اسم المقرر : رياضيات (معادلات تفاضلية و تكامل متعدد)

استاذ المقرر : د / اسماعيل جاد امين

الفرقـــــة : الثانية

الشعبـــــــة : فيزياء وكيمياء

الفصل الدراسي الثاني

معادلات تفاضلية عادية

الباب الأول

1-1 مقــــــدمـــــــة

المعادلات التفاضلية من الموضوعات الهامة لورودها في كثير العلوم مثل الرياضيات البحتة و التطبيقية وفي الطبيعة و الكيمياء وفي كثير من العلوم الهندسية فكثير من مسائل الانحناء تعتمد في حلها علي المعادلات التفاضلية وكذلك تذبذب الاجسام و الذبذبات الكهربية وانتقال الحرارة وانتشار الاجسام الذائبة وسرعة التفاعلات الكيميائية .

2-1 تعريف المعادلات التفاضلية :

نفرض أن y دالة في المتغير x وأن $y', y'', ..., y^{(n)}$ المشتقات التفاضلية من الرتبة الاولي و الثانية حتي المشتقة النونية للمتغير y بالنسبة إلي x فإن إي علاقة تربط بين x, y وأحد المشتقات السابقة تسمي "معادلة تفاضلية عادية" أما إذا كانت y دالة في اكثر من متغير ولها مشتقات جزئية فإنها تسمي "معادلة تفاضلية جزئية " ونذكر الان بعض الامثلة المختلفة للمعادلات التفاضلية العادية .

$$\frac{d^2y}{dx^2}+w^2y=0 \qquad (1)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{d^2y}{dx^2}-5x=\cos 2x \qquad (2)$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2-2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+2yx=5 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial y}{\partial x} \qquad (5)$$

3-1 رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية :

رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلي مشتقة موجوده في المعادلة التفاضلية. **درجة المعادلة التفاضلية** هي الاس الذي يرفع الية أعلي معاملي تفاضلي المحدد لرتبة المعادلة.

فمثلاً المعادلة (1) هي معادلة من الرتبة الثانية والدرجة الاولي .

والمعادلة (2) من الرتبة الرابعة والدرجة الأولي .

والمعادلة (3) معادلة من الرتبة الثالثة و الدرجة الثانية .

والمعادلة (4)و(5) معادلات تفاضلية جزئية .

4-1 تكوين المعادلة التفاضلية :

يتم تكوين المعادلة التفاضلية بحذف الثوابت الاختيارية نفرض أن لدينا العلاقة

$$f\ (x, y, c) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

هذه المعادلة تمثل مجموعة المنحنيات المستوية ذات البارامتر الواحد وبتفاضل العلاقة (1) بالنسبة إلي x نحصل علي معادلة تحتوي علي x, y, y', c ولتكن

$$\phi\left(x, y, y', c\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

وبحذف c من (1) ، (2) نحصل علي علاقة في الصورة

$$\psi(x, y, y') = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

و العلاقة (3) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الاولي حصلنا عليها نتيجة لحذف ثابت اختياري واحد وتسمي هذه المعادلة بالمعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات (1) .

ولتوضيح ذلك نعتبر المثال الاتي

$$y^2 = 4a\left(x - c\right)$$

حيث c هو بارامتر المجموعة a ثابت مطلق فهذه المعادلة تمثل مجموعة من القطاعات المكافئة التي محورها المحور السيني ووترها البؤري العمودي $4a$ بالتفاضل نحصل علي

$$y\,\frac{dy}{dx}=2a$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية لمجموعة القطاعات المكافئة.

وفي الحالة العامة اذا اعتبرنا العلاقة

$$f\,(x\,,y\,,c_1,c_2,....,,c_n)=0.........................(4)$$

وهذه العلاقة تحتوي علي n من البارامترات $c_1,c_2,\ldots c_n$ للحصول علي المعادلة التفاضلية المناظرة نفاضل هذه العلاقة n من المرات المتتالية بالنسبة الي x فنحصل علي n من العلاقات في الصورة

$$\left.\begin{array}{l}\phi_1(x\,,y\,,y',c_1,c_2,...c_n)=0\\ \phi_2(x\,,y\,,y',y'',c_1,...c_n)=0\\ \phi_n(x\,,y\,,y',.......,y^{(n)},c_1,.....,c_n)=0\end{array}\right\}....................(5)$$

من العلاقات (4) ، (5) وعددها $n+1$ يمكن حذف الثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_n$ وتكون النتيجة هي الحصول علي معادلة تفاضلية عادية ورتبتها n علي الصورة

$$f\,(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0$$

مثال (1) :- كون المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات

$$c_1 x + (y - c_2)^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

الحل

حيث ان معادلة مجموعة المنحنيات تحتوي علي بارا مترين فإننا نفاضل مرتين باعتبار ان

$$c_1 + 2(y - c_2)y' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$2y'^2 + 2(y - c_2)y'' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

بحذف c_1 من المعادلة (2) نحصل علي

$$c_1 = -2(y - c_2)y' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

نعوض من (4) في(1) نجد ان

$$-2xy'(y - c_2) + (y - c_2)^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

بحذف C_2 من المعادلة (3) نحصل علي

$y - c_2 = -y'^2 / y''$................................(6)

بـالتعويض مـن (6) فـي (5) نحصـل علـي المعادلـة التفاضـلية المطلوب وهي

$$y' + 2xy'' = 0$$

مثـال(2):- أوجـد المعادلـة التفاضـلية للقطاعـات المكافئـة الراسـية المحور.

الـحل

المعادلة التفاضلية للقطاعات المكافئة الراسية المحور هي

$$x^2 = \alpha x + \beta y + c$$

و حيث ان هذه المعادلة تحتوي علي ثلاث ثوابت α, β, C

نفاضل ثلاث مرات متتالية∴

$$2x = \alpha + \beta \frac{dy}{dx}, \quad 2 = \beta \frac{d^2y}{dx^2}, \quad 0 = \beta \frac{d^3y}{dx^3}$$

المعادلة التفاضلية المطلوبة هي

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

مثال (3) إذا كانت

$$y = ae^{2x} + be^{-x} \quad ....(1)$$

فاثبت إن

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

الـحل

بالتفاضل نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = 2ae^{2x} - be^{-x} \quad ....(2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4ae^{2x} + be^{-x} \quad ....(3)$$

بجمع (1) ، (2) نجد أن

$$\frac{dy}{dx} + y = ae^{2x}$$

وبجمع (2) ، (3) ينتج أن

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 6ae^{2x}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2(\frac{dy}{dx} + y)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

وهو المطلوب .

5-1 حل المعادلات التفاضلية

حل المعادلة التفاضلية هو عملية الحصول علي الأصل الكامل للمعادلة التفاضلية إي عملية عكس عملية تكوين المعادلة و التي درسناها

ويمكن تقسيم هذه المعادلات من حيث طرق حلها إلي الانواع الاتية:-

1- المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات القابلة للانفصال .
2- المعادلات التفاضلية المتجانسة .
3- المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية .
4- المعادلات التفاضلية التامة .
5- المعادلات التفاضلية الخطية .
6- معادلات برنولي .
7- معادلات ريكاتي .

و سوف ندرس كل نوع علي حدة

1-5-1 :- المعـــادلات التفاضـــلية ذات المتغيـــرات القابلـــة للانفصال.

يمكن كتابة المعادلات التي يمكن فيها فصل المتغيرات علي الشكل الاتـي :-

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$
$$M(y)dx + N(x)dy = 0$$

وهـذه يمكـن تحويلهـا إلــي المعادلــة (1) وذلــك بالقســمة علــي $N(x)M(y)$ أي أن

$$\frac{dx}{N(x)} + \frac{dy}{M(y)} = 0 \qquad (1)$$

وهذه يمكن حلها بإجراء التكامل مباشرة

مثال: أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$x\sqrt{y^2-1}\,dx + y\sqrt{x^2-1}\,dy = 0$$

الـحل

بالقسمة علي $\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}$ نحصل علي

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}dy = 0$$

وبتكامل هذه المعادلة نحصل علي

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{y dy}{\sqrt{y^2-1}} = c$$
$$\sqrt{x^2-1} + \sqrt{y^2-1} = c$$

وهي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية

مثال (2) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$xy^3 \frac{dy}{dx} = 1 - x^2 + y^2 - x^2 y^2$$

الحل

نضع المعادلة علي الصورة

$$xy^3 \frac{dy}{dx} = (1-x^2) + y^2(1-x^2), \quad xy^3 \frac{dy}{dx} = (1-x^2)(1+y^2)$$
$$xy^3 dy = (1-x^2)(1+y^2) dx$$

بقسم طرفي المعادلة علي $x(1+y^2)$ نجد ان

$$\frac{y^3}{1+y^2} dy = \frac{1-x^2}{x} dx$$

وبالتكامل نحصل علي

$$\int \frac{y^3}{1+y^2} dy = \int \frac{1-x^2}{x} dx + c, \quad \int (y - \frac{y}{y^2+1}) dy = \int \frac{dx}{x} - \int x dx + c$$
$$\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \ln x - \frac{x^2}{2} + c, \quad x^2 + y^2 = 2\ln(x\sqrt{y^2+1}) + c$$

و هذا يمثل حل المعادلة التفاضلية

مثال (3) :- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}=(8x+2y+1)^2 ....(1)$$

الحل :- بوضع $u=8x+2y+1$

ثم بالتفاضل بالنسبة إلي x نحصل علي

$$u'=8+2y', \quad y'=\frac{1}{2}(u-8)$$

بالتعويض عن قيمة y' في المعادلة (1) نحصل علي

$$u'-8=2u^2, \qquad \frac{du}{dx}=2u^2+8$$

بالتكامل نحصل علي

$$\int\frac{du}{u^2+4}=2\int dx+c, \qquad \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{u}{2}=2x+c$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هي

$$\tan^{-1}\frac{8x+2y+1}{2}=4x+c$$

2-5-1 المعادلات التفاضلية المتجانسة

يقال للدالة $f(x,y)$ إنها متجانسة من درجة n إذا امكن وضعها علي الصورة

$$f(x,y)=x^n f(\frac{y}{x}),\qquad f(x,y)=x^n g(x,y)$$

حيث g دالة للمتغير $\frac{y}{x}$

ويقال للمعادلة التفاضلية الآتية :-

$$f(x,y)dx+g(x,y)dy=0$$

انها متجانسة إذا كانت كل من الدالتين $g(x,y),f(x,y)$ متجانسة من نفس الدرجة إي إن

$$f(x,y)=x^n\phi(\frac{y}{x}),\qquad g(x,y)=x^n\psi(\frac{y}{x})$$

المعادلة السابقة تكون علي الصورة

$$\phi(\frac{y}{x})dx+\psi(\frac{y}{x})dy=0............................(1)$$

ويمكن تحويل هذه المعادلة إلي معادلة من النوع الأول أي ذات متغيرات قابلة للانفصال وذلك بفرض أن

$$z=\frac{y}{x},\qquad y=xz,\qquad \frac{dy}{dx}=x\frac{dz}{dx}+z$$

وبوضع المعادلة (1) علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\phi(\frac{y}{x})}{\psi(\frac{y}{x})},\qquad x\frac{dz}{dx}+z=-\frac{\phi(z)}{\psi(z)}$$

$$x\frac{dz}{dx}=-\left[z+\frac{\phi(z)}{\psi(z)}\right]$$

وهذه معادلة قابلة للانفصال يمكن حلها كما سبق

مثال (1) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x^2-y^2)dx+2xydy=0,\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy}$$

ويوضع $y=xz$ نجد أن

$$x\frac{dz}{dx}+z=\frac{z^2-1}{2z},\qquad x\frac{dz}{dx}=-\frac{1+z^2}{2z}$$

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{2z}{1+z^2}dz,\qquad \ln x+\ln c=-\ln(1+z^2)$$

$$x(1+z^2)=c,\qquad x(1+\frac{y^2}{x^2})=c$$

$$x^2+y^2-cx=0$$

وهي معادلة مجموعة من الدوائر .

مثال (2) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$(2ye^{\frac{y}{x}}-x)\frac{dy}{dx}+2x+y=0$$

الحل :- يمكن كتابة المعادلة السابقة علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{x-2ye^{\frac{y}{x}}}$$

نضع $y=zx$ نجد أن

$$z+x\frac{dz}{dx}=\frac{2+z}{1-2ze^{z}},\qquad x\frac{dz}{dx}=\frac{2(1+z^{2}e^{z})}{1-2ze^{z}}$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{1-2ze^{z}}{2(1+z^{2}e^{z})}dz,\qquad 2\ln x=\int\frac{e^{-z}-2z}{e^{-z}+z^{2}}dz$$

$$2\ln x=-\ln(z^{z}+e^{-z})+\ln c,\qquad x^{2}(z^{z}+e^{-z})=c$$

$$x^{2}(\frac{y^{2}}{x^{2}}+\frac{y}{e^{x}})=c,\qquad y^{2}+x^{2}e^{-\frac{y}{x}}=c$$

مثال (3) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$xy'=\sqrt{x^{2}-y^{2}}+y'$$

الحل

$$y'=\sqrt{1-\frac{y^{2}}{x^{2}}}+\frac{y'}{x}$$

نضع $y=zx$ أي إن

$$y' = xz' + z, \qquad xz' + z = \sqrt{1-z^2} + z$$

$$xz' = \sqrt{1-z^2}, \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\sin^{-1} z = \ln cx, \qquad y = x \sin \ln cx$$

3-5-1 المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية .

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية تكون علي كصورة الآتية

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0 .....(1)$$

أو تكتب علي الصورة

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

و هذه المعادلات ذات المعاملات الخطية يمكن تحويلها إلي

1- معادلات متجانسة .

2- معادلات ذات متغيرات قابلة للانفصال .

أولا :- المعادلات ذات المعاملات الخطية والتي يمكن تحويلها إلي معادلات متجانسة .

في هذه الحالة المستقيمان

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad , \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

يتلاقيان في نقطة ولتكن (α,β) وهذا يعني إن محدد المعاملات لا يساوي الصفر .

نضع

$$x = u + \alpha \ , \ y = y + \beta$$

فيكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv}$$

و المعادلة (1) تصبح :-

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة فيمكن حلها كما سبق

ثانيا: معادلات يمكن تحويلها إلي متغيرات منفصلة ففي هذه الحالة يكون محدد المعاملات يساوي الصفر أي أن $a_1 b_2 = a_2 b_1$ والمستقيمان

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \ , \ \ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

يكونان متوازيان ويكون

$$a_1 x + b_1 y = \alpha(a_2 x + b_2 y)$$

نضع

$$u = a_1 x + b_1 y, \quad \frac{du}{dx} = a_1 + b_1 \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b^1}\left(\frac{du}{dx} - a_1\right)$$

والمعادلة (1) تصبح

$$\frac{1}{b_1}\left(\frac{du}{dx} - a_1\right) = \frac{u + c_1}{\alpha u + c_2}$$

وهذه معادلة ذات متغيرات قابلة للانفصال فيمكن حلها .

مثال (1) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(2x - y + 4)dy + (x - 2y + 5)dx = 0$$

الحل :-

نلاحظ أن محدد المعاملات

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

المعادلة يمكن تحويلها إلي معادلة متجانسة

أولا :- نوجد نقطة التقاطع للمستقيمين

$$2x - y + 4 = 0, \quad x - 2y + 5 = 0$$
$$y = 2, x = -1$$

باستخدام التعويض

$$x = u - 1 \quad , \quad y = v + 2$$
$$dx = du \quad , \quad dy = dv$$

المعادلة تصبح علي الصورة

$$\left(2u - 2 - v - 2 + 4\right) + \left(u - 1 - 2v - 4 + 5\right)du = 0$$

باستخدام التعويض $v = uz$

$$\frac{dv}{du} = z + u\frac{dz}{du}, \qquad (2 - z)(z + u\frac{dz}{du}) + (1 - 2z) = 0$$
$$2z' + 2v\frac{dz}{du} - z^2 - uz\frac{dz}{du} + 1 - 2z = 0, \qquad u(2 - z)\frac{dz}{du} = z^2 - 1$$
$$\frac{2 - z}{z^2 - 1}dz = \frac{1}{u}du, \qquad (\frac{1}{2(z - 1)} - \frac{3}{2(z + 1)})dz = \frac{1}{u}du$$
$$\frac{1}{2}\ln(z - 1) - \frac{3}{2}\ln(z + 1) = \ln u + \ln c, \qquad \ln\frac{z - 1}{(z + 1)^3} = 2\ln cu$$

بالتعويض عن قيم u, v نحصل علي

$$\frac{y - x - 3}{(y + x - 1)^3} = c$$

مثال (2) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$(2x - 4y + 5)\frac{dy}{dx} + x - 2y + 3 = 0$$

الحل :- نلاحظ إن محدد المعاملات يساوي الصفر

نضع

$$x-2y=u,\qquad 1-2\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(1-\frac{du}{dx})$$

المعادلة تصبح علي الصورة

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{du}{dx}=-\frac{u+3}{2u+5},\qquad \frac{du}{dx}=\frac{4u+11}{2u+5}$$

$$\int dx=\int\frac{2u+5}{4u+11}du=\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{4u+11})du$$

$$2x+\frac{c}{4}=u-\frac{1}{4}\log(4u+11),\qquad 8x+c=4x-8y-log(4x-8y+11)$$

$$4x+8y+log(4x-8y+11)+c=0$$

4-5-1 المعادلات التفاضلية الكاملة (التامة)

يقال للمعادلة التفاضلية الآتية :-

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0....................(1)$$

أنها كاملة (تامة) إذا تحققت للدالتين $M\ ,N$ المتصلتين العلاقة

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}............................(2)$$

حيث كل من $\frac{\partial N}{\partial x},\frac{\partial M}{\partial y}$ دالة متصلة وبذلك يكون الطرف الأيسر للمعادلة (1) عنصراً تفاضليا تاماً لدالة ما $f(x,y)$ بالنسبة للمتغيرين x,y إي أن

$$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

والشـرط الضـروري و الكـافي لـذلك هـو إن تحقـق العلاقـة (2) وسوف نثبت

الشرط الضروري : نفرض إن الطرف الأيسر للمعادلـة (1) يمثـل تفاضلاً تاماً للدالة $f(x,y)$

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

و بمقارنة المعاملات نحصل علي

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \text{...........}(3)$$

وبتفاضل العلاقة الأولي من (3) بالنسبة إلـي y و الثانيـة بالنسبة إلي x نحصل علي

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

وبمعني ذلك أنه إذا كانت المعادلة التفاضلية (1) تامـة فإنـه الشـرط (2) يجب أن يتحقق إي أن هذا الشرط ضروري .

الشــرط الكــافي : وبــالعكس لا ثبــات إن الشــرط كــافي نفـرض إن العلاقـة (2) صـحيحة ويكـون المطلـوب أثبـات أن المعادلـة التفاضـلية (1) تكـون تامـة أي أن توجـد دالـة $f(x,y)$ وبحيـث يكون .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \int \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

و العلاقة الأولي في (4) تحقق إذا كان :-

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + \phi(y) = \psi(x,y) + \phi(y) ......(5)$$

حيث $\phi(y)$ دالة اختيارية لا تحتوي علي x

وبتفاضل العلاقة (5) بالنسبة إلي y نجد ان

$$\mathrm{N} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \phi'(y) ....(6)$$

ومن العلاقة (6) نحصل علي $\phi(y)$ وذلك بالتكامل بالنسبة إلي y و بــالتعويض فــي العلاقــة (5) عــن $\phi(y)$ وبــذلك تتعــين الدالــة $f(x,y)$ تاماً وهذا يثبت أن الشرط كافي .

مثال (1) : اثبت أن المعادلـة التفاضـلية الآتيـة تامـة و أوجد أصـلها التام .

$$(2y^2+4xy-x^2)dx+(2x^2+4xy-y^2)dy=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

الحل : نفرض أن

$$M(x,y)=2y^2+4xy-x^2 \quad , \quad N(x,y)=2x^2+4xy-y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4y+4x \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x}=4x+4y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

المعادلة تامة

نفرض أن حل المعادلة علي الصورة

$$f(x,y)=c$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M=2y^2+4xy-x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

بتكامل المعادلة (3) بالنسبة إلي x

$$f(x,y)=2y^2x+2x^2y-\frac{x3}{3}+\phi(y) \ldots\ldots(4)$$

وبتفاضل العلاقة (4) بالنسبة إلي y

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N=2x^2+4xy-y^2=4xy+2x^2+\phi'(y)$$

$$\phi'(y)=-y^2(y), \qquad \phi(y)=-\frac{y^3}{3}+c$$

$$f(x,y)=2y^2x+2x^2y-\frac{x^3}{3}-\frac{y^3}{3}=c$$

مثال 2 : أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$(\cos x e^{\sin x} + \sin y \cos x)dx + \cos y \sin x \, dy = 0....(1)$$

الحل:- بوضع

$$M = \cos x e^{\sin x} + \sin y \cos x$$
$$N = \sin x \cos y$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos y \cos x ....(2)$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = \cos x \cos y ....(3)$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

بالتالي المعادلة تامة

نفرض أن حل المعادلة علي الصورة

$$F(x, y) = c$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = \cos x \; e^{\sin x} + \sin y \cos x ....(4)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = N = \sin x \cos y ....(5)$$

بتكامل العلاقة (4) بالنسبة إلي x نحصل علي

$$F(x, y) = -e^{\sin x} + \sin x \sin y + \phi(y) ....(6)$$

و بتفاضل هذه العلاقة بالنسبة إلي y نجد أن

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\sin x\,\cos y+\phi'(y)\text{..............................}(7)$$

من (7) ، (5) نحصل علي :-

$$\sin x\,\cos y=\phi'(y)+\sin x\,\cos y$$
$$\phi'(y)=0,\qquad \phi(y)=c$$

بالتعويض في المعادلة (6) عن قيم $\phi(y)$

$$F(x,y)=e^{\sin x}+\sin x\,\sin y+c$$

العوامل المكاملة :-

إذا كانت المعادلة التفاضلية التي من الدرجة الأولى والرتبة الأولى

$$(1)M(x,y)dx+N(x,y)dy=0\text{......................}(1)$$

غير تامة أي يكون

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

فإن يمكن تحويلها إلي معادلة تامة وذلك بضربها في عامل مكامل M والعامل المكامل M يكون غالبا دالة في (x,y) ولكن الحصول علي العامل المكامل في الحالة العامة هي مسألة رياضية

غير بسيط لذلك سوف نعتبر أن M دالة في y فقط أو M دالة في y فقط .

بضرب المعادلة (1) في العامل المكامل $M\ (x, y)$ لكي تصبح تامة وبذلك يكون

$$\mu(x,y)M\ (x,y)dx+\mu(x,y)N\ (x,y)dy\ =0.........(2)$$

المعادلة (2) اصبحت تامة إذا يكون

$$\frac{\partial x}{\partial y}(\mu M\ )=\frac{\partial}{\partial x}(\mu N\ )$$

$$M\ \frac{\partial\mu}{\partial y}-N\ \frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0..........(3)$$

ومن هذه المعادلة يتعين العامل المكاملة μ كدالة في x, y

أولا : شرط وجود عامل مكامل دالة في x فقط .

نفرض أن المعادلة (1) لها عامل مكامل $\mu=\mu(x)$ وبذلك تصبح المعادلة (3) علي الصورة

$$N\ \frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right),\qquad \frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

واضح أن الطرف الأيسر للمعادلة الأخيرة دالة في x فقط وبذلك فإن الطرف الأيمن دالة في x فقط .

الشرط الضروري والكافي كي يكون للمعادلة (1) عامل مكامل دالة في x فقط هو أن يكون المقدار $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ دالة في x فقط.

$$\frac{1}{\mu}d\,\mu=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx$$

وبالتكامل يكون

$$\ln\mu(x)=\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx,\qquad \mu(x)=e^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$$

ثانيا : شرط و جود عامل مكامل دالة في y فقط .

نفرض أن المعادلة (1) لها عامل مكامل في y وبذلك تصبح المعادلة (3) علي الصورة

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

واضح أن الطرف الأيسر للمعادلة هو دالة في y فقط وبذلك فإن الطرف الأيمن يكون كذلك دالة في y فقط .

الشرط الضروري والكافي لكي يكون للمعادلة (1) عامل مكامل دالة في y فقط هو أن يكون المقدار $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ دالة في y فقط .

وبتكامل هذه المعادلة

$$\ln\mu(y)=-\int\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dy,\qquad \mu(y)=e^{-\int\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dy}$$

وهذه العلاقة تعطي العامل المكامل بصورة صريحة.

مثال 1 : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

الحل :-

$$xy^3dx+(x^2y^2-1)dy=0$$

$$M(x,y)=xy^3\ ,\ N(x,y)=x^2y^2-1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3xy^2\ ,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=2xy^2,\qquad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

المعادلة غير تامة

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=xy^2$$

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{y}$$

يوجد عامل مكامل μ دالة في y فقط يتعين من

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{dy}{y}}=\frac{1}{y}$$

بعد الضرب في العامل المكامل تصبح المعادلة التفاضلية تامة :

$$xy^2dx+\left(x^2y-\frac{1}{y}\right)dy=0$$

ولإيجاد حل المعادلة التفاضلية (1) نفرض الحل العام لها علي الصورة

$$f(x,y)=c$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M=xy^2 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N=x^2y-\frac{1}{y} \qquad (3)$$

يتكامل المعادلة (2) نحصل علي

$$\mathrm{f}\ (\mathrm{x},\mathrm{y})=\frac{1}{2}x^2y^2+\phi(y) \qquad (4)$$

ثم نفاضل المعادلة بالنسبة إلي y نحصل علي

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N=x^2y-\frac{1}{y}=x^2y+\phi'(y), \qquad \phi'(y)=\frac{1}{y}$$

$$\phi(y)=\ln y+\ln c$$

بالتعويض في (4) نحصل علي الحل العام

$$f\ (x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2+\ln cy$$

مثال (2) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(1-xy)dx+(xy-x^2)dy=0$$

الحل :

$$M=1-xy \quad , \quad N=xy-x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-x \ , \ \frac{\partial N}{\partial x}=y-2x, \qquad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

المعادلة غير تامة

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=x-y, \qquad \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{x-y}{x\,(y-x)}=-\frac{1}{x}$$

يوجد عامل مكامل μ دالة في x فقط يتعين من

$$\mu(x)=e^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=\frac{1}{x}$$

بعد الضرب في العامل المكامل تصبح المعادلة التفاضلية تامة .

$$\left(\frac{1-xy}{x}\right)dx+\left(\frac{xy-x^2}{x}\right)dy=0$$

واضح أن حل المعادلة التفاضلية التامة السابقة هو

$$\ln x-xy+\frac{y^2}{2}=c$$

6-5-1 المعادلات التفاضلية الخطية

المعادلة التفاضلية تكون خطية إذا كانت y ومشتقاتها التفاضلية بالنسبة إلي x من الدرجة الأولي وغير مضروبة ببعضها وتكون الصورة العامة لها

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$$

حيث أن $a_0,a_1,.....,a_n,f(x)$ دوال في x

والمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولي و الدرجة الأولي تكون علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=\phi(x').....................(1)$$

Or

$$\frac{dx}{dy}+p(y)x=\phi(y)........................(2)$$

ولحل هذه المعادلـة نقوم بتحويلهـا إلـي صـورة معادلـة تامـة ويمكـن كتابة المعادلة (1) علي الصورة

$$\mu dy + (\mu p(x) y - \mu \phi(x)) dx = 0 \quad ....(3)$$

وذلك بضرب المعادلة (1) في عامل مكامل $\mu = \mu(x)$

و المعادلة التفاضلية (3) تكون تامة إذا تحقق الشرط

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x)) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x) p(x) y - \mu(x)\phi(x)\right]$$

ومنها يكون

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu p, \quad \frac{d\mu}{\mu} = p dx, \quad \mu = e^{\int p dx} \quad ....(4)$$

وبالتعويض من (4) في (3) نحصل علي الصورة

$$\mu dy + y\, d\mu = \mu \phi dx, \qquad d(\mu y) = \mu \phi dx$$

و بتكامل هذه المعادلة نحصل علي

$$\mu y = \int \mu \phi dx + c, \qquad y = \frac{1}{\mu}\int \mu\, \phi\, dx + \frac{c}{\mu}$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية (1)

وبالمثل يمكن إيجاد حل المعادلة التفاضلية (2) علي الصورة

$$x = \frac{1}{\mu}\int \mu\, \phi\, dy + \frac{c}{\mu}$$

مثال (1) : أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}+y\cot x=\sec x$$

الحل :لحل هذا المثال اولاً نوجد عاملاً مكاملاً يعتمد علي x

$$\mu=e^{\int \cot x dx}=\sin x$$

بالتالى الحل العام للمعادلة يصبح علي الصورة

$$\frac{d}{dx}(y\sin x)=\tan x,\qquad y\sin x=\int \tan x dx+c$$

$$y=\operatorname{cosec}x\ln\sec x+c\operatorname{cosec}x$$

ويمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية

مثال (2) أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية:

$$x\frac{dy}{dx}+(x+1)y=3x^2e^x$$

الحل : يمكن كتابة المعادلة علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}+(1+\frac{1}{x})y=3x^2e^x,\qquad \mu=e^{\int(1+\frac{1}{x})dx}=xe^x$$

$$\frac{d}{dx}(yxe^x)=3x^3e^{2x},\qquad yxe^x=3\int x^2e^{2x}dx+c$$

$$xy=(x^3+c)\mathrm{e}^{-x}$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية

7-5-1 : معادلة برنولي

هي معادلة تفاضلية تكون علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}+yp(x)=Q(x)y^{n}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث n عدد حقيقي اكبر من 1

لحل هذه المعادلة يتم تحويلها أولاً إلي معادلة خطية وذلك بالقسمة علي y^{n}

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{1-n}p(x)=Q(x)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

نضع

$$u=y^{1-n}$$

بالتالى يكون

$$\frac{du}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

وبالتعويض من (3) في (2) نحصل علي

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx}+up(x)=Q(x),\qquad \frac{du}{dx}+(1-n)up(x)=(1-n)Q(x)$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية يمكن حلها كما سبق .

مثال : أوجد الحل العام المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2x}=5x^2y^5$$

الحل :

بالقسمة علي y^5 نجد أن

$$y^{-5}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y^{-4}=5x^2$$

نفرض أن

$$y^{-4}=u, \qquad -y^{-5}\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}, \qquad -\frac{1}{4}\frac{du}{dx}-\frac{u}{2x}=5x^2$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{2u}{x}=-20x^2$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية ونوجد أولاً عامل مكامل وهو

$$\mu=e^{\int\frac{2dx}{x}}=x^2, \qquad \frac{d}{dx}(ux^2)=-20x^4$$

$$ux^2=-4x^5+c, \qquad u=-4x^3+\frac{c}{x^2}=\frac{c-4x^5}{x^2}=y^{-4}$$

بالتالى الحل العام للمعادلة هو

$$y^4=\frac{x^2}{c-4x^5}$$

7-5-1 : معادلة ريكاتي

معادلة ريكاتي هي المعادلة التي تكون علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y^{2}+Q(x)y+R(x)..................(1)$$

حيث R,Q,P دوال في x فقط ويمكن حل هذه المعادلة إلي علم أحد الحلول الخاصة لها $y=y_1$ حيث y_1 دالة في x وفي هذه الحالة فالأصل التام للمعادلة (1) يعطي بالتعويض

$$y=y_1+\frac{1}{z}$$

حيث أن z دالة في x يمكن ايجادها علي النحو التالي .

حيث أن $y=y_1$ حل للمعادلة (1) يحقق المعادلة (1)

$$\frac{dy_1}{dx}=p(x)y_1^{2}+Q(x)y_1+R(x)..................(3)$$

يطرح المعادلة (3) من المعادلة (1) ينتج أن

$$\frac{d}{dx}(y-y_1)=p(x)(\mathrm{y}^2-\mathrm{y}_1^2)+Q(x)(\mathrm{y}-\mathrm{y}_1)................(4)$$

من المعادلة (2) نحصل علي

$$\frac{d}{dx}(y-y_1)=\frac{d}{dx}(\frac{1}{z})=-\frac{1}{z^{2}}\frac{dz}{dx}$$

المعادلة (4) تصبح علي

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=(y_1^2+\frac{1}{z^2}+\frac{2y}{z}+y_1^2)p(x)+\frac{1}{z}Q(x)$$

$$\frac{dz}{dx}+\left[2y_1p(x)+Q(x)\right]z=-p(x)$$

وهذه معادلة خطية يمكن حلها كما سبق

مثال : اثبت أن $y=1$ حل خاص للمعادلة التفاضلية الآتية ثم أوجد حلها العام

$$\frac{dy}{dx}=(y-1)(xy-y-x)$$

الحل :

بوضع المعادلة التفاضلية علي الصورة

$$\frac{dy}{dx}=(x-1)\,\mathrm{y}^2+(1-2x)\,\mathrm{y}+x\,....................(1)$$

وهذه معادلة تمثل معادلة ريكاتي

بالتعويض $y=1$ في المعادلة (1) نحصل علي

$$x-1+(1-2x)+x=0$$

ولذلك فإن $y=1$ حل خاص للمعادلة التفاضلية

نفرض أن الحل العام للمعادلة التفاضلية علي الصورة

$$y = 1 + \frac{1}{z} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل علي :

$$\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = (x-1)(1+\frac{1}{z})^2 + (1-2x)(1+\frac{1}{z}) + x$$

$$\frac{dz}{dx} + (x-1)(z+1)^2 + (1-2x)(z^z + z) + z^2 x = 0$$

$$\frac{dz}{dx} + z^2(x-1+2x+x) + z(2x-2+1-2x) + x - 1$$

$$\frac{dz}{dx} - z = 1 - x \,..............(2)$$

وهذه المعادلة معادلة خطية

$$\mu = \bar{e}^{\int dx} = \bar{e}^{x}$$

حل هذه المعادلة هو

$$\frac{d}{dx}(\bar{e}^{x} z) = (1-x)\bar{e}^{x}, \qquad \bar{e}^{x} z = \int (1-x)\bar{e}^{x} + c = x\bar{e}^{x} + c$$

$$z = x + ce^{x}$$

إي أن الحل العام لمعادلة (1) هو

$$\frac{1}{y-1} = x + ce^{x}$$

وهو المطلوب .

تمارين (1)

1-كون المعادلات التفاضلية لمجموعة المنحنيات الآتية :-

$(i)\,y=(x-c)^3 \qquad (ii)\,y=\sin(x+c)$

$(iii)\,x^2+cy^2=2y \qquad (iv)\,y=c(x-2)^2$

$(iiv)\,y=ax^2+be^x \qquad (vi)\,y=ax^3+bx^2+cx$

$(vii)\,y=\alpha\,\mathrm{co}(\ln x)+\beta\sin(\ln x)$

$(viii)\,y=a\{x+\sqrt{x^2-1}\}^n+b\{x-\sqrt{x^2-1}\}^n$

حيث n ثابت مطلق .

$(ix)\quad y=(a+bx)\cosh mx$

حيث m ثابت مطلق .

$(x)\,y=a(\sin^{-1}x)+b(\sin^{-1}x)^2$

$(xi)\,y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

$(xii)\,y=\alpha e^{\beta x}$

$(xiii)\,(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\alpha^2$

2-أوجد المعادلة التفاضلية للقطاعات المكافئة التي محورها هو المحور السيني .

3-كون المعادلة التفاضلية للدوائر التي نصف قطرها الواحد الصحيح ومركزها تقع علي المستقيم $y=2x$

4- حل المعادلات التفاضلية الآتية بفصل المتغيرات :

$(i)\ \frac{dy}{dx} = \cos(y - x) \qquad (ii)\ \tan x \sin^2 y\,dx + \cos^2 x \cot y\,dy = 0$

$(iii)\ x\frac{dy}{dx} - y = y^2 \qquad (iv)\ xy\frac{dy}{dx} = 1 - x^2$

$(iiv)\ \frac{dy}{dx} = \sqrt{4x + 2y - 1} \qquad (v)\ x^2\frac{dy}{dx} + y = a$

$(vi)\ xy^3\frac{dy}{dx} = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$

$(vii)\ x(1 - x^2)dy = (x^2 - x + 1)y\,dx$

$(viii)\ (x + y)^2(x\frac{dy}{dx} + y) = xy(1 + \frac{dy}{dx})$

5- حل المعادلات التفاضلية المتجانسة الآتية :-

$(i)\ (x + 2y)dx - x\,dy = 0 \qquad (ii)\ xy' = y - xe^{y/x}$

$(iii)\ xy' - y = (x + y)\ln\frac{x + y}{x} \qquad (iv)\ xy' = y\cos(\ln\frac{y}{x})$

$(v)\ xy' - y = x\tan\frac{y}{x} \qquad (vi)\ (x^2 - 2xy - y^2)\frac{dy}{dx} = x^2 + 2xy - y^2$

$(vii)\ (x + y)^2\frac{dy}{dx} = x^2 - 2xy + 5y^2 \qquad (viii)\ x\frac{dy}{dx} = y - x\cos^2(\frac{y}{x})$

6- حل المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية الآتية :

$(i)\ y' = \dfrac{4x - y + 7}{2x + y - 1}$

$(ii)(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$

$(iii)(x - y - 1) + (y - x + 2)y' = 0$

$(iv)(3y - x)y' = 3x - y + 4$

$(v)(x - 5y + 5)dy + (5x - y + 1)dx = 0$

$(vi)\ x^2 \dfrac{dy}{dx} = (2x - y + 1)^2$

$(vii)(y + ax + b)\dfrac{dy}{dx} = y + ax - b$

7- بين أن المعادلات الآتية تامة واوحد الحل العام

$(i)\ 2xy\,dx + (x^2 - y^2)dy \quad (ii)(2 - 9xy^2)x\,dx + (4y^2 - 6x^3)y\,dy = 0$

$(iii)(x^3 - 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^3 y)dy = 0$

$(iv)\ x\,dx + y\,dy = a^2\left(\dfrac{x\,dx - y\,dy}{x^2 + y^2}\right)$

$(v)(3x^2 + 4x\,y)dx + (2x^2 + 3y^2)dy = 0$

$(vi)(\cos x - x\cos y)dy - (\sin y + y\sin x)dx = 0$

$(vii)\, e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0 \quad (viii)\, \frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$

$(ix)\, \frac{2x^2 + y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0$

$(x)\, (1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$

$(xi)\, \left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \frac{(x^2 + 1)\cos y}{\cos 2y - 1}dy = 0$

$(xii)\, \sin x \cos y dy + \cos x \sin y dx + \cos x e^{\sin x} dx = 0$

$(xiii)\, \left[3ax^2 + 2(a + 2h)xy + (b + 2h)y^2\right]dx$

$+\left[(a + 2h)x^2 + 2(b + 2h)xy + 3by^2\right]dy = 0$

8- أوجد عامل مكامل يعتمد علي x فقط لكل من المعادلات التفاضلية الآتية ومن ثم أوجد احلها التام .

$(i)\, (x^3 + y^4)dx + 8xy^3dy = 0$

$(ii)\, (1 - xy)dx + (1 - x^2)dy = c$

$(iii)\, (x^3 + 2y^3 - 3xy)dx + 3x(y^2 + x)dy = 0$

$(iv)\, (2x^2 + xy + a^2)ydx + (x + 2y)(x^2 + a^2)dy = 0$

9- أوجد عامل مكامل يعتمد علي y فقط لكل من المعادلات التفاضلية الآتية ومن ثم أوجد احلها التام .

$(i)\, xy^3dx + (x^2y^2 - 1)dy = 0$

$(ii)\, y^2dx + (xy + 1)dy = 0$

$(iii)\, (y + 1)dx + (xy + y^2 + y + 1)dy = 0$

$(iv)\, dx + \{1 + (x + y)\tan y\}dy = 0$

10- أوجد الحل العام لكل من المعادلات الخطية الآتية .

$$(i)\ (x+1)\frac{dy}{dx}-y=3x^4+4x^5 \quad (ii)\ \left\{2x\frac{dy}{dx}+y\right\}\sqrt{1+x}=1+2x$$

$$(iii)\ 2(x^2+x+1)\frac{dy}{dx}+(2x+1)y=8x^2+1$$

$$(iv)\ 2(1-x^2)\frac{dy}{dx}-(1+x)y=\sqrt{1-x^2}$$

$$(v)\ (1+x^2)^2\frac{dy}{dx}+(1+x)(1-x^2)y=2 \quad (vi)\ \frac{dy}{dx}+y\tan x=\sin 2x$$

$$(vii)\ \frac{dy}{dx}\sin x\cos^3 x+y\cos 2x\cos^2 x=0$$

$$(viii)\ \frac{1}{2}\frac{dy}{dx}=y\tan 2x+1+\sec 2x \quad (ix)\ \frac{dy}{dx}+2y=x^2+3\cosh x$$

$$(x)\ \frac{dy}{dx}+2y\,\mathrm{cosec}\,2x=2\cot^2 x\cos 2x \quad (xi)\ \frac{dy}{dx}\cot x-y=\mathrm{cosec}\,2x+\cos 2x$$

$$(xii)\ (1-x^2)\frac{dy}{dx}+xy=x\sin^{-1}x+(1-x)\sqrt{1-x^2}$$

10- حول المعادلات التفاضلية الآتية إلي معادلات خطية ثم أكمل حلها .

$(i)(xy-y^2)\frac{dy}{dx}=y^2-1 \quad (ii)\left\{x\left(\frac{1-y^2}{1ty^2}\right)-1\right\}\frac{dy}{dx}=y$

$(iii)\left\{(2y^2-1)x+y^3\right\}\frac{dy}{dx}=y(1-y^2)^2 \quad (iv)\,x\frac{dy}{dx}=4y-4\sqrt{y}$

$(v)2x\frac{dy}{dx}-y=\frac{2x^3-1}{y} \quad (vi)x^3\frac{dy}{dx}=2x^2y+y^3$

$(vii)\frac{dy}{dx}\cos x+y\sin x+y^3=0$

$(viii)2(1+x)y\frac{dy}{dx}+2x-3x^2+y^2=0$

11- أثبت أن $y=1$ حل خاص للمعادلة التفاضلية الآتية ثم أوجد أصلها التام

$$\frac{dy}{dx}=(y-1)(xy-y-x)$$

12- اثبت أن $y=\frac{x+1}{x^2}$ حل خاص للمعادلات التفاضلية الآتية واوجد أصلها التام .

$$\frac{dy}{dx}+y^2=\frac{1}{x4}$$

13- أثبت أن $y=x$ حل خاص لكل من المعادلات التفاضلية الآتية ثم أوجد حلها العام .

$$(i)\; x\frac{dy}{dx}+(n-1)ax^{n}(y-x)^{2}+y-2x=0$$

$$(ii)\; \frac{dy}{dx}+xy^{2}-(2x^{2}+1)y+x^{3}+x-1=0$$

$$(iii)\; (x^{2}+a)\frac{dy}{dx}+2y^{2}-3xy-a=0$$

تكامل متعدد

الفصل الثاني

التكامل الثنائي

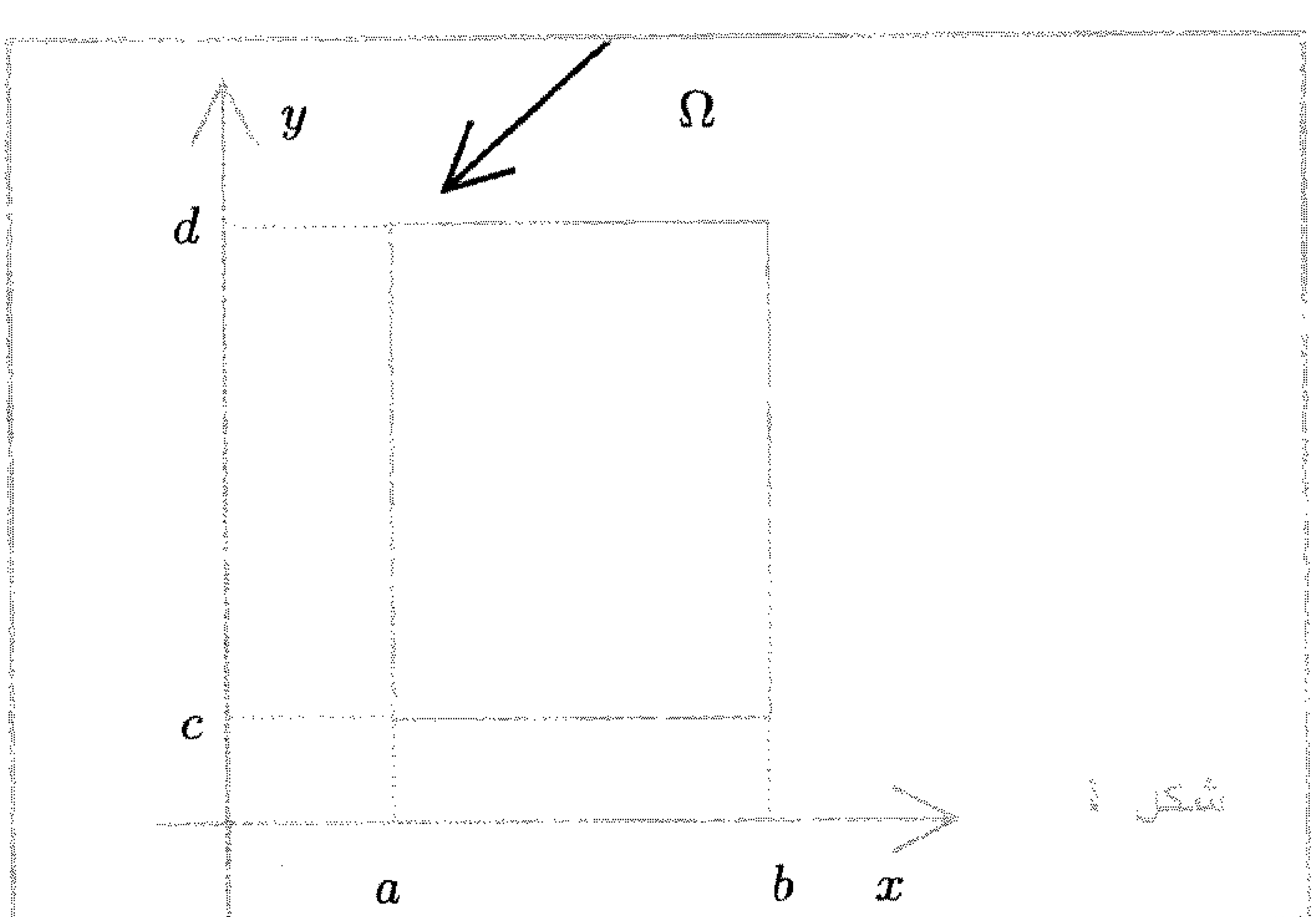
2.1 الحجم تحت سطح والتكامل الثنائي

التكامل المفرد $\int_a^b f(x)dx$ يمثل المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ وفوق محور x في الفترة $[a,b]$ حيث أن $f(x) \geq 0$، والتكامل الثنائي يعتبر تعميماً للتكامل المفرد أي يمثل الحجم تحت سطح في R^3.

ونعتبر حالة بسيطة. نفرض أن Ω تمثل مستطيلاً في R^2:

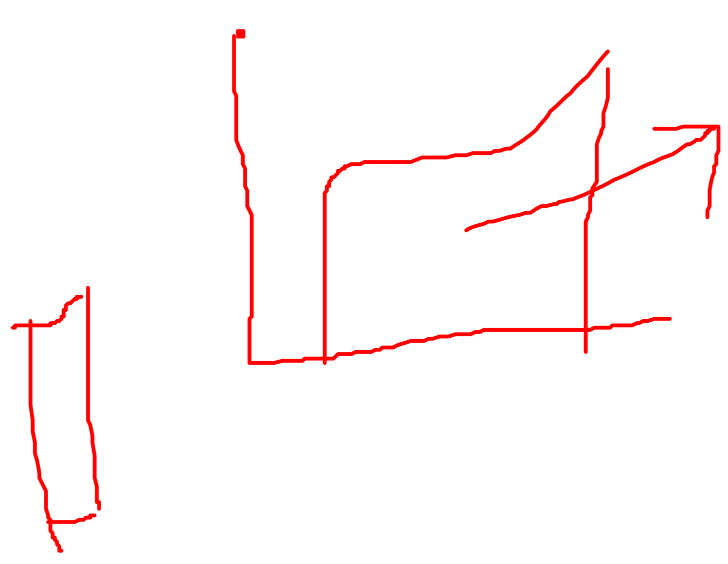
$$\Omega = \{(x,y) : a \leq x \leq b \ , \ c \leq y \leq d\}$$

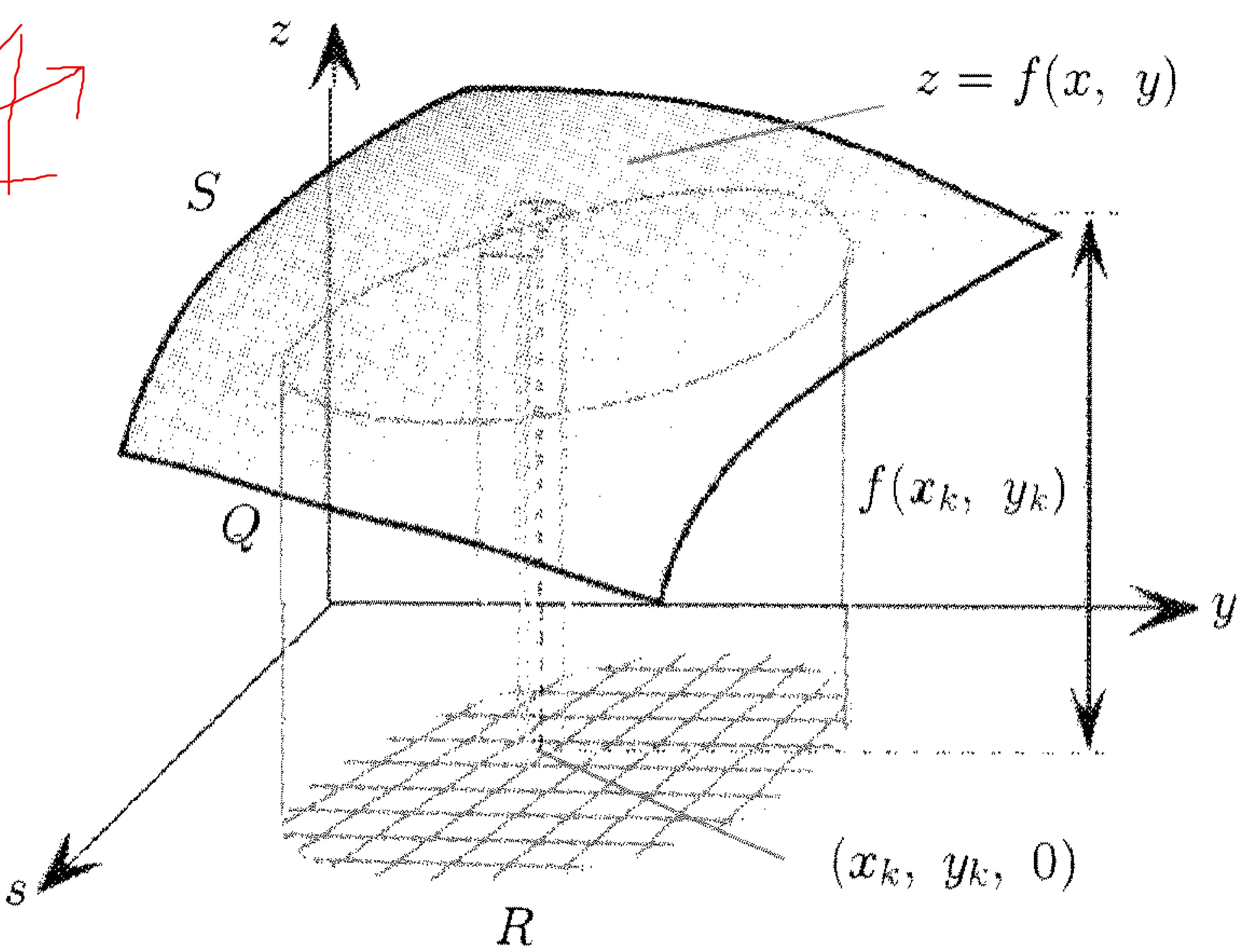
أنظر الشكل (1).



ونفرض أن $z = f(x, y)$ دالة متصلة وغير سالبة على المنطقة Ω، أي أن $f(x, y) \geq 0$ لكل $(x, y) \in \Omega$. والسؤال الآن ما هو الحجم تحت السطح $z = f(x, y)$ وفوق المستطيل Ω؟

وللإجابة عن السؤال نتبع الخطوات التالية:





شكل (2)

(1) نقسم المستطيل Ω إلى مستطيلات فرعية بمستقيمات موازية للمحورين حيث أن:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

و
$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d$$

ويمكن تعريف Δx و Δy كما يلي:

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

و
$$\Delta y = y_i - y_{i-1} = \frac{b-a}{m}$$

وهكذا يمكن تعريف المستطيلات الفرعية كما يلي:

$$\Omega_{ij} = \{(x,y) : x_{i-1} \le x \le x_i \ , \ y_{j-1} \le y \le y_j\}$$

حيث أن $i = 1,2,...,n$ و $j = 1,2,...,m$

أي أنه توجد $n\,m$ من المستطيلات الفرعية.

(2) نقدر الحجم تحت السطح وفوق كل مستطيل فرعي:

إذا كانت (x_i^*, y_j^*) نقطة في Ω_{ij}، فإن الحجم تحت السطح وفوق المستطيل Ω_{ij} تكون قيمته التقريبية كما يلي:

$$V_{ij} \approx f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta x \Delta y = f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta A \qquad (*)$$

حيث أن $\Delta A = \Delta x \Delta y$ تمثل مساحة المستطيل Ω_{ij}.

(3) وبجمع الحجوم التقريبية نحصل على الحجم الكلي:

$$V = V_{11} + V_{12} + ... + V_{1m} + V_{21} + V_{22} + ... + V_{2m} + ... + V_{n1} + V_{n2} + ... + V_{nm}$$

أو بصورة مختصرة

$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} V_{ij} \qquad (**)$$

من المعادلتين $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} V_{ij}$$

(4) وبأخذ النهاية عندما $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ نجد أن:

$$V = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta A$$

ملاحظة

عندما $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$، فإن قطر المستطيل يؤول إلى الصفر، وإذا عرفنا $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)}$، فإن $\Delta s \to 0$ عندما $(\Delta x, \Delta y) \to \bar{o}$ ويمكن كتابة المعادلة السابقة كما يلي:

$$V = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*) \, \Delta A$$

حيث أن ΔA تساوي قطر المستطيل $\Delta x \Delta y$.

مثــال 1

أوجد الحجم تحت السطح $z = x + 2y$ وفوق المستطيل:

$$\Omega = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 5\}$$

الحــل

للسهولة نقسم الفترتين $[1,2]$ و$[3,5]$ إلى n من الفترات الجزئية المتساوية (أي أن $n = m$).

$$1 = x_0 < x_1 < \ \dots \ x_n = 2$$

و

$$3 = y_0 < y_1 < \ \dots \ < y_n = 5$$

كذلك $\Delta x = \dfrac{b-a}{b} = \dfrac{1}{n}$ و $\Delta y = \dfrac{d-c}{n} = \dfrac{2}{n}$

وهكذا $x_i = 1 + \dfrac{i}{n}$ و $y_j = 3 + \dfrac{2j}{n}$

وباختيار $x_i^* = x_i$ و $y_j^* = y_j$ نجد أن:

$$V_{ij} = f(x_i^*, y_j^*) \, \Delta A = (x_i + 2y_j) \, \Delta x \Delta y$$

وبالتعويض عن x_i و y_j و Δx و Δy نجد أن:

$$V_{ij} = \left[\left(1+\frac{i}{n}\right)+2\left(3+\frac{2j}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right)\ \left(\frac{2}{n}\right) = \left(7+\frac{i}{n}+\frac{4j}{n}\right)\ \ \frac{2}{n^2}$$

وهكذا:

$$V = \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{14}{n^2}+\frac{2i}{n^3}+\frac{8j}{n^3}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{14}{n^2}\right)+\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2i}{n^3}\right)+\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{8j}{n^3}\right)$$

ولحسن الحظ يمكن إيجاد مجموع المتسلسلات الثنائية السابقة حيث أن:

$$,\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\frac{14}{n^2} = \frac{14}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} = \frac{14}{n^2}(n)(n) = 14$$

$$\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\frac{2i}{n^3} = \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} i = \frac{2}{n^3}(1+2+3+...+n)(n)$$

$$.= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n+1}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\frac{8j}{n^3} = \frac{8}{n^3}\ \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} j = \frac{8}{n^3}(n)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{4(n+1)}{n}$$

ملاحظة

$$1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

وهكذا

$$V = \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} V_{ij} \approx 14+\frac{n+1}{n}+\frac{4(n+1)}{n}$$

وبذلك

$$V = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j^*, x_j^*)\ \Delta A$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta A$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[14 + \frac{n+1}{n} + \frac{4(n+1)}{n}\right] = 19$$

والآن يمكننا تعريف التكامل الثنائي كما يلي:

تعريف 1 (التكامل الثنائي)

إذا كانت $z = f(x, y)$ والمنطقة Ω معرّفة كما يلي:

$$\Omega = \{(x, y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

وإذا كانت $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta A$ موجودة ومستقلة عن كيفية اختيار النقاط (x_i^*, y_j^*)، فإن التكامل الثنائي للدالة f على Ω يعرّف كما يلي:

$$\int\int_{\Omega} f(x, y) dA = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta A$$

نظرية 1

إذا كانت الدالة f متصلة على المنطقة المستطيلة Ω، فإن الدالة f تكون قابلة للتكامل على Ω.

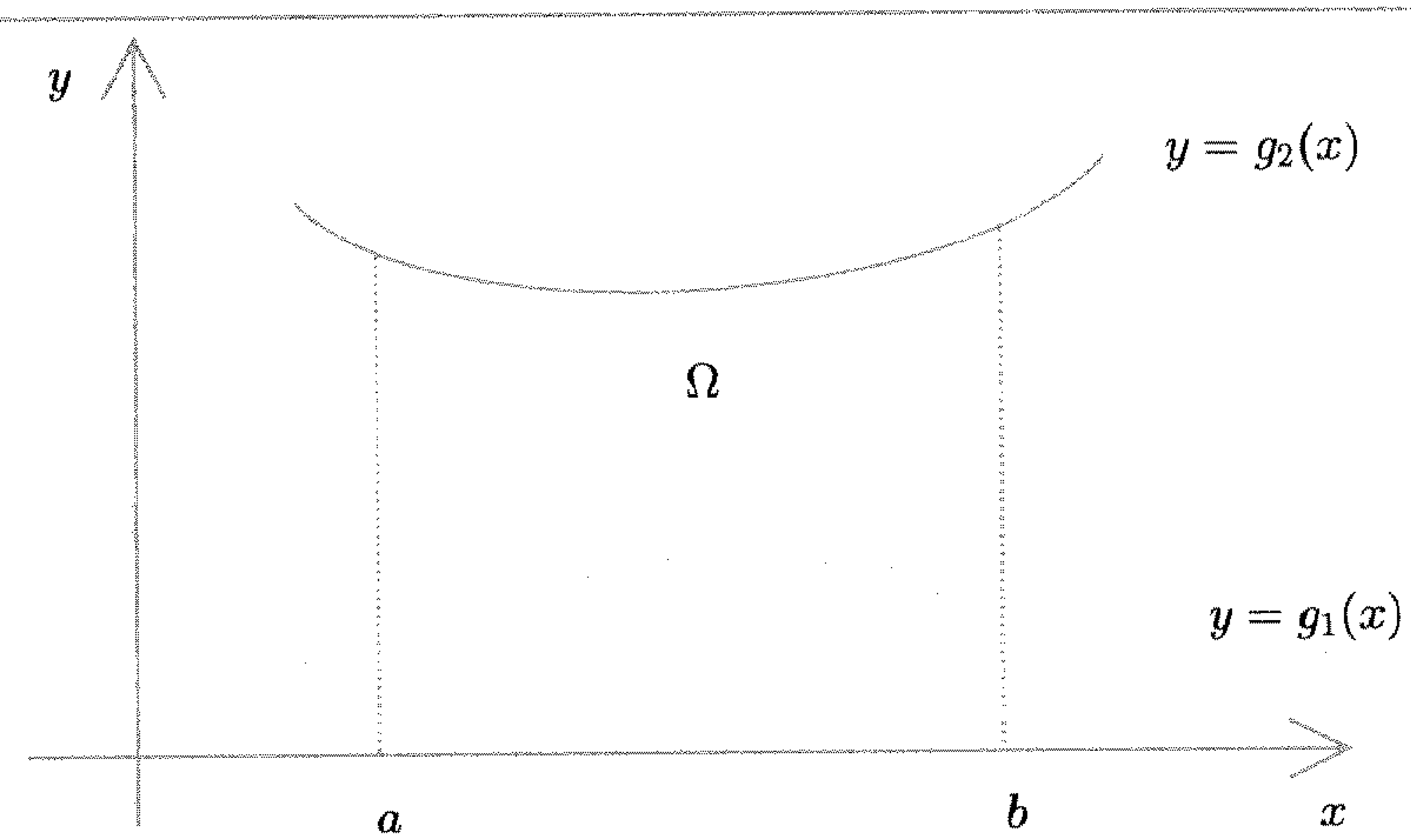
يمكن تعريف التكامل الثنائي على مناطق غير مستطيلة ومن أهمها المناطق الأفقية والرأسية البسيطة والتي سنقدمها فيما يلي:

المناطق الأفقية والرأسية البسيطة

حساب قيمة التكامل الثنائي باستخدام التعريف ليس بالأمر السهل، وتوجد كذلك بعض المناطق التي تكون عليها الدوال المتصلة غير قابلة للتكامل. وسنقتصر على نوعين من المناطق التي تكون عليها الدوال المتصلة قابلة للتكامل، ويمكن عليها حساب قيمة التكامل الثنائي.

تعريف 2

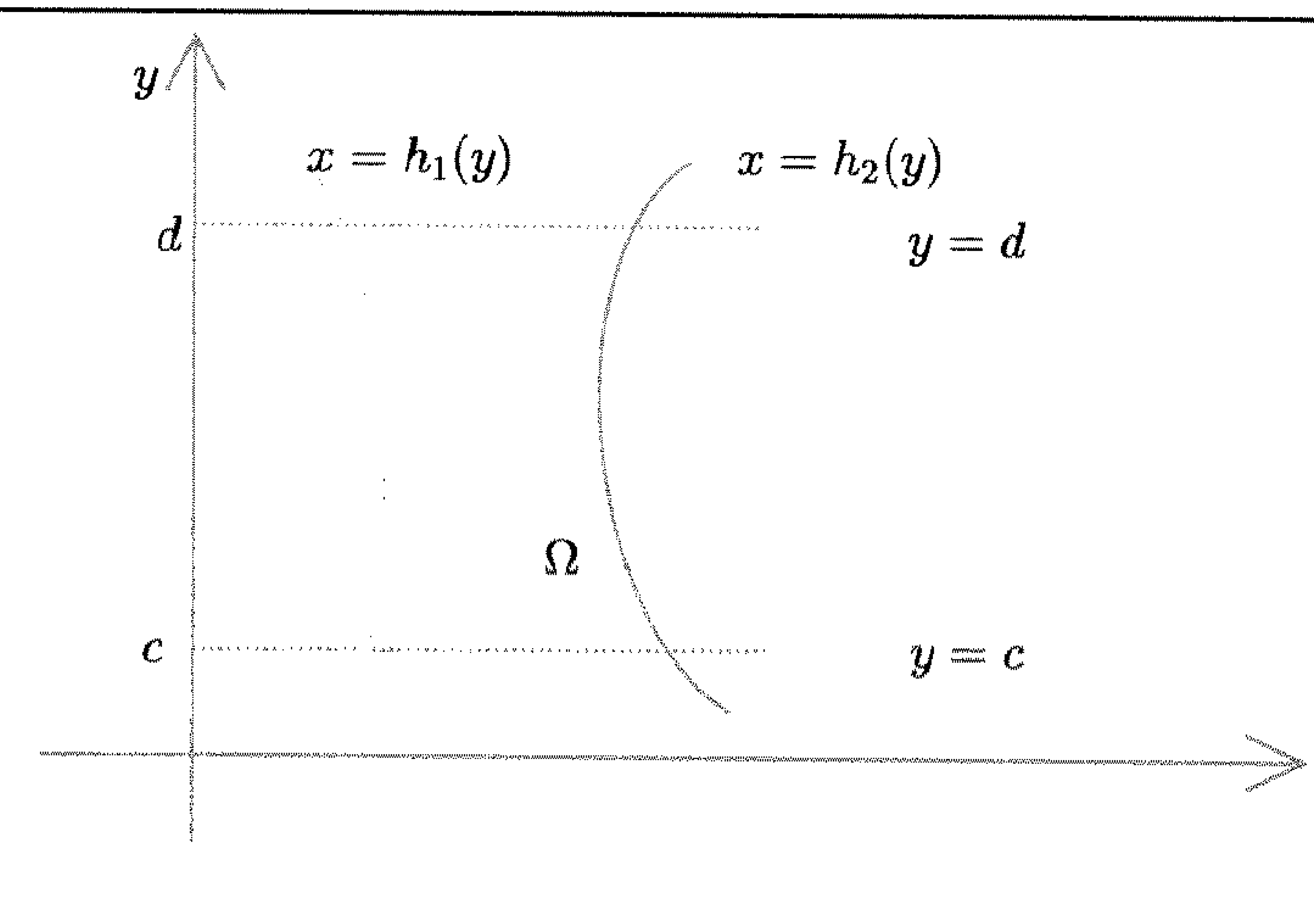
(1) إذا كانت الدالتان g_1 وg_2 متصلتين على الفترة $[a,b]$ حيث أن $g_1(x) \leq g_2(x)$ لكل $x \in [a,b]$، وإذا كانت Ω المنطقة الواقعة بين رسم الدالتين g_1 وg_2 على الفترة $[a,b]$، فإن المنطقة Ω تكون منطقة رأسية، انظر الشكل (3).



شكل (3)

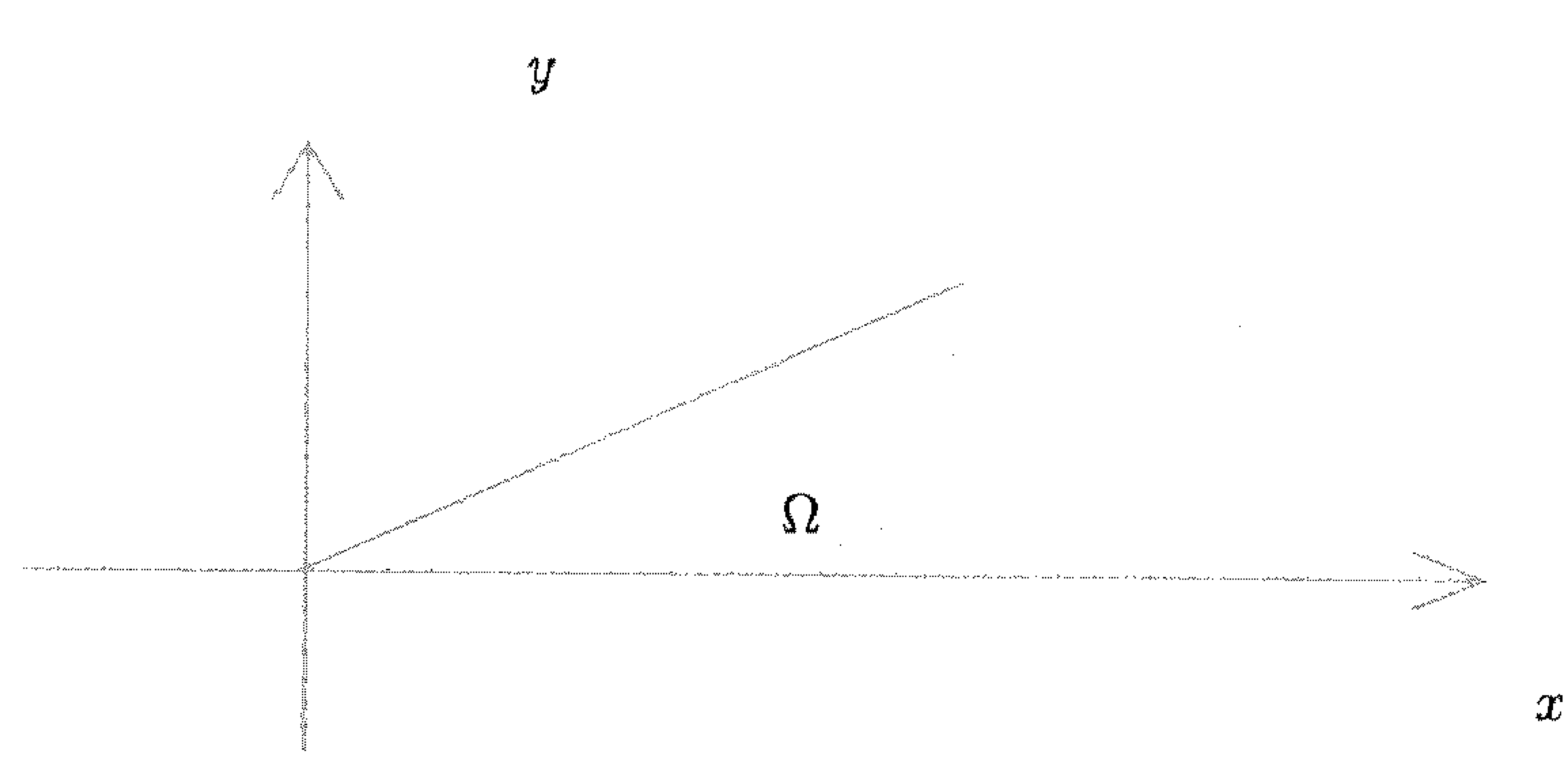
منطقة رأسية بسيطة

(2) إذا كانت الدالتان h_1 وh_2 متصلتين على الفترة $[c,d]$ حيث أن $h_1(y) \leq h_2(y)$ لكل $y \in [c,d]$. وإذا كانت Ω المنطقة الواقعة بين رسم الدالتين h_1 و h_2 على الفترة $[c,d]$، فإن المنطقة Ω تكون منطقة أفقية بسيطة، انظر الشكل (4).



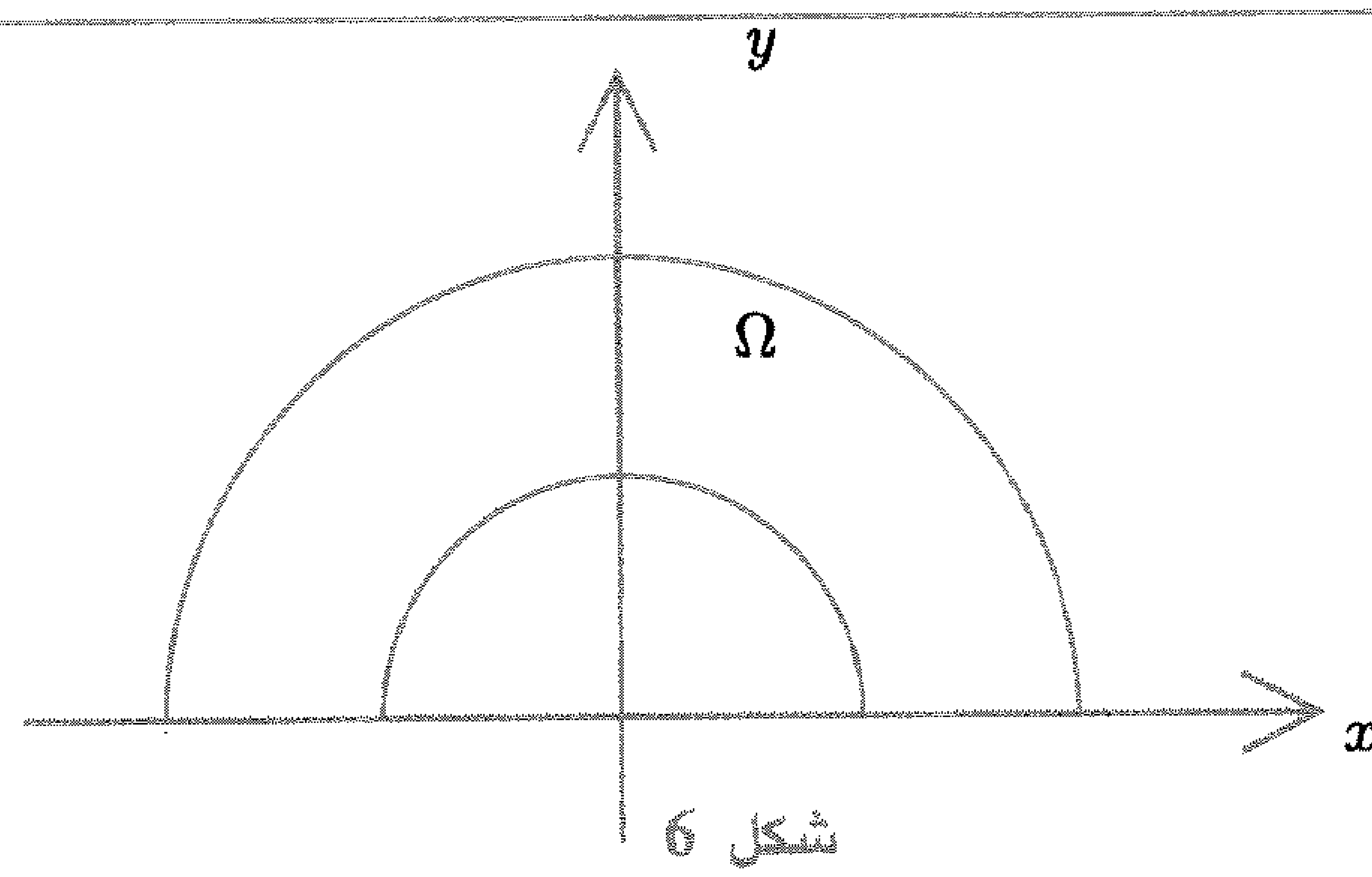
شكل (4)
منطقة أفقية بسيطة

(3) إذا كانت المنطقة Ω منطقة رأسية بسيطة، وأفقية بسيطة، فإن Ω تكون منطقة بسيطة، انظر الشكل (5).



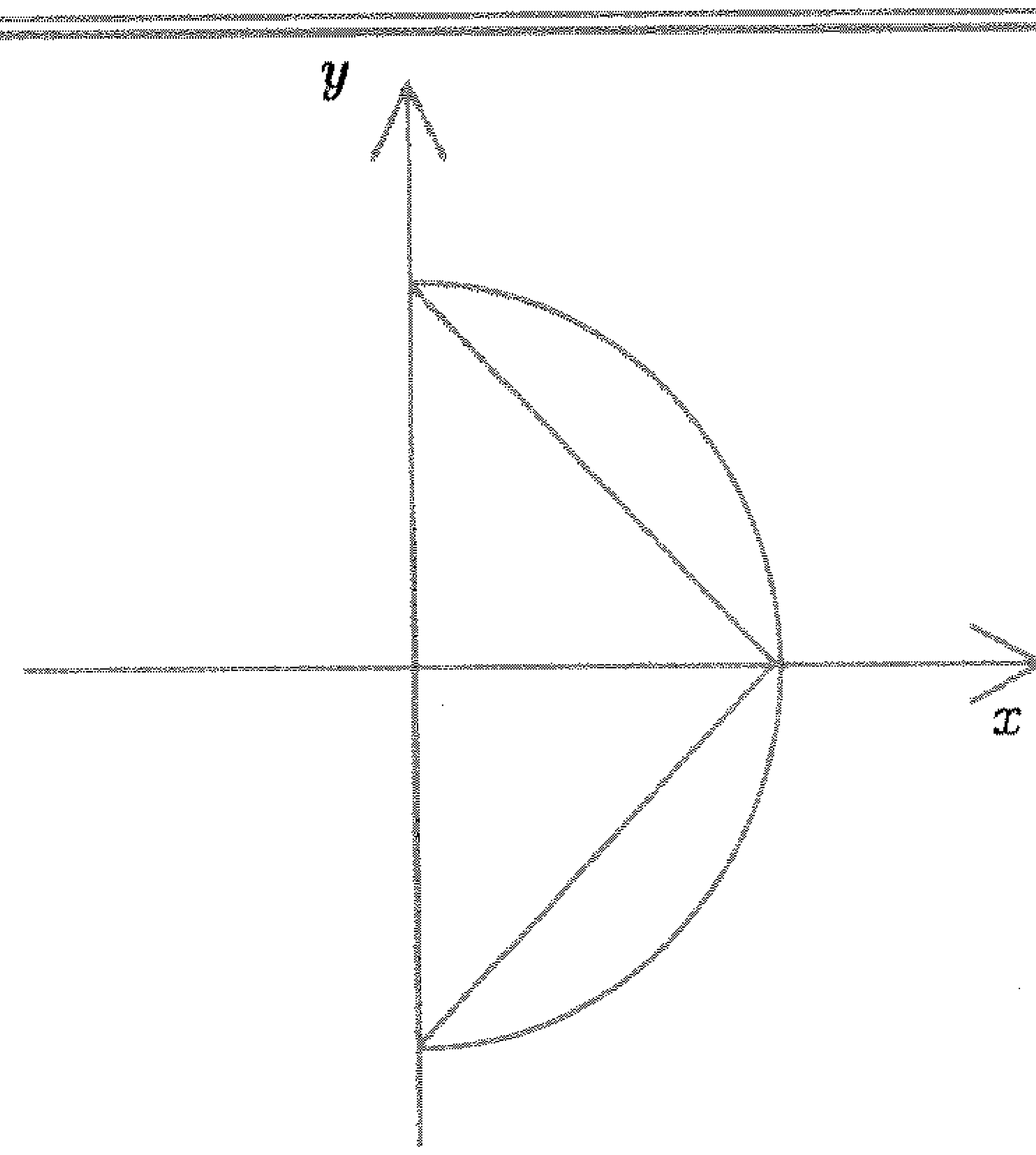
شكل (5)
منطقة بسيطة

وللتعرّف إلى مناطق مختلفة، انظر الأشكال من (6 ـ 8).



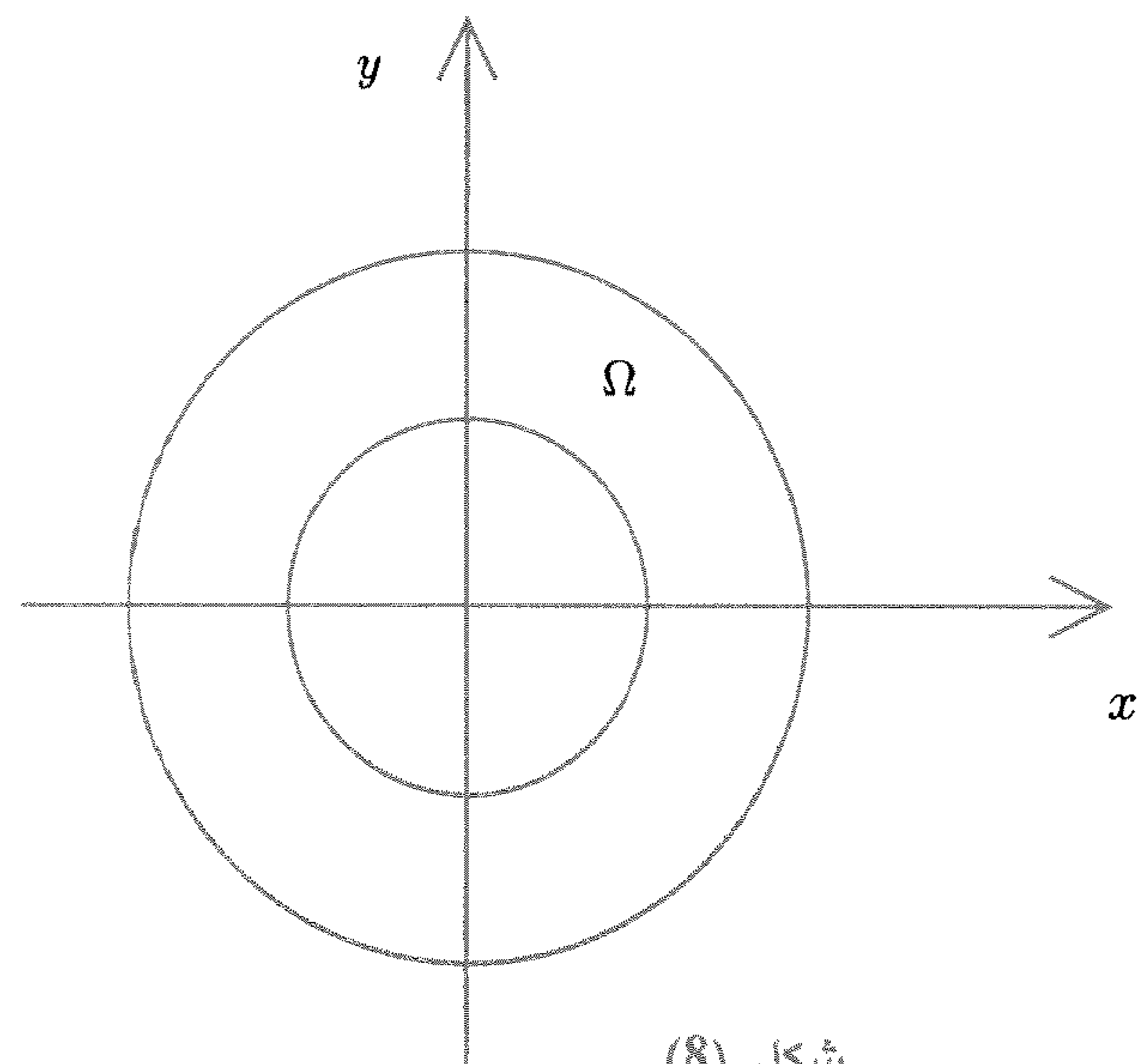
شكل 6

منطقة رأسية بسيطة ولكنها غير منطقة أفقية بسيطة



شكل (7)

منطقة أفقية بسيطة ولكنها غير منطقة رأسية بسيطة



شكل (8)

منطقة غير رأسية بسيطة وغير أفقية بسيطة

ويمكن تعريف التكامل الثنائي على منطقة عامة Ω، انظر الشكل (9)، ونفرض أن المنطقة محددة (Bounded)، أي أنه يوجد عدد M حيث أن لكل $(x,y) \in \Omega$ يكون $|f(x,y)| \leq M$، وبما أن Ω محددة، فإنه يمكن تعريف دالة جديدة $F(x,y)$ كما يلي:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ; \quad (x,y) \in \Omega \\ 0 & ; \quad (x,y) \neq R, (x,y) \notin \Omega \end{cases}$$

تعريف 3

إذا كانت f معرّفة على Ω، والدالة F معرّفة كما سبق، فإن:

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)dA = \int\int_{R} F(x,y)dA$$

وإذا كان التكامل على المنطقة R موجوداً، فإن الدالة f تكون قابلة للتكامل على Ω.

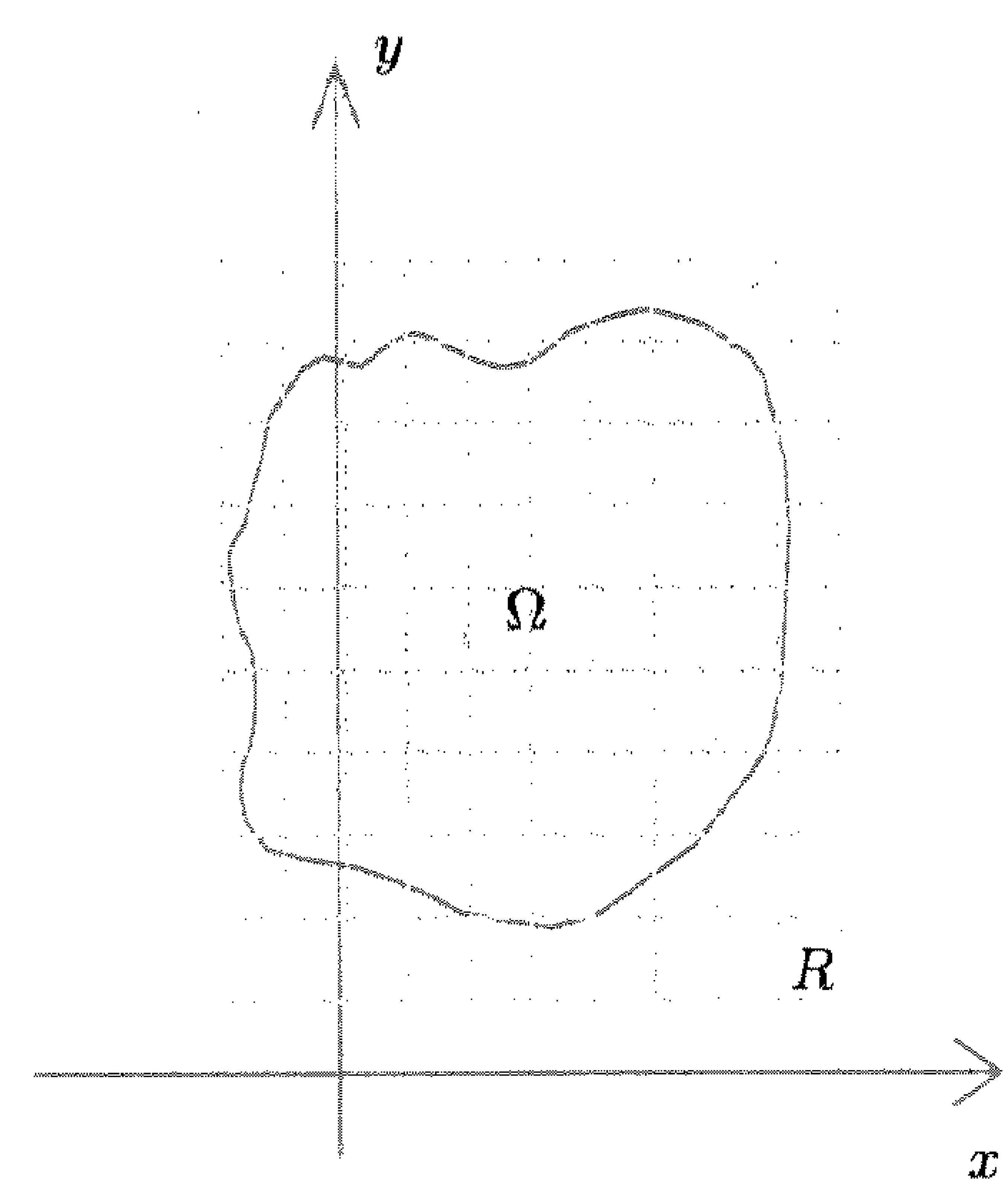
وسنوضح ذلك كما يلي:

إذا تم تقسيم المستطيل R إلى $n\,m$ من المستطيلات الفرعية، انظر الشكل (9). فإنه في كل مستطيل فرعي R_{ij} يقع بالكامل في Ω تكون $F = f$. وهكذا الحجم الذي يقع تحت السطح $Z = f(x, y)$ وفوق المستطيل R_{ij} يعطى بالمعادلة التالية:

$$\begin{aligned} V_{ij} &\approx f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta x \Delta y \\ &= F(x_i^*, y_j^*)\ \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

وإذا كان R_{ij} في R وليس في Ω، فإن $F = 0$، وهذا يعني أن

$$V_{ij} = F(x_i^*, y_j^*)\ \Delta x \Delta y = 0$$



شكل 9

وأخيراً إذا كان R_{ij} لا يوجد بالكامل داخل Ω أي أن جزءاً منه يقع خارج Ω، فإن هذا لا يعتبر مشكلة حقيقية، لأنه عندما $\Delta s \to 0$ يؤول مجموع الحجوم فوق هذه المستطيلات (على حدود Ω إلى الصفر إذا كانت حدود Ω معقدة جداً، وهكذا يكون مجموع الحجوم فوق R يساوي مجموع الحجوم فوق Ω وهذا يفسر التعريف 3.

2.2 خواص التكامل الثنائي

الخواص الأساسية للتكامل الثنائي مشابهة تماماً لخواص التكامل للدالة في متغير واحد. وفيما يلي سنذكر أهم الخواص الأساسية للتكامل الثنائي:

إذا كانت الدالتان g, f قابلتين للتكامل في المنطقة المغلقة R، فإن:

1) $$\iint_R Cf(x,y)dA = C\iint_R f(x,y)dA$$

حيث أن C مقدار ثابت.

2) $$\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA \pm \iint_R g(x,y)dA$$

3) إذا كان لكل (x,y) في R يكون $m \leq f(x,y) \leq M$ وإذا كان $A\ (R)$ ترمز إلى مساحة R، فإن:

$$mA(R) \leq \iint_R f(x,y)dA \leq MA(R)$$

4) إذا كانت $f(x,y) \leq g(x,y)$، فإن:

$$\iint_R f(x,y)dA \leq \iint_R g(x,y)dA$$

5) إذا كانت R مكونة من عدة مناطق $(R_1, R_2, ...)$ و f متصلة في R، فإن:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA + ...$$

نظرية 2

إذا كانت $f(x,y)$ متصلة في المنطقة المغلقة R حيث أن:

$$f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \quad ; \quad a \leq x \leq b$$

و $f_1(x)$ و $f_2(x)$ متصلتان، فإن:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\,dx$$

وبصورة مشابهة تماماً إذا كانت R على الصورة

$$g_1(y) \le y \le g_2(y) \quad ; \quad c \le y \le d$$

$g_1(y)$ و $g_2(y)$ متصلتان، فإن:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\,dy$$

مثال 1

أوجد أصغر قيمة وأكبر قيمة للتكامل الثنائي: $\iint_R f(x,y)dA$

حيث أن: $R = \{(x,y) : a \le x \le b \; ; \; c \le y \le d\}$ و $f(x,y) = sin(x-3y)$

الحل

بما أن $-1 \le sin(x-3y) \le 1$ ومساحة المنطقة R تكون $A(R) = (b-a)\ (d-c)$ إذن حسب الخاصية (3) نجد أن:

$$-(b-a)(d-c) \le \iint_R sin(x-3y)dA \le (b-a)(d-c)$$

2 .3 طرق إيجاد التكامل الثنائي (التكامل الجزئي)

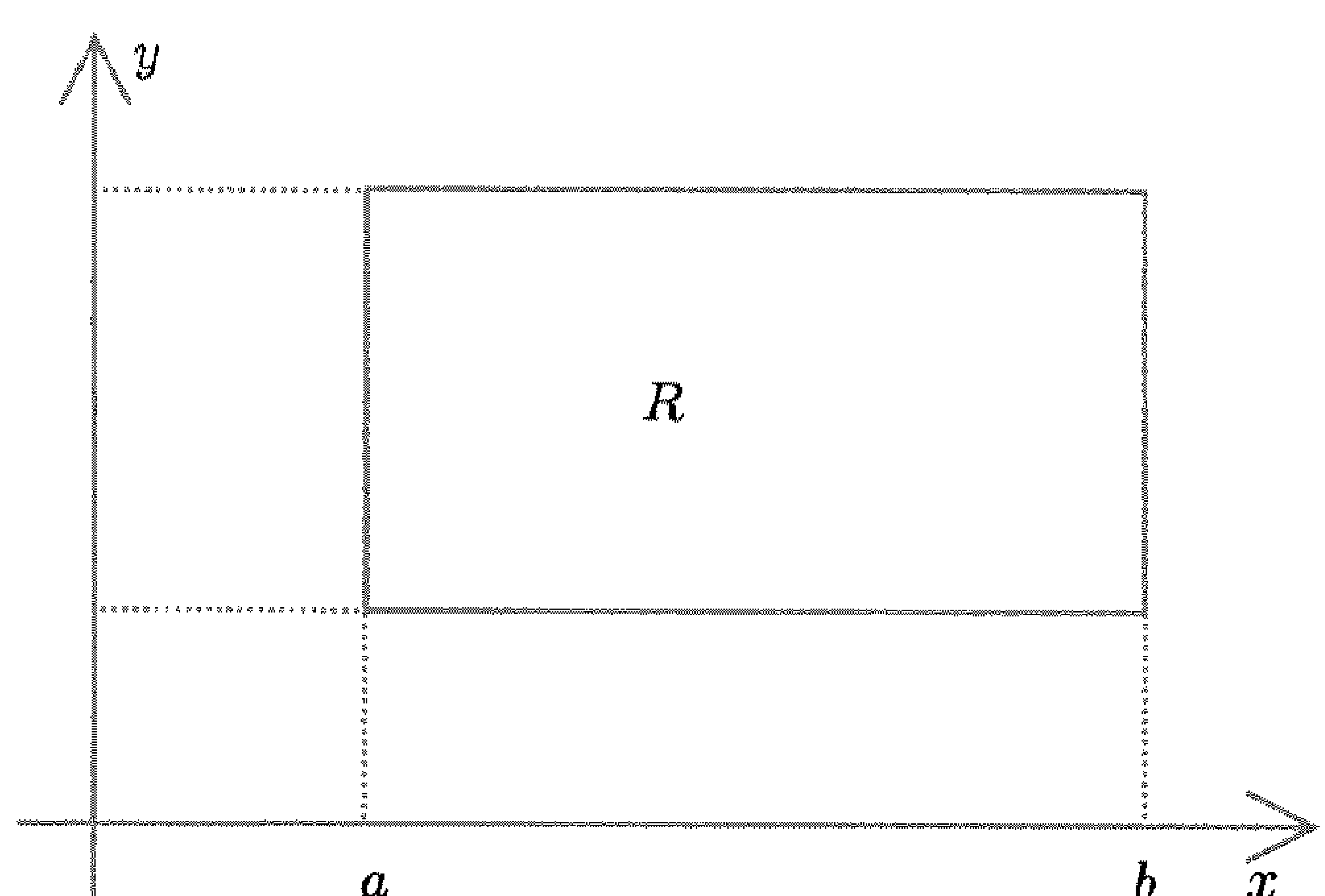
إذا كانت المنطقة R على شكل مستطيل في المستوى xy حيث أن $c \le y \le d, a \le x \le b$ وإذا كانت الدالة $f(x,y)$ متصلة في R، فإن التكامل المعتاد بالنسبة للمتغير x هو

$$\int_a^b f(x,y)dx$$

ويكون الناتج دالة في y فقط ولذلك $A(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ معرّفة في الفترة $c \le y \le d$.

وتكامل الدالة $A(y)$ يمكن أن يحسب كما يأتي:

$$\int_c^d A(y)dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy$$



شكل 10

ويمكن البداية من الناحية الأخرى

$$B(x) = \int_c^d f(x,y)dx$$

وهكذا

$$\int_a^b B(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

تعريف 4

التكامل

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx \quad \text{أو} \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$$

يسمى التكامل الجزئي أو التكامل المتكرر للدالة f.

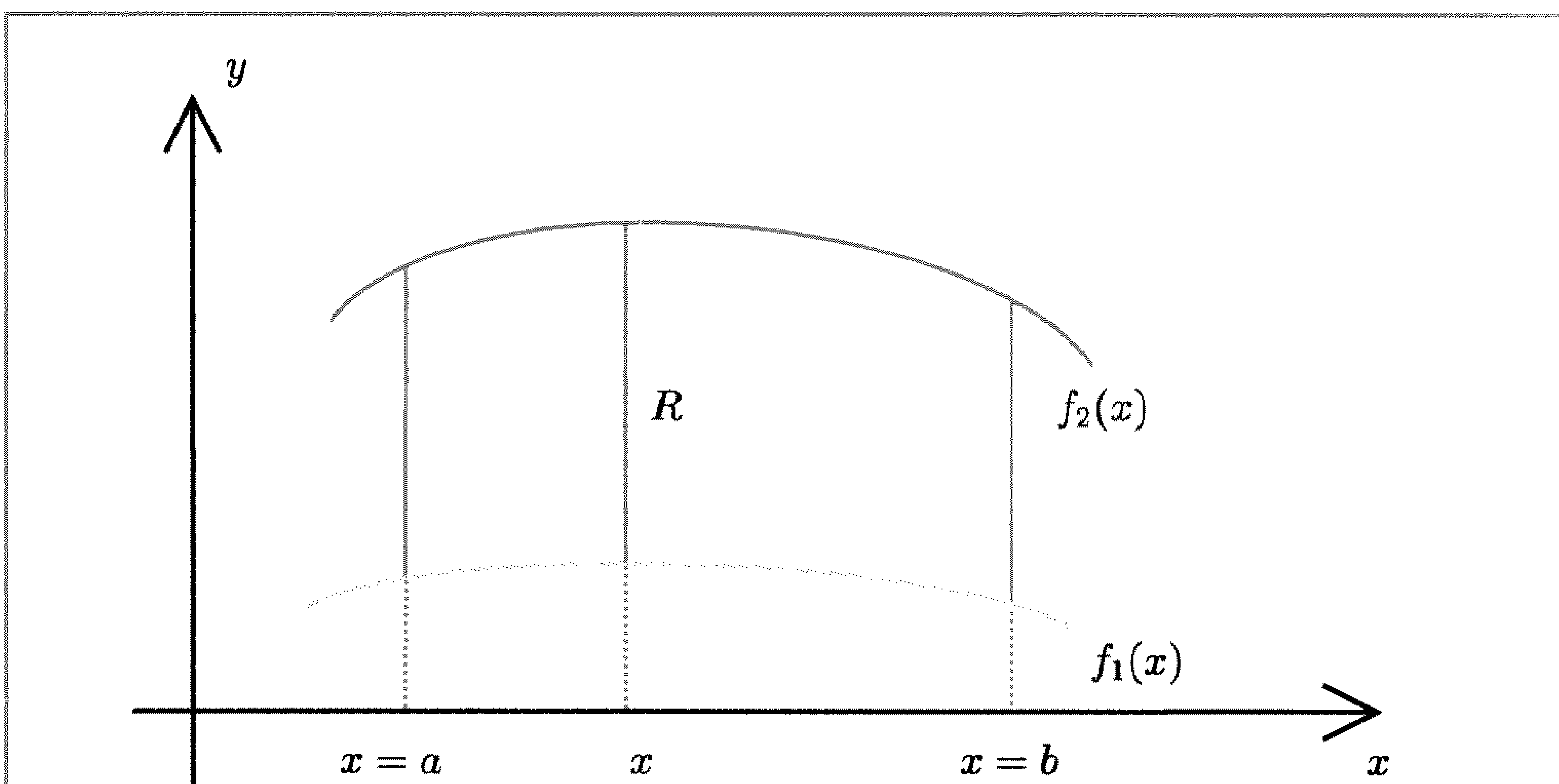
ملاحظة

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\ dy$$

أو

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\ dx$$

والتكامل الثنائي (الجزئي) يمكن أن يعرف في المنطقة R التي حدودها منحنيان كما هو موضح في الشكل (11).



شكل 11

$$R = \{(x,y)/a \le x \le b \; ; \; f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$$

وبذلك يمكن تعريف التكامل الثنائي في R كما يلي:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\, dx$$

حيث حدود y تكون من أسفل $\big(y = f_1(x)\big)$ إلى أعلى $\big(y = f_2(x)\big)$ وحدود x من اليسار $(x = a)$ إلى اليمين $(x = b)$.

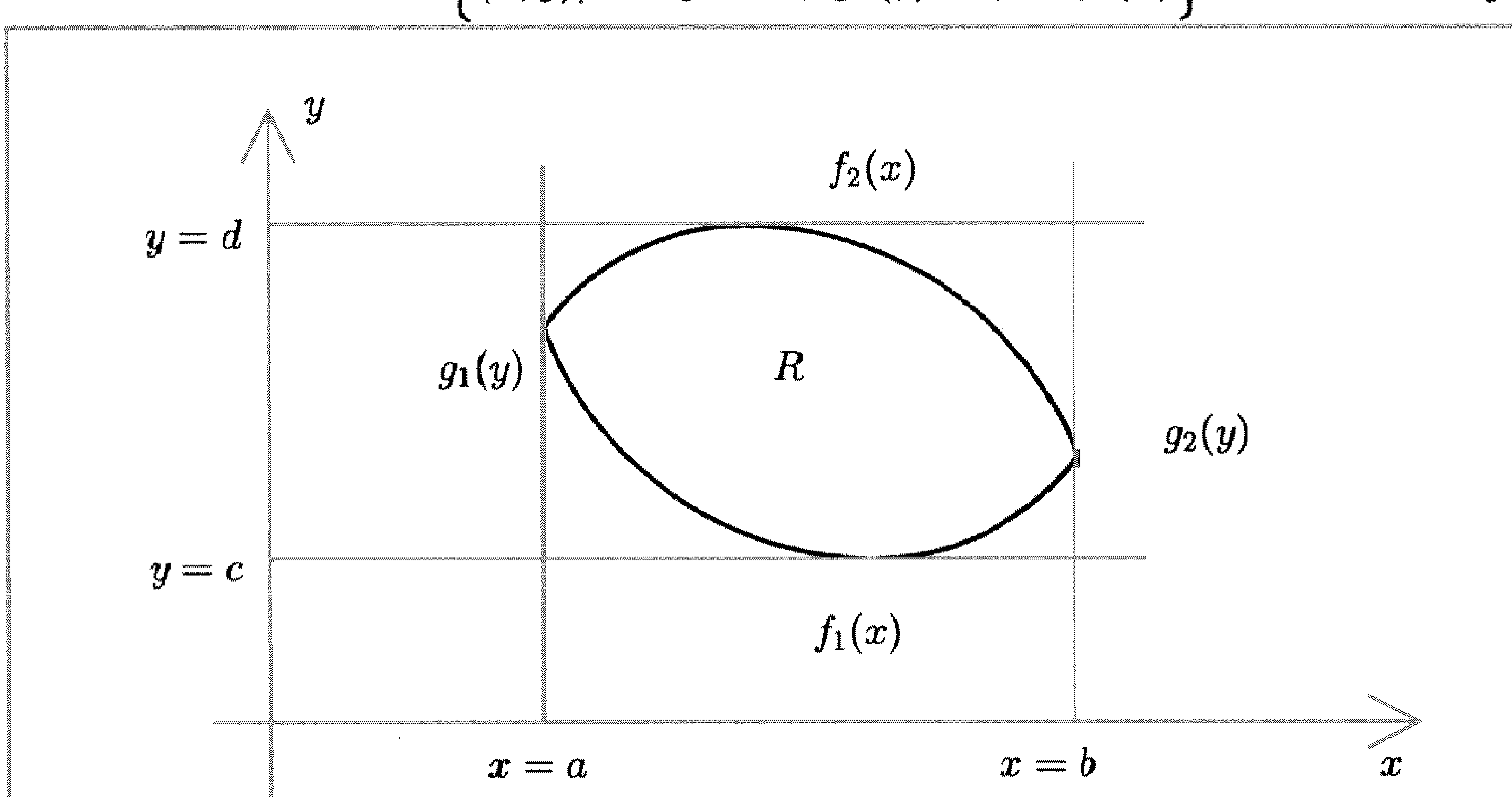
وبصورة عامة يمكن تعريف التكامل الثنائي في المنطقة R كما هو موضح في الشكل (12).

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\, dx$$

حيث أن: $R = \Big\{(x,y)/a \le x \le b \; ; \; f_1(x) \le y \le f_2(x)\Big\}$

و $$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\, dy$$

حيث أن: $R = \Big\{(x,y)/c \le y \le d \; ; \; g_1(y) \le y \le g_2(x)\Big\}$



شكل 12

ملاحظة

$$\int_{a}^{b}\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\,dx=\int_{c}^{d}\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\,dy$$

مثـال 1

أوجد الحجم تحت السطح $z=y+2y$ وفوق المستطيل R حيث أن:

$$R=\left\{(x,y):1\le x\le 2;3\le y\le 5\right\}$$

الحـل

$$V=\iint_R (x+2y)dA=\int_1^2\int_3^5 (x+2y)dy\,dx=\int_1^2 (xy+y^2)\Big|_3^5 dx$$

$$=\int_1^2 (2x+16)dx=(x^2+16x)\Big|_1^2=19$$

وكذلك يمكن حساب الحجم كما يلي:

$$V=\iint_R (x+2y)dA=\int_3^5\int_1^2 (x+2y)dx\,dy$$

$$=\int_2^5\left(\frac{x^2}{2}+2yx\right)\Big|_1^2 dy$$

$$=\int_3^5\left(2y+\frac{3}{2}\right)dy$$

$$=\left(y^2+\frac{3}{2}y\right)\Big|_3^5=19$$

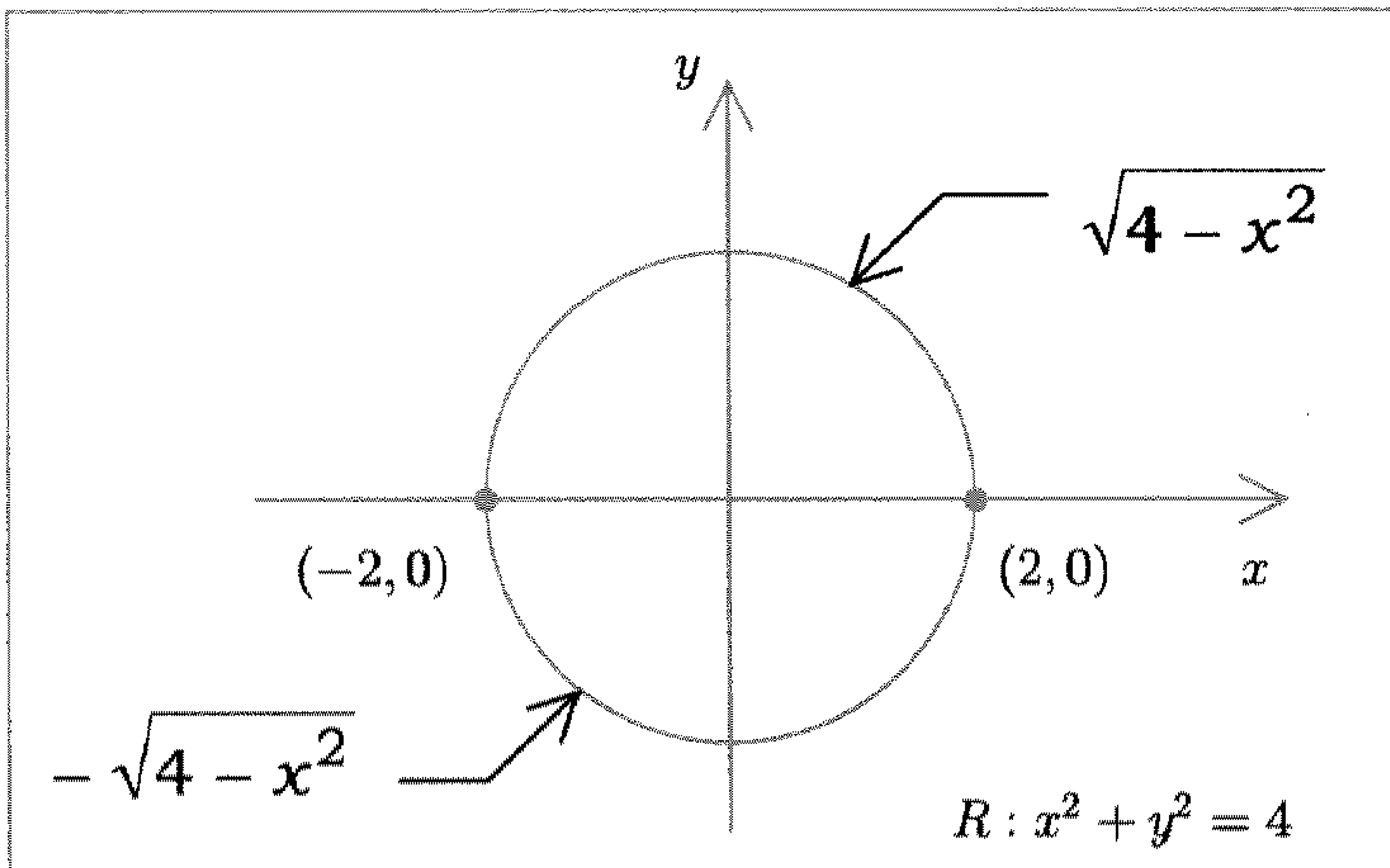
ملاحظة: يمكنك الآن المقارنة مع طريقة الحل المتبعة في البند الأول.

مثــال 2

أوجد قيمة التكامل الثنائي

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy\,dx$$

وارسم المنطقة R.



شكل 13

الحــل

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy\,dx = \int_{-2}^{2}\Big(\frac{1}{2}\,y^2\Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\Big)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\Big(4-x^2-(4-x^2)\Big)dx$$

$$=0$$

حيث أن R دائرة نصف قطرها 2 ومركزها نقطة الأصل.

مثــال 3

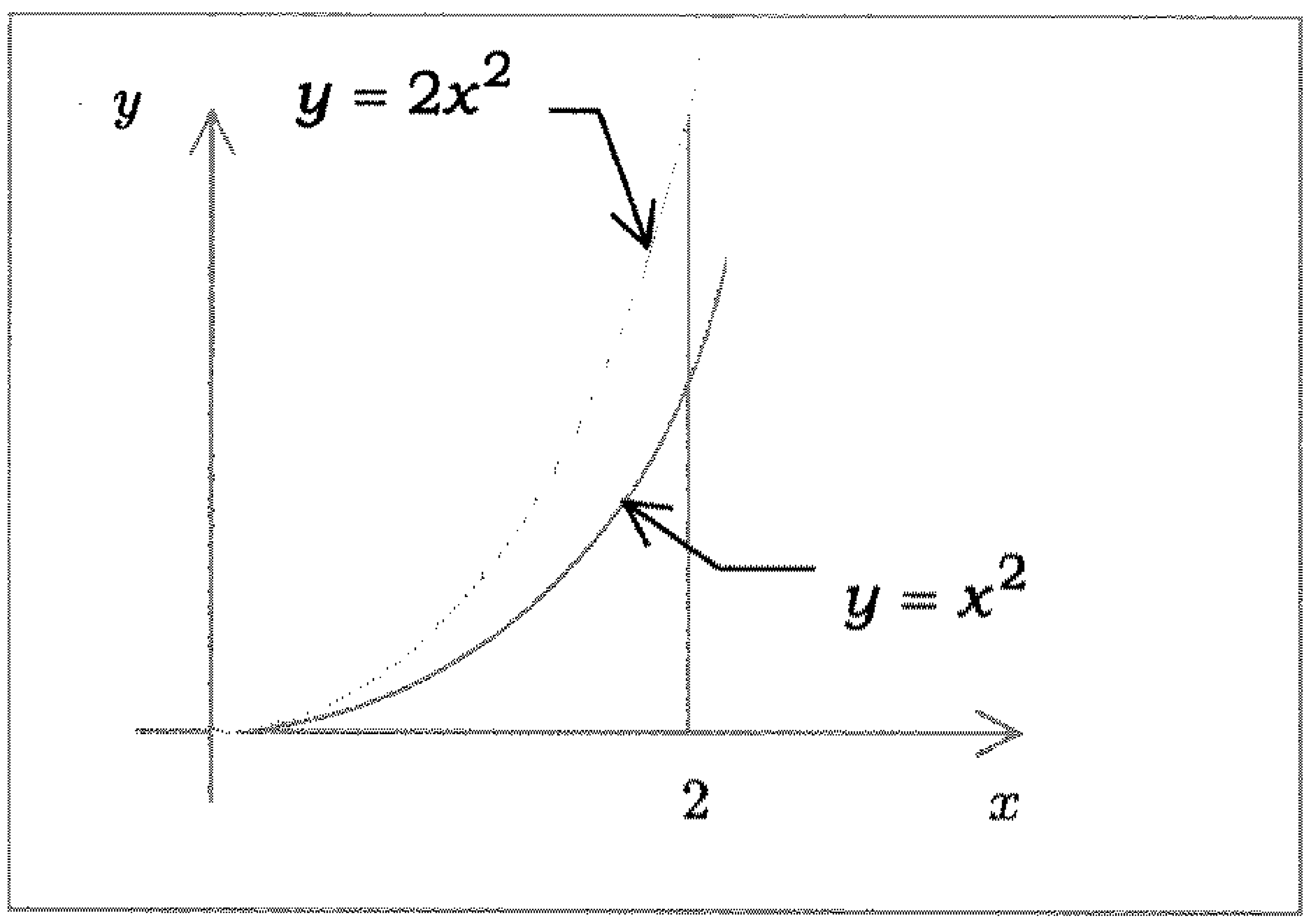
أوجد $\int_{0}^{2}\int_{x^2}^{2x^2} x\cos y\,dy\,dx$

وارسم المنطقة R.

الحـل

$$R = \{(x, y)/x^2 \leq y \leq 2x^2 \ ; \ 0 \leq x \leq 2$$

كما هو موضح بالرسم:



شكل 14

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x^2} x \cos y \, dy \, dx = \int_0^2 x \sin y \Big|_{x^2}^{2x^2} dx \quad ; \quad (x \text{ ثابت})$$

وبالتعويض عن y نجد أن:

$$= \int_0^2 \left(x \sin(2x^2) - x \sin x^2\right) dx$$

$$= \left(-\frac{1}{4} cos(2x^2) + \frac{1}{2} cos \ x^2\right)\Big|_0^2$$

وهكذا

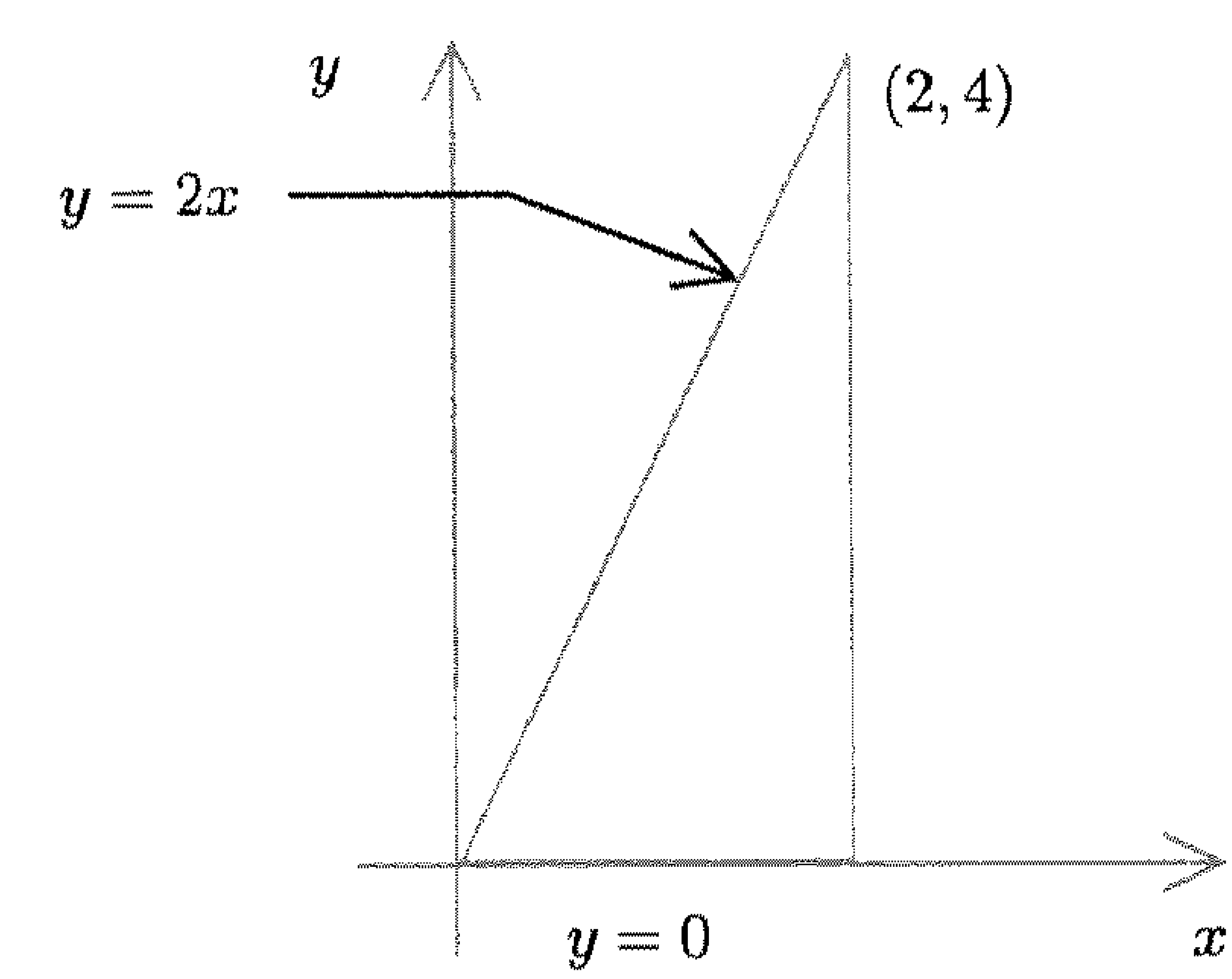
$$= -\frac{1}{4}[cos(8) - 2cos(4) + 1]$$

مثـــال 4

أوجد $\iint\limits_R x\,y\,dA$ حيث R المنطقة المغلقة الواقعة بين $y=0$ ، $y=2x$ ، $x=2$

الحـــل

يفضل دائماً رسم المنطقة R قبل وضع حدود التكامل.



شكل 15

واضح من الشكل أنه يمكن إجراء عملية التكامل حسب الترتيب $dydx$ أو $dxdy$.

أولاً إذا اخترنا الترتيب dydx:

$$\iint\limits_R x\,y\,dA = \int_0^2\int_0^{2x} x\,y\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x}{2}y^2\Big|_0^{2x} dx = \int_0^2 \frac{x}{2}(4x^2)dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^4\right)\Big|_0^2 = 8$$

وإذا اخترنا الترتيب dx dy:

$$\iint_R x\ y\ dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^2 x\ y\ dx\ dy = \int_0^4 \left(2y - \frac{1}{8}y^3\right) dy = 8$$

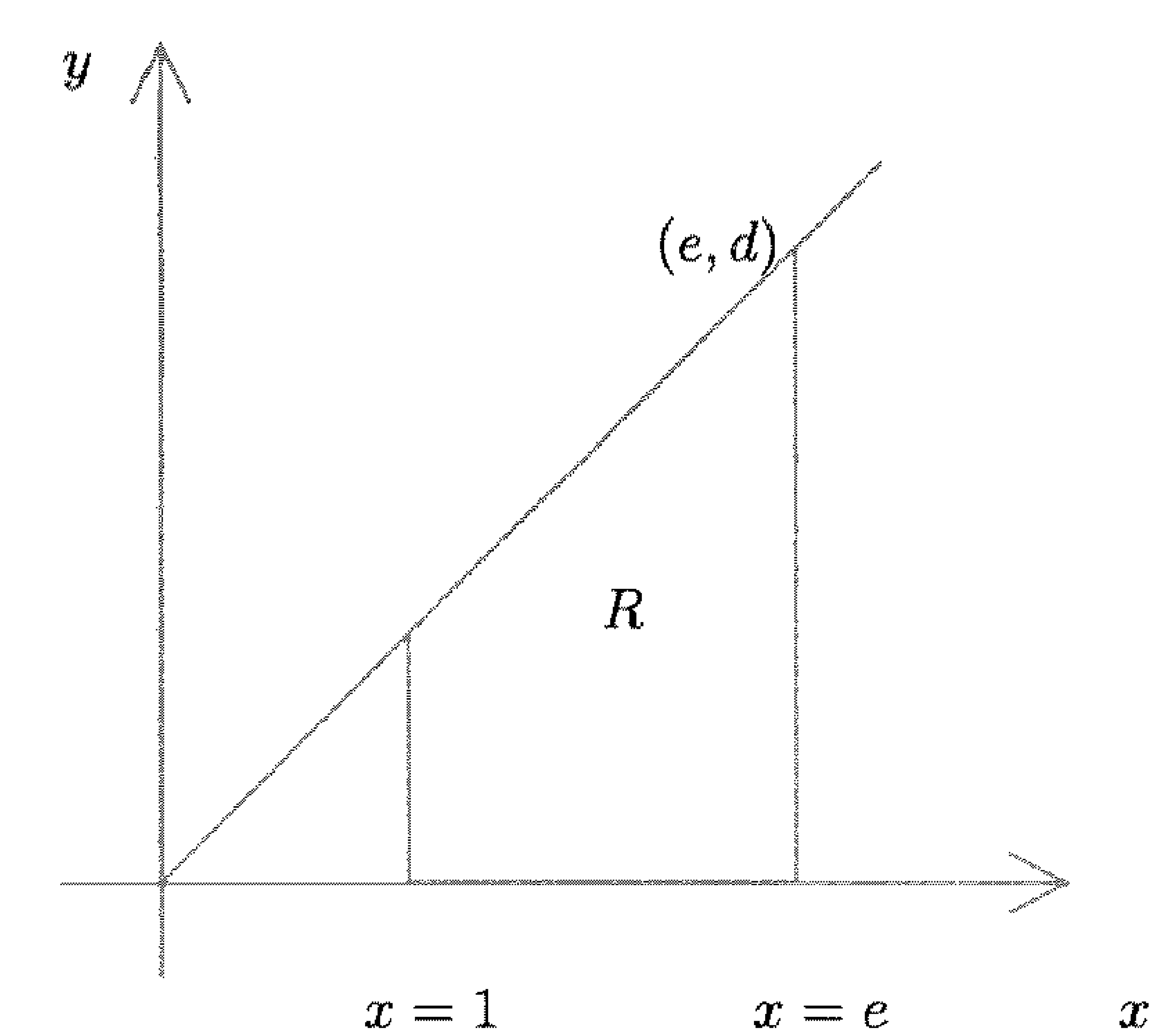
لاحظ تساوي القيمتين.

مثال 5

أوجد $\int_1^e \int_0^x ln\ x\ dy\ dx$

الحل

$$\int_1^e [y\ ln\ x]_0^x dx = \int_1^e x\ ln\ x\ dx$$



شكل 16

ويمكن إيجاد التكامل الأخير كما يأتي:

$$\int_1^2 x\ ln\ x\ dx = \frac{1}{2}\int_1^e ln\ x\ dx^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 ln\ x\Big|_1^e - \int_1^e x^2 d\ ln\ x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^2 - \int_1^e x\ dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{2}x^2\Big|_1^e\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(e^2 + 1)$$

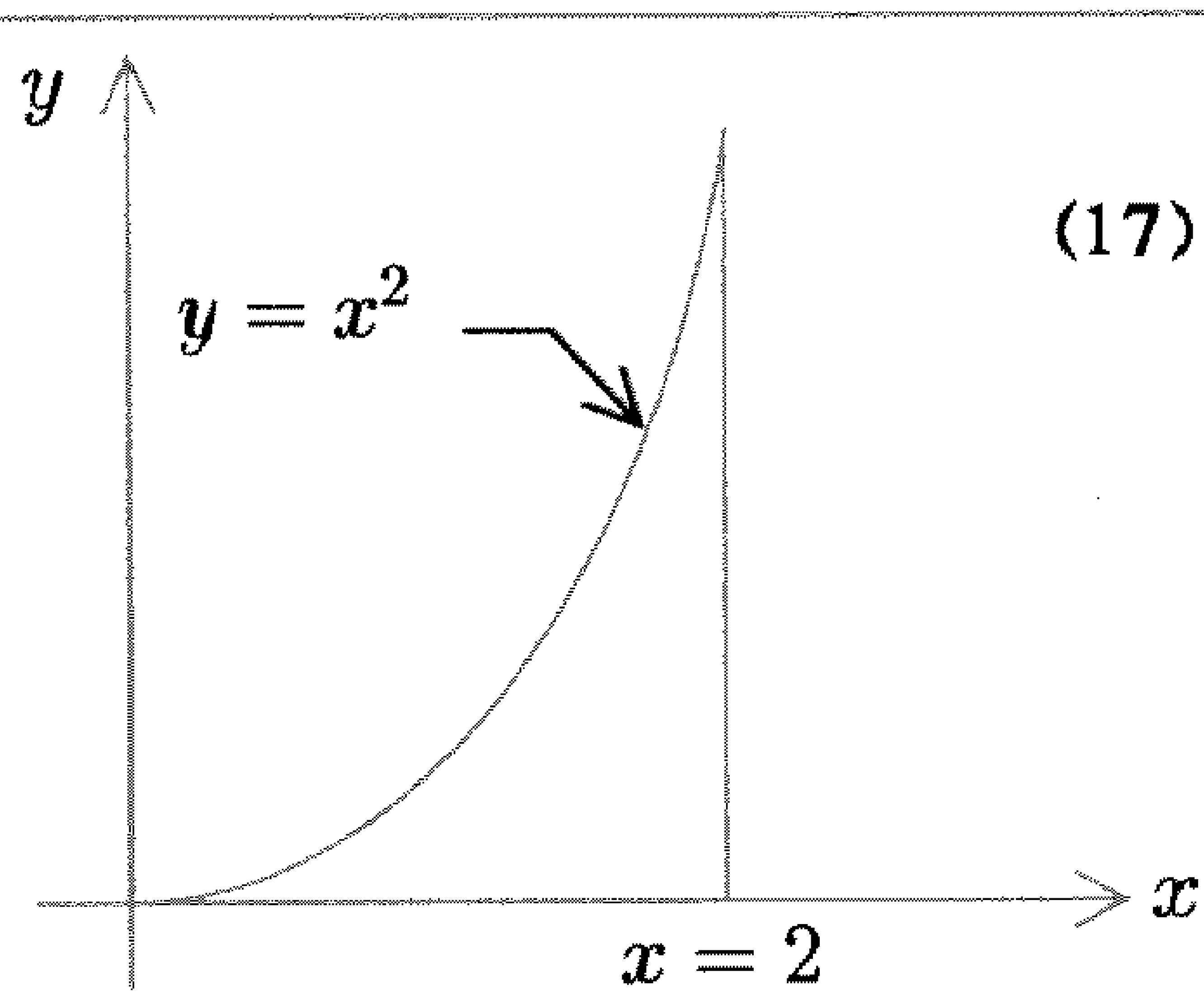
مثال 6

أوجد قيمة التكامل الثنائي:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y\ cosx^5\ dx\ dy$$

الحل

لا يمكن إيجاد قيمة التكامل على هذه الصورة ولذلك سنحاول تغيير حدود التكامل، ويفضل دائماً رسم المنطقة R. أنظر الشكل (17).



شكل (17)

من الشكل يتضح أن:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos x^5 \, dx \, dy = \int_0^2 \int_0^{x^2} y \cos x^5 \, dy \, dx$$

واضح أنه يمكن إيجاد التكامل في الجانب الأيمن، أي أن:

$$\int_0^2 \int_0^{x^2} y \cos x^5 \, dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^4 \cos x^5 \, dx$$

$$= \frac{1}{10} \sin x^5 \Big|_0^2$$

$$= \frac{\sin 32}{10}$$

تمارين

أوجد التكاملات الآتية وارسم المنطقة R في المستوى $x\,y$ في كل حالة:

1) $\displaystyle\int_2^3 \int_{\sqrt{x}}^{x^2} (x^2 - 2xy - 3y^2) dy \, dx$

2) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x^2 - xy) dy \, dx$

3) $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^{2x^2} x \cos y \, dy \, dx$

4) $\displaystyle\int_1^2 \int_1^x \frac{x^2}{y^2} dy \, dx$

5) $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y \, dy \, dx$

6) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3} dy \, dx$

7) $\displaystyle\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin x^3 \, dx \, dy$

8) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{y} \sin y \cos \frac{x}{y} dy \, dx$

$$\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{(y^2)} dy\, dx$$ (9

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{16+x^8}} dx\, dy$$ (10

عبّر عن كل تكامل ثنائي كتكامل جزئي ثم أوجد قيمة التكامل:

11) $\iint_R x\, y^2\, dA$ حيث أن R مثلث رؤوسه $(0,0)$, $(3,1)$, $(-2,1)$.

12) $\iint_R e^{\frac{x}{y}}\, dA$ حيث أن R المنطقة المحددة بـ $y=4$, $y=-x$, $y=2$.

13) $\iint_R x^3 \cos xy\, dA$ حيث أن R المنطقة المحددة بـ $x=2$ ، $y=0$ ، $y=x^2$.

14) بيّن أن:

أ) $$\iint_R dA = \frac{1}{2}$$

حيث أن R المنطقة الواقعة بين رسمي المعادلتين:

$$x = y \quad \text{و} \quad x = y^{\frac{1}{3}}$$

ب) $$\int_{-\infty}^{\infty} Exp(-x^2-y^2) dx\, dy = \pi$$

جـ) $$\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \cos\left(\frac{x^2}{3} - x\right) dx\, dy = 2\sin\left(\frac{2}{3}\right)$$

4.2 الحجم والمساحة والكتلة والعزم

التكامل الثنائي له تطبيقات متعددة وسنذكر منها ما يلي:

1) الحجم (Volume)

إذا كانت $z = f(x,y)$ تمثل معادلة السطح، فإن:

$$V = \iint\limits_R f(x,y)dA$$

تعطي حجم المجسم الواقع بين السطح والمستوى $x\,y$

2) المساحة (Area)

إذا كانت $f(x,y) \equiv 1$، فإن

$$A(R) = \iint\limits_R dA$$

حيث أن $A(R)$ تمثل مساحة المنطقة المغلقة R.

3) الكتلة (Mass)

إذا كانت $f(x,y)$ تمثل الكثافة $\left(\dfrac{\Delta m}{\Delta V}\right)$، فإن:

$$M(R) = \iint\limits_R f(x,y)dA$$

حيث أن $M(R)$ كتلة الصفيحة التي على شكل المنطقة R.

4) مركز الكتلة (Center of Mass)

إذا كانت الدالة تمثل الكثافة، فإن مركز الكتلة (x,y) للصفيحة الممثلة بالمنطقة R يعطى بالمعادلتين:

$$M_x = \iint\limits_R y\, f(x,y)dA \quad , \quad M_y = \iint\limits_R x\, f(x,y)dA$$

5) عزم القصور الذاتي (Moment of Inertia)

عزم القصور الذاتي للصفيحة حول محور x ومحور y

$$I_y = \iint_R x^2 f(x,y)dA \quad , \quad I_x = \iint_R y^2 f(x,y)dA$$

وكذلك عزم القصور الذاتي القطبي حول نقطة الأصل:

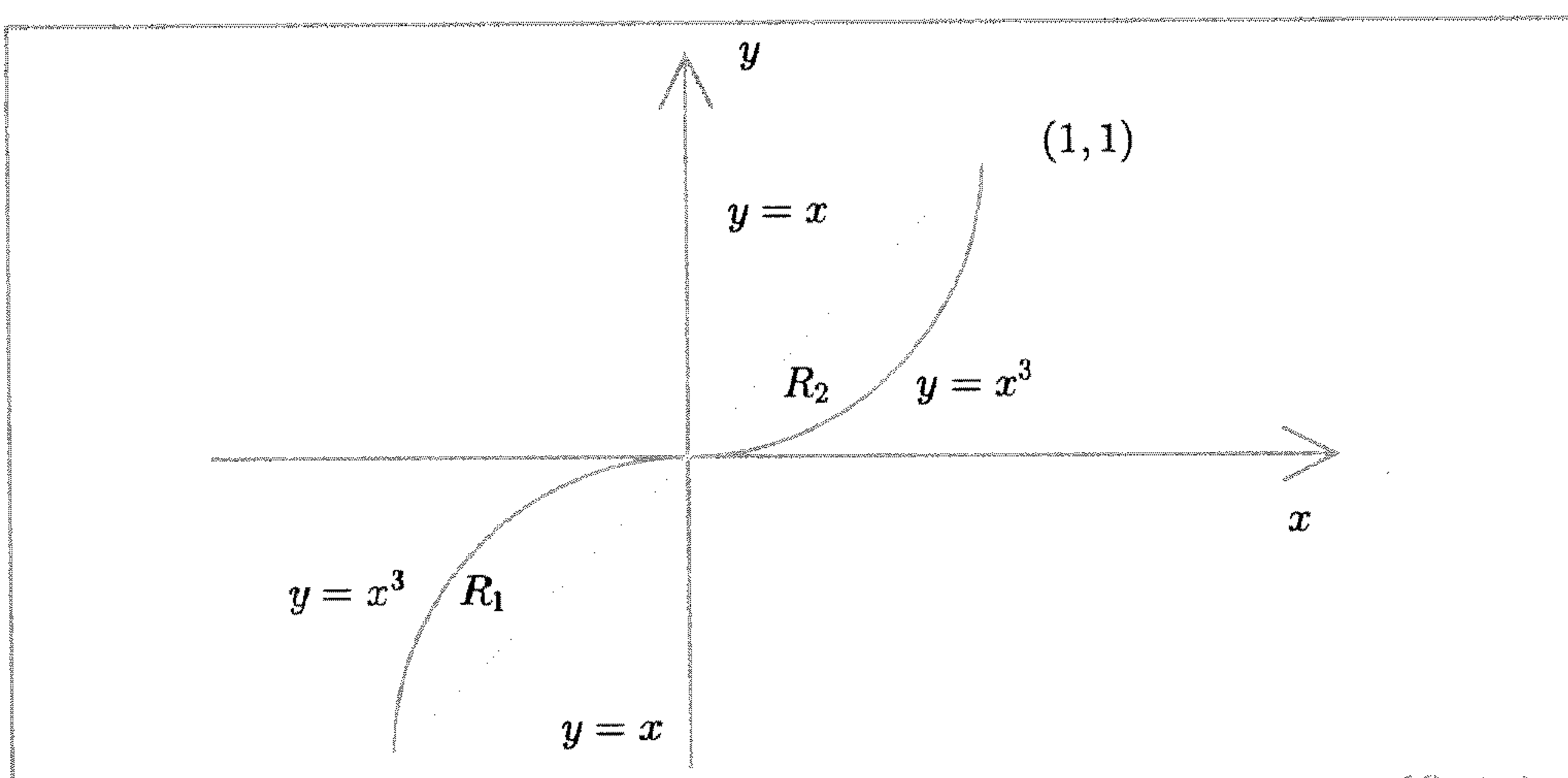
$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2) f(x,y)dA$$

مثـال 1

أوجد المساحة الواقعة بين المنحنى $y = x^3$ والمستقيم $y = x$.

الحــل

المعادلتان تتقاطعان عند النقاط التالية $(0,0)$، $(1,1)$، $(-1,-1)$ كما هو موضح بالشكل (18).



شكل 18

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2)$$

ولذلك $$A(R)\int_{-1}^{0}\int_{x}^{x^3} dy\ dx + \int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x} dy\ dx = \frac{1}{2}$$

وتترك تفاصيل إجراء عملية التكامل للقارئ.

مثال 2

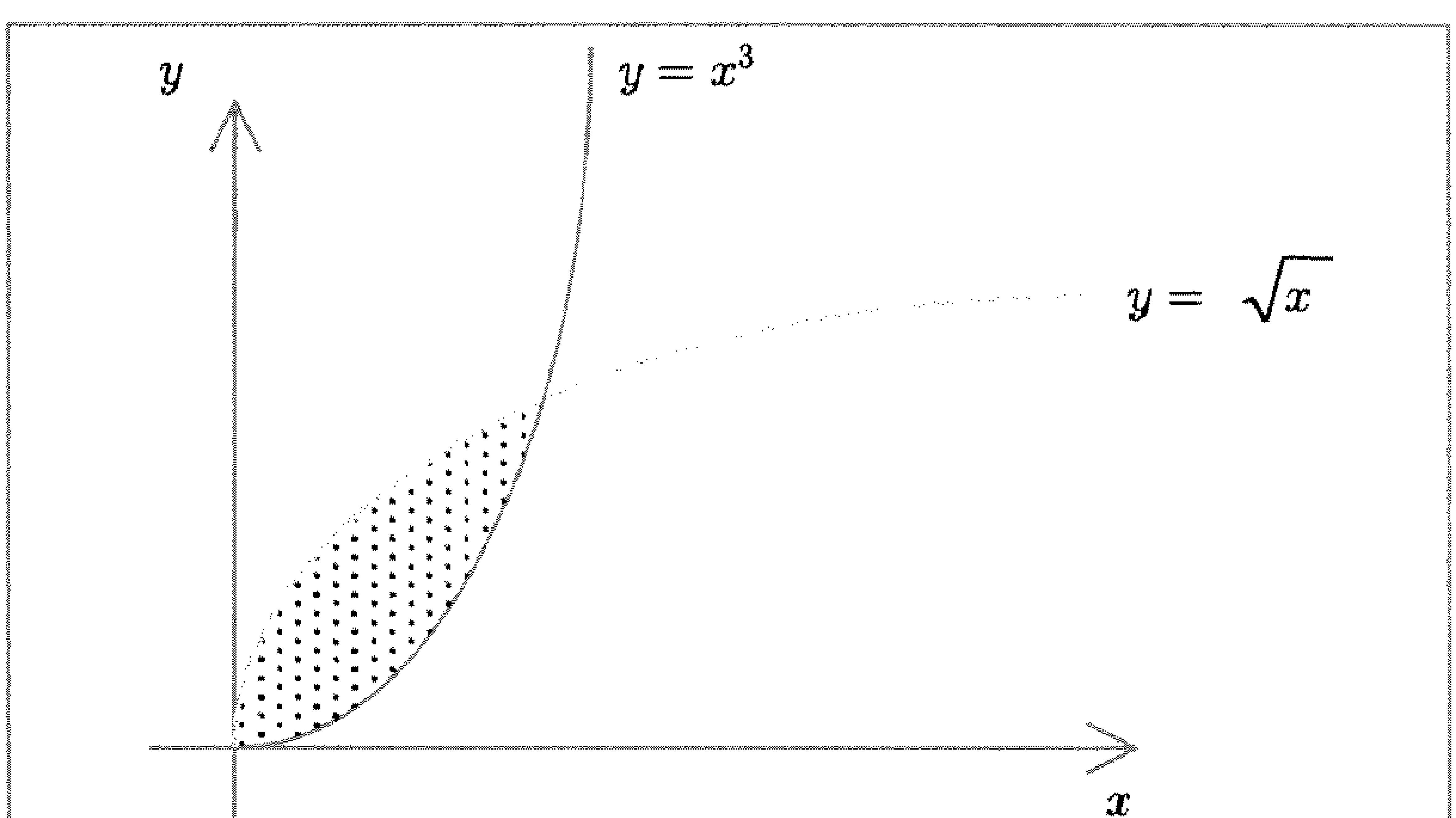
أوجد المساحة المحصورة بين المعادلتين $y = x^3$ و $y = \sqrt{x}$

الحل

المنحنيان يتقاطعان عند النقطتين $(0,0),(1,1)$.

المساحة:

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_{0}^{1}\int_{x^3}^{\sqrt{2}} dy\ dx \\ &= \int_{0}^{1} (\sqrt{x} - x^3)dx \\ &= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{12} \end{aligned}$$



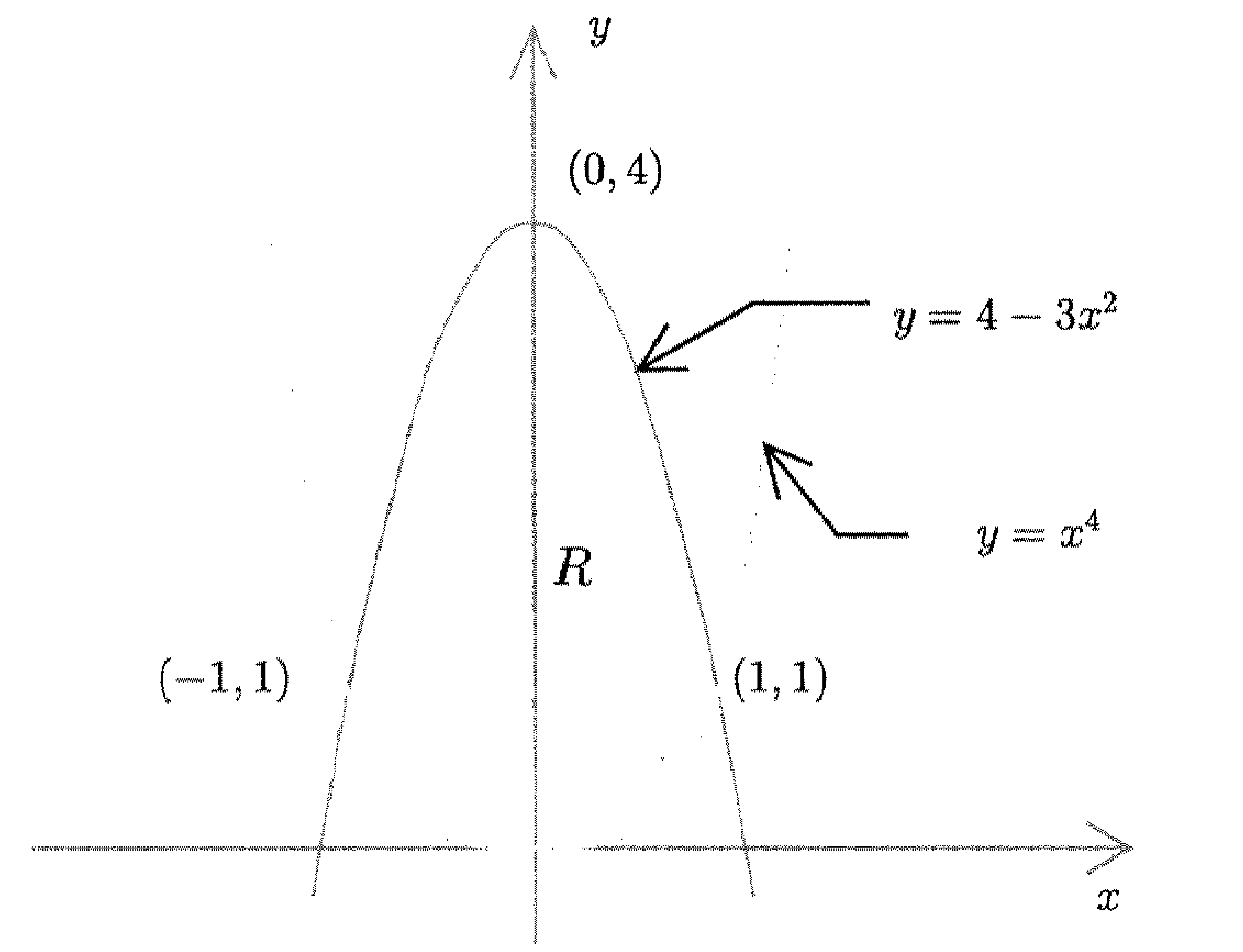
شكل 19

مثـال 3

أوجد مساحة المنطقة R الواقعة بين المنحنيين $y = x^4$ و $y = 4 - 3x^2$

الحـل

يتقاطع المنحنيان عند النقطتين $(1,1)$, $(-1,1)$.



شكل 20

مساحة المنطقة R

$$A(R) = \int_{-1}^{1} \int_{x^4}^{4-3x^2} dy\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (4 - 3x^2 - x^4) dx$$

$$= \left(4x - x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left[\left(4 - 1 - \frac{1}{5}\right) - \left(-4 + 1 + \frac{1}{5}\right)\right] = 6 - \frac{2}{3} = \frac{28}{5}$$

مثــال 4

أوجد حجم المجسم المحدد بالسطوح التالية:

$$x=2\ ,\ z=0\ ,\ y=0\ ,\ x^2=y+z$$

الحــل

$$V=\int_0^2\int_0^{x^2}(x^2-y)dy\,dx=\int_0^2(x^2y-\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^{x^2}dx$$

$$=\int_0^2\frac{x^4}{2}\,dx=\frac{16}{5}$$

ملاحظة: سنتناول إيجاد حجوم المجسمات بالتفصيل في الفصل الثالث عند دراسة التكامل الثلاثي.

مثــال 5

صفيحة معدنية لها شكل المنطقة R في المستوى $x\,y$ محددة برسم المعادلتين $x=y^2$ و $x=4$. أوجد مركز الكتلة إذا كانت الكثافة عند $P(x,y)$ تتناسب طرداً مع المسافة من محور y إلى النقطة P.

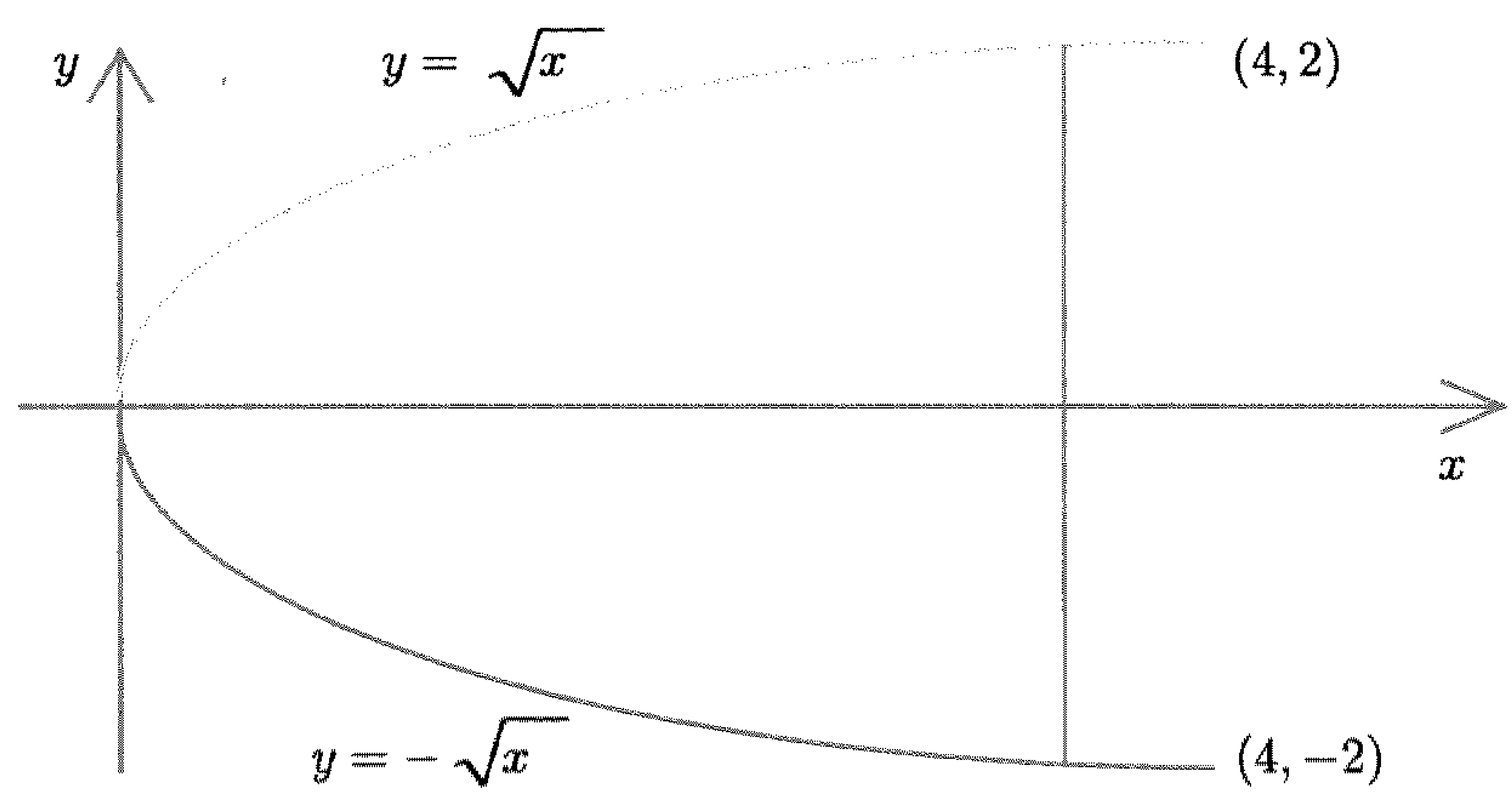
الحــل

من المعطيات $P(x,y)=k\,x$ حيث أن k مقدار ثابت، وحسب التعريف السابق كتلة الصفيحة:

$$M=\iint\limits_R k\,x\,dA$$

$$= k\int_0^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x \, dy \, dx$$

$$= 2k\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{4k}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4 = \frac{128}{5}k$$



شكل 21

عزم الصفيحة بالنسبة للمحور y:

$$M_y = \int_0^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x(kx) \, dy \, dx$$

$$= 2k\int_0^4 x^{\frac{5}{2}}dx$$

$$= \frac{4k}{7}(128) = \frac{512k}{7}$$

ومركز الكتلة

$$x = \frac{M_y}{M} = \frac{512k}{7} \cdot \frac{5}{128k} = \frac{20}{7}$$

يترك تمرين للقارئ أن يبين $y = 0$، وهكذا

$$(x, y) = \left(\frac{20}{7}, 0\right)$$

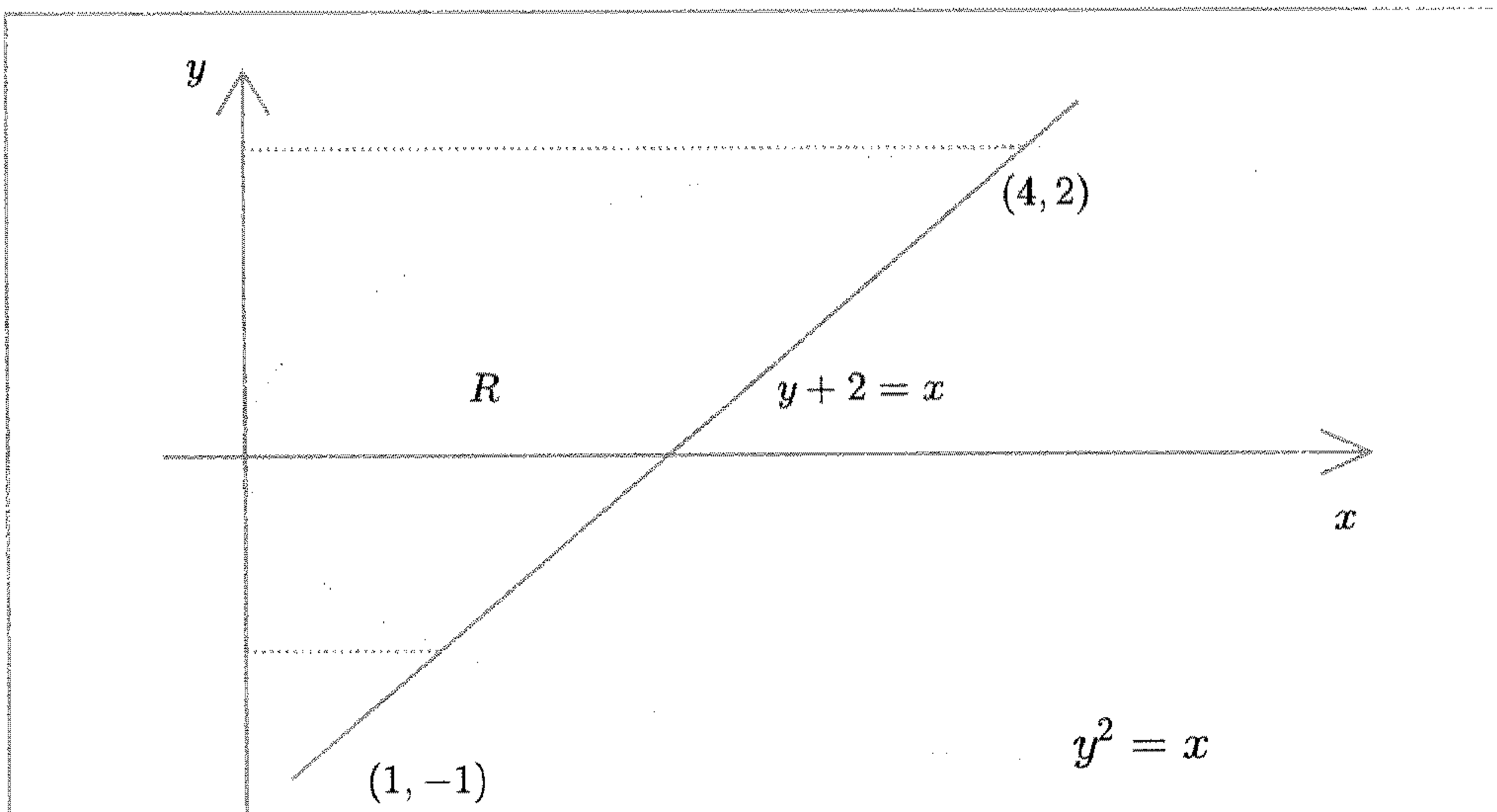
مثـــال 6

أوجد كتلة المنطقة R المحددة بـ $y^2 = x$ و $x = y + 2$ حيث أن الكثافة تعطى بالمعادلة التالية: $P = x^2\ y^2$

الحـــل

من السهل أن نوضح أن المنحنيين يتقاطعان عند النقطتين $(1,-1)$, $(2,4)$.

الكتلة: $M(R) = \iint\limits_R P(x,y)\ dA$



شكل 22

واضح من الشكل أن:

$$M(R) = \int_1^2 \int_{y^2}^{y+2} x^2\ y^2\ dx\ dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} y^2\ x^3 \Big|_{y^2}^{y+2}\ dx$$

وبالتعويض عن y وتجميع الحدود المتشابهة:

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}y^6 - \frac{1}{9}y^9 + \frac{6}{5}y^5 + 3y^4 + \frac{8}{3}y^3\right]\Bigg|_{-1}^{2} = 20.7$$

مثـــال 7

صفيحة معدنية مستوية على شكل مثلث محددة بالمستقيمين $y = x$ و $y = 2 - x$، ومحور x، كثافتها تعطى بالمعادلة التالية:

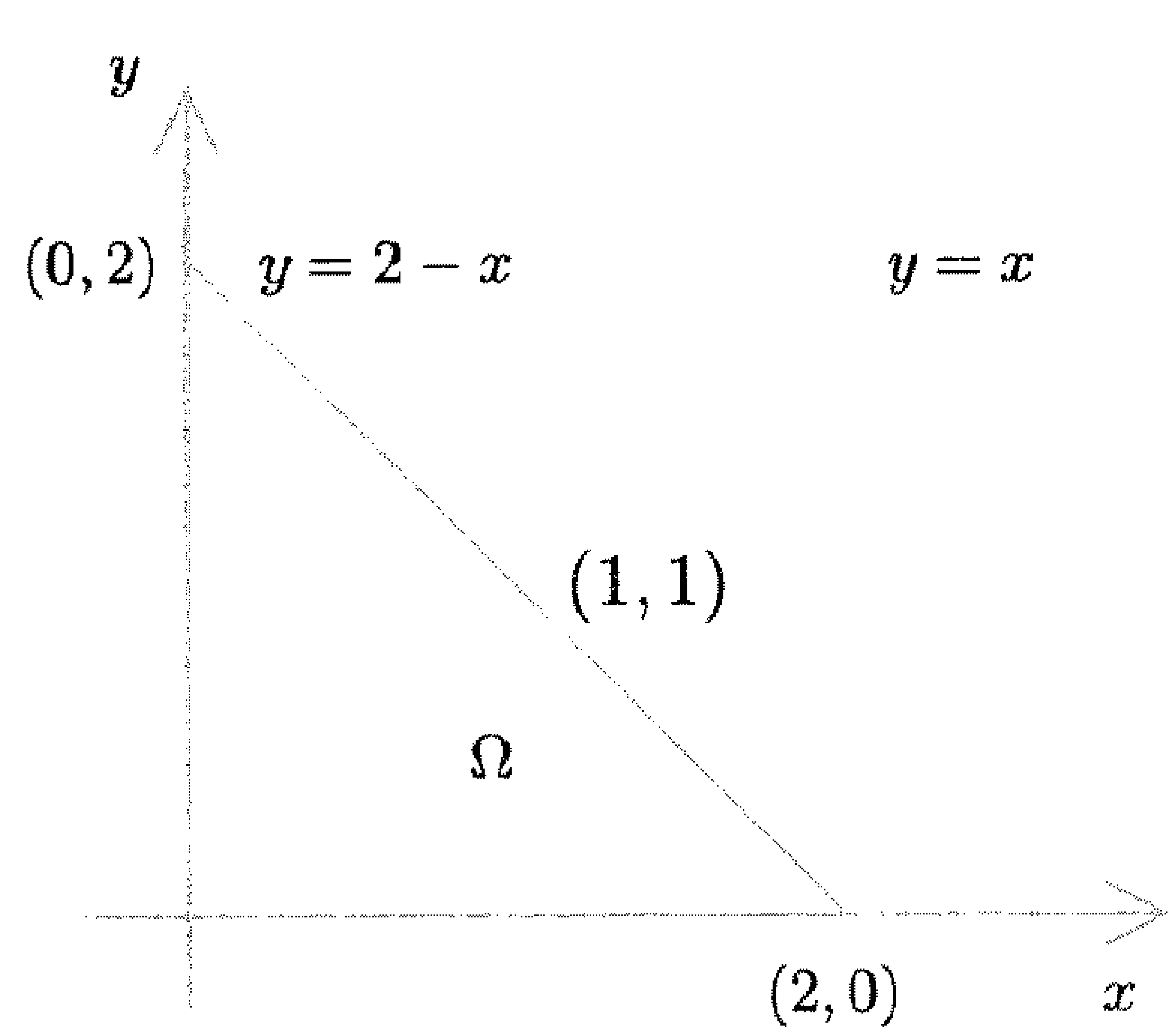
$$P(x, y) = 1 + 2x + y$$

المسافة مقيسة بالأمتار، والكتلة بالكيلوجرام، أوجد الكتلة، ومركز الكتلة للصفيحة.

الحـــل

$$\begin{aligned} M &= \iint_{\Omega} P(x, y) dA \\ &= \int_0^1 \int_y^{2-y} (1 + 2x + y) dx\, dy \\ &= \int_0^1 (x + x^2 + xy)\Big|_y^{2-y} dy \\ &= \int_0^1 (6 - 4y - 2y^2) dy = \frac{10}{3} kg \end{aligned}$$

ويترك للقارئ أن يبين: (x,y) = (1.1, 0.35)



شكل 23

تمارين

أوجد المساحة المحددة بالمعادلات أو المتباينات المذكورة وارسم المنطقة R في كل حالة:

1) $y=x$ ، $y=3x$ ، $x+4=4$

2) $y=ln|x|\ ,\ y=0\ ,\ y=1$

3) $x=4\ ,\ x=1\ ,\ y=-x\ ,\ y=\sqrt{x}$

4) $y^2=-x\ ,\ y=2\ ,\ y=-1\ ,\ x-y=4$

5) $y=3\ ,\ y=-2\ ,\ y-x=2\ ,\ x=y^2$

6) $2x+y+2=0\ ,\ 7x-y-17=0\ ,\ x-y+1=0$

7) $x=\pi\ ,\ x=-\pi\ ,\ y=sin\ x\ ,\ y=e^x$

8) $y=\dfrac{1}{1+x^2}\ ,\ y=x^2$

9) $x=32-y^2\ ,\ x=y^2$

10) $x=4y^2-3\ ,\ x=y^2\ ,\ x=2$

11) $y=sinh\ x\ ,\ y=cosh\ x$ في الفترة $[-1,1]$.

أوجد كتلة المنطقة R في الحالات الآتية

12) المنطقة R داخل الدائرة $x^2+y^2=46$ حيث أن $P(x,y)=x^2+y^2$

13) المنطقة R محددة بالمنحنيين $y=x^2$ و $y^2=x$ حيث أن $P=3y$

14) المنطقة R محددة بالمستطيل الذي رؤوسه $(0,0),(a,0),(a,b),(0,b)$ حيث أن:

$$P=\frac{3x}{1+x^2y^2}$$

أوجد حجم المجسمات $V(S)$ المذكور في الحالات التالية:

15) المجسم S محدد بالمعادلة التالية:

$$x+y+z=3\ ,\ y=0\ ,\ x^2+z^2=4$$

16) المجسم S محدد بالمعادلتين:

$$y=x-\frac{3}{2}\ ,\ y^2+z^2=2x$$

17) المجسم S محدد بالمعادلتين:

$$z^2=4-y\ ,\ y=x^2$$

5.2 تغيير المتغيرات في التكامل

نظرية 3

إذا كانت $f(x)$ متصلة على الأقل في $x_1 \le x \le x_2$ و $x = x(u)$ معرفة في $u_1 \le u \le u_2$ ومشتقتها الأولى متصلة مع $x_1 = x(u_1)$ و $x_2 = x(u_2)$ و $f[x(u)]$ متصلة في $u_1 \le u \le u_2$ فإن:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \int_{u_1}^{u_2} f[x(u)] \frac{dx}{du} du \qquad (1)$$

البرهان

إذا كانت $F(x)$ تكاملاً غير محدد أو لانهائياً للدالة $f(x)$، فإن:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = F(x_2) - F(x_1) \qquad (1)$$

ولكن $F[x\ (u)]$ تكون تكاملاً لانهائياً للدالة $f[x(u)]\dfrac{dx}{du}$

وبتطبيق قاعدة السلسلة:

$$\frac{dF}{du} = \frac{dF}{dx}\,\frac{dx}{du} = f(x)\frac{dx}{du} = f[x(u)]\frac{dx}{du} \qquad (2)$$

وبتكامل طرفي المعادلة (2) نجد أن:

$$F[x(u_2)] - F[x(u_1)] = F(x_2) - F(x_1) = \int_{u_1}^{u_2} f[x,u]\frac{dx}{du} \qquad (3)$$

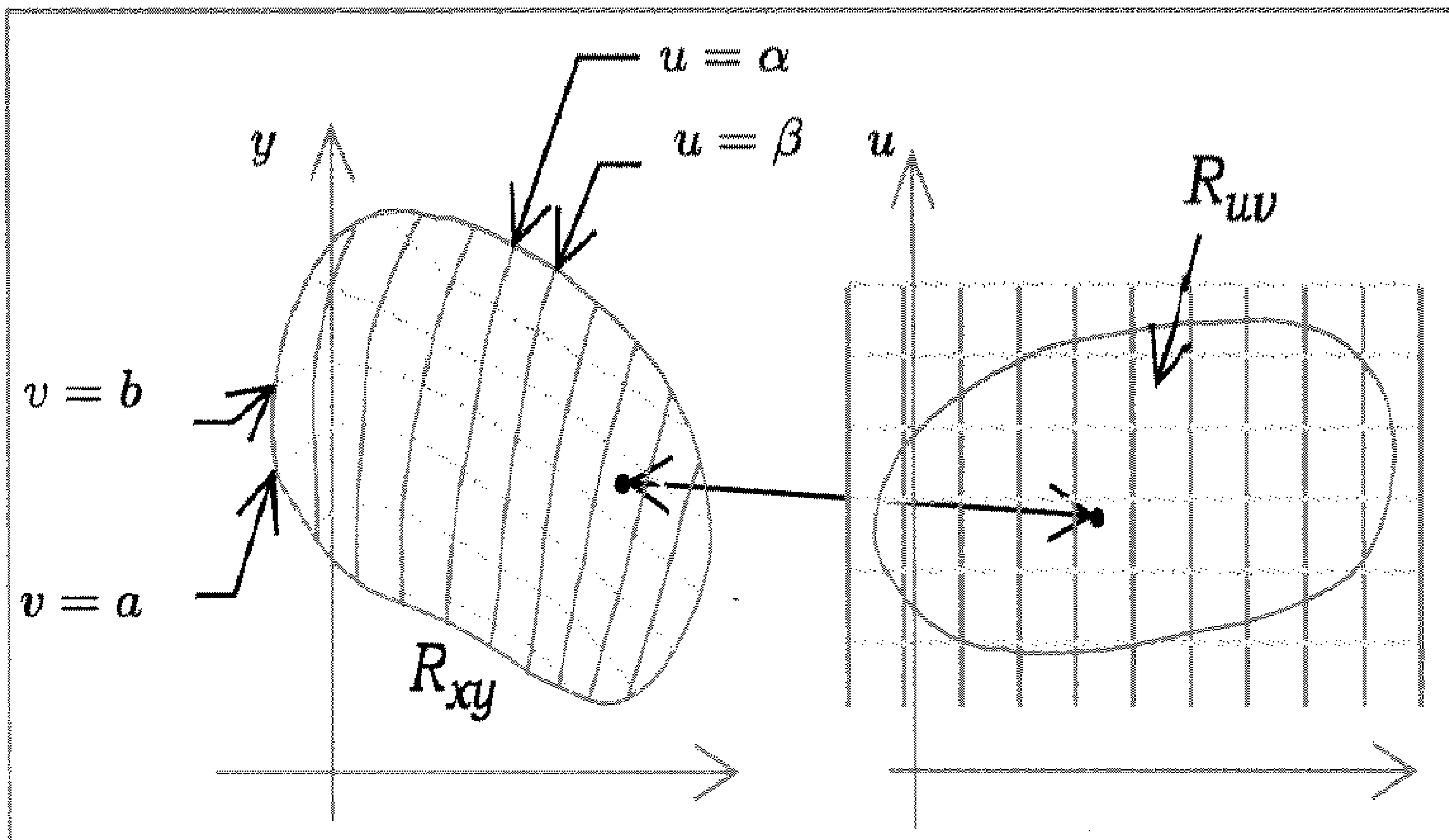
من (1) و(3) يكتمل البرهان.

نظرية 4

إذا كانت الدالة $f(x,y)$ متصلة في R_{xy}، وإذا كانت الدالتان $x=x(u,v)$ و $y=y(u,v)$ معرفتين ولهما مشتقات أولية متصلة في R_{uv}، وإذا كانت الدالتان العكسيتان $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ معرفتين ومتصلتين في R_{xy} حيث أن $f[x(u,v)\ ,\ y(u,v)]$ متصلة في R_{uv}، فإن:

$$\iint_{R_{xy}} f(x,y)dx\ dy = \iint_{R_{uv}} f[x(u,v),y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\ dv$$

المعادلتان $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ يمكن اعتبارهما كمقدمة للإحداثيات الخطية المنحنية في المستوى $x\,y$ كما هو موضح في الشكل (24a).



شكل (24a) شكل (24b)

المستقيمات (u = مقدار ثابت) و(v = مقدار ثابت) تكون نظام منحنيات موازية للمحورين ومن الطبيعي استخدامهما لتقسيم المنطقة R_{uv} إلى عناصر أو جزيئات من المساحة ΔA لتكوين التكامل الثنائي، وعند اعتبار العناصر الخطية

المنحنية، الحجم (تحت السطح $z = f(x,y)$) يقدر بـ $f(x,y)\Delta A$ حيث ΔA ترمز إلى أحد العناصر الخطية المنحنية.

إذا أمكن التعبير عن ΔA بـ $J\Delta u\, \Delta v$ والدالة $f(x,y)$ بـ $f((x(u)\ ,\ y(v))$ فإن:

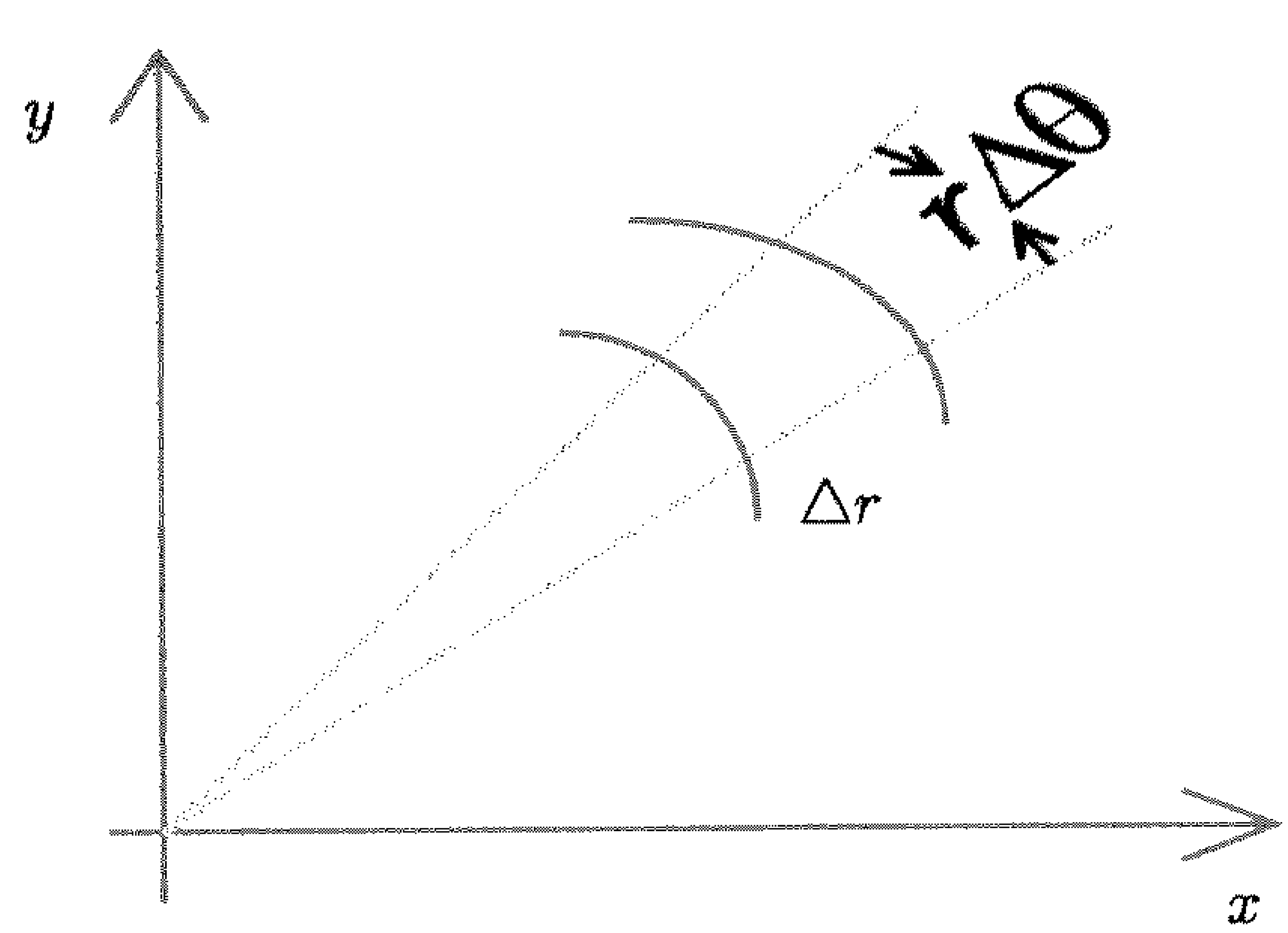
$$\sum_i f[x(u,v)\ ,\ y(u,v)]J\Delta u\ \Delta v = \iint_{R_{uv}} f[x(u,v)\ ,\ y(u,v)]Jdu\ dv$$

حيث أن $J = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$

العدد J (الجاكوبي) يمكن تفسيره بـ $\dfrac{\Delta\ A_{xy}}{\Delta\ A_{uv}}$ حيث أن $\Delta\ A_{xy}$ و $\Delta\ A_{uv}$ عنصرا المساحة في المستويين $x\ y$ و $u\ v$ على التوالي.

والإحداثيات القطبية تعتبر مثالاً للإحداثيات الخطية المنحنية.

$$y = r\ sin\ \theta\ \ ,\ \ x = r\ cos\ \theta$$



شكل 25

عنصر المساحة بالإحداثيات القطبية

عنصر المساحة تقريباً مستطيل جوانبه Δr و$r\Delta\theta$ كما هو موضح في الشكل (25)، ولذلك يمكن التعبير عن التكامل الثنائي بالإحداثيات القطبية كما يلي:

$$\iint_{R_{xy}} f(x,y)dx\,dy = \iint_{R_{r\theta}} f(r\,cos\,\theta\,,\ r\,sin\,\theta)rd\theta dr$$

لاحظ أن الجاكوبي في هذه الحالة:

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} cos\theta & -r\,sin\theta \\ sin\,\theta & r\,cos\,\theta \end{vmatrix} = r$$

وإذا كانت المنطقة $R_{r\theta}$ محددة بـ $r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\ ,\ \alpha \le \theta \le \beta$، فإن:

$$\iint_{R_r} f(r\,cos\,\theta\,,\ r\,sin\,\theta)rd\,\theta\,d\theta = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\,cos\,\theta\,,\ r\ \sin\ \theta)rd\,rd\theta$$

وفي بعض المسائل يكون من السهل إيجاد التكامل حسب الترتيب $d\theta\ dr$ فإذا كانت R محددة بـ $\theta_1(r) \le \theta \le \theta_2(r)\ ,\ a \le r \le b$، فإن:

$$\iint_{R_{r\theta}} f(r\,cos\,\theta\,,\ r\,sin\,\theta)rdrd\theta = \int_{a}^{b}\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\,cos\,\theta\,,\ r\,sin\,\theta)rd\theta dr$$

مثال 1

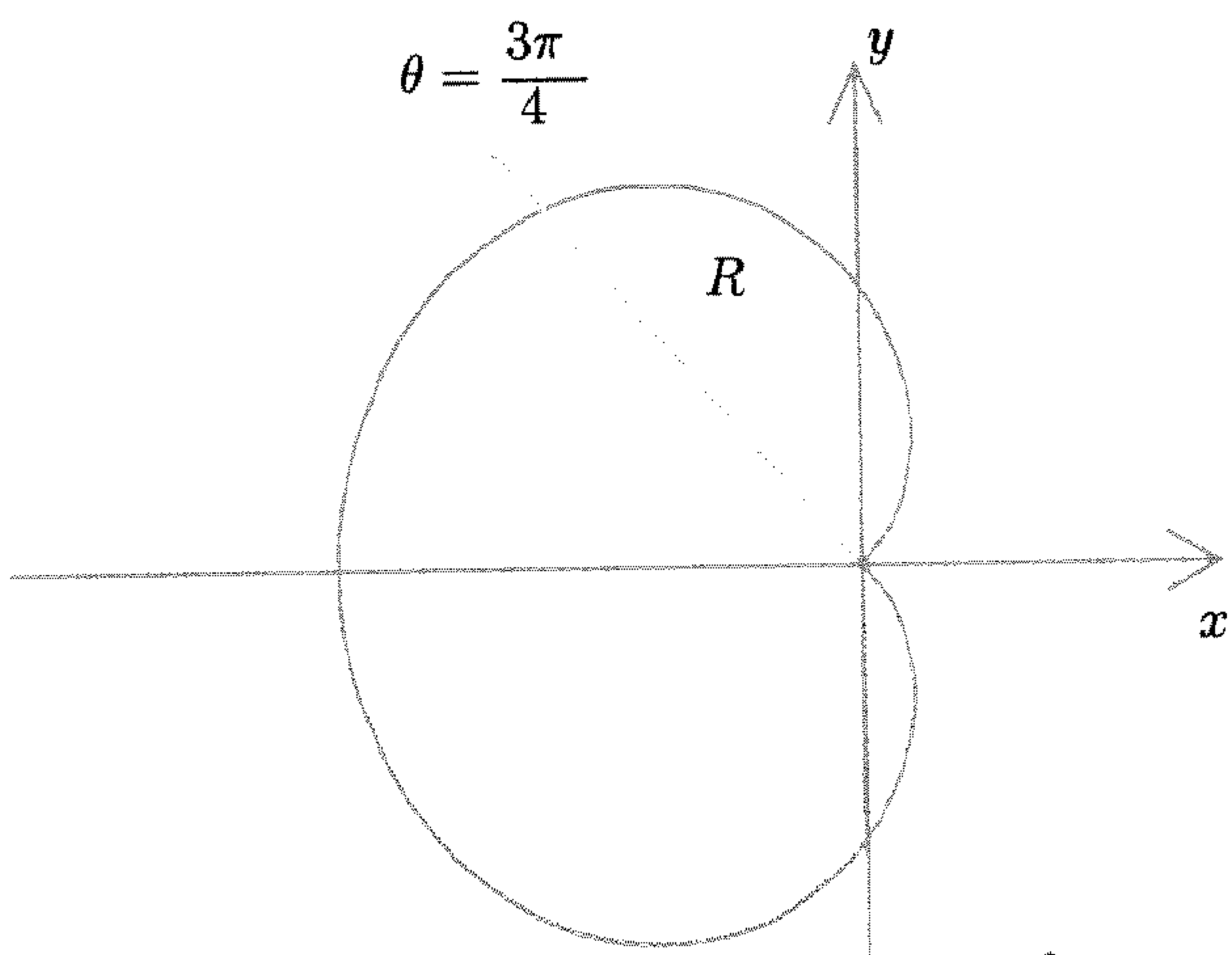
أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمستقيم $y = -x$ والمنحنى

$$x^2 + y^2 = 3\sqrt{x^2+y^2} - 3x$$

الحل

نستخدم الإحداثيات القطبية لوصف المنطقة R.

المنحنى $r^2 = 3r - 3rcos\,\theta$ أو $r = 3(1 - cos\,\theta)$، وهي تمثل معادلة قلب، والمعادلة القطبية للمستقيم $y = -x$ هي $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$



شكل 26

من الرسم نلاحظ أن المنطقة محددة بـ

$$0 \le \theta \le \frac{3\pi}{4} \quad \text{و} \quad 0 \le r \le 3(1 - \cos\theta)$$

مساحة المنطقة R:

$$A(R) = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{3(1-\cos\theta)} r\, dr\, d\theta$$

$$= 4.5 \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - \cos\theta)^2 d\theta$$

$$= 4.5 \left[\frac{3\theta}{2} - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= 4.5 \left[\frac{9\pi}{8} - \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\right] = 8.4153516$$

مثال 2

إذا كانت R المنطقة المحددة: $0 \le x \le \sqrt{1-y^2}$, $0 \le y \le 1$ فأوجد:

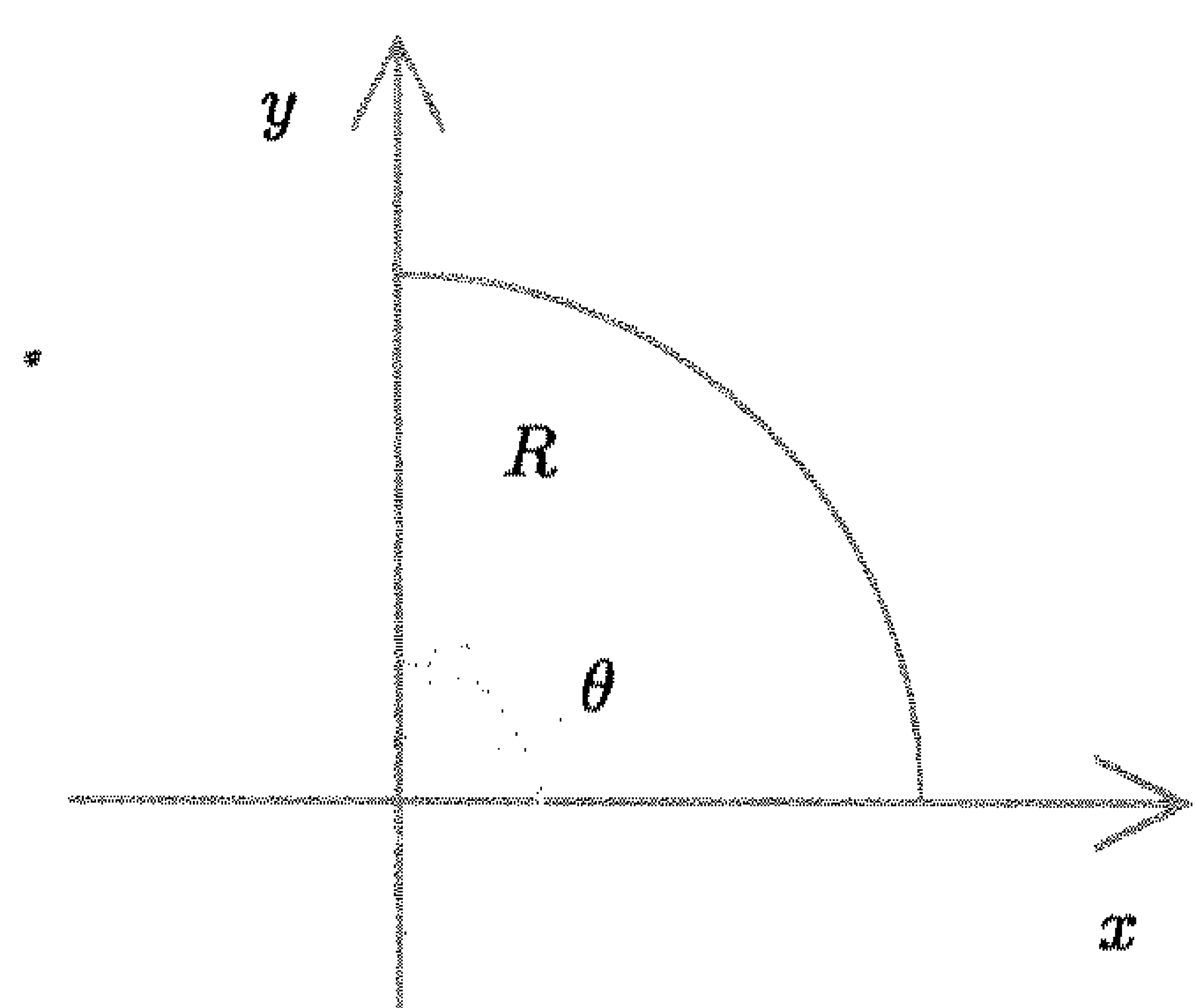
1 ـ مساحة المنطقة R

2 ـ قيمة التكامل $\iint_R \sin(x^2 + y^2) dA$

الحــل

المنطقة R عبارة عن ربع دائرة نصف قطرها 1 كما هو موضح بالرسم.

إذن مساحة المنطقة R هي $\frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{\pi}{4}$



شكل 27

من الرسم نلاحظ أن النقطة R محددة كما يلي:

$$0 \le r \le 1 \quad \text{و} \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

ومن الممكن إيجاد المساحة باستخدام التكامل الثنائي:

$$A(R) = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \, d\theta \, dr = \int_0^1 \frac{\pi}{2} r \, dr$$

$$= \frac{\pi r^2}{4}\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

هل يمكن إيجاد المساحة باستخدام الإحداثيات الديكارتية؟

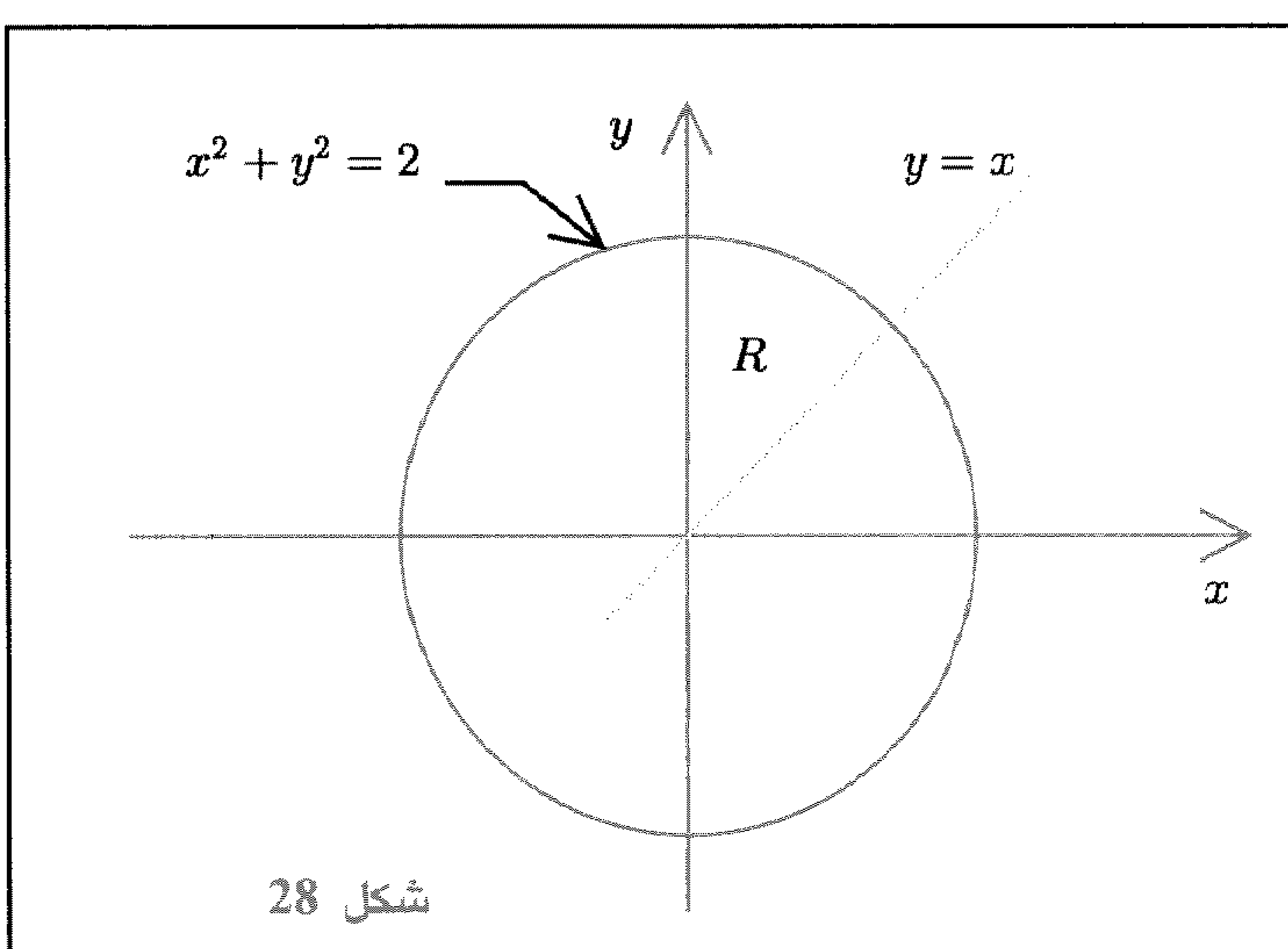
لاحظ أن:
$$\iint_R sin(x^2+y^2)dA = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} sin(x^2+y^2)dx\, dy$$

التكامل لا يمكن إيجاده على الصورة السابقة حتى لو تم تغيير ترتيب التكامل، أي $(dy\, dx)$، ولذلك سنستخدم الإحداثيات القطبية (تغيير المتغيرات).

ومن الرسم أيضاً:
$$\begin{aligned}\iint_R sin(x^2+y^2)dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 sin(r^2)r\, dr\, d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(cos(r^2)\Big|_0^1 \right) d\theta \\ &= -\frac{1}{2}(cos(1)-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}(1-cos(1)) = 0.361045724\end{aligned}$$

مثـال 3

أوجد قيمة التكامل $\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{2-y^2}} dx\, dy$



شكل 28

ويتضح من الرسم أن مساحة المنطقة R

$$= \frac{1}{8}\pi\, r^2 = \frac{\pi}{4}$$

ويمكن إيجاد المساحة باستخدام التكامل

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{2-y^2}} dx\, dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} r\, dr\, d\theta$$

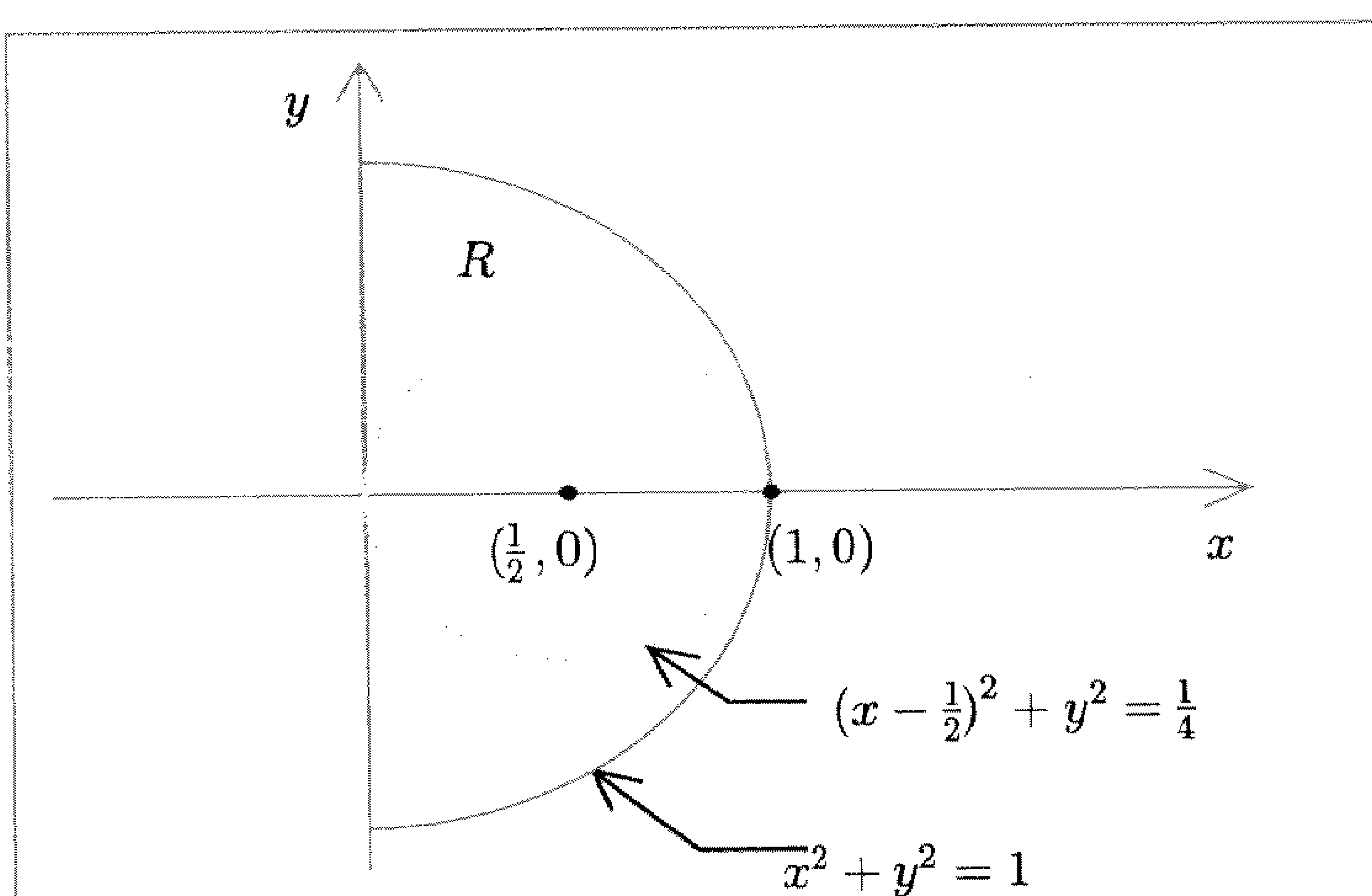
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

مثــال 4

أوجد قيمة التكامل $\int_0^1 \int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx$

الحــل

المنطقة R محددة بما يلي $\sqrt{x-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$, $0 \le x \le 1$



شكل 29

ولذلك $y=\sqrt{x-x^2}$ وهذا يتضمن $y^2+x^2=x$ أو $y^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

وكذلك $y=\sqrt{1-x^2}$ وهذا يتضمن $y^2+x^2=1$

لاحظ أن نصف قطر الدائرة الصغيرة $r_1=\frac{1}{2}$ ونصف قطر الدائرة الكبيرة $r_2=1$ ولذلك فإن مساحة المنطقة R هي:

$$\begin{aligned}A(R)&=\frac{1}{4}\pi r_2^2-\frac{1}{2}\pi r_1^2\\&=\frac{1}{4}\pi(r_2^2-2r_1^2)=\frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

ويمكن إيجاد المساحة باستخدام التكامل

$$A(R)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\cos\theta}^{1} 6\ dr\ d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)d\theta$$

ولكن $1-\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

إذن $A(R)=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)d\theta=\frac{\pi}{8}$

مثـــال 5

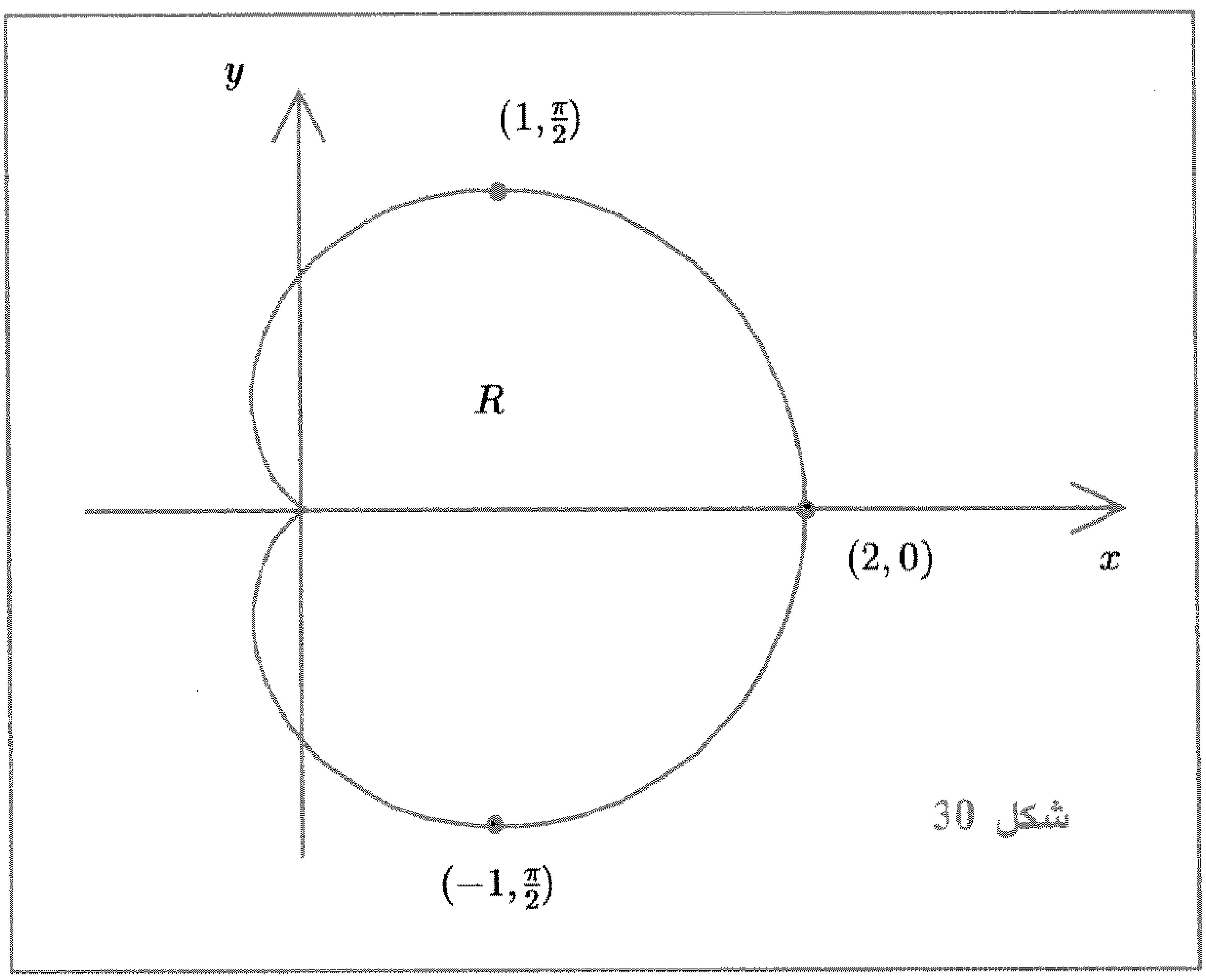
أوجد مساحة المنطقة R حيث R تقع داخل المنحنى $r=1+\cos\theta$

الحـــل

$$\begin{aligned}A(R)&=\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} r dr d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\Big|_0^{1+\cos\theta}\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\Big(1+2cos\theta+12(1+cos2\theta)\Big)d\theta$$

وبعد إجراء عملية التكامل والتعويض عن θ نجد أن $A(R)=\dfrac{3\pi}{2}$

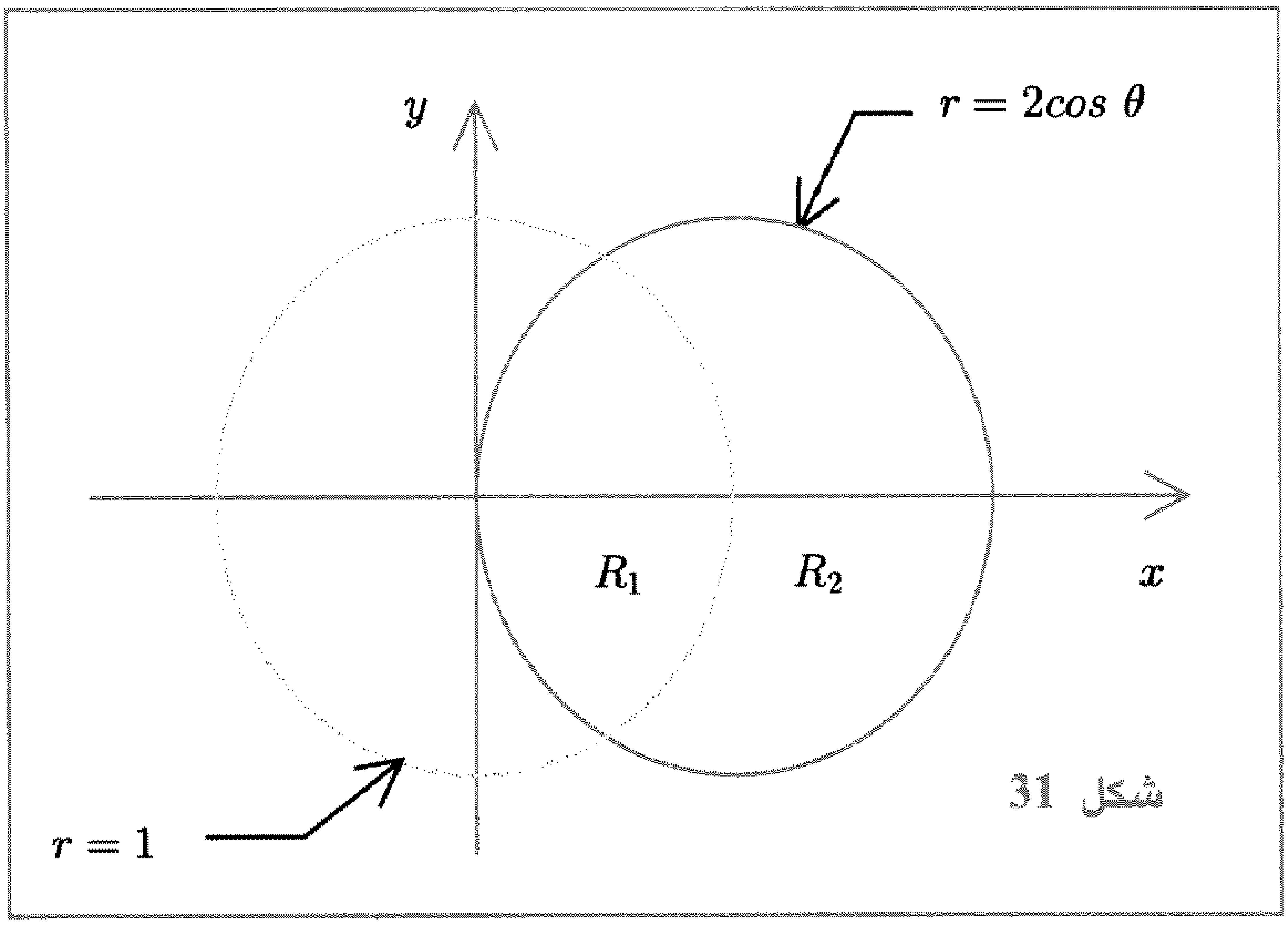


شكل 30

مثـــال 6

أ) أوجد مساحة المنطقة الواقعة داخل الدائرة $r=2cos\ \theta$ وخارج الدائرة $r=1$.

ب) أوجد مساحة تقاطع الدائرتين.



الحــل

أ) تتقاطع الدائرتان عند $1 = 2cos\ \theta$ أو $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$

ولذلك

$$A(R_2) = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{1}^{2\ cos\ \theta} r\ dr\ d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(r^2 \Big|_1^{2cos\ \theta} \right) d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4cos^2\theta - 1) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2\ cos\theta + 1) d\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.91322955$$

ب) مساحة الدائرة $r = 2cos\theta$ تساوي π

مساحة منطقة التقاطع تكون:

$$A(R_1) = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.228369699$$

مثـــال 7

أوجد حجم الكرة التي مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها a.

الحـــل

معادلة سطح الكرة

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

ومنها $z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

إذن المطلوب إيجاد الحجم تحت السطح $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$، وفوق القرص $x^2+y^2\le a^2$ وهو يمثل نصف حجم الكرة.

وباستخدام التكامل الثنائي نجد أن:

$$V=\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\;dy\;dx$$

(واضح أنه يجب استخدام الإحداثيات القطبية لإيجاد قيمة التكامل الثنائي).

وباستخدام الإحداثيات القطبية يكون حجم نصف الكرة:

$$\begin{aligned}V&=\int_{0}^{a}\int_{0}^{2\pi}\sqrt{a^2-r^2}\;\;r\;d\theta\;dr\\&=2\pi\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-r^2}\;\;r\;dr\\&=-\frac{3}{2}\pi(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{a}\\&=-\frac{2}{3}\pi(0-a^3)\\&=\frac{2}{3}\pi a^3\end{aligned}$$

وهكذا حجم الكرة يكون $\frac{4}{3}\pi\,a^3$

مثـــال 8

أوجد حجم المجسم المحدد من أعلى بالسطح $z = 3 + r$ ومن أسفل بالمنطقة المحددة بالمعادلة $r = 1 + sin\ \theta$.

الحـــل

$$V = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1+sin\theta} (3+r) r dr\ d\theta$$

ويترك للقارئ أن يبين أن

$$V = \frac{37}{6}\pi$$

مثـــال 9

أوجد $\int_{0}^{4} \int_{y/2}^{(y/2)+1} \frac{2x-y}{2} dx\ dy$

مستخدماً التعويض $v = \frac{y}{2}$ ، $u = \frac{2x-y}{2}$

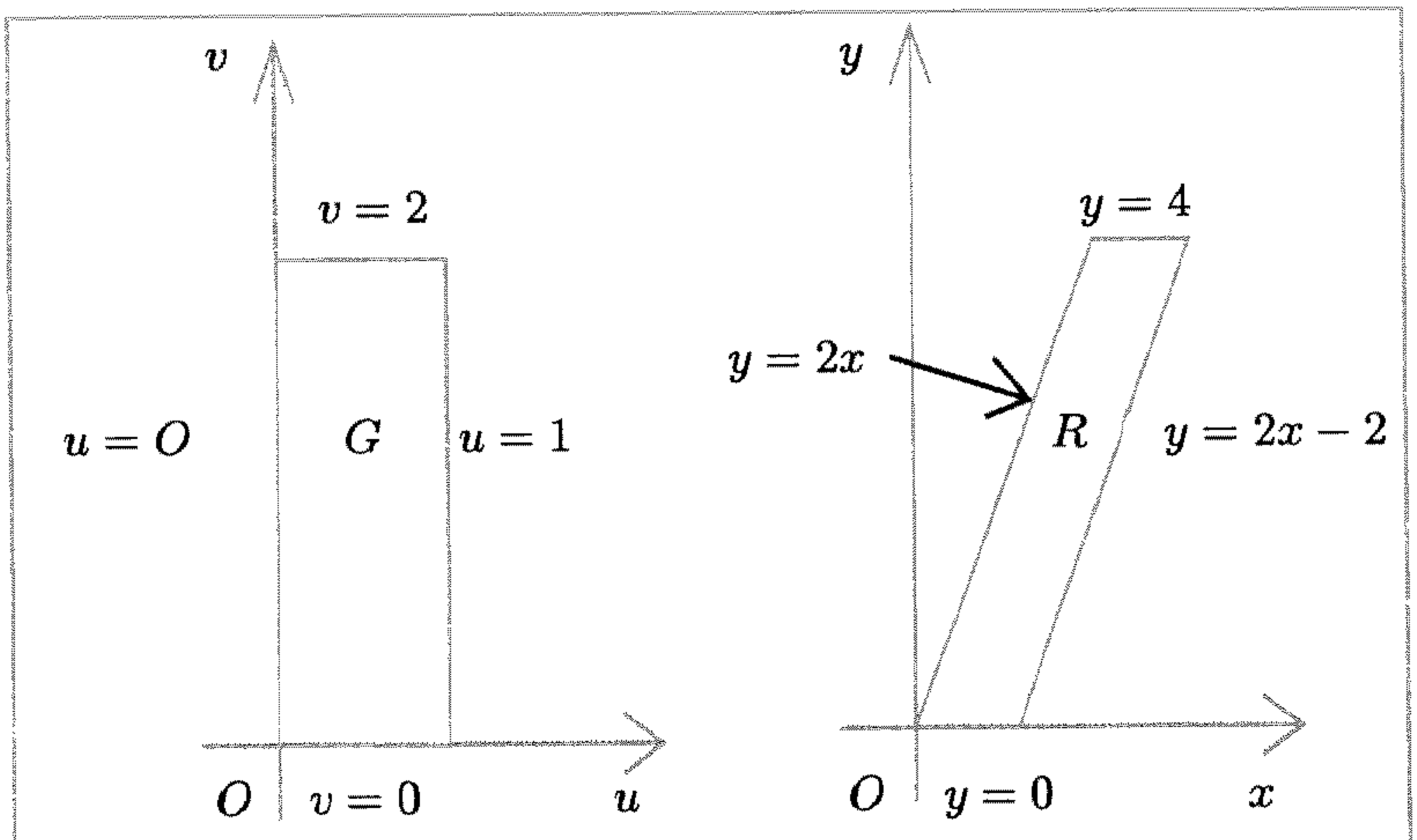
الحـــل

أولاً نرسم المنطقة R في المستوى $x\,y$ ونعين حدود المنطقة، أنظر الشكل (32).

ولتطبيق النظرية (4) يتطلب إيجاد المنطقة المناظرة G في المستوى $u\,v$ ومحدد جاكوبي للتحويل. ويمكن ذلك بإيجاد x وy بدلالة u، v من معادلتي التحويل، أي أن:

$$y = 2x$$

$$x = u + \frac{1}{2}y = u + v$$



شكل 32

ويمكن إيجاد حدود المنطقة G في المستوى $u\,v$ بالتعويض عن x و y في حدود المنطقة R كما هو موضح في الجدول التالي:

حدود المنطقة G في المستوى $u\,v$	التعويض عن x، y في حدود R	حدود R في المستوى $x\,y$
$u = 0$	$u + v = v$	$x = y/2$
$u = 1$	$u + v = v + 1$	$x = (y/2) + 1$
$v = 0$	$2v = 0$	$y = 0$
$v = 2$	$2v = 4$	$y = 4$

محدد جاكوبي يكون:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

والآن يوجد لدينا كل شيء لتطبيق النظرية (4):

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{(y/2)+1} \frac{2x-y}{2} dx\, dy = \int_0^2 \int_0^1 uJdudv$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 2ududv = \int_0^2 dv = 2$$

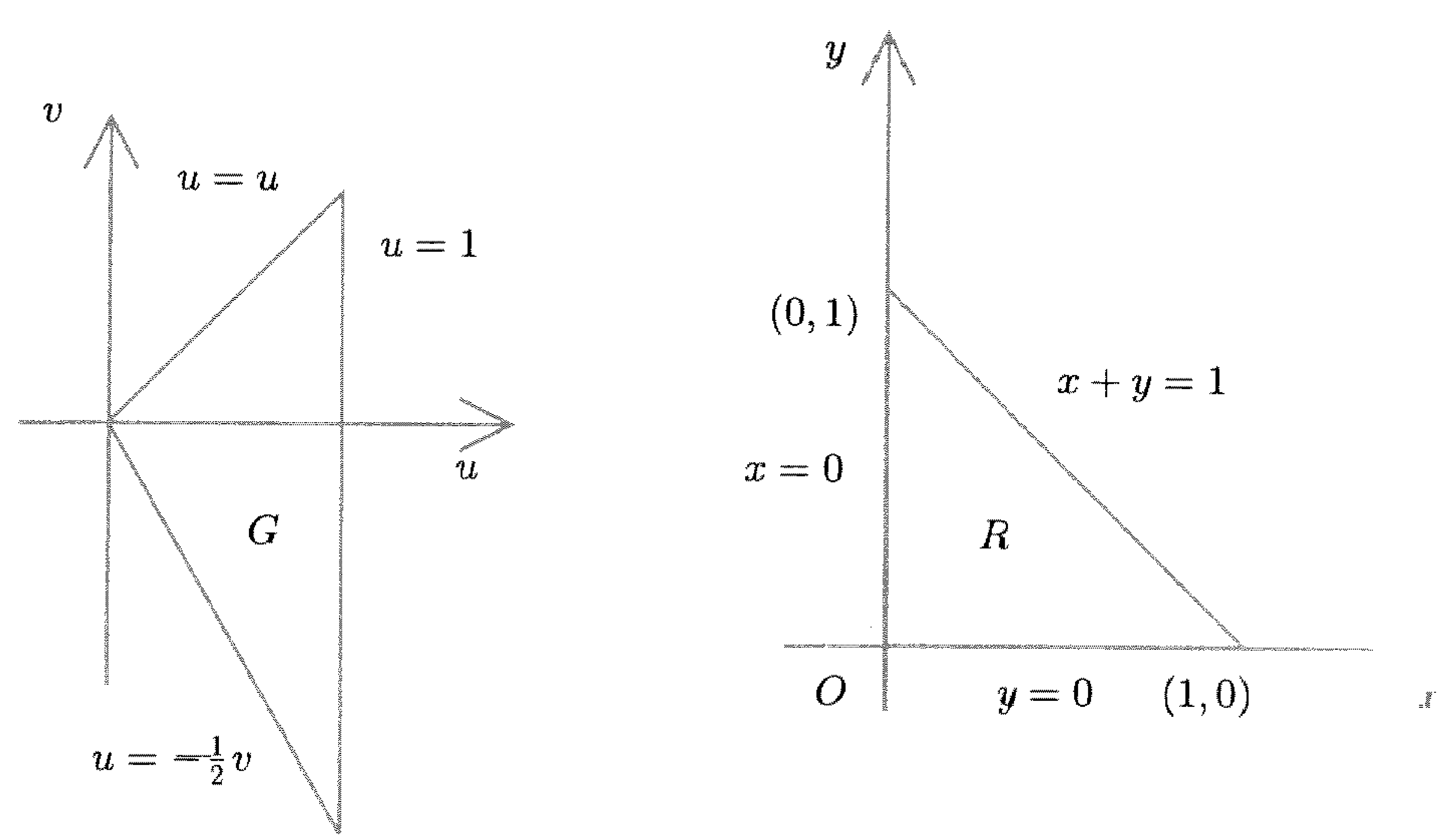
مثـــال 10

أوجد قيمة التكامل $\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 dydx$

الحـــل

أولاً ترسم المنطقة R في المستوى $x\ y$ وتعين حدود المنطقة R كما هو موضح بالشكل (33). وبعد فحص الدالة المكاملة (Integrand) يمكن استخدام التحويل:

$u = x + y$ و $v = y - 2x$



شكل 33

وبعد حل المعادلتين السابقتين معاً نحصل على:

$$y = \frac{1}{3}(2u + v) \quad و \quad x = \frac{1}{3}(u - v)$$

وتوجد حدود المنطقة G في المستوى $u\,v$ كما في المثال السابق

$$R_{xy} \Longrightarrow G_{uv}$$

$$x + y = 1 \Longrightarrow u = 1$$

$$x = 0 \Longrightarrow u = v$$

$$y = 0 \Longrightarrow u = -\frac{1}{2}v$$

ويحسب محدد جاكوبي كما يلي:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

وبعد فك المحدد نجد أن:

$$J = \frac{1}{3}$$

وهكذا

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y - 2x)^2 dydx$$

$$= \int_0^1 \int_{-2u}^{u} \sqrt{u}(v^2)\left(\frac{1}{3}\right) dvdu = \frac{2}{9}$$

ويترك للقارئ إجراء عملية التكامل بالتفصيل والتحقق من صحة النتيجة.

مثـال 11

أوجد

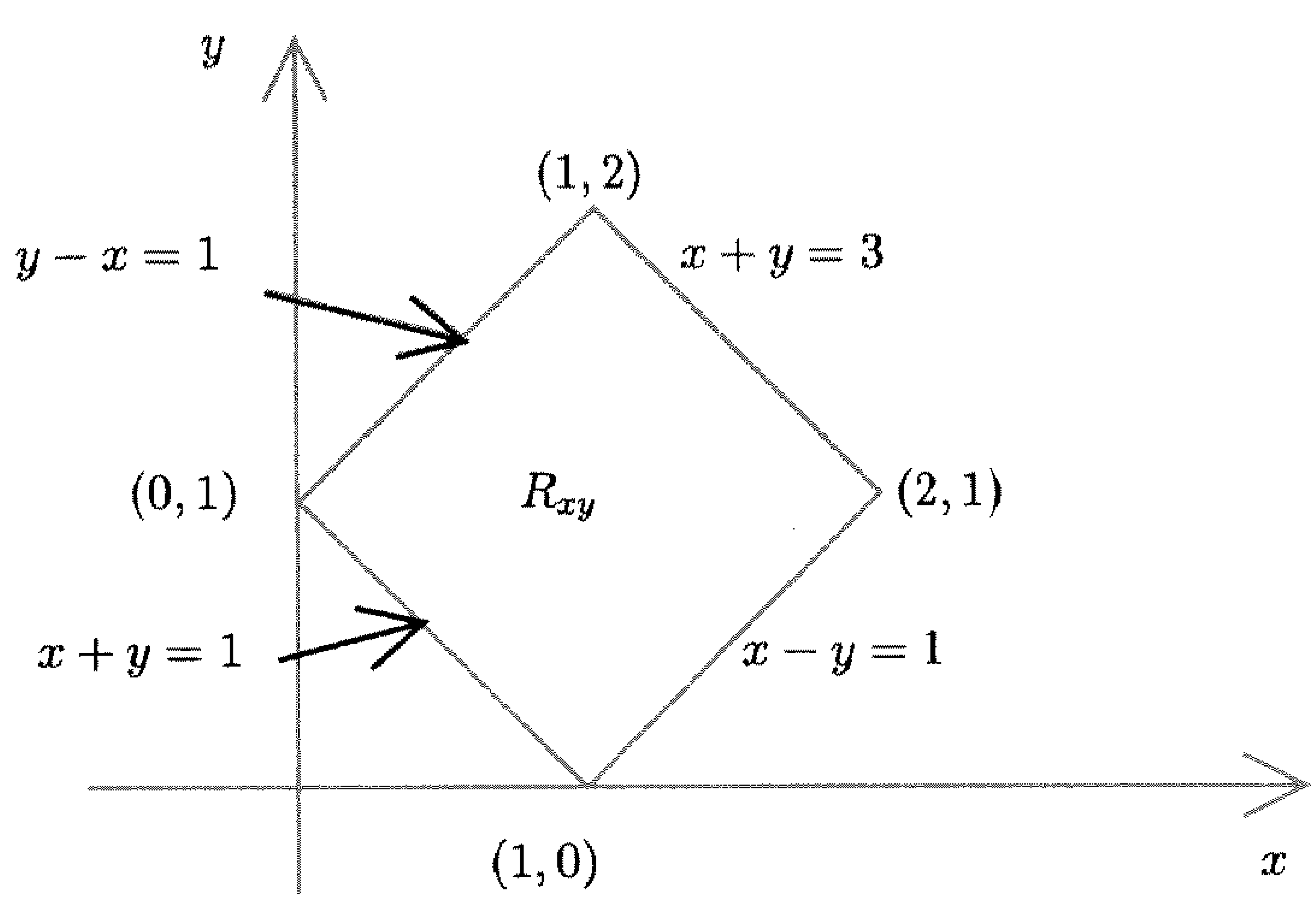
$$\iint_R (x-y)^2 \cos^2(x+y)\,dx\,dy$$

حيث أن R شبه المنحرف الذي رؤوسه:

$$(0,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,1)\ ,\ (1,0)$$

الحـل

المنطقة R في المستوى $x\,y$ موضحة بالشكل (34).



شكل 34

من الدالة المكاملة (Integrand) يفضل استخدام التحويل:

$$u = x - y \qquad \text{و} \qquad v = x + y$$

وبعد حل المعادلتين السابقتين نحصل على:

$$y=\frac{1}{2}(-u+v) \quad , \quad x=\frac{1}{2}(u+v)$$

يمكن تحديد حدود المنطقة G من معادلات حدود المنطقة R في المستوى $x\,y$ كما يلي

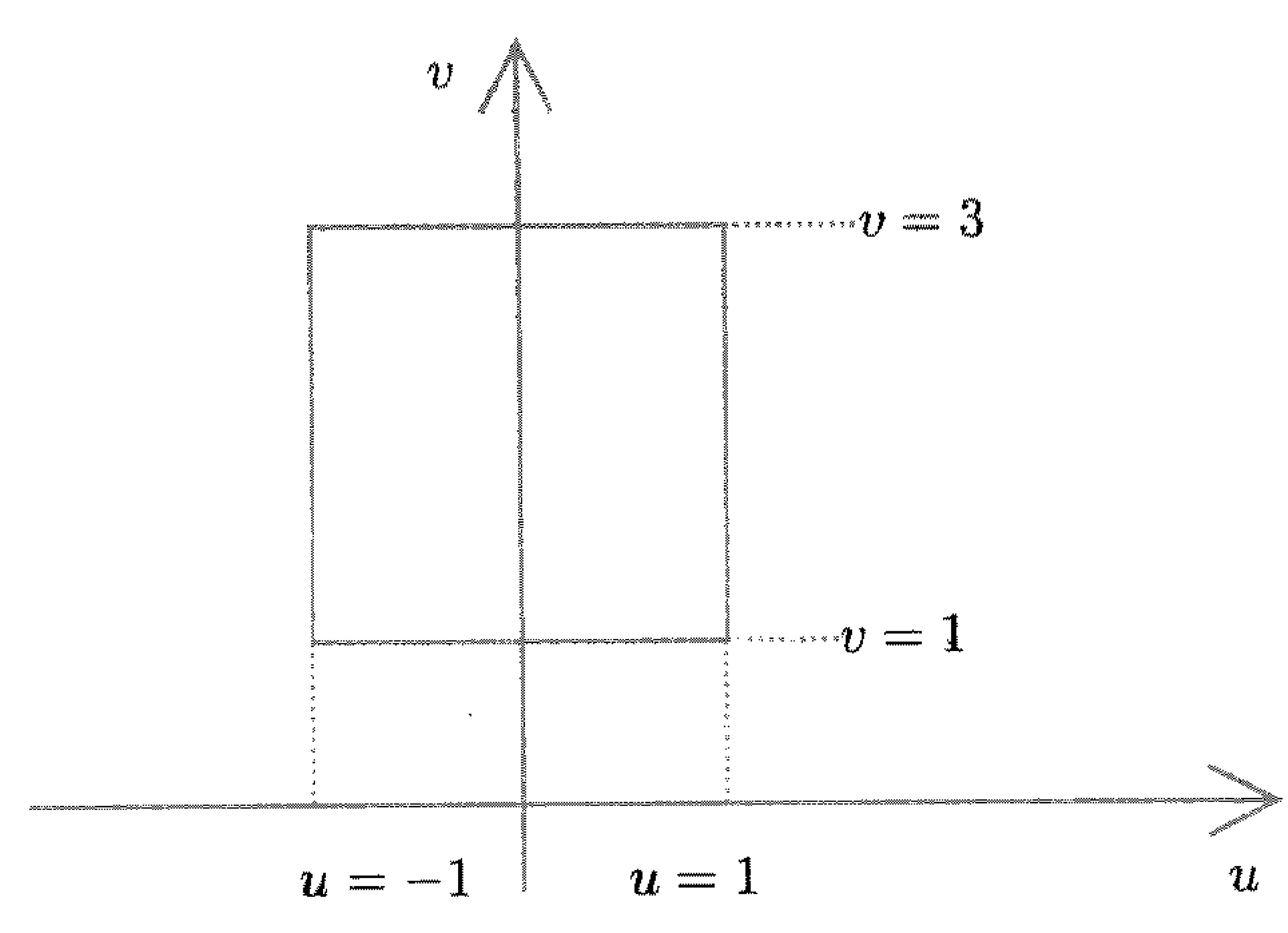
$$x-y=1 \implies u=1$$

$$x-y=3 \implies v=3$$

$$x+y=1 \implies v=1$$

$$y-x=1 \implies u=-1$$

المنطقة G في المستوى $u\,v$ موضحة بالشكل (35).



شكل 35

ويمكن إيجاد محدد جاكوبي للتحويل كما يلي:

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

وهكذا

$$\iint_R (x-y)^2 cos^2(x+y)dxdy$$
$$= \int_1^3 \int_{-1}^1 u^2 cos^2 v\left(\frac{1}{2}\right)dudv$$
$$= \int_1^3 \frac{1}{3}cos^2 vdv$$
$$= \frac{1}{6}\int_1^3 (1+cos2v)dv$$
$$= \frac{1}{6}\left[v+\frac{1}{2}sin\ 2v\right]_1^3$$
$$= \frac{1}{6}\left[2+\frac{1}{2}(sin6-sin2)\right]$$
$$= 0.2342739$$

مثـــال 12

أوجد قيمة التكامل التالي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

الحـــل

التكامل السابق يعتبر من أهم التكاملات التي يصادفها القارئ في نظرية الاحتمالات، وفي هذا المثال سنبين كيف يمكن استخدام التكامل الثنائي والإحداثيات القطبية لإيجاد قيمته.

نفرض أن:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$$

واضح أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2I$$ (لماذا؟)

وبما أنه يمكن استخدام أي متغير في إيجاد قيمة التكامل، فإن:

$$I = \int_{0}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

وهكذا

$$I^2 = \left(\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{0}^{\infty} e^{-y^2} dy\right)$$

$$= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx\ dy$$

وباستخدام الإحداثيات القطبية نجد أن:

$$I^2 = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r\ d\theta\ dr$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2} r\ dr$$

$$= -\frac{\pi}{4}\lim_{a\to\infty} e^{-r^2}\Big|_{0}^{a}$$

$$= -\frac{\pi}{4}\lim_{a\to\infty}\left(e^{-a^2}-1\right) = \frac{\pi}{4}$$

وهذا يتضمن $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

ومنها $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$

ويترك للقارئ أن يبين $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$

(**إيضاح** استخدام التعويض $u = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$).

تمارين

عبر عن التكاملات الآتية كتكاملات جزئية واستخدم الإحداثيات القطبية لإيجاد قيمة كل منها :

1) $\iint_R x\,y\,dA$ حيث أن R المنطقة المحددة بالمنحنى $r=4$.

2) $\iint_R (x^2+y^2)dA$ حيث أن R المنطقة المحددة بالمنحنى $r=2(1+sin\theta)$

3) $\iint_R (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dA$ حيث أن R المنطقة المحددة بالمنحنى $r=2+cos\theta$

أوجد مساحة المنطقة R في المستوى $x\,y$ مستخدماً الإحداثيات القطبية

4) المنطقة المحددة بالمنحنى $r=2+sin\theta$.

5) المنطقة داخل القلب $r=1+cos\theta$ وخارج الدائرة $r=\frac{1}{2}$

أوجد قيمة التكاملات الآتية مستخدماً الإحداثيات القطبية

6) $\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dy\,dx$

7) $\int_{0}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dy\,dx$

8) $\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}$

9) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} cos(x^2+y^2)dx\,dy$

10) $\int_{0}^{2a}\int_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} dy\,dx$

11) $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx$

12) $\int_{0}^{2a}\int_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} x^2\,dy\,dx$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى أو المنحنيات التالية:

13) $r = 1 - \cos\theta$ 14) $r = 4(1 + \cos\theta)$

15) $r^2 = \cos 2\theta$ 16) $r = 3 - 2\sin\theta$

17) $r = \tan 2\theta$ والمستقيم $\theta = \frac{\pi}{4}$

18) أوجد حجم المجسم المحدد بالمخروط $z^2 = x^2 + y^2$ والأسطوانة $x^2 + y^2 = 4$

19) أوجد مساحة المنطقة التي تقع داخل المنحنى $(x^2 + y^2)^3 = 9y^2$

20) بيّن أن $\iint\limits_{\Omega} \frac{dA}{1 + x^2 + y^2} = \pi \ln 2$

حث أن Ω قرص الوحدة $(r = 1)$.

21) أوجد

$$\iint\limits_{R} (4x - 4y + 1)^{-2} dx dy$$

حيث أن R المنطقة المحددة بالمعادلات التالية:

$$x = \sqrt{-y} \quad ، \quad x = y \quad و \quad x = 1$$

حيث أن: $x = u + v$ ، $y = v - u^2$

22) أوجد

$$\iint\limits_{R} (x^2 + 2y^2) dx\, dy$$

حيث أن R منطقة في الربع الأول ومحددة برسم المعادلات:

$$xy = 1 \;,\; xy = 2 \;,\; y = x \;,\; y = 2x$$

23) أوجد

$$\iint_R \left(\sqrt{x-2y}+\frac{1}{4}y^2\right)dx\,dy$$

حيث أن R المثلث الذي رؤوسه $(4,2)$, $(4,0)$, $(0,0$

حيث أن $u=\frac{1}{2}y$ ، $v=x-2y$

تمارين الفصل الثاني

أرسم منطقة التكامل ثم أوجد قيمة التكاملات التالية:

1) $$\int_1^4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2} e^{\frac{y}{\sqrt{x}}}\, dy\, dx$$

2) $$\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy} dx\, dy$$

3) $$\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y dy\, dx$$

4) $$\int_1^2 \int_0^{2\ln x} e^{x+y} dy\, dx$$

5) $$\int_0^1 \int_{-y}^{y} \sinh(y^2) dx\, dy$$

6) $$\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{1+y^{\frac{3}{2}}} dx\, dy$$

7) $$\int_0^1 \int_{-y^{1/3}}^{y^{1/2}} 3x^2 y dx\, dy$$

8) $$\int_0^{\pi/4} \int_0^{y} (\sin^2 xy + \cos^2 xy) dx\, dy$$

أرسم منطقة التكامل واكتب التكامل الثنائي المكافئ مع تغيير ترتيب التكامل

9) $$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} x dy\, dx$$

10) $$\int_0^{3/2} \int_0^{9-4x^2} 16x dy\, dx$$

11) $$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3xy\, dx\, dy$$

12) $$\int_0^4 \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} x dy\, dx$$

13) $$\int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{x^2+1} f(x,y) dy\, dx$$

14) $$\int_0^1 \int_{x^2}^{2x} x^2 y\, dy\, dx$$

15) $$\int_0^1 \int_0^{\exp(y)} xy\, dx\, dy$$

16) $$\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} f(x,y) dy\, dx$$

أرسم منطقة التكامل وحدد ترتيب التكامل المناسب وأوجد قيمة التكامل لكل من التكاملات التالية:

17) $\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3}\, dy\, dx$ (18 $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dydx}{y^4+1}$

19) $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dy\, dx$ (20 $\int_0^{1/16} \int_{y^{1/4}}^{1/2} cos(16\pi x^5) dx\, dy$

21) $\iint_R (y-2x^2) dA$ حيث أن R المنطقة داخل المربع
$$|x|+|y|=1$$

22) $\iint_R xy dA$ حيث أن R المنطقة المحددة بالمستقيمات
$y=x$, $y=2x$ و $x+y=2$

الحجم تحت السطح $z=f(x,y)$

23) أوجد حجم المنطقة الواقعة تحت المجسم المكافئ $z=x^2+y^2$ وفوق المثلث المحدد بالمستقيمات $y=x$, $x=0$ و $x+y=2$ في المستوى $x\,y$.

24) أوجد حجم المجسم المحدد من أعلى بالأسطوانة $z=x^2$ ومن أسفل بالمنطقة المحددة بالقطع المكافئ $y=2-x^2$ والمستقيم $y=x$ في المستوى $x\,y$.

25) أوجد حجم المنطقة التي تشتمل على كل النقاط التي تقع داخل الأسطوانة $(x+1)^2+y^2=1$ وداخل الكرة $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$.

26) أوجد حجم المنطقة الواقعة داخل الأسطوانتين (المنطقة المشتركة):
$x^2+z^2=a^2$ و $y^2+z^2=a^2$

التكاملات على مناطق غير محدودة

أوجد قيمة التكاملات المعتلة التالية:

(27 $$\int_{-1}^{1}\int_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}}(2y+1)dy\,dx$$

(28 $$\int_{1}^{\infty}\int_{e^{-x}}^{1}\frac{1}{x^3y}dy\,dx$$

(29 $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}dx\,dy$$

(30 $$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}xe^{-(x+2y)}dx\,dy$$

(31 أوجد قيمة التكامل $\int_{0}^{2}(tan^{-1}\pi x - tan^{-1}x)dx$

(32 أوجد المنطقة R التي تجعل قيمة التكامل التالي قيمة عظمى وقيمة صغرى وبيّن السبب في كل حالة $\iint_R (4-x^2-2y^2)dA$

(33 أوجد قيمة التكامل $\int_{0}^{1}\int_{0}^{3}\frac{x^2}{(y-1)^{2/3}}dy\,dx$

المساحة (Area)

أوجد مساحة المنطقة المحددة أو المطوقة بـ

(34 المحوران والمستقيم $2x+y=2$

(35 القطع المكافئ $x=-y^2$ والمستقيم $y=x+2$

(36 القطاعان المكافئان $x=y^2$ و $x=2y-y^2$

(37 القطاعان المكافئان $x=y^2-1$ و $x=2y^2-2$

التكاملات القطبية

استخدم الإحداثيات القطبية لإيجاد قيمة التكاملات التالية:

(38 $$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx$$

(39 $$\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx$$

(40 $$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} ln(x^2+y^2+1)dx\,dy$$

(41 $$\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}dy\,dx$$

(42 أوجد مساحة المنطقة داخل القلب $r=1+\cos\theta$ وخارج الدائرة $r=1$

(43 أوجد مساحة المنطقة المشتركة التي تقع داخل القلبين $r=1+\cos\theta$ و $r=1-\cos\theta$

(44 أوجد مساحة المنطقة المطوقة بالقلب $r=1+\cos\theta$

(45 أوجد المساحة الواقعة داخل رسم المنحنى $r=\cos 2\theta$

(46 أوجد المساحة داخل رسم المعادلة $r=\sin(n\,\theta)$ حيث أن n عدد صحيح موجب.

تغير المتغيرات في التكاملات الثنائية

أوجد قيمة التكاملات التالية:

(47 $$\int_{0}^{4}\int_{y/2}^{(y/2)+1} \frac{2x-y}{2}dx\,dy$$

(48 $$\iint_R (2x^2-xy-y^2)dx\,dy$$

حيث أن R المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحددة بالمستقيمات

$$y=x_1\ ,\ y=x-2\ ,\ y=-2x+7\ ,\ y=-2x+4$$

(**إيضاح**: استخدم التعويض $u = x - y$ و $v = 2x + y$).

48) أوجد قيمة التكامل:

$$\iint_R (3x^2 + 14xy + 8y^2)dx\ dy$$

حيث أن R المنطقة الواقعة في الربع الأول ومحددة بالمستقيمات

$$y = -\frac{1}{4}x + 1\ ,\ y = -\frac{1}{4}x\ ,\ y = -\frac{3}{2}x + 3\ ,\ y = -\frac{3}{2}x + 1$$

(**إيضاح**: استخدم التعويض $u = 2x + 2y$ و $v = x + 4y$).

49) إذا كانت المنطقة الواقعة في الربع الأول للمستوى $x\,y$ ومحددة بالقطاعين الزائدين $xy = 1$ و $xy = 9$ والمستقيمين $y = 4x, y = x$، استخدم التعويض $x = \frac{u}{v}$ و $y = uv$ حيث أن $u > 0$ و $v > 0$ لكتابة التكامل $\iint_R \left(\sqrt{\frac{y}{y}} + \sqrt{xy}\right)dx\ dy$ كتكامل على منطقة ملائمة G في المستوى $u\,v$ ثم أوجد قيمة التكامل في المستوى $u\,v$ على المنطقة G

50) استخدم التحويل $x = u + \left(\frac{1}{2}\right)v$ و $y = v$ لإيجاد قيمة التكامل:

$$\int_0^2 \int_{y/2}^{(y+4)/2} y^3(2x - y)e^{(2x-y)^2} dx\ dy$$

51) أوجد مركز كتلة المنطقة المثلثية المحددة بالمستقيمات $x = 2$ و $y = 2$ والقطاع الزائد $x\,y = 2$ في المستوى $x\,y$.

52) أوجد عزم القصور الذاتي القطبي حول نقطة الأصل لصفيحة مثلثية رقيقة كثافتها 3 ومحددة بمحور y والمستقيمين $y = 2x$ و $y = 4$ في المستوى $x\,y$

53) أوجد مركز الكتلة وعزوم القصور الذاتية وأنصاف أقطار التدوير (gyration) حول المحاور لصفيحة رقيقة (thin) محددة بالمستقيم $y = x$،

القطاع المكافئ $y = x^2$ في المستوى $x\,y$ إذا كانت دالة الكثافة $\delta(x,y) = 1$.

54) أوجد نصف قطر التدوير (radius of gyration) لكل مما يلي حول نقطة الأصل إذا كانت الكثافة 1:

أ) $x^2 + y^2 \geq 1$ جـ) $0 \leq x \leq y \leq 1$

ب) $x^2 + y^2 \leq 4\ ,\ y \geq 0$ د) $0 \leq x \leq 1\ ,\ 0 \leq y \leq 2$

55) أوجد مركز المناطق التالية إذا كانت الكثافة ثابتة:

أ) $x^2 + y^2 \leq 4\ ,\ y \geq 0$ ب) $x^2 \leq y \leq 4\ ,\ x \geq 0$

ج) $0 \leq y \leq sin\ x \qquad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

56) أوجد قيمة التكاملات التالية:

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx\ dy \qquad \int_0^1 \int_{2y}^2 4cos(x^2) dx\ dy$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^1 \frac{2\pi\ sin\ \pi x^2}{x^2} dx\ dy \qquad \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\ dx}{1+y^4}$$

الفصل الثالث

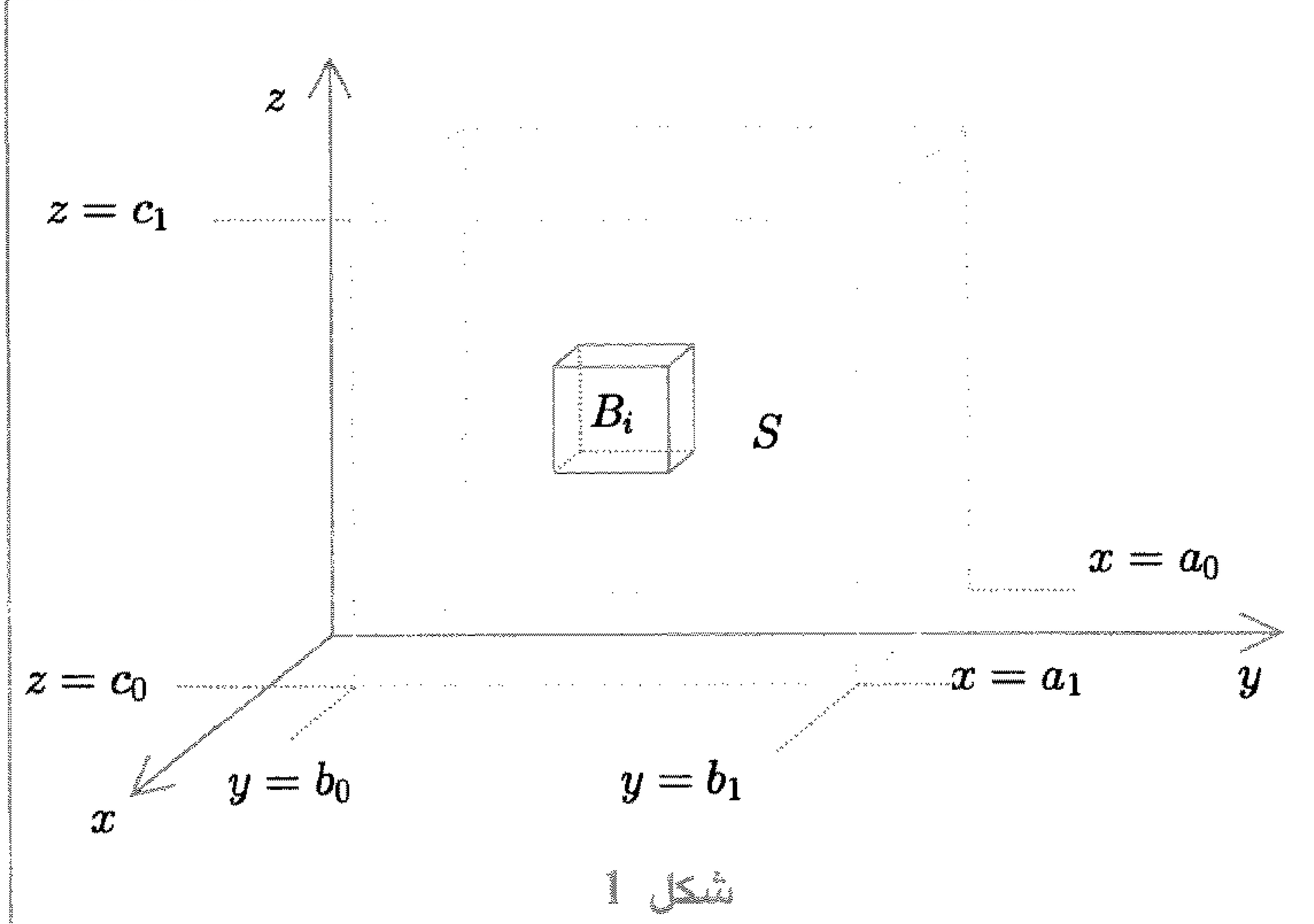
التكامل الثلاثي

3 . 1 تعريف التكامل الثلاثي

تعريف التكامل الثلاثي يوازي تعريف التكامل الثنائي، فإذا اعتبرنا متوازي السطوح المحدد بالمستويات الستة:

$$a_0 \leq x \leq a_1 \quad , \quad b_0 \leq y \leq b_1 \quad , \quad c_0 \leq z \leq c_1$$

أنظر الشكل (1).



شكل 1

وإذا كانت الدالة $f(x,y,z)$ معرّفة في المنطقة المغلقة S، فإنه بصورة مشابهة للتكامل الثنائي تقسم المنطقة المجسمة S إلى متوازيات السطوح بمستويات موازية للمستويات الإحداثية (x,y,z).

وإذا كانت $B_1, B_2, ..., B_n$ تمثل متوازيات السطوح في S، وإذا رمزنا لحجم متوازي السطوح B_i بـ $V(B_i)$ وباختيار النقطة $P_i(x_i, y_i, z_i)$ في أي مكان من B_i، فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, V(B_i)$$

يكون قيمة تقريبية للتكامل الثلاثي.

ملاحظة

اعتبرنا المنطقة S متوازي السطوح للتوضيح فقط، حيث أن R يمكن أن تكون أي منطقة محددة ومغلقة ومقياس التقسيم يساوي طول أكبر قطر من $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$، وإذا كان المجموع السابق يؤول إلى نهاية (عدد حقيقي) عندما يؤول مقياس التقسيم إلى الصفر لكل P_i (أي اختيار)، فإن النهاية تسمى تكاملاً ثلاثياً للدالة f على المنطقة S، ويرمز للتكامل الثلاثي بالرمز:

$$\iiint\limits_{S} f(x,y,z)dV$$

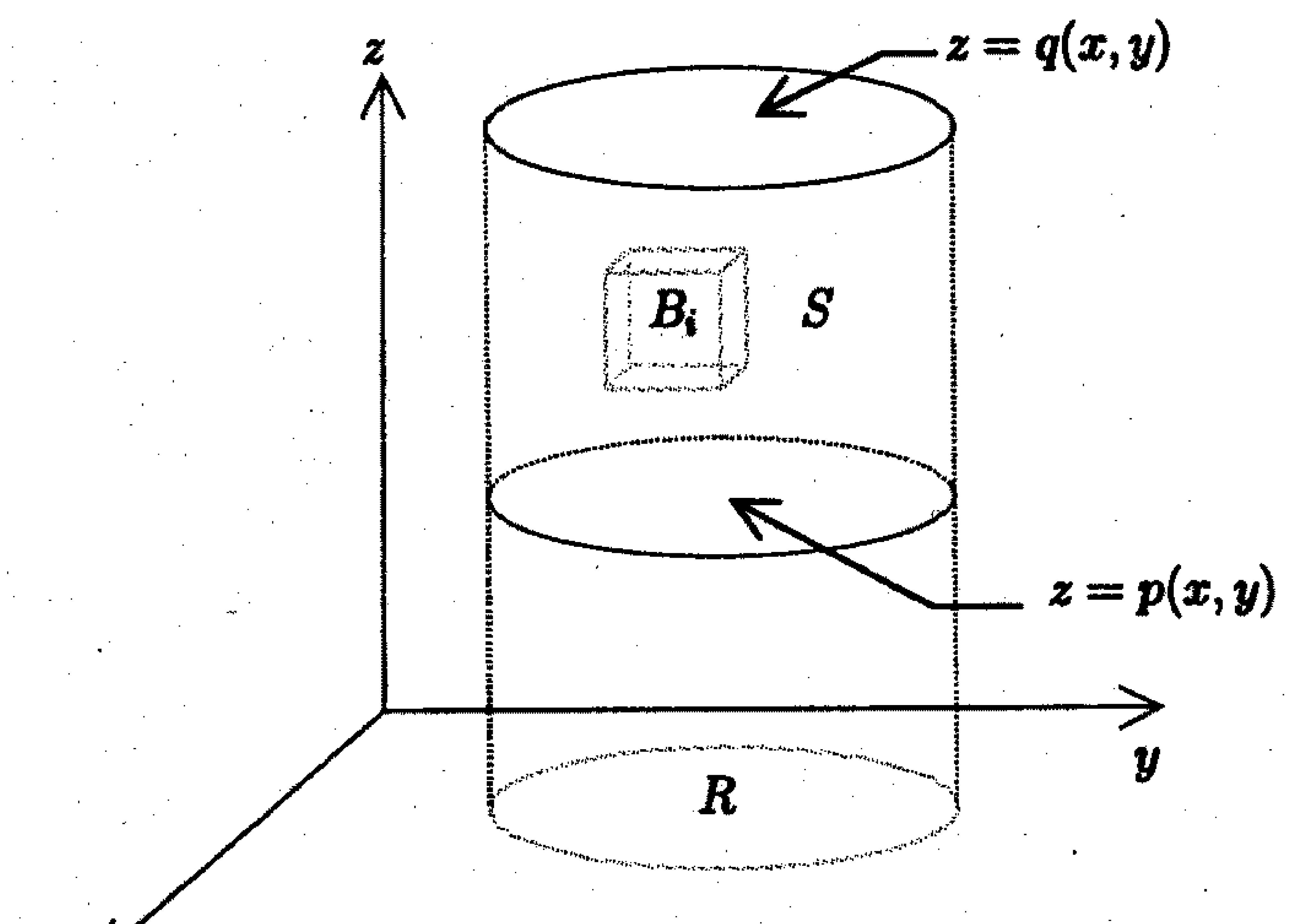
وعندما تكون المنطقة S متوازية السطوح كما سبق، فإن:

$$\iiint\limits_{S} f(x,y,z)dv = \int_{a_0}^{a_1}\int_{b_0}^{b_1}\int_{c_0}^{c_1} f(x,y,z)dz\,dy\,dx$$

وإذا كانت المنطقة S محددة كما يلي:

$$p(x,y) \le z \le q(x,y) \quad , \quad b_0 \le y \le b_1 \quad , \quad a_0 \le x \le a$$

كما هو موضح في الشكل (2).



شكل 2

فإن

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dV = \int_{a_0}^{a_1}\int_{b_0}^{b_1}\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z)dz\,dy\,dx$$

نظرية 1

نفرض أن المنطقة S معرفة بالمنحنيات التالية:

$$r_1(x,y) \le z \le r_2(x,y) \quad , \quad p(x) \le y \le q(x) \quad , \quad a \le x \le b$$

حيث أن الدوال r_2, r_1, q, p تكون متصلة.

وإذا كانت الدالة f متصلة في المنطقة S، فإن:

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dV = \int_a^b\int_{p(x)}^{q(x)}\int_{r_1(x,y)}^{r_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,dy\,dx$$

ملاحظة

إذا كانت حدود z متغيرة فإنها تكون دالة في المتغيرين x و y على الأكثر وحدود y دالة في x فقط وحدود x ثابتة حيث أن ترتيب التكامل $dz\,dy\,dx$ ويمكن اعتبار الترتيبات الأخرى بصورة مشابهة تماماً.

في الغالب يمكن تحديد حدود التكامل من الرسم التخطيطي بصورة مشابهة للتكامل الثنائي، كما سيتضح من الأمثلة التي سنقدمها في هذا الفصل.

وبما أن التكامل المحدد للدالة في متغير واحد يفسر بالمساحة والتكامل الثنائي بالحجم فمن المتوقع تفسير التكامل الثلاثي بما فوق الحجم أو الحجم الزائد (Hypervolume) أو الحجم في أربعة أبعاد. وعلى الرغم من بعض الأهمية للتفسيرات السابقة فإنه من الأهمية اعتبار الحالات الآتية:

1) الكتلة (Mass)

إذا كانت الدالة $\rho(x,y,z)$ تمثل الكثافة على وحدة الحجم، فإن:

$$M(S)=\iiint\limits_{S}\rho(x,y,z)dV$$

2) الحجم (Volume)

إذا كانت $f(x,y,z)=1$، فإن:

$$V(S)=\iiint\limits_{S}dV$$

3) عزم المجسم S بالسنبة للمستويات x y، x z، y z يعرف كما يأتي:

$$M_{xz}=\iiint\limits_{S}y\;\rho(x,y,z)dV\;,\;\;M_{xy}=\iiint\limits_{S}z\;\rho(x,y,z)dV$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_S x \ \rho(x,y,z)dV$$

حيث أن $\rho(x,y,z)$ تمثل كثافة المجسم S.

4) مركز الكتلة هو النقطة (x, y, z)

حيث أن:

$$x = \frac{M_{yz}}{M} \ , \ y = \frac{M_{xz}}{M} \ , \ z = \frac{M_{xy}}{M}$$

~~5~~) عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحاور z, y, x

$$I_y = \iiint\limits_S (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dV \ , \ I_x = \iiint\limits_S (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dV$$

$$I_z = \iiint\limits_S (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dV$$

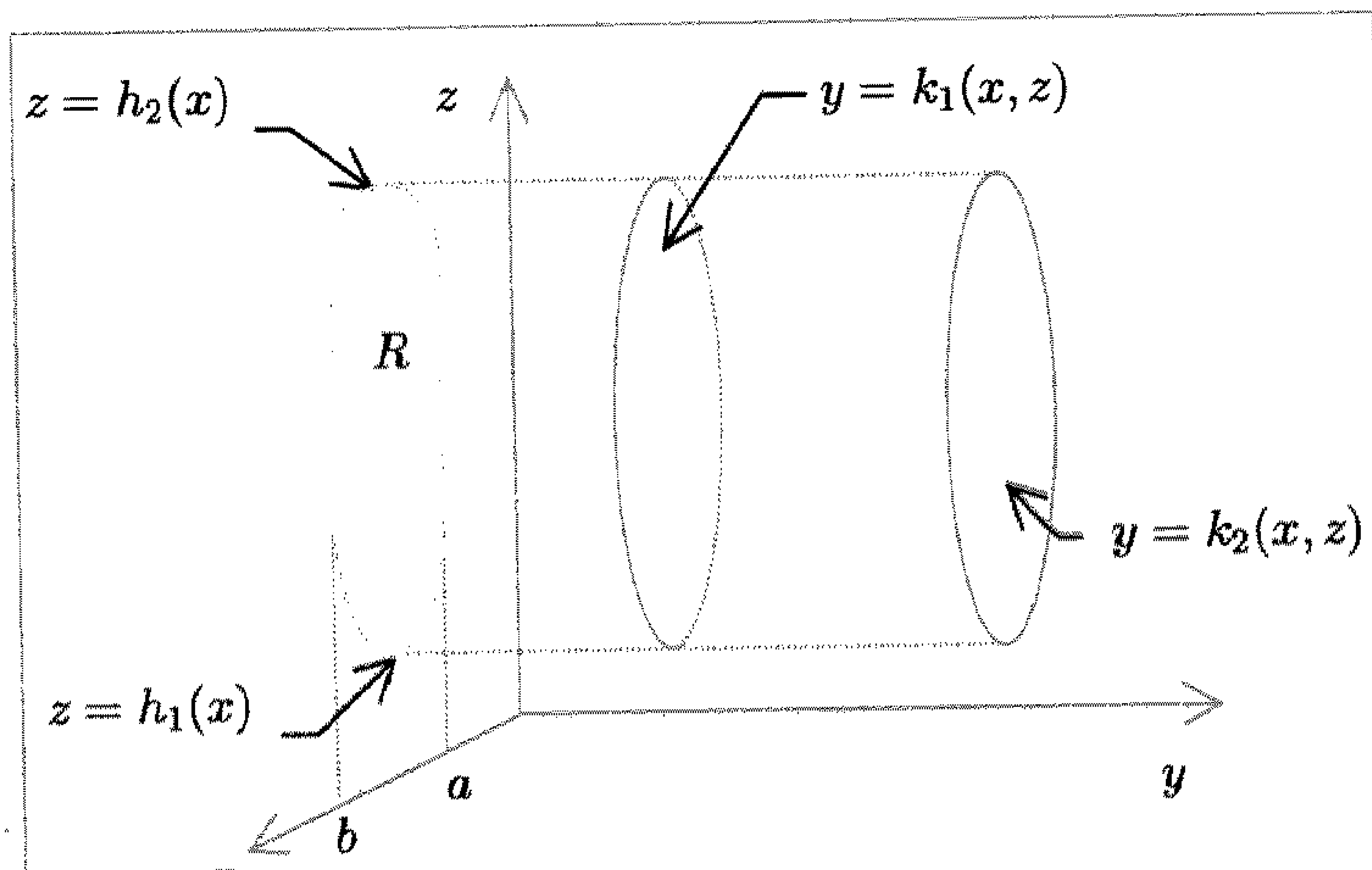
حيث أن $\rho(x,y,z)$ تمثل كثافة المجسم S.

2.3 تغيير ترتيب التكامل

رأينا أهمية ترتيب التكامل الثنائي، حين يتعذر في بعض المسائل إجراء عملية التكامل، كذلك الحال في التكامل الثلاثي يكون للترتيب أهمية كبيرة. فإذا كانت المنطقة S كما يلي:

$$S=\{(x,y,z): a\leq x\leq b\ ,\ h_1(x)\leq z\leq h_2(x)\ ,\ k_1(x,z)\leq y\leq k_2(x,z)\}$$

أنظر الشكل (3).



شكل 3

فإن تكامل الدالة على المنطقة S يمكن كتابته كما يأتي:

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dV=\int\limits_a^b\int\limits_{h_1(x)}^{h_2(x)}\int\limits_{k_1(x,z)}^{k_2(x,z)} f(x,y,z)dy\ dz\ dx$$

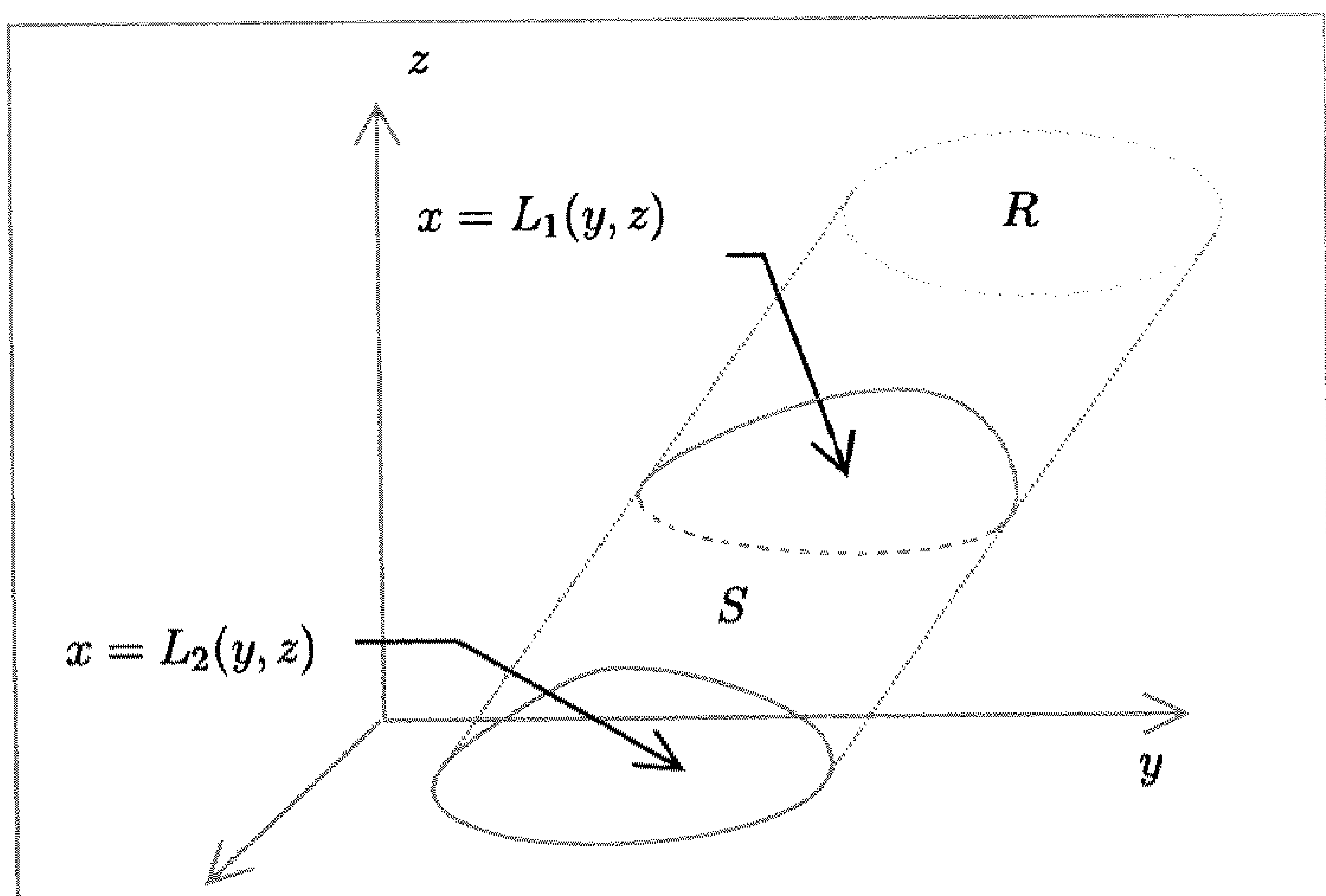
والصورة الأخيرة يمكن تفسيرها بأخذ نهاية مجموع صف من متوازيات السطوح الموازية لمحور y من السطح الأيسر $(y=k_1(x,z))$ إلى السطح الأيمن $(y=k_2(x,z))$ ثم تكامل الدالة المكاملة (Integrand) على المنطقة R في المستوى $x\ z$.

وأخيراً إذا كانت المنطقة S على الصورة التالية:

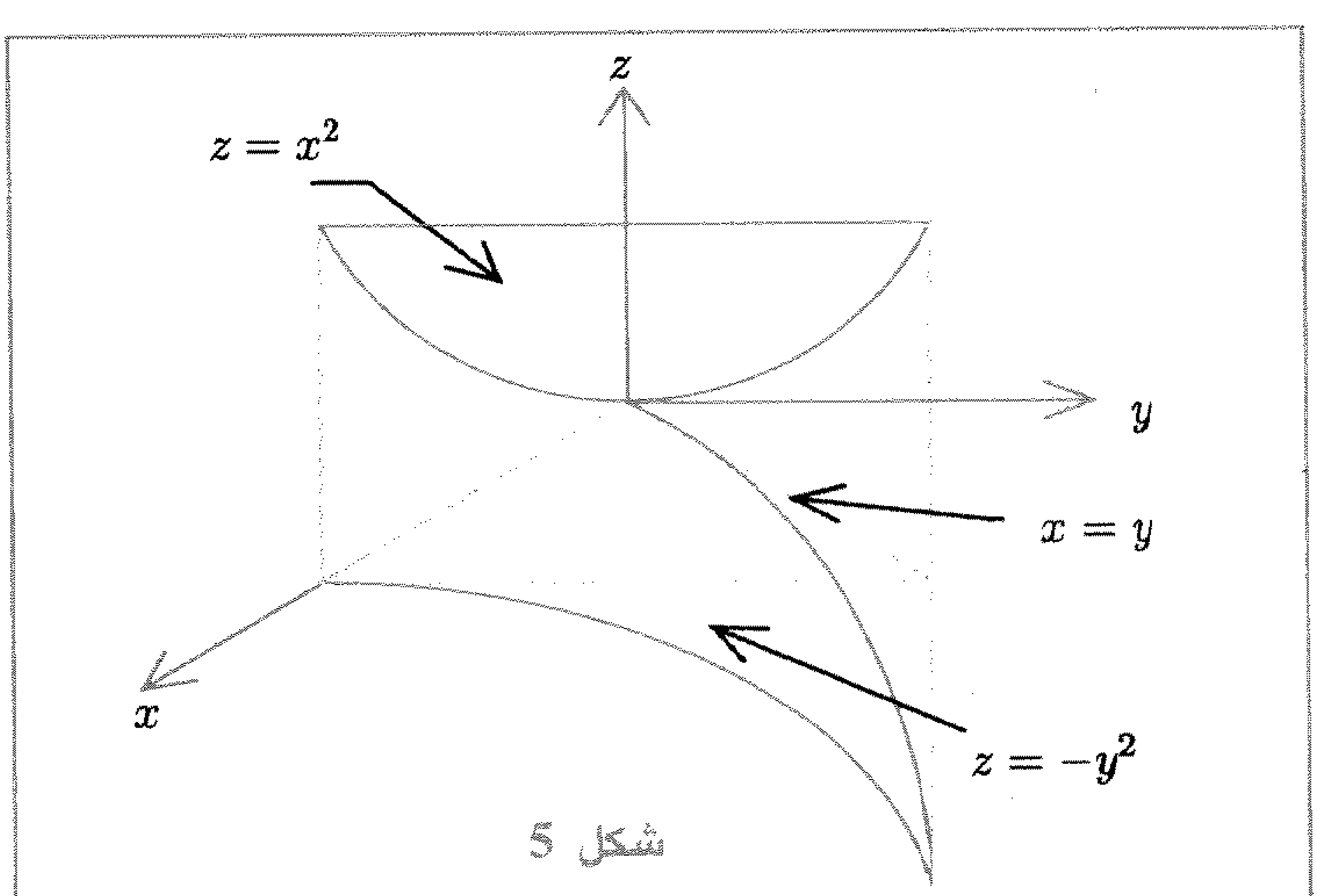
$$S=(x,y,z): c_1\leq z\leq c_2\ ,\ r_1(z)\leq z\leq r_2(z)\ ,\ L_1(y,z)\leq x\leq L_2(y,z)\}$$

فإن التكامل الثلاثي للدالة f يكتب كما يأتي:

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dV = \int\limits_{c_1}^{c_2} \int\limits_{r_1(z)}^{r_2(z)} \int\limits_{L_1(y,z)}^{L_2(y,z)} f(x,y,z)dx\ dy\ dz$$



شكل 4



شكل 5

مثـال 1

أوجد قيمة التكامل $I = \iiint\limits_S (x^2 - y^2)dv$

حيث أن S المجسم بين السطحين $z = -y^2$ و $z = x^2$ لكل $(x, y) \in R$ و R في المستوى $x\ y$ حيث أن $y = 0$ و$y = x$ و$0 \leq x \leq 1$.

الحـل

من الشكل (5) يمكن كتابة حدود التكامل كما يأتي:

$$I = \int\limits_0^1 \int\limits_0^x \int\limits_{-y^2}^{x^2} (x^2 - y^2)dz\ dy\ dx$$

ولإيجاد قيمة التكامل الثلاثي نعتبر أولاً المتغيرين y و x ثابتين ونكامل بالنسبة للمتغير z أي أن:

$$I = \int\limits_0^1 \int\limits_0^x (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)dy\ dx$$

والخطوة الثانية نكامل بالنسبة للمتغير y ونعتبر x ثابتاً:

$$I = \int\limits_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{5}x^5\right)dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{4}{5}x^2\right)dx$$

$$= \frac{4}{30}x^6 \Big|_0^1 = \frac{2}{15}$$

مثـال 2

أوجد قيمة التكامل

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{sinz} x^2 sin\ y\ dx\ dy\ dz$$

وارسم المجسم S.

الحـــل

$$I=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3\ siny\Big|_0^{sin\ z}\ dy\ dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3z\ sin\ y\ dy\ dz$$

$$I=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3\ z\ cos\ y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dz$$

$$I=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3\ z\ dz$$

يمكن كتابة التكامل السابق كما يلي:

$$I=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos^2z)d\ cos\ z$$

وبعد إجراء التكامل بالنسبة لـ $cos\ z$:

$$I=-\frac{1}{3}\left(cos\ z-\frac{1}{3}cos^3z\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{1}{3}\left[0-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{2}{9}$$

ويترك رسم المجسم كتمرين للقارئ.

مثـــال 3

أوجد قيمة التكامل

$$\iiint_S ye^{xy}dV$$

حيث أن S المكعب المحدد بالمستويات التالية:

$z=0$ و $z=-2$, $y=2$ $y=0$, $x=3$ $x=1$

الحـــل

$$\iiint\limits_S ye^{xy}dV = \int_0^2\int_1^3\int_{-2}^0 ye^{xy}dz\,dx\,dy$$

$$= 2\int_0^2\int_1^3 ye^{xy}dx\,dy$$

$$= \int_0^2 (e^{3y} - e^{y})dy$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{2}{3}e^6 - 2e^2$$

ملاحظة

يمكن إيجاد التكامل السابق بتغيير ترتيب التكامل (خمس صور مختلفة) ويمكن للقارئ محاولة ذلك علماً بأن النتيجة مطابقة.

مثـــال 4

أوجد قيمة التكامل الثلاثي $\iiint\limits_S x\,dz\,dy\,dx$

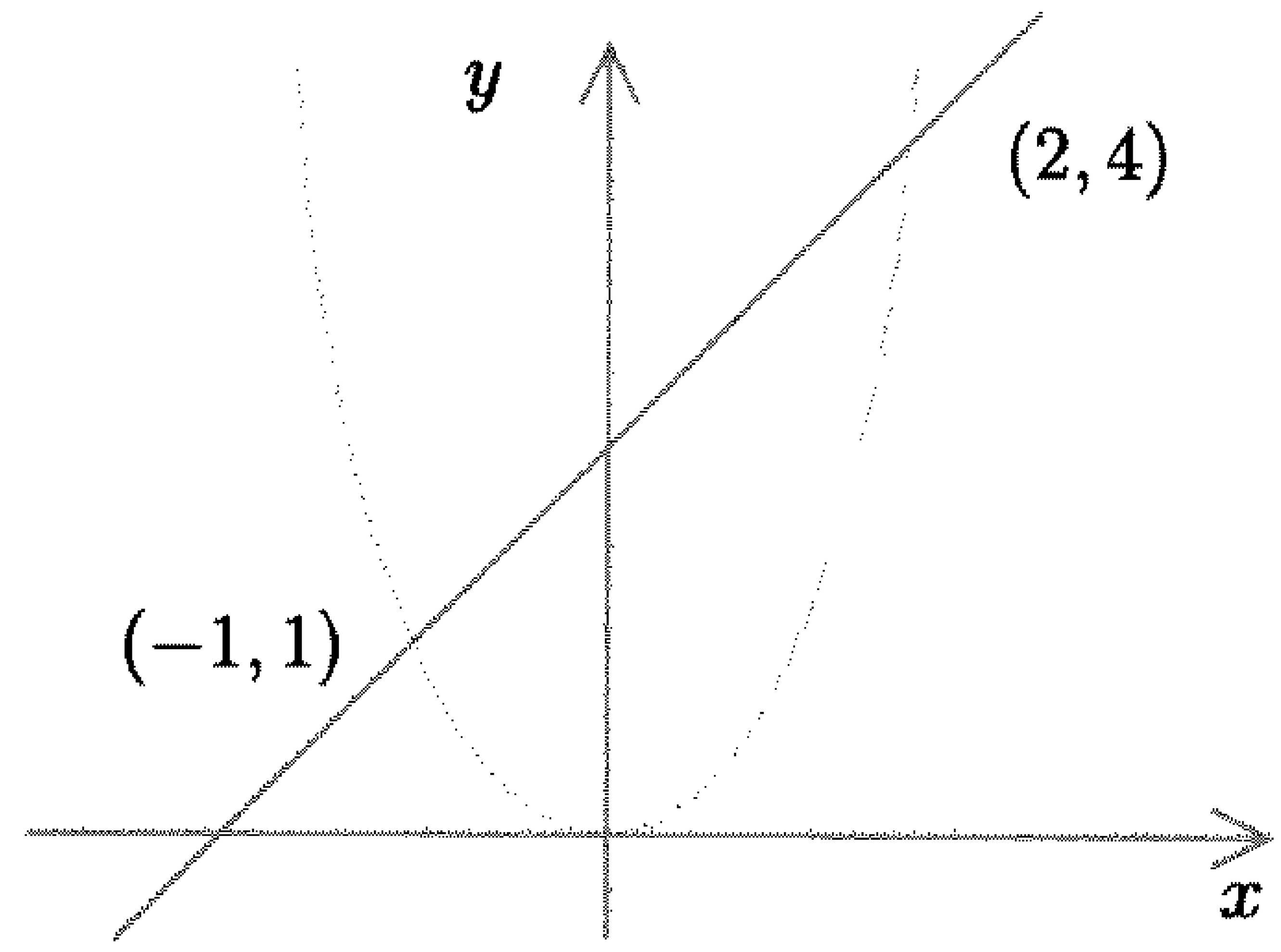
حيث أن S المنطقة المحددة بالسطوح التالية:

$$y = x^2\ ,\ y = 2 + x\quad 4z = x^2 + y^2 \quad \text{و} \quad z = x + 3$$

الحـــل

لمعرفة حدود التكامل نرسم مسقط المجسم S في المستوى $x\,y$، وهو عبارة عن المنطقة الواقعة بين المنحنى $y = x^2$ والمستقيم $y = x + 2$ كما هو موضح بالرسم، وبأخذ أي نقطة من السهل معرفة أن المجسم S محدد من أسفل

بـ $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ ومن أعلى بـ $z = x + 3$



شكل 6

وهكذا
$$I = \iiint\limits_S x\, dv = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} \int_{\frac{1}{4}(x^2+y^2)}^{x+3} x\, dz\, dy\, dx$$

وعند إجراء عملية التكامل نعتبر y و x ثابتين ونكامل بالنسبة للمتغير z في البداية أي أن:

$$I = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} \left[x(x+3) - \frac{x}{4}(x^2 + y^2) \right] dy\, dx$$

وعملية التكامل بسيطة ومن السهل أن يبين القارئ أن قيمة هذا التكامل تكون 5.23.

مثال 5

أوجد قيمة التكامل الثلاثي

$$I = \int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-z^2}} \int_{0}^{2-z} z\, dx\, dy\, dz$$

الحـل

أولاً نعتبر المتغيرين y و z ثابتين ونكامل بالنسبة للمتغير x

$$I=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}}(x\ z)\Big|_0^{2-z}dy\ dz=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}}(2z-z^2)dy\ d$$

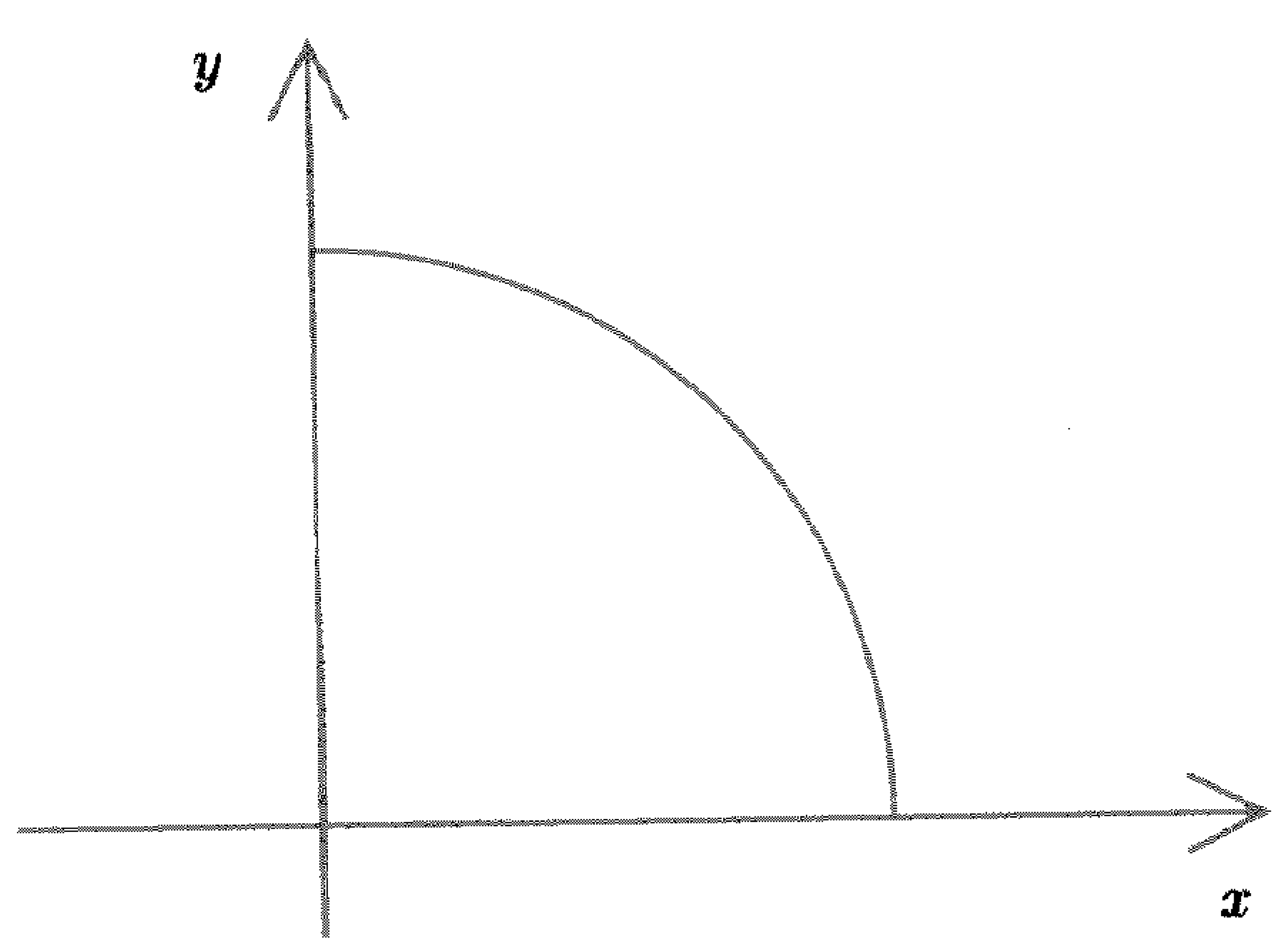
والآن نعتبر z ثابتاً ونكامل بالنسبة للمتغير y، ولتبسيط عملية التكامل نستخدم الإحداثيات القطبية، ولذلك:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2(2rcos\theta-r^2cos^2\theta)r\ dr\ d\theta$$

وبالتكامل بالنسبة لـ r نجد أن:

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{3}r^3cos\theta-\frac{1}{4}r^4cos^2\theta\right)\Big|_0^2d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{16}{3}cos\ \theta-4cos^2\theta\right)d\theta$$



شكل 7

وباستخدام المتطابقة $cos^2\theta = \frac{1}{2}(cos2\theta + 1)$ نجد أن:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{16}{3} cos\ \theta - 2cos\ 2\theta - 2\right) d\theta$$

$$= \left(\frac{16}{3} sin\ \theta - sin\ 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{16}{3} - 0 - \pi\right) = \frac{16 - 3\pi}{3}$$

مثـال 6

أوجد الحجم الواقع بين السطحين

$$z = 8 - x^2 - y^2 \quad , \quad z = x^2 + 3y^2$$

الحـل

السطحان يتقاطعان عند الأسطوانة التي قاعدتها قطع ناقص في المستوى $x\ y$

$$8 - x^2 - y^2 = x^2 + 3y^2$$

أو

$$x^2 + 2y^2 = 4 \Longrightarrow x \pm \sqrt{4 - 2y^2}$$

وعندما $x = 0$ فإن $y = \pm\sqrt{2}$

ولذلك

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\ dx\ dy$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} (8 - 2x^2 - 4y^2) dx\ dy$$

وبإجراء عملية التكامل بالنسبة للمتغير x (y ثابت) يمكن أن نبين أن:

$$V=\frac{8}{3}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(4-2y^2)^{\frac{3}{2}}\,dy$$

وباستخدام التعويض $y=\sqrt{2}\,sin\,\theta$، وهذا يتضمن $dy=\sqrt{2}\,cos\theta d\theta$، نجد أن:

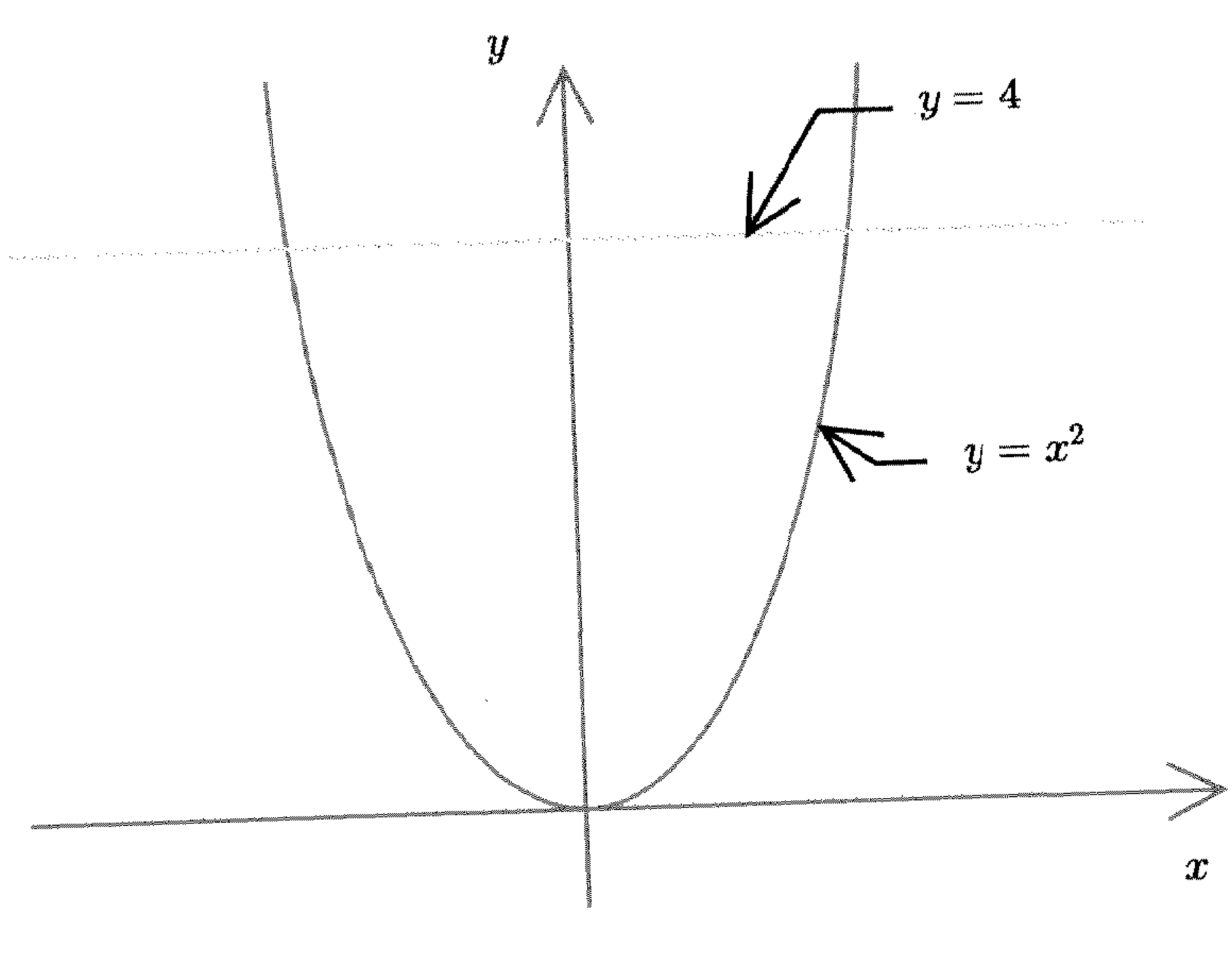
$$V=\frac{64\sqrt{2}}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}cos^4\theta\,d\theta=\frac{16\sqrt{2}}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(cos\,2\theta+1)^2d\theta$$

ويمكن كتابة التكامل الأخير على الصورة التالية:

$$=\frac{16\sqrt{2}}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2cos2\theta+\frac{1}{2}(cos\,4\theta+1\right)\,d\theta$$

وبعد إجراء التكامل نجد أن:

$$V=\frac{16\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3}{2}\pi=8\sqrt{2}\,\pi=35.54306351$$



شكل 8

مثـــال 7

أوجد حجم المجسم المحدد بالأسطوانة $y=x^2$ والمستويين $y+z=4$ ، $z=0$

الحـــل

لتحديد حدود التكامل، نرسم مسقط المجسم في المستوى $x\,y$، انظر الشكل (8).

واضح أن المستوى $y+z=4$ فوق المستوى $z=0$ (المستوى $x\,y$).

ولذلك

$$V=\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{4-y} dz\,dy\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}(4-y)dy\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(4y-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{x^2}^{4} dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(8-4x^2+\frac{1}{2}x^4\right)dx$$

$$=8x-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5\Big|_{-2}^{2}$$

$$=32-\frac{64}{3}+\frac{64}{10}=17.067$$

مثـــال 8

إذا كانت المنطقة Ω معرفة كما يلي:

$$\Omega = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 1 \ , \ x^2 \leq y \leq x \ , \ x-y \leq z \leq x+y\}$$

فأوجد ما يأتي:

أ) حجم المنطقة Ω ب) $\iiint\limits_{\Omega} 2x^3y^2z \, dV$

ج) الكتلة الكلية د) مركز الكتلة

إذا كانت الكثافة $\rho(x,y,z) = x + 2y + 4z$

الحـل

أ) يمكن إيجاد الحجم V كما يلي:

$$V = \iiint\limits_{\Omega} dV$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{2} \int_{x-y}^{x+y} dz \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 2y \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^4) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

ب)

$$\iiint\limits_{\Omega} 2x^3y^2z \, dV = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \int_{x-y}^{x+y} 2x^3y^2z \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^x x^3y^2\Big[(x+y)^2-(x-y)^2\Big]dy\ dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^x x^3y^2[(2x)(2y)]dy\ dx$$ (لماذا؟)

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^x 4x^4y^3\ dy\ dx$$

$$= \int_0^1 x^4y^4\Big|_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 x^4\left[x^4-x^8\right]dx$$

$$\int_0^1 (x^8-x^{12})dx$$

$$= \left(\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{13}x^{13}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{9}-\frac{1}{13}=\frac{4}{117}$$

جـ) الكتلة الكلية يمكن إيجادها كما يلي:

$$M = \iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)dV$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^x \int_{x-y}^{x+y} (x+2y+4z)dz\ dy\ dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^x [(x+y)(2y)+2(4xy)]dy\ dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} [10xy + 4y^2] dy\ dx$$

$$= \int_0^1 \left[5xy^2 + \frac{4}{3}y^3\right]\Bigg|_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\left(5x^3 + \frac{4}{3}x^3\right) - \left(5x^5 + \frac{4}{3}x^6\right)\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{19}{3}x^3 - 5x^5 - \frac{4}{3}x^6\right) dx$$

$$= \left(\frac{19}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^6 - \frac{4}{21}x^7\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{19}{12} - \frac{5}{6} - \frac{4}{21} = \frac{133 - 70 - 16}{84} = \frac{47}{84} = 0.5595$$

د) عزم المجسم Ω بالنسبة للمستوى $x\ y$ يمكن إيجاده كما يلي:

$$M_{xy} = \iiint_{\Omega} z\ \rho(x, y, z) dv$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \int_{x-y}^{x+y} z(x + 2y + 4z) dz\ dy\ dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \left[(x + 2y)\frac{z^2}{2} + \frac{4}{3}z^3\right]_{x-y}^{x+y} dy\ dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \left[(x + 2y)(2xy) + \frac{4}{3}(6x^2y + 2y^3)\right] dy\ dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \left(10x^2y + 4xy^2 + \frac{8}{3}y^3\right) dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[5x^2y^2 + \frac{4}{3}xy^3 + \frac{2}{3}y^4\right]_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[5x^2(x^2 - x^4) + \frac{4}{3}x(x^3 - x^6) + \frac{2}{3}y^4\right]_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[5x^2(x^2 - x^4) + \frac{4}{3}x(x^3 - x^6) + \frac{2}{3}(x^4 - x^8)\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(5x^4 - 5x^6 + \frac{4}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^7 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^8\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(7x^4 - 5x^6 - \frac{4}{3}x^7 - \frac{2}{3}x^8\right) dx$$

$$= \left(\frac{7}{5}x^5 - \frac{5}{7}x^7 - \frac{4}{24}x^8 - \frac{2}{27}x^9\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{7}{5} - \frac{5}{7} - \frac{1}{6} - \frac{2}{27} = \frac{841}{1890} = 0.4449735$$

ولكن مركز الكتلة

$$(x, y, z) = \left(\frac{M_{yz}}{M}\ ,\ \frac{M_{xz}}{M}\ ,\ \frac{M_{xy}}{M}\right)$$

ومنها

$$z = \frac{0.44497}{0.5595} = 0.795299 = 0.795$$

ويترك للقارئ كتمرين أن يبين:

$$(x, y, z) = (0.689, 0.606, 0.795)$$

تمارين 2.3

أوجد قيمة التكاملات الآتية:

1) $\displaystyle\int_0^3\int_{-1}^1\int_2^4 (y-xz)dz\,dy\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\cos z\,dy\,dx\,dz$

3) $\displaystyle\int_{-15}^{13}\int_1^e\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} z(\ln x)^2 dz\,dx\,dy$

4) $\displaystyle\int_{-1}^2\int_1^{x^2}\int_0^{x+y} 2x^2\,y\,dz\,dy\,dx$

أرسم المنطقة S المحددة بالمعادلات المعطاة وعبّر عن التكامل:

$$\iiint_S f(x,y,z)dV$$

كتكامل جزئي بست صور مختلفة في التمارين من 5 ـ 7:

5) $x+2y+3z=6\ ,\ x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0$

6) $x^2+y^2=9\ ,\ z=0\ ,\ z=2$

7) $36x^2+9y^2+4z^2=36$

أوجد قيمة التكامل $\displaystyle\iiint_S f(x,y,z)dV$

حيث أن S محدد بالسطوح المعطاة وf الدالة المعطاة في التمارين من 8ـ11:

8) $z=0\ ,\ x^3+z=1\ ,\ y^2+z=1\ ,\ f(x,y,z)=x$

9) $x^2+z^2=a^2,\ y^2+z^2=a^2\ ,\ f(x,y,z)=x^2+y^2$

10) $x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0\ ,\ x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\ ,\ f(x,y,z)=z$

11) $y^2+z^2=4ax\ ,\ y^2=ax\ ,\ x=3a\ ,\ f(x,y,z)=x^2$