جامعة جنوب   الوادى

كلية التربية بالغردقة

الفرقة الثالثة عام رياضيات

المادة : تطبيقية (7)   (أليكتروإستاتيكا)

إستاذ المادة   /   د. محمد محمد عبد العزيز

الفصل الدراسى الثانى   2023-2022

المحتويات

مقدمة عامة

مقدمة

إن قوانين القوة المعروفة لدينا تماماً هما القانونين اللذين يصفان قوى الجاذبية بين الكتل المختلفة ، والقوى الكهربائية بين الشحنات المختلفة .

إن القوى المتبادلة بين الكتل أو الشحنات المختلفة المستقرة تكون متناسبة عكسياً مع مربع المسافة الفاصلة بينهما . ولقد تم اكتشاف العلاقات الرياضية المختلفة التي توضح طبيعة العلاقة المتبادلة بين الأجسام أو الشحنات الكهربية . أحد هذه القوانين المعروفة هو قانون نيوتن للجذب العام والقانون الآخر هو قانون كولوم في الالكتروستاتيكا .

إن الإستفادة التامة من معلوماتنا عن قانون القوة مثلاً ، يستلزم أن يكون لدينا نظرية ميكانيكية عن طبيعة الحالة المعنية بالدراسة . وهذا يعني أنه يجب أن يكون لدينا نظرية تصف سلوك الجسيم ، تحت تأثير قانون قوة معروف ، بالنسبة للجسيمات الأخرى .

إن الأجسام الكبيرة والتي تتحرك بسرعات صغيرة بالمقارنة بسرعة الضوء فإنها تخضع تماماً لقوانين ميكانيكا نيوتن الكلاسيكية . إن قوانين الميكانيكا الكلاسيكية بالإضافة لقانون الجاذبية معاً يؤديان إلى توقعات دقيقة بحركة الكواكب . وهناك شئ هام نركز عليه هنا ونشير إليه وهو أن الميكانيكا الكلاسيكية لا تنطبق مطلقاً على المشاهدات المأخوذة على الجسيمات في النطاق الذري أو على الأجسام التي تتحرك بسرعة عالية جداً . إن سلوكيات مثل هذه الجسيمات لا يمكن فهمها إلا بدلالة أفكار من نظرية الكم والنظرية الخاصة في النسبية .

إنه لمن الملحوظ أن الميكانيكا تخضع لتعديلات فعالة في حين أنه في نفس الوقت نجد أن قانون كولوم مازال كما هو ثابتاً. ونحن نعلم تماماً أن سلوك الذرات لا يناسب إطار الميكانيكا الكلاسيكية القديمة، وعلى الرغم من ذلك فإنه عند استخدام قانون كولوم مع النظريات النسبية وميكانيكا الكم نجد أن التفاعلات الذرية يمكن تفسيرها بدقة كبيرة في كل حالة وخاصة عندما نجرى مقارنة بين النظرية والتجريب.

من حيث المبدأ نجد أن معظم الخصائص الكيميائية، في الفيزياء الذرية وفيزياء الجوامد، يمكن إشتقاقها تقريباً إنطلاقاً من قانون كولوم.

بعض المفاهيم والنظريات الهامة في تحليل المتجهات

بند ١ : الدوال المتجهة

إذا تواجد متجه ما وليكن $\vec{A}$ مع كل قيمة مناظرة تأخذها الكمية العددية u فإنه يقال أن المتجه $\vec{A}$ دالة في المتغير u ويرمز له بالصورة $\vec{A}(u)$.

تبعاً لذلك فإن $A_1(u)$ ، $A_2(u)$ ، $A_3(u)$ هي مركبات (مساقط) هذا المتجه $\vec{A}(u)$ في إتجاه محاور الإحداثيات الثلاثة OX, OY, OZ على الترتيب فإنه يكون :

$$\vec{A}(u) = A_1(u)\vec{i} + A_2(u)\vec{j} + A_3(u)\vec{k} \qquad (1.1)$$

حيث $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ هي متجهات الوحدة في إتجاه المحاور المتعامدة OX, OY, OZ على الترتيب.

وإذا كان لكل نقطة من الفراغ الثلاثي (x,y,z) متجه $\vec{A}$ مناظرها فإن هذا المتجه $\vec{A}$ يكون دالة في (x,y,z) ويمكن كتابته بدلالة مساقطه على محاور الإحداثيات كالآتي :

$$\vec{A}(x,y,z) = A_1(x,y,z)\vec{i} + A_2(x,y,z)\vec{j} + A_3(x,y,z)\vec{k} \qquad (1.2)$$

هذه الدالة المتجهة $\vec{A}(x,y,z)$ يقال أنها تعرف مجال متجه لأنه لكل نقطة من المجال يترافق معها متجه.

كذلك بالمثل فإن أي دالة قياسية $\Phi(x,y,z)$ تعرف مجالاً عدديا (قياسياً) لأنه لكل نقطة في منطقتها (مجالها) يترافق معها مقدار عددي.

بند ٢ : النهايات والإتصال والمشتقات للدوال المتجهة

تتبع النهايات والإتصال والمشتقات للدوال المتجهة قواعد مشابهة لتلك القواعد الخاصة بالدوال العددية. فمثلاً الدالة القياسية $\Phi(u)$ يقال أنها متصلة عند u إذا كان $\lim_{\Delta u \to 0} \Phi(u+\Delta u) = \Phi(u)$. أي أن الدالة $\Phi(u)$ تكون دالة متصلة عند u إذا كان لأي عدد موجب ϵ يمكن إيجاد عدد ما موجب δ بحيث أنه :

$$|\Phi(u+\Delta u) - \Phi(u)| < \epsilon \quad \text{طالما كان} \quad |\Delta u| < \delta .$$

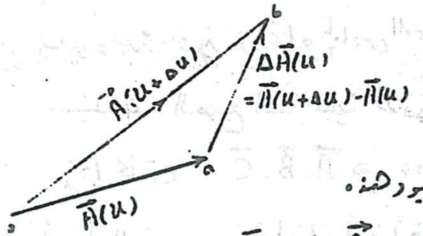
الدالة الإتجاهية $\vec{A}(u) = A_1(u)\vec{i} + A_2(u)\vec{j} + A_3(u)\vec{k}$ تسمى دالة متصلة عند u إذا

كانت الدوال القياسية الثلاث $A_1(u), A_2(u), A_3(u)$ متصلات عند u أو إذا كان $\lim_{\Delta u \to 0} \vec{A}(u+\Delta u) = \vec{A}(u)$. وهذا التعريف يكافئ القول أن الدالة المتجهة $\vec{A}(u)$ تكون متصلة عند u إذا كان لأي عدد موجب ϵ يمكننا إيجاد عدد ما موجب δ بحيث أن $|\vec{A}(u+\Delta u) - \vec{A}(u)| < \epsilon$ كلما كان $|\Delta u| < \delta$

II- نهاية ومشتقة المتجهات

لتكن الدالة المتجهة $\vec{A}(u)$ هي دالة في متغير قياسي وحيد u عندئذ يكون

$$\frac{\Delta \vec{A}}{\Delta u} = \frac{\vec{A}(u+\Delta u) - \vec{A}(u)}{\Delta u} \qquad (1.3)$$



مشتقة المتجه $\vec{A}$ بالنسبة إلى المتغير u تعطى بـ

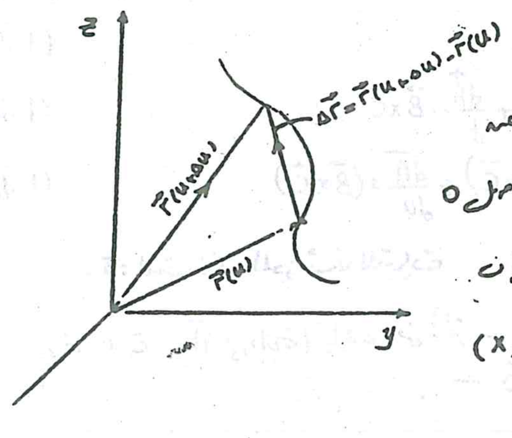
$$\frac{d\vec{A}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta u} = \frac{\vec{A}(u+\Delta u) - \vec{A}(u)}{\Delta u}.$$

إذا كانت هذه المشتقة موجودة. ويشترط وجود هذه النهاية موجودة فإنه يمكن التعبير عن مشتقة المتجه $\vec{A}(u)$ بدلالة مركباته

$$\frac{d\vec{A}(u)}{du} = \frac{dA_1}{du}\vec{i} + \frac{dA_2}{du}\vec{j} + \frac{dA_3}{du} \qquad (1.4)$$

بالمثل أيضاً يمكن تعريف مشتقات الدوال الإتجاهية ذات الرتب الأعلى مثل $\frac{d^2\vec{A}(u)}{du^2}$ شرط أن تكون هذه المشتقة موجودة.

البند 3: المعنى الهندسي لمشتقة المتجه



على وجه الخصوص إذا كانت $\vec{A}(u)$ هو عبارة عن دالة متجه موضع $\vec{r}(u)$ الذي يصل نقطة الأصل O من نظام إحداثي معين مع النقطة (x, y, z) فإن مركبات الدالة المتجهة $\vec{r}(u)$ تعرف (x, y, z) كدوال للمقدار u حسب

$$\vec{r}(u) = x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j} + z(u)\vec{k}$$

أي أنه عندما نتغير النقطة u في الفراغ فإن النقطة الإنتهائية للمتجه $\vec{r}$ ترسم في الفراغ منحنى له المعادلات البارامترية $x = x(u)$, $y = y(u)$, $z = z(u)$. عندئذ يكون

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta u} = \frac{\vec{r}(u+\Delta u) - \vec{r}(u)}{\Delta u}$$

هو عبارة عن متجه في إتجاه $\Delta \vec{r}$. وإذا كانت $\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta u} = \frac{d\vec{r}}{du}$ موجودة فإن النهاية له تمثل المتجه في إتجاه المماس للمنحنى عند النقطة (x, y, z) وتعطى بالعلاقة الآتية

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{dx}{du}\vec{i} + \frac{dy}{du}\vec{j} + \frac{dz}{du}\vec{k} \tag{1.5}$$

إذا كان البارامتر u هو طول القوس s مقاساً من نقطة ما على المنحنى فإن $\frac{d\vec{r}}{ds}$ يساوي وحدة متجه في إتجاه المماس المعين . تسمى وحدة المماس المتجهة .

بند 4 : الصيغ التفاضلية للمتجهات

إذا كانت $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ هي دوال إتجاهية تفاضلية من المتغير القياسي u ، كانت Φ أيضاً دالة قياسية تفاضلية أيضاً من المتغير u فإن :

$$\frac{d}{du}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\vec{B}}{du} \tag{1.6}$$

$$\frac{d}{du}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{du} + \vec{B}\cdot\frac{d\vec{A}}{du} \tag{1.7}$$

$$\frac{d}{du}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du} + \vec{B}\times\frac{d\vec{A}}{du} \tag{1.8}$$

$$\frac{d}{du}(\Phi\vec{A}) = \Phi\frac{d\vec{A}}{du} + \vec{A}\frac{d\Phi}{du} \tag{1.9}$$

$$\frac{d}{du}(\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{du} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{du}\times\vec{C} + \frac{d\vec{A}}{du}\cdot\vec{B}\times\vec{C} \tag{1.10}$$

$$\frac{d}{du}(\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{A}\times(\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{du}) + \vec{A}\times(\frac{d\vec{B}}{du}\times\vec{C}) + \frac{d\vec{A}}{du}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \tag{1.11}$$

بند 5: المشتقات الجزئية للمتجهات :

إذا كانت $\vec{A}$ هي دالة إتجاهية من أكثر من متغير قياسي ولتكن x, y, z مثلاً عندئذ نكتب

$\vec{A} = \vec{A}(x,y,z)$. المشتقة الجزئية للدالة الإتجاهية $\vec{A}$ بالنسبة للمتغير x تعرف بـ

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{A}(x+\Delta x, y, z) - \vec{A}(x,y,z)}{\Delta x} \qquad (1.12)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\vec{A}(x, y+\Delta y, z) - \vec{A}(x,y,z)}{\Delta y} \qquad (1.13)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\vec{A}(x, y, z+\Delta z) - \vec{A}(x,y,z)}{\Delta z} \qquad (1.14)$$

إذا كانت هذه النهايات موجودة فإن تلك العلاقات السابقة تعرف المشتقات الجزئية للدالة الإتجاهية $\vec{A}$ بالنسبة للمتغيرات x, y, z على الترتيب.

إذا كانت $\vec{A}(x,y,z) = A_1(x,y,z)\vec{i} + A_2(x,y,z)\vec{j} + A_3(x,y,z)\vec{k}$ فإن

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}dz \qquad (1.15)$$

تعرف أيضا المشتقات الجزئية ذات الرتب الأعلى للدوال المتجهة (الرتبة الثانية) مثلا

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right) . \qquad (1.16)$$

وخواص المشتقات الجزئية للمتجهات مشابهة تماما لتلك التي في الدوال القياسية.

إذا كانت $\vec{A}, \vec{B}$ دوال إتجاهية من المتغيرات x, y, z فإن

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \vec{B}\cdot\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \qquad (1.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\times\vec{B} \qquad (1.18)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(\vec{A}\cdot\vec{B}) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\vec{A}\cdot\vec{B})\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\vec{A}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \vec{B}\cdot\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\right] \\ &= \vec{A}\cdot\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + \vec{B}\cdot\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y \partial x}\end{aligned} \qquad (1.19)$$

بند 6: التدرج والتفرق والتفاف المتجهات

المؤثر التفاضلي الإتجاهي نابلا $\vec{\nabla}$ يعرف بـ

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad (1.20)$$

هذا المؤثر التفاضلي $\vec{\nabla}$ له خصائص مماثلة لتلك التي في المتجهات وهذا المؤثر التفاضلي في تطبيقات تعرف باسم الميل والتباعد والدوران

1- الميل (التدرج)

لتكن Φ دالة قياسية تفاضلية عند كل نقطة (x,y,z) في حيز معين من الفراغ فإن تدرج Φ يعرف كالآتي

$$grad\ \Phi = \vec{\nabla}\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{k} \tag{1.21}$$

و الدالة الإتجاهية $\vec{\nabla}\Phi$ تعرف بمجال إتجاهي.

* إذا كانت $\Phi(x,y,z)=c$ تمثل معادلة سطح مثلاً ، حيث c مقدار ثابت فإن $\vec{\nabla}\Phi$ تمثل العمودي على هذا السطح . ويمكن بيان ذلك كالآتي

إذا فرضنا أن $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ متجه موضع أي نقطة $P(x,y,z)$ على السطح فإن $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ تقع في المستوى المماس للسطح عند P ولكن

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right) = 0 \tag{1.22}$$

$$\text{or}\quad d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz = \vec{\nabla}\Phi\cdot d\vec{r} = 0 \tag{1.23}$$

أي أن $\vec{\nabla}\Phi$ عمودية على $d\vec{r}$ وبذلك تكون عمودية على السطح.

2- التفرق (التباعد)

دعونا أن $\vec{V}(x,y,z) = V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}$ دالة إتجاهية تفاضلية ومعرفة عند كل نقطة (x,y,z) في حيز معين من الفراغ فإن تباعد $\vec{V}$ يكتب $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$ أو $div\ \vec{V}$ ويعرف كالآتي

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}\right) \tag{1.24}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} \tag{1.25}$$

مع ملاحظة أن $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} \neq \vec{V}\cdot\vec{\nabla}$

3- **الإلتفاف (الدوران)** . دوران الدالة الإتجاهية التفاضلية $\vec{V}$ يكتب $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ أو $curl\ \vec{V}$

ويكتب كالآتي

$$Curl\,\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\times\left(V_1\vec{i}+V_2\vec{j}+V_3\vec{k}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial V_3}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial V_1}{\partial z}-\frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad (1.26)$$

ويلاحظ عند فك المحدد أنه من الضروري أن تسبق العوامل المؤثرة $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ المركبات V_1, V_2, V_3.

بند 7: صيغ تحتوي على ∇

إذا كانت $\vec{A}, \vec{B}$ دوال إتجاهية تفاضلية وكانت Ψ, Φ دوال قياسية تفاضلية في الموضع (x,y,z) فإن:

$$\vec{\nabla}(\Phi+\Psi) = \vec{\nabla}\Phi+\vec{\nabla}\Psi \quad \text{أو} \quad grad(\Phi+\Psi) = grad\,\Phi + grad\,\Psi \qquad (1.27)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\vec{\nabla}\cdot\vec{B} \quad \text{أو} \quad div(\vec{A}+\vec{B}) = div\,\vec{A} + div\,\vec{B} \qquad (1.28)$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}+\vec{\nabla}\times\vec{B} \quad \text{أو} \quad Curl(\vec{A}+\vec{B}) = Curl\,\vec{A} + Curl\,\vec{B} \qquad (1.29)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\Phi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\Phi)\cdot\vec{A}+\Phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) \qquad (1.30)$$

$$\vec{\nabla}\times(\Phi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\Phi)\times\vec{A}+\Phi(\vec{\nabla}\times\vec{A}) \qquad (1.31)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \qquad (1.32)$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) \qquad (1.33)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \qquad (1.34)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\Phi) = \nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \qquad (1.35)$$

حيث ∇^2 يسمى مؤثر لابلاس

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

دوران الميل للدالة القياسية Φ يساوي صفر

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\Phi) = \vec{0}$$

تباعد الدوران للدالة الإتجاهية $\vec{A}$ يساوي صفر :

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \qquad (1.36)$$

ملاحظة: الصيغ المعطاة بالمعادلة (1.36) تكون محققة على إعتبار أن Φ, A لها مشتقات جزئيات متصلة من الرتبة الثانية.

أمثلة توضيحية

1. احسب $\vec{\nabla} f(r)$. حيث $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

من الواضح أن $f(r) = f([x^2+y^2+z^2]^{1/2})$

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(r)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(r)}{\partial z}\vec{k}$$

الدالة $f(r)$ تعتمد على المتغير x لأن المتجه $\vec{r}$ دالة في هذا المتغير x

وبالتالي خاصية من قانون السلسلة في المشتقات الجزئية نجد أن

$$\frac{\partial f(r,\theta,\phi)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

وفي هذه الحالة

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{df}{dr}, \quad \frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x^2+y^2+z^2]^{1/2} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{df(r)}{dr}\,\frac{x}{r}$$

وبالمثل يمكننا أيضاً الحصول على المشتقات الجزئية للدالة $f(r)$ بالنسبة للمتغيرات y, z على الترتيب. وبجمع هذه المشتقات الجزئية والتعويض في صيغة الميل للدالة $f(r)$ نحصل على

$$\vec{\nabla} f(r) = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr} = \frac{\vec{r}}{r}\frac{df(r)}{dr}, \quad r = |\vec{r}|$$

$$\vec{\nabla} f(r) = \vec{r}_0 \frac{df(r)}{dr}, \quad \vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$$

2. احسب $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

3- إحسب $\vec{\nabla}\cdot(\vec{r} f(r))$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{r} f(r)) = \frac{\partial}{\partial x}(x f(r)) + \frac{\partial}{\partial y}(y f(r)) + \frac{\partial}{\partial z}(z f(r))$$

$$= 3 f(r) + \left(\frac{x^2}{r} + \frac{y^2}{r} + \frac{z^2}{r}\right) f_r'(r) = 3 f(r) + r \frac{df}{dr}$$

وعموما إذا كان $f(r) = r^{n-1}$ فإن

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{r}\, r^{n-1}) = 3 r^{n-1} + (n-1) r^{n-1} = (n+2) r^{n-1}$$

فإذا كانت $n = -2$ فإن $\vec{\nabla}\cdot(\vec{r}\, r^{n-1}) = 0$

4- إحسب $\vec{\nabla} \times \vec{r}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

5- إحسب $\vec{\nabla} \times (\vec{r} f(r))$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{r} f(r)) = f(r)\, \vec{\nabla} \times \vec{r} + (\vec{\nabla} f(r)) \times \vec{r}$$

باستعمال نتائج المثالين (1) ، (4) نجد أن

$$\vec{\nabla} \times (\vec{r} f(r)) = (\vec{\nabla} f(r)) \times \vec{r} = \frac{df(r)}{dr}\, \vec{r}_0 \times \vec{r} = \vec{0}$$

وحاصل الضرب الاتجاهي هذا يتلاشى لأن $\vec{r} = \vec{r}_0\, r$ ، $\vec{r}_0 \times \vec{r}_0 = \vec{0}$

6- عرض تباعد الميل للدالة Φ ($\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi$)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية في الإحداثيات الكارتيزية وتعرف باسم معادلة لابلاس للدالة Φ . وهذه المعادلة لها أهمية خاصة في الرياضيات التطبيقية وخاصة عند دراسة النظرية الكهربية والمغناطيسية

تكامل المتجهات

بعد أن تعرضنا لتفاضل المتجهات سوف ندرس فيما التكاملات الخطية، السطحية والحجمية.

في كل حالة من هذه الحالات نجد إختصار التكاملات الإتجاهية إلى تكاملات قياسية. المألوفة لدينا

البداية: التكاملات الخطية.

نفرض أن $\vec{r}$ هو متجه موضع نقطة في الفراغ (x,y,z) ونفرض أن $\Phi(x,y,z)$

هي دالة قياسية في الموضع. نفرض كذلك أن المتجه $\vec{A}$ هو دالة إتجاهية في الموضع معرفة

ومتصلة على طول منحنى C يصل بين نقطتين P_1 و P_2 حيث

$$\vec{A}(x,y,z) = A_1(x,y,z)\vec{i} + A_2(x,y,z)\vec{j} + A_3(x,y,z)\vec{k}$$

عندئذ يمكن تعريف التكامل الخطي لكل من الدالة القياسية Φ والدالة المتجهة $\vec{A}$ كالآتي

$$\int_C \Phi \, d\vec{r} \tag{1.37}$$

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} \tag{1.38}$$

$$\int_C \vec{A}\times d\vec{r} \tag{1.39}$$

وفي كل من الحالات الثلاثة يجرى التكامل على المنحنى C والذى قد يكون منحنى مفتوح (له نقطتى بداية ونهاية منفصلتين) وقد يكون المنحنى C مغلقاً (يكونا حلقة). والتكامل الثاني المعرف بالمعادلة (1.38) هو أهم التكاملات الخطية إستخداماً لماله من تطبيقات فيزيائية متعددة.

رياضياً يعبر هذا التكامل عن المركبة المماسية للدالة المتجهة $\vec{A}$ على طول المنحنى C من النقطة P_1 إلى النقطة P_2. أما إذا كان المتجه $\vec{A}$ يمثل القوة $\vec{F}$ المؤثرة على جسيم متحرك على المنحنى C فإن هذا التكامل يعطى الشغل المبذول بهذه القوة $\vec{F}$ لنقل الجسيم من النقطة P_1 إلى P_2 على المنحنى C. وإذا كان C عبارة عن منحنى بسيط مغلق فإن التكامل (1.38) يأخذ الصيغة

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \tag{1.40}$$

بند ٩ : التكاملات السطحية

من الممكن كتابة التكاملات السطحية في صورة مماثلة للتكاملات الخطية السابقة. فإذا كان $\vec{d\sigma}$ يمثل عنصر مساحة ذات اتجاه فإنه يمكن التعبير عنه في الصورة $d\vec{a}$ حيث $\vec{a}$ هو متجه وحدة عمودي على عنصر المساحة $d\sigma$ في الاتجاه الموجب. ويمكن تحديد هذا الاتجاه الموجب بالنسبة للسطح المغلق في الاتجاه العمودي على السطح إلى الخارج.

وبالتناظر مع التكاملات الخطية (1.37 - 1.39) يمكننا كتابة التكاملات السطحية كالتالي

$$\iint_{\sigma} \phi \, d\vec{\sigma} \qquad (1.41)$$

$$\iint_{\sigma} \vec{A} \cdot d\vec{\sigma} \qquad (1.42)$$

$$\iint_{\sigma} \vec{A} \times d\vec{\sigma} \qquad (1.43)$$

والصيغة الثانية (1.42) هي أكثر الصيغ التكاملية شيوعاً. وهذا التكامل يوصف الناحية الطبيعية من سريان (تدفق) فيض خلال المساحة المعطاة.

ونرمز للتكامل السطحي على سطح مغلق σ بالعلامة التكاملية $\oiint_{\sigma}$

بند ١٠: التكاملات الحجمية

وهي تكاملات بسيطة بعض الشئ. فإذا كان لدينا سطح مغلق يحتوي على حيز حجمي τ فإن التكامل الحجمي يمكن التعبير عنه بدلالة عنصر الحجم المناسب $d\tau$ كالآتي

$$\iiint_{\tau} \phi \, d\tau \qquad (1.44)$$

$$\iiint_{\tau} \vec{A} \, d\tau \qquad (1.45)$$

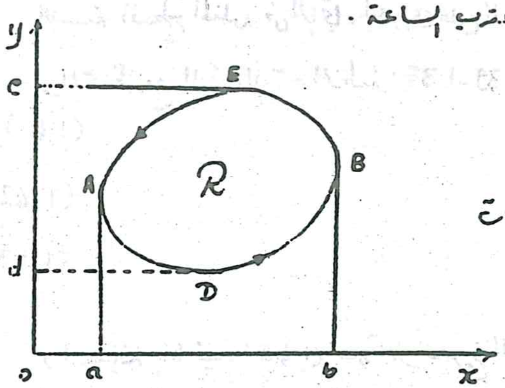
وسوف نبحث فيما بعد عن العلاقات المختلفة والتي تربط التكاملات الخطية والمساحية والحجمية. كل بالآخر من خلال عرض نظريتي كل من جاوس (تربط التكامل الحجمي بالتكامل السطحي) وستوكس (التي تربط التكامل السطحي بالتكامل على المنحنى الذي يحد السطح)

نظرية (11): نظرية جرين في مستوى

تنص هذه النظرية على أنه: إذا كانت R هي منطقة مغلقة في المستوى xy ومحدودة بمنحنى بسيط مغلق C وكانت M, N دوال متصلة (مستمرة) في المنطقة R فإن

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy \qquad (1.46)$$

المنحنى C مأخوذ في إتجاه ضد حركة عقرب الساعة.



البرهان

نفرض أن C هو منحنى مغلق وله خاصية أن أي خط مستقيم موازٍ لأي من محاور الإحداثيات يمكنه أن يتقاطع في نقطتين على الأكثر. نفرض لذلك أن معادلتي المنحنيين AEB, ADB هما $y = Y_2(x)$, $y = Y_1(x)$ على الترتيب.

على إعتبار كذلك أن المنطقة R محدودة بالمنحنى C فإنه

$$\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy\right] dx = \int_a^b \left(M(x,y)\Big|_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)}\right) dx$$

$$= -\int_a^b M(x,Y_1)\,dx - \int_b^a M(x,Y_2)\,dx = -\oint_C M\,dx \qquad (1.47)$$

$$\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dx\,dy = -\oint_C M\,dx \qquad (1.48)$$

وبالمثل يمكن أيضاً إيجاد التكامل على المنحنيات EAD, EBD والتي نعتبر لها المعادلات $x = X_1(y)$, $x = X_2(y)$ على الترتيب وعلى ذلك يكون

$$\iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{y=d}^{y=e}\left[\int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\right]dy = \int_d^e \left[N(x_2,y)-N(x_1,y)\right]dy$$

$$= \int_e^d N(x_1,y)\,dy + \int_d^e N(x_2,y)\,dy = \oint N\,dy \qquad (1.49)$$

$$\iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy = \oint N\,dy \qquad (1.50)$$

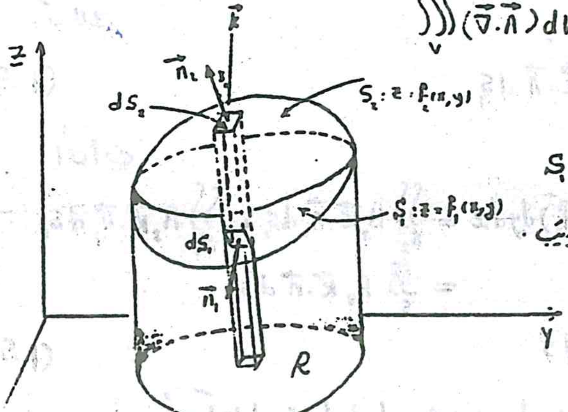
وبجمع العلاقتين (1.47) و (1.50) نحصل على

$$\oint_c M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\,dy \qquad (1.51)$$

بند 12: نظرية التباعد لجاوس

وهذه النظرية لها النص التالي: التكامل السطحي لمتجه ما على سطح مغلق يساوي التكامل الحجمي لتباعد ذلك المتجه متكاملاً على الحجم الذي يحده هذا السطح.

$$\iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\,dV = \iint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} \qquad (1.52)$$



نفرض أن S هو عبارة عن سطح مغلق وأن معادلات السطحين العلوي والسفلي S_2, S_1 تعطى من $z = f_2(x,y)$ ، $z = f_1(x,y)$ على الترتيب. نفرض كذلك أن مسقط السطح S على المستوى xy هو R ونعتبر أن $\vec{A}$ هي دالة إتجاهية من الموضع x,y,z حيث

$$\vec{A}(x,y,z) = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$$

$$\iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\,dV = \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\,dz\,dx\,dy = \iint_R \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial A_3}{\partial z}\,dz\right]dx\,dy$$

$$\iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\,dV = \iint_R A_3(x,y,z)\Big|_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} dx\,dy$$

$$= \iint_R \left[A_3(x,y,f_2) - A_3(x,y,f_1)\right] dx\,dy \qquad (1.53)$$

بالنسبة للجزء العلوي S_2 فإن مسقط عنصر المساحة له ds_2 على المستوى xy يساوي

$dy\,dx = \cos\gamma_2\, ds_2 = \vec{n}_2\cdot\vec{k}\, ds_2$ حيث $\vec{n}_2$ هو متجه وحدة عمودي على عنصر المساحة السطحية ds_2 ويصنع

زاوية γ_2 مع اتجاه محور z الرأسي.

أما بالنسبة للجزء من المساحة السفلي S_1 فإن مسقط عنصر المساحة له ds_1 على المستوى xy يأخذ

الصيغة ds_1 $dy\,dx = -\cos\gamma_1\, ds_1 = \vec{n}_1\cdot\vec{k}\, ds_1$ حيث $\vec{n}_1$ هو متجه وحدة عمودي على عنصر المساحة السطحية

ds_1 ويصنع زاوية قدرها γ_1 مع اتجاه محور z إلى أسفل.

لذلك أمكننا كتابة الصيغ التكاملية السابقة على الصورة الآتية

$$\iint_R A_3(x,y,f_2)\,dy\,dx = \iint_{S_2} A_3\,\vec{k}\cdot\vec{n}_2\, ds_2 \qquad (1.54)$$

وكذلك

$$\iint_R A_3(x,y,f_1)\,dy\,dx = -\iint_{S_1} A_3\,\vec{k}\cdot\vec{n}_1\, ds_1 \qquad (1.55)$$

أي أن

$$\iint_R A_3(x,y,f_2)\,dy\,dx - \iint_R A_3(x,y,f_1)\,dy\,dx = \iint_{S_2} A_3\,\vec{k}\cdot\vec{n}_2\, ds_2 + \iint_{S_1} A_3\,\vec{k}\cdot\vec{n}_1\, dS_1$$

$$= \iint_S A_3\,\vec{k}\cdot\vec{n}\, ds$$

$$\therefore \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\,dV = \iint_S A_3\,\vec{k}\cdot\vec{n}\, ds \qquad (1.56)$$

بالمثل أيضاً لو أخذنا إسقاط السطح S على المستويات الكارتيزية yz , xz نحصل على

النتائج الآتية على الترتيب.

$$\iiint_V \frac{\partial A_1}{\partial x}\,dV = \iint_S A_1\,\vec{i}\cdot\vec{n}\, ds \qquad (1.57)$$

$$\iiint_V \frac{\partial A_2}{\partial y}\,dV = \iint_S A_2\,\vec{j}\cdot\vec{n}\, ds \qquad (1.58)$$

وبجمع نتيجة التكاملات السابقة ((1.56)-(1.58)) فإننا نحصل على

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dV = \iint_S (A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k})\cdot\vec{n}\, ds \qquad (1.59)$$

$$\iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\, dV = \iint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\, ds = \iint_S \vec{A}\cdot d\vec{s} \;;\; d\vec{s}=\vec{n}\, ds \qquad (1.60)$$

وهذه الصيغة تعرف باسم نظرية التباعد لجاوس. وتعتبر نظرية التباعد لجاوس عبارة عن تعميم لنظرية جرين في مستوى حيث تستبدل المنطقة R والمنحنى C الذي يحدها بحيز فراغي V يحده سطح معين مغلق S. وغالباً ما تسمى نظرية التباعد بنظرية جرين في الفراغ.

هناك بعض الصيغ التكاملية المرافقة لنظرية جاوس سوف نذكر بعض منها فيما يلي

نفرض أن ψ و ϕ هما دالتين قياسيتين في الموضع ولهما مشتقات متصلة من الرتبة الثانية على الأقل فإن

$$\iiint_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\, dV = \iint_S (\phi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\phi)\cdot d\vec{s} \qquad (1.61)$$

نفرض أن $\vec{A}$ هي الدالة الاتجاهية حيث أن $\vec{A}=\phi\vec{\nabla}\psi$

وباستخدام نظرية التباعد لجاوس نحصل على

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, dV = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\psi)\, dV = \iint_S \vec{A}\cdot d\vec{s} = \iint_S (\phi\vec{\nabla}\psi)\cdot\vec{n}\, ds \qquad (1.62)$$

$$\because \quad \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\psi) = \phi\nabla^2\psi + (\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\psi)$$

وبالتعويض في التكامل السابق نحصل على

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\psi)\, dV = \iiint_V [\phi\nabla^2\psi + (\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\psi)]\, dV = \iint_S (\phi\vec{\nabla}\psi)\cdot d\vec{s} \qquad (1.63)$$

وتعرف هذه الصيغة بمتطابقة جرين الأولى

وبتبديل كل من ϕ,ψ في التكامل السابق نحصل على

$$\iiint_V [\psi\nabla^2\phi + (\vec{\nabla}\psi)\cdot(\vec{\nabla}\phi)]\, dV = \iint_S (\psi\vec{\nabla}\phi)\cdot d\vec{s} \qquad (1.64)$$

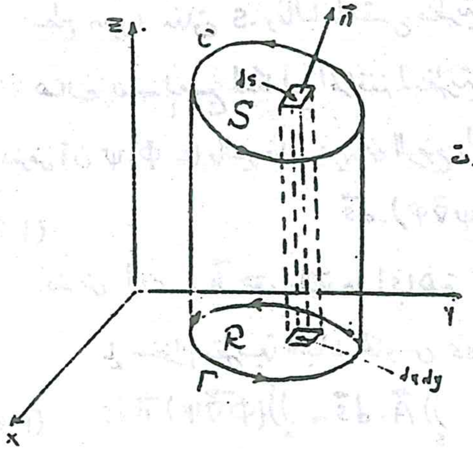
وبطرح هذه العلاقة التكاملية من النتيجة (1.63) نحصل على

2) $$\iiint_V \left[\Phi \vec\nabla^2 \Psi - \Psi \vec\nabla^2 \Phi\right] dv = \iint_S \left(\Phi \vec\nabla \Psi - \Psi \vec\nabla \Phi\right) . d\vec S \qquad (1.64)$$

وتعرف هذه بمتطابقة جرين الثانية

بند 13: نظرية ستوكس

وتنص هذه النظرية على ما يلي: التكامل الخطي للمركبة المماسية لمتجه ما $\vec A$ حول منحنى بسيط مغلق C يساوي التكامل السطحي للمركبة العمودية لدوران المتجه $\vec A$ مأخوذاً على السطح S الذي يحده هذا المنحنى C.



$$\iint_S (\vec\nabla \times \vec A) . \vec n \, ds = \oint_C \vec A . d\vec r \qquad (1.65)$$

نفرض أن S هو سطح وأن مساقطه على المستويات الإحداثية xy, yz, xz هي عبارة عن مناطق محدودة بمنحنيات بسيطة مغلقة. نفرض كذلك أن السطح S يمكن تمثيله بأي من المعادلات

$$z = f(x,y) \quad \text{أو} \quad y = h(x,z) \quad \text{أو} \quad x = g(y,z)$$

حيث f, g, h هي دوال تفاضلية متصلة. العلاقة المطلوب إثباتها هي

$$\iint_S (\vec\nabla \times \vec A) . \vec n \, ds = \iint_S \left[\vec\nabla \times (A_1 \vec i + A_2 \vec j + A_3 \vec k)\right] . \vec n \, ds = \oint_C \vec A . d\vec r \qquad (1.66)$$

حيث C هو منحنى في السطح S و $\vec A$ هي دالة اتجاهية. عندئذ يمكن كتابة

$$\vec\nabla \times (A_1 \vec i) = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A_1}{\partial z} \vec j - \frac{\partial A_1}{\partial y} \vec k \qquad (1.67)$$

$$\left[\vec\nabla \times (A_1 \vec i)\right] . \vec n \, ds = \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} \vec n . \vec j - \frac{\partial A_1}{\partial y} \vec n . \vec k\right) ds \qquad (1.68)$$

إذا كانت $z = f(x, y)$ تمثل معادلة السطح S وكان $\vec{r}$ هو متجه موضع أي نقطة (x, y, z) على السطح S حيث $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ فإن

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{k} = \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{k} \tag{1.69}$$

الآن $\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}$ هو عبارة عن متجه مماس السطح S وبالتالي فهو عمودي على المتجه الإتجاهي $\vec{n}$ (العمودي على السطح). لذلك يكون

$$\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = 0 = \vec{n} \cdot \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{n} \cdot \vec{k} \tag{1.70}$$

$$\therefore \quad \vec{n} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial f}{\partial y}\vec{n} \cdot \vec{k} = -\frac{\partial z}{\partial y}\vec{n} \cdot \vec{k} \tag{1.71}$$

وبالتعويض بهذه النتيجة في العلاقة السابقة (1.68) نحصل على

$$\begin{aligned}
[\vec{\nabla} \times (A_1\vec{i})] \cdot \vec{n}\, ds &= \left(\frac{\partial A_1}{\partial z}\vec{n} \cdot \vec{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\vec{n} \cdot \vec{k}\right) ds \\
&= \left(-\frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\vec{n} \cdot \vec{k} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\vec{n} \cdot \vec{k}\right) dS \\
&= -\left(\frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\vec{n} \cdot \vec{k}\, dS
\end{aligned} \tag{1.72}$$

وحيث أن مسقط الدالة الإتجاهية $\vec{A}$ على محاور الإحداثيات هي دوال في الموضع (x, y, z) لذلك

$$A_1(x, y, z) = A_1(x, y, f(x, y)) = F(x, y) \tag{1.73}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} \tag{1.74}$$

وبدمج النتيجتين (1.72) و(1.74) نحصل على

$$[\vec{\nabla} \times (A_1\vec{i})] \cdot \vec{n}\, ds = -\left(\frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\vec{n} \cdot \vec{k}\, ds = -\frac{\partial F}{\partial y}\, dx\, dy$$

لأن $\vec{n} \cdot \vec{k}\, ds = dx\, dy$

$$\therefore \quad \iint_S [\vec{\nabla} \times (A_1\vec{i})] \cdot \vec{n}\, ds = -\iint_R \frac{\partial F}{\partial y}\, dx\, dy \tag{1.75}$$

حيث R هو مسقط S على المستوى xy . وباستعمال نظرية جرين في المستوى نجد أن

$$-\iint_R \frac{\partial F}{\partial y}\, dx\, dy = \oint_\Gamma F\, dx \tag{1.76}$$

حيث Γ هو منحنى يحد المنطقة R (مسقط S على المستوى xy). وحيث أنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى Γ نجد أن قيمة الدالة F هي نفس قيمة A_1 عند كل نقطة (x, y, z) على المنحنى C وحيث أن dx هي نفسها لكلا المنحنيين لذلك

$$\oint_{\Gamma} F\,dx = \oint_{C} A_1\,dx \tag{1.77}$$

or

$$\iint_S [\vec{\nabla}\times(A_1\vec{i})]\cdot\vec{n}\,ds = \oint_C A_1\,dx \tag{1.78}$$

وبالمثل بتعيين المساقط على مستويات الاحداثيات الأخرى xz, yz فنحصل على النظرية تماما

$$\iint_S [\vec{\nabla}\times(A_2\vec{j})]\cdot\vec{n}\,ds = \oint_C A_2\,dy \tag{1.79}$$

$$\iint_S [\vec{\nabla}\times(A_3\vec{k})]\cdot\vec{n}\,ds = \oint_C A_3\,dz \tag{1.80}$$

وبجمع النتائج (1.78) - (1.80) نحصل على النظرية على

$$\iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{n}\,ds = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} \tag{1.81}$$

وتعتبر نظرية جرين حالة خاصة من نظرية ستوكس. ويلاحظ هنا أن نظرية ستوكس تربط تكاملاً سطحياً بتكامل خطي مغلق. ويجب أن نتذكر أيضاً أن نظرية التباعد لجاوس تربط تكاملاً حجمياً بتكامل سطحي مغلق. وكلا النظريتين نجد أن أكثر استخدامها من البراهين المجردة الخاصة.

بند 14: أنظمة الاحداثيات

تعتبر أنظمة الإحداثيات الكارتيزية من أكثر الأنظمة شيوعاً بالنسبة للإستعمال في حل المسائل الفيزيائية المختلفة . والإحداثيات الكارتيزية تتميز بصفة خاصة ألا وهي أن متجهات الوحدة الثلاث $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (في إتجاه محاور الإحداثيات) هي متجهات ثابتة والمقدار ثابتة ولكن ليس كل المسائل الفيزيائية تتطلب أن نتبنى الإحداثيات الكارتيزية لحلها وهي كثيرة :
وخاصة عند إتصال مع قوى الجذب المتبادلة بين جسمين أو القوى الإلكتروستاتيكية .

ويبدو أن إختيار أنظمة الإحداثيات المناسبة لحل المسائل الفيزيائية والإستغلال لحل التبسيط المشروطة لتلك المسائل يكون هام جداً وخاصة عند دراسة حالات التماثل إن وجدت من المسألة المعنية بالدراسة . أي أنه تكون هناك سهولة في حل المسائل الفيزيائية المختلفة باستعمال الإحداثيات المناسبة لا أكثر مما لو إستعملنا الإحداثيات الكارتيزية في الغالب .

من هنا كان لابد من البحث عن صورة عامة تمكن كتابة الصيغ الرياضية للمؤثرات بي والمتحولة في إيجاد الميل والدوران والتباعد والصيغ الرياضية الأخرى لدوال المجال القياسية والإتجاهية .

سوف نقدم لهذا الغرض الإحداثيات الخطية الإنحنائية المتعامدة في الصورة العامة والتي يمكن تحويلها إلى أي نظام إحداثي معني بالدراسة .

بند 15: الإحداثيات الخطية الإنحنائية المتعامدة

في الإحداثيات الكارتيزية يوجد ثلاث عائلات مترافقة متعامدة من المستويات والتي تحدد من $x = const,\ y = const,\ z = const$. أما في الإحداثيات العامة المعنية بالدراسة هنا سوف نعتبر :
ثلاث سطوح خطية إنحنائية متعامدة وتوصف من : $q_1 = const,\ q_2 = const,\ q_3 = const$.

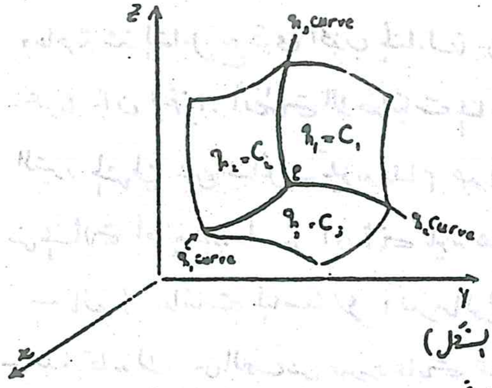
سوف نعتبر أي نقطة في إحداثياتنا هذه بالإحداثيات q_1, q_2, q_3 وكذلك أيضاً من x, y, z .
وهذا يعني أنه يمكن كتابة إحداثيات النقطة في الإحداثيات الخطية المتعامدة في الصورة q_1, q_2, q_3 .

نفرض أن الإحداثيات المتعامدة x, y, z لأي نقطة يمكن التعبير عنها بدلالات q_1, q_2, q_3 كالآتي

$$x = x(q_1, q_2, q_3) \;,\; y = y(q_1, q_2, q_3) \;,\; z = z(q_1, q_2, q_3) \qquad (1.82)$$

بحل هذه المعادلات بالنسبة إلى q_1, q_2, q_3 بدلالات x, y, z نجد أن

$$q_1 = q_1(x, y, z) \;,\; q_2 = q_2(x, y, z) \;,\; q_3 = q_3(x, y, z) \qquad (1.83)$$



حيث الدوال الموجودة في المعادلة (1.82) والدوال العكسية (1.83) هي عبارة عن دوال متصلة ولها مشتقات جزئية ويوجد تناظر أحادي بين النقط الموجودة في نظام الإحداثيات المتعامدة x, y, z و q_1, q_2, q_3 يمكن تعريف إحداثيات أي نقطة P (كما في الشكل):

التي تعطى بالإحداثيات المتعامدة x, y, z ولكن أيضاً بالإحداثيات q_1, q_2, q_3 والتي تسمى بالإحداثيات الخطية المنحنية لهذه النقطة. فإذا كانت q_2, q_3 ثابتة ويتغير q_1 فإن المتجه $\vec{r}$ يرسم منحنى يسمى منحنى الإحداثي q_1. وبالمثل يمكن تعريف منحنيي الإحداثيات q_2, q_3 المارين بالنقطة P. وكل سطحين من الأسطح المعرفة سابقاً يتقاطعان في منحنيات تسمى منحنيات إحداثية أو خطوط. والأسطح المنحنية إذا تقاطعت على التعامد فإن الإحداثيات الخطية المنحنية تكون متعامدة. ويمكن التعبير عن متجه موضع النقطة P كالتالي

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ وباستخدام معادلات التحويل (1.82) يمكن كتابة $\vec{r}$ في الصورة

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$$

$$\therefore\; d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \qquad (1.84)$$

حيث $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$ هو المماس لمنحنى الإحداثي q_1 عند النقطة P. فإذا كانت $\vec{e}_1$ هو وحدة المتجهات

عند P في هذا الإتجاه فيمكننا كتابة $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = h_1 \vec{e}_1$ حيث $h_1 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right|$ بالمثل يمكن كتابة $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = h_2 \vec{e}_2$ ، $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = h_3 \vec{e}_3$ حيث $h_2 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\right|$ ، $h_3 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\right|$ و $\vec{e}_3, \vec{e}_2$ هما وحدات إتجاهية عند P في إتجاه المماس لمنحنيات الإحداثيات q_2, q_3 على الترتيب ومن ثم يكون

$$d\vec{r} = h_1 dq_1 \vec{e}_1 + h_2 dq_2 \vec{e}_2 + h_3 dq_3 \vec{e}_3 \tag{1.85}$$

فإذا كانت $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ متعامدة على التبادل عند أي نقطة P فإن الإحداثيات المنحنية الإقليدية تكون متعامدة. في هذه الحالة يمكن التعبير عن طول قوس منحنى ds بالعلاقة

$$ds^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2 \tag{1.86}$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0 \quad ، \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1 \quad \text{حيث} \tag{1.87}$$

فإذا كانت q_2, q_3 ثابتة وتغيرت q_1 فإن $d\vec{r} = h_1 dq_1 \vec{e}_1$ أي أن عنصر الطول التفاضلي ds_1 على المنحنى الإحداثي q_1 عند النقطة P هو $h_1 dq_1$.

بالمثل تكون العناصر المتناظرة للطول عبر منحنيات الإحداثيات q_2, q_3 هو ds_2, ds_3 حيث $ds_2 = h_2 dq_2$ ، $ds_3 = h_3 dq_3$. وبالتالي فإن عنصر الحجم في الاحداثيات المنحنية المتعامدة يعطى بـ

$$dV = d\vec{s}_1 \cdot (d\vec{s}_2 \times d\vec{s}_3) = (h_1 dq_1 \vec{e}_1) \cdot [(h_2 dq_2 \vec{e}_2) \times (h_3 dq_3 \vec{e}_3)]$$

$$\therefore dV = h_1 h_2 h_3 \, dq_1 dq_2 dq_3 \quad \text{إذ} \quad \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$$

I . الميل في الإحداثيات المنحنية المتعامدة

يمكن التعبير عن الميل في الإحداثيات المنحنية المتعامدة لدالة ما قياسية في الموضع Φ نفرض أن

$$\vec{\nabla} \Phi = f_1 \vec{e}_1 + f_2 \vec{e}_2 + f_3 \vec{e}_3 \tag{1.88}$$

ولكن $d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 = h_1 dq_1 \vec{e}_1 + h_2 dq_2 \vec{e}_2 + h_3 dq_3 \vec{e}_3$

$$\therefore d\Phi = \vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{r} = h_1 f_1 dq_1 + h_2 f_2 dq_2 + h_3 f_3 dq_3 \tag{1.89}$$

أيضاً $d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} dq_3$ (1.90)

بمقارنة المعادلات في المعادلتين (1.89) و(1.90) نجد أن

$$f_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1} \ \text{،}\ f_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2} \ \text{،}\ f_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3} \qquad (1.91)$$

وبالتعويض في الفرض (1.88) نجد أن

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3} \qquad (1.92)$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3} \qquad (1.93)$$

متجهات الوحدة في إتجاه المماسات للإحداثيات المنحنية.

نفرض أن $\Phi = q_1$ في العلاقة السابقة (1.92) نجد أن $\vec{\nabla}q_1 = \frac{\vec{e}_1}{h_1}$

أي أن $|\vec{\nabla}q_1| = \frac{1}{h_1}$ وبالمثل يمكن إثبات أن

$\vec{\nabla}q_3 = \frac{\vec{e}_3}{h_3}$ ، $\vec{\nabla}q_2 = \frac{\vec{e}_2}{h_2}$ حيث $|\vec{\nabla}q_2| = \frac{1}{h_2}$ ، $|\vec{\nabla}q_3| = \frac{1}{h_3}$.

ومن ذلك يتضح أن

$$\vec{\nabla}q_2 \times \vec{\nabla}q_3 = \frac{\vec{e}_2\times\vec{e}_3}{h_2h_3} = \frac{\vec{e}_1}{h_2h_3} \quad ; \quad \vec{e}_1 = \vec{e}_2\times\vec{e}_3 \qquad (1.94)$$

$$\therefore \vec{e}_1 = h_2h_3(\vec{\nabla}q_2)\times(\vec{\nabla}q_3) \qquad (1.95)$$

بالمثل يمكننا أيضاً إثبات أن

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_2 &= h_3h_1(\vec{\nabla}q_3)\times(\vec{\nabla}q_1) \quad ; \quad \vec{e}_3\times\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 &= h_1h_2(\vec{\nabla}q_1)\times(\vec{\nabla}q_2) \quad ; \quad \vec{e}_1\times\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1.96)$$

دالة التفرق في الإحداثيات المنحنية

نفرض أن $\vec{A}$ هي دالة اتجاهية في الإحداثيات المنحنية المتعامدة q_1, q_2, q_3 حيث

$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3 \qquad (1.97)$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot(A_1\vec{e}_1) = \vec{\nabla}\cdot(A_1 h_2 h_3 \vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3)$$

$$= \vec{\nabla}(A_1 h_2 h_3)\cdot(\vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3) + A_1 h_2 h_3 \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} q_2 \times \vec{\nabla} q_3)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(A_1\vec{e}_1) = \vec{\nabla}(A_1 h_2 h_3)\cdot\frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1 h_2 h_3) \qquad (1.98)$$

وبالمثل كذلك نحصل على إشتقاق تباعد المركبات الأخرى للدالة المتجهة $\vec{A}$ كالآتي

$$\vec{\nabla}\cdot(A_2\vec{e}_2) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial q_2}(A_2 h_1 h_3) \;،\; \vec{\nabla}\cdot(A_3\vec{e}_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}(A_3 h_1 h_2) \qquad (1.99)$$

وفى النهاية نحصل على إيجاد التباعد لأى دالة متجهة فى الوضع كالآتى

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 A_3)\right] \qquad (1.100)$$

دوران المتجهات فى الإحداثيات المنحنية

نحصل على إيجاد دوران دالة متجهة $\vec{A}$ بإيجاد المركبات المختلفة كالآتى

$$\vec{\nabla}\times(A_1\vec{e}_1) = \vec{\nabla}\times(A_1 h_1 \vec{\nabla} q_1) = \vec{\nabla}(A_1 h_1)\times\frac{\vec{e}_1}{h_1}$$

$$= \frac{\vec{e}_2}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial q_3}(A_1 h_1) - \frac{\vec{e}_3}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}(A_1 h_1) \qquad (1.101)$$

وفى النهاية يكون

$$\vec{\nabla}\times(A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3) = \frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(A_2 h_2)\right]$$

$$+ \frac{\vec{e}_2}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(A_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(A_3 h_3)\right] + \frac{\vec{e}_3}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(A_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(A_1 h_1)\right]$$

$$\therefore \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ A_1 h_1 & A_2 h_2 & A_3 h_3 \end{vmatrix} \qquad (1.102)$$

مؤثر لابلاس فى الإحداثيات المنحنية :

مما سبق وجدنا أنه لأى دالة قياسية ϕ يكون

$$\vec\nabla\Phi=\frac{\vec e_1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}+\frac{\vec e_2}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2}+\frac{\vec e_3}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\qquad(1.92)$$

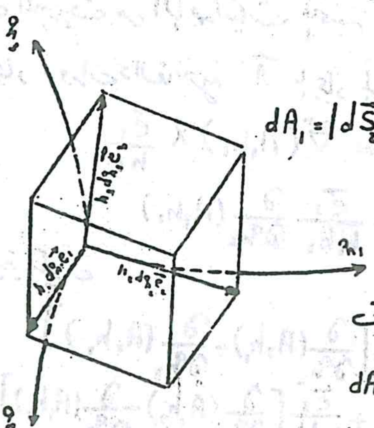
فإذا كانت $\vec A=\vec\nabla\Phi$ فإن

$$\vec A=A_1\vec e_1+A_2\vec e_2+A_3\vec e_3=\frac{\vec e_1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}+\frac{\vec e_2}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2}+\frac{\vec e_3}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\qquad(1.103)$$

$$A_1=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}\ ,\quad A_2=\frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\ ,\quad A_3=\frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\qquad(1.104)$$

$$\vec\nabla\cdot\vec A=\vec\nabla\cdot\vec\nabla\Phi=\nabla^2\Phi$$
$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\right)\right]$$
$$(1.105)$$

عناصر المساحات في الإحداثيات المنحنية المتعامدة



من الشكل الواضح أمامنا نجد أن

$$dA_1=|d\vec S_2\times d\vec S_3|=|(h_2dq_2\vec e_2)\times(h_3dq_3\vec e_3)|$$
$$=h_2h_3\,dq_2\,dq_3\qquad(1.106)$$

$$\text{حيث}\quad|\vec e_2\times\vec e_3|=1\qquad(1.107)$$

بالمثل نجد أيضاً تعيين لعناصر المساحة dA_2, dA_3 كالآتي

$$dA_2=|(h_1dq_1\vec e_1)\times(h_3dq_3\vec e_3)|=h_1h_3\,dq_1\,dq_3$$
$$dA_3=|(h_1dq_1\vec e_1)\times(h_2dq_2\vec e_2)|=h_1h_2\,dq_1\,dq_2$$

$$\text{حيث}\quad|\vec e_1\times\vec e_3|=1\ ,\ |\vec e_1\times\vec e_2|=1\qquad(1.108)$$

وسوف نتعرض فيما يلي دراسة الصيغ الرياضية الخاصة لبعض الإحداثيات (الكارتيزية - الكروية - الإحداثيات الأسطوانية) وذلك باستعمال توضيحات مناسبة لكل نوع من هذه الإحداثيات

1-15: أنظمة إحداثيات خاصة

1. الإحداثيات الكارتيزية المتعامدة.

تعتبر أنظمة الإحداثيات الكارتيزية هي أبسط أنظمة الإحداثيات والتي لها

$$h_1 = h_x = 1\ ,\ h_2 = h_y = 1\ ,\ h_3 = h_z = 1 \tag{1.109}$$

أما بالنسبة لسطوح الإحداثيات فهي عبارة عن ثلاث فئات من السطوح المتوازية وهي

$$x = \text{Const}\ ,\ y = \text{Const}\ ,\ z = \text{Const} \tag{1.110}$$

ونظام الإحداثيات الكارتيزية ينفرد بأن كل من h_1, h_2, h_3 ثوابت وهي ميزة ذات أهمية حيث تناظر متجهات الوحدة $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ على الترتيب $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ والتي لها إتجاهات ثابتة. كما أن الإحداثيات الخطية المنحنية q_1, q_2, q_3 تناظر x, y, z على الترتيب. ونفرض أن Φ هي دالة قياسية من الموضع ونفرض كذلك أن $\vec{A}$ هي دالة اتجاهية من الموضع ومما سبق نجد أن

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{k} \tag{1.111}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad ; \vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \tag{1.112}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi = \nabla^2\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \tag{1.113}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{1.114}$$

ونعين أيضاً [illegible] متجه الموضع $\vec{r}$ وكذلك عنصر الطول ds وعنصر الحجم dV من الإحداثيات الكارتيزية المتعامدة كالآتي

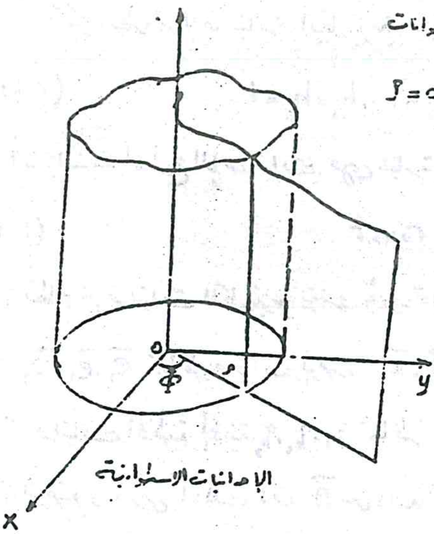
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\ ,\quad d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} \tag{1.115}$$

$$(ds)^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\ ,\quad dV = dx\,dy\,dz \tag{1.116}$$

الإحداثيات الأسطوانية

في نظام الإحداثيات الأسطوانية نجد أن المعادلات الخطية المنحنية لثلاثة h_1, h_2, h_3 تناظر (ρ, ϕ, z) على الترتيب . أسطح الإحداثيات كالآتي

- $\rho = const = (x^2+y^2)^{1/2}$ وهو تمثل تجمع لأسطوانات الدائرية التي لها محور z مشترك. أو محور z إذا كان $\rho = 0$



الإحداثيات الإسطوانية

- $\phi = const = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$. هي تجمع المستويات الرأسية التي تمر بمحور z.
- $z = const$ وهو تمثل تجمع المستويات المتوازية التي توازي المستوى xy.

وتحل المعادلات السابقة في ρ, ϕ, z نحصل على معادلات التحويل الآتية

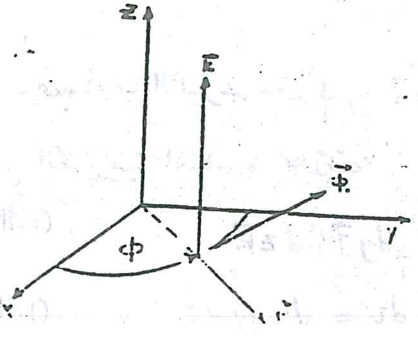
$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z = z$$

حيث

$$0 \le \rho \le \infty , \quad 0 \le \phi \le 2\pi , \quad -\infty \le z \le +\infty$$

أي أن محور z لا يتغير. أما عوامل القياس للإحداثيات الإسطوانية فهي $h_1 = h_\rho = 1,\ h_2 = h_\phi = \rho$ و $h_3 = h_z = 1$. أما متجهات الوحدة $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ في الاحداثيات الإسطوانية فهي $\vec{\rho}, \vec{\phi}, \vec{k}$

ومتجه الوحدة $\vec{\rho}$ عمودي على السطح الاسطواني ويشير دائماً إلى إتجاه تزايد نصف القطر ρ . ومتجه الوحدة $\vec{\phi}$ فهو يمس سطح الإسطوانة ومتعامد على المستوى $\phi = const$ ويشير دائماً إلى إتجاه تزايد ϕ.



أما متجه الوحدة الثالث $\vec{k}$ فهو متجه الوحدة الكارتيزي العادي ويشير دائماً في إتجاه تزايد محور z

والعنصر الطولي لمنحنى من الاحداثيات الاسطوانية هو

$$(ds)^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = (d\rho)^2 + (\rho\, d\phi)^2 + (dz)^2 \qquad (1.117)$$

$$d\vec{r} = d\rho\, \vec{\rho}_\circ + (\rho\, d\phi)\, \vec{\phi}_\circ + dz\, \vec{k} \qquad (1.118)$$

أما المؤثرات التفاضلية المشتملة على $\vec{\nabla}$ تنتج مباشرة من المعادلات

$$\vec{\nabla}\psi(\rho,\phi,z) = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}\vec{\rho}_\circ + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\vec{\phi}_\circ + \frac{\partial \psi}{\partial z}\vec{k} \qquad (1.119)$$

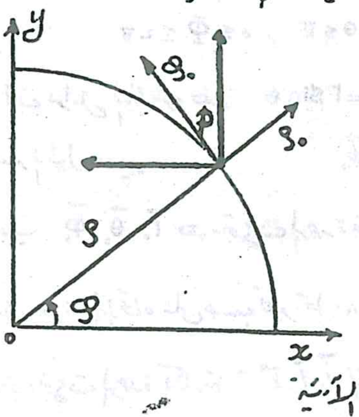
حيث ψ هي دالة قياسية في الوضع (ρ, ϕ, z).

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (1.120)$$

حيث $\vec{A}$ هي دالة إتجاهية في الوضع

$$\vec{\nabla}^2\psi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial \psi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \qquad (1.121)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{\rho}_\circ & \rho\vec{\phi}_\circ & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \qquad (1.122)$$



والعنصر الحجمي في الاحداثيات الاسطوانية له ثلاث عناصر طول هي dz و $\rho d\phi$ و $d\rho$. أي أن العنصر الحجمي في الاحداثيات الاسطوانية يعطى من

$$dv = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz \qquad (1.123)$$

وهذه العلاقة يمكن إستنتاجها مباشرة من الرسم. كما أن متجهات الوحدة في الإحداثيات الاسطوانية يمكن إيجادها من العلاقات الآتية

$$\vec{\rho}_\circ = \vec{i}\cos\phi + \vec{j}\sin\phi \;،\; \vec{\phi}_\circ = -\vec{i}\sin\phi + \vec{j}\cos\phi \;،\; \vec{k}_\circ = \vec{k} \qquad (1.124)$$

وبحل هذه المعادلات الثلاث في $\vec{k}$ و $\vec{\phi}_\circ$ و $\vec{\rho}_\circ$ فإننا نحصل على $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ للإحداثيات الكارتيزية.

- الإحداثيات الكروية

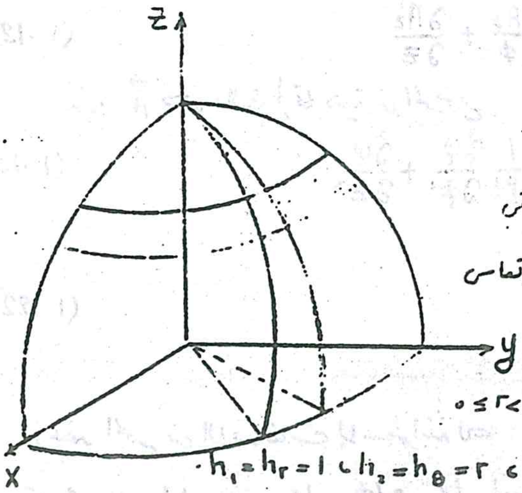
في الإحداثيات الكروية نجد أن r, θ, ϕ تناظر q_1, q_2, q_3 في الإحداثيات المنحنية المتعامدة.

أن السطوح المختلفة في الإحداثيات الكروية يمكن تعريفها كالآتي

1. $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} = \text{Const}$ هي جميع السطوح الكروية المشتركة في المركز أو نقطة الأصل إذا كانت $r = 0$

2. $\theta = \text{Const}$ هي عبارة عن جميع المخاريط المشتركة في محور z ولها رأس مشترك عند المركز وتكون خط إذا كانت $\theta = 0$ أو $\theta = \pi$ وتتحول إلى المستوى xy إذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$

3. $\Phi = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \text{Const}$ وهو يعطي جميع المستويات الرأسية المارة بمحور z.



وتحلل المعادلات لكل من r, θ, Φ نجد أن

$$x = r\sin\theta\cos\Phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi \quad , \quad z = r\cos\theta$$

حيث الزاوية θ تقاس بداية من محور z الرأسي في الاتجاه الموجب. والزاوية Φ تقع في المستوى xy وتقاس بداية من محور x في الاتجاه الموجب. حيث

$$0 \le r < \infty \, , \, 0 \le \theta \le \pi \quad , \quad 0 \le \Phi \le 2\pi$$

كما أن عوامل المقياس هي $h_1 = h_r = 1 \, , \, h_2 = h_\theta = r \, , \, h_3 = h_\phi = r\sin\theta$

وعنصر الطول يعطى من

$$d\vec{r} = dr\,\vec{r}_0 + (r\,d\theta)\vec{\theta}_0 + (r\sin\theta\,d\phi)\vec{\phi}_0$$

حيث $\vec{r}_0, \vec{\theta}_0, \vec{\Phi}_0$ هي متجهات الوحدة في إتجاه تزايد كل من r, θ, ϕ. ومتجهات الوحدة هذه تتميز بأنها متغيرة الإتجاه على حسب تغير كل من θ, ϕ. ويمكن كتابة متجهات الوحدة في الإحداثيات الكروية بدلالة متجهات الوحدة الكارتيزية $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ الثابتة الإتجاه كالآتي

$$\vec{r}_0 = \sin\theta\cos\phi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\phi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \qquad (1.125)$$

المجال الكهربي للتوزيعات المختلفة للشحنات

بند 17: الشحنة الكهربائية وقانون كولوم

سوف نركز في دراستنا في هذا المنهج على تطبيق الكهرومغناطيسية على الأجسام ذات النطاق الكبير ، حيث الأصل الذري للقوى الكهربائية غير منظور مباشرة.

نحن نعرف من دراستنا السابقة أنه يوجد نوعان من حاملات الشحنة الكهربائية:
حاملات الشحنة السالبة مثل الإلكترونات والأيونات السالبة وحاملات الشحنة الموجبة مثل البروتونات والأيونات الموجبة. هذه الشحنات تؤثر بعضها على البعض بقوى ذات طبيعة كهربية. وجدير بالذكر أنه يوجد نوعان من هذه القوى: قوى التنافر تلك التي توجد بين الشحنات المتشابهة وقوى التجاذب التي توجد بين الشحنات المختلفة.

ويمكن تلخيص أنواع التفاعل بين الأجسام نتيجة للقوى المتبادلة بينها كما يلي:

I- تفاعل كتلي وهو يعتمد على كتل الأجسام المتفاعلة

II- تفاعل كهربي ويحدث بين الأجسام التي تحمل شحنات كهربائية (سالبة أو موجبة) وقوى التفاعل في هذه الحالة قد تكون قوة تجاذب أو تنافر على حسب الشحنات الكهربائية المحمولة تلك الأجسام.

III- وبالقياس على التفاعل الكهربي المذكور يوجد أيضاً تفاعل مغناطيسي والذي يحتمل أن يكون موجباً أو سالباً أيضاً.

IV- هناك تفاعل آخر أيضاً وهو التفاعل النووي وهو ناتج عن وجود القوى المتبادلة بين الجسيمات المشحونة في نوى الذرات والإلكترونات المكونة للهيكل الذري لعنصر المادة.

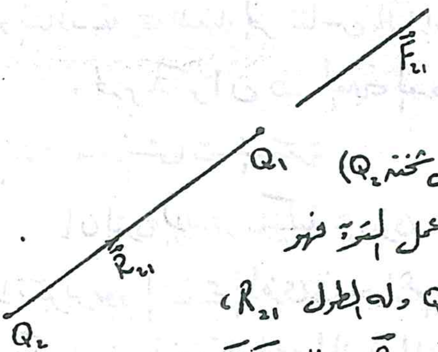
والقوى التي تنشأ من هذا النوع هي إما تفاعلات جاذبة أو طاردة. فالشحنات التي من نفس النوع يدفع كل منها الآخر بينما الشحنات المختلفة تتجاذب معاً. ومن المعروف أن الشحنة المحمولة بالبروتون تسمى شحنة موجبة ، أما الشحنة المحمولة بالإلكترون فهي سالبة.

ان قيمة واتجاه القوة بين جسيمين مستقرين، كل منهما يحمل شحنة كهربية تعطى بقانون كولوم والذى ينص على ما يلى :

إن القوة المتبادلة بين جسيمين صغيرين جداً - يفصلهما في الفراغ أو الهواء بعد مسافة كبيرة بالنسبة لمقاسيهما - تتناسب مع الشحنة على كل منهما وتتناسب عكسياً مع مربع المسافة بينهما.

إن الصيغة الرياضية لهذه القوة يمكن كتابتها كالتالى

$$\vec{F}_{21} \propto \frac{Q_2 Q_1}{R_{21}^2}\, \vec{a}_R \qquad (2.1)$$



حيث المتجه $\vec{F}_{21}$، المبين بالشكل الذى أمامنا، يمثل القوة المؤثرة بالجسيم (الذى يحمل شحنة Q_2) على الجسيم الذى يحمل شحنة Q_1. أما خط عمل القوة فهو ممثل بالمتجه $\vec{R}_{21}$ الذى يمتد من Q_2 إلى Q_1 وله الطول R_{21}، حيث متجه الوحدة $\vec{a}_R$ يعمل على طول الإتجاه $\vec{R}_{21}$، والذى يمكن كتابته بدلالة R_{21} حيث $\vec{a}_R = \vec{R}_{21}/R_{21}$. المعادلة السابقة (2.1) هى قانون التربيع العكسى على الرغم من ظهور R_{21}^3 فى مقام الكسر. لاحظ كذلك أن هذه المعادلة تصف بطريقة تلقائية شكل التجاذب والتنافر للقوة على حسب طبيعة الشحنة الموجودة على كل من Q_1 و Q_2.

ولتكملة العبارة القانونية السابقة والمعطاة بالمعادلة (2.1)، يجب أن نقرر ماهى الوحدات المستعملة ومن هنا نعين ثوابت التناسب الطردى فى تلك المعادلة المذكورة. لذلك سوف نستعمل نظام الوحدات الدولى SI والذى يطبقه معظم الفيزيائيين والمهندسين الذين يطبقون الكهرومغناطيسية على مشاكل تحتوى على أجسام ذات نظام كبير.

هذا النظام يسمى بالنظام الجورجى وهو عالمى فى الغالب ويستعمل من الفيزيائيين النظرية وفيزياء الجو.

ومن نظام الوحدات الدولى SI (نظام mks) فإن الشحنة Q تقاس بالكولوم Coulomb (C)، والمسافة R بالمتر meters (m) والقوة F يجب أن تكون بالنيوتن Newton (N). ومن نظام الوحدات فإن قانون كولوم يأخذ الصيغة الآتية

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q_1}{R_{21}^2} \vec{a}_R \quad (2.2)$$

ومن نظام الوحدات الدولى نجد أن المقدار الثابت الجديد ϵ (يسمى بسماحية الفضاء الحر) كمية ليست عديمة الأبعاد. فمن قانون كولوم نجد أن له الوحدة $C^2/N.m^2$ وله المقدار

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ Coulomb}^2 \text{ Newton}^{-1} m^{-2}$$

والسماحية ϵ للفضاء الحر تقاس بالفاراد لكل متر حيث أن الفاراد له الأبعاد $C^2/N.m$.

والجدير بالذكر أن هذه القيمة العددية لـ ϵ قد تم تعيينها تجريبياً وليست بقياس القوة بين الشحنات المستقرة.

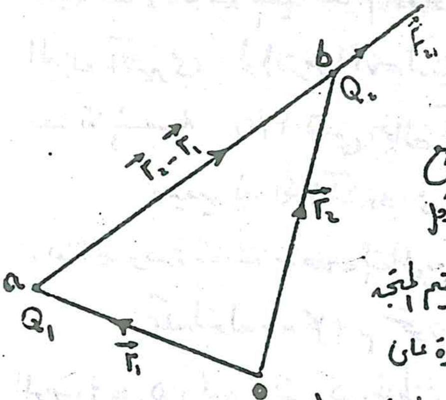
إن القوى الإلكتروستاتيكية هى قوى جسمية والتى تعنى أن القوة بين أى زوج من الشحنات لا تتغير بوجود الشحنات الأخرى فى جوارهم. وكما ذكرنا أن النيوتن هو وحدة قياس القوة ويمكن تعريفه بأنه تلك القوة المطلوبة لإعطاء كتلة مقدارها واحد كيلوجرام (kg) عجلة مقدارها واحد متر لكل ثانية لكل ثانية m/s^2.

أما الكولوم فهو وحدة قياس كبيرة جداً للشحنة وتقاس بالوحدات التالية الأصغر microcoulombs (μC) أو nanocoulombs (nC) أو picocoulombs (pC).

وعموماً فإن التركيب الذرى يتكون من ثلاث وحدات مواد أساسية هى: وحدة ذات شحنة سالبة وتسمى بالإلكترونات ووحدة ذات شحنة موجبة وتسمى بالبروتونات، هذا بالإضافة لوحدة متعادلة الشحنة تعرف باسم النيوترونات. والشحنة السالبة التى يحملها الإلكترون تتعادل من حيث المقدار الشحنة الموجبة التى يحملها البروتون وكلاهما تمثل أصغر كمية للشحنة، وتستخدم كمية

الشحنة e (مقدار شحنة الإلكترون أو البروتون) كوحدة طبيعية لقياس الشحنة ، بمعنى أن أي كمية من الشحنة تكون بمضاعفات صحيحة لهذه الكمية e .

القوة من الكميات المتجهة (لها مقدار وإتجاه ونقطة عمل ونقطة تأثير) . وبالنسبة لقانون كولوم فإن القوة تعمل على الخط الذي يصل بين الشحنتين . والصيغة الرياضية السابقة (2.1) يمكن كتابتها بدلالة متجهات الموضع للشحنات المختلفة بالنسبة لنقطة ثابتة o ، كما هو موضح بالشكل الذي أمامنا



وإذا فرضنا أن $\vec r_1$ هو متجه موضع الشحنة Q_1 عند النقطة a ، وأن $\vec r_2$ هو متجه موضع الشحنة Q_2 عند النقطة b ، فمن هندسة الشكل نجد أن $\vec R_{12} = \vec r_2 - \vec r_1$ يمثل الجزء من الخط المستقيم المتجه من a إلى b . القوة المتجهة $\vec F_{12}$ هي القوة المؤثرة على الشحنة Q_2 نتيجة لوجود الشحنة Q_1 والصيغة الإتجاهية لها بدلالة متجهات الموضع تعطى من

$$\vec F_{12} = \frac{Q_2 Q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec r_2 - \vec r_1|^3} (\vec r_2 - \vec r_1) = \frac{Q_2 Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \vec a_{12} \qquad (2.3)$$

حيث $\vec a_{12}$ هو متجه الوحدة في إتجاه المتجه $\vec R_{12}$. ومن الملاحظ أن متجه القوة في هذه الحالة يمكن تعيينه بدلالة ثلاثة مركبات تمثل مساقط تلك القوة على محاور الإحداثيات الثلاثة

إن القوة المعبر عنها بقانون كولوم هي عبارة عن قوة متبادلة بين الشحنتين Q_1 ، Q_2 ولها نفس المقدار لكل منهما ولكن في إتجاه متضاد وبذلك يكون

$$\vec F_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \vec a_{12} = -\vec F_{21} = -\frac{Q_2 Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \vec a_{21} \qquad (2.4)$$

حيث $R_{21} = R_{12} = |\vec R_{21}| = |\vec R_{12}|$.

بند 18: المجال الكهربي:

طبقاً لمبدأ التركيب ، نجد أن القوة الكلية المؤثرة على جسيم مشحون هي عبارة عن المجموع الإتجاهي للقوى المبذولة عليه بكل الشحنات الأخرى. عادة ما يوجد في المادة عدد هائل من الجسيمات المشحونة. وعند الأخذ في الإعتبار للقوى المؤثرة على أي واحد من تلك الجسيمات فإنه من المفيد تقديم المصادر المساهمة في القوة الفعلية وذلك بتقديم مفهوم المجال الكهربي. لو إفترضنا أنه لدينا شحنة ما ولتكن Q واقعة تحت تأثير قوة ما ولتكن F . نحصل إذن على النسبة F/Q تسمى المجال الكهربي عند النقطة حيث تقع الشحنة Q .

ونجد أن بعد المجال الكهربي في نظام الوحدات الدولية هو $(Newton)(Coulomb)^{-1}$

، هنالك وحدة مكافئة في حالات التعامل مع الطاقة الكهربية هي $Volt\ m^{-1}$.

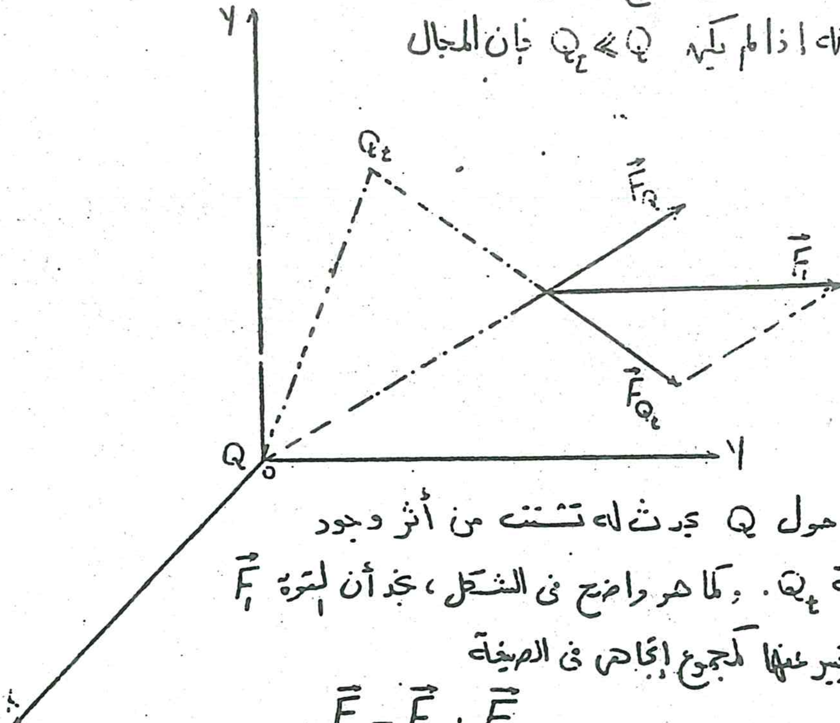
ويمكن القول بأن كل جسم مشحون يكون محاطاً بمنطقة تظهر فيها آثار الشحنة الكهربية الموجودة على هذا الجسم . تسمى هذه المنطقة بالمجال الكهربي للجسم المشحون ، بمعنى أنه عند وضع أي جسم آخر مشحون (ولتكن شحنة موجبة صغيرة Q_t "تسمى بشحنة إختبار") عند أي نقطة في هذه المنطقة سوف تتأثر بقوة تنافر أو تجاذب تبعاً لطبيعة شحنة الجسم صاحب المجال إذا كانت موجبة أو سالبة على الترتيب.

وتختلف شدة المجال الكهربي من نقطة لأخرى هذا إذا لم يكن المجال منتظماً ، أما إذا كان المجال منتظماً فإن شدته تكون ثابتة عند جميع النقط.

ولتعيين شدة المجال الكهربي نفترض أنه لدينا شحنة ما ولتكن Q موضوعة عند نقطة الأصل . ان شدة المجال الناشئة عن تلك الشحنة Q تكون كروية ومتماثلة وهذا يبدو واضحاً إذا كانت الشحنة عند نقطة الأصل . فإذا سمحنا لشحنة إختبار Q_t أن تتحرك ببطئ حول الشحنة Q فسوف تتولد قوة على طول الخط المستقيم الواصل بينهما ومتجهة من نقطة الأصل عند Q إذا كانت

الشحنات من نفس النوع. ويجب أن نلاحظ

هنا أنه إذا لم يكن $Q \gg Q_t$ فإن المجال



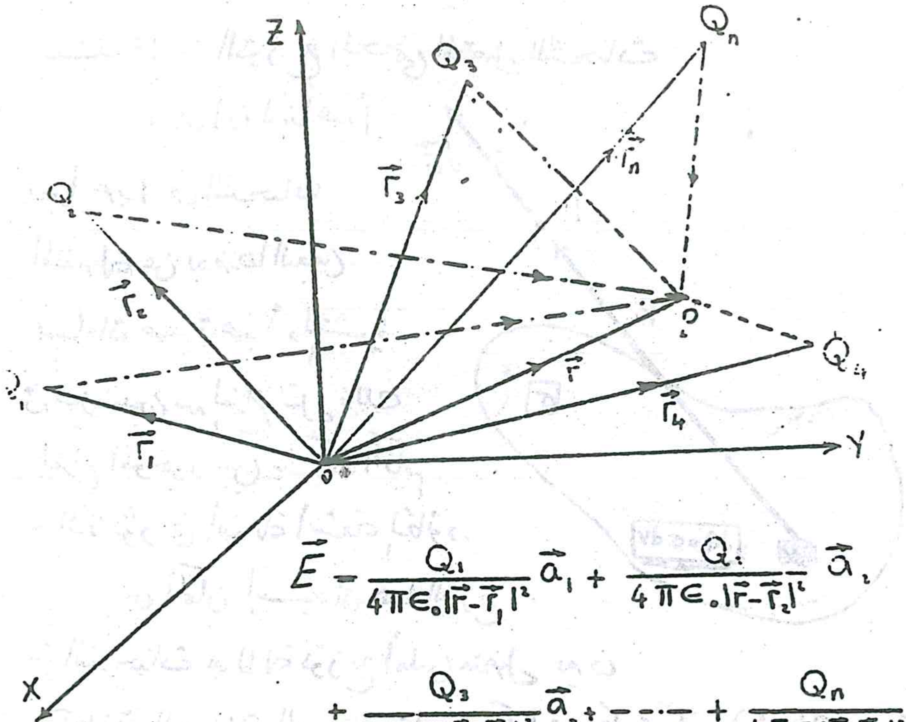
المتماثل حول Q يحدث له تشتت من أثر وجود الشحنة Q_t. وكما هو واضح في الشكل، نجد أن القوة $\vec{F}_1$ يمكن التعبير عنها كمجموع إتجاهي في الصيغة

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{Q_t} + \vec{F}_Q \qquad (2.5)$$

ونفرض أن الشحنة Q_t صغيرة لدرجة كافية لمنع التشتت في المجال الناشئ عن الشحنة النقطية Q عند نقطة الأصل o، فإن شدة المجال الكهربي $\vec{E}_1$ الناشئ عن هذه الشحنة النقطية Q هو عبارة عن القوة المؤثرة على وحدة الشحنات الموجبة في Q_t، أي أن

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_t} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_{1t}^2}\,\vec{a}_{1t} \qquad (2.6)$$

وهي تعتمد على الجزء الخطي R_{1t} المتجه من Q إلى Q_t. والمعادلة (.6) تعـ مجالاً كهربياً متجهاً $\vec{E}$ نتيجة شحنة نقطية واحدة Q في الفراغ. وعلى وجه العموم يمكن تعريف شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ الناتج عن الشحنة النقطية Q في الفراغ كا



$$\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_1|^2}\vec{a}_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_2|^2}\vec{a}_2$$

$$+ \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_3|^2}\vec{a}_3 + ---- + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_n|^2}\vec{a}_n \quad (2.9)$$

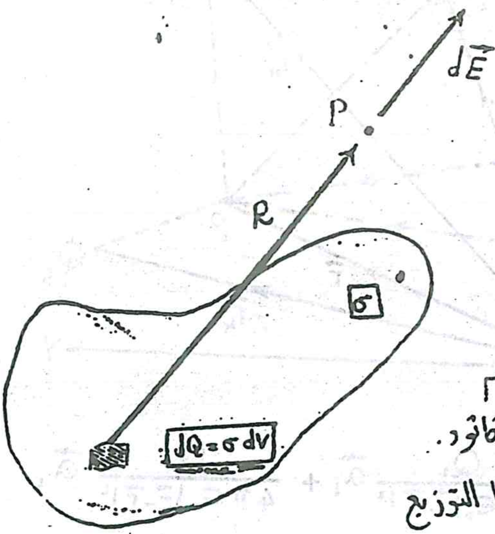
حيث $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots, \vec{a}_n$ هى متجهات وحدة فى إتجاه المتجهات $(\vec{r}-\vec{r}_1)$, $(\vec{r}-\vec{r}_2)$, ... $(\vec{r}-\vec{r}_n)$ على الترتيب. أى أنه يمكن كتابة شدة المجال الكهربى الكلية، عند نقطة ما ولتكن P، والتى متجه موضعها $\vec{r}$ فى الصيغة العامة التالية :

$$\vec{E} = \sum_{m=1}^{n} \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_m|^2}\vec{a}_m \quad (2.10)$$

حيث $\vec{a}_m$ هو الوحدة الإتجاهية فى إتجاه المتجه الواصل من موضع الشحنة Q_m إلى النقطة P المراد تعيين شدة المجال الكهربى عندها.

وفيما يلى سوف نعين الصيغ المختلفة لشدة المجال الكهربى الناتجة عن التوزيعات المختلفة للشحنات.

بند ١١ : التوزيع الحجمي المتصل للشحنات



نفرض أن لدينا عدداً كبيراً جداً من الشحنات المنفصلة عن بعضها البعض بمسافات صغيرة جداً ومنتشرة في حيز معين من الفراغ مثل ذلك الفراغ الموجود بين شبكة التحكم والكاثود في أنبوبة أشعة الكاثود.

من الممكن إستبدال هذا التوزيع من الشحنات بدلالة توزيع أملس متصل يعرف بكثافة الشحنة الحجمية وتقاس بالكولوم لكل متر مكعب (C/m^3). وكثافة الشحنة الحجمية σ_v تعرف بـ

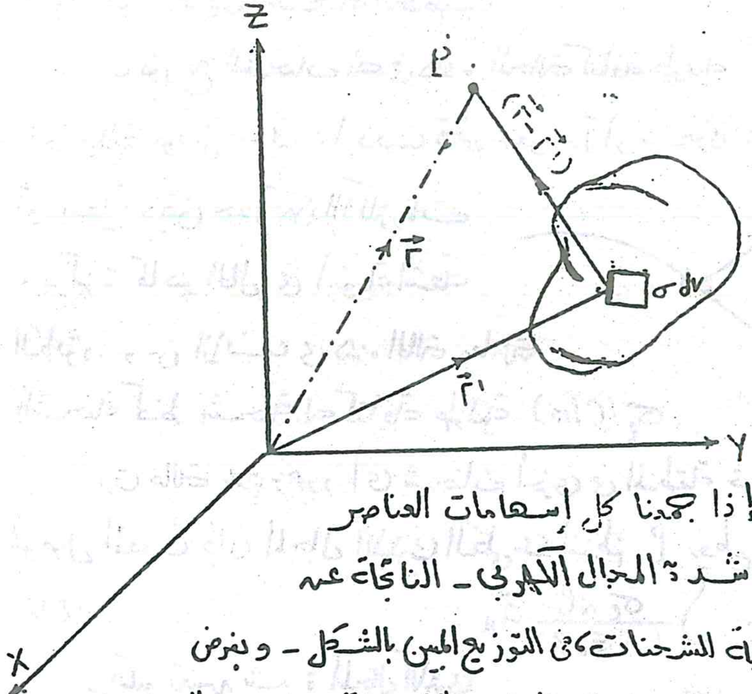
$$\sigma_v = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} = \frac{dQ}{dv} \qquad (2.11)$$

ويشير الدليل v إلى الحجم. والشحنة الكلية داخل حجم معين محدود يمكن تعيينها من

$$Q = \int_{vol} dQ = \int_{vol} \sigma\, dv \qquad (2.12)$$

ومن ذلك نجد أن الإسهام العنصري التزايدي لشدة المجال الكهربي، $\Delta\vec{E}(\vec{r})$، عند نقطة ما متجه موضعها $\vec{r}$ نتيجة لوجود عنصر شحنة ΔQ عند نفس الموضع يتعين من

$$\Delta\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \qquad (2.13)$$



و بالتالي إذا جمعنا كل إسهامات العناصر التزايدية في شدة المجال الكهربي - الناتجة عن العناصر الحجمية للشحنات، في التوزيع المبين بالشكل - و بفرض أن العنصر الحجمي ΔV المناظر لعنصر الشحنة يقترب من الصفر و أن عدد العناصر الحجمية الشحنة يصبح لا نهائياً عندئذ يتحول المجموع إلى تكامل على الحجم ، حيث

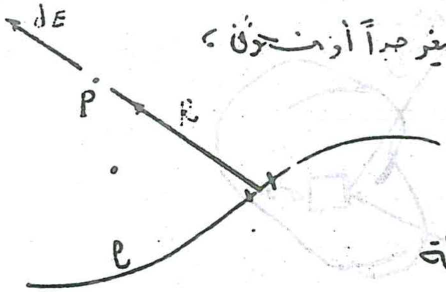
$$\vec{E}(r) = \int \frac{\sigma(\vec{r}')\,dv}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|^3} (\vec{r}-\vec{r}') \qquad (2.14)$$

حيث المتجه $\vec{r}$ مقاس من نقطة الأصل حتى النقطة التي يعين عندها المجال الكهربي $\vec{E}$. أما المتجه $\vec{r}'$ فهو يتجه من نقطة الأصل حتى المنبع حيث تقع الشحنة . والمسافة القياسية من المنبع حتى نقطة تعيين المجال هي $|\vec{r}-\vec{r}'|$. فإذا فرضنا أن $\vec{R} = (\vec{r}-\vec{r}')$ و $\vec{a}_R$ تشير متجه الوحدة في إتجاه $\vec{R}$ ، فإن العلاقة (2.14) تصبح

$$\vec{E}(r) = \int \frac{\sigma_v\, dv}{4\pi\epsilon_0 R^2}\, \vec{a}_R \quad , \quad \vec{a}_R = \frac{\vec{R}}{R} \qquad (2.15)$$

ب - ٥ - ٢ : مجال الشحنات الخطية

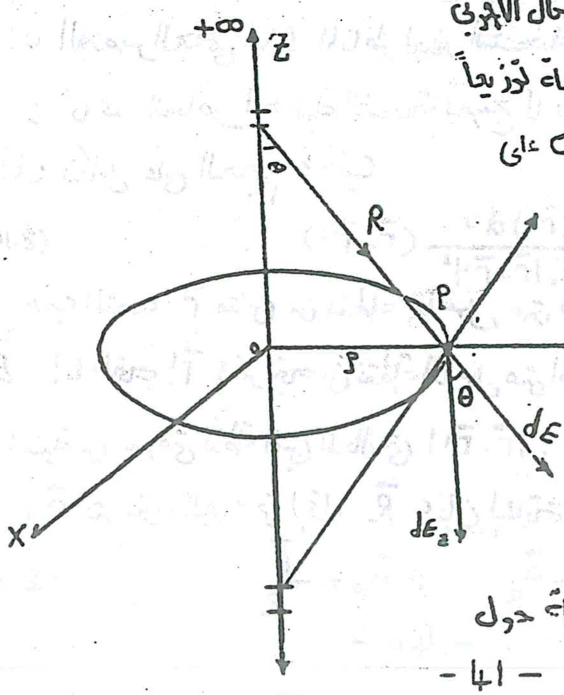
إن توزيع الشحنات له في هذه الحالة كثافة طولية كما في حالة موصل معدني ذا نصف قطر صغير جداً أو شحنة ، أو شعاع دقيق جداً من الإلكترونات ومركزة كما هو الحال في أنبوبة أشعة الكاثود. ومن الأنسب في هذه الحالة معاملة الشحنة كخط شحنة له كثافة طولية $\sigma_\ell\ (C/m)$.



وفي حالة عدم وجود أي شحنات أخرى في المنطقة عدا تلك التي من الموصل المعدني فإن المجال الكهربي الكلي عند النقطة P يعطى من

$$\bar{E} = \int \frac{\sigma_\ell \, d\ell}{4\pi\epsilon_0 R^2}\, \vec{a}_R \qquad (2.16)$$

ويمكن تعيين شدة المجال الكهربي $\bar{E}$ الناتج عن شحنة موزعة توزيعاً متجانساً ذو كثافة طولية σ_ℓ على طول خط مستقيم ممتد امتداداً لا نهائياً من $-\infty$ إلى $+\infty$ ومنطبق على محور Z مثلاً كما في حالة الإحداثيات الإسطوانية.



عندما تتحرك نقطة حول

خط الشحنة ، نجد أن قيمة المجال لا تتغير بتغير قيمة الزاوية Φ نظراً لوجود تماثل حول خط الشحنة.

أما إذا تحركنا إلى أعلى وأسفل خط الشحنة الممتد مسافة لانهائية في كلا الإتجاهين نجد أن كل عنصر طول تزايدي من خط الشحنة يعمل كشحنة نقطية ينتج عندها عنصر مساهمة تزايدي لشدة المجال الكهربي الموجه نحو الإبتعاد عن القطعة الصغيرة للشحنة (بفرض خط شحنة موجب). أي أن محصلة النهائية لشدة المجال الكهربي في إتجاه محور z ، E_z ، تتلاشى نظراً لأن مجال عناصر الشحنة أعلى وأسفل النقطة التي نعين عندها المجال يلاشي كل منها الآخر.

ومما سبق نجد أن هناك مركبة واحدة تتغير معها شدة المجال الكهربي وأن تتغير مع ρ فقط. المحصلة النهائية لشدة المجال الكهربي تساوي مجموع العناصر التفاضلية لشدة المجال الناتجة من عناصر الشحنة الطولية. وعندما يصبح كل عنصر طولي من خط الشحنة متناهياً في الصغر يتحول المجموع إلى تكامل ، حيث

$$\vec{E}(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_e \, dz}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{a}_R \qquad (2.17)$$

وبعد إجراء التكامل نحصل في النهاية على

$$\vec{E}(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_e \, \rho \, dz}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{\rho}_0 \quad \frac{\sigma_e}{2\pi\epsilon_0 \rho} \vec{\rho}_0 \qquad (2.18)$$

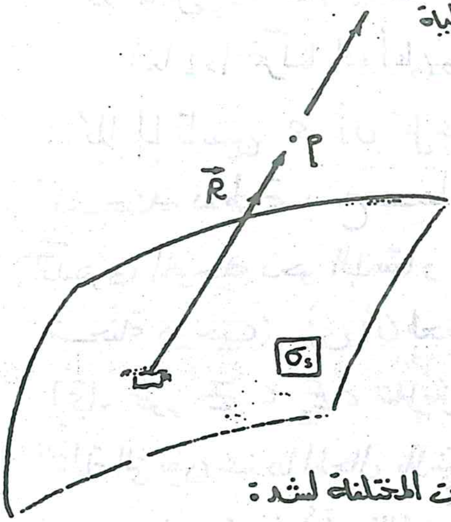
حيث متجه الوحدة $\vec{a}_R = \dfrac{\rho \vec{\rho}_0 - z\vec{k}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$. ويمكن صياغة النتيجة (18.) كالآتي

$$\vec{E}(\rho) = E_\rho \vec{\rho}_0 \qquad (2.19)$$

حيث E_ρ هي مركبة شدة المجال الكهربي في إتجاه نصف القطر الدائري. وكما سبق أن أشرنا أن المركبة الثانية للمجال تتلاشى.

بند 21 : التوزيع السطحي للشحنات .

يوجد توزيع آخر للشحنات وهي الشحنات السطحية ذات الكثافة المنتظمة $\sigma_s \, (C/m^2)$. الشحنة الإستاتيكية



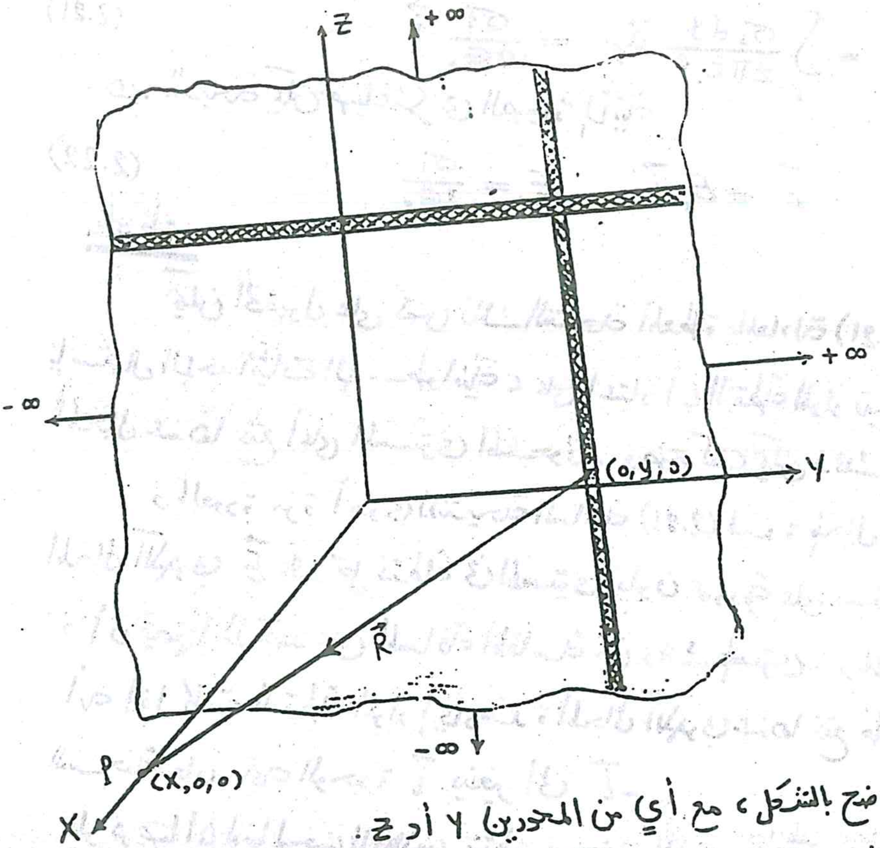
تستوطن أسطح الموصلات وليس بداخلها ولهذا فإن σ_s تسمى بالكثافة السطحية للشحنة. عندئذ كل عنصر شحنة سطحي ينشأ عنه عنصر مساهمة في شدة المجال الكهربي.

وشدة المجال الكهربي عند نقطة ما، ولتكن P مثلاً ، هي محصلة المساهمات المختلفة لشدة المجال المناظرة لعناصر الشحنة السطحية. وعندما تصبح العناصر السطحية ، الحاملة لعناصر الشحنة ، صغيرة بدرجة متناهية في الصغر عندئذ يتحول المجموع إلى تكامل حيث نحصل في النهاية على

$$\vec{E} = \int \frac{\sigma_s \, dS}{4 \pi \epsilon_0 R^2} \, \vec{a}_R \qquad (2.20)$$

وذلك على إعتبار أنه لا توجد شحنات أخرى في المنطقة غير تلك التي توجد على السطح S .

وسوف نوضح فيما يلي الكيفية التي تمكن تعيين بها قيمة التكامل (2.20) .
نفرض أنه لدينا سطح لانهائي مستو وأن كثافة الشحنة السطحية له هي σ_s مثلاً وبتقسيم اللوح المستو اللانهائي إلى عناصر (شرائح) طولية تفاضلية العرض، ونطبق النتيجة (2.20) مباشرة نجد أن شدة المجال الكهربي عند نقطة ما لا تتغير



كما هو موضح بالشكل ، مع أي من المحورين Y أو Z .

والسبب في هذا يرجع إلى أن المركبتين الناتجتين من العناصر التفاضلية للشحنة الموجودة في كل شريحة تفاضلية متماثلة ، متماثلتين بالنسبة للنقطة المراد تعيين شدة المجال عندها سواء في اتجاه محور Y أو في اتجاه محور Z .

أي أن المركبة الوحيدة الموجودة هي تلك التي تعمل في اتجاه محور X .

نفرض أن عنصر الشحنة لكل وحدة طول على كل شريط تفاضلي هي $\rho_L = \sigma_s \, dy$

ونفرض كذلك أن المسافة من عنصر ما على الشريحة إلى النقطة ، المطلوب تعيين شدة المجال عندها هي R . وباستخدام نتيجة البند السابق مباشرة ، نجد أ

شدة المجال الكهربي المحصلة تتعين من

$$\vec{E} = \int \frac{\sigma_s \, dy}{2\pi\epsilon_0 R} \vec{a}_R = \frac{\sigma_s}{2\epsilon_0} \vec{i} \quad (2.21)$$

وهذه النتيجة يمكن صياغتها في الصورة الآتية

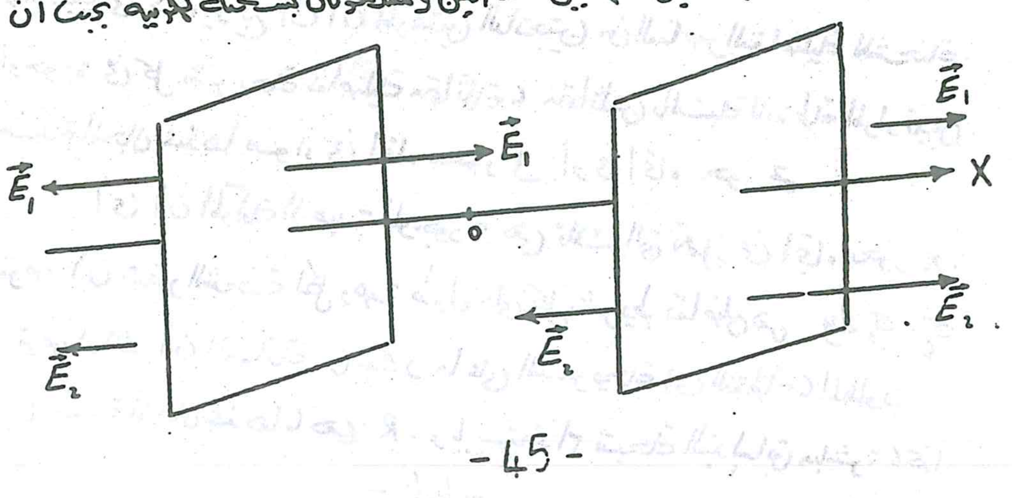
$$\vec{E} = E_x \vec{i} \ , \quad E_x = \frac{\sigma_s}{2\epsilon_0} \quad (2.22)$$

ملحوظة:

يمكن الحصول على نفس تلك النتيجة المعطاة بالمعادلة (2.21) ، وذلك باستعمال الإحداثيات الإسطوانية ، على إعتبار أن النقطة المراد تعيين شدة المجال عندها تقع أعلى المستوى المشحون . وضح كيف يمكن ذلك ؟

وبالعودة مرة أخرى للنتيجة السابقة (2.21) لشدة المجال نجد أن شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ عند كل نقطة في المستوى تكون عمودية على مستوى الشحنة ، أن قيمتها لا تعتمد على المسافة المقاسة من ذلك المستوى . ونلاحظ كذلك أنه إذا كانت النقطة المراد إيجاد شدة المجال الكهربي عندها تقع خلف مستوى الشحنة فإن متجه الوحدة $\vec{i}$ يتغير إلى $-\vec{i}$.

فلو فرضنا أن لدينا لوحين لانهائيين منتظمين ومشحونان بشحنة كهربية يجب أن



الكثافة السطحية لشحنة أى منهما هى σ_s. نفرض أن هذين اللوحين عند
عند الموضعين $x = \pm a$.

شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ الناتج من هذين اللوحين، فى المناطق المختلفة
الموضحة بالرسم تتعين من

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{cases} -\dfrac{\sigma_s}{\epsilon_0}\vec{i} & x < -a \\ 0 & -a < x < a \\ \dfrac{\sigma_s}{\epsilon_0}\vec{i} & x > a \end{cases} \qquad (2.23)$$

من الممكن أيضاً تعيين شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ فى تلك المواضع المختلفة
فى الحالات المختلفة للكثافات السطحية على اللوحين. فإذا كانت الكثافة لـ
للشحنة على اللوح الخلفى هى $-\sigma_s$، فإن شدة المجال تتعين من

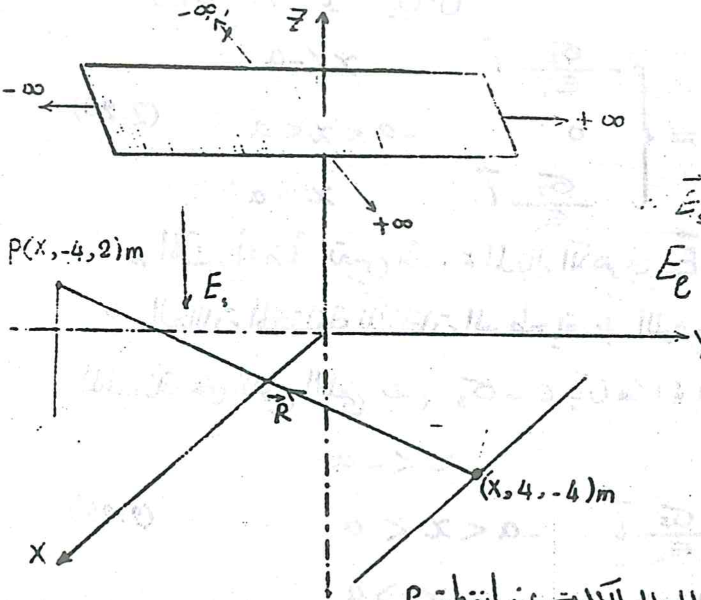
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{cases} 0 & x < -a \\ -\dfrac{\sigma_s}{\epsilon_0}\vec{i} & -a < x < a \\ 0 & x > a \end{cases} \qquad (2.24)$$

وهكذا لو كان لدينا أكثر من لوح معدنى موصل مشحون بحيث تكون هذ
المجموعات من الألواح عمودية على أحد المحاور، فإنه يمكن إيجاد شدة المجـ
الكهربي المحصل فى المواضع المختلفة أياً كانت الكثافات السطحية الشحنـ
الموضوعة على هذه الألواح.

وهناك تطبيق هام لهذه النتيجة التى تم الحصول عليها فى هذا ا
والتى تعطى قيمة المجال الكهربي بين لوحين، حيث أنها تعطى المجال الكهربي
لوحين متوازيين لمكثف هوائى بشرط أن تكون المسافة البينية أصغر من أبعادهما با

: لوح معدني مشحون بكثافة شحنة منتظمة $\sigma_s = \frac{1}{18\pi}(nC/m^2)$ ، موضوع عند $Z = 5m$. وخط شحنة منتظم مشحون بكثافة شحنة ذات منتظمة موجب $\sigma_\ell = \frac{8}{9}(nC/m)$ ؛ ويوازي محور x ويمر بالنقطة $Y=4m$, $Z=-4m$. أوجد شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ عند النقطة $(X,-4,2)$

الحل :



$$\sigma_s = \frac{1}{18\pi}\ (nC/m^2)$$

$$\sigma_\ell = \frac{8}{9}\ (nC/m)$$

$$\therefore \vec{E}_s = -\vec{K}\ \ V/m$$

$$E_\ell = 1.6\ \ V/m$$

وبالتالي فإن شدة المجال الكلية عند النقطة P هي محصلة المجال الناتج عن المستوى المشحون بالإضافة للمجال الناتج عن الخط المنتظم المشحون أيضاً ، حيث

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_\ell = -\vec{K} + 1.6\ \vec{a}_R$$

$$\therefore \vec{E} = -1.28\ \vec{J} - 0.04\ \vec{K}$$

أي أن المجال الاتجاه سالب في حين أن قيمته العددية تقريباً 1.2806 . وبالمثل أيضاً يمكن تعيين شدة المجال الكهربي المحصل عند أي نقطة أو موضع في الفراغ .

تمارين

1- شحنتان نقطيتان $Q_1 = 50\,\mu C$ ، $Q_2 = 10\,\mu C$ موضوعتان عند النقطتين (1,-3 و (3,1,0). أوجد القوة المؤثرة على الشحنة Q_1.

2- أوجد القوة التي تؤثر على الشحنة $Q=100\,\mu C$ والموضوعة عند النقطة $(0,0,3)\,m$ نتيجة لوجود أربع شحنات قيمة كل منها $20\,\mu C$ وتقع على محوري x, y عند $x=y=\pm 4m$

3- شحنة نقطية $Q_1=300\,\mu C$ عند النقطة $(1,-1,-3)m$ تلاقي قوة $=8\vec{i}-8\vec{j}+4\vec{k}\,N$ نتيجة لوجود شحنة نقطية $Q_2\,\mu C$ عند النقطة $(3,-3,-2)m$. أوجد الشحنة Q_2.

4- أوجد القوة التي تؤثر على شحنة نقطية قيمتها $30\,\mu C$ عند النقطة $(0,0,3)m$ والناتجة عن وجود شحنة قدرها $200\,\mu C$ والموزعة توزيعاً منتظماً على القرص الدائري $0, r \le 6m$

5- أوجد شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ عند نقطة الأصل والناتجة عن شحنة نقطية قدرها nC وموضوعة عند النقطة (2,3,-4) وذلك في الإحداثيات الكارتيزية.

6- أوجد شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ عند النقطة $(0,0,3)m$ والناتجة عن الشحنة $Q_1=0.35\,\mu C$ عند النقطة $(0,4,0)m$ والشحنة $Q_2=-0.52\,\mu C$ عند النقطة $(3,0,0)m$.

7- خط شحنة منتظم يوازي محور z ويمر بالنقطتين $x=2m$ ، $y=-4m$ وله توزيع منتظم له الكثافة $\rho_\ell=20\,nC/m$. أوجد شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ عند النقطة $-1,4)m$

8- شحنة تقع على المستوى $z=-4m$. أوجد شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ عند نقطة الأصل، إذا أن المستوى مربع الشكل حيث $-2\le x\le 2m$ ، $-2\le y\le 2m$ وله شحنة سطحية منتظمة التوزيع حيث $\sigma_s=(x^2+y^2+16)^{3/2}\,nC/m^2$.

٩- يحتوي مستوى $x+3y-6z=6m$ على شحنة سطحية منتظمة الكثافة السطحية $\sigma_s = 0.52\ nC/m^2$. أوجد شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ في الجانب الذي يحتوي على نقطة الأصل.

١٠- استنتج صيغة لشدة المجال الكهربي $\vec{E}$ في الإحداثيات الكارتيزية والناتجة عن خط شحنة لانهائي الطول ويحتوي على توزيع شحنة طولية منتظمة الكثافة σ_ℓ.

١١- بين أن شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ خارج قشرة كروية منتظمة ومشحونة بشحنة منتظمة الكثافة σ_s لها نفس قيمة المجال الناشئ عن شحنة نقطية عند المركز ولها نفس قيمة الشحنة الكلية الموجودة على سطح القشرة الكروية.

١٢- قرص دائري معدني $z=0,\ r\le 1m$ له توزيع شحنة منتظم الكثافة حيث تعطى كثافته السطحية بالعلاقة $\sigma_s = 2(\rho^2+25)^{3/2} e^{-10\rho}\ C/m^2$. أوجد شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ عند النقطة $(0,0,6)m$.

13- بين أن شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ لها قيمة صفرية في كل موضع داخل قشرة كروية مشحونة بشحنة منتظمة.

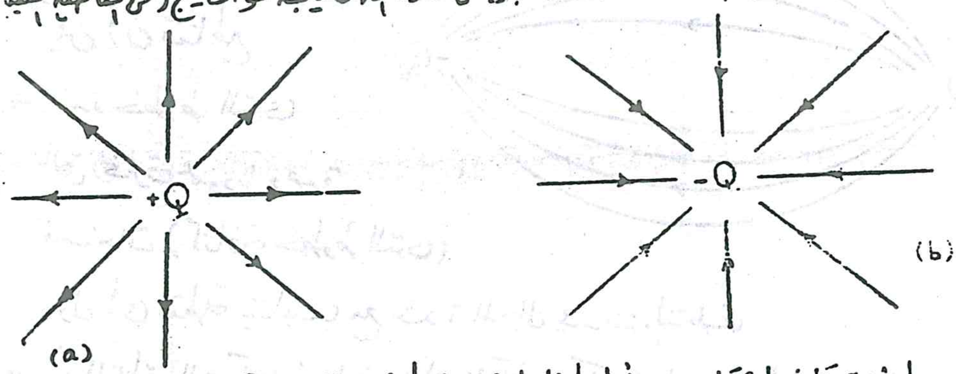
14- شحنة موزعة بانتظام داخل حجم كروي نصف قطره a، وشدة الشحنة لها كثافة σ ثابتة. بين أن شدة المجال الكهربي تعطى من

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{r\sigma}{3\epsilon_0}\,\vec{a}_r & r \le a \\[2ex] \dfrac{a^3\sigma}{3\epsilon_0 r^2}\,\vec{a}_r & r \ge a \end{cases}$$

حيث r هي المسافة مقاسة من مركز الكرة، $\vec{a}_r$ هو متجه الوحدة في إتجاه نصف قطر الكرة (في إتجاه تزايد نصف قطر الكرة r).

البند 22: كثافة الفيض الكهربي.

عند فحص خصائص المجال الكهربي في جوار مجموعة من الشحنات النقطية لـ
وُجِدَ أن قيمة المجال الكهربي عند مسافة r من شحنة نقطية Q+ تتعيّن كما
أن أشرنا من المعادلة (2.7). والمجال في هذه الحالة يتجه نحو الخارج (من الناحية الحيب



من الشحنة كما في الشكل a. أما المجال لشحنة نقطية سالبة Q- فله نفس الحجم
ويشير للداخل نحو الشحنة كما في الشكل b. وكما هو واضح من الرسم نجد أن إتجاه المجال حول الشحنة
الموجبة والسالبة يُشار إليه بخطوط عليها أسهم. وهذه الخطوط المتصلة التي تتبع اتجاه المجال
تسمى بخطوط القوى. وحيث أن اتجاه المجال على وجه العموم يختلف من نقطة لأخرى فإن
خطوط القوى غالباً ما تكون على شكل منحنيات.

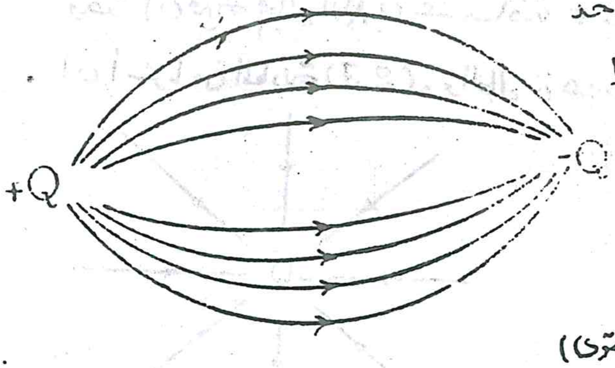
وخط القوى في المجال الكهربي هو خط وهمي بحيث المماس له عند أي نقطة
له نفس إتجاه المجال عند هذه النقطة.

وكل خط من خطوط القوى في أي مجال كهروستاتيكي (عدا المجال الكهربي الناشئ
من التغير في المجال المغناطيسي) هو عبارة عن خط متصل بادئاً من شحنة موجبة ومنتهياً
سالبة. وكما هو واضح من الشكل a أن خطوط المجال حول الشحنة المعزولة Q

تنتهي بشحنات سالبة. وهذا يعني أن الشحنات السالبة والتي يجب أن تنتهي عندها خطوط القوى تقع على مسافات بعيدة من الشحنة المعزولة ذات الإعتبار ومن أهم خواص خطوط القوى تلك هي ما يلي:

* عند أي نقطة يأخذ المجال إتجاهاً محدداً ومن هنا فإن أي نقطة لا يمكن أن يمر بها أكثر من خط واحد

وهذا يعني أن خطوط القوى لا يمكن أن تتقاطع.



* عدد خطوط القوى التي تخترق عمودياً وحدة المساحات (كثافة خطوط القوى) حول أي نقطة يتناسب مع شدة المجال عند هذه النقطة.

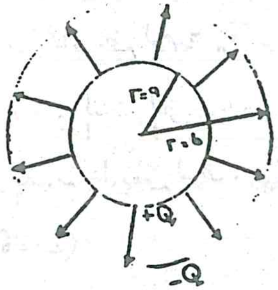
* في المناطق التي تكون فيها شدة المجال الكهربي كبيرة تتقارب خطوط القوى، حيث توجد الشحنات، كما أنها، خطوط القوى، تتباعد عند المسافات الكبيرة حيث يكون المجال ضعيفاً.

وحيث أن المجال الكهروستاتيكي حول شحنة نقطية معزولة Q+ يمثل بخطوط مشعة في جميع الإتجاهات حول الشحنة الموجبة، فإنه يمكن التوصل إلى فكرة تقريبية عن المجال حول التوزيعات المختلفة للشحنة وذلك عن طريق رسم خطوط القوى.

وإنه لمن المهم هنا أن نلجأ إلى مفهوم التدفق (الفيض) الكهربي الذي ينساب للخارج متماثلاً من الشحنة النقطية وينطبق على خطوط الإنسياب (القوى)، ثم نتصور هذا التدفق الكهربي كلما وجد مجالاً كهربياً.

ولدراسة المجالات الكهروستاتيكية وتأثير المواد العازلة المختلفة على هذه المجالات

تجدر بنا الإشارة إلى التجربة التي أجراها فاراداي - على سطحين كرويين موصلين ومتحدين المركز ونصفي قطريهما مختلفين وبينهما مادة عازلة - والتي بينت أن الشحنة الكلية على الكرة الخارجية تكون مساوية في المقدار الشحنة الأصلية الموجودة



على الكرة الداخلية. وهذه النتيجة صحيحة لأي مادة عازلة تفصل بين هذين السطحين الكرويين. وهذه التجربة أدت إلى استنتاج ما يسمى بالتدفق (الفيض) الكهربي. كما أنها بينت أن هناك تناسباً طردياً بين التدفق (الفيض) الكهربي والشحنة الموجودة على الكرة الداخلية. وذلك لأنه كلما زادت الشحنة الموجودة على الكرة الداخلية إزدادت تبعاً لذلك الشحنة السالبة على الكرة الخارجية.

وباستخدام نظام الوحدات الدولي في القياس وُجد أن ثابت التناسب بين التدفق أو الكهربي Ψ والشحنة الكلية الموجودة على سطح الكرة الداخلية Q يساوي الوحدة، أي

$$\Psi = Q \tag{2.25}$$

فإذا كانت Q كولوم هي الشحنة الكلية الموضوعة على الكرة الداخلية وموزعة على سطح هذه بانتظام فإنه ينتج عنها Ψ ($= Q$) كولوم من التدفق الكهربي والممتد من الكرة الداخلية إلى الكرة الخارجية في إتجاه خطوط الإنسياب وموزعة بتماثل على سطح هذه الكرة. فإذا كان a هو نصف قطر الكرة الداخلية، فإن كثافة التدفق على هذا السطح هي $\frac{\Psi}{4\pi a^2}$ (C/m^2) أو $\frac{Q}{4\pi a^2}$ (C/m^2). وباستخدام نظام الوحدات الدولي للقياس فإن كثافة الفيض تقاس بالكولوم لكل متر مربع أو عدد الخطوط لكل متر مربع (لأن كل خط فيض ينتج من شحنة مقدارها كولوم واحد).

والفيض الكهربي Ψ هو كمية قياسية بينما كثافة الفيض الكهربي $\vec{D}$ هي كمية متجهة ولها نفس

اتجاه خطوط الفيض.

فإذا كانت خطوط الفيض المجاورة للنقطة P

لها اتجاه متجه الوحدة $\vec{a}_n$ ونفرض أن $d\Psi$

هي كمية الفيض التي تعبر اتجاه المساحة المتناهية الصغر ds

والعمودية على متجه الوحدة $\vec{a}_n$ فإن كثافة الفيض عند النقطة P تعطى من

$$\vec{D} = \frac{d\Psi}{dS}\,\vec{a}_n \qquad (2.25)$$

باب 2.3: قانون جاوس)

إذا أثار تركيز الشحنة الداخلية الموجودة على سطح الموصل الكروي في البند السابق تجربة فراداي

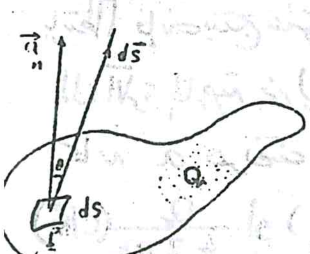
شحنة ذات قيمة معينة مركز هذا الموصل الكروي فإن الشحنة الكلية الناتجة بالحث على الكرة

الخارجية ستظل كما هي حتى لو كان سطح الموصل الداخلي مكعب. وذلك لأن كل كولوم واحد من

الشحنة ينتج عنه كولوم واحد من الفيض (المندفع) الكهربي. أي أن $+Q$ Coulombs على

أي موصل داخلي سوف ينتج شحنة سالبة بالحث قيمتها $-Q$ Coulombs على السطح الكروي

للموصل الخارجي. أي أن $\Psi = Q$ خط فيض كهربي.



نفرض أن لدينا شحنة حجمية كثافتها هي $\rho_v\ (C/m^3)$

وهذه الشحنة موزعة داخل سطح مغلق مساحته S كما لو كانت

سحابة من الشحنات النقطية. فإذا كانت Q كولوم هي

الشحنة الكلية داخل هذا السطح فإن Q كولوم من الفيض

سوف تمر خلال هذا السطح المحتوي الشحنة. ويجب أن نلاحظ هنا أن كثافة الفيض تختلف

في المقدار والاتجاه من نقطة إلى أخرى على السطح S (لأنه غير متماثل أو منتظم). أي

كثافة الفيض $\vec{D}$ عند أي نقطة على السطح سيكون لها قيمة ما اتجاهها الاتجاه العمودي على

ونفرض أن كثافة الفيض $\vec{D}$ عند نقطة ما ولتكن P تصنع زاوية θ مع العمودي على المستوى الذي يحتوي عنصر المساحة ds عند تلك النقطة. عنصر الفيض $d\psi$ الذي يعبر عنصر المساحة ds يعطى بـ

$$d\psi = D\, ds \cos\theta$$

$$= \vec{D} \cdot ds\, \vec{a}_n = \vec{D} \cdot d\vec{S} \qquad (2.27)$$

حيث $d\vec{S}$ هو عنصر متجه المساحة له المقدار ds والاتجاه $\vec{a}_n$. واتجاه متجه الوحدة مأخوذ دائماً من نقطة على السطح في الاتجاه العمودي على السطح إلى نقطة خارج هذا السطح ولذلك فإن كمية الفيض $d\psi$ تمر دائماً من داخل السطح S إلى خارجه خلال عنصر المساحة

وبتطبيق الصيغة (3.3) لكمية الفيض $d\psi$ على سطح مغلق S نحصل على

$$\psi = \oint\!\!\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \qquad (2.28)$$

وهذه الصيغة تعرف باسم قانون جاوس والذي ينص على أن "الفيض الكهربي خلال سطح مغلق يساوي الشحنة الكلية المحتواة بذلك السطح".

فإذا كانت الشحنة الكلية المحصورة بواسطة ذلك السطح هي عبارة عن شحنات نقطية فإن

$$Q = \sum_n Q_n \qquad (2.29)$$

وإذا كانت الشحنة طولية فإن

$$Q = \int \rho_l\, dl \qquad (2.30)$$

وإذا كانت الشحنة ذات توزيع سطحي فإن

$$Q = \int \rho_s\, ds \qquad (2.31)$$

أما إذا كانت الشحنة ذات توزيع حجمي فإن

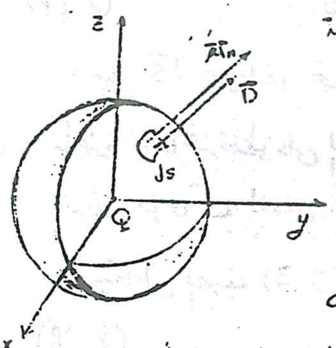
$$Q = \int \rho_v\, dv \qquad (2.32)$$

ونظرية جاوس لها أهمية كبيرة في هذا المجال لأن لها تطبيقات متعددة.

٢-٤: تطبيقات قانون جاوس

سوف نتعرض فيما يلي لبعض تطبيقات قانون جاوس ونذكر منها ما يلي

I - استنتاج العلاقة بين الكثافة الفيضية وشدة المجال الكهربي .



اعتبر شحنة نقطية Q ذات شحنة موجبة مثلاً وموضوعة عند نقطة أصل الإحداثيات . فإذا كانت هذه الشحنة محاطة بسطح كروي مثلاً وله نصف قطر r

من التماثل نجد أن الكثافة الفيضية D الناتجة عن الشحنة Q لها قيمة ثابتة عند كل نقطة على السطح . كما أن الكثافة الفيضية تكون عمودية على السطح عند كل نقطة عليه . وبالتعويض في قانون جاوس نجد أن

$$Q = \oint\!\!\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s} = D \oint\!\!\oint_s ds$$

$$= D(4\pi r^2)$$

$$\therefore D = \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad (2.33)$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{a}_n = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{a}_r \qquad (2.34)$$

وكذلك نعلم مما سبق أن شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ الناتجة عن الشحنة Q تعطى من

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{a}_r \qquad (2.35)$$

وبمقارنة النتيجتين (3.10) و(3.11) نجد أن

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \qquad (2.36)$$

وعموما لأي مجال كهربي $\vec{E}$ في وسط متجانس له معامل نفاذية ϵ يكون

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \qquad (2.37)$$

... ومن هنا نلاحظ أن متجهات كل من $\vec{E}$ و $\vec{D}$ يكون لها نفس الاتجاه ويختلفان فقط في معامل ثابت

يتوقف على الوسط. لأن المجال الكهربي E الناتج عن شحنة Q يكون دالة في معامل النفاذية للوسط بينما كثافة الفيض D لا تتوقف على هذا المعامل.

II - تعيين شدة المجال الناتج عن شحنة منتظمة.

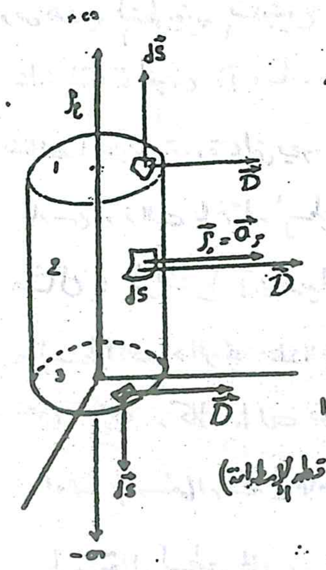
ب - السطح الكروي المستخدم فيما سبق يمكن اعتباره سطح جاوس خاص لأنه يحقق الشروط الآتية:

1 - السطح مغلق

2 - عند كل نقطة من السطح نجد أن كثافة الفيض D إما متعامدة أو مماسة للسطح

3 - كثافة الفيض لها نفس القيمة عند كل نقط السطح حيث D تكون عمودية

ومن ذلك يتضح أن قانون جاوس يعتمد أساساً على التماثل وإلا فلا يمكن استخدام هذا القانون للحصول على حل لبعض المسائل الهامة.



الشحنة الخطية تقابلنا في كثير من المسائل ولا نعرف المجال الناتج عنها حول الشحنة نفترض هذه الحالة أن خط الشحنة المنتظمة يقع على طول محور z من الإحداثيات الإسطوانية. من الواضح أن شدة المجال لا تتغير عند جميع النقط التي لها نفس البعد عن محور الإسطوانة. ومن تماثل الإسطوانة حول محورها نجد أن كثافة الفيض لها مركبة واحدة فقط دالة في ρ (نصف قطر الإسطوانة)

$$\vec{D} = D_\rho \vec{a}_\rho = D_\rho \vec{\rho}_0 \qquad \text{في } D_\rho = f(\rho) \quad (2.38)$$

وهذا يدل أن أنسب اختيار لسطح جاوس هو السطح الإسطواني. وحيث يتكون هذا السطح من ثلاثة سطوح محددة. وبتطبيق نظرية جاوس على سطح إسطواني دائري مغلق نجد

$$Q = \int_1 \vec{D}\cdot\vec{ds} + \int_2 \vec{D}\cdot\vec{ds} + \int_3 \vec{D}\cdot\vec{ds} \quad (2.39)$$

تتلاشى التكاملات السطحية على كل من السطح الأول والثالث نظراً لتعامد كل من $\vec{D}$ ، $d\vec{S}$ له ويتوازى كل من $\vec{D}$ ، $d\vec{S}$ على السطح الثاني وتكون قيمة D ثابتة إذا كانت ρ ثابتة

$$\therefore Q = \iint_{2} \vec{D}\cdot d\vec{S} = D(2\pi\rho l)$$

حيث l هو طول محور الإسطوانة. ولكن الشحنة الكلية داخل محور الإسطوانة هي $Q=\sigma_l l$

$$\therefore D = \frac{\sigma_l}{2\pi\rho} \qquad (2.40)$$

أما شدة المجال الكهربي في اتجاه ρ (نصف قطر الإسطوانة) تكون

$$E_\rho = \frac{\sigma_l}{2\pi\epsilon\rho} \qquad (2.41)$$

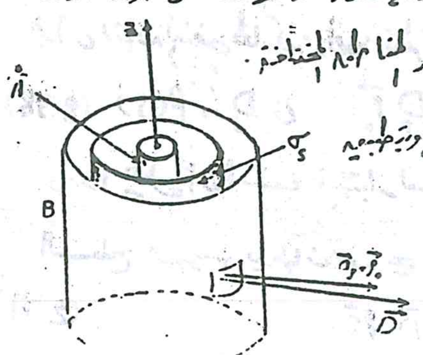
وعليه نقول بأن نظرية جاوس ينتفع بها في حالة الأسطح الجاوسية ذات التماثل بالنسبة لتوزيع الشحنات.

ومن هذين التطبيقين السابقين نجد أن التكامل يؤول إلى كتابة مساحة السطح الذي تكون ثابتة الإزاحة العمودية D متعامدة عليه.

هناك أمثلة متعددة والتي يصعب التكامل عليها من وجهة نظر قانون كولوم، والتي تحل بنظرية جاوس، وذلك باختيار السطح المناسب للتكامل.

مثال: لو اعتبرنا أن لدينا شحنة خطية منتظمة الكثافة الطولية σ_l ومنطبقة على محور z مع أسطوانة دائرية متحدة المحور مع خط الشحنة ونصف قطرها a وكثافتها السطحية σ_s وكلاهما له توزيعات شحنة ممتدة إلى ما لانهاية على طول محور z.

أوجد باستعمال نظرية جاوس التدفق الكهربي عند المناطق المختلفة.



باستعمال السطح الجاوسي A المبين في الشكل وبتطبيق نظرية جاوس عليه نحصل على

$$\vec{D} = \frac{\sigma_l}{2\pi\rho}\vec{a}_\rho \qquad 0<\rho<a$$

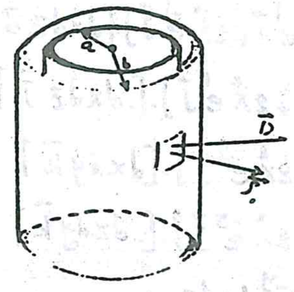
وباستعمال السطح الجاوسي B نحصل على

$$(\sigma_\ell + 2\pi a\sigma_s)\ell = \int \vec{D}\cdot d\vec{s} = D\int ds = D(2\pi\rho\ell)$$

$$\therefore D = \frac{\sigma_\ell + 2\pi a\sigma_s}{2\pi\rho} \quad ; \quad \rho > a$$

$$\therefore \vec{D} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_\ell}{2\pi\rho} & 0<\rho<a \\[2ex] \dfrac{\sigma_\ell + 2\pi a\sigma_s}{2\pi\rho} & \rho > a \end{cases}$$

مثال: إدرس كثافة الفيض D وذلك لإسطوانتين متحدتين المحور وطولها لانهائي لا... ... نصف قطر الداخلية a والخارجية b مع العلم بأن الإسطوانة الداخلية لا ... الكثافة السطحية σ_s على سطحها الخارجي.



الحل: نختار سطح جاوس في هذه الحالة ليكون عبارة عن إسطوانة دائرية قائمة طولها ℓ ونصف قطرها $a<\rho<b$ فنحصل مباشرة على

$$Q = D(2\pi\rho\ell)$$

أما بالنسبة للشحنة الكلية على سطح الإسطوانة الداخلية فهي

$$Q = \int \sigma_s ds = (2\pi a\sigma_s)\ell$$

وبالمقارنة نحصل على $\sigma_\ell \ell = 2\pi b\sigma_s \ell$

$$b\sigma_s = \frac{\sigma_\ell}{2\pi} \qquad \vec{D} = \frac{a\sigma_s}{\rho}\vec{\rho} \qquad a<\rho<b$$

وعلينا التعبير عن هذه النتيجة أيضاً بدلالة الشحنة لوحدة الأطوال σ_ℓ، فنحصل:

$$\therefore \vec{D} = \frac{\sigma_\ell}{2\pi\rho}\vec{\rho}$$

وهذه النتيجة تتفق تماماً مع الحالة التي لخط شحنة لانهائي كثافة الشحنة الطولية له هي σ_ℓ

مثال :

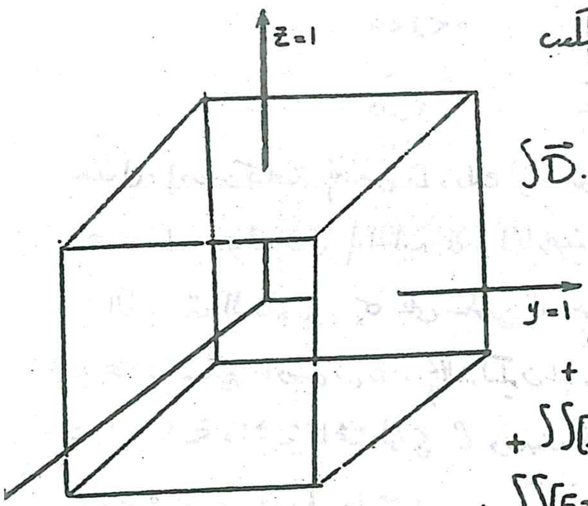
إذا كانت كثافة التدفق تتعين من $\vec{D} = 5x e^{-y}\vec{i} + 2x^2 e^{-y}\vec{J} \;\; \mu C/m^2$

إحسب التدفق الكلي الخارج من سطح المكعب المكون بـ $|x|, |y|, |z| \le 1$

الحل :

لحساب التدفق الكلي الخارج من سطح المكعب

نجد أن



$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = \iint [5e^{-y}\vec{i}+2e^{-y}\vec{J}]\cdot[dy\,dz\,\vec{i}]$$
$$+\iint[-5e^{-y}\vec{i}+2e^{-y}\vec{J}]\cdot[-dy\,dz\,\vec{i}]$$
$$+\iint[5xe^{-1}\vec{i}+2x^2e^{-1}\vec{J}]\cdot[dx\,dz\,\vec{J}]$$
$$+\iint[5xe^{1}\vec{i}+2x^2e^{1}\vec{J}]\cdot[-dx\,dz\,\vec{J}]$$
$$+\iint[5xe^{-y}\vec{i}+2x^2e^{-y}\vec{J}]\cdot[dx\,dy\,\vec{k}]$$
$$+\iint[5xe^{-y}\vec{i}+2x^2e^{-y}\vec{J}]\cdot[-dx\,dy\,\vec{k}]$$

$$\therefore \oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = 5\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^{-y}\,dy\,dz + 5\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^{-y}\,dy\,dz$$
$$+2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2 e^{-1}\,dx\,dz - 2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2 e^{1}\,dx\,dz$$

أي أن التدفق الكلي الخارج من سطح المكعب يساوي

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = 20\left(e-\frac{1}{e}\right) - \frac{8}{3}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

$$\therefore \oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = \frac{52}{3}\left(e-\frac{1}{e}\right) = 40.74 \;\; \mu C$$

تمارين

1- سطح مغلق S يحتوي على شحنات خطية موزعة بانتظام ولها كثافة طولية $\rho_l = -\rho_0 \sin\frac{\ell}{2}$ (C/m) ، حيث $0 \le \ell \le \pi$. ما هو الفيض الكلي الذي يعبر السطح S .

2- شحنة موزعة في منطقة كروية حيث $r \le 2m$ ولها كثافة حجمية منتظمة تعطى من $\rho = -\frac{200}{r^2}$ ($\mu C/m^3$) . ما هو الفيض الذي يعبر السطح $r = 1m$ ، $r = 4m$ ، $r = 500m$.

3- شحنة نقطية Q عند نقطة الأصل في الإحداثيات الكروية يحيط بها سطح كروي له توزيع شحنات منتظم عند $r = a$ وله الشحنة الكلية $Q' - Q$. ما هو الفيض الذي يعبر الأسطح $r = K$ حيث $K < a$ ، $K > a$.

4- شحنة نقطية Q عند نقطة الأصل. أوجد صيغة للفيض الكلي الذي يعبر مقطع من السطح الكروي مركزه عند نقطة الأصل حيث $\alpha \le \phi \le \beta$.

5- الأسطح الكروية $r = 2$ ، 4 ، $6m$ تحمل شحنات كثافاتها السطحية هي $6\ \mu C/m^2$ ، 0 ، 100 على الترتيب. أوجد $|\vec D|$ عندما r تساوي $(r = 1m, 3m, 5m, 8m)$

6- نفرض أن $\vec D = 2r\cos\phi\ \vec{\phi} - \frac{\sin\phi}{3r}\ \vec{k}$ في الإحداثيات الإسطوانية. أوجد الفيض الذي يعبر الجزء من المستوى $z = 0$ والذي له $r \le a$ ، $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$ وكذلك إذا كانت $\frac{3}{2}\pi \le \phi \le 2\pi$ حيث $\vec D$ هي كثافة الفيض. اعتبر أن الاتجاه الموجب للفيض هو نفس اتجاه محور z .

7- إستعمل قانون جاوس لإيجاد كل من $\vec E$ و $\vec D$ في المنطقة بين اسطوانتين موصلتين ومتحدتين المحور، وذلك للمكثفات الإسطوانية إذا علمت أن الإسطوانة الداخلية لها نصف قطر a . أوجد كذلك كثافة الفيض التي تعبر السطح الإسطواني الذي نصف قطره أكبر من نصف قطر الإسطوانة الثانية .

٩- شحنة حجمية كثافتها ρ وموزعة بانتظام على حجم كروي نصف قطره $a \leq r$. إستعمل قانون جاوس لتعيين كثافة الفيض $\vec{D}$. ماهي الشحنة النقطية التي يجب وضعها عند نقطة الأصل حتى ينتج عنها كثافة الفيض $\vec{D}$ عندما تكون $r > a$.

١٠- تحتوي السطح المستوى $z = 0.5$ في المنطقة $-1 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 2$ على كثافة شحنة $\rho_s = 2x^2 + 5y \ C/m^2$، وليس هناك شحنة في أي مكان آخر. كم هو قدر التدفق الكهربي التي يترك المنطقة المكعبة: $|x|$، $|y|$ و $|z| \leq 1$.

١١- يتبع ذلك. شحنة منتظمة ذو $15 \ nC/m$ على طول المحور z، ووضع لوح منتظم للشحنة ذي $4 \ nC/m^2$ عند المستوى $z = 1$. (أ) ماهو التدفق الكهربي الكلي المار للسطح الكروي $r = 2$؟ (ب) أوجد $|\vec{D}|$ عند النقطة على السطح الكروي حيث $x = 2$ (جـ) أعد الجزء (ب) للنقطة حيث $x = 1$، $y = -0.5$، $z > 0$.

الشغل و الطاقة للأنظمة المشحونة

٣ - ١ : المعادلة التفاضلية لقانون جاوس

- ذكرنا فيما سبق كيفية تطبيق قانون جاوس لإيجاد كثافة الفيض الكهربي و ذلك بالنسبة للأسطح المتماثلة و التي تكون لها المركبة العمودية للكثافة الفيض ذات قيمة ثابتة أو صفرية و ذلك في كل موضع على السطح.

أما إذا لم يتحقق ذلك ، فإنه توجد طريقتين مختلفتين إحداهما الطريقة التي سوف نطبقها هنا و هي طريقة التباعد للمجالات الإتجاهية و التي تتغير بقدر بسيط من نقطة لأخرى في الفراغ.

فإذا كان التباعد في المجال الإتجاهي موجب أو سالب ، فإنه يقال في هذه الحالة أن المنطقة التي تحتوي على المجال إما منبع أو مصب على الترتيب. أي أن الفيض الكهربي Ψ ينشأ من الشحنة الموجبة $+Q$ التي تكون عند المنبع حيث يكون التباعد موجب و ذلك بالنسبة للمجالات الكهربية الإستاتيكية و المغناطيسية بالمثل أيضاً.

ونظرية التباعد لجاوس يمكن إستعمالها لأي مجال إتجاهي في أي نظام إحداثيات (كارتيزي - إسطواني - كروي).

وقانون جاوس في صيغته التكاملية (العلاقة بين التكامل الحجمي والتكامل على السطح الذي يحد ذلك الحجم) بأخذ الصورة المعطاة بالمعادلة (1.52)

و في ضوء نظرية جاوس للتباعد لأي مجال إتجاهي $\vec{A}$ عند نقطة ما و لتكن في الفراغ ، فإنه يمكن كتابة

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oiint \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} \qquad (3.1)$$

حيث التكامل مأخوذ على عنصر السطح الذي يحد عنصر الحجم ΔV المتناهي في الصغر والذي يؤول للنقطة ρ. أي أننا يمكننا صياغة قانون جاوس للعلاقة بين كثافة الفيض والشحنة، وذلك بأخذ التكامل على عنصر الحجم ΔV المحدود بعنصر السطح ΔS الذي يحده، حيث

$$\oint\!\!\oint_{\Delta S} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \rho \, \Delta V \qquad (3.2)$$

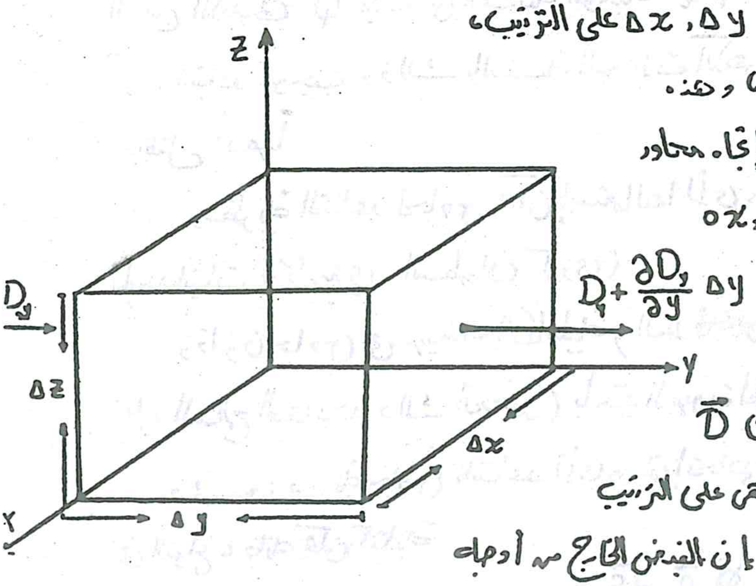
وبأخذ النهاية عندما تكون ΔV كمية متناهية في الصغر، نجد أخيراً أن

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint\!\!\oint \vec{D} \cdot d\vec{s}}{\Delta V} = \rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{Q}{\Delta V} \qquad (3.3)$$

وتلك الصيغة المعرفة في الطرف الأيسر تسمى بتباعد كثافة الفيض D وتعتمد على نظام الإحداثيات المستخدم.

وسوف نأخذ فيما يلي كحالة خاصة الإحداثيات الكارتيزية.

نأخذ عنصر الحجم ΔV عبارة عن مكعب له أوجه توازي محاور الإحداثيات ولها الأطوال Δx ، Δy ، Δz على الترتيب، كما هو مبين بالشكل، وهذه الأطوال مأخوذة في إتجاه محاور الإحداثيات ox ، oy ، oz بنفس الترتيب.



نفرض كذلك أن مركبات كثافة الفيض $\vec{D}$ في إتجاه هذه المحاور هي على الترتيب D_x ، D_y ، D_z . إن الفيض الخارج من أوجه

المكعب العمودية على محور x هو

$$\left(D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \Delta z - D_x \Delta y \Delta z = \frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z \qquad (3.4)$$

بالمثل كذلك توجد مساهمات أخرى مماثلة من الأوجه الأخرى العمودية على محوري y و z ويكون الفيض الكلي خارج هذا المكعب هو

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{s} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z \qquad (3.5)$$

وهذه النتيجة يمكن صياغتها كالتالي

$$\lim_{\Delta x\Delta y\Delta z \to 0} \frac{\oiint \vec{D}\cdot d\vec{s}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint \vec{D}\cdot d\vec{s}}{\Delta v} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = div\,\vec{D} \qquad (3.6)$$

فإذا اعتبرت وحدة حجوم تفاضلية $r\,dr\,d\phi\,dz$ في الإحداثيات الإسطوانية أو $r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$ في الإحداثيات الكروية فإننا نحصل على صيغ مختلفة للتباعد (باختلاف نظام الإحداثيات) ومحتوية على مركبات الدالة المتجهة في نظام الإحداثيات الخاص. ويمكن استنتاج ذلك بالاستعانة بنظام الإحداثيات لنفس هذا الدرس. بمقارنة المعادلتين (3.3) و (3.6) نحصل في النهاية على

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = div\,\vec{D} = \rho \qquad (3.7)$$

أو ما يساويها حيث

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad (3.8)$$

وهذه هي الصيغة التفاضلية لقانون جاوس (وتسمى أيضاً بالصورة النقطية لقانون جاوس) والصيغتان (3.7) و (3.8) يمثلان أحد معادلات ماكسويل للمجالات الإستاتيكية. والمعادلة (3.8) تكون صحيحة باعتبار أن ϵ_0 مقدار ثابت خلال المنطقة تحت الإختبار

اما عدا ذلك فنجد أن

$$\text{div}(\epsilon.\vec{E}) = \rho \qquad (3.9)$$

والمعنى الفيزيائى لمتجه كثافة الفيض بأنه يمثل الإنسياب الخارجي للتدفق من سطح صغير مغلق لكل وحدة حجوم عندما يتقلص الحجم إلى الصفر.

ومن النتيجتين السابقتين (3.7) و(3.8) يمكننا أن نستنتج أن كل من $\vec{E}$, $\vec{D}$ لهما تباعد صفرى فى المنطقة الخالية من الشحنة.

والصيغ التفاضلية لتباعد المجال أو التدفق، والسابق إستنتاجها فى هذا البند تعتبر هامة للمجالات المتغيرة وذلك بإستثناء المجالات التى لها تماثل فى جوار المنطقة المجاورة للشحنة النقطية يكون المجال ليس له نفس القيمة عند المواضع المختلفة.

وبالعودة مرة أخرى للمعادلة (3.7) نجد أنه على الرغم من أن الحدود الفردية فى الطرف الأيسر لتلك المعادلة، قد تكون غير صفرية إلا أن المحصلة الكلية لمجموع هذه الحدود دائماً مساوياً للصفر.

ولبيان ذلك، نفترض أننا وضعنا شحنة نقطية Q عند نقطة الأصل. متجه الموضع $\vec{r}$ لنقطة ما فى الفراغ، له المركبات x, y, z فى الإحداثيات الكارتيزية.

أى أن المجال الكهربى عند أى نقطة فى الفراغ يكون له ثلاث مركبات مأخوذة فى إتجاه المحاور الكارتيزية.

والمركبة E_x لشدة المجال الكهربى فى إتجاه المحور ox تتعين من

$$E_x = \frac{Q\,x}{4\pi\epsilon_o r^3}$$

$$= \frac{Q\,x}{4\pi\epsilon_o (x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

بتفاضل هذه المركبة بالنسبة لـ x نحصل على

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{r^2-3x^2}{r^5}\right)$$

كذا بالنسبة لكل من $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ و $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ يكون لهما نفس القيمات ولكن مع استبدال x لكل من z, y على نفس الترتيب. وبجمع المركبات المختلفة نحصل من المركبة على النتيجة التالية

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3r^2-3x^2-3y^2-3z^2}{r^5}\right) = 0$$

أى أن تباعد المجال الكهربى الناتج عن شحنة نقطية الموضوعة عند نقطة أصل الإحداثيات الكارتيزية ، تساوى صفر.

أما فى حالة الإحداثيات الكروية وذلك على إعتبار أنه يوجد لدينا توزيع حجمى منتظم للشحنات فى حجم كروى نصف قطره a. فإنه فى المنطقة r > a تكون كثافة الشحنات لها قيمة صفرية. وشدة المجال الكهربى $\vec{E}$ يكون لها مركبة فى إتجاه نصف القطر حيث $\vec{E} = E_r\vec{r}_0$.

وتباعد شدة المجال الكهربى عند كل منطقة ، داخل خارج الحجم الكروى ، تتعين من

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(\frac{\sigma_v r}{3\epsilon_0}\right)\right] = \frac{\sigma_v}{\epsilon_0} \quad ; \quad r \leq a$$

أما فى المنطقة r > a نجد أن تباعد المجال الكهربى يتعين من

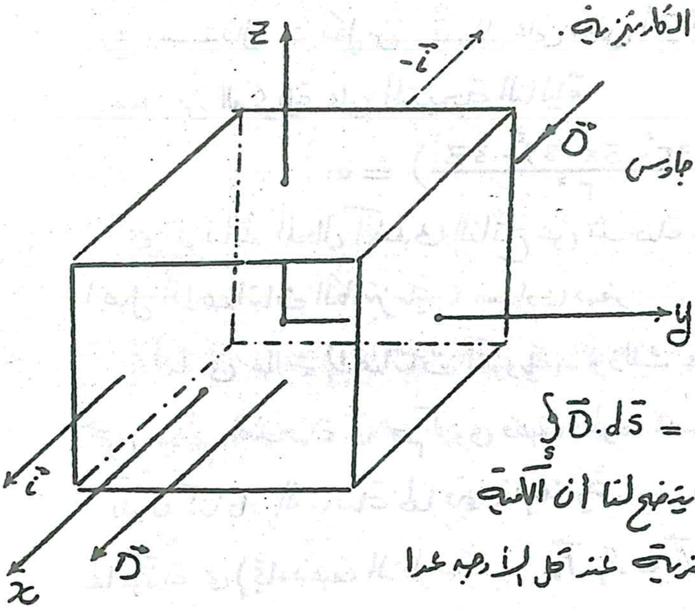
$$\operatorname{div}\vec{E} = 0 \qquad ; \quad r < a$$

* وضح هذه النتيجة الأخيرة لتباعد المجال ؟

كذلك فى أى نظام للإحداثيات يمكن إثبات النتيجة السابقة ، الخاصة بتلاشى تباعد المجال الكهربى فى المناطق الخالية من أى توزيع للشحنات الكهر

مثال :

إذا علمت أن كثافة الفيض $\vec{D}=5e^{2x}\,\vec{i}$. حقق نظرية التباعد لجاوس وذلك بالنسبة للمكعب طول ضلعه $2m$ ومركزه عند نقطة الأصل وجوانبه موازية لمحاور الإحداثيات الكارتيزية.



الحل ـــــ .

ان الصيغة العامة لنظرية جاوس تتحدد من العلاقة

$$\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_v (\vec{\nabla}\cdot\vec{D})\,dv$$

ومن المعطى لقيمة $\vec{D}$ يتضح لنا ان الكمية $\vec{D}\cdot d\vec{s}$ لا تتبع صفرية عند كل الأوجه عدا الوجهين $x=-1$ ، $x=1$

$$\therefore \oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_{\substack{front\\x=1}} \vec{D}\cdot d\vec{s} + \int_{\substack{back\\x=-1}} \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 5e^{2}\,dy\,dz - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 5e^{-2}\,dy\,dz$$

وبإجراء التكامل نحصل في النهاية على أن

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = 40\sinh 2$$

وبالمثل يمكننا إيجاد التكامل الحجمي للطرف الثاني في نظرية جاوس فنحصل على أن

$$\int (\vec{\nabla}\cdot\vec{D})\,dv = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 10\,e^{2x}\,dx\,dy\,dz = 40\sinh 2$$

وبمقارنة نتيجتي التكاملين السطحي والحجمي نجد أنهما يحققان نظرية جاوس.

تمارين

1 - إذا أعطيت الدوال المتجهة :

$$\vec{A} = r^2 \sin\theta\, \vec{r}_0 + 13\phi\, \vec{\theta}_0 + 2r\, \vec{\phi}_0 \quad ، \quad \vec{A} = 2\rho \cos^2\phi\, \vec{\rho}_0 + 3r^2 \sin z\, \vec{\phi}_0 + 4z \sin^2\phi\, \vec{k}$$

أوجد تباعد كل منها

2 - أوجد تباعد الدالة المتجهة $\vec{A}$ عند نقطة الأصل حيث

$$\vec{A} = e^{5x}\, \vec{i} + 2\cos y\, \vec{J} + 2\sin z\, \vec{k}$$

3 - أوجد $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ للدوال المتجهة الآتية

$$\vec{A} = \frac{10}{\rho^2}\vec{\rho}_0 + 5e^{-2z}\vec{k} \quad \text{at the point } (2, \phi, 1)$$

$$\vec{A} = \left(\frac{10\sin^2\theta}{r}\right)\vec{r}_0 \quad \text{at the point } (2, \pi/4, \phi)$$

4 - أوجد كثافة الشحنة في الإحداثيات الكروية حيث كثافة الفيض $\vec{D}$ تعطى من

$$\vec{D} = \frac{10}{r^2}\left[1 - e^{-2r}(1 + 2r + 2r^2)\right]\vec{r}_0$$

5 - أوجد بتباعد شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ الناشئ عن خط شحنة لانهائي منتظم .

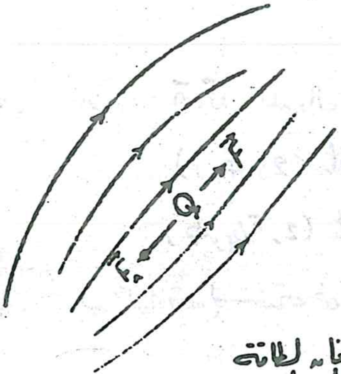
6 - إذا كانت كثافة الفيض $\vec{D} = \frac{r^3}{5}\vec{r}_0$ في الإحداثيات الكروية . حقق نظرية التباعد لجاوس وذلك للحجم المحتوى بـ $r=2$ و $r=1$. أعد حل هذه المسألة وذلك في الإحداثيات الأسطوانية وذلك للحجم المحدود بـ $z=10$ ، $z=0$ ، $r=2$

7 - في المنطقة $r \le 1$ (في الإحداثيات الكروية) : $\vec{D} = \left(\frac{4r}{3} - \frac{r^3}{5}\right)\vec{r}_0$

وفي المنطقة $r > 1$: $\vec{D} = \frac{5}{r^2}\vec{r}_0$. أوجد كثافة الشحنة في كلا المنطقتين .

... 26 : الشغل المبذول (الطاقة المستنفذة) في تحريك شحنة نقطية في مجال كهربي .

* سبق لنا تعريف شدة المجال الكهربي على أنه القوة التي تؤثر على وحدة الشحنات الموجبة النقطية التي نرمز لمقدارها بمقياس شدة المجال .



عند وجود شحنة نقطية Q في مجال كهربي $\vec{E}$ فإن هذه الشحنة تكون واقعة تحت تأثير قوة تحركها في إتجاه المجال.

إذا حاولنا تحريك هذه الشحنة في إتجاه عكس المجال فيجب التأثير على هذه الشحنة بقوة مساوية للقوة المبذولة بواسطة قوة المجال الكهربي ولكنه في الإتجاه المضاد وذلك يتطلب بذل شغل. أما إذا حركنا الشحنة في إتجاه المجال فإن الطاقة المستنفذة تكون سالبة لأن قوى المجال هي التي ستبذل شغلاً.

القوة التي تؤثر على شحنة نقطية Q لكي تحركها مسافة معينة dl في إتجاه المجال الكهربي $\vec{E}$ هي

$$\vec{F}_E = Q\vec{E} \qquad (3.10)$$

حيث $\vec{F}_E$ هي القوة الناتجة عن المجال الكهربي $\vec{E}$. والقوة الخارجية التي يجب أن نطبقها على هذه الشحنة النقطية حتى تظل في حالة إتزان تحت تأثير قوة المجال $\vec{E}$ هي

$$\vec{F} = -Q\vec{E} \qquad (3.11)$$

والشغل هو عبارة عن القوة المؤثرة خلال إزاحة معينة. لذلك فإن العنصر التفاضلي للشغل dW يمكن الحصول عليه بتطبيق القوة المؤثرة على الجسيم المشحون والذي يتحرك بسرعة ثابتة خلال عنصر تفاضلي للإزاحة dl .

والشغل المبذول قد يكون موجب أو سالب على حسب إتجاه عنصر الإزاحة التفاضلية للشحنة Q

وذلك بالنسبة للقوة التي تم تطبيقها $\vec{F}_a$

وعندما تكون القوة ليست في إتجاه واحد مع الإزاحة dl فيجب أن نستعمل هنا مركبة القوة في إتجاه الإزاحة حيث ..

$$dW = F\cos\theta\, dl = \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

$$= Q\vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (3.12)$$

وبهذا الشغل المبذول بمؤثر خارجي في المجال الكهربي $\vec{E}$ هو

$$dW = -Q\vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (3.13)$$

والشغل الكلي المطلوب لتحريك شحنة مسافة محدودة يتحدد من التكامل

$$W = -Q\int_{init}^{final}\vec{E}\cdot d\vec{l} = -Q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \quad \text{joules} \qquad (3.14)$$

وهذا التكامل الخطي في المعادلات السابقة يعرف به الشغل المبذول لتحريك شحنة نقطية Q من موضع لآخر في المجال وهو تكامل على طول مسار محدد لحاصل الضرب القياسي للمجال المتجه وطول المسار المتجه التفاضلي. النقطتان A و B هما نقطتي البداية والنهاية على طول المسار المختار. وإذا كان المجال الكهربي منتظماً (له قيمة ثابتة) فإن

$$W = -Q\vec{E}\cdot\int_A^B d\vec{l} \qquad (3.15)$$

بند 27: فرق الجهد الكهربي بين نقطتين.

* يمكن تعريف جهد النقطة B بالنسبة للنقطة A على أنه الشغل المبذول في تحريك وحدة الشحنات الموجبة Q_u من النقطة A الى النقطة B حيث

$$V_{BA} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \quad \text{volt} \qquad (3.16)$$

ويجب أن نلاحظ أن الموضعين الإبتدائي والنهائي للشحنة يقعان على النهاية السفلى والعليا من التكامل (3.16) وهذا التكامل له قيمة ثابتة لا تعتمد على المسار الذي يصل

النقطتين A و B لأن المجال الإلكتروستاتيكي هو مجال محافظ، حيث تعتمد طاقة الجهد على موضع الشحنة ولا تعتمد على المسار. أي أن طاقة الجهد عند نقطة ما لها متجه الموضع $\vec{r}$ يمكن كتابتها $Q\,V(r)$. حيث الدالة $V(r)$ تسمى دالة الجهد الإلكتروستاتيكي.

إن الشغل المبذول بالقوة الإلكتروستاتيكية يمثل بالطاقة الجهد المفقودة للشحنة، والتي لها

$$(\text{طاقة الجهد عند } B) - (\text{طاقة الجهد عند } A) = -Q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (3.17)$$

بفرض أن $\vec{r}_A$ و $\vec{r}_B$ هما متجهات الموضع للموضعين A و B على الترتيب، فإن الفرق في طاقة الجهد بين الموضعين A و B يصبح

$$Q\,V(r_B) - Q\,V(r_A) = -Q\int_A^B \vec{E}\, d\vec{l} \qquad (3.18)$$

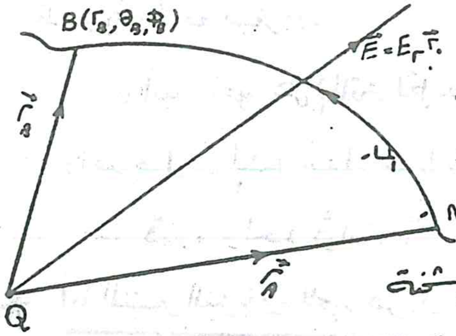
وأخيراً بقسمة الطرفين في هذه المعادلة على Q نحصل على

$$V(r_B) - V(r_A) = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (3.19)$$

ومن هذه المعادلة يتضح أن الجهد هو دالة قياسية في الموضع وأن قيمته تتغير عند أي نقطة معطاة. فعندما يكون فرق الجهد في المعادلة (3.19) موجباً فإنه يجب بذل شغل لتحريك الشحنة من الموضع A إلى الموضع B. وعندئذ يقال أن جهد النقطة B أعلى من جهد النقطة A.

ومن الممكن أن نعرف مرجعاً صفرياً للجهد عند اللانهاية وذلك باختيار قيمة صفرية للجهد عند اللانهاية وذلك لنظام معزول من الشحنات. أي أنه لشحنة نقطية معزولة عند نقطة الأصل يمثل تغير الجهد $V(r)$ من الشغل المبذول لنقل شحنة نقطية من اللانهاية إلى نقطة لها متجه موضع $\vec{r}$.

ومن الملاحظ أن الشغل المبذول يعتمد على قيمة r وليس على المتجه $\vec{r}$. ويمكن فحص التعريف السابق لفرق الجهد لشحنة نقطية وذلك بأخذ مسافات نصف قطرية r_A ، r_B وذلك بالاقتباس للتعبير عن شحنة نقطية Q موضوعة عند نقطة الأصل حيث



$$\vec{E} = E_r \vec{r}_\circ \qquad (3.20)$$

أما عنصر المسافة الإتجاهية في الفراغ عند الإنتقال من الموضع الإبتدائي A إلى الموضع النهائي B، وذلك في مجال الشحنة النقطية Q الموضوعة عند نقطة الأصل، فيتعين من

$$\vec{dl} = dr\,\vec{r}_\circ + r\,d\theta\,\vec{\theta}_\circ + r\sin\theta\,d\phi\,\vec{\phi}_\circ \qquad (3.21)$$

$$V(r_B) - V(r_A) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_\circ}\int_A^B \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_\circ}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \qquad (3.22)$$

فإذا كانت $r_A > r_B$ فإن النتيجة في تلك المعادلة تكون موجبة وبذلك يكون فرق الجهد بين الموضعين A، B موجباً. والنتيجة المستنتجة بتلك المعادلة تعني أن الطاقة المبذولة بواسطة المجال الخارجي قد أُستنفذت في إحضار الشحنة الموجبة (شحنة الإختبار) من r_A إلى r_B وذلك في مجال الشحنة النقطية Q.

فإذا تحركت النقطة A إلى اللانهاية، فإن النتيجة السابقة تصبح

$$V(r_B) = Q/4\pi\epsilon_\circ r_B \qquad (3.23)$$

وهذه النتيجة تمكننا بسهولة من تعريف ما يسمى "المرجع الصفري للجهد" وهو أن نضع $V(r_A) = 0$ (عندما تتراجع النقطة A إلى اللانهاية). وفي الحالة العامة نجد أن قيمة الجهد المطلق منسوبة لنقطة إسناد محددة، لها جهد أصفرياً، تتعين من

$$V(r) = Q/4\pi\epsilon_\circ r \qquad (3.24)$$

هذه المعادلة تعطي تقريباً الجهد المتماس عند أي نقطة على مسافة قدرها ١٥ ٢ م

شحنة نقطية Q موضوعة عند نقطة الأصل، وذلك على إعتبار أننا سنأخذ الجهد عند اللانهاية كمرجع صفري.

إن أبعاد الجهد هي الطاقة لكل وحدة شحنة، ووحدة الجهد هي الفولت.

واحد جول من الشغل يبذل عندما تتحرك شحنة مقدارها واحد كولوم خلال فرق جهد قدره واحد فولت.

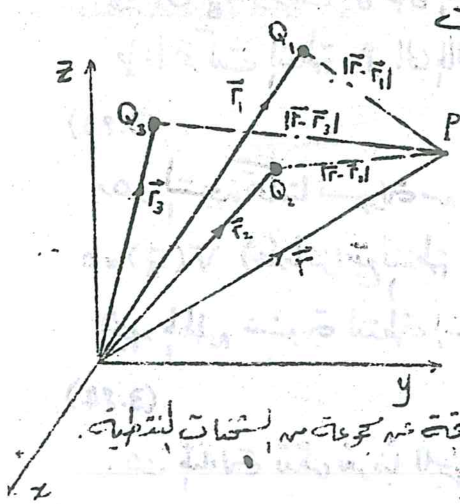
* أما المعنى الفيزيائي للجهد هو أن $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ Joules من الشغل يجب أن يبذل في حمل أو نقل وحدة الشحنات "شحنة مقدارها واحد كولوم" من اللانهاية الى أي نقطة على بعد r meter من الشحنة Q.

هناك أيضاً طريقة أخرى للتعبير عن الجهد $\Phi(r)$ بدون إختيار مرجع صفري خاص حيث يمكن كتابة الجهد بإضافة مقدار ثابت إختياري (مرجع صفري) يُعين بطريقة غير مباشرة حيث

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C \quad , \text{where } C \text{ is a constant} \qquad (3.25)$$

مع ملاحظة أن فرق الجهد بين نقطتين ليس دالة في الثابت C.

بند 28: الجهد لتوزيع معين من الشحنات



سبق لنا تعريف الجهد عند نقطة بأنه "الشغل المبذول في نقل وحدة الشحنات الموجبة من اللانهاية إلى هذه النقطة (المراد تعيين شدة المجال عندها).

، المجال خطي مع الشحنة (أي أنه يمكن تطبيق مبدأ التراكب على مجموعة من المجالات الناتجة عن مجموعة من الشحنات النقطية.

نفرض أنه لدينا نظام معين من الشحنات له مجال معين عند أى نقطة لا يعتمد على المسار المأخوذ من حمل الشحنة إلى تلك النقطة .

قيمة الجهد الناشئ من الشحنة Q_1 الموضوعة عند $\vec{r}_1$ يشتمل على المسافة $|\vec{r}-\vec{r}_1|$ من Q_1 إلى النقطة P والتى لها متجه موضع $\vec{r}$ حيث نوجد قيمة الجهد $V(r)$ وأن

$$V(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}_1|} \qquad (3.26)$$

أما الجهد الناشئ من شحنتين نقطيتين Q_1 ، Q_2 على مسافتين $|\vec{r}-\vec{r}_1|$ ، $|\vec{r}-\vec{r}_2|$ من Q_1 و Q_2 إلى نقطة المجال P فيعطى من

$$V(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}_2|} \qquad (3.27)$$

وهكذا لعدد n من الشحنات فإننا نجد أن

$$V(r) = \sum_{m=1}^{n} \frac{Q_m}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}_m|} \qquad (3.28)$$

أما إذا مثلت كل شحنة نقطية بأى أنها عنصر صغير لتوزيع متصل للشحنة حجمية $\rho \Delta V$ فإن الجهد الكلى فى هذه الحالة يمكن كتابته كالآتى

$$V(r) = \frac{\rho(r_1)\Delta V_1}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{\rho(r_2)\Delta V_2}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}_2|} + \cdots\cdots + \frac{\rho(r_n)\Delta V_n}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}_n|} \qquad (3.29)$$

وعندما نجرى المجموع على أن يصبح عدد العناصر الشحنية لانهائياً فإننا نحصل على

$$V(r) = \int_{vol} \frac{\rho(r')dv'}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (3.30)$$

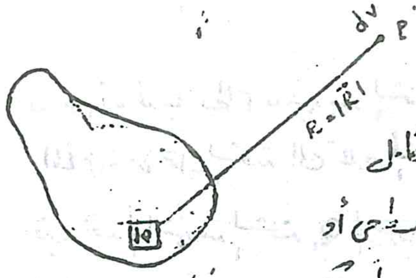
حيث $\rho(r')$ هى كثافة الشحنة الحجمية و dv' هو عنصر الحجم التفاضلى . وحاصل ضرب هذين المتغيرين يحدد العنصر التفاضلى للشحنة $\rho(r')dv'$ عند نقطة r' .

المسافة $|\vec{r}-\vec{r}'|$ هى المسافة من عنصر الشحنة (المنبع) الى نقطة المجال .

والمعادلة السابقة (4.30) يمكن إعادة صياغتها كالآتى

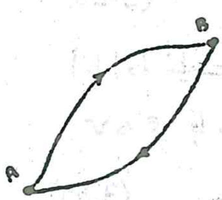
$$V(r) = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon R} = \int \frac{\rho\, dv}{4\pi\epsilon R} \qquad (3.31)$$

فإن الشحنة في هذه الحالة لها توزيع حجمي معين له الكثافة $\rho\,(C/m^3)$ حيث $dQ = \rho\, dv$. ويجب أن نلاحظ هنا أن R تتغير من موضع لآخر خلال الحجم المأخوذ عليه التكامل السابق. أما إذا كانت الشحنة لها توزيع سطحي أو خطي فإن العلاقة السابقة (3.31) تكون صحيحة أيضاً ولكن مع



استبدال الكثافة الحجمية ρ بالكثافة السطحية ρ_s أو خطية ρ_l . ومما هو جدير بالذكر أن تحليل الجهد في المعادلة السابقة الجهد $V(P)$ عند نقطة خارجية مقاسة على أساس أن الجهد يقيس بالنسبة إلى مرجع جهد صفري عند اللانهاية وهو مقياس منضبط للشغل المبذول في إحضار وحدة الشحنات من اللانهاية إلى نقطة في المجال عند P حيث يوجد الجهد.

والشغل المبذول في تحريك شحنة نقطية من موضع ما وليكن A إلى نقطة أخرى B في مجال كهربي ساكن $\vec{E}$ له نفس القيمة على أي مسار آخر بين نفس هذين الموضعين A, B . فإذا كان الشغل المبذول في تحريك شحنة نقطية Q عبر مسار مغلق يساوي الصفر حيث



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \text{zero} \qquad (3.32)$$

فإن هذا المجال الإتجاهي $\vec{E}$ يطلق عليه مجال محافظ.

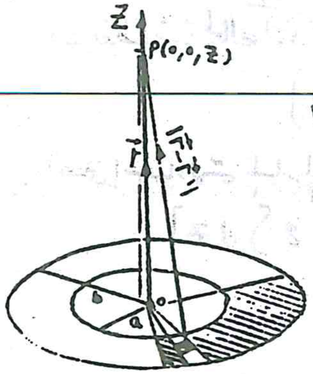
والمعادلة السابقة (3.32) صحيحة في حالة المجالات الإستاتيكية بينما تكون هذه النتيجة غير صحيحة عندما يتغير أي من المجال الكهربي $\vec{E}$ أو المجال المغناطيسي H مع الزمن

مثال : أوجد الجهد عند النقطة $P(0,0,z)$ في الفضاء الحر لكل من توزيعات الشحنة الآتية في المستوى $z = 0$. (أ) ρ_s منتظمة على القرص $0 \le \rho \le a$

(ب) ρ_s منتظمة على حلقة مستوية حيث $a \le \rho \le b$.

(جـ) ρ_s منتظمة على القطاع $\alpha \le \phi \le \beta$ ، $0 \le \rho \le a$

الحل :



(أ) لتعيين الجهد عند النقطة P والناتج عن القرص المنتظم الشحنة نجد أنه يتعين من العلاقة

$$V = \int_S \frac{\rho_s \, \rho \, d\rho \, d\phi}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \int \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}$$

فنحصل في النهاية على

$$V = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left\{ \sqrt{z^2 + a^2} - z \right\}$$

(ب) في هذه الحالة نجد أن حدود التكامل سوف تختلف عن تلك التي في النتيجة السابقة وذلك لاستبدال القرص بالحلقة المعرفة هنا ، حيث تصبح

$$V = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \int \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left\{ \sqrt{z^2 + b^2} - \sqrt{z^2 + a^2} \right\}$$

(جـ) باستخدام حدود القطاع المعرفة هنا نجد أن

$$V = \int_S \frac{\rho_s \, \rho \, d\rho \, d\phi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{(\beta - \alpha)}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

وبإجراء التكامل نحصل في النهاية على

$$V = \frac{(\beta - \alpha)\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \sqrt{z^2 + a^2} - z \right\}$$

من الملاحظ هنا أنه يمكن تطبيق تلك النتائج التي حصلنا عليها في الأجزاء الثلاثة السابقة لأي قيم للبارمترات المختلفة المعطاة والممثلة بكل من ρ_s و a و z وكذلك α و β ، والحصول على القيم العددية المناظرة للقيم المعطاة .

. . . إذا كانت أن شدة المجال $\vec{E}$ هي $\vec{E} = 10y\,\vec{i} + 10x\,\vec{j} - 2\vec{k}\ V/m$

احسب الشغل المبذول في حمل شحنة مقدارها $3C$ من $(0,-2,8)$ إلى $(5,3,23)$

على طول المسار: (أ) $Z = 2x^2 - y$ ، $y^2 = x + 4$ (ب) الخط المستقيم المباشر.

الحل:

(أ) الشغل المبذول في نقل شحنة قدرها QC من موضع لآخر في الفراغ يتحدد من

$$W = -Q\int_{init}^{final} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

حيث نعطي شدة المجال الكهربي بالاحداثيات الكارتيزية وبذلك تصبح W كالآتي

$$W = -3\left[\int 10y\,dx + \int 10x\,dy - \int 2\,dz\right]$$

باستخدام معادلتي المسار المعطاة في (أ) نجد أن هذه التكاملات تصبح

$$W = -3\left\{10\int 2y^2\,dy + 10\int (y^2-4)\,dy - 2\int dz\right\}$$

$$= -3\left[10\int_{-2}^{3}(3y^2-4)\,dy - 2\int_{8}^{23} dz\right]$$

$$W = -3\left[10\,(y^3-4y)\Big|_{-2}^{3} - 2\,z\Big|_{8}^{23}\right]$$

$$\therefore W = -3\,[150-30] = -360\ J$$

نلاحظ أن هذه النتيجة نفسها يمكن الحصول عليها باستخدام معادلتي المسار في (أ) ولكن بإجراء التكاملات على متغيرات أخرى باستعمال التعويضات المناسبة.

(ب) في هذه الحالة لإيجاد الشغل المبذول بواسطة المجال تم لنقل الشحنة المعطاة من الموضع الابتدائي إلى الموضع النهائي على مسار الخط المستقيم المباشر بين هذين الموضعين، يجب علينا أولاً أن نعين معادلات الخط المستقيم. ومن الواضح أن أي اثنين من المعادلات الثلاث الآتية لمستويات مارة بالخط يكونان كافيين لتعريف الخط، حيث

$$x = y + 2 \quad ، \quad 3x = z - 8 \quad ، \quad 3y = z - 14$$

وباستعمال الصيغة التكاملية السابقة للشغل المبذول مع استخدام التعويض المناسب نجد

$$W = -Q\left[10\int(x-2)\,dx + 10\int(y+2)\,dy - 2\int dz\right]$$

$$W = -3\left[10\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_0^5 + 10\left(\frac{y^2}{2} + 2y\right)\Big|_{-2}^{3} - 30\right]$$

وبالتعويض بحدود التكامل المعطاة نحصل من النظرية على أن

$$W = -3\left[10\left(\frac{5}{2}\right) + 10\left(\frac{21}{2} + 2\right) - 30\right]$$

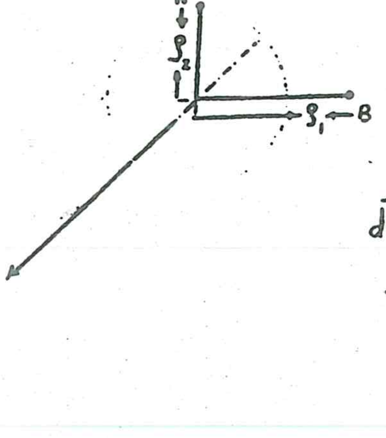
$$\therefore W = -3\left[25 + 125 - 30\right] = -360 \text{ J}$$

وهاتين النتيجتين في الجزئين (أ) و(ب) تعطيان نفس القيمة للشغل على الرغم من اختلاف شكل المسار في كلا الحالتين. وهذا يدل على أن الشغل المبذول لا يعتمد على المسار المعطى ولكن يتوقف على الموضعين الابتدائي والنهائي فقط.

مثال:

خط شحنة منتظم، منطبق على محور x، وكثافة الشحنة الطولية هي $\sigma_\ell = 200\ \mu C/m$. فإذا كان ρ_1 و ρ_2 هما أنصاف أقطار مسارين دائريين مركزيهما عند خط الشحنة، فاوجد الشغل المبذول في نقل شحنة ما ولتكن Q المسار الدائري لأي من المسارين المعروفين. أوجد كذلك فرق الجهد بين نقطتين على ρ_1

الحل:



الشغل المبذول من نقل الشحنة Q حول أي من المسارين الدائريين يساوي صفر، حيث

$$W = -Q\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

حيث $\vec{E}$ و $d\vec{\ell}$ يتحددان من

$$d\vec{\ell} = \rho\, d\Phi\, \vec{\Phi}_0 \quad , \quad \vec{E} = \frac{\sigma_\ell}{2\pi\epsilon_0\rho}\vec{\rho}_0$$

أما فرق الجهد بين نقطتين على المسار فهو يعطى من :

$$V_{AB} = -\int_{B}^{A} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{B}^{A} \frac{\sigma_\ell}{2\pi\epsilon_0 \rho}\, d\rho$$

$$V_{AB} = -\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\sigma_\ell}{2\pi\epsilon_0 \rho}\, d\rho = -\frac{\quad}{2\pi\epsilon_0} \ln(\rho_2/\rho_1)$$

وعليه نضع V_{AB} في الصيغة التالية :

$$V_{AB} = \frac{\sigma_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln(\rho_1/\rho_2)$$

ونلاحظ أن إشارة فرق الجهد تختلف باختلاف الموضعين الابتدائي والنهائي المقاس بينهما فرق الجهد .

أما قيمة الشغل المبذول في نقل شحنة موجبة Q من B الى A فهي تساوى

$$W = \frac{Q\sigma_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln(\rho_1/\rho_2)$$

وله قيمة موجبة نظراً لأن $\rho_1 > \rho_2$.

بند 29: تدرج الجهد

مما سبق نجد أنه توجد طريقتين مختلفتين لتعيين الجهد: إحداهما من خلال التكامل الخطي على متجه شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ والثانية من خلال التكامل الحجمي للشحنة لأصلية على أنها أنه يوجد لها توزيع حجمي.

هاتين الطريقتين ليستا عمليتين في أغلب الأحيان لأن كل من شدة المجال أو التوزيع الحجمي للشحنة غالباً ما يكونا غير معروفين.

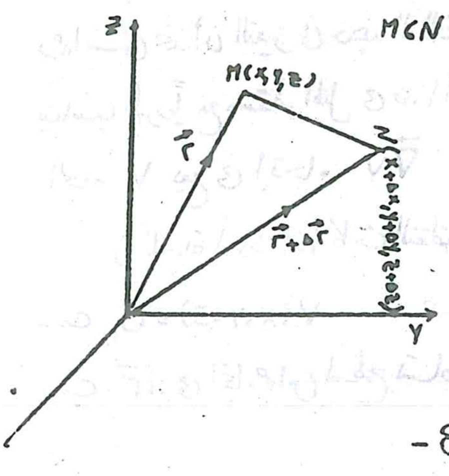
وهدفنا الحالي هو استنتاج شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ من الجهد وذلك من خلال العلاقة العامة للتكامل الخطي بين كل من شدة المجال الكهربي والجهد الكهربي حيث

$$V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (3.33)$$

وهذه العلاقة تمكن أن نستخدم بسهولة في الاتجاه العكسي أو العكسي لإيجاد $\vec{E}$ أو V والمعادلة (3.33) يمكن أن تطبق بسهولة لإيجاد فرق الجهد بين نقطتين متجاورتين بينهما مسافة صغيرة جداً. وتتحول الصيغة التكاملية للجهد نظراً بالنسبة لأخرى صادرة لها بحيث أنه

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (3.34)$$

حيث دالة الجهد V مأخوذة على أنها دالة قياسية في الموضع $V(x,y,z)$، $\vec{E}$ هو مجال حافظ. ومن الشكل الموضح أمامنا نجد أن النقطتين M، N المتجاورتين في المنطقة، والتي فيها الدالة القياسية للجهد، معرفة تماماً.

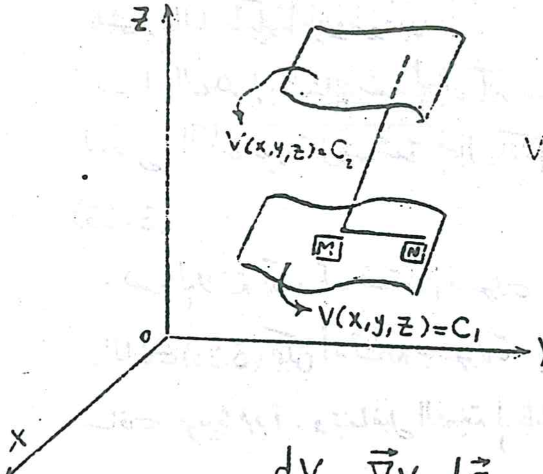


حيث المتجه $d\vec{r}$ التي تصل بين هذين الموضعين، M و N، يعرف في الإحداثيات الكارتيزية كالآتي

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

مع ملاحظة أن المعادلة التكاملية (3.33) لها خاصية أنه يمكن تطبيقها على عنصر قصير جداً أو لذى على أساسه تكون $\vec{E}$ ثابتة مؤدية إلى تزايد في فرق الجهد بين الموضعين المتجاورين. لكن حسب المتجهات نجد أن التغير في الجهد بين نقطتين M, N يعطى بالعلاقة

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \qquad (3.36)$$



حيث يعطى المؤثر التفاضلي $\vec{\nabla}$ من

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad (3.37)$$

كذلك ميل الدالة القياسية $V(x,y,z)$ يعطى من

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \qquad (3.38)$$

وبمقارنة المعادلات (3.35) و(3.36) و (3.38) نجد أن

$$dV = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} \qquad (3.39)$$

حيث $\vec{\nabla}V$ هو ميل أو تدرج الدالة القياسية V، ويسمى أيضاً بالمجال الإتجاهي.

ومما سبق نجد أن التغير في جهد الدالة القياسية V، لقيم $|d\vec{r}|$ الثابتة، في إتجاه $d\vec{r}$ يتناسب طردياً مع مسقط الميل في هذا الإتجاه. وكذلك نجد أن أقصى تزايد موجب لدالة الجهد V يقع في إتجاه $\vec{\nabla}V$

ومن ناحية أخرى إذا كانت النقطتان M, N تقعان على سطح واحد لتساوي الجهد حيث $V(x,y,z) = C_1$ عندئذ $dV = 0$، وهذا يعني أن $\vec{\nabla}V$ يكون عمودياً على $d\vec{r}$ حيث $d\vec{r}$ في إتجاه مماس لسطح تساوي الجهد C_1. وفي الواقع نجد أنه باختيار مناسب

خصوص لنقطة N نجد أن dl تمثل المماس أدنب عند النقطة N مارا بأي نقطة M.
لذلك نجد أن ميل الدالة الجهدية V يجب أن تكون عموديا على السطح الخارجي عند النقطة
حيث أن الميل $\vec{\nabla} V$ في اتجاه تزايد V وتشير من $V(x,y,z)=c_1$ إلى $(x,y,z)=c_2$
حيث $c_2 > c_1$. أي أن التدرج في دالة الجهد الغير اتجاهية له مجال متجه ويكون عموديا على
سطح تساوي الجهد.

بمقارنة المعادلات (3.34) و (3.39) مع الأخذ في الاعتبار إلى أن $dr = dl$ هي إزاحة صغيرة اختيارية نجد من البرهنة أن

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \qquad (3.40)$$

ونلاحظ أن الميل في الإحداثيات المختلفة كالإسطوانية ، الكروية يمكن اشتقاقه من خلال دراستنا لتحليل المتجهات. حيث كل حد في الميل يحتوي على المشتقة الجزئية للدالة V بالنسبة للمسافة في الإتجاه الخاص بمتجه الوحدة.

ومن النتيجة (3.40) نجد أن شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ تساوي ميل الدالة الجهدية V ولكن بإشارة سالبة.

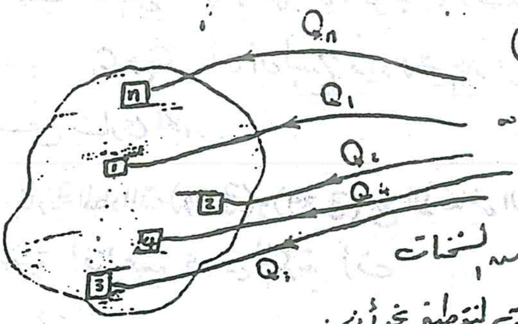
بند 3.5 : تعيين الطاقة المستنفذة في المجالات الكهربية الإستاتيكية.

من تعريف مفهوم الشغل نجد أنه يمثل الطاقة المستنفذة في تحريك شحنة نقطية (شحنة اختبار) في مجال كهربي. ومن ذلك نجد أن إحضار شحنة موجبة من مالانهاية في مجال شحنة (أخرى موجبة مثبتة) بواسطة مؤثر خارجي ، يتطلب بذل شغل بواسطة المؤثر عند حمل الشحنة النقطية حتى موضع قريب من الشحنة الثابتة ثم يمسك بها هناك.

إن الطاقة المستنفذة في إحضار هذه الشحنة لموضعها الجديد تمثل طاقة جهد مبذولة بالمؤثر الخارجي. وعند زوال ذلك المؤثر الخارجي فإن هذه الشحنة تكتسب عجلة مبتعدة عن الشحنة الثابتة مكتسبة طاقة حركية لذاتها وتكون لها المقدرة على بذل شغل نتيجة للطاقة التي تحتفظ بها.

لإيجاد طاقة الجهد الموجودة من نظام معين من الشحنات لابد أن نعين أولاً الشغل المبذول

بواسطة جزء خارجي من وضع هذه الشحنات من أماكنها. كالآتي :



نفترض أن لدينا فراغ صفر (خالي من الشحنات)

حيث شدة المجال الكهربي $E = 0$

خلال هذا الفراغ .

ولإيجاد الشغل المطلوب لنقل عدد معين من الشحنات

وأيضا توزيع معين ولتكن n من الشحنات النقطية نجد أن :

الشغل المبذول في نقل الشحنة النقطية الأولى Q_1 من مالانهاية إلى الموضع $\boxed{1}$ يساوي صفر

نظراً لعدم وجود مجال هناك . أما الشغل المبذول في نقل الشحنة الثانية Q_2 من مالانهاية

إلى الموضع رقم $\boxed{2}$ يساوي حاصل ضرب الشحنة Q_2 والجهد الناشئ عن تلك الشحنة نتيجة

لوجود الشحنة Q_1 . كذلك الحال الشغل الناتج عن نقل الشحنة Q_3 من مالانهاية إلى الموضع رقم $\boxed{3}$

يساوي حاصل ضرب هذه الشحنة والجهد الكلي الناتج عن هذه الشحنة نتيجة لوجود الشحنات Q_1, Q_2

وهكذا بالنسبة لبقية الشحنات ، أي أنه يمكن كتابة :

الشغل الناتج لوضع Q_1 = Zero أو $W_1 = 0$

الشغل الناتج لوضع $Q_2 = Q_2 V_{2,1}$ حيث $V_{2,1}$ هو الجهد عند موضع الشحنة Q_2

نتيجة لوجود الشحنة Q_1 عند الموضع رقم $\boxed{1}$ وهكذا حيث

الشغل الناتج لوضع $Q_3 = Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2}$. وعلى النهاية نجد أن الشغل الكلي لوضع

عدد n من الشحنات يساوي طاقة جهد المجال الكلي $= W_E$

$$\therefore W_E = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots\cdots + W_n$$

$$= 0 + Q_2 V_{2,1} + (Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2}) + (Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3}) + \cdots (4.$$

حيث W_E هي عبارة عن الطاقة الكلية المختزنة في المجال الكهربي لتوزيع الشحنات المعطاة وإذا كانت هذه الشحنات قد تم ترتيبها في مواضع عكسية بالنسبة للمواضع السابقة يعني أن

$$W_2 = Q_2 V_{2,1} = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{21}} = Q_1 \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} = Q_1 V_{1,2} \qquad (3.42)$$

وهكذا بالنسبة لبقية الشحنات نجد في النهاية أن المعادلة (3.41) يمكن صياغتها كالآتي

$$W_E = 0 + Q_1 V_{1,2} + Q_1 V_{1,3} + Q_2 V_{2,3} + Q_1 V_{1,4} + Q_2 V_{2,4} + Q_3 V_{3,4} + \cdots\cdots \qquad (3.43)$$

بجمع النتيجتين (3.41) و (3.43) يمكن صياغتها كالآتي

$$\begin{aligned} W_E = & \frac{1}{2} Q_1 \left(V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + V_{1,5} + \cdots\cdots \right) \\ & + \frac{1}{2} Q_2 \left(V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + V_{2,5} + \cdots\cdots \right) \\ & + \frac{1}{2} Q_3 \left(V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + V_{3,5} + \cdots\cdots \right) \\ & + \frac{1}{2} Q_4 \left(V_{4,1} + V_{4,2} + V_{4,3} + V_{4,5} + \cdots\cdots \right) + \cdots\cdots \qquad (3.44) \end{aligned}$$

ولاحظ مما سبق أن الجهود التي بين الأقواس تمثل كل منها مجموع الجهود الناتجة عن توزيع الشحنة عند النقطة التي يوجد عندها هذا الجهد المحصل، أي أن

$$V_1 = V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + V_{1,5} + \cdots\cdots \qquad (3.45)$$

وهذه النتيجة (3.45) تمثل الجهود الكلية عند الشحنة Q_1 نتيجة لوجود الشحنات $Q_2, Q_3, Q_4, \ldots\ldots$ وهكذا بالمثل بالنسبة لبقية الأقواس وفي النهاية يمكننا كتابة المعادلة (3.44) في الصيغة التالية

$$\begin{aligned} W_E &= \frac{1}{2}\left(Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + \cdots\cdots \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} Q_m V_m \qquad (3.46) \end{aligned}$$

وعندما يكون توزيع الشحنة متصلا فإن الطاقة الكلية المختزنة في منطقة توزيع الشحنة يمكن لنا كتكامل على عنصر حجمي للشحنة وفي النهاية نجد أن الطاقة الكلية المختزنة يمكن كتابتها في الصورة

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} \rho V \, dv \qquad (3.46$$

وهذه صيغة خاصة للطاقة المختزنة لأي نموذج شحنة آخر مختلف يؤخذ له في الإعتبار كأن يكون له توزيع سطحي متصل مثلاً.

من الممكن إشتقاق صيغ مناظرة للنتيجة (3.46) حيث يمكن التعبير عن الطاقة المختزنة ، بدلالة الشحنة ، بدلالات شدة المجال الكهربي $\vec{E}$ أو كثافة الفيض $\vec{D}$ باستعمال تحليل المتجهات حيث يمكن كتابتها

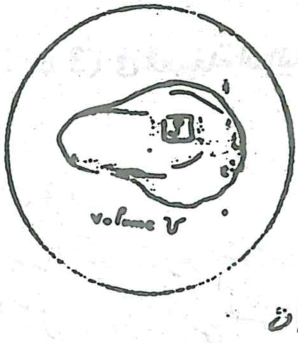
$$\vec{\nabla}\cdot(V\vec{D}) = V(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}) + \vec{D}\cdot(\vec{\nabla}V)$$

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{vol}(\vec{\nabla}\cdot\vec{D})V\,dv = \frac{1}{2}\int_{vol}\left[\vec{\nabla}\cdot(V\vec{D}) - \vec{D}\cdot(\vec{\nabla}V)\right]dv \qquad (3.47)$$

باستخدام نظرية جاوس يمكن تحويل التكامل الحجمي الأول إلى تكامل على السطح الذي يحد ذلك الحجم حيث

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{\substack{spherical\\surface}}(V\vec{D})\cdot d\vec{s} - \frac{1}{2}\int_{vol}\left[\vec{D}\cdot(\vec{\nabla}V)\right]dv \qquad (3.48)$$

حيث التكامل السطحي الأول مأخوذ على سطح كروي نصف قطره R وهذا السطح يحتوي على الحجم v المأخوذ له بالإعتبار في التكامل (4.48) والذي يحتوي بداخله على الشحنة الكلية التي لها كثافة توزيع منتظمة ρ.



فعندما يكون السطح الكروي كبير جداً نجد أن الشحنة الحجمية المحتواة بداخله تبدو وكأنها شحنة نقطية. وحيث أن كثافة الفيض $\vec{D}$ تتناسب عكسياً مع R^2 ، والجهد V يتناسب عكسياً مع R بينما عنصر السطح المتناهي يظهر أنه فائز كجزء من السطح الكروي ويتزايد مع زيادة R^2 لذلك نجد أن

المقدار بتكامل يقترب من الصفر باتجاه للمقدار $1/R$. واخيراً نجد ان التكامل والتكامل الأول قيمته للصفر عندما تزداد بحيث تظهر السطح الكروي تزايداً لا نهائياً ..

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\substack{\text{spherical}\\ \text{surface}}} (V\vec{D})\cdot d\vec{S} = 0 \qquad (3.49)$$

$$W_E = -\frac{1}{2}\int_{vol}[\vec{D}\cdot(\vec{\nabla} V)]\,dv = \frac{1}{2}\int_{vol}[\vec{D}\cdot\vec{E}]\,dv \quad ، \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V \qquad (3.50)$$

وهذه النتيجة التكاملية للطاقة الكلية المخزونة من المجال الكهربي لتوزيع الشحنات ويمكن كتابتها بالشكل الآتي

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{vol}\epsilon E^2\,dv = \frac{1}{2}\int_{vol}\frac{D^2}{\epsilon}\,dv \qquad (3.51)$$

وهذه النتيجة تعني أنه يمكن تعيين الطاقة الكلية المخزونة في المجال الكهربي الناتج من توزيع الشحنات ، إما بدلالة شدة المجال الكهربي أو كثافة الفيض مع الأخذ في الاعتبار انفاذية الوسط .

مثال:

أوجد الطاقة المخزونة في نظام مكون من شحنتين نقطيتين حيث $Q_1 = -5nC$ و $Q_2 = 3nC$ ، ومفصولتين بمسافة قدرها $d = 0.5m$.

الحل:

حيث أن الشحنات هنا هي توزيعات نقطية فإن

$$2W_E = Q_1V_1 + Q_2V_2$$
$$= Q_1\left(\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 d}\right) + Q_2\left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 d}\right)$$
$$\therefore W_E = Q_1Q_2/4\pi\epsilon_0 d$$

وبالتالي فإن القيمة العددية للطاقة المخزونة تتعين من

$$W_E = -270 \ nj$$

. ذلك بعد التعويض بقيم الكميات المعطاة في المسألة.

قد يكون من غير المألوف أن تكون الطاقة المختزنة هنا لكمية سالبة مع أن القيمة التكاملية للطاقة، وكذلك $\frac{1}{2}\in E^2$ تكون بالضرورة موجبة. وضح ذلك ؟

مثال :

أوجد قيمة الطاقة المختزنة في نظام مكون من أربعة شحنات نقطية موجبة، متساوية ... في مربع طول ضلعه 5m، ومقدار كل منها 10 nC. أوجد كذلك قيمة الطاقة في حالة وجود شحنتين فقط منهما وتقعان على زاويتي أحد قطريه.

الحل :

الطاقة المختزنة في هذه الحالة تتعين من

$$2W_E = Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3 + Q_4V_4 = \frac{20\times10}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2}{5} + \frac{1}{5\sqrt{2}}\right]$$

$$= 4Q_1V_1 = 4Q_1\left[\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 d\sqrt{2}} + \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0 d}\right]$$

$$\therefore W_E = 2Q_1V_1 = 974.56 \ nj \ : d = 5$$

أما في الحالة الثانية، يمكننا الإستعانة بالمثال السابق، فنحصل في النهاية على

$$W_E = \frac{Q_1Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{13}}$$

وبعد التعويض نحصل في النهاية على

$$W_E = 127.28 \ nj$$

تمارين

1- أوجد الشغل المبذول في تحريك شحنة نقطية Q = -20 μC من نقطة الأصل إلى النقطة (4, 2, 0) في المجال

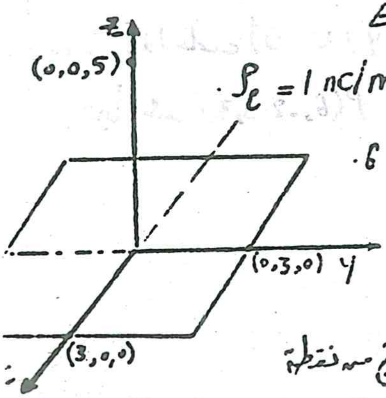
$$\vec{E} = 2(x+4y)\vec{i} + 8x\vec{j}$$

وذلك من خلال المسار $x^2 = 8y$.

2- أوجد الزيادة في كمية الشغل المطلوب لإحضار شحنة نقطية Q = 2 nC من ما لا نهاية إلى r = 2 m ، وكذلك من اللانهاية إلى r = 4 m ، في المجال الكهربي $\frac{10^5}{r}\vec{r}_0$ (V/m)

3- أوجد الشغل المبذول في تحريك شحنة نقطية Q = 3 μC من $(0, \pi, 0)$ إلى النقطة $(2, \frac{\pi}{2}, 2)$ ، في الإحداثيات الإسطوانية ، وذلك في المجال الكهربي

$$\vec{E} = \frac{10^3}{\rho}\vec{\rho}_0 + 10^3 z\vec{k}$$



4- شحنة خطية منتظمة الكثافة حيث $\rho_\ell = 1$ nC/m.

وضع خط الشحنة في شكل مربع طول ضلعه 6 m.

أوجد الجهد عند النقطة (0,0,5) m ، أنظر الشكل.

5- إشتق صيغة للجهد عند نقطة على بعد d من الأمتار في إتجاه نصف القطر الدائري للخارج من نقطة متوسط خط شحنة نهائي طوله ℓ من الأمتار وله كثافة شحنة خطية منتظمة (C/m)

6- خط شحنة منتظم كثافة الشحنة الطولية له هي $\rho_\ell = 2$ nC/m. ويقع في المستوى z = 0 وموازياً للمحور x عند النقطة y = 3 m. أوجد فرق الجهد Φ_{BA} بين B, A حيث A(0,0,0) ، B(10,0,4)

7- إذا أعطيت المجال الكهربي $\vec{E} = -5e^{-\rho/6}\,\hat{\rho}$ في الإحداثيات الإسطوانية أوجد الطاقة المخزونة في الحجم $\rho \le 2a$ ، $0 \le z \le 5a$.

8- إذا كان الجهد $V = 3x^2 + 4y^2$ V أوجد الطاقة المخزونة في الحجم $1 \le x \le 1m$ ، $0 \le y \le 1m$ ، $0 \le z \le 1m$

9- يعطى مجال جهد كهروستاتيكي بالعلاقة $V = 1000\sqrt{r}$ V. ما هو مقدار الطاقة المخزونة داخل كرة نصف قطرها الوحدة ومركزها عند نقطة الأصل في فضاء حر.

10- إذا علمت أن $V = 2x^2y + 20z - 4\ln(x^2+y^2)$ V في فضاء حر ما عين قيمها عند $P(6,-2.5,3)$ لـ: (أ) V ، (ب) $\vec{E}$ ، (جـ) $\vec{D}$ ، (د) ρ .