مقدمة جبر مجرد

لطلاب الفرقة الاولي تربية عام فيزياء

بسم الله الرحمن الرحيم

▪ مقدمة:

الحمد لله الذي علم بالقلم ، علم الإنسان ما لم يعلم ، والصلاة والسلام على أشـــرف الأنبياء والمرسلين نبينا محمد ﷺ وعلى آله وصحبه أجمعين وبعد ...

فلقد ارتبط علم الجبر منذ تأسيسه بعلماء المســـلمين الأوائل وعلى رأسهم العلامة **الخوارزمي** (٧٨٠م-٨٥٠م) و**الماهاني** المُتوَفى عام(٨٧٤م) **وأبو الجود بن الليث** المُتوَفى عام (١٠٠٨م) **وعمر الخيَام** (١٠٤٢-١١٢٣م) ، وقد نقل من علومهم بعد ذلك علماء أوروبا مثل الألماني **ليبنـــز** (١٦٤٦-١٧١٦م) ، والفرنسي **لابلاس** (١٧٤٩-١٨٢٧م) ، والفرنسي **كوشي** (١٧٨٩-١٨٥٧م) ، والألماني **كانتـــور** (١٨٤٠-١٨٩٤م) في عصر التنوير والازدهار الأوروبي.

وقد عرف الألماني **كانتور** المجموعة لأول مرة في عام ١٨٧٣م وذلك عنـــد دراســـته لمتسلسلات الدوال المثلثية، ثم عُرفت بعد ذلك العلاقات والرواسم والعمليات الثنائية.

وتُعتبر نظرية المجموعات القاعدة الأســـاسية لدراســـة العلوم الرياضية المختلفة ، ومنذ أن عُرفت المجموعات حدث تطوراً عظيماً في كل الرياضيات حيث حدث تقريب وربـــط بين الحساب والهندسة وبين الجبر والتحليل مما أدى بها نحو التجريد الذي وســـع شموليـــة المفاهيم الرياضية وقلل من قوانينها مما ساعد على اكتشاف علوم رياضية جديدة أدت إلى تطبيقات مختلفة في جميع المجالات.

ونقدم هذه المذكرة والتي تشـــتمل على مجموعـــة المحاضـــرات في أســـس الجبر المجرد والتي قمت بتدريسها في الجامعات والمعاهد وهي مقسمة إلى خمسة أبواب:

في الباب الأول تناولنا نظرية المجموعات ، وفي الباب الثاني العلاقات ،

وفي الباب الثالث الرواســـم ، وفي الباب الرابع العمليات الثنائيـــة ،

وفي الباب الخامس الأنظمة الرياضية ذات العملية الثنائية الواحدة.

ونسأل الله عز وجل أن ينفعنا بما علمنا وأن يعلمنا ما ينفعنا ، وأن يجعل أعمالنا خالصة لوجهه الكريم ، وأخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين.

د. سعد شرقاوي

عضو هيئة التدريس بقسم الرياضيات

كلية العلوم بقنا

جامعة جنوب الوادي

الجزء الأول
مقدمة في المنطق الرياضي

الفصل الأول

مقدمة في المنطق الرياضي

المنطق هو العلم الذي يبحث فـــي القواعد التي تتبع في التفكير وطرق الاستدلال الصحيح. وهو بذلك أداة للتفكير لأنه يعنى بتحليل طرق التفكير وصيانته من الخطأ. والعملية المنطقية تهتم بفئة من الصيغ أو القضايا.

وبشكل عام يمكن القول عن المنطق الرياضي بأنه الأداة الفاصلة بين الحقيقة والخطأ. وقد ظهر في أواسط القرن التاسع عشر الميلاد نتيجة أبحاث العالم الإنجليزي جورج بول(1815-1884 م).

أنوع المنطق منطق كلاسيكي- منطق المكملات- منطق الاسناديات- المنطق الترجيحي- المنطق البوليان.

ويعتبر الفيلسوف الإغريقي أرسطو (384- 332ق.م) أول من وضع قواعد الاستنتاج والذي يقوم على ثلاث مبادئ أساسية وهي:

1. ثنائية القيمـــــة: أي أن قيمة القضية اما ان تكون صواب او خطأ.
2. عدم التناقـض: أي ألا تكون القضية صواب وخطأ في ان واحد.
3. الثالث المستبعد: أي ألا تكون القضية غير صحيحه وغير خاطئة.

(1-1) العبارات المنطقية:

تعريف:
القضية أو التقرير (A statement or proposition) هي جملة تحمل خبرا ولا تأخذ إحدي القيمتين: صحيحة (T) أو خاطئة (F).

مثال:

1- لينا تدرس في كلية العلوم. "جملة تمثل تقرير"

2- تونس عاصمة تونس. " جملة تمثل تقرير "

3- $x+2=8$ "لا تمثل تقرير لأنها صحيحة لبعض القيم فقط"

جدول الصدق أو الحقيقة

كل تقرير يمكن تمثيلة بجدول يسمي بجدول الصدق فمثلا

- إذا كان P تقريرا فأنه يأخذ احدى القمتين
T أو F
ويمكن وضع ذلك في جدول الصدق.

P
T
F

- إذا كان هناك n من التقارير فان القيم تكون 2^n.

فمثلا إذا كان لدينا ثلاث تقارير p ,q ,r فان جدول الصدق

P	Q	R
T	T	**T**
T	T	**F**
T	F	**T**
F	T	**T**
F	F	**T**
F	T	**F**
T	F	**F**
F	F	**F**

(2-1) أدوات الربط المنطقية *Compound Statement*

إذا كان التقرير يحمل خبر واحد فانه يسمي تقريرا بسيطا مثل "لينا في كلية الطب".

أما إذا كان يحمل أكثر من خبر فانه يسمي تقريرا مركبا مثل "صبا في كلية العلوم وتمتلك سيارة “. وللتعبير عن هذه الجملة لابد من ادخال اداه ربط "و" وهذه الاداة تسمي بأداة الربط المنطقية.

وسنختصر في دراستنا على خمس ادوات ربط:

1- أداة النفي (Negative):

P	-p
T	F
F	T

يرمز بالرمز (-) وتعريف كالاتي إذا كان التقرير p هو صواب فان p– يكون خطأ.
فمثلا ليكن p هو التقرير "x عدد طبيعي زوجي " فيكون p– هو " x ليس عدد طبيعي زوجي".

ملحوظة:
يجب التفريق بين النفي والنقيض ففي المثال يمثل النفي اما إذا قلنا نقيض التقرير p هو " x عدد طبيعي فردى".

2- أداة الوصل "and " conjunction

p	q	$p \wedge q$
T	T	**T**
T	F	**F**
F	T	**F**
F	F	**F**

يرمز لها بالرمز $\wedge$ وتعرف كالاتي:
إذا كان p, q تقريرين فان $p \wedge q$ هو تقرير صواب في حالة واحدة فقط عندما يكون p, q كلا هما صواب وخلاف ذلك يكون خطأ.
فمثلا: نفرض لدينا الجملة التالية "لينا طالبة في كلية الطب وعضوة بالنادي الأهلي" فلو رمزنا للتقرير "لينا طالبة في كلية الطب" بالحرف p ورمزنا للتقرير "لينا عضوة بالنادي الأهلي" بالحرف q فان الجملة تصبح $p \wedge q$.

3- أداة الفصل "Or" disjunction

p	q	$p \vee q$
T	T	**T**
T	F	**T**
F	T	**T**
F	F	**F**

يرمز لها بالرمز $\vee$ وتعرف كالاتي:
إذا كان p, q تقريرين فان $p \vee q$ هو تقرير خطأ في حالة واحدة فقط عندما يكون p, q كلا هما خطأ وخلاف ذلك يكون صواب.
فمثلا: نفرض لدينا الجملة التالية "صبا ذاهبة لكلية الطب أو تشاهد مباره الأهلي" فلو رمزنا للتقرير "صبا ذاهبة لكلية الطب

" بالحرف p ورمزنا للتقرير "صبا تشاهد مباره الأهلي" بالحرف q فان الجملة تصبح $p \vee q$

4- أداة الشرط "if ...,then"

يرمز لها بالرمز → وتعرف كالاتي:
إذا كان p, q تقريرين فان $p \to q$هو تقرير خطأ في حالة واحدة فقط عندما يكون p صائب و q خاطئ وخلاف ذلك يكون صواب.
فمثلا: نفرض لدينا الجملة التالية "إذا نجحت صبا في الامتحان فان والدها سوف يقدم لها هدية" فلو رمزنا للتقرير "نجحت صبا في الامتحان " بالحرف p ورمزنا للتقرير " والدها سوف يقدم لها هدية " بالحرف q فان الجملة تصبح $p \to q$ وتكون خاطئة في حالة واحدة إذا نجحت صبا ولم يقدم لها والدها هدية.

p	q	$p \to q$
T	T	**T**
T	F	**F**
F	T	**T**
F	F	**T**

5-أداة ثنائي الشرط "if and only if":

يرمز لها بالرمز ↔وتعرف كالاتي:
إذا كان p, q تقريرين فان $p \leftrightarrow q$هو تقرير صائب في حالة واحدة عندما يكون p,qكلاهما صائب أو خاطئ وخلاف ذلك يكون خطأ.
فمثلا: نفرض لدينا الجملة التالية "المثلث يكون متساوي الساقين إذا كان وكان فقط يوجد فيه زاويتا متساويتان" فلو رمزنا للتقرير "المثلث يكون متساوي الساقين " بالحرف p ورمزنا للتقرير "المثلث يوجد فيه زاويتا متساويتان " بالحرف q فان الجملة تصبح $p \leftrightarrow q$.

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	**T**
T	F	**F**
F	T	**F**
F	F	**T**

تعريف:
العبارة المنطقية هي جملة تتكون من عدة تقارير تربط بينهم بعض الروابط المنطقية.

مثال (1):

عبر عن الجمل التالية بصورة رمزية:

1- قنا مدينة مصرية ونهر النيل يمر في أثيوبيا.
2- قنا ليست مدينة مصرية أو نهر النيل لا يمر في أثيوبيا.
3- إذا كانت قنا مدينة مصرية فان نهر النيل يمر في أثيوبيا.
4- قنا مدينة مصرية إذا كان وكان فقط نهر النيل يمر في أثيوبيا.

الحل:
إذا فرضنا p تقريرا يمثل " قنا مدينة مصرية "و q تقريرا يمثل " نهر النيل يمر في أثيوبيا " فان:

1- تمثل: $p \wedge q$
2- تمثل: $-p \vee q -$
3- تمثل: $p \rightarrow q$
4- تمثل: $p \leftrightarrow q$

مثال (2):

عبر بجدول الصدق عن العبارة المنطقية التالية:

$$A = (p \vee -q) \wedge r$$

الحل:

p	q	r	$-q$	$p \vee -q$	A
T	T	T	F	T	T
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F

F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	F

(3-1) تكافؤ العبارات المنطقية *Logical Equivalence*

تعريف

يقال لعبارتين منطقيتين A,B أنهما متكافئتان منطقيا إذا كانت قيم الصواب لهما متطابقة لجميع قيم الصواب. ويرمز لذلك بالرمز $A \equiv B$.

مثال (3):

اثبت أن $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

الحـــل:

p	p	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

نلاحظ أن العمود الاخير و العمود الأول متطابقين.

تعريف

يقال للعبارة المنطقية A أنها صحيحة منطقيا أو استدلال إذا كانت قيم الصواب لها دائما الصواب.

وتكتب $A \equiv T$.

مثال (4)

اثبت أن العبارة التالية استدلال $p \vee -p$.

الحل:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{-p}$	$\boldsymbol{p \vee -p}$
$\boldsymbol{T}$	F	T
$\boldsymbol{F}$	T	T

نلاحظ أن $p \vee -p \equiv T$

تعريف

يقال للعبارة المنطقية A أنها خاطئة منطقيا أو تناقض إذا كانت قيم الصواب لها دائما خاطئة. وتكتب $\boldsymbol{A \equiv F}$.

مثال (5)

اثبت أن العبارة التالية تناقض $p \wedge -p$.

الحل:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{-p}$	$\boldsymbol{p \wedge -p}$
$\boldsymbol{T}$	F	F
$\boldsymbol{F}$	T	F

نلاحظ أن $p \wedge -p \equiv F$.

تمارين

1-اثبت أن

i. $-(p \wedge q) \equiv -p \vee -q$
ii. $-p \vee q \equiv p \longrightarrow q$
iii. $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p) \equiv p \leftrightarrow q$

2- لأي ثلاث تقارير r, p, q اثبت العلاقات الاتية:

i. $-(-p) \equiv p.$
ii. $-(p \wedge -p) \equiv T.$
iii. $-(p \vee -p) \equiv F.$
iv. $p \wedge p \equiv p, p \vee p \equiv p.$
v. $p \wedge q \equiv q \wedge p, p \vee q \equiv q \vee p.$
vi. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r, p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
vii. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r), p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$
viii. $-(p \wedge q) \equiv -p \vee -q, -(p \vee q) \equiv -p \wedge -q.$
ix. $p \vee (p \wedge q) \equiv p,\ p \wedge (p \vee q) \equiv p.$

.

(1-4) العلاقات في المنطق الرياضي

تعريف

بفرض أن A,B عبارتين منطقيتين يحويا نفس التقارير المنطقية. نقول إن A تقضى B إذا كانت $A \to B \equiv T$ وتكتب $A \Longrightarrow B$.

مثال (6)

برهن أن $(p \vee q) \wedge -p \Rightarrow q$.

الحل:

لنبرهن أن العبارة $(p \vee q) \wedge -p \longrightarrow q \equiv T$

p	q	$-p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge -p$	$(p \vee q) \wedge -p \longrightarrow q$
T	T	F	T	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T

تعريف

بفرض أن A,B عبارتين منطقيتين يحويا نفس التقارير المنطقية. نقول إن A تكافئ B إذا كانت $A \leftrightarrow B \equiv T$ وتكتب $A \Leftrightarrow B$.

ملحوظة:

حيث $A \leftrightarrow B$ استدلال يعني صائبة منطقيا وهذا لا يتحقق الا عندما يكون لهم A,B نفس قيم الصواب في جدول الصواب ولهذا نكتب $A \Leftrightarrow B$ أو $A \equiv B$.

مثال (6)

إذا كانت $A \equiv p \leftrightarrow q$ و $B \equiv (p \wedge q) \vee (-p \wedge -q)$ فبرهن أن $A \equiv B$

الحل:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	A	$-\boldsymbol{p}$	$-q$	$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$	$-\boldsymbol{p} \wedge -\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{B}$	$A \leftrightarrow B$
$\boldsymbol{T}$	T	T	F	F	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
F	T	F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	F	T	T	T

تمارين

1-اثبت أن

i. $A \Rightarrow A \vee B, \;\; B \Rightarrow A \vee B.$

ii. $A \wedge B \Rightarrow A, \;\; A \wedge B \Rightarrow B.$

iii. $(A \longrightarrow B) \wedge A \Rightarrow B, \;\; (A \longrightarrow B) \wedge -B \Rightarrow -A.$

iv. $(-A \vee B) \wedge A \Rightarrow B, \;\; (-B \vee A) \wedge B \Rightarrow A.$

v. $B \Rightarrow (A \longrightarrow B), -A \Rightarrow (A \longrightarrow B).$

vi. $(A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow C) \Rightarrow (A \longrightarrow C).$

الجزء الثاني
أسس الجبر المجرد

أسس الجبر المجرد

المحتوى: الصفحة

الباب الأول: المجموعات

الباب الثاني: العلاقات

الباب الثالث: الرواسم

## المحتوى:		الصفحة

الباب الرابع: العمليات الثنائية

الباب الخامس: الأنظمة الرياضية ذات العملية الثنائية الواحدة

الباب الأول

المجموعات Sets

مقدمة Introduction:

تُعتبر نظرية المجموعات من أهم ما كشف العقل البشري في الرياضيات. ولا ترجع أهمية نظرية المجموعات إلى مجرد أنها إضافة جديدة إلى مجال الرياضيات ، فحسب بل لأنها علاوة على ذلك أمدت الرياضيين بأسس وأساليب جديدة لمعالجة فروع الرياضيات المختلفة التي كانت قائمة ، كما أتاحت الفرصة لكشف الكثير من الفروع الحديثة ولقد ساعدت لغة ورموز وجبر نظرية المجموعات في دراسة هندسة إقليدس وجبر الأعداد ونظرية الدوال الحقيقية كما أنها أصبحت أداة رئيسية في دراسة المنطق وجبر بوليان والجبر المجرد Boolean & Abstract Algebra والهندسات المختلفة والتوبولوجي Topology. وسوف تقتصر دراستنا في هذا الباب على لغة ورموز وجبر المجموعات.

مفهوم المجموعة The Mathematical Concept of a Set :

هناك أمثلة كثيرة لمفهوم المجموعة في حياتنا اليومية. فكثيراً ما نتحدث عن "مجموعة" الطلاب التي يتكون منها فريق كرة القدم لكلية العلوم بقنا ،و"مجموعة" الدول الأعضاء في هيئة الأمم المتحدة ، و"مجموعة" الحروف الهجائية التي تتكون منها كلمة "المجتهدون" .

إن كلاً من التجمعات السابقة يُطلق عليها لفظ "مجموعة".

وعلى ذلك فإن "المجموعة" هي تجمع من الأشياء. ولعل هذه العبارة تبرز لنا سؤالاً هو ، هل كل تجمع من الأشياء – أو العناصر – يحدد مجموعة بالمعنى الرياضي؟ فمثلاً هل يمكن أن نطلق لفظ مجموعة على تجمعات مثل: الأعداد المهمة ، الأشكال الهندسية الجميلة، الأعداد الصحيحة الأكبر بكثير من 10 .إن تحديد هذه التجمعات يتوقف أساساً على وجود إجابة محددة للأسئلة: ما هو العدد المهم؟ وما هو الشكل الهندسي الجميل؟ وماذا نعني بأكبر بكثير من؟.

في الواقع أنه ليست هناك إجابة محددة على كل هذه التساؤلات فإن الجمال والأهمية أمور تختلف من ثقافة لأخرى ومن شخص لآخر ، ومن ثم فإنه لا يمكن أن تحدد عبارات مثل الأعداد المهمة مجموعة بالمعنى الرياضي ، لأننا لا نستطيع الحكم بصفة قاطعة عما إذا كان عنصر ما ينتمي إلى هذا التجمع أم لا. وبتعبير آخر إن العبارات السابقة تمثل تجمعات من العناصر غير المعرفة تعريفاً جيداً. وعلى العكس من ذلك فإن عناصر تجمعات مثل فريق كرة القدم بكلية العلوم بقنا ، وزوايا المثلث ABC والأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من 7 معرفة تعريفاً جيداً ، حيث إنه في كل حالة يمكن الحكم بصفة قاطعة أن عنصراً ما ينتمي إلى ذلك التجمع أم لا ، ولذلك فإن كلاً منها تمثل مجموعة بالمعنى الرياضي ، وعلى ذلك يمكننا القول بأن:

"**المجموعة: هي تجمع من العناصر المعرفة تعريفاً جيداً**".

وسوف نصطلح في هذا المقرر على استخدام الحروف الهجائية الكبيرة للتعبير عن المجموعة فمثلاً قد نعتبر:

X هي مجموعة الأعداد الأولية ..... ,2, 3, 5, 7, 11

Y هي مجموعة الألوان الأخضر والأصفر والأزرق

N هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

وكذلك سوف نستخدم الحروف الهجائية الصغيرة للتعبير عن العناصر التي تتكون منها المجموعات. فمثلاً نعتبر المجموعة T هي $T = \{a, b, c, d, e, f\}$ فإن a عنصر ينتمي إلى المجموعة T ويعبر عن ذلك رمزياً كالآتى :

$a \in T$ وتُقرأ a ينتمي إلى T.

أي أننا استخدمنا الرمز $\in$ للتعبير عن انتماء عنصر إلى مجموعة ونلاحظ مثلاً أن العنصر g لا ينتمي إلى المجموعة T ويعبر عن ذلك رمزياً:

$g \notin T$ وتُقرأ g لا تنتمي إلى المجموعة T.

أي أننا استخدمنا الرمز $\notin$ للتعبير عن عدم انتماء عنصر إلى مجموعة.

- **التعبير عن المجموعات Set Formulation :**

توجد طريقتان للتعبير عن المجموعات:

١- طريقة السرد Tabulation Method وتُسمى أيضا طريقة الحصر:

ويتم ذلك بكتابة جميع العناصر التي تتكون منها المجموعة (إذا كان ذلك ممكناً) أو كتابة بعضها بطريقة توضح كيفية اســتنتاج بقية العناصر، وتُوضع عناصر المجموعة بين قوسين متوسطين وبين كل عنصرين تُوضع فاصلة "," مثال على ذلك:

$X = \{2, 3, 5, 7, 11\}$,
$Y = \{a, b, c, d, e\}$,
$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

ونلاحظ أننا كتبنا بين القوسين الرموز الدالة على جميع العناصر في كل من المجموعات X,Y أما N فقد كتبنا الرموز الدالة على أربع عناصر فقط إذ يمكن استنتاج باقي العناصر. ونود أن ننبه إلى أن اختلاف ترتيب العناصر بين القوسين في مجموعة لا يغير من المجموعة.

٢- طريقة الخاصية المميِزة The Rule Method: ويتم ذلك بإعطاء خاصـــية معينة تميز عناصر المجموعة عن غيرها من العناصر بحيث يمكن باستخدام هذه الخاصية أن نحدد بطريقة قاطعة ما إذا كان عنصر ما ينتمي إلى هذه المجموعة أم لا.

فإذا كانت p خاصية معينة فإن { x : x لها الخاصية p } هي المجموعة التي تتكون من جميع العناصر مثل x حيث x تتمتع بالخاصية p . ونلاحظ هنا أن الرمز ":" يقوم مقام كلمة "حيث" مثال على ذلك:

X= { x : x عدد أولى بين 0 ، 12 } وهذه تعني أن

$X = \{2,3,5,7,11\}$.

- **المجموعة الخالية The Empty Set :**

إذا تأملنا المجموعة { x : x عدد زوجى يقع بين 0 ،1 } فإننا نجد أن هذه المجموعة لا تحتوي على أي عناصر ، ويُقال للمجموعة التي لا تحتوى على أي عناصر بأنها "مجموعة خالية" وسنبرهن فيما بعد أن المجموعة الخالية مجموعة وحيدة. وعادة نستخدم الرمز ϕ ويقرأ "فاي" ليدل على المجموعة الخالية وقد يُستخدم الرمز{ } أحياناً.

- **المجموعات المنتهية والمجموعات اللانهائية :**

يُقال لمجموعة ما إنها منتهية Finite إذا كانت خالية أو كانت تحتوى على عدد محدود n من العناصر حيث إن n عدد صحيح موجب ، وفي غير هذه الحالات يُقال للمجموعة أنها لا نهائية Infinite.

- **تساوي مجموعتين :**

يُقال لمجموعتين Y ، X أنهما متساويتين إذا كانتا تتكونان من نفس العناصر بالضبط بغض النظر عن الترتيب ، أي أن المجموعتين X ، Y تكونان متساويتين إذا كانتا مجرد اسمين لمجموعة واحدة $Y = X$.

ومن تعريف تساوي مجموعتين يتضح أن :

١. إذا كانت $Y = X$ فإن كل عنصر من عناصر X ينتمي إلى Y وكل عنصر من عناصر Y ينتمي إلى X.
٢. إذا كانت Y, X مجموعتين وكل عنصر من عناصر Y ينتمي إلى X وكل عنصر من عناصر X ينتمي إلى Y فإن $Y = X$.

وإذا كانت المجموعة X لا تساوي المجموعة Y فإننا نعبر عن ذلك بأن نكتب $X \neq Y$.

- **الاحتواء Inclusion** :

يُقال أن المجموعة X مجموعة جزئية Subset من المجموعة Y إذا كان كل عنصر من عناصر X ينتمي إلى Y ، ويُكتب "$X\subset Y$" ويُقرأ X مجموعة جزئية من Y. وفي بعض الأحيان يُكتب "$Y\supset X$" وتقرأ "Y تحتوى على X" لتدل على أن المجموعة X مجموعة جزئية من Y وإذا كانت X ليســـت مجموعة جزئية من Y فإننا نعبر عن ذلك بالرمز $X \not\subset Y$ (وهذا يعني أن هناك عنصـــراً واحداً على الأقل ينتمي إلى X ولا ينتمي إلى Y).

تعريف:

يُقال للمجموعة غير الخالية X أنها مجموعة جزئية فعلية Proper Subset من المجموعة Y إذا كان $X\subset Y$ ، $X\neq Y$ والنظرية التالية تتضمن الخواص الأساسية لمفهوم الاحتواء.

نظرية(١):

١ – لأي مجموعة X يكون $X \subseteq X$.

٢ – لأي مجموعتين X,Y إذا كان $X\subset Y, Y\subset X$ فإن $X=Y$.

٣ – لأي ثلاث مجموعات X,Y,Z إذا كان $X\subset Y, Y\subset Z$ فإن $X\subset Z$.

البرهان: سنبرهن الخاصية الثانية فقط ونترك برهان الخاصيتين الأولى والثالثة للطالب.

بما أن $X\subset Y$ إذاً كل عنصر من عناصر X ينتمي إلى Y .

(من تعريف المجموعة الجزئية).

وبما أن $Y\subset X$ إذاً كل عنصر من عناصر Y ينتمي إلى X .

(من تعريف المجموعة الجزئية).

إذاً $X=Y$ (من تعريف تساوي مجموعتين).

نتيجة: المجموعتان X,Y تكونان متساويتين إذا وإذا فقط كان $X\subset Y, Y\subset X$.

"إذا وإذا فقط" تعني أن النتيجة وعكسها صحيحة.

نظرية(٢): المجموعة الخالية ϕ مجموعة جزئية من أي مجموعة.

البرهان: لتكن X أي مجموعة وبفرض أن $\phi \not\subset X$ فهذا يعني أن ϕ تحتوي على عنصر لا ينتمي إلى المجموعة X ولكن هذا مستحيل لأن المجموعة ϕ لا تحتوي على أية عناصر ، وإذاً $\phi \not\subset X$ فرض خاطئ ، وعلى ذلك فلا بد أن تكون $\phi \subset X$.

نظرية(٣): المجموعة الخالية وحيدة.

البرهان: بفرض أن هناك مجموعتين خاليتين هما ϕ_1 , ϕ_2 .

فمن النظرية السابقة تكون ϕ_1 مجموعة جزئية من أي مجموعة ممكن أن تكون ϕ_2 أي أن $\phi_1 \subset \phi_2$.

وبالمثل ϕ_2 مجموعة جزئية من أي مجموعة ولتكن ϕ_1 أي أن $\phi_2 \subset \phi_1$.

ومن نظرية (١) نستنتج أن $\phi_2 = \phi_1$ أي أن المجموعة الخالية وحيدة.

مثال:

إذا كانت المجموعة $X = \{1,2,3\}$ فاكتب جميع المجموعات الجزئية للمجموعة X.

الحل:

المجموعات الجزئية للمجموعة X هي

$\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.

ونلاحظ أنه إذا كانتW هي المجموعة التي عناصرها هي كل المجموعات الجزئية للمجموعة X فإن:

$W = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

ونلاحظ أن $X \not\subset W$ وإنما $X \in W$

كما نلاحظ أن $1 \in X$ ولكن $1 \notin W$

وأيضا $\{2\} \notin X$ بينما $\{2\} \in W$

تُسمى المجموعة W .بمجموعة المجموعات الجزئية Power set للمجموعة X ويُرمز لها بالرمز $P(X)$ وتُسمى أيضا مجموعة القوى للمجموعة X .

- **المجموعة الشاملة Universal Set** :

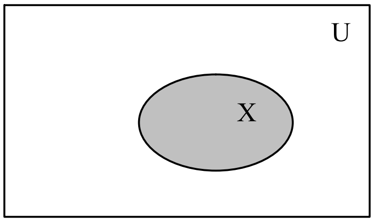
إذا كان لدينا عدد من المجموعات فإن المجموعة الشاملة هي المجموعة التي تحتوي على كل عناصر هذه المجموعات ، أو بمعنى آخر أن عناصر هذه المجموعات تنتمي جميعها إلى هـــذه المجموعة الأم (الشاملة). ويُرمز لها بالرمز U ويمكن تعيين أكثر من مجموعة شاملة لمجموعة أو لعدد من المجموعات ، ويُفضل تحديد واحدة منها في المسألة.

(اذكر مثال لمجموعة شاملة لمجموعة أو لعدد من المجموعات؟).

- **أشكال فن Venn Diagram** :

من المفيد دائماً أن يكون لدينا صورة مرئية تمثل محتوى أي مسألة رياضية ، فـــإن ذلـــك يساعد على الفهم واقتراح الحلول. لذلك سنمثل دائماً المجموعة الشاملة U بمستطيل في مستوى الورقة على أن نعتبر أن عناصر U هي جميع النقط الواقعة داخل هذا المـــستطيل وفي هذه الحالة يمكن أن نمثل المجموعات المختلفة بمساحات داخل هذا المستطيل

انظر الشكل:



شكل (١)

تُسمى مثل هذه الأشكال بأشكال فن ويمكن استخدام هذه الأشكال في توضيح العلاقـــة بين المجموعات المختلفة.

ولكن ينبغي الإشارة إلى أن توضيح مسألة باستخدام أشكال فن لا يمكن أن يُقبل كبرهان لمسائل المجموعات. ويجب التعود على استخدام البرهان المنطقى سواء في برهنة النظريات أو في حل التمارين.

- **التضمين Implication** :

إذا كانت A,B جملتين خبرتين فإن أي واحدة منهما يُحتمل أن تكون صحيحة أو خاطئة. إذا حدث أن صحة الجملة A تستلزم بالضرورة أن تكون الجملة B صحيحة فمعنى هـــذا أن صحة الجملة A شرط لازم لصحة الجملة B ، أو بعبارة أخرى صحة الجملة B متضمنة في صحة الجملة A

ونكتب ذلك بالصورة الرمزية $A \Rightarrow B$ وتُقرأ A تؤدى إلى B .

مثال: إذا كانت الجملة A هي $x = 3$ وكانت B هي الجملة $x^2 = 9$ في هذه الحالة يكون $A \Rightarrow B$.

وإذا حدث أن $A \Rightarrow B , B \Rightarrow A$ فإننا نكتب $A \Leftrightarrow B$ وتُقرأ " A إذا وإذا فقط B "

ويُقال في هذه الحالة أن الجملتين A, B متكافئتان.

مثال: $y = 2 \Leftrightarrow 3y + 1 = 7$

وباستخدام مفهوم التضمين يمكننا تعريف احتواء مجموعة لأخرى كما يلي:

$X \subset Y$ إذا كان $a \in X \Rightarrow a \in Y$ لكل عنصر a .

كذلك تعريف تساوي مجموعتين يمكن كتابته كما يلي:

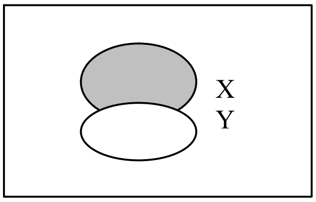
$X = Y$ إذا كان $a \in X \Leftrightarrow a \in Y$ لكل عنصر a .

▪ الفروق والمكملات Differences and Complements :

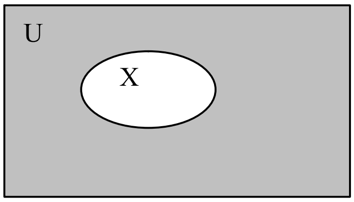
تعريف(١): الفرق بين مجموعتين X,Y هو المجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمي إلى المجموعة X ولا تنتمي إلى المجموعة Y ويُرمز للفرق بين X,Y بالرمز $X - Y$

أي أن $X - Y = \{a : a \in X, a \notin Y\}$

(انظر الشكل) المساحة المظللة تمثل $X - Y$



تعريف(٢): إذا كانت $X \subset U$ فإن المجموعة $U - X$ تُسمى مكملة أو متممة المجموعة X بالنسبة للمجموعة الشاملة ، ومجازاً تُسمى "مكملة X" ويُرمز لها بالرمز X^c وأحياناً بالرمز $X^\backslash$ أي أن $X^c = \{a : a \in U, a \notin X\}$ (انظر الشكل):



المساحة المظللة في الشكل السابق تمثل المجموعة X^c (مكملة المجموعة X).

نلاحظ أن لأي عنصر $a \in U$ يكون إما $a \in X$ أو $a \in X^c$

مثال: باعتبار أن Z (مجموعة الأعداد الصحيحة) هي المجموعة الشاملة.

(١) أوجد مكملة كل من المجموعات الآتية:

(i) The set of all Even Numbers.

مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية.

(ii) $X = \{x : x \in Z, x < 1\}$.

(iii) $Y = \{y : y \in Z, 4 < y \leq -4\}$.

(٢) أوجد: $Z - X^c$ ، $X^c - Y$

الحل: $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$

(١) مجموعة الأعداد الزوجية (i) $E = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \ldots\}$

$\therefore E^c = Z - E = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots\}$.

أي أن مكملة مجموعة الأعداد الزوجية هي مجموعة الأعداد الفردية Odd Numbers.

(ii) $X = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$.

$\therefore X^c = Z - X = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

(iii) $Y = \{\ldots, -6, -5, -4, 5, 6, 7, \ldots\}$.

$\therefore Y^c = Z - Y = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

(٢) $X^c - Y = \{1, 2, 3, 4\}, \ Z - X^c = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$.

نظرية(٤): لأي مجموعة X يكون $(X^c)^c = X$.

البرهان: إذا كان a أي عنصر في المجموعة الشاملة فإن:

$a \in (X^c)^c \Rightarrow a \notin X^c \Rightarrow a \in X$.

لأن أي عنصر إما أن ينتمي إلى المجموعة أو إلى مكملتها،ومن تعريف المجموعة الجزئية:

$\therefore (X^c)^c \subset X. \qquad (1)$

ويكون: $a \in X \Rightarrow a \notin X^c \Rightarrow a \in (X^c)^c$

$\therefore X \subset (X^c)^c. \qquad (2)$

من (2),(1) نستنتج أن:

$(X^c)^c = X$.

ويمكن إثبات نظرية (٤) بطريقة جداول الانتماء:

حيث نكون جدول مكون من ثلاث أعمدة هي عمود لكل من $X, X^c, (X^c)^c$

وإذا أخذنا العنصر a من عناصر المجموعة الشاملة التي تحتوى على المجموعة X

فيكون لدينا احتمالين إما $a \in X$ أو $a \notin X$ فنبدأ بملء الجدول:

بوضع 1 في عمود X إذا كان $a \in X$ ووضع 0 في عمود X إذا كان $a \notin X$

وبالمثل نملأ الأعمدة الباقية باستخدام تعريف هذه المجموعات فنحصل على الجدول:

X	X^c	$(X^c)^c$
1	0	1
0	1	0

ونلاحظ من الجدول أن قيم الإنتماء التي في العمودين الأول والثالث متطابقة ،

ومن ثم يكون $(X^c)^c = X$.

الاتحاد والتقاطع Union and Intersection

إذا كان X,Y مجموعتين فإن المجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمى إلى إحدى المجموعتين على الأقل تُسمى اتحاد المجموعتين X,Y ويُرمز لها بالرمز $X\cup Y$ ويُقرأ "X اتحاد Y" ويمكن التعبير رمزياً عن اتحاد المجموعتين X,Y كما يلي:

$$X\cup Y = \{a: a\in X\vee a\in Y\}.$$

حيث "$\vee$" تعني أن $a\in X$ أو $a\in Y$ أو a تنتمي لكل من X,Y .

أما المجموعة التي تتكون من العناصر المشتركة فقط بين المجموعتين X,Y فتمثـــل تقـــاطع المجموعتين X,Y ويُرمز لها بالرمز "$X\cap Y$" وتُقرأ "X تقاطع Y" أي أن :

$$X\cap Y = \{a: a\in X\wedge a\in Y\}.$$

حيث "$\wedge$" تعني أن $a\in X$ و $a\in Y$ (أي تنتمي لكل من X,Y في نفس الوقت).

مثال: إذا كانت $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 3, 5, 7\}$

فإن $X\cap Y = \{1, 3\}$, $X\cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

وإذا كانت $X = \{d, e, f\}$, $Y = \{a, b, c\}$ فإن $X\cap Y = \phi$.

ملاحظات: (١) يُقال لمجموعتين X,Y أنهما متباعدتان Disjoint إذا كان:

$$X\cap Y = \phi.$$

(٢) إذا كانت U هي المجموعة الشاملة للمجموعة X فإن:

$$X\cup X^c=U\ ,\ X\cap X^c=\phi$$

(٣) لأي مجموعتين X,Y يكون:

(i) $a\notin X\cup Y\Leftrightarrow a\notin X\wedge a\notin Y$. (ii) $a\notin X\cap Y\Leftrightarrow a\notin X\vee a\notin Y$.
(iii) $X\subset X\cup Y,\ Y\subset X\cup Y$. (iv) $X\cap Y\subset X\ ,\ X\cap Y\subset Y$.

نظرية(٥): لأي مجموعتين X,Y يتحقق:

$$X\subset Y \Leftrightarrow X\cup Y=Y.$$

البرهان: النظرية تنص على أن الجملتين $X\subset Y$ ، $X\cup Y=Y$ متكافئتان.

أي أنه أولاً: إذا كان $X\subset Y$ فإن $Y=X\cup Y$.

ثانياً: وإذا كان $X\cup Y=Y$ فإن $X\subset Y$.

أولاً: نفرض أن $X \subset Y$ وسنبرهن أن $X \cup Y = Y$ كما يلي:

من الواضح أن:

$$Y \subset X \cup Y. \qquad (1)$$
$$a \in X \cup Y \Rightarrow a \in X \vee a \in Y \Rightarrow a \in Y \ ; X \subset Y$$
$$\therefore X \cup Y \subset Y. \qquad (2)$$

من (2),(1) يكون $X \cup Y = Y$ وهو المطلوب أولاً.

ثانياً: نفرض أن $X \cup Y = Y$ وسنبرهن أن $X \subset Y$:

من الواضح أن:

$$X \subset X \cup Y \Rightarrow X \subset Y \quad ; X \cup Y = Y.$$

وهو المطلوب ثانيا.

من أولا وثانيا تثبت النظرية.

نظرية(٦): لأي مجموعتين X,Y يتحقق:

$$X \subset Y \Leftrightarrow X \cap Y = X.$$

البرهان:

أولاً: نفرض أن $X \subset Y$ وسنبرهن أن $X \cap Y = X$:

من الواضح أن:

$$X \cap Y \subset X. \qquad (1)$$
$$a \in X \ , X \subset Y \Rightarrow a \in X \wedge a \in Y \Rightarrow a \in X \cap Y$$
$$\therefore X \subset X \cap Y. \qquad (2)$$

من (2),(1) يكون $X \cap Y = X$ وهو المطلوب أولاً.

ثانياً: نفرض أن $X \cap Y = X$ وسنبرهن أن $X \subset Y$:

$$a \in X = X \cap Y \Rightarrow a \in X \wedge a \in Y \Rightarrow a \in Y.$$
$$\therefore X \subset Y.$$

وهو المطلوب ثانيا.

ومن أولا وثانيا تثبت النظرية.

نظرية(٧): إذا كانت $X_1\subset X_2 , Y_1\subset Y_2$ فإن:

(1) $X_1\cup Y_1 \subset X_2\cup Y_2$.
(2) $X_1\cap Y_1 \subset X_2\cap Y_2$.

البرهان:

(1) $a\in X_1\cup Y_1 \Rightarrow a\in X_1\vee a\in Y_1 \Rightarrow a\in X_2\vee a\in Y_2 \;\; ; X_1\subset X_2 , Y_1\subset Y_2$
$\therefore\;\; X_1\cup Y_1 \subset X_2 \cup Y_2$.
(2) $a\in X_1\cap Y_1 \Rightarrow a\in X_1 \wedge a\in Y_1 \Rightarrow a\in X_2 \wedge a\in Y_2 \;\; ; X_1\subset X_2 , Y_1\subset Y_2$
$\therefore\;\; X_1\cap Y_1 \subset X_2\cap Y_2$.

نظرية(٨): لأي مجموعة X يتحقق:

(1) $X\cup X = X$.
(2) $X\cap X = X$.

ويُشار إلى هذين القانونين بقانوني اللا نمو Idempotency .

نظرية(٩): لأي مجموعتين X,Y يتحقق:

(1) $X\cup Y = Y\cup X$.
(2) $X\cap Y = Y\cap X$.

ويُشار إلى هذين القانونين بقانوني الإبدال Commutative Laws .

نظرية(١٠): لأي ثلاث مجموعات X, Y, Z يتحقق:

(1) $(X\cup Y)\cup Z = X\cup(Y\cup Z)$.
(2) $(X\cap Y)\cap Z = X\cap(Y\cap Z)$.

ويُشار إلى هذين القانونين بقانوني الدمج أو قانوني الترتيب Associative Laws .

نظرية(١١): إذا كانت X, Y أي مجموعتين فإن:

$$X - Y^c = X\cap Y.$$

البرهان: باستخدام نتيجة نظرية (١) وهي الطريقة العامة لأي عنصر a من عناصر المجموعة الشاملة ومن تعريف الفرق بين المجموعتين نجد أن:

$a\in(X - Y^c) \Rightarrow a\in X \wedge a\notin Y^c$

$\Rightarrow a\in X \wedge a\in Y$ من تعريف المجموعة المكملة

$\Rightarrow a\in(X\cap Y)$ من تعريف تقاطع مجموعتين

$\therefore\;\; X - Y^c \subset X\cap Y.$ (1)

وبالعكس يكون:

$$\begin{aligned} a\in(X\cap Y) &\Rightarrow a\in X \wedge a\in Y \\ &\Rightarrow a\in X \wedge a\notin Y^c \\ &\Rightarrow a\in(X - Y^c) \\ \therefore\ (X\cap Y) &\subset X - Y^c. \qquad (2) \end{aligned}$$

ومن (2),(1) نستنتج أن:

$$(X - Y^c) = (X\cap Y) .$$

ويمكن إثبات ذلك بطريقة جداول الانتماء حيث نكون جدول مكون من خمس أعمدة هي عمود لكل من:

$X, Y, Y^c, (X - Y^c), (X\cap Y).$

وإذا أخذنا العنصر a من عناصر المجموعة الشاملة التي تحتوي على المجموعتين X, Y فيكون لدينا الاحتمالات الآتية:

$a\in X ,\ a\in Y.$
$a\in X ,\ a\notin Y.$
$a\notin X ,\ a\in Y.$
$a\notin X ,\ a\notin Y.$

وليس هناك أية احتمالات أخرى.

نبدأ بملء الجدول بأن نضع 1 في عمود X إذا كان $a\in X$ ونضع 0 إذا كان $a\notin X$

وبالمثل نملأ الأعمدة الباقية باستخدام تعريف هذه المجموعات فنحصل على الجدول الآتي:

X	Y	Y^c	$(X - Y^c)$	$(X \cap Y)$
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0

ونلاحظ من الجدول أن قيم الإنتماء التي في العمودين الأخيرين متطابقة، ومن ثم فإن:

$(X - Y^c) = X\cap Y .$

نظرية(١٢): <u>قانون دي مورجان De Morgan's Laws</u> :

لأي مجموعتين X, Y يتحقق:

$$(1)\ (X\cap Y)^c = X^c\cup Y^c\ .$$
$$(2)\ (X\cup Y)^c = X^c\cap Y^c.$$

البرهان:

<u>سنبرهن (1) باستخدام جداول الانتماء كما يلي:</u>

نكون جدول الإنتماء كما يلي:

X	Y	X^c	Y^c	$X\cap Y$	$(X\cap Y)^c$	$(X^c\cup Y^c)$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

نلاحظ من الجدول أن قيم الإنتماء التي في العمودين الأخيرين متطابقة، ومن ثم فإن:

$$(X\cap Y)^c = X^c\cup Y^c\ .$$

<u>وسنبرهن (2) باستخدام الطريقة العامةكما يلي:</u>

(2) إذا كان a عنصر من عناصر المجموعة الشاملة فإن :

$$\begin{aligned} a\in(X\cup Y)^c &\Rightarrow a\notin(X\cup Y)\\ &\Rightarrow a\notin X \wedge a\notin Y\\ &\Rightarrow a\in X^c \wedge a\in Y^c\\ &\Rightarrow a\in X^c\cap Y^c\ . \end{aligned}$$

$$\therefore\ (X\cup Y)^c \subset X^c\cap Y^c\ . \qquad (1)$$

وأيضاً

$$\begin{aligned} a\in(X^c\cap Y^c) &\Rightarrow a\in X^c \wedge a\in Y^c\\ &\Rightarrow a\notin X \wedge a\notin Y\\ &\Rightarrow a\notin(X\cup Y)\\ &\Rightarrow a\in(X\cup Y)^c\ . \end{aligned}$$

$$\therefore\ (X^c\cap Y^c) \subset (X\cup Y)^c\ . \qquad (2)$$

من (1),(2) نستنتج أن

$$(X\cup Y)^c = (X^c\cap Y^c).$$

نظرية(١٣): <u>قانوني التوزيع Distributive laws</u> :

لأي ثلاث مجموعات X, Y, Z يتحقق:

$$(1)\ X\cap(Y\cup Z) = (X\cap Y)\cup(X\cap Z)$$
$$(2)\ X\cup(Y\cap Z) = (X\cup Y)\cap(X\cup Z)$$

البرهان:

<u>سنبرهن (1) باستخدام جداول الانتماء كما يلي:</u>

X	Y	Z	$X\cap Y$	$X\cap Z$	$Y\cup Z$	$X\cap(Y\cup Z)$	$(X\cap Y)\cup(X\cap Z)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

نلاحظ من الجدول أن قيم الإنتماء التي في العمودين الأخيرين متطابقة، ومن ثم فإن :

$$X\cap(Y\cup Z) = (X\cap Y)\cup(X\cap Z).$$

<u>وسنبرهن (2) بالطريقة العامة كما يلي:</u>

(2) إذا كان a أحد عناصر المجموعة الشاملة فإن:

$$a\in(X\cup(Y\cap Z)) \Rightarrow a\in X \vee a\in(Y\cap Z).$$

فإذا كان:

$$\begin{aligned} a\in X &\Rightarrow a\in(X\cap Y),\ a\in(X\cap Z) \\ &\Rightarrow a\in(X\cap Y)\cup(X\cap Z). \end{aligned}$$

وإذا كان:

$$\begin{aligned} a\in(Y\cap Z) &\Rightarrow a\in Y,\ a\in Z \\ &\Rightarrow a\in X\cup Y,\ a\in X\cup Z \\ &\Rightarrow a\in(X\cup Y)\cap(X\cup Z). \end{aligned}$$

$$\therefore\ X\cup(Y\cap Z)\subset(X\cup Y)\cap(X\cup Z). \qquad (I)$$

والعكس نفرض أن:

$$a\in(X\cup Y)\cap(X\cup Z) \Rightarrow a\in(X\cup Y) \qquad (1),$$
$$a\in(X\cup Z) \qquad (2)$$

إذا كان $a \notin X$ فإنه من (2) , (1) يكون:

$$a\in Y,\ a\in Z \Rightarrow a\in(Y\cap Z).$$
$$\therefore\ a\in X \vee a\in(Y\cap Z)$$
$$\therefore\ a\in X\cup(Y\cap Z).$$
$$\therefore\ (X\cup Y)\cap(X\cup Z)\subset X\cup(Y\cap Z). \qquad (II)$$

من (I),(II) يكون :

$$\therefore\ X\cup(Y\cap Z) = (X\cup Y)\cap(X\cup Z).$$

ملاحظة: يمكن اختصار الطريقة العامة لإثبات ما سبق كما يلي:

$$\begin{aligned}a\in X\cup(Y\cap Z) &\Leftrightarrow a\in X \vee a\in(Y\cap Z)\\ &\Leftrightarrow a\in(X\cap X) \vee a\in(Y\cap Z)\\ &\Leftrightarrow [a\in X \wedge a\in X] \vee [a\in Y \wedge a\in Z]\\ &\Leftrightarrow [a\in X \vee a\in Y] \wedge [a\in X \vee a\in Z]\\ &\Leftrightarrow a\in(X\cup Y) \wedge a\in(X\cup Z)\\ &\Leftrightarrow a\in(X\cup Y) \cap (X\cup Z)\end{aligned}$$
$$\therefore\ X\cup(Y\cap Z) = (X\cup Y)\cap(X\cup Z).$$

نتيجة: عملية التقاطع "$\cap$" تتوزع على عملية الفرق "-" بالنسبة للمجموعات.

بينما عملية الإتحاد "$\cup$" لا تتوزع على عملية الفرق "-" بالنسبة للمجموعات.

أي أن لأي ثلاث مجموعات X,Y,Z يتحقق:

$$X\cap(Y-Z) = (X\cap Y)-(X\cap Z). \quad , \quad (X-Y)\cap Z = (X\cap Z)-(Y\cap Z).$$
$$X\cup(Y-Z) \neq (X\cup Y)-(X\cup Z). \quad , \quad (X-Y)\cup Z \neq (X\cup Z)-(Y\cup Z).$$

تحقق من ذلك؟.

تمرين: باستخدام قوانين التوزيع برهن أن لأي مجموعتين X,Y يتحقق:

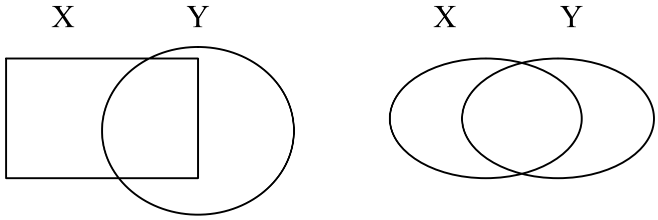
(1) $X\cap(X^c\cup Y) = X\cap Y.$

(2) $X\cup(Y-X) = X\cup Y.$

- **تعريف**: تُعرف مجموعة الفرق المتماثل (أو الاختلاف المتماثل) للمجموعتين X,Y والتي يُرمز لها بالرمز $X\Delta Y$ كما يلي:

$$X\Delta Y = (X\cup Y)-(X\cap Y) = (X-Y)\cup(Y-X).$$

وتُمثل كما بالشكل:



تمرين: تحقق من أن $(X\cup Y)-(X\cap Y) = (X-Y)\cup(Y-X)$

مثال: إذا كانت $X = \{x : x \in N, 3 \le x \le 10\}$, $Y = \{y : y \in N, 5 < y < 12\}$

فإن $X\Delta Y = \{3,4,5,11\}$ (تحقق من ذلك؟) .

▪ **تعميم فكرتي الاتحاد والتقاطع Generalization of Union & Intersection**:

يمكن تعميم فكرتي الاتحاد والتقاطع لتشمل أي عدد من المجموعات (سواء كان منتهياً أو غير منته). فإذا كانت $G = \{X, Y, Z, \ldots\}$ عائلة من المجموعات ، أي أن G هي مجموعة عناصرها مجموعات $X, Y, Z, \ldots$ يُعرف اتحاد هذه المجموعات بأنه المجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمي إلى واحدة على الأقل من هذه المجموعات $X, Y, Z, \ldots$.

ويُرمز لاتحاد هذه المجموعات بالرمز $X \cup Y \cup Z \cup \ldots$

كذلك نعرف تقاطع المجموعات التي تنتمي إلى G بأنه المجموعة التي تتكون من العناصر المشتركة بين جميع المجموعات $X, Y, Z, \ldots$

ويُرمز لتقاطع هذه المجموعات بالرمز $X \cap Y \cap Z \cap \ldots$

وإذا كان لدينا عدد محدود من المجموعات $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ فإننا نكتب $\cup_{i=1}^{n} X_i$ لاتحاد هذه المجموعات ونكتب $\cap_{i=1}^{n} X_i$ لتقاطع هذه المجموعات.

$$\cup_{i=1}^{n} X_i = \{x : x \in X_i \ \ for\, some\ i\}\ ,\ \ \cap_{i=1}^{n} X_i = \{x : x \in X_i \ \ for\, all\ i\}.$$

▪ **التجزيء Partition** :

تعريف: يُقال لمجموعة من المجموعات الجزئية غير الخالية من المجموعة X أنها تجزيء للمجموعة X إذا كانت هذه المجموعات متباعدة ثنائياً وكان اتحادها هو المجموعة X.

مثال: المجموعة $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}, \ldots\}$ تكون تجزيء لمجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N.

كذلك المجموعة $\{\{1,4,7,\ldots\},\{2,5,8,\ldots\},\{3,6,9,\ldots\}\}$ تجزيء آخر لـــ N .

بينما المجموعة $\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}, \ldots\}$ ليست تجزيء لـــ N .

▪ **الأزواج (الثنائيات) المرتبة Ordered Pairs** :

ليكن x,y عنصرين في مجموعة . من هذين العنصرين يمكن تكوين ما يُسمى بالزوج المرتب أو الثنائي المرتب ، حيث تُسمى x المركبة الأولى (المسقط الأول) ،وتُسمى y المركبة الثانية (المسقط الثاني) للزوج المرتب . أي أن الزوج المرتب هو مجموعة من عنصرين الترتيب بينهما أساسي ، لذلك يُرمز للزوج المرتب الذي مركبته الأولى x ومركبته الثانية y بالرمز (x,y) .

لاحظ أن $\{x,y\} = \{y,x\}$ في حين أن $(x,y) \neq (y,x)$ ، ويتم التســـاوي فقط في حالة $x = y$ ، وبوجه عام يمكن القول أن $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$.

مثال: أوجد x,y إذا علمت أن $(x+2y\ ,\ 3) = (4\ ,\ x+y)$.

الحل: من تعريف تساوي الأزواج المرتبة نجد أن $x+2y = 4\ ,\ x+y = 3$

فبالطرح نجد أن $y = 1$ ، وبالتعويض نجد أن $x = 2$.

- **<u>الحاصل الديكارتي (الضرب الكرتيزي) لمجموعتين</u>**

<u>Cartesian Product of two Sets</u> :

ليكن X,Y مجموعتين غير خاليتين. الحاصل الديكارتي $X \times Y$ هو مجموعة الأزواج المرتبة التي مركبتها الأولى تنتمي للمجموعة X ،ومركبتها الثانية تنتمي للمجموعة Y أي أن:

$$X \times Y = \{(x,y) : x \in X \wedge y \in Y\}.$$

مثال(١): ليكن $A = \{a, b, c\}\ ,\ B = \{x, y\}$ فإن

$$A \times B = \{(a,x), (a,y), (b,x), (b,y), (c,x), (c,y)\},$$
$$B \times A = \{(x,a), (x,b), (x,c), (y,a), (y,b), (y,c)\},$$
$$A \times A = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\},$$
$$B \times B = \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y)\}.$$

مثال(٢): إذا كان $X=\{1,2,3\}$ اكتب $X \times X$.

الحل:

$$X \times X=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}.$$

نظرية(١٤): لأي مجموعات اختيارية A, B, C, D يتحقق:

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
(ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
(iii) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

الإثبات: سنبرهن (i),(iii) ونترك برهان (ii) للطالب.

(i)
$$\begin{aligned}(x,y) \in A \times (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in A \times C \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C).\end{aligned}$$

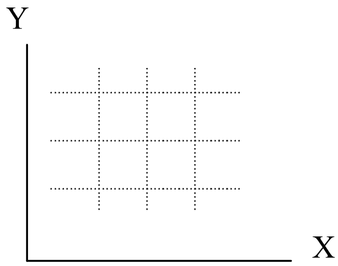
$$\therefore A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

$$\text{(iii)}\quad (x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D) \Leftrightarrow (x,y)\in A\times B \wedge (x,y)\in C\times D$$
$$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B \wedge x\in C \wedge y\in D$$
$$\Leftrightarrow x\in A\cap C \wedge y\in B\cap D$$
$$\Leftrightarrow (x, y)\in(A\cap C)\times(B\cap D).$$
$$\therefore\ (A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D).$$

في بعض الأحيان يُسمى حاصل الضرب الكرتيزي $X\times X$ المربع الكرتيزي ويُرمز له بالرمز X^2 .

- **تمثيل حاصل الضرب الكرتيزي Representation of Cartesian Products** :

يُمثل حاصل الضرب الكرتيزي $X\times Y$ بيانياً برسم محورين المحور الأفقي يمثل عناصر المجموعة X ، والمحور الرأسي يمثل عناصر المجموعة Y ، وتُمثل الأزواج المرتبة (x,y) (أي عناصر حاصل الضرب الكرتيزي) بنقط في المستوى كما بالشكل:



ملاحظة:

إذا كانت X مجموعة عدد عناصرها m ، وكانت Y مجموعة عدد عناصرها n فإن حاصل الضرب الكرتيزي$X\times Y$ يكون مجموعة عدد عناصرها $m\times n$ (عدد الأزواج المرتبة).

تمارين

١- استخدم طرق التعبير عن المجموعات لتحديد عناصر المجموعات الآتية:

(أ) الأعداد الطبيعية الأقل من 8

(ب) الأعداد الكسرية التي لها البسط يساوي1 ولها المقام الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من7

(ج) الحروف المختلفة المكونة للجملة " مَن جد وجد ومَن زرع حصد " .

٢- عبر عن المجموعات الآتية بذكر صفة مشتركة بين عناصر المجموعة:

(أ) $\{ a , e , i , o , u \}$

(ب) $\{ 10 , 100 , 1000 , 10000 , ...\}$

(ج) $\{ 1 , 1/2 , 1/3 , 1/4 , ...\}$.

٣- عبر عن المجموعات الآتية بطريقة الحصر (السرد):

(أ) $X=\{ x: x \text{ is a factor of } 6 \}$

(ب) $Y=\{ y: y \text{ is a solution of } y^2=0 \}$

(ج) $A=\{ a: a\in N, a \text{ is odd number}, 1<a<10\}$

(د) $B=\{ b: b\in N, b \text{ is prime number}, 1<b<12\}$

حيث N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة.

٤- اعط مثال لمجموعات تحتوي على:

(أ) عنصرين فقط.

(ب) لا تحتوي على عناصر.

(ج) عنصر واحد فقط.

(د) عدد غير محدود من العناصر.

٥- بفرض المجموعة $A = \{ 3 , 5 , 8 , 9 \}$ عبر برموز جبرية عن الآتي:

(أ) 8 عنصر في A

(ب) 4 ليس عنصرا في A

(ج) يوجد فقط ثماني مجموعات جزئية من عناصرA تحتوي العنصر 8

٦- حدد أي من المجموعات الآتية تكون منتهية ، وأيها تكون لانهائية:

(أ) $A = \{ x , y , p , q , 6 , 8 \}$

(ب) $B = \{ x : x \text{ is a multiple of } 3 \}$

(ج) مجموعة حروف اللغة العربية

(د) $D = \{ x : x \in R, 0 \le x \le 1\}$ حيث R مجموعة الأعدادالحقيقية.

٧- اكتب بعض المجموعات التي تصلح كل منها كمجموعة شاملة للمجموعات:

$A = \{1,2\}$, $B = \{2,3,4\}$, $C = \{3,4,5\}$.

٨- مالعلاقة بين $\{1\}$,1 ، وبين $\{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \}$, $\{1, 2, 3\}$

٩- بفرض المجموعات:

$A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{3,5\}$, $E = \{2\}$, $D = \{5, 7, 9\}$.

حدد أي من العبارات الآتية يكون صحيحا ، وأيها خطأ:

(1) $B \subset A$	(2) $E \subset B$	(3) $D \subset A$
(4) $B \in A$	(5) $\phi \subset B$	(6) $\phi \in B$
(7) $E \not\subset A$	(8) $7 \subset D$	(9) $2 = E$
(10) $5 \in A$	(11) $\{5\} \in A$	(12) A finite.

١٠- اكتب عناصر مجموعة المجموعات الجزئية لكل من المجموعات الآتية:

(أ) $\{a, b\}$

(ب) $\{a, b, c, d\}$

١١- إذا كانت $X = \{a,b,c\}$ بيّن الصواب من الخطأ فيما يلي (وصحح الخطأ):

(1) $\{a\} \in X$	(2) $\{a,b\} \subset P(X)$	(3) $\{\phi\} \in P(X)$
(4) $\{\phi\} = \phi$	(5) $\{a,b\} \subset X$	(6) $\{\{a\}\} \subset X$
(7) $\{d\} \subset P(X)$.		

١٢- بفرض أن $a \in X$, $b \in Y$, $X \subset Y$,$Y \subset Z$

(أ) هل $a \in Z$

(ب) هل $b \in Z$

(ج) هل $a \in Y$

(د) هل كل عنصر من عناصر Z يتطلب أن يكون عنصرا من عناصر كلا من X,Y

(ه) هل كل عنصر من عناصر X يتطلب أن يكون عنصرا من عناصرZ وليسY

١٣- بفرض أن $A = \{a,b,c,d\}, B = \{c,d,e\}, C = \{c,e,f,g\}, D = \{a,b,e,f\}$

عبر عن المجموعات الآتية:

(i) $A\cup(B\cup C)$.
(ii) $(A\cup B)\cap C$.
(iii) $(A\cap B)\cup(C\cap D)$.
(iv) $A-B$.
(v) $(A\cup B)-(A\cap B)$.

١٤- بفرض أن $B=\{2,3,4\}$, $A=\{1,2\}$. اكتب عناصر المجموعات الآتية:

(i) $A\times A$. (ii) $A\times B$.
(iii) $B\times A$. (iv) $B\times B$.
(v) $(A\times B)\cup(B\times A)$. (vi) $(A\times A)\cup(B\times A)$.
(vii) $(A\times A)\cup(A\times B)$. (viii) $(A\cup B)\times A$..

١٥- بفرض أن $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فحدد أي من المجموعات الآتية تكون تجزيئ للمجموعة A وأيها لا تكون (مع ذِكر السبب):

(i) $\{ \{1, 2, 6\}, \{6, 3\} \}$.
(ii) $\{ \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 2\} \}$.
(iii) $\{ \{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5, 6\} \}$.
(iv) $\{ \{1, 2\},\{3, 4\},\{5, 6\} \}$.

١٦- لأي ثلاث مجموعات اختيارية A, B, C برهن أن:

(i) $A\cap(B\cap C)^c = (A-B)\cup(A-C)$.
(ii) $A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$.
(iii) $(A\cup B)-C = (A-C)\cup(B-C)$.
(iv) $A\times(B-C) = (A\times B)-(A\times C)$.
(v) $(A\times A)\cap(B\times C) = (A\cap B)\times(A\cap C)$.

الباب الثاني

العلاقات Relations

تعريف: إذا كانت X,Y مجموعتان فإن أي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الكارتيزي $X\times Y$ تُسمى علاقة $\Re$ بين المجموعتين X,Y.

أي أن $\Re \subseteq X\times Y$ وإذا كان $(a,b)\in\Re$ أو $a\Re b$ يُقال أن a يرتبط بالعنصر b بالعلاقة $\Re$.

ونلاحظ أن:

(١) إذا كان عدد عناصر المجموعة X هو n وكان عدد عناصر المجموعة Y هو m فإن عدد العلاقات المختلفة التي يمكن أن نكونها بين المجموعتين X,Y هو 2^{nm} لأن عدد عناصر المجموعة $X \times Y$ هو nm.

وإذاً عدد المجموعات الجزئية من المجموعة $X\times Y$ هو 2^{nm}.

(٢) تُسمى أي مجموعة جزئية من $X\times X$ بعلاقة على X أو علاقة في X أو علاقة من X إلى X.

(٣) إذا كانت $\Re = X\times X$ فإننا نقول أن $\Re$ علاقة ممتلئة Full.

(٤) إذا كانت $\Re = \phi$ فإننا نقول أن العلاقة $\Re$ علاقة خالية Empty.

العلاقات الممتلئة والخالية قليلة الأهمية ، ولكن العلاقات الجديرة بالدراسة هي التي تكون فيها $\Re$ مجموعة جزئية فعلية من $X\times Y$ أو من $X\times X$.

مثال(١): إذا كانت $\Re$ علاقة معرفة على المجموعة $X = \{2, 3, 4, 6\}$ كما يلي:

$$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow a\backslash b \quad \forall a,b\in X.$$

($a\backslash b$ تعني أن a تقسم b أو أن b تقبل القسمة على a) فإن مجموعة الثنائيات المرتبة:

$$\{ (2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (6,6) \}.$$

تعبر عن هذه العلاقة $\Re$ وواضح أن إحداثيي كل عنصر من هذه المجموعة يجعلان التعبير $a\backslash b$ صحيح. فمثلاً العدد 2 يقسم العدد 2 ، والعدد 3 يقسم العدد 6 ، والعدد 2 يقسم العدد 4 وهكذا ...

نطاق ومدى العلاقة $\Re$ Domain & Range:

إذا كانت $\Re$ علاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y فإننا يمكن أن نميز مجموعتين جزئيتين واحدة من X والأخرى من Y كما يلي:

المجموعة التي تتكون من جميع عناصـــر X التي تظهر كإحداثي أول في أحد عناصر $X\times Y$ التي تنتمي إلى $\Re$ تُسمى نطاق العلاقة $\Re$.

والمجموعة التي تتكون من جميع عناصـــر Y التي تظهر كأحداثي ثاني في أحد عناصر $X\times Y$ التي تنتمي إلى $\Re$ تُسمى مدى العلاقة $\Re$.

ويُرمز بالرمز $D_\Re$ لنطاق العلاقة R وبالرمز $G_\Re$ لمدى العلاقة $\Re$ أي أن:

$$D_\Re = \{x\in X : (x,y)\in\Re\}\ ,\ G_\Re = \{y\in Y : (x,y)\in\Re\}.$$

ونلاحظ أن:

$$\Re \subseteq D_\Re\times G_\Re \subseteq X\times Y.$$

مثال(٢): نطاق ومدى العلاقة $\Re$ المعرفة في المثال السابق يكون:

$$D_\Re = G_\Re = \{2, 3, 4, 6\}.$$

مثال(٣): إذا كانت $\Re$ علاقة معرفة على المجموعة $X = \{1, 2, 3, 4\}$ كما يلي:

$$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow a>b \quad \forall a,b\in X.$$

فعبر عن $\Re$ كمجموعة ثنائيات مرتبة ، ثم أوجد $D_\Re , G_\Re$.

الحل:

$$\Re = \{ (2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}.$$
$$D_\Re = \{2, 3, 4\}\ ,\ G_\Re = \{1, 3, 2\}.$$

العلاقات العكسية Inverse Relation :

إذا كانت $\Re$ علاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y فإنه يمكن تعريف علاقة $\Re^{-1}$ من Y إلى X بحيث أن لكل عنصرين $y\in Y, x\in X$ يكون $y\Re^{-1}x$ إذا فقط كان $x\Re y$.

مثال(٤): إذا كانت المجموعة X والعلاقة $\Re$ هما الموضحتان في مثال (١)

وكانت $\Re^{-1}$ هي العلاقة العكسية للعلاقة $\Re$ على المجموعة X فإن:

$$\Re^{-1} = \{ (2,2), (4,2), (6,2), (3,3), (6,3), 4,4), (6,6)\}.$$

لاحظ أن $a\Re^{-1}b$ تعني أن b تقسم a أو أن a يقبل القسمة على b.

تحصيل أو تركيب العلاقات Composition of Relations:

إذا كانت $\Re_1$ علاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y ، وكانت $\Re_2$ علاقة من المجموعة Y إلى المجموعة Z فإنه يمكن تحصيل أو تركيب العلاقة $\Re_2$ مع العلاقة $\Re_1$ لتنتج علاقة من X إلى Z تُعرف كما يلي:

$$\Re_2 \circ \Re_1 = \{(x,z): \exists\ y \in Y\ ;(x,y) \in \Re_1\ ,(y,z) \in \Re_2\}.$$

تُسمى $\Re_2 \circ \Re_1$ العلاقة المحصلة أو العلاقة المركبة.

مثال: إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ وكانت:

$$\Re_1 = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3),(2,1)\},\ \ \Re_2 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,1)\}.$$

علاقتين معرفتين على المجموعة A فإن:

$$\Re_1 \circ \Re_2 = \{ (1,1), (1,3), (1,2), (2,2), (2,1), (3,1), (3,3) \} ,$$
$$\Re_2 \circ \Re_1 = \{ (1,1), (1,2), (2,2), (3,1), (3,2), (2,1) \}.$$

وواضح أن:

$$\Re_1 \circ \Re_2 \neq \Re_2 \circ \Re_1\ .$$

- **خواص العلاقات** :

أولاً: العلاقة العاكسة Reflective Relation :

إذا كانت $\Re$ علاقة على المجموعة A فإن $\Re$ تُسمى علاقة عاكسة (أو علاقة انعكاسية) إذا تحقق الشرط:

$$\forall\ a \in A \Rightarrow (a,a) \in \Re.$$

مثال(١): إذا كانت $\Re_1,\Re_2$ علاقتين معرفتين على المجموعة $A = \{1, 2, 3\}$ حيث:

$$\Re_1 = \{ (1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (3,3), (2,1)\} ,$$
$$\Re_2 = \{ (1,1), (1,2), (2,2), (3,1)\}.$$

فإن العلاقة $\Re_1$ تكون علاقة عاكسة وذلك لأن $\forall\ a \in A \Rightarrow a\Re a$

بينما العلاقة $\Re_2$ ليست علاقة عاكسة وذلك لأن $3 \in A\ ,\ (3,3) \notin \Re_2$.

نتيجة: يمكن تعريف عدد 2^{n^2-n} من العلاقات العاكسة على المجموعة A والتي تحتوي على عدد n من العناصر.

وذلك لأن عدد عناصر مجموعة حاصل الضرب الكرتيزي AxA هو n^2.

وعدد العناصر التي على الصورة (a,a) هو n وهذه العناصر يجب أن تدخل في تكوين أي علاقة عاكسة.

وعدد بقية العناصر يكون n^2-n. وهذه العناصر يمكننا إضافة أي مجموعة جزئية منها إلى العناصر n الأولى فنحصل على علاقة عاكسة.

وكما نعلم أن عدد المجموعات الجزئية التي يمكن تكوينها من $n^2 - n$ من العناصر هو 2^{n^2-n}

وإذاً عدد العلاقات العاكسة التي يمكن تكوينها على المجموعة A التي عدد عناصرها nيكون 2^{n^2-n}.

ثانياً: العلاقة المتماثلة Symmetric Relation :

إذا كانت $\Re$ علاقة على المجموعة A فإن $\Re$ تُسمى علاقة تماثل (أو علاقة تناظرية أو علاقة متماثلة) إذا تحقق الشرط:

$$\forall\ (a,b)\in\Re \Rightarrow (b,a)\in\Re.$$

مثال(٢): إذا كانت $X = \{1, 2, 3, 4\}$ وكانت العلاقة $\Re$ هي:

$$\Re = \{ (1,1), (1,3), (1,4), (3,1), (3,3), (3,4), (4,1), (4,3), (4,4)\}.$$

هل $\Re$ علاقة متماثلة أم لا ؟.

الحل: نجد أن

$$(1,1),(1,1)\in\Re\ ,\ (1,3),(3,1)\in\Re\ ,\ (1,4),(4,1)\in\Re\ ,\ (3,3),(3,3)\in\Re\ ,$$
$$(3,4),(4,3)\in\Re,\ (4,4),(4,4)\in\Re.$$

أي أن $\forall\ (a,b)\in\Re \Rightarrow (b,a)\in\Re$ ومن ثم تكون $\Re$ علاقة متماثلة.

مثال(٣): إذا كانت X هي مجموعة المستقيمات المرسومة في المستوى ، وكانت $\perp$ هي علاقة "عمودي على" معرفة على المجموعة X.

فإننا نلاحظ أن لكل $L\in X$ لا يمكن أن يكون $L\perp L$.

وإذاً العلاقة $\perp$ ليست علاقة عاكسة.

وإذا كان L_1,L_2 خطين مستقيمين في الجموعة X فإن:

$$L_1 \perp L_2 \Rightarrow L_2 \perp L_1.$$

وإذاً العلاقة $\perp$ تكون علاقة متماثلة.

ثالثاً: العلاقة المتخالفة Asymmetric Relation :

إذا كانت $\Re$ علاقة على المجموعة A فإن $\Re$ تُسمى علاقة متخالفة (أو علاقة تخالفية) إذا تحقق الشرط:

$\forall\ (a,b)\in\Re \Rightarrow (b,a)\notin\Re.$

نلاحظ أن العلاقة المتخالفة لا يمكن أن تحتوي على أي عنصر على الصورة (a,a) حيث $a\in A$ وعلى ذلك فالعلاقة المتخالفة لا يمكن أن تكون علاقة عاكسة.

مثال(٤): إذا كانت $\Re_1,\Re_2,\Re_3$ علاقات معرفة على المجموعة $A = \{1,2,3\}$ حيث:

$\Re_1 = \{ (1,2), (1,3), (2,3)\}.$
$\Re_2 = \{ (1,2), (2,1), (1,3), (2,3)\}.$
$\Re_3 = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,3)\}.$

فإن العلاقة $\Re_1$ متخالفة وذلك لأن $\forall\ (a,b)\in \Re_1 \Rightarrow (b,a)\notin \Re_1$ ، بينما العلاقة $\Re_2$ ليست متخالفة وذلك لأن $(1,2),(2,1)\in\Re_2$ ، وكذلك العلاقة $\Re_3$ ليست متخالفة ، وذلك لأن $(1,1)\in\Re_3$.

رابعاً: العلاقة عكسية التماثل Anti-Symmetric Relation :

إذا كانت $\Re$ علاقة على المجموعة A فإن $\Re$ تُسمى علاقة عكسية التماثل (أو علاقة متخالفة التماثل) إذا تحقق الشرط:

$\forall\ (a,b)\in\Re\ ,\ a \neq b \Rightarrow (b,a)\notin\Re.$

أو إذا تحقق الشرط:

If $(a,b)\in\Re$ and $(b,a)\in\Re \Rightarrow a = b.$

مثال(٥): إذا كانت $\Re_1$ علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N كما يلي: $(a,b)\in\Re_1 \Leftrightarrow b = a^2\ \ \forall\ a,b\in N$

$\therefore \Re_1 = \{ (1,1), (2,4), (3,9), (4,16), \ldots\}.$

وتكون العلاقة $\Re_1$ عكسية التماثل وذلك لأن:

$\forall\ (a,b)\in\Re_1\ ,\ a \neq b \Rightarrow (b,a)\notin\Re_1.$

ولكنها ليست متخالفة وذلك لأن $(1,1)\in\Re_1$.

وإذا كانت $\Re_2 = \Re_1 - \{(1,1)\}$ فإن العلاقة $\Re_2$ تكون علاقة عكسية التماثل ، وتكون $\Re_2$ أيضاً علاقة متخالفة (تحقق من ذلك؟).

خامساً: العلاقة الناقلة Transitive relation :

إذا كانت $\Re$ علاقة على المجموعة A فإن $\Re$ تُسمى علاقة ناقلة (أو علاقة متعـــدية) إذا تحقق الشرط:

$$\forall\ (a,b)\in\Re \text{ and } (b,c)\in\Re \Rightarrow (a,c)\in\Re.$$

مثال(٦): إذا كانت $\Re_1,\Re_2,\Re_3$ علاقات معرفة على المجموعة $A = \{1,2,3\}$ حيث:

$$\Re_1 = \{ (1,1), (2,2), (3,3)\} ,$$
$$\Re_2 = \{ (1,1), (1,2), (2,2), (3,1)\} ,$$
$$\Re_3 = \{ (1,2), (1,3)\}.$$

فإن العلاقة $\Re_1$ تكون علاقة ناقلة وذلك لأن $\forall\ (a,b),(b,c)\in\Re_1 \Rightarrow (a,c)\in\Re_1$

بينما العلاقة $\Re_2$ ليست علاقة ناقلة وذلك لأن $(3,1),(1,2)\in\Re_2$, $(3,2)\notin\Re_2$

والعلاقة $\Re_3$ تكون علاقة ناقلة وذلك لعدم وجود ما يمنع ذلك.

مثال(٧): إذا كانت $\Re$ علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N كمايلي:

$$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow b = a^n \quad \forall a,b,n\in N.$$

فإن العلاقة $\Re$ تكون كما يلي:

$$\Re = \{ (1,1), (2,2), (2,4), (2,8), \ldots$$
$$, (3,3), (3,9), (3,27), \ldots\ldots.$$
$$, (4,4), (4,16), (4,64), \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}.$$

والعلاقة $\Re$ تكون علاقة ناقلة وذلك لأن:

$$\forall\ (a,b)\in\Re, (b,c)\in\Re \Rightarrow b = a^n , c = b^m \quad ; n,m\in N.$$
$$\Rightarrow c = b^m = (a^n)^m = a^{nm} = a^r ; r = nm\in N$$
$$\Rightarrow (a,c)\in\Re$$

ومن الواضح أن العلاقة $\Re$ تكون عكسية التماثل، وليست متخالفة (تحقق من ذلك؟).

أمثلة عامة:

مثال(١): ادرس خصائص العلاقة $\Re$ المعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N كما يلي:

$$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow a/b\in N \quad \forall a,b\in N.$$

الحل:

(١) العلاقة $\Re$ عاكسة وذلك لأن:

$$\forall\ a\in N,\ a/a = 1\in N \Rightarrow (a,a)\in\Re.$$

(٢) العلاقة $\Re$ ليست متماثلة وذلك لأن:

$$(6,2)\in\Re\ ;\ 6/2 = 3\in N\ ,\ (2,6)\notin\Re\ ;\ 2/6 = 1/3\notin N.$$

(٣) العلاقة $\Re$ ليست متخالفة وذلك لأن:

$$(1,1)\in\Re$$

(٤) العلاقة $\Re$ عكسية التماثل وذلك لأن:

$$\begin{aligned}\forall\ (a,b)\in\Re,\ a \neq b &\Rightarrow a/b\in N\ ;\ a/b \neq 1.\\ &\Rightarrow b/a\notin N\\ &\Rightarrow (b,a)\notin\Re.\end{aligned}$$

(٥) العلاقة $\Re$ ناقلة وذلك لأن:

$$\begin{aligned}\forall\ (a,b)\in\Re,\ (b,c)\in\Re &\Rightarrow a/b\in N,\ b/c\in N\\ &\Rightarrow (a/b)(b/c)\in N\\ &\Rightarrow a/c\in N\\ &\Rightarrow (a,c)\in\Re.\end{aligned}$$

مثال(٢): إذا كانت $\Re$ هي العلاقة المعرفة على N كما يلي:

$$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow a/b\in Q \quad \forall\ a,b\in N.$$

(حيث Q هي مجموعة الأعداد النسبية) فادرس خصائص هذه العلاقة؟.

الحل:

(١) العلاقة $\Re$ عاكسة وذلك لأن:

$$\forall\ a\in N\ ;\ a/a\in Q \Rightarrow (a,a)\in\Re.$$

(٢) العلاقة $\Re$ متماثلة وذلك لأن:

$$\forall\ (a,b)\in\Re \Rightarrow a/b\in Q \Rightarrow b/a\in Q \Rightarrow (b,a)\in\Re$$

(٣) العلاقة $\Re$ ليست متخالفة وذلك لأن $(1,1)\in\Re$

(٤) العلاقة $\Re$ ليست عكسية التماثل وذلك لأن:

$1,2 \in N,\ 1 \neq 2\ ,(1,2),(2,1) \in \Re.$

(٥) العلاقة $\Re$ ناقلة وذلك لأن:

$\forall\ (a,b),(b,c) \in \Re \Rightarrow a/b, b/c \in Q \Rightarrow (a/b)(b/c) = a/c \in Q \Rightarrow (a,c) \in \Re.$

مثال(٣): ادرس العلاقة $\Re$ المعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N كما يلي:

$(a,b) \in \Re \Leftrightarrow (a-b)/3 \in N \quad \forall a,b \in N.$

(من حيث كونها: عاكسة – متماثلة – ناقلة).

الحل:.

(١) العلاقة $\Re$ ليست عاكسة وذلك لأن:

$1 \in N,\ (1,1) \notin \Re\ ;(1-1)/3 = 0/3 = 0 \notin N.$

(٢) العلاقة $\Re$ ليست متماثلة وذلك لأن:

$(6,3) \in \Re\ ;(6-3)/3 = 1 \in N\ ,\ (3,6) \notin \Re\ ;(3-6)/3 = -3/3 = -1 \notin N.$

(٣) العلاقة $\Re$ ناقلة وذلك لأن:

$$\begin{aligned}\forall\ (a,b) \in \Re,(b,c) \in \Re &\Rightarrow (a-b)/3 \in N,\ (b-c)/3 \in N.\\ &\Rightarrow (a-b)/3+(b-c)/3 \in N.\\ &\Rightarrow (a-c)/3 \in N.\\ &\Rightarrow (a,c) \in \Re.\end{aligned}$$

ملاحظة: يمكن إعادة صياغة العلاقة $\Re$ السابقة كما يلي:

$$\begin{aligned}(a,b) \in \Re &\Leftrightarrow a - b = 3n\ \ ; n \in N.\\ &\Leftrightarrow a = b + 3n\ \ ; n \in N.\end{aligned}$$

علاقة التكافؤ وفصول التكافؤ :

Equivalence Relation and Equivalence Classes:

تعريف(١): إذا كانت $\Re$ علاقة على المجموعة A ، وكانت $\Re$ عاكسة ومتماثلة وناقلة فإنها تُسمى **علاقة تكافؤ**.

وعلاقة التساوي على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N تُعتبر علاقة تكافؤ حيث:

(1) $\forall\ a \in N\ ;\ a = a \Rightarrow (a,a) \in \Re$.
(2) $\forall\ (a,b) \in \Re \Rightarrow a = b \Rightarrow b = a \Rightarrow (b,a) \in \Re$.
(3) $\forall\ (a,b),(b,c) \in \Re \Rightarrow a = b,\ b = c \Rightarrow a = c \Rightarrow (a,c) \in \Re$.

وإذاً العلاقة $\Re$ عاكسة ومتماثلة وناقلة ، ومن ثم تكون علاقة تكافؤ.

وبالمثل علاقة التساوي على أي مجموعة من الأعداد تكون علاقة تكافؤ.

مثال(١): إذا كانت العلاقة $\Re$ معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة Z كما يلي:

$(a,b) \in \Re \Leftrightarrow (a-b)/n \in Z\ \ ;\ n \in N\ ,\ n \geq 2$.

فتحقق من أن $\Re$ تكون علاقة تكافؤ.

الحل:

(1) $\forall\ a \in Z\ ;(a-a)/n = 0 \in Z \Rightarrow (a,a) \in \Re$.

وإذاً $\Re$ علاقة عاكسة.

(2) $\forall\ (a,b) \in \Re \Rightarrow (a-b)/n \in Z \Rightarrow (b-a)/n \in Z \Rightarrow (b,a) \in \Re$.

وإذاً $\Re$ علاقة متماثلة.

(3) $\forall\ (a,b),(b,c) \in \Re \Rightarrow (a-b)/n \in Z,(b-c)/n \in Z$.
$\Rightarrow (a-b)/n+(b-c)/n \in Z$.
$\Rightarrow (a-c)/n \in Z$.
$\Rightarrow (a,c) \in \Re$.

وإذاً $\Re$ علاقة ناقلة.

ومن ثم تكون العلاقة $\Re$ علاقة تكافؤ.

تُسمى هذه العلاقة علاقة التطابق بمقياس العدد الصحيح n ، وتُكتب $a \equiv b \pmod n$

تعريف(٢): إذا كانت $\Re$ علاقة تكافؤ على المجموعة A . يُعرف **فصل التكافؤ** للعنصر $x\in A$ بأنه المجموعة:

$$[x] = \{y\in A :(x,y)\in\Re\}.$$

مثال(٢): أوجد فصول التكافؤ للعلاقة $\Re$ المعرفة على Z كما يلي:

$$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow a \equiv b \pmod 5).$$

الحل: فصول التكافؤ لهذه العلاقة تكون هي:

$$[0] = \{\ldots,-10, -5, 0, 5,10, \ldots\}.$$
$$[1] = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}.$$
$$[2] = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}.$$
$$[3] = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}.$$
$$[4] = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}.$$

وبذلك يكون $Z = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$.

أي أنه تُوجد خمسة فصول تكافؤ فقط لعلاقة التكافؤ $\Re$ وهي [4] ,[3] ,[2] ,[1] ,[0] ونلاحظ أن كل فصل تكافؤ يتكون من عناصر تتميز بخاصية مشتركة وهي أن باقي قسمة أي عدد منها على العدد الصحيح 5 له نفس الباقي الموجب، ونلاحظ أيضاً كل فصلين منها منفصلان (أي أن تقاطعهما هو المجموعة الخالية) واتحادهم جميعاً يُعطي المجموعة Z ومن ثم تكون مجموعة فصول التكافؤ هذه تجزيء للمجموعة Z .

مثال(٣): إذا كانت $\Re$ علاقة معرفة على المجموعة $X = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ كما يلي:

$$(a,b)\in\Re \Leftrightarrow (a-b)/3\in Z \quad \forall a,b\in X.$$

فتحقق من أن $\Re$ تكون علاقة تكافؤ ، ثم تحقق من أن مجموعة فصول التكافؤ لهذه العلاقة تكون تجزيء للمجموعة X.

الحل: العلاقة $\Re$ تكون هي:

$$\Re = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(0,3),(3,0),(0,6),(6,0),(1,4),(4,1),(1,7),(7,1),(3,6),(6,3),(4,7),(7,4),(2,5),(5,2)\}.$$

واضح أن $\Re$ علاقة تكافؤ حيث إنها علاقة عاكسة ومتماثلة وناقلة (تحقق من ذلك؟).

وفصول التكافؤ تكون هي:

$[0] = \{0, 3, 6\} = [3] = [6].$
$[1] = \{1, 4, 7\} = [4] = [7].$
$[2] = \{2, 5\} = [5].$

أي أنه يوجد ثلاثة فصول تكافؤ فقط هي $\{0,3,6\},\{1,4,7\},\{2,5\}$.

ومجموعة فصول التكافؤ $\{\{0,3,6\},\{1,4,7\},\{2,5\}\}$ تكون تجزيء للمجموعة X حيث إنها متباعدة ثنائياً واتحادها جميعا يساوي المجموعة X .

نظرية(١): إذا كانت $\Re$ علاقة تكافؤ على المجموعة A فإن:

$$b\in[a] \Leftrightarrow a\in[b] \quad \forall a,b\in A.$$

البرهان:

$$\begin{aligned} b\in[a] &\Leftrightarrow b\in\{y\in A :(a,y)\in\Re\} \\ &\Leftrightarrow (a,b)\in\Re \Leftrightarrow (b,a)\in\Re \Leftrightarrow a\in\{y\in A :(b,y)\in\Re\} \Leftrightarrow a\in[b]. \end{aligned}$$

نظرية(٢): إذا كانت $\Re$ علاقة تكافؤ على المجموعة A فإن $a\in[a]\ \forall a\in A$.

البرهان: حيث إن $\Re$ علاقة تكافؤ فهي عاكسة ومن ثم يكون:

$$\forall a\in A \Rightarrow (a,a)\in\Re \Leftrightarrow a\in[a].$$

نظرية(٣): إذا كان فصلي التكافؤ $[a],[b]$ متقاطعين فإن $[a] = [b]$.

البرهان:

$$\begin{aligned} \text{let } c\in[a]\cap[b] &\Leftrightarrow c\in[a],\ c\in[b]. \\ &\Leftrightarrow (a,c)\in\Re,\ (b,c)\in\Re. \\ &\Leftrightarrow (a,c)\in\Re,\ (c,b)\in\Re. \\ &\Leftrightarrow (a,b)\in\Re. \\ \text{let } d\in[a] &\Leftrightarrow (a,d)\in\Re,\ (a,b)\in\Re. \\ &\Leftrightarrow (b,a)\in\Re,\ (a,d)\in\Re \\ &\Leftrightarrow (b,d)\in\Re \\ &\Leftrightarrow d\in[b]. \\ &\therefore [a] = [b]. \end{aligned}$$

وبذلك فإن أي فصلين تكافؤ إما متساويين أو غير متقاطعين.

ولذلك إذا كانت $\Re$ علاقة تكافؤ على المجموعة A فإنه يمكن كتابة A على صـــورة اتحاد مجموعة غير متقاطعة من فصول التكافؤ للعلاقة $\Re$ أي أن:

$$A = \bigcup_{a \in A} [a].$$

ولذلك يُقال أن فصول التكافؤ تجزىء المجموعة إلى أجزاء غير متقاطعة.

علاقة الترتيب الجزئي Partial Ordering:

تعريف(١): إذا كانت العلاقة $\Re$ معرفة على المجموعة A بحيث يكون:

١ – $\Re$ عاكسة.

٢ – $\Re$ عكسية التماثل.

٣ – $\Re$ ناقلة.

فإن $\Re$ تُسمى **علاقة ترتيب جزئي**. يُرمز أحياناً لعلاقة الترتيب الجزئي بالرمز " $\leq$ " .

مثال(١): إذا كانت $\Re$ هي العلاقة $\leq$ (أقل من أو تساوي) المعرفة على الأعداد الصحيحة الموجبة N . فتحقق من أن $\Re$ تكون علاقة ترتيب جزئي.

الحل: يمكن التعبير عن العلاقة $\Re$ كما يلي: $(a,b)\in\Re \Leftrightarrow a\leq b \;\; \forall a,b\in N$

$(1)\ \forall\ a\in N\ ;\ a\leq a \ \Rightarrow (a,a)\in\Re.$

وإذاً العلاقة $\Re$ عاكسة.

$(2)\ \forall\ (a,b)\in\Re,\ a\neq b \Rightarrow a<b \Rightarrow\ b>a\ \Rightarrow (b,a)\notin\Re.$

وإذاً العلاقة $\Re$ عكسية التماثل.

$(3)\ \forall\ (a,b),(b,c)\in\Re \Rightarrow a\leq b,\ b\leq c \Rightarrow a\leq c\ \Rightarrow (a,c)\in\Re.$

وإذاً العلاقة $\Re$ ناقلة.

وبالتالي تكون $\Re$ علاقة ترتيب جزئي على N .

مثال(٢): إذا كانت $\Re$ علاقة معرفة على المجموعة P(A) للمجموعة المنتهية A كمايلي:

$(X,Y)\in\Re \Leftrightarrow X\subseteq Y \quad \forall\ X,Y\in P(A).$

فتحقق من أن $\Re$ تكون علاقة ترتيب جزئي.

الحل:

(1) $\forall\ X\in P(A)\ ;\ X\subseteq X \Rightarrow (X,X)\in\Re.$

وإذاً R علاقة عاكسة.

(2) $\forall\ (X,Y)\in\Re,\ X\neq Y \Rightarrow X\subset Y \Rightarrow Y\not\subset X \Rightarrow (Y,X)\notin\Re.$

وإذاً $\Re$ علاقة عكسية التماثل.

(3) $\forall\ (X,Y)\in\Re,\ (Y,Z)\in\Re \Rightarrow X\subseteq Y,\ Y\subseteq Z \Rightarrow X\subseteq Z \Rightarrow (X,Z)\in\Re.$

وإذاً $\Re$ علاقة ناقلة. وبالتالي تكون $\Re$ علاقة ترتيب جزئي .

تعريف(٢): **علاقة الترتيب الفعلي** (**أو الترتيب الدقيق**) Strict Order Relation :

إذا كانت العلاقة $\Re$ معرفة على المجموعة A بحيث يكون:

١ – $\Re$ عكسية التماثل.

٢ – $\Re$ ناقلة.

فإن $\Re$ تُسمى **علاقة ترتيب فعلي**. يُرمز أحياناً لعلاقة الترتيب الفعلي بالرمز " < " .

مثال: إذا كانت $\Re$ هي العلاقة < (أقل من) المعرفة على الأعداد الصحيحة الموجبة N فتحقق من أن $\Re$ تكون علاقة ترتيب فعلي.

الحل: يمكن التعبير عن العلاقة $\Re$ كما يلي: $(a,b)\in\Re \Leftrightarrow a<b\ \forall a,b\in N$

(1) $\forall\ (a,b)\in\Re,\ a\neq b \Rightarrow a<b \Rightarrow b>a \Rightarrow (b,a)\notin\Re.$

وإذاً العلاقة $\Re$ عكسية التماثل.

(2) $\forall\ (a,b),(b,c)\in\Re \Rightarrow a<b,\ b<c \Rightarrow a<c \Rightarrow (a,c)\in\Re.$

وإذاً العلاقة $\Re$ ناقلة. وبالتالي تكون $\Re$ علاقة ترتيب فعلي على N .

تعريف(٣): لتكن A مجموعة مرتبة جزئياً بالعلاقة $\Re$ ، ونفرض أن $B\subset A$.

إذا وُجد عنصر $l\in A$ بحيث يكون $l\,\Re\, b$ لجميع العناصر $b\in B$.

فإن l يُسمى **حداً سفلياً** lower bound للمجموعة B ، وإذا وُجد عنصر $u\in A$ بحيث يكون $b\,\Re\, u$ لجميع عناصر $b\in B$. فإن u يُسمى **حداً علوياً** upper bound للمجموعة B.

لاحظ أن إننا لم نشترط أن l أو u تنتمي إلى B ولكنها بالطبع عناصر من A.

تعريف(٤): إذا كانت $\Re$ علاقة ترتيب جزئي معرفة على المجموعة A وكانت B مجموعة جزئية من A وكان العنصر l^* يحقق أنه حداً سفلياً للمجموعة B ويحقق الشرط لأي حد سفلي آخر l للمجموعة B أن $l \Re l^*$ فإن l^* يُسمى **أكبر حد سفلي** ويُرمز له بالرمز $l^* = \inf B$ ، وإذا كان العنصر u^* يحقق أنه حداً علوياً للمجموعة B ويحقق الشرط لأي حد علوي آخر u للمجموعة B أن $u^* \Re u$ فإن u^* يُسمى **أصغر حد علوي** ، ويُرمز له بالرمز $u^* = \sup B$.

تعريف(٥): إذا كانت $\Re$ هي علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A وكانت $B \subset A$ وكان l^* هو أكبر حد سفلي لهذه المجموعة بحيث $l^* \in B$ فإن l^* يُسمى **الحد الأدنى** للمجموعة B ، ويُرمز له بالرمز $l^* = \min B$.

وإذا كان u^* هو أصغر حد علوي لهذه المجموعة بحيث $u^* \in B$. فإن u^* يُسمى **الحد الأعظم** ، ويرمز له بالرمز $u^* = \max B$.

ملاحظة: إذا كانت $\Re$ هي علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A وكانت $B \subset A$ ، وكانت المجموعة B مجموعة محدودة فإن $\sup B = \max B \;,\; \inf B = \min B$.

تعريف(٦): إذا كانت $\Re$ هي علاقة ترتيب جزئي على المجموعة L وكانت M مجموعة جزئية من L تحتوي على الأقل على عنصرين. فإن المجموعة L تُسمى **شبكة** Lattice إذا كان للمجموعة الجزئية M أكبر حد سفلي ، وأصغر حد علوي (أي يوجد $\inf M , \sup M$) ، فإذا كانت $M=\{a,b\}$ فإن:

$$\inf M = a \wedge b \;,\; \sup M = a \vee b .$$

وتُسمى $\wedge$ عملية التقاطع أو التلاقي (meet)،وتُسمى $\vee$ عملية الإتحاد أو الوصل(join)

تعريف(٧): يُقال عن الشبكة L أنها **شبكة مكتملة** (Complete Lattice) إذا كان لكل مجموعة جزئية منها أصغر حد علوي.

تعريف(٨): يُقال عن الشبكة L أنها **شبكة توزيعية** (Distributive Lattice) إذا كان لكل $a,b,c \in L$ يتحقق: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \;,\; a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

أمثلة: مجموعة الأعداد الصحيحة تمثل شــبكة ليست مكتملة (حيث أنها مرتبة جزئياً بالنسبة للعلاقة " $\leq$" ولا يوجد لكل مجموعة جزئية منها أصغر حد علوي).

أما مجموعة القوى $P(X)$ للمجموعة الإختيارية X تمثل شبكة مكتملة وشبكة توزيعية (حيث أنها مرتبة جزئياً بالنســبة للعلاقة " $\subseteq$" ، وأي مجموعة جزئية منها يكون لها أصغر حد علوي ، وعمليتي الإتحاد والتقاطع يتوزعان على بعضهما البعض).

ولمفهوم الشبكات تطبيقات هامة كما في مجال الهواتف،والحاسبات،والأقمار الصناعية.

تماريـــــن

١- إذا كان a عمره ٧٠ سنة، وله ابن c عمره ٤٠ سنة ، وابنه d عمرها ٣٦ سنة لها ابن e عمره ١٠ سنوات ، وكان b عمره ٦٥ سنة وهو أخ لـــ a .

عبر عن العلاقات الآتية كثنائيات مرتبة:

(أ) العلاقة $\Re_1$ علاقة " أكبر من".

(ب) العلاقة $\Re_2$ علاقة " أخوة ".

(ج) العلاقة $\Re_3$ علاقة " أبوة وبنوة ".

(د) العلاقة $\Re_4$ علاقة " جد وحفيد ".

٢- أسرة مكونة من ثلاثة أخوة b_1, b_2, b_3 ، وأختين s_1, s_2 .

عبر عن العلاقـــات الآتية كثنائيات مرتبة:

(أ) العلاقة $\Re_1$ علاقة " أخت لـــ ".

(ب) العلاقة $\Re_2$ علاقة " أخ لـــ ".

٣- اختبر أي من العلاقات الآتية تكون (عاكسة – متماثلة – عكسية التماثل- ناقلة – علاقة تكافؤ – علاقة ترتيب جزئي):

(أ) علاقة "يوازي" على مجموعة الخطوط المستقيمة في المستوى.

(ب) علاقة "يتعامد مع" على مجموعة الخطوط المستقيمة في المستوى.

(ج) علاقة "أكبر من أو يساوي" على مجموعة الأعداد الطبيعية.

(د) علاقة "أب لـــ" على مجموعة أعضاء أسرة ما.

(هـــ) علاقة "أخ لـــ" على مجموعة أعضاء أسرة ما.

٤- لتكن العلاقات $\Re_1, \Re_2, \Re_3, \Re_4$ معرفة على المجموعة $A=\{1, 2, 3, 4\}$ حيث:

$\Re_1=\{ (1, 3), (2, 4), (1, 1), (4, 3), (4, 4), (3, 1) \}$,
$\Re_2=\{ (2, 4), (1, 1), (3, 1), (4, 3) \}$,
$\Re_3=\{ (2, 3), (1, 2), (3, 4), (4, 1) \}$,
$\Re_4=\{ (1, 4), (2, 2), (3, 2) \}$

فاوجد العلاقات المحصلة $\Re_3 o \Re_4$, $\Re_4 o \Re_3$, $\Re_3 o \Re_2$, $\Re_2 o \Re_1$.

٥- عبر عن العلاقات الآتية كثنائيات مرتبة من $N\times N$ حيث N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ، ثم ادرس خصائص كلا منها:

(i) $\Re=\{ (x,y) : x<y \}$.
(ii) $\Re=\{ (x,y) : x\neq y \}$.
(iii) $\Re=\{ (x,y) : x\neq y, y=2 \}$.
(iv) $\Re=\{ (x,y) : x+2y=12 \}$.

٦- بفرض أن $X=\{1,2,3\}$ ، والعلاقة $\Re$ معرفة على $P(X)$ كما يلي:

$$A\Re B \Leftrightarrow \#(A) = \#(B) \quad \forall\ A,B\in P(X)$$

حيث $\#(A)$ يرمز لعدد عناصر A . فتحقق من أن $\Re$ تكون علاقة تكافؤ.

ثم حدد فصول التكافؤ بالنسبة لهذه العلاقة.

٧- بفرض C هي مجموعة الأعداد المركبة ، والتي الجزء الحقيقي لكل منها لا يساوي الصفر. تحقق من أن العلاقة $\Re$ المعرفة على المجموعة C كما يلي:

$$(a+ib)\Re(c+id) \Leftrightarrow ac>0$$

تكون علاقة تكافؤ.

٨- إذا كانت $\Re$ هي العلاقة المعرفة على المجموعة N كما يلي:

$$(x,y)\in\Re \Leftrightarrow y/x\in N.$$

فتحقق من أن العلاقة $\Re$ تكون علاقة ترتيب جزئي.

الباب الثالث

الرواسم Mappings (Functions)

تعريف: إذا كانت A,B مجمـــوعتين فإن العلاقة f من المجمـــوعة A إلى المجموعة B تُسمى راسم أو رابط أو تطبيق من A إلي B إذا كان:

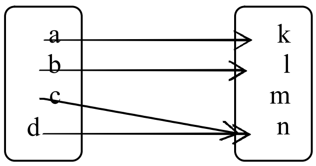
$\forall\ a\in A\ \ \exists|\ b\in B\ ;\ afb.$

أي أن لكل عنصر من عناصر المجموعة A يوجد عنصر وحيد من عناصر المجموعة B يرتبط معه بالعلاقة f ويُكتب $f : A \to B$ ويكون $f(a) = b$ حيث $a\in A\ ,\ b\in B$.

وعلى ذلك يمكن القول بأن الراسم من مجموعة إلى أخرى هو علاقة تربط كل عنصر من عناصر المجموعة الأولى بعنصر واحد وواحد فقط من عناصر المجموعة الثانية.

مثال(١): في الشـــكل التوضـــيحي التـــالي العلاقة f من المجمـــوعة $A = \{a, b, c, d\}$ إلى المجموعة $B = \{k, l, m, n\}$ تمثل راســـم حيث:

$$f = \{(a,k),(b,l),(c,n),(d,n)\}$$



واضح أن كل عنصر من عناصر المجموعة A يرتبط بعنصر وحيد من عناصر المجموعة B.

مثال(٢): إذا كانت f علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية R كما يلي:

$f : R \to R\ ,\ f(x) = x^2\ \ \forall\ x\in R.$

فإن f تُعتبر راسم من R إلى R حيث لكل $x\in R$ يوجد x^2 وحيدة تنتمي إلى R.

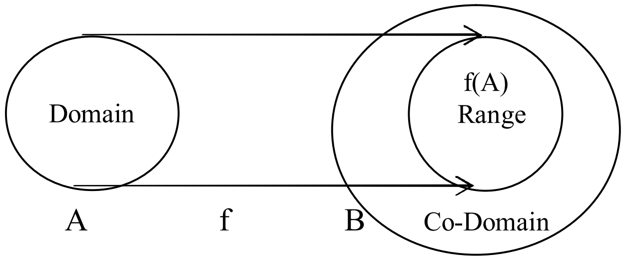
مثال(٣): إذا كانت X مجموعة منتهية ، وكانت P(X) مجموعة كل المجموعات الجزئية من X ، وكانت f علاقة معرفة كما يلي:

$f : P(X) \to Z^+\ ,\ f(S) = |\ S\ |\ \ \ \forall\ S\in P(X).$

حيث | S | هو عدد عناصر المجموعة S وحيث Z^+ هي مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة. فإن العلاقة f تُعتبر راسم من P(X) إلى Z^+ حيث إن كل عنصر (مجموعة) من عناصر P(X) يوجد بداخله عدد وحيد من العناصر وهو | S | ينتمي إلى Z^+ .

نطاق ومدى الراسم:

إذا كان f راسم من A إلى B وكان $b = f(a)$ فإن b تُسمى صورة a بالراسم f (Image of a by f)، وتُسمى المجموعة A بنطاق الراسم أو مجال الراسم Domain ويُسمى B بالنطاق المصاحب أو المجال المقابل Co-domain وتُسمى المجموعة التي تمثل صورة المجال بمدى الراسم (Range of f) .



ملاحظة: مدى الراسم يكون مجموعة جزئية من المجال المقابل.

مثال: أوجد المجال والمجال المقابل والمدى للراسم $f : R \to R$ حيث $f(x) = x^2$.

الحل: المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية R والمجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية R ، والمدى f(R) هو مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة R^* .

- **تساوى راسمين:**

إذا كان $f : A \to B$, $g : X \to Y$ راسمين فإن الراسمين f, g يكونا متساويين ويُكتب $f = g$ إذا وإذا فقط كان لهما نفس المعالم (المجال والمجال المقابل والمدي).
أي يكون:

$$A = X, B = Y , f(a) = g(a) \ \ \forall a \in A.$$

- **أنواع الرواسم Types of Mappings :**

(١) الراسم الأحادي (One to One or Injective) :

يُقال للراسم $f : A \to B$ أنه راسم أحادي أو متباين من A إلى B إذا كانت العناصر المختلفة من مجموعة المجال لها صور مختلفة في مجموعة المجال المقابل أي أن:

$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \ \ \forall\, a,b \in A.$

بمعنى أن (إذا تساوت الصور تساوت الأصول):

If $a \neq b$ in A $\Rightarrow$ $f(a) \neq f(b)$ in B.

(٢) الراسم الفوقي (Onto or Surjective) :

يُقال أن f راسم فوقي أو غامر أو شامل من A إلى B إذا كان مدى الراسم f يساوي المجال المقابل B. أي أن كل عنصر من عناصر B يكون له أصل في A.

أي أن:

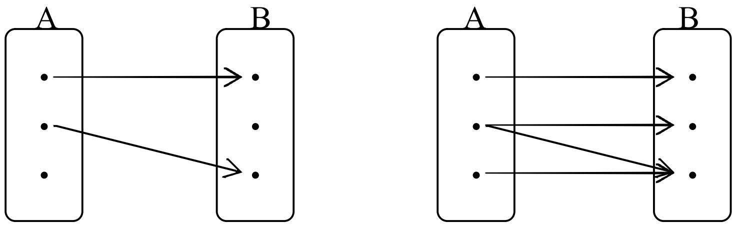
$\forall\, b \in B \ \ \exists\, a \in A \ ; \ f(a) = b.$

(٣) الراسم أحادي التناظر (Bijective or One to One Correspondence) :

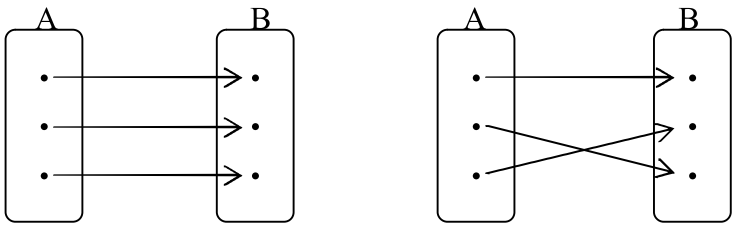
يُقال للراسم $f : A \to B$ أنه أحادي التناظر أو تناظر أحادي أو تقابل من A إلى B إذا كان f راسم أحادي وفوقي في نفس الوقت. أي يكون لكل عنصر في A صورة وحيدة في B ، ولكل عنصر في B أصل وحيد في A.

- **أمثلة توضيحية (انظر المخططات السهمية الآتية):**

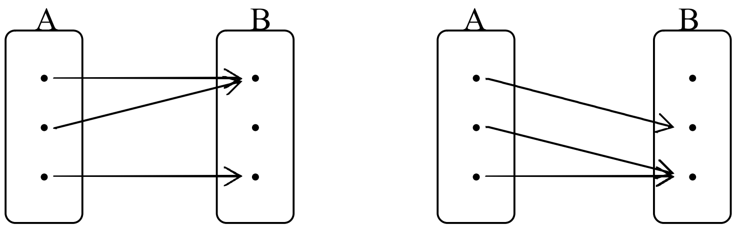
(١) علاقات وليست رواسم:



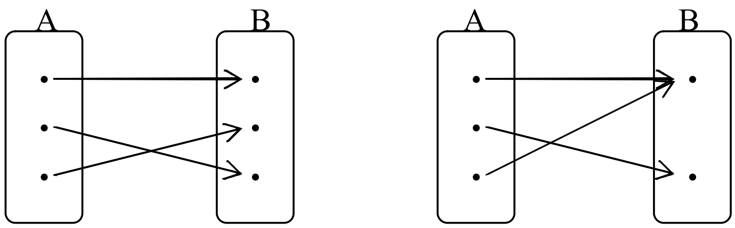
(٢) رواسم أحادية:



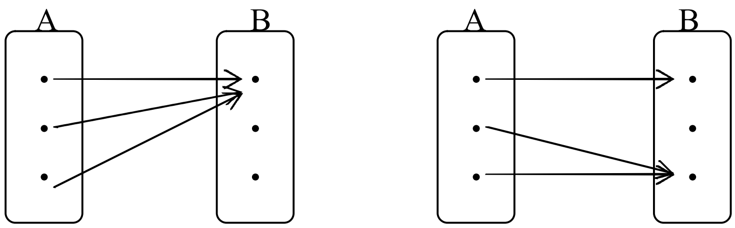
(٣) رواسم ليست أحادية:



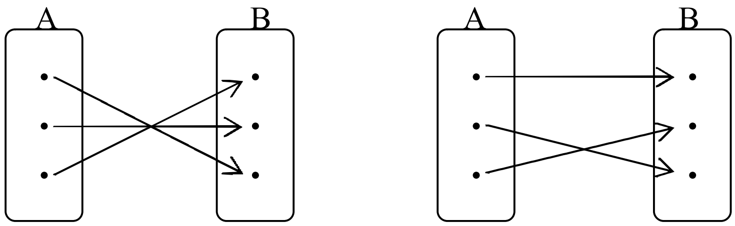
(٤) رواسم فوقية:



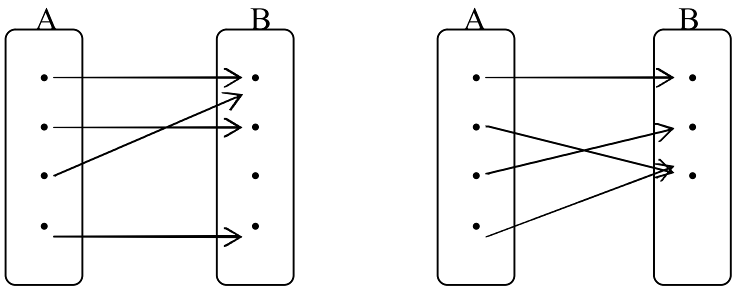
(٥) رواسم ليست فوقية:



(٦) رواسم أحادية التناظر:



(٧) رواسم ليست أحادية التناظر:



- **أمثلة تحليلية:**

مثال(١): إذا كانت Z هي مجموعة الأعداد الصحيحة فحدد نوع الراسم $f : Z \to Z$
حيث $f(x) = 2x+1$ لكل $x \in Z$.

الحل:

(1) let $x_1, x_2 \in Z$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1+1 = 2x_2+1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

وإذاً f راسم أحادي.

(2) let $y \in Z$, $y=f(x) \Rightarrow y = 2x+1 \Rightarrow x = (y-1)/2 \notin Z$.

وإذاً f راسم ليس فوقي.

مثال(٢): إذا كانت R هي مجموعة الأعداد الحقيقية فحدد نوع الراسم $f : R \to R$
حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x} & if \;\; x \neq 0, \\ 0 & otherwise. \end{cases} \quad \forall \; x \in R.$$

الحل:

(1) $-1, 1 \in R$, $f(-1) = f(1) = 0$.

وإذاً ليس لكل عنصرين مختلفين في المجال صورتين مختلفتين في المجال المقابل ، ومن ثم فإن f راسم ليس أحادي.

(2) let $y \in R$, $y = f(x)$

فإذا كان $y = 0$ فإن $x = 0$ حيث $f(0) = 0$ ، وإذا كان $y \neq 0$ فنبحث عن x حيث

$$y = f(x) \Rightarrow y = \frac{x^2-1}{x} \Rightarrow x^2 - yx - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(y \pm \sqrt{y^2+4}\right) \in R.$$

وبذلك كل عنصر غير صفري في المجال المقابل R يكون له أصل في المجال R .

وعلى ذلك فإن الراسم f فوقي.

مثال(٣): حدد نوع الراسم $f : R \to R^+ , f(x) = x + \sqrt{x^2+1} \quad \forall x \in R$

حيث R^+ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

الحل:

(1) let $x_1, x_2 \in R$, $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow x_1 + \sqrt{x_1^2+1} = x_2 + \sqrt{x_2^2+1}$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2) = \sqrt{x_2^2+1} - \sqrt{x_1^2+1} .$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = x_1^2 + 1 + x_2^2 + 1 - 2\sqrt{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} .$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} = 1 + x_1x_2.$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 1 + x_1^2x_2^2 = 1 + x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2.$$

$$\Rightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 0.$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = 0.$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2.$$

أي أنه إذا كانت الصور $f(x_1)$, $f(x_2)$ متساوية فإن الأصول x_1, x_2 تكون متساوية وعلى ذلك فإن f راسم أحادي.

(2) let $y \in R^+ , y = f(x) = x + \sqrt{(x^2+1)}$

$$\Rightarrow (y - x) = \sqrt{(x^2+1)} \Rightarrow y^2 - 2yx + x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{y^2-1}{2y} \in R .$$

أي أن لكل عنصر y في المجال المقابل R^+ يوجد أصل x في المجال R

وإذاً f راسم فوقي.

من (2),(1) يكون f راسم أحادي التناظر.

مثال(٤): إذا كانت Z^* هي مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة ، وكانت N هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة فحدد نوع الراسم $f : N \to Z^*$ حيث:

$f(x) = 2x \quad \forall x \in N.$

الحل:

(1) let $x_1, x_2 \in N$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

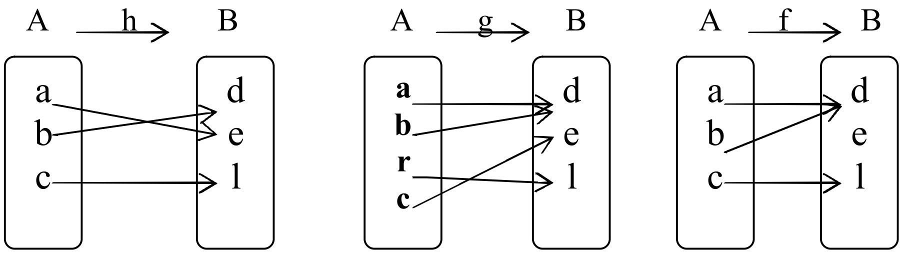
وإذاً f راسم أحادي.

(2) let $y \in Z^*$, $y = f(x) \Rightarrow y = 2x \Rightarrow x = (y/2) \in N$.

وإذاً f راسم فوقي. ومن (2),(1) يكون f راسم أحادي التناظر.

- **معكوس الراسم Inverse of the Mapping** :

إذا كان الراسم f معرف من المجموعة A إلى المجموعة B. وكما نعلم أن كل راسم علاقة ، أي أنه يمكن إيجاد العلاقة العكسية للراسم من B إلى A والسؤال الآن هو هل هذه العلاقة تكون راسم ؟ وللإجابة على هذا السؤال نستعرض الأمثلة الآتية:



شكل (ج) شكل (ب) شكل (أ)

في شكل (أ) نجد أن f راسم من A إلى B وأن f^{-1} علاقة وليست راسم من B إلى A لأن العنصر d مرتبط بعنصرين هما a,b ، وأيضاً لأن العنصر e ليس له صور بالعلاقة العكسية f^{-1} ، ونلاحظ أن f راسم ليس فوقي لأن e ليس لها أصل في A بالراسم f ، وأن f راسم ليس أحادي لأن d لها أصلان في A. ولكى يكون f^{-1} راسم كان يجب أن يكون لكل عنصر في B صورة وحيدة في A بالراسم f^{-1} .

أي أن كل عناصر B تكون صور وحيدة لعناصر A بالراسم f.

ويمكن صياغة ذلك في الشرطين الآتيين:

(١) كل عناصر B يجب أن تكون صور لعناصر A بالراسم f.

(٢) كل هذه الصور تكون وحيدة.

ونجد أن الشرط (١) يعني أن الراسم f يجب أن يكون فوقي ، والشرط (٢) يعني أن الراسم f يجب أن يكون أحادي.

وبهذا نستنتج أنه لكي تكون العلاقة العكسية للراسم f أيضاً راسم يجب أن يكون الراسم f أحادي التناظر.

وفي الشكل (ب) الراسم g راسم فوقي ولكنه ليس أحادي لأن كل عناصر B لها صور في A ولكن العنصر d مرتبط بعنصرين في A.

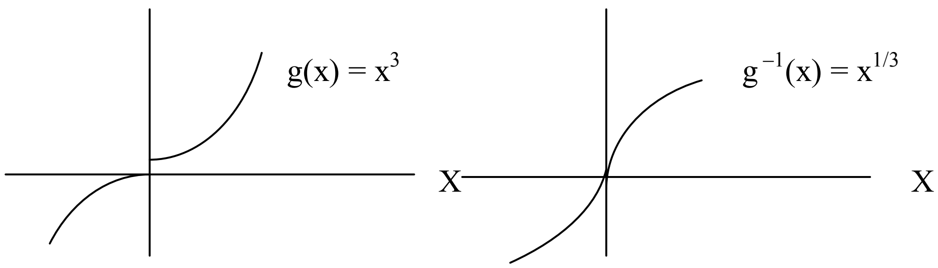
وبهذا نجد أن العلاقة العكسية g^{-1} ليست راسم لأن العنصر d ليس مرتبط بعنصر وحيد في A بالعلاقة العكسية g^{-1}.

وفي الشكل (ج) الراسم h راسم أحادي وفوقي. وبهذا نجد أن العلاقة العكسية h^{-1} تُعتبر راسم لأن كل عنصر في B مرتبط بعنصر واحد فقط في A بالعلاقة العكسية h^{-1}

ملاحظة: إذا كان الراسم f أحادي التناظر فإن الراسم العكسي f^{-1} (إن وُجد) يكون أيضاً أحادى التناظر.

- **أمثلة توضيحية:**

١ – الراسم $g : R \to R$ حيث $g(x) = x^3$ راسم أحادي التناظر. ومن ثم يكون الراسم العكسي g^{-1} معرف كما يلي: $g^{-1} : R \to R\ ;\ g^{-1}(x) = x^{1/3} \quad \forall\ x \in R$

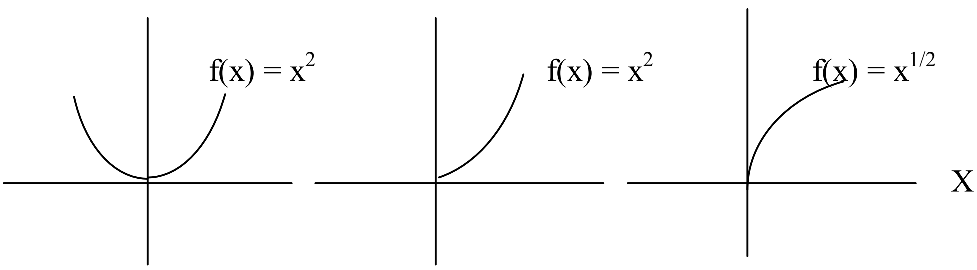


٢ – الراسم $f : R \to R$ حيث $f(x) = x^2$ ليس أحادي . ومن ثم يكون الراسم العكسي f^1 غير معرف ، ولكن إذا تم تصغير R لتُصبحR^+ فإن:

$f : R^+ \to R^+\ ;\ f(x) = x^2.$

وبذلك يُصبح الراسم f أحادي التناظر . وفي هذه الحالة يكون f^{-1} معرف كما يلي:

$f^{-1} : R^+ \to R^+;\ f^{-1}(x) = x^{1/2} \quad \forall\ x \in R^+.$



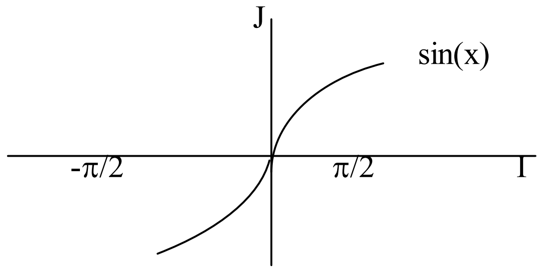
٣- نفرض المجموعتين:

$$I = \left\{ x \in R : \frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \right\}, \quad J = \{x \in R : -1 \le x \le 1\}.$$

والراسم $Sin : I \to J$ المعرف كما يلي:

$\sin x = y \,,\ \forall\, x \in I \,,\ y \in J.$

هذا الراسم يكون أحادي التناظر. والراسم العكسي $\sin^{-1} : J \to I$ يكون معرف.



ومن الرسم نلاحظ أن كل نقطة في J يقابلها نقطة وحيدة في I بالراسم العكسي $\sin^{-1}$

٤- نفرض المجموعتين:

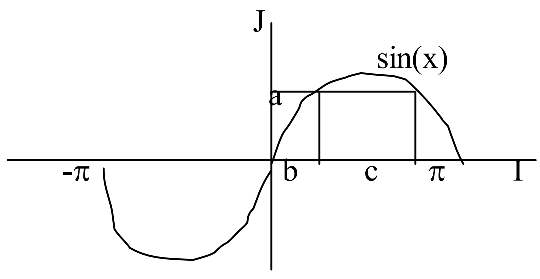
$I = \{x : x \in R \,,\ -\pi \le x \le \pi\},\ J = \{y : y \in R \,,\ -1 \le y \le 1\}.$

والراسم $\sin : I \to J$ المعرف كما يلي:

$\sin x = y \quad \forall\, x \in I \,,\ y \in J.$

هذا الراسم sin ليس أحادي لأن العدد $a \in J$ له أصلان في I هما $b,c \in I$ حيث إن $\sin b = a \,,\ \sin c = a$ وهذا الراسم sin أيضاً راسم فوقي لأن كل النقط في J لها أصل في I وبذلك فإن الراسم العكسي $\sin^{-1}$ غير معرف لأن sin لا يكون أحادي التناظر على هذه الفترات.

ولذلك حتى نتعامل مع العلاقة $y = \sin^{-1} x$ يجب أن نحدد المجال والمجال المقابل لهذه العلاقة بالفترات: $-1 \le x \le 1$ ، $\frac{-\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.



▪ تحصيل الرواسم Composition of Mappings :

إذا كان الرواسم f , g معرفة كما يلي:

$$f : A \to B \ , \ g : D \to C.$$

وكانت $f(A) \subset D$. فإنه يمكن تحصيل (تركيب) الراسم g مع الراسم f لينتج الراسم المحصلة (المركبة) $g{\circ}f : A \to C$ حيث يكون:

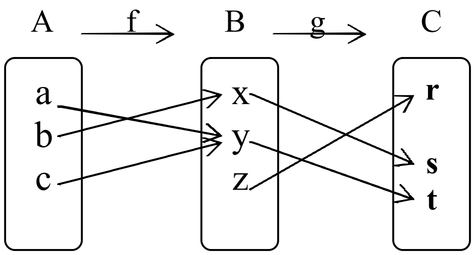
$$(g{\circ}f)(a) = g(f(a)) \ \forall \ a \in A.$$

وفي حالة $B = D$ فإن الشرط $f(A) \subset D$ يتحقق دائماً ، وبذلك فإنه لأي ثلاث مجموعات A, B, C ولأي راسمين:

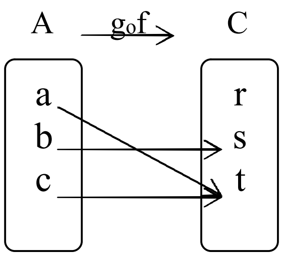
$$f : A \to B \ , \quad g : B \to C,$$

يمكن دائماً تعريف الراسم $g{\circ}f$ ونلاحظ أيضاً أن الراسم $f{\circ}g$ لا يكون معرفاً إلا إذا كان $g(B) \subset A$ ، وعندئذ فليس من الضروري أن يكون $f{\circ}g = g{\circ}f$.

<u>مثال توضيحي</u>: إذا كانت $f : A \to B$, $g : B \to C$ راسمين مُعرفين كما بالشكل:



فإن الراسم المحصلة $g{\circ}f : A \to C$ يُعرف بالشكل التالي:



- **أمثلة تحليلية:**

مثال(١): إذا كان $f, g : R \to R$ راسمين حيث:

$$g(x) = x^2,\ \ f(x) = 1 - x.\ \ \forall\ x \in R.$$

فإن:

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 1 - x^2.$$
$$(g\circ f)(x) = g(f(x) = g(1 - x) = (1 - x)^2.$$
$$(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f(1 - x) = 1 - (1 - x) = x.$$

مثال(٢): إذا كان $f, g : R \to R$ راسمين حيث:

$$g(x) = 2x\text{-}3,\ \ f(x) = x^2+3x+1.\ \ \forall\ x \in R.$$

فأوجد: (1) $(f\circ g)(x)$. (2) $(g\circ f)(x)$. (3) $(g\circ g)(x)$. (4) $(f\circ f)(x)$

الحل:

$$(1)\ (f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-3) = (2x-3)^2+3(2x-3)+1 = 4x^2-6x+1.$$
$$(2)\ (g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+3x+1) = 2(x^2+3x+1)-3 = 2x^2+6x-1.$$
$$(3)\ (g\circ g)(x) = g(g(x)) = g(2x-3) = 2(2x-3)-3 = 4x-9.$$
$$(4)\ (f\circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2+3x+1) = (x^2+3x+1)^2+3(x^2+3x+1)+1$$
$$= x^4+6x^3+14x^2+15x+5.$$

نظرية(١): إذا كان الراسمان $f : A \to B\ ,\ g : B \to C$ راسمين فوقيين

فإن المحصلة $g\circ f : A \to C$ تكون راسماً فوقياً أيضاً.

البرهان: حيث إن كل من الراسمين f,g فوقي فمن تعريف الراسم الفوقي يكون:

$$f(A) = B,\ \ g(B) = C$$
$$\therefore (g\circ f)(A) = g(f(A)) = g(B) = C.$$

أي أن صورة المجال A تكون هي المجال المقابل C للراسم $g\circ f$ وإذاً الراسم $g\circ f$ يكون فوقي.

نظرية(٢): إذا كان الراسمان $f : A \to B\ ,\ g : B \to C$ راسمين أحاديين

فإن المحصلة $g\circ f : A \to C$ تكون راسماً أحادياً أيضاً.

البرهان: حيث إن كلاً من الراسمين أحادي فمن تعريف الراسم الأحادي يكون:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b\ \forall a,b \in A\ ,\quad g(c) = g(d) \Rightarrow c = d\ \forall c,d \in B.$$
$$\therefore (g\circ f)(a_1) = (g\circ f)(a_2) \Rightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2))$$
$$\Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2\ \forall a_1,a_2 \in A.$$

وإذاً $(g\circ f)$ راسم أحادي.

نظرية(٣): إذا كان الراسمان $f : A \to B\ ,\ g : B \to C$ راسمين أحاديين التناظر فإن المحصلة $g_o f$ تكون راسماً أحادي التناظر أيضاً.

نتيجة: إذا كانت $f : A \to B\ ,\ g : B \to C\ ,\ h : C \to D$ ثلاث رواسم.

فأثبت أن $h_o(g_o f) = (h_o g)_o f$ (خاصية الدمج) .

البرهان: واضح أن:

$$(h_o g)\, _o f : A \to D\ ,\quad h_o(g_o f) : A \to D.$$

ومن تعريف تساوي راسمين يتبقى لإثبات التساوى أن نثبت أن:

$$(h_o(g_o f))(a) = ((h_o g)\, _o f)(a).\quad \forall\ a \in A.$$
$$\therefore (h_o(g_o f))(a) = h((g_o f)(a)) = h(g(f(a))) = (h_o g)(f(a)) = ((h_o g)\, _o f)(a).$$

تعريف: راسم الوحدة للمجموعة A (Identity map of A) يُعرف كما يلي:

$$i_A : A \to A\ \ ;\ i_A(a) = a.\quad \forall\ a \in A$$

ومن السهل إثبات أنه لأي راسم $f : A \to B$ يكون:

$$i_{B o} f = f\ ,\ f_o i_A = f.$$

تعريف: يُقال أن الراسم $f : A \to B$ قابل للانعكاس Invertiable إذا وُجد راســـم $g : B \to A$ بحيث يكون:

$$g_o f = i_A\ ,\quad f_o g = i_B\ .$$

وفي هذه الحالة يُسمى الراسم g لراسم العكسي للراسم f ويُكتب $g = f^{-1}$.

مثال: الراسم $f : N \to Z^*\ ,\ f(n) = n-1\ \ \forall\ n \in N$ (N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ، والمجموعة Z^* هي مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة) يكون قابل للانعكاس لأنه يمكن إيجاد راسم $g : Z^* \to N\ ,\ g(n) = n+1\ \ \forall\ n \in Z^*$ ويتحقق:

$$(g_o f)(n) = g(f(n)) = g(n-1) = (n-1)+1 = n.\quad \forall\ n \in N \qquad \therefore g_o f = i_N\ .$$
$$(f_o g)(m) = f(g(m)) = f(m+1) = m+1-1 = m\ .\quad \forall\ m \in Z^*\ \ \therefore f_o g = i_{Z^*}\ .$$

تمهيدية: الراسم إن وُجد له معكوس فإن هذا المعكوس يكون وحيد.

البرهان: نفرض أن $f : A \to B$ راسم له معكوسان هما $g_1, g_2 : B \to A$.

فمن تعريف المعكوس للراسم يكون:

$$g_{1o} f = i_A\ ,\ f_o g_2 = i_B\ .$$
$$\therefore\ g_1 = g_{1o} i_B = g_{1o}(f_o g_2) = (g_{1o} f)\, _o g_2 = i_{Ao} g_2 = g_2\ .$$

أي أن المعكوس وحيد .

نظرية(٤): الراسم $f : A \to B$ يكون قابل للانعكاس إذا وإذا فقط كان راسم أحادي التناظر (أي أحادي وفوقي).

البرهان:

أولاً: نفرض أن الراسم قابل للانعكاس وسنثبت أنه أحادي التناظر:

$$\begin{aligned}(1)\ \text{let } x_1,x_2\in A\ ,\ f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))\\ &\Rightarrow i_A(x_1) = i_A(x_2).\\ &\Rightarrow x_1 = x_2\ .\end{aligned}$$

وإذاً f راسم أحادي.

$$(2)\ \text{let } y\in B\ ,\ y=f(x) \Rightarrow x=f^{-1}(y).$$

أي أن لكل عنصر $y \in B$ يوجد (أصل) $x \in A$ بحيث $f(x) = y$.

وإذاً f راسم فوقي.

ثانياً: نفرض أن f راسم أحادي التناظر وسنثبت أنه قابل للانعكاس:

حيث إن f أحادي التناظر فيكون:

$$\forall\ a\in A\ \exists|\ b\in B\ ;\ f(a) = b,$$
$$\forall\ b\in B\ \exists|\ a\in A\ ;\ g(b) = a.$$

وبالتالي يكون الراسم $g : B \to A$ مُعرف حيث $g(b) = a$ ويكون:

$$(g\circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a\ .\ \ \therefore\ g\circ f = i_A\ ,$$
$$(f\circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b\ .\ \ \therefore\ f\circ g = i_B\ .$$

وإذاً f قابل للانعكاس.

نظرية(٥): إذا كانت $f : A\to B\ ,\ g : B \to C$ رواسم قابلة للانعكاس فإن الراسم المحصلة $(g\circ f)$ يكون قابل للانعكاس أيضاً ويكون $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$.

البرهان:

نفرض أن $h = g\circ f\ ,\ k = f^{-1}\circ g^{-1}$ فإذا أثبتنا أن $h\circ k = i_C\ ,\ k\circ h = i_A$ يكون الراسم k معكوس للراسم h :

$$\therefore\ h\circ k = (g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1}) = g\circ((f\circ f^{-1})\circ g) = g\circ(i_B\circ g^{-1}) = g\circ g^{-1} = i_C\ ,$$
$$k\circ h = (f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f) = f^{-1}\circ((g^{-1}\circ g)\circ f) = f^{-1}\circ(i_B\circ f) = f^{-1}\circ f = i_A\ .$$
$$\therefore\ (g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}.$$

تمارين

١- لتكن العلاقات $\Re_1, \Re_2, \Re_3, \Re_4$ معرفة على المجموعة $A=\{1, 2, 3, 4\}$ حيث:

$\Re_1=\{ (1, 3), (2, 4), (1, 1), (4, 3), (4, 4), (3, 1) \}$,
$\Re_2=\{ (2, 4), (1, 1), (3, 1), (4, 3) \}$,
$\Re_3=\{ (2, 3), (1, 2), (3, 4), (4, 1) \}$,
$\Re_4=\{ (1, 4), (2, 2), (3, 2) \}$

فحدد أي من هذه العلاقات تكون راسم (وما نوعه؟) ، وأيها لا تكون راسم (مع ذِكر السبب)؟.

٢- بفرض $f : Z \to Z^*$ راسم حيث $f(x) = x^2 \ \ \forall x\in Z$ وأن Z مجموعة الأعداد الصحيحة ، Z^* مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة $\{0, 1, 2, 3,...\}$.

(أ) حدد نوع الراسم f .

(ب) اكتب عناصر المدى $f(Z)$.

٣- بفرض أن $g: N \to Y$ راسم حيث $g(x) = x+2 \ \forall x\in N$ ، N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ، والمجموعة $Y=\{3,4,5,...\}$.

(أ) حدد نوع الراسم g .

(ب) أوجد العلاقة العكسية g^{-1} .

٤- بفرض أن $f, g : R \to R$ (حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية) راسمان معرفان كما يلي: $f(x) = 3x^3 \ , g(x) = 5x - 5 \ \ \forall x\in R$.

(أ) حدد نوع كلا من هذين الراسمين ؟

(ب) أوجد f^1 .

(ج) أوجد $f\circ g \ , g\circ f$.

٥- بفرض أن $f: R \to R$ راسم حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية ،

$f(x)=-2x+3 \ \ \forall x\in R$.

فتحقق من أن f يكون أحادي التناظر ، وبفرض أن $A=\{-4, -2, 0, 2, 4\}\subset R$ اكتب عناصر المجموعة $f^1(A)$.

٦- بفرض أن $f: R \to R$ راسم حيث $f(x) = 2x-3 \ \ \forall x \in R$. تحقق من أن f يكون أحادي التناظر ، ومن ثم أوجد f^{-1} .

٧- بفرض أن $f, g: R \to R$ راسمان معرفان كما يلي:

$f(x)=2x+1$, $g(x)= x^2-2$. $\forall x \in R$.

أوجد صيغة تعريف لكل من $f \circ g$, $g \circ f$ ، ومن ثم احسب قيمة $(f \circ g)(4),(g \circ f)(4)$.

٨- بفرض أن $f, g: R \to R$ راسمان معرفان كما يلي:

$f(x) = x^2+3x+1$, $g(x) = 2x-3$. $\forall x \in R$.

أوجد صيغة تعريف لكل من: $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$, $f \circ f$.

٩- بفرض أن $f: R \to R$ راسم قابل للإنعكاس وأن:

$f(x) = (x-1)/(x+1)$, $f^{-1}(y) = (1+y)/(1-y) \quad \forall x,y \in R$.

فتحقق من أن $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, $(f \circ f^{-1})(y) = y$.

١٠- إذا كان $f: R \to R$ راسم ، وكانت A_1, A_2 مجموعات جزئية اختيارية من مجموعة الأعداد الحقيقية R فتحقق من صحة ما يلي:

(i) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(ii) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$, $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ *in general*.

(Hint: For (ii) second part: let $A_1 = \{-1,0\}$, $A_2 = \{0,1\}$, $f(x) = x^2$)

١١- إذا كان $f: R \to R$ راسم قابل للإنعكاس ، وكانت B_1, B_2 مجموعات جزئية اختيارية من مجموعة الأعداد الحقيقية R فتحقق من صحة ما يلي:

(i) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(ii) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

الباب الرابع

العمليات الثنائية Binary Operations

نعلم أن عمليتي الجمع والضرب على الأعداد تختص بتركيب Composing عددين معاً لينتج عدد ثالث ، وكذلك عمليتي الاتحاد والتقاطع على المجمـــوعات تختص بتركيب مجموعتين معاً لتنتج مجموعة ثالثة ، وكذلك عملية تحصيل العلاقات (أو الرواسم) تقوم بتحصيل علاقتين (أو راسمين) لتكوين علاقة ثالثة (أو راسم ثالث) ،
وهكذا يتبين لنا مفهوم العمليات الثنائية ويمكن تعميمه.

تعريف(١): الراسم $b: X\times X \to X\ ;\ b(x,y)=z\in X\ \ \forall (x,y)\in X\times X$
يُسمى **عملية ثنائية** binary operation على المجموعة غير الخالية X .
أي أن العملية التي تحصل عناصر مجموعة ما (كل اثنان معاً) على أن يكون ناتج التحصيل ينتمي للمجموعة تُسمى عملية ثنائية على هذه المجموعة ، وفي هذه الحالة نقول أن المجموعة مغلقة بالنسبة للعملية.

وعادة يُرمز للعملية الثنائية بالرموز $*$ ، $\#$ ، $\circ$ ، $\oplus$ ، $\otimes$ ، . . . .

تعريف(٢): يُقال للعملية الثنائية $*$ على المجموعة X أنها دامجة associative
إذا تحقق الشرط: $(x*y)*z=x*(y*z)\ \ \forall x,y,z\in X$
ويُقال أنها ابدالية commutative إذا تحقق الشرط: $x*y=y*x\ \ \forall x,y\in X$

مثال(١): عملية الجمع العادية "+" عملية ثنائية دامجة على مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية ، **و**عملية الضرب العادية "×" عملية ثنائية دامجة على مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية ، وعملية الجمع العادية "+" ليست عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية حيث إن مجموع أي عددين فرديين لا يكون بالضرورة عدد فردي ، ولكن عملية الضرب"×" عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية حيث إن حاصل ضرب أي عددين فرديين دائماً يكون عدد فردي.

العنصر المحايد والمعكوس Identity and Inverse Elements:

تعريف(٣): إذا كانت $*$ عملية ثنائية على المجموعة غير الخالية X فإن العنصر $e \in X$ يُسمى **عنصراً محايداً** بالنسبة للعملية $*$ إذا تحقق الشرط: $x * e = e * x = x \quad \forall x \in X$

وإذا كانت $*$ عملية ثنائية ذات عنصر محايد $e \in X$ وليكن $x \in X$ فإن العنصر $y \in X$ يُسمى **معكوس (نظير)** للعنصر x إذا تحقق الشرط: $x * y = y * x = e$

مثال(٢): لتكن العملية $*$ معرفة في مجموعة الأعداد الصحيحة Z كما يلي:

$$x * y = x + y - 3 \quad \forall x, y \in Z$$

ادرس العملية $*$ (من حيث كونها عملية ثنائية إبدالية ، ودامجة ، ووجود العنصر المحايد ووجود المعكوس).

الحل:

$$(1) \quad x * y = x + y - 3 \in Z \quad \forall x, y \in Z.$$

وإذاً $*$ عملية ثنائية في Z.

$$(2) \quad x * y = x + y - 3 = y + x - 3 = y * x \quad \forall x, y \in Z.$$

وإذاً $*$ إبدالية.

$$(3) \quad (x * y) * z = (x + y - 3) * z = (x + y - 3) + z - 3 = x + y + z - 6,$$
$$x * (y * z) = x * (y + z - 3) = x + (y + z - 3) - 3 = x + y + z - 6.$$
$$\therefore (x * y) * z = x * (y * z) \quad \forall x, y, z \in Z.$$

وإذاً $*$ دامجة.

$$(4) \quad x * e = x \Rightarrow x + e - 3 = x \Rightarrow e = 3,$$
$$e * x = x \Rightarrow e + x - 3 = x \Rightarrow e = 3.$$

وإذاً العنصر المحايد بالنسبة للعملية $*$ يكون $e = 3 \in Z$

$$(5) \quad x * y = e \Rightarrow x + y - 3 = 3 \Rightarrow y = 6 - x,$$
$$y * x = e \Rightarrow y + x - 3 = 3 \Rightarrow y = 6 - x.$$

وإذاً معكوس العنصر $x \in Z$ يكون $6 - x \in Z$

تمثيل العمليات الثنائية بالجداول Representation by Tables :

إذا كانت X مجموعة منتهية (عدد عناصرها محدود n مثلاً) وكانت $*$ عملية ثنائية في X فإنه يلزم كتابة عدد n^2 من الأزواج المرتبة وصورها.

وللسهولة نلجأ إلى ما يُسمى بجدول العملية وهو شبيه بجدول الضرب.

كما سيتضح من المثال التالي:

مثال: لتكن $X = \{-1,0,1\}$ معرف عليها عمليتي الجمع والضرب العاديتين $\times ,+$

الحل: المجموعة X منتهية (عدد عناصرها 3) فيمكن تمثيل العمليتين $\times ,+$ بالجداول كما يلي:

الجدول الذي يمثل العملية $+$ في المجموعة X يكون:

+	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

ونلاحظ من الجدول أن بعض العناصر الموجودة داخله (أي بعض الصور) لا تنتمي إلى المجموعة X (مثلاً $-2,2 \notin X$) وبذلك فإننا بنظرة واحدة إلى الجدول نستنتج أن $+$ ليست عملية ثنائية في المجموعة X.

والجدول الذي يمثل العملية $\times$ على المجموعة X يكون:

×	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

ونلاحظ من الجدول أن جميع العناصر الموجودة داخله تنتمي إلى المجموعة X ومن ثم فإن $\times$ تكون عملية ثنائية في المجموعة X.

الجمع والضرب بمقياس العدد الصحيح n :

Addition & Multiplication Mod n :

تعريف: يُقال أن العددين الصحيحين a,b **متطابقين بمقياس العدد الصحيح** n إذا كان $a-b$ يقبل القسمة على n حيث $n \geq 2$ ويُكتب جبرياً $a \equiv b (\text{mod } n)$

ومن خلال دراستنا للعلاقات في الباب الثاني رأينا أن علاقة التطابق هذه تكون علاقة تكافؤ ، ومجموعة فصول التكافؤ لها تكون تجزيء لمجموعة الأعداد الصحيحة Z

ويُرمز لمجموعة فصول التكافؤ لهذه العلاقة بالرمز Z/n

حيث $Z/n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$

ومن باب الإيجاز نكتب $Z_n = \{0,1,2,\ldots,n-1\}$

وعمليتي الجمع والضرب في Z_n نعرفهما كما يلي:

حاصل جمع $a,b \in Z_n$ بمقياس العدد الصحيح n يكون عبارة عن **باقي ناتج قسمة المجموع** $a+b$ **على العدد الصحيح** n

وحاصل ضرب $a,b \in Z_n$ بمقياس العدد الصحيح n يكون عبارة عن **باقي ناتج قسمة حاصل الضرب** $a \times b$ **على العدد الصحيح** n

ويُرمز لعملية الجمع بمقياس العدد الصحيح n بالرمز $\oplus_n$

ولعملية الضرب بمقياس العدد الصحيح n بالرمز $\otimes_n$

ملاحظة: كلا من العمليتين $\oplus_n, \otimes_n$ في Z_n تكون دامجة.

مثال(١): لتكن $\oplus_4$ عملية الجمع بمقياس 4 معرفة على المجموعة $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ ادرس العملية $\oplus_4$ (من حيث كونها عملية ثنائية إبدالية ، ودامجة ، ووجود العنصر المحايد ، ووجود المعكوس).

الحل: نمثل العملية $\oplus_4$ بجدول كما يلي:

$\oplus_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

ونلاحظ من الجدول أن:

(١) جميع العناصر الموجودة داخله تنتمي إلى المجموعة Z_4. ومن ثم فإن $\oplus_4$ تكون عملية ثنائية في المجموعة Z_4.

(٢) عناصر الجدول متماثلة حول القطر الرئيسي للجدول. ومن ثم فإن $\oplus_4$ تكون ابدالية.

(٣) العنصر $0 \in Z_4$ هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية $\oplus_4$

(حيث ينطبق الصف (العمود) المناظر له على الصف (العمود) الرئيسي للجدول).

(٤) معكوسات عناصر المجموعة Z_4 تكون كما يلي:

العنصر	0	1	2	3
المعكوس	0	3	2	1

وحيث إن كلا من العمليتين $\otimes_n, \oplus_n$ في Z_n تكون دامجة. وعلى ذلك $\oplus_4$ تكون دامجة.

مثال(٢): لتكن $\otimes_{10}$ عملية الضرب بمقياس 10 معرفة على

المجموعة $X = \{2,4,6,8\} \subset Z_{10}$ ادرس العملية $\otimes_{10}$

(من حيث كونها عملية ثنائية إبدالية ، ودامجة ، ووجود العنصر المحايد والمعكوس).

الحل: نمثل العملية $\otimes_{10}$ بجدول كما يلي:

$\otimes_{10}$	2	4	6	8
2	4	8	2	6
4	8	6	4	2
6	2	4	6	8
8	6	2	8	4

ونلاحظ من الجدول أن:

(١) جميع العناصر الموجودة داخله تنتمي إلى المجموعة X.

ومن ثم فإن $\otimes_{10}$ تكون عملية ثنائية في المجموعة X.

(٢) عناصر الجدول متماثلة حول القطر الرئيسي للجدول.

ومن ثم فإن $\otimes_{10}$ تكون ابدالية.

(٣) العنصر $6 \in X$ هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية $\otimes_{10}$ (حيث ينطبق الصف (العمود) المناظر له على الصف (العمود) الرئيسي للجدول).

(٤) معكوسات عناصر المجموعة X تكون كما يلي:

العنصر	2	4	6	8
المعكوس	8	4	6	2

وحيث إن كلا من العمليتين $\oplus_n, \otimes_n$ في Z_n تكون دامجة.

وعلى ذلك $\otimes_{10}$ تكون دامجة.

تماريـــــن

(**١**) حدد أي من العبارات الآتية صحيح وأيها خطأ (مع ذكر السبب) :

(أ) عملية الجمع إبدالية على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N.

(ب) عملية الضرب دامجة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N.

(ج) عملية الرفع إلى قوى (أس لــ) إبدالية على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N

(د) عملية الطرح عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة Z .

(هــ) عملية الطرح عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N .

(**٢**) لتكن العملية * معرفة في مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة N كما يلي:

$x * y = 2x + 3y \ \forall x, y \in N$.

تحقق من أن * تكون عملية ثنائية غير دامجة وغير إبدالية في N

وهل * تكون عملية ثنائية في المجموعة الجزئية $\{1,2,3,4\}$ من N؟ ولماذا؟.

(**٣**) لتكن $\otimes_5$ عملية الضرب بمقياس 5 معرفة على المجموعة $X = Z_5 - \{0\}$

ادرس العملية $\otimes_5$ (من حيث كونها عملية ثنائية إبدالية ، ودامجة ، ووجود العنصر المحايد ووجود المعكوس).

الباب الخامس

الأنظمة الرياضية ذات العملية الثنائية الواحدة:

Mathematical System with One Operation:

تعريف: لتكن $*$ عملية ثنائية معرفة على مجموعة غير خالية X فإن الثنائي $< X,* >$ يُسمى **نظاماً رياضياً (أو نظاماً جبرياً أو بناءً جبرياً) ذو عملية ثنائية واحدة** .

فمثلاً كل من $< N,+ >, < N,\times >$ حيث N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة يكون نظام رياضي ذو عملية ثنائية واحدة، بينما $< N,- >$ ليس نظاماً ذا عملية حيث إن $1-2 \notin N$ ، كذلك $< N,\div >$ ليس نظاماً ذا عملية (لماذا؟).

مثال(١): إذا كانت Z هي مجموعة الأعداد الصحيحة. بيّن أي من الثنائيات الآتية يعبر عن نظام رياضي ذي عملية:

$< Z,+ >, < Z,\times >, < Z,- >, < Z,\div >$.

الحل:

حيث إن مجموع أي عددين صحيحين يكون دائماً عدداً صحيحاً فإن عملية الجمع $+$ عملية ثنائية في Z ومن ثم فإن $< Z,+ >$ يكون نظاماً ذا عملية.

كذلك حيث إن حاصل ضرب أي عددين صحيحين يكون دائماً عدداً صحيحاً فإن $< Z,\times >$ يكون نظاماً ذا عملية .

وحيث إن ناتج طرح أي عددين صحيحين يكون دائماً عدداً صحيحاً فإن $< Z,- >$ يكون نظاماً ذا عملية .

أما $< Z,\div >$ فليس نظاماً ذا عملية حيث خارج قسمة عددين صحيحين ليس دائماً عدد صحيح.

مثال(٢): إذا كانت $O=\{\pm1,\pm3,\pm5,...\}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية.
وضح أي من الثنائيات الآتية يكون نظاماً ذا عملية:

$<O,+>,<O,\times>,<O,->$.

<u>الحل:</u>

حيث إن مجموع أي عددين صحيحين فرديين يكون دائماً عدداً صحيحاً زوجياً فمثلاً $O \not\in 2- = (5-) + 3$, $O \not\in 12 = 7 + 5$ ومن ثم $<O,+>$ ليس نظاماً ذا عملية.
كذلك $<O,->$ ليس نظاماً ذا عملية لنفس السبب.
أما $<O,\times>$ فيكون نظاماً ذا عملية حيث حاصل ضرب أي عددين صحيحين فرديين هو عدد صحيح فردي ويمكن إثبات ذلك في الحالة العامة كما يلي:

$$x,y\in O\ ;x=2m+1,y=2n+1\ ,m,n\in Z$$
$$\begin{aligned}\therefore x\times y&=(2m+1)(2n+1)\\&=4mn+2m+2n+1\\&=2(2mn+m+n)+1\in O.\end{aligned}$$

التمثيل بالجداول Representation by Tables :

إذا كانت X مجموعة منتهية (عدد عناصرها محدود n مثلاً) وكانت $*$ عملية ثنائية في X فإنه يلزم كتابة عدد n^2 من الأزواج المرتبة وصورها، وللسهولة وكما ذكرنا في الباب الرابع نمثل الثنائي $< X,* >$ بجدول كما سيتضح في الأمثلة التالية:

مثال(١): لتكن $X = \{-1,0,1\}$ بيّن أي من الثنائيات الآتية يكون نظاماً ذا عملية:
$< X,+ >, < X,\times >$.

الحل: المجموعة X منتهية عدد عناصرها 3 ومن ثم فإن عدد عناصر $X \times X$ يساوي $3^2 = 9$ حيث:

$$X \times X = \{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1).(1,0),(1,1)\}.$$

ولكي نعرف ماإذا كانت العملية $+$ أو العملية $\times$ عملية ثنائية في X أم لا .
يجب أن نوجد صورة كل عنصر من عناصر $X \times X$ (أي ناتج تحصيل العنصر الأول مع العنصر الثاني لكل زوج مرتب في $X \times X$ بواسطة العملية $+$
أو العملية $\times$) ونتأكد أن جميع الصور تنتمي إلى X
وللسهولة نستخدم الجداول الممثلة للعمليات المعطاة في المجموعة X كما يلي:

✓ الجدول الذي يمثل $< X,+ >$ يكون:

+	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

نلاحظ من الجدول أن بعض العناصر الموجودة داخله (أي بعض الصور) لا تنتمي إلى المجموعة X (مثلاً $-2,2 \notin X$) وبذلك فإننا بنظرة واحدة إلى الجدول نستنتج أن $+$ لا تكون عملية ثنائية في المجموعة X وأن $< X,+ >$ لايكون نظاماً ذا عملية.

✓ والجدول الذي يمثل $< X, \times >$ يكون:

$\times$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

نلاحظ من الجدول أن جميع العناصر الموجودة داخله تنتمي إلى المجموعة X ومن ثم فإن $\times$ تكون عملية ثنائية في المجموعة X، وأن $< X, \times >$ نظاماً ذا عملية.

مثال(٢): لتكن $X = \{1,2\}$، ولتكن $Y = P(X)$ ادرس كلاً من الثنائيات:

$< Y, \cup >, < Y, - >, < Y, \Delta >$

(من حيث كون كل منها نظام ذا عملية أم لا).

الحل: المجموعة Y هي مجموعة القوى للمجموعة X أي $Y = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ والعمليات $\cup, -, \Delta$ هي الإتحاد، والفرق،والفرق المتماثل على الترتيب في المجموعات.

✓ الجدول الذي يمثل $< Y, \cup >$ يكون:

$\cup$	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
ϕ	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

من الجدول نلاحظ أن جميع عناصره تنتمي إلى المجموعة Y ومن ثم فإن $< Y, \cup >$ نظام ذو عملية.

✓ والجدول الذي يمثل $<Y,->$ يكون:

$-$	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
$\{1\}$	$\{1\}$	ϕ	$\{1\}$	ϕ
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	ϕ	ϕ
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	ϕ

من الجدول نلاحظ أن جميع عناصره تنتمي إلى المجموعة Y ومن ثم فإن $<Y,->$ نظام ذو عملية.

✓ والجدول الذي يمثل $<Y,\Delta>$ يكون:

Δ	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
ϕ	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	ϕ	$\{1,2\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	ϕ	$\{1\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	ϕ

من الجدول نلاحظ أن جميع عناصره تنتمي إلى المجموعة Y ومن ثم فإن $<Y,\Delta>$ نظام ذو عملية.

مثال(٣): تحقق من أن كلا من $<Z_4,\oplus_4>,<Z_4,\otimes_4>$ يكون نظاماً ذا عملية.

الحل:

$Z_4=\{0,1,2,3\}$ والجدولين الممثلين للعمليتين $\oplus_4,\otimes_4$ في Z_4 يكونا كما يلي:

$\oplus_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\otimes_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

من الجدولين واضح أنه لا توجد عناصر غريبة (أي أن عناصر كل جدول جميعها تنتمي للمجموعة Z_4) وإذاً كلا من $<Z_4,\oplus_4>,<Z_4,\otimes_4>$ يكون نظاماً ذا عملية.

مثال(٤): إذا كانت $X=Z_6-\{0\}$ فبيّن ما إذا كان $<X,\otimes_6>$ نظاماً ذا عملية أم لا ؟.

الحل: $Z_6=\{0,1,2,3,4,5\}$ ومن ثم تكون $X=\{1,2,3,4,5\}$ والجدول الممثل لعملية الضرب بمقياس العدد 6 في المجموعة X يكون:

$\otimes_6$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

من الجدول يتبين أن $<X,\otimes_6>$ لا يكون نظامً ذا عملية ،

حيث يوجد العنصر 0 لا ينتمي إلى X.

مثال(٥): لتكن $X = R - \{1\}$ حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية ، ولتكن * عملية في X بحيث: $x * y = x + y - xy \quad \forall x, y \in X$

فتحقق من أن $< X, * >$ يكون نظام ذا عملية.

<u>الحل</u>: واضح أن عدد عناصر المجموعة X لانهائي ومن ثم فلا يمكن تمثيل $< X, * >$ بجدول ولذلك نتبع ما يلي:

ليكن $x, y \in X$ حيث $x * y = x + y - xy$ فإذا كان $x * y = x + y - xy = 1$

فإن $x(1-y) = 1 - y$ وحيث $y \neq 1$ فإنه يمكن القسمة على $1 - y$ فينتج $x = 1$

وهذا يناقض الفرض. ومن ثم فإن $x * y = x + y - xy \neq 1$

وإذا X مغلقة بالنسبة للعملية * أي أن $< X, * >$ يكون نظاماً ذا عملية.

الأنظمة الإبدالية:

تعريف: إذا كانت العملية الثنائية * إبدالية في المجموعة X أي أن:

$$x * y = y * x \ \forall x, y \in X$$

فإن النظام $< X,* >$ يُسمى **نظام إبدالي**.

مثال(١): النظامان $< Z,+ >, < Z,\times >$ إبداليان أما النظام $< Z,- >$ فليس إبدالياً.

مثال(٢): لتكن العملية الثنائية * معرفة على N كما يلي:

$$a * b = a^b \ \forall a, b \in N$$

فإن العملية * غير إبدالية حيث إن:

$$2,3 \in N \ \ ,2 * 3 = 2^3 = 8 , 3 * 2 = 3^2 = 9$$
$$\therefore 2 * 3 \neq 3 * 2.$$

وعلى ذلك فإن النظام $< N,* >$ ليس إبدالياً.

مثال(٣): لتكن العملية * معرفة في المجموعة $X = R - \{1\}$

(حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية) كما يلي:

$$x * y = x + y - xy \ \ \forall x, y \in X$$

تحقق من أن النظام $< X,* >$ إبدالي.

<u>الحل</u>: لكل $x, y \in X$ يكون:

$$\begin{aligned} x * y &= x + y - xy \\ &= y + x - yx \\ &= y * x. \end{aligned}$$

وإذاً العملية * إبدالية في X ومن ثم فالنظام $< X,* >$ إبدالي.

مثال(٤): لتكن $M_{2\times 2}(R)$ هي مجموعة المصفوفات ذات العناصر الحقيقية من النوع 2×2 (أي أن $M_{2\times2}(R) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \ real\}$).

فإن عملية الجمع في $M_{2\times2}(R)$ تكون إبدالية حيث:

$$A + B = B + A \ \ \forall A, B \in M_{2\times2}(R) .$$

بينما عملية الضرب في $M_{2\times2}(R)$ ليست إبدالية حيث إنه ليس من الضروري أن يكون $AB = BA \ \ \forall A, B \in M_{2\times2}(R)$

فمثلاً إذا كانت $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ فإننا نجد أن:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

$$\therefore AB \neq BA.$$

مثال(٥): إذا تأملنا الجدول الذي يمثل النظام $< Z_3, \oplus_3 >$ حيث $Z_3=\{0,1,2\}$ ، $\oplus_3$ عملية الجمع بمقياس 3 وهو كما يلي:

$\oplus_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

نجد أن الجدول متماثل حول القطر الرئيسي (أي العناصر متساوية البعد عن القطر الرئيسي) مما يدل على أن: $x \oplus_3 y = y \oplus_3 x \quad \forall x, y \in Z_3$

أي أن النظام $< Z_3, \oplus_3 >$ إبدالي.

وستكون وسيلتنا في بيان أن نظاماً عدد عناصره محدود هو نظام إبدالي هي النظر في الجدول الذي يمثله فإذا كان الجدول متماثلاً حول القطر الرئيسي قلنا أن النظام إبدالي.

الأنظمة الدامجة (التجميعية):

تعريف: يُقال أن النظام $<X,*>$ **دامج** (أو **تجميعي**) إذا كانت العملية * دامجة في X أي أن:

$$(x*y)*z = x*(y*z)\ \forall x,y,z \in X.$$

مثال(١): لتكن العملية الثنائية * معرفة على N كما يلي:

$$a*b = a^b\ \forall a,b \in N$$

فإن العملية * غير دامجة حيث إن:

$$a,b,c \in N\ ,(a*b)*c = (a^b)^c = a^{bc}, a*(b*c) = a^{(b^c)} \neq a^{bc},$$
$$\therefore (a*b)*c \neq a*(b*c).$$

فمثلاً:

$$(2*3)*4 = 2^3*4 = (2^3)^4 = 2^{12},$$
$$2*(3*4) = 2*(3^4) = 2^{(3^4)} = 2^{81}.$$

وعلى ذلك فإن النظام $<N,*>$ ليس دامجاً.

مثال(٢): لتكن العملية * معرفة في المجموعة $X = R-\{1\}$ حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية كما يلي:

$$x*y = x+y-xy\ \ \forall x,y \in X$$

تحقق من أن النظام $<X,*>$ يكون دامج.

الحل: ليكن $x,y,z \in X$ فإن:

$$\begin{aligned}(x*y)*z &= (x+y-xy)*z\\ &= (x+y-xy)+z-(x+y-xy)z\\ &= x+y+z-xy-xz-yz+xyz,\\ x*(y*z) &= x*(y+z-yz)\\ &= x+(y+z-yz)-x(y+z-yz)\\ &= x+y+z-xy-xz-yz+xyz.\end{aligned}$$

وإذاً $(x*y)*z = x*(y*z)\ \forall x,y,z \in X$ أي أن العملية * دامجة ومن ثم يكون النظام $<X,*>$ دامج.

مثال(٣): كل من الأنظمة $< Z_n, \oplus_n >, < Z_n, \otimes_n >$ تكون دامجة (حيث إن تحصيل العمليتين $\oplus_n, \otimes_n$ الجمع والضرب بمقياس العدد الصحيح n لأي عنصرين من عناصر المجموعة Z_n هو ناتج باقي قسمة الجمع والضرب العادي للعنصرين على العدد الصحيح n وأن كلاً من عملية الجمع والضرب العادي عملية دامجة على أي مجموعة من العناصر).

مثال(٤): كل من الأنظمة $< P(X), \cup >, < P(X), \cap >, < P(X), \Delta >$ دامجة.

بينما النظام $< P(X), - >$ ليس دامجاً.

مثال(٥): جمع وضرب المصفوفات $M_{2\times2}$ عمليات دامجة حيث إن:

$$\begin{aligned} (A+B)+C &= A+(B+C), \\ (AB)C &= A(BC). \end{aligned} \qquad \forall A, B, C \in M_{2\times2}$$

النظام ذو العنصر المحايد:

تعريف: يُقال أن النظام $<X,*>$ **ذو عنصر محايد** إذا وُجد عنصر $e\in X$ بحيث:

$$x*e=e*x=x \ \ \forall x\in X.$$

وإذا كان النظام $<X,*>$ إبدالي فيكفي أن نحقق أحد الشرطين:

$x*e=x \ \ \forall x\in X$ أو $e*x=x \ \ \forall x\in X$

أما إذا لم يكن النظام $<X,*>$ إبدالياً وتحقق الشرط: $x*e=x \ \ \forall x\in X$ فقط فإن e في هذه الحالة تُسمى **عنصر محايد يميني** .

وكذلك إذا تحقق الشرط: $e*x=x \ \ \forall x\in X$ فقط فإن e في هذه الحالة تُسمى **عنصر محايد يساري** .

أما إذا تحقق الشرطان معاً فإن e تُسمى **عنصر محايد** .

مثال(١): العنصر المحايد في النظام $<Z,+>$ هو الصفر، أما العنصر المحايد في النظام $<Z,\times>$ فهو الواحد الصحيح.

مثال(٢): العنصر المحايد في كل من النظامين $<P(X),\cup>,<P(X),\Delta>$ هو المجموعة الخالية ϕ والعنصر المحايد في النظام $<P(X),\cap>$ هو المجموعة الأصلية X أما النظام $<P(X),->$ له عنصر محايد يميني فقط هو المجموعة الخالية ϕ وليس له محايد يساري وذلك لأن:

$$\begin{matrix} A-\phi=A, \\ \phi-A=\phi. \end{matrix} \quad \forall A\in P(X).$$

مثال(٣): ابحث وجود العنصر المحايد في النظام $< X,* >$ حيث $X = R-\{1\}$
(R مجموعة الأعداد الحقيقية) والعملية * معرفة في X كما يلي:
$$x * y = x + y - xy \quad \forall x, y \in X .$$
الحل:
$$\begin{aligned} x * e = x &\Rightarrow x + e - xe = x \\ &\Rightarrow e - xe = 0 \\ &\Rightarrow e(1-x) = 0 \\ &\Rightarrow e = 0 \vee 1 - x = 0 \\ &\Rightarrow e = 0 \vee x = 1 \\ &\Rightarrow e = 0 \ , x \neq 1 \ \ ; x \in R - \{1\}. \end{aligned}$$
وإذاً العنصر $0 \in X$ هو العنصر المحايد اليميني للنظام $< X,* >$
وحيث إن النظام $< X,* >$ إبدالي لذلك فالعنصر $0 \in X$ هو أيضاً محايد يساري ، وعلى ذلك فإن $0 \in X$ هو العنصر المحايد لهذا النظام.

مثال(٤): لتكن $X = \{1,2,3,4\}$ ولتكن العملية * معرفة في X كما يلي:
$$x * y = x \quad \forall x, y \in X.$$
ادرس النظام $< X,* >$ (من حيث الإبدال والدمج ووجود العنصر المحايد).

الحل: حيث إن عدد عناصر X محدود فنكون جدول يمثل النظام كما يلي:

*	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4

من الجدول نلاحظ أن:

(أ) النظام $< X,* >$ غير إبدالي (لعدم تماثل الجدول حول قطره الرئيسي).

(ب) النظام $< X,* >$ دامج لأن: $(x * y) * z = x * (y * z) = x \quad \forall x, y, z \in X$.

(ج) كل من العناصر 1,2,3,4 محايد يميني حيث إن:
$$x * 1 = x \ , \ x * 2 = x \ , \ x * 3 = x \ , \ x * 4 = x \quad \forall x \in X.$$
(د) النظام $< X,* >$ لايحتوي على محايد يساري.

مثال(٥): لتكن $X=\{2,4,6,8\}\subset Z_{10}$ ولتكن $\otimes_{10}$ هي عملية الضرب بمقياس 10 ادرس النظام $<X,\otimes_{10}>$ (من حيث الإبدال والدمج ووجود العنصر المحايد).

الحل: الجدول الذي يمثل النظام $<X,\otimes_{10}>$ يكون كالتالي:

$\otimes_{10}$	2	4	6	8
2	4	8	2	6
4	8	6	4	2
6	2	4	6	8
8	6	2	8	4

من الجدول نلاحظ أن:

(أ) النظام $<X,\otimes_{10}>$ إبدالي (لتماثل الجدول حول قطره الرئيسي).

(ب) النظام $<X,\otimes_{10}>$ دامج لأن:

$$(x\otimes_{10} y)\otimes_{10} z = x\otimes_{10}(y\otimes_{10} z)\ \ \forall x,y,z\in X$$

فمثلاً:

$$(2\otimes_{10}4)\otimes_{10}6=8\otimes_{10}6=8\ \ ,\ \ 2\otimes_{10}(4\otimes_{10}6)=2\otimes_{10}4=8,$$
$$(2\otimes_{10}6)\otimes_{10}8=2\otimes_{10}8=6\ \ ,\ \ 2\otimes_{10}(6\otimes_{10}8)=2\otimes_{10}8=6,$$

ولإثبات ذلك على كل اختبار ممكن لثلاثة عناصر من X فهى عملية شاقة ، ولذلك نستنتج إدماج العملية $\otimes_{10}$ من كون أن عملية الضرب بمقياس العدد الصحيح n لأي عنصرين من المجموعة Z_n هي ناتج باقي قسمة الضرب العادي للعنصرين على n وحيث إن عملية الضرب العادية دامجة على أي مجموعة من العناصر فبالتالي تكون العملية $\otimes_{10}$ دامجة على X.

(ج) العمود الثالث في الجدول يتطابق مع العمود الذي على يسار الجدول (العمود الرئيســـي للجدول) ، وأن الصف الثالث يتطابق مع الصف أعلى الجدول (الصف الرئيســـي للجدول) ، وأن العمود الثالث والصف الثالث يتقاطعان عند العنصر 6 وهذا يدل على أن العنصر 6 هو العنصر المحايد للنظام $<X,\otimes_{10}>$

(حيث يتحقق: $x\otimes_{10}6=6\otimes_{10}x=x\ \ \forall x\in X$).

العنصر المعكوس (النظير):

تعريف: ليكن $< X,* >$ نظاماً ذا عنصر محايد e وليكن $x \in X$ إذا وُجد عنصر $y \in X$ بحيث $x * y = e$ فإن العنصر y يُسمى **معكوس (نظير) يميني** للعنصر x كذلك إذا وُجد عنصر $z \in X$ بحيث $z * x = e$ فإن العنصر z يُسمى **معكوس (نظير) يساري** للعنصر x

وإذا كان النظام $< X,* >$ إبدالياً فإن المعكوس اليميني لأي عنصر $x \in X$ (إن وُجد) يكون هو نفسه المعكوس اليساري للعنصر x وفي هذه الحالة نتحدث عن معكوس العنصر.

وبالطبع لا معنى للحديث عن المعكوسات إذا لم يكن للنظام عنصر محايد.

ونستطيع أن نتبين بسهولة أن معكوس العنصر المحايد e هو نفسه.

مثال(١): في المثال السابق نستطيع أن نتبين من جدول النظام $< X,\otimes_{10} >$ أن معكوسات عناصر المجموعة X تكون كما يلي:

العنصر	2	4	6	8
المعكوس	8	4	6	2

مثال(٢): لتكن العملية * معرفة في المجموعة $X = R - \{1\}$ حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية كما يلي:

$$x * y = x + y - xy \quad \forall x, y \in X$$

عيّن المعكوس لأي عنصر في النظام $< X,* >$

الحل: أثبتنا فيما سبق أن العنصر المحايد للنظام $< X,* >$ هو 0 وليكن معكوس العنصر $x \in X$ هو العنصر y وعلى ذلك فإن:

$$\begin{aligned} x * y = 0 &\Rightarrow x + y - xy = 0 \\ &\Rightarrow y(1 - x) = -x \\ &\Rightarrow y = \frac{-x}{1 - x} \quad \forall x \in X = R - \{1\}. \end{aligned}$$

وإذاً العنصر $\frac{x}{x-1}$ هو المعكوس اليميني للعنصر x في النظام $<X,*>$ وكذلك يكون هو نفسه المعكوس اليساري للعنصر x حيث إن النظام $<X,*>$ إبدالي.

ومن ثم يكون العنصر $\frac{x}{x-1}$ هو معكوس العنصر x في النظام $<X,*>$

مثال(٣): لتكن العملية $*$ معرفة في مجموعة الأعداد الصحيحة Z كما يلي:

$$x*y=x+y-3 \quad \forall x,y\in Z$$

ادرس النظام $<Z,*>$ (من حيث الإبدال، والدمج، ووجود العنصر المحايد، ووجود المعكوس).

<u>الحل</u>:

$$(1)\ \ x*y=x+y-3=y+x-3=y*x \quad \forall x,y\in Z.$$

إذاً النظام $<Z,*>$ إبدالي.

$$(2)\ \ (x*y)*z=(x+y-3)*z=(x+y-3)+z-3=x+y+z-6,$$
$$x*(y*z)=x*(y+z-3)=x+(y+z-3)-3=x+y+z-6.$$
$$\therefore (x*y)*z=x*(y*z) \quad \forall x,y,z\in Z.$$

إذاً النظام $<Z,*>$ دامج.

$$(3)\ \ x*e=x\Rightarrow x+e-3=x$$
$$\Rightarrow e=3,$$
$$e*x=x\Rightarrow e+x-3=x$$
$$\Rightarrow e=3.$$

إذاً العنصر المحايد للنظام $<Z,*>$ هو $e=3$

$$(4)\ \ x*y=e\Rightarrow x+y-3=3$$
$$\Rightarrow y=6-x,$$
$$y*x=e\Rightarrow y+x-3=3$$
$$\Rightarrow y=6-x.$$

إذاً معكوس العنصر x هو العنصر $6-x$

تمارين

١− لتكن العملية * معرفة في المجموعة $X = R - \{-1\}$ حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية كما يلي: $x * y = x + y + xy \quad \forall x, y \in X$

فتحقق من أن $< X,* >$ يكون نظام دامج وإبدالي ،

وابحث وجود العنصر المحايد، والمعكوس.

٢− إذا كانت $X = \{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \; reals \}$ وكانت $\times$ عملية ضرب المصفوفات.

فتحقق من أن $< X,\times >$ يكون نظام دامج وإبدالي وذو عنصر محايد ،

وأن جميع عناصر هذا النظام عدا العنصر $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ لها معكوس ضربي.

٣− لتكن $\otimes_8$ عملية الضرب بمقياس 8 معرفة على المجموعة $X = \{1,3,5,7\} \subset Z_8$

ادرس النظام $< X,\otimes_8 >$ (من حيث الإبدال والدمج ووجود العنصر المحايد والمعكوس).

المراجع:

١- موسوعة علماء العرب على الإنترنت.

٢- موقع الرياضيات على الإنترنت.

http://www.math.com

٣- موسوعة ويكيبيديا الحرة على الإنترنت.

http://en.wikipedia.org/wiki/mathematics

1. W.Edwin.Clark : "Elementary Abstract Algebra" University of South Florida press (2001).
2. R.B.J.T. Allendy : "Rings ,Fields and Groups" Edward Arnold London (1995).
3. J.P.Fraleigh : "A first course in abstract algebra" 5th Edition Addison-Wesley(1994).
4. S.Lang : "Algebra" Addison Wesley 3th edition (1992).
5. D.Sara Cino : "Abstract Algebra" a first course. Addison Wesley (1980).
6. P.B.Bhatta Charya and S.K.Jain : "First Course in Rings ,Fields and Vector Spaces" Wiley Eastern Limited New Delhi (1977).
7. I.Kaplansky : "Fields and Rings" 2nd edition University of Chicago press (1972).
8. D.M.Burton : "A First course in Rings and Ideals" Addison Wesley London (1970).