اسم المقرر : (اساسيات الرياضيات)

استاذ المقرر : د / اسماعيل جاد امين

الفرقـــــة : الاولي

الشعبـــــــة : أساسي لغة غربية

الفصل الدراسى الثانى

بسم الله الرحمن الرحيم

يعدا الجبر والتفاضل فرعان أساسيان من فروع الرياضيات وأساسياتها واللذان لهما دورا أساسيا ومهم فى عملية تطوير الرياضيات بجميع شعبها البحتة والتطبيقية. ولقد جاءت هذة المذكرة البسيطة فى مبادىء الجبر والتفاضل متضمنة موضوعات تغطى مفردات منهاج المقرر والذى يدرسة طلاب السنة الأولى بكلية التربية - تعليم أساسى و مايعادلها من باقى الكليات الأخرى بحيث تجعل هذة المذكرة مرجع مفيد فى تغطية الموضوعات الاتية:

جزء الجبر:

- نظرية الفئات والمجموعات العددية.
- الضرب الكارتيزى للمجموعات.
- المصفوفات.
- المحددات.
- المعادلات الخطية وحلولها.
- الاستنتاج الرياضى.
- الأسس واللوغاريتمات.
- الكسور الجزئية.
- نظرية ذات الحدين.

جزء التفاضل:

- الدوال الحقيقية.
- المجال والمدى للدالة.
- تصنيف الدوال.
- أنواع الدوال.
- النهايات والاتصال.
- المشتقات.

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

المقـدمـة
INTRODUCTION

تعد الرياضيات اليوم أحد مظاهر حضارتنا الخلاقة واسعة الامتداد ، والتى يرجع تاريخها إلى ألفين وخمسمائة عام. ولقد اكتسبت الرياضيات فى الخمسمائة عام الأخيرة صفة مميزة إضافية ، وهى صفة "لغة العلم" وبهذا أخذت تؤدى دوراً حاسماً فى السيطرة على العالم المادى. وأفضل مثال لهذه السيطرة هو التقدم المذهل الذى حققته الدول المتقدمة باهتمامها بالرياضيات والريادة التى تحققت لبعض الدول فى مجال الحاسبات الإلكترونية ونظم تبادل المعلومات دون غيرها لكونها أولت الرياضيات عناية خاصة.

ويقع الاهتمام بالرياضيات فى صلب نظرية المعرفة العقلية عند أفلاطون كما يقع المنطق فى صلب النظرية نفسها عند أرسطو ، وطبقاً لنظرية المعرفة عند أفلاطون فهناك ثلاثة أنواع من المعرفة تتدرج من الأدنى وصولاً إلى الأعلى وهى المعرفة الظنية والفهم ثم المعرفة العقلية.

وتعتمد المعرفة الظنية على المشاهدات الحسية ويليها الفهم حيث يمكن الوصول إلى الاستنباطات والنظريات من خلال الخبرات الحسية كما فى علم الهندسة.

أما أعلى مراحل المعرفة فهى المعرفة العقلية والتى نصل إليها بقوة بقوانين الفكر الموجودة بالعقل وحده دون الاعتماد على الحواس ويمكن إدراك أهمية الدور الذى تلعبه الرياضيات فى هذا النظام المعرفى من خلال دراسة نظام التربية عند أفلاطون.

وتبدو هنا أهمية الرياضيات فى تنمية ملكة التعميم والتجريد لدى التلميذ ، للوصول إلى الأحكام العامة والقوانين الكلية. هذا فضلاً عن أعدادها للفرد لتجاوز مرحلة المعرفة الظنية للوصول إلى مرحلة المعرفة العقلية.

وقد اعتمدت نهضة الدول الحديثة والتى اكتسبت شهرة عالمية فى مجال صناعة أجهزة الكمبيوتر والاتصال عن بعد مثل اليابان على الاهتمام بالرياضيات ســـواءً فى المرحلة الجامعية أو المراحل التى قبلها.

ليس دور الرياضيات مقصوراً على المعرفة العلمية دون غيرها ولكنه يتعداه إلى كل فروع المعرفة من أدب وموسيقى وتاريخ وجغرافيا ... الخ.

ومما يرثى له أن دارس الأدب وعلوم اللغة وغيرها يظنون – وبعض الظـــن أثم – أن هناك بوناً شاسعاً بين البناء اللغوى والبناء الرياضى ومن ثم فهم يعجبـــون مـــن محاولة تدريس الرياضيات لطلاب الدراسات الأدبية مثل أقرانهم طـــلاب الدراســـات العلمية.

فى العالم المتقدم فإن أعرق الجامعات توجد بها كراسى للأستاذية فى اللغويـات Linguistics داخل أقسام الرياضيات. ولقد وجد أن معامل الارتباط بـــين القـــدرات اللغوية الأساسية مثل القدرة الكلامية verbal ability والعلاقـــة اللفظيـــة word fluency والقدرات المنطقية مثل القدرة الاســـتقرائية Inductive ability والقـــدرة الاســـتدلالية Deductive ability – هما قدرتان لازمتان لعالم الرياضيات ، بل ربما كانتا أهم قدرتـــان لازمتان بالنسبة له – هى معاملات قوية. بل أكثر من ذلك فإن معاملات الارتباط بين القدرات اللغوية والقدرة الحسابية ليست ضعيفة.

فى مجال الارتباط بين الرياضيات والأدب فقد لمع علماء رياضيات لغويون بـــل وعلماء رياضيات أدباء ففى حضارتنا الإسلامية نجد على سبيل المثال الخليل بن أحمـــد الذى عاش على امتداد الثلاثة الأرباع الأخيرة من القرن الثامن الميلادى وتلاميـــذه – ومنهم سيبويه والليث بن رافع – فالخليل بن أحمد هو أول من وضع للشعر العـــربى بحوره وهو أول من أنتج معجم العين ، أول معجم فى اللغة العربية. فقد ابتكر طريقـــة فريدة فى ترتيب الألفاظ فى معجمه. فلا هو اتبع طريقة "أبجد هوز حطى كلمـــن..." ولا هو اتبع طريقة أ ب ت ث ج ح خ ..." فلعله – كما يقول الدكتور ذكى نجيب محمود فى كتابه "المعقول ولا معقول فى تراثنا الفكرى" – لم يجد فيها أساساً علميـــاً

فأقام طريقته على أساس أن يجئ ترتيب الحروف بحسب مخارجها عند النطق فأقصاها مخرجاً يرد أولاً فى الترتيب وأدناها إلى الشفتين يرد أخراً وما بين الأقصى والأدنى ترتب الحروف بحسب مخارجها المتعاقبة أى أنه أوجد لها الترتيب "ع ح هـ خ غ ق ..." وإذا كانت أبنية الكلمة ثنائية وثلاثية ورباعية وخماسية فقد رسم صورة لفظية يمكن أن تنتجها هذه الأبنية مستخدماً فى ذلك نظام "التباديل والتوافيق".

وإذا قفزنا إلى القرن السادس الهجرى التقينا واحداً من أهم رواد النظم التعليمى فى الرياضيات أبا محمد عبد الله بن محمد بن الحجاج الأردينى الفندلاوى المعروف بابن الياسمين (أو بابن الياسمينى) ، شيخ شيوخ العلوم الرياضية بالمغرب العربى فى زمانه ، برع فى علوم الهيئة والمنطق والتنجيم وكان محيطاً بالعلوم الرياضية من حساب وعدد وهندسة ومساحة وجداول مقابله وكان أديباً بليغاً وشاعراً مجيداً وهو صاحب الأراجيز الثلاث الشهيرة : الأرجوزة الياسمينية فى علم الجبر والمقابلة ، سمعت منه بإشبيلية سنة ٥٨٧ هـ (١١٩١ م) والأرجوزة الياسمينية فى أعمال الجذور ومنظومة الكفات.

وهو يبدأ أرجوزته فى أعمال الجبر والمقابلة ، التى تتألف من ثلاثة وخمسين بيتاً بقوله :

الحمد لله على ما ألهما ... ومن تم تعليمه وفهما

ثم صلاة الله طول الأبد ... على النبى المصطفى محمد

والشكر للحبر الذكى العالم ... أستاذنا محمد بن قاسم

ويختمها بقوله :

وضرب كل زائد وناقص ... فى نوعه زيادة للفاحص

وضربه فى ضده نقصان ... فافهم هداك الملك الديان

ثم صلاة الله والسلام ... على النبى ما انجلى الظلام

وفى غضون أرجوزته يوضح عناصر المعاملة الجبرية ثم يصف معادلات الدرجة الثانية ويشرح طريقة حلها. ثم يعرض للحالة العامة لمعادلة الدرجة الثانية ، ثم ينتقل إلى

تعريف عمليتي الجبر والمقابلة ثم يعرض للمنازل أو بلغتنا العصرية الأسس ثم يتناول ضرب المقادير الجبرية...

أما أرجوزته فى أعمال الجذور فتقع فى خمسة وخمسين بيتاً شرح فى ثناياها ضرب الجذور ثم جمعها ، ثم قسمتها ، ثم تضعيفها ، ثم طرحها ، ثم تجذير ذوات الأسماء والمنفصلات.

ونعود القهقرى إلى القرن الخامس الهجرى لنشهد ميلاد "غياث الدين عمر أبو الفتح بن إبراهيم الخيام" المولود فى نيسابور سنة ٤٣٣ هـ (= ١٠٤٠ م) على أرجح الأقوال والمتوفى فى سنة ١١٢٣ م. تلك العبقرية التى . . . ربما لا تعلم العامة عنها إلا أنها صاحبة الرباعيات بغزلياتها وخمرياتها ودعوتها إلى الاستمتاع بالحياة ولذاتها. لكن هذه العقلية الجبارة كان لها – إلى جانب نظريتها الفلسفة – إنتاجها الرياضى والفلكى العظيم فقد أبدع فى حل معادلات الدرجة الثانية متأثراً بأستاذه الخوارزمى وبحث فى معادلات الدرجة الثالثة والرابعة وابتكر نظرية ذات الحدين المرفوعة إلى أس عدد موجب صحيح ويذكر سميث فى كتاب تاريخ الرياضيات أن علماء الرياضيات فى القرون الوسطى وما قبلها قد حلوا نظرية ذات الحدين ، وهى التى تمكن بواسطتها رفع مقدار جبرى ذى حدين إلى قوة معلومة ؛ وحل أقليدس المقدار الجبرى ذا الحدين مرفوعاً إلى قوة أسها اثنان لكن عمر الخيام فك المقدار الجبرى ذا الحدين مرفوعاً إلى أسس ٢ أو ٣ أو ٤ ... أو ن حيث أن "ن" عدد صحيح موجب ولذا يعتبر مبتكر نظرية ذات الحدين. ويقول سارتون : أن عمر الخيام من عظام علماء الرياضيات فى القرون الوسطى ولكنه اشتهر بشعره المتقن. مع إنه حل ثلاثة عشر نوعاً من معادلات الدرجة الثالثة بكل دقة ويضيف : «أنه اهتم بتصنيف معادلات الدرجة الثالثة حسب درجاتها حسب حدودها المحصورة فى ثلاثة عشر نوعاً.

هذا بالإضافة إلى اهتمام الخيام بدراسة الهندسة فدرس هندسة أقليدس ثم حاول برهنة ما يسمى بالموضوعة الخامسة من موضوعات أقليدس ، التى استعصت على من سبقه من علماء المسلمين. وبرهن أن مجموع زوايا أى شكل رباعى = ٣٦٠°

درجة وأن مجموع زوايا المثلث ١٨٠° درجة . هذا بالإضافة إلى أنه ترك واحد وعشرين مؤلفاً فى فروع المعرفة المختلفة من الرباعيات فى كتاب الموسيقى الكبير مروراً برسالة الميزان الجبرى وحل المسائل التكعيبية.

هذا فيض من غيث فهناك الكثير من علماء العرب من كانت لهم إسهامات فى مجال الأدب والتاريخ والجغرافيا كأمثال البيرونى وغيره.

والعلاقة بين الرياضيات والأدب ليست مقصورة على الآداب العربية فحسب ولكننا نجد أن هناك الكثير من علماء الغرب الذين يملكون علوماً أدبية جنباً إلى جنب علومهم الطبيعية فها هو جاليليو (سنة ١٥٦٤ — ١٦٤٢) يقول :

"والفلسفة فى ذلك الكتاب العظيم — الطبيعة — والمفتوح دائما تحت بصرنا. إلا إننا لا نفهم هذا الكتاب حتى نتعلم أولاً كيف نفهم لغته ونقرأ حروفه التى كتب بها. إنه مكتوب بلغة الرياضيات وحروفها المثلثات والدوائر والأشكال الهندسية الأخرى. والتى يستحيل بدونها للإنسان أن يفهم كلمة واحدة منه. فبدونها نمضى متخبطين فى متاهة مظلمة."

وأخيراً نستطيع أن نؤكد أن لغة الرياضيات واحدة من أهم الموضوعات التى تجب دراستها. ذلك أن الرياضيات بناء ولغة لوصف الطبيعة المحيطة بنا ، استناداً لذلك فإننا فى دراستنا للرياضيات — كما فى دراستنا للغة — لابد من إدخال بعض الرموز والمصطلحات (التى تعتبر أبجدية الرياضيات) ، وكذلك إدخال بعض القواعد لبناء القضايا (العبارات) الرياضية (والتى تقابل الجمل بالنسبة للغة).

نظرية المجموعات

SETS THEORY

"كل شخص يعرف بنفسه ما المقصود بالمجموعة"

بوريل

٢–١ – مقدمة : INTRODUCTION

يؤكد غالبية علماء الرياضيات أن نظرية المجموعات ظهرت إلى الوجود فى ١٨٧٣/١٢/٧ بواسطة الفيلسوف عالم الرياضيات جورج كانتور G. Cantor (١٨٤٥–١٩١٨) عند محاولته البرهان على أن الأعداد الحقيقية أكثر من الأعداد الطبيعية وظهر هذا فى رسالته إلى صديقه عالم الرياضيات الألمانى ريدبكند R. Dekeind (١٨٣١–١٩١٦).

منذ ذلك التاريخ ونظرية المجموعات تلعب دوراً هاماً وحيوياً فى النباءات الرياضية وبل أصبحت الرياضيات بفضل نظرية المجموعات -- أكثر بساطة ونقاءً ووضوحاً ، وأصبحت الصياغات الرياضية أكثر دقة.

وظهور نظرية المجموعات لعب دوراً فعال فى ظهور فروع كثيرة فى الرياضيات مثل التوبولوجيا وأنواع الجبر المختلفة ونظرية الزمر... الخ.

٢–٢ – ما هو المقصود بالمجموعة :

قال كانتور : المجموعة تفى تجمعاً فى وحدة تامة لأشياء مختلفة نتصورها أو نفكر فيها. ولذا فإن الرياضيات تهتم فقط بالمجموعات التى تتألف من عناصر أو أعداد تجمع فيما بينها صفة عامة مثل :

١ – مجموعة الدول العربية.

٢- مجموعة دول حوض البحر المتوسط.

٣- مجموعة رابطة الأدباء الشبان.

وهكذا ...

هنا

ولكن كيف يمكن التعبير عن المجموعة ؟. للتعبير عن المجموعة طريقتان : الأولى وهى طريقة القائمة (أى قائمة بجميع عناصر المجموعة) ، ثم نحصرها ضمن قوسين كبيرين على أن نفصل بين كل عنصر وآخر بفاصلة . مثلا

١- {أحمد ، محمد ، على ، زيد }.

٢- {أ ، ب ، ج ، د }.

٣- مجموعة حروف الإظهار وهى {أ ، هـ ، ع ، غ ، خ}.

٤- مجموعة حروف الإدغام {ى ، ر ، م ، ل ، و ، ن}.

٥- مجموعة حروف القلقلة{ق ، ط ، ب ، ج ، د}.

هذه الطريقة قد يبدو غير صالحة لتمثيل مجموعة العناصر التى تحوى عددا كبيراً من العناصر : مثلاً مجموعة طلاب فرقتك أو مجموعة الحركات فى لعبة الجمباز. فهناك طريقة أخرى للتعبير عن المجموعة وهى طريقة القاعدة (الصفة المميزة أى أنه لصفة ما فإن جميع العناصر التى تتمتع بهذه الصفة تكون عناصر فى هذه المجموعة) مثل: مجموعة الأعداد الطبيعية تكتب :

$N = \{1, 2, 3, \ldots, \} = \{x : x \in N\}$

وكذلك مجموعة الأعداد الحقيقة تكتب فى الصورة :

$\{x : x \in R\}$

أما المجموعة $\{x\}$ عبارة عن مجموعة تحتوى على عنصر وحيد هو x

والمجموعة الخالية يرمز لها بالرمز φ.

٢–٣ – انتماء عنصر إلى مجموعة.

إذا كانت $G=\{a, b, c\}$ مجموعة فإنه يرمز للعنصر $a \in G$ ويقال أن a ينتمى إلى المجموعة G والعنصر $d \notin G$ لا ينتمى لمجموعة G.

∉

تعريف : (٢–١).

يقال للمجموعة A أنها محدودة (أو منتهية) إذا كانت تحتوى على عدد محدود من العناصر وإلا سميت مجموعة لانهائية.

تعريف : (٢–٢).

إذا كانت A مجموعة محدودة وعدد عناصرها n فإن العدد n يسمى بالعدد الرئيسى (أو العدد الكاردينالى) ويرمز له بالرمز $n(A)$.

n

n(A)

مثال : (٢–٣).

$A = \{1, 2, 5\}$, $n(A) = 3$

مثال : (٢–٤).

مجموعة الأعداد الطبيعية الغير محدودة $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

مثال : (٢–٥).

مجموعة الأعداد الصحيحة $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

٢–٤ – المجموعات الجزئية : Subsets

إذا تذكرنا مجموعة حروف الإدغام وهـى $A = \{$ى ، ر ، م ، ل ، و ، ن$\}$

وكما نعلم أن هذه المجموعة تنقسم إلى مجموعتين

١ – مجموعة حروف الإدغام بغنة $B = \{$ى ، ن ، م ، و$\}$,

٢ – مجموعة حروف الإدغام بغير غنة $C = \{$ل ، ر$\}$.

فأن كلاً من المجموعتين C, B يقال أنهما مجموعتان جزئيتان من المجموعـة A ويرمز لهما فى هذه الحالة $C \subseteq A$, $B \subseteq A$.

$C \subseteq A$

$B \subseteq A$

مثال : (٢–٦).

إذا كانت $A = \{x, y, z, w\}$ و كانت $B = \{x, z\}$ فإن $B \subseteq A$

مثال : (٢–٧).

مجموعة الأعداد الطبيعية N مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الصحيحة Z

$N \subseteq Z$

مثال : (٢–٨).

أوجد جميع المجموعات الجزئية من المجموعة $A=\{a, b, c\}$

الحل

أولاً : المجموعات الجزئية ذوات العنصر الواحد $\{a\}, \{b\}, \{c\}$.

ثانياً : المجموعات الجزئية ذوات العنصرين $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$.

ثالثاً : المجموعات الجزئية ذوات الثلاث عناصر $\{a, b, c\}$. المجموعه نفسها

رابعاً : المجموعات الجزئية التي لا تحوى أى عنصر φ. الخا ليه

وبذلك تكون جميع المجموعات الجزئية من المجموعة A هي :

$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \varphi$

والمجموعة المكونة من كل هذه المجموعات الجزئية تسمى مجموعة القوى ويرمز لها بالرمز P(A) وتكتب في صورة

$p(A) = \{\varphi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

لحساب عدد المجموعات الجزئية نجده 8 مجموعات وعدد عناصر المجموعة A هو ثلاثة عناصر لذلك نجد أن $n(P(A)) = 2^3 = 8$ في حين أن $n(A) = 3$.

(2)(2)(2)

ملاحظة :

نلاحظ من المثال السابق أنه إذا كانت المجموعة $A=\{a\}$ أى أنها تحوى عنصراً وحيداً فإن مجموعة المجموعات الجزئية هى $P(A) = \{\varphi, \{a\}\}$ وعدد عناصرها $2^1=2$. وإذا زاد عدد عناصر المجموعة A عن العنصر الواحد فإن عدد عناصر المجموعة P(A) يعطى من خلال الجدول التالى :

عدد عناصر P(A)	مجموعة المجموعات الجزئية	عدد عناصر المجموعة n(A)	المجموعة A
$2^1 = 2$	$P(A)=\{\{a\}, \varphi\}$	1	$A=\{a\}$
$2^2 = 4$	$P(A)=\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \varphi\}$	2	$A\{a, b\}$
$2^3 = 8$	$P(A)=\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \varphi\}$	3	$A=\{a, b, c\}$
$2^4 = 16$	طلاب ؟	4	$A=\{a, b, c, d\}$
2^n	$P(A)=(\{\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \varphi\}$	N	$A=\{a_1, a_2, \ldots a_n)$

بعد هذه الملاحظة نستطيع تقديم المثال التالى :

مثال : (٢–٩).

إذا كانت A مجموعة عدد عناصرها n فإن عدد عناصر p(A) هو 2^n

الحل بعد دراسه نظريه ذات الحدين

عناصر المجموعة p(A) هى كل المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة A

أولاً : المجموعة الجزئية الخالية أى أن $\varphi \in p(A)$.

ثانيا : المجموعات الجزئية ذوات العنصر الواحد وعددها $\binom{n}{1} = n$

ثالثاً : المجموعات الجزئية ذوات العنصرين وعددها $\frac{n(n-1)}{2!} = \binom{n}{2}$.

رابعاً : المجموعات الجزئية ذوات n عنصر وعددها $\binom{n}{n} = 1$

فمن الواضح أن عدد عناصر $p(A)=$ المجموع الكلى للمجموعات الجزئية للمجموعة A أى أن :

$$n(p(A)) = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{r} + \ldots \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

وحسب نظرية ذات الحدين نجد أن

$$n(p(A) = (1+1)^n = 2^2$$

٢–٥– جبر المجموعات :- algebra of sets

الاتحاد : Union

إذا كانت $A=\{1, 2, 3, 4\}$، $B=\{-1, -2, -3, 5\}$ فإن اتحاد المجموعتين A، B ويرمز له بالرمز $A \cup B$ (ويقرأ A اتحاد B) عبارة عن أصغر مجموعة تحوى كلاً منهما أى أن :

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, -1, -2, -3, 5\}$$

من الجدير بالملاحظة أن $A \subset A \cup B$، $B \subset A \cup B$

تعريف : (٢–١٠).

إذا كانت A، B مجموعتين فإن اتحادهما هو المجموعة $A \cup B$ المعرفة بالصيغة التالية :

او

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$$

التقاطع : Intersection

إذا كانت $A = \{x, y, z, w\}$، $B = \{c, f, y, g, z\}$ فإن تقاطع المجموعتين A، B ويرمز له بالرمز $A \cap B$ (ويقرأ A تقاطع B) عبارة عن أكبر مجموعة جزئية محتواه فى كل من A، B فى آن واحد أى أن :

$$A \cap B = \{y, z\}$$

ونلاحظ هنا أن $A \cap B \subset A$ وأيضا $A \cap B \subset B$ وهذا يعنى أن $A \cap B$ مجموعة مكونة من العناصر المشتركة بين A، B.

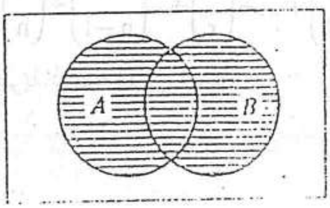
تعريف : (٢–١١).

إذا كانت A، B مجموعتين فإن تقاطعهما هو المجموعة $A \cap B$ المعرفة كما يلى :

و

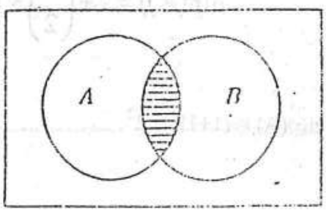
$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

$\wedge$



$A \cup B$ is shaded

مظلل



$A \cap B$ is shaded

٢-٦- المجموعة الشاملة (الكلية) : Universal set

إذا كانت S مجموعة ما فإن أى مجموعة A تحقق الشرط $S \subseteq A$ يمكن اعتبارها مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعة S. ويمكن تعميم ذلك كما يلى : -

إذا كانت $S_1, S_2, \dots, S_n$ مجموعات فإن أى مجموعة T تحقق الشرط

$$S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n \subseteq T$$

يمكن اعتبارها مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعات $S_1, S_2, \dots, S_n$

مثال : (٢-١٢).

إذا كانت $A=\{1, 2, 3\}$، $B=\{1, 2, 3, 4, \}$، ..... $N=\{1, 2, 3, \dots \}$ فإن كل مجموعة من هذه المجموعات تصلح أن تكون مجموعة شاملة للمجموعة A.

مثال : (٢-١٣).

إذا كانت $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{c, d\}$, $A_3 = \{x, y\}$ فإن كلاً من المجموعتين $G = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $H=\{a, b, c, d, x, y\}$ تصلح أن تكون مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعات A_1, A_2, A_3 فضلاً عن ذلك إذا كانت R مجموعة كل الحروف الأبجدية الإنجليزية فإنها أيضاً تصلح أن تكون مجموعة شاملة للمجموعات A_1, A_2, A_3.

ملاحظات.

١- المجموعة الشاملة تختلف من مثال عنها فى مثال آخر.

٢- المجموعة الشاملة لمثال معين هى مجموعة اختيارية ولكن اختيارها يجب أن يظل ثابت.

٢–٧– متممة (مكملة) المجموعة : Complement Of A Set

إذا كانت $S=\{a, b, c, d\}$ هي المجموعة الشاملة بالنسبة إلى المجموعة $A=\{a, b\}$
فإن المجموعة $b=\{c, d\}$ تسمى متممة A بالنسبة إلى المجموعة S ويرمز لها بالرمز A^c أى أن $B=A^c$.

ولاحظ أن :

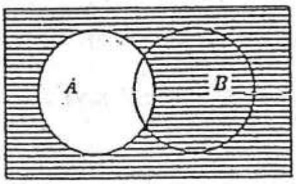
(i) $A \cap A^c = \phi$
(ii) $A \cup A^c = S$

تعريف : (٢–١٤).

أن مكملة المجموعة A بالنسبة للمجموعة الشاملة S تعرف كما يلى :

$$A^c = \{x : x \in S \wedge (x \notin A)\}$$

أى هى مجموعة العناصر المنتهية للمجموعة الشاملة ولكنها فى ذات الوقت لا تنتمى إلى المجموعة A وهذا يتضح من الشكل التالى :



A^c is shaded

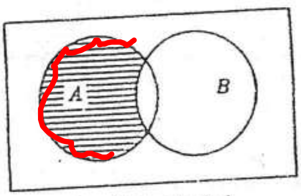
S

تعريف : (٢–١٥).

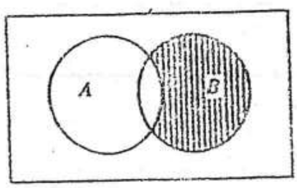
إذا كانت A, B مجموعتين فإن الفرق بين A, B (أو حاصل طرح B من A) ويرمز له بالرمز A-B يعرف بالصورة التالية :

$$A-B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

أو بمعنى أنه مجموعة العناصر التى تنتمى إلى المجموعة A فقط دون المجموعة B كما يتضح من الشكل التالى :



$A-B$ is shaded



$B-A$ is shaded

مثال : (٢-١٦).

إذا كانت $A=\{a, b, c\}$ ، $B=\{b, c\}$ فإن

(i) $A-B = \{a\}$

(ii) $B-A = \{\ \} = \phi$

مثال : (٢-١٧).

إذا كانت A ، B مجموعتين وفرضنا أن S هى المجموعة الشامل لهما فأثبتت أن :

$$A-B = A \cap B^c$$

الحل

باستخدام التعريف نجد أن :

$$A-B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

لأن

$$= \{x : (x \in A) \wedge x \in B^c\} \qquad x \notin B \Leftrightarrow x \in B^c$$

وفق تعريف التقاطع

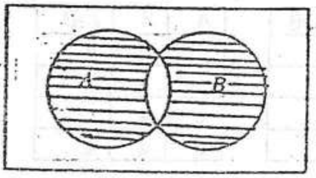
$$A-B = A \cap B^c$$

تعريف : (٢-١٨).

الفرق التناظرى لمجموعتين A ، B ويرمز له بالرمز $A \Delta B$ (يقرأ A دلتا B) ويعرف كالآتى :

$$\begin{aligned} A \Delta B &= \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\} \\ &= \{x : x \in (A-B) \vee x \in (B-A)\} \\ &= (A-B) \cup (B-A) \end{aligned}$$

وبمعنى أدق هى مجموعة العناصر المنتمية إلى المجموعة A فقط والمجموعة B فقط ولا تنتمى إلى $A \cap B$. يمكن توضيح ذلك من خلال الشكل التالى :



الجزء المظلل هو $A \Delta B$

مثال : (٢–١٩).

إذا كانت $A=\{a, b, c, d\}$، $B=\{d, e, f, g\}$ فإن :

$$
\begin{aligned}
A \Delta B &= (A-B) \cup (B-A) \\
&= \{a, b, c\} \cup \{e, f, g\} \\
&= \{a, b, c, e, f, g\}
\end{aligned}
$$

٢–٨– جداول الانتماء : Membership Tables

تعرف جداول الانتماء بطريقة مشابهة تماماً للطريقة التى عرفنا بها جداول الصواب فى باب المنطق. فإن كانت $A \neq \phi$ مجموعة مفروضة وكان x عنصراً ما ، فإما أن يكون $x \in A$ وإلا فإن $x \notin A$ فللاختصار نعبر عن هذه الحالة بالجدول التالى :

A
∈
∉

أما إذا كانت A، B مجموعتين مختلفتين وغير خاليتين وكان x عنصراً ما فإن الاحتمالات الممكنة لانتماء أو عدم انتماء العنصر x لأى منهما تبدو من خلال الجدول التالى :

A	B
∈	∈
∈	∉
∉	∈
∉	∉

ويمكن تعميم فكرة جداول الانتماء لتشمل بعض العمليات المعرفة على المجموعات مثل الاتحاد والتقاطع والفرق المتناظر كما يلى :

A	B	$A \Delta B$
∈	∈	∉
∈	∈	∈
∈	∉	∈
∈	∉	∈

A	B	$A - B$
∈	∉	∉
∉	∈	∉
∈	∉	∈
∉	∉	∉

A	B	$A \cup B$
∈	∈	∈
∉	∈	∈
∈	∉	∈
∉	∈	∉

A	B	$A \cap B$
∈	∈	∈
∈	∈	∈
∈	∈	∈
∈	∈	∉

ملاحظات.

١– يمكن استخدام العددين ١ و ٥ عوضاً عن الرمزين ∈، ∉ على الترتيب فى جميع جداول الانتماء.

٢- إن جداول الانتماء وسيلة ناجحة وسهلة جداً فى برهنة كثير من النظريات المتعلقة بالمجموعات والعمليات عليها.

3

٢-٩- بعض الخواص (النظريات) المهمة فى جبر المجموعات.

نفرض أن C, B, A ثلاث مجموعات جزئية من المجموعة الشاملة Ω فإنه يمكن بسهولة برهان الخواص (النظريات) الآتية :

خاصة اللانمو

(i) $A \cup A = A$ (i)' $A \cap A = A$

خاصة الإبدال

(ii) $A \cup B = B \cup A$ (ii)' $A \cap B = B \cap A$

خاصة الدمج

(iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (iii)' $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

خاصة التوزيع

(iv) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (iv)' $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(v) $A \cup \phi = A$ (v)' $A \cap \varphi$

(vi) $A \cup \Omega = \Omega$ (vi)' $A \cap \Omega = A$

(vii) $\Omega^c = \varphi$ (vii)' $\phi^c = \Omega$

(viii) $(A^c)^c = A$

(ix) $A \cup A^c = \Omega$ (ix)' $A \cap A^c = \varphi$

(x) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (x)' $(A \cap B)^c \cdot A^c \cup B^c$

(xi) $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$

(xii) $A - B \neq B - A$ بفرض أن B, A مجموعتان غير خالتين $A \neq B$

(xiii) $A - B \subseteq A$

(xiv) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$ (xiv)' $A \supset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

سوف نقوم الآن ببرهنة الخاصة (iv) والتى تنص على أن عملية الاتحاد تتوزع على عملية التقاطع مع ترك البقية كتمارين للقارئ.

للإثبات طريقتين :

أولاهما باستخدام التعريف :

وفق تعريف الاتحاد $A\cup(B\cap C) = \{x : (x\in A) \vee (x\in(B\cap C)\}$

وفق تعريف التقاطع $= \{x : (x\in A) \vee (x\in B \wedge x\in C)\}$

$= x : [(x\in A) \vee (x\in B)] \wedge [(x\in A) \vee (x\in C)]\}$

وذلك لأنه أداة الربط "$\vee$" قابلة التوزيع على أداة الربط "$\wedge$"

وفق تعريف الاتحاد $= \{x : (x\in(A\cup B) \wedge [x\in(A\cup C)]\}$

وفق تعريف التقاطع $= (A\cup B) \wedge (A\cup C)$

أما الطريقة الثانية فهي طريقة استخدام جداول الانتماء ومنها نجد أن :

A	B	C	A∪b	A∪C	B∩C	A∪(B∩C)	(A∪B)∧(A∪C)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	00	0	0	0	0

تمارين (٢)

١ - إذا كانت $C=\{-3, -1, 4\}, B=\{-2, -1, 1, 2\}, A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ فتحقق من صحة جميع الخواص (النظريات) الواردة في (٢-٩) معتبراً أن المجموعة الشاملة هي $S.$ $A\cup B\cup C$.

٢- إذا كانت C, B, A مجموعات كما في التمرين (١) فباستخدام أشكال فن لتشيل المجموعات الآتية

① $A\cup B$ ② $A\cap C^c$

③ $B-C$ ④ $A\cap(B\cup C)$.

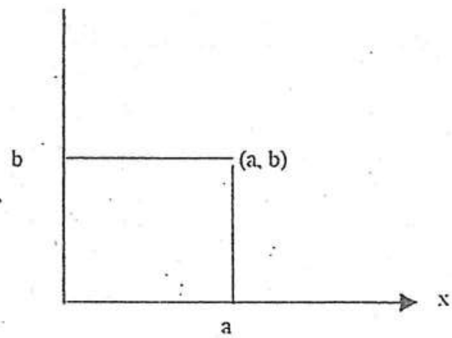
الفصل الثالث

الضرب الكارتيزى للمجموعات - العلاقات

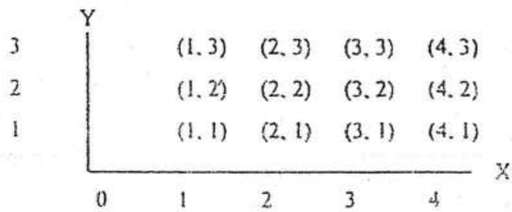
CARTESIAN PRODUCT OF SETS – RELATIONS

٣-١ الأزواج (أو الثنائيات) المرتبة : Ordered pairs

من خلال الهندسة التحليلية نعرف أن أى نقطة يمكن رسمها فى مستوى متى عرف لها إحداثيان a ,b الأول يسمى الإحداثى السينى والثانى يسمى الإحداثى الصادى ونعبر عن ذلك بالرمز $p(a, b)$. يسمى (a, b) زوجا مرتبا ، مركبته الأولى (اليسرى) وهى a ، ومركبته الثانية (اليمنى) وهى b ومن الواضح أنه $(a, b) \neq (b, a)$ ما لم يكن $a=b$ ومن هنا تبرز أهمية الترتيب فى الأزواج.



إذا كان لدينا مجموعة نقط الإحداثى $X=\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{0, 1, 2, 3\}$ فإن مجموعة نقط المستوى $X \times Y$ والمتمثلة فى الشكل التالى هى :



عبارة عن المجموعة المكونة من الأزواج المرتبة التالية :

$XxY = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$

ومن هنا نستطيع أن نعرف حاصل الضرب الكارتيزى للمجموعتين Y, X مما يلى :

$XxY = \{(x, y) : x\in X, y\in Y\}.$

مثال : (١-١-٣)

إذا كانت $A=\{1, 2\}$، $B=\{a, b\}$ فإن مجموعة حاصل الضرب الكارتيزى للمجموعة A فى المجموعة B ويرمز لها بالرمز AxB وتعرف كما يلى :

$AXB=\{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b)\}$

فى حين أن حاصل الضرب الكارتيزى للمجموعة B فى المجموعة A يأخذ الصيغة التالية :

$BxA = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2)\}$

تعريف :

يعرف حاصل الضرب الكارتيزى للمجموعة A فى المجموعة B بأنه المجموعة AxB حيث :

$AxB = \{(a, b) : (A\in A) \wedge (b\in B)\}$

مثال :

إذا كانت $A=\{1, 2\}$، $B=\{2, 3\}$ فإن :

(i) $AxB = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$

(ii) $BxA = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

(iii) $(AxB)\cap(BxA) = \{(2, 2)\}$

(iv) $AxB \neq BxA$

(v) $A^2 = AxA = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

مثال :

أوجد قيمتى x, y إذا علمت أن العنصرين $(2x-y, x+y)$، $(0, 1)$ متساويان.

الحل

$$(2x-y,\ x+y) = (0,\ 1) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-y = 0 \\ x+y = 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{2}\right) \wedge \left(y = \frac{2}{3}\right)$$

مثال :

إذا كانت B, A مجموعتين مفروضتين فأثبت أن :

$$(A\times B)\cap(B\times A) = \varphi \Leftrightarrow A\cap B = \varphi$$

الحل

$$(A\times B)\cap(B\times A) = \varphi \Leftrightarrow (a,\ b) \neq (b,\ a) : \forall a\in A \wedge b\in B$$
$$\Leftrightarrow a \neq b : \forall a\in A\wedge b\in B$$
$$\Leftrightarrow A\cap B = \phi$$

٣–٢ بعض خواص حاصل الضرب.

(١) إذا كانت أحدى المجموعتين خالية فإن $A\times B = B\times A = \phi$.

البرهان :

أولا : لنضع $B = \phi$ ولنبرهن أن $A\times B = A\times\phi = \phi$ $(A\neq\phi)$. لنفرض جدلاً أن $A\times B = A\times\phi\neq\phi$ ، وبالتالى فإنه يوجد عنصر واحد على الأقل (x, y) بحيث $(x,\ y)\ \in A\times B$ وهذا يعنى أن $y\in B, x\in A$ وفق تعريف ضرب مجموعتين ولكن $y\in B$ تؤدى إلى أن $y\in\phi$ وهذا مستحيل لأن ϕ مجموعة خالية. وبالتالى فإنه لا يوجد على الإطلاق أى عنصر $(x,y)\in A\times B$ وهذا يناقض الفرض بأن $A\times B\neq\phi$. ومن ذلك نستنتج أن $A\times B=\phi$ عندما $B=\phi$. هذا وإذا وضعنا $A=\phi$ فإننا نثبت بطريقة مشابهة أن $A\times B=B\times A=\phi$ $(B\neq\phi)$. أما إذا كانت $A=B=\phi$ فمن الأولى أن تكون $A\times B=B\times A=\phi$.

(٢) إذا كانت C, B, A ثلاث مجموعات غير خالية فإن :

(i) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

(ii) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$

البرهان :

(i) $A\times(B\cup C)=\{(x, y) : (x\in A)\wedge y\in(B\cup C)\}$ تعريف ضرب مجموعتين

$=\{(x, y) : (x\in A)\wedge[(y\in B)\vee(y\in C)]\}$ تعريف اتحاد مجموعتين

$=\{(x, y) : [(x\in A)\wedge(y\in B)]\vee[(x\in A)\wedge(y\in C)]\}$ $\wedge$ تتوزع على $\vee$

$=\{(x, y) : [(x, y)\in(A\times B)]\vee[(x, y)\in(A\times C)]\}$ تعريف ضرب مجموعتين

$=(A\times B)\cup(A\times C)$ تعريف اتحاد مجموعتين

وبرهان الخاصة الثانية رقم (ii) يترك للقارئ.

(٣) إذا كانت A، B مجموعتين مفروضتين وكان $n(A) = l$, $n(B) = m$ فأن $n(A\times B) = lm$

البرهان :

لنفرض أن $A=\{a_1, a_2, \dots a_l\}$, $B=\{b_1, b_2, \dots b_m\}$ فيكون لدينا

(١) عدد الثنائيات المرتبة $(a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_m)$ وعددها m

(٢) عدد الثنائيات المرتبة $(a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_2, b_m)$ وعددها m

(٣) عدد الثنائيات المرتبة $(a_3, b_1), (a_3, b_2), \dots, (a_3, b_m)$ وعدها m

وهكذا بالنسبة لجميع عناصر المجموعة A والتى عددها l .

∴ عدد الثنائيات المرتبة $(a_l, b_1), (a_l, b_2) \dots (a_l, b_m)$ عددها m

∴ أجمالى عدد الثنائيات المرتبة هو lm ولذا فإن $n(A\times B) = lm$.

(٤) إذا كانت $G\subseteq A$، $H\subseteq b$ فإن $G\times H\subseteq A\times B$.

البرهان :

$\forall(x,y)\in(G\times G) : (x,y)\in A\times B \dots H\subseteq B,\ G\subseteq A$

وبالتالى فإن $G\times H\subseteq A\times B$

تمرين :

١ – إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{3, 4\}$، $C = \{4, 5, 6\}$ فأوجد :

(i) $A \times B$
(ii) $B \times A$
(iii) $A \times C$
(iv) $C \times A$
(v) $B \times C$
(vi) $C \times B$
(vii) $(A \times B) \cup (A \times C)$
(ix) $A \times (B \cup C)$
(x) $(A \times B) \cup (A \times C)$
(xi) $A \times (B \cap C)$
(xii) $A \times B \times C$
(xiii) $n(A \times B \times C)$

(٢) أثبت أن $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$

(٣) أكتب عناصر المجموعة الآتية :

$$G = \{(x, y) : (x, y \in Z^+) \wedge [(1 \leq x \leq 3) \wedge (1 \leq y \leq 2)]\}$$

٣-٣ العلاقات الثنائية : Binary relations

إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$، $B = \{1, 2\}$ فإن :

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

ولو أردنا إيجاد مجموعة جزئية R من المجموعة $A \times B$ بحيث تكون عناصر R مكونة من جميع الثنائيات (الأزواج) المرتبة التى تكون مركبتا كل منهما متساويتين أى :

$$R = \{(x, y) : (x, y) \in A \times B \wedge x = y\} \subseteq A \times B$$

$$R = \{(1, 1), (2, 2)\} \subseteq A \times B$$

∴ المجموعة الجزئية R عبارة عن الثنائيات المرتبة والتى فيها – لكل ثنائي مرتب – الإحداثى الأول مرتبط بالإحداثى الثانى بعلاقة التساوى ولذلك لو تم تحديد جميع الثنائيات المرتبة والتى فيها الإحداثى الأولى أكبر (أو أصغر) من الإحداثى الثانى فتكون قد حددنا مجموعتين جزئيين من $A \times B$ هما R_2 و R_3 كما يلى :

$$R_2 = \{(x, y) : (x, y) \in A \times B \wedge (x > y)\} = \{(2, 1)\}$$

$$R_3 = \{(x, y) : (x, y) \in A \times B \wedge (x < y)\} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

الآن نستطيع القول بإمكانية تحديد مجموعة جزئية من المجموعة $A \times B$ بواسطة تعريف علاقة R من A الى B.

تعريف :

إذا كانت B, A مجموعتين مفروضتين و كانت $R \subseteq AxB$ قيل أن R علاقة ثنائية من A إلى B.

مثال :

لتكن $A=\{a, b, c\}$، $B=\{b, c, d\}$ ولتكن $R=\{(a, b), (a, c), (b, b), (c, c)\}$.

(ب) هل R علاقة ثنائية من A إلى B مع ذكر السبب ؟.

(ب) هل R علاقة ثنائية على A مع ذكر السبب ؟.

(ج) هل R علاقة ثنائية على B مع ذكر السبب ؟.

(د) إذا علمت $R^1=\{(x, y) : (x, y)\in AxB \wedge x=y\}$ فأكتب عناصر R^1.

الحل

(أ) العلاقة R علاقة ثنائية من A إلى B لأنه $R \subseteq AxB$.

(ب) العلاقة R علاقة ثنائية من A إلى A لأن $R\subseteq AxA$.

(ج) العلاقة R ليست علاقة ثنائية من B إلى B لأن $R\not\subset BxB$ فمثلا $(a, b) \notin BxB$

(د) $R^1=(b, b), (c, c)\} \subseteq AxB$

بعد أن تم تعريف العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B فإن المجموعة الجزئية $\{x : x\in A \wedge xRy\}$ من A تسمى مجموعة تعريف العلاقة R (Domain) كما تسمى المجموعة الجزئية $\{y : y\in B \wedge xRy\}$ من B تسمى مدى (Range) العلاقة R.

مثال :

إذا كانت $A=\{1, 3, 5, 7\}$، $B=\{2, 4, 6\}$ و كانت

$R=\{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 4), (3, 6), (5, 6)\} \subseteq AxB$

فإن مجموعة تعريف العلاقة R هى المجموعة الجزئية $\{1, 3, 5\}$ وأن مدى العلاقة R هو المجموعة الجزئية $\{2, 4, 6\}$.

تعريف :

إذا كانت R علاقة ثنائية على مجموعـــة A (أى أن $R \subseteq A \times A$) وكـــانت xRx متحققة لكل عناصر A أى أن ($\forall x \in A : xRx$) فإننا نقول أن العلاقة R انعكاســـية (أو عاكسة) Reflexive relations .

تعريف :

إذا كانت R علاقة على A تحقق الشرط $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ قلـــنا أن R علاقة تناظرية (أو متماثلة) Symmetric relation.

تعريف :

إذا كانت R علاقة تحقق الشرط $(x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ قلنا أن علاقة R علاقة متعدية (ناقلة) Transitive relation.

تعريف :

إذا كانت R علاقة على A وكانت علاقة انعكاسية وتناظرية وناقلة قلنـا أن R علاقة تكافؤ على A Equivalence relation.

مثال :

إذا كانت المجموعة A عبارة عن جميع الخطوط المستقيمة فى مستوى مـــا وأن هناك علاقة R هى علاقة التوازى بين هذه الخطوط وضح نوع هذه العلاقة.

الحل

١) العلاقة R علاقة انعكاسية لأن كل مستقيم يوازى نفسه $\forall x \in A : xRx$.

٢) العلاقة R علاقة متماثلة حيث أنه إذا كان المستقيم $x \in A$ يوازي المســـتقيم $y \in A$ فإنه المستقيم x أى أن $xRy \Rightarrow yRx$.

٣) واضح أن العلاقة R علاقة ناقلة حيث أنه إذا كان x مستقيم يوازى المســـتقيم وكان المستقيم y يوازى المستقيم z فإنه المستقيم x يوازى المستقيم z.

مثال :

- إذا كانت A مجموعة الخطوط المستقيمة كما فى المثال السابق وكانت R علاقة التعامد أدرس هذه العلاقة.

الحل

(١) العلاقة R ليست انعكاسية لأن المستقيم لا يتعامد نفسه.

(٢) العلاقة R متماثلة.

(٣) العلاقة R ليست ناقلة وضح ذلك ؟.

مثال :

إذا كانت $A=\{1, 2, 3, 4,\}$ وكانت $R\subseteq A\times A$ حيث أن

$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}.$

فادرس العلاقة R من حيث كونها (أ) انعكاسية (ب) متماثلة (ج) ناقلة

الحل

(أ) R ليست انعكاسية لأن $(3, 3)\notin R$ مثلاً.

(ب) R متماثلة لأن $(x, y)\in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$.

(ج) R ليست ناقلة لأن $(2, 1)\in R \wedge (1, 2)\in R \Rightarrow (2, 2)\notin R$.

تمارين :

(١) إذا كانت $B=\{3, 5, 7, 8\}, A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ فأجب عما يلى :

(أ) أكتب عناصر كل من $B\times A, A\times B$.

(ب) إذا كانت $R=\{(1, 3), (1, 5), (2, 7), (2, 8)\}$ فهل R علاقة ثنائية من A إلى B مع التعليل ؟. وإذا كان الجواب بالإيجاب فأكتب مجموعة تعريف العلاقة R كذلك مداها.

(ج) إذا كانت $R=A\times B$ فهل R علاقة ثنائية من A إلى B ؟ وإذا كان الجواب بنعم فعين كلا من تعريف R ومداها ، ثم أكتب عناصر R^{-1} ثم وضح هل $R^{-1}=B\times A$ أم لا ؟.

(٢) إذا كانت $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فادرس كلا من العلاقات الآتية فى A من حيث كونها (أ) انعكاسية (ب) متماثلة (ج) ناقلة (د) علاقة تكافؤ.

(i) $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

(ii) $R_2 = R_1 - \{(5, 5)\}$

(iii) $R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

(iv) $R_4 = R_3 \cup \{(2, 2)\}$

(v) $R_5 = \{(2, 6)\}$

(vi) $R_6 = \{(3, 7), (4, 3), (3, 3), (4, 4)$

(vii) $R_8 = A\times A$

(٣) أذكر مجموعة تعريف ومدى كلاً من العلاقات، المذكورة فى المسألة رقم (٢).

(٤) إذا كانت R علاقة ثنائية من A إلى B فأثبت أن :

(أ) مجموعة تعريف R = مدى R^{-1}

(ب) مدى R = مجموعة تعريف R^{-1}

(٥) إذا كانت $A=\{0, 1, 2, 3\}$ وكانت العلاقة R معرفة كما يلى :

$R=\{(1, 1), (3, 2), (2, 1), (1, 3), (0, 2), (0, 3), (2, 3), (3, 0), (3, 1)\}$

(ب) فهل R علاقة متكافئة ؟

(ب) أوجد R^{-1} ؟

أمثلة : أ - فئة كل الاعداد التي هي أكبر من 10 وأقل من 7 أي أن

$$\{x \mid x > 10 \text{ and } x < 7\} = \varphi$$

ب - فئة الرجال الأحياء الذين يزيد أعمارهم عن 150 سنة

جـ - فئة الاعداد المحصورة بين 3,14 وتقبل القسمة على 15

الفئات المحدودة والفئات اللانهائية :

يقال لفئة ما بأنها محدودة إذا كانت خالية أو كانت تحتوي على n من العناصر حيث n عدد صحيح موجب وبخلاف ذلك يقال للفئة أنها لانهائية والأمثلة التالية توضح ذلك على الترتيب

أ - إذا كانت $A = \{1, 3, 5, 9, 11, 15\}$ فإن A محدودة

ب - إذا كانت $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ فإن N غير محدودة

الفئات المتساوية :

يقال أن الفئة A تساوي الفئة B إذا كانت جميع العناصر الموجودة في A هي نفس عناصر الفئة B $\Leftarrow A = B$

وبعبارة أخرى الفئتان A, B تكونان متساويتين أي أن $A = B$ إذا وإذا كانت $A \subset B$ وكان أيضاً $B \subset A$ فمثلاً

$$A = \{1, 2, 5, 7\} \quad , B = \{2, 7, 1, 5\}$$

$$A \subset B \ , \ B \subset A$$

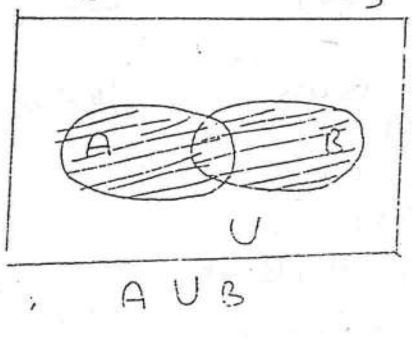
$$\Rightarrow A = B$$

العمليات على الفئات :

إتحاد الفئات : (Union)

يعرف إتحاد الفئة A مع الفئة B التي عناصرها تنتمي إلى الفئة A أو تنتمي إلى الفئة B أو تنتمي إلى كليهما

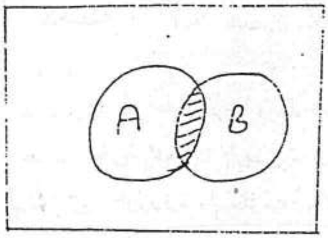
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$$



$A \cup B$

تقاطع الفئات Intersection

تقاطع فئتين A, B هو فئة العناصر التي تنتمي إلى كل من A, B



$A \cap B$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$$

مثال

$A = \{3, 1, 2, -2\}$, $B = \{5, 0, 1, 3\}$

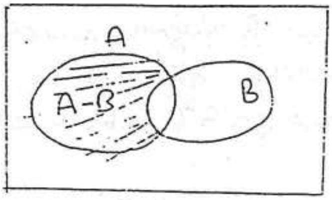
$A \cup B = \{0, 1, -2, 2, 3, 5\}$

$A \cap B = \{1, 3\}$

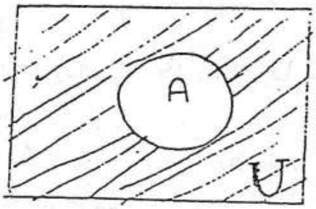
فروق الفئات:

فرق فئتين A, B هو فئة العناصر التي تنتمي إلى A ولكن لا تنتمي إلى B ويرمز لها بالرمز $A - B$

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$



$A - B$



A^c

المكملات: نعرف مكملة الفئة A بأنها الفئة التي كافة عناصرها لا تنتمي إلى A ويرمز لها بالرمز A^c أو A' أو ~

$$A^c = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$$

تمارين

س١- إذا كانت: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$

أوجد كلاً من:

(i) $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $B \cup B$

(ii) $(A \cup B) \cup C$, $A \cup (B \cup C)$

(iii) $(A \cap B)$, $A \cap C$, $B \cap C$, $B \cap B$

(iv) $(A \cap B) \cap C$, $A \cap (B \cap C)$

(v) $A - B$, $C - A$, $B - C$, $B - A$, $B - B$

$x \in A$ and $x \notin B$

$x \in A$ and $x \in B^c$

$x : x \in A$ and $x \in B$
$\varphi = \{x : x \in A$ and $x \notin B\}$

٢- اثبت أن $B - A^c = A \cap B$

٣- اثبت أنه اذا كان $A \cap B = \varphi$ فإن $A \subset B^c$

٤- اثبت أن $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

٣- نظام الاعداد الحقيقية

فئة الاعداد تنقسم إلى تسلسل من الفئات الجزئية وابسط الاعداد هي الاعداد التي أستعملها الانسان $1, 2, 3, ---$ والتي تسمى فئة الاعداد الطبيعية اذا أضفنا عنصر الصفر، والاعداد السالبة للاعداد الطبيعية فإننا نحصل على فئة الاعداد الصحيحة I : $--, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, ---$

اذا كان $a, b \in I$ فإن $a + b, a - b, ab \in I$.

أي أن الفئة I مغلقة تحت عمليات الجمع والطرح والضرب

الأعداد القياسية :

أي عدد يمكن التعبير عنه كخارج قسمة عددين صحيحين يمكن على شكل p/q ($q \neq 0$) $p, q \in I$ يسمى عدد كسري (قياسي) وفئة الاعداد القياسية Q يمكن أن تكتب في الصورة

$$Q = \{x \mid x = p/q, q \neq 0, p, q \in I\}$$

الاعداد الغير قياسية :

هي الاعداد الحقيقية التي لا يمكن كتابتها على الصورة p/q تسمى بالاعداد الغير قياسية فمثلاً الاعداد $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{2}$ هي أعداد غير قياسية

مثال : أثبت أن $\sqrt{2}$ عدد غير قياسي

الحل نفرض أن $\sqrt{2}$ هو عدد قياسي وسوف نصل إلى تناقض

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

حيث p, q ليس بينهما عامل مشترك

$$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \quad (1)$$

وحيث أن $2q^2$ عدد زوجي فإن p^2 تكون كذلك عدد زوجي ، p زوجية

نفرض أن $p = 2x$ من (1) يكون

$$2q^2 = (2x)^2 \Rightarrow q^2 = 2x^2$$

وحيث أن $2x^2$ زوجية فإن q^2 تكون زوجية أيضاً أي أن q زوجية . وبذلك تكون p, q كلاهما زوجي ولهما عامل مشترك 2 وهذا تناقض لأن p, q ليس بينهما عامل مشترك عندئذ تكون $\sqrt{2}$ عدد غير قياسي

[illegible]

الأعداد الحقيقية

فئة الأعداد غير النسبية [illegible]

فئة الأعداد النسبية Q

$Q = \{ x \mid$ [illegible] $\}$

فئة الأعداد الصحيحة Z [illegible]

[illegible]

[illegible]

- لكل $a\in R$ يوجد $-a\in R$ ، $\frac{1}{a}\in R$ بحيث أن

$$a+(-a)=0, \qquad a\cdot\frac{1}{a}=1$$

حيث $(-a)$ تسمى بالمعكوس الجمعي لـ a

أي أن -3 هو المعكوس الجمعي لـ 3 لأن $3+(-3)=0$

$\frac{1}{a}$ يسمى المعكوس الضربي لـ a

القيمة المطلقة :

القيمة الموجبة لعدد حقيقي معطى x تسمى بالقيمة المطلقة (بالمقدار) لهذا العدد ويرمز لها بالرمز $|x|$ وتقرأ مقياس x

وبذلك تكون

$$|x|=\begin{cases} x & \text{if } x>0 \\ -x & \text{if } x<0 \\ 0 & \text{if } x=0 \end{cases}$$

مثال

$$|0|=0,\ |-7|=7,\ |5|=5$$

نظرية (1) إذا كانت $b>0$ ، فإن $b>z>-b$

إذا كان $|z|<b$

نظرية (2) أثبت أن

$$\text{(i)}\ |ab|=|a||b|$$

$$\text{(ii)}\ |a+b|\le|a|+|b|$$

$$\text{(iii)}\ \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$$

البرهان :

$$\text{(i)}\ |ab|=\sqrt{(ab)^2}=\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{a^2}\,\sqrt{b^2}=|a|\cdot|b|$$

$$\text{(ii)}\ |a+b|=\sqrt{(a+b)^2}$$

$$|a+b|^2=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

$$\le a^2+b^2+|2ab|$$

$$\le |a|^2+|b|^2+2|a||b|$$

$$\le [|a|+|b|]^2$$

عندئذ تكون

$$|a+b|\le|a|+|b|$$

$$\text{(iii)}\ \left|\frac{a}{b}\right|=\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}}=\frac{|a|}{|b|}$$

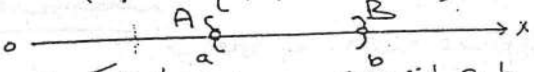
الفترات : يوجد نوعين من الفترات

(أ) فترات نهائية (أأ) فترات لا نهائية

أولاً الفترات النهائية نفرض أن a, b هما عددان حقيقيان بحيث أن $a < b$

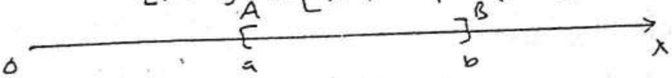
(1) فئة كل الاعداد الحقيقية بين a, b يقال أنها تكون فترة مفتوحة ويرمز بالرمز (a, b) وبذلك تكون

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$



(2) فئة كل الاعداد الحقيقية الواقعة بين a, b والتي تشمل a, b يقال انها تكون فترة مغلقة ويرمز لها بالرمز $[a, b]$ وبذلك تكون

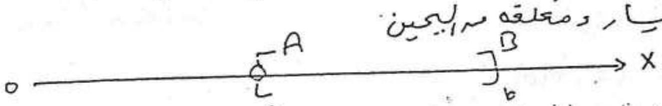
$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$



(3) فئة كل الاعداد الحقيقية بين (a, b) والتي تشمل نقطة نهائية واحدة ولا تشمل نقطة النهاية الأخرى يقال انها تكون فترة نصف مغلقة (أو نصف مفتوحة) وبذلك الفترة

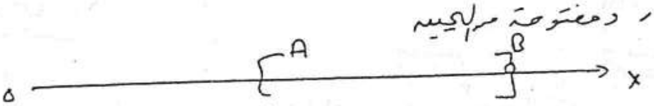
$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

تكون فترة مفتوحة من اليسار ومغلقة من اليمين



والفترة $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$

تكون مغلقة من اليسار ومفتوحة من اليمين



ثانياً الفترات اللانهائية :

الفترة اللانهائية يمكن ان تكون أي من الأنواع الآتية :

(1) فئة كل الاعداد الحقيقية x بحيث أن $x > a$ ويرمز لها بالرمز (a, ∞) وبذلك تكون

$$(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$$

(2) فئة كل الاعداد الحقيقية x بحيث أن $x \geq a$ ويرمز لها بالرمز $[a, \infty)$ وبذلك تكون

$$[a, \infty) = \{x \mid x \geq a\}$$

(3) فئة كل الاعداد الحقيقية x بحيث أن $x < a$ ويرمز لها بالرمز $(-\infty, a)$ وبذلك تكون

$$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$$

(4) فئة كل الأعداد الحقيقية x بحيث أن $x \le 9$ ويرمز لها بالرمز $(-\infty, 9]$ وبذلك تكون

$(-\infty, 9] = \{x \mid x \le 9\}$

(5) فئة كل الأعداد الحقيقية وبذلك تكون

$(-\infty, \infty) = \{x \mid x$ عدد حقيقي $\}$

<u>أمثلة</u>

<u>مثال (1)</u> حل المتباينة $|2x-3| \le 5$

الحل عندما $2x-3$ موجبة فإن

$|2x-3| = 5 \Rightarrow 2x-3=5 \Rightarrow 2x=8 \therefore x=4$

وعندما $2x-3$ سالبة عندئذٍ يكون

$|2x-3|=5 \Rightarrow -(2x-3)=5 \Rightarrow -2x+3=5$

$\Rightarrow 2x=-2 \quad \therefore x=-1$

$\therefore x=-1$ أو $x=4$

∴ حل المتباينة $\{x \mid -1 \le x \le 4\}$

<u>مثال (2)</u> حل المتباينة $|x-2| < 1$

الحل عندما $x-2$ موجبة عندئذٍ

$|x-2| < 1 \Rightarrow x-2 < 1 \Rightarrow x < 3$ (1)

وعندما $x-2$ سالبة عندئذٍ

$|x-2| < 1 \Rightarrow -(x-2) < 1 \Rightarrow -x+2 < 1$

$-x < -1 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow 1 < x$ (2)

من (1) ، (2) نحصل على حل المتباينة هو الفئة

$\{x \mid 1 < x < 3\}$

<u>مثال (3)</u> حل المتباينة $|3x+2| > 5$

الحل عندما $3x+2$ موجبة فإن

$|3x+2| > 5 \Rightarrow 3x+2 > 5 \Rightarrow 3x > 3 \Rightarrow x > 1$ (1)

وعندما $3x+2$ سالبة فإن

$|3x+2| > 5 \Rightarrow -(3x+2) > 5 \Rightarrow -3x-2 > 5$

$\Rightarrow -3x > 7 \Rightarrow 3x < -7 \Rightarrow x < -7/3$

من (1) ، (2) فإن حل هذه المتباينة يكون الفئة

$(-\infty, -7/3) \cup (1, \infty)$

المجموعات العددية

1. مجموعة الأعداد الطبيعية N :

وهي مجموعة الأعداد التي تستخدم في العد {....1.2.3.4} = N .

2. مجموعة الأعداد الكلية W :

وهي مجموعة الأعداد الطبيعية مضافا لها الصفر {....0.1.2.3.4} = W .

مثال 1

$\mathbb{N} \subset \mathbb{W}$

A- صواب	B - خطأ

$\mathbb{W} \subset \mathbb{N}$

A- صواب	B - خطأ

$0 \in \mathbb{N}$

A- صواب	B - خطأ

$0 \in \mathbb{W}$

A- صواب	B - خطأ

$\frac{2}{3} \in N$

A- صواب	B - خطأ

$--6 \notin \mathrm{N}$

A- صواب	B - خطأ

3. مجموعة الأعداد الصحيحة Z:

$$Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3 \ldots\}$$

مثال 2

$Z \subset N$

A- صواب B - خطأ

$2/3 \in Z$

A- صواب B - خطأ

ملاحظة : كل عدد طبيعي أو كلي هو عدد صحيح وليس كل عدد صحيح هو عدد طبيعي أو كلي

$N \subset Z$

A- صواب B - خطأ

$W \subset Z$

A- صواب B - خطأ

$0 \notin Z$

A- صواب B - خطأ

$-8 \in Z$

A- صواب B - خطأ

4. مجموعة الأعداد القياسية (النسبية – الكسرية) Q:

هي مجموعة الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة كسر ($\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$) ، بحيث أن المقام لا يساوي صفر، ويمكن كتابتها على الصورة: $Q = \left\{ x : x = \frac{a}{b} ,\ a, b \in Z ,\ b \neq 0 \right\}$.

التمثيل العشري للأعداد النسبية إما أن يكون منتهي أو أن يكون غير منتهي و متكررا.

مثال 3

$W \in Q$

A- صواب B - خطأ

$\frac{2}{3} \notin Q$

A- صواب B - خطأ

ملاحظة : كل عدد طبيعي أو كلي أو عدد صحيح هو عدد نسبي والعكس غير صحيح

[illegible]

A- صواب B - خطأ

[illegible] Q

A- صواب B - خطأ

[illegible]

A- صواب B - خطأ

[illegible]

[illegible]

25/100 هو عدد قياسي وتمثيله العشري منتهي وهو 0.25

مثال 4

A- صواب   B - خطأ

1/3 هو عدد قياسي وتمثيله العشري غير منتهي (متكرر) وهو ...0.3333

A- صواب   B - خطأ

5. مجموعة الأعداد غير القياسية (غير النسبية – غير الكسرية) $\overline{Q}$:

هي مجموعة الأعداد التي لا يمكن كتابتها في صورة الأعداد الكسرية مثل: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \frac{1}{\sqrt{7}}, e, \pi$

[illegible]

مثال 5

$\frac{2}{\sqrt{5}} \in \overline{Q}$

A- صواب   B - خطأ

$Z \subset \overline{Q}$

A- صواب   B - خطأ

$Q \not\subset \overline{Q}$

A- صواب   B - خطأ

$\frac{\pi}{2} \in \overline{Q}$

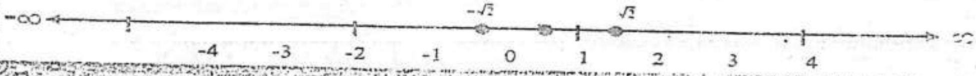
A- صواب   B - خطأ

$\frac{1}{e} \in \overline{Q}$

A- صواب   B - خطأ

6. مجموعة الأعداد الحقيقية R:

وهي مجموعة جميع الأعداد الكسرية وغير الكسرية. ويمكن تمثيلها بيانياً بنقاط على خط الأعداد الحقيقية بحيث نقطة الصفر في المنتصف والأعداد الموجبة على اليمين والأعداد السالبة على اليسار.



ملاحظة

1) $\mathbf{N} \subset \mathbf{W} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$

2) $\overline{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{R}$

3) $\mathbf{Q} \cap \overline{\mathbf{Q}} = \phi$

4) $\mathbf{Q} \cup \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$

مثال 6

$\frac{2}{\sqrt{5}} \in R$

A- صواب B - خطأ

$Z \subset R$

A- صواب B - خطأ

$R \not\subset \overline{Q}$

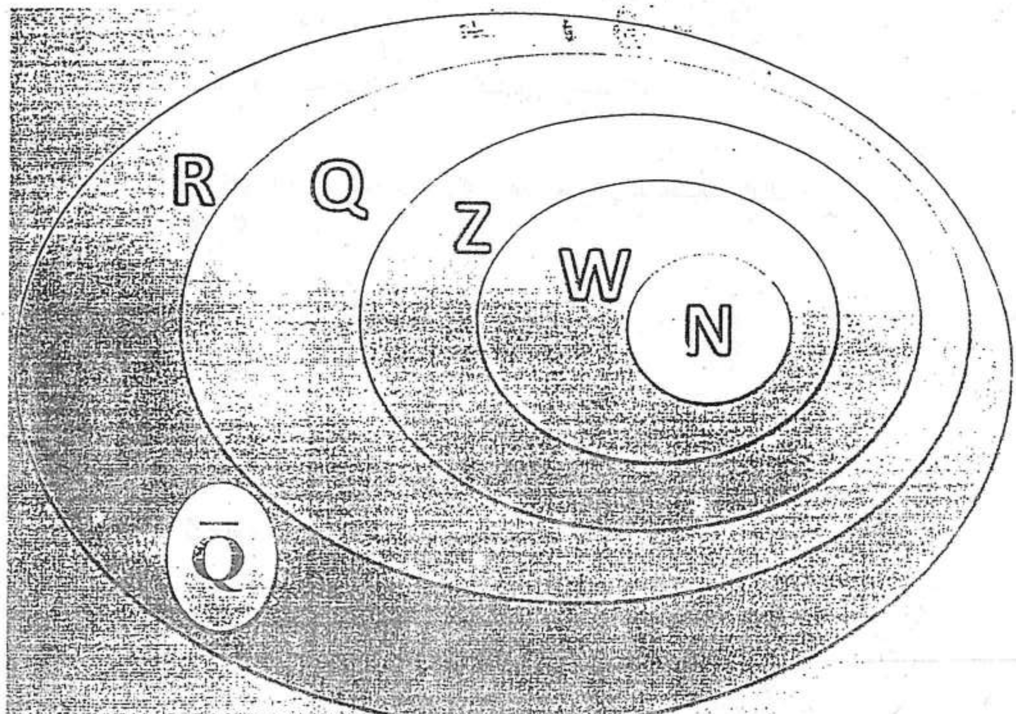
A- صواب B - خطأ

$\frac{\pi}{2} \in R$

A- صواب B - خطأ

$-10 \notin R$

A- صواب B - خطأ



الأسس واللوغاريتمات

الأسس واللوغاريتمات مهارات رياضية بالغة الأهمية ولا غنى عنها لإجراء أي نوع من الحسابات، وهذه المهارات بدورها تحول الحسابات المعقدة إلى حسابات ميسورة ومباشرة في أحيان كثيرة ولا سيما في مجال التفاضل والتكامل.

(٤-١) الأسس والجذور

Exponents & Radicals

إن العدد $5\times5\times5\times5\times5\times5$ يمكن كتابته مختصرا على الصورة 5^6 حيث يسمى العدد 5 الأساس ، ويسمى العدد 6 الأس ، ونقول إن العدد 5 مرفوع إلى القوة 6 أو إلى الأس 6 .

تعريف

ليكن $x\in\mathbb{R}$، $n\in\mathbb{N}$ نعرف القوة النونية للعدد x التي نرمز إليها بالرمز x^n بأنها حاصل ضرب x بنفسة n من المرات ، أي ان

$$x^n = x\cdot x\cdot\ldots\cdot x \qquad n-\text{مرة}.$$

تعريف

إذا كان $n\in\mathbb{N}$ ، $x\neq0$ ، فنعرف العدد x^{-n} كما يلي $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$.

ملاحظة

إذا كان $x\in\mathbb{R}^*$ ، فإن $x^0=1$ بينما الرمز 0^0 غير معرف في الرياضيات ولذلك فني أن تاند ن فيما يلي نستثنى الحالة 0^0 .

قوانين الأسس

(١) إذا كان $n,m\in\mathbb{Z}$ وكان $x\in\mathbb{R}^*$ فإن $x^n x^m = x^{n+m}$.

مثال (٤-١)

(i) $5^8.5^{-3}=5^{8-3}=5^5$.

(ii) $3^5.3^2=3^{5+2}=3^7$.

(iii) $2^{-3}.2^{-2}=2^{-3-2}=2^{-5}$.

(٢) إذا كان $n,m\in\mathbb{Z}$ وكان $x\in\mathbb{R}^*$ فإن

(i) $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

(ii) $\left(x^n\right)^m = x^{nm}$

مثال (٤-٢)

(i) $\frac{5^6}{5^2} = 5^{6-2} = 5^4$

(ii) $\frac{3^8}{3^{-2}} = 3^{8-(-2)} = 3^{10}$

(iii) $\left(\sqrt{2}^3\right)^2 = \sqrt{2}^{3.2} = \sqrt{2}^6 = 8$

(٣) إذا كان $x, y \in \mathbb{R}^*$ وكان $n \in \mathbb{Z}$ فإن $(xy)^n = x^n y^n$.

ملاحظة

هذا القانون ناتج من كون عملية الضرب إبدالية في $\mathbb{R}$.

(٤) إذا كان $x, y \in \mathbb{R}^*$ وكان $n \in \mathbb{Z}$ فإن $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

تعريف

لتكن $n \in \mathbb{N}$ ، نعرف الجذر النوني للعدد الحقيقي x بأنه العدد الذي إذا ضربناه في نفسه n من المرات فالناتج يساوي x .

ملاحظات

(i) تعميما لما ذكرناه سابقا (البند (٢-٤))، فإن الرمز $x^{\frac{1}{n}}$ يحتفظ به للدلالة على مجموعة الجذور النونية للعدد الحقيقي الموجب x بينما الرمز $\sqrt[n]{x}$ نعني به الجذر النوني الحقيقي الموجب للعدد الحقيقي الموجب x ، وإن كنا سنستخدمهما مجازا بمعنى واحد ما لم ينص على غير ذلك .

(ii) إذا كان $x \in \mathbb{R}^+$ وكان n عددا طبيعيا زوجيا فإن الجذر النوني لـ x له قيمتان حقيقيتان إحداهما موجبة ونرمز لها بالرمز $\sqrt[n]{x}$ والأخرى سالبة ونرمز لها بالرمز $-\sqrt[n]{x}$.

(iii) إذا كان $x \in \mathbb{R}$ وكان n عددا طبيعيا فرديا فإن الجذر النوني لـ x له قيمة حقيقية واحدة فقط يرمز لها بالرمز $\sqrt[n]{x}$.

(iv) إذا كان $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ بحيث $m > 0$ وكان $x \in \mathbb{R}^+$ فإن $x^{\frac{n}{m}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n = \sqrt[m]{x^n}$.

مثال (٤-٣)

أوجد قيمة $64^{\frac{2}{3}}$.

الحـــل

$$.(64)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{64})^2 = (4)^2 = 16$$

مثال (٤-٤)

أوجد قيمة $81^{\frac{3}{4}}$.

الحـــل

$$(81)^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{81})^3 = (3)^3 = 27$$

(٥) إذا كان $x, y \in \mathbb{R}$ وكان $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ ، $m > 0$ فإن :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{\sqrt[m]{x^n}}{\sqrt[m]{y^n}} \quad ; \qquad (x \cdot y)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \cdot \sqrt[m]{y^n}$$

حيثما كانت هذه الحدود معرفة.

(٦) إذا كان $x \in \mathbb{R}^* - \{1, -1\}$ وكان $n, m \in \mathbb{Q}$ فإن : $x^n = x^m \Rightarrow n = m$.

(٧) إذا كان $x, y \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ وكان $n \in \mathbb{Q}^*$ فإن : $x^n = y^n \Rightarrow x = y$.

مثال (٤-٥)

أوجد قيمة x التي تحقق العلاقة $2^{x-3} = 2^6$.

الحـــل

$$2^{x-3} = 2^6 \Rightarrow x - 3 = 6 \Rightarrow x = 9 .$$

مثال (٤-٦)

أوجد قيمة x التي تحقق العلاقة $3x^3 = 81$.

الحـــل

$$3x^3 = 81 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = 3 .$$

مثال (٤-٧)

ضع المقدار التالي في أبسط صورة $\frac{(16)^2 \cdot 9 \cdot 125}{32 \cdot 15}$

الحــل

$$\frac{(16)^2\cdot 9\cdot 125}{32\cdot 15}=\frac{(2^4)^2\cdot 3^2\cdot 5^3}{2^5\cdot 3\cdot 5}$$
$$=$$

$$\frac{2^8\cdot 3^2\cdot 5^3}{2^5\cdot 3\cdot 5}=2^{8-5}.3^{2-1}.5^{3-1}=(8)(3)(25)=600.$$

مثـال (٤-٨)

أوجد قيمة $\sqrt{625}$.

الحــل

$$625=5^4 \Rightarrow \sqrt{625}=\sqrt{5^4}=5^{4/2}=25\ .$$

طريقة أخرى

$$\sqrt{625}=\sqrt{25\cdot 25}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{25}=(5)(5)=25.$$

ملاحظات

(i) إذا كانت $x\in\mathbb{R}^+$ ، $n,m\in\mathbb{N}$ فإن

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}=x^{\frac{1}{n\cdot m}}$$
$$\sqrt[m]{x}\cdot\sqrt[n]{x}=x^{\frac{n+m}{n\cdot m}}$$

(ii) بطريقة مغايرة لما سبق يمكن تعريف العدد x^y حيث $y\in\mathbb{R}$ ، $x\in\mathbb{R}^+$ ، ولكن هذا التعريف يتطلب خلفية رياضية ليست في مستوى هذا الكتاب ، ولذلك نترك التعريف وننوه إلى أن جميع قوانين الأسس السابقة تنطبق على الأسس الحقيقية أيضا طالما كانت هذه الحدود معرفة في $\mathbb{R}$.

مثـال (٤-٩)

أوجد قيمة كل من $\sqrt{\frac{169}{49}}$ ، $\sqrt[5]{\sqrt[2]{3^{10}}}$.

الحــل

$$\sqrt{\frac{169}{49}}=\frac{\sqrt{169}}{\sqrt{49}}=\frac{13}{7}\quad ,\quad \sqrt[5]{\sqrt[2]{3^{10}}}=\left(3^{10}\right)^{\frac{1}{(5\times 2)}}=\left(3^{10}\right)^{\frac{1}{10}}=3$$

مثـال (٤-١٠)

حل المعادلة $8^{2x-10}=4^{x+1}$.

$$8^{2x-10}=4^{x+1}$$

الحـــل

$$8^{2x-10}=4^{x+1} \quad\Rightarrow\quad \left(2^3\right)^{2x-10}=\left(2^2\right)^{x+1}$$
$$\Rightarrow\quad 2^{6x-30}=2^{2x+2}$$
$$\Rightarrow\quad 6x-30=2x+2$$
$$\Rightarrow\quad x=8.$$

نظريـــة

ليكن $x>y$ عددين حقيقيين ، a عددا حقيقيا موجبا فإن

(i) إذا كان $x>y>0$ فإن $x^a>y^a$.

(ii) إذا كان $0<a<1$ فإن $a^x<a^y$.

(iii) إذا كان $a>1$ فإن $a^x>a^y$.

مثـال (٤-١١)

قارن بين العددين $2^{\sqrt{2}},(\sqrt{2})^2$.

الحـــل

لاحظ أن $(\sqrt{2})^2=2^1<2^{\sqrt{2}}$ لأن $1<\sqrt{2}$.

مثـال (٤-١٢)

قارن بين العددين $3^{\frac{1}{3}},2^{\frac{1}{2}}$.

الحـــل

ضع $s=3^{\frac{1}{3}},t=2^{\frac{1}{2}}$ ، ولاحظ أن $s^6=(3^{\frac{1}{3}})^6=3^{\frac{6}{3}}=3^2=9$ بينما $t^6=(2^{\frac{1}{2}})^6=2^{\frac{6}{2}}=2^3=8$. أي أن $s^6>t^6$ ومن الفرع الأول من النظرية السابقة نجد أن $s>t$.

فائـدة

أكبر قيمة للمقدار $x^{\frac{1}{x}}$ تكون عندما $x=e$ حيث e هو العدد النيبيري غير النسبي الوارد في البند (٢-٤).

مثـال (٤-١٣)

أيهما أكبر $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ أم $\sqrt{6}+\sqrt{3}$ ؟

الحـــل

بتربيع العددين نجد أن

$(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2=2+7+2\sqrt{14}=9+2\sqrt{14}$ ، وأن $(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2=3+6+2\sqrt{18}=9+2\sqrt{18}$ ،

ومن ذلك نجد أن $\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

(٤ -٢) اللوغاريتمات

Logarithms

تعريف

لتكن $x,y\in\mathbb{R}$ ، $a\in\mathbb{R}^+$ ، بحيث $a^x=y$ فإننا نقول إن لوغاريتم y بالنسبة للأساس a هو العدد x ونكتب ذلك رمزيا $\log_a y=x$ أي أن : $\log_a y=x \Leftrightarrow a^x=y$.

مثال (٤-١٤)

$\log_2 16=4$ لأن $2^4=16$.

$\log_5 125=3$ لأن $5^3=125$.

ملاحظات

(i) إذا كان $y\in\mathbb{R}^+$ ، $y\neq 1$ فإن $\log_1 y$ غير موجود وذلك لاستحالة وجود عدد x بحيث $1^x=y$.

(ii) إذا كان الأساس $a=10$ فإن $\log_a y=\log_{10} y$ يكتب اختصارا على الصورة $\log y$ ويسمى اللوغاريتم العشري .

قوانين اللوغاريتمات

ليكن $x,y,a\in\mathbb{R}^+$ ، $t\in\mathbb{R}$ فإن :

(١) $\log_a a=1$ لأن $a^1=a$.

(٢) $\log_a 1=0$ لأن $a^0=1$.

(٣) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$. (برهن ذلك) .

(٤) $\log_a(\frac{x}{y})=\log_a x-\log_a y$.

(٥) $\log_a(x)^t=t\log_a x$.

نتيجة

$$\log_a(\frac{1}{y})=\log_a 1-\log_a y=0-\log_a y=-\log_a y \ .$$

مثال (٤-١٥)

أوجد قيمة $\log_2 128$.

الحـــل

نكتب العدد 128 بعد تحليله على شكل قوة للأساس 2 فيكون :

2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

إذن $128 = 2^7$. وبذلك نصل إلى

$$\log_2 128 = \log_2 2^7 = 7\log_2 2 = 7(1) = 7 .$$

مثال (٤-١٦)

أوجد قيمة المقدار $\log_5 \frac{3}{5} + \log_5 \left(\frac{15}{2}\right)^2 - \log_5 \frac{5}{36} + \log_5 \frac{5}{243}$.

الحـــل

$$\text{المقدار} = \log_5 \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{5}{243}}{\frac{5}{36}} = \log_5 \frac{3\cdot 15\cdot 15\cdot 5\cdot 36}{5\cdot 5\cdot 2\cdot 2\cdot 243}$$

$$= \log_5 5 = 1$$

مثال (٤-١٧)

أوجد قيمة x إذا كان $\log_2 x + \log_2 (x-2) = 3$.

الحـــل

$$\log_2 x + \log_2 (x-2) = 3$$
$$\Rightarrow \log_2 x(x-2) = 3$$
$$\Rightarrow x(x-2) = 2^3$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$\Rightarrow (x-4)(x+2) = 0$$
$$\Rightarrow x = 4 \quad or \quad x = -2$$

(والقيمة الثانية مرفوضة لأنها سالبة).

مثال (٤-١٨)

أوجد قيمة المقادير التالية :

(i) $\log 10$. (ii) $\log 10{,}000$. (iii) $\log(100\times 10^{-2})$. (iv) $\log 0.01$.

الحل

$$(i)\quad \log 10 = \log_{10} 10 = 1.$$

$$(ii)\quad \log 10{,}000 = \log 10^4 = 4\log 10 = 4(1) = 4.$$

$$(iii)\quad \log(100\times 10^{-2}) = \log\frac{100}{100} = \log 1 = 0.$$

$$(iv)\quad \log 0.01 = \log\frac{1}{100} = \log 1 - \log 100 = 0 - 2 = -2.$$

مثال (٤-١٩)

إذا كان $\log 3 = 0.4771, \log 2 = 0.3010$ فأوجد قيمة كل من $\log 5, \log\frac{27}{8}, \log 36$.

الحل

$$\log 36 = \log(4\times 9) = \log(2^2\times 3^2) = \log 2^2 + \log 3^2 = 2\log 2 + 2\log 3$$
$$= 2(0.3010) + 2(.4771) = 1.5562.$$

$$\log\frac{27}{8} = \log\left(\frac{3}{2}\right)^3 = 3(\log 3 - \log 2) = 3(0.4771 - 0.3010) = 0.5283.$$

$$\log 5 = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990.$$

مثال (٤-٢٠)

وضح أن $\log\sqrt{x}^{\sqrt{2}} - \frac{\log x}{\sqrt{2}} = 0$.

الحل

$$\log\sqrt{x}^{\sqrt{2}} = \log\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \log x^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\log x\,,$$

$$\log\sqrt{x}^{\sqrt{2}} - \frac{\log x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\log x - \frac{1}{\sqrt{2}}\log x$$

$$(\log x)\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = (\log x)\,(0) = 0.$$

المصفوفات

MATRICES

٤–١ مقدمة : INTRODUCTION

لكى نعطى فكرة عما يقصد بالمصفوفات ومفردها مصفوفة سوف نفترض المثال التالى :

لنفرض أن لديك فصلاً دراسياً وبه مجموعة من أوائل الطلاب وتريد أن تعد نموذجاً لدرجاتهم خلال فترة زمنية لتراقب مدى تقدمهم أو ما هى نواحى القصور لتعالجها لكى يستمروا فى تفوقهم. مجموعة الطلاب هم (أحمد ، محمد ، شادى ، سارة) وكانت درجاتهم خلال شهر موزعة بالصورة التالية :

	أحمد	محمد	شادى	سارة
الأسبوع الأول	٩	٨	٧	٨
الأسبوع الثانى	٨	٧	٩	٦
الأسبوع الثالث	٧	٨	٦	٩
الأسبوع الرابع	٩	٧	٨	٨

من خلال هذا الجدول تستطيع أن تحدد من صاحب أعلى درجة فى الأسبوع الأول مثلاً ومدى احتفاظه بهذا التفوق خلال الأسابيع التالية ، ولسهولة التعامل مع مثل هذه النماذج نستطيع كتابة هذا الجدول فى الصورة التالية :

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 7 & 8 \\ 9 & 6 & 8 & 7 \\ 8 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

هذا الجدول يسمى مصفوفة 4x4 (أى أن عدد صفوفها أربعة وعدد أعمدتها أربعة).

ولكن إذا أردت أن تطبق النظام السابق على كل تلاميذ الفصل وليكن عددهم m لعدد أسابيع العام وليكن عددها n فإن المصفوفة الناتجة تكون من النوع mxn وتأخذ الشكل الآتي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{3m} \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nm} \end{pmatrix}$$

ويلاحظ أن هذه المصفوفة تحتوى على عدد n من الصفوف (يناظر عدد الأسابيع) وعدد m من الأعمدة (يناظر عدد التلاميذ).

ملاحظة :

يجب ملاحظة أن n, m هما عددان صحيحان موجبان وأنه من الممكن أن تكون n=1, m=1.

أمثلة على المصفوفات :

١ – مصفوفة من النوع الأول 2x3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

٢ – مصفوفة من النوع 2x2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

٣ – مصفوفة من النوع 1x4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

٤ — مصفوفة من النوع 3x1.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

٤–٢ الرموز المستعملة للمصفوفات.

حيث أن المصفوفة عبارة عن مجموعة من العناصر فسوف نرمز للمصفوفة بالحروف الكبيرة مثل C. B. A ... الخ وعناصر المصفوفة سوف نرمز لها بالحروف الصغيرة مثل c, b, a ... الخ.

فمثلاً المصفوفة A من النوع 3x3 تأخذ الشكل التالى :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

حيث أن a_{11} هو العنصر الأول (عمود الأول والصف الثانى)

a_{12} هو العنصر الموجود فى (عمود الثانى والصف الأول)

a_{13} هو العنصر الموجود فى (عمود الثالث والصف الأول)

a_{21} هو العنصر الموجود فى (عمود الأول والصف الثانى)

A_{22} هو العنصر الموجود فى (عمود الأول والصف الثانى)

وهكذا

فلذا متى رمز للعناصر المصفوفة السابقة بالرمز a_{ij} فإن i تشير لعدد الصفوف j تشير إلى عدد الأعمدة وغالباً نضع المصفوفة فى الصورة.

$$A = [a_{i,j}]$$

هى مصفوفة لها i صف و j عمود حيث أن $j = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, m$

٤–٣ أنوع المصفوفات.

هناك أنواع مختلفة من المصفوفات حسب قيم n.m وعلى حسب نوع عناصر المصفوفة.

(١) المصفوفة المستطيلة.

إذا كانت $m \neq n$ يقال للمصفوفة A أنها مستطيلة.

(٢) المصفوفة المربعة.

إذا كانت $m = n$ سميت المصفوفة A مصفوفة مربعة.

(٣) مصفوفة الصف.

إذا كانت $m = 1$ فإن المصفوفة تسمى مصفوفة الصف أى المكونة من صف واحد.

(٤) مصفوفة العمود.

إذا كانت $n = 1$ سميت المصفوفة A بمصفوفة العمود (أى مصفوفة مكونة من عمود واحد).

أمثلة :

١) مصفوفات مستطيلة مثل :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

٢) مصفوفات مربعة مثل :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

٣) مصفوفة الصف مثل :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

٤) مصفوفة العمود مثل :

$$F = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(٥) المصفوفة القطرية:

يقال للمصفوفة المربعة أنها مصفوفة قطرية إذا أنعدمت جميع عناصرها عـــدا عناصر القطر أى :

$$a_{ij} = \begin{cases} = 0 & i \neq j \\ \neq 0 & i = j \end{cases}$$

مثال :

المصفوفات التالية تسمى مصفوفات قطرية.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ويجب ملاحظة أن المصفوفة القطرية تتحدد متى عرفت عناصرها فإذا قلنا أن العنـــاصر القطرية للمصفوفة ما هى $D = \text{diag}\,(5, 1, 4, 7)$ فإن المصفوفة يمكن تتابعها فى الصـــورة التالية :

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(٦) المصفوفة المثلثية.

يقال للمصفوفة $A=[a_{ij}]$ أنها مصفوفة مثلثية علوية إذا كانت $a_{ij} = 0$ عندما $i > j$.

كما يقال أنها مصفوفة مثلثية سفلى إذا كانت $a_{ij} = 0$ عندما $i > j$.

مثال :

المصفوفتان التاليتان هما مصفوفتان علويتان.

$$A=\begin{pmatrix}2&3&1\\0&5&2\\0&0&3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}7&2&1\\0&5&4\\0&0&6\end{pmatrix}$$

وبمعنى إذا كانت العناصر أسفل القطر صفرية سميت مثلثية علوية.

مثال :

المصفوفة التالية من النوع المثلثية السفلى.

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&4&0&0\\5&2&1&0\\3&5&1&4\end{pmatrix}$$

(٧) مصفوفة الوحدة.

هى مصفوفة قطرية عناصرها القطرية متساوية وكل منها يساوى الواحد الصحيح مثل :

$$I_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad I_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

تعريف.

تتساوى المصفوفتان A, B إذا كانتا على نفس النظم وكان كل عنصر فى المصفوفة A يساوى نظيره فى المصفوفة B.

فمثلاً المصفوفتان :

$$\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}$$

غير متساويتان لاختلافهما فى النظم.

وأيضا المصفوفتان :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

غير متساويتان لأن كل عنصر من عناصر الأولى لا يساوى نظيرة فى الثانية.

مثال :

أوجد قيمة k التى تجعل المصفوفتين التاليتين متساويتين

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2k \\ 4 & 3k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

الحل

بما أن المصفوفتين على نفس النظم 2x2 فإنه لكى تتساوى المصفوفتان فإنـــه يجـــب أن تتساوى العناصر المتناظرة ومن ذلك نجد أن

$3k = 9, 2k = 6$ ومنها نحصل على أن $k = 3$

مثال :

أوجد قيمة كلا من y, x متى علمت أن المصفوفتين B, A متساويتان

$$A = \begin{pmatrix} 3 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7-x & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل

مساواة العناصر المتناظرة نحصل على المعادلتين

$$y = 2$$
$$7 - x = 3$$

ومنها نحصل على أن $x = 4, y = 2$.

٤-٤ جبر المصفوفات : Algebra of Matrices

١- ضرب المصفوفة فى عدد ثابت.

إذا كانت لدينا المصفوفة A وكان المطلوب ضربها فى العدد الثـــابت k فـــإن المصفوفة KA تعرف بأنها المصفوفة التى كل عنصر من عناصرها مضروب فى العدد k.

مثال :

إذا كانت لدينا المصفوفة A بالصورة التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

وكان المطلوب الحصول على المصفوفة KA حيث أن $k = 3$

الحل

$$KA = \begin{pmatrix} k & 2k & 3k \\ 2k & k & 4k \\ 4k & 5k & 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 12 \\ 12 & 15 & 6 \end{pmatrix}$$

مثال :

أوجد A- .2A إذا علم أن :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

الحل

$$-A = (-1)A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A = (2)A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -4 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

٢ – عملية جمع المصفوفات.

حاصل جمع مصفوفتين على نفس النظم B, A هو مصفوفة من نفس النظم ويرمز لها بالرمز A+B ونحصل عليها من جمع العناصر المتناظرة فى كل من B . A.

مثال :

إذا كانت المصفوفة A تمثل درجات مجموعة مكونة من ثلاث تلاميذ خـــلال الفصل الدراسى الأول فى ثلاث مواد دراسية كما يلى :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

وكانت مصفوفة الدرجات فى الفصل الدراسى الثانى فى الشكل التالى :

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

فكيف تحصل على مصفوفة الدرجات الكلية للفصلين الدراسيين.

الحل

نقوم بجمع كل درجة من المصفوفة A إلى الدرجة المناظرة لها من المصفوفة B بالشـــكل التالى

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 15 \\ 9 & 7 & 10 \\ 8 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

مثال :

أوجد A+B إذا كان

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

الحل

نلاحظ أن هاتين المصفوفتين من نفس النوع وبالتالى يمكن إيجاد المجموع (وذلك بجمع العناصر المتناظرة) هكذا ..

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 9 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+7 & 2+9 & 4+3 \\ 1+2 & 3+0 & 8+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 7 \\ 3 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

مثال :

أوجد قيمة كل من x ,y اللتان تحققان المعادلة الآتية :

$2A + 4B = C$

حيث أنه

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2x \\ -3 & 3y \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ -8 & 42 \end{pmatrix}$$

الحل

بالتعويض عن قيمة كل من C, B, A فى المعادلة $2A+4B = C$ نحصل على الصيغة التالية :

$$2\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 & 2x \\ -3 & 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ -8 & 42 \end{pmatrix}$$

باستخدام خاصية ضرب المصفوفات فى عدد قياسى نحصل على :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2x \\ 4 & 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8x \\ -12 & 12y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ -8 & 42 \end{pmatrix}$$

باستخدام خاصية جمع المصفوفتين الموجودتين فى الطرف الأيسر نحصل على :

$$\begin{pmatrix} 2+8 & 2x+8x \\ 4-12 & 2y+12y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ -8 & 42 \end{pmatrix}$$

الطرفان من نفس النوع ولكى يحدث التساوى يلزم تساوى العناصر المتناظرة

$$\begin{pmatrix} 10 & 10x \\ -8 & 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ -8 & 42 \end{pmatrix}$$

ومنها نحصل على أن

$$10X = 30 \Rightarrow x = 3$$
$$14Y = 42 \Rightarrow y = 3$$

تعريف.

إذا كانت A ,B مصفوفتان من نفس النوع فإن ناتج الطرح A – B هو مصفوفة أخرى من نفس نوع A ,B تعطى من $A - B = A+(-B)$.

مثال :

إذا كان :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

فأوجد : $3A-2B$

الحل

$$3A-2B=3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 9 & 12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -2\\ -4 & -10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$$

فيما يلى : بعض خصائص جمع المصفوفات ذات النظم الواحد.

إذا كانت C, B, A ثلاث مصفوفات من نفس النوع فإن

الجمع إبدالى $\quad$ (i) $A+B=B+A$

الجمع دامج $\quad$ (ii) $(A+B)+C=A+(B+C)$

تعريف.

المحايد الجمعى للمصفوفة A هى مصفوفة على نفس النظم لها الرمز 0 وتحقق المعادلة $A+0=0+A=A$ وهى مصفوفة كل عناصرها أصفار مثلا

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

تعريف.

المعكوس الجمعى B للمصفوفة A هى مصفوفة من نفس النظم تحقق $A+B=0$

ومن ذلك يتضح أن $B=-A$

مثال :

أوجد المعكوس الجمعى للمصفوفة التالية :

$$A=\begin{pmatrix} & 1\\ -3 & \end{pmatrix}$$

الحل

نفرض أن المصفوفة B هى نفس المصفوفة A على صورة التالية :

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

بما أن B تحقق A + B = 0 فإن :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

أى أن :

$$\begin{pmatrix} 1+a & 1+b \\ -3+c & 2+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

من شرط التساوى نجد أن :

$a = -1,\ b = -1,\ c = 3,\ d = -2$

∴ المصفوفة B هى :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

ومن الملاحظ أن $B = -A$

٣ — عملية ضرب المصفوفات.

إذا كانت لدينا مصفوفة A تمثل درجات ثلاث طلاب فى ثلاث مواد دراسية مختلفة بالصورة الآتية :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

وكان المطلوب لرفع النتيجة ضرب درجات المادة الأولى فى 2 والمادة الثانية فى 3 والمادة الثالثة فى 4 وذلك لكل الطلاب فكيف تجرى عملية ضرب هذه.

تعتبر المقادير المراد ضربها هى مصفوفة صف بالصورة :

$$B = (2, 3, 4)$$

عند ضرب المصفوفة B فى درجات الطالب الأول :

$$(2, 3, 4)\begin{pmatrix}5\\4\\7\end{pmatrix} = 2x5+3x4+4x6 = 10+12+28 = 50$$

∴ مجموعات درجات الطالب الأول 50.

بالنسبة للطالب الثانى :

$$(2, 3, 4)\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} = 2x2+3x3+4x5 = 4+9+20 = 33$$

بالنسبة للطالب الثالث :

$$(2, 3, 4)\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix} = 2x3+3x2+4x6 = 36$$

فيمكن وضع نتائج الضرب الثلاث فى الصورة التالية :

$$(2, 3, 3)\begin{pmatrix}5 & 2 & 3\\4 & 3 & 2\\7 & 5 & 6\end{pmatrix} = (50, 33, 36)$$

وإذا كان المطلوب ضرب نفس الدرجات فى مصفوفة ثانية ولتكن (1, 3, 4) فإن عملية الضرب تكون :

$$(1, 3, 4)\begin{pmatrix}5 & 2 & 3\\4 & 3 & 2\\7 & 5 & 6\end{pmatrix} = 5+12+28,\ 2+9+20,\ 3+6+24 = (45\ 31\ 33)$$

∴ يمكن ضم العمليتان السابقتان فى الصورة التالية :

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\1 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2 & 3\\4 & 3 & 2\\7 & 5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}50 & 33 & 36\\45 & 31 & 33\end{pmatrix}$$

إذا فرضنا أن المصفوفة الأولى :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

والثانية :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

فإنه :

$$B.A = \begin{pmatrix} 50 & 33 & 36 \\ 45 & 31 & 33 \end{pmatrix}$$

ويمكننا أن نلخص عملية الضرب للمصفوفتين :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

بالصورة الآتية :

$$A.B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$$

العنصر الأول فى العمود الأول من مصفوفة ناتج الضرب وهو ax+bz عبارة عن حاصل جمع نواتج ضرب الصف الأول (a, b) من المصفوفة عنصراً عنصراً فى عناصر العمود الأول من المصفوفة B.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{ax+bz} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

والعنصر الثانى فى العمود الأول cx+dz عبارة عن حاصل جمع نواتج ضرب الصف الثانى من المصفوفة A فى العمود الأول من المصفوفة B.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \boxed{cx+dz} & 0 \end{pmatrix}$$

وكذلك العنصر الأول فى الصف الثانى من مصفوفة الضرب نحصل عليه بضرب عناصر الصف الأول من A فى عناصر العمود الثانى من B.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{ay+bw} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وكذلك العنصر الثانى فى العمود الثانى نحصل عليه بنفس الطريقة :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \boxed{cy + dw} \end{pmatrix}$$

تعريف.

يقال المصفوفتين B ، A أنهما قابلتان للضرب على الصورة A.B إذا كانت عدد أعمدة A مساوياً عدد صفوف B .

مثال :

أوجد حاصل الضرب A.B إذا كانت :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

الحل

واضح أن حاصل الضرب A.B موجود لأنه عدد أعمدة A يساوى عدد صفوف B وبالتالى فإن :

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x3 + 1x2 & 2x1 + 1x3 \\ 2x3 + 2x2 & 3x1 + 2x3 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$$

تمرين.

كيف نحصل على B.A من المثال السابق ؟

مثال :

إذا كانت

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

فأثبت أن :

$$A.(B+C) = A.B + A.C$$

الحل

نحسب أولاً B+C كما يلى :

$$B+C=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -3\\ 4 & 3\end{pmatrix}$$

ثانيا نحسب :

$$A.(B+C)=\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & -3\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1x7+3x4, & -3x1+3x3\end{pmatrix}$$

$$A.(B+C)=\begin{pmatrix}19 & 6\end{pmatrix}$$

ثالثا نحسب A.C. A.B

$$A.B=\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1x3+3x5 & 1x0+3x1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 3\end{pmatrix}$$

$$A.C=\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1x4+x(-1) & 1x(-3)+3(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}$$

رابعا نحسب $A.B+A.C=(18\ \ 3)+(1\ \ 3)$

$$=(19\ \ 6)$$

$$A.(B+C)=A.B+A.C$$

تمارين :

١ - أثبت أن $A.(B+C)=A.B+A.C$

إذا كانت

$$A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-3 & 4\end{pmatrix}$$

٢ - إذا كانت

$$A=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & 6\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}7 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

فأحسب كل مما يلى :

(i) $3A+2B-C$

(ii) $B.A+C$

(iii) $B.^{\cdot}+C^{2}$

٣ – إذا كانت

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

فأثبت أن $A.B = 0$ ثم أوجد حاصل الضرب $B.A$

٤ – أثبت أن $AB = AC$ إذا كانت

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

المحددات

DETERMINATS

٥-١ مقدمة : INTRODUCTION

إذا كانت لدينا مصفوفة مربعة A بالشكل التالى :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

فإنه يوجد مفهوم جديد خاص بالمصفوفات يسمى محدد المصفوفة وهذا المفهوم يرمز له بالرمز

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$$

يقال أن المصفوفة A محددة من الرتبة الثانية

وإذا كانت المصفوفة B من النوع 3x3 :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

فإن المحدد يعطى بالشكل التالى

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

ويقال أن المصفوفة B محددة من الرتبة الثالثة. ويلاحظ أن هذه المحددات كميات جبرية بخلاف المصفوفات (إذ ليس للمصفوفات حتى المربعة منها قيم جبرية) ونعرف فيما يلى ما ترمز إليه المحددات.

أولا محدد الرتبة الثانية.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$$

هذه هى قيمة محدد الرتبة الثانية. ولكن كيف نحصل على قيمة محدد من الرتبة الثالثـة.

لكى نوضح ذلك نفرض أن :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

مصفوفة مربعة من النوع 3x3 . ومحدد هذه المصفوفة هو :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

ولكن كيف نوجد قيمة هذه المحدد : نفك هذا المحدد باستخدام عناصر صف واحد أو عمود واحد من صفوف أو أعمدة هذا المحدد ولإجراء ذلك سوف نختار عل سـبيل المثال الصف الأول.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & f \\ g & 0 & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{vmatrix}$$

وذلك عند اختيار أى عنصر سوف نحذف كل عناصر الصف العمود الذين هما هـذا العنصر ثم نقوم بضرب هذا العنصر فى المحدد كما يلى :

$$|A| = a\begin{vmatrix} c & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

والإشارة السالبة هنا ضرورية حيث العنصر الأول موجب والثانى سـالب والثـالث موجب ومن ثم استخدام فك محددات الرتبة الثانية كما سبق نحصل على أن :

$$|A| = a(ai - fh) - b(di - fg + (c(dh - eg)$$

مثال :

أحسب $|A|$ إذا كانت :

$$A=\begin{pmatrix}2&4&3\\3&2&5\\4&3&8\end{pmatrix}$$

الحل

$$|A|=\begin{vmatrix}2&4&3\\3&2&5\\4&3&8\end{vmatrix}$$

وهذا المحدد من الرتبة الثالثة فسوف نستخدم عناصر أى صف وليكن الصـــف الأول كما يلى :

$$|A|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&5\\0&3&8\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&4&0\\3&0&5\\4&0&8\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0&3\\3&2&0\\4&3&0\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&5\\3&8\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}3&5\\4&8\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}3&2\\4&3\end{vmatrix}$$

$$=2(2x8-5x3)-4(3x8-5x4)+3(3x3-2x4)$$

$$=2(16-15)-4(24-20)+3(9-8)$$

$$2-16+3=-11$$

$$|A|=-11$$

٥-٢ خواص المحددات.

سوف نقتصر دراستنا على خواص المحددات من الرتبة الثانية فقط.

(١) إذا بدلنا الأعمدة بالصفوف فإن قيمة المحدد لا تتغير إذا اعتبرنا :

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

وإذا بدلنا الصفوف بالأعمدة لكى تصير المصفوفة مصفوفة أخرى وهى :

$$B=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$$

والحساب محدد كل من B, A كما يلى :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$|B| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$|A| = |B|$$

(٢) إذا بدلنا عناصر صف (أو عمود) بعناصر صف (أو عمود) آخر محدد ما فإن المحدد الجديد قيمته تساوى قيمة المحدد الأصلى بإشارة مخالفة.

مثال : ولتكن

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

نبدل الصفوف وترمز للمصفوفة الجديدة بالرمز B

$$B = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

ونلاحظ أن :

$$|A| = (ad - bc)$$

$$|B| = (bc - ad) = -(ad - bc)$$

وهنا نجد أن : $|B| = -|A|$ وكذلك نفس الشىء لو بدلنا عمود مكان آخر.

(٣) يمكن أخذ عامل مشترك من عناصر أى صف (أو عمود) خارج المحدد أى أنه إذا كانت :

$$A = \begin{pmatrix} ka & kb \\ c & d \end{pmatrix}$$

فإن

$$|A| = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = k(ad - bc)$$

مثال :

أوجد قيمة محدد المصفوفة :

$$A=\begin{pmatrix}14 & 66\\ 21 & 55\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}14 & 66\\ 21 & 55\end{vmatrix}=(14x55)-66(21)=-616$$

ولكنه لتسهيل عملية الفك ومن ثم الضرب نحاول أن نأخذ أى عوامل مشتركة من صف أو عمود وذلك من خلال تحليل عناصر المصفوفة :

$$|A|=\begin{vmatrix}(2)(7) & (2)(3)(11)\\ (3)(7) & (5)(11)\end{vmatrix}$$

نأخذ 2 عامل مشترك من الصف الأول :

$$|A|=2\begin{vmatrix}7 & 3(11)\\ 3(7) & 5(11)\end{vmatrix}$$

نأخذ 7 عامل مشترك من العمود الأول :

$$|A|=2(7)\begin{vmatrix}1 & 3(11)\\ 3 & 5911)\end{vmatrix}$$

نأخذ 11 عامل مشترك من العمود الثانى :

$$|A|=2(7)(11)\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 5\end{vmatrix}$$

$$=2(77)(1x5-3x3)=(154)(5-9)=-616$$

(٤) لا تتغير قيمة المحدد إذا أضفت مضاعفات صف منه (أو عمود) إلى العناصر المناظرة لصف (أو عمود) أخر.

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

فإن

$$|A|=(ad-bc)=ad-bc$$

فإذا أضفنا عناصر الصف الأول إلى الصف الثان فى الصورة :

$$B=\begin{pmatrix}a & b\\ a+c & b+d\end{pmatrix}$$

فإن محدد المصفوفة B :

$$|B| = (a(b+d) - b(a+c)) = ab + ad - (ab + bc)$$
$$= ab + ad - ab - bc = ad - bc$$
$$\therefore \quad |A| = |B|$$

وكذلك إذا ضربنا عناصر العمود الأول فى المصفوفة A فى مقدار ثابت k ثم أضفناه إلى العمود الثانى كما يلى :

$$C = \begin{pmatrix} a & ka+b \\ c & kc+d \end{pmatrix}$$

فإن المحدد يعطى بالصورة التالية :

$$|C| = \begin{vmatrix} a & ka+b \\ c & kc+d \end{vmatrix} = a(kc+d) - c(ka+b)$$
$$= akc + ad - cka - cb = ad - bc$$

ويتضح أيضا أن : $|A| = |C|$

مثال :

أوجد قيمة المحدد للمصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} 72 & -84 \\ -71 & 80 \end{pmatrix}$$

واضح أن المحدد يحسب بالطريقة العادية فيساوى :

$$|A| = \begin{vmatrix} 72 & -84 \\ -71 & 80 \end{vmatrix} = (72)(80) - (-84)(-71) = -204$$

ولكن باستخدام خواص المحددات وذلك بإضافة عناصر الصف الأول إلى عناصر الصف الثانى نحصل على الآتى :

$$B = \begin{vmatrix} 72 & -84 \\ -71+72 & 80-84 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 72 & -84 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$$
$$|B| = 72(-4) - (1)(-84) = -204$$

تمارين

١ – أوجد قيمة المحددات التالية :

(i) $\begin{vmatrix} 17 & -15 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

٢ – أثبت باستخدام فك المحددات أن :

(i) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ -ab & a^2 \end{vmatrix} = a^2(a^2 + b^2)$

(ii) $\begin{vmatrix} -x & 1 \\ -b & -(x+a) \end{vmatrix} = x^2 + ax + b$

٣ – أوجد قيمة x فى كل من المحددات التالية :

(i) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ -2 & x+3 \end{vmatrix} = 0$ (ii) $\begin{vmatrix} -x & 2 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} = 0$

المعادلات الخطية

LINEAR EQUATIONS

٦-١ مقدمة : INTRODUCTION

إذا فرضنا أنه لدينا معادلتان آتيتان فى متغيرين y, x فى الصورة التالية :

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad (2)$$

حيث أن a_1, b_1, c_1 , a_2, b_2, c_2 ثوابت

كنا فيما سبق نقوم بحل هاتين المعادلتين باستخدام طريقة الحذف وذلك كما يلى :

نحذف المتغير x بأن نقوم بضرب المعادلة الأولى فى a_2 والمعادلة الثانية فى $-a_1$ وجمع المعادلتين كما يلى :

$$a_2a_1x + a_2b_1y = c_1a_2$$

$$-a_1a_2x - a_1b_2y = -a_1c_2$$

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y = (c_1a_2 - c_2a_1)$$

ومعها نحصل على أن
$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_2b_1 - a_1b_2}$$

وبنفس الطريقة إذا ضربنا المعادلة الأولى فى b_2 والثانية فى $-b_1$ وذلك لحذف y ومنها نحصل على x كما يلى :

$$b_2a_1x + b_2b_1y = c_1b_2$$

$$-b_1a_2x - b_2b_1y = c_2b_1$$

$$(b_2a_1 - b_1a_2)x = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{b_2a_1 - b_1a_2}$$

ولكننا الآن بعد أن درسنا المصفوفات والمحددات نستطيع إيجاد طريقة أخرى أفضل وأسهل لحل هاتين المعادلتين وذلك كما يلى :

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

أولا نقوم بفصل الثوابت فى الطرف الأيسر فى صورة المصفوفة A والمتغيرات فى صورة المصفوفة B كما يلى :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

وكذلك ثوابت الطرف الأيمن بالمصفوفة $B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ولذلك نستطيع كتابة المعادلتان السابقتان فى الصورة التالية :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

أو فى صورة

$$AX = B$$

لكى نوجد المتغيرات y, x نستخدم طريقة كرامر لحل المعادلات والتى تتلخص خطواتها فى الآتى :

١- حساب محدد المصفوفة $|A|$.

٢- نوجد المصفوفة A_1 وذلك بوضع العمود $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ مكان العمود الأول من A ونحسب قيمة محدد A_1

$$|A_1| = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_1 & b \end{vmatrix}$$

٣- نوجد المصفوفة A_2 وذلك بوضع العمود $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ بدلاً من العمود الثانى فى المصفوفة A ثم نحسب محدد المصفوفة A_2.

$$|A_2'| = \begin{vmatrix} a_1 & c \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

ويكون حل المعادلتان بالصورة التالية :

$$x = \frac{|A_1|}{|A|}, \qquad y = \frac{|A_2|}{|A|}$$

مثال :

حل المعادلتين

$$2x - 3y = 1$$
$$x + 2y = 4$$

الحل

أولاً : بطريق الحذف وذلك بضرب الأولى فى 1 والثانية فى –2 ثم الجمع

$$3x - 3y = 1$$
$$-2x + 4y = -8$$

$$-7x \quad = -7$$

ومعها $y = 1$.

وكذلك ضرب المعادلة الأولى فى 2 والثانية فى +3 نحصل على

$$4x - 6y = 2$$
$$+3x + 6y = +12$$

$$yx \;= 14$$

ومعها $x = 2$

ثانيا : إذا استعملنا طريقة المحددات فإنه يجب وضع المعادلات فى الصورة التالية :

$$2x - 3y = 1$$
$$x + 2y = 4$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A.X = B$$

حيث أن :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

أولاً : $$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7$$

ثانيا : $$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14$$

ثالثاً : $$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7$$

ومنها نحصل على

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{14}{7} = 2$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{7}{7} = 1$$

مما سبق تعلمنا كيف نقوم بحل معادلتين آنيتين في مجهولتين ويمكن تعميم هذه الفكرة لعدد ثلاث معادلات في ثلاث متغيرات مثل :

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

بنفس الطريقة نجعل المعادلات على صورة $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

ومحدد A من الرتبة الثالثة يمكن إيجاده كما تعلمنا في خلال دراستنا للمحددات.

والمحدد A_1 يأخذ الشكل التالي :

$$|A_1| = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

وذلك باستبدال العمود الأول بالمصفوفة B

وكذلك باستبدال العمود الثاني بالمصفوفة B نحصل على A_2

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

وبنفس الطريقة لو استبدلنا العمود الثالث بالمصفوفة B لحصلنا على المحدد $|A_3|$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

ومنها نحصل على المتغيرات z, y, x بالصيغ التالية :

$$x = \frac{|A_1|}{|A|},\ \ y = \frac{|A_2|}{|A|},\ \ z = \frac{|A_3|}{|A|}$$

مثال :

باستخدام المحددات أوجد حل المعادلات الثلاث التالية :

$$2x - y + z = 6$$
$$3x + 4y - 2z = 0$$
$$x + 5y - 4z = -7$$

الحل

نضع المعادلات على صورة AX=B حيث أن :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

أولاً : محدد المصفوفة A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-16+10) + (-12+2) + (15-4) = -11$$

ثانياً : محدد المصفوفة A_1

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ -7 & 5 & -9 \end{vmatrix} = -22$$

ثالثا : نحسب المحدد $|A_2|$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 7 & -4 \end{vmatrix} = 11$$

رابعاً : نسحب المحدد $|A_3|$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -11$$

ومنها نوجد الحل بالصورة التالية :

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-22}{-11} = 2$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{11}{-11} = -1$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-11}{-11} = 1$$

تمارين

(١) أوجد حل المعادلات الآتية بطريقة الحذف

(i) $2x + 3y = 0$

$x - 7y = 0$

(ii) $22x - 11y = 0$

$5x - 3y = 0$

الكسور الجزئية

٧–١ المقدمة : INTRODUCTION

كثيرا ما يصادفنا فى مبادئ الجبر عملية إيجاد المجموع الجبرى لعدة كسور معطاة فنحصل على كسر واحد وذلك بتوحيد مقامات هذه الكسور وإيجاد المجموع الجبرى لهذه الكسور فنحصل على كسر واحد وعكس هذه العملية وهو تحويل الكسر الواحد إلى عدد من الكسور والتى تسمى كسور جزئية.

وتستخدم هذه الطريقة لتحويل الكسر.

$$\frac{f_n(x)}{g_m(x)}$$

إلى كسوره الجزئية ، حيث كل من $g_m(x)$ $f_n(x)$ كثيرة حدود على الصورة :

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$g_m(x) = b_0 + b_2x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$$

تعريف : يسمى الكسر $\frac{f_n(x)}{g_m(x)}$ كسراً حقيقياً إذا كان درجة البسط اقل من درجة المقام أى أن $n < m$ أما إذا كان $n \geq m$ يتسمى الكسر غير حقيقى ومثال ذلك الكسور الآتية : –

$$\frac{x = 1}{x^2 = 1}, \frac{x^4 + 1}{x^5 + 2x\ 4 + 3}, \frac{1}{x + 1}$$

كسور حقيقة بينما الكسور الآتية : –

$$\frac{x + 1}{x - 1}, \frac{x^2 + 1}{x + 1}, \frac{x^5 + 3x^5 + 2}{x^4 + 2x + 3}$$

كسور غير حقيقة.

ويمكننا فى الواقع وبدون أى خسارة فى التعميم أن نفترض درجة البسط $f_n(x)$ أقل من درجة المقام أى أن $n < m$ لأنه خلاف ذلك يمكننا أن نبدأ بقسمة البسط على المقام إلى أن نحصل على خارج قسمة عبارة عن كثيرة حدود. أخرى درجتها تساوى درجة البسط مطروحاً منها درجة المقام وباقى درجته تقل عن درجة المقام.

وتتلخص فكرة الكسور الجزئية فى تجزئ الكسر الحقيقة $\dfrac{f_n(x)}{g_m(x)}$ حيث $n < m$ إلى مجموع جبرى بأشكال أبسط وذلك بحسب العوامل الأولية للمقام $g_m(x)$ ولا جزاء التحليل إلى كسور جزئية نعتبر الحالات الآتية :

٧–٢ المقام يقبل التحليل إلى عوامل أولية جميعها من الدرجة الأولى ومختلفة.

ليكن المقدار فى هذه الحالة على الصورة :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\phi(x)}{\lambda(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_r)}$$

$$\alpha_r \neq \alpha_s, \quad \lambda \neq 0$$

$$r, s = 1, 2, 3, \dots, n, \ r \neq s$$

فى هذه الحالة المقدار يقبل التحليل إلى كسور جزئية على الصورة

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x+\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}$$

حيث $A_1, A_2, \dots, A_n$ ثوابت تتعين من المتطابقة.

$$\frac{1}{\lambda} f(x) = A_1(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) + A_2(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_n)$$
$$+ \dots + A_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{n-1})$$

وهذه متطابقة صحيحة لجمع قيم.

ويتعين $A_1, A_2, \dots A_n$ لوضع

$x = \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$

على الترتيب وبذلك نحصل على التحليل المناظر لكسور الجزئية.

مثال (١) : حلل الكسر الآتى إلى كسوره الجزئية : –

$$\frac{5-2x}{6x^3-x^2-x}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x)$$

الحل : نحاول تحليل المقام إلى عوامل أولية : –

$$\therefore \frac{5-2x}{6x^3+x^2-x}=\frac{5-2x}{x(3x-1)(2x+1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{3x-1}+\frac{A_3}{2x+1}$$

$$\therefore A_1(3x-1)(2x+1)+A_2x(2x+1)+A_3x(3x-1)=5-2x$$

بوضع : $x=0$ نحصل على $A_1=-5$

ولضع ، $x=\frac{1}{3}$ نحصل على $A_2=\frac{39}{5}$

ولوضع $x=-\frac{1}{2}$ نحصل على $A_3=\frac{24}{5}$

وبالتعويض عن قيم A_1, A_2, A_3 بالقيم التى حصلنا عليها نجد أن الكسر تحـول إلى كسوره الجزئية.

$$\frac{5-2x}{6x^3+x^2-x}=\frac{-5}{x}+\frac{\frac{39}{5}}{3x-1}+\frac{\frac{24}{5}}{2x+1}$$

٧–٢ جميع عوامل المقام من الدرجة الأولى وبعضها مكرر :

ليكن من بين عوامل المقام $g(x)$ العامل $\alpha x+\beta$ مكرر r من المرات فقط أى أى من بين هذه العوامل يوجد العامل $(x+\beta)^r$ بحيث لا تقبل $g(x)$ والقسمة على $(\alpha x+\beta)^m$ إذا كانت $m>r$ يناظر هذا العامل تحليل جزئى على الصورة :

$$\frac{f(x)}{(\alpha x+\beta)^r}=\frac{A_1}{\alpha x+\beta}+\frac{A_2}{(\alpha x+\beta)^2}+\ldots+\frac{A_r}{(\alpha x+\beta)^r}$$

مثال (٢) : حلل الكسر الآتى إلى كسوره الجزئية :

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x^2-1)}$$

الحل : الكسر يناظر تحليل جزئى على الصورة

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x\ \ -1)}=\frac{3x+1}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$=\frac{A_1}{(x-1)}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{x+1}$$

$$\therefore 3x+1=A_1(x-1)(x+1)+A_2(x+1)+A_3(x-1)^2$$

وبوضع $x=-1$ نحصل على $A_1=-½$

وبوضع $x=1$ نحصل على $A_3=2$

وبمقارنة معامل x^2 على الطرفين نحصل على

$A_1+A_2=0$ $\therefore A_2=½$

$$\therefore \frac{3x+1}{(x-1)(x^2-1)}=\frac{-1/2}{x-1}+\frac{1/2}{(x-1)^2}+\frac{2}{x+1}$$

٧–٣ المقام $\neq(x)$

يشمل من بين عوامله على عامل من الدرجة الثانية غير مكرر ولا تقبل التحليل إلى عاملين حقيقيين عن الدرجة الأولى :

ليكن هذا العامل هو $\alpha x^2+\beta x+\gamma$

حيث $\beta^2<4\alpha\gamma$ جزء التحليل المناظر لهذا العامل يكون على الصورة

$$\frac{Ax+B}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\frac{f(x)}{g(x)}$$

مثال (٣) : حلل الكسر الآتى إلى كسوره الجزئية :

$$\frac{1-2x}{x^2+1}$$

الحل :

$$\text{الكسر}=\frac{1-2x}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+c}{x^2-x+1}$$

$\therefore 1 - 2x = A(x^2 - x + 1) + (x + 1)(Bx + c)$

وبوضع $x = -1$ نجد أن $A = 1$

وبمقارنة x^2 على الطرفين نجد أن :

$A_1 + B = 0 \Rightarrow B = -1$

والحد المطلق نحصل على :

$A_1 + C = 1 \Rightarrow C = 0$

التحليل المناظر هو :

$$\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2 - x + 1}$$

مثال (٤) : حلل الكسر الآتى إلى كسوره الجزئية :

$$\frac{5x - 7}{(x+3)(x^2+2)}$$

الحل :

$$\frac{5x - 7}{(x+3)(x^2+2)} = \frac{A_1}{x+3} + \frac{A_2x + A_3}{x^2+2}$$

$$\therefore A_1(x^2 + 2) + (x + 3)(A_2x + A_3)$$
$$= 5x - 7$$

وبوضع $x = -3$ نحصل على $A_2 = -2$

وبمقارنة معامل x^2 على الطرفين ينتج أن :

$A_1 + A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = 2$

وبمقارنة الحد المطلق على الطرفين نجد أن :

$2A_1 + 3A_3 = -7$

$\therefore \quad 3A_3 = -7 - 2A_1$

$\therefore \quad A_3 = -1$

الكسر يناظر تحليل جزئى على الصورة :

$$\frac{5x-7}{(x+2)(x^2+2)}=\frac{-2}{x+3}+\frac{2x-1}{x^2+2}$$

مثال (٥) : حلل الكسر الآتى إلى كسوره الجزئية :

$$\frac{x^3+5x^2+4x+5}{(x-1)(x^3-1)}$$

الحل :

$$\frac{x^3+5x^2+4x+5}{(x-1)(x^3-1)}=\frac{x^3+5x^2+4x+5}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3x+A_4}{x^2+x+1}$$

$$\therefore A_1(x-1)(x^2+x+1)+A_2(x^2+x+1)+(A_3x+A_4)(x-1)^2=x^3+5x^2+4x+5$$

نضع $x=1$ نحصل على $A=5$

بمقارنة معامل x^3 نحصل على $A_1+A_3=1$

بمقارنة معامل x^2 نحصل على $A_4=2A_3$

وبمقارنة الحد المطلق نجد أن $-A_1+A_4=0$

$\therefore A_1=A_4$

ويكون $A_1=\frac{2}{3},\ A_3=\frac{1}{3},\ A_4=\frac{2}{3}$

$$\therefore \frac{x^3+5x^2+4x+5}{(x-1)(x^3-1)}=\frac{\frac{2}{3}}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2+x+1}$$

٧-٤ المقام يشتمل على عامل مكرر من الدرجة الثانية :

- نفرض أن المقام يشتمل على العامل :

$$r \succ 2\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right)^r)$$

العامل المكرر r من المرات يقبل القسمة على :

$$\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right)^r$$

ولا يقبل القسمة على قوة أعلى :

∴ يناظر المقدار $\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right)^r$ تحليل جزئى على الصورة :

$$\frac{A_1 x + B_1}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} + \frac{A_2 x + B_2}{\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right)^2} - \frac{A_3 x + B_3}{\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right)^3}$$
$$+ \ldots\ldots + \frac{A_r x + B_r}{\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right)^r}$$

مثال (٦) : حلل الكسر الآتى إلى كسوره الجزئية :

$$\frac{2x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2}$$

الحل : تحلل الكسر إلى كسوره الجزئية كالآتى :

$$\frac{2x^2 + x + 4}{x\left(x^2 + 2\right)^2} = \frac{\alpha}{x} + \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + 2} + \frac{A_2 x + B_2}{\left(x^2 + 2\right)^2}$$

$$2x^2 + x + 4 = \alpha\left(x^2 + 2\right)^2 + \left(A_1 x + B_1\right)\left(x^2 + 2\right)x + \left(A_2 x + B_2\right)(x)$$

بوضع $x = 0$ نحصل على $\alpha =$

بمقارنة معامل x^4 نجد أن $A_1 + \alpha = 0 \Rightarrow A_1 = -1$

معامل x نجد أن $B_1 = 0$

ويكون $B_2 = 0, \quad A_2 = 0$

$$\frac{2x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)} = \frac{1}{x} \quad \frac{x}{x^2 + 2} \quad \frac{1}{(x^2 + 2)^2}$$

تمارين :

(١) حلل الكسر $\dfrac{x^2+20}{(x-2)^2(x+4)}$ إلى كسوره الجزئية واحد مفكوك كل كسر في قوى x التصاعدية واستنتج معامل x^n.

(٢) حلل الكسور الآتية إلى كسورها الجزئية :

(i) $\dfrac{2x+8}{x^3-8}$ (ii) $\dfrac{1}{1-x^4}$ (iii) $\dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)(x-2)}$

(iv) $\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-1}$ (v) $\dfrac{2x^2+3x+1}{(x^2+1)(x^2+3)^2}$

(vi) $\dfrac{2x+3}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$ (vii) $\dfrac{3x^3-6x^2-1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

(viii) $\dfrac{x^2+7x+1}{(x+2)^2(x+3)}$ (ix) $\dfrac{1}{x(x^2+4)}$

(x) $\dfrac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

(٣) إذا كان :

$$\frac{x+a^2}{(x-a)(x-a)(x-a)}=\frac{b}{x-a}+\frac{c}{x-a^2}+\frac{d}{x-a^3}$$

فأوجد قيم الثوابت b, c, d بدلالة a حيث :

$a\neq 0,\quad a\neq 1.$

نظرية ذات الحدين Binomial Theory

١. نظرية ذات الحدين بأس عدد صحيح موجب n:

من خلال دراستنا السابقة (وباستخدام الضرب العادي) نعلم أن:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

أي أن

$$(x+y)^2 = x^n + nxy + y^n \quad ; n = 2.$$

وأن

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$
$$= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{(2)(1)}x^{n-2}y^2 + y^n \quad ; n = 3.$$

وبالمثل يكون:

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$
$$= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{(2)(1)}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{(3)(2)(1)}x^{n-3}y^3 + y^n$$
$$; n = 4.$$

وعلى ذلك يكون:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{(2)(1)}x^{n-2}y^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\ldots(3)(2)(1)}x^{n-r}y^r + \ldots + y^n.$$

ويسمى هذا المفكوك الأخير مفكوك ذات الحدين بأس عدد صحيح موجب $n \in Z^+$

ملاحظات:

نلاحظ في مفكوك ذات الحدين بأس عدد صحيح موجب $n \in Z^+$ أن:

١- عدد الحدود في المفكوك يساوي $n+1$.

٢- مجموع قوى (أس) كلا من x, y في أي حد من حدود المفكوك يساوي n .

٣- معامل الحد الثاني في أول المفكوك يساوي معامل الحد الثاني في أخر المفكوك، ومعامل الحد الثالث في أول المفكوك يساوي معامل الحد الثالث في أخر المفكوك، وهكذا ...

٤- الحد $x^{n-r}y^{r}$ $T_{r+1}=\dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)...(3)(2)(1)}$ يُسمى الحد العام (رتبته $r+1$) في المفكوك.

٥- إذا كانت n عدد زوجي فإن رتبة الحد الأوسط في مفكوك ذات الحدين تساوي $\dfrac{n+2}{2}$. أما إذا كانت n عدد فردي فإنه يوجد حدان أوسطان في مفكوك ذات الحدين رتبتهما تساوي $\dfrac{n+1}{2}.\dfrac{n+3}{2}$.

مثال(١): أوجد الحدين الأوسطين في مفكوك $(1+\sqrt{2}x)^{9}$.

الحل:

حيث إن n عدد فردي فإنه يوجد حدان أوسطان رتبتهما $\dfrac{9+1}{2}=5.\dfrac{9+3}{2}=6$

أي أن الحدين الأوسطين هما الحدان الخامس والسادس.

وبوضع $x=1,y=\sqrt{2}x,n=9.r=4$ في الحد العام T_{r+1} لمفكوك ذات الحدين $(x+y)^{n}$ يكون:

$$T_5=\frac{(9)(8)(7)(6)}{(4)(3)(2)(1)}(\sqrt{2}x)^4=504x^4.$$

وبوضع $x=1,y=\sqrt{2}x,n=9,r=5$ في الحد العام T_{r+1} لمفكوك ذات الحدين $(x+y)^{n}$ يكون:

$$T_6=\frac{(9)(8)(7)(6)(5)}{(5)(4)(3)(2)(1)}(\sqrt{2}x)^5=504\sqrt{2}x^5.$$

مثال(٢): أوجد الحد الخالي من x في مفكوك $(x+\frac{1}{2x^2})^9$.

الحل: نضع $\frac{1}{2x^2}$ بدلا من y في الحد العام T_{r+1} لمفكوك ذات الحدين $(x+y)^n$ حيث $n=9$ فيكون:

$$T_{r+1}=\frac{9(9-1)(9-2)...(9-r+1)}{r(r-1)(r-2)...(3)(2)(1)}(x)^{9-r}(\frac{1}{2x^2})^r$$
$$=\frac{9(9-1)(9-2)...(9-r+1)}{r(r-1)(r-2)...(3)(2)(1)}(\frac{1}{2})^r(x)^{9-3r}.$$

ولكي يكون الحد خالي من x يجب أن يكون:

$$9-3r=0\Rightarrow r=3.$$

وإذاً الحد الخالي من x يكون هو الحد T_{3+1} (أي الحد الرابع)يساوي:

$$T_4=\frac{(9)(8)(7)}{(3)(2)(1)}(\frac{1}{2})^3=\frac{21}{2}.$$

- **استخدام التوافيق في التعبير عن معاملات مفكوك ذات الحدين:**

يمكننا التعبير عن معاملات قوى x,y في مفكوك ذات الحدين:

$$(x+y)^n=x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{(2)(1)}x^{n-2}y^2+...+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)...(3)(2)(1)}x^{n-r}y^r+...+y^n.$$

باستخدام التوافيق وفي هذه الحالة يكون الحد العام الذي رتبته $r+1$ في الصورة:

$$T_{r+1}={}^nC_rx^{n-r}y^r\ ;\ {}^nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)...(3)(2)(1)}=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

وعلى ذلك يكون:

$$(x+y)^n={}^nC_0x^ny^0+{}^nC_1x^{n-1}y+{}^nC_2x^{n-2}y^2+{}^nC_rx^{n-r}y^r+...+{}^nC_nx^{n-n}y^n.$$
$$=\sum_{r=0}^{n}{}^nC_rx^{n-r}y^r.$$

وباعتبار $y=1$ في مفكوك ذات الحدين يكون:

$$(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r=\sum_{r=1}^{n+1} {}^nC_{r-1}x^{r-1} \qquad (1)$$

حيث معامل x^r هو:

$$ {}^nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(r-1))}{r!} \qquad (2)$$

- دراسة خصائص معامل x^r في العلاقة (1):

مثال(٣): تحقق من أن:

1. ${}^nC_0={}^nC_n=1$
2. ${}^nC_{n-1}={}^nC_1=n$
3. ${}^nC_r=0 \quad if \quad r\geq n+1$
4. ${}^nC_r+{}^nC_{r-1}={}^{n+1}C_r$

الحل:

1. ${}^nC_0=\dfrac{n!}{0!(n-0)!}=\dfrac{n!}{n!}=1$, ${}^nC_n=\dfrac{n!}{n!(n-n)!}=\dfrac{n!}{n!}=1.$

2. ${}^nC_1=\dfrac{n!}{1!(n-1)!}=\dfrac{n(n-1)!}{(n-1)!}=n$.

$$ {}^nC_{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!}=\frac{n(n-1)!}{(n-1)!}=n.$$

3. $at\ r\geq n+1\ ;\ {}^nC_r=\dfrac{n(n-1)\dots(n-n)}{r!}=0.$

4. $${}^nC_r+{}^nC_{r-1}=\frac{n!}{r!(n-r)!}+\frac{n!}{(r-1)!(n-(r-1))!}$$
$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}+\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$
$$=\frac{n!}{r!(n-r+1)!}[n-r+1+r]$$

$$\therefore {}^nC_r+{}^nC_{r-1}=\frac{n!(n+1)}{r!(n-r+1)!}=\frac{(n+1)!}{r!((n+1)-r)!}={}^{n+1}C_r.$$

٢ . نظرية ذات الحدين بأي أس n (عدد حقيقي):

عندما يكون في ذات الحدين الأس n عدد صحيح سالب أو كسر فإن مفكوك ذات الحدين يصبح على صورة متسلسلة لانهائية (أي أن عدد حدود المفكوك يزداد إلى ما لانهاية) ويكون على الصورة التالية:

$$(1+x)^n = 1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(r-1))}{r!}x^r+\dots$$

وعندما يكون $|x| < 1$ فإن مجموع حدود هذا المفكوك إلى ما لانهاية يكون كمية محدودة (وذلك من خصائص جمع المتسلسلات).

وعلى ذلك يكون:

$$(a+x)^n = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(r-1))}{r!}a^{n-r}x^r.$$

حيث إن

$$(a+x)^n = x^n(1+\frac{a}{x})^n \;,\; \left|\frac{a}{x}\right| < 1 \quad i.e.\ |a| < |x|.$$

وأيضا

$$(a+x)^n = a^n(1+\frac{x}{a})^n \;,\; \left|\frac{x}{a}\right| < 1 \quad i.e.\ |x| < |a|.$$

مثال(٤): إذا كان $|x| < 1$ أوجد مفكوك كلا من:

$$(1+x)^{-1} \quad , \quad (1+x)^{-2}$$

الحل:

$$(1+x)^{-1} = 1+\frac{(-1)}{1!}x+\frac{(-1)(-2)}{2!}x^2+\dots+\frac{(-1)(-2)(-3)\dots(-1-(r-1))}{r!}x^r+\dots$$
$$= 1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^r x^r+\dots .$$

وبالمثل يكون:

$$(1+x)^{-2} = 1-2x+3x^2-4x^3+...+(-1)^r(r+1)x^r+... .$$

مثال(٥): إذا كان $4<|x|$ أوجد مجموع الحدود الأربع الأولى في مفكوك:

$$(4+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

الحل:

$$(4+x^2)^{-\frac{1}{2}} = (x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+\frac{4}{x^2})^{-\frac{1}{2}} \; ; \; \left|\frac{4}{x^2}\right| < 1$$

$$= \frac{1}{x}[1+\frac{(-\frac{1}{2})}{1!}(\frac{4}{x^2})+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}(\frac{4}{x^2})^2+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}(\frac{4}{x^2})^3+...]$$

$$= \frac{1}{x}[1-\frac{2}{x^2}+\frac{6}{x^4}-\frac{20}{x^6}+...]$$

وإذاً مجموع الأربع الحدود الأولى في المفكوك يكون هو:

$$\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{6}{x^5}-\frac{20}{x^7}.$$

مثال(٦): إذا كان $|x|<\frac{1}{3}$ فأوجد مجموع الثلاثة حدود الأولى في مفكوك:

$$\frac{(1+2x)^{\frac{1}{5}}}{(1-3x)^{\frac{1}{4}}}.$$

الحل: المفكوك يكون صحيحا عندما يكون $|2x|<1, |-3x|<1$ أي $|x|<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$

$$\frac{(1+2x)^{\frac{1}{5}}}{(1-3x)^{\frac{1}{4}}} = (1+2x)^{\frac{1}{5}}(1-3x)^{-\frac{1}{4}}$$

$$= [1+(\frac{1}{5})(2x)+\frac{1}{2!}(\frac{1}{5})(\frac{-4}{5})(2x)^2+...]$$

$$.[1+(\frac{-1}{4})(-3x)+\frac{1}{2!}(\frac{-1}{4})(\frac{-5}{4})(-3x)^2+...]$$

$$= [1+\frac{2x}{5}-\frac{8x^2}{25}+...][1+\frac{3x}{4}+\frac{45x^2}{32}+...]$$

$$= 1+\frac{23x}{20}+\frac{1109x^2}{800}+....$$

وإذاً مجموع الثلاثة حدود الأولى في المفكوك يكون : $1+\frac{23x}{20}+\frac{1109x^2}{800}$.

تمارين محلولة:

(١) باستخدام مفكوك ذات الحدين أوجد مقربا لثلاثة أرقام عشرية قيمة كلا من:

$$\sqrt{24} \ , \ \sqrt[3]{28} \ , \ \sqrt{1.01}$$

الحل:

$$\sqrt{24} = (25-1)^{\frac{1}{2}} = 5(1-\frac{1}{25})^{\frac{1}{2}}$$

$$= 5[1+(\frac{1}{2})(\frac{-1}{25})+\frac{1}{2!}(\frac{1}{2})(\frac{-1}{2})(\frac{-1}{25})^2+...]$$

$$= 5[1-0.02-0.0002+...]$$

$$\approx 4.899$$

$$\sqrt[3]{28} = (27+1)^{\frac{1}{3}} = 3(1+\frac{1}{27})^{\frac{1}{3}}$$

$$= 3[1+(\frac{1}{3})(\frac{1}{27})+\frac{1}{2!}(\frac{1}{3})(\frac{-2}{3})(\frac{1}{27})^2+...]$$

$$= 3+\frac{1}{27}-\frac{1}{(27)(81)}+...$$

$$\approx 3.037-0.0004$$

$$\approx 3.037$$

$$\sqrt{1.01}=(1+0.01)^{\frac{1}{2}}=1+(\frac{1}{2})(0.01)+\frac{1}{2!}(\frac{1}{2})(\frac{-1}{2})(0.01)^2+...$$
$$\approx 1+0.005-0.0001$$
$$\approx 1.005.$$

(٢) إذا كان $|x|<1$ فأوجد معامل x^r في مفكوك $\frac{2x}{1-x^2}$.

الحل:

$$\frac{2x}{1-x^2}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}=(1-x)^{-1}-(1+x)^{-1}$$
$$=[1+x+\frac{(-1)(-2)}{2!}x^2+...+\frac{(-1)(-2)(-3)...(-r)}{r!}x^r+...]$$
$$-[1-x+\frac{(-1)(-2)}{2!}x^2+...+\frac{(-1)(-2)(-3)...(-r)}{r!}x^r+...].$$

$$\therefore \frac{2x}{1-x^2}=[1+x+x^2+...+x^r+...]-[1-x+x^2+...+(-1)^r x^r+...].$$
$$=2x-2x^3+...+(1-(-1)^r)x^r+.....$$

وعلى ذلك يكون معامل x^r هو $(1-(-1)^r)$ حيث $r=0,1,2,....$.

■ تمارين:

١- باستخدام ذات الحدين برهن أن:

$$(x+y)^5-(x-y)^5=2y(5x^4+10x^2y^2+y^4).$$

٢- تحقق من أن الحد الأوسط في مفكوك $(x-\frac{1}{x})^{12}$ يكون خالي من x وأوجد قيمته.

٣- إذا كان $|x|<\frac{1}{4}$ فأوجد مفكوك كل من:

$$(1-4x)^{\frac{-2}{3}},\ (2+3x)^{-2},\ \sqrt[3]{1+2x},\ \frac{1}{1+4x}.$$

الباب السادس

الاستنتاج الرياضي Mathematical Induction

✓ الاستنتاج الرياضي هو طريقة رياضية لإثبات صحة بعض القوانين الرياضية التى يكون المتغير فيها عدداً صحيحاً موجباً.

✓ نستطيع أن نلخص مبدأ الاستنتاج الرياضي كما يلي:

ليكن $F(n)$ تقريراً صحيحاً عندما $n = 1$ فإذا كانت صحة التقرير عندما $n = k$ تؤدي إلى صحته عندما n تساوي الحد التالي لـ k فإن التقرير يكون صحيحاً لكل عدد صحيح موجب n .

مثال(١): بالاستنتاج الرياضي أثبت أن:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = (1/6)(n)(n+1)(2n+1)$$

الحل:

(١) نثبت صحة العلاقة عندما $n = 1$:

$$L.H.S. = 1^2 = 1 \quad , R.H.S. = (1/6)(1)(2)(3) = 1$$

الطرفان متساويان تتكون العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

(٢) نفرض صحة العلاقة عندما $n = k$ أي أن :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = (1/6)(k)(k+1)(2k+1).$$

(٣) نثبت صحة العلاقة عندما $n = k+1$:

$$\begin{aligned} L.H.S. &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 \\ &= (1/6)(k)(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\ &= (1/6)(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)] \\ &= (1/6)(k+1)[2k^2+7k+6] \\ &= (1/6)(k+1)(k+2)(2k+3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R.H.S. &= (1/6)(k+1)(k+2)(2(k+1)+1) \\ &= (1/6)(k+1)(k+2)(2k+3). \end{aligned}$$

الطرفان متساويان فتكون العلاقة صحيحة عندما $n = k+1$ وذلك بفرض صحتها عندما $n = k$ وحيث إنها صحيحة عندما $n = 1$ فتكون صحيحة لكل قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال(٢): أثبت بالاستنتاج الرياضي أن:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots\dots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

<u>الحل:</u>

(١) نثبت صحة العلاقة عندما $n = 1$:

$$L.H.S. = \frac{1}{2!}=\frac{1}{2} \quad . \qquad R.H.S. = 1-\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}.$$

الطرفان متساويان فتكون العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

(٢) نفرض صحة العلاقة عندما $n = k$ أي أن:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots\dots+\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(k+1)!}.$$

(٣) نثبت صحة العلاقة عندما $n = k+1$:

$$L.H.S.=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots\dots+\frac{k}{(k+1)!}+\frac{(k+1)}{(k+2)!}$$

$$=1-\frac{1}{(k+1)!}+\frac{(k+1)}{(k+2)!}$$

$$=1-\frac{1}{(k+2)!}[k+2-k-1]$$

$$=1-\frac{1}{(k+2)!}.$$

$$R.H.S.=1-\frac{1}{(k+2)!}.$$

الطرفان متساويان فتكون العلاقة صحيحة عندما $n = k+1$ وذلك بفرض صحتها عندما $n = k$ وحيث إنها صحيحة عندما $n = 1$ فتكون صحيحة لكل قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال(٣): أثبت أن المقدار $3n^2 - n$ يقبل القسمة على 2

(لكل n عدد صحيح موجب)

<u>الحل</u>: نفرض أن P_n هي الخاصية: " $3n^2 - n$ يقبل القسمة على 2 " .

(١) نثبت صحة الخاصية عندما $n = 1$:

$$3(1)^2 - 1 = 2$$

يقبل القسمة على 2 . وإذاً الخاصية صحيحة عندما $n = 1$.

(٢) نفرض صحة الخاصية عندما $n = k$ أي أن: " $3k^2 - k$ يقبل القسمة على 2 ".

(٣) نثبت صحة الخاصية عندما $n = k+1$:

$$\begin{aligned} 3(k+1)^2 - (k+1) &= 3(k^2+2k+1) - k - 1 \\ &= 3k^2+6k+3-k-1 \\ &= (3k^2-k)+2(1+3k) \end{aligned}$$

وحيث إن المقدار $3k^2 - k$ يقبل القسمة على 2 من الفرض(٢) وأن المقدار $2(1+3k)$ يقبل القسمة على 2 فيكون المقدار $3(k+1)^2 - (k+1)$ يقبل القسمة على 2 .

وإذاً الخاصية P_n تكون صحيحة عندما $n = k+1$ وذلك بفرض صحتها عندما $n = k$

وحيث إنها صحيحة عندما $n = 1$ فتكون صحيحة لكل قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال(٤): تحقق من أن كل الأعداد التي في الصورة $7^n - 2^n$ تقبل القسمة على 5

(لكل n عدد صحيح موجب).

<u>الحل</u>: نفرض أن P_n هي الخاصية: " $7^n - 2^n$ تقبل القسمة على 5 " .

(١) نثبت صحة الخاصية عندما $n = 1$:

$$7^1 - 2^1 = 5$$

تقبل القسمة على 5 وإذاً الخاصية صحيحة عندما $n = 1$.

(٢) نفرض صحة الخاصية عندما $n = k$ أي أن: " $7^k - 2^k$ تقبل القسمة على 5 ".

(٣) نثبت صحة الخاصية عندما $n = k+1$:

$$\begin{aligned} 7^{k+1} - 2^{k+1} &= (7)(7)^k - (7)(2)^k + (7)(2)^k - (2)(2)^k \\ &= 7[7^k - 2^k] + (5)(2)^k \end{aligned}$$

وحيث إن $7^k - 2^k$ تقبل القسمة على 5 من الفرض (٢) وأن $(5)(2)^k$ تقبل القسمة على 5 فتكون $7^{k+1} - 2^{k+1}$ تقبل القسمة على 5 .

وإذاً الخاصية P_n صحيحة عندما $n = k+1$ وذلك بفرض صحتها عندما $n = k$

وحيث إنها صحيحة عندما $n = 1$ فتكون صحيحة لكل قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال(٥): أثبت أن $|\sin nx| \le n|\sin x|$ لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n ولكل قيم x الحقيقية.

الحل: نفرض أن P_n هي الخاصية: "$|\sin nx| \le n|\sin x|$".

(١) نثبت صحة الخاصية عندما $n = 1$:

$$|\sin(1)x| \le (1)|\sin x|.$$

وإذاً الخاصية صحيحة عندما $n = 1$.

(٢) نفرض صحة الخاصية عندما $n = k$ أي أن: " $|\sin kx| \le k|\sin x|$ ".

(٣) نثبت صحة الخاصية عندما $n = k+1$:

$$|\sin(k+1)x| = |\sin(kx + x)| = |\sin kx \cos x + \cos kx \sin x|.$$

وبتطبيق متباينة المثلث وخواص القيمة القياسية (المطلقة) فإننا نحصل على:

$$|\sin(k+1)x| \le |\sin kx||\cos x| + |\cos kx||\sin x|.$$

وبما أن $|\cos x| \le 1$ لكل قيم x الحقيقية فإنه ينتج أن :

$$|\sin(k+1)x| \le |\sin kx| + |\sin x| \le k|\sin x| + |\sin x| = (k+1)|\sin x|.$$

وإذاً الخاصية P_n صحيحة عندما $n = k+1$ وذلك بفرض صحتها عندما $n = k$

وحيث إنها صحيحة عندما $n = 1$ فتكون صحيحة لكل قيم n الصحيحة الموجبة ولجميع قيم x الحقيقية.

▪ تمارين:

١- لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n تحقق من صحة العلاقات الآتية:

(i) $2 + 6 + 12 + \ldots + n(n+1) = (1/3)(n)(n+1)(n+2)$.

(ii) $3 + 11 + 19 + \ldots + (8n - 5) = 4n^2 - n$.

(iii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$.

(iv) $1 + 1/2 + 1/4 + \ldots + 1/2^{n-1} = 2 - 1/2^{n-1}$.

(v) $(1)(2) + (2)(3) + (3)(4) + \ldots + (n)(n+1) = (1/3)(n)(n+1)(n+2)$.

٢- أثبت أن المقدار $(11)^n - (4)^n$ يقبل القسمة على 7 حيث n عدد صحيح موجب

٣- أثبت أن المقدار $7^n - 6n - 1$ يقبل القسمة على 36 حيث n عدد صحيح موجب

٤- أثبت أن $x^n - y^n$ تقبل القسمة على $x - y$ لكل n عدد صحيح موجب.

٥- أثبت أن $x^{2n} - y^{2n}$ تقبل القسمة على $x \pm y$ لكل n عدد صحيح موجب.

****

مبادئ التفاضل :
1

الفصل الأول

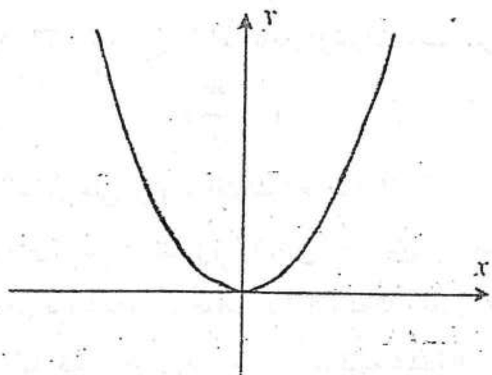
الدوال الحقيقية Real functions

مقدمة :-

يعتبر تحليل العلاقات بيت الكميات الفيزيائية و الرياضية واحد من أهم الموضوعات في حساب التفاضل و التكامل. هذه العلاقات يمكن وصفها و التعبير عنها في صورة إشكال بيانية ، صيغ رياضية ، بيانات عددية أو في صورة كلمات . في هذا الفصل سوف ندرس مفهوم الدالة ، الذي قدمه عالم انرياضيات "ليبنتز" "Lebnitz" في القرن السابع عشر ،و الذي يعتبر بمثابة حجر الأساس في تشكيل معظم انعلاقات التي تربط بين الكميات المتغيرة. وسوف نتابع أيضا ما صاحب هذا المفهوم من تطور في معناه ودلالته. ولتحديد معنى لفظ "دالة" نبدأ بتقديم الأتي:

١-١ الشكل البياني للدالة

الرسم البياني يستخدم لوصف المعادلات الرياضية كما لو كانت بيانات فيزيائية.على سبيل المثال نفرض المعادلة: $y = x^2$



لكل قيمة للمتغير x، المعادلة $y = x^2$ وتنتج قيمة حقيقية مناظرة للمتغير y، ذلك بالتعويض عن قيمة x في الطرف الأيمن من المعادلة.

x		-3	-2	-1	0	1	2	3	
$y = x^2$		9	4	1	0	1	4	9	

مجموعة كل النقاط في مستوى الإحداثيات xy و التي تحقق إحداثياتها معادلـــة في x و y تسمى الشكل البياني للدالة في المستوى xy.

لوصف العلاقة بين كميتين (متغيرين) احدهما يعتمد على الآخر توجد ثـــلاث طـــرق: المعادلات كطريقة جبرية ، الجداول البيانية كطريقة عددية و الأشكال البيانية كطريقة مرئية.

في عام ١٦٧٣ استخدم عالم الرياضيات ليبتز Leibniz مصطلح دالة لوصـــف عمليـــة اعتماد إحدى كميتين على الأخرى. الأمثلة التالية تفسر ذلك:

- مساحة الدائرة تعتمد على نصف قطرها r من خلال المعادلة $A = \pi.r^2$ ، لذا يقال أن A دالة في r.
- السرعة v لسقوط كرة من أعلى بفعل الجاذبية الأرضية تزيد مع الزمن t حتى تـــرتطم بالأرض، لذا يقال أن v دالة في t.
- قانون "هوك" في الفيزياء

ليكن l هو طول سلك زنبركى ولتكن y هي مقدار القوة اللازمة لإحداث اســـتطالة فى السلك مقدارها x .والعلاقة الدالة على ارتباط x مع y تعرف باسم قانون (هوك) وهى :

$$y = \frac{m}{l} x$$

حيث m مقدار ثابت يتوقف على نوع السلك المستخدم.

هنا l, m يدلان على (ثابتين) بينما y, x يدلان على (متغيرين) ونلاحـــظ أيـــضا أن كـــل استطالة محددة x تحتاج إلى قوة محددة y لإحداث تلك الاستطالة وبمعنى آخر :

أن كل قيمة محددة x تعين أو تحدد قيمة محددة y.

ولقد اتفق العلماء على تسمية المتغير y دالة في المتغير x في جميع الأمثلـــة الـــتى ســـبق التعرض لها. وفى مواقف أخرى مماثلة لها.

تعليق :

فى الأمثلة السابقة استخدمنا الرموز الدالة على الثوابت والمتغيرات لتعبر عن كميات فيزيائية فهى تعبر أحيانا عن الأطوال أو المسافات أو الأحجام أو الزمن أو القوى أو المبياحات أو السرعات ...... الخ.

ولكننا سوف نتعامل أيضا مع موافف رياضية لا تدل فيها الرموز على مقادير فيزيائية. وهذا الموقف هو الذى أدى إلى تعديل مفهوم (الدالة) عن ذلك المفهوم الذى افترضناه سابقا. وكما سنعرف فيما بعد.

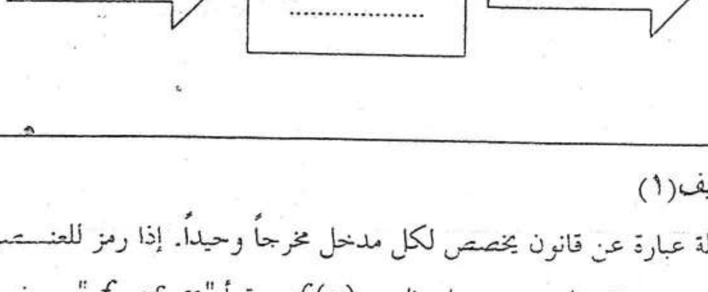
تعريف "الدالة"Function :

حسب المفهوم التقليدي الذي قدمه العالم "ليبنتز" ومعاصروه ، فتعرف الدالة كما يلي :

إذا كان المتغير y يرتبط بالمتغير x بالطريقة التي تعطي فيها كل قيمة للمتغير x قيمة وحيدة تماماً للمتغير y . فإننا نقول أن y دالة في x ونعبر عن ذلك بكتابة الصورة :

$$y = f(x)$$

يمكن تخيل الدالة كبرنامج كمبيوتر يأخذ المدخلات x و يجري عليها بعض العمليات تم يعطي مخرج واحد فقط y. لذا يقال أن الدالة f (برنامج الكمبيوتر) تخصص قيمة وحيدة y لكل قيمة مدخلة x .



تعريف(١)
الدالة عبارة عن قانون يخصص لكل مدخل مخرجاً وحيداً. إذا رمز للعنصر المدخل بالرمز x ، فإن المخرج يرمز له بالرمز $f(x)$ و يقرأ "f of x"

ولقد تطوز هذا التعريف ليشمل مواقف رياضية لا يدل فيها الرمز x والرمز y على كميات فيزيائية فقط .

ولسوف نعيد صياغة التعريف الحديث للدالة ذات المتغير الحقيقى كما يلي :

تعريف الدالة :

لتكن X و Y فئتيز غير خاليتين من الأعداد الحقيقية ولتكن f علاقة تعين لكـل عنصر من عناصر الفئة X عنصرا واحدا فقط من عناصر الفئة Y. فإننا نسمى f دالة من Y إلى Y. ونعبر عنها بالصورة :

$$f : X \to Y$$

نسمى X مجال الدالة (نطاق الدالة) Domain

ونسمى Y المجال المقابل (النطاق المصاحب) Co-domain

إذا كان العدد y من Y هو العدد المتابل للعدد x من X فإننا نسمى y صورة (image) العنصر x. أو نسمى y قيمة الدالة عند x.ونعبر عن ذلك رمزيا :

$$y = f(x)$$

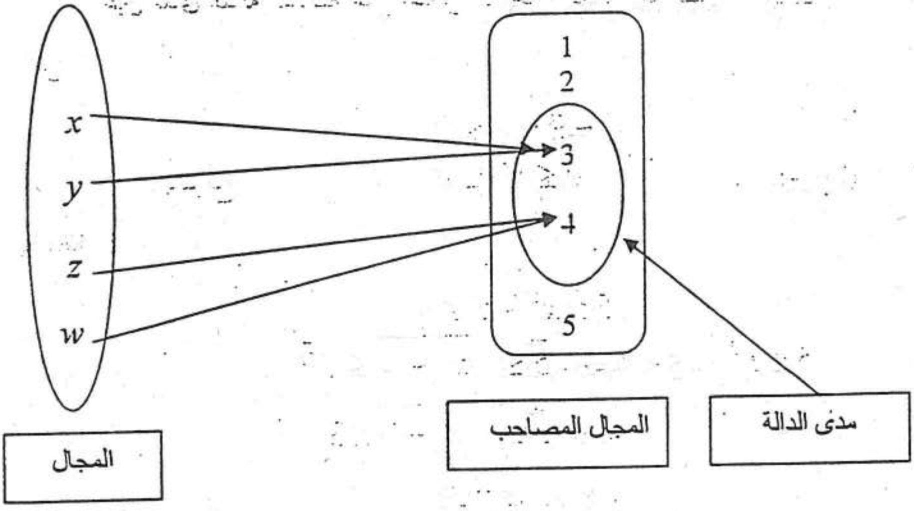
نسمى x المتغير المستقل (independent variable) ، ونـــسمى y المـــتغير التـــابع (dependent variable).

مدى الدالة : **Range of function**

نسمى المجموعة المكونة من جميع صور عناصر مجال الدالة X بمدى الدالة.

مدى f و يعبر عنه بالمجموعة:

$$R(f) = \{y : y = f(x),\ \forall x \in X\} \subset Y$$



مثال (١):

عين مجال ومدى دالة f المعرفة بالقاعدة :

$y - x$
$y - x^2$
$y - \sqrt{x}$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$$

الحل :

واضح أن الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ معرفة لكل قيمة حقيقية x لأن ما تحت الجذر التربيعي وهو $(x^2 + 5)$ مقدار موجب دائما لجميع قيم (x^2+5).

فيكون مجال الدالة هو : فئة الأعداد الحقيقية R

ولتحديد المدى نرى أن :

لكل x حقيقية فإن $x^2 \geq 0$ و من ثم نجد أن:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 5 \geq 5 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 5} \geq \sqrt{5}$$

أي أن

$$y = \sqrt{x^2 + 5} \geq \sqrt{5}$$

فيكون مدى f هو $R(f) = \{y : y\sqrt{5}\}$

مثال (٢) :

عين مدى الدالة السابقة على أساس أن المجال المعطى هو الفترة $[-2,2]$.

الحل :

$$-2 \le x \le 2$$

بالتربيع $\quad 0 \le x^2 \le 4 \quad$ (لماذا ؟)

بإضافة 5 :

$$5 \le x^2 + 5 \le 9$$

$$5 \le x^2 + 5 \le 9 \Rightarrow \sqrt{5} \le \sqrt{x^2+5} \le \sqrt{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} \le \sqrt{x^2+5} \le 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} \le y \le 3$$

(لاحظ أن المقادير الثلاث موجبة)

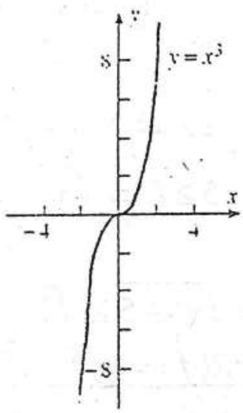
مدى f هو $\{y : \sqrt{5} \le y \le 3\}$

مثال (٣):

عين مجال ومدى الدالة f المعرفة بالقاعدة

$$f(x) = x^3$$

واضح أن مجال ومدى هذه الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ، أي أن $(-\infty,+\infty)$



$y = x$,
$y = x^2$

مثال (٣):

عين مجال الدالة f المعرفة بالقاعدة

$$f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{1}{(x-1)(x-3)}$$

واضح أن هذه الدالة معرفة لجميع قيم x الحقيقية عدا القيم $x=1$ ، $x=3$

إذن المجال هو: $\{x : x \neq 1 \;,\; x \neq 3\} = (-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$

مثال(٥):

عين مجال الدالة f المعرفة بالقاعدة

$$f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$$

لكي يكون المدى ذا قيم حقيقية فيجب أن يكون ما تحت الجذر قيمة موجبة ، أي أن

$$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)\geq 0$$

المتساوية $(x-3)(x-2)\geq 0$ ،تتحقق عند القيم $x\geq 3$ أو $x\leq 2$. إذن المجال هو

$(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$

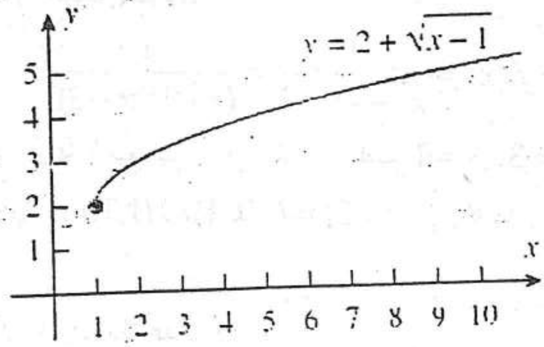
مثال (٦):

عين مجال ومدى الدالة f المعرفة بالقاعدة

$$f(x)=2+\sqrt{x-1}$$

الحل

واضح أنه يجب أن تكون $(x-1)\geq 0$ ، هذا يحدث عند قيم $x\geq 1$. إذن مجال الدالة هو $[1,+\infty)$ ، من ثم يكون المدى هو قيم المخرجات المناظرة لقيم $x\in[1,+\infty)$ و هي $[2,+\infty)$



مثال (٧):

عين مجال ومدى الدالة f المعرفة بالقاعدة:

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

الحل

هذه الدالة معرفة لجميع قيم x الحقيقية عدا قيمة $x=1$، إذن المجال هو

$$\{x : x \neq 1\} = (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$$

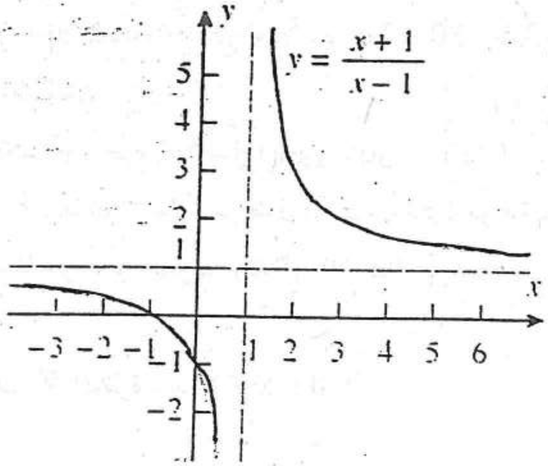
لإيجاد مدى الدالة $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ يجب تحديد عناصر مجموعة المخرجات $y=\frac{x+1}{x-1}$

و لحساب ذلك نحل المعادلة $y=\frac{x+1}{x-1}$ في صورة $x=g(y)$ كما يلي:

$$\begin{aligned} y(x-1)=x+1 &\Rightarrow yx-y=x+1 \\ &\Rightarrow x(y-1)=y+1 \\ &\Rightarrow x=\frac{y+1}{y-1} \end{aligned}$$

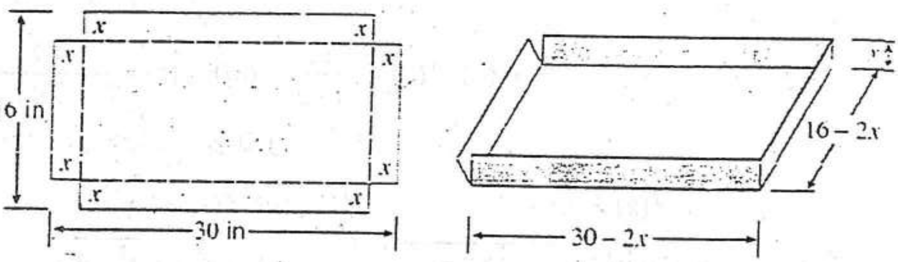
واضح إنه عند $y=1$ ، لا توجد القيمة x، إذا يكون مدى الدالة هو المجموعة

$$\{y : y \neq 1\} = (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$$



مثال (٨) (مثال تطبيقي)

مستطيل من الكارتون طوله ٣٠ بوصة و عرضة ١٦ بوصة ، استخدم لصناعة صندوق مفتوح و ذلك بإزالة مربعات متساوية المساحة من الأركان الأربع كما في الشكل :



i) إذا كان V هو حجم الصندوق الناتج عندما يكون طول ضلع المربع المزال هو x.

اوجد صيغة للحجم كدالة في x.

ii) اوجد نطاق و مدى الدالة V.

الحل :

i) كما هو واضح في الشكل ، فإن الصندوق المنتج له الأبعاد : $30-2x$ ، $16-2x$ ، x .إذن يكون الحجم في الصيغة:

$$V(x)=(30-2x)(16-2x)x=4x^3-92x^2+489x$$

ii) مجال الدالة هو جميع القيم x . بما أن x عبارة عن طول فيجب أن تكون موجبة ، كما يجب ألا يزيد طول الضلع المقطوع عن ٨ بوصة (لماذا؟) ،فإن المجال هو $\{x:0\le x\le 8\}$.

أما المدى فهو جميع المخرجات V المناظرة لقيم $0\le x\le 8$.

تمرين (١-١)

١- لتكن $f(x)=2x+5$ احسب قيمة :

$$f(0)\ ,f(2)\ ,\ f(\frac{1}{3})\ ,\ f(\frac{1}{x})\ ,\ f(x-3)$$

٢- عين مجال الدوال التي قاعدتها :

$$(i)\quad f(x)=3x-2 \qquad (ii)\ f(x)=\frac{1}{3x-2} \qquad (iii)\ f(x)=\frac{x}{(x+2)(x-3)}$$

٣ – عين مجال الدوال الآتية مع بيان المدى إن أمكن :

$$(i)\ f(x)=\sqrt{x-6} \qquad (ii)\ f(x)=\sqrt{x^2-4}$$

$$(iii)\ f(x)=\sqrt{(x-1)(x-4)} \qquad (iv)\ f(x)=\sqrt{x^2+4}$$

$$(v)\ f(x)=\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} \qquad (vi)\ f(x)=\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x+2}$$

١-٢ جبر الدوال :

كما هو معلوم فإن الأعداد تجمع و تطرح و تضرب و تقسم للحصول من هذه العمليات على أعداد جديدة ، فإنه يمكن إجراء عمليات الجمع و الطرح و الضرب و القسمة و عمليات أخرى على الدوال بغية الحصول على دوال جديدة.

تعريف

بفرض أن كل من $f = f(x)$ و $g = g(x)$ ،فإن:

- جمع الدالتين يعطي الدالة $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- طرح الدالتين يعطي الدالة $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$.
- ضرب الدالتين يعطي الدالة $(f.g)(x) = f(x).g(x)$.
- قسمة الدالتين يعطي الدالة $g(x) \neq 0$: $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

مجال كل من الدوال $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ ، $\dfrac{f}{g}$ عبارة عن تقاطع مجال الدالة f مع مجال الدالة g ، مع وجود شرط كون $g(x) \neq 0$ في حالة $\dfrac{f}{g}$.

مثال (١)

بفرض أن $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ و $g(x) = x - 3$.

- اوجد $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ و $(f.g)(x)$ و $(\dfrac{f}{g})(x)$
- اوجد مجال كل دالة من الدوال السابقة

الحل

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (1+\sqrt{x-2}) + (x-3) = x - 2 + \sqrt{x-2}$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (1+\sqrt{x-2}) - (x-3) = 4 - x + \sqrt{x-2}$$
$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (1+\sqrt{x-2}).(x-3)$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1+\sqrt{x-2}}{x-3}$$

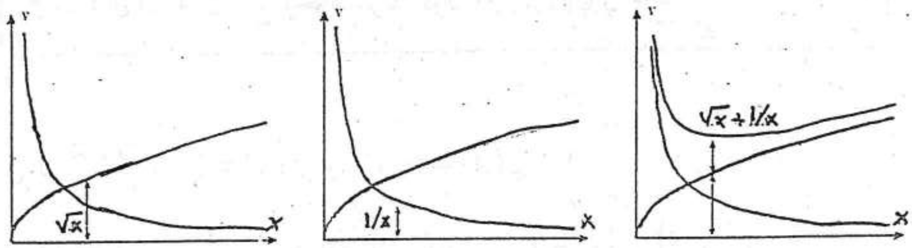
بما أن مجال الدالة $f(x) = 1+\sqrt{x-2}$ و هو $[2,+\infty)$ و مجال الدالة $g(x) = x-3$ و هو $(-\infty,+\infty)$. إذن مجال كل دالة من الدوال السابقة عبارة عن تقاطع $[2,+\infty)$ مع $(-\infty,+\infty)$.

- مثال بفرض أن $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$. اوجد $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ و $(f.g)(x)$ و $(\frac{f}{g})(x)$. ثم ارسم هذه الدوال

الحل

$$(f+g)(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} \qquad (f-g)(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$$

$$(f.g)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} \qquad (\frac{f}{g})(x) = x\sqrt{x}$$

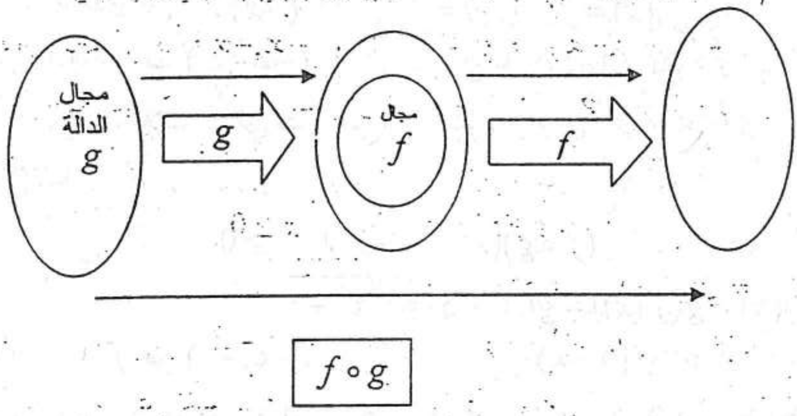


تعريف

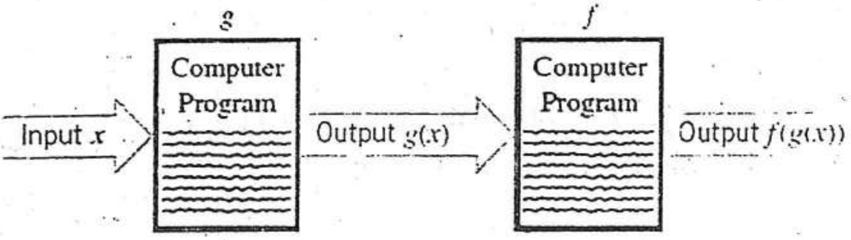
تحصيل (تركيب) الدالتين f و g يرمز له بالرمز $f \circ g$ و يعرف بالصيغة:

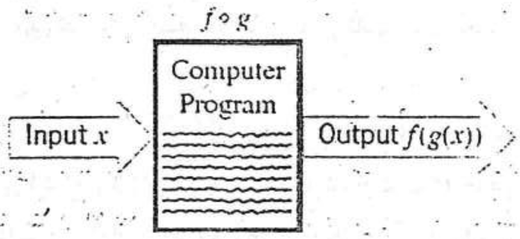
$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

بمجال الدالة $f \circ g$ يتكون من جميع القيم x التي تنتمي إلى مجال الدالة g بشرط أن $g(x)$ تنتمي إلى مجال الدالة f



يمكن تخيل عملية تحصيل الدوال كما لو كانا برنامجي كمبيوتر يقوم أولهما g باستقبال المـــدخل x و إجراء عليه بعض عمليات ثم يخرجه في صورة $g(x)$. يقوم البرنامج الثاني f في التعامـــل مع مخرجات الأول كمدخلات ثم يجري عليها بعض العمليات و يخرجها في الصورة $f(g(x))$..





مثال(٢)

بفرض أن $f(x) = x^2 + 3$ ، $g(x) = \sqrt{x}$. اوجد $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$.

الحل

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2+3=x+3$$

بما أن مجال الدالة f هو $(-\infty,+\infty)$ و مجال الدالة g هو $[0,+\infty)$، فإن مجال $f\circ g$ يتكون من جميع المدخلات x التي تنتمي إلى تقاطع مجالي f و g . أي أن مجال $f\circ g$ هو $[0,+\infty)$. لذا

$$(f\circ g)(x)=x+3,\qquad x\geq 0$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+3)=\sqrt{x^2+3}$$

بما أن مجال الدالة f هو $(-\infty,+\infty)$ و مجال الدالة g هو $[0,+\infty)$، فإن مجال $f\circ g$ يتكون من كل القيم x في الفترة $(-\infty,+\infty)$ بشرط أن الدالة $f(x)=x^2+3$ تقع في $[0,+\infty)$. إذن مجال $f\circ g$ هو $(-\infty,+\infty)$.

مثال(٣)

اوجد $(f\circ g\circ g)(x)$، إذا كانت

$$f(x)=\sqrt{x}\qquad,\quad g(x)=1/x\qquad,\quad h(x)=x^3$$

الحل

$$(f\circ g\circ h)(x)=f(g(h(x)))=f(g(x^3))=f(\frac{1}{x^3})=\sqrt{\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{\sqrt{x^3}}=\frac{1}{x^{3/2}}$$

إزاحة الشكل البياني للدوال :

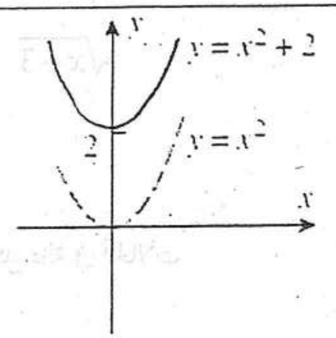
افترض الدالة $y=f(x)$. ماذا يحدث لو أضيف أو طرح مقدار ثابت بحيث تأخذ معادلة الدالة أحدى الصور:

$$y=f(x-c)\ \text{،}\ y=f(x)-c\ \text{،}\ y=f(x)+c$$

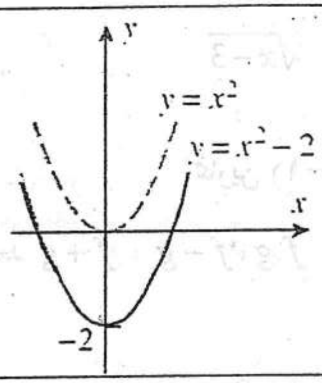
التأثير الهندسي على الشكل البياني للدالة $y=f(x)$ عند إضافة مقدار ثابت c يتمثل في إزاحة الشكل البياني للدالة بمحاذاة محور الصادات في الاتجاه الموجب و الطرح يتمثل في إزاحة الشكل البياني في الاتجاه السالب. أما إضافة المقدار الثابت إلى المتغير المستقل x يمثل إزاحة للشكل البياني للدالة $y=f(x)$ في الاتجاه الموجب لمحور السينات ،بينما الطرح يمثل إزاحة في الاتجاه السالب لمحور السينات.

هذه العمليات تتضح بصورة جلية من خلال الجدول التالي:

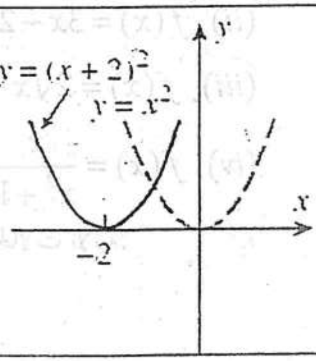
العمليات على $y=f(x)$	إضافة مقدار ثابت c للدالة $f(x)$	طرح مقدار ثابت c من الدالة $f(x)$	إضافة مقدار ثابت c للمتغير المستقل x	طرح مقدار ثابت من c المتغير المستقل x
الدالة الجديدة	$y=f(x)+c$	$y=f(x)-c$	$y=f(x+c)$	$y=f(x-c)$
التأثير الهندسي	إزاحة المنحنى إلى أعلى c من الوحدات	إزاحة المنحنى إلى أسفل c من الوحدات	إزاحة المنحنى إلى اليسار c من الوحدات	إزاحة المنحنى إلى اليمين c من الوحدات
مثال $y=x^2$	شكل (١)	شكل (٢)	شكل (٣)	شكل (٤)



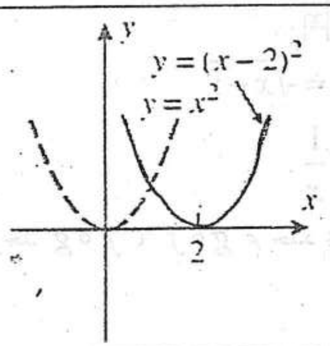
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

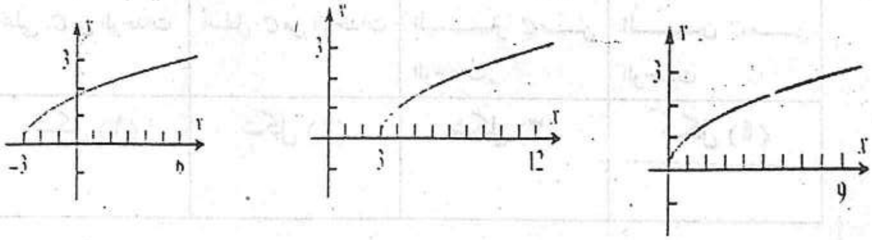


شكل (٤)

مثال(٤)

ارسم الشكل البياني للدوال $\sqrt{x}$ ، $\sqrt{x-3}$ ، $\sqrt{x+3}$ مع ملاحظة الفروق بين الأشكال المختلفة

الحل



$\sqrt{x}$ $\qquad$ $\sqrt{x-3}$ $\qquad$ $\sqrt{x+3}$

تمارين (١–٢)

(١). اوجد $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ ، $\dfrac{f}{g}$ ثم حدد مجال كل دالة في الحالات الآتية:

$(i)\ \ f(x)=2x \quad , \quad g(x)=x^2+2$

$(ii)\ \ f(x)=3x-2 \quad , \quad g(x)=|x|$

$(iii)\ \ f(x)=2\sqrt{x-1} \quad , \quad g(x)=\sqrt{x-1}$

$(iv)\ \ f(x)=\dfrac{x}{x^2+1} \quad , \quad g(x)=\dfrac{1}{x}$

(٢). اوجد $f\circ g$ ، $g\circ f$ ثم حدد مجال كل دالة في الحالات الآتية:

$(i)\ \ f(x)=2x+1 \quad , \quad g(x)=x^2-x$

$(ii)\ \ f(x)=2x-x^2 \quad , \quad g(x)=x^3$

$(iii)\ \ f(x)=x^2 \quad , \quad g(x)=\sqrt{1-x}$

$(vi)\ \ f(x)=\sqrt{x-3} \quad , \quad g(x)=\sqrt{x^2+3}$

$(v)\ \ f(x)=\dfrac{1+x}{1-x} \quad , \quad g(x)=\dfrac{x}{1-x}$

(٣). اوجد الدالة $f\circ g\circ h$ في الحالات الآتية:

$(i)\ \ f(x)=x^2+1 \ , \quad g(x)=\dfrac{1}{x}, \quad h(x)=x^3$

$(ii)\ \ f(x)=\dfrac{1}{1+x} \quad , \quad g(x)=\sqrt[3]{x}\ , \quad h(x)=\dfrac{1}{x^3}$

١-٣ تصنيف الدوال :

١-٣-١ الذوال الأحادية والدوال الفوقية :

عند تعريف الدالة يشترط بأن يكون لكل عنصر x من عناصر المجال عنصر مقابل واحد فقط فى المجال المقابل. ولم يشترط العكس . لذا إذا كان كل عنصر فى مدى الدالة هو صورة لعنصر واحد فقط من عناصر المجال سميت الدالة أحادية وبالتالى :

تكون الدالة f أحادية إذا تحقق :

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

وهذا يؤدى بالتالى إلى أن :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

وتسمى الدالة f فوقية إذا كان مدى f هو المجال المقابل

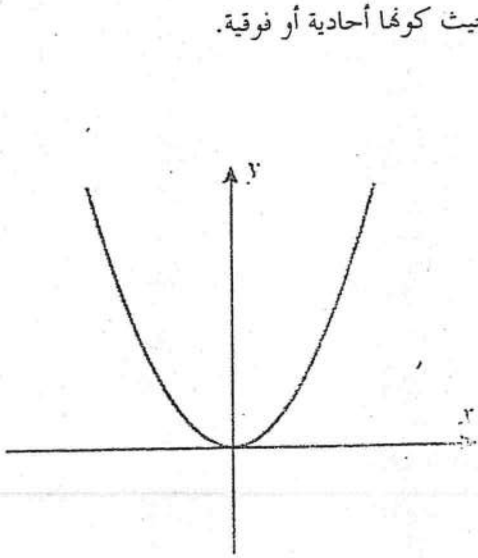
أي إنه إذا كان كل عنصر في المجال القابل هو صورة لأحد عناصر المجال.

مثال (١) :

لتكن $f : R \to R$ قاعدتها $f(x) = x^2$

اختبر نوع الدالة من حيث كونها أحادية أو فوقية.

الحل :



أنواع الدوال

١- الدوال الجبرية :-

يقال أن الدالة $f(x)$ دالة جبرية إذا أمكن تكوينها بإجراء عدد من العمليات الجبرية (الجمع والطرح والضرب والقسمة) وأخذ الجذور مثال

$$y = 3x^5 + 3x^2 + 61$$

$$y = \frac{\sqrt{x+7} - \sqrt[3]{x^2+2}}{7x^5 - 2}, \quad h(x) = \sqrt{\frac{(3x+6)^3}{x(x^2-4)}}$$

تعطي دوال جبرية .

٢- الدوال المسترسلة :-

هي أي دالة ليست جبرية وتشمل الأنواع الآتية

(أ) الدوال الأسية :- وتأخذ الصور

(i) $f(x) = a^x, \quad a \in R$

(ii) $g(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in R$

مثال

$$e^x, \quad 2^x, \quad x^{\sqrt{2}}$$

Euler no.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \simeq 2.718$$

(ب) الدوال اللوغاريتمية :-

هي الدوال ذات الصور

$$y = \log_a x, \quad y = \log_e x = \ln x$$

(جـ) الدوال المثلثية والمثلثية العكسية :-

الدوال المثلثية هي

$$\sin x, \ \cos x, \ \tan x, \ \sec x, \ \csc x$$

أما الدوال المثلثية العكسية فهي

$$\sin^{-1} x, \ \cos^{-1} x, \ \tan^{-1} x, \ldots$$

(د) الدوال الزائدية والزائدية العكسية

الدوال الزائدية هي

$$\sinh x\ ,\quad \cosh x\ ,\quad \tanh x\ ,\ \operatorname{sech} x\ ,\ \operatorname{csech} x$$

، الدوال الزائدية العكسية

$$\sinh^{-1} x\ ,\ \cosh^{-1} x\ ,\ \ldots$$

(٣) الدوال الصريحة والدوال الضمنية

الدالة الصريحة يتحدد بها المتغير التابع y مباشرة بدلالة المتغير x وتكتب على الصورة

$$y = f(x)$$

وبخلاف ذلك فإن الدالة تسمى دالة ضمنية . فمثلا الدوال

$$y = (x^2-3)\sin\log x$$

$$y = 2x^2 + \sqrt{x}$$

$$y = \sin(\sec x)/\sqrt{x+\tan x}$$

هي دوال صريحة . أما الدوال

$$2x^2 + 5xy - 3y^2 = 0$$

$$\log x + y\cos x = 20\, x\cos y$$

$$\ln x + \sec yx = 5\, x\tan\frac{x}{y}$$

واضح أنه لا يمكن وضعها في الصورة $y = f(x)$ لذا تسمى جميعها دوال ضمنية ويجوز أن نقول أن x دالة في y أو y دالة في x لأن التناظر بينهما على صورته هذه لا يحدد أيهما مستقل وأيهما يتبع الآخر.

(٤) الدالة المباشرة والعكسية

إذا كانت y دالة في x معطاة على الصورة $y = f(x)$ وأمكن منها إيجاد x بدلالة y أي $x = g(y)$ يقال عندئذ أن g دالة عكسية للدالة f وتسمى $f(x)$ بالدالة المباشرة. فمثلا إذا كانت $y = f(x) = ax+b$ فإن

$$x = g(y) = \frac{1}{a}(y-b)$$

تمثل الدالة العكسية.

(٥) الدوال الزوجية والدوال الفردية

يقال للدالة $f(x)$ أنها دالة زوجية إذا كان

$$f(-x) = f(x)$$

وان دالة فردية إذا كان

$$f(-x) = -f(x)$$

خلاف ذلك أي عندما

$$f(-x) \neq \pm f(x)$$

يقال أن الدالة ليست زوجية ولا فردية.

يلاحظ أن منحنى الدالة الزوجية يكون متماثل حول المحور y ومنحنى الدالة الفردية يكون متماثل حول نقطة الأصل أي النقطة التي لها $x=0, y=0$

مثال للدوال الزوجية نذكر

$$x^2,\ x^4,\ \dots,\ \cos x\ ,\ \sec x$$

ومن بين الدوال الفردية

$$x,\ x^3,\ \dots,\ \sin x,\ \operatorname{cosec} x\ ,\ \tan x\ ,\ \operatorname{cotan} x$$

وهناك دوال ليست زوجية ولا فردية مثل

$$x^2 - x\ ,\ 5^x\ ,\ x + \sec x\ ,\ x^3 + 5$$

(٦) دوال دورية

يقال أن الدالة $f(x)$ دورية إذا كان لجميع قيم x الحقيقية

$$f(x) = f(x + nL)$$

حيث n عدد طبيعي. وتسمى L دورة الدالة $f(x)$.

على سبيل المثال نعلم أن

$$\cos x = \cos(x \pm 2\pi) = \dots = \cos(x \pm n2\pi)\ ,\ n = 0, 1, \dots$$

وهذا يعني أن الدالة $f(x) = \cos x$ دالة دورية ودورتها 2π

بينما الدالة $f(x) = \tan x$ دورية أيضاً π أي

$$\tan x = \tan(x + n\pi)\ ,\ n = 0, 1, \dots$$

بعض الدوال شائعة الاستعمال

١. كثيرات الحدود وتأخذ الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

وتسمى كثيرة حدود من درجة n في المتغير x حيث n عدد طبيعي موجب والمقادير

$$a_n,\ a_{n-1},\ \dots,\ a_0$$

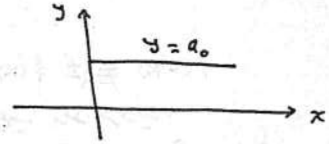
ثوابت اختيارية تسمى بالمعاملات. من كثيرات الحدود نذكر الحالات الآتية:

(أ) دالة المقدار الثابت

وهي كثيرة حدود من درجة صفر أي

$$y = f(x) = a_0$$

وهي تمثل خط مستقيم يوازي المحور ox ويبعد عنه مسافة $y = a_0$



(ب) الدالة الخطية

هي كثيرة حدود من الدرجة الأولى وتأخذ الصورة

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x$$

مثل $y = 5 + x \quad , \quad y = 10 + 7x , \ldots$

حيث a_0, a_1 ثوابت اختيارية وهذه الدالة تمثل خط مستقيم في المستوى xy ميل مقداره a_1 ويقطع جزء مقداره a_0 من المحور oy.

(ج) الدالة ذات الدرجة الثانية

هي كثيرة حدود من الدرجة الثانية وتأخذ الصورة

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

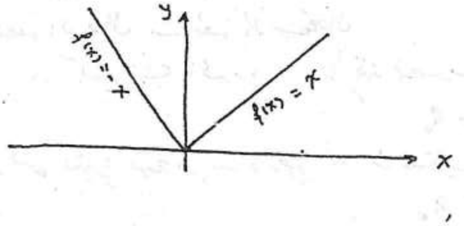
وتمثل منحنى في المستوى xy

٢- دالة المقياس

وهي على الصورة

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & , \ x \geq 0 \\ -x & , \ x < 0 \end{cases}$$

ويمكن تمثيلها بالشكل البياني



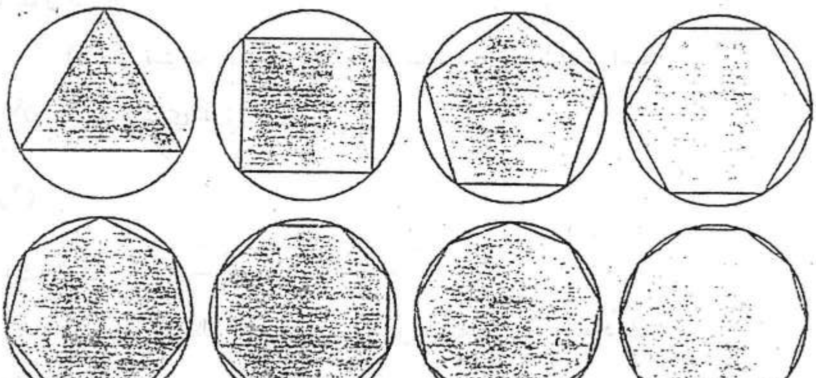
الفصل الثاني

النهايات والاتصال limits and continuity

٢-١ مقدمة :

مفهوم "النهاية" هو أحد الأفكار الأساسية التي تميز علم التفاضل والتكامل عن غيره من فروع الرياضيات المختلفة مثل الهندسة و الجبر ولقد تناول هذا المفهوم الفلاسفة والرياضيون الإغريق منذ فجر التاريخ و صارت على دربهم الأجيال التالية حتى استطاع عالم الرياضيات "كوشي – Cauchy صياغة مفهوم النهاية في الصورة المعروفة لنا اليوم .

أول محاولة لاستخدام مفهوم النهاية كانت عندما حاول العلماء الإغريق إيجاد مساحة الدائرة عن طريق إيجاد مساحة مضلع مرسوم داخلها وتمر الدائرة برءوسه ،و لكنهم وجدوا أن مساحة المضلع تقل عن مساحة الدائرة دائما .وبزيادة عدد أضلاع المضلع تدريجيا وجدوا أن مساحته تقترب من مساحة الدائرة .



ولهذا يمكن القول بأن:

"مساحة الدائرة هي نهاية مساحة المضلع المرسوم داخلها عندما تزداد عدد أضلاعه زيادة لا نهائية

٢-٢ نهاية الدالة

من المسائل المهمة حساب قيمة الدالة $f(x)$ عندما تقترب قيمة المتغير المستقل x من قيمة ما a ولكن ليست مساوية لها ، و في بعض الأحيان قد لا تكون النقطة $x=a$ إحدى نقاط الدالة. في هذه الحالة يكون السؤال المطروح هو:

كلما اقتربت x من a، فهل تقترب $f(x)$ من مقدار معين L

إذا كان الجواب إيجابياً فإننا نقول أن نهاية الدالة $f(x)$ تساوي L: تندما تقترب x من a، نرمز لذلك رياضياً بالرمز

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

و لتوضيح ذلك بصورة عملية : نفترض أن عالم فيزياء يريد قياس كمية ما $f(x)$ عندما يكون ضغط الهواء x مساوياً للصفر. و حيث أنه من المستحيل (تكنولوجياً) الوصول إلى الفراغ التام، فإن الطريق الطبيعي هو أن نجري عمليات القياس المطلوبة بصورة تدريجية مع تضائل الضغط إلى أن يقترب الضغط من الصفر، فإذا كانت أقصى قيمة نحصل عليها هي L، فإننا نقول أن :

$f(x)$ تقترب من L كلما اقتربت x (الضغط) من الصفر

لنضرب الآن المثال التمهيدي التالي:

مثال (١) :

اعتبر الدالة $f(x)=x^2-x+1$

ونرغب في دراسة سلوك الدالة عندما يقترب المتغير المستقل x من العدد 2

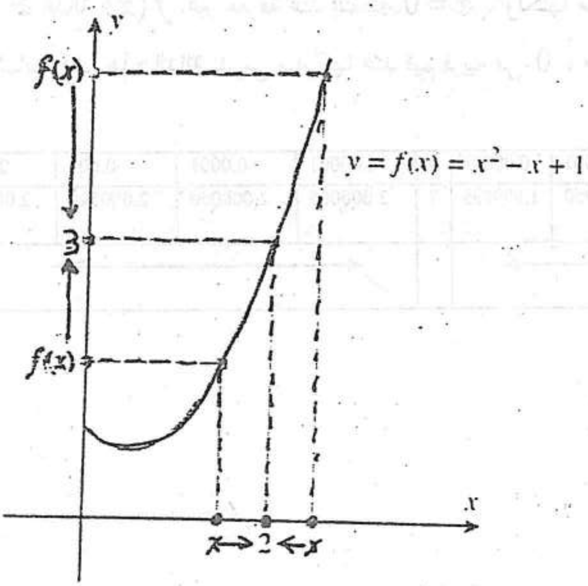
والسؤال الآن :

ما هي القيمة التي تقترب منها $f(x)$ كلما اقتربت x من القيمة 2 ؟

إن الإجابة على هذا السؤال هو جوهر موضوع النهايات.

وهذه الإجابة تتضح من الجدول التالي:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
2.1	3.31	1.9	2.71
2.01	3.0301	1.99	2.9701
2.001	3.003001	1.999	2.997001
2.0001	3.0003	1.9999	2.9997
2.00001	3.00003	1.99999	2.99997
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
2	3	2	3
$x \to 2^+$	$f(x) \to 3$	$x \to 2^-$	$f(x) \to 3$



نلاحظ الآتي:

i) أنه عندما اقتربت x من العدد 2 من جهة اليمين فإن $f(x)$ اقتربت من العدد 3.
نُسمى ذلك بالنهاية اليمنى للدالة عند النقطة 2 ونعبر عن ذلك بالصورة

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$$

ii) أنه عندما اقتربت x من العدد 2 من جهة اليسار فإن $f(x)$ اقتربت من العدد 3.

نسمى ذلك بالنهاية اليسرى للدالة عند النقطة 2 ونعبر عن ذلك بالصورة

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=3$$

بعد هذا المثال نستطيع القول: لكي نوجد $\lim_{x\to a} f(x)$، يجب أن نسأل أنفسنا السؤال التالي:

إذا كانت x قريبة من a و$x\neq a$ ، هل يوجد عدد خاص إليه تقترب $f(x)$.

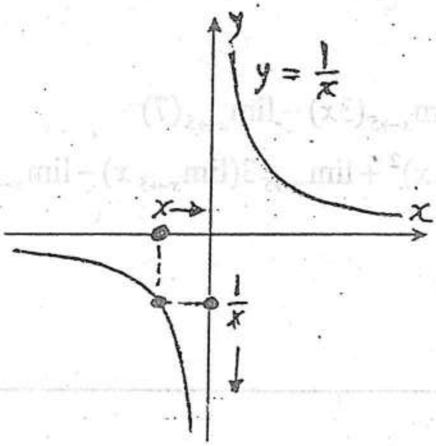
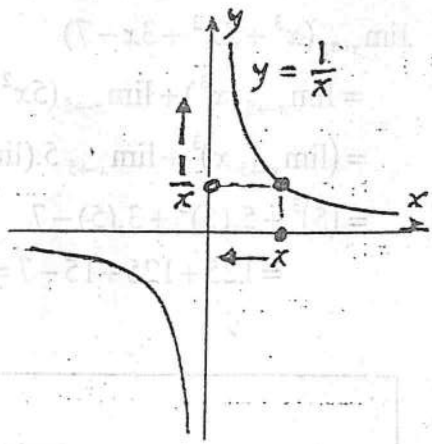
هذا السؤال يفترض أن الدالة f معرفة عند جميع القيم القريبة من a عدا النقطة $x=a$

مثال (٢)

لتكن $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ ، حيث أن $x\neq 0$

واضح أن الدالة $f(x)$ غير معرفة عند النقطة $x=0$ ، ولكنها معرفة عند قيم قريبة من 0 .لحساب نهاية هذه الدالة ندرس سلوكها عند قيم قريبة من 0 ، من خلال الجدول التالي:

x	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	0	0.00001	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$	1.994987	1.999500	1.999950	1.999995	?	2.000005	2.000050	2.000500	2.0049
	$\longrightarrow$							$\longleftarrow$	

	
$\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

النظرية التالية تشمل قواعد حساب النهايات جبرياً

نظرية (القواعد الأساسية للنهايات)

بفرض أن a عدد حقيقي و أن $\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \quad , \quad \lim_{x\to a} g(x) = L_2$

فإن:

$(i) \quad \lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$

$(ii) \quad \lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L_1 - L_2$

$(iii) \quad \lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = (\lim_{x\to a} f(x)).(\lim_{x\to a} g(x)) = L_1.L_2$

$(iv) \quad \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}, \qquad provided\ L_2 \neq 0$

$(v) \quad \lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$

مثال (٦)

اوجد $\lim_{x\to 5}(x^3 + 5x^2 + 3x - 7)$

الحل

$$\lim_{x\to5}(x^3+5x^2+3x-7)$$
$$=\lim_{x\to5}(x^3)+\lim_{x\to5}(5x^2)+\lim_{x\to5}(3x)-\lim_{x\to5}(7)$$
$$=\left(\lim_{x\to5}x\right)^3+\lim_{x\to5}5.(\lim_{x\to5}x)^2+\lim_{x\to5}3(\lim_{x\to5}x)-\lim_{x\to5}(7)$$
$$=(5)^3+5.(5)^2+3.(5)-7$$
$$=125+125+15-7=258$$

نظرية

لأي كثيرة حدود

$$p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_nx^n$$

و لأي عدد حقيقي a

$$\lim_{x\to a}p(x)=c_0+c_1a+c_2a^2+...+c_na^n=p(a)$$

البرهان

$$\lim_{x\to a}p(x)=\lim_{x\to a}\left(c_0+c_1a+c_2a^2+...+c_na^n\right)$$
$$=\lim_{x\to a}c_0+\lim_{x\to a}c_1a+\lim_{x\to a}c_2a^2+...+\lim_{x\to a}c_na^n$$
$$=\lim_{x\to a}c_0+c_1\lim_{x\to a}a+c_2\lim_{x\to a}a^2+...+c_n\lim_{x\to a}a^n$$
$$=c_0+c_1a+c_2a^2+...+c_na^n=p(a)$$

مثال (٧) : أوجد $\lim_{x\to2}\dfrac{4x^2+3x+1}{2x+7}$

الحل

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x^2+3x+1}{2x+7}=\frac{\lim_{x\to 2}\left(4x^2+3x+1\right)}{\lim_{x\to 2}\left(2x+7\right)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 2}4x^2+\lim_{x\to 2}3x+\lim_{x\to 2}1}{\lim_{x\to 2}2x+\lim_{x\to 2}7}$$

$$=\frac{4.\lim_{x\to 2}x^2+3.\lim_{x\to 2}x+1}{2.\lim_{x\to 2}x+7}$$

$$=\frac{4.4+3.2+1}{2.2+7}=\frac{23}{11}$$

مثال(٨) :

أوجد $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}}{x^3+1}$

الحل :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}}{x^3+1}=\frac{\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2+x+2}}{\lim_{x\to 1}\left(x^3+1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{\lim_{x\to 1}\left(x^2+x+2\right)}}{\lim_{x\to 1}\left(x^3+1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{\lim_{x\to 1}x^2+\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}2}}{\lim_{x\to 1}x^3+\lim_{x\to 1}1}$$

$$=\frac{\sqrt{1+1+2}}{1+1}=\frac{2}{2}=1$$

نهاية الدوال الكسرية

نظرية

لتكن $f(x)=\dfrac{p_1(x)}{p_2(x)}$ دالة كسرية بحيث إن $p_1(x)$ و $p_2(x)$ كثيرتي حدود.

لأي عدد حقيقي a، نجد أن

(i). إذا كانت $p_2(a)\neq 0$ ، فإن $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

(ii). إذا كانت $p_2(a)=0$ ، و $p_1(a)\neq 0$ ، فإن $\lim_{x\to a} f(x)$ تكون غير موجودة.

البرهان:

إثبات (i) ،إذا كانت $p_2(a)\neq 0$ ، فإن

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x)&=\lim_{x\to a}\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\\&=\frac{\lim_{x\to a} p_1(x)}{\lim_{x\to a} p_2(x)}\\&=\frac{p_1(a)}{p_2(a)}=f(a)\end{aligned}$$

إثبات (ii) ، إثبات عدم وجود النهاية نضع المثال العكسي الآتي

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x+3}{x-2}$$

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	الدالة تتناقص تناقصاً غير محدود (لانهائي)
$\dfrac{2x+3}{x-2}$	-68	-698	-6998	-69998	-699998	
$x \xrightarrow{\text{increases}} 2$						
x	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	الدالة تتزايد تزايداً غير محدود(لانهائي)
$\dfrac{2x+3}{x-2}$	72	702	7002	70002	70002	
$x \xrightarrow{\text{decreases}} 2$						

٢-٦ الاتصال Continuity

بالنظر إلى المسار الذي يرسمه جسيم متحرك حركة مستمرة و بدون انقطاع أو توقف نستطيع أن نتخيل المسار كما لو كان منحنى منتظم غير ، خالي من قفزات .في هذا الباب سوف نترجم "المنحنى الغير متقطع" إلى صيغة رياضية تعرف بالدرال المتصلة مع دراسة العديد من خواص هذه الدوال.

تعريف

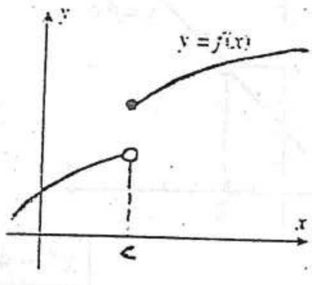
يقال أن الدالة f مستمرة عند النقطة $x = c$ إذا تحققت الشروط:

(١) $f(c)$ معرفة

(٢) انهاية $\lim_{x\to c} f(x)$ تكون موجودة

(٣) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

إذا فقدت الدالة شرط أو أكثر من شروط الاتصال تصبح غير مستمرة discontinuous عند النقطة $x = c$.الشكل التالي يوضح عم اتصال الدالة



مثال (١)

حدد أي من الدوال التالية متصلة عند النقطة $x = 2$.

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2} \qquad g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ 3 & x=2\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ 4 & x=2\end{cases}$$

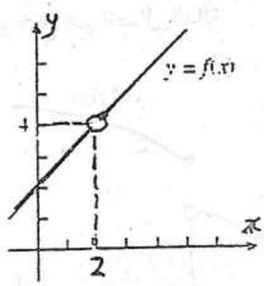
الحل

أولا للدوال الثلاث نهاية متساوية و هي

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2} h(x)$$

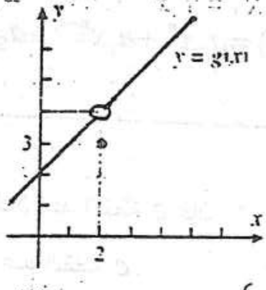
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

ولكن الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ غير معرفة عند $x=2$ و من ثم فهي غير متصلة.

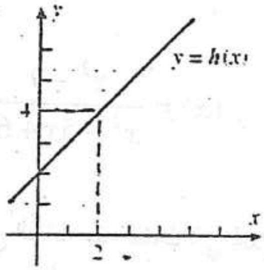


الدالـــة $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ 3 & x=2\end{cases}$ معرفـــة عنـــد $x=2$ و لكـــن قيمتـــها

$g(2)=3$ عند $x=2$ وهي تختلف عن قيمة النهاية لهذه الدالة، من ثم فهي غير متصلة.



الدالة $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ 4 & x=2\end{cases}$ معرفة عند $x=2$ و قيمتها $g(2)=4$ عند $x=2$ وهي نفس قيمة النهاية لها فهي متصلة.



تعريف (الاتصال على فترة)

الدالة $y=f(x)$ تكون متصلة على:

الفترة (a,b) إذا كانت متصلة عند كل نقطة x من نقاط الفترة (a,b).

الفترة $(a,+\infty)$ إذا كانت متصلة عند كل نقطة x من نقاط الفترة $(a,+\infty)$.

الفترة $(-\infty,b)$ إذا كانت متصلة عند كل نقطة x من نقاط الفترة $(-\infty,b)$.

الفترة $(-\infty,+\infty)$ إذا كانت متصلة عند كل نقطة x من نقاط الفترة $(-\infty,+\infty)$. في هذه الحالة يقال أن الدالة متصلة دائما.

مثال (٢)

كثيرة الحدود

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

متصلة لجميع قيم x الحقيقية.

نظرية

بفرض أن f , g دالتان متصلتان عند النقطة c. فإن

i) الدالة $f \pm g$ متصلة عند النقطة c.

ii) الدالة $f \cdot g$ متصلة عند النقطة c.

iii) الدالة $\frac{f}{g}$ متصلة عند النقطة c. بشرط كون $g(c) \neq 0$

مثال (٣)

حدد نقاط عدم اتصال الدالة $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$

الحل

الدالة كسرية ومتصلة عند جميع النقاط عدا النقاط التي تجعل المقام صفراً. لتحديد هذه النقاط نحسب جذور المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$ و هي $x = 3$, $x = 2$.

نظرية

إذا كانت $\lim_{x \to c} f(x) = L$ و كانت الدالة g متصلة عند النقطة L، فإن $\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(L)$. أي أن $\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(\lim_{x \to c} f(x))$

ملاحظة :

المتساوية $\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(\lim_{x \to c} f(x))$ تظل صحيحة في حالة استبدال $\lim_{x \to c}$ بأي من $\lim_{x \to c^{\pm}}$ أو $\lim_{x \to +\infty}$ أو $\lim_{x \to -\infty}$.

لدراسة اتصال تحصيل دالتين متصلتين نذكر النظرية التالية

نظرية (اتصال تحصيل دالتين)

i) إذا كانت الدالة f متصلة عند النقطة c، وكانت الدالة g متصلة عند النقطة $f(c)$، فإن الدالة $g \circ f$ تكون متصلة عند النقطة c.

ii) إذا كانت كل من الدالتين f و g متصلة دائماً، فإن الدالة $g \circ f$ تكون متصلة دائماً.

البرهان

لإثبات أن الدالة $g \circ f$ متصلة عند النقطة c، فيجب إثبات أن

$$\lim_{x\to c} g \circ f(x) = g \circ f(c)$$

لإثبات ذلك نتبع الآتي

$$\lim_{x\to c} g \circ f(x) = \lim_{x\to c} g(f(x)) = g(\lim_{x\to c} f(x))$$
$$= g(f(c)) = g \circ f(c)$$

مثال (٤)

ادرس اتصال الدالة $h(x) = \left|4x^2 + 2x + 7\right|$

الحل

يمكن اعتبار أن الدالة h كما لو كانت تحصيل الدالة المتصلة $f(x) = 4x^2 + 2x + 7$ و الدالة $g(x) = |x|$.

$$\because \lim_{x\to a} g \circ f(x) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = \left|\lim_{x\to a} f(x)\right|$$

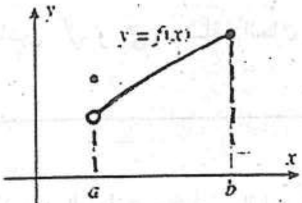
$$\therefore \left|\lim_{x\to 3}(x^2 + 2x + 3)\right| = |18|$$

الدالة متصلة دائماً.

لدراسة اتصال الدالة $f(x)$ على الفترة المغلقة $[a,b]$ يجب مراعاة الآتي:

- دراسة الاتصال على الفترة المفتوحة (a,b).
- دراسة الاتصال عند النقطتين الطرفيتين b, a.

فقد تكون الدالة متصلة على الفترة المفتوحة (a,b) و لكنها غير متصلة عند نقطة من النقطتين الطرفيتين أو كلاهما ، كما في الدالة الممثلة بالشكل التالي



نلاحظ أن الدالة متصلة من جهة اليسار عند النقطة b حيث أن

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

بينما الدالة غير متصلة من جهة اليمين عند النقطة a حيث أن

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \neq f(a)$$

في هذه الحالة يقال أن الدالة متصلة فقط على الفترة المفتوحة (a,b) و ليست متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$.

تعريف

الدالة f تكون متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ إذا تحققت الشروط التالية:

الدالة متصلة على الفترة المفتوحة (a,b).

الدالة متصلة من جهة اليمين عند النقطة a .

الدالة متصلة من جهة اليسار عند النقطة b.

مثال (٥)

ادرس اتصال الدالة $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

الحل

لدراسة اتصال هذه الدالة يجب أولا تحديد مجالها .

مجال هذه الدالة هو الفترة المغلقة $[-3,3]$. إذن يجب دراسة اتصال هذه الدالة على الفترة المفتوحة $(-3,3)$ و عند النقطتين الطرفيتين $-3,3$.

ثانياً: الاتصال على الفترة المفتوحة $(-3,3)$. نفرض أن c أي نقطة في الفترة $(-3,3)$

$$\therefore \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{\lim_{x\to c}(9-x^2)}$$
$$= \sqrt{9-c^2} = f(c)$$

وهذا يبرهن أن الدالة متصلة عند كل نقطة من نقاط الفترة المفتوحة $(-3,3)$.

الدالة متصلة عند النقطتين الطرفيتين $3, 3-$، حيث أن

$$\therefore \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{\lim_{x\to 3^-}(9-x^2)} = 0 = f(3)$$
$$\therefore \lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{\lim_{x\to -3^+}(9-x^2)} = 0 = f(-3)$$

لذا فإن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[-3,3]$.

تمارين

(١) حدد نقطة اتصال (أو عدم اتصال) كل دالة من الدوال التالية:

(1) $f(x) = x^3 - 2x + 7$ (2) $f(x) = (x-3)^{19}$

(3) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (4) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

(5) $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-16}$ (6) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2+7x-2}$

(7) $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \le 4 \\ 7+\dfrac{16}{x}, & x > 4 \end{cases}$

(8) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-1}, & x \ne 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$

(٢) حدد (إن أمكن) قيمة الثابت k التي تجعل الدوال التالية متصلة دائماً

$$(1)\ f(x)=\begin{cases}7x-2, & x\le 1\\ kx^2, & x>1\end{cases}$$

$$(2)\ f(x)=\begin{cases}kx^2, & x\le 2\\ 2x+k, & x>2\end{cases}$$

(٣) حدد فترة اتصال الدالة $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

(٤) اوجد قيمة المتغير x التي تكون عندها الدالة f متصلة و غير متصلة. ثم حدد أي من نقاط عدم الاتصال قابلة للإزالة كي تصبح الدالة متصلة بعد أن كانت الغير متصلة

$$(1)\ f(x)=\frac{x^2+3x}{x+3} \qquad (2)\ f(x)=\frac{x^2-4}{x^3-8}$$

$$(3)\ f(x)=\begin{cases}2x-3, & x\le 2\\ x^2, & x>2\end{cases}$$

$$(4)\ f(x)=\begin{cases}3x^2+5, & x\ne 1\\ 6, & x=1\end{cases}$$

تفاضل الدوال ذات المتغير الواحد

تعريف :

اذا كانت الدالة $y=f(x)$ معرفة لجميع قيم المتغير المستقل x في المدى $[a,b]$ وكانت x_0 تقع داخل هذا المدى . نفرض أن الدالة $g(x)$ المعطاه بالعلاقة $g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $x \neq x_0$ معرفة لجميع قيم x داخل هذا المدى ما عدا عند $x=x_0$ فاذا كانت $g(x)$ تؤول للنهاية ما عندما تؤول x إلى x_0 فان هذه النهاية تسمى مشتقة الدالة $f(x)$ في النقطة x_0 اذا كانت هذه المشتقة موجودة في منطقة معينة فانها تكون دالة في x ويرمز لها بالرمز $f'(x)$ أو $\frac{dy}{dx}$ أي أن

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

والنهاية اليمنى للدالة $g(x)$ عندما تؤول x إلى x_0 تسمى المشتقة اليمنى ويرمز لها بالرمز $f'_+(x_0)$ والنهاية اليسرى لا تسمى المشتقة اليسرى عند $x=x_0$ ويرمز لها بالرمز $f'_-(x_0)$ ومن الأفضل أن نكتب

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

حيث $\lim_{x\to 0} g(x)$ وحيدة ومحدودة ولا تعتمد على اشارة x أو على اختيار المتتابعة (Δx) .

من الواضح أن الدالة $g(x)$ دائما تؤول إلى نهاية عندما يكون للدالة $f(x)$ مشتقة عند النقطة $x=x_0$ وهذا معناه أن تكون الدالة $f(x)$ تفاضلية عند نقطة ما فلابد وأن تكون هذه الدالة متصلة عندها والا فان الدالة $g(x)$ لا تؤول إلى نهاية محدودة ولكن من ناحية أخرى اذا كانت الدالة متصلة فان هذا لا يعني أنها تفاضلية

أى أن اتصال الدالة عند نقطة ما شرط ضرورى كى يكون للدالة مشتقة عندها ولكنه غير كاف

<u>ولاثبات ذلك</u> :

نفرض أن $f'(x_0)$ موجودة ومحدودة فإنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون $|g(x) - f'(x_0)| < \epsilon$ طالما كانت $|x - x_0| < \delta$ بوضع $\phi(x) = g(x) - f'(x)$ حيث $|\phi(x)| < \epsilon$ من ذلك نجد أن

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\{f'(x_0) + \phi(x)\}, |\phi(x)| < \epsilon$$

وباستخدام هذه العلاقة نجد أن

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

وهذا معناه ان الدالة $y = f(x)$ متصلة عند $x = x_0$

ويمكن القول بأنه لكل $m > 0$ يوجد العدد الصغير

$$\delta < \frac{m}{\epsilon + |f'(x_0)|}$$

بحيث يكون

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|\,|f'(x_0) + \phi(x)|$$
$$< \delta(|f'(x_0)| + \epsilon) < m \; ; \forall |x - x_0| < \delta$$

وهذا معناه أن الدالة $y = f(x)$ متصلة عند $x = x_0$ أو أن الاتصال شرط ضرورى للتفاضلية

<u>مثلا</u> : اذا اعتبرنا الدالة $f(x) = |x|$ سوف نثبت أولاً أنها دالة متصلة عند $x = x_0$ كما يلي :-

لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ ، $\delta < \epsilon$ بحيث يكون

$$|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |0|| = |x| < \delta < \epsilon \; ;$$

$$|x - 0| < \delta$$

بعد ذلك تكون الدالة $g(x)$ كما يلي :-

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$$

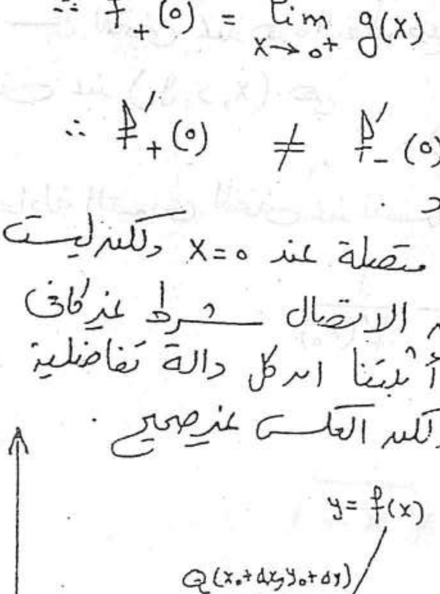
$$= \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = 1 \;,\; f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} g(x) = -1$$

$$\therefore f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

أى أن $f'(0)$ ليس له وجود

وهذا معناه أن الدالة $y = |x|$ متصلة عند $x = 0$ ولكنها ليست تفاضلية عند هذه النقطة أى أن الاتصال شرط غير كافٍ لتفاضلية الدالة وبذلك نكون قد أثبتنا أن كل دالة تفاضلية عند نقطة ما تكون متصلة عندها ولكن العكس غير صحيح.



المعنى الهندسى للمشتقة :-

نفرض أن الدالة $y = f(x)$ ممثلة بالمنحنى كما بالشكل نأخذ عليه النقطتين $P(x_0, y_0)$ ، $Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ القريبتين من بعضهما

فيكون ميل الوتر $PQ = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ فاذا اقتربت Δx من الصفر تقترب Q من P ويقترب الوتر PQ من المماس للمنحنى عند النقطة P ويكون

$$\tan\theta = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} g(x)$$

$$= f'(x_0)$$

وهذا معناه ان قيمة المشتقة عند $x = x_0$ تساوى مع ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة وعلى ذلك تكون معادلة المماس للمنحنى عند (x_0 , y_0) هى

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0)$$

ومعادلة العمودى للمنحنى عند نفس النقطة هى

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$y = x\sqrt{x+1} \quad ,$$

$$y = (x+1)\sqrt{x}$$

القواعد الأساسية للتفاضل :-

رأينا أنه اذا كانت $y = f(x)$ فإن $\frac{dy}{dx}$ أو $\frac{d}{dx}[f(x)]$ أو $f'(x)$ هو ميل المماس للمنحنى $y = f(x)$ عند أى نقطة (x, y) أو $(x, \phi(x))$ ع الترتيب.

وتسمى $\frac{dy}{dx}$ أو $\frac{d}{dx}[\phi(x)]$ أو $f'(x)$ بالمشتقة الأولى للدالة $y = f(x)$ ذات المتغير الواحد x أو تفاضل الدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x ، فالمشتقة الأولى للدالة ما هى فى الواقع الا ميل المماس للمنحنى الدالة عند أى نقطة عليه.
وهناك قواعد محددة لتفاضل دالة بالنسبة الى متغيرها ترتكز فى اثبات صحتها ع مفهوم المشتقة الأولى (أو ميل المماس عند نقطة ع المنحنى وفى تطبيقاتها ع نصوص هذه القواعد وتلخص هذه القواعد فى النظريات الآتية :

نظرية (١) :

اذا كانت $f(x) = a$ حيث a مقدار ثابت فان

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = 0$$

نظرية (٢) ،

تفاضل المجموع الجبرى لدالتين يساوى المجموع الجبرى لتفاضل الدالتين أى أنه

$$\frac{d}{dx}[f_1(x) \pm f_2(x)] = \frac{d}{dx}[f_1(x)] \pm \frac{d}{dx}[f_2(x)]$$

وعموما تفاضل المجموع الجبرى لعدد محدود من الدوال يساوى المجموع الجبرى لتفاضل هذه الدوال وأنه

$$\frac{d}{dx}[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)] = \frac{d}{dx}[f_1(x)] \pm$$

$$\pm \frac{d}{dx}[f_2(x)] \pm \dots\dots\dots \pm \frac{d}{dx}[f_n(x)]$$

نظرية (٣):

تفاضل حاصل ضرب ثابت فى دالة يساوى حاصل ضرب الثابت × تفاضل الدالة ، أى أن

$$\frac{d}{dx}[a\, f(x)] = a \frac{d}{dx}[f(x)]$$

نظرية (٤):

تفاضل حاصل ضرب دالتين يساوى الأولى × تفاضل الثانية زائد الثانية × تفاضل الأولى أى أن

$$\frac{d}{dx}[f_1(x)\; f_2(x)] = f_1(x) \frac{d}{dx} f_2(x) + f_2(x) \cdot \frac{d}{dx}[f_1(x)]$$

نظرية (٥):

تفاضل خارج قسمة دالتين يساوى خارج قسمة مقدار مقامه هو مربع المقام الأصلى وبسطه يساوى المقام × تفاضل البسط - البسط × تفاضل المقام أى أن:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right] = \frac{f_2(x) \frac{d}{dx}[f_1(x)] - f_1(x) \frac{d}{dx}[f_2(x)]}{[f_2(x)]^2}$$

نتيجة

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right] = -\frac{1}{x^2}$$

نظرية (٦) : اذا كانت $f(x) = x^n$ فانه

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[x^n] = n\,x^{n-1}$$

نتيجة :-

$$\frac{d}{dx}[\sqrt{x}] = \frac{1}{2}\Big/\sqrt{x}$$

البراهين :

نظرية (١) : اذا كانت $f(x) = a$ حيث a مقدار ثابت فانه

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = 0$$

البرهان :-

$$f(x) = a \,,\; f(x+\Delta x) = a$$ بالطرح

$$\therefore f(x+\Delta x) - f(x) = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[f(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (0) = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[f(x)] = 0$$

نظرية (٢) :

تفاضل المجموع الجبرى للدالتين يساوى المجموع الجبرى لتفاضل دالتين أى

$$\frac{d}{dx}[f_1(x) \pm f_2(x)] = \frac{d}{dx}[f_1(x)] \pm \frac{d}{dx}[f_2(x)]$$

البرهان :-

$$\because f_1(x) + f_2(x) = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}[f_1(x) + f_2(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f_1(x+\Delta x) + f_2(x+\Delta x) - f_1(x) + f_2(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\left(\frac{f_1(x+\Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} \right) + \left(\frac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{\Delta x} \right) \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f_1(x+\Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{\Delta x} \right]$$

ويمكن اثبات الحالة الاخرى (فرق الدالتين) بالمثل.

$\frac{d}{dx}[f_1(x)] - \frac{d}{dx}[f_2(x)]$ وعموما تفاضل المجموع الجبرى لعدد محدود من الدوال يساوى المجموع الجبرى لتفاضل الدوال ، أى

$$\frac{d}{dx}\left[f_1(x) \pm f_2(x) + \cdots \pm f_n(x)\right] =$$

$$= \frac{d}{dx}[f_1(x)] \pm \frac{d}{dx}[f_2(x)] \pm \cdots \pm \frac{d}{dx}[f_n(x)]$$

نظرية (٢) : تفاضل حاصل ضرب ثابت فى دالة يساوى حاصل ضرب الثابت فى تفاضل الدالة أى

$$\frac{d}{dx}[a f(x)] = a \frac{d}{dx}[f(x)]$$

البرهان :-

$$\frac{d}{dx}[a f(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a f(x+\Delta x) - a f(x)}{\Delta x}$$

$$= a \frac{d}{dx}[f(x)]$$

نظرية (٤) : تفاضل حاصل ضرب دالتين يساوى الأولى × تفاضل الثانية زائد الثانية × تفاضل الأولى ، أى

$$\frac{d}{dx}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right] = f_1(x)\,\frac{d}{dx}\left[f_2(x)\right] + f_2(x)\,\frac{d}{dx}\left[f_1(x)\right]$$

البرهان :

$$\frac{d}{dx}\left[f_1(x)\,f_2(x)\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x+\Delta x)\,f_2(x+\Delta x) - f_1(x)\,f_2(x)}{\Delta x}$$

$$f(x) = f_1(x)\,f_2(x)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f_1(x+\Delta x)f_2(x+\Delta x) - f_2(x)\,f_2(x+\Delta x) + f_1(x)\,f_2(x+\Delta x) - f_1(x)f_2(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[f_1(x)\,\frac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{\Delta x} + f_2(x+\Delta x)\,\frac{f_1(x+\Delta x) - f_1(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= f_1(x)\,\frac{d}{dx}\left[f_2(x)\right] + f_2(x)\,\frac{d}{dx}\left[f_1(x)\right]$$

نظرية (٥) :

تفاضل خارج قسمة دالتين يساوى خارج قسمة مقدارها مربع المقام الأصلى وبسطه = المقام × تفاضل البسط ـ البسط × تفاضل المقام أى أن

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right] = \frac{\left[f_2(x)\right]\frac{d}{dx}\left[f_1(x)\right] - \left[f_1(x)\right]\frac{d}{dx}\left[f_2(x)\right]}{\left[f_2(x)\right]^2}$$

البرهان :- أفرض أن $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = f(x)$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right] = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\left(\frac{f_1(x+\Delta x)}{f_2(x+\Delta x)}\right)-\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\dfrac{f_1(x+\Delta x)\,f_2(x)-f_1(x)\,f_2(x+\Delta x)}{f_2(x)\,f_2(x+\Delta x)}}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f_2(x)\,f_1(x+\Delta x)-f_2(x)\,f_1(x)+f_2(x)\,f_1(x)-f_1(x)\,f_2(x\mp\Delta x)}{(\Delta x)\left[f_2(x)\right]\left[f_2(x+\Delta x)\right]}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f_2(x)\,f_1(x+\Delta x)-f_1(x)-f_1(x)\,f_2(x+\Delta x)-f_2(x)}{(\Delta x)\left[f_2(x)\right]\left[f_2(x+\Delta x)\right]}$$

$$= \frac{f_2(x)\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{f_1(x+\Delta x)-f_1(x)}{\Delta x}\right)-f_1(x)\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{f_2(x+\Delta x)-f_2(x)}{\Delta x}\right)}{f_2(x)\lim\limits_{\Delta x \to 0} f_2(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{f_2(x)\dfrac{d}{dx}\left[f_1(x)\right]-f_1(x)\dfrac{d}{dx}\left[f_2(x)\right]}{\left[f_2(x)\right]^2}$$

مثال (1) : اذا كانت $f(x)=15$ فان

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}15 = 0$$

مثال (٢) : اذا كانت $f(x) = x + 2$ فان

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[x+2] = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(2) = 1$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(x+2) = 1$$

مثال (٣) :

$$\frac{d}{dx}[15x^3 - 2x + 1] =$$

$$= 15\frac{d}{dx}[x^3] - 2\frac{d}{dx}[x] + \frac{d}{dx}[1] =$$

$$= (15)(3x^2) - 2(1) = 45x^2 - 2$$

مثال (٤) :

$$\frac{d}{dx}[(x^2+1)(5x^3-1)] =$$

$$= (x^2+1)\frac{d}{dx}(5x^3-1) + (5x^3-1)\frac{d}{dx}(x^2+1)$$

$$= (x^2+1)(15x^2) + (5x^3-1)(2x)$$

$$= x(25x^3 + 15x - 2)$$

مثال (٥) :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x-1}{x^2+19}\right] =$$

$$= \frac{(x^2+19)\frac{d}{dx}[x-1] - x-1\frac{d}{dx}[x^2+19]}{[x^2+19]^2}$$

$$= \frac{(x^2+19) - (x-1)(2x)}{(x^2+19)^2} = \frac{19 + 2x - x^2}{(x^2+19)^2}$$

- ٥ -

المشتقة الأولى للدوال المركبة :

اذا كانت $y = f(Z)$ ، $Z = g(x)$ فانه

$$y = f[g(x)]$$

تسمى الدالة $f[g(x)]$ دالة الدالة أو الدالة المركبة من الدالتين f , g

نظرية (٧) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dx}$$

أو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dZ}[f(Z)] \cdot \frac{d}{dx}[f(x)]$$

وعموما اذا كانت

$$y = f_1(Z) , Z = f_2(t) , \dots , h = f_n(x)$$

فانه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dt} \cdot \dots \frac{dh}{dx}$$

البرهان :- اذا كانت Δx , Δy , ΔZ هى المتغيرات فى Z , y , x على الترتيب فانه

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta Z} \cdot \frac{\Delta Z}{\Delta x} \quad \text{تطابقيا}$$

وحيث أن نهاية حاصل ضرب دالتين يساوى حاصل ضرب النهايتين ، فانه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dx}$$

أمثلة :

مثال (١) : أوجد مشتقة الدالة $y = (x^2 + 3x - 2)^4$

الحل :- نضع $u = \phi(x) = x^2 + 3x - 2$ فتصبح
$$y = f(u) = u^4$$
وتكون المشتقة المطلوبة هي :
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= 4u^3 \cdot (2x+3)$$
$$= 4(x^2+3x-2)^3 (2x+3)$$
ويمكن الحصول على نفس النتيجة مباشرة بدون فرض الدالة الداخلية u كالآتي : تفاضل الدالة الخارجية y بالنسبة الى القوس فتحصل على $4(x^2+3x-2)^3$ ثم نضرب الناتج في تفاضل القوس (الدالة الداخلية) بالنسبة الى x أى $(2x+3)$.

مثال (٦) : فاضل بالنسبة الى x الدالة $y = \dfrac{1}{x^3+3x^2-6x+4}$

الحل :-
نكتب y في الصورة $y = (x^3+3x^2-6x+4)^{-1}$
ثم نفاضل بالنسبة الى x :
$$\frac{dy}{dx} = -(x^3+3x^2-6x+4)^{-2} \cdot (3x^2+6x-6)$$
$$= -\frac{3(x^2+2x-2)}{(x^3+3x^2-6x+4)^2}$$

مثال (٧) :- أوجد مشتقة الدالة
$$y = \left(\frac{3x-2}{2x+1}\right)^7$$

الحل

$$y' = 7\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right)^6 \cdot \frac{3(2x+1)-(3x-2)2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{49(3x-2)^6}{(2x+1)^8}$$

مثال (٤) :- فاضل بالنسبة لـ x الدالة

$$y = (x^2+2x-3)^{16}(2x+5)^{18}$$

الحل :- نضع

$u = (x^2+2x-3)^{18}$ و $v = (2x+5)^{18}$ فيكون

$u' = 16(x^2+2x-3)^{15}(2x+2)$ و

$v' = 13(2x+5)^{12}(2)$.

$$\therefore y' = u'v + uv'$$

$$= (2x+5)^{13}\, 32(x^2+2x-3)^{15}(x+1) + (x^2+2x-3)^{16}\, 26\,(2x+5)^{12}$$

$$= (x^2+2x-3)^{15}(2x+5)^{12}\left[32(2x+5)(x+1) + 26(x^2+2x-3)\right]$$

⑧ التفاضل الضمني :-

سبق لنا أن عرفنا الدوال الضمنية وهي دوال تظهر في الصورة $f(x,y)=0$ حيث $f(x,y)$ هي تعبير يربط المتغير المستقل x بالتابع y . وقد وجدنا أنه يمكن في بعض الأحوال التعبير عن y صراحة بدلالة x . وفي أغلب الأحيان يتعذر ذلك . وللحصول على المشتقة $\frac{dy}{dx}$ نفاضل العلاقة السابقة مباشرة بالنسبة إلى x فنحصل على معادلة في الصورة $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0$ وهي معادلة من الدرجة الأولى في $\frac{dy}{dx}$ بالنسبة لـ $\frac{dy}{dx}$ نحصل على المشتقة $\frac{dy}{dx} = \phi(x,y)$.

من هذا المثال يتضح أن الكميات df لا تحتاج من الناحية العملية
إلى جهد صائب في حين أن إيجاد Δf أصعبه عدد لا
كثير. وحيث أن الخطأ في استعمال df بدلا من Δf يكون
صغيراً فإن هذا التقريب يوفر كثيراً من وقت الحساب اللازم

مثال (٢): أوجد التفاضلة dy والزيادة Δy للدالة $= x^2$

١) لأية قيم اختيارية لكل من x ، Δx

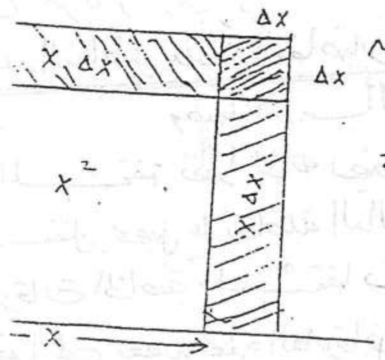
٢) عندما $x = 20$ ، $\Delta x = 0.1$

الحل:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$dy = (x^2)'\,\Delta x = 2x\,\Delta x.$$

ويبين شكل ([illegible]) كل من Δy ، dy . نجد أن Δy
المساحة كلها أي المستطيلات $2(x\,\Delta x)$ بالإضافة إلى
$(\Delta x)^2$ في حين أن
dy تمثل مساحة المستطيلين
فقط.



2) If $x = 20$, $\Delta x = 0.1$

$$\Delta y = 2 \times 20 \times 0.1 + (0.1)^2 = 4.01$$

$$dy = 2 \times 20 \times 0. = 4.00$$

مع ذلك فإن استبدال Δy بالكمية dy يعطي خطأ في
في حالات كثيرة يمكن اعتباره صغيراً بالنسبة ل
0.01
$\Delta y = 4.01$ وبالتالي يهمل.

مثال (٢) :

باستخدام التفاضلات أوجد قيمة تقريبية للجذر $\sqrt[5]{33}$

الحل :- نلاحظ فكرة الحل : أننا نعلم تماماً قيمة $\sqrt[5]{32}$ وهي 2 وأن 33 يقع بالقرب من 32 . لذلك تكون الدالة

$$f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{1/5}$$

إذا أخذنا $x = 32$ ، $\Delta x = 1$ يكون المطلوب تعيين $f(33)$

$$\Delta f = f(33) - f(32),$$

$$df = f'(32)\cdot(1) = f'(32)$$

$$\text{but } f'(x) = \frac{1}{5}x^{-4/5}$$

$$f'(32) = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{80},$$

$$\therefore df = \frac{1}{80}$$

$$\text{since } \Delta f \simeq df$$

$$\therefore f(33) = f(32) + \Delta f \simeq f(32) + df$$

$$\sqrt[5]{33} \simeq 2 + \frac{1}{80} = 2.0125$$

قواعد التفاضل بدلالة التفاضلات :-

وجدنا أن مسألة إيجاد تفاضلة دالة تكافئ مسألة إيجاد المشتقة نظراً لأنه بضرب الأخيرة في تفاضلة المتغير المستقل نحصل على تفاضلة الدالة . وعلى ذلك فإن كل النظريات والعلاقات الخاصة بالمشتقات تحتفظ أيضاً للتفاضلات .

وفيما يلي بعض هذه العلاقات :

$$dc = 0,$$

$$d(cu) = c\,du,$$

$$d(u+v) = du + dv$$

$$d(u\,v) = v\,du + u\,dv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2},$$

$$d(u^n) = n\,u^{n-1}\,du,$$

وهكذا .

تمارين

(١) أوجد من المبادئ الأولية مشتقة الدوال الآتية :

a) $y = \frac{1}{x}$ (b) $y = \sqrt{x}$

c) $y = x\sqrt{x+1}$ d) $y = \sqrt{4-x^2}$

e) $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

(٢) فاضل بالنسبة الى x الدوال الآتية :

a) $(x^3 + 6x^2 - 2x + 1)(x^2 + 3x - 5)$

b) $(x^4 + 2x - 3)(x^6 - 7x^5 + 8x^8 + 9x^2 + 1)$

c) $\frac{x^2 - x + 6}{x^2 + 1}(x^2 + x + 1)$

d) $(x^2 + 2x - 6)(3x - 2)(x^2 + 5)$

e) $\frac{(x^2+2)^3}{(x + x^2 - 1)}$

f) $(x+5)^2(8x-6)^3(7x^2+1)^4$

① $y = \sqrt{x}$

② $y = \tan\sqrt{x}$

③ $y = \ln(x^2 + 2x + 1)$

④ $y = xe^x$

⑤ $y = e^{\ln x \sqrt{x}}$