محاضـــــــرات

فى

الإقتصاد القياسى التطبيقى

إعداد

دكتـــــور

موافى رمضان موافى

قسم الاقتصاد – كلية التجارة

جامعة جنوب الوادى

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

الْحَمْدُ لِلَّهِ الَّذِي أَنْزَلَ عَلَىٰ عَبْدِهِ الْكِتَابَ وَلَمْ يَجْعَلْ لَهُ عِوَجًا ۜ

صدق الله العظيم

(سورة الكهف : الآية ١)

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة :

إن الهدف من مقرر الاقتصاد القياسى هو توضيح كيفية استخدام أدوات التحليل الاحصائى في مجال الاقتصاد. اي استخدام الوسائل والأدوات التي يستخدمها رجال الإحصاء من موضوعات الارتباط والانحدار وغيرها للمساعدة في حل المشاكل الاقتصادية التى تواجه متخذى القرار.

ولذا، فسوف نحاول في هذه المادة التعرف على ماهية الاقتصاد القياسى والتوصل إلى أن دراسة هذه المادة هى محطة هامة , ونقطة تحول لفهم أعمق وأوسع لما درسه الطالب من مقاييس لآداء الاقتصاد.

وبعد , فإننا نرجوا من الله أن نكون قد وفقنا فى إعداد هذه المذكرة آملين أن ينتفع بها أبناءنا الطلاب , وأن بستزيدوا بها علماً ومعرفةً .

مع أطيب التمنيات

قهرست الموضوعات

الفصل الأول

طبيعة علم الاقتصاد القياسي

الهدف من دراسة الفصل

بنهاية الدراسة لهذا الفصل يكون الدارس قادر على الالمام بالمفاهيم التالية:

١ـ تعريف الاقتصاد القياسي واهدافه

٢ـ تعريف النموذج الاقتصادي

٣ـ مكونات النموذج ومراحل اعداده

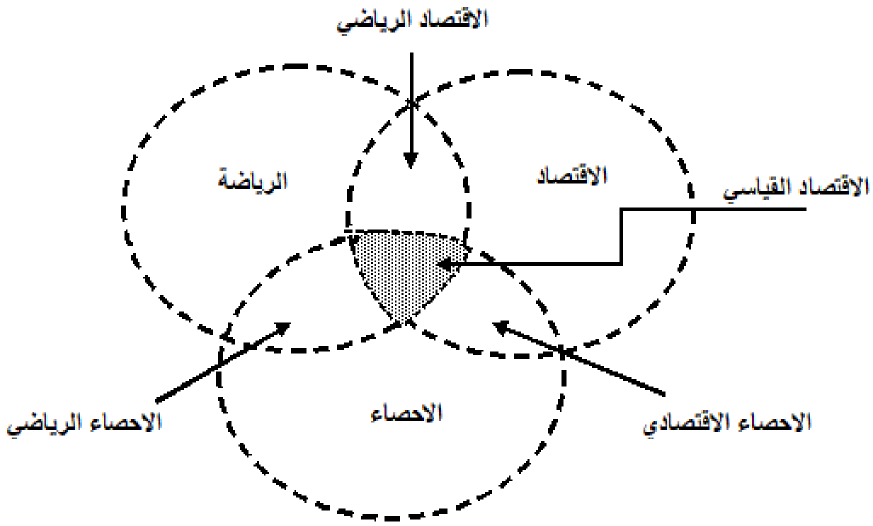
الفصل الأول

طبيعة علم الاقتصاد القياسى

- **تعريف الاقتصاد القياسي: Definition of Econometric**

كلمة إقتصاد قياسي بالإنجليزية (Econometrics) : مكونة من مقطعين : ECONOمشتقة من إقتصاد و METRICS مشتقة من كلمة قياس.

والاقتصاد القياسي Econometrics فرع من فروع علم الاقتصاد الذي يختص بالقياس (التقدير) الكمي للعلاقة بين المتغيرات مستخدما النظرية الاقتصادية والرياضيات والأساليب الاحصائية ، بهدف إختبار النظريات الاقتصادية المختلفة من ناحية ومساعدة رجال الأعمال والحكومات في إتخاذ القرارات ووضع السياسات من ناحية أخري .



أي أن الاقتصاد القياسي يهتم بتحليل الظواهر الاقتصادية الواقعية تحليلاً كمياً ، وذلك باستخدام أساليب الاستقراء الإحصائي المناسبة. أي إنه علم استعمال طرائق الاستقراء والاستدلال الإحصائي لكشف القوانين الاقتصادية الموضوعية وتحديد فعلها تحديداً كمياً.

فالتحليل الكمي للظواهر الاقتصادية هو محاولة للتحقق من العلاقات الاقتصادية والتأكد من منطقيتها في تمثيل الواقع المعقد الذي تعبر عنه النظرية الاقتصادية في صيغة فروض . ويعتمد الاقتصاد القياسي في قياس العلاقات الاقتصادية وتحليلها على دمج النظرية الاقتصادية والرياضيات والأساليب الإحصائية في نموذج متكامل ، وذلك بهدف تقويم معالم ذلك النموذج ثم إختبار الفروض حول ظاهرة إقتصادية معينة ، وأخيراً التنبؤ بقيم تلك الظاهرة.

- علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الاخرى:

من الواضح أن علم الاقتصاد القياسي يعتمد على ثلاثة علوم هي:

١. علم الاقتصاد: وهذا أمر طبيعي ، إذ إن الاقتصاد القياسي هو أحد فروع هذا العلم. فالنظرية الاقتصادية تشير عموماً إلى وجود علاقات معينة بين متغيرات إقتصادية كالعلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة معينة وسعرها وأسعار السلع البديلة مثلاً ، وتحتاج عملية قياس تلك العلاقات إلى إختيار نماذج قياسية لتمثيلها.

٢. الرياضيات بما توفره من نماذج رياضية يختار الاقتصاد القياسي ما يناسب منها وفق أسس معينة للوصول إلى نموذج لتمثيل العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية المدروسة . ومن الطبيعي أن يكون بعض تلك النماذج أقل جودة في التعبير عن الواقع المعقد من بعضها الآخر.

٣. الإحصاء بما يوفره من أدوات أساسية في القياس كالتي تتعلق بطرائق الاستدلال الإحصائي مثلاً.

إن علم الاقتصاد القياسي وفقاً لتعريف عدد من الأعلام الرواد في هذا المجال كلورنس كلاين L.Klein وإدموند مالينفو E.Malinvaud ، هو علم إستعمال طرائق الاستقراء والاستدلال الإحصائيين ، ولاسيما نظريات الاحتمال والتنبؤ والتقدير.

- تاريخ الاقتصاد القياسي

يعدّ علم الاقتصاد القياسي علماً حديثاً نسبياً إذا ما قورن بالعلوم الاقتصادية الأخرى ، فعلى الرغم من المحاولات التي ظهرت في القرن التاسع عشر والتي كانت ذات طابع إقتصادي قياسي ، كعمل الإحصائي الألماني أرنست إنغل (١٨٢١-١٨٩٦) Ernest Engel الذي وضع قوانينه الخاصة بالدخل والاستهلاك في ضوء بيانات ميزانية الأسرة ، وإستعمل مصطلح الاقتصاد القياسي أول مرة عام ١٩٢٦ من قبل الاقتصادي النروجي فريش Frisch.

في عام ١٩١٩ نشر الاقتصادي الأمريكي بيرسون **W.M.Pearson** طريقته الخاصة بتحليل الدورات الاقتصادية التي طبقت في تحليل هذه الدورات في عدد من البلدان الرأسمالية ، كما طبقت في الاتحاد السوفييتي سابقاً أيضاً في إنجاز عدد من الأبحاث التي وضعت في خدمة سياسة الدولة السوفييتية في مرحلة الانتقال من الرأسمالية إلى الاشتراكية. وتعد محاولات تقدير دوال منحنيات العرض والطلب للمنتجات الزراعية في الولايات المتحدة الأمريكية في مطلع الثلاثينات من القرن العشرين محاولات أولى أيضاً في مجال تطبيق مبادئ الاقتصاد القياسي.

أسس بعض واضعي الفكر الاقتصادي الأوائل من أمثال مور **H.More** ، وشولتز **H.Schultz** ، وفريش وستون **R.Stone** الجمعية الدولية للاقتصاد القياسي **International Econometrics Association** في عام ١٩٣٠. ثم توسع تطبيق مبادئ الاقتصاد القياسي بعد الحرب العالمية الثانية ، وأخذت أنشطة هذا العلم تشمل تقديرات لمعالم أو لثوابت نماذج اقتصادية مؤلفة من عدة معادلات. ومنذ ذلك التاريخ والاقتصاد القياسي يستخدم أداة فعالة في حل المعضلات الاقتصادية وفي عمليات التخطيط الاقتصادي . وبدأ تطبيق مبادئ هذا العلم بالانتشار حديثاً في بلدان العالم الثالث. وساعد على إنتشار طرائق الاقتصاد القياسي عاملان إثنان هما:

١. توافر الإحصاءات الاقتصادية بكميات أكبر وبدقة أفضل. وهي تؤلف المادة الأولية للبحث العلمي في الاقتصاد القياسي.

٢. التطور الكبير والسريع في مجال الحاسبات الإلكترونية الذي مكن من التوسع في النماذج الاقتصادية لتشمل عدداً كبيراً من المتغيرات بعد أن كان ذلك مقتصراً على التحليل النظري. فقد أصبح بالإمكان اليوم تقدير ثوابت نموذج مؤلف من عدة مئات من المعادلات وإختبار صلاحية النماذج الاقتصادية النظرية ومعرفة مدى ملاءمتها للواقع المعقد.

- **أهداف الاقتصاد القياسي: The Goals of Econometrics**

يهدف الاقتصاد القياسي إلي تحقيق ثلاثة أهداف رئيسية هي علي النحو التالي:

١. إختبار النظريات الاقتصادية المختلفة .

٢. مساعدة رجال الاعمال والحكومات في إتخاذ القرارات.

٣. مساعدة رجال الأعمال والحكومات في وضع السياسات.

- **مهام الاقتصاد القياسي**

تتمثل مهام الاقتصاد القياسي عامة بتحقيق ما يلي:

١. تحديد النموذج الرياضي المناسب لتمثيل العلاقة أو العلاقات القائمة بين المتغيرات الاقتصادية المدروسة ، إذ يجب على الباحث في هذه المرحلة وضع فروض النظرية الاقتصادية في نموذج رياضي عشوائي.

٢. تقدير معاملات أو ثوابت النموذج الرياضي المطبق. تبدأ هذه المهمة بجمع الإحصاءات الاقتصادية المناسبة بالدقة المطلوبة حول ظاهرة أو ظواهر يراد دراستها وتنتهي باستخدام الأساليب الإحصائية المناسبة لتقدير معالم النموذج الذي إختاره الباحث لتمثيل العلاقات بين المتغيرات.

٣. إختبار النموذج الرياضي العشوائي المطبق لمعرفة ما إذا كان يمثل فعلاً حقيقة الواقع المدروس أم أنه يجب على الباحث اختيار نموذج آخر أكثر واقعية. ويعتمد الباحث في اختيار النموذج المناسب على معايير اقتصادية، إذ من المفترض أن تنسجم قيم المعاملات المقررة في النموذج في طبيعتها وقيمها النسبية مع ما هو متوقع في إطار النظرية والفروض الاقتصادية التي تحكم الظواهر المدروسة. وكذلك من اختبارات فروض النموذج نفسها، ولاسيما تلك المتصلة بالحد العشوائي لمعرفة مدى انسجامها مع الواقع المدروس.

- **تطبيقات الاقتصاد القياسي:**

يعتبر مجال تطبيق الاقتصاد القياسي واسعًا جدًا حيث يشمل كافة الظواهر الاقتصادية:

- على مستوى الاقتصاد الجزئي: حيث يمكن إستخدام تطبيقاته لتحديد دوال الانتاج والتكاليف على مستوى المنشاة وكافة إشتقاقاتها مثل دوال الناتج المتوسط والناتج الحدي والتكلفة المتوسطة والحدية. وكذلك يقيس تاثير العوامل المؤثرة على الانتاج كميًا، ويحدد الحدود المثلى من كل عامل التي يجب إدخالها في العملية الانتاجية ، ويحدد التوليفة المثلى من العوامل مجتمعة التي تحقق أفضل عائدية.

- على مستوى الاقتصاد الكلي: يمكن باستخدام النماذج القياسية تقدير دوال الاستهلاك والطلب للسلع المختلفة على المستوى الكلي. وكذلك دوال الانتاج بصيغها غير الخطية المختلفة . كما يمكن بناء نماذج قياسية (متعددة المعادلات) توصف الاقتصاد ككل وتتضمن دوال الدخل القومي والاستثمار والاستخدام والاستهلاك والتجارة الخارجية (الصادرات والواردات).

- ويمكن إستخدام تطبيقات الاقتصاد القياسي في بعض الدراسات الاجتماعية.

- **إستخدام الاقتصاد القياسي:**

تطور إستعمال الاقتصاد القياسي مع تطور العلم نفسه ومع تغير المشكلات الاقتصادية. وبوجه عام فإن مجالات تطبيق طرق الاقتصاد القياسي هي:

١. تحليل الدورات الاقتصادية التي تعرضت لها البلدان الرأسمالية ، وخاصة الولايات المتحدة في مطلع القرن العشرين، بهدف التنبؤ بمواعيدها والتصدي للأزمات الاقتصادية ومعالجتها أو التخفيف من حدتها قبل حدوثها وتقليص الخسائر الناجمة عنها. وكانت جامعة هارفرد المركز الأول لهذا النوع من الأبحاث التي قلت أهميتها إثر عجزها عن التنبؤ بحدوث الأزمة الاقتصادية الكبرى عام ١٩٢٩.

٢. أبحاث السوق وتحديد مرونة الطلب والعرض ، إذ من الثابت عموماً أنّ هناك علاقة عكسية بين سعر المنتج والكمية المطلوبة منه. ومن المهم عند المنتجين معرفة مدى أثر تغيير محدد في سعر السلعة في الكمية المطلوبة منها. وعلى صعيد أجهزة الدولة المسؤولة عن تخطيط عملية التنمية فإن هذا النوع من الأبحاث ذو أهمية خاصة، إذ إن السياسات السعرية تؤلف أدوات لتوجيه أنماط الإنتاج والاستهلاك باتجاهات مرغوب فيها، مما يحتم ضرورة تعرُّف فعالية هذه الأدوات قبل استعمالها. ففي المجتمعات الاشتراكية مثلاً، يتطلب التخطيط الفعال للاستهلاك الفردي تعرُّف مرونات الطلب بالنسبة إلى الدخل والأسعار، لكي يستطيع المخطط تعرُّف الطلب المستقبلي في ضوء التطور المرسوم للدخول والأسعار المتوقعة للسلع وبدائلها.

٣. دراسة مستويات الإنتاج وعلاقتها بالتكلفة ، وهي دراسات ذات أهمية في مسائل تخطيط الإنتاج على صعيد الوحدات والقطاعات الإنتاجية. إذ تبين هذه الدراسات الأهمية النسبية لكل عامل من عوامل الإنتاج في العملية الإنتاجية على صعيد المؤسسة وأهميته في النمو الاقتصادي على مستوى القطاع والمجتمع. أي تحديد مصادر النمو الاقتصادي في المجتمع ودور التطور التقني في ذلك.

٤. نظرية البرمجة التي تطبق تطبيقاً واسعاً على صعيد الوحدات الإنتاجية في البلدان الرأسمالية والاشتراكية وفي تخطيط الاقتصاد الاشتراكي الشامل. وفي إطار هذه النظرية يتم تحليل النشاطات الاقتصادية المتداخلة بهدف ضمان التوازن بين جميع الوحدات المستقلة المساهمة في العمليات الإنتاجية المترابطة.

- **الاقتصاد القياسي والنماذج الرياضية:**

النموذج الاقتصادي هو تبسيط رياضي لحالة واقعية معقدة في المجتمع يفترض أن يعكس حقيقة العلاقات القائمة بين المتغيرات الاقتصادية الداخلة فيه. ويتوقف عدد هذه العلاقات على الأهداف المتوخاة من النموذج وعلى درجة التفصيل المرغوب في الحصول عليها. وتشترك النماذج الاقتصادية عامة بخصائص معينة منها:

أ. الافتراض أن سلوك المتغيرات الاقتصادية يتحدد بوساطة مجموعة معادلات تعرف بالمعادلات المتزامنة simultaneous equations.

ب. الافتراض أن النموذج المقترح تطبيقه يؤلف أكثر من مجرد تبسيط رياضي لحالة معقدة في الواقع.

ج. إفتراض أن يساعد فهم النموذج المطبق على فهم سلوك متغيرات النموذج في المستقبل. بمعنى أنه يساعد على إجراء التنبؤات المستقبلية حول مستويات تلك المتغيرات.

وتقسم النماذج الاقتصادية الرياضية إلى:

١. النموذج الخطي البسيط:

يعدّ النموذج الخطي البسيط أبسط أشكال النماذج الرياضية، فهو يتضمن متغيرين فقط أحدهما متغير تفسيري ويرمز له عادة بالرمز X، والثاني متغير تابع ويرمز له بالرمز Y. كما في النموذج ذي الرقم (١):

$$Y_i=A+BX_i+U_i \quad (1)$$

إذ إن (i) وهو الجنيب، يعبر عن رقم المشاهدة في المجتمع (i=1,2,3,...N) أو في العينة (i=1,2,3,...n)، وإن N و n تمثلان عدد وحدات المجتمع أو العينة على التوالي في الظاهرة المدروسة.

في هذا النموذج الخطي البسيط يمكن الافتراض، مثلاً، أن X_i تمثل الدخل التصرفي للأسرة (i) في حين تمثل Y_i الإنفاق الاستهلاكي الإجمالي لهذه الأسرة. أما A و B فهما معلمان أو ثابتان يمثل الأول متوسط مستوى الإنفاق الاستهلاكي عندما يكون الدخل التصرفي صفراً، ويمثل الثاني متوسط مقدار التأثير في Y عندما تتغير X بمقدار وحدة واحدة.

وأخيراً يعرف U_i بحد الخطأ أو المتغير العشوائي الذي يأخذ قيمة موجبة لدى أسرة تنفق أكثر من متوسط إنفاق الأسر المماثلة لها في الدخل وقيمة سالبة عند إنفاقها أقل من ذلك المتوسط وقيمة الصفر إذا ساوى إنفاقها متوسط إنفاق الأسر المماثلة لها في مستوى الدخل. وتبقى القيمة المتوقعة لهذا المتغير العشوائي ويرمز لها بالرمز $E(U_i)$ مساوية الصفر دائماً.

إن إدخال المتغير العشوائي U_i في النموذج الاقتصادي له عدة مسوغات أهمها:

أ. هناك الكثير من المتغيرات التي تؤثر في إنفاق الأسرة الاستهلاكي إلى جانب الدخل التصرفي في مثالنا هذا. وقد يتعذر قياس هذه المتغيرات أو ربما يحتاج ذلك إلى الكثير من الجهد والوقت والمال. فعلى سبيل المثال، إن حجم الأسرة ومكان إقامتها (مدينة أو قرية) وتركيبها النوعي وحساب أعمار أفرادها ومستواهم الثقافي، وغير ذلك كلها عوامل تؤثر في مستوى إنفاقها الاستهلاكي إلى جانب الدخل التصرفي. وقد يكون تأثير هذه المتغيرات المحذوفة في المتغير التابع موجباً أو سالباً إلا أنها في المحصلة تأثيرات يفترض أنها ثانوية يعكسها حد الخطأ.

ب. من المتعذر التنبؤ بدقة باستجابة الأفراد للتغيرات التي تطرأ على دخولهم. فإذا تضاعف دخل الأسرة مثلاً فإن التنبؤ بتغير مستوى إنفاقها الاستهلاكي وتركيبه بدقة أمر في غاية الصعوبة. ثم إن حد الخطأ يفترض فيه أن يعكس أخطاء التنبؤ هذه.

ج. أخطاء قياس متغيرات العلاقة الحقيقية في المجتمع. إذ لابد من ارتكاب أخطاء معينة في قياس قيم المتغيرات الاقتصادية في المسوح الإحصائية الميدانية. وتظهر تأثيرات أخطاء القياس هذه في المتغير العشوائي أيضاً.

ومع ذلك فإن إدخال المتغير العشوائي U_i في النموذج الاقتصادي يقتضي وضع بعض الافتراضات التي تتعلق بوسطه الحسابي (أو قيمته المتوقعة) وتباينه وتغاير قيمه المختلفة فيما بينها وتغاير قيمه المختلفة مع قيم المتغير (أو المتغيرات) التفسيري في النموذج.

٢. النموذج الخطي المتعدد المتغيرات التفسيرية:

إن الحالة التي هي أكثر شيوعاً في الاقتصاد أن يكون المتغير التابع Y تابعاً لعدد من المتغيرات التفسيرية لا لمتغير واحد. وهذه هي حال العلاقة ذات الرقم (٢) التي يطلق عليها علاقة الانحدار الخطي المتعدد.

$$Y_i=A+BX_i+CZ_i+U_i \quad (2)$$

إن Y_i في هذه العلاقة التي يفترض أنها تمثل كما في السابق الإنفاق الاستهلاكي الإجمالي للأسرة il ، تابعة ليس فقط للدخل التصرفي X_i لهذه الأسرة وإنما لمتغير آخر Z_i وهو عدد أفراد هذه الأسرة مثلاً. وقد يزيد عدد المتغيرات التفسيرية في النموذج على إثنين بحسب الظاهرة المدروسة وعلاقتها بالظواهر الأخرى.

إن الميزة الأساسية لعلاقات الانحدار الخطي المتعددة هي أنها تسمح بأن يعزل على حدة تأثير كل متغير تفسيري في النموذج. فعلى سبيل الاستئناس، تمثل B في النموذج ذي الرقم (٢) متوسط مقدار التأثير في Y عندما تتغير X بمقدار وحدة واحدة مع بقاء المتغير Z على مستواه. كذلك تمثل C متوسط مقدار التأثير فيY عندما تتغير Z بمقدار وحدة واحدة مع بقاء X على مستواه . وقد يكون التأثير موجباً أو سالباً بحسب طبيعة العلاقة بين المتغير التابع وكل من المتغيرات التفسيرية . وتدل الإشارة الموجبة (+) على العلاقة الطردية بين المتغير التابع والمتغير التفسيري (المستقل) في حين تدل الإشارة السالبة (–) على العلاقة العكسية بينهما، أي إن الإشارة تبين إتجاه التأثير.

٣. النماذج الرياضية غير الخطية:

تتعدد الصيغ غير الخطية في الاقتصاد القياسي، ويمكن دوماً ابتداع صيغ جديدة. وفيما يلي أمثلة قليلة على بعض الصيغ غير الخطية.

$$Y_i = A + BX_i^2 + U_i \qquad (3)$$

$$Y_i^2 = C + D\left(\frac{1}{X}\right) U_i \qquad (4)$$

$$Y_i = FX_i^M U_i \qquad (5)$$

إذ إن:A، B، C، D و F هي ثوابت تقدر قيمتها في النموذج المعني. وتشير هذه الصيغ إلى وجود علاقة غير خطية بينYوالمتغير التفسيري X في الصيغ الثلاث. ومع ذلك يلاحظ أن إعادة تعريف المتغير X^2 في النموذج ذي الرقم (٣)، كأن نضع X^2=W، يحول العلاقة الأصلية غير الخطية إلى علاقة خطية:

$$Y=A+BW_i+U_i$$

وإن إستعمال التحويلة الرياضية اللوغاريتمية يحول العلاقة ذات الرقم (٥) إلى علاقة خطية أيضاً:

$$\text{Log } Y_i=\text{Log } F+m \text{ Log } X+ \text{ Log } U_i$$

أما الأسس التي يتم فيها إختيار صيغة غير خطية من دون أخرى فأهمها:

(أ) انسجام الصيغة الرياضية مع النظرية الاقتصادية المتعلقة بالظاهرة المدروسة. وغالباً ما تساعد هذه النظرية في اختيار المتغيرات التي تدخل في العلاقة، كما تساعد في تحديد تأثير كل متغير تفسيري في التابع على حدة.

(ب) مراعاة العلاقة التي تعكسها المشاهدات الإحصائية حول الظاهرة أو الظواهر المدروسة، إذ قد ترجح هذه العلاقة صيغة من دون غيرها بين الصيغ المقبولة نظرياً.

(ج) البساطة التي تتجلى في اختيار أبسط الصيغ الرياضية بين الصيغ المقبولة. لعدم اختيار معادلة من الدرجة الثانية إذا كانت معادلة من الدرجة الأولى تفي بالغرض، وعدم اختيار معادلة من الدرجة الثالثة إذا كانت المعادلة من الدرجة الثانية مناسبة.

٤ . نموذج المعادلات المتزامنة simultaneous equation system

بغية توضيح مفهوم هذا النوع من النماذج الاقتصادية الرياضية نقتبس المثال التقليدي في التحليل الاقتصادي الكلي macro–analysis.

(أ) إن الكمية المعروضة من سلعة ما ويرمز لها عادة بالرمز Q_s هي الكمية التي يقبل المنتجون بإنتاجها وبيعها من أجل مستوى معين من الأسعار P مثلاً. أي إن Q_s تابع للسعر P، ويعبر عن ذلك رياضياً بالعلاقة:

$$Q_s = F\,(P) \qquad (6)$$

(ب) إن الكمية المطلوبة من هذه السلعة ويرمز لها بالرمز Q_d هي الكمية التي يقبل المستهلكون شراءها من أجل السعر P. أي إن Q_d تابع للسعرP، ويعبر عن ذلك رياضياً بالعلاقة:

$$Q_d = G\,(P) \qquad (7\ )$$

ويلاحظ في العلاقتين (٦) و(٧) أن المتغير التفسيري هو P ، ومع ذلك فإن كون كل من المقدارين Q_s وQ_d تابعاً لـ P لايعني بالضرورة تشابه شكل علاقة التبعية رياضياً.

(ج) يستدعي استقرار السعر في السوق تساوي الكميتين المعروضة والمطلوبة من هذه السلعة ، أي يجب تحقق العلاقة:

$$Q_d = Qs = Q_0 \qquad (8)$$

إذ تمثل Q_0 مستوى التوازن بين العرض والطلب من أجل السعر P. تؤلف هذه المعادلات الثلاث (٦) و(٧) و(٨) ما يسمى بنموذج المعادلات المتزامنة، فهو نموذج أكثر واقعية في التعبير عن العلاقات الاقتصادية القائمة في المجتمع قياساً بنماذج المعادلة الواحدة. ومع ذلك فإن صعوبة تقدير ثوابت هذا النوع من النماذج الرياضية يجعلها أقل جاذبية واستعمالاً من غيرها.

الفصل الثانى

أقسام التحليل الاقتصادى

<u>الهدف من دراسة الفصل</u>

<u>بنهاية الدراسة لهذا الفصل يكون الدارس قادر على الالمام بالمفاهيم التالية:</u>

١ـ أقسام التحليل الإقتصادي

٢ـ تعريف النموذج الاقتصادي

٣ـ مكونات النموذج ومراحل اعداده

الفصل الثاني

أقسام التحليل الإقتصادي

ينقسم التحليل الإقتصادي حسب درجة شموله للمتغيرات التي تؤثر في الظاهرة موضع الدراسة إلى مايلي:

تحليل جزئي **Partial Analysis** :

تحليل عام **General Analysis** :

فإذا كان المتغيرموضع الإهتمام هو الكمية المطلوبة من سلعة ما فان هذا المتغير يتأثر بعدد كبير من المتغيرات المستقلة مثل سعر السلعة نفسها، أسعار السلع الأخرى، أذواق المستهلكين، مستوى الدخل وهكذا.

$$y = P + Ps + T + I$$

حيث:

P= سعر السلعة نفسها

Ps= أسعار السلع الأخرى

T= أذواق المستهلكين

I= مستوى الدخل

فإذا ماتم دراسة العلاقة بين الكمية المطلوبة y من السلعة و سعرها P مع ثبات المتغيرات الأخرى فإن التحليل في هذه الحالة يطلق عليه تحليل جزئي، في حين أن دراسة العلاقة بين الكمية المطلوبة من السلعة y وكافة المتغيرات التي سبق ذكرها وذلك في وقت واحد (آنياً) يطلق عليه التحليل العام.

و ينسب التحليل العام إلى مؤسس مدرسة لوزان الإقتصادية العالم الإقتصادي ليون فالراس ***Leon Walras*** و هو فرنسي.

أدوات التحليل الإقتصادي

يمكن تقسيم التحليل الإقتصادي حسب الأدوات المستخدمة فيه أو نوع الصياغة المستخدمة إلى مايلي:

(أ) التحليل الوصفي Descriptive Analysis:

حيث يتم تحليل الظواهر الإقتصادية بطريقة وصفية كلامية دون القياس الكمي للعلاقات.ويناسب هذا النوع من التحليل الحالات التي تكون فيها العلاقات الإقتصادية بسيطة غير معقدة، كما يفيد هذا الأسلوب التحليلي في تحليل العلاقات التي يصعب صياغتها في صورة كمية.

(ب) الصيغة الرياضية Mathematical:

حيث تستخدم الأدوات الرياضية في صياغة و عرض النظريات الإقتصادية. و مع تزايد إستخدام الرياضة في الدراسات الإقتصادية ظهر فرع جديد هو "الإقتصاد الرياضي" *Mathematical Economics* وإذا كان المنهج الرياضي له فوائده و مميزاته التي يتفوق بها على الصياغة اللفظية، فان هناك العديد من المحاذير حول هذا الأسلوب مثل عدم صحة المعطيات الإحصائية والإحصاءات المستخدمة، وعدم التطابق بين المعطيات الإحصائية ووقائع موضوع الدراسة (الإلمام بكافة المتغيرات).

(ج) الصياغة القياسية Econometric:

حيث تستخدم الأدوات الرياضية والإحصائية معاً في صياغة النظريات الإقتصادية، ومع التطبيق المتزايد لهذا الأسلوب خاصة مع إستخدام الحاسبات الآلية ظهر فرع جديد في الدراسات الإقتصادية هو الإقتصاد القياسي *Econometrics*.

التحليل الإقتصادي ومتغير الزمن

يمكن تقسيم التحليل الإقتصادي وفقا لإدخال متغير عنصر الزمن في الإعتبار من عدمه إلى مايلي:

(أ) تحليل ستاتيكي (ساكن):

وهذا النوع من التحليل يتجاهل عنصر الزمن كليةً. فعند دراسة التوازن بين عرض السلعة والطلب عليها دون إشارة إلى عنصر الزمن (سعر أي فترة هو الذي يؤثر) أو الفترة يقال أن التحليل إستاتيكي "يبحث في نقطة توازن واحدة".

ولإدخال بعض الواقعية على هذا النوع من التحليل قام الإقتصاديون بدراسة الأثر النهائي لتغير أحد العوامل المستقلة على وضع التوازن الأصلي وذلك في صورة مقارنة بين وضع التوازن الجديد ووضع التوازن الأصلي دون أخذ الزمن في الإعتبار، ويعرف هذا النوع بإسم التحليل الساكن المقارن وإرتبط ظهور هذا التحليل بالنظرية العامة لكينز.

(ب) التحليل الديناميكي:

هذا النوع من التحليل يأخذ عنصر الزمن صراحة في الإعتبار ويستخدم لتوضيح مسار التغير والانتقال من وضع توازني إلى وضع توازني آخر أو إلى أوضاع غير توازنية.

ويمكن إدخال الزمن في التحليل الإقتصادي بطرق مختلفة منها:

١- *تحليل الفترات*:

حيث يكون متغير الزمن "متغيراً أو ثابتاً" ويتم تحديد العلاقات بين المتغيرات في هذا التحليل عن طريق حل مجموعة من معادلات الفروق.

٢- *تحليل العمليات:*

حيث يتم إدخال الزمن في صورة مستمرة ويتم تحديد العلاقة بين المتغيرات المختلفة عن طريق حل مجموعة من المعادلات التفاضلية.

النموذج الإقتصادي

يستعمل الإقتصاديون في تفسير وتحليل الظواهر الإقتصادية مايعرف بالنموذج، وهو عبارة عن تجسيد وتقريب للواقع، بمعنى أن يلجأ الباحث إلى تبسيط الظاهرة قيد البحث والدراسة في شكل يمكن دراسته و تحليل أسسه.

فالنموذج يعطي للإقتصادي طريقة لعرض النظرية بصورة سهلة الفهم والتحليل.

ويتكون النموذج من عدة عناصر وصيغ رياضية. فعناصره الأساسية تعرف بالمتغيرات Variables وهي رموز تأخذ قيماً مختلفة.

والمتغيرات نوعان:

متغيرات مستقلة Independent Variables

متعيرات تابعة Dependent Variables

فالزيادة أو النقص في المتغيرات المستقلة يؤدي إلى زيادة أو نقص في المتغيرات التابعة، والعلاقة التي تربطهما تعرف بصيغة النموذج. وهي في العادة صيغ رياضية إما أن تكون بشكل صريح *Explicit* أو بشكل ضمني. والأمثلة على ذلك كثيرة مثلك

من النماذج البسيطة دراسة مستويات الإستهلاك كدالة في مستوى الدخل، فهذا النموذج يبسط الواقع بصورة تجعل الإستهلاك وهو متغير تابع يتوقف أو يعتمد على متغير مستقل واحد هو الدخل. و الصيغة لهذا النموذج يمكن أن تكون :

الإستهلاك = دالة (الدخل)

$$C=f(I)$$

بدون تحديد الكيفية، في حين أن الصيغة الصريحة لهذا النموذج تبين الطريقة التي يعتمد الإستهلاك على الدخل عن طريق تحديد شكل العلاقة الرياضية.

ومن النماذج المعقدة والأكثر واقعية أن نجعل الإستهلاك، باعتباره متغيراً تابعاً يعتمد على العديد من المتغيرات المستقلة و التي تؤثر فعلاً في مستويات الإستهلاك مثل الدخل، عدد السكان، مستويات الأسعار و الأذواق وغيرها . وقد تكون صيغة النموذج ضمنية أو صريحة.

ويتعلق بالصيغة الرياضية كذلك كون العلاقة بين المتغير التابع والمتغير أو المتغيرات المستقلة علاقة خطية *Linear* أو غير خطية *Non-Linear* و سوف نبين المقصود منهما عند الحديث عن الأشكال و الرسوم البيانية.

الإفتراضات الأساسية

الإقتصاد يتعلق بدراسة السلوك البشري فيما يخص الإنفاق والإنتاج وإستعمالات الموارد ضمن إطار عالم متجدد متغير ومتشابك الأطراف، لذلك فإن محاولة معرفة كل جوانب السلوك البشري أو كل جوانب الظاهرة قيد الدراسة تعتبر محاولة مستحيلة، إذ من الصعب التنبؤ بالمتغيرات التي تتحكم في سلوك الأفراد، وكذلك من الصعب السيطرة على كل الظروف التي تؤثر في هذا السلوك.

وبناءاً على ذلك يلجأ الإقتصادي إلى الإعتماد على بعض الإفتراضات التي يمكن حصرها في الآتي:

١- إفتراض بقاء العوامل الأخرى على حالها Ceteris Paribus :

نتيجة لتعقد الواقع وصعوبة الإلمام بالجوانب المتعددة لأي ظاهرة في آن واحد، يستخدم الإقتصادي أثناء تحليله إفتراض معين يساعد على عزل الظاهرة قيد الدراسة لغرض معرفة العلاقة بين بعض المتغيرات فيها. ويحد هذا الإفتراض من إطار النظرية عن طريق تثبيت عوامل معينة تعتبر جزء من النموذج. فيستخدم الإقتصادي إفتراض *Ceteris Paribus* وهي كلمة لاتينية تعني بقاء العوامل الأخرى على حالها، أو بقائها ثابته *Other Things (or Factors)* Remain Constant و كمثال على ذلك، لو أردنا دراسة أثر تغير سعر سلعة ما على الكمية المطلوبة من تلك السلعة فإننا نلجاء إلى عزل آثار العوامل الأخرى التي تؤثر في الطلب على تلك السلعة مثل الدخل، أسعار السلع الأخرى، الأذواق وعدد السكان ... ألخ. بإفتراض أنها ثابتة. وبهذه الطريقة نستطيع معرفة تأثير تغير سعر السلعة فقط على الكميات المطلوبة بمعزل عن تأثير العوامل الأخرى.

٢- إفتراض العقلانية Rationality Assumption:

يعني أن الشخص في تصرفاته وقراراته منسجم مع تحقيق هدف معين. وهنا لا نبحث في طبيعة الهدف في حد ذاته من حيث كونه هدفاً سامياً أو أخلاقياً أو غير ذلك، ولكننا نقول أن الشخص يتصرف بعقلانة أو أن سلوكه عقلاني *Rational Behavior* إذا هو حدد هدفه و نهج النهج السليم للوصول إليه. أما إذا كان سلوكه غير متفق مع الهدف الذي حدده فإننا نقول أن هذا السلوك غير عقلاني *Irrational Behavior* . ويمكن التفريق بين السلوك غير العقلاني والسلوك العشوائي *Random Behavior* فالأخير يعني أن الشخص غير مستقر يتخبط بين الأهداف والوسائل ولايحقق هدف ولايصل لغاية.

٣- إفتراض تعظيم شئ ما Maximization Assumption :

يتعلق هذا الإفتراض ببيان أن هدف الشخص الذي يتصرف بعقلانية، حسب المفهوم السابق، هو تعظيم شئ ما. فقد يكون هدفه تعظيم المنفعة *Utility* كما في حالة المستهلك ، أو تعظيم الأرباح *Profits* أو المبيعات *Sales* كما في حالة المنتج، أو تعظيم الرفاهية *Welfare* بإعتباره هدف إجتماعي. ويفترض أن القرار الإقتصادي قد أتخذ لغرض تحقيق أحد هذه الأهداف.

التحليل الحدي

Marginal Analysis

تعرف الوحدات الحدية أو الهامشية بأنها الوحدات الأخيرة التي تمت إضافتها مثل الوحدة الأخيرة من السلعة المستهلكة، والوحدة الأخيرة من العنصر الإنتاجي المستخدم، والوحدة الأخيرة من السلعة المنتجة. وهكذا فكلمة حدي *Marginal* تعني إضافي.

وكل القرارات الإقتصادية هي قرارات حدية يستعمل فيها التحليل الحدي. فعندما يقرر المنتج إنتاج وحدة إضافية من سلعة ما فإنه ينظر إلى تكلفة الوحدة الأخيرة، أي مقدار ما تضيفة هذه الوحدة الأخيرة إلى التكلفة الكلية أو الإجمالية، وهو مايعرف بإسم التكلفة الحدية *Marginal Cost* . وينظر كذلك إلى فائدة الوحدة الأخيرة، أي مقدار ما تضيفة هذه الوحدة الأخيرة المنتجة إلى الإيراد الكلي أو الإجمالي، و هو ما يعرف بالإيراد الحدي *Marginal Revenue* . وهكذا بالنسبة لكل القرارات. فكل قراراتنا الإقتصادية نتخذها حسب التحليل الحدي حيث ننظر إلى الإضافة إلى التكلفة مقارنة بالإضافة إلى الفائدة.

فالأفراد يستخدمون التحليل الحدي دون أن تتم تسمية كذلك، فالطالب مثلاً عندما يفكر في دراسة ساعة إضافية لمادة معينة فإنه ينظر إلى المنفعة المترتبة على ذلك (والتي يمكن ان تنحصر في فهم المادة، حل الواجب، الإستعداد للإمتحان...الخ) و يقارن ذلك بالتكلفة الإضافية لتلك الساعة والتي يمكن أن تقاس بالعمل البديل الممكن القيام به خلال تلك الساعة (كزيارة صديق، الذهاب للتنزه، النوم...الخ).

الإقتصاد الوصفي، الواقعي، التقريري (الحقيقى) والإقتصاد المعيارى (المثالى)

يهتم علم الإقتصاد كواحد من العلوم الإجتماعية بالتنبؤ أو بتحديد أثر التغير في العوامل الإقتصادية على السلوك البشرى ويحاول الإقتصاد الوصفي أو الحقيقى تفسير الواقع بمحاولة الإجابة على الأسئلة من شاكلة " ماذا يكون " فالإقتصاد الحقيقى يفترض وجود علاقة يمكن بحثها وتحليلها فمثلاً إذا إرتفع سعر اللحم فإن الكمية التي يشتريها الناس سوف تقل ويمكننا إحصائياً فحص العلاقة بين أسعار اللحم كمية المشتروات لتحديد صحة هذه المقولة اى ان الإقتصاد الحقيقى يصدر أحكاماً تقريرية موضوعية يمكن إختبار صحتها أو عدم صحتها بالرجوع إلى الواقع . لذلك فهو يشمل المبادئ

والنظريات الإقتصادية التي تبحث في طبيعة الأشياء ومن ثم فهي تجيب على الأسئلة المتعقة "بما هو كائن

أما الاقتصاد المعياري (المثالي) فيستخدم أحكاماً تقديرية قيمية بالإضافة إلى المعلومات التي يمدنا بها الإقتصاد الوصفي لتأييد سياسة معينة من بين سياسات بديلة . أى أن هدف الإقتصاد المعيارى هو الوصول إلى معايير تتعلق بما يجب أن يكون ولايمكن حسم هذه الأحكام بالرجوع إلى الواقع حيث أنها تعتمد على ذات الشخص الذى يدلى بها أو يحكم فيها من حيث حالته النفسية وإنتمائه الإجتماعى والفكرى. ومن أمثلتها القول بأنه " يجب إستمرار الدعم الحكومى للقطاع الزراعي في المملكة حتى نوفر للمزارع دخل معقول يتساوى مع بقية أفراد المجتمع في القطاعات الإقتصادية الأخرى " مثل هذا القول يرتكز على قيمة إجتماعية وهي العدالة التي لايمكن التثبت من صحتها بالرجوع إلى الواقع لأن العدالة معيار أو قيمة تتعلق بقضية فلسفية .

إذاً الإقتصاد المعياري يتضمن مجموعة النظريات والمبادئ الإقتصادية التي تجيب على الأسئلة المتعلقة بما يجب أن يكون (مثل المفاضلة بين تحقيق معدل مرتفع من النمو للدخل القومي و القضاء على البطالة وما يجب أن يكون عليه النظام الضريبي مثلاً) هذا النوع من التساؤلات يمثلها الدراسات المتعلقة بإقتصاديات الرفاهيه , وواضح أن هذه الأسئلة تبحث في مواضيع يدخل فيها عنصر تقديري يختلف بإختلافات الإقتصاديين ومن ثم لايمكن إختبارها بإستخدام المشاهدات العملية كما لايمكن الحكم بأفضلية إحداها.

الفصل الثالث

اختبارات الفروض

الفصل الثالث

اختبارات الفروض

مقدمة

سوف نتناول فى هذا الفصل الجزء الثانى من الاستدلال الإحصائى وهو إختبارات الفروض. يحاول الباحث اتخاذ قرار ما لمشكلة محددة بشأن خواص توزيع ما (المتوسط – النسبة) لعينة عشوائية تم سحبها من المجتمع "العينة المسحوبة لابد وأن تكون ممثلة تمثيلا جيدا للمجتمع محل الدراسة". ولكى نصل إلى قرار إحصائى لابد من وضع فروض عن خواص المجتمع، ومن هنا نختبر مدى صحة هذا الفرض من عدمه وذلك عن طريق العينة العشوائية التى تم سحبها من المجتمع.

وهذه الفروض هى مانطلق عليه الفروض الإحصائية **Statistical Hypothesis**.

وتنقسم اختبارات الفروض الإحصائية إلى قسمين:

أولا: اختبارات الفروض الإحصائية المعلمية: وفى هذا القسم يكون معلوم لدينا التوزيع الذى تتبعه البيانات التى لدينا وما إذا كان توزيعًا متصلاً أم منفصلاً (متقطعًا) ويكون المطلوب هو اختبار فروض حول معالم المجتمع.

ثانيا: اختبارات الفروض الإحصائية اللامعلمية: فى كثير من التجارب والأبحاث يكون لدينا بيانات واقعية يصعب من خلالها التعرف على التوزيع الذى تتبعة ومن هنا نشأت الحاجة إلى ما يعرف باختبارات الفروض اللامعلمية حيث لاتحتاج مثل هذه الاختبارات معرفة شكل التوزيع الذى تتبعه البيانات محل الدراسة، كما يفضل استخدامها عندما يكون حجم العينة

المسحوبة من المجتمع صغيرًا نسبيا. وسوف نهتم فى فصلنا هذا بالقسم الأول وهو اختبارات الفروض الإحصائية المعلمية.

اختبارات الفروض الإحصائية المعلمية

عند القيام باختبار إحصائى يكون لدينا فرضان:

الفرض الأول: هو ما يسمى بفرض العدم **Null Hypothesis** وسوف نرمز له بالرمز H_o.

الفرض الثاني: يسمى بالفرض البديل **Alternative Hypothesis** ويرمز له بالرمز H_1.

وكما ذكرنا من قبل تعتمد اختبارات الفروض على بيانات العينة وفرض قيمة معينة لمعلمة من معالم المجتمع حيث يكون الاختبار: هل هناك فرق بين قيمة معلمة المجتمع المفروضة والقيمة المقدرة لها من خلال بيانات العينة؟ فإذا كان هناك فرق فهل يرجع هذا الفرق إلى خطأ المعاينة؟ أم هو فرق حقيقى "معنوي" **Significant**. فإذا كان الفرق معنويا فيكون القرار هو عدم قبول الفرض العدمى وعليه فإننا نقبل بالفرض البديل. أما إذا كان الفرق غير معنوى فإننا نقبل الفرض العدمي.

أنواع الأخطاء

الخطأ من النوع الأول α والخطأ من النوع الثانى β

إن أى قرار إحصائى يمكن أن ينتج عنه نوعان من الخطأ:

خطأ من النوع الأول: يحدث هذا النوع من الأخطاء عندما نقوم برفض الفرض العدمى H_o فى حين أنه صحيح، وذلك باحتمال مقداره α (وتسمى α بمستوى المعنوية وهى تأخذ قيما صغيرة (٠.٠١، ٠.٠٥،...).

خطأ من النوع الثاني: يقع مثل هذا الخطأ عندما نقبل الفرض العدمى H_o فى حين أنه خطأ وذلك باحتمال مقدارة β.

ويمكن تلخيص القرارات الإحصائية بالجدول التالي:

القرار	قبول H_o	رفض H_o

		الفرض
خطأ من النوع الأول α	قرار صحيح	H_o صحيح
قرار صحيح	خطأ من النوع الثانى β	H_o خطأ

ولاختبار صحة فرض العدم H_o يجب أن نكون إحصاءة (دالة من مشاهدات العينة العشوائية) حيث يكون توزيع الإحصاءة معروف ويتم تقسيم المجال المقابل لهذه الدالة إلى قسمين (منطقتين):

المنطقة الأولى: تسمى منطقة القبول حيث يتم قبول الفرض العدمى ويكون احتمال حدوث قيم الإحصاءة (α -1) كبيرا.

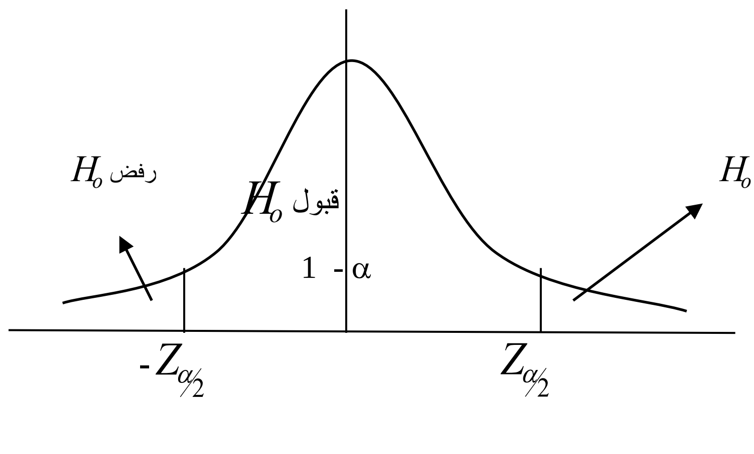
المنطقة الثانية: تسمى منطقة الرفض حيث يتم رفض الفرض العدمى ويقبل الفرض البديل ويكون احتمال حدوث قيم الإحصاءة α صغيرا.

الأشكال التالية يمكن من خلالها توضيح مناطق الرفض والقبول وذلك حسب نوع الفرض البديل، وسوف نوضح ذلك باستخدام المتوسط μ (متوسط المجتمع) كالتالي:

١-الاختبار من طرفين: يسمى الاختبار الإحصائى اختبارًا ذا طرفين إذا كان على الصورة:

H_o: $\mu = \mu_o$

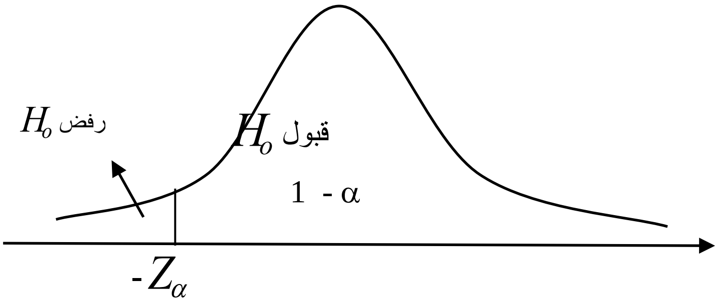
H_1: $\mu \neq \mu_o$



٢-الاختبار من طرف واحد أدنى: يسمى الاختبار الإحصائى اختبارًا ذا طرف واحد أدنى إذا كان على الصورة:

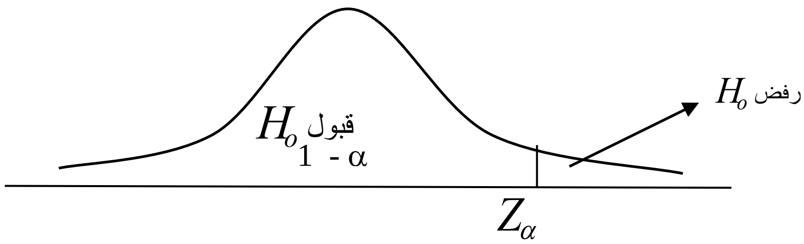
H_o: $\mu = \mu_o$

H_1: $\mu < \mu_o$



٣-الاختبار من طرف واحد أعلى: يسمى الاختبار الإحصائى اختبارًا ذا طرف واحد أعلى إذا كان على الصورة:

H_o: $\mu = \mu_o$
H_1: $\mu > \mu_o$



<u>اختبارات الفروض لمتوسط المجتمع μ</u>

<u>تباين المجتمع معلوم</u>

يكون $Z = \dfrac{x-\mu_o}{\sigma/\sqrt{n}}$ عندما يكون الانحراف المعيارى σ للمجتمع معلوم فإن الإحصائية لها التوزيع الطبيعى المعياري، أى أن:

$Z \sim N(0,1)$

وتسمى الإحصائية بقيمة Z المحسوبة من خلال بيانات العينة و x يمثل متوسط البيانات المشاهدة من العينة، n تمثل حجم العينة المسحوبة من المجتمع و μ_o هو القيمة المفروضة لمتوسط المجتمع والتى نقوم باختبارها. نقوم بعد ذلك بإختيار قيمة α (مستوى المعنوية) حيث يتم على أساسة تحديد القيم الحرجة $Z_{\alpha/2}$ و $-Z_{\alpha/2}$ أو Z_α وذلك حسب نوع الاختبار هل هو اختبار من طرف واحد أم من طرفين، وسوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية:

مثال (١): أخذت عينة من ٦٤ طالب من إحدى المدارس فوجد أن متوسط الطول هو ١٥٥ سم. فإذا كان الانحراف المعيارى للمجتمع يساوى ٥ سم. اختبر الفرض القائل:

$$H_o: \mu = 160 \qquad , \qquad H_1: \mu \neq 160$$

وذلك عند مستوى معنوية:

أ- ٠.٠٥

ب- ٠.٠١

الحل:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_o}{\sigma / \sqrt{n}}$$

حيث:

$\bar{x}$ **= 155,** μ_o **= 160,** σ**= 5,** n **= 64**

α = 0.05

$$\Rightarrow Z = \frac{155 - 160}{\frac{5}{\sqrt{64}}}$$

$$Z = -8 \qquad (1)$$

وهذه تمثل قيمة Z المحسوبة.

أ- عند مستوى معنوية (α = 0.05) وبما أن الاختبار من طرفين إذا قيم Z الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0.05/2} = Z_{0.025}$$

$$Z_{0.025} = 1.96$$

وعليه فإن قيمة $-Z_{\alpha/2}$ ستكون:

$$-Z_{\alpha/2} = -1.96$$

ومن هنا نجد أن قيمة Z المحسوبة أصغر من قيمة Z الجدولية، أى أن قيمة Z تقع فى منطقة الرفض، ومن هنا يتم رفض الفرض العدمى بأن $\mu = 160$.

ب- عند مستوى معنوية (α = 0.01) وبما أن الاختبار من طرفين إذا قيم Z الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0.01/2} = Z_{0.005}$$
$$Z_{0.005} = 2.58$$

وعليه فإن قيمة $-Z_{\alpha/2}$ ستكون:

$$-Z_{\alpha/2} = -2.58$$

ومن هنا نجد أن قيمة Z المحسوبة أصغر من قيمة Z الجدولية، أى أن قيمة Z تقع فى منطقة الرفض، ومن هنا يتم رفض الفرض العدمى بأن $\mu = 160$.

مثال (٢): إذا كان أحد مصانع المواد الغذائية ينتج نوعا من الألبان حيث يصل متوسط وزن العبوة ٢٤٠ جرام، وذلك بانحراف معيارى ١٨ جرام حيث كانت أوزان العبوات تتبع التوزيع الطبيعي. تم أخذ عينة من ٩ عبوات وذلك عند إجراء اختبار الرقابة على الجودة فوجد أن متوسط وزن العبوة ٢٣٥ جرام. هل ترى أن هناك عيبا بالإنتاج مما أدى إلى انخفاض متوسط وزن العبوة؟ مستوى المعنوية ١٠٪.

الحل: ١- نضع فروض الاختبار وهى كالتالي:

$$H_o: \mu = 240$$
$$H_1: \mu < 240$$

٢- نقوم بحساب قيمة Z المحسوبة

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_o}{\sigma / \sqrt{n}}$$

حيث:

$\bar{x} = 235$, $\mu_o = 240$, $\sigma = 18$, $n = 9$

$\alpha = 0.01$

$$\Rightarrow Z = \frac{235 - 240}{\frac{18}{\sqrt{9}}},$$

$$Z = -0.83 \qquad (1)$$

وهذه تمثل قيمة Z المحسوبة.

٣- نقوم الأن بحساب قيمة Z الجدولية

عند مستوى معنوية $(\alpha = 0.1)$ وبما أن الاختبار من طرف واحد إذا قيمة Z الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$-Z_{\alpha} = -Z_{0.1}$$

$$-Z_{0.1} = -1.28 \qquad (2)$$

من (١) و (٢) نجد أن قيمة Z المحسوبة أصغر من قيمة Z الجدولية، أى أن قيمة Z تقع فى منطقة القبول، ومن هنا يتم قبول الفرض العدمى بأن $\mu = 24$.

درجات الحرية

إذا كان لينا مجتمع ما ونريد تقدير عدد من معالم هذا المجتمع كالمتوسط والانحراف المعيارى إلى آخره وتم سحب عينة من البيانات المستقلة التى تمثل ذلك المجتمع حجمها n فإن درجات الحرية التى يرمز لها بالرمز v تساوى حجم العينة مطروحا منه عدد المعالم المراد تقديرها ويمكن التعبير عن ذلك من خلال العلاقة التالية:

$$v = n - k$$

حيث k هى عدد المعالم المقدرة.

تباين المجتمع مجهول وحجم العينة صغير

عندما يكون الانحراف المعيارى للمجتمع مجهول وكذلك حجم العينة المسحوبة من ذلك المجتمع صغير (< ٣٠) فإن الإحصائية Z يتم تغيرها إلى الإحصائية t التى يكون لها الشكل التالي:

$$t = \frac{x - \mu_o}{S / \sqrt{n}}$$

حيث S تمثل الانحراف المعيارى للعينة والإحصائية t تتبع توزيع t وذلك بدرجات حرية $(v = n - 1)$ ومستوى معنوية α أو $\alpha/2$ حسب نوع الاختبار من طرف واحد أو طرفين، وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال (٣): إذا كان متوسط ربح سهم إحدى الشركات هو ١٥ جنيه فى العام الماضي. تم أخذ عينة من ٧ مساهمين عن توقعاتهم عن متوسط ربح السهم العام الحالى فوجد أنه ١٧ جنية بانحراف معيارى ٢. هل توافق المساهمين فى تقديرهم لارتفاع متوسط ربح السهم هذا العام؟ وذلك بمستوى معنوية ٥٪.

الحل: ١- نضع فروض الاختبار وهى كالتالي:

$H_o: \mu = 15$
$H_1: \mu > 15$

٢- نقوم بحساب قيمة t المحسوبة

$$t = \frac{x - \mu_o}{S/\sqrt{n}}$$

حيث:

$x = 17, \quad \mu_o = 15, \quad S = 2, \quad n = 7$
$\alpha = 0.05$

$$\Rightarrow t = \frac{17 - 15}{\frac{2}{\sqrt{7}}},$$

$t = 2.65 \qquad (1)$

وهذه تمثل قيمة t المحسوبة.

٣- نقوم الآن بحساب قيمة t الجدولية.

عند مستوى معنوية ($\alpha = 0.05$) وبما أن الاختبار من طرف واحد إذا قيمة t الجدولية سوف تكون كالتالي:

$t_{(n-1, \alpha)} = t_{(7-1, 0.05)}$
$t_{(6, 0.05)} = 1.943 \qquad (2)$

من (١) و (٢) نجد أن قيمة t المحسوبة أكبر من قيمة t الجدولية، أى أن قيمة t تقع فى منطقة الرفض، ومن هنا يمكن القول بأننا نوافق المساهمين على توقعهم بارتفاع متوسط ربح السهم هذا العام.

اختبارات الفروض للفرق بين متوسطى مجتمعين

العينات الكبيرة المستقلة

هناك العديد من الأبحاث التى يكون المطلوب فيها المقارنة بين مجتمعين مختلفين أو منطقتين مختلفتين أو أسلوبين لتدريس مقرر ما...إلخ. من هنا جاء اختبار الفرق بين متوسطى المجتمعين عن طريق سحب عينة من كل مجتمع ويكون الاختبار لنرى

الفرق بين متوسطى العينتين، وهل هو فرق حقيقى أم يرجع هذا الفرق إلى الصدفة البحتة.

إذا كان متوسط العينة الأولى $\bar{x}_1$ ومتوسط العينة الثانية $\bar{x}_2$ بانحراف معيارى S_1 و S_2 على الترتيب وكان حجم العينة الأولى n_1 وحجم العينة الثانية n_2 فإن توزيع المعاينة للفرق $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ يقترب من التوزيع الطبيعى بمتوسط $\mu_1-\mu_2$ وانحراف معيارى $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

حيث:

μ_1 هى متوسط المجتمع الأول و μ_2 متوسط المجتمع الثانى و$(\sigma_2^2 ، \sigma_1^2)$ يمثلان تباين المجتمع الأول والثانى على التوالي. ويكون فرض العدم والفرض البديل على الصورة:

H_o: μ_1- μ_2= **0,** $\Leftrightarrow$ H_o: μ_1= μ_2

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$,

or H_1: $\mu_1 < \mu_2$,

or H_1: $\mu_1 > \mu_2$

هذا وتأخذ الإحصاءة Z الشكل التالي:

$$Z = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)_o}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$

نلاحظ من شكل العلاقة السابقة أن $(\sigma_2^2 ، \sigma_1^2)$ مجهولتين، ولذا تم التعويض بتباين العينة الأولى وتباين العينة الثانية مع كبر حجم العينتين (n_1 < ٣٠) و (n_2 < ٣٠).

ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي:

مثال (٤): إذا اختيرت عينة عشوائية من ٦٠ طالب من جامعة خاصة، فوجد أن متوسط ذكائهم ٦٩ درجة وتباين قدرة ٢٣٠ درجة، كذلك تم اختيار عينة عشوائية أخرى من ٨٥ طالب من جامعة حلوان فوجد أن متوسط ذكائهم ٧٤ درجة وتباين قدرة ٢١٥ درجة. اختبر الفرض القائل بأن متوسط ذكاء طالب الجامعة الخاصة أقل من متوسط ذكاء طالب جامعة حلوان.

وذلك بمستوى معنوية (α = 0.05).

الحل: ١- نضع فروض الاختبار وهى كالتالي:

H_o: μ_1= μ_2

$H_1: \mu_1 < \mu_2$

٢- نقوم بحساب قيمة Z المحسوبة

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_o}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$Z = \frac{(69 - 74) - 0}{\sqrt{\frac{230}{60} + \frac{215}{85}}}$$

$$Z = \frac{-5}{\sqrt{6.36}}$$

$Z =$ **- 1.98, (1)**

٣- نقوم بحساب قيمة Z الجدولية

عند مستوى معنوية ($\alpha = 0.05$) وبما أن الاختبار من طرف واحد إذا قيمة Z الجدولية سوف تكون كالتالي:

$-Z_\alpha = -Z_{0.05}$

$-Z_{0.05}$ **= -1.65 (2)**

من (١) و (٢) نجد أن قيمة Z المحسوبة أصغر من قيمة Z الجدولية، أى أن قيمة Z تقع فى منطقة الرفض، ومن هنا يمكن القول بأن متوسط ذكاء طلبة الجامعة الخاصة أقل من متوسط ذكاء طلبة جامعة حلوان.

العينات الصغيرة المستقلة

لقد وجد الإحصائيون أن الفرق بين المتوسطين $\bar{x}_1$، $\bar{x}_2$ عندما يكون حجم العينتين المستقلتين n_1، n_2 صغيرا وتباين المجتمع الأول والثانى مجهول فإن الإحصائية:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_o}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

حيث:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

تتبع توزيع t بدرجات حرية $(v = n_1 + n_2 - 2)$. وسوف نوضح طريقة الاختبار تلك بالمثال التالي:

مثال (٥): اختيرت عينة عشوائية من ١١ طالب من كلية التجارة جامعة القاهرة فوجد أن متوسط ذكائهم ٨٠ درجة بانحراف معيارى ٧ درجات. كذلك اختيرت عينة عشوائية من ٦ طلاب من كلية الآداب جامعة القاهرة أيضا فوجد أن متوسط ذكائهم ٧٥ درجة بانحراف معيارى ٥ درجات. هل يمكننا القول بأن متوسط ذكاء طلبة التجارة لا يساوى متوسط ذكاء طلبة الآداب وذلك عند مستوى معنوية ٥٪.

الحل: ١- نضع فروض الاختبار وهى كالتالي:

$$H_o: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

٢- نقوم بحساب قيمة S_p^2 كالآتي:

$$\text{1- } S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$S_p^2 = \frac{(11-1)(7)^2 + (6-1)(5)^2}{11+6-2}$$

$$S_p^2 = \frac{10\times 49 + 5\times 25}{15}$$

$$S_p^2 = 41 \qquad (1)$$

٣- نقوم بحساب قيمة t المحسوبة.

$$\text{2- } t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_o}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$t = \frac{(80-75) - 0}{\sqrt{41\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{6}\right)}}$$

$$t = \frac{5}{\sqrt{10.56}}$$

$$t = 1.54 \qquad (2)$$

٤- نقوم الأن بحساب قيمة t الجدولية.

عند مستوى معنوية $(\alpha = 0.05)$ وبما أن الاختبار من طرفين فإن قيم t الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$t_{(n_1+n_2-2, \alpha/2)} = t_{(11+6-2, 0.025)} =$$

$t_{(15, 0.025)} = \pm 2.131$ (3)

من (٢) و (٣) نجد أن قيمة t المحسوبة تقع بين قيم t الجدولية، أى أن قيمة t تقع فى منطقة القبول، أى أن متوسط ذكاء طلبة كلية التجارة مساو لمتوسط ذكاء طلبة كلية الآداب.وذلك عند مستوى معنوية ٥٪.

٣- العينات الغير مستقلة

لقد بينا فى الحالات السابقة كيفية إجراء الاختبار فى حالة العينات المستقلة، ولكن فى بعض الأحيان نجد أن العينات التى تم سحبها بطريقة عشوائية هى عينات غير مستقلة بمعنى وجود علاقة بين مشاهدات العينتين، وفى هذه الحاله نقوم بحساب الفرق بين أزواج المشاهدات ثم إيجاد متوسط هذا الفرق وأيضا الانحراف المعيارى له. ونظرا لأن التباين يكون مجهولا، كذلك صغر حجم العينتين سوف تتبع الإحصاءة $t=\frac{\bar{d}-D_o}{s_d/\sqrt{n}}$

توزيع t بدرجات حرية $(v=n-1)$حيث:

$\bar{d}$ هى متوسط الفرق بين أزواج المشاهدات.

s_d هو الانحراف المعيارى للفرق بين أزواج المشاهدات.

n تمثل حجم العينة المسحوبه من المجتمع (عدد أزواج المشاهدات).

D_o هو الفرق بين متوسطى المجتمعين الأول والثاني.

ويكون فرض العدم والفرض البديل على الصورة:

$$H_o: D_o = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_o: D_o = \mu_2 - \mu_1$$

$$H_1: D_o \neq 0$$

$$\text{or} \quad H_1: D_o < 0$$

$$\text{or} \quad H_1: D_o > 0$$

المثال التالى سوف يوضح كيفية حساب الإحصاءة t كذلك أسلوب إجراء الاختبار.

مثال (٦): يرغب أحد المحاسبين فى مقارنة المبيعات اليومية لأحد المطاعم فرع القاهرة مع المبيعات اليومية لذات المطعم فرع الاسكندرية وذلك فى خلال سبعة أيام اختيرت عشوائيا على مدار الشهر.

اليوم	المبيعات	
	فرع القاهرة	فرع الأسكندرية
١	١٥٤٠	١٦٧٠
٢	١٢١٢	١٧٨٠
٣	١٧٠٠	١٨٨٠
٤	١٠٦٤	١٩٦٨
٥	١١٩٥	٢٤٣٠
٦	١٤٥٠	٢١٤٥
٧	١٥٠٥	٢١٣٦

اختبر الفرض القائل بعدم وجود فرق بين متوسطى الفرعين وذلك بمستوى معنوية ٥٪.

الحل: ١- نضع فروض الاختبار وهى كالتالي:

$$H_o: \bar{D}_o = 0$$

$$H_1: \bar{D}_o \neq 0$$

٢- نقوم بحساب قيمة t المحسوبة.

$$t = \frac{\bar{d} - \bar{D}_o}{s_d / \sqrt{n}}$$

$1-\ \bar{D}_o = 0$

$2-\ n = 7$

سوف نقوم الآن بحساب الفروق ومتوسطها وكذلك الانحراف المعيارى لها:

اليوم	الفرق (d)	مربع الفرق (d^2)
١	١٣٠-	١٦٩٠٠
٢	٥٦٨-	٣٢٢٦٢٤
٣	١٨٠-	٣٢٤٠٠
٤	٩٠٤-	٨١٧٢١٦
٥	١٢٣٥-	١٥٢٥٢٢٥
٦	٦٩٥-	٤٨٣٠٢٥
٧	٦٣١-	٣٩٨١٦١
المجموع	٤٣٤٣-	٣٥٩٥٥٥١

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$\bar{d} = \frac{-434}{7}$$

$$\bar{d} = -620.43 \qquad (1)$$

$$s_d = \frac{1}{n-1}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} d_i)^2}{n}}$$

$$s_d = \frac{1}{7-1}\sqrt{3595551 - \frac{(-4343)^2}{7}}$$

$$s_d = \frac{1}{6}\sqrt{901029}$$

$$s_d = \frac{1}{6}\,(949.23)$$

$$s_d = 158.2 \qquad (2)$$

$$t = \frac{-620.43}{158.2/\sqrt{7}}$$

$$t = -10.38 \qquad (3)$$

٣- نقوم الآن بحساب قيمة t الجدولية.

عند مستوى معنوية $(\alpha = 0.05)$ وبما أن الاختبار من طرفين فإن قيم t الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$t_{(n-1,\alpha/2)} = t_{(6,0.025)}$$

$$t_{(6,0.025)} = \pm 2.448 \qquad (4)$$

من (٣) و (٤) نجد أن قيمة t المحسوبة أصغر من قيمة t الجدولية، أى أن قيمة t تقع فى منطقة الرفض، أى أن متوسط مبيعات الفرعين (القاهرة والأسكندرية) غير متساو. وذلك عند مستوى معنوية ٥٪.

٧-٥ اختبارات الفروض لنسبة المجتمع π

إذا كان المجتمع الذى نقوم بدراسته يتبع أحد التوزيعات المتقطعة مثل توزيع ذى الحدين، وإذا كانت نسبة ظاهرة معينة فى المجتمع هيπ وكانت p هى نسبة الظاهرة فى العينة العشوائية التى تم سحبها من المجتمع. فإن المطلوب هو اختبار وجود فرق معنوى

بين نسبة الظاهرة فى كل من العينة والمجتمع ويكون الفرض العدمى والفرض البديل على الصورة:

$$H_o: \pi = \pi_o ,$$
$$H_1: \pi \neq \pi_o ,$$
$$\text{or} \quad H_1: \pi < \pi_o ,$$
$$\text{or} \quad H_1: \pi > \pi_o$$

وعليه فإن الإحصائية $\frac{p-\pi_o}{\sqrt{\frac{\pi_o(1-\pi_o)}{n}}}$ تتبع التوزيع الطبيعى القياسي، حيث n تمثل حجم العينة المسحوبة من المجتمع ومن ثم نقوم بحساب قيمة Z المحسوبة كالآتي:

$$Z = \frac{p-\pi_o}{\sqrt{\frac{\pi_o(1-\pi_o)}{n}}}$$

ثم يتم مقارنة Z المحسوبة بقيمة Z الجدلية حتى يمكن أن نتخذ القرار الإحصائى بقبول أو رفض الفرض العدمى كما ذكرنا من قبل عند اختبار المتوسط. وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال (٧): قامت إحدى شركات الكمبيوتر باستيراد شحنة من أجهزة الكمبيوتر وقد تعهدت الشركة المصدرة للأجهزة بأن نسبة الأجهزة المعيبة لن تزيد عن ٦٪، تم إختيار عينة عشوائية من ١٨٠ جهاز وتبين وجود ٢٠ جهاز معيب. عند مستوى معنوية ١٪ اختبر مدى مصداقية هذه الشركة.

الحل: ١- نضع فروض الاختبار وهى كالتالي:

$$H_o: \pi = \mathbf{0.06}$$
$$H_1: \pi > \mathbf{0.06}$$

٢- قيمة Z المحسوبة يتم ايجادها كالتالي:

$$Z = \frac{p-\pi_o}{\sqrt{\frac{\pi_o(1-\pi_o)}{n}}}$$

نسبة المعيب فى العينة هي:

$$p = \frac{20}{180}$$
$$p = \mathbf{0.11}$$

$$Z = \frac{0.11-0.06}{\sqrt{\frac{0.06(1-0.06)}{180}}}$$

$$Z = \frac{0.05}{\sqrt{\frac{0.06\times 0.94}{180}}}$$

$$Z = \frac{0.05}{0.02}$$

$$Z = 2.5 \quad (1)$$

نقوم الآن بايجاد قيمة Z الجدولية عند مستوى معنوية ١٪:

$$Z_{\alpha} = Z_{0.01}$$

$$Z_{0.01} = 2.33 \quad (2)$$

من (١) و (٢) نجد أن قيمة Z المحسوبة أكبر من قيمة Z الجدولية عند مستوى معنويـة ١٪، ونتيجـة لـذلك نـرفض فـرض العـدم الـذى يـدل علـى عـدم مصـداقية الشـركة المصدرة للأجهزة.

٧-٦ اختبارات الفروض للفرق بين نسبتين $(\pi_1-\pi_2)$

نريد الآن اختبار الفرق بين نسبتين فى عينتين لنرى هل هناك فرق بينهما أم لا؟ مثل نسبة التدخين بين الرجال والسيدات ونسبة المتعلمين بين الأولاد والبنـات...إلخ. فإذا كانت p_1 و p_2 هما نسبتان من عينتـان مسحوبتان عشوائيا حجمهما علـى الترتيب n_1 و n_2 فـإن توزيـع المعاينـة للفـرق بـين النسـبتين p_1-p_2 يتبـع التوزيـع الطبيعـى وتكـون للإحصاءة Z الشكل التالي:

$$Z = \frac{(p_1-p_2)-(\pi_1-\pi_2)_0}{\sqrt{p(1-p)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}} \quad (1)$$

حيث:

$$P = \frac{n_1p_1+n_2p_2}{n_1+n_2}$$

الصيغة فى المعادلة (١) يمكن استخدامها عندما يكون فرض العدم على الصورة:

$$H_o: (\pi_1-\pi_2) = 0$$

ويكون الفرض البديل على الصورة:

$$H_1: (\pi_1 - \pi_2), \mathbf{0} \neq$$

$$H_1: , \mathbf{or} (\pi_1 - \pi_2) \mathbf{0} >$$

$$H_1: , \mathbf{or} (\pi_1 - \pi_2) \mathbf{0} <$$

ولكن عندما يكون فرض العدم على الصورة:

$$H_o: (\pi_1 - \pi_2) = \pi, \qquad \pi \neq \mathbf{0}$$

يتم استخدام الإحصاءة التالية:

$$Z, \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} = \qquad \mathbf{(2)}$$

يأخذ الفرض البديل الشكل التالي:

$$H_1: (\pi_1 - \pi_2) \neq \pi,$$

$$H_1: , \mathbf{or} (\pi_1 - \pi_2) > \pi$$

$$H_1: , \mathbf{or} (\pi_1 - \pi_2) < \pi$$

وسوف نوضح ذلك بالأمثلة التالية:

مثال (٨): مجموعتان أ، ب تتكون كل مجموعة من ١٠٠ شخص مصابين بمرض معين، أراد باحث اختبار مصل ضد هذا المرض فتم إعطاء المصل للمجموعة أ، بينما المجموعة ب تم إعطاؤها العلاج المعتاد. وبعد فترة وجد أن ٨٠ شخص من المجموعة أ قد شفى بينما شفى ٦٢ شخص من المجموعة ب. اختبر الفرض بأن المصل يساعد على الشفاء أكثر من العلاج المعتاد، وذلك عند مستوى معنوية ٥٪.

الحل: ١- نضع فروض الاختبار وهى كالتالي:

$$H_o: (\pi_1 - \pi_2), \mathbf{0} =$$

$$H_1: (\pi_1 - \pi_2) \mathbf{0} >$$

٢- قيمة Z المحسوبة يتم إيجادها كالتالي:

$$Z = \frac{(p_1-p_2)-(\pi_1-\pi_2)_0}{\sqrt{p(1-p)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}$$

$$p_1 = \frac{80}{100} = \mathbf{0.8}$$

$$p_2 = \frac{62}{100} = \mathbf{0.62}$$

$$\bar{P} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

$$\bar{P} = \frac{100\times0.8+100\times0.62}{100+100}$$

$$\bar{P} = \frac{142}{200}$$

$$\bar{P} = \mathbf{0.71}$$

$$Z = \frac{0.8-0.62-0}{\sqrt{0.71\times0.29(\frac{1}{100}+\frac{1}{100})}}$$

$$Z = \frac{0.18}{\sqrt{0.21\times0.02}}$$

$$Z = \mathbf{2.78} \qquad \mathbf{(1)}$$

٣- نقوم الآن بحساب قيمة Z الجدولية.

$$Z_\alpha = Z_{0.05}$$

$$Z_{0.05} = \mathbf{1.65} \qquad \mathbf{(2)}$$

من (١) و (٢) نجد أن قيمة Z المحسوبة أكبر من قيمة Z الجدولية عند مستوى معنوية ٥٪ ونتيجة لذلك نقبل الفرض البديل الذى يدل على مدى فاعلية المصل.

مثال (٩): ينتج أحد المصانع سلعة ما من خلال وحدتين للإنتاج، فإذا اختيرت عينة عشوائية من ١٠٠ وحدة من إنتاج الوحدة الأولى فوجد بها ١٢ وحدة معيبة. وتم إختيار ١٥٠ وحدة من إنتاج الوحدة الثانية فوجد بها ١٥ وحدة معيبة. اختبر الفرض القائل بأن الفرق بين نسبة الإنتاج التالفة لا يزيد عن ٠.٠٤ وذلك عند مستوى معنوية ٥٪.

الحل: ١- نضع فروض الاختبار وهى كالتالي:

$$H_o: (\pi_1-\pi_2) = \mathbf{0.04},$$

$$H_1: (\pi_1-\pi_2) < \mathbf{0.04}$$

٢- قيمة Z المحسوبة يتم إيجادها كالتالي:

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$$

$$p_1 = \frac{12}{100} = \mathbf{0.12}$$

$$p_2 = \frac{15}{150} = \mathbf{0.1}$$

$$Z = \frac{(0.12 - 0.1) - 0.04}{\sqrt{\frac{0.12 \times 0.88}{100} + \frac{0.1 \times 0.9}{150}}}$$

$$Z = \frac{-0.02}{\sqrt{0.001 + 0.000}}$$

$$Z = \mathbf{-0.49} \qquad \mathbf{(1)}$$

٣- نقوم الآن بحساب قيمة Z الجدولية.

$$Z_\alpha = -Z_{0.05}$$

$$Z_{0.05} = \mathbf{-1.65} \qquad \mathbf{(2)}$$

من (١) و (٢) نجد أن قيمة Z المحسوبة أكبر من قيمة Z الجدولية عند مستوى معنوية ٥٪ ونتيجة لذلك نقبل الفرض العدمى بأن الفرق بين نسبة الإنتاج المعيب يساوى ٠.٠٤.

تمارين

١-فى دراسة على متوسط أعمار الطلاب المتقدمون لشغل إحدى الوظائف أخذت عينة عشوائية من ٣٠ متقدم للوظيفة، فوجد أن متوسط أعمارهم ٢٥ سنة وذلك بانحراف معيارى ٥ سنوات. هل يمكن القول بأن متوسط أعمار جميع المتقدمين يساوى ٢٨ سنة وذلك فى ٩٥٪ من الحالات؟

٢-فى دراسة على نسبة المعيب فى أحد المنتجات أخذت عينة من ٥٠٠ وحدة فوجد أن عدد الوحدات المعيبة بها ١٠٠ وحدة. هل يمكن القول بأن نسبة المعيب فى هذا المنتج تختلف عن ١٪ وذلك عند مستوى معنوية ١٠٪.

٣-فى دراسة على نسبة غياب العاملين فى قطاعين من قطاعات مؤسسة ما وجد أن نسبة الغياب فى القطاع أ هى ٣٠٪ فى حين أن نسبة الغياب فى القطاع ب هى ٣٥٪. أخذت عينتان من نفس الحجم من القطاعين حجمها ١٠٠٠ عامل فوجد أن عدد الغائبين فى القطاع أ ٣٥٠ عامل بينما عدد الغائبين فى القطاع ب ٤٥٠ عامل. هل يمكن القول بأن نسبة الغياب الحقيقية فى القطاعين مختلفة وذلك كما أشارت البيانات، وذلك عند مستوى معنوية ١٪.

٤-فى دراسة للمقارنة بين مجموعتين من الدارسين لتحديد مدى قدرتهم على التحصيل فى الأساليب المحاسبية الجديدة. أخذت عينة من ١٠٠ دارس من كل مجموعة فكانت النتائج على النحو التالي:

	العينة (أ)	العينة (ب)
متوسط القدرة	٨٠	٧٥
تباين العينة	٢٥	١٦

هل يمكن القول بأن متوسط درجة التحصيل متساوى فى المجموعتين؟

٥-إذا أردنا إجراء دراسة عن مدى فاعلية برنامجين لتدريب العاملين. أخذت عينة من المتدربين فى البرنامج الأول حجمها ٥٠ فكان متوسط الدرجات التى حصلوا عليها ١٥ درجة وذلك بانحراف معيارى ٣ درجات. كذلك أخذت عينة من المتدربين فى البرنامج الثانى حجمها ١٠٠ فكان متوسط الدرجات التى حصلوا عليها ١٢ درجة وذلك بانحراف معيارى ٤ درجات. هل يمكن الاستدلال بتكافؤ البرنامجين؟

٦-فى دراسة على نسبة الوحدات المعيبة التى تنتجها ماكينة غزل أخذت عينة من ٢٠٠ وحدة فوجد ٢٠ وحدة معيبة. فهل يمكن القول بأن نسبة المعيب فى إنتاج هذه الماكينة تختلف عن ١٢٪؟ وذلك عند مستوى معنوية ٥٪.

٧-فى دراسة على خط إنتاج ينتج نوعين من الملابس أحدهما للأطفال والآخر للشباب، أخذت عينة عشوائية حجمها ٥٠ من كل خط فكانت نسبة المعيب فى خط الأطفال ١٪ وكانت نسبة المعيب فى خط الشباب ١.٥٪، هل يمكن القول أن:

(أ) أن نسبة المعيب فى خط الأطفال تساوى نسبة المعيب فى خط الشباب؟

(ب) نسبة المعيب فى خط الأطفال مختلفة عن ٢٪؟

اعتبر مستوى المعنوية ٥٪.

٨-فى دراسة على مجموعة من الدارسين فى تخصص الحاسب والإدارة كانت لدينا النتائج التالية:

	الحاسب	الإدارة
حجم العينة	١٠٠	٨٠
متوسط الدرجات	١٥	١٨
الانحراف المعياري	٣	٢

هل يمكن القول عند درجة ثقة ٩٠٪ أن متوسط تحصيل الدارسين متكافيء؟

٩-فى دراسة على مجموعة من الطلاب فى المرحلة الأساسية أخذت عينة من ٥٠ طالب فوجد أن متوسط عمر الطالب ٧.٥ سنة وذلك بانحراف معيارى ٠.٢٥ هل يمكن القول أن متوسط عمر الطالب فى المرحلة الأساسية هو ٨ سنوات وذلك عند مستوى معنوية ٥٪؟

١٠- إذا كان متوسط درجة التركيز فى المنتج (أ) هى ٠.٧ بانحراف معيارى ٠.١ وذلك لعينة من ١٢٠٠ عبوة للمنتج (أ). فى حين كان متوسط درجة التركيز فى المنتج (ب) هى ٠.٦ بانحراف معيارى ٠.٠٩ وذلك لعينة من ١٠٠٠ عبوة للمنتج (ب). هل يمكن القول بأن متوسط درجة التركيز فى المنتجين مختلفة وذلك فى ٩٠٪ من الحالات.

الفصل الرابع

بعض التطبيقات الاقتصادية باستخدام الأساليب الاحصائية

الفصل الرابع

بعض التطبيقات الاقتصادية باستخدام

الأساليب الإحصائية

البرمجة الخطية

تقدمت وسائل التحليل الرياضي للمشاكل الإدارية والاقتصادية تقدما كبيرا وتعتبر البرمجة الخطية Linear Programming إحدى هذه الوسائل. وتعرف البرمجة الخطية على أنها فرع من الفروع الرئيسية للبرمجة الرياضية وأسلوب من أساليب بحوث العمليات؛ تتكون من مجموعة من المفاهيم والنظريات والطرق الرياضية التى تستخدم لإيجاد الحل الأمثل لمجموعة من المشكلات، بموجب معيار معين للمثالية وضمن شروط محددة. وسمي هذا الأسلوب بالبرمجة لأنه يهدف إلى إيجاد البرنامج الأمثل لتشغيل النظام قيد البحث. وأطلقت عليه صفة الخطية لأن جميع العلاقات التي تربط بين متغيرات النموذج الرياضي للمسألة علاقات خطية. إنتشر إستخدام البرمجة الخطية في العديد من مجالات الحياة العملية: العلمية والتقنية والعسكرية والإدارية والإقتصادية. ومن أهم مسائل البرمجة الخطية في المجالات الإدارية والإقتصادية:

- مسائل تخصيص الموارد وتحديد المزيج الإنتاجي.
- مسائل إعداد الوجبات والخلائط.
- مسائل تقطيع المواد.
- مسائل تحميل الآلات وإستخدام الطاقات الإنتاجية المتاحة.
- مسائل النقل.
- مسائل توطين المنشآت وحساب الحجم الأمثل للطاقات الإنتاجية.
- مسائل تنظيم وتوزيع مراكز العمل والآلات والخطوط الإنتاجية والخدمية وغيرها.

وفي المجالات العسكرية تستخدم البرمجة الخطية لحل مسائل النقل وتوضيح شبكات الرادار والدفاعات الجوية ومخازن الإمداد والتموين وغيرها.

وتهدف البرمجة الخطية إلى الإجابة بأسلوب التحليل الرياضي على بعض الأسئلة وحل المشاكل بما يحقق اكبر ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة في ظل القيود والمحددات القائمة.
وعموماً فإن أداء أي عمل بأفضل الوسائل يعني في حد ذاته البحث عن الحدود الدنيا أو القصوى. فعندما تتعلق المشكلة بالتكاليف فإن الهدف عادة يكون الوصول إلى الحد الأدنى وإذا تعلق الأمر بالأرباح فإن الهدف يكون هو الوصول إلى الحد الأقصى.

صياغة المشكلة

المشكلات التى نبحث لها عن حل أمثل غالبا ما تاتي في صورة كلامية. وتحدد طريقة الحل في تصوير المشكلة في شكل نموذج رياضي يعبر عن المشكلة، ومن ثم يحل هذا النموذج بالاساليب المختلفة. ويمكن اتباع الخطوات التالية في بناء النموذج الرياضي:

- حدد الكميات التي تحتاج إلى قيم مثلى. وعرفها كمتغيرات لتاخذ الرموز س١، س٢،...، سن.
- عرف هدف المشكلة وعبر عنه رياضياً باستخدام المتغيرات.
- حدد ومثل القيود في صورة متباينات وذلك باستخدام المتغيرات.
- اضف إلى النموذج الرياضي شرط عدم السالبية (إن جميع المتغيرات يجب أن تكون أكبر من أو تساوي الصفر).

مشاكل الأمثلية

مشاكل الأمثلية (Optimization Problems) هي تلك المشاكل التي نبحث فيها عن أكبر أو أصغر قيمة لدالة تعتمد على متغير أو متغيرات وتسمى هذه الدالة بدالة الهدف (Objective Function) وتخضع هذه الدالة إلى قيود متمثلة في معادلات أو متباينات تربط وتحكم المتغيرات بعضها بالبعض، كما في المثال التالي:

مثال :

أوجد أكبر قيمة لدالة الهدف هـ = ٥ س١ + ٣ س٢ طبقا للآتي:

س١ ـ س٢ = ٣

س٢ = ٢

ونطلق على المتغيرات س١، س٢ بمتغيرات القرار (Decision Variables)، وهي التي نبحث عن قيمها لتعظيم دالة الهدف.

مشاكل البرمجة الخطية

مشاكل البرمجة (Programming Problems) هي التي تتطلب إيجاد التوزيع الأمثل (Optimal Allocation) للموارد المحدودة (عمالة، مواد، آلات، أموال،...الخ) لتحقيق أهداف معينة.

مشاكل البرمجة الخطية Linear Programming Problems هي التي تتطلب إيجاد اكبر أو اصغر قيمة لدالة هدف خطية طبقا لقيود خطية. بمعنى أن العلاقة التي تربط بين المتغيرات بعضها بالبعض هي علاقة خطية (متباينات أو معادلات من الدرجة الأولى، الأس = ١).

مثال :

تقوم شركة تعدين بتشغيل ثلاثة مناجم (ص، ط، ك)، ويفصل الخام على درجتين من حيث الجودة النوعية قبل الشحن ويبين الجدول الآتي الطاقة الإنتاجية اليومية للمناجم وكذلك التكلفة اليومية.

المنجم	طاقة الإنتاج من خام عالى الجودة	طاقة الإنتاج من خام قليل الجودة	تكلفة التشغيل (١٠٠٠جنيه/يوم)
ص	٤	٤	٢٠
ط	٦	٤	٢٢
ك	١	٦	١٨

وقد التزمت الشركة بتسليم ٥٤ طن من الخام عالى الجودة و٦٥ طن من الخام قليل الجودة في نهاية كل أسبوع، والمطلوب تحديد عدد الأيام المطلوب تشغيل العمال فيها من كل منجم للوفاء بإلتزام الشركة علما بأن العمال لا يعملون طوال أيام الأسبوع؟

أفترض متغيرات القرار كالتالي:

س١ = عدد الأيام التي يعملها العمال في منجم س أسبوعيا

س٢ = عدد الأيام التي يعملها العمال في منجم ط أسبوعيا

س٣ = عدد الأيام التي يعملها العمال في منجم ك أسبوعيا

ومن المسألة نري أننا نبحث عن اقل تكلفة تشغيل للمناجم وذلك لتلبية التزامات الشركة، أي أن المسألة يمكن تمثيلها كالآتي:

أوجد أقل هـ = ٢٠ س١ + ٢٢ س٢ + ١٨ س٣

طبقا للقيود الآتية

إجمالى إنتاج عالى الجودة ٤ س١ + ٦ س٢ + س٣ > ٥٤

إجمالى إنتاج قليل الجودة ٤ س١ + ٤ س٢ + ٦ س٣ > ٦٥

∵ العمال لا يعملون طوال أيام الإسبوع

∴ قيد العمل في منجم ص هو س١ ≤ ٦

قيد العمل في منجم ط هو س٢ ≤ ٦

قيد العمل في منجم ك هو س٣ ≤ ٦

قيد عدم السالبية س١ ، س٢ ، س٣ > ٠

مثال :

ينتج أحد مصانع البلاستيك صنفين من الأدوات البلاستيكية يتطلب إنتاج وحدة من الصنف الأول ٣ ساعات عمل و٤ كجم من المواد الخام ويتطلب إنتاج وحدة من الصنف الثاني ٥ ساعات عمل و٢ كجم من المواد الخام فإذا علمنا أن الأرباح العائدة من الصنف الأول هي ١٠ جنيه لكل وحدة إنتاج وللصنف الثاني ٨ جنيه لكل وحدة إنتاج وأن إمكانيات المصنع الأسبوعية هي ١٠٩ ساعات و٨٠ كجم من المواد الخام، فأوجد الصياغة لهذه المسألة على شكل نموذج برمجة خطية من أجل تعظيم الربحية.

الحل

لصياغة هذه المسألة نلاحظ أن الهدف هو الحصول على أكبر كمية ممكنة من الأرباح أي تكبير (تعظيم) دالة الهدف ولتكن ص = د(س) ويكون ذلك بتحديد قيم مثلى

لمتغيرات القرار أو الكميات المنتجة من الصنفين الأول والثاني بفرض أن الكمية المنتجة من الصنف الأول تسمى س١ وبفرض أن الكمية المنتجة من الصنف الثاني تسمى س٢ وبالتالي فإن دالة الهدف هي

تعظيم (ص) = ١٠س١+٨س٢

وذلك تحت القيود التي تحدد بأن لاتزيد ساعات العمل لإنتاج س١، س٢ عن ١٠٩ ساعة وأن لا تزيد المواد الخام اللازمة لإنتاج س١ ، س٢ عن ٨٠ كجم أي أن:

٣ س١+٥س٢≤١٠٩

٤ س١+٢س٢≤٨٠

ومن البديهي أن قيم كل من س١ ، س٢ لابد وأن تكون قيم غير سالبة أي أن:

س١≤٠ س٢≤٠

وبالتالي فإن المشكلة أصبحت مسألة برمجة خطية المطلوب فيها تعظيم دالة الهدف المعطاة تحت القيود المعطاة وقيد الإشارة الغير سالبة للمتغيرات.

<u>البرمجة الخطية باستخدام الرسم البياني :</u>

يمكن حل مسألة البرمجة الخطية بيانيا إذا كانت المسألة لها متغيرا قرار (س، ص) وذلك لتعذر رسم المتباينات لأكثر من ذلك، وكما تم شرحه في رسم المتباينات فيمكن حل المسألة كالتالي:

١- رسم المتباينات وإيجاد منطقة الحلول الممكنة.

٢- تحديد نقاط الأركان لمنطقة الحلول الممكنة (إيجاد إحداثيات هذه النقاط).

٣- التعويض بنقاط الأركان في دالة الهدف واختيار النقطة التي تعطي الحل الأمثل.

مثال :

هـ = ٦ س١ + ٤ س٢ طبقا للآتي

٥ س١ + ٥ س٢≤٣٠ (١)

س١ - س٢ ≤ -٤ (٢)

س٢ ≤ ٢ (٣)

س١ ، س٢ ≥ ٠ (٤)

١- إيجاد منطقة الحلول الممكنة

رسم المتباينات (١) إلى (٣)، أما المتباينة (٤) فتمثل شرط عدم السالبية، أي أخذ النقاط في الربع الأول الموجب فقط لكل متباينة.

وبالنسبة للمتباينة (١) فتؤخذ في حالة التساوي

٥ س١ + ٥ س٢ = ٣٠ ، وبالتعويض س١ = ٠ نجد أن س٢ = ٦، أي أن النقطة (٠، ٦) تقع على المستقيم، وبوضع س٢ = ٠ نجد أن س١ = ٦، أي أن النقطة (٦،٠) تقع على المستقيم.

وبالمثل المتباينة (٢) فتحد بالمستقيم المار بالنقطتين (٠، ٤) والنقطة (-٤، ٠)،

والمتباينة (٣) تحد بالمستقيم س٢ = ٢ الموازي لمحور س١

وبرسم جميع المتباينات معا نحصل على المنطقة المظللة كما هو موضح في شكل (٧-١).

٢- لمعرفة نقاط الأركان أ، ب، جـ، ء

نلاحظ أن النقطة أ هي نقطة تقاطع المستقيم (١) مع (٢)

لمعرفة نقطة تقاطع المستقيم (١) مع (٢) نقوم بحل المعادلتين معا، أي

٥ س١+ ٥ س٢ = ٣٠ مع س١ - س٢ = -٤

نضرب المعادلة الثانية في ٥ ونجمعها مع المعادلة الأولى (للتخلص من س٢)، فنحصل على

٥ س١+ ٥ س٢= ٣٠

٥ س١- ٥ س٢= - ٢٠

١٠ س١= ١٠، أي س١ = ١

وبالتعويض في أي معادلة نجد أن س٢ = ٥ أي أن نقطة التقاطع أ = (١، ٥)

وبالمثل فإن النقطة ب هي تقاطع المستقيم (١) مع (٣) أي حل

٥ س١ + ٥ س٢ = ٣٠ مع س٢ = ٢

وبالتعويض المباشر بقيمة س٢ في المعادلة الأولى نجد أن

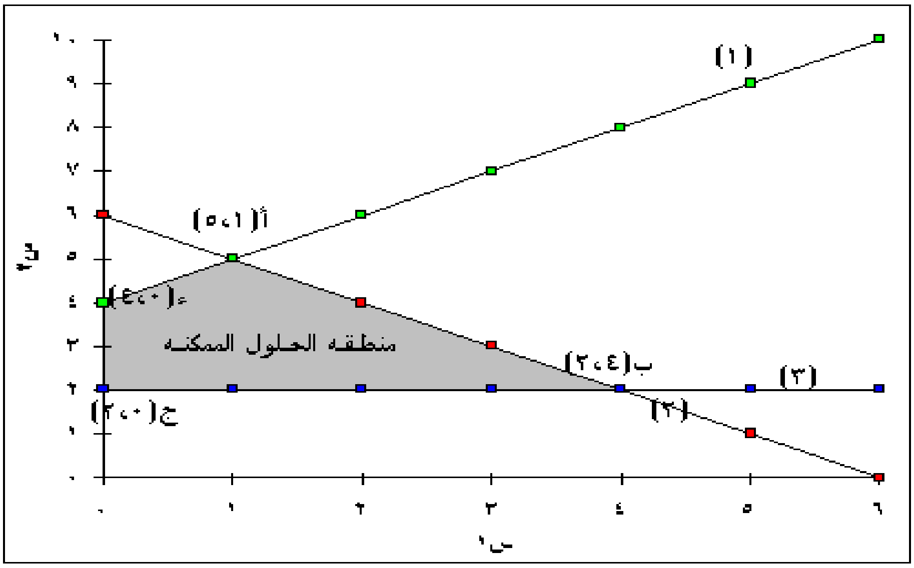
٥ س١ + ٥ (٢) = ٣٠

٥ س١ = ٢٠ أي أن س١ = ٤

أي أن نقطة التقاطع ب = (٤، ٢).

أما النقطتين جـ، ء فتقعا على المحور س٢

أي أن النقطة جـ = (٠، ٢) والنقطة ء = (٠، ٤)



شكل (٧-١): البرمجة الخطية باستخدام الرسم البيانى

٣- التعويض بنقاط الأركان في دالة الهدف

نقاط الأركان	هــــــ = ٦ س١ + ٤ س٢
أ (١،٥)	٦(١) + ٤(٥) = ٢٦
ب (٤،٢)	٦(٤) + ٤(٢) = ٣٢
جـ (٠،٢)	٦(٠) + ٤(٢) = ٨
ء (٠،٤)	٦(٠) + ٤(٤) = ١٦

يلاحظ أن قيمة دالة الهدف عند النقطة ب (٤،٢) هي أكبر قيمة وهي تمثل الحل الأمثل (أفضل الحلول الممكنة). يمكن إيجاد النقطة ب بطريقة أخرى كالتالي:

<u>طريقة رسم دالة الهدف:</u>

١ـ خذ على سبيل المثال النقطة (١، ٣) التي تقع في منطقة الحلول الممكنة، وقيمة دالة الهدف ر عند هذه النقطة هي:

هـ = ٦ (١) + ٤(٣) = ٦ + ١٢ = ١٨

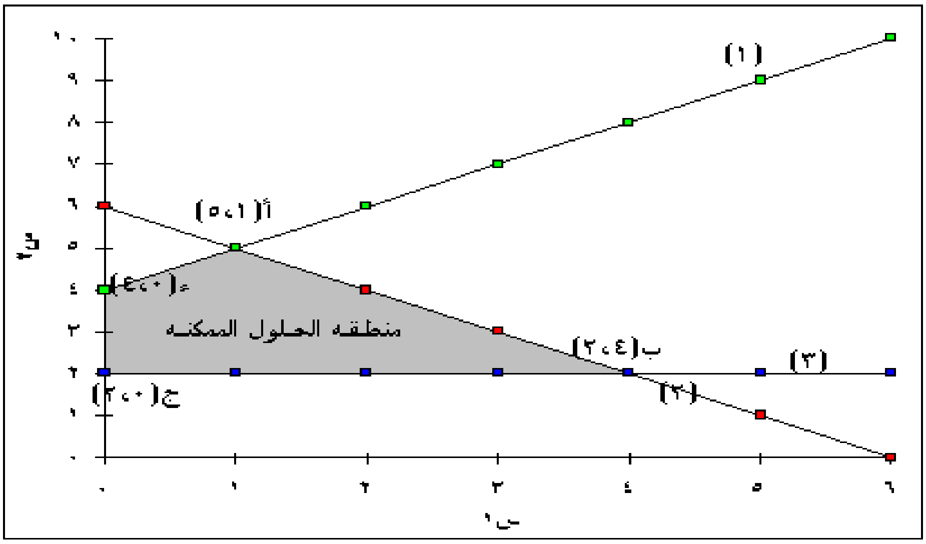
٢ـ ولنرسم الآن المستقيم ٦ س١ + ٤ س٢ = ١٨

بوضع س١= ٠ أولا نجد النقطة (٠، ٤,٥)

وبوضع س٢= ٠ نجد النقطة (٣، ٠)

وبالتالى سنحصل علي المستقيم المار بالنقطتين السابقتين كما في شكل

٣ـ بأخذ مستقيمات متوازية مع المستقيم السابق، نحصل على المستقيم الذي يمس أقصى نقطة في منطقة الحلول الممكنة، وهى النقطة ب (٤،٢). وبالتالى فإن النقطة ب هي نقطة الحل الأمثل.



شكل (٧ـ٢): رسم دالة الهدف

<u>مثال:</u>

حل المشكلة الآتية بيانيا؟

أوجد أكبر هـ = ٨ س١ + ٣ س٢

طبقا للقيود الآتية

٥ س١ + ٥ س٢ ≤ ٣٥ (١)

س١ - س٢ ≤ ٤ (٢)

س٢ ≥ ٤ (٣)

س١، س٢ ≤ ٠

الحل

١- رسم المتباينات السابقة لمعرفة منطقة الحلول الممكنة يمكن كتابة المتباينة الأولى كالتالي

٥ س١ + ٥ س٢ = ٣٥ (١)

س١- س٢ = ٤ (٢)

ويلاحظ أن المعادلة (٢) عبارة عن معادلة خط مستقيم ولرسم أي مستقيم نحتاج إلى نقطتين تقعا عليه

بوضع س١= ٠ في المعادلة ٥ س٢= ٣٥ أي س٢= ٧ ، أي نحصل على النقطة (٠،٧)

وبالمثل نضع س٢= ٠ في المعادلة الثانية ٥ س١ = ٣٥

أي س١= ٧، أي نحصل على النقطة (٧، ٠)

وبالتالى يمكن رسم المستقيم المار بالنقطتين (٠، ٧) و(٧، ٠)

ولرسم المتباينة ٥ س١ + ٥ س٢ > ٣٥، نفترض نقطة عشوائية ولتكن (١، ١)

والتعويض في المتباينة السابقة: ٥ (١) + ٥ (١) = ١٠ > ٣٥

أي نأخذ المستوى إلى يسار المستقيم ٥ س١+ ٥ س٢= ٣٥، كما في شكل (٧-٣).

وبالمثل بالنسبة للمتباينة (٢) ، س١- س٢ ≥ ٤

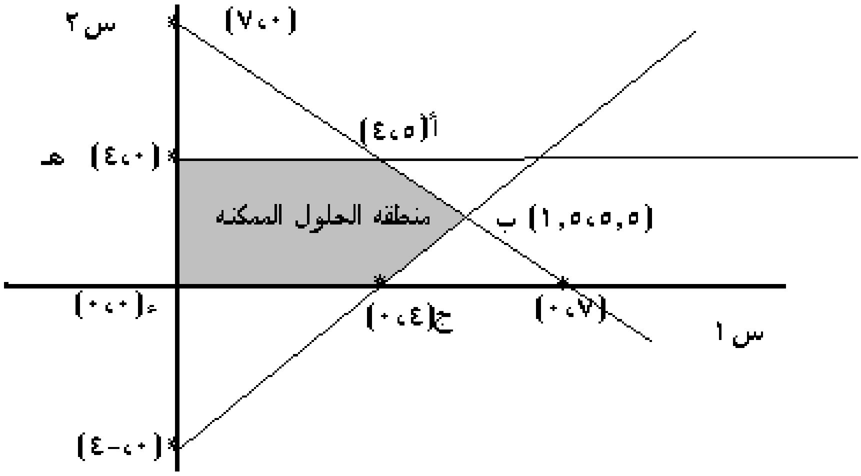
س١- س٢ > ٤

س١- س٢ = ٤

ولرسم المستقيم س١- س٢ = ٤ نحصل على النقطتين (٠، -٤)، (٤، ٠)

وبأخذ النقطة العشوائية السابقة والتعويض في المتباينة نجد أنها تتحقق فنأخذ المستوى على يسار المستقيم س١ - س٢=٤، كما في شكل (٧-٣). وبالمثل بالنسبة للمتباينة (٣)، س٢ = ٤

حيث يمثل المستقيم س٢ = ٤ مستقيما يوازي محور س١ ويقطع محور س٢ في النقطة (٠، ٤)، وتكون المتراجحة س٢ < ٤ هي المستوى الواقع تحت المستقيم س٢= ٤



شكل (٧-٣): رسم المتباينات لمعرفة منطقة الحلول الممكنة

من شكل (٧-٣) نجد أن المنطقة المظللة تمثل منطقة الحلول الممكنة.

٢- تعيين نقاط الأركان

لاحظ أن النقطة أ هي تقاطع المستقيمين ٥ س١+ ٥ س٢= ٣٥ وس٢= ٤

وبالتعويض بقيمة س٢= ٤ في المعادلة الأولى نجد أن

٥ س١+ ٥(٢) = ٣٥

وعليه فإن س١= ٢٥ ÷ ٥ = ٥

أي أن النقطة أ هي (٥، ٤)

والنقطة ب هي تقاطع ٥ س١+ ٥ س٢= ٣٥ مع س١ - س٢= ٤

وبضرب المعادلة الثانية في ٥ وجمعها مع المعادلة الأولى نحصل على التالي:

٥ س١- ٥ س٢= ٢٠

٥ س١+ ٥ س١= ٣٥

١٠ س١ = ٥٥ أى أن س١ = ٥,٥

وبالتعويض بقيمة س١ في المعادلة الأولى نجد أن ٥ (٥,٥) + ٥ س٢= ٣٥

أي أن ٥ س٢= ٣٥ _ ٢٧,٥ = ٧,٥

أى أن س٢ = ٧,٥ ÷ ٥ = ١,٥

أي أن النقطة ب هي (٥,٥، ١,٥)

أما النقطة جـ فهي (٤، ٠)، والنقطة د هي (٠، ٠)، والنقطة هـ هي (٠، ٤)

٣- التعويض بالنقاط في دالة الهدف

النقاط	دالـــة الهــدف هـــ = ٨ س١+ ٣ س٢
أ (٥، ٤)	٨ (٥) + ٣ (٤) = ٥٢
ب (٥,٥، ١,٥)	٨ (٥,٥) + ٣ (١,٥) = ٤٨,٥
جـ (٤، ٠)	٨ (٤) + ٣ (٠) = ٣٢
د (٠، ٠)	٠
هـ (٠، ٤)	٨ (٠) + ٣ (٤) = ١٢

ويكون الحل الأمثل عند النقطة أ (٥، ٤)، حيث هـ = ٥٢

مثال:

يقوم جزار بعمل شطائر اللحم بتكوين من لحم بقري ولحم ماعز. يحتوي لحم البقر على ٨٠٪ لحم و٢٠٪ دهون ويكلف ٢٤ جنيه لكل كيلو في حين أن لحم الماعز على ٦٨٪ لحم و٣٢٪ دهون ويكلف ١٨ جنيه لكل كيلو. ماهي كمية اللحم من كل نوع يجب أن يستخدمها المحل في كل كيلو من شطائر اللحم إذا علمت أنه يجب تخفيض التكاليف والمحافظة علي نسبة الدهون. بحيث لايزيد عن ٢٥٪؟

الحل

المتغيرات:

نفرض أن وزن لحم البقر المستخدم في الكيلو= س

نفرض أن وزن لحم الماعز المستخدم في الكيلو= ص

دالة الهدف:

تصغير(هـ)= ٢٤ س+١٨ص

القيود:

القيد الاول: يحتوي كل كيلو علي ٠,٢ س من الدهون من لحم البقر و٠,٣٢ ص من الدهون من لحم الماعز ويجب الا تزيد الدهون في الشطيرة عن ٠,٢٥

٠,٢ س + ٠,٣٢ ص ≤ ٠,٢٥ (١)

القيد الثاني: ويجب أن يكون وزن لحم البقر ولحم الماعز في كل كيلو من الشطائر هو كيلو واحد.

س + ص = ١ (٢)

القيد الثالث: قيد عدم السالبية

س، ص ≥ ٠ (٣)

<u>النموذج الرياضي:</u>

تصغير(هـ)= ٢٤ س+١٨ص

علماً بأن: ٠,٢ س + ٠,٣٢ ص ≤ ٠,٢٥

س + ص = ١ س , ص ≥ ٠

الحل البياني للمثال (٧-٦)

للحصول علي الرسم البياني الممثل للمشكلة يتم اتباع الخطوات التالية:

رسم محوري الأفقى (س) والرأسي (ص) كما هو موضح بالرسم التالى

رسم القيود كما يلي:

- القيد الاول:

بفرض أن س = ٠

نجد أن ص= ٠,٧٨ نحصل على النقطة (٠، ٠,٧٨)

بفرض أن ص=٠

نجد ان س=١,٢٥ نحصل على النقطة (١,٢٥، ٠)

نوقع النقطتين (٠، ٠,٧٨) و(١,٢٥، ٠) علي الرسم.

- القيد الثاني:

بفرض أن س=٠ نجد ان ص=١ نحصل على النقطة (٠، ١)

بفرض أن ص= ٠ نجد ان س=١ نحصل على النقطة (١، ٠)

نوقع النقطتين (٠، ١) و(١، ٠) علي الرسم.

بحل المعادلتين:

٠,٢ س + ٠,٣٢ ص = ٠,٢٥

س+ص=١

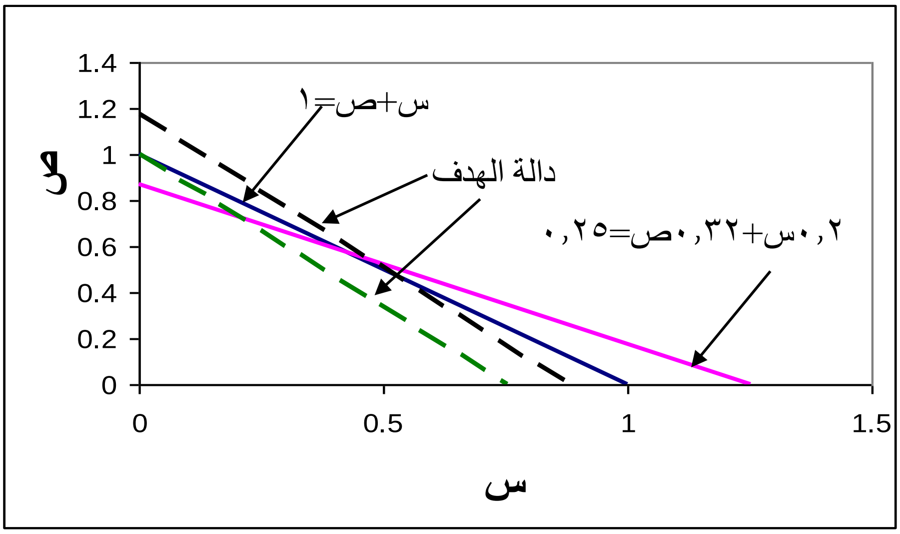
نحصل على:

س=٠,٥٨   ص=٠,٤٢

بالتعويض في (هـ)=   ٢٤ س+١٨ص نجد ان

(هـ)= ٢٤(٠,٥٨)+١٨(٠,٤٢)=٢١

مما يعني أن المحل يجب أن يستخدم ٠,٥٨ من لحم البقر والباقي ٠,٤٢ من لحم الماعز وذلك يحقق أقل تكلفة والتي تساوي ٢١ جنيه للكيلو.



مثال :

استخدام طريقة الرسم البياني فى ايجاد الحل لقيم س، ص للدالة الآتية:

تصغير (هـ)= ٥س+٢ص

تحت الشروط التالية:

٢س + ٥ ص ≤ ١٠   ٤ س – ص ≤ ٢١

س + ص ≤ ٤   س ، ص >٠

رسم القيود:

القيد الأول: ٢ س + ٥ ص > ١٠

بفرض أن ص = ٠ ، نجد أن : س = ٥ وعندما نفرض أن س = ٠ نجد أن ص = ٢

اذا وصلت النقطتين (٥، ٠) و(٠، ٢)

القيد الثاني: ٤س – ص > ٢١

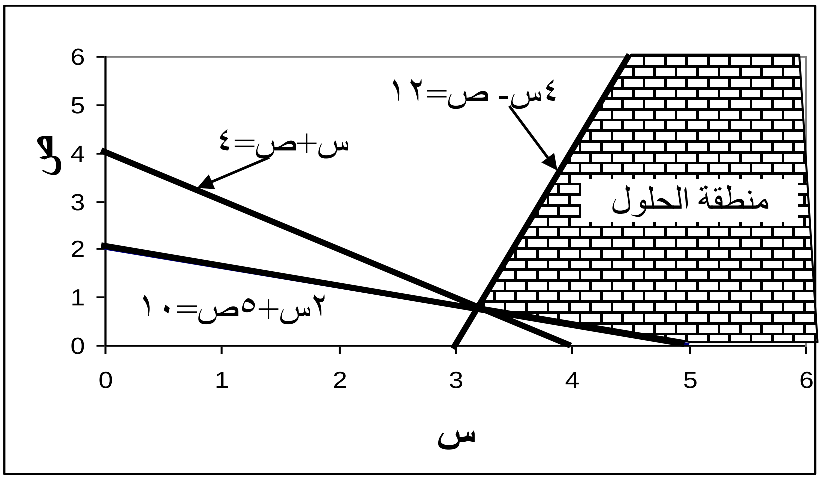
بفرض أن ص=٠، نجد أن س=٣ وعندما نفرض أن س=٠ نجد أن ص=-١٢ والتي ليست على الرسم لذلك نفرض أن س=٥ نجد أن ص=٨

اذا وصلت النقطتين (٣، ٠) و(٥، ٨)

القيد الثالث: س + ص > ٤

بفرض ان ص=٠، نجد ان س=٤ وعندما نفرض ان س=٠ نجد ان ص=٤

إذا وصلت النقطتين (٤، ٠) و(٠، ٤)



رسم دالة الهدف:

افرض أن دالة الهدف تساوي أي رقم اختياري وليكن ٢٠

∴ ٥س+٢ص=٢٠ عندما س=٠ ∴ ص= ١٠ وعندما ص=٠ ∴ س= ٤ وصل النقطتين (٠، ١٠)، (٤، ٠) حرك دالة الهدف في اتجاة تصغير القيمة حتى تصل إلى أخر نقطة في منطقة الحلول المحددة بأخر قيدين.

حل نقط التقاطع للقيود الحاكمة التي يقع عليها الحل

س+ص=٤

٤س-ص=١٢

بحل المعادلتين السابقتين نجد ان:

٥ س = ١٦ أى أن س = ٣,٢

بالتعويض في س+ص=٤ نجد أن ص= ٠,٨

بالتعويض في دالة الهدف كما يلي:

هـ= ٥س+٢ص= ٥(١٦/٥) + ٢(٤/٥) = ١٧,٦

نجد ان الحل الامثل هو:

س= ٣,٢، ص= ٠,٨، هـ= ١٧,٦

البرمجة الخطية و أسعار الظل

تقوم شركة جنى للغسالات بانتاج نوعين من الغسالات , الأولى X من النوع الأوتوماتيك , وتحقق الواحدة عائد قدره ٥٠٠ جنيه , و الثانية Y عادية وتحقق الواحدة عائد قدره ٢٠٠ جنيه . " فإذا ما اعتبرنا أن العائد كله ربح "

النوع الأول X يحتاج إلى عدد واحد مبرج إليكترونى T , بينما لا يحتاج الثانى لذلك . و يتطلب انتاج الوحدة من النوع الأول إلى ١٢ ساعة عمل L و كذلك إلى ٦ وحدات من المواد الخام M , فى حين يحتاج انتاج الواحدة من النوع الثانى إلى ٨ ساعات عمل L , و ١٤ وحدة من المواد الخام M .

فإذا كانت الكميات المتاحة للشركة من عوامل الانتاج السابقة على النحو التالى :

وحدات برمجة إليكترونية T = 400

وحدات مواد خام M = 8400 ساعات عمل L = 7200

فإذا كانت الشركة تهدف إلى تعظيم أرباحها .

١– حدد الكميات الواجب انتاجها من النوعين مع حساب كمية الطاقة غير المستغلة

٢ – احسب أسعار الظل فى الحالات التالية :

أ – زيادة T من ٤٠٠ إلى ٤١٠ ب – زيادة L من ٧٢٠٠ إلى ٨٠٠٠

جـ – زيادة M من ٨٤٠٠ إلى ٨٤٣٠

٣ – إذا شرعت الشركة فى انتاج نوع جديد من الغسالات (G) أكثر سعة وتطوراً و كان انتاج الواحدة منها يحتاج إلى عدد واحد مبرمج T وإلى ١٦ وحدة من المواد الخام M , و إلى ١٨ ساعة عمل L , و تم تحديد العائد من هذا النوع بمقدار ٦٢٥ جنيه للوحدة , فهل يمكن القبول بهذا المنتج أم لا تبعاً لأسعار الظل؟

الحل

١ – دالة الهدف هى تعظيم الربح π و بالتالى فإن :

$$\pi = 500X + 200Y$$

و تكون القيود هى :

قيد البرمجة (T) $X \leq 400$

قيد المواد الخام (M) $14Y + 6X \leq 8400$

قيد العمالة (L) $8Y + 12X \leq 7200$

نحول المتباينات السابقة إلى معادلات كالتالى

$$X = 400 \qquad (T)$$

$$14Y + 6X = 8400 \qquad (M)$$

$$8Y + 12X = 7200 \qquad (L)$$

نرسم القيود الثلاثة بيانيا بتحديد البدايات و النهايات على المحورين عن طريق جعل Y = صفر مرة , X = صفر مرة , و ذلك فى كل معادلة , و بالتالى فإذا وضعنا X على المحور الأفقى , Y على المحور الرأسى فيكون :

القيد الأول كما هو لأنه من طرف واحد فيكون خط مستقيم عمودى عند ٤٠٠

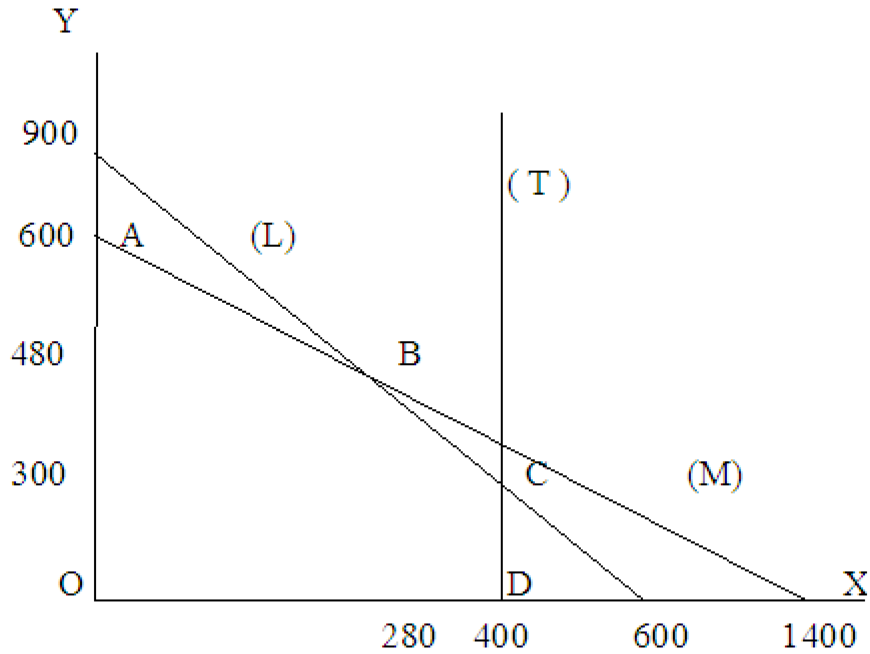
القيد الثانى : عند Y = صفر يكون : 12 X = 7200 و منها X = ٦٠٠ و عند X = صفر

يكون : 8 Y = 7200 و منها Y = ٩٠٠

القيد الثالث :عند Y = صفر يكون : 6 X = 8400 و منها X = ١٤٠٠

و عند X = صفر يكون : 14 Y = 8400 و منها Y = ٦٠٠

و بالتالى نرسم القيود كما يلى :



و تتحدد منطقة الحلول المثلى فى الشكل السابقة بالمنطقة ABCDO , علماً بأن النقطة B تنتج من تقاطع القيد M مع القيد L , و بحل هاتين المعادلتين آنياً نجد أن :

$$14Y + 6X = 8400 \qquad (M)$$

$$8Y + 12X = 7200 \qquad (L)$$

و بقسمة القيد L على ٢ و طرح الناتج من القيد M يكون

$$14\,Y + 6\,X = 8400 \qquad (M)$$

$$\underline{4\,Y + 6\,X = 3600 \qquad (L) \quad -}$$

$$10\,Y = 4800$$

و منها Y = ٤٨٠ و بالتعويض عن Y فى أى من القيدين نجد أن X = ٢٨٠

كما أن النقطة C تنتج من تقاطع القيد T مع القيد L

و عند التعويض عن قيمة Y = ٣٠٠ فى القيد L نجد أن X = ٣٠٠

نقوم بعد ذلك باختبار أركان الحل فى ظل دالة الهدف كالتالى :

النقاط	دالة الهدف $\pi = 500\,X + 200\,Y$
0	= 500 (0) + 200 (0) = 0
A	= 500 (0) + 200 (600) = 120000
B	= 500 (280) + 200 (480) = 236000
C	= 500 (400) + 200 (300) = 260000
D	= 500 (400) + 200 (0) = 200000

من خلال الجدول السابق يتضح أن النقطة C هى التى تعظم الأرباح و ذلك بانتاج ٤٠٠ غسالة من النوع الأول مع ٣٠٠ غسالة من النوع الثانى .

– يلاحظ أن النقطة C هى تقاطع القيد T مع القيد L و عندها نجد أن الموارد مستغلة بالكامل عند هذين القيدين حيث يكون :

$$400 = 400 \qquad (T)$$

$$8\,(300) + 12\,(400) = 2400 + 4800 = 7200 \qquad (L)$$

أما فى القيد الثالث وهو قيد المواد الخام فنجد أنه غير مستغل بالكامل حيث يكون :

$$14\,(300) + 6\,(400) = 4200 + 2400 = 6600 < 8400 \quad (M)$$

وبالتالى فهناك فائض فى المواد الخام قدره :

١٨٠٠ = ٦٦٠٠ – ٨٤٠٠

<u>٢ – أسعار الظل Shadow Price</u>

<u>أ – عند زيادة T من ٤٠٠ إلى ٤١٠</u>

نجد أن القيد T يتقاطع مع القيد L فى نقطة الحل الأمثل , و بالتعويض عن قيمة T فى القيد L يكون :

$$8\,Y + 12\,(410) = 7200$$

و منها نجد أن $8\,Y = 2280$ **إذن** $Y = 285$

و بالتعويض عن هذه القيم فى دالة الهدف يكون

$$\pi = 500\,(410) + 200\,(285) = 262000$$

و باتالى فإن مقدار الزيادة فى الربح هى $\pi\Delta = 200$

و منها نجد أن $shadow\ price = \frac{\Delta\pi}{\Delta T} = \frac{2000}{10} = 200$

<u>ب – عند زيادة L من ٧٢٠٠ إلى ٨٠٠٠</u>

نجد أن القيد T يتقاطع مع القيد L فى نقطة الحل الأمثل , و بالتعويض عن قيمة T فى القيد L يكون :

$$8\,Y + 12\,(400) = 8000$$

و منها نجد أن $8\,Y = 3200$ **إذن** $Y = 400$

و بالتعويض عن هذه القيم فى دالة الهدف يكون

$$\pi = 500\,(400) + 200\,(400) = 280000$$

و باتالى فإن مقدار الزيادة فى الربح هى $\pi\Delta = 20000$

و منها نجد أن $shadow\ price = \frac{\Delta\pi}{\Delta L} = \frac{20000}{800} = 25$

<u>جـ – عند زيادة M من ٨٤٠٠ إلى ٨٤٣٠</u>

نجد أن القيد M يتقاطع مع القيد L فى منطقة الحل الأمثل , و بحل القيدين معاً

يكون : : $(M)\quad 14\,Y + 6\,X = 8430$

$$(L)\quad 8\,Y + 12\,X = 7200$$

و بقسمة القيد L على ٢ و طرح الناتج من القيد M يكون

$$
\begin{array}{lr}
14\,Y + 6\,X = 8430 & (M) \\
\underline{4\,Y + 6\,X = 3600} & \underline{(L)\quad -}
\end{array}
$$

$$10\,Y = 4830$$

ومنها Y = ٤٨٣

وبالتعويض عن Y فى أى من القيدين نجد أن : X = ٢٧٨

وبالتعويض عن هذه القيم فى دالة الهدف يكون

$$\pi = 500\,(278) + 200\,(483) = 235600$$

وباتالى فإن مقدار الزيادة فى الربح هى :

$$\pi\Delta = -\ 24400$$

و منها نجد أن $shadowprice = ZERO$

٣ – من المفترض أن تبعاً للأسعار الظلية أن يكون :

$$16\,(M) + 1\,(T) + 18\,(L) = 625$$

و عند حساب تكاليف المنتج الجديد مقومة بالأسعار الظلية نجد أن :

$$16\,(0) + 1\,(200) + 18\,(25) = 650$$

وبما أن تكلفة المنتج تكون أكبر من العائد المرجو منه فإن القرار هو الرفض .

و يكتفى فقط بالمنتجين القديميين حيث يكون :

عند حساب تكاليف المنتج X مقومة بالأسعار الظلية نجد أن :

$$6\,(M) + 1\,(T) + 12\,(L) = 500$$

$$6\,(0) + 1\,(200) + 12\,(25) = 500$$

و عند حساب تكاليف المنتج Y مقومة بالأسعار الظلية نجد أن :

$$14\,(M) + 0\,(T) + 8\,(L) = 200$$

$$14\,(0) + 0\,(200) + 8\,(25) = 200$$

<u>تمرين غير محلول</u>

تقوم شركة جينا لطلمبات المياه بانتاج نوعين من اجهزة الطلمبات , الأول اقتصادى E ويحقق الواحد ربح قدره ٢٠٠ جنيه , والثانى قياسى S ويحقق الواحد ربح قدره ٤٠٠ جنيه.

النوع الأول E يحتاج إلى عدد ٢ مشغل D (Drive) , بينما يحتاج النوع الثانى S إلى عدد واحد مشغل D . كذلك يحتاج النوع الثانى S إلى عدد واحد قرص صلب H (Hard Disk) . بينما النوع الأول E لا يحتاج إلى ذلك . ويتطلب انتاج الوحدة من كل نوع إلى ٥ ساعات عمل L .

فإذا كانت الكميات المتاحة للشركة من عوامل الانتاج السابقة على النحو التالى :

قرص صلب $H = 300$

مشغل $D = 650$

ساعات عمل $L = 2000$

فإذا كانت الشركة تهدف إلى تعظيم أرباحها .

١- حدد الكميات الواجب انتاجها من النوعين

٢- حساب كمية الطاقة غير المستغلة

٣- احسب أسعار الظل عند

أ - زيادة L من ٢٠٠٠ إلى ٢٤٠٠ ساعة

ب - زيادة D من ٦٥٠ إلى ٧٠٠

جـ - زيادة H من ٣٠٠ إلى ٣٢٠

٤ - حساب تكاليف المنتج E والمنتج S مقومة بالأسعار الظلية

٥ - إذا شرعت الشركة فى انتاج نوع جديد من الطلمبات (G) أكثر سعة وتطوراً و كان انتاج الواحدة منها يحتاج إلى عدد ٢ مشغل D وإلى عدد ٢ قرص صلب H و إلى ٨ ساعات عمل L , و تم تحديد العائد من هذا النوع بمقدار ٧٢٠ جنيه للوحدة , فهل يمكن القبول بهذا المنتج أم لا تبعاً لأسعار الظل؟

الفصل الخامس

التنبؤ بالطلب على المبيعات باستخدام الطرق الاحصائية

الفصل الخامس

التنبؤ بالطلب على المبيعات باستخدام الطرق الاحصائية

<u>التنبؤات والتحليلات التسويقية :</u>

يعتبر التنبؤ بالنسبة للمؤسسات والشركات نافذة على المستقبل ، ولا سيما بالنسبة للأنشطة الإقتصادية التى تعتمد على تخصيص المصادر المتاحة على الأنشطة المختلفة.

التنبؤ

هو توقع ما قد يحدث فى المستقبل من أحداث. وعادة ما يهتم المديرون بنتائج هذه التنبؤات التى قد تؤثر على عملياتهم وقدراتهم

الهدف الرئيسى للتنبؤ

هو الاستخدام الأفضل للمعلومات المتاحة حاليا، والمطلوب استثمارها فى الأنشطة المستقبلية التى تخدم الأهداف الخاصة للمؤسسة.

ملحوظة هامة :

التنبؤ التام للمستقبل غير ممكن

ولكن الدراسات تعطينا اتجاهات عامة.

يستخدم التنبؤ بالمبيعات فى

تحديد مستويات الإنتاج

التسعير

التخطيط المالى والتدفقات النقدية .

تحديد حجم رأس المال المطلوب.

<u>وظيفة التنبؤ :</u>

يمثل التنبؤ مجموعة من الإجراءات الهادفة للحصول على تقرير للنشاط المستقبلى، ولذلك فالتركيز الأساسى ينصب على نموذج التقنية المستخدمة فى التنبؤ.

معايير اختيار أسلوب التنبؤ المناسب

سواء كان أسلوب التنبؤ كمياً أو غير كمياً فإنه لابد من توافر الشروط الأساسية لكل منها، ويتوقف الاختيار على عاملين هما:

١ - خصائص عملية صنع القرار

٢ - خصائص أسلوب التنبؤ

أولاً : خصائص عملية صنع القرار

أ- الأفق الزمنى:

المدى الحالى (أقل من شهر)

المدى القصير (من شهر إلى ثلاثة شهور)

المدى المتوسط (من ثلاثة شهور إلى سنتين)

المدى الطويل (أكثر من سنتين).

ب- درجة التفاصيل:

يعتبر تحديد درجة التفصيل فى البيانات خاصية هامة من خصائص عملية صنع القرار التى لها تأثيرها فى اختيار أسلوب التنبؤ المناسب.

فهناك بيانات عامة تجميعية عن سلوك الظاهرة محل البحث خلال المدى الزمنى المحدد، وأحيانا أخرى بيانات تفصيلية عن جوانب الظاهرة ومستوياتها المختلفة.

ج- عدد الظواهر:

إذا كان هناك عدد كبير من المنتجات التى تحتاج المنشأة للتنبؤ بحجم مبيعات كل منها ، فإنه غالبا ما يفضل أساليب بسيطة فى التنبؤ.

أما إذا كان عدد المنتجات محدودا فإنه من الممكن أن تستخدم أساليب تنبؤ أكثر تطورا .

د- الهدف من التنبؤ:

الهدف من التوقع هو أحد أمرين

التخطيط أو الرقابة

فى حالة التخطيط

يهتم صانع القرار باكتشاف نمط سلوك الظاهرة، حتى يمكن التنبؤ بسلوكها فى المستقبل.

فى حالة الرقابة

أسلوب التنبؤ المناسب فى هذه الحالة، هو ذلك الأسلوب الذى يساعد فى التنبؤ باحتمال التغير فى النمط العام وتوقيت حدوثه.

هـ- مدى ثبات أو استقرار الظاهرة:

فالظواهر ذات الثبات أو الاستقرار تختلف عملية التنبؤ بسلوكها عن الظواهر غير المستقرة والمتغيرة، وبالتالى تختلف أساليب التنبؤ المناسبة.

و- خصائص صانع القرار:

قدرات صانع القرار وخبراته السابقة لها تأثيرها على اختيار أسلوب التنبؤ المناسب، فهناك البعض الذى يستطيع ويفضل استخدام الأساليب المتطورة والمعقدة فنياً ، بينما هناك آخرون يفضلون الأساليب البسيطة .

ثانياً : خصائص أسلوب التنبؤ

أ- الأفق الزمنى:

يتعلق الأفق الزمنى لأسلوب التنبؤ بعنصرين أساسيين، العنصر الأول:

يختص بالمدى الزمنى المناسب للتنبؤ، فهناك أساليب أفضل فى التنبؤ لفترات قصيرة الأجل ، بينما هناك أساليب تتناسب مع الأجل المتوسط أو الأجل الطويل.

وبوجه عام تستخدم الأساليب غير الكمية فى حالة ما يكون أفق التنبؤ الزمنى طويلا.

العنصر الثانى:

يختص بعدد فترات التنبؤ فى المستقبل. فهناك أساليب تنبؤ بفترة واحدة أو فترتين فقط، بينما هناك أساليب تنبؤ بعدد أكبر من الفترات.

ب- نوع نموذج التنبؤ:

يمكن تقسيم نماذج التنبؤ إلى أربعة أنواع أساسية، هى:

١- النماذج التى تربط سلوك الظاهرة بعامل الزمن، مثل السلاسل الزمنية.

٢- النماذج السببية التى تربط الظاهرة وسلوكها بمسببات أو عوامل مؤثرة مستقلة، مثل أسلوب الانحدار.

٣- النماذج الإحصائية التى تتطلب إجراء اختبارات ثقة .

٤- الأساليب غير الإحصائية والتى لا تستخدم بالضرورة اختبارات الفروض وغيرها.

ج- التكاليف:

تتكون عناصر تكاليف أسلوب التنبؤ من

تكاليف تطوير الأسلوب

تكاليف تجهيز البيانات المطلوبة وتخزينها

تكاليف إجراء التنبؤ ذاته.

* تختلف تكاليف الأساليب عن بعضها البعض طبقا لطبيعة وشروط استخدام كل منها .

د- الدقة:

تعتبر دقة التوقعات أحد العوامل الهامة فى اختيار الأسلوب المناسب. ولا شك أنه كلما زادت دقة التنبؤات كلما ارتفعت تكاليف التنبؤ بوجه عام. ومن أجل هذا يحتاج الأمر أن يحدد صانع القرار مستوى الدقة المناسب للتنبؤات الخاصة بالظاهرة موضع الدراسة.

هـ- سهولة الاستخدام:

تشير الأدلة إلى أن استخدام الإدارة للأساليب العلمية، يتوقف على مدى فهمها للأسلوب وسهولة استخدامه. ولذلك فإن سهولة الاستخدام تعتبر عاملا أساسيا فى اختيار الأسلوب المناسب.

و - نمط البيانات:

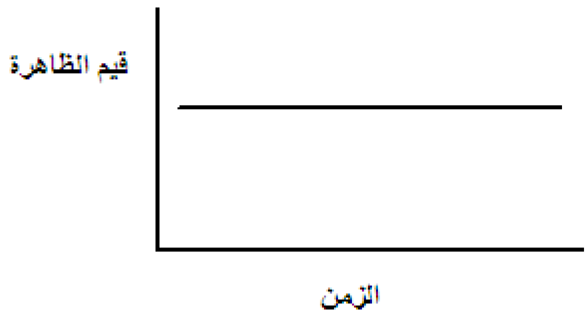
تفترض أساليب التنبؤ الكمية نمطاً معيناً للبيانات يستخدم فى التنبؤ بسلوك الظاهرة فى المستقبل

أما الأساليب غير الكمية فإنها تتقبل أى نمط يمكن تحديده

وعادة ما تأخذ البيانات أحد الأنماط التالية:

و/١ – النمط الأفقى:

يتواجد النمط الأفقى حينما لا يكون هناك اتجاه مؤثر فى البيانات
وفى هذه الحالة تعرف سلسلة البيانات بكونها "ثابتة"، بمعنى أنها لا ترتفع أو تنخفض بناء على نمط معين.
وبالتالى فهناك احتمال أن تكون إحدى قيم السلسلة أكبر أو أقل من النمط العام ، كما يتضح من الشكل التالى .



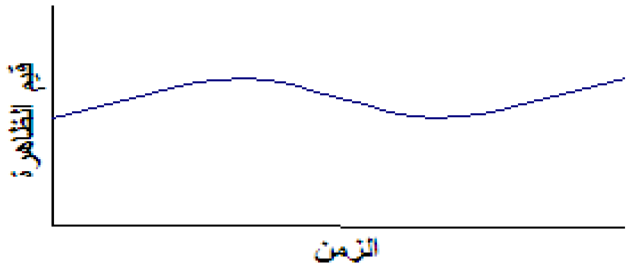
نمط البيانات الافقى

<u>و / ٢ – النمط الموسمى:</u>

تأخذ البيانات صفة النمط الموسمى عندما تتذبذب قيم الظاهرة مع عامل موسمى معين.
لا يقصد بالضرورة المواسم المناخية وهى الصيف والخريف والشتاء والربيع، ولكن أيضا الأعياد والاحتفالات وبداية أول الشهر وأيام الأسبوع وساعات اليوم وهكذا.

<u>و / ٣ – نمط الدورة الاقتصادية:</u>

هناك تشابه كبير بين النمط الموسمى ونمط الدورة الاقتصادية مع اختلاف هام، وهو أن طول الفترة الزمنية للدورة الاقتصادية تكون أكثر من عام لآخر .

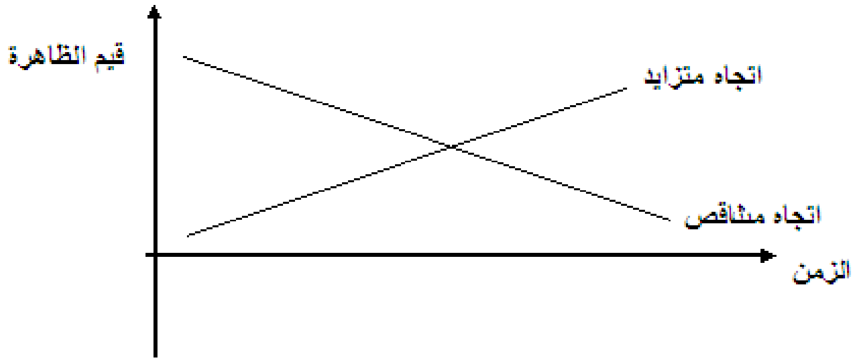


نمط الدورة الإقتصادية للبيانات

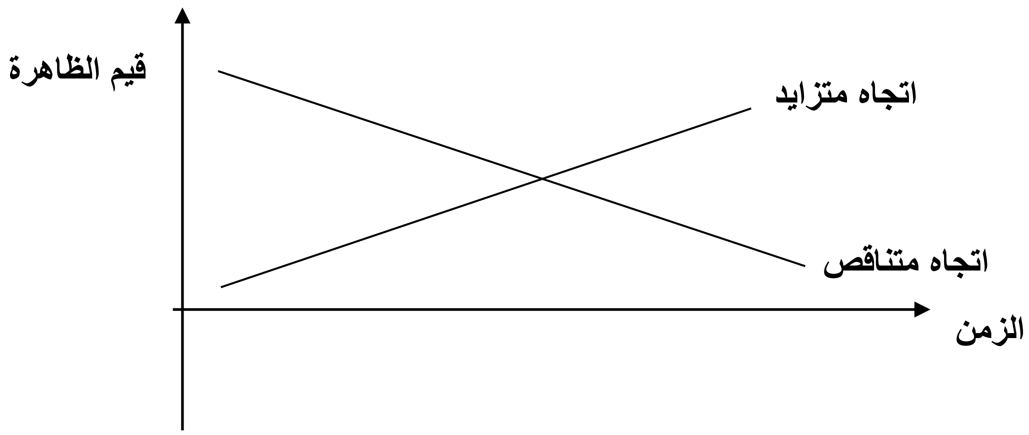
و / ٤ – نمط الاتجاه:

تأخذ البيانات نمط الاتجاه عندما تتزايد أو تتناقص قيم الظاهرة خلال فترة زمنية معينة

مثل سلسلة الدخل القومى، وأسعار العديد من السلع، وحجم مبيعات الشركات وغيرها.



نمط الإتجاه للبيانات



نمط الإتجاه للبيانات

أساليب التنبؤ Forecasting Models

يمكن تصنيفها الي مجموعتين:

١- **أساليب نوعية Qualitative Models:** مجموعة من الطرق الموضوعية التي تستخدم للقيام بتنبؤ للطلب عندما لا تتوفر بيانات تاريخية عن الطلب والتي تعتمد علي الأساليب التي تستثمر الحكمة والتجربة التي تمتلكها الإدارة، فضلا عن مجموعة من العوامل الأخرى والمعلومات التي يمتلكها الأفراد كالحدس والخبرة الشخصية والتوقعات. ومنها الأربعة التالية والمستخدمة في الوقت الحاضر.

أ- تقديرات رجال البيع Sales Force Estimates: وتمتاز هذه الطريقة بالدقة لاتصال رجال البيع بسبب اتصالهم الدائم بالزبائن، وانتشار رجال البيع في مناطق جغرافية ليسهل تقسيم الطلب حسب المناطق، وتتيح هذه الطريقة إمكانية تجميع الطلب علي أي مستوي ترغب فيه الشركة. ومن عيوبها احتمال التحيز الشخصي لرجال البيع، وعدم قدرة رجال البيع أحيانا علي التمييز بين رغبات الزبائن Wants Or Wish List وحاجات الزبائن Needs Or Necessary Purchase، واحتمال قيام رجال البيع بتقديم تقديرات منخفضة عن حجم الطلب في المستقبل من أجل الظهور بمظهر جيد أمام الشركة عند تجاوز مبيعاتهم الفعلية للتقديرات اخسس التي قدموها سابقا.

ب-أسلوب لجنة الخبراء Panel Of Experts Methods، ويستخدم هذا الأسلوب أحيانا لتعديل التنبؤات التي أجريت في مواجهة ظروف استثنائية كترويج منتجات جديدة أو وقوع حدث عالمي يزعزع التنبوئات التي أجرتها الشركة، وعيوبها ارتفاع التكلفة المقترنة بالتنبؤ واحتمال المبالغة أو الاستهانة بتقدير الطلب بسبب تباين الخبرات التي يمتلكها الخبراء.

ت-بحوث التسويق Market Search: مدخلا نظاميا لصياغة واختبار فرضيات عن السوق، وتكون في المدي القصير والمتوسط والطويل وكن دقتها في المدي القصير، وتتطلب القيام بالخطوات التالية:

١- تصميم استبانة لجمع البيانات اللازمة
٢- تقرير الكيفية الت ستدار بموجبها الاستبانة
٣- اختيار عينة ممثلة لمجتمع البحث
٤- تحليل نتائج الاستبانة

ث-طريقة دلفي The Delphi Method: عملية الحصول علي اتفاق بين مجموعة من الخبراء حول تنبؤ إحدى الحوادث Events في المستقبل مع

المحافظة علي سرية هوية كل عضو من أعضاء المجموعة، واجراء هذه الطريقة تتطلب ثلاثة أنواع من المشاركين:

٥- متخذو قرار التنبؤ وعددهم من ٥- ١٠

٦- مساعدو متخذي قرار التنبؤ الذين يعدون سلسلة الاستبيانات وتوزيعها علي أعضاء اللجنة السرية وجمع النتائج وتلخيصها وتقديمها لمتخذي القرار.

٧- الخبراء، وهم الأفراد لذين يتسلمون الاستبانة ويجيبون عليها وتعد اجاباتهم مدخلات لمتخذي القرار تمهيدا إجراء التنبؤ.

٢- أساليب كمية Quantitative Models

أ- تحليل السلاسل الزمنية Time Series Analysis

وتمثل السلسلة مجموعة من المشاهدات مرتبة زمنيا حسب تسلسل وقوعها، وأن السلسلة الزمنية ربما تنطوي علي واحد أو أكثر من العناصر التالية: المتوسط، الاتجاه، الأثر الموسمي،، الأثر الدوري، والعوامل العشوائية، وربما الارتباط الذاتي أيضا. ويهدف تحليل السلاسل الزمنية الي تحديد وعزل كل وحد من العناصر السابقة. وعلي هذا الأساس فإن التنبؤ لمدة معينة يعبر عنه كدالة للعوامل السابقة، وكالتالي:

$$Y= = T X C X S X S X R\ldots\ldots$$

حيث أن:

Y= التنبؤ لفترة مقبلة، T= الاتجاه، C= الأثر الدوري، S = الأثر الموسمي، R= المتغيرات العشوائية.

ومن الناحية العملية فإنه يمكن حساب الاتجاه والمتوسط والعوامل الموسمية بسهولة، أما تحديد قيمة الأثر الدوري فهي عملية صعبة، فضلا عن كونها لا تظهر في المدي القريب والمتوسط للتنبؤ.

وسيتم تنا الأسلوب التالي:

<u>أسلوب المتوسطات المتحركة Simple Moving Average Method</u>

وهو من إحدى الطرائق المستخدمة في تحديد الاتجاه في السلسلة، ويعد أيضا من الأساليب الكمية المستخدمة في التنبؤ بالطلب علي المنتجات.

وبموجب هذا الأسلوب فإن التنبؤ بالطلب   لفترة مقبلة يساوي مجموع الطلب لعدد معين من الفترات الماضية مقسوما علي تلك الفترات.

تفترض هذه الطريقة أن الطلب مستق نوعا ما وأنه لا ينطوي علي عوامل موسمية.

ومن مزايا هذه الطريقة أنها سهلة الفهم والتطبيق ولا تطلب بيانات كثيرة عن الماضي.

ومن عيوب هذا الأسلوب أن نتائج التنبؤ تعتمد علي طول المتوسط، لذلك ينبغي اختيار فترة زمنية مناسبة لحساب التنبؤ. وكلما طالت فترة المتوسط كلما ساعد ذلك علي إزالة أثر العوامل العشوائية.
ومن عيوب هذا الأسلوب أيضا أنه يتطلب الاحتفاظ بجميع البيانات عن الماضي مما يؤدي إلي ارتفاع تكاليف حفظ واسترجاع البيانات سواء يدويا أم بالحاسوب، بالإضافة الي أن هذا الأسلوب يعطي نفس الوزن أو الأهمية لجميع البيانات التي تدخل في حساب التنبؤ. والوزن أو الأهمية هنا بواقع واحد مقسوما علي طول الفترة الزمنية.
ولعلاج هذه المشكلة فإنه بالإمكان تغيير الأوزان النسبية أو أهمية كل مشاهدة حسب ما تمليه الخبرة الشخصية عن الطلب في الماضي علي أن يكون مجموع الأوزان مساويا للواحد الصحيح. فمثلا إذا أعطيت أوزان عالية للمشاهدات القريبة جدا للمستقبل فذلك يعني أن تنبؤ الطلب يتأثر بشكل مباشر بما حدث في الماضي القريب.

مثال:

بفرض أن البيانات التالية تمثل الطلبات الشهرية لمنتج معين خلال أشهر متتالية كما هو مبين بالجدول التالي:

الشهر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
الطلب	٣٥	٣٠	٣٢	٤٠	٤٨	٥٠	٦٥

والمطلوب:

١- التنبؤ بالطلب للشهر الخامس باستخدام طريقة المتوسطات المتحركة لعدد ثلاث فترات.
٢- التنبؤ بالطلب للشهر السابع باستخدام طريقة المتوسطات المتحركة لعدد أربع فترات.
٣- التنبؤ بالطلب للشهر السادس باستخدام طريقة المتوسطات المتحركة لعدد أربع فترات بالأوزان التالية:
(٣ للشهر السابق، ٤ قبل شهرين، ٢ قبل ثلاثة أشهر، ٥ قبل أربعة أشهر).
٤- التنبؤ بالطلب للشهر الثامن باستخدام طريقة المتوسطات المتحركة لعدد أربع فترات بالأوزان التالية:
(٣٠٪ للشهر السابق، ١٠٪ قبل شهرين، ٤٠٪ قبل ثلاثة أشهر، ٢٠٪ قبل أربعة أشهر).

الحل:

لحساب الطلب المتنبأ به باستخدام طريقة المتوسطات المتحركة (كما هو مطلوب في النقطتين ١، ٢) يتم اتباع القاعدة التالية:

$$MA_t = \frac{\sum_{k=1}^{n} D_{t-k}}{N}$$

حيث أن:

MA_t = المتوسط المتحرك للفترة المقبلة t

n= مجموع الفترات

K= مؤشر الفترات (K=1,2,3,.....∈)

N= طول المتوسط (t >N)

D_{t-k} = الطلب الحقيقي للفترة t-k

ويتم الحساب كما هو مبين بالجدول التالي:

الشهر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
الطلب	٣٥	٣٠	٣٢	٤٠	٤٨	٥٠	٦٥
المتوسط المتحرك للشهر الخامس طوله ثلاث فترات					(٣٠+٣٢+٤٠) ÷ ٣=١٠٢÷٣=٣٤		
المتوسط المتحرك للشهر السابع طوله خمس فترات							(٣٠+٣٢+٤٠+٤٨+٥٠) ÷٥ =٢٠٠÷٥=٤٠

ولحساب الطلب المتنبأ به باستخدام طريقة المتوسطات المتحركة المرجح بالأوزان (كما هو مطلوب في النقطتين ٣، ٤) يتم اتباع القاعدة التالية:

$$WMA_t = \frac{\sum (W_k D_k)}{\Sigma W_k}$$

حيث أن:

WMA_t = المتوسط المتحرك الموزون للفترة المقبلة t

W_k= الوزن النسبي للفترة k

D_k= الطلب الحقيقي للفترة k

ويتم الحساب كما هو مبين بالجدول التالي:

الشهر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
الطلب	٣٥	٣٠	٣٢	٤٠	٤٨	٥٠	٦٥	
المتوسط المتحرك الموزون للشهر السادس طوله أربع فترات بالأوزان التالية: (٣ للشهر السابق، ٤ قبل شهرين، ٢ قبل ثلاثة أشهر، ٥ قبل أربعة أشهر).						(٤٨×٣+٤٠×٤+٣٢×٢+٣٠×٥) ÷١٤ =(١٤٤+١٦٠+٦٤+١٥٠)÷١٤ = ٥١٨÷١٤=٣٧وحدة		
المتوسط المتحرك الموزون للشهر الثامن طوله أربع فترات بالأوزان التالية: (٣٠٪ للشهر السابق، ١٠٪ قبل شهرين، ٤٠٪ قبل ثلاثة أشهر، ٢٠٪ قبل أربعة أشهر).								(٦٥×٠,٣٠+٥٠×٠,١٠+٤٨× ٠,٤٠+٤٠×٠,٢٠) ÷١٠٠٪ =(١٩,٥+٥+١٩,٥+٨) ÷١ = ٥١٨÷١٠٠٪=٥١,٧ وحدة =٥١٨ وحدة تقريبا

ب-الأساليب السببية Casual Methods: ومنها الانحدار الخطي Linear Regression والانحدار المتعدد Multiple Regression وتعد من أكثر الطرق فعالية للتنبؤ بالطلب، وتستخدم عندما تتوفر معلومات كثيرة عن العلاقة بين الطلب ومجموعة من العوامل الداخلية والخارجية التي يمكن أن تؤثر في الطلب

الانحدار الخطى Linear Regression

تفترض هذه الطريقة أن الطلب يحدث بسبب واحد أو أكثر من المتغيرات، ويطلق علي الطلب تسمية المتغير التابع Dependent Variable أما العامل أو العوامل التي تسبب الطلب فتطلق عليها تسمية العوامل المستقلة Independent Variables، وتستخدم المعادلة التالية لوصف العلاقة بين متغيرين أحدهما مستقل والآخر تابع:

$Y=a +b X$

أما الثابتان a و b فيحسبان بطريقة المربعات الصغرى Least Squares Method، وذلك كما يلي:

$$b = \frac{\sum XY - n\,\bar{X}\,\bar{Y}}{\sum X^2 - n\bar{X}^2}$$

$$a = \bar{Y} - b\,\bar{X}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{n}$$

- ويطلق علي a ثابت الانحدار، وقيمته تعني قيمة المتغير التابع عندما تكون قيمة المتغير المستقل صفرا. وهي تمثل نقطة تقاطع خط الانحدار مع المحور الرأسي (الذي يمثل المتغير التابع).

- ويطلق علي b ميل خط الانحدار، وقيمته تعني قيمة التغير في المتغير التابع عندما يتغير المتغير المستقل بواقع الوحدة.

ويتم حساب معامل الارتباط (r) من خلال المعادلة التالية:

$$r = \frac{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^{\ \ 2}}}{\sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^{\ \ 2}}}$$

ويتم تحديد نوع العلاقة من خلال إشارة معامل الارتباط، فإذا كانت الاشارة موجبة دل ذلك علي أن العلاقة طردية، وإذا كانت الاشارة سالبة دل ذلك علي أن العلاقة عكسية.

وعند تفسير قيمة معامل الارتباط الخطي المحسوب من بيانات العينة، فلا توجد قواعد ثابتة وإنما تخضع لعملية التقريب والتي تعتمد في الأساس علي مجال الدراسة، وقد جرت العادة أن يتم الحكم علي معامل الارتباط بطريقة تقترب من ما ذكر في الجدول التالي:

العلاقة بين المتغيرين (المستقل والتابع)	قيمة معامل الارتباط بين المتغيرين
لا توجد علاقة	$\lvert 0.00\rvert \leq r < \lvert 0.25\rvert$
ضعيفة	$\lvert 0.25\rvert \leq r < \lvert 0.50\rvert$
متوسطة	$\lvert 0.50\rvert \leq r < \lvert 0.75\rvert$
قوية	$\lvert 0.75\rvert \leq r < \lvert 0.90\rvert$
قوية جدا	$\lvert 0.90\rvert \leq r < \lvert 1.00\rvert$

مثال:

فيما يلي ٥ مشاهدات من الطلب الفعلي لمنتجين يعتمد أحدهما Y علي مبيعات الآخر X:

المشاهدة	الطلب الفعلي للمنتج X	الطلب الفعلي للمنتج Y
١	٥٥٠٠٠	١٤٩٠٠٠
٢	١٥٠٠٠	٤٦٠٠٠
٣	٣٠٠٠٠	٧٥٠٠٠
٤	٥٠٠٠٠	١٣٥٠٠٠
٥	٦٥٠٠٠	١٨٠٠٠

والمطلوب:

١- ايجاد معادلة الانحدار الخطي للعلاقة بين الطلب علي المنتجين؟

٢- ما هو نوع العلاقة ودرجة قوتها بين المتغيرين؟

٣- ما هي قيمة الطلب المقدر من المنتج Y عندما يكون الطلب علي المنتج X بواقع ٧٠٠٠٠ وحدة؟

٤- ما هو مقدار ثابت الانحدار وميل خط الانحدار وبم تفسر كل منهما بالنسبة للطلب علي المنتجين سالفي الذكر؟

الحل

الصيغة العامة معادلة الانحدار الخطي كما يلي:

Y=a + b X

وتحدد قيمة الثابتين a و b بطريقة المربعات الصغرى Least Squares Method، وذلك كما يلي:

$$b = \frac{\sum XY - n\,\bar{X}\,\bar{Y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^{\;\;2}}$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{n}$$

$$r = \frac{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2}}{\sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

ويبين الجدول التالي قيمة مفردات المعادلات حتي يتسنى احتساب قيمة a و b و r مع مراعاة أن القيم بالألف وحدة:

المشاهدة	X بالألف وحدة	Y بالألف وحدة	x^2	XY	Y^2
١	٥٥	١٤٩	٣٠٢٥	٨١٩٥	٢٢٢٠١
٢	١٥	٤٦	٢٢٥	٦٩٠	٢١١٦
٣	٣٠	٧٥	٩٠٠	٢٢٥٠	٥٦٢٥
٤	٥٠	١٣٥	٢٥٠٠	٦٧٥٠	١٨٢٢٥
٥	٦٥	١٨٠	٤٢٢٥	١١٧٠٠	٣٢٤٠٠
المجموع	٢١٥	٥٨٦	١٠٨٧٥	٢٩٥٨٥	٨٠٥٦٧

$\bar{X}$ = ٢١٥÷ ٥ = ٤٣ ألف وحدة

$\bar{Y}$ =٥٨٦÷ ٥= ١١٧ ألف وحدة

$$b = \frac{\sum XY - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$$

$$B = \frac{٢٩٥٨٥ - ٥\times٤٣\times ١١٧}{١٠٨٧٥ - ٥\times(٤٣)^٢} = \frac{٢٩٥٨٥ - ٢٥١٥٥}{١٠٨٧٥ - ٩٢٤٥} = \frac{٤٤٣٠}{١٦٣٠} = ٢,٧٢$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

= ١١٧- ٤٣ × ٢,٧٢ = ١١٧ - ١١٦,٩٦ = ٠,٠٤

وبذلك تكون معادلة خط الانحدار كما يلي:

Y=0.04 + 2.72 X

ويطلق علي a ثابت الانحدار، وقيمته ٠,٠٤ تعني قيمة المتغير التابع (الطلب علي المنتج Y) عندما تكون قيمة المتغير المستقل (الطلب علي المتغير المستقل X) مساويا للصفر. وهي تمثل نقطة تقاطع خط الانحدار مع المحور الرأسي (الذي يمثل المتغير التابع).

- ويطلق علي b ميل خط الانحدار، وقيمته٢,٧٢ تعني قيمة التغير في المتغير التابع (الطلب علي المنتج Y) عندما يتغير المتغير المستقل(الطلب علي المتغير المستقل X) بواقع الوحدة.

ولمعرفة نوع ودرجة قوة العلاقة بين المتغيرين التابع والمستقل يتم حساب قيمة معامل الارتباط من خلال المعادلة التالية:

$$r = \frac{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2}}{\sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{5\times 10875 - 125^2}}{\sqrt{5\times 80567 - 586^2}} = \frac{\sqrt{54375 - 15625}}{\sqrt{402835 - 343396}} = \frac{\sqrt{38750}}{\sqrt{59439}} = \sqrt{0.652} \approx 0.8$$

وعلي ذلك فإن العلاقة بين الطلب علي المنتجين تتصف بما يلي:

- نوعها طردية لكون إشارة معامل الارتباط موجبة.

- درجتها قوية لكون قيمة معامل الارتباط ٠,٨ تقريبا وهي تقع بين ٠,٧٥ و ٠,٩٠

وللحصول علي قيمة الطلب المقدر من المنتج Y عندما يكون الطلب علي المنتج X بواقع ٧٠٠٠٠ وحدة يتم التعويض في معادلة خط الانحدار كما يلي:

$$Y = 0,.04 + 2.72 \times 70000 = 0,.04 + 190400 \approx 90400.04$$

مثال

إذا كانت المجاميع التالية خاصة ببيانات عينة من ٢٠ مشاهدة من الطلب الفعلي لمنتجين يعتمد أحدهما Y علي مبيعات الآخر X:

$$\sum x = 145$$

$$\sum x^2 = 1250$$

$$\sum Y = 980$$

$$\sum xy = 2450$$

والمطلوب:

١- ايجاد معادلة الانحدار الخطي للعلاقة بين الطلب علي المنتجين؟

٢- ما هو نوع العلاقة ودرجة قوتها بين المتغيرين؟

٣- ما هي قيمة الطلب المقدر من المنتج Y عندما يكون الطلب علي المنتج X بواقع ١٠ وحدة؟

٤- ما هو مقدار ثابت الانحدار وميل خط الانحدار وبم تفسر كل منهما بالنسبة للطلب علي المنتجين سالفي الذكر؟

(الارتباط والانحدار)

مقدمة

تناولنا فى الفصول السابقة طرق دراسة متغير واحد لأى ظاهرة محل الدراسة، مثل أوزان مجموعة من الطلاب أو أجور مجموعة من العمال... إلخ. وعرضنا كيف يمكن تلخيص البيانات فى جداول توزيعات تكرارية وكيفية عرضها بيانيا. كذلك دراسة بعض المقاييس العددية التى تساعد على معرفة بعض خصائص التوزيعات التكرارية، ومنها مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت والالتواء والتفرطح.

سوف نتناول الآن دراسة البيانات التى يكون لأفرادها متغيران يتغيران معا فى وقت واحد، وذلك لمعرفة نوع العلاقة التى تربط بينهما، مثل دراسة العلاقة بين أوزان وأطوال مجموعة من الطلاب أو أعمار ودرجات مجموعة من الطلاب، وهكذا.... ثم إيجاد مقاييس تقيس درجة هذه العلاقة.

كذلك سوف نقوم بدراسة العلاقة بين المتغيرين (x,y)، فإذا كانت هناك علاقة بين المتغير x والمتغير y فكيف يمكن التعبير عنها بمعادلة رياضية ومنها يمكن التنبؤ بقيمة أحد المتغيرين إذا علمت قيمة المتغير الآخر. وسوف نتناول فى هذا الباب إيجاد مقاييس لقياس قوة الارتباط بين المتغيرين(x,y) فى الحالة الخطية فقط. وسندرس منها معامل الارتباط الخطى لبيرسون **(Pearson)**، ومعامل ارتباط الرتب لسبيرمان (**Spearman**)، كما سوف ندرس معامل الاقتران ومعامل التوافق، وكذلك دراسة معادلة الانحدار الخطى البسيط.

<u>معامل الارتباط الخطى لبيرسون</u>

يستخدم معامل الارتباط الخطى لبيرسون لقياس التغير الذى يطرأ على المتغير y عندما تتغير قيم x أو العكس. ويستخدم عادة فى حالة البيانات الكمية.

إذا كان لدينا أزواج المشاهدات التالية:

$$(x_n,y_n),\ \ldots,(x_2,y_2),\ (x_1,y_1)$$

فإن معامل الارتباط r لبيرسون يعطى من خلال العلاقة:

$$r=\frac{\sum xy-\frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sqrt{(\sum x^2-\frac{(\sum x)^2}{n})(\sum y^2-\frac{(\sum y)^2}{n})}}, \qquad (1)$$

ويكون لمعامل الارتباط (r) الخصائص التالية:

١ – قيمته تساوى صفرا عندما تكون الظاهرتان مستقلتان تماما.

٢ – قيمته مقدار موجب عندما يكون الارتباط بين المتغيرين طرديًا. ويكون قويا عندما يكون المقدار الموجب قريبا من الواحد الصحيح، وضعيفا عندما يكون المقدار الموجب قريبا من الصفر.

٣ – قيمته مقدار سالب عندما يكون الارتباط بين المتغيرين عكسيا. ويكون قويا عندما يكون المقدار السالب قريبًا من (–١)، وضعيفًا عندما يكون المقدار السالب قريبًا من الصفر.

مثال (١): الجدول التالى يوضح درجات مجموعة مكونة من ثمانية طلاب فى كل من مادتى الإحصاء والرياضيات فى إحدى الامتحانات. هل هناك علاقة بين تحصيل الطالب فى المادتين؟

الإحصاء x	13	9	19	15	11	8	16	11
الرياضيات y	15	7	17	15	10	9	14	10

الحل: لتبسيط البيانات بالجدول نطرح مقدار ثابت = ١٠ من كل من قيم x وقيم y ونكون الجدول التالي:

x	y	$x = x - 10$	$y = y - 10$	$y\,x$	x^2	y^2
13	15	3	5	15	9	25
9	7	-1	-3	3	1	9
19	17	9	7	63	81	49
15	15	5	5	25	25	25
11	10	1	0	0	1	0
8	9	-2	-1	2	4	1
16	14	6	4	24	36	16
11	10	1	0	0	1	0
		22	17	132	158	125

$$r=\frac{\sum xy-\frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sqrt{\left(\sum x^2-\frac{(\sum x)^2}{n}\right)\left(\sum y^2-\frac{(\sum y)^2}{n}\right)}}$$

$$r=\frac{132-\frac{(22\times 17)}{8}}{\sqrt{\left(158-\frac{(22)^2}{8}\right)\left(125-\frac{(17)^2}{8}\right)}}$$

$r=\mathbf{0.93}$

أى يوجد ارتباط طردى (قوى جدا) بين درجات تحصيل الطالب فى المادتين.

مثال (٢): البيانات التالية توضح العلاقة بين قيمة الاستهلاك y والدخل x

الاستهلاك (y)	٢	٣	٤	٥	٦	١٠
الدخل (x)	٣	٥	٦	٨	٩	١١

والمطلوب: حساب معامل الارتباط بين الاستهلاك والدخل، وما هو مدلوله ؟

حساب المجاميع:

x	y	x^2	y^2	xy
3	2	9	4	6
5	3	25	9	15
6	4	36	16	24
8	5	64	25	40
9	6	81	36	54
11	10	121	100	110
4	30	336	190	249

$\sum x=42$, $\sum y=30$

$\sum x^2=336$

$\sum y^2=190$

$\sum xy=249$

يوجد ارتباط طردي قوي بين الاستهلاك والدخل.

- **حساب معامل الارتباط:**

باستخدام المجاميع السابقة، نجد أن معامل الارتباط قيمته هي

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right)\left(\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}\right)}}$$

$$= \frac{249 - \frac{(42)(30)}{6}}{\sqrt{\left(336 - \frac{(42)^2}{6}\right)\left(190 - \frac{(30)^2}{6}\right)}}$$

$$= \frac{39}{\sqrt{(42)(40)}} = \frac{39}{40.9878} = -0.9515$$

•يوجد ارتباط طردي قوي بين الاستهلاك والدخل.

معامل ارتباط الرتب (سبيرمان)

معامل الارتباط الخطى لبيرسون الذى سبق الحديث عنه يقيس مقدار قوة الارتباط بين متغيرين وذلك فى حالة البيانات الكمية. لكن فى بعض الأحيان يكون مطلوب إيجاد قوة الارتباط بين متغيرين على صورة بيانات وصفية يمكن وضعها فى صورة ترتيبية، مثال على هذا تقديرات الطلاب فى مادتين مختلفتين، فيكون من الصعب حساب معامل ارتباط بيرسون. لذلك نشأت الحاجة إلى إيجاد مقياس يعطى قوة الارتباط للبيانات الوصفية. وهذا المقياس هو ما يسمى بمعامل ارتباط الرتب لسبيرمان، وهو يعطى مقياسا للارتباط فى كل من البيانات الكمية والوصفية التى لها صفة الترتيب مثل تقديرات الطلاب، فإنه يمكن إعطاء رتب لها من حيث كبر التقدير وصغره وكذلك البيانات الكمية. نلاحظ أن رتب المتغيرين (x, y) تزيد وتنقص حسب زيادة ونقص كل من قيم المتغيرين (x, y). لذلك فإن حساب معامل الارتباط للرتب يقترب كثيرا من معامل ارتباط بيرسون، ولكن يمتاز عنه فى السهوله والدقة خاصة عندما تكون أزواج القيم أقل من ١٥.

ويعطى معامل ارتباط الرتب بالعلاقة التالية:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}, \qquad (2)$$

حيث r_s معامل ارتباط الرتب لسبيرمان، n تمثل عدد أزواج القيم (x, y)، d هى الفرق بين رتب أزواج القيم(x, y) ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال (٢): اوجد معامل ارتباط الرتب لتقديرات الطلاب فى كل من مادتى الإحصاء والرياضيات كما هو موضح بالجدول التالي:

الرياضيات x	A	C	C	C	B	D
الإحصاء y	B	B	D	C	A	E

الحل: نقوم بتلخيص الحل فى الجدول التالي:

الرياضيات x	الإحصاء y	رتبة $x = a$	رتبة $y = b$	$d=a-b$	d^2
A	B	6	4.5	1.5	2.25
C	B	3	4.5	-1.5	2.25
C	D	3	2	1	1
C	C	3	3	0	0
B	A	5	6	-1	1
D	E	1	1	0	0
					6.5

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6 \times 6.5}{6(36-1)}$$

$$r_s = 1 - 0.186$$

$$r_s = 0.814$$

أى يوجد ارتباط طردى قوى بين تقديرات مادتى الرياضيات والإحصاء.

معامل الاقتران ومعامل التوافق

لقد سبق أن وضحنا بأن معامل ارتباط بيرسون يعطى قوة الارتباط فى حالة البيانات الكمية، وكذلك معامل ارتباط الرتب لسبيرمان، وهو يستخدم لإيجاد قوة الارتباط للرتب فى حالة البيانات الكمية والوصفية التى لها صفة الترتيب، ولكن قد تكون هناك بيانات وصفية لها صفات مميزة ولكن لا يمكن ترتيبها مثل الحالة الاجتماعية، وكذلك لون البشرة....إلخ. ولقياس قوة الارتباط لهذه البيانات نشأت الحاجة إلى إيجاد مقياس مناسب يقيس الارتباط بين هذه الصفات، ومنها معامل الاقتران الذى يستخدم عندما يكون لكل من الظاهرتين صفتين فقط. كذلك دراسة معامل التوافق فى حالة تكون كل من الظاهرتين أو إحداهما على الأقل من أكثر من صفتين كما سنوضح ذلك بالتفصيل كما يلي:

١ـ معامل الإقتران

يستخدم معامل الاقتران لقياس قوة الارتباط بين ظاهرتين كل منهما ذات صفتين فقط، وسوف يرمز له بالرمز C.C مثل دراسة قوة الارتباط بين التدخين والتعليم، حيث يوضح الجدول التالى التكرار للصفات:

التدخين / التعليم	يدخن	لا يدخن
متعلم	A	B
غير متعلم	C	D

فيكون معامل الإقتران C.C كالتالي:

$$\text{C.C} = \frac{AD - BC}{AD + BC} \qquad (3)$$

ونوضح ذلك بالمثال الآتي:

مثال (٣): عند دراسة العلاقة بين التعليم والتدخين فى إحدى الشركات أخذت عينة مكونة من ١٧ شخصا وكانت النتائج على النحو التالي:

التدخين / التعليم	يدخن	لا يدخن
متعلم	5	5
غير متعلم	3	4

احسب معامل الاقتران بين التدخين والتعليم.

الحل:

$$\text{C.C} = \frac{AD - BC}{AD + BC}$$

$$\text{C.C} = \frac{(5\times4)-(3\times5)}{(5\times4)+(3\times5)}$$

$$\text{C.C} = 0.14$$

وهو ارتباط ضعيف

٢ـ معامل التوافق

إذا كانت بيانات الظاهرتين التى لدينا عبارة عن بيانات وصفية لكل منهما أو إحداهما على الأقل وكانت مقسمة لأكثر من صفتين، فإن معامل الاقتران السابق لا يصلح فى هذه الحالة ويتم استخدام مقياس آخر هو معامل التوافق C. لحساب معامل التوافق نفرض أن لدينا الظاهرة X والتى لها r من الصفات والظاهرة الثانية Y والتى لها s من الصفات، ويوضح جدول الاقتران بين الظاهرتين كما يلي:

الصفة Y / الصفة X	Y_1	Y_2	$\dots$	Y_s	المجموع
X_1	f_{11}	f_{12}	$\dots$	f_{1s}	$f_{1.}$
X_2	f_{21}	f_{22}	$\dots$	f_{2s}	$f_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_r	f_{r1}	f_{r2}	$\dots$	f_{rs}	$f_{r.}$
المجموع	$f_{.1}$	$f_{.2}$	$\dots$	$f_{.s}$	$f_{..}$

نحسب المقدار B ومنه نحسب معامل التوافق C بالعلاقة التالية:

$$C = \sqrt{\frac{B-1}{B}}, \qquad (4)$$

حيث:

$$B = \frac{(f_{11})^2}{f_{.1}f_{1.}} + \frac{(f_{12})^2}{f_{.2}f_{1.}} + \dots + \frac{(f_{rs})^2}{f_{.s}f_{r.}}$$

ونوضح ذلك بالمثال التالي:

مثال (٤): عند دراسة العلاقة بين الرائحة ولون الزهرة لعينة مكونة من ٣٠ زهرة كانت لدينا النتائج التالية:

الرائحة Y / اللون X	بدون رائحة	له رائحة	المجموع
أصفر	6	4	10
أبيض	7	2	9
أحمر	6	5	11
المجموع	19	11	30

احسب معامل التوافق C بين اللون ورائحة الزهور.

الحل: نحسب قيمة B كالتالي:

$$B = \frac{6^2}{19\times10}+\frac{7^2}{19\times9}+\frac{6^2}{19\times11}+\frac{4^2}{11\times10}+\frac{2^2}{11\times9}+\frac{5^2}{11\times11}$$

B = 1.05

ويكون معامل التوافق C كالتالي:

$$C = \sqrt{\frac{B-1}{B}}$$

$$C = \sqrt{\frac{1.05-1}{1.05}}$$

C = 0.22

ويلاحظ أن قيمة معامل التوافق تبين مقدار قوة الارتباط وهى ضعيفة فى هذا المثال.

خط الانحدار البسيط

لقد سبق لنا دراسة العلاقة بين متغيرين (x,y) وإيجاد معامل الارتباط بينهما بعدة طرق وذلك لقياس قوة الارتباط وإتجاه العلاقة بينهما (طردية – عكسية) كما فى معاملى ارتباط بيرسون وسبيرمان ومدى قوة العلاقة كما فى حالة معاملى الاقتران والتوافق. وفيما يلى نبحث عن إيجاد معادلة رياضية تمثل أفضل توفيق لخط مستقيم يعبر عن البيانات فى شكلها الخطي. والغرض من إيجاد معادلة خط الانحدار هو التنبؤ بقيمة المتغير التابع لقيمة محددة من قيم المتغير المستقل. وتسمى العلاقة بين المتغير المستقل x والمتغير التابع y بمعادلة خط الانحدار البسيط. وعليه فإذا كان x متغيرًا مستقلاً، y متغيرًا تابعًا فإن المعادلة التى نحصل عليها تسمى بمعادلة خط انحدار y على x وهى على الصورة التالية:

$$y = a + bx, \qquad (5)$$

حيث يعرف a على أنه ثابت الانحدار (الجزء المقطوع من محور y) ويحسب من خلال العلاقة:

$$a = y - bx, \qquad (6)$$

كذلك يعرف b بمعامل انحدار y على x ويحسب من خلال العلاقة التالية:

$$b = \frac{\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}, \qquad (7)$$

مثال (٥): اوجد معادلة خط انحدار درجات الإحصاء y على درجات الرياضيات x فى مثال (١).

الحل: نقوم بتلخيص الحسابات من خلال الجدول التالي:

x	y	xy	x^2	y^2
15	**13**	**195**	**225**	**169**
7	**9**	**63**	**49**	**81**
17	**19**	**323**	**289**	**361**
15	**15**	**225**	**225**	**225**
10	**11**	**110**	**100**	**121**
9	**8**	**72**	**81**	**64**
14	**16**	**224**	**196**	**256**
10	**11**	**110**	**100**	**121**
97	**102**	**1322**	**1265**	**1398**

$$b = \frac{\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}$$

$$b = \frac{1322 - \frac{97 \times 102}{8}}{1265 - \frac{(97)^2}{8}} = 0.96$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$a = \frac{102}{8} - 0.96\left(\frac{97}{8}\right)$$

$$a = 1.11$$

أى أن معادلة خط انحدار y على x هي:

$$y = 1.11 + 0.96x$$

تمارين

١- في أحد أماكن بيع السيارات كانت المبيعات كالتالي:

4	1	6	5	1	1	2	3	عمر السيارة x
29	71	17	18	70	60	44	31	ثمن البيع y

- اوجد معامل الارتباط بين عمر السيارة (بالسنوات) وثمن البيع (بآلاف الجنيهات) بطريقة بيرسون.
- اوجد خط انحدار y على x.

٢- الجدول التالى يمثل الدخل x والإنفاق y لمجموعة من الأسر بمئات الجنيهات.

40	39	27	38	44	42	66	56	x
28	20	25	19	22	27	38	31	y

- اوجد معامل ارتباط بيرسون وسبيرمان للدخل والإنفاق.
- اوجد خط انحدار y على x.
- اوجد قيمة الإنفاق عندما يصبح الدخل ٦٠٠٠ جنيه.

٣- البيانات التالية تمثل تقديرات ثمانية من الطلاب فى مادتى الكيمياء والطبيعة.

B	E	D	C	E	D	B	A	الكيمياء
B	E	D	C	D	E	C	A	الطبيعة

اوجد معامل الارتباط المناسب لتقديرات الكيمياء والطبيعة.

الفصل السادس

تطبيقات اقتصادية على التوزيعات الاحتمالية

الهدف من دراسة الفصل

بنهاية الدراسة لهذا الفصل يكون الدارس قادر على الالمام بالمفاهيم التالية:

١- توزيع ذى الحدين

٢- توزيع بواسون

٣- التوزيع فوق الهندسي

٤- التوزيع الطبيعى القياسي

٥- توزيع ت

٦- توزيع ف

الفصل السادس

تطبيقات اقتصادية على التوزيعات الاحتمالية

مقدمة

إذا كان مدى المتغير العشوائى X مجموعة محدودة من القيم فى هذه الحالة يمكن القول بأن X متغير عشوائى منفصل، مثال على ذلك عدد الوحدات المنتجة لإحدى الآلات، عدد أطفال الأسرة، عدد مرات ظهور الكتابة عند إلقاء قطعة نقود،....وهكذا.

أما إذا كان عدد القيم التى يأخذها المتغير العشوائى X غير محدود (لا يمكن عده) فى هذه الحالة يقال إن المتغير العشوائى X متغير عشوائى متصل. مثال على ذلك أوزان أو أطوال مجموعة من الطلاب أو الدخل السنوى لمجموعة من الأسر، أو درجات الحرارة فى فترة ما،... إلخ.

إن دراسة المتغيرات العشوائية المتصلة والمنفصلة والتوزيعات الاحتمالية المصاحبة لكل نوع من أنواع المتغيرات العشوائية لتساعدنا فى الحصول على نتائج يمكن استخدامها فى تقديرات معالم المجتمع كذلك اختبارات الفروض المتعلقة باتخاذ القرارات المهمة حيث يتم اتخاذ مثل هذه القرارات على أساس علمى صحيح.

وفيما يلى بعض التوزيعات الاحتمالية المهمة التى لها العديد من التطبيقات المهمة فى الحياة العملية مثل توزيع ذى الحدين وتوزيع بواسون والتوزيع فوق الهندسي، وذلك للمتغير العشوائى المنفصل (المتقطع) والتوزيع الطبيعى وتوزيع ت وتوزيع ف للمتغير العشوائى المتصل.

توزيع ذى الحدين

توجد العديد من ظواهر الحياة تكون النتيجة الممكنة لها إما نجاحًا وإما فشلاً، واحتمال أن تكون نتيجة التجربة نجاحًا هو p بينما إحتمال نتيجة الفشل هو q بحيث $(p+q=1)$. فإذا تم تكرار مثل هذه التجربة n من المرات فإننا نحصل كل مرة على نجاح أو فشل (نتيجة كل محاولة مستقلة عن نتيجة المحاولة الأخرى) بمعنى أنه يتم إجراء التجربة n من المحاولات المستقلة. المتغير العشوائى x الذى يمثل عدد مرات الحصول على نجاح خلال n من المحاولات يقال أنه يتبع توزيع ذى الحدين الذى له داله التوزيع الاحتمالى التالية:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}, \qquad x=0,1,2,\ldots,n$$

ويستخدم هذا التوزيع فى الحياة العملية لكثير من الظواهر، مثل النجاح والرسوب فى الامتحان لمجموعة من الطلبة، إصابة هدف معين من عدمه أو التدخين وعدم التدخين لمجموعة من الأشخاص فى مدينة ما...إلخ.

مثال (١): إذا كانت نسبة النجاح فى أحد المقررات هى ٠.٨ فإذا تقدم لهذا الامتحان ١٥ طالب ما هو احتمال أن ينجح:

١- جميع الطلاب

٢- ٨ طلاب

٣- ٦ طلاب

٤- ولاطالب

الحل:

$n = 15, \qquad p = 0.8, \qquad q = 0.2$

$$P(X=x) = \binom{15}{x} (0.8)^x \, (0.2)^{15-x}, \qquad x = 0,1,2,\ldots,15$$

١- نجاح جميع الطلاب:

$$P(X=15) = \binom{15}{15} (0.8)^{15} \, (0.2)^{15-15}$$

$$P(X=15) = 1 \times 0.035 \times 1$$

$$P(X=15) = 0.035$$

٢- نجاح ٨ طلاب:

$$P(X=8) = \binom{15}{8} (0.8)^8 \, (0.2)^{15-8}$$

$$P(X=8) = 6435 \times 0.1677722 \times 0.0000128$$

$$P(X=8) = 0.013819$$

٣- نجاح ٦ طلاب:

$$P(X=6) = \binom{15}{6} (0.8)^6 \, (0.2)^{15-6}$$

$$P(X=6) = 5005 \times 0.262144 \times 0.000000512$$

$$P(X=6) = 0.000672$$

٤- عدم نجاح أى طالب:

$$P(X=0) = \binom{15}{0}(0.8)^{0}\,(0.2)^{15-0}$$

$P(X=0)$ = 1 × 1 × 0

$P(X=0)$= 0

مثال (٢): إذا كانت نسبة الإصابة بمرض الإنفلوانزا فى إحدى المدن فى فصل الشتاء هى ٠.٠٦. تم إختيار ٢٠ شخص من هذه المدينة، ما احتمال أن يكون:

١- ٧ أشخاص مصابون بالإنفلونزا.

٢- جميعهم أصحاء.

٣- جميعهم مرضى.

٤- ما إحتمال أن يكون نصفهم مرضى.

الحل:

n = **20,** p= **0.6,** q= **0.4**

$$P(X=x) = \binom{20}{x}(0.6)^{x}\,(0.4)^{20-x}, \qquad x=0,1,2,\ldots,20$$

١- ٧ أشخاص مصابون بالإنفلونزا:

$$P(X=7) = \binom{20}{7}(0.6)^{7}\,(0.4)^{20-7}$$

$P(X=7)$= 77520 × 0.0279936 × **0.00000671**

$P(X=7)$= 0.014563

٢-جميعهم أصحاء:

$$P(X=0) = \binom{20}{0}(0.6)^{0}\,(0.4)^{20-0}$$

$P(X=0)$ = 1 × 1 × 0.000

$P(X=0)$= 0

٣-جميعهم مرضى:

$$P(X=20) = \binom{20}{20}(0.6)^{20}\,(0.4)^{20-20}$$

$P(X=20)$ = 1 × 0.00004 × 1

$P(X=20)$= 0.00004

٤-إحتمال أن يكون نصفهم مرضى:

$$P(X=10) = \binom{20}{10}(0.6)^{10}\,(0.4)^{20-10}$$

$P(X=10)$ = 184756 × 0.006046618 × 0.0001

$P(X=10)$= 0.111715

مثال (٣): صندوق يحتوى على ٧ مصابيح فإذا كان احتمال أن يكون المصباح جيدًا هو ٠.٨، تم اختيار ٣ مصابيح عشوائيا، ما احتمال:

١- أن تكون جميع المصابيح جيدة.

٢- أن يكون هناك مصباح تالف.

٣- أن تكون جميع المصابيح تالفة.

٤- أن يكون هناك مصباح جيد على الأقل.

٥- أن يكون هناك مصباح جيد على الأكثر.

الحل:

$n = 3, \qquad p = 0.8, \qquad q = 0.2$

$$P(X=x) = \binom{3}{x} (0.8)^x \ (0.2)^{3-x}, \qquad x = 0,1,2,3$$

١- أن تكون جميع المصابيح جيدة:

$$P(X=3) = \binom{3}{3} (0.8)^3 \ (0.2)^{3-3}$$

$$P(X=3) = 1 \times 0.512 \times 1$$

$$P(X=3) = 0.512$$

٢- أن يكون هناك مصباح تالف:

$$1 - P(X=2) = 1 - \binom{3}{2} (0.8)^2 \ (0.2)^{3-2}$$

$$= 1 - (3 \times 0.64 \times 0.2)$$

$$= 1 - 0.384$$

$$1 - P(X=2) = 0.616$$

٣- أن تكون جميع المصابيح تالفة:

$$P(X=0) = \binom{3}{0} (0.8)^0 \ (0.2)^{3-0}$$

$$P(X=0) = 1 \times 1 \times 0.008$$

$$P(X=0) = 0.008$$

٤- أن يكون هناك مصباح جيد على الأقل:

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$P(X \geq 1) = \binom{3}{1} (0.8)^1 \ (0.2)^{3-1} + \binom{3}{2} (0.8)^2 \ (0.2)^{3-2} + \binom{3}{3} (0.8)^3 \ (0.2)^{3-3}$$

$$P(X \geq 1) = 0.096 + 0.384 + 0.512$$

$$P(X \geq 1) = 0.992$$

٥- أن يكون هناك مصباح جيد على الأكثر

$P(X \leq 1) = P(X=1) + P(X=0)$

$P(X \leq 1) = 0.096 + 0.008$

$P(X \leq 1) = 0.104$

توزيع بواسون

يستخدم هذا التوزيع لحساب احتمال وصول عدد معين إلى مركز الخدمة، مثال على ذلك:

- **ماكينة السحب الآلي.**
- **شباك البنك.**
- **طلمبة بنزين فى محطة الوقود.**
- **سويتش التليفون.**
- **وصول السيارات إلى أماكن الانتظار.**

فى هذا التوزيع سوف يعبر المتغير العشوائى X عن أعداد الواصلين خلال فترة زمنية معينة (دقيقة، ساعة،...) $x = 0,1,2,..$ وسوف تمثل λ متوسط أعداد الواصلين إلى محطة الخدمة فى الفترة الزمنية المحددة.

وسوف تعبر دالة الاحتمال عن وجود عدد X فى فترة زمنية محددة فى محطة الخدمة. وتأخذ دالة الاحتمال الشكل التالي:

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \qquad x = 0,1,2,..$$

مثال (٤): إذا كان متوسط عدد طالبى استخدام ماكينة السحب الآلى فى أحد البنوك هو ٥ أفراد كل نصف ساعة.

أ- احسب الاحتمالات التالية لإعداد الواصلين كل نصف ساعة بأن يكون:

١- ١٠ أشخاص.

٢- يقل عن ٣ أشخاص.

٣- أكثر من شخص واحد.

٤- يتراوح العدد بين ٤ و ٨ أشخاص.

ب-احسب نفس الاحتمالات السابقة إذا كان معدل الوصول كل ربع ساعة.

ج- احسب نفس الاحتمالات السابقة إذا كان معدل الوصول كل ساعة.

الحل: أ- معدل الوصول كل نصف ساعة.

$\lambda = 5$,

$$P(X=x) = \frac{e^{-5}5^{x}}{x!}, \qquad x = 0,1,2,..$$

1- $P(X=10)=\frac{e^{-5}5^{10}}{10!}$

$P(X=10)=$ **0.018132789**

2- $P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$P(X<3)=\frac{e^{-5}5^{0}}{0!}+\frac{e^{-5}5^{1}}{1!}+\frac{e^{-5}5^{2}}{2!}$

$P(X<3)=$ **0.006737947 + 0.033689735 + 0.084224337**

$P(X<3)=$ **0.124652**

3- $P(X>1)=1-P(X\leq 1)$

$P(X>1)=1-(P(X=0)+P(X=1))$

$P(X>1)=$ **1- (0.006737947 + 0.033689735)**

$P(X>1)=$ **1- 0.040428**

$P(X>1)=$ **0.959572318**

4- $P(4\leq X\leq 8)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)$

$P(4\leq X\leq 8)=\frac{e^{-5}5^{4}}{4!}+\frac{e^{-5}5^{5}}{5!}+\frac{e^{-5}5^{6}}{6!}+\frac{e^{-5}5^{7}}{7!}+\frac{e^{-5}5^{8}}{8!}$

$P(4\leq X\leq 8)=$ **0.17546737 + 0.17546737 + 0.146222808 + 0.104444863 +**

+ 0.065278039

$P(4\leq X\leq 8)=$ **0.66688045**

ب− معدل الوصول كل ربع ساعة.

إذا متوسط معدل الوصول:

$\lambda = 5 \times \frac{1}{2} = 2.5$

$P(X=x)=\frac{e^{-2.5}2.5^{x}}{x!}, \qquad x=0,1,2,\ldots$

1- $P(X=10)=\frac{e^{-2.5}2.5^{10}}{10!}$

$P(X=10)=$ **0.000215725**

2- $P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$P(X<3)=\frac{e^{-2.5}2.5^{0}}{0!}+\frac{e^{-2.5}2.5^{1}}{1!}+\frac{e^{-2.5}2.5^{2}}{2!}$

$P(X<3)=$ **0.082084999 + 0.205212497 + 0.256515621**

$P(X<3)=$ **0.543813**

3- $P(X>1)=1-P(X\leq 1)$

$P(X>1)=1-(P(X=0)+P(X=1))$

$P(X>1)=$ **1- (0.082084999 + 0.205212497)**

$P(X>1)=$ **1- 0.287297**

$P(X>1)=$ **0.712703**

4- $P(4\leq X\leq 8)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)$

$P(4 \le X \le 8)$ = $\frac{e^{-2.5}2.5^4}{4!}$ + $\frac{e^{-2.5}2.5^5}{5!}$ + $\frac{e^{-2.5}2.5^6}{6!}$ + $\frac{e^{-2.5}2.5^7}{7!}$ + $\frac{e^{-2.5}2.5^8}{8!}$

$P(4 \le X \le 8)$ = **0.133601886 + 0.066800943 + 0.027833726 + 0.009940617 +**

+ 0.003106443

$P(4 \le X \le 8)$ = **0.241284**

ج- معدل الوصول كل ساعة

إذا متوسط معدل الوصول:

λ **= 5 × 2 = 10**

$P(X = x)$ = $\frac{e^{-10}10^x}{x!}$, $x = 0,1,2,\ldots$

1- $P(X = 10)$= $\frac{e^{-10}10^{10}}{10!}$

$P(X = 10)$= **0.125110036**

2- $P(X < 3)$= $P(X = 0)$ + $P(X = 1)$ + $P(X = 2)$

$P(X < 3)$ = $\frac{e^{-10}10^0}{0!}$ + $\frac{e^{-10}10^1}{1!}$ + $\frac{e^{-10}10^2}{2!}$

$P(X < 3)$ = **0.0000454 + 0.000454 + 0.00227**

$P(X < 3)$= **0.002769**

3- $P(X > 1)$ **= 1-** $P(X \le 1)$

$P(X > 1)$ **= 1- (** $P(X = 0)$ + $P(X = 1)$**)**

$P(X > 1)$ **= 1- (0.0000454 + 0.000454)**

$P(X > 1)$ **= 1- 0.000499**

$P(X > 1)$ **= 0.999501**

4- $P(4 \le X \le 8)$ = $P(X = 4)$ + $P(X = 5)$+ $P(X = 6)$ + $P(X = 7)$ + $P(X = 8)$

$P(4 \le X \le 8)$ = $\frac{e^{-10}10^4}{4!}$ + $\frac{e^{-10}10^5}{5!}$ + $\frac{e^{-10}10^6}{6!}$ + $\frac{e^{-10}10^7}{7!}$ + $\frac{e^{-10}10^8}{8!}$

$P(4 \le X \le 8)$ = **0.01891664 + 0.03783327 + 0.06305546 + 0.09007923 +**

+ 0.11259903

$P(4 \le X \le 8)$ = **0.322484**

مثال (٥): إذا كان متوسط وصول السفن إلى أحد الموانيء سفينتين فى اليوم. اوجد احتمال أن يصل إلى هذا الميناء فى يوم معين ثلاث سفن.

الحل:

λ **= 2 ,**

$P(X = x)$ = $\frac{e^{-2}2^x}{x!}$, $x = 0,1,2,\ldots$

$P(X = 3)$= $\frac{e^{-2}2^3}{3!}$

$P(X = 3)$= **0.18044704**

التوزيع فوق الهندسى

يفيد التوزيع فوق الهندسى فى حالة المجتمعات التى يتم تقسيمها إلى صفتين أو جزءين حيث تتميز هذه المجتمعات بكونها محدودة وصغيرة. وتتم عملية سحب العينة من المجتمع بدون إرجاع. وعليه فإن شرط استقلال المحاولات يكون غير متحقق، حيث يؤثر السحب بدون إرجاع على نسبة إحدى الصفتين وذلك لصغر حجم المجتمع. مثال على ذلك سحب عينة من الطلاب فى إحدى الشعب، سحب عينة من السيارات لدراسة عدد السيارات المعيبة...إلخ.

والمتغير العشوائى X فى هذه الحالة يمثل عدد حالات النجاح وتكون دالة التوزيع الاحتمالى له على الصورة:

$$P(X=x) = \frac{\binom{a}{x}\binom{b}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad x=0,1,2,\ldots,n$$

حيث:

- N تمثل حجم المجتمع.
- n تمثل حجم العينة المسحوبة من المجتمع.
- $a+b=N$.

مثال (٦): معرض سيارات به ٤٨ سيارة من بينها ٨ سيارات معيبة. أختيرت عينة عشوائية من ٥ سيارات اوجد:

أ- احتمال أن تكون العينة المسحوبة كلها سليمة

ب- احتمال أن تكون سيارة واحدة معيبة

ج- احتمال وجود سيارتين معيبتين على الأقل بالعينة

الحل: سوف يمثل المتغير العشوائى X عدد السيارات المعيبة فى العينة المسحوبة، a يمثل عدد السيارات المعيبة فى المجتمع و b يمثل عدد السيارات السليمة فى المجتمع. وسوف تأخذ دالة التوزيع الإحتمالى الصورة:

$$P(X=x) = \frac{\binom{8}{x}\binom{40}{5-x}}{\binom{48}{5}}, \qquad x=0,1,2,3,4,5$$

أ- احتمال أن تكون العينة المسحوبة كلها سليمة

$$P(X=0) = \frac{\binom{8}{0}\binom{40}{5-0}}{\binom{48}{5}}$$

$$P(X=0) = \frac{1\times 658008}{1712304}$$

$P(X=0)$ = **0.38**

ب− احتمال أن تكون سيارة واحدة معيبة

$$P(X=1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{40}{5-1}}{\binom{48}{5}}$$

$$P(X=1) = \frac{8\times 91390}{1712304}$$

$P(X=1)$ = **0.43**

ج− احتمال وجود سيارتين معيبتين على الأقل بالعينة

$P(X\geq 2)$= **1- (** $P(X=0)$+ $P(X=1)$**)**

$P(X\geq 2)$= **1 – (0.38 + 0.43)**

$P(X\geq 2)$= **0.19**

مثال (٧): شحنة من ٨٠ جهاز كهربائى من بينها ٤ أجهزة معيبة، تم سحب عينة عشوائية من ٣ أجهزة.اوجد إحتمال أن تحتوى هذه العينة على جهاز واحد متعطل.

الحل: سوف يمثل المتغير العشوائى X عدد الأجهزة المعيبة فى العينة المسحوبة، a يمثل عدد الأجهزة المعيبة فى الشحنة وb يمثل عدد الأجهزة السليمة فى الشحنة. وسوف تأخذ دالة التوزيع الاحتمالى الصورة:

$$P(X=x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{76}{3-x}}{\binom{80}{3}}, \qquad x=0,1,2,3$$

احتمال أن يكون هناك جهاز واحد معيب بالعينة هو:

$$P(X=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{76}{3-1}}{\binom{80}{3}}$$

$$P(X=1) = \frac{4\times 2850}{82160}$$

$P(X=1)$ = **0.14**

التوزيع الطبيعى القياسى

التوزيع الطبيعى هو عبارة عن توزيع له الشكل الجرسى وهو متماثل حول المتوسط μ وتساوى المساحة الكلية تحت المنحنى الواحد الصحيح. ولهذا التوزيع العديد من التطبيقات المهمة فى الحياة العملية لمعظم الظواهر الطبيعية مثل الأطوال والأوزان ودرجات الطلاب ومقياس ضغط الدم وغيرها من الظواهر البيولوجية والعلمية. وتعطى داله الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائى X الذى يتبع التوزيع الطبيعى $(X \approx N(\mu, \sigma^2))$ كالتالي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

حيث:

$$-\infty < X < \infty, \qquad -\infty < \mu < \infty, \qquad \sigma > 0$$

هذا ويعتبر التوزيع الطبيعى القياسى حالة خاصة من التوزيع الطبيعى وذلك حيث يكون المتوسط له يساوى الصفر والانحراف المعيارى يساوى الواحد الصحيح. وسوف نرمز للمتغير العشوائى الذى يتبع التوزيع الطبيعى القياسى بالرمز Z أى أن $Z \approx N(0,1)$ وتعطى دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع من خلال العلاقة:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad -\infty < z < \infty$$

وكما هو معلوم هناك جداول خاصة بهذا التوزيع يمكن من خلالها حساب الاحتمالات المطلوبة. هذا ويمكن تحويل جميع القيمة غير القياسية (قيم تتبع التوزيع الطبيعى) إلى قيم قياسية وذلك من خلال العلاقة التالية:

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

فمثلاً إذا كان لدينا متغير عشوائى يتبع التوزيع الطبيعى $X \approx N(16,16)$ فيمكن تحويله إلى متغير عشوائى له التوزيع الطبيعى القياسى كالتالي:

$$Z = \frac{x-16}{4}$$

المتغير العشوائى الجديد Z يتوزع توزيعا طبيعيا قياسيا له المتوسط صفر والانحراف المعيارى واحد.

مثال (٨): باستخدام الجدول الإحصائى الذى يعطى المساحة تحت المنحنى الطبيعى القياسي، اوجد الاحتمالات التالية:

1- $P(z \leq 1.72)$, 2- $P(z \leq 1.07)$
3- $P(z \geq 0.29)$ 4- $P(-1.91 \leq z \leq 0.45)$

الحل:

1- $P(z \leq 1.72)$ **= 0.9573**
2- $P(z \leq 1.07)$ **= 0.8577**
3- $P(z \geq 0.29)$ **= 1-** $P(z < 0.29)$
$P(z \geq 0.29)$ **= 1- 0.6141**
$P(z \geq 0.29)$ **= 0.3859**
4- $P(-1.91 \leq z \leq 0.45)$**=** $P(z \leq 0.45)$ **-** $P(z \leq -1.91)$
$P(-1.91 \leq z \leq 0.45)$ **= 0.6736 – 0.0281**
$P(-1.91 \leq z \leq 0.45)$ **= 0.6455**

مثال (٩): إذا كانت $X \approx N(16,16)$ **اوجد الاحتمالات الأتية:**

1- $P(X \leq 14)$
2- $P(X \geq 22)$

الحل: نلاحظ أن المتغير العشوائى X هو متغير عشوائى غير قياسى وعليه سوف نقوم بتحويله إلى المتغير العشوائى القياسى كالتالي:

1- $x = 14 \Rightarrow Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$
$\Rightarrow \ z = \dfrac{14-16}{4}$ **= -0.5**
$\Rightarrow P(X \leq 14)$ **=** $P(Z \leq -0.5)$ **= 0.3085**
2- $x = 22 \Rightarrow Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$
$\Rightarrow \ z = \dfrac{22-16}{4}$ **= 1.5**
$\Rightarrow P(X \geq 22)$ **=** $P(Z \geq 1.5)$ **= 1-** $P(Z < 1.5)$
$\Rightarrow P(Z \geq 1.5)$ **= 1- 0.9332 = 0.0668**

مثال (١٠): إذا كانت درجة ذكاء الطلاب فى الجامعة تتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط ١٠٥ وانحراف معيارى ١٠. ما هى نسبة الطلبة الذين تقع درجة ذكائهم بين ١١٤،١٠٠.

الحل:

$X \approx N(105,100)$
$P(100 \leq X \leq 114) = P\left(\dfrac{100-105}{10} \leq \dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{114-105}{10}\right)$
$P(100 \leq X \leq 114) = P(-0.5 \leq Z \leq 0.9)$
$P(100 \leq X \leq 114) = P(z \leq 0.9)$ **-** $P(z \leq -0.5)$
$P(100 \leq X \leq 114)$**= 0.8159 – 0.3085**
$P(100 \leq X \leq 114)$**= 0.5074**

توزيع ت

إذا كانت دالة الكثافة الإحتمالية للمتغير العشوائى t على الصورة:

$$f(t) = c\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \qquad -\infty < t < \infty$$

فإن هذا التوزيع يسمى توزيع t حيث ν تمثل درجات الحرية و c ثابت يعتمد على ν ليجعل المساحة تحت المنحنى تساوى الواحد الصحيح.

ويتشابه توزيع t مع التوزيع الطبيعى القياسى من حيث الشكل الجرسى إلا أنه أكثر انخفاضا منه وعندما تزداد درجات الحرية فإن توزيع t يقترب من التوزيع الطبيعى القياسي.

وهناك جداول خاصة لهذا التوزيع مثل التوزيع الطبيعى القياسى إلا أن جداول توزيع t تختلف بعض الشيئ حيث يعتمد الجدول على درجات الحرية التى تمثل العمود الرأسى والمساحات التى تمثل الخط الأفقى بينما الأعداد داخل الجدول تمثل قيم t المناظرة لدرجات الحرية والمساحة.

مثال (١١): اوجد قيمة t لكل من:

$t\,(0.975, 20)$ $\qquad$ $t\,(0.995, 12)$

$t\,(0.95, 5)$ $\qquad$ $t\,(0.90, 7)$

الحل: باستخدام جدول t نحصل على:

$t\,(0.975, 20) = 2.086$

$t\,(0.995, 12) = 3.055$

$t\,(0.95, 5) = 2.015$

$t\,(0.90, 7) = 1.415$

مثال (١٢): اوجد درجات الحرية المناظرة للقيم التالية:

$t\,(0.975, \nu) = 2.228$ $\qquad$ $t\,(0.995, \nu) = 2.921$

$t\,(0.95, \nu) = 1.721$ $\qquad$ $t\,(0.90, \nu) = 1.337$

الحل: باستخدام جدول t نحصل على:

$t\,(0.975, \nu) = 2.228 \;\Rightarrow\; \nu = 10$

$t\,(0.995, \nu) = 2.921 \;\Rightarrow\; \nu = 16$

$t\,(0.95, \nu) = 1.721 \;\Rightarrow\; \nu = 21$

$t\,(0.90, \nu) = 1.337 \;\Rightarrow\; \nu = 16$

توزيع ف

من التوزيعات المهمة التى تستخدم فى اختبارات الفروض هو توزيع F. هذا التوزيع دالة الكثافة الاحتمالية له تعطى من خلال العلاقة التالية:

$$f(F) = \frac{c\,F^{(\nu_1-2)/2}}{(\nu_2+\nu_1 F)^{(\nu_1+\nu_2)/2}}, \qquad F > 0$$

يسمى هذا التوزيع بتوزيع F وعبر عنه بالرمز $F(\nu_1, \nu_2)$ حيث ν_1 و ν_2 يمثلان درجات الحرية و c هو ثابت يعتمد على درجات الحرية حتى تصبح المساحة تحت المنحنى مساوية للواحد الصحيح.

ويلاحظ فى هذا التوزيع بأنه ملتو ناحية اليمين هذا وكلما ازدادت درجات الحرية اقترب هذا التوزيع من التوزيع الطبيعى القياسي.

هذا وسوف نستخدم الرمز $F(\alpha, \nu_1, \nu_2)$ (α ترمز إلى المساحة) لإيجاد قيمة F المناظرة لدرجات الحرية والمساحة المعطاة.

مثال (١٣): اوجد:

F (0.01, 11 , 15) **F (0.05, 10 , 7)**

الحل:

F (0.01, 11 , 15) = 0.235
F (0.05, 10 , 7) = 0.318

تمارين

١- إذا كانت نسبة المعيب فى الإنتاج تمثل ١٠٪ سحبت عينة مكونة من ٥ وحدات. اوجد الاحتمالات التالية:

أ- لا يوجد فى العينة وحدة معيبة.

ب-توجد وحدة معيبة فقط.

ت-توجد وحدة معيبة على الأكثر.

ث-توجد وحدتان معيبتان على الأقل.

٢- إذا كان احتمال أن يتخرج طالب من الجامعة هو ٠.٠٦. سحبت عينة مكونة من ٤ طلاب، اوجد الاحتمالات الآتية:

- أن يتخرج جميع الطلاب فى العينة.
- أن يتخرج طالبان فقط.
- أن يتخرج طالبان على الأقل.

٣- مصنع به ١٥ عامل و ٥ مهندسين، سحبت عينة عشوائية مكونة من ٣ أفراد. اوجد الاحتمالات الآتية:

١- العينة كلها من المهندسين.

٢- العينة بها عامل واحد ومهندسان.

٣- العينة كلها من العمال.

٤- إذا كان المتغير العشوائى Z له توزيع طبيعى قياسي، فاوجد الاحتمالات التالية:

- $P(Z<1.8)$
- $P(Z>-0.5)$
- $P(-0.2<Z<0.5)$

٥- إذا كان المتغير العشوائى X الذى يتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط يساوى ٨٠ وانحراف معيارى يساوى ٤.٨ اوجد الاحتمالات التى يأخذها المتغير العشوائى للقيم التالية:

١- أقل من ٨٧.٢.

٢- أكبر من ٧٦.٤.

٣- بين ٨١.٢، ٨٦.

٤- بين ٧١.٦، ٨٨.٤.

٦- إذا كانت درجة الحرارة خلال شهر مارس تتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط ٢٠ درجة وانحراف معيارى ٣.٣٣ درجة.

اوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة بين ٢١.١١، ٢٦.٦٦ فى هذا الشهر.

٧- إذا كان إحتمال أن يكسب فريق مباراة هو ٠.٧٥ فإذا لعب هذا الفريق ٤ مباريات. اوجد احتمال أن يكسب هذا الفريق:

- مباراة واحدة على الأقل.
- مبارتان فقط.
- أكثر من نصف المباريات.

٨- إذا كان ٢٠٪ من إنتاج ماكينة مسامير تالفًا. اوجد احتمال أن يكون من بين ٤ مسامير تم اختيارها عشوائيا:

- مسمار واحد تالف.
- لا توجد مسامير تالفة.
- يوجد مسماران تالفان على الأكثر.

٩- صندوق يحتوى على ٤ كرات بيضاء و ٦ كرات حمراء. تم سحب عينة عشوائية مكونة من ٣ كرات بدون إرجاع. افرض أن المتغير العشوائى X يمثل عدد الكرات البيضاء فى العينة المسحوبة اوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى X.

١٠- إذا كان متوسط عدد الحوادث على الطريق الصحراوى هو ٣ حوادث يوميا. ما هو احتمال وقوع أكثر من ٥ حوادث فى يوم ما.؟

١١- اوجد قيمة t لكل من:

t (0.95, 20)
t (0.90, 28)
t (0.99,12)
t (0.975, 7)
t (0.995, 13)

١٢- اوجد قيمة b فى كل مما يأتي:

(b , 5) = 2.015
t (b , 20) = 1.325
t (b , 23) = 2.069
t (b , 12) = 2.681
t (b , 15) = 2.131

١٣- اوجد:

F (0.01, 7 , 12)
F (0.05, 12 , 5)
F (0.01, 5 , 8)
F (0.05, 5 , 5)

١٤- اوجد قيمة b فى كل مما يأتي:

F (b, 8 , 9) = 3.23
F (b, 9 , 11) = 4.63
F (b, 3 , 24) = 3.72
F (b, 2 , 24) = 3.

ملحوظة هامة:

من باب الأمانة العلمية ومبدأ رد الفضل الى أهله فقد تم الاعتماد في اعداد هذه النسخة بشكل كبير أن لم يكن أساسى على كتاب الإحصاء الخاص ببرنامج الطرق المؤدية الى التعليم العالى بجامعة عين شمس فللسادة المؤلفون جزيل الشكر، وعلى رأسهم الأستاذ الدكتور سيد كاسب.