد نقطة وحيدة في الفضاء الثلاثي.

▪ العلاقة بين الإحداثيات الكرتيزية والأسطوانية والكريه:

لتكن P نقطة ما في الفضاء الثلاثي فإن إحداثياتها الكارتيزية (x,y,z) وإحداثياتها الأسطوانية هي (r, θ, z) وإحداثياتها الكريه هي (ρ,θ,φ) ومن الرسم السابق يتضح أن:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \qquad (1).$$

$$r = \rho\sin\varphi, \qquad z = \rho\cos\varphi \qquad (2).$$

العلاقة (1) تحول الإحداثيات الأسطوانية إلى إحداثيات كرتيزية.

والعلاقة (2) تحول الإحداثيات الكريه إلى إحداثيات أسطوانية.

ومن العلاقة (1) نستنتج أن:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad (3).$$

العلاقة (3) تحول الإحداثيات الكرتيزية إلى إحداثيات أسطوانية.

ومن العلاقة (2) نستنتج أن:

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{r}{z} \qquad (4).$$

العلاقة (4) تحول الإحداثيات الأسطوانية إلى إحداثيات كريه.

وبالتعويض من (2) في (1) نحصل على:

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\varphi. \qquad (5).$$

العلاقة (5) تحول الإحداثيات الكريه إلى إحداثيات كرتيزيه.

وبالتعويض من (3) في (4) نحصل على:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}, \varphi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \qquad (6).$$

العلاقة (6) تحول الإحداثيات الكرتيزيه إلى إحداثيات كريه.

مثال(٢): إذا كانت $(1,-\sqrt{3},2)$ هي الإحداثيات الكرتيزية لنقطة في الفضاء الثلاثي. فأوجد إحداثياتها الأسطوانية والكريه.

الحل:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+3}=2,$$

$$\theta=\tan^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{1})=-\frac{\pi}{3}.$$

(حيث θ تقع في الربع الرابع من المستوىXOY).

$\therefore$ الإحداثيات الأسطوانية للنقطة $(1,-\sqrt{3},2)$ تكون هي $(2,-\frac{\pi}{3},2)$.

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{1+3+4}=2\sqrt{2},$$

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=\tan^{-1}\frac{2}{2}=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}.$$

$\therefore$ الإحداثيات الكريه للنقطة $(1,-\sqrt{3},2)$ تكون هي $(2\sqrt{2},-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})$.

مثال(٣): أوجد الإحداثيات الكرتيزية للنقطة المتماثلة بالنسبة للمستوى ZOX مع النقطة $(2\sqrt{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})$.

الحل:

نوجد الإحداثيات الكرتيزية للنقطة $(\rho,\theta,\varphi)\equiv(2\sqrt{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})$

$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta=(2\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{2})=1$$

$$y=\rho\sin\varphi\sin\theta=(2\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{\sqrt{3}}{2})=\sqrt{3}$$

$$z=\rho\cos\varphi=(2\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}})=2$$

$\therefore$ الإحداثيات الكرتيزيه للنقطة المتماثلة بالنسبة للمستوى ZOX مع النقطة $(2\sqrt{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})$ تكون $(1,-\sqrt{3},2)$.

مثال(٤): حول المعادلة $\rho^2\,(1+3\sin^2\varphi\cos^2\theta)=4$ إلى الصورة الكارتيزية.

الحل:

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left[1+3\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2\right]=4$$

$$\therefore \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1.$$

تمارين

١ – أوجد الإحداثيات الكرتيزية للنقطة المتماثلة بالنسبة للقطب مع كل من النقط الآتية:

$$P_1(2,\frac{-\pi}{2},0),\ P_2(1,\frac{-\pi}{3},1),\ P_3(3,\frac{\pi}{4},1)$$

٢ – أوجد الإحداثيات الكريه للنقطة المتماثلة بالنسبة للمحور OX مع كل من النقط الآتية:

$$P_1(-1,\sqrt{3},-2)\ ,\ P_2(\sqrt{3},1,\ 2).$$

٣ – حول كل معادلة من المعادلات الآتية إلى الصورة الأسطوانية ثم إلى الصورة الكريه

(i) $x^2 + y^2 = 6.$ (ii) $xy = z.$
(iii) $x^2 + y^2 + z^2 = 16.$ (iv) $x^2 - y^2 - 2z^2 = 4.$
(v) $x^2 + y^2 = 8\,xy.$ (vi) $x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 = 0.$
(vii) $x^2 + y^2 + z^2 = 6z.$

٤ – حول كل معادلة من المعادلات الآتية إلى الصورة الكارتيزية.

(i) $z \sin\theta = r.$ (ii) $z^2 \cos\theta = r^2.$
(iii) $r = a(1 - \cos\theta).$ (iv) $y = z(1 + \cos\theta).$
(v) $\rho = a \cot\varphi / \cos\varphi.$ (vi) $\rho = z\, a \sin\theta \sin\varphi.$

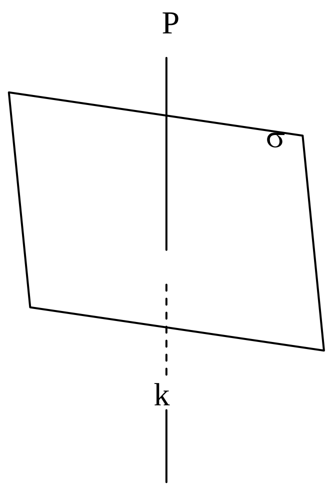
٢ – المساقط:

أ – مسقط نقطة في الفضاء الثلاثي:

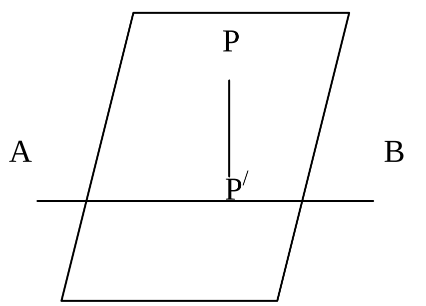
١ – لإيجاد مسقط نقطة ما P في الفضاء الثلاثي على المستقيم AB نرسم المستوى σ المار بالنقطة P وعموديا على AB انظر (شكل١).

فتكون $P^{/}$ نقطة تقاطع المستوى σ مع AB هى مسقط P على AB.

٢ – ولإيجاد مسقط نقطة P على المستوى σ نرسم من P مستقيم PK عمودياً على المستوى σ فتكون نقطة تقاطع العمود PK مع المستوى σ هى مسقط P على المستوى σ انظر (شكل٢).



(شكل٢)

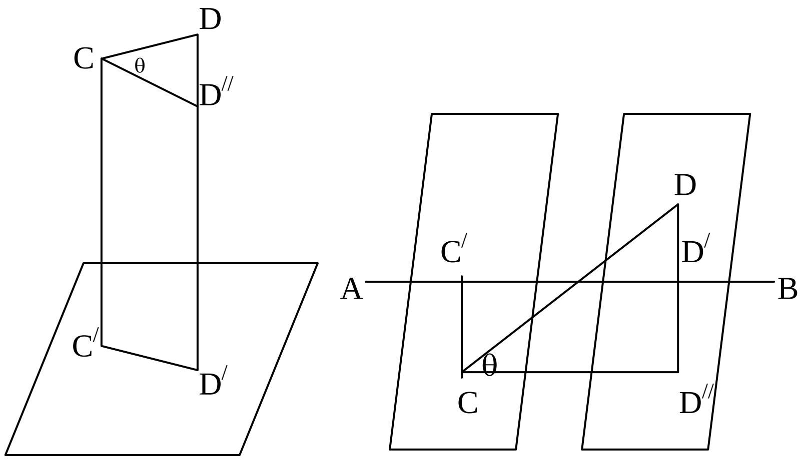


(شكل١)

ب – مسقط مستقيم في الفضاء الثلاثي:

١- مسقط المستقيم CD على المستقيم AB هو الجزء $C'D'$ من المستقيم AB حيث C', D' هما مسقط C, D على المستقيم AB على الترتيب انظر (شكل٣).

٢- وبالمثل مسقط المستقيم CD على المستوى σ هو المستقيم $C'D'$ حيث C',D' هما مسقط كل من C, D على المستوى σ على الترتيب انظر (شكل٤).



(شكل٤)　**(شكل٣)**

في (شكل٣) إذا كانت θ هى الزاوية بين المستقيمين الغير مستوين AB, CD فإن θ تقاس بالزاوية بين مستقيمين مرسومين من أي نقطة موازيين لـ AB, CD ولذلك نرسم من C مستقيم $CD'' \parallel AB$ كما بالرسم.

$\therefore\ CD'' = C'D' = CD \cos\theta.$　　(1)

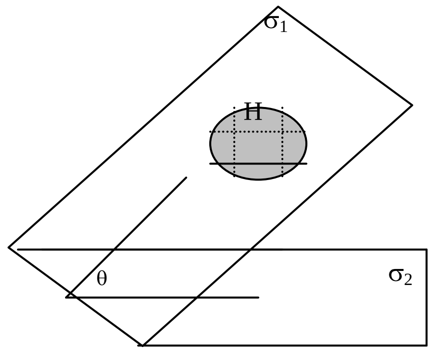
وفي (شكل٤) إذا كانت θ هى الزاوية بين المستقيم CD والمستوى σ أي بين المستقيم CD ومسقطه $C'D'$ ثم رسمنا $CD'' \parallel C'D'$ ويقطع CD' في C''

$\therefore\ C'D' = CD'' = CD \cos\theta.$　　(2)

من (1),(2) يتضح أن طول مسقط المستقيم CD على المستقيم AB (على المستوى σ) يكون مساوياً لحاصل ضرب CD في جيب تمام الزاوية بين CD والمستقيم AB (أو المستوى σ).

ج – مسقط مساحة مستوية على مستوى في الفضاء الثلاثي:

نفرض في المستوى σ_1 مساحة مستوية H يراد إيجاد مسقطها على المستوى σ_2 ونفرض أن الزاوية بين المستويين σ_1, σ_2 هي θ تقسم المساحة H إلى عدد كبير من المستطيلات انظر (شكل٥)



(شكل٥)

وحيث إن مساحة المستطيل = حاصل ضرب طولى ضلعيه.

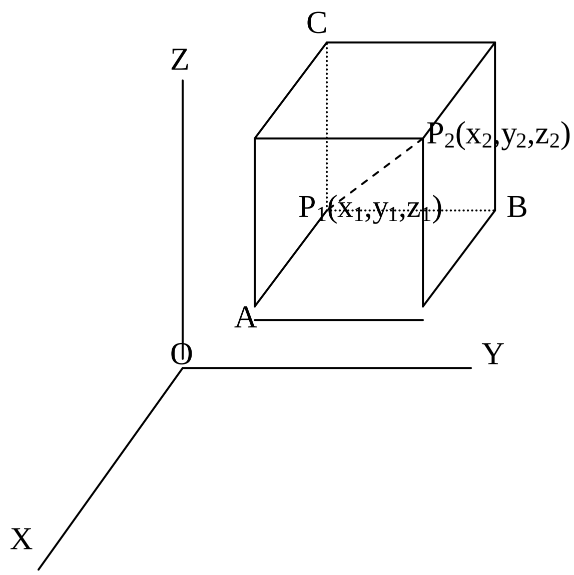
فإن مسقط مساحة كل مستطيل يكون مساوياً مساحة هذا المستطيل مضروبة في جيب تمام الزاوية θ ومن ثم يكون مسقط المساحة الكلية H مساوياً حاصل ضرب H في جيب تمام الزاوية θ أي أن:

$$H_{\sigma 2} = H \cos \theta.$$

حيث $H_{\sigma 2}$ هى مساحة مسقط H على المستوى σ_2.

٣ – البعد بين نقطتين في الفضاء الثلاثي:

لتكن $P_1(x_1,y_1,z_1), P_2(x_2,y_2,z_2)$ نقطتين في الفضاء الثلاثي والمطلوب إيجاد الطول P_1P_2 لذلك نرسم من P_1 ثلاث مستويات توازي مستويات الإحداثيات ،ثم نرسم أيضاً من P_2 ثلاثة مستويات توازي مستويات الإحداثيات فتكوّن هذه المستويات الست متوازي مستطيلات فيه P_1P_2 قطراً كما يتضح من الرسم التالي:



$$\therefore P_1A = x_2 - x_1 \ , \ P_1B = y_2 - y_1 \ , \ P_1C = z_2 - z_1 \ ,$$

$$\therefore \overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1A}^2 + \overline{P_1B}^2 + \overline{P_1C}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$\therefore P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

- **ملاحظات ونتائج:**

١- بُعد النقطة $P(x, y, z)$ عن نقطة الأصل O يكون $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

٢- وإذا كان P_1P_2 يوازي أحد المستويات فلن نتمكن من رسم متوازي المستطيلات المشار إليه ورغم ذلك يظل القانون صحيحاً كما يلي: نفرض مثلا أن P_1P_2 يوازي المستوى XOY عندئذ يكون $z_1=z_2$ وبالتالي يكون طول P_1P_2 هو:

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

٣- إذا كان P_1P_2 يوازي أحد المحاور مثلا $P_1P_2 \,//\, OX$ فإن $y_1=y_2,\ z_1=z_2$ وبالتالي يكون طول P_1P_2 يساوي x_2-x_1

٤ – نقطة التقسيم:

لتكن $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ نقطتان معلومتان في الفضاء الثلاثي.

فإن إحداثيات النقطة P التى تقسم المسافة بين النقطتين P_1,P_2 من الداخل بحيث:

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_2P}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$ (نسبة التقسيم)

تكون:

$$\left(\frac{\lambda_1x_2+\lambda_2x_1}{\lambda_1+\lambda_2},\frac{\lambda_1y_2+\lambda_2y_1}{\lambda_1+\lambda_2},\frac{\lambda_1z_2+\lambda_2z_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right).$$

- **ملاحظات ونتائج:**

١ – نقطة منتصف المسافة بين P_1,P_2 تكون $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

٢ – إذا كانت نقطة التقسيم P بين P_1,P_2 تقسم من الخارج كامتداد للمسافة بين P_1,P_2 سواء من ناحيةP_2 أو من ناحيةP_1 بحيث (نسبة التقسيم) $\frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_2P}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

فإن إحداثيات النقطة P تكون:

$$\left(\frac{\lambda_1x_2-\lambda_2x_1}{\lambda_1-\lambda_2},\frac{\lambda_1y_2-\lambda_2y_1}{\lambda_1-\lambda_2},\frac{\lambda_1z_2-\lambda_2z_1}{\lambda_1-\lambda_2}\right).$$

■ أمثلة:

مثال(١): تحقق من أن المثلث الذى رؤوسه $P_1(1, -2, 1), P_2(3, -3, -1), P_3(4, 0, 3)$ يكون قائم الزاوية وأوجد مساحته.

الحل:

$$\overline{P_1P_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 4 + 1 + 4 = 9.$$
$$\overline{P_2P_3}^2 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = 1 + 9 + 16 = 26.$$
$$\overline{P_1P_3}^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 9 + 4 + 4 = 17.$$
$$\therefore \overline{P_2P_3}^2 = \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_1P_3}^2$$

أي أن المثلث $P_1P_2P_3$ يكون قائم الزاوية في P_1 .

$$\Delta\, P_1P_2P_3 = \tfrac{1}{2}\,(P_1P_2)\,(P_3P_1) = \frac{1}{2}(3)\left(\sqrt{17}\right) = \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

مثال(٢): أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث تظل دائماً على بعدين متساويين من النقطتين $P_1(2, -1, 3), P_2(1, 0, 2)$.

الحل:

نفرض أن النقطة هي $P(x, y, z)$

$$\therefore \overline{PP_1} = \overline{PP_2} \Rightarrow \overline{PP_1}^2 = \overline{PP_2}^2 .$$
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2.$$
$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = (x - 1)^2 + (y - 0)^2 + (z - 2)^2.$$
$$2x - 2y + 2z - 9 = 0.$$

وهذه تمثل معادلة مستوى في الفضاء الثلاثي.

مثال(٣): تحقق من أن احداثيات المركز المتوسط للمثلث الذي رؤوسه:

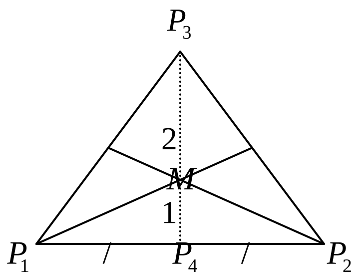
$$P_1(-1,0,1),\, P_2(-3,-2,-1),\, P_3(7,8,9).$$

تكون $(1,2,3)$

الحل:

نقطة تلاقي منصفات أضلاع المثلث (منصفات زوايا رؤوس المثلث) تكون هي المركز المتوسط للمثلث ، (وتُسمى أيضاً مركز ثقل المثلث) وهذه النقطة تقسم المستقيم الذي يصل بين أي رأس من رؤوس المثلث إلى الضلع المقابل بنسبة تقسيم 2:1

انظر الشكل:



واضح أن النقطة M تكون هي المركز المتوسط للمثلث وهذه النقطة تقسم P_3P_4 من الداخل بنسبة تقسيم $\dfrac{\overline{P_3M}}{\overline{P_4M}} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \dfrac{2}{1}$.

وإحداثيات نقطة التقسيم من الداخل تُعطى من:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right).$$

واحداثيات النقطة P_4 كمنتصف مسافة بين النقطتين P_1, P_2 تكون:

$$\left(\frac{(-1)+(-3)}{2}, \frac{(0)+(-2)}{2}, \frac{(1)+(-1)}{2}\right) = (-2,-1,0)\ ,$$

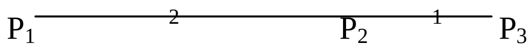
$$\therefore M\left(\frac{(2)(-2)+(1)(7)}{1+2}, \frac{(2)(-1)+(1)(8)}{1+2}, \frac{(2)(0)+(1)(9)}{1+2}\right) \equiv (1,2,3)$$

وهو المطلوب.

مثال(٤): إذا قُسم المستقيم P_1P_2 من ناحية P_2 بالنقطة P_3 بحيث $\overline{P_1P_2} = 2\overline{P_2P_3}$

علماً بأن $P_1(-1,0,1), P_2(1,2,3)$ فأوجد إحداثيات P_3

الحل:



واضح من المعطيات أن النقطة $P_3(x,y,z)$ تقسم P_1P_2 من الخارج بنسبة $\frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_2P_3}} = \frac{3}{1}$.

وإحداثيات نقطة التقسيم من الخارج تُعطى من:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 - \lambda_2 y_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 - \lambda_2 z_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)$$

$$\therefore x = \frac{3(1)-1(-1)}{3-1} = 2,\ y = \frac{3(2)-1(0)}{3-1} = 3,\ z = \frac{3(3)-1(1)}{3-1} = 4$$

وإذاً إحداثيات نقطة التقسيم تكون $P_3(2,3,4)$

مثال(٥): أوجد احداثيات نقطة تقاطع المستقيم P_1P_2 مع المستوى XOZ حيث:

$P_1(3,-1,5), P_2(-1,3,-3)$.

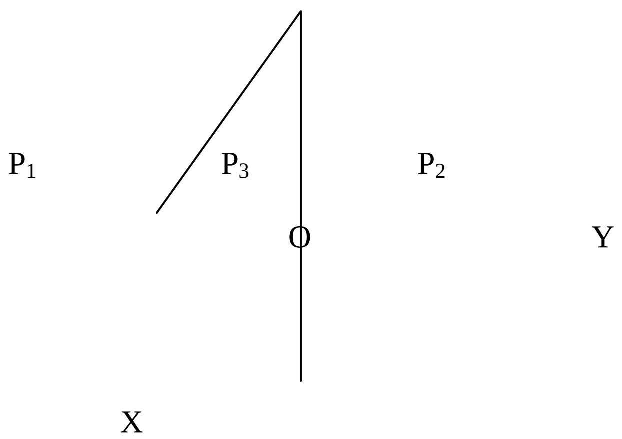
الحل:

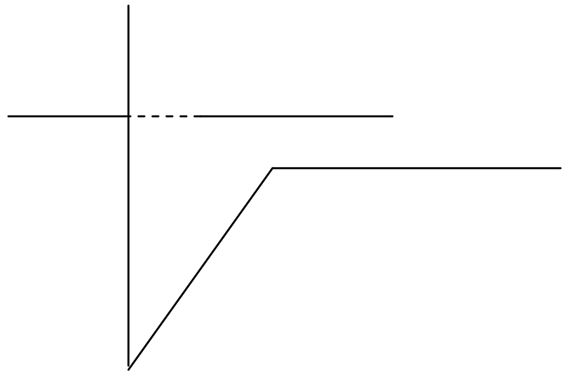
لتكن نقطة التقاطع P_3 وهي نقطة تقسيم من الداخل تقع على المستوى XOZ

ومن ثم تكون $P_3(x,0,z)$.

ونفرض أن P_3 تقسم المسافة بين P_1, P_2 من الداخل بنسبة $\lambda_1 : \lambda_2$ أي أن $\frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_3P_2}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

كما يضح من الرسم التالي:





$$\therefore x=\frac{\lambda_1 x_2+\lambda_2 x_1}{\lambda_1+\lambda_2},\ 0=\frac{\lambda_1 y_2+\lambda_2 y_1}{\lambda_1+\lambda_2},\ z=\frac{\lambda_1 z_2+\lambda_2 z_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$\therefore 0=\frac{\lambda_1(3)+\lambda_2(-1)}{\lambda_1+\lambda_2}\Rightarrow 3\lambda_1-\lambda_2=0\Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore x=\frac{1(-1)+3(3)}{4}=2,\ \ z=\frac{1(-3)+3(5)}{4}=3.$$

وإذاً احداثيات نقطة التقاطع تكون $P_3(2,0,3)$.

مثال(٦): أوجد احداثيات النقطتين P_3, P_4 اللتين تقسمان المسافة بين النقطتين: $P_1(1,5,3), P_2(7,2,9)$.

إلى ثلاثة أجزاء متساوية.

الحل:

P_1 ———— P_3 ———— P_4 ———— P_2

واضح أن النقطة P_3 تقسم P_1P_2 من الداخل بنسبة تقسيم $\dfrac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_2P_3}} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \dfrac{1}{2}$.

وأن النقطة P_4 تقسم P_1P_2 من الداخل بنسبة تقسيم $\dfrac{\overline{P_1P_4}}{\overline{P_2P_4}} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \dfrac{2}{1}$.

وإحداثيات نقطة التقسيم من الداخل تُعطى من:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right).$$

$$\therefore P_3\left(\frac{(1)(7)+(2)(1)}{1+2}, \frac{(1)(2)+(2)(5)}{1+2}, \frac{(1)(9)+(2)(3)}{1+2}\right) = (3,4,5) \quad ,$$

$$\therefore P_4\left(\frac{(2)(7)+(1)(1)}{2+1}, \frac{(2)(2)+(1)(5)}{2+1}, \frac{(2)(9)+(1)(3)}{2+1}\right) = (5,3,7)$$

(**ملاحظة**: بعد حساب احداثيات P_3 يمكن حساب احداثيات النقطة P_4 كمنتصف مسافة بين النقطتين P_2, P_3).

تمارين

١ – تحقق من أن أبعاد النقطة $P(x, y, z)$ عن محاور الاحداثيات OX, OY, OZ تكون هي $\sqrt{y^2+z^2}, \sqrt{x^2+z^2}, \sqrt{x^2+y^2}$ على الترتيب.

٢ – تحقق من أن $(2, 2, 0), (6, 6, 0), (6, 2, 1)$ تكون رؤوس مثلث متساوي الساقين وأوجد مساحته.

٣ – إذا كان $P_1P_2P_3$ مثلث متساوي الأضلاع وكانت $P_1(1, 2, 6), P_2(1, 6, 2)$ فأوجد نقطة P_3 علما بأن الإحداثي y لها يساوي 2 ثم احسب مساحة المثلث.

٤ – أوجد نقطة على محور السينات تكون متساوية البعد عن النقطتين (4, 3, 1), (-2,
-6, 2) .

٥ – أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث تكون متساوية البعد عن النقطتين (6 ,1 ,8) ,(1 ,5 ,2).

٦ – أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث يظل بعدها عن النقطة(3 ,-2 ,1) مساوياً بعدها عن المحور OY.

٧ – أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث يظل بعدها عن النقطة(2 ,-1 ,1) دائماً مساوياً 3 وماذا يكون هذا المحل الهندسي؟ .

٨– استنتج احداثيات المركز المتوسط للمثلث الذى رؤوسه:

$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$.

٩– احسب احداثيات المركز المتوسط للمثلث الذي رؤوسه:

(0,7,-5), (-1,5,-6), (4,0,3).

١٠ – أوجد احداثيات النقطتين اللتين تقسمان المسافة بين النقطتين:

$P_1(3, -5, -2)$, $P_2(7, 1, -6)$

إلى ثلاثة أجزاء متساوية.

----

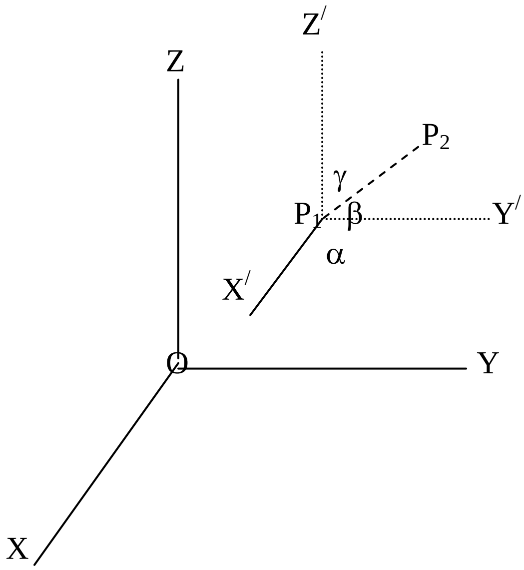
٥ – زوايا الاتجاه:

اتفقنا على أن الزاوية بين مستقيمين فى الفضاء الثلاثي تُقاس بالزاوية بين أى مستقيمين فى نفس المستوى ومرسومان من أى نقطة ويوازيان المستقيمان المعطيان فى الفضاء الثلاثي.

ولذلك لإيجاد الزوايا التى يصنعها المستقيم P_1P_2 مع الاتجاهات الموجبة للمحاور OX, OY, OZ نرسم من P_1 المستقيمات P_1X', P_1Y', P_1Z' توازي محاور الإحداثيات فتكون الزوايا α,β,γ الموضحة بالرسم هى الزوايا التى يصنعها المستقيم P_1P_2 مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات.

تُسمى الزوايا α,β,γ بزوايا الاتجاه للمستقيم P_1P_2 وتُسمى جيوب تمام هذه الزوايا $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ بجيوب تمام الاتجاه للمستقيم P_1P_2.

انظر الشكل:



ومن المهم جداً عند حساب زوايا اتجاه المستقيم P_1P_2 أن نعتبر P_1P_2 متجهاً بدايته P_1 ونهايته P_2 ثم نحسب الزوايا α,β,γ بين الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات والاتجاه الموجب للمستقيم P_1P_2 باعتبار هذا الاتجاه من P_1 إلى P_2

ولذلك إذا كانت α,β,γ زوايا اتجاه المستقيم P_1P_2 فإن زوايا الاتجاه للمستقيم P_2P_1 تكون هي $\pi-\alpha,\pi-\beta,\pi-\gamma$ على الترتيب ، وتكون جيوب تمام اتجاه P_2P_1 هي

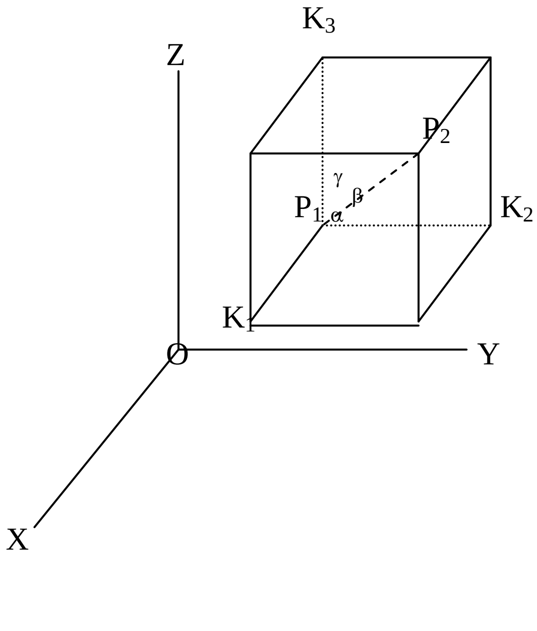
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha\ ,\ \cos(\pi-\beta) = -\cos\beta\ ,\ \cos(\pi-\gamma) = -\cos\gamma.$$

وواضح أن زوايا اتجاه المحور OX تكون هي $0,\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}$ وجيب تمام اتجاه المحور OX تكون $(1,\ 0,\ 0)$ وبالمثل تكون جيوب تمام اتجاه المحور OY هي $(0,\ 1,\ 0)$ وجيوب تمام اتجاه المحور OZ هي $(0, 0, 1)$

ومجموع مربعات جيوب تمام اتجاه أي من محاور الإحداثيات يكون مساوياً الواحد الصحيح.

نتيجة(١): مجموع مربعات جيوب تمام اتجاه أي مستقيم فى الفضاء الثلاثي يكون مساوياً الواحد الصحيح.

البرهان: ليكن P_1P_2 مستقيما زوايا اتجاهه هي α,β,γ نرسم متوازي مستطيلات بحيث يكون P_1P_2 قطراً فيه:



من الرسم يتضح ما يلي:

$$\cos\alpha=\frac{\overline{P_1K_1}}{\overline{P_1P_2}},\ \cos\beta=\frac{\overline{P_1K_2}}{\overline{P_1P_2}},\ \cos\gamma=\frac{\overline{P_1K_3}}{\overline{P_1P_2}}.$$

$$\therefore \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{\overline{P_1K_1}^2+\overline{P_1K_2}^2+\overline{P_1K_3}^2}{\overline{P_1P_2}^2}=\frac{\overline{P_1P_2}^2}{\overline{P_1P_2}^2}=1.$$

$$\therefore \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

وسوف نرمز اختصاراً لجيوب تمام اتجاه المستقيم فى الفضاء الثلاثي بالرموز L, M, N أي أن :

$L = \cos\alpha$, $M = \cos\beta$, $N = \cos\gamma$.

وسوف نقول أن الكميات الثلاثة a, b, c هي نسب اتجاه المستقيم الذي جيوب تمام اتجاهه L, M, N عندما وعندما فقط يتحقق الشرط:

$L : M : N = a : b : c$

نتيجة(٢): إذا كانت a, b, c هى نسب اتجاه المستقيم الذي جيوب تمام اتجاهه هي L, M, N فإن:

$$L=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ M=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ N=\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

البرهان: حيث إن $L : M : N = a : b : c$ فيكون:

$$L=\lambda a,\quad M=\lambda b,\quad N=\lambda c \qquad (*)$$

وبالتالي يكون:

$$L^2+M^2+N^2=\lambda^2a^2+\lambda^2b^2+\lambda^2c^2=\lambda^2(a^2+b^2+c^2).$$

$$\therefore 1=\lambda^2(a^2+b^2+c^2)\Rightarrow\lambda^2=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

وبالتعويض عن λ فى العلاقات (*) نحصل على

$$L=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ M=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ N=\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

▪ **ملاحظات:**

١ – واضح أن قيم λ تُعطينا مجموعتين من جيوب تمام الاتجاه أحداهما L_1, M_1, N_1 والأخرى $-L_1, -M_1, -N_1$ وهذا أمر طبيعي حيث إنه إذا كانت a, b, c نسب اتجاه المستقيم P_1P_2 الذي جيوب تمام اتجاهه L_1, M_1, N_1

فإن نفس الكميات a, b, c تكون أيضاً نسب اتجاه المستقيم P_2P_1 الذي جيوب تمام اتجاهه $-L_1, -M_1, -N_1$.

٢ – إذا كانت $P_2(x_2, y_2, z_2), P_1(x_1, y_1, z_1)$ نقطتان فى الفضاء الثلاثي فإن نسب اتجاه OP_1 تكون هي x_1, y_1, z_1 ونسب اتجاه P_1P_2 هي $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$.

٣ – إذا كانت المستقيمات متوازية فإنها تشترك فى زوايا الاتجاه وبالتالي يكون لها نفس نسب الاتجاه (جيوب تمام الاتجاه).

٤ – لا يمكن أن تنعدم في آن واحد جميع جيوب تمام الاتجاه للمستقيم في الفضاء الثلاثي حيث $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

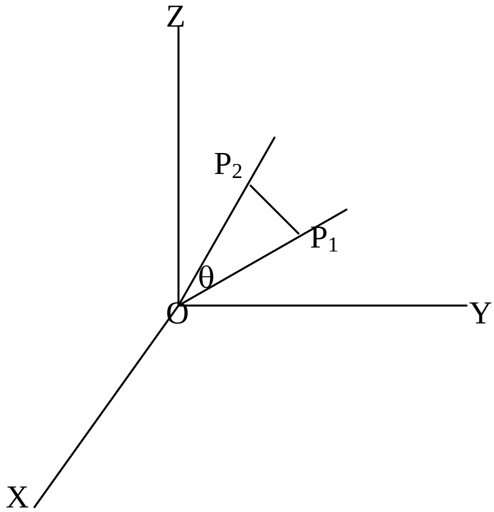
٥ – إذا كانت $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ فإن جيوب تمام اتجاه P_1P_2 تكون هي:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{\overline{P_1P_2}}, \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{\overline{P_1P_2}}, \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{\overline{P_1P_2}}.$$

وكذلك جيوب تمام اتجاه P_2P_1 تكون هي $\frac{x_1 - x_2}{\overline{P_1P_2}}, \frac{y_1 - y_2}{\overline{P_1P_2}}, \frac{z_1 - z_2}{\overline{P_1P_2}}$.

٦ – الزاوية بين مستقيمين في الفضاء الثلاثي:

نفرض مستقيمين جيوب تمام اتجاه أحدهما L_1, M_2, N_2 وجيوب تمام اتجاه الآخر $L_2,$ M_2, N_2 نرسم من القطب O مستقيمين OP_1, OP_2 يوازيان المستقيمان المعلومان كما بالرسم:



فإن الزاوية θ بين المستقيمين تُعطى من النتيجة الآتية:

نتيجة(٣): $\cos\theta = L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2$

البرهان: باعتبار أن $P_2(x_2, y_2, z_2), P_1(x_1, y_1, z_1)$ نقطتان من المثلث OP_1P_2 فيكون:

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{OP_1}^2 + \overline{OP_2}^2 - 2(OP_1)(OP_2)\cos\theta .$$

وحيث إن:

$$\overline{P_1P_2}^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2 .$$

$$\therefore (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2 = (x_1^2+y_1^2+z_1^2) + (x_2^2+y_2^2+z_2^2) - 2(OP_1)(OP_2)\cos\theta.$$

$$\therefore -2x_1x_2 - 2y_1y_2 - 2z_1z_2 = -2(OP_1)(OP_2)\cos\theta \quad ,$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{(OP_1)(OP_2)} = \left(\frac{x_1}{OP_1}\right)\left(\frac{x_2}{OP_2}\right) + \left(\frac{y_1}{OP_1}\right)\left(\frac{y_2}{OP_2}\right) + \left(\frac{z_1}{OP_1}\right)\left(\frac{z_2}{OP_2}\right)$$
$$= L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2 .$$

- **ملاحظات:**

١ – شرط تعامد مستقيمين جيوب تمام اتجاه أحدهما L_1, M_1, N_1 وجيوب تمام اتجاه الآخر L_2, M_2, N_2 هو:

$$L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2 = 0.$$

٢ – إذا كانت a_1, b_1, c_1 نسب اتجاه مستقيم ما وكانت a_2, b_2, c_2 نسب اتجاه مستقيم آخر فإن الزاوية بينهما θ تُعطى بالعلاقة:

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

٧ – نسب اتجاه العمودي على مستقيمين معلومين:

نفرض مستقيمين معلومين نسب اتجاه أحدهما a_1, b_1, c_1 ونسب اتجاه الأخر a_2, b_2, c_2 ويُراد إيجاد نسب اتجاه العمودي عليهما ولتكن a, b, c

واضح أنه يجب أن نشترط عدم توازي المستقيمين المعلومين أى أن:

$$a_1 : b_1 : c_1 \neq a_2 : b_2 : c_2$$

ومن شرط التعامد يكون:

$$a_1a + b_1b + c_1c = 0,$$
$$a_2a + b_2 b + c_2c = 0.$$

وهاتان العلاقتان كافيتان لإيجاد النسبة بين الكميات a, b, c .

ومن شرط عدم التوازي نستنتج أنه على الأقل أحد المحددات:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

يكون مختلفاً عن الصفر وليكن المحدد الأول هو المختلف عن الصفر فبالتالي يكون:

$$a_1a + b_1b = - c_1c.$$
$$a_2a + b_2b = - c_2c.$$

$$\therefore a = \frac{\begin{vmatrix} -c_1c & b_1 \\ -c_2c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = -c\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = c\frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

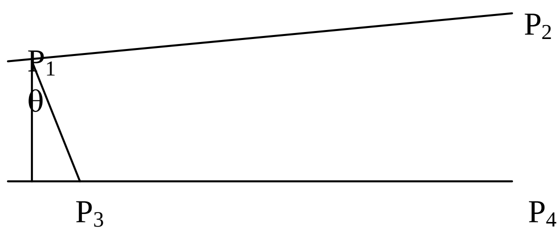
وبالمثل يمكن إثبات أن $b = c\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ وباعتبار $c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ينتج:

$$a = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

وهذه هي نسب الاتجاه العمودي على المستقيمين المعلومين.

٨ – طول أقصر بُعد بين مستقيمين معلومين غير متقاطعين في الفضاء الثلاثي:

طول أقصر بعد بين المستقيمين المعلومين $P_1P_2,\ P_3P_4$ يساوي طول مسقط المستقيم الواصل بين أحد جوانب أطراف المستقيمين على العمودي عليهما ، ومن ثم يساوي حاصل ضرب طول المستقيم الواصل بين أحد جوانب أطراف المستقيمين في جيب تمام الزاوية بين هذا المستقيم الواصل وبين المستقيم العمودي على المستقيمين(انظر الشكل):



وإذا كان K هو طول أقصر بعد بين المستقيمين المعلومين P_1P_2, P_3P_4 فإن:

$$K = \left|\overline{P_1P_3}\cos\theta\right| = \left|\overline{P_1P_3}(L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2)\right|$$

حيث L_1, M_1, N_1 جيوب تمام اتجاه P_1P_3 (أو جيوب تمام اتجاه P_2P_4) ،

وحيث L_2, M_2, N_2 جيوب تمام اتجاه العمودي على المستقيمين.

- **أمثلة:**

مثال(١): في أي الحالات الآتية يوجد مستقيم في الفضاء الثلاثي زوايا اتجاهه α,β,γ ؟

(i) $\alpha=\frac{\pi}{4},\beta=\frac{\pi}{3},\gamma=\frac{2\pi}{3}$.

(ii) $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{4},\gamma=\frac{3\pi}{4}$.

الحل:

الشرط اللازم لكي تكون α,β,γ عبارة عن زوايا اتجاه مستقيم في الفضاء الثلاثي هو:

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$

(i) $\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{2\pi}{3}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)^2=1$

وإذاً α,β,γ تكون زوايا اتجاه مستقيم في الفضاء الثلاثي.

(ii) $\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{3\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{5}{4}\neq 1$

وإذاً α,β,γ لا تكون زوايا اتجاه مستقيم في الفضاء الثلاثي.

مثال(٢): أوجد جيوب تمام اتجاه المستقيم المار بالنقطتين $P_1(1, -2, 3), P_2(2, -3, 5)$

الحل:

لتكن نسب اتجاه المستقيم P_1P_2 هي a,b,c

$\therefore a=2-1=1\ ,\ b=-3-(-2)=-1\ ,\ c=5-3=2$

وبالتالي تكون جيوب تمام اتجاه المستقيم P_1P_2 هي:

$$L=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}},$$

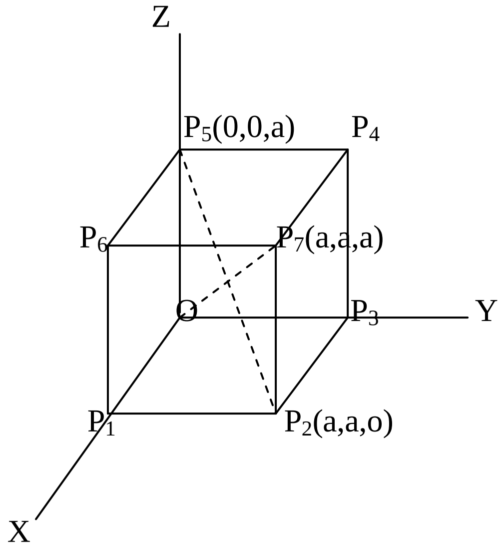
$$M=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=-\frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$N=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

مثال(٣): أوجد الزاوية بين قطرين من أقطار المكعب.

الحل:

نفرض أن طول ضلع المكعب a وبأخذ ثلاثة أوجه متعامدة من المكعب منطبقة على مستويات الإحداثيات كما بالرسم:



وبالتالي تكون أقطار المكعب هي كالتالي $P_1P_4, P_3P_6, P_2P_5, OP_7$

ونوجد الزاوية بين القطرين OP_7, P_2P_5 كما يلي:

نسب اتجاه OP_7 هي a, a, a ،ونسب اتجاه P_2P_5 هي $-a, -a, a$

وبالتالي الزاوية بين قطري المكعب تُعطى من:

$$\theta = \cos^{-1}[\pm\frac{a(-a)+a(-a)+a(a)}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\ \sqrt{a^2+a^2+a^2}}] = \cos^{-1}[\pm\frac{-a^2}{3a^2}] = \cos^{-1}[\mp\frac{1}{3}].$$

وواضح أنه نحصل على قيمتين(موجبة وسالبة)إحداهما للزاوية الحادة والثانية للمنفرجة.

مثال(٤): أوجد جيوب تمام اتجاه العمودي على المستوى المار بالنقط:

$P_1(2, 3, -2), P_2(1, -1, -1), P_3(0, 1, 2)$

الحل:

المستقيم العمودي على المستوى المار بالنقط المعطاه يكون هو العمودي على المستقيمين P_1P_2 , P_1P_3 حيث أنهما يقعا في نفس المستوى المار بالنقط P_1,P_2,P_3

ولتكن نسب اتجاه هذا العمودي هي a,b,c ونسب اتجاه P_1P_2 هي a_1,b_1,c_1

ونسب اتجاه P_1P_3 هي a_2,b_2,c_2

$$\therefore a_1 = 1-2 = -1 \, , \, b_1 = -1-3 = -4 \, , \, c_1 = -1-(-2) = 1 \quad ,$$

$$a_2 = 0-2 = -2 \, , \, b_2 = 1-3 = -2 \, , \, c_2 = 2-(-2) = 4 \quad ,$$

$$a = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -14$$

$$b = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

وإذاً جيوب تمام اتجاه العمودي على المستوى تكون:

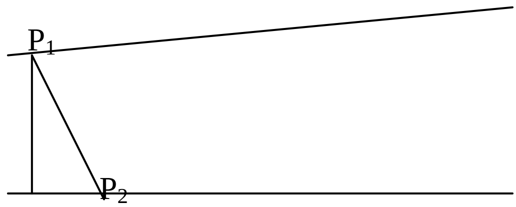
$$L = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-14}{\sqrt{196+4+36}} = \frac{-14}{\sqrt{236}} \, ,$$

$$M = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{2}{\sqrt{236}} \, ,$$

$$N = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-6}{\sqrt{236}} .$$

مثال(٥): أوجد طول أقصر بُعد بين مستقيمين في الفضاء الثلاثي نسب اتجاه أحدهما $3,2,1$ ويمر بالنقطة $(3,4,5)$ ونسب اتجاه الأخر $3,6,-2$ ويمر بالنقطة $(4,6,3)$

الحل: لتكن $P_1(3,4,5)$, $P_2(4,6,3)$



طول أقصر بُعد K بين المستقيمين المعلومين يُعطى من العلاقة:

$$K = \left|\overline{P_1P_2}(L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2)\right|.$$

حيث L_1, M_1, N_1 جيوب تمام اتجاه P_1P_2 ، وحيث L_2, M_2, N_2 جيوب تمام اتجاه العمودي على المستقيمين.

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(4-3)^2 + (6-4)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3\ ,$$

$$\therefore L_1 = \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3}\ ,\ M_1 = \frac{6-4}{3} = \frac{2}{3}\ ,\ N_1 = \frac{3-5}{3} = \frac{-2}{3}\ ,$$

ولتكن نسب اتجاه العمودي على المستقيمين هي a, b, c

ولتكن $a_1, b_1, c_1 \equiv 3,2,1\ ,\ a_2, b_2, c_2 \equiv 3,6,-2$ وإذاً:

$$a=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=-10\ ,\ b=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=9\ ,$$

$$c=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=12\ ,$$

$$L_2=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{-10}{\sqrt{100+81+144}}=\frac{-10}{\sqrt{325}}=\frac{-10}{\sqrt{(13)(25)}}=\frac{-10}{5\sqrt{13}}\ ,$$

$$M_2=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{9}{\sqrt{325}}=\frac{9}{5\sqrt{13}}\ ,$$

$$N_2=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{12}{\sqrt{325}}=\frac{12}{5\sqrt{13}}\ ,$$

$$\therefore K=\left|\overline{P_1P_2}\left(L_1L_2+M_1M_2+N_1N_2\right)\right|$$

$$=\left|3\left[(\frac{1}{3})(\frac{-10}{5\sqrt{13}})+(\frac{2}{3})(\frac{9}{5\sqrt{13}})+(\frac{-2}{3})(\frac{12}{5\sqrt{13}})\right]\right|.$$

$$=\left|\frac{-16}{5\sqrt{13}}\right|=\frac{16}{5\sqrt{13}}.$$

مثال(٦): أوجد طول أقصر بعد بين المستقيمين $P_1P_2\,,P_3P_4$ حيث:

$P_1(-4,-1,2)\ ,\ P_2(2,-3,5)\ ,\ P_3(0,3,-5)\ ,\ P_4(2,4,-4)$.

الحل:

لتكن نسب اتجاه P_1P_2 هي a_1,b_1,c_1 ونسب اتجاه P_3P_4 هي a_2,b_2,c_2

ونسب اتجاه العمودي على $P_1P_2\,,P_3P_4$ هي a,b,c

$$\therefore a_1=2-(-4)=6\ ,\ b_1=-3-(-1)=-2\ ,\ c_1=5-2=3\ ,$$
$$a_2=2-0=2\ ,\ b_2=4-3=1\ ,\ c_2=-4-(-5)=1\ ,$$

$$a = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$b = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

وإذاً جيوب تمام اتجاه العمودي على المستقيمين تكون:

$$L_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-5}{\sqrt{25+0+100}} = \frac{-5}{5\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \ ,$$

$$M_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{0}{5\sqrt{5}} = 0 \ ,$$

$$N_2 = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \ ,$$

$$\overline{P_1P_3} = \sqrt{16+16+49} = \sqrt{81} = 9 \ ,$$

وجيوب تمام اتجاه P_1P_3 تكون:

$$L_1 = \frac{0-(-4)}{9} = \frac{4}{9} \ , \ M_1 = \frac{3-(-1)}{9} = \frac{4}{9} \ , \ N_1 = \frac{-5-2}{9} = \frac{-7}{9} \ ,$$

وإذاً طول أقصر بُعد بين المستقيمين يُعطى من العلاقة:

$$\left|\overline{P_1P_3}\left(L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2\right)\right| = \left|9\left[(\frac{4}{9})(\frac{-1}{\sqrt{5}}) + (\frac{4}{9})(0) + (\frac{-7}{9})(\frac{2}{\sqrt{5}})\right]\right|$$

$$= \left|\frac{-18}{\sqrt{5}}\right| = \frac{18}{\sqrt{5}}.$$

تمارين

١- إذا كانت $P_1(3, 4, 5), P_2(4, 6, 3), P_3(-1, 2, 4), P_4(1, 0, 5)$

فأوجد طول مسقط المستقيم P_1P_2 على المستقيم P_3P_4.

٢- أوجد زوايا المثلث الذي رؤوسه $(-1, 5, -1), (1, -1, 3), (-2, 3, 4)$.

٣- بدون حساب أطوال أضلاع المثلث الذي رؤوسه النقط:

$(1, 2, 6), (1, 6, 2), (4, 4, 0)$.

تحقق من أنه قائم الزاوية.

٤- إذا كانت نسب اتجاه أضلاع مثلث هي $\{0,4,-4\}$, $\{-4,4,0\}$, $\{-4,0,4\}$.

فتحقق من أن المثلث يكون متساوي الأضلاع.

٥- عيّن قيمة λ التي تجعل المستقيم P_1P_2 عمودياً على المستقيم P_3P_4 علما بأن:

$P_1(-\lambda,-1,2), P_2(0,2,4), P_3(1,\lambda,1), P_4(\lambda + 1,0,2)$.

٦- مستقيم نسب اتجاهه $1, -2, 2$ ويمر بالنقطة $(-4, 6, 1)$

أوجد نقطة تقاطعه مع مستويات الإحداثيات.

٧- أوجد طول أقصر بعد بين مستقيمين أحدهما نسب اتجاهه $1, -2, 2$ ويمر بالنقطة $(2, 5, 1)$ والآخر نسب اتجاهه $-2, 3, 6$ ويمر بالنقطة $(-2, 2, 6)$.

٨- أوجد طول أقصر بعد بين المستقيمين P_1P_2, P_3P_4 حيث:

$P_1(0, 2, 4), P_2(3, 4, 5), P_3(1, 0, 5), P_4(4, 6, 3)$.

الباب الثاني

المستوى والخط المستقيم في الفضاء الثلاثي

أولاً – المستوى في الفضاء الثلاثي:

١– تعريف المستوى:

المستوى هو السطح الذى إذا أُخذت عليه نقطتان P_1, P_2 فإن جميع نقط المستقيم P_1P_2 تكون واقعة على السطح أيضاً.

نظرية: أي معادلة من الدرجة الأولى في x, y, z تدل على مستوى ، والعكس صحيح بمعنى أن معادلة أي مستوى تكون من الدرجة الأولى في x, y, z.

البرهان: نفرض أن معادلة من الدرجة الأولى في x, y, z بالصورة العامة:

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (1)$$

ولتكن $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ نقطتين على المحل الهندسي للمعادلة (1) إذاً:

$$\left.\begin{aligned} ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ولتكن P نقطة ما على المستقيم P_1P_2 بحيث $\dfrac{P_1P}{P_2P} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$

$$\therefore P(x, y, z) \equiv \left(\frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right).$$

وباستخدام العلاقة (2) نجد أن النقطة P تحقق المعادلة (1) وعلى ذلك وطبقا للتعريف فإن المعادلة (1) تمثل مستوى.

ولإثبات العكس نفرض مستوى يمر بنقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ونفرض أن P_0K عمودي على المستوى وأن نسب اتجاه العمودي هي a,b,c

ولإيجاد معادلة المستوى نفرض $P(x, y, z)$ أي نقطة عليه.واضح أن المستوى يكون هو المحل الهندسي للنقطة P التى تحقق الشرط $P_0P \perp P_0K$.

وحيث إن نسب اتجاه P_0P تكون $(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)$.

$$\therefore a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \ . \qquad (3)$$

$$\therefore ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0.$$

وواضح أن (3) معادلة من الدرجة الأولى في x, y, z وتتحقق فقط بجميع نقط المستوى وبالتالي فهي معادلة المستوى.

- **ملاحظات ونتائج**:

١- المعادلة (1) تشتمل على أربعة ثوابت يمكن اختزالها إلى ثلاثة ثوابت مستقلة ، وهذا يعني أن المستوى في الفضاء الثلاثي يتحدد بثلاث شروط مستقلة.

٢- معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة $P(x_1, y_1, z_1)$ ونسب اتجاه العمودي عليه هي a, b, c تكون على الصورة $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

٣- شرط توازي المستقيم الذي نسب اتجاهه a_1, b_1, c_1 (جيوب تمام اتجاهه L,M,N) للمستوى $ax+by+cz+d=0$ هو: $aa_1+bb_1+cc_1=0$ ($aL+bM+cN=0$).

٤- الزاوية θ بين المستويين $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ تكون:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\pm \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \right).$$

٥- شرط توازي المستويين $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ هو:

$a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2$

والمسافة بين المستويين $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ تساوي:

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

٦- شرط تعامد المستويين $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ هو:

$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

٧- إذا كانت $\{a_1, b_1, c_1\}, \{a_2, b_2, c_2\}$ نسب اتجاه مستقيمين معلومين ، وكانت $\{a, b, c\}$ نسب اتجاه العمودي عليهما ومن شرط التعامد يكون:

$$a_1a + b_1b + c_1c = 0 ,$$
$$a_2a + b_2b + c_2c = 0 .$$

ويكون: $a = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$

- **أمثلة:**

مثال(١): أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (1- ,1 ,0) ويكون عمودياً على المستقيم P_1P_2 حيث $P_1(1, -1, 2), P_2(3, -4, 1)$.

الحل:

معادلة المستوى يمر بالنقطة (x_1, y_1, z_1) ونسب اتجاه العمودي عليه هي a, b, c تكون على الصورة:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

ونسب اتجاه العمودي P_1P_2 تكون:

$$a = 3 - 1 = 2, \quad b = -4 + 1 = -3, \quad c = 1 - 2 = -1.$$

فتكون معادلة المستوى المطلوبة:

$$2(x-0)+(-3)(y-1)+(-1)(z-(-1)) = 0.$$
$$\therefore 2x-3y-z+2=0.$$

مثال(٢): أوجد معادلة المستوى المار بالنقطتين P_1, P_2 ويوازي المستقيم P_3P_4 حيث:

$$P_1(0, 1, 0), P_2(2, 0, 1), P_3(3, 0, 0), P_4(0, 2, 2).$$

الحل:

حيث إن المستوى يمر بالنقطتين P_1, P_2 ويوازي المستقيم P_3P_4 فيكون العمودي على المستوى هو العمودي على المستقيمين P_1P_2 , P_3P_4

ونسب اتجاه P_1P_2 تكون 2,-1,1

ونسب اتجاه P_3P_4 تكون 2 ,2 ,3–

وبالتالي تكون نسب اتجاه العمودي عليهما (العمودي على المستوى) هي:

$$a = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4, \ b = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7, \ c = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

ومن ثم تكون معادلة المستوى المطلوب بمعلومية نسب اتجاه العمودي عليه 1 ,7- , 4 – ويمر بالنقطة $P_1(0, 1, 0)$ هي:

$$-4(x-0) - 7(y-1) + 1(z-0) = 0.$$
$$\therefore 4x + 7y - z - 7 = 0.$$

مثال(٣): أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (1, -1, 5) ويكون عمودياً على المستويين $x + 2y + z = 0$، $2x - y + 3z - 1 = 0$.

الحل:

معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (1, -1, 5) ونسب اتجاه العمودي عليه a,b,c تكون:

$$a(x-1) + b(y+1) + c(z-5) = 0.$$

وحيث إن المستوى عمودي على كل من المستويين المعطيين فيكون العمودي على المستوى المطلوب موازياً لكل من المستويين المعطيين وشرط ذلك هو:

$$2a - b + 3c = 0.$$
$$a + 2b + c = 0.$$
$$\therefore a = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad b = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad c = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$

وعلى ذلك تكون معادلة المستوى المطلوب هي:

$$-7(x-1) + (y+1) + 5(z-5) = 0.$$
$$\therefore -7x + y + 5z - 17 = 0.$$

٢ – صور خاصة لمعادلة المستوى:

أ – معادلة المستوى المار بثلاث نقط معلومة:

نفرض النقط الثلاث $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$

معادلة أي مستوى يمر بالنقطة P_1 تكون بالصورة :

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

فإذا مر هذا المستوى بالنقطتين P_2, P_3 فنحصل على:

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0.$$
$$a(x_3 - x_1) + b(y_3 - y_1) + c(z_3 - z_1) = 0.$$

وبحذف المعاملات الثلاثة a, b, c بين المعادلات نحصل على:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

وهذه هي معادلة المستوى المار بالنقط P_1, P_2, P_3 (حيث إنها معادلة من الدرجة الأولى في x, y, z وتحققها النقط P_1, P_2, P_3).

نتيجة: شرط وقوع النقط:

$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3), P_4(x_4, y_4, z_4)$

في مستوى واحد هو:

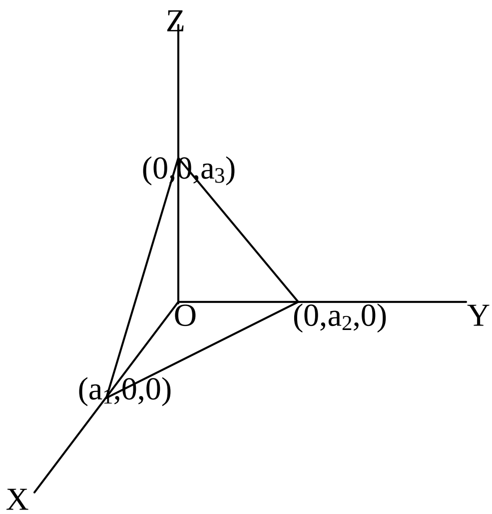
$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

ب – معادلة المستوى بمعلومية أطوال الأجزاء التي يقطعها من محاور الإحداثيات:

نفرض أن الأجزاء المقطوعة من المحاور هي a_1, a_2, a_3 أي أن المستوى يمر بالنقط:

$(a_1,0,0),(0,a_2,0),(0,0,a_3)$

كما بالرسم:



وبذلك تكون معادلة المستوى هي:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-0 & z-0 \\ 0-a_1 & a_2-0 & 0-0 \\ 0-a_1 & 0-0 & a_3-0 \end{vmatrix} = 0.$$

أي أن:

$$a_2a_3x + a_1a_3y + a_1a_2z = a_1a_2a_3 .$$

فإذا كانت $a_1a_2a_3 \neq 0$ فإن المعادلة السابقة تصبح على الصورة:

$$\frac{x}{a_1}+\frac{y}{a_2}+\frac{z}{a_3}=1.$$

- **ملاحظات ونتائج:**

١- إذا كان أحد الأجزاء a_1, a_2, a_3 لا يساوى الصفر ، وكان الجزءان الآخران مساويان للصفر ، وبالتالي يمر المستوى بنقطة الأصل ومعادلة المستويات التي تمر بنقطة الأصل تكون على الصورة:

$$ax+by+cz=0\,.$$

٢- إذا وازى المستوى أحد المحاور وليكن المحور OX فإن $a_1 \to \infty$ وعندئذ $\frac{x}{a_1}\to 0$ لجميع قيم x المحدودة ، ومن ثم تصبح المعادلة السابقة على الصورة:

$$\frac{y}{a_2}+\frac{z}{a_3}=1.$$

وهذه المعادلة تمثل مستوى يوازي المحورOX ويقطع المحاور OY,OZ بأجزاء a_2, a_3 على الترتيب ، وبالمثل تكون المعادلتين:

$$\frac{x}{a_1}+\frac{z}{a_3}=1, \qquad \frac{x}{a_1}+\frac{y}{a_2}=1.$$

تمثلان معادلة مستوى يوازي المحور OY ويقطع المحاور OX,OZ بأجزاء a_1, a_3 على الترتيب ، ومعادلة مستوى يوازي المحور OZ ويقطع المحاور OX,OY بأجزاء a_1, a_2 على الترتيب.

٣- المعادلة $x=a_1$ تمثل في الفضاء الثلاثي مستوى يوازي المستوى YOZ ويقطع المحور OX في جزء طوله a_1 .

ج – معادلة المستوى في الصورة العمودية:

نفرض أن R طول العمود النازل من نقطة الأصل على المستوى وأن L, M, N جيوب تمام اتجاه هذا العمود ، وبفرض أن a_1, a_2, a_3 هي الأجزاء التى يقطعها المستوى من المحاور OX,OY,OZ (انظر الرسم السابق) نجد أن:

$$L = \frac{R}{a_1},\ M = \frac{R}{a_2},\ N = \frac{R}{a_3}.$$

وبالتعويض في المعادلة $\frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2} + \frac{z}{a_3} = 1$ عن قيم a_1, a_2, a_3 نحصل على:

$$\frac{\mathrm{Lx}}{\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{My}}{\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{Nz}}{\mathrm{R}} = 1.$$

أي أن:

$$\mathrm{Lx} + \mathrm{My} + \mathrm{Nz} = \mathrm{R}.$$

وهذه هي معادلة المستوى في الصورة العمودية حيث $0 < R$.

- **ملاحظات ونتائج:**

١- إذا وقعت نقطة الأصل في منتصف البعد بين مستويين متوازيين وكانت معادلة أحدهما في الصورة العمودية Lx + My + Nz = R فإن المستوى الأخر يُعطى بالمعادلة Lx - My - Nz = R

٢- الصورة العمودية لمعادلة المستوى $ax + by + cz + d = 0$ تكون :

$$\frac{ax + by + cz + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.$$

ويكون طول العمود النازل من نقطة الأصل على هذا المستوى مساوياً:

$$\left|\frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|.$$

مثال(٤): أوجد أطوال الأجزاء المقطوعة من المحاور بمستوى يمر بالنقطة (1, -1, 1) ، ويوازي المستوى 3x – 4y + 5z + 2 = 0 .

الحل:

معادلة المستوى الذى يوازي المستوى المعطى تكون بالصورة:

3x – 4y – 5z + d = 0.

فإذا مر هذا المستوى بالنقطة (1, -1, 1) فإن d = - 12

ومن ثم تكون معادلة المستوى المطلوب هي:

3x - 4y + 5z – 12 = 0.

$$\therefore \frac{x}{4}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{\frac{12}{5}}=1.$$

وبالتالي تكون أطوال الأجزاء المقطوعة من المحاور هي $4,-3,\frac{12}{5}$.

مثال(٥): أوجد الصورة العمودية للمستوى الذى يقطع محاور الاحداثيات بأجزاء أطوالها على الترتيب هي 1- ,1 ,2-

الحل:

معادلة المستوى بمعلومية الأجزاء المقطوعة تكون:

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-1}=1.$$

$$\therefore x-2y+2z=-2.$$

وبذلك تكون الصورة العمودية للمستوى هي:

$$\frac{x-2y+2z}{\pm\sqrt{1+4+4}}=\frac{-2}{\pm\sqrt{1+4+4}}.$$

وباختيار الإشارة السالبة ليكون الطرف الأيمن موجب:

$$\therefore -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z=\frac{2}{3}.$$

أي أن جيوب تمام اتجاه وطول العمود النازل على المستوى من نقطة الأصل تكون هي على الترتيب: $L=-\frac{1}{3},M=\frac{2}{3},N=\frac{2}{3},R=\frac{2}{3}$.

٣ ـ طول العمود النازل على مستوى معلوم من نقطة معلومة:

نفرض أن المستوى $Lx + My + Nz = R$ حيث $R > 0$ مُعطى بالصورة العمودية ، ونفرض أن $P(x_1, y_1, z_1)$ النقطة المعلومة.

فإذا كانت $P_0(x_0, y_0, z_0)$ إحدى نقط المستوى فإن طول العمود النازل من النقطة P على المستوى وليكن R_1 يكون مساوياً للقيمة العددية لمسقط P_0P_1 على العمود على المستوى أي أن:

$$R_1 = \pm[L(x_1 - x_0) + M(y_1 - y_0) + N(z_1 - z_0)] = \pm(Lx_1 + My_1 + Nz_1 - R).$$

نظرية: الدالة $ax + by + cz + d$ تكون موجبة لجميع النقط الواقعة على أحد جانبي المستوى $ax + by + cz + d = 0$ وتكون سالبة لجميع النقط في الجانب الآخر.

البرهان: نفرض النقطتين $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ تقعان على جانبي المستوى:
$ax + by + cz + d = 0$.

ونفرض أن P_1P_2 يقطع المستوى في نقطة P بحيث $\frac{P_1P}{P_2P} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

$$\therefore P\left(\frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)..$$

وحيث إن P تقع على المستوى فإنها تحقق معادلته أي أن:

$$a(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1) + b(\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1) + c(\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1) + d(\lambda_1 + \lambda_2) = 0.$$

$$\therefore \lambda_1(ax_2 + by_2 + cz_2 + d) + \lambda_2(ax_1 + by_1 + cz_1 + d) = 0.$$

$$\therefore \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\left(\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{ax_2 + by_2 + cz_2 + d}\right).$$

ولكي تكون النسبة $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ موجبة ، لابد أن تكون الكميتان:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d \ , \ ax_2 + by_2 + cz_2 + d$$

مختلفان في الإشارة.

مثال(٦): أوجد طولي العمودين النازلين من النقطتين (1,0,2) ,(0,0,0) على المستوى x–2y+2z– 4=0 ووضح أن هاتين النقطتين تقعان في جهتين مختلفتين من المستوى.

الحل:

نفرض أن R_0, R_1 هما أطوال العمودين من النقطتين (2 ,0 ,1) ,(0 ,0 ,0) على المستوى

$$\therefore R_o = \mp\frac{1(0)-2(0)+2(0)-4}{\sqrt{1+4+4}} = \mp\frac{-4}{3} = \frac{4}{3},$$

$$R_1 = \mp\frac{1(1)-2(0)+2(2)-4}{\sqrt{1+4+4}} = \mp\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

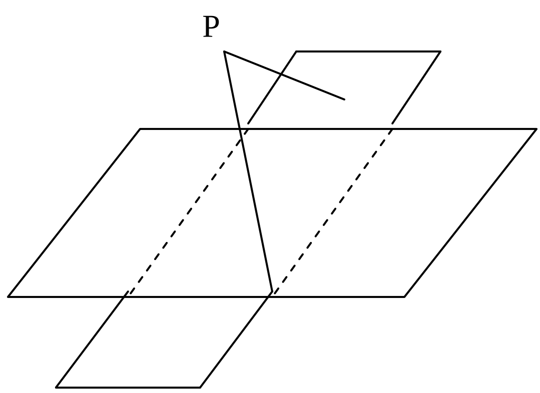
وواضح أن R_o, R_1 مختلفتين في الإشارة أي أن النقطتين (2 ,0 ,1) ,(0 ,0 ,0) تقعان في جهتين مختلفتين من المستوى المُعطى.

٤ – المستويان المنصفان للزاوية الزوجية بين مستويين معلومين:

نفرض أن $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ مستويين معلومين.

المستوى المنصف للزاوية الزوجية بين هذين المستويين يكون هو المحل الهندسي لنقطة في الفضاء الثلاثي بحيث يكون بعدها عن المستوى الأول يساوي بعدها عن المستوى الثاني.

(انظر الشكل):



أي أنه إذا كانت $P(\alpha,\beta,\gamma)$ نقطة على المستوى المنصف فإن:

$$\frac{a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm\frac{a_2\alpha+b_2\beta+c_2\gamma+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

أي أن النقطة $P(\alpha,\beta,\gamma)$ دائماً تحقق إحدى المعادلتين:

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2x+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

وهما معادلتى المستويين المنتصفين للزاوية الزوجية بين المستويين المعلومين.

وواضح أن هذين المستويين يكونا متعامدان لأن نسب اتجاه أحدهما هي:

$$a_1k_2-a_2k_1\ ,\ b_1k_2-b_2k_1\ ,\ c_1k_2-c_2k_1.$$

ونسب اتجاه الآخر هي:

$$a_1k_2+a_2k_1\ ,\ b_1k_2+b_2k_1\ ,\ c_1k_2+c_2k_1.$$

حيث $k_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2},\ k_2=\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$.

مثال(٧): أوجد معادلتى المستويين المنصفين للزاوية الزوجية بين المستويين:

$$x+2y-2z+3=0\ ,\quad 2x-y+2z=4.$$

الحل:

معادلتى المستويين المنتصفين للزاوية الزوجية بين المستويين المعطيين تُعطيان من:

$$\frac{x+2y-2z+3}{\sqrt{1+4+4}}=\pm\frac{2x-y+2z-4}{\sqrt{4+1+4}}.$$

وإذاً المعادلتين تكونا $3x+y-1=0\ ,\ x-3y+4z-7=0$

٥ – معادلة أي مستوى يمر بخط تقاطع مستويين معلومين:

نفرض أن $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\ ,\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ مستويين معلومين وغير متوازيين.

معادلة المستوى المار بخط تقاطعهما تكون على الصورة:

$$\lambda_1(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0.$$

حيث λ_1,λ_2 ثابتان لا يساويان الصفر في آن واحد.

مثال(٨): أوجد المستوى المار بخط تقاطع المستويين:

$$x+y+z-3=0\ ,\quad x-2y+3z+4=0.$$

ويكون عمودياً على المستوى الثاني.

الحل:

معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين تكون على الصورة:

$\lambda_1(x + y + z - 3) + \lambda_2(x - 2y + 3z + 4) = 0. \qquad (*)$
$\therefore (\lambda_1 + \lambda_2)\, x + (\lambda_1 - 2\,\lambda_2)\, y + (\lambda_1 + 3\,\lambda_2)\, z + (-3\lambda_1 + 4\lambda_2) = 0.$

ولكي يكون هذا المستوى عمودياً على المستوى $x - 2y + 3z + 4 = 0$

يجب أن يتحقق الشرط:

$(\lambda_1 + \lambda_2) - 2\,(\lambda_1 - 2\lambda_2) + 3\,(\lambda_1 + 3\lambda_2) = 0.$

وبالتالي نحصل على $\lambda_1 = -7\lambda_2$ ، وبالتعويض في المعادلة (*) نحصل على:

$-7\lambda_2(x + y + z - 3) + \lambda_2(x - 2y + 3z + 4) = 0.$

وبوضع $\lambda_2 = 1$ تكون معادلة المستوى المطلوب هي:

$6x + 9y + 4z - 25 = 0.$

مثال(٩): أوجد معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين:

$$3x + 2y - 5z + 1 = 0\ , \quad x - 5y - z - 3 = 0.$$

ويكون عمودياً على المستوى الأول.

الحل:

معادلة المستوى المطلوب تكون على الصورة:

$\lambda_1(3x + 2y - 5z + 1) + \lambda_2(x - 5y - z - 3) = 0.$
$\therefore (3\lambda_1 + \lambda_2)\, x + (2\lambda_1 - 5\lambda_2)\, y + (-5\lambda_1 - \lambda_2)\, z + (\lambda_1 - 3\lambda_2) = 0.$

ومن شرط التعامد نحصل على:

$3(3\lambda_1 + \lambda_2) + 2(2\lambda_1 - 5\lambda_2) - 5\,(-5\lambda_1 - \lambda_2) = 0.$
$\therefore\ 38\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 19\lambda_1.$

وبالتعويض نحصل على:

$\lambda_1[(3 + 18)\, x + (2 - 72)\, y + (-5 - 18)\, z + (1 - 54)] = 0.$

وباختيار $\lambda_1 = 1$ تكون المعادلة المطلوبة هي:

$21\, x - 70\, y - 23\, z - 53 = 0.$

٦ – وضع ثلاثة مستويات بالنسبة لبعضها في الفضاء الثلاثي:

نفرض أن لدينا ثلاثة مستويات:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0.$$

تُوجد خمس حالات مختلفة ممكنة لوضع هذه المستويات لبعضهما في الفضاء الثلاثي:

أ – انطباق المستويات الثلاثة على بعضها إذا تحقق الشرط:

$$a_1:b_1:c_1:d_1 = a_2:b_2:c_2:d_2 = a_3:b_3:c_3:d_3.$$

ب – تتوازى المستويات الثلاثة إذا تحقق الشرط:

$$a_1:b_1:c_1 = a_2:b_2:c_2 = a_3:b_3:c_3\ .$$

ج – تتقاطع المستويات الثلاثة في خط مستقيم في الجزء المحدد من الفضاء الثلاثي ويكون شرط التقاطع هو وجود قيمة عددية λ تجعل المستوى:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda\,(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0.$$

ينطبق مع المستوى الثالث أي أن:

$$\frac{a_1+\lambda a_2}{a_3} = \frac{b_1+\lambda b_2}{b_3} = \frac{c_1+\lambda c_2}{c_3} = \frac{d_1+\lambda d_2}{d_3}\ .$$

د – تتقاطع المستويات الثلاثة في نقطة واحدة إذا تحقق الشرط:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0\ .$$

هـ – ليس للمستويات الثلاثة أي نقطة مشتركة ويحدث ذلك إذا كان خط تقاطع مستويان من المستويات الثلاثة يوازي المستوى الثالث.

مثال(١٠): تحقق من أن المستويات الثلاثة:

$2x - y + 5z - 1 = 0,$
$x + 3y + z - 4 = 0,$
$6x + 11y + 9z - 17 = 0.$

تتقاطع في خط مستقيم.

الحل:

معادلة المستوى الذي يمر بخط تقاطع المستويين الأول والثاني تكون:

$2x - y + 5z - 1 + \lambda(x + 3y + z - 4) = 0$

$\therefore (2 - \lambda)x + (-1 + 3\lambda)y + (5 + \lambda)z + (-1 - 4\lambda) = 0. \qquad (*)$

ولكى تتقاطع المستويات الثلاثة في خط مستقيم يجب أن تنطبق المعادلة (*) مع معادلة المستوى الثالث أي يتحقق:

$$\frac{2+\lambda}{6} = \frac{-3+3\lambda}{11} = \frac{5+\lambda}{9} = \frac{1+4\lambda}{17}. \qquad (**)$$

وواضح أن القيمة العددية $\lambda = 4$ تحقق العلاقة (**)

وبالتالي تتقاطع المستويات الثلاثة في خط مستقيم.

تمارين

١- أوجد معادلة المستوى العمودي على P_1P_2 من منتصفه علماً بأن

$P_1(-3, -1, 4), P_2(1, 5, 6).$

٢- إذا كانت $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{2\pi}{3}$ زاويتين من زوايا اتجاه العمودي على المستوى المار بالنقطة $(3, 1, 2)$ فاوجد معادلة المستوى.

٣- أوجد معادلة المستوى الموازي للمستوى $2x - y + z = 0$ ويقطع من المحور OY جزء طوله 3 وحدات.

٤- تحقق من أن النقط $(0, 2, -4), (-1, 1, -2), (-2, 3, 3), (-3, -2, 1)$ تقع في مستوى واحد ، وأوجد معادلته.

٥- أوجد معادلة المستوى الموازي للمستوى $4x + y + 8z + 39 = 0$ ويبعد عنه 7 وحدات.

٦- أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث يكون بعدها عن المستوى $x + 2y + 2z - 6 = 0$ ضعف بعدها عن المستوى $4x - 8y + z - 9 = 0$.

٧- أوجد الزاوية الحادة بين كل من المستويين فيما يلي:

(i) $2x - y + 2z - 10 = 0, \quad 4x + y + z - 7 = 0.$

(ii) $5x + 3y - 4z + 14 = 0, \quad x - 4y - z + 12 = 0.$

(iii) $3x + 4y - 16 = 0, \quad 4y - 2z - 5 = 0.$

٨- أوجد معادلات المستويات التى تمر بالنقطتين $(8, 0, 1), (0, 4, 2)$ وتصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع المستوى $2x - y + 2z - 7 = 0$.

٩- أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة $(3, -2, 1)$ والمار بخط تقاطع المستويين:

$3y - 2z - 4 = 0, \quad x + y + 4z + 6 = 0.$

١٠- أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة $(1, -2, 2)$ وعمودي على كل من المستويين:

$3x - 3y + z = 0, \quad 2x + 4y - 5z + 1 = 0.$

١١- أوجد معادلة المستوى العمودي على المستوى $x - y + z = 0$ ويمر بالنقطة $(2, -1, 1)$ ويوازي المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة $(2, 3, -1)$.

الباب الثانى

المستوى والخط المستقيم في الفضاء الثلاثي

أولاً – المستوى في الفضاء الثلاثي:

١– تعريف المستوى:

المستوى هو السطح الذى إذا أُخذت عليه نقطتان P_1, P_2 فإن جميع نقط المستقيم P_1P_2 تكون واقعة على السطح أيضاً.

نظرية: أي معادلة من الدرجة الأولى في x, y, z تدل على مستوى ، والعكس صحيح بمعنى أن معادلة أي مستوى تكون من الدرجة الأولى في x, y, z.

البرهان: نفرض أن معادلة من الدرجة الأولى في x, y, z بالصورة العامة:

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (1)$$

ولتكن $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ نقطتين على المحل الهندسي للمعادلة (1) إذاً:

$$\begin{aligned} &ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ &ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

ولتكن P نقطة ما على المستقيم P_1P_2 بحيث $\frac{P_1P}{P_2P} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

$$\therefore P(x, y, z) \equiv \left(\frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right).$$

وباستخدام العلاقة (2) نجد أن النقطة P تحقق المعادلة (1) وعلى ذلك وطبقا للتعريف فإن المعادلة (1) تمثل مستوى.

ولإثبات العكس نفرض مستوى يمر بنقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ونفرض أن P_0K عمودي على المستوى وأن نسب اتجاه العمودي هي a,b,c

ولإيجاد معادلة المستوى نفرض $P(x, y, z)$ أي نقطة عليه.واضح أن المستوى يكون هو المحل الهندسي للنقطة P التى تحقق الشرط $P_0P \perp P_0K$.

وحيث إن نسب اتجاه P_0P تكون $(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)$.

$$\therefore a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \ . \qquad (3)$$

$$\therefore ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0.$$

وواضح أن (3) معادلة من الدرجة الأولى في x, y, z وتتحقق فقط بجميع نقط المستوى وبالتالي فهي معادلة المستوى.

- **ملاحظات ونتائج**:

٨- المعادلة (1) تشتمل على أربعة ثوابت يمكن اختزالها إلى ثلاثة ثوابت مستقلة ، وهذا يعني أن المستوى في الفضاء الثلاثي يتحدد بثلاث شروط مستقلة.

٩- معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة $P(x_1, y_1, z_1)$ ونسب اتجاه العمودي عليه هي a, b, c تكون على الصورة $a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$

١٠-شرط توازي المستقيم الذي نسب اتجاهه a_1, b_1, c_1 (جيوب تمام اتجاهه L,M,N) للمستوى $ax+by+cz+d=0$ هو: $aa_1+bb_1+cc_1=0$ ($aL+bM+cN=0$).

١١-الزاوية θ بين المستويين $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ تكون:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\pm\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right).$$

١٢-شرط توازي المستويين $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ هو:

$a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2$

والمسافة بين المستويين $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ تساوي:

$$\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

١٣-شرط تعامد المستويين $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ هو:

$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

١٤-إذا كانت $\{a_1,b_1,c_1\},\{a_2,b_2,c_2\}$ نسب اتجاه مستقيمين معلومين ، وكانت $\{a,b,c\}$ نسب اتجاه العمودي عليهما ومن شرط التعامد يكون:

$$a_1a+b_1b+c_1c=0\ ,$$
$$a_2a+b_2b+c_2c=0\ .$$

ويكون: $a=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\quad b=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix},\quad c=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$

▪ **أمثلة:**

مثال(١): أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة $(0, 1, -1)$ ويكون عمودياً على المستقيم P_1P_2 حيث $P_1(1, -1, 2), P_2(3, -4, 1)$.

الحل:

معادلة المستوى يمر بالنقطة (x_1, y_1, z_1) ونسب اتجاه العمودي عليه هي a, b, c تكون على الصورة:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

ونسب اتجاه العمودي P_1P_2 تكون:

$$a = 3 - 1 = 2,\ \ b = -4 + 1 = -3,\ \ c = 1 - 2 = -1.$$

فتكون معادلة المستوى المطلوبة:

$$2(x-0)+(-3)(y-1)+(-1)(z-(-1)) = 0.$$
$$\therefore 2x-3y-z+2=0.$$

مثال(٢): أوجد معادلة المستوى المار بالنقطتين P_1, P_2 ويوازي المستقيم P_3P_4 حيث:

$P_1(0, 1, 0), P_2(2, 0, 1), P_3(3, 0, 0), P_4(0, 2, 2).$

الحل:

حيث إن المستوى يمر بالنقطتين P_1, P_2 ويوازي المستقيم P_3P_4 فيكون العمودي على المستوى هو العمودي على المستقيمين P_1P_2 , P_3P_4

ونسب اتجاه P_1P_2 تكون $2,-1,1$

ونسب اتجاه P_3P_4 تكون $-3, 2, 2$

وبالتالي تكون نسب اتجاه العمودي عليهما (العمودي على المستوى) هي:

$$a = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4,\ b = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7,\ c = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

ومن ثم تكون معادلة المستوى المطلوب بمعلومية نسب اتجاه العمودي عليه $-4, -7, 1$ ويمر بالنقطة $P_1(0, 1, 0)$ هي:

$$-4(x - 0) - 7(y - 1) + 1(z - 0) = 0.$$
$$\therefore 4x + 7y - z - 7 = 0.$$

مثال(٣): أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (5 ,1- ,1) ويكون عمودياً على المستويين $2x - y + 3z - 1 = 0, \quad x + 2y + z = 0$.

الحل:

معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (5 ,1- ,1) ونسب اتجاه العمودي عليه a,b,c تكون:

$$a(x-1) + b(y+1) + c(z-5) = 0.$$

وحيث إن المستوى عمودي على كل من المستويين المعطيين فيكون العمودي على المستوى المطلوب موازياً لكل من المستويين المعطيين وشرط ذلك هو:

$$2a - b + 3c = 0.$$
$$a + 2b + c = 0.$$
$$\therefore a = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad b = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad c = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$

وعلى ذلك تكون معادلة المستوى المطلوب هي:

$$-7(x-1) + (y+1) + 5(z-5) = 0.$$
$$\therefore -7x + y + 5z - 17 = 0.$$

٢ – صور خاصة لمعادلة المستوى:

أ – معادلة المستوى المار بثلاث نقط معلومة:

نفرض النقط الثلاث $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$

معادلة أي مستوى يمر بالنقطة P_1 تكون بالصورة :

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

فإذا مر هذا المستوى بالنقطتين P_2, P_3 فنحصل على:

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0.$$
$$a(x_3 - x_1) + b(y_3 - y_1) + c(z_3 - z_1) = 0.$$

وبحذف المعاملات الثلاثة a, b, c بين المعادلات نحصل على:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

وهذه هي معادلة المستوى المار بالنقط P_1, P_2, P_3 (حيث إنها معادلة من الدرجة الأولى في x, y, z وتحققها النقط P_1, P_2, P_3).

نتيجة: شرط وقوع النقط:

$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3), P_4(x_4, y_4, z_4)$

في مستوى واحد هو:

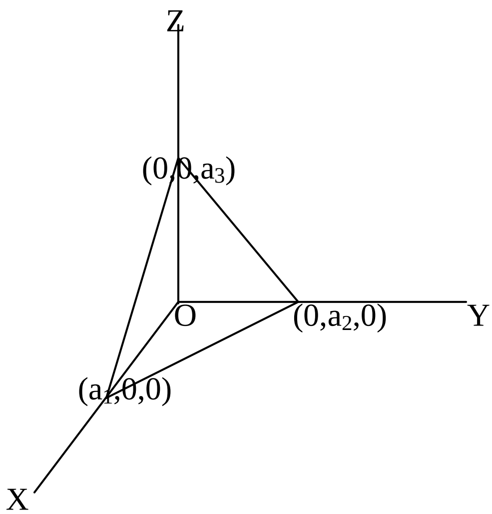
$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

ب – معادلة المستوى بمعلومية أطوال الأجزاء التي يقطعها من محاور الإحداثيات:

نفرض أن الأجزاء المقطوعة من المحاور هي a_1, a_2, a_3 أي أن المستوى يمر بالنقط:

$(a_1,0,0),(0,a_2,0),(0,0,a_3)$

كما بالرسم:



وبذلك تكون معادلة المستوى هي:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-0 & z-0 \\ 0-a_1 & a_2-0 & 0-0 \\ 0-a_1 & 0-0 & a_3-0 \end{vmatrix} = 0.$$

أي أن:

$$a_2a_3x + a_1a_3y + a_1a_2z = a_1a_2a_3 .$$

فإذا كانت $a_1 a_2 a_3 \neq 0$ فإن المعادلة السابقة تصبح على الصورة:

$$\frac{x}{a_1}+\frac{y}{a_2}+\frac{z}{a_3}=1.$$

- **ملاحظات ونتائج:**

٤- إذا كان أحد الأجزاء a_1, a_2, a_3 لا يساوى الصفر ، وكان الجزءان الآخران مساويان للصفر ، وبالتالي يمر المستوى بنقطة الأصل ومعادلة المستويات التي تمر بنقطة الأصل تكون على الصورة:

$$ax+by+cz=0\,.$$

٥- إذا وازى المستوى أحد المحاور وليكن المحور OX فإن $a_1 \to \infty$ وعندئذ $\frac{x}{a_1} \to 0$ لجميع قيم x المحدودة ، ومن ثم تصبح المعادلة السابقة على الصورة:

$$\frac{y}{a_2}+\frac{z}{a_3}=1.$$

وهذه المعادلة تمثل مستوى يوازي المحورOX ويقطع المحاور OY,OZ بأجزاء a_2, a_3 على الترتيب ، وبالمثل تكون المعادلتين:

$$\frac{x}{a_1}+\frac{z}{a_3}=1, \qquad \frac{x}{a_1}+\frac{y}{a_2}=1.$$

تمثلان معادلة مستوى يوازي المحور OY ويقطع المحاور OX,OZ بأجزاء a_1, a_3 على الترتيب ، ومعادلة مستوى يوازي المحور OZ ويقطع المحاور OX,OY بأجزاء a_1, a_2 على الترتيب.

٦- المعادلة $x=a_1$ تمثل في الفضاء الثلاثي مستوى يوازي المستوى YOZ ويقطع المحور OX في جزء طوله a_1 .

ج – معادلة المستوى في الصورة العمودية:

نفرض أن R طول العمود النازل من نقطة الأصل على المستوى وأن L, M, N جيوب تمام اتجاه هذا العمود ، وبفرض أن a_1, a_2, a_3 هي الأجزاء التى يقطعها المستوى من المحاور OX,OY,OZ (انظر الرسم السابق) نجد أن:

$$L = \frac{R}{a_1},\ M = \frac{R}{a_2},\ N = \frac{R}{a_3}.$$

وبالتعويض في المعادلة $\frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2} + \frac{z}{a_3} = 1$ عن قيم a_1, a_2, a_3 نحصل على:

$$\frac{\mathrm{Lx}}{\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{My}}{\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{Nz}}{\mathrm{R}} = 1.$$

أي أن:

$$\mathrm{Lx + My + Nz = R.}$$

وهذه هي معادلة المستوى في الصورة العمودية حيث $0 < R$.

- **ملاحظات ونتائج:**

٣- إذا وقعت نقطة الأصل في منتصف البعد بين مستويين متوازيين وكانت معادلة أحدهما في الصورة العمودية Lx + My + Nz = R فإن المستوى الأخر يُعطى بالمعادلة Lx - My - Nz = R

٤- الصورة العمودية لمعادلة المستوى $ax + by + cz + d = 0$ تكون :

$$\frac{ax + by + cz + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.$$

ويكون طول العمود النازل من نقطة الأصل على هذا المستوى مساوياً:

$$\left|\frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|.$$

مثال(٤): أوجد أطوال الأجزاء المقطوعة من المحاور بمستوى يمر بالنقطة (1, -1, 1) ، ويوازي المستوى $3x - 4y + 5z + 2 = 0$.

الحل:

معادلة المستوى الذى يوازي المستوى المعطى تكون بالصورة:

$3x - 4y - 5z + d = 0.$

فإذا مر هذا المستوى بالنقطة (1, -1, 1) فإن $d = -12$

ومن ثم تكون معادلة المستوى المطلوب هي:

$$3x - 4y + 5z - 12 = 0.$$

$$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{\frac{12}{5}} = 1.$$

وبالتالي تكون أطوال الأجزاء المقطوعة من المحاور هي $4, -3, \frac{12}{5}$.

مثال(٥): أوجد الصورة العمودية للمستوى الذى يقطع محاور الاحداثيات بأجزاء أطوالها على الترتيب هي 1- ,1 ,2-

الحل:

معادلة المستوى بمعلومية الأجزاء المقطوعة تكون:

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-1} = 1.$$

$$\therefore x - 2y + 2z = -2.$$

وبذلك تكون الصورة العمودية للمستوى هي:

$$\frac{x - 2y + 2z}{\pm\sqrt{1+4+4}} = \frac{-2}{\pm\sqrt{1+4+4}}.$$

وباختيار الإشارة السالبة ليكون الطرف الأيمن موجب:

$$\therefore -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = \frac{2}{3}.$$

أي أن جيوب تمام اتجاه وطول العمود النازل على المستوى من نقطة الأصل تكون هي على الترتيب: $L = -\frac{1}{3}, M = \frac{2}{3}, N = \frac{2}{3}, R = \frac{2}{3}$.

٣ ـ طول العمود النازل على مستوى معلوم من نقطة معلومة:

نفرض أن المستوى $Lx + My + Nz = R$ حيث $R > 0$ مُعطى بالصورة العمودية ، ونفرض أن $P(x_1, y_1, z_1)$ النقطة المعلومة.

فإذا كانت $P_0(x_0, y_0, z_0)$ إحدى نقط المستوى فإن طول العمود النازل من النقطة P على المستوى وليكن R_1 يكون مساوياً للقيمة العددية لمسقط P_0P_1 على العمود على المستوى أي أن:

$$R_1 = \pm[L(x_1 - x_0) + M(y_1 - y_0) + N(z_1 - z_0)] = \pm(Lx_1 + My_1 + Nz_1 - R).$$

نظرية: الدالة $ax + by + cz + d$ تكون موجبة لجميع النقط الواقعة على أحد جانبي المستوى $ax + by + cz + d = 0$ وتكون سالبة لجميع النقط في الجانب الآخر.

البرهان: نفرض النقطتين $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ تقعان على جانبي المستوى: $ax + by + cz + d = 0$.

ونفرض أن P_1P_2 يقطع المستوى في نقطة P بحيث $\dfrac{P_1P}{P_2P} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$

$$\therefore P\left(\frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)..$$

وحيث إن P تقع على المستوى فإنها تحقق معادلته أي أن:

$$a(\lambda_1x_2 + \lambda_2x_1) + b(\lambda_1y_2 + \lambda_2y_1) + c(\lambda_1z_2 + \lambda_2z_1) + d(\lambda_1 + \lambda_2) = 0.$$
$$\therefore \lambda_1(ax_2 + by_2 + cz_2 + d) + \lambda_2(ax_1 + by_1 + cz_1 + d) = 0.$$
$$\therefore \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\left(\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{ax_2 + by_2 + cz_2 + d}\right).$$

ولكي تكون النسبة $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ موجبة ، لابد أن تكون الكميتان:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d \;,\; ax_2 + by_2 + cz_2 + d$$

مختلفان في الإشارة.

مثال(٦): أوجد طولي العمودين النازلين من النقطتين (1,0,2) ,(0,0,0) على المستوى x–2y+2z– 4=0 ووضح أن هاتين النقطتين تقعان في جهتين مختلفتين من المستوى.

الحل:

نفرض أن R_0, R_1 هما أطوال العمودين من النقطتين (2 ,0 ,1) ,(0 ,0 ,0) على المستوى

$$\therefore R_o = \mp \frac{1(0)-2(0)+2(0)-4}{\sqrt{1+4+4}} = \mp \frac{-4}{3} = \frac{4}{3},$$

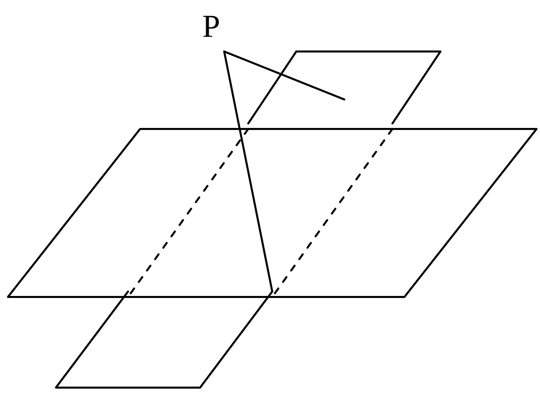
$$R_1 = \mp \frac{1(1)-2(0)+2(2)-4}{\sqrt{1+4+4}} = \mp \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

وواضح أن R_o, R_1 مختلفتين في الإشارة أي أن النقطتين (2 ,0 ,1) ,(0 ,0 ,0) تقعان في جهتين مختلفتين من المستوى المُعطى.

٤ – المستويان المنصفان للزاوية الزوجية بين مستويين معلومين:

نفرض أن $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ مستويين معلومين.

المستوى المنصف للزاوية الزوجية بين هذين المستويين يكون هو المحل الهندسي لنقطة في الفضاء الثلاثي بحيث يكون بعدها عن المستوى الأول يساوي بعدها عن المستوى الثاني. (انظر الشكل):



أي أنه إذا كانت $P(\alpha,\beta,\gamma)$ نقطة على المستوى المنصف فإن:

$$\frac{a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm \frac{a_2\alpha+b_2\beta+c_2\gamma+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

أي أن النقطة $P(\alpha,\beta,\gamma)$ دائماً تحقق إحدى المعادلتين:

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2x+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

وهما معادلتي المستويين المنتصفين للزاوية الزوجية بين المستويين المعلومين.

وواضح أن هذين المستويين يكونا متعامدان لأن نسب اتجاه أحدهما هي:

$$a_1k_2-a_2k_1\ ,\ b_1k_2-b_2k_1\ ,\ c_1k_2-c_2k_1.$$

ونسب اتجاه الآخر هي:

$$a_1k_2+a_2k_1\ ,\ b_1k_2+b_2k_1\ ,\ c_1k_2+c_2k_1.$$

حيث $k_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2},\ \ k_2=\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$.

مثال(٧): أوجد معادلتي المستويين المنصفين للزاوية الزوجية بين المستويين:

$$x + 2y - 2z + 3 = 0\ ,\quad 2x - y + 2z = 4.$$

الحل:

معادلتي المستويين المنتصفين للزاوية الزوجية بين المستويين المعطيين تُعطيان من:

$$\frac{x+2y-2z+3}{\sqrt{1+4+4}}=\pm\frac{2x-y+2z-4}{\sqrt{4+1+4}}.$$

وإذاً المعادلتين تكونا $3x+y-1=0\ ,\ x-3y+4z-7=0$

٥ – معادلة أي مستوى يمر بخط تقاطع مستويين معلومين:

نفرض أن $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\ ,\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ مستويين معلومين وغير متوازيين.

معادلة المستوى المار بخط تقاطعهما تكون على الصورة:

$$\lambda_1(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0.$$

حيث λ_1,λ_2 ثابتان لا يساويان الصفر في آن واحد.

مثال(٨): أوجد المستوى المار بخط تقاطع المستويين:

$$x + y + z - 3 = 0\ ,\quad x - 2y + 3z + 4 = 0.$$

ويكون عمودياً على المستوى الثاني.

الحل:

معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين تكون على الصورة:

$\lambda_1(x + y + z - 3) + \lambda_2(x - 2y + 3z + 4) = 0.$ (*)
$\therefore (\lambda_1 + \lambda_2)\, x + (\lambda_1 - 2\, \lambda_2)\, y + (\lambda_1 + 3\, \lambda_2)\, z + (-3\lambda_1 + 4\lambda_2) = 0.$

ولكي يكون هذا المستوى عمودياً على المستوى $x - 2y + 3z + 4 = 0$

يجب أن يتحقق الشرط:

$(\lambda_1 + \lambda_2) -2\, (\lambda_1 - 2\lambda_2) + 3\, (\lambda_1 + 3\lambda_2) = 0.$

وبالتالي نحصل على $\lambda_1 = -7\lambda_2$ ، وبالتعويض في المعادلة (*) نحصل على:

$-7\lambda_2(x + y + z - 3) + \lambda_2(x - 2y + 3z + 4) = 0.$

وبوضع $\lambda_2 = 1$ تكون معادلة المستوى المطلوب هي:

$6x + 9y + 4z - 25 = 0.$

مثال(٩): أوجد معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين:

$3x + 2y - 5z + 1 = 0\ ,\quad x - 5y - z - 3 = 0.$

ويكون عمودياً على المستوى الأول.

الحل:

معادلة المستوى المطلوب تكون على الصورة:

$\lambda_1(3x + 2y - 5z + 1) + \lambda_2(x - 5y - z - 3) = 0.$
$\therefore (3\lambda_1 + \lambda_2)\, x + (2\lambda_1 - 5\lambda_2)\, y + (-5\lambda_1 - \lambda_2)\, z + (\lambda_1 - 3\lambda_2) = 0.$

ومن شرط التعامد نحصل على:

$3(3\lambda_1 + \lambda_2) + 2(2\lambda_1 - 5\lambda_2) -5\, (-5\lambda_1 -\lambda_2) = 0.$
$\therefore\ 38\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 19\lambda_1.$

وبالتعويض نحصل على:

$\lambda_1[(3 + 18)\, x + (2 - 72)\, y + (-5 - 18)\, z + (1 - 54)] = 0.$

وباختيار $\lambda_1 = 1$ تكون المعادلة المطلوبة هي:

$21\, x - 70\, y - 23\, z - 53 = 0.$

٦ – وضع ثلاثة مستويات بالنسبة لبعضها في الفضاء الثلاثي:

نفرض أن لدينا ثلاثة مستويات:

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$
$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$
$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0.$

تُوجد خمس حالات مختلفة ممكنة لوضع هذه المستويات لبعضهما في الفضاء الثلاثي:

أ – انطباق المستويات الثلاثة على بعضها إذا تحقق الشرط:

$a_1:b_1:c_1:d_1= a_2:b_2:c_2:d_2 = a_3:b_3:c_3:d_3.$

ب – تتوازى المستويات الثلاثة إذا تحقق الشرط:

$a_1:b_1:c_1= a_2:b_2:c_2 = a_3:b_3:c_3 .$

ج – تتقاطع المستويات الثلاثة في خط مستقيم في الجزء المحدد من الفضاء الثلاثي ويكون شرط التقاطع هو وجود قيمة عددية λ تجعل المستوى:

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda (a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0.$

ينطبق مع المستوى الثالث أي أن:

$$\frac{a_1+\lambda a_2}{a_3}=\frac{b_1+\lambda b_2}{b_3}=\frac{c_1+\lambda c_2}{c_3}=\frac{d_1+\lambda d_2}{d_3}.$$

د – تتقاطع المستويات الثلاثة في نقطة واحدة إذا تحقق الشرط:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

هـ – ليس للمستويات الثلاثة أي نقطة مشتركة ويحدث ذلك إذا كان خط تقاطع مستويان من المستويات الثلاثة يوازي المستوى الثالث.

مثال(١٠): تحقق من أن المستويات الثلاثة:

$2x - y + 5 z -1 = 0,$
$x + 3y + z - 4 = 0,$
$6x + 11 y + 9 z - 17 = 0.$

تتقاطع في خط مستقيم.

الحل:

معادلة المستوى الذي يمر بخط تقاطع المستويين الأول والثاني تكون:

$2x - y + 5z - 1 + \lambda(x + 3y + z - 4) = 0$
$\therefore (2 - \lambda)\, x + (-1 + 3\lambda)\, y + (5 + \lambda)\, z + (-1 - 4\lambda) = 0. \qquad (*)$

ولكى تتقاطع المستويات الثلاثة في خط مستقيم يجب أن تنطبق المعادلة (*) مع معادلة المستوى الثالث أي يتحقق:

$$\frac{2+\lambda}{6} = \frac{-3+3\lambda}{11} = \frac{5+\lambda}{9} = \frac{1+4\lambda}{17}. \qquad (**)$$

وواضح أن القيمة العددية $\lambda = 4$ تحقق العلاقة (**)

وبالتالي تتقاطع المستويات الثلاثة في خط مستقيم.

تمارين

١٢–أوجد معادلة المستوى العمودي على P_1P_2 من منتصفه علماً بأن

$P_1(-3, -1, 4), P_2(1, 5, 6)$.

١٣–إذا كانت $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{2\pi}{3}$ زاويتين من زوايا اتجاه العمودي على المستوى المار بالنقطة $(3, 1, 2)$ فاوجد معادلة المستوى.

١٤–أوجد معادلة المستوى الموازي للمستوى $2x - y + z = 0$ ويقطع من المحور OY جزء طوله 3 وحدات.

١٥–تحقق من أن النقط $(0, 2, -4), (-1, 1, -2), (-2, 3, 3), (-3, -2, 1)$ تقع في مستوى واحد ، وأوجد معادلته.

١٦–أوجد معادلة المستوى الموازي للمستوى $4x + y + 8z + 39 = 0$ ويبعد عنه 7 وحدات.

١٧–أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفضاء الثلاثي بحيث يكون بعدها عن المستوى $x + 2y + 2z - 6 = 0$ ضعف بعدها عن المستوى $4x - 8y + z - 9 = 0$.

١٨–أوجد الزاوية الحادة بين كل من المستويين فيما يلي:

(i) $2x - y + 2z - 10 = 0, \quad 4x + y + z - 7 = 0.$
(ii) $5x + 3y - 4z + 14 = 0, \quad x - 4y - z + 12 = 0.$
(iii) $3x + 4y - 16 = 0, \quad 4y - 2z - 5 = 0.$

١٩–أوجد معادلات المستويات التى تمر بالنقطتين $(2, 4, 0)$, $(1, 0, 8)$ وتصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع المستوى $2x - y + 2z - 7 = 0$.

٢٠–أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة $(1, -2, 3)$ والمار بخط تقاطع المستويين:

$$3y - 2z - 4 = 0, \quad x + y + 4z + 6 = 0.$$

٢١– أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة $(2, -2, 1)$ وعمودي على كل من المستويين:

$$3x - 3y + z = 0, \quad 2x + 4y - 5z + 1 = 0.$$

٢٢– أوجد معادلة المستوى العمودي على المستوى $x - y + z = 0$ ويمر بالنقطة $(2, -1, 1)$ ويوازي المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة $(-1, 3, 2)$.

الباب الثالث

نظرية المعادلات الجبرية Theory of Algebraic Equations

✓ **مفاهيم خاصة بالمعادلة الجبرية:**

العامل – المعامل – الجذر.

✓ **العناصر الأساسية في دراستنا لنظرية المعادلات الجبرية:**

القسمة بطريقة المعاملات المنفصلة – تحويل المعادلات – تكوين معادلة جبرية جذورها معلومة – بحث الجذور الموجبة والجذور السالبة والجذور الصحيحة والجذور الكسرية للمعادلات الجبرية ذات المعاملات الصحيحة – حذف الحد الثاني في معادلة جبرية معلومة – الحل الجبري للمعادلات الجبرية من الدرجة الثالثة والرابعة.

✓ طريقة القسمة التركيبية (أو التحليلية) أو طريقة المعاملات المنفصلة:

لإيجاد خارج القسمة والباقي عند قسمة كثيرة الحدود:

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

على عامل الدرجة الأولى $x - \alpha$.

فإن خارج القسمة يكون عبارة عن كثيرة حدود من درجة $n-1$ ولتكن:

$$q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \ldots + b_{n-1}$$

وباقي القسمة R .

ويتم حساب المعاملات $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ والباقي R على النحو التالي:

$$\begin{array}{c|cccccc} \alpha & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ & & \alpha b_0 & \alpha b_1 & \cdots & \alpha b_{n-2} & \alpha b_{n-1} \\ \hline & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & \boxed{R} \end{array}$$

وذلك بكتابة معاملات $p(x)$ في الصف الأول مع مراعاة أنه إذا كانت إحدى قوى x غير موجودة يُوضع صفر لمعاملها ، ويترك الصف الثاني خاليا مؤقتا ،
وفي الصف الثالث نكتب b_0 يساوي a_0 تحت a_0 ثم نضرب b_0 في α ونكتب حاصل الضرب αb_0 في الصف الثاني تحت a_1 ثم نجمعهما لنحصل على b_1 في الصف الثالث ، ثم نضرب b_1 في α ونكتب حاصل الضرب αb_1 في الصف الثاني تحت a_2 ثم نجمعهما لنحصل على b_2 في الصف الثالث ، وهكذا ... ،

فبذلك تتكون كثيرة الحدود:

$$q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \ldots + b_{n-1}$$

وهي خارج القسمة ، ويكون باقي القسمة $R = a_0 + \alpha b_{n-1}$

مثال(١): باستخدام القسمة التركيبية أوجد خارج القسمة والباقي عند قسمة:

$2x^5-28x^3+11x^2+64$ على $x+4$

الحل:

-4	2	0	-28	11	0	64
		-8	32	-16	20	-80
	2	-8	4	-5	20	**-16**

وبالتالي يكون خارج القسمة هو كثيرة الحدود: $2x^4-8x^3+4x^2-5x+20$

والباقي 16- .

مثال(٢): بطريقة المعاملات المنفصلة أوجد خارج القسمة والباقي عند قسمة:

$x^5+2x^4-9x^3-22x^2+8$ على x^2-x-6

الحل: نحلل المقسوم عليه x^2-x-6 إلى عاملين من الدرجة الأولى $(x-3)(x+2)$

نقسم أولا على $x-3$ ثم نقسم خارج القسمة على $x+2$ كما يلي:

3	1	2	-9	-22	0	8
		3	15	18	-12	-36
-2	1	5	6	-4	-12	**-28**
		-2	-6	0	8	
	1	3	0	-4	-4	

فيكون خارج القسمة النهائي هو x^3+3x^2-4 .

والباقي النهائي للقسمة يكون عبارة عن مجموع الباقي الأول وحاصل ضرب الباقي الثاني في العامل الأول المقسوم عليه أي يكون: $-28+(-4)(x-3)=-4x-16$

(وللدلالة على صحة ذلك) حيث نلاحظ من عمليات القسمة السابقة أن:

$$\begin{aligned}&(x-3)[x^4+5x^3+6x^2-4x-12]-28\\&=(x-3)[(x+2)(x^3+3x^2-4)-4]-28\\&=(x-3)(x+2)(x^3+3x^2-4)-4(x-3)-28.\end{aligned}$$

ومن ثم فإن الباقي النهائي للقسمة يكون $-28+(-4)(x-3)=-4x-16$

ملاحظة: يمكننا أن نقسم أولا على $x+2$ ثم نقسم خارج القسمة على $x-3$

وخارج القسمة النهائي والباقي النهائي للقسمة يكون هو نفسه (تحقق من ذلك؟).

- **تحويل المعادلات:**

المقصود بتحويل المعادلات هو إيجاد معادلة ترتبط جذورها بعلاقة معينة مع جذور معادلة أخرى معلومة. وفي بعض الأحيان بعد إجراء تحويل مناسب قد نتمكن من
حل المعادلة الجديدة الناتجة، وتبعا لذلك يمكننا الحصول على جذور المعادلة الأصلية.
والمعادلة الجديدة (المحولة) تكون من نفس درجة المعادلة الأصلية.
وفيما يلي بعض التحويلات حيث نفترض دائما أن المعادلة الأصلية المعلومة هي:

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n=0$$

١–تحويل معادلة معلومة إلى معادلة أخرى جذورها تساوي جذور المعادلة المعلومة بإشارة مخالفة:

إذا كانت $P(x)=0$ معادلة جبرية معلومة فإن المعادلة التي جذورها تساوي جذور المعادلة المعلومة بإشارة مخالفة تكون هي $P(-x)=0$

مثال(٣): أوجد المعادلة التي جذورها تساوي جذور المعادلة:

$$x^5-10x^3+5x^2-x+2=0$$

بإشارة مخالفة.

الحل: نضع $-x$ بدلا من x فتكون المعادلة المطلوبة هي:

$$(-x)^5-10(-x)^3+5(-x)^2-(-x)+2=0 \Rightarrow -x^5+10x^3+5x^2+x+2=0$$

أي $x^5-10x^3-5x^2-x-2=0$.

٢–تحويل معادلة معلومة إلى معادلة أخرى جذورها تساوي مقلوب جذور المعادلة المعلومة:

إذا كانت $P(x)=0$ معادلة جبرية معلومة فإن المعادلة التي جذورها تساوي مقلوب جذور المعادلة المعلومة تكون هي $P(1/x)=0$.

مثال(٤): أوجد المعادلة التي جذورها تساوي مقلوب جذور المعادلة:

$$x^5-10x^3+5x^2-x+2=0$$

الحل: نضع $1/x$ بدلا من x فتكون المعادلة المطلوبة هي:

$$(1/x)^5-10(1/x)^3+5(1/x)^2-(1/x)+2=0$$

وبالضرب في x^5 يكون $1-10x^2+5x^3-x^4+2x^5=0$ أي $2x^5-x^4+5x^3-10x^2+1=0$.

٣-تحويل معادلة معلومة إلى معادلة أخرى جذورها تساوي جذور المعادلة المعلومة مضروبة في كمية ثابتة:

إذا كانت $P(x)=0$ معادلة جبرية معلومة فإن المعادلة التي جذورها تساوي جذور المعادلة المعلومة مضروبة في كمية ثابتة ولتكن k تكون هي $P(x/k)=0$.

مثال(٥): أوجد المعادلة التي جذورها ثلاثة أمثال جذور المعادلة:

$$x^3+4x^2-7x+6=0$$

الحل: نضع $x/3$ بدلا من x فتكون المعادلة المطلوبة هي:

$$(x/3)^3+4(x/3)^2-7(x/3)+6=0$$

أي $x^3+12x^2-63x+162=0$.

مثال(٦): أوجد المعادلة التي جذورها تكون نصف جذور المعادلة:

$$2x^4-3x^3+x^2+4x=0$$

الحل: نضع $2x$ بدلا من x فنحصل على المعادلة المطلوبة وهي:

$$32x^4-24x^3+4x^2+8x=0.$$

مثال(٧): أوجد المعادلة التي تكون جذورها عشرة أمثال جذور المعادلة:

$$x^4+7x^3-5x+8=0$$

الحل: نضع $x/10$ بدلا من x فنحصل على المعادلة المطلوبة وهي:

$$x^4+70x^3-5000x+80000=0.$$

مثال(٨): حول المعادلة $3x^4-5x^3+x^2-x+2=0$ إلى أخرى بحيث يكون معامل x^4 يساوي الواحد الصحيح ، ومعاملات الحدود الأخرى كلها أعداد صحيحة.

الحل: نقسم طرفي المعادلة على 3 فنحصل على:

$$x^4-(5/3)x^3+(1/3)x^2-(1/3)x+(2/3)=0$$

ثم نوجد المعادلة التي جذورها ثلاثة أضعاف جذور المعادلة السابقة

وذلك بوضع $x/3$ بدلا من x فنحصل على المعادلة:

$$(x/3)^4-(5/3)(x/3)^3+(1/3)(x/3)^2-(1/3)(x/3)+(2/3)=0$$

وبالضرب في (3^4) نحصل على المعادلة المحولة المطلوبة وهي:

$$x^4-5x^3+3x^2-9x+54=0.$$

٤-تحويل معادلة معلومة إلى معادلة أخرى جذورها تنقص (أو تزيد) عن جذور المعادلة المعلومة بمقدار ثابت:

إذا كانت $P(x)=0$ معادلة جبرية معلومة فإن المعادلة التي جذورها تنقص (تزيد) بمقدار α عن جذور المعادلة المعلومة تكون هي $P(x+\alpha)=0$ ($P(x-\alpha)=0$).

ولتحويل معادلة معلومة $P(x)=0$ إلى أخرى جذورها تنقص (تزيد) بمقدار α عن جذور المعادلة المعلومة – وبدلا من استخدام مفكوك ذات الحدين – نتبع ما يلي:

نقسم كثيرة الحدود $P(x)$ على العامل $x-\alpha$ (على العامل $x+\alpha$) قسمة متتالية بطريقة المعاملات المنفصلة حتى تنتهي عملية القسمة. فتكون المعادلة المطلوبة هي $q(x)=0$ حيث $q(x)$ هي كثيرة الحدود التي معاملاتها عبارة عن معامل أكبر قوى في كثيرة الحدود $p(x)$ وبواقي القسمة من أسفل إلى أعلى على الترتيب.

ويُرتب العمل كما في الأمثلة التالية:

مثال(٩): أوجد المعادلة التي تنقص جذورها بمقدار 4 عن جذور المعادلة:

$x^4-6x^3+35x-17=0$

الحل: نقسم كثيرة الحدود $x^4-6x^3+35x-17$ قسمة متتالية على $x-4$ كما يلي:

4	1	-6	0	35	-17
		4	-8	-32	12
4	1	-2	-8	3	-5
		4	8	0	
4	1	2	0	3	
		4	24		
4	1	6	24		
		4			
	1	10			

فتكون المعادلة المطلوبة هي: $x^4+10x^3+24x^2+3x-5=0$

ملاحظة: يمكن إعادة صياغة مثال(٩) على الصورة:

إذا كانت $P(x) = x^4-6x^3+35x-17$ فأوجد $P(x+4)$.

مثال(١٠): أوجد المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار 3 عن جذور المعادلة:

$4x^4+48x^3+151x^2+42x-245=0$ وبحل المعادلة الناتجة أوجد جذور المعادلة الأصلية.

الحل: نقسم كثيرة الحدود $4x^4+48x^3+151x^2+42x-245$ قسمة متتالية على x+3 كما يلي:

-3	4	48	151	42	-245
		-12	-108	-129	261
-3	4	36	43	-87	16
		-12	-72	87	
-3	4	24	-29	0	
		-12	-36		
-3	4	12	-65		
		-12			
	4	0			

فتكون المعادلة المحولة المطلوبة هي $4x^4-65x^2+16=0$

والتي يمكن كتابتها على الصورة:

$(x^2-16)(4x^2-1)=0$

ومن ثم يكون:

x=4 , 1/2, -1/2 , -4

وعلى ذلك تكون جذور المعادلة الأصلية (تنقص 3 عن هذه الجذور) هي:

x=1 , -5/2 , -7/2 , -7

نظرية الباقي ونظرية العامل:

(١)نظرية الباقي: إذا قسمت كثيرة الحدود $P(x)$ على $x-\alpha$ فإن الباقي يساوي $P(\alpha)=R$ (أي أن الباقي يساوي قيمة كثيرة الحدود عندما $x=\alpha$) .

مثال(١١): أوجد قيمة كثيرة الحدود $P(x)=x^4-2x^3+36x+5$ عندما $x=-4$.

الحل: الطريقة العادية لحل هذا المثال هي أن نعوض عن $x=-4$ في كثيرة الحدود المعطاة فيكون:

$$P(-4)=(-4)^4-2(-4)^3+36(-4)+5=245.$$

وباستخدام نظرية الباقي والقسمة التركيبية يكون الحل كما يلي:

بفرض أن $P(x)=x^4-2x^3+36x+5$ وبقسمة$P(x)$ على $x=-4$ أي على $x+4$ فإن باقي القسمة يساوي $P(-4)$ كما يلي:

-4	1	-2	0	36	5
		-4	24	-96	240
	1	-6	24	-60	245

واضح أن الباقي هو 245 يساوي $P(-4)$.

(٢) نظرية العامل:إذا كانت α جذرا للمعادلة $P(x)=0$ فإن $x-\alpha$ يكون عامل لكثيرة الحدود $P(x)$ (وهذا يعني أن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$) والعكس صحيح أي أنه إذا كان $x-\alpha$ عامل لكثيرة الحدود $P(x)$ فإن α يكون جذرا للمعادلة $P(x)=0$.

مثال(١٢): أوجد قيمة C التي تجعل كثيرة الحدود $P(x)=x^6-4x^5-149x^3+C$ تقبل القسمة على $x-7$.

الحل: كثيرة الحدود $P(x)$ تقبل القسمة على $x-7$ عندما يكون باقي القسمة مساويا الصفر

7	1	-4	0	-149	0	0	C
		7	21	147	-14	-98	-686
	1	3	21	-2	-14	-98	C-686

باقي القسمة $R=C-686=0$ وإذاً $C=686$.

مثال(١٣): تحقق من أن $x=2$ يكون جذرا للمعادلة $2x^4-5x^3-26x^2+20x+72=0$ وأن $x-2$ عامل للطرف الأيسر منها.

الحل: بقسمة الطرف الأيسر من المعادلة على $x=2$ كما يلي:

72	20	-26	-5	2	2
-72	-56	-2	4		
0	-36	-28	-1	2	

وبما أن باقي القسمة يساوي 0 فيكون $x=2$ جذرا للمعادلة المعطاة ، ويكون $x-2$ عامل للطرف الأيسر منها.

عدد الجذور: تؤكد النظرية الأساسية في الجبر أن كل معادلة جبرية $P(x)=0$ لها جذر على الأقل، وأكثر من ذلك تؤكد أنه إذا كانت معاملات المعادلة أعداد مركبة فإنه توجد قيمة تأخذها x خلال حقل الأعداد تحقق المعادلة.

النظرية الأساسية للمعادلات: كل معادلة جبرية من درجة n لها بالضبط عدد n من الجذور.

مثال(١٤): المعادلة الجبرية $x^3-x^2-7x+15=0$ تكافئ:

$$(x+3)(x-2-i)(x-2+i)=0$$

ولها ثلاثة جذور هي $-3 , 2+i , 2-i$.

والنظرية الأساسية للمعادلات لم تذكر كيف توجد العوامل (أو الجذور) ولكنها ضمنت وجودها.

فالمعادلة الجبرية $2x^3+(1+2i)x^2+(4+i)x+2=0$ تكافئ $2(x+1/2)(x-i)(x+2i)=0$

ولها ثلاثة جذور هي $-1/2 , i , -2i$.

▪ تكوين المعادلة التي جذورها معلومة:

إذا كانت $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n$ هي جذور معادلة جبرية معاملاتها أعداد صحيحة من درجة n فإن المعادلة تكون على الصورة:

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n)=0.$$

مثال(١٥): كوّن المعادلة الجبرية ذات المعاملات الصحيحة التي جذورها هي $3/2,-5$.

الحل:

$$(x-3/2)(x+5)=0$$
$$\therefore\ x^2+(7/2)x-15/2=0$$
$$\therefore 2x^2+7x-15=0.$$

وهي المعادلة المطلوبة.

مثال(١٦): كوّن المعادلة الجبرية التي جذورها $2+i,2-i,0$ كجذور بسيطة (ليست مكررة) ولها أيضا -1 كجذر مكرر مرتين وليس لها جذور أخري.

الحل:

$$(x-2-i)(x-2+i)(x)(x+1)^2=0$$
$$\therefore x^5-2x^4-2x^3+6x^2+5x=0.$$

وهي المعادلة المطلوبة.

نظرية(١): إذا كان $a+ib$ جذرا للمعادلة الجبرية $P(x)=0$ ذات المعاملات الصحيحة فإن $a-ib$ يكون أيضا جذرا لها.

مثال(١٧): إذا كان $1+i$ جذرا للمعادلة $x^4-2x^3-2x^2+8x-8=0$ فأوجد باقي الجذور.

الحل: $1+i$ جذر للمعادلة فيكون $1-i$ أيضا جذر لها ، ونوجد الجذرين الباقيين بقسمة الطرف الأيسر للمعادلة على حاصل ضرب العاملين المناظرين للجذرين $1+i\ ,\ 1-i$ كما يلي: $(x-(1+i))(x-(1-i)) = ((x-1)^2-i^2) = x^2-2x+2$

$$
\begin{array}{c|l}
x^2-2x+2 & x^4-2x^3-2x^2+8x-8 \\
\hline
x^2-4 & \underline{\overset{-}{x^4}\overset{+}{-2x^3}\overset{-}{+2x^2}} \\
 & \qquad -4x^2+8x-8 \\
 & \qquad \underline{\overset{+}{-4x^2}\overset{-}{+8x}\overset{+}{-8}} \\
 & \qquad\ 0\ +0\ +0
\end{array}
$$

فيكون خارج القسمة هو العامل(x^2-4) ومن ثم يكون الجذران الباقيان هما $-2\ ,\ 2$.

نظرية(٢): إذا كان $a+\sqrt{b}$ (حيث $a\ ,b$ عددان حقيقيان ، b ليس مربعا كاملا) جذرا لمعادلة جبرية معاملاتها أعداد حقيقية فإن $a-\sqrt{b}$ يكون أيضا جذرا لها.

مثال(١٨): أوجد كل جذور المعادلة $2x^3-5x^2-14x-3=0$ إذا علمنا أن $2-\sqrt{5}$ هو أحد جذورها.

الحل: بما أن $2-\sqrt{5}$ جذر للمعادلة فيكون $2+\sqrt{5}$ أيضا جذرا لها ، ونوجد الجذر الثالث بقسمة الطرف الأيسر للمعادلة على حاصل ضرب العاملين المناظرين للجذرين $2+\sqrt{5}\ ,\ 2-\sqrt{5}$ كما يلي: $(x-2+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{5})= x^2-4x-1$

$$
\begin{array}{c|l}
x^2-4x-1 & 2x^3-5x^2-14x-3 \\
\hline
2x+3 & \underline{\overset{-}{2x^3}\overset{+}{-8x^2}\overset{+}{-2x}} \\
 & \quad 3x^2-12x-3 \\
 & \quad \underline{\overset{-}{3x^2}\overset{+}{-12x}\overset{+}{-3}} \\
 & \quad 0\ +0\ +0
\end{array}
$$

وعلى ذلك يكون الجذر الثالث هو $-3/2$

- **تغييرات الإشارة:**

عندما تنقلب إشارات معاملات كثيرة الحدود من موجب إلى سالب أو من سالب إلى موجب فإن هذا يُسمى تغير في الإشارة.

مثال: إشارات معاملات كثيرة الحدود $P(x)=3x^5-7x^4+9x^2+6x-5$ هي - + + - + على التوالي وواضح أن هناك ثلاثة تغيرات في الإشارة.

للمعادلة $x^2+4x+5=0$ يلاحظ أن الطرف الأيسر لا يوجد به تغير في الإشارة ولذلك لا يمكن أن توجد جذور موجبة لهذه المعادلة وذلك لان أي قيمه موجبة للمتغير x تجعل كل حد في الطرف الأيسر موجب ولذلك مجموع الطرف الأيسر لا يمكن أن يكون صفر.

ومن ناحية أخرى المعادلة $x^2-7x+10=0$ الطرف الأيسر لها يوجد به تغيران في الإشارة ولذلك لها جذرين موجبين هما 2,5

والعلاقة بين عدد الجذور الموجبة وعدد تغيرات الإشارة تُعطى بالقاعدة التالية:

- **قاعدة الإشارات:**

"عدد الجذور الموجبة للمعادلة الجبرية $P(x)=0$ ذات المعاملات الصحيحة يكون إما مساويا لعدد تغيرات الإشارات في كثيرة الحدود $P(x)$ أو أقل من هذا العدد بعدد صحيح زوجي موجب".

مثال(١٩): ابحث الجذور الموجبة للمعادلة الجبرية $x^3-4x^2+6x+9=0$

الحل: الطرف الأيسر للمعادلة $x^3-4x^2+6x+9=0$ به تغيران في الإشارة ، وطبقا لقاعدة الإشارات يكون للمعادلة إما جذرين موجبين أو لا يوجد جذور موجبة علي الإطلاق.

والقاعدة المناظرة فيما يختص بعدد الجذور السالبة يمكن الحصول عليها باعتبار عدد تغيرات الإشارة في كثيرة الحدود $P(-x)$ وذلك بوضع $-x$ بدلا من x ، والقاعدة تكون كما يلي:

"عدد الجذور السالبة للمعادلة الجبرية $P(x)=0$ ذات المعاملات الصحيحة يكون إما مساويا لعدد تغيرات الإشارة في كثيرة الحدود $P(-x)$ أو أقل من هذا العدد بعدد صحيح زوجي موجب" .

مثال(٢٠): ابحث الجذور السالبة للمعادلة الجبرية $x^3-4x^2+6x+9=0$

الحل: الطرف الأيسر $P(x)=x^3-4x^2+6x+9$ ويكون:

$$P(-x)=(-x)^3-4(-x)^2+6(-x)+9= -x^3-4x^2-6x+9$$

واضح أنه يوجد تغير واحد في إشارة كثيرة الحدود$P(-x)$ ، ولذلك يكون للمعادلة جذر سالب واحد بالضبط.

وفي المثال السابق وجدنا أن لنفس المعادلة إما جذرين موجبين أو لا توجد جذور موجبة علي الإطلاق، ومن ثم يكون للمعادلة جذرين موجبين وجذر سالب واحد.

- **الجذور الصحيحة**:

نظرية(٣): إذا وُجد لمعادلة جبرية –معاملاتها أعداد صحيحة– جذر صحيح فيجب أن يكون هذا الجذر عامل للحد المطلق.

مثال(٢١): ابحث الجذور الصحيحة للمعادلة الجبرية $x^3-2x^2-7x+2=0$

الحل: عوامل(قواسم) الحد المطلق الأعداد الصحيحة $\pm 1, \pm 2$ التي من المحتمل أن تكون جذور صحيحة للمعادلة المعطاه، وعندما نجرب (نختبر) كل هذه الأعداد كجذور باستخدام طريقة قسمة المعاملات المنفصلة كما يلي:

1	1	-2	-7	2
		1	-1	-8
	1	-1	-8	-6

-1	1	-2	-7	2
		-1	3	4
	1	-3	-4	6

2	1	-2	-7	2
		2	0	-14
	1	0	-7	-12

-2	1	-2	-7	2
		-2	8	-2
	1	-4	1	0

نجد أن 2- فقط هو الجذر الصحيح للمعادلة.

ملاحظة: يمكن التعويض بعوامل الحد المطلق في الطرف الأيسر للمعادلة المعطاه فيكون العدد الصحيح الذي يحقق المعادلة جذرا صحيحا لها.

- **الجذور الكسرية:**

نظرية(٤): إذا كان للمعادلة الجبرية $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n=0$ (والتي معاملاتها أعداد صحيحة) جذرا على الصورة الكسرية α/β حيث α,β عددان صحيحان. فيجب أن يكون α عامل من عوامل a_n ويكون β عامل من عوامل a_0 .

مثال(٢٢): ابحث الجذور الكسرية للمعادلة الجبرية $2x^3+7x^2+2x-6=0$

الحل: الأعداد الكسرية التي من المحتمل أن تكون جذور للمعادلة:
$2x^3+7x^2+2x-6=0$

هي $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ (عوامل الحد المطلق a_n)كبسط ، $\pm1, \pm2$ (عواملa_0)كمقام.

أي الأعداد $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm1/2, \pm3/2$

وعندما نختبر هذه الأعداد باستخدام القسمة التحليلية فإننا نجد أن $-3/2$ هو الجذر الكسري الوحيد للمعادلة حيث:

-3/2	2	7	2	-6
		-3	-6	6
	2	4	-4	0

وقاعدة الإشارات تؤكد أنه يوجد جذر موجب واحد فقط ، وبذلك يكون هذا الجذر عدد غير كسري ، وكذلك يكون للمعادلة جذر سالب أخر وهذا الجذر يجب أن يكون عدد غير كسري .

ونستطيع بالطبع أن نوجد الجذرين الآخرين للمعادلة بحل المعادلة $2x^2+4x-4=0$ (الناتجة من خارج القسمة) فيكونا $-1\pm\sqrt{3}$.

نتيجة: أي جذر كسري للمعادلة الجبرية $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n=0$ (حيث معامل x^n الوحدة والمعاملات الباقية أعداد صحيحة) يكون عدد صحيح من بين عوامل الحد المطلق a_n .

مثال(٢٣): ابحث الجذور الكسرية للمعادلة الجبرية $x^5+12x^2-7x+4=0$

الحل: الأعداد الكسرية التي يمكن أن تكون جذور للمعادلة:

$$x^5+12x^2-7x+4=0$$

هي من بين الأعداد $\pm1,\pm2,\pm4$ (عوامل الحد المطلق)

وعندما نجرب (نختبر) هذه الأعداد بواسطة القسمة التحليلية نجد أنه لا يوجد بينهم أي جذر للمعادلة، وبذلك نستنتج أنه إذا وُجدت جذور حقيقية للمعادلة فإنها تكون أعداد غير كسرية .

وبتطبيق قاعدة الإشارات على هذه المعادلة نجد أنه يوجد جذر حقيقي سالب ، وأيضا يوجد إما جذران موجبان أو لا توجد جذور موجبة على الإطلاق وفي هذه الحالة يكون الجذران الآخران تخيليان مترافقان.

الحل الجبري للمعادلات:

حذف الحد الثاني من معادلة معلومة:

حذف الحد الثاني في المعادلة الجبرية $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ يعني جعلها خالية من معامل x^{n-1} ويتم ذلك بتحويلها إلى أخرى جذورها تنقص بمقدار $\dfrac{-a_1}{(n)(a_0)}$ عن جذور المعادلة الأصلية.

مثال: احذف الحد الثاني في المعادلة $x^3 + 3x^2 - 2x + 5 = 0$

الحل: حذف الحد الثاني في المعادلة المعطاة (يعني جعلها خالية من معامل x^2) ويتم ذلك بتحويلها إلى أخرى جذورها تنقص بمقدار $\dfrac{-a_1}{(n)(a_0)} = \dfrac{-3}{(3)(1)} = -1$ عن جذور المعادلة الأصلية المعطاة كما يلي:

-1	1	3	-2	5
		-1	-2	4
-1	1	2	-4	9
		-1	-1	
-1	1	1	-5	
		-1		
	1	0		

فتكون المعادلة المطلوبة هي:

$$x^3 - 5x + 9 = 0.$$

▪ الطريقة العامة لحل معادلة من الدرجة الثالثة:

سنلخص فيما يلي طريقة العالم الرياضي كاردان Cardan لحل المعادلة الجبرية من الدرجة الثالثة في الصورة العامة:

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

أولاً: نحذف الحد (الثاني) الذي يحتوي على x^2

فتتحول المعادلة إلى الصورة القياسية:

$$x^3+ax+b=0$$

ثانياً: نحسب قيمة المميز $\Delta=\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{a^3}{27}$ فيكون لدينا ثلاث حالات:

- الحالة الأولى: إذا كان $\Delta>0$ يكون للمعادلة جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان ، وتكون هذه الجذور على الصورة:

$$y+z\,,\ y\omega+z\omega^2\,,\ z\omega+y\omega^2$$

حيث:

$$y=[-\frac{b}{2}+\sqrt{\Delta}]^{\frac{1}{3}},\ \ z=[-\frac{b}{2}-\sqrt{\Delta}]^{\frac{1}{3}},$$

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\ ,\ \omega^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$ (الجذور التكعيبية للواحد الصحيح)

- الحالة الثانية: إذا كان $\Delta=0$ تكون جميع جذور المعادلة حقيقية أحد هذه الجذور يكون مكرر مرتين نوجده من العلاقة $3x^2+a=0$ فيكون $x=\pm\sqrt{\dfrac{-a}{3}}$

ونختار منها القيمة التي تحقق المعادلة القياسية $x^3+ax+b=0$

وبمعرفة الجذر المكرر (أي الجذرين المتساويين) للمعادلة يمكن استنتاج الجذر الثالث حيث مجموع الجذور الثلاث يساوي الصفر.

▪ الحالة الثالثة: إذا كان $\Delta < 0$ تكون جميع جذور المعادلة حقيقية مختلفة. وفي هذه الحالة تكون y^3, z^3 كميتين تخيليتين مترافقتين، ويمكن الحصول على جذور المعادلة باستخدام نظرية دي موافر للأعداد المركبة حيث إذا فرضنا أن:

$$y^3 = p+iq = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ z^3 = p-iq = r(\cos\theta - i\sin\theta)$$

وإذاً يكون لـ y ثلاث قيم مختلفة هي:

$$r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}),\ r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\theta+2\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{3}),$$

$$r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\theta+4\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+4\pi}{3}),$$

ويكون لـ z ثلاث قيم مختلفة هي:

$$r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\theta}{3} - i\sin\frac{\theta}{3}),\ r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\theta+2\pi}{3} - i\sin\frac{\theta+2\pi}{3}),$$

$$r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\theta+4\pi}{3} - i\sin\frac{\theta+4\pi}{3}).$$

ونحصل على جذور المعادلة بجمع القيم المتناظرة لكل من y, z فتكون:

$$2r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\theta}{3}),\ 2r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\theta+2\pi}{3}),\ 2r^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\theta+4\pi}{3}).$$

وواضح أن جذور المعادلة تكون كلها حقيقية ومختلفة.

ملاحظة: القيم المختلفة للمقدار $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{m}{k}}$ تكون:

$$z_s = \cos\frac{m\theta+2\pi s}{k} + i\sin\frac{m\theta+2\pi s}{k}\quad ; s = 0,1,2,\ldots,k-1$$

مثال(١): حول المعادلة الجبرية $x^3+3x^2-15x-52=0$ إلى أخرى خالية من معامل x^2 ثم أوجد جذور المعادلة الناتجة.

الحل: نحذف الحد (الثاني) الذي يحتوي على x^2 في المعادلة بتحويلها إلى أخرى جذورها تنقص بمقدار $-1=\dfrac{-a_1}{(n)(a_0)}=\dfrac{-3}{(3)(1)}$ عن جذور المعادلة الأصلية المعطاة وذلك كما يلي:

-1	1	3	-15	-52
		-1	-2	17
-1	1	2	-17	-35
		-1	-1	
-1	1	1	-18	
		-1		
	1	0		

فتكون المعادلة الناتجة هي $x^3-18x-35=0$

والصورة القياسية لمعادلة الدرجة الثالثة هي $x^3+ax+b=0$

وعلى ذلك يكون $a=-18\ ,\ b=-35$ ومميز المعادلة المساعدة يكون:

$$\Delta=\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}=\frac{(-35)^2}{4}+\frac{(-18)^3}{27}=\frac{361}{4}>0$$

فيكون للمعادلة جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان ، وتكون هذه الجذور على الصورة $y+z,\ y\omega+z\omega^2,\ z\omega+y\omega^2$ حيث:

$$y=[-\frac{b}{2}+\sqrt{\Delta}]^{\frac{1}{3}}\ ,z=[-\frac{b}{2}-\sqrt{\Delta}]^{\frac{1}{3}},\ \ \omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \ \omega^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$\therefore y=(-\frac{b}{2}+\sqrt{\Delta})^{\frac{1}{3}}=(-\frac{-35}{2}+\frac{19}{2})^{\frac{1}{3}}=(27)^{\frac{1}{3}}=3\ ,$$

$$\therefore z=(-\frac{b}{2}-\sqrt{\Delta})^{\frac{1}{3}}=(-\frac{-35}{2}-\frac{19}{2})^{\frac{1}{3}}=(8)^{\frac{1}{3}}=2$$

وإذاً جذور المعادلة تكون هي $5,\ 3\omega+2\omega^2,\ 2\omega+3\omega^2$

أي تكون $5,\ -\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ -\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

مثال(٢): حول المعادلة الجبرية $x^3+3x^2-9x+5=0$ إلى أخرى خالية من معامل x^2 ثم أوجد جذور المعادلة الناتجة.

الحل: نحذف الحد (الثاني) الذي يحتوي على x^2 في المعادلة بتحويلها إلى أخرى جذورها تنقص بمقدار $\frac{-a_1}{(n)(a_0)}=\frac{-3}{(3)(1)}=-1$ عن جذور المعادلة الأصلية المعطاة فتكون المعادلة الناتجة هي $x^3-12x+16=0$ (تحقق من ذلك؟).

والصورة القياسية لمعادلة الدرجة الثالثة هي $x^3+ax+b=0$

وعلى ذلك يكون $a=-12\,,\,b=16$ ومميز المعادلة المساعدة يكون:

$$\Delta=\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}=\frac{(16)^2}{4}+\frac{(-12)^3}{27}=0$$

وإذاً يكون للمعادلة جذر مكرر يحقق المعادلة $3x^2+a=0$ أي يحقق المعادلة:

$$3x^2-12=0$$

وجذرا هذه المعادلة هما $x=\pm 2$ إلا أن $x=-2$ لا يحقق المعادلة القياسية ، ولذلك يكون الجذر المكرر للمعادلة هو $x=2$ وحيث إن مجموع جذور المعادلة يساوي الصفر فيكون الجذر الثالث للمعادلة هو $x=-4$.

ومن ثم تكون جذور المعادلة الناتجة هي $x=2,2,-4$.

مثال(٣): حول المعادلة الجبرية $x^3-3x^2-3x+1=0$ إلى أخرى خالية من معامل x^2 ثم أوجد جذور المعادلة الناتجة.

الحل: نحذف الحد (الثاني) الذي يحتوي على x^2 في المعادلة بتحويلها إلى أخرى جذورها تنقص بمقدار $1=\frac{-(-3)}{(3)(1)}=\frac{-a_1}{(n)(a_0)}$ عن جذور المعادلة الأصلية المعطاة فتكون المعادلة الناتجة هي $x^3-6x-4=0$ (تحقق من ذلك؟).

والصورة القياسية لمعادلة الدرجة الثالثة هي $x^3+ax+b=0$

وعلى ذلك يكون $a=-6,\ b=-4$ ومميز المعادلة المساعدة يكون:

$$\Delta=\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}=\frac{(-4)^2}{4}+\frac{(-6)^3}{27}=-4<0$$

وإذاً يكون للمعادلة ثلاث جذور حقيقية مختلفة تُعطى من:

$$y^3=-\frac{b}{2}+\sqrt{\Delta}=-\frac{-4}{2}+\sqrt{-4}=2+i2=2(1+i)=2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}),$$

$$z^3=-\frac{b}{2}-\sqrt{\Delta}=-\frac{-4}{2}-\sqrt{-4}=2-i2=2(1-i)=2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$$

ومن ثم يكون لـ y ثلاث قيم مختلفة هي:

$$\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}),\sqrt{2}(\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}),\sqrt{2}(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}).$$

ويكون لـ z ثلاث قيم مختلفة هي:

$$\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}),\sqrt{2}(\cos\frac{9\pi}{12}-i\sin\frac{9\pi}{12}),\sqrt{2}(\cos\frac{17\pi}{12}-i\sin\frac{17\pi}{12}).$$

وإذاً تكون جذور المعادلة هي:

$$2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}),-2,2\sqrt{2}(\cos\frac{17\pi}{12}).$$

- **الطريقة العامة لحل معادلة من الدرجة الرابعة:**

سنعرض فيما يلي طريقتين لحل المعادلة من الدرجة الرابعة ، وسنرى أنه في كلتا الحالتين تعتمد الطريقة على حل معادلة مساعدة من الدرجة الثالثة.

الطريقة الأولى تُنسب إلى العالم الرياضي فراري Ferrari

والطريقة الثانية تُنسب إلى ديكارت De-Cart .

أولا: طريقة فراري لحل معادلة من الدرجة الرابعة:

الصورة القياسية للمعادلة من الدرجة الرابعة هي:

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0 \qquad (1)$$

بالقسمة على a_0 نحصل على المعادلة:

$$x^4+px^3+qx^2+rx+k=0 \qquad (2)$$

وبإعادة كتابة المعادلة (2) على الصورة:

$$(x^2+\frac{p}{2}x+\lambda)^2-(\alpha x+\beta)^2=0 \qquad (3)$$

أي أن:

$$x^4+px^3+(2\lambda+\frac{p^2}{4}-\alpha^2)x^2+(p\lambda-2\alpha\beta)x+(\lambda^2-\beta^2)=0 \qquad (4)$$

بمقارنة المعاملات في (4),(2) نحصل على:

$$2\lambda+\frac{p^2}{4}-\alpha^2=q$$
$$p\lambda-2\alpha\beta=r$$
$$\lambda^2-\beta^2=k$$

وإذاً يكون:

$$\alpha^2=2\lambda+\frac{p^2}{4}-q$$
$$\alpha\beta=\frac{1}{2}(p\lambda-r) \qquad (5)$$
$$\beta^2=\lambda^2-k$$

وبحذف α, β بين هذه المعادلات ينتج أن:

$$\frac{1}{4}(p\lambda - r)^2 = (\lambda^2 - k)(2\lambda + \frac{p^2}{4} - q)$$

وبفك الأقواس وترتيب الحدود بالنسبة لقوى λ نحصل على:

$$2\lambda^3 - q\lambda^2 - 2(k - \frac{pr}{4})\lambda - (qk + \frac{pk + r^2}{4}) = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة الثالثة في λ لها على الأقل جذر حقيقي واحد، وباستخدام هذه القيمة الحقيقية للمقدار λ يمكن الحصول على α, β من (5) ثم من المعادلة (3) ينتج أن:

$$x^2 + \frac{p}{2}x + \lambda = \pm(\alpha + \beta)$$

وهاتين معادلتين من الدرجة الثانية في x يمكن منهما الحصول على جذور المعادلة الأصلية.

مثال(١): أوجد حل المعادلة الآتية بطريقة فراري

$$x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 14x + 3 = 0 \qquad (1)$$

الحل: نكتب المعادلة في الصورة:

$$(x^2 + 3x + \lambda)^2 - (\alpha x + \beta)^2 = 0 \qquad (2)$$

بمقارنة المعاملات في المعادلتين (1),(2) نحصل على:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= 2\lambda - 3 \\ \beta^2 &= \lambda^2 - 3 \qquad (3) \\ \alpha\beta &= 3\lambda - 7 \end{aligned}$$

بحذف α, β بين مجموعة المعادلات (3) نحصل على:

$$(3\lambda - 7)^2 = (2\lambda - 3)(\lambda^2 - 3)$$

$$\therefore 2\lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda - 40 = 0$$

$$\therefore \lambda^3 - 6\lambda^2 + 18\lambda - 20 = 0.$$

ونرى أن القيمة $\lambda = 2$ تحقق هذه المعادلة ، وبالتعويض في (3) نحصل على:

$$\alpha^2 = 1, \beta^2 = 1, \alpha\beta = -1$$

وإذاً $\alpha = 1, \beta = -1$ أو $\alpha = -1, \beta = 1$

وبالتعويض في (2) نحصل على:

$$(x^2+3x+2)^2-(x-1)^2=0$$
$$\Rightarrow (x^2+3x+2)=\pm(x-1)$$
$$\therefore x^2+2x+3=0 \Rightarrow x=-1\pm i\sqrt{2}\ ,$$
$$x^2+4x+1=0 \Rightarrow x=-2\pm\sqrt{3} .$$

وبالتالي تكون جذور المعادلة الأصلية (1) هي: $x=-1\pm i\sqrt{2},-2\pm\sqrt{3}$.

مثال(٢): أوجد حل المعادلة الآتية بطريقة فراري

$$x^4+11x^2+10x+50=0 \qquad (1)$$

الحل: نكتب المعادلة في الصورة

$$(x^2+\lambda)^2-(\alpha x+\beta)^2=0 \qquad (2)$$

بمقارنة المعاملات في المعادلتين نحصل على

$$\alpha^2=2\lambda-11$$
$$\beta^2=\lambda^2-50 \qquad (3)$$
$$\alpha\beta=-5$$

بحذف α,β بين مجموعة المعادلات (3) نحصل على:

$$(-5)^2=(2\lambda-11)(\lambda^2-50)$$
$$\therefore 2\lambda^3-11\lambda^2-100\lambda+525=0$$

وجذور هذه المعادلة هي $\lambda=5,-7,\frac{15}{2}$ نختار منها الجذر $\frac{15}{2}$ لأنه بذلك تكون قيم α,β حقيقية من (3) فيكون:

$$\alpha^2=4 \Rightarrow \alpha=\pm 2$$
$$\beta^2=\frac{25}{4} \Rightarrow \beta=\pm\frac{5}{2}$$
$$\alpha\beta=-5$$

وحتى يتحقق أن $\alpha\beta=-5$ لابد أن تكون $\alpha=2,\beta=-\frac{5}{2}$

وبالتعويض في (2) نحصل على:

$$(x^2+\frac{15}{2})^2-(2x-\frac{5}{2})^2=0 \Rightarrow (x^2+\frac{15}{2})=\pm(2x-\frac{5}{2})$$

$$\Rightarrow 2x^2-4x+17=0 \Rightarrow x=1\pm 3i \quad ,$$

$$\Rightarrow 2x^2+4x+13=0 \Rightarrow x=-1\pm 2i$$

وبالتالي تكون جذور المعادلة الأصلية (1) هي: $x=1\pm 3i,-1\pm 2i$

ثانياً: طريقة دي–كارت لحل معادلة من الدرجة الرابعة:

الصورة القياسية للمعادلة من الدرجة الرابعة هي:

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \qquad (1)$$

بحذف الحد الثاني من المعادلة وذلك بالتعويض عن $x - \frac{a_1}{4a_0}$ بدلا من x فتصبح المعادلة على الصورة:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \qquad (2)$$

نفرض أنه يمكن كتابة هذه المعادلة على الصورة:

$$(x^2 + \lambda x + \alpha)(x^2 - \lambda x + \beta) = 0 \qquad (3)$$

وبمقارنة المعاملات في المعادلتين (3),(2) نحصل على:

$$\alpha + \beta - \lambda^2 = p \ , \ \lambda(\alpha - \beta) = q \ , \ \alpha\beta = r$$

$$\Rightarrow 2\alpha = \lambda^2 + p - \frac{q}{\lambda} \ , \ 2\beta = \lambda^2 + p + \frac{q}{\lambda} \ , \ \alpha\beta = r \qquad (4)$$

بحذف α, β بين مجموعة المعادلات (4) نحصل على:

$$(\lambda^2 + p - \frac{q}{\lambda})(\lambda^2 + p + \frac{q}{\lambda}) = 4r$$

$$\therefore \lambda^6 + 2p\lambda^4 + (p^2 - 4r)\lambda^2 - q^2 = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة الثالثة في λ^2 لها على الأقل جذر واحد حقيقي موجب λ فإذا علمنا λ يمكن تعيين α, β من العلاقات(4) . وبالتعويض في المعادلة (3) عن قيم λ, α, β نحصل على معادلتين من الدرجة الثانية هما:

$$x^2 + \lambda x + \alpha = 0 \ , \ x^2 - \lambda x + \beta = 0$$

يكون لهما أربعة جذور هي جذور المعادلة (2) . وأخيرا تكون جذور المعادلة الأصلية(1) تزيد بمقدار $\frac{-a_1}{4a_0}$ عن جذور المعادلة (2) .

مثال: أوجد حل المعادلة الآتية بطريقة دي–كارت

$$x^4+6x^3+12x^2+14x+3=0 \qquad (1)$$

<u>الحل</u>: بحذف الحد الثاني من المعادلة وذلك بالتعويض عن $x-\dfrac{a_1}{4a_0}$ بدلا من x

حيث $a_0=1, a_1=6$ أي بوضع $x-\dfrac{3}{2}$ بدلا من x أي نحول المعادلة إلى أخرى

جذورها تنقص بمقدار $\dfrac{-3}{2}$ عن جذور المعادلة المعطاة (1) كما يلي:

-3/2	1	6	12	14	3
		-3/2	-27/4	-63/8	-144/16
-3/2	1	9/2	21/4	49/8	-99/16
		-3/2	-9/2	-9/8	
-3/2	1	3	3/4	5	
		-3/2	-9/4		
-3/2	1	3/2	-3/2		
		-3/2			
	1	0			

فتصبح المعادلة على الصورة:

$$x^4-\frac{3}{2}x^2+5x-\frac{99}{16}=0 \qquad (2)$$

نكتب هذه المعادلة على الصورة:

$$(x^2+\lambda x+\alpha)(x^2-\lambda x+\beta)=0 \qquad (3)$$

بمقارنة المعاملات في المعادلتين (3),(2) نحصل على:

$$\alpha+\beta-\lambda^2=-\frac{3}{2}$$

$$(\alpha-\beta)\lambda=5 \qquad (4)$$

$$\alpha\beta=-\frac{99}{16}$$

$$\therefore 2\alpha=\lambda^2-\frac{3}{2}-\frac{5}{\lambda} \quad , \quad 2\beta=\lambda^2-\frac{3}{2}+\frac{5}{\lambda}$$

وبحذف α, β نحصل على:

$$(\lambda^2 - \frac{3}{2} - \frac{5}{\lambda})(\lambda^2 - \frac{3}{2} + \frac{5}{\lambda}) = 4(\frac{-99}{16})$$

$$\therefore 4\lambda^6 - 12\lambda^4 + 108\lambda^2 - 100 = 0 \qquad (5)$$

وواضح أن $\lambda^2 = 1$ هو أحد جذور هذه المعادلة فإذا أخذنا القيمة $\lambda = 1$ فبالتعويض في (4) نحصل على :

$$\alpha = -\frac{11}{4} \ , \ \beta = \frac{9}{4}$$

وبالتعويض عن قيم α, β, λ في (3) نحصل على المعادلتين:

$$x^2 + x - \frac{11}{4} = 0 \ , \ x^2 - x + \frac{9}{4} = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}, \frac{1}{2} \pm i\sqrt{2}$$

وهذه جذور المعادلة (2) التي تنقص جذورها عن جذور المعادلة الأصلية (1) بمقدار $\frac{-3}{2}$ وعلى ذلك تكون جذور المعادلة الأصلية المطلوبة هي:

$$\therefore x = -2 \pm \sqrt{3}, -1 \pm i\sqrt{2} \ .$$

تمارين:

١- بطريقة المعاملات المنفصلة أوجد خارج وباقي قسمة كثيرة الحدود $x^5 - 6x^4 + 15x^2 + 7$ على $x - 2$.

٢- بطريقة المعاملات المنفصلة أوجد خارج وباقي قسمة كثيرة الحدود $3x^7 - x^6 + 31x^2 + 21x + 5$ على $x + 2$.

٣- بطريقة المعاملات المنفصلة أوجد خارج وباقي قسمة كثيرة الحدود $x^5 - 4x^4 + 9x^3 - 6x^2 - 16x + 13$ على $x^2 - 3x + 2$.

٤- أوجد العلاقة بين a, b بحيث إن كثيرة الحدود $2x^4 - 7x^3 + ax + b$ تقبل القسمة على $x - 3$.

٥- أوجد المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار 2 عن جذور المعادلة:

$$4x^4 + 32x^3 + 31x^2 - 132x - 180 = 0 .$$

وبحل المعادلة الناتجة أوجد جذور المعادلة الأصلية.

٦- إذا كانت $p(x) = x^4 + 12x^3 + 49x^2 + 78x + 40$ فأوجد $p(x-3)$.

٧- إذا كانت $p(x) = x^4 + 10x^3 + 39x^2 + 76x + 65$ فأوجد $p(x+4)$.

٨- إذا علمت أن أحد جذور المعادلة $2x^3 - 15x^2 + 86x - 102 = 0$ هو $3 + 5i$ فأوجد باقي الجذور.

٩- ابحث الجذور الموجبة والجذور السالبة للمعادلة الجبرية

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 2 = 0.$$

وإذا عُلم أن أحد جذورها هو $2 + \sqrt{3}$ فأوجد باقي الجذور.

١٠- ابحث الجذور الموجبة والجذور السالبة للمعادلة الجبرية

$$6x^3 + 24x^2 + 2x - 3 = 0 .$$

ثم حولها إلى أخرى تكون معاملاتها أعداد صحيحة ، ويكون معامل أكبر قوى فيها الواحد الصحيح.

١١- ابحث الجذور الموجبة والجذور السالبة والجذور الصحيحة للمعادلة الجبرية
$2x^3 - 5x^2 - 14x - 7 = 0$.

١٢- ابحث الجذور الموجبة والجذور السالبة والجذور الكسرية للمعادلة الجبرية
$2x^3 - 5x^2 - 14x - 3 = 0$.

١٣- حول المعادلة $x^3 - 12x^2 + 30x - 27 = 0$ إلى أخرى خالية من معامل x^2
ثم أوجد جذور المعادلة الناتجة.

١٤- احذف الحد الثاني في كل من المعادلات الجبرية الآتية:

(i) $x^3 - 3x^2 - 3x - 4 = 0$
(ii) $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$
(iii) $8x^3 - 12x^2 - 6x + 1 = 0$

ثم أوجد جذور المعادلة الناتجة.

١٥- أوجد جذور كل من المعادلات الجبرية الآتية:

(i) $x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 10x + 3 = 0$
(ii) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$
(iii) $x^4 + 11x^2 + 10x + 50 = 0$.
(iv) $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 2 = 0$

****