



رياضيات التمويل والأستثمار

إعداد

أ.د/ عطية محمد جلول

أستاذ الرياضة والتأمين

قسم الأساليب الكمية

كلية التجارة بقنا

جامعة جنوب الوادي

2023/2022

بيانات الكتاب

الكلية: التجارة

الفرقة: الثانية

الشعبة: العربى

عدد الصفحات: 197

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَقُلْ رَبِّي زِدْنِي عِلْمًا

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

إهداء

إلى روح والدتي الطاهرة

المحتويات

الصفحة	الموضوع
5	مقدمة
6	الجزء الأول – الفائدة البسيطة
7	الفصل الأول – الفائدة والجملة
16	الفصل الثاني – جملة الدفعات
21	الفصل الثالث – الفوائد الدورية
25	الفصل الرابع – القيمة الحالية والخصم
32	الفصل الخامس – تسوية الديون
39	الفصل السادس – إستهلاك القروض
46	الجزء الثاني الفائدة المركبة
47	الفصل الأول – الفائدة والجملة
56	الفصل الثاني – القيمة الحالية والخصم
64	الفصل الثالث – الدفعات مؤكدة السداد المتساوية
78	الفصل الرابع – تسوية الديون
88	الفصل الخامس - إستهلاك القروض
110	تطبيقات عامة
139	الجداول المالية
184	امتحانات سنوات سابقة
197	المراجع

مقدمة

رياضيات التمويل والاستثمار تنشأ من قاعدة أساسية مؤداها أن أي مبلغ من النقود لا يجب تجميده لأية فترة زمنية مهما طال أو قصرت ، بل يجب استثمار هذا المبلغ بأية طريقة من طرق الاستثمار أو إقراضه بأية طريقة من طرق الإقراض

ويتناول هذا الكتاب رياضيات التمويل والاستثمار في جزئين هما: -

الجزء الأول : الفائدة البسيطة

الجزء الثاني: الفائدة المركبة

ويتضمن الجزء الأول : ستة فصول يتناول الأول منها الفائدة والجملة ، أما الثاني فيتناول جملة الدفعات المؤكدة السداد ، والثالث يتناول الفوائد الدورية ، ويتناول الرابع القيمة الحالية والخصم ، والخامس يتناول تسوية الديون والفصل السادس يتناول استهلاك القروض

أما الجزء الثاني فيتضمن خمسة فصول يتناول الأول منها الفائدة والجملة ، و يتناول الثاني القيمة الحالية والخصم أما الثالث فيتناول الدفعات مؤكدة السداد ، و الرابع يتناول تسوية الديون ، أما الخامس يتناول استهلاك القروض طويلة الأجل .

وأرجو أن يكون الله قد وفقني في عرض هذه الموضوعات بطريقة سهلة ومبسطة تساعد القارئ العزيز وأبنائي من الطلاب على الفهم والاستيعاب وتحقيق أكبر استفادة ممكنة.

ولا يفوتني أن أتقدم بالشكر والعرفان لجميع أساتذتي الأجلاء الذين استفدت من كتاباتهم في هذا المجال الواسع من مجالات العلم والمعرفة.

والله ولي التوفيق

أ. د. عطيه جلول

الجزء الأول الفائدة البسيطة

الفصل الاول

الفائدة والجملة

فيما يلي عرض للمفاهيم الخاصة بالاستثمار أو الاقتراض و الرموز المقابلة لهما :

أ = أصل المبلغ المستثمر أو المقترض.

ن = مدة الاستثمار أو الإقراض.

ع = معدل الفائدة وهو فائدة وحدة النقود في نهاية وحدة الزمن وهو نسبة تمثل فائدة وحدة النقود في نهاية الفترة الزمنية الواحدة، وهذه الوحدة الزمنية يعرف بها المعدل فإذا كانت سنة يكون المعدل سنوي وإذا كانت 6 شهور يكون المعدل نصف سنوي وإذا كانت 4 شهور يكون المعدل ثلث سنوي... وهكذا.

ف = الفائدة المستحقة عن أصل المبلغ مقابل استثماره أو إقراضه خلال المدة.

ج = الجملة المستحقة وهي ما يؤول إليه أصل المبلغ مضافا إليه الفوائد المستحقة عليه.

القانون الأساسي الفائدة

$$\begin{array}{l} \text{الفائدة} = \text{أصل المبلغ} \times \text{معدل الفائدة} \times \text{المدة} \\ \text{ف} = \text{أ} \times \text{ع} \times \text{ن} \end{array}$$

مشاكل التطبيق في قانون الفائدة

يجب أن تتبع وحدة زمن المعدل وحدة الزمن المحسوب عنها المعدل أي أنه :

- إذا كان المعدل سنوي تكون المدة وحدات زمن سنوية ، وإذا كان المعدل شهري تكون المدة وحدات زمن شهرية.

أمثلة محلولة

مثال (1)

أوجد معدل الفائدة البسيطة المستخدم بالنسبة لمبلغ قيمته 6000 جنيه أودع لمدة 9 شهور في أحد البنوك فبلغت فائدته 157.5 جنيه.

==

القانون الأساسي للفائدة :

$$\text{ف} = \text{أ} \times \text{ع} \times \text{ن}$$

$$157.5 = 6000 \times \text{ع} \times \frac{9}{12}$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{157.5}{0.75 \times 6000} = 3.5\% \text{ سنوي}$$

مثال (٢) :

أوجد مدة استثمار مبلغ 6000 جنيه أستثمر في أحد البنوك بمعدل فائدة سنوى قدره 3.5% فبلغت فائدته 157.5 جنيه.

(الحل)

$$ف = أ \times ع \times ن$$

$$ن \times \frac{3.5}{100} \times 6000 = 157.5$$

$$ن = \frac{157.5}{210}$$

$$= \frac{3}{4} = 0.75 \text{ سنة}$$

قانون الجملة :

$$\begin{array}{l} \text{الجملة} = \text{أصل المبلغ} + \text{الفائدة} \\ \text{ج} = \text{أ} + \text{ف} \end{array}$$

أو :

$$\begin{array}{l} \text{الجملة} = \text{أصل المبلغ} + (\text{أصل المبلغ} \times \text{المعدل} \times \text{المدة}) \\ \text{ج} = \text{أ} + (\text{أ} \times \text{ع} \times \text{ن}) \\ \text{ج} = \text{أ} (1 + \text{ع} \times \text{ن}) \end{array}$$

مثال (٣)

ماهي جملة مبلغ 6000 جنيه أستثمر في أحد البنوك المدة 9 شهور فكانت فائدته 157.5 جنيه

(الحل)

$$\text{ج} = \text{أ} + \text{ف}$$

$$\text{ج} = 6000 + 157.5 = 6157.5$$

مثال (4)

أوجد جملة مبلغ 6000 جنيه استثمر في أحد البنوك بمعدل فائدة 3.5 سنوياً لمدة المدة 9 شهور

(الحل)

$$ج = أ (ع + 1)$$

$$ج = 6000 \left(\frac{9}{12} \times \frac{3.5}{100} + 1 \right)$$

$$= 6157.5 \text{ جنيه}$$

معدل الفائدة غير السنوي:

← معدل شهري ← معدل ربع سنوي

← معدل ثلث سنوي ← معدل نصف سنوي

من الضروري الاتفاق بين وحدة الزمن والمدة ووحدة الزمن المعدل.

مثلاً:

إذا كان في التمرين المدة بالسنوات والمعدل ربع سنوي فإنه لا بد من تحويل المعدل الربع سنوي إلى معدل سنوي

أو

تحويل المدة من مدد سنوية إلى مدد طول كل منها ربع سنوية وهكذا ، وحل الأمثلة التالية توضح ذلك:

مثال (5)

أوجد الفائدة البسيطة لمبلغ 2000 جنيه أستثمر لمدة 3 سنوات إذا علمت أن معدل الفائدة الربع سنوي 2%

(الحل)

• تحويل المدة إلى فترات زمنية تتفق مع وحدة زمن المعدل.

$$ع = 2\% \text{ ربع سنوي}$$

$$ن = 4 \times 3 = 12$$

• .: المدة تساوي 12 وحدة زمنية طول كل منها 3 شهور (ربع سنة)

$$ف = أ \times ع \times ن$$

$$ف = 2000 \times \frac{2}{100} \times 12$$

$$= 480 \text{ جنيهاً}$$

الحل بطريقة أخرى

تحويل وحدة الزمن المعدل لتتفق مع وحدة زمن المدة

$$ن = 3 \text{ سنوات}$$

$$ع = 4 \times 0.02 = 0.08 \text{ سنوياً}$$

$$ف = أ \times ع \times ن$$

$$ف = 3 \times \frac{8}{100} \times 2000$$

$$= 480 \text{ جنيهاً}$$

مثال (6)

أوجد الفائدة البسيطة لمبلغ 1000 جنيه استثمرت المدة 16 شهر إذا علمت أن معدل الفائدة 4% كل أربع شهور.

(الحل)

• تحويل المدة إلى فترات زمنية تتفق مع وحدة زمن المعدل.

$$\therefore ن = \frac{16}{4} = 4 \text{ فترات}$$

• أي 4 فترات طول كل منها ثلث سنة

$$ف = 4 \times \frac{4}{100} \times 1000 = 160$$

الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة :

- كيف يتم التطبيق في قانون الفائدة والجملة إذا كانت المدة بالأيام ؟
- ما معنى الفائدة الصحيحة وما معنى الفائدة التجارية ؟
- هل يوجد قانون لحساب الفائدة الصحيحة واخر لحساب الفائدة التجارية ؟
- هل توجد علاقة بين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة ؟

السنة البسيطة :

هي تلك التي لا تقبل القسمة على 4 بدون باقى مثال سنوات 2001 ، 2003 ،

وفيما يلي بيان بعدد أيام كل شهر من شهور السنة البسيطة

يناير	فبراير	مارس	ابريل	مايو	يونيو	يوليو	اغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

السنة الكبيسة :

هي تلك التي تقبل القسمة على 4 بدون باقى وهى نفس شهور السنة البسيطة ما عدا شهر فبراير 29 يوم مثل السنوات 2000، 2004

قانون الفائدة الصحيحة (فص)

$$\text{فص} = \text{أ} \times \text{ع} \times \frac{\text{عدد الأيام}}{366 \text{ أو } 365}$$

(سنة بسيطة) (سنة كبيسة)

قانون الفائدة التجارية (فت)

$$\text{فت} = \text{أ} \times \text{ع} \times \frac{\text{عدد الأيام}}{360}$$

العلاقة بين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة :

$$\frac{\text{فص}}{\text{فت}} = \frac{\text{أ} \times \text{ع} \times \frac{\text{أ}}{365}}{\text{أ} \times \text{ع} \times \frac{\text{أ}}{360}}$$

$$\frac{\text{فص}}{\text{فت}} = \frac{365}{360} = \frac{72}{73}$$

أى أن :

$$72 \text{ فت} = 73 \text{ فص}$$

$$\text{فص} = \frac{72}{73} \text{ فت}$$

$$\text{فت} = \frac{73}{72} \text{ فص}$$

الفرق بين الفائدة التجارية و الفائدة الصحيحة :

$$\text{فت} - \text{فص} = \text{فت} - \frac{72}{73} \text{ فت}$$

$$\therefore \text{فت} - \text{فص} = \text{فت} \left(\frac{72}{73} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{73} \text{ فت}$$

وهو ما يطلق عليه الفرق بمعلومية الفائدة التجارية

أو

$$\begin{aligned} \text{فك} - \text{فص} &= \frac{72}{73} \text{فص} - \text{فص} \\ &= \text{فص} \left(1 - \frac{72}{73} \right) \\ &= \frac{1}{72} \text{فص} \end{aligned}$$

وبالتالي فإنه يستنتج من ذلك أن :

الفائدة التجارية أكبر من الفائدة الصحيحة وذلك إذا فرضنا ثبات المعاملات الأخرى.

ملاحظات هامة تؤخذ في الاعتبار قبل بداية حل الأمثلة :

- 1- إذا لم يذكر في التمرين أي بيان يحدد نوع السنة - في هذه الحالة تعتبر سنة بسيطة و بالتالي فإن فبراير يكون 28 يوم.
- 2- إذا لم يحدد نوع الفائدة البسيطة المطلوبة - في هذه الحالة تعتبر الفائدة المطلوبة هي الفائدة التجارية.
- 3- القاعدة الأساسية عند حساب المدة بالأيام هي عدم احتساب يوم الإيداع و احتساب يوم السحب وذلك في جميع الحالات.

والأمثلة التالية توضح مشاكل التطبيق

مثال (7)

افترض شخص مبلغ 7200 جنيه من بنك يحسب فوائد بسيطة بمعدل 3% سنوي وذلك بتاريخ 7 مايو 1983 و قام بسداد مبلغ القرض في 15 أغسطس من نفس السنة. أوجد جملة ما قام بسداده إذا علمت أن البنك يستخدم الفائدة الصحيحة.

(الحل)

عدد الأيام	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس
	24	30	31	15

$$\text{المدة} = 100 = 15 + 31 + 30 + 24 = 100 \text{ يوم}$$

$$\text{فص} = \text{أ} \times \text{ع} \times \frac{\text{ى}}{365}$$

$$= \frac{100}{365} \times \frac{3}{100} \times 7200 =$$

$$= 60 \text{ جنيه}$$

$$\text{جملة ما يسدد} = \text{أ} + \text{فص}$$

$$= 7200 + 60 = 7260 \text{ جنيه}$$

حل التمرين السابق باستخدام الفائدة التجارية

$$\text{فت} = \frac{73}{72} \text{ فص}$$

$$= 60 \times \frac{73}{72} =$$

$$= 60.833 \text{ جنيه}$$

(لا بد أن يكون مبلغ يزيد عن 60 جنيه)

مثال (٨)

اقترض شخص مبلغ 7200 جنيه بتاريخ 19 فبراير من بنك يحسب فوائد بسيطة بمعدل 4% سنوياً .
أوجد تاريخ السداد إذا علمت أن الفائدة التي حصل عليها البنك بلغت 48 جنيه

(الحل)

طالما لم يذكر نوع الفائدة المطلوبة

∴ الفائدة تجارية

$$\text{فت} = \text{أ} \times \text{ع} \times \frac{\text{ى}}{360}$$

$$\therefore \frac{\text{ى}}{360} \times \frac{4}{100} \times 7200 = 48$$

$$\therefore \text{ى} = 60 \text{ يوم}$$

ويحدد تاريخ السداد كالاتي:

(شهر الافتراض) فبراير 9 يوم

مارس 31 يوم

(شهر السداد) أبريل 20 يوم فقط

إذن تاريخ السداد هو 20 أبريل من نفس السنة.

مثال (9) :

إذا علمت أن الفرق بين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة يساوي 7 جنيه. أوجد كل من الفائدتين.

(الحل)

$$\text{فك} - \text{فص} = \frac{1}{73} \text{ فك}$$

$$\frac{1}{73} \text{ فك} = 7$$

$$\therefore \text{فك} = 511 \text{ جنيه}$$

$$\text{فك} - \text{فص} = 7$$

$$\therefore \text{فص} = 511 - 7$$

$$= 504 \text{ جنيه}$$

الفائدة لأكثر من مبلغ :

في حالة الفائدة الصحيحة : (طريقة النمر)

$$\text{مجموعه الفوائد} = \text{ع} \times \frac{1}{365} \left(\text{المبلغ الأول} \times \text{مدته} + \text{المبلغ الثاني} \times \text{مدته} \dots \right)$$

في حالة الفائدة التجارية :

$$\text{ع} \times \frac{1}{360} \left(\text{المبلغ الأول} \times \text{مدته} + \text{المبلغ الثاني} \times \text{مدته} \dots \right) =$$

أما إذا كانت المدد بالشهور يستبدل $\frac{1}{360}$ ، $\frac{1}{365}$

ويتم استخدام $\frac{1}{12}$ بدلا منها.

مثال (10) :

تم إيداع المبالغ التالية في أحد البنوك والتي تحسب فوائد بسيطة بمعدل 3.5%

• 3000 جنيه لمدة 15 يوم

• 4500 جنيه لمدة 20 يوم

• 6000 جنيه لمدة 12 يوم

• 8000 جنيه لمدة 18 يوم

المطلوب :

أوجد مجموع الفوائد المستحقة إذا علمت أن البنك يستخدم طريقة الفائدة الصحيحة.

(الحل)

$$18 \times 8000 + 12 \times 6000 + 20 \times 4500 + 15 \times 3000 \left) \frac{1}{365} \times \frac{35}{1000} = \text{مجموع الفوائد} \right. =$$

$$33.658 \text{ جنيه} = 351000 \times \frac{1}{365} \times \frac{35}{1000} =$$

(نمر اليوم)

مثال (11)

أوجد مجموع الفوائد المستحقة عن المبالغ التالية إذا علمت أن معدل الفائدة المستخدم 6%

- 1000 جنيه لمدة سنة
- 2000 جنيه لمدة 4 شهور
- 3000 جنيه لمدة 15 يوم

(الحل)

$$\text{مجموع الفوائد} = \frac{1}{360} \times \frac{6}{100} (15 \times 3000 + 30 \times 4 \times 2000 + 360 \times 1 \times 1000)$$

$$= \frac{1}{360} \times \frac{6}{100} (645000) \leftarrow \text{(نمر الأيام)}$$

$$= \frac{645}{6}$$

$$= 107.5 \text{ جنيه}$$

الفصل الثاني

جملة الدفعات مؤكدة السداد

الدفعات مؤكدة السداد هي مبالغ تستثمر في السوق المالية ويفصل بين كل مبلغ و آخر فترة زمنية معينة وبهذا يمكن تقسيم الدفعات من ناحية كل دفعة إلى:

1- دفعات متساوية القيمة وتتساوى فيها قيمة كل دفعة مهما كان عددها.

2- دفعات متفاوتة القيمة وفيها تختلف قيمة كل دفعة عن غيرها من الدفعات.

كما يمكن تقسيم الدفعات من حيث الفترة الزمنية التي تفصل بين كل دفعة وأخرى إلى :

1- دفعات منتظمة السداد: و هي تلك الدفعات التي بين كل دفعة والدفعة التالية لها فترة زمنية ثابتة.

2- دفعات غير منتظمة السداد : وهي تلك الدفعات التي لا يوجد انتظام في تاريخ سدادها.

وإذا أردنا الوصول إلى نوع الدفعات من ناحيتي القيمة وانتظام الفترات الزمنية

نجد أنه يمكن تمييز أربعة أنواع الدفعات وهي:

1- دفعات متساوية القيمة ومنتظمة السداد .

2- دفعات متساوية القيمة و غير منتظمة السداد .

3- دفعات متفاوتة القيمة ومنتظمة السداد .

4- دفعات متفاوتة القيمة و غير منتظمة السداد .

وللتسهيل سيكتفي في الدراسة بالنوع الأول وهي الدفعات المتساوية القيمة والمنتظمة السداد ، وهذا النوع من الدفعات يمكن تقسيمه بحسب توقيت سداده إلى:

1- دفعات عادية : وهي تلك الدفعات التي تدفع آخر الفترة الزمنية

2- دفعات فورية: وهي الدفعات التي تدفع فوراً أي في أول الفترة الزمنية.

الرموز المستخدمة :

د = قيمة الدفعة وهي اختصار لكلمة دفعة.

و = عدد مرات سداد الدفعة.

دو = جملة الدفعات.

القانون الأساسي لجملة الدفعات :

$$\text{جملة الدفعات} = \text{قيمة الدفعة} \times \text{عددتها} + \frac{\text{عدد الدفعات}}{2} [\text{فائدة الدفعة الأولى} + \text{فائدة الدفعة الأخيرة}]$$

$$\text{ج د} = \text{د} \times \text{ر} \times \frac{\text{ن}}{2} [\text{د} \times \text{ع} \times \text{ن} + \text{د} \times \text{ع} \times \text{ن} \times \text{ر}]$$

أمثلة محلولة

مثال (1)

أودع أحد الأشخاص مبلغ 200 جنيه في أول كل شهر من شهر عام 1995 في بنك يحسب فوائد بسيطة بمعدل 4% سنويا. أوجد ما تكون له في نهاية السنة .

(الحل)

200	200	200
-----	-----	-----

$$\text{الجملة} = 12 \times 200 + \frac{12}{2} \left[\frac{1}{12} \times \frac{4}{100} \times 200 + \frac{12}{12} \times \frac{4}{100} \times 200 \right]$$

$$= 2452 \text{ جنيه}$$

مثال (2)

أودع شخص مبلغ 100 جنيه في آخر كل شهرين لمدة سنة ونصف في أحد البنوك التي تحتسب فوائد بسيطة بمعدل 5% سنويا. أوجد جملة ما تكون له في نهاية المدة.

(الحل)

$$\text{الجملة} = 9 \times 100 + \frac{9}{2} \left[\frac{16}{12} \times \frac{5}{100} \times 100 + \frac{5}{12} \times \frac{5}{100} \times 100 \right]$$

$$= 930 \text{ جنيه}$$

مشاكل تطبيق القانون الأساسي

مثال (3)

أودع شخص مبلغ 100 جنيه في آخر كل 3 شهور و ذلك خلال عام 1995 ثم زاد المبلغ إلى 200 جنيه خلال عام 1996 ثم زاد إلى 300 جنيه خلال عام 1997، فإذا علمت أن البنك يحسب فوائد بسيطة بمعدل 6% سنويا. أوجد جملة ما تكون لهذا الشخص في نهاية عام 1997.

(الحل)

• جملة دفعات سنة 1995 =

$$\left[\frac{24}{12} \times \frac{6}{100} \times 100 + \frac{33}{12} \times \frac{6}{100} \times 100 \right] \frac{4}{2} + 4 \times 100$$

= 457 جنيه

• جملة دفعات سنة 1996 =

$$\left[\frac{12}{12} \times \frac{6}{100} \times 200 + \frac{21}{12} \times \frac{6}{100} \times 200 \right] \frac{4}{2} \times 4 \times 200$$

= 866 جنية

• جملة دفعات سنة 1997 =

$$1227 \text{ جنيه} = \left[\frac{\text{صفر}}{12} \times \frac{6}{100} \times 300 + \frac{2}{12} \times \frac{6}{100} \times 300 \right] \frac{4}{2} + 4 \times 300$$

• جملة الدفعات في نهاية عام 1997

$$= 2550 \text{ جنيه} = 1227 + 866 + 457$$

الحل بطريقة أخرى

= الجملة =

$$\left[\frac{\text{صفر}}{12} \times \frac{6}{100} \times 100 + \frac{33}{12} \times \frac{6}{100} \times 100 \right] \frac{12}{2} + 12 \times 100$$

+

$$\left[\frac{\text{صفر}}{12} \times \frac{6}{100} \times 100 + \frac{21}{12} \times \frac{6}{100} \times 100 \right] \frac{8}{2} + 8 \times 100$$

+

$$\left[\frac{\text{صفر}}{12} \times \frac{6}{100} \times 100 + \frac{9}{12} \times \frac{6}{100} \times 100 \right] \frac{4}{2} + 4 \times 100$$

= 2550 جنيه

ماذا لو نقصت قيمة الدفعة؟؟

- يمكن أن يكون المجهول قيمة الدفعة وبالتالي يتم إعطاء الجملة في التمرين.

- هل يختلف الأمر إذا كانت الدفعة يتم دفعها في نهاية كل مدة عن بداية كل مدة؟؟

مثال (4)

أشترى أحد الأشخاص آلة بمبلغ 1200 جنيه وطلب من التاجر تقسيط ثمنها على سنة بواقع 12 قسط شهري يستحق القسط أول كل شهر وذلك مقابل فوائد بسيطة بمعدل 6% سنوياً تحسب على أصل ثمن الآلة ، فإذا علمت أن التاجر استطاع استثمار الأقساط المسددة بنفس معدل الفائدة . أوجد المعدل العام للاستثمار الذي حققه التاجر .

(الحل)

$$\frac{\text{ثمن الآلة} + \text{الفوائد}}{12} = \text{القسط الشهري}$$
$$\frac{1 \times \frac{6}{100} \times 1200 + 1200}{12} =$$
$$106 = \text{جنيه}$$

● جملة ما حصل عليه الدائن = جملة 12 دفعة شهرية فورية قيمة كل منها 106 جنيه بمعدل فائدة 6% سنوياً.

$$\bullet \text{ جملة ما حصل عليه الدائن} = \frac{12}{100} + 12 \times 106 = \left[\frac{1}{12} \times \frac{6}{100} \times 106 + \frac{12}{12} \times \frac{6}{100} \times 106 \right]$$
$$= 1313.34 \text{ جنيه}$$

● الفوائد التي حصل عليها الدائن

$$= 1200 - 1313.34$$

$$= 113.34 \text{ جنيه}$$

● إيجاد معدل الاستثمار العام (الحقيقي)

$$ف = أ \times ع \times ن$$

$$113.34 = 1 \times ع \times 1200$$

$$\therefore ع = \frac{113.34}{1200}$$

$$= 9.445\%$$

مثال (5)

يودع أحد الأشخاص في بنك مبلغ 300 جنيه في نهاية كل 4 شهور لمدة ثلاث سنوات ثم أنقص المبلغ إلى النصف خلال السنتين التاليتين ، فإذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة قد تغير من 6% سنوياً خلال الأربع سنوات الأولى إلى 8% سنوياً ابتداء من السنة الخامسة. أوجد جملة ما تكون لهذا الشخص في نهاية السنة السادسة.

(الحل)

الجملة في نهاية السنة السادسة

$$\begin{aligned} & \left[\frac{12}{12} \times \frac{6}{100} \times 300 + \frac{44}{12} \times \frac{6}{100} \times 300 \right] \frac{9}{2} + 9 \times 300 \\ & \quad 2 \times \frac{8}{100} \times 2700 + \\ & \quad + \\ & \left[\frac{\text{صفر}}{12} \times \frac{6}{100} \times 150 + \frac{8}{12} \times \frac{6}{100} \times 50 \right] \frac{3}{2} + 3 \times 150 \\ & \quad 2 \times \frac{8}{100} \times 450 + \\ & \quad + \\ & \left[\frac{12}{12} \times \frac{8}{100} \times 150 + \frac{20}{12} \times \frac{8}{100} \times 50 \right] \frac{3}{2} + 3 \times 150 \\ & \quad = 4539 \text{ جنيهه} \end{aligned}$$

تمرين (غير محلول)

إذا علمت أن أحد الأشخاص كان يودع مبلغ 200 جنيه في أول كل شهر من الشهور الفردية لمدة سنتين وكان يسحب نصف هذا المبلغ في أول كل شهر من الشهور الزوجية خلال نفس المدة. أوجد جملة المتبقي له في نهاية السنتين إذا علمت أن معدل الفائدة 5% سنويا

الفصل الثالث

الفوائد الدورية

في حالة إبرام القروض فإن أبسط طريقة لسداد القرض هي سداد أصل القرض وفوائده في نهاية مدة القرض ، ولكن بعض الضرورات العملية وبناء على اتفاق بين المقرض والمقترض فإنه يتفق على سداد أصل القرض في نهاية المدة مع سداد الفوائد المستحقة بصورة دورية في نهاية فترات زمنية مجددة خلال مدة القرض. وتسهيلاً للأمر سيفترض تساوى الفترات الزمنية التي تدفع في نهايتها قيمة الفائدة الدورية الواحدة ، غير إنه يلفت النظر إلى أنه قد يتم الإتفاق على سداد هذه الفوائد في نهاية فترات غير متساوية وهذه تحتاج إلى معالجة رياضية خاصة تختلف اختلافاً كبيراً عن المعالجات الرياضية الخاصة بالفوائد الدورية التي تدفع في نهاية فترات زمنية متساوية.

خطوات حل التمارين :

1- إيجاد عدد الفوائد الدورية

$$\text{عدد الفوائد الدورية} = \frac{\text{مدة القرض}}{\text{مدة الفائدة الدورية الواحدة}}$$

2- إيجاد قيمة الفائدة الدورية الواحدة

$$ف = أ \times ع \times ن$$

3- وضع الفوائد الدورية على الخط الزمني لمدة القرض



مثال (1)

أقترض أحد الأشخاص مبلغ 10000 جنيه لمدة 4 سنوات وأتفق مع الدائن على سداد فوائد هذا القرض بصورة دورية في نهاية كل 6 شهور ، فإذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة 5% سنويا ، وأن المدين قام بسداد الفوائد الدورية في مواعيدها وأن الدائن استثمر هذه الفوائد فور سدادها بمعدل 6% سنويا. أوجد المعدل العام للاستثمار الذي حققه الدائن من هذا القرض.

(الحل)

$$\text{عدد الفوائد الدورية} = \frac{12 \times 4}{6} = 8 \text{ فوائد}$$

قيمة الفائدة الدورية الواحدة

$$\frac{6}{12} \times \frac{5}{100} \times 10000 =$$

$$= 250 \text{ جنيه}$$

نهاية	8	7	6	5	4	3	2	1	6
4	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	Σ	شهور
سنوات									

جملة الفوائد التي حققها البنك (الدائن)

= الفوائد الدورية + فوائد استثمار الفوائد الدورية.

$$1- \text{الفوائد الدورية} = 8 \times 250 = 2000 \text{ جنيه}$$

$$2- \text{فوائد استثمار الفوائد الدورية} = \text{فائدة استثمار الفائدة الأولى} + \text{فائدة استثمار الفائدة الثانية} + \dots + \dots$$

فوائد استثمار الفوائد الدورية

$$= \frac{42}{12} \times \frac{5}{100} \times 250 =$$

$$+ \frac{36}{12} \times \frac{6}{100} \times 250 + \dots$$

$$+ \frac{\text{صفر}}{12} \times \frac{6}{100} \times 250 +$$

= مجموع متوالية عددية متناقصة حدها الأول فائدة استثمار الفائدة الدورية الأولى وحدها الأخير فائدة استثمار الفائدة الدورية الأخيرة وعدد حدودها هو عدد الفوائد الدورية المستثمرة.

وبنفس طريقة الدفعات المؤكدة السداد :

$$= \frac{8}{2} [\frac{\text{صفر}}{12} \times \frac{6}{100} \times 250 + \frac{42}{12} \times \frac{6}{100} \times 250]$$

$$= \frac{8}{2} [\text{صفر} + 52.5] = 210$$

$$\text{جملة الفوائد التي حققها الدائن} = 2000 + 210 = 2210 \text{ ج}$$

إيجاد معدل الاستثمار العام :

جملة الفوائد التي حققها الدائن = أصل القرض × معدل الاستثمار × المدة

$$2210 = 1000 \times \text{ع} \times 4 \text{ سنوات}$$

$$\text{ع} = \frac{2210}{4000} = 5.525 \text{ سنوياً}$$

المشكل الخاصة بالفوائد الدورية :

- 1- سداد المقترض للفوائد الدورية في مواعيدها وتأجيل سداد أصل القرض لمدة تالية لإنتهاء مدة القرض
- 2- عدم سداد بعض الفوائد الدورية وسدادها مع أصل القرض في نهاية مدة القرض الأصلية
- 3- عدم سداد بعض الفوائد الدورية وتأجيل سدادها هي وأصل القرض لمدة تالية لإنتهاء فترة القرض الأصلية

مثال (٣)

أفترض شخص مبلغ 12000 جنيه بمعدل فائدة بسيطة قدره 4% و أتفق مع الدائن على سداد أصل القرض في نهاية 40 شهر مع سداد فوائد بصورة دورية في نهاية كل 5 شهور ، وقد قام المقترض بسداد الثلاث فوائد الدورية الأولى في مواعيدها ولم يستطيع سداد باقي الفوائد وأتفق مع المقترض على سدادها مع أصل القرض في نهاية مدته. فإذا علمت أن معدل التأخير 6.5% سنويا وأن المقترض قد استطاع استثمار الفوائد الدورية المسددة بمعدل 8% سنويا أوجد ما يلي:

- 1- مجموع الفوائد التي تحملها المدين.
- 2- جملة ما يلتزم المدين بسداده في نهاية مدة القرض.
- 3- مجموع الفوائد التي حققها الدائن.
- 4- معدل الاستثمار العام الذي حققه الدائن.

(الحل)

$$\text{عدد الفوائد الدورية} = \frac{40}{5} = 8 \text{ فوائد}$$

$$\text{قيمة الفائدة الدورية} = 12000 \times \frac{4}{100} \times \frac{5}{12} = 200 \text{ جنيه}$$

200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	شهور	5

40 شهر											

200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	شهور	5
نهاية											
40											
شهر											

مجموع الفوائد التي تحملها المدين

= الفوائد الدورية المسددة

+ الفوائد الدورية المتأخرة

+ فوائد تأخير الفوائد الدورية المتأخرة (غير المسددة)

• الفوائد الدورية المسددة = $3 \times 200 = 600$ جنيه

• الفوائد الدورية المتأخرة = $5 \times 200 = 1000$ جنيه

$$\left(\begin{array}{l} \text{فائدة تأخير الفائدة} \\ \text{المتأخرة الثانية} \end{array} + \begin{array}{l} \text{فائدة تأخير الفائدة} \\ \text{المتأخرة الأولى} \end{array} \right) \frac{\text{عدد الفوائد المتأخرة}}{2} = \text{فوائد تأخير الفوائد الدورية المتأخرة}$$

$$\left[\frac{\text{صفر}}{12} \times \frac{6}{1000} \times 200 + \frac{20}{12} \times \frac{65}{1000} \times 200 \right] \frac{5}{2} =$$

= 54.167 جنيه

∴ المطلوب

= 54.16 + 1000 + 600 =

= 1654 جنيه

جملة ما يلتزم المدين بسداده في نهاية مدة القرض

= أصل القرض + الفوائد الدورية المتأخرة + فوائد تأخير الفوائد الدورية المتأخرة

= 54.16 + 1000 + 12000 =

= 1354.16 جنيه

مجموع الفوائد التي حققها الدائن

= الفوائد الدورية المسددة + الفوائد الدورية المتأخرة + فوائد تأخير الفوائد الدورية المتأخرة

+ فوائد استثمار الفوائد المسددة.

فوائد استثمار الفوائد الدورية المسددة =

$$\left(\begin{array}{l} \text{فائدة استثمار الفائدة} \\ \text{المسددة الأخيرة} \end{array} + \begin{array}{l} \text{فائدة استثمار الفائدة} \\ \text{المسددة الأولى} \end{array} \right) \frac{\text{عدد الفوائد المسددة}}{2} =$$

$$\left[\frac{25}{12} \times \frac{8}{100} \times 200 + \frac{35}{12} \times \frac{8}{100} \times 200 \right] \frac{3}{2} =$$

= 120 جنيه

مجموعة الفوائد التي حققها الدائن

= 120 + 54.16 + 1000 + 600 =

= 1774.16 ج

معدل الاستثمار العام الذي حققها الدائن =

$$\frac{4}{12} \times \text{ع} \times 12000 = 1774.16$$

= ع = 4.43%

الفصل الرابع القيمة الحالية والخصم

أولاً: القيمة الحالية والخصم لمبلغ :

تعتبر الأوراق التجارية (الكمبيالات والسندات) من أبرز وسائل إثبات الالتزامات ، التي ترتبت على كثير من العمليات المالية والتجارية حيث يتم تحديد قيمة الالتزام المادي في هذه الأوراق وكذا تاريخ الاستحقاق بالإضافة إلى اسم الساحب (الدائن) والمسحوب عليه (المدين) وتاريخ تحرير الورقة التجارية وفي بعض الحالات قد يطلب المدين سداد قيمة التزامه المادي قبل أن يحل ميعاد الاستحقاق ، وفي بعض الحالات الأخرى قد يقوم الدائن بتقديم الأوراق التجارية الموجودة لديه إلى أحد البنوك للحصول على قيمته النقدية في تاريخ تقديمها للبنك وفي هذه الحالات فإن القيمة المسددة تكون أقل من قيمة الدين وذلك نتيجة للسداد العاجل والفرق بين قيمة الدين والقيمة المسددة يمثل الخصم المستحق لتعجيل الدفع. وفيما يلي سيتم إلقاء الضوء على العمليات المالية الخاصة بهذه الحالات وذلك بعد إيضاح المفاهيم الخاصة بالرموز المتعلقة بها وهي:

(ق س) وهي القيمة الاسمية للدين وتمثل القيمة المستحقة في نهاية مدة الدين المسجل بالورقة التجارية

(ق ح ت) ← وتمثل القيمة الحالية التجارية

(ق ح ص) ← القيمة الحالية الصحيحة

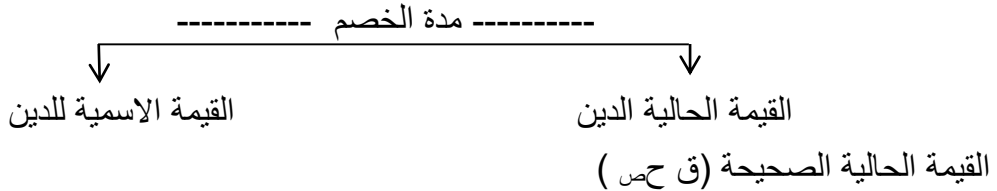
(ع) ← معدل الفائدة

(ص) ← معدل الخصم

(خ ت) ← الخصم التجاري

(خ ص) ← الخصم الصحيح

أولاً : القيمة الحالية لخصم المبلغ:



$$\frac{\text{القيمة الاسمية}}{1 + \text{معدل الفائدة} \times \text{مدة الخصم}} = \text{القيمة الحالية بمعدل فائدة}$$

الخصم الصحيح (خ ص) الخصم بمعدل فائدة

= القيمة الاسمية - القيمة الحالية بمعدل فائدة

$$\therefore \text{ق ح ص} = \frac{\text{ق س}}{1 + \text{ع ن}} \quad \text{خ ص} = \frac{\text{ق س} \times \text{ع ن}}{1 + \text{ع ن}}$$

مثال (1)

شخص مدين بمبلغ 11200 جنيه و يستحق السداد بعد ثلاث سنوات ، وقد أراد هذا الشخص سداد قيمة هذا الدين فوراً. أوجد مقدار الخصم الذي سيحصل عليه إذا علمت أن معدل الفائدة 4% سنوياً.

(الحل)

$$ج = 11200 \text{ جنيه}$$

$$ع = 4\%$$

$$ن = 3 \text{ سنوات}$$

$$\therefore \text{ق حص} = \frac{11200}{3 \times \frac{4}{100} + 1}$$

$$= \frac{11200}{1.12}$$

$$= 10000$$

$$\text{خص} = \text{ق س} - \text{ق حص}$$
$$1200 = 10000 - 11200 =$$

أو

$$\therefore \text{خص} = \frac{\text{ق س} \times ع \times ن}{ع + 1}$$

$$= \frac{0.12}{1.12} \times 11200 =$$

$$= 1200 \text{ جنيه}$$

القيمة الحالية بمعدل الخصم (القيمة الحالية التجارية) ق ح

• القيمة الحالية بمعدل خصم

$$= \text{القيمة الاسمية} - \text{الخصم بمعدل خصم}$$

$$\text{ق ح} = \text{ق س} - \text{خت} \text{ (الخصم التجاري)}$$

$$\text{ق ح} = \text{ق س} (1 - ص)$$

حيث :

$$ص = \text{معدل الخصم}$$

$$ن = \text{هي المدة}$$

الخصم بمعدل خصم = خت

$$\text{خت} = \text{قس} \times \text{ص} \times \text{ن}$$

حيث :

$$\text{قس} = \text{القيمة الاسمية أو الجملة}$$

$$\text{ص} = \text{معدل الخصم}$$

$$\text{ن} = \text{المدة}$$

• **المدة (مدة الخصم)**

هي المدة من تاريخ الخصم حتي تاريخ استحقاق الدين

مثال (٢)

تاجر مدين بكمبيالة قيمتها 3600 جنيه وتستحق بعد 10 شهور وطلب سداد قيمتها فوراً. أوجد مقدار الخصم والقيمة التي يسدها إذا علمت أن معدل الخصم هو 5% سنوية.

(الحل)

$$\text{قس} = 3600 \text{ جنيه} \quad \text{ن} = 10 \text{ شهور} \quad \text{ص} = 5\%$$

$$\text{ق ح ت} = ? \quad \text{خت} = ?$$

$$\text{خت} = 3600 \times \text{ص} \times \text{ن}$$

$$\text{خت} = 3600 \times \frac{5}{100} \times \frac{10}{12} = 150 \text{ جنيه}$$

$$\text{ق ح ت} = 3600 - 150 = 3450 \text{ جنيه}$$

العلاقة بين معدل الفائدة ومعدل الخصم ع، ص

تعتمد على تساوي الخصم بمعدل فائدة والخصم بمعدل خصم

أي أن :

$$\text{خت} = \text{خص}$$

$$\text{قس} \times \text{ص} \times \text{ن} = \frac{\text{قس} \times \text{ع} \times \text{ن}}{\text{ع} + 1}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{\text{ع}}{\text{ع} + 1}$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{\text{ص}}{\text{ص} - 1}$$

حيث:

ع = هو معدل الفائدة.

ص = هو معدل الخصم

ملحوظة هامة:

الخصم بمعدل خصم أكبر من الخصم بمعدل فائدة ، وذلك في حالة تساوي جميع العوامل الأخرى.
- ما هو معدل الخصم المقابل لمعدل فائدة 4% سنويا والمدة 20 يوم

$$\frac{ع}{ص + 1} = ص \therefore$$

$$\frac{0.04}{\frac{20}{360} \times 0.04 + 1} = ص \therefore$$

$$= 3.991\%$$

العلاقة بين : الخصم التجارى (خت) والخصم الصحيح (خص)

$$\frac{خت}{خص} = 1 + ع ن$$

$$\frac{خت}{ع} = \frac{خص}{ع}$$

الفرق بين الخصم التجارى (خت) والخصم الصحيح (خص)

$$\frac{ق س \times ع^2 \times ن^2}{ع ن + 1} = خص - خت$$

بدلالة ق س

$$خت - خص = ق ح ص \times ع^2 \times ن^2$$

بدلالة ق ح ص

ثانيا: خصم الأوراق التجارية:

• الخصم التجاري

• العمولة

• مصروفات التحصيل

$$حت = ق س \times ع \times ن$$

مصروفات التحصيل تشبه العمولة ولكن بحد أدنى.

مهلة السداد : يوم أو عدة أيام ويترتب عليها زيادة الخصم

إجمالى الخصم = الخصم + العمولة + مصاريف التحصيل

صافي المستحق بعد الخصم

$$= \text{مجموع القيم الاسمية} - \text{إجمالي الخصم}$$

$$\text{معدل الخصم الإجمالي} = \frac{\text{إجمالي الخصم}}{\text{القيمة الاسمية} \times \text{المدة}}$$

مثال (٣)

فيما يلي بيان بالقيم الاسمية وتواريخ الاستحقاق الثلاثة أوراق تجارية :

القيمة الاسمية	تاريخ الاستحقاق
2000 جنية	1993 / 4 / 14
4000 جنية	1993 / 2 / 1
3000 جنية	1992 / 12 / 5

وفي 2 نوفمبر 1992 تم خصم هذه الأوراق بالبنك فاذا علمت أن معدل الخصم 6% سنويا و العمولة 1.5 في الالف ومصاريف التحصيل $\frac{2}{3}$ في الألف وبعد أدنى 5.2 جنية للورقة الواحدة و أن البنك يضيف يوم واحد مهلة سداد . المطلوب : حساب ما يلي:

- 1- الخصم الإجمالي.
- 2- صافي المستحق
- 3- معدل الخصم الإجمالي

(الحل)

المدد من تاريخ الخصم حتى تاريخ الاستحقاق :

$$14 + 31 + 28 + 31 + 31 + 28 = 1 \text{ ي}$$

$$164 = 1 + 163 = \text{يوم}$$

$$1 + 31 + 31 + 28 = 2 \text{ ي}$$

$$92 = 91 + 1 = \text{يوم}$$

$$5 + 28 = 3 \text{ ي}$$

$$34 = 1 + 33 = \text{يوم}$$

↓	↓	↓	↓
1993/3/14	1993/2/1	1992/12/5	1992/11/2

$$\text{الخصم التجاري} = \frac{1}{360} \times \frac{6}{100} (34 \times 3000 + 92 \times 4000 + 164 \times 2000)$$

$$= 133 \text{ جنية}$$

$$\text{العمولة} = \frac{3}{2000} \times 9000 = 13.5 \text{ جنية}$$

مصروفات التحصيل

$$\text{الورقة الأولى} = \frac{2}{3000} \times 2000 = 1.333 \text{ جنيه}$$

$$\text{الورقة الثانية} = \frac{2}{3000} \times 3000 = 2 \text{ جنيه}$$

$$\text{الورقة الثالثة} = \frac{2}{3000} \times 4000 = 2.667 \text{ جنيه}$$

$$\text{اجمالي الخصم} = 133 + 7.667 + 154.167 = 394.834 \text{ جنيه}$$

↙ (2.667 + 2.5 + 2.5)

$$\text{صافي المستحق} = 9000 - 154.167 =$$

$$= 8845.833 \text{ جنيه}$$

إجمالي الخصم =

$$\text{معدل الخصم الإجمالي} = \frac{1}{360} \times (33 \times 3000 + 91 \times 4000 + 163 \times 2000)$$

$$= 154.167 \text{ = معدل الخصم الإجمالي (2191.667)}$$

$$\text{معدل الخصم الإجمالي} = \frac{154.16}{2191.667} = 7.03\%$$

ثالثاً: القيمة الحالية والخصم للدفعات :

القيمة الحالية للدفعات = مجموع الدفعات - خصم الدفعات

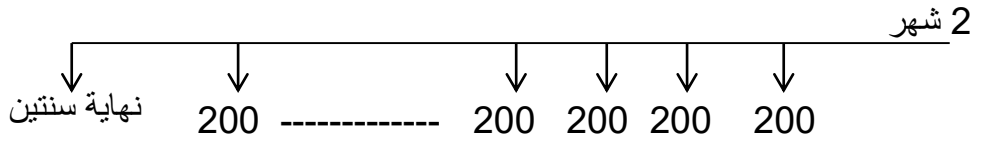
$$\text{خصم الدفعات} = \frac{\text{عدد الدفعات}}{2}$$

(خصم الدفعة الأولى + خصم الدفعة الأخيرة)

مثال(4):

أشترى شخص آلة وأنفق على سداد ثمنها على 12 قسط قيمة القسط الواحد 200 جنيه يدفع في نهاية كل شهرين ، وبعد أن قام بسداد الثلاثة أقساط الأولى وفي تاريخ استحقاق القسط الثالث طلب سداد باقي الأقساط المتفق عليها مرة واحدة. احسب مقدار الخصم الذي يحصل عليه التاجر والقيمة التي قام بسدادها إذا علمت أن معدل الخصم 6% سنوياً.

(الحل)



القسط الرابع هو أول قسط سيتم سداده قبل ميعاد استحقاقه

$$\text{مقدار الخصم} = \frac{9}{2} \left(\frac{18}{12} \times \frac{6}{100} \times 200 + \frac{2}{12} \times \frac{6}{100} \times 200 \right)$$

$$= 90 \text{ جنيه}$$

القيمة التي قام بسدادها (القيمة الحالية التجارية)

$$= 1800 - 90$$

$$= 1710 \text{ جنيه}$$

الفصل الخامس

تسوية الديون

طرق تسوية الديون

1- عند أبعد تاريخ تكون معادلة التسوية.

جملة الديون قبل التسوية = جملة الديون بعد التسوية

2- عند أقرب تاريخ تكون معادلة التسوية

القيمة الحالية للديون قبل التسوية = القيمة الحالية بعد التسوية

المدة المكافئة :

هي تلك التي بعدها يتم سداد دين جديد قيمته الاسمية تساوى مجموع القيم الاسمية للديون القديمة.

تاريخ الاستحقاق المتوسط :

هو تاريخ سداد الدين الجديد الذي قيمته الاسمية تساوي مجموع القيم الاسمية للديون القديمة

مثال (1) :

شخص مدين بالديون التالية :

دين قيمته الاسمية 1000 جنيه يستحق بعد سنتين . دين قيمته الاسمية 1000 جنيه يستحق بعد 3

سنوات . دين قيمته الاسمية 4000 جنيه يستحق بعد 5 سنوات

وقد أراد استبدال الديون السابقة بدين واحد يستحق بعد 6 سنوات. أوجد قيمة الدين الجديد إذا علمت أن

معدل الفائدة 5% سنويا.

(الحل)

جملة الديون قبل التسوية = جملة الديون بعد التسوية

$$1000 + 1000 \times \frac{5}{100} \times 4$$

+

$$2000 + 2000 \times \frac{5}{100} \times 3$$

+

$$4000 + 4000 \times \frac{5}{100} \times 1$$

= جملة الدين الجديد

$$\text{جملة الدين الجديد} = 7700 \text{ جنيه}$$

مثال (2) :

شخص مدين بالديون الآتية :

- دين قيمته الاسمية 2000 جنيه يستحق بعد 3 سنوات.
- دين قيمته الاسمية 1000 جنيه يستحق بعد 4 سنوات.
- دين قيمته الاسمية 3000 جنيه يستحق بعد 5 سنوات.

فإذا تم الاتفاق على أن يستبدل هذه الديون بدين واحد يستحق بعد سنتين ، أوجد قيمة هذا الدين الجدي إذا علمت أن معدل الخصم هو 4% سنويا.

(الحل)

القيمة الحالية للديون القديمة = القيمة الحالية للديون الجديدة

$$2000 - 2000 \times \frac{4}{100} \times 1$$

+

$$1000 - 1000 \times \frac{4}{100} \times 2$$

+

$$3000 - 3000 \times \frac{4}{100} \times 3$$

$$= \text{قيمة الدين الجديد} = 5480 \text{ جنيه}$$

مثال (3) :

دين قيمته الاسمية 3000 جنيه تستحق بعد 9 شهور ودين آخر قيمته الاسمية 5000 جنيه يستحق بعد 15 شهر ، وقد أتفق مع الدائن على أن يقوم بسداد مبلغ 4000 جنيه نقدا وتحرير كمبيالة بالمبلغ الباقي تستحق بعد 10 شهور. أوجد القيمة الاسمية للكمبيالة إذا علمت أن معدل الخصم 4% سنويا.

(الحل)

القيمة الحالية للديون قبل التسوية = القيمة الحالية للديون بعد التسوية

∴ تاريخ التسوية هو تاريخ السداد النقدي في تاريخ التسوية يكون

$$3000 - 3000 \times \frac{4}{100} \times \frac{9}{12}$$

+

$$5000 - 5000 \times \frac{4}{100} \times \frac{15}{12}$$

+

$$س - س \times \frac{4}{100} \times \frac{10}{12}$$

$$∴ 7660 = \frac{29}{30} س + 4000$$

$$∴ س = 3786.2 \text{ جنيه}$$

مثال (4)

تاجر مدين بالديون الآتية في 21 أبريل سنة 2000 .

- سند أذني قيمته الاسمية 2000 جنيه يستحق بعد 19 يوم.
- سند أذني قيمته الاسمية 3000 جنيه يستحق بعد 44 يوم.
- سند قيمته الاسمية 4000 جنيه يستحق بعد 79 يوم.
- سند قيمته الاسمية 5000 جنيه يستحق بعد 84 يوم.

وفى 25 أبريل من نفس العام استبدل الأوراق التجارية السابقة بسند أذني واحد قيمته الاسمية تعادل مجموع القيم الاسمية للديون القديمة. أوجد المدة المكافئة باستخدام الطريقة التقريبية ثم أوجد تاريخ الاستحقاق المتوسط .

(الحل)

في تاريخ التسوية هو 25 أبريل فإن :

القيمة الحالية للديون القديمة = القيمة الحالية للديون الجديدة ، وحيث ينص صراحة على استخدام الطريقة التقريبية فإن :

$$\frac{3 \times 3 + 2 \times 2 + 1 \times 1}{3 + 2 + 1} = \text{المدة المكافئة}$$

$$\text{مدة السند الأول} = 4 - 19 = 15 \text{ يوم}$$

$$\text{مدة السنة الثاني} = 4 - 44 = 40 \text{ يوم}$$

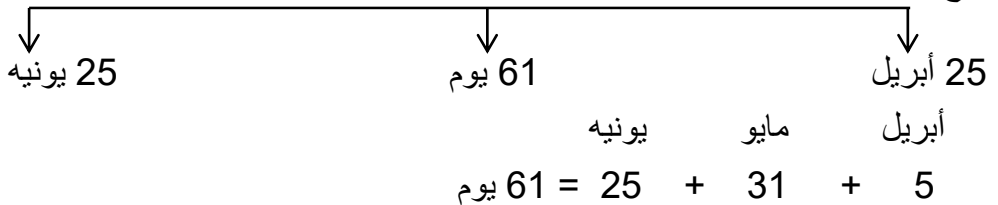
..... وهكذا

المدة المكافئة

$$\frac{80 \times 5000 + 75 \times 4000 + 40 \times 3000 + 15 \times 2000}{5000 + 4000 + 3000 + 2000} =$$

$$= 61 \text{ يوم تقريبا.}$$

تاريخ الاستحقاق المتوسط



ويمكن حل المثال بالطريقة العادية (يترك للطالب)

أمثلة غير محلولة

مثال (١)

شخص مدين بما يلي:

- 1500 جنيه تستحق بعد 4 سنوات.
- 2500 جنيه تستحق بعد 2 سنة
- 2200 جنيه تستحق بعد 5 سنوات.

أُتفق على استبدال هذه الديون بدين واحد يستحق بعد 3 سنوات.

المطلوب : أوجد قيمة هذا الدين إذا علمت أن معدل الخصم 5% سنويا.

مثال (٢)

تاجر مدين بالديون الآتية :

- دين قيمته 2500 جنيه يستحق بعد سنة
- دين قيمته 2000 جنيه يستحق بعد 3 سنوات
- دين قيمته 5500 جنيه يستحق بعد 5 سنوات

فإذا تم الاتفاق على استبدال هذه الديون بسدين قيمة الأول 4000 جنيه ويستحق بعد سنة ، وقيمة السند الثاني 7000 جنيه .

المطلوب : أوجد المدة التي يستحق بعدها السند الثاني إذا علمت أن معدل الفائدة 6% سنويا.

مثال (٣)

تاجر مدين بالأوراق التجارية الآتية :

- كمبيالة قيمتها 1700 جنيه تستحق بعد 16 شهر.
- كمبيالة قيمتها 3200 جنيه تستحق بعد 23 شهر
- سند أذني قيمته 4000 جنيه يستحق بعد 30 شهر
- سند أذني قيمته 500 جنيه يستحق بعد 35 شهر.

أراد استبدال هذه الأوراق بثلاث سندات أذنيه - السند الأول قيمته الاسمية نصف القيمة الاسمية للسند الثاني ، والسند الثاني قيمته الاسمية نصف القيمة الاسمية للسند الثالث ويستحق السند الأول بعد 11 شهر والسند الثاني بعد 24 شهرا والسند الثالث بعد 36 شهرا.

المطلوب: أوجد القيمة الاسمية للسندات الثلاثة إذا علمت أن معدل الفائدة 6% سنويا ومعدل الخصم 6% سنويا

مثال (4)

شخص مدين بما يلي :

- 3400 جنيه تستحق بعد 18 شهر
- 5700 جنيه تستحق بعد 15 شهراً
- 3600 جنيه تستحق بعد 32 شهراً

أراد استبدالها بدين واحد قيمته الاسمية تعادل مجموع القيم الاسمية للديون السابقة .

المطلوب : أوجد المدة المكافئة إذا علمت أن معدل الخصم 5% سنويا.

مثال (5) :

أوجد المدة المكافئة في التمرين السابق باستخدام قانون المدة المكافئة.

مثال (6) :

تاجر مدين بالأوراق التجارية الآتية :

- سند أذنى قيمته 1800 جنيه يستحق في 3 مارس 1994
- سند أذنى قيمته 3100 جنيه يستحق في 20 يونيو 1994
- كمبيالة قيمتها 4200 جنيه تستحق في 15 سبتمبر 1995

أراد هذا التاجر في 20 يناير 1994 استبدال الديون القديمة بكمبيالتين - قيمة الكمبيالة الأولى $\frac{1}{4}$ قيمة الكمبيالة الثانية وتستحق الأولى في 15 مايو 1994 والثانية في 10 أغسطس 1994.

المطلوب :

أوجد القيمة الاسمية لكل منهما إذا علمت أن معدل الفائدة 5% سنويا ومعدل الخصم 5% سنويا.

مثال (٧)

تاجر مدين بالديون الآتية:

- كمبيالة قيمتها الأسمية 2500 جنيه تستحق 7 يونيو 1995
- كمبيالة قيمتها الاسمية 3800 جنيه تستحق 3 أغسطس 1995
- كمبيالة قيمتها الأسمية 4500 جنيه تستحق 9 أكتوبر 1995

وفي 17 فبراير 1993 أراد هذا التاجر استبدال الديون السابقة بدين واحد قيمته الاسمية تعادل القيمة الاسمية للدين السابق.

المطلوب: أوجد المدة المكافئة وتاريخ الاستحقاق المتوسط إذا علمت أن معدل الخصم 6% سنويا.

مثال (٨) :

أوجد المدة المكافئة وتاريخ الاستحقاق المتوسط في التمرين السابق باستخدام قانون المدة المكافئة.

الفصل السادس

استهلاك القروض

مفاهيم أساسية :

تشمل السوق المالية قطاعين أساسيين هما الاستثمار والتمويل ويعتبر من أهم العناصر التي يعتمد عليها التمويل القروض ، وإذا كانت القروض جميعا تتشابه من حيث الحصول على أصل القرض في أول المدة إلا أنهما يختلفا اختلافا كبيرا من حيث طريقة سداد القرض وفوائده.

وفيما يلي أهم طرق سداد القروض:

- 1- سداد أصل القرض وفوائده في نهاية مدة القرض.
- 2- سداد أصل القرض في نهاية المدة مع سداد فوائده بصورة دورية
- 3- سداد أصل القرض في نهاية المدة مع سداد فوائده في أول المدة.
- 4- استهلاك أصل القرض بمبالغ متساوية مع سداد الفوائد على الرصيد.
- 5- سداد أصل القرض وفوائده على أقساط متساوية.

وسوف يتم دراسة الثلاث طرق الأخيرة فقط كما يلي:

الطريقة الأولى : سداد أصل القرض في نهاية المدة مع سداد فائدة في أول المدة.

مثال (1) :

أقترض شخص مبلغ 6000 جنيه من أحد الأشخاص المدة 3 سنوات بمعدل فائدة قدره 5% سنويا ، فإذا علمت أن هذا الشخص يستقطع الفوائد من أصل القرض في أول المدة

أوجد ما يلي:

- 1- الفوائد.
- 2- معدل الاستثمار العام الذي حققه الدائن في حالة عدم استثمار الفوائد.
- 3- معدل الاستثمار الذي حققه الدائن إذا أمكنه استثمار الفوائد بمعدل 5% سنويا.

(الحل)

يوجد هنا أصل وهمي وهو 6000 جنيه ، و حقيقى وهو ما يتسلمه المقترض فعلا.

نحسب أولا مجموع الفوائد

$$ف = أ \times ع \times ن$$

$$= 6000 \times \frac{5}{100} \times 3$$

$$= 900 \text{ جنيه}$$

ثانياً : معدل الاستثمار العام الذي حققه المرابي

$$\begin{aligned} \text{أصل القرض الذي يتسلمه المقترض} &= 6000 - 900 = 5100 \\ \text{الفوائد} &= \text{أصل القرض الحقيقي} \times \text{معدل الاستثمار العام} \times \text{ن} \\ 900 &= 5100 \times \text{ع} \times 3 \\ \text{ع} &= 5.88\% \end{aligned}$$

ثالثاً : معدل الاستثمار العام الذي حققه الدائن إذا استطاع استثمار الفوائد بمعدل 5%.

$$\begin{aligned} \text{فوائد الاستثمار} &= 900 \times \frac{5}{100} \times 3 \\ &= 135 \text{ جنية} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{الفوائد التي حققها الدائن} &= 900 + 135 = 1035 \text{ جنيته} \\ \text{ف} &= \text{أ} \times \text{ع} \times \text{ن} \\ 1035 &= 5100 \times \text{ع} \times 3 \\ \text{ع} &= 6.765\% \end{aligned}$$

الطريقة الثانية : استهلاك القرض بمبالغ متساوية مع سداد فائدة على الرصيد

مثال (2)

اقترض تاجر مبلغ 3600 جنيته لمدة 30 شهر بمعدل فائدة قدره 5% سنويا ويتم الاتفاق على استهلاك القرض على 6 أقساط متساوية مع سداد الفائدة على الرصيد.

المطلوب:

- 1- مجموع الفوائد.
- 2- تصوير جدول استهلاك القرض.
- 3- إيجاد المعدل العام للاستثمار الذي حققه الدائن إذا علمت أن جميع المستحقات ددت في مواعيدها وأن الدائن قد تمكن من استثمارها فور تسلمها بمعدل 6% سنويا.

(الحل)

$$\text{مدة القسط} = \frac{\text{مدة القرض}}{\text{عدد الأقساط}} = \frac{30}{6} = 5 \text{ شهور}$$

$$\text{قيمة القسط} = \frac{\text{مدة القرض}}{\text{عدد الأقساط}} = \frac{3600}{6} = 600 \text{ جنيه}$$

مجموع الفوائد =

$$\left(\frac{5}{12} \times \frac{5}{100} \times 600 + \frac{5}{12} \times \frac{5}{100} \times 3600 \right) \frac{6}{2} =$$

مجموع الفوائد = 262.5 جنيه

الفترة	الرصيد أول الفترة	الاستهلاك المتساوي	فائدة الرصيد	الاستهلاك + الفائدة	الرصيد في نهاية الفترة
-1	3600	600	75	675	3000
-2	3000	600	62.5	662.5	2400
-3	2400	600	50	650	1800
-4	1800	600	37.5	637.5	1200
-5	1200	600	25	625	600
-6	600	600	12.5	612.5	صفر
		3600	262.5	3862.5	

ثالثاً: المعدل العام للاستثمار :

مجموع الفوائد التي حققها الدائن :

1- مجموع فوائد الأرصدة = 262.5 جنيه

2- فوائد الاستثمار

فائدة استثمار المبلغ الأول :

$$84.375 \text{ جنيه} = \frac{25}{12} \times \frac{6}{100} \times 675 =$$

فائدة استثمار المبلغ الثاني :

$$66.25 \text{ جنيه} = \frac{20}{12} \times \frac{6}{100} \times 662.5 =$$

فائدة استثمار المبلغ الثالث :

$$48.750 \text{ جنيه} = \frac{15}{12} \times \frac{6}{100} \times 650 =$$

$$\text{فوائد الاستثمار} = 246.875 \text{ جنيه}$$

$$\text{مجموع الفوائد التي حققها الدائن} = 262.5 + 246.875 = 509.375 \text{ جنيه}$$

$$\text{ف} = \text{أ} \times \text{ع} \times \text{ن}$$

$$509.375 = 360 \times \text{أ} \times \text{ع} \times \frac{30}{12}$$

$$\text{ع} = 5.659\%$$

الطريقة الثالثة : سداد أصل القرض وفوائده على أقساط متساوية

$$\text{جملة القرض} = \text{جملة الأقساط}$$

$$\text{أ} + \text{أ} \times \text{ع} \times \text{ن} =$$

$$\text{د} \times \text{ر} + \frac{\text{د} \times \text{ع} \times \text{ن} + \text{د} \times \text{ع} \times \text{ن}}{2}$$

مثال (٣)

اقترض شخص مبلغ 2000 جنيه لمدة سنة وأتفق على سداد هذا المبلغ وفوائده على أقساط متساوية ويدفع القسط في نهاية كل شهرين ، فإذا علمت أن معدل الفائدة 5% سنويا فأوجد ما يلي:

1- قيمة القسط المتساوي.

2- المعدل العام للاستثمار الذي حققه الدائن إذا عه أنه قام باستثمار الأقساط المسددة فور تسلمها بمعدل فائدة قدره 8% سنويا

(الحل)

جملة القرض = جملة الأقساط

$$\frac{5}{100} \times 2000 + 2000$$

$$\left[\frac{\text{صفر}}{12} \times \frac{5}{100} \times د + \frac{10}{12} \times \frac{5}{100} \times د \right] \frac{6}{2} + 6 \times د =$$

$$\frac{د}{8} + 6د = 100 + 2000 =$$

حيث د = قيمة القسط المتساوي

... قيمة القسط = 342.857 جنيه

ثانياً : المعدل العام للاستثمار :

مجموع الفوائد التي حققها الدائن

$$= \text{الفوائد التي تضمنتها الأقساط} + \text{فوائد استثمار الأقساط}$$

الفوائد التي تضمنتها الأقساط

$$= 2000 - 6 \times 342.857 = 57.142 \text{ جنيه}$$

فوائد الاستثمار

$$= \left(\frac{100}{12} \times \frac{8}{100} \times 342.85 + \frac{100}{12} \times \frac{8}{100} \times 342.85 \right) \frac{6}{2} =$$

$$= 68.57 \text{ جنيه}$$

$$\text{الفوائد التي حققها الدائن} = 68.57 + 57.14 = 125.71 \text{ جنيه}$$

$$\text{..... ف} = \text{أ} \times \text{ع} \times \text{ن}$$

$$1 \times \text{ع} \times 2000 = 125.71$$

$$\text{ع} = 6.286\%$$

أمثلة غير محلولة

مثال (١)

اقترض تاجر مبلغ 4500 جنيه لمدة 30 شهر بمعدل فائدة 4.5 سنويا. فإذا علمت أن المقرض يستقطع الفوائد من أصل القرض في أول المدة.

المطلوب:

1- إيجاد قيمة الفوائد.

2- معدل الاستثمار العام الذي حققه المقرض إذا تمكن من استثمار الفوائد بنفس المعدل.

3- معدل الاستثمار العام الذي يحققه المقرض إذا تمكن من استثمار الفوائد بمعدل 6.5% سنويا

مثال (٢)

فرق بين طريقة استهلاك أصل القرض بمبالغ متساوية مع سداد فائدة الرصيد وطريقة سداد أصل القرض وفوائده على أقساط متساوية.

مثال (٣)

اقترض تاجر مبلغ 2800 جنيه لمدة 21 شهر بمعدل فائدة قدره 5% سنويا و أتفق على استهلاك هذا القرض على 14 مبلغا متساوية مع سداد فائدة الرصيد .

المطلوب :

1- إيجاد مجموع الفوائد.

2- تصوير جدول استهلاك القرض.

3- المعدل العام للاستثمار الذي حققه المقرض إذا أمكنه استثمار أي قيمة فور تسلمها بمعدل 7% سنويا.

مثال (4)

اقترض شخص مبلغ 3000 جنيه لمدة 5 سنوات بمعدل فائدة 6% سنويا وأنفق على استهلاك هذا القرض على 14 مبلغا متساويا مع سداد فائدة الرصيد.

المطلوب :

1- تصوير جدول استهلاك القرض.

2- ايجاد المعدل العام للاستثمار إذا علمت أن المقرض تمكن من استثمار أي قيمة فور تسلمها بمعدل 8% سنوياً.

مثال (5)

اقترض أحد الأشخاص مبلغ 5000 جنيه لمدة 30 شهر بمعدل فائدة 9.5 % سنوياً وتعهد بسداده على 10 أقساط متساوية من أصل القرض والفوائد معاً.

المطلوب :

أوجد قيمة القسط ومجموع الأقساط.

مثال (6)

اقترض شخص مبلغ 1500 جنيه لمدة سنتين وتعهد بسداده على أقساط متساوية من أصل القرض والفوائد معاً . فإذا علمت أن قيمة القسط بلغت 264 جنيه

المطلوب :

أوجد طول الفترة الزمنية التي يدفع في نهايتها القسط إذا علمت أن معدل الفائدة المستخدم مقداره 8.5% سنوياً.

مثال (٧)

اقترض تاجر مبلغ 3000 جنية لمدة سنة ونصف و أنفق على سداد هذا المبلغ وفوائده على 6 أقساط متساوية. فإذا علمت أن معدل الفائدة 6.5 % سنوياً.

المطلوب :

1- إيجاد قيمة القسط المتساوي

2- المعدل العام للاستثمار الذي حققه المقرض مع العلم أنه أمكنه استثمار أي قيمة تسلمها بمعدل 7% سنوياً.

الجزء الثاني الفائدة المركبة

الفصل الاول

الفائدة والجملة

أولاً: معادلة الفائدة والجملة

1- معادلة الفائدة

$$ف = أ [1 - (ع + 1)^{-ن}]$$

2- معادلة الجملة

$$ج = أ (ع + 1)^ن$$

الجملة = الأصل + الفائدة

- في حالة طلب الفائدة نحصل على الجملة أولاً ثم نطرح منها أصل المبلغ.
- المعادلتين السابقتين بهما أربعة مجاهيل فإذا عرف منهم ثلاثة مجاهيل أمكن الوصول إلى المجهول الرابع ويفضل عند إيجاد قيم المجاهيل استخدام علاقة الجملة

كيفية حساب المقدار (ع+1)ن

هناك طرق عديدة

1- الآلة الحاسبة

2- اللوغاريتمان

3- نظرية ذات الحدين

4- الجداول المالية

وسوف يتم استخدام الطريقة الرابعة فقط.

مثال (1) :

أستثمر أحد الأشخاص مبلغ 1000 جنيه في أحد البنوك التي تحسب فوائد مركبة بمعدل 5% سنوياً. أوجد جملة تكون له و الفوائد التي حصل عليها إذا علمت أن مدة الاستثمار هي 4 سنوات.

(الحل)

$$ج = أ (ع + 1)^ن$$

$$ج = 1000 (1 + \frac{5}{100})^4$$

بالكشف في جدول جملة وحدة النقود وتحت المعدل 5% وامام المدة 4 (الجدول في نهاية الكتاب).

$$1.215506 \times 1000 =$$

$$= 1215.506 \text{ جنيه}$$

$$\text{ف} = \text{ح} - \text{أ}$$

$$\text{ف} = 1215.506 - 1000$$

$$\text{ف} = 215.506 \text{ جنيه}$$

مشاكل تطبيق معادلة الفائدة والجملة

مثال (2)

أوجد جملة 3000 جنيه لمدة 4 سنوات إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة 5% سنويا والفائدة تضاف في نهاية كل 6 شهور

(الحل)

القاعدة الأساسية المعروفة والتي تقضي بأنه لا بد من تساوي وحدة زمن المدة مع وحدة زمن المعدل .
في هذا التمرين يوجد معدل اسمي ومعدل حقيقي ، معدل الاسمي (الظاهر) هو المعدل المعطى في التمرين.

وبتطبيق قاعدة ضرورة توافق وحدة زمن المدة مع وحدة زمن المعدل فإنه يمكن :

1- تحويل المدة إلى فترات زمنية طول كل منها يساوى 6 شهور

$$n = 2 \times 4 = 8 \text{ فترات}$$

2- تحويل المعدل إلى معدل نصف سنوي

$$= \frac{0.05}{2} = 2.5\%$$

وذلك كله مرتبط بعدد مرات إضافة الفائدة

$$ج = 3000 \times (1 + 0.025)^8$$

$$ج = 3000 \times 1.218403$$

$$= 36552.9 \text{ جنيه}$$

العلاقة بين المعدل الحقيقي السنوي والمعدل الاسمي السنوي

$$ع = \left(\frac{ع}{م} + 1 \right)^{م-1}$$

حيث

م = عدد مرات إضافة الفائدة
ع = المعدل الحقيقي السنوي
ع_م = المعدل الاسمي السنوي

$$\boxed{ع_{م} = \left(1 - \frac{1}{م} (ع + 1) \right)}$$

مثال (3)

أوجد المعدل الحقيقي المقابل لمعدل اسمي سنوي قدره 6% وتدفع الفائدة في نهاية كل 3 شهور.

(الحل)

$$م = \frac{12}{3} = 4 \text{ فترات (ربع سنوي)}$$

$$ع = 1 - \left[\frac{ع_{م}}{م} + 1 \right]$$

$$ع = 1 - 4 \left[\frac{0.06}{4} + 1 \right]$$

مثال (4)

أوجد المعدل الاسمي السنوي المقابل لمعدل حقيقي سنوي مقداره 5% إذا علمت أن الفائدة تضاف في نهاية كل 4 شهور.

(الحل)

$$م = \frac{12}{4} = 3 \text{ فترات (ثلث سنوي)}$$

$$ع_{م} = \left(1 - \frac{1}{م} (ع + 1) \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3} (0.05 + 1) \right) 3 =$$

$$= \left(1 - 1.016396 \right) 3 =$$

(من جدول وحدة النقود لكسر الفترة)

$$= 4.919\%$$

مثال (5)

البنك الأهلي يعطي فائدة مركبة على الودائع لديه بمعدل فائدة مركبة قدره 12% سنويا وتضاف الفائدة كل شهر ، وبنك مصر يعطى معدل فائدة مركبة قدره 12.75 سنويا وتضاف الفائدة كل نصف سنة. أي البنكين أفضل بالنسبة للمودع ولماذا؟

(الحل)

$$1 - 12 \left[\frac{\%12}{12} + 1 \right] = ع$$

$$1 - 12(\%1 + 1) = ع$$

$$1 - 1.1268250 =$$

• للبنك الأهلي = 0.1268250

$$12.68\% =$$

• لبنك مصر = 12.75%

وبالتالي بنك مصر هو الأفضل و ليس هناك ضرورة الحساب المعدل الحقيقي لبنك مصر.

حالات المدد الكسرية :

هناك طريقتين للحل:

1- طريقة استخدام قانون جملة الفائدة المركبة بالنسبة لوحدات الزمن الكاملة والفائدة البسيطة بالنسبة الكسور السنة.

٢- طريقة النسبة والتناسب.

مثال (6)

أودع شخص مبلغ 9000 جنيه في أحد البنوك لمدة 10 سنوات وأربع شهور وعشرة أيام فإذا علمت أن معدل الفائدة السنوي المركب 5%. أوجد جملة ما يتكون له في نهاية المدة.

(الحل)

• استخدام الطريقة العملية

ح = أ (ع+1)¹⁰ + فائدة بسيطة عن كسور السنة.

$$\frac{10}{360} \times \frac{5}{100} \times 1000 + \frac{4}{12} \times \frac{5}{100} \times 1000 + 10(0.05 + 1) 1000$$

$$1646.932 = 1.370 \times \frac{5}{100} \times 161.667 + (من الجدول) 1.628895 \times 1000$$

• استخدام طريقة النسبة والتناسب:

$$ح = 100 (0.05 + 1)^{10.36} \text{ حيث أن المدة} =$$

$$\frac{10}{360} + \frac{4}{12} + 10$$

$$0.027 + 0.333 + 10 =$$

$$10.36 \text{ سنة} =$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ {}^{11}(0.05 + 1) & & {}^{10.36}(0.05 + 1) \\ & & \downarrow \\ & & {}^{10}(1+0.05) \end{array}$$

وبطرح المعادلة (٢) من المعادلة (١) فإن الناتج هو 0.081444 عبارة عن فرق الجملة المقابل لتغير

$$(1) \quad 1.710339 = {}^{11}(1+0.05)$$

$$(2) \quad 0.628895 = {}^{10}(1+0.05)$$

في المدة قدرها سنة واحدة
 الفرق الجملة المقابل لـ 0.36 من السنة

∴ الفرق الجملة المقابل لـ 0.36 من السنة

$$0.029220 = 0.36 \times 0.081444 =$$

$$0.029220 + {}^{10}(0.05 + 1) = {}^{10.36}(0.05 + 1) \therefore$$

$$0.029220 + 1.628895 =$$

$$1.65215 =$$

$$\text{ح} = 1000 \times {}^{10.36}(0.05 + 1)$$

$$1658.215 = 1.658215 \times 1000 = \text{جنيه}$$

حالات المعدلات الكسرية :

مثال (٧)

أوجد جملة 1000 جنيه أستثمر بمعدل فائدة 4.2% لمدة عشر سنوات .

(الحل)

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ & & {}^{10}(0.042 + 1) \times 1000 = \text{ح} \\ & & \downarrow \\ & & 51 \end{array}$$

$$^{10}(0.05 + 1)$$

$$^{10}(0.042 + 1)$$

$$^{10}(1+0.04)$$

ونستخدم طريقة النسبة والتناسب أيضا ، ويستكمل الحل.

حالة المدة الكسرية والمعدل الكسرى

مثال (8)

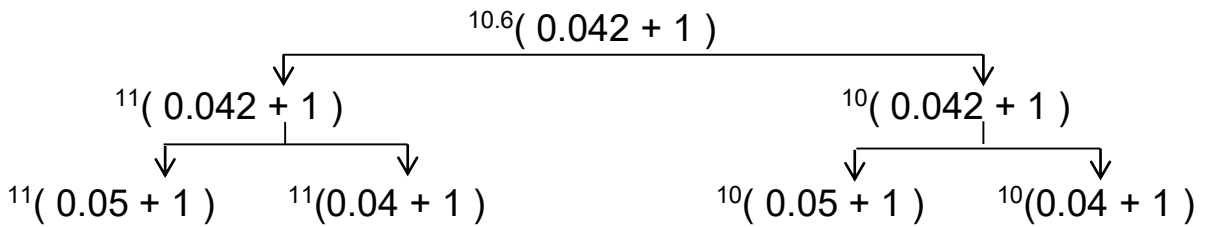
أوجد جملة 1000 جنيه أستثمر بفائدة مركبة لمدة عشر وسبع شهور وسبع أيام إذا علمت أن معدل الفائدة المركب %4.2

(الحل)

$$ح = 1000(0.042 + 1)^{10.6}$$

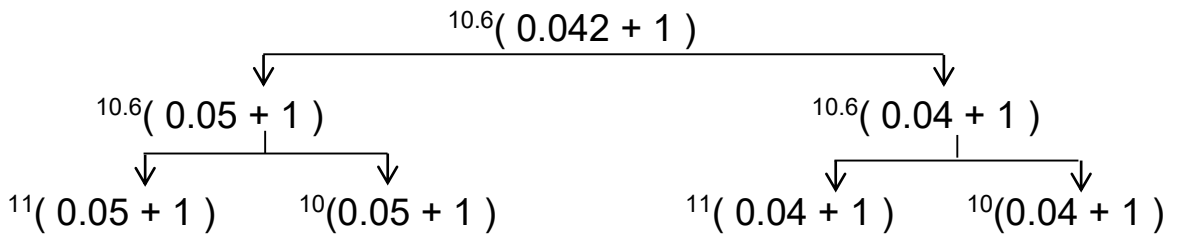
المعدل يقع بين 4 % ، 5 % - المدة تقع بين 10 سنوات و 11 سنة نستخدم طريقة النسبة والتناسب ونحل كالاتى

• إذا أردنا حل مشكلة المدة أولاً :



ويستكمل الحل

إذا أردنا حل مشكلة المعدل أولاً :



ويستكمل الحل

حالات المدد الغير موجودة بالجدول

مثال (٩)

حسبت جملة مبلغ استثمار لدى بنك القاهرة بمعدل فائدة مركبة قدره 3% سنويا ولمدة ستون سنة فوجدت تساوى 5891.6 جنيه. أحسب أصل المبلغ المستثمر.

(الحل)

ن = 60 سنة وهي مدة غير موجودة بالجدول

ح = $(1 + 0.04)^n$ (أكبر مدة 30 سنة)

$$5891.6 = أ (1 + 0.03)^{60}$$

$$أ = \frac{5891.6}{(1 + 0.03)^{60}}$$

وبالبحث في الجدول أمام المدة 30 تحت المعدل 3%

$$أ = 5891.6 \times 2.42726$$

$$أ = 5891.6 \times 2.42726$$

$$\frac{5891.6}{5.8916} = أ$$

$$1000 = أ$$

أمثلة غير محلولة

مثال (1):

أوجد الجملة والفائدة المركبة في الحالات الآتية :

المبلغ	المعدل	المدة
2000 جنية	4% سنوياً	5 سنوات
1500 جنية	3.5% سنوياً	6 سنوات ونصف
3400 جنية	2.75% سنوياً	8 سنوات وأربع شهور
7400 جنية	4.3% سنوياً	7 سنوات

مثال (2)

أوجد الجملة والفائدة المركبة في الحالات الآتية :

أصل المبلغ	المعدل	المدة
6500 جنية	2% سنوياً	4 سنوات
4500 جنية	1.5% سنوياً	6 سنوات و 5 شهور
3000 جنية	1% سنوياً	3 سنوات و 5 شهور و 10 أيام
2500 جنية	4.7% سنوياً	5 سنوات و 8 شهور و 14 يوم

مثال (3)

أوجد الجملة والفائدة المركبة لمبلغ 3000 جنية في الحالات الآتية :

المعدل	المدة
4% سنوياً والفائدة تضاف كل 3 شهور	5 سنوات
5% سنوياً والفائدة تضاف مرتين في السنة	6 سنوات و نصف
7% سنوياً والفائدة تضاف كل 4 شهور	6 سنوات و 5 شهور
3% سنوياً والفائدة تضاف 4 مرات في السنة	9 سنوات و 10 شهور و 19 يوم
6% سنوياً والفائدة تضاف 3مرات في السنة	20 سنة

مثال (4)

أوجد المعدل الاسمي السنوي المقابل للمعدلات الحقيقية السنوية الآتية :

3% ، 5% ، 6.5% ، 7%

وذلك إذا كانت إضافة الفائدة كالتالي:

- 1- كل ربع سنة
- 2- كل 4 شهور
- 3- كل 6 شهور
- 4- كل شهر

مثال (5)

أوجد الجملة والفائدة المركبة لمبلغ 4000 جنيه في الحالات الآتية:

المعدل	المدة
7% تضاف الفائدة كل 2 سنة	10 سنوات
6% تضاف الفائدة كل 18 شهر	6 سنوات
5% تضاف الفائدة كل 15 شهر	7 سنوات
5% سنوياً تضاف الفائدة كل 9 شهور	4 سنوات و نصف
6% سنوياً والفائدة تضاف كل شهر	25 سنة

مثال (6) :

أوجد المعدل الحقيقي السنوي المقابل للمعدلات الاسمية السنوية الآتية :

4% ، 5% ، 6% ، 7.5% ، 9%

إذا كانت (م) تساوى : 2 ، 3 ، 6

مثال (7) :

أوجد المدة التي يؤول بعدها مبلغ 1000 جنيه أستثمر بمعدل فائدة مركب قدره 5% سنوية إلى :

1- 1642.335 جنيهاً.

2- 1835.624 جنيهاً.

3- 1994.217 جنيهاً.

4- 2136.952 جنيهاً.

أوجد معدل الفائدة المركب السنوي الذي باستخدامه يؤول مبلغ 1000 جنيه أستثمر لمدة 10 سنوات إلى :

1- 1320.435 جنيهاً

2- 1510.662 جنيهاً

3- 1563.341 جنيهاً

4- 2136.952 جنيهاً

الفصل الثاني القيمة الحالية والخصم

$$\begin{aligned}
 \text{ج} &= \text{أ} (1 + \text{ع})^n \\
 \therefore \text{أ} &= \frac{\text{ج}}{(1 + \text{ع})^n} \\
 &= \frac{1}{(1 + \text{ع})^n} \times \text{ج} \\
 \text{القيمة الحالية} &= \text{القيمة الأسمية} \times \frac{1}{(1 + \text{ع})^n} \\
 \text{ح} &= \frac{1}{(1 + \text{ع})^n}
 \end{aligned}$$

القيمة الحالية لوحدة النقود التي تستحق بعدن من السنوات القاعدة الأساسية هي :

$$\text{ق.ح} = \text{ق.س} \times \text{ح}^n \times \text{ع} \%$$

ونحصل على قيمة ح^ن من الجداول المالية في نهاية الكتاب .

مثال (1) :

شخص مدين بمبلغ 1000 جنيه تستحق بعد 10 سنوات. أحسب القيمة التي يجب أن يسدها المدين سدادا لهذا الدين الآن وبعد سنتين وبعد 5 سنوات وذلك بمعدل فائدة مركبة 12% .

(الحل)

ما يجب سداده الآن = القيمة الحالية

$$\text{ق.ح} = \text{ق.س} \times \text{ح}^n \times \text{ع} \%$$

$$\text{ق.ح} = 10000 \times \text{ح}^{10} \times 12\%$$

$$= 10000 \times 0.321973 \text{ (من الجدول)}$$

$$\text{ق.ح} = 3219.73 \text{ جنيه}$$

ما يسده بعد سنتين من الآن :

$$\text{ق.ح} = 10000 \times \text{ح}^8 \times 12\%$$

$$= 10000 \times 0.402883 \text{ (من الجدول)}$$

$$= 4038.83$$

$$= 10000 \times 0.402883 \text{ جنيه}$$

ما يسدده في نهاية 5 سنوات :

$$\text{ق.ح} = 10000 \times \text{ح}^{5\%12}$$

$$= 0.567427 \times 10000 = 5674.27 \text{ جنيه}$$

مثال (2) :

شخص مدين بالديون الآتية :

- 1000 جنيه تستحق في نهاية 5 سنوات
- 3000 جنيه تستحق في نهاية 7 سنوات
- 5000 جنيه تستحق في نهاية 10 سنوات

أحسب المبلغ الذي يدفع اليوم سداداً لهذه الديون بمعدل فائدة مركبة عن نصف سنة قدره 5%

(الحل)

قيمة ما يتم سداد = مجموع القيم الحالية للديون

$$= 1000 \times \text{ح}^{5\%10} + 3000 \times \text{ح}^{5\%14} + 5000 \times \text{ح}^{5\%20}$$

$$= 0.61391 \times 1000 + 0.50507 \times 3000 + 0.37689 \times 5000$$

$$= 613.91 + 1515.21 + 1884.45$$

$$= 4013.57 \text{ جنيه}$$

مشاكل التطبيق : إذا كانت المدة أكبر من نطاق الجدول

مثال (3) :

أوجد القيمة الحالية لمبلغ 1000 ج تستحق بعد 5 سنوات وثلاثة شهور بمعدل فائدة مركبة 10% سنوياً

(الحل)

$$\text{ق.ح} = \text{س} \times \text{ح}^{\frac{\text{ن}}{\text{ع}}\%}$$

$$= 1000 \times \text{ح}^{\frac{5\frac{1}{4}}{10}\%}$$

والمقدار $\text{ح}^{\frac{5\frac{1}{4}}{10}\%}$ يمكن الحصول عليه بأكثر من طريقة وأهم هذه الطرق طريقة النسبة والتناسب كالآتي

$$\text{ح}^{\frac{5}{10}\%} = 0.620921 \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{ح}^6_{10} = 0.564474 \dots \dots \dots (2)$$

ب طرح المعادلة (٢) من المعادلة (1)

فرق القيمة الحالية المقابل لسنة واحدة

$$0.564474 - 0.620921 =$$

$$0.056447 =$$

$$= \frac{1}{4} \text{ سنة}$$

$$0.0141125 = \frac{1}{4} \times 0.056447 =$$

$$\text{ح}^5_{10} - \text{فرق} \frac{1}{4} \text{ سنة} = \text{ح}^5_{10}$$

لاحظ أن الفرق يطرح لأن قيمة ح تقل كلما زادت قيمة ن

$$0.0141125 - 0.62092 = \text{ح}^5_{10}$$

$$0.6068075 =$$

$$\therefore \text{القيمة الحالية} = 0.6068075 \times 1000 =$$

$$6068.075 =$$

مثال (4) :

أوجد القيمة الحالية لمبلغ 2000 جنيه تستحق بعد 6 سنوات بمعدل فائدة مركب %5.2 سنويا.

(الحل)

$$\text{ق. ح} = 2000 \times \text{ح}^6_{5.2\%}$$

وباستخدام الجدول وقاعدة النسبة والتناسب فإن :

$$\text{ح}^6_{5\%} = 0.74622 \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{ح}^6_{5.5\%} = 0.72525 \dots \dots \dots (2)$$

ب طرح (٢) من (١)

فان الناتج هو فرق القيمة الحالية المقابل لـ $\frac{1}{2}\%$

وسنرمز له بالرمز ق١

$$ق_1 = 0.7622 - 0.72525 = 0.02097$$

لاحظ أن القيمة الحالية تتناقص بزيادة قيمة ع مع ثبات العوامل الأخرى .

وللحصول على فرق 0.2% وسنرمز له بالرمز ق₂ فإن :

$$\frac{0.5}{0.2} = \frac{ق_1}{ق_2}$$

$$\frac{0.2 \times ق_1}{0.5} = ق_2$$

$$\frac{0.2 \times 0.02097}{0.5} = ق_2$$

$$0.008388 =$$

$$ق_2 = \frac{6}{5\%} ح = \frac{6}{5.5\%} ح$$

$$0.008388 - 0.74622 =$$

$$0.737832 =$$

∴ القيمة الحالية = 2000 × 0.737832

$$= 1475.664 \text{ جنيه}$$

معدل الفائدة ومعدل الخصم :

ع = معدل الفائدة

ص = معدل الخصم

$$ع = \frac{ص}{ص-1}$$

$$ص = \frac{ع}{ع+1}$$

مثال (5):

أحسب معدل الخصم المركب المقابل لمعدل فائدة مركبة قدره 15% .

(الحل)

$$\frac{ع}{ع-1} = ص$$

$$13.04\% = \frac{0.15}{1.15} =$$

مثال (6):

أحسب معدل الفائدة المركبة المقابل لمعدل خصم مركب قدره 12% .

(الحل)

$$12.63\% = \frac{0.12}{0.12-1} = \frac{ص}{ص-1} = ع$$

مثال (7):

أوجد معدل الفائدة المركب السنوي المستخدم لإيجاد القيمة الحالية لدين قيمته الأسميه 1000 جنيه ومدته خمس سنوات فبلغت 772.491 جنيه.

(الحل)

$$أ = ح \times \frac{ن}{ع\%}$$

$$772.491 = 1000 \times \frac{5}{ع\%}$$

$$0.772491 = \frac{772.491}{1000} = \frac{5}{ع\%}$$

وبالكشف في جدول القيمة الحالية لوحدة النقود نجد أن هذه القيمة تقع بين المعدلين 5% ، $\frac{1}{2}$ 5%

وباستخدام طريقة النسبة والتناسب فإن فرق القيمة الحالية المقابل لتغير في المعدل قدره 5% ، 0%

$$= \frac{5}{ع\%} - \frac{5}{5.5\%}$$

$$= 0.765134 - 0.783526 =$$

$$= 0.018392 =$$

$$ع = 5\% + س$$

الفرق في القيمة الحالية المقابل لتغير في المعدل قدره س ، حيث س هي القيمة التي تزيد عن المعدل 5%

$$= \frac{5}{ع\%} - \frac{5}{5\%}$$

$$= 0.772491 - 0.783526 =$$

$$0,011035=$$

$$\frac{0.011035}{0.018392} = \dots$$

س = 3، تقريباً

المعدل = 5.3 تقريباً

مثال (8) :

أوجد مدة الاستثمار لدين قيمته الأسميه 1000 جنيه تم خصمه بمعدل فائدة مركبة قدره 5% سنويا فبلغت قيمته الحالية 608.066 جنيه

(الحل)

$$ق ج = ق س \times ح \frac{ن}{ع \%}$$

$$608.066 = 1000 \times ح \frac{ن}{5\%}$$

وبالكشف في جدول القيمة الحالية عن هذه القيمة تحت المعدل 5% نجد أنها تقع بين المدة 10 ، 11 سنة ، وباستخدام النسبة والتناسب فإن المدة تكون = 10+ س حيث س جزء من السنة ، وباستخدام النسبة والتناسب بنفس الطريقة السابقة نجد أن المدة = 10.2 سنة

12 يوم ، 2 شهر ، 10 سنة

مثال (9) :

أحد التجار مدين بكمبيالة قيمتها الاسمية 7000 جنيه وقد قام بخصم هذه الكمبيالة لدى أحد البنوك على أساس معدل فائدة مركب قدره 8% سنويا والخصم يتم كل 3 شهور .

أحسب المبلغ الذي يتسلمه هذا التاجر من البنك قبل ميعاد استحقاق الكمبيالة بمدة قدرها خمس سنوات وشهرين

(الحل)

ما يتسلمه التاجر

$$\frac{2}{12} \times \frac{8}{100} \times 7000 - \frac{20}{\%2} \times 7000 =$$

أو

$$\frac{1}{12} \times \frac{8}{100} \times 7000 - \frac{21}{\%2} \times 7000 =$$

وذلك على أساس أنه تم استخدام الفائدة المركبة بالنسبة لمدة 5 سنوات ، وتم استخدام الفائدة البسيطة بالنسبة لمدة 2 شهر

الحالة الأولى : حساب القيمة الحالية قبل 5 سنوات

الحالة الثانية : تم حساب القيمة الحالية قبل 5 سنوات و 3 أشهر

أمثلة غير محلولة

مثال (1) :

أوجد القيمة الحالية والخصم المركب في الحالات الآتية :

المدة	المعدل	أصل المبلغ
10 سنوات	5% سنوياً	3000 جنية
8 سنوات ونصف	4.5% سنوياً	2500 جنية
7 سنوات و 8 شهور	3,25% سنوياً	3700 جنية
7 سنوات	5,7% سنوياً	6500 جنية

مثال (2) :

أوجد القيمة الحالية والخصم في الحالات الآتية :

المدة	معدل الفائدة	أصل المبلغ
6 سنوات	3% سنوياً	4500 جنية
10 سنوات و 7 شهور	1% سنوياً	5000 جنية
8 سنوات و 5 شهور و 12 يوم	0,75% سنوياً	3500 جنية
7 سنوات	3,9% سنوياً	2000 جنية

مثال (3) :

أوجد القيمة الحالية والخصم لدين قيمته الاسمية 1000 جنية في الحالات الآتية :

المعدل	المدة
6% سنوياً والفائدة تضاف كل 3 شهور	8 سنوات
4% سنوياً والفائدة تضاف مرتين في السنة	6 سنوات ونصف
5% سنوياً والفائدة تضاف 3 مرات في السنة	10 سنوات و 8 شهور
3% سنوياً والفائدة تضاف 4 مرات في	9 سنوات و 7 شهور و 23 يوم

السنة	
25 سنة	6% سنوياً والفائدة تضاف 3 مرات في السنة

مثال (4) :

أوجد معدلات الخصم المقابلة لمعدلات الفائدة الآتية :

2.5% ، 7% ، 5.5% ، 3%

مثال (5) :

أوجد القيمة الحالية والخصم في الحالات الآتية :

المدة	المعدل	أصل المبلغ
15 سنة	5% سنوياً	2000 جنيه
12 سنة ونصف	3.5% سنوياً	3500 جنيه
10 سنوات و 5 شهور و 18 يوم	84.3% سنوياً	6200 جنيه
7 سنوات	5.7% سنوياً	6500 جنيه

مثال (6) :

أوجد معدلات الفائدة المقابلة لمعدلات الخصم الآتية:

5.3% ، 4% ، 3.84% ، 6% ، 5.63%

مثال (7) :

أوجد معدل الفائدة السنوي الذي باستخدامه تكون قيمه الحالية لمبلغ 1000 جنيه يستحق بعد 10 سنوات كما يلي :

- 1- 613.613 جنيهاً .
- 2- 585.430 جنيهاً .
- 3- 600.00 جنيهاً .
- 4- 630.215 جنيهاً .

مثال (8) :

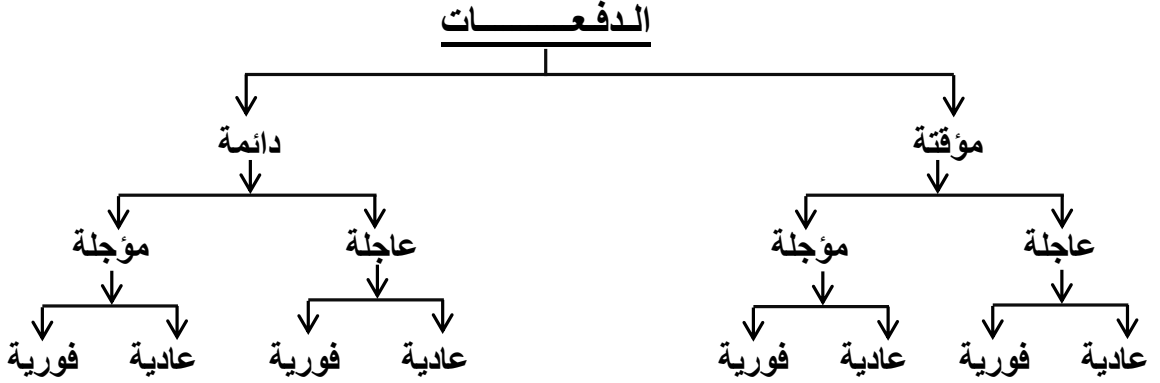
أوجد دين قيمته الاشمية 1000 جنيه إذا كان معدل الفائدة المستخدم 5% سنوياً والقيمة الحالية :

- 1- 783.526 جنيهاً .
- 2- 584.679 جنيهاً .

الفصل الثالث

الدفعات المؤكدة السداد المتساوية

الدفعات : عبارة عن مبالغ متساوية فى القيمة ويفصل بين كل مبلغ وآخر منها فترة زمنية متساوية أيضاً ، ويمكن تقسيم الدفعات كما يلى :



وبالتالى فإن الأنواع المختلفة للدفعات هى :

- 1- مؤقتة عاجلة عادية
- 2- مؤقتة عاجلة فورية
- 3- مؤقتة مؤجلة عادية
- 4- مؤقتة مؤجلة فورية
- 5- دائمة عاجلة عادية
- 6- دائمة عاجلة فورية
- 7- دائمة مؤجلة عادية
- 8- دائمة مؤجلة فورية

أولاً : جملة الدفعات :

الدفعة المؤقتة العاجلة العادية جـ_ن ع%

$$\boxed{\text{جـ} \sqrt[n]{\text{ع}} = \frac{1 - \text{ع}^{1-n}}{\text{ع}}}$$

مثال (1) :

أوجد جملة دفعة عادية ربع سنوية مقدارها 100 جنيه إذا كانت المدة 5 سنوات ومعدل الفائدة المركبة 2% ربع سنوية.

(الحل)

$$\begin{aligned} \text{عدد الدفعات} &= 4 \times 5 = 20 \text{ دفعة} \\ \text{الجملة} &= 10 \times \sqrt[2]{20} \end{aligned}$$

$$\text{الجملة} = 24.297369 \times 100 = 2429.737$$

2- الدفعة المؤقتة العاجلة الفورية جـ ن %ع - 1

$$\boxed{\text{جـ ن} \%ع = \text{جـ ن} + 1 \%ع - 1}$$

مثال (2):

أوجد جملة دفعة فورية نصف سنوية مقدارها 200 جنيه إذا كانت المدة 4 سنوات ومعدل الفائدة المركبة النصف سنوى 3%

(الحل)

عدد الدفعات = 2 × 4 = 8 دفعات

$$\text{الجملة} = 200 \times \text{جـ} \sqrt[8]{3\%}$$

$$= 200 (1 + 3\% \sqrt[8]{1+8})$$

$$= 200 (1 + 3\% \sqrt[8]{9})$$

$$= 200 (1 - 10.159106)$$

$$= 9.159106 \times 200 \text{ (من الجدول)}$$

$$= 1831.831 \text{ جنيه}$$

3- الدفعة المؤقتة المؤجلة العادية م/جـ ن %ع

ن : فترة دفع الدفعة

حيث م : فترة التأجيل

$$\boxed{\text{م/جـ ن} \%ع = \text{جـ ن} \%ع}$$

فترة التأجيل لا تؤثر على جملة الدفعات لأن التجمع يتم فى نهاية المدة وبالتالي لا يظهر تأثير فترة التأجيل

مثال (3):

أوجد جملة دفعة عادية ربع سنوية مقدرها 100 جنيه إذا كان أول مبلغ من مبلغها يستحق بعد مرور 4 سنوات وأن مدة الدفعة هو 5 سنوات ومعدل الفائدة المركب 2% ربع سنوى

(الحل)

$$16 / \text{جـ} \sqrt[20]{3\%} = \text{جـ} \sqrt[20]{3\%}$$

$$\therefore \text{الجملة} = 24.297369 \times 100 =$$

$$= 2429.737 \text{ جنيه}$$

لا تأثير لفترة التأجيل على الحل

4- الدفعة المؤقتة المؤجلة الفورية :

مثال (4):

أوجد جملة دفعة فورية نصف سنوى مقدارها 200 جنيهه إذا كانت أول مبالغها تدفع بعد 4 سنوات والمدة 4 سنوات أيضاً

(الحل)

$$\frac{8}{j-8} \cdot 3\% \quad \text{لا تأثير للتأجيل}$$
$$\text{الجملة} = 200 \times \frac{8}{j-8} \cdot 3\% \quad \text{ويستكمل الحل}$$

٥- الدفعة الدائمة العاجلة العادية $\infty = \frac{1}{j}$

6- الدفعة الدائمة العاجلة الفورية $\infty = \frac{1}{j}$

٧- الدفعة الدائمة المؤجلة العادية م/ح $\infty = \frac{1}{j}$

٨- الدفعة الدائمة المؤجلة الفورية م / ج $\infty = \frac{1}{j}$

ثانياً: القيمة الحالية لدفعات :

١- القيمة الحالية للدفعة العادية المؤقتة العاجلة :

$$\frac{1 - (1 + \frac{c}{100})^{-n}}{c} = \frac{d}{100}$$

مثال (5) :

أحسب القيمة الحالية والخصم لعشرين دفعة سنوية عادية قيمة كل منها 100 جنيهه إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة 5% سنويا.

(الحل)

$$\text{القيمة الحالية} = 10 \times \frac{1 - (1 + 0.05)^{-20}}{0.05}$$

$$= 12.462210 \times 100 =$$

$$= 1246.221 \text{ جنيهه}$$

$$\text{الخصم} = 20 \times 100 = 1246.221 - 753.779 =$$

٢ - القيمة الحالية للدفعة الفورية المؤقتة العاجلة :

$$\frac{1 - (1 + \frac{c}{100})^{-n}}{c} = \frac{d}{100}$$

مثال (6) :

أوجد القيمة الحالية لدفعة فورية قيمتها 200 جنيه إذا كانت المدة 5 سنوات ومعدل الفائدة المركب 2% ربع سنوي ثم أوجد قيمة الخصم.

(الحل)

$$\text{عدد الدفعات} = 4 \times 5 = 20$$

$$\text{القيمة الحالية} = 300 \times \overline{d}_{20}^{2\%}$$

$$= 300 (1 - \overline{d}_{20}^{2\%})$$

$$= 300 (1 - \overline{d}_{19}^{2\%})$$

$$= 300 (1 + 15.678462)$$

$$= 5003.539 \text{ جنيه}$$

$$\text{الخصم} = 6000 - 5003.539$$

$$= 996.461 \text{ جنيه}$$

٣ - القيمة الحالية الدفعة المؤقتة المؤجلة العادية :

$$\overline{d}_n^e \%$$

وهنا توجد علامتين :

$$\overline{d}_n^e \%$$

أو

$$\overline{d}_n^e \%$$

مثال (٧) :

أشترى أحد أشخاص عقار و اتفق على سداد ثمنه على خمس دفعات سنوية عادية قيمة كل منها 1000 جنيه السداد بعد فترة تأجيل قدرها 3 سنوات. أوجد ثمن شراء إذا علمت أن معدل الفائدة المركب 5% سنويا.

(الحل)

ثمن شراء العقار = القيمة الحالية للدفعات السددة في تاريخ الشراء.

$$= 1000 \times \overline{d}_n^e \%$$

$$= 1000 \times \overline{d}_3^{5\%}$$

$$= 1000 (\overline{d}_3^{5\%} - \overline{d}_3^{5\%})$$

$$= 1000 (\overline{d}_3^{5\%} - \overline{d}_8^{5\%})$$

$$3739.965 = (2.723248 - 6.463213)1000 =$$

3- القيمة الحالية للدفعة المؤقتة المؤجلة الفورية

$$\frac{م}{د/ن} = \frac{د}{1-م} - \frac{د}{1-م+ن} = \frac{د}{م}$$

مثال (٨) :

حل المثال رقم (٧) إذا كانت الدفعة فورية.

(الحل)

ثمن شراء العقار

$$= 1000 \times \frac{د}{3} \sqrt[5]{0.05}$$

$$= 1000 \left(\frac{د}{1-3+5} \sqrt[5]{0.05} - \frac{د}{1-3} \sqrt[5]{0.05} \right)$$

$$= 1000 \left(\frac{د}{7} \sqrt[5]{0.05} - \frac{د}{2} \sqrt[5]{0.05} \right)$$

$$= (1.859410 - 5.786373) 1000 =$$

$$= 3926.963$$

5- القيمة الحالية للدفعة الدائمة العاجلة العادية :

$$\frac{1}{\%ع} = \frac{د}{\%ع} \sqrt[∞]{0.05}$$

مثال (٩) :

أحسب ثمن شراء مزرعة تغل إيراد قدره 1000 جنيه في نهاية كل سنة إذا علمت أن معدل الفائدة المركب هو 5% سنويا.

(الحل)

$$\text{ثمن المزرعة} = 1000 \times \frac{د}{\%ع} \sqrt[∞]{0.05}$$

$$= \frac{1}{0.05} \times 1000 =$$

$$= 20 \times 1000 =$$

$$= 20000 \text{ جنيه}$$

6 - القيمة الحالية للدفعة الدائمة العاجلة الفورية

$$1 + \frac{1}{\epsilon} = \overset{\cdot\cdot}{\% \epsilon} \sqrt{\infty}$$

مثال (١٠):

أوجد ثمن شراء المزرعة في المثال السابق إذا كان الإيراد يدفع في أول كل سنة.

(الحل)

$$\text{ثمن المزرعة} = \overset{\cdot\cdot}{\% 5} \sqrt{\infty} \times 1000 =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \right) 1000 =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{0.05} \right) 1000 =$$

$$= 21000 \text{ جنيه}$$

٧ - القيمة الحالية للدفعة الدائمة المؤجلة العادية :

$$\text{م/د} \sqrt{\infty} = \frac{1}{\epsilon} - \overset{\cdot\cdot}{\% \epsilon} \sqrt{م}$$

مثال (١١)

أوجد ثمن شراء مزرعة تعطى إيراد سنوي آخر كل عام قدره 1000 جنيه بحيث يبدأ الإيراد بعد مرور 5 سنوات إذا علمت أن معدل الفائدة المركب السنوي هو 5% سنويا.

(الحل)

$$\text{ثمن شراء المزرعة} = \overset{\cdot\cdot}{\% 5} \sqrt{\infty} \times 1000 =$$

$$= \left(\overset{\cdot\cdot}{\% 5} \sqrt{م} - \frac{1}{0.05} \right) 1000 =$$

$$= (4.329477 - 20) 1000 =$$

$$= 15670.523 \text{ جنيه}$$

8- القيمة الحالية للدفعة الدائمة المؤجلة الفورية

$$\text{م/د} \sqrt{\infty} = \overset{\cdot\cdot}{\% \epsilon} \sqrt{1 - م} - \frac{1}{\epsilon}$$

مثال (12) :

أوجد ثمن شراء المزرعة في المثال السابق إذا كانت الدفعة فورية

(الحل)

$$\begin{aligned} \text{ثمن شراء المزرعة} &= 1000 \times \sqrt[\infty]{d} \\ &= 1000 \left(\sqrt[5]{1 - 5\%} - \frac{1}{0.05} \right) \\ &= 1000 \left(\sqrt[5]{4} - 20 \right) \\ &= 1000 (3.54595 - 20) \\ &= 16454.05 \text{ جنيه} \end{aligned}$$

مثال (13) :

أودع شخص في أحد البنوك ما يلي :

1000 جنيه لمدة 10 سنوات.

100 جنيه في آخر كل سنة لمدة الخمس سنوات الأولى

200 جنيه آخر كل سنة لمدة الخمس سنوات التالية

أوجد جملة ما يكون لهذا الشخص في نهاية المدة إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة 5% سنويا.

(يترك الحل للطالب)

مثال (14) :

في أول يناير 2005 كان أحد التجار مدينة بكميالة قيمتها الاسمية 5000 جنيه تستحق بعد 10 شهور ، وفي نفس هذا التاريخ تلقى عرض من الدائن يقوم بموجبه التاجر بدفع مبلغ 480 جنيها في نهاية كل شهر ولمدة 10 شهور بدلا من سداد قيمة الكميالة مرة واحدة في ميعاد استحقاقها - فإذا علمت أن التاجر يمكنه استثمار أمواله بمعدل فائدة 12% سنوي وتضاف الفائدة كل شهر.

هل يقبل التاجر هذا العرض من الدائن ولماذا؟

(الحل)

الحل يتم بإحدى الطريقتين:

الأولى: ويتم المقارنة بين القيمة الاسمية للكمبيالة وقدرها 5000 ج وجملة دفعة قدرها 480 ج تدفع

لمدة 10 شهور بمعدل فائدة مركب 1% عن كل شهر

القيمة الاسمية للكمبيالة = 5000 جنييه

$$\text{الجملة} = 480 \times \sqrt[10]{10\%}$$

$$10,46221254 \times 480 =$$

$$= 5021.86 \text{ جنييه}$$

إذا رفض العرض سوف يسدد 5000 جنييه

إذا قبل العرض سوف يسدد 5021.86 جنييه فرضا .

∴ القرار: رفض العرض حيث انه إذا قبل هذا العرض ستكون هناك خسارة 21.86 جنييه

الثانية: يتم المقارنة بين المعدل الذي يحققه التاجر إذا قام باستثمار أمواله بنفسه (المعدل الذي يحققه

إذا لم يقبل العرض) و المعدل الذي يحققه إذا قبل العرض .

$$\therefore 5000 = 480 \times \sqrt[10]{\text{بمعدل } \% \text{ ع}}$$

$$\therefore \sqrt[10]{\% \text{ ع}} = \frac{5000}{480}$$

$$= 10.4166667$$

وبالبحث في الجدول نجد أن:

$$\sqrt[10]{0.5\%} = 10.2182641$$

$$\sqrt[10]{1\%} = 10.46221254$$

∴ المعدل الشهري يتراوح بين 0.05% ، 1%

∴ المعدل السنوي أقل من 12%

وبالتالي فإنه :

إذا قبل العرض سيحقق معدل فائدة أقل من 12%

إذا رفض العرض فإن المعدل الذي يحققه بنفسه = 12%

∴ القرار رفض العرض

مثال (15) :

أحسب القيمة الحالية لدفعة عادية مبلغها 1000 جنيه تدفع كل شهر ولمدة عشرين شهرا إذا علمت أن أول مبلغ من مبالغها سيدفع بعد مرور خمس شهور وأن معدل الفائدة المركب المستخدم هو 12% سنويا وتضاف الفائدة كل شهر.

(يترك للطالب حل المثال)

مثال (16) :

أشترى أحد الأشخاص سيارة بمبلغ 20000 جنيه على أن يسدد ثمنها على أقساط قيمة كل قسط 1000 جنيه في نهاية كل شهر بداية من تاريخ شراء السيارة فإذا علمت أن معدل الفائدة المركبة المستخدم هو 12% سنويا. أحسب المدة اللازمة السداد الأقساط المستحقة عليه.

(الحل)

ثمن شراء السيارة = القيمة الحالية لدفعة مقدارها 1000 جنيه تدفع في نهاية كل شهر وبمعدل فائدة 1% شهريا ولمدة ن من الشهور (ن مجهولة)

$$20000 = 1000 \times d \overline{n} \mid 1\%$$

$$\therefore d \overline{n} \mid 1\% = \frac{20000}{1000}$$

وبالبحث في الجدول الرابع نجد أن :

القيمة 20 تقع بين المدة 22 ، 23

∴ المدة = 23 شهر

مثال (17) :

أراد شخص استثمار أمواله بمعدل 12.5% سنوياً وقد عرض عليه مشروعين :

الأول : شراء قطعة أرض في سبيل الاستصلاح يقدر الخبراء أنها سوف تعطي عائد مقداره 7000 ج

آخر كل سنة بعد مرور 5 سنوات.

الثاني: شراء عمارة نغل إيراد سنوى آخر كل سنة مقداره 3000 جنيه ويقدر الخبراء عمرها الافتراضي بحوالي 35 سنة تباع بعدها الأرض و الانقاص بمبلغ 60000 جنيه.

أى المشروع عين أفضل بالنسبة للمشتري؟

(الحل)

المشروع الأول:

القيمة الحالية للإيرادات المتوقعة

$$= 7000 \times \frac{1}{(1 + 0.125)^{\infty}}$$

$$= 7000 \left(\frac{1}{0.125} - 1 \right)$$

$$= 7000 \left(\frac{1}{0.125} - 3.56056 \right) \text{ (من الجدول)}$$

∴ القيمة الحالية للإيراد المتوقع = 31075 جنيه

المشروع الثانى:

القيمة الحالية للإيرادات المتوقعة

$$= 3000 \times \frac{1}{(1 + 0.125)^{35}} + 60000 \times \frac{1}{(1 + 0.125)^{35}}$$

$$= 3000 \times \frac{1 - (1 + 0.125)^{-35}}{0.125} + 60000 \times \frac{1}{(1 + 0.125)^{35}}$$

$$= 3000 \left[\frac{(1 + 0.125)^{35} - 1}{0.125} \right] +$$

$$0.016205 \times 60000 +$$

$$= 972 + 7.870356 \times 3000 =$$

$$= 24583 \text{ جنيه}$$

وبما أن الإيراد من المشروع الأول أكبر

∴ المشروع الأول أفضل للمشتري .

مثال (18) :

أشتر شخص عقار وعرض عليه البائع أن يسدد الثمن بإحدى طريقتين :

الطريقة الأولى : يسدد 10000 جنيه نقداً ثم يسدد 20000 جنيه بعد 3 سنوات ثم يسدد 30000

جنيه بعد 5 سنوات

الطريقة الثانية : يسدد خمسة عشر دفعة فورية قيمة كل منها 5000 جنيه

فاذا علمت أن معدل الفائدة المركبة هو 10% سنوياً. أي الطريقتين أفضل للمشتري ولماذا ؟

(الحل)

هناك طريقتين:

الطريقة الأولى ما يسدده المشتري = القيمة الحالية للمدفوعات

$$= 3000 + 20000 \times \frac{3}{10\%} + 30000 \times \frac{5}{10\%}$$

$$= 10000 + 0.75131 \times 20000 + 0.62092 \times 30000 =$$

$$= 43653.8 \text{ جنيه}$$

الطريقة الثانية :

ما يسدده المشتري = القيمة الحالية ادفعة فورية قيمتها 5000 جنيه ومدتها 15 سنة عاجلة بمعدل فائدة

10% سنوياً

$$= 5000 \times \frac{15}{10\%}$$

$$= 5000 \times \frac{1 - 15\%}{10\%} + 1 =$$

$$= 5000 \times (1 + 14\%) =$$

$$= 5000 \times (1 + 7.3668) =$$

$$= 41833.44 \text{ جنيه}$$

وبما ان المدفوع وفق الطريقة الثانية أقل من المدفوع وفق الطريقة الأولى .

∴ الطريقة الثانية أفضل بالنسبة للمشتري

أمثلة غير محلولة

مثال (1) :

عرف ما يلي :

- الدفعة المحدودة العاجلة الفورية.
- الدفعة المحدودة المؤجلة العادية.
- الدفعة الدائمة المؤجلة العادية.
- الدفعة الدائمة العاجلة الفورية.

مثال (2) :

أوجد القيمة الحالية لدفعة عادية إذا علمت أن :

المدة	معدل الفائدة	قيمة الدفعة
10 سنوات	5% سنوياً	300 جنيه سنوياً
9 سنوات ونصف	5,2% نصف سنوي	250 جنيه نصف سنوية
5 سنوات و 9 شهور	6% سنوياً وتضاف الفائدة 4 مرات	175 جنيه ربع سنوي
سنتين وسبع شهور	1% شهرياً	50 جنيه شهرياً

مثال (3) :

أوجد الجملة والقيمة الحالية لدفعة فورية إذا علمت أن:

المدة	معدل الفائدة	قيمة الدفعة
96 شهراً	4% سنوياً	300 جنيه سنوياً
30 شهراً	6% وتضاف الفائدة مرتين	150 جنيه نصف سنوية
36 شهراً	9% سنوياً وتضاف الفائدة كل 4 شهور	125 جنيه ثلث سنوية
19 شهراً	1.5% شهرياً	45 جنيه شهرياً

مثال (4):

أوجد القيمة الحالية والجملة للدفعات الآتية و التي سددت خلال 10 سنوات.

100 جنيه في آخر كل سنة لمدة الخمس سنوات الأولى.

50 جنيه في أول كل سنة خلال الخمس سنوات التالية.

وذلك إذا علمت أن معدل الفائدة المركب 4% سنويا

مثال (5)

أودع شخص في أحد البنوك مبلغ 185 جنيهاً في نهاية كل 6 شهور ولمدة 6 سنوات ، فإذا علمت أن معدل الفائدة المركب والنصف سنوي قد تغير من 2% خلال الثلاث سنوات الأولى و إلى 3% خلال الثلاث سنوات الأخيرة.

المطلوب: أوجد جملة ما تكون لهذا الشخص في نهاية المدة.

مثال (6)

عقار عمره الافتراضي 30 سنة ويتوقع أن يغل إيراد في نهاية كل ربع سنة قدره 250 جنيه خلال العشر سنوات الأولى ، و 200 جنيه خلال العشر سنوات التالية ، و 175 جنيه خلال العشر سنوات الأخيرة. فإذا علمت أنه يتوقع زيادة معدل الفائدة المركب الربع سنوي من 1.5% خلال العشر سنوات الأولى ، و 2% خلال العشر سنوات التالية ، 2.5% خلال العشر سنوات الأخيرة.

المطلوب: أوجد ثمن شراء العقار مع العلم بأن الاتفاق تم على أساس عدم تقاضى المشتري الإيراد السبع سنوات الأولى.

مثال (7)

يراد إيقاف مبلغ من المال لإقامة مستشفى والصرف عليها ، فإذا علمت أن معدل الفائدة المركبة 5% سنوياً. **فالمطلوب** تحديد قيمة المبلغ الموقوف إذا علمت بأنه تم تقدير المبالغ اللازمة بما يلي:

أولاً: أتفق على سداد ثمن الأرض على خمس سنوات وبواقع 12000 جنيه في أول كل سنة.

ثانياً: أتفق مع مقاول البناء على تقاضى مستحقته بواقع 7000 جنيه في نهاية كل سنة ولمدة 10 سنوات

ثالثاً: مبلغ 47000 جنيه لشراء الأجهزة الطبية في نهاية 3 سنوات.

رابعاً: مبلغ 53000 جنيه لتأثيث المستشفى وتجهيزه في نهاية أربع سنوات.

خامساً: أن المصاريف الدورية للمستشفى تقدر بواقع 7000 جنيه سنوياً ابتداءً من تاريخ افتتاح المستشفى بعد 6 سنوات من الآن ولمدة 10 سنوات ، ثم تزيد إلى 10000 جنيه سنوياً لمدة الـ 10 سنوات التالية لها.

مثال (8) :

أودع أحد الأشخاص مبلغ 1000 جنيه في أول كل سنة لمدة 20 سنة ، فإذا علمت أن معدل الفائدة المركب قد تغير من 6% سنوية خلال السبع سنوات الأولى و إلى 8% خلال السبع سنوات التالية ثم إلى 7% بعد ذلك. أحسب جملة ما تكون لهذا الشخص في الحالات الآتية:

أولاً: في نهاية 20 سنة.

ثانياً: في نهاية 22 سنة.

ثالثاً: في نهاية 24 سنة.

الفصل الرابع

تسوية الديون

مفاهيم أساسية :

في حالة الاقتراض والبيع بالأجل تنشأ ديون يرتبط اسنادها بمواعيد محددة ، غير أنه لاى ظرف من الظروف قد يتم الاتفاق بين الدائن والمدين على تسوية جديدة للديون ، وذلك فيما يتعلق بمدتها أو قيمتها أو عددها ، وحتى لا يضر أحد الطرفين نتيجة هذه التسوية فإنه يعتمد على القاعدة الأساسية.

قيمة الديون القديمة في أي تاريخ = قيمة الديون الجديدة عند نفس التاريخ

وفي حالة الفائدة المركبة سنعمد على تاريخ واحد هو تاريخ التسوية وبالتالي تصبح القاعدة:

القيمة الحالية للديون قبل التسوية = القيمة الحالية للديون بعد التسوية

ملاحظات :

- 1- من الممكن أن تسوى الديون في أي تاريخ آخر أننا سنكتفي في دراستنا بتاريخ التسوية.
- 2- في حالة إعطاء معدل فائدة نستخدم جدول القيمة الحالية ، أما في حالة إعطاء معدل خصم يتم تحويل إلى معدل فائدة ثم نستخدم الجداول المالية.

المدة المكافئة وتاريخ الاستحقاق المتوسط :

المدة المكافئة :

هي المدة التي بعدها يدفع دين قيمته الاسمية تساوى مجموع القيم الاسمية للديون القديمة

تاريخ الاستحقاق المتوسط:

هو تاريخ استحقاق الدين الجديد الذي قيمته الاسمية تساوي مجموع القيم الاسمية للديون القديمة.

طريقة تقريبية لإيجاد المدة المكافئة :

هذه الطريقة لا تستخدم إلا إذا نص على استخدامها ، وبالتالي إذا لم ينص على استخدام الطريقة التقريبية نستخدم الطريقة العادية لإيجاد المدة المكافئة.

من العلاقة السابقة :

$$\frac{\text{ح} \times 1 + \text{ح} \times 2 + \text{ح} \times 3 + \dots}{\text{ح} + \text{ح} + \text{ح} + \dots} = \text{ح}$$

وبعد استخدام اللوغاريتمات و التقريب تصبح العلاقة السابقة كما يلي :

$$\frac{\text{ن} \times 1 + \text{ن} \times 2 + \text{ن} \times 3 + \dots}{\text{ن} + \text{ن} + \text{ن} + \dots} = \text{ن}$$

مثال (1) :

تاجر مدين بالديون الآتية :

1000 جنيه	تستحق السداد بعد 2 سنة
2000 جنيه	تستحق السداد بعد 4 سنوات
3000 جنيه	تستحق السداد بعد 6 سنوات

فإذا تم الاتفاق بين الطرفين على استبدال الديون القديمة بدينين متساويين في القيمة يستحق الأول بعد 3 سنوات و الثاني بعد 5 سنوات . أوجد القيمة الاسمية للديون الجديدة إذا علمت أن معدل الفائدة 5% سنويا.

(الحل)

بفرض أن القيمة الاسمية للدين الأول س

∴ القيمة الاسمية للدين الثاني س

و بتطبيق القاعدة الأساسية :

القيمة الحالية للديون قبل التسوية = القيمة الحالية للديون بعد التسوية.

$$= \text{ح} \times 1 + \text{ح} \times 2 + \text{ح} \times 3 + \dots$$

$$= \text{س} \times \text{ح} + \text{س} \times \text{ح}^2$$

$$\frac{6}{\%5} \text{ ح} \times 3000 + \frac{4}{\%5} \text{ ح} \times 1000 + \frac{2}{\%5} \text{ ح} \times 1000 =$$

$$\frac{2}{\%5} \text{ ح} \times \text{س} + \frac{2}{\%5} \text{ ح} \times \text{س} =$$

$$2000 + 0.907029 \times 1000 =$$

$$0.74315 \times 3000 + 0.822702 \times$$

$$0.783526 \times \text{س} + 0.863838 \times \text{س} =$$

$$2238.645 + 1645.404 + 907.029 \times$$

$$(0.783526 + 0.863838) \text{ س} =$$

$$1.647364 \times \text{س} = 4791.078$$

$$\frac{4791.078}{1.647364} = \text{س}$$

$$2908.3299 =$$

$$2908.330 =$$

∴ القيمة الاسمية للكمبيالة الأولى = 2908.330

∴ القيمة الاسمية للكمبيالة الثانية = 2908.330

مثال (2)

تاجر مدين بالديون الآتية:

1000 جنيه تستحق السداد بعد 2 سنة

2000 جنيه تستحق السداد بعد 4 سنوات

3000 جنيه تستحق السداد بعد 6 سنوات .

فإذا أراد استبدال جميع الديون السابقة يدين و أحد قيمته تساوى مجموع الديون السابقة.

فأوجد المدة المكافئة باستخدام الطريقة العادية.

(الحل)

القيمة الحالية للديون قبل التسوية = القيمة الحالية الديون بعد التسوية

$$= ح_1 \times 1 + ح_2 \times 2 + ح_3 \times 3 + \dots + ح_n \times n$$

$$= ح_n \left(1 + 2 + 3 + \dots + n \right) \times 5\%$$

$$= ح_n \times 1000 \times 5\% + ح_n \times 2000 \times 5\% + ح_n \times 3000 \times 5\%$$

$$= ح_n (1000 + 2000 + 3000) \times 5\%$$

$$= 0.907029 \times 1000 + 0.822702 \times 2000 + 0.74615 \times 3000$$

$$= ح_n \times 6000 \times 5\%$$

$$ح_n \times 6000 \times 5\% = 4791.078$$

$$ح_n = \frac{4791.078}{6000 \times 5\%}$$

$$= 0.79513$$

وبالكشف عن هذه القيمة في جدول القيمة الحالية لوحدة النقود تحت المعدل 5% نجد أنها تقع بين المدة

4 ، 5



$$ح_4 \times 5\% = 0.822702$$

$$ح_5 \times 5\% = 0.783526$$

0.039179 = فرق في القيمة الحالية يعادل تغير في المدة وقدره 1 سنة

$$ح_4 \times 5\% = 0.822702$$

$$ح \frac{ن}{5\%} = 0.798513$$

0.024189 = فرق في القيمة الحالية يعادل تغير في المدة وقدره س سنة

$$س \times 0.39176 = 1 \times 0.24189$$

$$س = \frac{0.24189}{0.39176}$$

$$= 0.617444 = 0.62 \text{ سنة تقريباً}$$

$$ن = 4 + س$$

$$= 4.62 = 0.62 + 4 \text{ سنة}$$

تحويل كسر السنة إلى شهور وأيام :

تحويل كسر السنة إلى شهور = $0.62 \times 12 = 7.44$ شهر

تحويل كسر الشهر إلى أيام = $44.0 \times 30 = 13.20$ يوم

∴ المدة المكافئة هي

سنوات	شهور	أيام
4	7	13

مثال (٣) :

أوجد المدة المكافئة في المثال السابق باستخدام الطريقة التقريبية

(الحل)

$$ن = \frac{ح_1 \times 1 + ح_2 \times 2 + ح_3 \times 3}{ح_1 + ح_2 + ح_3}$$

$$= \frac{6 \times 3000 + 4 \times 2000 + 2 \times 1000}{3000 + 2000 + 1000}$$

$$4.67 \text{ سنة} = \frac{28000}{6000} = \frac{18000 + 8000 + 2000}{6000}$$

تحويل كسر السنة إلى شهور وأيام :

• تحويل كسر السنة إلى شهور = $0.67 \times 12 = 8.04$ شهر.

• تحويل كسر الشهر إلى أيام = $0.04 \times 30 = 1.20$ يوم

المدة المكافئة هي:

سنوات	شهور	أيام
4	8	1

استخدام معدل الخصم المركب في تسوية الديون:

بالنسبة للديون المثبتة بأوراق تجارية فإنها تخضع باستخدام معدل خصم ، لذلك فقد توجد عدة ديون سواء كانت ديون قيمة أو جديدة بعضها مثبت بأوراق تجارية ، في هذه الحالة يستخدم معدل الفائدة للديون العادية ومعدل الخصم المثبتة بأوراق تجارية وحتى يمكن استخدام الجداول المالية نبدأ أولاً بتحويل معدل الخصم إلى معدل فائدة.

مثال (4) :

تاجر مدين بالديون الآتية :

2000 جنيهاً كمبيالة تستحق بعد 3 سنوات.

4000 جنيهاً دين يستحق بعد 4 سنوات.

3000 جنيهاً سند أذني يستحق بعد 6 سنوات.

أراد استبدالها بثلاثة ديون القيمة الاسمية للدين الأول ضعف القيمة الاسمية للدين الثاني ، والقيمة الاسمية للدين الثاني ضعف القيمة الاسمية للدين الثالث .

فإذا علمت أن الدين الجديد الثاني مثبت بكمبيالة وأن هذه الديون الجديدة تستحق بعد 2 سنة ، 5 سنوات و 7 سنوات على التوالي وأن معدل الفائدة 5% سنوياً ومعدل الخصم 66، 5% سنوياً.

المطلوب : أوجد القيمة الاسمية للديون الجديدة.

(الحل)

تحويل معدل الخصم إلى معدل فائدة

$$ع = \frac{ص}{ص - 1}$$

$$ع = \frac{0.0566}{0.0566 - 1}$$

$$ع = \frac{0.0566}{0.9434}$$

$$= 0.06 \% \text{ تقريبا}$$

$$= 6 \% \text{ سنويا}$$

أى أن :

الديون العادية تسوى على أساس معدل فائدة قدره 5% والديون المثبتة بأوراق تجارية ستسوى على أساس معدل فائدة قدره 6% سنوياً

تحديد القيمة للديون الجديدة :

بفرض ان القيمة الاسمية للدين الأصغر وهو الثالث = س

∴ القيمة الاسمية للدين الثاني = 2 س

∴ القيمة الاسمية للدين الأول = 4 س

القيمة الحالية للديون قبل التسوية = القيمة الحالية للديون بعد التسوية

$$\frac{6}{\%6} ح \times 3000 + \frac{4}{\%5} ح \times 4000 + \frac{2}{\%6} ح \times 2000 =$$

$$\frac{7}{\%5} ح \times س + \frac{2}{\%6} ح \times س2 + \frac{2}{\%5} ح \times س4 =$$

$$0.704961 \times 3000 + 0.822702 \times 2000 + 0.839619 \times 2000 =$$

$$0.710681 \times س + 0.747258 \times س2 + 0.907029 \times س4 =$$

$$2114.883 + 3290.808 + 1679.238 =$$

$$= س (0.710681 + 1.494516 + 3.628116)$$

$$5.833313 \times س = 7084.929$$

$$س = \frac{708.926}{5.833313} = 1214.563 \text{ جنيهاً}$$

القيمة الاسمية للدين الأول = 4 س

$$= 1214.563 \times 4 = 4858.252 \text{ جنيهاً}$$

القيمة الاسمية للدين الثاني = 2 س

$$= 1214.563 \times 2 = 2429.126 \text{ جنيهاً}$$

القيمة الاسمية للدين الثالث = س

$$= 1214.563 \text{ جنيهاً}$$

أمثلة محلولة

مثال (1) :

شخص مدين بالديون الآتية :

2500 جنيهاً	تستحق الدفع بعد 3 سنوات.
3500 جنيهاً	تستحق الدفع بعد 6 سنوات.
4000 جنيهاً	تستحق الدفع بعد 10 سنوات.

أراد استبدالها بدين واحد يستحق السداد بعد 7 سنوات

المطلوب : القيمة الاسمية للدين الجديد فإذا علمت أن معدل الفائدة 4.5% سنوياً.

مثال (2) :

شخص مدين بالديون الآتية :

3000 جنيهاً	تستحق السداد بعد 4 سنوات.
4300 جنيهاً	تستحق السداد بعد 10 سنوات
5000 جنيهاً	تستحق السداد بعد 6 سنوات.

أراد استبدالها بثلاثة ديون جديدة - القيمة الاسمية للدين الأول نصف القيمة الاسمية للدين الثاني ، والقيمة الاسمية للدين الثاني ثلث القيمة الاسمية للدين الثالث.

المطلوب : أوجد القيمة الاسمية للديون الثلاثة إذا علمت أن معدل الفائدة 3.9% سنوياً.

مثال (3) :

تاجر مدين بالديون الآتية :

3200 جنيهاً	تستحق السداد بعد 14 شهراً
2500 جنيهاً	تستحق السداد بعد 18 شهراً
2500 جنيهاً	تستحق السداد بعد 25 شهراً و 14 يوم

أراد استبدالها بدينين - القيمة الاسمية للدين الأول ثلث القيمة الاسمية للدين الثاني .

المطلوب : أوجد القيمة الاسمية للديون الجديدة إذا علمت أن الدين الجديد الأول يستحق بعد 15 شهراً والدين الجديد الثاني يستحق بعد 22 شهراً و 18 يوماً وأن معدل الفائدة المستخدم 5% سنوياً.

مثال (4) :

تاجر مدين بالأوراق الآتية :

سند أذنى قيمته الاسمية 3500 جنيهاً	ويستحق السداد بعد 3 سنوات
كمبيالة قيمتها الاسمية 4500 جنيهاً	ويستحق السداد بعد 5 سنوات
سند أذنى قيمته الاسمية 5000 جنيهاً	ويستحق السداد بعد 6 سنوات
كمبيالة قيمتها الاسمية 6000 جنيهاً	ويستحق السداد بعد 7 سنوات

أراد أستبدالها بسند أذنى واحد يستحق بعد 4 سنوات .

المطلوب : أوجد القيمة الاسمية لهذا السند إذا علمت أن معدل الفائدة المستخدم 5% سنوياً.

مثال (5) :

شخص مدين بالديون الآتية :

1000 جنيهاً	تستحق السداد بعد 3 سنوات.
4000 جنيهاً	تستحق السداد بعد 4 سنوات.
5000 جنيهاً	تستحق السداد بعد 5 سنوات.

أراد أستبدالها بدين واحد قيمة الاسمية تعادل القيمة الاسمية للديون السابقة

المطلوب : أوجد مدة هذا الدين إذا علمت أن معدل الفائدة 4.6% سنوياً.

مثال (6) :

أوجد المدة المكافئة في المثال السابق باستخدام الطريقة التقريبية

مثال (7) :

تاجر مدين بالديون الآتية :

دين قيمته الاسمية 2000 جنيهاً	يستحق بعد 15 شهراً
كمبيالة قيمتها الاسمية 3000 جنيهاً	يستحق بعد 20 شهراً
سند أننى قيمته الاسمية 4000 جنيهاً	يستحق بعد 25 شهراً
دين قيمته الاسمية 5000 جنيهاً	يستحق بعد 30 شهراً

أراد أستبدال الديون السابقة بثلاثة ديون - قيمة الدين الأول ضعف الدين الثاني ، وقيمة الدين الثاني ثلث الدين الثالث . فإذا علمت أن الدين الجديد الأول والثاني أتفق على استبدالهم بكميالتين ، وأن معدل الفائدة 6% سنوي ومعدل الخصم 6% سنويا.

المطلوب : او جد القيمة الأسمية للديون الثلاثة إذا كانت تواريخ استحقاقها بعد 18 ، 22 ، 26 شهراً على الترتيب .

الفصل الخامس

استهلاك القروض طويلة الأجل

توجد عدة طرق لسداد الديون أو القروض طويلة الأجل من أهمها سداد القرض و فوائده في نهاية مدته وطريقة الاستهلاكات المتساوية وطريقة الأقساط المتساوية وطريقة الاحتياطي المستثمر ، وفيما يلي عرض مختصر لهذه الطرق .

أولاً: سداد القرض وفوائده في نهاية المدة :

وهذه الطريقة في مضمونها تعني قيام المدين أو المقرض بسداد جملة الدين في نهاية مدته ، وهذه الجملة تعنى اصل القرض وفوائده وبالتالي تستخدم معادلة جمع المبالغ بفائدة مركبة لتحديد قيمة المبلغ الواجب سداده في نهاية المدة.

مثال (1):

اقتضت شركة مدحت للأدوات المنزلية مبلغ 10000 جنيه من بنك القاهرة لمدة عشر سنوات بمعدل فائدة مركبة قدرها %12 سنويا على أن تقوم بسداد المبلغ وفوائده في نهاية المدة. أحسب المبلغ المطلوب سداده والفوائد التي تحملتها شركة مدحت .

(الحل)

$$\text{جملة الدين أو القرض} = أ(١+ع)^ن$$

$$= 10000 \times (1.12)^{10}$$

$$= 3.105484 \times 10000 =$$

$$\therefore \text{المبلغ الواجب سداده} = 31058.48$$

$$\therefore \text{ف} = \text{ج} - \text{أ}$$

$$\therefore \text{ف} = 1000 - 31058.48 =$$

$$\therefore \text{مجموع الفوائد} = 21058.48 \text{ جنيها}$$

ثانياً : طريقة الاستهلاكات المتساوية :

يقصد بطريقة الاستهلاكات المتساوية سداد القرض على أجزاء أو دفعات متساوية من الأصل فقط خلال مدة السداد المحددة ، أما الفوائد فتحسب على الرصيد المتبقي من القرض وتسدد كل فترة دورية - ولذلك تسمى هذه الطريقة أحياناً بطريقة " القسط المتساوي من الأصل فقط".

ويتم حساب الاستهلاك المتساوي وفقاً لهذه الطريقة بقسمة مبلغ القرض على عدد مرات السداد أو على عدد الاستهلاكات المتساوية.

أما الفوائد الدورية المستحقة فتحسب على أرصدة القرض المتبقية بعد خصم الاستهلاكات المتساوية ، فتحسب الفائدة الأولى على أصل القرض بينما تحسب الفائدة الثانية على أصل القرض بعد طرح قيمة الاستهلاك الأول وهكذا حتى الفائدة الأخيرة التي تحسب على الاستهلاك الأخير فقط

مجموع الفائدة الدورية والاستهلاك المتساوي يمثل القسط الواجب دفعه كل فترة زمنية من فترات مدة القرض ، و بالطبع يكون ذلك القسط غير متساوي نتيجة ثبات الاستهلاكات و اختلاف الفوائد الدورية.

مثال (٣) :

اقتضت شركة حازم للكمبيوتر مبلغ 20000 جنية من بنك مصر على أن يتم السداد على أقساط متساوية من أصل القرض تسدد في نهاية كل سنة ولمدة 5 سنوات وعلى أساس فائدة مركبة بمعدل 12% سنوياً

المطلوب :

- 1- إيجاد الاستهلاك المتساوي
- 2- حساب الفوائد الدورية.
- 3- تصوير جدول الاستهلاك.

(الحل)

1- إيجاد الاستهلاك المتساوي:

$$\frac{أ}{ن} = \frac{\text{أصل القرض}}{\text{عدد مرات السداد}} = \text{الاستهلاك المتساوي}$$

$$\therefore ك = \frac{20000}{5} = 4000 \text{ جنية}$$

2- إيجاد الفوائد الدورية :

فائدة رصيد القرض خلال وحدة الزمن الأولى

$$= \text{أصل القرض} \times \text{معدل الفائدة} \times 1$$

$$\therefore \text{ف1} = \frac{12}{100} \times 20000 = 2400 \text{ جنيها}$$

رصيد القرض في بداية وحدة الزمن الثانية

$$= \text{أصل القرض} - \text{الاستهلاك}$$

$$= 20000 - 4000 = 16000 \text{ جنيهاً}$$

$$\therefore \text{ف2} = \frac{12}{100} \times 16000 = 1920 \text{ جنيها}$$

رصيد القرض في بداية وحدة الزمن الثالثة

$$= 16000 - 4000 = 12000 \text{ جنيهاً}$$

$$\therefore \text{ف3} = \frac{12}{100} \times 12000 = 1440 \text{ جنيها}$$

وهكذا نجد أن :

$$\therefore \text{ف4} = \frac{12}{100} \times 8000 = 960 \text{ جنيها}$$

$$\therefore \text{ف5} = \frac{12}{100} \times 4000 = 480 \text{ جنيها}$$

وكذلك فإن :

الرصيد في بداية وحدة الزمن الرابعة

$$= 12000 - 4000 = 8000 \text{ جنيهاً}$$

الرصيد في بداية وحدة الزمن الخامسة

$$= 8000 - 4000 = 4000 \text{ جنيهاً}$$

3- القسط الواجب السداد = الأستهلاك المتساوى + فائدة الرصيد

$$\therefore \text{ط 1} = \text{ك} + \text{ف 1}$$

$$2400 + 4000 =$$

$$= 6400 \text{ جنيه}$$

$$\text{وكذلك ط 2} = 4000 + \text{ف 2}$$

$$1920 + 4000 =$$

$$= 5920 \text{ جنيه}$$

$$1440 + 4000 = \text{ط 3}$$

$$= 5440 \text{ جنيه}$$

$$960 + 4000 = \text{ط 4}$$

$$= 4960 \text{ جنيه}$$

$$480 + 4000 = \text{ط 5}$$

$$= 4480 \text{ جنيه}$$

4- تصوير جدول الاستهلاك :

م	رصيد القرض اول المدة	الفائدة على الرصيد	الاستهلاك المتساوي	القسط المستحق	رصيد القرض آخر المدة
1	20000	2400	4000	6400	16000
2	16000	1920	4000	5920	12000
3	12000	1440	4000	5440	8000
4	8000	960	4000	4960	4000
5	4000	480	4000	4480	صفر
6	-----	7200	20000	27200	-----

والجدول السابق يوضح الحقائق التالية :

- 1- مجموع الاستهلاكات المتساوية يساوي أصل القرض
- 2- رصيد القرض في أول كل فترة يتناقص بمقدار الاستهلاك المتساوي
- 3- رصيد القرض في أول الفترة الأخيرة يساوي الاستهلاك المتساوي
- 4- الفائدة على رصيد القرض أول الفترة يمثل متوالية عددية أساسها يساوي فائدة الاستهلاك المتساوي ، وحدها الأول يساوي فائدة القرض ، وحدها الأخير يساوي فائدة الاستهلاك
- 5- رصيد القرض أول الفترة يمثل متوالية عددية حدها الأول يساوي قيمة القرض وحدها الأخير وأساسها يساوي الاستهلاك المتساوي وعدد حدودها يساوي عدد الاستهلاكات
- 6- القسط المستحق يساوي مجموع الاستهلاك المتساوي والفائدة على الرصيد ، وتمثل الأقساط المستحقة متوالية حسابية حدها الأول يساوي مجموع الاستهلاك المتساوي وفائدة القرض، و حدها الأخير يساوي مجموع الاستهلاك المتساوي و فائدته عن فترة واحدة ، كما أن مجموع الأقساط المدفوعة يساوي أصل القرض بالإضافة إلى مجموع الفوائد المستحقة.

مثال (٣):

قرض قيمته 20000 جنيه يستهلك بطريقة الاستهلاكات المتساوية على مدى 16 سنة ، فإذا كان معدل الفائدة السنوي %10 فأوجد :

- 1- مجموع الفوائد.
- 2- مجموع الأقساط المستحقة الدفع.
- 3- القسط الواجب الدفع في نهاية السنة الحادية عشرة.

(الحل)

1- إيجاد مجموع الفوائد

$$\therefore \frac{\text{القرض}}{\text{عدد الاستهلاكات}} = \text{الاستهلاك المتساوي}$$

$$\therefore \frac{أ}{ن} = ك$$

$$\therefore ك = \frac{20000}{16} = 1250 \text{ جنيهاً}$$

$$\therefore \text{ف} = 1 = \text{أ} \times \text{ع} \times \text{ن}$$

$$2000 \text{ جنيه} = \frac{10}{100} \times 20000 =$$

\therefore فائدة الأستهلاك = فائدة رصيد القرض عن السنة الاخيرة

$$\therefore \text{ف} = 16 = \text{ك} \times \text{ع} = 1250 \times \frac{10}{100} = 125 \text{ جنيه}$$

\therefore مجموع الفوائد = مجموع متوالية عددها حدها الأول هو فائدة القرض وحدها الأخير هو فائدة الأستهلاك وعدد حدودها هو عدد الأستهلاكات.

$$\therefore \text{مجموع الفوائد} = \frac{\text{ن}}{2} (\text{أ} + \text{ل})$$

حيث أن :

أ ← تمثل فائدة القرض

ل ← تمثل فائدة الأستهلاك

$$\therefore \text{مجموع الفوائد} = \frac{16}{2} (125 + 2000)$$

$$= 8 \times 2125 = 17000 \text{ جنيه}$$

$$\text{أو مجموع الفوائد} = \frac{\text{ن}}{2} (\text{أ} + \text{ل})$$

$$= \frac{\text{ن}}{2} (\text{ف} + 1 + \text{ن})$$

$$= \frac{\text{ن}}{2} (\text{أ} \times \text{ع} + \text{ك} \times \text{ع})$$

$$= \frac{\text{ن}}{2} (\text{ن} \times \text{ك} \times \text{ع} + \text{ع} \times \text{ك} \times \text{ع})$$

حيث أن :

$$\text{أ} = \text{ن} \times \text{ك}$$

$$= \frac{\text{ن}}{2} (\text{ك} \times \text{ع} (1 + \text{ن}))$$

$$= \text{ن} \times \text{ك} \times \text{ع} \left(\frac{1 + \text{ن}}{2} \right)$$

$$\frac{1+16}{2} \times 2000 =$$

$$17000 \text{ جنيه} = \frac{17}{2} \times 2000 =$$

2- مجموع الأقساط المستحقة

$$37000 \text{ جنيه} = 17000 + 20000 =$$

3- القسط الواجب الدفع في السنة الحادية عشرة:-

رصيد القرض في بداية السنة الحادية عشرة

$$= \text{القرض} - \text{الاستهلاكات}$$

$$= 20000 - 1250 \times 10 =$$

$$7500 \text{ جنيه} = 20000 - 12500 =$$

$$\therefore \text{ف 11} = \text{الرصيد} \times \text{ع}$$

$$750 \text{ جنيه} = \frac{10}{100} \times 75000 =$$

$$\therefore \text{القسط المستحق} = \text{الاستهلاك} + \text{الفائدة}$$

$$\therefore \text{ط 11} = \text{ك} + \text{ف 11}$$

$$2000 \text{ جنيه} = 1250 + 750 =$$

$$\therefore \text{قسط السنة الحادية عشرة} = 2000 \text{ جنيه}$$

مثال (4) :

قسط يستهلك على 16 قسط سنوي متساوي من الأصل فقط فإذا علمت أن :

- القسط المدفوع في نهاية السنة الأولى = 3250 جنيها

- رصيد القرض في أول السنة الخامسة = 15000 جنيها

- رصيد القرض أول السنة الحادية عشرة = 7500 جنيها

المطلوب :

1- الاستهلاك المتساوى

2- أصل القرض.

3- معدل الفائدة المستخدم.

(الحل)

1- إيجاد الاستهلاك المتساوى

الاستهلاك المتساوى = $\frac{\text{قيمة الاستهلاكات المعلومة}}{\text{عدد الاستهلاكات المعلومة}}$

∴ ك = $\frac{\text{الفرق أى رصدين معلومين}}{\text{الفرق بين ترتيبيهما}}$

$$\frac{11 أ - 5 أ}{5 - 11} =$$

$$\frac{7500 - 15000}{6} =$$

$$\frac{7500}{6} =$$

$$1250 \text{ جنيه} =$$

∴ الأستهلاك المتساوى = 1250 جنيه

2- أصل القرض :

أصل القرض = الرصيد في بداية أي فترة + الاستهلاكات السابقة

$$\text{∴ أ} = 5 أ + 4 ك$$

$$4 \times 1250 + 15000 =$$

$$5000 + 15000 =$$

$$20000 \text{ جنيه} =$$

∴ أصل القرض = 20000 جنيه

3- معدل الفائدة :

∴ القسط المستحق في أي سنة = الاستهلاك المتساوى + فائدة الرصيد في بداية السنة.

$$\therefore 1 \text{ ط} = \text{ك} + \text{ف} 1$$

$$\therefore 1 \text{ ف} + 1250 = 3250$$

$$\therefore 1 \text{ ف} = 3250 - 1250$$

$$= 2000 \text{ جنيه}$$

$$\therefore 1 \text{ ف} = \text{القرض} \times \text{معدل الفائدة} \times 1$$

$$\therefore 2000 = 20000 \times \frac{\text{ع}}{100} \times 1$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{100 \times 2000}{20000} = 10$$

$$\therefore \text{معدل الفائدة} = 10\%$$

مثال (5):

دين يسدد بطريقة الاستهلاكات السنوية المتساوية فإذا علمت أن:

- فائدة السنة الأولى = 2000 جنيه
- فائدة السنة الثانية = 1500 جنيه
- رصيد القرض أول السنة الثانية عشرة = 6250 جنيه
- الرصيد في أول الفترة الاخيرة = 1375 جنيه

المطلوب :

- 1- الاستهلاك المتساوى
- 2- أصل القرض
- 3- مدة القرض
- 4- معدل الفائدة المستخدم

(الحل)

1- إيجاد الاستهلاك المتساوى

الفائدة الدورية على رصيد القرض تمثل متوالية حسابية أساسها فائدة الاستهلاك المتساوى

$$\therefore \text{فائدة الاستهلاك المتساوى} = \frac{\text{مجموع فوائد عدة استهلاكات}}{\text{عدد هذه الفوائد}}$$

$$= \frac{\text{الفرق بين أى فائدتين}}{\text{الفرق بين ترتيبيهما}}$$

$$\frac{5\text{ف}-1\text{ف}}{1-5} =$$

$$125 \text{ جنيهاً} = \frac{500}{4} = \frac{1500-2000}{4} =$$

∴ القسط = الاستهلاك + الفائدة على الرصيد

∴ القسط الأخير = الاستهلاك + فائدة الاستهلاك (أو الرصيد في أول الفترة الأخيرة)

$$\text{طن} = \text{ك} + \text{ف ن}$$

$$\text{ك} = \text{طن} - \text{ف ن}$$

∴ الاستهلاك المتساوى = 1260 جنيه

2- إيجاد أصل القرض :

القرض = الرصيد في أول أي فترة + الاستهلاكات السابقة

$$6250 = 11 \times \text{ك} +$$

$$6250 = 11 \times 1250 +$$

$$6250 = 13750 +$$

∴ أصل القرض = 20000 جنيه

3- إيجاد مدة القرض

مدة القرض = عدد الاستهلاكات

$$\text{∴ عدد الاستهلاكات} = \frac{\text{القرض}}{\text{الاستهلاك المتساوى}}$$

$$\text{∴ مدة القرض} = \frac{20000}{1250} = 16$$

∴ الاستهلاكات سنوية

∴ مدة القرض = 16 سنة

4- إيجاد معدل الفائدة :

$$\text{∴ ف 1} = \text{القرض} \times \text{المعدل}$$

$$\text{∴ } 2000 = 20000 \times \frac{\text{ع}}{100}$$

$$\text{∴ ع} = \frac{100 \times 2000}{20000} = 10$$

∴ معدل الفائدة المستخدم = 10% سنوياً

ثالثاً : طريقة الأقساط المتساوية من الأصل والفوائد معاً :

مؤدي هذه الطريقة أن يقوم المدين أو المقرض بسداد أقساط ثابتة أو متساوية من الأصل والفائدة معاً في نهاية كل مدة زمنية. هذا القسط الثابت عبارة عن جزئين أحدهما يمثل الاستهلاك من أصل القرض وهو متزايد من فترة لأخرى والآخر يمثل الفائدة وهي متناقصة من فترة لأخرى بمقدار المتزايد في قيمة الاستهلاك حيث يكون مجموع الجزئين ثابتاً من فترة لأخرى.

وبحسب القسط المتساوي والاستهلاكات والفوائد المستحقة خلال مدة القرض طبقاً للحقائق والمعادلات الآتية

1- حساب القسط المتساوي :

إذا افترضنا أن أصل القرض هو (أ) والقسط المتساوي (الثابت) هو (ط) وأن الفائدة المستحقة عن وحدة الزمن (ر) وان الاستهلاك من أصل القرض عن وحدة الزمن الثابت (ر) هو (ك ر) وأن مدة القرض هي (ن) من وحدات الزمن وأن القسط يدفع في نهاية كل وحدة زمن وأن معدل الفائدة المركبة المستخدم هو (ع %) عن كل وحدة زمن ، فإنه في نهاية مدة القرض يجب أن تتساوى جملة القرض مع جملة الأقساط المسددة أي أن :

جملة القرض = جملة الأقساط

$$\therefore أ(ع+1)^ن$$

$$= ط \times ج \sqrt[ن]{ع\%}$$

$$\therefore ط = \frac{أ(ع+1)^ن}{ج \sqrt[ن]{ع\%}} \quad (1/5)$$

وكذلك فإن:

$$\therefore أ = \frac{ط \times ج \sqrt[ن]{ع\%}}{(ع+1)^ن} \quad (2/5)$$

أما عند بداية مدة القرض فإنه يجب أن تتساوى قيمة القرض مع القيمة الحالية للأقساط الواجب سدادها أي ان :

$$أ = ط \times د \sqrt[ن]{ع\%} \quad (3/5)$$

كما أن :

$$ط = أ \times \frac{1}{د \sqrt[ن]{ع\%}} \quad (4/5)$$

ويمكن الحصول على قيمة المقدار $\frac{1}{\sqrt[n]{\%ع}}$ من الجدول الخامس مباشرة بدلاً من الحصول على قيمة $\sqrt[n]{\%ع}$ من الجدول الرابع ثم قسمة وحدة النقود على الوحدة السابقة.

مثال (6) :

قرض قيمته 10000 جنيه يراد استهلاكه على مدى 5 سنوات بأقساط متساوية من الأصل والفوائد معاً في نهاية كل سنة ، فإذا كان معدل الفائدة المركبة المستخدم هو 8% فأوجد القسط المتساوي ثم كون جدول الاستهلاك.

(الحل)

$$ط = أ \times \frac{1}{\sqrt[n]{\%ع}}$$

$$ط = \frac{1}{\sqrt[5]{8\%}} \times 10000$$

ومن الجدول الخامس نجد أن:

$$ط = 0.2545645 \times 10000 =$$

$$= 2504.5645 \text{ جنيه}$$

$$\text{ف} 1 = أ \times \frac{8}{100}$$

$$= \frac{8}{100} \times 10000 =$$

$$\text{ك} 1 = ط - \text{ف} 1$$

$$= 800 - 2504.5645 =$$

$$= 1704.5645 \text{ جنيه}$$

رصيد القرض أول السنة الثانية :

$$= أ - \text{ك} 1$$

$$= 10000 - 1704.5645 = 8295.4355$$

$$\text{ف} 2 = \frac{8}{100} \times 8295.4355 =$$

$$= 663.63484$$

$$\text{ك} 2 = ط - \text{ف} 2$$

$$663.63484 - 2504.5645 =$$

$$= 1804.929 \text{ جنيه}$$

رصيد القرض أول السنة الثالثة

$$= 6454.506 \text{ جنيهًا} - 8295.4355 =$$

$$= 3 \text{ ف} \times \frac{8}{100} \times 6454.506 =$$

$$= 516.3605 \text{ جنيهًا}$$

$$= 3 \text{ ك} - 2504.5645 - 516.3605 =$$

$$= 1988.2039 \text{ جنيه}$$

رصيد القرض أول السنة الرابعة

$$= 4466.302 \text{ جنيهًا} - 1988.2039 - 6454.506 =$$

$$= 4 \text{ ف} \times \frac{8}{100} \times 4466.302 =$$

$$= 357.304 \text{ جنيهًا}$$

$$= 4 \text{ ك} - 2504.5645 - 357.304 =$$

$$= 2147.261 \text{ جنيه}$$

رصيد القرض أول السنة الخامسة

$$= 2319.041 \text{ جنيهًا} - 2147.261 - 4466.302 =$$

$$= 5 \text{ ف} \times \frac{8}{100} \times 2319.041 =$$

$$= 185.523 \text{ جنيهًا}$$

$$= 5 \text{ ك} - 2504.5645 - 185.523 =$$

$$= 2319.041 \text{ جنيه}$$

رصيد القرض في آخر السنة الخامسة

$$= 2319.041 - 2319.041 = \text{صفر}$$

رصيد القرض أول السنة	الفائدة	القسط السنوي	الأستهلاك	رصيد القرض آخر السنة
10000	800	2504.5645	1704.5645	8295.4355
8295.4355	663.635	2504.5645	1840.9296	6454.506
6454.506	516.3605	2504.5645	1988.2039	4466.302
4466.302	357.304	2504.5645	2147.261	2319.041
2319.041	185.523	2504.5645	2319.041	صفر
—	2522.8225	12522.8225	10000000	—

من الجدول السابق تتضح لنا الحقائق الآتية :

1- مجموع الأقساط المتساوية

$$= \text{مجموع الاستهلاكات} + \text{مجموع الفوائد}$$

2- مجموع الاستهلاكات = أصل القرض

3- الاستهلاكات تتزايد بمعدل ثابت قيمته (1.08) حيث :

$$\bullet \text{ ك}1 = 1.08 \times \text{ك}2$$

$$\bullet \text{ ك}2 = 1.08 \times 1704.5645 = 1804.9296$$

$$\bullet \text{ ك}3 = 1.08 \times \text{ك}2$$

$$\bullet \text{ ك}3 = 1.08 \times 1804.9296 = 1988.204$$

• وهكذا

العلاقة بين الاستهلاكات:

من الجدول السابق وجدنا أن كل استهلاك عبارة عن الاستهلاك السابق له مضروباً في المقدار (ع + ١) ، وبمعنى آخر فإن أي استهلاك هو عبارة عن جملة الاستهلاك السابق له بمعدل فائدة ع% ولمدة فتره زمنية واحدة.

$$\therefore \text{ك}2 = \text{ك}1 (ع + ١)$$

$$3ك = 2ك (ع + 1) = 1ك (ع + 1)^2$$

$$4ك = 3ك (ع + 1) = 2ك (ع + 1)^2$$

$$1ك (ع + 1)^3$$

$$5ك = 4ك (ع + 1) = 3ك (ع + 1)^2$$

$$4ك = 3ك (ع + 1)^3$$

وهكذا نجد أن:

$$كِر = كِر - 1 (ع + 1) = 1ك (ع + 1) - ... (5/5)$$

3- إيجاد معدل الفائدة بدلالة استهلاكية متتاليتين:

من العلاقة السابقة يمكن إيجاد الفرق بين اى استهلاكيين متتاليين كما يلي:

$$كِر - 1كِر = 1كِر - 1كِر (ع + 1) = 1كِر - 1كِر (ع + 1)$$

$$كِر - 1كِر = 1كِر - 1كِر \times ع$$

ومن العلاقة السابقة يمكن إيجاد معدل الفائدة كما يلي :

$$ع = \frac{كِر - 1كِر}{1كِر - 1كِر} \dots \dots \dots (6/5)$$

4- العلاقة بين القسط المتساوي والاستهلاك الأخير :

نظرا لأن الاستهلاك الأخير (كِن) عبارة عن القسط المتساوي (ط) ومطروحاً منه الفائدة الأخيرة

(فن) أي أن :

$$كِن = ط - فن$$

$$\therefore ط = ك + فن$$

$$ط = كِن + كِن \times ع \times 1$$

$$\therefore ط = كِن (ع + 1) \dots \dots \dots (7/5)$$

أي أن القسط المتساوي يساوي جملة الاستهلاك الأخير معدل الفائدة (ع) ولمدة قدرها وحدة زمن واحدة

5- إيجاد رصيد القرض في نهاية أي فترة

إذا افترضنا أننا نرغب في إيجاد رصيد القرض في نهاية الفترة (ر) فإننا نحصل على هذا الرصيد بإيجاد القيمة الحالية للأقساط المتساوية المتبقية أو عن طريق خصم الأستهلاكات السابقة من أصل القرض.

ونظراً لأن القسط المتساوي يمثل دفعة عادية فإنه يمكن الاستفادة بقوانين الدفعات لإيجاد رصيد القرض في نهاية أي فترة زمنية كما يلي :

رصيد القرض في نهاية الفترة (ر) = القيمة الحالية للأقساط التالية :

$$أر = ط \times د \sqrt[n]{ع} \% \dots\dots\dots (8/5)$$

أو الرصيد = القرض - الأستهلاكات السابقة

$$\therefore أر = أ - (ك + 2ك + 3ك + \dots\dots\dots ك ر)$$

$$\therefore أر = أ - ك \times ح \sqrt[n]{ع} \% \dots\dots\dots (9/5)$$

6- العلاقة بين القرض والأستهلاكات :

وجدنا من الجدول السابق أن القرض عبارة مجموع الإستهلاكات أي أن :

$$أ = ك + 2ك + 3ك + \dots\dots\dots ك ن$$

و باستخدام العلاقة بين الإستهلاكات نجد أن :

$$أ = ك + 1ك + (ع + 1) ك + 1ك + 2(ع + 1) ك + 1ك$$

$$(ع + 1) ك + 3(ع + 1) ك + \dots\dots\dots ك (ع + 1) ن - 1$$

$$= ك (1 + ج + 1ج + 2ج + 3ج + \dots\dots\dots ج ن - 1)$$

$$= ك (مجموعة متوالية هندسية تصاعدية حدها الأول واحد وأساسها ج أو (ع + 1) وعدد حدودها = ن)$$

$$ن = ك \times \frac{(ج - ن)}{1 - ج}$$

$$= ك \times \frac{1 - (ع + 1)}{1 - ع + 1}$$

$$= ك \times \frac{1 - ن(ع + 1)}{ع}$$

$$\therefore أ = ك \times ج \sqrt[ع]{\%}$$

ومن العلاقتين (9/5) ، (10/5) نجد أن:

$$أ = ك \times ج - ك \times ج \times ر$$

$$\therefore أ = (ج - ح) \sqrt[ع]{\%} \text{ و } (11 / 5)$$

ومن العلاقة (10 / 5) نجد أن:

$$ك = أ \times \frac{1}{ج \sqrt[ع]{\%}} \text{ } (12 / 5)$$

ولكن:

$$ط = ك + ف$$

$$\therefore ك = ط - ف$$

$$= (أ \times \frac{1}{ج \sqrt[ع]{\%}} - أ \times ع)$$

$$\therefore ك = 1 (أ \times \frac{1}{ج \sqrt[ع]{\%}} - ع) \text{ } (13 / 5)$$

ومن العلاقتين (12/5) ، (13/5) نجد أن :

$$أ \times \frac{1}{ج \sqrt[ع]{\%}} = (ع - \frac{1}{ج \sqrt[ع]{\%}})$$

$$\therefore (14/5) \text{ } (ع - \frac{1}{ج \sqrt[ع]{\%}}) = \frac{1}{ج \sqrt[ع]{\%}}$$

مثال (٧) :

سلفة تستهلك على 5 أقساط متساوية من الأصل والفائدة معاً تدفع في نهاية كل سنة ، فإذا علمت أن الاستهلاك الثاني 465.920 جنيهاً والثالث 994.102 جنيهاً ، فابعد بدون استخدام الجداول المالية ما يلي

- 1- معدل الفائدة المركبة المستخدم
- 2- قيمة السلفة
- 3- القسط المتساوى
- 4- مجموع الفوائد المستحقة

(الحل)

$$3ك = 2ك(ع + 1)$$

$$\frac{3ك}{2ك} = (ع+1) \therefore$$

$$\frac{994.102}{920.465} =$$

$$1.08 =$$

$$\therefore ع = 8\% \text{ سنوياً}$$

1- إيجاد مقدار السلفة :

$$\therefore 1ك = \frac{2ك}{ع+1}$$

$$852.282 \text{ جنيه} = \frac{920.465}{1.08} =$$

$$4ك = 3ك(ع + 1)$$

$$4ك = 1.08 \times 994.102 =$$

$$1073.63 \text{ جنيه} =$$

$$5ك = 3ك(ع + 1)^2$$

$$4ك = (ع + 1)$$

$$1159.521 = 1.08 \times 1073.63 =$$

$$1159.521 \text{ جنيه} =$$

$$\dots أ = 1ك + 2ك + 3ك + 4ك + 5ك$$

$$\therefore 1159.521 + 1073.63 + 994.102 + 920.465 + 852.282 = أ$$

$$\therefore \text{قيمة السلفة} = 5000 \text{ جنيه}$$

2- إيجاد القسط المتساوي

$$ف أ = 1 \times ع$$

$$0.08 \times 5000 = 1 ف .:$$

$$400 = \text{جنيه}$$

$$ط = 1 ك + 1 ف$$

$$400 + 852.282 = \text{القسط المتساوي} .:$$

$$1252.282 = \text{جنيه}$$

3- إيجاد مجموع الفوائد المستحقة

مجموع الفوائد = مجموع الأقساط المتساوية – قيمة السلفة

$$5000 - 5 \times 1252.282 =$$

$$5000 - 6261.41 =$$

$$1261.21 = \text{مجموع الفوائد} = \text{جنيهاً} .:$$

مثال (8):

قرض يستهلك بطريقة الأقساط المتساوية من الأصل الفائدة معاً بحيث يدفع القسط في نهاية كل سنة ولمدة 5 سنوات ، فإذا علمت أن الفرق بين الاستهلاك الثاني والثالث هو 73.6372 جنيهاً وأن معدل الفائدة المستخدم هو 8%

المطلوب :

1- قيمة القرض.

2- القسط المتساوي.

(الحل)

$$\frac{1 - r^k}{1 - r} = ع$$

$$\frac{2^k - 3^k}{2^k} = 0.08$$

$$\frac{73.6372}{2^k} =$$

$$73.6372 = 2^k \times 0.08 \therefore$$

$$920.465 \text{ جنيه} = \frac{73.6372}{0.08} = 2^k \therefore$$

$$852.28241 \text{ جنيه} = \frac{920.465}{0.08} = 1^k \therefore$$

$$\therefore 1^k = 1 \text{ جـ} \sqrt[ع]{\%}$$

$$5.866600 \times 852.28241 =$$

$$5.866600 \times 852.28241 =$$

$$\text{القرض} = 5000 \text{ جنيه}$$

$$ط = \frac{1}{\sqrt[د]{\%}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[د]{\%}} \times 5000 =$$

$$\therefore \text{القسط المتساوى}$$

$$0.2545645 \times 5000 =$$

$$1252.2823 \text{ جنيه} =$$

أمثلة غير محلولة

مثال (1) :

قرض قيمته 8000 جنيه يستهلك على أربعة أقساط متساوية من الأصل فقط مع حساب فائدة الرصيد في نهاية كل عام ، فإذا كان معدل الفائدة المركبة المستخدم 11% سنوياً .
صور جدول الاستهلاك.

مثال (2) :

قرض يستهلك بطريقة الاستهلاكات المتساوية وكان لديك المعلومات الآتية :

• القسط الأول = 490 جنيه

• القسط الرابع = 400 جنيه

• القسط الأخير = 280 جنيه

فأوجد قيمة القرض ومعدل الفائدة المستخدم ومدة القرض.

مثال (3) :

إذا كان رصيد القرض في أول السنة الثالثة هو 1200 جنيه والاستهلاك المتساوي هو 400 جنيه فما هو القرض.

مثال (4) :

إذا كانت فائدة القرض في نهاية السنة الأولى 200 جنيه بمعدل 10% سنوياً ، وعدد الاستهلاكات المتساوية يساوي خمسة. فأوجد القرض والاستهلاك المتساوي ثم صور جدول الاستهلاك.

مثال (5) :

قرض يستهلك بطريقة الاستهلاكات المتساوية فإذا كان الاستهلاك المتساوي هو 250 جنيه ، وكانت فائدة الرصيد في نهاية السنة الأولى 100 جنيه وفائدته في نهاية السنة الأخيرة 20 جنيه. فأوجد كلا من المدة والقرض والمعدل المستخدم للفائدة المركبة.

مثال (6)

فرض قيمته 4000 جنيه يستهلك على أربعة أقساط متساوية من الأصل والفائدة معاً فإذا كانت الأقساط تستحق في نهاية كل سنة ، وكان معدل الفائدة المركبة السنوي 12% .
فأوجد القسط المتساوي ثم صور جدول الاستهلاك.

مثال (7) :

قرض يسدد على أربعة أقساط متساوية من الأصل والفائدة معاً بفائدة مركبة بمعدل 11% سنويا - فإذا علمت أن الاستهلاك الثاني 471,364 جنيهاً. فما هو أصل القرض وكم يكون القسط المتساوي.

مثال (8) :

قرض يستهلك على 10 سنوات فإذا كان الاستهلاك الأول هو 1199.028 جنيهاً ، والثاني 1327.591 جنيهاً ، فما هو معدل الفائدة والقرض والقسط المتساوي من الأصل والفائدة معاً

مثال (10) :

سلفة تستهلك على 5 أقساط سنوية متساوية من الأصل والفائدة معاً ، فإذا علمت أن الأقساط كانت تدفع في نهاية كل سنة وأن الاستهلاك الثاني 178.25 جنيهاً ، والثالث 198.84085 جنيهاً. فأوجد بدون اللجوء إلى الجداول المالية :

أ- معدل الفائدة المستخدم

ب- قيمة السلفة

ج- القسط المتساوي

تطبيقات عامة

أولاً : تطبيقات عامة على الفائدة البسيطة

- 1- أوجد الفائدة المستحقة عند نهاية مدة الاستثمار لكل من المبالغ التالية :
(أ) 1000 جنيه لمدة سنة و 9 شهور بمعدل 10% سنوياً
(ب) 2000 جنيه لمدة 8 شهور بمعدل 12% سنوياً
(ج) 5000 جنيه لمدة سنتين و 4 شهور بمعدل 14% سنوياً
- 2- أودع شخص مبلغ ما لمدة 3 سنوات في مصرف يحسب فائدة بسيطة بمعدل 15% سنوياً . فإذا علمت أن الفائدة المستحقة على هذا المبلغ هي 1800 جنيه فما هو ذلك المبلغ ؟
- 3- اقترض شخص مبلغ 15000 جنيه من بنك يحسب فائدة بسيطة بمعدل ما ، وفي نهاية سنتين وجد أن الفائدة المستحقة عليه بلغت 4500 . احسب معدل الفائدة المستخدم؟
- 4- أودع تاجر مبلغ 6000 جنيه لمدة معينة في بنك يحسب فائدة بسيطة بمعدل 10% ، وفي نهاية المدة تبين له أن جملة المبلغ هي 6800 جنيه . احسب مدة الايداع؟
- 5- اقترض شخص مبلغ 30000 جنيه من مصرف يحسب فائدة بسيطة بمعدل 12% سنوياً ، وفي نهاية مدة معينة طلب منه المصرف مبلغ 1800 جنيه كفوائد على القرض ، فكم تبلغ هذه المدة ؟

حل التمرين الثالث :

$$\therefore \text{ف} = \text{أ} \times \text{ع} \times \text{ن}$$

$$\therefore 450 = 15000 \times \text{ع} \times 2.2$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{4500}{2.5 \times 15000} = 0.12$$

∴ معدل الفائدة المستخدم هو 12% سنوياً

حل التمرين الخامس :

$$\therefore \text{ف} = \text{أ} \times \text{ع} \times \text{ن}$$

$$\therefore 1800 = 30000 \times \frac{12}{100} \times \text{ن}$$

$$\therefore 0.5 = \frac{100 \times 1800}{12 \times 3000}$$

∴ المدة المطلوبة هي نصف سنة

- 6- اقترض شخص مبلغ 30000 جنيه من بنك يحسب فائدة بسيطة بمعدل معين . وفي نهاية مدة معينة خلال سنة 1988 حسب الفرق بين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة لهذا القرض . فوجد مساوياً 16.90 جنيهاً . احسب كل من الفائدتين التجارية والصحيحة ثم احسب جملة المستحق عليه للبنك بالطريقة التجارية .
- 7- قرض قيمته 2800 جنيه حسبت فائدته يوم 21 مارس سنة 1987 فوجدت 56 جنيهاً . فاذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة المستخدم هو 12 % فما هو تاريخ الاقتراض ؟
- 8- اذا كان الفرق بين الفائدة التجارية والفائدة الصحية لمبلغ ما بمعدل ما لمدة معينة خلال سنة 1987 هو 3 جنيهاً احسب كل من الفائدتين
- 9- إذا كانت الفائدة الصحيحة لمبلغ معين بعد مدة معينة هي 28.8 جنيهاً فما هي الفائدة التجارية لهذا المبلغ
- 10- إذا كان مجموع الفائدتين التجارية والصحيحة لمبلغ ما بعد عدد معين من الأيام سنة 1988 هو 36.3 جنيهاً بمعدل فائدة معين فاحسب كلا من الفائدتين .
- 11- اقترض شخص مبلغاً لمدة 169 يوماً بمعدل فائدة بسيطة 12.5% سنوياً فبلغت فائدته الصحيحة 240 جنيهاً . فما هو ذلك المبلغ ؟

12- شخص مدين بالمبالغ الآتية :

4120 جنيها تستحق بعد 73 يوماً

3269 جنيها تستحق بعد 146 يوماً

2620 جنيها تستحق بعد مدة معينة

وإذا علمت أن جملة هذه المبالغ محسوبة على أساس فائدة صحيحة بمعدل 10% هي 10370 جنيها فما هي مدة استحقاق الدين الثالث ؟

13- أودع شخص المبالغ التالية لدى بنك مصر :

5000 جنيه في اول يناير سنة 1987

6000 جنيه في آخر يناير سنة 1987

9000 جنيه في 2 مارس سنة 1987

فإذا علمت أن جملة هذه المبالغ في آخر يونيو سنة 1987 هي 20960 جنيها فما هو معدل الفائدة المستخدم

14- اقترض تاجر المبالغ الآتية في عام 1988 من بنك يحسب فائدة بسيطة بمعدل 15% سنويا :

9000 جنيه لمدة 150 يوماً تنتهي في نفس العام

6000 جنيه لمدة 125 يوماً تنتهي في نفس العام

س جنيه لمدة 115 يوماً تنتهي في نفس العام

فإذا علمت أن الفرق بين الفائدة التجارية والصحيحة لهذه المبالغ هو 22.1995 جنيها فما هو المبلغ الثالث ؟

15- أودع شخص المبالغ الآتية في بنك النيل سنة 1987 :

2000 جنيه يوم 16 يناير

8000 جنيه يوم 23 فبراير

5000 جنيه يوم 28 مارس

12000 جنيه يوم 7 ابريل

وإذا علمت أن جملة هذه المبالغ يوم 15 أغسطس من نفس العام هي 28694.17 جنيها فما هو معدل الفائدة البسيطة المستخدم؟

حل التمرين الثالث عشر

١- إيجاد مدد المبالغ بالأيام:

$$\begin{array}{l} \text{يناير} \quad \text{فبراير} \quad \text{مارس} \quad \text{أبريل} \quad \text{مايو} \quad \text{يونيه} \quad = \text{المجموع} \\ 30 = 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 30 \\ 150 = 28 + 31 + 30 + 31 + 30 \\ 120 = 29 + 30 + 31 + 30 \end{array}$$

٢- إيجاد الفائدة المستحقة على المبالغ:

$$\begin{array}{l} \therefore \text{ج} = \text{أ} + \text{ف} \quad \text{لجميع المبالغ} \\ \therefore 20960 = (9000 + 6000 + 5000) + \text{ف} \\ \therefore 20960 - 20000 = \text{ف} \end{array}$$

$$960 = \text{جنيها}$$

٣- الفائدة بطريقة النمر:

$$\text{المبلغ} \times \text{المدة} = \text{النمر اليومي}$$

$$900000 = 180 \times 5000$$

$$900000 = 150 \times 6000$$

$$\underline{1080000} = 120 \times 9000$$

$$\text{مجموع النمر اليومية} = 2880000$$

$$\therefore \text{القاسم} = \frac{100 \times 360}{\text{ع}} \quad \text{حيث ع المعدل المئوي}$$

$$\therefore \text{ف} = \frac{\text{ع} \times 2880000}{100 \times 360}$$

$$\therefore 960 = 80 \text{ ع}$$

∴ ع = 12 أى أن معدل الفائدة المستخدم هو 12% سنوياً

التمرين الرابع عشر :

∴ سنة 1988 تعتبر سنة كبيسة

∴ فت = 61 (فت - فاصك)

$$\text{فت} = 61 \times 22.1995$$

$$= 1354.1695 \text{ جنيهاً}$$

ويمكن إيجاد الفائدة التجارية بطريقة النمر كما يلي :

المبلغ × المدة بالأيام = النمر اليومية

$$1350000 = 150 \times 9000$$

$$750000 = 125 \times 6000$$

$$\text{س} \times 115 = 115 \text{ س}$$

∴ مجموع النمر اليومية = 2100000 + 115 س

$$\frac{100 \times 360}{15} = \text{القاسم اليومي}$$

$$= 2400$$

$$\frac{\text{مجموع النمر}}{\text{القاسم}} = \text{فت} \quad \therefore$$

$$\therefore 1354.1695 = \frac{2100000}{2400} + \frac{115 \text{ س}}{2400}$$

$$= \frac{115+875}{2400}$$

∴ س = 10000.06 جنيهاً

∴ المبلغ الثالث هو 10000 جنيهاً تقريباً

16- اقترض شخص مبلغ 2000 جنيه وتعهده بسداده بعد 3 سنوات على أن يقوم بسداد فوائد دورية في نهاية كل 3 شهور بمعدل فائدة بسيطة قدرها 6% فإذا علمت أن المدين لم يتمكن الا من سداد 3 فوائد دورية فقط في مواعيدها وطلب من الدائن تأجيل باقي الفوائد إلى نهاية مدة القرض ، وقد وافق الدائن على ذلك بشرط سداد المدين لفوائد تأخير بمعدل 8% سنويا .

المطلوب : ايجاد مجموع ما يقوم المدين بسداده في نهاية مدة القرض

17- اقترض شخص مبلغ 6000 جنيه لمدة 4 سنوات على ان يسدد الفوائد بصفة دورية في نهاية كل 6 شهور بمعدل 12% وفي حالة التأخير يلتزم بدفع فوائد تأخير بمعدل 13% . فإذا علمت أن المدين لم يسدد سوف 4 فوائد دورية في مواعيدها وأنه يرغب في سداد كل المبالغ المستحقة عليه في نهاية مدة القرض .

والمطلوب :

أ- ايجاد قيمة المبالغ التي يسدها المدين في نهاية مدة القرض.

ب- كم يبلغ مجموع الفوائد التي تحملها المدين .

18- اقترض شخص مبلغ 12000 جنيه لمدة سنتين ونصف وتعهده بدفع فوائد دورية في نهاية كل شهرين بمعدل فائدة بسيطة قدره 8% وبعد سداد خمس فوائد الأولى في مواعيدها طلب من الدائن سداد باقي الفوائد والقرض الاصلى بعد انتهاء مدة القرض بستة شهور . فوافق الدائن مقابل قيام المدين بدفع فوائد تاخير بمعدل 10% على الفوائد المتأخرة حتى تاريخ إنتهاء مدة القرض الاصلى وبمعدل 12% على الفوائد والقرض خلال مدة التأخير التالية فإذا كان الدائن يستثمر الفوائد المسددة في مواعيدها فور حصوله عليها بمعدل 9% سنوياً . فأحسب ما يلي :

أ- مجموع ما يسدده المدين في نهاية مدة التأخير

ب- مجموع الفوائد التي تحملها المدين

ج - معدل الاستثمار العام الذى حققه الدائن

19- أقترض شخص مبلغ 3000 جنيه وتعهده بسداده بعد 3 سنوات على ان يدفع فوائد دورية في نهاية كل 3 شهور بمعدل فائدة معين وقد اتفق مع الدائن على أن تحسب عليه فوائد تأخير بواقع 9% سنوياً على الفوائد المتأخرة ، وقد قام المدين بسداد سبع الفوائد الأولى في مواعيدها وتأخر في سداد باقي الفوائد حتى تاريخ استحقاق القرض الاصلى . فإذا علمت ان الدائن كان يستثمر الفوائد المسدده بمجرد استلامها بمعدل 8% سنويا وأنه حقق معدل استثمار عام قدره 6.67 فما هو معدل الفائدة الذي استخدم لحساب الفوائد الدورية .

20- اقترض تاجر مبلغ 24000 جنيه من بنك يحب فائدة بسيطه بمعدل 8% سنويا . واتفق على سداد القرض في نهاية 3 سنوات على أن يسدد الفوائد بصفة دورية في نهاية كل شهرين ، وبعد سداد خمس الفوائد الأولى في مواعيدها طلب تأجيل باقي الفوائد والقرض الأصلي الى ما بعد نهاية المدة بثمانية شهور . فوافق البنك بشرط تحمله لفوائد تأخير بمعدل 10% على الفوائد المتأخرة و12% على القرض الأصلي . فإذا علمت أن البنك قد تمكن من استثمار الفوائد الدورية المسددة بعد حصوله على كل منها بشهر واحد بمعدل 9% سنويا . فاحسب ما يلي :

أ- مجموع ما يسدده المدين للبنك في نهاية مدة التأخير

ب- مجموع الفوائد التي تحملها المدين

ج- معدل الاستثمار الاجمالي الذي حققه البنك .

حل التمرين العشرون

ارشادات الحل :

$$أ = 24000 = \text{جنيه}$$

$$ن = 3 \text{ سنوات}$$

$$ع = 8\% \text{ للقرض}$$

$$10\% \text{ للفوائد المتأخرة}$$

$$12\% \text{ لتأخير القرض}$$

$$9\% \text{ للفوائد المسدده المستثمره بعد شهر من السداد}$$

عدد الفوائد المسدده = 5 فوائد

ل = شهران

مدة التأخير (ت) = 8 شهور

(الحل)

∴ عدد الفوائد الدورية = $\frac{n}{l}$

∴ عدد الفوائد = $\frac{12 \times 3}{2} = 18$ فائدة

∴ عدد الفوائد المتأخرة = $18 - 5 = 13$ فائدة

∴ ف = أ × ع × ل

∴ ف = $24000 \times \frac{8}{100} \times \frac{2}{12} = 320$ جنيها

أ- إيجاد مجموع ما يسدده المدين للبنك في نهاية مدة التأخير :

مجموع ما يسدده = جملة القرض + جملة الفوائد المتأخرة

جملة القرض = أ (1 + ن ع)

$25920 = 24000 \left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{12}{12} \right)$ جنيها

جملة الفوائد المتأخرة = قيمة الفوائد المتأخرة + فوائد تأخيرها

قيمة الفوائد المتأخرة = $13 \times 320 = 4160$ جنيها

فوائد التأخير = ف × ع × مجموع مدد التأخير

$= 320 \times \frac{10}{100} \times \frac{13}{2} \left(\frac{8 + 32}{12} \right) =$

$= 320 \times \frac{10}{100} \times \frac{13}{2} \times \frac{40}{12} =$

$= 693.330$ جنيها

∴ مجموع ما يسدده المدين = $25920 + 4160 + 693.330 = 30773.330$ جنيها

ب- إيجاد مجموع ما تحمله المدين من فوائد :

ما تحمله المدين من فوائد

= الفوائد الدورية كلها + فوائد تأخير الفوائد الدورية المتأخرة + فوائد تأخير القرض

$$(2400 - 25920) + 693.33 + 18 \times 320 =$$

$$= 8373.33 \text{ جنيهاً} = 1920 + 693.33 + 5760$$

ج - ايجاد معدل الاستثمار الاجمالي الذي حققه البنك :

مجموع الفوائد التي حققها البنك =

مجموع الفوائد التي تحملها المدين + فوائد استثمار الفوائد الدورية المسدده

فوائد استثمار الفوائد المسددة = ف × ع × مجموع مدد الاستثمار

$$(33 + 41) \frac{5}{12} \times \frac{9}{2} \times \frac{320}{100} =$$

$$= 444 \text{ جنيها}$$

مجموع الفوائد التي حققها البنك = 8373.33 ÷ 444 = 8817.33 جنيها

$$\therefore \text{ف} = \text{أ} \times \text{ع} \times \text{ن}$$

حيث :

ف ← مجموع الفوائد التي حققها البنك

ع ← معدل الاستثمار العام

ن ← هي مدة القرض مضاف اليها مدة التأخير

$$\therefore 8817.33 = 24000 \times \text{ع} \times \frac{44}{12}$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{12 \times 8817.33}{44 \times 24000} = 0.1002$$

∴ معدل الاستثمار العام هو 10 % تقريباً

21- اودع شخص اول كل شهر من شهور عام 1987 مبلغاً وقدره 300 جنيه في بنك يحسب فائدة

بسيطة بمعدل 12% سنوياً . أحسب جملة ما تكون له في نهاية شهر مارس عام 1988 .

22- اودع شخص في آخر كل ربع سنة من عام 1985 مبلغاً قدره 100 جنيه ثم زاد المبلغ الى الضعف عام 1986 ثم إلى ثلاثة أمثاله عام 1987 . فإذا علمت أن البنك يحسب فائدة بسيطة بمعدل 10% سنوياً . أحسب جملة المبالغ المتكونة الحساب هذا الشخص في نهاية عام 1987.

23- اودع شخص في بنك مبلغ 400 جنيه في نهاية 4 شهور خلال عام 1985 ثم انخفض ما يودعه الى النصف خلال عام 1986 ثم إلى الربع خلال عام 1987 . فإذا كان البنك يحسب فوائد بسيطة بمعدل 12% سنوياً . أوجد جملة ما لهذا الشخص في البنك في نهاية عام 1987.

24- اودع شخص في بنك في منتصف كل شهر من اشهر عام 1987 مبلغاً قدره 400 جنيه وكان يسحب في نهاية كل شهر من أشهر نفس العام نصف المبلغ الذي يودعه في أول الشهر . أحسب رصيد هذا الشخص لدى البنك في نهاية شهر مارس عام 1988 إذا علمت أن البنك يحسب له فوائد بسيطة و 8% سنوياً على الايداعات ويحسب عليه فوائد بسيطة بمعدل 10% في حالة المسحوبات

25- أودع شخص مبلغاً ما في نهاية كل 3 شهور لمدة 18 شهراً ثم نصف ذلك المبلغ في نهاية كل 3 شهور لمدة 18 شهراً تالية . فإذا علمت أن معدل الفائدة البسيط على الايداعات هو 4% سنوياً وان جملة ما تكون لهذا الشخص في نهاية الثلاث سنوات هو 2983.5 جنيهاً. احسب قيمة المبالغ المودعة خلال 18 شهراً الأولى والثانية .

26- اودع شخص في نهاية كل 3 شهور خلال عام 1986 مبلغاً قدره 200 جنيه ثم ضعف هذا المبلغ في نهاية كل 3 شهور خلال عام 1987. فإذا علمت أن جملة المتكون له في نهاية عام 1987 هو 2502 جنيهاً. أحسب معدل الفائدة البسيطة المستخدم .

27- أودع شخص في بداية ومنتصف كل شهر من اشهر عام 2017 مبلغ قدره 400 جنيه وكان يسحب يوم 20 من كل شهر من نفس العام 200 جنيه . احسب صافي المستحق له في نهاية عام 2017 إذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة المستخدم هو 12% على كل من الايداعات والمسحوبات وان عدد ايام اى شهر هي 30 يوماً .

حل التمرين السابع والعشرون

صافي المستحق في نهاية عام 1987

= جملة ايداعات - جملة المسحوبات

- ايجاد جملة الإيداعات

المبالغ المودعه تعد بمثابة دفعة فورية نصف شهرية مبلغها 400 جنيه .

$$\therefore ج د = د \times م + د \times ع \times \frac{ع}{2} (ن + ل)$$

$$\therefore ج د = 24 \times 400 + \frac{12}{100} \times \frac{24}{2} \times \left(\frac{1}{2} + 12 \right) \times \frac{1}{12}$$

$$= 9600 + 600 + 10200 \text{ جنيهاً}$$

- ٢. ايجاد جملة المسحوبات :

المبالغ المسحوبة عبارة عن دفعة شهرية تدفع كل منها يوم 20 من كل شهر ويستثمر اول مبالغها لمدة

قدرها $11\frac{1}{3}$ شهراً وأخر مبالغها لمدة $\frac{1}{3}$ شهر فقط

وبتطبيق القاعدة العامة نجد ان

$$ج د = د \times م + د \times ع \times \frac{ع}{2} (2ن + 1ن)$$

حيث 1ن مدة استثمار المبلغ الاول 2ن مدة استثمار المبلغ الأخير

$$\therefore ج د = 12 \times 200 + \frac{12}{100} \times \left(\frac{1}{2} + 11\frac{1}{2} \right) \times \frac{1}{2}$$

$$= 2400 + \frac{35}{3} \times 12$$

$$= 2540 + 140 = 2680 \text{ جنيهاً}$$

$$\therefore \text{صافي المستحق} = 2540 - 10200$$

$$= 7660 \text{ جنيهاً}$$

28- شخص مدين بمبلغ 2240 جنيه يستحق السداد بعد 3 سنوات وقد اراد هذا الشخص سداد قيمة ما عليه فوراً . اوجد مقدار المبلغ الواجب سداه فوراً اذا علمت أن معدل الفائدة المستخدم في عملية الخصم هو 8% سنويا .

29- شخص مدين بكمبيالة قيمتها الاسمية 5000 جنيه و السداد بعد سنة ونصف . وقد طلب المدين من الدائن سداد قيمة الكمبيالة فوراً. احسب قيمة الخصم الذي يحصل عليه المدين نتيجة السداد الفوري اذا علمت أن معدل الخصم المستخدم هو 6% .

30- اوجد معدلات الخصم السنوية المقابلة للمعدلات الفائدة الآتية : 5%، 7%، 9% وذلك اذا كانت مدة الخصم هي 8 شهور.

31- أوجد معدلات الفائدة المقابلة لمعدلات الخصم التالية اذا ما كانت المدة 20 يوما : 5% ، 7% ، 9% .

32- اذا كان الفرق بين الخصم التجاري والخصم الصحيح هو 4 جنيهات . فأوجد القيمة الاسمية وكلا من الخصمين اذا كانت مدة الخصم 180 يوما والمعدل المستخدم هو 10% سنوياً.

حل التمرين الثاني والثلاثون

$$\therefore \text{خت} - \text{خص} = \text{خص} \times \text{ن} \times \text{ع}$$

$$\therefore 4 = \text{خص} \times \frac{180}{360} \times \frac{10}{100}$$

$$\therefore \text{خص} = 80 \text{ جنيها}$$

أي أن الخصم الصحيح هو 80 جنيها

$$\therefore \text{خت} = \text{خص} + \text{الفرق بين الخصمين}$$

$$\text{خت} = 80 + 4$$

$$= 84 \text{ جنيها}$$

أي ان الخصم التجاري هو 84 جنيها

$$\therefore \text{خت} = \text{قس} \times \text{ص} \times \text{ن}$$

$$\therefore 84 = \text{قس} \times \frac{10}{100} \times \frac{180}{360}$$

وذلك لان ص = ع في هذه الحالة

$$\therefore \text{قس} = 1680 \text{ جنيهاً}$$

أي ان القيمة الاسمية هي 1680 جنيهاً

33- شخص مدين باربعة اقساط نصف سنوية قيمة كل منها 200 جنيه ويستحق اولها بعد سنه ، وقد أراد هذا الشخص سداد قيمة هذه الأقساط فوراً. أوجد القيمة التي سيقوم بسدادها اذا علمت أن معدل الخصم 12%

34- اشترى شخص سيارة واتفق على سداد ثمنه على 15 قسطا ثلث سنوى قيمة كل منها 500 جنيه ويستحق اولها بعد 4 شهور من الشراء وبعد سداد خمسة الأقساط الاولى في مواعيدها طلب من الدائن سداد قيمة الأقساط المتبقية عليه مرة واحدة في تاريخ استحقاق القسط السادس فوافق الدائن على أن يمنحه خصم تعجيل الدفع بمعدل 10% سنويا . احسب مقدار الخصم الذي يحصل عليه المشتري وقيمة المبلغ الواجب السداد في ميعاد استحقاق القسط السادس .

35- أحسب القيمة الحالية لدفعة ربع سنوية عادية مبلغها 500 جنيه ومدتها 3 سنوات اذا علمت أن معدل الفائدة 8% سنويا.

36- شخص مدين بالديون التالية :

دين قيمته الاسمية 10000 جنيه يستحق بعد شهرين

دين قيمته الاسمية 2000 جنيه يستحق بعد 3 شهور

دين قيمته الاسمية 3000 جنيه يستحق بعد 5 شهور

أراد استبدال الديون السابقة بدين واحد يستحق بعد 6 شهور . أحسب القيمة الاسمية للدين الجديد اذا علمت أن معدل الفائدة المستخدم 10% سنويا (استخدم طريقتين مختلفتين و فارن بين النتائج مبيناً الأفضل للمدين .

37- شخص مدين بالديون التالية :

كمبيالة قيمتها الاسمية 2000 جنيه تستحق بعد 3 شهور

كمبيالة قيمتها الاسمية 1000 جنيه تستحق بعد 4 شهور

كمبيالة قيمتها الاسمية 3000 جنيه تستحق بعد 5 شهور

أراد ان يستبدلها بدين واحد يستحق بعد شهرين . أوجد القيمة الاسمية للدين الجديد اذا علمت أن معدل الخصم 12% سنويا.

38- شخص مدين بالمبالغ التالية :

دين قيمته الاسمية 2000 جنيه يستحق في 2 مارس سنة 1987 .

دين قيمته الاسمية 3060 جنيهة يستحق في 20 يونيو سنة 1987 .

دين قيمته الاسمية 4120 جنيه يستحق الدفع في تاريخ معين اتفق المدين مع الدائن في اول سنة

1987 على سداد مبلغ 6015 نقداً وتحرير كمبيالة قيمتها الاسمية 3180 جنيهها تستحق الدفع في 27

نوفمبر سنة 1987 فاذا علمت أن معدل الفائدة المتفق عليه 9% سنوياً فما هو تاريخ إستحقاق الدين

الجديد ؟

ثانيا : تطبيقات عامة على الفائدة المركبة

- 1- اقترض شخص مبلغاً معيناً لمدة 10 سنوات بفائدة مركبة بمعدل 4% سنويا. وفي نهاية المدة طالبه المقترض بمبلغ 14802.44 جنيها . احسب قيمة المبلغ المفترض .
- 2- اودع شخص مبلغ 1000 جنيه في بنك بحسب فائدة مركبة بمعدل 11 % سنويا ، فإذا كانت جملة المبلغ بعد مدة معينة هي 2162.94 جنيها . احسب مدة الاستثمار.
- 3- استثمر شخص مبلغ 8000 جنيه لمدة 10 سنوات بمعدل فائدة مركبة قدرة 5% عن كل نصف سنة - احسب جملة الاستثمار في نهاية المدة المذكورة .
- 4- اقترض شخص من بنك مبلغ 2000 جنيه بفائدة مركبة بمعدل 12% سنويا - فإذا علمت أن جملة المبلغ اصبحت 6414.27 جنيها وكانت الفوائد تضاف كل نصف سنة . احسب مدة القرض .
- 5- اودع شخص مبلغ 4000 جنيه في شركة استثمار تعطى عائدا سنويا مركبا قدره 12% فإذا اراد الشخص سحب جملة ما له بعد 10 سنوات و 6 اشهر ونصف الشهر فاحسب جملة ما يسحبه
- 6- أستثمر عادل مبلغ 7000 جنيه لمدة 8.4 سنة بمعدل فائدة مركبة قدرة 9.5 % في السنة . احسب قيمة الفوائد المركبة المستحقة له في نهاية المدة .
- 7- حسبت جملة مبلغ 100 جنيه بعد 10 سنوات فوجدت تساوى 2200 جنيه - فما هو معدل الفائدة المركبة السنوي الذي حسبت على اساسه هذه الجملة
- 8- تضاعف مبلغ 2000 جنيه بعد مدة معينة من استثماره فإذا علمت أن معدل الفائدة المركبة السنوي هو 8% فما هي مدة الاستثمار - اذا كانت الفوائد تضاف كل نص سنة .
- 9- أحسب جملة مبلغ 9000 جنيه استثمار بفائدة مركبة بمعدل 4.5% عن كل 6 شهور لمدة 30 عاما .

10- أحسب المعدل الحقيقي السنوي الذي يناظر معدل اسمي قدره 10% سنويا - اذا كانت الفوائد تضاف كل :

(أ) شهر

(ب) شهرين.

(ج) 4 شهور

(د) 6 شهور

11- أحسب المعدل السنوي الأسمى الذي يقابل معدل حقيقي قدره 8% سنويا وذلك في حالة اضافة الفائدة المركبة كل :

(أ) 3 شهور .

(ب) 4 شهور .

(ج) 6 شهور .

(د) سنة واحدة .

12- أفترض راضى من مرتضى مبلغ 6000 جنيه لمدة 20 عاماً لفائدة مركبة بمعدل 2% عن كل ربع سنة بشرط أن تضاف الفوائد مرة واحدة كل سنتين - أحسب جملة القرض المستحقة لمرتضى في نهاية المدة .

13- استخدم جدول الجملة وملحق جدول الجملة لإيجاد جملة مبلغ 3000 جنيه استثمر لمدة 8.73 سنة بمعدل فائدة مركبة قدرها 6% سنويا .

14- استخدم جدول جملة وحدة النقود في إيجاد جملة المبلغ المذكور في التمرين السابق اذا كان معدل الفائدة المركبة هو 4.2% عن كل نصف سنة

حل التمرين الثاني عشر

المعدل عن كل سنتين = $2\% \times 4 \times 2 = 16\%$ لكل سنتين

المدة بالوحدات الزمنية = $\frac{20}{2} = 10$ وحدات طول كل منها سنتان

$$\therefore ج = أ (1 + ع)^{10}$$

$$\therefore ج = أ (1 + ع)^{10}$$

$$4.11435 \times 6000 =$$

= 26468.61 جنيها أي أن جملة القرض المستحقة تبلغ 26468,61 جنيها

15- أحسب القيمة الحالية والخصم المركب للمبالغ الآتية :

(أ) الكميالة قيمتها الاسمية 2000 جنيه تستحق بعد 5 سنوات بمعدل فائدة 6% سنويا

(ب) دين قيمته الاسمية 4000 جنيه يستحق بعد 8 سنوات بمعدل فائدة مركبة 9% سنويا.

(ج) دين قيمته الاسمية 6000 جنيه يستحق بعد 10 سنوات بمعدل فائدة مركبة 4% عن كل نصف سنة

16- احسب القيمة الاسمية والخصم المركب الديون الآتية :

(أ) دين يستحق بعد 5 سنوات بمعدل فائدة 6% سنويا اذا علمت أن قيمته الحالية 1494.516 جنيها

(ب) دين يستحق بعد 5 سنوات واربعة أشهر بمعدل فائدة 6% إذا كانت قيمته الحالية 733.159 ج

(ج) دين يستحق بعد 7 سنوات بمعدل فائدة 5% سنويا اذا كانت قيمته الحالية 3553.407 جنيها.

17- أحسب مدة خصم الديون التالية :

(أ) دين ديمته الاسمية 1000 جنيه ، ومعدل الفائدة المستخدم هو 6% سنويا اذا كانت قيمته

الحالية 627.411 جنيها

(ب) كمياله قيمتها الاسمية 2050 جنيه وقيمتها الحالية 1584.188 جنيها بمعدل فائدة 6%

سنويا

(ج) دين قيمته الاسمية 10000 جنيه وقيمتها الحالية 2584.19جنيها إذا كان معدل الفائدة المستخدم 7% سنوياً .

18- أحسب معدل الفائدة المركبة المستخدم في خصم كميالة قيمتها الاسمية 10000 جنيه اذا كانت :

(أ) مدة الخصم 10 سنوات والقيمة الحالية 4631.53 جنيهاً

(ب) مدة الخصم 5 سنوات والخصم المركب 2870.14 جنيهاً

19- أحسب معدلات الفائدة المركبة التي تناظر معدلات الخصم التالية :

(أ) 10% على ان يتم الخصم 4 مرات في السنة

(ب) 6% على ان يتم الخصم مرتين في السنة

(ج) 9% سنوياً.

20- أحسب معدلات الخصم المركب التي تناظر معدلات الفائدة المركبة التالية :

(أ) 3.5% عن كل نصف سنة .

(ب) 2.5% عن كل ثلث سنة .

(ج) 1.5% عن كل ربع سنة .

21- كميالة قيمتها الاسمية 7000 جنيه تستحق بعد 20 سنة أحسب قيمتها الحالية إذا كان معدل الخصم المركب 1.5% عن كل 3 أشهر

22- دين قيمته الاسمية 8000 جنيه يستحق بعد 17.4 سنة احسب قيمته الحالية اذا كان معدل الخصم المستخدم هو 7% سنوياً .

23- اذا كان معدل الخصم المركب النصف سنوى هو 2.912% وكانت القيمة الحالية لدين يستحق بعد 10 سنوات هي 553.676 جنيها - فاحسب القيمة الاسمية للدين .

24- أحسب القيمة الحالية لدين قيمته الاسمية 6000 جنيه يستحق بعد 14.7 سنة . اذا كان معدل الفائدة المستخدم هو 2.1% عن كل ربع سنة .

25- كمبيالة قيمتها الاسمية 4000 جنيه وقيمتها الحالية هي 1435.67 جنيها - احسب معدل الفائدة المركبة السنوى المستخدم في عملية الخصم اذا علمت أن مدة الخصم كانت 8 سنوات .

حل التمرين الخامس والعشرون

$$\therefore ق ح = ق س \times ح ن ع \%$$

$$\therefore ح ن ع \% = \frac{ق ح}{ق س}$$

$$\therefore 8\% = \frac{1435.67}{4000} = 0.3589175$$

بالبحث في جدول (٢) ، اى جدول القيمة الحالية لوحدة النقود امام المدة 8 سنوات نجد أن الرقم المذكور يقع بين ع = 13% ، 14% كما يلي :

$$ح ١٣\% = 0.3761599 \dots \dots \dots (1)$$

$$ح ع \% = 0.3589175 \dots \dots \dots (2)$$

$$ح 14\% = 0.3505591 \dots \dots \dots (3)$$

الفرق بين (١) و (3) = 0.0256008 و هو مقابل 1%

الفرق بين (١) و (2) = 0.0172424 و هو مقابل س%

وباستخدام النسبة والتناسب نجد ان :

$$0.6735 = \frac{0.0172424}{0.0251008} = \frac{س}{1}$$

$$\therefore ع = 13\% + س$$

$\therefore ع = 13.67$ تقريبا وهو معدل الفائدة المركبة في عملية الخصم

26- تاجر مدين بالمبالغ الاتية :

2000 جنيه تستحق بعد سنتين

1050 جنيه تستحق بعد سنة

4000 جنيه تستحق بعد 4 سنوات .

3050 جنيه تستحق بعد 3 سنوات

وقد اراد استبدال هذه الديون بدين واحد يستحق بعد 5 سنوات. احسب القيمة الاسمية لدين الجديد اذا كان معدل الفائدة المركبة هو 10% سنويا يدفع 4 مرات في السنة

27- اذا كانت القيمة الاسمية للديون القديمة الأربعة المدة التي يستحق في نهايتها ذلك الدين .

28- اذا اراد التاجر في التمرين الأول أن يستبدل ديونه الأربعة بثلاث ديون ، القيمة الاسمية ضعف القيمة الاسمية للثاني و القيمة الاسمية للاول ضعف القيمة الاسمية للثاني و القيمة الاسمية للثالث ثلث القيمة الاسمية للأول وكان معدل الفائدة المستخدم هو 14% سنوياً على أن تضاف الفوائد مرتين في السنة فما هي القيم الاسمية للديون الجديدة

29- تاجر مدين بالمبالغ الآتية :

2000 جنيه تستحق بعد 3 سنوات

3000 جنيه تستحق بعد 4 سنوات

4000 جنيه تستحق بعد 5 سنوات

5000 جنيه تستحق بعد 8 سنوات .

وقد اراد استبدال هذه الديون بدينين متساويين في القيمة الاسمية ويستحق الأول بعد 6 سنوات والثاني بعد 7 سنوات - احسب القيمة الاسمية لهذين الدينين الجديدين إذا كان معدل الخصم المركب المستخدم 7% سنويا.

30- في التمرين السابق اذا اراد المدين استبدال ديونه القديمه بدين واحد قيمته الإسمية 14000 جنيه فما هي المدة المكافئة

31- حل التمرين رقم (4) اذا استخدم معدل الخصم 7% سنوياً في خصم الديون القديمة فقط ، أما الديون الجديدة فيتم خصمها بمعدل فائدة 8% سنويا

حل التمرين الثلاثون

$$\frac{ن_1 ق_1 + ن_1 ق_1 + ن_1 ق_1 + ن_1 ق_1 + ن_1 ق_1 + ن_1 ق_1 + ن_1 ق_1 + ن_1 ق_1 + ن_1 ق_1 + ن_1 ق_1}{ق_1 + ق_1 + ق_1 + ق_1 + ق_1 + ق_1 + ق_1 + ق_1 + ق_1 + ق_1} = \text{المدة التقريبية}$$

$$\therefore \text{ن} = \frac{5000 \times 8 + 4000 \times 5 + 300 \times 4 + 2000 \times 3}{5000 + 4000 + 3000 + 2000} = \frac{78000}{14000} = 5.571$$

يوم شهر سنة

∴ المدة التقريبية هي 5,571 سنة أي 26 6 5

لأن $0.571 \times 12 = 6.852$ شهراً

$0.852 \times 30 = 52.56$ يوماً

32- دفعة عادية مبلغها السنوي 150 جنيها وعدد مبالغها 52 مبلغا ، حسبت جملتها فكانت 7500 جنيها ، فما هو معدل الفائدة المركبة الذي حسبت على اساسه الجمله .

33- ما هي مدة دفعة عادية مبلغها السنوي 250 جنيها ، اذا كانت جملتها في نهاية تلك المدة 6000 جنيها بمعدل فائدة مركبة 9% سنويا

34- ما هو المبلغ الواجب ايداعه في اول سنه للحصول على مبلغ 10000 جنيها في نهاية 15 سنة اذا كان معدل الفائدة المركبة المستخدم 9% سنويا - احسب كذلك المبلغ السنوي اذا تم الابداع في نهاية كل سنة ؟

35- أودع حسام مبلغ 200 جنيها في اول كل سنه في بنك يحسب فائدة مركبة بمعدل 8% سنويا وبعد 10 سنوات أودع نصف المبلغ السابق في نهاية كل سنة لمدة 5 سنوات وفي نهاية المدة سحب جملة المبالغ المتكونه له في البنك ودفعتها ثمنا لقطعة ارض تدر ربعاً في نهاية كل سنة . فإذا ان الاستثمار في الأراضي يحسب بمعدل فائدة مركبه قدره 10% سنويا فما هو الربح السنوي للارض

36- أودع شخص لأبنه دفعة فورية سنوية مبلغها 2000 جنيها في بنك يحسب فائدة مركبة بمعدل 10% سنويا لمدة 5 سنوات وقد طلب من البنك سداد جملة ما له لابنه في شكل دفعه سنوية عادية لمدة 10 سنوات تبدأ بعد انتهاء اخر ايداع بثلاث سنوات . فما هو مبلغ الدفعة التي سيحصل عليها الابن

37-قرض قيمته 8000 جنيه يستهلك على اربعة اقساط متساوية من الأصل فقط مع حساب فائدة الرصيد في نهاية كل عام فاذا كان معدل الفائدة المركبة المستخدم 11% سنوياً صور جدول الاستهلاك

38- فرض يستهلك بطريقة الاستهلاكات المتساوية وكان لديك المعلومات التالية :

القسط الاول = 290 جنيها.

القسط الرابع = 400 جنيها .

القسط الاخير = 280 جنيها .

فأوجد : قيمة القرض ومعدل الفائدة المستخدم ومدة القرض ؟

39- اذا كان رصيد القرض في اول السنة الثالثة هو 1200 جنيه والاستهلاك المتساوي هو 400 جنيه فما هو القرض ؟

40- اذا كانت فائدة القرض في نهاية السنة الاولى 200 جنيه بمعدل 10% سنوياً وعدد الاستهلاكات المتساوية يساوي خمسة والاستهلاك المتساوي ثم صور جدول الاستهلاك .

41-قرض يستهلك بطريقة الاستهلاكات المتساوية فاذا كان الاستهلاك المتساوي هو 250 جنيها وكانت فائدة الرصيد في نهاية السنة الأولى 100 جنيه وفائدته في نهاية السنة الاخيرة 20جنيهاً ، **فالمطلوب :** ايجاد كل من المدة والقرض والمعدل المستخدم للفائدة المركبة

42-قرض قيمته 4000 جنيه يستهلك على اربعة اقساط متساوية من الأصل والفائدة معاً فاذا كانت الأقساط تستحق في نهاية كل سنة وكان معدل الفائدة المركبة السنوي 12% **المطلوب :** ايجاد القسط المتساوي ثم تصوير جدول الاستهلاك.

43-قرض يسدد على اربعة اقساط سنوية متساوية من الأصل والفائدة معاً بفائدة مركبة بمعدل 11% سنوياً - فاذا علمت أن الاستهلاك الثاني 471.364 جنيها فما هو اصل القرض وكم يكون القسط المتساوي .

44-قرض يستهلك على 10 سنوات فاذا كان الاستهلاك الأول هو 1196.28 جنيها والثاني 1327.591 جنيها فما هو معدل الفائدة والقرض والقسط المتساوي من الأصل والفائدة معاً ؟

45-سلفة تستهلك على 5 أقساط سنوية متساوية من الأصل معاً فاذا علمت أن الأقباط كانت تدفع في نهاية كل سنة وأن الاستهلاك الثاني 178.235 جنيها و الثالث 197.8485 جنيها فاوجد بدون اللجوء الى الجداول المالية :

أ- معدل الفائدة المستخدم

ب- قيمة السلفة.

46-قرض يستهلك على أربعة أقساط متساوية من الأصل و الفائدة معا. فاذا علمت أن مجموع الاستهلاكين الثاني والثالث هو 999.231 جنيها وأن معدل الفائدة المركبة هو 4% سنويا .

فأوجد : القرض ثم صور جدول الاستهلاك بدون الرجوع الى الجداول المالية .

47- اقترض شخص مبلغ 10000 جنيه لمدة 10 سنوات بمعدل فائدة 17% سنويا على أن تسدد الفوائد بصفة دورية كل سنة ويسدد القرض في نهاية المدة . ما هو المبلغ المخصص لخدمة الدين في حالة تكوين احتياطي خاص باستهلاك القرض واستثماره بمعدل 15% سنويا.

48- اقترض شخص مبلغ 10000 جنيه لمدة 6 سنوات فائدة 10% يدفع مرتين في السنة . فاذا قام المدين بسداد الفوائد النصف سنوية وخصص احتياطي لاستهلاك الدين واستثمره بمعدل 4% عن نصف سنة . احسب المبلغ الدوري المخصص لخدمة الدين .

حل التمرين الثامن والثلاثون

فائدة الاستهلاك المتساوي = $\frac{\text{الفرق بين أى قسطين أو أى فاندتين}}{\text{الفرق بين ترتيبهما}}$

$$\frac{4ط - 1ط}{1 - 4} =$$

$$= \frac{90}{3} = \frac{400 - 490}{3} = 30 \text{ جنيها}$$

:: ط = ك + ف

:: ط (الاخير) = ك + ف حيث فن هي فائدة الاستهلاك

$$\therefore 30 + ك = 280$$

$$\therefore ك = 280 - 30$$

$$= 250 \text{ جنيهاً}$$

$$\text{فائدة الاستهلاك} = ف_n = ك \times ع$$

$$\therefore 30 = 250 \times ع$$

$$\therefore ع = \frac{30}{250} = 12\%$$

∴ معدل الفائدة المستخدم هو 12%

$$\therefore ف_1 = ط_1 - ك$$

$$\therefore ف_1 = 490 - 250$$

$$= 240 \text{ جنيهاً}$$

$$\therefore ف_1 = أ \times ع$$

$$\therefore 240 = أ \times \frac{100}{12} = 2000 \text{ جنيهاً}$$

∴ القرض هو 2000 جنيهه

∴ ن = عدد الاستهلاكات

$$\therefore ن = \frac{\text{القرض}}{\text{الاستهلاك}} = \frac{أ}{ك}$$

$$\therefore ن = \frac{2000}{250} = 8$$

أى أن مدة القرض هي 8 وحدات زمن متناسقي مع وحدة الزمن المحسوب عنها المعدل 12% . فإذا كانت وحدة الزمن هي السنة فإن المدة تصبح 8 سنوات والمعدل يكون 12% سنوياً.

حل التمرين الخامس والاربعون

أ- إيجاد معدل الفائدة المستخدم

$$\therefore K_3 = K_2 (1 + \epsilon)$$

$$\therefore \frac{K_3}{K_2} = 1 + \epsilon$$

$$1.11 = \frac{197.84085}{178.235} =$$

$$\therefore \epsilon = 11\% \text{ سنوياً}$$

ب- إيجاد قيمة السلفة :

$$\therefore K_1 = \frac{K_2}{\epsilon + 1}$$

$$\therefore K_1 = \frac{178.235}{1.11} = 160.572$$

$$\text{وكذلك } K_4 = K_3 = K_2 (1 + \epsilon)$$

$$219.603 = (1 + 0.11) 197.84085 =$$

$$K_4 = K_3 (1 + \epsilon)^2$$

$$2432.759 = (1 + 0.11)^2 197.84085 =$$

$$\therefore A = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5$$

$$\therefore A = 1000 \text{ جنيه}$$

$$\therefore \text{السلفة مقدارها } 1000 \text{ جنيه}$$

اسئلة الكترونية

حدد ما اذا كانت كل عبارة من العبارات التالية صحيحة او خاطئة :

- 1- القيمة الحالية المحسوبة على أساس معدل خصم بسيط أقل من القيمة الحالية المحسوبة على أساس معدل فائدة بسيطة وذلك في حالة تساوي جميع العوامل المستخدمة في الحساب
- 2- اذا كانت قيمة الخصم التجاري المحسوب على أساس معدل خصم بسيط لدين ما خلال فترة معينة مساوية لقيمة الخصم الصحيح المحسوب على أساس معدل فائدة لنفس الدين خلال نفس المدة - فإن ذلك يعني أن معدل الخصم البسيط المستخدم كان أقل من معدل الفائدة.
- 3- قيمة الخصم المحسوب على أساس معدل فائدة بسيطة أقل من الخصم المحسوب على أساس معدل خصم بسيط وذلك في حالة تساوي جميع العوامل المستخدمة في الحساب.
- 4- إذا تساوت قيمة الخصم التجاري لدين ما خلال فترة معينة مع الخصم الصحيح لنفس الدين فإن ذلك يعني أن معدل الخصم البسيط المستخدم كان مساوياً لمعدل الفائدة.
- 5- الخصم بمعدل فائدة أكبر من الخصم بمعدل خصم وذلك في حالة تساوي جميع العوامل الأخرى
- 6- الخصم التجارى أقل من الخصم الصحيح وذلك في حالة تساوي جميع العوامل الأخرى
- 7- القيمة الحالية بمعدل خصم أكبر من القيمة الحالية بمعدل فائدة وذلك في حالة تساوي جميع العوامل الأخرى
- 8- القيمة الحالية الصحيحة أكبر من القيمة الحالية التجارية وذلك في حالة تساوي جميع العوامل الأخرى
- 9- الخصم الصحيح هو ذلك يحسب على أساس أن عدد أيام السنة 365 يوم أو 366 يوم.
- 10- الفائدة التجارية هي تلك تحسب على أساس أن عدد أيام السنة 360 يوم
- 11- فى جميع الحالات يكون المعدل الحقيقي المركب السنوي أكبر من المعدل الاسمي المركب السنوي
- 12- لا يختلف المعدل الحقيقي السنوي المركب عن المعدل الاسمي السنوي المركب إلا في الحالات التى يضاف فيها الفائدة في نهاية فترات أقل من السنة.
- 13- تتناقص القيمة الحالية لوحدة النقود (ح)ن بزيادة قيمة معدل الفائدة مع ثبات العوامل الأخرى

14-تتزايد القيمة الحالية لوحدة النقود (ح)ن المحسوب على أساس معدل فائدة مركب بتناقص المدة أو الزمن مع ثبات العوامل الأخرى

15-معدل الخصم المركب السنوي المقابل لمعدل فائدة مركب سنوي قدره ٨% هو 7% تقريبا

16-جملة دفعة مقدارها واحد جنيه عادية ومؤجلة (م) من السنوات ومدتها (ن) من السنوات وبمعدل فائدة مركب (ع) تساوى جملة دفعة مقدارها واحد جنيه عادية وعاجلة ومدتها (ن) من السنوات وبنفس معدل الفائدة.

17-بدون استخدام الحل الرياضي يمكن القول أن القيمة الحالية لدفعة مقدارها 100 جنيه تدفع في نهاية كل سنة ولمدة 10 سنوات ومؤجلة خمس سنوات وبمعدل فائدة مركب 10% تساوى القيمة الحالية لدفعة مقدارها 100 جنيه تدفع في بداية كل سنة ولمدة 10 سنوات ومؤجلة 6 سنوات وبنفس معدل الفائدة.

ثانياً : أختَر الإجابة الصحيحة من كل إجابة من الإجابات التالية :

1-إذا بلغ الخصم التجاري لمدين ما خلال مدة معينة100 جنيه وقد بلغ الخصم الصحيح لنفس الدين خلال نفس المدة 100 جنيه أيضاً فإن ذلك يعني :

(أ) أن معدل الخصم يساوى معدل الفائدة.

(ب) أن معدل الخصم أكبر من معدل الفائدة.

(ج) أن معدل الخصم أقل من معدل الفائدة.

(د) أن معدل الخصم يختلف عن معدل الفائدة

2-حساب المعدل السنوي المركب الحقيقي المقابل لمعدل سنوي اسمى مركب قدره 6% فوجد انه أيضاً يبلغ 6% وهو ما يدل على أن:

(أ) الفوائد كانت تضاف كل فترة أقل من سنة

(ب) الفوائد كانت تضاف كل فترة أكبر من سنة.

(ج) الفوائد كانت تضاف كل فترة تساوي سنة.

(د) الفوائد كانت تضاف كل فترة أقل من شهر .

3-المعدل السنوي الحقيقي المقابل لمعدل سنوي اسمى قدره 6% والفائدة التي تضاف في نهاية كل 3 شهور هو

- 6.136% - 5.992%

- 6.453% - 6%

4- المعدل السنوي الحقيقي المقابل لمعدل سنوي اسمى قدره 10% والفائدة التي تضاف في نهاية كل ١٢ شهر هو

- 10.132% - 10.457%

- 10% - 9.921%

5- بدون حل التمرين المعدل الحقيقي السنوي المقابل لمعدل سنوي اسمى قدره 12% والفائدة تضاف كل شهرين هو

- 12.62% - 12%

- 11.95% - 12.12%

6- بدون حل التمرين المعدل الحقيقي السنوي الاسمى المقابل لمعدل سنوي حقيقي قدره 12% والفائدة تضاف كل شهرين هو

- 11.43% - 12%

- 12.62% - 11.91%

7- جملة مبلغ قدره 38000 جنيه استثمر بأحد البنوك لمدة سنة ونصف السنة وبمعدل فائدة بسيط قدره 13.6% هو

- 45257 جنيه - 54752 جنيه

- 45572 جنيه - 45725 جنيه

8- معدل الخصم البسيط المقابل لمعدل فائدة قدره 4% سنويا والمدة 20 يوم هو :

- 4.11% - 4.5%

- 3.99% - 3.92%

9- الكمبيالة التي تستحق الدفع في 20 مارس من عام 2004 وقد تم خصمها بالبنك في 20 فبراير من عام 2003 على أساس معدل خصم بسيط تكون مدة خصم هذه الكمبيالة :

- 390 يوم - 393 يوم

- 394 يوم - 395 يوم

10-تقدم أحد التجار بسند اذني قيمته الاسمية 5800 جنيهه لخصمه لدى أحد البنوك وذلك في 12 فبراير من عام 2004، فإذا علمت أن تاريخ استحقاق هذا السند 11 مايو من نفس العام وأن معدل الخصم المستخدم هو 6% سنويا ويضاف مهلة للسداد يوم واحد والعمولة بواقع واحد في الألف ومصاريف تحصيل (نصف في الألف) بحد أدني 4,2 جنيه ، وبالتالي فإن معدل الخصم الإجمالي الذي يتحمله التاجر هو:

- 6.674%

- 6.689%

المداول المالية

$$\% 1 = \text{ع}$$

ن	(ع + 1) °	ع	ح - ن	س ن	س ن
1	1,01000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
2	1,02010	1,02000	2,01000	1,02010	1,02010
3	1,03030	1,03000	3,03000	1,03030	1,03030
4	1,04060	1,04000	4,04000	1,04060	1,04060
5	1,05090	1,05000	5,05000	1,05090	1,05090
6	1,06120	1,06000	6,06000	1,06120	1,06120
7	1,07160	1,07000	7,07000	1,07160	1,07160
8	1,08200	1,08000	8,08000	1,08200	1,08200
9	1,09250	1,09000	9,09000	1,09250	1,09250
10	1,10300	1,10000	10,10000	1,10300	1,10300
11	1,11360	1,11000	11,11000	1,11360	1,11360
12	1,12420	1,12000	12,12000	1,12420	1,12420
13	1,13490	1,13000	13,13000	1,13490	1,13490
14	1,14560	1,14000	14,14000	1,14560	1,14560
15	1,15640	1,15000	15,15000	1,15640	1,15640
16	1,16720	1,16000	16,16000	1,16720	1,16720
17	1,17800	1,17000	17,17000	1,17800	1,17800
18	1,18890	1,18000	18,18000	1,18890	1,18890
19	1,19980	1,19000	19,19000	1,19980	1,19980
20	1,21070	1,20000	20,20000	1,21070	1,21070
21	1,22170	1,21000	21,21000	1,22170	1,22170
22	1,23270	1,22000	22,22000	1,23270	1,23270
23	1,24380	1,23000	23,23000	1,24380	1,24380
24	1,25490	1,24000	24,24000	1,25490	1,25490
25	1,26600	1,25000	25,25000	1,26600	1,26600

$$\% 2 = \varepsilon$$

ن	$(x-1) \times 100$	$\frac{1}{(x-1)} - \varepsilon$	$\sqrt[n]{x}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$
1	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
2	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
3	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
4	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
5	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
6	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
7	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
8	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
9	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
10	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
11	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
12	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
13	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
14	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
15	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
16	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
17	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
18	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
19	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
20	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
21	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
22	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
23	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
24	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
25	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
26	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
27	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
28	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
29	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000
30	1,00000	-0,00000	1,00000	1,00000	1,00000

$$\frac{1}{3} = \varepsilon$$

$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}$	ج ن	ح ن	ن (ε+1)	ن
1,000000	2,236067	1,000000	2,236067	1,000000	1
0,000001	2,236068	2,000000	0,999999	1,000001	2
0,000002	2,236069	3,000000	0,999998	1,000002	3
0,000003	2,236070	4,000000	0,999997	1,000003	4
0,000004	2,236071	5,000000	0,999996	1,000004	5
0,000005	2,236072	6,000000	0,999995	1,000005	6
0,000006	2,236073	7,000000	0,999994	1,000006	7
0,000007	2,236074	8,000000	0,999993	1,000007	8
0,000008	2,236075	9,000000	0,999992	1,000008	9
0,000009	2,236076	10,000000	0,999991	1,000009	10
0,000010	2,236077	11,000000	0,999990	1,000010	11
0,000011	2,236078	12,000000	0,999989	1,000011	12
0,000012	2,236079	13,000000	0,999988	1,000012	13
0,000013	2,236080	14,000000	0,999987	1,000013	14
0,000014	2,236081	15,000000	0,999986	1,000014	15
0,000015	2,236082	16,000000	0,999985	1,000015	16
0,000016	2,236083	17,000000	0,999984	1,000016	17
0,000017	2,236084	18,000000	0,999983	1,000017	18
0,000018	2,236085	19,000000	0,999982	1,000018	19
0,000019	2,236086	20,000000	0,999981	1,000019	20
0,000020	2,236087	21,000000	0,999980	1,000020	21
0,000021	2,236088	22,000000	0,999979	1,000021	22
0,000022	2,236089	23,000000	0,999978	1,000022	23
0,000023	2,236090	24,000000	0,999977	1,000023	24
0,000024	2,236091	25,000000	0,999976	1,000024	25

٤ - ١.٢.٥

$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}^{-1}$	$\sqrt{5}^0$	$\sqrt{5}^1$	$\sqrt{5}^2$
1,٢٥٠٠٠	٢,٢٣٦١	١,٠٠٠٠٠	١,٢٣٦١	١,٠٢٥٠٠	١
٤,٥٢٦٤٠٠	١,٨١٦٦١	١,٢٥٠٠٠	١,٢٢٢٥١	١,٠٧١٢٢	٢
-٢,٣٥٦٦٢٤	٢,٨٠١٦٤	٢,١٠٠٠٢	-١,٢٠١٦٤	١,١٠٨٧٢	٣
٠,٢٢٢٢٥١	٢,٦٢٢٠٨	٤,٢٤٦٤	-٢,٨٢٦٤	١,١٤٧٥٢	٤
-٢,٢٢١١٨١	٤,٥١٥٠٠	٥,٢٢٢٤٧	-٢,٨٢٦٤٧	١,١٨٦٦٦	٥
٠,١٨٧٦٦٨	٥,٢٢٨٥٥	٦,٥٠٠٠١٥	-٢,٨٢٦٥٠	١,٢٢٦٦٦	٦
-١,١٢٢٥٤٤	٦,٦١٤٥٤	٧,٧٧٦٤١	-٢,٨٢٦٤١	١,٢٦٦٦٦	٧
٠,١٤٥٤٧٧	٦,٨٢٢١٢	٩,٠٠١٦٩	-٢,٨٢٦٤١	١,٣٠٦٦٦	٨
-١,١٢٦٦٦٦	٧,٦٠٧٦٦	١٠,٢٦٨٥٠	-٢,٨٢٦٦٦	١,٣٤٦٦٦	٩
٠,١٢٠٢٤٤	٨,٢٦٦٦٦	١١,٧٢٦٦٦	-٢,٨٢٦٦٦	١,٣٨٦٦٦	١٠
-١,١١٦٦٦٦	٩,٠٠٠٠٠	١٢,٦٦٦٦٦	-٢,٨٢٦٦٦	١,٤٢٦٦٦	١١
٠,١٠٢٦٦٦	٩,٦٦٦٦٦	١٤,٦٠٦٦٦	-٢,٨٢٦٦٦	١,٤٦٦٦٦	١٢
-١,٠٩٦٦٦٦	١٠,٢٠٦٦٦	١٦,٦٦٦٦٦	-٢,٨٢٦٦٦	١,٥٠٦٦٦	١٣
٠,٠٩٠٦٦٦	١٠,٦٦٦٦٦	١٧,٦٦٦٦٦	-٢,٨٢٦٦٦	١,٥٤٦٦٦	١٤
-١,٠٨٦٦٦٦	١١,٠٦٦٦٦	١٩,٦٦٦٦٦	-٢,٨٢٦٦٦	١,٥٨٦٦٦	١٥
٠,٠٨٦٦٦٦	١٢,٠٦٦٦٦	٢٠,٦٦٦٦٦	-٢,٨٢٦٦٦	١,٦٢٦٦٦	١٦
-١,٠٧٦٦٦٦	١٢,٦٦٦٦٦	٢٢,٦٦٦٦٦	-٢,٨٢٦٦٦	١,٦٦٦٦٦	١٧
٠,٠٧٦٦٦٦	١٣,٦٦٦٦٦	٢٤,٦٦٦٦٦	-٢,٨٢٦٦٦	١,٧٠٦٦٦	١٨
-١,٠٦٦٦٦٦	١٣,٦٦٦٦٦	٢٦,٦٦٦٦٦	-٢,٨٢٦٦٦	١,٧٤٦٦٦	١٩
٠,٠٦٦٦٦٦	١٤,٦٦٦٦٦	٢٨,٦٦٦٦٦	-٢,٨٢٦٦٦	١,٧٨٦٦٦	٢٠
-١,٠٥٦٦٦٦	١٤,٦٦٦٦٦	٣٠,٦٦٦٦٦	-٢,٨٢٦٦٦	١,٨٢٦٦٦	٢١
٠,٠٥٦٦٦٦	١٥,٦٦٦٦٦	٣٢,٦٦٦٦٦	-٢,٨٢٦٦٦	١,٨٦٦٦٦	٢٢
-١,٠٤٦٦٦٦	١٥,٦٦٦٦٦	٣٤,٦٦٦٦٦	-٢,٨٢٦٦٦	١,٩٠٦٦٦	٢٣
٠,٠٤٦٦٦٦	١٥,٦٦٦٦٦	٣٦,٦٦٦٦٦	-٢,٨٢٦٦٦	١,٩٤٦٦٦	٢٤
-١,٠٣٦٦٦٦	١٦,٦٦٦٦٦	٣٨,٦٦٦٦٦	-٢,٨٢٦٦٦	١,٩٨٦٦٦	٢٥

$$\frac{1}{\epsilon} = \epsilon$$

$\frac{1}{\epsilon}$	ϵ^5	ϵ^4	ϵ^3	ϵ^2	$\epsilon(\epsilon+1)$	ϵ
1,11111	1,11111	1,11111	1,11111	1,11111	1,11111	1
2,22222	2,22222	2,22222	2,22222	2,22222	2,22222	2
3,33333	3,33333	3,33333	3,33333	3,33333	3,33333	3
4,44444	4,44444	4,44444	4,44444	4,44444	4,44444	4
5,55555	5,55555	5,55555	5,55555	5,55555	5,55555	5
6,66666	6,66666	6,66666	6,66666	6,66666	6,66666	6
7,77777	7,77777	7,77777	7,77777	7,77777	7,77777	7
8,88888	8,88888	8,88888	8,88888	8,88888	8,88888	8
9,99999	9,99999	9,99999	9,99999	9,99999	9,99999	9
10,10101	10,10101	10,10101	10,10101	10,10101	10,10101	10
11,11111	11,11111	11,11111	11,11111	11,11111	11,11111	11
12,12121	12,12121	12,12121	12,12121	12,12121	12,12121	12
13,13131	13,13131	13,13131	13,13131	13,13131	13,13131	13
14,14141	14,14141	14,14141	14,14141	14,14141	14,14141	14
15,15151	15,15151	15,15151	15,15151	15,15151	15,15151	15
16,16161	16,16161	16,16161	16,16161	16,16161	16,16161	16
17,17171	17,17171	17,17171	17,17171	17,17171	17,17171	17
18,18181	18,18181	18,18181	18,18181	18,18181	18,18181	18
19,19191	19,19191	19,19191	19,19191	19,19191	19,19191	19
20,20202	20,20202	20,20202	20,20202	20,20202	20,20202	20

$$\sum_{i=0}^n \delta_i = \varepsilon$$

$\frac{1}{\sqrt{0.5}}$	$\sqrt{0.5}$	$\sqrt{0.5}$	δ_i	$\delta_i(\varepsilon + i)$	δ_i
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	1
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	2
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	3
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	4
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	5
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	6
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	7
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	8
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	9
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	10
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	11
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	12
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	13
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	14
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	15
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	16
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	17
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	18
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	19
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	20
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	21
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	22
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	23
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	24
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	25
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	26
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	27
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	28
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	29
1.41421356	0.70710678	0.70710678	0.00000000	0.00000000	30

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}^{-1}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$
0.4472135955	2.2360679775	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	1
0.4472135955	2.2360679775	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	2
0.4472135955	2.2360679775	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	3
0.4472135955	2.2360679775	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	4
0.4472135955	2.2360679775	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	5
0.4472135955	2.2360679775	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	6
0.4472135955	2.2360679775	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	7
0.4472135955	2.2360679775	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	8
0.4472135955	2.2360679775	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	9
0.4472135955	2.2360679775	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	10
0.4472135955	2.2360679775	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	11
0.4472135955	2.2360679775	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	12
0.4472135955	2.2360679775	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	13
0.4472135955	2.2360679775	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	14
0.4472135955	2.2360679775	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	15
0.4472135955	2.2360679775	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	16
0.4472135955	2.2360679775	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	17
0.4472135955	2.2360679775	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	18
0.4472135955	2.2360679775	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	19
0.4472135955	2.2360679775	0.4472135955	0.4472135955	0.4472135955	20

%0,0 - 2

$\frac{1}{\sqrt{s}}$	\sqrt{s}	\sqrt{s}^2	\sqrt{s}^3	\sqrt{s}^4	\sqrt{s}^5
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	2
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	3
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	4
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	5
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	6
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	7
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	8
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	9
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	10
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	11
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	12
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	13
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	14
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	15
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	16
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	17
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	18
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	19
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	20
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	21
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	22
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	23
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	24
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	25
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	26
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	27
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	28
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	29
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	30

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \xi$$

$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}^{-2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}^{-1}$	$\sqrt{5}$
1,70000	,112233	1,00000	,112233	1,70000	1
-0,01617	1,872233	1,70000	,112233	1,112233	2
-0,27111	1,187233	1,187233	,112233	1,111111	3
-0,18809	1,167233	1,171717	,112233	1,111111	4
0,12221	1,112233	0,12221	,112233	1,122211	5
0,12221	1,112233	1,12221	,112233	1,112233	6
0,112233	0,087233	1,12221	,112233	1,012233	7
0,11111	1,112233	1,112233	,112233	1,012233	8
0,112233	1,112233	11,112233	,112233	1,112233	9
0,12221	1,112233	11,112233	,112233	1,112233	10
0,12221	1,112233	11,112233	,112233	1,112233	11
0,112233	1,112233	11,112233	,112233	1,112233	12
0,112233	1,112233	11,112233	,112233	1,112233	13
0,112233	1,112233	11,112233	,112233	1,112233	14
0,112233	1,112233	11,112233	,112233	1,112233	15
0,112233	1,112233	11,112233	,112233	1,112233	16
0,112233	1,112233	11,112233	,112233	1,112233	17
0,112233	1,112233	11,112233	,112233	1,112233	18
0,112233	1,112233	11,112233	,112233	1,112233	19
0,112233	1,112233	11,112233	,112233	1,112233	20
0,112233	1,112233	11,112233	,112233	1,112233	21
0,112233	1,112233	11,112233	,112233	1,112233	22
0,112233	1,112233	11,112233	,112233	1,112233	23
0,112233	1,112233	11,112233	,112233	1,112233	24

$$\% \cdot 7,0 = \varepsilon$$

$\frac{1}{\sqrt{0}^s}$	$\sqrt{0}^s$	$\sqrt{0}^{\rightarrow}$	$\sqrt{0}^{\leftarrow}$	$\sqrt{0}^{(E+1)}$	$\sqrt{0}$
1,20---	1,178117	1,000000	1,178117	1,200000	1
1,011117	1,181-117	1,100000	1,181-117	1,101117	2
1,177707	1,181117	1,111117	1,177707	1,111777	3
1,1111-7	1,181117	1,1-1117	1,1111-7	1,111117	4
1,11-170	1,181117	1,111117	1,11-170	1,111-17	5
1,1-1011	1,181117	1,111117	1,1-1011	1,11-1011	6
1,111117	1,181117	1,111117	1,111117	1,111117	7
1,111117	1,181117	1,1-1117	1,111117	1,111117	8
1,1-1171	1,181117	1,111117	1,1-1171	1,111-17	9
1,1111-0	1,181117	1,111117	1,1111-0	1,1111-0	10
1,11-100	1,181117	1,111117	1,11-100	1,111-10	11
1,111117	1,181117	1,111117	1,111117	1,111117	12
1,111117	1,181117	1,111117	1,111117	1,111117	13
1,111117	1,181117	1,111117	1,111117	1,111117	14
1,111117	1,181117	1,111117	1,111117	1,111117	15
1,111117	1,181117	1,111117	1,111117	1,111117	16
1,111117	1,181117	1,111117	1,111117	1,111117	17
1,111117	1,181117	1,111117	1,111117	1,111117	18
1,111117	1,181117	1,111117	1,111117	1,111117	19
1,111117	1,181117	1,111117	1,111117	1,111117	20
1,111117	1,181117	1,111117	1,111117	1,111117	21
1,111117	1,181117	1,111117	1,111117	1,111117	22
1,111117	1,181117	1,111117	1,111117	1,111117	23
1,111117	1,181117	1,111117	1,111117	1,111117	24
1,111117	1,181117	1,111117	1,111117	1,111117	25
1,111117	1,181117	1,111117	1,111117	1,111117	26

$$N = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2^s}$	$\sqrt{2^s}$	$\sqrt{2^{2s}}$	$\sqrt{2^{4s}}$	$\sqrt{2^{(2s+1)}}$	2^s
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1
0,500000	0,707107	0,500000	0,250000	0,707107	2
0,250000	0,500000	0,250000	0,125000	0,500000	3
0,125000	0,353553	0,125000	0,062500	0,353553	4
0,062500	0,250000	0,062500	0,031250	0,250000	5
0,031250	0,176777	0,031250	0,015625	0,176777	6
0,015625	0,125000	0,015625	0,007812	0,125000	7
0,007812	0,089486	0,007812	0,003906	0,089486	8
0,003906	0,063549	0,003906	0,001953	0,063549	9
0,001953	0,045176	0,001953	0,000977	0,045176	10
0,000977	0,032409	0,000977	0,000488	0,032409	11
0,000488	0,023114	0,000488	0,000244	0,023114	12
0,000244	0,016777	0,000244	0,000122	0,016777	13
0,000122	0,012125	0,000122	0,000061	0,012125	14
0,000061	0,008706	0,000061	0,000031	0,008706	15
0,000031	0,006309	0,000031	0,000015	0,006309	16
0,000015	0,004571	0,000015	0,000008	0,004571	17
0,000008	0,003309	0,000008	0,000004	0,003309	18
0,000004	0,002398	0,000004	0,000002	0,002398	19
0,000002	0,001736	0,000002	0,000001	0,001736	20

$$\frac{1}{10} \cdot 0 = \varepsilon$$

$\frac{1}{10} s$	$\frac{1}{10} \varepsilon$	$\frac{1}{10} \rightarrow$	$\frac{0}{\varepsilon}$	$\frac{0}{\varepsilon+1}$	$\frac{0}{\varepsilon}$
1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1
1,00001	1,00001	1,00001	1,00001	1,00001	1
1,00002	1,00002	1,00002	1,00002	1,00002	2
1,00003	1,00003	1,00003	1,00003	1,00003	3
1,00004	1,00004	1,00004	1,00004	1,00004	4
1,00005	1,00005	1,00005	1,00005	1,00005	5
1,00006	1,00006	1,00006	1,00006	1,00006	6
1,00007	1,00007	1,00007	1,00007	1,00007	7
1,00008	1,00008	1,00008	1,00008	1,00008	8
1,00009	1,00009	1,00009	1,00009	1,00009	9
1,00010	1,00010	1,00010	1,00010	1,00010	10
1,00011	1,00011	1,00011	1,00011	1,00011	11
1,00012	1,00012	1,00012	1,00012	1,00012	12
1,00013	1,00013	1,00013	1,00013	1,00013	13
1,00014	1,00014	1,00014	1,00014	1,00014	14
1,00015	1,00015	1,00015	1,00015	1,00015	15
1,00016	1,00016	1,00016	1,00016	1,00016	16
1,00017	1,00017	1,00017	1,00017	1,00017	17
1,00018	1,00018	1,00018	1,00018	1,00018	18
1,00019	1,00019	1,00019	1,00019	1,00019	19
1,00020	1,00020	1,00020	1,00020	1,00020	20
1,00021	1,00021	1,00021	1,00021	1,00021	21
1,00022	1,00022	1,00022	1,00022	1,00022	22
1,00023	1,00023	1,00023	1,00023	1,00023	23
1,00024	1,00024	1,00024	1,00024	1,00024	24
1,00025	1,00025	1,00025	1,00025	1,00025	25
1,00026	1,00026	1,00026	1,00026	1,00026	26
1,00027	1,00027	1,00027	1,00027	1,00027	27
1,00028	1,00028	1,00028	1,00028	1,00028	28
1,00029	1,00029	1,00029	1,00029	1,00029	29
1,00030	1,00030	1,00030	1,00030	1,00030	30

$$\frac{1}{\sqrt{s}} = \epsilon$$

$\frac{1}{\sqrt{s}}$	\sqrt{s}	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{s^4}$
1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1
0,99999	1,00001	0,99998	0,99996	0,99994	2
0,99997	1,00003	0,99994	0,99988	0,99984	3
0,99995	1,00005	0,99990	0,99980	0,99976	4
0,99993	1,00007	0,99984	0,99972	0,99968	5
0,99991	1,00009	0,99978	0,99964	0,99960	6
0,99989	1,00011	0,99972	0,99956	0,99952	7
0,99987	1,00013	0,99966	0,99948	0,99944	8
0,99985	1,00015	0,99960	0,99940	0,99936	9
0,99983	1,00017	0,99954	0,99932	0,99928	10
0,99981	1,00019	0,99948	0,99924	0,99920	11
0,99979	1,00021	0,99942	0,99916	0,99912	12
0,99977	1,00023	0,99936	0,99908	0,99904	13
0,99975	1,00025	0,99930	0,99900	0,99900	14
0,99973	1,00027	0,99924	0,99892	0,99896	15
0,99971	1,00029	0,99918	0,99884	0,99896	16
0,99969	1,00031	0,99912	0,99876	0,99896	17
0,99967	1,00033	0,99906	0,99868	0,99896	18
0,99965	1,00035	0,99900	0,99860	0,99896	19
0,99963	1,00037	0,99894	0,99852	0,99896	20
0,99961	1,00039	0,99888	0,99844	0,99896	21
0,99959	1,00041	0,99882	0,99836	0,99896	22
0,99957	1,00043	0,99876	0,99828	0,99896	23
0,99955	1,00045	0,99870	0,99820	0,99896	24
0,99953	1,00047	0,99864	0,99812	0,99896	25
0,99951	1,00049	0,99858	0,99804	0,99896	26
0,99949	1,00051	0,99852	0,99796	0,99896	27
0,99947	1,00053	0,99846	0,99788	0,99896	28
0,99945	1,00055	0,99840	0,99780	0,99896	29
0,99943	1,00057	0,99834	0,99772	0,99896	30

$$\frac{1}{\rho} \Delta = \mathcal{E}$$

$\frac{1}{s}$	\sqrt{s}	\sqrt{s}^2	τ	$\mathcal{E} + 1$	ρ
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	13
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	14
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	15
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	16
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	17
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	18
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	19
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	20
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	21
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	22
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	23
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	24
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	25
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	26
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	27
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	28
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	29
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	30
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	31
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	32
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	33
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	34
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	35
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	36
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	37
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	38
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	39
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	40
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	41
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	42
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	43
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	44
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	45
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	46
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	47
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	48
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	49
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	50
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	51
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	52
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	53
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	54
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	55
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	56
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	57
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	58
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	59
0.13000	1.14017	1.29993	0.13000	1.13000	60

$$\frac{1}{2} \Lambda_{90} = \mathcal{E}$$

$\frac{1}{\Gamma \cup S}$	$\Gamma \cup S$	$\Gamma \cup \rightarrow$	$\cup \tau$	$\cup (\mathcal{E}+1)$	\cup
1,-20---	-,111101	1,-00000	-,111101	1,-20---	1
1,011111	1,111111	1,-20---	-,111100	1,111111	2
1,111101	1,001111	1,111110	-,111101	1,111111	3
1,111111	1,111111	1,011111	-,111101	1,111111	4
1,111111	1,111111	0,111111	-,111100	1,001111	5
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	6
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	7
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	8
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	9
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	10
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	11
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	12
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	13
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	14
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	15
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	16
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	17
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	18
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	19
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	20
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	21
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	22
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	23
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	24
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	25
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	26
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	27
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	28
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	29
1,111111	1,111111	1,111111	-,111100	1,111111	30

No. 2

$\frac{1}{\sigma^5}$	$\sqrt{\sigma^5}$	$\sqrt{\sigma^{10}}$	σ	$\sigma(\epsilon+1)$	σ
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0
0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	1
0.00002	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002	2
0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	3
0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	4
0.00005	0.00005	0.00005	0.00005	0.00005	5
0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	6
0.00007	0.00007	0.00007	0.00007	0.00007	7
0.00008	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008	8
0.00009	0.00009	0.00009	0.00009	0.00009	9
0.00010	0.00010	0.00010	0.00010	0.00010	10
0.00011	0.00011	0.00011	0.00011	0.00011	11
0.00012	0.00012	0.00012	0.00012	0.00012	12
0.00013	0.00013	0.00013	0.00013	0.00013	13
0.00014	0.00014	0.00014	0.00014	0.00014	14
0.00015	0.00015	0.00015	0.00015	0.00015	15
0.00016	0.00016	0.00016	0.00016	0.00016	16
0.00017	0.00017	0.00017	0.00017	0.00017	17
0.00018	0.00018	0.00018	0.00018	0.00018	18
0.00019	0.00019	0.00019	0.00019	0.00019	19
0.00020	0.00020	0.00020	0.00020	0.00020	20
0.00021	0.00021	0.00021	0.00021	0.00021	21
0.00022	0.00022	0.00022	0.00022	0.00022	22
0.00023	0.00023	0.00023	0.00023	0.00023	23
0.00024	0.00024	0.00024	0.00024	0.00024	24
0.00025	0.00025	0.00025	0.00025	0.00025	25
0.00026	0.00026	0.00026	0.00026	0.00026	26
0.00027	0.00027	0.00027	0.00027	0.00027	27
0.00028	0.00028	0.00028	0.00028	0.00028	28
0.00029	0.00029	0.00029	0.00029	0.00029	29
0.00030	0.00030	0.00030	0.00030	0.00030	30
0.00031	0.00031	0.00031	0.00031	0.00031	31
0.00032	0.00032	0.00032	0.00032	0.00032	32
0.00033	0.00033	0.00033	0.00033	0.00033	33
0.00034	0.00034	0.00034	0.00034	0.00034	34
0.00035	0.00035	0.00035	0.00035	0.00035	35
0.00036	0.00036	0.00036	0.00036	0.00036	36
0.00037	0.00037	0.00037	0.00037	0.00037	37
0.00038	0.00038	0.00038	0.00038	0.00038	38
0.00039	0.00039	0.00039	0.00039	0.00039	39
0.00040	0.00040	0.00040	0.00040	0.00040	40
0.00041	0.00041	0.00041	0.00041	0.00041	41
0.00042	0.00042	0.00042	0.00042	0.00042	42
0.00043	0.00043	0.00043	0.00043	0.00043	43
0.00044	0.00044	0.00044	0.00044	0.00044	44
0.00045	0.00045	0.00045	0.00045	0.00045	45
0.00046	0.00046	0.00046	0.00046	0.00046	46
0.00047	0.00047	0.00047	0.00047	0.00047	47
0.00048	0.00048	0.00048	0.00048	0.00048	48
0.00049	0.00049	0.00049	0.00049	0.00049	49
0.00050	0.00050	0.00050	0.00050	0.00050	50

$$1/9 = \varepsilon$$

$\frac{1}{10^5}$	10^5	10^{-5}	$\frac{1}{10}$	$10(\varepsilon+1)$	$\frac{1}{10}$
1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1
1,00001	1,00001	1,00001	1,00001	1,00001	1
1,00002	1,00002	1,00002	1,00002	1,00002	1
1,00003	1,00003	1,00003	1,00003	1,00003	1
1,00004	1,00004	1,00004	1,00004	1,00004	1
1,00005	1,00005	1,00005	1,00005	1,00005	1
1,00006	1,00006	1,00006	1,00006	1,00006	1
1,00007	1,00007	1,00007	1,00007	1,00007	1
1,00008	1,00008	1,00008	1,00008	1,00008	1
1,00009	1,00009	1,00009	1,00009	1,00009	1
1,00010	1,00010	1,00010	1,00010	1,00010	1
1,00011	1,00011	1,00011	1,00011	1,00011	1
1,00012	1,00012	1,00012	1,00012	1,00012	1
1,00013	1,00013	1,00013	1,00013	1,00013	1
1,00014	1,00014	1,00014	1,00014	1,00014	1
1,00015	1,00015	1,00015	1,00015	1,00015	1
1,00016	1,00016	1,00016	1,00016	1,00016	1
1,00017	1,00017	1,00017	1,00017	1,00017	1
1,00018	1,00018	1,00018	1,00018	1,00018	1
1,00019	1,00019	1,00019	1,00019	1,00019	1
1,00020	1,00020	1,00020	1,00020	1,00020	1
1,00021	1,00021	1,00021	1,00021	1,00021	1
1,00022	1,00022	1,00022	1,00022	1,00022	1
1,00023	1,00023	1,00023	1,00023	1,00023	1
1,00024	1,00024	1,00024	1,00024	1,00024	1
1,00025	1,00025	1,00025	1,00025	1,00025	1
1,00026	1,00026	1,00026	1,00026	1,00026	1
1,00027	1,00027	1,00027	1,00027	1,00027	1
1,00028	1,00028	1,00028	1,00028	1,00028	1
1,00029	1,00029	1,00029	1,00029	1,00029	1
1,00030	1,00030	1,00030	1,00030	1,00030	1
1,00031	1,00031	1,00031	1,00031	1,00031	1
1,00032	1,00032	1,00032	1,00032	1,00032	1
1,00033	1,00033	1,00033	1,00033	1,00033	1
1,00034	1,00034	1,00034	1,00034	1,00034	1
1,00035	1,00035	1,00035	1,00035	1,00035	1
1,00036	1,00036	1,00036	1,00036	1,00036	1
1,00037	1,00037	1,00037	1,00037	1,00037	1
1,00038	1,00038	1,00038	1,00038	1,00038	1
1,00039	1,00039	1,00039	1,00039	1,00039	1
1,00040	1,00040	1,00040	1,00040	1,00040	1

$$\frac{1}{9,0} = \epsilon$$

$\frac{1}{10^5}$	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1
1,00001	1,00001	1,00001	1,00001	1,00001	1,00001	2
1,00002	1,00002	1,00002	1,00002	1,00002	1,00002	3
1,00003	1,00003	1,00003	1,00003	1,00003	1,00003	4
1,00004	1,00004	1,00004	1,00004	1,00004	1,00004	5
1,00005	1,00005	1,00005	1,00005	1,00005	1,00005	6
1,00006	1,00006	1,00006	1,00006	1,00006	1,00006	7
1,00007	1,00007	1,00007	1,00007	1,00007	1,00007	8
1,00008	1,00008	1,00008	1,00008	1,00008	1,00008	9
1,00009	1,00009	1,00009	1,00009	1,00009	1,00009	10
1,00010	1,00010	1,00010	1,00010	1,00010	1,00010	11
1,00011	1,00011	1,00011	1,00011	1,00011	1,00011	12
1,00012	1,00012	1,00012	1,00012	1,00012	1,00012	13
1,00013	1,00013	1,00013	1,00013	1,00013	1,00013	14
1,00014	1,00014	1,00014	1,00014	1,00014	1,00014	15
1,00015	1,00015	1,00015	1,00015	1,00015	1,00015	16
1,00016	1,00016	1,00016	1,00016	1,00016	1,00016	17
1,00017	1,00017	1,00017	1,00017	1,00017	1,00017	18
1,00018	1,00018	1,00018	1,00018	1,00018	1,00018	19
1,00019	1,00019	1,00019	1,00019	1,00019	1,00019	20
1,00020	1,00020	1,00020	1,00020	1,00020	1,00020	21
1,00021	1,00021	1,00021	1,00021	1,00021	1,00021	22
1,00022	1,00022	1,00022	1,00022	1,00022	1,00022	23
1,00023	1,00023	1,00023	1,00023	1,00023	1,00023	24
1,00024	1,00024	1,00024	1,00024	1,00024	1,00024	25
1,00025	1,00025	1,00025	1,00025	1,00025	1,00025	26
1,00026	1,00026	1,00026	1,00026	1,00026	1,00026	27
1,00027	1,00027	1,00027	1,00027	1,00027	1,00027	28
1,00028	1,00028	1,00028	1,00028	1,00028	1,00028	29
1,00029	1,00029	1,00029	1,00029	1,00029	1,00029	30

$$\frac{1}{9,0} = \epsilon$$

$\frac{1}{10^s}$	10^s	10^{-s}	$\frac{0}{\epsilon}$	$9(\epsilon+1)$	0
0,1-10-1	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
0,2-10-2	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
0,3-10-3	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
0,4-10-4	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
0,5-10-5	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
0,6-10-6	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
0,7-10-7	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
0,8-10-8	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
0,9-10-9	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
1,0-10-10	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
1,1-10-11	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
1,2-10-12	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
1,3-10-13	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
1,4-10-14	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
1,5-10-15	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
1,6-10-16	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
1,7-10-17	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
1,8-10-18	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
1,9-10-19	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
2,0-10-20	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
2,1-10-21	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
2,2-10-22	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
2,3-10-23	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
2,4-10-24	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
2,5-10-25	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
2,6-10-26	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
2,7-10-27	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
2,8-10-28	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
2,9-10-29	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00
3,0-10-30	1,000-00	100,000-00	0,000-00	9,000-00	00

$$\frac{1}{\epsilon} = \mathcal{E}$$

$\frac{1}{\epsilon^5}$	$\frac{1}{\epsilon^5}$	$\frac{1}{\epsilon^5}$	$\frac{1}{\epsilon^5}$	$\frac{1}{\epsilon^5}$	$\frac{1}{\epsilon^5}$
1,1-0-0-0-0	1,1-0-0-0-0	1,1-0-0-0-0	1,1-0-0-0-0	1,1-0-0-0-0	1
0,077111	1,1770077	1,1-0-0-0-0	0,1771111	1,111-0-0-0	2
0,1-01114	1,1111107	1,11-0-0-0-0	0,1011110	1,111-0-0-0	3
0,11-01114	1,1111110	1,1111-0-0-0	0,1111-111	1,1111-0-0-0	4
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	5
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	6
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	7
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	8
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	9
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	10
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	11
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	12
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	13
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	14
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	15
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	16
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	17
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	18
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	19
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	20
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	21
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	22
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	23
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	24
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	25
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	26
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	27
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	28
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	29
0,11177114	1,1117711	1,11-0-0-0-0	0,111-111	1,111-0-0-0	30

$$\frac{1}{A} = \epsilon$$

$\frac{1}{\sigma^2}$	σ^2	σ^{-2}	σ	$\sigma(\epsilon+1)$	σ
1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1.00001	0.99999	1.00001	0.99999	1.00001	0.99999
1.00002	0.99998	1.00002	0.99998	1.00002	0.99998
1.00003	0.99997	1.00003	0.99997	1.00003	0.99997
1.00004	0.99996	1.00004	0.99996	1.00004	0.99996
1.00005	0.99995	1.00005	0.99995	1.00005	0.99995
1.00006	0.99994	1.00006	0.99994	1.00006	0.99994
1.00007	0.99993	1.00007	0.99993	1.00007	0.99993
1.00008	0.99992	1.00008	0.99992	1.00008	0.99992
1.00009	0.99991	1.00009	0.99991	1.00009	0.99991
1.00010	0.99990	1.00010	0.99990	1.00010	0.99990
1.00011	0.99989	1.00011	0.99989	1.00011	0.99989
1.00012	0.99988	1.00012	0.99988	1.00012	0.99988
1.00013	0.99987	1.00013	0.99987	1.00013	0.99987
1.00014	0.99986	1.00014	0.99986	1.00014	0.99986
1.00015	0.99985	1.00015	0.99985	1.00015	0.99985
1.00016	0.99984	1.00016	0.99984	1.00016	0.99984
1.00017	0.99983	1.00017	0.99983	1.00017	0.99983
1.00018	0.99982	1.00018	0.99982	1.00018	0.99982
1.00019	0.99981	1.00019	0.99981	1.00019	0.99981
1.00020	0.99980	1.00020	0.99980	1.00020	0.99980
1.00021	0.99979	1.00021	0.99979	1.00021	0.99979
1.00022	0.99978	1.00022	0.99978	1.00022	0.99978
1.00023	0.99977	1.00023	0.99977	1.00023	0.99977
1.00024	0.99976	1.00024	0.99976	1.00024	0.99976
1.00025	0.99975	1.00025	0.99975	1.00025	0.99975
1.00026	0.99974	1.00026	0.99974	1.00026	0.99974
1.00027	0.99973	1.00027	0.99973	1.00027	0.99973
1.00028	0.99972	1.00028	0.99972	1.00028	0.99972
1.00029	0.99971	1.00029	0.99971	1.00029	0.99971
1.00030	0.99970	1.00030	0.99970	1.00030	0.99970
1.00031	0.99969	1.00031	0.99969	1.00031	0.99969
1.00032	0.99968	1.00032	0.99968	1.00032	0.99968
1.00033	0.99967	1.00033	0.99967	1.00033	0.99967
1.00034	0.99966	1.00034	0.99966	1.00034	0.99966
1.00035	0.99965	1.00035	0.99965	1.00035	0.99965
1.00036	0.99964	1.00036	0.99964	1.00036	0.99964
1.00037	0.99963	1.00037	0.99963	1.00037	0.99963
1.00038	0.99962	1.00038	0.99962	1.00038	0.99962
1.00039	0.99961	1.00039	0.99961	1.00039	0.99961
1.00040	0.99960	1.00040	0.99960	1.00040	0.99960

$$\frac{1}{10} = 0.1$$

$\frac{1}{10^s}$	$\sqrt{10^s}$	$\sqrt{10^{-s}}$	$\frac{1}{10^s}$	$\frac{1}{10^{s+1}}$	$\frac{1}{10^s}$
1,1-0-0-0	1,1-1-1-1-1	1,0-0-0-0-0	1,1-1-1-1-1	1,1-0-0-0-0	1
1,0-1-0-0-1	1,1-1-1-1-1	1,1-0-0-0-0	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	2
1,0-1-0-1-0-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	3
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	4
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	5
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	6
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	7
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	8
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	9
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	10
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	11
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	12
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	13
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	14
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	15
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	16
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	17
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	18
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	19
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	20
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	21
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	22
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	23
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	24
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	25
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	26
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	27
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	28
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	29
1,0-1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	1,1-1-1-1-1	30

$$\%1,90 = \text{ع}$$

$\frac{1}{10^s}$	$\sqrt{10}^s$	$\sqrt{10}^{\frac{s}{2}}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}(\text{ع} + 1)$	$\frac{1}{10}$
0,115071	1,115071	1,115, 1117-	0,115071	11,115071	11
0,115072	1,115072	111,115072	0,115072	11,115072	11
0,115073	1,115073	111,115073	0,115073	11,115073	11
0,115074	1,115074	111,115074	0,115074	11,115074	11
0,115075	1,115075	111,115075	0,115075	11,115075	11
0,115076	1,115076	111,115076	0,115076	11,115076	11
0,115077	1,115077	111,115077	0,115077	11,115077	11
0,115078	1,115078	111,115078	0,115078	11,115078	11
0,115079	1,115079	111,115079	0,115079	11,115079	11
0,115080	1,115080	111,115080	0,115080	11,115080	11
0,115081	1,115081	111,115081	0,115081	11,115081	11
0,115082	1,115082	111,115082	0,115082	11,115082	11
0,115083	1,115083	111,115083	0,115083	11,115083	11
0,115084	1,115084	111,115084	0,115084	11,115084	11
0,115085	1,115085	111,115085	0,115085	11,115085	11
0,115086	1,115086	111,115086	0,115086	11,115086	11
0,115087	1,115087	111,115087	0,115087	11,115087	11
0,115088	1,115088	111,115088	0,115088	11,115088	11
0,115089	1,115089	111,115089	0,115089	11,115089	11
0,115090	1,115090	111,115090	0,115090	11,115090	11
0,115091	1,115091	111,115091	0,115091	11,115091	11
0,115092	1,115092	111,115092	0,115092	11,115092	11
0,115093	1,115093	111,115093	0,115093	11,115093	11
0,115094	1,115094	111,115094	0,115094	11,115094	11
0,115095	1,115095	111,115095	0,115095	11,115095	11
0,115096	1,115096	111,115096	0,115096	11,115096	11
0,115097	1,115097	111,115097	0,115097	11,115097	11
0,115098	1,115098	111,115098	0,115098	11,115098	11
0,115099	1,115099	111,115099	0,115099	11,115099	11
0,115100	1,115100	111,115100	0,115100	11,115100	11

$$\frac{1}{10} = \epsilon$$

$\frac{1}{10^s}$	$\sqrt{10^s}$	$\sqrt{10^{-s}}$	$\frac{1}{10^s}$	$\frac{1}{10^{s+1}}$	$\frac{1}{10^s}$
1,100000	0,100000	1,000000	0,100000	1,100000	1
0,081938	1,714000	0,110000	0,081938	1,100000	2
0,069444	0,110000	0,110000	0,069444	1,100000	3
0,059000	0,110000	0,110000	0,059000	1,100000	4
0,050000	0,110000	0,110000	0,050000	1,100000	5
0,042170	0,110000	0,110000	0,042170	1,100000	6
0,035294	0,110000	0,110000	0,035294	1,100000	7
0,029247	0,110000	0,110000	0,029247	1,100000	8
0,023900	0,110000	0,110000	0,023900	1,100000	9
0,019163	0,110000	0,110000	0,019163	1,100000	10
0,015037	0,110000	0,110000	0,015037	1,100000	11
0,011413	0,110000	0,110000	0,011413	1,100000	12
0,008294	0,110000	0,110000	0,008294	1,100000	13
0,005579	0,110000	0,110000	0,005579	1,100000	14
0,003258	0,110000	0,110000	0,003258	1,100000	15
0,001321	0,110000	0,110000	0,001321	1,100000	16
0,000000	0,110000	0,110000	0,000000	1,100000	17
0,000000	0,110000	0,110000	0,000000	1,100000	18
0,000000	0,110000	0,110000	0,000000	1,100000	19
0,000000	0,110000	0,110000	0,000000	1,100000	20
0,000000	0,110000	0,110000	0,000000	1,100000	21
0,000000	0,110000	0,110000	0,000000	1,100000	22
0,000000	0,110000	0,110000	0,000000	1,100000	23
0,000000	0,110000	0,110000	0,000000	1,100000	24
0,000000	0,110000	0,110000	0,000000	1,100000	25
0,000000	0,110000	0,110000	0,000000	1,100000	26
0,000000	0,110000	0,110000	0,000000	1,100000	27
0,000000	0,110000	0,110000	0,000000	1,100000	28
0,000000	0,110000	0,110000	0,000000	1,100000	29
0,000000	0,110000	0,110000	0,000000	1,100000	30

$$\frac{1}{11} = \varepsilon$$

$\frac{1}{10^5}$	$\frac{1}{10^5}$	$\frac{1}{10^5}$	$\frac{1}{10^5}$	$\frac{1}{10^5}$	$\frac{1}{10^5}$
0,117217	2,122002	127,99277	0,117217	10,79270	21
0,117218	2,027200	127,99278	0,097217	17,792700	22
0,117219	2,000000	107,217217	0,052721	12,097210	23
0,110700	2,000000	122,717217	0,000000	2,000000	24
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	25
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	26
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	27
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	28
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	29
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	30
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	31
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	32
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	33
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	34
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	35
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	36
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	37
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	38
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	39
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	40
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	41
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	42
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	43
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	44
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	45
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	46
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	47
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	48
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	49
0,110000	2,000000	127,99277	0,000000	2,000000	50

$$\% 11,0 = \varepsilon$$

$\frac{1}{\sqrt{0}^s}$	$\sqrt{0}^s$	$\sqrt{0}^{\rightarrow}$	$\overset{\circ}{\tau}$	$\overset{\circ}{\tau}(\varepsilon+1)$	$\overset{\circ}{\tau}$
1,110000	0,817121	1,000000	0,817121	1,110000	1
0,084813	1,170111	1,110000	0,800000	1,111111	2
0,111111	0,817121	0,800000	0,817121	1,111111	3
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,000000	4
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	5
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	6
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	7
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	8
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	9
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	10
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	11
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	12
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	13
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	14
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	15
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	16
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	17
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	18
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	19
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	20
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	21
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	22
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	23
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	24
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	25
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	26
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	27
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	28
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	29
0,111111	0,817121	0,817121	0,817121	1,111111	30

$$\frac{1}{10} = \varepsilon$$

$\frac{1}{10^s}$	10^s	10^{-s}	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}(\varepsilon+1)$	$\frac{1}{10}$
0.11111	1.11111	0.90909	0.11111	0.12222	0.1
0.11112	1.11122	0.90910	0.11112	0.12223	0.1
0.11113	1.11133	0.90911	0.11113	0.12224	0.1
0.11114	1.11144	0.90912	0.11114	0.12225	0.1
0.11115	1.11155	0.90913	0.11115	0.12226	0.1
0.11116	1.11166	0.90914	0.11116	0.12227	0.1
0.11117	1.11177	0.90915	0.11117	0.12228	0.1
0.11118	1.11188	0.90916	0.11118	0.12229	0.1
0.11119	1.11199	0.90917	0.11119	0.12230	0.1
0.11120	1.11210	0.90918	0.11120	0.12231	0.1
0.11121	1.11221	0.90919	0.11121	0.12232	0.1
0.11122	1.11232	0.90920	0.11122	0.12233	0.1
0.11123	1.11243	0.90921	0.11123	0.12234	0.1
0.11124	1.11254	0.90922	0.11124	0.12235	0.1
0.11125	1.11265	0.90923	0.11125	0.12236	0.1
0.11126	1.11276	0.90924	0.11126	0.12237	0.1
0.11127	1.11287	0.90925	0.11127	0.12238	0.1
0.11128	1.11298	0.90926	0.11128	0.12239	0.1
0.11129	1.11309	0.90927	0.11129	0.12240	0.1
0.11130	1.11320	0.90928	0.11130	0.12241	0.1
0.11131	1.11331	0.90929	0.11131	0.12242	0.1
0.11132	1.11342	0.90930	0.11132	0.12243	0.1
0.11133	1.11353	0.90931	0.11133	0.12244	0.1
0.11134	1.11364	0.90932	0.11134	0.12245	0.1
0.11135	1.11375	0.90933	0.11135	0.12246	0.1
0.11136	1.11386	0.90934	0.11136	0.12247	0.1
0.11137	1.11397	0.90935	0.11137	0.12248	0.1
0.11138	1.11408	0.90936	0.11138	0.12249	0.1
0.11139	1.11419	0.90937	0.11139	0.12250	0.1
0.11140	1.11430	0.90938	0.11140	0.12251	0.1
0.11141	1.11441	0.90939	0.11141	0.12252	0.1
0.11142	1.11452	0.90940	0.11142	0.12253	0.1
0.11143	1.11463	0.90941	0.11143	0.12254	0.1
0.11144	1.11474	0.90942	0.11144	0.12255	0.1
0.11145	1.11485	0.90943	0.11145	0.12256	0.1
0.11146	1.11496	0.90944	0.11146	0.12257	0.1
0.11147	1.11507	0.90945	0.11147	0.12258	0.1
0.11148	1.11518	0.90946	0.11148	0.12259	0.1
0.11149	1.11529	0.90947	0.11149	0.12260	0.1
0.11150	1.11540	0.90948	0.11150	0.12261	0.1
0.11151	1.11551	0.90949	0.11151	0.12262	0.1
0.11152	1.11562	0.90950	0.11152	0.12263	0.1
0.11153	1.11573	0.90951	0.11153	0.12264	0.1
0.11154	1.11584	0.90952	0.11154	0.12265	0.1
0.11155	1.11595	0.90953	0.11155	0.12266	0.1
0.11156	1.11606	0.90954	0.11156	0.12267	0.1
0.11157	1.11617	0.90955	0.11157	0.12268	0.1
0.11158	1.11628	0.90956	0.11158	0.12269	0.1
0.11159	1.11639	0.90957	0.11159	0.12270	0.1
0.11160	1.11650	0.90958	0.11160	0.12271	0.1
0.11161	1.11661	0.90959	0.11161	0.12272	0.1
0.11162	1.11672	0.90960	0.11162	0.12273	0.1
0.11163	1.11683	0.90961	0.11163	0.12274	0.1
0.11164	1.11694	0.90962	0.11164	0.12275	0.1
0.11165	1.11705	0.90963	0.11165	0.12276	0.1
0.11166	1.11716	0.90964	0.11166	0.12277	0.1
0.11167	1.11727	0.90965	0.11167	0.12278	0.1
0.11168	1.11738	0.90966	0.11168	0.12279	0.1
0.11169	1.11749	0.90967	0.11169	0.12280	0.1
0.11170	1.11760	0.90968	0.11170	0.12281	0.1
0.11171	1.11771	0.90969	0.11171	0.12282	0.1
0.11172	1.11782	0.90970	0.11172	0.12283	0.1
0.11173	1.11793	0.90971	0.11173	0.12284	0.1
0.11174	1.11804	0.90972	0.11174	0.12285	0.1
0.11175	1.11815	0.90973	0.11175	0.12286	0.1
0.11176	1.11826	0.90974	0.11176	0.12287	0.1
0.11177	1.11837	0.90975	0.11177	0.12288	0.1
0.11178	1.11848	0.90976	0.11178	0.12289	0.1
0.11179	1.11859	0.90977	0.11179	0.12290	0.1
0.11180	1.11870	0.90978	0.11180	0.12291	0.1
0.11181	1.11881	0.90979	0.11181	0.12292	0.1
0.11182	1.11892	0.90980	0.11182	0.12293	0.1
0.11183	1.11903	0.90981	0.11183	0.12294	0.1
0.11184	1.11914	0.90982	0.11184	0.12295	0.1
0.11185	1.11925	0.90983	0.11185	0.12296	0.1
0.11186	1.11936	0.90984	0.11186	0.12297	0.1
0.11187	1.11947	0.90985	0.11187	0.12298	0.1
0.11188	1.11958	0.90986	0.11188	0.12299	0.1
0.11189	1.11969	0.90987	0.11189	0.12300	0.1
0.11190	1.11980	0.90988	0.11190	0.12301	0.1
0.11191	1.11991	0.90989	0.11191	0.12302	0.1
0.11192	1.12002	0.90990	0.11192	0.12303	0.1
0.11193	1.12013	0.90991	0.11193	0.12304	0.1
0.11194	1.12024	0.90992	0.11194	0.12305	0.1
0.11195	1.12035	0.90993	0.11195	0.12306	0.1
0.11196	1.12046	0.90994	0.11196	0.12307	0.1
0.11197	1.12057	0.90995	0.11197	0.12308	0.1
0.11198	1.12068	0.90996	0.11198	0.12309	0.1
0.11199	1.12079	0.90997	0.11199	0.12310	0.1
0.11200	1.12090	0.90998	0.11200	0.12311	0.1

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \varepsilon$$

$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5} \rightarrow$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$
1,17.....	2,236067	1,.....	2,236067	1,17.....	1
2,011318	1,708185	2,17.....	2,732051	1,708185	2
3,130358	1,618034	3,273807	3,771307	1,618034	3
4,272019	1,618034	4,377443	4,791286	1,618034	4
5,425426	1,618034	5,481080	5,811265	1,618034	5
6,590593	1,618034	6,584717	6,831244	1,618034	6
7,767530	1,618034	7,688354	7,851223	1,618034	7
8,956347	1,618034	8,791991	8,871202	1,618034	8
10,157054	1,618034	9,895628	9,891181	1,618034	9
11,370661	1,618034	11,000265	10,911160	1,618034	10
12,597268	1,618034	12,105902	11,931139	1,618034	11
13,836875	1,618034	13,212539	12,951118	1,618034	12
15,089482	1,618034	14,320176	13,971097	1,618034	13
16,355089	1,618034	15,428813	14,991076	1,618034	14
17,633696	1,618034	16,538450	16,011055	1,618034	15
18,925303	1,618034	17,648087	17,031034	1,618034	16
20,230910	1,618034	18,758724	18,051013	1,618034	17
21,550517	1,618034	19,870361	19,070992	1,618034	18
22,884124	1,618034	20,983000	20,090971	1,618034	19
24,231731	1,618034	22,096637	21,110950	1,618034	20
25,593338	1,618034	23,211274	22,130929	1,618034	21
26,968945	1,618034	24,326911	23,150908	1,618034	22
28,358552	1,618034	25,443548	24,170887	1,618034	23
29,762159	1,618034	26,561185	25,190866	1,618034	24
31,179766	1,618034	27,679822	26,210845	1,618034	25
32,611373	1,618034	28,799459	27,230824	1,618034	26
34,057080	1,618034	29,920096	28,250803	1,618034	27
35,516887	1,618034	31,041733	29,270782	1,618034	28
37,000694	1,618034	32,164370	30,290761	1,618034	29
38,498501	1,618034	33,288007	31,310740	1,618034	30

$$1/150 = \varepsilon$$

$\frac{1}{10^5}$	$\sqrt{10^5}$	$\sqrt{10^4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^3}$
1,120----	0,8888889	3,1622776	0,8888889	1,120----	1
0,0100000	3,1622776	3,1622776	0,0100000	0,0100000	2
0,1111111	3,1622776	3,1622776	0,1111111	0,1111111	3
0,0111111	3,1622776	3,1622776	0,0111111	0,0111111	4
0,1100000	3,1622776	3,1622776	0,1100000	0,1100000	5
0,0100000	3,1622776	3,1622776	0,0100000	0,0100000	6
0,1000000	3,1622776	3,1622776	0,1000000	0,1000000	7
0,0100000	3,1622776	3,1622776	0,0100000	0,0100000	8
0,1000000	3,1622776	3,1622776	0,1000000	0,1000000	9
0,0100000	3,1622776	3,1622776	0,0100000	0,0100000	10
0,1000000	3,1622776	3,1622776	0,1000000	0,1000000	11
0,0100000	3,1622776	3,1622776	0,0100000	0,0100000	12
0,1000000	3,1622776	3,1622776	0,1000000	0,1000000	13
0,0100000	3,1622776	3,1622776	0,0100000	0,0100000	14
0,1000000	3,1622776	3,1622776	0,1000000	0,1000000	15
0,0100000	3,1622776	3,1622776	0,0100000	0,0100000	16
0,1000000	3,1622776	3,1622776	0,1000000	0,1000000	17
0,0100000	3,1622776	3,1622776	0,0100000	0,0100000	18
0,1000000	3,1622776	3,1622776	0,1000000	0,1000000	19
0,0100000	3,1622776	3,1622776	0,0100000	0,0100000	20
0,1000000	3,1622776	3,1622776	0,1000000	0,1000000	21
0,0100000	3,1622776	3,1622776	0,0100000	0,0100000	22
0,1000000	3,1622776	3,1622776	0,1000000	0,1000000	23
0,0100000	3,1622776	3,1622776	0,0100000	0,0100000	24
0,1000000	3,1622776	3,1622776	0,1000000	0,1000000	25
0,0100000	3,1622776	3,1622776	0,0100000	0,0100000	26
0,1000000	3,1622776	3,1622776	0,1000000	0,1000000	27
0,0100000	3,1622776	3,1622776	0,0100000	0,0100000	28
0,1000000	3,1622776	3,1622776	0,1000000	0,1000000	29
0,0100000	3,1622776	3,1622776	0,0100000	0,0100000	30

$$\frac{1}{150} = \epsilon$$

$\frac{i}{10^5}$	$\sqrt{10^5}$	$-\sqrt{10^5}$	$\frac{1}{10^5}$	$\frac{1}{10^5}(\epsilon+1)$	$\frac{1}{10^5}$
0.151171	Y, 120YAE	-117, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151172	Y, 117YAE	117, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151173	Y, 114YAE	114, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151174	Y, 111YAE	111, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151175	Y, 108YAE	108, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151176	Y, 105YAE	105, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151177	Y, 102YAE	102, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151178	Y, 99YAE	99, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151179	Y, 96YAE	96, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151180	Y, 93YAE	93, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151181	Y, 90YAE	90, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151182	Y, 87YAE	87, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151183	Y, 84YAE	84, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151184	Y, 81YAE	81, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151185	Y, 78YAE	78, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151186	Y, 75YAE	75, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151187	Y, 72YAE	72, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151188	Y, 69YAE	69, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151189	Y, 66YAE	66, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151190	Y, 63YAE	63, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151191	Y, 60YAE	60, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151192	Y, 57YAE	57, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151193	Y, 54YAE	54, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151194	Y, 51YAE	51, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151195	Y, 48YAE	48, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151196	Y, 45YAE	45, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151197	Y, 42YAE	42, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151198	Y, 39YAE	39, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151199	Y, 36YAE	36, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666
0.151200	Y, 33YAE	33, -121.0	0.000006666	0.000007333	0.000006666

$$\frac{1}{\Delta t} = \epsilon$$

$\frac{1}{\Delta t}^s$	$\sqrt{\Delta t}^s$	$\sqrt{\Delta t}^{\rightarrow}$	Δt	$\Delta t^{(E+1)}$	Δt
1,150000	1,118034	1,150000	1,150000	1,150000	1
1,150000	1,118034	1,150000	1,150000	1,150000	2
1,150000	1,118034	1,150000	1,150000	1,150000	3
1,150000	1,118034	1,150000	1,150000	1,150000	4
1,150000	1,118034	1,150000	1,150000	1,150000	5
1,150000	1,118034	1,150000	1,150000	1,150000	6
1,150000	1,118034	1,150000	1,150000	1,150000	7
1,150000	1,118034	1,150000	1,150000	1,150000	8
1,150000	1,118034	1,150000	1,150000	1,150000	9
1,150000	1,118034	1,150000	1,150000	1,150000	10
1,150000	1,118034	1,150000	1,150000	1,150000	11
1,150000	1,118034	1,150000	1,150000	1,150000	12
1,150000	1,118034	1,150000	1,150000	1,150000	13
1,150000	1,118034	1,150000	1,150000	1,150000	14
1,150000	1,118034	1,150000	1,150000	1,150000	15
1,150000	1,118034	1,150000	1,150000	1,150000	16
1,150000	1,118034	1,150000	1,150000	1,150000	17
1,150000	1,118034	1,150000	1,150000	1,150000	18
1,150000	1,118034	1,150000	1,150000	1,150000	19
1,150000	1,118034	1,150000	1,150000	1,150000	20

$$\frac{1}{\sqrt{12}} = \varepsilon$$

$\frac{1}{\sqrt{10}^5}$	$\sqrt{10}^5$	$\sqrt{10}^{\rightarrow}$	$\sqrt{10}^{\leftarrow}$	$\sqrt{10}^{\leftarrow}$	$\sqrt{10}^{\leftarrow}(\varepsilon+1)$	$\sqrt{10}^{\leftarrow}$
0,120160	Y,2Y111A	1Y1,800011	0,01111A	12,110011	11	
0,120320	Y,100001	100,81011	0,01111A	12,110011	12	
0,120480	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	13	
0,120640	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	14	
0,120800	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	15	
0,120960	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	16	
0,121120	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	17	
0,121280	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	18	
0,121440	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	19	
0,121600	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	20	
0,121760	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	21	
0,121920	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	22	
0,122080	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	23	
0,122240	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	24	
0,122400	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	25	
0,122560	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	26	
0,122720	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	27	
0,122880	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	28	
0,123040	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	29	
0,123200	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	30	
0,123360	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	31	
0,123520	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	32	
0,123680	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	33	
0,123840	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	34	
0,124000	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	35	
0,124160	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	36	
0,124320	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	37	
0,124480	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	38	
0,124640	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	39	
0,124800	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	40	
0,124960	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	41	
0,125120	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	42	
0,125280	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	43	
0,125440	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	44	
0,125600	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	45	
0,125760	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	46	
0,125920	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	47	
0,126080	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	48	
0,126240	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	49	
0,126400	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	50	
0,126560	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	51	
0,126720	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	52	
0,126880	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	53	
0,127040	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	54	
0,127200	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	55	
0,127360	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	56	
0,127520	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	57	
0,127680	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	58	
0,127840	Y,111110	111,81111	0,01111A	12,110011	59	
0,128000	Y,100001	100,81111	0,01111A	12,110011	60	

$$\frac{1}{10^5} = \epsilon$$

$\frac{1}{10^5}$	$\Gamma \bar{0}^5$	$\Gamma \bar{0} \rightarrow$	$\bar{0} \tau$	$\bar{0}(\epsilon+1)$	$\bar{0}$
1,120000	0,881007	1,000000	-881007	1,120000	1
-1,122222	1,107222	1,120000	-1,122222	1,881220	2
1,117777	1,151110	1,117777	-1,122222	1,117777	3
-1,115555	1,112222	1,115555	-1,107222	1,107222	4
1,124444	1,112222	1,011111	0,020111	1,124444	5
-1,127777	1,112222	1,127777	-1,127777	1,127777	6
1,117777	1,107222	1,011111	-1,117777	1,117777	7
-1,117777	1,112222	1,117777	-1,117777	1,117777	8
1,112222	0,011111	1,011111	0,111111	1,112222	9
-1,112222	0,111111	1,112222	-1,112222	1,112222	10
1,112222	0,111111	1,112222	-1,112222	1,112222	11
-1,112222	0,111111	1,112222	-1,112222	1,112222	12
1,112222	0,111111	1,112222	-1,112222	1,112222	13
-1,112222	0,111111	1,112222	-1,112222	1,112222	14
1,112222	0,111111	1,112222	-1,112222	1,112222	15
-1,112222	0,111111	1,112222	-1,112222	1,112222	16
1,112222	0,111111	1,112222	-1,112222	1,112222	17
-1,112222	0,111111	1,112222	-1,112222	1,112222	18
1,112222	0,111111	1,112222	-1,112222	1,112222	19
-1,112222	0,111111	1,112222	-1,112222	1,112222	20
1,112222	0,111111	1,112222	-1,112222	1,112222	21
-1,112222	0,111111	1,112222	-1,112222	1,112222	22
1,112222	0,111111	1,112222	-1,112222	1,112222	23
-1,112222	0,111111	1,112222	-1,112222	1,112222	24
1,112222	0,111111	1,112222	-1,112222	1,112222	25
-1,112222	0,111111	1,112222	-1,112222	1,112222	26
1,112222	0,111111	1,112222	-1,112222	1,112222	27
-1,112222	0,111111	1,112222	-1,112222	1,112222	28
1,112222	0,111111	1,112222	-1,112222	1,112222	29
-1,112222	0,111111	1,112222	-1,112222	1,112222	30

$$110 = E$$

$\frac{1}{\sqrt{0}^5}$	$\sqrt{0}^5$	$\sqrt{0}^2$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{(E+1)}$	$\frac{0}{0}$
1,10-213	Y,10211A	111,11110Y	1,102110	11,1-1,1A-	27
1,10210Y-	Y,1111AY0	11A,111A1A	1,10210Y	11,11110T	2Y
1,1021-1-	Y,11021A	110,1111AY	1,1021-1-	11,11110*	1A
1,102A021	Y,1111A0	1A0,1-1111	1,102A021	11,11110T	11
1,102A-1Y	Y,1111-1Y	111,1Y11Y0A	1,102A-1Y	11,1000011	1-
1,102Y11Y	Y,1111Y*1	11A,1-1111	1,102Y11Y	00,1111-11	11
1,102YAA	Y,1Y111Y	11A,1Y111Y	1,102YAA	0Y,111111	1Y
1,102Y1-0	Y,11110A	1Y1,11-1A1	1,102Y1-0	10,111101	1Y
1,1021A1Y	Y,1-110Y	0-1,10111-1	1,1021A1Y	Y0,1-1Y-1-	11
1,1021110	Y,1111011	110,11-11Y	1,1021110	11,111101	10
1,10210Y1	Y,1111A11	111,1Y-1A1Y1	1,10210Y1	10,11110-1	11
1,10211A	Y,1111-00	Y10,11A1Y1Y	1,10211A	1-1,11111A-	1Y
1,10211-1Y	Y,1111Y11	1-1,1011A0-	1,10211-1Y	11Y,111100-	1A
1,10201Y1	Y,101110-	1-11,100011A	1,10201Y1	111,10110-	01
1,1020A0A	Y,111-10Y	1111,11-111	1,1020A0A	10A,11A1Y-	1-
1,1020Y00	Y,111111Y	1111,111-1Y	1,1020Y00	1Y1,1111A1-	1-
1,1020110	Y,1Y1111Y	0-1,11A0A01	1,1020110	1-1,1111-1-	11
1,10200A0	Y,0Y111-	1Y-1,1Y111-	1,10200A0	111,111101-	1Y
1,1020010	Y,0Y1110	110,111101-	1,1020010	111,111101-	11
1,1020101	Y,1A111A0	11-1,111101-	1,1020101	11A,11-1Y-	1-
1,10201-0	Y,1A001Y	10-1,11111-1	1,10201-0	110,111101-	1-
1,10201Y1	Y,1A111A	1A1,111111	1,10201Y1	1A1,111101-	1-
1,102011-	Y,1A-101-	1111,1111011	1,102011-	111,111111-	1-
1,10201Y0	Y,11110-	111,1A1-1Y1	1,10201Y0	110,111101-	1-
1,1020111	Y,111111	110,11-11111	1,1020111	011,11110-	1-

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \epsilon$$

$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}^{-1}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}^{-1}$	$\sqrt{5}^{-1}$
1,111111	2,236067	0,447214	2,236067	0,447214	1
2,222222	4,472134	0,894427	4,472134	0,894427	2
3,333333	6,708201	1,341641	6,708201	1,341641	3
4,444444	8,944268	1,788854	8,944268	1,788854	4
5,555555	11,180335	2,236067	11,180335	2,236067	5
6,666666	13,416402	2,683281	13,416402	2,683281	6
7,777777	15,652469	3,130494	15,652469	3,130494	7
8,888888	17,888536	3,577708	17,888536	3,577708	8
9,999999	20,124603	4,024921	20,124603	4,024921	9
10,111111	22,360670	4,472134	22,360670	4,472134	10
11,222222	24,596737	4,919348	24,596737	4,919348	11
12,333333	26,832804	5,366561	26,832804	5,366561	12
13,444444	29,068871	5,813775	29,068871	5,813775	13
14,555555	31,304938	6,260988	31,304938	6,260988	14
15,666666	33,541005	6,708201	33,541005	6,708201	15
16,777777	35,777072	7,155415	35,777072	7,155415	16
17,888888	38,013139	7,602628	38,013139	7,602628	17
18,999999	40,249206	8,049842	40,249206	8,049842	18
19,111111	42,485273	8,497055	42,485273	8,497055	19
20,222222	44,721340	8,944268	44,721340	8,944268	20
21,333333	46,957407	9,391482	46,957407	9,391482	21
22,444444	49,193474	9,838695	49,193474	9,838695	22
23,555555	51,429541	10,285909	51,429541	10,285909	23
24,666666	53,665608	10,733122	53,665608	10,733122	24
25,777777	55,901675	11,180335	55,901675	11,180335	25
26,888888	58,137742	11,627549	58,137742	11,627549	26
27,999999	60,373809	12,074762	60,373809	12,074762	27
28,111111	62,609876	12,521976	62,609876	12,521976	28
29,222222	64,845943	12,969189	64,845943	12,969189	29
30,333333	67,082010	13,416402	67,082010	13,416402	30
31,444444	69,318077	13,863616	69,318077	13,863616	31
32,555555	71,554144	14,310829	71,554144	14,310829	32
33,666666	73,790211	14,758043	73,790211	14,758043	33
34,777777	76,026278	15,205256	76,026278	15,205256	34
35,888888	78,262345	15,652469	78,262345	15,652469	35
36,999999	80,498412	16,099683	80,498412	16,099683	36
37,111111	82,734479	16,546896	82,734479	16,546896	37
38,222222	84,970546	16,994110	84,970546	16,994110	38
39,333333	87,206613	17,441323	87,206613	17,441323	39
40,444444	89,442680	17,888536	89,442680	17,888536	40
41,555555	91,678747	18,335750	91,678747	18,335750	41
42,666666	93,914814	18,782963	93,914814	18,782963	42
43,777777	96,150881	19,230177	96,150881	19,230177	43
44,888888	98,386948	19,677390	98,386948	19,677390	44
45,999999	100,623015	20,124603	100,623015	20,124603	45
46,111111	102,859082	20,571817	102,859082	20,571817	46
47,222222	105,095149	21,019030	105,095149	21,019030	47
48,333333	107,331216	21,466244	107,331216	21,466244	48
49,444444	109,567283	21,913457	109,567283	21,913457	49
50,555555	111,803350	22,360670	111,803350	22,360670	50

$$\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} = \epsilon$$

$\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$	$\sqrt{1-\epsilon^2}$	$\sqrt{1-\epsilon^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$
1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1.00001	0.99999	0.99999	1.00001	1.00001	1.00001
1.00002	0.99996	0.99996	1.00004	1.00004	1.00004
1.00003	0.99991	0.99991	1.00009	1.00009	1.00009
1.00004	0.99984	0.99984	1.00016	1.00016	1.00016
1.00005	0.99975	0.99975	1.00025	1.00025	1.00025
1.00006	0.99964	0.99964	1.00036	1.00036	1.00036
1.00007	0.99951	0.99951	1.00049	1.00049	1.00049
1.00008	0.99936	0.99936	1.00064	1.00064	1.00064
1.00009	0.99919	0.99919	1.00081	1.00081	1.00081
1.00010	0.99900	0.99900	1.00100	1.00100	1.00100
1.00011	0.99879	0.99879	1.00121	1.00121	1.00121
1.00012	0.99856	0.99856	1.00144	1.00144	1.00144
1.00013	0.99831	0.99831	1.00169	1.00169	1.00169
1.00014	0.99804	0.99804	1.00196	1.00196	1.00196
1.00015	0.99775	0.99775	1.00225	1.00225	1.00225
1.00016	0.99744	0.99744	1.00256	1.00256	1.00256
1.00017	0.99711	0.99711	1.00289	1.00289	1.00289
1.00018	0.99676	0.99676	1.00324	1.00324	1.00324
1.00019	0.99639	0.99639	1.00361	1.00361	1.00361
1.00020	0.99600	0.99600	1.00400	1.00400	1.00400
1.00021	0.99559	0.99559	1.00441	1.00441	1.00441
1.00022	0.99516	0.99516	1.00484	1.00484	1.00484
1.00023	0.99471	0.99471	1.00529	1.00529	1.00529
1.00024	0.99424	0.99424	1.00576	1.00576	1.00576
1.00025	0.99375	0.99375	1.00625	1.00625	1.00625
1.00026	0.99324	0.99324	1.00676	1.00676	1.00676
1.00027	0.99271	0.99271	1.00729	1.00729	1.00729
1.00028	0.99216	0.99216	1.00784	1.00784	1.00784
1.00029	0.99159	0.99159	1.00841	1.00841	1.00841
1.00030	0.99100	0.99100	1.00900	1.00900	1.00900
1.00031	0.99039	0.99039	1.00961	1.00961	1.00961
1.00032	0.98976	0.98976	1.01024	1.01024	1.01024
1.00033	0.98911	0.98911	1.01089	1.01089	1.01089
1.00034	0.98844	0.98844	1.01156	1.01156	1.01156
1.00035	0.98775	0.98775	1.01225	1.01225	1.01225
1.00036	0.98704	0.98704	1.01296	1.01296	1.01296
1.00037	0.98631	0.98631	1.01369	1.01369	1.01369
1.00038	0.98556	0.98556	1.01444	1.01444	1.01444
1.00039	0.98479	0.98479	1.01521	1.01521	1.01521
1.00040	0.98400	0.98400	1.01600	1.01600	1.01600
1.00041	0.98319	0.98319	1.01681	1.01681	1.01681
1.00042	0.98236	0.98236	1.01764	1.01764	1.01764
1.00043	0.98151	0.98151	1.01849	1.01849	1.01849
1.00044	0.98064	0.98064	1.01936	1.01936	1.01936
1.00045	0.97975	0.97975	1.02025	1.02025	1.02025
1.00046	0.97884	0.97884	1.02116	1.02116	1.02116
1.00047	0.97791	0.97791	1.02209	1.02209	1.02209
1.00048	0.97696	0.97696	1.02304	1.02304	1.02304
1.00049	0.97600	0.97600	1.02401	1.02401	1.02401
1.00050	0.97502	0.97502	1.02500	1.02500	1.02500

$$\Delta \xi_0 = \epsilon$$

$\frac{1}{\sqrt{5}} s$	τ_0	$\tau_0 - \epsilon$	τ	$\xi(\epsilon+1)$	$\cdot \xi$
1,110...0	0,875577	1,000...0	0,875577	1,110...0	1
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	2
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	3
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	4
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	5
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	6
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	7
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	8
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	9
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	10
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	11
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	12
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	13
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	14
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	15
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	16
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	17
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	18
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	19
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	20
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	21
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	22
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	23
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	24
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	25
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	26
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	27
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	28
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	29
0,1110...0	1,177111	1,110...0	0,177111	1,111...0	30

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon = \varepsilon$$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon$	$\sqrt{2} \varepsilon$	$\sqrt{2} \varepsilon$	ε	$\varepsilon(\varepsilon+1)$	ε
0,111111	1,414214	1,414214	0,707107	1,525219	11
0,111112	1,414215	1,414215	0,707107	1,525220	12
0,111113	1,414216	1,414216	0,707107	1,525221	13
0,111114	1,414217	1,414217	0,707107	1,525222	14
0,111115	1,414218	1,414218	0,707107	1,525223	15
0,111116	1,414219	1,414219	0,707107	1,525224	16
0,111117	1,414220	1,414220	0,707107	1,525225	17
0,111118	1,414221	1,414221	0,707107	1,525226	18
0,111119	1,414222	1,414222	0,707107	1,525227	19
0,111120	1,414223	1,414223	0,707107	1,525228	20
0,111121	1,414224	1,414224	0,707107	1,525229	21
0,111122	1,414225	1,414225	0,707107	1,525230	22
0,111123	1,414226	1,414226	0,707107	1,525231	23
0,111124	1,414227	1,414227	0,707107	1,525232	24
0,111125	1,414228	1,414228	0,707107	1,525233	25
0,111126	1,414229	1,414229	0,707107	1,525234	26
0,111127	1,414230	1,414230	0,707107	1,525235	27
0,111128	1,414231	1,414231	0,707107	1,525236	28
0,111129	1,414232	1,414232	0,707107	1,525237	29
0,111130	1,414233	1,414233	0,707107	1,525238	30
0,111131	1,414234	1,414234	0,707107	1,525239	31
0,111132	1,414235	1,414235	0,707107	1,525240	32
0,111133	1,414236	1,414236	0,707107	1,525241	33
0,111134	1,414237	1,414237	0,707107	1,525242	34
0,111135	1,414238	1,414238	0,707107	1,525243	35
0,111136	1,414239	1,414239	0,707107	1,525244	36
0,111137	1,414240	1,414240	0,707107	1,525245	37
0,111138	1,414241	1,414241	0,707107	1,525246	38
0,111139	1,414242	1,414242	0,707107	1,525247	39
0,111140	1,414243	1,414243	0,707107	1,525248	40

$$\frac{1}{10} = \varepsilon$$

$\frac{1}{10^5}$	$\frac{1}{10^5}$	$\frac{1}{10^5}$	$\frac{1}{10^5}$	$\frac{1}{10^5}$	$\frac{1}{10^5}$
1,100000	1,100000	1,100000	1,100000	1,100000	1
1,110000	1,110000	1,110000	1,110000	1,110000	2
1,120000	1,120000	1,120000	1,120000	1,120000	3
1,130000	1,130000	1,130000	1,130000	1,130000	4
1,140000	1,140000	1,140000	1,140000	1,140000	5
1,150000	1,150000	1,150000	1,150000	1,150000	6
1,160000	1,160000	1,160000	1,160000	1,160000	7
1,170000	1,170000	1,170000	1,170000	1,170000	8
1,180000	1,180000	1,180000	1,180000	1,180000	9
1,190000	1,190000	1,190000	1,190000	1,190000	10
1,200000	1,200000	1,200000	1,200000	1,200000	11
1,210000	1,210000	1,210000	1,210000	1,210000	12
1,220000	1,220000	1,220000	1,220000	1,220000	13
1,230000	1,230000	1,230000	1,230000	1,230000	14
1,240000	1,240000	1,240000	1,240000	1,240000	15
1,250000	1,250000	1,250000	1,250000	1,250000	16
1,260000	1,260000	1,260000	1,260000	1,260000	17
1,270000	1,270000	1,270000	1,270000	1,270000	18
1,280000	1,280000	1,280000	1,280000	1,280000	19
1,290000	1,290000	1,290000	1,290000	1,290000	20
1,300000	1,300000	1,300000	1,300000	1,300000	21
1,310000	1,310000	1,310000	1,310000	1,310000	22
1,320000	1,320000	1,320000	1,320000	1,320000	23
1,330000	1,330000	1,330000	1,330000	1,330000	24
1,340000	1,340000	1,340000	1,340000	1,340000	25
1,350000	1,350000	1,350000	1,350000	1,350000	26
1,360000	1,360000	1,360000	1,360000	1,360000	27
1,370000	1,370000	1,370000	1,370000	1,370000	28
1,380000	1,380000	1,380000	1,380000	1,380000	29
1,390000	1,390000	1,390000	1,390000	1,390000	30

$$\frac{1}{10} = \varepsilon$$

$\frac{1}{10^s}$	$\sqrt{10^s}$	$\sqrt{10^{-s}}$	$\frac{1}{10^s}$	$\frac{1}{10^{s+1}}$	$\frac{1}{10^s}$
0.100000	3.162278	0.316228	0.010000	0.001000	0.1
0.100001	3.162281	0.316227	0.010001	0.001000	0.1
0.100002	3.162284	0.316227	0.010002	0.001000	0.1
0.100003	3.162287	0.316227	0.010003	0.001000	0.1
0.100004	3.162290	0.316227	0.010004	0.001000	0.1
0.100005	3.162293	0.316227	0.010005	0.001000	0.1
0.100006	3.162296	0.316227	0.010006	0.001000	0.1
0.100007	3.162299	0.316227	0.010007	0.001000	0.1
0.100008	3.162302	0.316227	0.010008	0.001000	0.1
0.100009	3.162305	0.316227	0.010009	0.001000	0.1
0.100010	3.162308	0.316227	0.010010	0.001000	0.1
0.100011	3.162311	0.316227	0.010011	0.001000	0.1
0.100012	3.162314	0.316227	0.010012	0.001000	0.1
0.100013	3.162317	0.316227	0.010013	0.001000	0.1
0.100014	3.162320	0.316227	0.010014	0.001000	0.1
0.100015	3.162323	0.316227	0.010015	0.001000	0.1
0.100016	3.162326	0.316227	0.010016	0.001000	0.1
0.100017	3.162329	0.316227	0.010017	0.001000	0.1
0.100018	3.162332	0.316227	0.010018	0.001000	0.1
0.100019	3.162335	0.316227	0.010019	0.001000	0.1
0.100020	3.162338	0.316227	0.010020	0.001000	0.1
0.100021	3.162341	0.316227	0.010021	0.001000	0.1
0.100022	3.162344	0.316227	0.010022	0.001000	0.1
0.100023	3.162347	0.316227	0.010023	0.001000	0.1
0.100024	3.162350	0.316227	0.010024	0.001000	0.1
0.100025	3.162353	0.316227	0.010025	0.001000	0.1
0.100026	3.162356	0.316227	0.010026	0.001000	0.1
0.100027	3.162359	0.316227	0.010027	0.001000	0.1
0.100028	3.162362	0.316227	0.010028	0.001000	0.1
0.100029	3.162365	0.316227	0.010029	0.001000	0.1
0.100030	3.162368	0.316227	0.010030	0.001000	0.1
0.100031	3.162371	0.316227	0.010031	0.001000	0.1
0.100032	3.162374	0.316227	0.010032	0.001000	0.1
0.100033	3.162377	0.316227	0.010033	0.001000	0.1
0.100034	3.162380	0.316227	0.010034	0.001000	0.1
0.100035	3.162383	0.316227	0.010035	0.001000	0.1
0.100036	3.162386	0.316227	0.010036	0.001000	0.1
0.100037	3.162389	0.316227	0.010037	0.001000	0.1
0.100038	3.162392	0.316227	0.010038	0.001000	0.1
0.100039	3.162395	0.316227	0.010039	0.001000	0.1
0.100040	3.162398	0.316227	0.010040	0.001000	0.1
0.100041	3.162401	0.316227	0.010041	0.001000	0.1
0.100042	3.162404	0.316227	0.010042	0.001000	0.1
0.100043	3.162407	0.316227	0.010043	0.001000	0.1
0.100044	3.162410	0.316227	0.010044	0.001000	0.1
0.100045	3.162413	0.316227	0.010045	0.001000	0.1
0.100046	3.162416	0.316227	0.010046	0.001000	0.1
0.100047	3.162419	0.316227	0.010047	0.001000	0.1
0.100048	3.162422	0.316227	0.010048	0.001000	0.1
0.100049	3.162425	0.316227	0.010049	0.001000	0.1
0.100050	3.162428	0.316227	0.010050	0.001000	0.1

ساج

جد جلد واحد والثوب لثوب القبر

١٦ ١٧	١٨ ١٩	٢٠ ٢١	٢٢ ٢٣	٢٤ ٢٥	٢٦ ٢٧
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
1,000001	1,000002	1,000004	1,000008	1,000016	1,000032
1,000004	1,000008	1,000016	1,000032	1,000064	1,000128
1,000009	1,000018	1,000036	1,000072	1,000144	1,000288
1,000016	1,000032	1,000064	1,000128	1,000256	1,000512
1,000025	1,000050	1,000100	1,000200	1,000400	1,000800
1,000036	1,000072	1,000144	1,000288	1,000576	1,001152
1,000049	1,000098	1,000196	1,000392	1,000784	1,001568
1,000064	1,000128	1,000256	1,000512	1,001024	1,002048
1,000081	1,000162	1,000324	1,000648	1,001296	1,002592
1,000100	1,000200	1,000400	1,000800	1,001600	1,003200
1,000121	1,000242	1,000484	1,000968	1,002048	1,003936
1,000144	1,000288	1,000576	1,001152	1,002560	1,004736
1,000169	1,000338	1,000676	1,001360	1,003136	1,005632
1,000196	1,000392	1,000784	1,001584	1,003776	1,006624
1,000225	1,000450	1,000900	1,001824	1,004480	1,007712
1,000256	1,000512	1,001024	1,002080	1,005248	1,008904
1,000289	1,000576	1,001152	1,002352	1,006080	1,010208
1,000324	1,000648	1,001296	1,002640	1,006976	1,011624
1,000361	1,000724	1,001444	1,002944	1,007936	1,013152
1,000400	1,000804	1,001600	1,003264	1,008960	1,014792
1,000441	1,000888	1,001764	1,003600	1,010048	1,016544
1,000484	1,000976	1,001936	1,003952	1,011192	1,018408
1,000529	1,001068	1,002116	1,004320	1,012392	1,020384
1,000576	1,001164	1,002304	1,004704	1,013648	1,022472
1,000625	1,001264	1,002500	1,005104	1,014960	1,024672
1,000676	1,001368	1,002704	1,005520	1,016328	1,026984
1,000729	1,001476	1,002916	1,005952	1,017752	1,029408
1,000784	1,001588	1,003136	1,006400	1,019232	1,031944
1,000841	1,001704	1,003364	1,006864	1,020768	1,034592
1,000900	1,001824	1,003600	1,007344	1,022360	1,037352
1,000961	1,001948	1,003844	1,007840	1,024008	1,040224
1,001024	1,002076	1,004096	1,008352	1,025712	1,043208
1,001089	1,002208	1,004356	1,008880	1,027472	1,046304
1,001156	1,002344	1,004624	1,009424	1,029288	1,049512
1,001225	1,002484	1,004900	1,009984	1,031160	1,052832
1,001296	1,002628	1,005184	1,010556	1,033088	1,056264
1,001369	1,002776	1,005476	1,011144	1,035072	1,059808
1,001444	1,002928	1,005776	1,011748	1,037112	1,063464
1,001521	1,003084	1,006084	1,012368	1,039208	1,067232
1,001600	1,003244	1,006400	1,013000	1,041360	1,071112
1,001681	1,003408	1,006724	1,013648	1,043568	1,075104
1,001764	1,003576	1,007056	1,014312	1,045832	1,079208
1,001849	1,003748	1,007396	1,014992	1,048152	1,083424
1,001936	1,003924	1,007744	1,015688	1,050528	1,087752
1,002025	1,004104	1,008096	1,016396	1,052960	1,092192
1,002116	1,004288	1,008456	1,017116	1,055448	1,096744
1,002209	1,004476	1,008824	1,017848	1,057992	1,101408
1,002304	1,004668	1,009196	1,018596	1,060592	1,106184
1,002401	1,004864	1,009576	1,019356	1,063248	1,111072
1,002500	1,005064	1,009964	1,020128	1,065960	1,116072
1,002601	1,005268	1,010360	1,020912	1,068728	1,121184
1,002704	1,005476	1,010764	1,021708	1,071552	1,126408
1,002809	1,005688	1,011176	1,022516	1,074432	1,131744
1,002916	1,005904	1,011596	1,023336	1,077368	1,137192
1,003025	1,006124	1,012024	1,024168	1,080360	1,142752
1,003136	1,006348	1,012464	1,025012	1,083408	1,148424
1,003249	1,006576	1,012916	1,025868	1,086512	1,154208
1,003364	1,006808	1,013380	1,026736	1,089672	1,160104
1,003481	1,007044	1,013856	1,027616	1,092888	1,166112
1,003600	1,007284	1,014344	1,028508	1,096160	1,172232
1,003721	1,007528	1,014844	1,029412	1,099488	1,178464
1,003844	1,007776	1,015356	1,030328	1,102872	1,184808
1,003969	1,008028	1,015880	1,031256	1,106312	1,191264
1,004096	1,008284	1,016416	1,032196	1,109808	1,197832
1,004225	1,008544	1,016964	1,033148	1,113360	1,204512
1,004356	1,008808	1,017524	1,034112	1,116968	1,211304
1,004489	1,009076	1,018096	1,035088	1,120632	1,218208
1,004624	1,009348	1,018680	1,036076	1,124352	1,225224
1,004761	1,009624	1,019276	1,037076	1,128128	1,232352
1,004900	1,009904	1,019884	1,038088	1,131960	1,239592
1,005041	1,010188	1,020504	1,039112	1,135848	1,246944
1,005184	1,010476	1,021136	1,040148	1,139792	1,254408
1,005329	1,010768	1,021780	1,041196	1,143792	1,261984
1,005476	1,011064	1,022436	1,042256	1,147848	1,269672
1,005625	1,011364	1,023104	1,043328	1,151960	1,277472
1,005776	1,011668	1,023784	1,044412	1,156128	1,285384
1,005929	1,011976	1,024476	1,045508	1,160352	1,293408
1,006084	1,012288	1,025180	1,046616	1,164632	1,301544
1,006241	1,012604	1,025896	1,047736	1,168968	1,309792
1,006400	1,012924	1,026624	1,048868	1,173360	1,318152
1,006561	1,013248	1,027364	1,049996	1,177808	1,326624
1,006724	1,013576	1,028116	1,051136	1,182312	1,335208
1,006889	1,013908	1,028880	1,052288	1,186872	1,343904
1,007056	1,014244	1,029656	1,053452	1,191488	1,352712
1,007225	1,014584	1,030444	1,054628	1,196160	1,361632
1,007396	1,014928	1,031244	1,055816	1,200888	1,370664
1,007569	1,015276	1,032056	1,057016	1,205672	1,379808
1,007744	1,015628	1,032880	1,058228	1,210512	1,389064
1,007921	1,015984	1,033716	1,059452	1,215408	1,398432
1,008100	1,016344	1,034564	1,060688	1,220360	1,407912
1,008281	1,016708	1,035424	1,061936	1,225368	1,417504
1,008464	1,017076	1,036296	1,063196	1,230432	1,427208
1,008649	1,017448	1,037180	1,064468	1,235552	1,437024
1,008836	1,017824	1,038076	1,065752	1,240728	1,446952
1,009025	1,018204	1,038984	1,067048	1,245960	1,457004
1,009216	1,018588	1,039904	1,068356	1,251248	1,467168
1,009409	1,018976	1,040836	1,069676	1,256592	1,477444
1,009604	1,019368	1,041780	1,071008	1,261992	1,487832
1,009801	1,019764	1,042736	1,072352	1,267448	1,498332
1,009999	1,020164	1,043704	1,073708	1,272960	1,508944
1,010199	1,020568	1,044684	1,075076	1,278528	1,519664
1,010401	1,020976	1,045676	1,076456	1,284152	1,530492
1,010604	1,021388	1,046680	1,077848	1,289832	1,541432
1,010809	1,021804	1,047696	1,079252	1,295568	1,552484
1,011016	1,022224	1,048724	1,080668	1,301360	1,563648
1,011225	1,022648	1,049764	1,082096	1,307208	1,574924
1,011436	1,023076	1,050816	1,083536	1,313112	1,586312
1,011649	1,023508	1,051880	1,084988	1,319072	1,597812
1,011864	1,023944	1,052956	1,086452	1,325088	1,609424
1,012081	1,024384	1,054044	1,087928	1,331160	1,621144
1,012300	1,024828	1,055144	1,089416	1,337288	1,632972
1,012521	1,025276	1,056256	1,090916	1,343472	1,644912
1,012744	1,025728	1,057380	1,092428	1,349712	1,656964
1,012969	1,026184	1,058516	1,093952	1,356008	1,669128
1,013196	1,026644	1,059664	1,095488	1,362360	1,681404
1,013425	1,027108	1,060824	1,097036	1,368768	1,693792
1,013656	1,027576	1,061996	1,098596	1,375232	1,706292
1,013889	1,028048	1,063180	1,099968	1,381752	1,718904
1,014124	1,028524	1,064376	1,101352	1,388328	1,731624
1,014361	1,028996	1,065584	1,102748	1,394960	1,744452
1,014600	1,029472	1,066804	1,104156	1,401648	1,757392
1,014841	1,030044	1,068036	1,105576	1,408392	1,770444
1,015084	1,030616	1,069280	1,107008	1,415192	1,783608
1,015329	1,031192	1,070536	1,108452	1,422048	1,796884
1,015576	1,031772	1,071996	1,109908	1,428960	1,810272
1,015825	1,032356	1,073468	1,111376	1,435928	1,823772
1,016076	1,032944	1,074952	1,112856	1,442952	1,837384
1,016329	1,033536	1,076448	1,114348	1,450032	1,851104
1,016584	1,034132	1,077956	1,115852	1,457168	1,864932
1,016841	1,034732	1,079476	1,117368	1,464360	1,878872
1,017100	1,035336	1,081008	1,118896	1,471608	1,892924
1,017361	1,035944	1,082552	1,120436	1,478912	1,907088
1,017624	1,036556	1,084108	1,121988	1,486272	1,921364
1,017889	1,037172	1,085676	1,123552	1,493688	1,935752
1,018156	1,037792	1,087256	1,125128	1,501160	1,950252
1,018425	1,038416	1,088848	1,126716	1,508688	1,964864
1,018696	1,039044	1,090452	1,128316	1,516272	1,979584
1,018969	1,039676	1,092068	1,129928	1,523912	1,994412
1,019244	1,040312	1,093696	1,131552	1,531608	2,009352
1,019521	1,040952	1,095336	1,133188	1,539360	2,024404
1,019800	1,041596	1,096988	1,134836	1,547168	2,039568
1,020081	1,042244	1,098652	1,136496	1,555032	2,054844
1,020364	1,042896	1,099928	1,138168	1,562952	2,070232
1,020649	1,043552	1,101216	1,139852	1,570928	2,085732
1,020936	1,044212	1,102516	1,141548	1,578960	2,101344
1,021225	1,044876				

إمتحانات سنوات سابقة

	جامعة جنوب الوادي كلية التجارة بقنا	التاريخ: 2021/05/25 وقت الامتحان : ساعتان	
	رياضيات التمويل والاستثمار		
	الفرقة : الثانية (انتظام – انتساب)		

السؤال الأول (50 درجة)

اختر الاجابه الصحيحه :

- 1- أودع شخص مبلغ 100 جنيه في آخر كل شهرين لمدة سنة ونصف في أحد البنوك التي تحسب فوائد بسيطة بمعدل 5% سنوياً ، وبالتالي فإن جملة ما تكون له في نهاية السنة هو
- أ- 910 ب- 930 ج- 950 د- 940
- شخص يودع مبلغ 100 جنيه في آخر كل 3 شهور وذلك خلال عام 95 ثم زاد المبلغ إلى 200 جنيه خلال عام 1996 ثم زاد إلى 300 جنيه خلال عام 1997، فإذا علمت أن البنك يحسب فوائد بسيطة بمعدل 6% سنوياً فإن :
- 2- جملة دفعات عام 1995 هي :
- أ- 754 ب- 475 ج- 457 د- لا شيء مما سبق
- 3- جملة دفعات عام 1996 هي :
- أ- 860 ب- 870 ج- 890 د- لا شيء مما سبق
- 4- جملة دفعات عام 1997 هي :
- أ- 1227 ب- 1272 ج- 1722 د- 1270
- 5- جملة جميع الدفعات في نهاية عام 1997 هي
- أ- 2550 ب- 2500 ج- 2250 د- لا شيء مما سبق
- 6- جملة مبلغ قدرة 38000 جنية استثمر باحدي البنوك لمدة سنة ونصف السنه وبمعدل فائدة بسيط قدرة 13.6% هو :
- أ- 45257 جنية ب- 45752 جنية ج- 45572 جنية . د- 45725 جنية

7- معدل الخصم البسيط المقابل لمعدل فائدة قدرة 4% سنويا والمدة 20 يوم :

أ- 4.11% ب- 4.5% ج- 3.99% د- 3.92%

8- الكمياله التي تستحق الدفع في 20 مارس من عام 2004 وقد تم خصمها بالبنك في 20 فبراير من

عام 2003 علي اساس معدل خصم بسيط تكون مدة خصم هذه الكمياله :-

أ- 390 يوم ب- 393 يوم ج- 394 يوم د- 395 يوم

9- تقدم احد التجار بسند اذني قيمته الاسمية 5800 جنية لخصمة لدي احد البنوك وذلك في 12 فبراير

من عام 2004 ، فإذا علمت ان تاريخ استحقاق هذا السند 11 مايو من نفس العام وان معدل

الخصم المستخدم هو 6% سنويا ويضاف مهلة للسداد يوما واحدا والعمولة بواقع 1 في الالف

ومصاريف تحصيل (نصف في الالف) بحد ادني 4.2 جنية ، وبالتالي فإن معدل الخصم الاجمالي

الذي يتحمله التاجر هو :

أ – 6.674% ب – 6.764% ج – 6.689% د- لا شئ مما سبق

اقترض شخص مبلغ 7200 جنية بتاريخ 19 فبراير من بنك يحسب فوائد بسيطة بمعدل 4% سنوياً، إذا علمت أن الفائدة التي حصل عليها البنك بلغت 48 جنية.

10- المدة التي فى نهايتها يتم سداد القرض هي:

أ- 50 يوم ب- 40 يوم ج- 60 يوم د- 70 يوم

11- تاريخ سداد القرض هو:

أ- 20 ابريل من نفس السنة ب- 25 ابريل من نفس السنة

ج- 28 ابريل من نفس السنة د- 30 ابريل من نفس السنة

اقترض شخص مبلغ 12000 جنية بمعدل فائدة بسيطة قدره 4% واتفق مع الدائن على سداد أصل القرض في نهاية 40 شهر مع سداد فوائد بصورة دورية في نهاية كل 5 شهور وقد قام المقترض بسداد الثلاث فوائد الدورية الأولى في مواعيدها ولم يستطع سداد باقي الفوائد واتفق مع المقترض على سدادها مع أصل القرض في نهاية مدته. فإذا علمت أن معدل التأخير 6.5% سنوياً وأن المقترض قد استطاع استثمار الفوائد الدورية المسددة بمعدل 8% سنوياً.

12- عدد الفوائد الدورية هي :

أ- 10 ب- 6 ج- 8 د- 12

13- قيمة الفائدة الدورية الواحدة هي :

أ- 300 ب- 100 ج- 400 د- 200

14- فوائد تأخير الفوائد الدورية المتأخره هي :

أ- 45.167 ب- 56.76 ج- 54.167 د- لا شئ مما سبق

15- مجموع الفوائد التي تحملها المدين هي

أ- 1465.16 ب- 1564.16 ج- 1654.16 د- لا شئ مما سبق

16- جملة ما يلتزم به المدين بسداده في نهاية مدة القرض :

أ- 12000 ب- 13054.16 ج- 13045.16 د- لا شئ مما سبق

17- فوائد استثمار الفوائد الدورية المسددة هي :

أ- 100 ب- 110 ج- 130 د- 120

18- مجموع الفوائد التي حققها الدائن :

أ- 1477.16 ب- 1774.16 ج- 1770.16 د- لا شئ مما سبق

19- معدل الاستثمار العام الذي حققه الدائن

أ- 4.43% ب- 5.43% ج- 6.43% د- 3.43%

20- الفائدة البسيطة لمبلغ 2000 جنيه استثمر لمدة 3 سنوات بمعدل فائدة بسيطه ربع سنوي 2% هو

:

أ- 480 ب- 840 ج- 120 د- 360

البنك الاهلي المصري يحسب معدل فائدة مركبة علي الودائع النقدية بواقع 12% سنويا علي ان تضاف الفائدة كل شهر بينما يقوم بنك مصر بإحتساب معدل فائدة مركبة قدرة 12.75% سنويا علي ان تضاف الفائدة كل نصف سنه

21- معدل الفائدة الحقيقي للبنك الاهلي هو :

أ- 12.68% ب- 11.68% ج- 12% د- 10.75%

22- معدل الفائدة الاسمي في بنك مصر هو :

أ- 12% ب- 12.75% ج- 11% د- 11.75%

23- اذا بلغ الخصم التجاري لمدين ما خلال مدة معينة 100 جنية وقد بلغ الخصم الصحيح لنفس الدين خلال نفس المدة 100 جنية ايضا فإن ذلك يعني :

أ – ان معدل الخصم يساوي معدل الفائدة ب – ان معدل الخصم اكبر من معدل الفائدة

ج – ان معدل الخصم اقل من معدل الفائدة د – ان معدل الخصم يختلف عن معدل الفائدة

24- المعدل السنوي المركب الحقيقي المقابل لمعدل سنوي اسمي مركب قدرة 6% بلغ في احد الحالات 6% ايضا وبالتالي فان هذا يعني :

أ – الفوائد كانت تضاف كل فترة اقل من سنه.

ب – الفوائد كانت تضاف كل فترة اكبر من سنه

ج – الفوائد كانت تضاف كل فترة تساوي سنه.

د – لا شئ مما سبق

25- المعدل السنوي الحقيقي المقابل لمعدل سنوي اسمي قدرة 6% والفائدة كانت تضاف في نهاية كل 3 اشهر هو :

أ – 6.136% ب – 5.992% ج – 4.123% د – 6%

السؤال الثاني (50 درجة)

حدد ما اذا كانت كل عبارة من العبارات التالية صحيحة او خاطئة

- 1- القيمة الحالية المحسوبة علي اساس معدل خصم بسيط اكبر من القيمة الحالية المحسوبه علي اساس معدل فائدة بسيطه وذلك في حالة تساوي جميع العوامل المستخدمة في الحساب
- 2- اذا كانت قيمة الخصم التجاري المحسوب علي اساس معدل خصم بسيط لدين ما خلال فترة معينة مساويه لقيمة الخصم الصحيح المحسوب علي اساس معدل فائدة لنفس الدين خلال نفس المدة فان ذلك يعني ان معدل الخصم البسيط المستخدم كان اكبر من معدل الفائدة
- 3- الفائدة البسيطة لمبلغ 2000 جنيه استثمر لمدة 3 سنوات بمعدل فائدة بسيطه ربع سنوي 2% هو 840 جنيه
- 4- جملة مبلغ 6000 جنيه استثمرت في احد البنوك لمدة 9 اشهر بمعدل فائدة بسيطة 4% هي 6157 جنيه

- 5- يجب أن تتبع وحدة زمن المدة وحدة الزمن المحسوب عنها المعدل وذلك في حالتني حساب الفائدة الببسطه والفائدة المركبة
- 6- اذا علمت ان الفرق بين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة يساوي 7 جنية فان الفائدة التجارية تكون قيمتها تساوي 511 جنية
- 7- قيمة الخصم المحسوب علي اساس معدل فائدة ببسطه اقل من الخصم المحسوب علي اساس معدل خصم ببسط وذلك في حالة تساوي جميع العوامل المستخدمة في الحساب
- 8- اودع احد الاشخاص مبلغ 200 جنية في اخر كل شهر من شهور عام 1995 في بنك يحسب فوائد بسيطة بمعدل 4% وبالتالي فان جملة ما تكون لهذا الشخص في نهاية السنة 2452 جنية
- 9- السنة الكبيسة هي تلك التي تقبل القسمة على 4 بدون باقي وهي نفس شهور السنة البسيطة ما عدا شهر فبراير 29 يوم
- 10- الخصم بمعدل فائدة اكبر من الخصم بمعدل خصم وذلك في حالة تساوي جميع العوامل الاخرى
- 11- الخصم التجاري اقل من الخصم الصحيح وذلك في حالة تساوي جميع العوامل الاخرى
- 12- عند حساب المدة بالايام فانه يتم احتساب يوم الايداع ولا يتم احتساب يوم السحب
- 13- الخصم الصحيح هو ذلك الذي يحسب علي اساس ان عدد ايام السنة 365 يوم او 366 يوم
- 14- الفائدة التجارية هي تلك التي تحسب علي اساس ان عدد ايام السنة 360 يوم
- 15- في جميع الحالات يكون المعدل الحقيقي المركب السنوي اكبر من المعدل الاسمي المركب السنوي
- 16- اذا لم يحدد في التمرين نوع الفائدة البسيطة فانه يتم الحل علي اساس ان الفائدة هي فائدة تجارية
- 17- تتناقص القيمة الحالية لوحدة النقود بزيادة قيمة معدل الفائدة مع ثبات العوامل الاخرى
- 18- الفائدة الصحيحة هي تلك التي يتم احتسابها علي اساس ان عدد ايام السنة 360 يوم
- 19- معدل الخصم المركب السنوي المقابل لمعدل فائدة مركب سنوي قدرة 8% هو 7.5% تقريبا
- 20- الفائدة التجارية اكبر من الفائدة الصحيحة وذلك في حالة تساوي جميع العوامل الاخرى
- 21- تاجر مدين بكمبيالة قيمتها 3600 جنية وتستحق بعد 10 شهور فإذا علمت أن معدل الخصم البسيط هو 5% سنوياً وبالتالي فإن القيمة الحالية التي يسدها التاجر الان هي 3540 جنية
- 22- البنك الاهلي المصري يحسب معدل فائدة مركبة علي الودائع النقدية بواقع 12% سنوياً علي ان تضاف الفائدة كل شهر بينما يقوم بنك مصر باحتساب معدل فائدة مركبة قدرة 12.75% سنوياً علي

ان تضاف الفائدة كل نصف سنه فاذا علمت ان المعدل الحقيقي فى البنك الاهلى هو 12.68%
وبالتالى فان البنك الاهلي افضل من بنك مصر بالنسبة للعميل

23- الفائدة البسيطة لمبلغ تساوي حاصل ضرب اصل المبلغ فى مدته فى معدل الفائدة .

24- جملة مبلغ بفائدة بسيطه تساوي اصل المبلغ مضافا اليه قيمة الفائدة

25- توجد علاقة معينة بين الفائدة البسيطة التجارية والفائدة البسيطة الصحيحه

مع اطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق

أ.د/ عطية جلول

	التاريخ: 2022/6/6 وقت الامتحان : 3 ساعات	جامعة جنوب الوادي كلية التجارة بقنا
	رياضيات التمويل والاستثمار	
	الفرقة : الثانية (انتظام – انتساب)	

السؤال الأول (60 درجة)

اختر الاجابه الصحيحه :

تقدم احد التجار بسند ادني قيمته الاسمية 5800 جنية لخصمة لدي احد البنوك وذلك في 12 فبراير من عام 2020 ، فإذا علمت ان تاريخ استحقاق هذا السند 11 مايو من نفس العام وان معدل الخصم المستخدم هو 6% سنويا ويضاف مهلة للسداد يوما واحدا والعمولة بواقع 1 في الالف ومصاريف تحصيل (نصف في الالف) بحد ادني 4.2 جنية ، وبالتالي فان :

- 1- مدة الخصم هي:
 أ-86 يوم ب-90 يوم ج-94 يوم د-لا شئ مما سبق
- 2- قيمة الخصم الاجمالي هي:
 أ-97 ب-95 ج-93 د- لا شئ مما سبق
- 3- معدل الخصم الاجمالي هو:
 أ – 6.674% ب – 6.764% ج – 6.689% د- لا شئ مما سبق

اقترض شخص مبلغ 12000 جنيه بمعدل فائدة بسيطة قدره 4% واتفق مع الدائن على سداد أصل القرض في نهاية 40 شهر مع سداد فوائد بصورة دورية في نهاية كل 5 شهور وقد قام المقترض بسداد الثلاث فوائد الدورية الأولى في مواعيدها ولم يستطع سداد باقي الفوائد واتفق مع المقترض على سدادها مع أصل القرض في نهاية مدته. فإذا علمت أن معدل التأخير 6.5% سنوياً وأن المقترض قد استطاع استثمار الفوائد الدورية المسددة بمعدل 8% سنوياً.

- 4- فوائد تأخير الفوائد الدورية المتأخره هي :
 أ- 45.167 ب- 56.167 ج- 54.167 د- لا شئ مما سبق
- 5- مجموع الفوائد التي تحملها المدين هي
 أ- 1465.16 ب- 1564.16 ج- 1654.16 د- لا شئ مما سبق
- 6- جملة ما يلتزم به المدين بسداده في نهاية مدة القرض :
 أ- 12000 ب- 13054.16 ج- 13045.16 د- لا شئ مما سبق
- 7- فوائد استثمار الفوائد الدورية المسددة هي :
 أ- 100 ب- 110 ج- 130 د- 120
- 8- مجموع الفوائد التي حققها الدائن :

ب- 1477.16 ب- 1774.16 ج- 1770.16 د- لا شئ مما سبق
9- معدل الاستثمار العام الذي حققه الدائن:

ب- 4.43% ب- 5.43% ج- 6.43% د- 3.43%
10- الفائدة البسيطة لمبلغ 1000 جنية استثمر لمدة 5 سنوات بمعدل فائدة بسيطه نصف سنوي 6% هي :

ب- 600 ب- 300 ج- 400 د- 500

البنك الاهلي المصري يحسب معدل فائدة مركبة علي الودائع النقدية بواقع 12% سنويا علي ان تضاف الفائدة كل شهر وبالتالي فان:

11- معدل الفائدة الحقيقي للبنك الاهلي هو :

ب- 12.68% ب- 11.68% ج- 12% د- 10.75%

شخص يودع مبلغ 100 جنية في آخر كل 3 شهور وذلك خلال عام 2005 ثم زاد المبلغ إلى 200 جنية خلال عام 2006 ثم زاد إلى 300 جنية خلال عام 2007، فإذا علمت أن البنك يحسب فوائد بسيطة بمعدل 6% سنوياً فإن :

12- جملة دفعات عام 2005 هي :

ب- 754 ب- 475 ج- 457 د- لا شئ مما سبق

13- جملة دفعات عام 2006 هي :

ب- 860 ب- 870 ج- 890 د- لا شئ مما سبق

14- جملة دفعات عام 2007 هي :

ب- 1227 ب- 1272 ج- 1722 د- 1270

15- جملة جميع الدفعات في نهاية عام 2007 هي

ب- 2550 ب- 2500 ج- 2250 د- لا شئ مما سبق

16- جملة مبلغ قدرة 5000 جنية استثمر باحدي البنوك لمدة 3 سنوات بمعدل فائدة بسيط قدرة 12% هي :

أ- 8600 جنية ب- 6800 جنية ج- 6000 جنية . د- 4800 جنية

17- معدل الخصم البسيط المقابل لمعدل فائدة قدرة 4% سنويا والمدة 20 يوم :

أ- 4.11% ب- 4.5% ج- 3.99% د- 3.92%

18- الكمبياله التي تستحق الدفع في 20 مارس من عام 2004 وقد تم خصمها بالبنك في 20 فبراير من عام 2003 علي اساس معدل خصم بسيط تكون مدة خصم هذه الكمبياله :-

أ- 390 يوم ب- 393 يوم ج- 394 يوم د- 395 يوم

19- جملة 3000 جنية استثمرت بمعدل فائدة مركبة 6% لمدة 4 سنوات اذا علمت ان الفائدة كانت تضاف مرتين في السنة هي:

أ- 3800.31 ب- 3080 ج- 3831.8 د- 2800.31

20- المعدل الحقيقي المقابل لمعدل اسمي سنوي قدره 12% وتدفع الفائدة في نهاية كل 3 شهور هو:

أ- 11.33% ب- 12.55% ج- 11.55% د- 12%

21- شخص مدين ببلغ 10000 جنية تستحق بعد 10 سنوات. احسب القيمة التي يجب أن يسدها المدين سداداً لهذا الدين الآن وذلك بمعدل فائدة مركبة 12%:

أ- 10000 جنية ب- 4219.73 ج- 3219.73 د- لا شئ مما سبق

22- معدل الخصم المركب المقابل لمعدل فائدة مركبة 15% سنوياً هو:

أ- 16% ب- 17% ج- 15.6% د- 13.04%

23- لدى أحد التجار كمبياله قيمتها الاسمية 7000 جنية وقد قام بخصم هذه الكمبياله لدى أحد البنوك على أساس معدل فائدة مركب قدره 8% سنوياً والخصم يتم كل ثلاث شهور ، لذا فان المبلغ الذي يتسلمه هذا التاجر من البنك قبل ميعاد استحقاق الكمبياله بمدة قدرها خمس سنوات وشهرين هو:

أ- 4624.466 ب- 4642.466 ج- 6424.46 د- لا شئ مما سبق

24- جملة دفعة عادية ربع سنوية مقدارها 500 جنية إذا كانت المدة 5 سنوات ومعدل الفائدة المركبة 3% ربع سنويه هي:

أ- 13543.185 ب- 13435.185 ج- 14435.185 د- لا شئ مما سبق

25- ثمن شراء مزرعة تغل إيراد قدره 10000 جنية في نهاية كل سنة إذا علمت أن معدل الفائدة المركب 10% سنوياً هو:

أ- 80000 ب- 90000 ج- 120000 د- 100000

26- تاجر مدين بمبلغ 1000 جنية يستحق بعد سنتين – 2000 جنية يستحق بعد 4 سنوات – 3000 جنية يستحق بعد 6 سنوات وقد أراد استبدال جميع الديون السابقة بدين واحد قيمته الاسمية تساوي مجموع الديون السابقة فان المدة المكافأه بالطريقة التقريبية هي:

أ- 4.67 ب- 4.76 ج- 6 د- 5.67

27- اشترى أحد الأشخاص عقار وأتفق على سداد ثمنه على خمس دفعات سنوية عادية قيمة كل منهما 1000 جنية بحيث يبدأ السداد بعد فترة تأجيل قدرها 3 سنوات- أوجد ثمن شراء العقار إذا علمت أن معدل الفائدة المركب 5% سنوياً.

أ- 3993.965 ب- 3739.965 ج- 3937.965 د- لا شئ مما سبق

28- أوجد جملة دفعة فورية نصف سنوية مقدارها 200 جنية إذا كانت المدة 4 سنوات ومعدل الفائدة المركبة 3% نصف سنوي.

أ- 1381.821 ب- 1883.821 ج- 1831.821 د- لا شئ مما سبق

29- اوجد ثمن شراء مزرعة تغل إيراد سنوي قدرة 1000 جنية بحيث يبدأ الايراد بعد 3 سنوات اذا علمت ان معدل الفائدة المركب 5% سنويا

أ- 17267.752 ب- 17276.752 ج- 17672.752 د- لا شئ مما سبق

30- شخص مدين بمبلغ 11200 جنية ويستحق السداد بعد ثلاث سنوات وقد أراد هذا الشخص سداد قيمة هذا الدين فوراً. أوجد مقدار الخصم الذي سيحصل عليه إذا علمت بأن معدل الفائدة البسيطة 4% سنويا

أ- 1200 ب- 1120 ج- 1020 د- لا شئ مما سبق

السؤال الثاني (40 درجة)

حدد ما اذا كانت كل عبارة من العبارات التالية صحيحة او خاطئة

1- في أول يناير 2022 كان أحد التجار مدينياً بكميالة قيمتها الاسمية 5000 جنية تستحق بعد 10 شهور وفي نفس هذا التاريخ تلقي عرض من الدائن يقوم بموجبه التاجر يدفع 480 ج في نهاية كل شهر ولمدة عشر شهور بدلاً من سداد قيمة الكميالة مره واحده في ميعاد استحقاقها فإذا علمت أن التاجر يمكنه

- استثمار أمواله بمعدل فائدة 12% سنوي وتضاف الفائدة كل شهر لذا فان التاجر يقبل هذا العرض من الدائن .
- 2- اذا كانت قيمة الخصم التجاري المحسوب علي اساس معدل خصم بسيط لدين ما خلال فترة معينة مساوية لقيمة الخصم الصحيح المحسوب علي اساس معدل فائدة لنفس الدين خلال نفس المدة فان ذلك يعني ان معدل الخصم البسيط المستخدم كان اقل من معدل الفائدة .
- 3- الفائدة البسيطة لمبلغ 2000 جنيه استثمر لمدة 3 سنوات بمعدل فائدة بسيطه ربع سنوي 2% هو 840 جنيه .
- 4- جملة مبلغ 6000 جنيه استثمرت في احد البنوك لمدة 9 اشهر بمعدل فائدة بسيطة 8% هي 6157 جنيه .
- 5- يجب أن تتبع وحدة زمن المدة وحدة الزمن المحسوب عنها المعدل وذلك في حالتها حساب الفائدة البسيطة والفائدة المركبة .
- 6- اذا علمت ان الفرق بين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة يساوي 7 جنية فان الفائدة التجارية تكون قيمتها تساوي 611 جنية .
- 7- قيمة الخصم المحسوب علي اساس معدل فائدة بسيطه اقل من الخصم المحسوب علي اساس معدل خصم بسيط وذلك في حالة تساوي جميع العوامل المستخدمة في الحساب .
- 8- اودع شخص مبلغ 200 جنية في اخر كل شهر من شهر عام 2005 في بنك يحسب فوائد بسيطة بمعدل 4% وبالتالي فان جملة ما تكون لهذا الشخص في نهاية السنة 2452 جنية .
- 9- جملة 3000 جنيه تستثمر لمدة 4 سنوات إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة 6% سنوياً والفائدة تضاف في نهاية كل 6 شهور هي 3800.31 .
- 10- شخص مدين بمبلغ 10000 جنيه تستحق بعد 10 سنوات فاذا علمت ان معدل الفائدة المركب المستخدم 12% فان القيمة التي يجب أن يسدها المدين سداداً لهذا الدين الآن هي 4219.73
- 11- الخصم بمعدل فائدة اكبر من الخصم بمعدل خصم وذلك في حالة تساوي جميع العوامل الاخرى .
- 12- الخصم التجاري اقل من الخصم الصحيح وذلك في حالة تساوي جميع العوامل الاخرى .
- 13- عند حساب المدة بالايام فانه يتم احتساب يوم الايداع ولا يتم احتساب يوم السحب .
- 14- الخصم الصحيح هو ذلك الذي يحسب علي اساس ان عدد ايام السنة 360 يوم .
- 15- جملة دفعة عادية ربع سنوية مقدارها 100 جنيه إذا كانت المدة 5 سنوات ومعدل الفائدة المركبة 3% ربع سنوي هي : 2687.037
- 16- جملة دفعة عادية ربع سنوية مقدارها 100 جنيه إذا كان أول مبلغ من مبالغها يستحق بعد مرور 4 سنوات وأن مدة دفع الدفعة هو 5 سنوات ومعدل الفائدة المركب 3% ربع سنويه هي. 2678.037
- 17- عند حساب جملة دفعة مؤجلة بفائدة مركبة فانه لا تأثير لفترة التاجيل على الحل
- 18- تتناقص القيمة الحالية لوحدة النقود بزيادة قيمة معدل الفائدة مع ثبات العوامل الاخرى
- 19- معدل الفائدة المركب السنوي المقابل لمعدل خصم مركب سنوي قدرة 7.5% هو 8% تقريبا .
- 20- القيمة الحالية المحسوبة علي اساس معدل خصم بسيط اكبر من القيمة الحالية المحسوبة علي اساس معدل فائدة وذلك في حالة تساوي جميع العوامل المستخدمة في الحساب .

ملاحظات

$$2.723248 \sqrt[3]{\%5} \text{ د } 3$$

$$10.159106 \sqrt[3]{\%3} \text{ ج } 9$$

$$10.46221254 \sqrt[3]{\%1} \text{ ج } 10$$

$$1.26677 = {}^8(\%3+1)$$

$$0.321973 = \%12^{10} \text{ ح } 10$$

$$0.6739713 = \%2^{20} \text{ ح } 20$$

$$26.87037 \sqrt[3]{\%3} \text{ ج } 20$$

$$6.463213 \sqrt[3]{\%5} \text{ د } 8$$

مع اطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

أ.د / عطية جلول

المراجع

المراجع العربية

د. عطية محمد جلول , رياضيات التمويل والاستثمار وتطبيقاتها، جامعة جنوب الوادي, بدون ناشر، 2007

د. مصطفى عبدالغنى احمد ، رياضيات التمويل والاستثمار، مكتبة عين شمس، القاهرة، 1999

المراجع الاجنبية

Biehler,j.T.(2008)The mathematics of money. Irwin: The McGraw-Hill Companies, Inc.

Shao & Shao(1990) Mathematics for Management and Finance. Ohio: South Western Publishing Co.

Helen Cissell and David C (1990) Mathematics of Finance. Boston: Houghton Mifflin Co