



رياضيات تطبيقية (10)

محاضرات في نظرية المجالات الكهرومغناطيسية

إعداد

الدكتور / نصر الدين فريد الأنصاري

كلية العلوم بقنا
قسم الرياضيات

العام الجامعي

2023/2024

بيانات الكتاب

الكلية: التربية بقنا

الفرقة: الرابعة

التخصص: شعبة الرياضيات عام

تاريخ النشر:

عدد الصفحات: 132

المؤلف: الدكتور/ نصر الدين فريد الأنصاري

الرموز المستخدمة

نص للقراءة والدراسة



أنشطة ومهام



أسئلة للتفكير والتقييم الذاتي



فيديو للمشاهدة

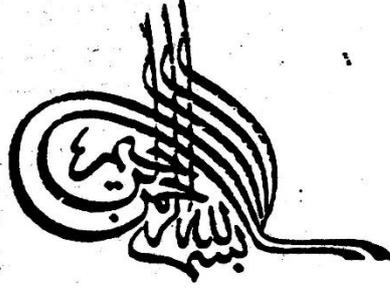


رابط خارجي



تواصل عبر مؤتمر الفيديو



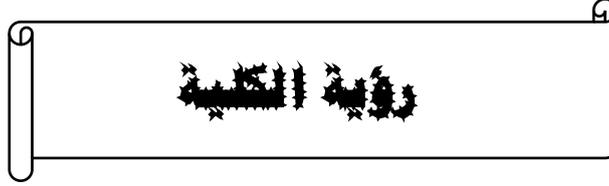


قَالُوا سُبْحَانَكَ اللَّهُمَّ إِنَّا نَعُوذُ بِكَ

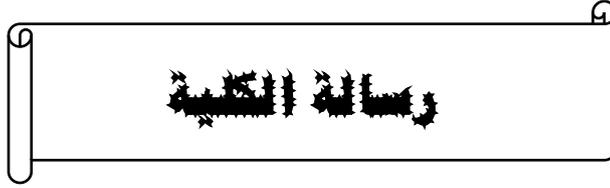
بِمَنَّا

إِنَّكَ أَنْتَ الْعَلِيمُ الْعَظِيمُ

« صدق الله العظيم »



التميز في تعليم العلوم الأساسية والبحث العلمي للمساهمة في التنمية المستدامة.



تقديم تعليم مميز في مجالات العلوم الأساسية وإنتاج بحوث علمية تطبيقية للمساهمة في التنمية المستدامة من خلال اعداد خريجين متميزين طبقا للمعايير الأكاديمية القومية, وتطوير مهارات وقدرات الموارد البشرية وتوفير خدمات مجتمعية وبيئية تلبي طموحات مجتمع جنوب الوادي، وبناء الشراكات المجتمعية الفاعلة.

المحتوى

1	الباب الأول.....
1	المتجهات.....
2	متجه الوحدة.....
2	مركبات المتجه.....
3	الضرب القياسي لمتجهين.....
3	الضرب الاتجاهي لمتجهين.....
3	الضرب الثلاثي للمتجهات.....
4	تفاضل المتجهات.....
5	التفاضل الجزئي للمتجهات.....
8	المجالات القياسية والاتجاهية.....
8	أ-مجالات قياسية.....
8	ب-مجالات اتجاهية.....
9	التدرج أو الانحدار.....
9	التباعد (الانسياب).....
10	الدوران.....
10	أمثلة محلولة.....
14	تكامل المتجهات.....
14	التكامل الخطي.....
15	التكامل السطحي.....
16	التكامل الحجمي.....
17	نظرية جاوس للانسياب.....
17	نظرية ستوكس.....
17	نظرية جرين في المستوى.....
17	نظريات التكامل المرتبطة.....
18	الاحداثيات.....
18	تحويل الاحداثيات.....
19	الاحداثيات المنحنية المتعامدة.....
19	متجهات الوحدة.....
20	طول القوس وعنصر الحجم.....
21	التدرج والتباعد والدوران ولاپلسيان في الاحداثيات المنحنية.....
22	حالات خاصة.....
25	الباب الثاني.....
25	1- قانون كولوم.....
27	2 - المجال الكهربى.....
28	3 - الجهد الكهربى.....
30	نظرية جاوس للفيض.....
32	معادلة بواسون.....
32	معادلة لابلاس.....
33	خطوط القوى وأنابيب القوى.....
34	أمثلة محلولة.....

37	الظاهرة الكهربائية لتركيبات من الشحنة
37	1- مجموعة من الشحنات على خط مستقيم
39	2- المجال الكهربى والجهد الكهربى لشحنات خطية
41	3-- المزوج الكهربى
44	تمارين
45	المواد العازلة القابلة للاستقطاب
46	متجه الاستقطاب
46	قاعدة بواسون للتوزيع المكافئ
47	متجه الازاحة الكهربائية
48	نتائج
50	الشروط السطحية
51	تطبيق
53	التيارات الكهربائية
53	شدة التيار الكهربى
54	متجه كثافة التيار
54	معادلة الاتصال
54	تمارين
56	الباب الثالث
56	القانون العكسى لكولوم
56	الجهد المغناطيسى لمغناطيس صغير
58	المجال المغناطيسى لمغناطيس صغير
59	المواد القابلة للمغطة
59	الجهد الاتجاهى
60	أمثلة محلولة
62	الجهد لفترة مغناطيسية منتظمة
64	أمثلة محلولة
72	الباب الرابع
72	قانون فرداى
73	تيار الازاحة – قانون أمبير الدائرى
75	معادلات ماكسويل
76	الجهود الكهرومغناطيسية في معادلات ماكسويل
78	أمثلة محلولة
84	الباب الخامس
84	حركة جسيم مشحون في مجال كهروستاتيكى
85	حركة جسيم مشحون في مجال مغناطيسى منتظم
85	حركة جسيم مشحون في مجال كهرومغناطيسى منتظم
86	الجسيمات المشحونة Charged particles
87	أمثلة محلولة
113	تطبيقات Applications
113	أ – راسم الذبذبات Cathode ray oscillograph
119	ب – منتقى السرعة velocity Selector
120	ج – مطياف الكتلة (spectrograph) Mass spectrometer
121	د – السيكلترون Cyclotron
124	المراجع

الصور والاشكال

1	شكل 1-1
6	شكل 1-2
7	شكل 1-3
16	شكل 1-4
19	شكل 1-5
20	شكل 1-6
22	شكل 1-7
23	شكل 1-8
25	شكل 2-1
28	شكل 2-2
29	شكل 2-3
31	شكل 2-4
33	شكل 2-5
34	شكل 2-6
35	شكل 2-7
36	شكل 2-8
37	شكل 2-9
39	شكل 2-10
40	شكل 2-11
41	شكل 2-12
43	شكل 2-13
45	شكل 2-14
46	شكل 2-15
57	شكل 3-1
63	شكل 3-2
65	شكل 3-3
67	شكل 3-4
68	شكل 3-5
70	شكل 3-6
87	شكل 5-1
88	شكل 5-2
90	شكل 5-3
92	شكل 5-4
93	شكل 5-5
95	شكل 5-6
97	شكل 5-7
99	شكل 5-8
100	شكل 5-9
102	شكل 5-10
103	شكل 5-11
104	شكل 5-12

107	شكل 5-13
109	شكل 5-14
110	شكل 5-15
112	شكل 5-16
113	شكل 5-17
114	شكل 5-18
117	شكل 5-19
118	شكل 5-20
119	شكل 5-21
120	شكل 5-22
122	شكل 5-23

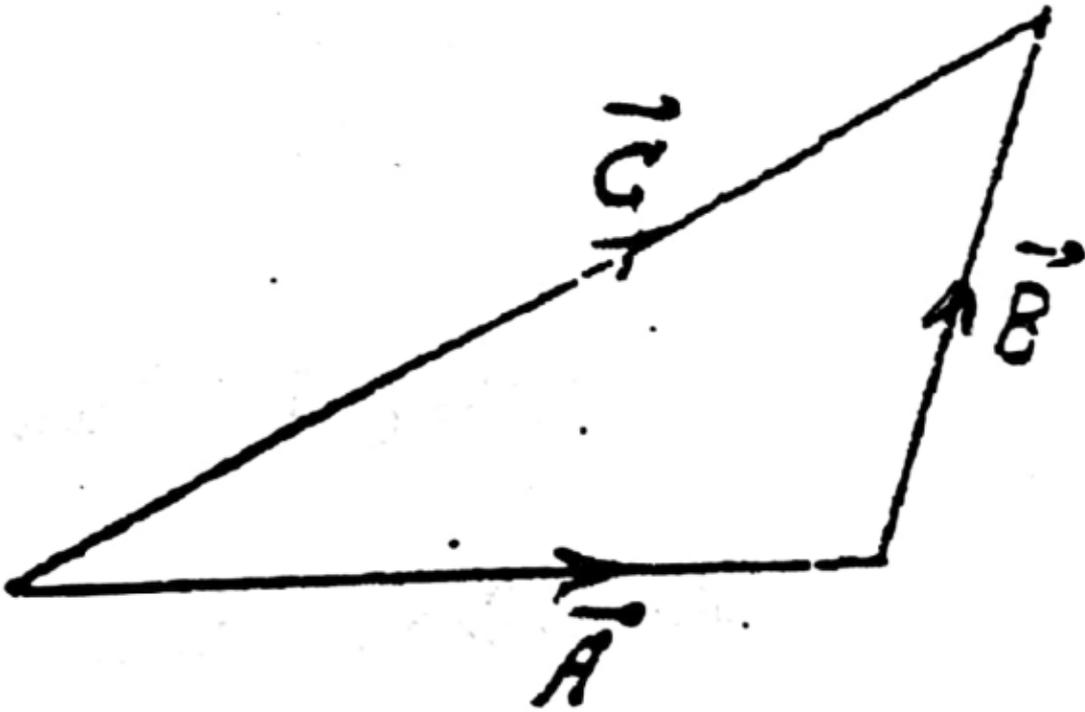
الباب الأول

مقدمة رياضية

المتجهات



المتجه هو كمية تتحدد بالمقدار والاتجاه مثل الازاحة والسرعة والقوة . أما الكمية القياسية فانها تتحدد بالمقدار فقط مثل الطول والزمن ودرجة الحرارة . المتجهان \vec{A}, \vec{B} يتساويان اذا كان لهما نفس المقدار والاتجاه بغض النظر عن نقطة البداية , وبذلك يكون $\vec{A} = \vec{B}$. مجموع أو محصلة متجهين \vec{A}, \vec{B} هو المتجه \vec{C} أي أن $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$, والفرق بين المتجهين



شكل 1-1

\vec{A}, \vec{B} هو عبارة عن المتجه $\vec{A} + (-\vec{B})$. اذا كان $\vec{A} = \vec{B}$ فان $\vec{A} - \vec{B} = \vec{0}$, ويعرف $\vec{0}$ بالمتجه الصفري أي متجه مقداره يساوى صفر وليس له اتجاه محدد .

ضرب المتجه \vec{A} بكمية قياسية m هو المتجه $m\vec{A}$ قيمته m مضروبة في مقدار المتجه \vec{A} وله نفس اتجاه المتجه \vec{A} أو عكس اتجاه المتجه تبعا لقيمة الكمية m موجبة أو سالبة على الترتيب .

إذا كان $\vec{C}, \vec{B}, \vec{A}$ ثلاثة متجهات , n, m كميات قياسية فان:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \quad \text{قانون التبديل للجمع :}$$

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} \quad \text{قانون التنسيق للجمع :}$$

$$(m + n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A} \quad \text{قانون التوزيع :}$$

$$m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B} \quad \text{قانون التوزيع :}$$

متجه الوحدة

هو متجه مقداره الوحدة , فإذا كان \vec{A} متجه غير صفري فان \vec{A}/A هو متجه وحدة في اتجاه المتجه \vec{A} . ومثال على ذلك متجهات الوحدة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ في اتجاه المحاور الكارتيزية المتعامدة x, y, z .

مركبات المتجه

في الفضاء الثلاثي يمكن التعبير عن أي متجه \vec{A} بنقطة بداية عند نقطة الأصل o للاحداثيات المتعامدة وليكن (A_1, A_2, A_3) الاحداثيات المتعامدة لنقطة النهاية للمتجه \vec{A} . المتجهات $\vec{A}_1\vec{i}, \vec{A}_2\vec{j}, \vec{A}_3\vec{k}$ تسمى المركبات الاتجاهية للمتجه \vec{A} في الاتجاهات x, y, z على الترتيب . الكميات A_1, A_2, A_3 تسمى المركبات القياسية أو مركبات المتجه \vec{A} في اتجاه المحاور x, y, z على الترتيب , وفي هذه الحالة فان المتجه \vec{A} يكتب في الصورة الرياضية :

$$\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$$

ومقدار هذا المتجه هو :

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

وجيوب تمام اتجاه هذا المتجه مع المحاور المتعامدة x, y, z هي :

$$\cos \theta_1 = \frac{A_1}{A}, \quad \cos \theta_2 = \frac{A_2}{A}, \quad \cos \theta_3 = \frac{A_3}{A}$$

على الترتيب . واضح أن :

$$\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 = 1$$

الضرب القياسي لمتجهين

ويعرف بالصورة :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

حيث θ هي الزاوية بين المتجهين \vec{B}, \vec{A} . لأي ثلاث متجهات $\vec{C}, \vec{B}, \vec{A}$ تتحقق العلاقات الآتية :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

الضرب الاتجاهي لمتجهين

ويعرف بالصورة الرياضية :

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = AB \sin \theta \cdot \vec{e}$$

حيث θ هي الزاوية بين المتجهين \vec{B}, \vec{A} و \vec{e} متجه وحدة في الاتجاه العمودي على المستوىالذي يجمع المتجهين \vec{B}, \vec{A} , ولأي ثلاث متجهات $\vec{C}, \vec{B}, \vec{A}$ تتحقق العلاقات التالية :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

الضرب الثلاثي للمتجهاتيسمى حاصل الضرب : $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$ بالضرب الثلاثي القياسي والذي يمكن وضعه

بالصورة :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

أما حاصل الضرب الثلاثي $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$ فيسمى بحاصل الضرب الثلاثي الاتجاهي والذي

يمكن كتابته بالصورة :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

وهو متجه يقع في المستوى الذي يقع فيه المتجهان \vec{C}, \vec{B} .

تفاضل المتجهات

نفرض أن $\vec{A} = \vec{A}(u)$ متجه يتوقف على المتغير العددي u فيكون:

$$\frac{\Delta \vec{A}}{\Delta u} = \frac{\vec{A}(u + \Delta u) - \vec{A}(u)}{\Delta u}$$

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta u} = \frac{d\vec{A}}{du}$$

ويسمى هذا المتجه مشتقة المتجه \vec{A} بالنسبة للمتغير u . وهو متجه يتوقف على u .

إذا كانت المتجهات $\vec{C}, \vec{B}, \vec{A}$ دوال اتجاهية في المتغير u وكانت Φ دالة قياسية قابلة

للتفاضل فان:

$$\frac{d}{du}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\vec{B}}{du} \quad (1)$$

$$\frac{d}{du}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du} \cdot \vec{B} \quad (2)$$

$$\frac{d}{du}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{A} \wedge \frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du} \wedge \vec{B} \quad (3)$$

$$\frac{d}{du}(\Phi \vec{A}) = \Phi \frac{d\vec{A}}{du} + \vec{A} \frac{d\Phi}{du} \quad (4)$$

$$\frac{d}{du}[\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})] = \vec{A} \cdot \left(\vec{B} \wedge \frac{d\vec{C}}{du} \right) + \vec{A} \cdot \left(\frac{d\vec{B}}{du} \wedge \vec{C} \right) + \frac{d\vec{A}}{du} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) \quad (5)$$

$$\frac{d}{du}[\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})] = \vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \frac{d\vec{C}}{du} \right) + \vec{A} \wedge \left(\frac{d\vec{B}}{du} \wedge \vec{C} \right) + \frac{d\vec{A}}{du} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) \quad (6)$$

الترتيب في العلاقات (3) , (5) , (6) مهم .

التفاضل الجزئي للمتجهات

إذا كان المتجه يعتمد على أكثر من متغير قياسي وليكن تفاضل المتجه بالنسبة للمتغير أو بالنسبة للمتغير أو بالنسبة للمتغير تعطى بالصيغة :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(x + \Delta x, y, z) - \vec{A}(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(x, y + \Delta y, z) - \vec{A}(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(x, y, z + \Delta z) - \vec{A}(x, y, z)}{\Delta z}$$

باستخدام القواعد المعروفة في التفاضل الجزئي فإنه يمكن التحقق من العلاقات الآتية :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \cdot \vec{B}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{A} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \wedge \vec{B}$$

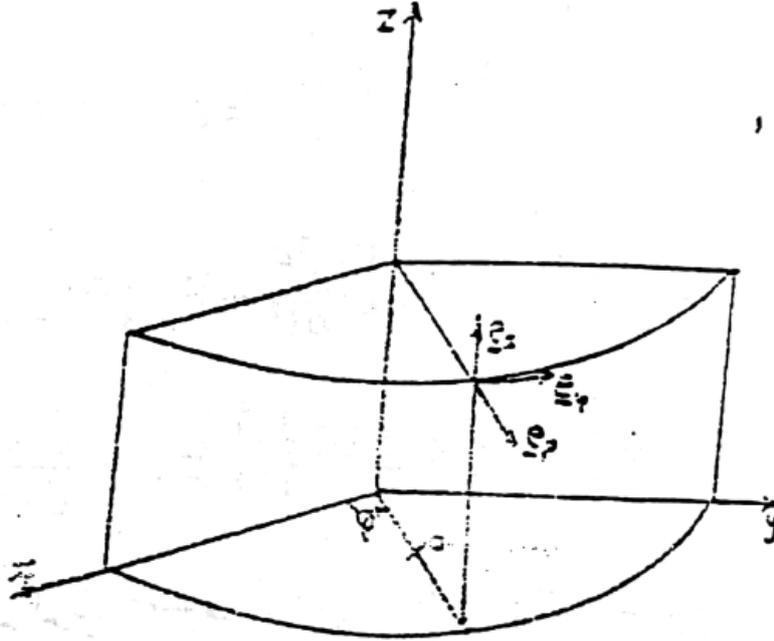
$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \cdot \vec{B} \right)$$

$$= \vec{A} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y \partial x} \cdot \vec{B}$$

..... الخ

نفرض أن الاحداثيات الاسطوانية لجسيم متحرك (كما هو موضح بالشكل) هي :

(ρ, ϕ, z) عند اللحظة الزمنية t . يمكن اثبات أن :



شكل 1- 2

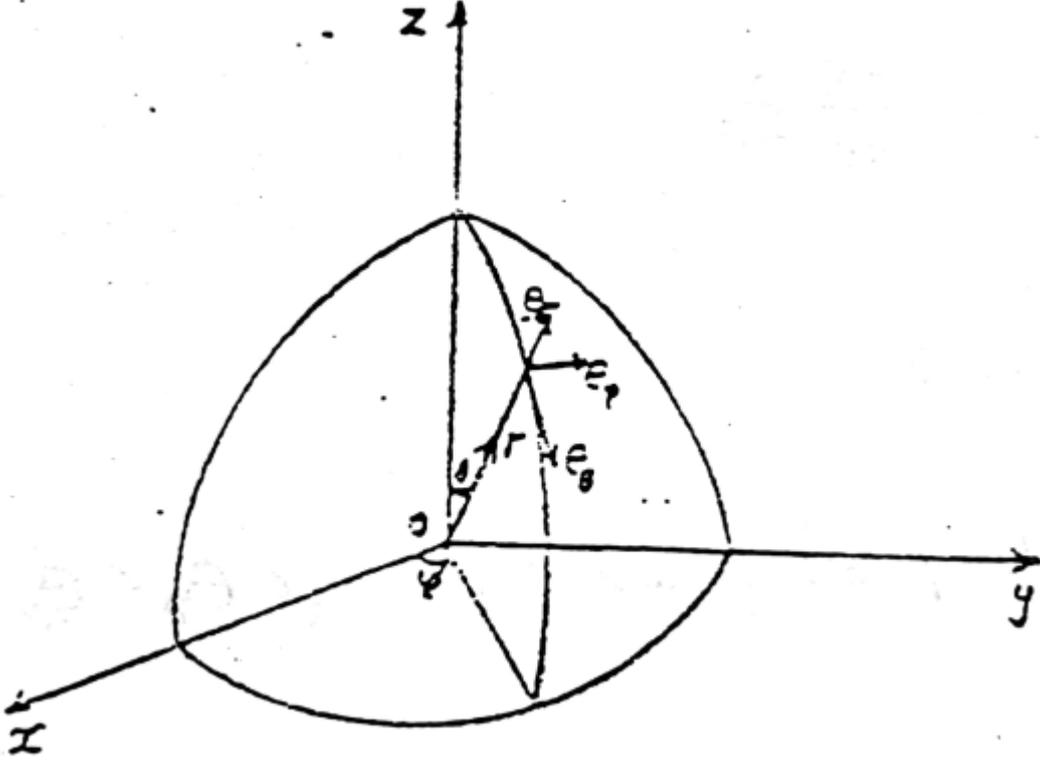
$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \vec{e}_\phi, \quad \frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dt} \vec{e}_\rho, \quad \frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0}$$

حيث $\vec{e}_z, \vec{e}_\phi, \vec{e}_\rho$ هي متجهات الوحدة في اتجاه z, ϕ, ρ على الترتيب . باستخدام العلاقات السابقة فان متجهى السرعة والعجلة لجسيم يتحرك في الاحداثيات الاسطوانية يمكن ايجادها على الصورة :

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\phi}{dt} \vec{e}_\phi + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z$$

$$\vec{f} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] \vec{e}_\rho + \left[\rho \frac{d^2\phi}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\phi}{dt} \right] \vec{e}_\phi + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{e}_z$$

اذا كانت (r, θ, ϕ) هي الاحداثيات القطبية الكرية لجسيم عند اللحظة الزمنية t كما هو موضح بالشكل .فانه يمكن اثبات أن :



شكل 1-3

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{d\phi}{dt}\sin\theta\cdot\vec{e}_\phi$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_r + \frac{d\phi}{dt}\cos\theta\cdot\vec{e}_\phi$$

$$\frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dt}\cos\theta\cdot\vec{e}_\theta - \frac{d\phi}{dt}\sin\theta\cdot\vec{e}_r$$

حيث $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ هي متجهات الوحدة في اتجاه r, θ, ϕ على الترتيب . وبذلك فإنه يمكن إيجاد متجهي السرعة والعجلة لجسيم يتحرك في الاحداثيات القطبية الكرية على الصورة :

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\frac{d\phi}{dt}\sin\theta\cdot\vec{e}_\phi$$

$$\vec{f} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \sin^2 \theta \right] \vec{e}_r$$

$$+ \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \right] \vec{e}_\theta$$

$$+ \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} \sin \theta + r \frac{d^2 \phi}{dt^2} \sin \theta + 2r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\phi}{dt} \cos \theta \right] \vec{e}_\phi$$

المجالات القياسية والاتجاهية

يمكن التعبير عن الكمية الفيزيائية بدالة نقطية متصلة في منطقة ما في الفضاء , ومثل هذه الدالة تسمى point function المنطقة التي تحدد فيها الكمية القياسية فتعرف بالمجال . وتنقسم هذه المجالات الى نوعين أساسيين هما :

أ-مجالات قياسية

ومن أمثلتها مجال توزيع درجة الحرارة , ومجال توزيع الكثافة , ومجال توزيع الجهد الكهربى الخ . وأى من هذه المجالات يمكن تمثيله بدالة قياسية متصلة تعطى المقدار للكمية المعرفة عند كل نقطة . مثل هذه الدالة لا تمر بأى تغيرات فجائية في قيمتها عند انتقالها من نقطة الى أخرى مجاورة لها . كما أن مثل هذا المجال يمكن تخطيطه بيانيا بواسطة مجموعة من السطوح مثل سطوح التساوى الحرارى isothermal surfaces , و سطوح تساوى الكثافة Equi-density surfaces , و سطوح تساوى الجهد equi-potential surfaces الخ . والتي عندها يتحدد المجال بقيمة ثابتة , وتختار هذه السطوح بحيث أنه عند الانتقال من سطح الى آخر نحصل على فرق اختياري يميز ذلك المجال . كما أن هذه السطوح لا يمكن أن تتقاطع ولكنها تقع متتالية , وأن الدوال القياسية النقطية الممثلة لها تكون وحيدة القيمة عند كل نقطة .

ب-مجالات اتجاهية

ومن أمثلتها مجالات توزيع السرعات في الموائع , شدة المجال الكهربى والمغناطيسى ... الخ . وتتمثل عند أى نقطة دالة اتجاهية متصلة , وتتحدد هذه الدالة عند أى نقطة بواسطة متجه له قيمة قياسية واتجاه محددان . المقدار والاتجاه يتغيران باستمرار من نقطة الى أخرى في منطقة المجال , وتمثل هذه الدالة الاتجاهية بواسطة منحنى يسمى خط الفيض أو خط الانسياب أو خط المتجه vector line , line of flux or flux line . حيث يكون اتجاه الكمية المتجهة عند

أى نقطة على المنحنى هو اتجاه المماس للمنحنى عند هذه النقطة . ولتحديد مقدار المتجه عند هذه النقطة على المنحنى نرسم سطحاً صغيراً جداً وعمودياً على المنحنى عند هذه النقطة فيكون عدد النقط في وحدة المساحات من هذا السطح مساوياً لمقدار المتجه (القيمة القياسية للمتجه) عددياً . وف الواقع فانه عند كل نقطة من هذه النقط يمر خط من خطوط الفيض , وبالتالي فان المجال يمكن تخطيطه اذا رسمنا عبر كل نقطة من هذه النقط خطاً للفيض . ومعنى ذلك أن اتجاه هذه الخطوط (اتجاه المماسات لهذه الخطوط) هو نفسه اتجاه الدالة الاتجاهية , وكثافة هذه الخطوط (عدد الخطوط التي تعبر وحدة المساحات العمودية عليها) تساوى مقدار الدالة الاتجاهية . وكذلك فان خطوط الفيض لا يمكن أن تتقاطع عند أي نقطة , وذلك لأن تقاطع الخطوط يعنى أنه عند نقطة التقاطع يكون اتجاه الدالة الاتجاهية غير محدد , وهذا يخالف مضمون الكمية الاتجاهية . كما أن الدالة النقطية للمتجه يجب أن تكون وحيدة القيمة .

التدرج أو الانحدار

نفرض أن $\Phi(x, y, z)$ دالة قياسية معرفة وقابلة للتفاضل عند كل نقطة (x, y, z) فى فضاء معين (أي أن Φ مجال قياسي) . تدرج أو ميل أو انحدار الدالة Φ يعرف رياضياً بالصورة :

$$\nabla\Phi = \text{grad } \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \vec{k}$$

يلاحظ أن $\nabla\Phi$ عبارة عن دالة اتجاهية (مجال اتجاهى) .

التباعد (الانسياب)

نفرض أن المتجه $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ معرف وقابل للتفاضل عند كل نقطة (x, y, z) فى فضاء معين (أي أن \vec{A} يمثل مجال اتجاهى) . فان تباعد أو انسياب المجال \vec{A} يعرف بالصورة الرياضية :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A} = \text{div } \vec{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}) \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \end{aligned}$$

الدوران

إذا كان $\vec{A}(x, y, z)$ مجال اتجاهي قابل للتفاضل عند كل نقطة (x, y, z) في فضاء معين . فان دوران المتجه يكتب بالصورة : $curl\vec{A}$ or $rot\vec{A}$, $\nabla \wedge \vec{A}$ ويعرف بالصيغة الرياضية :

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \vec{A} = curl\vec{A} = rot\vec{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \wedge (A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

هنا يجب ملاحظة أنه عند فك المحدد (متجه في صورة محدد) فان المؤثرات التفاضلية :

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \text{ لا بد أن تسبق المركبات } A_1, A_2, A_3$$

أمثلة محلولة



مثال :

أثبت أن : $\nabla(FG) = F\nabla G + G\nabla F$ حيث G, F هي دوال قياسية قابلة للتفاضل عند أي

نقطة (x, y, z) .

الحل :

$$\begin{aligned}\nabla(FG) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) (FG) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (FG) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} (FG) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} (FG) \vec{k} \\ &= \left(F \frac{\partial G}{\partial x} + G \frac{\partial F}{\partial x} \right) \vec{i} + \left(F \frac{\partial G}{\partial y} + G \frac{\partial F}{\partial y} \right) \vec{j} + \left(F \frac{\partial G}{\partial z} + G \frac{\partial F}{\partial z} \right) \vec{k} \\ &= F \left(\frac{\partial G}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial G}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial G}{\partial z} \vec{k} \right) + G \left(\frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k} \right)\end{aligned}$$

$$= F\nabla G + G\nabla F$$

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \Phi \quad \text{مثال : بين أن :}$$

الحل :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \Phi) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \nabla^2 \Phi \end{aligned}$$

$$\text{مثال : أثبت أن } \nabla \cdot (\Phi \vec{A}) = (\nabla \Phi) \cdot \vec{A} + \Phi (\nabla \cdot \vec{A})$$

الحل :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\Phi \vec{A}) &= \nabla \cdot (\Phi A_1 \vec{i} + \Phi A_2 \vec{j} + \Phi A_3 \vec{k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\Phi A_1) + \frac{\partial}{\partial y} (\Phi A_2) + \frac{\partial}{\partial z} (\Phi A_3) \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} A_1 + \Phi \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} A_2 + \Phi \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} A_3 + \Phi \frac{\partial A_3}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} A_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} A_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} A_3 + \Phi \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) \\ &= (\nabla \Phi) \cdot \vec{A} + \Phi (\nabla \cdot \vec{A}) \end{aligned}$$

$$\text{مثال : أثبت أن } \nabla \cdot (U \nabla V - V \nabla U) = U \nabla^2 V - V \nabla^2 U$$

الحل : بوضع $\Phi = U$, $\vec{A} = \nabla V$ فإن :

$$\nabla \cdot (U \nabla V) = \nabla U \cdot \nabla V + U (\nabla \cdot \nabla V) = \nabla U \cdot \nabla V + U \nabla^2 V$$

بتبادل V, U ينتج أن :

$$\nabla \cdot (V \nabla U) = \nabla V \cdot \nabla U + V \nabla^2 U$$

ثم بالطرح نجد أن :

$$\nabla \cdot (U \nabla V - V \nabla U) = U \nabla^2 V - V \nabla^2 U$$

مثال : اثبت أن : $\nabla \wedge (\Phi \vec{A}) = (\nabla \Phi) \wedge \vec{A} + \Phi (\nabla \wedge \vec{A})$

الحل :

$$\nabla \wedge (\Phi \vec{A}) = \nabla \wedge (\Phi A_1 \vec{i} + \Phi A_2 \vec{j} + \Phi A_3 \vec{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Phi A_1 & \Phi A_2 & \Phi A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y} (\Phi A_3) - \frac{\partial}{\partial z} (\Phi A_2) \right] \vec{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z} (\Phi A_1) - \frac{\partial}{\partial x} (\Phi A_3) \right] \vec{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x} (\Phi A_2) - \frac{\partial}{\partial y} (\Phi A_1) \right] \vec{k}$$

$$= \left[\Phi \frac{\partial A_3}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} A_3 - \Phi \frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} A_2 \right] \vec{i}$$

$$+ \left[\Phi \frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} A_1 - \Phi \frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} A_3 \right] \vec{j}$$

$$+ \left[\Phi \frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} A_2 - \Phi \frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} A_1 \right] \vec{k}$$

$$= \Phi \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \vec{k} \right]$$

$$+ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} A_3 - \frac{\partial \Phi}{\partial z} A_2 \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} A_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial x} A_3 \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} A_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial y} A_1 \right) \vec{k}$$

$$= \Phi (\nabla \wedge \vec{A}) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \Phi (\nabla \wedge \vec{A}) + (\nabla \Phi) \wedge \vec{A}$$

مثال : أثبت أن $\nabla \wedge (\nabla \Phi) = \vec{0}$

الحل :

$$\nabla \wedge (\nabla \Phi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} \right) \vec{k} = \vec{0}$$

مثال : أثبت أن $\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{A}) = 0$

الحل :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{A}) &= \nabla \cdot \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \vec{k} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

مثال : أثبت أن $\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A} + \nabla (\nabla \cdot \vec{A})$

الحل :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) &= \nabla \wedge \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \vec{k} \right] \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} & \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} & \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \right] \vec{i} \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \right] \vec{j} \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \right] \vec{k} \\
&= - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_1 \vec{i} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_2 \vec{j} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_3 \vec{k} \\
&+ \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z \partial x} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z \partial y} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2} \right) \vec{k} \\
&= - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot (A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) \\
&= -\nabla^2 \vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A})
\end{aligned}$$

تكامل المتجهات



نفرض أن المتجه \vec{A} يعتمد على التغير u أي

$$\vec{A} = \vec{A}(u) = A_1(u) \vec{i} + A_2(u) \vec{j} + A_3(u) \vec{k}$$

حيث A_1, A_2, A_3 دوال متصلة في منطقة فضائية معينة. التكامل المحدود للمتجه \vec{A} بين

النهايات $u = a$, $u = b$ يمكن وضعه في الصورة :

$$\int_a^b \vec{A} du = \vec{i} \int_a^b A_1 du + \vec{j} \int_a^b A_2 du + \vec{k} \int_a^b A_3 du$$

وكما هو معروف فإن هذا التكامل يمكن اعتباره كنهاية لمجموع .

التكامل الخطي

نفرض أن متجه موضع نقطة موجودة على المنحنى c الواصل بين النقطتين p_2, p_1 ونفرض أن $\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}$ دالة في الموضع ومتصلة على

المنحنى c . حينئذ يكون التكامل للمركبة المماسية للمتجه \vec{A} على طول المنحنى c من النقطة p_1 الى النقطة p_2 في الصورة :

$$\int_{p_1}^{p_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_c (A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz)$$

ويعرف هذا التكامل بالتكامل الخطى للمتجه \vec{A} . اذا كان $\vec{A} = \vec{F}$ حيث \vec{F} هي القوة المؤثرة على جسيم يتحرك على المنحنى c المغلق والبسيط (أي لا يقطع نفسه في أي مكان) فان التكامل الخطى يأخذ الصورة :

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_c (A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz)$$

وهذا التكامل يمثل الشغل المبذول ضد القوة . في ميكانيكا الموائع وديناميكا الطيران التكامل الخطى يمثل دوران المتجه \vec{A} على المنحنى c حيث \vec{A} يمثل سرعة المائع .

نظرية :

اذا كان $\vec{A} = \nabla\Phi$ في منطقة فضائية R حيث $\Phi = \Phi(x, y, z)$ دالة قياسية تفاضلية ووحيدة القيمة ومتصلة في هذه المنطقة الفضائية فان :

$$\int_{p_1}^{p_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (\text{أ}) \quad \text{لا يتوقف على شكل المنحنى الواصل بين النقطتين } p_2, p_1 .$$

$$\oint_c \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\text{ب}) \quad \text{حول أي منحنى مغلق في المنطقة الفضائية } R .$$

التكامل السطحي

باعتبار أن S سطح له جانبان كما هو موضح بالشكل , ونختار متجه الوحدة \vec{n} العمودي على أحد جانبي السطح S (الجانب الموجب للسطح) . المتجه $d\vec{S}$ (عنصر سطحي) يمكن كتابته بالصورة :

$$d\vec{S} = \vec{n} dS$$

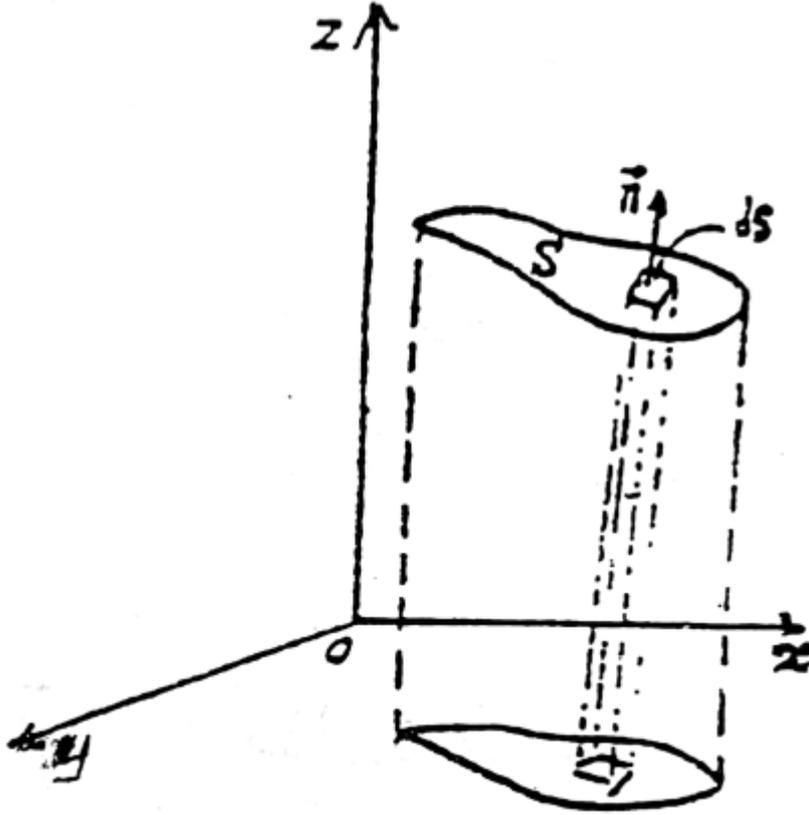
التكامل :

$$\iint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

يسمى بالتكامل السطحي (انسياب أو تدفق المتجه \vec{A}) للمتجه \vec{A} فوق السطح S . تكاملات سطحية أخرى في الصور :

$$\iint \Phi d\vec{S} = \iint \Phi \vec{n} dS \quad , \quad \iint \vec{A} \wedge d\vec{S}$$

حيث دالة قياسية. الرمز \iint أو الرمز \oint يستخدم ليبين أن التكامل مأخوذ على السطح المغلق S أو المنحنى المغلق C على الترتيب .



شكل 1-4

التكامل الحجمي

نفرض أن السطح المغلق S يحتوي على الحجم V (يحيط بالحجم). التكاملات:

$$\iiint_V \vec{A} d\tau \quad , \quad \iiint_V \Phi d\tau$$

تمثل تكاملات حجمية أو تكاملات في الفضاء. $d\tau$ تمثل عنصر حجمي.

نظرية جاوس للانسياب

وتنص على أنه إذا كان V هو الحجم المحدد بالسطح S والمتجه \vec{A} دالة في الموضع وتفاضلية ومتصلة فان :

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{A}) d\tau = \oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

حيث \vec{n} هو متجه وحدة عمودي (للخارج) على السطح S و $d\tau$ عنصر الحجم .

نظرية ستوكس

تنص على أنه إذا كان S سطحاً مفتوحاً ومحدداً بالمنحنى c (حيث c منحنى بسيط) وكان المتجه \vec{A} متجه تفاضلي متصل فان :

$$\oint_c \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \iint_S (\nabla \wedge \vec{A}) \cdot \vec{n} dS$$

نظرية جرين في المستوى

إذا كانت R منطقة مغلقة في المستوى xy ومحددة بمنحنى بسيط مغلق c وكانت الدالتان متصلتين ولهما مشتقات متصلة فان :

$$\oint_c (Mdx + Ndy) = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

نظريات التكامل المرتبطة

(1)

$$\iiint_V (\Phi \nabla^2 \psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \psi) d\tau = \iint_S (\Phi \nabla \psi) \cdot d\vec{S}$$

تسمى نظرية جرين أو متطابقة جرين الأولى .

(2)

$$\iiint_V (\Phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \Phi) d\tau = \iint_S (\Phi \nabla \psi - \psi \nabla \Phi) \cdot d\vec{S}$$

تسمى متطابقة جرين الثانية أو نظرية جرين المتماثلة .

(3)

$$\iiint_V (\nabla \wedge \vec{A}) d\tau = \iint_S (\vec{n} \wedge \vec{A}) dS = \iint_S d\vec{S} \wedge \vec{A}$$

(4)

$$\oint_c \Phi d\vec{r} = \iint_S (\vec{n} \wedge \nabla \Phi) dS = \iint_S d\vec{S} \wedge \nabla \Phi$$

(5)

نفرض أن ψ تمثل اما دالة اتجاهية أو دالة قياسية تبعا للرمز * الذى يبين ضرب قياسي أو ضرب اتجاهى أو ضرب عادى اذن :

$$\iiint_V (\nabla * \psi) d\tau = \iint_S (\vec{n} * \psi) dS = \iint_S d\vec{S} * \psi$$

$$\oint_c d\vec{r} * \psi = \iint_S (\vec{n} \wedge \nabla) * \psi dS = \iint_S (d\vec{S} \wedge \nabla) * \psi$$

واضح أن نظرية جاوس للانسحاب ونظرية ستوكس والنتيجتين (4), (3) هي حالات خاصة من هذه النظرية .

الاحداثيات

تحويل الاحداثيات

نفرض أنه يمكن وضع الاحداثيات الكارتيزية لنقطة مادية (x, y, z) في الصورة :

$$x = x(u_1, u_2, u_3)$$

$$y = y(u_1, u_2, u_3)$$

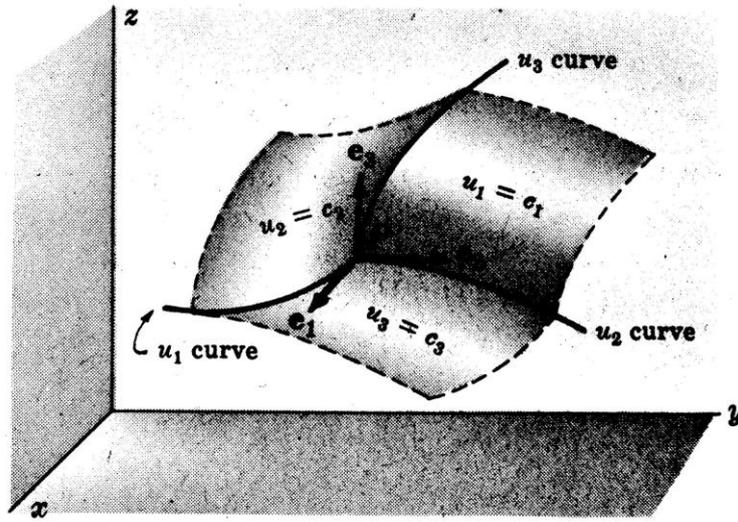
$$z = z(u_1, u_2, u_3) \quad (1)$$

بحل هذه المعادلات أي إيجاد u_3, u_2, u_1 بدلالة z, y, x فانه يمكن الحصول على :

$$u_1 = u_1(x, y, z)$$

$$u_2 = u_2(x, y, z) \quad (2)$$

$$u_3 = u_3(x, y, z)$$



شكل 1- 5

واضح أنه أمكن تعيين النقطة p بواسطة الاحداثيات المتعامدة (x, y, z) أو بواسطة الاحداثيات (u_1, u_2, u_3) والتي تسمى بالاحداثيات المنحنية. مجموعة المعادلات (1), (2) تعرف باحداثيات التحويل.

الاحداثيات المنحنية المتعامدة

السطوح: $u_1 = c_1, u_2 = c_2, u_3 = c_3$ (حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت) تسمى احداثيات السطوح وكل زوج من هذه السطوح تتقاطع في منحنيات تسمى احداثى المنحنيات أو الخطوط كما هو مبين بالشكل السابق. اذا تقاطعت المنحنيات (احداثيات السطوح) في زوايا قائمة تسمى الاحداثيات عندئذ بالاحداثيات المنحنية المتعامدة. الاحداثيات (u_1, u_2, u_3) في هذه الحالة تشابه محاور الاحداثيات (x, y, z) في نظام الاحداثيات المتعامدة.

متجهات الوحدة

نفرض أن متجه موضع النقطة p هو $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. واضح أنه يمكن وضع \vec{r} في الصورة $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$. متجه المماس للمنحنى u_1 عند p (التي لها u_2, u_3 ثوابت)

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = h_1 \vec{e}_1 \text{ . أي أن } \vec{e}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} / \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \right| \text{ : اذن وحدة المتجه في اتجاه هذا المماس هو}$$

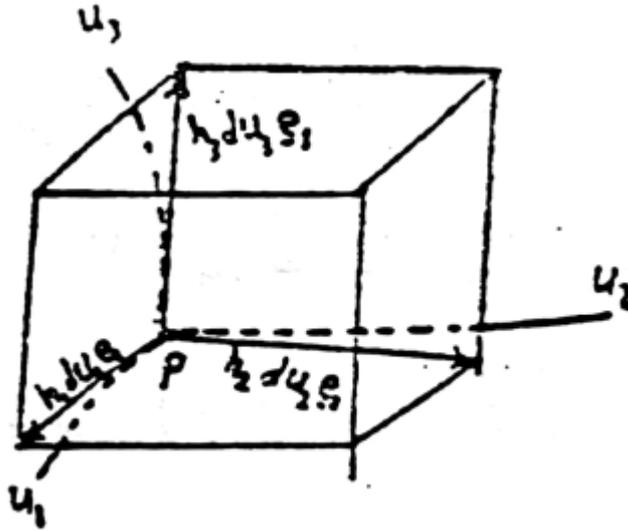
حيث h_1 هو مقدار متجه المماس . بالمثل اذا كانت \vec{e}_3, \vec{e}_2 هي متجهات الوحدة الأساسية

للمنحنيات u_3, u_2 عند النقطة p على الترتيب فان : $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} = h_2 \vec{e}_2$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} = h_3 \vec{e}_3$ حيث

. $h_3 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right|$, $h_2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right|$. متجهات الوحدة $\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1$ في اتجاه تزايد u_3, u_2, u_1 على الترتيب .

طول القوس وعنصر الحجم

نفرض أن $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$ هو متجه موضع النقطة p واضح من الشكل أن :



شكل 1-6

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3 \\ &= h_1 du_1 \vec{e}_1 + h_2 du_2 \vec{e}_2 + h_3 du_3 \vec{e}_3 \end{aligned}$$

ويكون كذلك :

$$(ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = h_1^2 (du_1)^2 + h_2^2 (du_2)^2 + h_3^2 (du_3)^2$$

حيث أخذنا في الاعتبار أنه بالنسبة للاحداثيات المنحنية المتعامدة يكون :

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0 \quad \text{و} \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1$$

واضح من الشكل السابق أن عنصر الحجم في الاحداثيات المنحنية المتعامدة يمكن كتابته بالصورة :

$$\begin{aligned} d\tau &= (h_1 du_1 \vec{e}_1) \cdot [(h_2 du_2 \vec{e}_2) \wedge (h_3 du_3 \vec{e}_3)] \\ &= h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \end{aligned}$$

وذلك لأن : $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3) = 1$.

التدرج والتباعد والدوران ولاپلسيان في الاحداثيات المنحنية

نفرض أن $\Phi = \Phi(u_1, u_2, u_3)$ دالة قياسية والمتجه $\vec{A} = \vec{A}(u_1, u_2, u_3)$ حيث $\vec{A} = \vec{A}(u_1, u_2, u_3)$ وحيث u_1, u_2, u_3 هي احداثيات منحنية متعامدة . في هذه الاحداثيات المنحنية يمكن الحصول على الصيغ الآتية :

$$\nabla \Phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \vec{e}_3 \quad (أ)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \quad (ب)$$

$$\nabla \wedge \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \quad (ج)$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \right) \right] \quad (د)$$

حالات خاصة

الاحداثيات الاسطوانية

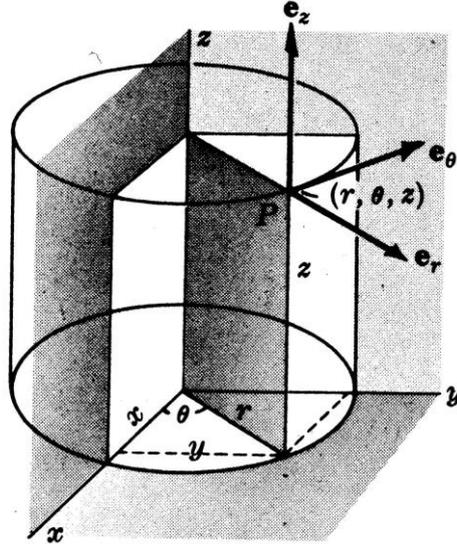
في الاحداثيات الاسطوانية (ρ, ϕ, z) يكون :

$$x = \rho \cos \phi \quad , \quad y = \rho \sin \phi \quad , \quad z = z$$

$$u_1 = \rho \quad , \quad u_2 = \phi \quad , \quad u_3 = z$$

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho \quad , \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_\phi \quad , \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_z$$

$$h_1 = h_\rho = 1 \quad , \quad h_2 = h_\phi = \rho \quad , \quad h_3 = h_z = 1$$



شكل 7-1

العلاقات (أ) - (د) السابقة تأخذ في حالة الاحداثيات الاسطوانية على الترتيب الصور الآتية

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho A_z) \right]$$

$$\nabla \wedge \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

الاحداثيات الكرية

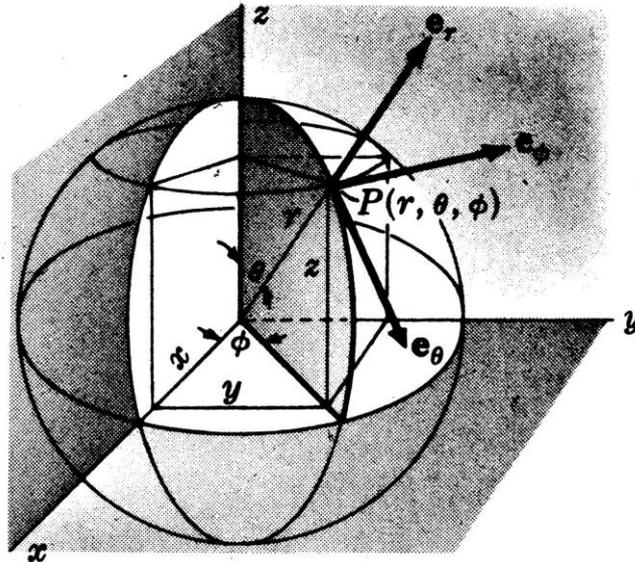
في الاحداثيات الكرية (r, θ, ϕ) تكون :

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

$$u_1 = r, \quad u_2 = \theta, \quad u_3 = \phi$$

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_r, \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_\theta, \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_\phi$$

$$h_1 = h_r = 1, \quad h_2 = h_\theta = r, \quad h_3 = h_\phi = r \sin \theta$$



شكل 8-1

وعليه فان العلاقات (أ) _ (د) في الاحداثيات الكرية تأخذ على الترتيب الصور :

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\wedge\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta\vec{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

الباب الثاني

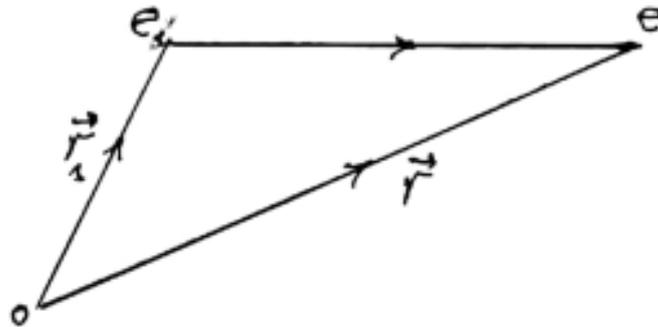
الكهرباء الساكنة

إن الوثائق التي ترجع إلى ما قبل 600 سنة قبل الميلاد تدل على توفر معلومات معرفية بالكهربية الساكنة وكلمة إستاتيكية مشتقة من الكلمة الإغريقية لمادة الكهر ب . وقد كان الإغريق يقضون الساعات الطويلة بذلك قطعة من القماش بمادة الكهر ب ويلاحظون كيف أن هذه المادة تقوم بعدئذ بجذب القطع الصغيرة إلا أن إهتمام الإغريق كان مركّزاً على المنطق والفلسفة وليس على العلم التجريبي . ولهذا إنقضت فترة طويلة قبل أن يصبح في الإمكان إثبات أن ظاهرة الجذب هذه ليست سحراً .



1- قانون كولوم

أول من أجرى تجارب عملية هو الدكتور كليرت طيبب ملكة إنجلترا حيث أعلن في عام 1600 أن هذه الظاهرة لا تقتصر على الكهر ب فقد بل تتعداها إلى الزجاج والخشب والكبريت ومواد أخرى . وبعد ذلك بقليل أجرى مهندس الجيش الفرنسي كولوم عدداً من التجارب المتقدمة بإستعمال ميزان إلتوائى خاص حقيقى بغرض معرفة مقدار قوة الجذب بين جسمين يحمل كلاً منهما شحنة كهربية إستاتيكية . إن نتائج كولوم تعرف الآن بإسم قانون كولوم وتحمل شبةً كبيراً بقانون الجذب العام لينيوتن والذي أُكتشف قبل ذلك بمائة عام . إن قانون كولوم ينص على أن القوة بين جسمين مشحونين ومفصولين بمسافة كبيرة بالنسبة لحجميهما تتناسب طردياً مع حاصل ضرب الشحنتين وعكسياً مع مربع المسافة بينهما . وهذه القوة تعتبر قوة تنافر للشحنات التي لها نفس الإشارة وقوة تجاذب للشحنات مختلفة الإشارة . ويأخذ قانون كولوم الصورة الرياضية الأتية :



شكل 2- 1

$$\vec{F} = \frac{e e_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) . \quad (1)$$

حيث \vec{F} هي القوة المؤثرة على الشحنة e الناتجة عن وجود الشحنة e_i ، \vec{r}_i هو متجه موضع e_i بالنسبة لنقطة الأصل O . فى الصيغة (1) إختارنا ثابت التناسب يساوى الوحدة . إذا كان هناك n من الشحنات e_1, e_2, \dots, e_n فإن القوة المؤثرة على الشحنة e تصبح على الصورة :

$$\vec{F} = e \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) . \quad (2)$$

ويمكن تعميم الصيغتين (1)،(2) فى حالة التوزيع المتصل(المنتظم) من الشحنات والذى يميزه بدالتين قياسيتين فى الموضع هما :

أ - الكثافة الحجمية للشحنة وهى الشحنة لوحدة الحجم يرمز لها بالرمز $\rho (r')$.

ب - الكثافة السطحية للشحنة وهى الشحنة لوحدة المساحات ويرمز لها بالرمز $\sigma (r')$. وفى هذه الحالة يمكن وضع القوة المؤثرة على الشحنة e الناشئة عن الجسم المشحون فى الصورة :

$$\vec{F} = e \iiint_V \frac{\rho (r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') d\tau + e \iint_S \frac{\sigma (r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dS \quad (3)$$

حيث V هو حجم الجسم ، $d\tau$ عنصر الحجم ، S هو سطح الجسم ، dS عنصر السطح . والصورة الرياضية العامة لقانون كولوم للقوة على شحنة e الناشئة عن توزيع مركز للشحنات بالإضافة للتوزيعين السابقين هى :

$$\vec{F} = e \iiint_V \frac{\rho (r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') d\tau + e \iint_S \frac{\sigma (r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dS +$$

$$e \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) . \quad (4)$$

2 - المجال الكهربى

هو مفهوم رياضى نستخدمه لتمييز ظاهرة الكهربائية ، وهو دالة إتجاهية فى الموضع ، وتُعرف شدة المجال الكهربى عند نقطة بأنه القوة المؤثرة على وحدة الشحنات الموجبة إذا وضعت عند هذه النقطة . والصورة الرياضية العامة لشدة المجال الكهربى هى :

$$\begin{aligned} \vec{E} = & \iiint_V \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') d\tau + \\ & \iint_S \frac{\sigma(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dS + \\ & \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) . \end{aligned} \quad (5)$$

بتكوين حاصل الضرب الإتجاهى للمؤثر ∇ والمتجه \vec{E} (أى دوران المتجه \vec{E}) المعطى بالمعادلة (5) نجد أن :

$$\nabla \wedge \vec{E} = \vec{0} . \quad (6)$$

باستخدام نظرية ستوكس لتحويل التكامل السطحى إلى تكامل خطى أى أن :

$$\iint_S (\nabla \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} .$$

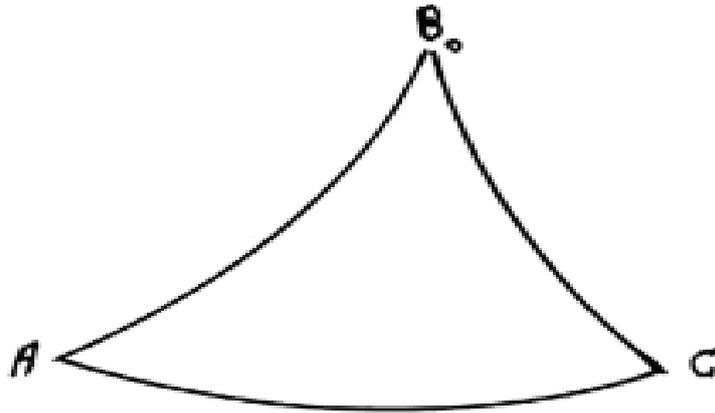
حيث S سطح محدد بواسطة المنحنى المغلق C ، عنصر متجه الطول من المنحنى C . ثم بالتعويض فى المعادلة (6) نجد أن :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 . \quad (7)$$

أى أن المتجه \vec{E} (شدة المجال الكهربى) يمثل مجال محافظ (أى قوة محافظة) .

3- الجهد الكهربى

يكون أحيانا من الصعب إيجاد شدة المجال الكهربى \vec{E} باستخدام قانون كولوم (وفى كثير من الحالات معقد جدا) ويرجع السبب في ذلك الى أن متجه شدة المجال الكهربى من نوع المجالات الاتجاهية الناشئة من توزيعات للشحنات ، ومن الضرورى في أغلب الحالات اجراء ثلاثة تكاملات (واحدة لكل مركبة من مركبات المجال الكهربى) . كما أن تحليل المجال لمركباته يزيد من صعوبة عملية التكامل في أغلب الحالات . لذلك فمن المرغوب فيه إيجاد دالة قياسية وبعملية واحدة للتكامل يمكن الحصول منها على المجال الكهربى . تعرف هذه الدالة القياسية بدالة الجهد وهى دالة في الموضع ، وحيث أن المجال الكهربى قوة محافظة فان الشغل المبذول بواسطة المجال لنقل وحدة الشحنات الموجبة من موضع A الى موضع B_0 لا يتوقف على المسار ، وانما يتوقف فقط على هذين الموضعين . فاذا كانت B_0 نقطة ثابتة معينة متفق عليها يسمى عندئذ الشغل المبذول بواسطة المجال الكهربى لنقل وحدة الشحنات الموجبة من الموضع A الى الموضع القياسى B_0 (يؤخذ هذا الموضع القياسى في مالا نهاية) بطاقة جهد الشحنة الموجبة التي مقدارها الوحدة عندما توضع عند A . أو باختصار جهد المجال عند A . ويرمز له بالرمز Φ_A ، وحيث أن الشغل لا يتوقف على المسار بين النقطتين فتكون الدالة القياسية في الموضع دالة وحيدة القيمة عند أي نقطة في الفضاء . فاذا رمزنا للشغل بالرمز W فان :



شكل 2- 2

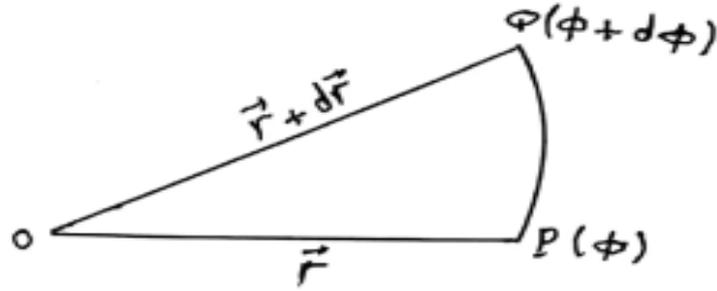
$$\Phi_A = W_{AB_0} , \Phi_C = W_{CB_0}$$

وعليه فان :

$$W_{AC} = W_{AB_0} + W_{B_0C} = W_{AB_0} - W_{CB_0}$$

$$= \Phi_A - \Phi_C = -(\Phi_C - \Phi_A) \quad (8)$$

وهذا يعنى أن الشغل المبذول بواسطة المجال لنقل وحدة الشحنات الموجبة يساوى التغير في دالة الجهد بين الموضعين مضروباً في إشارة سالبة . والآن نفرض ان الشغل لنقل وحدة الشحنات الموجبة من النقطة $P(\vec{r})$ حيث دالة الجهد عندها ϕ والنقطة $Q(\vec{r} + d\vec{r})$ ودالة الجهد عندها $\Phi + d\Phi$ هو dW حيث :



شكل 2-3

$$dW = -[\Phi + d\Phi - \Phi] = -d\Phi$$

وهذا الشغل يمكن وضعه بالصورة :

$$dW = \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = -d\Phi = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right)$$

$$= -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$= -(\nabla \Phi) \cdot d\vec{r} \quad (9)$$

$$\vec{E} = -\nabla \Phi = \text{grad } \Phi \quad (10)$$

وهذه العلاقة تأخذ في الاحداثيات الكارتيزية والاسطوانية والكرية على الترتيب الصور :

$$(E_x, E_y, E_z) = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$

$$(E_\rho, E_\phi, E_z) = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$

$$(E_r, E_\theta, E_\phi) = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)$$

يلاحظ أن العلاقة (10) تحقق : $\nabla \wedge \vec{E} = \vec{0}$. كما يلاحظ مما سبق أنه إذا كانت هناك شحنة e موضوعة في مجال كهربى فإن القوة المؤثرة على هذه الشحنة تصبح $e\vec{E}$ وطاقة جهد الشحنة هي $e\Phi$.

مثال : أوجد مجال وجهد شحنة موضوعة عند نقطة الأصل .

الحل : نفرض أن \vec{r} موضع النقطة P بالنسبة للشحنة فيكون المجال عند هذه النقطة هو :

$$\vec{E} = \frac{e}{r^3} \vec{r}$$

أما دالة الجهد فتعطى بالصورة :

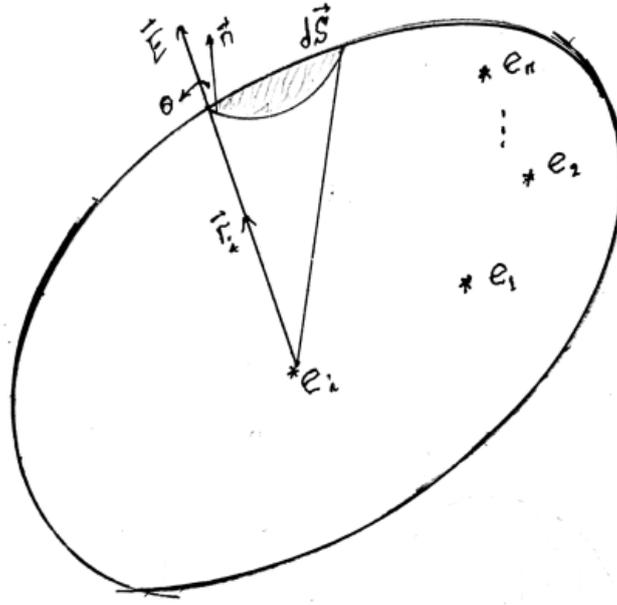
$$\Phi = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_P^\infty \frac{e}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{e}{r^2} dr = \frac{e}{r}$$

نظرية جاوس للفيض

إذا كانت N الفيض الكهربى الخارج من السطح المغلق S للمجال الكهربى \vec{E} فإن هذا الفيض يعطى بالصيغة :

$$N = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi Q$$

حيث Q هي الشحنة الكلية داخل السطح .



شكل 2-4

البرهان : نفرض أن شدة المجال الناشئ عن الشحنة e_i عند النقطة $P(\vec{r}_i)$ كما هو موضح بالشكل . التكامل السطحي السابق يمكن وضعه بالصورة :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \left(\sum_{i=1}^n \frac{e_i}{r_i^3} \vec{r}_i \right) \cdot d\vec{S}$$

$$= \sum_{i=1}^n e_i \oiint_S \frac{\vec{r}_i \cdot d\vec{S}}{r_i^3} = \sum_{i=1}^n e_i \oiint_S d\omega_i = \sum_{i=1}^n e_i \omega_i$$

حيث ω_i هي الزاوية المجسمة عند الشحنة e_i . وتكون : $\omega_i = 0$ أو $\omega_i = 4\pi$ عندما تكون الشحنة خارج أو داخل السطح على الترتيب . وعليه فان التكامل السطحي السابق يصبح :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi Q \quad (11)$$

إذا كانت هناك شحنات e'_i موزعة على السطح S بالإضافة للتوزيع السابق . ففي هذه الحالة تكون الزاوية المجسمة ω'_i المناظرة للشحنة السطحية e'_i . وعليه فان الفيض الكلي الناتج من الشحنات السطحية والتوزيع الداخلي للشحنات بالصيغة :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi Q + 2\pi Q'$$

حيث Q' هي الشحنة الكلية الموجودة على السطح S . أما في حالة التوزيع المنتظم للشحنة ، وبفرض أن الكثافة الحجمية للشحنة داخل السطح هي ρ فيكون الفيض بالصورة :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \iiint_V \rho d\tau \quad (12)$$

حيث V هو الحجم المحاط بالسطح S ، $d\tau$ عنصر الحجم . اذا كان هناك توزيع سطحي منتظم بكثافة سطحية σ بالإضافة للتوزيع الحجمي المنتظم السابق فان الفيض يأخذ الصيغة :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \iiint_V \rho d\tau + 2\pi \oiint_S \sigma dS$$

باستخدام العلاقة التكاملية

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau$$

وبالتعويض في المعادلة (12) نجد أن :

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (13)$$

وتعرف هذه المعادلة بالصيغة التفاضلية لقانون جاوس . اذا كانت $\rho = 0$ فان :

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (14)$$

أي أنه عند النقط التي ليس بها شحنات يتلاشى تباعد المجال الالكتروستاتيكي .

معادلة بواسون

بوضع $\vec{E} = -\nabla\Phi$ في (13) نحصل على :

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho \quad (15)$$

وهذه تسمى معادلة بواسون ، وهي معادلة أساسية في علم الكهربية .

معادلة لابلاس

بوضع $\rho = 0$ في المعادلة (15) نحصل على :

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (16)$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة لابلاس وهي احدى المعادلات الهامة في فروع الفيزياء النظرية.

خطوط القوى وأنابيب القوى

خط القوة هو المنحنى الذى يكون المماس له عند أي نقطة عليه ينطبق مع اتجاه المجال الكهربى عند هذه النقطة . بفرض أن $d\vec{\ell}$ هو عنصر الطول الاتجاهى من المنحنى ℓ فيكون :

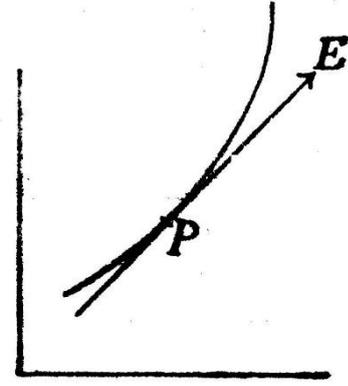
$$d\vec{\ell} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$$

$$d\vec{\ell} = \lambda\vec{E}$$

حيث \vec{i} ، \vec{j} ، \vec{k} متجهات

الوحدة الأساسية ، ويكون :



شكل 2-5

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} = \lambda$$

عامة عند كل نقطة في الفضاء يمر خط قوة واحد من خطوط القوى ، ولكن عندما يكون : $\vec{E} = \vec{0}$ فان اتجاه خط القوة عند هذه النقطة يكون غير محدد ، ومثل هذه النقطة تسمى نقطة التعادل . حزمة خطوط القوى التي تمر بمنحنى مغلق تسمى أنبوبة القوى . الفيض خلال أي مقطع من أنبوبة القوى يسمى شدة الانبوبة . أنبوبة الوحدة هي تلك الأنبوبة التي شدتها الوحدة .

ملاحظات :

(أ) خط تساوى الجهد يقطع خط القوة على التعامد لأن المجال الكهربى \vec{E} يكون عموديا على خط تساوى الجهد .

(ب) اذا شجن جسم موصل بشحنة فان هذه الشحنة تستقر فقط وتتوزع على سطح الموصل أي لن توجد شحنات داخل هذا الموصل .

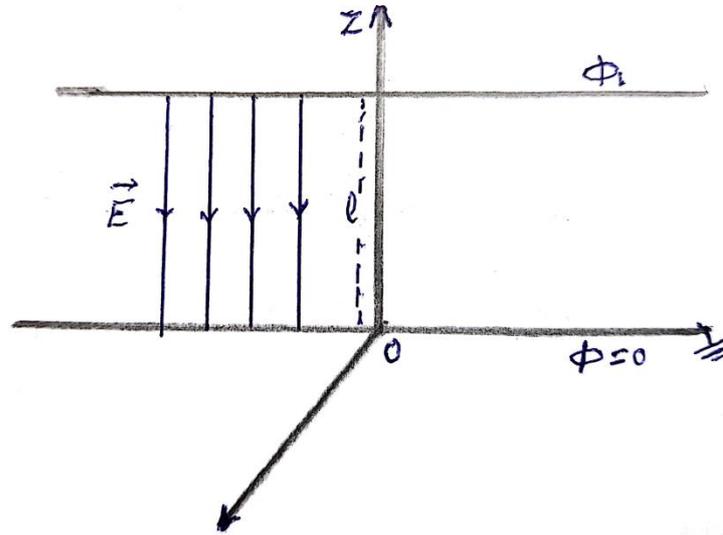
(ج) سطح الموصل هو سطح تساوى الجهد .



أمثلة محلولة

مثال (1) : استنتج الجهد الكهربى وشدة المجال الكهربى لمكثف يتكون من صفيحتين مستويتين موصلتين ولانهائيتين في الطول . احدهما موصلة بالأرض بينما الجهد على الصفيحة الأخرى عند أي نقطة عليها يساوى Φ_1 والمسافة بين الصفيحتين يساوى l .

الحل : باختيار مجموعة المحاور الكارتيزية بحيث يكون المحور z عموديا على مستوى كل صفيحة . كما بالشكل .



شكل 2-6

واضح من التماثل أن الجهد الكهربى (والمجال الكهربى) دالة في المتغير z أي أن $\Phi = \Phi(z)$ وتصبح معادلة لابلاس بالصورة :

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} = 0$$

ثم بالتكامل نجد أن :

$$\Phi = Az + B$$

باستخدام الشرطين : $\Phi = 0$ عندما $z = 0$ ، $\Phi = \Phi_1$ عندما $z = l$ نجد أن : $A = \frac{\Phi_1}{l}$ ،

وبذلك فإن دالة الجهد الكهربى تأخذ الصورة :

$$\Phi = \frac{\Phi_1}{l} z$$

وشدة المجال الكهربى تعطى بالعلاقة :

$$\vec{E} = -\frac{d\Phi}{dz} \vec{k} = -\frac{\Phi_1}{l} \vec{k}$$

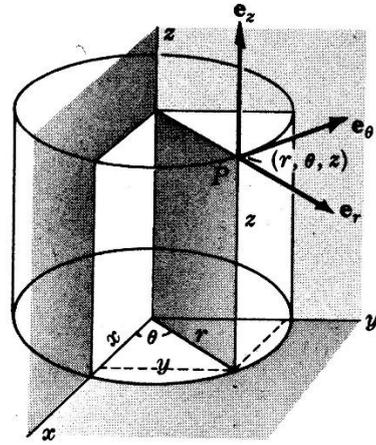
حيث \vec{k} متجه الوحدة في اتجاه المحور z . واضح أن المجال الكهربى مجال منتظم وفى اتجاه الصفيحة الموصلة بالأرض .

مثال (2): أوجد الجهد الكهربى والمجال الكهربى لمكثف يتكون من اسطوانتين لا نهائيتين في الطول ومشتركتين في المحور ، ونصف قطر الأسطوانة الداخلية a ودالة الجهد عند أي نقطة عليها Φ_a بينما الأسطوانة الخارجية موصلة بالأرض ونصف قطرها b .

الحل :

باختيار مجموعة المحاور الأسطوانية

($\rho \cdot \phi \cdot z$) بحيث أن المحور z ينطبق على المحور المشترك لاسطوانتى المكثف من الواضح أن جميع النقط الواقعة على أسطوانة نصف قطرها ρ حيث $a < \rho < b$ متماثلة لكل من دالة الجهد الكهربى



شكل 2-7

والمجال الكهربى . أي أن دالة الجهد $\Phi = \Phi(\rho)$. معادلة لابلاس في الاحداثيات الاسطوانية :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

والتي تصبح في هذه الحالة بالصورة :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\Phi}{d\rho} \right) = 0$$

ثم بالتكامل مرتين متتاليتين نجد أن :

$$\Phi = A \ln \rho + B$$

باستخدام الشرطين : $\Phi = \Phi_a$ عندما $\rho = a$ ، $\Phi = 0$ عندما $\rho = b$ نجد أن :

$$A = -\frac{\Phi_a}{\ln b - \ln a} \quad , \quad B = \frac{\Phi_a \ln b}{\ln b - \ln a}$$

وشدة المجال للمكثف يعطى بالصورة :

$$\vec{E} = -\frac{d\Phi}{d\rho} \vec{e}_\rho = \frac{\Phi_a}{\rho(\ln b - \ln a)} \vec{e}_\rho$$

حيث \vec{e}_ρ متجه الوحدة في اتجاه ρ . واضح أن المجال يتناسب عكسيا مع ρ , واتجاهه من الأسطوانة الصغرى الى الأسطوانة الكبرى .

مثال (3): أوجد الجهد الكهربى والمجال الكهربى لمكثف يتكون من قشرتين رقيقتين كرويتين ومشتركتين في المركز . نصف قطر الكرة الداخلية a ودالة الجهد عليها Φ_a . أما الكرة الخارجية فموصلة بالأرض ونصف قطرها b .

باختيار مجموعة المحاور الكرية

الحل :

(r, θ, ϕ) . من الواضح أنه لجميع النقط الواقعة على سطح كرة نصف قطرها $a < r < b$ فان دالة الجهد والمجال الكرى متماثلان لهذه النقط أي

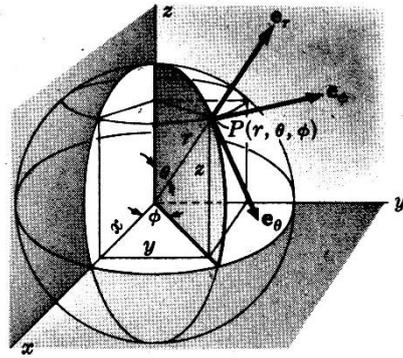


Fig. 22-13. Spherical coordinates.

شكل 2-8

أن :

أي أن : $\Phi = \Phi(r)$ ، ومعادلة لابلاس في الاحداثيات الكرية هي :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0$$

والتي تصبح في هذه الحالة بالصيغة :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0$$

بالتكامل نجد أن :

$$\Phi = -\frac{A}{r} + B$$

باستخدام الشرطين : $\Phi = \Phi_a$ عندما $r = a$ ، $\Phi = 0$ عندما $r = b$. نجد أن :

$$A = -\frac{ab\Phi_a}{b-a} \quad ، \quad B = -\frac{a\Phi_a}{b-a}$$

وبذلك فإن :

$$\Phi = \frac{a\Phi_a}{b-a} \left(\frac{b}{r} - 1 \right)$$

$$\vec{E} = -\frac{d\Phi}{dr} \vec{e}_r = \frac{ab\Phi_a}{r^2(b-a)} \vec{e}_r$$

أي أن المجال الكهربى يتناسب عكسيا مع r^2 واتجاهه من القشرة الصغرى الى القشرة الكبرى.

الظاهرة الكهربائية لتركيبات من الشحنة

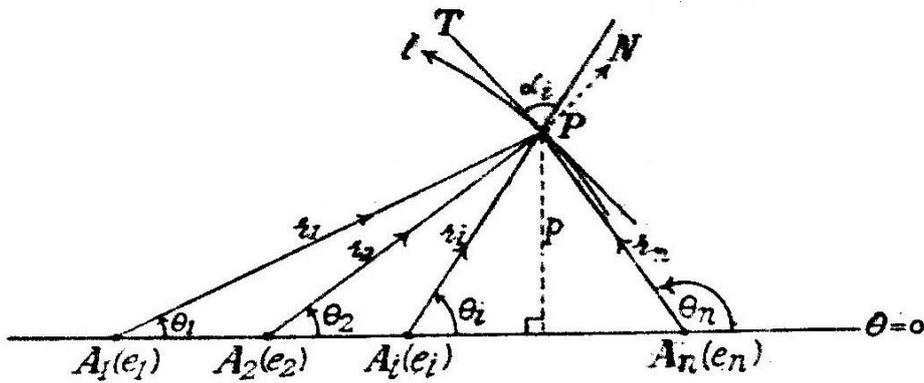


1- مجموعة من الشحنات على خط مستقيم

نفرض أن مجموعة من الشحنات المركزة على الخط المستقيم $\theta = 0$ عند النقط e_1, e_2, \dots, e_n

. نفرض أن النقطة P على خط القوة ℓ كما هو موضح بالشكل . المجال A_1, A_2, \dots, A_n

الكهربى الكلى \vec{E} يجب أن يكون في اتجاه المماس لخط القوة المار بالنقطة P . أي أن المركبة العمودية للمجال على المماس يجب أن تتلاشى . أي أن :



شكل 2- 9

$$\frac{e_1}{r_1^2} \sin \alpha_1 + \frac{e_2}{r_2^2} \sin \alpha_2 + \dots + \frac{e_n}{r_n^2} \sin \alpha_n = 0 \quad (1)$$

حيث α_i هي الزاوية بين \vec{E}_i والمماس عند النقطة P لخط القوة ℓ , وحيث أن :

$$\sin \alpha_i = r_i \frac{d\theta_i}{d\ell} \quad (1) \text{ فإن المعادلة (1) تأخذ الصورة :}$$

$$\frac{e_1}{r_1} d\theta_1 + \frac{e_2}{r_2} d\theta_2 + \dots + \frac{e_n}{r_n} d\theta_n = 0 \quad (2)$$

باستخدام العلاقات :

$$r_1 \sin \theta_1 = r_2 \sin \theta_2 = \dots = r_n \sin \theta_n = m \quad (3)$$

والتعويض في المعادلة (2) نحصل على :

$$e_1 \sin \theta_1 d\theta_1 + e_2 \sin \theta_2 d\theta_2 + \dots + e_n \sin \theta_n d\theta_n = 0 \quad (4)$$

وبتكامل هذه المعادلة نجد أن :

$$e_1 \cos \theta_1 + e_2 \cos \theta_2 + \dots + e_n \cos \theta_n = \text{const.} \quad (5)$$

لجميع قيم الثابت نحصل على معادلات خطوط القوى لتوزيع الشحنات السابق . واضح أن هذه الخطوط تقع على سطح محوره ℓ . أما خطوط تساوى الجهد التي تقطع خطوط القوى على التعامد فتتعين من :

$$\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \dots + \frac{e_n}{r_n} = \text{const.}$$

أي أن :

$$e_1 \sin \theta_1 + e_2 \sin \theta_2 + \dots + e_n \sin \theta_n = \text{const.} \quad (6)$$

لجميع قيم الثابت نحصل على معادلات خطوط تساوى الجهد .

2- المجال الكهربى والجهد الكهربى لشحنات خطية

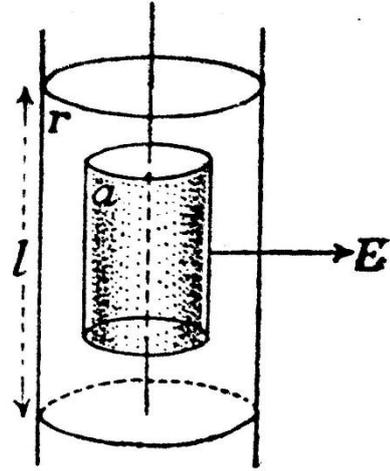
إذا وزعت شحنات خطية توزيعا متصلا على خط مستقيم لا نهائى الطول يسمى هذا التوزيع بالتوزيع الخطى للشحنة , وتسمى الشحنة e على وحدة الطول الكثافة الطولية . وإذا كانت e لها نفس القيمة عند كل نقطة يسمى التوزيع بالتوزيع المنتظم للشحنة . لإيجاد شدة المجال الكهربى والجهد الكهربى الناتج عن سلك

مشحون بشحنة منتظمة نفرض أن السلك عبارة عن أسطوانة نصف قطرها a صغير جدا وعليها شحنة خطية منتظمة . والآن نتخيل أسطوانة نصف قطرها r متحدة المحور مع الأسطوانة السابقة . الفيض الكلى الخارج من الأسطوانة الخارجية لطول مقداره L هو :
 $2\pi rLE$ حيث E مقدار شدة المجال . وحيث أن الشحنة الداخلية الكلية هي (eL) فإنه بتطبيق نظرية جاوس للفيض نجد أن :

$$2\pi rLE = 4\pi(eL)$$

$$E = \frac{2e}{r} \quad (7)$$

$$E = -\frac{d\Phi}{dr} = \frac{2e}{r}$$



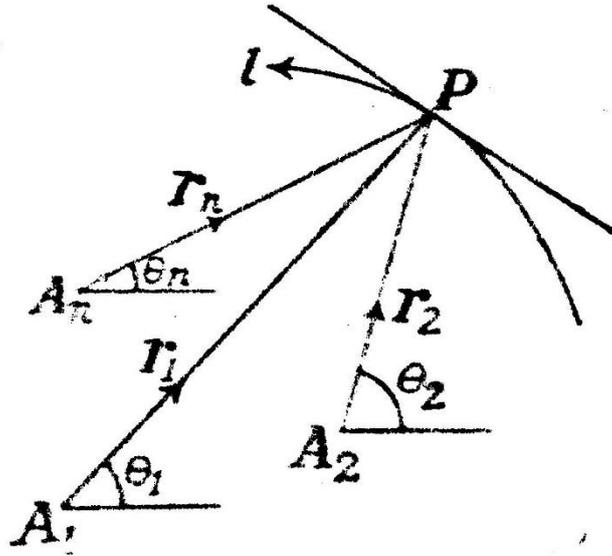
شكل 2- 10

ثم بالتكامل نجد أن :

$$\Phi = const. - 2e \ln r \quad (8)$$

العلاقتان (7) ، (8) لا يعتمدا على نصف قطر الأسطوانة الداخلية ، وبفرض أن $a \rightarrow 0$ أي أن الأسطوانة الداخلية آلت الى سلك مشحون بشحنة خطية منتظمة فتكون (7) ، (8) هما المعادلتان لشدة المجال الكهربى والجهد الكهربى للسلك المشحون .

لايجاد خطوط القوى لمجموعة من الأسلاك المتوازية اللانهائية الطول والمشحونة بشحنات منتظمة : نفرض أن الكثافة الطولية للشحنة لهذه الأسلاك هي e_1, e_2, \dots, e_n ونفرض أن الأسلاك تقطع على التعمد مستوى في النقط A_1, A_2, \dots, A_n على الترتيب، ونفرض أن P نقطة على خط القوة l في هذا المستوى، ونفرض أن : A_1P, A_2P, \dots, A_nP تصنع الزوايا $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ مع خط ثابت في المستوى $\theta = 0$ كما هو موضح بالشكل .



شكل 2- 11

وحيث أن مركبة المجال الكهربى الكلى العمودية على المماس عند النقطة P للمنحنى l يجب أن تتلاشى فإن :

$$\frac{2e_1}{r_1} \sin \alpha_1 + \frac{2e_2}{r_2} \sin \alpha_2 + \dots + \frac{2e_n}{r_n} \sin \alpha_n = 0 \quad (9)$$

حيث α_i هي الزاوية بين A_iP والمماس للمنحنى وحيث أن : $\sin \alpha_i = r_i \frac{d\theta_i}{d\ell}$ فإن :

$$e_1 d\theta_1 + e_2 d\theta_2 + \dots + e_n d\theta_n = 0$$

ثم بالتكامل نجد أن :

$$e_1 \theta_1 + e_2 \theta_2 + \dots + e_n \theta_n = const. \quad (10)$$

لقيم الثابت المختلفة تعطى المعادلة (10) معادلة خطوط القوى في المستوى لمجموعة الأسلاك

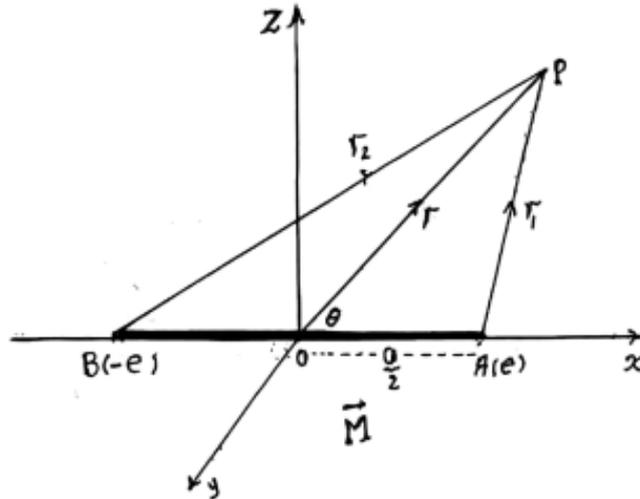
المتوازية المشحونة بشحنات خطية منتظمة . أما خطوط تساوى الجهد في هذا المستوى فتنتعین من المعادلة :

$$e_1 \ln r_1 + e_2 \ln r_2 + \dots + e_n \ln r_n = \text{const.} \quad (11)$$

3-- المزدوج الكهربى

هو عبارة عن شحنتين كهربيتين كبيرتين جدا $(+e), (-e)$ تبعدان عن بعضهما بمسافة صغيرة جدا δl . ويتميز المزدوج الكهربى بمتجه يسمى متجه العزم أو الشدة الكهربائية ، وهذا المتجه يعطى بالصيغة الرياضية :

$$\vec{M} = \lim_{\delta l \rightarrow \infty} (e \delta \vec{l})$$



شكل 2- 12

المتجه الواصل من الشحنة السالبة الى الشحنة الموجبة يسمى محور المزدوج وهو نفس اتجاه متجه العزم الكهربى . الجهد الكهربى للمزدوج عند النقطة $P(\vec{r})$ يمكن وضعه بالصورة :

$$\Phi(P) = \frac{(+e)}{r_1} + \frac{(-e)}{r_2} = e \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (12)$$

باختيار مجموعة المحاور الكارتيزية (x, y, z) بحيث ينطبق محور المزدوج على المحور x كما هو موضح بالشكل . فانه يمكن وضع :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, M = ae$$

حيث a طول المزدوج الكهربى (a صغيرة جدا) . وكذلك :

$$r_1 = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2} = r \left(1 - \frac{ax}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

$$r_2 = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2} = r \left(1 + \frac{ax}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

ثم بالتعويض في (12) نجد أن فان الجهد الكهربى للمزدوج يصبح بالصورة :

$$\begin{aligned} \Phi(P) &= \frac{e}{r} \left[\left(1 - \frac{ax}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{ax}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right] = \frac{ae}{r^2} \frac{x}{r} \\ &= \frac{M \cos \theta}{r^2} = \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3} \end{aligned} \quad (15)$$

حيث θ هي الزاوية بين المتجهين : \vec{r}, \vec{M} . المجال الكهربى عند النقطة P يكون :

$$\vec{E} = -\nabla\Phi = -\nabla\left(\frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3}\right) = -\frac{\vec{M}}{r^3} + 3\frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} \quad (16)$$

والمركبتان القطبيتان للمجال الكهربى يتعينا من العلاقتين :

$$E_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{2M \cos \theta}{r^3} \quad (17)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial \theta} = \frac{M \sin \theta}{r^3} \quad (18)$$

والمعادلة التفاضلية القطبية لخطوط القوى تعطى بالصورة :

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta}$$

ثم بالتعويض والتكامل نحصل على معادلة خطوط القوى بالصيغة :

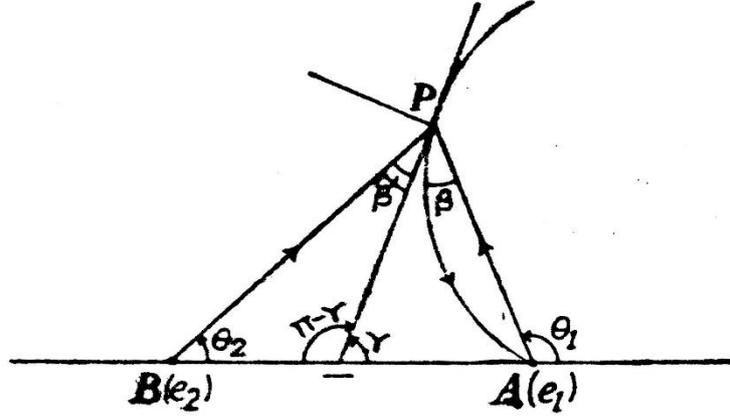
$$r = c \sin^2 \theta \quad (19)$$

مثال (4): ادرس خطوط القوى للشحنتين الموجبتين e_1, e_2 عند النقطتين A, B . ثم بين أن المماس عند اللانهاية (خط التقارب) لخط القوة الذى يبدأ من e_1 بزاوية ميل α مع BA يصنع مع BA الزاوية :



$$2 \sin n^{-1} \left(\sqrt{\frac{e_1}{e_1 + e_2}} \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

الحل :



شكل 2-13

نفرض أن نقطة P على خط القوة الذي يبدأ من A وينتهي عند ما لانهاية . ونفرض أن الخط BA هو الخط : $\theta = 0$. معادلة خطوط القوى هي :

$$e_1 \cos \theta_1 + e_2 \cos \theta_2 = C \quad (1)$$

لايجاد C لخط القوة الذي يبدأ من A بزواوية ميل α وينتهي عند ما لانهاية نستخدم الشرط عندما $P \rightarrow A$ فان : $\theta_2 = 0, \theta_1 = \alpha$ ثم بالتعويض في المعادلة السابقة نجد أن :

$C = e_1 \cos \alpha + e_2$ وتصبح معادلة خط القوة المذكور بالصورة :

$$e_1 \cos \theta_1 + e_2 \cos \theta_2 = e_1 \cos \alpha + e_2 \quad (2)$$

لايجاد ميل المماس عند اللانهاية (وهي زاوية ميل خط التقارب) نستخدم الشرط : عندما $P \rightarrow \infty$ فان $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ ثم بالتعويض في المعادلة (2) نجد أن :

$$(e_1 + e_2) \cos \theta = e_1 \cos \alpha + e_2$$

$$(e_1 + e_2) \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = e_1 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) + e_2$$

$$(e_1 + e_2) \sin^2 \frac{\theta}{2} = e_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{e_1}{e_1 + e_2}} \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\theta = 2 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{e_1}{e_1 + e_2}} \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

تمارين



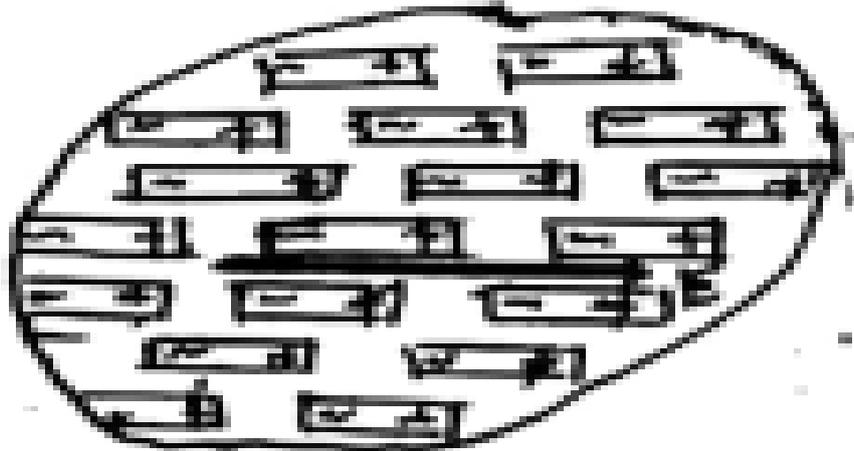
- 1- أوجد خطوط القوى لسلكين متوازيين ولانهائيين في الطول , والكثافة الطولية للشحنة لهما e , $-e$. أوجد كذلك منحنيات تساوى الجهد .
- 2- ثلاثة أسلاك لانهائية الطول , والكثافة الطولية للشحنة هي : 1 , -2 , 1 وحدة شحنة . تقطع هذه الأسلاك على التعامد مستوى في ثلاث نقاط وعلى استقامة واحدة هي : A , B , C على الترتيب حيث $AB = BC = a$. أثبت أن معادلة خطوط القوى هي : $r^2 = a^2 \cos(2\theta + \alpha) \sec \alpha$ حيث B عند نقطة الأصل , BC خط قياس الزاوية α , α بارامتر .
- 3- ثلاثة أسلاك رفيعة متوازية ومتماثلة في الشحنة الخطية المنتظمة , وتقطع على التعامد مستوى في ثلاث نقاط A , B , C والتي تمثل رؤوس مثلث متساوى الأضلاع وطول ضلعه $\sqrt{3}c$. بين أن المعادلة القطبية لمنحنيات تساوى الجهد المرسومة في المستوى تكون على الصورة : $r^6 + c^6 - 2r^3c^3 \cos \theta = cons.$ بفرض أن مركز المثلث هو نقطة الأصل .
- 4 - أربعة أسلاك متوازية ولانهائية الطول , وضعت بحيث تقطع على التعامد مستوى في أربع نقاط هي رؤوس المربع $ABCD$ والكثافة الطولية للشحنة المنتظمة هي : e عند A , C , $-e$ عند B , D . إذا كان طول ضلع المربع هو $2a$ فأثبت أن الجهد Φ عند النقطة P الواقعة داخل المربع يأخذ الصورة : $\Phi = 2er^2a^{-2} \cos 2\theta$ حيث (r, θ) الاحداثيات القطبية للنقطة بالنسبة لمركز المربع .

المواد العازلة القابلة للاستقطاب

وجد بالتجربة أن بعض المواد العازلة مثل الميكا والزجاج اذا أثر عليها كهربيا فانها تستقطب بمعنى أن كل عنصر صغير منها يتحول الى مزدوج كهربى , وهذه الظاهرة يمكن تفسيرها بطريقتين كما يلى :



(أ) تحتوى ذرات أي مادة على شحنات موجبة وأخرى سالبة . فاذا كانت المادة موصلة فان الشحنات السالبة تكون حرة الحركة في المادة الواقعة تحت تأثير مجال كهربى فينتج سريان للتيار الكهربى . أما اذا كانت المادة عازلة وقابلة للاستقطاب فان هذا السريان لا يحدث ولكن المجال الكهربى المؤثر يزيح الشحنات في الذرة إزاحة طفيفة بحيث تزااح الشحنة الموجبة في اتجاه المجال المؤثر والشحنة السالبة في الاتجاه المضاد , وبذلك تظهر المزدوجات الكهربائية في المادة المستقطبة في اتجاه المجال الكهربى .



شكل 2- 14

(ب) يمكن تخيل أن جزيئات المادة العازلة مكونة أساسا من مزدوجات كهربية موزعة في المادة توزيعا عشوائيا بحيث يتكون كل عنصر صغير منها على عدد كبير من هذه المزدوجات ولا يبدو هذا العنصر مستقطبا لأن هذه المزدوجات تلاشى بعضها بعضا , ولكن اذا وضعت هذه المادة في مجال كهربى فانه يحدث انتظام في اتجاهات هذه المزدوجات وتأخذ اتجاه المجال , وتصبح المادة مستقطبة .

متجه الاستقطاب

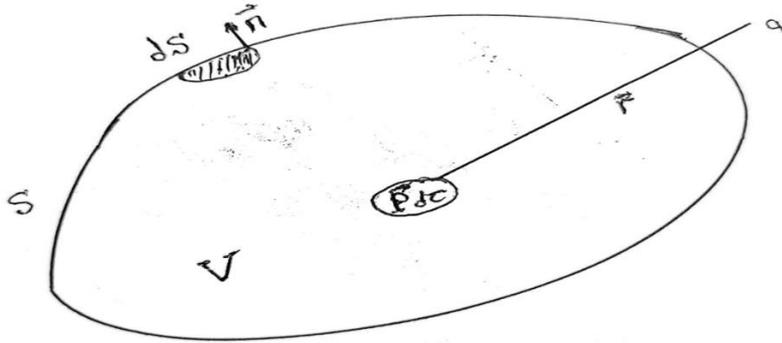
ندخل الآن مفهوما يميز شدة الاستقطاب للمادة وهو متجه الاستقطاب \vec{P} والذي يعرف بأنه متجه عزم المزدوج الكهربى المكافئ لوحدة الحجم للمادة المستقطبة . فاذا كان لدينا حجم من المادة $d\tau$ فإنه يكافئ مزدوجا كهربيا عزمه : $\vec{P}d\tau$. لكثير من المواد تكون هناك علاقة خطية بين المتجه \vec{P} ومتجه شدة المجال الكهربى \vec{E} عند أي نقطة داخل المادة المستقطبة . أي أن :

$$\vec{P} = k\vec{E}$$

حيث k ثابت يتوقف على المادة ويسمى معامل القابلية للاستقطاب . اذا كان متجه الاستقطاب ثابت في المقدار والاتجاه عند جميع نقط المادة المستقطبة قيل أن الاستقطاب منتظم .

قاعدة بواسون للتوزيع المكافئ

نفرض أن لدينا جسما مستقطبا حجمه V ومحاط بالسطح S وأن $d\tau$ عنصر حجم من هذا الجسم . هذا العنصر يكافئ مزدوجا كهربيا متجه عزمه $\vec{P}d\tau$. فاذا كانت q نقطة خارج الجسم المستقطب فإن الظاهرة الكهربائية الناشئة عن الجسم عند النقطة q تتميز بمتجه المجال \vec{E} ودالة الجهد Φ , ويقدران بتكامل تأثيرات المزدوجات الكهربائية المكونة للجسم .



شكل 2-15

لحساب دالة الجهد عند النقطة q نفرض أن الجهد الناتج عن المزدوج الكهربى $\vec{P}d\tau$ هو :

$$d\Phi = \vec{P}d\tau \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right)$$

ويكون الجهد الناتج عن الجسم عند النقطة q هو :

$$\Phi_q = \iiint_V \vec{P} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\tau = \iiint_V \left[\nabla \cdot \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) - \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{r} \right] d\tau$$

ويكون:

$$\Phi_q = \iiint_V \left(\frac{-\nabla \cdot \vec{P}}{r} \right) d\tau + \oiint_S \frac{\vec{P} \cdot d\vec{S}}{r} = \iiint_V \left(\frac{-\nabla \cdot \vec{P}}{r} \right) d\tau + \oiint_S \frac{P_n}{r} dS$$

وهذه النتيجة تبين أن الجسم المستقطب يكافئ تماما النموذج الكهربى التالى :

(1) مجموعة من الشحنات الموزعة على حجم الجسم وكثافتها الحجمية للشحنة هي :

$$\rho = -\nabla \cdot \vec{P}$$

(2) مجموعة من الشحنات الموزعة على سطح الجسم وكثافتها السطحية للشحنة هي :

$$\sigma = P_n \text{ وهى المركبة العمودي لمتجه الاستقطاب على سطح الجسم المستقطب .}$$

التوزيعان السابقان يعرفان بتوزيع بواسون المكافئ للجسم المستقطب .

واضح أن الشحنة الكلية الناتجة عن التوزيعين السابقين هي :

$$Q = \iiint_V (-\nabla \cdot \vec{P}) d\tau + \oiint_S P_n dS = -\iiint_V (\nabla \cdot \vec{P}) d\tau + \iiint_V (\nabla \cdot \vec{P}) d\tau = 0$$

كما هو متوقع لأنه يجب أن تكون الشحنة الكلية داخل الجسم المستقطب وعلى سطحه تساوى الصفر . شدة المجال الكهربى عند النقطة q الواقعة خارج الجسم المستقطب هو القوة المؤثرة على وحدة الشحنات الموجبة عند هذه النقطة ويحقق المعادلات :

$$\vec{E} = -\nabla \Phi, \nabla \wedge \vec{E} = \vec{0}, \oiint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

الظاهرة الكهربائية داخل الجسم المستقطب تتميز أيضا بمتجه المجال الكهربى \vec{E} ويحقق المعادلات السابقة .

متجه الازاحة الكهربائية

عند أي نقطة داخل الجسم المستقطب يتحقق توزيع بواسون المكافئ . وهذا يعنى أن المجال \vec{E} عند أي نقطة داخل الجسم المستقطب يرتبط بكثافة الشحنة الحجمية عند هذه النقطة (أي بالكثافة $-\nabla \cdot \vec{P}$) بواسطة نظرية جاوس للفيض . أي أن :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \iiint_V (-\nabla \cdot \vec{P}) d\tau$$

حيث S هو سطح الجسم المستقطب المحيط بالحجم V . وباستخدام العلاقة التكاملية :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau$$

وبالتعويض في نظرية جاوس للفيض نحصل على :

$$\nabla \cdot (\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = 0$$

والآن يمكن تعريف متجه جديد لتمييز الظاهرة الكهربائية داخل المادة المستقطبة والذي يمكن وضعه بالصورة :

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

ويسمى متجه الازاحة الكهربائية ويحقق العلاقة الرياضية : $\nabla \cdot \vec{D} = 0$, وهذا صحيح في حالة الجسم المستقطب فقط وغير مشحون بشحنات إضافية من الخارج . وحيث أن $\vec{P} = k\vec{E}$ وبالتعويض فان متجه الازاحة الكهربائية يأخذ الصيغة :

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi k\vec{E} = K\vec{E} , K = 1 + 4\pi k$$

ويسمى K ثابت الاستقطاب . واضح كذلك أن :

$$\nabla \cdot (K\vec{E}) = 0 , \nabla \cdot (K\nabla\Phi) = 0$$

فاذا كانت K لا تعتمد على الموضع فان دالة الجهد تحقق معادلة لابلاس : $\nabla^2\Phi = 0$. أما اذا كان الجسم المستقطب مشحونا بشحنات حرة إضافية وكثافتها الحجمية ρ وبتطبيق نظرية جاوس للفيض نجد أن :

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi(\rho - \nabla \cdot \vec{P}) \Rightarrow \nabla \cdot (\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = 4\pi\rho$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \Rightarrow \nabla \cdot (K\nabla\Phi) = -4\pi\rho$$

وإذا كانت K لا تعتمد على الموضع فان دالة الجهد تحقق : $\nabla^2\Phi = -\frac{4\pi}{K}\rho$ وهي معادلة بواسون . في حالة الفضاء $\rho = 0$, وتصبح $K = 1$ ويكون $\vec{D} = \vec{E}$,

نتائج

1) اذا تخيلنا سطحاً مغلقاً مرسوم داخل المادة فانه ينتج مما سبق أن :
أ- اذا كانت المادة غير مشحونة بشحنات حرة فان :

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{D}) d\tau = 0$$

ب- اذا كانت المادة مشحونة بشحنات حرة كثافتها الحجمية ρ فان :

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{D}) d\tau = 4\pi \iiint_V \rho d\tau$$

(2) إذا كان الجسم منتظم الاستقطاب أي أن $\vec{P} = \text{cons}$. فإن المجال الكهربى داخل المادة يكون منتظما أي أن $\vec{E} = \text{cons}$. ويحقق $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ إذا لم تكن هناك شحنات حرة أي $\rho = 0$ ويؤول توزيع بواسون المكافئ الى توزيع سطحى فقط أي :

$$\Phi = \iint_S \frac{P_n}{r} dS$$

(3) إذا كانت النقطة التي نحسب عندها الجهد Φ خارج الجسم غير المشحون بشحنات حرة (أي أن $\rho = 0$) بعيدة جدا عن الجسم فإن : $\nabla \left(\frac{1}{r} \right)$ تظل ثابتة أثناء عملية التكامل أي أن :

$$\Phi = \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \iiint_V \vec{P} d\tau = \vec{m} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right)$$

أي أنه في هذه الحالة نعتبر الجسم المستقطب كما لو كان مزدوجا كهربيا ومتجه عزمه يتعين

$$\text{بالصيغة : } \vec{m} = \iiint_V \vec{P} d\tau$$

(4) إذا وضعنا شحنة $+e$ في مادة ثابت استقطابها K وأحطنا هذه الشحنة بكرة نصف قطرها r ومركزها الشحنة $+e$ وكانت \vec{D} , \vec{E} , \vec{P} عند أي نقطة على بعد r من الشحنة فإن :
شكل

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi e \Rightarrow 4\pi r^2 D = 4\pi e \Rightarrow D = \frac{e}{r^2} \Rightarrow \vec{D} = \frac{e}{r^3} \vec{r}$$

والمجال الكهربى يتعين من : $\vec{E} = \frac{e}{Kr^3} \vec{r}$ ومتجه شدة الاستقطاب يأخذ الصورة :

$$\vec{P} = \frac{\vec{D} - \vec{E}}{4\pi} = \frac{(K-1)e}{4\pi r^3} \vec{r}$$

هذا يعنى أنه إذا كانت هناك شحنة e' على بعد r من الشحنة $+e$ فإن القوة المؤثرة على

الشحنة e' تكون بالصورة : $\vec{F} = \frac{ee'}{Kr^3} \vec{r}$ وإذا لم تكن هناك مادة فإن $\vec{F} = \frac{ee'}{r^3} \vec{r}$, أي أن وجود

الشحنة $+e$ داخل المادة انقص مقدارها من $+e$ الى $\frac{+e}{K}$ لأن $K \geq 1$ ويمكن فهم ذلك من

توزيع بواسون كالاتى : إذا اعتبرنا الشحنة $+e$ على هيئة كرة نصف قطرها b المادة بعد أن تستقطب تكافئ توزيع حجمى كثافته تتعين من :

$$-\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{(K-1)e}{4\pi K} \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0$$

وتوزيع سطحى كثافته السطحية : $-P_{a=b}$ لأن \vec{P} في اتجاه \vec{r} أي عمودى على سطح الكرة ,

وهذا يعنى ان استقطاب المادة يضيف الى الشحنة $+e$ شحنة أخرى مقدارها

$$q = \lim_{b \rightarrow 0} 4\pi b^2 P_{r=b} = \lim_{b \rightarrow 0} -4\pi b^2 \frac{(K-1)e}{4\pi K b^2} = -\frac{(K-1)e}{K}$$

الإشارة السالبة لأن اتجاه \vec{P} هو اتجاه \vec{r} والاتجاه العمودي على السطح (سطح الكرة) نحو الخارج في اتجاه $-\vec{r}$ وبذلك تكون الشحنة الكلية :

$$+e - \frac{(K-1)e}{K} = \frac{e}{K}$$

الشروط السطحية

الشروط السطحية الواجب توفرها عند السطح الفاصل بين مادتين مستقطبتين يمكن الحصول عليها بفرض أن S هو السطح الفاصل بين مادتين (1) ، (2) وثابتي استقطابهما K_1 ، K_2 على الترتيب . ونتخيل أسطوانة عمودية على السطح S ومساحة قاعدتها A وأن \vec{n} متجه وحدة عمودي على السطح ، وإذا كانت هناك شحنات حرة على السطح الفاصل S وكثافتها السطحية σ وبفرض أن ارتفاع الأسطوانة صغير جدا بحيث يمكن إهمال فيض \vec{D} على السطح الدوراني نحصل على :

$$D_{n2}A - D_{n1}A = 4\pi\sigma A \Rightarrow D_{n2} - D_{n1} = 4\pi\sigma$$

وهذا يعنى أن المركبة العمودية لمتجه الازاحة الكهربائية عند السطح الفاصل المشحون تكون غير متصلة ، وحيث أن

$$\vec{D} = K\vec{E} , E_n = \frac{\partial\Phi}{\partial n}$$

فنجد أن :

$$K_2 E_{n2} - K_1 E_{n1} = 4\pi\sigma \Rightarrow K_2 \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} - K_1 \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = -4\pi\sigma$$

وإذا كان السطح غير مشحون أي $\sigma = 0$ فإن :

$$D_{n2} - D_{n1} = 0 , K_2 E_{n2} - K_1 E_{n1} = 0 \Rightarrow K_2 \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = K_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}$$

أما بخصوص المركبة المماسية لمتجه المجال الكهربى في اتجاه السطح الفاصل فانها تكون متصلة ، أي أن $E_{t2} = E_{t1}$ ومنها نجد أن الجهد يكون دالة متصلة عند السطح أي $\Phi_2 = \Phi_1$ إذا فرضنا أن المادة (2) هي مادة موصلة فان $\vec{E}_2 = 0$ أي $\vec{E}_{t2} = 0$ ويكون $E_{t1} = 0$ أي أن المجال الكهربى في المادة (1) يكون فقط عموديا على السطح S أي أن :

$$E_1 = -\frac{4\pi\sigma}{K_1}, \quad \sigma = +\frac{K_1}{4\pi} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial n}, \quad \Phi_1 = \Phi_2$$

تطبيق



وضعت كرة نصف قطرها a وثابت استقطابها K في مادة ثابت استقطابها K_1 وممتدة الى اللانهاية, وأثر على المادتين مجال كهربى منتظم شدته \vec{E}_0 . احسب دالة الجهد عند أي نقطة .

الحل : يوجد حيزان (1), (2) داخل الكرة (2) : $0 < r < a$ وخارج الكرة $a < r < \infty$.
 بأخذ المحور z في اتجاه المجال المنتظم \vec{E}_0 خلال مركز الكرة O فيكون هذا المحور هو محور تماثل, وإذا اخترنا الاحداثيات القطبية الكرية للتعبير عن دالة الجهد والتي تعتمد عندئذ على r, θ أي أن $\Phi = \Phi(r, \theta)$ لذلك سنبحث عن دالتي الجهد : $\Phi_1(r, \theta), \Phi_2(r, \theta)$ في المنطقتين (1), (2) وكل منهما تحققا الشروط :

$$(أ) \quad \nabla^2\Phi_1 = 0, \quad \nabla^2\Phi_2 = 0 \quad \text{عندما نكتب معادلة لابلاس في الاحداثيات القطبية الكرية .}$$

(ب) Φ_1 تكون وحيدة القيمة ومحدودة القيمة عندما $r = \infty$, Φ_2 تكون وحيدة القيمة ومحدودة القيمة عندما $r = 0$.

(ج) $\Phi_1 = \Phi_2$ عندما $r = a$ لجميع قيم الزاوية θ .

$$(د) \quad K_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial r} = K_2 \frac{\partial\Phi_2}{\partial r} \quad \text{عندما } r = a \text{ لجميع قيم الزاوية } \theta.$$

لذلك نركب الدالتين Φ_1, Φ_2 من الدوال :

$$\frac{C}{r}, \quad \frac{A \cos\theta}{r^2}, \quad Br \cos\theta, \quad -E_0 r \cos\theta$$

داخل الكرة $0 < r < a$ نختار $\Phi_2 = Br \cos\theta$

خارج الكرة $a < r < \infty$ يجب أن يؤول الجهد الى ذلك المجال المنتظم عند $r = \infty$ كما ان المجال عند النقط البعيدة يكون قريبا من ذلك للمزدوج الكهربى . لذا نختار

$$\Phi_1 = -E_0 r \cos\theta + \frac{A \cos\theta}{r^2}$$

ثم بتطبيق الشرطين (ج), (د) نحصل على :

$$-E_0 a \cos\theta + \frac{A \cos\theta}{a^2} = Ba \cos\theta$$

$$K_1 \left[-E_0 \cos \theta - \frac{2A \cos \theta}{a^3} \right] = K_2 B \cos \theta$$

$$-E_0 + \frac{A}{a^3} = B, \quad -E_0 - \frac{2A}{a^3} = \frac{K_2}{K_1} B$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن :

$$A = \frac{K_2 - K_1}{K_2 + 2K_1} E_0 a^3, \quad B = \frac{-3K_1}{K_2 + 2K_1} E_0$$

وبذلك يكون :

$$\Phi_1 = -E_0 r \cos \theta + \frac{K_2 - K_1}{K_2 + 2K_1} \cdot \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta$$

$$\Phi_2 = \frac{-3K_1 E_0}{K_2 + 2K_1} \cdot r \cos \theta$$

نتيجة (1) : نستطيع أن نوجد توزيع من الشحنات في الفضاء والمكافئ للتركيبية السابقة ويعطى

نفس دالتي الجهد Φ_1, Φ_2 وذلك من

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + 0 = 4\pi\rho$$

$$(E_{n1} - E_{N2})_{r=a} = 4\pi\sigma$$

والدالتان Φ_1, Φ_2 تحققا معادلة لابلاس حيث $\rho = 0$. في الحيزين (1) , (2) نضع

$$K_1 = 1 \quad K_2 = K$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right)_{r=a} = -4\pi\sigma$$

$$-E_0 \cos \theta - 2 \frac{K-1}{K+2} \cdot E_0 \cos \theta + \frac{3}{K+2} \cdot E_0 \cos \theta = -4\pi\sigma$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{3(K-1)}{4\pi(K+2)} \cdot E_0 \cos \theta$$

وهذا يعنى أن توزيع من الشحنات بكثافة سطحية σ على سطح الكرة (نصف قطرها a) وثابت استقطابها K موضوعة في الفضاء يعطى نفس الظاهرة الكهربائية (مثل الكرة التي نصف قطرها a في مجال كهربى منتظم E_0).

نتيجة (2) : اذا كانت الكرة هي فجوة في المادة K_1 فان :

$$\Phi_2 = \frac{-3K_1}{1+2K_1} \cdot E_0 r \cos \theta$$

مثال (5) : احسب توزيع بواسون المكافئ في حالة كرة نصف قطرها a ومستقطبة بحيث كان متجه الاستقطاب يتعين من : $\vec{P} = \alpha \vec{r}$ حيث α ثابت , متجه موضع نقطة بالنسبة الى مركز الكرة

الحل :

الكثافة الحجمية للشحنة تعطى من : $\rho = -\nabla \cdot \vec{P} = -\alpha \nabla \cdot \vec{r} = -3\alpha$

والكثافة السطحية تتعين من : $\sigma = \vec{P} \cdot \vec{n} = \alpha \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \alpha r \Rightarrow \sigma = \alpha a$

لأن $r = a$ عند سطح الكرة . واضح أن الشحنة الكلية :

$$Q = \iiint_V (-3\alpha) d\tau + \iint_S (\alpha a) dS = (-3\alpha) \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right) + (\alpha a) (4\pi a^2) = 0$$

التيارات الكهربائية

عن توصيل موصلين دالتى الجهد عليهما Φ_1 , Φ_2 بواسطة سلك معدنى عندئذ يحدث سريان كهربى من الموصل ذي الجهد الأكبر للموصل الاخر حتى يتساوى الجهدان .

شدة التيار الكهربى

شدة التيار في موصل منتظم هو معدل تغير الشحنة Q أي أن : $I = \frac{dQ}{dt}$.



متجه كثافة التيار

معدل سريان التيار الكهربى عبر عنصر dS من سطح عند نقطة $p(\vec{r})$ هو : $\vec{j} \cdot d\vec{S}$ حيث $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$ هو متجه كثافة التيار .

معادلة الاتصال

معدل سريان الشحنة الكهربائية خارج سطح S المحيط بالحجم V هو : $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ ويساوى معدل النقص في الشحنة , وبفرض أن السطح ثابت فيكون :

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial T} \iiint_V \rho d\tau$$

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{j}) d\tau$$

نجد أن :

$$\iiint_V \left(\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة الاتصال . عندما $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ فان : $\nabla \cdot \vec{j} = 0$.

بوضع $\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ والتي تبين أن الشحنة المتباعدة في الثانية لكل وحدة حجوم تساوى معدل النقص في الشحنة بالنسبة للزمن لكل وحدة حجوم عند هذه النقطة .

تمارين



1 - شحنة $+e$ موضوعة أمام السطح المستوى لمادة ثابت استقطابها K ونصف لانهاية . أحسب القوة بين الشحنة والمادة .

2 - كرة نصف قطرها a منتظمة الاستقطاب وكان \vec{P} متجه الاستقطاب . أحسب المجال الكهربى الكلى عند المركز الناتج عن الجزء السطحى من توزيع بواسون المكافئ .

3 - قضيب رفيع مساحة مقطعه A منطبق على المحور x من نقطة الأصل الى $x = L$.
 فاذا علم أن الاستقطاب كان في اتجاه القضيب ويتعين من : $|\vec{P}| = ax^2 + b$. أحسب الكثافة
 الحجمية لشحنة الاستقطاب وكذلك الكثافة السطحية لها عند كل طرف .

4 - ثلاث قشرات كروية رقيقة متحدة المركز A , B , C أنصاف أقطارها
 a , b , c على الترتيب حيث $a < b < c$. ملئ الفضاء بين A , B بمادة ثابت
 استقطابها K , والفضاء بين B , C بمادة ثابت استقطابها K' . وصلت القشرتان
 A , C بالأرض وشحنت القشرة B بشحنة كلية Q . أثبت أن Q تنقسم على
 السطحين الداخلي والخارجي للقشرة B بالنسبة : $\frac{Ka(c-b)}{K'c(b-a)}$.

الباب الثالث

الظاهرة المغناطيسية

الظاهرة المغناطيسية في الفضاء تتحدد بوجود متجه \vec{H} يعرف بمتجه شدة المجال المغناطيسي ودالة جهد قياسية Ω . ويمكن معالجة الظاهرة المغناطيسية بنفس الطريقة التي عالجنا بها الظاهرة الكهربائية الاستاتيكية.

المجالات المغناطيسية تنشأ عادة من نوعين من الأجسام :

(أ) بواسطة شحنات كهربية متحركة أو تيارات كهربية .

(ب) بواسطة أجسام ممغنطة (مواد مغناطيسية) ويجب ملاحظة أن هناك فرق أساسي بين الظاهرة الكهربائية والظاهرة المغناطيسية حيث من الممكن ظهور شحنات كهربية بصورة منفردة (موجبة أو سالبة) أما في الظاهرة المغناطيسية فإن الأقطاب المغناطيسية تظهر في شكل أزواج متلازمة (أي قطب مغناطيسي موجب يلزمه قطب مغناطيسي سالب أو قطب شمالي يلزمه قطب جنوبي)

القانون العكسي لكولوم

لأي قطبين مغناطيسيين شدتهما p_1 , p_2 , وتفصلهما مسافة r ستظهر قوة بينهما تتناسب طرديا مع حاصل الضرب $p_1 p_2$ وتتناسب عكسيا مع مربع المسافة بين القطبين , أي أن :

$$\vec{F} \propto \frac{p_1 p_2}{r^3} \vec{r}$$

وثابت التناسب يتوقف على الوسط الموجود به هذين القطبين المغناطيسيين .

الجهد المغناطيسي لمغناطيس صغير

المغناطيس الصغير يسمى مزدوج مغناطيسي وهو يتكون من قطبين مغناطيسيين كبيرين تفصل بينهما مسافة صغيرة جدا . متجه العزم المغناطيسي للمزدوج يرمز له بالرمز \vec{M} ومقداره :

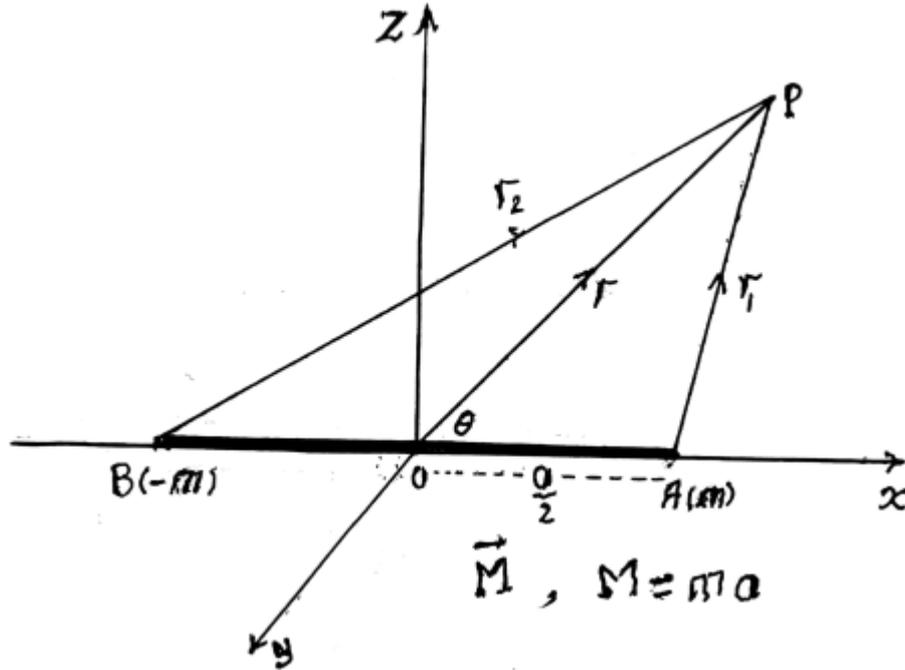
$$M = ma$$

حيث m شدة القطب , a طول المغناطيس الصغير (a صغيرة جدا) .

اتجاه متجه العزم في اتجاه محور المزدوج (الخط الواصل من القطب السالب للقطب الموجب)

الجهد المغناطيسي الناشئ عن المزدوج عند النقطة $p(r)$ يعطى بالصيغة :

$$\Omega(p) = \frac{m}{r_1} + \frac{-m}{r_2} = m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$



شكل 1-3

باختيار مجموعة المحاور الكارتيزية بحيث ينطبق المحور x على محور المغناطيس الصغير كما هو موضح بالشكل , وعليه يمكن وضع :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r_1 = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2} = r \left(1 - \frac{ax}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$r_2 = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2} = r \left(1 + \frac{ax}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

وبالتعويض فان دالة الجهد تصبح بالصورة :

$$\Omega(p) = \frac{m}{r} \left[\left(1 - \frac{ax}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{ax}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right] = \frac{ma}{r^2} \cdot \frac{x}{r}$$

وبفرض أن θ هي الزاوية بين المتجهين \vec{M} , \vec{r} فتكون : $\cos \theta = \frac{x}{r}$, وتصبح دالة الجهد بالصورة :

$$\Omega(p) = \frac{M \cos \theta}{r^2} = \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

المجال المغناطيسي لمغناطيس صغير

شدة المجال المغناطيسي للمغناطيس الصغير عند النقطة p تتعين من العلاقة الآتية :

$$\vec{H} = -\nabla \Omega(p) = -\nabla \left(\frac{M \cos \theta}{r^2} \right)$$

وبذلك فان مركبة المجال في اتجاه تزايد r تعطى بالشكل :

$$H_r = -\frac{\partial \Omega}{\partial r} = \frac{2M \cos \theta}{r^3}$$

أما مركبة المجال في اتجاه تزايد الزاوية θ فتعطى بالعلاقة :

$$H_\theta = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = \frac{H \sin \theta}{r^3}$$

يمكن وضع المجال المغناطيسي أيضا بالصيغة :

$$\begin{aligned} \vec{H} = -\nabla \Omega &= -\nabla \left(\frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} \nabla (\vec{M} \cdot \vec{r}) - (\vec{M} \cdot \vec{r}) \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \\ &= -\frac{\vec{M}}{r^3} + \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{r})}{r^3} \vec{r} \end{aligned}$$

وتكون :

$$H_M = -\frac{M}{r^3} , \quad H_r = \frac{3M \cos \theta}{r^3}$$

المواد القابلة للمغطة

عناصر هذه المواد عبارة عن مغناطيسات صغيرة . هذه المغناطيسات الصغيرة في حالة توزيع عشوائي . فاذا وضعت مادة قابلة للمغطة في مجال مغناطيسي فانه يحدث تعديل في المغناطيسات الصغيرة بحيث يصبح اتجاه متجه العزم المغناطيسي لكل مغناطيس صغير في اتجاه المجال المغناطيسي الموجودة به هذه المادة القابلة للمغطة وتصبح عندئذ المادة ممغطة . لدراسة مثل هذه المواد نستخدم متجه يسمى متجه شدة المغطة ويرمز له بالرمز \vec{I} ويعرف بأنه متجه العزم المغناطيسي لوحدة الحجم من المادة الممغطة . وهناك علاقة (مبرهنة عمليا لبعض المواد الممغطة) بين شدة المجال \vec{H} والمتجه \vec{I} للمادة الممغطة بالصيغة :

$$\vec{I} = k\vec{H}$$

حيث k ثابت ويسمى بمعامل قابلية المادة للمغطة . يرتبط مع المتجهين \vec{I} , \vec{H} متجه آخر \vec{B} ويسمى متجه الحث المغناطيسي بالعلاقة :

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{I} = \mu\vec{H}$$

حيث $\mu = 1 + 4\pi k$ ويسمى معامل النفاذية المغناطيسية . متجه الحث المغناطيسي يحقق :

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

الجهد الاتجاهي

من العلاقة $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ فانه يمكن وضع متجه الحث المغناطيسي على الصورة :

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$$

يسمى المتجه \vec{A} متجه الجهد الاتجاهي . اذا كان \vec{A}' جهد اتجاهي فان $\vec{A}' + \nabla\Psi$ يمثل أيضا جهد اتجاهي (حيث Ψ دالة قياسية) , ويعطى نفس متجه الحث المغناطيسي , وذلك لأنه اذا كان $\vec{A} = \vec{A}' + \nabla\Psi$ فان : $\nabla \wedge \vec{A} = \nabla \wedge \vec{A}'$, ولذلك فانه لتحديد المتجه \vec{A} الذي يتعين منه متجه الحث المغناطيسي تحديدا وحيدا فانه يلزم وضع شرط (قيد) على المتجه \vec{A} . من العلاقة $\vec{A} = \vec{A}' + \nabla\Psi$ نجد أن : $\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}' + \nabla^2\Psi$ سنختار الدالة القياسية Ψ بحيث تحقق الشرط : $\nabla^2\Psi = -\nabla \cdot \vec{A}'$ عندئذ فان متجه الحث المغناطيسي يعطى بالصورة :

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} \quad \text{والمتجه } \vec{A} \text{ يحقق الشرط : } \nabla \cdot \vec{A} = 0 .$$



أمثلة محلولة

مثال (1):

أثبت أن الجهد الاتجاهي لمغناطيس صغير عند نقطة هو: $\vec{A} = \frac{\vec{M} \wedge \vec{r}}{r^3}$. حيث \vec{M} متجه العزم المغناطيس للمغناطيس، \vec{r} متجه موضع النقطة بالنسبة للمغناطيس.

الحل:

نفرض أن محور المغناطيس الصغير ينطبق على المحور oz بحيث يكون متجه العزم للمغناطيس الصغير بالصورة $\vec{M} = (0, 0, M)$ ، ويصبح المتجه \vec{A} بالصورة:

$$\vec{A} = \frac{\vec{M} \wedge \vec{r}}{r^3} = \left(\frac{-My}{r^3}, \frac{Mx}{r^3}, 0 \right)$$

ومنه نجد أن:

$$\nabla \wedge \vec{A} = \left(\frac{3Mxz}{r^5}, \frac{3Myz}{r^5}, \frac{3Mz^2}{r^5} - \frac{M}{r^3} \right)$$

وحيث أن $\vec{M} \cdot \vec{r} = Mz$ فإنه يمكن وضع هذا المتجه بالشكل:

$$\nabla \wedge \vec{A} = \frac{3\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{M}}{r^3}$$

وهذا المتجه يمثل شدة المجال المغناطيسي للمغناطيس الصغير عند نقطة $p(r)$ ، والمتجه \vec{A} يحقق الشرط:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-My}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Mx}{r^3} \right) + 0 = 0$$

وعليه فإن المتجه \vec{A} يمثل الجهد الاتجاهي للمغناطيس الصغير.

مثال (2):

أثبت أن الجهد الاتجاهي لمجال مغناطيسي ثابت (حيث المجال المغناطيسي \vec{H} في اتجاه المحور oz) يمكن وضعه في الصورة: $\vec{A} = [0, -aHz, (1-a)Hy]$ حيث a ثابت.

الحل:

متجه الدوران للمتجه \vec{A} هو:

$$\nabla \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -aHz & (1-a)Hy \end{vmatrix} = (H, 0, 0)$$

والمتجه \vec{A} يحقق الشرط :

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 + \frac{\partial}{\partial y}(-aHz) + \frac{\partial}{\partial z}(1-a)Hy = 0$$

ومن ذلك نستنتج أن المتجه \vec{A} هو الجهد الاتجاهي للمجال المغناطيسي الثابت \vec{H} حيث

$$\vec{H} = \vec{B}$$

مثال (3) :

باستخدام الاحداثيات الاسطوانية أثبت أنه إذا كان المجال المغناطيسي \vec{H} في اتجاه المحور

$$\vec{A} = \left(0, \frac{1}{2}H\rho, 0\right) \text{ : فان الجهد الاتجاهي يأخذ الصورة :}$$

الحل :

متجه الدوران للمتجه المعطى \vec{A} في الاحداثيات الاسطوانية يكون بالصورة :

$$\nabla \wedge \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{1}{2}A\rho^2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, H)$$

المتجه \vec{A} يحقق الشرط :

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{2}H\rho \right) = 0$$

من ذلك ينتج أن المتجه \vec{A} يمثل الجهد الاتجاهي لمجال مغناطيسي ثابت في اتجاه المحور oz

$$\vec{B} = \vec{H} \text{ حيث}$$

مثال (4) :

أثبت أنه لمجال مغناطيسي \vec{H} يوازي محور الزاوية θ في الاحداثيات القطبية الكرية فان

$$\vec{A} = \left(0, 0, \frac{1}{2} Hr \sin \theta \right) .$$

الجهد الاتجاهي يمكن وضعه بالصورة :

الحل :

متجه الدوران للمتجه \vec{A} في الاحداثيات القطبية الكرية يأخذ الصورة :

$$\nabla \wedge \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} Hr^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix}$$

$$= H (\cos \theta, -\sin \theta, 0)$$

والمتجه \vec{A} يحقق الشرط :

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 + 0 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{2} Hr \sin \theta \right) = 0$$

وعليه فان المتجه $\nabla \wedge \vec{A}$ يمثل شدة المجال المغناطيسي \vec{H} , ومركبته الأولى في اتجاه تزايد r والمركبة الثانية في اتجاه تناقص الزاوية θ . أي أن المجال المغناطيسي في اتجاه المحور oz وهو محور الزاوية θ .

الجهد لقشرة مغناطيسية منتظمة

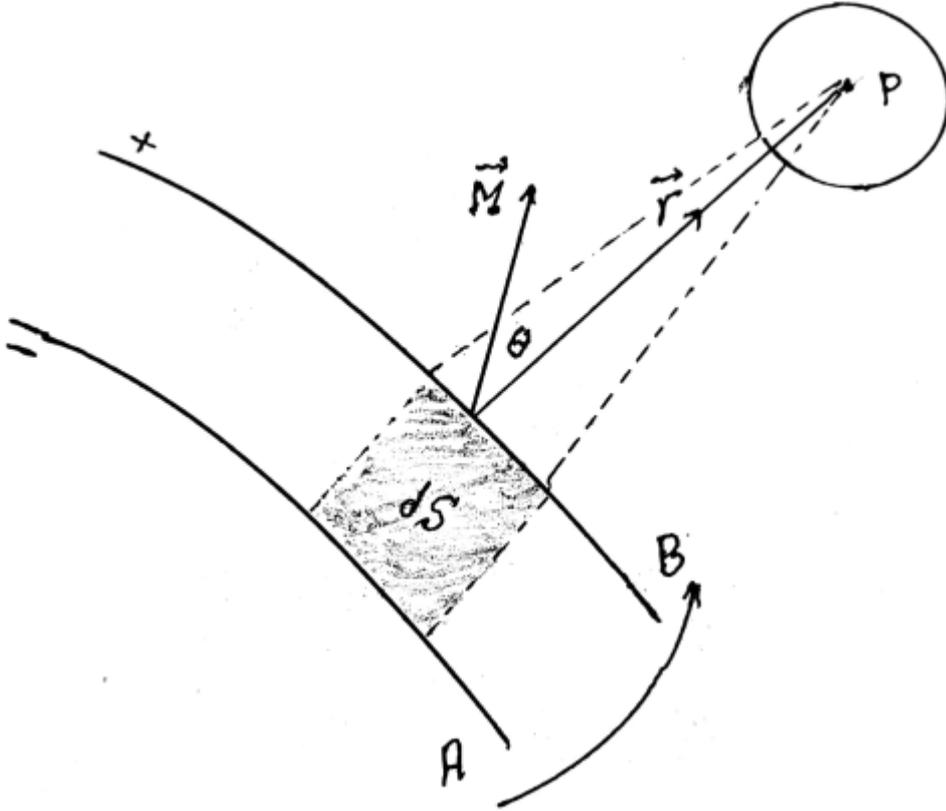
نعتبر قشرة ذات سمك صغير, ونفرض ان n هو عدد الأقطاب الموجبة المغناطيسية الصغيرة لوحدة السطح لهذه القشرة. ونفرض أن \vec{M} هو متجه العزم لكل مغناطيس صغير. نفرض أن المغناطيسات الصغيرة موزعة توزيعاً منتظماً بحيث تكون الأقطاب الموجبة منطبقة على أحد سطحي القشرة بينما الأقطاب السالبة منطبقة على السطح الآخر للقشرة. لايجاد الجهد المناطيسي الناتج عن القشرة عند النقطة p فاننا نختار العنصر dS من سطح القشرة

المغناطيسية. نفرض أن r هو موضع النقطة p بالنسبة للعنصر dS . الجهد المغناطيسي الناتج عن العنصر السطحي عند النقطة p (الموضوعة في جهة الأقطاب الموجبة) يكون بالصورة:

$$d\Omega(p) = \frac{MndS \cos \theta}{r^2}$$

نرسم مخروط قاعدته العنصر dS ورأسه النقطة p فيكون:

$$\frac{dS \cos \theta}{r^2} = d\omega$$



شكل 2-3

حيث $d\omega$ هي الزاوية المجسمة للمخروط الذي قاعدته dS . وعليه فان الجهد المغناطيسي الكلي الناشئ عن القشرة عند النقطة p يعطى بالعلاقة:

$$\Omega(p) = \Omega_+ = \iint_S d\Omega = Mn \iint_S d\omega = Mn\omega$$

حيث $d\omega$ هي الزاوية المجسمة التي تصنعها القشرة عند النقطة p . بوضع $Mn = \Phi$ نجد أن :

$$\Omega_+ = \Phi \omega$$

حيث Φ تمثل العزم المغناطيسي لوحدة السطح (لوحدة المساحة) أو الشدة المغناطيسية . عندما تكون النقطة p على الجانب الآخر (اى في جهة الأقطاب السالبة) فان :

$$\Omega_- = -\Phi \omega$$

الشغل اللازم لنقل وحدة الأقطاب الموجبة من النقطة (الواقعة على سطح الأقطاب السالبة)

الى النقطة p (الواقعة على سطح الأقطاب الموجبة) يعطى بالعلاقة :

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \mu(\Omega_B - \Omega_A) = \mu\Phi(\omega_B + \omega_A) \end{aligned}$$

$\vec{B} = \mu\vec{H}$ هو متجه الحث المغناطيسي , $d\vec{\ell}$ عنصر الازاحة , وتعتمد الزاويتان المجسمتان

على محيط القشرة المغناطيسية . عندما تكون القشرة المغناطيسية ذات سمك

صغير جدا فان النقطة A تنطبق تقريبا على النقطة B وفى هذه الحالة فان :

$$\omega_A + \omega_B = 2\pi \text{ ويصبح الشغل عندئذ بالصورة :}$$

$$W = 2\pi\mu\Phi$$

أمثلة محلولة



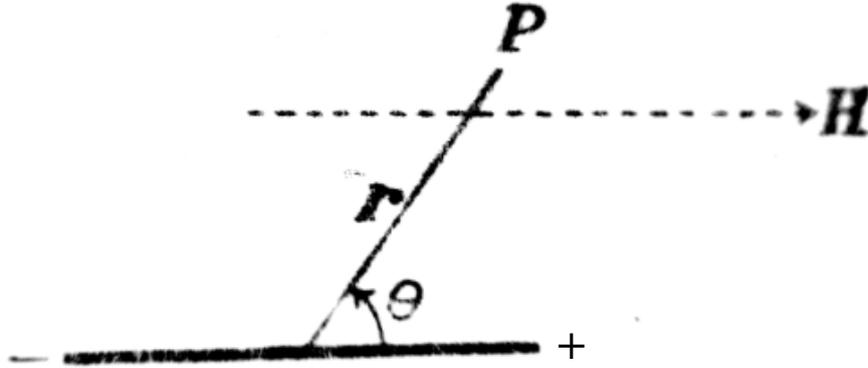
مثال (5) :

وضع مزدوج مغناطيسي عزمه \vec{M} في مجال مغناطيسي منتظم \vec{H} بحيث يكون محور المغناطيس يوازي المجال المغناطيسي . بين أن المجال المحصل بتلاشى على دائرة أو عند نقطتين . اوجد النسبة بين قطر الدائرة والمسافة بين النقطتين .

الحل :

محصلة المجال المغناطيسي \vec{H} والمجال الناشئ عن المزدوج عند النقطة $p(r)$ هو :

$$\vec{H}_1 = \vec{H} - \frac{\vec{M}}{r^3} + \frac{3\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r}$$



شكل 3-3

المجالان \vec{M} , \vec{H} لهما نفس الاتجاه وعلية فان المجال \vec{H}_1 عبارة عن مجموع متجهين أحدهما في اتجاه المتجه \vec{H} والآخر في اتجاه المتجه \vec{r} . يتلاشى المتجه المحصل \vec{H}_1 عندما يتلاشى معاملا \vec{H} , \vec{r} أي عندما يكون :

$$H - \frac{M}{r^3} , \quad \cos \theta = 0$$

ومنها نجد أن : $r = \left(\frac{M}{H}\right)^{\frac{1}{3}}$ ويكون r عمودى على \vec{M} . أي أن المجال \vec{H}_1 يتلاشى عند

كل نقط الدائرة التي نصف قطرها $\left(\frac{M}{H}\right)^{\frac{1}{3}}$ وهذه الدائرة في مستوى عمودى على \vec{M} أي

أن الدائرة عمودية على محور المزدوج , ومن جهة أخرى اذا كان \vec{M} في اتجاه مضاد للمتجه \vec{H} فانه يمكن وضع $\vec{M} = -\lambda \vec{H}$ حيث $\lambda \geq 0$, ويكون المجال المحصل عندئذ بالصورة :

$$\vec{H}_1 = \left(1 + \frac{\lambda}{r^3}\right) \vec{H} - \frac{3\lambda(\vec{H} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r}$$

واضح من هذه العلاقة أن معامل \vec{H} لا يساوى الصفر , ويتلاشى \vec{H}_1 فقط عندما يتوازي

المتجهان \vec{H} , \vec{r} . وعندما يكون \vec{r} , \vec{H} في نفس الاتجاه فان \vec{H}_1 يتلاشى عند النقطة (

على محور المزدوج والتي موضعها r الذى يحقق :

$$\left(1 + \frac{\lambda}{r^3}\right)H - \frac{3\lambda H}{r^3} = 0$$

ومنها نجد أن : $r^3 = 2\lambda$. وعندما يكون \vec{r} , في اتجاهين متضادين فان موضع النقطة يتحدد من :

$$\left(1 + \frac{\lambda}{r^3}\right)H - \frac{3\lambda H}{r^3} = 0$$

أي أن $r^3 = 2\lambda$. أي توجد نقطتان يتلاشى عندهما المجال \vec{H}_1 . المسافة بين النقطتين هي

$$2r' = 2\left(\frac{M}{H}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ وطول قطر الدائرة العمودية على محور المزدوج هي : } 2r = 2(2\lambda)^{\frac{1}{3}}$$

أي أن : $2r' = 2(\lambda)^{\frac{1}{3}}$. وتكون النسبة بين قطر الدائرة والمسافة بين النقطتين هي :

$$\frac{2r'}{2r} = \frac{2(\lambda)^{\frac{1}{3}}}{2(2\lambda)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{(2)^{\frac{1}{3}}}$$

مثال (6) :

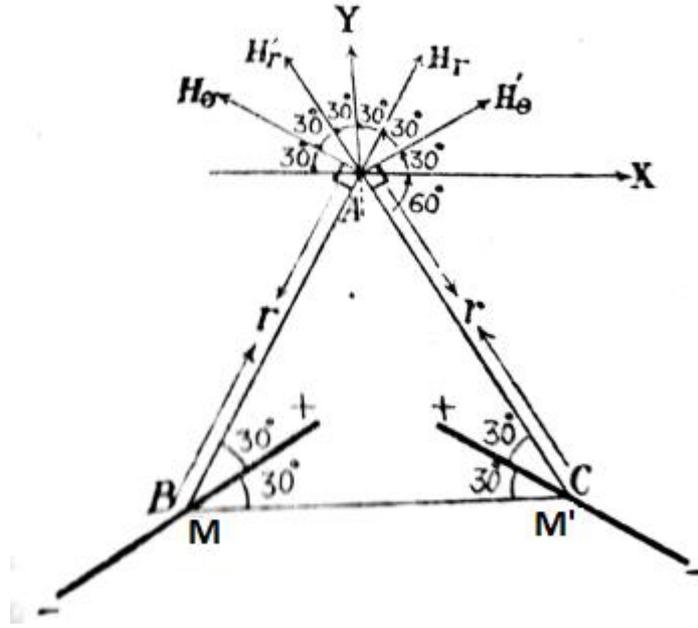
وضع مزدوجان عزمهما \vec{M} , \vec{M}' عند الرأسين B , C للمثلث المتساوي الأضلاع ABC بحيث ينصف محور المزدوج الزاوية المناظرة , ثم وضع مغناطيس صغير عند A بحيث يدور بحرية . أثبت أن الزاوية بين محور المغناطيس الصغير ومنصف الزاوية A هي :

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3} \cdot M - M'}{7 \cdot M + M'}\right)$$

الحل :

المزدوجان M , M' عند النقطتين B , C ينتجا عند النقطة المجالين المغناطيسيين :

$$\vec{H} = (H_r, H_\theta) \quad , \quad \vec{H}' = (H'_r, H'_\theta)$$



شكل 3-4

$$H_r = \frac{2M \cos 30^\circ}{r^3} = \frac{\sqrt{3}M}{r^3}, \quad H_\theta = \frac{M \sin 30^\circ}{r^3} = \frac{M}{2r^3}$$

$$H'_r = \frac{2M' \cos 30^\circ}{r^3} = \frac{\sqrt{3}M'}{r^3}, \quad H'_\theta = \frac{M' \sin 30^\circ}{r^3} = \frac{M'}{2r^3}$$

مركبتا محصلة المجالين \vec{H} , \vec{H}' هما Y , X حيث :

$$X = (H_r - H'_r) \cos 60^\circ + (H'_\theta - H_\theta) \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}(M - M')}{4r^3}$$

$$Y = (H_r + H'_r) \cos 30^\circ + (H_\theta + H'_\theta) \cos 60^\circ = \frac{7(M + M')}{4r^3}$$

خط القوة عند A (اتجاه المغناطيس الصغير عند A في حالة الاتزان) يميل على منصف الزاوية A بالزاوية θ حيث :

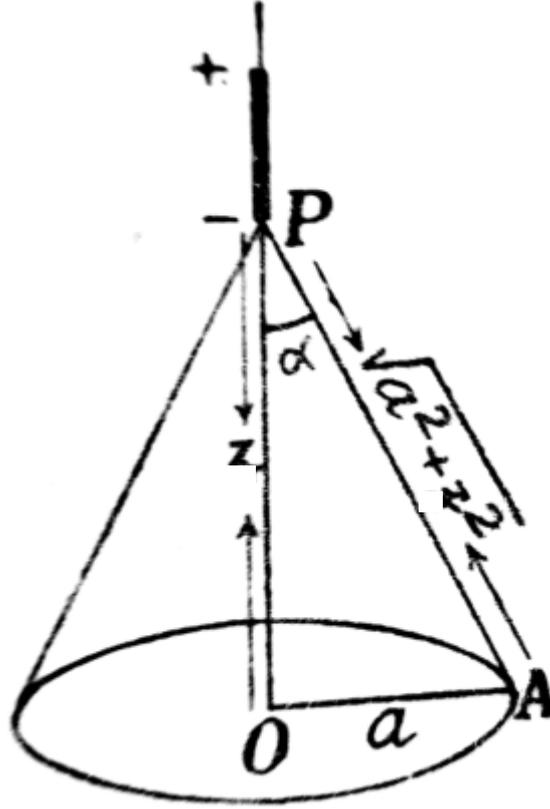
$$\tan \theta = \frac{X}{Y} = \frac{\sqrt{3} \cdot M - M'}{7 \cdot M + M'} \quad \therefore \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3} \cdot M - M'}{7 \cdot M + M'} \right)$$

مثال (7) :

قشرة مغناطيسية منتظمة شدتها Φ ومحدودة بمنحنى دائرى نصف قطره a . أوجد المجال المغناطيسى لهذه القشرة عند نقطة على محور القشرة وتبعد عن مركز الدائرة مسافة z . ثم أوجد القوة الميكانيكية المؤثرة على مغناطيس صغير يقع على محور القشرة (محور المغناطيس الصغير ينطبق على محور القشرة z) .

الحل :

أولا : نفرض أن النقطة p تبعد عن النقطة o بالمسافة z . الزاوية المجسمة عند النقطة p بواسطة المخروط الدائرى القائم هي :



شكل 3-5

$$\omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$$

ويكون الجهد المغناطيسى للقشرة عند p هو :

$$\Omega(p) = \Phi \omega = 2\pi\Phi \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$$

وشدة المجال للقشرة عند p يعطى بالصورة :

$$H = -\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \frac{2\pi\Phi a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ثانيا : نفرض أن \vec{M} متجه عزم المغناطيس الصغير المنطبق على المحور z عند p ,
وبفرض أن القطبين $(-m), (+m)$ يبعدان عن النقطة o بالمسافتين $z, z + dz$ القوتان
المؤثرتان على القطبين المغناطيسيين هما : $-m\vec{H}, +m(\vec{H} + d\vec{H})$ وتكون القوة المؤثرة على
المغناطيس الصغير (محصلة القوتين) هي :

$$F = -mH + m(H + dH) = mH = -\frac{6\pi\Phi a^2 z (mdz)}{(a^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{6\pi\Phi a^2 Mz}{(a^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

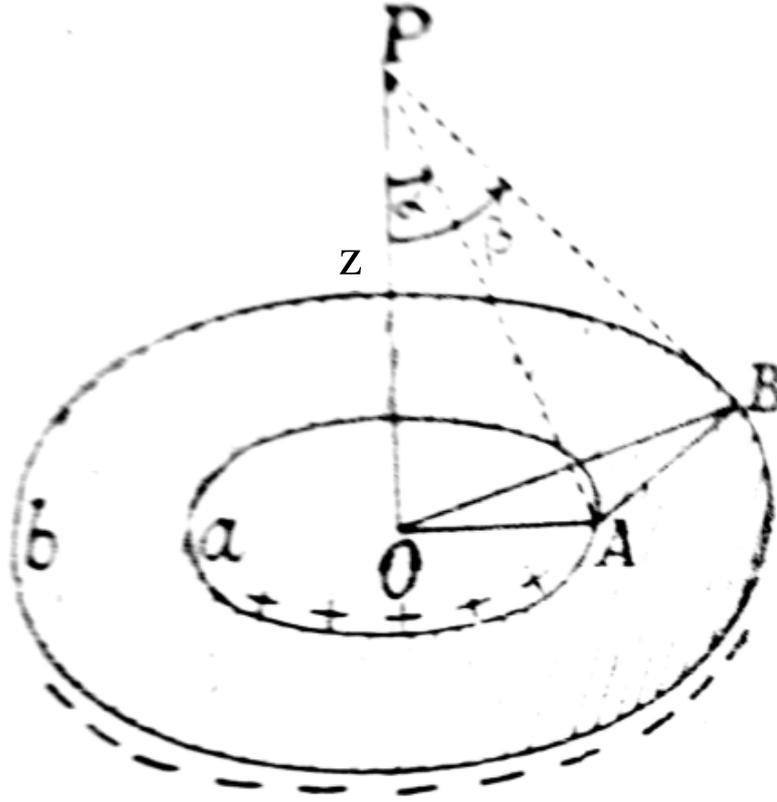
والاشارة السالبة تعنى أن القوة المؤثرة هي قوة جذب .

مثال (8) :

قشرة مغناطيسية منتظمة محدودة بالمنحنيين الدائريين والمشاركين في المركز o , ونصف
قطريهما a, b . أثبت أن مجال القشرة يتلاشى عند نقطة على محور القشرة ويبعد عن

$$\text{المركز بالمسافة : } \frac{(ab)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}}$$

الحل :



شكل 3-6

الجهد المغناطيسي للقشرة عند p يكون بالصورة :

$$\Omega = \Phi(\omega_b - \omega_a) = 2\pi\Phi\{(1 - \cos \beta) - (1 - \cos \alpha)\} = 2\pi\Phi(\cos \alpha - \cos \beta)$$

$$\cos \alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}, \quad \cos \beta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + b^2}}$$

مقدار المجال المغناطيسي عند النقطة p يتعين من :

$$H = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} = 2\pi\Phi \left\{ \frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

يتلاشى المجال المغناطيسي \vec{H} عندما يتحقق الشرط :

$$\frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \therefore a^4 (b^2 + z^2)^3 = b^4 (a^2 + z^2)^3$$

ومنها نجد أن :

$$z = z' = \frac{(ab)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}}$$

أي أن المجال \vec{H} يتلاشى عند النقطة p' التي تبعد عن المركز o بالمسافة z' .
الشغل الكلي المبذول بالمجال المغناطيسي لنقل المغناطيس الصغير من مالانهاية الى نقطة معينة
(تمثل طاقة الوضع للمغناطيس) يعطى بالعلاقة : $W = -\vec{M} \cdot \vec{H}$. وعند النقطة p' يكون :

$$W = -\vec{M} \cdot \vec{H}' = 0$$

لأن $\vec{H}' = \vec{0}$ عند النقطة p' .

الباب الرابع

المجالات الكهرومغناطيسية المتغيرة

الآن نناقش حالة المجالات الكهرومغناطيسية المتغيرة مع الزمن. سنقدم مفهومين جديدين :
 مجال كهربى ينتج من مجال مغناطيسى متغير , وهذا المفهوم نتج من البحث التجريبي لميشيل
 فرداي . والمفهوم الثانى عبارة عن مجال مغناطيسى ينشأ عن مجال كهربى متغير مع الزمن .

قانون فرداي

بعد أن أوضح أورستد (1820م) أن تيارا كهربيا أثر على أبرة بوصلة . أعلن فرداي أنه اذا
 استطاع تيار كهربى انتاج مجال مغناطيسى فان المجال المغناطيسى يجب أن يكون قادرا على
 انتاج تيار كهربى . بدلالة المجالات يمكن القول بأن مجالا مغناطيسيا متغيرا مع الزمن ينتج قوة
 دافعة كهربية (e m f) والتي تنشئ تيارا فى دائرة مغلقة . قانون فرداي يصاغ رياضيا فى
 الصورة :

$$emf = -\frac{dN}{dt} \quad (1)$$

حيث N عبارة عن الفيض (الانسياب أو التدفق) المغناطيسى الكلى خلال المقطع العرضى
 لدائرة مغناطيسية . أي أن

$$N = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2)$$

حيث \vec{B} الحث المغناطيسى . العلاقة (1) تبين أن القوة الدافعة الكهربائية كمية قياسية , وتعرف
 هذه الكمية القياسية كذلك بالصورة :

$$emf = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3)$$

حيث \vec{E} شدة المجال الكهربى . عامة فان القوة الدافعة الكهربائية تتغير اذا تغير شكل المسار
 من المعادلات (1)-(3) نجد أن :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (4)$$

سنعتبر هنا أن المسار ساكن فان المعادلة (4) بالصورة :

$$emf = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (5)$$

بتطبيق نظرية ستوكس فان المعادلة (5) تأخذ الصورة :

$$\iint_S (\nabla \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

وحيث أن dS عنصر سطح اختياري فاننا نحصل على :

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6)$$

هذه المعادلة تمثل احدى معادلات ماكسويل . المعادلة (6) تبين أن مجالا مغناطيسيا متغيرا مع الزمن ينشأ عنه مجال كهربى . وهذا المجال الكهربى له خاصية الدوران وتكامله الخطى حول مسار مغلق عامة لايساوى الصفر . اذا كان متجه الحث المغناطيسى \vec{B} لايتغير مع الزمن فان المعادلتين (5) , (6) تؤولان على الترتيب الى المعادلتين الكهروستاتيكيين :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (7)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad (8)$$

تيار الازاحة – قانون أمبير الدائرى

قانون أمبير الدائرى في حالة المجالات المغناطيسية التي لا تتغير مع الزمن يمكن كتابته في الصورة الرياضية :

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J} \quad (9)$$

حيث \vec{H} شدة المجال المغناطيسى , \vec{J} متجه كثافة التيار . في حالة المجالات المغناطيسية التي تتغير مع الزمن فان المعادلة (9) تكون غير صحيحة وهذا واضح لأنه عندما نضرب طرفى المعادلة (9) قياسيا في المؤثر ∇ , أي أن :

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{H}) = 0 = \nabla \cdot \vec{J}$$

والتي تقود الى النتيجة : $\nabla \cdot \vec{J} = 0$, وهذه النتيجة تتعارض مع معادلة الاتصال :

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

وعليه فان المعادلة (9) صحيحة فقط اذا كانت : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. سنفرض اننا أضفنا حدا مجهولا

\vec{G} للطرف الأيمن للمعادلة (9) عندئذ فان (9) تأخذ الصورة :

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J} + \vec{G}$$

$$\therefore \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{H}) = 0 = \nabla \cdot \vec{J} + \nabla \cdot \vec{G}$$

بمقارنة هذه المعادلة مع معادلة الاتصال نجد أن :

$$\nabla \cdot \vec{G} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

باستخدام المعادلة $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ فإننا نحصل على أبسط حل للمتجه \vec{G} في الصورة :

$$\vec{G} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

وعلى ذلك فإن قانون أمبير الدائري يأخذ الصورة التفاضلية الآتية :

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (10)$$

المعادلة (10) لم تستنبط وإنما هي صورة رياضية لقانون أمبير الدائري حصلنا عليها ولا تتعارض مع معادلة الاتصال. المعادلة (10) متوافقة أيضا مع جميع النتائج الأخرى وهي معادلة مقبولة كما نفعّل عادة مع أي قانون تجريبي والمعادلة المستنبطة منه. المعادلة (10) واحدة أخرى من معادلات ماكسويل. الحد الإضافي الموجود بالطرف الأيمن للمعادلة (10) أي الحد $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ له وحدات كثافة التيار (أمبير لكل متر مربع) ولأنه ينتج من التغير الزمني لمتجه

الازاحة \vec{D} فإنه يسمى كثافة تيار الازاحة ويرمز له بالرمز $\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. أما متجه كثافة

التيار \vec{J} فإنه عبارة عن كثافة تيار التوصيل $\sigma \vec{E}$ (الذي ينتج من حركة الشحنات) وكذلك تيار الحمل $\rho \vec{v}$. في حالة الوسط الغير موصل ولا يوجد فيه كثافة شحنة حجمية (أي $\rho = 0$) فإن المعادلة (10) تؤول الى الصورة البسيطة الآتية :

$$\nabla \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

تيار الازاحة الكلي العابر لأي سطح S يتعين بالتكامل :

$$I = \iint_S \vec{J}_d \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (11)$$

نستطيع الحصول على الصورة المتغيرة مع الزمن لقانون أمبير الدائري التكاملية , وذلك بتكامل المعادلة (10) على السطح S أي

$$\iint_S (\nabla \wedge \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = I + I_d$$

وبتطبيق نظرية ستوكس فإن المعادلة السابقة تأخذ الصورة :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + I_d \quad (12)$$

معادلات ماكسويل

حصلنا من قبل على معادلتين من معادلات ماكسويل للمجالات المتغيرة مع الزمن في صورتين :

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (13)$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (14)$$

المعادلتان الباقيتان غير متغيرتين عن صورتيهما غير المتغيرة مع الزمن وهما :

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (16)$$

المعادلات الأربعة السابقة هي معادلات ماكسويل التي تمثل الأساس لدراسة النظرية الكهرومغناطيسية , وهي معادلات تفاضلية جزئية تربط المجالات الكهربائية والمغناطيسية ببعضها وبمنابعها (الشحنة وكثافة التيار) . التعرف على الصور التكاملية لمعادلات ماكسويل يكون عادة أسهل بدلالة القوانين التجريبية التي تم منها الحصول على هذه المعادلات بعملية تعميم (التجارب يجب أن تتعامل مع كميات ماكرو سكوبية فيزيائية) . لذلك فان نتائج هذه التجارب يعبر عنها بعلاقات تكاملية .

سنحاول الآن إيجاد الصور التكاملية لمعادلات ماكسويل (13) – (16) السابقة . بتكامل المعادلة (13) لسطح S وتطبيق نظرية ستوكس نحصل على :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (17)$$

هذه المعادلة تسمى قانون فرداي . باجراء نفس العملية التكاملية على المعادلة (14) نجد أن :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (18)$$

والذي يسمى قانون أمبير الدائري . باجراء التكامل الحجمي للمعادلة (15) وذلك باعتبار أن الحجم الكلي V محاط بالسطح S نجد أن :

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{D}) d\tau = \iiint_V \rho d\tau$$

وباستخدام نظرية جاوس لتحويل التكامل الحجمي الى تكامل سطحي فان المعادلة السابقة تأخذ الصورة :

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho d\tau \quad (19)$$

وباجراء نفس عملية التكامل السابقة على المعادلة (16) نحصل على :

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (20)$$

عندما تستخدم الوحدات الالكتروستاتيكية لقياس ρ والمتجهات \vec{D} , \vec{E} , \vec{J} وكذلك باستخدام الوحدات الالكترومغناطيسية لقياس المتجهات \vec{B} , \vec{H} فان معادلات ماكسويل للمجالات الكهرومغناطيسية المتغيرة تأخذ الصور التفاضلية الآتية :

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \quad (21)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (22)$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (23)$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = 4\pi\vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (24)$$

حيث c هي سرعة الضوء في الفضاء .

الجهود الكهرومغناطيسية في معادلات ماكسويل

من المعادلة $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ فان متجه الحث المغناطيسي \vec{B} يمكن وضعه بالصورة $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$ حيث \vec{A} يمثل الجهد الاتجاهي . بالتعويض في معادلة ماكسويل (23) نحصل على :

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \wedge \vec{A}$$

$$\therefore \nabla \wedge \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

وعليه فانه يمكن وضع :

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\Phi$$

أي أن شدة المجال الكهربى يمكن وضعه بالصورة :

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (25)$$

بضرب طرفي هذه العلاقة قياسيا في المؤثر ∇ وباستخدام المعادلة $\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$ حيث $\vec{D} = K\vec{E}$ فاننا نحصل على :

$$\nabla^2\Phi + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = -\frac{4\pi}{K} \rho \quad (26)$$

حيث فرضنا هنا أن الوسط ايثوتروبي متجانس (حيث μ, K كميات ثابتة) .
من معادلة ماكسويل (24) وباستخدام العلاقات :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{\nabla \wedge \vec{A}}{\mu}, \quad \vec{D} = K\vec{E}$$

نجد أن :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) = 4\pi\mu\vec{J} + \frac{\mu K}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (27)$$

وباستخدام المتطابقة الاتجاهية الآتية

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

وكذلك باستخدام المعادلة (25) فان المعادلة (27) تأخذ الصورة :

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = 4\pi\mu\vec{J} - \frac{\mu K}{c} \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \frac{\mu K}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (28)$$

ثم باستخدام الشرط الآتي :

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\mu K}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (29)$$

Equation of guage invariance

وعليه فان المعادلتين (26), (28) يصبحوا على الترتيب بالصورتين :

$$\nabla^2\Phi - \frac{\mu K}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{K} \rho \quad (30)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\mu K}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -4\pi\mu\vec{J} \quad (31)$$

المعادلتان (30), (31) هما المعادلتان الموجبتان للجهد القياسى المرتبط Φ والجهد

الاتجاهى \vec{A} .



أمثلة محلولة

مثال (1) :

بين أن الدالة : $f(x, y, z) = \frac{1}{r} \rho \left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c} \right)$ تحقق المعادلة : $\square f = 0$ حيث

$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ، r هي المسافة بين النقطتين : (x, y, z) ، (ξ, η, ζ) ، c هي سرعة الضوء في الفضاء .

الحل :

لايجاد $\nabla^2 f$ فاننا نعين أولاً ∇f أي

$$\nabla f = \frac{1}{r} \nabla \rho + \rho \nabla \left(\frac{1}{r} \right)$$

نفرض أن $\rho' = \frac{\partial \rho}{\partial u}$ حيث $u = t - \frac{r}{c}$. لذلك فاننا نحصل على :

$$\nabla f = \frac{1}{r} \left(-\frac{\rho}{c} \nabla r \right) - \frac{\rho}{r^2} \nabla r = - \left(\frac{\rho'}{cr} + \frac{\rho}{r^2} \right) \nabla r$$

وحيث أن $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$ أي وحدة متجهات في اتجاه المتجه \vec{r} وعليه فان ∇f تأخذ الصورة :

$$\nabla f = - \left(\frac{\rho'}{cr^2} + \frac{\rho}{r^3} \right) \vec{r}$$

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = - \nabla \cdot \left(\frac{\rho'}{cr^2} + \frac{\rho}{r^3} \right) \vec{r}$$

$$= - \left[\left(\frac{\rho'}{cr^2} + \frac{\rho}{r^3} \right) \nabla \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \nabla \left(\frac{\rho'}{cr^2} + \frac{\rho}{r^3} \right) \right]$$

$$= - \left[3 \left(\frac{\rho'}{cr^2} + \frac{\rho}{r^3} \right) - \vec{r} \cdot \left(\frac{\rho''}{c^2 r^2} + \frac{2\rho'}{cr^3} + \frac{3\rho}{r^4} + \frac{\rho'}{cr^3} \right) \frac{\vec{r}}{r} \right] = \frac{\rho''}{c^2 r} \quad (1)$$

الدالة ρ'' يمكن كتابتها بالصيغة :

$$\rho'' = \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = r \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (2)$$

وبالتعويض عن ρ'' من المعادلة (2) في المعادلة (1) نجد أن :

$$\nabla^2 f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad \therefore \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f = \square f = 0 \quad (3)$$

المؤثر التفاضلي \square يسمى مؤثر دالمبرت . والمعادلة (3) تسمى المعادلة الموجية .

مثال (2) :

اكتب معادلات ماكسويل لفضاء حر , وبين أن الجهد الاتجاهي : $\vec{A} = \frac{f'(u)}{cr} \vec{k}$ يمثل حلا

لهذه المعادلات . حيث $f(u)$ دالة في المتغير $u = t - \frac{r}{c}$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, \vec{k} متجه

وحدة في اتجاه المحور z . أوجد مركبات المجال الكهربى والمجال المغناطيسى , وبين أن

الجهد القياسى المرتبط Φ يمكن وضعه بالصورة :

$$\Phi = z \left(\frac{f'(u)}{cr^2} + \frac{f(u)}{r^3} \right)$$

الحل :

في حالة الفضاء الحر فان : $K = 1, \mu = 1, \rho = 0, \vec{J} = \vec{0}$. وعليه فان معادلات ماكسويل في هذه

الحالة تأخذ الصورة :

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \wedge \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

وفي حالة الفضاء الحر فان المعادلة الموجية التي يحققها الجهد الاتجاهي تأخذ الصيغة :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = \vec{0} \quad (1)$$

سنبرهن الآن على أن الجهد الاتجاهي المعطى في المثال يحقق المعادلة الموجية (1) , ولإجراء

ذلك نوجد الكميات التالية :

$$\begin{aligned} c \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f'(u)}{cr} \vec{k} \right) = \left[f' \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \right) + \frac{f''}{r} \cdot \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \right] \vec{k} \\ &= - \left(\frac{xf'}{r^3} + \frac{xf''}{cr^2} \right) \vec{k} \end{aligned}$$

بإجراء عملية التفاضل الجزئى مرة أخرى نحصل على :

$$c \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} = - \left[\frac{r^2 - 3x^2}{r^5} \cdot f' + \frac{r^2 - 3x^2}{cr^4} \cdot f'' - \frac{x^2}{c^2 r^3} \cdot f''' \right] \vec{k} \quad (2)$$

بالمثل يمكن إيجاد : $c \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2}$, $c \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}$ بالصيغتين :

$$c \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} = - \left[\frac{r^2 - 3y^2}{r^5} \cdot f' + \frac{r^2 - 3y^2}{cr^4} \cdot f'' - \frac{y^2}{c^2 r^3} \cdot f''' \right] \vec{k} \quad (3)$$

$$c \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = - \left[\frac{r^2 - 3z^2}{r^5} \cdot f' + \frac{r^2 - 3z^2}{cr^4} \cdot f'' - \frac{z^2}{c^2 r^3} \cdot f''' \right] \vec{k} \quad (4)$$

بجمع المعادلات (2) , (3) , (4) نحصل على :

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = \nabla^2 \vec{A} = \frac{f'''}{c^3 r} \cdot \vec{k} \quad (5)$$

وحيث أن :

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{f'''}{cr} \cdot \vec{k} \quad (6)$$

وبالتعويض من المعادلة (6) في المعادلة (5) نجد أن :

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

أي أن المتجه \vec{A} المعطى في المثال يحقق المعادلة الموجية (1) , أي يمثل حلا لمعادلات ماكسويل في الفضاء الحر . لإيجاد مركبات شدة المجال المغناطيسي \vec{H} حيث $\vec{H} = \vec{B}$ فإننا نستخدم العلاقة الاتجاهية :

$$\vec{H} = \nabla \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{f'}{cr} \end{vmatrix} \quad (7)$$

من العلاقة (7) نجد أن مركبات المجال المغناطيسي هي :

$$H_x = -y \left(\frac{f'}{r^3} + \frac{f''}{cr^2} \right) , H_y = x \left(\frac{f'}{r^3} + \frac{f''}{cr^2} \right) , H_z = 0$$

لإيجاد دالة الجهد القياسي المرتبط Φ فإننا نستخدم الشرط :

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -c \nabla \cdot \vec{A} = -c \nabla \cdot \left(\frac{f'}{cr} \vec{k} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f'}{r} \right) = z \left(\frac{f'}{r^3} + \frac{f''}{cr^2} \right)$$

بإجراء التكامل بالنسبة للزمن نحصل على :

$$\Phi = z \left(\frac{f}{r^3} + \frac{f'}{cr^2} \right) + F(x, y, z)$$

حيث $F(x, y, z)$ دالة اختيارية ويمكن اختيارها تساوى صفر , وعلى ذلك فإن الجهد القياسى يأخذ الصورة :

$$\Phi = z \left(\frac{f}{r^3} + \frac{f'}{cr^2} \right) \quad (8)$$

شدة المجال الكهربى \vec{E} يتعين من العلاقة :

$$\vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{f''}{cr} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \nabla \Phi &= z \nabla \left(\frac{f}{r^3} + \frac{f'}{cr^2} \right) + \left(\frac{f}{r^3} + \frac{f'}{cr^2} \right) \vec{k} \\ &= -z \left(\frac{3f}{r^4} + \frac{3f'}{cr^3} + \frac{f''}{c^2 r^2} \right) \nabla r + \left(\frac{f}{r^3} + \frac{f'}{cr^2} \right) \vec{k} \end{aligned} \quad (11)$$

ثم بالتعويض من المعادلتين (10) , (11) في المعادلة (9) نحصل على مركبات المجال الكهربى بالصورة :

$$\begin{aligned} E_x &= xz \left(\frac{3f}{r^5} + \frac{3f'}{cr^4} + \frac{f''}{c^2 r^3} \right) \\ E_y &= yz \left(\frac{3f}{r^5} + \frac{3f'}{cr^4} + \frac{f''}{c^2 r^3} \right) \\ E_z &= z^2 \left(\frac{3f}{r^5} + \frac{3f'}{cr^4} + \frac{f''}{c^2 r^3} \right) - \left(\frac{f}{r^3} + \frac{f'}{cr^2} + \frac{f''}{c^2 r} \right) \end{aligned}$$

مثال (3) :

أثبت أن المجال المغناطيسي : $\vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [(\nabla\Phi) \wedge \vec{k}]$, والمجال الكهربى :

$$\vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \vec{k} + \frac{\partial}{\partial z} \nabla\Phi$$

حيث \vec{k} وحدة

متجهات في اتجاه المحور z , والدالة Φ تحقق المعادلة الموجية : $\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$.

الحل :

في حالة الفضاء الحرفان معادلات ماكسويل هي :

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \wedge \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

سنثبت أن المتجهين \vec{E} , \vec{H} المذكورين في المثال يحققا هذه المعادلات كما يلى :

i)

$$\nabla \cdot \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \{(\nabla\Phi) \wedge \vec{k}\} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \{ \vec{k} \cdot [\nabla \wedge (\nabla\Phi)] - (\nabla\Phi) \cdot \nabla \wedge \vec{k} \} = 0$$

ii)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= -\frac{1}{c^2} \nabla \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \vec{k} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot (\nabla\Phi) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \Phi \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \vec{E} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\nabla \wedge (\Phi \vec{k})] + \frac{\partial}{\partial z} [\nabla \wedge (\nabla\Phi)] = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\nabla \wedge (\Phi \vec{k})] \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [(\nabla\Phi) \wedge \vec{k} + \Phi (\nabla \wedge \vec{k})] = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [(\nabla\Phi) \wedge \vec{k}] \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [(\nabla\Phi) \wedge \vec{k}] \right\} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \{ \vec{H} \} \end{aligned}$$

$$\therefore \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

iv)

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \nabla \wedge [(\nabla \Phi) \wedge \vec{k}] \right\} \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (k \cdot \nabla)(\nabla \Phi) - [(\nabla \Phi) \cdot \nabla] \vec{k} + (\nabla \Phi) \nabla \cdot \vec{k} - \vec{k} \nabla^2 \Phi \right\} \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \Phi) - \vec{k} \nabla^2 \Phi \right\} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \vec{k} - \vec{k} \nabla^2 \Phi \right\} \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \vec{E} - \vec{k} \left(\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \right\} \quad \therefore \nabla \wedge \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

الباب الخامس

حركة الجسيمات المشحونة

سنتناول في هذه الدراسة حركة الجسيمات المشحونة سواء كانت هذه الجسيمات موجبة الشحنة أو سالبة الشحنة في مجال كهربى أو في مجال مغناطيسى أو في مجال كهرومغناطيسى . وحيث أن تأثير هذه المجالات على حركة الجسيمات المشحونة أكبر من تأثير قوى الجذب النيوتونى بينها لذا فننا سنهمل قوى الجذب بالمقارنة مع قوى المجال الكهربى أو المجال المغناطيسى أو المجال الكهرومغناطيسى . وسنفرض أن كتلة الجسيم المشحون ثابتة أثناء الحركة .



حركة جسيم مشحون في مجال كهروستاتيكي

كما علمنا فان المجال الكهربى ينشأ من شحنة كهربية ساكنة , وهذا المجال يمثل بمجموعة من خطوط القوى . ويؤثر المجال الكهروستاتيكي في كل نقطة من نقط الفضاء بقوة على وحدة الشحنة الموجبة اذا وضعت عند تلك النقطة , وهذا مايعرف بشدة المجال الكهربى \vec{E} وهو دالة الموضع . اذا تحرك جسيم مشحون كتلته m وشحنته q في مجال كهربى منتظم شدته \vec{E}

فان القوة المؤثرة على هذا الجسيم تتعين مقدارا واتجاها من قانون كولوم , أي أن :

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

وتتعين عجلة الجسيم \vec{f} مقدارا واتجاها من قانون نيوتن للحركة . أي أن معادلة الحركة لجسيم مشحون في مجال كهربى منتظم هي :

$$\vec{F} = m\vec{f} = q\vec{E} \quad (1)$$

واضح أن الجسيم يتحرك بعجلة منتظمة تتوقف على كتلة الجسيم m وشحنته q وشدة المجال \vec{E} وتكون \vec{f} في اتجاه المجال اذا كانت شحنة الجسيم موجبة وفى اتجاه عكس المجال اذا كانت شحنة الجسيم سالبة . يلاحظ أن حركة الجسيم تشابه حركة المقذوف الحر في المجال المنتظم للجاذبية الأرضية بالقرب من سطح الأرض .

حركة جسيم مشحون في مجال مغناطيسي منتظم

ينشأ المجال المغناطيسي المنتظم من قطب مغناطيسي ساكن أو من مرور تيار كهربى مستمر في سلك , ويمثل هذا المجال بمجموعة من خطوط القوى . ويؤثر المجال المغناطيسي في كل نقطة من نقط الفضاء بقوة على وحدة الأقطاب الموجبة الساكنة عند تلك النقطة . وهذا ما يعرف بشدة المجال المغناطيسي \vec{H} وهو دالة في الموضع . اذا تحرك جسيم كتلته m وشحنته q بسرعة \vec{v} في مجال مغناطيسي منتظم شدته \vec{H} فان القوة المؤثرة على هذا الجسيم تتعين مقداراً واتجاهاً من قانون لورنتز بالصورة :

$$\vec{F} = q(\vec{v} \wedge \vec{H})$$

وتتعين عجلة الجسيم \vec{f} مقداراً واتجاهاً من قانون الحركة لنيوتن . أي أن معادلة حركة جسيم مشحون في مجال مغناطيسي منتظم \vec{H} هي :

$$\vec{F} = m\vec{f} = q(\vec{v} \wedge \vec{H}) \quad (2)$$

حركة جسيم مشحون في مجال كهرومغناطيسي منتظم

اذا تحرك جسيم كتلته m وشحنته q بسرعة \vec{v} في مجالين منتظمين أحدهما كهربى شدته \vec{E} والآخر مغناطيسي شدته \vec{H} . فتكون القوة الناشئة من المجالين معا بالصورة :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \wedge \vec{H})$$

وتتعين عجلة الجسيم من معادلة الحركة :

$$\vec{F} = m\vec{f} = q\vec{E} + q(\vec{v} \wedge \vec{H}) \quad (3)$$

باستخدام الاحداثيات الكارتيزية ومتجهات الوحدة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ في اتجاه المحاور المتعامدة

$$\vec{H} = H_x\vec{i} + H_y\vec{j} + H_z\vec{k} , \vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} \quad \text{فان } x, y, z$$

على ثلاث معادلات تفاضلية نحلها بالتكامل المباشر أو بطرق حل المعادلات التفاضلية للحصول على المعادلات البارامترية لمسار الجسيم :

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

واضح أن هناك فرق أساسي في تأثير المجالات الكهربائية والمغناطيسية على الجسيمات المشحونة حيث أن القوة التي تؤثر في الاتجاه العمودي على الاتجاه الذي يتقدم فيه الجسيم يمكن تغيير مقدار سرعة هذا الجسيم (أي أن متجه العجلة يكون دائما عموديا على متجه السرعة) , وعلى ذلك تبقى طاقة الحركة للجسيم غير متغيرة . لذلك فإن المجال المغناطيسي المنتظم (ثابت مع الزمن) غير قادر على نقل طاقة للشحنة المتحركة ومن ناحية أخرى فإن المجال الكهربى يؤثر بقوة تعتمد على الاتجاه الذي يتقدم فيه الجسيم , لذلك فإن المجال الكهربى يسبب عامة انتقال للطاقة بين المجال والجسيم المشحون .

الجسيمات المشحونة Charged particles

الجسيمات المشحونة نوعان :

(أ) الجسيمات ذات الشحنة السالبة : وهى عبارة عن الالكترونات electrons والأيونات السالبة . والالكترون هو أصغر شحنة سالبة موجودة على الاطلاق . ثوبت الالكترون هي :

$$\text{كتلة الالكترون } (m) = 9.107 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\text{شحنة الالكترون } (-e) = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

(ب) الجسيمات ذات الشحنة الموجبة : وهى عبارة عن البروتونات protons والأيونات الموجبة . والبروتون يحمل نفس شحنة الالكترون ولكن بإشارة معاكسة . ثوابت البروتون :

$$\text{كتلة البروتون } (m) = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\text{شحنة البروتون } (e) = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

أمثلة محلولة

مثال (1) :



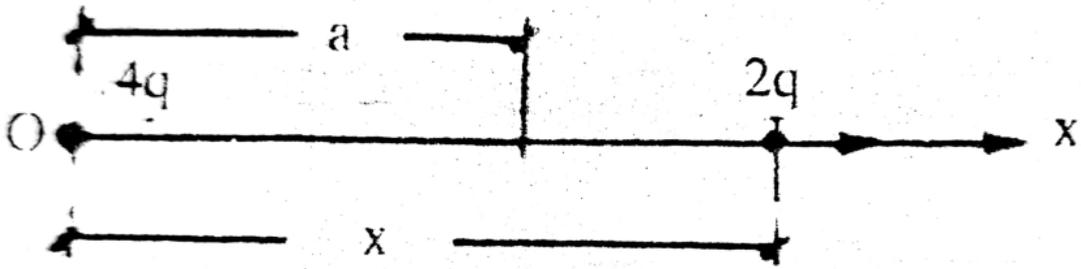
ثبت جسيم مشحون بشحنة موجبة $4q$ عند نقطة الأصل O ووضع جسيم كتلته m وشحنته $2q$ عند النقطة $(a, 0)$ وترك ليتحرك من سكون تحت تأثير قوة التنافر بين الشحنتين . أوجد سرعة الجسيم عندما يصبح على بعد x من O وزمن الحركة .

الحل :

معادلة حركة الجسيم هي :

$$m \ddot{x} = \frac{(2q)(4q)}{4\pi\epsilon x^2}$$

$$\ddot{x} = \frac{2q^2}{m\pi\epsilon x^2} \quad (1)$$



شكل 5-1

الشروط الابتدائية للحركة هي : $t = 0, x = a, \dot{x} = 0$

$$\therefore \ddot{x} = v \frac{dv}{dx} = \frac{2q^2}{m\pi\epsilon x^2}$$

وبفصل المتغيرات واجراء التكامل نحصل على :

$$\int_0^v v dv = \frac{2q^2}{m\pi\epsilon} \int_a^x \frac{dx}{x^2}$$

$$v = \pm \frac{2q}{a\sqrt{m\pi\epsilon}} \sqrt{\frac{x-a}{x}}$$

وبما أن تزداد بازدياد الزمن نختار الإشارة الموجبة أي أن

$$v = + \frac{2q}{a\sqrt{m\pi\epsilon}} \sqrt{\frac{x-a}{x}} = \frac{dx}{dt}$$

بفصل المتغيرات واجراء التكامل نحصل على :

$$\int_0^t dt = \frac{a\sqrt{m\pi\epsilon}}{2q} \int_a^x \sqrt{\frac{x}{x-a}} dx$$

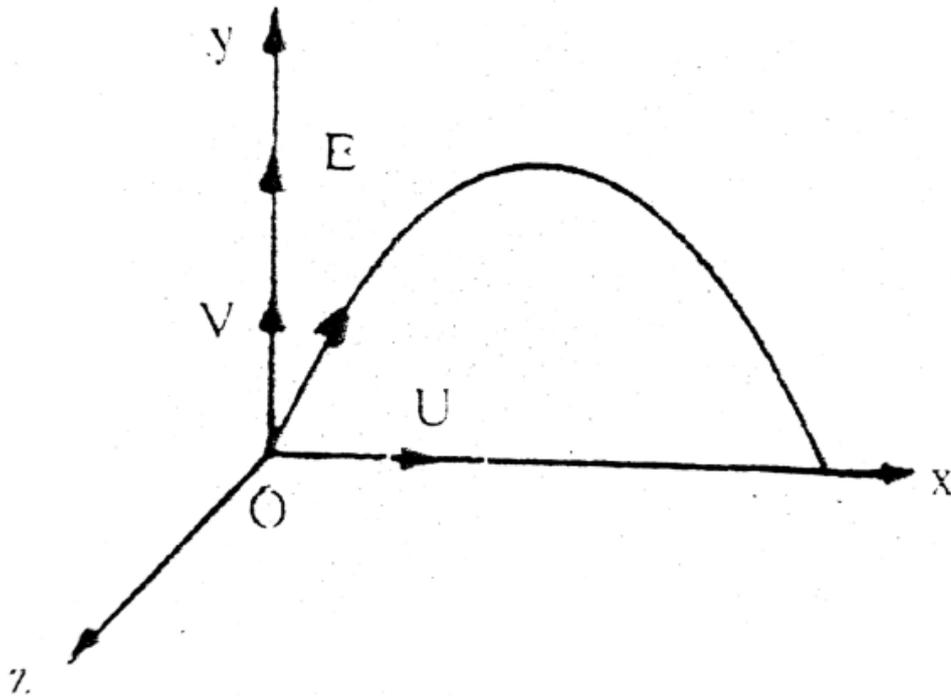
وباستخدام التعويض : $(x = a \cosh^2 u)$ يمكن تعيين قيمة التكامل بالصورة :

$$t = \frac{a\sqrt{m\pi\epsilon}}{2q} \left\{ \sqrt{x(x-a)} + a \cosh^{-1} \sqrt{\frac{x}{a}} \right\}$$

مثال (2) :

الكترن كتلته m وشحنه يتحرك في مجال كهربى منتظم شدته $\vec{E} = +E\vec{j}$. اذا قذف الالكترن من نقطة الأصل بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0 = U\vec{i} + V\vec{j}$. أوجد المعادلات البارامترية للمسار (اهمل وزن الجسيم) .

الحل :



شكل 5- 2

معادلة حركة الجسيم الاتجاهية هي :

$$m \ddot{x} \vec{i} + m \ddot{y} \vec{j} + m \ddot{z} \vec{k} = -e (E \vec{j})$$

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -\frac{eE}{m}, \quad \ddot{z} = 0 \quad (1) - (3)$$

الشروط الابتدائية للحركة هي : عندما $t = 0$ فان :

$$\dot{x} = U, \quad \dot{y} = V, \quad \dot{z} = 0$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

بحل المعادلات التفاضلية (3) - (1) واستخدام الشروط السابقة نحصل على المعادلات البارامتريّة لمسار الجسيم بالصورة :

$$x = Ut, \quad y = Vt - \frac{eE}{2m} t^2, \quad z = 0 \quad (4) - (6)$$

من المعادلة (6) يتضح أن الجسيم يتحرك في المستوى xoy ومن المعادلتين (4), (5) وبحذف البارامتر t نحصل على المعادلة الكارتيزية للمسار بالصورة :

$$y = \frac{V}{U} x - \frac{eE}{2mU^2} x^2$$

وهي معادلة قطع مكافئ محوره رأسى ويمر بنقطة القذف (نقطة الأصل) ومقلوب الى أسفل .

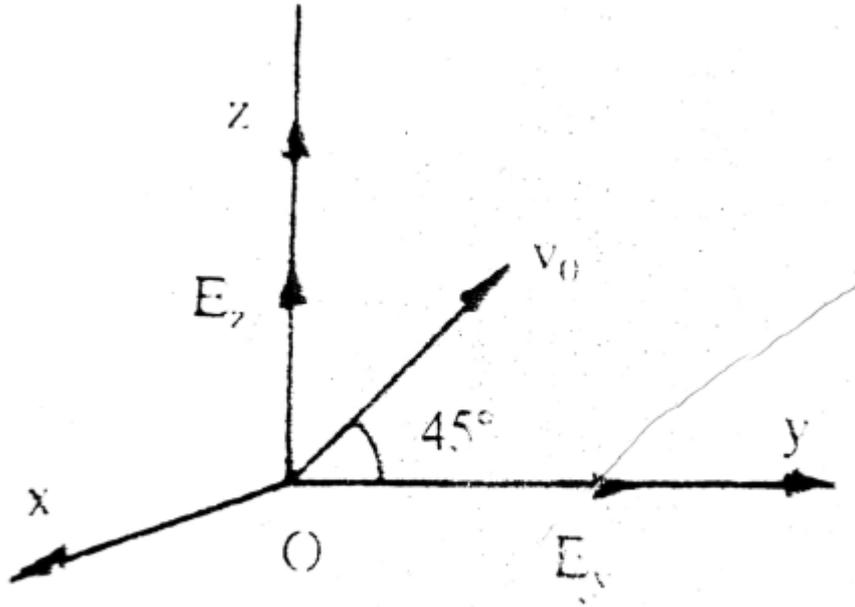
مثال (3) :

قاذف يقذف جسيمات مشحونة كتلة كل منها m وشحنته q بسرعة مقدارها v_0 في المستوى yoz وتميل بزاوية 45° على محور y . يؤثر على الجسيم مجال كهربى متغير $\vec{E} = E_0 \sin pt \vec{j} + E_0 \cos pt \vec{k}$ حيث p, E_0 ثوابت. أثبت أن حركة الجسيم هي حركة مستوية في المستوى yoz ويمكن تمثيلها بحركة نقطة على دائرة مركزها الهندسى يتحرك بسرعة منتظمة .

الحل :

معادلة حركة الجسيم في المجال الكهربى

$$m (\ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}) = q (E_0 \sin pt \vec{j} + E_0 \cos pt \vec{k})$$



شكل 5-3

$$\ddot{x} = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{y} = \frac{qE_0}{m} \sin pt \quad (2)$$

$$\ddot{z} = \frac{qE_0}{m} \cos pt \quad (3)$$

والشروط الابتدائية: عندما $t = 0$ يكون

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}, \quad \dot{z} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

بالتكامل المباشر للمعادلات التفاضلية (3) - (1) واستخدام الشروط الابتدائية نحصل على

المعادلات البارامترية لمسار الجسيم

$$x = 0 \quad (4)$$

$$y = \left(\frac{v_0}{\sqrt{2}} + \frac{qE_0}{mp} \right) t - \frac{qE_0}{mp} \sin pt \quad (5)$$

$$z = \left(\frac{v_0 t}{\sqrt{2}} + \frac{qE_0}{mp^2} \right) - \frac{qE_0}{mp^2} \cos pt \quad (6)$$

من المعادلة (4) يتضح أن الجسم يتحرك في المستوى yoz ومن المعادلتين (5), (6) بحصل على المعادلة الكارتيزية لمسار الجسم على الصورة :

$$(y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2 \quad (7)$$

حيث

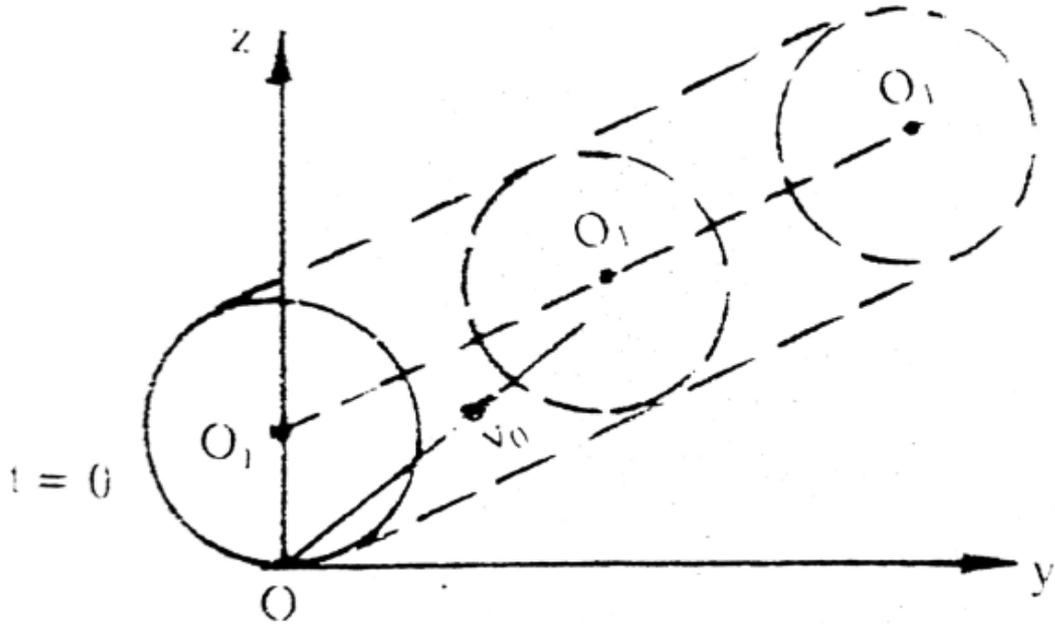
$$y_1 = \left(\frac{v_0}{\sqrt{2}} + \frac{qE_0}{mp} \right) t \quad \therefore \dot{y}_1 = \frac{v_0}{\sqrt{2}} + \frac{qE_0}{mp}$$

$$z_1 = \frac{v_0}{\sqrt{2}} t + \frac{qE_0}{mp^2} \quad \dot{z}_1 = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \quad R = \frac{qE_0}{mp^2}$$

المعادلة (7) تبين أن حركة الجسم يمكن تمثيلها بحركة نقطة على دائرة نصف قطرها R ومركزها النقطة $O_1(y_1, z_1)$ ويتحرك هذا المركز في المستوى yoz بسرعة منتظمة مركباتها y_1, z_1 ومسا المركز هو خط مستقيم معادلته الكارتيزية (العلاقة بين y_1, z_1) تكون :

$$\frac{z_1 - \frac{qE_0}{mp^2}}{\frac{v_0}{\sqrt{2}}} = \frac{y_1}{\frac{v_0}{\sqrt{2}} + \frac{qE_0}{mp}}$$

$$z_1 = \frac{y_1}{1 + \frac{qE_0 \sqrt{2}}{mpv_0}} + \frac{qE_0}{mp^2}$$

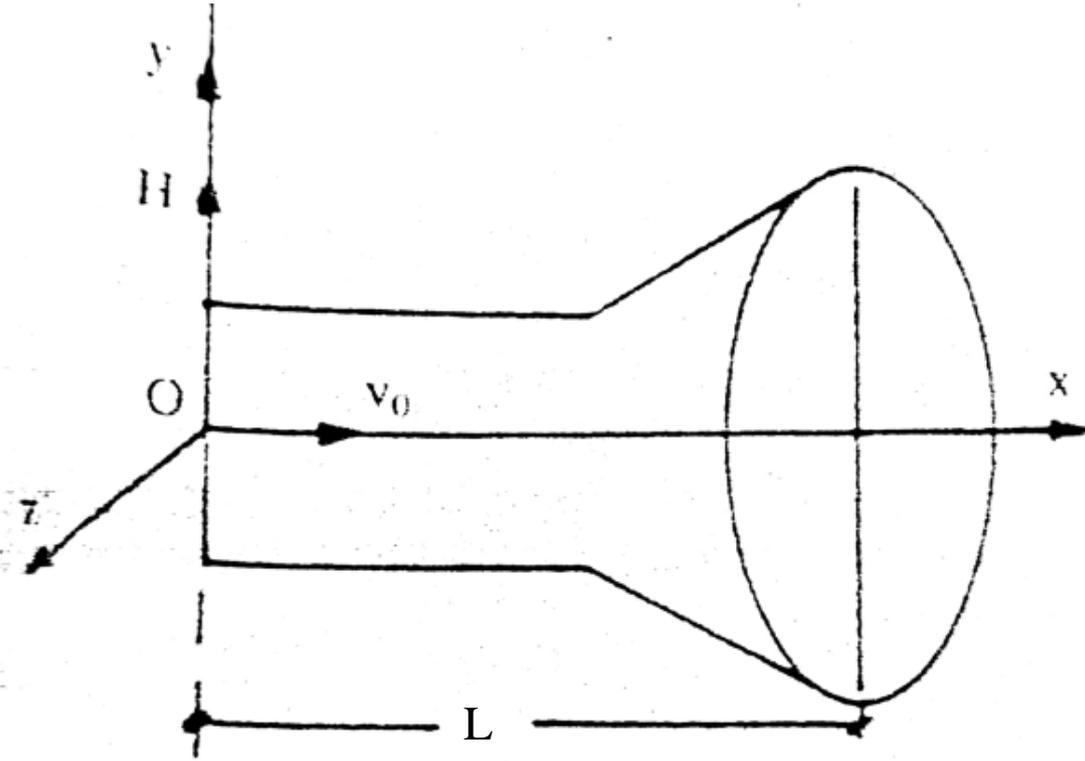


شكل 4-5

(4) مثال

أنبوية مهبط تشع الكترونات شحنة كل منها $(-e)$ وكتلته m وسرعته v_0 وموضوعة في مجال مغناطيسي منتظم $\vec{H} = H\vec{j}$. عين احداثيات موقع اصطدام الالكترون بالشاشة.

الحل :



شكل 5-5

معادلة حركة الجسيم هي :

$$m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}) = (-e) \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 0 & H & 0 \end{vmatrix}$$

$$\ddot{x} = \frac{eH}{m} z \quad (1)$$

$$\ddot{y} = 0 \quad (2)$$

$$\ddot{z} = -\frac{eH}{m} x \quad (3)$$

الشروط الابتدائية هي : عندما $t = 0$

$$\dot{x} = v_0, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = 0$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

بحل المعادلات التفاضلية (3) - (1) مع مراعاة الشروط الابتدائية نحصل على المعادلات البارامترية لمسار الجسيم :

$$x = \frac{mv_0}{eH} \sin\left(\frac{eH}{m}t\right) \quad (4)$$

$$y = 0 \quad (5)$$

$$z = \frac{mv_0}{eH} \left\{ \cos\left(\frac{eH}{m}t\right) - 1 \right\} \quad (6)$$

عندما يصطدم الإلكترون بشاشة الأنبوية فان $x = L$ ومن المعادلة (4) نحصل على :
 زمن وصول الجسيم للشاشة (screen) هو :

$$\therefore t_s = \frac{m}{eH} \sin^{-1}\left(\frac{LeH}{mv_0}\right)$$

$$L = \frac{mv_0}{eH} \sin\left(\frac{eH}{m}t_s\right)$$

وبالتعويض في (5), (6) نحصل على :

$$y_s = 0$$

$$z_s = \frac{mv_0}{eH} \left\{ \sqrt{1 - \left(\frac{LeH}{mv_0}\right)^2} - 1 \right\}$$

أي أن احداثيات موقع اصطدام الإلكترون بالشاشة هي : $(L, 0, z_s)$.

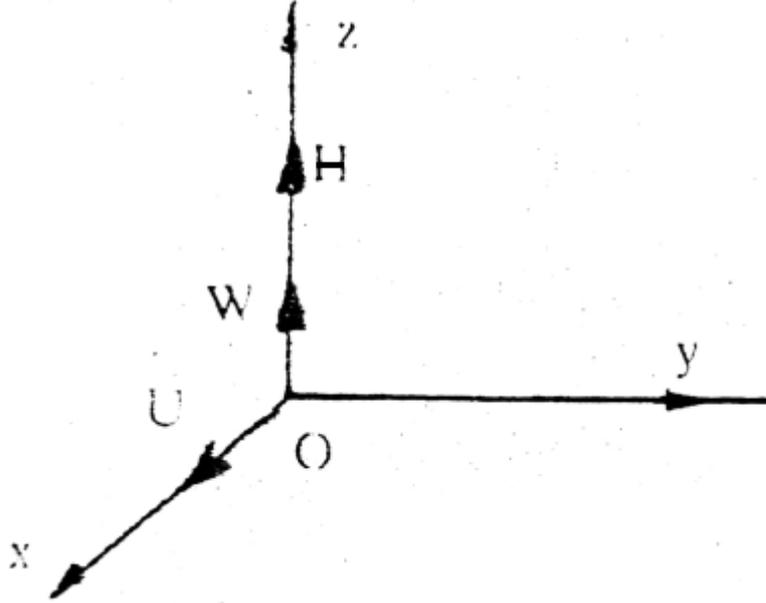
مثال (5) :

جسيم مشحون كتلته m وشحنته q يتحرك في مجال مغناطيسي منتظم $\vec{H} = H\vec{k}$.
 اذا قذف الجسيم من نقطة الأصل O بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0 = U\vec{i} + W\vec{k}$. أوجد المعادلات البارامترية لمسار الجسيم (اهمل وزن الجسيم) .

الحل :

معادلة الحركة للجسيم هي :

$$M (\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}) = q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & H \end{vmatrix}$$



شكل 5-6

$$\ddot{x} = \frac{qH}{m}y \quad (1)$$

$$\ddot{y} = -\frac{qH}{m}x \quad (2)$$

$$\ddot{z} = 0 \quad (3)$$

الشروط الابتدائية للحركة هي : عندما $t = 0$ فان

$$\dot{x} = U \quad \dot{y} = 0 \quad \dot{z} = W$$

$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0$$

بحل المعادلات التفاضلية (3) – (1) مع استخدام الشروط الابتدائية نحصل على المعادلات البارامترية لمسار الجسيم

$$x = \frac{mU}{qH} \sin\left(\frac{qH}{m}t\right) \quad (4)$$

$$y = \frac{mU}{qH} \left\{ \cos\left(\frac{qH}{m}t\right) - 1 \right\} \quad (5)$$

$$z = Wt \quad (6)$$

نفرض أن :

$$\Phi = \frac{qH}{m}t, \quad a = \frac{mU}{qH}, \quad b = \frac{mW}{qH}$$

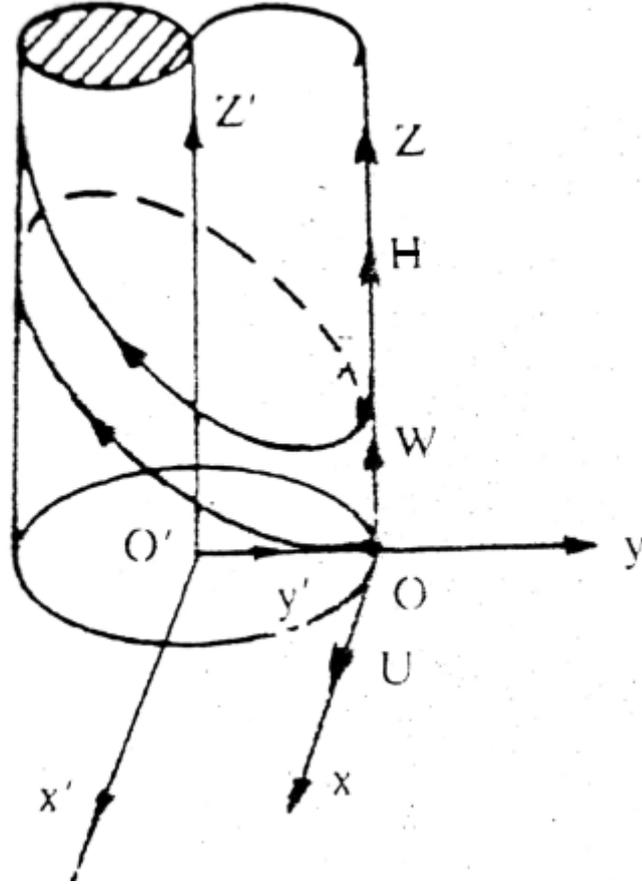
$$x = x', \quad y = y' - a, \quad z = z'$$

المعادلات البارامترية للجسيم تكون على الصورة :

$$x' = a \sin \Phi \quad (7)$$

$$y' = a \cos \Phi \quad (8)$$

$$z' = b\Phi \quad (9)$$



شكل 5-7

المعادلات (9) - (7) تمثل منحنى بريمي *circular helix* يقع على سطح أسطوانة

دائرية قائمة نصف قطرها a ومحورها المحور z' (اتجاه المجال المغناطيسي)

وزاوية المنحنى البريمي α حيث :

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} = \frac{W}{U}$$

وخطوته p حيث :

$$p = 2\pi a \tan \alpha = \frac{2\pi m W}{q H}$$

مثال (6) :

يبدأ جسيم كتلته m وشحنته q حركته من النقطة $A(0,a,0)$ بسرعة V في اتجاه المحور y في مجال مغناطيسي منتظم \vec{H} في اتجاه المحور x بحيث المستوى xoy يكون أفقياً . بأخذ تأثير الجاذبية الأرضية في الاعتبار أثبت أن حركة الجسيم حركة مستوية في المستوى yoz ويمكن تمثيلها هندسيا بدائرة نصف قطرها R حيث :

$$R = \frac{m^2 g}{q^2 H^2} + \frac{mV}{qH}$$

منتظمة مقدارها mg/qH وفي الاتجاه السالب له . عين مقدار المسافة a التي يجب أن يبدأ الجسيم من عندها لكي يتمكن من المرور بنقطة الأصل . متى يمر الجسيم بنقطة الأصل .

الحل :

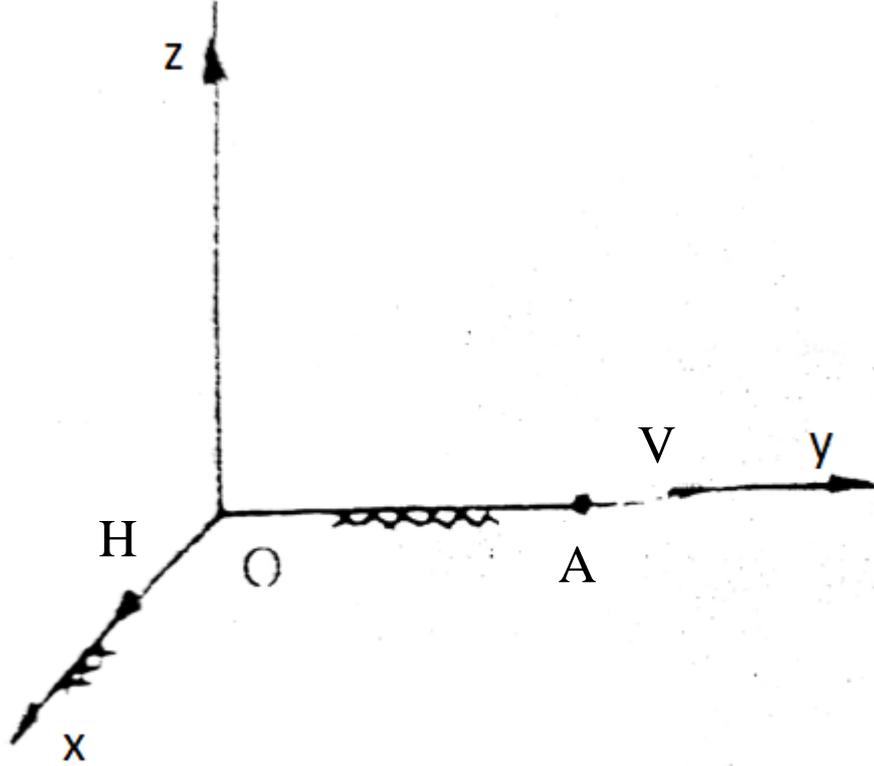
معادلة حركة الجسيم تكون بالصورة :

$$m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}) = -mg\vec{k} + q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ H & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\ddot{x} = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{y} = \frac{qH}{m} \dot{z} \quad (2)$$

$$\ddot{z} = -\left(g + \frac{qH}{m} \dot{y}\right) \quad (3)$$



شكل 5-8

الشروط الابتدائية هي : عندما $t = 0$

$$\dot{x} = 0 , \dot{y} = V , \dot{z} = 0$$

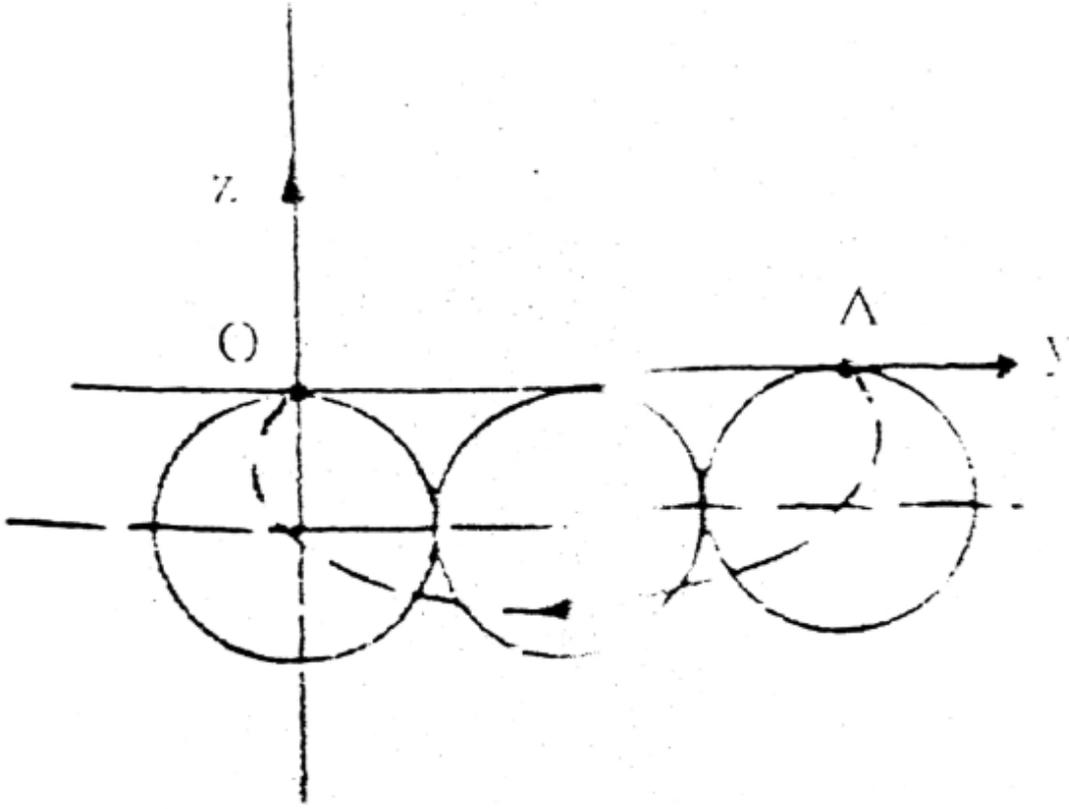
$$x = 0 , y = a , z = 0$$

بحل المعادلات التفاضلية (3) - (3) واستخدام أحوال البداية نحصل على المعادلات البارامترية لمسار الجسم بالصورة :

$$x = 0 \quad (4)$$

$$y = a - \frac{mg}{qH}t + \left(\frac{m^2g}{q^2H^2} + \frac{mV}{qH} \right) \sin \frac{qH}{m}t \quad (5)$$

$$z = \left(\frac{m^2g}{q^2H^2} + \frac{mV}{qH} \right) \left\{ \cos \frac{qH}{m}t - 1 \right\} \quad (6)$$



شكل 5-9

من المعادلة (4) يتضح أن الجسيم يتحرك في المستوى yoz ومن المعادلتين (5) , (6) نحصل على المعادلة الكارتيزية لمسار الجسيم على الصورة :

$$(y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2 \quad (7)$$

$$y_1 = a - \frac{mg}{qH}t, \quad \dot{y}_1 = -\frac{mg}{qH}$$

$$z_1 = -\left(\frac{m^2g}{q^2H^2} + \frac{mV}{qH}\right) = const, \quad \dot{z}_1 = 0$$

$$R = \frac{m^2g}{q^2H^2} + \frac{mV}{qH}$$

المعادلة (7) تعنى أنه يمكن تمثيل حركة الجسيم بحركة نقطة على دائرة نصف قطرها R ومركزها النقطة $o_1(y_1, z_1)$ ويتحرك المركز في المستوى yoz بسرعة منتظمة

مركباتها z, y أي أنها في اتجاه المحور y لأن $z_1 = 0$ ومسار المركز عبارة عن خط مستقيم .

عندما يمر الجسم بنقطة الأصل o في المستوى yoz فإنها تحقق معادلاته البارامترية (5) , (6) وكذلك المعادلة الكارتيزية (7)

$$\left(a - \frac{mg}{qH}t\right)^2 + \left(\frac{m^2g}{q^2H^2} + \frac{mV}{qH}\right)^2 = \left(\frac{m^2g}{q^2H^2} + \frac{mV}{qH}\right)^2$$

ومنها نحصل على زمن حركة الجسم

$$t = \frac{qHa}{mg} \quad (8)$$

ثم بالتعويض بهذا الزمن في المعادلتين (5) , (6) نحصل على :

$$\sin \frac{q^2H^2a}{m^2g} = 0 \quad (9)$$

$$\cos \frac{q^2H^2a}{m^2g} = 1 \quad (10)$$

بحل المعادلتين الملتئتين (9) , (10) نحصل على :

$$\frac{q^2H^2a}{m^2g} = 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$a = 2n\pi g \left(\frac{m}{qH}\right)^2$$

والزمن المناظر نحصل عليه من المعادلة (8) :

$$t = \frac{2n\pi m}{qH}$$

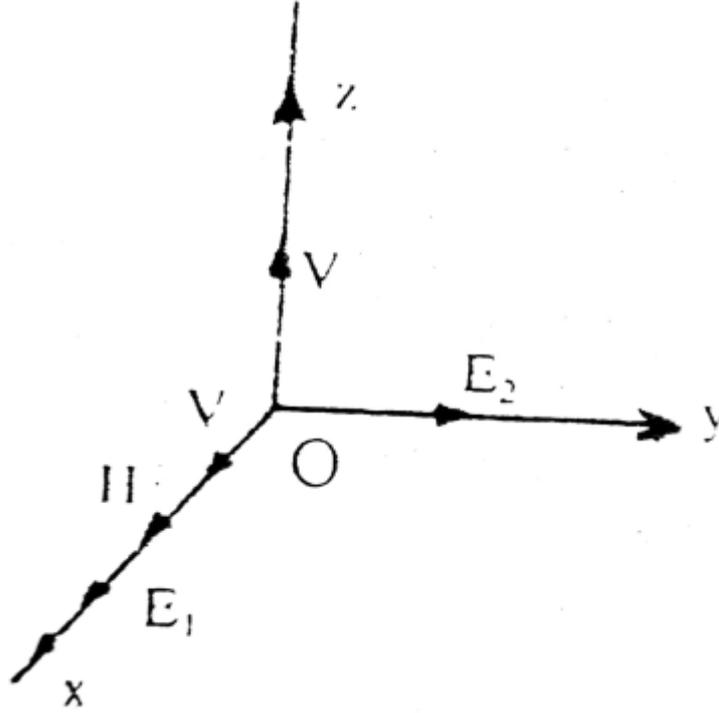
مثال (7) :

جسيم كتلته m وشحنته q موضوع في مجال كهربى منتظم شدته $\vec{E} = E_1\vec{i} + E_2\vec{j}$ ومجال مغناطيسى منتظم \vec{H} في اتجاه المحور x . بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل بسرعة $\vec{v}_0 = V(\vec{i} + \vec{k})$ عين المعادلات البارامترية للمسار .

الحل :

معادلة حركة الجسيم الاتجاهية هي :

$$m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}) = q(E_1\vec{i} + E_2\vec{j}) + q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ H & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



شكل 5-10

$$\ddot{x} = \frac{qE_1}{m} \quad (1)$$

$$\ddot{y} = \frac{q}{m}(E_2 + Hz\dot{z}) \quad (2)$$

$$\ddot{z} = -\frac{qH}{m}y \quad (3)$$

أحوال بداية الحركة هي : عندما $t = 0$

$$\dot{x} = V, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = V$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

بحل المعادلات التفاضلية (3) - (1) مع مراعاة أحوال البداية نحصل على المعادلات البارامترية لمسار الجسيم بالصورة :

$$x = Vt + \frac{qE_1}{2m}t^2 \quad (4)$$

$$y = \frac{m}{qH^2}(E_2 + VH) \left\{ 1 - \cos \frac{qH}{m}t \right\} \quad (5)$$

$$z = -\frac{E_2}{H}t + \frac{m}{qH^2}(E_2 + VH) \sin \frac{qH}{m}t \quad (6)$$

مثال (8) :

يتحرك الكترون كتلته m وشحنته q في مجالين منتظمين أحدهما كهربى $\vec{E} = E\vec{j}$

والآخر مغناطيسى $\vec{H} = H\vec{k}$ بدأ الالكترتون حركته من نقطة الأصل بسرعة $\vec{v}_0 = \frac{E}{H}\vec{i}$ أثبت أن الالكترتون سوف يتحرك بسرعة منتظمة في اتجاه المحور x .

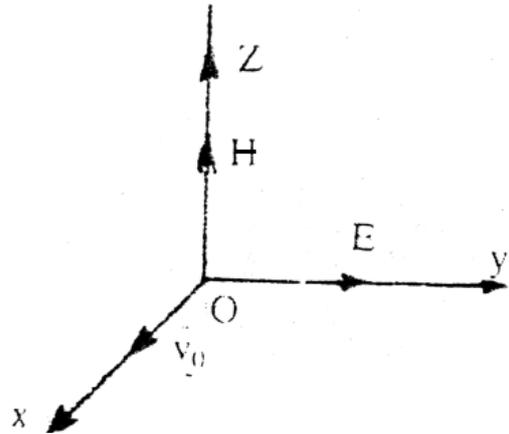
الحل :

القوة التي تؤثر على الجسيم في بداية الحركة هي

$$\vec{F} = (-e)\vec{E} + (-e)(\vec{v} \wedge \vec{H})$$

$$= -eE\vec{j} - e \left(\frac{E}{H}\vec{i} \wedge H\vec{k} \right)$$

$$= -eE\vec{j} + eE\vec{j} = \vec{0}$$



شكل 5-11

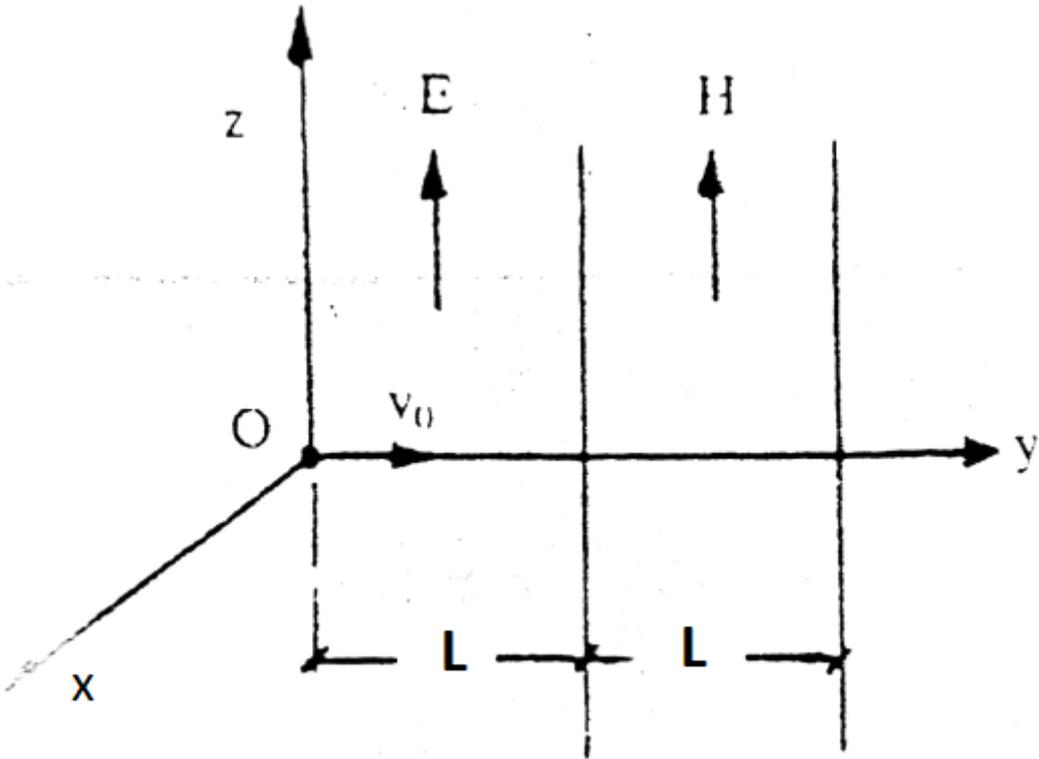
أي أن محصلة القوى المؤثرة على الالكترتون تنعدم في لحظة الابتداء وبالتالي يستمر الالكترتون في الحركة بسرعة منتظمة \vec{v}_0 في خط مستقيم على المحور ox (قانون نيوتن الأول) تستخدم هذه الخاصية في جهاز منتقى السرعة *velocity selector* (انظر التطبيقات).

مثال (9) :

يبدأ جسيم كتلته m وشحنته q حركته من نقطة الأصل o بسرعة $\vec{v}_0 = v_0 \vec{j}$ تحت تأثير مجال كهربى منتظم شدته $\vec{E} = E \vec{k}$ في المنطقة $0 < y < L$ وعند خروجه من المجال الكهربى يتعرض لتأثير مجال مغناطيس منتظم شدته $\vec{H} = H \vec{k}$ في المنطقة $L < y < 2L$ فاذا كانت المسافة L تحقق $L = \frac{mv_0}{qH}$. عين موقع الجسيم عند خروجه من المجال الكهربى ومن المجال المغناطيسى (اهمل تأثير الجاذبية الأرضية) .

الحل :

دراسة حركة الجسيم في المجال الكهربى $0 < y < L$:



شكل 5- 12

معادلة حركة الجسيم هي :

$$m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}) = q(E\vec{k})$$

$$\ddot{x} = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{y} = 0 \quad (2)$$

$$\ddot{z} = \frac{qE}{m} \quad (3)$$

أحوال البداية : عندما $t = 0$

$$\dot{x} = 0 , \dot{y} = v_0 , \dot{z} = 0$$

$$x = 0 , y = 0 , z = 0$$

بحل المعادلات التفاضلية (3) – (1) مع استخدام الشروط الابتدائية نحصل على :

$$\dot{x} = 0 , x = 0 \quad (4)$$

$$\dot{y} = v_0 , y = v_0 t \quad (5)$$

$$\dot{z} = \frac{qE}{m} , z = \frac{qE}{2m} t^2 \quad (6)$$

أي أن الجسم يتحرك في المستوى yoz والمعادلة الكارتيزية لمسار الجسم في المجال الكهربى :

$$z = \frac{qE}{2mv_0^2} y^2$$

ويغادر الجسم المجال الكهربى عندما وبالتعويض في المعادلات (6) – (4) نحصل على زمن الحركة واحداثيات موقع الجسم وعلى مركبات سرعته عندئذ بالصورة :

$$t = \frac{L}{v_0}$$

$$\dot{x} = 0 , x = 0$$

$$\dot{y} = v_0 , y = L = \frac{mv_0}{qH}$$

$$\dot{z} = \frac{qEL}{mv_0} = \frac{E}{H} , z = \frac{qE}{2mv_0^2} L^2 = \frac{mE}{2qH^2}$$

دراسة حركة الجسم في المجال المغناطيسى $L < y < 2L$:

معادلة حركة الجسم تكون

$$m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}) = q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & H \end{vmatrix}$$

$$\ddot{x} = \frac{qH}{m} \dot{y} \quad (7)$$

$$\ddot{y} = -\frac{qH}{m} \dot{x} \quad (8)$$

$$\ddot{z} = 0 \quad (9)$$

وأحوال البداية هي عندما $t = 0$

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = v_0, \quad \dot{z} = \frac{E}{H}$$

$$x = 0, \quad y = L = \frac{mv_0}{qH}, \quad z = \frac{mE}{2qH^2}$$

بحل المعادلات التفاضلية (9) - (7) مع مراعاة أحوال البداية نحصل على المعادلات البارامترية لمسار الجسيم في المجال المغناطيسي بالصورة:

$$x = \frac{mv_0}{qH} \left(1 - \cos \frac{qH}{m} t \right)$$

$$y = \frac{mv_0}{qH} \left(1 + \sin \frac{qH}{m} t \right)$$

$$z = \frac{E}{H} t + \frac{mE}{2qH^2}$$

ويغادر الجسيم المجال المغناطيسي عندما $y = 2L$ وبالتعويض في المعادلات (12) -

(10) نحصل على زمن الحركة واحداثيات موقع الجسيم المناظرة:

$$t = \frac{m\pi}{2qH}$$

$$x = \frac{mv_0}{qH}$$

$$y = 2L = \frac{2mv_0}{qH}$$

$$z = \frac{(1 + \pi)mE}{2qH^2}$$

مثال (10) :

جسيم مشحون كتلته m وشحنته q يتحرك في مجال كهربى منتظم شدته $\vec{E} = E\vec{j}$ ومجال مغناطيسى شدته $\vec{H} = H\vec{k}$. اذا تحرك الجسيم من نقطة الأصل o من السكون. أوجد المعادلات البارامترية لمسار الجسيم (اهمل وزن الجسيم).
الحل :

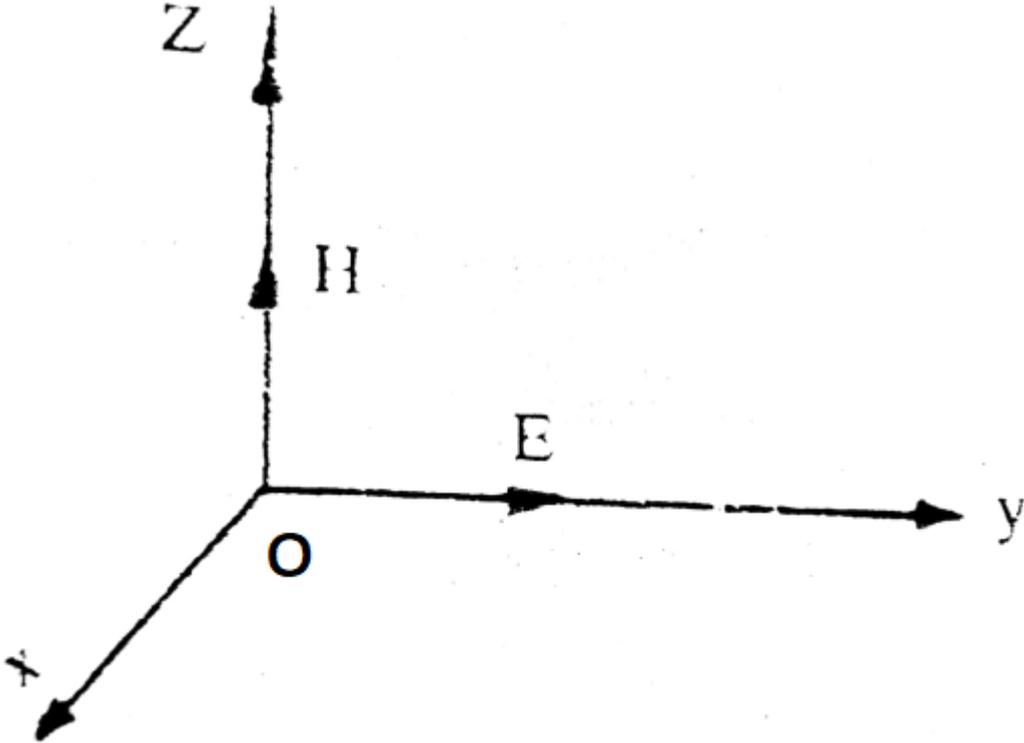
معادلة حركة الجسيم هي :

$$m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}) = q(E\vec{j}) + q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & H \end{vmatrix}$$

$$\ddot{x} = \frac{qH}{m} y \quad (1)$$

$$\ddot{y} = \frac{qE}{m} - \frac{qH}{m} x \quad (2)$$

$$\ddot{z} = 0 \quad (3)$$



شكل 5- 13

أحوال بداية الحركة هي عندما $t = 0$

$$\dot{x} = 0 , \dot{y} = 0 , \dot{z} = 0$$

$$x = 0 , y = 0 , z = 0$$

بحل المعادلات التفاضلية (3) - (1) ومراعاة أحوال البداية نحصل على المعادلات البارامترية لمسار الجسيم بالصورة :

$$x = \frac{mE}{qH^2} \left(\frac{qH}{m} t - \sin \frac{qH}{m} t \right) \quad (4)$$

$$y = \frac{mE}{qH^2} \left(1 - \cos \frac{qH}{m} t \right) \quad (5)$$

$$z = 0 \quad (6)$$

من المعادلة (6) يتضح أن الجسيم يتحرك في المستوى xoy . نفرض أن :

$$\theta = \frac{qH}{m} t , \quad a = \frac{mE}{qH^2}$$

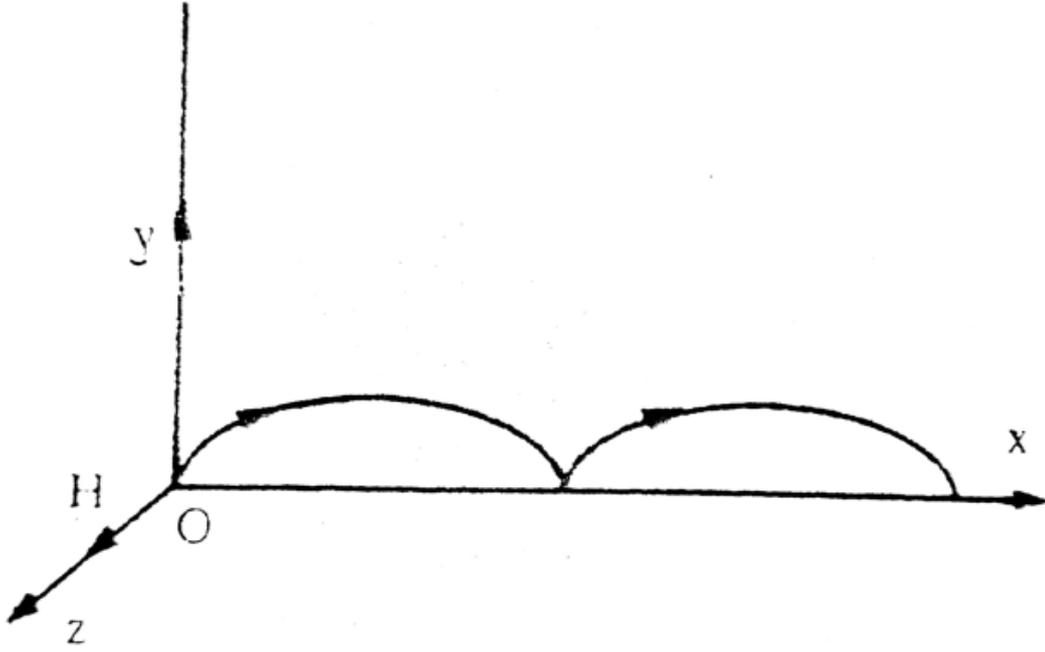
فان المعادلات البارامترية لحركة الجسيم تكون على الصورة :

$$x = a(\theta - \sin \theta) \quad (7)$$

$$y = a(1 - \cos \theta) \quad (8)$$

$$z = 0 \quad (9)$$

المعادلات (9) - (7) تمثل منحنى سيكلويد *Cycloid* في المستوى xoy .



شكل 5- 14

نصف قطر الدائرة المولدة a والزمن الذي يأخذه الجسم في رسم قوس السيكلويد من ناب الى ناب t_{OA} (successive cusps)

$$\therefore \theta = \frac{qH}{m}t \quad \therefore t_{OA} = \frac{2\pi m}{qH}$$

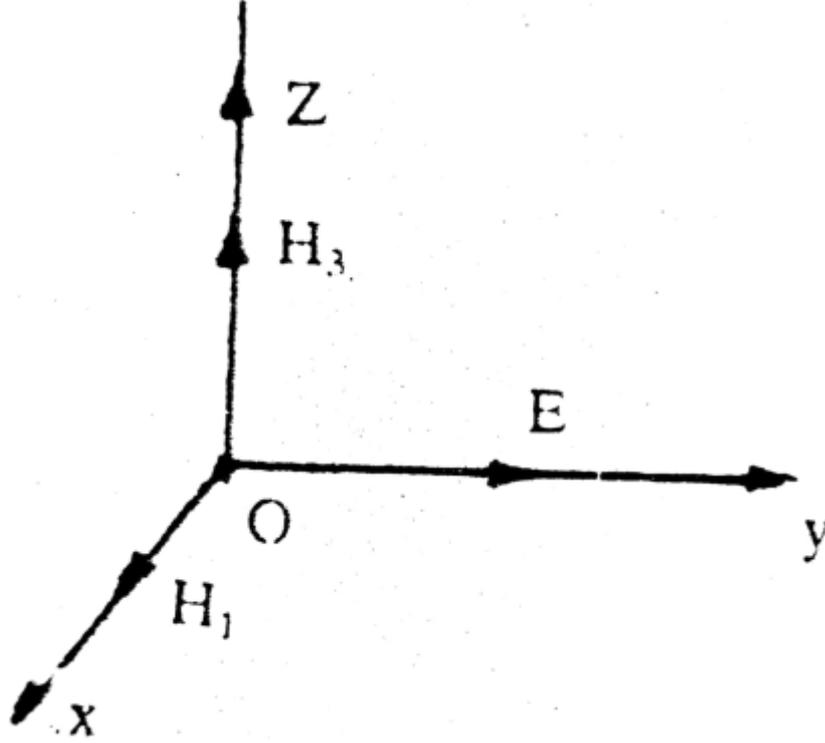
مثال (11) :

جسيم كتلته m وشحنته q يتحرك تحت تأثير مجال كهربى منتظم شدته E في اتجاه محور y ومجالين مغناطيسيين شدة الأول H_1 في اتجاه محور x والآخر شدته H_3 في اتجاه محور z . اذا بدأ الجسم حركته من سكون عند نقطة الأصل . أثبت أنه يمكن تمثيل حركة الجسم بحركة نقطة على سطح كرة مركزها الهندسى يتحرك بسرعة منتظمة في مستوى مواز للمستوى xoz .

الحل :

معادلة حركة الجسيم هي :

$$m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}) = qE\vec{j} + q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ H_1 & 0 & H_3 \end{vmatrix}$$



شكل 5-15

$$\ddot{x} = \frac{qH_3}{m} \dot{y} \quad (1)$$

$$\ddot{y} = \frac{q}{m} (E + H_1 \dot{z} - H_3 \dot{x}) \quad (2)$$

$$\ddot{z} = -\frac{qH_1}{m} \dot{y} \quad (3)$$

وأحوال البداية هي : عندما $t = 0$

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = 0$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

بحل المعادلات التفاضلية (3) - (1) ومراعاة أحوال البداية نحصل على المعادلات

البارامترية لمسار الجسيم على الصورة :

$$x = \frac{H_3 E}{H^2} \left\{ t - \frac{m}{qH} \sin \frac{qH}{m} t \right\} \quad (4)$$

$$y = \frac{mE}{qH^2} \left\{ 1 - \cos \frac{qH}{m} t \right\} \quad (5)$$

$$z = -\frac{H_1 E}{H^2} \left\{ t - \frac{m}{qH} \sin \frac{qH}{m} t \right\} \quad (6)$$

$$H^2 = H_1^2 + H_3^2 \quad (7)$$

من المعادلات (4) - (6) نحصل على المعادلة الكارتيزية للمسار على الصورة :

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2 \quad (8)$$

حيث

$$x_1 = \frac{H_3 E}{H^2} t, \quad \dot{x}_1 = \frac{H_3 E}{H^2}$$

$$y_1 = \frac{mE}{qH^2} = \text{const.}, \quad \dot{y}_1 = 0$$

$$z_1 = -\frac{H_1 E}{H^2} t, \quad \dot{z}_1 = \frac{H_1 E}{H^2}$$

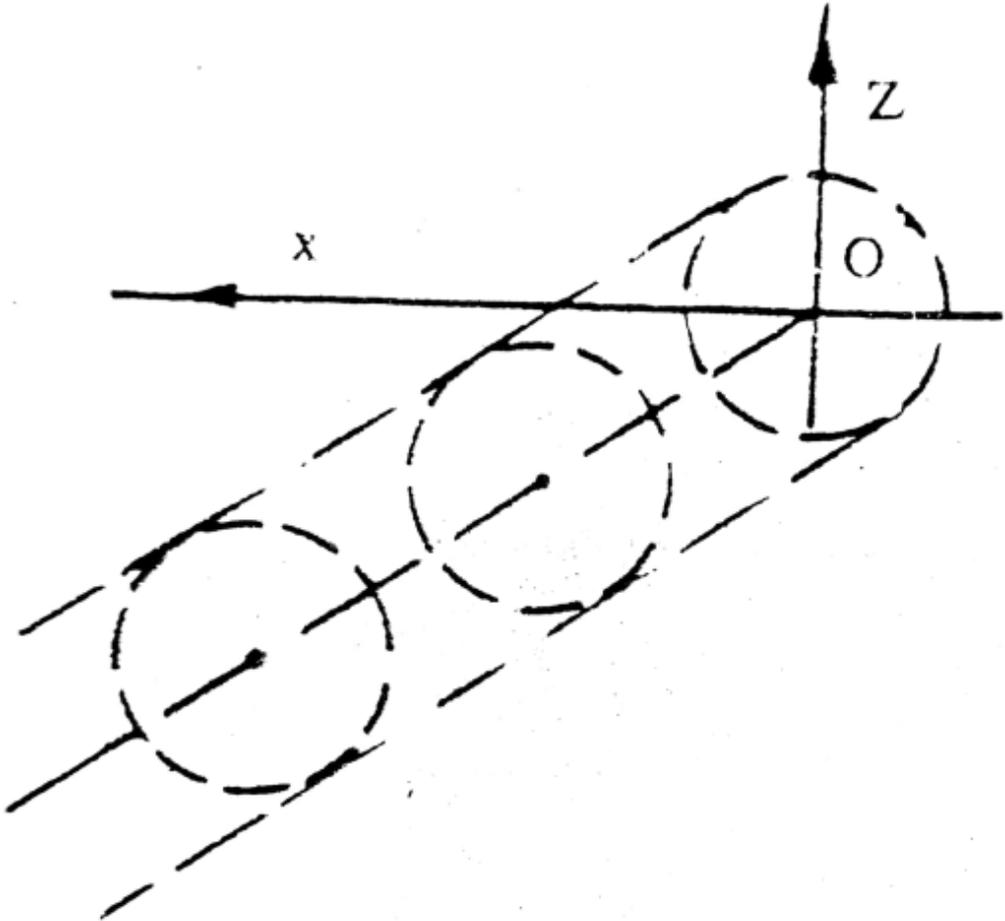
$$R = \frac{mE}{qH^2}$$

المعادلة (8) تبين أنه يمكن تمثيل حركة الجسيم بحركة نقطة على سطح كرة نصف قطرها R ومركزها $o_1(x_1, y_1, z_1)$ ويتحرك المركز بسرعة مركباتها $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$ ويلاحظ أن المركز

يتحرك في مستوى يوازي المستوى xoz والذي يبعد عنه مسافة ثابتة $y_1 = R$ ومسار

مركز الكرة خط مستقيم معادلته الكارتيزية (العلاقة بين x_1, z_1) تكون بالصورة :

$$z_1 = -\frac{H_1}{H_3} x_1$$



شكل 5-16

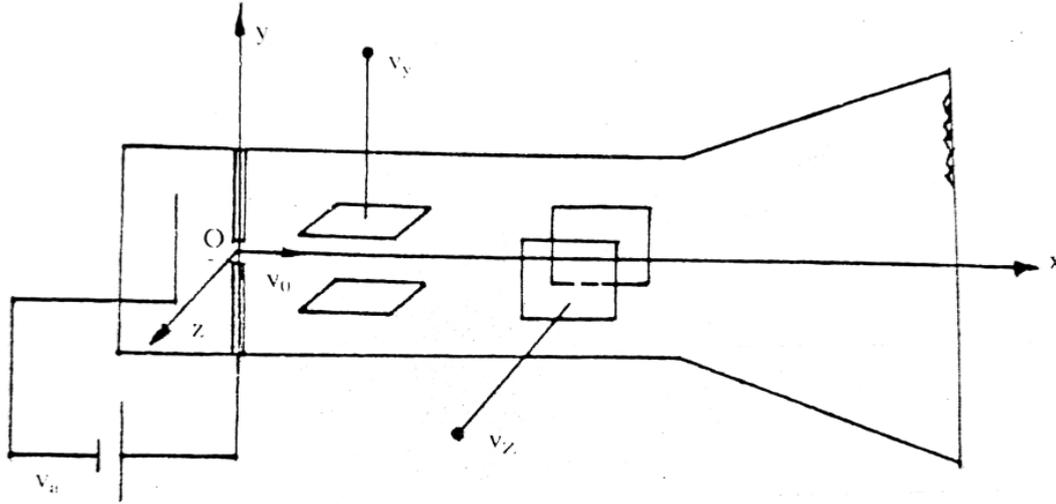
تطبيقات Applications

سندرس فيما يلي بعض الأجهزة الألكترونية التي تعتمد على حركة الجسيمات المشحونة في المجالات الكهربائية والمغناطيسية.



أ – راسم الذبذبات Cathode ray oscillograph

يتكون راسم الذبذبات من أنبوبة زجاجية يتوسطها شعاع الكترونات التي تقابل شاشة فسفورية . ينحرف الشعاع الألكتروني تحت تأثير المجال الكهربى وتتحرك تبعاً لذلك النقطة المضيئة على الشاشة .

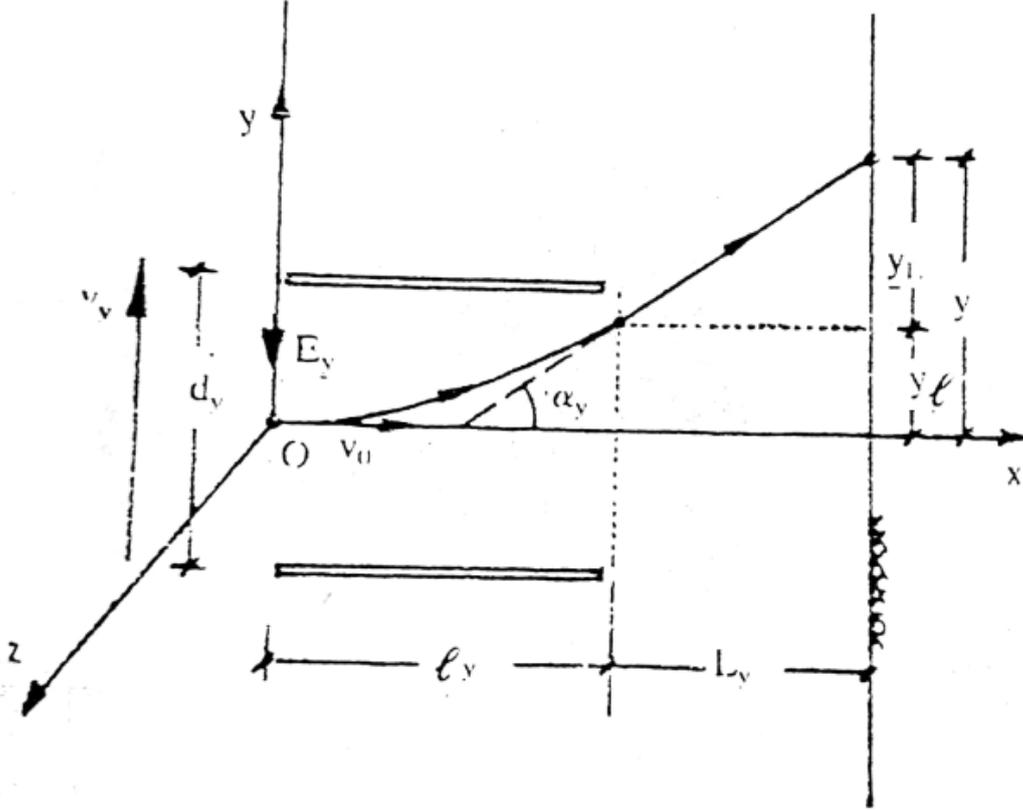


شكل 5-17

عندما يسخن المهبط Cathode تشع منه الكترونات تتحرك في اتجاه محور الأنبوبة (محور x) بسرعة منتظمة v_0 تتناسب مع فرق الجهد V_a وهناك نوعين من ألواح الانحراف . ألواح الانحراف الرأسى vertical deflecting plates وهما لوحين أفقيين بينهما فرق جهد V_y وينشأ عنه مجال كهربى شدته E_y يسبب الانحراف الرأسى لشعاع الكترونات عند مروره بين اللوحين الأفقيين ($E_y = \frac{V_y}{d_y}$ حيث d_y هي المسافة بين لوحى الانحراف الرأسى) . ألواح الانحراف الأفقى horizontal deflecting plates وهما لوحين رأسيين بينهما فرق جهد V_z وينشأ عنه مجال كهربى شدته E_z يسبب الانحراف الأفقى

لشعاع الالكترونات عند مروره بين اللوحين الرأسيين . ($E_z = \frac{V_z}{d_z}$) حيث d_z هي المسافة بين لوحى الانحراف الأفقى) .

نعتبر الآن حركة الالكترونات بين ألواح الانحراف الرأسى :



شكل 5- 18

تتحرك الالكترونات بسرعة v_0 في اتجاه محور x (محور الانبوبة) وشدة المجال الكهربى بين اللوحين هو E_y واتجاهه الى أسفل . في فترة وجود الالكترون بين اللوحين فان معادلة حركة الالكترون هي :

$$m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}) = -e(-E_y\vec{j})$$

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = \frac{eE_y}{m}, \quad \ddot{z} = 0 \quad (1) - (3)$$

أحوال بداية الحركة هي عندما $t = 0$

$$\dot{x} = v_0, \dot{y} = 0, \dot{z} = 0$$

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

بحل المعادلات التفاضلية (3) – (1) نحصل على المعادلات البارامترية لمسار الإلكترون

$$x = v_0 t, y = \frac{eE_y}{2m} t^2, z = 0$$

أي أن الإلكترون يتحرك في المستوى xoy ومعادلته الكارتيزية هي :

$$y = \frac{eE_y}{2mv_0^2} x^2 \quad (\text{قطع مكافئ})$$

الانحراف الرأسى y_ℓ لمسار الإلكترون عند مغادرته منطقة اللوحين نحصل عليها بالتعويض

$$x = \ell_y \text{ عن}$$

$$\therefore y_\ell = \frac{eE_y}{2mv_0^2} \ell_y^2$$

بعد خروج الإلكترون من بين اللوحين يواصل حركته في خط مستقيم ميله α_y يمس مساره السابق (قطع مكافئ) حتى يصطدم بشاشة فسفورية فيضئ موقع الإلكترون عليها لفترة قصيرة بحيث يراه المشاهد من الخارج . ولحساب الزاوية α_y نحسب ميل المماس لمسار الإلكترون (قطع مكافئ) عندما $x = \ell_y$ وعلى ذلك فإن :

$$\tan \alpha_y = \frac{eE_y}{mv_0^2} \ell_y$$

ويكون الانحراف خلال المسافة L_y الى أن يصطدم الإلكترون بالشاشة هو :

$$y_L = L_y \tan \alpha_y = \frac{eE_y}{mv_0^2} \ell_y L_y$$

ويكون الانحراف الكلى

$$y = y_\ell + y_L = \left(\frac{e\ell_y^2}{2mv_0^2} + \frac{e\ell_y L_y}{mv_0^2} \right) E_y$$

$$y = C_y E_y$$

حيث C_y ثابت يعتمد على خواص الأنبوبة . وعلى هذا فلو أطلق تيار مستمر من الالكترونات بسرعة v_0 فانه يصيب الشاشة في نقطة على ارتفاع y من محور الجهاز محدثا نقطة مضيئة ويتوقف موضع النقطة المضيئة y على شدة المجال E_y وهذا بدوره يتوقف على فرق الجهد بين ألواح الانحراف الرأسى V_y .

$$y = C_y E_y = C_y \frac{V_y}{d_y} = K_y V_y \quad , \quad K_y = \frac{C_y}{d_y}$$

بالمثل بالنسبة لألواح الانحراف الأفقى فانهما يجعلان الالكترون ينحرف في اتجاه عمودى عليهما أي في اتجاه محور تبعا للمعادلة :

$$z = C_z E_z = C_z \frac{V_z}{d_z} = K_z V_z \quad , \quad K_z = \frac{C_z}{d_z}$$

وبالنسبة لألواح الانحراف الرأسى وألواح الانحراف الأفقى معا فان حركة النقطة المضيئة على الشاشة تتعين بالمعادلتين :

$$y = C_y E_y = K_y V_y$$

$$z = C_z E_z = K_z V_z$$

مثال (12) :



في جهاز راسم الذبذبات اذا كان جهدى الانحراف هما :

$$V_y = A \sin \omega t \quad , \quad V_z = B \cos \omega t$$

حيث A, B, ω ثوابت . أوجد معادلة المسار على الشاشة .

الحل :

المعادلات البارامترية للمسار هي :

$$y = K_y V_y = K_y A \sin \omega t$$

$$z = K_z V_z = K_z B \cos \omega t$$

بحذف البارامتر t بينهما نحصل على :

$$\frac{y^2}{(K_y A)^2} + \frac{z^2}{(K_z B)^2} = 1$$

وهى معادلة قطع ناقص تظهر على الشاشة كمنحنى مضى .

مثال (13) :

في جهاز راسم الذبذبات اذا كان جهدي الانحراف هما :

$$V_y = A \sin \omega t \quad , \quad V_z = B \sin 2\omega t$$

حيث ثوابت . ما هي الصورة التي تظهر على الشاشة .

الحل :

المعادلات البارامترية للمسار هي :

$$y = K_y V_y = K_y A \sin \omega t$$

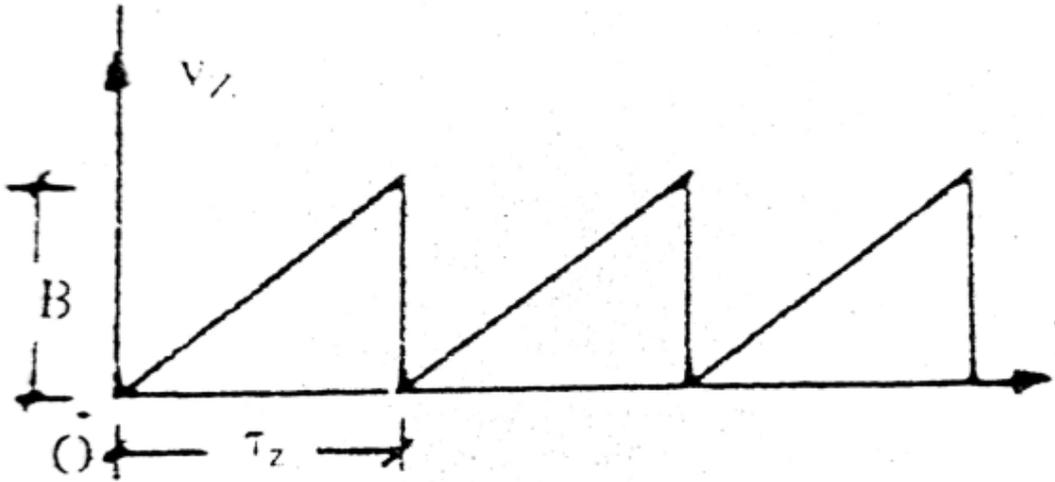
$$z = K_z V_z = K_z A \sin 2\omega t$$

بحذف البارامتر t بينهما نحصل على :

$$z = 2 \frac{K_z B}{K_y A} y \sqrt{1 - \frac{y^2}{K_y^2 A^2}}$$

ويلاحظ أن الزمن الدوري $\tau_y = \frac{2\pi}{\omega}$ والزمن الدوري $\tau_z = \frac{\pi}{\omega}$ أي أن $\tau_y = 2\tau_z$ أي أنه

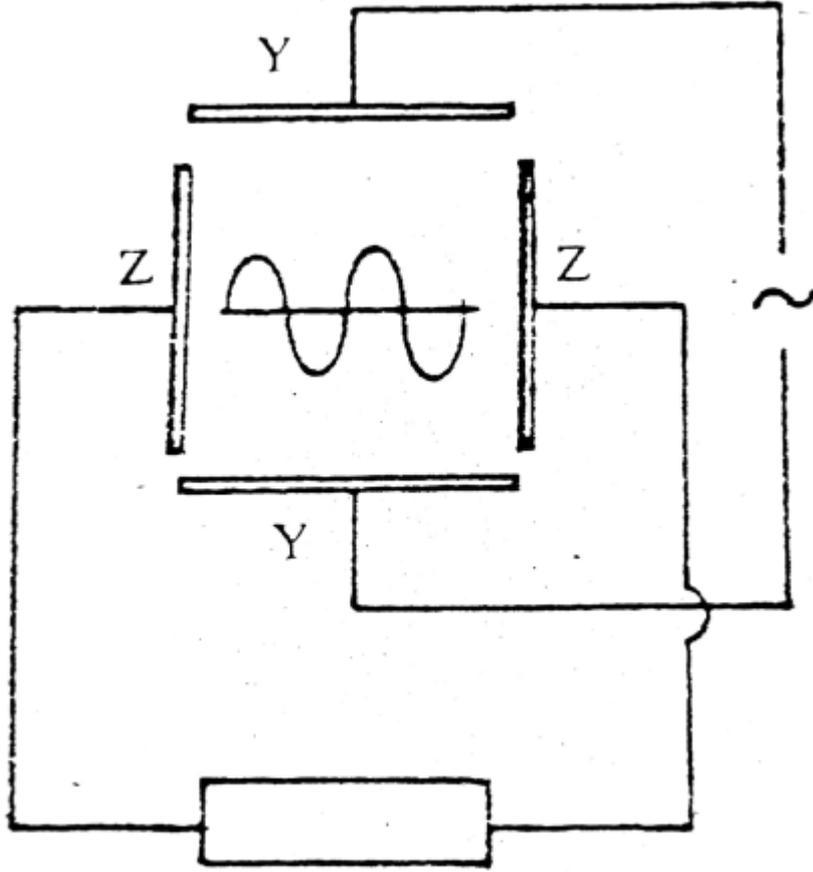
يكون لدينا ذبذبتان كاملتان في الاتجاه z لكل ذبذبة واحدة في اتجاه y .



شكل 5- 19

وإذا اختلف التردد الزاوي للجهد V_y عنه للجهد العمودي V_z أمكن الحصول على ما يسمى بأشكال " ليساجو " على الشاشة . وعلى العموم اذا كانت V_z معلومة فان V_y يمكن معرفتها

من الأشكال المرسومة على شاشة الأنبوبة . في الاستخدام العملي لجهاز راسم الذبذبات يعطى على شكل أسنان المنشار saw tooth مما يجعل الالكترون ينحرف في الاتجاه الموجب لمحور Z فقط.



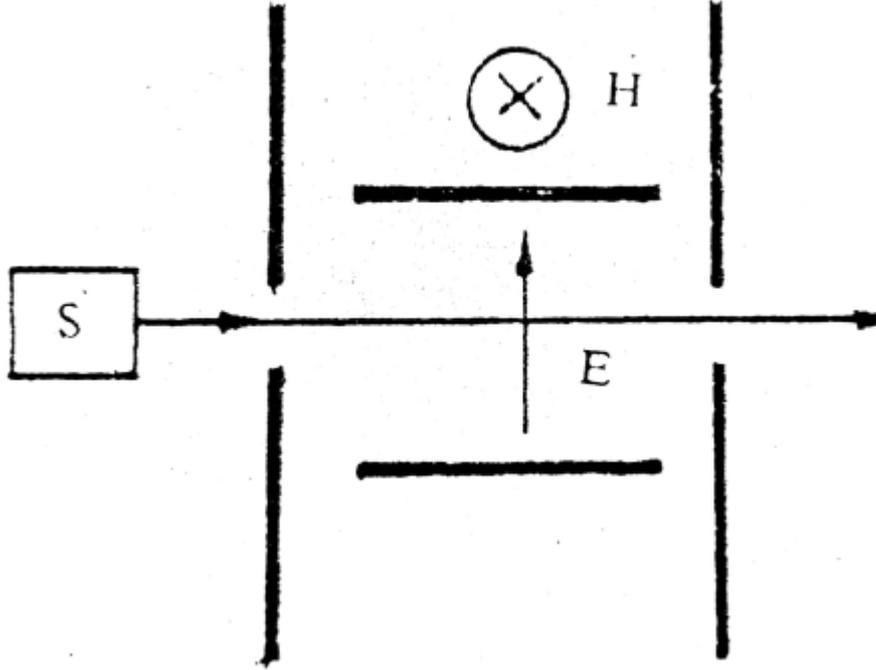
شكل 5- 20

هذا ويوضح الجهد المطلوب دراسته V_y على اللوحين الآخرين فاذا كانت دورية فانه يمكن بضبط تردد V_z تكوين صورة ثابتة لأشكال الشاشة تعيننا على تفسير المجال المجهول .
الجهد V_z المعروف يعرف بجهد التوقيت time voltage وتثبت الصورة على الشاشة اذا كان الزمن الدوري لجهد التوقيت τ_z يساوى الزمن الدوري للجهد المجهول .

ب - منتقى السرعة velocity Selector



تكون غالبية الجسيمات المشحونة الصادرة من منابع الاشعاعات ذات سرع مختلفة ولهذا يستعمل جهاز منتقى السرعة للحصول على حزمة من الجسيمات المشحونة ذات سرعة واحدة تكون ذات فائدة وأهمية في الدراسات والأبحاث العملية .



شكل 5- 21

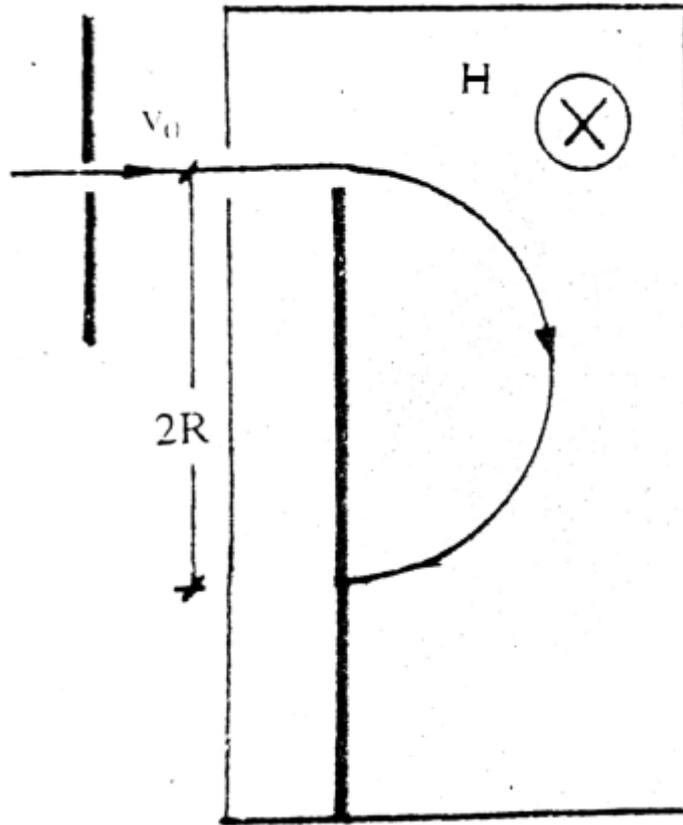
يتكون الجهاز من حاجزين متقويين على استقامة واحدة وبين الحاجزين يوجد مجال كهربى منتظم \vec{E} ومجال مغناطيسى \vec{H} عمودى عليه . ويوضع منبع اشعاعات S أمام ثقب أحد هذين الحاجزين (المدخل) . يمر من المدخل حزمة من الجسيمات المشحونة السريعة وهذه الجسيمات تخضع لتأثير قوتين كهربية ثابتة ومغناطيسية تبعا لسرعة الجسيم وشدة المجال \vec{H} . اذا وجه المجال المغناطيسى بالجهة التي يتولد منها قوة معاكسة للقوة الكهربائية وكانت القوتان متساويتين فان محصلتهما تكون منعدمة , وعليه فان الجسيم ذو السرعة المناظرة هو الوحيد الذى يكمن خاضعا لمثل هذه القوة المحصلة المنعدمة والذى لا يعانى أي انحراف فيخرج من ثقب الحاجز المقابل (المخرج) . أي جسيم آخر يتحرك بسرعة أخرى يكون متأثرا بقوة أكبر من أو أقل من qvH ويكون هناك محصلة للقوة الكهربائية والمغناطيسية تؤدي الى انحراف

مسار الجسيم وعدم مروره من المخرج . سرعة الجسيم الخارج نحصل عليها من تساوى القوة الكهربائية والقوة المغناطيسية .

$$qE = qvH \quad \therefore v = \frac{E}{H}$$

ج - مطياف الكتلة (spectrograph) Mass spectrometer

هو جهاز يقياس بواسطته نسبة شحنة جسيم الى كتلته كما أنه يستخدم في الكشف عن النظائر (isotopes) المختلفة . ويعمل هذا الجهاز كما يلى :



شكل 5- 22

تؤخذ حزمة جسيمات وحيدة السرعة من منتقى السرعة velocity selector وتدخل من فتحة

في صندوق مفرغ من الهواء وموضوع في مجال مغناطيسي \vec{H} عمودى على اتجاه حزمة الجسيمات وعندئذ تنحرف هذه الجسيمات وتتحرك في مسار دائرى . ويوضع في طريق هذه الجسيمات المنحرفة من جانب الصندوق لوح حساس يوازي مستوى المجال المغناطيسي حيث يكشف طول قطر الدائرة الذى بمعرفته تصبح النسبة بين الشحنة والكتلة معلومة وذلك لأنه من قانون نيوتن وقانون لورنتز نحصل على :

$$\frac{mv^2}{R} = qvH \quad \therefore \quad \frac{q}{m} = \frac{v}{RH}$$

ومن منتقى السرعة

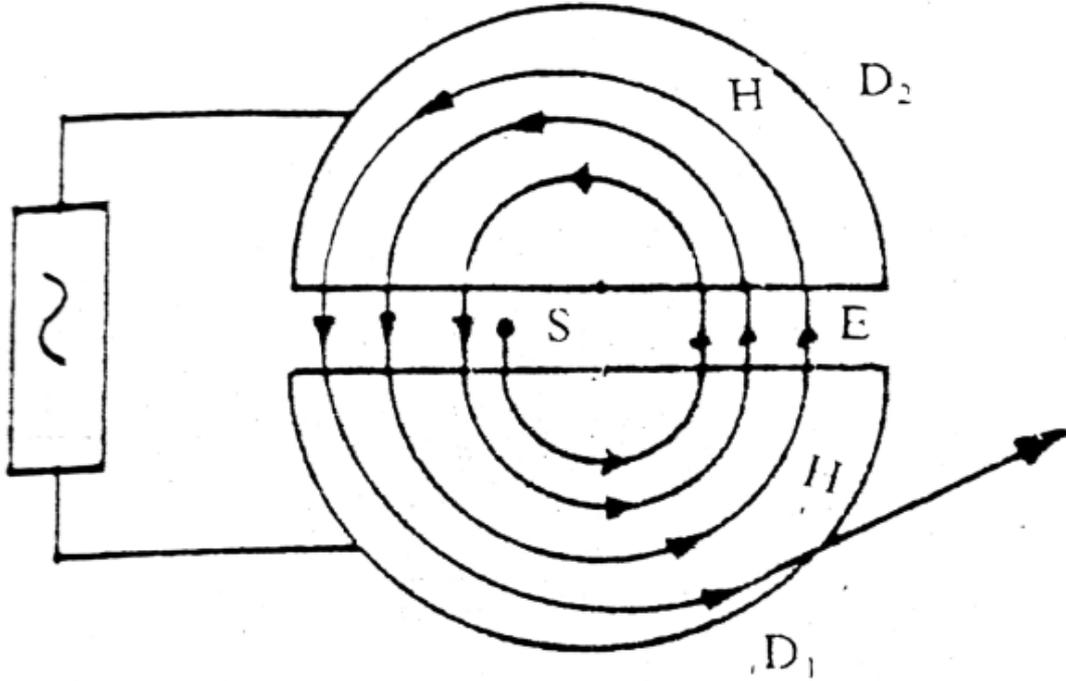
$$v = \frac{E}{H}$$

$$\therefore \quad \frac{q}{m} = \frac{E}{RH^2}$$

ومن هذه المعادلة تتعين النسبة بين الشحنة والكتلة للجسيم وذلك بقياس نصف القطر R لدائرة مسار الجسيم . ويمكن حساب الكتلة اذا علم مقدار الشحنة ولذلك سمي بمطياف الكتلة . وتختلف النسبة q/m لنظائر العنصر الواحد ويختلف تبعاً لهذا نصف قطر دائرة المسار وبذلك يمكن الكشف عن النظائر .

د - السيكلترون Cyclotron

يستخدم جهاز السيكلترون للحصول على شعاع من الجسيمات المشحونة المعجلة Accelerated وذلك بواسطة مجال مغناطيسى قوى يودى الى تحريك الجسيمات المشحونة في مدارات دائرية وفى نفس الوقت يتم تعجيلها بواسطة مجال كهربى .



شكل 5- 23

يتركب الجهاز من نصفى علبة D_1, D_2 وكل منهما على شكل حرف D (Dee) مفرغتين من الهواء تفصلهما مسافة صغيرة . يوضع نصفى العلبة بين قطبي مغناطيس قوى واتجاه مجاله \vec{H} عمودى على مستوى سطح نصفى العلبة اللذين بوصلان بمصدر لجهد متردد و عالى التردد High frequency alternating voltage ويكون اتجاه المجال الكهربى الناشئ في الفراغ بين D_2, D_1 عموديا على اتجاه المجال المغناطيسى . يوضع مصدر الجسيمات المشحونة S في مركز الفتحة بين D_2, D_1 . نفرض أن جسما موجبا انبعث من S عندما كان D_2 موجبا بالنسبة الى نصف العلبة D_1 في هذه الحالة نجد أن الجسيم الموجب يتأثر بعجلة أثناء قطعه المسافة بين D_2, D_1 ليدخل نصف العلبة D_1 وذلك لوجود المجال الكهربى خلال هذه المسافة وحيث أن نصف العلبة يعتبر سطحا متساوى الجهد Equipotential surface فان المجال الكهربى \vec{E} داخل أي من نصفى العلبة يساوى صفرا لذلك نجد أن الجسيم الموجب داخل D_1 يؤثر عليه المجال المغناطيسى العمودى فقط ويحركه في قوس من دائرة نصف قطرها r_1 مثلا وبسرعة ثابتة v_1 ويكون $r_1 = \frac{mv_1}{qH}$ وعندما يصل الجسيم الى حافة D_1 يكون الجهد المتردد قد انعكس وبذلك يتغير اتجاه المجال الكهربى بين

D_2, D_1 ويتجه من نصف العلبة D_1 الى D_2 وبالتالي يحدث تعجيل جديد للجسيم أثناء عبوره المسافة بين D_2, D_1 ليُدخل D_2 وبسرعة v_2 أكبر من السرعة الأولى v_1 ويكون نصف قطر المسار للجسيم داخل D_2 بتأثير \vec{H} أكبر من نصف القطر r_1 داخل D_1 . وتتكرر هذه العملية بفعل الجهد المتردد بين D_2, D_1 فتزداد سرعة الجسيم الموجب الشحنة حتى يكتسب طاقة عالية جدا عند خروجه من النافذة الخاصة لذلك والموجودة في نصف العلبة D_1 حيث يصطدم بالهدف Target المراد قذفه بهذه الجسيمات .

السرعة الزاوية ω التي يتحرك بها الجسيم في أي دائرة هي :

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qH}{m}$$

ويلاحظ أن السرعة الزاوية ثابتة (بفرض أن H) وإذا كان T زمن عبور الجسيم لأي من نصفي العلبة وتردد الجهد العالى f فان :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \frac{qH}{m}$$

ويلاحظ أن الزمن اللازم لرسم نصف الدائرة العلوية يساوى الزمن اللازم لرسم نصف الدائرة السفلية مع أنها أصغر وذلك لأن تردد الحركة الدائرية ثابت ولا يتعلق بنصف القطر.

المراجع

- 1- Basic Laws of Electromagnetism By : I. E. Irodov 1986.
- 2- A Treats on Electricity & Magnetism By : J. C. Maxwell.1954.
- 3- Classical Electrodynamics B: JOHN DAVID JACKSON 1962.
- 4- ELECTROMAGNETIC FIELDS AND WAVES By : Paul Lorain 1969.
- 5- Magnetofluid Dynamics By : Lazar Dragos 1975.