اسم المقرر : بحتة 8 (جزء المعادلات تفاضلية II)

استاذ المقرر : د / اسماعيل جاد امين

الفرقـــــة : الثانية

الشعبـــــــة : عام رياضيات

الفصل الدراسي الثاني

الباب الثالث
معادلات الرتبة الثانية

(٣-١) الصورة العامة لمعادلات الرتبة الثانية الخطية هي:

$$y''(x)=f\left(y(x),y'(x);x\right) \qquad (1)$$

كما عرفنا سابقاً من الباب الثاني، فإن معادلات الرتبة الأولى ويلزمها شرط ابتدائي واحد. كذلك فإن معادلات الرتبة الثانية يلزمها شرطان ابتدائيان وذلك لإيجاد الحل الوحيد (إن وجد). أما الحل العام لمعادلات الرتبة الثانية يحتوي على ثابتين (بدلاً من ثابت واحد في حالة الرتبة الأولى).

نظرية (١):

إذا كانت الدوال $f\left(y,y',x\right), \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}$ **دوال متصلة بالنسبة للمتغيرات الثلاثة** x, y, y' **في المنطقة** R **(ذو ثلاث أبعاد** x, y, y'**) وكانت النقطة** $\left(x_0,y_0,y_0'\right)$ **نقطة داخلية داخل المنطقة** R **فإنه يوجد حل وحيد** $y=y(x)$ **للمعادلة التفاضلية (1) يحقق الشرطان الآتيان:**

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_0' \qquad (2)$$

وذلك في منطقة ما حول النقطة x_0.

وعلى الرغم من أن المعادلة التفاضلية (1) تبدو بسيطة ورغم التأكد من وجود الحل الوحيد (باستخدام النظرية (1)) إلا أنه لا توجد طريقة عامة لحل المعادلة (1)و (2) إلا إذا كانت f تأخذ صوراً مبسطة ومن هذه الصور:

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=g(x) \qquad (3)$$

حيث $p(x), q(x), g(x)$ دوال متصلة بالإضافة للشرطان

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y'_0 \tag{4}$$

المسألة (4) ,(3) تحقق شروط النظرية (1) وعلى ذلك فإن المعادلة (3) مع الشرطان (4) لهما حل وحيد طبقاً للنظرية (1) ولبيان ذلك فإن:

$$f(x,y,y')=-p(x)y(x)-q(x)y'(x)+g(x)$$

ويلاحظ أن f متصلة طالما كانت p, q, g متصلة.

كذلك فإن:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-q(x)$$

وهي متصلة لأن $q(x)$ متصلة

أيضاً:

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=-p(x)$$

وهي متصلة لأن $p(x)$ متصلة.

أي أن $f, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}$ دوال متصلة. أي أن الصورة (3) تحقق شروط النظرية (1) وإذا أضفنا الشرطان (4) فإن المسألة (4) ,(3) يكون لها حل وحيد في مدى (فترة ما) حول النقطة x_0.

(٣-٢) اختزال الرتبة:

أولاً: إذا كانت المعادلة في الصورة:

$$y''=f(x,y') \tag{1}$$

فإن التعويض $v = y'$ يؤدي إلى أن:

$$y'' = v'$$

بالتعويض في (1) يكون:

$$\frac{dv}{dx} = f(x,v) \qquad (2)$$

معادلة (1) هي معادلة من الرتبة الأولى في المتغير التابع v والمتغير المستقل x. يمكن حلها بإحدى الطرق المبينة في الباب الثاني وإيجاد $v = v(x)$ وبإجراء تكامل $\frac{dy}{dx} = v = v(x)$ المعادلة الأخيرة بعد فصل المتغيرات يمكن إيجاد y كدالة في x.

مثال (١):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$x^2 y'' + 2xy' - 1 = 0\,; \qquad x > 0$$

الحـل

يمكن كتابة المعادلة على الصورة:

$$y'' = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} y'$$

وهي على شكل المعادلة (1)، لذلك نضع $v = y'$

فإن

$$v' = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} v$$

$$\therefore\ \frac{dv}{dx}+\frac{2}{x}v=\frac{1}{x^2}$$

$$\mu(x)=\exp\int\frac{2dx}{x}=\exp\left(\ln x^2\right)=x^2$$

$$v(x)=\frac{1}{x^2}\{c_1+\int dx\}=\frac{1}{x^2}\{c_1+x\}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{c_1}{x^2}+\frac{1}{x}$$

بإجراء التكامل يكون

$$y=-\frac{c_1}{x}+\ln x+c_2$$

وهو الحل العام للمعادلة (انظر لاحتوائه على ثابتين).

مثال (٢):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y''+x(y')^2=0$$

الحـل

$$y''=-x(y')^2$$

وهي معادلة على شكل (1) بوضع $v=y'$ فإن:

$$\frac{dv}{dx}=-xv^2$$

$$\therefore\ -\frac{dv}{v^2}=xdx$$

$$\therefore \ \frac{1}{v} = \frac{x^2}{2} + c_1 = \frac{x^2 + c_1}{2}$$

$$\therefore \ \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^2 + c_1}$$

$$\therefore \ dy = 2\frac{dx}{x^2 + c_1}$$

وبإجراء تكامل للطرفين يكون:

$$y = c_2 + \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{c_1}} \tanh^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{c_1}} & if \ \ c_1 > 0 \\ -\dfrac{2}{x} & if \ \ c_1 = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{-c_1}} \ln\left|\dfrac{x - \sqrt{-c_1}}{x + \sqrt{-c_1}}\right| & if \ \ c_1 < 0 \end{cases}$$

<u>ثانياً :</u> إذا كانت المعادلة على الصورة:

$$y'' = f(y, y') \qquad (3)$$

فإن التعويض $v = y'$ يعطي

$$\frac{dv}{dx} = f(y, v)$$

وهذه المعادلة تحتوي على ثلاث متغيرات x, y, v ولكن التحويلة

$$y'' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy}$$

بالتعويض في (3) يكون:

$$v\frac{dv}{dy} = f(y,v)$$

وهي معادلة من الرتبة الأولى يمكن حلها وإيجاد

$$v = v(y)$$

وبالتالي يمكن حل $\frac{dv}{dx} = v(y)$ بفصل المتغيرات وإيجاد y كدالة في x.

مثال (٣):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y\,y'' + (y')^2 = 0$$

الحـل

نكتب المعادلة بالصورة:

$$y'' = -\frac{(y')^2}{y} \qquad\qquad y \neq 0$$

وهي على شكل المعادلة (3) لذلك نفرض أن $v = y'$

$$\therefore\ y'' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}.\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy}$$

$$\therefore\ v\frac{dv}{dy} = -\frac{v^2}{y}$$

$$\therefore\ \frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y}$$

حيث $v \neq 0$ وبإجراء التكامل

$$\ln v + \ln y = \ln c \qquad \Rightarrow \qquad vy = c$$

$$\therefore\ y\frac{dy}{dx} = c \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = c_1 x + c_2$$

مثال (٤):

أوجد حل المعادلة:

$$y'' + y(y')^3 = 0$$

الحـل

نكتب المعادلة على شكل (3)

$$y'' = -y(y')^3$$

نضع $y' = v$

$$\therefore\ y'' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}.\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy}$$

بالتعويض في المعادلة

$$\therefore\ v\frac{dv}{dy} = -yv^3$$

$$\therefore\ -\frac{dv}{v^2} = y\,dy \qquad (v \neq 0 \text{ حيث})$$

$$\therefore\ \frac{1}{v} = \frac{1}{2}y^2 + c = \frac{y^2 + c_1}{2}$$

$$\therefore\ v = \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y^2 + c_1}$$

$$\therefore\ \left(y^2 + c_1\right)dy = 2dx$$

$$\therefore\ \frac{1}{3}y^3 + c_1 y = 2x + c_2$$

تمارين

أوجد حل كل مما يأتي:

(1) $xy'' + y' = 1;$ $\quad x > 0$

(2) $2x^2 y'' + (y')^3 = 2xy';$ $\quad x > 0$

(3) $y'' + y = 0$

(4) $2y^2 y'' + 2y(y')^2 = 1$

(5) $yy'' = 2;$ $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

(6) $y'' - 3y^2 = 0;$ $\quad y(0) = 2,\ y'(0) = 4$

(7) $y'y'' - x = 0;$ $\quad y(1) = 2,\ y'(1) = 1$

(8) $(1 + x^2)y'' + 2xy' + \dfrac{3}{x^2} = 0;$ $\quad x > 0$

(٣-٢) الحلول الأساسية للمعادلات المتجانسة:

لنعتبر المعادلة التفاضلية

$$L[y(x)] = \frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \qquad (1)$$

حيث $p(x), q(x)$ دوال متصلة في الفترة $\alpha < x < \beta$ والمؤثر $L[y(x)]$ يعرف كالآتي:

$$L\left[y(x)\right] = \left[\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right] y(x)$$

فمثلاً:

$$L\left[x^2\right] = \left[\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right] x^2$$

$$= 2 + 2x\,p(x) + x^2 q(x)$$

وعلى ذلك يمكن كتابة (1) باستخدام المؤثر $L[.]$ كالآتي:

$$L[y(x)] = 0 \qquad (1)$$

نظرية (١):

إذا كانت $y_1(x), y_2(x)$ هما حلان للمعادلة (1) فإن التعبير الخطي

$$c_1\,y_1 + c_2\,y_2$$

هو أيضاً حل للمعادلة (1) حيث c_1, c_2 ثوابت.

البرهان:

بما أن $y_1(x), y_2(x)$ هما حلان للمعادلة (1) فإن

$$L[y_1(x)] = 0, \qquad L[y_2(x)] = 0$$

$$(1) = L\left[c_1 y_1 + c_2 y_2\right]$$ الأيسر من

$$= c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2]$$

$$= c_1(0) + c_2(0) = 0 = (1)$$ الأيمن من

أي أن $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ هو حل للمعادلة (1). وهو المطلوب.

نظرية (٢):

إذا كانت $p(x), q(x)$ **دوال متصلة في الفترة** $\alpha < x < \beta$ **وكانت** $y_1(x), y_2(x)$ **هما حلان للمعادلة (1) بحيث أن:**

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

(ورونسكي)

$$\boxed{y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0,} \qquad \forall\, x \in (\alpha, \beta) \qquad (2)$$

فإن التعبير

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \checkmark$$

هو الحل العام للمعادلة (1) حيث c_1, c_2 **ثوابت.**

ملحوظة:

يلاحظ أن الشرط (2) هو:

$$\checkmark\quad \underline{W(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

وسوف نسمي هذا المحدد بـ Wronskian نسبة إلى العالم البولندي Wronski ويرمز له بالرمز

$$\underline{W(x)} = W(y_1, y_2)$$

نظرية (٣):

إذا كانت الدوال $p(x), q(x)$ دوال متصلة في الفترة (α, β) وإذا كانت $y_1(x),$ $y_2(x)$ هما حلان للمعادلة (1) فإنه إما أن

$$W(x) \equiv 0 \qquad \forall\, x \in (\alpha, \beta)$$

أو $W(x) \neq 0$ وذلك لأي نقطة x داخل الفترة (α, β).

بمعنى أنه لا توجد نقطة x داخل الفترة (α, β) تتلاشى عندها W.

البرهان: (مهم)

حيث أن $y_1(x), y_2(x)$ هما حلان للمعادلة (1) إذن

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$$

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$$

بضرب الأولى في y_2 - والثانية في y_1 والجمع يكون

$$\left(\underbrace{y_1y_2'' - y_2y_1''}_{W'}\right) + p\left(\underbrace{y_1y_2' - y_1'y_2}_{W}\right) = 0 \qquad (*)$$

وحيث أن:

$$W(x) = y_1y_2' - y_1'y_2$$

فإن:

$$\frac{dW}{dx} = y_1y_2'' - y_1''y_2$$

بالتعويض في (*) نحصل على

$$\frac{dW}{dx} + pW = 0$$

وبحل المعادلة الأخيرة

$$W(x) = ce^{-\int^{x} p(x)dx} \qquad (3)$$

حيث c ثابت التكامل

وحيث أن الدالة الأسية لا تساوي صفراً فإن $W(x)$ لا تساوي صفراً عند أي نقطة إلا إذا كانت $c = 0$ وإذا كانت $c = 0$ فإن $W(x) = 0$ لجميع قيم x. وهو المطلوب.

نظرية (٤):

إذا كانت الدوال $p(x), q(x)$ دوال متصلة في الفترة (α, β) وكان $y_1(x), y_2(x)$ حلان للمعادلة (1) وكانت $W(y_1, y_2) \neq 0$ فإن $y_1(x), y_2(x)$ هما دالتان غير مرتبطتان خطياً (linearly independent) ويكون الحل العام للمعادلة (1) بالصورة:

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

البرهان:

سوف نثبت أنه إذا كانت $W(x) \neq 0$ فإن y_1, y_2 دوال مستقلة خطياً.

نضع

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

بإجراء التفاضل

$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0$$

وبحل المعادلتان المتجانستان الأخيرتان في المجهولين c_1, c_2 فإن محددة المعاملات

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W(y_1, y_2) \neq 0$$

أي أن الحل الوحيد للمعادلتين الأخيرتين هو الحل الصفري، أي

$$c_1 = c_2 = 0$$

وعلى ذلك يكون y_1, y_2 مستقلان خطياً (وذلك إذا كان $W \neq 0$).

وقد بينا من النظرية السابقة أن التركيبة الخطية

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

هي أيضاً حل للمعادلة (1). وهو المطلوب.

نظرية (٥): مهم

إذا كانت $y_1(x)$ هي أحد حلي المعادلة (1) فإن الحل الثاني $y_2(x)$ للمعادلة (1) يحقق العلاقة

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{W(x)}{y_1^2(x)} dx \qquad (4)$$

حيث

$$W(x) = ce^{-\int^x p(x)dx} \qquad (3)$$

وعلى ذلك يمكن حساب $W(x)$ من (3) واستخدام (4) لإيجاد الحل الثاني إذا علم الحل الأول.

ويلاحظ أن y_1, y_2 مستقلان خطياً. (~~أثبت~~ ذلك).

مثال (١):

بين أن $y_1(x) = x$ هو حل للمعادلة

$$\left(1 - x^2\right)y'' - 2xy' + 2y = 0; \qquad -1 < x < 1$$

ثم أوجد الحل الثاني.

$y' = 1$

$y'' = 0$

R.H.S $= 0 - 2x + 2x = 0$

$= $ L.H.S

الحـل

حيث أن

$$y_1'(x)=1, \qquad y_1''(x)=0$$

الأيسر من المعادلة $= \text{zero} - 2x + 2x$

$= \text{zero} =$ الأيمن من المعادلة

أي أن $y_1 = x$ هو حل للمعادلة ولإيجاد الحل الثاني نكتب المعادلة على الصورة (1) أي أن:

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{2}{1-x^2}y=0$$

$$p(x)=\frac{2x}{x^2-1}$$

$$\therefore\ W(x)=c\exp\left(-\int^{x}\frac{2x}{x^2-1}dx\right)$$

$\ln \frac{1}{x^2-1}$

$$=c\exp\left(\ln\left(\frac{1}{x^2-1}\right)\right)$$ $= c\,e$ $= \frac{c}{x^2-1}$

$$=\frac{c}{x^2-1}$$

$$y_2(x)=cx\int\frac{1}{x^2\left(x^2-1\right)}dx$$

$$=cx\int\left(\frac{-1}{x^2}+\frac{1/2}{x-1}+\frac{-1/2}{x+1}\right)dx$$

$$= cx\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right\}$$

$$= c + \frac{cx}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

تمارين

(١) تحقق من أن $y(x) = e^x$ هو حل للمعادلة

$$y'' + y' - 2y = 0$$

ثم أوجد الحل الآخر وكذلك الحل العام، وأيضاً الحل الوحيد الذي يحقق الشروط

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

(٢) بين أن $y = x^2$ هو أحد حلول المعادلة

$$x^2 y'' - 2y = 0\,; \qquad x > 0$$

ثم أوجد الحل الآخر وكذلك الحل العام للمعادلة.

(٣) بين أن $y_1(x) = 1$ هو حل المعادلة

$$x^2 y'' + 2xy' = 0$$

ثم أوجد حلها العام.

(٤) بين أن $y_1(x) = x$ هو حل للمعادلة

$$x^2 y'' + 2xy' - 2 = 0$$

ثم أوجد الحل العام.

(٥) بين أن $y_1(x) = 3x^2 - 1$ هو حل للمعادلة

$$\left(1 - x^2\right)y'' - 2xy' + 6y = 0\,; \qquad |\,x\,| < 1$$

ثم أوجد الحل العام

(٦) بين أن $y_1(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ هو حل للمعادلة

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) y = 0\,; \qquad x > 0$$

ثم أوجد الحل العام.

(٧) بين أن $y_1(x) = (x - 1)$ هو حل للمعادلة

$$x(x-1)y'' + (x-1)y' - y = 0\,; \qquad x > 1$$

ثم أوجد الحل العام.

(٨) بين أن $y_1(x) = x$ هو حل للمعادلة

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0$$

ثم أوجد الحل العام

(٩) بين أن $y_1(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ هو حل للمعادلة

$$x(x-1)^2 y'' + (x-1)y' + 2(1-3x)y = 0$$

ثم أوجد الحل العام.

(٣-٤) المعادلات المتجانسة ذات المعاملات الثابتة:

$ay''+by'+cy=0$

هي معادلات على الصورة:

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0 \qquad (1)$$

حيث a, b, c ثوابت.

سوف نحاول أن نوجد الحل في الصورة e^{rx} حيث r ثابت مطلوب تعيينه. لذلك نفرض أن:

Let $$y=e^{rx}$$

وعلى ذلك يكون

$$y'=re^{rx}, \qquad\qquad y''=r^2e^{rx}$$

بالتعويض عن y, y', y'' في المعادلة (1) يكون

$$e^{rx}\left(ar^2+br+c\right)=0$$

وحيث أن $e^{rx}\neq 0$ فإن:

$$ar^2+br+c=0$$

وهي تسمى بالمعادلة المميزة حلها يكون:

$$r=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

وتكون قيمتي r متساويتان إذا كانت $b^2-4ac=0$

وتكون قيم r حقيقية مختلفة إذا كانت $b^2-4ac>0$

وتكون قيم r تخيلية (مترافقة) إذا كانت $b^2-4ac<0$

وسوف ندرس كل حالة على حدة.

أولاً: إذا كانت r حقيقية، $r_1 \neq r_2$

حيث

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad r_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

وفي هذه الحالة يمكن إثبات أن:

$$y_1 = e^{r_1 x}, \qquad y_2 = e^{r_2 x}$$

دوال مستقلة، وعلى ذلك هما الحلان الأساسيان للمعادلة التفاضلية (1) كالآتي:

للتأكد انهما الحلان الاساسيان

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix}$$

جذران حقيقيان مختلفان $r_1 \neq r_2$

$$W(y_1, y_2; x) = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)x}$$

وحيث أن $r_1 - r_2 \neq 0$ لذلك فإن $W \neq 0$. لذلك فإن الحلان مستقلان ويكون الحل العام للمعادلة (1) بالصورة:

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية.

مثال (١):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

الحـل

نفرض أن $y = e^{rx}$ وعلى ذلك يكون

$$y' = re^{rx}, \qquad y'' = r^2 e^{rx}$$

والمعادلة المميزة بالصورة

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$

$$r_1 = -2, \qquad r_2 = -3$$

وعلى ذلك يكون الحل العام بالصورة:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$$

ثانياً: إذا كانت $b^2 - 4ac = 0$ فإن:

$$r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$$

وعلى ذلك يكون أحد الحلول هو:

$$y_1 = e^{\frac{-b}{2a}x}$$

ويكون المطلوب الآن إيجاد الحل الثاني والذي يكون مستقل خطياً عن y_1. كما سبق فإن:

$$W(y_1, y_2; x) = e^{-\int \frac{b}{a} dx} = e^{\frac{-b}{a}x}$$

امزبتى

ويكون:

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{W}{y_1^2} dx = y_1 \int \frac{e^{\frac{-b}{a}x}}{e^{\frac{-b}{a}x}} dx = y_1 \int dx = x y_1(x) = x e^{\frac{-b}{2a}x}$$

وعلى ذلك يكون الحل العام بالصورة:

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 x y_1$$
$$= (c_1 + c_2 x) y_1$$

مثال (٢):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

الحـل

المعادلة المميزة هي:

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$(r + 2)^2 = 0$$

$$r_1 = r_2 = -2$$

$$y_1(x) = e^{-2x}$$

وعلى ذلك يكون الحل العام بالصورة:

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}.$$

تمارين

أوجد الحل العام لكل مما يأتي:

(1) $y'' + 2y' - 3y = 0$

(2) $6y'' - y' - y = 0$

(3) $4y'' + 4y' + y = 0$

(4) $2y'' - 3y' + y = 0$

(5) $y'' - y = 0$

(6) $y'' - 2y' + y = 0$

(7) $y'' - 6y' + 9y = 0$

(8) $y'' + 8y' - 9y = 0$

أوجد الحل الوحيد لكل مما يأتي:

(9) $y'' - 5y' + 6y = 0,\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

(10) $y'' - 7y' + 12y = 0,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

(11) $y'' - 6y' + 16y = 0,\quad y(0) = y'(1) = 1$

(12) $y'' - y' - 6y = 0,\quad y(0) = 0,\ y(1) = 1$

ثالثاً: إذا كانت $b^2 - 4ac < 0$

فإن جذري المعادلة المميزة في هذه الحالة هما جذران مركبان مترافقان (وذلك لأن a, b, c ثوابت حقيقية). ونفرض أنهما على الصورة:

$$r_1 = \lambda + i\mu \,, \qquad r_2 = \lambda - i\mu$$

حيث $\mu \,, \lambda$ كميات حقيقية، $i = \sqrt{-1}$.

والآن نترك ذلك جانباً وسوف نعود لـ r_1, r_2 بعد قليل ولنبدأ بتعريف الدالة

$$f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (*)$$

ويلاحظ أن:

$$f(0) = 1$$

بتفاضل (*) بالنسبة إلى θ يكون

i^2

$$\frac{df}{d\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta$$

$i(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$= i(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= i\,f$$

$$\frac{df}{f} = i\,d\theta$$

بإجراء تكامل الطرفين، يكون

$$\ln f = i\theta + c$$

$f(0) = 1$

حيث أن $\theta = 0$ عندما $f = 1$ ومنها فإن $c = 0$ وعلى ذلك يكون

$f = e^{i\theta}$

$$\ln f = i\theta$$

$$\therefore \quad f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

والعلاقة الأخيرة تسمى بصيغة أويلر Euler's formula وعلى ذلك يكون:

$$\cos x + i\sin x = e^{ix}$$

$$\cos x - i\sin x = e^{-ix}$$

بالجمع والطرح يكون:

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right), \qquad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

نعود الآن للمعادلة المميزة التي جذراها r_1, r_2 فإن الحلان للمعادلة التفاضلية هما

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{\lambda x + i\mu x}$$

$$y_2 = e^{\lambda x - i\mu x}$$

ولكي نبين أن هذان الحلان مستقلان فإن:

$$W(y_1, y_2; x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)x}$$

$$\neq 0$$

لأن $r_1 \neq r_2$ وعلى ذلك فإن y_1, y_2 حلان مستقلان خطياً.

نعود الآن للحل العام الذي يأخذ الصورة:

$$\begin{aligned}
y(x) &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\
&= c_1 e^{(\lambda + i\mu)x} + c_2 e^{(\lambda - i\mu)x} \\
&= e^{\lambda x}\left(c_1 e^{i\mu x} + c_2 e^{-i\mu x}\right) \\
&= e^{\lambda x}\left\{c_1(\cos\mu x + i\sin\mu x) + c_2(\cos\mu x - i\sin\mu x)\right\} \\
&= e^{\lambda x}\left\{(c_1 + c_2)\cos\mu x + i\,(c_1 - c_2)\sin\mu x\right\}
\end{aligned}$$

$$y(x) = e^{\lambda x}\{c_1 \cos\mu x + c_2 \sin\mu x\}$$

مثال (٣):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' + y' + y = 0$$

الحــل

المعادلة المميزة هي:

$$r^2 + r + 1 = 0$$

$$\therefore\ r = \frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \lambda = \frac{-1}{2}, \qquad \mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

وعلى ذلك يكون الحل العام بالصورة:

$$y(x) = e^{\frac{-x}{2}}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

تمارين

أوجد الحل العام لكل مما يأتي:

(1) $y'' - 2y' + 2y = 0$

(2) $y'' + y' + 2y = 0$

(3) $y'' + 5y' + 6y = 0$

(4) $y'' + 2y' + 2y = 0$

(5) $9y'' - 6y' + y = 0$

(6) $y'' + 4y' = 0$

أوجد الحل الوحيد لكل مما يأتي:

(7) $y'' + 2y' + 3y = 0;\qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

(8) $y'' + 4y' + 5y = 0;\qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

أوجد حل لكل من المعاملات الآتية:

(9) $y'' + iy' + 2y = 0$

(10) $y'' + 2y' + iy = 0$

(11) $y'' - iy' + 2y = 0$

(12) $iy'' + y' - 2y = 0$

لاحظ أن جذري المعادلة المميزة في المسائل (12 – 9) لن تكون مترافقة.

(٣-٥) معادلة أويلر Euler's Equation

هي معادلات على الصورة:

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0 \qquad (1)$$

حيث α, β ثوابت عددية.

ملحوظة:

يلاحظ أن نقطة الأصل هي regular singular ولكننا لن نتعرض لنقط الشذوذ في هذا المقرر وعلى ذلك فإن المعادلة (1) لها حل في أي فترة لا تحتوي على نقطة الأصل. وعلى ذلك فإننا سوف نبحث عن الحل في الصورة:

$$y = x^r, \qquad x > 0$$

حيث r ثابت مطلوب تعيينه. على ذلك يكون:

$$y' = r x^{r-1}, \qquad y'' = r(r-1)x^{r-2}$$

بالتعويض عن y, y', y'' في المعادلة (1) يكون

$$x^r \{r(r-1) + \alpha r + \beta\} = 0$$

وحيث أن $x^r \neq 0$ فإن:

$$r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$$

وحلها هو:

$$r = \frac{1}{2}\left[-(\alpha - 1) \pm \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\beta}\right]$$

وهناك ثلاث حالات جديرة بالاعتبار

<u>أولاً:</u> إذا كانت $(\alpha - 1)^2 - 4\beta > 0$

فإن:

$$r_1 \neq r_2$$

وعلى ذلك فإن الحلان هما

$$y_1 = x^{r_1}, \qquad y_2 = x^{r_2}$$

ويمكن بسهولة إثبات أنهما مستقلان خطياً وعلى ذلك فإن الحل العام يأخذ الصورة:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

مثال (١):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$2x^2 y'' + 3xy' - y = 0; \qquad x > 0$$

الحـل

بالتعويض عن $y = x^r$ نحصل على:

$$x^r \left(2r^2 + r - 1\right) = 0$$

$$\therefore\ 2r^2 + r - 1 = 0$$

$$\therefore\ r_1 = \frac{1}{2}, \qquad r_2 = -1$$

وعلى ذلك فإن الحل العام يأخذ الصورة:

$$y(x) = c_1 \sqrt{x} + \frac{c_2}{x}, \qquad \forall\ x > 0$$

ثانياً: إذا كانت $(\alpha - 1)^2 - 4\beta = 0$

في هذه الحالة تكون

$$r_1 = r_2 = \frac{1-\alpha}{2}$$

وأحد الحلول يأخذ الصورة

$$y_1(x) = x^{\frac{1-\alpha}{2}}$$

ولإيجاد الحل المستقل الآخر نحسب W من المعادلة (1)

$$W(y_1, y_2; x) = e^{-\int \frac{\alpha}{x} dx} = e^{-\alpha \ln x} = x^{-\alpha}$$

وعلى ذلك فإن الحل الثاني y_2 هو

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{W}{y_1^2} dx = y_1 \int \frac{x^{-\alpha}}{x^{1-\alpha}} dx = y_1 \int \frac{dx}{x} = y_1 \ln x$$

وعلى ذلك فإن الحل العام يأخذ الصورة

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= (c_1 + c_2 \ln x) y_1(x) \\ &= (c_1 + c_2 \ln x) x^r \end{aligned}$$

<u>مثال (٢):</u>

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0, \qquad x > 0$$

<u>الحــل</u>

بالتعويض عن $y = x^r$ ومشتقاتها يكون

$$x^r (r^2 + 4r + 4) = 0$$

والمعادلة المميزة هي:

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$\therefore\ r_1 = r_2 = -2$$

وعلى ذلك فإن الحل العام هو:

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left(c_1 + c_2 \ln x\right)$$

ثالثاً: إذا كانت $(\alpha - 1)^2 - 4\beta < 0$

في هذه الحالة فإن r_1, r_2 هما عددان مركبان مترافقان وذلك إذا كانت α , β أعداد حقيقة.

نفرض أن:

$$r_1 = \lambda + i\mu , \qquad r_2 = \lambda - i\mu$$

وسوف نشرح معنى x^r في حالة إذا ما كانت r عدد مركب.

نعلم أن

$$x^r = e^{r \ln x}$$

$$\therefore\quad x^{\lambda + i\mu} = e^{(\lambda + i\mu)\ln x} = e^{\lambda \ln x} . e^{i\mu \ln x}$$

$$= x^{\lambda} e^{i\mu \ln x}$$

$$= x^{\lambda}\left\{\cos(\mu \ln x) + i \sin(\mu \ln x)\right\}$$

نعود الآن للحل العام لمعادلة أويلر حيث

$$y_1(x) = x^{r_1}, \qquad y_2(x) = x^{r_2}$$

(حيث y_1, y_2 حلول مستقلة خطياً)

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

$$=c_1x^{(\lambda+i\mu)}+c_2x^{(\lambda-i\mu)}$$

$$=x^r\left[c_1\cos(\mu\ln x)+c_1 i\sin(\mu\ln x)\right]$$
$$+x^r\left[c_2\cos(\mu\ln x)-c_2 i\sin(\mu\ln x)\right]$$

$$=x^\lambda\left\{(c_1+c_2)\cos(\mu\ln x)+i(c_1-c_2)\sin(\mu\ln x)\right\}$$

$$\therefore\ y(x)=x^\lambda\left\{c_1\cos(\mu\ln x)+c_2\sin(\mu\ln x)\right\}$$

مثال (٣):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$x^2y''+2xy'+y=0; \qquad x>0$$

الحــل

نفرض أن $y = x^r$ ونعوض عنها وعن تفاضلاتها في المعادلة نحصل على

$$x^r[r(r-1)+2r+1]=0$$

$$\therefore\ r=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \lambda=\frac{-1}{2}, \qquad \mu=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وعلى ذلك فإن الحل العام بالصورة:

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]$$

تمارين

أوجد الحل العام للمعادلات الآتية:

(1) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$

(2) $x^2y'' + 3xy' + \frac{3}{4}y = 0$

(3) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

(4) $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$

(5) $x^2y'' - xy' + y = 0$

(6) $2x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$

(7) $x^2y'' + 6xy' - y = 0$

(8) $(x-2)^2y'' + 5(x-2)y' + 8y = 0$

(9) $x^2y'' + 2xy' + 4y = 0$

(10) $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$

(11) $2x^2y'' + xy' + 2y = 0$

(12) $(x-1)^2y'' + 2(x-1)y' + y = 0$

(13) $y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$

(14) $(x+1)^2y'' + 3(x+1)y' + y = 0$

(15) $x^2y'' + xy' + iy = 0$

(16) $x^2y'' + ixy' + y = 0$

(٣-٦) المعادلات الغير متجانسة من الرتبة الثانية:

هي معادلات على الصورة:

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = g(x) \qquad (1)$$

حيث p, q, g هي دوال متصلة (وذلك لضمان وجود الحل أو الحل الوحيد في حالة إضافة شرطان ابتدائيان).

لاحظ أن المعادلة (1) غير متجانسة لكون الطرف الأيمن منها لا تساوي الصفر.

تعريف:

تعرف المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (1) بأنها المعادلة

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0 \qquad (2)$$

نظرية:

الحل العام للمعادلة (1) هو مجموع التركيبة الخطية لحلين غير مرتبطان خطياً للمعادلة (2) مضافاً إليه حل خاص يحقق المعادلة (1).

البرهان:

نفرض أن $y_1(x), y_2(x)$ هما حلان مستقلان للمعادلة (2) ونفرض أن $y_p(x)$ هو أي حل يحقق المعادلة (1) والمطلوب إثبات أن الحل العام للمعادلة (1) هو $y(x)$ حيث:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) \qquad (3)$$

حيث أن كل من y_1, y_2 هما حلان للمعادلة (2) فإنهما يحققانها أي أن:

$$\left.\begin{aligned} y_1'' + p y_1' + q y_1 &= 0 \\ y_2'' + p y_2' + q y_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

وحيث أن y_p يحقق (1) فإن:

$$y_p'' + py_p' + qy_p = g(x) \qquad (**)$$

والآن لنبحث إذا ما كانت $y(x)$ المعطاة بالمعادلة (3) تحقق (1)

$$\text{الأيسر من (1)} = (c_1y_1 + c_2y_2 + y_p)'' + p(x)(c_1y_1 + c_2y_2 + y_p)'$$

$$+ q(x)(c_1y_1 + c_2y_2 + y_p)$$

$$= c_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + c_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)$$

$$+ (y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p)$$

وباستخدام (**), (*) فإن:

$$\text{الأيسر من (1)} = c_1\text{zero} + c_2\text{zero} + g(x)$$

$$= g(x) = \text{الأيمن من (1)}$$

أي أن (3) هي الحل العام للمعادلة الغير متجانسة (1).

<u>أولاً. إيجاد الحل الخاص y_p</u> للمعادلة الغير متجانسة بطريقة المعاملات الغير محددة:

نفرض أن:

$$g(x) = e^{\alpha x}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n)\begin{cases}\cos\beta x\\ \sin\beta x\end{cases}$$

حيث $a_0, a_1, \dots, a_n, \beta, \alpha$ ثوابت، n صحيح غير سالب.

نبحث عن الحل الخاص y_p في الصورة:

$$y_p = e^{\alpha x}(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n)\cos\beta x$$
$$+ e^{\alpha x}(B_0x^n + B_1x^{n-1} + \dots + B_n)\sin\beta x$$

حيث $A_0, A_1, \dots, A_n, B_0, B_1, \dots, B_n$ ثوابت مطلوب تعيينها (لاحظ الفرق بين B_i, β)

<u>ملاحظة هامة:</u>

يلاحظ أنه لا يجب أن يكون أي حد من الحل الخاص على صورة أي من الحلين الأساسيان للمعادلة المناظرة المتجانسة.

وإن وجد أحد الحدود من الحل الخاص مماثلاً (على شكل) أحد الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة المناظرة فإنه يجب ضرب الحل الخاص في x والأمثلة سوف توضح ذلك.

مثال (١):

أوجد الحل الخاص ثم الحل العام للمعادلة:

$$y'' - 3y' - 4y = 4x^2$$

الحـل

يلاحظ أن المعادلة المناظرة المتجانسة هي:

$$y'' - 3y' - 4y = 0$$

وحلولها الأساسية هي:

$$y_1 = e^{4x}, \qquad y_2 = e^{-x}$$

ولإيجاد الحل الخاص يلاحظ أن:

$$g(x) = 4x^2 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \beta = 0, \;\; n = 2$$

وعلى ذلك فإننا نبحث عن y_p بالصورة:

$$y_p = A_0 x^2 + A_1 x + A_2$$

وعليه

$$y'_p = 2A_0 x + A_1, \qquad y''_p = 2A_0$$

بالتعويض عن y_p وتفاضلاتها في المعادلة الغير متجانسة يكون

$$2A_0 - 3(2A_0 x + A_1) - 4\left(A_0 x^2 + A_1 x + A_2\right) = 4$$

وبمقارنة معاملات قوى x المختلفة يكون

$$A_0 = -1, \qquad A_1 = \frac{3}{2}, \qquad A_2 = \frac{-13}{8}$$

وعلى ذلك فإن y_p تصبح

$$y_p = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$$

يلاحظ أنه لا يوجد حد في الحل الخاص على شاكلة e^{4x} أو e^{-x} (الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة المناظرة) وعلى ذلك فإن الحل العام للمعادلة الغير متجانسة هي:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} - x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$$

مثال (٢):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$$

الحــل

المعادلة المتجانسة المناظرة هي:

$$y'' - 3y' - 4y = 0$$

وحلولها الأساسية هي:

$$y_1 = e^{4x}, \qquad y_2 = e^{-x}$$

كذلك يلاحظ أن:

$$g(x) = 2\sin x$$

وعلى ذلك فإن:

$$n = 0, \ \beta = 1, \ \alpha = 0$$

وعلى ذلك نبحث عن الحل الخاص y_p بالصورة

$$y_p = A_0 \cos x + B_0 \sin x$$

وعليه يكون

$$y'_p = -A_0 \sin x + B_0 \cos x,$$

$$y''_p = -A_0 \cos x - B_0 \sin x$$

بالتعويض عن y_p وتفاضلاتها في المعادلة الغير متجانسة

$$-(A_0 \cos x + B_0 \sin x) - 3(-A_0 \sin x + B_0 \cos x)$$
$$-4(A_0 \cos x + B_0 \sin x) = 2 \sin x$$

بمقارنة معاملات $\sin x, \cos x$ في الطرفين

$$-5A_0 - 3B_0 = 0, \qquad 3A_0 - 5B_0 = 2$$

$$\therefore A_0 = \frac{3}{17}, \quad B_0 = \frac{-5}{17}$$

أي أن الحل الخاص يأخذ الصورة:

$$y_p(x) = \frac{1}{17}(3\cos x - 5\sin x)$$

والحل العام هو:

$$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{17}(3\cos x - 5\sin x).$$

مثال (٣):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$$

الحـل

الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة هي:

$$y_1 = e^{4x}, \qquad y_2 = e^{-x}$$

$$g(x) = e^{-x}$$

$$\therefore\ \alpha = -1, \qquad n = 0, \qquad \beta = 0$$

لذلك نبحث عن y_p في الصورة الآتية:

$$y_p(x) = A_0 e^{-x}$$

$$\therefore\ y_p' = -A_0 e^{-x}, \qquad y_p'' = A_0 e^{-x}$$

بالتعويض عن y_p وتفاضلاتها في المعادلة يكون:

$$A_0 e^{-x} - 3\left(-A_0 e^{-x}\right) - 4A_0 e^{-x} = e^{-x}$$

وبمقارنة معاملات e^{-x} نجد أن:

$$0.e^{-x} = e^{-x}$$

وهذا غير معقول.

والخطأ هنا أن الحل الخاص الذي نبحث عنه بالصورة $A_0 e^{-x}$ ولكن e^{-x} هو أحد الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة المناظرة. لذلك يجب ضرب الحل الخاص في x وعلى ذلك يجب أن نبحث عن الحل الخاص في الصورة الآتية:

$$y_p(x) = A_0 x e^{-x}$$

$$\therefore\ y_p'(x) = A_0(1-x)e^{-x}, \qquad y_p''(x) = A_0(-2+x)e^{-x}$$

بالتعويض عن y_p وتفاضلاتها في المعادلة التفاضلية يكون

$$A_0e^{-x}\left[(x-2)-3(1-x)-4x\right]=e^{-x}$$

$$-5A_0e^{-x}=e^{-x}$$

$$\therefore\ A_0=-\frac{1}{5}$$

أي أن الحل الخاص بالصورة:

$$y_p=-\frac{x}{5}e^{-x}$$

والحل العام بالصورة:

$$y(x)=c_1e^{4x}+c_2e^{-x}-\frac{x}{5}e^{-x}$$

مثال (٤):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y''+4y=xe^{x}+x\sin 2x$$

الحـل

الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة المناظرة هي:

$$y_1=\sin 2x,\qquad y_2=\cos 2x$$

وحيث أن:

$$g(x)=xe^{x}+x\sin 2x$$

لذلك نبحث عن الحل الخاص بالصورة:

$$y_p(x)=(A_0x+A_1)e^{x}+(B_0x+B_1)\cos 2x+(C_0x+C_1)\sin 2x$$

وحيث أن $\sin 2x, \cos 2x$ يظهران في الحلول الأساسية لذلك يجب ضرب هذا الجزء من الحل الخاص في x أي يجب أن نبحث عن y_p بالصورة:

$$y_p(x) = (A_0 x + A_1)e^x + \left(B_0 x^2 + B_1 x\right)\cos 2x + \left(C_0 x^2 + C_1 x\right)\sin 2x$$

بحساب y'_p, y''_p والتعويض في المعادلة المعطاة ومقارنة المعاملات نحصل على:

$$A_0 = \frac{1}{5}, \qquad A_1 = \frac{-2}{25}$$

$$B_0 = \frac{-1}{8}, \qquad B_1 = 0$$

$$C_0 = 0, \qquad C_1 = \frac{1}{16}$$

وعلى ذلك فإن الحل العام بالصورة:

$$y(x) = \alpha \sin 2x + \beta \cos 2x + \frac{x}{16}\sin 2x - \frac{x^2}{8}\cos 2x + \frac{1}{25}(5x - 2)e^x$$

تمارين

باستخدام طريقة المعاملات الغير معينة، أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الآتية ثم أوجد الحل الوحيد إذا أعطيت الشروط:

(1) $y'' + y' - 2y = 2x$; $\quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

(2) $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$

(3) $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$

(4) $y'' + 4y = x^2 + 3e^x$; $\quad y(0) = 0, y'(0) = 2$

(5) $y'' + 9y = x^2 e^{3x} + 6$

(6) $y'' - 2y' + y = xe^x + 4$; $\quad y(0) = y'(0) = 0$

(7) $2y'' + 3y' + y = x^2 + 3\sin x$

(8) $y'' + y = 3\sin 2x + x\cos 2x$

(9) $y'' + 2y' + y = e^x \cos x$

(10) $y'' + y' + y = \sin^2 x$

(11) $y'' + y = x(1 + \sin x)$

(12) $y'' - 5y' + 6y = e^x \cos 2x + e^{2x}(3x + 4)\sin x$

(13) $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x} + 2e^{-x}\cos x + 4x^2 e^{-x}\sin x$

(14) $y'' - 4y' + 4y = 2x^2 + 4xe^{2x} + x\sin 2x$

(15) $y'' + 4y = x^2 \sin 2x + (6x + 7)\cos 2x$

(16) $x^2 y'' + xy' + y = x^2$

(17) $x^2 y'' + 2xy' + y = \sin 2x$

(18) $x^2 y'' - 5xy' + 4y = x^2$

(لاحظ أن المسائل من 11 : 15 أكثر صعوبة).

(٣-٧) طريقة تغيير البارامتر:

في هذا الفصل سوف نعطي طريقة أخرى لإيجاد الحل الخاص للمعادلة

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \qquad (1)$$

حيث المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (1) هي:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (2)$$

ونفرض أن الحلان الأساسيان المستقلان للمعادلة (2) هما:

$$y_1(x), \qquad y_2(x)$$

والحل العام للمعادلة (2) هو y_h حيث:

$$y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

وهذه الطريقة تعتمد على أننا نفرض أن الثوابت c_1, c_2 دوال في المتغير x وذلك لإيجاد الحل الخاص، أي أننا سوف نبحث عن الحل الخاص y_p في الصورة:

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

ولإيجاد y_p يجب أن نوجد $u_1(x), u_2(x)$ يلاحظ أن y_p وتفاضلاتها يجب أن تحقق المعادلة التفاضلية الغير متجانسة (1) وحيث أن y_p بها مجهولين هما $u_1(x), u_2(x)$ لذلك يحق لنا أن نضع شرط واحد على الدوال u_1, u_2 وهذا الشرط اختياري وسوف نختاره بحيث يسهل الحسابات. لذلك:

$$y'_p = \left(u'_1y_1 + u'_2y_2\right) + \left(u_1y'_1 + u_2y'_2\right)$$

وكما قلنا سوف نختار الشرط الآتي لتسهيل الحسابات لذلك نفرض أن:

$$u'_1y_1 + u'_2y_2 = 0 \qquad (3)$$

وباستخدام (3) فإن y''_p تأخذ الصورة:

$$y''_p = u'_1y'_1 + u'y'_2 + u_1y''_1 + u_2y''_2$$

بالتعويض عن y_p وتفاضلاتها في المعادلة (1) يكون:

$$\begin{aligned} &u_1\left(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right) + u_2\left(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\right) \\ &+ u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x) \end{aligned}$$

وحيث أن y_1, y_2 هما حلان للمعادلة المتجانسة (2) فإن:

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x) \qquad (4)$$

بحل المعادلتين (4) ,(3) في المجاهيل u_1', u_2' نحصل على

$$u_1' = \frac{-y_2 g}{y_1 y_2' - y_1' y_2}, \qquad u_2' = \frac{y_1 g}{y_1 y_2' - y_1' y_2}$$

يلاحظ أن

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0$$

مما سبق يمكن صياغة النظرية التالية:

نظرية:

إذا كانت $p(x),\ q(x),\ g(x)$ دوال متصلة في الفترة (α, β) في المعادلة التفاضلية (1) وكان y_1, y_2 هما الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة (2) فإن الحل الخاص y_p للمعادلة (1) يكون بالصورة:

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x) g(x)}{W(y_1, y_2)} dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x) g(x)}{W(y_1, y_2)} dx \qquad (5)$$

مثال (١):

أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' + y = \sec x; \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

الحــل

المعادلة المتجانسة المناظرة

$$y'' + y = 0$$

وحلولها الأساسية هما:

$$y_1 = \cos x, \qquad y_2 = \sin x$$

وعلى ذلك

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

وباستخدام (5) فإن y_p تصبح

$$\begin{aligned} y_p &= -\cos\int \sin x \sec x\, dx + \sin x \int \cos x \sec x\, dx \\ &= \cos x \ln(\cos x) + x \sin x \end{aligned}$$

وعلى ذلك فإن الحل العام هو

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln(\cos x) + x \sin x \\ &= (c_1 + \ln(\cos x))\cos x + (c_2 + x)\sin x \end{aligned}$$

مثال (٢):

أوجد الحل الوحيد للمعادلة الآتية:

$$y'' - y = e^{2x}, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

الحــل

المعادلة المتجانسة المناظرة هي:

$$y'' - y = 0$$

وحلولها الأساسية هما

$$y_1 = e^x, \qquad y_2 = e^{-x}$$

وبالتالي

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

وباستخدام (5) فإن الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{2}e^x \int e^{-x} e^{2x} dx - \frac{1}{2}e^{-x} \int e^x e^{2x} dx$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{6}e^{2x} = \frac{1}{3}e^{2x}$$

وعلى ذلك فإن الحل العام بالصورة:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$$

لإيجاد الحل الوحيد نستخدم الشروط

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

$$0 = c_1(1) + c_2(1) + \frac{1}{3}(1) \qquad \Rightarrow \qquad c_1 + c_2 + \frac{1}{3} = 0$$

$$1 = c_1(1) + c_2(1) + \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 - c_2 + \frac{2}{3} = 1$$

$$c_1 = \frac{-1}{2}, \qquad c_2 = \frac{1}{6}$$

ويكون الحل الوحيد هو:

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{6}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$$

تمارين

باستخدام طريقة تغيير البارامتر أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية:

(1) $y'' - 5y' + 6y = 2e^{x}$

(2) $y'' - y' - 2y = 2e^{-x}$

(3) $y'' + 9y = 9\sec^2(3x); \qquad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

(4) $y'' + y = \tan x; \qquad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

(5) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$

(6) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{1}{x^2} e^{-2x}; \qquad x > 0$

(7) $y'' + 4\,y = 3\ \mathrm{cosec}(2x); \qquad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

(٨) معادلة بسل من الرتبة ½ هي:

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0; \qquad x > 0$$

(i) تحقق من أن

$$y_1(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \qquad y_2(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

هما الحلول الأساسية للمعادلة

(ii) أوجد الحل العام للمعادلة:

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) y = 3x^{\frac{3}{2}} \sin x$$

(٩) تحقق من أن $y(x) = x$ هو أحد حلول المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 4x^2; \qquad x > 0$$

ثم أوجد الحل العام للمعادلة الغير متجانسة.

(١٠) تحقق من أن $y = x$ هو أحد حلول المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة:

$$(1 - x) y'' + xy' - y = 2(x - 1)^2 e^{-x}$$

حيث $0 < x < 1$ ثم أوجد الحل العام للمعادلة الغير متجانسة.

(٣-٨) المؤثر D:

يعرف المؤثر D على أنه المؤثر $\frac{d}{dx}$ وعلى ذلك يكون

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$$

$$D^3 = \frac{d^3}{dx^3}, \ldots$$

$$D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

حيث n عدد صحيح موجب.

جبر المؤثر D:

١- لاحظ أن من تعريف المؤثر D يكون

$$D^0 y = 1 \, . \, y = y$$

٢- $D^m(D^n y) = D^{m+n} y$

حيث m, n أعداد صحيحة.

٣- إذا كانت u, v دوال تفاضلية فإن:

$$D(u \pm v) = D\,u \pm D\,v$$

٤- إذا كانت α ثابتة فإن:

$$D(\alpha y) = \alpha D(y), \qquad D(\alpha) = 0$$

٥- $D^n(u \pm v) = D^n(u) \pm D^n(v)$

مثال (١):

احسب قيمة

$$D^n\left(x^4+\sin 2x-5\right)$$

الحـل

$$D^2\left(x^4+\sin 2x-5\right)=D^2\left(x^4\right)+D^2\left(\sin 2x\right)-D^2(5)$$

$$=12x^2-4\sin 2x-0$$

$$=12x^2-4\sin 2x$$

والآن نعرض لبعض النظريات الأساسية المتعلقة بالمؤثر D وذلك لاستخدامها كإحدى الطرق لإيجاد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية

نفرض أن $F(D)$ كثيرة حدود حيث:

$$F(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\ldots+a_{n-1}D+a_n \qquad (1)$$

حيث

صحيح موجب n $\qquad a_i=a_i(x),$

لاحظ أن من تعريف $F(D)$ فإن المعادلة التفاضلية لها الصورة:

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_n=g(x)$$

تأخذ الشكل الآتي:

$$F(D)\,(y)=g(x)$$

نعود الآن لنذكر بعض النظريات التي يحققها وبالتالي $F(D)$ ثم معنى $\dfrac{1}{F(D)}$

أولاً:

معنى $D^n e^{\alpha x}$ ثم $F(D)\left(e^{\alpha x}\right)$ ثم $\dfrac{1}{F(D)} e^{\alpha x}$

لاحظ أن:

$$De^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x},$$

$$D^2 e^{\alpha x} = \alpha^2 e^{\alpha x}$$

$$\vdots$$

$$D^n e^{\alpha x} = \alpha^n e^{\alpha x}$$

ومن تعريف $F(D)$ التي في (1) يكون:

$$\begin{aligned} F(D)e^{\alpha x} &= \left(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n\right)e^{\alpha x} \\ &= a_0 D^n e^{\alpha x} + a_1 D^{n-1} e^{\alpha x} + \ldots + a_n e^{\alpha x} \\ &= a_0 \alpha^n e^{\alpha x} + a_1 \alpha^{n-1} e^{\alpha x} + \ldots + a_n e^{\alpha x} \\ &= \left(a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \ldots + a_n\right)e^{\alpha x} \\ &= F(\alpha)e^{\alpha x} \end{aligned}$$

(لاحظ أن $F(\alpha)$ = ثابت)

وعلى ذلك يكون:

$$\frac{1}{F(D)}\left\{F(D)e^{\alpha x}\right\} = e^{\alpha x}$$

$$\therefore\ \frac{1}{F(D)}\left\{F(\alpha)e^{\alpha x}\right\} = e^{\alpha x}$$

$$\therefore\ F(\alpha)\frac{1}{F(D)}\left\{e^{\alpha x}\right\} = e^{\alpha x}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{1}{F(D)}\left\{e^{\alpha x}\right\} = \frac{1}{F(\alpha)}e^{\alpha x}}$$

حيث $F(\alpha) \neq 0$

مثال (١):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' - y' - 6y = 2e^{x}$$

الحـل

حل المعادلة المتجانسة كما هو معلوم

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$$

ولإيجاد الحل الخاص باستخدام المؤثر D نقول المعادلة هي:

$$(D^2 - D - 6)\, y = 2\, e^{x}$$

حيث

$$F(D) = D^2 - D - 6$$

$$\therefore \quad y_p = \frac{1}{F(D)}\left(2e^{x}\right)$$

حيث $\alpha = 1$

$$= 2\frac{1}{F(D)}\left\{e^{x}\right\}$$

$$= 2\frac{1}{F(\alpha)}e^{x}$$

$$= 2\frac{1}{1-1-6}e^{x}$$

$$= \frac{2}{-6}e^{x}$$

$$= -\frac{1}{3}e^{x}$$

وعلى ذلك يكون الحل العام للمعادلة بالصورة الآتية:

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{3}e^{x}$$

مثال (٢):

أوجد الحل الخاص للمعادلة:

$$y'' + 2y' + 3y = e^{-x}$$

الحـل

المعادلة لها الصورة

$$\left(D^2 + 2D + 3\right)y = e^{-x}$$

حيث

$$F(D) = D^2 + 2D + 3, \qquad \alpha = -1$$

$$F(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 3 = 2 \neq 0$$

$$\therefore \; y_p = \frac{1}{F(D)}\left\{e^{-x}\right\} = \frac{e^{-x}}{F(\alpha)}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-x}$$

مثال (٣):

أوجد الحل الخاص للمعادلة:

$$y'' + y' - 2y = e^x$$

الحـل

لاحظ أن $\alpha = 1$ وكذلك

$$F(D) = D^2 + D - 2$$

$$F(\alpha) = F(1) = 1 + 1 - 2 = 0$$

واضح أن العلاقة السابقة لا يمكن استخدامها... لماذا؟؟

لذلك سوف نذكر النظرية التالية التي تسمى بنظرية الإزاحة.

ثانياً:

سوف نوجد معنى $v = v(x)$ للآتي $D^n\left\{e^{\alpha x}v\right\}$ ثم $F(D)\left\{e^{\alpha x}v\right\}$ ثم

$$\frac{1}{F(D)}\left\{e^{\alpha x}v\right\}$$

لاحظ أن:

$$D\left(e^{\alpha x}v\right) = e^{\alpha x}Dv + \alpha e^{\alpha x}v$$

$$= e^{\alpha x}(D + \alpha)v$$

لاحظ أن α = ثابت... كذلك

$$D^2\left(e^{\alpha x}v\right)=D.D\left(e^{\alpha x}v\right)$$

$$=D\left\{e^{\alpha x}\underbrace{(D+\alpha)v}_{V}\right\}$$

$$=D\left\{e^{\alpha x}V\right\}$$

$$=e^{\alpha x}(D+\alpha)V$$

$$=e^{\alpha x}(D+\alpha)\left[(D+\alpha)v\right]$$

$$=e^{\alpha x}(D+\alpha)^2v$$

$$D^n\left(e^{\alpha x}v\right)=e^{\alpha x}(D+\alpha)^n v$$

وعلى ذلك

$$\begin{aligned}F(D)\left\{e^{\alpha x}v\right\}&=\left(a_0D^n+a_1D^{n-1}+\ldots+a_{n-1}D+a_n\right)\left\{e^{\alpha x}v\right\}\\&=e^{\alpha x}\Big[a_0(D+\alpha)^n+a_1(D+\alpha)^{n-1}+\ldots\\&\quad+a_{n-1}(D+\alpha)+a_n\Big]v\\&=e^{\alpha x}F(D+\alpha)v\end{aligned}$$

وعلى ذلك فإن:

$$\frac{1}{F(D)}\left\{F(D)e^{\alpha x}v_1\right\}=e^{\alpha x}v_1$$

$$\therefore\ \frac{1}{F(D)}\left\{e^{\alpha x}F(D+\alpha)v_1\right\}=e^{\alpha x}v_1$$

نضع

$$F(D+\alpha)\, v_1 = v$$

$$\therefore\ v_1 = \frac{1}{F(D+\alpha)}\{v\}$$

$$\boxed{\therefore\ \frac{1}{F(D)}\{e^{\alpha x} v\} = e^{\alpha x}\frac{1}{F(D+\alpha)}\{v\}}$$

ولبيان كيفية وفائدة نظرية الإزاحة نعود إلى مثال (٣) ص ١٢٨

نعلم أن

$$F(D) = D^2 + D - 2$$

حيث $\alpha = 1$ ومنها $F(\alpha) = 0$ والمعادلة على الشكل

$$F(D)\{y\} = e^x$$

$$\therefore\ \begin{aligned} y_p &= \frac{1}{F(D)}\{e^x\} \\ &= \frac{1}{F(D)}\{e^x.1\} \end{aligned}$$

وباستخدام نظرية الإزاحة يكون

$$\begin{aligned} y_p &= e^x \frac{1}{F(D+\alpha)}\{1\} \\ &= e^x \frac{1}{(D+1)^2 + (D+1) - 2}\{1\} \\ &= e^x \frac{1}{D(D+3)}\{1\} \\ &= e^x \frac{1}{D}\left[\frac{1}{D+3}\{1\}\right] \end{aligned}$$

$$= e^{x}\frac{1}{D}\left[\frac{1}{D+3}\left\{e^{0}\right\}\right]$$

$$= e^{x}\frac{1}{D}\left[\frac{1}{0+3}\right]$$

$$= e^{x}\frac{1}{D}\left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$$= y_{3}e^{x}\frac{1}{D}\left\{1\right\} \qquad (*)$$

في الخطوة (*) لا يمكن اعتبار $e^0 = 1$ وتطبيق المؤثر $\frac{1}{D}$ عليها لأنه في هذه الحالة سوف يكون المقام صفراً... ولإنهاء المسألة لا بد وأن نعرف المؤثر D^{-1}, D^{-2} وهكذا.

نفرض أن:

$$I\,y = \int y\,dx$$

وبإجراء تفاضل الطرفين يكون

$$\frac{d}{dx}I\,y = \frac{d}{dx}\int y\,dx$$

$$\therefore\ D\,I\,y = y$$

$$\therefore\ I = \frac{1}{D}$$

ويتضح من ذلك أن $\frac{1}{D} = D^{-1}$ تعني عملية التكامل فمثلاً

$$\frac{1}{D}\left\{1\right\} = D^{-1}\left\{1\right\} = \int dx = x$$

$$\frac{1}{D}\left\{x^3\right\}=\int x^3 dx=\frac{1}{4}x^4$$

وعلى ذلك يكون

$$\frac{1}{D^2}\{1\}=\frac{1}{D}\left\{\frac{1}{D}\{1\}\right\}=\frac{1}{D}\{x\}=\frac{1}{2}x^2$$

وهكذا

بالعودة الآن إلى الخطوة (*) في ص ١٧١ يكون

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{3}e^x\frac{1}{D}\{1\} \\ &= \frac{1}{3}e^x . x \\ &= \frac{x}{3}e^x \end{aligned}$$

وهو الحل الخاص بالمسألة.

<u>مثال (٤):</u>

أوجد الحل الخاص للمعادلة:

$$y''-2y'=3$$

<u>الحـل</u>

$$F(D)=D^2-2D$$

$$\therefore\ y_p=\frac{1}{F(D)}\{3\}=3\frac{1}{D(D-2)}\{1\}$$

$$= 3\frac{1}{D(D-2)}\left\{e^{0}\right\}$$

لاحظ أن $\alpha = 0$ كذلك $F(D) = 0$

$$\therefore \; y_p = 3\frac{1}{D}\frac{1}{D-2}\left\{e^{0}\right\}$$

$$\therefore \; y_p = 3\frac{1}{D}\left\{\frac{1}{D-2}\right\}$$

$$= 3\frac{1}{D}\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{D}\{1\}$$

$$= -\frac{3}{2}x$$

ثالثا:

نعود الآن لإيجاد معنى كل من

$$F\left(D^{2}\right)\cos(ax+b),\; F\left(D^{2}\right)\sin(ax+b)$$

حيث a, b ثوابت وبالتالي معنى

$$\frac{1}{F\left(D^{2}\right)}\{\cos(ax+b)\}, \qquad \frac{1}{F\left(D^{2}\right)}\{\sin(ax+b)\}$$

نعلم أن

$$D^{2}\{\sin(ax+b)\} = -a^{2}\sin(ax+b)$$

كذلك

$$D^4\{\sin(ax+b)\}=D^2\{-a^2\sin(ax+b)\}$$
$$=(-a^2)^2\sin(ax+b)$$

وعلى العموم فإن:

$$(D^2)^n\{\sin(ax+b)\}=(-a^2)^n\sin(ax+b)$$

$$F(D^2)\{\sin(ax+b)\}=\{a_0(D^2)^n+a_1(D^2)^{n-1}+\dots$$
$$+a_{n-1}(D^2)+a_n\}\sin(ax+b)$$
$$=\{a_0(-a^2)^n+a_1(-a^2)^{n-1}+\dots$$
$$+a_{n-1}(-a^2)+a_n\}\sin(ax+b)$$
$$=F(-a^2)\sin(ax+b)$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن:

$$\boxed{F(D^2)\{\cos(ax+b)\}=F(-a^2)\cos(ax+b)}$$

وعليه فإن:

$$\frac{1}{F(D^2)}\{F(D^2)\sin(ax+b)\}=\sin(ax+b)$$

$$\therefore\ \frac{1}{F(D^2)}\{F(-a^2)\sin(ax+b)\}=\sin(ax+b)$$

$$\boxed{\frac{1}{F(D^2)}\{\sin(ax+b)\}=\frac{1}{F(-a^2)}\sin(ax+b)}$$

حيث $F(-a^2)\neq 0$

وكذلك يكون

$$\boxed{\frac{1}{F\left(D^2\right)}\left\{\cos(ax+b)\right\}=\frac{1}{F\left(-a^2\right)}\cos(ax+b)}$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن (حيث $F\left(a^2\right)\neq 0$)

$$\boxed{\frac{1}{F\left(D^2\right)}\left\{\sinh(ax+b)\right\}=\frac{1}{F\left(a^2\right)}\sinh(ax+b)}$$

$$\boxed{\frac{1}{F\left(D^2\right)}\left\{\cosh(ax+b)\right\}=\frac{1}{F\left(a^2\right)}\cosh(ax+b)}$$

وكأمثلة على القوانين السابقة فإن:

مثال (٥):

احسب قيمة كل من

$$\left(D^2+4\right)\{\sin 3x\}=(-9+4)\sin 3x=-5\sin 2x\,,$$

$$\left(D^4+3D^2+7\right)\{\cos x\}=\left[(-1)^2+3(-1)+7\right]\cos x=-\cos x\,,$$

$$\frac{1}{D^2+4}\{\sin 4x\}=\frac{1}{-16+4}\{\sin 4x\}=\frac{-1}{12}\sin 4x\,,$$

$$\frac{1}{D-2}\{\cos 2x\}=\frac{D+2}{D^2-4}\{\cos 2x\}=(D+2)\frac{1}{D^2-4}\{\cos 2x\}$$

$$=(D+2)\left[\frac{1}{-4-4}\right]\{\cos 2x\}$$

$$=-\frac{1}{8}(D+2)\{\cos 2x\}$$

$$= -\frac{1}{8}\{D\cos 2x + 2\cos 2x\}$$

$$= -\frac{1}{8}\{-2\sin 2x + 2\cos 2x\}$$

$$= \frac{1}{4}(\sin 2x - \cos 2x)$$

<u>مثال (٦):</u>

احسب قيمة

$$\frac{1}{D^2 + D + 2}\{\cos 2x\}$$

<u>الحـل</u>

$$\frac{1}{D^2 + D + 2}\{\cos 2x\} = \frac{1}{(-4) + D + 2}\{\cos 2x\}$$

$$= \frac{1}{D - 2}\{\cos 2x\}$$

$$= \frac{D + 2}{D^2 - 4}\{\cos 2x\}$$

$$= (D + 2)\frac{1}{D^2 - 4}\{\cos 2x\}$$

$$= (D + 2)\left\{\frac{1}{-4 - 4}\cos 2x\right\}$$

$$= -\frac{1}{8}(D+2)\cos 2x$$

$$= -\frac{1}{8}[-2\sin 2x + 2\cos 2x]$$

$$= \frac{1}{4}[\sin 2x - \cos 2x]$$

مثال (٧):

أوجد الحل الخاص للمعادلة:

$$y'' + 2y' + y = e^{3x} + 4e^{x}$$

الحـل

$$F(D) = D^2 + 2D + 1 = (D+1)^2$$

$$\therefore \quad y_p = \frac{1}{F(D)}\{e^{3x}\} + \frac{1}{F(D)}\{e^{x}\}$$

$$= \frac{1}{(D+1)^2}\{e^{3x}\} + \frac{1}{(D+1)^2}\{e^{x}\}$$

$$= \frac{1}{16}e^{3x} + \frac{1}{4}e^{x}$$

مثال (٨):

أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$y'' - 2y' + y = e^{x}$$

الحـل

$$F(D)=D^2-2D+1=(D-1)^2$$

$$\therefore\ y_p=\frac{1}{F(D)}\left\{e^x\right\}$$

$$=\frac{1}{(D-1)^2}\left\{e^x\right\}$$

$$=\frac{1}{(D-1)^2}\left\{e^x.1\right\}$$

$$=e^x\frac{1}{(D+1-1)^2}\{1\}$$

$$=e^x\frac{1}{D^2}\{1\}$$

$$=e^x\frac{1}{D}\left\{\frac{1}{D}(1)\right\}$$

$$=e^x\frac{1}{D}\{x\}$$

$$=\frac{1}{2}x^2e^x$$

والآن سوف نعطي بعض المفكوكات التي تفيد في حل بعض المسائل.

$$\frac{1}{1+D}=1-D+D^2-D^3+...$$

$$\frac{1}{1-D}=1+D+D^2+D^3+...$$

$$\frac{1}{(1+D)^2}=1-2D+3D^2-4D^3+\ldots$$

$$\frac{1}{(1-D)^2}=1+2D+3D^2+4D^3+\ldots$$

وعلى وجه العموم فإن:

$$\frac{1}{(1+D)^m}=1-mD+\frac{m(m+1)}{2!}D^2-\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}D^3+\ldots$$

وتلك المفكوكات مفيدة إذا كان الطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية كثيرة حدود.

مثال (٩):

أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$y''-y'-2y=3x^2-2x+1$$

الحـل

$$F(D)=(D^2-D-2)=(D-2)(D+1)$$

$$y_p=\frac{1}{F(D)}\{3x^2-2x+1\}$$

$$=\frac{1}{(D-2)(D+1)}\{3x^3-2x+1\}$$

$$=\left[\frac{1/3}{D-2}-\frac{1/3}{D+1}\right]\{3x^3-2x+1\}$$

$$=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(1-D/2)}-\frac{1}{(1+D)}\right]\{3x^2-2x+1\}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{D}{2}+\frac{D^2}{4}+\frac{D^3}{8}+\ldots\right)\right.$$

$$\left. +\left(1-D+D^2-D^3+\ldots\right)\right]\left\{3x^2-2x+1\right\}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{4}D+\frac{9}{8}D^2-\frac{15}{16}D^3+\ldots\right]\left\{3x^3-2x+1\right\}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}\left(3x^2-2x+1\right)-\frac{3}{4}\left(3x^2-2x+1\right)'\right.$$

$$\left. +\frac{9}{8}\left(3x^2-2x+1\right)''+\frac{15}{16}(zero)\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{9}{2}x^2-3x+\frac{3}{2}-\frac{9}{2}x+\frac{3}{2}+\frac{27}{4}\right]$$

$$= -\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x-\frac{13}{4}$$

مثال (١٠):

أوجد الحل الخاص للمعادلة:

$$y''+y'+y=\cosh x+\sin 2x$$

الحـل

$$F(D)=D^2+D+1$$

الحل الخاص بالنسبة إلى $\cosh x$ هو y_{p_1} حيث

$$y_{p_1}=\frac{1}{F(D)}\{\cosh x\}=\frac{1}{D^2+D+1}\{\cosh x\}$$

$$=\frac{1}{1^2+D+1}\{\cosh x\}=\frac{1}{D+2}\{\cosh x\}$$

$$=\frac{D-2}{D^2-4}\{\cosh x\}=(D-2)\left\{\frac{1}{D^2-4}\cosh x\right\}$$

$$=(D-2)\left\{\frac{1}{1-4}\cosh x\right\}=-\frac{1}{3}(D-2)\cosh x$$

$$=-\frac{1}{3}[\sinh x-2\cosh x].$$

والحل الخاص بالنسبة إلى $\sin 2x$ هو y_{p_2} حيث

$$y_{p_2}=\frac{1}{F(D)}\{\sin 2x\}=\frac{1}{D^2+D+1}\{\sin 2x\}$$

$$=\frac{1}{-4+D+1}\{\sin 2x\}=\frac{1}{D-3}\{\sin 2x\}$$

$$=\frac{D+3}{D^2-9}\{\sin 2x\}=(D+3)\left\{\frac{1}{D^2-9}\sin 2x\right\}$$

$$=(D+3)\left\{\frac{1}{-4-9}\sin 2x\right\}=-\frac{1}{13}(D+3)\{\sin 2x\}$$

$$=-\frac{1}{13}[2\cos 2x+3\sin 2x]$$

ويكون الحل الخاص هو y_p حيث:

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

تمارين

أوجد الحل الخاص لكل من المعادلات الآتية باستخدام المؤثر D:

(1) $y'' + y' + 6y = e^{-3x} + x.$

(2) $y'' - y' + y = \sin x + \cos x.$

(3) $y'' + y' + 2y = \sinh x + \cosh x.$

(4) $y'' + y' + 3y = \sin 2x + \sinh 3x.$

(5) $y'' - y' - y = \cos 2x - 3 \cosh 3x.$

(6) $y'' + 2y' + 3y = 3x^3 + 2x^2 + 5.$

(7) $y'' + y' = x^2 + \sin x.$

(8) $y'' - y = x + e^x.$