بحوث العمليات

د. محمد محمود خطاب
قسم الأساليب الكمية
كلية التجارة
جامعة سوهاج

د. محمد عبدالحميد الربع
قسم الأساليب الكمية
كلية التجارة
جامعة جنوب الوادى

مقدمة

أصبح استخدام وتطبيق الطرق الكمية سواء رياضية أو إحصائية عنصراً أساسياً في حل مشاكل الحياة العلمية أو اليومية على حد سواء . فلقد أصبحت تلك الطرق بمثابة أدوات رئيسية من أدوات التحليل الكمي لمشاكل اتخاذ القرارات سواء في النواحي الاقتصادية وبالتحديد في قطاع الإنتاج والنواحي الإدارية ورسم السياسات العامة للقطاع الحكومي وكذلك القطاع الخاص على حد سواء . وذلك نظراً لما توفره تلك الطرق والأساليب من تحليل أمثل لكافة الظواهر سواء منها الكمية أو الوصفية والذي يساهم في تحقيق قدراً عالياً من الثقة في اتخاذ القرارات والتنبؤ بما ستكون عليه تلك الظواهر في المستقبل .

وتعتبر بحوث العمليات - Operations Research – OR أحد الأساليب أو الطرق الكمية الشائعة الاستخدام في مجال حل غالبية المشكلات الاقتصادية والإدارية والمحاسبية والهندسية والزراعية والطبية والتخطيطية وغيرها من المشاكل التي تهم أي قطاع سواء حكومي أو خاص لدفع عملية التنمية ورفاهية الشعوب حيث تقوم بحوث العمليات أساساً على تحقيق مايسمى بالأمثلية في حل تلك المشكلات باختلاف أنواعها .

هذا بالإضافة أن لهذا الفرع الهام من أساليب تحليل النماذج الرياضية – بحوث العمليات – دوراً رئيسياً في إجراء بحوث دراسات الجدوى الاقتصادية والتطبيقات المحاسبية وخصوصاً بعد ظهور برامج الحاسب الجاهزة – مجموعة حزم البرامج التطبيقية والتي تتناول أساليب وطرق حل المشاكل المختلفة في حياتنا اليومية .

ويود المؤلفان من خلال هذا الكتاب أن يتقدما بباكورة إنتاجهم في هذا المجال لطلاب البكالوريوس – كلية التجارة – ليكون عوناً لهم في تلك المرحلة الهامة ويصقل خبرتهم العملية فيما بعد في هذا المجال حتى يكون نداً قوياً وعنيداً لخريجي كلية الهندسة – ميكانيكا إنتاج – بل ويفوق خريج هذا القطاع بفضل من الله وتوفيقه إن شاء الله .

كما لا يفوت المؤلفان على أن ينوهان بأن لملاحظاتكم البناءة ستكون كل اهتمام في الطبعات القادمة إن شاء الله ... لذا فنحن في انتظار ما ترونه من ملاحظات سواء أخطاء مطبعية أو شكلية تفيد في تنقيح الطبعات التالية من هذا الكتاب لكي يصبح منهجاً مفيداً في هذا المجال والله ولي التوفيق .

المؤلفان

د . محمد محمود حامد خطاب

د . محمد عبد الحميدعبدالرحمن الربع

فى يناير ٢٠٢٣

الفصل الأول
منهج بحوث العمليات

في غالبية المشاكل الحياتية باختلاف أنواعها سواء الاقتصادية أو الإدارية أو...إلخ . تأتي مشكلة الوصول للاستخدام الأمثل والتخصيص الأمثل للموارد المتاحة من موارد بشرية وساعات عمل للآلات ورأس مال محدود وكذلك عملية تقييم أداء الوحدات الاقتصادية. وامتداداً لذلك عملية التنبوء بقيم المتغيرات الاقتصادية في المستقبل والتي يمكن تطبيق عليها مفاهيم ونظريات الطرق والأساليب الكمية وبحوث العمليات بالتحديد والتي أصبحت منذ وقت طويل أحد الأساليب والأدوات الرئيسية في أيدي الإدارة الواعية والتي تعتمد على أساليب علمية في تناول حل مشكلاتها واتخاذ القرارات المثلى .

وفي هذا الباب نتناول التعريف بالجوانب الرئيسية الهامة لهذا العلم سواء من ناحية نشأته التاريخية وتطور مجالات استخدامه التي يمكن أن تكون أساساً هاماً في معايير التطوير والجودة سواء في المجال العلمي أو العملي .

- <u>نشأة وتطور مجال بحوث العمليات .</u>

تعتمد بحوث العمليات كمنهج كمي يساهم في عملية صنع القرار على تطبيق مبادئ طرق القياس والتحليل الكمي لحل المشاكل وذلك من خلال بناء النماذج الرياضية للمشاكل موضع الدراسة . هذا وترجع نشأة بحوث العمليات كعلم مستقل يعتمد على النظريات الرياضية إلى أيام الحرب العالمية الثانية . حيث قام مجموعة متكاملة من علماء إنجليز بإجراء تجارب متعددة على استخدام شبكة الرادار ضمن أساليب الدفاع الجوي والطيران . حيث قام هؤلاء العلماء في ظل ظروف الحرب المحيطة بتخطيط مجموعة من الخطط والاستراتيجيات التي تؤدي إلى استخدام الرادار في التنبؤ بنسبة الطائرات المصابة بالقذائف الناتجة عن استخدام المدفعية . وكانت كل تجربة يتم فيها تسجيل المعلومات والنتائج التي تم التوصل إليها لكي يتم إعادة دراستها وتبويبها وتحليلها لاستخلاص النتائج والخروج منا ببعض النتائج والنظريات التي تفيد في وضع

خطط مستقبلية للدفاع الجوي والعمليات العسكرية والطيران . ولقد أدى النجاح في هذا المجال إلى استقطاب علماء آخرين حاولوا المشاركة في تلك التجارب العسكرية ساهموا بدرجة كبيرة في إضافات جديدة ومتعددة في هذا المجال . فقاموا بمحاولة تطبيق بحوث العمليات في مجالات أخرى مثل تطبيق قواعد الاحتمالات في التحديد الأمثل لأماكن تواجد الغواصات ومن ثم توجيه القنابل إليها وإصابة الأهداف بواسطة سلاح الطيران أو غيره من الوسائل العسكرية الدفاعية والهجومية.

وبانتهاء الحرب العالمية الثانية استقر هذا العلم في عقول العلماء الذين ساهموا في تطويره وتنميته . وهذا ما أدى بكثير من العلماء المدنيين الذين سمعوا بنجاح هذا العلم في دراسة مدى جدواه في كثير من المجالات الحيوية مما ولد عقيدة راسخة بجدوى وفائدة استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرار . ولقد طرأت تغيرات كثيرة وظهرت عوامل متعددة أدت إلى انتشار استخدام أساليب بحوث العمليات بصورة موسعة في مجالات الاقتصاد والإدارة عموماً . فقد اشتدت في الآونة الأخيرة المنافسة بين المؤسسات التجارية والصناعية للحصول على نصيب أكبر من المشاركة في الحصص التسويقية لتحقيق أقصى ربح ممكن . فقامت بعض من الشركات والمؤسسات بمحاولة تطبيق الأساليب العلمية لبحوث العمليات فحققت رواجاً ونجاحاً واضحاً في حصولها على الجزء الأكبر من المشاركة في السوق السلعي والخدمي لتحقيق الأرباح مما دفع بباقي المؤسسات إلى إتباع تلك الأساليب العلمية حتى يمكنها المنافسة والبقاء في السوق وتحقيق الأرباح .

هذا ولقد كان لبداية عصر ظهور أجهزة الحاسبات بعد انتهاء الحرب العالمية الثانية وتطور تصميمها واستخدامها دوراً رئيسياً في تطبيق أساليب بحوث العمليات على نطاق واسع . حيث ساهمت أجهزة الحاسبات كوسيلة مساعدة تساهم في تطوير حل المشاكل المركبة التي تحتوي على العديد من الأنشطة والمتغيرات والقيود والحسابات المعقدة . أي أن لظهور الحاسبات دوراً رئيسياً في تسهيل تطبيق أساليب النماذج وتوفير الجهد والوقت الضائع في متطلبات تلك النماذج في إتمام الحسابات والمشاكل

الرياضية المعقدة والتي يصعب على الفرد القيام بها في وقت مناسب وبدقة عالية دون الوقوع في أية أخطاء .

هذا ولقد أدى تزايد وتفاعل وتداخل وتشابك أنشطة المشروعات والهيئات والمؤسسات الصناعية والتجارية والخدمية إلى أن أصبحت بمثابة بيئة كبيرة معقدة . ولقد أوجدت هذه البيئة أمام إدارات تلك المؤسسات مشاكل إدارية وتجارية وصناعية معقدة مما جعل لاستخدام الأساليب العلمية في بحوث العمليات والطرق الكمية ضرورة حتمية للنجاح والتطوير الدائم من أجل البقاء . وقد أدى ذلك إلى تضافر جهود كثيراً من المؤسسات والمعاهد والجامعات لنشر وتطوير مفاهيم النظريات العلمية لبحوث العمليات ثم تطبيق تلك النظريات في شتى المجالات . مما دفع إلى ظهور جمعيات متخصصة في بحوث العمليات في الولايات المتحدة الأمريكية و أوروبا أصدرت النشرات والدوريات والمجلات العلمية النظرية منها والتطبيقية والتي أثرت في هذا العلم وساهمت في تطويره.

- **<u>مفهوم بحوث العمليات : -</u>**

يرى الكثير أن علم بحوث العمليات هو العلم الخاص بعملية بناء أو صياغة المشاكل التطبيقية ومحاولة إيجاد الأساليب المثلى لحلها وكيفية استخدام هذه الأساليب في عملية الإجابة على التساؤل عن ماذا يحدث لو تحقق شيء معين أو عدم تحقق ذاك الشيء وهو ما يسميه مستخدمي هذا العلم بتحليل الحساسية Sensitivity Analysis لتلك الأساليب .

فهناك فريق من جمهور وعلماء هذا العلم يعتبر أن بحوث العمليات هو العلم الخاص ببناء النماذج الرياضية وتحديد الأساليب المثلى لحلها . والبعض الآخر يعتبر أن بحوث العمليات هو علم دراسة الحالات التطبيقية Case study والبعض الآخر يرى أنها بمثابة الإحصاء التطبيقي لما تقوم به من تطبيق لبعض أدوات الإحصاء التطبيقي .

هذا ولقد قامت الجمعية الإنجليزية لبحوث العمليات بتعريف بحوث العمليات على أنها تطبيق النماذج الرياضية في حل المشاكل المعقدة والمركبة التي تنشأ عند إدارة الأنظمة الكبيرة من الموارد البشرية والآلات والمواد الخام ورؤوس الأموال في مجال الصناعة وإدارة المشروعات .

كما عرفت الجمعية الأمريكية لبحوث العمليات على أنها بمثابة عملية التحديد الأمثل لعملية تصميم وتشغيل الموارد المتاحة من أفراد وآلات وعوامل إنتاج في ظل موارد تتسم بالمحدودية .

ومن خلال تلك التعريفات المختلفة فإن بحوث العمليات ترتكز على مجموعة دعائم رئيسية هي : –

١– تطبيق الطرق العلمية في معالجة المشاكل مع اختلاف أنواعها .

٢– بناء نموذج رياضي يساهم في حل تلك المشاكل واتخاذ القرارات المثلى لتلك الحلول .

٣– استخدام النماذج الرياضية في إجراء ما يسمى بتحليل الحساسية للوقوف على إجابة التساؤلات الخاصة بماذا يحدث لو ؟

وتقوم بحوث العمليات كأحد فروع الرياضة أو الإحصاء التطبيقي في حلها للمشكلات موضع الدراسة بالمرور في سلسلة من الخطوات المتتالية وهي:–

١– تحديد المشكلة موضع الدراسة . وذلك من خلال تحديد أهداف متخذ القرار والوقوف على البدائل المختلفة التي تساهم في تحقيق تلك الأهداف .

٢– تركيب وصياغة النموذج الرياضي الذي يعكس تحديد كافة جوانب المشكلة موضع الدراسة . وهنا يتم تحديد المتغيرات الأصلية التي تلعب دوراً أساسياً في المشكلة وتصميم هيكل للنموذج الرياضي من دالة تعبر عن هدف المؤسسة أو المشروع ومجموعة القيود التي تحد من تحقيق هذا الهدف والذي تعكسه الموارد والطاقات المحدودة.

٣- تجربة واختبار النموذج الرياضي سواء اختبار مدى إمكانية تطبيق هذا النموذج أو مدى أمثليته وإمكانية استخدامه في التنبؤ أو الإجابة على التساؤلات الخاصة بماذا يحدث لو ؟ أو ما يسمى باختبارات تحليل الحساسية .

٤- تنفيذ وتقييم النموذج : فإذا تبين لجمهور متخذي القرار جدوى النموذج محل التطبيق يتم قبوله وتطويره في ضوء النتائج المستخلصة وإلا يعاد صياغة المشكلة من جديد .

- **<u>نطاق أو حدود علم بحوث العمليات : -</u>**

في غالبية المشروعات والمؤسسات باختلاف أنواعها التجارية والزراعية والصحية والخدمية ... إلخ فإن لأساليب بحوث العمليات مجالاً واسع النطاق في الوصول بالحلول المثلى التي ينجم عنها أقصى ربح ممكن

(أو أقل تكلفة أو خسارة ممكنة) أو بأفضل وسيلة ممكنة (في حالة الخدمات) .

هذا وتستخدم الأساليب الحديثة للطرق و الأساليب الكمية والإحصائية والرياضية بما فيها بحوث العمليات في مجالات كثيرة ومتعددة لحل مشاكل كثيرة ومتعددة لحل مشاكل مختلفة ومتعددة منها :

١- تخصيص وتوزيع الموارد الاقتصادية المحدودة والمتاحة تخصيصاً أو توزيعاً أمثلاً بهدف تحقيق أكبر عائد أو ربح (أو تخفيض الخسارة أو التكلفة) .

٢- وضع البرامج والجداول المثلى لإدارة العمليات الإنتاجية .

٣- تقييم ومتابعة ومراقبة إدارة المشروعات

٤- مراقبة المخزون السلعي وتحديد حجم الطلبيات المثلى من هذا المخزون وحدود بداية تلك الطلبيات .

٥- تخطيط الأرباح والعوائد وتصميم الموازنات التخطيطية السليمة المبنية على أسس وقواعد رياضية سليمة .

٦- متابعة واقتراح مشروعات الإحلال والتجديد وتحديد الأوقات المثلى لإجرائها .

٧- دراسة وتخطيط الأنشطة والعمليات التي تطلب خدماتها من مراكز خدمة متباينة في شكل صفوف انتظار .

٨- متابعة التنفيذ الزمني لجدولة أنشطة المشروعات والأنشطة المختلفة التي تتكون منها تلك المشروعات .

٩- إعداد جداول تشغيل الآلات ذات القدرات المتباينة بكفاءة في تنفيذ العمليات الفنية .

١٠- تناول مشاكل تنظيم حركة نقل المواني والمرور .

١١- تناول الأنشطة العسكرية المختلفة وذلك لتحقيق ما يرجى منها من أعمال وأهداف قومية .

١٢- تنظيم وتخطيط مشكلات النقل البري والبحري والجوي وذلك في مختلف المجالات العملية .

١٣- هذا ورغم التنوع في مجالات تطبيقات الطرق الكمية والرياضية والإحصائية وبحوث العمليات فإن هناك حدود في مجال توفير المعلومات والنتائج الكمية التي تساعد الإدارة ومتخذي القرار في مختلف المجالات في اتخاذ القرار السليم وتستعين بحوث العمليات في ذلك بإيجاد مجموعة من النماذج الرياضية التي تستخدم قدراً كبيراً من المعلومات والبيانات حول الظواهر محل الدراسة . والخلاصة فإن الأسلوب العلمي المستخدم في عملية جمع وتحليل البيانات وكذلك تكوين وإنشاء النماذج الرياضية يعتبر من حدود هذا المجال أو هذا العلم – بحوث العمليات – مما دعي الكثير لاعتباره أحد مجالات وحدود الإحصاء التطبيقي . كما أن تلك المعلومات لن تكون بديلا عن حكمة وفطنة القائمين على الإدارة خاصة في ظل الظروف المتداخلة والمتشابكة في الحياة العلمية والتي تتضمن عدداً كبيراً من المتغيرات التي تعتبر بمثابة البيئة الداخلية للمشروع وتشابك تلك المتغيرات الأخرى التي تمثل البيئة الخارجية للمشروع

حيث تزداد الحاجة إلى حسن التقدير الشخصي لمتخذي القرار وطريقة اختيارهم للأسلوب العلمي المناسب لحل المشاكل موضع الدراسة .

وأخيراًُ فإن لبحوث العمليات مجالاً رئيسياً تؤدي فيه وظيفة استشارية في المؤسسات مما يترك مسئولية القرار وتحمل مسئولية تبعاته على المديرين . ولابد لنجاح هذا كله من وجود نظام جيد أو تنظيم جيد في المؤسسات من ناحية الهيكل الإداري مع تحديد واضح للواجبات والمسئوليات بجانب وجود نظام متكامل للمعلومات يساعد على استخدام الأساليب العلمية الحديثة والتي تحتاج قدراً كبيراً من البيانات والمعلومات الدقيقة والخبرة .

- <u>بحوث العمليات والنماذج الرياضية :</u>

Operations Research and Mathematical Models

ترتكز دراسات بحوث العمليات على بناء نموذج أو مجموعة من النماذج التي تعبر عن الموضوع تحت الدراسة بأكبر قدر من الواقعية . ومن ثم فإنه يمكن تعريف نموذج بحوث العمليات بأنه عبارة عن تمثيل مبسط لمشكلات واقعية موجودة في الحياة العملية ويراد إيجاد حلول مثلي لتلك المشكلات من خلال هذه النماذج .

هذا وقد يكون نموذج بحوث العمليات موجود فعلاً في الحياة العملية أو قد يكون مجرد فكرة في إطار التنفيذ . حيث يكون الهدف في الحالة الأولى من النموذج كيفية تحسينه أو ترشيده وتجنب السلبيات والمعوقات . أما في الحالة الثانية – في إطار التنفيذ – فيكون الهدف هو تحديد أفضل شكل للنظام في المستقبل .

هذا وينتج التعقيد ودرجة الصعوبة في النماذج الواقعية من كبر عدد المتغيرات التي تحكم النظام موضع الدراسة حيث يجب اقتراح مسارات معينة لتلك المتغيرات سواء كل منهم على حدة أو مجتمعه معاً وذلك بهدف الوصول لأفضل الحلول لمواجهة مشكلات معينة قد تقابل أو تعترض النظام موضع الدراسة . إلا أنه برغم كبر عدد تلك المتغيرات نجد أن عدداً قليلاً منها هو الذي يكون له تأثير جوهري على النظام موضع

الدراسة . ومن هنا تكون مهمة الباحث استخدام خبرته في اكتشاف العدد القليل من تلك المتغيرات التي يكون لها التأثير الجوهري على النظام لكي تكون مقترحاته وتوصياته مهتمة بعملية تحسين سير العمل في النظام موضع الدراسة . ومن ثم فعلى قدر خبرة الباحث الفرد في تحديد تلك المتغيرات المؤثرة تكون بالتوازي قدرته على تبسيط نماذج بحوث العمليات التي يقترحها ولهذا الدور أهمية فعالة في مجال بحوث العمليات . والمثال التالي يوضح لنا كيفية تركيب نموذج بحوث عمليات قريب بقدر الإمكان مما يجري في الحياة العملية :

بفرض أن لدينا منتج صناعي يمر بمراحل متعددة بدءاً من تصميمه واختباره وإعطاء أمر إنتاجه لقسم الإنتاج . وقسم الإنتاج بدوره يحتاج لمواد وتجهيزات في قسم المواد الخام الذي قد يوفرها له قسم المخازن الخاصة بالمواد أو عن طريق شرائها من السوق الخارجي عن طريق قسم المشتريات . وذلك حتى يصل المنتج لشكله النهائي فتكون مسئولية قسم المبيعات بالتعاون مع قسم التسويق لضمان وصول المنتج إلى مستهلكيه في الوقت والمكان المناسب وبالسعر المناسب . وبفرض أن الباحث المنوط بموضوع بحوث العمليات كان هدفه الرئيسي هو تحديد مستوى أو كمية الإنتاج بالمشروع . فإنه بالنظر بعين فاحصة للنظام ككل نجد أن هناك عدداً كبيراً من المتغيرات التي قد تؤثر مباشرة في عملية تحديد مستوى الإنتاج من السلعة موضع الدراسة . يمكن لنا سرد بعض الأمثلة من تلك المتغيرات التي قد تؤثر بطريقة مباشرة على مستوى وحجم الإنتاج منها :

<u>أ – قسم الإنتاج</u> :

الساعات المتاحة لتشغيل الآلات وعدد ساعات العمالة المتاحة والترتيب التتابعي فنياً على الآلات كخطوط إنتاج متكاملة والمتاح من المخزون وعدد الوحدات الغير مقبولة فنياً من الإنتاج ومعدل الرقابة على التالف من الإنتاج.

ب_ قسم الموارد :

المخزون المتاح من الموارد ومعدل التسليمات من المواد المشتراة والقدرة التخزينية المحدودة لمخازن المؤسسة .

ج- قسم التسويق : -

التنبؤات بحجم المبيعات ومدى كثافة الحملات الإعلانية وطاقة أو قدرة المنشأة على إعطاء تسهيلات عمليات البيع والتوزيع وأثر المنتجات المنافسة لمنتج المؤسسة موضع الدراسة .

فيلاحظ أن كل من تلك المتغيرات المذكورة في تلك الأقسام الثلاث الموضحة للمؤسسة أو المنشأة التجارية يؤثر سواء بطريق مباشر أو بطريق غير مباشر على حجم أو مستوى المطلوب تحديده كهدف رئيسي للمنشأة . كما أن تضمين كافة تلك المتغيرات والعلاقات التشابكية فيما بينهما في نموذج واحد يهدف لتحديد حجم أو مستوى الإنتاج يعتبر عملية شاقة ومعقدة للغاية . لذا فأننا سوف ننهج استنباط بناء نموذج بحوث عمليات على مرحلتين أساسيتين من مراحل الاستنتاج : الأولى وهي استخلاص نموذج افتراضي لما يجري فعلاً في حياة تلك المنشأة ويكون مصدره النظام الفعلي داخل المنشأة . والثانية هي إنشاء نموذج بحوث العمليات المطلوب ويكون مصدره هو ما تم استخلاصه من نظام افتراضي في المرحلة السابقة.

وعلى ذلك فستكون مهمتنا الأولى هي إيجاد النظام الافتراضي لما يجري فعلاً داخل المنشأة معبرين عنه في صورة المتغيرات الرئيسية المؤثرة فيه . وباستخدام الخبرات والتجارب السابقة في هذا المجال نجد أن هناك متغيرين رئيسين في تلك المرحلة وهما:

١- متغير يمثل معدل الإنتاج من هذه السلعة محور الدراسة .

٢- متغير آخر يمثل معدل استهلاك هذه السلعة .

لاحظ أن كل من المتغيرين السابقين يتضمن مجموعة من المتغيرات التي تعبر عنه . فمثلاً المتغير الأول - معدل الإنتاج - يتضمن عدد الساعات المتاحة لتشغيل الآلات وعدد ساعات العمل المتاحة للإنتاج والترتيب التتابعي الفني على خطوط الإنتاج

ومدى توافر المواد الخام الأولية اللازمة . كما أن المتغير الثاني والذي يمثل معدل الاستهلاك يتحدد عن طريق مجموعة أخرى من المتغيرات الخاصة بقسم التسويق السابق ذكرها . فمما لا شك فيه أن هناك عملية تسهيل كبيرة في الحصول على النظام الافتراضي لما يجري فعلاً داخل المنشأة عن طريق النظر فقط إلى متغيرين أساسين أحدهما يعبر عن معدل الإنتاج والآخر يعبر عن معد الاستهلاك والتسويق.

وبعد الحصول على تصوير نظام أو نموذج افتراضي من واقع ما يجري فعلاً داخل المنشأة وبعد تبسيطه في صورة مجموعات مؤثرة من المتغيرات يمكن استنتاج أو إنشاء نموذج بحوث العمليات المطلوب : فمثلاً يمكن أن يكون نموذج بحوث العمليات المطلوب مهتماً بتحديد حجم الإنتاج مع أخذ تكلفة زيادة أو عجز المخزون من هذا الإنتاج النهائي لدى المنشأة . كما يمكن أن ينصب اهتمام نموذج بحوث العمليات المطلوب على ناحية أخرى مثل تحديد مستوى وحجم إنتاج بحيث تكون النهاية العظمى للمخزون ومن هذا الإنتاج لدى المنشأة تحت مستوى معين تحدده الإدارة ومتخذي القرار.

وعموماً يمكن القول بأنه ليس هناك أية قواعد محددة يتم مراعاتها عند استنباط نموذج بحوث العمليات من النظام الافتراضي . لكن هذا العمل بالإضافة إلى أنه يساهم في تقليل المتغيرات تأثيراً فأنه يعتبر عملية فن وخبرة أكثر منها علماً وقواعد محددة .

ولما كان من الصعوبة وضع قواعد محددة لبناء نموذج بحوث العمليات . وبسبب أن إنشائها يحتاج لخبرة وحنكة الباحث وتضافر جهود فريق البحث ومدى إلمامه بالجوانب المختلفة للظاهرة موضع الدراسة . فإنه من المفيد أن نذكر بصورة مختصرة عن أهم نماذج بحوث العمليات السائدة في استخدامها وتركيبها العام وهي : –

١- <u>النماذج الرياضية المحددة</u> **Deterministic Models** .

وهي أكثر النماذج استخداماً في مجال بحوث العمليات وتحتوي على مجموعة من المتغيرات الكمية والرموز الجبرية التي تعبر عن تلك المتغيرات التي يتضمنها النموذج والتي تعبر عن علاقات المتغيرات مع بعضها في صورة دوال رياضية تعبر

عن الأنشطة التـي تحـدث فعلاً داخل المشروع أو المنشـأة وتتميـز هـذه النمـاذج الرياضية المحددة بأن دور عامل الصدفة وعدم التأكد يكاد يكون معدوم أو ضئيل للغايـة . والنموذج المحدد يعتبر بمثابـة صيغة تفسيرية للمشكلة موضـع الدراسـة . ويتم حل النموذج الرياضي المحدد بإتباع بعض الخطوات الرياضية أو الأساليب التي من شأنها أن تصل بالأهداف المرجوة التي ترغبها الإدارة من مقترحات إيجابيـة لحل مشكلاتها . ومـن أمثلـة تلك النمـاذج أساليب وطـرق حل نمـاذج البرمجـة الخطيـة ومشاكل النقل والتخصيص وإدارة مراقبة المخزون السلعي فـي حالـة الطلب المحدود وغير ذلك مما ستوضحه الدراسة فيما بعد .

٢- النماذج الرياضية الاحتمالية : **Probabilistic Models**

وفـي تلك النمـاذج يكـون لـدور الصدفة وحالـة عدم التأكد دوراً صريحاً مثـل نمـاذج المحاكاة **Simulation** حيث يتم تقليد أو محاكاة تتابع الأنشطة والأعمال داخل النظام أو المنشأة محل الدراسـة وذلك علـى مدار فترات زمنيـة محددة . وينـتج عن محاكـاة أحـداث وأنشـطة المشـروع بيانـات تقـوم الإدارة بتجميعهـا علـى أسـاس أنهـا مقياس لكفـاءة وكفايـة النظـام . كمـا أن تلك البيانـات الإحصائية التـي يـتم تجميعهـا يمكـن تحـديثها لتستعمل فـي المستقبل . وفـي الغالـب يستخدم أسلوب المحاكـاة فـي الحـالات التـي يصعب فيهـا بنـاء نمـوذج رياضـي محدد ومبسط يمكن حلـه . أي أن المحاكاة تصف سلوك أو هيكل نظام واقعي خلال فترات زمنيـة ممتدة وبذلك تعتبر عملية لاستخلاص جوهر الحقيقة دون الوصول للحقيقة ذاتها .

٣- النماذج الاستنباطية : **Deductive Models**

وتستخدم هذه النماذج الاستنباطية حينما يكون من الصعوبة صياغة مشكلة معينـة رياضياً ومن ثم يصعب معه أيضاً الوصول إلـى حلول مثلـى محددة لتلك المشكلة . وتقوم النماذج الاستنباطية في البحوث على أساس التحرك من صيغة حل مقترح إلى حل مقترح آخر أفضل بهدف الوصول إلى أفضل الحلول والذي يعتبر آنذاك النمـوذج

أو الطريقة الاستنباطية حلاً تقريبياً للمشكلة موضوع الدراسة . وننوه إلى أنه في بعض الحالات قد تكون الصيغة الرياضية للمشكلة موضع الدراسة ممكنة وبسيطة لكن طرق حلها قد يحتاج لنموذج رياضي يشتمل على طريقة حل طويلة وشاقة ومعقدة مما يجعلنا في النهاية استخدام أحد النماذج الاستنباطية في جوهر حل المشكلة .

مكونات النموذج الرياضى :

بصفة عامة يتكون النموذج الرياضي من ثلاثة محددات رئيسية وهي :-

المحدد الأول : متغيرات قرارية ومعلمات :

Decision Variables and Parameters

حيث يتم افتراض عدداً من المتغيرات تقابل الأعداد المقابلة من المنتجات محور الدراسة . وسميت هذه المتغيرات بالقرارية نظراً لأنه يتخذ بصددها قرار في نهاية حل النموذج وهذا القرار يفيد بإنتاج عدداً معيناً من كل نوع من الأنواع المختلفة من المنتجات محل الدراسة . وهذه المتغيرات القرارية تعتبر بمثابة مجموعة المجاهيل في النموذج محور التكوين . وكل مجهول يعبر عن عدد الوحدات المنتجة من كل منتج . أو بصفة عامة هذه المجاهيل (المتغيرات القرارية) تقابل ما هو مطلوب تحديد قيمه المثلى من النموذج محل الدراسة .

أما المعلمات (أو البارامترات) هي عبارة عن مجموعة المكونات التي تتحكم في تركيب أو بناء النموذج . فعلى سبيل المثال لا الحصر إن كنا بصدد مشكلة إنتاجية لنوعين من المنتجات فإن المتغيرات القرارية المفترضة هي ولتكن $س_١$ ، $س_٢$ كل منهما يعبر عن عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من كل نوع من نوعي المنتجات . أما عن المعالم فهي مثلاً الاحتياجات الفنية لإنتاج الوحدة من كل منتج في مراحل الإنتاج هذا بالإضافة للطاقات المتاحة من عوامل الإنتاج وسعر بيع أو ربح أو تكلفة إنتاج الوحدة من كل منتج . فكل هذه المعالم تعتبر بمثابة معلمات النموذج . ناهيك عن إذا كانت هناك معدلات استهلاك أو معدلات إنتاج أو معدلات استهلاك أو تسويق وخلافه من

معالم لتلك المشكلة الإنتاجية . وبصفة عامة فإن معلمات النموذج قد تكون محددة وقد تكون احتمالية وهو ما يؤدي بأن يصبح النموذج الرياضي محدداً أو احتمالياً .

المحدد الثاني : - القيود الهيكلية للنموذج : Constraints

وهي عبارة عن مجموعة الحدود أو القيود التي تضع حدوداً معقولة ومسموحاً بها سواء على المتغيرات القرارية أو العلاقات(معادلات أو متباينات) والتي توضح العلاقة ما بين جوانب النموذج المختلفة . فمثلاً في المشاكل الإنتاجية محل مثالنا السابق المطروح فإن هناك بعض من تلك القيود الهيكلية التي توضح العلاقة ما بين ما هو مستخدم فعلاً من مراحل الإنتاج المختلفة وبين ما هو متاح من كل مرحلة لتبين ما يسمى بالطاقات المستغلة من مراحل الإنتاج المختلفة والتي تعكس أيضاً الطاقات الغير مستغلة(عاطلة) من مراحل الإنتاج ، هذا بالإضافة لمجموعة القيود التي توضح عدم إمكانية إنتاج وحدات سالبة من المنتجات المختلفة والتي تسمى بقيود عدم السالبية .

المحدد الثالث : دالة الهدف : Objective Function

وهي عبارة عن دالة رياضية تعبر عن هدف النموذج الرياضي لذا سميت بدالة الهدف . وهذه الدالة تتضمن المتغيرات القرارية وبعض معالم النموذج الرياضي وتستخدم تلك الدالة في قياس مدى كفاءة النظام أو المشروع في تحقيق أهدافه . فمثلاً إذا كان محور اهتمام المشروع هو الربح المحقق من كل نوع من أنواع المنتجات فإن الهدف في تلك الحالة سيكون دالة معبرة عن أما دالة الربح الإجمالي أو الصافي . ومن ثم فيكون الهدف من خلال النموذج والذي تعكسه دالة الهدف هو عبارة عن عملية تعظيم لدالة الهدف والعكس صحيح تماماً.

وخلاصة ما سبق هو أن بناء هيكل النموذج الرياضي في بحوث العمليات يتم من خلال افتراض مجموعة المتغيرات القرارية ولتكن س$_{١}$ ، س$_{٢}$......، س$_{ن}$

فيكون المطلوب هو إيجاد قيم س$_{و}$ حيث و = ١، ٢ ، ....، ن التي تجعل دالة الهدف : –

د(س$_{١}$ ، س$_{٢}$......، س$_{ن}$) (حد أقصى) أو(حد أدنى)

بشرط مجموعة القيود الهيكلية التالية :

ق$_{ل}$ (س$_{١}$ ، س$_{٢}$......، س$_{ن}$) $\gtreqless$ ب$_{ل}$

، س$_{و}$ > صفر

حيث ل = ١، ٢ ، ..... ، م

، و = ١ ، ٢ ، ..... ، ن

أي أن الدالة د (س) تعبر عن دالة الهدف . كما أن القيد ق$_{ل}$ (س$_{١}$ ، ..... س$_{ن}$) $\gtreqless$ ب$_{ل}$ يعبر عن القيد رقم (ل) في قيود النموذج . أما عن س$_{و}$ $\leq$ صفر لكافة قيم (و) فهذا يفيد لا سالبية المتغيرات القرارية أي أن المتغيرات القرارية أما أن تكون صفرية أو بأي قيم موجبة فقط وعدم إمكانية أن تأخذ تلك المتغيرات القرارية أي قيم سالبة.

هذا ويتضح مما سبق أن النماذج الرياضية تهدف إلى الحصول على أفضل الحلول لدالة الهدف في ظل مجموعة محددة من القيود . وبصفة عامة فإن أفضل الحلول يتأتى من خلال تعظيم أو تدنيه (تقليل) قيمة دالة الهدف إلى أقصى حد ممكن وهو ما يسمى بأمثلية النموذج أو دالة الهدف .

لكن يجدر بنا ملاحظة أنه إذا قام باحثان على الأقل بتناول مشكلة أو موضوع معين بالدراسة . فقد نحصل كذلك على نموذجين مقابلين على الأقل لكل منهما دالة هدف ربما أو في الغالب قد تكون مختلفة أيضاً مع أن الموضوع محل الدراسة هو موضوع واحد لكن اختلاف الرؤية أو المنظور للمشكلة ربما يكون سبباً يعزي إليه هذا الاختلاف . فمثلاً إذا كان باحثاً ما وليكن (أ) ينظر لمشكلة إنتاجية ما من منظور تعظيم الأرباح . فقد يفضل باحث آخر وليكن (ب) في تناول نفس المشكلة الإنتاجية لكن من زاوية تقليل أو تدنيه التكاليف . فمن الواضح أن كلاً من المنهجين مختلفين تماماً عن بعضهما في تناول نفس المشكلة . حيث أن بنفس مجموعة القيود قد نجد أن النموذجين قد لا يؤديان لنفس النتائج أو الحلول المثلى للمشكلة . وتفسيرنا لهذا الاختلاف أن التكاليف قد تكون عناصرها في الغالب تحت التحكم المباشر للمنشأة محل

الدراسة بينما جانب الربح يؤثر فيه عوامل خارجة عن تحكم المنشأة مثل الحالة التسويقية للمنتجات من ناحية المنافسين لتلك المنتجات في السوق .

ونخلص من ذلك بأن الحل الأمثل لنموذجاً رياضياً معيناً يكون هو أفضل الحلول فقط لهذا النموذج في ظل سيادة ظروف أو قيود معينة ولكن هذا الحل لا يعتبر أفضل أو أمثل الحلول على الإطلاق . ففي الحياة العملية نجد أنه من الصعب أن يتضمن النموذج الواحد كل الأهداف الممكنة . وذلك بسبب ما قد ينتج من تعقيد في شكل النموذج الرياضي في حالة ما تضمن كل الأهداف المرجوة مما يجعل حل هذا النموذج عملية شاقة للغاية وخاصة في حالة ما إذا كانت بعض تلك الأهداف أو كليهما غير مقيسة . وهنا يجدر بنا ملاحظة أنه إذا انصب اهتمام دالة الهدف في النموذج على أحد وليس كل الأهداف (التي قد تكون متضاربة أحياناً) فإن ذلك يقودنا إلى أن الحصول على حل أمثل هو بمثابة حلاً أمثلاً جزئياً لا يمكنه خدمة المنشأة كجهاز يحتوي على وحدات متكاملة . لكن لتلافي ذلك فقد يختار الباحث أكثر الأهداف المتعارضة أهمية ويتضمنها في دالة الهدف . وفي نفس الوقت يعطي أوزاناً ترجيحية للأهداف الأخرى الباقية ويأخذها في الاعتبار جميعاً حتى يصل إلى حلاً أمثلاً كلياً يخدم أهداف المنشأة ككل .

خطوات تكوين النموذج الرياضي والمشاكل محور دراستنا في بحوث العمليات :

لبناء نموذج رياضي حتى يتسنى استخدامه في مجال بحوث العمليات يكون ذلك من خلال ما يلي : -

١- صياغة المشكلة . **Problem Formulation**

٢- بناء هيكل النموذج . **The model construction**

٣- استنتاج واستخراج الحل من النموذج . **Conducting and deriving**

٤- اختبار النموذج والحل المستخرج منه . **The Solution from the model**

٥- تنفيذ الحل . **Testing the model and its solution**

٦- رقابة النموذج ومدى حساسية الحل

Control the model and the solution sensitivity

أما عن المشاكل التي ستتناولها الدراسة بشيء من التفصيل فهي على النحو التالي :

أولاً : نموذج البرمجة الخطية كأحد صور النماذج الرياضية :

من حيث عملية صياغة النموذج وطرق حل النماذج الخطية بيانياً وجدولياً باستخدام طرق السمبلكس المختلفة وفي نهاية هذا الجزء نتناول دراسة تحليل الحساسية وهو ما يفيد الإجابة على التساؤلات الخاصة بماذا يحدث إذا (لو) تغيرت أحد معالم النموذج الخطي إن أمكن .

ثانياً : دراسة نموذج النقل :

من حيث عملية صياغة مشاكل النقل وأساليب حل مشاكل النقل مبدئياً وطرق تحسين الحلول المبدئية المقترحة للوصول للحل الأمثل . كما يتم تناول مشكلة التخصيص كأحد الحالات الخاصة لنموذج النقل وأسلوب حل مشكلة التخصيص .

ثالثاً :نظرية المباريات .

رابعاً : نظرية صفوف الانتظار ونماذج صفوف الانتظار .

خامسا : شبكات الأعمال وأساليب التحليل الشبكي .

سادساً : بعض الطرق الإحصائية لمراقبة جودة الإنتاج .

الفصل الثاني

البرمجة الخطية

وسوف نتناول بالدراسة في هذا الفصل ما يلي : –

١–صياغة نموذج البرمجة الخطية .

٢–أشكال النموذج الخطي

٣–حل النموذج .

- **الحل البياني للنماذج الخطية .**

- **الحل الجدولي باستخدام طرق السمبلكس .**

٤ – المشكلة (أو النموذج) البديلة أو الثنائية .

٥ – تحليل أسعار الظل .

البرمجة الخطية

Linear Programming

يعتبر النموذج الخطي هو أحد الصور الهامة من النماذج الرياضية في منهج بحوث العمليات . وتقوم النماذج الخطية بالبحث عن أفضل الطرق الممكنة للتوزيع الكفؤ للموارد المحدودة المتاحة على مجموعة الأنشطة المختلفة المكونة لمشروع معين بهدف الوصول إلى الأهداف التي تسعى الإدارة أو متخذي القرار إلى تحقيقها سواء تعظيم العائد أو الربح إلى أقصى حد ممكن أو تقليل الخسارة أو التكاليف إلى أقل حد ممكن .

هذا ولقد سميت هذه النماذج بالخطية نظراً لأن مجموعة العلاقات أو الدوال التي تحكم هذه النماذج (سواء دالة تعبر عن الأهداف المرجوة أو قيود النموذج) كلها دوال خطية يمكن تمثيلها جميعاً في صورة خطوط مستقيمة تعكس كل من الأهداف وقيود النموذج بيانياً . وبمعنى آخر فإن الدول التي تحكم صور النماذج الخطية المختلفة كلها دوال من الدرجة الأولى. وتختلف تلك النماذج الخطية عن حالات كثيرة والتي تتصل بأنشطة متنوعة في الحياة العملية لا ينطبق عليها افتراضات الدوال الخطية حيث نجد في هذا المجال ما يسمى بنماذج البرمجة الغير خطية **Non Linear Programming** والتي يتفرع منها البرمجة التربيعية والتكعيبية وهي تعتبر أصعب في تناولها وحلها من النماذج الخطية .

<u>أولاً :- صياغة مشاكل النماذج الخطية ودراسة بعض التطبيقات الشائعة</u>

Formulation for the Linear Programming problem (cases) <u>:</u>

المقصود بالصياغة هنا هي وضع المشاكل النظرية في صورة قالب خطي حيث يتكون النموذج الخطي كأحد صور النموذج الرياضي من ثلاثة عناصر رئيسية سبق توضيحها على النحو التالي :

أ – **مجموعة المتغيرات القرارية** : – **Decision variables**

وسميت بهذا الاسم نظراً لأنه يتخذ بصددها قرار في نهاية حل النموذج . وهذه المتغيرات عددها يساوي عدد المنتجات في المشاكل الإنتاجية أو بصفة عامة هي عبارة عن ما هو مطلوب تحديد قيمه المثلى من جراء حل النموذج وكل متغير من تلك المتغيرات القرارية يعبر عن عدد الوحدات الواجب إنتاجها من كل منتج في المشاكل الإنتاجية على سبيل المثال . فيمكن التعبير عن تلك المتغيرات القرارية بالمتغيرات (س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، ......، س$_{ن}$) .

ب – **معلمات النموذج الخطي : Parameters**

من المعروف في المشاكل الإنتاجية على وجه الخصوص (أو ما يقابلها في المشاكل الأخري) أن لكل منتج من المنتجات المختلفة متطلبات خاصة من عوامل الإنتاج المختلفة (ماكينات مختلفة – ساعات عمل – موارد أخرى ...) كما أن لكل وحدة منتجة من المنتجات المختلفة تساهم بنسبة خاصة في دالة الأرباح أو الخسارة المحققة وهي ما تسمى بهوامش ربح أو تكلفة أو خسارة الوحدة المنتجة . هذا بالإضافة إلى محدودية الموارد المتاحة من عوامل أو عناصر الإنتاج . كل تلك العوامل تسمى بمعلمات النموذج الخطي . ويمكن التعبير عن الاحتياجات الفنية من عامل الإنتاج (و) لإنتاج وحدة واحدة من المنتج (ر) بالرمز (أ$_{ور}$) والحدود المتاحة من عامل الإنتاج (و) هي ب$_{و}$ وهامش ربح أو تكلفة الوحدة المنتجة من المنتج (ر) هو ج $_{ر}$ حيث ر = ١ ، ٢ ، ...... ، ن ، و = ١ ، ٢ ، ...... ، م حيث (م) عدد عوامل أو عناصر أو مراحل الإنتاج ، (ن) هي عدد المنتجات المختلفة في المنشأة محل الدراسة .

ج – **دالة الهدف : Objective Function**

وهذه الدالة تسمى بدالة الهدف كما سبق أن أوضحنا لأنها تعبر عن الهدف من المشروع (أو من النموذج الخطي) من حيث كون المطلوب هو تعظيم الأرباح أم تدنيه

(تقليل) الخسارة وتلك الدالة هي عبارة عن مجموع حواصل ضرب هامش ربح أو تكلفة أو خسارة الواحدة المنتجة × عدد الوحدات المنتجة من كل نوع أي أن :

$$د\ (س) = جـ_{١}\ س_{١} + جـ_{٢}\ س_{٢} + \ldots \ldots + جـ_{ن}\ س_{ن}$$

$$= \sum_{ر=١}^{ن} جـ_{ر}\ س_{ر} \qquad \text{(تعظيم أو تدنيه)}$$

د – <u>القيود الهيكلية للنموذج الخطى</u> : <u>Constraints</u>

وهذه القيود بمثابة علاقات رياضية (≥ أو ≤ أو =) تعبر عن العلاقة ما بين الطاقات المستغلة والمتاحة من عوامل الإنتاج في مشاكل الإنتاج (أو ما يقابلها في النماذج الخطية الأخرى) . حيث يعبر الطرف الأيمن من تلك العلاقات عن الطاقات المستغلة من عناصر أو عوامل الإنتاج المختلفة بينما يعبر الطرف الأيسر منها عن الطاقات المتاحة من مجموعة تلك العناصر أو تلك العوامل . أي أنه بافتراض أن (أ) تعبر عن مصفوفة المعاملات الفنية لإنتاج الوحدة وأن المتجه (<u>س</u>) يعبر عن المتغيرات القرارية في النموذج والمتجه (<u>ب</u>) يعبر عن الطاقات المتاحة . وعليه يمكن تصور النموذج الخطى فى الشكل المصفوفى التالى :

$$\underline{أ}\ \underline{س} \ \lesseqgtr\ \underline{ب}$$

حيث أن (<u>أ</u>) مصفوفة من درجة م × ن ، المتجه (<u>س</u>) متجه راسي من درجة ن × ١ أما المتجه (<u>ب</u>) فهو متجه رأسي من درجة م × ١

أي أن :

$$\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} & \ldots\ldots & أ_{١ن} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} & \ldots\ldots & أ_{٢ن} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} & \ldots\ldots & أ_{٣ن} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ أ_{م٣} & أ_{م٢} & أ_{م٣} & \ldots\ldots & أ_{م ن} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س_{١} \\ س_{٢} \\ س_{٣} \\ \vdots \\ س_{ن} \end{pmatrix} \lesseqgtr \begin{pmatrix} ب_{١} \\ ب_{٢} \\ ب_{٣} \\ \vdots \\ ب_{م} \end{pmatrix}$$

وتسمى المصفوفة أ بمصفوفة المعاملات الفنية لإنتاج الوحدة من كل منتج .

هـ – قيود عدم السالبية : Non-negativity Constraints

وهذه المجموعة من القيود تفيد لا سالبية قيم المتغيرات القرارية . وهذا القيد أساس في قيود أي نموذج خطي ويعتبر من المسلمات . ويعبر عن هذه المجموعة من القيود بالصورة الرياضية التالية :

س١ ، س٢ ، ..... ، سن > صفر

أو سر > صفر حيث ر = ١ ، ٢ ، ......، ن

والآن دعنا نقوم بعرض مجموعة أمثلة تساعد على فهم عملية صياغة المشاكل أو النماذج في صورة قالب خطي .

مثال (١) : إذا كان لديك منشأة تنتج ثلاث منتجات صناعية (أ ، ب، ج) وذلك من خلال ثلاث مراحل إنتاجية (١ ، ٢ ،٣) . فإذا كانت احتياجات الوحدة الواحدة من المنتجات الثلاث في تلك المراحل الإنتاجية وكذلك هامش ربح الوحدة المنتجة والطاقات الإنتاجية المتاحة يوضحها الجدول التالي :

المنتج / مراحل إنتاج	احتياجات الوحدة من المراحل الثلاث (دقيقة) أ	ب	ج	الطاقة الإنتاجية (دقيقة / يوم)
(١)	١	٢	١	٤٣٠
(٢)	٣	صفر	٢	٤٦٠
(٣)	١	٤	صفر	٤٢٠
هامش ربح الوحدة (جنيه)	٣	٢	٥	

ووجود الصفر في الجدول السابق يفيد أن هذا المنتج لا يحتاج إلى هذا البندلإنتاجه . كما أنه يفترض أن كل الوحدات المنتجة تباع بالكامل وكذلك أن ربح الوحدة هو عبارة عن ربح الوحدة المنتجة الصافي .

والمطلوب الآن هو صياغة تلك المشكلة الإنتاجية في صورة نموذج خطي وبلغة أخرى المطلوب تحديد عدد الوحدات المثلى التى يجب إنتاجها من كل نوع والتي تساهم في تحقيق أقصى ربح ممكن .

الحــــــل :

فى البداية يتم افتراض مجموعة من المتغيرات القرارية تعبر عن عدد الوحدات المنتجة من كل نوع . لذا نفرض أن :

عدد الوحدات الواجب إنتاجها من النوع (أ) = س$_{١}$ وحدة

، عدد الوحدات الواجب إنتاجها من النوع(ب) = س$_{٢}$ وحدة

، عدد الوحدات الواجب إنتاجها من النوع (ج) = س$_{٣}$ وحدة

لاحظ أن أ ، ب ، ج أنواع للمنتجات الثلاث أما س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ هي بمثابة عدد الوحدات الواجب إنتاجها من كل نوع .

أما عن المعلمات الخاصة بالنموذج الخطي فهي موضحة بالجدول المعطى في التمرين .

لذا فالمطلوب الآن هو تحديد قيم س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ التي تجعل دالة الهدف (دالة الربح الصافي أو الإجمالي) :

د (س) = ٣ س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ + ٥س$_{٣}$ أكبر ما يمكن (أو تعظيم)

بشرط القيود الهيكلية التالية : −

س$_{١}$+٢ س$_{٢}$ + س$_{٣}$ $\leq$ ٤٣٠

٣ س$_{١}$ + ٢س$_{٣}$ $\leq$ ٤٦٠

س$_{١}$ + ٤س$_{٢}$ $\leq$ ٤٢٠

،

س$_{١}$ $\geq$ صفر

س$_{٢}$ $\geq$ صفر

س$_{٣}$ $\geq$ صفر

لاحظ أن دالة الهدف كما سبق و أن ذكرنا تعبر عن هدف المشروع أو المنشأة وهو تعظيم الربح الإجمالي أو الصافي أما مجموعة القيود الثلاث الأولى فهي تعبر عن العلاقة ما بين الطاقات المستغلة والطاقات المتاحة من مراحل الإنتاج الثلاث . أما عن القيود الثلاث الأخيرة فهي عبارة عن قيود عدم السالبية . هذا بالإضافة إلى أنه إذا كانت مجموعة المنتجات الثلاث بمثابة متغيرات متقطعة أي لا تقبل التقسيم والتجزأة بمعنى أن المتغيرات القرارية تأخذ قيماً صحيحة فقط . في هذه الحالة يضاف قيد على مجموعة القيود الستة السابقة يفيد بأن $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ أعداد صحيحة . وخلاصة ما سبق أننا بصدد نموذج خطي صياغته على النحو التالي :

أوجد قيم $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ التي تجعل الدالة :

$د(س) = ٣ س_{١} + ٢س_{٢} + ٥س_{٣}$ أكبر ما يمكن

بشرط القيود الهيكلية

$س_{١} + ٢ س_{٢} + س_{٣} \geq ٤٣٠$

$٣ س_{١} + ٢س_{٣} \geq ٤٦٠$

$س_{١} + ٤س_{٢} \geq ٤٢٠$

،

$س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ $\leq$ صفر وأعداداً صحيحة .

<u>ملحوظة</u> : لاحظ أن طرفي كل قيد من القيود الثلاثة الأولى له نفس وحدة القياس . بمعنى أن الطاقة المستغلة من المرحلة الإنتاجية الأولى بالدقيقة لا تتجاوز الطاقة المتاحة من تلك المرحلة والتي تعادل ٤٣٠ دقيقة لكل يوم . وهكذا بالنسبة للقيدين الثاني والثالث .

لكن إذا افترضنا أن الاحتياجات الفنية لإنتاج الوحدة المعطاة في الجدول السابق وحدات قياسها بالساعات أو الطاقات المتاحة بالدقائق . في هذه الحالة لابد من توحيد معيار وحدة القياس للطرفين بمعنى يجب أما تحويل الساعات إلى دقائق أو العكس أي من خلال الضرب في ٦٠ دقيقة أو العكس القسمة على ٦٠ دقيقة لتوحيد

وحدة قياس طرفي كل علاقة من علاقات القيود الهيكلية . كما يلاحظ أيضاً أن كافة العلاقات التي تحكم النموذج الخطي عبارة عن علاقات خطية .

مثال (٢) : - (تحديد التوليفة المثلي للغذاء) :

قد يكون مطلوب من الباحث رسم خطة مثلي سواء لإعداد وجبة غذائية لعمال مصنع معين أو للطلبة في مراحل التعليم المختلفة على أن تتكون تلك الوجبة من مكونات الغذاء الكامل من مواد نشوية وبروتينية ومواد سكرية والفيتامينات التي يحتاجها العامل أو الطالب وذلك في ظل أن تكون تكلفة تلك الوجبة أقل ما يمكن . كما قد يكون من المطلوب إعداد أفضل توليفة ممكنة من علف تغذية الدواجن أو الماشية على أن تتكون تلك التوليفة من مواد معينة لنمو الدواجن أو الماشية وبشرط أن يتحقق تكلفة دنيا لتلك التوليفة . أو قد يكون مطلوب من الباحث الفرد الاستشارة في معرفة أفضل وجبة غذائية تكون نظاماً غذائياً معيناً لمجموعة مرضى السكر أو ضغط الدم على أن تتضمن تلك الوجبة عناصر غذائية ضرورية لصحة الإنسان .

هذا وسوف نعرض المثال التالي لتوضيح دور النموذج الخطي في عملية تخطيط مثل هذه الوجبات الغذائية أو تلك الأعلاف .

فإذا فرضنا أن المطلوب هو إعداد وجبة غذائية لتلاميذ المرحلة الابتدائية تتكون تلك الوجبة من بيض ولحم ولبن مع العلم بأن التلميذ الواحد يحتاج على الأقل إلى ٥٠ مليجرام من فيتامين (أ) ، ٦٠ مليجرام من فيتامين (ب) . و أن كل دستة من البيض (أي ١٢ بيضة) تحتوي على ٥ ملجم من فيتامين أ ، ٨ ملجم من فيتامين ب ، وأن الكيلوجرام من اللحم يحتوي على ٦ ملجم من فيتامين أ ، ٧ ملجم من فيتامين ب ، وأن كل كيلوجرام من اللبن يحتوي على ١٠ ملجم من فيتامين أ ، ٨ ملجم من فيتامين ب . كما أن ثمن دستة البيض ١٢ جنيهاً و كيلو اللحم ٢٩ جنيهاً وكيلو اللبن ٤ جنيه . فإذا كان المطلوب هو تحديد كميات البيض واللحم واللبن التي يجب أن

تتضمنها وجبة التلميذ بحيث يحصل منها على القدر اللازم له على الأقل من كل من فيتامين أ ، ب وبشرط أن تكون تكلفة الوجبة أقل ما يمكن .

الحـــــــل:

- **افتراض مجموعة المتغيرات القرارية :**

دعنا نفرض أن الكميات اللازمة لتكوين وجبة التلميذ الغذائية :

من البيض = $س_١$ دستة

ومن اللحم = $س_٢$ كيلوجرام

ومن اللبن = $س_٣$ كيلوجرام

- **تحديد معلمات النموذج** : يمكن تلخيص معلمات النموذج الخطي في الجدول التالي :

النوع / فيتامين	بيض (بالدستة)	لحم (بالكيلو)	لبن (بالكيلو)	الحد الأدنى المطلوب من الفيتامينات (ملجم)
أ	٥	٦	١٠	٥٠
ب	٨	٧	٨	٦٠
ثمن الوحدة من الطعام (جنيه)	١٢	٢٩	٤	تدنية تكلفة الوجبة .

- **صياغة المشكلة :-**

المطلوب إيجاد قيم $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ التي تجعل دالة الهدف :

د (س) $= ١٢ س_١ + ٢٩س_٢ + ٤س_٣$ (أقل ما يمكن)

بشرط القيود الهيلية التالية :

$٥س_١ + ٦س_٢ + ١٠س_٣ \geq ٥٠$

$٨ س_١ + ٧س_٢ + ٨س_٣ \geq ٦٠$

$س_١ \geq$ صفر

$س_٢ \geq$ صفر

$س_٣ \geq$ صفر

أما عن حل النموذج أي تحديد قيم $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ التي تحقق تدنية لدالة الهدف بشرط القيود الموضحة عالية فهو ما سنتناوله فيما بعد ،

مثال (٣) : – (إمتحان دور أكتوبر سنة ١٩٩٠ – تجارة سوهاج) : –

البيانات التالية مشتقاه من ملفات ودفاتر إحدى الشركات :–

١– تقوم الشركة بإنتاج ٣ أصناف من المنتجات أ ، ب ، ج .

٢– تحتاج الوحدة المنتجة من (أ) إلى ٥ كجم من المادة الخام (ل) ، ٤ كجم من المادة الخام (ن) وتحتاج إلى ٣ ساعات عمل في مركز التشغيل (م) ، كما تحتاج الوحدة المنتجة من (ب) إلى ٣ كجم من المادة الخام (ل) ، ٢ كجم من المادة الخام (ن) وساعتين في مركز التشغيل (م) ، بينما تحتاج الوحدة المنتجة من (ج) إلى ٧ كجم من المادة (ل) ، ٥ كجم من المادة (ن) ، أربعة ساعات عمل في مركز التشغيل (م) .

٣– تبلغ الكميات المتاحة من المادة الخام (ل) ٢١٠٠ كجم ومن المادة الخام (ن) ١٦٠٠ كجم كما أن عدد الساعات المتاحة بالمركز(م)هي ١٧٠٠ ساعة عمل .

٤– تبلغ تكلفة الكيلوجرام من المادة (ل) ٤جنيه ومن المادة الخام (ن) = ٣ جنيه بينما يبلغ معدل أجر ساعة العمل في مركز التشغيل م جنيهاً واحداً في حين تبلغ التكاليف المتغيرة الأخرى للوحدة من (أ) خمسة جنيهات وللوحدة من (ب) ستة جنيهات ومن (ج) ثلاثة جنيهات . كما تبلغ التكاليف الثابتة للشركة ٢٥٠٠ جنيه .

٥– حددت الشركة أسعار بيع الوحدة من المنتجات الثلاث أ ، ب ، ج بمبلغ ٥١ ، ٣٢ ، ٥٢ جنيهاً على الترتيب .

والمطلوب تحديد برنامج الإنتاج الأمثل .

الحـــــــل :

افتراض مجموعة المتغيرات القرارية وهي مساوية لعدد المنتجات . لذا نفرض أن : –

عدد الوحدات الواجب إنتاجها من النوع (أ) = $س_١$ وحدة

، عدد الوحدات الواجب إنتاجها من النوع (ب) = $س_٢$ وحدة

، عدد الوحدات الواجب إنتاجها من النوع (جـ) = $س_٣$ وحدة

- أما عن معلمات النموذج : – فيمكن استخلاصها من المشكلة موضع الدراسة والتي يوضحا الجدول التالي : –

المنتج / بيان	أ	ب	ج	تكلفة الوحدة من المادة الخام	الطاقة المتاحة
ل ن م	٥ ٤ ٣	٣ ٢ ٢	٧ ٥ ٤	٤ ج ٣ ج ١ ج	٢١٠٠ ١٦٠٠ ١٧٠٠
سعر البيع للوحدة المنتجة	٥١ ج	٣٢ ج	٥٢ ج		
تكاليف لإنتاج الوحدة	٥×٤ +٤×٣+٣×١ =٣٥	٣×٤ +٢×٣+٢×١ = ٢٠	٧×٤ +٥×٣+٤×١ = ٤٧		
تكاليف متغيرة أخرى	٥	٦	٣		
جملة التكاليف المتغيرة	٤٠	٢٦	٥٠		
ربح (أو خسارة) الوحدة	٥١–٤٠= ١١	٣٢ – ٢٦=٦	٥٢–٥٠=٢	(تعظيم)	

- **<u>صياغة المشكلة في صورة نموذج خطي :</u>**

المطلوب إيجاد قيم س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ التي تجعل : –

د (س) = ١١ س$_{١}$ + ٦س$_{٢}$ + ٢س$_{٣}$ – ٢٥٠٠ (أقل ما يمكن)

بشرط القيود الهيكلية :

٥س$_{١}$ + ٣س$_{٢}$ + ٧س$_{٣}$ ≥ ٢١٠٠

٤ س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ + ٥س$_{٣}$ ≥ ١٦٠٠

٣س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ + ٤س$_{٣}$ ≥ ١٧٠٠

،

س$_{١}$ ≤ صفر

س$_{٢}$ ≤ صفر

س$_{٣}$ ≤ صفر

أما عن حل النموذج الخطي لتحديد القيم المثلى للمتغيرات القرارية التي تجعل دالة الهدف د(س) اكبر ما يمكن (نهاية عظمى) فهو ما سيرد فيما بعد عند تناولنا لحل النماذج الخطية جدوليًا بطريقة السمبلكس .

<u>ملحوظة</u> :

(١) في المثال السابق لاحظ أن دالة الهدف د(س) تعبر عن دالة الربح الصافي طالما طرحنا التكلفة الثابتة من دالة الربح الإجمالي . هذا ويمكننا إغفال التكلفة الثابتة وحل المشكلة باعتبار أن الربح الذي ينتج عن دالة الهدف يعبر عن ربحًا إجماليًا ويتم طرح منه التكلفة الثابتة ليعبر عن دالة الربح الصافي .

أي أنه يمكنك التعبير عن دالة الهدف سواء كدالة ربح إجمالي أو دالة ربح صافي .

(٢) يراعى فهم العبارات التي يتم ذكرها في المشكلة موضع الصياغة فمثلاً راعى أن هناك مجموعة من المرادفات المتكافئة في المعنى وعلى سبيل المثال :

- **الطاقة المتاحة ≡ لا يزيد عن ≡ على الأكثر ≡ الحد الأقصى .**

فكل هذه المرادفات تفيد أن القيد في صورة متباينة (≥)

- لا تقل عن ≡ على الأقل ≡ فأكثر ≡ الحد الأدنى . كل هذه المرادفات تفيد أن صورة القيد على شكل متباينة في صورة (≤) .
- أما التأكيد في اللفظ فيفيد تحقق علاقة التساوي(=) . فمثلاً إذا ذكرنا في مشكلة ما ولتكن مشكلة الوجبات الغذائية أنه يجب أن تحتوي الوجبة على كم معين من الفيتامينات أو البروتينات فإن القيود هنا يجب أن تكون على صورة معادلة (=) .

كذلك على سبيل المثال إذا أعطيت في الإطار النظري للمشكلة الواردة في المثال رقم (٣) بأن هناك ما يفيد في تلك المشكلة بأن هناك قيد تسويق على منتجات الشركة يفيد هذا القيد بأن عدد الوحدات المنتجة من النوع (أ) يجب أن يكون ضعف عدد الوحدات المنتجة من النوع (ب) فيظهر هذا الشرط الخاص بعملية التلازم الفني للمنتجات ضمن قيود النموذج على الصورة التالية :

$س_١ = ٢س_٢$ أي أن :

$س_١ - ٢س_٢ =$ صفر (قيد التسويق)

<u>مثال (٤) : -</u>

تقوم إحدى الشركات بإنتاج أربعة أنواع من المنتجات هي أ ، ب ، ج ، د . ولقد بينت الدراسات التسويقية للشركة أن أقصى ما يمكن تسويقه من المنتجات الأربعة هي ٥٠٠٠٠ ، ٣٠٠٠٠ ، ٢٥٠٠٠ ، ٢٥٠٠٠ على الترتيب . كما بينت الدراسات الفنية والتجارية أن تسويق المنتجين أ ، جـ مرتبطين معاً بحيث أن من يقوم بشراء المنتج(أ) يقوم أيضًا بشراء المنتج (ج) بنسبة وحدتين من (ج) مقابل وحدة واحدة من المنتج(أ) . والجدول التالي يبين نتائج الدراسات الفنية والتجارية بتلك الشركة :

بيان / المنتج	وزن الوحدة (كجم)	النسبة المئوية للفاقد أثناء التشغيل من وزن الوحدة	سعر بيع الوحدة (بالجنيه)	تكلفة إنتاج الوحدة (بالجنيه)	الوقت المستغرق لإنتاج الوحدة على خطوط الإنتاج (دقيقة)
أ	١٥٠	١٠ %	٦	٢،٥	١٥
ب	٢٠٠	٥ %	٤	١،٥	٦
ج	٢٥٠	٥ %	٥	١	٥
د	٣٥٠	٣ %	٥	١،٤	٥

هذا ولقد بينت دراسات عملية الإنتاج أن الآلات عندما تنتج وحدة من المنتج (جـ) فلابد من أن يتم إنتاج وحدة من المنتج (د) . ولقد كان حجم الطاقة الإنتاجية المتاحة للآلات ١٥٠٠٠ ساعة سنوياً كما كانت كمية المواد الخام المتاحة والمستخدمة في إنتاج (أ) هي ٣٠٠٠ طن وكذلك ٨٠٠٠ طن للمنتجات ب ، ج ، د معاً . فإذا رغبت الشركة في تخطيط عملية الإنتاج بحيث تحصل على أكبر عائد ممكن . فكيف يمكنك صياغة تلك المشكلة خطياً؟

الحـــــل :

- **افتراض المتغيرات القرارية :**

نفرض أن عدد الوحدات الواجب إنتاجها من المنتج أ = س١ وحدة

، نفرض أن عدد الوحدات الواجب إنتاجها من المنتج ب = س٢ وحدة

، نفرض أن عدد الوحدات الواجب إنتاجها من المنتج ج = س٣ وحدة

، نفرض أن عدد الوحدات الواجب إنتاجها من المنتج د = س٤ وحدة

- **ولتحديد معلمات النموذج فيبينها الجدول التالي :**

بيان / المنتج	وزن الوحدة (كجم)	الفاقد أثناء التشغيل (كجم)	الكمية الفعلية للمواد المستخدمة قبل الفقد	الوقت المستغرق للإنتاج (دقيقة)	هامش ربح الوحدة (جنيه)
أ	١٥٠	١٥٠× ١٠/١٠٠ =١٥	١٥٠+١٥=١٦٥	١٥	٣،٥ (ج)
ب	٢٠٠	٢٠٠× ٥/١٠٠ =١٠	٢١٠	٦	٢،٥ (ج)
ج	٢٥٠	١٢،٥	٢٦٢،٥	٥	٤ (ج)
د	٣٥٠	١٠،٥	٣٦٠،٥	٥	٣،٦ (ج)

- **صياغة المشكلة في صورة نموذج خطي :**

المطلوب إيجاد قيم س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ ، س$_{٤}$ التي تجعل الدالة : –

د (س) =٣،٥ س$_{١}$ + ٢،٥س$_{٢}$ + ٤س$_{٣}$ + ٣،٦ س$_{٤}$ (تعظيم)

بشرط القيود الهيكلية التالية : –

١– قيود المواد الخام اللازمة والمتاحة للإنتاج :

١٦٥ س$_{١}$ ≤ ٣٠٠٠٠٠٠

٢١٠ س$_{٢}$ + ٢٦٢،٥ س$_{٣}$ + ٣٦٠،٥ س$_{٤}$ ≤ ٨٠٠٠٠٠٠

٢– قيد ساعات العمل المستغلة والمتاحة :

١٥/٦٠ س$_{١}$ + ٦/٦٠س$_{٢}$ + ٥/٦٠س$_{٣}$ + ٥/٦٠س$_{٤}$ ≤ ١٥٠٠٠

٣– قيود التلازم الفني للإنتاج : –

س$_{١}$ = ٢س$_{٣}$ أي أن س$_{١}$ – ٢ س$_{٣}$ = صفر

س$_{٣}$ = س$_{٤}$ أي أن س$_{٣}$ – س$_{٤}$ = صفر

٤– قيود التسويق :

س$_{١}$ ≤ ٥٠٠٠٠

س$_{٢}$ ≤ ٣٠٠٠٠

$س_٣$ ≥ ٢٥٠٠٠

$س_٤$ ≥ ٢٥٠٠٠

٥- بالإضافة لقيود عدم السالبية أي أن :

$س_ر$ ≤ صفر حيث ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ .

وخلاصة ما سبق من أمثلة توضيحية أنه إذا كنا بصدد عملية صياغة نموذج خطي لأي مشكلة موضع دراسة فإنه بداية يتم افتراض مجموعة من المتغيرات القرارية تعكس ما هو مطلوب تحديد قيمه المثلى في المشكلة موضع الدراسة . ثم تحديد معلمات النموذج والتي تعتبر بمثابة معاملات للمتغيرات القرارية سواء في دالة الهدف أو القيود هذا بالإضافة لثوابت القيود كأحد تلك المعالم . و أخيراً مجموعة قيود عدم السالبية والتي تعد أساس في كل النماذج الخطية و أحد المسلمات في تلك النماذج والتي سيكون لها دوراً في حل النموذج االخطي وهو ما سيرد فيما بعد .

ثانياً : أشكال النموذج الخطي : -

من خلال دراستنا لعملية صياغة النماذج الخطية يتضح لنا أن نماذج البرمجة الخطية تتناول أما تعظيم أو تقليل قيمة دالة الهدف في ظل مجموعة من الشروط تسمى بالقيود الهيكلية للنموذج الخطي . كما أن القيود الواردة في نماذج البرمجة الخطية عبارة عن مجموعة من العلاقات الخطية قد تكون إما في صورة متباينات على شكل أقل من أو تساوي (≥) أو في صورة أكبر من أو تساوي (≤) أو في شكل معادلات رياضية (=) أو قد تكون هذه القيود عبارة عن توليفة مختلفة من تلك العلاقات الرياضية الثلاثة .

هذا بالإضافة إلى أن مجموعة المتغيرات القرارية المتضمنة في نموذج البرمجة الخطية أما أن تكون متغيرات لا سالبية أي أكبر من أو تساوي الصفر ($س_و$ ≤ صفر) أو قد تكون متغيرات غير مقيدة أو غير محددة الإشارة أي يمكن أن تأخذ قيماً موجبة أو

صفرية أو سالبة في بعض النماذج الخطية . إلا أنه في حالة وجود هذه الصفة في بعض المتغيرات (غير محددة الإشارة) فإنه يمكن تحويلها إلى صورة الفرق بين متغيرين لا سالبين كما سيرد فيما بعد .

ومن ثم فالتعريف العام لنموذج البرمجة الخطية يأخذ الصورة التالية :

أوجد قيم س_1 ، س_2 ، س_3 ، ، ......، $\text{س}_{\text{ن}}$ التي تجعل الدالة :

$$\text{د}(\text{س}) = \pm \text{جـ}_1 \text{س}_1 \pm \text{جـ}_2 \text{س}_2 \pm \ldots \pm \text{جـ}_{\text{ن}} \text{س}_{\text{ن}} \quad \text{تعظيم (تقليل)}$$

$$= \pm \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{جـ}_{\text{ر}} \text{س}_{\text{ر}} \quad \text{تعظيم (تقليل)}$$

بشرط القيود الهيكلية التالية :

$$\pm \text{أ}_{11} \text{س}_1 \pm \text{أ}_{21} \text{س}_2 \pm \ldots \pm \text{أ}_{\text{ن}1} \text{س}_{\text{ن}} \; (\geq \text{ أو } = \text{ أو } \leq) \pm \text{ب}_1$$

$$\pm \text{أ}_{12} \text{س}_1 \pm \text{أ}_{22} \text{س}_2 \pm \ldots \pm \text{أ}_{\text{ن}2} \text{س}_{\text{ن}} \; (\geq \text{ أو } = \text{ أو } \leq) \pm \text{ب}_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\pm \text{أ}_{\text{م}1} \text{س}_1 \pm \text{أ}_{\text{م}2} \text{س}_2 \pm \ldots \pm \text{أ}_{\text{م ن}} \text{س}_{\text{ن}} \; (< \text{ أو } = \text{ أو } >) \pm \text{ب}_{\text{م}}$$

، س_1 ، س_2 ، ٠٠٠٠ ، $\text{س}_{\text{ن}} \leq$ صفر . أو غير محددة الإشارة .

وغالباً فإن نماذج البرمجة الخطية تتناول مشكلات تخصيص مجموعة من الموارد المحدودة لمجموعة من الأنشطة المحددة . ومن ثم فإن مجموعة المعاملات $\text{ج}_{\text{ر}}$ ، $\text{أ}_{\text{ور}}$ ، $\text{ب}_{\text{و}}$ يمكن تفسيرها على النحو التالي : فإذا كانت $\text{ب}_{\text{و}}$ تعبر عن الكمية المتاحة من المورد (و) فإن $\text{أ}_{\text{ور}}$ تعبر عن الكمية اللازمة من المورد رقم (و) والتي يجب تخصيصها لكل وحدة من وحدات النشاط أو المنتج (ر) أما ($\text{جـ}_{\text{ر}}$) فهي تمثل عائد مساهمة (ربح أو تكلفة أو خسارة) الوحدة الواحدة من النشاط أو المنتج (ر)

هذا وبعد صياغة المشكلة في شكل نموذج برمجة خطية تأتي مرحلة حل النموذج للحصول على القيم المثلى للمجاهيل أو المتغيرات القرارية وبذلك تتمكن الإدارة من اتخاذ القرار الملائم في مواجهة حل مشكلة معينة موضع دراسة .

وحيث أن أشكال نماذج البرمجة الخطية تختلف من مشكلة لأخرى فهناك ما يهتم بمشكلة تعظيم لدالة الهدف كما أن هناك ما يهدف إلى مشكلة التدنية أو التقليل .

وكـذلك هنـاك بعـض القيـود قـد تتواجـد فـي صـورة (≥) أو (=) أو (≤) كمـا أن المتغيرات القرارية قد تكون لا سالبة في بعض الأحيان كما قد تكون غير محددة الإشـارة فـى أحيـان أخـرى . ومـا دامـت هنـاك أشـكال للنمـاذج الخطيـة تختلـف مـن مشـكلة لأخـرى بسبب ما تم ذكره سابقاً فإنـه يجب على الباحث أن يقوم بتعديل شـكل نمـوذج البرمجـة الخطية حتى يتناسب مع طريقة الحل التي سيقوم بإتباعها في حل النموذج .

وبصفة عامة فإنـه يوجد شكلين أساسين لنماذج البرمجة الخطية يمكن للباحث أن يقوم بتحويل شكل النموذج الخطي محل الدراسة إليهما وذلك لكـي يسـهل معـه عمليـة حل النموذج وتحديد قيم متغيراته القرارية المثلـى ومـن ثـم القيمـة المثلـى لدالـة الهـدف . وهذين الشكلين هما :

أ – الشكل القانونـي **Canonical From**

ب – الشكل المعياري أو النمطي (أو القياسي) **Standard From**

حيـث يسـتخدم الشـكل المعيـاري مباشـرة لحـل النمـوذج الخطـي بينمـا الشـكل القانوني يستخدم بوجه خاص في حالة معالجة حل المشاكل البديلة والتي سترد فيما بعد في هذا النطاق .

<u>أولاً : الشكل القانونـى لنموذج البرمجة الخطية</u> :

يمكـن لنمـوذج البرمجـة الخطـي الـذي تـم تعريفـه فـي صـورته العامـه سـابقاً أن يوضع على الصورة التالية والتي يطلق عليها الشكل أو الصورة القانونية التالية : –

أوجد قيم $س_ر$ حيث ر = ١ ، ٢ ، ..... ، ن التي تجعل قيمة الدالة:

د (س) = مجـــــ جـ $_ر$ س $_ر$ (تعظيم)

بشرط القيود الهيكلية التالية :

مجـ $أ_{ور}$ $س_ر$ ≥ $ب_و$ حيث ر = ١ ، ٢ ، ...... ، ن

، $س_ر$ ≤ صفر ، و = ١ ، ٢ ، ..... ، م

أو بصورة رياضيـة أكثر تفصيلاً : المطلوب إيجـاد قيـم $س_ر$ حيث ر = ١ ،٢ ، .... ، ن التي تجعل دالة الهدف :

د (س) = $جـ_١$ $س_١$ + $جـ_٢$ $س_٢$ + ... + $جـ_ن$ $س_ن$ (تعظيم)

بشرط القيود :

$أ_{١١}$ $س_١$ + $أ_{٢١}$ $س_٢$ + ...+ $أ_{١ن}$ $س_ن$ ≥ ± $ب_١$

$أ_{١٢}$ $س_١$ + $أ_{٢٢}$ $س_٢$ + ...+ $أ_{٢ن}$ $س_ن$ ≥ ± $ب_٢$

$أ_{م١}$ $س_١$ + $أ_{م٢}$ $س_٢$ + ... +$أ_{م ن}$ $س_ن$ ≥ ± $ب_م$

، قيم $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ، ......، $س_ن$ ≤ صفر

من الشكل السابق يتضح لنا أن الشكل القانوني يتميز بمجموعة من الخصائص وهي :

١- دالة الهدف دائماً أبدا في صورة تعظيم .

٢- جميـع القيـود فـي صـورة علاقـة تبـاين علـى شكل أقل مـن أو يسـاوي أي علـى الصورة (≥) .

٣- جميع المتغيرات القرارية لا سالبة .

والسؤال المطروح الآن إذا كـان لـدينا نمـوذج خطـي فـي أي صـورة مغايرة لمـا سـبق هل يمكن وضعه في الصورة أو الشكل القانوني ؟

والإجابـة بالإثبـات نعم يمكـن وضـع أي نمـوذج خطـي علـى الصـورة القانونيـة حتـى لـو اختلـف عن هذا الشكل فـي أحد خصائصـه وذلـك من خـلال إجـراء التحـويلات الرياضية اللازمة على النحو التالي : -

- إذا كان لديك دالـة هدف د (س) في صورة تدنيـة فإن الشكل الرياضـي المكـافئ لهـا هو أنـه إذا تـم ضرب تلـك الدالـة في (-١) تصبح الدالـة فـي الصورة العكسية أي تعظيم : أي أن تقليل دالة هدف تكافئ رياضياً تعظيم القيمـة السـالبة لنفس الدالـة أي أن :

د (س) = $أ_١$ $س_١$ + $أ_٢$ $س_٢$ + ...+ $أ_ن$ $س_ن$ (تدنية)

تكافئ رياضياً :

د (ع) = – د(س) = –$أ_١$ $س_١$ – $أ_٢$ $س_٢$ – ..... – $أ_ن$ $س_ن$ (تعظيم)

أي أن :

د (ع) = – د (س) (تعظيم)

- **بالنسبة للقيود التي على صورة علاقة تباين في شكل (≥) فهي في الصورة القانونية وخلاف ذلك يمكن تحويلها للصورة القانونية وذلك على النحو المبين التالي :**

١– علامة التباين التي على صورة أكبر من أو تساوي (≤) يتم ضربهما في (–١) فتنعكس علاقة التباين لتصبح (≥) فمثلاً إذا كان لديك القيد :

$أ_{١١}$ $س_١$ + $أ_{٢١}$ $س_٢$ + ...+ $أ_{ن١}$ $س_ن$ ≤ $ب_١$ **يمكن وضعه في الصورة القانونية من خلال الضرب × (–١) فيصبح على الصورة:**

–$أ_{١١}$ $س_١$ – $أ_{٢١}$ $س_٢$ – ......– $أ_{ن١}$ $س_ن$ ≥ – $ب_١$

ومن ثم أصبح القيد في الصورة القانونية .

٢–إذا كان القيد الهيكلي في صورة معادلة (=) . فمعروف رياضياً أن المعادلة ما هي إلا نتيجة متباينتين متضادتين الاتجاه إحداهما في صورة (≥) وهي في الصورة القانونية والأخرى في صورة عكسية على شكل(≤) فيتم ضرب هذه الصورة × (–١) فيصبح الناتج صورة قانونية .

<u>مثال</u> : القيد $أ_{١٣}$ $س_١$ + $أ_{٢٣}$ $س_٢$ + ... + $أ_{٣ن}$ $س_ن$ = $ب_٣$

يفك لقيدين وهما :

$أ_{١٣}$ $س_١$ + $أ_{٢٣}$ $س_٢$ + ... + $أ_{٣ن}$ $س_ن$ ≥ $ب_٣$

، $أ_{١٣}$ $س_١$ + $أ_{٢٣}$ $س_٢$ + ... + $أ_{٣ن}$ $س_ن$ ≤ $ب_٣$

فالعلاقة الأولى في الصورة (≥) فهي قانونية أما العلاقة الثانية فيتم ضربهما في

(−١) لتصبح في الصورة القانونية فتصبح على الشكل :

$-أ_{١٣}\ س_{١} - أ_{٢٣}\ س_{٢} - \ldots\ldots - أ_{٣ن}\ س_{ن} \geq - ب_{٣}$

أي أن القيد الذي يوجد في النموذج الخطي في صورة معادلة يفك إلى قيدين والقيدين معاً يتم اعتبارهم في حل النموذج الخطي .

٣− إذا وجد قيد من قيود النموذج الخطي في صورة حدود مطلقة أي بغض النظر عن الإشارة (|| ||) فإنه يفك إلى قيدين في حالة ما إذا توافرت علاقة تباين (≥ أو ≤) ويفك إلى أربعة قيود في حالة ما إذا توافرت علاقة تساوي (=) في القيد الهيكلي . وهنا يراعى الآتي : −

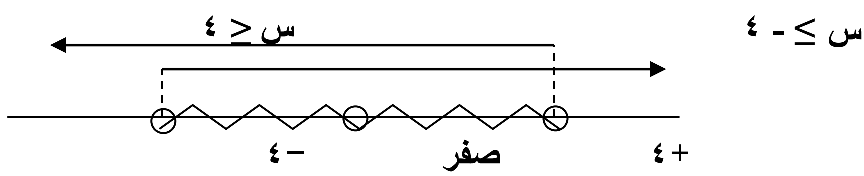
أ – قيد هيكلي في صورة حدود مطلقة وعلاقة تباين في صورة (≥) فلتوضيح الصورة القانونية في تلك الحالة دعنا نفرض المثال التالي : −

$| ٢س_{١} | \geq ٨$

هذا القيد يكتب رياضياً على الصورة −٨ ≥ ٢س ≥ ٨

أي أن : −٤ ≥س ≥ ٤

والآن دعنا نقوم بتحديد الجزء من خط المحور السيني الذي يحقق المتباينتين س ≥ ٤، س ≤ −٤ والذي يتم ضرب × −١ لكي يصبح في الصورة القانونية والذي يوضحه الشكل التالي :



لاحظ من خلال الشكل البياني الموضح أن هناك مسافة يشترك فيها القيدين معاً في الحل . لذلك فإنه إذا وجد لديك قيد حد مطلق ومعه علاقة تباين في صورة (≥) وثابت القيد موجباً فيؤخذ قيدي الحد المطلق في تلك الحالة معاً في الحل مع باقي القيود . لكن إذا كان ثابت القيد سالباً جدلا فدعنا نرى المثال التالي :

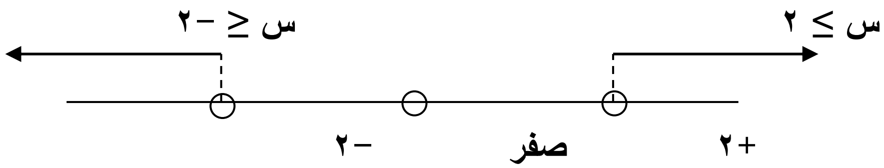
$| س | \geq -٢$

يفك هذا القيد إلى قيدين وهما ٢ ≥ س ≥ -٢

أي أن المتباينتين الناتجتين من فك قيد الحد المطلق هي :

س ≥ -٢ ، س ≤ ٢

و الآن دعنا نقوم بتحديد الجزء من المحور السيني الذي يحقق هاتين المتباينتين من خلال الشكل التالي :



ومن خلال هذا الشكل يتضح لنا أن فرعي قيد الحد المطلق لا تجمعهم على الأقل نقطة تحققهم معاً . لذلك نتوقع أنه إذا تم أخذ القيدين في الحل مع باقي القيود فلن توجد مساحة مشتركة تحقق كافة القيود وعدم وجود مساحة مشتركة يفيد عدم وجود حل للنموذج الخطي لذلك يتم أخذ أحد القيدين فقط في الحل وهما :

إما س ≥ -٢ وهو قانوني الشكل أو س ≤ ٢ ويتم ضرب × (-١) ليصبح في الصورة القانونية .

وخلاصة ذلك أن :

- **قيد الحد المطلق ومعه علاقة التباين (≥) وثابت القيد موجب يؤخذ القيدين معاً في الحل مع باقي القيود (الفرع الأول والفرع الثاني .**
- **قيد الحد المطلق ومعه علاقة التباين (≥) وثابت القيد سالب جدلا يؤخذ أحد القيدين فقط في الحل مع باقي القيود (أما الفرع الأول أو الفرع الثاني من فرعى قيد الحد المطلق) .**

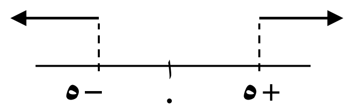
ب - إذا كان هناك قيد هيكلي في صورة حدود مطلقة وعلاقة تباين في صورة (≤) فيحدث العكس تماماً من الحالة السابقة التي قمنا بدراستها حالاً . حيث يؤخذ أحد القيدين فقط وذلك إذا كان ثابت القيد موجباً . أما إذا كان ثابت القيد سالباً جدلا فيؤخذ القيدين معاً في الحل مع باقي القيود وهو ما سنوضحه في المثال والشكل التالي :

* |ص| ≤ ٥

أي أن :

-٥ ≤ ص ≤ ٥

وبيانيًا فإن :



ومن الرسم يتضح لنا أنه كون أن ليس هناك مساحة مشتركة ما بين فرعي قيد الحد المطلق يفيد أنه يجب أن يؤخذ أحد القيدين فقط : إما ص ≥ -٥ وهو صورة قانونية . أو ص ≤ ٥ ويتم ضرب هذا القيد × (-١) لتحويله للصورة القانونية فيصبح علي الصورة:

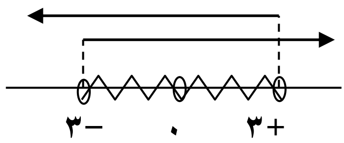
- ص ≥ -٥

* كذلك فإنه إذا كان:

|ص| ≤ -٣ جدلا .

أي أن : ٣ ≤ ص ≤ -٣

وبيانيًا فإن :



ووجود مساحة مشتركة فيما بين فرعي قيد الحد المطلق تفيد أنه يتم اعتبار الفرعين معًا في الحل مع باقي القيود وهما ص ≥ ٣ وهو صورة قانونية ، ص ≤ -٣ ويتم الضرب × (-١) لتحويل هذا الفرع للصورة القانونية أي أن :

- ص ≥ ٣

(جـ) إذا وجد قيد من قيود النموذج الخطي في صورة حدود مطلقة وعلاقة ما بين طرفي القيد في صورة معادلة (=) فإن الصورة القانونية تحكم بتحويل المعادلة إلى متباينتين أولاً قبل التخلص من علامة الحدود المطلقة . حيث

يكون أحد المتباينتين في صورة (≥) والأخرى في صورة (≤) . وبدوره كل من القيدين يحتوي على صورة الحدود المطلقة وعلاقة تباين إما في صورة (≥) أو في صورة (≤) . وهنا يتم اعتبار التحويلات الواردة في البندين أ ، ب لوضع النموذج في الصورة القانونية .

٤- إذا وجد ضمن المتغيرات القرارية ($س_ر$) متغيرًا غير محدد الإشارة بمعنى أنه إما أن يكون موجبًا أو صفرًا أو سالبًا فإنه يمكن التعبير عن هذا المتغير بصورة الفرق بين متغيرين لا سالبين . فمثلاً إذا كان المتغير القراري $س_٢$ غير محدد الإشارة فإن يمكن استبداله في كل من دالة الهدف وكافة القيود بالفرق ما بين المتغيرين $س_٢^{/}$ ، $س_٢^{//}$ أي يتم التعويض الآتي في النموذج الخطي :

$$س_٢ = س_٢^{/} - س_٢^{//}$$

حيث إن كل من $س_٢^{/}$ ، $س_٢^{//}$ متغيرًا لا سالبًا أي أن :

$$س_٢^{/} \le صفر \quad ، \quad س_٢^{//} \le صفر$$

والمثال التالي يوضح استخدام تلك التحويلات في وضع أي نموذج برمجه خطية في صورته أو شكله القانوني لهذا النموذج .

<u>مثال (١)</u> : إذا كان لديك النموذج الخطي التالي :

$د(س) = ٢س_١ - ٣س_٢ + ٥س_٣$ (تدنيه)

بشرط القيود

١) $س_١ + ٢س_٢ + س_٣ \ge ٣٥$

٢) $٢س_١ + ٧س_٢ - ٥س_٣ \le ٧٠$

٣) $٣س_١ - ٢س_٢ = ٥$

٤) | ٥$س_١$ + ١٢$س_٢$ − ٧$س_٣$ | ≤ ٩٠

٥) | ٧$س_١$ − ٨$س_٢$ − $س_٣$ | ≥ ١٢

$س_١$ ، $س_٣$ ≥ صفر

$س_٢$ متغير غير محدد(مقيد) الإشارة .

والمطلوب وضع النموذج الخطي السابق في الصورة القانونية لنماذج البرمجة الخطية .

<u>الحـــــــل</u> :

تتلخص الخصائص القانونية للنموذج الخطي في : دالة الهدف في صورة تعظيم وكافة القيود في صورة (≤) وكافة المتغيرات القرارية لا سالبة :.

لذا فنحن بصدد التحويلات التالية على النموذج الخطي المعطى .

<u>أولاً</u> : <u>بالنسبة لدالة الهدف</u> المعطاة يتم ضربها في (−١) فتصبح على الصورة:

ع = − د (س) = −٢$س_١$ + ٣$س_٢$ − ٥$س_٣$ (تعظيم)

<u>ثانيًا</u> : <u>بالنسبة للقيود الهيكلية</u> :

١) <u>القيد الأول :</u>

$س_١$ + ٢$س_٢$ + $س_٣$ ≤ ٣٥ (صورة قانونية للقيد)

٢) <u>القيد الثاني :</u>

٢$س_١$ + ٧$س_٢$ − ٥$س_٣$ ≥ ٧٠

يتم ضرب القيد الثاني في (−١) لتحويله للصورة القانونية فيصبح القيد الثاني على الصورة التالية :

−٢$س_١$ − ٧$س_٢$ + ٥$س_٣$ ≤ −٧٠ (صورة قانونية للقيد)

٣) <u>القيد الثالث :</u>

٣$س_١$ − ٢$س_٢$ = ٥

يفك لقيدين ويتم اعتبار القيدين معًا في حل النموذج . هذين القيدين على الصورة :

$٣س_١ - ٢س_٢ \geq ٥$ (صورة قانونية)

$٣س_١ - ٢س_٢ \leq ٥$ فيتم الضرب × (−١) ليصبح على الصورة

$- ٣س_١ + ٢س_٢ \geq -٥$ (صورة قانونية)

٤) <u>القيد الرابع :</u>

$| ٥س_١ + ١٢س_٢ - ٧س_٣ | \geq ٩٠$

قيد الحد المطلق وفي ظل علاقة تباين (≥) وثابت القيد موجب يفك لقيدين ويتم اعتبارًا القيدين معًا في الحل . وهذين القيدين هما :

$- ٩٠ \geq ٥س_١ + ١٢س_٢ - ٧س_٣ \geq ٩٠$

أي أن :

$٥س_١ + ١٢س_٢ - ٧س_٣ \geq ٩٠$ (صورة قانونية)

، $٥س_١ + ١٢س_٢ - ٧س_٣ \leq -٩٠$ يتم الضرب × (−١) فيصبح

$- ٥س_١ - ١٢س_٢ + ٧س_٣ \geq ٩٠$ (صورة قانونية)

٥) <u>القيد الخامس :</u>

$| ٧س_١ - ٨س_٢ + س_٣ | \leq ١٢$

قيد الحد المطلق وفي ظل علاقة تباين (≤) وثابت القيد موجب يفك لقيدين ويتم اعتبار أحد القيدين فقط في الحل مع باقى القيود. لذا فإن :

$-١٢ \leq ٧س_١ - ٨س_٢ + س_٣ \leq ١٢$

لذا يتم اعتبار أحد القيدين فقط :

أما :

$٧س_١ - ٨س_٢ + س_٣ \leq ١٢$

ويتم الضرب × (−١) ليصبح على الصورة :

−٧ $س_{١}$ + ٨$س_{٢}$ − $س_{٣}$ ≥ −١٢ (صورة قانونية)

أو

٧$س_{١}$ − ٨$س_{٢}$ + $س_{٣}$ ≥ −١٢ (صورة قانونية)

وفي النهاية يبقى معالجة المتغير $س_{٢}$ الغير محدد الإشارة في النموذج الخطي وذلك من خلال التعويض عنه بالفرق بين متغيرين لا سالبيين $س_{١}^{/}$ ، $س_{٢}^{//}$ أي أن : $س_{٢}$ = $س_{٢}^{/}$ − $س_{٢}^{//}$

وبذلك يصبح الشكل القانوني للنموذج الخطي السابق على الصورة التالية :

ع = − د (س) = −٢ $س_{١}$ + ٣$س_{٢}^{/}$ −٣$س_{٢}^{//}$ − ٥$س_{٣}$ (تعظيم)

بشرط القيود الهيكلية التالية :

$س_{٢}$ + ٢ $س_{٢}^{/}$ − ٢$س_{٢}^{//}$ + $س_{٣}$ ≥ ٣٥

−٢$س_{١}$ − ٧$س_{٢}^{/}$ + ٧$س_{٢}^{//}$ + ٥$س_{٣}$ ≥ −٧٠

٣ $س_{١}$ − ٢ $س_{٢}^{/}$ + ٢$س_{٢}^{//}$ ≥ ٥

− ٣$س_{١}$ + ٢$س_{٢}^{/}$ − ٢$س_{٢}^{//}$ ≥ − ٥

٥$س_{١}$ + ١٢$س_{٢}^{/}$ − ١٢$س_{٢}^{//}$ − ٧$س_{٣}$ ≥ ٩٠

، − ٥$س_{١}$ − ١٢$س_{٢}^{/}$ + ١٢$س_{٢}^{//}$ + ٧$س_{٣}$ ≥ ٩٠

بالإضافة لأحد القيدين التاليين فقط :

أما −٧$س_{١}$ + ٨ $س_{٢}^{/}$ −٨ $س_{٢}^{//}$ − $س_{٣}$ ≥ −١٢

أو ٧$س_{١}$ − ٨ $س_{٢}^{/}$ + ٨ $س_{٢}^{//}$ + $س_{٣}$ ≥ ١٢

هذا بالإضافة لقيود عدم السالبية وهي :

$س_{١}$ ، $س_{٢}^{/}$ ، $س_{٢}^{//}$ ، $س_{٣}$ ≤ صفر

هذا ويلاحظ أن الفرق الوحيد فيما بين النموذج الأصلي والنموذج في الشكل القانوني كما يتضح في المثال السابق هو دالة الهدف فقط حيث نجد أن دالة الهدف في النموذج الأصلي هي د (س) وأصبحت في الشكل القانوني

ع = – د(س). أما قيم المتغيرات القرارية فأنها لم تتغير في الحالتين فهي متغيرات لا سالبه أما متباينات النموذج الأصلي فقد تم استبدالها بمتباينات أو علاقات رياضيه مكافئه لها في الشكل القانوني .

ثانيا : الشكل المعياري (القياسي) أو النمطي لنموذج البرمجة الخطية :

وتتلخص خصائص الشكل المعياري أو القياسي للنموذج الخطي في مجموعة الخصائص التالية:

١– داله الهدف في صورة تعظيم أو تدنيه.

٢– ثوابت القيود(الطرف الأيسر للقيود) دائما "أبدا" لا سالبه أي يمكنها أن تكون صفريه أو موجبه (أي ≤ صفر).

٣– جميع القيود تكون علي شكل معادلات رياضيه (=) فيما عدا قيود عدم السالبية حيث تعتبر أساس ثابت من أسس النماذج الخطيه.

٤– جميع المتغيرات القرارية لا سالبه .

وتطبيقا" لتلك الخصائص فانه يمكن تحويل أي قيد يرد في النموذج الأصلي في صوره متباينة إلى قيد يوضع ضمن قيود الشكل المعياري في صوره معادله وذلك من خلال اضافه أو طرح متغيرات متممه **slack variables** من تلك المتباينات وهنا يتم أتباع الخطوات التالية:

أ– اجعل ثابت القيد موجبا أولاً.

ب–إذا كانت المتباينة الناتجة في (أ) في صوره أقل من أو يساوي (أي في صورة ≥) يضاف متغير متمم في الطرف الأيمن وتحول المتباينة إلى معادلة (=) . أما إذا كانت المتباينة الناتجة في (أ) في صورة متباينة على شكل أكبر من أو يساوي (أي في صورة ≤) يتم طرح متغير متمم من الطرف الأيمن للمتباينة وتحول إلي معادله(=) . والمتغيرات المتممة المطروحة أو المضافة هي متغيرات لا سالبه أيضًا .

كذلك كما هو الحال في الشكل القانوني إذا ما وجدت أحد المتغيرات القرارية على الأقل غير محدد الإشارة فإنه يتم التعبير عنها بالفرق بين متغيرين لا سالبين .

<u>مثال (٢)</u>: ضع النموذج المبين في المثال السابق في الصورة المعيارية.

الحل : –

<u>أولاً</u> : بالنسبة لدالة الهدف في صورة تعظيم أو تدنيه على حد سواء صورة معيارية . لذا فإن الدالة :

د (س) = ٢س$_{١}$ – ٣س$_{٢}$ + ٥س$_{٣}$ (تدنيه)

(وهي صورة معيارية) .

<u>ثانياً :</u> بالنسبة للقيود : اجعل ثوابت القيود موجبة أولاً ثم تحول علاقات التباين (≥ أو ≤) إلى معادلات (=) وذلك من خلال إضافة أو طرح متغيرات متممة على الترتيب . لذا فإن :

١– <u>القيد الأول :</u>

س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ + س$_{٣}$ ≥ ٣٥

طالما ثابت القيد (الطرف الأيسر) موجباً وعلاقة التباين في صورة ≥ لذا يضاف متغير متمم وليكن س$_{٤}$ للطرف الأيمن وتحول العلاقة لمعادلة على الصورة التالية :

س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ + س$_{٣}$ + س$_{٤}$ = ٣٥ (صورة معيارية)

٢– <u>القيد الثاني</u> : ٢س$_{١}$ + ٧س$_{٢}$ – ٥س$_{٣}$ ≤ ٧٠

لاحظ أن ثابت القيد موجب وعلاقة التباين في صورة أكبر من أو تساوي (≤) لذا يتم طرح متغير متمم وليكن س$_{٥}$ وتحول المتباينة لمعادلة على الصورة التالية : –

٢س$_{١}$ + ٧س$_{٢}$ – ٥س$_{٣}$ – س$_{٥}$ = ٧٠ (صورة معيارية)

٣– <u>القيد الثالث :</u> ٣س$_{١}$ – ٢س$_{٢}$ = ٥ (صورة معيارية)

لاحظ أن ثابت القيد موجباً والقيد في صورة معادلة أصلاً فهذا القيد يعتبر في الصورة المعيارية لا يشهد أي تغيير ويظل كما هو دون تغيير .

٤- <u>القيد الرابع :</u> | ٥س$_{١}$ + ١٢س$_{٢}$ – ٧س$_{٣}$ | ≥ ٩٠

يفك لقيدين ويتم اعتبار القيدين معاً في الحل كما سبق شرحه حيث أن ثابت القيد موجب والعلاقة في صورة (≥) . وهذين القيدين هي : –

–٩٠ ≥ ٥س$_{١}$ + ١٢س$_{٢}$ – ٧س$_{٣}$ ≥ ٩٠

أي أن :

أ): ٥س$_{١}$ + ١٢س$_{٢}$ – ٧س$_{٣}$ ≥ ٩٠

ب): ٥س$_{١}$ + ١٢س$_{٢}$ – ٧س$_{٣}$ ≤ – ٩٠ يضرب × (–١)

وذلك لجعل ثابت القيد موجباً

– ٥س$_{١}$ – ١٢س$_{٢}$ + ٧س$_{٣}$ ≥ ٩٠

بالنسبة للقيد (أ) يضاف له متغير متمم وليكن س$_{٦}$ ويحول لمعادلة وبالنسبة للقيد (ب) يضاف له متغير متمم وليكن س$_{٧}$ ويحول لمعادلة .

لذا فالقيدين معا في الصورة المعيارية في الحل وهما : –

٥س$_{١}$ + ١٢س$_{٢}$ – ٧س$_{٣}$ + س$_{٦}$ = ٩٠ (صورة معيارية)

– ٥س$_{١}$ – ١٢س$_{٢}$ + ٧س$_{٣}$ + س$_{٧}$ = ٩٠ (صورة معيارية)

٥- <u>القيد الخامس :</u> | ٧س$_{١}$ – ٨س$_{٢}$ + س$_{٣}$ | ≤ ١٢

يكافئ الشكل الرياضي التالي : –

– ١٢ ≤ ٧س$_{١}$ – ٨ س$_{٢}$ + س$_{٣}$ ≤ ١٢

وحيث أن ثابت القيد الخاص بالحد المطلق في الأساس موجباً ويحتوي على علاقة تباين (≤) لذا فيتم اعتبار أحد القيدين فقط في الحل وهما:

أما : ٧س$_{١}$ – ٨س$_{٢}$ + س$_{٣}$ ≤ ١٢

ويطرح منه متغير متمم ويحول لمعادلة طالما ثابتة موجب والعلاقة (≤)

أي أن ٧س$_{١}$ – ٨س$_{٢}$ + س$_{٣}$ – س$_{٨}$ = ١٢ (صورة معيارية)

أو $٧س_١ - ٨س_٢ + س_٣ \geq -١٢$ × (−١)

$-٧س_١ + ٨س_٢ - س_٣ \leq ١٢$

لذا يتم طرح متغير متمم وليكن $س_٩$ ويحول القيد لمعادلة على الصورة :

$-٧س_١ + ٨س_٢ - س_٣ - س_٩ = ١٢$ **(صورة معيارية)**

وفي النهاية يتم التعويض عن $س_٢$ المتغير الغير محدد الإشارة في كل من دالة الهدف وكافة القيود بالفرق بين متغيرين لا سالبين أي :

$س_٢ = س_٢^{/} - س_٢^{//}$

ومن ثم يصبح النموذج الخطي في الصورة المعيارية التالية : −

$د(س) = ٢س_١ - ٣س_٢^{/} + ٣س_٢^{//} + ٥س_٣$ **(تدنيه)**

بشرط القيود الهيكلية :

$$س_١ + ٢س_٢^{/} - ٢س_٢^{//} + س_٣ + س_٤ = ٣٥$$

$$٢س_١ + ٧س_٢^{/} - ٧س_٢^{//} - ٥س_٣ - س_٥ = ٧٠$$

$$٣س_١ - ٢س_٢^{/} + ٢س_٢^{//} = ٥$$

$$٥س_١ + ١٢س_٢^{/} - ١٢س_٢^{//} - ٧س_٣ + س_٦ = ٩٠$$

$$-٥س_١ - ١٢س_٢^{/} + ١٢س_٢^{//} + ٧س_٣ + س_٧ = ٩٠$$

ثم أحد القيدين فقط :

أما $٧س_١ - ٨س_٢^{/} + ٨س_٢^{//} + س_٣ - س_٨ = ١٢$

أو $-٧س_١ + ٨س_٢^{/} - ٨س_٢^{//} - س_٣ - س_٩ = ١٢$

$س_١، س_٢^{/} ، س_٢^{//} ، س_٣ ، س_٤ ، س_٥ ، س_٦ ، س_٧ ، س_٨ ، س_٩ \geq$ صفر

ثانياً : حل النماذج الخطية :

بعد صياغة المشكلة في صورة قالب خطي تأتي مرحلة حل النموذج الخطي ، والمقصود بحل النموذج الخطي هو تحديد القيم المثلى لمتغيراته القرارية .

وبصفة عامة هناك اتجاهين رئيسيين في حل نماذج البرمجة الخطية وهما: –

أ – الحل البياني لنماذج البرمجة الخطية .

ب – الحل الجبري (أو الجدولي) لنماذج البرمجة الخطية(طرق السمبلكس) .

إلا أن الطريقة الأولى يسهل استخدامها في حالة ما إذا كان النموذج الخطي يحتوي على متغيرين قرارين فقط وتبدأ درجة التعقيد في الحل البياني حينما يحتوي النموذج الخطي على ثلاثة متغيرات حيث يتطلب الحل البياني قدرة على الرسم في شكل ثلاثي الأبعاد (المنشور) وتزداد درجة التعقيد في حالة ما إذا كان النموذج يحتوي على أربعة متغيرات قرارية حيث يتطلب الحل تخيل شكل رباعي الأبعاد . هذا وسوف تقتصر الدراسة في استخدامنا للحل البياني في حالة ماإذا كان النموذج الخطي يحتوي على متغيرين قرارين فقط. أما في حالة احتواء النموذج الخطي على أكثر من متغيرين فيفضل استخدام الطرق الجدولية (السمبلكس) في مثل هذه الحالات . وهذه الطرق تستخدم في حل النماذج الخطية التي تحتوي على أي عدد من المتغيرات القرارية . لكن دراسة الحل البياني في البداية ستفيد القارئ في التعرف على الإطار العام والمصطلحات العلمية المتداولة في مجال حل نماذج البرمجة الخطية وتصورها الهندسي والرياضي والذي يعتبر بمثابة وسيلة ناجحة لاستيعاب الحلول الجبرية باستخدام الطرق المختلفة لطريقة السمبلكس .

<u>أ – الحل البيانى لنموذج البرمجة الخطية : - Graphical Solution</u>

ذكرنا حالاً أننا سنتناول حل النماذج الخطية التي تحتوي على متغيرين قرارين فقط . لكن قبل تناولنا لخطوات حل النموذج الخطي بيانياً دعنا نسترجع كيفية التمثيل البياني للعلاقات الخطية سواء المعادلات أو المتباينات. وسبق لنا الإشارة المقصود بالنماذج الخطية هي النماذج التي يمكن تمثيل كافة العلاقات الموجودة بها سواء كانت دالة الهدف أو القيود في صورة خطوط مستقيمة .

أ – <u>تمثيل معادلة الخط المستقيم بيانياً :</u>

إذا كان لدينا معادلة خط مستقيم على الصورة :

$$أ\ س_{١} + ب\ س_{٢} = جـ \qquad (١)$$

فإنه يمكن تمثيلها بيانياً من خلال أحد الزاويتين التاليين : –

<u>الأولى :</u> بدلالة الأجزاء المقطوعة من المحورين الأفقي والرأسي : فيمكن كتابة المعادلة (١) في صورة الأجزاء المقطوعة من المحورين وذلك من خلال قسمة طرفي المعادلة ÷ قيمة الحد المطلق (جـ) فتصبح المعادلة على الصورة :

$$\frac{أس_{١}}{جـ} + \frac{ب\ س_{٢}}{جـ} = ١$$

أو

$$\frac{س_{١}}{\frac{جـ}{أ}} + \frac{س_{٢}}{\frac{جـ}{ب}} = ١$$

وهذه المعادلة تعتبر معادلة خط مستقيم يقطع مسافة قدرها $\frac{جـ}{أ}$ من محور (س$_{١}$) كما يقطع مسافة قدرها $\frac{جـ}{ب}$ من محور س$_{٢}$

فمثلاً : إذا كان لديك المعادلة ٢س$_{١}$ + ٣س$_{٢}$ = ٦

$$\frac{٢س_{١}}{٦} + \frac{٣\ س_{٢}}{٦} = ١$$

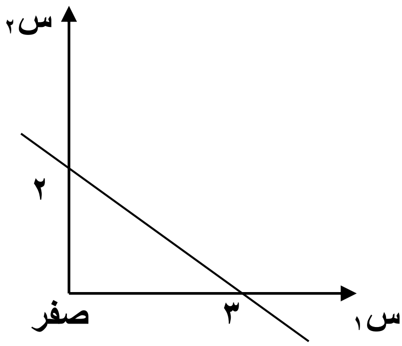
يمكن كتابتها على الصورة

أو

$$\frac{\text{س}_{١}}{\frac{٦}{٢}} + \frac{\text{س}_{٢}}{\frac{٦}{٣}} = ١$$

أي أن :

$$\frac{\text{س}_{١}}{٣} + \frac{\text{س}_{٢}}{٢} = ١$$



وهذه المعادلة عبارة عن معادلة خط مستقيم يقطع ثلاث وحدات من محور س$_{١}$ ووحدتين من محور س$_{٢}$ كما هو موضح في الرسم .

<u>الثانيـة</u> : – مـن خـلال التعويض عـن أحـد المتغيـرين بقيمـة صـفرية ثـم اسـتنتاج قيمــة المتغيــر الآخــر . فمــثلاً فـــي المعادلـــة الســـابقة : ٢س$_{١}$ + ٣س$_{٢}$ = ٦ يمكن إيجاد إحداثيات نقطتي التقاطع مع المحورين على النحو التالي :

- **افتـراض أن س$_{١}$ = صـفر وبـالتعويض فـي المعادلـة (١) ينـتج أن**

٢ (صفر) + ٣س$_{٢}$ = ٦

ومنـها س$_{٢}$ = ٢

فتكون إحداثيات النقطة الأولى هي (صفر ، ٢)

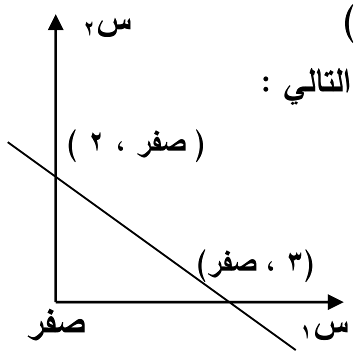
ومرة أخرى نفرض أن $س_٢$ = صفر وبالتعويض في المعادلة (١) ينتج أن
٢$س_١$ + ٣ (صفر) = ٦

ومنها فإن $س_١$ = ٣

فتكون إحداثيات النقطة الثانية هي (٣ ، صفر)

هذا ويمكن وضع إحداثيات النقطتين في الجدول التالي :

$س_١$	صفر	٣
$س_٢$	٢	صفر

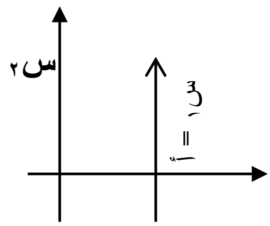


ومن هذا الجدول فإن الخط المستقيم الذي يمثل تلك المعادلة كما هو مبين في الشكل المقابل .

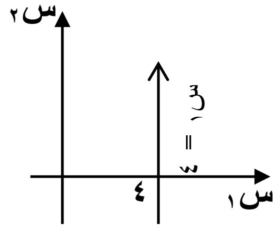
لاحظ أن أي نقطة تقع على الخط المستقيم فقط تحقق المعادلة (١) .

<u>ملحوظة</u> : -

معادلـة الخط المستقيم التـي تحتـوي علـى متغيـر واحد فقط تعنـي معادلـة خط مستقيم يقطع أحد المحورين عند نقطة معينـة وعمـودي عليـه ويـوازي المحـور الآخر . فمثلاً :



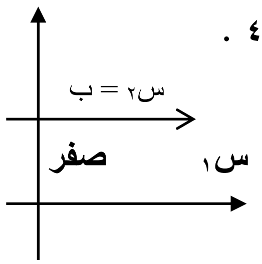
١- إذا لدينا المعادلة س$_١$ = أ فهي تمثل معادلة خط مستقيم يقطع مسافة قدرها (أ) من محور س$_١$ وعمودي عليه ويوازي المحور الآخر س$_١$ أي يوازي محور (س$_٢$) كما هو موضح بالرسم



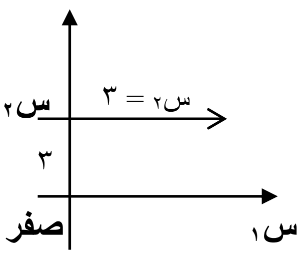
فمثلاً إذا كان لدينا ٢س$_١$ = ٨

أي س$_١$ = ٤ فإن هذه المعادلة خطها البياني يقطع (٤) وحدات من محور س$_١$ كما يوضحها الشكل المبين . س$_٢$

ووجود العلاقة في صورة المعادلة تفيد في أن أي نقطة تقع على هذا الخط تحقق المعادلة س$_١$ = ٤ .



٢- إذا كان لدينا المعادلة س$_٢$ = ب فهي تمثل معادلة خط مستقيم يقطع عدد (ب) وحدة من محور س$_٢$ وعمودي عليه ويوازي محور س$_١$. كما هو موضح .



فمثلاً إذا كان لدينا المعادلة ٥س$_٢$ = ١٥

أو س$_٢$ = ٣ فإن هذه المعادلة خطها البياني يقطع ٣ وحدات من محور س$_٢$ وعمودي عليه

ويوازي محور $س_١$ كما هو موضح بالرسم .

(ب) <u>تمثيل علاقة التباين (أي $\geq$ أو $\leq$):</u>

بصفة عامة إذا كان لديناعلاقة تباين في صورة خطية على الصورة

$أ\ س_١ + ب\ س_٢ \gtrless جـ$

فإنه لتمثيل المتباينة يتم تحويلها إلى معادلة (=) أولاً ثم يتم إتباع خطوات المعادلات الخطية سالفة الذكر . وبعد تمثيل الخط المستقيم الذي يعبر عن المعادلة المقابلة لعلاقة التباين يأتي دور تحديد المساحة التي تحققها صيغة المتباينة .

ولتحديد اتجاه تحقق المتباينة فهناك العديد من الطرق لكن كل الطرق التي تقوم بتحديد هذا الاتجاه يشذ فيها حالات كثيرة وخصوصًا حينما تكون أحد معلمات النموذج الخطي (من ثوابت القيود أو معاملات المتغيرات سواء في دالة الهدف أو القيود) معاملات سالبة .

لكن سوف نذكر لك عزيزي القارئ طريقة بسيطة تساهم في تحديد الاتجاه أهم ما يميزها أنها قاعدة عامة لا يشذ عنها أي قيد في عملية تحديد اتجاه تحققه . وتتلخص هذه الطريقة في اعتبار أي نقطة في المجال الدائري لتساهم في تحديد الاتجاه . وأبسط نقطة تساهم في تلك العملية هي نقطة الأصل (صفر ، صفر) فيمكن استخدامها كمعيار سهل في تحديد الاتجاه .

فعند استخدام نقطة الأصل كمعيار في تحديد الاتجاه يتم الآتي :

- **إذا كان لديك قيد على الصورة :**

$أ\ س_١ \pm ب\ س_٢ \gtrless \pm جـ$

فبالتعويض بنقطة الأصل في هذا القيد فإن :

$أ\ (صفر) \pm ب\ (صفر) \gtrless \pm جـ$

أي أن :صفر $\bigcirc$ $\pm$ جـ

وفي الدائرة المحصورة بين الطرفين اكتب العلاقة الرياضية الصحيحة التي تحكم بين الصفر من جانب والمقدار ± جـ من جانب آخر ليتحدد ذلك أن نقطة الأصل تقع في اتجاه معين من عدمه.

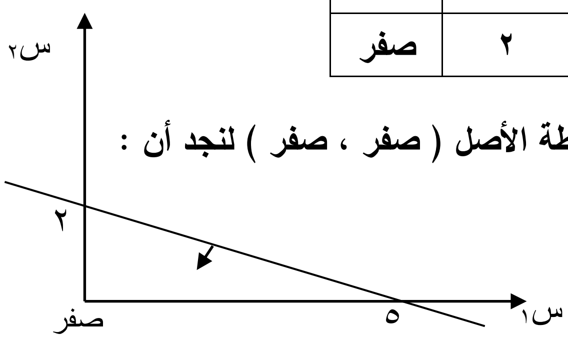
<u>مثال (١)</u> : – حدد اتجاه العلاقة $٢س_١ + ٣س_٢ \leq ٦$

<u>الحـــــل</u> : تحول المتباينة لمعادلة لتصبح :

$٢س_١ + ٥س_٢ = ١٠$

وهذا الخط المستقيم يمر بالنقطتين الذي يوضحهم الجدول التالي :

$س_١$	صفر	٥
$س_٢$	٢	صفر



أما عن الاتجاه فيتم التعويض بنقطة الأصل (صفر ، صفر) لنجد أن :

صفر ضع علاقة التباين الصحيحة **١٠**

فلا شك أن الصفر أقل من ١٠

وهذا يفيد أن نقطة الأصل تقع في اتجاه أقل من أو يساوي ١٠ وحيث أن المتباينة المطلوب تحديد اتجاهها هي $٢س_١ + ٥س_٢ \leq ١٠$ فهذا يعني أن نقطة الأصل تقع في اتجاه تحقق القيد كما هو موضح . لذلك فإن أي نقطة تقع على الخط المستقيم أو في اتجاه نقطة الأصل تحقق العلاقة $٢س_١ + ٣س_٢ \leq ٦$.

<u>مثال (٢)</u> : حدد اتجاه المتباينة : – ٢س$_{١}$ – ٣س$_{٢}$ $\geq$ – ٦

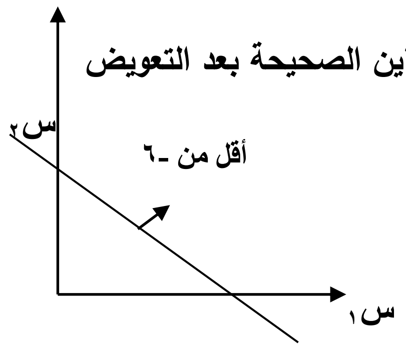
<u>الحـل</u> : يتم تحويل المتباينة لمعادلة أولاً فتكون الصورة :

– ٢س$_{١}$ – ٣س$_{٢}$ = – ٦

ومن ثم يتم استنتاج نقطتين لهذا الخط كما يوضحها الجدول التالي :

س$_{١}$	صفر	٣
س$_{٢}$	٢	صفر

أما عن تحديد الاتجاه فيمكنك رسم الخط المستقيم الذي يعبر عن المعادلة كما هو موضح في الشكل ثم استخدام نقطة الأصل كمعيار في تحديد الاتجاه من خلال التعويض في العلاقة وحدد علاقة التباين الصحيحة بعد التعويض



صفر ضع علاقة التباين الصحيحة – ٦

فلا شك أن العلاقة الصحيحة بين القيمة صفر والقيمة – ٦ هي أن الصفر >– ٦ .

أي أن نقطة الأصل تقع في اتجاه أكبر من – ٦ . وحيث أن المطلوب هو تحديد اتجاه المتباينة $\geq$ – ٦ لذا فإن الاتجاه الصحيح هو الاتجاه الذي لا توجد فيه نقطة الأصل . وخلاصة ما سبق هو أن أي نقطة تقع على الخط المستقيم أو أعلاه تحقق علاقة التباين ($\geq$ – ٦) كما هو موضح في الرسم البياني المقابل .

<u>مثال (٣)</u> : حدد اتجاه المتباينة : ٢ س$_{١}$ – ٤ س$_{٢}$ $\leq$ ٨

<u>الحـل</u> : بداية يتم تحويل المتباينة لمعادلة ٢ س$_{١}$ – ٤ س$_{٢}$ = ٨ ثم يتم استنتاج إحداثي نقطتين لتلك المعادلة كما يوضحها الجدول المبين

$س_١$	صفر	٤
$س_٢$	– ٢	صفر

ثم قم بتمثيل النقطتين بيانياً كما يوضحه الشكل البياني المقابل . أما عن تحديد الاتجاه فيتم التعويض بنقطة الأصل في طرفي العلاقة نجد أن

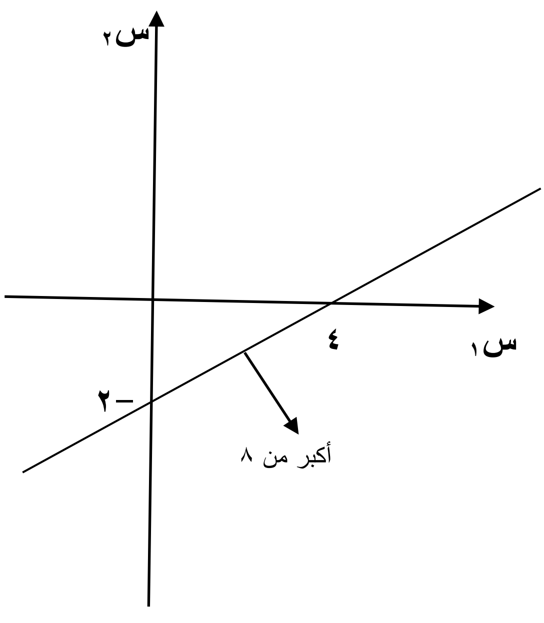
صفر ضع علاقة التباينالصحيحة **٨**

فلا شك أن العلاقة الصحيحة التي تربط بين الطرفين هي أن الصفر أقل من (<) ٨ . أي أن نقطة الأصل تقع في اتجاه أقل من ٨ .

وحيث أن المتباينة المطلوب تحديد

اتجاهها هي: $٢ س_١ - ٤ س_٢ \leq ٨$.

لذا فإن اتجاه المتباينة هو أن أي نقطة تقع على الخط المستقيم أو في اتجاه مضاد لنقطة الأصل كما هو موضح في الرسم .



<u>مثال</u> (٤) : حدد اتجاه تحقيق المتباينة – ٣$س_١$ + ٢ $س_٢$ ≤ ٦

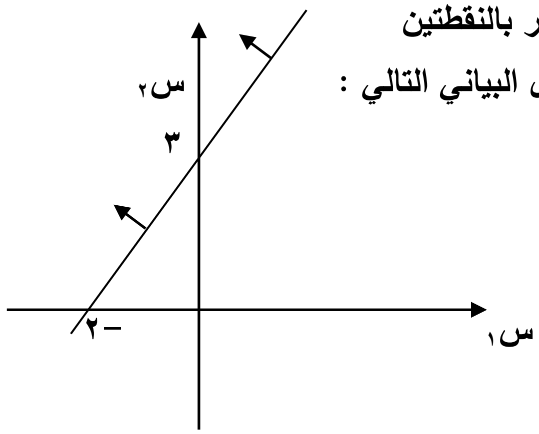
<u>الحل</u> : يتم تحويل المتباينة لمعادلة على الصورة :

– ٣$س_١$ + ٢ $س_٢$ = ٦

يتم استنتاج إحداثيات نقطتين كما يوضحهم الجدول المقابل.

$س_١$	صفر	– ٢
$س_٢$	٣	صفر

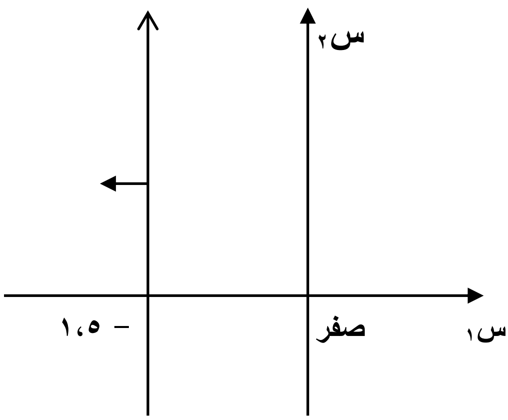
ثم يتم رسم الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين الواردتين بهذا الجدول ليعطي الشكل البياني التالي :



أما عن تحديد الاتجاه فيتم استخدام نقطة الأصل كمعيار في تحديد الاتجاه حيث أن :

صفر ضع علاقة التباين الصحيحة **٦**

فلا شك أن الصفر أقل من ٦ . وهذا يعني أن نقطة الأصل تقع في اتجاه أقل من (<) . وحيث أن المتباينة المطلوب تحديد اتجاهها هي (≤) لذا فإن النقاط التي تقع على الخط المستقيم أو في الاتجاه المضاد لنقطة الأصل يعتبر مجال تحقيق المتباينة كما هو موضح على الرسم



<u>مثال (٥)</u> : حدد اتجاه المتباينة:

٢ س١ ≥ – ٣

الحل : تحول المتباينة لمعادلة:

فتصبح على الصورة :

٢ س١ = – ٣

أي أن س١ = – ١،٥

وهي معادلة خط مستقيم يقطع (– ١،٥) وحدة من محور س١ وعمودي عليه ويوازي محور س٢ كما يوضحها الشكل المقابل . أما عن الاتجاه فيتم اعتبار نقطة الأصل كمعيار في تحديد الاتجاه فنجد أن بالتعويض في العلاقة فإن

صفر ضع علاقة التباين الصحيحة **– ٣**

فلا شك أن الصفر أكبر من (>) – ٣ . وحيث أن المطلوب هو تحديد اتجاه أقل من أو تساوي – ٣ لذا فإن الاتجاه هو أي نقطة على الخط المستقيم

$س_١$ = – ١،٥ أو في الاتجاه المضاد لنقطة الأصل كما هو موضح على الرسم بعاليه .

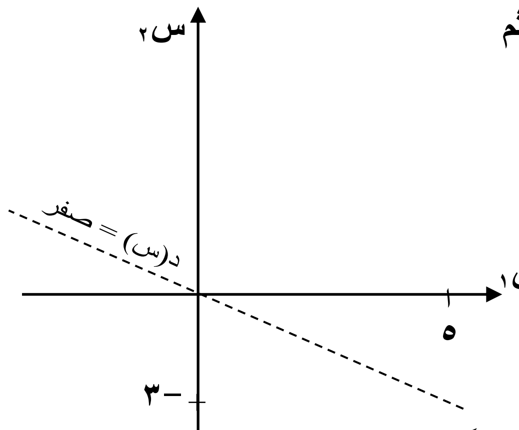
ملحوظة : في النماذج الخطية وبالتحديد عندما نكون بصدد عملية تمثيل معادلة دالة الهدف بيانياً . ففي أغلب الأحوال تكون دالة الهدف خالية من المقادير الثابتة . و أفضل طريقة لتمثيلها بياني ولكي تكون نتائج الجميع واحدة فإن يتم افتراض أن قيمة دالة الهدف مساوية للصفر فتصبح الصورة عندئذ على الشكل : – أ $س_١$ + ب $س_٢$ = صفر

وهذه المعادلة تمر بنقطة الأصل (صفر ، صفر) بالإضافة لنقطة المعاملات الفنية والتي تفيد أنه إذا تم التعويض عن أحد المتغيرين بمعامل المتغير الآخر فإن قيمة المتغير الآخر تكون بمثابة معامل المتغير الأول لكن بإشارة مخالفة أي (ب ، – أ) أو (– ب ، أ)

فمثلاً إذا كانت لدينا المعادلة ٣ $س_١$ + ٥ $س_٢$ = صفر

فهي تمر بالنقاط (صفر ، صفر) ، بالإضافة للنقطتين التاليتين:

(٥ ، – ٣) أو (– ٥ ، ٣) ومن ثم فإن الخط المستقيم الذي يعبر عن الدالة المعطاة يمثله الخط المستقيم المبين في الشكل المقابل



- **خطوات حل النموذج الخطي بيانياً : -**

تتمثل خطوات حل النموذج بيانياً فيما يلي : –

١– تمثيل قيود النموذج بيانياً وتحديد اتجاهاتها .

٢- تحديد منطقة الحلول المشتركة والتي تحقق كافة قيود النموذج الخطي وهي ما تسمى بالمجال المسموح به أو المجال المشترك أو الفراغ المشترك Feasible Solution (or) Solution Space **وهو المجال الذي تحقق كافة نقاطه كافة قيود النموذج الخطي. هذا ويتحدد أركان المجال المشترك بمجموعة من النقاط تسمى بنقاط الحلول الأساسية الممكنة أو النقاط المتطرفة** Extreme Points **للشكل أو للمجال المشترك .**

٣- تمثيل معادلة دالة الهدف بيانياً بخط مستقيم من خلال افتراض أن د(س) = صفر . ثم يتم تحريك الخط الممثل لدالة الهدف موازياً لنفسه في اتجاه المجال المشترك إلى أن يمس أول نقطة في المجال المشترك في حالة مشاكل التدنية أو إلى أن يمس آخر نقطة في المجال المشترك في حالة التعظيم وتعتبر تلك النقطة بمثابة نقطة الحل الأمثل للنموذج الخطي (في حالة معاملي المتغيرين القراريين موجبًا).

ملاحظات :

١- إذا كانت معاملات دالة الهدف موجبة للمتغيرين القرارين والمجال المشترك يبدأ من نقطة الأصل فإن أول نقطة يمسها خط دالة الهدف د(س) = صفر تعتبر نقطة التدنية و آخر نقطة يمسها خط تلك الدالة في المجال المشترك تعتبر بمثابة نقطة التعظيم والعكس هو الصحيح تماماً . بمعنى إذا كانت معاملات المتغيرين القرارين سالبة سوف تكون أول نقطة يمسها خط الدالة د(س) = صفر هي بمثابة نقطة التعظيم و آخر نقطة يمسها هي نقطة التدنية .

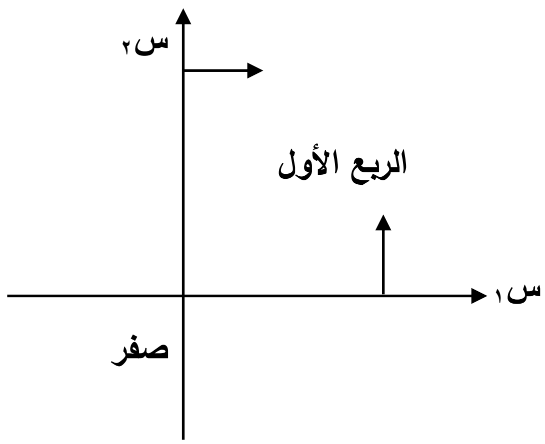
٢- إذا كان أحد معاملي المتغيرين القرارين في دالة الهدف موجباً والآخر سالباً فإنه في حالة التدنية يتم تحريك خط الدالة د (س) = صفر في

اتجاه محور المتغير ذو المعامل السالب في دالة الهدف أما في حالة التعظيم فيتم تحريك خط الدالة د (س) = صفر في اتجاه المتغير القراري ذو المعامل الموجب في دالة الهدف .

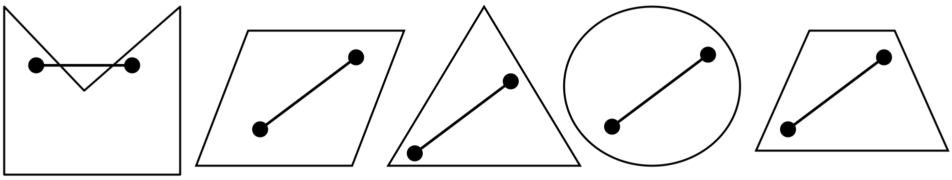
٣- إذا وجد قيد واحد فقط من قيود النموذج الخطي في صورة معادلة (=) فإن منطقة الحلول المشتركة إن وجدت سوف تكون بمثابة جزء من الخط المستقيم الذي يمثل القيد الذي وجد أصلاً في صورة معادلة على أن يقع هذا الجزء من هذا الخط في منطقة الحلول المشتركة لباقي قيود النموذج الخطي .

٤- إذا وجد قيدين على الأقل من قيود نموذج خطي في صورة معادلات(=) فإن منطقة الحلول المشتركة إن وجدت سوف تكون بمثابة نقطة وحيدة وهي نقطة تقاطع القيود التي ظهرت أساساً في النموذج الخطي في صورة معادلات على أن تقع نقطة تقاطعهم في المجال المشترك لباقي القيود التي كانت أصلاً في صورة متباينات في النموذج .

٥- توافر قيدي عدم السالبية دائماً أبداً في النماذج الخطية يفيد أن المجال المشترك إن وجد سيقع دائماً في الربع الأول



٦- المجال المشترك أو منطقة الحلول المشتركة الناتجة عن الحل البياني هي بمثابة مجال محدب **Convex Set** بمعنى إذا تم اعتبار أي نقطتين داخل هذا المجال فهناك إمكانية لتوصيل خط مستقيم يمر بهاتين النقطتين على أن يقع هذا الخط بالكامل داخل الشكل المحدب كما هو موضح في الرسم .



مجال غير محدب ← → مجالات محدبة حيث يقع الخط المستقيم بالكامل داخل الشكل المحدب

٧- يمكن التحقق من مدى صحة نقطة الحل الأمثل للنموذج الخطي من خلال التعويض في دالة الهدف بإحداثيات أركان الشكل المشترك .

٨- بعد تحديد منطقة الحلول المشتركة(المجال المسموح به) لنموذج خطي إذا كان الخط المستقيم الممثل لقيد ما لا يشكل أحد أضلاع المجال المسموح به فإنه يمكن اعتبار هذا القيد بمثابة قيد زائد من قيود النموذج الخطي أو غير فعال في النموذج بمعنى إذا تم حذف هذا القيد لن يؤثر على المجال المشترك ومن ثم لا يؤثر على الحل الأمثل للنموذج الذي يعبر عن المشكلة محل الدراسة .

- <u>أنواع الحلول الناتجة عن حل النموذج الخطي : -</u>

هناك أربعة أنواع من الحلول تنتج من حل نموذج البرمجة الخطية وهي:

١- <u>حلول أساسية:</u> **Basic Solutions**

فأي نقطة تقاطع قيدين معاً بما في ذلك نقطة تقاطع قيدي عدم السالبية تسمى حلاً أساسياً .

٢- حلول ممكنة : (مسموحاً بها) **Feasible Solutions**

بعد تحديد منطقة الحلول المشتركة أو المجال المشترك فإن أي نقطة تقع داخل تلك المنطقة أو على أحد أضلاعها أو أركانها تسمى حلاً ممكناً أو مسموحاً به .

٣- حلول أساسية ممكنة (النقاط المتطرفة):

Basic Feasible Solutions or Extreme Points

وهي بمثابة النقاط المتطرفة من المجال المشترك أي نقاط الأركان للشكل المشترك .

٤- الحل الأمثل : **Optimal Solution**

وهو ذلك الحل الأساسي الممكن الذي يحقق النهاية المطلوبة لدالة الهدف . أي هو الحل الذي يجعل قيمة دالة الهدف أقل ما يمكن في حالة مشاكل التدنية أو أكبر ما يمكن في حالة مشاكل التعظيم . هذا وقد يكون الحل الأمثل للنموذج الخطي وحيداً أي نقطة واحدة أو قد تتعدد الحلول المثلى فنكون بصدد حالة تعدد حلول مثلى وهي ما سترد دراستها في الحالات الخاصة فيما بعد حيث يكون الخط الممثل لدالة الهدف موازياً لأحد الأضلاع أو الخط المستقيم الذي يمثل أحد قيود النموذج الخطي.

مثال (١) : - حدد المجال المشترك لمجموعة القيود التالية : -

١) : $س_١ + س_٢ \geq ٤$

٢) : $٤ س_١ + ٣س_٢ \geq ١٢$

٣) : $- س_١ + س_٢ \geq ١$

٤) : $س_١ + س_٢ \leq ٦$

٥) : $س_١ \geq$ صفر

٦) : $س_٢ \geq$ صفر

ثم حدد القيود الزائدة إن وجدت مبرراً إجابتك بالتعليق المناسب .

الحل :

لتحديد منطقة الحلول المشتركة أو المجال المسموح به يتم الآتي:

أ – تمثيل كافة القيود وتحديد اتجاهاتها : –

- **قيدي عدم السالبية : $س_١ \geq$ صفر ، $س_٢ \geq$ صفر يفيدا أن منطقة الحلول المشتركة إن وجدت ستقع في الربع الأول حتماً .**
- **القيد الأول : $س_١ + س_٢ \leq ٤$**

يحول لمعادلة على النحو التالي :

$س_١ + س_٢ = ٤$ ويتم استنتاج إحداثي نقطتين كما يبينها الجدول المقابل.

$س_١$	صفر	٤
$س_٢$	٤	صفر

- **القيد الثاني : $٤ س_١ + ٣س_٢ \leq ١٢$**

يحول المعادلة : $٤ س_١ + ٣س_٢ = ١٢$

ويتم استنتاج إحداثي نقطتين كما يوضحها الجدول المقابل

$س_١$	صفر	٣
$س_٢$	٤	صفر

- **القيد الثالث : $- س_١ + س_٢ \leq ١$**
- **يحول المعادلة : $- س_١ + س_٢ = ١$**

ويتم استنتاج إحداثي نقطتين كما يوضح الجدول المقابل .

$س_١$	صفر	١–
$س_٢$	١	صفر

ولتحديد اتجاه القيد يتم اعتبار نقطة الأصل كمعيار في تحديد الاتجاه على النحو التالي : صفر < ١ أي أن:

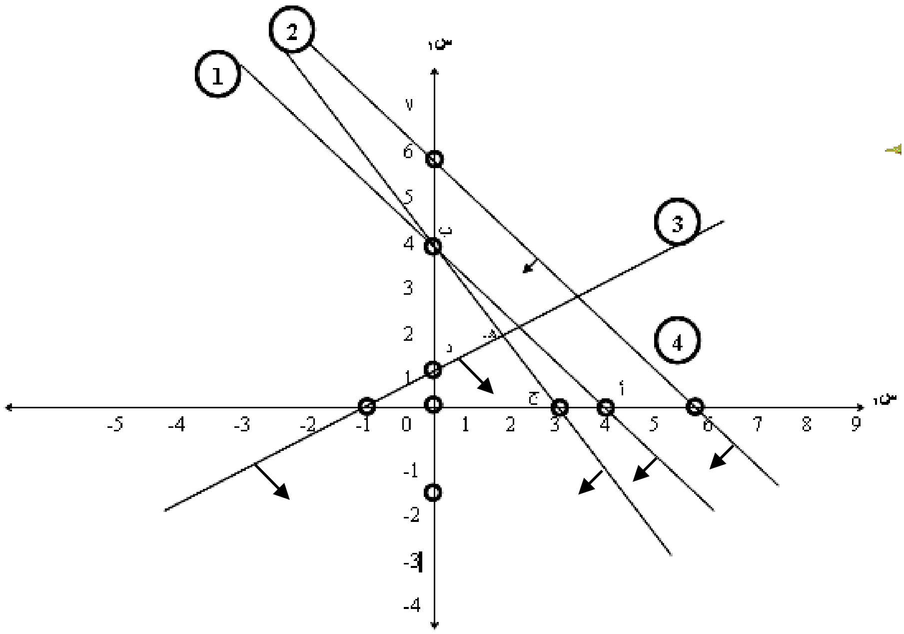
نقطة الأصل واتجاه القيد واحداً . أي أن نقطة الأصل تقع في اتجاه القيد.

- <u>القيد الرابع</u> : س١ + س٢ ≥ ٦
- يحول المعادلة على النحو التالي : س١ + س٢ = ٦

ويتم استنتاج إحداثي نقطتين كما يوضحهم الجدول المقابل .

س١	صفر	٦
س٢	٦	صفر

ب – الرسم البياني لتحديد منطقة الحلول المشتركة (المجال المسموح به) :



<u>تصفية الرسم لتحديد منطقة الحلول المشتركة :</u>

- قيدي عدم السالبية : <u>س١ و س٢</u>
- القيد الأول : (المساحة المشتركة ما بين قيدي عدم السالبية والقيد الأول هي <u>أ و ب</u>)

- **القيد الثاني : (المساحة المشتركة ما بين قيدي عدم السالبية والقيد الأول والثاني هي <u>جـ و ب</u>)**
- **القيد الثالث : (المساحة المشتركة ما بين قيدي عدم السالبية والقيد الأول والثاني والثالث هي <u>جـ و د هـ</u>)**
- **القيد الرابع : (المساحة المشتركة ما بين قيدي عدم السالبية والقيود من الأول حتى الرابع هي <u>جـ و د هـ</u>) ومن ثم فإن منطقة الحلول المشتركة(المجال المسموح به) هي الشكل ج و د هـ .**

وحيث أن الخطوط المستقيمة الممثلة للقيدين الأول و الرابع لا تمثل أي من أضلاع المجال المشترك لذا فان القيدين الأول و الرابع تعتبر قيود زائدة.

<u>مثال (٢)</u> :

إذا كان لديك النموذج الخطي التالي : -

$$\text{د}(\text{س}) = \text{س}_{١} + ٢\text{س}_{٢}$$

بشرط القيود الهيكلية التالية : -

$$-٣\,\text{س}_{١} + ٣\,\text{س}_{٢} \leq ٩$$

$$\text{س}_{١} - \text{س}_{٢} \leq ٢$$

$$\text{س}_{١} + \text{س}_{٢} \leq ٦$$

$$\text{س}_{١} + ٣\,\text{س}_{٢} \geq ٦$$

$$\text{س}_{١} \geq \text{صفر}$$

$$\text{س}_{٢} \geq \text{صفر}$$

<u>والمطلوب :</u>

١- حدد نقطة الحل الأمثل بيانياً في حالتي التدنية والتعظيم لقيمة دالة الهدف مع تحقيق نتائجك جبرياً .

٢- حدد أنواع الحلول الناتجة عن حل هذا النموذج الخطي .

٣- حدد القيود الزائدة إن وجدت .

الحل : -

١- لتحديد نقطة الحل الأمثل بيانياً في حالتي التدنية والتعظيم للدالة يتم الآتي : -

- استنتاج إحداثي نقطتين لكل قيد على النحو التالي :

- قيدي عدم السالبية : يفيد أن منطقة الحلول المشتركة إن وجدت ستقع في الربع الأول حتمًا .

- القيد الأول : $-$ ٣ س$_{١}$ + ٣ س$_{٢}$ $\leq$ ٩

بالقسمة على ٣ ويحول لمعادلة

$-$ س$_{١}$ + س$_{٢}$ = ٣

والجدول المقابل يحدد إحداثي نقطتين يمر بهما خط القيد الأول .

س$_{١}$	صفر	$-$ ٣
س$_{٢}$	٣	صفر

أما لتحديد الاتجاه فإن صفر < ٣ أي أن نقطة الأصل تقع في اتجاه القيد.

- القيد الثاني : س$_{١}$ $-$ س$_{٢}$ $\leq$ ٢

يحول لمعادلة: س$_{١}$ $-$ س$_{٢}$ = ٢

والجدول المقابل يحدد إحداثي نقطتين يمر بهما خط القيد الثاني .

س$_{١}$	صفر	٢
س$_{٢}$	$-$٢	صفر

أما عن اتجاه القيد فإن صفر < ٢ أي أن نقطة الأصل تقع في اتجاه القيد الثاني .

- القيد الثالث : س$_{١}$ + س$_{٢}$ $\leq$ ٦

يحول لمعادلة س$_{١}$ + س$_{٢}$ = ٦ بقسمة الطرفين ÷ ٦

$$\frac{س_{١}}{٦} + \frac{س_{٢}}{٦} = ١$$

وهي معادلة خط مستقيم يقطع ٦ وحدات من كل من محور $س_١$ ، $س_٢$. أما عن الاتجاه فحيث أن (صفر < ٦) أي أن كلاً من نقطة الأصل واتجاه القيد واحدًا.

<u>القيد الرابع</u> : $س_١ + ٣ س_٢ \leq ٦$

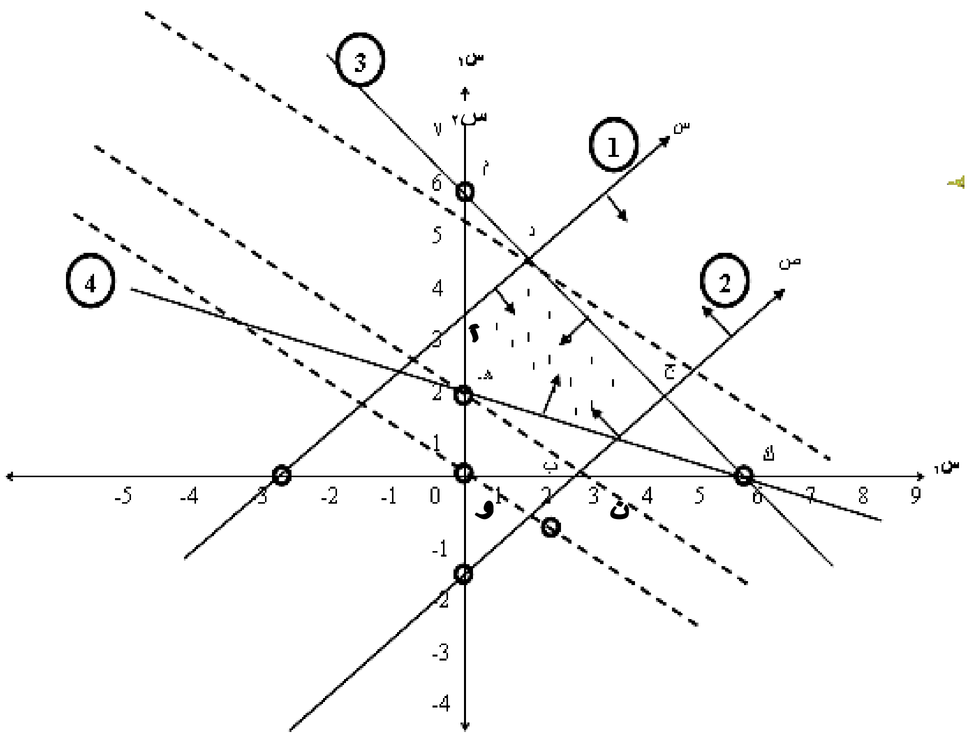
يحول لمعادلة ليصبح $س_١ + ٣ س_٢ = ٦$

$س_١$	صفر	٦
$س_٢$	٢	صفر

والجدول المقابل يحدد إحداثي نقطتين يمر بهما خط القيد الرابع .

أما عن الاتجاه فهو مضاد لنقطة الأصل حيث أن (صفر <٦) عكس المتباينة

- الرسم البياني لتمثيل خطوط كافة القيود وتحديد اتجاهاتها ومن ثم



تصفية المجال المشترك :

- **قيدي عدم السالبية: $س_1$ و $س_2$.**
- **المجال المشترك لقيدي عدم السالبية والقيد الأول هو الشكل المفتوح $س_1$ و أ $س_2$.**
- **المجال المشترك لقيدي عدم السالبية والقيد الأول و الثاني : هو الشكل المفتوح ص ب و أ س.**
- **المجال المشترك لقيدي عدم السالبية والقيود من القيد الأولى حتى القيد الثالث هو الشكل: ج ب و أ د.**
- **المجال المشترك لقيدي عدم السالبية ومجموعة القيود من الأول حتى القيد الرابع هو الشكل : ج ن هـ أ د (المجال المشترك).**
- **تمثيل معادله داله الهدف بيانيًا :**

نفرض أن د (س) = صفر.

س١ + ٢س٢ = صفر .

والجدول المقابل يوضح إحداثى نقطتين يمر بهما خط الداله د (س) = صفر

$س_1$	صفر	٢
$س_2$	صفر	– ١

ويتم تمثيل خط الدالة د (س) = صفر بخط متقطع تمييزًا لـه عن خطوط القيود .

ولتحديد نقطتي الحل الأمثل في حالتي التدنية والتعظيم يتم تحريك الخط المستقيم المعبر عن الدالـة د (س) = صـفر موازيـاً لنفسـه فـي اتجـاه المجال المشترك إلى أن يمس أول نقطة في المجال لتعطي نقطة الحل الأمثل في حالة التدنية وهي النقطة (هـ) ذات الإحداثيات (صفر ، ٢)

وإلى أن يمس خط الدالة د (س) = صفر في آخر نقطة في المجال في حالة التعظيم وهي النقطة (د) وهي نقطة تقاطع القيد الأول والثالث معاً ولاستنتاجها جبرياً يكون من خلال حل المعادلتين التاليتين :

$$-س_{١} + س_{٢} = ٣$$

$$س_{١} + س_{٢} = ٦$$

بجمع المعادلتين معاً ينتج أن ٢ $س_{٢}$ = ٩ فتكون $س_{٢} = \frac{٩}{٢}$

وبالتعويض في أحد المعادلتين ولتكن الأولى عن قيمة $س_{٢}$ ينتج أن :

$$-س_{١} + \frac{٩}{٢} = ٣$$

أي أن $س_{١} = \frac{٣}{٢}$

ومن ثم فنقطة الحل الأمثل في حالة التعظيم هي النقطة د (٣/٢ ، ٩/٢)

ومن ثم فإن : –

- عند النقطة هـ (صفر ، ٢) تكون قيمة الدالة د (س) أقل ما يمكن ولتحديد أقل قيمة للدالة د (س) يتم التعويض في الدالة د(س) بإحداثيات النقطة هـ (صفر،٢) فتكون :
- د (س) = $س_{١}$ + ٢$س_{٢}$

= صفر + ٢ (٢) = ٤

- وعند النقطة د $\left(\frac{٣}{٢} ، \frac{٩}{٢} \right)$

تكون قيمة الدالة د (س) أكبر ما يمكن ولتحديد أكبر قيمة للدالة د (س) يتم التعويض في الدالة د (س) فتكون:

د (س) = $س_{١} + س_{٢}$

$$= \frac{٣}{٢} + \frac{٩}{٢} = \frac{٢١}{٢}$$

هذا وللتحقق جبرياً من صحة نتائجنا دعنا نعوض في دالة الهدف د(س) بكافة نقاط أركان الشكل المشترك (النقاط المتطرفة للشكل المشترك) أي مجموعة النقاط جـ ، ن ، هـ ، أ ، د . والنقطة جـ هي تقاطع خطي القيدين الثاني والثالث أما النقطة ن فهي تقاطع خطي القيدين الثاني والرابع ويتم استنتاجها جبرياً على النحو التالي : –

استنتاج إحداثيات النقطة جـ :

القيد الثاني $س_١ - س_٢ = ٢$

والقيد الثالث $س_١ + س_٢ = ٦$

وبجمع المعادلتين ينتج أن $٢ س_١ = ٨$ أي أن $س_١ = ٤$

وبالتعويض في أحد المعادلتين ولتكن الأولى فينتج أن $س_٢ = ٢$ فتكون إحداثيات النقطة جـ هي (٤ ، ٢)

استنتاج إحداثيات النقطة ن : –

القيد الثاني $س_١ - س_٢ = ٢$

القيد الرابع $س_١ + ٣س_٢ = ٦$

وبطرح معادلة القيد الثاني من معادلة القيد الرابع ينتج أن $س_٢ = ١$

وبالتعويض في أي من المعادلتين ينتج أن $س_١ = ٣$

فتكون إحداثيات النقطة ن هي (٣ ، ١)

أما باقي النقاط المتطرفة فبعضها يقع على المحاور فهو معلوم إحداثياته .

والجدول التالي يوضح مدى صحة الحل البياني :

إحداثيات نقاط أركان الشكل المشترك (النقاط المتطرفة)	د (س) = س$_{١}$ + ٢ س$_{٢}$	ملاحظات
جـ (٤ ، ٢)	د(س) = ٤+٢(٢) = ٨	
ن (٣ ، ١)	د (س) = ٣+٢(١) = ٥	
هـ (صفر ، ٢)	د(س)= صفر+٢(٢) = ٤	أقل ما يمكن
أ (صفر ، ٣)	د(س)=صفر+٢(٣) = ٦	
د (٣/٢ ، ٩/٢)	د(س)= ٣/٢ +٢(٩/٢) = ١٠,٥	أكبر ما يمكن

ومن هذا الجدول يتضح صحة قرارنا في تحديد الحل الأمثل في حالتي التدنية والتعظيم .

٢- <u>تحديد أنواع الحلول الناتجة عن حل النموذج الخطي : -</u>

هناك أربعة أنواع من الحلول الناتجة عن حل هذا النموذج وهي : -

أ – <u>الحلول الأساسية</u> : فأي نقطة تقاطع قيدين معاً بما في ذلك تقاطع قيدي عدم السالبية تسمى حلاً أساسياً وفي هذا المثال فإن نقاط الحلول الأساسية هي مجموعة النقاط ك ، ب ، و ، هـ ، أ ، م ، د ، جـ ، ن

(لاحظ أنها نقاط تقع في الربع الأول فقط من الرسم البياني)

ب – <u>الحلول الممكنة أو المسموح بها</u> : أي نقطة تقع في المجال المشترك جـ ن هـ أ د تسمى حلاً ممكناً أو مسموحاً به . وهناك عدد لا نهائي من النقاط في هذا الشكل سواء داخله أو على أضلاعه أو أركانه .

ج – <u>حلول أساسية ممكنة (النقاط المتطرفة أو أركان الشكل المشترك)</u> : وهناك خمسة نقاط تعبر عن الحلول الأساسية الممكنة وهي مجموعة النقاط جـ ، ن، هـ ، أ ، د فقط . وهذه النقاط تحقق كافة القيود .

د – **الحلول المثلى** : الحل الأمثل في حالة تدنية قيمة دالة الهدف عند النقطة هـ (صفر ، ٢) حيث تصل الدالة د(س) لنهايتها الصغرى والتي تبلغ (٤) . أما الحل الأمثل في حالة التعظيم فهو عند النقطة د (٢/٣ ، ٢/٩) حيث تصل الدالة د (س) لنهايتها العظمى والتي تبلغ ١٠،٥ .

٢– **تحديد القيود الزائدة في النموذج الخطي** : – سبق وأن أوضحنا أنه بعد تحديد المجال المشترك فإن أي قيد لا يشكل خطه المستقيم ضلعاً من أضلاع المجال المشترك يعتبر قيد زائد . والملاحظ في هذا النموذج أن كافة قيود النموذج الخطي تعتبر قيوداً فعالة (باستثناء قيد عدم السالبية الأول (س١ ≤ صفر) لأن خطوطها جميعاً تشكل أضلاع المجال المشترك. لذا يمكن إعتبار أن قيد عدم السالبية الأول س١ ≤ صفر قيد زائد أمباقي قيود النموذج فهي جميعا قيودا فعالة أى قيودا غير ذائدة .

مثال (٣) : حل النموذج الخطي التالي بيانياً في حالة التدنية والتعظيم وحدد أنواع الحلول الناتجة عن هذا الحل إذا كانت لديك الدالة :

د (ص) = ٥ص١ + ٢ص٢

بشرط القيود الهيكلية :

ص١ + ص٢ ≥ ١٠

ص١ = ٥

ص١ ≤ صفر

ص٢ ≤ صفر

الحــل :

لتحديد نقطة الحل الأمثل بيانياً في كل من حالتي التدنية والتعظيم يتم استنتاج إحداثي نقطتين لكل قيد على النحو التالي :

- **<u>قيدي عدم السالبية</u> : $ص_١ \geq$ صفر ، $ص_٢ \geq$ صفر يفيدا أن منطقة الحلول المشتركة إن وجدت ستقع في الربع الأول حتماً .**
- **<u>القيد الأول</u> : $ص_١ + ص_٢ \geq ١٠$**

يحول لمعادلة : $ص_١ + ص_٢ = ١٠$ بالقسمة ÷ ١٠ فيكون

$$\frac{ص_١}{١٠} + \frac{ص_٢}{١٠} = ١$$

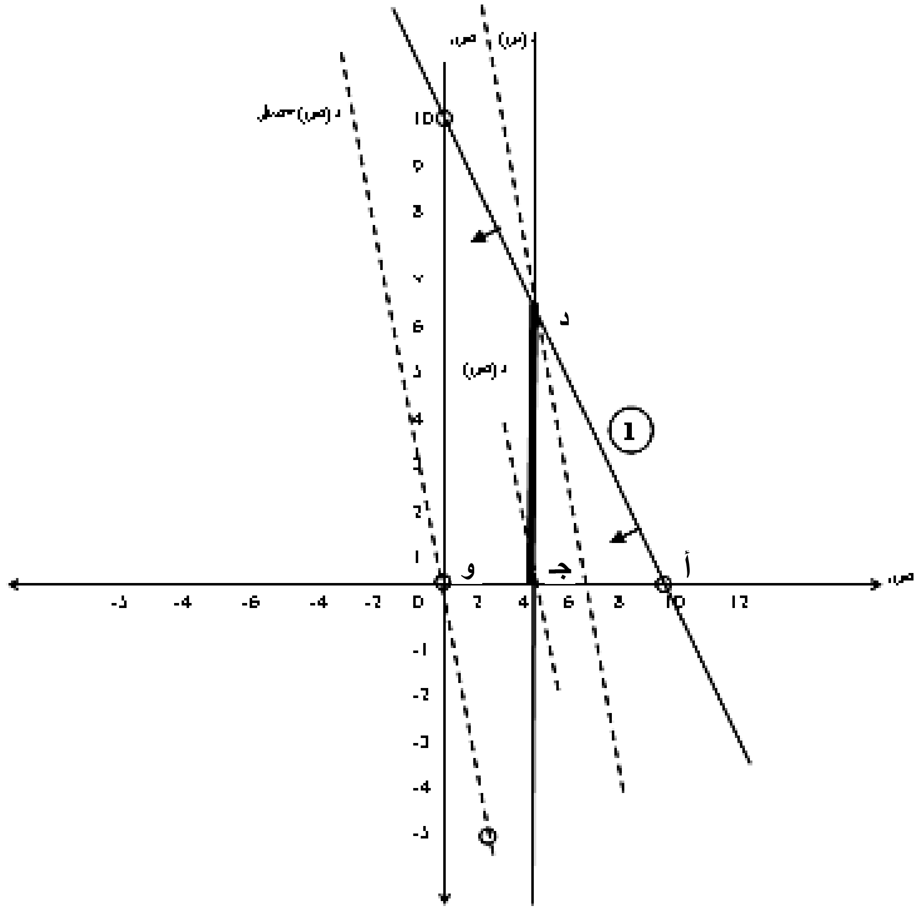
وهي معادلة خط مستقيم يقطع ١٠ وحدات من كل من المحورين الأفقي والرأسي .

- **<u>القيد الثاني</u> : $ص_١ = ٥$ وهذا القيد أصلاً في صورة معادلة. وهي معادلة خط مستقيم يقطع ٥ وحدة. من محور $ص_١$ وعمودي عليه ويوازي محور $ص_٢$.**
- **استنتاج نقطتين لمعادلة دالة الهدف : نفرض أن د (س) = صفر لذا فإن : $٥ص_١ + ٢ص_٢$ = صفر**

- **والجدول المقابل يبين إحداثيات نقطتين يمر بهما خط الدالة د(ص) = صفر**

$ص_١$	صفر	٢
$ص_٢$	صفر	– ٥

- الرسـم البيـاني لتحديـد المجـال المشـترك إن وجـد ومـن ثـم نقطـة الحـل الأمثل في حالة التدنيه وفي حالة التعظيم كما يوضحها الشكل التالي:



تصفية المجال المشترك :

- **قيدي عدم السالبية : ص١ و ص٢ .**
- **قيد عدم السالبية والقيد الأول : أ و ب**
- **قيدي عدم السالبية والقيدين الأول والثاني : الخط جـ د**

- ومن الرسم البياني يتضح أن المجال المشترك هو الخط المستقيم جـ د ومن ثم بتحريك الخط الممثل للدالة د (ص) = صفر موازياً لنفسه في اتجاه المجال المشترك جـ د نجد أنه يمس أول نقطة وهي النقطة (جـ) و آخر نقطة هي النقطة (د) . أي أن :
- نقطة الحل الأمثل في حالة التدنية هي النقطة جـ (٥ ، صفر) وعندها تكون قيمة الدالة د (ص) = ٥ $ص_١$ + ٢ $ص_٢$ = ٥ (٥) + ٢(صفر) = ٢٥ وهي أقل قيمة للدالة د (ص) .

أما نقطة الحل الأمثل في حالة التعظيم فهي النقطة د (٥، ٥) وعندها تكون قيمة دالة الهدف د (ص) = ٥ (٥) + ٢ (٥) = ٣٥ وهي أكبر قيمة للدالة د (ص) .

أما عن أنواع الحلول الناتجة عن هذا النموذج فهي : -

١ -<u>الحلول الأساسية</u> : وهي مجموعة النقاط أ ، جـ ، و ، ب ، د .

٢- <u>الحلول الممكنة</u> : أي نقطة تقع على الخط المستقيم جـ د تعتبر حلاً ممكناً ومن ثم فهناك عدد لا نهائي من نقاط الحلول الممكنة .

٣- <u>الحلول الأساسية الممكنة</u> (النقاط المتطرفة من الشكل المشترك) وهما النقطتان (جـ ، د) .

٤- <u>الحل الأمثل في حالة التدنية</u> هي النقطة جـ (٥ ، صفر) بينما الحل الأمثل في حالة التعظيم فهو عند النقطة د (٥ ، ٥) .

<u>ملحوظة (على المثال السابق) :</u> - إذا افترضنا وجود قيد على الصورة $ص_٢$ = ٣ كقيد ثالث في النموذج السابق والذي نحن بصدده في مثال (٣) . فإن المجال المشترك هنا سيكون نقطة وحيدة وهي النقطة (٥ ، ٣) وفي هذه الحالة ستكون هي نقطة الحل الأمثل سواء المشكلة أو النموذج الخطي تدنية أو تعظيم لدالة الهدف .

مثـال (٤) : حل النمـوذج الخطـي التـالي بيانيـاً فـي كل مـن حـالتي التدنيـة والتعظيم : -

د (س) = - $س_٢$ تدنية (تعظيم)

بشرط القيود الهيكلية :

$س_١ + س_٢ \leq ١$

$س_١ + س_٢ \geq ٢$

$س_١ - س_٢ \geq ١$

$س_١ - س_٢ \leq - ١$

$س_١ \leq$ صفر

$س_٢ \leq$ صفر

الحـــل : -

لحل النموذج الخطي المعطى في حالتي التدنية والتعظيم أي تحديد نقطة الحل الأمثل في الحـالتين يتم استنتاج إحداثي نقطتين لكل خط مستقيم يقابـل كل قيد من القيود الهيكلية على النحو المبين التالي : -

- **قيـدي عدم السـالبية : س١ ≤ صفر ، س٢ ≤ صفر يفيدا أن منطقة الحلول المشتركة إن وجدت ستقع في الربع الأول حتماً .**
- **القيد الأول : س١ + س٢ ≤ ١**

يحـول لمعادلـة فيصـبح : س١ + س٢ = ١ وهـي معادلـة خـط مستقيم يقطع وحدة واحدة من كل من المحـورين الأفقـي والرأسـي أمـا عن اتجـاه تحقـق القيـد فهـو فـي الاتجـاه المضـاد لنقطـة الأصـل حيـث أن المعاملات وثابت القيد موجباً . أي أن الاتجاه الذي يحقق هذا القيـد هو أعلى الخط المستقيم .

● <u>القيد الثاني</u> : $س_{١} + س_{٢} \leq ٢$

يحول لمعادلة: $س_{١} + س_{٢} = ٢$ بالقسمة ÷ ٢ فيكون :

$$\frac{س_{١}}{٢} + \frac{س_{٢}}{٢} = ١$$

وهي معادلة خط مستقيم يقطع (٢) وحدة من كل من محور $س_{١}$ ، $س_{٢}$ أما عن الاتجاه فهو في اتجاه نقطة الأصل حيث أن المعاملات موجبة وثابت القيد موجب .

● <u>القيد الثالث</u> : $س_{١} - س_{٢} \leq ١$

يحول لمعادلة فيصبح : $س_{١} - س_{٢} = ١$

والجدول المقابل يوضح إحداثي نقطتين لخط تلك المعادلة .

$س_{١}$	صفر	١
$س_{٢}$	-١	صفر

أما عن تحديد الاتجاه فيجب استخدام إحداثيات أي نقطة ولتكن نقطة الأصل كمعيار في تحديد اتجاه هذا القيد ومن ثم فباستخدام نقطة الأصل فإن:

صفر $<$ ١

أي أن نقطة الأصل (صفر ، صفر) تقع في اتجاه القيد . أو بمعنى آخر كلاً من نقطة الأصل واتجاه تحقيق القيد اتجاهاً واحداً .

● <u>القيد الرابع</u> : $س_{١} - س_{٢} \geq -١$

يحول لمعادلة فيصبح $س_{١} - س_{٢} = -١$

$س_{١}$	صفر	-١
$س_{٢}$	١	صفر

والجدول المقابل يوضح إحداثي نقطتين لخط تلك المعادلة .

أما عن تحديد الاتجاه فيجب استخدام إحداثيات أي نقطة ولتكن نقطة الأصل كمعيار في تحديد اتجاه هذا القيد ومن ثم فإن :

صفر > – ١

أي أن كل من نقطة الأصل واتجاه تحقق هذا القيد اتجاهاً واحداً .

● **<u>تمثيل معادلة دالة الهدف</u> : نفرض أن د(س) = صفر**

ومن ثم فإن : – $س_٢$ = صفر بالضرب × – ١

أي أن $س_٢$ = صفر

وهي معادلة خط مستقيم يقطع (صفر) وحده من محور $س_٢$ وعمودي عليه ويوازي محور ($س_١$) وهو ما يفيد أن خط الدالة د(س) = صفر منطبق تماماً على المحور الأفقي .

أو يمكنك استنتاج نقطتين لخط الدالة د (س) = صفر

كما توضحها العلاقة والجدول التالي :

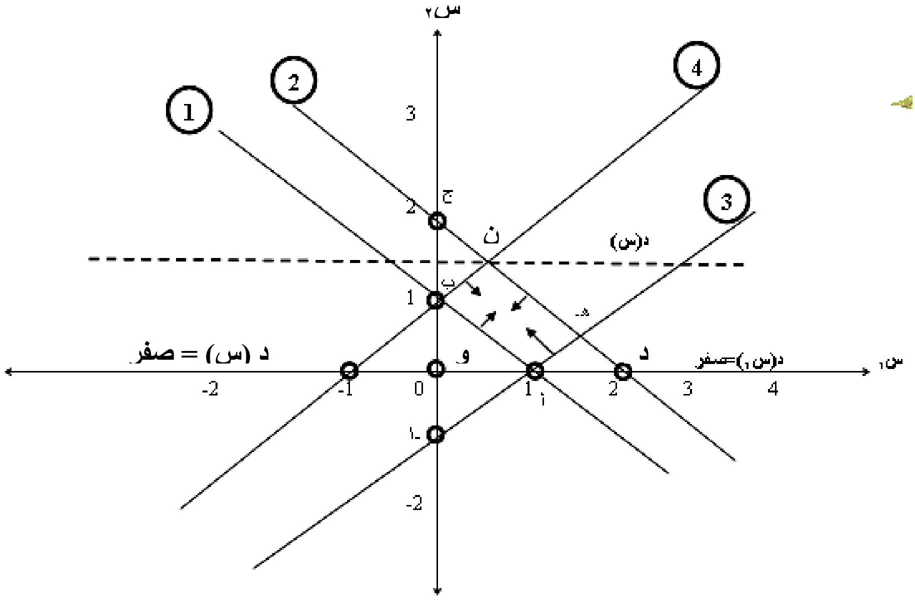
(صفر) $س_١$ – $س_٢$ = صفر

$س_١$	صفر	–١
$س_٢$	صفر	صفر

لاحظ أنه في هذا المثال حيث أن الدالة د (س) = – $س_٢$ وحيث أن $س_٢$ تحقق شرط عدم السالبية أي أن $س_٢$ ≤ صفر فهذا يفيد أن قيمة الدالة د (س) دائماً أبداً ستكون سالبة ومن ثم سوف ينعكس قرار الأمثلية أي أنه في هذه الحالة سوف يتم تحريك الخط الممثل للدالة:

د (س) = صفر موازياً لنفسه في اتجاه المجال المشترك إلى أن يمس أول نقطة في المجال المشترك والتي تعتبر بمثابة نقطة الحل الأمثل في حالة التعظيم في تلك الحالة ويتم تحريك خط تلك الدالة موازياً لنفسه إلى أن يمس آخر نقطة في المجال لتعطي نقطة الحل الأمثل في حالة التدنية.

- **الرسم البياني لتحديد المجال المشترك والحل الأمثل في حالتي التدنية والتعظيم كما يوضحه الرسم البياني التالي : –**



<u>تصفية الرسم البيانى لتحديد المجال المشترك :</u>

- **قيدي عدم السالبية : <u>س١ و س٢</u> .**
- **المجال المشترك لقيدي عدم السالبية والقيد الأول : المجال المفتوح لأعلى <u>س١ أ ب س٢</u> .**
- **المجال المشترك لقيدي عدم السالبية والقيد الأول والثاني :<u>أ ب جـ د</u>.**
- **المجال المشترك لقيدي عدم السالبية والقيد الأول والثاني والثالث هو : <u>أ ب جـ هـ</u> .**
- **المجال المشترك لقيدي عدم السالبية والقيود من الأول حتى الرابع هو:<u>أ ب ن هـ</u> وهذا الشكل الرباعي بمثابة المجال المشترك .**

<u>ومن ثم فإن</u> :

- نقطة الحل الأمثل في حالة التعظيم هي النقطة أ (١ ، صفر)
- نقطة الحل الأمثل في حالة التدنية هي النقطة ن (١/٢ ، ٣/٢)

وللتحقق من صحة الحل البياني دعنا نستنتج قيمة دالة الهدف عند أركان الشكل المشترك كما يوضحها الجدول التالي : –

نقاط الأركان	د (س) = – س٢	ملاحظات
أ (١ ، صفر)	د (س) = صفر	أكبر ما يمكن لدالة الهدف
ب (صفر ، ١)	د (س) =– ١	
ن (١/٢ ، ٣/٢)	د (س) = – ٣/٢	أقل ما يمكن لدالة الهدف
هـ (٣/٢ ، ١/٢)	د (س) = – ١/٢	

و أخيراً نؤكد على ما سبق و أن ذكرناه سابقاً وهو أنه نظراً لسالبية معامل المتغير القراري في دالة الهدف وهو ما أدى إلى انعكاس قرار الأمثلية كما يؤكده الجدول السابق .

<u>ملاحظات على الحل البياني</u> :–

من خلال الأمثلة السابقة يتضح لنا أنه عند تحديد نقطة الحل الأمثل يراعي ما يلي : –

١– إذا كانت معاملات المتغيرين القرارين موجبة فإنه يتم تحريك الخط الممثل لدالة الهدف د(س) = صفر موازياً لنفسه في اتجاه المجال إلى أن يمس أول نقطة في المجال في حالة التدنية أو إلى أن يمس آخر نقطة في المجال في حالة التعظيم .

٢– إذا كان معامل المتغيرين القرارين سالبًا ينعكس القرار السابق بمعنى أنه يتم تحريك الخط الممثل لدالة الهدف د (س) = صفر

إلـى أن يمـس أول نقطـة فـي المجـال فـي حالـة التعظـيم أو إلـى أن يمس آخر نقطة في المجال في حالة التدنية .

٣- إذا كانت أحد معاملات المتغيرين القرارين موجبة والآخر سالباً فإنـه يتم تحريك الخط الممثل لدالة الهدف د (س) = صفر موازياً لنفسـه فـي اتجـاه محـور المتغيـر ذو المعامـل الموجب فـي دالـة الهدف فـي حالة التعظيم إلى أن يمس آخر نقطة والتي تعتبر نقطة الحل الأمثل في حالة التعظيم والعكس صحيح أي أنه في حالة التدنية يتم تحريك الخط الممثل لدالة الهدف د (س) = صفر في اتجاه محور المتغير ذو المعامـل السـالب فـي دالـة الهـدف إلـى أن يمـس آخـر نقطـة فـي المجال المشترك لتعطي نقطة الحل الأمثل في حالة التدنية.

فمثلاً إذا كانت لديك الدالة د (س) = ٢س$_١$ – ٣س$_٢$ فالمنطق الرياضي يحكم بأن إذا كان خط الدالة د (س) = صفر يقطع المجال المشترك في تلك الحالة فإنه يتم تحريك خط الدالة د (س) = صفر موازياً لنفسه في اتجاه محور (س$_١$) فـي حالـة البحث عن نقطـة الحـل الأمثـل فـي حالـة التعظيم . أمـا فـي حالـة التدنيـة فيتم تحريـك خـط الدالـة د (س) = صفر في اتجاه محور س$_٢$ ذو المعامل السالب وإلى أن يمس آخر نقطة في هذا المجال لتعطي نقطة الحل الأمثل في حالة التدنية .

ب : حل النماذج الخطية باستخدام الحل الجبري (طريقة السمبلكس)

لاحظنا في الحل البياني أن الأمر يتطلب حسابات معقدة ورسم في الفراغ في حالة النماذج الخطية التي تحتوي على أكثر من متغيرين قرارين . وبالتالي لابد من استخدام طريقة حل جبرية للتوصل إلى حل المشاكل التي تحتوي على أي عدد من المتغيرات القرارية . وسنقدم في هذا الجزء طريقة عامة تسمى بطريقة السمبلكس **Simplex Algorithm** والتي تم تصميمها لحل أي نموذج خطي يحتوي على أي عدد من المتغيرات القرارية.

فالحل الجبري للنماذج الخطية يكون من خلال ما يسمى بطريقة السمبلكس وهي عبارة عن طريقة رياضية للوصول للحل الأمثل لدالة الهدف مشروطة بمجموعة القيود الهيكلية للنموذج الخطي وهذه الطريقة تقوم على أساس مبدأ التكرارية في جولات التحسين المتتالية إلى أن يتم التوصل للحل الأمثل إن أمكن .

هذا وقبل تحديد طريقة السمبلكس المستخدمة في الحل يجب أولاً أن تكون ثوابت القيود الهيكلية موجبة بمعنى إذا كان هناك قيد ثابتة (الطرف الأيسر للقيد) سالباً يتم ضرب طرفي القيد × (– ١) فتنعكس علاقة التباين . فإذا تم وضع كافة القيود في هذه الصورة ونتج عن ذلك : –

١– كافة القيود في صورة متباينات على الشكل أقل من أو يساوي (أي في صورة ≤) فإن الطريقة المستخدمة في الحل الجبري أو الجدولي تسمى بطريقة السمبلكس العادية .

٢– أما إذا كان هناك قيد على الأقل ليس على الصورة (≤) بمعنى أن هناك قيد على الأقل في صورة (=) أو في صورة أكبر من أو يساوي (≥) فإن الطرق الجبرية المستخدمة من طرق السمبلكس هي أما :

أ – طريقة (م) الكبرى

The M-Technique (or Method) of Penalty .

ب – طريقة السمبلكس ذات المرحلتين

The Two– Phase Technique

وكما سيتضح لنا في دراسة هذا الجزء أن المعلومات التي سيتم الحصول عليها من طريقة السمبلكس ستفيد كثيراً في التوصل لمجموعة أخرى من النتائج بالإضافة للوصول للحل الأمثل للنموذج الخطي والقيم المثلى للمتغيرات القرارية . فهذه الطريقة كما سنرى فيما بعد تقدم التفسير الاقتصادي للمشكلة وتظهر ما يسمى بتحليل الحساسية للنموذج الخطي . وكما ذكرنا حالاً فإن طريقة السمبلكس تقوم بحل النموذج الخطي من خلال عملية التحسن التدريجي حيث يتم تكرار نفس خطوات الحل لعدد من المرات قبل التوصل للحل الأمثل .

١- <u>طريقة السمبلكس العادية :</u>

وتستخدم هذه الطريقة في حل النموذج الخطي الذي تكون فيه ثوابت القيود موجبة وكافة القيود على صورة متباينات في شكل ($\leq$) . وتتلخص خطوات الحل باستخدامها فيما يلي : –

١– ضع النموذج الخطي في الصورة المعيارية (وذلك من خلال إضافة متغير متمم لكل قيد ويحول لمعادلة .

٢– تصوير جدول الحل المبدئي وذلك باعتبار المتغيرات المتممة المضافة هي بمثابة المتغيرات الأساسية وفيما يلي صورة لجدول الحل المبدئي لهذه الطريقة :

" جدول الحل المبدئي "

<table>
<tr><th colspan="2">معاملات دالة الهدف (جـ ر)</th><th>معاملات المتغيرات القرارية والمتممة</th><th rowspan="2">قيم المتغيرات الأساسية(قيم الحل)</th><th rowspan="2">النسبة لتحديد المتغير الخارج</th></tr>
<tr><th>متغيرات أساسية (م.أ)</th><th>معاملات متغيرات أساسية(م.م.أ)</th><th>المتغيرات القرارية والمتممة</th></tr>
<tr><td>المتغيرات المتممة</td><td></td><td>معاملات المتغيرات في القيود</td><td>ثوابت القيود</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">هـ ر = مجموع حواصل ضرب (م.م.أ)
× أعمدة معاملات المتغيرات</td><td>هـ ر</td><td rowspan="2">قيمة دالة الهدف</td><td rowspan="2">المشكلة تعظيم (أو تدنية)</td></tr>
<tr><td colspan="2">صف اختبار الأمثلية</td><td>هـ ر – جـ ر</td></tr>
</table>

هذا ولكي يكون جدول الحل المبدئي أو أي جدول يعبر عن أحد جولات تحسين الحل حلاً أمثلاً إذا تحقق فيه شرطين أساسين وهما : –

أ – <u>شرط الإمكانية</u> : **Feasibility Condition**

وهو يفيد وجوب أن تكون كافة قيم الحل (قيم المتغيرات الأساسية في الجدول محل الاختبار) قيماً محققة لشرط عدم السالبية أي أكبر من أو تساوي الصفر .

ب– <u>شرط الأمثلية</u> : **Optimality Condition**

وهو يفيد وجوب أن يحتوي صف اختبار الأمثلية (هـ ر – جـ ر) على معاملات صفرية فقط تناظر (أسفل) أعمدة المتغيرات الأساسية أما معاملات المتغيرات الغير أساسية فيجب أن تكون معاملات موجبة جميعاً في حالة مشاكل التعظيم أو سالبة في حالة مشاكل التدنية حتى يكون الحل الأمثل حلاً وحيداً .

<u>ملحوظة</u> : إذا تحقق شرط الأمثلية وكان هناك معامل أحد المتغيرات الغير أساسية معامل صفري في صف اختبار الأمثلية فهذا يفيد أننا بصدد حل أمثل متعدد الحلول المثلى بمعنى أن هناك حلول مثلى أخرى تعطي نفس قيمة الحل الأمثل لدالة الهدف وهو ما سيرد فيما بعد في الحالات الخاصة .

٣- إذا لم يكن جدول الحل المبدئي حلاً أمثلاً فيتم إجراء تحسين للحل وذلك من خلال الخطوات التالية : -

أ - تحديد المتغير الداخل في الحل (العمود المحوري) Pivot Column وهو عبارة عن المتغير الذي يقابل المعامل الأكثر سالبية في صف اختبار الأمثلية (وبمعنى آخر أقل قيمة عددياً أو أكبر قيمة مطلقة للمعاملات السالبة في الصف (هـ ر - جـ ر) وذلك في حالة مشاكل التعظيم والعكس صحيح في حالة التدنية حيث يتم اختيار المتغير ذو أكبر معامل موجب في صف اختبار الأمثلية كمتغير داخل في الحل .

ب - تحديد المتغير الخارج من الحل (الصف المحوري) Pivot Row

بعد تحديد عمود المحور (المتغير الداخل في الحل) يتم حساب النسب التي تقابل العناصر الموجبة فقط في هذا العمود المحوري وهذه النسب هي عبارة خارج قسمة عمود قيم الحل على العناصر الموجبة المقابلة في العمود المحوري ويتم اختيار الصف المقابل لأقل نسبة سواء المشكلة تعظيم أو تدنية كصف محوري أو المتغير الخارج من الحل .

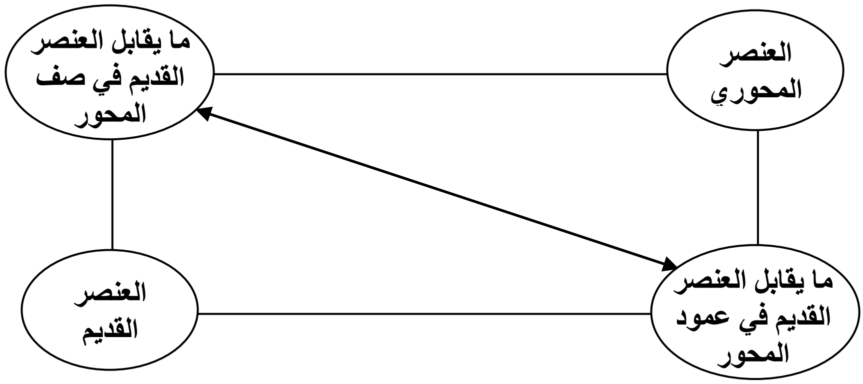
جـ - تحديد العنصر المحوري Pivot Element

العنصر المحوري هو تقاطع العمود المحوري مع الصف المحوري . هذا وبعد تحديد العمود المحوري والصف المحوري ومن ثم العنصر المحوري يتم الآتي : -

- قسمة الصف المحوري على العنصر المحوري .
- عمود المحور تصبح عناصره أصفاراً بما في ذلك المقابل لصف اختبار الأمثلية فيما عدا العنصر المحوري أصبحت قيمته الوحدة من نتاج الخطوة السابقة . أما العنصر المقابل لصف مجاميع حواصل الضرب فهو نفس معامل المتغير أعلى الجدول .
- باقي عناصر الجدول يتم استنتاجها من خلال إحدى الطريقتين التاليتين : –

<u>الأولى</u> : <u>استنتاج كل عنصر على حدة :</u>

حيث يتم استنتاج العناصر الجديدة كما هو موضح في الشكل والقانون المبين التالي :



$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \frac{\text{ما يقابل القديم في صف المحور} \times \text{ما يقابله في عمود المحور}}{\text{العنصر المحوري}}$$

<u>الثانية</u> : – <u>وهي استنتاج صف بالكامل</u>:– وفي هذه الحالة يتم استنتاج الصفوف الداخلية بالكامل صف تلو الآخر وذلك من خلال القاعدة التالية:

الصف الجديد = الصف القديم – ما يقابل الصف القديم في عمود المحور × الصف المحوري بعد قسمته على العنصر المحوري

*** وبعد استكمال كافة الصفوف المقابلة للمتغيرات الأساسية يتم حساب صف مجاميع حواصل الضرب (هـ) من خلال ضرب عمود معاملات المتغيرات الأساسية (م . م . أ) في أعمدة المتغيرات . ومنها يتم استنتاج صف اختبار الأمثلية ($هـ_ر$ – $جـ_ر$) وهو عبارة عن الفرق ما بين مجاميع حواصل الضرب ($هـ_ر$) وبين المعاملات أعلى الجدول ($جـ_ر$). ثم يتم اختبار مدى تحقق شرطي الإمكانية والأمثلية والتحسين مرة أخرى متى لزم الأمر للوصول للحل الأمثل .**

والأمثلة التالية توضح آلية الحل باستخدام طريقة السمبلكس العادية .

<u>مثال (١)</u> : – أوجد قيم $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، التي تجعل الدالة

د (س) = ٥ $س_١$ + ٤$س_٢$ + ٦$س_٣$ (أكبر ما يمكن)

بشرط القيود : –

$س_١$ + $س_٢$ + $س_٣$ ≤ ١٠٠

٣$س_١$ +٢ $س_٢$ + ٤$س_٣$ ≤ ٢٠٠

٣$س_١$ +٢ $س_٢$ ≤ ١٥٠

$س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ≥ صفر

<u>الحـــــل</u> : -

لاحظ أولاً أن ثوابت القيود جميعها موجبة وكافة القيود على شكل متباينات في صورة (≥) لذا فالحل يكون باستخدام طريقة السمبلكس العادية وذلك من خلال اتباع الخطوات السابقة على النحو التالي : -

- وضع النموذج الخطي في الصورة المعيارية وذلك من خلال إضافة متغير متمم لكل قيد ويحول لمعادلة :

د (س) = ٥س$_{١}$ + ٤س$_{٢}$ + ٦س$_{٣}$ + (٠) س$_{٤}$+ (٠) س$_{٥}$ + (٠)س$_{٦}$
(تعظيم)

<u>بشرط القيود</u> : -

س$_{١}$ + س$_{٢}$ + س$_{٣}$ + (س$_{٤}$) = ١٠٠

٣س$_{١}$ +٢ س$_{٢}$ + ٤س$_{٣}$ + (س$_{٥}$) = ٢٠٠

٣س$_{١}$ +٢ س$_{٢}$ + (س$_{٦}$) = ١٥٠

س$_{ر}$ ≤ صفر حيث ر = ١ ، ٢ ، ..... ، ٦

- تصوير جدول الحل المبدئي باعتبار المتغيرات المتممة بمثابة متغيرات أساسية على النحو التالي :

جدول الحل المبدئي (الجدول الأول)

م . أ	جـ ر / م. م. أ	٥	٤	٦	صفر	صفر	صفر	قيم الحل	النسبة
		س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦		
س٤	صفر	١	١	١	١	صفر	صفر	١٠٠	١٠٠/١ = ١٠٠
س٥	صفر	٣	٢	٤	صفر	١	صفر	٢٠٠	٢٠٠/٤ = ٥٠ →
س٦	صفر	٣	٢	صفر	صفر	صفر	١	١٥٠	.
هـ ر		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	تعظيم
هـ ر – جـ ر		-٥	-٤	-٦	صفر	صفر	صفر		

↑

لاحظ أن في جدول الحل المبدئي قيم الحل (١٠٠ ، ٢٠٠ ، ١٥٠) جميعاً موجبة لذا فالحل ممكن . لكن صف اختبار الأمثلية يحتوي على معاملات سالبة تقابل أعمدة المتغيرات الغير أساسية في هذا الجدول وهي س١ ، س٢ ، س٣ وحيث أن المشكلة تعظيم لذا فالحل غير أمثل ويحتاج إلى التحسين.

لذا يتم الآتي : –

١– تحديد المتغير الداخل (العمود المحوري) وهو عمود (س٣) والذي يناظر المعامل (– ٦) الأكثر من حيث السالبية .

٢– تحديد المتغير الخارج من الأساس (الصف المحوري) باستبعاد النسبة الثالثة والتي تقابل الرقم الصفري في عمود المحوري ومن ثم فإننا نختار النسبة الأقل وهي (٥٠) لتقابل صف المحور أي أن المتغير س٥ هو المتغير الخارج من الأساس ليحل محله المتغير (س٣) الداخل ضمن متغيرات الأساس في الجدول التالي .

٣- تحديد العنصر المحوري وهو تقاطع عمود المحور ($س_٣$) مع صف المحور ($س_٥$) ومن ثم فإن الرقم أو العنصر (٤) هو بمثابة العنصر المحوري

<u>ومن ثم يتم إجراء التحسين على النحو التالي</u> : -

- تصبح المتغيرات الأساسية هي $س_٤$ ، $س_٣$ ، $س_٦$ على الترتيب بدلاً من $س_٤$ ، $س_٥$ ، $س_٦$.
- قسمة الصف الثاني من جدول الحل المبدئي على العصر المحوري وهو العنصر (٤) ليعطي العناصر التالية :

($\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، صفر ، $\frac{١}{٤}$ ، صفر ، ٥٠)

- عمود ($س_٣$) تكتب عناصره أصفاراً ماعدا العنصر المحوري قيمته أصبحت الواحد الصحيح من الخطوة السابقة.
- استنتاج صف $س_٤$ الجديد (أي في الجدول الثاني) : -

صف($س_٤$) الجديد = صف($س_٤$) القديم – ما يقابل صف($س_٤$) في عمود المحور القديم × صف المحور بعد قسمته على العنصر المحوري

= $س_٤$ القديم – ١ ×($\frac{٣}{٤}$، $\frac{١}{٢}$، ١ ، صفر، $\frac{١}{٤}$، صفر ، ٥٠)

= $س_٤$ القديم – صف المحور بعد قسمته على الصفر المحوري

- استنتاج صف ($س_٦$) الجديد :

صف ($س_٦$) الجديد = صف ($س_٦$) القديم – ما يقابل صف ($س_٦$) في عمود المحور القديم × صف المحور بعد قسمته على العنصر المحوري

= $س_٦$ القديم – صفر × صف المحور بعد قسمته على العنصر المحوري

<u>ومن ثم فإن</u> :

صف ($س_٦$) الجديد = صف ($س_٦$) القديم في تلك الحالة .

والجدول التالي يبين جولة التحسين الأولى في الحل :

الجدول الثاني (التحسين الأول)

م . أ	جـ ر / م. م. أ	٥	٤	٦	صفر	صفر	صفر	قيم الحل	النسبة
		س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦		
س٤	صفر	١/٤	١/٢	صفر	١	-١/٤	١	٥٠	١٠٠
س٣	٦	٣/٤	١/٢	١	صفر	١/٤	صفر	٥٠	١٠٠
س٦	صفر	٣	٢	صفر	صفر	صفر	١	١٥٠	٧٥ ←
هـ ر		٩/٢	٣	٦	صفر	٣/٢	صفر	٣٠٠	تعظيم
هـ ر – جـ ر		-١/٢	-١	صفر	صفر	٣/٢	صفر		

وبملاحظة الجدول الثاني السابق نجد أن الحل ممكن لكنه لا زال غير أمثل حيث لا زالت بعض معاملات المتغيرات الغير أساسية معاملات سالبة وحيث أن المشكلة تعظيم لدالة الهدف لذا فالجدول الثاني يعتبر حل غير أمثل لذا يتم التحسين بنفس الآلية السابقة فنستنتج الجدول التالي :

الجدول الثالث (التحسين الثاني)

م . أ	جـ ر / م. م. أ	٥	٤	٦	صفر	صفر	صفر	قيم الحل	النسبة
		س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦		
س٤	صفر	-١/٢	صفر	صفر	١	-١/٤	-١/٤	٢٥/٢	
س٣	٦	صفر	صفر	١	صفر	١/٤	-١/٤	٢٥/٢	
س٢	٤	٣/٢	١	صفر	صفر	صفر	١/٢	٧٥	
هـ ر		٦	٤	٦	صفر	٣/٢	١/٢	٣٧٥	تعظيم
هـ ر – جـ ر		١	صفر	صفر	صفر	٣/٢	١/٢		

في الجدول الأخير (الجدول الثالث) يلاحظ الآتي :

١- كافة قيم المتغيرات الأساسية (قيم $س_٢$ ، $س_٣$ ، $س_٤$) والممثلة في عمود قيم الحل قيمًا موجبة لذا فالحل ممكن .

٢- كافة معاملات صف اختبار الأمثلية ($هـ_ر - جـ_ر$) معاملات :

- صفرية فقط تناظر (أو أسفل) أعمدة المتغيرات الأساسية ($س_٢$ ، $س_٣$ ، $س_٤$) .
- **وموجبة جميعًا تناظر (أو أسفل) أعمدة المتغيرات الغير أساسية وهي $س_١$ ، $س_٥$ ، $س_٦$. وحيث أن المشكلة تعظيم لدالة الهدف لذا فالحل أمثل ووحيد (أي لا يوجد تعدد للحل الأمثل) .**

ومن ثم فإن الحل الأمثل والوحيد هو :

$س_١^* = س_٥^* = س_٦^* =$ صفر ،

$س_٢^* = ٧٥$ ، $س_٣^* = \frac{٢٥}{٢}$ ، $س_٤^* = \frac{٢٥}{٢}$ ،

$د(س^*) = ٣٧٥$

ملاحظات على الحل الجدولي (طريقة السمبلكس) :

١- أعمدة المتغيرات الأساسية في أي جدول تشكل أعمدة مصفوفة وحدة ففي الجدول الأول من المثال السابق فإن أعمدة مصفوفة الوحدة أسفل المتغيرات الأساسية $س_٤$ ، $س_٥$ ، $س_٦$ أما في الجدول الثاني فإن أعمدة مصفوفة الوحدة أسفل المتغيرات الأساسية $س_٤$ ، $س_٣$ ، $س_٦$ على الترتيب أما في الجدول الأخير (الجدول الثالث) فإن أعمدة مصفوفة الوحدة أسفل المتغيرات $س_٤$ ، $س_٣$ ، $س_٢$ على الترتيب أي بنفس ترتيب المتغيرات الأساسية في تلك الجداول .

٢- معاملات المتغيرات الأساسية في صف اختبار الأمثلية ($هـ_ر - جـ_ر$) معاملات صفرية دائمًا أبدًا سواء كان جدول الحل أمثل أم غير أمثل .

٣- عند إجراء التحسين لاحظ الآتي :

أ- إذا وجد عنصر صفري في عمود المحور يتم نقل صفه في الجدول التالي كما هو دون تغير . وكذلك إذا وجد عنصر صفري في صف المحور ينقل عموده كما هو دون تغير .

ب-إذا وجد عنصر الوحدة (+١) في عمود المحور فإن صفه الجديد سيكون بمثابة صفه القديم مطروحًا منه صف المحور بعد قسمته على العنصر المحوري والعكس صحيح أي إذا وجد عنصر (-١) في عمود المحور فإن صفه الجديد سيكون عبارة عن مجموع صفه القديم وصف المحور بعد قسمته على العنصر المحوري .

٤- في جدول السمبلكس الأخير (جدول الحل الأمثل) لاحظ أن المتغيرات الأساسية بالترتيب كما هي واردة في الجدول الأخير عبارة عن $س_٤$ ، $س_٣$ ، $س_٢$ وأعمدة تلك المتغيرات في جدول الحل المبدئي يمكن كتابتها في شكل مصفوفي وليكن المصفوفة (أ) على الصورة :

$$\text{من واقع جدول الحل المبدئي} \qquad \begin{array}{ccc} س_٢ & س_٣ & س_٤ \\ \left(\begin{array}{c} ١ \\ ٢ \\ ٢ \end{array}\right. & \begin{array}{c} ١ \\ ٤ \\ \text{صفر} \end{array} & \left.\begin{array}{c} ١ \\ \text{صفر} \\ \text{صفر} \end{array}\right) \end{array} = \text{أ}$$

أما عن أعمدة المتغيرات الأساسية في جدول الحل المبدئي $س_٤$ ، $س_٥$ ، $س_٦$ من واقع جدول الحل الأمثل (الجدول الأخير) دعنا نسميها بالمصفوفة (ب) على الصورة :

$$\text{ب} = \begin{array}{ccc} \text{س}_{٦} & \text{س}_{٥} & \text{س}_{٤} \\ \end{array}$$

$$\text{من واقع جدول الحل الأمثل} \qquad \begin{pmatrix} \frac{-١}{٤} & \frac{-١}{٤} & ١ \\ \frac{-١}{٤} & \frac{١}{٤} & \text{صفر} \\ \frac{١}{٢} & \text{صفر} & \text{صفر} \end{pmatrix} = \text{ب}$$

والآن دعنا نقوم بإيجاد حاصل ضرب المصفوفتين أ × ب أو ب أ على النحو التالي

$$\begin{pmatrix} \frac{-١}{٤} & \frac{-١}{٤} & ١ \\ \frac{-١}{٤} & \frac{١}{٤} & \text{صفر} \\ \frac{١}{٢} & \text{صفر} & \text{صفر} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٤ & \text{صفر} \\ ٢ & \text{صفر} & \text{صفر} \end{pmatrix} = \text{أ ب}$$

$$I_{٣\times٣} \text{ مصفوفة الوحدة} = \begin{pmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} & ١ \\ \text{صفر} & ١ & \text{صفر} \\ ١ & \text{صفر} & \text{صفر} \end{pmatrix} =$$

أي أن ناتج ضرب مصفوفة متغيرات أساس الحل الأمثل من واقع جدول الحل المبدئي (المصفوفة أ) في مصفوفة متغيرات أساس الحل المبدئي من واقع جدول الحل الأمثل (المصفوفة ب) ما هو إلا مصفوفة الوحدة (I) .

٥- كذلك إذا تم ضرب مصفوفة متغيرات أساس الحل المبدئي من واقع جدول الحل الأمثل أي المصفوفة ب السابق تعريفها في عمود ثوابت القيود (قيم الحل من واقع جدول الحل المبدئي) فإن الناتج هو عبارة عن القيم المثلى لمتغيرات أساس الحل الأمثل وبالتطبيق على المثال السابق نجد أن :

[ب] × قيم ثوابت قيود النموذج = القيم المثلى لمتغيرات الأساس في جدول الحل الأمثل أي أن :

$$\begin{pmatrix} \frac{٥٠}{٤} \\ \frac{٥٠}{٤} \\ \frac{١٥٠}{٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠٠ \\ ٢٠٠ \\ ١٥٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-١}{٤} & \frac{-١}{٤} & ١ \\ \frac{-١}{٤} & \frac{١}{٤} & \text{صفر} \\ \frac{١}{٢} & \text{صفر} & \text{صفر} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{٢٥}{٢} \\ \frac{٢٥}{٢} \\ ٧٥ \end{pmatrix}$$

كما أن صف معاملات متغيرات أساس الحل المبدئي من واقع جدول الحل الأمثل المقابل للصف هـ ر في جدول الحل الأمثل إذا تم ضربه في ثوابت القيود للنموذج يعطي القيمة المثلى لدالة الهدف. أي أن:

$$[\text{صفر} \quad \frac{٣}{٢} \quad \frac{١}{٢}] \begin{pmatrix} ١٠٠ \\ ٢٠٠ \\ ١٥٠ \end{pmatrix} = \text{صفر} + {}^{٦٠٠}/_{٢} + {}^{١٥٠}/_{٢} = ٣٧٥$$

وهي نفس قيم الحل الأمثل لمتغيرات أساس الحل الأمثل (الأخير) والقيمة المثلى لدالة الهدف .

٦- عند الانتقال من جدول حل للنموذج الخطي إلى جدول حل تالي آخر أفضل منه من خلال جولات تحسين السمبلكس المتتابعة ، بمعنى أنه إذا كانت دالة الهدف تعظيم سنجد أن قيمة دالة الهدف تتزايد من خطوة لأخرى أو من جدول لآخر والعكس صحيح في حالة التدنية .

هذا وإذا أمعنا النظر فإننا سنجد أن قيمة الدالة د (س) في حالة التعظيم سوف تزداد في كل جدول بقيمة تعادل حاصل ضرب معامل المتغير الداخل في صف الأمثلية (هـ ر – جـ ر) × عدد الوحدات التي سوف يساهم بها المتغير المرشح للدخول وهي بمثابة أقل نسبة في العمود الأخير في الجدول وهي المحددة للمتغير الخارج من متغيرات الأساس . فمثلاً بالنظر

لقيمة دالة الهدف في جدول الحل المبدئي سنجد أن قيمة الدالة د(صفر) . أما في الجدول الثاني (التحسين الأول) سنجد أن د(س) = ٣٠٠ أي أن مقدار الزيادة في قيمة دالة الهدف هو ٣٠٠ – صفر = ٣٠٠ . فإذا رجعنا للجدول الأول سنجد أن أقل نسبة هي ٥٠ وحيث أن المتغير الداخل ضمن الأساس في الجدول الثاني هو س$_{٣}$ ومعامله في الصف الأخير من الجدول :

(هـ $_{٣}$ – جـ $_{٣}$ = ٦) بإهمال الإشارة أي أن الزيادة التي ستطرأ على قيمة دالة الهدف بالجدول الثاني هي عبارة عن ٥٠ × ٦ = ٣٠٠ وهي بالفعل قيمة د (س) في الجدول الثاني كذلك إذا تتبعنا الجدول الثالث فإن قيمة دالة الهدف زادت عن الجدول الثاني بمقدار ٣٧٥ – ٣٠٠ = ٧٥ وهذا المقدار هو أيضاً عبارة عن حاصل ضرب المعامل (هـ $_{٢}$ – جـ $_{٢}$ = ١ مع إهمال الإشارة) × أقل نسبة أي ٧٥ أي أن :

٣٧٥ – ٣٠٠ = ١ × ٧٥

<u>مثال (٢)</u> : – أوجد قيم س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ التي تجعل الدالة :

د(س) = ٣ س$_{١}$ +٢ س$_{٢}$ + ٥س$_{٣}$ (تعظيم)

بشرط :

س$_{١}$ +٢ س$_{٢}$ + س$_{٣}$ $\geq$ ٤٣٠

– ٣س$_{١}$ – ٢س$_{٣}$ $\leq$ – ٤٦٠

– س$_{١}$ – ٤س$_{٢}$ $\leq$ – ٤٢٠

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ $\leq$ صفر

<u>الحـــل</u> :

بداية وقبل تحديد طريقة السمبلكس المناسبة يجب أولاً جعل ثوابت القيود موجبة لذا يجب ضرب طرفي القيد الثاني والثالث × (– ١) حتى تصبح الثوابت موجبة جميعاً لكافة القيود. فيكون لدينا النموذج الخطي التالي:

د(س) = ٣ $س_{١}$ +٢ $س_{٢}$ + ٥$س_{٣}$ (تعظيم)

بشرط القيود :

$س_{١}$ +٢ $س_{٢}$ + $س_{٣}$ ≥ ٤٣٠

٣$س_{١}$ + ٢$س_{٣}$ ≥ ٤٦٠

$س_{١}$ + ٤$س_{٢}$ ≥ ٤٢٠

$س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ≤ صفر

والآن أصبحت كافة القيود ثوابتها موجبة . وحيث أن كافة القيود على شكل متباينات في صورة (≥) . لذا فطريقة الحل المناسبة هي طريقة السمبلكس العادية . لذا يجب الآن وضع النموذج في الصورة المعيارية وذلك على النحو التالي :

د(س) = ٣$س_{١}$ + ٢$س_{٢}$ + ٥$س_{٣}$ (تعظيم)

$س_{١}$ +٢ $س_{٢}$ + $س_{٣}$ + ($س_{٤}$) = ٤٣٠

٣ $س_{١}$ +٢$س_{٣}$ + ($س_{٥}$) = ٤٦٠

$س_{١}$ +٤ $س_{٢}$ + ($س_{٦}$) = ٤٢٠

$س_{ر}$ ≤ صفر حيث ر = ١ – ٦

ثم نبدأ في إعداد جدول الحل المبدئي والذي يأخذ الصورة التالية

جدول الحل المبدئي (الجدول الأول)

م . أ	جـ ر / م. م. أ	٣	٢	٥	صفر	صفر	صفر	قيم الحل	النسبة
		$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$	$س_{٥}$	$س_{٦}$		
$س_{٤}$	صفر	١	٢	١	١	صفر	صفر	٤٣٠	٤٣٠
$س_{٥}$	صفر	٣	صفر	(٢)	صفر	١	صفر	٤٦٠	→٢٣٠
$س_{٦}$	صفر	١	٤	صفر	صفر	صفر	١	٤٢٠	-
هـ ر		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	تعظيم
هـ ر – جـ ر		–٣	–٢	–٥	صفر	صفر	صفر		

↑

والآن سوف نقوم بتحسين الحل طالما أننا بصدد مشكلة تعظيم حيث أن هناك معاملات سالبة في صف اختبار لأمثلية هـ ر – جـ ر . لذا يتم الآتي:

١- تحديد المتغير الداخل (العمود المحوري) : وهو المتغير الغير أساسي الذي يناظر المعامل الأكثر سالبية في صف الأمثلية وهو عمود $س_٣$ ومن ثم فالمتغير الداخل في الحل ضمن الأساس هو ($س_٣$).

٢- تحديد المتغير الخارج من الأساس : باستبعاد حساب النسب التي تقابل أصفارًا أو معاملات سالبة في عمود المحور فإننا بصدد حساب النسبتين ٤٣٠ ÷ ١ = ٤٣٠ ، ٤٦٠ ÷ ٢ = ٢٣٠ والنسبة الأقل تقابل صف ($س_٥$) لذا فإن ($س_٥$) هي المتغير الخارج من الحل

٣- يتقاطع صف المحور مع عمود المحور في العنصر المحوري (٢) .

لذا يتم الحسين على النحو التالي:

- **استنتاج صف المحور الجديد من خلال قسمة الصف المحوري ÷ العنصر المحوري فيصبح الصف المحوري الجديد عناصره هي :**
  [٣/٢ ، صفر ، ١ ، صفر ، ١/٢ ، صفر ، ٢٣٠]
- **استنتاج صف س٤ الجديد وهو عبارة عن :**

$س_٤$ القديم – مقابل صف $س_٤$ في عمود المحور × صف المحور الجديد

١ – ١ × ٣/٢ = – ١/٢
٢ – ١ × صفر = ٢
١ – ١ × ١ = صفر
١ – ١ × صفر = ١
صفر – ١ × ١/٢ = – ١/٢
صفر – ١ × صفر = صفر
٤٣٠ – ١ × ٢٣٠ = ٢٠٠

- **<u>استنتاج صف س٦ الجديد :</u>**

س٦ الجديد = س٦ القديم – ما يقابل صف س٦ في عمود المحور القديم × صف المحور الجديد

وحيث إن مقابل صف س٦ القديم في العمود المحوري صفرًا لذا فإن :

صف س٦ الجديد = صف س٦ القديم

أما عن صف هـ ر وصف اختبار الأمثلية فيتم استنتاجهم في الجدول التالي:

جدول السمبلكس الثاني (التحسين الأول)

م . أ	جـ ر / م. م. أ	٣	٢	٥	صفر	صفر	صفر	قيم الحل	النسبة
		س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦		
س٤	صفر	-١/٢	(٢)	صفر	١	-١/٢	صفر	٢٠٠	١٠٠←
س٣	٥	٣/٢	صفر	١	صفر	١/٢	صفر	٢٣٠	-
س٦	صفر	١	٤	صفر	صفر	صفر	١	٤٢٠	١٠٥
هـ ر		١٥/٢	صفر	٥	صفر	٥/٢	صفر	١١٥٠	تعظيم
هـ ر – جـ ر		٩/٢	-٢	صفر	صفر	٥/٢	صفر		

↑

- **<u>اختبار الأمثلية</u> : بعد حساب صف اختبار الأمثلية في الجدول السابق نجد أنه لا زالت هناك معاملات سالبة في صف اختبار الأمثلية (معامل س٢) وهو ما يفيد أن الجدول الثاني لا يعتبر جدول الحل الأمثل وهو ما يتطلب اعتبار جولة تحسين تالية . وذلك باعتبار عمود (س٢) كعمود محوري أو متغير داخل في الحل ثم يتم حساب النسب المقابلة للمتغيرات الأساسية في الجدول السابق والتي تزيد فيها المعاملات في عمود المحور عن الصفر (أي المقابلة لصف س٤ ، س٦) وهذه النسب هي :**

($\frac{٢٠٠}{٢}$ ، $\frac{٤٢٠}{٤}$) = (١٠٠ ، ١٠٥) والنسبة الأقل هي ١٠٠ وهو ما يفيد اعتبار المتغير (س$_{٤}$) المقابل للنسبة الأقل هو بمثابة المتغير الخارج من الحل (صف المحور) . ومن ثم فإن العنصر المحوري هو الرقم (٢) . ومن ثم فإنه يتم التحسين على النحو التالي :

المتغيرات الأساسية تصبح س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ ، س$_{٦}$ ، على الترتيب .

صف المحور الجديد = صف المحور القديم ÷ ٢

فتكون عناصر صف المحور الجديد هي :

($-^{١}/_{٤}$ ، ١ ، صفر ، $^{١}/_{٢}$ ، $-^{١}/_{٤}$ ، صفر ، ١٠٠)

- استنتاج صف س$_{٣}$ الجديد (أي في الجدول الثالث) وهو سيكون مساويًا لصف س$_{٣}$ القديم (في الجدول الثاني) نظرًا لأن صف س$_{٣}$ القديم يتقاطع مع العمود المحوري في عنصر الصفر .
- استنتاج صف س$_{٦}$ الجديد : وهو عبارة عن :

صف س$_{٦}$ القديم – ما يقابل صف س$_{٦}$ في عمود المحور القديم × صف المحور الجديد

١ – ٤ × ($-^{١}/_{٤}$) = ٢

٤ – ٤ × ١ = صفر

صفر – ٤ × صفر = صفر

صفر – ٤ × $^{١}/_{٢}$ = −٢

صفر – ٤ × ($-^{١}/_{٤}$) = ١

١ – ٤ × صفر = ١

٤٢٠ – ٤ × ١٠٠ = ٢٠

أما عن صف مجاميع حواصل الضرب (هـ $_{ر}$) وصف اختبار الأمثلية فيتم استنتاجهم في الجدول على النحو التالي :

الجدول الثالث

م . أ	جـ$_{ر}$ / م. م. أ	٣	٢	٥	صفر	صفر	صفر	قيم الحل	النسبة
		س$_{١}$	س$_{٢}$	س$_{٣}$	س$_{٤}$	س$_{٥}$	س$_{٦}$		
س$_{٢}$	٢	−١/٤	١	صفر	١/٢	−١/٤	صفر	١٠٠	
س$_{٣}$	٥	٣/٢	صفر	١	صفر	١/٢	صفر	٢٣٠	
س$_{٦}$	صفر	٢	صفر	صفر	−٢	١	١	٢٠	
هـ$_{ر}$		٧	٢	٥	١	٢	صفر	١٣٥٠	تعظيم
هـ$_{ر}$ − جـ$_{ر}$		٤	صفر	صفر	١	٢	صفر		

وفي جدول الحل الخير (الجدول الثالث) يلاحظ الآتي :

١- حيث أن كافة عناصر قيم الحل المقابلة للمتغيرات الأساسية قيمًا جميعًا موجبة لذا فالحل ممكن ويحقق شروط عدم السالبية .

٢- وحيث إن كافة معاملات صف اختبار الأمثلية (هـ$_{ر}$ − جـ$_{ر}$) معاملات:

- **صفرية فقط تناظر أعمدة المتغيرات الأساسية (س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ ، س$_{٦}$)**
- **وموجبة جميعًا تناظر أعمدة المتغيرات الغير أساسية وهي س$_{١}$ ، س$_{٤}$ ، س$_{٥}$. وحيث أن المشكلة تعظيم لدالة الهدف لذا فالحل أمثل ووحيد وهو :**

س$_{١}^{*}$ = س$_{٤}^{*}$ = س$_{٥}^{*}$ = صفر ، س$_{٢}^{*}$ = ١٠٠ ، س$_{٣}^{*}$ = ٢٣٠

، س$_{٦}^{*}$ = ٢٠ ، د(س*) = ١٣٥٠ .

المغزى الاقتصادى من حل النماذج الخطية (أسعار ظل الموارد) :

مما لا شك فيه أن من أهم النتائج المستخلصة من حل النماذج الخطية أنها تعطي عنصراً تحليلياً على درجة عالية من الأهمية في تفسيرها الاقتصادي والإداري والمحاسبي وهو جانب هام جداً لرجال الإدارة ومتخذي القرار فيما يختص بالمشكلات التي تتناولها نماذج البرمجة الخطية . حيث تساهم نماذج البرمجة الخطية في تحديد ما يسمى باسم الفرصة البديلة أو القيم الثنائية (وهي ما سيتم دراستها فيما بعد) أو بلغة أخرى ما يسمى بأسعار ظل الموارد (القيود) .

أسعار الظل : – shadow Prices

بصفة عامة يمكن تعريف سعر ظل المورد (والمورد هو القيد المتاح الداخل في بناء نموذج البرمجة الخطية) بأنه عبارة عن مقدار الزيادة أو النقص في قيمة دالة الهدف الذي يرجع أساساً إلى زيادة أو نقص طاقة المورد المتاحة بمقدار وحدة واحدة . حيث أنه بزيادة الطاقة أو الكمية المتاحة من أحد الموارد (وهي بمثابة الطرف الأيسر للقيد أو المورد) بمقدار وحدة واحدة ، فإن ذلك سوف يترتب عليه زيادة (أو نقص) في قيمة دالة الهدف (سواء دالة الربح أو التكاليف) بمقدار معين وتلك الزيادة (أو النقص) هي ما تسمى باسم سعر ظل المورد تحت افتراض أن طاقة هذا المورد المتاحة مستغلة استغلالاً كاملاً .

أي أن لأسعار الظل من الخواص الهامة والتي تجعلنا نستفيد منها في الحصول على تفسيرات بالغة الأهمية في المشاكل التي تتناولها نماذج البرمجة الخطية بالدراسة وسنحاول تناول أهم تلك الخصائص أو التفسيرات. هذا ويمكن الحصول على أسعار الظل الخاصة بالموارد (القيود) بإحدى الطريقتينالتاليتين : الأولى من خلال حل المشكلة أو النموذج الخطي الأصلي

<ins>والثانية</ins> من خلال حل النموذج المبدل أو الثنائي وهو ما سيتم دراسته فيما بعد في هذا المقرر .

ولتحديد أسعار ظل الموارد المختلفة من خلال حل النموذج الخطي الأصلي فيكون ذلك من خلال صف اختبار الأمثلية وذلك من واقع جدول الحل الأمثل (الجدول الأخير لحل النموذج الخطي الأصلي) وبالتحديد معاملات صف اختبار الأمثلية (هـ ر – جـ ر) بالتحديد أسفل أعمدة المتغيرات المتممة والمستخدمة في حل النموذج .

فعلى سبيل المثال : –

بالنظر للمثال السابق لهذا الجزء أي مثال (٢) فإنه يمكنك استخلاص أسعار ظل الموارد من واقع جدول الحل الأمثل على النحو التالي :

سعر ظل المورد أو القيد الأول = معامل المتغير المتمم الأول (س٤) في صف اختبار الأمثلية

= (هـ ٤ – جـ٤) = ١

، سعر ظل المورد أو القيد الثاني = معامل المتغير المتمم الثاني (س٥) في صف اختبار الأمثلية

= (هـ٥ – جـ٥) = ٢

، سعر ظل المورد أو القيد الثالث = معامل المتغير المتمم الثالث (س٦) في صف اختبار الأمثلية

= (هـ ٦ – جـ٦) = صفر

وطبقاً لتعريف سعر الظل فإنه عند زيادة (أو نقص) طاقة المورد الأول بمقدار وحدة واحدة فإن ذلك يترتب عليه زيادة (أو نقص) الربح الإجمالي بمقدار (١) وحدة نقد كما يحددها سعر ظل هذا المورد . وهو ما يفيد بأن طاقة المورد الأول مستغلة بالكامل (أي لا توجد طاقة عاطلة في المورد

الأول) وبالتالي فإنه إذا زادت طاقة المورد الأول المتاحة بمقدار ١٠ وحدات زمنية أي حدث تغير في ثابت القيد الأول من ٤٣٠ ليصبح ٤٤٠ فإن ذلك سوف يؤدي إلى زيادة قيمة دالة الهدف بمقدار حاصل ضرب عدد الوحدات الإضافية في الطاقة المتاحة (أي ١٠) × سعر ظل المورد الأول أي (١) أي سيترتب على تلك الزيادة في الطاقة المتاحة (الطرف الأيسر للقيد الأول) إلى زيادة قيمة دالة الهدف بمقدار (١٠×١=١٠) أي تصبح ١٣٦٠ بدلاً من ١٣٥٠ .

والآن دعنا نؤكد على أن اختلاف سعر الظل عن الصفر يرجع إلى أن هناك استغلال كامل لطاقة المورد ففي حالة :

<u>المورد الأول</u> : دعنا نعوض بالقيم المثلى الناتجة عن جدول الحل الأمثل في القيد الأول :

$س_{١} + ٢س_{٢} + س_{٣} \leq ٤٣٠$

وحيث إن $س_{١}^{*}$ = صفر ، $س_{٢}^{*}$ = ١٠٠ ، $س_{٣}^{*}$ = ٢٣٠ (من الحل الأمثل)

فبالتعويض في القيد الأول نجد أن

الطاقة المستغلة (الطرف الأيمن للقيد الأول) = $س_{١} + ٢س_{٢} + س_{٣}$

= صفر + ٢ (١٠٠) + ٢٣٠

= ٤٣٠

والطاقة المتاحة (الطرف اليسر للقيد الأول أو ثابت القيد الأول) = ٤٣٠

أي أن الطاقة المستغلة = الطاقة المتاحة للمورد الأول وهو ما يفيد أن طاقة المورد الأول المتاحة مستغلة بالكامل أو بمعنى آخر إنعدام الطاقة العاطلة في المورد الأول .

<u>المورد الثاني</u> : لاحظ أن سعر ظل المورد الثاني = ٢ وحده نقد يفيد أيضًا أن هناك استغلال كامل لطاقة المورد الثاني بالكامل ودعنا نؤكد على ذلك من خلال التعويض في القيد الثاني بالقيم المثلى للمتغيرات القرارية . أي أن :

$$٣س_١ + ٢س_٣ \leq ٤٦٠$$

$$٣ (صفر) + ٢ (٢٣٠) \leq ٤٦٠$$

$$٤٦٠ \leq ٤٦٠$$

وهو ما يفيد أن الطاقة المستغلة (الطرف الأيمن للقيد) مساوية للطاقة المتاحة من هذا المورد (الطرف الأيسر للقيد) . وهو ما يفيد كذلك انعدام الطاقة العاطلة أو انعدام الطاقة الغير مستغلة في هذا المورد أو هذا القيد .

وتعليقًا على ما سبق أن أوضحناه أنه إذا تم زيادة (أو نقص) طاقة المورد الثاني المتاحة بمقدار وحده واحدة فإنه سوف يترتب على ذلك زيادة (أو نقص) قيمة دالة الهدف بمقدار سعر ظل هذا المورد أي بمقدار (٢) وحدة نقد . ومن ثم إذا زادت طاقة المورد الثاني المتاحة بمقدار ٢٠ وحدة أي تغيرت لتصبح ٤٨٠ بدلاً من ٤٦٠ فإن ذلك سوف يؤدي لزيادة قيمة دالة الهدف من ١٣٥٠ لتصبح ١٣٥٠ + ٢ × ٢٠ = ١٣٩٠ وحدة نقد .

<u>أما بالنسبة للمورد (أو القيد) الثالث</u> : فحيث أن سعر ظل المورد الثالث هو صفرًا فإن هذا يفيد أن هناك طاقة عاطلة في هذا المورد أو القيد وتقدر قيمة الطاقة العاطلة بقيمة المتغير المتمم الخاص بهذا القيد والتي ظهر بها ضمن المتغيرات الأساسية في جدول الحل الأمثل أي أن الطاقة العاطلة في المورد أو القيد الثالث تقدر بـ ٢٠ وحدة والآن دعنا نتأكد من وجود هذا الكم من الطاقة العاطلة في هذا المورد الثالث من خلال التعويض في القيد الثالث الخاص بهذا النموذج الخطي على النحو التالي :

$$س_١ + ٤س_٣ \leq ٤٢٠$$

$$صفر + ٤ (١٠٠) \leq ٤٢٠$$

أي أن :

٤٠٠ (وهى الطاقة المستغلة) ≤ ٤٢٠ (وهي الطاقة المتاحة)

والفرق ما بين الطرفين هو عبارة عن الطاقة الغير مستغلة أو الطاقة العاطلة وهي ٢٠ وحدة كما سبق وأن تنبئنا بها .

لاحظ أن المتغيرات المتممة الخاصة بالقيد الأول والثاني أي $س_{٤}$ ، $س_{٥}$ لم تظهر ضمن المتغيرات الأساسية في جدول الحل الأمثل وهذا يرجع لما سبق وأن أوضحناه نتيجة انعدام الطاقات العاطلة في الموردين الأول والثاني .

والآن حتى يكون لدينا القدرة على التنبؤ بما يحدث على قيمة دالة الهدف نتيجة زيادة أو نقص طاقة الموارد المتاحة دعنا نجمع التغيرات المفترضة على طاقة كل من المورد الأول والثاني . حيث أنه أوضحنا أنه بزيادة طاقة المورد الأول بمقدار ١٠ وحدات زمنية وطاقة المورد الثاني بمقدار ٢٠ وحدة زمنية فإن مقدار الزيادة الناشئة على قيمة دالة الهدف سيكون عبارة عن :

مقدار الزيادة في قيمة د(س) = ١٠ × ١ + ٢٠ × ٢ = ٥٠ وحدة نقد

أي أن قيمة د(س) سوف تزداد من ١٣٥٠ وحدة نقد لتصبح بالتحديد القيمة ١٣٥٠ + ٥٠ = ١٤٠٠ وحدة نقد .

ويمكن استنتاج تلك القيمة الجديدة على النحو التالي :

<u>ضرب المصفوفة أسفل المتغيرات المتممة</u> من واقع جدول الحل الأمثل وهي ما أسميناها سابقًا بالمصفوفة (ب) × متجه الموارد بعد التغير أي متجه ثوابت القيود ليصبح (٤٤٠ ، ٤٨٠ ، ٤٢٠) بدلاً من (٤٣٠ ، ٤٦٠ ، ٤٢٠)

$$\begin{array}{ccc} س_{٦} & س_{٥} & س_{٤} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \text{صفر} & -\frac{١}{٤} & \frac{١}{٢} \\ \text{صفر} & \frac{١}{٢} & \text{صفر} \\ ١ & ١ & -٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤٤٠ \\ ٤٨٠ \\ ٤٢٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠٠ \\ ٢٤٠ \\ ٢٠ \end{pmatrix}$$

والنـواتج هـي:(١٠٠ ، ٢٤٠ ، ٢٠) وهـي بمثابـة قـيم الحـل المثلـى المقابلـة لمتغيـرات أسـاس الحـل الأمثـل أي المقابلـة للمتغيـرات الأساسـية $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، $س_{٦}$ ذات معـاملات فـي دالـة الـهدف (٢ ، ٥ ، صـفر) علـى الترتيـب ومـن ثـم فإن قيمة دالة الهدف يتم استنتاجها من خـلال ضرب المتجهين علـى النحـو التالي :

$$(٢ \quad ٥ \quad \text{صفر}) \begin{pmatrix} ١٠٠ \\ ٢٤٠ \\ ٢٠ \end{pmatrix} = ٢٠٠ + ١٢٠٠ + \text{صفر} = ١٤٠٠$$

وهـذه القيمـة هـي قيمـة دالـة الهدف التـي تنبئنـا بهـا حـالاً مـن خـلال استخدامنا للمفهوم الاقتصادي لأسعار ظل الموارد المتاحة .

(٢)إذا كانت ثوابـــت القيـــود موجبـــة
وهناك قيد على الأقل ليس على صورة(≥) :

إذا كانت قيود النموذج الخطي جميعًا ثوابتها موجبة وهناك قيد على الأقل ليس على صورة متباينة في صورة أقل من أو تساوي (≥) بمعنى أن هناك قيد على الأقل في صورة معادلة (=) أو في صورة أكبر من أو يساوي (≤) فإن هناك طريقتين أساسيتين هما :

أ- طريقة (م) الكبرى

ب- طريقة السمبلكس ذات المرحلتين

(أ) : طريقة (م) الكبرى :

وسميت هذه الطريقة بـ (م) الكبرى لأنها تستخدم مجموعة متغيرات جديدة في حل النموذج الخطي تسمى بالمتغيرات الصناعية يتم تصويرها بمعاملات في دالة الهدف كبيرة جدًا يرمز لها بالرمز (م) . وطبقًا لهذه الطريقة يتم الآتي :

١- ضع النموذج الخطي في الصورة المعيارية وذلك من خلال إضافة متغير متمم للقيد الذي على الصورة (≥) أو يتم يطرح متغير متمم من القيد الذي على الصورة (≤) . أما القيود المعيارية الجاهزة أي التي في صورة معادلات (=) فتظل كما هي دون إضافة أو طرح متغيرات متممة لها في تلك الخطوة .

٢- القيود التي كانت أصلاً في صورة معادلات (=) أو في صورة متباينات على صورة (≤) يضاف لكل منها متغير صناعي . وتعتبر هذه المتغيرات الصناعية بمثابة المتغيرات الأساسية لتلك القيود في جدول الحل المبدئي فيما بعد .

٣- يتم تصوير المتغيرات الصناعية في دالة الهدف وذلك بمعامل (– م) في حالة التعظيم لدالة الهدف أوبمعامل (+ م) في حالة التدنية لدالة الهدف حيث (م) مقدار موجب وكبير جدًا وليكن ١٠ أو ١٠٠ أو ١٠٠٠ أو ١٠٠٠٠ وهكذا .

٤- يتم تصوير جدول الحل المبدئي وذلك باعتبار أن المتغير الصناعي الموجود في القيود التي كانت أصلاً في صورة (= أو ≤) هو بمثابة متغيرها الأساسي أما القيود التي كانت في صورة متباينة على الشكل (≥) فيتم اعتبار متغيراتها المتممة بمثابة المتغيرات الأساسية لهذه القيود .

٥- بعد تكوين جدول الحل المبدئي يتم اختبار مدى أمثلية الحل والتحسين متى لزم الأمر كما هو الحال في طريقة السمبلكس العادية إلى أن يتحقق شرطي الإمكانية والأمثلية وبنفس قواعد التحسين السابق الإشارة إليها سابقًا إلى أن نصل لجدول الحل الأمثل .

<u>مثال (١)</u> : إذا كان لديك النموذج الخطي التالي :

س = ٤س$_{١}$ + س$_{٢}$ (تدنيه)

بشرط القيود

٣س$_{١}$ + س$_{٢}$ = ٣

٤س$_{١}$ + ٣س$_{٢}$ ≤ ٦

س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ ≥ ٤

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ≤ صفر

والمطلوب :

١- حل النموذج الخطي بيانيًا مع إيضاح أنواع الحلول الناتجة عن هذا الحل البياني وتوضيح ماهية وجود قيود زائدة من عدمه .

٢- حقق نتائجك في (١) من خلال أحد طرق السمبلكس المناسبة .

الحل :

١- الحل البياني للنموذج :

قبل حل النموذج الخطي المعطى لاحظ أن هناك أحد القيود في صورة معادلة لذا فإننا قبل إجراء الحل البياني يمكن لنا أن نتنبأ مسبقًا بأن منطقة الحلول المشتركة إن وجدت ستكون بمثابة جزء من الخط المستقيم الممثل للقيد الذي ظهر أصلاً في صورة معادلة . ولبيان مدى صحة هذه الملاحظة دعنا نجري الحل اللازم بيانيًا على النحو التالي :

❖ **استنتاج إحداثي نقطتين لكل قيد :**

- **قيدي عدم السالبية : يفيدا أن منطقة الحلول المشتركة إن وجدت ستقع في الربع الأول حتمًا .**

- **القيد الأول : $٣س_١ + س_٢ = ٣$**
والجدول المقابل يبين إحداثي نقطتين لهذا الخط الممثل للقيد الأول

$س_١$	صفر	١
$س_٢$	٣	صفر

- **القيد الثاني : $٤س_١ + ٣س_٢ \leq ٦$**
يحول لمعادلة : $٤س_١ + ٣س_٢ = ٦$
والجدول المقابل يبين إحداثي نقطتين لخط هذا القيد

$س_١$	صفر	$^{٣}/_{٢}$
$س_٢$	٢	صفر

- **القيد الثالث : $س_١ + ٢س_٢ \geq ٤$**
يحول لمعادلة : $س_١ + ٢س_٢ = ٤$
والجدول المقابل يبين إحداثي

$س_١$	صفر	٤
$س_٢$	٢	صفر

نقطتين لخط هذا القيد

❖ **استنتاج إحداثي نقطتين لمعادلة دالة الهدف وذلك من خلال افتراض أن قيمة د(س) = صفر فيكون :**

٤س١ + س٢ = صفر

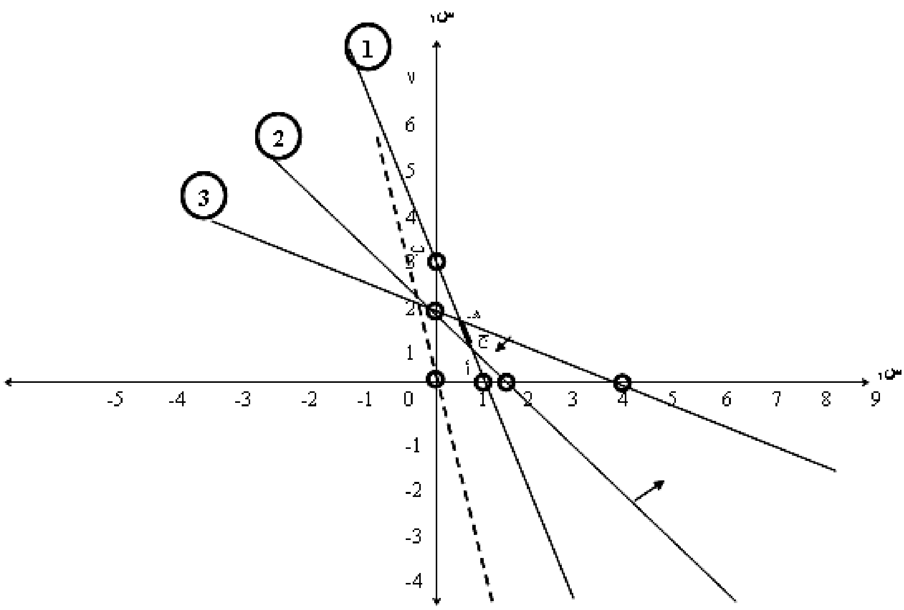
والجدول المقابل يعطي إحداثيات

س١	صفر	١
س٢	صفر	-٤

والجدول المقابل يعطي إحداثيات نقطتين لخط دالة الهدف :

د(س) = صفر.

❖ **الرسم البياني وتحديد اتجاه القيود ومن ثم منطقة الحلول المشتركة ومن ثم الحل الأمثل كما يوضحه الشكل البياني التالي .**



تصفية الرسم لتحديد المجال المشترك :

*<u>قيدي عدم السالبية</u>: **المجال المشترك إن وجد سيقع في الربع الأول** <u>س١ و س٢</u>

***المجال المشترك فيما بين قيدي عدم السالبية والقيد الأول:**

الخط المستقيم أ ب

***المجال المشترك فيما بين قيدي عدم السالبية والقيود الأول والثاني :**

الخط المستقيم جـ ب

***المجال المشترك فيما بين قيدي عدم السالبية والقيود الأول والثاني والثالث:**

الخط المستقيم جـ هـ

ومن الرسم البياني الموضح نجد أن منطقة الحلول المشتركة هي الخط جـ هـ وبتحريك الخط المستقيم المتقطع المعبر عن الدالة د(س) = صفر موازيًا لنفسه في اتجاه المجال المشترك أي في اتجاه الخط جـ هـ إلى أن يمس أول نقطة في هذا المجال حيث إننا بصدد مشكلة تدنيه نجد أنه يمس أول نقطة في هذا الخط عند النقطة (هـ) وهذه النقطة إحداثياتها هي هـ [٢/٥ ، ٩/٥]. يمكنك التحقق من ذلك من خلال حل معادلة القيد الأول والثالث معًا . أما نقطة الحل الأمثل في حالة التعظيم فتكون عند النقطة :

جـ [٣/٥ ، ٦/٥] ، هي نقطة تقاطع خطي القيدين الأول والثاني.

والجدول التالي يحقق الحل البياني جبريًا:

إحداثيات الأركان	د(س) = ٤س$_{١}$ + س$_{٢}$	ملاحظات
جـ (٣/٥ ، ٦/٥)	د(س) ٤(٣/٥) + ٦/٥ = ١٨/٥	أكبر ما يمكن (تعظيم)
هـ (٢/٥ ، ٩/٥)	د(س) ٤(٢/٥) + ٩/٥ = ١٧/٥	أقل ما يمكن (تدنيه)

والحل البياني الناتج يؤكد أن جميع القيود الواردة في النموذج الخطي قيود فعالة أو غير زائدة باستثناء قيدي عدم السالبية ومن ثم لا توجد قيود زائدة في هذا النموذج سوى قيدي عدم السالبية.

٢- تحقيق النتائج في (١) من خلال أحد طرق السمبلكس المناسبة :

لاحظ أن كافة القيود ثوابتها موجبة وهناك قيد على الأقل (قيدين) ليس على الصورة ($\geq$) بمعنى أن هناك قيود في صورة (= أو $\leq$) لذا فالحل إما باستخدام طريقة (م) الكبرى أو بطريقة السمبلكس ذات المرحلتين. فلنرى خطوات الحل باستخدام طريقة (م) الكبرى على النحو التالي :-

أ- ضع النموذج في الصورة المعيارية وهي :

د(س) = ٤س$_{١}$ + س$_{٢}$ (تدنيه)

بشرط القيود :

٣س$_{١}$ + س$_{٢}$ = ٣

٤س$_{١}$ + ٣س$_{٢}$ − س$_{٣}$ = ٦

س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ + س$_{٤}$ = ٤

س$_{ر}$ $\geq$ صفر حيث ر = ١-٤

ب- أضف متغير صناعي للقيد الذي كان على الصورة (= أو $\leq$) في قيود النموذج الخطي أي يضاف المتغير الصناعي س$_{٥}$ للقيد الأول والمتغير الصناعي س$_{٦}$ للقيد الثاني . ثم يتم تصوير هذه المتغيرات الصناعية في دالة الهدف بمعامل (+ م) لأن دالة هدف النموذج في صورة تدنيه . ومن ثم تصبح صورة النموذج على الشكل التالي :

د(س) = ٤س$_{١}$ + س$_{٢}$ + م س$_{٥}$ + م س$_{٦}$ (تدنيه)

بشرط أن :

٣س$_{١}$ + س$_{٢}$ + (س$_{٥}$) = ٣

٤س$_{١}$ + ٣س$_{٢}$ − س$_{٣}$ + (س$_{٦}$) = ٦

س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ + (س$_{٤}$) = ٤

س$_{ر}$ $\geq$ صفر حيث ر = ١-٦

جـ – تصوير جدول الحل المبدئي للسمبلكس باعتبار المتغيرات الصناعية هي المتغيرات الأساسية للقيود التي كانت على الصورة (= أو ≤) والمتغيرات المتممة هي المتغيرات الأساسية للقيود التي كانت على الصورة (≥) . ومن ثم يكون لدينا الجدول التالي :

جدول الحل المبدئي

م . أ	جـ ر / م. م. أ	٤	١	صفر	صفر	م	م	قيم الحل	النسبة
		س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦		
س٥	م	(٣)	١	صفر	صفر	١	صفر	٣	٣/٣ = ١ ←
س٦	م	٤	٣	−١	صفر	صفر	١	٦	٦/٤ = ٣/٢
س٤	صفر	١	٢	صفر	١	صفر	صفر	٤	٤/١ = ٤
هـ ر		٧م	٤م	−م	صفر	م	م	٩م	تدنيه
هـ ر – جـ ر		٧م−٤	٤م−١	−م	صفر	صفر	صفر		

↑

- **<u>اختبار مدى أمثلية جدول الحل المبدئي</u>: لاحظ أنا كافة عناصر قيم الحل موجبة لذا فالحل ممكن . لكن صف الأمثلية غير محقق لشرط الأمثلية حيث إننا بصدد مشكلة تدنيه فيجب أن تكون المعاملات في صف (هـ ر – جـ ر) كلها معاملات صفرية وسالبة . لاحظ أن المقدار (م) مقدار موجب وكبير جدًا ومن ثم ففي مشاكل التدنيه لن يصبح الحل أمثلاً طالما أن هناك أحد المعاملات الموجودة في صف اختبار الأمثلية ذو معامل موجب للمقدار (م). لذا يتم التحسين على النحو التالي :**
- **<u>تحديد المتغير الداخل (العمود المحوري)</u>: وهو المتغير الذي يقابل المعامل الأكثر إيجابية وهو (٧م – ٤) الذى يقابل المتغير (س١).**

- <u>تحديد المتغير الخارج (الصف المحوري)</u>: يتم حساب النسب الثلاث وهى ($\frac{٤}{١}$ ، $\frac{٣}{٣}$ ، $\frac{٦}{٤}$) = (٤ ، ١ ، ١,٥) وتؤخذ أقل نسبة وهي النسبة (١) المقابلة لصف س٥ والذي يعتبر بمثابة المتغير الخارج من الأساس .
- يتقاطع صف وعمود المحور في العنصر المحوري وهو العنصر (٣) ومن ثم تصبح المتغيرات الأساسية في جدول السمبلكس الثاني هي س١ ، س٦ ، س٤ على الترتيب ويكون عناصر صف :
- س١ (صف المحور الجديد) هي : (١ ، ١/٣، صفر ، صفر ، ١/٣ ، صفر ، ١)
- صف س٦ الجديد = س٦ القديم – ٤ × صف المحور الجديد :

٤	–	٤	× ١	= صفر
٣	–	٤	× ١/٣	= ٥/٣
١–	–	٤	× صفر	= ١–
صفر	–	٤	× صفر	= صفر
صفر	–	٤	× ١/٣	= – ٤/٣
١	–	٤	× صفر	= ١
٦	–	٤	× ١	= ٢

- عناصر صف س٤ الجديد = صف س٤ القديم –١× صف المحور الجديد = صف س٤ القديم – صف المحور الجديد

كما هو موضح بالجدول الثاني التالي وكذلك استنتاج صف المجاميع هـ ر وصف اختبار الأمثلية (هـ ر – جـ ر).

الجدول الثاني

م . أ	جـ ر / م. م. أ	٤	١	صفر	صفر	م	م	قيم الحل	النسبة
		س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦		
س١	٤	١	١/٣	صفر	صفر	١/٣	صفر	١	٣
س٦	م	صفر	(٥/٣)	−١	صفر	−٤/٣	١	٢	٦/٥ = ١ ١/٥ →
س٤	صفر	صفر	٥/٣	صفر	١	−١/٣	صفر	٣	٩/٥ = ١ ٤/٥
هـ ر		٤	٤/٣ + ٥/٣م	−م	صفر	٤/٣ − ٤/٣م	م	٤ + ٢م	تدنيه
هـ ر − جـ ر		صفر	١/٣ + ٥/٣م	−م	صفر	٤/٣ − ٤/٣م	صفر		

ومن خلال بيانات الجدول السابق لاحظ تحقق شرط الإمكانية ، أما صف اختبار الأمثلية (هـ ر − جـ ر) نجد تحقق شرط الإمكانية وعدم تحقق شرط الأمثلية حيث أنه لا زالت هناك معاملات موجبة في صف اختبار الأمثلية . ومن ثم فبإجراء التحسين الثاني نحصل على الجدول الثالث للسمبلكس .

<u>مسودة حسابات الجدول الثالث</u> :

- **<u>استنتاج صف المحور الجديد</u> (صف س٢) = صف س٦ في الجدول الثاني ÷ ٥/٣**

  (في الجدول الثالث) = ٣/٥ × صف س٦ في الجدول الثاني

- **<u>استنتاج صف س١ الجديد</u> = صف س١ القديم − ١/٣ × صف س٦ في الجدول الثالث**

أي أن صف س١ الجديد هو :

١	−	١/٣	×	صفر	=	١
١/٣	−	١/٣	×	١	=	صفر
صفر	−	١/٣	×	(−٣/٥)	=	١/٥
صفر	−	١/٣	×	صفر	=	صفر

$\frac{١}{٣}$ − $\frac{١}{٣}$ × $(-\frac{٤}{٥})$ = $\frac{١}{٣} + \frac{٤}{١٥} = \frac{٣}{٥}$

صفر − $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٣}{٥}$ = $-\frac{١}{٥}$

١ − $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٦}{٥}$ = $\frac{٣}{٥}$

- **استنتاج صف س٤ الجديد = صف $س_٤$ القديم − $\frac{٥}{٣}$ × صف المحور الجديد**

أي أن صف $س_٤$ الجديد هو :

صفر − $\frac{٥}{٣}$ × **صفر** = **صفر**

$\frac{٥}{٣}$ − $\frac{٥}{٣}$ × ١ = **صفر**

صفر − $\frac{٥}{٣}$ × $(-\frac{٣}{٥})$ = ١

١ − $\frac{٥}{٣}$ × **صفر** = ١

$-\frac{١}{٣}$ − $\frac{٥}{٣}$ × $(-\frac{٤}{٥})$ = $-\frac{١}{٣} + \frac{٤}{٣} = ١$

صفر − $\frac{٥}{٣}$ × $\frac{٣}{٥}$ = − ١

٣ − $\frac{٥}{٣}$ × $\frac{٦}{٥}$ = ١

- **أما عن صف $هـ_ر$ و صف الأمثلية فهي موضحة في الجدول الثالث التالي :**

الجدول الثالث

م . أ	$جـ_ر$ / م. م. أ	٤	١	صفر	صفر	م	م	قيم	النسبة
		$س_١$	$س_٢$	$س_٣$	$س_٤$	$س_٥$	$س_٦$	الحل	
$(س_١)$	صفر	١	صفر	$\frac{١}{٥}$	صفر	$\frac{٣}{٥}$	$-\frac{١}{٥}$	$\frac{٣}{٥}$	٣
$(س_٢)$	٥	صفر	١	$-\frac{٣}{٥}$	صفر	$-\frac{٤}{٥}$	$\frac{٣}{٥}$	$\frac{٦}{٥}$	-
$(س_٤)$	صفر	صفر	صفر	(١)	١	١	−١	١	١ ←
$هـ_ر$		٤	١	$\frac{١}{٥}$	صفر	$\frac{٨}{٥}$	$-\frac{١}{٥}$	$\frac{١٨}{٥}$	تدنية
$هـ_ر - جـ_ر$		صفر	صفر	$\frac{١}{٥}$	صفر	$\frac{٨}{٥}-م$	$-\frac{١}{٥}-م$		
				↑		(−)	(−)		

وفي الجدول الثالث المبين أعلاه يلاحظ تحقق شرط الإمكانية حيث أن كافة قيم الحل موجبة أما عن شرط الأمثلية فلازال هناك أحد المعاملات موجباً وهو المقابل أو أسفل المتغير س$_{٣}$ بمعامل (١/ه) أما باقي المعاملات فهي تحقق شرط الأمثلية حيث أنها معاملات صفرية وسالبة . لذا يتم اعتبار جولة تحسين أخرى وذلك باعتبار (س$_{٣}$) كمتغير داخل ضمن متغيرات الأساس أي العمود المحوري وبحساب النسب التي تناظر المعاملات الموجبة فقط في عمود المحور نجد أن أقل نسبة تقابل صف المتغير (س$_{٤}$) . ومن ثم فإن صف س$_{٤}$ هو بمثابة صف المحور . ويتقاطع صف وعمود المحور في العنصر المحوري(١) في الجدول الثالث . ومن ثم يتم التحسين للحصول على الجدول الرابع التالي :

- <u>مسودة حسابات الجدول الرابع</u>:-

<u>استنتاج صف المحور الجديد</u> (صف س$_{٣}$) وذلك من خلال قسمة صف المحور القديم (س$_{٤}$ في الجدول الثالث) ÷ العنصر المحوري وهو الرقم(١) فينتج عناصر صف س$_{٣}$ هي (صفر ، صفر ، ١ ، ١ ، ١ ، - ١ ، ١)

- <u>استنتاج صف س$_{١}$ الجديد في الجدول الرابع</u>:

صف س$_{١}$ الجديد = س$_{١}$ القديم - (١/ه) × صف س$_{٣}$ الجديد في الجدول الرابع

أي أن صف س$_{١}$ الجديد هو مجموعة العناصر التالية :

١ - ١/ه × صفر = ١

صفر - ١/ه × صفر = صفر

١/ه - ١/ه × ١ = صفر

صفر - ١/ه × ١ = - ١/ه

٣/ه - ١/ه × ١ = ٢/ه

- ١/ه - - ١/ه × (-١) = صفر

٣/٥ − ١/٥ × ١ = ٢/٥

- **استنتاج صف س٢ الجديد = س٢ القديم − (− ٣/٥) × صف س٣ الجديد**

أي أن صـف س٢ الجديـد أي أن صـف س٢ الجديـد هـو مجموعـة العناصـر التالية :

صفر − (− ٣/٥)× صفر = صفر

١ − (− ٣/٥)× صفر = ١

− ٣/٥ − (− ٣/٥)× ١ = صفر

صفر − (− ٣/٥)× ١ = ٣/٥

− ٤/٥ − (− ٣/٥)× ١ = − ١/٥

٣/٥ − (− ٣/٥)× (−١) = صفر

٦/٥ − (− ٣/٥)× ١ = ٩/٥

- **أما عن صف المجاميع الخاصة بحواصل الضرب (هـ ر) وصف اختبار الأمثلية يتم استنتاجها بعد تكوين الجدول الرابع على النحو التالي : −**

الجدول الرابع

م . أ	جـ ر / م.م.أ	٤	١	صفر	صفر	م	م	قيم	النسبة
		س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	الحل	
س١	٤	١	صفر	صفر	−١/٥	٢/٥	صفر	٢/٥	
س٢	١	صفر	١	صفر	٣/٥	−١/٥	صفر	٩/٥	
س٣	صفر	صفر	صفر	١	١	١	−١	١	
هـ ر		٤	١	صفر	−١/٥	٧/٥	صفر	١٧/٥	تدنية
هـ ر − جـ ر		صفر	صفر	صفر	−١/٥	٧/٥−م	−م		

ويملاحظة عناصر الجدول الأخير (الرابع) يلاحظ الآتي : -

١- كافة عناصر قيم الحل المقابلة لمتغيرات الأساس (س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$) قيماً موجبة لذا فالحل ممكن (محقق لشرط الامكانية)

٢- كافة معاملات صف اختبار الأمثلية معاملات : -

*** صفرية <u>فقط</u> تناظر أو أسفل أعمدة المتغيرات الأساسية .**

*** وسالبة <u>جميعاً</u> تناظر أو أسفل أعمدة المتغيرات الغير أساسية (س$_{٤}$ ، س$_{٥}$ ، س$_{٦}$) وحيث أننا بصدد مشكلة تدنية لقيمة دالة الهدف لذا فالحل الناتج في الجدول الرابع يعتبر حلاً أمثلاً ووحيداً وهو :-**

س$_{١}^{*}$ = $^{٢}/_{٥}$ ، س$_{٢}^{*}$ = $^{٩}/_{٥}$ ، س$_{٣}^{*}$ = ١ ،

س$_{٤}^{*}$ = س$_{٥}^{*}$ = س$_{٦}^{*}$ = صفر ، د(س*) = $^{١٧}/_{٥}$

وهذا الحل يؤكد صحة الحل البياني الوارد في المطلوب الأول.

<u>ملحوظة :</u> - إذا كان المطلوب حل النموذج الخطي الوارد في المثال (٢) في حالة تعظيم دالة الهدف فيتم اعتبار نفس الخطوات السابقة لكن مع الفارق الوحيد وهو تصوير المتغيرات الصناعية في دالة الهدف بمعامل (- م) وليس (+ م) . أي أن الفارق في حالة التعظيم هو أن دالة الهدف د(س) ستأخذ الصورة التالية :

د (س) = ٤س$_{١}$ + س$_{٢}$ - م س$_{٥}$ - م س$_{٦}$

ثم يتم اعتبار نفس الخطوات السابقة والتحسين بنفس الآلية إلى أن يتحقق شرطي الإمكانية والأمثلية في حالة التعظيم . <u>وعلى الطالب</u> حل هذا التمرين في حالة التعظيم والتحقق من أن الحل النهائي في حالة التعظيم سوف يؤكد صحة الحل البياني والتي أفادت بأن القيم المثلى للمتغيرات القرارية في حالة التعظيم هي : س$_{١}^{*}$ = $^{٣}/_{٥}$ ، س$_{٢}^{*}$ = $^{٦}/_{٥}$ ، د (س*) = $^{١٨}/_{٥}$

(ب) <u>طريقة السمبلكس ذات المرحلتين</u> : –

مما يؤخذ على طريقة (م) الكبرى هو إمكانية حدوث خطأ حسابي نتيجة لتخصيص قيمة صغيرة أو كبيرة جداً بالإضافة لأخطاء التقريب المتأصلة في الحاسبات الالكترونية الرقمية والحدود المركبة التي تظهر في صف اختبار الأمثلية . هذا ولقد تم تصميم طريقة السمبلكس ذات المرحلتين لتجنب مثل هذه المشاكل حيث تتخلص هذه الطريقة من معاملات الجزاء (م) . ولقد سميت هذه الطريقة بذات المرحلتين وذلك لأن الحل باستخدامها يمر فعلاً بمرحلتين أساسيتين حيث يتم في :–

<u>المرحلة الأولى</u> I : – وفي هذه المرحلة يتم الآتي : –

- **ضع النموذج الخطي في الصورة المعيارية وذلك من خلال إضافة (أو طرح) متغير متمم من كل قيد على الصورة $\geq$ (أو $\leq$) وتحول القيود لمعادلات .**
- **إضافة متغير صناعي (أو وهمي) Artificial variable للقيود التي كانت أصلاً موجودة في النموذج الخطي في صورة معادلة (=) أو في صورة أكبر من أو يساوي ($\leq$) .**
- **تصوير المتغيرات الصناعية في دالة الهدف بمعامل (– ١) في حالة مشاكل التعظيم أو بمعامل (+ ١) في حالة مشاكل التدنية .**
- **أجمع القيود التي يوجد بها متغيرات صناعية (أي جمع القيود التي كانت أصلاً في النموذج الخطي في صورة = أو $\leq$) . ثم عبر عن مجموع هذه المتغيرات الصناعية بدالة وهمية ولتكن الدالة (ف .)**
- **كون جدول الحل المبدئي باعتبار أن الدالة (ف .) بمثابة دالة هدف المرحلة الأولى مشروطة بقيود النموذج الخطي . ويكون المطلوب في**

تلك المرحلة هو الوصول بقيمة الدالة الوهمية (ف .) إلى أقل قيمة لها وإلى الصفر إن أمكن. أي أنه في المرحلة الأولى يتم تتبع خطوات تدنية الدالة (ف.) دائماً أبداً بغض النظر عن طبيعة دالة هدف النموذج الخطي من حيث كونها تدنية أم تعظيم.

- أجري التحسين اللازم للوصول بقيمة الدالة (ف.) إلى أقل قيمة ممكنة وإلى الصفر إن أمكن . فإذا تحقق شرطي الإمكانية والأمثلية. لصف الدالة (ف.) أي أصبحت معاملات صف الدالة (ف.) معاملات صفرية وسالبة يتم شطب صف الدالة (ف٠) وأعمدة المتغيرات الصناعية والجدول المتبقي يعتبر بمثابة جدول الحل المبدئي للنموذج في المرحلة الثانية .

المرحلة الثانية II : الجدول الناتج من المرحلة الأولى بعد شطب صف الدالة (ف.) و أعمدة المتغيرات الصناعية يتم استنتاج صف أمثلية النموذج الخطي (هـ ر – جـ ر) بنفس آلية الطرق السابقة ثم يتم اعتبار جولات التحسين اللازمة متى لزم الأمر حسب طبيعة دالة هدف النموذج من حيث المطلوب تعظيم أم تدنية الدالة د (س) .

أي أن دور الدالة د (س) يقع في المرحلة الثانية . أما المرحلة الأولى فالدور الأساسي للدالة الوهمية (ف.) وفي تلك المرحلة يتم الوصول للحد الأدنى (تدنية) لتلك الدالة (ف.) دائماً أبداً بغض النظر عن دالة هدف النموذج الخطي تعظيم أم تدنية .

<u>مثـال (١)</u> : المطلـوب حـل النمـوذج الخطـي الـوارد فـي المثـال السـابق باستخدام طريقة السمبلكس ذات المرحلتين .

<u>الحـــــل</u> : -

<u>المرحلـة الأولـى I</u> : النمـوذج الخطـي فـي الصـورة المعياريـة و إضـافة المتغيرات الصناعية للقيود (= أو $\leq$) واستنتاج الدالة الوهمية (ف.).

د (س) = د $س_١$ + $س_٢$ + $س_٥$ + $س_٦$ (تدنية)

بشرط القيود : -

٣ $س_١$ + $س_٢$ + ($س_٥$) = ٣

٤$س_١$ + ٣$س_٢$ – $س_٣$ +($س_٦$) = ٦

$س_١$ + ٢$س_٢$ + ($س_٤$) = ٤

، $س_ر$ $\leq$ صفر لكل ر = ١– ٦

ويجمـع القيـود التـي بهمـا متغيرات صـناعية أي جمـع القيـد الأول والثـاني ينتج أن:

٧$س_١$ + ٤$س_٢$ – $س_٣$ + ($س_٥$ + $س_٦$) = ٩

وبالتعويض في ناتج الجمع السابق عن ف = $س_٥$ + $س_٦$ ينتج أن

٧$س_١$ + ٤$س_٢$ – $س_٣$ + ف = ٩

وهذه المعادلة هي بمثابة معادلة الدالة الوهمية (ف.) والتي سيتم تحسين الحل للوصول لأقل قيمة لها (تدنية) مشروطة بمجموعة قيود النمـوذج. ومن ثم فإن جدول الحل المبدئي باعتبار المتغيرات الصناعية للقيـود التـي كانت في صورة (= أو $\leq$) بمثابة المتغيرات الأساسية و المتغير المتمم للقيد ($\geq$) هو المتغير الأساسي يأخذ صورة الجدول التالي:

جدول الحل المبدئي

المتغيـــــــرات الأساسية (م. أ)	$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$	$س_{٥}$	$س_{٦}$	قيم الحل	النسبة
$س_{٥}$	(٣)	١	صفر	صفر	١	صفر	٣	١ →
$س_{٦}$	٤	٣	-١	صفر	صفر	١	٦	١,٥
$س_{٤}$	١	٢	صفر	١	صفر	صفر	٤	٤
ف.	٧	٤	-١	صفر	صفر	صفر	٩	تدنية دائماً

والملاحظ على هذا الجدول أنـه يحقق شرط الإمكانيـة أما عن شرط الأمثليـة فهو غير متحقق حيث أننا بصدد الوصول لتدنية قيمة الدالة (ف.) لذا يجري التحسـين الأول الـلازم باعتبـار ($س_{١}$) كمتغيـر داخـل فـي الأسـاس وبحسـاب النسب يتحدد خروج المتغيـر ($س_{٥}$) من متغيرات الأساس ومن ثم فعنصر المحور هو الرقم (٣) ، والجدول التـالي يعتبـر جدول التحسن الأول (الجدول الثـاني للسمبلكس) بنفس آليـة خطوات التحسين السـابقة والإضـافة الوحيـدة لجـداول التحسـين السـابقة أنـه يـتم اسـتنتاج صـف (ف.) كبـاقي صـفوف متغيرات الأساس أي أن:-

صف ف. الجديد = صف ف. القديم - ٧ × صف المحور الجديد

ومن ثم ينتج الجدول التالي :

الجدول الثاني (التحسين الأول)

المتغيرات الأساسية (م. أ)	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	قيم الحل	النسبة
س١	١	١/٣	صفر	صفر	١/٣	صفر	١	٣
س٦	صفر	(٥/٣)	-١	صفر	-٤/٣	١	٢	١،٢ ←
س٤	صفر	٥/٣	صفر	١	-١/٣	صفر	٣	١،٨
ف.	صفر	٥/٣	-١	صفر	-٧/٣	صفر	٢	تدنية دائماً

↑

وبإجراء التحسين الثاني بنفس خطوات آلية التحسين السابق ليعطي الجدول الثالث مع مراعاة أن : -

صف ف. الجديد = ف. القديم - (٥/٣) (صف المحور الجديد) .

ومن ثم فإن :

الجدول الثالث (التحسين الثاني)

المتغيرات الأساسية (م. أ)	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	قيم الحل	النسبة
س١	١	صفر	١/٥	صفر	٣/٥	-١/٥	٣/٥	
س٢	صفر	١	-٣/٥	صفر	-٤/٥	٣/٥	٦/٥	
س٤	صفر	صفر	١	١	١	-١	١	
ف.	صفر	صفر	صفر	صفر	-١	-١	صفر	تدنية

وفي الجدول الثالث لاحظ أن قيم المتغيرات الأساسية محققة لشرط الإمكانية (جميعاً موجبة في عمود قيم الحل) كما أن صف الدالة (ف.) محققاً لشرط أمثلية تدنية الدالة حيث أن صف اختبار الأمثلية أي صف الدالة (ف.) جميعاً معاملات سالبة وصفرية هذا بالإضافة إلى أن قيمة الدالة (ف.)

وصلت لنهايتها الصفري وهي القيمة (صفر) تحت عمود قيم الحل . وبهذا تنتهي المرحلة الأولى .

<u>المرحلة الثانية II</u> : يتم شطب صف الدالة الوهمية (ف.) و أعمدة المتغيرات الصناعية والجدول المتبقي يتم استنتاج مجاميع حواصل الضرب (هـ ر) وصف الأمثلية (هـ ر – جـ ر) وهو ما يعتبر أساس المرحلة الثانية وذلك علي النحو التالي : –

جدول الحل المبدئي للمرحلة الثانية

م . أ	جـ ر / م.م.أ	٤ س١	١ س٢	صفر س٣	صفر س٤	قيم الحل	النسبة
س١	٤	١	صفر	١/٥	صفر	٣/٥	٣
س٢	١	صفر	١	-٣/٥	صفر	٦/٥	-
س٤	صفر	صفر	صفر	١	١	١	← ١
هـ ر		٤	١	١/٥	صفر	١٨/٥	تدنية
هـ ر – جـ ر		صفر	صفر	١/٥	صفر		

وهذا الجدول وإن كان يحقق شرط الإمكانية إلا أنه لا يحقق شرط الأمثلية حيث أن هناك معامل موجب في صف اختبار الأمثلية حيث أن هناك معامل موجب في صف اختبار الأمثلية والمطلوب تدنية الدالة د (س) . لذا يجب اعتبار جولة تحسين وذلك باعتبار (س٣) كمتغير داخل ضمن متغيرات الأساس والمتغير (س٤) كمتغير خارج من متغيرات الأساس ومن ثم فالعنصر المحوري هو الرقم (١) . والجدول التالي يبين عملية التحسين اللازمة :

الجدول الثاني للمرحلة الثانية

م . أ	جـ ر / م.م.أ	٤	١	صفر	صفر	قيم الحل	النسبة
		$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$		
$س_{١}$	٤	١	صفر	صفر	-١/٥	٢/٥	
$س_{٢}$	١	صفر	١	صفر	٣/٥	٩/٥	
$س_{٣}$	صفر	صفر	صفر	١	١	١	
هـ ر		٤	١	صفر	-١/٥	١٧/٥	تدنية
هـ ر – جـ ر		صفر	صفر	صفر	-١/٥		

وفي الجدول الأخير يلاحظ الآتي : –

١–كافة عناصر قيم الحل قيماً موجبة لذا فالحل ممكن،

٢–كان معاملات صف اختبار الأمثلية معاملات:

- **صفرية فقط تناظر أعمدة المتغيرات الأساسية ($س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$) .**
- **وسالبة جميعاً تناظر أعمدة المتغيرات الغير أساسية ($س_{٤}$) وحيث أن المشكلة تدنية للدالة د (س) لذا فالحل أمثل ووحيد وهو :**

$س^{*}$ = ٢/٥ ، $س_{٢}^{*}$ = ٩/٥ ، $س_{٣}^{*}$ = ١ ، $س_{٤}^{*}$ = صفر ،

د($س^{*}$) = ١٧/٥ .

لاحظ أن الحل الناتج هو نفس الحل الناتج باستخدام طريقة (م) الكبرى في المثال السابق (مثال (١)).

مثال (٣) : أوجد قيم $س_{١}$ $س_{٢}$ $س_{٣}$ التي تجعل الدالة : –

د(س) = ٥ $س_{١}$ – ٦ $س_{٢}$ – ٧ $س_{٣}$ (أكبر ما يمكن)

بشرط القيود : -

$س_1 + ٥ س_2 - ٣س_3 \leq ١٥$

$٥س_1 - ٦س_2 + ١٠س_3 \geq ٢٠$

$س_1 + س_2 + س_3 = ٥$

$س_1 ، س_2 ، س_3 \leq$ صفر

الحل : -

حيث أن ثوابت قيود النموذج جميعاً موجبة وهناك قيد على الأقل ليس على صورة ($\geq$) لذا فإن حل هذا النموذج الخطي يكون أما باستخدام طريقة (م) الكبرى أو طريقة السمبلكس ذات المرحلتين . والآن دعنا نقوم بحل النموذج باستخدام السمبلكس ذات المرحلتين على النحو المبين التالي :

<u>المرحلة الأولى (I)</u> : وفيها يتم الآتي :

- **وضع النموذج الخطي في الصورة المعيارية ثم إضافة متغير صناعي للقيود التي على صورة = أو $\leq$ ثم تصوير هذه المتغيرات الصناعية بمعامل (- ١) في دالة الهدف . ثم جمع القيود التي بها متغيرات صناعية والتعويض عن مجموع المتغيرات الصناعية بدالة الهدف الوهمية (ف.) والتي تمثل دالة الهدف في تلك المرحلة والمطلوب تدنية تلك الدالة في تلك المرحلة والوصول بها لأقل قيمة ممكنة وإلى الصفر إن أمكن . ومن ثم فإن : -**

د(س) = $٥س_1 - ٦س_2 - ٧س_3 \quad - س_6 - س_7$ (تعظيم)

بشرط القيود :

$س_1 + ٥ س_2 - ٣س_3 - س_4 \quad + (س_6) = ١٥$

$٥س_1 - ٦س_2 + ١٠س_3 \quad + (س_5) = ٢٠$

$س_1 + س_2 + س_3 \quad + (س_7) = ٥$

$س_{ر}$ ≤ صفر حيث ر = ١ – ٧

ويجمع القيدين الأول والثالث (القيود التي بها متغير صناعي) ينتج أن :

$٢س_{١}$ + $٦ س_{٢}$ – $٢س_{٣}$ – $س_{٤}$ + ($س_{٦}$ + $س_{٧}$) = ٢٠

أي أن:

$٢س_{١}$ + $٦ س_{٢}$ – $٢س_{٣}$ – $س_{٤}$ + ف. = ٢٠

ومن ثم فإن جدول الحل المبدئي للمرحلة الأولى هو :

الجدول الأول

(م. أ)	$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$	$س_{٥}$	$س_{٦}$	$س_{٧}$	قيم الحل	النسبة
$س_{٦}$	١	٥	–٣	–١	صفر	١	صفر	١٥	٣ ←
$س_{٥}$	٥	–٦	١٠	صفر	١	صفر	صفر	٢٠	.
$س_{٧}$	١	١	١	صفر	صفر	صفر	١	٥	٥
ف.	٢	٦	–٢	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	تدنية

↑

وبإجراء التحسين اللازم على الجدول الأول حيث أن عمود ($س_{٢}$) هو العمود المحوري وصف ($س_{٦}$) هو الصف المحوري ومن ثم العنصر (٥) هو العنصر المحوري فيكون : –

- صف $س_{٢}$ (المحور الجديد) = صف $س_{٦}$ ÷ ٥ فيكون الناتج هو :

صف $س_{٢}$ = (١/٥ ، ١ ، – ٣/٥ ، – ١/٥ ، صفر ، ١/٥ ، صفر ، ٣)

- صف $س_{٥}$ الجديد = صف $س_{٥}$ القديم – (– ٦) × صف المحور الجديد

أي صف $س_{٢}$ في الجدول الجديد . ومن ثم فإن:

٥ – (–٦) × ١/٥ = ٢٥/٥ + ٦/٥ = ٣١/٥

– ٦ – (– ٦) × ١ = – ٦ + ٦ = صفر

١٠ − (− ٦) × (−٣/٥) = ٥٠/٥ − ١٨/٥ = ٣٢/٥

صفر − (− ٦) × (−١/٥) = − ٦/٥

١− (− ٦) × صفر = ١

صفر − (− ٦) × ١/٥ = ٦/٥

صفر − (− ٦) × صفر = صفر

٢٠ − (− ٦) × ٣ = ٢٠ + ١٨ = ٣٨

- **<u>صف س$_{٧}$ الجديد</u> = صف س$_{٧}$ القديم − ١ × صف المحور الجديد**

= صف س$_{٧}$ القديم − صف س$_{٢}$

أي أن صف س$_{٧}$ الجديد عبارة عن :

١− ١/٥ = ٤/٥

١− ١ = صفر

١ − (−٣/٥) = ٨/٥

صفر − (−١/٥) = ١/٥

صفر − صفر = صفر

صفر − ١/٥ = −١/٥

١ − صفر = ١

٥ − ٣ = ٢

- **<u>صف الدالة (ف.)</u> الجديد = صف (ف.) القديم − ٦ × صف المحور الجديد**

أي أن صف (ف.) الجديد عبارة عن :

٢ − ٦ × ١/٥ = ٤/٥

٦ − ٦ × ١ = صفر

−٢ − ٦ × (−٣/٥) = ٨/٥

−١ − ٦ × (−١/٥) = ١/٥

صفر − ٦ × صفر = صفر

صفر − ٦ × ١/٥ = − ٦/٥

صفر − ٦ × صفر = صفر

٢٠ − ٦ × ٣ = ٢

ومن ثم فإن جدول التحسين الأول عبارة عن :

الجدول الثاني (التحسين الأول)

(م. أ)	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	س٧	قيم الحل	النسبة
س٢	١/٥	١	−٣/٥	−١/٥	صفر	١/٥	صفر	٣	.
س٥	٣١/٥	صفر	٣٢/٥	−٦/٥	١	٦/٥	صفر	٣٨	٥,٩
س٧	٤/٥	صفر	(٨/٥)	١/٥	صفر	−١/٥	١	٢	١,٢٥ ←
ف.	٤/٥	صفر	٨/٥	١/٥	صفر	−٦/٥	صفر	٢	تدنية

وبملاحظة الجدول الثاني نجد تحقق شرط الإمكانية وعدم تحقق شرط الأمثلية حيث لازال هناك معاملات موجبة في صف الدالة الوهمية (ف.) والمطلوب تصغير لتلك الدالة . لذا يتم اعتبار جولة تحسين أخرى على النحو التالي :

- **عمود المحور هو عمود (س٣) ذو أكبر معامل موجب في صف الدالة (ف.) .**
- **صف المحور هو صف المتغير الصناعي (س٧) المقابل لأقل نسبة في العمود الأخير من الجدول الثاني :**
- **العنصر المحوري هو العنصر (٨/٥)**

ومن ثم يتم التحسين على النحو التالي: −

- <u>صف المحور الجديد</u>= الصف المحوري القديم ÷ العنصر المحوري

أي أن صف س٣ في الجدول الثالث = صف س٧ في الجدول الثاني ÷ (٨/٥)

= صف س٧ في الجدول الثاني × ٥/٨

فتكون عناصر صف س٣ في الجدول الثالث هي :

(١/٢ ، صفر ، ١ ، ١/٨ ، صفر ، − ١/٨ ، ٥/٨ ، ٥/٤)

- **<u>صف س٢ الجديد</u> = صف س٢ القديم − (− ٣/٥) × صف س٣ الجديد**

= صف س٢ القديم + ٣/٥ × صف المحور الجديد

أي أن :

١/٥ + ٣/٥ × ١/٢ = ٢/١٠ + ٣/١٠ = ١/٢

١ + ٣/٥ × صفر = ١

− ٣/٥ + ٣/٥ × ١ = صفر

−١/٥ + ٣/٥ × ١/٨ = − ٨/٤٠ + ٣/٤٠ = − ٥/٤٠ = − ١/٨

صفر + ٣/٥ × صفر = صفر

صفر + ٣/٥ × (− ١/٨) = ٨/٤٠ − ٣/٤٠ = ٥/٤٠ = ١/٨

صفر + ٣/٥ × ٥/٨ = ٣/٨

٣ + ٣/٥ × ٥/٤ = ١٥/٤

- **<u>صف س٥ الجديد</u> = صف س٥ القديم − ٣٢/٥ × صف المحور الجديد**

ومن ثم فإن عناصر صف (س٥) الجديد هي :

٣١/٥ − ٣٢/٥ × ١/٢ = ٣

صفر − ٣٢/٥ × صفر = صفر

٣٢/٥ − ٣٢/٥ × ١ = صفر

−٦/٥ − ٣٢/٥ × ١/٨ = −٢

١ − $\frac{٣٢}{٥}$ × صفر = ١

$\frac{٦}{٥}$ − $\frac{٣٢}{٥}$ × (− $\frac{١}{٨}$) = ٢

صفر − $\frac{٣٢}{٥}$ × $\frac{٥}{٨}$ = −٤

٣٨ − $\frac{٣٢}{٥}$ × $\frac{٥}{٤}$ = ٣٠

- **أما عن صف الدالة الوهمية (ف٠) الجديد = صف (ف٠) القديم − $\frac{٨}{٥}$× صف المحور الجديد . ومن ثم فإن عناصر صف الدالة (ف٠) الجديد هي :**

$\frac{٤}{٥}$ − $\frac{٨}{٥}$ × $\frac{١}{٢}$ = صفر

صفر − $\frac{٨}{٥}$ × صفر = صفر

$\frac{٨}{٥}$ − $\frac{٨}{٥}$ × ١ = صفر

$\frac{١}{٥}$ − $\frac{٨}{٥}$ × $\frac{١}{٨}$ = صفر

صفر − $\frac{٨}{٥}$ × صفر = صفر

− $\frac{٦}{٥}$ − $\frac{٨}{٥}$ × (− $\frac{١}{٨}$) = − ١

صفر − $\frac{٨}{٥}$ × $\frac{٥}{٨}$ = − ١

٢ − $\frac{٨}{٥}$ × $\frac{٥}{٤}$ = صفر

ومن ثم فإن عناصر الجدول الثالث هي : −

الجدول الثالث (التحسين الثاني)

(م. أ)	$س_١$ $س_٢$ $س_٣$ $س_٤$ $س_٥$ $س_٦$ $س_٧$	قيم الحل
$س_٢$	$\frac{١}{٢}$ ١ صفر −$\frac{١}{٨}$ صفر $\frac{١}{٨}$ $\frac{٣}{٨}$	$\frac{١٥}{٤}$
$س_٥$	٣ صفر صفر −٢ ١ ٢ −٤	٣٠
$س_٣$	$\frac{١}{٢}$ صفر ١ $\frac{١}{٨}$ صفر −$\frac{١}{٨}$ $\frac{٥}{٨}$	$\frac{٥}{٤}$
ف.	صفر صفر صفر صفر −١ −١	صفر

ويملاحظة عناصر قيم الحل وصف الأمثلية للدالة (ف.) نجد أن :

- كافة عناصر قيم الحل موجبة لذا فالحل ممكن .
- كافة معاملات صف اختبار الأمثلية أصفاراً ومعاملات سالبة وحيث أن المطلوب في تلك المرحلة هو تدنية للدالة (ف.) لذا فالحل أمثل وتنتهي المرحلة الأولى . ومن ثم يتم شطب أعمدة المتغيرات الصناعية س٦ ، س٧ وشطب صف الدالة الوهمية (ف.) والجدول المتبقي يعتبر أساس لجدول الحل المبدئي للمرحلة الثانية .

المرحلة الثانية II : −

الجدول الأول للمرحلة الثانية

م . أ	جـ ر / م. م. أ	٥ س١	−٦ س٢	−٧ س٣	صفر س٤	صفر س٥	قيم الحل	النسبة
س٢	−٦	١/٢	١	صفر	−١/٨	صفر	١٥/٤	٧,٥
س٥	صفر	٣	صفر	صفر	−٢	١	٣٠	١٠
س٣	−٧	(١/٢)	صفر	١	١/٨	صفر	٥/٤	٢,٥ ←
هـ ر		−١٣/٢	−٦	−٧	−١/٨	صفر	−١٢٥/٤	تعظيم
هـ ر − جـ ر		−٢٣/٢ ↑	صفر	صفر	−١/٨	صفر		

في الجدول الأخير يلاحظ تحقق شرط الإمكانية لكن شرط الأمثلية غير متحقق نظراً لوجود معاملات سالبة في صف الأمثلية (هـ ر − جـ ر) حيث أن المشكلة تعظيم لدالة الهدف د (س) . لذا يتم اعتبار جولة تحسين حيث يتم اختيار :

- عمود (س١) كمتغير داخل في الحل (عمود المحور)
- صف (س٣) كمتغير خارج من الحل (صف المحور) .

- **العنصر ($\frac{١}{٢}$) هو العنصر المحوري فيكون :**
- **صف المحور الجديد (صف س$_{١}$) = صف س$_{٣}$ القديم ÷ ($\frac{١}{٢}$)**

= صف س$_{٣}$ × ٢

فتكون عناصر صف س$_{١}$ هي :

(١ ، صفر ، ٢ ، $\frac{١}{٤}$ ، صفر ، $\frac{٥}{٢}$)

- **عناصر صف س$_{٢}$ الجديد = صف س$_{٢}$ القديم –($\frac{١}{٢}$) × صف المحور الجديد**

أي أن عناصر صف س$_{٢}$ الجديد هي : –

$\frac{١}{٢}$ – $\frac{١}{٢}$ × ١ = صفر

١ – $\frac{١}{٢}$ × صفر = ١

صفر – $\frac{١}{٢}$ × ٢ = – ١

– $\frac{١}{٨}$ – $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٤}$ = – $\frac{١}{٤}$

صفر – $\frac{١}{٢}$ × صفر = صفر

$\frac{١٥}{٤}$ – $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٥}{٢}$ = $\frac{٥}{٢}$

- **عناصر صف س$_{٥}$ الجديد = صف س$_{٥}$ القديم – ٣ × صف المحور الجديد**

أي أن عناصر صف س$_{٥}$ الجديد هو :

٣ – ٣ × ١ = صفر

صفر – ٣ × صفر = صفر

صفر – ٣ × ٢ = –٦

– ٢ – ٣ × $\frac{١}{٤}$ = – $\frac{١١}{٤}$

١ – ٣ × صفر = ١

٣٠ – ٣ × $\frac{٥}{٢}$ = $\frac{٤٥}{٢}$

- أما عناصر صف المجاميع هـ$_ر$ وصف اختبار الأمثلية (هـ$_ر$ – جـ$_ر$) فيتم استنتاجها في الجدول التالي : –

الجدول الثاني (للمرحلة الثانية)

م . أ	جـ$_ر$ / م. م. أ	٥ س$_1$	– ٦ س$_2$	–٧ س$_3$	صفر س$_4$	صفر س$_5$	قيم الحل	النسبة
س$_2$	– ٦	صفر	١	– ١	١/٤	صفر	٥/٢	
س$_5$	صفر	صفر	صفر	– ٦	– ١١/٤	١	٤٥/٢	
س$_1$	– ٧	١	صفر	٢	١/٤	صفر	٥/٢	
هـ$_ر$		٥	– ٦	١٦	١١/٤	صفر	–٥/٢	تعظيم
هـ$_ر$ – جـ$_ر$		صفر	صفر	٢٣	١١/٤	صفر		

وبملاحظة عناصر الجدول الأخير يلاحظ الآتي : –

- كافة عناصر قيم الحل المناظرة للمتغيرات الأساسية (س$_2$ ، س$_5$ ، س$_1$) قيماً موجبة لذا فالحل ممكن .
- كافة معاملات صف اختبار الأمثلية (هـ$_ر$ – جـ$_ر$) معاملات :
- صفرية <u>فقط</u> تناظر أعمدة المتغيرات الأساسية .
- موجبة <u>جميعاً</u> تناظر أعمدة المتغيرات الغير أساسية (س$_3$ ، س$_4$) وحيث أن المشكلة محل الدراسة هي تعظيم لدالة الهدف د(س) لذا فالحل أمثل ووحيد وهو : –

س$_1^*$ = ٥/٢ ، س$_2^*$ = ٥/٢ ، س$_3^*$ =صفر ، س$_4^*$ = صفر

س$_5^*$ = ٤٥/٢ ، س$_6^*$ = س$_7^*$ = صفر ، د (س*) = – (٥/٢) .

ملاحظات على طريقة (م) الكبرى والسمبلكس ذات المرحلتين : –

عند تناول جداول الحل سواء بطريقة (م) الكبرى أو السمبلكس ذات المرحلتين قد ينتج الآتي : –

١– خروج كافة المتغيرات الصناعية من متغيرات الأساس وهنا نجد أن شرطي الإمكانية والأمثلية تم تحقيقها في المرحلة الأولى ووصول قيمة الدالة الوهمية ف. إلى الصفر . وهذا يعني أن لمشكلة البرمجة الخطية المطروحة لها حل ممكن أو مسموحاً به ويمكن الانتقال للمرحلة الثانية لطريقة السمبلكس ذات المرحلتين .

٢– إذا تحقق كل من شرطي الإمكانية والأمثلية ولا زال هناك أحد المتغيرات الصناعية موجود ضمن المتغيرات الأساسية بقيمة تزيد عن الصفر فهذا يعني أن مشكلة البرمجة الخطية المطروحة ليس لها حل ممكن وفي هذه الحالة نتوقف عن الحل وتعليقنا على هذه الحالة كما سيرد في الحالات الخاصة بأن المشكلة محل الدراسة ليس لها حل ممكن وهو ما سيرد في مجموعة الحالات الخاصة فيما بعد . وفي هذه الحالة سنجد في طريقة (م) الكبرى أن قيمة دالة الهدف تحتوي على حد مركب من حدين الأول ثابت والآخر يحتوي على مقدار يشمل معامل الجزاء (م) أما في طريقة السمبلكس ذات المرحلتين ستجد أن الدالة (ف.) لن تصل إلى الصفر في المرحلة الأولى . وهو ما سيعوق حل المرحلة الثانية .

٣– إذا تحقق شرطي الإمكانية والأمثلية ولا زال هناك أحد المتغيرات الصناعية موجود ضمن متغيرات الأساس ولكن بقيمة صفرية في قيم الحل فهذا يعني أن هناك حل للمشكلة ويعتبر القيد الذي يوجد به هذا المتغير الصناعي والذي ظهر بقيمة صفرية ضمن متغيرات الأساس بمثابة قيد زائد أو غير فعال .

٤- لازلنا نؤكد على أنه عند استخدام طريقة السمبلكس ذات المرحلتين فإنه في المرحلة الأولى للحل يتم تدنية الدالة (ف.) دائماً أبداً وذلك بغض النظر عن المطلوب تعظيم أو تدنية الدالة د(س) . أما في المرحلة الثانية من تلك الطريقة فالدور الأساسي للدالة د(س) حيث يتم إجراء اللازم حسب المطلوب من حيث تعظيم دالة الهدف د(س) أم تدنيتها .

الحالات الخاصة عند حل النماذج الخطية بيانيًا أو بطرق السمبلكس :

في هذا الجزء سوف نلقي الضوء على بعض الحالات الخاصة والتي قد نكون عرضه لها عند حل النماذج الخطية سواء بيانياً أو جبرياً من خلال أحد طرق السمبلكس التي تم طرحها سابقاً للحصول على الحل الأمثل للنموذج الخطي محل الدراسة . حيث نجد أنه ربما نواجه موقفاً غير عادياً لم يسبق أن عهدناه في التطبيقات السابقة لكن بقدر ما هو ممكن يجب أن نحكم المنطق الرياضي في الخروج من مثل هذه الحالات متى أمكن ذلك . وقد يكون من الأفضل في مثل هذه الحالات الخاصة التعرض لها من خلال أمثلة رقمية مزودة كلما أمكن بتفسيرات بيانية ولفظية حتى تكتمل الصورة والفائدة من إيضاح خصائص تلك الحالات وكيفية التغلب عليها ومواجهتها بأسلوب رياضي وعملي صحيح .

أولاً : حالة وجود حلول مثلى متعددة : Multiple Optimum Solutions

والمقصود بتعدد الحلول المثلى في مشاكل الإنتاج على سبيل المثال حتى تتضح الرؤية هو إمكانية إنتاج توليفات مختلفة كل منها يعبر عن عدد وحدات مختلف (أو بمعنى توليفات) من الأنواع المختلفة لكنها تعطي نفس القدر من الأرباح أو التكاليف (أو الخسارة) . هذا ويمكن ملاحظة ذلك بيانياً وجدولياً بطرق السمبلكس على النحو التالي : -

١- بيانياً : - عند تحريك الخط المتقطع الممثل لدالة الهدف في اتجاه منطقة الحلول المشتركة إلى أن يمس أول نقطة (في حالة التدنية) أو آخر نقطة (في حالة التعظيم) وربما قد يكون العكس حسب إشارات معاملات المتغيرات القرارية في دالة الهدف كما سبق و أن أوضحنا ذلك . فإذا انطبق الخط المتقطع الممثل للدالة د (س) على أحد أضلاع منطقة الحلول

المشتركة فإن هذا يفيد أننا بصدد حالة تعدد حلول مثلى . هذا ويمكن ملاحظة ذلك بمجرد النظر للعلاقات الرياضية الموجودة في النموذج الخطي فإذا كان:-
الطرف الأيمن لأحد القيود = حاصل ضرب مقدار ثابت × معادلة دالة الهدف
أو العكس صحيح بمعنى إذا كانت :-
معادلة دالة الهدف = حاصل ضرب مقدار ثابت × الطرف الأيمن لأحد القيود
أو خارج قسمة الطرف الأيمن لأحد القيود على مقدار ثابت
فهذا يعني أننا سنكون بصدد حالة تعدد حلول مثلى بمعنى أن هناك عدد لا نهائي من الحلول المثلى تعطي نفس القيمة المثلى لدالة الهدف د(س*) .

٢- <u>أما جدولياً</u> : فعند تناول الحل بأحد طرق السمبلكس المختلفة فإنه بعد إجراء جولات التحسين المتتالية لحين تحقق شرطي الإمكانية والأمثلية (أي في جدول الحل الأمثل و الأخير من الحل) سنجد أن هناك أحد المتغيرات الغير أساسية يناظره معامل صفري في صف اختيار الأمثلية (هـ$_{ر}$ - جـ$_{ر}$) . وهذا المعامل الصفري الذي يوجد أسفل عمود متغير غير أساسي في صف اختبار الأمثلية يفيد أننا بصدد حالة تعدد حلول مثلى والجدول الذي يكون نحن بصدده هو أحد تلك الحلول المثلى . فإذا أردنا الوصول لحل أمثل آخر يمكنك اعتبار جولة تحسين إضافية وذلك باعتبار المتغير الغير أساسي ذو المعامل الصفري في صف الأمثلية (هـ$_{ر}$ - جـ$_{ر}$) كعمود محوري ثم يتم حساب النسب في العمود الأخير من هذا الجدول الأمثل ومن ثم تحديد أقل نسبة لتناظر صف المحور ومن ثم يتم تحديد العنصر المحوري وبالتالي تستكمل جولة التحسين الإضافية بنفس آلية عملية التحسين التي نعرفها فينتج جدول آخر بقيم مختلفة للمتغيرات الأساسية لكن بنفس القيمة المثلى لدالة الهدف أي القيمة د(س*) .

هذا ومن خلال جدول الحل الأمثل والحل الأمثل الإضافي يمكننا استنتاج مجموعة من البدائل التي يمكن استنتاجها من الحلين الأمثلين السابقين يؤديان إلى حلول مثلى أخرى لا تتغير عندها قيمة دالة الهدف د(س*) رغم تغيير قيم متغيرات الأساس في كل مرة . ولاستنتاج مثل هذه الحلول الأخرى المتعددة يتم الآتي :

دعنا نفرض أن الحل الأمثل الأول نتج عنه القيم المثلى التالية : س$_١^{*/}$ ، س$_٢^{*/}$ مثلاً و أن الحل الأمثل الثاني ينتج عنه القيم المثلى س$_١^{*//}$ ، س$_٢^{*//}$ في هذه الحالة يمكنك استنتاج مجموعة من البدائل الممكنة من خلال التعويض في المعادلتين الخطيتين التاليتين:

س$_١$ = ل س$_١^{/}$ + (١ – ل) س$_١^{//}$

، س$_٢$ = ل س$_٢^{/}$ + (١ – ل) س$_٢^{//}$

حيث صفر ≤ ل ≤ ١

- **فإذا تم التعويض عن ل = صفر يعطي الحل الأمثل الثاني أو الإضافي أي يعطي س$_١$ = س$_١^{*//}$ ، س$_٢$ = س$_٢^{*//}$.**
- **أما إذا تم التعويض عن ل = ١ فإن الناتج هو إحداثيات الحل الأمثل الأول أي أن :**

س$_١$ = س$_١^{/}$ ، س$_٢$ = س$_٢^{/}$.

- **أما إذا تم التعويض عن ل = أي قيمة كسرية فيما بين الصفر والواحد الصحيح فإن الناتج يعطي إحداثيات لحلول مثلى مختلفة كلما اختلفت القيمة الكسرية (ل) في كل مرة عن الأخرى .**

<u>مثال</u> : المطلوب إيجاد قيم س$_١$ ، س$_٢$ التي تجعل الدالة

د (س) = ٥/٢ س$_١$ + س$_٢$ (تعظيم)

<u>بشرط</u> : –

$٣س_{١} + ٦س_{٢} \geq ١٨$

$٥س_{١} + ٢س_{٢} \geq ١٠$

$س_{١} ، س_{٢} \leq$ صفر

في هذا المثال بداية لاحظ أن علاقة التباين للقيد الثاني إذا تم قسمتها ÷ ٢ ينتج أن : $\frac{٥}{٢} س_{١} + س_{٢} \geq ٥$ أو العكس صحيح إذا تم ضرب معادلة دالة الهدف × ٢ ينتج الطرف الأيمن للقيد الثاني .

لاحظ أن الطرف الأيمن لهذا القيد أصبح صورة طبق الأصل من معادلة دالة الهدف وهو ما يفيد تساوي ميلي الخط المستقيم المعبر عن هذا القيد والخط المستقيم المعبر عن دالة الهدف . وتساوي الميلين يفيد أن خط القيد الثاني موازياً لخط معادلة دالة الهدف . لذا فمن خلال النظرة المبدئية يمكن استنتاج أننا سنكون بصدد حالة تعدد حلول مثلي سواء في حالة التدنية أو في حالة تعظيم قيمة دالة هدف النموذج الخطي . والتوازي الناتج عن تساوي الميلين يؤدي إلى أنه عند تحريك الخط الممثل للدالة د (س) = صفر موازياً لنفسه في اتجاه المجال المشترك سوف ينطبق على الخط المستقيم المعبر عن القيد الثاني وهو ما يفيد تعدد الحلول المثلى . و الآن دعنا نتأكد من مدى صحة هذا الاستنتاج الناتج عن النظرة المبدئية للعلاقات الخطية للنموذج الخطي والذي أفاد بوجود حالة تعدد حلول مثلى.

- <u>الحل البياني للنموذج : -</u>

- تمثيل القيود وتحديد اتجاهاتها ومن ثم تحديد منطقة الحلول المشتركة إن وجدت : –

* <u>قيدي عدم السالبية</u> : $س_{١} \leq$ صفر ، $س_{٢} \leq$ صفر يفيدا أن منطقة الحلول المشتركة إن وجدت ستقع في الربع الأول حتماً .

* **القيد الأول :** ٣س$_{١}$ + ٦س$_{٢}$ ≥ ١٨

يحول لمعادلة : ٣س$_{١}$ + ٦س$_{٢}$ = ١٨ ÷ ٣

فيكون: س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ = ٦

وباستنتاج إحداثي نقطتين لهذا الخط كما يوضحها الجدول المقابل

س$_{١}$	صفر	٦
س$_{٢}$	٣	صفر

القيد الثاني : ٥س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ ≥ ١٠

يحول لمعادلة : ٥س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ = ١٠

وباستنتاج إحداثي نقطتين لهذا الخط كما يوضحها الجدول المقابل

س$_{١}$	صفر	٢
س$_{٢}$	٥	صفر

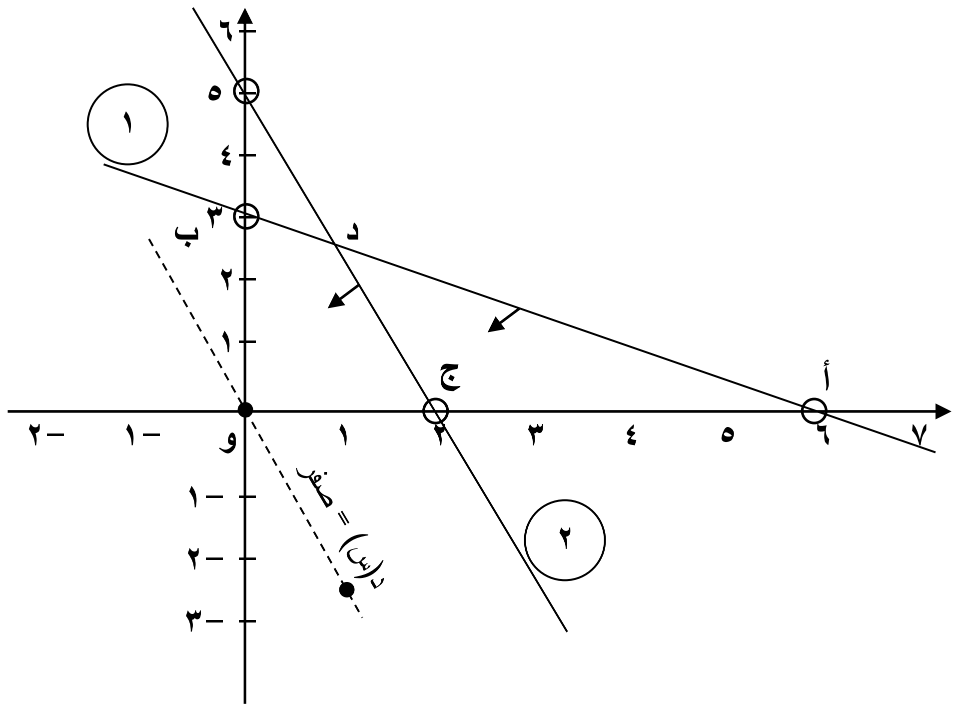
- **تمثيل معادلة دالة الهدف: – نفرض أن د (س) = صفر فيكون :**

٢,٥س$_{١}$ + س$_{٢}$ = صفر

وباستنتاج إحداثي نقطتين لهذا الخط كما يوضحها الجدول المقابل

س$_{١}$	صفر	١
س$_{٢}$	صفر	–٢,٥

الرسم البياني لتحديد منطقة الحلول المشتركة إن وجدت ومن ثم تحديد الحل الأمثل :



<u>تصفية المجال المشترك :</u>

- **قيدي عدم السالبية يفيدا أن المجال المشترك سيقع في الربع الأول $س_١$ و $س_٢$.**
- **المجال المشترك بين القيد الأول وقيدي عدم السالبية : أ و ب**
- **المجال المشترك بين القيد الأول والثاني وعدم السلبية : ج و ب د (المجال المشترك)**

- **وبتحريك الخط المستقيم المعبر عن دالة الهدف د(س) = صفر في اتجاه المجال المشترك <u>جـ و ب د</u> إلى أن آخر نقطة في المجال المشترك نجد أن خط الدالة د(س) = صفر سوف ينطبق بالكامل على الخط المستقيم جـ د نظراً لتساوي الميلين . وهو ما يفيد أن أي نقطة**

تقع على الخط المستقيم جـ د تعتبر حلاً أمثلاً رغم تغيير إحداثيات كل نقطة عن الأخرى على هذا الخط فيما بين كل نقطة وأخرى. وللتأكيد على ذلك دعنا نعوض بإحداثيات النقطة جـ (٢ ، صفر) مرة ، والنقطة د وهي تقاطع خطي القيدين الأول والثاني مرة أخرى. وبحل هاتين المعادلتين معاً ينتج أن د (١ ، $\frac{٥}{٢}$) فنجد أن :

<u>د(س) عند النقطة جـ</u> = $\frac{٥}{٢}$ (٢) + صفر = ٥

كما أن :

<u>د(س) عند النقطة د</u> = $\frac{٥}{٢}$ (١) + $\frac{٥}{٢}$ = ٥

أي رغم اختلاف إحداثيات النقطتين جـ ، د إلا أن قيمة دالة الهدف كما هي دون تغيير .

أما عن الحل الجدولي فيكون باستخدام طريقة السمبلكس العادية نظراً لأن كافة عناصر ثوابت القيود موجبة وكل القيود في شكل متباينات على الصورة (≥) . ومن ثم يتم الآتي: –

- **وضع النموذج الخطي في الصورة المعيارية من خلال إضافة متغير متمم لكل قيد فيصبح الشكل المعياري للنموذج على الصورة التالية :**

د (س) = $\frac{٥}{٢}$ $س_{١}$ + $س_{٢}$ + (٠) $س_{٣}$ + (٠) $س_{٤}$ (تعظيم)

بشرط القيود :

$س_{١}$ + ٢ $س_{٢}$ + $س_{٣}$ = ٦

٥$س_{١}$ + ٢ $س_{٢}$ + $س_{٤}$ = ١٠

$س_{ر}$ ≤ صفر حيث ر = ١– ٤

والجداول التالية تبين جولات الحل بدءاً من جدول الحل المبدئي إلى جدول الحل الأخير (الأمثل):

جداول السمبلكس

م . أ	جـ ر / م.م.أ	٥/٢	١	صفر	صفر	قيم	النسبة
		س١	س٢	س٣	س٤	الحل	
س٣	− ٦	١	٢	١	صفر	٦	٦
س٤	صفر	٥	٢	صفر	١	١٠	٢
هـ ر		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	تعظيم
هـ ر − جـ ر		− ٥/٢	−١	صفر	صفر		
س٣	صفر	صفر	٨/٥	١	− ١/٥	٤	
س١	٥/٢	١	٢/٥	صفر	١/٥	٢	
هـ ر		٥/٢	١	صفر	١/٢	٥	تعظيم
هـ ر − جـ ر		صفر	صفر	صفر	١/٢		

في جدول السمبلكس الأخير لاحظ أن : −

- **كافة عناصر قيم الحل موجبة لذا فالحل ممكن .**
- **كافة معاملات صف اختبار الأمثلية معاملات : −**

- صفرية تناظر أعمدة المتغيرات الأساسية س١ ، س٣ <u>وبعض أعمدة المتغيرات الغير أساسية</u> (س٢)

- موجبه تناظر أعمدة باقي المتغيرات الغير أساسية (س٤) وحيث أن المشكلة تعظيم لذا فالجدول الأخير يعتبر حل أمثل لكنه ليس حلاً وحيداً بل أننا بصدد حالة تعدد حلول مثلى .

لاحظ أنه من الطبيعي كما رأينا سابقاً في جداول السمبلكس أن تكون المعاملات الصفرية في صف اختبار الأمثلية (هـ ر − جـ ر) أسفل المتغيرات

الأساسية وهي في مثالنا (س$_{١}$ ، س$_{٣}$) . لكن ما هو مستجد علينا في تلك الحالة أن معامل المتغير الغير أساسي (س$_{٢}$) معامل صفري وهو الذي يفيد أننا بصدد حالة تعدد حلول مثلى . ولاستنتاج صورة أخرى بديلة من تلك الحلول المتعددة يمكن اعتبار جولة تحسين أخرى باعتبار عمود المتغير الغير أساسي ذو المعامل الصفري في صف الأمثلية (س$_{٢}$) كعمود محوري و يتم حساب النسب من جديد [(٤ ÷ $\frac{٨}{٥}$ = ٤ × $\frac{٥}{٨}$ = $\frac{٥}{٢}$) ، (٢ ÷ $\frac{٥}{٢}$ = ٢ × $\frac{٢}{٥}$ = ٥)]

أي أن صف المحور هو صف س$_{٣}$ ومن ثم فالعنصر المحوري هو ($\frac{٨}{٥}$) والجدول التالي هو بمثابة الحل الأمثل الثاني لهذا النموذج .

جدول لحل الأمثل البديل

م . أ	جـ$_{ر}$ / م.م.أ	-٦ س$_{١}$	-٧ س$_{٢}$	صفر س$_{٣}$	صفر س$_{٤}$	قيم الحل
س$_{٢}$	١	صفر	١	$\frac{٥}{٨}$	$-\frac{١}{٨}$	$\frac{٥}{٢}$
س$_{١}$	$\frac{٥}{٢}$	١	صفر	$-\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	١
هـ$_{ر}$		$\frac{٥}{٢}$	١	صفر	$\frac{١}{٢}$	٥
هـ$_{ر}$ – جـ$_{ر}$		صفر	صفر	صفر	$\frac{١}{٢}$	

والجدول الأخير يحقق شرطي الإمكانية والأمثلية ويفيد كذلك بتعدد الحلول المثلى نظراً لأن هناك متغير غير أساسي (س$_{٣}$) ذو معامل صفري في صف اختبار الأمثلية. ولاحظ أيضاً أن قيمة دالة الهدف المثلى ثابتة في الجدولين الأمثليين الأول والثاني وهي القيمة (٥) ومن خلال هذين الجدولين فإن :

من خلال جدول الحل الأمثل الأول فإن الحل الأمثل الأول هو :

س$_{١}^{*/}$ = ٢ ، س$_{٢}^{*/}$ = صفر ، س$_{٣}^{*/}$ = ٤ ، س$_{٤}^{*/}$ = صفر ، د(س$^{*/}$) = ٥

كما أن الحل الأمثل الثاني (البديل) وذلك من واقع جدول الحل الأمثل الثاني هو:

س$_{١}^{*//}$ = ١ ، س$_{٢}^{*//}$ = $\frac{٥}{٢}$ ، س$_{٣}^{*//}$ = س$_{٤}^{*//}$ = صفر ، د (س$^{*//}$) = ٥ .

وخلاصة ما سبق هو أنه رغم تغير مكونات وقيم المتغيرات الأساسية في الجدولين إلا أنه لا زالت قيمة دالة الهدف ثابتة دون تغيير . هذا ويمكننا استنتاج عدد لا نهائي من الحلول المثلى الأخرى والتي تعطي نفس القيمة المثلى للدالة د (س*) وذلك من خلال التعويض في جميع البدائل الخطية الممكنة والمكونة من الحلين الأمثلين السابقين وذلك كما يلي:

س$_{١}$ = ل س$_{١}^{/}$ + (١ − ل) س$_{١}^{//}$

، س$_{٢}$ = ل س$_{٢}^{/}$ + (١ − ل) س$_{٢}^{//}$

حيث صفر ≤ ل ≤ ١

فمثلاً عند ل = $\frac{١}{٢}$ فإن:

س$_{١}$ = $\frac{١}{٢}$ (٢) + (١ − $\frac{١}{٢}$) (١) = ١ + $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

، س$_{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ (صفر) + (١ − $\frac{١}{٢}$) ($\frac{٥}{٢}$) = صفر + $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٥}{٢}$ = $\frac{٥}{٤}$

، د (س) = $\frac{٥}{٢}$ س$_{١}$ + س$_{٢}$ = $\frac{٥}{٢}$ ($\frac{٣}{٢}$) + $\frac{٥}{٤}$ = $\frac{١٥}{٤}$ + $\frac{٥}{٤}$ = ٥

- **وكذلك عند ل = $\frac{١}{٥}$ فإن:**

س$_{١}$ = $\frac{١}{٥}$ (٢) + (١ − $\frac{١}{٥}$) (١) = $\frac{٢}{٥}$ + $\frac{٤}{٥}$ = $\frac{٦}{٥}$

، س$_{٢}$ = $\frac{١}{٥}$ صفر٢) + (١ − $\frac{١}{٥}$) ($\frac{٥}{٢}$) = صفر + $\frac{٤}{٥}$ × $\frac{٥}{٢}$ = ٢

د(س) = $\frac{٥}{٢}$ ($\frac{٦}{٥}$) + ٢ = ٥

- **وكذلك عند ل = $\frac{١}{٣}$ فإن:**

س$_{١}$ = $\frac{١}{٣}$ (٢) + (١ − $\frac{١}{٣}$) (١) = $\frac{٢}{٣}$ + $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{٤}{٣}$

، $س_{٢} = \frac{١}{٣}$ (صفر) + $(١ - \frac{١}{٣})\ (\frac{٥}{٢}) = \frac{٢}{٣} + \frac{٥}{٢} = \frac{٥}{٣}$

، $د(س) = \frac{٥}{٢} س_{١} + س_{٢} = \frac{٥}{٢}\ (\frac{٤}{٣}) + \frac{٥}{٣} = \frac{١٠}{٣} + \frac{٥}{٣} = ٥$

وهكذا فإنه يمكن الحصول على عدد لا نهائي من الحلول المثلى .

٢- <u>حالة تعدد المتغيرات المرشحة للدخول ضمن المتغيرات الأساسية (تعدد الأعمدة المحورية)</u> :

سبق أن أوضحنا أنه عند اختيار أحد المتغيرات الغير أساسية ليكون متغيراً أساسياً في الجدول التالي (أي ليكون متغير داخل الأساس) فإن ذلك يتم بناءاً على فحص عناصر صف اختبار الأمثلية ($هـ_{ر} - جـ_{ر}$) حيث يعتمد اختيارنا للمتغير المرشح للدخول ضمن متغيرات الأساس على طبيعة مشكلة البرمجة الخطية وبالتحديد على طبيعة دالة الهدف فإذا كانت المشكلة تعظيم فإننا نبحث عن المتغير الغير أساسي ذو المعامل الأكثر سالبية في صف اختبار الأمثلية ليدخل ضمن المتغيرات الأساسية . أما في حالة مشاكل التدنية فإننا نسارع بإدخال المتغير الغير أساسي ذو أكبر معامل موجب في صف اختبار الأمثلية ليدخل ضمن متغيرات الأساس .

لكن في بعض الحالات قد يحدث سواء في حالة مشاكل التعظيم أو التدنية أن يتساوى معاملي متغيرين غير أساسين أو أكثر في معاملاتهم سواء السالبة أو الموجبة على الترتيب وفي هذه الحالة يقال أننا بصدد حالة تعادل بين المتغيرات المرشحة للدخول في الأساس .

وبصفة عامة يؤكد جميع المؤلفين بأنه لا توجد قاعدة علمية يمكن استخدامها كمعيار لاختيار متغير دون آخر من بين المتغيرات المتعادلة والمرشحة للدخول في الأساس . إلا أننا نرى أنه إذا حكمنا المنطق الرياضي فإننا نخرج من حالة التعادل ببساطة متناهية على النحو التالي :-

أ – إذا كان التعادل في أي جولة من جولات التحسين خلاف جدول الحل المبدئي فأننا يمكن أن نخرج من التعادل من خلال استخدام معاملات المتغيرات المتعادلة الموجودة في أول صف في جدول السمبلكس أعلى الجدول ($جـ_ر$) في الحكم علي أفضلية أحدهما على الآخر حيث نسارع بإدخال المتغير الغير أساسي ذو هامش الربح الأكبر في حالة مشاكل التعظيم ليصبح ضمن المتغيرات الأساسية والعكس صحيح حيث نسارع بإدخال المتغير الغير أساسي ذو هامش التكلفة أو الخسارة الأقل للدخول ضمن متغيرات الأساس في حالة مشاكل التدنية وهكذا نخرج من حالة التعادل بمنطق رياضي يؤدي لاختصار جولات التحسين .

ب – أما إذا كان التعادل في جدول الحل المبدئي فهذا يرجع ربما للتعادل أو للتساوي فيما بين المعاملات ($جـ_ر$) التي تقع أعلى الجدول وفي هذه الحالة يمكن الخروج من حالة التعادل بمنطق رياضي أيضاً من خلال اعتبار عمليات حسابية إضافية (كمسودة) يتم في كل منها افتراض أن أحد تلك المتغيرات الغير أساسية بمثابة متغير داخل (أي كعمود محوري) ومن ثم يتم تحديد النسب ومن ثم الصف المحوري وكذلك العنصر المحوري ثم يتم حساب قيمة دالة الهدف د(س). وتجري نفس الحسابات السابقة باعتبار المتغير الآخر المشارك في حالة التعادل . ومن خلال مقارنة قيم دالة الهدف في تلك الحالات يمكن اعتبار المتغير الداخل في الأساس هو ذلك المتغير الذي يؤدي للتحسين الأفضل أي يجعل قيمة الدالة د (س) أكبر من غيرها في حالة تعظيم قيمة دالة الهدف والعكس هو الصحيح تماماً في حالة التدنية.

وبصفة عامة يتم اختيار المتغير الغير أساسي الذي يدخل ضمن المتغيرات الأساسية في الجدول التالي الذي يؤدي للتحسين و التحسين الأفضل كذلك كمعيار للخروج من حالة التعال التي قد نكون بصددها .

٣- <u>حالـة تعدد المتغيـرات المرشـحة للخـروج مـن الأسـاس (تعـدد الصـفوف محورياً) :</u>

عند إجراء جولات التحسين في طرق السمبلكس المختلفة علمنا أنه عند اختيار أحد المتغيرات الأساسية لكي يصبح متغيراً غير أساسياً أي عند تحديد ما يسمى بصف المحور أو المتغير الخارج من متغيرات الأساس أننا نختار ذلك المتغير الأساسي الذي يتحول إلى الصفر أقرب من غيره في مجموعة المتغيرات الأساسية عند زيادة المتغير الداخل ضمن متغيرات الأساس وهو ذلك المتغير الذي يناظر أقل نسبة محسوبة في العمود الأخير من جداول السمبلكس فيما بعد قيم متغيرات الأساس (قيم الحل) والتي تقابل العناصر الموجبة التي تزيد عن الصفر في عمود المتغير المرشح للدخول ضمن متغيرات الأساس .

ولكن قد يحدث في أي جدول من جداول السمبلكس وعند التحسين أن تتساوى نسبتين على الأقل من حيث أقل النسب فنجد أنفسنا أمام حالة تعدد المتغيرات الأساسية المرشحة للخروج من الحل أو للتحول إلى متغيرات غير أساسية (صفرية) وتسمى حالة التعدد هذه بالاعتلال أو التحلل Degeneracy .

وهذه الحالة وإن كان يصعب اكتشافها بيانياً إلا أنها تكون واضحة في جداول السمبلكس . وإذا كنا بصدد مثل هذه الحالة (التعادل) فيمكن المفاضلة في تحديد أي من تلك المتغيرات يجب خروجه من متغيرات الأساس وذلك من خلال تطبيق قاعدة تشارنز وكوبر Charnis and Cooper حيث يتم الآتي : -

- **بعد حساب النسب فيما بين الثوابت (أو قيم الحل) والعناصر الموجبة المناظرة في عمود المحور تتحدد المتغيرات الأساسية المرشحة**

للخروج من الأساس المقابلة للنسب الأقل ونكون بصدد حالـة التعادل وتسمى الصفوف التـي تقـع فيها تلك المتغيرات المتعادلـة فـي النسب الأقل بالصفوف الأساسية المرشحة للخروج من الحل .

- **يـتم قسـمة عناصـر أول عمـود مـن أعمـدة مصـفوفة الوحـدة بالجـدول الذي به حالة التعادل (على يسار عمـود المحـور) علـى عناصر عمـود المتغير الأساسي المرشح للدخول فـي الحل . فإذا حصلنا علـى نسب متفاوتة فيتم اختيار المتغير المقابل لأقل نسبة ليعتبر متغير خارج من متغيرات الأساس ويعني ذلك التخلص من حالة التعادل .**

أمـا إذا حصـلنا علـى نسـب متسـاوية فإننـا ننتقـل لعمـود مصـفوفة الوحـدة الثـاني (مـن جهـة اليسـار) ويـتم حسـاب النسـب فيمـا بـين عناصـر عمـود مصفوفة الوحدة الجديد وبين عناصر عمود المتغير الأساسي المرشـح للدخول ضمن متغيرات الأساس .

ويمكن أن تستمر تلك العملية حتى نحصل على نسب متفاوتـة فنختـار أقلهـا لتقابـل صـف المحـور أو المتغيـر الخـارج مـن متغيـرات الأسـاس لنـتخلص من حالـة التعادل .

<u>مثال</u> : المطلوب إيجاد قيم $س_1$ ، $س_2$ التي تجعل قيمة دالـة الـهدف

د(س) = $٣ س_1 + ٥ س_2$ أكبر ما يمكن (تعظيم)

بشرط القيود : -

$$س_1 + س_2 \leq ٨$$

$$س_2 \leq ٦$$

$$٣ س_1 + ٢ س_2 \leq ١٢ ،$$

$$س_1 ، س_2 \geq صفر$$

الحل :

حيث أن ثوابت القيود جميعاً موجبة وكافة القيود على صورة متباينات في شكل (≤) لذا فالحل يكون باستخدام طريقة السمبلكس العادية وفيها يتم الآتي : −

- **تحويل النموذج الخطي للصورة المعيارية وهي : −**

د(س) =٣ س$_١$ +٥ س$_٢$ (تعظيم)

بشرط القيود : −

س$_١$+ س$_٢$ + س$_٣$ = ٨

س$_٢$ + س$_٤$ = ٦

٣ س$_١$+ ٢ س$_٢$ + س$_٥$ = ١٢

س$_ر$ ≥ صفر حيث ر = ١− ٤

- **تصوير جدول الحل المبدئي والتحسين للوصول للحل الأمثل**

جدول الحل المبدئي

م . أ	جـ ر / م.م.أ	٣	٥	صفر	صفر	صفر	قيم الحل	النسبة
		س$_١$	س$_٢$	س$_٣$	س$_٤$	س$_٥$		
س$_٣$	صفر	١	١	١	صفر	صفر	٨	٨
س$_٤$	صفر	صفر	١	صفر	١	صفر	٦	٦ ←
س$_٥$	صفر	٣	٢	صفر	صفر	١	١٢	٦ ←
هـ ر		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	تعظيم
هـ ر − جـ ر		− ٣	− ٥	صفر	صفر	صفر		
			↑					

حيث نجد أن في جدول الحل المبدئي أن المتغير الغير أساسي (س$_٢$) هو المتغير المرشح للدخول ضمن متغيرات الأساس في جولة التحسين الأولى وبعد حساب النسبة نجد أن كل من المتغيرين س$_٤$ ، س$_٥$ مرشحاً لأن يكون

متغيراً خارجاً وذلك نظراً لأن كل منهما يناظره أقل نسبة وهي (٦) في العمود الأخير من جدول الحل المبدئي . لذا يتم تطبيق قاعدة تشارنز وكوبر للخروج من حالة التعادل حيث يتم الآتي : –

- حساب النسبة الثانية وهي خارج قسمة عناصر أول عمود مصفوفة وحدة على يسار عمود المحور على عناصر عمود المحور المقابلة للصفوف المرشحة للخروج من الأساس فيكون لدينا النسبتين التاليتين :

صفر/١ = صفر تقابل صف $س_{٤}$

،

صفر/٢ = صفر تقابل صف $س_{٥}$

وتساوي النسبتين يفيد أن حالة التعادل مازالت موجودة وهو ما يتطلب منا الانتقال للعمود التالي من جهة اليسار من أعمدة مصفوفة الوحدة من جدول الحل المبدئي الذي به التعادل . لذلك ننتقل للعمود الثاني من أعمدة مصفوفة الوحدة ويتم حساب النسب المقابلة لخارج القسمة وهي : –

١/١ = ١ النسبة الثانية المقابلة للمتغير $س_{٤}$

صفر/٢ = صفر النسبة الثانية المقابلة للمتغير $س_{٥}$

وتفاوت أو اختلاف النسبتين الأخيرتين يفيد أن النسبة المقابلة للمتغير الأساسي $س_{٥}$ هي النسبة الأقل . ولذلك تكون حالة التعادل قد انتهت باختيار المتغير ($س_{٥}$) كمتغير خارج من الأساس ليحل محله المتغير الداخل ضمن الأساس وهو ($س_{٢}$) في الجدول التالي . وتستمر خطوات طريقة السمبلكس حتى نصل إلى الحل الأمثل إن وجد .

٤- <u>حالة وجود مجال مسموح به لا نهائي مجال (غير محدود)</u>

Unbounded Feasible Solution

في هذه الحالة إذا كان النموذج الخطي يحتوي على متغيرين قرارين وبالتحديد عند الحل البياني سنجد أن منطقة الحلول المشتركة منطقة غير محددة أو بمعنى آخر أن منطقة الحلول المشتركة غير مكتملة الأركان بمعنى أن المجال المشترك مفتوح ويفيد إمكانية الوصول بقيم المتغيرات القرارية إلى مالا نهاية ومن ثم الوصول بقيمة دالة الهدف إلى مالا نهاية كذلك .

أما جدولياً فعند تتبع جولات حل طرق السمبلكس المختلفة فإنه قد نجد أن عمود المتغير الغير أساسي سواء في أحد جولات التحسين وبالتحديد عمود المتغير المرشح للدخول في الحل أو أحد أعمدة المتغيرات الغير أساسية في جدول الحل الأمثل يحتوي على عناصر صفرية أو سالبة جميعاً وهذا يفيد أننا بصدد مجال مشترك غير محدد (لا نهائي).

وفي هذه الحالة نكون بصدد أحد الحالتين الفرعيتين التاليتين وهما : -

أ – مجال مشترك غير محدود لكن هناك حل أمثل محدود : -

فمثلاً اعتبر أن لديك النموذج الخطي التالي : -

<u>مثال (١)</u> : المطلوب إيجاد قيم $س_{١}$ ، $س_{٢}$ التي تجعل الدالة : -

د(س) = $س_{١}$ + ٤ $س_{٢}$ (تدنية)

بشرط القيود : -

$س_{١} + س_{٢} \leq ٤$

$س_{١} - ٢س_{٢} \geq ٢$

$٢س_{١} - س_{٢} \leq ٢$

$س_{١} ، س_{٢} \leq$ صفر

فإذا قمنا بتمثيل هذا النموذج الخطي بيانياً فإنه يتم الآتي : -

- تمثيل القيود وتحديد اتجاهاتها ومن ثم تحديد منطقة الحلول المشتركة إن وجدت وكذلك والحل الأمثل وعليه يتم الآتي:

تمثيل القيود:-

- قيدي عدم السالبية : يفيدا أن منطقة الحلول المشتركة ستقع في الربع الأول حتماً إن وجدت .
- القيد الأول : $س_١ + س_٢ \leq ٤$

يحول لمعادلة : $س_١ + س_٢ = ٤$

والجدول المقابل يوضح إحداثي نقطتين لخط القيد الأول :

$س_١$	صفر	٤
$س_٢$	٤	صفر

- القيد الثاني : $س_١ - س_٢ \geq ٢$

يحول لمعادلة : $س_١ - س_٢ = ٢$

والجدول المقابل يوضح إحداثي نقطتين لخط القيد الثاني :

$س_١$	صفر	٢
$س_٢$	− ١	صفر

أما عن اتجاه هذا القيد فيتم استخدام نقطة الأصل كمعيار في تحديد الاتجاه وذلك علة النحو التالي :

صفر − ٢ (صفر) $\geq$ ٢

أي أن كل من نقطة الأصل واتجاه القيد واحداً .

- القيد الثالث : $٢ س_١ - س_٢ \leq ٢$

يحول لمعادلة : $٢س_١ - س_٢ = ٢$

والجدول المقابل يوضح إحداثي نقطتين لخط القيد الثالث :

$س_١$	صفر	١
$س_٢$	− ٢	صفر

أما عن اتجاه هذا القيد فيتم استخدام نقطة الأصل كمعيار في تحديد الاتجاه وذلك على النحو التالي : ٢ (صفر) – (صفر) ≥ ٢

أي أن نقطة الأصل تقع في اتجاه تحقق هذا القيد أو أن كل من نقطة الأصل واتجاه القيد في اتجاه واحد .

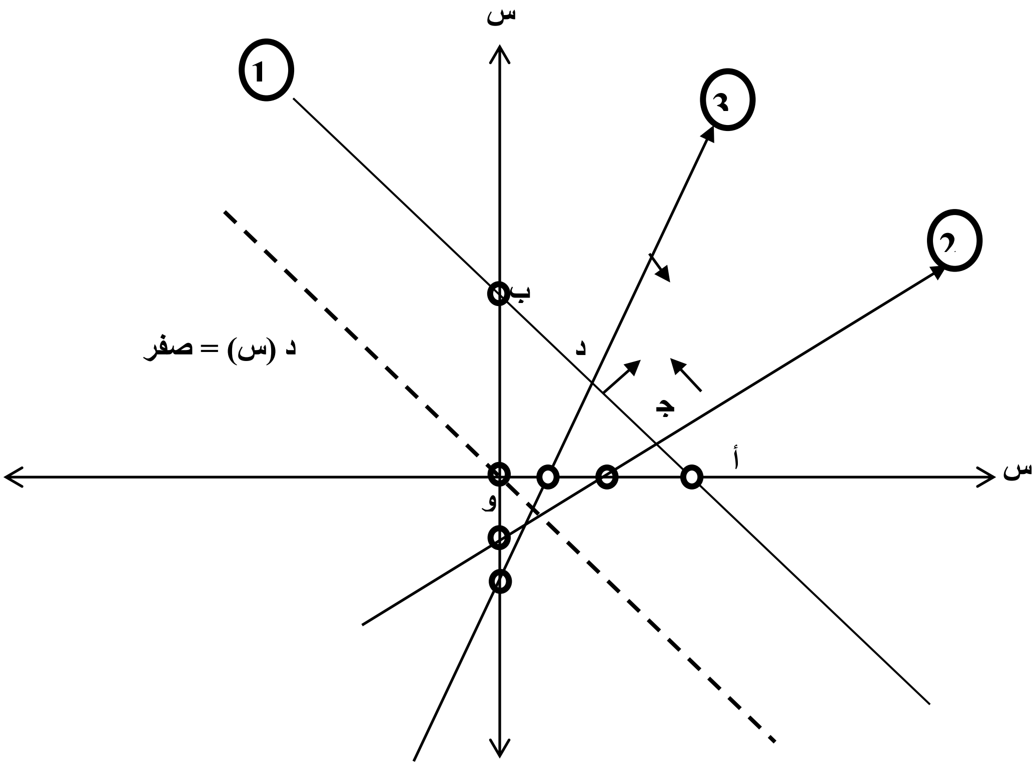
- <u>تمثيل معادلة دالة الهدف</u> : نفرض أن د (س) = صفر

فيكون : – س١ + ٤ س٢ = صفر

والجدول المقابل يوضح إحداثي نقطتين لخط الدالة د(س) = صفر :

س١	صفر	٤
س٢	صفر	–١

- وأخيراً يتم الرسم البياني للقيود وتحديد اتجاه تحقق القيود ومن ثم المجال المشترك والحل الأمثل إن وجد وذلك من خلال الرسم البياني التالي : –



تصفية المجال المشترك :

- **قيدي عدم السالبية : س١ و س٢**
- **المجال المشترك لقيدي عدم السالبية والقيد الأول : المجال المفتوح لأعلى س١ أ ب س٢**
- **المجال المشترك لقيدي عدم السالبية والقيد الأول والثاني : المجال المفتوح ٢ جـ ب س٢**
- **المجال المشترك لقيدي عدم السالبية وكافة القيود : ٢ جـ د ٣ مجال غير محدود أو لا نهائي .**
- **والحل الأمثل في حالة تدنية د (س) هو حل محدود بالنقطة (جـ) حيث أنه إذا تم تحريك الخط الممثل للدالة د (س) = صفر موازياً لنفسه في اتجاه المجال المشترك إلى أن يمس أول نقطة في المجال حيث أننا بصدد مشكلة تدنية نجد أن خط دالة الهدف يمس النقطة المحددة (جـ) كأول نقطة في المجال ومن ثم فهي تمثل الحل الأمثل المحدود رغم أن المجال المشترك مجالاً غير محدوداً (لا نهائي) .**

أي أنه قد يكون هناك مجال مسموح به (أو مجال مشترك) غير محدود ولكن في نفس الوقت هناك حل أمثل محدود وبالتالي هناك قيمة محددة لدالة الهدف والمثال التالي يوضح بالإضافة للمثال السابق تلك الملاحظة .

مثال (٢) : أوجد قيم س١ ، س٢ التي تجعل قيمة دالة الهدف :

د(س) =٦س١ – ٢ س٢ (تعظيم)

بشرط القيود : –

٢س١ – س٢ ≤ ٢

س١ ≤ ٤

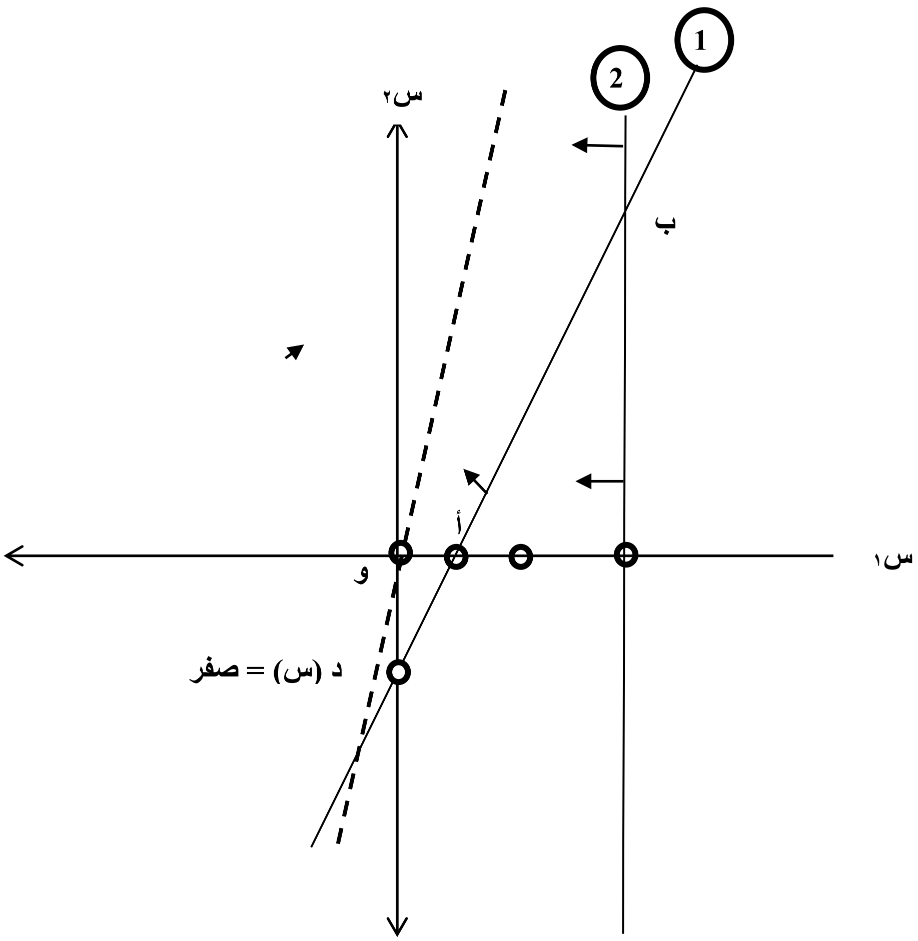
س١ ، س٢ ≥ صفر

بيانياً وجدولياً وذلك من خلال أحد طرق السمبلكس المناسبة .

<u>الحـــل</u> : -

<u>أولاً الحل البياني</u> : -

يمكن تلخيص الحل البياني الذي يوضح حل هذا النموذج في الشكل البياني التالي وعلى الطالب مراعاة استنتاج إحداثيات نقاط القيود ودالة الهدف بالطريقة المعتادة في الأمثلة السابقة .



<u>تصفية المجال المشترك :</u>

<u>قيدي عدم السالبية</u>: س١ و س٢

<u>قيدي عدم السالبية والقيد الأول</u> : ① أ و س٢ (مجال غير محدود)

<u>قيدي عدم السالبية والقيد الأول والثاني</u>: المجال المشترك هو② ب أ و س٢ (مجال غير محدود) .

ومن خلال الرسم البياني للنموذج الخطي المعطي في هذا المثال نجد أنه رغم أن المجال المشترك مجالاً غير محدوداً (لا نهائي) إلا أنه لتحديد نقطة الحل الأمثل يتم تحريك الخط الممثل لدالة الهدف د (س) = صفر موازياً لنفسه في اتجاه محور المتغير ذو المعامل الموجب في دالة الهدف ومن ثم فالتحرك في الاتجاه الموجب لمحور (س١) ذو المعامل الموجب في دالة الهدف فنجد أن خط الدالة د (س) المتقطع يمس آخر نقطة في هذا المجال الغير محدود وذلك عند النقطة المحددة في الرسم بالنقطة (ب) وهي تعتبر نقطة الحل الأمثل ذات الإحداثيات (٤، ٦) كما هو موضح بالرسم.

ومن ثم فإن أكبر قيمة لدالة الهدف هي :-

د (س) = ٦ س١ – ٢س٢ = ٦ (٤) – ٢ (٦) = ١٢

أي أن : –

س١* = ٤ ، س٢* = ٦ ، د (س*) =١٢

أما عن الحل الجدولي لهذا النموذج فإننا نستخدم طريقة السمبلكس العادية في حل هذا النموذج نظراً لأن ثوابت القيود موجبة وكافة القيود على صورة متباينات (≥) . ومن ثم فإن : –

- **النموذج في الصورة المعيارية هو : –**

د(س) = ٦ س١ – ٢س٢ + (٠) س٣ + (٠) س٤ تعظيم

<u>بشرط القيود</u> : –

٢س١ − س٢ + (س٣) = ٢

س١ +(س٤) = ٤

سر ≤ صفر حيث ر = ١−٤

- **تصوير جدول الحل المبدئي والتحسين للوصول للحل الأمثل كما هو موضح في الجداول المتتالية : −**

جداول السمبلكس

م . أ	جـ ر / م.م.أ	٦	−٢	صفر	صفر	قيم الحل	النسبة
		س١	س٢	س٣	س٤		
س٣	صفر	(٢)	−١	١	صفر	٢	١ ←
س٤	صفر	١	صفر	صفر	١	٤	٤
هـ ر		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	تعظيم
هـ ر − جـ ر		−٦ ↑	٢	صفر	صفر		
س١	٦	١	− ١/٢	١/٢	صفر	١	.
س٤	صفر	صفر	(١/٢)	− ١/٢	١	٣	←
هـ ر		٦	−١	١	صفر	٦	تعظيم
هـ ر − جـ ر		صفر	−٣ ↑	١	صفر		
س١	٦	١	صفر	صفر	١	٤	
س٢	−٢	صفر	١	−١	٢	٦	
هـ ر		٦	−٢	٢	٤	١٢	تعظيم
هـ ر − جـ ر		صفر	صفر	٢	٤		

وبملاحظة عناصر الجدول الأخير نجد تحقق كل من شرطي الإمكانية والأمثلية والجدول يفيد أن الحل أمثل ووحيد .

هذا ومع أننا قد توصلنا لحل أمثل محدود وقيمة محدودة لدالة الهدف إلا أنه بملاحظة عناصر جدول الحل المبدئي نجد أن هناك متغير غير أساسي (س$_٢$) في الجدول الأول عناصره بالكامل صفرية وسالبة . كذلك بملاحظة عناصر جدول الحل الأخير (الحل الأمثل) نجد أن عناصر عمود المتغير الغير أساسي وهو (س$_٣$) عناصره كذلك صفرية وسالبة ولا توجد به عناصر موجبة . لكن هذا لن يؤثر سواء في الجدول المبدئي أو الحل الأمثل لأن في جدول الحل المبدئي كان المتغير الغير أساسي المرشح للدخول ضمن الأساس هو المتغير (س$_١$) فلم يؤثر على التحسين أي لن يترتب عليه توقف الحل وكذلك في الجدول الأخير (الحل الأمثل) لم يؤثر عمود (س$_٣$) في شيء حيث أننا توصلنا للحل الأمثل . والخلاصة هو أنه عند الحل الجدولي بأحد طرق السمبلكس فإنه يمكن اكتشاف أننا بصدد مجال مشترك غير محدود حينما نجد أن هناك عمود متغير غير أساسي في أي جدول من جداول السمبلكس عناصره بالكامل صفرية وسالبة فقط . ويكون هناك حل أمثل محدود في تلك الحالة إذا كان العمود المرشح للدخول غير ذلك العمود الغير أساسي ذو المعاملات الصفرية والسالبة . أي أننا نكون بصدد مجال مشترك غير محدود (لا نهائي) ومع ذلك فإن الحل الأمثل للنموذج الخطي محدود و لا بديل عنه .

ب- <u>مجال مسموح به غير محدود وحل أمثل غير محدود (لا نهائي)</u> :

في المثالين السابقين من حالة المجال المشترك الغير محدود والحل الأمثل المحدود إذا تخيلنا أن المطلوب تعظيم دالة الهدف المذكورة في المثال الأول

وتدنية دالة الهدف للنموذج الخطي المذكور في المثال الثاني يتضح لنا حالة المجال المسموح به الغير محدود والحل الأمثل الغير محدود (اللانهائي) .

ففي المثال الأول(١) من حالة الحل الأمثل المحدود إذا كانت دالة هدف النموذج الخطي في صورة تعظيم لترتب على ذلك أننا سوف نقوم بتحريك خط دالة الهدف د (س) = صفر موازياً لنفسه في اتجاه المجال المشترك الغير محدود لكي يمس هذا الخط آخر نقطة في هذا المجال الغير محدود من أعلى وهو ما يفيد أننا سوف نتحرك بهذا الخط لأعلى ولأعلى حتى اللانهاية حيث أن المجال المشترك لا نهائي وهو ما يفيد أنه في تلك الحالة إمكانية وصول كل من قيم $س_١$ ، $س_٢$ إلى ما لانهاية ومن ثم تصل قيمة د(س) إلى ما لانهاية وفي تلك الحالة نقول أننا بصدد نموذج خطي ليس له مجال محدود (حل لا نهائي) .

أما في المثال الثاني (٢) فإذا افترضنا أن دالة هدف النموذج الخطي في صورة تدنية فإنه بمتابعة الحل البياني فإننا سوف نتحرك بخط دالة الهدف د (س) موازياً لنفسه في اتجاه محور المتغير ($س_٢$) إلى أن يمس آخر نقطة في هذا المجال الغير محدود . سنجد في هذه الحالة إمكانية التحرك إلى مالا نهاية ومن ثم فإن المجال الغير محدود في تلك الحالة سينتج عنه حل غير محدود (لا نهائي) كذلك . وهو ما يفيد أيضاً إمكانية وصول قيم كل من $س_١$ ، $س_٢$ إلى ما لانهاية ومن ثم وصول قيمة د (س) إلى ما لانهاية .

كذلك إذا تتبعنا جدول السمبلكس المبدئي في المثال الثاني (٢) من الحالة السابقة وتحت افتراض أن دالة هدف النموذج الخطي في صورة تدنية وليس تعظيم . فأننا في تلك الحالة سنقرر باختيار المتغير($س_٢$) كمتغير داخل (عمود محوري) نظراً لأنه يقابل أكبر معامل موجب . وهنا سوف نتوقف عن الحل نظراً لأن كافة معاملات المتغير الغير أساسي ($س_٢$) معاملات

صفرية وسالبة ومن ثم لا نستطيع إجراء جولة تحسين على الحل المبدئي وهو ما يفيد أننا بصدد حالة حل غير محدودة (حل لا نهائي) .

هذا ويجدر بنا التنويه إلى أن مشكلة الحل غير المحدود وإن كانت مشكلة رياضية بحتة إلا إنها تعتبر مشكلة غير واقعية في الحياة العملية ويستحيل حدوثها . لأن معنى وجود مشكلة ذات حل غير محدود أننا أمام مشكلة تتميز بوفرة لا نهائية في الموارد (ثوابت القيود) وهذا أمر لا يتفق مع مجريات الأمور في الحياة التي تقوم أساسًا على أن جميع الأنشطة ذات موارد محدودة يراد استخدامها بأفضل طريقة تحقق أقصى عائد ممكن (أو أقل خسارة أو تكلفة ممكنة) . ولذلك فإننا إذا قابلنا مشكلة نموذج خطي ذو حل غير محدود فإن ذلك يرجع لأحد أمرين أما أن يكون هناك خطأ ما قد وقعنا فيه عند صياغة المشكلة في صورة نموذج خطي أو أن هناك خطأ حسابي عند الانتقال من جولة لأخرى من جولات التحسين لجداول السمبلكس.

<u>مثال (٢)</u>: المطلوب إيجاد قيم س$_{١}$ ، س$_{٢}$ التي تجعل قيمة دالة الهدف :

د(س) = س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ (تعظيم)

بشرط القيود :

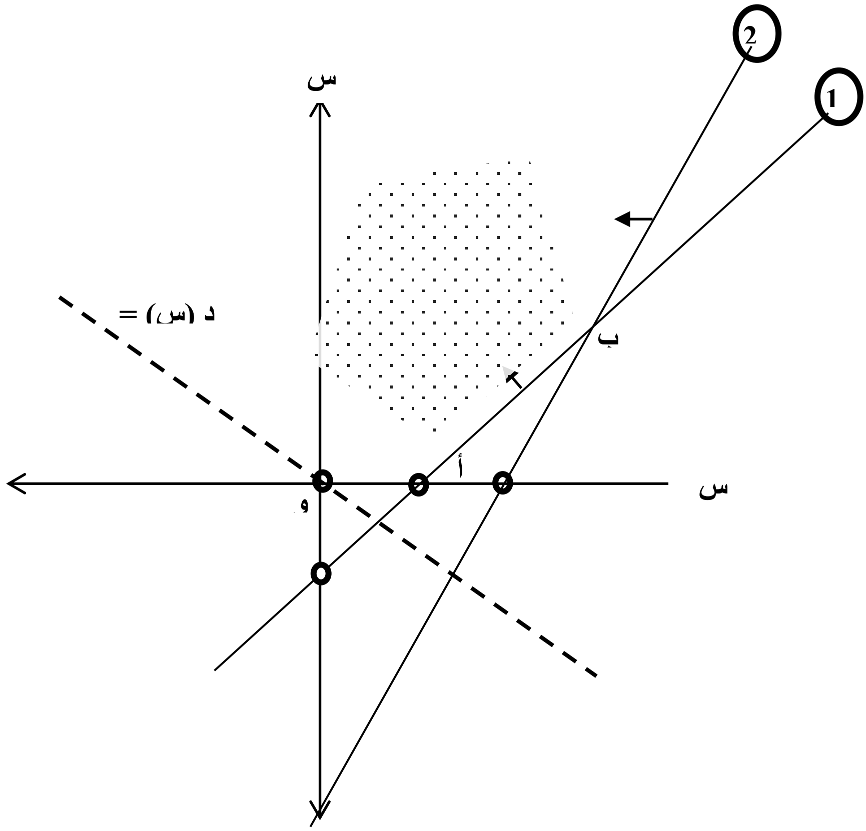
س$_{١}$ – س$_{٢}$ $\geq$ ١٠

٢س$_{١}$ – س$_{٢}$ $\geq$ ٤٠

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ $\leq$ صفر

<u>الحـــل</u>:

بدون الخوض في تفاصيل الحل البياني فإن الشكل البياني الذي يعطي صورة عن حل هذا النموذج يأخذ الشكل التالي :



<u>تصفية المجال المشترك :</u>

قيدي عدم السالبية يفيد أن المجال سيقع ضمن المساحة س١ و س٢

المجال المشترك للقيد الأول مع قيدي عدم السالبية : ١ أ و س٢

المجال المشترك لكافة القيود : الشكل الغير محدود ٢ ب أ و س٢

والحل الأمثل حل لا نهائي فلا يوجد حل محدود .

<u>ملحوظة</u> : إذا كانت دالة الهدف في هذا المثال في صورة تدنيه بدلاً من تعظيم دالة الهدف فسوف نكون بصدد حالة مجال غير محدود لكن هناك حل أمثل

محدود وستكون نقطة الأصل (صفر ، صفر) هي نقطة الحل المثل . أما جدوليًا فسيكون جدول الحل المبدئي هو الحل الأمثل .

٥- **حالة عدم وجود مجال مشترك أو حلول مسموح بها :**

وتتحقق تلك الحالة حينما لا توجد نقطة واحدة على الأقل تحقق كافة القيود الهيكلية الخاصة بالنموذج الخطي . وتسمى المشكلة في تلك الحالة بأن ليس لها مجالاً ممكنًا .

ولبيان تلك الحالة فإنه :

- في حالة الحل البياني للنموذج الخطي فكما ذكرنا : بعد تمثيل كافة القيود فلا توجد نقطة واحدة على الأقل تحقق كافة القيود الهيكلية للنموذج نظرًا لتضاد اتجاه القيود .
- أما جدوليًا عند استخدام أحد طرق السمبلكس وبالتحديد أما طريقة (م) الكبرى أو السمبلكس ذات المرحلتين فقط وذلك نظرًا لأن تضاد اتجاه القيود التي ذكرناها بيانيًا يعني أن هناك بعض القيود في صورة ($\geq$) والبعض الآخر في صورة (= أو $\leq$) ومن ثم فلن تكون طريقة السمبلكس العادية محلاً للاستخدام في تلك الحالة .

وفي هذه الحالة عند اعتبار جولات التحسين للمشكلة نجد تحقيق شرط الإمكانية والأمثلية في جدولاً معينًا من جداول السمبلكس لإحدى الطريقتين المذكورتين ، إلا أنه رغم تحقق شرطي الإمكانية والأمثلية فإننا سنجد أن هناك أحد المتغيرات الصناعية سوف يكون ضمن المتغيرات الأساسية وهو ما سيجعل قيمة دالة الهدف تحتوي على المعامل (م) في حالة طريقة (م) الكبرى وعدم وصول قيمة الدالة الوهمية (ف.) للصفر في المرحلة الأولى من طريقة السمبلكس ذات المرحلتين . وهذا يعني أنه إذا كان

هناك إمكانيـة لرسم النمـوذج الخطـي بيانيًا (بمعنـى أنـه نمـوذج خطـي يحتـوي على متغيرين قراريين) سنجد أن ليس هناك مجال مسموح به في تلك الحالة .

<u>مثال</u> : أوجد قيم س، ، س، التي تجعل قيمة دالة الهدف :

د(س) = ٣س، + ٢س،   (أكبر ما يمكن)

بشرط القيود :

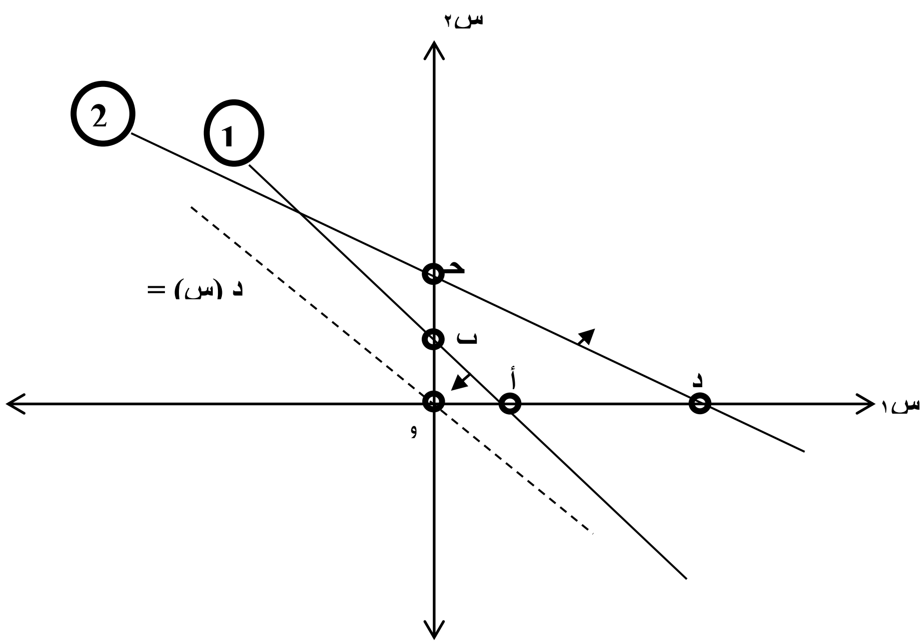
٢س، + س، ≥ ٢

٣س، + ٤س، ≤ ١٢

س، ، س، ≤ صفر

الحل :

إذا قمنا بحل النموذج الخطي بيانيًا . فإن الشكل البياني التالي يصور حل هذا النمـوذج الخطـي بـدون تفاصـيل (وعلـى الطالـب اسـتنتاج إحـداثيات النقـاط الخاصة بالقيود ومعادلة دالة الهدف كما سبق) .



<u>تصفية المجال المشترك:</u>

قيدي عدم السالبية ←── <u>س١ و س٢</u>

القيد الأول مع قيدي عدم السالبية ←── <u>س١ أ ب س٢</u>

القيد الثاني مع قيدي عدم السالبية والقيد الأول : <u>لا يوجد مجال مسموح به</u>.

من خلال الشكل البياني يلاحظ عدم وجود مجال مسموح به أي لا يوجد منطقة حلول مشتركة تحقق كافة قيود النموذج الخطي أي لا يوجد مجال للحلول المسموح بها أو الممكنة .

أما بخصوص تطبيق طريقة السمبلكس المناسبة فلاحظ أن كافة قيود النموذج الخطي ثوابتها موجبة وهناك قيد هيكلي (القيد الثاني) في صورة متباينة على الشكل (≤) لذلك فإننا سوف نستخدم المتغيرات الصناعية سواء استخدمنا طريقة (م) الكبرى أو السمبلكس ذات المرحلتين . ويهمنا هنا معرفة كيفية اكتشاف حالة عدم وجود منطقة حلول مسموح بها للنموذج موضع الدراسة من الناحية الجبرية وذلك من خلال تطبيق أحد الطريقتين المحددتين سلفًا . فإذا استخدمنا أي من طريقة (م) الكبرى أو السمبلكس ذات المرحلتين فإننا قد نواجه أحد المواقف الثلاثة التالية :

١- أن يتحقق شرطي الإمكانية والأمثلية ومع ذلك هناك أحد المتغيرات الصناعية موجود ضمن متغيرات الأساس . وهنا ستحتوي قيمة دالة هدف النموذج على معامل معين مضروبًا في المعامل (م) في طريقة (م) الكبرى أو لا تصل قيمة الدالة الوهمية (ف.) إلى الصفر في حالة طريقة السمبلكس ذات المرحلتين . وهذا معناه أن النموذج الخطي محل الدراسة ليس له منطقة حلول مسموح بها ومن ثم فليس هناك حلاً مسموحًا به أو ممكنًا .

٢- أن يتحقق شرطي الإمكانية والأمثلية مع عدم وجود أي من المتغيرات الصناعية في الأساس . وهذا يعني أن للنموذج الخطي المطروح للحل له مجال مسموح به أو بمعنى له حل ويمكن الانتقال من جولة لأخرى بأحد الطريقتين المحددتين .

٣- أن يتحقق شرطي الإمكانية والأمثلية مع وجود أحد المتغيرات الصناعية في الأساس ولكن بقيمة صفرية مقابلة في عمود قيم الحل وهذا يعني أن قيمة دالة الهدف الوهمية تصل كذلك للصفر . ويمكن شطب أعمدة المتغيرات الصناعية وصف الدالة الوهمية (ف.) واستكمال خطوات المرحلة الثانية . وفي تلك الحالة يكون هذا مؤشرًا إلى أن القيد الذي ظهر متغيره الصناعي ضمن متغيرات الأساس بقيمة صفرية مقابلة في عمود قيم الحل يعتبر قيد زائد إلا أن هناك حلاً مسموحًا به للنموذج الخطي المطروح للحل في تلك الحالة كذلك .

أن أنه إذا توصلنا لأحد الحالتين الثانية أو الثالثة فهذا يعني أن هناك منطقة حلول مسموح بها ويمكن الاستمرارية في جولات الحل لحين الوصول للحل الأمثل . أما إذا أوصلتنا النتائج للحالة الأولى فهذا يعني عدم وجود مجال مسموح به ومن ثم فالمشكلة ليس لهل حل .

فبالتطبيق على المثال السابق واستخدام طريقة (م) الكبرى مثلاً فإن :

- النموذج في الصورة المعيارية وإضافة المتغيرات الصناعية وتصوير المتغيرات الصناعية في دالة الهدف بمعامل (-م) فيكون الآتي :

د(س) = ٣$س_١$ + ٢$س_٢$ + (٠) $س_٣$ + (٠) $س_٤$ - م $س_٥$ (تعظيم)

بشرط القيود :

٢$س_١$ + $س_٢$ + ($س_٣$) متمم = ٢

٣$س_١$ + ٤$س_٣$ - $س_٤$ + ($س_٥$) صناعي = ١٢

س ر ≤ صفر   حيث ر= ١ – ٥

- **تصوير جدول الحل المبدئي والتحسين للوصول للحل الأمثل إن وجد**

جداول السمبلكس

م . أ	جـ ر / م.م.أ	٣	٢	صفر	صفر	–م	قيم الحل	النسبة
		س١	س٢	س٣	س٤	س٥		
س٣	صفر	٢	(١)	١	صفر	صفر	٢	٢ →
س٥	–م	٣	٤	صفر	–١	١	١٢	٣
هـ ر		–٣م	–٤م	صفر	–م	–م	١٢م	تعظيم
هـ ر – جـ ر		–٣م–٣	–٤م–٢	صفر	م	صفر		
س٢	٢	٢	١	١	صفر	صفر	٢	٢
س٥	–م	–٥	صفر	–٤	–١	١	١٢	٣
هـ ر		–٣م	–٤م	صفر	–م	–م	٤ – ٤م	تعظيم
هـ ر – جـ ر		١+٥م	صفر	٢+٤م	م	صفر		
		+		+	+			

ويلاحظ في الجدول الثاني تحقق شرطي الإمكانية (كافة قيم الحل الموجبة) والأمثلية (كافة معاملات صف اختبار المثلية (هـ ر – جـ ر) معاملات صفرية وموجبة حيث أن المشكلة تعظيم لدالة الهدف) وهذا يعني أننا توصلنا للحل الأمثل . لكن لاحظ أن في الجدول الثاني يوجد المتغير الصناعي (س٥) ضمن متغيرات الأساس بقيمة مقابلة في قيم الحل مساوية (٤) وهذا مؤشر إلى أن النموذج الخطي المطروح للحل ليس له مجال مسموح به . والتفسير العلمي في هذه الحالة هو أن القيد الثاني في هذا النموذج لم يؤخذ في الحسبان عند

البحث عن الحل الأمثل وفي هذه الحالـة كما لـو كنـا نعالـج مشكلة أخرى غيـر النموذج الخطي المطروح للحل .

لكن الحالة التي نود أن ننوه عنـها أنه إذا ظهر هذا المتغير الصنـاعي ضمن متغيرات الأساس في الحل الأمثل لكن بقيمـة صـفرية . فإن القيـد الـذي يوجد به هذا المتغير الصناعي كأنـه قد تم أخذه في الحسبان أو بعين الاعتبـار ضـمن قيـود سـابقة أو القيـود الأخـرى فـي النمـوذج الخطـي المطـروح ومـن ثـم يكون هنـاك مجـال مسموح بـه أو ممكن لكن هذا القيـد يعتبـر بمثابـة قيد زائـد (غير فعال) في النموذج .

٦- <u>حالة المتغيرات الغير محددة الإشارة :</u>

سبق وأن أوضحنا عند تناولنا للصيغة المعيارية والقانونية للنماذج الخطية أنه إذا كانت أحد المتغيرات القرارية غير محددة الإشارة فإنه يتم علاجها على نحـو الفرق بين متغيرين لا سالبين مقـابلين . أي أنـه لتحقيق شرط الإمكانيـة فـي جداول السمبلكس بطرقها المختلفة وكانت أحد المتغيرات القراريـة غيـر محددة الإشارة فإنه يتم علاجها علـى نحـو الفرق بين متغيرين لا سالبين مقـابلين . أي أنه لتحقيق شرط الإمكانيـة فـي جداول السمبلكس بطرقها المختلفـة وكـان لـدينا أحد المتغيرات القراريـة غيـر محـددة الإشـارة ولـيكن ($س_ر$) فإننـا نقـوم بالتعويض عنه بالفرق بين متغيرين لا سالبين وذلك على الصورة :

$س_ر = س_ر^{/} - س_ر^{//}$ حيث ر = ١ أ، ٢ أ، ...... أ، ن

حيث $س_ر^{/}$ ، $س_ر^{//} \geq$ صفر

وفي هذه الحالـة لا توجد أدنـى مشكلة مـن ظهـور المتغيـرين $س_ر^{/}$ ، $س_ر^{//}$ معًا في أي من جداول طرق السمبلكس لتلك الحالـة .

مثال : أوجد قيم $س_١$ ، $س_٢$ التي تجعل الدالة :

$د(س) = ٣س_١ + ٥س_٢$ (تعظيم)

بشرط القيود :

$س_١ \leq ٤$

$س_٢ \leq ٦$

$٣س_١ + ٢س_٢ \leq ١٨$

$س_١$ متغير غير محدد الإشارة

$س_٢ \geq$ صفر

الحل :

بداية حيث إن كافة القيود ثوابتها موجبة وحيث إنها جميعًا في صورة متباينات على الصورة ($\leq$) لذا فالحل يكون باستخدام طريقة السمبلكس العادية حيث يتم الآتي :

١- وضع النموذج في الصورة المعيارية حيث يتم إضافة متغير متمم لكل قيد ويحول لمعادلة . والصورة المعيارية تضمن معالجة المتغيرات الغير محددة الإشارة من خلال التعويض عنها بالفرق بين متغيرين لا سالبين ومن ثم فإنه نفرض أن $س_١ = س_١^{/} - س_١^{//}$ ويتم التعويض بهذه العلاقة في كافة عناصر النموذج الخطي سواء دالة الهدف أو القيود على النحو التالي :

$د(س) = ٣ (س_١^{/} - س_١^{//}) + ٥س_٢ + (٠) س_٣ + (٠) س_٤ + (٠) س_٥$

(تعظيم)

بشرط القيود الهيكلية التالية :

$س_١^{/} - س_١^{//} + (س_٣) = ٤$

$س_٢ + (س_٤) = ٦$

٣س$_{١}^{/}$ − ٣س$_{١}^{//}$ + ٢س$_{٢}$ +(س$_{٥}$) = ١٨

حيث : س$_{١}^{/}$ ، س$_{١}^{//}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ ، س$_{٤}$ ، س$_{٥}$ ≤ صفر

٢- تصوير جدول الحل المبدئي والتحسين لحين الوصول للحل الأمثل :

جداول السمبلكس

م . أ	جـ ر / م.م.أ	٣	-٣	٥	صفر	صفر	صفر	قيم الحل	النسبة
		س$_{١}^{/}$	س$_{١}^{//}$	س$_{٢}$	س$_{٣}$	س$_{٤}$	س$_{٥}$		
س$_{٣}$	صفر	١	-١	صفر	١	صفر	صفر	٤	.
س$_{٤}$	صفر	صفر	صفر	(١)	صفر	١	صفر	٦	٦ →
س$_{٥}$	صفر	٣	-٣	٢	صفر	صفر	١	١٨	٩
هـ ر		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	تعظيم
هـ ر − جـ ر		-٣	٣	-٥	صفر	صفر	صفر		
س$_{٣}$	صفر	١	-١	صفر	١	صفر	صفر	٤	٤
س$_{٢}$	٥	صفر	صفر	١	صفر	١	صفر	٦	.
س$_{٥}$	صفر	٣	-٣	صفر	صفر	-٢	١	٦	٢ →
هـ ر		صفر	صفر	٥	صفر	٥	صفر	٣٠	تعظيم
هـ ر − جـ ر		-٣	٣	صفر	صفر	٥	صفر		
س$_{٣}$	صفر	صفر	صفر	صفر	١	$^{٢}/_{٣}$	$-^{١}/_{٣}$	٢	
س$_{٢}$	٥	صفر	صفر	١	صفر	١	صفر	٦	
س$_{١}^{/}$	٣	١	-١	صفر	صفر	$-^{٢}/_{٣}$	$^{١}/_{٣}$	٢	
هـ ر		٣	-٣	٥	صفر	٣	١	٣٦	تعظيم
هـ ر − جـ ر		صفر	صفر	صفر	صفر	٣	١		

وبملاحظة عناصر الجدول الأخير نجد أن :

- كافة عناصر قيم الحل موجبة لذا فالحل الأخير يحقق شرط الإمكانية .
- كافة عناصر معاملات صف اختبار الأمثلية ($هـ_{ر} - جـ_{ر}$) معاملات :

– صفرية <u>فقط</u> تناظر أعمدة المتغيرات الأساسية ($س_{١}^{/}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$)

– موجبة <u>فقط</u> تناظر أعمدة المتغيرات الغير أساسية ($س_{٤}$ ، $س_{٥}$)

وحيث أن المشكلة هي تعظيم دالة الهدف لذا فجدول الحل الأخير يعتبر جدول حل أمثل ووحيد وهو :

$س_{١}^{*/} = ٢$ ، $س_{١}^{*//}$ = صفر ، $س_{٢}^{*} = ٦$ ، $س_{٣}^{*} = ٢$ ،

$س_{٤}^{*}$ = صفر

، $س_{٥}^{*}$ = صفر ، $د(س^{*}) = ٣٦$

ومن هذا الحل فإن $س_{١}^{*} = س_{١}^{*/} - س_{١}^{*//}$ = ٢ – صفر = ٢

أي أن الحل الأمثل بدلالة المتغيرات القرارية (الأصلية في النموذج) هو :

$س_{١}^{*}$ = ٢ – صفر = ٢

، $س_{٢}^{*} = ٦$ ، $س_{٣}^{*} = ٢$ ، $س_{٤}^{*} = س_{٥}^{*}$ = صفر ، $د(س^{*}) = ٣٦$

لاحظ أن في جميع جداول السمبلكس بدءًا من جدول الحل المبدئي حتى جدول الحل الأمثل فإن المعاملات أسفل المتغيرين $س_{١}^{/}$ ، $س_{١}^{//}$ واحدة في العمودين لكن متضادة في الإشارة فقط لذا فإنه في جدول الحل الأمثل فإن المعامل الصفري أسفل المتغير $س_{١}^{//}$ لم نعتبره حالة تعدد حلول مثلى نظرًا لأن أعمدة $س_{١}^{/}$ ، $س_{١}^{//}$ هي نفسها لكن عكس الإشارة فقط فمعاملي $س_{١}^{/}$ ، $س_{١}^{//}$ في الجدول تعبر في النهاية عن معامل لمتغير واحد وهو أصل المتغيرين وهو المتغير ($س_{١}$) .

٧- **<u>حالة المتغيرات القرارية ذات الحدود الدنيا</u> :**

عند صياغة المشاكل النظرية رياضيًا في صورة قالب لنموذج خطي فقد يتواجد لبعض المتغيرات القرارية أو كلها قيود توضح الحدود الدنيا لتلك المتغيرات والتي لا تتعداها هذه المتغيرات . وصورة القيد الخاص بالحدود الدنيا هو :

$س_ر \geq أ_ر$ حيث ر = ١ أو ٢ أو .... أو ن

أو كل هذه المتغيرات القرارية

ويسمى المقدار $أ_ر$ بالحد الأدنى للمتغير القراري رقم (ر) .

هذا ومن خلال الحلول البيانية والجدولية اتضح لنا أن زيادة عدد قيود النموذج يؤدي لزيادة الجهد الحسابي المطلوب في الحل وكلما قل عدد تلك القيود أدى معه إلى قلة الجهد المبذول في الحل بمعنى أن هناك علاقة طردية فيما بين كثافة عدد القيود في النموذج من جانب وكم الحسابات المطلوب في حل النموذج الخطي من جانب آخر . لذلك فيمكن اختصار قيود النموذج الخطي الذي يحتوي على قيود الحدود الدنيا للمتغيرات القرارية من أجل اختصار الحسابات المطلوبة للحل . حيث يمكن التعبير عن المتغير الذي له قيد حد أدنى في النموذج بمتغير آخر مضافًا إليه قيمة الحد الأدنى وذلك في كل من دالة الهدف وقيود النموذج الخطي . أي أنه إذا كان لدينا مثلاً $س_١ \geq ٥$ فإنه يمكن التعويض عن $س_١ = س_١^/ + ٥$ في كل من دالة الهدف والقيود وفي تلك الحالة يتم الاستغناء عن قيد الحد الأدنى لأنه يعتبر في تلك الحالة تم معالجته مع باقي القيود . والمثال التالي يوضح هذه الحالة.

<u>مثال</u> : أوجد قيم $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ التي تجعل قيمة دالة الهدف :

$د(س) = ٢س_١ + س_٢ + ٤س_٣$ (تعظيم)

<u>بشرط القيود</u> :

$س_١ + ٢س_٢ - س_٣ \geq ٥$

$$-٢س_١ + ٣س_٢ + س_٣ \leq ٨$$
$$س_١ \geq ٢$$
$$س_٢ \geq ١$$
$$س_٣ \geq صفر$$

الحل :

بالنظر لقيود النموذج الخطي نجد أن للمتغيرين القراريين $س_١$ ، $س_٢$ قيود حدود دنيا لذا يمكن اعتبار التحويلات الخطية التالية :

ضع : $س_١ = س'_١ + ٢$

، $س_٢ = س'_٢ + ١$

فتصبح صورة النموذج الخطي المعدلة والمكافئة تمامًا للنموذج السابق هي :

$د(س) = ٢(س'_١ + ٢) + (س'_٢ + ١) + ٤س_٣$ (تعظيم)

<u>بشرط</u> :

$$(س'_١ + ٢) + ٢(س'_٢ + ١) - س_٣ \leq ٥$$
$$-٢(س'_١ + ٢) + ٣(س'_٢ + ١) + س_٣ \leq ٨$$
$$س'_١ ، س'_٢ ، س_٣ \geq صفر$$

أي أن المطلوب الآن إيجاد قيم $س'_١$ ، $س'_٢$ ، $س_٣$ التي تجعل الدالة :

$د(س) = ٢س'_١ + س'_٢ + ٤س_٣ + ٥$ (تعظيم)

<u>بشرط</u> :

$$س'_١ + ٢س'_٢ - س_٣ \leq ١$$
$$-٢س'_١ + ٣س'_٢ + س_٣ \leq ٩$$
$$س'_١ ، س'_٢ ، س_٣ \geq صفر$$

وبعد الوصول للحل الأمثل للنموذج يتم استنتاج قيم $س_١$ ، $س_٢$ وذلك من خلال التعويض في المعادلات السابقة وهي:

$س_{١}^{*} = س_{١}^{/*} + ٢$ ، $س_{٢}^{*} = س_{٢}^{/*} + ١$

لاحظ مدى البساطة التي طرأت على النموذج الخطي سواء في تقليل عدد القيود أو استخدامك لطريقة السمبلكس العادية في حل نموذج يحتوي على قيدين فقط وذلك بدلاً من استخدامنا لطريقة (م) الكبرى أو ذات المرحلتين للنموذج الأصلي والذي يحتوي على أربعة قيود .

ملحوظة : عند تناولنا لحل المشاكل الخطية بأحد طرق السمبلكس المختلفة من خلال تناولنا الحل بالجداول المتتالية فإنه يمكن إجراء اختبار دوري في كل من الجداول المتتالية لضمان دقة الحسابات وذلك على النحو التالي :

- أضف عمود يسمى بالتدقيق الحسابي قبل عناصر عمود النسبة الذي يحدد المتغير الخارج من الأساس. في هذا العمود يتم جمع عناصر كل صف في الجدول (بدءًا من جدول الحل المبدئي) .
- هذا العمود المضاف حديثًا يتم اعتبار عناصره عند التحسين مع باقي عناصر الجداول . بمعنى الرقم الموجود في هذا العمود مقابلاً لصف المحور يتم قسمته على العنصر المحوري كما هو الحال في عناصر صف المحور وباقي عناصر هذا العمود المضاف يتم استنتاجها مع صفوفها المقابلة وبنفس آلية استنتاج حسابات تلك الصفوف .
- في كل جدول من جداول التحسين يجب أن تظل عناصر هذا العمود المضاف من أجل اختبار دقة الحسابات عبارة عن مجموع صفوفها المقابلة لها في نفس الجدول إلى أن نصل لجدول الحل الأمثل فيجب تحقق هذه الخاصية كذلك .

وعلى سبيل المثال إذا تم حل النموذج الخطي الوارد في المثال الأخير وهو :

$$د(س) = ٢ س_{١}^{/} + س_{٢}^{/} + ٤س_{٣} + ٥$$ **(تعظيم)**

بشرط أن :

$$س_{١}^{/} + ٢ س_{٢}^{/} - س_{٣} \geq ١$$

$$-٢س_{١}^{/} + ٣س_{٢}^{/} + س_{٣} \geq ٩$$

$$س_{١}^{/} ، س_{٢}^{/} ، س_{٣} \leq صفر$$

فحيث أن كافة قيم ثوابت القيود موجبة وكافة القيود على شكل متباينات في صورة ($\geq$) لذا فالحل باستخدام طريقة السمبلكس العادية وهو على النحو التالي :

- **وضع النموذج في الصورة المعيارية فيكون :**

$$د(س) = ٢ س_{١}^{/} + س_{٢}^{/} + ٤س_{٣} + (٠) س_{٤} + (٠) س_{٥}$$ **(تعظيم)**

بشرط أن :

$$س_{١}^{/} + ٢ س_{٢}^{/} - س_{٣} + (س_{٤}) = ١$$

$$-٢س_{١}^{/} + ٣س_{٢}^{/} + س_{٣} + (س_{٥}) = ٩$$

$$س_{١}^{/} ، س_{٢}^{/} ، س_{٣} ، س_{٤} ، س_{٥} \leq صفر$$

- **تصوير جدول الحل المبدئي والتحسين لحين الوصول لجدول الحل الأمثل:**

جداول السمبلكس

م . أ	جـ ر / م.م.أ	٢	١	٤	صفر	صفر	قيم الحل	عمود دقة الحسابات	النسبة
		س١/	س٢/	س٣	س٤	س٥			
س٤	صفر	١	٢	-١	١	صفر	١	٤	.
س٥	صفر	-٢	٣	(١)	صفر	١	٩	١٢	←
هـ ر		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	تعظيم	
هـ ر – جـ ر		-٢	-١	-٤	صفر	صفر			
س٤	صفر	-١	٥	صفر	١	١	١٠	١٦	
س٣	٤	-٢	٣	١	صفر	١	٩	١٢	
هـ ر		-٨	١٢	٤	صفر	٤	-٤	تعظيم	
هـ ر – جـ ر		-١٠	١١	صفر	صفر	٤	٤م		

في الجدول الثاني وبعد تحديد عناصر عمود المحور وهو عمود س١ للتحسين مرة ثانية نجد أن كافة عناصر عمود المحور قيمًا سالبة لذا لا يمكن استكمال الحل من خلال تحسينات متتالية ونتوقف عند هذا الحد وسالبية عناصر عمود المحور جميعًا تفيد أننا بصدد مجال مسموح به غير محدود وحل أمثل غير محدود (أي لا نهائي) وهو ما يفيد إمكانية وصول قيم المتغيرات القرارية في النموذج إلى مالا نهاية وكذلك فإن قيمة دالة الهدف د(س) يمكنها الوصول إلى مالا نهاية كذلك . لكن ما يهمنا بجانب تحقق هذه الحالة الخاصة (حل غير محدود) هو أننا أضفنا عمود قبل عمود النسبة في هذه الجداول يحتوي على مجاميع عناصر كل صف من صفوف الجدول في الجدول الأول وتم إجراء التحسين الأول على الجدول المبدئي . يلاحظ أن هذا

العمود في الجدول الثاني لازال يحقق أيضًا خاصية أن عناصره عبارة عن مجاميع للصفوف المقابلة رغم أننا لم نستنتج تلك العناصر في الجدول الثاني من خلال جمع الصفوف بل تم استنتاجها ضمن جولة التحسين كباقي العناصر الناتجة من قسمة صف المحور على العنصر المحوري ($^{١٢}/_{١}$ =١٢) والعنصر الثاني [٤ – (–١) (١٢) = ١٦] .

وعلى الطالب اعتبار أي من التمرينات الغير محلولة أو أحد الأمثلة المحلول السابقة التأكد من الدور الفعال الذي يقوم به عمود دقة الحسابات .
هذا ويمكن اعتبار المثال التالي كذلك لتوضيح دور عمود دقة الحسابات .

مثال :

المطلوب إيجاد قيم س$_{١}$ ، س$_{٢}$ التي تجعل قيمة دالة الهدف :

د(س) = ٨س$_{١}$ + ٦س$_{٢}$ (تعظيم)

بشرط :

٤س$_{١}$ + ٢ س$_{٢}$ ≥ ٦٠

٢س$_{١}$ + ٤س$_{٢}$ ≥ ٤٨

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ≤ صفر

الحل :

حيث إن كافة القيود ثوابتها موجبة وعلى صورة متباينات في شكل (≥) لذا فالحل يكون باستخدام طريقة السمبلكس العادية على النحو التالي :

- **الصورة المعيارية للنموذج الخطي :**

د(س) = ٨س$_{١}$ + ٦س$_{٢}$ + (٠) س$_{٣}$ + (٠) س$_{٤}$ (تعظيم)

بشرط القيود :

٤س$_{١}$ + ٢ س$_{٢}$ + (س$_{٣}$) = ٦٠

٢س١ + ٤س٢ + (س٤) = ٤٨

س ر ≥ صفر حيث ر = ١ – ٤

- **تصوير جداول الحل المبدئي والتحسين للوصول للحل الأمثل. والجداول التالية تعبر عن جداول السمبلكس المتتالية :**

جداول السمبلكس

م . أ	جـ ر / م. م. أ	٨	٦	صفر	صفر	صفر	١٤	النسبة
		س١	س٢	س٣	س٤	قيم الحل	دقة الحسابات	
س٣	صفر	(٤)	٢	١	صفر	٦٠	٦٧	٦٠/٤ =١٥ →
س٤	صفر	٢	٤	صفر	١	٤٨	٥٥	٤٨/٢ =٢٤
هـ ر		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	تعظيم
هـ ر – جـ ر		–٨	–٦	صفر	صفر	صفر	–١٤	
س١	٨	١	١/٢	١/٤	صفر	١٥	٦٧/٤	١٨ ١/٢
س٤	صفر	صفر	(٣)	–١/٢	١	١٨	٤٣/٢	٧ ١/٦ →
هـ ر		٨	٤	٢	صفر	١٢٠	١٣٤	تعظيم
هـ ر – جـ ر		صفر	–٢	٢	صفر	١٢٠	١٢٠	
س١	٨	١	صفر	١/٣	–١/٦	١٢	٧٩/٦	
س٢	٦	صفر	١	–١/٦	١/٣	٦	٤٣/٦	
هـ ر		٨	٦	٥/٣	٢/٣	١٣٢	٤٥٥/٣	
هـ ر – جـ ر		صفر	صفر	٥/٣	٢/٣	١٣٢	٤٥٥/٣	

<u>وفي الجدول الأخير يلاحظ الآتي</u> :

- **كافة عناصر قيم الحل موجبة لذا فالحل ممكن .**

- **كافة معاملات صف اختبار الأمثلية معاملات صفرية فقط تناظر أعمدة المتغيرات الأساسية ($س_١$ ، $س_٢$) ومعاملات موجبة جميعًا تناظر أعمدة المتغيرات الغير أساسية ($س_٣$ ، $س_٤$) وحيث أن المطلوب هو تعظيم لدالة الهدف د(س) لذا فالحل أمثل ووحيد وهو :**

$س_١^*$ = ١٢ ، $س_٢^*$ = ٦ ، $س_٣^*$ = $س_٤^*$ = صفر ، د($س^*$) = ١٣٢

لاحظ أن عمود دقة الحسابات رغم أنه يتم استنتاجه في كل جدول بنفس آلية عناصره في التحسين إلا أنه يلاحظ أنه إذا تم جمع عناصر أي صف ستجد أنها بالفعل تحقق ما يقابلها من مجموع في هذا العمود . هذا وبالإضافة لعمود دقة الحسابات المذكور فإنه توجد طريقة أخرى للتحقق من مدى صحة حل النموذج الخطي الأصلي وهو كما سنرى فيما بعد من خلال دراستنا لما يسمى بالمشكلة المبدلة .

المشكلة المبدلة (النموذج الثنائي) Dual Problem

في تناولنا للجزء الخاص بما يسمى أسعار ظل الموارد للنموذج الخطي الأصلي المطروح للحل ذكرنا أن أسعار الظل أو ما يسمى بتكلفة الفرصة البديلة يمكن استنتاجها من واقع جدول الحل الأمثل للنموذج الخطي الأصلي وذلك من خلال معاملات المتغيرات المتممة في صف اختبار الأمثلية :

(هـ $_{ر}$ – جـ $_{ر}$) .

وسوف نتناول في هذا الجزء طريقة أخرى لإيجاد أسعار ظل موارد النموذج الخطي الأصلي أو تكلفة الفرصة البديلة وذلك من خلال إيجاد وحل النموذج المقابل للنموذج الخطي الأصلي والذي يطلق عليه اسم المشكلة البديلة أو المبدلة أو النموذج الخطي الثنائي .

والمشكلة المبدلة (البديلة)أو النموذج الثنائي ما هي إلا الوجه المقابل أو المضاد للمشكلة أو النموذج الخطي الأصلي . فإذا كان المطلوب إيجاد المشكلة البديلة أو النموذج الثنائي للمشكلة أو النموذج الخطي الأصلي يجب وضع النموذج الأصلي في إحدى الصورتين التاليتين فإذا كانت المشكلة الأصلية في صورة تعظيم لدالة الهدف فاجعل كافة قيودها في صورة متباينات على صورة ($\geq$) والعكس صحيح فإذا كانت المشكلة الأصلية في صورة تدنيه لدالة الهدف فاجعل كافة قيودها على صورة متباينات في شكل ($\leq$) وفي هذه الحالة فإن المشكلة الثنائية أو النموذج الثنائي يمكن توضيح مكوناته من خلال الجدول التالي والذي يوضح العلاقة ما بين النموذجين الأصلي من جانب والثنائي (البديل أو البدل) من جانب آخر:

العلاقة بين النموذج الأصلي والنموذج الثنائي

المشكلة الأصلية (النموذج الأصلي) **Primal Problem**	المشكلة الثنائية (النموذج الثنائي) **Dual Problem**
١- إذا كانت المشكلة الأصلية في صورة تعظيم لدالة الهدف د(س) وفي ظل قيود على شكل متباينات جميعًا في صورة (≥)	١- فإن المشكلة الثنائية المقابلة تصبح عبارة عن تدنيه لدالة الهدف د(ص) وفي ظل قيود على شكل متباينات جميعًا في صورة (≤)
٢- إذا كانت المشكلة الأصلية في صورة تدنيه لدالة الهدف د(س) وفي ظل قيود على شكل متباينات جميعًا في صورة (≤)	٢- فإن المشكلة الثنائية المقابلة تصبح عبارة عن تعظيم لدالة الهدف د(ص) وفي ظل قيود على شكل متباينات جميعًا في صورة (≥)
٣- عدد المتغيرات القرارية في المشكلة الأصلية	يقابله عدد القيود في المشكلة الثنائية
٤- عدد القيود في المشكلة الأصلية	عدد المتغيرات القرارية في المشكلة الثنائية
٥- ثوابت القيود	هي معاملات المتغيرات القرارية في دالة هدف المشكلة الثنائية
٦- معاملات المتغيرات القرارية في دالة هدف المشكلة الأصلية	هي ثوابت قيود المشكلة الثنائية
٧- إذا كانت مصفوفة معاملات المتغيرات القرارية و في القيود هي أ من درجة (ر × و) أي $أ_{ر × و}$	٧- فإن مصفوفة معاملات المتغيرات القرارية في القيود هي مدور المصفوفة (أ) أي من درجة (و× ر) أي $أ_{و × ر}$
٨- لا سالبية قيم المتغيرات القرارية	لا سالبية المتغيرات القرارية
القيمة المثلى لدالة هدف المشكلة الأصلية أي د($س^*$) أي أن أقصى ربح ← والعكس صحيح أي أن أقل خسارة ←	تساوي تمامًا القيمة المثلى لدالة هدف المشكلة الثنائية أي د($ص^*$) يقابلها أقل خسارة يقابلها أقصى ربح

هذا وقبل تناولنا لأمثلة توضيحية للمشكلة الثنائية فإنه يمكن من خلال العلاقة فيما بين النموذج الأصلي والنموذج الثنائي فإن:

١- المشكلة الثنائية للمشكلة الثنائية تعطي المشكلة الأصلية (أو النموذج الخطي الأصلي) .

٢- أسعار ظل موارد النموذج الخطي الأصلي ما هي إلا قيم المتغيرات القرارية المثلى للمشكلة الثنائية (أو النموذج الخطي الثنائي) .

ومن ثم فإنه يمكن القول أنه لاستنتاج القيم المثلى للمشكلة الثنائية من واقع جدول حل النموذج الخطي الأصلي الأمثل يكون ذلك من خلال معاملات صف اختبار أمثلية النموذج الأصلي أي من صف (هـ $_{ر}$ – جـ $_{ر}$) المناظرة لأعمدة المتغيرات المتممة . أي أن :

القيمة المثلى للمتغير القراري <u>الأول</u> في النموذج الثنائي = معامل المتغير المتمم <u>الأول</u> في صف اختبار أمثلية الحل الأمثل للمشكلة الأصلية :

(هـ $_{ن+١}$ – جـ $_{ن+١}$) ،

القيمة المثلى للمتغير القراري <u>الثاني</u> في النموذج الثنائي = معامل المتغير المتمم <u>الثاني</u> في صف اختبار أمثلية الحل الأمثل للمشكلة الأصلية :

(هـ $_{ن+٢}$ – جـ $_{ن+٢}$). وهكذا فإن :

القيمة المثلى للمتغير القراري رقم (ر) في النموذج الثنائي = معامل المتغير المتمم ذو نفس الرتبة (ر) في صف اختبار أمثلية الحل الأمثل للمشكلة الأصلية .

كما أن العكس صحيح تمامًا فإننا إذا قمنا بحل النموذج الثنائي فإن القيم المثلى للمتغيرات القرارية للنموذج الخطي الأصلي ما هي إلا معاملات المتغيرات المتممة في صف اختبار أمثلية الحل الأمثل للنموذج البديل أو الثنائي .

وخلاصة ما سبق فإنه بالإضافة لبيان كيفية استنتاج الحل الأمثل لنموذجًا خطيًا ما من واقع جدول الحل الأمثل للنموذج المضاد فإن أسعار ظل موارد النموذج الأصلي يمكن بالتالي استنتاجها من خلال أحد الزاويتين التاليين :

١- <u>من واقع جدول الحل الأمثل للمشكلة الأصلية</u> : حيث إن أسعار ظل الموارد في هذه الحالة ما هي إلا معاملات المتغيرات المتممة في صف اختبار أمثلية الحل الأمثل للنموذج الخطي الأصلي (المشكلة الأصلية) . أي أن أسعار الظل يتم استنتاجها هنا من صف اختبار الأمثلية ($هـ_ر - جـ_ر$) وبالتحديد أسفل المتغيرات المتممة .

٢- <u>من واقع جدول الحل الأمثل للمشكلة الثنائية</u> : وهنا يتم تحديد أسعار الظل من خلال تحديد القيم المثلى للمتغيرات القرارية المثلى من واقع جدول الحل الأخير أي الأمثل (من عمود قيم الحل) :

أي أن :

(سعر ظل المورد الأول أي القيد الأول للمشكلة الأصلية) =القيمة المثلى للمتغير القراري الأول ($ص_١^*$) من واقع جدول الحل الأمثل للنموذج الثنائي.

،

(سعر ظل المورد الثاني أي القيد الثاني للنموذج الأصلي) = القيمة المثلى للمتغير القراري الثاني $ص_٢^*$ من واقع جدول الحل الأمثل للمشكلة الثنائية

وهكذا

(سعر ظل المورد رقم (ر) أي القيد (ر) للنموذج الأصلي) =القيم المثلى للمتغير القراري ذو نفس الرتبة أي ($ص^*$) من واقع جدول الحل الأمثل للمشكلة الثنائية .

مثال (١) : أوجد المشكلة الثنائية للنموذج الخطي التالي :

د(س) = ٢س$_١$ + ٣س$_٢$ (تعظيم)

بشرط القيود :

س$_١$ − ٢س$_٢$ ≥ ٧

٣س$_١$ − ٥س$_٢$ ≤ −٩

٢س$_١$ ≥ ١٥

٣س$_٢$ ≤ ١١

| ٤س$_١$ −٦س$_٢$ | ≥ ٢٣

س$_١$ ، س$_٢$ ≤ صفر

الحـــــل :

لإيجاد المشكلة الثنائية للمشكلة الأصلية المعطاة يجب توحيد اتجاه قيود المشكلة الأصلية على الصورة (≥) . أما عن قيد الحد المطلق (القيد الخامس في النموذج الأصلي) فكما سبق عند تناولنا لأشكال النموذج الخطي يفك هذا القيد إلى قيدين ويتم اعتبار القيدين معًا في الحل طالما أن العلاقة في صورة (≥) وثابت القيد موجبًا . ومن ثم فإن :

د(س) = ٢س$_١$ + ٣س$_٢$ (تعظيم)

بشرط القيود :

س$_١$ − ٢س$_٢$ ≥ ٧ (ص$_١$)

− ٣س$_١$ + ٥س$_٢$ ≥ ٩ (ص$_٢$)

٢س$_١$ ≥ ١٥ (ص$_٣$)

−٣س$_٢$ ≥ −١١ (ص$_٤$)

٤س$_١$ −٦س$_٢$ ≥ ٢٣ (ص$_٥$)

، −٤س$_١$ + ٦س$_٢$ ≥ ٢٣ (ص$_٦$)

س$_١$ ، س$_٢$ ≤ صفر

لاحظ أن النموذج الأصلي بعد إجراء عملية توحيد اتجاه القيود جميعًا أصبح يحتوي على ستة قيود ومن ثم فالنموذج الثنائي سيحتوي على ستة متغيرات قرارية مقابلة لها وهي ص $_{و}$ حيث و = ١-٦ أي أن النموذج الثنائي هو :

<u>المطلوب</u> : إيجاد قيم ص $_{و}$ حيث و = ١ و ٢ و ...... و ٦ التي تجعل قيمة دالة الهدف :

د(ص) = ٧ص$_{١}$ + ٩ص$_{٢}$ + ١٥ص$_{٣}$ − ١١ص$_{٤}$ + ٢٣ص$_{٥}$ + ٢٣ص$_{٦}$

أقل ما يمكن (تدنيه)

<u>بشرط القيود</u> :

ص$_{١}$ − ٣ص$_{٢}$ + ٢ ص$_{٣}$ +(٠) ص$_{٤}$ + ٤ص$_{٥}$ − ٤ص$_{٦}$ $\leq$ ٢

−٢ص$_{١}$ + ٥ص$_{٢}$ + (٠) ص$_{٣}$ − ٣ص$_{٤}$ − ٦ص$_{٥}$ + ٦ص$_{٦}$ $\leq$ ٣

ص $_{و}$ $\leq$ صفر حيث و = ١ − ٦

<u>مثال (٢)</u> : فيما يلي لديك النموذج الخطي التالي :

<u>المطلوب</u> : إيجاد قيم س$_{١}$ ، س$_{٢}$ التي تجعل قيمة دالة الهدف

د(س) = ٢س$_{١}$ + س$_{٢}$ (تدنيه)

<u>بشرط القيود</u> :

٣س$_{١}$ + س$_{٢}$ $\leq$ ٣

٤س$_{١}$ + ٣س$_{٢}$ $\leq$ ٦

س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ $\geq$ ٣

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ $\leq$ صفر

<u>والمطلوب</u>:

١- حل النموذج الخطي بيانيًا .

٢- أوجد النموذج الثنائي .

٣- حل النموذج الثنائي . ثم استنتج الحل الأمثل للنموذج الأصلي من واقع جدول الحل الأمثل للنموذج الثنائي وضع نتائجك في صورة جدول الحل الأمثل للنموذج الأصلي .

٤- حدد أسعار ظل الموارد بطريقتين مختلفتين وفسر معناها .

٥- حقق نتائج النموذجين الأصلي والثنائي معًا .

الحــل :

١- حل النموذج المعطى (الأصلي) بيانيًا :

- **تمثيل القيود من خلال استنتاج إحداثيات نقطتين لكل قيد :**
- **قيدي عدم السالبية: يفيدا أن منطقة الحلول المشتركة ستقع في الربع الأول حتمًا (إن وجدت).**
- **القيد الأول : ٣س$_{١}$ + س$_{٢}$ $\leq$ ٣**

  يحول لمعادلة ٣س$_{١}$ + س$_{٢}$ = ٣

س$_{١}$	صفر	١
س$_{٢}$	٣	صفر

- **القيد الثاني : ٤س$_{١}$ + ٣س$_{٢}$ $\leq$ ٦**

  يحول لمعادلة ٤س$_{١}$ + ٣س$_{٢}$ = ٦

س$_{١}$	صفر	١,٥
س$_{٢}$	٢	صفر

- **القيد الثالث : س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ $\geq$ ٣**

  يحول لمعادلة س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ = ٣

س$_{١}$	صفر	٣
س$_{٢}$	١,٥	صفر

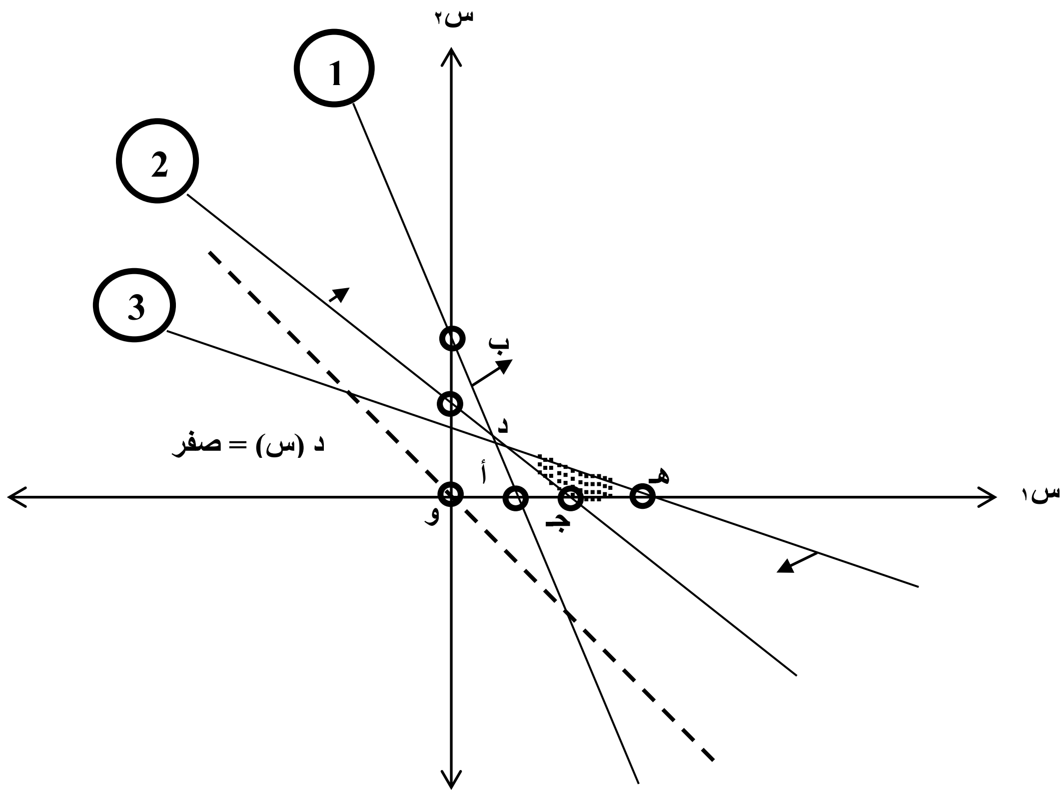
- **تمثيل معادلة دالة الهدف: نفرض أن د(س) = صفر فيكون :**

  ٢س$_{١}$ + س$_{٢}$ = صفر

س$_{١}$	صفر	١
س$_{٢}$	٣	٢-

- **التمثيل البياني للقيود وتحديد اتجاهاتها**

ومن ثم تحديد منطقة الحلول المشتركة لتحديد الحل الأمثل إن وجد :



<u>تصفية المجال المشترك :</u>

قيدي عدم السالبية المجال المشترك س١ و س٢

المجال المشترك فيما بين قيدي عدم السالبية والقيد الأول :

هو الشكل المفتوح لأعلى س١ أ ب س٢

المجال المشترك فيما بين قيدي عدم السالبية والقيدين الأول والثاني :

هو الشكل المفتوح لأعلى س١ جـ د ب س٢

المجال المشترك فيما بين قيدي عدم السالبية والقيود من الأول حتى القيد الثالث هو المثلث جـ د هـ

إحداثيات نقطة الحل الأمثل هي (٣/٥ ، ٦/٥)

ومن ثم فإن س١* = ٣/٥ ، س٢* = ٦/٥

، د(س*) = ٢س$_١$ + س$_٢$ = ٢($^٣/_٥$) + $^٦/_٥$ = $^{١٢}/_٥$

٢- <u>إيجاد النموذج الثنائي (المشكلة البديلة)</u> :

قبل تحديد الشكل الرياضي للنموذج الثنائي يجب توحيد اتجاه قيود النموذج الأصلي أولاً . وحيث إن النموذج الأصلي دالة الهدف د(س) في صورة تدنيه لذا يجب وضع كافة قيود النموذج الأصلي على صورة متباينات في شكل (≤) جميعًا : أي أن

د(س) = ٢س$_١$ + س$_٢$ (تدنيه)

<u>بشرط</u> :

٣س$_١$ + س$_٢$ ≤ ٣ (ص$_١$)

٤س$_١$ + ٣س$_٢$ ≤ ٦ (ص$_٢$)

- س$_١$ - ٢س$_٢$ ≤ ٣ (ص$_٣$)

س$_١$ ، س$_٢$ ≤ صفر

ومن ثم يصبح النموذج الثنائي على الصورة :

المطلوب إيجاد قيم ص$_١$ ، ص$_٢$ ، ص$_٣$ التي تجعل الدالة :

د(ص) = ٣ ص$_١$ + ٦ ص$_٢$ - ٣ ص$_٣$ (تعظيم)

<u>بشرط القيود</u> :

٣ ص$_١$ + ٤ ص$_٢$ - ص$_٣$ ≥ ٢

ص$_١$ + ٣ص$_٢$- ٢ ص$_٣$ ≥ ١

ص$_١$ ، ص$_٢$ ، ص$_٣$ ≤ صفر

<u>ملحوظة</u> : – الشكل أو النموذج الثنـائي هو شكل لنـوذج رياضـي خطـي يقابـل الشكل الأصلي لكنه ليس طريقة حل للنموذج الأصلي .

٣– <u>لحـل النمـوذج الثنـائى الـوارد فـى المطلـوب رقـم (٢)</u> . فحيـث أن كافـة القيود في هذا النموذج ثوابتها موجبة وعلى صورة متباينات في شكل (≥) لذا فحل النموذج الخطي الثنائي يكون مـن خـلال طريقـة السـمبلكس العاديـة وذلـك على النحو التالي :

- وضع النموذج الثنائي في الصورة المعيارية : فيكون على الصورة :

د (ص) = ٣ ص$_{١}$ + ٦ ص$_{٢}$ – ٣ ص$_{٣}$ (تعظيم)

<u>بشرط القيود</u> :

٣ ص$_{١}$ + ٤ ص$_{٢}$ – ص$_{٣}$ + (ص$_{٤}$) = ٢

ص$_{١}$ + ٣ ص$_{٢}$ – ٢ ص$_{٣}$ + (ص$_{٥}$) = ١

ص $_{ر}$ ≤ صفر حيث ر = ١ – ٥

- تكـوين جـدول الحـل المبـدئي للنمـوذج الثنـائي والتحسـين للوصـول للحـل الأمثل وذلك من خلال جداول السمبلكس التالية :

جدول السمبلكس

م . أ	جـ ر / م. م. أ	٣	٦	-٣	صفر	صفر	قيم الحل	النسبة
		ص١	ص٢	ص٣	ص٤	ص٥		
ص٤	صفر	٣	٤	-١	١	صفر	٢	١/٢
ص٥	صفر	١	(٣)	-٢	صفر	١	١	١/٣ ←
هـ ر		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	تعظيم
هـ ر - جـ ر		-٣	-٦	٣	صفر	صفر		
ص٤	صفر	(٥/٣)	صفر	٥/٣	١	-٤/٣	٢/٣	٢/٥ ←
ص٢	٦	١/٣	١	-٢/٣	صفر	١/٣	١/٣	١
هـ ر		٢	٦	-٤	صفر	٢	٢	تعظيم
هـ ر - جـ ر		-١	صفر	-١	صفر	٢		
ص١	٣	١	صفر	١	٣/٥	-٤/٥	٢/٥	
ص٢	٦	صفر	١	-١	-١/٥	٣/٥	١/٥	
هـ ر		٣	٦	-٣	٣/٥	٦/٥	١٢/٥	تعظيم
هـ ر - جـ ر		صفر	صفر	(صفر)	٣/٥	٦/٥		

لاحظ في الجدول الأخير (الجدول الثالث) يلاحظ الآتي : -

- **كافة عناصر قيم الحل موجبة لذا فالحل ممكن .**
- **كافة معاملات صف اختبار الأمثلية (هـ ر - جـ ر) معاملات :**

- **صفرية تقابل أعمدة المتغيرات الأساسية (ص١ ، ص٢)**
- **موجبة وصفرية تقابل أعمدة المتغيرات الغير أساسية (ص٣ ، ص٤ ، ص٥) وحيث أن دالة هدف النموذج الثنائي في صورة تعظيم لذا فالحل**

أمثل ولكنه متعدد الحلول المثلى و أحد تلك الحلول هو المبين بالجدول الثالث وهو : -

ص$_١^*$ = $^٢/_٥$ ، ص$_٢^*$ = $^١/_٥$ ، ص$_٣^*$ = ص$_٤^*$ = ص$_٥^*$ = صفر ، د(ص*) = $^{١٢}/_٥$.

<u>ملحوظة</u> : في الجدول الثاني كانت هناك حالة تعدد متغيرات مرشحة للدخول في الأساس (تعدد الأعمدة المحورية) لكن تطبيقاً لفكرة المنطق الرياضي في عملية التحسين فحيث أن المطلوب هو تعظيم للدالة د (ص) لذا فمن الأفضل دخول المتغير (ص$_١$) عن المتغير (ص$_٣$) حيث أن ص$_١$ تحقق ربحاً يعادل ٣ وحدة نقد في حين المتغير ص$_٣$ يحقق خسارة قدرها – ٣ وحدة نقد . فمن الأفضل لا شك هو دخول المتغير ص$_٣$ في الحل كمتغير أساسي.

<u>ولاستنتاج الحل الأمثل للنموذج الأصلي من واقع جدول الحل الأمثل للنموذج الثنائي فإن</u> : -

(القيمة المثلى للمتغير القراري <u>الأول</u> في المشكلة الأصلية أي س$_١^*$) = معامل المتغير المتمم <u>الأول</u> في صف اختبار أمثلية المشكلة الثنائية أي معامل ص$_٤$

= $^٣/_٥$

أو = (هـ$_٤$ – جـ$_٤$)

،

(القيمة المثلى للمتغير القراري <u>الثاني</u> في المشكلة الأصلية أي س$_٢^*$) = معامل المتغير المتمم <u>الثاني</u> في صف اختبار أمثلية المشكلة الثنائية أي معامل ص$_٥$

= $^٦/_٥$

أو = (هـ$_٥$ – جـ$_٥$)

<u>كذلك فإن:</u>

(القيمة المثلى للمتغير المتمم <u>الأول</u> في المشكلة الأصلية أي $س_{٣}^{*}$) = معامل المتغير القراري <u>الأول</u> في صف اختبار أمثلية المشكلة الثنائية أي معامل $ص_{١}$

أو: ($هـ_{١}$ – $جـ_{١}$) = صفر

وهكذا فإن $س_{٤}^{*}$ = صفر

، $س_{٥}^{*}$ = صفر

كما أن د ($س^{*}$) = د ($ص^{*}$) = ١٢/٥ .

هذا ويمكن وضع تلك النتائج في جدول يعبر عن جدول الحل الأمثل للمشكلة الأصلية وذلك على النحو المبين التالي : –

جدول الحل الأمثل للنموذج الأصلي

م . أ	$جـ_{ر}$ / م. م. أ	٢	١	صفر	صفر	صفر	قيم الحل	النسبة
		$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$	$س_{٥}$		
$س_{١}$	٢	١	صفر			صفر	٣/٥	
$س_{٢}$	١	صفر	١			صفر	٦/٥	
$س_{٥}$	صفر	صفر	صفر			١	صفر	
$هـ_{ر}$		٢	١				١٢/٥	تدنية
$هـ_{ر}$ – $جـ_{ر}$		صفر	صفر	٢/٥	١/٥	صفر		

٤ – تحديد قيم أسعار الظل بطريقتين مختلفتين والتفسير الاقتصادى لها:

يمكن تحديد قيم أسعار ظل موارد المشكلة الأصلية من خلال أحد الزاويتين التاليتين :–

الأولى : من واقع جدول الحل الأمثل للمشكلة الأصلية : حيث يتم استنتاج أسعار ظل الموارد من أسفل أعمدة المتغيرات المتممة في صف اختبار أمثلية المشكلة الأصلية أي أن :

- **سعر ظل المورد (القيد) الأول = معامل المتغير المتمم الأول (س٣) = ٢/٥ في صف اختبار الأمثلية النموذج الأصلي**
- **سعر ظل المورد (القيد) الثاني = معامل المتغير المتمم الثاني (س٤)= ١/٥ في صف اختبار أمثلية النموذج الأصلي**
- **سعر ظل المورد الثالث = معامل المتغير المتمم الثالث (س٥) في = صفر في صف اختبار أمثلية النموذج الأصلي**

الثانية : – من واقع جدول الحل الأمثل للنموذج الثنائي : حيث أن قيم أسعار ظل موارد (أو قيود) المشكلة الأصلية هي بمثابة القيم المثلى للمتغيرات القرارية للنموذج الثنائي (أي من واقع عمود قيم الحل في الجدول الأمثل للمشكلة الثنائية). أي أن:

سعر ظل المورد الأول = قيمة المتغير القراري الأول المثلى في المشكلة الثنائية = ص١* =٢/٥

،

سعر ظل المورد الثاني = قيمة المتغير القراري الثاني المثلى في المشكلة الثنائية = ص٢* =١/٥

، سعر ظل المورد الثالث = قيمة المتغير القراري الثالث المثلى في المشكلة الثنائية = ص٣* = صفر

أما عن التفسير أو المغزى الاقتصادي لأسعار الظل فإنه :

- **إذا كان سعر الظل = صفر فهذا يفيد أن هناك طاقة عاطلة أو غير مستغلة في طاقة هذا المورد ، وتقدر قيمة الطاقة العاطلة بالقيمة التي يظهر بها المتغير المتمم لقيد المشكلة الأصلية ضمن متغيرات الأساس المثلى .**
- **أما إذا كان سعر ظل المورد ≠ صفر فهذا يفيد أن طاقة المورد مستغلة بالكامل.**

وبالتطبيق على المثال السابق فإن : -

- **حيث أن سعر ظل المورد = $^{٢}/_{٥}$ أي لا يساوي الصفر فهذا يفيد أن طاقة المورد الأول (أي القيد الأول) للمشكلة الأصلية مستغلة بالكامل و للتأكد من ذلك دعنا نقوم بالتعويض في القيد الأول بالقيم المثلى المستنتجة للمتغيرات القرارية في النموذج الأصلي :**

٣ س$_{١}$ + س$_{٢}$ ≤ ٣

أي أن الطاقة المستغلة (الطرف الأيمن للقيد) = ٣ ($^{٣}/_{٥}$) + $^{٦}/_{٥}$ = $^{١٥}/_{٥}$ = ٣

وحيث أن الطاقة المتاحة للمورد (القيد) الأول = ٣

لذا فإن طاقة المورد الأول الغير مستغلة = المتاح – المستغل

= ٣ – ٣ = صفر

أي أن طاقة المورد الأول مستغلة بالكامل و لا توجد فيه طاقة عاطلة .

وهو ما أكدته قيمة سعر ظل المورد الأول باختلاف قيمته عن الصفر .

كذلك فإن :

- **حيث أن سعر ظل المورد الثاني = ١/٥ أي لا يساوي الصفر وهذا يفيد بأن طاقة المورد (القيد) الثاني مستغلة بالكامل . فلنرى ذلك من خلال التعويض في القيد الثاني :**

٤ س$_{١}$ + ٣ س$_{٢}$ ≤ ٦

الطاقة المستغلة (الطرف الأيمن للقيد) = ٤ (٣/٥) + ٣ (٦/٥) = ٦

وحيث أن الطاقة المتاحة (الطرف الأيسر للقيد) = ٦

لذا فإن

الطاقة الغير مستغلة (العاطلة) = المتاح – المستغل

= ٦ – ٦ = صفر

وهو ما يفيد أن طاقة المورد الثاني مستغلة بالكامل أي انعدام الطاقة العاطلة في المورد الثاني وهو بالفعل ما أكدته قيمة سعر ظل المورد الثاني باختلاف قيمته عن الصفر .

أما عن سعر ظل المورد الثالث فهو مساوياً للصفر وهو ما يفيد أن هناك أما طاقة عاطلة في هذا المورد أو هناك وفورات استخدام للطاقة المتاحة بمعنى أن قد يكون الطاقة المستغلة تفوق الطاقة المتاحة . وتبين ذلك من خلال القيد الثالث في النموذج الأصلي حيث أن

س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ ≥ ٣

الطاقة المستغلة (الطرف الأيمن للقيد) = ٣/٥ + ٢ (٦/٥) = ٣

الطاقة المتاحة (الطرف الأيسر للقيد) = ٣

أي أن الطاقة العاطلة = المتاح – المستغل = ٣ – ٣ = صفر

وهو ما يفيد انعدام الطاقة العاطلة . ويرجع التفسير في أن هناك تضاد في التفسير النظري لسعر ظل المورد الثالث عن ما تؤكده حسابات طرفي القيد الثالث إلى أن جدول الحل الأمثل للمشكلة الثنائية والمستنتج منه

الحل الأمثل للمشكلة الأصلية به حالة تعدد حلول مثلى فإذا تم اعتبار جولة تحسين بديلة للحل الأمثل للمشكلة البديلة السابقة فإن ذلك سيترتب عليه دخول المتغير القراري الثالث (ص$_{٣}$) ضمن الأساس وخروج (ص$_{١}$) وهذا هو التفسير الرياضي لتلك الحالة .

٥- <u>تحقيق نتائج النموذجين الأصلي والثنائي معاً .</u>

لتحقيق نتائج النموذجين معاً يتم التعويض في دالة هدف وقيود النموذج الذي تم استنتاج قيم متغيراته المثلى .

وفي مثالنا هذا حيث أننا استنتجنا القيم المثلى للمتغيرات القرارية للنموذج الأصلي . لذا يتم التعويض في دالة هدف وقيود النموذج الأصلي : حيث نجد أن :

<u>أولاً : تحقيق دالة الهدف :</u>

د (س) = ٢ س$_{١}$ + س$_{٢}$

وحيث أن س$_{١}^{*}$ = $^{٣}/_{٥}$ ، س$_{٢}^{*}$ = $^{٦}/_{٥}$

لذا فإن :

د (س*) = ٢ س$_{١}^{*}$ + س$_{٢}^{*}$ = ٢ ($^{٣}/_{٥}$) + $^{٦}/_{٥}$ = $^{١٢}/_{٥}$ وهـــــي نفس القيمة المستنتجة من حل النموذج الثنائي .

<u>ثانيًا : تحقيق القيود</u> : -

<u>القيد الأول</u> : ٣س$_{١}$ + س$_{٢}$ ≤ ٣

أي أن ٣ ($^{٣}/_{٥}$) + $^{٦}/_{٥}$ ≤ ٣

$^{١٥}/_{٥}$ = ٣ ≤ ٣

هذا وبالإضافة لصحة القيد الأول رياضياً فإن الفرق ما بين طرفي القيد وهو = الأيسر – الأيمن = ٣ – ٣ = صفر

وهذا الفرق بين طرفي القيد الأول هو نفس معامل المتغير القراري الأول في صف اختبار أمثلية المشكلة الثنائية أي معامل ص$_{١}$ في صف اختبار الأمثلية .

<u>والقيد الثاني</u> : ٤ س$_{١}$ + ٣ س$_{٢}$ ≤ ٦

٤ (٣/٥) + ٣ (٦/٥) = ٦ ≤ ٦

هذا وبالإضافة لصحة القيد الثاني رياضياً فإن الفرق بين طرفي هذا القيد يساوي الصفر وهو نفس معامل المتغير القراري الثاني (ص$_{٢}$) في صف اختبار أمثلية المشكلة الثنائية .

أما **<u>القيد الثالث</u>** فإن : س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ ≥ ٣

أي أن ٣/٥ + ٢ (٦/٥) = ١٥/٥ = ٣ ≥ ٣

هذا بالإضافة لصحة القيد الثالث رياضياً فإن الفرق بين طرفي هذا القيد يساوي الصفر وهو نفس معامل المتغير القراري الثالث (ص$_{٣}$) في صف اختبار أمثلية المشكلة الثنائية .

<u>مثال (٢)</u> : إذا كان لديك النموذج الخطي التالي :

د (س) = ٣س$_{١}$ + ٥س$_{٢}$ (تعظيم)

بشرط القيود :

س$_{١}$ ≥ ٤

س$_{٢}$ ≥ ٦

٣س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ ≥ ١٨

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ≤ صفر

والمطلوب :

١- حل النموذج باستخدام طريقة السمبلكس المناسبة.

٢- إيجاد النموذج المبدل (المشكلة الثنائية) .

٣- حل النموذج الثنائي باستخدام طريقة السمبلكس المناسبة.

٤- وضح العلاقة بين نتائجك في (١) ، (٣) من خلال تحقيق نتائج النموذجين معاً .

٥- حلل أسعار الظل .

الحـــــل : -

١- **حل النموذج :**

لحل النموذج الأصلي فحيث أن كافة قيود هذا النموذج ثوابتها موجبة وفي صور متباينات على شكل (≥) لذا فالحل بطريقة السمبلكس العادية حيث يتم الآتي : -

- وضع النموذج في الصورة المعيارية :

د(س) = ٣س$_{١}$ + ٥س$_{٢}$ + (٠) س$_{٣}$ + (٠) س$_{٤}$ + (٠) س$_{٥}$ تعظيم

بشرط القيود :

س$_{١}$ + (س$_{٣}$) = ٤

س$_{٢}$ + (س$_{٤}$) = ٦

٣س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ + (س$_{٥}$) = ١٨

س$_{ر}$ ≥ صفر حيث ر = ١-٥

- تصوير جدول الحل المبدئي والتحسين للوصول للحل الأمثل :

جداول السمبلكس

م . أ	جـ ر	٣	٥	صفر	صفر	صفر	قيم الحل	النسبة
	م. م. أ	س١	س٢	س٣	س٤	س٥		
س٣	صفر	١	صفر	١	صفر	صفر	٤	-
س٤	صفر	صفر	(١)	صفر	١	صفر	٦	٦ →
س٥	صفر	٣	٢	صفر	صفر	١	١٨	٩
هـ ر		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	تعظيم
هـ ر – جـ ر		–٣	–٥	صفر	صفر	صفر		
س٣	صفر	١	صفر	١	صفر	صفر	٤	٤
س٢	٥	صفر	١	صفر	١	صفر	٦	.
س٥	صفر	(٣)	صفر	صفر	–٢	١	٦	٢ →
هـ ر		صفر	٥	صفر	٥	صفر	٣٠	تعظيم
هـ ر – جـ ر		–٣	صفر	صفر	٥	صفر		
س٣	صفر	١	صفر	١	٢/٣	–١/٣	٢	
س٢	٥	صفر	١	صفر	١	صفر	٦	
س١	٣	صفر	صفر	صفر	–٢/٣	١/٣	٢	
هـ ر		٣	٥	صفر	٣	١	٣٦	تعظيم
هـ ر – جـ ر		صفر	صفر	صفر	٣	١		

وفي جدول الحل الأخير يلاحظ الآتي : –

- **كافة عناصر قيم الحل موجبة لذا فالحل ممكن .**
- **كافة معاملات صف اختبار الأمثلية معاملات : –**

- **صفرية فقط تناظر أعمدة المتغيرات الأساسية ($س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$) .**
- **موجبة جميعاً تناظر أعمدة المتغيرات الغير أساسية ($س_٤$ ، $س_٥$)**

وحيث أن المشكلة التي نحن بصدد حلها هي تعظيم لدالة الهدف لذا فالحل أمثل ووحيد وهو : -

$س_١^*$ = ٢ ، $س_٢^*$ = ٦ ، $س_٣^*$ = ٢ ، $س_٤^*$ = $س_٥^*$ = صفر ، د ($س^*$) = ٣٦

٢- إيجاد النموذج المبدل أو المشكلة الثنائية : -

حيث أن المشكلة الأصلية تعظيم وكافة قيودها في صورة ($\leq$) لذا فالعكس تكون المشكلة الثنائية حيث تصبح دالة الهدف لها في صورة تدنية وكافة قيودها على صورة متباينات في شكل أكبر من أو يساوي ($\geq$) . لذا نفرض عدد من المتغيرات القرارية للنموذج الثنائي يقابل عدد قيود المشكلة الأصلية ولتكن هذه المتغيرات هي $ص_١$ ، $ص_٢$ ، $ص_٣$

فيكون المطلوب هو إيجاد قيم $ص_١$ ، $ص_٢$ ، $ص_٣$ التي تجعل قيمة الدالة :

د (ص) = ٤ $ص_١$ + ٦ $ص_٢$ + ١٨ $ص_٣$ (تدنية)

بشرط القيود :

$ص_١$ + (٠) $ص_٢$ + ٣ $ص_٣$ $\geq$ ٣

(٠) $ص_١$ + $ص_٢$ + ٢ $ص_٣$ $\geq$ ٥

$ص_١$ ، $ص_٢$ ، $ص_٣$ $\geq$ صفر

٣- لحل النموذج الثنائي : - لاحظ أن كافة ثوابت قيود النموذج الثنائي موجبة وهناك قيد على الأقل ليس على الصورة ($\leq$) لذا فالحل أما باستخدام طريقة (م) الكبرى أو السمبلكس ذات المرحلتين . دعنا نقوم بالحل باستخدام طريقة السمبلكس ذات المرحلتين على النحو التالي :

- **وضع النموذج الثنائي في الصورة المعيارية و إضافة المتغيرات الصناعية ثم تصوير الدالة الوهمية كمجموع للمتغيرات الصناعية :**

د(ص)= ص $_{١}$ + ٦ص $_{٢}$ + ١٨ص $_{٣}$ +(٠) ص $_{٤}$ +(٠) ص $_{٥}$+ ص $_{٦}$+ ص $_{٧}$

(تدنية)

<u>بشرط القيود</u> :

ص $_{١}$ + (٠) ص $_{٢}$ + ٣ ص $_{٣}$ – ص $_{٤}$ متمم **+ (ص $_{٦}$)** صناعي **= ٣**

(٠) ص $_{١}$+ ص $_{٢}$ + ٢ ص $_{٣}$ – ص $_{٥}$ متمم **+ (ص $_{٧}$)** صناعي **=٥**

حيث ص $_{ر}$ ≤ صفر حيث ر = ١ – ٧

وبجمع القيدين بعد وضعهما في الصورة المعيارية والتعويض عن مجموع المتغيرات الصناعية بالدالة الوهمية (ف٠) فإن :

ص $_{١}$ + ص $_{٢}$ + ٥ ص $_{٣}$ – ص $_{٤}$ – ص $_{٥}$ + (ص $_{٦}$ + ص $_{٧}$) = ٨

أي أن:

ص $_{١}$ + ص $_{٢}$ + ٥ ص $_{٣}$ – ص $_{٤}$ – ص $_{٥}$ + ف $_{٠}$ = ٨

ومن ثم فإن جداول السمبلكس للمرحلة الأولى هي:

جداول السمبلكس للمرحلة الأولي (I)

(م. أ)	٤	٦	١٨	صفر	صفر	١	١	قيم الحل	النسبة
	ص١	ص٢	ص٣	ص٤	ص٥	ص٦	ص٧		
ص٦	١	صفر	(٣)	-١	صفر	١	صفر	٣	١
ص٧	صفر	١	٢	صفر	-١	صفر	١	٥	٢,٥
ف.	١	١	٥	-١	-١	صفر	صفر	٨	تدنية
ص٣	١/٣	صفر	١	-١/٣	صفر	١/٣	صفر	١	
ص٧	-٢/٣	(١)	صفر	٢/٣	-١	-٢/٣	١	٣	
ف.	-٢/٣	١	صفر	٢/٣	-١	-٥/٣	صفر	٣	تدنية
ص٣	١/٣	صفر	١	-١/٣	صفر	١/٣	صفر	١	
ص٢	-٢/٣	١	صفر	٢/٣	-١	-٢/٣	١	٣	
ف.	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	-١	-١	صفر	تدنية

تحقق شرط الإمكانية في الجدول الثالث حيث إن كافة قيم الحل موجبة. ووصول قيمة الدالة الوهمية (ف.) إلى الصفر نتيجة تحقق شرط التدنية كذلك من حيث الأمثلية فهذا يفيد انتهاء المرحلة الأولى. ومن ثم بشطب أعمدة المتغيرات الصناعية ص٦ ، ص٧ وشطب صف الدالة الوهمية (ف.) والجدول المتبقي يعتبر أساس المرحلة الثانية على النحو التالي : -

جدول السمبلكس للمرحلة الثانية (II)

م . أ	جـ $_{ر}$ / م.م.أ	٤ / ص$_{١}$	٦ / ص$_{٢}$	١٨ / ص$_{٣}$	صفر / ص$_{٤}$	صفر / ص$_{٥}$	قيم الحل	النسبة
ص$_{٣}$	١٨	$^{١}/_{٣}$	صفر	١	$^{١}/_{٣}$	صفر	١	
ص$_{٢}$	٦	$^{١}/_{٣}$	١	صفر	$^{٢}/_{٣}$	− ١	٣	
هـ $_{ر}$		٢	٦	١٨	− ٢	− ٦	٣٦	تدنية
هـ $_{ر}$ − جـ $_{ر}$		− ٢	صفر	صفر	− ٢	− ٦		

وحيث أن جدول الحل المبدئي للمرحلة الثانية يحقق كل من شرطي الإمكانية والأمثلية لحالة تدنية دالة الهدف د (ص) . لذا فالحل المبين بهذا الجدول أمثل ووحيد وهو:

ص$_{١}^{*}$ = صفر ، ص$_{٢}^{*}$ = ٣ ، ص$_{٣}^{*}$ =١ ، ص$_{٤}^{*}$ = ص$_{٥}^{*}$ = صفر ،

د (ص*) = ٣٦

٤– <u>توضيح العلاقة بين نتائج النموذجين من خلال تحقيق نتائج حل النموذجين معاً</u> .

أ– من واقع جدول الحل الأمثل للمشكلة الأصلية لاحظ أنه يمكن استنتاج جدول الحل الأمثل للمشكلة الثنائية وذلك على النحو التالي :–

القيمة المثلى للمتغير القراري <u>الأول</u> في المشكلة الثنائية (ص$_{١}^{*}$) = معامل المتغير المتمم <u>الأول</u> (س$_{٣}$) في صف اختبار أمثلية المشكلة الأصلية = صفر أي (هـ$_{٣}$ – جـ$_{٣}$) في جدول الحل الأمثل للمشكلة الأصلية. وكذلك فإن:

القيمة المثلى للمتغير القراري <u>الثاني</u> في المشكلة الثنائية ($ص_{٢}^{*}$) = معامل المتغير المتمم <u>الثاني</u>($س_{٤}$)في صف اختبار أمثلية المشكلة الأصلية = ٣

أي ($هـ_{٤}$ – $جـ_{٤}$) في جدول الحل الأمثل للمشكلة الأصلية.

القيمة المثلى للمتغير القراري <u>الثالث</u> في المشكلة الثنائية ($ص_{٣}^{*}$) = معامل المتغير المتمم <u>الثالث</u> ($س_{٥}$) في صف اختبار أمثلية المشكلة الأصلية = ١

أي ($هـ_{٥}$ – $جـ_{٥}$) في جدول الحل الأمثل للمشكلة الأصلية.

وكذلك فإن :

القيمة المثلى للمتغير المتمم <u>الأول</u> للمشكلة الثنائية ($ص_{٤}^{*}$) = معامل المتغير القراري <u>الأول</u> في صف اختبار أمثلية المشكلة الأصلية ، أي معامل ($س_{١}$) في الصف ($هـ_{ر}$ – $جـ_{ر}$) وبالتحديد ($هـ_{١}$ – $جـ_{١}$) = صفر.

وكذلك فإن القيمة المثلى للمتغير المتمم <u>الثاني</u> للمشكلة الثنائية ($ص_{٥}^{*}$)= معامل المتغير القراري <u>الثاني</u> في صف اختبار أمثلية المشكلة الأصلية أي معامل ($س_{١}$) في الصف ($هـ_{ر}$ – $جـ_{ر}$) وبالتحديد ($هـ_{٢}$ – $جـ_{٢}$)= صفر.

وللتحقيق الخاص بالنموذجين معاً يتم التعويض في دالة هدف وقيود النموذج الذي تم استنتاج قيم متغيراته المثلى (أي النموذج الثنائي في تلك الحالة):

فيكون:

- **<u>تحقيق دالة الهدف في النموذج الثنائي</u> :**

∴ د (ص) = ٤ $ص_{١}$ + ٦ $ص_{٢}$ + ١٨ $ص_{٣}$

= ٤ (صفر) + ٦ (٣) + ١٨ (١) = ٣٦ = د($ص^{*}$)

- **تحقيق القيود في المشكلة الثنائية :**
- **القيد الأول :**
- **$ص_١ + ٣ص_٣ \geq ٣$**
- **صفر + ٣ (١) = (٣) $\geq$٣**

فبالإضافة لصحة القيد رياضياً حيث ٣= ٣ والتساوي جزء من العلاقة بين الطرفين فإن الفرق بين طرفي القيد الأول = ٣ – ٣ = صفر وهو نفس معامل المتغير القراري الأول ($س_١$) في صف اختبار أمثلية المشكلة الأصلية

- **القيد الثاني :**

$ص_٢ + ٢ ص_٣ \geq ٥$

٣ + ٢ (١) = ٥ $\geq$ ٥

فبالإضافة لتحقق القيد الثاني فإن الفرق بين طرفي القيد = الأيسر – الأيمن
= ٥ – ٥ = صفر

وهذا الفرق هو نفس معامل المتغير القراري الثاني (نفس رتبة القيد) في صف اختيار أمثلية المشكلة الأصلية أي معامل $س_٢$ في الصف ($هـ_ر$ – $جـ_ر$) .

ب- من واقع جدول الحل الأمثل للمشكلة الثنائية يمكن استنتاج جدول الحل الأمثل للمشكلة الأصلية وذلك على النحو المبين التالي : -

القيمة المثلى للمتغير القراري الأول في النموذج الأصلي = معامل المتغير المتمم الأول في صف أمثلية الثنائية

أي أن: $س_١^*$ = معامل ($ص_٤$) في الصف ($هـ_ر$ – $جـ_ر$)

وبالتحديد المعامل ($هـ_٤$–$جـ_٤$) = ٢ مع إهمال الإشارة في حالة التدنية للمشكلة الثنائية . .

، القيمة المثلى للمتغير القراري الثاني في النموذج الأصلي = معامل المتغير المتمم الثاني في صف أمثلية المشكلة الثنائية

أي أن: $س_٢^*$ = معامل ($ص_٥$)

أي ($هـ_٥$ – $جـ_٥$) في صف ($هـ_ر$ – $جـ_ر$) = ٦

كما أن :

القيمة المثلى للمتغير المتمم الأول في النموذج الأصلي = معامل المتغير القراري الأول ($ص_١$) في صف الأمثلية

أي أن ($هـ_١$ – $جـ_١$) ← $س_٣^*$ = ٢ مع إهمال الإشارة

، القيمة المثلى للمتغير المتمم الثاني في النموذج الأصلي = معامل القراري الثاني في صف أمثلية المشكلة الثنائية أي معامل ($ص_٢$)

أي أن: ($هـ_٢$ – $جـ_٢$) ← $س_٤^*$ = صفر

،

القيمة المثلى للمتغير المتمم الثالث في النموذج الأصلي = معامل المتغير الثالث ($ص_٣$) في صف أمثلية المشكلة الثنائية ، أي أن :

($هـ_٣$ – $جـ_٣$) ← $س_٥^*$ = صفر

كما أن : د($س^*$) = د ($ص^*$) = ٣٦

هذا ولتحقيق نتائج النموذجين معاً فكما هو وارد سابقاً يتم التعويض في دالة هدف وقيود النموذج الذي تم استنتاج قيم متغيراته المثلى . وفي تلك الحالة يتم التعويض في النموذج الأصلي حيث استنتجنا قيم متغيراته المثلى من واقع جدول الحل الأمثل للمشكلة الثنائية . أي أن

$س_١^*$ = ٢ ، $س_٢^*$ = ٦ ، د ($س^*$) = ٣٦

- <u>تحقيق دالة هدف النموذج الأصلي : –</u>

د (س) = ٣$س_١$ + ٥ $س_٢$

= ٣ (٢) + ٥(٦) = ٣٦ = د (س*)

- **تحقيق قيود النموذج الأصلي:-**
- **القيد الأول : س١ ≤ ٤**

حيث أن ٢ ≤ ٤

هذا وبالإضافة لصحة القيد رياضياً فإن الفرق بين طرفي القيد وبالتحديد الطرف الأيسر (المتاح) – الطرف الأيمن (المستغل) مع إهمال إشارة الفرق هو ٤. ٢ = ٢ وهذا الفرق هو نفس معامل المتغير القراري الأول في صف أمثلية المشكلة الثنائية المعامل (ص١) في صف هـ ر– جـ ر مع إهمال الإشارة .

- **القيد الثاني : س٢ ≤ ٦**

وحيث أن ٦ ≤ ٦

فبالإضافة لصحة تحقق القيد رياضياً فإن الفرق بين طرفي القيد الثاني في المشكلة الأصلية صفراً وهو نفس معامل المتغير القراري الثاني (أي نفس رتبة القيد) في صف أمثلية المشكلة الثنائية التي تم الاستنتاج منها .

- **القيد الثالث : ٣س١ + ٢س٢ ≤ ١٨**

أي أن ٣ (٢) + ٢ (٦) = ١٨ ≤ ١٨

فبالإضافة لصحة تحقق القيد رياضياً فإن الفرق بين طرفي القيد الثالث في المشكلة الأصلية صفراً وهو نفس معامل المتغير القراري الثالث (أي نفس رتبة القيد) في صف أمثلية المشكلة الثنائية التي تم الاستنتاج منها .

٥- تحليل أسعار الظل والمغزى الاقتصادي منها :

سعر ظل المورد (القيد في المشكلة الأصلية) هو عبارة عن مقدار الزيادة أو النقص التي تطرأ على قيمة دالة هدف النموذج الأصلي نتيجة

زيادة أو نقص طاقة المورد المتاحة (أي الطرف الأيسر للقيد) بمقدار وحدة واحدة.

ويتم استنتاج أسعار ظل المورد رقم (ر) = معامل المتغير المتمم من نفس الرتبة (ر) في صف أمثلية المشكلة الأصلية. أي أن: ($هـ_{ن+ر}$ – $جـ_{ن+ر}$)

حيث أن ن = ٢ ، ر = ١ ، ٢ ، ٣.

سعر ظل المورد <u>الأول</u> = معامل المتغير المتمم <u>الأول</u> ($س_٣$) في صف اختبار أمثلية المشكلة الأصلية ($هـ_٣$ – $جـ_٣$) = صفر

،

سعر ظل المورد <u>الثاني</u>= معامل المتغير المتمم <u>الثاني</u> ($س_٤$) في صف اختبار أمثلية المشكلة الأصلية ($هـ_٤$ – $جـ_٤$) = ٣

،

سعر ظل المورد <u>الثالث</u> = معامل المتغير المتمم <u>الثالث</u> ($س_٥$) في صف اختبار أمثلية المشكلة الأصلية ($هـ_٥$ – $جـ_٥$) =١

وبصفة عامة إذا كان سعر ظل المورد = صفر فهذا يفيد أن طاقة المورد تكون غير مستغلة بالكامل أي تواجد طاقة عاطلة في هذا المورد وتقدر قيمة الطاقة العاطلة بقيمة المتغير المتمم لهذا القيد الذي يظهر بها في متغيرات الأساس ضمن قيم الحل . أما إذا كان سعر ظل المورد لا يساوي الصفر فهذا يفيد أن طاقة المورد مستغلة بالكامل وهو ما يؤدي إلى اختفاء المتغيرات المتممة للقيود التي تتسم بذلك من متغيرات الأساس .

فحيث أن :

سعر ظل المورد الأول = صفر . فهذا يعني أن هناك طاقة عاطلة في هذا المورد وهو ما أدى لظهور المتغير المتمم للقيد الأول ($س_٣$) في جدول الحل الأمثل ضمن متغيرات الأساس بقيمة = ٢ (وحدة طاقة عاطلة)

وللتأكد من ذلك أرجع إلى تحقيق القيد الأول في المشكلة الأصلية السابق تحقيقه حيث وجدنا أن الفرق بين طرفي القيد ٤. ٢ = ٢ .

أما القيد الثاني فحيث أن سعر ظل المورد الثاني = ٣ $\neq$ صفر

والقيد الثالث فحيث أن سعر ظل المورد الثالث = ١ $\neq$ صفر

فهذا يفيد أن طاقة الموردين الثاني والثالث مستغلة بالكامل و لا توجد طاقة عاطلة في هذين الموردين وهو ما أدى إلى خروج المتغيرات المتممة للقيدين الثاني والثالث (س٤ ، س٥) من متغيرات الأساس في جدول الحل الأمثل.

أما عن تأكيد التفسير الاقتصادي لأسعار ظل الموارد : فدعنا نفرض أن طاقة الموارد الثلاثة قد زادت بمقدار (٥) وحدات لكل مورد أي أصبحت ثوابت القيود (للمشكلة الأصلية) ٩ ، ١١ ، ٢٣ على الترتيب فإن من المتوقع أن تصل قيمة دالة الهدف إلى القيمة المثلى للدالة د (س*) مضافاً إليها مجموع حواصل ضرب مقدار الزيادة في طاقة هذه الموارد × أسعار ظل تلك الموارد أي أن:

القيمة المثلى لدالة الهدف بعد زيادة طاقات الموارد المتاحة الثلاث = د(س*)

+ مجموع مقدار الزيادة في طاقة المورد (ر) × سعر ظل المورد (ر)

= ٣٦ + [٥ × صفر + ٥ × ٣ + ٥ × ١] = ٥٦ وحدة نقد .

وللتأكد من ذلك يمكنك استنتاج قيمة دالة الهدف المثلى بعد الزيادة من خلال جدول الحل الأمثل للمشكلة الأصلية كما سبق عند تناولنا هذا الجزء حيث يتم ضرب المصفوفة التي تقع أسفل المتغيرات المتممة من جدول الحل الأمثل في متجه الثوابت الجديد بعد التغيير لينتج قيم المتغيرات المثلى والتي يتم بدورها ضربها في متجه هامش ربح الوحدة ليعطي قيمة دالة الهدف الجديدة المثلى بعد زيادة طاقة تلك الموارد.

أي أن :

$$\begin{pmatrix} \text{س}_{٣}^{*} \\ \text{س}_{٢}^{*} \\ \text{س}_{١}^{*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٢/٣ & -١/٣ \\ \text{صفر} & ١ & \text{صفر} \\ \text{صفر} & -٢/٣ & ١/٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٩ \\ ١١ \\ ٢٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٦/٣ \\ ١١ \\ ١/٣ \end{pmatrix}$$

وإذا تم ترتيب القيم المثلى للمتغيرات القرارية لتصبح عناصر مرتبة فيكون :

$$\begin{pmatrix} \text{س}_{١}^{*} \\ \text{س}_{٢}^{*} \\ \text{س}_{٣}^{*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١/٣ \\ ١١ \\ ٢٦/٣ \end{pmatrix}$$

والآن لحساب قيمة دالة الهدف الجديدة ، أي بعد زيادة طاقة الموارد المتاحة فإن :

الربح الإجمالي الجديد = متجه هامش ربح الوحدة × متجه قيم الحل

$$= \begin{pmatrix} ٣ & ٥ & \text{صفر} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١/٣ \\ ١١ \\ ٢٦/٣ \end{pmatrix}$$

$$= ٣ \times ١/٣ + ٥ \times ١١ + \text{صفر} \times ٢٦/٣$$

$$= ٥٦ \quad \text{وحدة نقد}$$

وهي نفس القيمة المتوقعة باعتبار فكرة أسعار ظل الموارد التي سبق تحديدها من خلال مفهوم أسعار الظل الخاص بالموارد.

تـمـا ريـن

١) : مصنع ينتج نوعين أ ، ب من المنتجات البلاستيكية للاستهلاك العائلي . فإذا كان لإنتاج الوحدة من الوعاء (أ) يجب أن يمر على آلتين يحتاج إلى ٤ ساعات على الآلة الأولى وثلاث ساعات على الآلة الثانية . بينما تحتاج الوحدة من الوعاء (ب) إلى ساعتين على الآلة الأولى وستة ساعات على الآلة الثانية . وإذا علمت أن الساعات المتاحة للآلة الأولى لا تزيد عن ١٢ ساعة في اليوم بينما الآلة الثانية لا تزيد عن ١٨ ساعة في اليوم وكان ربح الوحدة من النوع (أ) ٤ جنيه ومن النوع (ب) جنيهان . والمطلوب تحديد توليفة الإنتاج المثلى بحيث يحقق هذا المصنع أقصى ربح ممكن .

٢) : إذا كان مطلوب عمل وجبة غذائية للتلاميذ مكونة من نوعين من الأطعمة ط١ ، ط٢ . فإذا كانت الوحدة من الطعام ط١ تعطي ٣ مللجم من فيتامين (أ) ، (٣) مللجم من فيتامين (ب) . وكان التلميذ يحتاج على الأقل إلى ١٨ مللجم من فيتامين (أ) وعلى الأقل ١٢ مللجم من فيتامين (ب) وكان ثمن الوحدة من الطعام ط١ هو ثلاثون قرشاً وثمن الوحدة من الطعام ط٢ هو ٥٠ قرشاً . فالمطلوب تحديد وجبة الطعام المحققة لتلك الشروط بحيث تكون لها أقل تكلفة ممكنة .

٣) : مصنع لعب أطفال ينتج نوعين من المنتجات أ ، ب . فإذا كان كل نوع من هذه اللعب يجب أن يمر على مراحل الإنتاج الثلاثة الموضحة

بالجدول التالي والذي يوضح الساعات المتاحة واللازمة لإنتاج الوحدة من كل نوع وكذلك هامش ربح الوحدة من كل نوع : –

نوع اللعبة / المرحلة	أ	ب	أقل وقت مخصص للمرحلة
الأولى	١٠	٥	٨٠
الثانية	٦	٦	٦٦
الثالث	٥	٦	٩٠
ربح الوحدة	٣	٥	

والمطلوب تحديد أفضل تشكيلة للإنتاج من نوعي اللعب بحيث يتحقق أقصى ربح ممكن .

٤) : ترغب شركة صناعية في إنتاج ٢٠٠٠ كيلوجرام من خيوط الغزل ويستلزم ذلك خلط ثلاث أصناف من الموارد الخام هي $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$. فإذا كانت تكلفة الكيلوجرام من هذه الأصناف الثلاثة هي ١٠ ، ١٢ ، ١٤ جنيهاً على الترتيب و لا يمكن استخدام أكثر من ٣٠٠ كيلوجرام من النوع س١ كما يجب استخدام ١٥٠ كيلوجرام من النوع س٢ ويجب استخدام ٢٠٠ كيلوجرام من الصنف س٣ .

والمطلوب تحديد الكمية الواجب استخدامها من كل نوع بحيث تؤدي إلى تقليل التكلفة لأقل حد ممكن .

٥) : سوق تجاري يعمل ٢٤ ساعة يومياً ويحتاج للأعداد التالية من موظفي الخزينة كحد أدنى : -

الفترة	١	٢	٣	٤	٥	٦
الوقت من اليوم ٢٤ ساعة	٣–٧	٧–١١	١١–١٥	١٥–١٩	١٩–٢٣	٢٣–٣
العدد المطلوب كحد أدنى	٧	٢٠	١٤	٢٠	١٠	٥

علماً بأنه تتبع الفترة رقم (٦) الفترة رقم (١) مباشرة . ويعمل كل عامل خزينة ٨ ساعات يومياً متتالية ابتداءً من أي فترة من الفترات الستة .
والمطلوب تحديد ورقة تشغيل لموظفي الخزينة يومياً وذلك بأقل عدد ممكن منهم وبما يفي بالمتطلبات اللازمة لهذا السوق .

٦) : يحتاج فريق سباحة ٤٠٠ متر تتابع إلى أربعة سباحين يسبح كل منهم ١٠٠ متر ظهر وصدر وفراشة وحرة . ويتوافر لدى المدرب ستة سباحين مدربين يسبحون بأزمنة متوقعة بالتوالي منفردين موضحه بالجدول التالي :

السباحة / السباح	الزمن بالثانية الذي يقضيه السباح في السباحة المقابلة			
	سباحة منفردة ظهر	سباحة منفردة صدر	سباحة منفردة فراشة	سباحة منفردة حرة
١	٦٥	٧٣	٥٢	٦٧
٢	٥٣	٨٤	٦٦	٦٥
٣	٧٧	٦٣	٦٥	٥٩
٤	٦٥	٥٣	٦٧	٧٥
٥	٧٣	٧٤	٧٥	٨٣
٦	٧٧	٦٢	٧٥	٧٢

فكيف يمكن للمدرب اختيار أربعة سباحين للسباق بحيث يكون مجموع زمن السباق أقل ما يمكن . (صياغة المشكلة فقط)

٧) : حدد المجال المسموح به بيانياً لمجموعة القيود الهيكلية التالية :

س$_{١}$ + س$_{٢}$ ≥ ٤

٤س$_{١}$ + ٣س$_{٢}$ ≥ ١٢

− س$_{١}$ + س$_{٢}$ ≤ ١

س$_{١}$ + س$_{٢}$ ≥ ٦

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ≤ صفر

و أي من تلك القيود يعتبر قيد زائد (غير فعال)

٨) : حل النموذج الخطي التالي بيانياً وحقق نتائجك جدولياً من خلال طريقة السمبلكس المناسبة :

د(س) = ٥ س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ تعظيم

بشرط القيود:

س$_{١}$ + س$_{٢}$ ≥ ١٠

س$_{١}$ = ٥

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ≤ صفر

٩) : حل النموذج الخطي التالي بيانياً مرة في حالـة تعظيم دالـة الـهدف ومـرة أخرى في حالة تدنيتها :

د (س) = ٥س$_{١}$+ ٣س$_{٢}$ أكبر ما يمكن (أقل ما يمكن)

<u>بشرط القيود:</u>

س$_{١}$ + س$_{٢}$ ≥ ٦

س$_{١}$ ≤ ٣

س$_{٢}$ ≤ ٣

٢س$_{١}$ + ٣س$_{٢}$ ≤ ٣

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ≤ صفر

مـع بيـان فـي كـل حالـة مـن الحـالات التاليـة إذا مـا كـان منطقـة الحلـول المشتركة (إن وجدت) بها نقطة واحدة أم عدد لا نـهائي من النقـاط أم لا يوجد بها أي نقطة على الإطلاق :

أ – إذا كانت القيود كما أعطيت بالنموذج .

ب– إذا تغير القيد الأول ليصبح س$_{١}$ + س$_{٢}$ ≥ ٥

جـ – إذا تغير القيد الأول ليصبح س$_{١}$ + س$_{٢}$ ≥ ٧

١٠) : <u>حل النموذج الخطي التالي</u> : –

$$\text{د}(\text{س}) = \text{س}_1 - \text{س}_2 + 3\text{س}_3$$ (تعظيم)

بشرط القيود:

$$\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3 \leq 10$$

$$\text{س}_1 - \text{س}_3 \leq 5$$

$$2\text{س}_1 - 2\text{س}_2 + 3\text{س}_3 \leq \text{صفر}$$

$$\text{صفر} \leq \text{س}_1 ، \text{س}_2 ، \text{س}_3$$

ثم أوجد المشكلة الثنائية واستنتج جدول حلها من خلال جدول الحل الأمثل للنموذج الأصلي .

١١) : <u>حل النموذج الخطي التالي بيانياً وجدولياً</u> :

$$\text{د}(\text{س}) = 6\text{س}_1 - 2\text{س}_2$$ (تعظيم)

<u>بشرط القيود</u> :

$$\text{س}_1 - \text{س}_2 \leq 1$$

$$3\text{س}_1 - \text{س}_2 \leq 6$$

$$\text{صفر} \leq \text{س}_1 ، \text{س}_2$$

وبين بيانياً أنه عند الحل الأمثل فإن المتغيرين س_1 ، س_2 يمكنهم الزيادة إلى ما لا نهاية بينما تظل قيمة دالة الهدف ثابتة .

١٢) : أوجد قيم س_1 ، س_2 التي تجعل الدالة :

$$\text{د}(\text{س}) = 5\text{س}_1 + 2\text{س}_2$$ (تعظيم)

<u>بشرط القيود</u> :

$$\text{س}_1 - 2\text{س}_2 \leq 2$$

$-٢س_{١} + ٣س_{٢} \le ٢$

$س_{١}$ ، $س_{٢}$ غير محدد الإشارة .

١٣) : <u>إذا كان لديك النموذج الخطي التالي</u> :

د (س) = $٣س_{١} + ٢س_{٢}$ (تعظيم)

<u>بشرط القيود</u> :

$٢س_{١} + س_{٢} \le ٢$

$٣س_{١} + ٤س_{٢} \ge ١٢$

$س_{١} ، س_{٢} \ge$ صفر

فمن خلال التمثيل البياني بين أن النموذج المعطي لا يوجد لـه نقاط متطرفة وأقترح ما يمكن عمله لكي يكون هناك نقطة متطرفة على الأقل .

١٤) : <u>إذا كان لديك النموذج الخطي التالي</u> :

د (س) = $س_{١} - ٣س_{٢} - ٢س_{٣}$ (تدنية)

<u>بشرط القيود</u> :

$٢س_{١} - س_{٢} + ٢س_{٣} \le ٧$

$-٢س_{١} + ٤س_{٢} \le ١٢$

$-٤س_{١} + ٣س_{٢} + ٨س_{٣} \le ١٠$

$س_{١} ، س_{٢} ، س_{٣} \ge$ صفر

<u>والمطلوب</u> :

١- حل النموذج .

٢- أوجد المشكلة الثنائية واستنتج حلها من واقع نتائجك في (١) .

٣- حدد أسعار ظل المورد .

١٥) : حـل النمـاذج الخطيـة التاليـة بيانيـاً وجـدولياً باسـتخدام طريقـة السمبلكس الملائمة مع إيضاح أنواع الحلول الناتجة عن حل النموذج :

أ) $د(س) = س_{١} + ٢س_{٢}$ (تعظيم)

<u>بشرط</u> :

$-٣س_{١} + ٣س_{٢} \le ٩$

$س_{١} - س_{٢} \le ٢$

$س_{١} + س_{٢} \le ٦$

$س_{١} + ٣س_{٢} \le ٦$

ب) $د(س) = -س_{١} + س_{٢}$ (تعظيم)

<u>بشرط</u> :

$س_{١} + س_{٢} \le ٢$

$س_{١} \le ٢$

$س_{١} ، س_{٢} \ge$ صفر

ج) $د(س) = -س_{١} + ٢س_{٢}$ (تعظيم)

<u>بشرط</u> :

$س_{١} + ٢س_{٢} \le ٤$

$٢س_{١} + ٥س_{٢} \le ١٠$

$س_{١} ، س_{٢} \ge$ صفر

١٦) : <u>إذا كان لديك النموذج الخطي التالي</u> :

$د(س) = ٢س_{١} + ٣س_{٢} - ٥س_{٣}$ (تعظيم)

<u>بشرط القيود</u> :

س$_{١}$ + س$_{٢}$ + س$_{٣}$ = ٧

٢س$_{١}$ – ٥س$_{٢}$ + س$_{٣}$ ≤ ١٠

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ ≤ صفر

١٧) <u>: أوجد قيم س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ التي تجعل قيمة الدالة</u> :

د (س) = ٥س$_{١}$ – ٦س$_{٢}$ – ٧س$_{٣}$ (أقل ما يمكن)

<u>بشرط القيود</u> :

س$_{١}$ +٥ س$_{٢}$ – ٣س$_{٣}$ ≤ ١٥

٥س$_{١}$ – ٦س$_{٢}$ + ١٠س$_{٣}$ ≥ ٢٠

س$_{١}$ + س$_{٢}$ + س$_{٣}$ = ٥

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ ≤ صفر

١٨) : حل النموذج الخطي التالي بيانياً : –

د (س) = – س$_{٢}$ (تدنية)

<u>بشرط</u> :

س$_{١}$ + س$_{٢}$ ≤ ١

س$_{١}$ +س$_{٢}$ ≥ ٢

س$_{١}$ – س$_{٢}$ ≥ ١

س$_{١}$ – س$_{٢}$ ≤ – ١

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ≤ صفر

ثم حل النموذج الخطي باعتبار أن د (س) = – س$_{١}$ (تعظيم) وفي كل مرة حدد أنواع الحلول الناتجة عن النموذج الخطي .

١٩) : <u>فيما يلي لديك النموذج الخطي التالي</u> :

د (س) = ٢س١ + س٢ (تعظيم)

<u>بشرط القيود</u> :

س١ + ٢س٢ ≥ ١٠

س١ + س٢ ≥ ٦

س١ – س٢ ≥ ٢

س١ ، س٢ ≤ صفر

<u>والمطلوب</u> :

١- حل النموذج الخطي بيانياً مع إيضاح أنواع الحلول .

٢- حل النموذج جدولياً .

٣- أوجد المشكلة البديلة

٤- من واقع نتائجك في (٢) استنتج الحل الأمثل للنموذج الثنائي مع تحقيق نتائج النموذجين معاً .

٥- حدد أسعار الظل بطريقتين مختلفتين وحلل معناها . وما هو أثر زيادة الطاقات المتاحة لتصبح ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ على الترتيب .

٢٠) : <u>حل النموذج الخطي التالي بيانياً وجدولياً</u>:

د (س) = – ٢س١ – س٢ (تدنية)

<u>بشرط القيود</u>:

س١ + س٢ ≥ ٢

س١ + ٣ س٢ ≤ ٣

س١ ، س٢ ≤ صفر

ثم أوجد المشكلة الثنائية واستنتج جدول الحل الأمثل لها من خلال نتائج حل النموذج الأصلي .

٢١) : حل النموذج الخطي التالي بيانياً وجدولياً:

د (س) = ٤س$_{١}$ + ٨س$_{٢}$ (أقل ما يمكن)

بشرط القيود:

س$_{١}$ − س$_{٢}$ ≤ ٢

٢س$_{١}$ + س$_{٢}$ ≤ ٥

٢٢) : أوجد قيم س$_{١}$ ، س$_{٢}$ التي تجعل قيمة الدالة:

د (س) = ٣س$_{١}$ − س$_{٢}$ (تدنية)

بشرط القيود:

س$_{١}$ +٢س$_{٢}$ ≤ ٦

س$_{١}$ − س$_{٢}$ ≥ ٢

س$_{٢}$ ≥ ٢

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ≤ صفر

ثم أوجد المشكلة الثنائية واستنتج جدول حلها الأمثل وحقق نتائج النموذجين معاً .

٢٣) : إذا كان لديك النموذج الخطي التالي:−

د (س) = − س$_{١}$ (تدنية)

بشرط القيود:

س$_{١}$ + س$_{٢}$ ≥ ٢

$| س_١ - س_٢ | \geq ١$

$س_١ ، س_٢ \geq$ صفر

<u>والمطلوب</u>:

١- حل النموذج بيانياً وجدولياً مع إيضاح أنواع الحلول .

٢- أوجد المشكلة الثنائية .

٣- من واقع نتائجك في (١) استنتج جدول الحل الأمثل للمشكلة الثنائية .

٤- حدد أسعار ظل الموارد بطريقتين مختلفتين مع تفسير المغزى الاقتصادي لها .

الفصل الثالث
مشكلة النقل
Transportation problem

يقدم هذا القسم مشكلة النقل بأشكالها المختلفة حيث تبدو تلك المشكلة واضحة في التعامل مع خطة تدنية تكاليف نقل سلعة وحيدة متجانسة من مصادر إنتاجها (المصانع مثلاً) إلى عدد من أماكن توزيعها (الأسواق مثلاً) هذا ويمكن الامتداد بمشكلة أو نموذج النقل بطريقة مباشرة ليتناول حالات عملية متعددة سواء في مجال جدولة العمالة أو تخصيص الأفراد أو التدفق النقدي أو جدولة مستويات احتياطي السدود أو نقل البترول الخام من حقول الإنتاج إلى أماكن التوزيع وهكذا .

هذا ويعتبر نموذج النقل أساساً نموذج برمجة خطية يمكن حله بأحد طرق السمبلكس . لكن ستلاحظ فيما يلي أن كثافة عدد قيود النموذج الخطي الخاص بمشكلة أو نموذج النقل يجعل مثل هذه الطرق أقل كفاءة من وجهة النظر الحسابية . وهو ما تطلب من الهيكل الخاص لنموذج النقل ضرورة وجود أساليب تعتمد على إجراءات معينة في الحل تسمى بأساليب النقل والتي تعتبر أكثر كفاءة من وجهة النظر الحسابية .

هذا ويمكن أن يمتد أسلوب النقل ليشمل عدداً من التطبيقات الهامة مثل نموذج التخصيص ونموذج النقل المرحلي . وبتعبير مباشر فإن نموذج أو مشكلة النقل تهدف إلى دراسة تحديد خطة النقل المثلى لسلعة وستقتصر دراستنا على حالة سلعة وحيدة متجانسة من عدد من مصادر الإنتاج Sources إلى عدد من أماكن الطلب أو منافذ السلعة Destinations . وتشمل مشكلة النقل على مستوى الكمية المعروضة في كل مصدر من مصادر

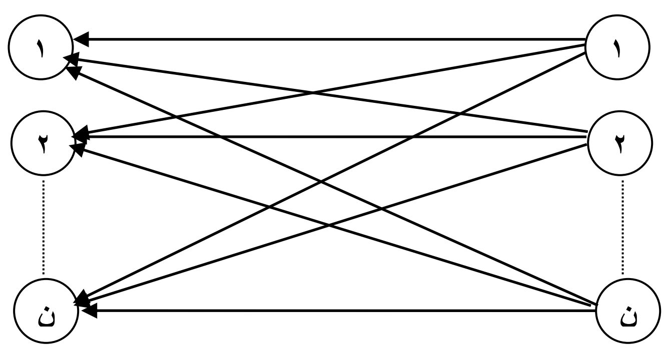
الإنتاج ومقدار الطلب في كل مكان من أماكن الطلب على السلعة أو منافذ البيع .

كما تعتمد المشكلة على تكلفة نقل وحدة السلعة من كل مصدر من مصادر الإنتاج إلى كل مركز من مراكز أو منافذ البيع (الأسواق) ، وحيث أنه توجد سلعة واحدة فيمكن لمكان الطلب أن يحصل على الكمية المطلوبة من مصدر عرض السلعة . ويتمثل الهدف الرئيسي للنموذج في تحديد عدد الوحدات التي يجب نقلها من مصادر العرض إلى أماكن الطلب بما يحقق أدنى تكلفة نقل إجمالية . ويقوم نموذج النقل على افتراض أساسي مؤداه أن تكلفة النقل عبر مسار معين يرتبط مباشرة بعدد الوحدات المنقولة عبر هذا المسار أي أن تكلفة النقل للوحدة لا تتأثر بعدد الوحدات المنقولة من أي مصدر إلى أي هدف أو مركز توزيع للسلعة والعكس صحيح . بمعنى يجب أن تكون تكلفة نقل الوحدة المعروضة هي نفسها تكلفة نقل الوحدة المطلوبة وبما يتناسب مع تعريفه وحدة النقل .

ويصور الشكل التالي نموذج النقل على أنه شبكة مكونة من عدد(ن) من مصادر عرض السلعة وعدد (م) من أماكن الطلب على السلعة:

مصادر الإنتاج (مصانع)

أماكن الطلب على السلعة (أسواق)



حيث يمثل أي من أماكن عرض أو طلب السلعة المتجانسة بدائرة ويمثل السهم الذي يصل مكان العرض بالطلب المسار الذي يمكن من خلاله أن يتم نقل السلعة .

صياغة مشكلة النقل : -

من التعريف السابق لمشكلة النقل تتلخص مشكلة النقل في عملية تحديد عدد الوحدات الواجب نقلها من سلعة متجانسة من مصادر الإنتاج على مراكز التوزيع وذلك بأقل تكلفة نقل إجمالي ممكنة . ومن ثم فلصياغة نموذج خطي يعكس مشكلة النقل محل الدراسة يتم الآتي :-

١- المتغيرات القرارية للنموذج : نفرض أن $س_{رو}$ بمثابة متغيرا يعبر عن عدد الوحدات الواجب نقلها من المصدر (ر) إلى مركز التوزيع (و) حيث:

ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ...... ، ن وكذلك فإن و = ١ ، ٢ ، ٣ ، ...... ، م

٢- معلمات النموذج الخطي الخاص بمشكلة النقل :

هناك ثلاثة معلمات رئيسية يمكن بيانها على النحو التالي:

أ- تكلفة نقل أو تعريفه نقل الوحدة من السلعة المتجانسة من مصدر الإنتاج (ر) إلى مركز التوزيع (و) ولتكن هذه التعريفه هي ($ت_{رو}$) .

ب- مجموع الكميات التي يمكن أن يعرضها مصدر الإنتاج (ر) ولتكن ($ع_{ر}$) .

ج- مجموع الكميات التي يمكن أن يطلبها مركز توزيع وليكن (و) ولتكن ($ط_{و}$)

هذا ويمكن وضع المتغيرات القرارية المعترضة وكذا المعلمات الخاصة بنموذج النقل في صورة الجدول التالي:

استخدامات / موارد	١	٢	.....	م	ع ر
١	ت١١ س١١	ت٢١ س٢١	.....	ت١ن س١ن	ع١
٢	ت١٢ س١٢	ت٢٢ س٢٢	.....	ت٢ن س٢ن	ع٢
٣	ت١٣ س١٣	ت٢٣ س٢٣	.....	ت٣م س٣م	ع٣
. . .	. . .				. . .
ن-١	ت ن-١ ١ س ن-١ ١	ت ن-١ ٢ س ن-١ ٢		ت ن-١ م س ن-١ م	ع ن - ١
أن	ت ن١ س ن١	ت ن٢ س ن٢	.....	ت ن ن س ن ن	ع ن
طو	ط١	ط٢	.....	ط م	مجـ ع ر = مجـ ط و

٣- **<u>دالة هدف نموذج النقل</u> :**

وهذه الدالة تعبر عن دالة التكاليف الإجمالية الناتجة عن نقل كميات السلع المتجانسة من مصادر إنتاجها Source إلى مراكز توزيعها Destinations وهي عبارة عن مجموع حواصل ضرب تعريفه نقل الوحدة من السلعة من المصدر (ر) إلى مركز التوزيع (و) أي ترو × عدد وحدات

السلعة الواجب نقلها من نفس المصدر (ر) إلى نفس مركز التوزيع (و) أي س$_{رو}$. أي أن :

ت = د(س) = ت$_{١١}$ س$_{١١}$ + ت$_{٢١}$ س$_{٢١}$ + ...+ ت$_{١م}$ س$_{١م}$

+ ت$_{١٢}$ س$_{١٢}$ + ت$_{٢٢}$ س$_{٢٢}$ + ...+ ت$_{٢م}$ س$_{٢م}$

+ ....

+ ت$_{ن١}$ س$_{ن١}$ + ت$_{٢٢}$ س$_{ن٢}$ + ...+ ت$_{ن م}$ س$_{ن م}$ (تدنية)

وبصيغة مختصرة إحصائياً فإن دالة التكاليف الإجمالية هي :

ت = د (س) = $\sum_{ر=١}^{ن} \sum_{و=١}^{م}$ ت$_{ر و}$ س$_{رو}$ (أقل ما يمكن)

حيث ر = ١: ن ، و = ١: م

٤- وهذه الدالة الخاصة بتكاليف النقل الإجمالية مشروطه بمجموعة من القيود الهيكلية الخاصة بقيود نموذج النقل حيث تشترط المجموعة الأولى منها والتي تسمى قيود العرض (الصفوف) بأن مجموع المقادير المنقولة من السلعة من المصدر معين من مصادر الإنتاج لسلعة وليكن المصدر (ر) حيث ر = ١ ، ٢ ، .... ، ن لا يمكن أن يزيد عن العرض المتاح في هذا المصدر وليكن (ع$_{ر}$) . هذا ويوجد في نموذج النقل عدد (ن) من قيود العرض تأخذ الصورة :

س$_{١١}$ + س$_{٢١}$ + س$_{٣١}$ + ...+ س$_{١م}$ $\leq$ ع$_{١}$

س$_{١٢}$ + س$_{٢٢}$ + س$_{٣٢}$ + ...+ س$_{٢م}$ $\leq$ ع$_{٢}$

س$_{١٣}$ + س$_{٢٣}$ + س$_{٣٣}$ + ...+ س$_{٣م}$ $\leq$ ع$_{٣}$

س$_{ن١}$ + س$_{ن٢}$ + س$_{ن٣}$ + ... + س ن م $\leq$ ع $_{ن}$

بالإضافة للمجموعة الثانية من القيود الخاصة بالطلب (أو الأعمدة) والتي تشترط بأن يكون مجموع المقادير المنقولة من السلعة إلى مركز التوزيع (و)حيث: و = ١ ، ٢ ، .....، م يجب أن تفي باحتياجات طلب هذا المركز أي يجب ألا تقل عن الكميات التي يطلبها المركز (و) من تلك السلعة. ومن ثم يوجد في نموذج النقل عدد (م) من قيود الطلب تأخذ الصورة التالية :

$$\text{س}_{١١} + \text{س}_{١٢} + \text{س}_{١٣} + \ldots\ldots + \text{س}_{ن١} \geq \text{ط}_{١}$$

$$\text{س}_{٢١} + \text{س}_{٢٢} + \text{س}_{٢٣} + \ldots\ldots + \text{س}_{ن٢} \geq \text{ط}_{٢}$$

$$\text{س}_{٣١} + \text{س}_{٣٢} + \text{س}_{٣٣} + \ldots\ldots + \text{س}_{ن٣} \geq \text{ط}_{٣}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\text{س}_{١م} + \text{س}_{٢م} + \text{س}_{٣م} + \ldots\ldots + \text{س}_{ن م} \geq \text{ط}_{م}$$

كما يجب أن يتضمن نموذج النقل لقيد يفيد بعدم وجود فائض من تلك السلعة سواء في الكميات التي تعرضها مصادر الإنتاج عن متطلبات مراكز التوزيع والعكس صحيح . أي يجب أن يكون إجمالي الكميات المعروضة مساوياً لإجمالي الكميات المطلوبة وهو ما يسمى بنموذج النقل المتوازن وهو يختلف عن نموذج النقل الذي حصرنا قيوده الهيكلية بعاليه في أن كل قيوده تصبح في صورة معادلات بدلاً من المتباينات ، هذا بالإضافة للشرط الخاص بتوازن النموذج والذي يفيد بأن:

$$\underset{\text{ر}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{ع}_{\text{ر}} = \underset{\text{و}=١}{\overset{\text{م}}{\text{مجـ}}} \text{ط}_{\text{و}}$$

وبصفة عامة في الحياة العملية قد تتساوى الكميات المطلوبة مع المعروضة وقد لا تتساوى . وعموماً وعلى أية حال يمكن دائماً إجراء عملية موازنة مشكلة النقل وتعتبر هذه العملية أساس في وضع طريقة حل النموذج حيث يمكن إضافة مصادر إنتاج وهمية للسلعة تؤدي إلى مواجهة الزيادة في

الطلب أو العكس يمكن افتراض مراكز توزيع إضافية يمكنها أن تنال فائض عرض مصادر إنتاج السلعة .

وبالإضافة للقيود الخاصة بقيود العرض وقيود الطلب وشرط التوازن فهناك قيود عدم السالبية الخاصة بجميع المتغيرات القرارية والتي تفيد بأن عدد وحدات السلعة المنقولة من المصدر (ر) إلى المركز (و) عدداً لا سالباً دائماً أي أن :

$\text{س}_{\text{رو}} \geq$ صفر حيث ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ...... ، ن

، و = ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، م

وخلاصة ما سبق فإن النموذج الخطي الذي يعبر عن مشكلة النقل يأخذ الصورة التالية :

المطلوب إيجاد قيم $\text{س}_{\text{رو}}$ حيث ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ...... ، ن

، و = ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، م

التي تجعل دالة التكاليف الإجمالية :

$\text{ت} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \text{ت}_{\text{رو}}\ \text{س}_{\text{رو}}$ (أقل ما يمكن)

بشرط القيود :

أ – <u>شرط التوازن</u> : $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ر}} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \text{ط}_{\text{و}}$

ب– <u>قيود العرض (الصفوف)</u> : وهي:

$\sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \text{س}_{\text{رو}} = \text{ع}_{\text{ر}}$ حيث ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ...... ، ن

، و = ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، م

جـ – <u>قيود الطلب (الأعمدة)</u>: وهي:

$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{رو}} = \text{ط}_{\text{و}}$ حيث ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ...... ، ن

، و = ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، م

د – قيود عدم السالبية وهي :

س $_{رو}$ ≤ صفر   حيث   ر = ١ و ٢ و ...... ن

، و = ١ و ٢ و ...... م

وأخيراً فإنه يجب أن نذكر أنه يمكن تصور أن تكون دالة هدف ربحية في نموذج النقل ويكون المطلوب في تلك الحالة هو تعظيم دالة الأرباح الإجمالية بدلاً من تدنية تكاليف النقل الإجمالية . ويمكن تصور ذلك على النحو التالي :

إذا كان لدينا مجموعة شركات مختلفة لإنتاج السلعة المتجانسة محل الدراسة وهذه الشركات نظراً لعدم تواجد أسطول من عربات نقل السلعة من مصادر الإنتاج (الشركات) إلى مراكز التوزيع (الأسواق) . فإن إدارة تلك الشركات يمكنها طرح مناقصة عامة على الشركات المتخصصة في عمليات الشحن أو النقل لمثل هذا الكم الكبير من وحدات السلعة المتجانسة . فإذا نظرنا من زاوية إدارة الشركات المنتجة لوحدات السلعة المتجانسة فإنها سوف تبحث عن أقل عطاءات شركات الشحن بمعنى أقل تعريفة نقل ممكنة مما يترتب عليه أقل جملة تكاليف نقل للسلعة من مصادر الإنتاج لمراكز التوزيع . أما من منظور شركات الشحن فسوف يكون محلاً لاهتمامها هو عملية تعظيم الأرباح الناتجة عن نقلها لسلعة تلك الشركات من مصادر إنتاجها إلى مراكز توزيعها. أي أن نموذج مشكلة النقل أما أن يحتوي على دالة هدف تعبر عن إجمالي تكاليف نقل وفي تلك الحالة سيكون القرار الأمثل هو تدنية تلك التكاليف الإجمالية إلى أقل حد ممكن (تدنية)، أما إذا كانت دالة هدف نموذج النقل تعبر عن أرباح شركات الشحن أو النقل فلا شك أن المطلوب من دالة هدف النموذج في تلك الحالة هو تعظيم أرباح شركات النقل أو الشحن لأكبر قيمة ممكنة .

هذا ونظراً لكثافة عدد القيود التي يحويها النموذج الخطي لمشكلة النقل فإنه من المتوقع إن حل مثل هذه النماذج بأسلوب أحد طرق السمبلكس (وبالتحديد (م) الكبرى أو السمبلكس ذات المرحلتين) يحتاج إلى جهد كبير للغاية وعمليات رياضية مملة لأنه كما سبق عند تناولنا سابقاً في البرمجة الخطية أن الوقت اللازم لحل نموذج خطي يتناسب طردياً مع عدد قيود النموذج الخطي محل الدراسة . ومن ثم يمكن القول أنه نظرًا لكثافة عدد قيود النموذج الخطي الخاص بمشكلة النقل فإنه تأتي الحاجة إلى حل أو معالجة مشاكل النقل بأساليب رياضية أخرى تسمى بأساليب أو طرق حل مشاكل النقل . إلا أنه يجب أن ننوه أن مثل هذه الأساليب التي سنقوم بدراستها تقوم أساساً على مبادئ و أسس طرق السمبلكس . وسوف نعرض بشيء من الإيجاز هذه الطرق أو الأساليب المستخدمة في حل مشاكل النقل بعد التعرض لخطوات حل نماذج النقل سواء في حالة تدنية جملة التكاليف أو تعظيم إجمالي الأرباح .

<u>خطوات حل مشكلة النقل :</u>

قبل تناول خطوات حل نموذج مشكلة النقل بأي من طرق تحديد الحل المبدئي يجب في البداية التحقق من مدى توافر شرط التوازن في مشكلة النقل محل الدراسة فإذا لم يتحقق شرط التوازن يتم إضافة عمود أو صف وهمي بتكاليف أو بأرباح صفرية نتيجة نقل الوحدة في هذا العمود أو هذا الصف لينال فائض العرض أو فائض الطلب . وهذا العمود أو الصف الوهمي عند تحديد جدول الحل المبدئي يفضل ألا يؤخذ في الحسبان حيث يقتصر دوره في تحقيق شرط التوازن وخلاياه ذات تعريفة النقل الصفرية يتم شغلها بالعدد الذي يشكل فائض للعرض في الصف أو فائض الطلب في العمود (كما سنرى

فيما بعد) . وبعد تحقيق التوازن إن لم يكن متحققاً يتم إتباع خطوات الحل على النحو التالي : -

١- تحديد جدول الحل المبدئي للمشكلة موضع الدراسة وذلك من خلال أحد الطرق التالية : -

أ- طريقة الركن الشمالي الشرقي North – East Corner Rule .

ب- طريقة أدنى تكلفة Least Cost Method

ج – طريقة فوجل التقريبية

Vogel's Approximation Method (V A M)

مع مراعاة التفرقة فيما بين دالة هدف نموذج نقل تعبر عن تكاليف إجمالية أم أرباح إجمالية كما سنرى فيما بعد .

٢- اختبار مدى أمثلية الحل المبدئي الذي تم اقتراحه بأحد الطرق الثلاثة السابقة وتحسين مثل تلك الحلول متى لزم الأمر للوصول للحل الأمثل وذلك من خلال إحدى الطريقتين التاليتين:-

أ- طريقة حجز الزاوية (حجر الوطء) أو الحجر المتنقل:

Steady – Stone Method or Stepping – Stone .

ب- طريقة التوزيع المعدل Modified Distribution Method

وسوف نتناول بالتفصيل كل من طرق تصميم أو تحديد جدول الحل المبدئي Starting Solution ثم طرق تحسين هذا الحل المبدئي Improved Starting Solution للوصول للحل الأمثل.

أولاً : طرق تصميم أو تحديد جدول الحل المبدئى المقترح لمشكلة النقل (أو ما تسمى أساليب حل مشاكل النقل) :

١) طريقة الركن الشمالي الشرقي North – East Method :

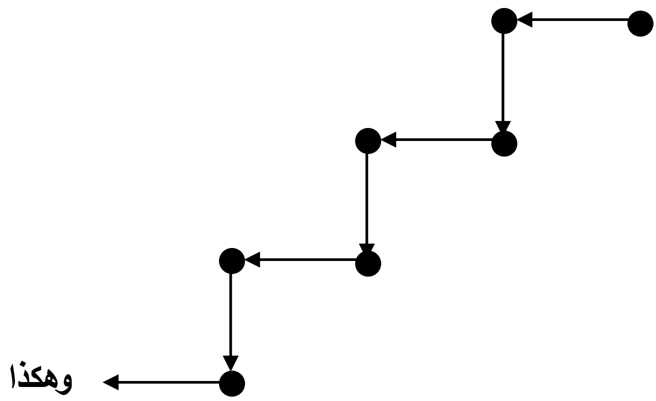
وطبقاً لهذه الطريقة يتم تصميم جدول الحل المبدئي لمشكلة النقل وذلك من خلال استيفاء خلايا الجدول المعبر عن مشكلة النقل بدءاً من أول خلية في جدول المشكلة والتي تقع في أعلى الجدول (اتجاه الشمال) ومن جهة اليمين (اتجاه الشرق) من الجدول وذلك بغض النظر عن تعريفة أو تكلفة نقل وحدة السلعة الموضحة بالجدول (أو ربح وحدة النقل في حالة مشاكل تعظيم الأرباح) .

وفي هذه الطريقة يتم الآتي : في الخلية التي تقع أعلى الجدول من جهة اليمين يتم مقارنة إجمالي المعروض في صف تلك الخلية (ع١) بإجمالي مطلوب عمودها (ط١) ثم يتم اشتغالها بأيهما أقل(ع١ أم ط١) .

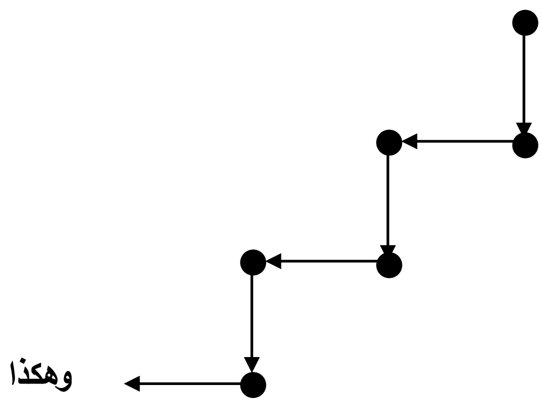
فإذا كان (ع١) أقل من (ط١) يتم شغل الخلية بمقدار (ع١) وبالتالي يتم استنفاذ كل طاقة عرض الصف الأول ويتم استكمال باقي طلب تلك الخلية من المصدر الثاني أي من الخلية التي أسفلها . أما إذا كانت (ط١) أقل من ع١ فيتم تلبية احتياجات مركز التوزيع الأول بالكامل في تلك الخلية ثم يتم التحرك على الصف نفسه في الخلية التالية للأولى ويتم فيها استنفاذ باقي العرض من خلال الوفاء بجزء من أو كل طلبات مركز التوزيع الثاني . وهكذا في كل مرة يتم شغل خلية معينة نتيجة استنفاذ كمية معروضة لأحد مصادر الإنتاج أو الوفاء بطلبات مركز توزيع معين بالكامل . فيما عدا الخلية الأخيرة والتي يتم بناءاً على شغلها استنفاذ باقي الكمية المعروضة بباقي الكمية المطلوبة. فيكون ناتج عدد الخلايا المشغولة عبارة عن عدد صفوف الجدول مضافاً إليها عدد أعمدة الجدول مطروحاً منها الخلية الأخيرة

التي بناء على شغلها بعدد من وحدات السلعة ، يترتب عليها استنفاذ عرض وتلبية احتياجات كاملة . أي أن عدد الخلايا المشغولة والتي تعتبر بمثابة عدد المتغيرات المستقلة هو (ن + م – ١) .

هذا ويجب أن ننوه على أن الخلايا التي سيتم إشغالها بعدد من وحدات السلعة سوف تكون شكل سلمي أي على صورة السلم (ما لم يكون هناك تعادل فيما بين الكمية المعروضة والمطلوبة عند أي خلية بخلاف الأخيرة) وهنا يأخذ جدول الحل المبدئي الصورة التالية:



أو



هذا ورغم بساطة العمليات الحسابية التي تتطلبها تلك الطريقة أو هذا الأسلوب في تصميمها للحل المبدئي المقترح إلا أن أهم ما يعيبها كما ذكرنا حالاً إنها لا تأخذ تعريفة نقل الوحدة في الحسبان عند تصميم جدول الحل المبدئي . لذا نتوقع في غالبية الأحوال إنها تعطي جدول حل مبدئي بعيد كل البعد عن جدول الحل الأمثل لمشكلة النقل موضع الدراسة ومن ثم فالحل باستخدامها يتطلب خوض جولات تحسين متعددة حتى يصل الجدول المقترح باستخدام تلك الطريقة إلى جدول الحل الأمثل للمشكلة .

مثال : – (السؤال الأول (أ) لدور مايو ٢٠٠٦) : –

- **بإتباع طريقة الركن الشمالي الشرقي ما هو الحل الأمثل لمشكلة النقل التالية**

إلى / من	عميل (١)	عميل(٢)	عميل(٣)	إجمالي الموجودات
مخزن(أ)	٤	٨	٢٤	٩٠
مخزن(ب)	٨	٤	٨	٦٠
مخزن(جـ)	١٦	٤	١٦	٣٠
إجمالي الاحتياجات	٤٥	٧٥	٦٠	١٨٠

<u>**الحـــــل**</u> **: -**

بفرض أن $س_{رو}$ تعبر عن عدد وحدات السلعة الواجب نقلها من المخزن (ر) للعميل (و)   حيث   ر = ١ ، ٢ ، ٣ ،

و = ١ ، ٢ ، ٣

ولتحديد جدول الحل المبدئي المقترح لتلك المشكلة فحيث أن شرط التوازن متحقق أي أن مجـ $ع_{ر}$ = مجـ $ط_{و}$ = ١٨٠ . لذا يتم تكوين جدول الحل المبدئي مباشرة وهو :

إلى / من	عميل (١)	عميل(٢)	عميل(٣)	إجمالي الموجودات $ع_{ر}$
مخزن(أ)	٤ ٤٥	٨ ٤٥	٢٤	٩٠
مخزن(ب)	٨	٤ ٣٠	٨ ٣٠	٦٠
مخزن(جـ)	١٦	٤	١٦ ٣٠	٣٠
إجمالي الاحتياجات $ط_{و}$	٤٥	٧٥	٦٠	مجـ $ع_{ر}$ = مجـ $ط_{و}$ = ١٨٠

<u>**في هذا الجدول لاحظ الآتي:**</u>

١-في الخلية الأولى (أ ١) تم مقارنة قيمة $ع_{١}$ = ٩٠ بقيمة $ط_{١}$ = ٤٥ وتم شغل تلك الخلية بأيهما أقل أي ٤٥ وحدة سلعة وبناء على هذا العدد تم تلبية كافة احتياجات العميل الأول ولازالت هناك كمية موجودة بالمخزن

الأول تبلغ ٤٥ وحدة (فائض عرض من الصف الأول) لذا يتم التحرك على نفس الصف للخلية التالية وهي الخلية (أ ٢) .

٢- في الخلية الثانية للجدول (أ٢) تمت مقارنة فائض العرض = ٤٥ بـ إجمالي احتياجات العميل الثاني وهي ٧٥ وحدة . وتم شغل تلك الخلية بأيهما أقل [٤٥ أم ٧٥] أي تم شغلها بـ ٤٥ وحدة سلعة ومن ثم تم استنفاذ باقي المعروض في المخزن الأول ولا زالت هناك احتياجات للعميل الثاني تبلغ ٧٥ – ٤٥ = ٣٠ وحدة سلعة . لذا يتم التحرك على العمود الثاني الذي تقع فيه الخلية (أ٢) وبالتحديد النزول للخلية (ب٢) لتلبية باقي احتياجات العميل الثاني (فائض طلب) من المخزن الثاني .

٣-في الخلية الثالثة (ب٢) تمت مقارنة فائض الطلب (٣٠) بإجمالي المعروض بالمخزن الثاني والذي يبلغ ٦٠ وحدة سلعة ومن ثم شغل الخلية بأيهما أقل (٣٠ أم ٦٠) . لذا تم شغل الخلية ب٢ بعدد ٣٠ وحدة سلعة ومن ثم تم تلبية كافة احتياجات العميل الثاني لكن لا زال هناك فائض في المخزن الثاني يبلغ ٦٠ – ٣٠ = ٣٠ وحدة سلعة لذا يتم التحرك على نفس الصف للخلية التي بعد الخلية ب ٢ أي للخلية ب ٣ .

٤-في الخلية ب ٣ تمت مقارنة فائض العرض ٣٠ باحتياجات العميل الثالث ٦٠ وثم شغل تلك الخلية بأيهما أقل (٣٠ أم ٦٠) ومن ثم شغلها بعدد ٣٠ وحدة سلعة ومن ثم تم استنفاذ كافة الوحدات التي يعرضها المخزن (ب) لذا يجب التحرك على نفس العمود الذي به الخلية ب ٣ و لأسفل أي للخلية جـ ٣ .

٥-و أخيراً الخلية جـ ٣ . فحيث أنها الخلية الأخيرة والمشكلة أساساً في وضع توازن من البداية فسنجد حتماً كمية معروضة تعادل تماماً كمية مطلوبة أي يتم شغل تلك الخلية بمقدار ٣٠ وحدة سلعة . ومن ثم تنتهي

طريقة الركن الشمالي الشرقي (والبعض يسميها طريقة الركن الأيمن العلوي) من تصميمها لجدول الحل المبدئي المقترح . وحيث أن عدد الخلايا المشغولة في هذا الجدول تبلغ ٥ خلايا وهي تعادل (ن + م – ١) والتي تساوي (٣+ ٣ – ١ = ٥) وهو ما يسمى بشرط الانتظام) وهذا الجدول المقترح يعكس أحد جولات السمبلكس وبالتحديد يعكس صورة تامة عن جدول السمبلكس الأول. لاحظ أن الخلايا المشغولة في الجدول السابق تعطي شكل سلمي.

أما عن اختبار مدى أمثلية الحل المقترح وتحسينه للوصول للحل الأمثل وهو باقي التمرين فسيرد فيما بعد عند تناولنا لطرق اختبار الأمثلية .

<u>ملحوظة</u> : إذا كانت المشكلة في هذا المثال هي تعظيم أرباح بدلاً من تدنية التكاليف فلاحظ أن عملية التخصيص للخلايا لن يختلف في الحالتين فالعملية واحدة سواء تدنية تكاليف أو تعظيم أرباح تبدأ بتخصيص الخلية الأولى في أعلى الجدول من جهة اليمين بغض النظر عن تكلفة أم أرباح .

<u>مثال (٢)</u> : – تقوم شركة بإنتاج سلعة ما من خلال ثلاثة فروع لها ق١ ، ق٢ ، ق٣ وتقوم بتوريدها إلى ثلاثة أسواق هي أ١ ، أ٢ ، أ٣ والجدول التالي يوضح تعريفة نقل وحدة السلعة من مصادر إنتاجها إلى مراكز توزيعها وكذا الكميات المعروضة والمطلوبة .

السوق / مراكز إنتاج	أ١	أ٢	أ٣	الكميات المعروضة
ق١	٣	٤	٨	٥٠٠
ق٢	٢	٦	١٠	٦٠٠
ق٣	٥	٧	٩	٨٠٠
الكميات المطلوبة	٤٠٠	٦٥٠	٥٥٠	

والمطلوب:

١- صياغة المشكلة في صورة نموذج خطي يعبر عن مشكلة النقل.

٢- تصوير جدول الحل المبدئي مستخدماً في ذلك طريقة الركن الشمالي الشرقي .

الحـــــل : -

قبل صياغة المشكلة في صورة نموذج خطي يعبر عن تلك المشكلة وكذلك قبل اقتراحنا لجدول الحل المبدئي باستخدام طريقة الركن الشمالي الشرقي يجب أولاً التحقق من مدى توافر شرط التوازن من عدمه . فحيث أن :-

$\overset{٣}{\underset{ر=١}{مجـ}}$ ع ر = ٥٠٠ + ٦٠٠ + ٨٠٠ = ١٩٠٠ وحدة سلعة

،

$\overset{٣}{\underset{و=١}{مجـ}}$ ط و = ٤٠٠ + ٦٥٠ + ٥٥٠ = ١٦٠٠ وحدة سلعة

لذا فهناك فائض في الكمية المعروضة يبلغ ٣٠٠ وحدة سلعة لذا يضاف عمود وهمي رابع وليكن أ$_{٤}$ ويعتبر هذا العمود بمثابة سوق وهمي إضافي ينال فائض العرض وتكاليف النقل إليه من كافة مصادر الإنتاج (الشركات) الثلاث تكاليف صفرية . ومن ثم يصبح لدينا جدول المشكلة في الصورة التالية . ونتيجة لذلك فإنه :

١- لصياغة المشكلة في نموذج خطي يعبر عن مشكلة النقل نفرض أن س$_{رو}$ تعبر عن كمية وحدات السلعة الواجب نقلها من الشركة (ر) للسوق (و) حيث ر = ١ ، ٢ ، ٣ ،

و = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤.

ومن ثم يكون المطلوب هو : -

السوق / الشركة	أ$_{١}$	أ$_{٢}$	أ$_{٣}$	أ$_{٤}$ (وهمي)	ع$_{ر}$
ف$_{١}$	٣ س$_{١١}$ ٤٠٠	٤ س$_{٢١}$ ١٠٠	٨ س$_{٣١}$	صفر س$_{٤١}$	٥٠٠
ف$_{٢}$	٢ س$_{١٢}$	٦ س$_{٢٢}$ ٥٥٠	١٠ س$_{٣٢}$ ٥٠	صفر س$_{٤٢}$	٦٠٠
ف$_{٣}$	٥ س$_{١٣}$	٧ س$_{٢٣}$	٩ س$_{٣٣}$ ٥٠٠	صفر س$_{٤٣}$ ٣٠٠	٨٠٠
ط$_{و}$	٤٠٠	٦٥٠	٥٥٠	٣٠٠	١٩٠٠

تحديد قيم س$_{ور}$ التي تجعل دالة التكاليف الإجمالية :

ت = ٣ س$_{١١}$ + ٤ س$_{٢١}$ + ٨ س$_{٣١}$ + (٠) س$_{٤١}$

+ ٢س$_{١٢}$ + ٦س$_{٢٢}$ + ١٠س$_{٣٢}$ + (٠) س$_{٤٢}$

+ ٥س$_{١٣}$ + ٧س$_{٢٣}$ + ٩ س$_{٣٣}$ + (٠) س$_{٤٣}$ (أقل ما يمكن)

<u>بشرط القيود</u>:-

أ – مجـ$_{ر=١}^{٣}$ ع$_{ر}$ = مجـ$_{و=١}^{٣}$ ط$_{و}$ = ١٩٠٠ (شرط التوازن)

ب – <u>قيود العرض (الصفوف)</u>:

س$_{١١}$ + س$_{٢١}$ + س$_{٣١}$ + س$_{٤١}$ = ٥٠٠

س$_{١٢}$ + س$_{٢٢}$ + س$_{٣٢}$ + س$_{٤٢}$ = ٦٠٠

س$_{١٣}$ + س$_{٢٣}$ + س$_{٣٣}$ + س$_{٤٣}$ = ٨٠٠

جـ – <u>قيود الطلب (الأعمدة)</u> :

س$_{١١}$ + س$_{١٢}$+ س$_{١٣}$ = ٤٠٠

س$_{٢١}$ + س$_{٢٢}$ + س$_{٢٣}$ = ٦٥٠

س$_{٣١}$ + س$_{٣٢}$+ س$_{٣٣}$ = ٥٥٠

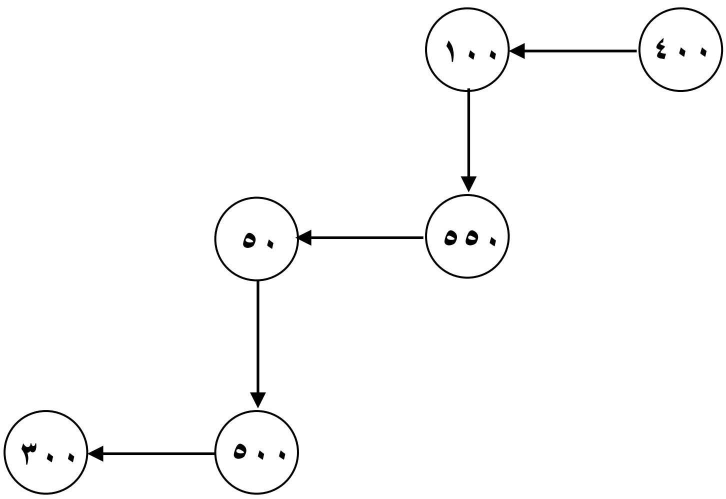
س$_{٤١}$ + س$_{٤٢}$ + س$_{٤٣}$ = ٣٠٠

د – <u>قيود عدم السالبية</u> : س $_{رو}$ ≤ صفر

حيث ر = ١ ، ٢ ، ٣

و = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

٢– تصوير جدول الحل المبدئي لجدول النقل باستخدام طريقة الركن الشمالي الشرقي ويتضح من خلال الشكل السلمي الناتج من الجدول السابق على الصورة التالية :



ومن خلال المتغيرات القرارية المفترضة فإنه طبقًا لهذه الطريقة فإن :

$س_{١١}$ = ٤٠٠ وحدة سلعة ، $س_{٢١}$ = ١٠٠ وحدة سلعة ، $س_{٢٢}$ = ٥٥٠ وحدة سلعة ، $س_{٣٢}$ = ٥٠ وحدة سلعة ، $س_{٣٣}$ = ٥٠٠ وحدة سلعة ، $س_{٤٣}$ = ٣٠٠ وحدة سلعة وباقي المتغيرات القرارية قيمتها صفرية طبقاً لهذا الحل المقترح . وبتكلفة إجمالية = ٣ × ٤٠٠ + ٤ × ١٠٠ + ٦ × ٥٥٠ + ١٠ × ٥ + ٩ × ٥٠٠ + صفر × ٣٠٠ = ٩٤٥٠ وحدة نقد

وحيث أن عدد الخلايا المشغولة = ٦

و أن ن + م – ١ = ٣ + ٤ – ١ = ٦

لذا فالحل المقترح باستخدام طريقة الركن الشمالي الشرقي لهذا المشكلة يعتبر حلاً أساسياً ممكناً . أما عن اختبار الأمثلية والتحسين فسيرد فيما بعد .

<u>ملحوظة</u> : لاحظ أنه إذا كانت المشكلة تعظيم أرباح في هذا المثال فلن يختلف الجدول عن ما تم وضعه في حالة التكلفة .

<u>ملاحظات على طريقة الركن الشمالي الشرقي : -</u>

١- إذا لم يحدد في المطلوب استخدام هذه الطريقة (طريقة الركن الشمالي الشرقي) كطريقة في تحديد جدول الحل المبدئي المقترح للمشكلة محل الدراسة فلا ينصح باستخدامها في تحديد الحل المبدئي لأنها تعطي حلاً مبدئياً بعيد كل البعد عن الأمثلية .

٢- عند افتراضنا للحل المبدئي باستخدام هذه الطريقة لاحظ أنه عند شغل خلية ما يترتب على ذلك أما استنفاذ كافة المعروض في صف أو تلبية كافة احتياجات عمود معين باستثناء الخلية الأخيرة في الجدول حيث يترتب على شغلها استنفاذ طاقة المصدر الأخير من مصادر العرض وتلبية احتياجات المركز الأخير من مراكز التوزيع وهو ما يترتب عليه أن

يكون شرط الانتظام متحققاً وهو ما يفيد بوجوب أن تكون عدد الخلايا المشغولة في الحل المقترح بأي طريقة مساوياً لعدد الصفوف + عدد الأعمدة -١ أي (ن + م – ١) وهو ما يجعل الجدول المقترح بمثابة جدول حل أساسي وممكن أي يشكل أحد جولات السمبلكس .

٣- عند اقتراحك للحل المبدئي باستخدام هذه الطريقة قد يحدث ما يسمى بانتكاسة في الحل (عدم الانتظام) . ويحدث ذلك حينما يتساوى العرض مع الطلب عند شغلك لخلية ما في الجدول (باستثناء الخلية الأخيرة) كما ذكرنا في تلك الحالة ستجد نفسك تحتاج التحرك على قطر معين من أقطار مربع أو مستطيل وهنا سنجد أننا نفقد درجة من درجات الشكل السلمي . ولعلاج حالة عدم الانتظام في نفس اللحظة (حالة الانتكاسة) يمكنك شغل أحد الخلايا التي بجانب الخلية في نفس الصف (يساراً) أو أسفل الخلية أي في نفس العمود بعدد صفري من وحدات السلعة ، والمنطق الرياضي يحكم بوضع الصفر في الخلية التي تتمتع بميزة نسبية عن غيرها حسب طبيعة المشكلة بمعنى إذا كانت المشكلة هي تدنية لإجمالي تكاليف النقل يتم وضع الصفر في أيهما أقل من حيث التكلفة أما إذا كانت المشكلة موضع الدراسة هي تعظيم أرباح فيفضل وضع الصفر في الخلية ذات أعلى ربح من الخليتين اللذين يؤديان لاستكمال الشكل السلمي لهذه الطريقة .

(٢) طريقة أدنى (أقل) تكلفة : - Least Cost Method

تقوم تلك الطريقة على أساس تخصيص أقصى قدر ممكن من وحدات السلعة للخلية ذات ميزة أقل تكلفة في الجدول ككل ثم يتم استبعاد الصف أو العمود الذي تم استنفاذ طاقته المعروضة أو تلبية احتياجاته المطلوبة على الترتيب. أي أنه طبقاً لتلك الطريقة فإن الأولوية تعطي لأشغال الخلايا التي تتمتع بميزة أقل تكلفة حيث يتم استيفاء الكمية المطلوبة من الكمية المعروضة لتلك الخلايا على التوالي . وإذا تساوت خليتين على الأقل من حيث قيمة أقل تكلفة فإنه يتم استيفاء الخلية التي تتمتع بميزة نسبية أكثر من غيرها والمنطق الرياضي يحكم باستيفاء الخلية التي سيتم إشغالها بأكثر قدر ممكن من وحدات السلعة أو استيفاء الخلية التي يترتب عليها تحسين الحل أفضل من غيرها (كما سيتضح فيما بعد) .

هذا وتعتبر طريقة أقل تكلفة أفضل من طريقة الركن الشمالي الشرقي وذلك لأنها تأخذ بعين الاعتبار ميزة المعامل الفني لتعريفة نقل وحدة السلعة من المصدر إلى الهدف ومن ثم فإننا نتوقع أن تعطي تلك الطريقة تصميم لجدول حل مبدئي مقترح أقرب للأمثلية من الحل المقترح باستخدام طريقة الركن الشمالي الشرقي.

وطبقاً لهذه الطريقة فإنه بعد شغل أو استيفاء أي خلية في الجدول لابد أن يترتب على ذلك استنفاذ المعروض في صف واحد فقط أو تلبية احتياجات عمود واحد فقط . وبعد تعديل العرض أو الطلب للصفوف والأعمدة الغير مستبعدة يتم تكرار العملية بتخصيص أقصى قدر ممكن من وحدات السلعة المتجانسة للخلية ذات ميزة أقل تكلفة غير مستبعدة سابقاً . وتكتمل الطريقة عندما يتم استيفاء كل صفوف وأعمدة مشكلة النقل موضع الدراسة.

لاحظ أن قبل بداية الحل بتلك الطريقة يجب في البداية التأكد أيضاً من مدى توافر شرط التوازن للمشكلة محل الدراسة . فإن لم يكن متحققاً يضاف صف أو عمود وهمي حسب طبيعة المشكلة بتكاليف نقل صفرية يؤدي للتوازن . كما أن عدد الخلايا المشغولة حسب تلك الطريقة يجب أيضًا أن يكون مساوياً (ن + م – ١) حتى يكون الحل المقترح حلاً أساسياً وممكنا (أو مسموحاً به) .

<u>ملاحظات على طريقة أدنى (أقل تكلفة)</u>

١) عند استيفاء الخلايا ذات ميزة أقل تكلفة في جدول مشكلة النقل قد يتساوى عرض وطلب تلك الخلية مما يترتب عليه عند شغل هذه الخلية استنفاذ الطاقة المعروضة بالكامل وتلبية كل الاحتياجات اللازمة أي يترتب على ذلك شطب صف وعمود في آن واحد . وفي تلك الحالة سنكون بصدد حالة عدم انتظام أو ما يسمى بالانتكاسة في الحل المقترح وذلك لأن عدد الخلايا المشغولة في نهاية هذا الحل المقترح سيكون أقل من (ن + م –١). ولعلاج هذه المشكلة في نفس اللحظة الناتجة عن تساوي العرض والطلب لخلية ما يتم تحديد الخلية ذات ميزة أقل تكلفة تلي الخلية التي تم إشغالها حالاً برقم العرض أو الطلب المتساويين ويتم شغل هذه الخلية بمقدار صفري من وحدات السلعة وتعتبر هذه الخلية وتعتبر هذه الخلية المشغولة بصفر من الوحدات كما لو كانت مشغولة بأي عدد آخر من وحدات السلعة ويتم معاملتها كخلية عادية مشغولة .

٢– في حالة مشاكل النقل الخاصة بعملية تعظيم أرباح شركات النقل و الشحن فإن طريقة أقل تكلفة تقابلها طريقة أعلى (أقصى) ربح في مثل هذه المشاكل . حيث يتم في تلك الحالة شغل خلايا جدول النقل طبقاً لأولوية أو

ميزة أعلى ربح في الجدول . وما ينطبق من ملاحظات على طريقة أقل تكلفة هي نفسها على طريقة أعلى ربح في حالة مشاكل تعظيم الأرباح .

٣- قبل البدء في تصميم الحل المقترح بطريقة أدنى تكلفة (أو أقصى ربح) يجب أولاً التحقق من مدى توافر شرط التوازن . ومحاولة تحقيق التوازن في حالة عدم توازن المشكلة وذلك من خلال إضافة صف أو عمود وهمي بتكاليف نقل صفرية كما سبق.

<u>مثال : (١)</u>

فيما يلي الجدول التالي يبين تعريفه نقل الوحدة لسلعة يتم إنتاجها في خمسة فروع وتسويقها في أربعة مراكز مختلفة .

أسواق / مصانع	ب١	ب٢	ب٣	ب٤	العرض
أ١	٢٠	٣١	١٨	٤٢	١٨٠
أ٢	١٦	٩	١٣	٥١	٢٤٠
أ٣	٤٣	١٩	٣٢	٢٥	٢٠٠
أ٤	٣٤	٢٤	٤٤	٣٥	٢٣٥
أ٥	٢٣	٥٤	٣٤	٦٨	١٨٥
الطلب	٢٣٧	٢٣٥	١٦٧	٣١١	١٠٤٠

<u>والمطلوب</u>:

١- صياغة النموذج الخطي لمشكلة النقل في حالة تدنيه التكاليف وتعظيم الأرباح .

٢- تصوير جدول الحل المبدئي في الحالتين السابقتين محددًا قيمة التكاليف الإجمالية والأرباح الإجمالية الناجمة عن عملية تخصيص هذا الحل المقترح باستخدام طريقة أدنى تكلفة (ومرة أخرى في حالة أقصى ربح).

الحـــل:

قبل الصياغة وتحديد الحل المبدئي المقترح باستخدام طريقة أدنى تكلفة (أو أعلى ربح) يتم التحقق من مدى توافر شرط التوازن لجدول النقل المعطى على النحو التالي : فحيث أن :

$\sum_{ر=١}^{٥}$ ع ر =١٨٠ + ٢٤٠ + ٢٠٠ + ٢٣٥ + ١٨٥ = ١٠٤٠وحدة سلعة

، $\sum_{و=١}^{٤}$ ط و =٢٣٧ + ٣٢٥ + ١٦٧ + ٣١١ = ١٠٤٠ وحدة سلعة

أي ان مجـ^{٥} ع ر = مجـ^{٤} ط و = ١٠٤٠

لذا فالمشكلة في وضع توازن

ومن ثم نفرض أن س$_{رو}$ تعبر عن عدد الوحدات الواجب نقلها من المصنع (ر) للسوق (و) حيث ر = ١ : ٥ ، و = ١ : ٤ فيكون :

١- **صياغة النموذج الخطي لمشكلة النقل في حالة التدنية والتعظيم على النحو التالي :**

أوجد قيم س$_{رو}$ التي تجعل دالة التكلفة الإجمالية (ت) أو دالة الربح الإجمالي (جـ) هي :

ت (أو حـ) = $\sum_{ر=١}^{٥}$ $\sum_{١٠}^{٤}$ ت$_{رو}$ (أو حـ $_{رو}$) × س$_{رو}$ (تدنية) (أو تعظيم)

أي أن:

ت (أو ح) = ٢٠ س$_{١١}$ + ٣١ س$_{٢١}$ + ١٨ س$_{٣١}$ + ٤٢ س$_{٤١}$

+ ١٦ س$_{١٢}$ + ٩ س$_{٢٢}$ + ١٣ س$_{٣٢}$ + ٥١ س$_{٤٢}$

+ . . . . + . . .

+ . . .   .   + . . .

+ ٢٣ $س_{١٥}$ + ٥٤ $س_{٢٥}$ + ٣٤ $س_{٣٥}$ + ٦٨ $س_{٤٥}$

(تدنية أو تعظيم)

بشرط القيود :

أ – شرط التوازن : $\sum_{ر=١}^{٥} ع_ر = \sum_{و=١}^{٤} ط_و$

ب – قيود العرض (الصفوف) :

$س_{١١} + س_{٢١} + س_{٣١} + س_{٤١} = ١٨٠$

$س_{١٢} + س_{٢٢} + س_{٣٢} + س_{٤٢} = ٢٤٠$

$= ٢٠٠$

$= ٢٣٥$

$س_{١٥} + س_{٢٥} + س_{٣٥} + س_{٤٥} = ١٨٥$

جـ – قيود الطلب (الأعمدة) :

$س_{١١} + س_{١٢} + س_{١٣} + س_{١٤} + س_{١٥} = ٢٣٧$

$س_{٢١} + س_{٢٢} + س_{٢٣} + س_{٢٤} + س_{٢٥} = ٣٢٥$

$= ١٦٧$

$س_{٤١} + س_{٤٢} + س_{٤٣} + س_{٤٤} + س_{٤٥} = ٣١١$

د – قيود عدم السالبية : $س_{رو} \geq$ صفر حيث ر = ١ : ٥ ، و = ١ : ٤

لاحظ أن الصياغة واحدة في حالتي التكلفة والأرباح فيما عدا أن الغرض من دالة الهدف هو تدنية التكاليف في حالة التكلفة بينما تعبر دالة الهدف في حالة الأرباح لشركات النقل والشحن عن تعظيم الأرباح .

٢- **تصوير جدول الحل المبدئي في حالة تدنية التكاليف (أقل تكلفة) وفي حالة تعظيم الأرباح (أقصى ربح) . وحساب جملة التكاليف أو جملة الأرباح كما توضحها الجداول التالية :**

<u>أ – الحل المقترح بطريقة أدنى تكلفة (مشكلة تكاليف):</u>

الجدول التالي يوضح عملية تخصيص الخلايا طبقاً لأولوية أو ميزة أقل تكلفة على النحو التالي : –

الحل المبدئي المقترح بطريقة أقل تكلفة وحساب جملة التكاليف الناتجة عن الحل المقترح :

أسواق / مصانع	ب ١	ب ٢	ب ٣	ب ٤	ع ر	إجمالي التكاليف
أ ١	٢٠ (١٣)	٣١	١٨ (١٦٧)	٤٢	١٨٠	٢٠×١٣+١٨×١٦٧=٣٢٦٦
أ ٢	١٦	٩ (٢٤٠)	١٣	٥١	٢٤٠	٩×٢٤٠= ٢١٦٠
أ ٣	٤٣	١٩ (٨٥)	٣٢	٢٥ (١١٥)	٢٠٠	١٩×٨٥+٢٥×١١٥=٤٤٩٠
أ ٤	٣٤ (٣٩)	٢٤	٤٤	٣٥ (١٩٦)	٢٣٥	٣٤×٣٩+٣٥×١٩٦=٨١٨٦
أ ٥	٢٣ (١٨٥)	٥٤	٣٤	٦٨	١٨٥	٢٣×١٨٥ =٤٢٥٥
ط و	٢٣٧	٣٢٥	١٦٧	٣١١	١٠٤٠	٢٢٣٥٧

أي أنه في حالة مشكلة التكاليف فإن طريقة أقل تكلفة تقوم بتخصيص الخلايا كما يلي : –

س١١ = ١٣ ، س٣١ = ١٦٧ ، س٢٢ = ٢٤٠ ، س٢٣ = ٨٥ ، س٤٣ = ١١٥ ، س١٤ = ٣٩ ، س٤٤ = ١٩٦ ، س١٥ = ١٨٥ . وفيما عدا ذلك فإن سرو = صفر . وذلك بتكلفة إجمالية تعادل ٢٢٣٥٧ وحدة نقد .

وحيث أن الجدول المقترح يحتوي على عدد من الخلايا المشغولة = ٨

، ∴ ن + م – ١ = ٥ + ٤ – ١ = ٨

لذا فالحل المقترح يعتبر حلاً أساسياً ممكناً . أما عن اختبار مدى أمثلية هذا الحل فسيرد فيما بعد .

ب – <u>الحل المقترح في حالة مشكلة تعظيم الأرباح</u> :

مصانع / أسواق	ب١	ب٢	ب٣	ب٤	ع ر	إجمالي التكاليف
أ١	٢٠	٣١ / ١٨٠	١٨	٤٢	١٨٠	٣١×١٨٠= ٥٥٨٠
أ٢	١٦	٩ / ١١٤	١٣	٥١ / ١٢٦	٢٤٠	٩×١١٤+٥١× ١٢٦=٧٤٥٢
أ٣	٤٣ / ٢٠٠	١٩	٣٢	٢٥	٢٠٠	٤٣×٢٠٠= ٨٦٠٠
أ٤	٣٤ / ٣٧	٢٤ / ٣١	٤٤ / ١٦٧	٣٥	٢٣٥	٣٤×٣٧+٢٤× ٣١+٤٤×١٦٧= ٩٣٥٠
أ٥	٢٣	٥٤	٣٤	٦٨ / ١٨٥	١٨٥	٦٨×١٨٥ =١٢٥٨٠
طو	٢٣٧	٣٢٥	١٦٧	٣١١	١٠٤٠	٤٣٥٦٢

أي أنه طبقاً لطريقة أقصى ربح فإن هذه الطريقة تقوم بتخصيص الخلايا كما هي موضحة بالجدول وهي :

$س_{٢١}$ = ١٨٠ وحدة سلعة ، $س_{٢٢}$ = ١١٤ وحدة سلعة ، $س_{٢٤}$ = ١٢٦ وحدة سلعة ، $س_{١٣}$ = ٢٠٠ وحدة سلعة ، $س_{١٤}$ = ٣٧ وحدة سلعة ، $س_{٢٤}$ = ٣١ وحدة سلعة ،

$س_{٣٤}$ = ١٦٧ وحدة سلعة ، $س_{٥٤}$ = ١٨٥ وحدة سلعة وفيما عدا ذلك فإن $س_{رو}$ = صفر

وطبقًا لهذا الجدول المقترح تبلغ أرباح شركة الشحن والنقل ٤٣٥٦٢ وحدة نقد .

وحيث أن عدد الوحدات المشغولة بالجدول = ٨

و كما أن : ن + م – ١ = ٥ + ٤ – ١ = ٨

لذا فإن الحل المقترح بطريقة أقصى ربح يعتبر حلاً أساسياً وممكناً (مسموحاً به) أما عن مدى أمثلية هذا الحل فسيرد فيما بعد .

<u>مثال (٣)</u> : تقوم أربعة شركات بتوريد جالونات البنزين المخصص لتموين الطائرات يومياً في المطارات الثلاثة المخصصة لشركة مصر للطيران . والجدول التالي يبين تعريفة نقل الجالون (بالدولار) وبعدد الجالونات التي تعرضها كل شركة وكذلك التي يطلبها كل مطار من المطارات الثلاثة على النحو التالي :

المطار / الشركة	$ب_{١}$	$ب_{٢}$	$ب_{٣}$	$ع_{ر}$
$أ_{١}$	١٠	٧	٨	٣٤٠
$أ_{٢}$	١٠	١١	١٤	٥٥٠
$أ_{٣}$	٩	١٢	٤	٦٦٠
$أ_{٤}$	١١	١٣	٩	٢٣٠
$ط_{و}$	٣٢٠	٦٦٠	٢٥٠	

<u>والمطلوب</u>: مستخدماً طريقة أقل تكلفة حدد جدول الحل المبدئي لمشكلة النقل المعطاة .. وهل الحل الناتج يعتبر حلاً أساسياً مسموحاً به ؟

<u>الحـل</u> : – في البداية يجب التحقق من مدى توافر شرط التوازن من عدمه

فحيث أن : مجـ$_{ر=١}^{٤}$ ع $_{ر}$ = ٣٤٠ + ٥٥٠ + ٦٦٠ + ٢٣٠ = ١٧٨٠ جالون

، مجـ$_{و=١}^{٣}$ ط و = ٣٢٠ + ٦٦٠ + ٢٥٠ = ١٢٣٠ جالون

ومن ثم فهناك فائض في العرض لذا يضاف عمود وهمي رابع يمثل مطار رابع ينال فائض العرض ومن ثم يصبح الجدول الخاص بمشكلة النقل على النحو التالي مبيناً فيه طريقة توزيع الجالونات المعروضة من الشركات الأربعة إلى المطارات الأربعة :

جدول الحل المبدئي

المطار / الشركة	ب$_{١}$	ب$_{٢}$	ب$_{٣}$	ب$_{٤}$	ع $_{ر}$	إجمالي التكاليف
أ$_{١}$	١٠	٧ ٣٤٠	٨	صفر	٣٤٠	٢٣٨٠
أ$_{٢}$	١٠	١١ ٣٢٠	١٤	صفر ٢٣٠	٥٥٠	٣٥٢٠
أ$_{٣}$	٩ ٣٢٠	١٢	٤ ٢٥٠	صفر ٩٠	٦٦٠	٣٨٨٠
أ$_{٤}$	١١	١٣	٩	صفر ٢٣٠	٢٣٠	صفر
ط $_{و}$	٣٢٠	٦٦٠	٢٥٠	٥٥٠	١٧٨٠	٩٧٨٠ $

وحيث أن الجدول المقترح يحتوي على :

عدد من الخلايا المشغولة = ن + م – ١ = ٧

لذا فالحل المقترح يعتبر حلاً أساسياً وممكناً (مسموحاً به)

<u>وطبقاً لهذا الحل المقترح فإن</u> :

س$_{٢١}$ = ٣٤٠ جالون ، س$_{٢٢}$ = ٣٢٠ جالون ، س$_{٤٢}$ = ٢٣٠ جالون ،

س$_{١٣}$ = ٣٢٠ جالون ، س$_{٣٣}$ = ٢٥٠ جالون ، س$_{٤٣}$ = ٩٠ جالون ،

س$_{٤٤}$ = ٢٣٠ جالون ،

س$_{١١}$ = س$_{٣١}$ = س$_{٤١}$ = س$_{١٢}$ = س$_{٣٢}$ = س$_{٢٣}$ = س$_{١٤}$ = س$_{٢٤}$ = س$_{٣٤}$

= صفر جالون

وطبقًا لهذا الجدول المقترح لحل مشكلة النقل بطريقة أدنى تكلفة تتحمل شركة مصر للطيران تكلفة نقل إجمالية تعادل ٩٧٨٠ دولار يومياً .

أما عن اختبار مدى أمثلية هذا الحل المقترح من عدمه فسيرد فيما بعد .

٣- <u>طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximation Method</u>

وتعتبر هذه الطريقة من أفضل الطرق في تصميمها لجدول الحل المبدئي المقترح لحل مشكلة النقل حيث أنها تعطي حلاً مبدئياً يكون أقرب ما يمكن لجدول الحل الأمثل للمشكلة إن لم يكن بالفعل في غالبية الأحوال هو الحل الأمثل وتتلخص خطوات هذه الطريقة فيما يلي : –

- **يضاف لجدول مشكلة النقل عدداً من الصفوف والأعمدة الإضافية بحد أقصى هو عبارة عن عدد صفوف أو أعمدة الجدول الخاص بمشكلة النقل وبالتحديد أيهما أكبر . حيث يتم في تلك الصفوف والأعمدة الإضافية حساب الفروق فيما بين أدنى تكلفتين في حالة مشاكل التكاليف**

(أو أعلى هامشي ربح في حالة مشاكل كل تعظيم الأرباح) وتسمى هذه الفروق بفروق الهدف **Penalty Differences** .

- بعد حساب فروق الهدف للصفوف والأعمدة الخاصة بمشكلة النقل يتم تحديد الصف أو العمود الذي يتمتع بميزة أكبر فرق هدفي والذي يعطي دلالة على وجود أصغر تكلفة (أو أعلى ربح) . ويسمى الصف أو العمود المقابل لأكبر فرق هدفي بصف أو عمود الهدف .
- في صف أو عمود الهدف حدد الخلية ذات أدنى تكلفة في حالة مشاكل التكاليف (أو أعلى ربح في حالة مشاكل تعظيم الأرباح) . ثم يتم استيفاء أو تخصيص أكبر كمية ممكنة من وحدات السلعة لتلك الخلية التي تم تخصيصها بكمية العرض أو الطلب (أيهما أقل) .
- استبعاد الصف الذي تم استنفاذ كميته المعروضة من السلعة أو العمود الذي تم تلبية كافة متطلباته من السلعة . ثم حساب الفروق فيما بين عناصر كل صف من الصفوف المتبقية وكذلك فيما بين كل عمود من الأعمدة المتبقية بنفس آلية الفروق السابقة(أي الفرق فيما بين أدنى تكلفتين في حالة مشاكل التكاليف أو أقصى هامشي ربح في حالة مشاكل تعظيم الأرباح للصفوف أو الأعمدة المتبقية بعد الاستبعاد ثم يتم تحديد صف أو عمود الهدف الذي يقابلة أكبر فرق هدفي . ثم يتم تخصيص الخلية ذات أقل تكلفة (أو أعلى ربح) حسب طبيعة المشكلة من حيث كونها مشكلة تدنية تكاليف أم مشكلة تعظيم أرباح .
- ويتم تكرار الخطوة السابقة إلى أن يتبقى صف واحد أو عمود واحد فقط فيتم فيه تحديد الخلية ذات أقل تكلفة (أو أقصى ربح) ويتم استيفاءها بنفس آلية الحسابات السابقة . مع ملاحظة أن شغل أي خلية يجب أن يترتب عليها استنفاذ الكمية المعروضة في صف ما فقط أو تلبية

احتياجات عمود واحد فقط باستثناء الخلية الأخيرة يترتب على إشغالها استنفاذ كمية معروضة وكذا كمية مطلوبة حتى ينتج عن الحل المبدئي المقترح حلاً أساسياً ومسموحاً به (ممكناً) أي حتى يكون عدد الخلايا المشغولة مساوياً (ن + م – ١) .

<u>ملاحظات على طريقة فوجل التقريبية</u> : –

١– تلبية احتياجات صف معين بمعنى شطب صف هدفي يترتب عليه أن تظل فروق باقي الصفوف في الخطوة التالية كما هي دون تغيير . وكذلك فإن تلبية احتياجات عمود معين أي شطب عمود هدفي فإنه يترتب عليه أن تظل فروق باقي الأعمدة في الخطوة التالية كما هي دون تغيير .

٢– بعد تحديد صف أو عمود الهدف ثم تحديد الخلية ذات الميزة النسبية الأعلى (أي ذات أدنى تكلفة أو أعلى هامش ربح حسب طبيعة مشكلة النقل) فإنه ربما تتساوى الكمية المطلوبة أي يتساوى عرض الصف مع طلب العمود لتلك الخلية . في هذه الحالة سوف يترتب على شغل تلك الخلية استنفاذ كمية معروضة وتلبية احتياجات مطلوبة كاملة أي سيترتب على ذلك شطب صف وعمود في آن واحد وهو ما سيؤدي إلى أن تصبح عدد الخلايا المشغولة في الحل المقترح أقل من (ن + م –١) أي أننا نكون بصدد حالة إنتكاسة في الحل المقترح . ولعلاج ذلك في نفس وقت ظهور حالة الانتكاسة يتم اختيار الخلية التي تتمتع بميزة نسبية في الصف والعمود الذي سيتم شطبه وتشغل تلك الخلية بعدد صفري من وحدات السلعة وتعتبر خلية مشغولة مثل باقي الخلايا المشغولة .

٣- إذا تساوى صفان أو عمودان أو صف وعمود من حيث فروق الهدف الأعلى يتم اختيار صف أو عمود الهدف الذي يحتوي على ميزة نسبية أفضل من غيره بمعنى يتم اختيار صف أو عمود الهدف الذي توجد به خلية ذات أقل تكلفة في حالة مشاكل التكاليف أو ذات أعلى هامش ربح في حالة مشاكل الأرباح . وإذا تساوى الصفين أو العمودين أو الصف والعمود في تلك الميزة أي تساووا في الخلية ذات أدنى تكلفة (أو أعلى ربح) يتم اختيار صف أو عمود الهدف الذي سوف يتم فيه شغل تلك الخلية بأقصى عدد من وحدات السلعة و إذا تحقق التساوي في ميزة أقصى عدد من وحدات السلعة فيجب أن تكون هناك رؤية في الجدول المتبقي فيما بعد شطب صف أو عمود الهدف بحيث نبقى على الصف أو العمود الذي يحتوي على ميزة نسبية أفضل من غيره من باقي الصفوف أو الأعمدة المتعادلة في المزايا السابقة ، أي نبقي على الصف أو العمود الذي يحتوي في خلاياه على أقل تكلفة أفضل من غيره في حالة مشاكل تدنية تكاليف النقل (والعكس صحيح في حالة مشاكل تعظيم أرباح شركات الشحن أي نبقي على الصف أو العمود الذي يحتوي على أعلى هامش ربح أفضل من غيره).

مثال : - (دور مايو ٢٠٠٣) : -

الجدول التالي يبين الحل المبدئي المقترح لمشكلة نقل باستخدام طريقة أدنى تكلفة والمطلوب تحديد برنامج النقل الأمثل مستخدماً في ذلك طريقة فوجل التقريبية في تحديد جدول الحل المبدئي وطريقة حجر الوطء في اختبار الأمثلية

أسواق / مصانع	ب١	ب٢	ب٣
أ١	٣	٥ (٢٠٠)	٤ (١٣٠٠)
أ٢	٢ (١٨٠٠)	٦	٨ (٧٠٠)
أ٣	٧	١ (١٠٠٠)	٩

<u>مطلـوب إضـافي</u> : – قـارن بـين التكـاليف الإجماليـة لجـدولي الحـل المقتـرح لطريقة أدنى تكلفة وطريقة فوجل التقريبية

الحل : -

لاحظ أن الجدول المعطى يعتبر جدول لمشكلة نقل في وضع توازن. لذا لتحديد جدول الحل المبدئي للمشكلة المعطاة باستخدام طريقة فوجل التقريبيـة يجب تحديد إجمـالي الكميات المعروضـة والمطلوبـة لكل صف أو عمـود وذلـك مـن خـلال تجميـع وحدات السـلعة الموزعـة فـي الجـدول المعطـى وذلـك مـن خـلال الجدول التالي : –

جدول الحل المقترح لطريقة أدنى تكلفة

أسواق / مصانع	ب١	ب٢	ب٣	ع ر	ج . ت
أ١	٣	٥ / ٢٠٠	٤ / ١٣٠٠	١٥٠٠	٥×٢٠٠+٤× ١٣٠٠=٦٢٠٠
أ٢	٢ / ١٨٠٠	٦	٨ / ٧٠٠	٢٥٠٠	٢×١٨٠٠+٨× ٧٠٠=٩٢٠٠
أ٣	٧	١ / ١٠٠٠	٩	١٠٠٠	١×١٠٠٠ =١٠٠٠
ط و	١٨٠٠	١٢٠٠	٢٠٠٠	٥٠٠٠	١٦٤٠٠

ومن خلال الجدول الأخير فإن جملة التكاليف الإجمالية للنقل الناتجة عن جدول الحل المبدئي باستخدام طريقة أدني تكلفة تبلغ ١٦٤٠٠ جنيه ، أما عن جدول الحل المبدئي المقترح بطريقة فوجل التقريبية فهو ما يوضحه الجدول التالي:

جدول الحل المقترح باستخدام طريقة فوجل التقريبية

بو / أر	ب١	ب٢	ب٣	عر	فروق الصفوف ف١	ف٢	ف٣	ج.ت
أ١	٣	٥	٤ (١٥٠٠)	١٥٠٠	١	١	١	٤×١٥٠٠= ٦٠٠٠
أ٢	٢ (١٨٠٠)	٦ (٢٠٠)	٨ (٥٠٠)	٢٥٠٠	٤	٤	٢	٢×١٨٠٠+ ٦×٢٠٠+٨ ×٥٠٠=
أ٣	٧	١ (١٠٠٠)	٩	١٠٠٠	٦	.	.	١×١٠٠٠ =١٠٠٠
طو	١٨٠٠	١٢٠٠	٢٠٠٠	٥٠٠٠	١٥٨٠٠ وحدة نقد			
فروق الأعمدة ف١	١	٤	٤					
ف١	١	١	٤					
ف١	.	١	٤					

وحيث أن عدد الخلايا المشغولة = ٥

، ن + م – ١ = ٣ + ٣ – ١ = ٥

لذا فإن الحل المقترح بطريقة فوجل التقريبية يعتبر حلاً أساسياً وممكناً (أو مسموحاً به) .

وبمقارنة إجمالي تكاليف تخصيص الخلايا في كل من طريقتي أدنى تكلفة وطريقة حل فوجل التقريبية نجد أن :

إجمالي تكاليف تخصيص طريقة أدنى تكلفة = ١٦٤٠٠ وحدة نقد

، إجمالي تكاليف تخصيص طريقة فوجل التقريبية = ١٥٨٠٠ وحدة نقد

أي أن إجمالي تكاليف طريقة أدنى تكلفة تزيد عن طريقة فوجل بمقدار

١٦٤٠٠ – ١٥٨٠٠ = ٦٠٠ وحدة نقد .

وهذا يؤكد أن طريقة فوجل التقريبية تعطي حلاً مقترحاً إن لم يكن بالفعل هو الحل الأمثل فهو أقرب ما يكون للأمثلية .

والآن دعنا نقوم بشرح عملية تخصيص خلايا جدول طريقة فوجل الوارد في المثال السابق:

١- تم حساب الفرق الأول (ف١) فيما بين عناصر أقل تكلفتين في كل صف وكل عمود فوجدنا أن الصف الثالث يتمتع بميزة أكبر فرق هدفي لذا فإن الصف الثالث هو صف الهدف . وبملاحظة خلايا الصف الثالث نجد أن أقل تكلفة في الصف الثالث هي (١) وبملاحظة الكمية المعروضة لصف تلك الخلية (١٠٠٠) والكمية المطلوبة في عمود تلك الخلية هو ١٢٠٠ لذا يتم شغلها بأيهما أقل أي بمقدار ١٠٠٠ وحدة سلعة ويظل هناك فائض في الطلب يعادل ٢٠٠ وحدة سلعة . ومن ثم يتم استنفاذ كل الطاقة المعروضة للمصنع الثالث (أ٣) وهو ما يترتب عليه شطب خلايا صف أ٣ .

٢- فروق الصفين أ١ ، أ٢ الثانية أي (ف٢) للصفين أ١ ، أ٢ تظل كما هي دون تغير أما التغير فهو في فروق الأعمدة فيتم حساب (ف٢) للأعمدة . وبمقارنة قيم ف٢ في الصفوف والأعمدة نجد أن الصف الثاني والعمود الثالث يتعادلان في أكبر قيمة في قيم (ف٢) . وحيث أن الصف الثاني يحتوي على أدنى تكلفة فيه هي (٢) بينما أدنى تكلفة في العمود الثالث هي (٤) لذا فإن الصف الثاني يحوي ميزة نسبية أفضل حيث أنه يحتوي على خلايا ذات أقل تكلفة أفضل من العمود الثالث لذا يتم اعتبار الصف الثاني بمثابة صف الهدف . ومن ثم بالرجوع للخلية أ٢ ب١ ذات التكلفة (٢) وحدة نقد فيتم مقارنة المعروض في صف تلك الخلية

(٢٥٠٠ وحدة سلعة) بالمطلوب في عمود تلك الخلية (١٨٠٠ وحدة سلعة) ويتم إشغالها بأيهما أقل أي (١٨٠٠) مما يترتب على ذلك تلبية احتياجات العمود الأول ومن ثم يتم شطب العمود الأول ويتبقى كمية معروضة في صف تلك الخلية تعادل ٧٠٠ وحدة سلعة .

٣- شطب العمود الأول يترتب عليه أن تظل فروق الأعمدة التالية المتبقية أي (ف$_٣$) هي نفس (ف$_٢$)السابقة بعد حذف العمود الأول ويتم حساب فروق الصفوف (ف$_٣$) من جديد.

٤- بمقارنة قيم ف$_٣$ للصفوف والأعمدة نجد أن هناك أكبر فرق وهو القيمة (٤) يقابل العمود الثالث من حيث أكبر فرق هدفي أي أنه يتم اعتبار العمود الثالث بمثابة عمود الهدف وأن الخلية أ$_١$ ب$_٤$ ذات ميزة أفضل نسبيًا .

٥- بمقارنة الكمية المعروضة بالمطلوبة للخلية أ$_١$ ب$_٤$ فيتم شغلها بأيهما أقل نجد أنها ستشغل بعد ١٥٠٠ وحدة سلعة والذي يترتب عليه شطب الصف الأول ويتبقى طلب يعادل ٥٠٠ وحدة سلعة في هذا العمود (ب$_٤$)

٦- باقي من خلايا الجدول الأصلي خليتين في الصف الثاني فقط وبالتحديد الخليتان أ$_٢$ب$_٢$ ، أ$_٢$ ب$_٣$ لذا لا داعي لحساب الفروق طالما تبقى صف واحد أو عمود واحد . وبملاحظة أي من الخليتين يعتبر الأدنى من حيث التكلفة نجد أن الخلية أ$_٢$ ب$_٢$ التي تحقق هذا الشرط . لذا يتم مقارنة (٧٠٠) وحدة سلعة معروضة متبقية في هذا الصف و (٢٠٠) وحدة سلعة مطلوبة في العمود (ب$_٢$) . لذا يتم إشغالها بأيهما أقل أي بعدد ٢٠٠ وحدة سلعة . ومن ثم يتم بالتالي تلبية كافة احتياجات العمود ب$_٢$ ويتبقى ٥٠٠ وحدة سلعة لازالت كمية معروضة من المصنع الثاني (أ$_٢$)

٧- الخلية الأخيرة التي لم يتم استيفاءها في هذا الجدول هي الخلية $أ_٢ ب_٣$ نجد أن يناظرها كمية معروضة في الصف تعادل ٥٠٠ وحدة سلعة ويقابلها طلب في عمودها هو ٥٠٠ وحدة سلعة لذا يتم شغلها بمقدار ٥٠٠ وحدة ومن ثم يتم استنفاذ كافة وحدات السلعة المعروضة وتلبية كافة احتياجات السوق المطلوبة .

أما عن اختبار الأمثلية والتحسين إذا لزم الأمر باستخدام طريقة حجر الوطء فسيرد فيما بعد .

<u>مثال (٢)</u> : - مصنع لديه ثلاثة فروع $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$ لإنتاج سلعة متجانسة تنتج ٦٠ ، ٣٥ ، ٤٠ وحدة من تلك السلعة . وقد تعهد هذا المصنع بتوريد ٢٢ وحدة للعميل الأول $ب_١$ خلال هذا الشهر وبتوريد ٤٥ وحدة للعميل $ب_٢$ ، ٢٠ وحدة للعميل $ب_٣$ ، ١٨ وحدة للعميل $ب_٤$ ، ٣٠ وحدة سلعة للعميل $ب_٥$. والمطلوب مقارنة جملة التكاليف الناجمة عن الحل المبدئي المقترح وذلك باستخدام كل من الطرق الثلاث المستخدمة في تحديد جدول الحل المبدئي لمشكلة النقل إذا علمت أن تعريفة نقل الوحدة من الفروع المختلفة للعملاء المختلفة كما يوضحها الجدول التالي : -

عملاء / فروع	$ب_١$	$ب_٢$	$ب_٣$	$ب_٤$	$ب_٥$
$أ_١$	٤	١	٣	٤	٤
$أ_٢$	٢	٣	٢	٢	٣
$أ_٣$	٣	٥	٢	٤	٤

<u>الحـــل</u>:-

قبل تناولنا للأساليب المختلفة المستخدمة في تحديد جدول الحل المبدئي المقترح يجب أولاً التأكد من مدى توافر شرط التوازن من عدمه فحيث أن :

مجـ$^{٣}_{ر = ١}$ ع ر = ٦٠ + ٣٥ + ٤٠ = ١٣٥ وحدة سلعة

، مجـ$^{٥}_{و = ١}$ ط و = ٢٢ + ٤٥ + ٢٠ + ١٨ + ٣٠ = ١٣٥ وحدة سلعة

لذا فالمشكلة في وضع توازن ومن ثم فإن الجداول المقترحة للحل المبدئي يمكن إيضاحها على النحو التالي لمقارنة جملة التكاليف الناجمة عن كل طريقة من الطرق الثلاث : الركن الشمالي الشرقي وطريقة أدنى تكلفة وطريقة فوجل التقريبية .

١- الحل المبدئي المقترح باستخدام طريقة الركن الشمالي الشرقي

أر / بو	ب١	ب٢	ب٣	ب٤	ب٥	ع ر	ج.ت
أ١	٤ / ٢٢	١ / ٣٨	٣	٤	٤	٦٠	١٢٦
أ٢	٢	٣ / ٧	٢ / ٢٠	٢ / ٨	٣	٣٥	٧٧
أ٣	٣	٥	٢	٤ / ١٠	٤ / ٣٠	٤٠	١٦٠
ط و	٢٢	٤٥	٢٠	١٨	٣٠	١٣٥	٣٦٣

وحيث أن الحل المقترح يحتوي على عدد من من الخلايا المشغولة = ٧

، حيث أن : ن + م – ١ = ٣ + ٥ – ١ = ٧

لذا فالحل المقترح بطريقة الركن الشمالي الشرقي يعتبر حلاً أساسياً وممكناً وبإجمالي تكلفة تعادل ٣٦٣ وحدة نقد .

<u>٢ – الحل المبدئي المقترح باستخدام طريقة أدنى تكلفة</u>

أر / بو	ب١	ب٢	ب٣	ب٤	ب٥	ع ر	ج.ت
أ١	٤	١ ٤٥	٣	٤ ٥	٤ ١٠	٦٠	١٠٥
أ٢	٢ ٢٢	٣	٢	٢ ١٣	٣	٣٥	٧٠
أ٣	٣	٥	٢ ٢٠	٤	٤ ٢٠	٤٠	١٢٠
ط و	٢٢	٤٥	٢٠	١٨	٣٠	١٣٥	٢٩٥

والجدول المقترح أيضاً يعتبر حل أساسي وممكن لأن عدد الخلايا المشغولة هو ن + م – ١ = ٧ وبإجمالي تكاليف كلية تعادل ٢٩٥ وحدة نقد .

<u>٣ – تصوير جدول الحل المقترح باستخدام طريقة فوجل التقريبية:</u>

عملاء / فروع	ب١	ب٢	ب٣	ب٤	ب٥	ع ر	ف١	ف٢	ف٣	ف٤	ف٥	ج.ت
أ١	٤	١ (٤٥)	٣	٤	٤ (١٥)	٦٠	٢	١	١	صفر	صفر	١٠٥
أ٢	٢ (١٧)	٣	٢	٢ (١٨)	٣	٣٥	صفر	صفر	صفر	١	.	٧٠
أ٣	٣ (٥)	٥	٢ (٢٠)	٤	٤ (١٥)	٤٠	١	١	١	١	١	١١٥
ط و	٢٢	٤٥	٢٠	١٨	٣٠	١٣٥	٢٩٠					

فروق الأعمدة	ب١	ب٢	ب٣	ب٤	ب٥
ف١	١	٢	صفر	٢	١
ف٢	١	.	صفر	٢	١
ف٣	١	.	صفر	.	١
ف٤	١	.	.	.	١
ف٥	١	.	.	.	صفر

في الجدول المقترح بطريقة فوجل كذلك فإن الحل يحتوي على عدد من الخلايا المشغولة يساوي (ن + م – ١) . لذا فالحل أيضاً يعتبر حلاً أساسياً ممكناً وبإجمالي تكلفة نقل تعادل ٢٩٠ وحدة نقد .

ومن خلال جملة التكاليف يمكن القول بأن الحل المقترح باستخدام طريقة فوجل يعطي حل أفضل من الطريقتين السابقتين حيث اتضح من خلال

الحل المبدئي للطرق الثلاث أن جملة تكاليف النقل للحل المقترح بطريقة فوجل التقريبية تقل عن التكاليف الناجمة عن الحل المقترح بطريقة أدنى تكلفة وتقل عن جملة التكاليف للحل المقترح باستخدام طريقة الركن الشمالي الشرقي .

ثانيًا : طرق اختبار الأمثلية في مشاكل النقل :

بعد تحديد جدول الحل المبدئي المقترح بأحد أساليب أو طرق حل مشاكل النقل الثلاث السابقة [الركن الشمالي الشرقي – أدنى تكلفة – طريقة فوجل التقريبية (طريقة الفروق)] تأتي المرحلة الثانية من خطوات الحل وهي اختبار مدى أمثلية الحل المبدئي المقترح وتحسينه للوصول للحل الأمثل لمشكلة النقل محل الدراسة . وهناك طريقتان أساسيتان لاختبار مدى أمثلية حل مشكلة النقل والتحسين للوصول للحل الأمثل وهما :

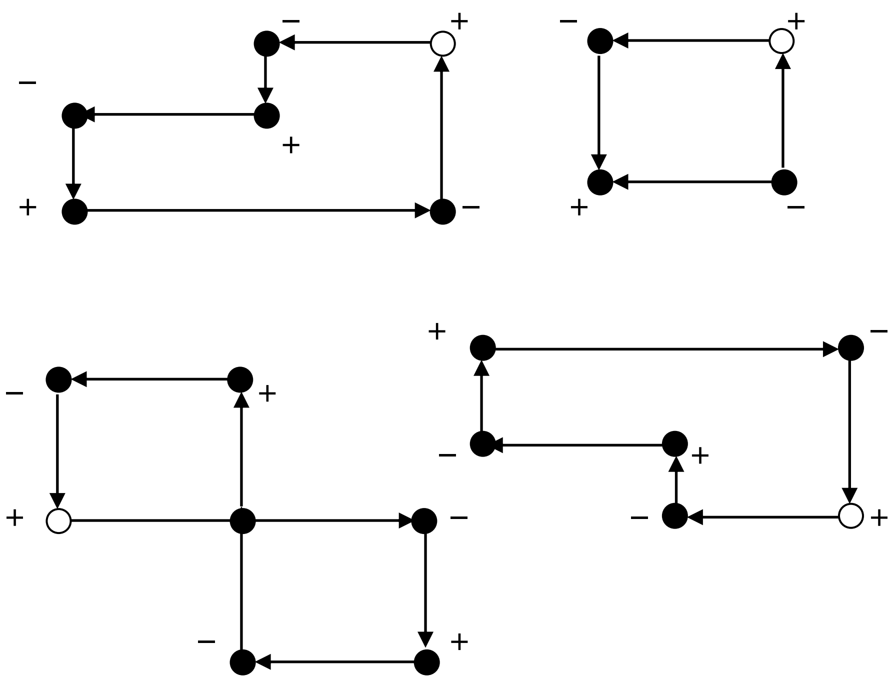
أ- طريقة حجر الوطء (أو حجر الزاوية) .

ب- طريقة التوزيع المعدل .

وقبل التعرض لتلك الطريقتين في اختبار أمثلية الحل المبدئي والذي تم اقتراحه بأحد الطرق الثلاث السابقة (الركن الشمالي الشرقي – أدنى تكلفة فوجل التقريبية) يجب أن ننوه إلى أن الخلايا المشغولة تقابل في طرق حل السمبلكس المتغيرات الأساسية والخلايا الغير مشغولة (الفارغة) في جدول مشكلة النقل يعتبر بمثابة المتغيرات الغير أساسية .

هذا وتبني طريقتي اختبار مدى أمثلية الحل وتحسينه على دراسة ما هو التغير الذي ينشأ على جملة تكاليف النقل بالنقصان أو جملة أرباح النقل بالزيادة وذلك سواء لجدول الحل المبدئي أو جدول الحل الجاري تحسينه نتيجة محاولة شغل خلية فارغة من خلايا جدول مشكلة النقل محل الدراسة بوحدة سلعة واحدة . ويتم تحديد مقدار التغير سواء في التكاليف أو الأرباح من خلال تكوين ما يسمى بالمسار المغلق للخلية الفارغة . أي أن المسار المغلق

يساهم في تحديد مقدار النقص في تكاليف النقل (أو الزيادة في الأرباح) الناتجة عن شغل تلك الخلية الفارغة بمقدار وحدة سلعة واحدة . ويتم تكوين المسار المغلق للخلية من خلال التحرك من تلك الخلية الفارغة في اتجاه خلية مشغولة سواء في اتجاه عقارب الساعة أو ضد عقارب الساعة وحين يصطدم مسار الخلية الفارغة بخلية مشغولة تنكسر حلقة المسار وتصنع زاوية قائمة وفي اتجاه خلية مشغولة تالية إلى أن تكتمل حلقة مسار الخلية الفارغة بالعودة إليها مرة أخرى مكونة أحد صور تلك المسارات المغلقة الموضحة في الشكل التالي :



لاحظ أن المسار المغلق في أي من تلك الأشكال الموضحة بالرسم يحتوي دائمًا على عددًا زوجيًا من الخلايا مهما تعقدت صور مسار الخلية فإنه لا بد أن يحتوي على عددًا زوجيًا من الخلايا . حيث تشهد نصف عدد

خلايا هذا المسار عملية زيادة في عدد وحدات السلعة بمقدار (+١) والنصف الآخر المقابل لها في نفس الصف أو العمود تشهد عملية نقصان (أي العكس) وذلك حتى يظل شرط التوازن (وهو أساس في الحل) متحققًا في كل جداول النقل المتتالية . أي حتى لا يؤثر استخدام الخلية الفارغة على توازن الصفوف والأعمدة أو الإخلال بقيود مشكلة النقل محل الدراسة . ويسمى خط سير التغير في تلك الخلايا نتيجة استخدام خلية فارغة بالمسار المغلق حيث بدأ هذا المسار بالخلية الفارغة وينتهي عند نفس الخلية ولذلك سمي بالمسار المغلق .

هذا وفي حالة إمكانية تعدد مسارات الخلية الفارغة فالمنطق الرياضي يحكم بإتباع المسار الذي يؤدي لتخفيض التكلفة بأكبر قدر ممكن (والعكس في حالة مشاكل الأرباح) . كما إنه في بعض الحالات ربما يكون عند تكويننا لمسار خلية فارغة قد نضطر للمرور على خلية مشغولة دون كسر حلقات المسار عندها وفي هذه الحالة لا تؤخذ تكلفة تلك الخلية في الحسبان عند حساب مقدار التغير الناشئ على جملة التكاليف (أو الأرباح) الناتجة عن شغل تلك الخلية بمقدار وحدة واحدة .

<u>أولاً : طريقة حجر الوطء (حجر الزاوية) :</u>

Steady or Stepping Stone Method

وطبقًا لهذه الطريقة يتم اختبار مدى أمثلية جدول مشكلة النقل المقترح أو الجاري تحسينه من خلال حساب مقدار التغير في التكاليف (أو الأرباح) للخلايا الشاغرة (الفارغة) في الجدول و ذلك من خلال المسار المغلق لتلك الخلايا . ولتقييم تلك الخلايا الفارغة يتم ضرب مقدار التغيير في التكاليف (أو الأرباح) × (– ١) ليعطي ما يسمى بديل التحسين أو تكلفة الفرصة الضائعة(وهي بمثابة معاملات المتغيرات الغير أساسية في جداول

السمبلكس). فإذا كانت كافة أدلة التحسين لتلك الخلايا الفارغة الجاري تقييمها عناصر سالبة جميعاً في حالة مشاكل التدنية (أو موجبة جميعاً في حالة مشاكل التعظيم فهذا يفيد أننا بصدد جدول حل أو نموذج حل أمثل ووحيد لمشكلة النقل محل الدراسة . وإلا فإن الجدول الذي نحن بصدد اختبار أمثليته يعتبر حلاً غير أمثلاً ويجب تحسينه وذلك على النحو المبين التالي :

- **اختيار الخلية الفارغة ذات أكبر دليل تحسين موجب في حالة مشاكل تدنية جملة تكاليف النقل (أو الأكثر سالبية في حالة مشاكل تعظيم جملة أرباح مشكلة النقل) للدخول في الحل من خلال جولة التحسين الجارية .**
- **بالرجوع لمسار تلك الخلية والتي تعتبر بمثابة المتغير الداخل في الحل ويتم تحديد أقل عدد من وحدات السلعة التي توجد في خلايا المسار الخاص بتلك الخلية وبالتحديد الخلايا التي ستشهد عملية نقصان لوحدات السلعة . ثم يتم إضافة وطرح هذا العدد من جميع خلايا المسار فقط الجاري استخدامه دون أي تغييرات على باقي الخلايا التي لا تقع على هذا المسار .**
- **طبقاً للتعديل السابق فإنه سيتم شغل الخلية الفارغة الجاري تحسين الحل باستخدامها بعدد من وحدات السلعة ، لذا فإنه يجب أن تقل التكاليف (أو تزيد الأرباح) بمقدار يعادل حاصل ضرب دليل تحسين تلك الخلية × عدد وحدات السلعة التي تم شغل الخلية الفارغة بها .**
- **وبعد تعديل الخلايا المشغولة بالجدول يتم تقييم الخلايا الفارغة مرة أخرى والتحسين إذا لزم الأمر للوصول للحل الأمثل .**

<u>ملاحظات على طريقة حجر الوطء : -</u>

١- إذا كانت كافة أدلة التحسين (عناصر تكلفة الفرصة الضائعة) أو ما تسمى بمعاملات السمبلكس للمتغيرات الغير أساسية جميعاً سالبة في حالة مشاكل تدنية تكاليف النقل (والعكس موجبة جميعًا في حالة مشاكل الأرباح) فإن هذا يعني أننا بصدد حل أمثل ووحيد . لكن إذا كان هناك أحد المعاملات على الأقل معاملاً صفرياً فإن هذا يفيد بأننا بصدد حل أمثل لكنه متعدد الحلول المثلى . أي أن هناك حل آخر يعطي نفس جملة التكاليف للحل (أو نفس جملة الأرباح) الذي نحن بصدده ولاستنتاج هذا البديل فيمكن من خلال الرجوع لمسار تلك الخلية ذات الدليل أو المعامل الصفري ويتم إجراء نفس خطوات التحسين باستخدام هذا المسار لينتج حل آخر وبنفس قيمة إجمالي تكاليف النقل ولكن بقيم أخرى مثلى للمتغيرات القرارية لنموذج النقل محل الدراسة . ومن ثم فإن اختلاف كافة أدلة التحسين عن الصفر فإن هذا يعني أننا بصدد حل أمثل و وحيد لمشكلة النقل محل الدراسة .

٢- عند إحداث أي تغير في خلية فارغة بتخصيص وحدة سلعة على الأقل لهذه الخلية فإن المسار المغلق لتلك الخلية يتجه نحو خلايا مشغولة في نفس الصف أو نفس العمود الذي به تلك الخلية الفارغة لإحداث تغيير مساو له في الكمية ولكن مضاد له في الأثر (+ - أو - +)

٣- المسار المغلق لأي خلية فارغة يحافظ دائماً على تحقيق شرط التوازن وذلك من خلال توازن صف وعمود تلك الخلية وهو ما يفيد بأن محصله التغير لأي صف أو عمود مساوية للصفر .

٤- إذا تساوى دليل تحسين خليتين على الأقل لجدول نقل غير أمثل فإننا نختار الخلية التي سوف تساهم في تقليل جملة تكاليف النقل (أو زيادة

أرباح النقل) بأكبر قيمة ممكنة . وبمعنى آخر يتم استخدام الخلية التي سوف يتم شغلها بأكبر قدر من وحدات السلعة في إجراء عملية التحسين اللازمة .

٥- عند التحسين فإنه يجب أن يتم شغل خلية واحدة وتفريغ خلية واحدة . بمعنى يجب أن يظل الجدول بعد التحسين جدول يعبر عن حل أساسي وممكن أي يجب أن يحتوي على عدد (ن + م – ١) من الخلايا المشغولة وإذا ترتب على شغلك الخلية الشاغرة بعدد من وحدات السلعة تفريغ أكثر من خلية مشغولة فإننا بصدد حالة عدم انتظام أو انتكاسة (اعتلال Degeneracy). ولعلاج تلك الحالة يتم شغل الخلية ذات أقل تكلفة في حالة مشاكل تدنية التكاليف (أو أعلى ربح في حالة مشاكل تعظيم الأرباح) في هذا المسار بعدد صفري من وحدات السلعة بما يؤدي لتحقيق شرط الانتظام [(ن + م – ١) خلية مشغولة] ، ويعتبر تلك الخلايا المشغولة برقم صفري خلايا أساسية فلا يتم تقييمها ويمكن انكسار حلقة أي مسار لخلية فارغة عند المرور بها إذا لزم الأمر .

٦- عند تقييم الخلايا الشاغرة من خلال إيجاد مسارها المغلق . في بعض الحالات قد يتطلب الأمر المرور على خلية مشغولة وعدم انكسار حلقات المسار عندها حتى يمكن تكوين مسار مغلق لتلك الخلايا ، وفي هذه الحالة يتم تكوين المسار ولكن لا تؤخذ تكلفة الخلايا المشغولة التي لم تنكسر حلقات المسار عندها في الاعتبار عند حساب مقدار التغيير في التكاليف (أو الأرباح) .

٧- هناك معيار لدقة خطوات الحل في مشاكل النقل عند إجراء خطوات التحسين فإنه بعد إجراء تحسين معين على أي جدول يجب أن تتحقق العلاقة التالية : –

- (مقدار التكاليف الكلية قبل إجراء التحسين) – (مقدار التكاليف الكلية بعد إجراء التحسين) = (دليل تحسين الخلية المستخدمة في التحسين) × (عدد الوحدات التي تم شغل بها الخلية).

أو

- (مقدار الأرباح الكلية بعد التحسين) – (مقدار الأرباح الكلية قبل التحسين) = (دليل تحسين الخلية المستخدمة في التحسين) × (عدد الوحدات التي شغلت بها تلك الخلية).

<u>مثال (١)</u> : –

تقوم شركة المطاحن الوطنية بنقل القمح المعبأ في أجولة من مجموعة المخازن أسبوعياً إلى ثلاث مطاحن مركزية . فإذا كانت المخازن الأربعة المتاحة لدى الشركة طاقتها الأسبوعية هي ٣٤٠ ، ٥٥٠ ، ٦٦٠ ، ٢٣٠ ألف جوال . كما أن الكمية المطلوبة من مطاحنها الثلاث هي ٣٢٠ ، ٦٦٠ ، ٢٥٠ ألف جوال أسبوعياً . وفيما يلي الجدول التالي يوضح تكلفة النقل والمناولة بالجنيه من مخازن الشركة إلى مطاحنها : –

من المخازن / إلى المطاحن	ب١	ب٢	ب٣
أ١	١٠	٧	٨
أ٢	١٠	١١	١٤
أ٣	٩	١٢	٤
أ٤	١١	١٣	٩

والمطلوب تحديد برنامج النقل الأمثل لتلك الشركة .

<u>الحل : -</u>

١- لتحديد برنامج النقل الأمثل يجب التأكد أولاً من مدى تحقق شرط التوازن من عدمه . فحيث أن : -

طاقة المخازن (إجمالي العرض) = $\sum_{ر=١}^{٤}$ ع ر = ٣٤٠ + ٥٥٠ + ٦٦٠ + ٢٣٠ = ١٧٨٠ ألف جوال

طاقة المطاحن (إجمالي الطلب) = $\sum_{و=١}^{٣}$ ط و = ٣٢٠ + ٦٦٠ + ٢٥٠ = ١٢٣٠ ألف جوال

أي أن فائض العرض = ١٧٨٠ – ١٢٣٠ = ٥٥٠ ألف جوال

لذا يضاف عمود وهمي لجدول النقل المعطى ويعتبر هذا العمود بمثابة مطحن رابع ينال فائض العرض وبتكاليف نقل صفرية من المخازن المختلفة إلى هذا المطحن الوهمي . ثم يتم تحديد جدول الحل المبدئي لمشكلة النقل وليكن باستخدام طريقة فوجل التقريبية (أفضل طريقة تحديد جدول الحل المبدئي لمشاكل النقل) وذلك كما يوضحها الجدول التالي :

جدول الحل المبدئي (بطريقة فوجل التقريبية)

من \ إلى	ب١	ب٢	ب٣	ب٤	ع ر	فروق ف١	ف٢	ف٣	ف٤	ج.ت
أ١	١٠	٧ (٣٤٠)	٨	صفر	٣٤٠	١	٣	.	.	٢٣٨٠
أ٢	١٠	١١ (٣٢٠)	١٤	صفر (٢٣٠)	٥٥٠	١	١	١		٣٥٢٠
أ٣	٩ (٣٢٠)	١٢	٤ (٢٥٠)	صفر (٩٠)	٦٦٠	٥	٣	٣		٣٨٨٠
أ٤	١١	١٣	٩	صفر (٢٣٠)	٢٣٠	٢	٢	٢		صفر
ط و	٣٢٠	٦٦٠	٢٥٠	٥٥٠	١٧٨٠	ج.ت = ٩٧٨٠				
فروق الأعمدة ف١	١	٤	٤	.						
ف٢	١	٤	.	.						
ف٣	١	١	.	.						
ف١			.	.						

وحيث أن جدول الحل المقترح بطريقة فوجل التقريبية لتلك المشكلة يحتوي على عدد من الخلايا المشغولة = ٧ ، حيث أن (ن + م – ١) = ٧ . لذا فإن : –

عـدد الخلايـا المشـغولة = ن + م – ١ = ٧ أي أن جـدول الحـل المقتـرح بطريقة ڤوجل التقريبية يعتبر جدول حل أساسي وممكن .

٢- اختبـار مـدى أمثليـة الحل المقترح بطريقـة فوجل التقريبيـة وتحسـينه متى لزم الأمر وذلك من خلال استخدام طريقة حجر الوطء : حيث يـتم تقيـيم الخلايـا الشـاغرة فـي الجـدول المقتـرح السـابق مـن خـلال حساب أدلـة تحسين تلك الخلايا وهـي أ١ ب١ ، أ١ ب٣ ، أ١ب٤ ، أ٢ ب١ ، أ٢ ب٣ ، أ٣ ب٢، أ٤ ب١ ، أ٤ ب٢ ، أ٤ ب٣ . والجدول التـالي يوضح حساب مقدار التغيير في التكاليف الناتجة عن تخصيص وحدة واحدة من السلعة للخليـة الشـاغرة و كذا أدلـة تحسين تلـك الخلايـا لاختبار مدى تحقق شرط الأمثلية :

الجدول الثاني

الخلية الشاغرة	مقدار التغير في التكاليف الناتجة عن المسار المغلق للخلية	دليل التحسين = تكلفة الفرصة الضائعة
أ١ ب١	+ ١٠ – ٩ + صفر – صفر+ ١١ – ٧ = ٥	– ٥
أ١ ب٣	+٨ – ٧ +١١ – صفر + صفر –٤ = ٨	– ٨
أ١ب٤	+ صفر – ٧ + ١١ – صفر = ٤	– ٤
أ٢ ب١	+ ١٠ – ٩ + صفر –صفر = ١	– ١
أ٢ ب٣	+١٤ –٤ + صفر – صفر = ١٠	– ١٠
أ٣ ب٢	+ ١٢ – صفر + صفر – ١١ = ١	– ١
أ٤ ب١	+١١ – صفر + صفر –٩ = ٢	– ٢
أ٤ ب٢	+١٣ – صفر + صفر – ١١ = ٢	– ٢
أ٤ ب٣	+ ٩ – صفر + صفر – ٤ = ٥	– ٥

وحيث أن كافة عناصر أدلة التحسين سالبة (وهي معاملات المتغيرات الغير أساسية في صف اختبار أمثلية جداول السمبلكس) وحيث أننا بصدد مشكلة

تدنية التكاليف إجمالية للنقل لذا فالحل المقترح بطريقة فوجل التقريبية الوارد بالجدول رقم (١) يعتبر حلاً أمثلاً ووحيداً .

لذا فبفرض أن $س_{رو}$ تعبر عن عدد الأجولة (بالألف) المنقولة من المخزن (ر) إلى المطحن (و) حيث ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

و = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ .

فتكون القيم المثلى بالألف جوال الواجب نقلها من :

المخزن الأول للمطحن الثاني أي $س_{٢١}^*$ = ٣٤٠ ألف جوال ،

المخزن الثاني للمطحن الثاني أي $س_{٢٢}^*$ = ٣٢٠ ألف جوال ،

المخزن الثاني للمطحن الرابع أي $س_{٤٢}^*$ = ٢٣٠ ألف جوال ،

المخزن الثالث للمطحن الأول أي $س_{١٣}^*$ = ٣٢٠ ألف جوال ،

المخزن الثالث للمطحن الثالث أي $س_{٣٣}^*$ = ٢٥٠ ألف جوال ،

المخزن الثالث للمطحن الرابع أي $س_{٤٣}^*$ = ٩٠ ألف جوال ،

المخزن الرابع للمطحن الرابع أي $س_{٤٤}^*$ = ٢٣٠ ألف جوال ،

$س_{١١}^*$ = $س_{٣١}^*$ = $س_{٤١}^*$ $س_{١٢}^*$ = $س_{٣٢}^*$ = $س_{٢٣}^*$ = $س_{١٤}^*$ = $س_{٢٤}^*$ = $س_{٣٤}^*$ = صفر . وعند هذا البرنامج الأمثل للنقل تصل تكاليف النقل الإجمالية لنهايتها الصغرى والتي تبلغ ٩٧٨٠ ألف جنيه.

<u>مثال (٢) :</u>

الجدول التالي يوضح تعريفة نقل الوحدة (بالجنية) من سلعة ما من مصادر إنتاجها إلى مراكز توزيعها كما يبين الكميات المطلوبة والمعروضة وذلك على النحو المبين التالي :

مراكز توزيع / مصادر إنتاج	أ	ب	جـ	د	$ع_ر$
$هـ_١$	٢٠	٣١	٨١	٤٢	١٨٠
$هـ_٢$	١٦	٩	١٣	٥١	٢٤٠
$هـ_٣$	٤٣	١٩	٣٢	٢٥	٢٠٠
$هـ_٤$	٣٤	٢٤	٤٤	٣٥	٢٣٥
$هـ_٥$	٢٣	٥٤	٣٤	٦٨	١٨٥
$ط_و$	٢٣٧	٣٢٥	١٦٧	٣١١	

والمطلوب : تحديد برنامج الحل الأمثل لمشكلة النقل المعطاه مستخدماً في ذلك : –

أ – طريقة أقل تكلفة في تحديد جدول الحل المقترح .

ب – طريقة حجر الوطء في اختبار الأمثلية المقترح .

الحل : -

بفرض أن عدد وحدات السلعة الواجب نقلها من مصدر الإنتاج (ر) لمركز التوزيع (و) هو $س_{رو}$ حيث ر= ١ : ٥ ، و = ١ : ٤ وفي البداية يجب التحقق من مدى توافر شرط التوازن فحيث أن :

$\sum_{ر=١}^{٥} ع_ر$ = ١٨٠ + ٢٤٠ + ٢٠٠ + ٢٣٥ + ١٨٥ = ١٠٤٠ وحدة سلعة

،

$\sum_{و=١}^{٤} ط_و$ = ٢٣٧ + ٣٢٥ + ١٦٧ + ٣١١ = ١٠٤٠ وحدة سلعة

لذا فمشكلة النقل محل الدراسة في وضع توازن . ومن ثم فإن لتحديد برنامج النقل الأمثل الذي يترتب عليه أقل تكلفة نقل إجمالية ممكنة يتم الآتي: –

١– تحديد جدول الحل المبدئي المقترح للمشكلة وذلك باستخدام طريقة أقل تكلفة كما هو مطلوب :

والجدول التالي يوضح عملية توزيع وحدات السلعة من مصادر الإنتاج لمراكز التوزيع حسب طريقة أقل تكلفة :

جدول رقم (١)

جدول الحل المبدئي المقترح باستخدام طريقة أقل تكلفة

توزيع / مصادر	أ	ب	جـ	د	ع ر	إجمالي تكاليف النقل
هـ١	٢٠ (١٨٠)	٣١	٨١	٤٢	١٨٠	٣٦٠٠
هـ ٢	١٦	− ٩ (٢٤٠)	+ ١٣ (٠)	٥١	٢٤٠	٢١٦٠
هـ ٣	٤٣	+ ١٩ (٨٥)	٣٢	− ٢٥ (١١٥)	٢٠٠	٤٤٩٠
هـ٤	٣٤	٢٤	− ٤٤ (٣٩)	+ ٣٥ (١٩٦)	٢٣٥	٨٥٧٦
هـ ٥	٢٣ (٥٧)	٥٤	٣٤ (١٢٨)	٦٨	١٨٥	٥٦٦٣
ط و	٢٣٧	٣٢٥	١٦٧	٣١١	١٠٤٠	٢٤٤٨٩ جنيه

وحيث أن جدول الحل المقترح باستخدام طريقة أدنى تكلفة يحتوي على عدد من الخلايا المشغولة = ٨

، حيث أن (ن + م – ١) = ٨

لذا فإن عدد الخلايا المشغولة = (ن +م –١) = ٨

أي أن جدول الحل المقترح يعتبر حلاً أساسياً وممكناً . ولاختبار مدى أمثلية الحل المقترح يتم إجراء الخطوة التالية .

٢- اختبار مدى أمثلية الحل الوارد بالجدول (١) وتحسينه متى لزم الأمر للوصول لجدول الحل الأمثل وذلك باستخدام طريقة حجر الوطء (حسب المطلوب) : -

والجدول التالي (جدول رقم (١/)) يبين عملية تقييم الخلايا الفارغة وذلك من خلال حساب مقدار التغيير في تكاليف النقل (بالنقص) نتيجة شغل تلك الخلايا الفارغة بمقدار وحدة سلعة واحدة وذلك من خلال تكوين المسارات المغلقة لتلك الخلايا وهو ما يوضحه الجدول التالي :

جدول رقم (١/)

تقييم الخلايا الشاغرة الواردة بالجدول (١)

الخلايا الشاغرة	مقدار التغير في التكاليف الإجمالية نتيجة شغل الخلية بمقدار وحدة		دليل التحسين = تكلفة الفرصة الضائعة
هـ١ ب	+٣١ – ٢٠ +٢٣ –٣٤ +٤٤ – ٣٥ + ٢٥– ١٩	= ١٥	– ١٥
هـ١ جـ	+٨١–٢٠ +٢٣–٣٤	= ٥٠	– ٥٠
هـ١ د	+٤٢–٢٠+٢٣–٣٤+٤٤–٣٥	=٢٠	– ٢٠
هـ٢ أ	+١٦ – ٢٣ + ٣٤ – ٤٤ + ٣٥ – ٢٥+١٩–٩	=٣	– ٣
هـ٢ جـ	+١٣–٩ +١٩ – ٢٥ + ٣٥ – ٤٤	=–١١	١١
هـ٢ د	+٥١ – ٩ + ١٩ – ٢٥	=٣٦	– ٣٦
هـ٣ أ	+٤٣ – ٢٣ + ٣٤ – ٤٤ + ٣٥ – ٢٥	=٢٠	– ٢٠
هـ٣ جـ	+٣٢ – ٤٤ + ٣٥ – ٢٥	=–٢	٢
هـ٤ أ	+٣٤ – ٢٣ + ٣٤ – ٤٤	=١	– ١
هـ٤ ب	+ ٢٤ – ٣٥ + ٢٥ – ١٩	=–٥	٥
هـ٥ ب	+٥٤ – ٣٤ + ٤٤ – ٣٥ + ٢٥ – ١٩	=٣٥	– ٣٥
هـ٥ د	+٦٨ – ٣٥ + ٤٤ – ٣٤	=٤٣	– ٤٣
مقدار النقص في جملة التكاليف نتيجة شغل الخلية هـ٢ جـ بعدد ٣٩ وحدة سلعة = – ١١ × ٣٩ = – ٤٢٩ (جنيه)			

وحيث أن جدول التقييم يحتوي على أدلة تحسين موجبة (١١ ، ٢ ، ٥) وحيث أن المشكلة تدنية تكاليف لذا فإن الحل المقترح الوارد بالجدول رقم(١) وهو الجدول محل التقييم لا يعتبر جدول حل أمثل . لذا يجب إجراء التحسين اللازم على الجدول رقم (١) وذلك من خلال الآتي : –

- تحديد الخلية ذات أكبر دليل تحسين موجب وهي الخلية (هـ٢ جـ) .

- **بالرجوع لمسار تلك الخلية وهو المسار التالي :–**
+ هـ٢ جـ – هـ٢ ب + هـ٣ ب – هـ٣ د + هـ٤ د + هـ٤ جـ

- **ومن خلال المسار السابق لاحظ أن الخلايا الموجودة على هذا المسار والتي ستشهد عملية نقصان في وحدات السلعة هي مجموعة الخلايا الثلاثة التالية : (هـ٢ ب ، هـ٣ د ، هـ٤ جـ) . وتحتوي تلك الخلايا طبقاً لعملية التخصيص الواردة في الجدول رقم (١) طبقاً لطريقة أدنى تكلفة على عدد من وحدات السلعة يعادل ٢٤٠ ، ١١٥ ، ٣٩ وحدة سلعة على الترتيب . ومن ثم فإن أقل عدد من وحدات السلعة في تلك الخلايا الثلاث هو (٣٩) وحدة سلعة . لذا يتم إضافة وطرح (٣٩) وحدة سلعة من خلايا المسار المغلق للخلية (هـ٢ جـ) حسب الإشارة المحددة في المسار .**

ومن ثم فطبقاً لجولة التحسين التي نحن بصددها يتم شغل الخلية هـ٢ جـ بمقدار ٣٩ وحدة سلعة ويتم طرح (٣٩) وحدة سلعة من الخلية (هـ٢ ب) { حتي يظل شرط التوازن متحققاً في نفس الصف } فيتبقى عدد (٢٠١) وحدة سلعة فى الخلية هـ٢ ب . ثم يضاف ٣٩ وحدة سلعة علي الخلية هـ٣ ب ليصبح العدد : (٨٥+٣٩ =١٢٤) وحدة سلعة (حتى يظل شرط التوازن متحققًا في نفس العمود وهكذا علي باقى خلايا المسار بالتبادل يتم طرح وإضافة عدد (٣٩) وحدة سلعة من وإلي خلايا المسار الخاص بالخلية هـ٢ جـ لتصبح عدد وحدات السلعة علي مسار تلك الخلية هو ٣٩،٢٠١،١٢٤،٧٦،٢٣٥ ويتم تفريغ الخلية هـ٤ جـ أي تصبح تحتوى علي (صفر) من وحدات السلعة .

لاحظ أن شغل الخلية هـ٢ جـ ترتب عليه تفريغ خلية مقابلة علي نفس المسار وهي الخلية هـ٤ جـ .

ومعيار دقة حسابات عملية التحسين هذه هو أنه يجب أن تقل التكاليف الإجمالية لنقل السلعة من مصادر إنتاجها إلي مراكز توزيعها بمقدار ١١× ٣٩ = ٤٢٩ ج وهى عبارة عن حاصل ضرب عدد وحدات السلعة التي تم شغل الخلية هـ٢ جـ بها نتيجة عملية التحسين × دليل تحسين تلك الخلية. والجدول (رقم٢) يبين نتيجة التعديل الجاري على جدول رقم (١) من خلال إتباع جولة التحسين سالفة الذكر .

جدول رقم (٢)

التحسين الأول للجدول المقترح

توزيع / مصادر	أ	ب	جـ	د	ع ر	إجمالي تكاليف النقل
هـ١	٢٠ ١٨٠	٣١	٨١	٤٢	١٨	٣٦٠٠
هـ ٢	١٦	٩ ٢٠١	+ ١٣ ٣٩	٥١	٢٤٠	٢٣١٦
هـ ٣	٤٣	− ١٩ ١٢٤	٣٢	+ ٢٥ ٧٦	٢٠٠	٤٢٥٦
هـ٤	٣٤	+ ٢٤ ٠	− ٤٤	− ٣٥ ٢٣٥	٢٣٥	٨٢٢٥
هـ ٥	٢٣ ٥٧	٥٤	٣٤ ١٢٨	٦٨	١٨٥	٥٦٦٣
ط و	٢٣٧	٣٢٥	١٦٧	٣١١	١٠٤٠	٢٤٤٨٩ جنيه

وبمقارنة التكاليف الإجمالية الناتجة عن التحسين (٢٤٠٦٠جنيه) بالتكاليف الإجمالية فيما قبل عملية التحسين وهي الواردة بالجدول رقم (١) والتي تبلغ ٢٤٤٨٩ نجد أن :

مقدار النقص في جملة تكاليف النقل والناتجة عن عملية التحسين = ٢٤٤٨٩- ٢٤٠٦٠=٤٢٩ جنيه

وهي نفس المقدار الوارد بالجدول الخاص بعملية التقييم السابقة أي نفس ناتج حاصل ضرب عدد الوحدات التي تم شغل الخلية هـ٢ جـ بها وهو الرقم (٣٩) × في دليل تحسين تلك الخلية وهو الرقم (١١) . لذا فإن جولة التحسين السابقة صحيحة في حساباتها . ومن ثم يتم تقييم خلايا الجدول رقم (٢) الشاغرة مرة أخرى على النحو التالي :

جدول ٢/

جدول تقييم الخلايا الشاغرة بالجدول رقم (٢)

الخلايا الشاغرة	مقدار التغير في التكاليف الإجمالية نتيجة شغل الخلية بمقدار وحدة	دليل التحسين = تكلفة الفرص الضائعة
هـ$_{١}$ ب	+٣١−٢٠+٢٣−٢٤+١٣−٩ =٦٧−٦٣ =٤	−٤
هـ$_{١}$ جـ	+٨١−٢٠+٢٣−٣٤ =١٠٤−٥٤ =٥٠	−٥٠
هـ$_{١}$ د	+٤٢−٢٠+٢٣−٣٤+١٣−٩+١٩−٢٥ =٩	−٩
هـ$_{٢}$ أ	+١٦−٢٣+٣٤−١٣ =١٤	−١٤
هـ$_{٢}$ د	+٥١−٩+١٩−٢٥ =٣٦	−٣٦
هـ$_{٣}$ أ	+٤٣−٢٣+٣٤−١٣+٩−١٩ =٣٢	−٣٢
هـ$_{٣}$ جـ	+٣٢−١٣+٩−١٩ =٩	−٩
هـ$_{٤}$ أ	+٣٤−٢٣+٣٤−١٣+٩−١٩+٢٥−٣٥ =١٢	−١٢
هـ$_{٤}$ ب	+٢٤−٣٥+٢٥−١٩ =−٥	٥
هـ$_{٤}$ جـ	+٤٤−٣٥+٢٥−١٩+٩−١٣ =١١	−١١
هـ$_{٥}$ ب	+٥٤−٣٤+١٣−٩ =٢٤	−٢٤
هـ$_{٥}$ د	+٦٨−٢٥+١٩−٩+١٣−٣٤ =٣٢	−٣٢
مقدار النقص في تكاليف النقل الإجمالية نتيجة شغل الخلية هـ$_{٤}$ ب بمقدار ١٢٤ وحدة = −٥ × ١٢٤ = −٦٢٠ جنيه		

وحيث أن جدول التقييم (جدول رقم ٢/) يحتوي على أدلة تحسين موجبة (٥) وحيث أننا بصدد مشكلة تدنيه تكاليف النقل لذا فإن الجدول رقم (٢) محل

التقييم الوارد بالجدول رقم (٢/) لا يعتبر جدول حل أمثل . لذا يجب إجراء التحسين اللازم على الجدول رقم (٢) وذلك من خلال الآتي :

- **تحديد الخلية ذات أكبر دليل تحسين موجب وهي الخلية هـ٤ ب .**
- **بالرجوع لمسار تلك وهو المسار التالي :**

+ هـ٤ ب – هـ٤ د + هـ٣ د – هـ٣ ب .

- **من المسار السابق نجد أن الخلايا التي ستشهد عملية نقصان في وحدات السلعة هما الخليتان هـ٤ د ، هـ٣ ب . وهاتين الخليتين تحتويان على عدد من وحدات السلعة هو ٢٣٥ ، ١٢٤ وحدة سلعة على الترتيب لذا يتم إضافة وطرح أقلهما وهو ١٢٤ إلى أو من خلايا المسار بالترتيب فتصبح تلك الخلايا بالترتيب تحتوي على عدد ١٢٤ ، ١١١ ، ٢٠٠ ويتم تفريغ الخلية هـ٣ ب من وحدات السلعة وينتج عن هذا التعديل جدول التحسين التالي الوارد بالجدول رقم (٣) .**

جدول رقم (٣)
التحسين الثاني للجدول المقترح

توزيع / مصادر	أ	ب	جـ	د	ع ر	إجمالي تكاليف النقل
هـ ١	٢٠ ١٨٠	٣١	٨١	٤٢	١٨٠	٣٦٠٠
هـ ٢	١٦	٩ ٢٠١	١٣ ٣٩	٥١	٢٤٠	٢٣١٦
هـ ٣	٤٣	١٩	٣٢	٢٥ ٢٠٠	٢٠٠	٥٠٠٠
هـ ٤	٣٤	٢٤ ١٢٤	٤٤ –	٣٥ ١١١	٢٣٥	٦٨٦١
هـ ٥	٢٣ ٥٧	٥٤	٣٤ ١٢٨	٦٨	١٨٥	٥٦٦٣
ط و	٢٣٧	٣٢٥	١٦٧	٣١١	١٠٤٠	٢٣٤٤٠ جنيه

وبمقارنة التكاليف الإجمالية للنقل الناتجة عن الجدولين رقم (٢) ، (٣) نجد مقدار النقص في التكاليف الناتجة عن التحسين

= ج . ت قبل التحسين – ج . ت بعد التحسين

= ٢٤٠٦٠ – ٢٣٤٤٠

= ٦٢٠ جنيه

وهذا المقدار هو عبارة عن نفس مقدار النقص في التكاليف الكلية لعملية النقل الوارد بآخر الجدول رقم (٢/) وهو ما يفيد بصحة الخطوات الحسابية المتبعة في عملية التحسين .

وبتكرار اختبار الأمثلية على الجدول رقم (٣) وذلك من خلال جدول تقييم الخلايا الشاغرة في هذا الجدول . لاحظ أن الجدول رقم (٣) يعتبر جدول حل أساسي وممكن نظرًا لأن عدد الخلايا المشغولة في هذا الجدول = (ن+م−١) =٨ خلايا .

وفيما يلي في الجدول رقم (٣/) عملية التقييم المطلوبة لاختبار مدى أمثلية الحل الوارد بالجدول (٣) .

جدول (٣/)

جدول تقييم الخلايا الشاغرة بالجدول رقم (٣)

الخلايا الشاغرة	مقدار التغير في التكاليف الإجمالية نتيجة شغل الخلية الشاغرة بمقدار وحدة واحدة		دليل التحسين = تكلفة الفرص الضائعة
هـ١ ب	+٣١-٢٠+٢٣-٢٤+١٣-٩	=٤	-٤
هـ١ جـ	+٨١-٢٠+٢٣-٣٤	=٥٠	-٥٠
هـ١ د	+٤٢-٢٠+٢٣-٣٤+١٣-٩+٢٤-٣٥	=٤	-٤
هـ٢ أ	+١٦-٢٣+٣٤-١٣	=١٤	-١٤
هـ٢ د	+٥١-٩+٢٤-٣٥	=٣١	-٣١
هـ٣ أ	+٤٣-٢٣+٣٤-١٣+٩-٢٤+٣٥-٢٥	=٣٦	-٣٦
هـ٣ ب	+١٩-٢٤+٣٥-٢٥	=٥	-٥
هـ٣ جـ	+٣٢-٢٥+٣٥-٢٤+٩-١٣	=١٤	-١٤
هـ٤ أ	+٣٤-٢٤+٩-١٣+٣٤-٢٣	=١٧	-١٧
هـ٤ جـ	+٤٤-١٣+٩-٢٤	=١٦	-١٦
هـ٥ ب	+٥٤-٣٤+١٣-٩	=٢٤	-٢٤
هـ٥ د	+٦٨-٣٥+٢٤-٩+١٣-٣٤	=٢٧	-٢٧

وحيث أن كافة عناصر أدلة التحسين للخلايا الفارغة الواردة بالجدول رقم (٣/) سالبة وحيث إننا بصدد مشكلة تدنيه تكاليف لذا فالحل الوارد بالجدول رقم (٣) يعتبر جدول حل أمثل ووحيد وطبقًا لهذا الحل الأمثل فإن عدد الوحدات للمتغيرات الأساسية هو :

$س_{١١}^{*}$ = ١٨٠ وحدة سلعة ، $س_{٢٢}^{*}$ = ٢٠١ وحدة سلعة ،

$س_{٣٢}^{*}$ = ٣٩ وحدة سلعة ، $س_{٤٣}^{*}$ = ٢٠٠ وحدة سلعة ،

$س_{٢٤}^{*}$ = ١٢٤ وحدة سلعية ، $س_{٤٤}^{*}$ = ١١١ وحدة سلعية ،

$س_{١٥}^{*}$ = ٥٧ وحدة سلعية ، $س_{٣٥}^{*}$ = ١٢٨ وحدة سلعية

أما قيم المتغيرات الغير أساسية وهي :

$س_{٢١}^{*}$ = $س_{٣١}^{*}$ = $س_{٤١}^{*}$ = $س_{١٢}^{*}$ = $س_{٤٢}^{*}$ = $س_{١٣}^{*}$ = $س_{٢٣}^{*}$ = $س_{٣٣}^{*}$ = صفر

، $س_{١٤}^{*}$ = $س_{٣٤}^{*}$ = $س_{٢٥}^{*}$ = $س_{٤٥}^{*}$ = صفر

وذلك بأقل تكلفة نقل ممكنة والتي تبلغ ٢٣٤٤٠ جنيه .

<u>ملحوظة</u> : في المثال السابق دعنا نقوم بإقتراح الحل المبدئي باستخدام طريقة فوجل التقريبية ولنقارن جملة تكاليف النقل الواردة من خلال هذه الطريقة بجملة تكاليف نقل جدول الحل المقترح بطريقة أدنى تكلفة.

<u>الحل المقترح بطريقة فوجل التقريبية يمكن بيانه على النحو التالي :</u>

جدول الحل المبدئي باستخدام طريقة فوجل التقريبية

إلى / من	أ	ب	ج	د	عر	فروق ف١	ف٢	ف٣	ف٤	ف٥	ف٦	ج.ت
هـ١	٢٠ ٥٢	٣١ ١٧	٨١	٤٢ ١١١	١٨٠	١١	١١	١١	١١	١١	١١	٦٢٢٩
هـ٢	١٦	٩ ٧٣	١٣ ١٦٧	٥١	٢٤٠	٤	٧	٧	٣٤	.	.	٢٨٢٨
هـ٣	٤٣	١٩	٣٢	٢٥ ٢٠٠	٢٠٠	٦	٦	٦	٦	٦	٦	٥٠٠٠
هـ٤	٣٤	٢٤ ٢٣٥	٤٤	٣٥	٢٣٥	١٠	١٠	١٠	١١	١١	.	٥٦٤٠
هـ٥	٢٣ ١٨٥	٥٤	٣٤	٦٨	١٨٥	١١	٣١	.	.	.	.	٤٢٥٥
طو	٢٣٧	٣٢٥	١٦٧	٣١١	١٠٤٠	ج.ت = ٢٣٩٥٢						

فروق الأعمدة	أ	ب	ج	د
ف١	٤	١٠	١٩	١٠
ف٢	٤	١٠	.	١٠
ف٣	٤	١٠	.	١٠
ف١	.	١٠	.	١٠
ف٥	.	٥	.	١٠
ف٦	.	١٢	.	١٧

لاحظ أن جملة تكاليف النقل للحل المقترح باستخدام طريقة فوجل التقريبية كما يوضحه الجدول السابق (وهي ٢٣٩٥٢ جنيه) تقل عن جملة تكاليف النقل للجدول المقترح باستخدام طريقة أقل تكلفة الواردة بالجدول رقم (١) (وهي ٢٤٤٥٩ جنيه) . وهي ما يترتب عليه تقليل جولات التحسين في الحل.

مثال (٣) :

يوجد لدى أحد الشركات أربعة مصانع أ$_1$ ، أ$_2$ ، أ$_3$ ، أ$_4$ في أماكن متفرقة من أنحاء الجمهورية تنتج سلعة واحدة متجانسة بمواصفات موحدة . وتباع هذه السلعة في ثلاث مراكز توزيع واحدة (أسواق) وهي ب$_1$ ، ب$_2$ ، ب$_3$ على الترتيب .

والجدول التالي يوضح الكميات المنتجة من السلعة والكميات المطلوبة لمراكز التوزيع وكذلك أسعار بيع الوحدة من تلك السلعة بالجنيه وكذا تكلفة النقل بالجنيه وتكلفة إنتاج هذه السلعة في المصانع الأربعة (بالجنيه) .

المصنع	الكميات المنتجة	تكلفة إنتاج الوحدة من السلعة(جنيه)	تكلفة نقل وحدة السلعة من المصانع الأربعة إلى السوق		
			ب$_1$	ب$_2$	ب$_3$
أ$_1$	٢٠٠٠	٣	٠،٥	٠،٤	صفر
أ$_2$	٣٦٠٠	٣،٢	صفر	٠،٦	٠،٢
أ$_3$	١٨٠٠	٢،٨	٠،٥	صفر	٠،٦
أ$_4$	٤٠٠٠	٢،٩	٠،٢	٠،٥	٠،٢
الكميات المطلوبة لمراكز التوزيع (الأسواق)			٣٠٠٠	٤٤٠٠	٣٨٠٠
سعر بيع الوحدة في مراكز التوزيع (بالجنيه)			٢	٦	٤

وقد تعهدت الشركة الأم بنقل وحدات السلعة من مصانعها الأربعة إلى مراكز توزيعها الثلاثة المعطاة بالجدول . والمطلوب:

١- صياغة المشكلة الخاصة بالشركة الأم في صورة نموذج خطي .
٢- تحديد جدول الحل المبدئي باستخدام الطرق الثلاث المحددة لذلك .
٣- اختبر مدى أمثلية الجدول المقترح لطريقة أعلى ربح (الترتيب التنازلي للأرباح) محددًا برنامج النقل الأمثل للشركة الأم والذي من شأنه يؤدي إلى تعظيم أرباح تلك الشركة مستخدمًا طريقة حجر الوطء في اختبار الأمثلية ؟

الحـــل:

قبل التعرض لأي من متطلبات المثال يجب أولاً التحقق من مدى تحقق شرط التوازن من عدمه . فحيث أن :

مجـ^{٤} ع$_{ر}$ = ٢٠٠٠ + ٣٦٠٠ + ١٨٠٠ + ٤٠٠٠ = ١١٤٠٠وحدة سلعة

، مجـ^{٣} ط$_{و}$ = ٣٠٠٠ + ٤٤٠٠ + ٣٨٠٠ = ١١٢٠٠ وحدة سلعة

لذا فهناك فائض عرض من وحدات السلعة يعادل ٢٠٠ وحدة سلعة لذلك يضاف عمود وهمي يعتبر بمثابة مركز توزيع رابع ينال فائض العرض من منتجات المصانع الأربعة و بهامش ربح صفري من المصانع إلى مراكز التوزيع . و من ثم فإن : -

١- لصياغة المشكلة الخاصة بالشركة الأم صاحبة المصانع الأربعة المنتجة للسلعة المتجانسة نفرض أن : -

س$_{رو}$ تعبر عن عدد وحدات السلعة الواجب نقلها من المصنع (ر) لمركز التوزيع (و) حيث ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ،

و = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

وهي بمثابة المتغيرات القرارية للنموذج . ولتحديد معلمات النموذج فإننا بصدد مشكلة يتوافر فيها بيانات عن سعر بيع السلعة في مراكز التوزيع المختلفة و تكلفة إنتاج السلعة وتكلفة نقل السلعة من مصادر الإنتاج لمراكز التوزيع . و لتحديد هامش ربح وحدة السلعة المنقولة من المصدر (ر) إلى مركز التوزيع(و) يتم حساب الآتي : –

(هامش ربح الوحدة المنقولة من المصنع (ر) للمركز (و)) = سعر بيع الوحدة المنتجة في مركز التوزيع – مجموع تكلفة الإنتاج والنقل .

فمثلاً

هامش ربح الخلية أ$_{١}$ب$_{١}$ = سعر البيع في المركز ب$_{١}$ – (تكلفة إنتاج المصنع أ$_{١}$ + تكلفة نقل الوحدة من المصنع أ$_{١}$ لمركز التوزيع ب$_{١}$)

= ٥ – (٣ + ٠،٥) = ١،٥ جنيه .

وهامش ربح الخلية أ$_{١}$ ب$_{٢}$ = ٦ – (٣ + ٠،٤) = ٢،٦ جنيه

وهامش ربح الخلية أ$_{١}$ ب$_{٣}$ = ٤ – (٣ + صفر) = ١ جنيه

وهامش ربح الخلية أ$_{١}$ ب$_{١}$ = ٦ – (٣،٢ + صفر) = ١،٨ جنيه

وهامش ربح الخلية أ$_{٢}$ ب$_{٢}$ = ٦ – (٣،٢ + ٠،٦) = ٢،٢ جنيه

وهامش ربح الخلية أ$_{٢}$ ب$_{٣}$ = ٤ – (٣،٢ + ٠،٢) = ٠،٦ جنيه

وهامش ربح الخلية أ$_{٣}$ ب$_{١}$ = ٥ – (٢،٨ + ٠،٥) = ١،٧ جنيه

وهامش ربح الخلية أ$_{٣}$ب$_{٢}$ = ٦ – (٢،٨ + صفر) = ٣،٢ جنيه

وهكذا لباقي الخلايا في الجدول المبين التالي : –

توزيع / مصانع	ب$_{١}$	ب$_{٢}$	ب$_{٣}$	ب$_{٤}$	ع$_{ر}$
أ$_{١}$	١,٥ س$_{١١}$	٢,٦ س$_{٢١}$	١ س$_{٣١}$	صفر س$_{٤١}$	٢٠٠٠
أ$_{٢}$	١,٨ س$_{١٢}$	٢,٢ س$_{٢٢}$	٠,٦ س$_{٣٢}$	صفر س$_{٤٢}$	٣٦٠٠
أ$_{٣}$	١,٧ س$_{١٣}$	٣,٢ س$_{٢٣}$	٠,٦ س$_{٣٣}$	صفر س$_{٤٣}$	١٨٠٠
أ$_{٤}$	١,٩ س$_{١٤}$	٢,٦ س$_{٢٤}$	٠,٩ س$_{٣٤}$	صفر س$_{٤٤}$	٤٠٠٠
ط$_{و}$	٣٠٠٠	٤٤٠٠	٣٨٠٠	٢٠٠	١١٤٠٠

فتصبح المشكلة هي المطلوب إيجاد قيم س$_{رو}$ التي تجعل دالة الربح الإجمالي : –

د(س) = ١,٥ س$_{١١}$ + ٢,٦ س$_{٢١}$ + ١ س$_{٣١}$ + (صفر) س$_{٤١}$

+ ١,٨ س$_{١٢}$ + ٢,٢ س$_{٢٢}$ + ٠,٦ س$_{٣٢}$ + (صفر) س$_{٤٢}$

+ ١,٧ س$_{١٣}$ + ٣,٢ س$_{٢٣}$ + ٠,٦ س$_{٣٣}$ + (صفر) س$_{٤٣}$

+ ١,٩ س$_{١٤}$ + ٢,٦ س$_{٢٤}$ + ٠,٩ س$_{٣٤}$ + (صفر) س$_{٤٤}$

(أكبر ما يمكن)

بشرط القيود الهيكلية التالية :

أ – <u>شرط التوازن</u> : مجـ$_{ر=١}^{٤}$ ع$_{ر}$ = مجـ$_{و=١}^{٤}$ ط و = ١١٤٠٠

ب – قيود العرض (الصفوف) : –

$س_{١١} + س_{٢١} + س_{٣١} + س_{٤١} = ٢٠٠٠$

$س_{١٢} + س_{٢٢} + س_{٣٢} + س_{٤٢} = ٣٦٠٠$

$س_{١٣} + س_{٢٣} + س_{٣٣} + س_{٤٣} = ١٨٠٠$

$س_{١٤} + س_{٢٤} + س_{٣٤} + س_{٤٤} = ٤٠٠٠$

جـ – قيود الطلب (الأعمدة) : –

$س_{١١} + س_{١٢} + س_{١٣} + س_{١٤} = ٣٠٠٠$

$س_{٢١} + س_{٢٢} + س_{٢٣} + س_{٢٤} = ٤٤٠٠$

$س_{٣١} + س_{٣٢} + س_{٣٣} + س_{٣٤} = ٣٨٠٠$

$س_{٤١} + س_{٤٢} + س_{٤٣} + س_{٤٤} = ٢٠٠$

د – قيود عدم السالبية :

$س_{رو} \leq$ صفر وقيماً صحيحة

حيث ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

، و = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

٢– تصميم جدول الحل المبدئي لمشكلة النقل المعطاة باستخدام الطرق الثلاث وهي : –

أ – باستخدام طريقة الركن الشمالي الشرقي : والجدول التالي يبين عملية تخصيص الخلايا حسب طريقة الركن الشمالي الشرقي .

جدول (١)

توزيع / مصانع	ب١	ب٢	ب٣	ب٤	ع ر	جملة الأرباح
أ١	١,٥ ٢٠٠٠	٢,٦	١	صفر	٢٠٠٠	٣٠٠٠
أ٢	١,٨ ١٠٠٠	٢,٢ ٢٦٠٠	٠,٦	صفر	٣٦٠٠	٧٥٢٠
أ٣	١,٧	٣,٢ ١٨٠٠	٠,٦	صفر	١٨٠٠	٥٧٦٠
أ٤	١,٩	٢,٦ صفر	٠,٩ ٣٨٠٠	صفر ٢٠٠	٤٠٠٠	٣٤٢٠
ط و	٣٠٠٠	٤٤٠٠	٣٨٠٠	٢٠٠	١١٤٠٠	١٩٧٠٠

لاحظ أنه في الجدول المقترح توجد حالة انتكاسة (عدم انتظام) تم معالجتها عند اقتراح الحل المبدئي و بالتحديد عند شغل الخلية أ٣ ب٢ حيث تساوي المطلوب مع المعروض لذا تم اعتبار خلية مشغولة برقم صفري من وحدات السلعة وبالتحديد الخلية ذات أعلى هامش ربح وهي الخلية أ٤ ب٢ .

ب – طريقة أقصى ربح (الترتيب التنازلي للأرباح) : –

وطبقاً لهذه الطريقة يتم تخصيص الخلايا طبقاً لأولوية أعلى هامش ربح في خلايا الجدول ككل كما يوضحها الجدول التالي :

جدول (٢)

توزيع / مصانع	ب ١	ب ٢	ب ٣	ب ٤	ع ر	جملة الأرباح
أ ١	١,٥	٢,٦	١ ٢٠٠٠	صفر	٢٠٠٠	٢٠٠٠
أ ٢	١,٨ ١٦٠٠	٢,٢	٠,٦ ١٨٠٠	صفر ٢٠٠	٣٦٠٠	٣٩٦٠
أ ٣	١,٧	٣,٢ ١٨٠٠	٠,٦	صفر	١٨٠٠	٥٧٦٠
أ ٤	١,٩ ١٤٠٠	٢,٦ ٢٦٠٠	٠,٩	صفر	٤٠٠٠	٩٤٢٠
ط و	٣٠٠٠	٤٤٠٠	٣٨٠٠	٢٠٠	١١٤٠٠	٢١١٤٠

وحيث أن الجدول المقترح يحتوي على عدد من الخلايا المشغولة = ٧ ،
(ن + م – ١) = ٧
أي أن عـدد الخلايـا المشـغولة = ن + م – ١ = ٧ لـذا فالجـدول المقتـرح بطريقة أعلى هامش ربح (الترتيب التنازلي للأرباح) يعتبر حلاً أساسياً ممكناً . ويحقق ربح إجمالي يعادل ٢١١٤٠ جنيه

جـ – تحديد جدول الحل المبدئي باستخدام طريقة فوجل التقريبية :

لاحظ أننا بصدد مشكلة تعظيم أرباح لذا يتم حساب الفروق في الصفوف أو الأعمدة على أساس الفرق ما بين أعلى هامشي ربح في الصف أو العمود .

والجدول التالي يوضح طريقة تحديد الحل المبدئي باستخدام طريقة فوجل التقريبية .

جدول الحل المبدئي المقترح

باستخدام طريقة فوجل التقريبية

جدول (٣)

من / إلى	ب١	ب٢	ب٣	ب٤	ع ر	فروق ف١	فروق ف٢	فروق ف٣	فروق ف٤	ج.ر
أ١	١,٥	٢,٦ ٢٠٠٠	١	صفر	٢٠٠٠	١,١	١,١	.	.	٥٢٠٠
أ٢	١,٨ ٣٠٠٠	٢,٢	٠,٦ ٤٠٠	صفر ٢٠٠	٣٦٠٠	٠,٤	٠,٤	٠,٤	١,٢	٥٦٤٠
أ٣	١,٧	٣,٢ ١٨٠٠	٠,٦	صفر	١٨٠٠	١,٥	.	.	.	٥٧٦٠
أ٤	١,٩	٢,٦ ٦٠٠	٠,٩ ٣٤٠٠	صفر	٤٠٠٠	٠,٧	٠,٧	٠,٧	١	٤٦٢٠
ط و	٣٠٠٠	٤٤٠٠	٣٨٠٠	٢٠٠	١١٤٠٠	ج.ر = ٢١٢٢٠				

فروق الأعمدة		ب١	ب٢	ب٣
	ف١	٠,١	٠,٦	٠,١
	ف٢	٠,١	صفر	٠,١
	ف٣	٠,١	٠,٤	٠,٣
	ف١	٠,١	.	٠,٣

وحيث أن الجدول المقترح بطريقة فوجل التقريبية يحتوي على عدد من الخلايا المشغولة = ن + م – ١ = ٧

لذا فالجدول المقترح يعتبر حلاً أساسياً وممكناً و بأرباح إجمالية تعادل ٢١٢٢٠ جنيه

ملحوظة : لاحظ أن إجمالي الأرباح الناجمة عن جدول الحل المبدئي المقترح بالطرق الثلاث يبين كما سبق أن أوضحنا أن طريقة فوجل التقريبية تعطي أفضل الحلول المقترحة لمشاكل النقل وهو ما يتضح من خلال مقارنة الأرباح الناجمة عن تخصيص الخلايا حسب الطرق الثلاث .

٣- اختبار مدى أمثلية الجدول المبدئي المقترح بطريقة أعلى هامش ربح (الترتيب التنازلي للأرباح) و تحسينه للوصول للحل الأمثل مستخدماً في ذلك طريقة حجر الوطء في اختبار الأمثلية : –

ولاختيار مدى أمثلية جدول الحل المبدئي لطريقة أعلى ربح باستخدام طريقة حجر الوطء يتم تقييم الخلايا الفارغة للجدول رقم (٢) كما يوضحها الجدول (٢/) المبين على النحو التالي :

جدول (٢/)

تقييم الخلايا الشاغرة في الجدول (٢)

الخلايا الشاغرة	مقدار التغير في الأرباح الإجمالية نتيجة شغل الخلية بمقدار وحدة		دليل التحسين = تكلفة الفرص الضائعة
أ$_1$ ب$_1$	+١,٥-١,٨+٠,٦-١	=-٠,٧	٠,٧
أ$_1$ ب$_2$	+٢,٦-٢,٦+١,٩-١,٨+٠,٦ -١	=-٠,٣	٠,٣
أ$_1$ ب$_4$	+صفر -١ +٠,٦ - صفر	=-٠,٤	٠,٤
أ$_2$ ب$_2$	+٢,٢-١,٨+١,٩-٢,٦	=-٠,٣	٠,٣
أ$_3$ ب$_1$	١,٧-١,٩+٢,٦-٣,٢	=-٠,٨	٠,٨
أ$_3$ ب$_3$	+٠,٦-٠,٦+١,٨-١,٩+٢,٦-٣,٢	=-٠,٧	٠,٧
أ$_3$ ب$_4$	+صفر-صفر+١,٨-١,٩+٢,٦-٣,٢	=-٠,٧	٠,٧
أ$_4$ ب$_3$	+٠,٩-٠,٦+١,٨-١,٩	=٠،٢	-٠,٢
أ$_4$ ب$_4$	+ صفر- صفر+١,٨ -١,٩	=-٠,١	٠,١

وحيث أننا بصدد مشكلة تعظيم أرباح وهناك دليل تحسين لا زال سالباً لذا فالجدول المبدئي المقترح بطريقة أعلى ربح وهو الجدول محل التقييم لا يعتبر جدول حل أمثل . و بالرجوع لمسار الخلية (أ$_4$ ب$_3$) ذات دليل التحسين السالب (معامل المتغير الغير أساسي الأكثر سالبية في جداول السمبلكس) نجد أن أقل عدد من وحدات السلعة ذو الإشارة السالبة على المسار هو ١٤٠٠ وحدة سلعة (حيث أن الخلايا التي سوف تشهد عملية نقصان على مسار الخلية أ$_4$ ب$_3$ هما الخليتان أ$_2$ ب$_3$ ، أ$_4$ ب$_1$ يحتويان على ١٨٠٠ ،

١٤٠٠ وحدة سلعة على الترتيب ، لذا يتم إضافة وطرح أقلهما وهي القيمة ١٤٠٠ وحدة سلعة إلى ومن خلايا هذا المسار) فينتج الجدول الثاني التالي بعد إتمام عملية التحسين .

الجدول الثاني (التحسين الأول)

توزيع / مصانع	ب$_{١}$	ب$_{٢}$	ب$_{٣}$	ب$_{٤}$	ع$_{ر}$	جملة الأرباح
أ$_{١}$	١,٥	٢,٦	١ ٢٠٠٠	صفر	٢٠٠٠	٢٠٠٠
أ$_{٢}$	١,٨ ٣٠٠٠	٢,٢	٠,٦ ٤٠٠	صفر ٢٠٠	٣٦٠٠	٥٦٤٠
أ$_{٣}$	١,٧	٣,٢ ١٨٠٠	٠,٦	صفر	١٨٠٠	٥٧٦٠
أ$_{٤}$	١,٩	٢,٦ ٢٦٠٠	٠,٩ ١٤٠٠	صفر	٤٠٠٠	٨٠٢٠
ط$_{و}$	٣٠٠٠	٤٤٠٠	٣٨٠٠	٢٠٠	١١٤٠٠	٢١٤٢٠

لاحظ أن مقدار الزيادة في إجمالي الأرباح = ٢١٤٢٠ – ٢١١٤٠

= ٢٨٠ جنيه

وهذا المقدار هو نفس ناتج حاصل ضرب دليل تحسين الخلية أ$_{٤}$ ب$_{٣}$ × مقدار عدد وحدات السلعة التي تم شغل بها تلك الخلية أي ١٤٠٠ وحدة سلعة . وهذا دليل على دقة حسابات جولة التحسين التي تم إجراؤها على الجدول المقترح للحل المبدئي .

وباختبار مدى أمثلية الحل الأخير يتم تقييم الخلايا الشاغرة في الجدول الثاني السابق وهو ما يوضحه جدول التقييم التالي :

جدول (٤/)

تقييم خلايا الجدول الثاني الشاغرة

الخلايا الشاغرة	مقدار التغير في الأرباح الإجمالية نتيجة شغل الخلية بمقدار وحدة واحدة		دليل التحسين = تكلفة الفرص الضائعة
أ$_{١}$ ب$_{١}$	+١,٥−١,٨+٠,٦−١	=−٠,٧	٠,٧
أ$_{١}$ ب$_{٢}$	+٢,٦−٢,٦+٠,٩−١	=−٠,١	٠,١
أ$_{١}$ ب$_{٤}$	+صفر−١+٠,٦− صفر	=−٠,٤	٠,٤
أ$_{٢}$ ب$_{٢}$	+٢,٢−٢,٦+٠,٩−٠,٦	=−٠,١	٠,١
أ$_{٣}$ ب$_{١}$	+١,٧−٣,٢+٢,٦−٠,٩+٠,٦−١,٨	=−١	١
أ$_{٣}$ ب$_{٣}$	+٠,٦−٣,٢+٢,٦−٠,٩	=−٠,٩	٠,٩
أ$_{٣}$ ب$_{٤}$	+صفر−صفر+٠,٦−٠,٩+٢,٦−٣,٢	=−٠,٩	٠,٩
أ$_{٤}$ ب$_{١}$	+١,٩−٠,٩+٠,٦−١,٨	=−٠,٢	٠,٢
أ$_{٤}$ ب$_{٤}$	+صفر−صفر+٠,٦−٠,٩	=−٠,٣	٠,٣

وحيث إن كافة أدلة التحسين المبينة بجدول التقييم الأخير معاملات موجبة جميعًا وحيث أن المشكلة تعظيم أرباح لذا فالجدول الثاني يعتبر جدول حل أمثل ووحيد وعليه فإن :

س$_{١١}^{*}$ = س$_{٢١}^{*}$ = س$_{٤١}^{*}$ = س$_{٢٢}^{*}$ = س$_{١٣}^{*}$ = س$_{٣٣}^{*}$ = س$_{٤٣}^{*}$ = س$_{١٤}^{*}$ = س$_{٤٤}^{*}$ = صفر ،

$س_{٣١}^{*}$ = ٢٠٠٠ وحدة سلعة ، $س_{١٢}^{*}$ = ٣٠٠٠ وحدة سلعة ،
$س_{٣٢}^{*}$ = ٤٠٠ وحدة سلعة ، $س_{٤٢}^{*}$ = ٢٠٠ وحدة سلعة ،
$س_{٢٣}^{*}$ = ١٨٠٠ وحدة سلعة ، $س_{٢٤}^{*}$ = ٢٦٠٠ وحدة سلعة ،
$س_{٣٤}^{*}$ = ١٤٠٠ وحدة سلعة

وتبلغ أرباح الشركة أقصى ما يمكن والتي تعادل ٢١٤٢٠ جنيه.

ثانيًا) طريقة التوزيع المعدل :

Revised Distribution Method OR Modified Distribution Method

تقوم طريقة التوزيع المعدل في اختبارها لمدى أمثلية حل مبدئي مقترح أو في تحسين جدول حل معين على أساس حساب تكلفة الفرص الضائعة أو أدلة التحسين مباشرة . فرأينا في الطريقة السابقة في اختبار الأمثلية (طريقة حجر الوطء) أن أدلة التحسين ما هي إلا معاملات المتغيرات الغير أساسية في صف اختبار أمثلية طرق السمبلكس . أي أن أدلة التحسين (وهي للخلايا الشاغرة في جدول النقل) هي للمتغيرات الغير أساسية . أما الخلايا المشغولة في جدول النقل فهي عبارة عن الخلايا الأساسية (أو المتغيرات الأساسية في جداول السمبلكس) .

وحيث أن معاملات صف اختبار الأمثلية المقابلة للمتغيرات الأساسية (الخلايا المشغولة) هي معاملات صفرية دائمًا . لذا تُبنى طريقة التوزيع المعدل على مساواة تكلفة الفرصة الضائعة للخلايا الأساسية (المشغولة) بالصفر ومن ثم يمكن استنتاج بما يسمى بمعاملات صفوف و أعمدة جدول النقل مستخدمين في ذلك خاصية المعامل الصفري المقابل لتكلفة الفرصة الضائعة لتلك الخلايا المشغولة (الأساسية) . و إذا ما تم حساب معاملات الصفوف و الأعمدة يسهل عملية تقييم الخلايا الفارغة من خلال حساب تكلفة

الفرصة الضائعة لها مباشرة وذلك من خلال خطوات طريقة التوزيع المعدل وذلك على النحو التالي : -

١- تحديد الخلايا المشغولة في الجدول محل التقييم .

٢- لكل خلية مشغولة يتم تكون المعادلة التالية : -

(معاملات الصف (ر) + معامل العمود (و)- تكلفة نقل الخلية $ت_{رو}$ = صفر

أي أن :

$ص_{ر} + ع_{و} = ت_{رو}$

٣- يتم حل مجموعة المعادلات الخطية للخلايا الأساسية وذلك من خلال افتراض أي من المعاملات لأحد الصفوف أو لأحد الأعمدة مساوياً للصفر ثم يتم استنتاج باقي معاملات الصفوف و الأعمدة .

٤- إجراء عملية تقييم للخلايا الشاغرة من خلال حساب تكلفة الفرصة الضائعة لكافة الخلايا الشاغرة وذلك من خلال العلاقة التالية : -

تكلفة الفرصة الضائعة للخلية ($ف_{رو}$) أو (دليل التحسين) = معامل الصف ($ص_{ر}$) + معامل العمود ($ع_{و}$) - تكلفة النقل بالخلية ($ت_{رو}$)

فإذا كانت كافة أدلة التحسين سالبة في حالة مشاكل تدنية إجمالي تكاليف النقل (أو موجبة جميعاً في حالة مشاكل تعظيم الأرباح) فإن هذا يدل على أن جدول الحل سواء المقترح أو محل التقييم جدول حل أمثل ووحيد .

وفي حالة وجود أحد أدلة التحسين صفرياً و تحقق الشرط السابق فهذا يعني أننا بصدد حل أمثل لكنه متعدد الحلول المثلى .

٥- إن لم يكن جدول الحل محل التقييم أمثلاً . يتم اختيار الخلية الشاغرة ذات أكبر دليل تحسين موجب للخلايا الشاغرة في حالة مشاكل تدنية التكاليف (أو الأكثر سالبية في حالة مشاكل تعظيم الأرباح) ثم يتم تكون المسار المغلق لتلك الخلية ويتم تحديد أقل عدد من وحدات السلعة

الموجودة في الخلايا التي ستشهد عملية نقصان لتضاف و تطرح تلك الكمية إلى ومن خلايا المسار المغلق لتلك الخلية .

٦- يتم تقييم الجدول بعد تحسينه و ذلك بتكرار الخطوات رقم (٤ ، ٥) إلى أن يتحقق شرط الأمثلية الخاص بمشكلة النقل محل الدراسة كما سبق و أن حددناه.

مثال (١):-

يوجد لدى إحدى الشركات ثلاثة فروع لإنتاج سلعة واحدة متجانسة لتسويقها في أربعة مراكز توزيع رئيسية . والجدول التالي يوضح الكميات التي تعرضها فروع الشركة والكميات التي تطلبها مراكز التوزيع وتكلفة نقل الوحدة من السلعة من الفروع إلى مراكز التوزيع (بالجنيه):

توزيع / مصانع	ب١	ب٢	ب٣	ب٤	كمية معروضة
أ١	١٩	٣٠	٥٠	١٠	٧٠٠٠
أ٢	٧٠	٣٠	٤٠	٦٠	٩٠٠٠
أ٣	٤٠	٨	٧٠	٢٠	١٨٠٠٠
كمية مطلوبة	٥٠٠٠	٨٠٠٠	٧٠٠٠	١٤٠٠٠	٣٤٠٠٠

<u>والمطلوب</u>:- مستخدماً طريقة أدنى تكلفة في تحديد جدول الحل المبدئي وطريقة التوزيع المعدل في اختبار الأمثلية حدد برنامج النقل الأمثل لهذه الشركة .

الحل : -

قبل تحديد جدول الحل المبدئي دعنا أولاً نتحقق من مدى توافر شرط التوازن من عدمه فحيث أن : -

$\text{مجـ}_{ر=١}^{٣}$ ع$_{ر}$ = ٧٠٠٠ + ٩٠٠٠ + ١٨٠٠٠ = ٣٤٠٠٠ وحدة سلعة .

،

$\text{مجـ}_{ور=١}^{٤}$ ط$_{و}$= ٥٠٠٠ + ٨٠٠٠ + ٧٠٠٠ + ١٤٠٠٠ = ٣٤٠٠٠ وحدة سلعة

لذا فالمشكلة في وضع توازن و عليه فإن الجدول التالي يوضح طريقة تخصيص وحدات السلعة باستخدام طريقة أدنى تكلفة.

جدول رقم (١)

تحديد جدول الحل المبدئي المقترح بطريقة أدنى تكلفة

توزيع / مصانع	ع$_{١}$ = ٣٠	ع$_{٢}$=-٢	ع$_{٣}$=صفر	ع$_{٤}$=١٠	عرض	ج.ت
أ$_{١}$ ص$_{١}$=صفر	١٩	٣٠	٥٠	١٠ (٧٠٠٠)	٧٠٠٠	٧٠٠٠٠
أ$_{٢}$ ص$_{٢}$=٤٠	٧٠ (٢٠٠٠)	٣٠	٤٠ (٧٠٠٠)	٦٠	٩٠٠٠	٤٢٠٠٠٠
أ$_{٣}$ ص$_{٢}$=١٠	٤٠ (٣٠٠٠)	٨ (٨٠٠٠)	٧٠	٢٠ (٧٠٠٠)	١٨٠٠٠	٣٢٤٠٠٠
طلب	٥٠٠٠	٨٠٠٠	٧٠٠٠	١٤٠٠٠	٣٤٠٠٠	٨١٤٠٠٠

وحيث أن جدول الحل المقترح يحتوي على : -

عدد من الخلايا المشغولة = (ن + م – ١) = ٦ . لذا فإن جدول الحل المقترح بطرية أدنى تكلفة يعتبر حلاً أساسياً و مسموحاً به و بتكاليف نقل إجمالية تعادل ٨١٤٠٠٠ جنيه

- **<u>اختبار مدى أمثلية الحل المبدئي باستخدام طريقة التوزيع المعدل :</u>**

بافتراض أن : $ص_١$ ، $ص_٢$ ، $ص_٣$ تمثل معاملات الصفوف ،

و بافتراض أن : $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ ، $ع_٤$ تمثل معاملات الأعمدة .

لذا فإنه من خلال الخلايا المشغولة يتم تكوين المعادلات الأساسية التالية :

$ص_١ + ع_٤ = ت_{١٤}$ أي أن ⟵ $ص_١ + ع_٤ = ١٠$

$ص_٢ + ع_١ = ت_{٢١}$ ⟵ $ص_٢ + ع_١ = ٧٠$

$ص_٢ + ع_٣ = ت_{٢٣}$ ⟵ $ص_٢ + ع_٣ = ٤٠$

$ص_٣ + ع_١ = ت_{٣١}$ ⟵ $ص_٣ + ع_١ = ٤٠$

$ص_٣ + ع_٢ = ت_{٣٢}$ ⟵ $ص_٣ + ع_٢ = ٨$

$ص_٣ + ع_٤ = ت_{٣٤}$ ⟵ $ص_٣ + ع_٤ = ٢٠$

وبافتراض أن أي من المعاملات يساوي الصفر وليكن نفرض أن

$ص_١$ = صفر . فينتج أن :

$ص_١$ = صفر ، $ع_١ = ٣٠$

$ص_٢ = ٤٠$ ، $ع_٢ = -٢$

$ص_٣ = ١٠$ ، $ع_٣$ = صفر

$ع_٤ = ١٠$

ومن ثم يتم تقييم الخلايا الشاغرة من خلال حساب تكلفة الفرص الضائعة ولتكن $ف_{رو}$ = معامل الصف (ر) + معامل العمود (و) – تكلفة نقل الخلية $ت_{رو}$ وهو ما يوضحه الجدول رقم (١/)

جدول (١/)

تقييم الخلايا الشاغرة بالجدول رقم (١)

الخلايا الشاغرة	تكلفة الفرص الضائعة ف$_{رو}$ = معامل الصف (ر) + معامل العمود (و) – ت$_{رو}$	ملاحظات
أ$_1$ ب$_1$	ف$_{11}$ = ص$_1$+ع$_1$– ت$_{11}$ = صفر+٣٠–١٩ = ١١	المتغير الداخل في الحل
أ$_1$ ب$_2$	ف$_{21}$ =ص$_1$+ع$_2$– ت$_{21}$= صفر+(–٢)–٣٠ = –٣٢	
أ$_1$ ب$_3$	ف$_{31}$= ص$_1$+ع$_3$– ت$_{31}$= صفر+صفر–٥٠ = –٥٠	
أ$_2$ ب$_2$	ف$_{22}$ = ص$_2$+ع$_2$ –ت$_{22}$ = ٤٠+(–٢)–٣٠ = ٨	
أ$_2$ ب$_4$	ف$_{42}$ = ص$_2$ +ع$_4$ –ت$_{42}$ = ٤٠+١٠–٦٠ = –١٠	
أ$_3$ ب$_3$	ف$_{33}$ = ص$_3$+ع$_3$ – ت$_{33}$ = ١٠+صفر–٧٠ = –٦٠	
مقدار النقص في التكاليف نتيجة دخول س$_{11}$ في الأساس بعدد ٣٠٠٠ وحدة سلعة = ٣٠٠٠ × ١١ = ٣٣٠٠٠ جنيه		

ويملاحظة عمود تكلفة الفرص الضائعة الوارد بالجدول (١/) نجد أن هناك معاملات موجبة وحيث إن المشكلة هي تدنيه تكاليف لذا فجدول الحل المبدئي [جدول (١)] لا يعتبر جدول أمثل لذا يجب تحسينه وذلك على النحو التالي: بالرجوع لمسار الخلية ذات أكبر معامل موجب في عمود تكلفة الفرصة الضائعة (ف$_{رو}$) أي للخلية أ$_1$ ب$_1$. وحيث أن مسار الخلية أ$_1$ ب$_1$ هو : أ$_1$ ب$_1$ – أ$_3$ ب$_1$ +أ$_3$ ب$_4$ – أ$_1$ ب$_4$ أي أن الخلايا التي ستشهد عملية نقصان لوحدات السلعة هما الخليتان أ$_3$ ب$_1$ ، أ$_1$ ب$_4$ وتحتوي كل منهما على الترتيب على عدد من وحدات السلعة يعادل ٣٠٠٠ ، ٧٠٠٠ . وحيث إن أقلهم في عدد وحدات السلعة هو ٣٠٠٠ لذا يتم إضافة وطرح ٣٠٠٠ وحدة سلعة إلى

ومن خلايا هذا المسار حسب الإشارة الموجودة في هذا المسار لينتج الجدول رقم (٢) وهو نتاج تحسين الجدول رقم (١) وهو :

جدول رقم (٢)

التحسين الأول

معامل الصف	معامل العمود	ع١ = ١٩	ع٢ = -٢	ع٣ = -١١	ع٤ = ١٠	عرض	ج.ت
	بو / أر	ب١	ب٢	ب٣	ب٤		
ص١= صفر		١٩ ٣٠٠٠	٣٠	٥٠	١٠ ٤٠٠٠	٧٠٠٠	٩٧٠٠٠
ص٢ =٥١		٧٠ ٢٠٠٠	٣٠	٤٠ ٧٠٠٠	٦٠	٩٠٠٠	٤٢٠٠٠٠
ص٣ =١٠		٤٠	٨ ٨٠٠٠	٧٠	٢٠ ١٠٠٠٠	١٨٠٠٠	٢٦٤٠٠٠
طلب		٥٠٠٠	٨٠٠٠	٧٠٠٠	١٤٠٠٠	٣٤٠٠٠	٧٨١٠٠٠

لاحظ أن الفرق ما بين جملة تكاليف النقل فيما قبل وبعد التحسين

= ٨١٤٠٠٠ – ٧٨١٠٠٠ = ٣٣٠٠٠ جنيه

وهي نفس الناتج الوارد بالجدول (١/) أي أن :

مقدار النقص في التكاليف = تكلفة الفرص الضائعة للخلية أ١ ب١ × عدد وحدات السلعة التي تم شغل بها الخلية أ١ ب١

= ١١ × ٣٠٠٠ = ٣٣٠٠٠ جنيه

وتحقق التساوي فيما بين مقدار النقص في التكاليف سواء بفرق التكاليف فيما قبل وبعد التحسين و بين تكلفة الفرص الضائعة للخلية $أ_{١}$ $ب_{١}$ يؤكد صحة حسابات جولة التحسين السابقة . والجدول رقم (٢) يعتبر حلاً أساسيًا ممكنًا حيث يحتوي على عدد من الخلايا المشغولة = (ن + م −١) = ٦

- ولاختبار مدى أمثلية الحل الوارد بالجدول (٢) يتم تقييم الخلايا الشاغرة. لذا يجب تكوين المعادلات الأساسية [للخلايا المشغولة بالجدول (٢)] لاستنتاج معاملات الصفوف (ر) والأعمدة (و) .

وذلك على النحو المبين التالي:

$ص_{١} + ع_{١} = ت_{١١}$ أي أن ← $ص_{١} + ع_{١} = ١٩$

$ص_{١} + ع_{٤} = ت_{٤١}$ ← $ص_{١} + ع_{٤} = ١٠$

$ص_{٢} + ع_{١} = ت_{١٢}$ ← $ص_{٢} + ع_{١} = ٧٠$

$ص_{٢} + ع_{٣} = ت_{٣٢}$ ← $ص_{٢} + ع_{٣} = ٤٠$

$ص_{٣} + ع_{٢} = ت_{٢٣}$ ← $ص_{٣} + ع_{٢} = ٨$

$ص_{٣} + ع_{٤} = ت_{٤٣}$ ← $ص_{٣} + ع_{٤} = ٢٠$

وبفرض أن أحد المعاملات وليكن $ص_{١}$ = صفر . فبالتعويض في المعادلات السابقة ينتج أن :

$ص_{١}$ = صفر ، $ع_{١} = ١٩$

$ص_{٢} = ٥١$ ، $ع_{٢} = −٢$

$ص_{٣} = ١٠$ ، $ع_{٣} = −١١$

$ع_{٤} = ١٠$

وهذه المعاملات تم رصدها في الجدول رقم (٢) أعلى الجدول (معاملات الأعمدة) وعلى يمين الجدول (معاملات الصفوف) . ومن ثم فبتقييم الخلايا الشاغرة في الجدول السابق ينتج لنا جدول التقييم التالي :

جدول ($٢^{/}$)

التحسين الثاني

تقييم الخلايا الشاغرة في الجدول (٢)

الخلية الشاغرة	تكلفة الفرصة الضائعة ف$_{رو}$ = ص$_{ر}$ + ع$_{و}$ − ت$_{رو}$	ملاحظات
أ$_{١}$ ب$_{٢}$	ف$_{١٢}$ =ص$_{١}$ + ع$_{٢}$ − ت$_{١٢}$ = ٠+(−٢)−٣٠ = −٣٢	
أ$_{١}$ ب$_{٣}$	ف$_{١٣}$ =ص$_{١}$ + ع$_{٣}$ − ت$_{١٣}$ = ٠+(−١١)−٥٠=−٦١	
أ$_{٢}$ ب$_{٢}$	ف$_{٢٢}$ =ص$_{٢}$ + ع$_{٢}$ − ت$_{٢٢}$ = ٥١+(−٢)−٣٠= (١٩)	المتغير الداخل في الحل
أ$_{٢}$ ب$_{٤}$	ف$_{٢٤}$ =ص$_{٢}$ + ع$_{٤}$ − ت$_{٢٤}$ = ٥١+١٠−٦٠ = (١)	
أ$_{٣}$ ب$_{١}$	ف$_{٣١}$ =ص$_{٣}$ + ع$_{١}$ − ت$_{٣١}$ = ١٠+١٩−٤٠ = −١١	
أ$_{٣}$ ب$_{٣}$	ف$_{٣٣}$ =ص$_{٣}$ + ع$_{٣}$ − ت$_{٣٣}$ = ١٠+(−١١)−٧٠=−٧١	
مقدار النقص في التكاليف نتيجة دخول س$_{٢٢}$ في الأساس بعدد (٢٠٠٠) وحدة سلعة = ٢٠٠٠×١٩=٣٨٠٠٠ جنيه		

وبملاحظة عمود المعاملات الخاص بتكلفة الفرصة الضائعة نجد أنه لازالت هناك معاملات موجبة . لذا فالجدول رقم (٢) لا يعتبر جدول حل أمثل ومن ثم يجب تحسينه على النحو الآتي :

حيث أن الخلية أ$_{٢}$ ب$_{٢}$ ذات أكبر تكلفة فرصة ضائعة موجبة لذا يتم اعتبارها بمثابة المتغير الداخل في الحل ومن ثم تكوين مسارها المغلق وهو على النحو التالي :

+ أ$_{٢}$ ب$_{٢}$ − أ$_{٣}$ ب$_{٢}$ + أ$_{٣}$ ب$_{٤}$ − أ$_{١}$ ب$_{٤}$ + أ$_{١}$ ب$_{١}$ − أ$_{٢}$ ب$_{١}$.

وبملاحظة هذا المسار نجد أن الخلايا التي ستشهد عملية نقصان في عدد وحدات السلعة هي الخلايا أ$_{٣}$ ب$_{٢}$ ، أ$_{١}$ ب$_{٤}$ ، أ$_{٢}$ ب$_{١}$ وهي تحتوي على عدد من

وحدات السلعة يعادل ٨٠٠٠ ، ٤٠٠٠ ، ٢٠٠٠ على الترتيب . لذا فأقل قيمة من وحدات السلعة هي العدد ٢٠٠٠ . لذا يتم إضافة وطرح (٢٠٠٠) وحدة سلعة إلى ومن خلايا مسار الخلية أ٢ ب٢ المغلق على الترتيب لينتج جدول التحسين الثالث (جدول رقم ٣) .

جدول رقم (٣)

التحسين الثالث

معامل الصف	معامل العمود أر / بو	ع١=١٩ ب١	ع٢=-٢ ب٢	ع٣=٨ ب٣	ع٤ =١٠ ب٤	عرض	ج.ت
ص١ =صفر	أ١	١٩ (٥٠٠٠)	٣٠	٥٠	١٠ (٢٠٠٠)	٧٠٠٠	١١٥٠٠٠
ص٢= ٣٢	أ٢	٧٠	٣٠ (٢٠٠٠)	٤٠ (٧٠٠٠)	٦٠	٩٠٠٠	٢٨٠٠٠٠
ص٣= ١٠	أ٣	٤٠	٨ (٦٠٠٠)	٧٠	٢٠ (١٢٠٠٠)	١٨٠٠٠	٢٤٠٠٠٠
طلب		٥٠٠٠	٨٠٠٠	٧٠٠٠	١٤٠٠٠	٣٤٠٠٠	٧٤٣٠٠٠

لاحظ أن الجدول الأخير (جدول رقم ٣) يحتوي على عدد من الخلايا المشغولة مساويًا (ن + م – ١) = ٦ . أي أن الحل الوارد بالجدول (٢) يعتبر حلاً أساسيًا ممكنًا . كما أن مقدار النقص في التكاليف الإجمالية أي الفرق ما بين التكاليف قبل وبعد التحسين عبارة عن :

مقدار النقص في التكاليف الإجمالية الناجمة عن التحسين الثاني =

٧٨١٠٠٠ – ٧٤٣٠٠٠ = ٣٨٠٠٠ جنيه

وهو نفس الناتج الوارد بالصف الأخير في الجدول (٢′) وهو ما يؤكد صحة حسابات جولة التحسين الثانية .

- وباختبار مدى أمثلية الحل الوارد بالجدول رقم (٣) وذلك من خلال تقييم الخلايا الشاغرة بهذا الجدول . لذا يتم تكوين المعادلات الأساسية (من الخلايا المشغولة الأساسية) لاستنتاج معاملات الصفوف والأعمدة . أي أن:

$ص_{١} + ع_{١} = ت_{١١}$ أي أن ⟵ $ص_{١} + ع_{١} = ١٩$

$ص_{١} + ع_{٤} = ت_{١٤}$ ⟵ $ص_{١} + ع_{٤} = ١٠$

$ص_{٢} + ع_{٢} = ت_{٢٢}$ ⟵ $ص_{٢} + ع_{٢} = ٣٠$

$ص_{٢} + ع_{٣} = ت_{٢٣}$ ⟵ $ص_{٢} + ع_{٣} = ٤٠$

$ص_{٣} + ع_{٢} = ت_{٣٢}$ ⟵ $ص_{٣} + ع_{٢} = ٨$

$ص_{٣} + ع_{٤} = ت_{٣٤}$ ⟵ $ص_{٣} + ع_{٤} = ٢٠$

وبفرض أن أحد المعاملات وليكن $و_{١}$ = صفر . فبالتعويض في المعادلات السابقة ينتج أن :

$ص_{١}$ = صفر ، $ع_{١} = ١٩$

$ص_{٢} = ٣٢$ ، $ع_{٢} = -٢$

$ص_{٣} = ١٠$ ، $ع_{٣} = ٨$

$ع_{٤} = ١٠$

وهذه المعاملات تم رصدها في الجدول رقم (٣) أعلى الجدول (معاملات الأعمدة) وعلى يمين الجدول (معاملات الصفوف) . ومن ثم فبتقييم الخلايا الشاغرة في الجدول رقم (٣) ينتج لنا جدول (٣′) :

جدول (٣/)

التحسين الثالث

تقييم الخلايا الشاغرة في الجدول (٣)

الخلية الشاغرة	تكلفة الفرصة الضائعة ف$_{رو}$ = ص$_{ر}$ + ع$_{و}$ – ت$_{رو}$	ملاحظات
أ$_{١}$ ب$_{٢}$	ف$_{٢١}$ =ص$_{١}$ + ع$_{٢}$ – ت$_{٢١}$ =٠+(–٢)–٣٠=–٣٢	حيث أن كافة معاملات تكلفة الفرصة الضائعة سالبة لذا فالحل أمثل ووحيد
أ$_{١}$ ب$_{٣}$	ف$_{٣١}$ =ص$_{١}$ + ع$_{٣}$ – ت$_{٣١}$ =٠+٨–٥٠ =–٤٢	
أ$_{٢}$ ب$_{١}$	ف$_{١٢}$ =ص$_{٢}$ + ع$_{١}$ – ت$_{١٢}$ =٣٢+١٩–٧٠=–١٩	
أ$_{٢}$ ب$_{٤}$	ف$_{٤٢}$ =ص$_{٢}$ + ع$_{٤}$ – ت$_{٤٢}$ =٣٢+١٠–٦٠=–١٨	
أ$_{٣}$ ب$_{١}$	ف$_{١٣}$ =ص$_{٣}$ + ع$_{١}$ – ت$_{١٣}$ =١٠+١٩–٤٠=–١١	
أ$_{٣}$ ب$_{٣}$	ف$_{٣٣}$ =ص$_{٣}$ + ع$_{٣}$ – ت$_{٣٣}$ =١٠+٨–٢٠ =–٢	

وحيث أن كافة معاملات تكلفة الفرصة الضائعة سالبة ، وحيث أننا بصدد مشكلة تدنيه إجمالي تكلفة النقل لذا فالحل الوارد بالجدول رقم (٣) يعتبر حلاً أمثلاً ووحيدًا .

وطبقًا لهذا الحل الأمثل فإن :

س$^{*}_{١١}$ = ٥٠٠٠ وحدة سلعة ، س$^{*}_{٢١}$ = س$^{*}_{٣١}$ = صفر ، س$^{*}_{٤١}$ = ٢٠٠٠ وحدة سلعة ،

س$^{*}_{١٢}$ = صفر ، س$^{*}_{٢٢}$ = ٢٠٠٠ وحدة سلعة ، س$^{*}_{٣٢}$ = ٧٠٠٠ وحدة سلعة ، س$^{*}_{٤٢}$= صفر ، س$_{١٣}$ = صفر ، س$^{*}_{٢٣}$ = ٦٠٠٠ وحدة سلعة ، س$_{٣٣}$ = صفر ، س$^{*}_{٤٣}$ = ١٢٠٠٠ وحدة سلعة . وعند هذا البرنامج الأمثل لمشكلة النقل تكون جملة تكاليف النقل أقل ما يمكن والتي تبلغ ٧٤٣٠٠٠ جنيه .

<u>ملحوظة</u> : إذا تم اقتراح الحل المبدئي لنفس المشكلة الواردة بالمثال السابق باستخدام طريقة ڤوچل التقريبية يكون الحل كما يلي :

بو / أر	ب١	ب٢	ب٣	ب٤	ع ر	فروق الصفوف ف١	ف٢	ف٣	ف٤	
أ١	١٩ (٥٠٠٠)	٣٠	٥٠	١٠ (٢٠٠٠)	٧٠٠٠	٩	٩	٤٠	٤٠	
أ٢	٧٠	٣٠	٤٠ (٧٠٠٠)	٦٠ (٢٠٠٠)	٩٠٠٠	١٠	٢٠	٢٠	٢٠	
أ٣	٤٠	٨ (٨٠٠٠)	٧٠	٢٠ (١٠٠٠٠)	١٨٠٠٠	١٢	٢٠	٥٠	.	
ط و	٥٠٠٠	٨٠٠٠	٧٠٠٠	١٤٠٠٠	٣٤٠٠٠	ج.ت = ٧٧٩٠٠٠				
فروق الأعمدة ف١	٢١	٢٢	١٠	١٠						
ف١	٢١	.	١٠	١٠						
ف١	.	.	١٠	١٠						
ف١	.	.	١٠	٥٠						

والحل المقترح بطريقة ڤوچل التقريبية يحتوي على عدد من الخلايا المشغولة = (ن + م – ١) = ٦ لذا فالحل المقترح يعتبر حلاً أساسيًا وممكنًا .

لكن لاحظ أن جملة التكاليف الناجمة عن تخصيص الخلايا باستخدام طريقة ڤوچل التقريبية تبلغ ٧٧٩٠٠٠ جنيه وهي تقل عن إجمالي التكاليف الناجمة عن الحل المقترح باستخدام طريقة أدنى تكلفة والتي بلغت تكاليف جدولها

المبدئي المقترح ٨١٤٠٠٠ جنيه . لذا فإن طريقة ڤوچل التقريبية تعتبر من أفضل الطرق في تحددها لجدول الحل المبدئي المقترح لحل مشكلة النقل لأنها تعطي حلاً مبدئيًا أقرب ما يكون للأمثلية إن لم يكن في غالبية الأحوال هو الحل الأمثل .

تـمـا ريـن

١): تقوم إحدى شركات النقل باستلام قمح معبأ في أجولة من مجموعة من المخازن أسبوعيًا بيانها بالجدول رقم (١) . ويتم تسليم تلك السلعة إلى مجموعة من المطاحن أسبوعيًا كما هي مبينة بالجدول رقم (٢) . ويبين الجدول رقم (٣) متوسط تكلفة النقل والمناولة بالجنيه لكل جوال من المخازن إلى المطاحن .

جدول رقم (١)

المخازن	الطاقة(جوال)
١	١٠٠٠٠
٢	١٢٠٠٠
٣	١٥٠٠٠

جدول رقم (٢)

المطاحن	الاحتياجات(جوال)
أ	٨٠٠٠
ب	٩٠٠٠
جـ	١٠٠٠٠
د	٨٠٠٠

جدول رقم (٣)

مطاحن

أ	ب	ج	د
١٣	١٤	١٣	٢٠
١٦	١٣	٢٠	١٢
١٩	١٢	١٧	١٥

والمطلوب :

أ- صياغة مشكلة النقل في صورة نموذج خطي .

ب- تحديد جدول الحل المبدئي باستخدام أساليب النقل الثلاث .

ج- اختبار مدى أمثلية الحل المقترح لأي من جداول الحلول المبدئية الناتجة في (ب) .

مع تحديد برنامج النقل الأمثل باستخدام طريقة التوزيع المعدل .

٢) : تقوم شركة مصر للطيران بتمويل طائراتها من أربعة شركات محددة هي أ$_{١}$ ، أ$_{٢}$ ، أ$_{٣}$ ، أ$_{٤}$ في مطاراتها الثلاث داخل جمهورية مصر العربية ب$_{١}$ ، ب$_{٢}$ ، ب$_{٣}$. والجدول التالي يبين تعريفة نقل الجالون الواحد بالجنيه من كل شركة من الشركات الأربعة إلى أي من المطارات الثلاث . كما يبين الجدول التالي طاقة الشركات بالألف جالون واحتياجات المطارات بالألف جالون وذلك على النحو المبين التالي :

الشركة \ المطار	ب١	ب٢	ب٣	طاقة الشركة
أ١	١٠	٧	٨	٣٤٠
أ٢	١٠	١١	١٤	٥٥٠
أ٣	٩	١٢	٤	٦٦٠
أ٤	١١	١٣	٩	٢٣٠
الاحتياجات	٣٢٠	٦٦٠	٢٥٠	

والمطلوب :

أ- صياغة مشكلة النقل في صورة نموذج خطي .

ب- تحديد جدول الحل المبدئي المقترح باستخدام أساليب النقل الثلاث : الركن الشمالي الشرقي ، طريقة أدنى تكلفة ، طريقة ڤوچل التقريبية مع مقارنة التكاليف الإجمالية للنقل باستخدام تلك الطرق الثلاث .

ج- اختبار مدى أمثلية الحل المقترح لأي من جداول الحلول المبدئية الناتجة في (ب) .

مع تحديد برنامج النقل الأمثل الذي يحقق أقل تكلفة نقل ممكنة .

٣) : تقوم إحدى شركات النقل والشحن بنقل منتجات شركة من فروعها الأربعة أ١ ، أ٢ ، أ٣ ، أ٤ إلى مراكز توزيع ثلاثة هي ب١ ، ب٢ ، ب٣ . والجدول التالي يوضح هامش ربح نقل وحدة السلعة بالجنيه من مصادر إنتاجها لمراكز التوزيع المختلفة كما يبين طاقات واحتياجات المصانع ومراكز التوزيع على الترتيب .

مراكز توزيع / مصانع	ب ١	ب ٢	ب ٣	الطاقة البيعية
أ ١	١,٥	٢,٦	١	٢٠٠٠
أ ٢	١,٨	٢,٢	٠,٦	٢٦٠٠
أ ٣	٠,٥	٣,٢	٠,٦	١٧٠٠
أ ٤	١,٨	٢,٦	٠,٩	٤٠٠٠
الاحتياجات	٣٠٠٠	٤٤٠٠	٣٨٠٠	

والمطلوب :

أ- صياغة مشكلة النقل في صورة نموذج خطي .

ب- حدد برنامج النقل المثل الخاص بشركة النقل والشحن بما يؤدي إلى تعظيم أرباحها إلى أقصى حد ممكن .

٤) : تمتلك شركة أسمدة ثلاثة مخازن تقدم من خلالها عبوات الأسمدة (بالجوال) إلى أربعة مراكز أو منافذ للتوزيع . والجدول التالي يبين تعريفة نقل الجوال من المخازن إلى مراكز التوزيع بالجنيه وطاقة المخازن واحتياجات مراكز التوزيع المختلفة :

مراكز توزيع / مصانع	ب ١	ب ٢	ب ٣	ب ٤	الطاقة البيعية
أ ١	١٣	١٤	١٣	٢٠	١٠٠٠٠
أ ٢	١٦	١٣	٢٠	١٢	١٢٠٠٠
أ ٣	١٩	١٢	١٧	١٥	١٥٠٠٠
الاحتياجات	٨٠٠٠	٩٠٠٠	١٠٠٠٠	٨٠٠٠	

والمطلوب :

أ- صياغة مشكلة النقل في صورة نموذج خطي .

ب- قارن بين جملة تكاليف النقل لأساليب النقل الثلاث .

ج- حدد برنامج النقل الأمثل لأحد الطرق الواردة في المطلوب (ب) .

٥) : مصنع لإنتاج الثلاجات لديه فرعين $أ_١$ ، $أ_٢$. فإذا كانت الكمية المنتجة للفرعين هما ١٥٠ ، ١٠٠ ثلاجة أسبوعيًا . ولقد تعهد هذا المصنع بتوريد منتجاته إلى ثلاثة توكيلات كبرى هي $م_١$ ، $م_٢$ ، $م_٣$ تحتاج إلى ٥٠ ، ٥٠ ، ١٥٠ ثلاجة أسبوعيًا على الترتيب . فإذا عملت أن تكلفة النقل والمناولة كما هي موضحة بالجدول التالي :

مراكز توزيع / فروع	$م_١$	$م_٢$	$م_٣$
$أ_١$	٢٥	٣٥	١٠
$أ_٢$	٢٠	٥	٨٠

والمطلوب :

أ- صياغة مشكلة النقل في صورة نموذج خطي .

ب- قارن بين جملة تكاليف النقل لأساليب النقل الثلاث .

ج- حدد برنامج النقل الأمثل لأحد الطرق الواردة في المطلوب (ب) .

٦) :فيما يلي جدول التحسين الثاني لمشكلة نقل باستخدام طريقة أدنى تكلفة:

أ$_{ر}$ \ ب$_{و}$	ب$_{١}$	ب$_{٢}$	ب$_{٣}$	ب$_{٤}$
أ$_{١}$	٢ (٢٠٠٠)	٤	٤ (٣٠٠٠)	صفر
أ$_{٢}$	٨	١٢	٨ (٥٠٠٠)	صفر
أ$_{٣}$	٤ (٥٠٠٠)	٨ (٣٠٠٠)	١٢	صفر

والمطلوب : أوجد ما يلي

١- الحل الأمثل للمشكلة مستخدمًا في ذلك طريقة الركن الشمالي الشرقي في تحديد جدول الحل المبدئي وطريقة التوزيع المعدل في اختبارك للأمثلية .

٢- الحل الأمثل للمشكلة مستخدمًا في ذلك طريقة ڤوچل التقريبية في تحديد جدول الحل المبدئي وطريقة حجر الوطء في اختبارك للأمثلية.

٧) :فيما يلي جدول توزيع وحدات من سلعة متجانسة طبقًا لطريقة أدنى تكلفة وتعريفة نقل الوحدة من تلك السلعة من مصادر إنتاجها إلى مراكز توزيعها :

بو / أر	ب١	ب٢	ب٣
أ١	٣	٥ (٢٠٠)	٤ (١٣٠٠)
أ٢	٢ (١٨٠٠)	٦	٨ (٧٠٠)
أ٣	٧	١ (١٠٠٠)	٩

والمطلوب :

مستخدمًا طريقة ڤوچل التقريبية في تحديد جدول الحل المبدئي وطريقة التوزيع المعدل في اختبار الأمثلية محددًا برنامج النقل الأمثل .

٨) :أوجد الحل الابتدائي لمشكلة النقل التالية :

١٠	٢٠	٥	٧	١٠
١٣	٩	١٢	٨	٢٠
٤	١٥	٧	٩	٣٠
١٤	٧	١	صفر	٤٠
٣	١٢	٥	١٩	٥٠
٦٠	٦٠	٢٠	١٠	

وذلك باستخدام كل من :

١- طريقة الركن الشمالي الشرقي .

٢- طريقة أدنى تكلفة .

٣- طريقة ڤوچل التقريبية .

ثم أوجد الحل الأمثل باستخدام أفضل حل ابتدائي .

٩) :حل مشكلة النقل التالية باستخدام طريقة ڤوچل التقريبية في تحديد جدول الحل المبدئي وطريقة التوزيع المعدل في تحديد الحل الأمثل

٥	١	صفر	٢٠
٣	٢	٤	١٠
٧	٥	٢	١٥
٩	٦	صفر	١٥
٥	١٠	١٥	

١٠) :شركة لها مصنعين أ$_{١}$ ، أ$_{٢}$ لإنتاج سلعة واحدة متجانسة وهناك ثلاثة مراكز لتوزيع تلك السلعة هي م$_{١}$ ، م$_{٢}$ ، م$_{٣}$. فإذا كانت الكمية المعروضة والمطلوبة من تلك السلعة وتكلفة نقل الوحدة الواحدة من السلعة من المصنعين لمراكز التوزيع موضحة بالجدول التالي :

مراكز التوزيع	م$_{١}$	م$_{٢}$	م$_{٣}$
الاحتياجات	٥٠	٥٠	١٥٠
تكلفة نقل السلعة من المصنع أ$_{١}$	٢٥	٣٥	١٠
تكلفة نقل السلعة من المصنع أ$_{٢}$	٢٠	٥	٨٠
إمكانيات المصنع أ$_{١}$	١٥٠ وحدة سلعة		
إمكانيات المصنع أ$_{٢}$	٥٠ وحدة سلعة		

والمطلوب :

أ- صياغة مشكلة النقل في صورة نموذج خطي .

ب- قارن بين جملة تكاليف النقل لأساليب النقل الثلاث .

ج- مستخدمًا أفضل الحلول الناتجة في (ب) حدد برنامج النقل الأمثل .

الفصل الرابع
نظرية المباريات Games Theory

المباراة : هي عبارة عن موقف تنافسي بين أشخاص أو مجموعات تسمى باللاعبين وتجرى هذه المباراة طبقًا لقواعد موضوعة مسبقًا ويعائد معلوم . ولكل لاعب خططه أو استراتيجياته المعلومة لدى طرفي المباراة لكن لا يمكن التنبؤ بصورة مؤكدة عن أي من هذه الاستراتيجيات سيتبعها أحد اللاعبين عند بداية المباراة .

هذا ويعد مكسب أحد طرفي المباراة بمثابة خسارة للطرف الآخر . وتسمى هذه الحالة بمباراة المجموع يساوي الصفر . حيث يكون مجموع المكسب والخسارة للاعبين مساويًا للصفر .

هذا ويتم التعبير عن المباراة في شكل مصفوفي . حيث يلعب أحد طرفي المباراة الصفوف [حيث تساوي عدد صفوف المصفوفة عدد خططه أو استراتيجياته] بينما يلعب اللاعب الآخر الأعمدة [حيث تساوي عدد أعمدة المصفوفة عدد خططه أو استراتيجياته]

ب

<u>فمثلاً : المباراة:</u> الاستراتيجية **(١) (٢)**

$$
\text{أ}\quad
\begin{array}{c}
(١)\\
(٢)
\end{array}
\begin{bmatrix}
٢ & ٣\\
-١ & -٢
\end{bmatrix}
$$

والمصفوفة المعبرة عن المباراة والتي تسمي بمصفوفة العائد تعني أن :

- **العناصر الموجبة في المصفوفة تعني مكاسب اللاعب (ا) الذي تمثل استراتيجياته في الصفوف ٠أما الأرقام السالبة فتوضح مكاسب اللاعب (ب) الذي تمثل استراتيجياته في الأعمدة .**

<u>وطبقًا لمصفوفة العائد من المباراة فإن:</u>

- إذا لعب (أ) باستراتيجيته الأولي فإنه يكسب (٢) نقطه من اللاعب (ب) إذا لعب (ب) باستراتيجيته الأولي بينما يكسب (أ) ٣ نقطة من اللاعب (ب) إذا لعب اللاعب (ب) باستراتيجيته الثانية .
- إما إذا لعب (أ) باستراتيجيته الثانية فانه يخسر (١) نقطه لصالح (ب) إذا لعب (ب) باستراتيجيته الأولي في حين يخسر اللاعب (أ) (٢) نقطة لصالح (ب) إذا لعب اللاعب (ب) باستراتيجيته الثانية .

ومن هنا فان اللاعب (أ) الذي يلعب الصفوف سيكون حريصًا على اللعب باستراتيجيته الأولي لأنها تحقق مكاسب وهنا يدرك (ب) الموقف ليلعب باستراتيجيته الأولى كذلك ليقلل خسارته لأقل حد ممكن . ومن ثم فان نقطة التعادل هي نقطة تلاقى الاستراتيجيات الأولى لـ (أ) والأولى لـ (ب) وهنا يكسب (أ) عدد (٢) نقطة ويخسر (ب) عدد (٢) نقطة ومن ثم فالمجموع الكلى هو ٢-٢= صفر

<u>تحديد نقطة التعادل للمباراة والاستراتيجيات الخالصة : [نقطة السرج - نقطة الركاب – نقطة التوازن]</u>

Pure Strategies and The Saddle Point

Minimax criterion : (قاعدة أكبر أقل القيم أو أقل أكبر القيم)

في أي مباراة [مصفوفة مربعة أو مستطيلة] يتم إضافة عمود علي يسار المصفوفة توضع فيه أقل القيم في كل صف وكذلك يضاف صف أسفل المصفوفة توضع فيه أكبر قيم كل عمود . فإذا كانت أقل أكبر القيم في العمود المضاف مساوية لأكبر أقل القيم في الصف مضاف فيقال أن للمباراة نقطة سرج أو نقطة تعادل وعند هذه النقطة تتحدد الاستراتيجيات المثلى للاعبين والتي تسمى بالاستراتيجيات الخالصة وكذلك تتحدد قيمة المباراة .

مثال (١) : إذا كانت لديك مصفوفة المباراة التالية :

ب

أ	٣	١-
	٤	٣

والمطلوب تحديد نقطة التعادل لتلك المباراة .

الحل :

ب

	الاستراتيجية (١)	(٢)	أقل القيم للصف
أ (١)	٣	١-	١-
(٢)	٤	٣	(٣) أكبر الأقل للصفوف
أكبر القيم في العمود	٤	(٣)	=

أقل الأكبر للأعمدة

∴ نقطة التعادل حينما يلعب اللاعب (أ) استراتيجيته الثانية واللاعب (ب) استراتيجيته الثانية وحينئذ يكسب اللاعب أ (٣) نقطة ويخسر اللاعب(ب) ٣ نقطة ومن ثم فقيمة المباراة = ٣ – ٣ = صفر .

وتسمى مثل هذه المباراة بمباراة اللاعبين بالنتيجة مساوية صفراً Two-Person Zero – Sum Games

- **<u>تحديد الاستراتيجيات المثلى للاعبين وكذا قيمة المباراة حينما لا توجد نقطة توازن في المباراة: [الاستراتيجيات المركبة أو المختلطة Mixed Strategies]</u>**

<u>أولاً : مصفوفة المباراة من درجة و ٢ × ٢</u> : – إذا لم توجد نقطة توازن للمباراة فإن حل المباراة يكون بإحدى الطريقتين التاليتين : –

أ – الطريقة الجبرية :–

و هنا يفترض الآتي :

$$\begin{array}{cc} & \text{ب} \\ & \begin{array}{cc} (١) & (٢) \end{array} \\ \text{أ} \begin{array}{c} (١) \\ (٢) \end{array} & \begin{bmatrix} \text{س}_{١١} & \text{س}_{٢١} \\ \text{س}_{١٢} & \text{س}_{٢٢} \end{bmatrix} \end{array}$$

١- نفرض أن لاعب الصفوف يلعب استراتيجيته الأولى باحتمال (أو بنسبة من وقته) يعادل (ك) ومن ثم فهو يلعب باستراتيجيته الثانية باحتمال مكمل (١- ك) .

٢- كذلك نفرض أن لاعب الأعمدة يلعب استراتيجيته الأولى باحتمال (بنسبة وقت) يعادل (ل) ومن ثم فهو يلعب استراتيجيته الثانية باحتمال مكمل (١ - ل)

٣- لتقدير قيم (ك ، ل) فإنه بافتراض تساوي فرص الكسب بالنسبة للاعب (أ) في حالة ما إذا لعب اللاعب (ب) استراتيجيته الأولى أو الثانية فيكون :

$$\begin{array}{cc} & \text{ب} \\ & \begin{array}{cc} (١) & (٢) \\ (\text{ل}) & (١-\text{ل}) \end{array} \\ \text{أ} \begin{array}{c} (١) \rightarrow (\text{ك}) \\ (٢) \rightarrow (١-\text{ك}) \end{array} & \begin{bmatrix} \text{س}_{١١} & \text{س}_{٢١} \\ \text{س}_{١٢} & \text{س}_{٢٢} \end{bmatrix} \end{array}$$

∴ س$_{١١}$ × ك + س$_{١٢}$ × (١ - ك) = س$_{٢١}$ × ك + س$_{٢٢}$ × (١ - ك)

ومن هذه المعادلة يتم استنتاج قيمة (ك)

كذلك فإنه بافتراض تساوي فرص الكسب بالنسبة للاعب (ب) في حالة ما إذا لعب اللاعب (أ) استراتيجيته الأولى أو الثانية فيكون : -

س$_{١١}$ × ل + س$_{٢١}$ × (١ - ل) = س$_{١٢}$ × ل + س$_{٢٢}$ × (١ - ل)

ومن هذه المعادلة يتم استنتاج قيمة (ل) .

٤ – بالتعويض عن قيم (ك ، ل) كاحتمالات (أو نسبة من الوقت) يمكن حساب قيمة المباراة = مجموع حواصل ضرب عناصر مصفوفة المباراة × الاحتمالات المناظرة في الصفوف والأعمدة .

فإذا كان الناتج موجباً فهذا يشير إلى مكاسب للاعب الصفوف. والعكس صحيح ، والناتج هو بمثابة قيمة المباراة في المتوسط . أما عن الاستراتيجيات المثلى للاعبين فهي عبارة عن نقطة تلاقي الصف والعمود ذوي الاحتمالات الأعلى نسبياً .

ب – <u>طريقة المصفوفات في تحديد الاستراتيجيات المثلى وقيمة المباراة</u> : –

٢ × ٢ للمباراة:

الخطوات : – بافتراض أن مصفوفة اللعب هي ع = $\begin{bmatrix} \text{س}_{\text{٢١}} & \text{س}_{\text{١١}} \\ \text{س}_{\text{٢٢}} & \text{س}_{\text{١٢}} \end{bmatrix}$

١– إيجاد قيمة محدد المصفوفة ع = | ع | = حاصل ضرب القطر الرئيسي – حاصل ضرب القطر العكسي= $\text{س}_{\text{١١}} \cdot \text{س}_{\text{٢٢}} - \text{س}_{\text{٢١}} \cdot \text{س}_{\text{١٢}}$

٢ – إيجاد مدور مصفوفة المرافقات : –

وهي في حالة المصفوفة ذات الدرجة الثانية (٢ × ٢) يتم استبدال عناصر القطر الرئيسي أماكنهم مع تغيير إشارات القطر العكسي . أى أن:

$$\begin{bmatrix} -\text{س}_{\text{٢١}} & \text{س}_{\text{٢٢}} \\ \text{س}_{\text{١١}} & -\text{س}_{\text{١٢}} \end{bmatrix}$$

٣ – إيجاد مصفوفة المرافقات = مدور مدور مصفوفة المرافقات =

$$\begin{bmatrix} س_{٢٢} & -س_{١٢} \\ -س_{٢١} & س_{١١} \end{bmatrix}$$

٣- **تحديد احتمالات اللعب بالاستراتيجيات لكلا اللاعبين حيث أن:-**

- **لاعب الصفوف = $\dfrac{(١ \quad ١)\ [\text{مرور مصفوفة المرافقات}]}{(١ \quad ١)\ [\text{مصفوفة المرافقات}] \begin{bmatrix} ١ \\ ١ \end{bmatrix}}$**

- **أما اللاعب**

الأعمدة = $\dfrac{(١ \quad ١)\ [\text{مصفوفة المرافقات}]}{(١ \quad ١)\ [\text{مصفوفة المرافقات}] \begin{bmatrix} ١ \\ ١ \end{bmatrix}}$

أي نفس المقام السابق

ومـن خـلال الاحتمـالات المسـتنتجة تتحـدد نقطـة تلاقـي الاسـتراتيجيات ذات الاحتمالات الأعلى نسبياً بالنسبة للاعبين لتعبر عن الاستراتيجية المثلى لكل لاعب .

أما عن قيمة المباراة = $\dfrac{|\ ع\ |}{(١ \quad ١)\ [\text{مصفوفة المرافقات}] \begin{bmatrix} ١ \\ ١ \end{bmatrix}}$

(أي نفس المقام السابق)

<u>ثانياً : إذا كانت مصفوفة اللعب مستطيلة من درجة</u> (٢ × م) أو (م ×٢) :

وهنا توجد طريقتين للحل : -

١- <u>الحل بالسيادة :- Dominance</u> : وهنا يتم اختصار المصفوفة لكي تصبح من درجة ٢ ×٢ لكي يتم حلها بإحدى الطريقتين السابقتين :

[الجبرية أو المصفوفات] حيث يتم الآتي:

أ - <u>إذا كانت المصفوفة من درجة</u> (م × ٢) : -

فإنه يتم تطبيق مبدأ السيادة من وجهة نظر لاعب الصفوف حيث نقوم باختيار أفضل ثلاثة أو كحد أدنى أثنين من استراتيجياته [من العدد(م) من استراتيجياته أو الصفوف] لكي تسود على الاستراتيجيات الأخرى ومن ثم نختصر عدد الصفوف إلى ثلاثة أو كحد أدنى صفين فقط من استراتيجياته .

ب – <u>إذا كانت المصفوفة من درجة</u> (٢ × م) : –

فإنه يتم تطبيق مبدأ السيادة من وجهة نظر لاعب الأعمدة حيث نقوم باختيار أفضل ثلاثة أو كحد أدنى أثنين من استراتيجياته [من العدد(م) من استراتيجياته أو الأعمدة] لكي تسود على الاستراتيجيات الأخرى ومن ثم نختصر عدد الأعمدة إلى ثلاثة أو كحد أدنى عمودين فقط من استراتيجياته.

جـ – حل المصفوفة الناتجة بعد تطبيق مبدأ السيادة بإحدى الطريقتين السابقتين (الطريقة الجبرية – أو طريقة المصفوفات ٢ × ٢) .

<u>مثال</u> : –

حل المباراة التالية : –

$$\begin{array}{cc} & \text{ص} \\ & \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -٤ & -١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{س}$$

<u>الحـــل</u> : –

مصفوفة المباراة المعطاة لا تحتوي على نقطة تعادل يمكن اختصاراها لتصبح من درجة ٢ × ٢ بدلاً من ٣ × ٢ و ذلك من خلال تطبيق مفهوم السيادة من وجهة نظر لاعب الصفوف (س) . حيث أنه بملاحظة عناصر مصفوفة المباراة لا شك أن اللاعب (س) سيكون حريصاً على إلغاء استراتيجيته الثانية و التي تعتبر كافة عناصرها خسارة لهذا اللاعب . لذا فباستخدام مبدأ السيادة يتم إلغاء الصف الثاني من تلك المباراة فتصبح من درجة ٢ × ٢

على النحو التالي:

$$\begin{array}{cc} & \text{ص} \\ \text{س} & \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} \end{array}$$

وبعد تطبيق مبدأ السيادة يتم اختبار ماهية وجود نقطة سرج (تعادل) من عدمه ومن ثم ماهية وجود استراتيجيات خالصة من عدمه و ذلك من خلال الآتي :

$$\begin{array}{cccc} & \text{ص} & & \text{أقل قيم الصفوف} \\ \text{س} & \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} & \begin{array}{c} ١ \\ ١ \end{array} & \text{أكبر أقل قيم الصفوف } ١ \\ \text{أكبر قيم الأعمدة} & ٣ \quad\quad ٢ & \neq & \end{array}$$

أقل أكبر قيم الأعمدة ٢

ومن ثم فلا توجد نقطة تعادل . لذا فلا توجد استراتيجيات خالصة للعب أي أن هناك استراتيجيات مركبة ولتحديدها يتم حل المباراة أما باستخدام الطريقة الجبرية أو بطريقة المصفوفات (استكمل الحل)

<u>ملحوظة</u> : – يمكن حل المباراة الأصلية للمثال السابق دون تطبيق مبدأ السيادة من خلال المصفوفات الفرعية التي سترد فيما بعد وذلك لأن تطبيق مبدأ السيادة من وجهة نظر أحد اللاعبين يفيد بأن هناك تحيزًا لصالح هذا اللاعب حينما نستبعد أحد أو بعض إستراتيجيات أحد اللاعبين.

<u>مثال</u> : حل المباراة التالية :

$$\begin{array}{cc} & \text{ص} \\ \text{س} & \begin{bmatrix} -١ & -٦ & ٣ & ١ \\ ٧ & -٤ & ٢ & \text{صفر} \end{bmatrix} \end{array}$$

<u>**الحـــل:**</u>

هذه المباراة وإن كانت تحتوي على نقطة تعادل (استراتيجات خالصة) إلا أن مصفوفة المباراة المعطاة من درجة ٢ × ٤ يمكن اختصارها بتطبيق مبدأ السيادة لتصبح من درجة ٢ × ٢ وذلك من خلال البحث عن مصلحة اللاعب (ص) في إلغاء استراتيجيتين من استراتيجياته الأربعة. فلا شك من مصلحة لاعب الأعمدة (ص) إلغاء العمودين الثالث والرابع اللذان تشكل عناصرهم خسائر للاعب الأعمدة . وإن كان هناك من يرى إلغاء العمود الأول والثالث . لذا فإن مبدأ السيادة وإن كان يعطي دليلاً على تعدد الاختيارات لمصلحة أحد اللاعبين فإنه يترتب عليه حلولاً مختلفة نتيجة اختلاف وجهات النظر في تطبيق مبدأ السيادة . وعموماً إذا تم إلغاء العمودين الأخيرين من مصفوفة المباراة فتصبح المباراة على الصورة :

$$\begin{array}{cc} \text{ص} & \\ \begin{bmatrix} ٦- & ١- \\ ٤- & ٧ \end{bmatrix} & \text{س} \end{array}$$

ثم يتم البحث عن ماهية وجود نقطة تعادل ومن ثم ماهية وجود استراتيجيات خالصة من عدمه .

٢ – <u>الحل باستخدام المصفوفات الفرعية للمباراة من درجة ٢×م أو م×٢:-</u>

إذا كان من الصعب اختصار مصفوفة اللعب باستخدام مبدأ السيادة ، وتجنبًا للتحيز ضد أحد اللاعبين فإننا نقوم بتقسيم المصفوفة الأصلية إلى عدد التباديل الممكنة من المصفوفات الفرعية وكل منها من درجة (٢ × ٢) . ثم يتم حل هذه المصفوفات الفرعية كمباريات عادية لتحديد احتمالات الاستراتيجيات وكذا قيمة المباراة وذلك بعد اختبار ماهية وجود نقطة تعادل من عدمه أولاً لكل مباراة .

مع ملاحظة يتم رفض حلول المصفوفات الفرعية التي تعطي احتمالات سالبة أو تزيد عن الوحدة . ثم يتم اختيار الاستراتيجيات التي تحقق قواعد الاحتمالات [أي بأن تكون كسرية موجبة محصورة بين الصفر والواحد الصحيح] .

وتكون الاستراتيجيات المثلى هي نقطة تلاقي الاستراتيجيات ذات القيم الأعلى من حيث احتمالاتها .

<u>ملحوظة</u> : من أهم عيوب تطبيق مبدأ السيادة في حل المباريات بعد اختصارها لتصبح من درجة ٢ × ٢ أنها تستبعد عناصر في مصفوفة المباراة وهو ما يفيد التحيز لأحد اللاعبين .

<u>ثالثاً : – إذا كانت مصفوفة المباراة من أي درجة أعلى من</u> (٢ × ٢) أي من درجة (٣ × ٢) أو (٢ × ٣) أو (٣ × ٣) <u>[أسلوب البرمجة الخطية]</u>

إذا لم يتواجد نقطة تعادل (سرج) للمصفوفة وكذا كان من الصعب تطبيق مبدأ السيادة أو صعب تطبيق أسلوب المصفوفات الفرعية فإن البرمجة الخطية تقدم وسيلة الحل كالآتي : –

بفرض أن مصفوفة اللعب ع من درجة ٣ × ٣ فإنه يتم الآتي : –

$$\begin{array}{c c}
\text{س}/\text{ص} & \begin{array}{ccc} (\text{ص}_{١}) & (\text{ص}_{٢}) & (\text{ص}_{٣}) \end{array} \\
\begin{array}{c} (\text{س}_{١}) \\ (\text{س}_{٢}) \\ (\text{س}_{٣}) \end{array} & \begin{bmatrix} \text{ن}_{١١} & \text{ن}_{٢١} & \text{ن}_{٣١} \\ \text{ن}_{١٢} & \text{ن}_{٢٢} & \text{ن}_{٣٢} \\ \text{ن}_{١٣} & \text{ن}_{٢٣} & \text{ن}_{٣٣} \end{bmatrix}
\end{array}$$

فيمكن إيجاد احتمالات استراتيجيات لاعب الصفوف من خلال حل النموذج الخطي التالي :

نفرض أن لاعب الصفوف يلعب استراتيجياته الثلاث باحتمالات أو بنسب هي $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ على الترتيب وأن لاعب الأعمدة يلعب استراتيجياته باحتمالات أو نسب هي $ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ ، $ص_{٣}$.

ولإيجاد احتمالات استراتيجيات لاعب الصفوف يتم حل النموذج الخطي التالي:

المطلوب إيجاد قيم $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ التي تجعل الدالة:

$د\,(س) = \sum_{ر=١}^{ن} س_{ر}$ (تقليل) أقل ما يمكن

بشرط : –

١) $ن_{١١}\, س_{١} + ن_{١٢}\, س_{٢} + ن_{١٣}\, س_{٣} \geq ١$

٢) $ن_{٢١}\, س_{١} + ن_{٢٢}\, س_{٢} + ن_{٢٣}\, س_{٣} \geq ١$

٣) $ن_{٣١}\, س_{١} + ن_{٣٢}\, س_{٢} + ن_{٣٣}\, س_{٣} \geq ١$

$س_{ر} \geq$ صفر حيث $ر = ١ - ٣$

ولإيجاد احتمالات استراتيجيات لاعب الأعمدة يكون المطلوب هو إيجاد قيم $ص_{ر}$ حيث $ر = ١ - ٣$ التي تجعل الدالة:

$د\,(ص) = \sum_{ر=١}^{ن} ص_{ر}$ (تعظيم)

بشرط : –

١– $ن_{١١}\, ص_{١} + ن_{٢١}\, ص_{٢} + ن_{٣١}\, ص_{٣} \leq ١$

٢– $ن_{١٢}\, ص_{١} + ن_{٢٢}\, ص_{٢} + ن_{٣٢}\, ص_{٣} \leq ١$

٣– $ن_{١٣}\, ص_{١} + ن_{٢٣}\, ص_{٢} + ن_{٣٣}\, ص_{٣} \leq ١$

$ص_{ر} \geq$ صفر حيث $ر = ١ - ٣$

لاحظ أن النموذج الخطي للاعب الأعمدة هو بمثابة النموذج الثنائي (البديل) للنموذج الخطي الخاص بلاعب الصفوف.

هذا و بحل أي من النموذجين (ويفضل حل المباراة من زاوية لاعب الأعمدة) وذلك بطريقة السمبلكس العادية والناتج هي احتمالات لعب لاعب

الأعمدة استراتيجياته المختلفة . كما يمكن استنتاج الاستراتيجيات الخاصة بلاعب الصفوف من خلال العلاقة فيما بين النموذج الأصلي والنموذج الثنائي. حيث يتم استنتاج احتمالات لعب لاعب الصفوف استراتيجياته من خلال معاملات المتغيرات المتممة في صف اختبار أمثلية جدول الحل الأمثل للاعب الأعمدة .

<u>مثال (٢)</u> : حدد الاستراتيجيات المثلى وكذا قيمة المباراة لمصفوفة المباراة التالية :

$$\begin{array}{cc} & \text{ب} \\ \text{أ} & \begin{bmatrix} ٦- & ٣- & ٩ \\ ٧ & ٦ & ٥ \end{bmatrix} \end{array}$$

<u>الحـــــل</u> :

لتحديد الاستراتيجيات المثلى وقيمة المباراة لمصفوفة المباراة يجب أولاً اختبار ماهية وجود نقطة تعادل من عدمه على النحو التالي :

$$\begin{array}{cccc} \text{قيم أقل الصفوف} & & \text{ب} & \\ ٦- & \begin{bmatrix} ٦- & ٣- & ٩ \\ ٧ & ٦ & ٥ \end{bmatrix} & & \text{أ} \\ ٥ \ \text{أكبر أقل قيم الصفوف} & & & \\ & ٧ \quad ٦ \quad ٩ & \text{قيم أكبر الأعمدة} & \end{array}$$

أقل اكبر الأعمدة ≠

عدم تساوي قيمة أكبر الأقل قيم في الصفوف مع قيمة أقل الأكبر في قيم الأعمدة تفيد عدم وجود نقطة تعادل ومن ثم لا توجد استراتيجيات خالصة بل ستكون هناك استراتيجيات مركبة .

وهنا يتم تطبيق فكرة المصفوفات الفرعية على النحو التالي :

(I) المصفوفة الأولى

$$\begin{bmatrix} ٣- & ٩ \\ ٦ & ٥ \end{bmatrix}$$

(II) المصفوفة الثانية

$$\begin{bmatrix} ٦- & ٩ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix}$$

(*III*) المصفوفة الثالثة $\begin{bmatrix} ٦- & ٣- \\ ٧ & ٦ \end{bmatrix}$

يتم حل كل من المباريات الثلاث على النحو التالي :

(*I*) <u>المصفوفة الفرعيـة الأولـى</u> : يتم فـي البدايـة اختبـار ماهيـة وجـود نقطـة تعادل من عدمه على النحو التالي :

$$\begin{array}{cccc} & & & \text{أقل قيم الصفوف} \\ [\,ع\,] = & \begin{bmatrix} ٩ & ٣- \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix} & & ٣- \\ & & & ٥ \;\; \text{أكبر الأقل} \\ \text{أكبر قيم الأعمدة} & ٩ \quad ٦ & \ne & \\ & \text{أقل الأكبر} & & \end{array}$$

عدم التساوي ما بين أكبر أقل قيم الصفوف مـع أقل أكبر قيم الأعمدة فهذا يفيد عدم وجود نقطة تعادل ومن ثم يتم استكمال الحل على النحو التالي :

$$|ع| = \begin{vmatrix} ٩ & ٣- \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix} = ٩ \times ٦ - (٣-) \times ٥$$

$$= ٥٤ + ١٥ = ٦٩$$

، مدور مصفوفة المرافقات $(ع^{-\,/}) = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٥- & ٩ \end{bmatrix}$

∴ مصفوفة المرافقات $ع^{-} = \begin{bmatrix} ٦ & ٥- \\ ٣ & ٩ \end{bmatrix}$

∴ نسب استراتيجيات لاعب الصفوف $= \dfrac{(١ \quad ١)\; ع^{-\,/}}{(١ \quad ١)\,(ع^{-})\begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}}$

$$= \dfrac{(١ \quad ١)\begin{pmatrix} ٦ & ٣ \\ ٥- & ٩ \end{pmatrix}}{(١ \quad ١)\begin{pmatrix} ٦ & ٥- \\ ٣ & ٩ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{(\text{١} \quad \text{١٢})}{\text{١٣}} = (\text{١}/\text{١٣} \quad ، \quad \text{١٢}/\text{١٣})$$

، نسب استراتيجيات لاعب الأعمدة

$$= \frac{(\text{١} \quad \text{١})\ \text{ع}^{-}}{(\text{١} \quad \text{١})\ (\text{ع}^{-}) \begin{pmatrix}\text{١}\\ \text{١}\end{pmatrix}}$$

$$= \frac{(\text{١} \quad \text{١}) \begin{pmatrix}\text{٦} & \text{-٥}\\ \text{٣} & \text{٩}\end{pmatrix}}{(\text{١} \quad \text{١}) \begin{pmatrix}\text{٦} & \text{-٥}\\ \text{٣} & \text{٩}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\text{١}\\ \text{١}\end{pmatrix}}$$

$$= \frac{(\text{٩} \quad \text{٤})}{\text{١٣}} = (\text{٩}/\text{١٣} \quad ، \quad \text{٤}/\text{١٣})$$

، وقيمة المباراة $= \dfrac{|\text{ع}|}{\text{المقام السابق}} = \text{٦٩}/\text{١٣}$

وهو ما يفيد مكسب للاعب الصفوف ويعادل ٦٩/١٣ وخسارة للاعب الأعمدة بنفس القيمة ، أما عن الاستراتيجيات المثلى للاعبين فهي الاستراتيجيات الأكثر احتمالاً.

(*II*) <u>المصفوفة الفرعية الثانية</u> : يتم في البداية اختبار ماهية وجود نقطة تعادل من عدمه على النحو التالي :

$$\begin{array}{lcc}
 & & \text{أقل قيم الصفوف}\\
[\text{ع}] = & \begin{bmatrix}\text{٩} & \text{-٦}\\ \text{٥} & \text{٧}\end{bmatrix} & \begin{matrix}\text{-٦}\\ \text{٥}\end{matrix} \ \text{أكبر الأقل}\\
\text{أكبر قيم الأعمدة} & \text{٩} \quad \text{٧} & \\
 & \text{أقل الأكبر} &
\end{array}$$

$\text{٧} \neq \text{٥}$

عدم التساوي ما بين أكبر أقل قيم الصفوف مع أقل أكبر قيم الأعمدة فهذا يفيد عدم وجود نقطة تعادل ومن ثم يتم استكمال الحل على النحو التالي :

$$|ع| = \begin{vmatrix} ٩ & -٦ \\ ٥ & ٧ \end{vmatrix} = ٩ \times ٧ - (-٦) \times ٥ = ٦٣ - (-٣٠) = ٩٣$$

، مدور مصفوفة المرافقات $(ع^{-/}) = \begin{bmatrix} ٧ & ٦ \\ -٥ & ٩ \end{bmatrix}$

∴ مصفوفة المرافقات $ع^{-} = \begin{bmatrix} ٧ & -٥ \\ ٦ & ٩ \end{bmatrix}$

∴ نسب استراتيجيات لاعب الصفوف

$$= \frac{(١ \quad ١)\ ع^{-/}}{(١ \quad ١)\ (ع^{-})\ \begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{(١ \quad ١) \begin{pmatrix} ٧ & ٦ \\ -٥ & ٩ \end{pmatrix}}{(١ \quad ١) \begin{pmatrix} ٧ & -٥ \\ ٦ & ٩ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{(٢ \qquad ١٥)}{١٧} = \left({}^{٢}/_{١٧} \quad ، \quad {}^{١٥}/_{١٧} \right)$$

، نسب استراتيجيات لاعب الأعمدة

$$= \frac{(١ \quad ١)\ ع^{-}}{(١ \quad ١)\ (ع^{-})\ \begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{(١ \quad ١) \begin{pmatrix} ٧ & -٥ \\ ٦ & ٩ \end{pmatrix}}{(١ \quad ١) \begin{pmatrix} ٧ & -٥ \\ ٦ & ٩ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}}$$

$$\left({}^{٤}/_{١٧} \quad ، \quad {}^{١٣}/_{١٧} \right) = \frac{(٤ \qquad ١٣)}{١٧} =$$

$${}^{٩٣}/_{١٧} = \frac{|ع|}{\text{المقام السابق}} = \text{، وقيمة المباراة}$$

وهو ما يفيد مكسب للاعب الصفوف بما يعادل ${}^{٩٣}/_{١٧}$ وخسارة للاعب الأعمدة بنفس القيمة ، أما عن الاستراتيجيات المثلى للاعبين فهي الأكثر احتمالاً.

(*III*) <u>المصفوفة الفرعية الثالثة</u> : يتم في البداية اختبار ماهية وجود نقطة تعادل من عدمه على النحو التالي :

أقل قيم الصفوف

$$\begin{array}{c|cc} -٦ & -٦ & -٣ \\ ٦ & ٧ & ٦ \\ \hline & ٧ & ٦ \end{array} \quad = [ع]$$

أكبر الأقل

أكبر قيم الأعمدة

أقل الأكبر

وجود نقطة تعادل تفيد أن الاستراتيجيات المثلى للاعبين استراتيجيات خالصة وهي الاستراتيجية الثانية للاعب الصفوف والأولى للاعب الأعمدة وعند ذلك فإن قيمة المباراة بمثابة مكسب للاعب الصفوف بما يعادل ستة نقاط وخسارة للاعب الأعمدة بنفس القيمة ، ومن ثم تصبح المباراة صفرية

<u>مثال (٣)</u> : أوجد الاستراتيجيات المثلى لكلاً من اللاعبين أ ، ب وكذلك قيمة المباراة لنتيجة المباراة التالية : ب

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} \quad \text{أ}$$

الحل : لتحديد الاستراتيجيات المثلى للاعبين أ ، ب يتم اختبار ماهية وجود نقطة تعادل (سرج) من عدمه أولاً وذلك على النحو التالي:

أقل قيم الصفوف

٢ ٤ ← ٢ أكبر الأقل

١ −٣ ← −٣

أكبر قيم الأعمدة ٢ ٤ =

أقل الأكبر

وجود نقطة تعادل يفيد بأن الاستراتيجيات المثلى للاعبين استراتيجيات خالصة ونقطة التعادل تفيد بأن لاعب الصفوف سيلعب استراتيجيته الأولى بنسبة ١٠٠% من وقته وعندئذ فإن لاعب الأعمدة يأخذ حذره ويلعب باستراتيجيته الأولى وذلك بنسبة ١٠٠% من وقته وعند نقطة التعادل هذه فإن قيمة المباراة هي ٢ نقطة كمكسب للاعب الصفوف وخسارة للاعب الأعمدة بحيث تصبح قيمة المباراة تساوي +٢−٢= صفر .

<u>مثال (٤)</u> : (السؤال الأول لدور مايو ٢٠٠٥) :

حدد الاستراتيجيات المثلى وقيمة المباراة لكل من اللاعبين أ ، ب وذلك من خلال مصفوفة المباراة التالية : ب

أ

٦	٤	−١	صفر	−٣
٣	٢	−٤	٥	−١

<u>الحـــل</u> :

لتحديد الاستراتيجيات المثلى وقيمة المباراة يتم في البداية اختبار ماهية وجود نقطة تعادل (سرج) من عدمه وذلك على النحو التالي :

	ب					أقل قيم الصفوف
أ	٦	٤	-١	صفر	-٣	-٣ أكبر أقل قيم الصفوف
	٣	٢	-٤	٥	-١	-٤
أكبر قيم الأعمدة	٦	٤	-١	٥	-١ أقل أكبر قيم الأعمدة	≠

عدم تساوي قيمة أكبر أقل قيم الصفوف مع قيمة أقل أكبر قيم الأعمدة تفيد عدم وجود نقطة تعادل (سرج) . ومن ثم لا توجد استراتيجيات خالصة بل هناك استراتيجيات مركبة .

وحيث أن درجة مصفوفة المباراة هي ٢×٥ لذا يفضل تطبيق مبدأ السيادة على مصفوفة المباراة من وجهة نظر لاعب الأعمدة وذلك من أجل اختصار عدد أعمدة المصفوفة بما يخدم مصلحة لاعب الأعمدة . لذا يتم حذف العمود الأول والثاني حيث تشكل عناصرها خسائر للاعب الأعمدة فتصبح المصفوفة الناتجة بعد تطبيق مبدأ السيادة من درجة ٢×٣ على الصورة التالية :

-١	صفر	-٣
-٤	٥	-١

وعلى المصفوفة الأخيرة يتم اختبار ماهية وجود نقطة تعادل من عدمه مرة أخرى وذلك على النحو التالي :

				أقل قيم الصفوف
	-١	صفر	-٣	-٣ أكبر الأقل
	-٤	٥	-١	-٤
أكبر قيم الأعمدة	-١	٥	-١ أقل الأكبر	≠

وحيث أن قيمة أقل اكبر قيم الأعمدة لا تساوي قيمة أكبر الأقل لقيم الصفوف فهذا يفيد بعدم وجود نقطة تعادل ومن ثم عدم وجود استراتيجيات خالصة بل هناك استراتيجيات مركبة ، ولاستنتاج تلك الاستراتيجيات المركبة يكون ذلك من خلال استخدام إحدى الطريقتين إما الطريقة الجبرية أو طريقة المصفوفات الفرعية ،هذا وسيتم عرض الطريقة الجبرية على أحد المصفوفات الفرعية ولتكن المصفوفة التالية:

	ل	(١-ل)
ك	١-	٣-
(١-ك)	٤-	١-

<u>وليكن الحل باستخدام الطريقة الجبرية على المصفوفة الفرعية الثالثة.</u>

ونترك للطالب حل المصفوفتان الأخيرتان سواء بالطريقة الجبرية أو بطريقة المصفوفات.

بافتراض أن لاعب الصفوف يلعب استراتيجيته الأولى باحتمال (ك) ومن ثم احتمال أن يلعب استراتيجيته الثانية هو احتمال مكمل (١- ك) وكذلك بافتراض أن لاعب الأعمدة يلعب استراتيجيته الأولى باحتمال (ل) ومن ثم يلعب لاعب الأعمدة استراتيجيته الثانية باحتمال مكمل هو (١- ل) .

وبافتراض تساوي فرص كسب لاعب الصفوف سواء لعب لاعب الأعمدة باستراتيجيته الأولى أو الثانية فيكون :

- ك-٤(١- ك) = -٣ك - (١- ك)

- ك - ٤ + ٤ك = -٣ك - ١ + ك

٣ك + ٢ك = -١ + ٤

٥ك = ٣   ∴ ك = ٣/٥

ومن ثم فإن ١ - ك = ١ - ٣/٥ = ٢/٥

أي أن نسب أو احتمالات استراتيجيات لاعب الصفوف هي [٣/٥ ، ٢/٥] .
وكذلك بافتراض تساوي فرص كسب لاعب الأعمدة سواء لعب لاعب الصفوف باستراتيجيته الأولى أو الثانية فإن :

- ل – ٣ (١ – ل) = –٤ل – (١ – ل)
- ل – ٣ + ٣ل = – ٤ل – ١ + ل
٢ل + ٣ل = ٣ – ١   ∴ ٥ل = ٢
∴ ل = ٢/٥   ومن ثم فإن ١ – ل = ١ – ٢/٥ = ٣/٥
أي أن نسب أو احتمالات استراتيجيات لاعب الأعمدة هي [٢/٥ ، ٣/٥]
أي أن:

	٢/٥	٣/٥
٣/٥	-١	-٣
٢/٥	-٤	-١

أما عن قيمة المباراة فهي عبارة عن :
قيمة المباراة = -١ (٣/٥ × ٢/٥) -٣ (٣/٥ × ٣/٥) -٤ (٢/٥ × ٢/٥)
-١ (٢/٥ × ٣/٥)

= (-٦-٢٧-١٦-٦) / ٢٥ = -٥٥ / ٢٥ = -١١ / ٥

وكون قيمة المباراة سالبة فهذا يفيد بمكسب للاعب الأعمدة والذي يعادل ١١/٥ نقطة وخسارة للاعب الصفوف بنفس القيمة .
<u>ملحوظة</u> : يمكن حل مصفوفة المباراة الثالثة السابقة بعد تطبيق مبدأ السيادة باستخدام طريقة المصفوفات (على الطالب إجراء الحل بطريقة المصفوفات).

<u>مثـال (٥)</u> : حـدد نقطـة التعـادل ونـوع اسـتراتيجيات لكـل مـن اللاعبـين أ ، ب لمصفوفة المباراة التالية :

ب

$$\begin{bmatrix} ١٠ & ٤ & ٤ \\ ١ & ٣ & ٢ \\ ٧ & ٥ & ٦ \end{bmatrix} \quad \text{أ}$$

<u>الحــــل</u> :

لتحديد نقطة التعادل يتم الآتي :

أقل قيم الصفوف   ب

$$\begin{array}{c} ٤ \\ ١ \\ ٥ \end{array} \quad \begin{bmatrix} ١٠ & ٤ & ٤ \\ ١ & ٣ & ٢ \\ ٧ & ٥ & ٦ \end{bmatrix} \quad \text{أ}$$

اكبر أقل قيم الصفوف

$$\begin{array}{ccc} ١٠ & ٥ & ٦ \end{array}$$

أكبر قيم الأعمدة

= أقل أكبر قيم الأعمدة

تساوي قيمـة أكبـر أقل قيم الصفوف مـع قيمـة أقل أكبـر قيم الأعمدة يفيد أن هنـاك نقطـة تعـادل أي أن الاسـتراتيجيات خالصـة بالنسـبة للاعبـي الصـفوف والأعمدة . حيث سيلعب لاعب الصفوف (أ) باستراتيجيته الثالثة وذلك بنسبة أو احتمـال ١٠٠% مـن وقتـه ومقابـل ذلـك سـيلعب لاعـب الأعمـدة (ب) باستراتيجيته الثانية بنسبة ١٠٠% من وقته وعندها فإن قيمـة المبـاراة تكون صـفرية نظـرًا لأن القيمـة (٥) تفيـد مكسـب للاعـب الصـفوف بخمسـة نقـاط وخسارة للاعب الأعمدة (ب) بخمسة نقاط أي بنفس القيمة .

<u>مثـال (٦)</u> : أوجـد الاسـتراتيجيات المثلـى وقيمـة المبـاراة لمصـفوفة المبـاراة التالية:

$$\begin{array}{cc} & \text{ب} \\ \text{أ} & \begin{bmatrix} -٦ & -١ & ٤ \\ ٧ & -٢ & ٥ \end{bmatrix} \end{array}$$

<u>الحـــــــل</u> : لتحديـد الاسـتراتيجيات المثلـى وقيمـة المبـاراة نختبـر أولاً ماهيـة وجود نقطة تعادل من عدمه وذلك على النحو التالي :

$$\begin{array}{ccc} & & \text{أقل قيم الصفوف} \\ & \begin{bmatrix} -٦ & -١ & ٤ \\ ٧ & -٢ & ٥ \end{bmatrix} & \begin{array}{c} -٦ \\ -٢ \end{array} \;\text{أكبر أقل الصفوف} \\ \text{أكبر قيم الأعمدة} & \begin{array}{ccc} ٧ & -١ & ٥ \end{array} & \neq \\ & \text{أقل أكبر قيم الأعمدة} & \end{array}$$

لذا لا توجـد نقطـة تعادل ، ولتحديـد الاستراتيجيات المركبـة لتلـك المبـاراة وكـذا قيمة المباراة يتم الآتي:

<u>ملحوظة</u> : إذا كان لـدينا مصـفوفة مبـاراة مـن درجـة (٢×٣) أو (٣×٢) يفضـل عـدم تطبيـق مبـدأ السـيادة ويـتم الحـل باسـتخدام المصـفوفات الفرعيـة الـثلاث الناتجـة سـواء بالطريقـة الجبريـة أو بطريقـة المصـفوفات . لكـن إذا زادت درجـة المصفوفة عن (٢×٣) أو (٣×٢) بمعنى (٢×م) أو (م×٢) حيث (م > ٣) فيفضل تطبيق مبدأ السيادة والوصول بمصفوفة المباراة لمصفوفة من درجـة ٢×٣ أو ٣×٢ .

بالرجوع للمثال السابق : واستخدام المصفوفات الفرعية وهي :

(I) <u>المصفوفة الفرعية الأولى</u> :

أقل قيم الصفوف

$$ع = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -6 \\ -2 \text{ أكبر الأقل} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{أكبر قيم الأعمدة} & 7 & -1 \end{array} \qquad \neq$$

لا توجد نقطة تعادل ومن ثم لا توجد استراتيجيات خالصة ومن ثم فهناك استراتيجيات مركبة ولتحديدها هناك أحد طريقتين :

١- الطريقة الجبرية

٢- طريقة المصفوفات

(*II*) <u>المصفوفة الفرعية الثانية</u> :

أقل قيم الصفوف

$$ع = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -6 \\ 5 \text{ أكبر الأقل} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{أكبر قيم الأعمدة} & 7 & 5 \end{array} \qquad =$$

لذا فهناك نقطة تعادل ومن ثم فهناك استراتيجيات خالصة حيث سيلعب لاعب الصفوف استراتيجيته الثانية بنسبة ١٠٠% من وقته ولاعب الأعمدة استراتيجيته الثانية بنسبة ١٠٠% من وقته ونتيجة المباراة مكسب للاعب الصفوف وخسارة للاعب الأعمدة وقيمة المباراة صفرية .

(*III*) <u>المصفوفة الفرعية الثالثة</u> :

أقل قيم الصفوف

$$ع = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -1 \\ -2 \text{ أكبر أقل قيم الصفوف} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{أكبر قيم الأعمدة} & -1 & 5 \end{array} \qquad =$$

أقل أكبر قيم الأعمدة

لذا فالاستراتيجيات خالصة حيث سيلعب لاعب الصفوف استراتيجيته الأولى بنسبة ١٠٠% من وقته كما يلعب لاعب الأعمدة استراتيجيته الأولى أيضًا بنسبة ١٠٠% من وقته ونتيجة المباراة خسارة للاعب الصفوف بنقطة واحدة ومكسب للاعب الأعمدة بنقطة واحدة ومن ثم مجموع المباراة صفرية.

ووجود نقطة تعادل في الحالتين الثانية (*II*) والثالثة (*III*) يفيدا بوجود استراتيجيات خالصة . أما الحالة الأولى (*I*) فنظرًا لعدم وجود نقطة تعادل فيجب حلها إما بالطريقة الجبرية أو بطريقة المصفوفات وذلك على النحو التالي :

<u>أولاً : حل مصفوفة المباراة (I) بالطريقة الجبرية</u> :

بافتراض الاحتمالات هي (ك) ، (١ – ك) للاعب الصفوف ، (ل) ، (١ – ل) للاعب الأعمدة . ولاستنتاجها يتم الآتي :

$$\begin{array}{c|cc} & \text{ل} & \text{١ – ل} \\ \hline \text{ك} & -٦ & -١ \\ \text{١ – ك} & ٧ & -٢ \end{array}$$

<u>(١) استنتاج (ك) ، (١ – ك) :</u>

بافتراض تساوي المكسب المتوقع للاعب الصفوف سواء لعب لاعب الأعمدة استراتيجيته الأولى أو الثانية فإن :

–٦ك + ٧(١ – ك) = –ك – ٢(١– ك)

–٦ك + ٧ – ٧ك = – ك – ٢ + ٢ك

–١٣ك – ك = –٢ – ٧

–١٤ ك = –٩ ∴ ك = ٩/١٤

فيكون ١ – ك = ١ – ٩/١٤ = ٥/١٤

أي أن نسب استراتيجيات لاعب الصفوف هي ٩/١٤ ، ٥/١٤ على الترتيب .

(٢) <u>استنتاج (ل) ، (١ – ل)</u>:

كذلك بافتراض تساوي المكسب المتوقع للاعب الأعمدة سواء لعب لاعب الصفوف استراتيجيته الأولى أو الثانية فإن :

–٦ل – ١(١ – ل) = ٧ل – ٢(١– ل)

$$-6\text{ل} - 1 + \text{ل} = 7\text{ل} - 2 + 2\text{ل}$$

$$-5\text{ل} - 9\text{ل} = -2 + 1$$

$$-14\,\text{ل} = -1 \qquad \therefore\ \text{ل} = \tfrac{1}{14}$$

فيكون $1 - \text{ل} = 1 - \tfrac{1}{14} = \tfrac{13}{14}$

ومن ثم فإن لاعب الأعمدة يلعب استراتيجياته بنسب أو باحتمالات $\tfrac{1}{14}$ ، $\tfrac{13}{14}$ **على الترتيب .**

(٣) أما عن قيمة المباراة فيتم تحديدها على النحو التالي :

$$\begin{array}{ccc} & \tfrac{1}{14} & \tfrac{13}{14} \\ \tfrac{9}{14} & \left[\begin{array}{c} -6 \\ 7 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} -1 \\ -2 \end{array}\right] \\ \tfrac{5}{14} & & \end{array}$$

$$\therefore\ \text{قيمة المباراة} = -6\left(\tfrac{9}{14} \times \tfrac{1}{14}\right) - 1\left(\tfrac{9}{14} \times \tfrac{13}{14}\right) + 7\left(\tfrac{5}{14} \times \tfrac{1}{14}\right) - 2\left(\tfrac{5}{14} \times \tfrac{13}{14}\right)$$

$$= \frac{-54 - 117 + 35 - 130}{14 \times 14}$$

$$= \frac{-301 + 35}{196} = \frac{-19}{14}$$

وكون قيمة المباراة سالبة فهذا يفيد أن هناك خسارة للاعب الصفوف بمقدار $\tfrac{19}{14}$ **نقطة ومكسب للاعب الأعمدة بـ** $\tfrac{19}{14}$ **نقطة وبمجموع مباراة صفرية.**

هذا ويمكن حل نفس المصفوفة الفرعية الأولى من تلك المباراة بطريقة المصفوفات وذلك من خلال الحل التالي .

<u>ثانيًا : حل المباراة باستخدام المصفوفات</u> :

نفرض أن :

$$\text{ع} = \begin{bmatrix} -٦ & -١ \\ ٧ & -٢ \end{bmatrix}$$

$$\therefore |\text{ع}| = (-٦ \times -٢) - (-١ \times ٧) = ١٢ + ٧ = ١٩$$

$$\text{ع}^{-/} = \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ -٧ & -٦ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{ع}^{-} = \begin{bmatrix} -٢ & -٧ \\ ١ & -٦ \end{bmatrix}$$

∴ نسب استراتيجيات لاعب الصفوف

$$= \frac{(١ \quad ١)\ \text{ع}^{-/}}{(١ \quad ١)\ (\text{ع}^{-})\begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{(١ \quad ١)\begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ -٧ & -٦ \end{pmatrix}}{(١ \quad ١)\begin{pmatrix} -٢ & -٧ \\ ١ & -٦ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{(-٩ \quad -٥)}{-١٤} = [\,٩/١٤ \quad ، \quad ٥/١٤\,]$$

، نسب استراتيجيات لاعب الأعمدة

$$= \frac{(١ \quad ١)\ \text{ع}^{-}}{(١ \quad ١)\ (\text{ع}^{-})\begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{(١ \quad ١)\begin{pmatrix} -٢ & -٧ \\ ١ & -٦ \end{pmatrix}}{(١ \quad ١)\begin{pmatrix} -٢ & -٧ \\ ١ & -٦ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{(-١ \quad -١٣)}{-١٤} = [\,١/١٤ \quad ، \quad ١٣/١٤\,]$$

، وقيمة المباراة

$$= \frac{|\text{ع}|}{\text{المقام السابق}} = ١٩/-١٤$$

وهو ما يفيد مكسب للاعب الأعمدة بمقدار $^{١٩}/_{١٤}$ وخسارة للاعب الصفوف بنفس القيمة وهو ما يؤدي إلى مجموع المباراة صفرية.

والاستراتيجيات المثلى للاعبين هي الاستراتيجيات الأكثر احتمالاً ، أي أن الاستراتيجية المثلى للاعب الصفوف هي الاستراتيجية الأولى أما عن الاستراتيجية المثلى للاعب الأعمدة فهي الاستراتيجية الثانية .

تمارين

(١) بافتراض أن لديك مصفوفة العائد Payoff Matrix التالية :

$$\begin{array}{cc} \text{ب} & \\ \begin{bmatrix} ٥ & ٩ & ٢ & ٨ \\ ١٨ & ٧ & ٥ & ٦ \\ ١٠ & -٤ & ٣ & ٧ \end{bmatrix} & \text{أ} \end{array}$$

المطلوب تحديد الاستراتيجيات المثلى وقيمة المباراة . ثم ضع مصفوفة المباراة في صورة نموذج خطي .

(٢) باقتراض أن لديك المباراة التالية بين اللاعبين أ ، ب :

$$\begin{array}{cc} \text{ب} & \\ \begin{bmatrix} -١ & ٣ & ٢ & ٢ \\ ٦ & ٢ & ٣ & ٤ \end{bmatrix} & \text{أ} \end{array}$$

المطلوب تحديد الاستراتيجيات المثلى وقيمة المباراة .

(٣) حدد نقطة السرج وكذا الاستراتيجيات المثلى للمباريات التالية :

- $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} ٤ & \text{صفر} & ٢ \\ ٢ & -٣ & ١ \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \\ ٥ & -١ \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ & ٣ \\ -٤ & -٣ & ١ \\ -٣ & ١ & \text{صفر} \end{bmatrix}$

- $\begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ٤ & \text{صفر} \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$

(٤) في مباراة بين لاعبين أ ، ب إذا علمت أنه يتم الآتي :

• إذا لعب لاعب الصفوف (أ) باستراتيجيته الأولى ولعب منافسه (ب) باستراتيجيته الأولى يكسب اللاعب (أ) خمسة نقاط ، أما إذا لعب منافسه باستراتيجيته الثانية فإنه يكسب نقطة واحدة .

• إذا لعب اللاعب (أ) باستراتيجيته الثانية ولعب منافسه باستراتيجيته الأولى فإن مكسب (أ) ثلاث نقاط ، أما إذا لعب منافسه باستراتيجيته الثانية فإن مكسب (أ) أربعة نقاط . والمطلوب :

- **حدد عناصر مصفوفة المباراة بين (أ) و (ب) .**
- **حدد الاستراتيجيات المثلى لكل من (أ) ، (ب) وكذا قيمة المباراة .**

(٥) حل المباريات التالية :

- $\begin{array}{cc} & \text{ب} \\ \text{أ} & \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & ٦ \\ -٧ & ٩ \\ -٤ & -٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} \end{array}$

- $\begin{array}{cc} & \text{ب} \\ \text{أ} & \begin{bmatrix} ١ & ٣ & -٣ & ٧ \\ ٢ & ٥ & ٤ & -٦ \end{bmatrix} \end{array}$

(٦) المطلوب صياغة المباريات التالية في صورة نموذج خطي :

- $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٥ \\ ٨ & ٤ & ٧ \\ -١ & ٥ & -٦ \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} -١ & ١ & ١ \\ ٢ & -٢ & ٢ \\ ٣ & ٣ & -٣ \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٥ & ٣ \\ -١ & ٤ & ٧ & ٢ \\ ٥ & -١ & ١ & ٩ \end{bmatrix}$

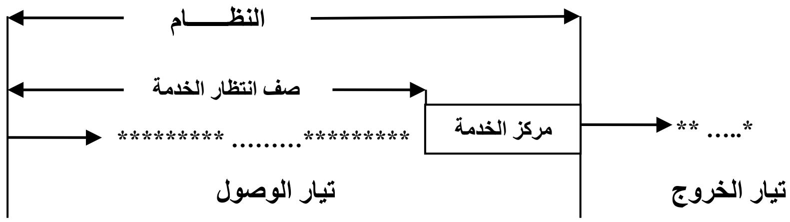
مع اختبار ماهية وجود استراتيجيات خالصة أم مركبة (أو مختلطة) .

الفصل الخامس
نظرية صفوف الانتظار
Queuing Theory

تدرس نظرية صفوف الانتظار عملية تتابع وصول مجموعة من العملاء طابي الخدمة من مركز (أو مراكز) خدمة بهدف نيل خدمة معينة وذلك للتعرف على التغيرات العشوائية التي تطرأ على صف الانتظار والذي يتكون من نتيجة زيادة معدل الوصول عن معدل أداء الخدمة في النظام.

هذا وتهدف نظرية الصفوف إلى تدنية التكاليف الكلية الناتجة سواء عن تعدد قنوات الخدمة أو تكلفة الانتظار في الصف.

وصفة عامة يمكن تصور النظام على النحو التالي:



مثال ذلك تتابع وصول مجموعة من السيارات لطلمبة البنزين من أجل نيل خدمة تزويد الوقود أو تتابع وصول مجموعة طلمبات عملاء يقومون بإجراء اتصالات تليفونية في سنترال أو دفع فواتير معينة.

هذا وتكمن صعوبة الوصول لأمثلية مشاكل صفوف الانتظار إلى عشوائية معدلات الوصول وكذلك زمن الخدمة. إلا أنه مع توافر الحد الأدنى من قواعد نظرية الاحتمالات يساهم في عملية الوصول لبعض المقاييس التي تفيد في دراسة مدى كفاءة النظام.

وتكمن كفاءة النظام في عملية تحديد العدد الأمثل من مراكز (أو مقدمي) الخدمة والذي ينجم عنه مجموع تكلفة الانتظار والخدمة إلى أقل ما يمكن. هذا

ويمكـن تعريـف المحـددات (أو العناصـر أو الخصـائص) الرئيسـية لصـف الانتظار فيما يلي : [خصائص نظم الصفوف]:-

١) توزيع الوصول: -(λ) **Arrival distribution**

والمقصود بتوزيع الوصول هو معدل وصول العمـلاء للنظام ، فقد يكـون هذا المعدل ثابت وقد يكون هذا المعدل عشوائيًا لـه توزيـع احتمـالي معين. هذا ويمكن التعبير عن معدل الوصول من خلال إحدى الزاويتين التاليتين:

* إمـا مـن خـلال تحديـد عدد العمـلاء الـذين يصـلون للنظـام فـي وحـدة الـزمن وليكن هذا العدد هو (λ) عميل / وحدة زمن.

* أو من خلال تحديد الزمن بـين وصـول كل عمليتـين متتـاليتين للنظـام. وهذا الزمن هو عبارة عن $1/\lambda$ وحدة زمنية/ عميل. أي مقلوب المعدل السابق.

٢) توزيع الخدمة: **Service distribution** (μ):

وهـو عبـارة عن كيفيـة خدمـة العمـلاء فـي النظـام مـن حيـث هل تـتم الخدمة بمعدل ثابت ولـيكن (μ) عميل كل وحـدة زمنيـة أم تـتم الخدمـة بـزمن عشوائي ذو توزيع احتمالي معين. هذا ويمكن كذلك التعبير عن توزيع الخدمة من خلال أحد الزاويتين التاليتين:-

- إما من خلال تحديد عدد العمـلاء الـذين يـتم خدمتهم فـي وحـدة الـزمن وليكن (μ) عميل / وحدة زمنية.
- أو من خلال تحديد الزمن بين خـروج كل عميلـين متتـاليين $^1/_\mu$ وحـدة زمنية/ عميل أي مقلوب المعدل السابق.

٣) طريقة (أو نظام) تقديم الخدمة **Service Discipline**

والمقصـود هنـا بنظـام الخدمـة هـو عمليـة ترتيـب أداء الخدمـة لعمـلاء النظام. فقد يكون نظام الخدمة أحد الصور التالية:

- من يصل أولاً يخدم أولاً **First Come Firs Served (FCFS)**
- من يصل أخيرًا يخدم أولاً**Last Come First Served**
- الخدمة طبقًا لأولويات معينـة **Priority** كوزن أو أهميـة العميل فـي النظام.

٤)عدد مراكز تقديم الخدمة: Service Facility

فقد يكون النظـام ذو مركـز خدمـة وحيد **Single Channel System** أو قد تتعدد مراكز الخدمة **Multiple-Channel System**

لتقليل زمن انتظار العملاء ورفع كفاءة الخدمة في النظام.

٥) عدد طالبي الخدمة (حجم مجتمع العملاء): Population

فقد يكون مجتمع العملاء محدودًا **Finite** بعدد معين وليكن (ن أو **N**) أو لا نـهائي (غير محدود) **Infinite** أي (∞)

٦)طاقة النظام: System Capacity

وهي عبارة عن الحد الأقصى لعدد العملاء في النظام (أي من هم فـي الخدمـة + من هي في صف الانتظار)

فقد تكون طاقة النظام محدودة بعدد (ن أو **N**) أو لا نـهائية (∞)

مقاييس كفاءة نظام الصفوف:

هناك مجموعة من المقاييس التـي تستخدم فـي مقارنـة كفـاءة نظـام عن آخـر وهي:

١-عدد العملاء المتوقع وجوده في النظام.

٢-عدد العملاء المتوقع في صف الانتظار.

٣-كثافة الاستخدام واحتمالات الاستقرار.

٤-متوسط الزمن المتوقع أن يقضيه العميل في النظام.

٥-متوسط الزمن المتوقع أن يقضيه العميل في صف الانتظار.

هذا وسوف تقتصر دراستنا على دراسة نموذج صف الانتظار ذو مركز الخدمة الوحيد أما عن النموذج المتعدد مراكز الخدمة فلا مجال لتناوله في دراستنا.

نموذج صف الانتظار ذو مركز خدمة وحيد
Single Channel Model

ويبنـي هذا النمـوذج علـى افتـراض أن هنـاك قنـاة خدمـة وحيـدة تقـدم الخدمـة لعمـلاء النظـام موضـع الدراسـة وأن كل من معدل الوصول ومعدل الخدمـة لـه توزيع بواسون (أي أن الزمن بين الوصول أو بين الخدمة له توزيع أسي) وأن نظـام الخدمـة طبقًا لأولويـة الوصـول أي مـن يصـل أولاً يخـدم أولاً وأن كـل مـن حجم مجتمع العملاء وطاقة النظام محدد بالعدد (ن أوN).

هذا ويمكن تلخيص فروض هذا النموذج في الصورة التالية:

$$(M \ / \ M \ / \ 1) : (FCFS \ / \ N \ / \ N)$$

توزيع الوصول له توزيع بواسون بمعلمة (λ) أو زمن بين الوصول أسي بمعلمة $^1/_\lambda$ حدة زمن/عميل	توزيع الخدمة لـــه توزيـــع بواســــــون بمعلمــــة (μ) وزمـــن بـــين خدمـــة أســـي بمعلمة $^1/_\mu$	عدد قنوات الخدمة C	نظام الخدمة من يصل أولاً يخدم أولاً	حجم مجتمع العملا محدود بالعدد (N)	طاقة النظام محددة بالعدد (N)

هذا ويمكن تصور قوانين صف الانتظار ذو مركز الخدمة الوحيد على النحو التالي:

١):احتمال الانتظار لوحدة واحدة أو عميل واحد وهو ما يسمى بكثافة الازدحام أو كثافة الاستخدام = معدل الوصول ÷ معدل الخدمة = $\lambda \div \mu$

وهذا الاحتمال يفيد في حساب احتمال وجود قناة الخدمة مشغولة.

٢):احتمال عدم وجود أي عميل في النظام أو احتمال وجود سفر عميل في صف الانتظار = ١ – (λ / μ) وهو احتمال مكمل للسابق

٣):احتمال وجود عدد (n) عميل في النظام وهو عبارة عن :

$$P_n = (\lambda/\mu)^n \, (١ - \lambda/\mu)$$

حيث : $n \geq ١$

٤):متوسط عدد العملاء (L_s) في النظام هو :

$$L_S = \lambda/(\mu - \lambda)$$

٥):متوسط عدد العملاء (L_q) في صف الانتظارهو :

$$Lq = \lambda^٢ / \mu\,(\mu - \lambda)$$

وهو أيضا = متوسط العدد في النظام – (١) ← من هو في الخدمة.

٦):متوسط الوقت (W_s) الذي يقضيه العميل في النظام هو :

$$W_S = ١ / (\mu - \lambda)$$

٧):متوسط الوقت (W_q) الذي يقضيه العميل في صف الانتظار هو :

$$Wq = \lambda / \mu\,(\mu - \lambda)$$

وهو عبارة عن متوسط الزمن في النظام مطروحا منه متوسط زمن الخدمة ($١/\mu$)

<u>ملحوظة:</u>

١) :إذا كان الزمن بين وصول كل عميليين متتاليين في النظام له توزيع أسي بمتوسط (١/ λ) فإن معدل وصول العملاء للنظام يكون له توزيع بواسون بمعلمة (λ) عميل لكل وحدة زمن.

٢) : وكذلك إذا كان الزمن بين خروج كل عميلين متتاليين من النظام أو متوسط زمن الخدمة للعميل الواحد له توزيع أسي بمعلمة (١ /μ) فإن معدل الخدمة في النظام يكون له توزيع بواسوني بمعلمة أو بمعدل (μ) عميل لكل وحدة زمن .

<u>مثال (١):</u>

تستطيع شركة كهرباء أن تستقبل شكاوى انقطاع التيار الكهربائي من العملاء بمعدل ٢ شكوى في الساعة في المتوسط. وتمتلك الشركة سيارة إصلاح مزودة بجهاز لاسلكي تستطيع خدمة ٧ طلبات في الساعة في المتوسط. والمطلوب تحديد الخصائص الأساسية لنظام صف الانتظار محددًا كثافة الاستخدام – متوسط زمن الانتظار حتى يبدأ إصلاح العطل ، وكذا ينتهي الإصلاح وما هو احتمال أن يكون جهاز الخدمة حاليًا.

<u>الحـل:</u>

<u>معطيات المثال هي:</u>

- **معدل ورود الشكاوى في الساعة = λ = ٢ شكوى/ساعة.**
- **عدد قنوات الخدمة (سيارة واحدة) ← مركز خدمة وحيد.**
- **معدل الخدمة في الساعة (μ = ٧) طلبات/ ساعة.**

لاحظ أن كل من معدل الوصول والخدمة لهم نفس وحدة القياس (في الساعة) فيكون:–

معامل كثافة الازدحام (الاستخدام) = λ / μ = ٧/٢ = ٠,٢٨٥٧١٤٢

وهو ما يفيد احتمال وجود قناة الخدمة مشغولة.

أ) :*<u>متوسط فترة الانتظار حتى يتم الإصلاح أو بمعنى آخر</u>متوسط فترة الانتظار في الصف (أى قبل البدء في الإصلاح) هو عبارة عن:

$$L_q = \lambda^{٢} / \mu(\mu - \lambda)$$

أى أن :

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{٢}{٧(٧-٢)} = ٢/٣٥ = ٠,٠٥٧١٤٢٨ \text{ ساعة}$$

= ٠,٠٥٧٨١٤٢٨ × ٦٠

= ٣,٤٢٨٦ دقيقة.

ب) :متوسط فترة الانتظار إلى أن ينتهي الإصلاح (أي في النظام) هى :

$$W_s = \frac{١}{(\mu-\lambda)} = \frac{١}{٧-٢} = ١/٥ = ٠،٢ \text{ ساعة}$$

= ٠,٢ × ٦٠ = ١٢ دقيقة.

<u>ملحوظة</u>: متوسط الزمن في الصف = متوسط الزمن في النظام أى(W_s) - متوسط زمن الخدمة أى (١/ μ) = ١٢ دقيقة – ١/٧ × ٦٠ = ٣,٤٢٨٦ وهي نفس الناتج السابق.

ج) :احتمال عدد وجود أي شكوى = $P_{٠}$ = ١ – λ/μ

وهذا الإحتمال عبارة عن إحتمال أن يكون النظام خاليًا"

=١ – ٢/٧ = ٥/٧ = ٠,٧١٤٢٨٥٧

مثال (٢):

تتلقى محطة بنزين طلبات غسيل وتشحيم السيارات بمعدل ٢٠ سيارة في الساعة. فإذا كان متوسط زمن خدمة السيارات في تلك المحطة دقيقتان للسيارة الواحدة والمطلوب حدد ما يلي:

متوسط عدد السيارات في صف الانتظار ، متوسط وقت الانتظار للسيارة قبل غسيلها ، متوسط زمن الانتظار لصاحب السيارة حتى نهاية الخدمة وما هو احتمال أن تكون المحطة خالية.

الحـل:

المعطيات:

- **عدد قنوات الخدمة = قناة خدمة وحيدة.**
- **معدل الوصول (λ) = ٢٠ سيارة / ساعة**
- **متوسط زمن الخدمة((أي(١/ μ))= ٢ دقيقة / سيارة . أى أن :**

(١ / μ (= ٢ دقيقة/ سيارة . ومن ثم فإن معدل الخدمة عبارة عن :

μ =) ١ / ٢) سيارة/دقيقة = (٢/١) × ٦٠ = ٣٠ سيارة/ساعة

ومن ثم فإن:

١] : متوسط عدد السيارات في صف الانتظار = $\frac{\lambda^{2}}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{(٢٠)^{2}}{٣٠(٣٠-٢٠)}$

= ٤٠٠ / (٣٠×١٠) = ٤٠٠ / ٣٠٠ = ١،٣٣٣ سيارة ≈ ١ سيارة

٢] :متوسط وقت الانتظار قبل غسيلها (أي في الصف) = $\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$

متوسط وقت انتظار السيارة في الصف = ٢٠ / (٣٠(٣٠−٢٠)) = ٢٠ / (٣٠×١٠)

=٣٠/٢ ساعة = ٣٠/٢ × ٦٠ = ٤ دقائق

٣] :متوسط وقت انتظار السيارة في محطة الخدمة حتى تنتهي الخدمة هى :

= متوسط الزمن في النظام = $\frac{1}{\mu-\lambda}$ = ١ / (٣٠ − ٢٠) = ١ / ١٠

= ٠,١ ساعة = ٠,١ × ٦٠ = ٦ دقائق.

لاحظ أن متوسط الزمن في الصف = متوسط الزمن في النظام – متوسط زمن الخدمة

= ٦ – ٢ ← معطاة في التمرين

= ٤ دقائق وهي نفس الناتج السابق .

٤] :احتمال عدم وجود أي سيارة في النظام (P_0) = ١ – λ/μ

= ١ – ٣٠/٢٠ = ١ – ٣/٢ = ٣/١ = ٠,٣٣٣٣

وهي عبارة عن احتمال أن تكون قناة الخدمة خالية وفي انتظار عملائها.

مثال (٣):

تمتلك محطة بنزين طلمبة واحدة تقوم بخدمة تموين السيارات.

فإذا علمت أن هذه المحطة تستقبل سيارات بمعدل ١٠ سيارات في الساعة كما أن الزمن بين خروج كل سيارتين متتاليتين يبلغ (٤/١٥) دقيقة في المتوسط.

والمطلوب:

حدد احتمالات تحقق حالات التوازن وكذا مقاييس كفاءة النظام .

الحل:

المعطيات:

-عدد مراكز الخدمة = ١ مضخة واحدة.

-معدل الوصول (λ) = ١٠ سيارة / ساعة.

ومتوسط زمن الخدمة (١/μ)= (٤/١٥) دقيقةسيارة . أى أوهو عبارة عن الزمن بين خروج كل سيارتين متتاليتين = (١٥ / ٤) دقيقة / سيارة

أي أن:

معدل الخدمة في الدقيقية أي قيمة (μ (=) ٤ / ١٥) سيارة / دقيقة.

ومن ثم فإن:

معدل الخدمة في الساعة =(٤ / ١٥) × ٦٠ = ١٦ سيارة/ساعة.

وعليه فإن كثافة الاستخدام (الازدحام) =(μ / λ)= (١٠ / ١٦) = (٥/٨)

وهذه النسبة من الوقت هى تلك النسبة التى تكون فيه المضخة مشغولة.

ومن ثم فإن:

***احتمالات حالة التوازن في النظام هي:**

P_0 = احتمال أن تكون المضخة في حالة عدم عمل (انتظار لعملائها بمعنى خالية) = ١ – (μ / λ) = ١ –)٥/٨(=) ٣/٨)

، $P_n = (1 - {}^{\lambda}/_{\mu})({}^{\lambda}/_{\mu})^n$ = (٨/٣) (٨/٥)^n وعليه فإن:

P_1 = احتمال وجود سيارة في النظام = (٨/٣) (٨/٥)^1 = ١٤/١٥ ،

P_2 = احتمال وجود سيارتين في النظام = (٨/٣) (٨/٥)^2 = ٥١٢/٧٥

وهكذا يمكن حساب P_3 ، P_4 ، .... وهكذا

* متوسط عدد السيارات في النظام (L_s) = $\lambda / (\mu - \lambda)$ = ١٠/(١٦−١٠)

أى أن متوسط العدد في النظام = ١٠/٦ = ٥/٣ = ١,٧٦ ≈ ٢ سيارة

، متوسط عدد السيارات في صف الانتظار (أي في الطابور) (L_q)

= متوسط عدد السيارات في صف الانتظار = $\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$ = $\frac{(10)^2}{16(16-10)}$

−متوسط العدد في الصف = $^{٩٦}/_{١٠٠}$ = $^{٢٤}/_{٢٥}$ ≈ ١ سيارة

لاحظ أن العدد في الصف = العدد في النظام − ١

لأن هناك سيارة في محطة الخدمة

متوسط الزمن الذي تقضيه السيارة في النظام(W_S) = $\frac{1}{\mu-\lambda}$ = $\frac{1}{16-10}$

= $^{٦}/_{١}$ ساعة للسيارة

= $^{٦}/_{١}$ × ٦٠ = ١٠ دقائق

، متوسط الزمن الذي تقضيه السيارة في الصف = $\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{10}{16(16-10)}$

= ١٠/٩٦ = ٥/٤٨ ساعة = ٥/٤٨ × ٦٠ = ٢٥/٤ ساعة = ٦,٢٥ دقيقية

لاحظ أن الزمن المتوقع في صف الانتظار =

الزمن المتوقع في النظام – متوسط زمن الخدمة

= ١٠ – ٣ ٣/٤ = ٦,٢٥ دقيقة (نفس الناتج السابق).

تمارين

١- تشير المعلومات المتجمعة من محطة غسيل السيارات آليًا بأن السيارات تصل إلى المحطة وفقًا لتوزيع بواسون بمتوسط ٥ سيارات/ساعة. ويختلف الزمن المطلوب لغسيل السيارة وتنظيفها ولكنه يتبع التوزيع الأسي بمتوسط ١٠ دقائق/سيارة. وبطبيعة الحال لا يمكن غسل أكثر من سيارة في آن واحد.

والمطلوب:

أ - احسب احتمالات تحقق حالة الاستقرار في المحطة.

ب-احسب محددات هذا النظام أو مقاييس فاعلية هذا النظام.

٢- تصل السيارات إلى بوابة دفع رسوم المرور على الطريق السريع وفقًا لتوزيع بواسون بمعدل ٩٠ سيارة/ساعة. ويبلغ متوسط زمن الخدمة (المرور من البوابة) ٣٨ ثانية/سيارة.

والمطلوب:

أ -احسب احتمالات تحقق حالات الاستقرار.

ب-احسب مقاييس فاعلية أو كفاءة هذا النظام.

٣- يوجد في أحد البنوك شباك لخدمة قائدي السيارات حيث يصل العملاء إلى الشباك وفقًا لتوزيع بواسون بمعدل ١٠ عميل/ساعة كما بلغ متوسط زمن الخدمة ٥ دقائق/عمل وفقًا للتوزيع الأسي. والمطلوب تحديد عناصر هذا النظام. واحسب احتمالات تحقق حالات الاستقرار المختلفة ومقاييس كفاءة أو فاعلية هذا النظام.

٤- يصل العملاء إلى البنك وفقًا لتوزيع بواسون بمتوسط ٣٦ عميل/ساعة ويتبع زمن خدمة العميل التوزيع الأسي بمتوسط ٠,٠٢٥ ساعة. حدد خصائص هذا النظام ومقاييس فاعليته.

٥- في أحد محطات البنزين تصل السيارات لتموين البنزين بمعدل ٤٠ سيارة في الساعة. فإذا علمت أن متوسط عدد السيارات التي يمكن تقديم خدمة تموين البنزين لها هو ٦٠ سيارة في الساعة.

والمطلوب إيجاد:

- احتمال عدم وجود سيارة في صف الانتظار.
- احتمال وجود سيارتين في صف الانتظار.
- احتمال وجود ٦ سيارات في صف الانتظار.
- متوسط عدد السيارات التي توجد في صف الانتظار.
- متوسط الزمن الذي تنتظره السيارة قبل نيل الخدمة.

٦- في عيادة أحد الأطباء لوحظ أن عدد المرضى الذين يصلون إلى العيادة للكشف يصلون بمعدل مريض واحد كل ٢٠ دقيقة ، وكان الطبيب يؤدي الخدمة في هذه العيادة بمعدل خمسة مرضى في الساعة ، أوجد ما يلي:

* احتمال أن يصل مريض إلى العيادة ويتم الكشف عليه فورًا أي دون انتظار.
* احتمال أن يصل مريض إلى العيادة وينتظر.
* متوسط عدد المرضى المنتظرين دورهم في الكشف.
* متوسط فترة الانتظار للمريض وكذا متوسط الزمن في هذا النظام.

الفصل السادس
" شبكات الأعمال "
" التحليل الشبكي للمشروعات "
Network Analysis For The Projects

بصفة عامة فإن المشروع هو عبارة عن مجموعة من الأنشطة المتتالية والمرتبطة ببعضها البعض والتي يجب تنفيذها وفقاً لأولويات أو ترتيب معين حتى يكتمل المشروع ككل . والنشاط في أي مشروع ما هو إلا عمل يتطلب وقت وموارد لإنجازه . و لقد تطلب التعقيد المتزايد للمشروعات ضرورة وجود أساليب تخطيطية تهدف لتعظيم درجة الكفاءة في إنجاز هذه المشروعات . [والمقصود بالكفاءة هنا هو إنجاز مثل هذه المشروعات في أقل زمن ممكن وبأقل تكلفة ممكنة وتسمى مثل هذه الأساليب بأساليب جدولة المشروعات – شبكات الأعمال– أو التحليل الشبكي Network Analysis] وتستخدم مثل هذه الأساليب في تحقيق الإدارة المثلى للمشروعات من حيث التنظيم والتخطيط الزمني الأمثل لتفادي ما يسمى بنقاط الاختناقات التي قد تعترض المشروع و تكون سبباً في إعاقته أو تأخير تنفيذه أو على الأقل تفيد في إمكانية التنبؤ بمثل هذه الاختناقات قبل حدوثها ومن ثم إمكانية وقفها أو التحكم فيها . ولقد شهد العصر الحالي تطوراً هائلاً في مجال شبكات الأعمال و اتخذ هذا التطور خطأ واضحاً ومفهوماً أعمق باحتلال شبكات الاتصالات – الانترنت – قمة هرم تقنية المعلومات في السنوات القليلة الماضية . ومن ثم تعتبر دراسة مثل هذه الموضوعات من أهم المشاكل التي تتطلب الفهم الجيد لطبيعة المشروعات كما تتطلب المزيد و المزيد من الدراسات الوافية في هذا المجال .

والتحليل الشبكي (شبكات الأعمال) للمشروعات هو عبارة عن ترتيب منطقي ومنظم لمجموعة أنشطة متتالية كل نشاط **Activity** من أنشطة المشروع يتم تمثيله في الشبكة التخطيطية للمشروع بسهم (←) يبدأ من نقطة أو عقدة تسمى بالحدث **Event** (تمثلها دائرة ○) يسمى بحدث بداية النشاط وينتهي بنقطة أو حدث يسمى بحدث نهاية النشاط أي أن النشاط يتم تمثيله بسهم يصل ما بين حدثين كما هو موضح في الرسم التالي:

والهدف من التحليل الشبكي كما سبق وأن أوضحنا هو تحديد أو تقدير أقل زمن ممكن لإنجاز المشروع وبأقل تكلفة ممكنة .

هذا وقبل أن نتعرض لأساليب التحليل الشبكي للمشروعات يجب في البداية أن نقدم بيان موجز عن الشبكة التخطيطية للمشروع .

<u>الشبكة التخطيطية للمشروع **Network Graph**</u>

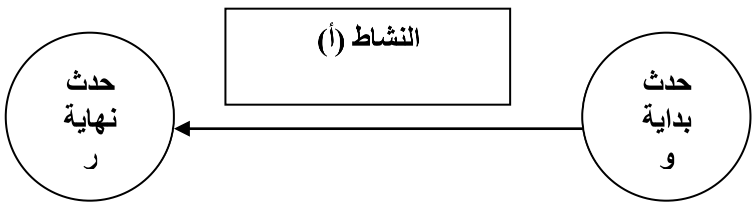
يتم تخطيط شبكة المشروع من خلال رسم مجموعة من الأسهم الاسترشادية والتي توضح مدي التداخل والتشابك فيما بين أنشطة المشروع بحيث أن كل سهم من تلك الأسهم يعبر عن اتجاه النشاط ومدي التقدم في انجاز هذا النشاط. هذا وتبني تلك الشبكة علي مجموعة من المفاهيم الأساسية التي تتلخص في الآتي:-

١- <u>الحدث</u> **Event** : وهو عبارة عن لحظة البدء أو الإتمام لأحد أنشطة المشروع ولا يستغرق أي زمن أو تكلفة. ويتم التعبير عن الحدث في الشبكة التخطيطية بدائرة يتم كتابة رقم الحدث بداخلها متسلسلا أي

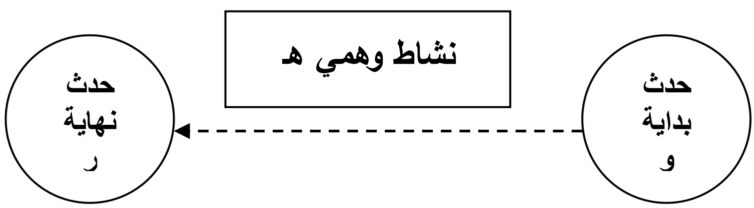
١ أو ٢ أو ٣ أو ...... وهكذا لحين حدث النهاية وليكن الحدث (ن) .

٢- <u>النشاط</u> **Activity** : وهو عبارة عن القيام بعمل محدد في المشروع وهو ما يتطلب زمن و تكلفة ويصل النشاط في الشبكة التخطيطية فيما بين حدثين الأول وليكن (١) وهو عبارة عن حدث بداية النشاط والثاني وليكن (٢) وهو عبارة عن حدث نهاية النشاط وهو عبارة عن رقم مسلسل اكبر من رقم حدث البداية ويرمز للنشاط في الشبكة بسهم ويعبر عنه بأحد أحرف الهجاء أ ، ب ، ج ، د ، .... إلخ. هذا ويعرف النشاط بحدث البداية والنهاية فقط.

والشكل التالي يوضح الحدث والنشاط في الشبكة التخطيطية للمشروع لحدث بداية (و) وحدث نهاية (ر) حيث و< ر للنشاط (أ).



هذا وقد يلجأ البعض لرسم أحد الأنشطة الوهمية وذلك من خلال رسم سهم متقطع. والنشاط الوهمي لا يمثل نشاطا حقيقيا بمعني أنه لا يستغرق زمن للإنجاز أو تكلفة بمعني أن زمن إنجازه صفرًا كما أن تكلفته صفرية.



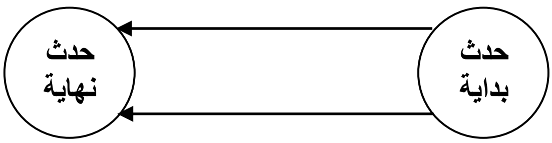
٣ – <u>المسار</u> : Path

والمسار هو عبارة عن تسلسل لمجموعة من الأنشطة المتتابعة يبدأ من حدث بداية المشروع (١) وينتهي بحدث نهاية المشروع وليكن (ن). وليس بالضرورة طبعاً أن يمر المسار بجميع الأحداث الموجودة في الشبكة التخطيطية للمشروع كما أنه لا توجد ضرورة بأحداث متسلسلة على الشبكة.

هذا وعند رسم الشبكة التخطيطية للمشروع توجد مجموعة من القواعد أو الأساسيات التي تحكم عملية الرسم وهي: –

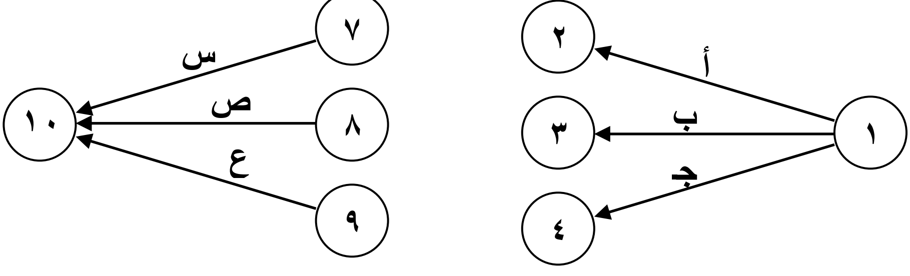
١- يجب أن تحتوي الشبكة التخطيطية للمشروع على حدث واحد للبداية وحدث واحد للنهاية.

٢- أي نشاط من أنشطة المشروع يتم تمثيله مرة واحدة و ذلك من خلال سهم واحد فقط بحدث بداية واحد وحدث نهاية واحد. بمعنى لا يمكن وجود الرسم التالي في أي شبكة تخطيطية:

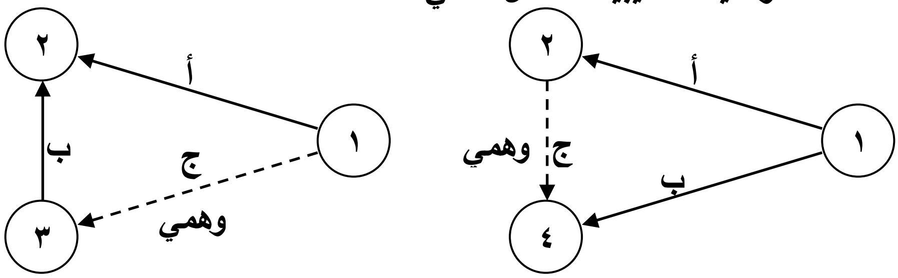


لا يمكن وجود هذا الشكل في الشبكة التخطيطية

٣- يمكن أن تبدأ مجموعة من الأنشطة المختلفة بحدث بداية واحد كما يمكن أن تنتهي مجموعة من الأنشطة بحدث نهاية واحد وهو ما يوضحه الشكل التالي:



٤- لا يمكن رسم نشاطين من خلال حدث بداية وحدث نهاية واحد. لكن يمكن القول أنه يمكن تنفيذ نشاطين على الأقل من نقطة بداية واحدة وفي نفس لحظة البدء. ولتوضيح ذلك يمكن تصور دور الأنشطة الوهمية كما يبينه الشكل التالي:-



دور الأنشطة الوهمية في الشبكة التخطيطية

٥- يفضل رسم أنشطة الشبكة التخطيطية للمشروع دون تقاطع فيما بين أنشطة المشروع المختلفة بقدر ما هو ممكن.

هذا ويراعى صحة علاقات التشابك والتتابع المنطقية لأنشطة المشروع في الشبكة التخطيطية للمشروع وفي حالة إضافة أنشطة جديدة إلى الشبكة فيجب معرفة الآتي:-

- ما هو النشاط أو مجموعة الأنشطة التي يجب تنفيذها فيما قبل هذا النشاط.
- ما هو النشاط أو مجموعة الأنشطة التي يمكن أن تبدأ مع نفس النشاط.
- ما هو النشاط أو مجموعة الأنشطة التي يجب أن تنفذ فيما بعد هذا النشاط أو يجب أن تتبع هذا النشاط .

هذا ويمكن استخدام أي عدد من الأنشطة الوهمية لتحقيق تتابع الأنشطة و للقضاء على الأنشطة أو الأحداث المعلقة و إن كان يفضل استخدامها في أضيق الحدود أو الاختصار منها بقدر الإمكان .

- **أساليب التحليل الشبكي للمشروعات : -**

على الرغم من إمكانية صياغة الشبكة التخطيطية للمشروع في صورة نموذج خطي يمكن حله باستخدام طرق حل النماذج الخطية و هو ما سنراه فيما بعد إلا أن كثافة عدد القيود تجعل من الصعوبة حل مثل هذه المشاكل باستخدام مثل هذه الطرق ، وهو ما دعى للحاجة إلى أساليب رياضية تقوم في إجراءات الحل بها على أساس الفكر الرياضي لطرق حل النماذج الخطية إلا أنها تتميز بالبساطة في تناولها وتسمى مثل هذه الأساليب بأساليب التحليل الشبكي والتي تتلخص فيما يلي : -

١- أسلوب المسار الحرج : Critical Path Method (CPM)

وطبقاً لهذا الأسلوب تكون أزمنة إنجاز أنشطة المشروع محل الدراسة أزمنة معلومة أو محددة Deterministic **بدرجة ثقة عالية (يقينية) .**

٢- أسلوب تقييم ومراجعة المشروعات (بيرت) :

Project Evaluation And Review Technique (PERT)

وطبقاً لهذا الأسلوب يتم تقدير زمن إنجاز أنشطة المشروع الغير معلومة و ذلك من خلال أحد صور التوزيعات الاحتمالية وبالتحديد توزيع بيتا Beta Distribution **. أي أن أزمنة أنشطة المشروع طبقاً لهذا الأسلوب أزمنة احتمالية** Probabilistic Or Stochastic

٣- أسلوب بيرت / تكلفة : – PERT / Cost

من أهم ما يؤخذ على أسلوبي المسار الحرج وبيرت السابقين أنه تتم معالجة أنشطة المشروع من خلال زاوية وحيدة فقط وهي الخاصة بأزمنة إنجاز الأنشطة فقط تاركين زاوية هامة جداً تبني على أساسها القرارات في إنشاء

المشروعات وهي جانب التكلفة . حيث يتم في هذا الأسلوب اعتبار جانب تكلفة إنجاز المشروع إلى جانب زمن إنجاز تلك الأنشطة . ومن ثم يقوم هذا الأسلوب على فكرة المبادلة فيما بين الزمن والتكلفة بمعنى يتم تحديد جملة التكاليف التي يمكن أن تتحملها الإدارة إذا أرادت التعجيل أو الإسراع في تنفيذ أنشطة المشروع أو اختصار عنصر زمن الإنجاز للأنشطة . أي أن الهدف الرئيسي لهذا الأسلوب هو تحديد أقل زمن لإنجاز أنشطة المشروع وبأقل تكلفة ممكنة.

٤- <u>أسلوب جيرت</u> :

Graphical Evaluation and Review Technique (GERT)

ويعتبر أسلوب جيرت أحدث أساليب التحليل الشبكي وهو يختلف عن باقي الأساليب السابقة حيث انه يبني علي أساس واقع احتمالي لزمن إنجاز الأنشطة وكذا عملية حدوث الأنشطة. اي ان عملية التدفقات لأنشطة المشروع عملية احتمالية.

هذا وتهدف دراسة تلك الأساليب إلي إلقاء الضوء علي الوقت الإجمالي اللازم لتنفيذ أنشطة المشروع المتتالية ومن ثم تخصيص الموارد الإضافية لما تسمي بالأنشطة الحرجة في المشروع. وتعتمد تلك الأساليب علي عنصرين أساسين وهما:-

١- تتابع الأنشطة الخاصة بالمشروع بمعني تحديد نقطة البدء ونقطة النهاية لكل نشاط (الشبكة التخطيطية للمشروع).

٢- الوقت المحدد أو المقدر لإنجاز كل نشاط من أنشطة المشروع وهو المحدد الأساسي الذي يتم من خلاله رسم الشبكة التخطيطية للمشروع .

<u>أولاً : أسلوب المسار الحرج</u>

Critical Path Method or Technique (CPM)

ذكرنا سابقاً أن المسار هو عبارة عن تسلسل منطقي منظم لترتيب أنشطة متتابعة في المشروع . والمسار الحرج هو عبارة عن سلسلة من الأنشطة الحرجة و التي يجب أن تنال اهتمام وعناية متخذي القرار في المشروع وذلك لأن أي تأخير في البدء في تلك الأنشطة الحرجة يترتب عليه تأخير في زمن إتمام المشروع ككل و هي ما تسمى بأنشطة الاختناقات أو عنق الزجاجة في المشروع .

أي أن النشاط الحرج : – هو النشاط الذي يؤدي أي تأخير في البدء فيه إلى تأخير في زمن إتمام المشروع ككل .

أما النشاط الغير حرج فهو ذلك النشاط الذي لا يؤدي أي تأخير فيه إلى تأخير في زمن إنجاز المشروع ككل و ذلك نظراً إلى أن الأنشطة الغير حرجة تحتوي على ما يسمى بالوقت الفائض أو العائم Float Time .

و طبقاً لأسلوب المسار الحرج فإنه يكون معلوم بدرجة عالية جداً من الثقة أزمنة إنجاز أنشطة المشروع أي أن أزمنة الإنجاز هنا أزمنة محددة Deterministic **. و لتحديد المسار الحرج يتم الآتي : –**

١- رسم الشبكة التخطيطية وذلك من خلال أزمنة إنجاز الأنشطة المحددة.

٢- حساب الوقت أو الزمن المبكر و المتأخر لبداية و نهاية إنجاز أنشطة المشروع حيث أن : –

- **<u>الوقت أو الزمن المبكر لبداية إنجاز النشاط</u> (م و) :–**

Earliest start time

وهو الزمن الذي يجب أن ينقضي من بداية المشروع حتى بداية هذا النشاط و ذلك تحت افتراض إتمام كافة الأنشطة السابقة لحدث بداية النشاط في الأزمنة أو الأوقات المحددة لها بدون أي تأخير . هذا و يتحدد الزمن المبكر

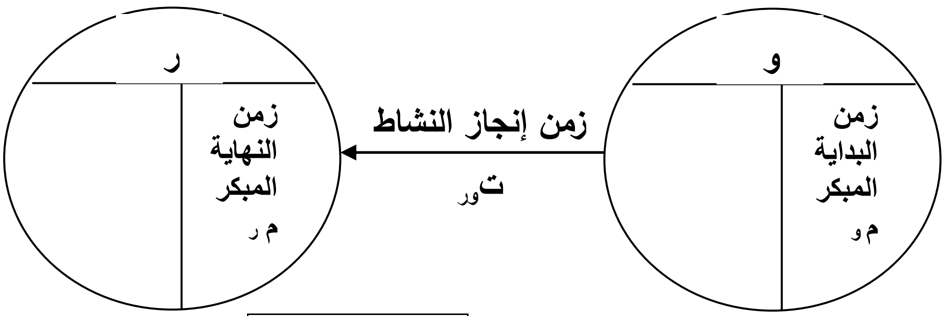
لإنجاز كافة الأنشطة أو المسارات السابقة لحدث بداية النشاط باستخدام ما يسمى بطريقة الحسابات الأمامية Forward Computation Method **على أساس أطول فترة زمنية لإنجاز كافة الأنشطة أو المسارات السابقة لحدث بداية النشاط .**

هذا ويبدأ المشروع بزمن مبكر بداية مساوياً للصفر يعبر عن نقطة البدء في تنفيذ المشروع ككل أي أن م١ = صفر

وفيما بعد نقطة البدء يتطلب تحديد المسار الحرج حساب الأزمنة المبكرة لبداية الأنشطة . والأزمنة المبكرة لبداية الأنشطة المتتالية ما هي إلا الأزمنة المبكرة لنهاية الأنشطة السابقة .

- **<u>الوقت أو الزمن المبكر لنهاية إنجاز النشاط Earliest Completion Time (م ر)</u>: وهو عبارة عن الحد الأعلى لمجموع زمن البداية المبكرة لإنجاز الأنشطة والمسارات التي تسبق النشاط أي (م و) مضافاً إليها زمن إنجاز النشاط الذي يبدأ بالحدث (و) وينتهي بالحدث (ر) وذلك بزمن إنجاز و ليكن (ت ور).**

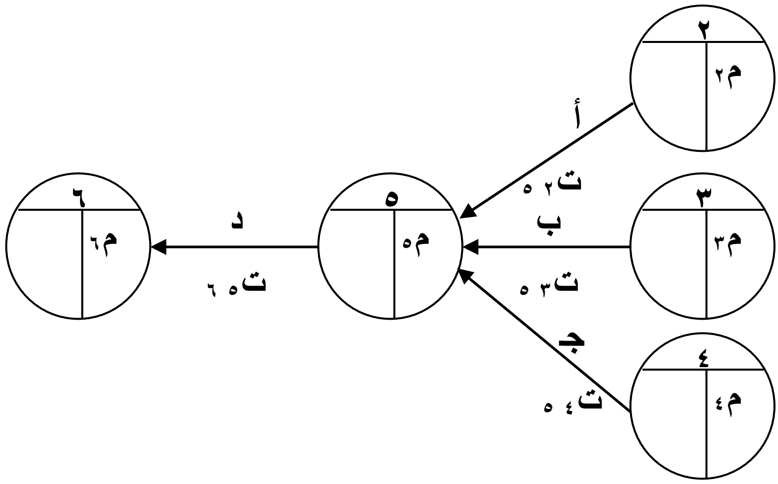
أي أن لكل نشاط زمن مبكر لبدايته وهو (م و) و زمن مبكر لنهايته و هو (م ر) والشكل التالي يوضح ذلك : -



ويكون في تلك الحالة $\boxed{\text{م ر} = \text{م و} + \text{ت ور}}$

أي أنـه فـي حالـة وجود نشاط واحد يسبق نشـاط معين فإنـه لا يوجد مجـال لعملية المقارنة و يكون في تلك الحالة $م_{ر} = م_{و} + ت_{ور}$

أما في حالة وجود تعدد للأنشطة أو المسارات التي تسبق نشاط معين فيكون لديك الشكل التالي على سبيل المثال :



فيكون زمن مبكر نهايـة الأنشطة (أ ، ب ، جـ) أي ($م_{٥}$) هو بمثابـة زمن البداية المبكرة للنشاط (د) [لأن زمن النـهايـة المبكر لنشاط ما هو إلا زمن البداية المبكر للنشاط التالي في الشبكة] ويكون عبارة عن :

$م_{٥}$ = الحد الأعلى لـ [($م_{٢}$ + $ت_{٢٥}$) ، ($م_{٣}$ + $ت_{٣٥}$) ، ($م_{٤}$ + $ت_{٤٥}$)]

أي أن القاعدة العامـة لطريقـة الحسـابات الأماميـة فـي حساب الـزمن المبكـر لنهاية النشاط الذي ينتهي بالحدث (ر) هي :

$$\boxed{م_{ر} = \text{الحد الأعلى للناتج } [\, م_{و} + ت_{رو} \,]}$$

وذلـك لجميـع الأنشـطة أو المسـارات التـي تسـبق ذلـك النشـاط الـذي ينتهـي بالحدث (ر) .

وعلى الشبكة التخطيطية يتم كتابة زمن مبكر بداية أو نهاية النشاط في الثلث الأسفل من جهة اليمين لحدث بداية أو نهاية النشاط كما هو موضح في الشكل السابق أو أعلى الدائرة المعبرة عن حدث بداية أو نهاية النشاط .

- <u>الوقت أو الزمن المتأخر لبداية النشاط</u> ($س_{و}$) : – Latest Start Time وهو عبارة عن الوقت الذي لا يجب التأخر عنه حتى يبدأ النشاط و ذلك حتى يتم تنفيذ المشروع في الزمن المحدد له دون أي تأخير . و يتم حساب الوقت أو الزمن المتأخر لبداية الأنشطة من خلال إتباع طريقة الحسابات الخلفية Backward Computation Method لأوقات المشروع و ذلك من خلال اعتبار الحد الأدنى للفرق ما بين الوقت أو الزمن المتأخر لنهاية كافة الأنشطة أو المسارات التي تلي النشاط الذي يبدأ بالحدث (و) و بين زمن انجاز تلك الأنشطة و التي تخرج من ذلك الحدث . و طريقة الحسابات الخلفية تقوم على أساس أن زمن النهاية المتأخر لإنجاز نهاية المشروع ما هو إلا زمن مبكر نهاية المشروع و ترتد في حساباتها بطريقة عكسية في استنتاجها للأزمنة المتأخرة لبداية الأنشطة وذلك من خلال العلاقات التالية : –
- إذا كان هناك نشاط وحيد يخرج من الحدث(و) و ينتهي بحدث النهاية (ر) في الشبكة (أو هناك مسار وحيد يلي ذلك الحدث (و)) فإنه في تلك الحالة لا يوجد مجال لعملية المقارنة ويكون:–

$$\boxed{س_{و} = س_{ر} - ت_{رو}}$$

- أما إذا كان هناك أنشطة متعددة تخرج من الحدث (و) و تنتهي بأحداث تالية فإن زمن متأخر بداية النشاط يكون عبارة عن : –

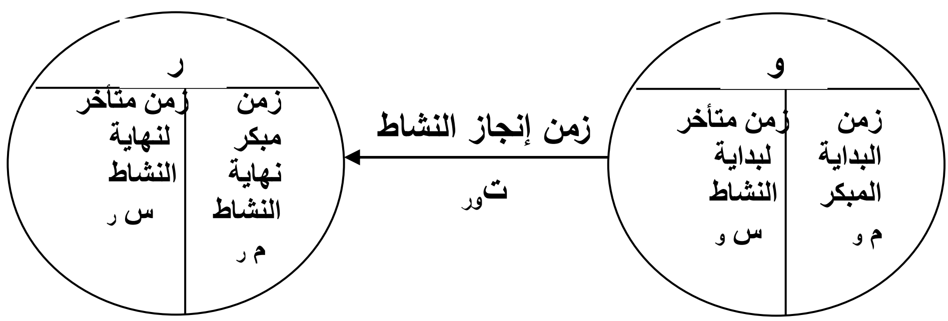
س $_{و}$ = الحد الأدنى لـ [زمن متأخر نهاية الأنشطة التي تلي النشاط الذي يبدأ بالحدث (و) – ت$_{ور}$] و ذلك لجميع قيم (ر) التي تلي الحدث (و) .

أي أن : $\boxed{\text{س}_{\text{و}} = \text{الحد الأدنى لـ [س}_{\text{ر}} - \text{ت}_{\text{ور}}\text{]}}$ لكافة قيم (ر) التي تلي الحدث (و) في الشبكة .

- <u>الوقـت أو الـزمن المتـأخر لنهايـة النشـاط</u>:- (س $_{ر}$) Latest Completion time . وهو بمثابة الوقت الذي يجب ألا يتأخر عنه نهاية النشاط و إلا ترتب على ذلك تأخر بداية الأنشطة اللاحقة له بصورة تؤدي إلى تأخر إنجاز المشروع ككل عن الموعد المحدد له . وعند حدث نهاية شبكة المشروع فإن الوقت المتأخر لنهاية النشاط يتساوى مع المبكر المتأخر لحدث النهاية أي أنه :

عند نهاية الشبكة يكون هذا الزمن مساوياً لزمن إنجاز المشروع ككل .

هذا وعند رسم الشبكة التخطيطية للمشروع يتم وضع الزمن المتأخر لبداية ونهاية الأنشطة في الثلث الأخير من الدائرة التي تعبر عن حدث بداية ونهاية الأنشطة المكونة للمشروع من جهة اليسار كما هو موضح في الشكل :



هذا وعند حدث البداية يتحقق التساوي ما بين زمن مبكر بداية النشاط و زمن متأخر بداية النشاط لكافة الأنشطة التي تبدأ من حدث بداية الشبكة . أي أن عند حدث البداية يكون :

زمن مبكر بداية النشاط = زمن متأخر بداية النشاط = صفر

أي أن: م و = س و = صفر

وكذلك عند حدث النهاية في الشبكة التخطيطية يتحقق التساوي ما بين زمن مبكر نهاية النشاط مع زمن متأخر نهاية النشاط لكافة الأنشطة التي تصب في حدث نهاية الشبكة التخطيطية للمشروع وكل منهم يعبر عن زمن إنجاز المشروع ككل أي أن عند حدث النهاية فإن :

زمن مبكر نهاية النشاط = زمن متأخر نهاية النشاط = زمن إنجاز المشروع ككل.

أي أن: م ر = س ر = زمن إنجاز المشروع ككل

أما عن الأنشطة الحرجة فهي تلك الأنشطة التي يتساوى عند بدايتها و عند نهايتها الزمن المبكر وكذا الزمن المتأخر إنجاز تلك الأنشطة . أي أنه عند الأنشطة الحرجة يتحقق ما يلي : –

م و = س و

، م ر = س ر

وأيضًا: م ر – م و = س ر – س و = ت ور

أي أن: الأنشطة الحرجة هي تلك الأنشطة التي تنعدم عندها الأزمنة الاحتياطية أو ينعدم عندها الفائض الزمني بمعنى لا يمكن التأخير في إنجازها لأن أي تأخير في إنجازها يترتب عليه التأخير في زمن إنجاز المشروع ككل .

الفائض (الاحتياطى) الزمنى والمسار الحرج : -

سبق وأن ذكرنا أن الأنشطة الحرجة هي مجموعة الأنشطة التي تكون ذات حساسية خاصة حيث تنعدم فيها المرونة في إمكانية التأخير في تنفيذها نظراً لأن أي تأخير في إنجازها يترتب عليه تأخير إنجاز المشروع ككل . وترجع عدم المرونة في تلك الأنشطة إلى انعدام وجود أزمنة راكدة أو احتياطية لها ولذا سميت بنقاط عنق الزجاجة للمشروع . والزمن الراكد للنشاط هو عبارة عن الفترة التي يمكن تأجيل النشاط بمقدارها دون التأثير على زمن إنجاز المشروع، ومن ثم فالأنشطة الحرجة لا تقبل التأخير نظراً لانعدام الأزمنة الاحتياطية لها أي أن الاحتياطي الزمني للأنشطة الحرجة دائماً أبداً صفراً. أما الأنشطة الغير حرجة فنظراً لأنها تحتوي على زمن فائض أو عائم لذا فإنه أي تأخير في إنجازها لا يترتب عليه تأخير في إنجاز المشروع ويرجع ذلك كما قلنا أنها تحتوي على زمن احتياطي أو زمن فائض.

وبصفة عامة هناك نوعين أساسيين للأزمنة الاحتياطية و هي :

١ – الزمن الاحتياطي الكلي : (ك $_{ور}$) Total Float Time

وهو عبارة عن الفرق ما بين زمن النهاية المتأخر لإنجاز النشاط و بين مجموع كل من الزمن المبكر لبداية لإنجاز النشاط وزمن إنجاز هذا النشاط أي أن :

زمن الاحتياطي الكلي (ك $_{ور}$) = [زمن النهاية المتأخر لإنجاز النشاط (س $_{ر}$)] – [زمن البداية المبكر لإنجاز النشاط (م $_{ر}$) + زمن إنجاز النشاط (ت $_{ور}$)]

أي أن: $\boxed{ك_{ور} = س_{ر} - (م_{و} + ت_{ور})}$

حيث :

ك $_{ور}$: هو الزمن الاحتياطي الكلي للنشاط الذي يبدأ بالحدث (و) و ينتهي بالحدث (ر)

، س$_{ر}$: هو زمن النهاية المتأخر لإنجاز الأنشطة التي تنتهي بالحدث (ر)

، م $_{و}$: هو زمن البداية المبكر لإنجاز الأنشطة التي تبدأ بالحدث (و).
، ت $_{ور}$: هو زمن إنجاز النشاط الذي يبدأ بالحدث (و) و ينتهي بالحدث (ر).
وتنعدم قيمة الاحتياطي الزمني الكلي (ك $_{ور}$) عند الأنشطة الحرجة بينما تزيد دائماً أبداً عن الصفر للأنشطة الغير حرجة . أي أن:

ك $_{ور}$ = صفر للأنشطة الحرجة

،

ك $_{ور}$ > صفر للأنشطة الغير حرجة نظراً لأنها تحتوي على زمن فائض .

٢–<u>الاحتياطي الزمني الحر</u> : (ح $_{ور}$) Free Float Time

وهو عبارة عن مقدار التأخير الذي يمكن أن يطرأ على تنفيذ نشاط معين دون التأخير فى زمن إنجاز المشروع ككلٍ بشرط تنفيذ باقي الأنشطة التالية في حدود التأخير المسموح به لها كزمن احتياطي حر مخصص لها وليس الزمن الاحتياطى الكلي لها. حيث يعرف الاحتياطي الزمني الحر للنشاط بأنه عبارة عن الفرق ما بين زمن الانتهاء المبكر أو زمن مبكر النهاية لكافة الأنشطة التي تنتهي بالحدث (ر) وبين مجموع كل من زمن البداية المبكر لإنجاز النشاط وزمن إنجاز هذا النشاط . أي أن :

الاحتياطي الزمني الحر (ح $_{ور}$) = زمن الانتهاء المبكر لإنجاز النشاط (م$_{ر}$)
– [زمن البداية المبكر لإنجاز النشاط (م $_{و}$) + زمن إنجاز النشاط]

أي أن:

$$\boxed{ح_{ور} = م_{ر} - (م_{و} + ت_{ور})}$$

حيث :

ح $_{ور}$: هو الزمن الاحتياطي الحر للنشاط الذي يبدأ بالحدث (و) و ينتهي بالحدث (ر) .

، $م_ر$: هو زمن الانتهاء المبكر لإنجاز كافة الأنشطة التي تنتهي بالحدث (ر).

، $م_و$: هو زمن البداية المبكر لإنجاز كافة الأنشطة التي تبدأ بالحدث (و) .

، $ت_{ور}$: هو زمن إنجاز النشاط الذي يبدأ بالحدث (و) و ينتهي بالحدث (ر) .

هذا وتنعدم قيمة الاحتياطي الزمني الحر عند الأنشطة الحرجة أي أن ($ح_{ور}$ = صفر) . أما الأنشطة الغير حرجة فإن الاحتياطي الزمني الحر لها أكبر من أو تساوي الصفر . وفي حالة ما إذا كان هناك نشاط غير حرج احتياطيه الزمني الحر صفرًا فهذا يعني أن هذا النشاط يشترك في الاحتياطي الزمني الكلي لأنشطة أخرى سابقة له . ويكون هذا الزمن الكلي هو عبارة عن الحد الأقصى لزمن تأخير تنفيذ هذه الأنشطة مجتمعة معًا .

وفي النهاية فإنه لتحديد زمن إنجاز مشروع معين باستخدام أسلوب المسار الحرج يتم إجراء الآتي :

١- باستخدام الأزمنة المحددة لإنجاز أنشطة المشروع المتتالية يتم رسم الشبكة التخطيطية للمشروع .

٢- يتم حساب أزمنة البداية المبكرة والمتأخرة (باستخدام طريقتي الحساب الأمامية والخلفية) و النهاية المبكرة والمتأخرة لإنجاز كافة أنشطة المشروع على الشبكة التخطيطية للمشروع ومن ثم يتم تحديد زمن إنجاز المشروع ككل بنهاية سلسلة حسابات تلك الأزمنة .

وعلى الشبكة التخطيطية لاحظ تحقق الخصائص التالية لكافة الأنشطة الحرجة للمشروع وهي :

- **تتساوى عندها الأزمنة المبكرة لبداية النشطة مع الأزمنة المتأخرة لبداية الأنشطة أي أن : $م_و = س_و$**

- **وكذلك تتساوى عندها الأزمنة المبكرة لنهاية الأنشطة مع الأزمنة المتأخرة لنهاية تلك الأنشطة أي أن : م $_{ر}$ = س $_{ر}$**
- **يتساوى الفرق ما بين زمن مبكر نهاية النشاط وبين زمن مبكر بداية النشاط مع الفرق ما بين زمن متأخر نهاية النشاط وبين زمن متأخر بداية النشاط مع زمن إنجاز النشاط . أي أن للنشاط (ور) يتحقق الآتي : (م $_{ر}$ – م $_{و}$) = (س $_{ر}$ – س $_{و}$) = ت $_{ور}$**

هذا بالإضافة إلى أن الزمن الاحتياطي الكلي والحر تنعدم قيمته للأنشطة الحرجة .

<u>ملحوظة</u> : يمكن تحديد المسار الحرج لأنشطة مشروع معين من خلال إجراء عملية حصر لكافة المسارات الممكنة في الشبكة التخطيطية للمشروع ويكون المسار الحرج هو المسار ذو أطول فترة زمنية لإنجاز المشروع من بين مجموعة المسارات الممكنة في الشبكة التخطيطية للمشروع .

مثال (١) :

فيما يلي الجدول التالي يبين الأزمنة اللازمة إنجاز أنشطة مشروع معين (بالأسبوع) .

النشاط	حدث البداية	حدث النهاية	زمن إنجاز النشاط بالأسبوع
أ	١	٢	٤
ب	١	٣	٦
ج	١	٤	٥
د	٢	٣	٤
هـ	٣	٥	٥
و	٣	٧	٧
ز	٤	٧	٥
ي	٢	٦	٢
ط	٥	٦	٥
ك	٦	٨	٤
خ	٧	٨	٢

والمطلوب :

١- رسم الشبكة التخطيطية للمشروع .

٢- من خلال نتائجك في (١) حدد المسار الحرج ومن ثم زمن إنجاز المشروع .

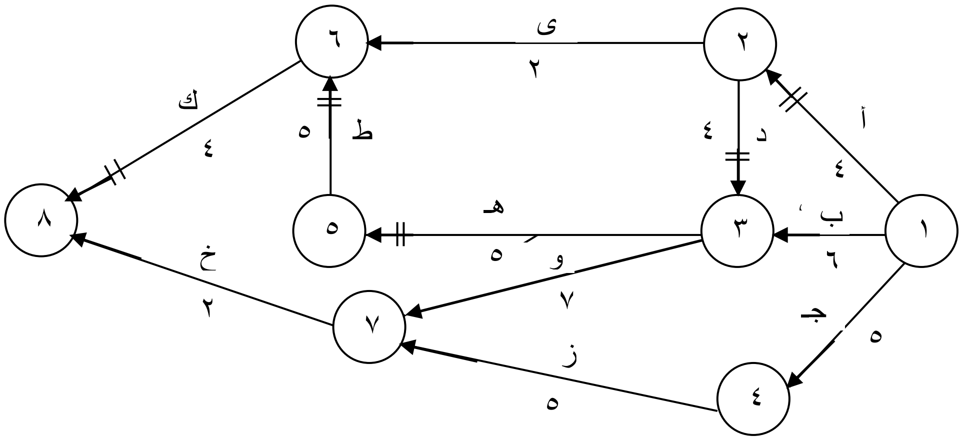
٣- حساب الأزمنة المبكرة والمتأخرة لإنجاز أنشطة المشروع.

٤- من خلال نتائج في (٣) حدد المسار الحرج.

٥- احسب الزمن الاحتياطي الكلي والزمن الاحتياطي الحر لأنشطة المشروع.

<u>الحـل:</u>

١- رسم الشبكة التخطيطية للمشروع : الرسم البياني التالي يوضح تسلسل أحداث وأنشطة المشروع المتتالية حيث يتم تمثيل حدث بداية ونهاية كل نشاط بدائرة أما الأسهم فهي تعبر عن اتجاه النشاط .



شكل رقم (١)

في الشكل رقم (١) لاحظ أن الشبكة التخطيطية للمشروع هي عبارة عن رسم كروكي لعملية التسلسل المنطقي لأنشطة المشروع ولا توجد ثمة علاقة تربط ما بين مدة إنجاز النشاط وطول السهم المعبر عن النشاط .

٢- من خلال رسم الشبكة التخطيطية للمشروع يمكن حصر كافة المسارات الممكنة في الشبكة وتحديد المسار الحرج وهو المسار ذو أطول فترة زمنية لإنجاز أنشطة المشروع ككل ز والجدول التالي يبين أزمنة كافة المسارات لتحديد المسار الحرج للمشروع :

جدول (٢)

م	المسار	مدة إنجاز المسار	ملاحظات
١	أ ي ك	٤+٢+٤ = ١٠	
٢	أ د هـ ط ك	٤+٤+٥+٥+٤ = (٢٢)	المسار الحرج
٣	أ د و خ	٤+٤+٧+٢ = ١٧	
٤	ب هـ ط ك	٦+٥+٥+٤ = ٢٠	
٥	ب و خ	٦+٧+٢ = ١٥	
٦	جـ ز خ	٥+٥+٢ = ١٢	

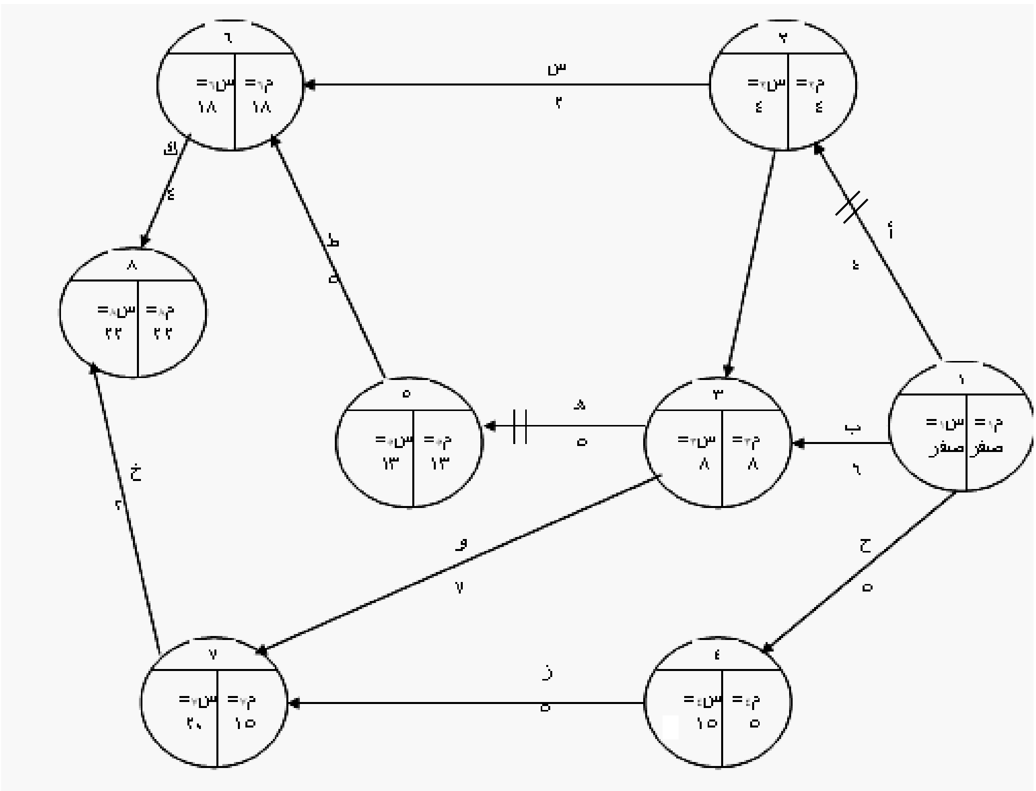
أي أن المسار الحرج هو المسار أ د هـ ط ك) ذو أطول فترة زمنية لإنجاز الأنشطة والتي تبلغ ٢٢ أسبوع .

ملحوظة : نتيجة التسلسل المنطقى لترتيب إنجاز الأنشطة فإن زمن المسار الحرج يعتبر بمثابة الحد الأدنى لزمن إنجاز المشروع ككل . فيجب ألا يُفْهَم عزيزي القارئ من خلال مفهوم أن المسار الحرج هو المسار ذو أطول فترة زمنية لإنجاز المشروع بأنه بالتالي يحتوي على طاقات أو أزمنة عاطلة لما سيتبين لنا حالاً من نتاج حل المثال الذي نحن بصدده . حيث سيتبين لنا العكس بمعنى هو المسار الذي لا توجد فيه أي أنواع من الاحتياطيات الزمنية. ويرجع ذلك إلى التسلسل المنطقي المتتالي للأنشطة الكائنة والمحددة فعليًا لإنجاز المشروع .

٣- حساب الأزمنة المبكرة والمتأخرة لبداية ونهاية إنجازأنشطة المشروع ككل .

دعنا نقوم بحساب تلك الأزمنة الأربعة على الشبكة التخطيطية للمشروع مرة أخرى .

والشكل البياني رقم (٢) يوضح الحسابات اللازمة لتلك الأزمنة الأربعة حيث تبدأ الشبكة بزمن بداية مبكر ابتدائي صفرًا ويتسلسل حساب الأزمنة المبكرة للنهاية من خلال طريقة الحسابات الأمامية . والعكس تنتهي الشبكة بحدث لنهاية الأنشطة الأخيرة وعند هذا الحدث يكون الزمن المبكر لنهاية تلك الأنشطة ما هو إلا الزمن المتأخر لنهاية تلك النشطة . ثم يتم تسلسل حساب الأزمنة المتأخرة لبداية تلك الأنشطة باستخدام طريقة الحسابات الخلفية وهو ما يوضحه الشكل البياني رقم (٢) :



- **<u>بالنسبة للنشاط أ (١–٢) :</u>**

زمن البداية المبكر $م_{١}$ = صفر

أما زمن النهاية المبكر $م_{٢}$ = $م_{١}$ + $ت_{٢١}$ = صفر + ٤ = ٤

- **بالنسبة للنشاط ب (١–٣) :**

زمن البداية المبكر $م_{١}$ = صفر

أما زمن النهاية المبكر $م_{٣}$ = الحد الأعلى لـ [($م_{١}$ + $ت_{٣١}$) ، ($م_{٢}$ + $ت_{٣٢}$)]

[وهو نفس زمن النهاية المبكر للنشاط (د) الذي ينتهي بنفس الحدث(٣)]

- **بالنسبة للنشاط جـ (١–٤) :**

زمن البداية المبكر $م_{١}$ = صفر

أما زمن النهاية المبكر $م_{٤}$ = $م_{١}$ + $ت_{٤١}$ = صفر + ٥ = ٥

- **بالنسبة للنشاط د (٢–٣) :**

زمن البداية المبكر $م_{٢}$ = ٤

أما زمن النهاية المبكر $م_{٣}$ = زمن النهاية المبكر للنشاط ب = ٨

(تم حسابه سابقًا)

- **بالنسبة للنشاط هـ (٣–٥) :**

زمن البداية المبكر $م_{٣}$ = ٨

أما زمن النهاية المبكر $م_{٥}$ = $م_{٣}$ + $ت_{٥٣}$ = ٨ + ٥ = ١٣

- **بالنسبة للنشاط ي(٢–٦) :**

زمن البداية المبكر $م_{٢}$ = ٤

أما زمن النهاية المبكر $م_{٦}$ = الحد الأعلى لـ [($م_{٢}$ + $ت_{٦٢}$) ، ($م_{٥}$ + $ت_{٦٥}$)]

= الحد الأعلى لـ [(٤ + ٢) ، (١٣+ ٥)]=١٨

[وهو نفس زمن النهاية المبكر للنشاط (ط) الذي ينتهي بنفس الحدث(٦)]

- **النشاط و (٣–٧) :**

زمن البداية المبكر $م_{٣}$ = ٨

أما زمن النهاية المبكر $م_{٧}$ = الحد الأعلى لـ [($م_{٣}$ + $ت_{٧٣}$) ، ($م_{٤}$ + $ت_{٧٤}$)]

= الحد الأعلى لـ [(٨+٧) ، (٥+٥)] = ١٥

[وهو نفس زمن النهاية المبكر للنشاط (ز) الذي ينتهي بنفس الحدث(٧)]

- **النشاط ز (٤–٧) :**

زمن البداية المبكر $م_{٤}$ = ٥

أما زمن النهاية المبكر $م_{٧}$ = زمن النهاية المبكر للنشاط و = ١٥

- **النشاط ك (٦–٨) :**

زمن البداية المبكر $م_{٦}$ = ١٨

أما زمن النهاية المبكر $م_{٨}$ = الحد الأعلى لـ [($م_{٦}$ + $ت_{٨٦}$) ، ($م_{٧}$ + $ت_{٨٧}$)]

= الحد الأعلى لـ [(١٨+٤) ، (١٥+٢)]=٢٢

[وهو نفس زمن النهاية المبكر للنشاط (ك) الذي ينتهي بنفس الحدث(٨)]

وزمن النهاية المبكر لأي من الأنشطة الأخيرة في المشروع (ك أو خ) أي الزمن ٢٢ أسبوع هو بمثابة زمن إنجاز المشروع ككل . وهذا الزمن يعتبر نقطة البدء في حساب الأزمنة المتأخرة لبداية ونهاية النشطة المختلفة للمشروع والتي يتم استنتاجها بطريقة الحسابات الخلفية .

***حساب الأزمنة المتأخرة لبداية ونهاية النشطة :**

بدءًا من الزمن المتأخر لنهاية المشروع وبمعنى آخر الزمن المتأخر لنهاية أي من النشاط (ك) أو (خ) وباستخدام طريقة الحسابات الخلفية يتم استنتاج الأزمنة المتأخرة لبداية من النشاطين ك ، خ والتي تعتبر بمثابة الأزمنة المتأخرة لنهاية الأنشطة السابقة لها وهكذا إلى أن نصل إلى زمن متأخر بداية أنشطة المشروع والتي يجب أن تتساوى مع زمن الابتداء المبكر للمشروع أي يجب أن تساوي الصفر فه معيار دقة حسابات الأزمنة المتأخرة وذلك على النحو المبين التالي :

- **بالنسبة للنشاط ك (٦–٨) :**

زمن متأخر نهاية النشاط أي $س_{٨}$ = $م_{٨}$ = ٢٢ أسبوع

أما زمن متأخر بداية النشاط أي $س_{٦}$ = $س_{٨}$ – $ت_{٨٦}$ = ٢٢–٤= ١٨ أسبوع

- **بالنسبة للنشاط خ (٧–٨) :**

زمن متأخر النهاية أي م٨ = س٨ = ٢٢ أسبوع

أما زمن متأخر البداية أي م٧ = س٨ – ت٨٧ = ٢٢–٢= ٢٠ أسبوع

- **بالنسبة للنشاط ط (٥–٦) :**

زمن متأخر النهاية أي س٦ = زمن متأخر بداية النشاط (ك) = ١٨ أسبوع

أما زمن متأخر البداية أي س٥ = س٦ – ت٦٥ = ١٨– ٥ = ١٣ أسبوع

- **بالنسبة للنشاط ز (٤–٧) :**

زمن متأخر النهاية أي س٧ = زمن متأخر بداية النشاط (خ) = ٢٠ أسبوع

أما زمن متأخر البداية أي س٤ = س٧ – ت٧٤ = ٢٠– ٥ = ١٥ أسبوع

- **بالنسبة للنشاط و (٣–٧) :**

زمن متأخر النهاية أي س٧ = زمن متأخر بداية النشاط (خ) = ٢٠ أسبوع

أما زمن متأخر البداية أي س٣ = الحد الأدنى لـ [(س٧ – ت٧٣) ، (س٥ – ت٥٣)]

= الحد الأدنى لـ [(٢٠ – ٧) ، (١٣ – ٥)] = ٨

[وهو نفس زمن متأخر البداية للنشاط (هـ) و الذي يبدأ بنفس الحدث(٣)]

- **النشاط ط (٢–٦) :**

زمن متأخر النهاية أي س٦ = زمن متأخر بداية النشاط (ك) = زمن متأخر نهاية النشاط (ط) = ١٨ أسبوع

أما زمن متأخر البداية أي س٢ = الحد الأدنى لـ [(س٦ – ت٦٢) ، (س٣ – ت٣٢)]

= الحد الأدنى لـ [(١٨– ٢) ، (٨– ٤)] = ٤ أسبوع

- **النشاط هـ (٣–٥) :**

زمن متأخر النهاية أي س٥ = زمن متأخر بداية النشاط (ط) = ١٣ أسبوع

أما زمن متأخر البداية أي س٣ = زمن متأخر بداية النشاط (و) = ٨ أسبوع

- **<u>النشاط د (٢–٣) :</u>**

زمن متأخر النهاية أي س٣ = زمن متأخر بداية أيًا من النشاطين (هـ) أو (و) = ٨ أسبوع

أما زمن متأخر البداية أي س٢ = زمن متأخر بداية النشاط (ي) = ٤ أسبوع

- **<u>النشاط حـ (١–٤) :</u>**

زمن متأخر النهاية أي س٤ = زمن متأخر بداية النشاط (ز) = ١٥ أسبوع

أما زمن متأخر البداية أي س١ = الحد الأدنى لـ [(س٢ – ت٢١) ، (س٣ – ت٣١) ، (س٤ – ت ٤١)]

= الحد الأدنى لـ [(٤–٤) ، (٨– ٦) ، (١٥–٥)] = صفر وهو معيار دقة الحسابات ، وهو نفس زمن متأخر البداية لأي من النشاطين أ ، ب

- **<u>النشاط ب (١–٣) :</u>**

زمن متأخر النهاية أي س٣ = زمن متأخر بداية أياً من النشاطين (هـ) أو (و) = ٨ أسبوع

زمن متأخر البداية للنشاط (ب) = (صفر) كما هو الحال بالنسبة للنشاط (ح)

- **<u>النشاط أ (١–٢) :</u>**

زمن متأخر النهاية أي س٢ = زمن متأخر بداية أيًا من النشاطين (د) أو (ي) = ٤ أسبوع

زمن متأخر البداية للنشاط (أ) = صفر كما هو الحال بالنسبة للنشاط (ح)

<u>ملحوظة</u> : يمكن حساب هذه الأزمنة الأربعة على الشبكة دون الحاجة للتفاصيل السابقة اختصارًا للوقت والجهد وذلك كما سيرد في الأمثلة التوضيحية لباقي الأساليب التالية للتحليل الشبكي .

٣- من خلال نتائجنا في (٣) وتحديد الأزمنة المبكرة والمتأخرة لبداية ونهاية أنشطة المشروع الموضحة على الشبكة يمكن تحديد الأنشطة الحرجة التي يتحقق فيها الآتي :

* $م_و = س_و$ ، * $م_ر = س_ر$

، * $م_ر - م_و = س_ر - س_و = ت_{ور}$

والأنشطة التي يتحقق عندها الخصائص السابقة هي مجموعة الأنشطة أ ، د ، هـ ، ط ، ك أي أن المسار الحرج هو المسار أ د هـ ط ك

<u>ملحوظة</u> : تحقق الشروط الثلاث معًا يفيد أن النشاط حرج دون الإخلال بأي شرط .

فمثلاً : لاحظ كلاً من النشاط (ب) ، ي نجد تحقق الشرطين $م_و = س_و$ ، $م_ر = س_ر$ لكن عدم تحقق الشرط الثالث والذي يفيد أن الفرق ما بين الأزمنة المبكرة للنهاية والبداية أو ما بين الأزمنة المتأخرة للنهاية والبداية لا بد أن يتساوى مع زمن إنجاز النشاط ($ت_{ور}$) فهذا الشرط غير متحقق لكل من النشاط ب أو ي حيث نجد أن :

- بالنسبة للنشاط ب والذي يبدأ والذي يبدأ بالحدث (١) وينتهي بالحدث (٣) فلاحظ أن : $م_١ = س_١ =$ صفر ، $م_٣ = س_٣ = ٨$

  لكن $م_٣ - م_١ = س_٣ - س_١ = ٨ -$ صفر $= ٨ \neq ٦$ زمن الإنجاز

- كذلك بالنسبة للنشاط (ي) الذي يبدأ بالحدث (٢) وينتهي بالحدث (٦) نجد أن :

$م_٢ = س_٢ = ٤$ ، $م_٦ = س_٦ = ١٨$

لكن $م_٦ - م_٢ = س_٦ - س_٢ = ١٨ - ٤ = ١٤ \neq ٢$ (زمن الإنجاز)

ويرجع ذلك على أن كلاً من النشاطين ب ، ي يحتوي على أزمنة احتياطية كما سنرى فيما بعد من خلال المثال .

٤- حساب الزمن الاحتياطي الكلي (ك$_{ور}$) والزمن الاحتياطي الحر (ح$_{ور}$) لأنشطة المشروع :

والجدول التالي يوضح الحسابات اللازمة لتحديد الأزمنة الاحتياطية بنوعيها الكلي والحر :

جدول (٣)

النشاط	الزمن الاحتياطي الكلي (بالأسبوع) ك$_{ور}$ = س$_{ر}$ − (م$_{و}$ + ت$_{ور}$)	الزمن الاحتياطي الحر (بالأسبوع) ح$_{ور}$ = م$_{ر}$ − (م$_{و}$ + ت$_{ور}$)
أ(١−٢)	ك$_{٢١}$=س$_{٢}$−(م$_{١}$+ت$_{٢١}$)=٤−(٠+٤)=صفر	ح$_{٢١}$=م$_{٢}$−(م$_{١}$+ت$_{٢١}$)=٤−(٠+٤)=صفر
ب(١−٣)	ك$_{٣١}$=س$_{٣}$−(م$_{١}$+ت$_{٣١}$)=٨−(٠+٦)=٢	ح$_{٣١}$=م$_{٣}$−(م$_{١}$+ت$_{٣١}$)=٨−(٠+٦)=٢
ج(١−٤)	ك$_{٤١}$=س$_{٤}$−(م$_{١}$+ت$_{٤١}$)=١٥−(٠+٥)=١٠	ح$_{٤١}$=م$_{٤}$−(م$_{١}$+ت$_{٤١}$)=٥−(٠+٥)=صفر
د(٢−٣)	ك$_{٣٢}$= =٨− (٤+٤) = صفر	ح$_{٣٢}$= =٨− (٤+٤) = صفر
هـ(٣−٥)	ك$_{٥٣}$= =١٣−(٨+٥)= صفر	ح$_{٥٣}$= =١٣−(٨+٥)= صفر
و(٣−٧)	ك$_{٧٣}$= =٢٠−(٨+٧)= ٥	ح$_{٧٣}$= =١٥−(٨+٧)= صفر
ز(٤−٧)	ك$_{٧٤}$= =٢٠−(٥+٥)= ١٠	ح$_{٧٤}$= =١٥−(٥+٥)= ٥
ي(٢−٦)	ك$_{٦٢}$= =١٨−(٤+٢)= ١٢	ح$_{٦٢}$= =١٨−(٤+٢)= ١٢
ط(٥−٦)	ك$_{٦٥}$= =١٨−(١٣+٥)= صفر	ح$_{٦٥}$= =١٨−(١٣+٥)= صفر
ك(٦−٨)	ك$_{٨٦}$= =٢٢−(١٨+٤)=صفر	ح$_{٨٦}$= =٢٢−(١٨+٤)=صفر
خ(٧−٨)	ك$_{٨٧}$ =٢٢−(١٥+٢)= ٥	ح$_{٨٧}$ =٢٢−(١٥+٢)= ٥

على الجدول العام لاحظ أن :

الزمن الاحتياطي الكلي هو الذي يحدد مدى حرجية الأنشطة . أي أن الأنشطة الحرجة هي التي ينعدم عندها الزمن الاحتياطي الكلي فقط . لذا فإن الأنشطة الحرجة هي (أ ، د ، هـ ، ط ، ك) . ومن ثم فالمسار الحرج هو المسار :

(أ د هـ ط ك) وهو نفس المسار الذي تم تحديده سابقًا عند حصر كافة مسارات الشبكة والذي له خاصية أطول فترة زمنية من بين كافة مسارات الشبكة .

أي أنه إذا انعدمت قيمة الاحتياطي الزمن الكلي (ك$_{ور}$) لنشاطٍ ما فإن هذا يفيد أن هذا النشاط يعتبر نشاطًا حرجًا والعكس صحيح أي أنه إذا كان النشاط حرجًا فإنه بالضرورة سيكون الزمن الاحتياطي الكلي له منعدمًا أي قيمته صفرية .

- **بالنسبة للزمن الاحتياطي الحر (ح $_{ور}$) فإنه يساوي صفر عند مجموعة الأنشطة التالية أ ، جـ ، د ، هـ ، و ، ط ، ك .**

أي أن الزمن الاحتياطي الحر للأنشطة الحرجة أ ، د ، هـ ، ط ، ك وبعض الأنشطة غير الحرجة قيمته صفرية .

ومن هنا نخلص كما سبق وأن أوضحنا أن الزمن الاحتياطي الحر لا يعتبر مؤثرًا عند مدى حرجية الأنشطة حيث أن يساوي الصفر لبعض الأنشطة الغير الحرجة . أي أنه إذا كان النشاط حرج فإنه بالضرورة أن ينعدم زمنه الاحتياطي الحر لكن العكس غير صحيح . بمعنى إذا كان الزمن الاحتياطي الحر مساويًا للصفر فإن هذا لا يحتمن بضرورة أن يكون هذا النشاط حرج ويرجع ذلك لأنه ربما يكون هذا النشاط يشترك في الزمن الاحتياطي الكلي لأحد الأنشطة السابقة على الأقل . وأن هذا الزمن الاحتياطي الحر هو عبارة عن مقدار التأخير الذي يمكن أن يطرأ على تنفيذ النشاط دون أي تأخير يذكر في زمن إنجاز المشروع ككل على شرط "أن يتم تنفيذ بقية الأنشطة في الزمن المخصص أو المسموح به لها بالوقت الاحتياطي الحر المخصص لها وليس بالزمن الاحتياطي الكلي .

ثانيًا : أسلوب تقييم ومراجعة المشروعات (بيرت) :

Project Evaluation and Review Technique (PERT)

سبق وأن أشرنا فـي أسلوب المسـار الحـرج أن أزمنـة تنفيـذ أنشـطة المشـروع تكون أزمنـة محددة أو معلومة بدرجة ثقة عاليـة تكـاد تصل لدرجـة التأكـد التـام ويرجع ذلك إلى توافر عنصر الثبات في خطوات التنفيذ والخبرة في كثير من المشروعات مثل مشاريع البناء والتشييد . أمـا إذا لـم يتـوافر لـدى رجـال القرار الخبرة الكافيـة التي تصل بأن تكون أزمنـة الإنجاز على درجـة عاليـة من التأكد نتيجة التغير الدائم في العوامل الفنية لأساليب الإنتاج والتكنولوجيا فإنـه يسود علـى عمليـة تنفيـذ الأنشـطة عنصـر المخـاطرة وعدم التأكـد مـن أزمنـة تنفيـذ أنشطة المشروعات ككل ويأتي هنا دور هذا الأسلوب في عملية تقييم ومراجعة أنشـطة المشـروع ككـل والـذي يبنـى علـى أسـاس الاسـتفادة مـن الأسـاليب الإحصـائية وبصـفة خاصـة التوزيعـات الاحتماليـة وعمليـة التقـدير الإحصـائي لأزمنـة إنجاز أنشطة المشروع . أي أنـه في حالـة عدم توافر لخبرة الكافية التـي تؤدي للتحقق من أزمنة تنفيذ أنشطة المشروع بدرجـة عاليـة من الثقـة والتأكد فإننا نلجأ لأسلوب تقييم ومراجعة المشروعات (بيرت) لتقدير تلك الأزمنـة .

ونظرًا لسيادة ظروف عدم التأكد في تنفيذ أنشطة مثل هذه المشـروعات فيضـع متخذ القرار ثلاثـة أنـواع مـن الأزمنـة لكل نشـاط من أنشطة المشروع للتغلب على ظروف عدم التأكد من هذا الزمن . وهذه الأنواع الثلاثة هي :

- **الزمن المتفائل لإنجاز النشاط (ن ل) : Optimistic Time**

وهو عبارة عن زمن إنجـاز النشـاط فـي ظل تـوافر كل الظروف المسـاعدة لعملية إنجاز النشاط . وهو عبارة عن أقل زمـن يمكـن فيـه إنجـاز النشـاط في ظل أفضل الظروف الممكنـة المساعدة لعملية تنفيذ وإنجاز النشاط .

- **<u>الـزمن المحتمـل (أو الأكثـر احتمـالاً) لإنجـاز النشـاط</u> (نح) : Most Likely Time**

وهو عبارة عن زمن تنفيذ النشاط في ظل ظروف إنجاز طبيعية بعيد عن النظرة التفاؤلية أو التشاؤمية لإنجاز النشاط .

- **<u>الزمن المتشائم لإنجاز النشاط (نش) : Pessimistic Time</u>**

وهـو عبـارة عـن زمـن إنجـاز النشـاط فـي ظـل ظـروف يغلـب عليهـا المعوقـات والصعوبات في عملية التنفيذ . وهذا الـزمن يعتبـر أ:بـر زمـن يمكـن فيـه إنجـاز النشاط في ظل أصعب أو أسوأ الظروف المحيطة التي تسود عملية التنفيذ .

ونظرًا لأن أسلوب تقييم ومراجعة المشروعات (بيـرت) يعتمـد علـى هـذه الأزمنـة الثلاثة المتفائل والمحتمل والمتشائم فإن أقرب التوزيعات الاحتمالية التـي تعطـي تقديرًا إحصـائيًا جيـدًا لأفضـل زمـن متوقـع لإنجـاز الأنشـطة فـي تلـك الحالـة هـو توزيـع بيتـا Beta Distribution وهـو أحـد التوزيعـات الاحتماليـة المتصـلة والملتوية (توزيـع غيـر معتدل) . فمـن خـلال قيـم الأزمنـة الثـلاث المختلفـة نل ، نح ، نس يـتم تقـدير متوسـط زمـن إنجـاز كـل نشـاط مـن أنشـطة المشـروع باستخدام توزيع بيتا وليكن هذا الزمن $\bar{ن}_أ$ للنشاط (أ) . حيث أن:

$$\bar{ن}_أ = \frac{ن_ل + ٤ن_ح + ن_ش}{٦} \quad \text{أو} \quad (ن_ل + ٤ن_ح + ن_ش) / ٦$$

أما الإنحراف المعيـاري لإنجـاز النشـاط (أ) وهـو مـا يعنـي مـدى إنحـراف زمـن إنجاز النشاط عن متوسط زمن الإنجاز المقرر فهو عبارة عن :

$\sigma_أ$ = ١/٦ [الـزمن المتشـائم لإنجـاز النشـاط (أ) – الـزمن المتفائـل لإنجـاز النشاط (أ)]

أي أن:

$$\sigma_أ = ١/٦ \, (ن_ش - ن_ل)$$

وحيث أن التباين ما هو إلا مربع الإنحراف المعياري . لذا فإن تباين زمن إنجاز النشاط (أ) هو :

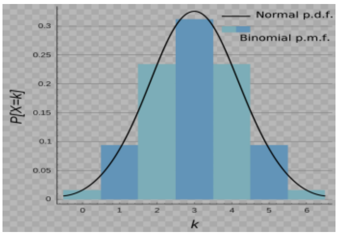
$$\sigma^{2}_{\text{أ}} = [\ \text{١/٦}\ (\text{ن}_{\text{ش}} - \text{ن}_{\text{ل}})\ ]^{2}$$

أما عن تباين زمن إنجاز المشروع ككل فهو عبارة عن مجموع تباينات الأنشطة الحرجة في المشروع . وأهم ما يميز أسلوب تقييم ومراجعة المشروعات (بيرت) هو إمكانية استخدامه في توافر بيانات تساعد الإدارة في اتخاذ القرارات الملائمة لعملية التخطيط وجدولة المشروعات والرقابة عليها . حيث يستخدم أسلوب بيرت نظرية الحد المركزية **Central Limit Theorem** في دراسة احتمالية إنجاز أنشطة المشروعات محل التنفيذ في أزمنة معينة . وهذه النظرية محتواها هو أن كافة التوزيعات الاحتمالية في النهاية تؤول للتوزيع المعتاد الطبيعي **Normal Distribution** وذلك في حالة كِبر حجم العينة أو زيادة عدد مرات إجراء التجربة ، وبناءًا عليه فإنه من خلال معلمتي التوزيع بيتا والذي يؤول للتوزيع الطبيعي ومن ثم يصبح من المعلوم لدينا معلمتي التوزيع الطبيعي والتي تستخدم بدورها في تحديد احتمال إنجاز المشروع ككل في زمن لا يقل عن أو لا يزيد عن زمن معين أو في حدود زمن معين وذلك على النحو التالي :

نفرض أن (س) بمثابة متغير عشوائي يعبر عن زمن إنجاز المشروع ككل . فيكون المتغير (س) متغير له التوزيع الطبيعي بمعلمتي متوسط زمن إنجاز المشروع ($\bar{\text{ن}}$) [وهو مجموع متوسطات أزمنة الأنشطة الحرجة فقط] وبانحراف معياري وليكن $\sigma_{\text{ن}}$ [وهي عبارة عن الجذر التربيعي لتباينات الأنشطة الحرجة فقط]. أي أن :

$$\text{س} \sim \text{م . ط}\ (\ \mu = \bar{\text{ن}}\ ،\ \sigma = \sigma_{\bar{\text{ن}}}\ )$$

ومن خلال التوزيع المعتاد الطبيعي يمكن حساب احتمال إنجاز المشروع في حدود زمن معين كما سبق لنا في دراسة هذا التوزيع كأحد التوزيعات الاحتمالية في مقرر الإحصاء التطبيقي . حيث إن كثافة احتمال المتغير (س) تأخذ الصورة الرياضية والبيانية التالية :

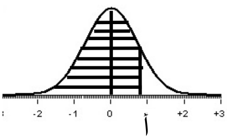


$$د(س) = \frac{١}{\sqrt{٢ط\,\sigma^{٢}}} \; هـ^{-١/٢ \frac{(س-\mu)^{٢}}{\sigma^{٢}}}$$

حيث $-\infty \leq س \leq \infty$

فلحساب إنجاز المشروع في زمن لا يتجاوز (أو على الأكثر أو لا يزيد عن أو الحد الأقصى له) زمن معين وليكن (أ) وحدة زمنية.

أي أن :

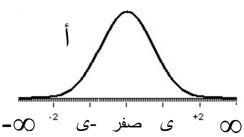


$$ح\ (س \leq أ) = \int_{-\infty}^{أ} د(س)\, ء س$$

وللتبسيط يمكن اعتبار نفس خطوات الحل الخاصة بالتوزيع المعتاد الطبيعي حيث يتم الآتي :

(١) تحويل الدرجة الطبيعية إلى درجة معيارية من خلال التحويلة الخطية:

$$ي = \frac{س - \mu}{\sigma} \sim$$ تتبع التوزيع المعتاد المعياري بمعالم(صفر ، ١)



$$ي = \frac{س - \mu}{\sigma} \sim م \, . \, م \ (صفر \ ، \ ١)$$

ومن ثم يتم استكمال الخطوات التالية :

$$(٢)\quad \text{ح}(\text{س} \le \text{أ}) = \text{ح}\left(\frac{\text{س}-\mu}{\sigma} \le \frac{\text{أ}-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \text{ح}\left(\text{ي} \le \frac{\text{أ}-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\text{أ}-\mu}{\sigma}\right)$$

وباستخدام الجداول المعيارية يمكن حساب احتمال إنجاز المشروع في زمن لا يتجاوز الزمن (أ) .

أما إذا كان المطلوب حساب احتمال إنجاز المشروع في زمن لا يقل عن (أو الحد الأدنى لزمن الإنجاز أو على الأقل ليبلغ قيمة معينة ولتكن (ب) وحدة زمنية فيكون المطلوب إيجاد قيمة ح(س $\ge$ ب). وعليه فإن:

بتحويل الصيغة الاحتمالية للصورة المعيارية أي أن:

$$(٢)\quad \text{ح}(\text{س} \ge \text{ب}) = \text{ح}\left(\frac{\text{س}-\mu}{\sigma} \ge \frac{\text{ب}-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \text{ح}\left(\text{ي} \ge \frac{\text{ب}-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= ١ - \text{ح}\left(\text{ي} \le \frac{\text{ب}-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \text{١} - \Phi\left(\frac{\text{أ} - \mu}{\sigma}\right)$$

وبالكشف في الجداول المعيارية بالطريقة المناسبة للوصول للمساحة المطلوبة والمساحة ما هي إلا الاحتمال المطلوب . مع مراعاة أن :

$\Phi(-\text{أ}) = \text{١} - \Phi(\text{أ})$.

وخلاصة ما سبق أن من أهم مزايا أسلوب بيرت أنه لا يقف عند حد تقدير متوسط زمن الإنجاز بل يمتد لحساب مثل هذه الاحتمالات السابقة والتي لا شك تلعب دورًا أساسيًا في اتخاذ القرار وفي ظل سيادة عنصر المخاطرة وظروف عدم التأكد .

وأخيرًا فإن خطوات الحل طبقًا لهذا الأسلوب تتلخص في الآتي :

- من خلال الأزمنة الثلاث المتاحة من البيانات $\text{ن}_{\text{ل}}$ ، $\text{ن}_{\text{ح}}$ ، $\text{ن}_{\text{س}}$ يتم تقدير متوسط زمن إنجاز كل نشاط (أو الزمن المتوقع لإنجاز كل نشاط) من أنشطة المشروع وكذا الانحراف المعياري له .
- رسم الشبكة التخطيطية للمشروع باستخدام الأزمنة المقررة لإنجاز أنشطة المشروع .
- تحديد المسار الحرج بأي من الطرق السابقة .
- حساب الاحتمالات المطلوبة لتحقق إنجاز المشروع في حدود زمن معين باستخدام التوزيع المعتاد الطبيعي . وهذه الاحتمالات تفيد في عملية اتخاذ القرارات حيث تفيد عملية التعاقد على مدة معينة للتنفيذ . فإذا لم يتحقق الموعد المتعاقد عليه وقعت الإدارة القائمة على التنفيذ تحت طائلة غرامات التأخير . أما إذا تم الإنجاز فيما قبل الموعد المحدد فقد تحصل الشركة القائمة على التنفيذ على مكافآت .

<u>مثال (٢) :</u>

فيما يلي الجدول التالي يوضح الأنشطة المختلفة لمشروع معين والأزمنة المقررة لإنجازها (بالساعة) .

جدول (٤)

النشاط	الحدث السابق (حدث البداية)	الحدث اللاحق (حدث النهاية)	الزمن ..... (ساعة)		
			المتفائل (نل)	المحتمل (نح)	المتشائم نس
أ	١	٢	٢	٤	٦
ب	١	٣	٣	٥	١٣
ج	٢	٥	٤	٥	٦
د	٢	٤	٢	٣	١٠
هـ	٣	٤	١	٢	٣
و	٥	٧	١	٢	٩
ز	٤	٧	٦	٨	١٠
ح	٣	٦	٥	٨	١١
ط	٦	٧	٤	٦	٨

<u>والمطلوب</u> :

١- مستخدمًا زمن إنجاز الأنشطة المحتمل (نح) ارسم الشبكة التخطيطية للمشروع ومن ثم حدد المسار الحرج .

٢- حساب الأزمنة المبكرة والمتأخر لبداية ونهاية إنجاز الأنشطة ومن ثم حدد المسار الحرج على الشبكة التخطيطية للمشروع .

٣- تحديد الزمن الاحتياطي الكلي والحر على الشبكة .

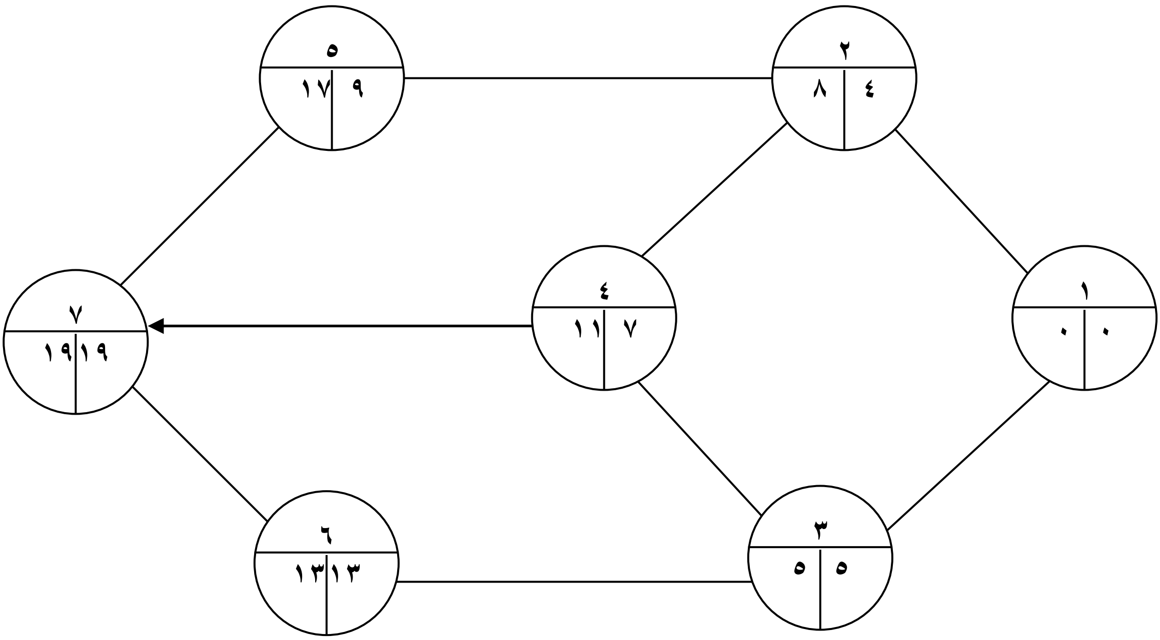
٤- استخدم أسلوب بيرت في تقدير زمن إنجاز المشروع .

٥- ما هو احتمال إنجاز المشروع في زمن لا يزيد عن ٢٣ ساعة .

٦- ما هو الحد الأقصى لزمن إنجاز المشروع وذلك بنسبة ٩٧،٥% .

<u>**الحــل**</u> :

١ – ارسم الشبكة التخطيطية للمشروع باستخدام عمود الزمن المحتمل المعطى في الجدول رقم (٤) :



ولتحديد المسار الحرج يتم إجراء عملية حصر لمجموعة مسارات الشبكة :

م	المسار	مدة إنجاز المسار	ملاحظات
١	أ جـ و	٤+٥+٢ = ١١ ساعة	
٢	أ د ز	٤+٣+٨ = ١٥ ساعة	
٣	ب هـ ز	٥+٢+٨ = ١٥ ساعة	
٤	ب ح ط	٥+٨+٦ =(١٩)ساعة	المسار الحرج

أي أن المسار الحرج هو المسار ذو أطول فترة زمنية لإنجاز المشروع وهو المسار (ب ح ط) بزمن إنجاز يعادل ١٩ ساعة .

٢- الأزمنة المبكرة والمتأخرة لبداية ونهاية إنجاز الأنشطة موضحه على الشبكة وذلك باستخدام طريقة الحسابات الأمامية Forward Computation Method لحساب الأزمنة المبكرة لبداية ونهاية إنجاز الأنشطة وباستخدام طريقة الحسابات الخلفية Backward Computation Method في حساب الأزمنة المتأخرة لبداية ونهاية إنجاز الأنشطة .

والمسار الحرج هو المسار الذي يتحقق عنده ما يلي :

$\text{م}_{\text{و}} = \text{س}_{\text{و}}$ ، $\text{م}_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}}$ ، $\text{م}_{\text{ر}} - \text{م}_{\text{و}} = \text{س}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{و}} = \text{ت}_{\text{ور}}$

والأنشطة التي يتحقق عندها تلك الخصائص الثلاث هي ب ، ح ، ط أي أن المسار الحرج هو المسار ب ح ط وهو ما يؤكد صحة الطريقة السابقة.

٣- تحديد الزمن الاحتياطي الكلي ($\text{ك}_{\text{ور}}$) والحر ($\text{ح}_{\text{ور}}$) على الشبكة وذلك من خلال الجدول الآتي :

الزمن الاحتياطي الكلي ($\text{ك}_{\text{ور}}$) = $\text{س}_{\text{ر}}$ – ($\text{م}_{\text{و}}$ + $\text{ت}_{\text{ور}}$)

، الزمن الاحتياطي الحر ح $_{\text{ور}}$ = م $_{\text{ر}}$ − (م $_{\text{و}}$ + ت $_{\text{ور}}$) .

والمسار الحرج هو الذي ينعدم عنده الاحتياطي الزمن الكلي أي أن المسار الحرج هو المسار ب ح ط . أما الزمن الاحتياطي الحر فهو مقياس مضلل في دراسة مدى حرجية النشاط فهناك بعض الأنشطة الغير حرجة يكون احتياطها الزمني صفرًا كما هو الحال في الأنشطة الحرجة .

٤− لاستخدام أسلوب بيرت في تقدير زمن إنجاز المشروع ككل يتم الآتي :

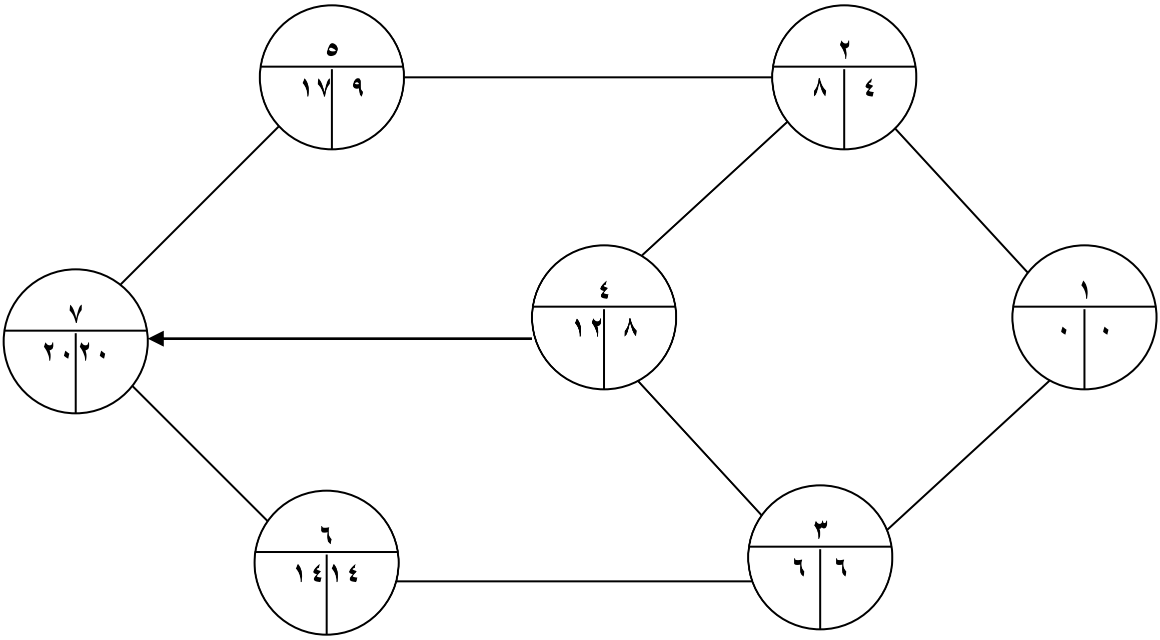
- تقدير أزمنة إنجاز المشروع :

والجدول التالي يبين الزمن المقدر لأنشطة المشروع وكذا الإنحرافات المعيارية لهذا الزمن المقدر:.

جدول (٥)

النشاط	الزمن			ن⁻ = ١/٦ (نل + ٤نح + نش)	σ⁻ = ١/٦ (ن − نل)	σ٢
	نل	نح	نش			
أ(١−٢)	٢	٤	٦	نأ = ١/٦ (٢+٤×٤+٦)=٤	σأ= ١/٦ (٦−٢)=٢/٣	٤/٩
ب(١−٣)	٣	٥	١٣	نب = ١/٦ (٣+٤×٥+١٣)=٦	σب= ١/٦ (١٣−٣)=٥/٣	٢٥/٩
ج(٢−٥)	٤	٥	٦	نجـ= ١/٦ (٤+٤×٥+٦)=٥	١/٣	١/٩
د(٢−٤)	٢	٣	١٠	ند = =٤	٤/٣	١٦/٣
هـ(٣−٤)	١	٢	٣	نهـ= =٢	١/٣	١/٩
و(٥−٧)	١	٢	٩	نو = =٣	٤/٣	١٦/٣
ز(٤−٧)	٦	٨	١٠	نز = =٨	٢/٣	٤/٩
ح(٣−٦)	٥	٨	١١	نح = =٨	١	١
ط(٦−٧)	٤	٦	٨	نط = =٦	٢/٣	٤/٩

بعد تقدير أزمنة إنجاز الأنشطة يتم رسم الشبكة التخطيطية للمشروع باستخدام أزمنة لإنجاز المقدرة للأنشطة ومن ثم تحديد المسار الحرج سواء من خلال حصر كافة المسارات الممكنة واعتبار المسار الحرج هو المسار ذو أطول فترة زمنية أو حساب الأزمنة المبكرة والمتأخرة لبداية ونهاية الأنشطة والموضحة على الشبكة التالية :



ومن الشبكة يتضح أن:

المسار الحرج هو المسار ب ح ط بزمن إنجاز للمشروع يقدر بعشرين ساعة .

٥- لحساب احتمال إنجاز المشروع في زمن لا يزيد عن ٢٣ أسبوع . نفرض أن (س) بمثابة متغير عشوائي يعبر عن زمن إنجاز المشروع ككل . فيكون المتغير (س) له التوزيع الطبيعي والذي تحدد معالمه على النحو التالي :

$\bar{ن}$ = مجموع الأزمنة المقدرة للأزمنة الحرجة = ٢٠ ساعة

، $\sigma_{ن}$ = $\sqrt{\text{مجموع تباينات الأنشطة الحرجة فقط}}$

= $\sqrt{\sigma^{2}_{ب} + \sigma^{2}_{ح} + \sigma^{2}_{ط}}$ = $\sqrt{{}^{٢٥}/_{٩} + ١ + {}^{٤}/_{٩}}$

= $\sqrt{{}^{٣٨}/_{٩}}$ = ٢,٠٥٥ ساعة

أي أن : س ~ م . ط (٢٠ ، ٢,٠٥٥)

فيكون :

$$ح(س \le ٢٣) = ح\left(\frac{س-\mu}{\sigma} \le \frac{٢٣-٢٠}{٢،٠٥٥}\right)$$

$$= (ي \le ١،٤٦)$$

$$= \Phi(١،٤٦)$$

و بالكشف في الجدول المعتاد المعياري عن المساحة المقابلة للدرجة المعيارية ١،٤٦ نجد أن :

ح (س $\le$ ٢٣) = ٠،٩٢٧٩

أي أن احتمال إنجاز المشرع في زمن ٢٣ ساعة وهو ٠،٩٢٧٩ أو ٩٢,٧٩%. هذا وباستخدام فكر الاحتمال المكمل فإن احتمال إنجاز المشروع في زمن يزيد عن ٢٣ ساعة هو ١ – ٠،٩٢٧٩ = ٠،٠٧٢١ أي ٧،٢١%

٦- لحساب الحد الأقصى لزمن إنجاز المشروع بنسبة ٩٧،٥ نفرض أن الحد الأقصى لهذا الزمن هو المقدار (ك) . فيكون :

ح (س$\le$ ك) = ٠،٩٧٥

و بتحويل الدرجة الطبيعية لمعيارية :

$$ح\left(\frac{س-\mu}{\sigma} \geq \frac{ك-\mu}{\sigma}\right) = ٠،٩٧٥$$

$$ح\left(ي \geq \frac{ك-٢٠}{٢،٠٥٥}\right) = ٠،٩٧٥$$

$$\Phi\left(\frac{ك-٢٠}{٢،٠٥٥}\right) = ٠،٩٧٥$$

و حيث أن المساحة ٠،٩٧٥ تزيد عن ٠،٥ لذا فالدرجة المعيارية

$$\frac{ك-٢٠}{٢،٠٥٥} \text{ درجة معيارية}$$

لذا فبالكشف في جدول التوزيع المعتاد المعياري عن المساحة ٠،٩٧٥ من حيث كونها تناظر أي من الدرجات المعيارية وتحت أي فروق نجد أن الدرجة المعيارية المقابلة هي ١,٩٦ . لذا يتم مساواة تلك الدرجة المعيارية بالمقدار

$$\frac{ك-٢٠}{٢،٠٥٥} \text{ فيكون :}$$

$$\frac{ك - ٢٠}{٢،٠٥٥} = ١،٩٦$$

ك – ٢٠ = ١،٩٦ (٢،٠٥٥)

= ٤،٠٢٧٨

أي أن :

ك = ٢٤، لاحظ أن الجداول المعيارية تأخذ ثلاث صور مختلفة لكنها في النهاية تعطي نتيجة واحدة وهذه الصور الثلاث هي : –

١– جدول المساحة من نقطة المتوسط المعياري . و هذه الجداول تعطي المساحة المحصورة بين المتوسط المعياري (الصفر) وبين أي درجة معيارية موجبة كما هو موضح بالشكل المقابل فهي تعطي المساحة المظللة أو الاحتمال أو النسبة ح (صفر ≤ ي ≤ + أ ٩)

٢– جدول المساحات التجميعية أو التراكمية و هو يعطي المساحة المحصورة ما بين (– ∞) و أي درجة معيارية موجبة أي أنها تعطي المساحة التالية : ح (– ∞ ≤ ي ≤ + أ) = Φ (أ)
كما هي موضحة بالرسم المقابل .

٣– جدول المساحة الصغرى و هذا الجدول يعطي المساحة المحصورة ما بين أي درجة معيارية موجبة و بين (∞) . أي أن هذا الجدول يعطي المساحة أو النسبة التالية :

ح (+أ ≤ ي ≤ – ∞) كما يوضحها الشكل المقابل (المساحة المظللة)

- استخدام البرمجة الخطية في التحليل الشبكي : –

تبين لنا من خلال دراستنا لأسلوبي المسار الحرج و بيرت أن كلاهما يقوم على أساس رسم الشبكة التخطيطية للمشروع و منها يتم تحديد أو تقدير زمن المسار الحرج و الذي يعتبر بمثابة أقل زمن يمكن خلاله تنفيذ أنشطة

المشروع ككل نظراً للتسلسل المنطقي لتتابع أنشطة المشروع . وحيث أن المسار الحرج ما هو إلا تتابع لمجموعة من الأنشطة الحرجة يتم إنجازها من خلال فترة زمنية تسمى بزمن إنجاز النشاط و كل نشاط من أنشطة المشروع يبدأ بحدث يسمى بحدث البداية وينتهي بحدث يسمى بحدث النهاية. و تتميز الأنشطة الحرجة بتحقق التساوي فيما بين زمن مبكر البداية مع زمن متأخر البداية للنشاط الحرج كما يتحقق التساوي فيما بين زمن مبكر النهاية مع زمن متأخر النهاية للنشاط الحرج . كما أن للأنشطة الحرجة يكون الفرق ما بين الأزمنة المبكرة للنهاية والبداية أو الفرق ما بين الأزمنة المتأخرة للبداية والنهاية عبارة عن زمن إنجاز النشاط .

لذا فإنه لتصوير شبكة مشروع معين في صورة نموذج خطي نفرض أن $س_١$ ، $س_٢$ ، ٠٠٠٠٠ ، $س_ن$ هي مجموعة المتغيرات القرارية التي تعبر عن أحداث شبكة المشروع محل الدراسة . فيكون المطلوب أو الهدف هو الوصول بزمن المسار الحرج و هو عبارة عن الفرق حدث النهاية ($س_ن$) و حدث البداية $س_١$ إلى أقل ما يمكن وذلك مشروطاً بمجموعة القيود الهيكلية الخاصة بأزمنة إنجاز أنشطة المشروع المختلفة وهي عبارة عن الفرق ما بين حدث نهاية النشاط و حدث بداية النشاط فيجب ألا تقل عن زمن إنجاز النشاط . فعلى سبيل المثال إذا كان لدينا نشاط يبدأ بالحدث (و) و ينتهي بحدث النهاية (ر) و ذلك بزمن إنجاز يعادل $ت_{ور}$ فإن القيد الخاص بهذا النشاط يأخذ الصورة التالية :

$س_و - س_ر \leq ت_{ور}$ وذلك لكافة أنشطة المشروع . هذا بالإضافة لقيود عدم السالبية الخاصة بكل المتغيرات القرارية في النموذج .

هذا ويمكن بعد صياغة النموذج الخطي حل هذا النموذج بأحد طرق السمبلكس التي طرحناها من ذي قبل (طريقة م الكبرى أو السمبلكس ذات المرحلتين) . لكن نظرًا لكثافة عدد القيود والتي من شأنها تحتاج إلى حسابات

طويلة ومملة يأتي دور أساليب التحليل الشبكي سواء المسار الحرج أو بيرت والذي يبنى أيضًا على أساس ومفاهيم البرمجة الخطية في أعضاء الحل بكفاءة ويسر .

مثال (٣) : ضع شبكة المشروع الواردة في المثال رقم (١) في صورة نموذج خطي .

الحل :

نفرض أن س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ ، .... ، س$_{٦}$ تعبر عن مجموعة المتغيرات القرارية المقابلة لأحداث الشبكة . فيكون المطلوب هو إيجاد قيم س$_{ر}$ حيث ر= ١ ، ٢ ، ...... ، ٦ التي تجعل دالة الهدف :

Z = س$_{٨}$ – س$_{١}$ (أقل ما يمكن)

بشرط القيود :

س$_{٢}$ – س$_{١}$	≥ ٤	النشاط (أ)
س$_{٣}$– س$_{١}$	≥ ٦	النشاط (ب)
س$_{٤}$ – س$_{١}$	≥ ٥	النشاط (جـ)
س$_{٣}$ – س$_{٢}$	≥ ٤	النشاط (د)
س$_{٥}$– س$_{٣}$	≥ ٥	النشاط (هـ)
س$_{٦}$ – س$_{٢}$	≥ ٢	النشاط (ى)
س$_{٧}$ – س$_{٣}$	≥ ٧	النشاط (و)
س$_{٧}$ – س$_{٤}$	≥ ٥	النشاط (ز)
س$_{٦}$ – س$_{٥}$	≥ ٥	النشاط (ط)
س$_{٨}$ – س$_{٦}$	≥ ٤	النشاط (ك)
س$_{٨}$– س$_{٧}$	≥ ٢	النشاط (خ)

س$_{ر}$ ≥ صفر حيث ر = ١ و ٢ و ٣و ٠٠٠ و ٨

هذا ويمكن وضع المتغيرات القرارية في صورة مرتبة فيصبح النموذج الخطي هو المطلوب إيجاد قيم س$_{ر}$ حيث ر = ١ و ٢ و ٠٠٠ و ٨ التي تجعل الدالة : -

Z = س$_{٨}$ – س$_{١}$ (أقل ما يمكن)

بشرط القيود :

– س$_{١}$ + س$_{٢}$ ≥ ٤

– س$_{١}$ + س$_{٣}$ ≥ ٦

– س$_{١}$ + س$_{٤}$ ≥ ٥

– س$_{٢}$ + س$_{٣}$ ≥ ٤

– س$_{٣}$ + س$_{٥}$ ≥ ٥

– س$_{٢}$ + س$_{٦}$ ≥ ٢

– س$_{٣}$ + س$_{٧}$ ≥ ٧

– س$_{٤}$ + س$_{٧}$ ≥ ٥

– س$_{٥}$ + س$_{٦}$ ≥ ٥

– س$_{٦}$ + س$_{٨}$ ≥ ٤

– س$_{٧}$ + س$_{٨}$ ≥ ٢

س$_{ر}$ ≥ صفر حيث ر = ١ و ٢ و ٠٠٠ و ٨

يتضح من صياغة شبكة المشروع في صورة خطية مدى اتجاه الحل باستخدام طرق السمبلكس بسبب كثافة القيود لذا فدور أساليب التحليل الشبكي تعتبر أكثر كفاءة في عملية الحل .

ثالثًا : أسلوب بيرت / تكلفة : PERT / Cost

من خلال دراستنا لأسلوبي المسار الحرج وبيرت تبين لنا أن كلاً من الأسلوبين يهدف للوصول لأقل زمن لإنجاز المشروعات في ظل بيانات متاحة عن أزمنة إنجاز أنشطة تلك المشروعات . ومن أهم أوجه النقد التي توجه لهذين الأسلوبين أنهما يغفلان عن جانب هام في اتخاذ القرار و عملية تنفيذ المشروعات وهو جانب التكلفة إنجاز أنشطة المشروع أما هذا الأسلوب – بيرت والتكاليف – فهو يتناول عملية التخطيط و الرقابة على أنشطة المشروع من خلال العلاقة التبادلية بين زمن إنجاز النشاط و تكلفة إنجاز النشاط . بمعنى إذا رأت الإدارة أنه يجب الإسراع في زمن إنجاز أنشطة المشروع فيجب عليها أن تقبل الزيادة في تكلفة الإنجاز المقابلة لتخفيض عنصر الزمن .

ويعتبر أسلوب بيرت / تكلفة بمثابة امتداد طبيعي لأسلوب بيرت السابق حيث يهتم هذا الأسلوب بعملية تخطيط الزمن المتوقع لإنجاز الأنشطة إلى جانب تحديد تكلفة كل نشاط . وبذلك يمكن من خلال هذا الأسلوب التعرف على زمن و تكلفة إنجاز المشروع وإمكانية تعديل خطط التنفيذ إذا رأت الإدارة أهمية في التعديل .

و بمعنى أكثر تحديداً يهدف أسلوب بيرت / تكلفة في تحديد أقل زمن لإنجاز المشروع بأقل تكلفة ممكنة و ذلك من خلال العلاقة التبادلية ما بين زمن إنجاز النشاط وتكلفة النشاط . بمعنى أنه يمكن تخفيض زمن إنجاز النشاط و تكلفة النشاط . بمعنى أنه يمكن تخفيض زمن إنجاز مشروع معين و ذلك بشرط قبول التكاليف الإضافية الناجمة عن الإسراع بزمن الإنجاز . فهناك علاقة عكسية قوية ما بين عاملي الزمن و تكلفة إنجاز النشاط . وعلى ذلك

فإن أسلوب بيرت / تكلفة يفرق ما بين نوعين من الأزمنة و نوعين من التكاليف و هي :

١- بالنسبة لزمن إنجاز الأنشطة فهناك نوعين من الأزمنة و هما : -

أ – الزمن أو الوقت العادي لإنجاز النشاط (نع) Normal Time

وهو الزمن اللازم لإتمام النشاط عند التكلفة العادية .

ب – الزمن أو الوقت المتسرع أو العاجل (نم) Crash Time

و هو عبارة عن أقل زمن ممكن لإنجاز النشاط في ظل تحمل تكاليف عاجلة

٢- بالنسبة لجانب التكلفة فهناك نوعين من التكاليف وهما:

أ – تكاليف عادية لإنجاز النشاط : (تع) Normal Cost

و هي تكلفة إنجاز النشاط في وقته العادى .

ب–تكاليف متسرعة (عاجلة) لإنجاز النشاط: (تم) Crash Cost

وهى تكلفة إنجاز النشاط فى وقته أو زمنه العاجل.

هذا وبالإضافة إلى الفرق ما بين جانبي التكلفة المعروفة لدينا جميعاً و هي التكاليف الثابتة Fixed Cost و هي عبارة عن تكاليف ثابتة لا تتغير مهما تغير حجم النشاط أو المشروع إلا أن هذه التكاليف المتغيرة Variable Cost فهي التي تتغير بتغير حجم النشاط أو حجم المشروع حيث تزداد هذه التكلفة المتغيرة بتخفيض أو نقصان زمن إنجاز النشاط أو المشروع و تقل هذه التكلفة المتغيرة مع زيادة زمن إنجاز النشاط أوالمشروع(علاقة عكسية) .

هذا و تكمن آلية الخطوات المتبعة لأسلوب بيرت و التكاليف في مهمة أو كيفية الوصول لأقل زمن ممكن بأقل تكلفة ممكنة في الآتي:

١- رسم الشبكة التخطيطية لأنشطة المشروع باستخدام الزمن العادي لإنجاز تلك الأنشطة. و من خلال تلك الشبكة يتم تحديد المسار الحرج للمشروع سواء من زاوية المسار ذو أطول فترة زمنية لإنجاز المشروع أو حساب

الأزمنة المبكرة و المتأخرة لبداية ونهاية الأنشطة ومن ثم حساب الاحتياطي الزمني الكلي والحر على تلك الشبكة. ومن خلال المسار الحرج يتم تحديد أقل زمن لإنجاز المشروع – زمن المسار العادي – ويتكاليف إجمالية عادية هي عبارة عن مجموع تكلفة أنشطة المشروع ككل سواء منها الحرجة أو غير الحرجة وهي تعتبر أقل تكلفة لإنجاز المشروع باستخدام زمن المسار الحرج العادي.

٢- رسم الشبكة التخطيطية لأنشطة المشروع و ذلك باستخدام الزمن العاجل لتلك الأنشطة . ومن ثم يتم تحديد زمن المسار الحرج العاجل و بإجمالي تكاليف متسرعة هي جملة تكلفة أنشطة المشروع العاجلة .

٣- الفرق ما بين زمن إنجاز المسار الحرج العادي وزمن المسار الحرج العاجل يبين مدى إمكانية إجراء التخفيضات اللازمة على أنشطة المشروع في مقابل تحمل تكاليف إضافية نتيجة تخفيض عنصر الزمن الخاص بإنجاز الأنشطة . أي أن :

حدود تخفيض زمن إنجاز المسار الحرج العادي – زمن المسار الحرج العاجل وهذا الفرق يعني إمكانية الوصول بزمن إنجاز المشروع العادي إلى زمن الإنجاز العاجل و ذلك في ظل تحمل تكاليف إضافية لاختصار أو تخفيض عنصر الزمن .

هذا ولإجراء التخفيضات اللازمة للوصول لزمن الإنجاز العادي لزمن الإنجاز العاجل يتم الآتي : –

أ – حساب ميل تكلفة وحدود تخفيض كل نشاط . حيث أن ميل تكلفة النشاط ما هو إلا مقدار الزيادة في التكلفة التي يمكن أن يتحملها المشروع نتيجة تخفيض زمن إنجاز النشاط بمقدار وحدة واحدة . أي أن ميل تكلفة النشاط هو

النسبة ما بين (الفرق ما بين التكلفة العاجلة والتكلفة العادية) إلى الفرق ما بين الوقت العادي و الوقت العاجل . أي أن : -

$$\text{ميل تكلفة النشاط} = \frac{\text{مقدار التغير في التكاليف}}{\text{مقدار التغير في الزمن}}$$

$$= \frac{\text{التكلفة المتسرعة أو العاجلة} - \text{التكلفة العادية}}{\text{الزمن العادي} - \text{الزمن العاجل}}$$

$$\text{أي أن ميل تكلفة النشاط} = \frac{ت_م - ت_ع}{ن_ع - ن_م}$$

أما حدود تخفيض زمن إنجاز النشاط فهو عبارة عن الفرق ما بين زمن إنجاز النشاط العادي وزمن إنجاز النشاط العاجل (المتسرع) .

أي أن :

حدود تخفيض النشاط = الزمن العادي لإنجاز النشاط – الزمن العاجل المتسرع $= ن_ع - ن_م$

ب - يتم إجراء سلسلة من التخفيضات المتتالية على أزمنة إنجاز أنشطة المسار الحرج للمشروع والتي تتمتع بميزة أقل ميل تكلفة وذلك في حدود عملية مقارنة ما بين حدود تخفيض زمن إنجاز النشاط وبين أقل زمن احتياطي حر يزيد عن الصفر للأنشطة الغير حرجة. ويتم التخفيض بمقدار أيهما أقل (حتى لا يتحول المسار الحرج ويصبح غير حرج). وفي كل مرة يتم

حساب التكاليف الإضافية الناجمة عن التخفيض في زمن تلك الأنشطة وهي عبارة عن حاصل ضرب ميل تكلفة النشاط مضروبًا في عدد الوحدات الزمنية التي تم تخفيضها من زمن إنجاز هذا النشاط.

جـ - الاستمرار في إجراء التخفيضات اللازمة على الأزمنة العادية لأنشطة المسار الحرج إلى أن نصل بزمن المسار الحرج في الشبكة العادية إلى زمن المسار الحرج بالشبكة العاجلة (المتسرعة) . و بتحقق ذلك نصل إلى أقل زمن لإنجاز المشروع و بأقل تكاليف إجمالية ممكنة (و التي تعتبر في تلك اللحظة أقل زمن و بأقل تكلفة) .

هذا ويراعى عند إجراء التخفيضات المتتالية للأنشطة الحرجة ما يلي : -

١- في حالة تساوي نشاطين حرجين في ميزة أقل ميل تكلفة في مجموعةالأنشطة الحرجة يتم تخفيض النشاط الذي له أكبر حدود تخفيض ممكنة . و في حالة التساوي في حدود التخفيض يتم اختيار النشاط الذي يشترك في أكثر من مسار حتى لا يتحول المسار الحرج و تظل الفروق فيما بين زمن المسار الحرج و باقي المسارات ثابتة .

٢- يمكن تخفيض نشاط حرج بالتوازي مع نشاط غير حرج يتمتع أيضاً بميزة أقل ميل تكلفة فيما بين مجموعة الأنشطة الغير حرجة و بما لا لتحول المسار الحرج .

٣- يراعى أيضاً عند إجراء التخفيضات الممكنة دراسة البدائل في حالة تعددها . ويفضل اختيار البديل الذي يترتب عليه التكاليف الإضافية الأقل نتيجة تخفيض وحدات زمنية متساوية لبدائل عملية التخفيض . هذا ويراعى عند تطبيق أسلوب بيرت و التكاليف التفرقة بين حالتي وجود مسار وحيد في الشبكة التخطيطية . فإذا كان :

أ – شبكة المشروع التخطيطية تتكون من مسار واحد فقط :

فإذا كان لدينا بالإضافة لأزمنة و تكلفة إنجاز أنشطة المشروع العادية بدائل مختلفة لأزمنة و تكاليف إنجاز نفس المشروع . فأنه للوصول لأقل زمن لإنجاز المشروع بأقل تكلفة ممكنة يتم الآتي : –

١- رسم الشبكة التخطيطية للمشروع ومن ثم تحديد زمن وتكلفة إنجاز أنشطة المشروع طبقاً للزمن و التكلفة العادية (وهي عبارة عن أطول فترة زمنية يمكن في خلالها إنجاز المشروع وذلك بأقل تكلفة إنجاز عادية ممكنة) .
٢- يتم حساب ميل تكلفة الأنشطة للبدائل المختلفة .
٣- تجري مجموعة التخفيضات المتتالية الممكنة على أنشطة الشبكة العادية في ظل معيار التخفيض طبقاً لأولوية أقل ميل تكلفة في المقارنة فيما بين البدائل المختلفة للتكلفة .

و المثال التالي يوضح ذلك .

<u>مثال : -</u>

يتكون أحد المشروعات من ثلاثة أنشطة فإذا كانت بيانات التكلفة العادية (بالألف جنيه) و الزمن اللازم لتنفيذ كل نشاط (بالأسبوع) و كذلك بيانات عن بدائل التكلفة العاجلة و الزمن العاجل من خلال بديلين مختلفين موضحة بياناتهم بالجدول التالي :

جدول (٦)

النشاط	مسار النشاط	بيانات عادية		بدائل عاجلة			
				البديل الأول		البديل الثاني	
		زمن	تكلفة	زمن عاجل	تكلفة عاجلة	زمن عاجل	تكلفة عاجلة
أ	(١-٢)	١٠	٢٠	٩	٢٥	٨	٢٨
ب	(٢-٣)	١٢	١٤	١١	٢١	٦	٢٦
ج	(٣-٤)	١٨	٣٥	١٤	٤١	١٠	٤٩
مجـ		٤٠	٦٩	٣٤	٨٧	٢٤	١٠٣

و المطلوب : -

١- باستخدام أسلوب بيرت / تكلفة ما هي أقل تكلفة ما هي أقل تكلفة لإنجاز المشروع بأقل زمن ممكن .

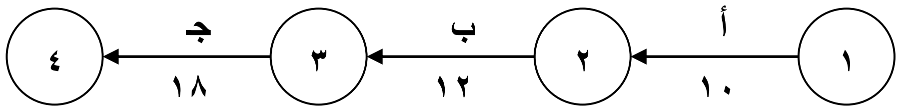
٢- إذا علمت أن الزمن المستهدف لإنجاز المشروع هو ٢٣ أسبوع فيما هي أقل تكلفة لإنجاز المشروع بشرط مراعاة الزمن المستهدف لإنجاز المشروع .

٣- حدد ما يلي : -

- ما هي أقل تكلفة لإنجاز المشروع في زمن يعادل ٢٠ أسبوع .
- ما هو أقل زمن لإنجاز المشروع بتكلفة تعادل ٨٣ ألف جنيه.

الحـل :

١- لتحديد أقل تكلفة لإنجاز المشروع بأقل زمن ممكن باستخدام أسلوب بيرت والتكاليف يتم بداية رسم الشبكة التخطيطية للمشروع وذلك باستخدام الزمن العادي والمبينة في الرسم التالي :



و يتضح من الرسم أن الشبكة التخطيطية للمشروع تفيد بأن هناك مسار وحيد يعبر عن التسلسل المنطقي و المتتابع لأنشطة المشروع و ذلك بزمن إنجاز عادي يعادل (١٠ + ١٢ + ١٨) أي ٤٠ أسبوعاً وذلك بأقل تكلفة عادية ممكنة و التي تعادل ٦٩ ألف جنيه . و هذه النقطة الزمنية (٤٠ أسبوع) كزمن إنجاز للمشروع وما يقابلها من تكلفة عادية مقابلة ٦٩ ألف جنيه يعتبر بمثابة أطول فترة زمنية لتنفيذ المشروع و بأقل تكلفة إجمالية عادية ممكنة لإنجاز أنشطة المشروع . وذلك مقارنة ببديلي التكلفة العاجلة و التي تفيد بوجود بديلين على الترتيب و هما : -

<u>البديل الأول</u> : يفيد إمكانية تنفيذ المشروع في زمن يعادل ٩+١١+١٤ = ٣٤ أسبوع وتكلفة عاجلة تعادل ٢٥ + ٢١ + ٤١ = ٨٧ ألف جنيه .

<u>البديل الثاني</u> : - يفيد إمكانية تنفيذ المشروع في زمن يعادل ٨+٦+١٠ = ٢٤ أسبوع و بتكلفة عاجلة تعادل ٢٨ + ٢٦ + ٤٩ = ١٠٣ ألف جنيه.

فللوصول لأقل تكلفة لإنجاز المشروع بأقل زمن ممكن يتم حساب ميل تكلفة الأنشطة للبدائل المختلفة كما يوضحها الجدول التالي :

جدول (٧)

بيان / نشاط	بيانات عادية		بدائل التكلفة العاجلة									
			البديل الأول					البديل الثاني				
	زمن عادي	تكلفة عادية	زمن عاجل	تكلفة عاجلة	زيادة تكلفة	نقص زمن	ميل تكلفة	زمن عاجل	تكلفة عاجلة	زيادة تكلفة	نقص زمن	ميل تكلفة
أ	١٠	٢٠	٩	٢٥	٥	١	٥	٨	٢٨	٨	٢	٤
ب	١٢	١٤	١١	٢١	٧	١	٧	٦	٢٦	١٢	٦	٢
جـ	١٨	٣٥	١٤	٤١	٦	٤	١,٥	١٠	٤٩	١٤	٨	١,٧٥
مجـ	٤٠	٦٩	٣٤	٨٧				٢٤	١٠٣			

ومن خلال عمودي ميل تكلفة الأنشطة في الجدول السابق يمكن ترتيب البدائل الخاصة بالتعديلات فى الخطط المتتالية على النحو التالي :

١) <u>التعديل الأول</u> : طبقاً للبديل الأول يتم تخفيض زمن النشاط (جـ) بمقدار (٤) أسبوع بميل تكلفة للأسبوع تعادل ١,٥ ألف جنيه أي تخفيض ٤ أسبوع مقابل تحمل تكاليف إضافية تعادل ٦ ألف جنيه .

٢) <u>التعديل الثاني</u> : – طبقاً للبديل الثاني يتم تخفيض النشاط (جـ) بمقدار (٨) أسبوع بميل تكلفة الأسبوع الواحد ١,٧٥ ألف جنية أي تخفيض ٨ أسبوع مقابل تحمل تكاليف إضافية تعادل ٨ × ١,٧٥ = ١٤ ألف جنيه .

٣) <u>التعديل الثالث</u> : طبقًا للبديل الثاني يتم تخفيض النشاط (ب) بمقدار (٦) أسبوع بميل تكلفة للأسبوع الواحد تعادل ٢ ألف جنية أي أن تخفيض ٦ أسابيع مقابل تحمل تكاليف إضافية تعادل ٦×٢=١٢ ألف جنيه .

٤) <u>التعديل الرابع</u> : طبقًا للبديل الثاني يتم تخفيض النشاط (أ) بمقدار (٢) أسبوع بميل تكلفة للأسبوع الواحد تعادل أربعة آلاف جنيه أي أن تخفيض أسبوعين مقابل تكاليف إضافية تعادل ٢ × ٤ = ثمانية آلاف جنيه.

٥) <u>التعديل الخامس</u> : طبقًا للبديل الأول يتم تخفيض النشاط (أ) بمقدار أسبوع بميل تكلفة للأسبوع ٥ آلاف جنيه كتكاليف إضافية يتحملها المشروع نتيجة التعجيل بالزمن بمقدار أسبوع .

٦) <u>التعديل السادس</u> : طبقًا للبديل الأول يتم تخفيض النشاط (ب) بمقدار أسبوع واحد بميل تكلفة للأسبوع سبعة آلاف جنيه .

هذا ويتم وضع هذه التعديلات في خطط التنفيذ في جدول على الصورة التالية:

جدول (٨)

الأنشطة / الخطط	النشاط (أ)		النشاط (ب)		النشاط (ج)		المجموع	
	زمن	تكلفة	زمن	تكلفة	زمن	تكلفة	زمن	تكلفة
بيانات عادية : أطول وقت/ أقل تكلفة * التعديل الأول	١٠	٢٠	١٢	١٤	١٨ -٤	٣٥ +٦	٤٠ -٤	٦٩ +٦
الخطة المعدلة الأولى *التعديل الثاني	١٠	٢٠	١٢	١٤	١٤ -٨	٤١ +١٤	٣٦ -٨	٧٥ +١٤
الخطة المعدلة الثانية *التعديل الثالث	١٠	٢٠	١٢ -٦	١٤ +١٢	٦	٥٥	٢٨ -٦	٨٩ +١٢
الخطة المعدلة الثالثة *التعديل الرابع	١٠ -٢	٢٠ +٨	٦	٢٦	٦	٥٥	٢٢ -٢	١٠١ +٨
الخطة المعدلة الرابعة *التعديل الخامس	٨ -١	٢٨ +٥	٦	٢٦	٦	٥٥	٢٠ -١	١٠٩ +٥
الخطة المعدلة الخامسة *التعديل السادس	٧	٣٣	٦ -١	٢٦ +٧	٦	٥٥	١٩ -١	١١٤ +٧
الخطة السادسة المعدلة أقل زمن/ أعلى تكلفة	٧	٣٣	٥	٣٣	٦	٥٥	١٨	١٢١

أي أن أقل زمن يمكن فيه إنجاز أنشطة المشروع هو ١٨ أسبوع وذلك بأقل تكلفة ممكنة مقابلة تعادل ١٢١ ألف جنيه .

٢- لتحديد أقل تكلفة ممكنة لإنجاز المشروع في فترة زمنية تعادل ٢٣ أسبوع فهناك طريقتين لحساب هذا القدر من التكاليف وهما:

<u>الطريقة الأولى</u> : من خلال متابعة الخطط الواردة بالجدول رقم (٨) نجد أن المدة الزمنية ٢٣ أسبوع تقع في نطاق التعديل الثالث (الخطة المعدلة الثالثة) والتي أدت إلى حساب أقل تكلفة لإنجاز المشروع في الفترة من ٢٢–٢٨ أسبوع . إلا أنه بدلاً من حساب أقل تكلفة مقابلة للفترة الزمنية ٢٢ أسبوع يتم حساب ما هو قيمة تكلفة تقابل إنجاز المشروع في زمن يعادل ٢٣ أسبوع وذلك على النحو التالي :

أقل تكلفة لإنجاز المشروع في زمن يعادل ٢٣ أسبوع = أقل تكلفة لإنجاز المشروع في زمن يعادل ٢٨ أسبوع + مقدار التغير الزمني فيما بين ٢٣ ، ٢٨ أسبوع × ميل تكلفة الوحدة من النشاط (ب) طبقًا للبديل الثاني . أي أن:

أقل تكلفة لإنجاز المشروع في زمن ٢٣ أسبوع = ٨٩+(٢٨–٢٣)×٢

= ٨٩+٥×٢=٩٩ ألف جنيه

أي أن أقل تكلفة لإنجاز المشروع في زمن يعادل ٢٣ أسبوع هي ٩٩ ألف جنيه.

<u>الطريقة الثانية</u> : باستخدام فكرة النسبة والتناسب على الجدول السابق فحيث أن الفترة الزمنية ٢٣ أسبوع تقع ما بين ٢٨ ، ٢٢ أسبوع تقابلهم أقل تكاليف ممكنة للإنجاز تعادل ٨٩ ، ١٠١ ألف جنيه على الترتيب. لذا فباعتبار الفترة الزمنية ٢٣ فيما بين النقطتين الزمنيتين يمكن تحديد أقل تكلفة مقابلة فيما بين نقطتي التكاليف . أي أن :

بافتراض أن (س) هى قيمة أقل تكلفة لإنجاز المشروع فى الفترة الزمنية ٢٣ أسبوع . فلإيجاد قيمة(س) فإن تطبيق قانون النسبة والتناسب ينتج أن :

زمن		تكلفة
٢٨	←	٨٩
٢٣	←	س
٢٢	←	١٠١

$$\frac{(\text{٢٨} - \text{٢٢})}{\text{٢٨} - \text{٢٣}} = \frac{\text{٨٩} - \text{١٠١}}{\text{٨٩} - \text{س}}$$

أي أن:

$$\frac{\text{٦}}{\text{٥}} = \frac{-\text{١٢}}{\text{٨٩} - \text{س}} \leftarrow \frac{\text{١}}{\text{٥}} = \frac{-\text{٢}}{\text{٨٩} - \text{س}}$$

أى أن: ٨٩ – س = –٢ × ٥

= – ١٠

ومنها فإن:

٨٩ + ١٠ = س

أى أن س = ٩٩ ألف جنيه

أى أن أقل تكلفة لإنجاز المشروع فى زمن يعادل ٢٣ أسبوع هى ٩٩ ألف جنيه . (وهو نفس الناتج السابق).

٣ – لتحديد:

(*) أقل تكلفة لإنجاز المشروع فى زمن يعادل ٢٠ أسبوع فإنه من خلال حسابات الجدول رقم (٨) يتضح أن أقل تكلفة لإنجاز المشروع فى زمن يعادل ٢٠ أسبوع هى ١٠٩ ألف جنيه (الخطة المعدلة الرابعة)

(*) أقل زمن لإنجاز أنشطة المشروع بتكلفة تعادل ٨٣ ألف جنيه فيمكن إيجاد الناتج بإحدى الطريقتين السابقتين ولكن للتبسيط دعنا نقوم بحساب

المطلوب بإستخدام قاعدة النسبة والتناسب . حيث نجد أن التكلفة المحددة للإنجاز هى ٨٣ ألف جنيه تقع فيما بين التكاليف الإجمالية المقابلة للخطة المعدلة الأولى والخطة المعدلة الثانية بالجدول رقم (٨) بتكاليف إجمالية مقابلة هى ٧٥ ، ٨٩ ألف جنيه على الترتيب . لذا نفرض أن : أقل زمن لإنجاز المشروع بتكلف تعادل ٨٣ ألف جنيه هو (ص) أسبوع . ولإستنتاج قيمة (ص) يتم الآتى :

زمن	تكلفة
٣٦ ⟵	٧٥
ص ⟵	٨٣
٢٨ ⟵	٨٩

$$\frac{٣٦ - ٢٨}{٣٦ - ص} = \frac{٧٥ - ٨٩}{٧٥ - ٨٣}$$

أى أن:

$$\frac{٨}{٣٦ - ص} = \frac{١٤-}{٨-} = \frac{٧}{٤}$$

ومن ثم فإن:

٣٢ = ٧ (٣٦ – ص)

. . ٧ص = ٢٥٢ – ٣٢ = ٢٢٠

. . ص = ٢٢٠ ÷ ٧ = ٣١,٤ أسبوع

أى أن أقل فترة زمنية لإنجاز أنشطة المشروع بتكلفة تعادل ٨٣ ألف جنيه هى ٣١,٤ أسبوع.

لا حظ أن الناتج (٣١,٤ أسبوع) لابد أن يقع بين ٣٦ ، ٢٨ أسبوع.

(ب) الشبكة التخطيطية للمشروع تحتوى على أكثر من مسار :-

إذا كانت الشبكة التخطيطية للمشروع تحتوى على أكثر من مسار فإنه لتطبيق أسلوب بيرت والتكاليف فى تحديد أقل زمن ممكن لإنجاز المشروع بأقل تكلفة ممكنة . يتم تحديد زمن المسار الحرج للمشروع والأزمنة المبكرة والمتأخرة لبداية ونهاية أنشطة المشروع وذلك مرة بإستخدام الزمن العادى ومرة بإستخدام الزمن المتسرع أو العاجل .ومن خلال المسارين الحرجين يمكن معرفة حدود تخفيض أنشطة المسارين من خلال الفرق بين زمن المسار الحرج للشبكة التخطيطية بإستخدام الزمن العادى وبين زمن المسار الحرج للشبكة التخطيطية باستخدام الزمن العاجل. ثم يتم حساب ميل تكلفة الأنشطة وتجرى التخفيضات المتتالية لأزمنة الأنشطة الحرجة للشبكة التخطيطية الخاصة بالزمن العادى وذلك باعتبار ما تم شرحه سابقا بخصوص هذه التخفيضات المتتالية إلى أن نصل بزمن الشبكة التخطيطية لأنشطة المشروع باستخدام الزمن العاجل أو في كل مره من مرات إجراء التخفيضات المتتالية يتم تحديد مقدار التكاليف الإضافية الناتجة عن إجراء تلك التخفيضات المتتالية .

ملحوظة:- في حالة احتواء الشبكة التخطيطية للمشروع على أكثر من مسار فإن سقف التخفيضات المتتالية الأولى لأزمنة الأنشطة الحرجة للشبكة العدية هو عبارة عن زمن المسار الحرج العاجل . أي لا يمكن تخفيض الأزمنة العادية أكثر مما يحدده المسار الحرج العاجل . أما في حالة احتواء الشبكة التخطيطية للمشروع علي مسار واحد وفي ظل تعدد بدائل التكلفة العاجلة فيمكن كما هو مبين في المثال السابق أن يصل الحد الأدني للفترة الزمنية لإنجاز أنشطة المشروع إلي أقل من أزمنة البدائل العاجلة كما هو مبين وواضح في المثال السابق . حيث أن التخفيضات المتتالية تأخذ مزايا كل بديل

من بدائل التكلفة العاجلة المتعددة أى أنه علي الإدارة ومنذ القرار التفاعل مع الإيجابيات أو مزايا تلك البدائل المختلفة من بدائل التكلفة العاجلة أى يستفيد من تلك المزايا أو الإيجابيات التى يقدمها كل بديل من تلك البدائل العاجلة المتعددة.

هذا وقبل التعرض لمثال تطبيقى لعملية التخفيضات المتتالية للأنشطة الحرجة للمشروع فى حالة تعدد المسارات لا ننسى ان التخفيضات تتم على الأنشطة الحرجة للشبكة التخطيطية المرسومة بإستخدام الزمن العادى لتلك الأنشطة . وهذه التخفيضات تتم بعد إتمام عملية المقارنة فيما بين حدود تخفيض الأنشطة الحرجة ذات أقل ميل تكلفة وأقل كمية من الزمن الأحتياطى الحر تختلف قيمته عن الصفر علي تلك الشبكة ويتم التخفيض بأيهما أقل (حدود تخفيض النشاط الحرج ذو أقل ميل تكلفه ،أقل زمن احتياطي حر يزيد عن الصفر) وذلك حتى لا يتحول المسار الحرج لمسار غير حرج بل يظل المسار الحرج حرجا حتى نهاية إتمام كافة التخفيضات المتتالية والممكنة للوصول بزمن المسار الحرج باستخدام الزمن العادي الي زمن المسار الحرج باستخدام الزمن المتسرع أو العاجل والذي يعتبر سقف الحد الأدنى لزمن إنجاز المشروع ككل ، هذا ويمكن إجراء التخفيضات المتتالية بيانيًا من خلال رسم الشبكة التخطيطية باستخدام الزمن العادي بعد كل محاولة من محاولات التخفيضات المتتالية أو من خلال حسابات جدولية لما سيوضحه المثال التالي.

<u>مثال</u> :.

الجدول التالي يوضح التكلفة العادية والتكلفة العاجلة والزمن العادي والزمن المتسرع(العاجل) لتنفيذ أنشطة المشروعات:

جدول (٩)

النشاط	مسار النشاط	بيانات عادية		بيانات عاجلة	
		الزمن (بالاسبوع)	التكلفة (بألاف الجنيهات)	الزمن (بالاسبوع)	التكلفة(بألاف الجنيهات)
أ	(١–٢)	١٠	٧	٩	٧،٤
ب	(٢–٣)	٩	١٨	٦	٢٠،٤
ج	(٢–٤)	٦	١٨	٣	٢٤
د	(٣–٥)	٧	٣،٥	٤	٦,٥
هـ	(٤–٥)	٩	٥،٤	٧	٧
و	(٤–٦)	٥	٥	٤	٦،٥
ز	(٥–٦)	٤	٨	٤	٨
ح	(٦–٧)	٧	٨	٥	١٢
مجـ		٥٧	٧٢،٩	٤٢	٩١،٨

والمطلوب :.

أ- مستخدما أسلوب بيرت/ تكلفة ما هو أقل زمن ممكن لإنجاز المشروع بأقل تكلفة ممكنة .

ب- ما هي أقل تكلفة لإنجاز المشروع في زمن مستهدف يعادل ٣١ أسبوع.

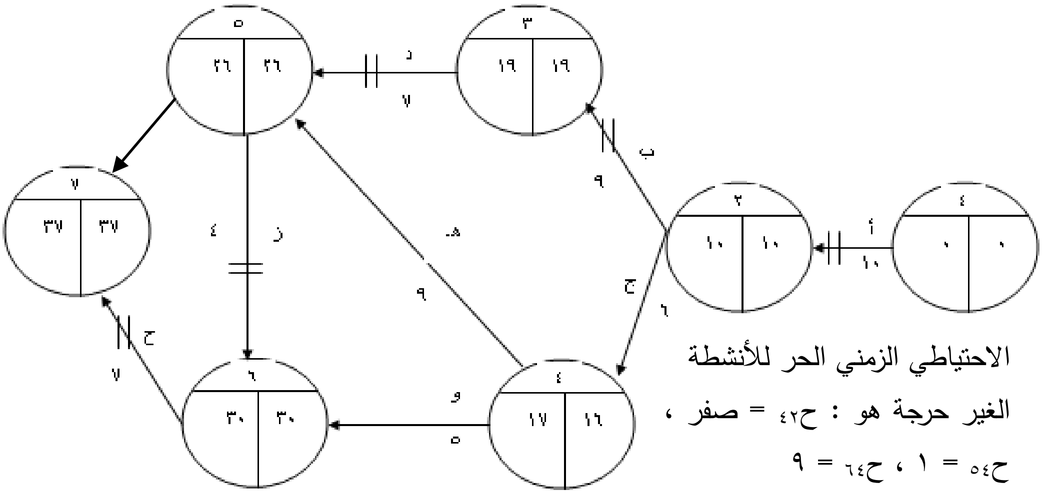
ج- ما هو أقل زمن لإنجاز المشروع بتكلفة تعادل ٨٠ ألف جنية بالضبط.

الحـل:.

أ- لتحديد أقل زمن لإنجاز أنشطة المشروع بأقل تكلفة ممكنة يتم الآتي:.

١- رسم الشبكة التخطيطية للمشروع باستخدام الأزمنة العادية لإنجاز أنشطة المشروع موضحا عليها الأزمنة المبكرة والمتأخرة لبداية ونهاية

الأنشطة والزمن الاحتياطي الحر للأنشطة كما يوضحها الشكل التالي:.



الاحتياطي الزمني الحر للأنشطة الغير حرجة هو : ح٤٢ = صفر ، ح٥٤ = ١ ، ح٦٤ = ٩

الشكل رقم (١)

من الشبكة التخطيطية باستخدام الزمن العادي فإن : -

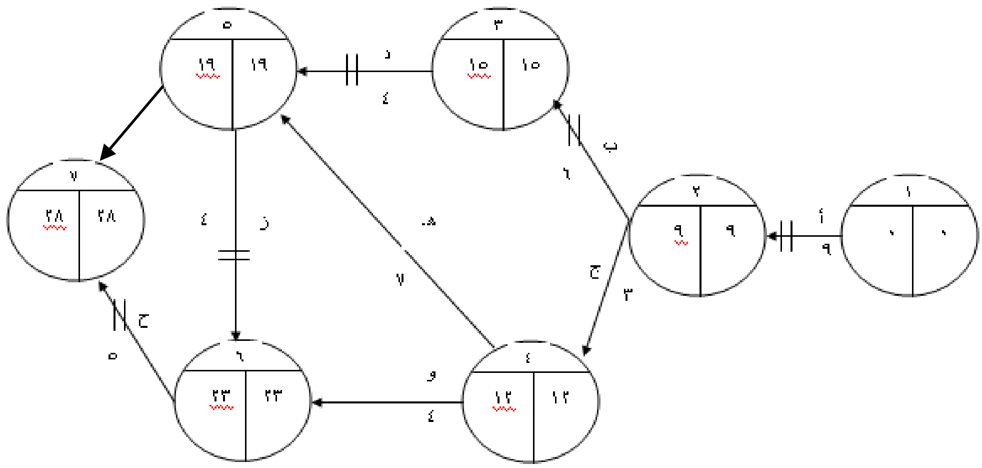
زمن المسار الحرج العادي = ٣٧ أسبوع

بتكاليف إجمالية = مجموع التكاليف العادية لإنجاز كافة أنشطة المشروع

= ٧ + ١٨ + ٠٠٠٠ + ٨

= ٧٢،٩ ألف جنيه

٢- رسم الشبكة التخطيطية للمشروع باستخدام الزمن المتسرع أو العاجل و تحديد زمن المسار الحرج العاجل و الأزمنة المختلفة و ذلك كما يوضحه الشكل التالي: -



شكل رقم (٢)

وطبقاً للشبكة الواردة في الشكل رقم (٢) فإن أقل زمن لإنجاز المشروع طبقاً للمسار الحرج العاجل هو ٢٨ أسبوع و ذلك بتكاليف إجمالية للأنشطة طبقاً للزمن العاجل = مجموع تكاليف كافة الأنشطة

أي أن:

إجمالي التكاليف المتسرعة = ٧،٤ + ٢٠،٤ + ٠٠٠٠ + ١٢

= ٩١،٨ ألف جنيه .

٣- من خلال مقارنة زمن المسار الحرج العادي والعاجل تبين لنا أن هناك إمكانية لتخفيض زمن إنجاز المشروع من ٣٧ أسبوع وهو عبارة عن زمن المسار الحرج العادي إلى ٢٨ أسبوع وهو عبارة عن زمن المسار الحرج العاجل . أي أن:

حدود تخفيض أزمنة أنشطة المشروع = ٣٧ – ٢٨ = ٩ أسبوع.

ولإجراء تلك التخفيضات يجب حساب ميل تكلفة أنشطة المشروع ككل . والجدول التالي يوضح الحسابات اللازمة لتحديد ميل أنشطة المشروع .

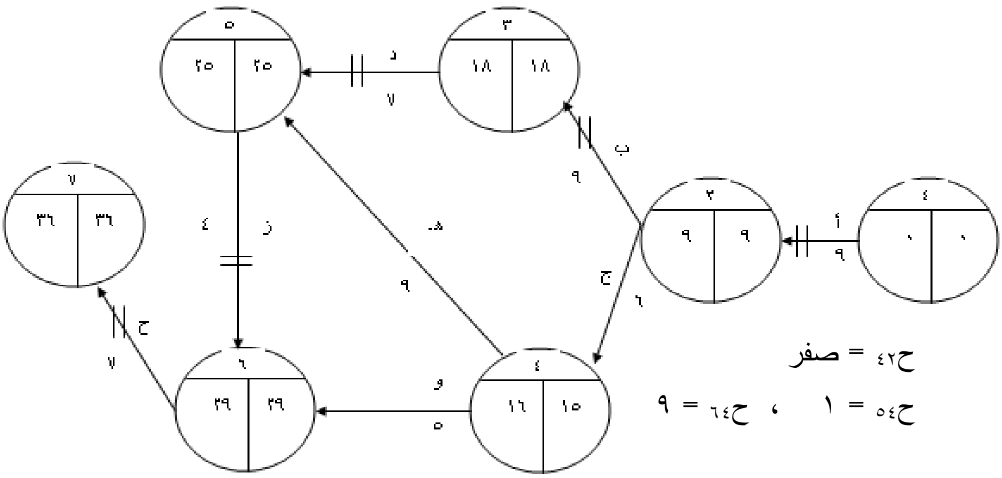
جدول (١٠)

النشاط / بيان	بيانات عادية		بيانات عاجلة		الزيادة في التكلفة	النقص في الزمن (حدود التخفيض)	ميل تكلفة النشاط	التخفيضات المتتالية				
	زمن	تكلفة	زمن	تكلفة				١	٢	٣	٤	٥
								أ	ب	ب، هـ معاً	ج	ج،د معاً
*ا	١٠	٧	٩	٧,٤	٠,٤	١	٠,٤	٩	٩	٩	٩	٩
*ب	٩	١٨	٦	٢٠،٤	٢,٤	٣	٠,٨	٩	٨	٦	٦	٦
جـ	٦	١٨	٣	٢٤	٦	٣	٢	٦	٦	٦	٦	٣
*د	٧	٣,٥	٤	٦,٥	٣	٣	١	٧	٧	٧	٧	٤
هـ	٩	٥,٤	٧	٧	١،٦	٢	٠,٨	٩	٩	٧	٧	٧
و	٥	٥	٤	٦,٥	١,٥	١	١,٥	٥	٥	٥	٥	٥
*ز	٤	٨	٤	٨	صفر	صفر	.	٤	٤	٤	٤	٤
*ح	٧	٨	٥	١٢	٤	٢	٢	٧	٧	٧	٥	٥

حيث أن ميل تكلفة النشاط هو عبارة عن النسبة ما بين الزيادة في تكلفة و بين النقص في زمن إنجاز النشاط.

- **<u>التخفيض الأول : -</u> لكي يتم تخفيض زمن إنجاز المشروع في ظل تقبل تحمل تكاليف إضافية نتيجة اختزال عنصر الزمن فإننا نبحث عن النشاط الحرج من أنشطة المسار الحرج و الذي يتمتع بميزة أقل تكلفة ونقارن حدود تخفيض بأقل زمن احتياطي (راكد) حر مختلفة قيمته عن الصفر على الشبكة (وذلك للأنشطة الغير حرجة طبعاً لأن الاحتياطي الحر للأنشطة الحرجة وبعض الأنشطة الغير حرجة صفراً) .**

فبملاحظة عمود ميل التكلفة نجد أن النشاط الحرج (أ) يتمتع بميزة أقل ميل تكلفة = ٠،٤ و حدود تخفيض النشاط (أ) هي (١) أسبوع . وحيث أن أقل راكد حر مختلفة قيمته عن الصفر على الشبكة هو (١) أسبوع . لذا يمكن تخفيض تلك الوحدة الزمنية مقابل تحمل تكاليف إضافية تعادل ١ × ٠،٤ = ٠،٤ ألف جنيه ويتم رسم الشبكة العادية مرة أخرى باعتبار أن عنصر الزمن لإنجاز النشاط (أ) هو ٩ أسابيع بدلاً من (١٠) أسابيع . و بهذا التخفيض يصل الزمن العادي لإنجاز النشاط (أ) إلى نفس قيمة الزمن العاجل أو المتسرع ومن ثم لا يمكن تخصيص هذا النشاط فيما بعد في التخفيضات التالية . والشبكة الموضحة بالشكل رقم (٣) توضح أزمنة أنشطة المشروع بعد التخفيض الأول (عناصر الزمن العادي لإنجاز أنشطة المشروع موضحة بالعمود الأول في بند التخفيضات المتتالية.



شكل رقم (٣)

<u>و بناءاً على هذا التخفيض فإن:</u>

أقل زمن لإنجاز المشروع = زمن المسار الحرج = ٣٦ أسبوعا

وذلك بتكاليف إجمالية = إجمالية تكلفة الأنشطة بالأزمنة العادية + تكاليف ناتجة عن آلية التخفيض

= ٧٢,٩ + ١ × ٠,٤

= ٧٣,٣ ألف جنيه

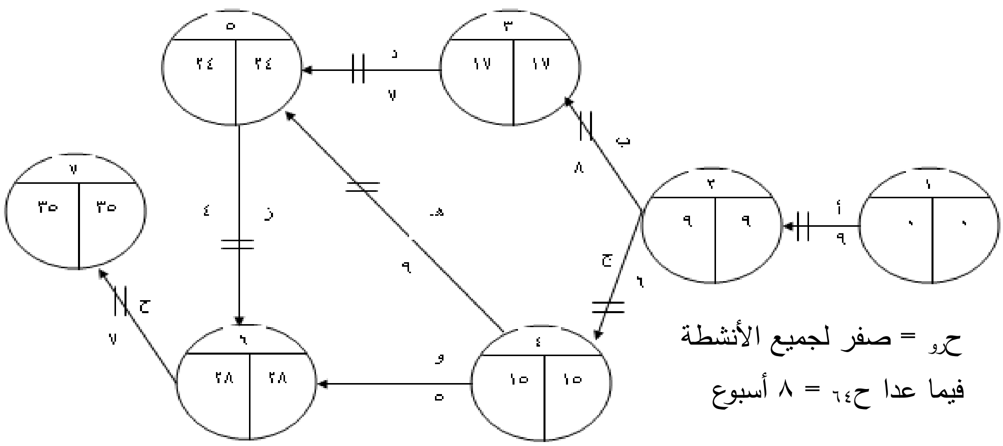
أي أن أقل تكلفة لإنجاز المشروع بزمن يعادل ٣٦ أسبوع هي ٧٣،٣ ألف جنيه

- **<u>التخفيض الثاني</u> : –**

بملاحظة الأنشطة الحرجة أ ، ب ، د ، ز ، ح . نجد أن النشاط أ ، ز لا يمكن تخفيض أزمنة إنجازهم العادية أقل من ذلك لأنها أزمنة إنجازهم العادية تتساوى مع الأزمنة العاجلة المقابلة . لذا فالمفاضلة الآن فيما بين الأنشطة ب ، د ، ح . و حيث أن النشاط (ب) يتمتع بميزة أقل ميل تكلفة (٠،٨) و لذا فبمقارنة حدود تخفيض النشاط (ب) و هي ٣ أسبوع بأقل راكد حر موجود على الشبكة الموجودة بالشكل رقم (٣) تختلف قيمته عن الصفر

(وهي القيمة ١ أسبوع) . لذا يتم تخفيض النشاط بأيهما أقل [٣ أو ١] أي يتم تخفيض النشاط (ب) بمقدار أسبوع واحد و يتحمل المشروع تكاليف إضافية ناجمة عن التخفيض أو التعجيل بزمن إنجاز المشروع بمقدار أسبوع تعادل ١ × ٠,٨ = ٠,٨ ألف جنيه . و تصبح أزمنة إنجاز الأنشطة كما هي واردة بالعمود (٢) الموجود بالجدول رقم (١٠) في التخفيضات المتتالية .

و من ثم تصبح لدينا الشبكة الواردة بالشكل رقم (٤) على النحو التالي :



شكل رقم (٤)

لاحظ في الشكل رقم (٤) أن المسار أ جـ هـ ز ح أصبح له نفس طول الفترة الزمنية لزمن المسار الحرج الأصلي أ ب د ز ح . أي أن التخفيض الثاني ترتب عليه ظهور مسار حرج آخر منافس للمسار الحرج الأصلي . وخلاصة التخفيض الثاني هو أن : –

أقل زمن لإنجاز المشروع = زمن المسار الحرج = ٣٥ أسبوع .

وذلك بتكاليف إجمالية = إجمالي التكاليف السابقة + تكلفة إضافية ناتجة عن التخفيض الثاني .

= ٧٣,٣ + ١ × ٠,٨ = ٧٤,١ ألف جنيه .

أي أن :

أقل تكلفة لإنجاز المشروع في زمن يعادل ٣٥ أسبوع هي ٧٤,١ ألف جنيه

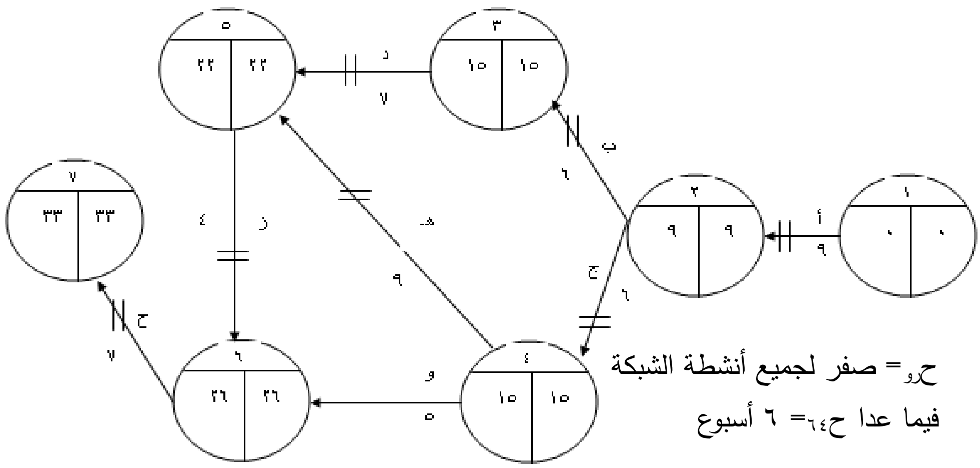
- <u>التخفيض الثالث</u> : -

من التخفيض السابق اتضح لنا أنه لا زال النشاط (ب) ذو أقل ميل تكلفة يحتوي على أسبوعين في حدود تخفيض بعد التخفيض السابق . وبمقارنة حدود تخفيض النشاط ب (٢ أسبوع) بأقل زمن احتياطي حر تختلف قيمته عن الصفر على الشبكة التخطيطية الواردة بالشكل رقم (٤) والتي تبلغ بـ ٨ أسابيع لذا يمكن إجراء التخفيض الثالث بأيهما أقل (٢ أو ٨) أي يتم تخفيض النشاط (ب) بمقدار أسبوعين وبهذا التخفيض يصل زمن النشاط (ب) العادي لزمن إنجازه العاجل أي لا يمكن تخفيض فيما بعد في التخفيضات المتتالية .

لكن لاحظ عزيزي القارئ أنه في التخفيض السابق (الثاني) ذكرنا بأن هناك مسار حرج ثاني منافس للمسار الحرج الأصلي . فإذا قمنا بتخفيض النشاط (ب) بمقدار وحدتين سيقل طول مدة تنفيذ المسار أ ب د ز ح بأسبوعين لتصبح ٣٣ أسبوع في حين يظل المسار الحرج المنافس أ جـ هـ ز ح بنفس طول الفترة الزمنية ٣٥ أسبوع أي أنه إذا قمنا بتخفيض النشاط (ب) بمقدار أسبوعين سيتحول المسار الحرج الأصلي ويصبح مسار غير حرج وهذا الاتجاه مرفوض كما سبق الإحاطة به سلفًا.

وللخروج من تلك النقطة يمكن إجراء تخفيض أحد أنشطة المسار الحرج المنافس الذي يتمتع بميزة أقل ميل تكلفة وبالتحديد الأنشطة التي لا تتواجد في المسار الحرج الأصلي حتى نبقي على التساوي فيما بين المسارين الأصلي والمنافس أي أنه يتم اختيار أحد النشاطين جـ أو هـ وبالتحديد أيهما أقل من حيث ميل التكلفة . فنجد أن النشاط هـ يتمتع بميزة أقل تكلفة. لذا فإنه في هذا التخفيض الثالث يتم تخفيض النشاطين ب ، هـ بالتوازي معًا وهنا

يتحمل المشروع تكاليف إضافية تعادل ٢ × ٠,٨+٢×٠,٨ =٣,٢ ألف جنيه . وينتج عن هذا التخفيض بأن تصبح لدينا الشبكة التخطيطية للمشروع الوارد بالشكل رقم (٥) . (لاحظ أن حدود تخفيض النشاط هـ تسمع بتخفيض أسبوعين).

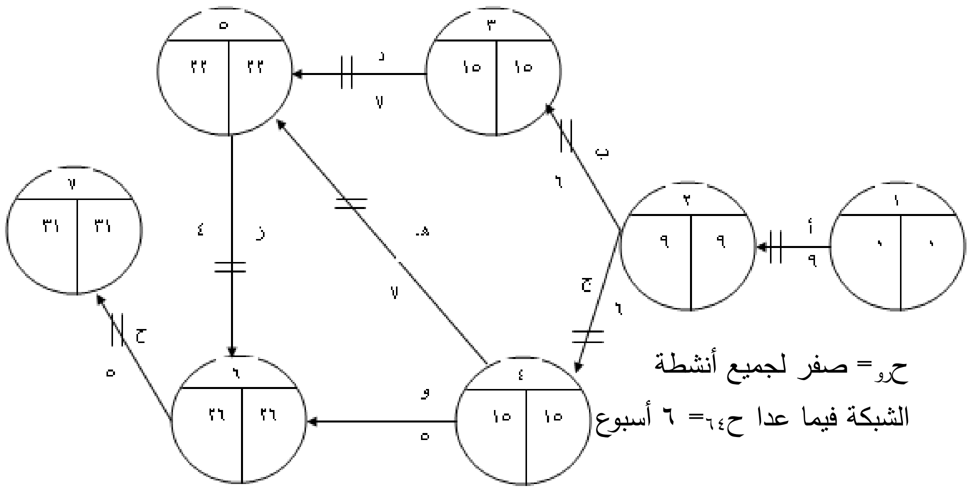


شكل رقم (٥)

ومن خلال التخفيض الثالث والذي تعكسه الشبكة الواردة في الشكل (٥) فإن أقل زمن لإنجاز المشروع = زمن المسار الحرج أ ب د ز ح = ٣٣ أسبوع وذلك بأقل تكاليف ممكنة = جملة التكاليف السابقة + تكاليف إضافية ناتجة عن تخفيض كل من النشاط ب ، هـ بأسبوعين = ٧٤,١ + (٢×٠,٨ + ٢×٠,٨) = ٧٧,٣ ألف جنيه .

أي أن أقل تكلفة لإنجاز المشروع في زمن يعادل ٣٣ أسبوع هي ٧٧,٣ ألف جنيه .

- <u>التخفيض الرابع</u> : – من التخفيضات المتتالية السابقة نخلص أن مجموع الأنشطة أ ، ب ، هـ ، ز وصلت لحدودها الدنيا أي زمن إنجازها العاجل وتظل مجموعة الأنشطة الحرجة جـ ، د ، ح والتي تسمح حدود تخفيضهم بعدد ٣ ، ٣ ، ٢ أسبوع على الترتيب. وحيث أن النشاط (د) يتمتع بميزة أقل ميل تكلفة لكن لاحظ أن النشاط (د) يوجد بالمسار الحرج الأصلي فقط فإذا رغبنا في تخفيضه فيجب تخفيض أحد الأنشطة الحرجة والتي توجد على المسار المنافس ولا توجد في المسار الأصلي بالتوازي معًا . والنشاط (جـ) يحقق تلك الإمكانية . وفي نفس الوقت أقل احتياطي حر مختلفة قيمته على الشبكة الواردة بالشكل رقم (٥) هو ستة أسابيع يسمح بها التخفيض ولا يؤدي لتحول المسار . لكن عزيزي القارئ دعنا نبحث عن ماهية وجود بدائل أخرى يمكن من خلالها اختصار مدة أسبوعين من أزمنة إ،جاز المشروع ككل ونرى أثرها على التكاليف الإضافية الناجمة عن هذا التخفيض . فهناك بديل وهو تخفيض النشاط (ح) بمدة أسبوعين وأهم ما يميز هذا النشاط أنه يوجد في المسارين الحرج الأصلي والحرج المنافس فهو يؤدي لاختصار مدة إنجاز ايهما إلى ٣١ أسبوع فقط وهذا يؤدي إلى تحمل تكاليف إضافية تعادل ٢×٢=٤ ألف جنيه أما البديل المطروح الخاص بتخفيض النشاطين جـ ، د بأسبوعين معًا بالتوازي يؤدي إلى تحمل تكاليف إضافية تعادل ٢×٢ + ٢×١ = ٦ ألف جنيه. أي أن البديل الخاص بتخفيض النشاط (ح) بمقدار أسبوعين يعتبر أفضل. لذا نجري هذا التخفيض (أي تخفيض النشاط (ح) بمقدار أسبوعين) فينتج لدينا الشبكة التالية الواردة بالشكل رقم (٦) .

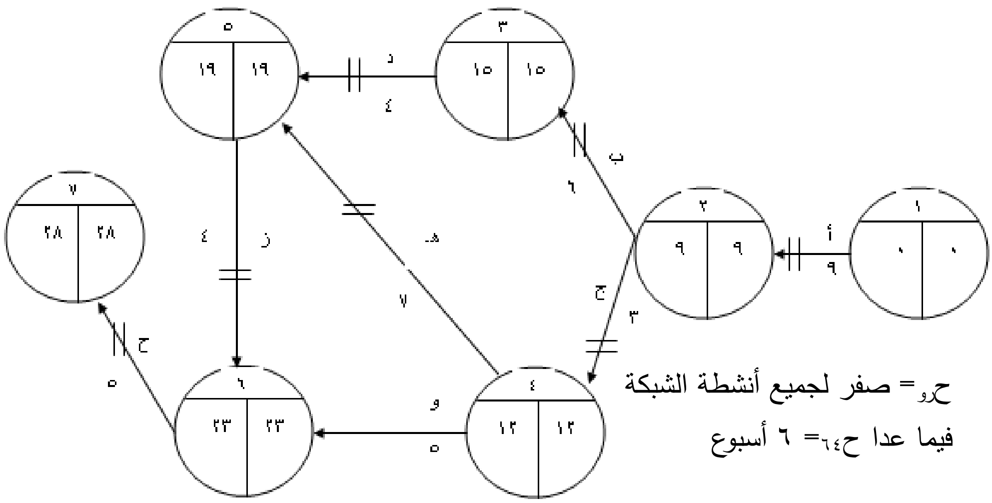


شكل رقم (٦)

وطبقًا لهذا التخفيض فإن أقل زمن لإنجاز المشروع هو زمن المسار الحرج ٣١ وذلك بأقل تكلفة ممكنة تعادل ٧٧,٣ + ٢ × ٢ = ٨١,٣ ألف جنيه

- **<u>التخفيض الخامس:</u>**

من خلال التخفيضات السابقة فان مجموعة الأنشطة أ،ب،هـ،و،ز،ح أصبحت حدود تخفيضها صفرية حيث أصبح الزمن العادي لإنجاز تلك الأنشطة هو نفس الأزمنة العاجلة لها .ولم يبقي الآن سوى النشاطين الحرجين (ج،د) اللذين كانا محلا للدراسة في التخفيض السابق والآن بلا وجود بدائل منافسة لهذا التخفيض لذا نجري هذا التخفيض علي الشبكة السابقة وذلك بتخفيض كلا من النشاطين (ج،د) بثلاث أسابيع حيث أن الزمن الاحتياطي الحر علي الشبكة السابقة يبلغ ٦ أسابيع فهو يسمح بهذا التخفيض ونكون بصدد الشبكة الواردة بالشكل رقم (٧)



شكل رقم (٧)

أي أن أقل زمن لإنجاز أنشطة المشروع هو٢٨ أسبوع وذلك بتكاليف إجمالية تعادل ٨١,٣+(٣×٢ + ٣×١) =٩٠,٣ ألف جنيه

وحيث أن زمن المسار الحرج باستخدام الزمن العادي للأنشطة تساوي مع زمن المسار الحرج باستخدام الزمن العاجل . لذا لا يمكن إجراء تخفيض فيما بعد ذلك حيث وصلت كافة الأنشطة الحرجة لسقف حدها الأدنى و من ثم و في النهاية نخلص إلى أن أقل زمن لإنجاز أنشطة هذا المشروع هو ٢٨ أسبوع و ذلك بأقل تكلفة إجمالية ممكنة والتي تعادل ٩٠،٣ ألف جنيه. لاحظ أن هذه القيمة من التكاليف الإجمالية تقل كثيراً عن جملة تكاليف الأنشطة باستخدام الزمن العاجل والتي تعادل ٩١،٨ ألف جنيه .

٢- من خلال التخفيض الرابع اتضح لنا أن أقل تكلفة لإنجاز أنشطة المشروع في زمن يعادل ٣١ أسبوع هي ٨١،٣ ألف جنيه .

٣- لتحديد أقل زمن يمكن من خلاله تنفيذ أنشطة المشروع بتكلفة تعادل ٨٠ ألف جنيه بالضبط . يمكن استخدام فكرة النسبة و التناسب كما سبق و أن أوضحنا في حالة الشبكة التخطيطية ذات المسار الواحد . فنجد أن إجمالي التكاليف ٨٠ ألف جنيه تقع في حدود ما بين التخفيض الثالث و الرابع . فإذا فرضنا أن الزمن الذي يمكن من خلاله إنجاز أنشطة المشروع بتكلفة تعادل ٨٠ ألف جنيه هو (س) أسبوع فيكون:

	الزمن بالأسبوع		التكلفة بالألف
التخفيض الثالث ←	٣٣	⟷	٧٧،٣
	س	⟷	٨٠
التخفيض الرابع ←	٣١	⟷	٨١،٣

فيكون :

٣٣ – ٣١ ـــــــ = ٨١،٣ – ٧٧،٣ ـــــــ
٣٣ – س   ٨٠ – ٧٧،٣

أي أن:

٢ ـــــــ = ٤ – ـــــــ
٣٣ – س   ٢،٧ –

أي أن:

١ ـــــــ = ٢ ـــــــ
٣٣ – س   ٢،٧

فيكون:

٢،٧ = ٢ (٣٣ – س) = ٦٦ – ٢ س

أي أن:

٢ س = ٦٦ – ٢,٧ = ٦٣,٣

أي أن:

س = ٣١,٦٥ أسبوع

أي أن أقل زمن لازم لإنجاز أنشطة هذا المشروع بتكلفة تعادل ٨٠ ألف جنيه بالضبط هو ٣١,٦٥ أسبوع .

ملحوظة : – يمكن استنتاج كل ما هو مطلوب في هذا المثال السابق أي يمكن تحديد أقل تكلفة لإنجاز أنشطة المشروع الواردة بالجدول رقم (٩) بأقل زمن ممكن من خلال رسم الشبكتين التخطيطيتين العادية و العاجلة و تحديد زمن المسار الحرج في كل شبكة ثم حساب ميل تكلفة الأنشطة الواردة بالجدول رقم (١٠) يلي ذلك إمكانية إجراء التخفيضات المتتالية على الشبكة التخطيطية للمشروع المستخدم فيها الزمن العادي لإنجاز أنشطة المشروع في جدول كما هو موضح بالجدول التالي رقم (١١) دون رسم شبكات الأعمال المتتالية لمراحل التخفيضات السابقة ومن يتم استنتاج حل كل ما هو مطلوب فيما بعد ذلك:

جدول رقم (١١)
التخفيضات اللازمة على أزمنة إنجاز أنشطة المشروع
لتحديد أقل تكلفة لإنجاز المشروع في أقل زمن ممكن

بيانات التخفيضات المتتالية / المسارات الممكنة في الشبكة	زمن المسار في حالة لا تعجيل في زمن الإنجاز (زمن عادي)	(١) تخفيض النشاط (أ) بمقدار أسبوع	(٢) تخفيض النشاط (ب) بمقدار أسبوع	(٣) تخفيض (ب،هـ) معًا بمقدار أسبوعين	(٤) تخفيض النشاط (ح) بمقدار أسبوعين	(٥) تخفيض (جـ،د) بمقدار ثلاث أسابيع
أ ب د ز ح	٣٧	٣٦	٣٥	٣٣	٣١	٢٨
أ ج هـ ز ح	٣٦	٣٥	٣٥	٣٣	٣١	٢٨
أ جـ و ح	٢٨	٢٧	٢٧	٢٧	٢٥	٢٢
إجمالي التكاليف العادية إنجاز المشروع	٧٢,٩	٧٢,٩	٧٣,٣	٧٤,١	٧٧,٣	٨١,٣
ت. إضافية ناتجة عن التخفيض	-	١× ٠,٤ = ٠,٤	١× ٠,٨ = ٠,٨	٢ × ٠,٨ + ٢×٠,٨ = ٣,٢	٢ × ٢ =٤	٢ × ٣ + ٣×١ =٩
جملة التكاليف	٧٢,٩	٧٣,٣	٧٤,١	٧٧,٣	٨١,٣	٩٠,٣

<u>ملحوظة : –</u>

يراعى كما سبق و أن ذكرنا دراسة البدائل الممكنة في حالة تعدد بدائل التخفيضات . ويراعى عند دراسة تلك البدائل مراعاة تساوي الفترات الزمنية التي يتم دراسة تخفيضها للبدائل المختلفة حيث لا يوجد أي جدوى لدراسة بدائل مختلفة في الفترة الزمنية التي يتم البحث في تخفيضها .

ويراعى كما سبق ألا يتحول المسار الحرج كما سبق و أن ذكرنا عند إجراء أي تخفيض من التخفيضات المتتالية . أي يظل المسار الحرج الذي تبدأ به الشبكة التخطيطية باستخدام الزمن العادي مساراً حرجاً للنهاية.

تـمـا ريـن

(١): يوضح الجدول التالي أنشطة أحد مشروعات لإنشاء مجمع سكني ضخم بأزمنة إنجازها بالشهور:

النشاط	حدث البداية	حدث النهاية	زمن إنجاز النشاط (شهور)
أ	١	٢	٣
ب	١	٣	٥
جـ	٢	٤	٢
د	٢	٧	٣
هـ	٣	٥	٤
و	٤	٧	٧
ز	٥	٧	٧
ل	٥	٦	٩
م	٧	٨	٥

والمطلوب : –

١- إعداد الشبكة التخطيطية للمشروع .

٢- تحديد المسار الحرج من خلال حصر مسارات الشبكة الناتجة في (١).

٣- تحديد المسار الحرج من خلال حساب الأزمنة المبكرة والمتأخرة ونهاية أنشطة المشروع مع حساب الزمن الفائض أو الاحتياطي الكلي والحر لكافة أنشطة الشبكة .

٤- من واقع الشبكة التخطيطية للمشروع والتي تم إعدادها في المطلوب (١) ما هي صورة النموذج الخطي اللازم لتحديد زمن المسار الحرج لهذا المشروع .

(٢): الجدول التالي يوضح الأنشطة المختلفة لمشروع إنشاء محطة كهرباء في إحدى المحافظات و تقديرات الأزمنة المختلفة (المتفائل – المحتمل – المتشائم) لكل نشاط من أنشطة المشروع:

النشاط	الأنشطة السابقة	تقديرات الزمن (بالأسبوع)		
		متفاعل	أكثر احتمالاً	متشائم
أ	.	١	٢	٣
ب	.	١	٣	١١
جـ	أ	١	١	١
د	أ	٢	٣	٤
هـ	ب	٢	٥	١٤
و	جـ	٢	٥	٨
ز	هـ	٢	٢	٢
ل	هـ	$^{١}/_{٢}$	١	١,٥
ح	ع، و ، ز	١	٢	٩

<u>والمطلوب :</u> –

١– ارسم الشبكة التخطيطية للمشروع .

٢– حساب الزمن المتوقع و الانحراف المعياري لأنشطة المشروع .

٣– تحديد المسار الحرج و الزمن المتوقع اللازم لإنجاز المشروع .

٤– حساب الزمن المبكر و المتأخر لبداية و نهاية الأنشطة ومن ثم الزمن الاحتياطي الكلي والحر لكل نشاط .

٥– ما هو احتمال إتمام إنجاز المشروع خلال ١٧ أسبوع .

٦– ما هو زمن إنجاز المشروع و ذلك بدرجة ثقة ٩٥ % .

(٣): يتكون أحد المشروعات من ثلاثة أنشطة متتالية أ ، ب ، جـ وقد أمكن جمع بيانات عن التكلفة العادية (بالألف جنيه) لإنجاز كل نشاط والزمن اللازم لإنجاز النشاط (بالشهور). وكذلك أتيحت لك بيانات أخرى عن بدائل التكلفة العاجلة كما هي موضحة بالجدول التالي:-

النشاط	حدث البداية	حدث النهاية	بيانات عادية		بيانات عاجلة			
					البديل الأول		البديل الثاني	
			زمن	تكلفة	زمن	تكلفة	زمن	تكلفة
أ	١	٢	١٠	٢٠	٨	٢٤	٦	٣٦
ب	٢	٣	١٤	٤٢	١٢	٦٠	٨	١٠٠
جـ	٣	٤	١٦	٦٤	١٠	٨٢	٨	٩٦

<u>والمطلوب</u>: استخدام أسلوب بيرت / تكلفة في تحديد ما هي أقل تكلفة لإنجاز أنشطة هذا المشروع عند أقل زمن ممكن لإنجاز تلك الأنشطة.

ومن خلال نتائجك السابقة ما هي أقل تكلفة لإنجاز المشروع في زمن يعادل ٣٣،٥ شهراً.

(٤): فيما يلي الجدول التالي يبين بيانات التكلفة العادية والمتسرعة أو العاجلة (بالألف جنيه) و الأزمنة العادية والعاجلة لتنفيذ تلك الأنشطة (بالشهر):

بيان / نشاط	مسار النشاط	بيانات عادية		بيانات عاجلة	
		زمن	تكلفة	زمن	تكلفة
أ	(١–٢)	١٦	٢٠٠	١٢	٤٠٠
ب	(١–٣)	٨	٣٠٠	٤	٧٠٠
جـ	(٢–٤)	٤	١٠٠	٢	١٨٠
د	(٢–٥)	٢٠	٢٠٠	١٠	٨٠٠
هـ	(٣–٤)	١٠	٢٠٠	٢	٤٠٠
و	(٤–٥)	٦	١٦٠	٢	٢٠٠

<u>والمطلوب</u>:–

١– رسم الشبكة التخطيطية للمشروع باستخدام الزمن العادي لإنجاز الأنشطة مبيناً الزمن المبكر والمتأخر لبداية ونهاية الأنشطة وكذا الزمن الاحتياطي الحر على الشبكة .

٢– أوجد المطلوب في (١) باستخدام الزمن العاجل لإنجاز أنشطة المشروع.

٣ – حدد ما هي أقل تكلفة لإنجاز المشروع عند أقل زمن ممكن .

(٥): الجدول التالي يوضح التكلفة العادية و العاجلة و الزمن العادي و العاجل لتنفيذ أنشطة أحد المشروعات:

النشاط	بيانات عادية		بيانات عاجلة	
	الزمن (أسبوع)	التكلفة(ألف جنيه)	الزمن(أسبوع)	التكلفة(ألف جنيه)
أ(١-٢)	١٠	٧	٩	٧,٤
ب(٢-٣)	٩	١٨	٦	٢٠,٤
جـ(٢-٤)	٦	١٨	٣	٢٤
د(٣-٥)	٧	٣,٥	٤	٦,٥
هـ(٤-٥)	٩	٥,٤	٧	٧
و(٤-٦)	٥	٥	٤	٦,٥
ز(٥-٦)	٤	٨	٤	٨
ح(٦-٧)	٧	٨	٥	١٢

<u>والمطلوب</u>:-

تحديد أقل تكلفة لإنجاز المشروع عند أقل زمن ممكن .

(٦): يبين الجدول التالي أزمنة إنجاز أنشطة أحد المشروعات (بالشهر) العادية والعاجلة و كذا التكلفة العادية للإنجاز (بالألف جنيه):-

النشاط	مسار النشاط	بيانات عادية			ميل تكلفة النشاط
		زمن	تكلفة		
أ	١–٢	١٢	٤٢	٩	٢
ب	١–٣	٧	٣٠	٥	٤
جـ	٢–٤	١٠	٢٦	٧	٢
د	٢–٣	٤	١٠	٣	١
هـ	٤–٦	١١	٣٤	٦	٣
و	٣–٥	٨	١٤	٦	١
ز	٥–٦	٧	١٠	٥	١
ل	٦–٧	٣	١٣	٢	٤

والمطلوب:

١- تحديد ما هي أقل تكلفة لإنجاز أنشطة المشروع عند أقل زمن ممكن باستخدام الزمن العادي لإنجاز تلك الأنشطة .

٢- تحديد المطلوب في (١) باستخدام الزمن العاجل لإنجاز تلك الأنشطة .

حدد ما هي أقل تكلفة لإنجاز المشروع عند أقل زمن ممكن .

الفصل السابع
بعض الطرق الإحصائية لمراقبة جودة الإنتاج

١/٧ مقدمه :

نتوقع في هذه المرحلة، أن يكون الدارس قد ألم بالأساليب الإحصائية الأساسية (وصفية، استدلالية)، والتى يمكن أن تساعده في عمليات اتخاذ القرارات الرشيدة، عند التعامل مع المشاكل الإدارية – أحد تحديات التنمية فى الدول النامية – ومنها مشاكل إدارة مراقبة جودة الإنتاج.

ففى أى عملية إنتاج سلعى مستمرة، يتوقع أن ينتج عنها عدد كبير من الوحدات نمطية المواصفات، وإن كانت لا تتطابق تماماً، فهناك دائماً قدر من الاختلاف أو التباين المسموح به، مادامت الوحدات المنتجة قادرة على أداء الغرض الذى أنتجت من أجله، وبما لا يؤثر على جودة الأداء.

والمراقبة الإحصائية لمعايير الجودة، هى عملية ضرورية كأحد مستلزمات العملية الإنتاجية، تهدف إلى الاكتشاف المبكر – وليس للعلاج – للانحرافات ومداها عن قياسات الجودة الموضوعة مسبقاً للسلعة المنتجة – والتي أصبحت عالمية المعايير – بغرض مساعدة القائمين على إدارة مراقبة جودة الإنتاج، فى اتخاذ الإجراءات العلاجية اللازمة لضمان استمرار أو تصحيح ضبط العملية الإنتاجية.

<u>النوع الأول</u>: وهى مجموعة المتغيرات التي يمكن توقعها مسبقاً لنمطيتها، وبالبحث من قبل إدارة مراقبة الجودة يمكن تحديدها، مثال: نقص خبرة العمالة، تقادم الماكينات، عيوب المواد الخام،...، وغيرها من الأسباب الممكنة التحديد Assignable، والغير مقبولة لجوهرية تأثيرها منفردة أو مجتمعة على مستوى جودة السلعة المنتجة.

وكون المتغيرات المفسرة للاختلافات غير المقبولة فى مواصفات الجودة الموضوعة مسبقاً – وخاصة على مستوى السلع الإنتاجية – قد تم التعرف عليها بتحديدها، تكون مرحلة التشخيص قد تمت، وأصبحت مرحلة العلاج ممكنة

باتخاذ الإجراءات العلاجية اللازمة، لإعادة العملية الإنتاجية إلى وضع الانضباط (تحت المراقبة).

النوع الثاني: وهى مجموعة المتغيرات، التى لا يمكن توقعها لعدم نمطيتها، مثال: التفاوت المقبول فى جودة المواد الخام، تقادم الماكينات، إهمال أداء بعض العاملين، ....، وغيرها من الأسباب العشوائية Random، والتي تمثل أمور طبيعية مقبولة، مادام تأثيرها منفردة غير جوهرى على مستوى جودة السلعة المنتجة.

والاختلافات فى مواصفات الجودة الموضوعة مسبقاً للسلعة المنتجة، تمثل الحد الأدنى المقبول فى مراقبة جودة الإنتاج، وتظل العملية الإنتاجية فى حالة مستقرة أو منضبطة أو تحت الرقابة in control ، ففي زمن العولمة، وقوانين منظمة التجارة العالمية (الجات)، فإن معايير قياسات الجودة عالمية المستوى، أصبحت تمثل الحائط الحقيقي– وليس الحائط الجمركي– أمام حركة السلع بين الدول، لذا فاستخدام الطرق الإحصائية لمراقبة جودة الإنتاج، وخاصة على مستوى المنشآت الصناعية، يجب أن تعتبر أحد مستلزمات العملية الإنتاجية.

فمن خلال خرائط مراقبة الجودة Control charts أكثر الوسائل استخداماً يمكن التمييز بين الأسباب العشوائية، وغير العشوائية والتى تشير إلى وجود خلل ما فى العملية الإنتاجية، يتعين التحرى عنها لإعادة العملية الإنتاجية إلى حالة الانضباط (أى العملية الإنتاجية معرضة فقط للمتغيرات العشوائية).

هذا ويمكن التعامل مع الطرق الإحصائية لمراقبة جودة الإنتاج، كأحد الجوانب التطبيقية للإحصاء ، ففي خرائط ضبط الجودة مثلاً، نستخدم الوسط الحسابى، والمدى بمدخل العينات الإحصائية، ثم محاولة تعميم النتائج الإحصائية

على مجتمع إحصائى جميع الوحدات المنتجة، للإجابة عن تساؤل، هل يمكن قبول تحقق مواصفات الجودة الموضوعة مسبقاً للسلع المنتجة فى العملية الإنتاجية، من عدمه أم لا ؟ وفى موضوع الطرق الإحصائية لمراقبة جودة الإنتاج، سنتناول: خرائط ضبط الجودة على مستوى ضبط المتغيرات، ضبط المواصفات، وخريطة المراقبة C وأخيراً أسلوب معاينة القبول الإحصائي Acceptance sampling.

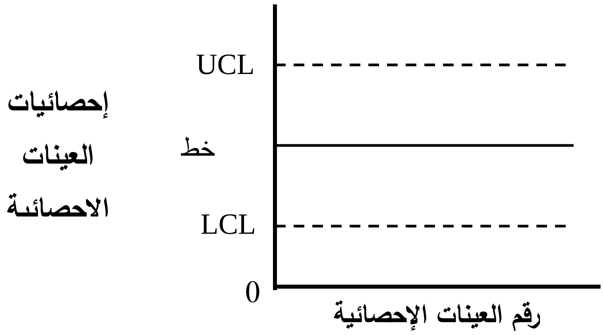
٢/٧ ضبط متغيرات العملية الإنتاجية:

تضمن الطرق الإحصائية لمراقبة جودة الإنتاج، الحفاظ على التحكم فى العملية الإنتاجية (مجموعة عمليات يفترض تكرارها تحت نفس الظروف)، على ضوء قياسات مواصفات جودة المنتج ، والموضوعة مسبقاً بمعرفة إدارة التصميمات بالمنشأة، بما يضمن تحقيق السلعة للغرض من إنتاجها فى إطار رغبات واحتياجات المستهلكين، والتى رصدتها دراسات السوق التى قامت بها إدارة التسويق بالمنشأة.

وتتولى إدارة الإنتاج تنفيذ العملية الإنتاجية، حتى يخرج المنتج المنشود إلى حيز الوجود الفعلى فى وجود متابعة لجودة الإنتاج، بما يضمن تحقق توحيد مقاييس المنتج وفق المعايير القياسية للمواصفات ، والسابق تحديدها، تحت إشراف إدارة مراقبة جودة الإنتاج بالمنشأة.

هذا ومن شكل (١/١٠) عرض بياني خريطة ضبط الجودة النمطية للمنتج، فيه : المحور الأفقى لتمثيل النقط الزمنية Time Points التى سحبت عندها العينات الإحصائية، أو لتمثيل أرقام العينات الإحصائية المسحوبة Sample Numbers، والمحور الرأسى لتمثيل مقياس إحصائى العينات المسحوبة، والخط المنتصف الأفقى Center Line لتمثيل الوسط الحسابى العام لمقياس العينات الإحصائية المسحوبة، والخط العلوى الأفقى لتمثيل حد

الضبط الأعلى Upper Central Limit (UCL) والخط السفلى لتمثيل حد الضبط الأدنى Lower Central Limit (LCL).



شكل (١/٧)

توضيحي عام لعرض بياني خريطة ضبط جودة نمطية

<u>ومع ملاحظة:</u>

أن المسافة بين حدى الضبط الأعلى، والأدنى تمثل نطاق الضبط Control Band فإذا ما وقعت قيم مقياس إحصائى العينات المسحوبة داخل نطاق حدى الضبط، فإن العملية الإنتاجية تعتبر تحت التحكم أو الرقابة، وعلى العكس إذا ما وقعت بعض قيم المقياس الإحصائى خارج نطاق حدى الضبط، فإن الأمر دليل على أن العملية الإنتاجية قد تكون خارج التحكم أو الرقابة.

وبالتالي يجب التحري عن الأسباب التى تقف وراء الاختلاف أو التباين فى مواصفات الجودة الموضوعة، من قبل اتخاذ الإجراءات العلاجية للعودة إلى حالة العملية الإنتاجية المستقرة أو المنضبطة أو تحت الرقابة in control.

وسنتناول هنا نوعين من خرائط مراقبة متغيرات العملية الإنتاجية: خريطة الوسط الحسابى $\bar{X}$ وخريطة المدى R على النحو الآتي:

<u>١/٢/٧ خريطة المراقبة للمتوسط الحسابي $\bar{X}$:</u>

يمكن استخدام خرائط مراقبة المتوسط $\bar{X}$ لمتابعة بناء العملية الإنتاجية حتى حالة الانضباط، إذا ما كانت مواصفات المنتج تحت مراقبة الجودة ، ومن

الممكن التعبير عنها بوحدات قياس كمية، مثال: أطوال أسياخ الحديد، أوزان تعبئة عبوات الأسمنت، ...، وغيرها من المتغيرات المستمرة.

ويستلزم إنشاء خريطة المراقبة للوسط الحسابي $\overline{X}$ للمرة الأولى، أن يتم سحب عدد من العينات العشوائية، يفضل ألا يقل عن ٢٠ عينة (وقد تصل إلى ٥٠)، على أن يتراوح حجم العينة ما بين n مفردة إلى ١٠ مفردات للعينة الواحدة، وبحساب الوسط الحسابي $\overline{X}$، والمدى R لكل عينة، والوسط الحسابى العام $\overline{X}$ لمشاهدات جميع العينات المسحوبة، وتستخدم جميعها في:

إنشاء خريطة المراقبة، ومتابعة مدى مطابقة بيانات كل عينة للمواصفات الموضوعة مسبقاً، وفى ضبط جودة الإنتاج، يتم تقدير فترة ثقة $\overline{\overline{X}} \pm 3\sigma_{\overline{X}}$ لتمثيل حدي الضبط الأعلى ($UCL_{\overline{X}}$)، والأدنى ($LCL_{\overline{X}}$)، وبمرجعية نظرية الحد المركزية Central limit theorem.

فإن وقوع الوسط الحسابي لأي عينة داخل حدود فترة الثقة هذه، يعد شبه مؤكد بنسبة ٩٩,٧٣% وبالتالي يتم تقدير حدى الضبط الأعلى، والأدنى فى خريطة المراقبة للوسط الحسابي ($\overline{X}$) ، كما يلي:

$$UCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} + 3\sigma_{\overline{x}}$$

$$LCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} - 3\sigma_{\overline{x}}$$

فإذا كان الانحراف المعيارى للمجتمع σ مجهولاً (فى الغالب) فإننا نستخدم تقدير الانحراف المعيارى S المحسوب من العينة، وفى هذه الحالة، فإن :

$$UCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} + 3\frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

$$LCL_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} - 3\frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

وسنحاول توضيح خطوات إنشاء، واستخدام خريطة المراقبة للوسط الحسابي $\overline{X}$ من خلال المثال التطبيقى، التالى:

مثال:(١/٧) أحد المصانع يقوم بتعبئة أنابيب معجون حلاقة، وقد صممت العملية الإنتاجية بحيث أن كل أنبوبة يجب أن تزن ٩٩ جراماً، وتتوقع إدارة مراقبة الجودة بالمصنع، عدم وجود اختلافات غير مقبولة بين أوزان أنابيب معجون الحلاقة المعبأة بالمصنع، وقد قام مهندس ضبط جودة الإنتاج بالمصنع، بسحب ٢٠ عينة عشوائية بحجم ٥ أنابيب للعينة الواحدة، وتسجيل مشاهدات قراءات أوزان مفردات العينات الإحصائية، بالجدول (١/٧).

والمطلوب: إنشاء خريطة مراقبة الوسط الحسابى $\overline{X}$ والإجابة عن تساؤل هل العملية الإنتاجية (تعبئة أنابيب معجون الحلاقة بالمصنع) تحت الرقابة (التحكم) أم لا؟، والإجابة تستلزم، حساب مجموعة من إحصائيات العينات الإحصائية، على الوجه الآتي:

١- حساب الوسط الحسابي للعينة الإحصائية الواحدة:

$$\overline{X}_j = \frac{X_{j1} + X_{j2} + \ldots + X_{jn}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} X_{ji}}{n}, \; j = 1, 2, \ldots, m$$

$$\overline{X}_1 = \frac{100 + 98 + 97 + 101 + 99}{5} = 99$$

$$\overline{X}_2 = \frac{96 + 103 + 101 + 99 + 101}{5} = 100$$

....

$$\overline{X}_{20} = \frac{104 + 95 + 99 + 100 + 102}{5} = 100$$

والتفصيل راجع جدول (١/٧)

٢- حساب الوسط الحسابي العام لمتوسطات العينات الإحصائية المسحوبة:

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \ldots + \overline{X}_m}{m} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \overline{X}_j}{m}$$

$$\overline{\overline{X}} = \frac{1980}{20} = 99$$

والتفصيل راجع جدول (١/٧)

٣- حساب تباين العينة الإحصائية الواحدة:

$$S_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} X_{ji}^2}{n} - (\bar{X})^2 \quad , \quad j = ١, ٢, \ldots, m$$

$$S_1^2 = \frac{49.015}{5} - 9801 \quad = 2.0$$

$$S_2^2 = \frac{50.028}{5} - 10000 \quad = 5.6$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_{20}^2 = \frac{50.046}{5} - 10000 \quad = 9.2$$

والتفصيل راجع جدول (١/٧)

٤- تقدير تباين المجتمع المجهول، بحساب متوسط تباينات العينات الإحصائية المسحوبة:

$$\hat{S}_X^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_m^2}{m} = \frac{\sum_{j=1}^{m} S_j^2}{m}$$

$$\hat{S}_X^2 = \frac{128.4}{20} = 6.42$$

والتفصيل راجع جدول (١/٧)

٥- وتجنباً للتقدير المتحيز المحسوب فى الصيغة السابقة، يمكن حساب تقدير تباين المجتمع المجهول:

$$S_X^2 = \frac{n}{n-1} \hat{S}_X^2$$

$$S_X^2 = \frac{5}{5-1} (6.42) = 8.025$$

٦- حساب تباين الوسط الحسابي:

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{S_x^2}{n}$$

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{8.025}{5} = 1.605$$

٧- حساب الخطأ المعياري:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{S_{\bar{x}}^2}$$

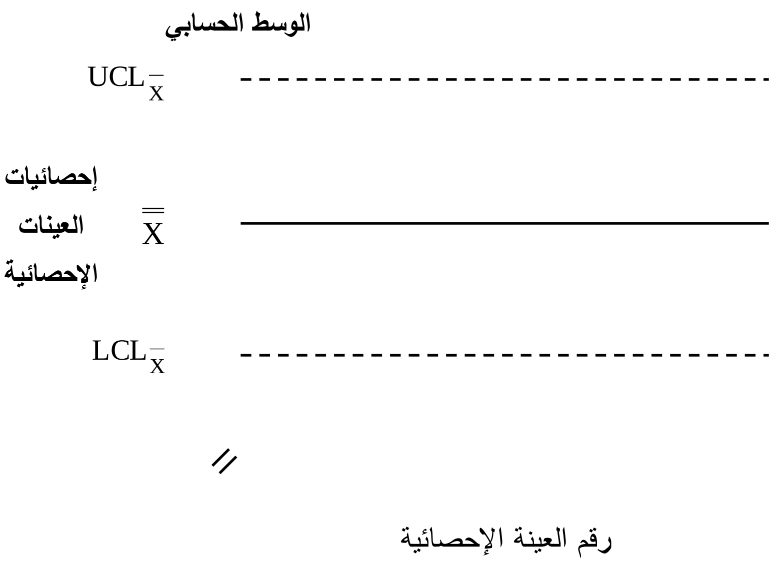
$$S_{\bar{x}} = \sqrt{1.605} = 1.27$$

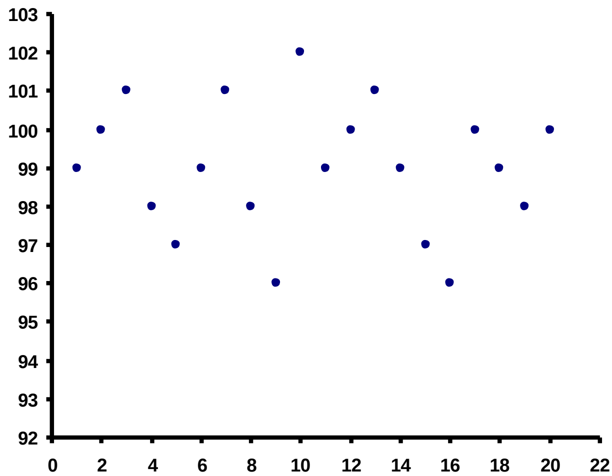
وباستخدام مجموعة إحصائيات العينات الإحصائية السابقة، يمكن تقدير حدى الضبط الأعلى، والأدنى فى خريطة المراقبة للوسط الحسابي $\bar{X}$:

$$UCL_{\bar{X}} = 99 + 3\ (1.27) = 102.81$$

$$LCL_{\bar{X}} = 99 - 3\ (1.27) = 95.19$$

ويبين شكل (٢/٧) خريطة المراقبة للوسط الحسابي $\bar{X}$ للعملية الإنتاجية (تعبئة أنابيب معجون الحلاقة) تحت الدراسة، وتظهر فيها جميع المشاهدات (متوسطات العينات المسحوبة)، تقع داخل حدود المراقبة (حد الضبط الأعلى ١٠٢,٨١ وحد الضبط الأدنى ٩٥,١٩)، وعليه يمكن قبول أن العملية الإنتاجية تحت الضبط.





شكل (٢/٧)

خريطة المراقبة للوسط الحسابي $\overline{X}$ للعملية الإنتاجية (تعبئة أنابيب معجون الحلاقة)

ويجب التنويه إلى:

١- أن شرط وقوع جميع مشاهدات المتوسطات للعينات المسحوبة داخل حدود المراقبة، هو غير كاف للحكم بقبول أن العملية الإنتاجية منضبطة، إلا إذا كانت الاختلافات داخل حدود المراقبة تتبع النمط العشوائي.

٢- إذا كنا بصدد إنشاء خريطة المراقبة للوسط الحسابي $\overline{X}$ للمرة الأولى، ووقعت بعض متوسطات العينات المسحوبة خارج حدود الضبط، فإنه يفضل استبعاد تلك المشاهدات، ثم إعادة حساب حدود الضبط لخريطة المراقبة- بما يضمن أنها حسبت من بيانات عملية إنتاجية مستقرة – ومتابعة توزيع مشاهدات المتوسطات التالية داخل حدود الضبط الجديدة، فإذا ما وقعت بعد بعض المشاهدات خارج حدود الضبط، فإن ذلك دليل مبكر أن العملية الإنتاجية غير منضبطة.

٢/٢/٧ خـريـطـة الـمـراقـبـة لـلـمـدى R:

لا يكتفي عادة باستخدام خريطة المراقبة للوسط الحسابي $\overline{X}$ للحكم على انضـباط العمليـة الإنتاجيـة تحـت الدراسـة مـن عدمـه، بـل يسـتخدم معهـا خـرائط أخـرى، لمراقبـة تشـتت أو تبـاين مشـاهدات العينـات الإحصـائية المسـحوبة داخـل حـدود ضـبط أخـرى، ويـرى بعـض الكتـاب أنهـا مرحلـة يجـب أن تسـبق مرحلـة خريطة المراقبة للوسط الحسابي $\overline{X}$ والأسلوب الأكثر استخداماً لهذا الغرض فى حالة العينات المسحوبة صغيرة الحجم $n\leq$١٠ هو خريطة المراقبة للمدى R.

بهـدف التحقـق مـن أن تشـتت أو تبـاين مشـاهدات العينـات المسـحوبة للعملية الإنتاجية فـى حالـة انضـباط من عدمـه، ومـادام لا يوجد اتجاه عام غير عشوائى لتوزيع مشاهدات العينات المسحوبة، وتمر عملية إنشاء خريطة المراقبة للمـدى R، بـنفس الخطـوات السـابقة، عنـد إنشـاء خريطـة المراقبـة للوسـط الحسابي $\overline{X}$.

وبـالتطبيق علـى بيانـات العمليـة الإنتاجيـة فـى المثـال التطبيقـى السـابق، نتنـــاول امتـــداد عـــرض خطـــوات إنشـــاء خريطـــة المراقبـــة للمـــدى R على النحو الآتى :

١- حســـاب الوســـط الحســـابي لمشـــاهدات المـــدى لمفـــردات العينـــات الإحصائية المسحوبة :

$$\overline{R} = \frac{R_1 + R_2 + \ldots + R_m}{m} = \frac{\sum_{j=1}^{m} R_j}{m}$$

$$\overline{R} = \frac{140}{20} = 7$$

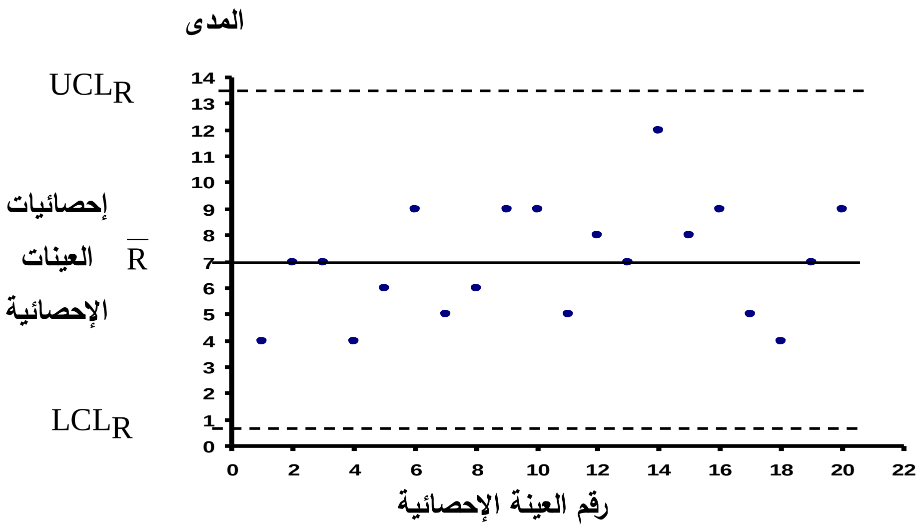
٢- حساب الانحراف المعياري لمشاهدات المدى لمفردات العينات الإحصائية المسحوبة، حسب الصيغة التالية:

$$S_R = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{m}(R_j - \bar{R})^2}{m-1}}$$

٣- حساب حدود ضبط مراقبة المدى:

$$UCL_R = \bar{R} + 3S_R$$
$$LCL_R = \bar{R} - 3S_R$$
$$UCL_R = 7 + 3\ (2{,}15) = 13{,}45$$
$$LCL_R = 7 - 3\ (2{,}15) = 0{,}55$$

ويبين الشكل (٣/٧) لخريطة المراقبة للمدى R للعملية الإنتاجية (تعبئة أنابيب معجون الحلاقة)، أن جميع مشاهدات المدى لمفردات العينات المسحوبة تقع ، وبعشوائية داخل حدود حدى مدى ضبط مراقبة المدى (الأعلى ١٣،٤٥، الأدنى ٠،٥٥)، وعليه يمكن القبول أن تشتت العملية الإنتاجية فى حالة منضبطة.



شكل (٣/٧)

خريطة المراقبة للمدى R للعملية الإنتاجية (تعبئة أنابيب معجون الحلاقة)

وإلى جوار نتائج خريطة المراقبة للوسط الحسابي $\bar{X}$ الموضحة بالشكل (٢/٧)، فإنه يمكن الآن الإجابة بمأمونية، عن السؤال المطروح، وقبول أن

العملية الإنتاجية المستمرة لتعبئة أنابيب معجون الحلاقة بالمصنع، فى حالة منضبطة ، ويجب التنويه، إلى:

١- يجب ملازمة خريطة المراقبة للمدى R لخريطة المراقبة للوسط الحسابي $\overline{X}$ من قبل الحكم عن حالة الانضباط من عدمه، للعملية الإنتاجية تحت الدراسة.

٢- في الغالب تأتى نتائج كل من خريطة المراقبة للوسط الحسابي $\overline{X}$ وخريطة المراقبة للمدى R متفقتين، وفى حالة الاختلاف، فإن الإجراءات العلاجية ستختلف.

٣- إذا كانت قيمة حد الضبط الأدنى لمراقبة المدى سالبة تساوى بالقيمة صفر ، وينفرد حد الضبط الأعلى هنا عند الحكم على حالة الانضباط من عدمه، لتباينات العملية الإنتاجية تحت الدراسة.

٤- إذا كان حجم العينات الإحصائية المسحوبة كبيرة n>١٠ من عملية إنتاجية مستمرة، يفضل استخدام خريطة المراقبة للانحراف المعيارى، عن خريطة المراقبة للمدى R.

<u>جدول (١/٧):</u> إحصائي : قراءات مشاهدات، وإحصائيات مفردات

للعينات الإحصائية المسحوبة، لخريطتى المراقبة $\bar{X}$ ، R (لخط تعبئة أنابيب معجون الحلاقة)

رقم العينة	الوزن بالجرامات لمفردات العينة					$\bar{X}$	$\sum X^2$	$\bar{X}^2$	S^2	R	$(R-\bar{R})^2$
	1	2	3	4	5						
1	100	98	97	101	99	99	49.015	9.801	2.0	4	9.00
2	96	103	101	99	101	100	50.028	10.000	5.6	7	0.00
3	102	96	103	102	102	101	51.037	10.201	6.4	7	0.00
4	98	99	97	100	96	98	48.030	9.604	2.0	4	9.00
5	96	100	99	96	94	97	47.069	9.409	4.8	6	1.00
6	99	99	95	104	98	99	49.047	9.801	8.4	9	4.00
7	103	102	102	98	100	101	51.021	10.201	3.2	5	4.00
8	98	98	96	102	96	98	48.044	9.604	4.8	6	1.00
9	97	95	95	101	92	96	46.124	9.216	8.8	9	4.00
10	100	97	105	102	106	102	52.074	10.404	10.8	9	4.00
11	102	100	97	98	98	99	49.021	9.801	3.2	5	4.00
12	95	102	103	99	101	100	50.040	10.000	8.0	8	1.00
13	105	102	98	99	101	101	51.035	10.201	6.0	7	0.00
14	93	96	99	105	102	99	49.095	9.801	18.0	12	25.00
15	92	96	100	100	97	97	47.089	9.409	8.8	8	1.00
16	92	101	95	97	95	96	46.124	9.216	8.8	9	4.00
17	102	98	101	99	100	100	50.010	10.000	2.0	5	4.00
18	101	99	98	100	97	99	49.015	9.801	2.0	4	9.00
19	95	99	97	102	97	98	48.048	9.604	5.6	7	0.00
20	104	95	99	100	102	100	50.046	10.000	9.2	9	4.00
المجموع						1980	891.012	196.074	128.4	140	88.00

$\bar{\bar{x}} = 99,\ s_X^2 = 6,42\ ,\ \bar{R} = 7,\ s_R = 2,15$

٣/٧ ضبط مواصفات العملية الإنتاجية:

في حالات كثيرة أخرى، يكون الحكم على جودة العملية الإنتاجية مرتبط بمواصفات وصفية، وبالتالى لا يمكن التعامل معها كمتغيرات مستمرة قابلة للقياس الكمى (كما فى حالات استخدام خريطة المراقبة للوسط الحسابي $\overline{X}$)، وفيها فحص جودة الوحدات المنتجة فى العملية الإنتاجية، تصنف إلى حالتين: حالة النجاح، وفيها المنتج يحقق المواصفات المعينة، فيعتبر منتج مقبول (جيد)، والأخرى حالة الفشل، وفيها المنتج لا يحقق المواصفات المعينة، فيعتبر مرفوض (معيب)، مثال: المصابيح الكهربائية تضئ أو لا تضئ، الأجزاء الكهربائية تعمل أو لا تعمل، ،...، هكذا، في مثل حالات ضبط الجودة هذه، تستخدم خريطة المراقبة لنسبة المعيب P للحكم على حالة العملية الإنتاجية، هل منضبطة أم لا؟

١/٣/٧ خريطة المراقبة لنسبة المعيب P:

وفى خريطة نسبة المعيب Proportion defective chart وتسمى بالخريطة P، يتم إجراء توزيع بيانى لنسب الوحدات المعيبة فى العينات الإحصائية المسحوبة، ويمكن أيضاً – وحسب درجة حيوية مجال العملية الإنتاجية – إنشاء الخريطة P وعلى أساس الفحص الكامل لجميع الوحدات المنتجة، غير أنه فى حالة ضبط المواصفات، يجب أن يكون حجم العينة كبيراً (عكس حالة ضبط المتغيرات)، لضمان الحصول على نتائج مرضية، عند الحكم على حالة الانضباطية من عدمه للعملية الإنتاجية تحت الدراسة.

ويتطلب إنشاء خريطة المراقبة لنسبة المعيب P، إجراء مجموعة من الإحصاءات ، على العينات الإحصائية المسحوبة من إنتاج العملية الإنتاجية تحت دراسة ضبط المواصفات، على النحو الآتي:

١- حساب نسبة الوحدات المعيبة P فى كل عينة إحصائية:

$$\hat{P} = \frac{\text{عدد الوحدات المعيبة في العينة الواحدة}}{\text{حجم العينة}}$$

٢- تقدير نسبة الوحدات المعيبة فى المجتمع الإحصائى تحت الدراسة (غالباً غير معلومة) :

$$\bar{\hat{P}} = \frac{\text{عدد كلى الوحدات المعيبة في العينات المسحوبة}}{\text{الحجم الكلى للعينات المسحوبة}}$$

٣- استخدام النسبة $\bar{\hat{P}}$ في تقدير الانحراف المعيارى للنسبة P في المجتمع الإحصائي تحت الدراسة (غالباً غير معلومة):

$$S_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{\bar{\hat{P}}(1-\bar{\hat{P}})}{n}}$$

٤- حساب حدي حدود الضبط (الأعلى، الأدنى) لخريطة نسبة المعيب P:

$$UCL_{\hat{P}} = \bar{\hat{P}} + 3S_{\hat{P}}$$

$$LCL_{\hat{P}} = \bar{\hat{P}} - 3S_{\hat{P}}$$

<u>ومع ملاحظة:</u>

إذا كانت قيمة حد الضبط الأدنى ($LCL_{\hat{P}}$) المحسوبة سالبة الإشارة، فيفترض أن قيمته تساوى الصفر، وسنتناول توضيح شكل واستخدام خريطة نسبة المعيب P فى المثال التطبيقى، التالي:

<u>مثال: (٢/٧)</u> العملية الإنتاجية تحت ضبط المواصفات، خاصة بخط تجميع أجهزة تليفزيون حالتها إما جيدة أو معيبة، وقد قام مهندس الجودة بالمصنع، بسحب عدد ٢٥ عينة عشوائية – على فترات زمنية متساوية – بحجم ١٠٠ جهاز تليفزيون للعينة الواحدة، وقام بتسجيل قراءات المشاهدات، ويوضحه الجدول (٢/٧)، والمطلوب

إنشاء الخريطة P والإجابة عن: هل العملية الإنتاجية فى حالة تحكم (أو تحت المراقبة) أم لا؟، وفيما يلي الإحصائيات المحسوبة من العينات المسحوبة، واللازمة لإنشاء الخريطة P:

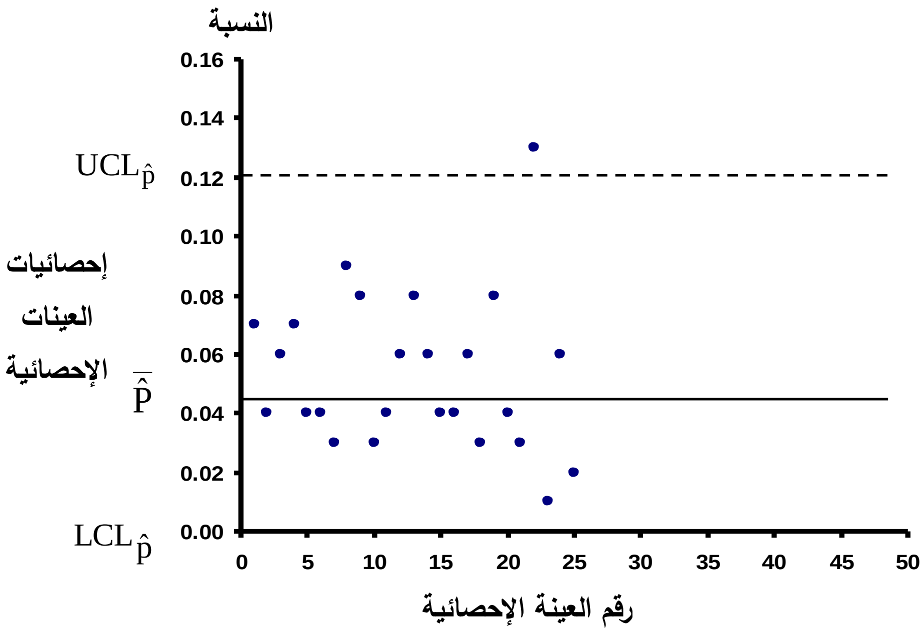
$$\bar{\hat{P}} = \frac{133}{2500} = 0,0532$$

$$S\,\hat{p} = \sqrt{\frac{0.0532(0.9468)}{100}} = 0,0224432$$

$$UCL_{\hat{p}} = 0,0532 + 3\,(0,0224432) = 0.1205$$

$$LCL_{\hat{p}} = 0,0532 - 3\,(0,0224432) = 0,014129 \approx 0$$

ويوضح الشكل (٤/٧) الخريطة P للعملية الإنتاجية تحت ضبط المواصفات (خط تجميع التليفزيون بالمصنع)، فيها التوزيع البيانى لنسب الوحدات المعيبة فى العينات المسحوبة، وترصد أن نسبة المعيب ٠،١٣ فى العينة رقم ٢٢ المسحوبة، تقع أعلى حد الضبط الأعلى ٠،١٢٠٥، والدلالة المبدئية أن العملية الإنتاجية غير مستقرة.



شكل (٤/٧)

خريطة المراقبة P لنسب الوحدات المعيبة، لخط تجميع التليفزيون

وكوننا بصدد إعداد خريطة المراقبة P للمرة الأولى، فإنه يجب استبعاد المشاهدة ٠,١٣ للعينة رقم ٢٢ من العينات المسحوبة (مع التحرى عن الأسباب وراء زيادة نسبة الوحدات المعيبة فى العينة السابقة، والعمل على تصحيح الأوضاع)، ثم إعادة حسابات الإحصائيات السابقة، لضمان أن خريطة المراقبة P محسوبة من بيانات عملية إنتاجية مستقرة، وعليه الإحصائيات الجديدة، لخريطة المراقبة P المعدلة:

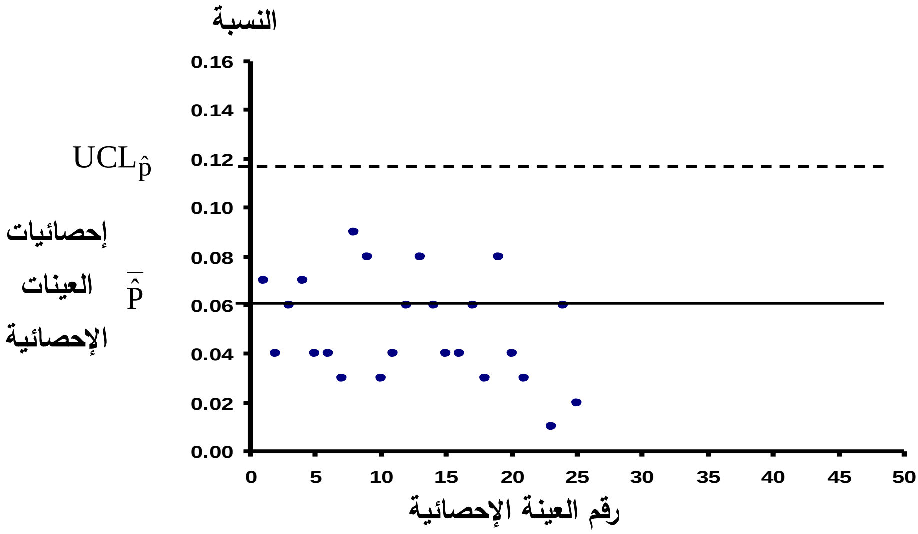
$$\bar{\hat{P}} = \frac{120}{2400} = 0{,}05$$

$$S_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{0.05(0.95)}{100}} = 0{,}0218$$

$$UCL_{\hat{p}} = 0.05 + 3\ (0.0218) = 0{,}1154$$

$$LCL_{\hat{p}} = 0{,}05 - 3\ (0{,}0218) = -0{,}0154 \approx 0$$

ويظهـر الشـكل (٥/٧) الخريطـة P المعدلـة (باسـتخدام النسـبة $\bar{\hat{P}}$ المعدلـة) للعمليـة الإنتاجيـة تحـت ضـبط المواصـفات، وفيهـا توزيـع بيـانى المشـاهدات (نسـب الوحدات المعيبة) للعينات المسحوبة المتبقية، تقع جميعها داخل حدى حدود الضبط الأعلـى، والأدنـى (٠،١١٥٤، ٠) ، وعليـه يمكـن الحكـم بـأن العمليـة الإنتاجيـة لخـط تجميع التليفزيون بالمصنع، في حالة التحكم (أو الرقابة).



شكل (٥/٧)

خريطة المراقبة P لنسبة الوحدات المعيبة المعدلة، لخط تجميع التليفزيون

وبفرض أنه تم سحب عدد ٢٥ عينة عشوائية جديدة – وعلى فترات زمنية متسـاوية – وبحجـم ١٠٠ تليفزيـون للعينـة الواحـدة (لـنفس العمليـة الإنتاجيـة)، وبـإجراء توزيـع بيـانى المشـاهدات (نسـب الوحـدات المعيبـة) للعينـات المسـحوبة الجديدة، علـى خريطـة المراقبـة $\bar{\hat{P}}$ المعدلـة السـابقة شـكل (٥/٧)، وأظهـر التوزيـع البيـانى الجديد، وجـود مشـاهدة أحد العينـات المسـحوبة الجديـدة، تقـع أعلـى حد الضبط الأعلى لخريطة المراقبة P المعدلة.

فإنه يجب إعادة إنشاء لخريطة المراقبة P بمدى ضبط جديدين، من واقع بيانات العينات المسحوبة الجديدة (بعد استبعاد مشاهدات العينة الشاذة)، فإذا أظهر التوزيع البيانى الجديد لمشاهدات العينات المسحوبة الجديدة المتبقية، أن أحد المشاهدات الأخرى تقع خارج حدود الضبط لخريطة المراقبة P المعدلة الجديدة، فإنه يمكن الحكم بأن العملية الإنتاجية تحت ضبط المواصفات، غير منضبطة.

جدول (٢/٧)

إحصائي : مشاهدات نسبة الوحدات المعيبة فى العينات المسحوبة

لخريطة المراقبة P (لخط تجميع التليفزيون)

رقم العينة	عدد الوحدات المعيبة	نسبة المعيب
1	٧	0,07
2	٤	0,04
3	٦	0,06
4	٧	0,07
5	٤	0,04
6	٤	0,04
7	٣	0,03
8	٩	0,09
9	٨	0,08
10	٣	0,03
11	٤	0,04
12	٦	0,06
13	٨	0,08
14	٦	0.06
15	٤	0,04
16	٤	0,04
17	٦	0,06
18	٣	0,03
19	٨	0,08
20	٤	0.04
21	٣	0,03
22	١٣	0,13
23	١	0,01
24	٦	0,06
25	٢	0,02
المجموع	١٣٣	

$n = 100$, $\bar{P} = 0.0532$, $S_P = 0.0224432$

٢/٣/٧ خريطة المراقبة C:

أحياناً كثيرة يكون هدف مراقبة الجودة، متعلق بالتحكم فى عدد العيوب – وليست نسبة الوحدات المعيبة – فى كل وحدة من الوحدات المنتجة فى وحدة قياس ما (المساحة أو الطول أو الحجم أو الزمن)، فى العملية الإنتاجية تحت ضبط مواصفات الجودة، ومن أمثلتها: عدد العيوب الموجودة فى كل متر مربع من الأقمشة المخصصة للتصدير، عدد الثقوب الصغيرة فى كل متر فى سلك كهربائى معزول،....، وهكذا.

وفق التوصيف السابق، فإن عدد العيوب هنا، تتبع توزيع بواسون بوسط حسابي، وتباين للمجتمع الإحصائي (العملية الإنتاجية) تحت مراقبة الجودة، وفى مثل هذه الحالات نستخدم خريطة المراقبة لعدد العيوب فى وحدة القياس، والمسماة خريطة المراقبة C في توزيع بياني عدد العيوب الموجودة فى العينة العشوائية المسحوبة، للحكم على الانضباط من عدمه للعملية الإنتاجية، وكما هو الحال فى خرائط المراقبة $\overline{X}$، R ، P فإن خريطة المراقبة C تتطلب حساب عدد من الإحصائيات، على النحو الآتي:

١- تقدير الوسط الحسابي لعدد العيوب فى العملية الإنتاجية (المجتمع الإحصائى) :

$$\overline{C} = \frac{C_1 + C_2 + \ldots + C_m}{m} = \frac{\sum_{j=1}^{m} C_j}{m}, \quad C: \text{عدد العيوب/وحدة قياس}$$

٢ – تقدير الانحراف المعيارى لعدد العيوب فى العملية الإنتاجية (المجتمع الإحصائى): $S_c = \sqrt{\overline{C}}$

٣- حساب حدي الضبط الأعلى، والأدنى فى خريطة المراقبة C:

$$UCL_C = \overline{C} + 3\sqrt{\overline{C}}$$

$$LCL_C = \overline{C} - 3\sqrt{\overline{C}}$$

ونتناول شرح كيفية استخدام خريطة المراقبة C في المثال التطبيقي، التالي:

مثال: (٣/٧) ترغب إحدى دور النشر ضبط أخطاء الكتابة التى تحدث عند صف عمال الطباعة أحرف الكتب، وللتحقيق قام مهندس مراقبة الجودة بسحب عينة عشوائية بحجم ٢٥ لوحة طباعة، وقام بتسجيل قراءات المشاهدات، (عدد الأخطاء الموجودة بكل لوحة طباعة) فى العينة العشوائية المسحوبة، فى جدول إحصائى (٣/٧)، والمطلوب: إنشاء خريطة المراقبة C، والحكم على مدى الانضباط فى العملية الإنتاجية من عدمه، وفيما يلي الإحصائيات المحسوبة من العينات المسحوبة، واللازمة لإنشاء خريطة المراقبة C:

$$\overline{C} = \frac{175}{25} = 7,0$$

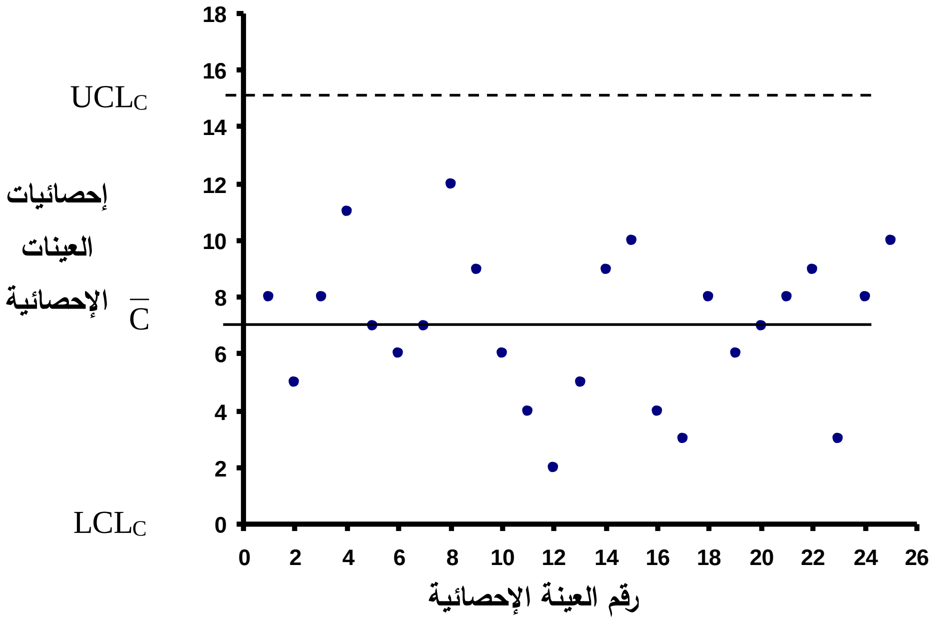
$$S_C = \sqrt{7.0} = 2,646$$

$$UCL_C = 7,0 + 3\,(2,646) = 14,938$$

$$LCL_C = 7,0 - 3\,(2,646) = -0,938 \approx 0$$

ويبين الشكل (٦/٧) خريطة المراقبة C وفيها توزيع بيانى عدد الأخطاء فى كل لوح طباعة (ممثلة بنقطة) فى العينة العشوائية المسحوبة، تقع كلها داخل حدى الضبط الأعلى، والأدنى (١٤،٩٣٨ ، ٠) ، لخريطة المراقبة C للعملية الإنتاجية (صف حروف ألواح الطباعة) تحت ضبط الجودة، وعليه يمكن الحكم أن العملية الإنتاجية للطباعة، تحت التحكم.

عدد العيوب



شكل (٦/٧)

خريطة المراقبة C لعدد العيوب فى وحدة

القياس، لخط الطباعة فى أحد دور النشر

جدول (٣/٧)
إحصائي : مشاهدات عدد العيوب في العينة المسحوبة، لخريطة المراقبة C (لخط الطباعة)

العينة	عدد الأخطاء	العينة	عدد الأخطاء
١	٨	١٤	٩
٢	٥	١٥	١٠
٣	٨	١٦	٤
٤	١١	١٧	٣
٥	٧	١٨	٨
٦	٦	١٩	٦
٧	٧	٢٠	٧
٨	١٢	٢١	٨
٩	٩	٢٢	٩
١٠	٦	٢٣	٣
١١	٤	٢٤	٨
١٢	٢	٢٥	١٠
١٣	٥		
المجموع			**١٧٥**

$\bar{C} = 7{,}0$, $S_C = 2{,}646$

٤/٧ خطة معاينة القبول الإحصائي:

في العملية الصناعية، لا نهتم فقط بضبط مواصفات الجودة للمخرجات (المنتج النهائى)، كعملية لاحقة (مستخدمين الملائم من طرق ضبط مواصفات الجودة السابق شرحها)، بل نهتم أيضا بمراقبة مواصفات الجودة الموضوعة للمدخلات (مواد خام أو أجزاء مصنعة)، كعملية سابقة فى مراحل تصنيع المنتج

النهائي، ورغم أن أسلوب الفحص الشامل لشحنات المواد المشتراة، يحقق أكبر حماية ممكنة للمستهلك.

إلا أن التكاليف المالية الكبيرة المصاحبة، إلى جانب عدم ملاءمته لبعض أنواع السلع، **مثال:** الذخيرة الحية أو ثقاب الكبريت أو... أو غيرها ، لذا يُعتبر أسلوب الفحص الشامل من الأساليب محدودة الاستخدام في الحياة العملية.

وعادة ما يستخدم مدخل العينات الإحصائية، بوضع خطة للمعاينة الإحصائية (تسمى طريقة معاينة القبول) لفحص المواد المشتراة، بسحب عينة عشوائية واحدة بحجم n وحدة من N حجم المجتمع الإحصائى (تحت مراقبة الجودة) ، مع تحديد مُسبق – مستنداً إلى نظرية الاحتمالات، والتوزيعات الاحتمالية – للحد الأقصى المسموح به لعدد الوحدات المعيبة، فى العينة المسحوبة، وتسمى بالقيمة الحرجة أو عدد القبول acceptance number ويرمز لها بالرمز c.

وتستخدم طريقة معاينة القبول، على مستوى المنتج بهدف التحقيق فى مدى تحقق مواصفات الجودة المطلوبة فى المنتج النهائى قبل طرحه للأسواق، والآخر على مستوى المستهلك بهدف اتخاذ قرار بقبول أو رفض شحنات المواد المشتراة، على ضوء مواصفات الجودة الموضوعة.

وتُعتبر طريقة معاينة القبول، أحد حالات الاستدلال الإحصائى (تعميم نتائج العينة على المجتمع الإحصائى) ، كأسلوب من أساليب اتخاذ القرار، بغرض اتخاذ قرار من اثنين: قبول الشحنة الواردة إذا كان: عدد الوحدات المعيبة فى العينة $X \leq c$ أو رفض الشحنة الواردة إذا كان عدد الوحدات المعيبة في العينة: $X > c$ تحت حالتي الطبيعة: الشحنة مطابقة للمواصفات أو الشحنة غير مطابقة للمواصفات، مع احتمال الوقوع فى أى من نوعى الخطأ:

الخطأ الأول: ويسمى خطأ من النوع الأول Type I Error ويقع عندما يتقرر رفض الشحنة الواردة على أنها معيبة، فى حين أن الحقيقة عكس ذلك، ويترتب عليه ما يسمى بمخاطرة المنتج (كونه يتحمل عبء إرجاع شحنة مطابقة للمواصفات)، واحتمال الوقوع فى خطأ من النوع الأول α يمثل الحد الأقصى لاحتمال رفض شحنة سليمة، يرتبط بعدد القبول c.

الخطأ الثاني: ويسمى خطأ من النوع الثانى Type II Error ويقع عندما يتقرر قبول الشحنة الواردة على أنها سليمة، فى حين أن الحقيقة عكس ذلك، ويترتب عليه وقوع ما يسمى بمخاطرة المستهلك، واحتمال الوقوع فى خطأ من النوع الثانى β ويرتبط بمستوى المعنوية الإحصائية α السابق تحديده.

ومن الممكن رسم منحنى يسمى بتوصيف العمليات، يوضح عليه: احتمالات قبول الشحنة الواردة، مستخدمين في تحديدها توزيع احتمالي ذو الحدين أو توزيع احتمالي بواسون في حالة المعاينة مع الإرجاع، أو التوزيع الاحتمالي الهندسي الزائد حالة المعاينة مع عدم الإرجاع، إذا كان حجم العينة المسحوبة ١٠% فأكثر من حجم المجتمع الإحصائى – عند مستويات مختلفة لنسب المعيب، وأيضاً نوعى الخطأ الأول، والثاني، ويمكن تلخيص القرارات المختلفة فى خطة معاينة القبول، فى الجدول الآتى:

جدول (٤/٧)

نموذج اتخاذ القرار لخطة معاينة القبول لمراقبة جودة الإنتاج

حالة الطبيعة / القرار	الشحنة مطابقة للمواصفات $P \leq P_0$	الشحنة غير مطابقة للمواصفات $P > P_0$
قبول الشحنة	قرار صحيح باحتمال $(1-\alpha)$	خطأ من النوع الثاني β (مخاطرة المستهلك)
رفض الشحنة	خطأ من النوع الأول α (مخاطرة المنتج)	قرار صحيح باحتمال $(1-\beta)$

<u>ومع ملاحظة</u>:

١- P_0 هي نسبة معيب محددة، ونستخدم الصيغة $P=P_0$ بدلاً من الصيغة $P\leq P_0$ عند حساب احتمالات جدول قرارات خطة معاينة القبول، عند التعامل مع جدول الاحتمالات التجميعية لتوزيعات ذات الحدين.

٢- يهتم المورد بمعرفة، احتمال حدث رفض شحنة مطابقة للمواصفات (مكمل احتمال حدث قبول شحنة مطابقة للمواصفات (١$-\alpha$)) وهو ما يطلق عليه وقوع خطأ من النوع الأول α أو ما يُسمى بمخاطرة المنتج Producer Risk.

٣- يهتم المستهلك بمعرفة، احتمال حدث قبول شحنة غير مطابقة للمواصفات (مُكمل احتمال حدث رفض شحنة غير مطابقة للمواصفات (١$-\beta$)) وهو ما يطلق عليه وقوع خطأ من النوع الثانى β أو ما يسمى بمخاطرة المستهلك Consumer Risk.

٤- تُعتبر القيمة الحرجة c المحدد الأساسي لمخاطرة المنتج أو

المستهلك، فى طريقة معاينة القبول.

<u>وسنتناول عرض تطبيقي لطريقة معاينة القبول، فى المثال الآتي:</u>

<u>مثال:(٤/٧)</u> يرغب مهندس مراقبة الجودة بأحد المصانع، فى ضبط جودة الأجزاء المصنعة والتى يشتريها المصنع من أحد الموردين، بوضع خطة لمعاينة القبول: بسحب عينة عشوائية من ٣٠ وحدة من حجم شحنة كبيرة من الأجزاء المصنعة، والتي وردت حديثاً للمصنع، ويعبر مهندس مراقبة الجودة عن رضاه، إذا كانت نسبة المعيب فى الشحنة لا تتعدى ١٠ فى المائة، كما يقرر قبول الشحنة، إذا كان عدد الوحدات المعيبة فى العينة لا تزيد عن ٣ وحدات، وإلا الشحنة سترد إلى المورد، والمطلوب: حساب جدول القرارات الممكنة من تطبيق خطة معاينة القبول الإحصائي.

<u>الحل:</u>

ويتطلب إعداد الجدول المطلوب، حساب مجموعة احتمالات الأحداث، الآتية:

١- حساب احتمال حدث قبول الشحنة، والشحنة مطابقة للمواصفات، وليكن الحدث A:

$$P(A) = P(X \leq 3 \mid n = 30 ,\ P = 0,10)$$
$$(1-\alpha) = 0,64744$$

٢- حساب احتمال حدث رفض الشحنة، والشحنة مطابقة للمواصفات (احتمال الوقوع فى خطأ من النوع الأول (مخاطرة المنتج)):

$$P(\overline{A}) = P(X > ٣ \mid n = ٣٠, P = ٠.١٠)$$
$$\alpha = 1 - P(A)$$
$$= 1 - 0,64744 = 0,35256$$

٣- حساب احتمال حدث قبول الشحنة، والشحنة غير مطابقة للمواصفات (احتمال الوقوع في خطأ من النوع الثانى (مخاطرة المستهلك)) ،

وليكن الحدث $\overline{R}$:

$$P(R) = P(X \leq 3 \mid n = 30 , \ P = 0,20)$$
$$\beta = 0,12271$$

كون الشحنة غير مطابقة للمواصفات (أى حالة نسبة المعيب $P > P_{.}$)، وبفرض أن: $P_{.} =$ ٠،٢٠.

٤- حساب احتمال حدث رفض الشحنة، والشحنة غير مطابقة للمواصفات:

$$P\left(\overline{R}\right) = 1 - P(R)$$
$$1 - \beta = 1 - 0,12271 = 0,87729$$

ويمكن تناول عرض ملخص للنتائج السابقة، فى الجدول الآتي:

جدول (٥/٧)

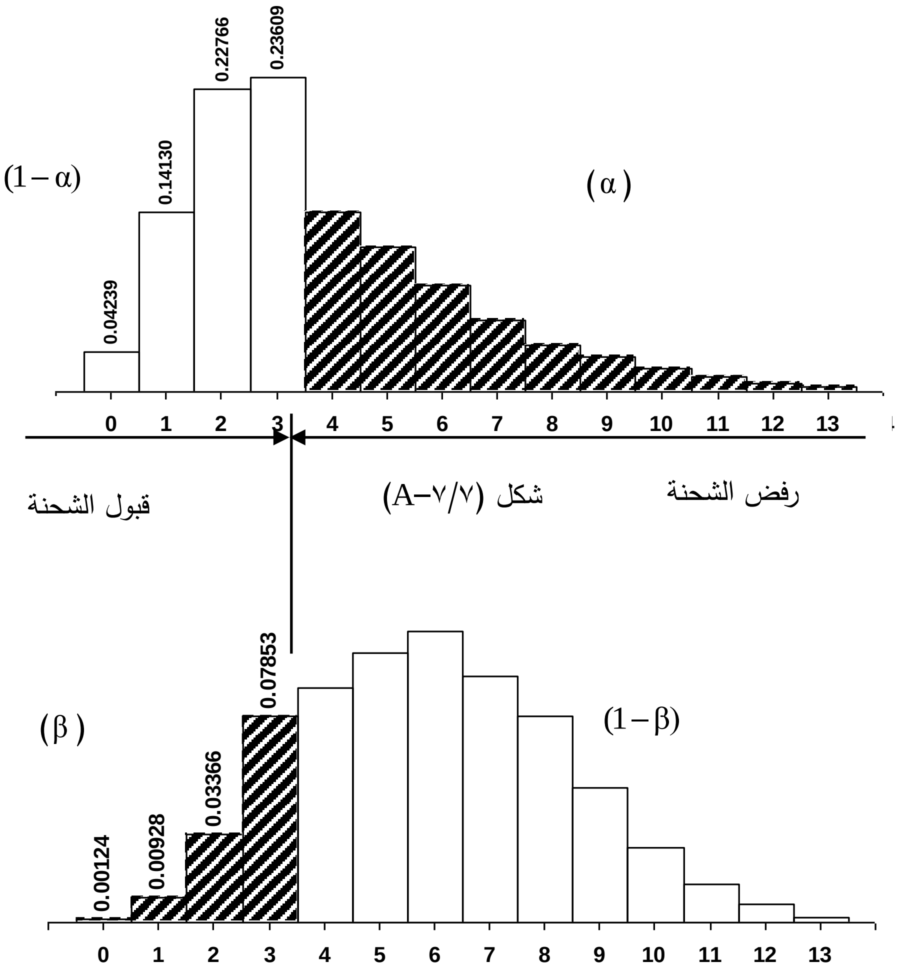
عرض حساب احتمالات أحداث القرارات الممكنة

لخطة معاينة القبول الإحصائي لشحنة من الأجزاء المصنعة

الواردة للمصانع

حالة الطبيعة / القرار	الشحنة مطابقة للمواصفات $P \leq 0,10$	الشحنة غير مطابقة للمواصفات $P > 0,10$
قبول الشحنة	$(1-\alpha)$ 0,64744	β 0,12271 مخاطرة المستهلك
رفض الشحنة	α 0,35256 مخاطرة المنتج	$(1-\beta)$ 0,87729

ويمكن توضيح نتائج جدول (٥/٧) في الشكل البياني الآتي:



شكل (B−٧/٧)

شكل (٧/٧)

العلاقة بين مخاطرة المنتج (α) ، ومخاطرة المستهلك (β)

وفيها $P=0.20, C=3, P_0=0.10, n=30$

وحيث:

- في شكل (A–٧/٧):
- المســاحة غيــر المظللــة، تمثــل احتمــال حــدث قبــول الشــحنة، والشحنة مطابقة للمواصفات، وتساوى ٠،٦٤٧٤٤
- المساحة المظللـة، تمثـل احتمـال حـدث رفـض الشـحنة، والشـحنة مطابقة للمواصفات، وتساوى ٠،٣٥٢٥٦
- وفي شكل (B–٧/٧):
- المساحة المظللـة، تمثـل احتمـال حـدث قبـول الشـحنة، والشـحنة غير مطابقة للمواصفات، وتساوى ٠،١٢٢٧١
- المســاحة غيــر المظللــة، تمثــل احتمــال حــدث رفــض الشــحنة، والشحنة غير مطابقة للمواصفات، وتساوى ٠،٨٧٧٢٩
- مستعيناً بجدول حساب : $P(X) = \binom{n}{x} P^{X} q^{n-X}$

ومع ملاحظة:

- فـي حالـة خطـة معاينـة القبـول، ذات حجـم العينـة المسـحوبة كبيـر جداً، ونسبة المعيب صـغيرة جداً، نستخدم فـى حسـاب احتمـالات الأحـداث المختلفـة المصـاحبة، توزيـع بواسـون كتقريـب لتوزيـع ذو الحدين.
- فـي طريقـة معاينـة القبـول، حقيقـة اسـتخدمنا اختبـارات الفـروض الإحصــائية فيهــا : يــنص فــرض العــدم H_0 علــى أن الشــحنة مطابقـة للمواصـفات (أى : $P \le P_0$) والآخـر يـنص الفـرض البـديل H_1 على أن الشحنة غير مطابقة للمواصفات (أي: $P > P_0$).

٥/٧ تمارين عامة :

١- تستخدم إحدى العمليات الإنتاجية، فى إنتاج جزء معين يقاس طوله بالسنتيمتر، سحبت عينة عشوائية مكونة من خمسة أجزاء فى كل عشر دقائق وقيست أطوالها لأقرب سنتيمتر، الجدول التالى يمثل البيانات التى حصلنا عليها لعشرة من هذه العينات:

الفترة الزمنية	القياسات 1	2	3	4	5
1	14	17	18	16	15
2	18	17	10	15	10
3	13	19	17	16	14
4	12	14	16	12	17
5	11	10	17	16	16
6	13	16	14	15	12
7	18	15	12	16	19
8	17	17	19	13	14
9	15	13	12	16	14
10	17	16	12	16	19

أ – ارسم خريطة الوسط الحسابي $\overline{X}$ وخريطة المدى R، ووزع البيانات على كل منهما.

ب– هل تدل خريطة الوسط الحسابي $\overline{X}$ على أن العملية الإنتاجية محكمة؟، ما هو قرارك بالنسبة لخريطة المدى R؟

٢- يعتقد المسئولون في مصنع تعبئة السكر بنجع حمادي، بأن العملية الإنتاجية تسير وفقاً للمواصفات المحددة، قام مهندس جودة الإنتاج باختيار عينة عشوائية، مكونة من تسعة أكياس من السكر في كل ساعة خلال أربعين ساعة وسجل وزن كل منها فوجد أن الوسط الحسابى العام لوزن الكيس يساوى ٤,٥ كيلو جراماً، بخطأ معيارى قدره ٠,٢ كيلو جراماً، كما وجد أن

الوسط الحسابى لمدى الأربعين عينة يساوى ٠,٢٥ كيلو جراماً، بانحراف معيارى قدره ٠,٠٥ كيلو جراماً.

أ– أنشـئ خريطتـي: الوسط الحسابي $\overline{X}$ والمدى R باستخدام هذه البيانات.

ب– افترض سحب عشرة عينات جديدة تتكون كل منها من تسعة أكياس، فيما يلى الوسط الحسابي $\overline{X}$ والمدى R لكل عينة من هذه العينات الجديدة :

الساعة	$\overline{X}$	R	الساعة	$\overline{X}$	R
1	4.8	0.20	6	4.6	0.24
2	3.5	0.30	7	5.3	0.41
3	4.2	0.28	8	4.9	0.32
4	4.8	0.22	9	4.6	0.21
5	5.0	0.42	10	4.4	0.20

وهل تدل خريطة الوسط الحسابي $\overline{X}$ على أن العملية الإنتاجية محكمة؟، ما هو قرارك بالنسبة لخريطة المدى R ؟ اشرح إجابتك.

٣- يعتقد المسئول عن أحد مصانع الأحذية بوجود نسبة مرتفعة من النعال المعيبة، فقام باختيار عينة عشوائية فى كل ساعة خلال عشرين ساعة، وسجل عدد النعال المعيبة فى كل عينة منها فى الجدول، التالي:

الساعة	حجم العينة	عدد الوحدات المعيبة	الساعة	حجم العينة	عدد الوحدات المعيبة
1	100	15	11	100	12
2	100	7	12	100	9
3	100	15	13	100	8
4	100	8	14	100	11
5	100	14	15	100	10
6	100	11	16	100	6
7	100	14	17	100	9
8	100	6	18	100	7
9	100	9	19	100	13
10	100	7	20	100	9

أ- ارسم خريطة نسبة المعيب P ثم وزع البيانات عليها.

ب- هل العملية الإنتاجية محكمة ؟ اشرح إجابتك؟

٤- قامت إحدى شركات إنتاج المصابيح الكهربائية باختبار ٥٠٠ مصباح كهربائى خلال عشرة أيام، خمسين مصباحاً فى كل يوم، فوجد من بينها ٢٥ مصباحاً معيباً.

أ- ارسم خريطة المراقبة P.

ب- بعد إنشاء خريطة المراقبة P قامت الشركة، بجمع خمس عينات عشوائية، والعينة في كل يوم تتكون كل منها من خمسين مصباحاً، فحصلنا على البيانات، التالية:

اليوم	1	2	٣	4	5
عدد الوحدات المعيبة	1	4	15	7	3

هل تدل هذه البيانات، على أن العملية الإنتاجية محكمة؟ اشرح إجابتك.

٥- بعد إنشاء خريطة المراقبة P فى التمرين السابق، تبين للشركة أن العملية

الإنتاجية غير محكمة، فقامت باستبعاد بيانات العينة التى سحبت عندما كانت العملية الإنتاجية غير محكمة، كما قامت باتخاذ الإجراءات اللازمة للتعرف على أسباب الاختلافات الغير عادية وتصحيحها، وبعد تصحيح العملية الإنتاجية قامت الشركة بسحب سبع عينات عشوائية، والعينة في كل يوم تتكون كل منها من ٢٥ وحدة، وفيما يلى ملخص لنتائج فحص هذه العينات.

اليوم	1	2	٣	4	5	6	7
عدد الوحدات المعيبة	4	5	2	3	1	٢	1

أ- ارسم خريطة المراقبة P باستخدام بيانات جميع العينات ماعدا العينة المستبعدة.

ب- هل تدل الخريطة الجديدة، على أن العملية الإنتاجية محكمة؟ اشرح إجابتك.

٦- استخدمت إحدى شركات طباعة الكتب ٢٥ لوحاً من ألواح الطباعة لإنشاء خريطة المراقبة C لمراقبة أخطاء الطباعة، فوجد أن خط المنتصف يقع عند ٧ وأن حدي الضبط الأعلى والأدنى هما ١٤,٩٣٧، ٠ على التوالى، وبعد إنشاء الخريطة، قامت الشركة باختيار عشرة ألواح طباعة عشوائياً، وسجلت الأخطاء الموجودة بكل منها فى الجدول التالي:

لوح الطباعة	**عدد الأخطاء**	**لوح الطباعة**	**عدد الأخطاء**
١	9	6	16
٢	12	7	8
٣	6	8	9
٤	16	9	13
٥	7	10	11

أ- وزع البيانات على خريطة المراقبة C.

ب- هل العملية الإنتاجية محكمة؟ إذا لم تكن كذلك، ماذا يجب عمله فى هذه الحالة؟

٧- تقوم إحدى شركات أجهزة التليفزيون بفحص أجهزتها قبل بيعها، فإذا كان الجهاز سليماً تم شحنه للمشترى وإلا وجب إصلاحه قبل بيعه، سحبت عينة عشوائية مكونة من عشرين جهازاً فحصلنا على البيانات التالية التى تمثل عدد العيوب الموجودة، بكل منها:

5, 6, 4, 3, 7, 8, 1,2, 4, 5, 4, 6, 7, 3,5, 3, 2, 7, 9, 9

أ- حدد خط المنتصف، وحدى الضبط الأعلى والأدنى لخريطة ضبط الجودة C.

ب- هل العملية الإنتاجية محكمة ؟ اشرح إجابتك.

٨- يقوم أحد مصانع أجهزة الراديو، بشراء كميات كبيرة من الترانزستور من شركة صناعات إلكترونية، ووفقاً لخطة معاينة القبول بهذا المصنع، تقبل الشحنة إذا وجدت ٣ وحدات معيبة على الأكثر فى عينة عشوائية مكونة من ٣٠ وحدة، أى أن الشحنة التى تتضمن ١٠ فى المائة على الأكثر من الوحدات المعيبة تعتبر مقبولة.

أ- أوجد احتمال الوقوع، في خطأ من النوع الأول (مخاطرة المنتج)، إذا كانت نسبة الوحدات المعيبة فى الشحنة تساوى ١٠ فى المائة.

ب- أوجد احتمال الوقوع، في خطأ من النوع الثانى (مخاطرة المستهلك) إذا كانت نسبة المعيب فى الشحنة تساوى ٢٠ فى المائة.

٩- تقوم شركة صناعات إلكترونية بشراء صمامات إلكترونية فى شحنات كبيرة، حيث تعتبر الشحنة مقبولة إذا كانت نسبة المعيب بها لا تزيد عن ٢٠ فى

المائة، ووفقاً لخطة معاينة القبول، تقبل الشحنة إذا وجدت ٤ وحدات معيبة على الأكثر فى عينة عشوائية من ٢٠ وحدة، افترض وصول شحنة من الصمامات للشركة، وافترض سحب عينة عشوائية مكونة من ٢٠ وحدة لفحصها، فأحسب قيمة كل من: α ، β كلما كان ذلك ممكناً، بافتراض أن نسبة المعيب فى الشحنة:

$p_1 = 0,1$	$p_4 = 0,4$	$p_7 = 0,7$
$p_2 = 0,2$	$p_5 = 0,5$	$p_8 = 0,8$
$p_3 = 0,3$	$p_6 = 0,6$	$p_9 = 0,9$

١٠- يدعى أحد الموردين أن نسبة المعيب فى إنتاجه لا تزيد عن ٢ فى المائة، ويقوم أحد المشترين بالشراء منه على هذا الأساس، ولمعرفة مدى صحة ادعاء هذا المورد، قام المشترى بسحب عينة عشوائية مكونة من ١٠٠ وحدة من كل شحنة يتسلمها لفحصها قبل قبوله للشحنة، افترض أن المشترى قرر قبول الشحنة إذا كان عدد الوحدات المعيبة فى العينة لا يزيد عن وحدتين (a=٢)، وأنه قرر رفض الشحنة إذا زاد عدد الوحدات المعيبة فى العينة عن ذلك، وحيث أن قرار رفض أو قبول الشحنة يتم اتخاذه بناء على بيانات العينة، فإنه من المحتمل رفض شحنة مطابقة للمواصفات أو قبول شحنة غير مطابقة للمواصفات، استخدم توزيع بواسون كتقريب لتوزيع ذو الحدين، لحساب:

أ – مخاطرة المنتج إذا كانت نسبة المعيب فى الشحنة تساوى ٢ فى المائة.

ب– مخاطرة المستهلك إذا كانت نسبة المعيب فى الشحنة تساوى ٣ فى المائة.

امتحان مادة (بحوث العمليات) لجميع الشعب (طلاب الفرقة الرابعة)

أجب عن جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول : "نظرية الصفوف + مشكلة النقل "(ساعة)

(الدرجة=٣٥ درجة)

أولا : " نظرية الصفوف " : (٢٠ دقيقة) (١٥ درجة)

يصل العملاء لشباك الحسابات الجارية بأحد البنوك طبقاً لتوزيع بواسون بمعدل عشرون عميلاً في الساعة. كما أن متوسط زمن خدمة العميل الواحد دقيقتان . فإذا كان البنك يحتوي علي شباك وحيد يخدم عملاء الحسابات الجارية طبقاً لنظام الخدمةمن يصل أولاً يخدم أولاً.والمطلوب :-

١- معالم أو خصائص هذا النظام في سطر واحد هى:

(a): $(M_{(\lambda=20)},M_{(\mu=30)},C\geq1):(LCFS,\infty,N)$.

(b): $(M_{(\lambda=20)},M_{(\mu=2)},C\geq1):(LCFS,N,N)$.

(C) : $(M_{(\lambda=20)},M_{(\mu=30)},C=1):(LCFS,N,N)$.

(D) : خلاف ذلك .

٢- إحتمالات تحقق حالات الإستقرار الأربعة الأولي على الترتيب هـــى:

(a): (٣٣٣و٠ ، ١٤٨و٠ ، ٢٢٢و٠ ، ٠٩٩و٠) .

(b): (١٤٨و٠ ، ٣٣٣و٠ ، ٩٩٩و٠ ، ٢٢٢و٠) .

(c): (٣٣٣و٠ ، ٢٢٢و٠ ، ١٤٨و٠ ، ٠٩٩و٠) .

(d): خلاف ذلك .

٣- من خلال نتائجك في (٢) فإن إحتمال أن يكون شباك الحسابات الجارية خالياً (دون عمل) وكذا إحتمال أن يكون الشباك مشغولاً على الترتيب :

(a): (٣٣٣و٠ ، ٧٧٧و٠) .

(b): (٦٦٧و٠ ، ٣٣٣و٠) .

(c): (٣٣٣و٠ ، ٦٦٧و٠) .

(d): خلاف ذلك .

٤- حدد مقاييس كفاءة النظام الأربعة (متوسط عدد العملاء فى الصف والنظام وكذا الزمن المتوقع أن يقضية العميل فى الصف والنظام على الترتيب هى) :

(a): (١ ، ٢ ، ٤ ، ٦) .
(b): (٢ ، ١ ، ٤ ، ٦) .
(c): (٦ ، ٤ ، ٢ ، ١) .
(d): خلاف ذلك .

<u>ثانيا : "مشكلة النقل</u> " : (٤٠ دقيقة) (٢٠ درجة)

الجدول التالى يبين تعريفة نقل الوحدة (بالجنية) لسلعة متجانسة من ثلاثة فروع إنتاجية لأربعة مراكز توزيع وكذا الطاقات المعروضة ($ع_ر$) والمطلوبة ($ط_و$) من تلك السلعة:

مراكز التوزيع / فروع الإنتاج	$ب_١$	$ب_٢$	$ب_٣$	$ب_٤$	$ع_ر$
$أ_١$	١٤	٢٥	٤٥	٥	٦٠٠٠
$أ_٢$	٦٥	٢٥	٣٥	٥٥	٨٥٠٠
$أ_٣$	٣٥	٣	٦٥	١٥	١٨٠٠٠
$ط_و$	٤٠٠٠	٧٥٠٠	٧٠٠٠	١٤٠٠٠	

<u>والمطلوب:</u>

(٥) : جملة التكاليف الناتجة عن الحل المبدئى لطريقة فوجل التقريبية هو :

(a): (٥٧٠٠٠٠ جنية) .
(b): (٥٧٢٥٠٠ جنية) .
(c): (٥٧٣٥٠٠ جنية) .

(d): خلاف ذلك .

(٦):من خلال برنامج الحل الأمثل لمشكلة النقل الواردة سابقا فإن عدد الوحدات التى يجب نقلها من الفرع الأول لمركز التوزيع الرابع وكذا من الفرع الثانى لمركز التوزيع الثانى وتكلفة النقل المثلى عل الترتيب هى :

(a): (٢٠٠٠ وحدة ، ١٥٠٠ وحدة ، ٥٤٦٥٠٠ جنية).
(b): (٢٢٠٠ وحدة ، ٢٠٠٠ وحدة ، ٥٤٠٦٠٠ جنية) .
(c): (صفر وحدة ، ٧٠٠٠ وحدة ، ٥٧٣٥٠٠ جنية) .
(d): خلاف ذلك .

<u>السؤال الثانى : " نظرية المباريات + شبكات الأعمال "</u> : (ساعة) (٣٥ درجة)
<u>أولا :" نظرية المباريات</u> " (٢٥ دقيقة) (<u>١٥ درجة</u>)

فيما يلى لديك مصفوفة العائد لمباراة بين اللاعبين أ و ب:

$$\begin{array}{cc} \text{ب} & \\ \begin{pmatrix} ٢ & ٧ \\ ٥ & ٣ \\ -٤ & -٣ \\ -٦ & ٧ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix} & \text{أ} \end{array}$$

<u>والمطلوب :</u>

٧-تحليل معنى عناصر الإستراتيجة الأولى للاعب الأعمدة فى مصفوفة المباراة يفيد أن :.

(a) : إذا لعب لا عب الأعمدة بإستراتيجيتة الأولى ولعب لاعب الصفوف بإستراتيجيتة الأولى أوالثانية أو ....أو الخامسة على

الترتيب فإن لاعب الصفوف يخسر سبعة أو ثلاثة نقاط أو يخسر ثلاثة نقاط أو يخسر سبعة نقاط أو نقطتين على الترتيب.

(b) إذا لعب لا عب الأعمدة بإستراتيجيتة الأولى ولعب لاعب الصفوف بإستراتيجيتة الأولى أوالثانية أو ....أو الخامسة على الترتيب فإن لاعب الصفوف يكسب سبعة أو ثلاثة نقاط أو يخسر ثلاثة نقاط أو يخسرسبعة نقاط أو نقطتين على الترتيب .

(c) إذا لعب لا عب الأعمدة بإستراتيجيتة الأولى ولعب لاعب الصفوف بإستراتيجيتة الأولى أوالثانية أو ....أو الخامسة على الترتيب فإن لاعب الصفوف يكسب سبعة أو ثلاثة نقاط أو يخسر ثلاثة نقاط أو يكسب سبعة نقاط أو نقطتين على الترتيب .

(d): خلاف ذلك .

٨- فى مصفوفة المباراة السابقة هناك :

(a): نقطة تعادل ومن ثم فالإستراتيجيات خالصة .

(b): لا توجد نقطة تعادل ومن ثم فالإستراتيجيات مركبة .

(c): نقطة تعادل ومن ثم فالإستراتيجيات مركبة .

(d): خلاف ذلك .

٩- بإفتراض عدم وجود نقطة تعادل فإنه يجب :

(a : تطبيق مبدأ السيادة من وجهة نظر لاعب الصفوف .

(b): تطبيق مبدأ السيادة من وجهة نظر لاعب الأعمدة.

(c): تطبيق مبدأ السيادة من وجهة نظر لاعبى الصفوف والأعمدة.

(d): خلاف ذلك .

١٠- نسبة الوقت للإستراتيجيات المثلى لكلاً من لاعب الصفوف والاعمدة على الترتيب هى :

(a): [(٧/٤ ، ٧/٥) و (٩/٦ ، ٩/٣) و (٥/٣ ، ٥/٢)] .

(b): [(٧/٤ ، ٧/٣) و (٩/٦ ، ٩/٣) و نقطة تعادل فى المصفوفة الفرعية الثالثة] .

(c): [(٧/٢ ، ٧/٥) و (٩/٤ ، ٩/٥) و نقطة تعادل فى المصفوفة الفرعية الثالثة] .

(d): خلاف ذلك .

١١-بافتراض تطبيقك لمبدأ السيادة بأسلوب صحيح على مصفوقة المباراة السابقة وتطبيق أسلوب المصفوفات الفرعية فإن القيمة المثلى للمباريات الثلاث الناتجة هى على الترتيب :

(a): (٧/٩ ، ٣ ، ٩/ ٣٨).

(b): (٩/٧ ، ٩ /٨ ، ٣).

(c): (٧/٢٩ ، ٩/٣٨ ، ٣).

(d) : خلاف ذلك .

<u>ثانياً:</u> (<u>شبكات الأعمال</u>): (٣٥ دقيقة) (٢٠ درجة)

الجدول التالى يبين الأزمنة اللازمة لإنجاز أنشطة أحد المشروعات (عادية وعاجلة بالأسبوع) وكذا التكلفة (عادية وعاجلة بالألف جنيه) اللازمة لإنجاز تلك الأنشطة:

النشاط ومساره	بيانات عادية		بيانات عاجلة	
	زمن	تكلفة	زمن	تكلفة
أ (١–٢)	١٢	٤٢	٩	٤٨
ب (١–٣)	٧	٣٠	٥	٣٨
جـ (٢–٤)	١٠	٢٦	٧	٣٢
د (٢–٣)	٤	١٠	٣	١١
هـ (٤–٦)	١١	٣٤	٦	٤٩
و (٣–٥)	٨	١٤	٦	١٦
ز (٥–٦)	٧	١٠	٥	١٢
ى (٦–٧)	٣	١٣	٢	١٧

فإن :

١٢– من خلال البيانات العادية وحصرك لمسارات الشبكة التخطيطية للمشروع فإن أقل زمن عادى لإنجاز أنشطة المشروع هو .... أسبوع وذلك بتكلفة عادية تعادل ....ألف جنية على الترتيب هى :

(a): (٢٥ أسبوع بتكلفة تعادل ١٧٩ ألف جنية).

(b): (٦٢ أسبوع بتكلفة تعادل ١٧٩ ألف جنية).

(c) : (٣٦ أسبوع بتكلفة تعادل ١٧٠ أف جنية).

(d): خلاف ذلك .

١٣– من خلال البيانات العاجلة وحصرك لمسارات الشبكة التخطيطية للمشروع فإن أقل زمن عاجل لإنجاز أنشطة المشروع هو ....أسبوع وذلك بتكلفة تعادل..........ألف جنية على الترتيب هى :

(a): (١٨ أسبوع بتكلفة تعادل ١٧٩ ألف جنية).
(b) : (٢٥ أسبوع بتكلفة تعادل ١٧٩ ألف جنية).
(c) : (٢٥ أسبوع بتكلفة تعادل ٢٢٣ أف جنية).
(d) : خلاف ذلك .

١٤- مستخدماً أسلوب بيرت/تكلفة فإن أقل تكلفة لإنجاز أنشطة المشروع بأقل زمن ممكن هى:
(a): (٢٥ أسبوع بتكلفة تعادل ٢١٢ ألف جنية).
(b): (٢٥ أسبوع بتكلفة تعادل ١٧٩ ألف جنية).
(c): (٢٥ أسبوع بتكلفة تعادل ٢٢٣ ألف جنية).
(d): خلاف ذلك .

١٥- جملة التكاليف اللازمة لإنجاز أنشطة المشروع فى زمن يعادل ٢٩ أسبوع هى:.
(a): (١٨٩ ألف جنية).
(b): (١٨٥ ألف جنية).
(c): (١٩٦ ألف جنية).
(d): خلاف ذلك .

١٦- الزمن اللازم لإنجاز أنشطة المشروع بتكلفة تعادل ٢١٠ ألف جنية هو:.
(a): (٢٦ أسبوع).

(b): (٢٥،٥ أسبوع).

(c): (٢٥ أسبوع).

(d): خلاف ذلك .

<u>السؤال الثالث</u> : (<u>البرمجة الخطية</u>) (ساعة) (٣٠ درجة)

فيما يلى لديك النموذج الخطى التالى :

د (س) = − ٣ $س_١$ + $س_٢$ (تعظيم أو تدنية)

<u>بشرط القيود الهيكلية التالية :</u>

$س_١$ + ٢$س_٢$ ≤ ٦

$س_١$ − $س_٢$ ≤ ٢

$س_٢$ ≥ ٣

$س_١$ ، $س_٢$ ≤ صفر

<u>والمطلوب</u> :

١٧− من خلال حلك للنموذج الخطى بيانياً فإنه :

(a): لا توجد قيود زائدة .

(b): هناك قيد وحيد زائد .

(c): هناك قيدين زائدين .

(d): خلاف ذلك .

١٨− عدد النقاط المعبرة عن الحلول الأساسية .... :

(a): نقطة وحيدة كحل أساسى .

(b): ستة نقاط حلول أساسية.

(c): أربعة نقاط حلول أساسية.

(d): خلاف ذلك.

١٩- عدد نقاط الحلول الممكنة ....:

(a): نقطة وحيدة كحل ممكن .

(b): عشرة نقاط حلول ممكنة .

(c): ثمانى نقاط حلول ممكنة.

(d): عدد لانهائى من الحلول الممكنة.

٢٠- عدد نقاط الحلول الأساسية الممكنة (النقاط المتطرفة)........

(a): نقطة وحيدة.

(b): ثلاث نقاط حلول أساسية ممكنة.

(c): عدد لانهائى من الحلول الأساسية الممكنة .

(d): خلاف ذلك .

٢١- الحل الأمثل فى حالة تعظيم دالة الهدف هو :

(a): حل وحيد .

(b): حل أمثل متعدد لكنه محدود بعدد من نقاط الحلول المثلى .

(c): حل أمثل متعدد يحتوى على عدد لانهائى من الحلول المثلى .

(d): خلاف ذلك .

٢٢- الحل الأمثل فى حالة تدنية دالة الهدف هو :

(a): حل وحيد .

(b): حل أمثل متعدد لكنه محدود بعدد من نقاط الحلول المثلى .

(c): حل أمثل متعدد يحتوى على عدد لانهائى من الحلول المثلى .

(d): خلاف ذلك .

٢٣- الحل الأمثل من خلال الحل الجدولى بطريقة السمبلكس المناسبة يتحقق فى حالة التدنية عند النقطة ....:

(a): (٦ ، صفر) .

(b): (٥ ، ٣) .

(c): (٢ ، صفر) .

(d): خلاف ذلك .

- إذا كان لديك النموذج الخطى التالى :

د(س) =٨ س$_١$ + ٦ س$_٢$ (تعظيم)

بشرط القيود الهيكلية التالية :

س$_١$ + س$_٢$ ≥ ٤

٤ س$_١$ + ٣ س$_٢$ ≥ ١٢

- س$_١$ + س$_٢$ ≥ ١

س$_١$ + س$_٢$ ≥ ٦

س$_١$ ، س$_٢$ ≤ صفر

فمن خلال حلك البيانى لهذا النموذج الخطى فإنه <u>:(أجب على السؤال ٢٤ و ٢٥ و٢٦ و٢٧):</u>

٢٤- بالنسبة للقيود الزائدة ....

(a) : لا توجد قيود زائدة .

(b) : يوجد قيد وحيد زائد هو القيد الرابع .

(c) : يوجد قيدان زائدان هما الأول والرابع

(d) : خلاف ذلك .

٢٥- عدد نقاط الحلول الأساسية هو :

(a) : ثمانى نقاط .　　(b) : أربع نقاط .

(c) : عشرة نقاط .　　(d) : خلاف ذلك .

٢٦- عدد نقاط الحلول الأساسية الممكنة (النقاط المتطرفة للشكل المشترك) هو :

(a): ثلاث نقاط .　　(b): أربع نقاط .

(c): عدد لانهائى من النقاط .　　(d) : خلاف ذلك .

٢٧- الحل الأمثل عبارة عن :

(a): عدد لانهائى من الحلول المثلى المتعددة　　(b):حل وحيد .

(c): متعدد الحلول المثلى ومعلوم عددها .　　(d) : خلاف ذلك .

انتهت الأسئلة

" **مع أطيب الأمنيات بالنجاح والتفوق ومستقبل باهر** "

المراجع

أولاً: بالمراجع باللغة العربية:

١-د/إبراهيم موسى عبد الفتاح ، "محاضرات في بحوث العمليات" ، كلية التجارة، جامعة الزقازيق ، ٢٠٠١م.
٢-د/أحمد محمد زامل ، د/ عبد الغفار شحاتة عبده ، " بحوث العمليات"، كلية التجارية ، جامعة الزقازيق ، ٢٠٠٣م.
٣-د/بهجب محمود ثابت ، "بحوث العمليات" ، كلية التجارة بسوهاج ، جامعة أسيوط ، ١٩٩٠م.
٤-د/على سيد بخيت ، "بحوث العمليات" ، كلية التجارة بسوهاج ، جامعة جنوب الوادي ، ٢٠٠١م.
٥-د/لندا سامي ، " بحوث العمليات" ، كلية التجارة بسوهاج ، جامعة جنوب الوادي ، ٢٠٠٢م.
٦-د/محمود علي أبو النصر ، " مقدمة في بحوث العمليات والطرق الكمية" ، كلية التجارة ، جامعة عين شمس ، ٢٠٠٠م.
٧-د/نادية مكاوي ، "محاضرات في بحوث العمليات" ، كلية الاقتصاد والعلوم السياسية ، جامعة القاهرة ، ١٩٨٠م.

ثانيًا: المراجع باللغة الإنجليزية:

٨- **Hamdy A Taha, "Operations Research-An Introduction", Eighth Eidition University of Arkansa, Fayetteville, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 2007.**

فهرس المحتويات

جامعة جنوب الوادي كلية التجارة	تاريخ الامتحان: ١ / ٦ / ٢٠٢٢ زمن الامتحان: ثلاث ساعات	
امتحان مادة: بحوث العمليات لطلاب الفرقة الرابعة (انتظام + انتساب موجة وعام) : "لجميع الشعب"		
امتحان دور مايو ٢٠٢٢	الشعبة العربية(محاسبة + ادارة + اقتصاد)	

ملاحظات : ١- يحتوى الامتحان على ٥٠ سؤال . تم تخصيص درجتان لكل اختيار صحيح.
٢- المجموعة الأولى من أسئلة الامتحان اختيار متعدد (من السؤال رقم (١) إلى السؤال رقم (٣٠)) ، أما المجموعة الثانية من الأسئلة عبارة عن أسئلة الصواب والخطأ (من السؤال رقم(١) إلى السؤال رقم(٢٠)). لذا أقرأ السؤال بعناية ثم اختار الإجابة الصحيحة .
٣- كراسة الإجابة التقليدية لإتمام العمليات الحسابية(المسودات) والتي تسبق قرارك باختيارك للإجابة الصحيحة فقط ، ولن يلتفت إليها في عملية التصحيح ، وفى كل العمليات الحسابية قرب حساباتك إلى أقرب ثلاثة أرقام عشرية . مع تمنياتي بالتوفيق للجميع .

أولا:المجموعة الأولى من الأسئلة (أسئلة الاختيار المتعدد من السؤال(١) إلى السؤال(٣٠)):

* **نظرية الصفوف**: يصل خريجي كلية التجارة بقنا إلى شباك إدارة الخريجين بالكلية من أجل استخراج شهادات التخرج وسحب ملفاتهم طبقا لتوزيع بواسون بمعدل ٧٠ خريج فى الساعة . وكذا كان التوزيع الاحتمالي للخدمة في الشباك له التوزيع البواسونى بمعدل خدمة ٨٠ خريج فى الساعة . والمطلوب:(أجب على الأسئلة من السؤال رقم (١) إلى السؤال رقم (٤)):

(١): تتلخص خصائص هذا النظام في النموذج:

(a): ($M_{(\lambda= 7)}$ / $M_{(\mu= 8)}$ / 1):(FCFS / N / N) .
(b): ($M_{(\lambda= 80)}$ / $M_{(\mu= 70)}$ / 1) :(FCFS / N / N) .
(c): ($M_{(\lambda= 70)}$ / $M_{(\mu= 80)}$ / 1) :(FCFS / N / N) .
(d): خلاف ذلك

(٢): نسبة الوقت الذى تكون فيه الخدمة في شباك إدارة الخريجين متاحة(الشباك خاليا) وكذا احتمال وجود ثلاث خريجين أمام شباك إدارة الخريجين (النظام) هما على الترتيب :

(a):(١٢,٥ % ، ٠,٠٨٤)   (b): (٨٤ % ، ٠,١٢٥)
(c): ٣٣,٣ % ، ٠,٣٣٣)   (d): خلاف ذلك .

(٣): عدد الخريجين المتوقع وجودهم في النظام وكذا في صف الانتظار هو على الترتيب:
(a): (٦ ، ٥ خريج)   (b): (٧ ، ٦خريج)   (c): (٨ ، ٧ خريج)   (d):خلاف ذلك.

(٤): الزمن المتوقع أن يقضيه الخريج حتى ينتهى من استخراج شهادة التخرج وسحب ملفه وكذا الزمن الذى ينتظره الخريج حتى يتم البدء فى خدمته هما على الترتيب :
(a): (٦ ، ٥,٢٥ دقيقة)   (b): (٥,٢٥ ، ٤,٥ دقيقة)   (c): (٤ ، ٣ دقيقة)   (d):خلاف ذلك.

* **<u>نظرية المباريات</u>**: إذا كانت مصفوفة العائد لمباراة فيما بين اللاعبين(أ ، ب) تأخذ الصورة التالية:

$$\begin{array}{cc} \text{ب} & \\ \begin{pmatrix} ٣ & -٢ & -٧ \\ ٤ & -٣ & ٦ \end{pmatrix} & \text{أ} \end{array}$$

<u>فإنه: (أجب على الأسئلة التالية من السؤال رقم (٥) إلى السؤال رقم (٩)):</u>

(٥): من خلال تحليلك لعناصر مصفوفة العائد من المباراة فإنه إذا لعب كل من اللاعبين(أ ، ب) باستراتيجيتهم الثانية فإن :

(a): اللاعب(أ) يكسب ستة نقاط ويخسر اللاعب (ب) ستة نقاط .
(b): اللاعب (أ) يكسب أربعة نقاط ويخسر اللعب (ب) أربعة نقاط .
(c): اللاعب (أ) يخسر ثلاث نقاط ويكسب اللاعب (ب) ثلاث نقاط .
(d):خلاف ذلك.

(٦): نتيجة لغياب وجود نقطة تعادل في تلك المباراة ونتيجة لاستخدامك فكرة المصفوفات الفرعية، فإن احتمال أن يلعب لاعب الصفوف (أ) باستراتيجيته الأولى في المصفوفات(أو المباريات) الفرعية الثلاث على الترتيب هو:

(a): (٠,٣٥٧ ، صفر ، ٠,٦٤٣) (b): (٠,٣٥٧ ، ٠,٦٤٣ ، صفر)
(c): (٠,٦٤٣ ، ٠,٣٥٧ ، صفر) (d):خلاف ذلك.

(٧): نتيجة لغياب وجود نقطة تعادل في تلك المباراة ونتيجة لاستخدامك لفكرة المصفوفات الفرعية، فإن احتمال أن يلعب لاعب الأعمدة(ب) باستراتيجيته الثانية في المصفوفات(أو المباريات) الفرعية الثلاث على الترتيب هو:

(a): (٠,٣٥٧ ، ٠,٩٢٩ ، ١) (b): (٠,٩٢٩ ، ١ ، صفر)
(c): (١ ، ٠,٩٢٩ ، صفر) (d):خلاف ذلك.

(٨): قيمة العائد من المباراة للمصفوفات(أو المباريات) الفرعية الثلاث على الترتيب هو:

(a): (-٧ ، ٤ ، ٣ ومجموع المباراة صفرية لكل مباراة فرعية).
(b): (-٣ ، ٤ ، -٢ ومجموع المباراة صفرية لكل مباراة فرعية).
(c): (٣ ، ٤ ، ٦ ومجموع المباراة صفرية لكل مباراة فرعية).
(d):خلاف ذلك.

(٩):إذا تم صياغة مصفوفة العائد من المباراة من وجهة نظر لاعب الصفوف (أ) في صورة نموذج خطى، فإن هذا النموذج الخطى سيحتوي على :

(a): (ثلاثة متغيرات قرارية في دالة هدف مشروطة بخمسة قيود هيكلية).
(b): (متغيران قراريان في دالة هدف مشروطة بثلاثة قيود هيكلية).
(c): (متغيران قراريان في دالة هدف مشروطة بخمسة قيود هيكلية).
(d): خلاف ذلك.

مشكلة النقل :تقوم إحدى شركات الشحن الكبرى بنقل القمح المعبأ فى أجوله من أربعة مخازن كبرى تابعة لوزارة التموين(أ١ ، أ٢ ، أ٣ ، أ٤) إلى ثلاث مطاحن كبرى على مستوى ج .م .ع هي (ب١ ، ب٢ ، ب٣) . والجدول التالي يوضح هامش ربح نقل شركة الشحن للجوال الواحد (بالجنية) من كل مخزن إلى كل مطحن وكذا طاقة المخازن المختلفة المتاحة أسبوعيا واحتياجات المطاحن المختلفة أسبوعيا (بالألف جوال) .

مخازن / مطاحن	ب١	ب٢	ب٣	الطاقة المتاحة
أ١	١٠	٧	٨	٣٠٠
أ٢	١٠	١١	١٤	٥٠٠
أ٣	٩	١٢	٤	٦٠٠
أ٤	١١	١٣	٩	٢٠٠
الإحتياجات	٥٠٠	٦٠٠	٥٠٠	

والمطلوب :(أجب على الأسئلة التالية من السؤال رقم (١٠) إلى السؤال رقم (١٥)):
(١٠): إذا تم صياغة جدول مشكلة النقل لشركة الشحن في صورة نموذج خطى، فإن طبيعة دالة الهدف تكون بمثابة عملية .... في نموذج خطى يحتوى على عدد .... من المتغيرات القرارية وعدد .... من القيود الهيكلية. (أكمل الفراغات بالاختيار الصحيح):
(a): (تعظيم لقيمة دالة هدف تعبر عن إجمالي أرباح النقل ، ١٢ متغير ، ٢٠ قيد هيكلي).
(b): (تدنية لقيمة دالة هدف تعبر عن إجمالي أرباح النقل ، ٧ متغير ، ١٠ قيد هيكلي).
(c): (تدنية لقيمة دالة هدف تعبر عن إجمالي تكاليف النقل ، ١٢ متغير ، ٢٠ قيد هيكلي).
(d):خلاف ذلك.

(١١): من خلال جدول الحل المبدئي باستخدام طريقة الركن الشمالي الشرقي فإن جملة الأرباح الناتجة عن هذا الحل هى:
(a): (١٩٤٠٠جنية). (b): (١٤٩٠٠جنية). (c): (١٤٥٠٠جنية). (d):خلاف ذلك.

(١٢): من خلال جدول الحل المبدئي باستخدام طريقة الترتيب التنازلي للأرباح فإن جملة الأرباح الناتجة عن هذا الحل هي:
(a): (١٩٢٠٠جنية). (b): (١٩٣٠٠جنية). (c): (١٩٤٥٠). (d):خلاف ذلك.

(١٣): من خلال جدول الحل المبدئي باستخدام طريقة فوجل التقريبية فإن جملة الأرباح الناتجة عن هذا الحل هي:
(a): (١٩٤٥٠جنية). (b): (١٩٤٠٠جنية). (c): (١٩٣٥٠جنية). (d):خلاف ذلك.

(١٤): من خلال نتائجك لجدول الحل المبدئي بطريقة الركن الشمالى الشرقي لمشكلة النقل محل الاعتبار واستخدامك لأحد طرق التحسين واختبار مدى أمثلية الحل المقترح فإن دليلي تحسين الخليتين (أ١ب٢ ، أ١ب٣) هما على الترتيب :
(a): (٣ ، ٢). (b): (٤ ، ٥). (c): (٤ ، -٥). (d):خلاف ذلك.

(١٥): بافتراض أنك تقوم بعملية تحسين على جدول الحل المبدئي المقترح بطريقة الركن الشمالي الشرقي وبالتحديد باستخدام المسار المغلق للخلية أ١ب٣ فإن جملة الأرباح بعد التحسين سوف تصبح :
(a): (١٦٤٠٠جنية). (b): (١٦٨٠٠جنية). (c): (١٦٨٥٠جنية). (d):خلاف ذلك.

<u>التحليل الشبكي للمشروعات وشبكات الأعمال</u>:
فيما يلي الجدول التالي يبين بيانات التكلفة العادية وكذا العاجلة (بالمليون جنية) وكذا الأزمنة العادية والعاجلة (بالشهر) لتنفيذ أنشطة إحدى المشروعات الحكومية وذلك علي النحو التالي:

بيان / النشاط	مسار النشاط	بيانات عادية		بيانات عاجلة	
		زمن عادى	تكلفة عادية	زمن عاجل	تكلفة عاجلة
أ	(١ – ٢)	١٦	٢٠٠	١٢	٤٠٠
ب	(١ – ٣)	٨	٣٠٠	٤	٧٠٠
ج	(٢ – ٤)	٤	١٠٠	٢	١٨٠
د	(٢ – ٥)	٢٠	٢٠٠	١٥	٨٠٠
هـ	(٣ – ٤)	١٠	٢٠٠	٥	٤٠٠
و	(٤ – ٥)	٦	١٦٠	٤	٢٠٠
المجموع			١١٦٠		٢٦٨٠

فإن **:<u>(أجب على الأسئلة التالية من السؤال رقم (١٦) إلى السؤال رقم (٢٠)):</u>**
(١٦): من خلال حسابك للأنواع الأربعة من الأزمنة بطريقة الحسابات الأمامية وكذا طريقة الحسابات الخلفية فإن زمن المسار الحرج العادي هو.......... شهر وبأقل تكلفة ممكنة تعادل .... مليون جنية.
(a): (٢٢ شهر ، ٤٠٠ مليون جنية) . (b): (٢٤ شهر ، ١١٦٠ مليون جنية) .
(c): (٣٦ شهر ، ١١٦٠ مليون جنية) . (d):خلاف ذلك.

(١٧): من خلال حسابك للأنواع الأربعة من الأزمنة بطريقة الحسابات الأمامية وكذا طريقة الحسابات الخلفية فإن الزمن الاحتياطي الكلى للأنشطة (ب ، ج ، ه) علي الترتيب هو :
(a): (١ ، صفر ، ١). (b): (٢ ، صفر ، ٢). (c): (٣ ، صفر ، ٢). (d):خلاف ذلك.

(١٨): من خلال استخدامك لأسلوب بيرت/تكلفة فإن أقل زمن لإنجاز هذا المشروع هو .... شهرا وذلك بأقل تكلفة ممكنة هى .... مليون جنية على الترتيب هما :
(a): (٢٦شهر ، ١١٦٠مليون جنية). (b): (٢٧شهر ، ١٩٦٠مليون جنية).
(c): (١٨ شهر ، ١٦٤٠مليون جنية). (d):خلاف ذلك.

(١٩): طبقا لأسلوب بيرت / تكلفة فإن قيمة أقل تكلفة تتحملها الحكومة لإنجاز أنشطة هذ المشروع في زمن يعادل ٢٨ شهر هي :
(a): (١٨١٠مليون جنية). (b): (١٨٣٠مليون جنية).
(c): (١٨٤٠مليون جنية). (d):خلاف ذلك.

(٢٠): من خلال استخدامك لأسلوب بيرت / تكلفة فإن أقل فترة زمنية يمكن خلالها تنفيذ أنشطة المشروع وذلك بتكلفة تعادل ١٥٠٠مليون جنية هي :
(a): (٢٧ شهر). (b): (٣٠ شهر). (c): (٣١ شهر). (d):خلاف ذلك.

* **البرمجة الخطية**:
فيما يلى لديك النموذج الخطى التالي :

$$د(س) = س_{١} + ٢س_{٢} \qquad \text{(تعظيم)}$$

بشرط القيود الهيكلية التالية:

$$-٣س_{١} + ٣س_{٢} \le ٩$$
$$س_{١} - س_{٢} \le ٢$$
$$س_{١} + س_{٢} \le ٦$$
$$س_{١} + ٣س_{٢} \le ٦$$
$$س_{١} ، س_{٢} \ge صفر$$

فإن:(أجب على الأسئلة التالية من السؤال رقم (٢١) إلى السؤال رقم (٣٠)):
(٢١): من خلال حلك البياني للنموذج الخطى الأصلي فإن عدد القيود الزائدة هو :
(a): قيد وحيد زائد. (b): قيدان زائدان . (c): ثلاث قيود زائدة. (d):خلاف ذلك.

(٢٢): من خلال حلك البياني للنموذج الخطى الأصلي فإن عدد نقاط الحلول الأساسية وعدد نقاط الحلول الأساسية الممكنة وعدد نقاط الحلول المثلى هو علي الترتيب:

(a): (١٢نقاط ، ٥ نقاط ،متعدد الحلول المثلي). (b): (١٢نقطة ، ٥ نقاط ،حل أمثل ووحيد).
(c): (١٠ نقاط ، ٤ نقاط ،حلول مثلى متعددة). (d):خلاف ذلك.

(٢٣): من خلال حلك البياني للنموذج الخطى الأصلي ، فإن المجال المشرك للنموذج الخطي مجال........ ويحتوي علي عدد من نقاط الحلول الممكنة(أو المسموح بها) ....من الحلول على الترتيب هما :
(a): (محدب ، عدد لانهائي). (b): (غير محدب ، عدد محدود).
(c): (محدب ، ١٢ نقطة). (d):خلاف ذلك.

(٢٤): إذا كان المطلوب تعظيم قيمة دالة هدف النموذج الخطي الأصلي وبعد استبعادك للقيود الزائدة (إن وجدت)، ومن خلال استخدامك لطريقة السمبلكس المناسبة فإن قيم العنصر المحوري بدءا من جدول الحل المبدئي حتى جدول الحل الأمثل هما على الترتيب :
(a): (١ ، ٣/٤). (b): (٣ ، ٣/٤). (c): (١ ، ٣/١). (d):خلاف ذلك.

(٢٥): إذا كان المطلوب تعظيم قيمة دالة هدف النموذج الخطى الأصلي وبعد استبعادك للقيود الزائدة (إن وجدت)، وتحديدك للنموذج الثنائي، فإن عدد المتغيرات القرارية وعدد القيود الهيكلية للنموذج الثنائي هما علي الترتيب :
(a):(٤ متغير قراري ، ٢ قيد هيكلي) . (b): (٣ متغير قراري ، ٢ قيد هيكلي) .
(c): (٣ متغير قراري ، ٣ قيد هيكلي) . (d):خلاف ذلك.

(٢٦): إذا كان المطلوب تعظيم قيمة دالة هدف النموذج الخطى الأصلي ، وبعد استبعادك للقيود الزائدة (إن وجدت)، ومن خلال استخدامك لطريقة السمبلكس المناسبة في حلك للنموذج الخطى الأصلي، واستنتاجك للقيم المثلى للمتغيرات القرارية والمتممة وكذا القيمة المثلى لدالة هدف النموذج الثنائي، فإن هذه القيم المستنتجة على الترتيب هي :
(a): (٣ ، ١ ، صفر ، صفر، ٥). (b): (٤/١ ، ٤/٣ ، صفر ، صفر ، ٥).
(c): (صفر ، صفر ، ٤/١ ، ٤/٣ ، ٥) (d): خلاف ذلك.

(٢٧): إذا كان المطلوب تعظيم قيمة دالة هدف النموذج الخطى الأصلي ، وبعد استبعادك للقيود الزائدة (إن وجدت)، ومن خلال استخدامك لطريقة السمبلكس المناسبة في حلك للنموذج الخطى الأصلي، فإن معاملات صف اختبار أمثلية النموذج الثنائي بما في ذلك القيمة المثلى لدالة هدف النموذج الثنائي هي على الترتيب :
(a): (-٢ ، صفر ، -٣ ، صفر ، ٥). (b): (صفر ، صفر ، -٣ ، -١ ، ٥).
(c): (صفر ، صفر ، -١ ، - ٣ ، ٥) (d):خلاف ذلك.

(٢٨): إذا كان المطلوب تعظيم قيمة دالة هدف النموذج الخطى الأصلي وبعد استبعادك للقيود الزائدة (إن وجدت)، ومن خلال استخدامك لطريقة السمبلكس المناسبة في حلك للنموذج الخطى الأصلي ومفهوم أسعار ظل الموارد، فإن قيمة دالة الهدف في حالة تغير ثوابت القيود لتصبح ١٠ ، ٥ ، ١٠ ، ١٠ تصبح قيمتها .... :

(a): (٤/٣٥). (b): (٤/٣٠). (c): (٤/٢٥). (d):خلاف ذلك.

(٢٩): بافتراض أن دالة الهدف للنموذج الخطي كانت تأخذ الصورة الخطية التالية :

د(س) = س١ – ٢س٢ فمن خلال حلك البياني للنموذج الخطى في حالتي التعظيم والتدنية ، فإن الحل الأمثل في الحالتين على الترتيب هو حل .... :

(a): (وحيد عند كل من النقطتين ((٢ ، صفر) ، (صفر ، ٢)) .

(b):(وحيد عند كل من النقطتين((٣ ، ١) ، (صفر ، ٢)) .

(c): (متعدد عند كل من النقطتين ((٣ ، ١) ، (صفر ،٢)) .

(d):خلاف ذلك.

(٣٠): بافتراض أن دالة الهدف للنموذج الخطي كانت تأخذ الصورة الخطية التالية:

د(س) = - س١ + ٢س٢ فمن خلال حلك البياني للنموذج الخطى في حالتي التعظيم والتدنية فإن الحل الأمثل في الحالتين على الترتيب هو حل .... :

(a): (وحيد عند كل من النقطتين ((٢ ، صفر) ، (صفر ، ٢)) .

(b):(متعدد عند كل من النقطتين ((٢ ، صفر) ، (صفر ، ٢)) .

(c): (وحيد عند كل من النقطتين ((٣ ، ١) ، (صفر ، ٢)) .

(d):خلاف ذلك.

<u>ثانيا:المجموعة الثانية من الأسئلة (أسئلة الصواب(T)والخطأ(F) من السؤال(١) إلى السؤال(٢٠)):</u> في ورقة التصحيح الإلكتروني المخصصة للإجابة (البابل شيت) اختر الحرف (T) للعبارة الصحيحة والحرف (F) للعبارة الخطأ :

(١): تهدف دراسة نظرية صفوف الانتظار إلى تقليل زمن انتظار وخدمة العميل فقط .

(٢): إذا كان زمن الخدمة في النظام له توزيع أسى بمتوسط خمسة دقائق فإن عدد العملاء الذين يتم خدمتهم في النظام يكون له التوزيع البواسوني بمعدل خمسة عملاء في الدقيقة .

(٣): وجود نقطة تعادل في مباراة بين فريقين يفيد وجود استراتيجيات مركبة ،وعندها تكون الاستراتيجية المثلى لكل فريق هي الاستراتيجية الأكثر احتمالا .

(٤): عند وضع مصفوفة عائد لمباراة من درجة ٤ × ٣ في صورة نموذج خطى من وجهة نظر لاعب الصفوف ، فإن النموذج الخطى سيحتوى على أربعة متغيرات قرارية تتواجد في دالة الهدف ومشروطة بعدد سبعة قيود هيكلية.

(٥): إذا احتوى جدول متوازن لمشكلة نقل تحتوى على عدد(ن) من مصادر الإنتاج وعدد(م) من مراكز التوزيع، فعند صياغة هذا الجدول في صورة نموذج خطى، فإن النموذج الخطى سيحتوى على عدد (ن + م) متغير قراري تتواجد جميعها في دالة الهدف والتي تكون مشروطة بعدد (ن × م) من القيود الهيكلية.

(٦): في مشكلة النقل الغير متوازنة وزيادة جملة طلب مراكز التوزيع عن جملة طاقات مراكز الإنتاج، فالأمر يتطلب إضافة عمود وهمى بمثابة مركز توزيع وهمي إضافي بتكاليف أو أرباح نقل صفرية لنقل الوحدة من السلعة من كافة مراكز الإنتاج إلي هذا العمود الوهمي لوضع مشكلة النقل في حالة توازن .

(٧): إذا كانت كافة عناصر أدلة التحسين لجدول تقييم الخلايا الشاغرة لأحد جداول مشكلة نقل جميعا سالبة في حالة مشاكل تخفيض جملة تكاليف النقل(أو موجبة جميعا في حالة مشاكل تعظيم جملة الأرباح لشركات الشحن) ، فإن الجدول محل التقييم يعتبر جدول حل أمثل ومتعدد الحلول المثلى.

(٨): عند إجراء عملية التحسين في جدول مشكلة نقل معينة من خلال تكوين المسار المغلق للمتغير الداخل في الحل، فإن التكاليف(أو الأرباح) الكلية فيما بعد التحسين سوف تقل (أو تزيد) بمقدار حاصل ضرب دليل تحسين تلك الخلية التي يعبر عنها المتغير الداخل في الحل× عدد وحدات السلعة التي تم بها شغل تلك الخلية طبقا لمسارها المغلق.

(٩): جدول الحل المبدئي لأي مشكلة نقل متوازنة تحتوى على عدد (ن) من مصادر الإنتاج وعدد(م) من مراكز التوزيع والذى يحتوى على عددا من الخلايا المشغولة (الأساسية) مساويا (ن + م – ١) خلية مشغولة يكون حلا أساسيا وممكنا .

(١٠): في التحليل الشبكي للمشروعات وبالتحديد في أنشطة المسار الحرج فقط تنعدم الازمنة الاحتياطية الحرة .

(١١): في التحليل الشبكي للمشروعات وبالتحديد في أسلوب بيرت/تكلفة فإنه قبل إجراء التخفيضات المتتالية على أزمنة أنشطة المسار الحرج العادي، فإن زمن تنفيذ المشروع طبقا

لزمن المسار الحرج وإن كان ذو أطول فترة زمنية لتنفيذ المشروع ككل ، إلا أنه يعتبر أقل زمن لإنجاز المشروع وبأقل تكلفة إجمالية ممكنة.

(١٢): في التحليل الشبكي للمشروعات وبالتحديد في أسلوب بيرت/تكلفة فإنه عند إجراء التخفيضات المتتالية ، وعند دراستنا لبدائل التخفيضات المتتالية والممكنة فإنه يمكن تخفيض أحد الأنشطة الغير حرجة بالتوازي مع الأنشطة الحرجة طبقا لأولوية أقل ميل تكلفة للنشاط .

(١٣): عند وضع النموذج الخطي في الصورة القانونية، فإنه يجب أن تكون كافة القيود في صورة معادلات باستثناء قيود عدم السالبية .

(١٤): عند وضع النموذج الخطي في أيا من صورتيه القانونية أو المعيارية فإن قيد الحد المطلق ومعه متباينة في صورة($\leq$) يتم رده لأصله الرياضي من خلال فكه إلى متباينتين فرعيتين ويتم اعتبارهم معا في الحل مع باقي قيود النموذج الخطي.

(١٥): المجال المشترك الناتج من حل النماذج الخطية بيانيا دائما أبدا مجالا محدبا سواء مجالا مشتركا محدودا أو غير محدودا (لا نهائيا).

(١٦): المعامل الصفري أسفل المتغير الغير أساسي في صف اختبار الأمثلية في جدول الحل الأمثل يفيد وجود قيم مثلى مختلفة ومتعددة لمتغيرات النموذج الخطي لكن بقيمة مثلى ثابته ووحيدة لدالة الهدف .

(١٧): يتم استخدام قاعدة تشارنز وكوبر للخروج من حالة التعادل فيما بين مجموعة من الصفوف المحورية(تعدد المتغيرات المرشحة للخروج من الأساس) فى جدول السمبلكس الجاري تحسينه للوصول للحل الأمثل .

(١٨): أثناء إجراء جولات التحسين فى طرق السمبلكس المختلفة ،إذا كانت كافة عناصر عمود المحور جميعا عناصر صفرية وسالبة ، فهذا يفيد وجود منطقة حلول مشتركة(مجال مشترك) فيما بين قيود النموذج الخطى غير محدود (مجال مشترك لانهائي) وحل أمثل غير محدود(حل لانهائي) .

(١٩): قيود الحدود الدنيا للمتغيرات القرارية في النماذج الخطية تعتبر قيودا زائدة .

(٢٠): بعد الوصول لجدول الحل الأمثل فى طرق السمبلكس في حل النماذج الخطي جبريا أو جدوليا (وبالتحديد طريقتي (م)الكبرى أو السمبلكس ذات المرحلتين)، فإن وجود أحد المتغيرات الاصطناعية (أو الصناعية) ضمن متغيرات الأساس بقيمة تفوق الصفر يفيد بأنه لا يوجد مجال

مشترك(منطقة حلول مشتركة) فيما بين قيود النموذج الخطي(أي عدم وجود مجال مشترك فيما بين قيود النموذج الخطى).

" **<u>إنتهت الأسئلة</u>** ..... **<u>أطيب الأمنيات بالنجاح والتوفيق</u>** ...."